



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS TRINDADE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PURA E APLICADA**

TIAGO AUGUSTO DOS SANTOS BOZA

**UMA NOVA ABORDAGEM PARA EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS DE ORDEM FRACIONÁRIA ESPAÇO
DEPENDENTES**

**FLORIANÓPOLIS
2025**

Tiago Augusto dos Santos Boza

Uma nova abordagem para equações
diferenciais de ordem fracionária espaço
dependentes

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Matemática Pura e Aplicada da Universidade
Federal de Santa Catarina como requisito parcial
para a obtenção do título de Doutor em Matemá-
tica, com Área de Concentração em Análise.

Orientador: Prof. Paulo Mendes de Carvalho
Neto, Dr.

Florianópolis
2025

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Boza, Tiago Augusto dos Santos

Uma nova abordagem para equações diferenciais de ordem fracionária espaço dependentes / Tiago Augusto dos Santos Boza ; orientador, Paulo Mendes de Carvalho Neto, 2025.
93 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2025.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Cálculo Fracionário. 3. Equações Diferenciais Fracionárias Abstratas. 4. Equações Diferenciais Fracionárias Espaço Dependentes. I. Carvalho Neto, Paulo Mendes de. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Tiago Augusto dos Santos Boza

**Uma nova abordagem para equações diferenciais de ordem
fracionária espaço dependentes**

O presente trabalho em nível de Doutorado foi avaliado e aprovado,
em 17 de Junho de 2025, pela banca examinadora composta pelos se-
guintes membros:

Profa. Gabriela del Valle Planas, Dra.
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

Prof. Matheus Cheque Bortolan, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Renato Fehlberg Júnior, Dr.
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de con-
clusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutor em
Matemática.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em
Matemática Pura e Aplicada

Prof. Paulo Mendes de Carvalho Neto, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2025

À Deus!

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por ter sustentado meus passos ao longo de toda esta jornada. Foi na fé, na oração e na presença divina que encontrei força, consolo e esperança para atravessar os momentos mais desafiadores do doutorado, e foram muitos! Sem isso, não teria sido possível seguir adiante.

Em segundo lugar, agradeço, com todo o meu amor, à minha esposa Isabelle. Seu amor, sua presença constante, seu apoio incondicional, sua paciência e generosidade foram absolutamente fundamentais para que eu pudesse concluir este trabalho. Em cada etapa deste percurso, especialmente nos momentos mais difíceis, Isabelle foi minha companheira, meu alicerce e meu porto seguro. Esta conquista é, antes de tudo, também sua.

Ao meu orientador, Paulo, expresso minha profunda gratidão. Desde o início do doutorado, em 2020, recebi dele incentivo, confiança e orientação precisa, que me motivaram a enfrentar os desafios acadêmicos com seriedade e segurança. Sua postura generosa, seu rigor científico e sua atenção humana foram decisivos para o desenvolvimento desta tese.

Durante os anos de 2021 e 2022, estive afastado do Colégio de Aplicação da UFSC, período em que pude me dedicar integralmente ao doutorado. Sou grato aos meus colegas de trabalho por todo o apoio e compreensão demonstrados nesse tempo, o que foi essencial para meu progresso acadêmico e pessoal.

Em novembro de 2021, nasceu meu filho Emanuel, trazendo uma nova luz à minha vida. Sua chegada renovou em mim a esperança, a alegria e a responsabilidade de continuar construindo caminhos através da educação e da ciência.

Após a qualificação, realizada em julho de 2023, com defesa inicialmente prevista para fevereiro de 2024, enfrentei uma das fases mais difíceis desta trajetória. Em outubro de 2023, minha mãe sofreu um AVC. Ela, uma mulher extraordinária: empregada doméstica e operadora de caixa de supermercado por mais de vinte anos, mãe solteira, criou sozinha este filho único com muito amor, coragem e dedicação. Foi também por ela, e por tudo o que me ensinou, que encontrei forças para continuar. Nesse período tão delicado, contei com o apoio inestimável das minhas tias, Cleide e Bene, que me ajudaram a cuidar dela com muito carinho, permitindo que eu pudesse dar continuidade à tese. Reforço, com ainda mais ênfase, minha gratidão à minha esposa Izabelle, que esteve ao meu lado com uma dedicação ainda maior, dividindo comigo o cuidado e as responsabilidades familiares com imensa coragem e sensibilidade.

Durante os anos de 2024 e 2025, fui acolhido e apoiado pelos colegas do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), com quem compartilhei não apenas responsabilidades profissionais, mas também reflexões, aprendizados e a construção de um ambiente de trabalho solidário e respeitoso. A todos e todas, meu sincero agradecimento.

Finalizo estes agradecimentos com o coração cheio de gratidão a todas as pessoas que, de diferentes formas, contribuíram para que esta tese se concretizasse. Cada palavra aqui escrita carrega também a marca de uma rede de afeto, trabalho e resistência que tornou possível este percurso.

*“É melhor obter sabedoria do que ouro! É melhor
obter entendimento do que prata!”*

Provérbios 16-16

Resumo

O foco principal desta tese é a análise de equações diferenciais abstratas da forma ${}_t^c D_t^{\alpha(x)} u(t, x) = Au(t, x) + f(t, u(t, x))$, onde A é um operador linear limitado e $\alpha(x)$ é uma ordem que depende da variável espacial. A principal contribuição original deste trabalho é o desenvolvimento de uma Teoria de Ordem Variável, que permite o estudo de equações diferenciais fracionárias cuja ordem varia com a posição espacial. Além disso, propõe-se uma formulação teórica rigorosa que garante a existência e unicidade de soluções para esses problemas de Cauchy no contexto de espaços de Banach. A tese se encerra com sugestões para pesquisas futuras, com o objetivo de aprofundar a compreensão da dinâmica de sistemas complexos por meio de modelos fracionários.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário. Equações Diferenciais Fracionárias Abstratas. Equações Diferenciais Fracionárias Espaço Dependentes.

Abstract

The main focus of this thesis is the analysis of abstract differential equations of the form ${}_CD_t^{\alpha(x)}u(t, x) = Au(t, x) + f(t, u(t, x))$, where A is a bounded linear operator and $\alpha(x)$ is a spatially dependent order. The primary original contribution of this work is the development of a Variable Order Theory, which enables the study of fractional differential equations whose order varies with spatial position. In addition, a rigorous theoretical framework is proposed to guarantee the existence and uniqueness of solutions to these Cauchy problems in the setting of Banach spaces. The thesis concludes with suggestions for future research, aiming to further explore the dynamics of complex systems via fractional models.

Keywords: Fractional Calculus. Fractional Partial Differential Equations. Spatially Dependent Fractional Partial Differential Equations.

Sumário

Introdução	1
1 Aspectos Preliminares ao Cálculo Fracionário	11
1.1 Função Gama	11
1.2 Função Beta	18
1.3 Função Digama	20
1.4 Função de Mittag-Leffler	22
1.5 Espaços Especiais	24
1.6 Elementos de Cálculo Fracionário	25
1.7 Transformada de Laplace	32
2 Equações Diferenciais Fracionárias Abstratas	36
2.1 Caso do Problema Linear	36
2.2 Caso do Problema não Homogêneo	41
3 Equações Diferenciais Fracionárias Abstratas Espaço Dependentes	44
3.1 Elementos de Cálculo Fracionário de Ordem Variável . .	44
3.2 Caso do Problema Linear com o Operador Limitado . .	60
3.3 Caso do Problema Semilinear com o Operador Limitado	73
3.4 Uma possível aplicação da Teoria de Ordem Variável . .	79
3.4.1 Modelo Clássico SIR	80
3.4.2 Algumas limitações do Modelo Clássico SIR . . .	80
3.4.3 Algumas justificativas do Modelo Fracionário SIR	82
3.4.4 Um possível Modelo Fracionário Espaço Dependente SIR	83

Introdução

O estudo matemático de equações diferenciais ordinárias e parciais envolvendo derivadas fracionárias tem atraído crescente atenção nas últimas décadas, impulsionado tanto pelo seu rigor teórico quanto pela ampla aplicabilidade em diversos contextos científicos. A noção de derivada fracionária, embora com origens históricas que remontam ao século XVII, consolidou-se recentemente como uma ferramenta poderosa na modelagem de fenômenos complexos, especialmente nas áreas de física matemática, engenharia, biologia e ciências aplicadas em geral.

Segundo [11], as derivadas fracionárias oferecem uma estrutura matemática particularmente adequada para descrever processos com memória e efeitos de hereditariedade, características frequentemente observadas em sistemas físicos reais. Nesse sentido, equações diferenciais fracionárias, como as equações de difusão de ordem não inteira, têm se mostrado eficazes na modelagem de dinâmicas anômalas e não locais. Essas equações foram inicialmente introduzidas no contexto de modelos de passeios aleatórios em tempo contínuo, como discutido em [18, 27].

Em particular, o estudo de equações cinéticas com derivadas fracionárias no tempo emergiu como uma poderosa ferramenta para descrever processos anômalos de difusão e relaxação. Segundo [36], modelos fracionários de difusão, difusão-advecção e equações do tipo Fokker-Planck representam uma abordagem eficaz para compreender a dinâmica de transporte em sistemas complexos, especialmente aqueles regidos por leis de difusão anômala e comportamentos de relaxamento não exponencial.

Conforme apontado em [29, 36], o campo da difusão anômala em meios complexos vem crescendo rapidamente, impulsionado por aplicações em áreas como geofísica, engenharia, biologia e ciência dos mate-

riais. Mais especificamente, [11, 21] destacam que equações de difusão fracionária são particularmente adequadas para modelar fenômenos de transporte anômalo, os quais não seguem as leis de Fick convencionais. Trabalhos como os de [23, 43, 44] relatam ainda observações experimentais de subdifusão em sistemas biológicos, como proteínas e lipídios em membranas celulares, moléculas de RNA no citoplasma ou o transporte de íons em dendritos espinhosos.

Nesses estudos, observa-se que, ao contrário dos processos clássicos de difusão, como na equação do calor, onde o deslocamento quadrático médio de uma partícula cresce linearmente com o tempo ($\langle x^2(t) \rangle \propto t$), os processos anômalos exibem crescimento não linear, frequentemente modelado por $\langle x^2(t) \rangle \propto t^\alpha$, com $0 < \alpha < 1$. Tais características evidenciam a inadequação de modelos clássicos para descrever certos comportamentos observados experimentalmente, o que justifica o uso de modelos com derivadas fracionárias, como as de Riemann-Liouville ou Caputo.

Além disso, os autores em [36] sintetizam as principais vantagens do uso de equações diferenciais fracionárias em sistemas complexos:

- (i) maior aderência aos comportamentos anômalos observados empiricamente em diversos experimentos;
- (ii) capacidade de incorporar, de forma direta, termos associados a forças externas;
- (iii) aplicabilidade de técnicas clássicas de resolução de EDPs e cálculo de momentos de transporte às versões fracionárias das equações;
- (iv) proximidade formal com as equações diferenciais usuais, facilitando sua adoção e análise;
- (v) não se trata apenas de uma reformulação conceitual, mas de uma estrutura robusta capaz de oferecer novas interpretações para uma ampla gama de fenômenos físicos e matemáticos.

Dessa forma, a modelagem baseada em equações diferenciais fracionárias representa não apenas uma extensão natural das ferramentas analíticas tradicionais, mas também uma base teórica consistente e promissora para a investigação de processos dinâmicos complexos, especialmente quando efeitos de memória, hereditariedade e heterogeneidade são relevantes.

Problemas autônomos de Cauchy envolvendo equações diferenciais fracionárias de difusão com ordem constante têm sido intensamente estudados nas últimas décadas, dada sua relevância teórica e aplicada. Um exemplo representativo é a equação

$$D_t^\alpha u(t, x) = K \left[\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right], \quad 0 < \alpha < 1, \quad (\text{OC})$$

a qual surge como modelo para descrever processos de difusão anômala em meios complexos. Estudos como os de [29, 45] investigam propriedades analíticas e qualitativas dessa classe de equações, enquanto pesquisas mais recentes, como as de [24, 33, 35], demonstram sua aplicabilidade na análise de dados experimentais, validando a eficácia dos modelos fracionários onde os clássicos falham.

Essas equações fracionárias são frequentemente derivadas assintoticamente a partir de modelos fundamentais de passeios aleatórios em tempo contínuo (CTRW) ou equações mestras generalizadas, como discutido em [18, 27]. Essa abordagem oferece uma base física sólida para a interpretação matemática da difusão anômala, modelando os efeitos de memória e heterogeneidade de maneira mais realista.

Do ponto de vista analítico, os problemas de Cauchy envolvendo equações de difusão fracionárias no tempo com ordem constante (OC) têm sido amplamente estudados. De acordo com [29], tais problemas — especialmente com operadores elípticos dependentes do tempo — admitem soluções únicas e analíticas em relação ao tempo, frequentemente expressas por funções de Mittag-Leffler. Trabalhos posteriores, como os de [46], estendem esses resultados para operadores quase setoriais.

Equações fracionárias de ordem constante têm se mostrado eficazes para descrever difusão anômala em meios homogêneos [2, 11], enquanto modelos de ordem distribuída surgem como alternativa para casos mais gerais, com resultados similares em [31, 32]. Como salientado por [45], embora a maioria dos modelos experimentais tradicionais considere ordem constante no tempo, essa abordagem nem sempre é suficiente para descrever estruturas mais complexas e heterogêneas.

Torna-se, portanto, necessário o avanço de investigações teóricas e numéricas para incorporar ferramentas mais adequadas à descrição de processos de difusão mais realistas, inclusive de natureza estocástica (ver [15]). Ainda segundo [45], existe uma ampla gama de casos físicos,

biológicos e fisiológicos para os quais equações do tipo (OC) não são capazes de oferecer uma caracterização satisfatória.

De fato, conforme [21], os modelos fracionários clássicos mostram-se inadequados especialmente quando os coeficientes de difusão ou as propriedades do sistema variam no tempo ou no espaço. Nesses casos, uma formulação mais apropriada é dada por equações de ordem variável, como

$$D_t^{\alpha(t,x,u(t,x))}u(t,x) = K \left[\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \right], \quad 0 < \alpha(t,x,u(t,x)) < 1, \quad (\text{OV})$$

em que a ordem fracionária depende do tempo, do espaço e até mesmo da própria solução. Essa flexibilidade permite representar com maior precisão a complexidade de processos difusivos observados em sistemas reais. Como indicado por [47], fenômenos físicos, químicos e biológicos com comportamento difusivo não homogêneo são frequentes, influenciados por diversos fatores dinâmicos e estruturais.

Importantes generalizações dessas ideias são apresentadas, por exemplo, em [38,42], que estudam a equação do calor fracionária com coeficientes dependentes do espaço, bem como a equação da onda de difusão fracionária. Nesta última, a derivada de primeira ordem no tempo, típica da equação de difusão clássica, é substituída por uma derivada fracionária de ordem $\alpha \in (0, 2)$. Dependendo do valor de α , obtêm-se diferentes regimes de propagação: para $\alpha = 1$, recupera-se a equação de difusão clássica; para $\alpha = 2$, a equação de onda; e para valores de α em $(0, 1)$ e $(1, 2)$, modela-se, respectivamente, subdifusão dispersiva e propagação de onda generalizada.

Apesar da expressividade matemática e da riqueza fenomenológica desses modelos, a literatura carece de estudos mais sistemáticos que explorem rigorosamente as implicações teóricas, computacionais e aplicadas das equações de ordem variável, especialmente nos casos em que α depende da solução ou de parâmetros ambientais. Como destacado por [29], tais modelos ainda não estão plenamente consolidados na literatura matemática, representando, assim, um campo promissor para novas contribuições.

Para destacar as complexidades que podem surgir no estudo de equações diferenciais da forma que pretendemos abordar, começaremos

apresentando um exemplo simples de um problema do tipo (OV), o qual servirá de preparação para uma EDP clássica unidimensional também do tipo (OV).

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} cD_t^{\alpha(x)} u(t, x) &= \lambda(x) u(t, x), \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in [0, L]$, em que $L > 0$, $\alpha \in B([0, L])$ (o espaço de funções reais limitadas em $[0, L]$) tal que $\alpha(x) \in (0, 1)$ para cada $x \in [0, L]$, $\lambda, u_0 \in C([0, L])$ (o espaço de funções reais contínuas em $[0, L]$), e $cD_t^{\alpha(x)}$ denota a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha(x)$ (para mais detalhes veja o Capítulo 3).

Então, observe que para cada $x \in [0, L]$ fixo, a partir da teoria do cálculo fracionário e das equações diferenciais, podemos deduzir que uma solução de (1) é dada por

$$u(t, x) = E_{\alpha(x)}(t^{\alpha(x)} \lambda(x)) u_0(x),$$

em que E é a função de Mittag-Leffler que será definida propriamente no Seção 1.4.

Seria de se esperar que, adaptando métodos conhecidos de resolução de equações diferenciais parciais, obtivéssemos uma abordagem análoga para encontrar a solução de equações diferenciais parciais com derivada fracionária dependente do espaço, mas este não é o caso.

Por exemplo, vamos tentar adaptar o método padrão de separação de variáveis para resolver a versão dependente do espaço de difusão fracionária da equação do calor unidimensional.

Para esse fim, considere $L > 0$ e suponha que $\alpha \in B([0, L])$ é tal que $\alpha(x) \in (0, 1)$ para cada $t \in [0, L]$, $u_0 \in C([0, L])$, e que $cD_t^{\alpha(x)}$ denota a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha(x)$.

Com isso, podemos considerar

$$\begin{aligned} cD_t^{\alpha(x)} u(t, x) &= u_{xx}(t, x), \\ u(0, x) &= u_0(x), \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in [0, L]$.

Se tentarmos encontrar todas as soluções não triviais da equação diferencial parcial (2) na forma de um produto $u(t, x) = f(t)g(x)$, substituindo esta forma nas equações, obtemos que

$$\frac{cD_t^{\alpha(x)}f(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}. \quad (3)$$

Observe que na situação clássica, a expressão acima seria igual a uma constante, pois cada lado dependeria de variáveis distintas. Porém, neste caso, ambos os lados da equação continuam a depender de x . Portanto, se assumirmos que elas são equivalentes a uma função dependente de x , como $\lambda(x)$, obteríamos de (2) e (3) as duas equações diferenciais a seguir

$$cD_t^{\alpha(x)}f(t) = \lambda(x)f(t), \quad (4a)$$

$$g''(x) - \lambda(x)g(x) = 0, \quad (4b)$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in [0, L]$.

Devido à condição de contorno $u(t, 0) = u(t, L) = 0$, que leva às igualdades $f(t)g(0) = 0$ e $f(t)g(L) = 0$, e porque estamos interessados em soluções não triviais, segue-se que $g(0) = g(L) = 0$. Portanto, de (4b) concluímos que estamos buscando soluções não triviais para o problema de valor de contorno de segunda ordem

$$\begin{aligned} g''(x) - \lambda(x)g(x) &= 0, \\ g(0) &= g(L) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

para todo $x \in [0, L]$.

Por outro lado, considerando que a variável x está fixa na equação (4a), obtemos do problema (1), que

$$f(t) = E_{\alpha(x)}(t^{\alpha(x)}\lambda(x)). \quad (6)$$

Contudo, para resolver (5), enfrentaríamos um problema difícil, pois precisaríamos obter uma família de funções que atuasse como base, de maneira análoga ao papel desempenhado pelas funções $\sin(n\pi x/L)$ no caso clássico em que $\lambda(x)$ é constante. A resolução desse problema exige um estudo aprofundado da teoria de Sturm-Liouville, o que foge ao escopo deste exemplo.

Assim, para discutir um caso mais concreto, uma abordagem é especificar adequadamente $\alpha(x)$ para garantir melhor controle sobre essas equações. Dito isto, vamos supor que

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1, & \text{para } x \in [0, L/2], \\ \alpha_2, & \text{para } x \in (L/2, L], \end{cases}$$

com $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$.

De (3), concluímos que $\lambda(x)$ é constante dentro de cada um dos intervalos $[0, L/2]$ e $(L/2, L]$. Ou seja, podemos optar por manter o mesmo valor constante dentro de cada intervalo. Consequentemente, de (5), com $\lambda_n(x) = -(n\pi)^2/L^2$, deduzimos que para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

são as soluções desejadas, idênticas ao caso clássico.

Agora, de (6) deduzimos que

$$f(t) = E_{\alpha(x)}\left(\frac{-n^2\pi^2 t^{\alpha(x)}}{L^2}\right) = \begin{cases} E_{\alpha_1}\left(\frac{-n^2\pi^2 t^{\alpha_1}}{L^2}\right), & \text{para } x \in [0, L/2], \\ E_{\alpha_2}\left(\frac{-n^2\pi^2 t^{\alpha_2}}{L^2}\right), & \text{para } x \in (L/2, L], \end{cases}$$

se pudermos expressar $u_0(x)$ como a série senoidal

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right),$$

então obteremos

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) E_{\alpha(x)}\left(\frac{-j^2\pi^2 t^{\alpha(x)}}{L^2}\right),$$

que é uma solução clássica em $[0, L/2) \cup (L/2, L]$, ou em outras palavras, satisfaz a primeira equação de (2) para cada $t \geq 0$ e todo $x \in [0, L]$.

Desta construção podem ser tiradas duas conclusões iniciais:

- (i) Dependendo da escolha de $\alpha(x)$, é improvável que a equação possa ser satisfeita em todos os pontos de $[0, L]$. Portanto, é mais geral escolher $\alpha \in L^\infty(0, L)$, em vez de $\alpha \in B([0, L])$.

- (ii) Para $\alpha(x)$ não constante, é muito difícil escolher $\lambda(x)$ em (3) para garantir que (5) seja possível de ser resolvido e (6) faça sentido. Portanto, uma teoria geral é necessária para lidar com a solução dessas equações, mesmo que uma solução explícita não seja trivialmente possível de ser obtida.

Neste contexto, faz falta desenvolver uma teoria rigorosa para equações diferenciais fracionárias mais gerais do que aquelas de ordem constante consideradas em (OC). Chamaremos tais equações, neste trabalho, de equações espaço-dependentes lineares, descritas por:

$$D_t^{\alpha(x)} u(t, x) = Au(t, x), \quad (\text{EDL})$$

para $0 < \alpha(x) \leq 1$, em que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear definido em um espaço de Banach X . Este tipo de equação constitui uma subclasse do modelo mais geral com ordem variável (OV), em que a dinâmica local do sistema é influenciada diretamente pelas variações da posição espacial.

O estudo de problemas do tipo (EDL) já representa, por si só, um avanço considerável, dadas as dificuldades teóricas ilustradas no exemplo anterior. No entanto, durante a análise inicial, observamos que a presença de operadores ilimitados introduz dificuldades técnicas substanciais. Por essa razão, neste trabalho, focaremos apenas no caso de operadores lineares limitados, como etapa preliminar para a compreensão do cenário mais geral, cujo desenvolvimento será abordado em estudos futuros, uma vez concluída a etapa e apresentados os resultados desta tese.

Adicionalmente, identificamos que, nesse contexto de operadores limitados, é possível também desenvolver uma teoria para equações semilineares associadas ao modelo espaço-dependente. Assim, o objetivo central deste trabalho é propor uma formulação teórica e abstrata para equações diferenciais fracionárias semilineares do tipo:

$$D_t^{\alpha(x)} u(t, x) = Au(t, x) + f(t, u(t, x)), \quad (\text{EDSL})$$

para $0 < \alpha(x) \leq 1$, em que $A : X \rightarrow X$ é um operador linear limitado e $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função adequada, com X sempre representando um espaço de Banach. Pretendemos, em particular, estabelecer condições necessárias e/ou suficientes para a existência e unicidade de

soluções, construindo um arcabouço matemático robusto para a análise de problemas de Cauchy, tanto no contexto linear quanto no semilinear.

Gostaríamos ainda de enfatizar que, devido à escassez de literatura em português sobre a teoria dos problemas do tipo (EDSL), no caso em que $\alpha(x)$ é constante e A é um operador linear limitado, optamos por tornar este texto não apenas uma exposição dos nossos principais resultados, mas também uma revisão de literatura. Nosso objetivo é reunir, de forma tão unificada quanto possível, os estudos existentes sobre esse tipo de problema mais simples. Naturalmente, evitaremos abordar resultados excessivamente gerais ou complexos que extrapolem o escopo desta tese; no entanto, sempre que possível, indicaremos referências sobre os tópicos que optamos por não demonstrar.

Considerando todo o exposto até este momento, estamos prontos para descrever a organização deste trabalho.

O Capítulo 1 introduz uma série de funções especiais e espaços funcionais que servirão de base para os desenvolvimentos teóricos posteriores. Ao final do capítulo, são apresentadas as definições e propriedades fundamentais das integrais e derivadas fracionárias de ordem constante α , bem como suas principais implicações, estabelecendo o alicerce conceitual para a formulação das equações fracionárias abordadas nos capítulos seguintes.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo do problema (EDSL) no caso em que $\alpha(x)$ é constante e a função f depende apenas do tempo, isto é, $f(t, x) = f(t)$. Nesse contexto, são estabelecidas condições que asseguram a existência e unicidade de soluções, considerando operadores lineares limitados.

Como principal contribuição original desta tese, o Capítulo 3 introduz uma Teoria de Ordem Variável, com ênfase nas integrais e derivadas fracionárias cuja ordem α depende da variável espacial x . Nesse capítulo, discutem-se as implicações teóricas dessa generalização e estabelecem-se condições de existência e unicidade para soluções de equações diferenciais abstratas espaço-dependentes, tanto no caso linear quanto no semilinear, mantendo-se a hipótese de operadores limitados.

Além disso, ao final do Capítulo 3 e nas Considerações Finais, são apresentadas reflexões sobre as potencialidades da teoria desenvolvida, bem como sugestões para investigações futuras, visando à ampliação e aprofundamento dos resultados obtidos.

Capítulo 1

Aspectos Preliminares ao Cálculo Fracionário

Neste capítulo, apresentamos conceitos fundamentais para o estudo do Cálculo Fracionário. Em particular, discutimos algumas funções especiais e certos espaços funcionais que se revelam essenciais ao desenvolvimento desta tese.

Encerramos o capítulo com a introdução das noções e definições centrais do Cálculo Fracionário, com ênfase nas integrais e derivadas de ordem não inteira. As ideias aqui desenvolvidas baseiam-se, em grande parte, nas exposições de [9, 13, 40].

1.1 Função Gama

Usualmente, no ambiente matemático, a função Gama é interpretada como uma extensão da função fatorial dos números naturais para os conjuntos dos números reais e complexos. Entretanto, é necessário definir rigorosamente tal função e, de fato, verificar se essa definição nos fornece uma função bem definida.

Provemos inicialmente, dois resultados.

Lema 1.1. *Se $r > 0$, então $\int_0^\infty t^{r-1} e^{-t} dt < \infty$.*

Demonstração. Note, primeiramente, que vale

$$\int_0^\infty t^{r-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{r-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{r-1} e^{-t} dt,$$

para $r > 0$, desde que cada uma das integrais no lado direito da igualdade acima seja finita.

Para $0 \leq t \leq 1$, temos que $t^{r-1} e^{-t} \leq t^{r-1}$. Sendo assim, podemos deduzir que

$$\int_0^1 t^{r-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{r-1} dt = \frac{1}{r} < \infty.$$

Por outro lado, se considerarmos $\varphi : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(t) := t^{r-1} e^{-t/2}$, notamos que

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = (r-1)t^{r-2} e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} t^{r-1},$$

para $t \geq 1$. Disto segue que $2(r-1)$ ou 1 são máximos globais de $\varphi(t)$. Definindo $M_r = \varphi(2(r-1))$, concluímos que

$$t^{r-1} e^{-t} = \varphi(t) e^{-t/2} \leq M_r e^{-t/2},$$

para $t \geq 1$.

Disto segue, por fim, que

$$\begin{aligned} \int_1^\infty t^{r-1} e^{-t} dt &\leq \int_1^\infty M_r e^{-\frac{t}{2}} dt \\ &= 2M_r e^{-\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2. *Se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$, então*

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-z} dz < \infty.$$

Demonstração. Veja que $\|t^{z-1}\| = t^{\operatorname{Re}(z)-1}$. Por fim, segue do Lema 1.1 que

$$\left\| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \right\| \leq \int_0^\infty \|t^{z-1} e^{-t}\| dt$$

$$= \int_0^\infty t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t} dt < \infty.$$

□

Graças à Proposição 1.2, podemos considerar a seguinte noção:

Definição 1.3. A *função Gama*, denotada por $\Gamma(z)$, é definida como a aplicação $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Note que a função Gama possui diversas propriedades interessantes. Vejamos algumas delas.

Proposição 1.4. A *função Gama é analítica, com*

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \log(t) dt,$$

em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(z_0) > 0$. Vamos mostrar que Γ é diferenciável em z_0 . Para isso, consideremos a diferença quociente

$$\frac{\Gamma(z_0 + h) - \Gamma(z_0)}{h} = \int_0^\infty \frac{t^{z_0+h-1} - t^{z_0-1}}{h} e^{-t} dt.$$

Para $t > 0$, a função $h \mapsto t^{z_0+h-1}$ é diferenciável em h , com derivada dada por

$$\frac{d}{dh} t^{z_0+h-1} = t^{z_0+h-1} \log t.$$

Assim, o integrando converge ponto a ponto para $t^{z_0-1} \log t e^{-t}$ quando $h \rightarrow 0$. Agora, para justificar a passagem do limite para dentro da integral, basta observar que, dado um compacto em $\operatorname{Re}(z) > 0$, podemos majorar

$$\left\| \frac{t^{z_0+h-1} - t^{z_0-1}}{h} e^{-t} \right\| \leq C \cdot |\log t| \cdot t^{\operatorname{Re}(z_0)-1} e^{-t},$$

com C dependendo do compacto em questão e a função majorante a

direita integrável em $(0, \infty)$.

Logo, pelo teorema da convergência dominada, podemos trocar limite e integral, e obtemos:

$$\Gamma'(z_0) = \int_0^\infty t^{z_0-1} \log t e^{-t} dt.$$

Portanto, Γ é diferenciável em z_0 . Como z_0 é arbitrário e ainda $\operatorname{Re}(z_0) > 0$, segue que Γ é diferenciável nesse domínio, e portanto analítica. $\square$

Proposição 1.5. *Se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$, então $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.*

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$. Notemos, primeiramente, que:

$$\left\| \frac{t^z e^{-t}}{z} \right\| = \frac{t^{\operatorname{Re}(z)} e^{-t}}{\|z\|},$$

para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Agora, considere o seguinte:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{z} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{d(t^z)}{dt} \right) e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{z} \cdot \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{z} \cdot \Gamma(z+1), \end{aligned}$$

para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$. $\square$

No último teorema, uma mudança de variáveis cuja justificativa repousa na teoria de integração de funções complexas ao longo de caminhos, em particular no Teorema de Cauchy. Entretanto, assumiremos aqui a validade desses resultados, uma vez que seu desenvolvimento foge ao escopo desta tese e deste capítulo. Para mais detalhes, veja [19].

Proposição 1.6. *Se $n \in \mathbb{N}$, então $\Gamma(n+1) = n!$.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar por indução que

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!.$$

Para $n = 0$, temos

$$\int_0^\infty e^{-t} dt = 1 = 0!.$$

Agora, suponha que o resultado vale para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!.$$

Vamos mostrar que

$$\int_0^\infty t^{n+1} e^{-t} dt = (n+1)!.$$

Usando integração por partes, obtemos:

$$\int_0^\infty t^{n+1} e^{-t} dt = \int_0^\infty (n+1)t^n e^{-t} dt = (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

Portanto, por indução, temos que

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Agora queremos estender o domínio da função Gama. Para isso provamos o seguinte resultado inicial.

Lema 1.7. *Considere o conjunto*

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Re}(z) > -1\},$$

e a função $\Gamma_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\Gamma_1(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Então, $\Gamma_1(z)$ é uma extensão analítica de $\Gamma(z)$ em Ω_1 .

Demonstração. Seja $z \in \Omega_1$. Como $\operatorname{Re}(z+1) > 0$, a função $\Gamma(z+1)$ está bem definida, e como $z \neq 0$, a função $\Gamma_1(z)$ também está bem definida.

Além disso, pela Proposição 1.4, a função $z \mapsto \Gamma(z+1)$ é analítica em Ω_1 , e a função $z \mapsto 1/z$ também é analítica nesse conjunto. Logo Γ_1 é analítica em Ω_1 .

Por fim, se $z \in \Omega_1$ e $\operatorname{Re}(z) > 0$, então, pela Proposição 1.5, temos que

$$\Gamma_1(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{z\Gamma(z)}{z} = \Gamma(z).$$

Logo, Γ_1 coincide com Γ em $\{z \in \Omega_1 : \operatorname{Re}(z) > 0\}$, sendo, portanto, uma extensão analítica da função Gama em Ω_1 . $\square$

Para prosseguir com a extensão da função Gama, consideremos, para cada $i \in \mathbb{N}$ fixado, o conjunto

$$\Omega_j = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-(j-1), \dots, -1, 0\} : \operatorname{Re}(z) > -j\}.$$

Apresentamos, então, o seguinte resultado:

Proposição 1.8. *Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja a função $\Gamma_j : \Omega_j \rightarrow \mathbb{C}$ definida recursivamente por*

$$\Gamma_j(z) = \frac{\Gamma_{j-1}(z+1)}{z}.$$

Então, $\Gamma_j(z)$ é uma extensão analítica de $\Gamma(z)$ em Ω_i .

Demonstração. Segue de diretamente de um argumento indutivo e do Lema 1.7. $\square$

Com todos estes resultados podemos, enfim, redefinir a função Gama da seguinte forma:

Definição 1.9. A função Gama, denotada por $\Gamma(z)$, é definida como a função analítica $\Gamma : D(\Gamma) := \mathbb{C} \setminus \{\dots, -1, 0\} \rightarrow \mathbb{C}$, que satisfaz:

- (i) Para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$, vale que

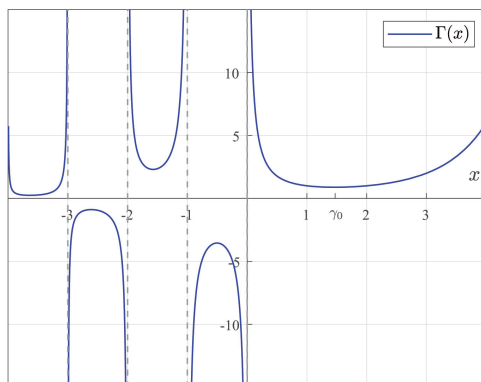
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

- (ii) $\Gamma(z)$ é analítica em $D(\Gamma)$;
- (iii) $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, para todo $z \in D(\Gamma)$;
- (iv) $\Gamma(n+1) = n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 1.10. (i) A função Gama não possui zeros em $D(\Gamma)$, fato que decorre diretamente dos itens (i) e (iii) da definição acima e de algumas justificativas da teoria de análise complexa que vamos omitir aqui (para mais detalhes, veja [1]).

- (ii) A função $\Gamma_i(z)$, construída recursivamente em cada conjunto Ω_i na Proposição 1.8, é de fato a única extensão analítica possível da função Gama para esses domínios. Isso decorre do chamado *Princípio de Continuidade Analítica*, segundo o qual duas funções holomorfas que coincidem em uma parte com ponto de acumulação de um domínio conexo devem coincidir em todo o domínio. Assim, como $\Gamma_i(z)$ coincide com $\Gamma(z)$ em $\{z \in \Omega_i : \text{Re}(z) > 0\}$, e ambas são analíticas em Ω_i , segue-se que Γ_i é a única extensão analítica possível da função Gama nesse conjunto. Para mais detalhes sobre esse princípio, veja [19, Cap. VII, §7].
- (iii) Abaixo temos um esboço do gráfico da função Gama, quando restrita à reta real.

Figura 1.1: Gráfico da função *Gama*



- (iv) Note que a função Gama possui um mínimo para $z > 0$. Podemos determinar o valor mínimo da função, que é dado por $\Gamma(\gamma_0) = 0.886\dots$, em que $\gamma_0 = 1.4616321\dots$. Além disso, a função Gama é estritamente decrescente no intervalo $(0, \gamma_0)$ e estritamente crescente no intervalo (γ_0, ∞) , com $\Gamma(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$ (para mais detalhes, veja [1] e [16]).

1.2 Função Beta

Nesta seção, apresentaremos a função *Beta* e sua relação com a função Gama. Assim como foi feito com a função Gama, começaremos provando o seguinte resultado preliminar:

Proposição 1.11. *Se $x, y \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$, então*

$$\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds < \infty,$$

e

$$\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Demonstração. Notemos, primeiramente, que a partir da definição da função Gama podemos escrever

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dt ds,$$

para $x, y \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$.

Considerando, então, as seguintes mudanças de variável $t = a^2$ e $s = b^2$, obtemos a seguinte expressão

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty a^{2x-1}b^{2y-1}e^{-(a^2+b^2)} da db.$$

Agora, fazendo as mudanças de variável $a = r \cos(\theta)$ e $b = r \sin(\theta)$ na expressão do lado direito da igualdade acima, obtemos

$$4 \cdot \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos(\theta))^{2x-1} (r \sin(\theta))^{2y-1} e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \cdot \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2x+2y-1} (\cos(\theta))^{2x-1} (\sin(\theta))^{2y-1} e^{-r^2} dr d\theta \\
&= 4 \cdot \left(\int_0^\infty r^{2(x+y)-1} e^{-r^2} dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2x-1} (\sin(\theta))^{2y-1} d\theta \right).
\end{aligned}$$

Por fim, fazendo uma última mudança de variável, a saber, chamando $r^2 = z$ e $(\cos(\theta))^2 = w$, temos que a expressão acima pode ser reescrita por

$$\begin{aligned}
&4 \cdot \left(\int_0^\infty r^{2(x+y)-1} e^{-r^2} dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2x-1} (\sin(\theta))^{2y-1} d\theta \right) \\
&= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-z} z^{(x+y)-1} dz \right) \left(\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 w^{x-1} (1-w)^{y-1} dw \right).
\end{aligned}$$

Logo concluímos que

$$\int_0^1 w^{x-1} (1-w)^{y-1} dw < \infty,$$

e

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y) \int_0^1 w^{x-1} (1-w)^{y-1} dw < \infty,$$

para $x, y \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$. O que nos dá o que queríamos e a prova está completa. $\square$

Definição 1.12. Chamamos de *função Beta*, denotada por $\mathcal{B}(x, y)$, a função $\mathcal{B} : \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\mathcal{B}(x, y) = \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds.$$

Observação 1.13. Segue da Proposição 1.11 que a função Beta está bem definida e satisfaz a identidade

$$\mathcal{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

sempre que $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$.

1.3 Função Digama

Nesta seção, apresentaremos a definição da função *Digama*, bem como alguns resultados auxiliares que desempenham papel fundamental no desenvolvimento desta tese. Conforme discutido na Seção 1.1, a função $1/\Gamma(z)$ está bem definida no domínio $D(\Gamma) = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. No entanto, é possível ir além e demonstrar que essa função admite uma extensão analítica a todo o plano complexo $\mathbb{C}$, tornando-se, portanto, uma função inteira.

Esse resultado clássico pode ser encontrado, por exemplo, em [19, Cap. VII, §7] e é enunciado nos seguintes termos:

Teorema 1.14. *A função $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(z)}, & z \in D(\Gamma), \\ 0, & z \in \{\dots, -1, 0\}. \end{cases}$$

é a única extensão analítica da função $1/\Gamma(z)$.

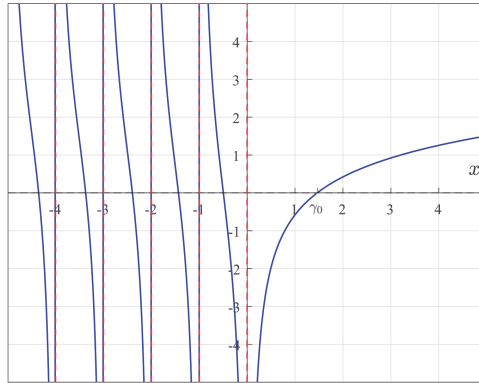
Com isto, podemos, então, definir a seguinte função.

Definição 1.15. Chamamos de *função Digama*, denotada por $\psi(z)$, a função $\psi : \mathbb{C} \setminus \{\dots, -2, -1, 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log(\Gamma(z)) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Abaixo temos uma representação do gráfico da função Digama, quando vista sobre o conjunto dos números reais.

Figura 1.2: Gráfico da Função Digama



Observação 1.16. Notemos que de acordo com seu gráfico a função Digama possui uma única raiz positiva. E, novamente de acordo com [1] tal raiz é o valor $z = \gamma_0$, e ainda mais, podemos obter a seguinte tabela dos primeiros zeros de ψ .

Tabela 1.1: Zeros da função Digama - $\psi(z_n) = 0$ - Fonte: [1]

n	z_n	$\Gamma(z_n)$
0	1.462...	0.886...
1	-0.504...	-3.545...
2	-1.573...	2.302...
3	-2.611...	-0.888...
4	-3.635...	0.245...
5	-4.653...	-0.053...
6	-5.667...	0.009...
7	-6.678...	-0.001...

Observação 1.17. Note, ainda, que para $x > 0$, a função ψ é estritamente crescente e satisfaz $\psi(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$. Essa informação será importante em argumentos apresentados posteriormente.

1.4 Função de Mittag-Leffler

As funções de Mittag-Leffler desempenham um papel central no estudo de equações diferenciais com derivação de ordem fracionária. Elas podem ser vistas como uma generalização natural da função exponencial, e surgem de modo análogo à solução da equação diferencial linear clássica

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cujas solução é dada por

$$u(t) = e^{\lambda t} u_0.$$

No contexto fracionário, onde a derivada clássica é substituída por uma derivada de ordem não inteira, a solução envolve, em vez da exponencial, a chamada função de Mittag-Leffler.

Nesta seção, apresentaremos a função de Mittag-Leffler generalizada, provando que ela está bem definida e é analítica no plano complexo.

Proposição 1.18. *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0$ a série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (1.1)$$

define uma função analítica no plano complexo.

Demonstração. Lembremos, então, que o Raio de Convergência, denotado aqui por R , de uma série de potências é obtido por

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta + \alpha)} \right|.$$

Para $\sigma \in \mathbb{C}$ com $|\sigma| \rightarrow \infty$ e $|\arg \sigma| < \pi$, a fórmula de Stirling (para mais detalhes veja [1]) garante que

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\sigma)}{\sqrt{2\pi} \sigma^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\sigma}} = 1.$$

Portanto obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta + \alpha)} \right| \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{2\pi} (\alpha k + \beta)^{(\alpha k + \beta) - \frac{1}{2}} e^{-(\alpha k + \beta)}}{\sqrt{2\pi} (\alpha k + \beta + \alpha)^{(\alpha k + \beta + \alpha) - \frac{1}{2}} e^{-(\alpha k + \beta + \alpha)}} \right| = 0. \end{aligned}$$

Disto segue que o Raio de Convergência da série é infinito, e a prova está completa. $\square$

Apoiados no resultado obtido na Proposição 1.18, introduzimos o seguinte conceito.

Definição 1.19. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0$, chamamos de *função de Mittag-Leffler Generalizada*, denotada por $E_{\alpha, \beta}(z)$, a função $E_{\alpha, \beta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada pela série (1.1). Quando $\beta = 1$, chamamos esta função apenas de *função de Mittag-Leffler*, e a denotamos por $E_{\alpha}(z)$.

A seguir, apresentamos apenas algumas propriedades assintóticas das funções de Mittag-Leffler que se revelaram relevantes para o desenvolvimento desta tese. Para uma discussão mais detalhada, ver [8].

(i) Para $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$, com $\omega > 0$, temos:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(t^{\alpha} \omega) dt = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^{\alpha} - \omega}.$$

(ii) Para $0 < \alpha < 2$ e $\beta > 0$, temos

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{(1-\beta)}{\alpha}} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} + \varepsilon_{\alpha, \beta}(z), \quad |\arg(z)| \leq \alpha\pi/2, \quad (1.2)$$

e

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \varepsilon_{\alpha, \beta}(z), \quad |\arg(-z)| < (1 - \alpha/2)\pi,$$

em que $\varepsilon_{\alpha, \beta}(z)$ é dada por

$$\varepsilon_{\alpha, \beta}(z) = - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(\|z\|^{-N}).$$

1.5 Espaços Especiais

Nesta seção, apresentamos alguns espaços funcionais clássicos que servem de base para a definição das integrais e derivadas fracionárias de Riemann–Liouville e das derivadas fracionárias de Caputo, tanto de ordem fixa quanto variável. As propriedades desses operadores serão discutidas na Seção 1.6 e no Capítulo 3, respectivamente.

Para a apresentação desses espaços — e em qualquer outro ponto desta tese em que tal notação se fizer necessária — adotaremos as seguintes convenções: I denotará o intervalo $[0, b]$, para algum $b > 0$, ou $[0, \infty)$ e Ω será um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Além disso, assumiremos que X é um espaço de Banach arbitrário.

Definição 1.20. Chamamos de *espaço das funções contínuas* de I em X , denotado por $C(I; X)$, o conjunto de todas as funções contínuas de $I \subset \mathbb{R}$ em X . Quando I é um intervalo compacto, a norma nesse espaço é dada por

$$\|u\|_{C(I; X)} = \sup_{t \in I} \|u(t)\|_X.$$

Com essa norma, $C(I; X)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.21. Chamamos de *espaço das funções continuamente diferenciáveis* de I em X , denotado por $C^1(I; X)$, ao conjunto de todas as funções continuamente diferenciáveis de $I \subset \mathbb{R}$ em X . Se I for um intervalo compacto, sua norma é dada por

$$\|u\|_{C^1(I; X)} = \|u\|_{C(I; X)} + \|u'\|_{C(I; X)}.$$

Neste caso $C^1(I; X)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.22. Chamamos de *espaço de Bochner–Lebesgue* de I em X , denotado por $L^p(I; X)$, para $1 \leq p \leq \infty$, o conjunto de todas as funções mensuráveis no sentido de Bochner de $I \subset \mathbb{R}$ em X tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X$ pertence a $L^p(I)$. A norma nesse espaço é definida por

$$\|u\|_{L^p(I; X)} = \left(\int_I \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

e, para $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^\infty(I;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|u(t)\|_X.$$

Com essa norma, $L^p(I;X)$ é um espaço de Banach.

Observação 1.23. Quando $I = (0, b)$ (ou $(0, \infty)$), denotamos por $L^1_{\text{loc}}(0, b; X)$ (ou $L^1_{\text{loc}}(0, \infty; X)$) o conjunto de todas as funções $f : (0, b) \rightarrow X$ (ou $f : (0, \infty) \rightarrow X$) tais que, para todo subconjunto compacto $K \subset (0, b)$ (ou $K \subset (0, \infty)$), temos $f \in L^1(K; X)$.

Definição 1.24. Chamamos de *espaço de Bochner–Sobolev* de I em X , denotado por $W^{k,p}(I;X)$, para $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$, o conjunto de todas as funções $u \in L^p(I;X)$ cujas derivadas fracas até ordem k também pertencem a $L^p(I;X)$. A norma nesse espaço é definida por

$$\|u\|_{W^{k,p}(I;X)} = \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^k \int_I \|D^n u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{0 \leq n \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|D^n u(t)\|_X, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Aqui, $D^n u$ denota a n -ésima derivada fraca da função u . Com essa norma, $W^{k,p}(I;X)$ é um espaço de Banach.

Observação 1.25. Nas definições fornecidas acima, quando $X = \mathbb{R}$, omitiremos X nas notações $L^p(I;X)$, $C(I;X)$ e $W^{k,p}(I;X)$, escrevemos apenas $L^p(I)$, $C(I)$ e $W^{k,p}(I)$, respectivamente. O mesmo se aplica a $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$, que denotará o espaço das funções mensuráveis de Lebesgue de Ω em $\mathbb{R}$.

1.6 Elementos de Cálculo Fracionário

Iniciamos com a definição de uma função construída a partir da razão entre um polinômio e a função Gama, cuja estrutura será essencial ao longo deste capítulo. Essa função define o núcleo da integração que dá origem à fórmula da integral fracionária de Riemann–Liouville,

que será formalmente apresentada a seguir. Por sua relevância, adotaremos neste trabalho a notação *g-alfa* para nos referirmos a ela, e destacaremos algumas de suas propriedades fundamentais.

Definição 1.26. Seja $\alpha > 0$. Chamamos de *g-alfa* a função $g_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Apresentamos agora a seguinte definição auxiliar:

Definição 1.27. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções. Definimos a *convolução entre f e g* , denotada por $(f * g)(t)$, como

$$(f * g)(t) := \int_{\mathbb{R}} f(t-s) g(s) ds,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Das definições acima, segue o resultado clássico:

Proposição 1.28. *Sejam $\alpha, \beta \geq 0$ e considere as funções g_α e g_β definidas em (1.26). Então,*

$$(g_\alpha * g_\beta)(t) = g_{\alpha+\beta}(t),$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Se $t \leq 0$ então temos

$$\begin{aligned} (g_\alpha * g_\beta)(t) &= \int_{\mathbb{R}} g_\alpha(t-s) g_\beta(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-s)^{\alpha-1} g_\beta(s) ds \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $t > 0$, temos

$$(g_\alpha * g_\beta)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds.$$

Fazendo a mudança de variável $s = tu$, temos:

$$\begin{aligned} (g_\alpha * g_\beta)(t) &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1} \cdot \mathcal{B}(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Portanto, $(g_\alpha * g_\beta)(t) = g_{\alpha+\beta}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto o que conclui a demonstração. $\square$

Definição 1.29. Sejam $0 < \alpha < 1$, $b > 0$ e $f : [0, b] \rightarrow X$. Chamamos de *Integral Fracionária de Riemann-Liouville de ordem α* da função f , denotada por $J_t^\alpha f(t)$, a função

$$J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (1.3)$$

para todo $t \in [0, b]$ tal que o lado direito da identidade acima exista.

Observação 1.30. Sejam $0 < \alpha < 1$, $b > 0$ e $f : [0, b] \rightarrow X$. Ao considerarmos a função g_α definida na Definição 1.26 e a noção de convolução, podemos estender f para uma função $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t), & 0 \leq t \leq b. \end{cases}$$

Com isso, obtemos a seguinte expressão para a convolução $g_\alpha * \tilde{f}$:

$$(g_\alpha * \tilde{f})(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, & 0 \leq t \leq b, \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, & t > b. \end{cases}$$

Em particular, para $t \in [0, b]$, a integral fracionária de Riemann–Liouville pode ser reescrita como

$$J_t^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t),$$

desde que a convolução acima esteja bem definida. Note que, por simplicidade de notação, mantemos a notação f na convolução.

Observação 1.31. De acordo com [13, Teorema 3.1], ao considerarmos $1 \leq p \leq \infty$,

$$J_t^\alpha : L^p(0, b; X) \rightarrow L^p(0, b; X),$$

define um operador linear limitado.

Definição 1.32. Sejam $0 < \alpha < 1$, $b > 0$ e $f : [0, b] \rightarrow X$. Chamamos de *Derivada Fracionária de Riemann–Liouville de ordem α* da função f , denotada por $D_t^\alpha f(t)$, a função

$$D_t^\alpha f(t) = D_t^1 J_t^{1-\alpha} f(t), \quad (1.4)$$

para todo $t \in [0, b]$ tal que o lado direito da identidade acima exista.

Observação 1.33. Notemos que, assim como obtivemos na Observação 1.30 podemos reescrever a expressão (1.4) como

$$D_t^\alpha f(t) = D_t^1 (g_{1-\alpha} * f)(t),$$

para todo $t \in [0, b]$, desde que as expressões acima existam.

Observação 1.34. E mais, podemos reescrever a expressão (1.4) explicitamente como

$$D_t^\alpha f(t) = D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right\},$$

para todo $t \in [0, b]$, desde que o lado direito da identidade acima exista.

Observação 1.35. Se $f \in L^1(0, b; X)$ e $g_{1-\alpha} * f \in W^{1,1}(0, b; X)$, então a Derivada Fracionária de Riemann-Liouville de ordem α , para $0 < \alpha < 1$, da função f existe para quase todos os $t \in [0, b]$.

Exemplo 1.36. Considerando a propriedade estabelecida na Proposição 1.11 e a função $f(t) = kt^\beta$, com $k \in \mathbb{R}$ e $\beta \in (-1, \infty)$, temos que

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{k \Gamma(\beta + 1) t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)}, \quad (1.5)$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Nas hipóteses apresentadas, podemos deduzir que

$$\begin{aligned} D_t^\alpha f(t) &= D_t^1(t^{1+\alpha-\beta}) \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\beta ds \\ &= (1+\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta} \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} \mathcal{B}(1-\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{k \Gamma(\beta+1) t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

E a prova está completa. $\square$

Tomando $\beta = 0$ na expressão (1.5), obtemos que a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma constante real k é dada por

$$D_t^\alpha k = \frac{k t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Esse comportamento singular na origem motivou matemáticos a proporem uma nova definição de derivada fracionária, com maior potencial para o tratamento de equações diferenciais nos moldes tradicionais. Por esse motivo, apresentamos a seguir a definição de derivada fracionária que será adotada e estudada ao longo desta tese.

Definição 1.37. Sejam $0 < \alpha < 1$, $b > 0$ e $f : [0, b] \rightarrow X$. Chamamos de *Derivada Fracionária de Caputo de ordem α* da função f , denotada por ${}_c D_t^\alpha f(t)$, a função

$${}_c D_t^\alpha f(t) = D_t^\alpha (f(t) - f(0)),$$

para todo $t \in [0, b]$, desde que o lado direito da identidade acima exista.

Observação 1.38. Se $f \in C([0, b]; X)$ e $g_{1-\alpha} * f \in W^{1,1}(0, b; X)$, então a Derivada Fracionária de Caputo de ordem α , para $0 < \alpha < 1$, da função f existe para quase todos os $t \in [0, b]$.

Por fim, encerramos esta seção com a apresentação e uma forma de demonstração de um teorema que reúne algumas propriedades fundamentais sobre as derivadas e a integral de ordem não inteira (para mais detalhes veja [12]).

Teorema 1.39. *Sejam $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1, b > 0, f \in L^1(0, b; X)$ e $h \in C([0, b]; X)$. Então:*

$$(i) \quad J_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_2} f(t) = J_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t), \quad q.t.p. \text{ em } [0, b];$$

$$(ii) \quad D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} f(t) = f(t), \quad q.t.p. \text{ em } [0, b];$$

$$(iii) \quad \text{Se } g_{1-\alpha_1} * f \in W^{1,1}((0, b), X), \text{ então}$$

$$J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = f(t) - g_{\alpha_1} \{J_s^{1-\alpha_1} f(s)\}_{s=0}, \quad q.t.p. \text{ em } [0, b];$$

E mais, se existe uma função integrável g tal que $f(t) = J_t^{\alpha_1} g(t)$, então:

$$J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = f(t), \quad q.t.p. \text{ em } [0, b];$$

$$(iv) \quad cD_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} h(t) = h(t), \quad q.t.p. \text{ em } [0, b];$$

$$(v) \quad \text{Se } g_{1-\alpha_1} * f \in W^{1,1}((0, b), X), \text{ então } J_t^{\alpha_1} cD_t^{\alpha_1} h(t) = h(t) - h(0), \\ q.t.p. \text{ em } [0, b].$$

Demonstração.

(i) Segundo (1.30), a Proposição 1.28 e as propriedades da convolução, temos que:

$$\begin{aligned} J_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_2} f(t) &= (g_{\alpha_1} * (g_{\alpha_2} * f))(t) \\ &= ((g_{\alpha_1} * g_{\alpha_2}) * f)(t) \\ &= ((g_{\alpha_1 + \alpha_2}) * f)(t) \\ &= J_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t), \end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, b]$.

(ii) Pelo item anterior e utilizando (1.4), temos:

$$\begin{aligned}
D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} f(t) &= D_t^1 J_t^{1-\alpha_1} J_t^{\alpha_1} f(t) \\
&= D_t^1 J_t^1 f(t) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(s) ds \right) \\
&= f(t),
\end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, b]$.

(iii) Notemos que pela definição $D_t^{\alpha_1} f(t) \in L^1(0, b; X)$ e utilizando-nos da Regra de Leibniz, temos que:

$$\begin{aligned}
J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} D_s^{\alpha_1} f(s) ds \\
&= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1} D_s^{\alpha_1} f(s) ds \right\} \\
&= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1} D_s^1 J_s^{1-\alpha_1} f(s) ds \right\},
\end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, b]$. Aplicando integração por partes e usando o item (i), obtemos:

$$\begin{aligned}
J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) &= D_t^1 \left\{ -\frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1} \{J_s^{1-\alpha_1} f(s)\} \Big|_{s=0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} J_s^{1-\alpha_1} f(s) ds \right\} \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \{J_s^{1-\alpha_1} f(s)\} \Big|_{s=0} + D_t^1 J_s^{\alpha_1} J_s^{1-\alpha_1} f(s) \\
&= f(t) - \frac{t^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} \{J_s^{1-\alpha_1} f(s)\} \Big|_{s=0},
\end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, b]$.

E, agora, seja g integrável tal que $f(t) = J_t^{\alpha_1} g(t)$, logo pelo item (ii) temos que

$$J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} g(t)$$

$$\begin{aligned}
&= J_t^{\alpha_1} g(t) \\
&= f(t),
\end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, b]$.

(iv) Notemos primeiramente que

$$\|J_s^{\alpha_1} h(s)|_{s=0}\| \leq \|h\|_{C([0,b],X)} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s (s-w)^{\alpha_1-1} dw|_{s=0} = 0.$$

Com isso obtemos que:

$$\begin{aligned}
cD_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} h(t) &= D_t^{\alpha_1} (J_t^{\alpha_1} h(t) - J_s^{\alpha_1} h(s)|_{s=0}) \\
&= D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} h(t) \\
&= h(t),
\end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, b]$.

(v) Defina $H(t) := h(t) - h(0)$ e note que pelos itens (iii) e (iv) podemos deduzir que

$$\begin{aligned}
J_t^{\alpha_1} cD_t^{\alpha_1} h(t) &= J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} H(t) \\
&= H(t) \\
&= h(t) - h(0),
\end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, b]$.

E a prova está completa. □

1.7 Transformada de Laplace

Nesta seção, apresentamos brevemente a transformada de Laplace, uma ferramenta analítica fundamental na resolução de equações diferenciais ordinárias e fracionárias. Abordaremos suas definições básicas, propriedades operacionais e, em especial, fórmulas envolvendo a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler e da derivada fracionária de Caputo. Esses resultados serão essenciais, por exemplo, na dedução da fórmula da variação das constantes discutida no Capítulo 2.

Mantemos aqui as convenções introduzidas na Seção 1.5, especialmente a suposição de que X é um espaço de Banach. Não reproduziremos demonstrações de resultados clássicos, remetendo o leitor as obras de referência [6, Capítulo 2], [28, Capítulo VI] ou [41, Capítulo 0] para demonstrações rigorosas e detalhadas.

Definição 1.40. Dizemos que uma função $f : [0, \infty) \rightarrow X$ possui *limitação exponencial* se existem constantes $M \geq 0$, $t_0 \geq 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|f(t)\|_X \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Definição 1.41. Se $f \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$, chamamos de *transformada de Laplace* de f a função $\mathcal{L} : \mathbb{C} \rightarrow X$ definida por

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que a integral acima existe. Para facilitar a escrita, denotaremos $\widehat{f}(s) = \mathcal{L}[f](s)$.

A existência da transformada acima está garantida pelo seguinte resultado clássico.

Teorema 1.42. Se $f \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$ e possui *limitação exponencial*, isto é,

$$\|f(t)\|_X \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq t_0,$$

para certos $M, \omega > 0$ e $t_0 \geq 0$, então a transformada de Laplace $\widehat{f}(s)$ existe para todo $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(s) > \omega$.

A partir deste teorema, provamos uma série de corolários que serão particularmente úteis nas seções subseqüentes desta tese. Reiteramos, contudo, que serão demonstrados apenas aqueles cujas provas não se encontram explicitamente nas referências citadas no início desta seção.

Corolário 1.43. Sejam $g \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$ e $h \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$ com *limitação exponencial*, isto é,

$$\|g(t)\|_X \leq Me^{\omega t} \quad \text{e} \quad \|h(t)\|_X \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq t_0,$$

para certos $M, \omega > 0$ e $t_0 \geq 0$. Então, a convolução $g * h$ admite transformada de Laplace para todo $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(s) > \omega$, e vale a

identidade

$$\mathcal{L}[g * h](s) = \mathcal{L}[g](s) \cdot \mathcal{L}[h](s).$$

Corolário 1.44. *Sejam $0 < \alpha < 1$ e $f \in C([0, \infty); X)$ tal que*

$$\|f(t)\|_X \leq M e^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq t_0,$$

para certas constantes $M, \omega > 0$ e $t_0 \geq 0$. Então, a transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville de ordem α de f existe para todo $s \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(s) > \omega$, e é dada por

$$\mathcal{L}[J_t^\alpha f(t)](s) = s^{-\alpha} \hat{f}(s).$$

Demonstração. Da Observação 1.30 temos $J_t^\alpha f(t) = g_\alpha * f(t)$, para qualquer $t \in [0, \infty)$. Mas, então, o Corolário 1.43 garante que

$$\mathcal{L}[J_t^\alpha f(t)](s) = \mathcal{L}[g_\alpha(t)](s) \mathcal{L}[f(t)](s),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(s) > \omega$. Agora, note que fazendo uma justificativa sobre integrais em caminhos complexos, podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} g_\alpha(t) dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{s^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-w} w^{\alpha-1} dw = s^{-\alpha}. \end{aligned}$$

□

Corolário 1.45. *Sejam $0 < \alpha < 1$ e $f \in C^1([0, \infty); X)$, tal que*

$$\|f(t)\|_X \leq M e^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq t_0, \tag{1.6}$$

para certas constantes $M, \omega > 0$ e $t_0 \geq 0$. Então, a transformada de Laplace da derivada de f existe para todo $s \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(s) > \omega$, e é dada por

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s \hat{f}(s) - f(0).$$

Demonstração. Seja $R > 0$, e note que uma integração por partes

garante que

$$\int_0^R e^{-st} f'(t) dt = f(R)e^{-sR} - f(0) + s \int_0^R e^{-st} f(t) dt.$$

Daí, graças a (1.6), deduzimos que $\mathcal{L}[f'(t)](s)$ existe para todo $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(s) > \omega$, e é dada por

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = -f(0) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

□

Corolário 1.46. *Sejam $0 < \alpha < 1$ e $f \in C([0, \infty); X)$, tal que $cD_t^\alpha f \in C([0, \infty); X)$ e*

$$\|f(t)\|_X \leq M e^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq t_0,$$

para certas constantes $M, \omega > 0$ e $t_0 \geq 0$. Então, a transformada de Laplace da derivada de Caputo de ordem α de f existe para todo $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(s) > \omega$, e é dada por

$$\mathcal{L}[cD_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha \hat{f}(s) - s^{\alpha-1} f(0).$$

Demonstração. Como $J_t^{1-\alpha}(f(t) - f(0)) \in C^1([0, \infty); X)$, segue dos Corolários 1.44 e 1.45 que $\mathcal{L}[cD_t^\alpha f(t)](s)$ existe e

$$\mathcal{L}[cD_t^\alpha f(t)](s) = s\mathcal{L}[J_t^{1-\alpha}(f(t) - f(0))](s) - J_t^{1-\alpha}(f(t) - f(0))|_{t=0},$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(s) > \omega$. Sabemos que $f(t) - f(0)$ é uma função contínua, portanto segue diretamente que $J_t^{1-\alpha}(f(t) - f(0))|_{t=0} = 0$. Finalmente, segue do Teorema 1.44 que

$$\mathcal{L}[cD_t^\alpha f(t)](s) = s\mathcal{L}[J_t^{1-\alpha}(f(t) - f(0))](s) = s \left[s^{\alpha-1} \left(\hat{f}(s) - \frac{f(0)}{s} \right) \right],$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(s) > \omega$, como queríamos. □

Capítulo 2

Equações Diferenciais Fracionárias Abstratas

Neste capítulo, trataremos essencialmente da existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy associado a equações diferenciais fracionárias. O foco será o seguinte problema:

$$\begin{cases} cD_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), & t \geq 0, \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \quad (2.1)$$

em que X é um espaço de Banach, $0 < \alpha < 1$, $A : X \rightarrow X$ é um operador linear limitado, cD_t^α denota a derivada fracionária de Caputo de ordem α (definida na Seção 1.6), e $f : [0, \infty) \rightarrow X$ é uma função contínua.

2.1 Caso do Problema Linear

Consideraremos nesta seção o caso em que $f(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ e todo $x \in X$. Podemos, então, reescrever o problema (2.1) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} cD_t^\alpha u(t) = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases} \quad (2.2)$$

As ideias desta seção estão baseadas essencialmente em [14], [20],

[30] e [40].

Comecemos estendendo a Definição 1.20, mas agora para a Derivada de Caputo.

Definição 2.1. Chamamos de *Espaço das Derivadas de Caputo contínuas*, denotado por $C^\alpha(I; X)$, o espaço que consiste de todas as funções contínuas de $I \subset \mathbb{R}$ em X cuja Derivada de Caputo de ordem α é contínua em I .

Antes de iniciarmos qualquer discussão sobre os resultados que pretendemos estabelecer, é necessário explicitar, de forma clara e concisa, o que entenderemos nesta seção por solução do problema 2.2.

Com base nesse esclarecimento, apresentamos a definição a seguir.

Definição 2.2. Uma função $u : [0, \infty) \rightarrow X$ é dita uma *solução* do problema (2.2) se:

- (i) $u \in C^\alpha([0, \infty); X)$;
- (ii) u satisfaz as equações do problema (2.2).

A seguir, provaremos uma equivalência integral que deve ser satisfeita por quaisquer possíveis soluções do problema (2.2).

Lema 2.3. *Seja $u : [0, \infty) \rightarrow X$ uma função contínua com $u \in C([0, \infty), X)$. Então, u é solução do problema (2.2) se, e somente se, u satisfaz a equação integral*

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds, \quad (2.3)$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $u \in C([0, \infty), X)$ é uma solução de (2.2). Nosso objetivo é mostrar que u satisfaz a equação integral (2.3).

Então $u \in C^\alpha([0, \infty), X)$ e daí, aplicando o operador J_t^α em ambos os lados da primeira equação de (2.2), utilizando o item (v) do Teorema 1.39, obtemos:

$$J_t^\alpha cD_t^\alpha u(t) = J_t^\alpha (Au(t)).$$

Logo,

$$u(t) - u(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds,$$

para todo $t \geq 0$, o que nos dá, utilizando a condição inicial de (2.2)

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds,$$

para todo $t \geq 0$. Logo u satisfaz a equação integral (2.3) para todo $t \geq 0$.

($\Leftarrow$) Suponha que $u \in C([0, \infty); X)$ e que u satisfaz a equação integral (2.3), em $[0, \infty)$, isto é:

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

Como $Au \in C([0, \infty); X)$, segue imediatamente que $u(0) = u_0$. Agora reescreva a equação (2.4) como

$$u(t) = u_0 + J_t^\alpha (Au)(t),$$

para todo $t \geq 0$.

Do item (ii) do Teorema 1.39, segue que $u \in C^\alpha([0, \infty), X)$ e que

$$cD_t^\alpha u(t) = cD_t^\alpha (u_0 + J_t^\alpha (Au(t))) = Au(t),$$

para todo $t \geq 0$.

Portanto, u satisfaz a primeira equação de (2.2) em $[0, \infty)$, ou seja, u é solução de (2.2). □

Por fim, apresentamos o teorema central desta seção, que estabelece a existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy dado em (2.2).

Teorema 2.4. *Se $u_0 \in X$, então o problema (2.2) admite uma única solução global.*

Demonstração. Seja $b > 0$. Definimos o operador $T_b : C([0, b]; X) \rightarrow C([0, b]; X)$ por

$$T_b u(t) := u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds.$$

Sejam $u, v \in C([0, b]; X)$. Para todo $t \in [0, b]$, temos:

$$\begin{aligned} \|T_b u(t) - T_b v(t)\|_X &\leq \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \|u - v\|_{C([0, b]; X)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{t^\alpha \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \|u - v\|_{C([0, b]; X)}}{\Gamma(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

De modo análogo, por indução, obtemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, b]$,

$$\|T_b^n u(t) - T_b^n v(t)\|_X \leq \frac{t^{n\alpha} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \|u - v\|_{C([0, b]; X)},$$

o que implica

$$\|T_b^n u - T_b^n v\|_{C([0, b]; X)} \leq M_n \|u - v\|_{C([0, b]; X)}, \text{ com } M_n := \frac{b^{n\alpha} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}.$$

Como a série com termo geral M_n é convergente (ver Proposição 1.18), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M_n < 1$ para todo $n \geq n_0$. Assim, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, T_b admite um único ponto fixo em $C([0, b]; X)$.

Como $b > 0$ é arbitrário, concluímos que o problema (2.2) possui uma única solução. $\square$

Corolário 2.5. *Se $u_0 \in X$, então o ponto fixo do teorema anterior é dado pela função $E_\alpha(t^\alpha A)u_0$.*

Demonstração. Seja $b > 0$. Façamos pelo Método Iterativo de Picard que, sabidamente, será convergente para o ponto fixo encontrado no Teorema 2.4.

Defina $\{U_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, b], X)$ com seus elementos dados por

$$U_0(t) = u_0 \quad e \quad U_n(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A U_{n-1}(s) ds.$$

Sendo assim, podemos computar

$$\begin{aligned}
U_1(t) &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A u_0 ds \\
&= u_0 + \frac{A u_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t w^{\alpha-1} dw \\
&= u_0 + \frac{t^\alpha A u_0}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Computando, mais uma vez, e considerando a Proposição 1.11, temos que

$$\begin{aligned}
U_2(t) &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A U_1(s) ds \\
&= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A \left(u_0 + \frac{s^\alpha A u_0}{\Gamma(\alpha+1)} \right) ds \\
&= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A u_0 ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\alpha A^2 u_0 ds \\
&= u_0 + \frac{t^\alpha A u_0}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{A^2 u_0}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\alpha ds \\
&= u_0 + \frac{t^\alpha A u_0}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha} A^2 u_0}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 (1-w)^{\alpha-1} w^\alpha dw \\
&= u_0 + \frac{t^\alpha A u_0}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha} A^2 u_0}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \cdot \mathcal{B}(\alpha, \alpha+1) \\
&= u_0 + \frac{t^\alpha A u_0}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha} A^2 u_0}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
&= u_0 + \frac{t^\alpha A u_0}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha} A^2 u_0}{\Gamma(2\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

E assim, obteremos, indutivamente, que

$$U_k(t) = \sum_{n=0}^k \frac{t^{n\alpha} A^n u_0}{\Gamma(n\alpha+1)}.$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{t^{n\alpha} A^n u_0}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha} A^n u_0}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\
 &= E_{\alpha}(t^{\alpha} A) u_0,
 \end{aligned}$$

uniformemente em $[0, b]$. Como b foi uma escolha arbitrária, a prova está completa. $\square$

Observação 2.6. (i) Em resumo, o Corolário 2.5 garante que a solução do problema (2.2) é expressa por $E_{\alpha}(t^{\alpha} A) u_0$, evidenciando que a dinâmica da equação está diretamente relacionada à função de Mittag-Leffler, cujo estudo foi desenvolvido na Seção 1.4.

(ii) Notemos que a solução obtida não satisfaz a propriedade de semigrupos, isto é

$$E_{\alpha}((t+s)^{\alpha} A) \neq E_{\alpha}(t^{\alpha} A) E_{\alpha}(s^{\alpha} A), \quad \forall \quad 0 < \alpha < 1 \quad \forall t, s \in [0, \infty).$$

Para mais detalhes veja [39].

2.2 Caso do Problema não Homogêneo

Nesta seção, passamos a considerar o problema completo (2.1). Assim como feito anteriormente, começamos definindo precisamente o que entenderemos por solução desse problema. Neste contexto, será necessário introduzir as noções de solução local e solução global.

Definição 2.7. Uma função $u : [0, \infty) \rightarrow X$ é dita uma *solução* do problema (2.1) se:

- (i) $u \in C^{\alpha}([0, \infty); X)$;
- (ii) u satisfaz as equações do problema (2.1).

Assim como na seção anterior, estabelecemos inicialmente uma equivalência integral que deve ser satisfeita por quaisquer soluções do pro-

blema (2.1), e, em seguida, enunciamos o teorema que garante a existência e unicidade de solução para esse caso.

Optamos, no entanto, por omitir as demonstrações, pois elas seguem os mesmos argumentos técnicos já empregados na prova do Lema 2.3 e do Teorema 2.4, sem introduzir novas ideias relevantes.

O foco principal desta seção é apresentar a fórmula da variação das constantes para o problema (2.1), a qual será fundamental na análise de exemplos mais elaborados no Capítulo 3. Ressaltamos que essa fórmula pressupõe a existência de solução para o próprio problema (2.1).

Lema 2.8. *Seja $u : [0, \infty) \rightarrow X$ uma função contínua com $u \in C([0, \infty), X)$. Então, u é solução do problema (2.1) se, e somente se, u satisfaz a equação integral*

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [Au(s) + f(s)] ds,$$

para todo $t \geq 0$.

Teorema 2.9. *Se $u_0 \in X$, então o problema (2.1) admite uma única solução.*

Agora vamos focar na obtenção da Fórmula da Variação das Constantes associada ao problema (2.1).

Teorema 2.10. *Sejam X um espaço de Banach e assuma que $f : [0, \infty) \rightarrow X$ é uma função contínua tal que $\|f(t)\|_X \leq Me^{\omega t}$ para algum $M, \omega > 0$ e algum $t_0 \geq 0$. Então, o problema (2.1) satisfaz*

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s) ds,$$

em que $E_\alpha(z)$ e $E_{\alpha,\alpha}(z)$ denotam as funções de Mittag-Leffler; veja detalhes em (1.1).

Demonstração. Aplicamos a transformada de Laplace em ambos os lados da primeira equação de (2.1) e usando a condição inicial de (2.1), obtemos graças ao Teorema 1.42 e ao Corolário 1.45 que:

$$\mathcal{L}[cD_t^\alpha u(t)](s) = s^\alpha \hat{u}(s) - s^{\alpha-1} u_0,$$

$$\mathcal{L}[Au(t)](s) = A\widehat{u}(s), \quad \mathcal{L}[f(t)](s) = \widehat{f}(s),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(s) > \omega$. Substituindo na equação transformada, obtemos:

$$s^\alpha \widehat{u}(s) - s^{\alpha-1} u_0 = A\widehat{u}(s) + \widehat{f}(s).$$

Reorganizando, obtemos:

$$(s^\alpha - A)\widehat{u}(s) = s^{\alpha-1} u_0 + \widehat{f}(s).$$

Tomando agora $s > \max\{\omega, \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/\alpha}\}$, podemos multiplicar ambos os lados da igualdade acima pelo resolvente fracionário $(s^\alpha - A)^{-1}$, para obtermos

$$\widehat{u}(s) = (s^\alpha - A)^{-1} s^{\alpha-1} u_0 + (s^\alpha - A)^{-1} \widehat{f}(s).$$

Utilizando as fórmulas conhecidas da transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} [s^{\alpha-1} (s^\alpha - A)^{-1}] &= E_\alpha(t^\alpha A), \\ \mathcal{L}^{-1} [(s^\alpha - A)^{-1}] &= t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A), \end{aligned}$$

obtemos:

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s) ds.$$

E isto conclui a prova. □

Capítulo 3

Equações Diferenciais Fracionárias Abstratas Espaço Dependentes

Neste capítulo apresentamos os elementos originais desta Tese, a saber, uma apresentação dos elementos teóricos do Cálculo Fracionário de Ordem Variável, bem como, elementos necessários e suficientes para obtenção de soluções de equações diferenciais abstratas espaço dependentes.

3.1 Elementos de Cálculo Fracionário de Ordem Variável

Considerando as funções e os espaços apresentados ao longo do Capítulo 1, bem como os resultados desenvolvidos até este ponto da tese, estamos prontos para introduzir as definições de diferenciação e integração de ordem variável.

Definição 3.1. Chamamos de *Integral Fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha(x)$* da função φ , denotada por $J_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x)$, a função dada

por

$$J_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(x)-1} \varphi(s, x) ds, & \text{se } \alpha(x) \in (0, 1], \\ \varphi(t, x), & \text{se } \alpha(x) = 0. \end{cases}$$

para $\varphi : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e para cada $(t, x) \in I \times \Omega$ tal que o lado direito da identidade acima exista.

Observação 3.2. Vale notar que se $\varphi \in L^1(0, b; L^1(\Omega))$, então para quase todo $x \in \Omega$, a função $\varphi(\cdot, x)$ pertence a $L^1(0, b)$. Portanto, se $\alpha \in L^\infty(\Omega)$, a partir da teoria clássica da integral fracionária de Riemann-Liouville (veja [13, Teorema 2.5]), temos que $J_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x)$ existe para quase todo $t \in [0, b]$ e quase todo $x \in \Omega$.

Exemplo 3.3. Considere as funções $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $\alpha(x) = x$, e $\phi : [0, \infty) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(t, x) = t^{1/2} \cos(x)$.

Então, podemos computar a $J_t^{\alpha(x)}\phi(t, x)$, isto é, $J_t^x t^{1/2} \cos(x)$ que será dada por

$$J_t^x t^{1/2} \cos(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(3/2) t^{x+(1/2)} \cos(x)}{\Gamma(x + (3/2))}, & \text{se } x \in (0, 1] \text{ e } t \in [0, \infty), \\ t^{1/2}, & \text{se } x = 0 \text{ e } t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Exemplo 3.4. Considere a função g_α conforme dada na Definição 1.26. Então, para cada $(t, x) \in I \times \Omega$ tal que $\alpha(x) \in (0, 1]$ e a integral fracionária de ordem $\alpha(x)$ esteja bem definida, podemos escrever:

$$J_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x) = [g_{\alpha(x)} * \varphi(\cdot, x)](t).$$

Além disso, conforme a Proposição 1.28, se $\alpha_1, \alpha_2 : \Omega \rightarrow [0, 1]$ são funções tais que as expressões envolvidas estão bem definidas, então vale a identidade

$$J_t^{\alpha_1(x)} J_t^{\alpha_2(x)} \varphi(t, x) = J_t^{\alpha_1(x) + \alpha_2(x)} \varphi(t, x),$$

para todo $(t, x) \in I \times \Omega$ em que a composição de operadores faça sentido (cf. [13, Teorema 3.15]).

Agora, apresentamos a primeira derivada fracionária de ordem variável a ser considerada nesta tese. Vale ressaltar que tal derivada será aqui introduzida apenas para definir a principal derivada fracionária de ordem variável utilizada em nossa teoria.

Definição 3.5. Chamamos de *Derivada Fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha(x)$* da função φ , denotada por $D_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x)$, a transformação dada por

$$D_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x) = \frac{d}{dt} \left\{ J_t^{1-\alpha(x)}\varphi(t, x) ds \right\},$$

para $\varphi : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e para cada $(t, x) \in I \times \Omega$ tal que o lado direito da identidade acima exista.

Mais explicitamente, podemos reescrever a Definição 3.5 em itens da seguinte maneira:

- (i) $\varphi(t, x)$, se $\alpha(x) = 0$;
- (ii) $\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(x)} \varphi(s, x) ds \right]$, se $\alpha(x) \in (0, 1)$;
- (iii) $\varphi_t(t, x)$, se $\alpha(x) = 1$.

Exemplo 3.6. Considere as mesmas funções do Exemplo 3.3. Então, podemos computar a $D_t^{\alpha(x)}\phi(t, x)$, isto é, $D_t^x t^{1/2} \cos(x)$ que será dada por

- (i) $t^{-1/2}$, se $x = 0$ e $t \in [0, \infty)$;
- (ii) $\frac{\Gamma(3/2)t^{(1/2)-x} \cos(x)}{\Gamma((3/2) - x)}$, se $x \in (0, 1/2]$ e $t \in [0, \infty)$;
- (iii) $\frac{\Gamma(3/2)t^{(1/2)-x} \cos(x)}{\Gamma((3/2) - x)}$, se $x \in (1/2, 1]$ e $t \in (0, \infty)$;
- (iv) $\frac{t^{-1/2} \cos(1)}{2}$, se $x = 1$ e $t \in (0, \infty)$.

Observação 3.7. Podemos verificar que a derivada fracionária apresentada na Definição 3.5 pode ter uma singularidade à medida que t se aproxima de 0^+ , semelhante à derivada fracionária clássica de Riemann-Liouville, conforme ilustrado no exemplo anterior.

Agora estamos prontos para apresentar nossa noção principal de derivada fracionária, a saber, a Derivada Fracionária de Caputo de ordem variável.

Definição 3.8. Chamamos de *Derivada Fracionária de Caputo de ordem $\alpha(x)$* da função φ , denotada por $cD_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x)$, a transformação dada por

$$cD_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x) = D_t^{\alpha(x)}\left[\varphi(t, x) - \varphi(0, x)\right]ds,$$

para $\varphi : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e para cada $(t, x) \in I \times \Omega$ tal que o lado direito da identidade acima exista.

A seguir, demonstraremos dois lemas que serão fundamentais para o estabelecimento do item (iv) do Teorema 3.11, um resultado que será demonstrado adiante e que desempenha um papel crucial na prova do Teorema principal da Seção 3.2.

Lema 3.9. Para $0 < \theta < \gamma < 1$, temos que

$$\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)y^\theta + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)y^\gamma - \frac{y}{e \log(y)} > 0, \quad (3.1)$$

para cada $y \in [e^{1/(1-\theta)}, e^{1/(1-\gamma)}]$.

Demonstração. Inicialmente, tomemos $x = \log(y)$ e observemos que a desigualdade (3.1) é equivalente a

$$\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)e^{x(\theta-1)+1}x + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)e^{x(\gamma-1)+1}x - 1 > 0,$$

para todo $x \in \left[\frac{1}{1-\theta}, \frac{1}{1-\gamma}\right]$.

Note que, para cada x nesse intervalo, existe $t \in [0, 1]$ tal que

$$x = \frac{t}{1-\theta} + \frac{1-t}{1-\gamma}.$$

Com base nisso, definimos a função $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \left[\frac{(1-\theta) - (\gamma-\theta)t}{\theta(1-\gamma)} \right] e^{-(1-t)(\gamma-\theta)/(1-\gamma)} \\ & + \left[\frac{(1-\theta) - (\gamma-\theta)t}{\gamma(1-\theta)} \right] e^{t(\gamma-\theta)/(1-\theta)} - 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, verificar a validade de (3.1) equivale a mostrar que $\varphi(t) > 0$ para todo $t \in [0, 1]$.

Para analisar o sinal de φ , começamos calculando sua derivada:

$$\varphi'(t) = \left[\frac{(\gamma - \theta)^2}{\theta\gamma(1 - \theta)^2(1 - \gamma)^2} \right] \left[\underbrace{e^{-(1-t)(\gamma-\theta)/(1-\gamma)}\gamma(1-\theta)^2(1-t)}_{=:\psi_1(t)} - \underbrace{e^{t(\gamma-\theta)/(1-\theta)}\theta(1-\gamma)^2t}_{=:\psi_2(t)} \right],$$

para todo $t \in [0, 1]$.

O sinal de $\varphi'(t)$ é determinado pela diferença $\psi_1(t) - \psi_2(t)$, ou seja, temos $\varphi'(t) \geq 0$ se, e somente se, $\psi_1(t) \geq \psi_2(t)$, o que é equivalente a

$$\underbrace{e^{t(\gamma-\theta)^2/[(1-\gamma)(1-\theta)]}}_{=:\psi_3(t)} \geq \underbrace{\left[\frac{e^{(\gamma-\theta)/(1-\gamma)}\theta(1-\gamma)^2}{\gamma(1-\theta)^2} \right] \left(\frac{t}{1-t} \right)}_{=:\psi_4(t)}.$$

Analisando as funções acima, concluímos que:

- (i) $\psi_3(0) = 1$ e $\psi_3(t)$ é contínua e crescente em $[0, 1]$;
- (ii) $\psi_4(0) = 0$, $\psi_4(t)$ é contínua e crescente em $[0, 1)$, porém tende a ∞ quando $t \rightarrow 1^-$.

Portanto, existe $r_{\theta\gamma} \in (0, 1)$ tal que $\varphi'(t) \geq 0$ em $(0, r_{\theta\gamma})$ e $\varphi'(t) < 0$ em $(r_{\theta\gamma}, 1)$.

Concluímos, assim, que φ é crescente em $(0, r_{\theta\gamma})$ e decrescente em $(r_{\theta\gamma}, 1)$, atingindo seu mínimo em $t = 0$ ou $t = 1$. Logo,

$$\varphi(t) \geq \min\{\varphi(0), \varphi(1)\} > \min\left\{\frac{1-\gamma}{\gamma}, \frac{1-\theta}{\theta}\right\} > 0,$$

para todo $t \in [0, 1]$. Isso encerra a demonstração da desigualdade desejada. $\square$

As ideias contidas na demonstração do último lema nos exigiu um esforço significativo, mas se mostraram importantíssimas na obtenção do resultado a seguir.

Lema 3.10. *Se $0 < \theta \leq \beta \leq \gamma < 1$, então*

$$(1 - \beta)y^\beta \leq \frac{(1 - \theta)}{\theta}y^\theta + \frac{(1 - \gamma)}{\gamma}y^\gamma,$$

para todo $y \in (0, \infty)$.

Demonstração. Fixe $y \in (0, \infty)$ e considere a função $f_y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_y(t) = \frac{(1 - \theta)}{\theta}y^\theta + \frac{(1 - \gamma)}{\gamma}y^\gamma - (1 - t)y^t.$$

Para apresentar todos os detalhes desta prova, vamos dividi-la em três casos.

- (i) Para $y \in (0, 1)$, observe que $(\log(y) - 1)/\log(y) > 1$, e $f_y(t)$ é uma função crescente no intervalo $(0, (\log(y) - 1)/\log(y))$. Portanto, como $[\theta, \gamma] \subset (0, 1)$ e $\beta \in [\theta, \gamma]$, podemos deduzir que

$$f_y(\beta) \geq f_y(\theta) = \frac{(1 - \theta)^2}{\theta}y^\theta + \frac{(1 - \gamma)}{\gamma}y^\gamma \geq 0,$$

que é equivalente à desigualdade desejada.

- (ii) Para $y \in [1, e]$, notamos que $f_y(t)$ é uma função crescente em $(0, \infty)$. Desse modo, considerando que $[\theta, \gamma] \subset (0, \infty)$ e $\beta \in [\theta, \gamma]$, concluímos que

$$f_y(\beta) \geq f_y(\theta) = \frac{(1 - \theta)^2}{\theta}y^\theta + \frac{(1 - \gamma)}{\gamma}y^\gamma \geq 0,$$

que é a desigualdade desejada.

- (iii) Chegamos ao caso mais desafiador desta demonstração, a saber, o caso em que $y \in (e, \infty)$.

Notamos que $0 < (\log(y) - 1)/\log(y) < 1$. Observe também que a função $f_y(t)$ é uma função decrescente em $(0, (\log(y) - 1)/\log(y))$ e uma função crescente em $((\log(y) - 1)/\log(y), \infty)$. Com isso, considerando $[\theta, \gamma] \subset (0, (\log(y) - 1)/\log(y))$, obtemos

$$f_y(\beta) \geq f_y(\gamma) = \frac{(1 - \theta)}{\theta}y^\theta + \frac{(1 - \gamma)^2}{\gamma}y^\gamma \geq 0,$$

que é exatamente a desigualdade desejada.

Agora, no caso em que $[\theta, \gamma] \subset ((\log(y) - 1)/\log(y), \infty)$, obtemos

$$f_y(\beta) \geq f_y(\theta) = \frac{(1 - \theta)^2}{\theta} y^\theta + \frac{(1 - \gamma)}{\gamma} y^\gamma \geq 0,$$

novamente obtemos a desigualdade desejada.

Por fim, se $(\log(y) - 1)/\log(y) \in [\theta, \gamma]$, podemos concluir que

$$f_y(\beta) \geq f_y\left(\frac{\log(y) - 1}{\log(y)}\right) = \underbrace{\frac{(1 - \theta)}{\theta} y^\theta + \frac{(1 - \gamma)}{\gamma} y^\gamma}_{=g(y)} - \frac{y}{e \log(y)},$$

e $y \in [e^{1/(1-\theta)}, e^{1/(1-\gamma)}]$.

Agora, pelo Lema 3.9, temos que $g(y) > 0$ em $[e^{1/(1-\theta)}, e^{1/(1-\gamma)}]$, o que, mais uma vez, nos dá a desigualdade desejada.

E a prova está completa. $\square$

Uma das aplicações do Lema 3.10 é a obtenção de algumas desigualdades que se mostraram essenciais para provar o primeiro teorema de existência e unicidade de solução (veja Teorema 3.22) que apresentaremos neste trabalho.

Teorema 3.11. *Se $0 < \alpha_0 < 1$ e $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ são tais que $\alpha(x) \in [\alpha_0, 1]$ para quase todo $x \in \Omega$, então as seguintes desigualdades são válidas:*

- (i) $\Gamma(\gamma_0) < \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq \Gamma(\alpha(x)) \leq \Gamma(\alpha_0)$, para quase todo $x \in \Omega$, em que γ_0 é o mínimo da função Gama apresentado no item (iv) da Observação 1.10.
- (ii) $s^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}-1} \leq s^{\alpha(x)-1} \leq s^{\alpha_0-1}$, para $0 < s \leq 1$ e para quase todo $x \in \Omega$.
- (iii) $s^{\alpha_0-1} \leq s^{\alpha(x)-1} \leq s^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}-1}$, para $s \geq 1$ e para quase todo $x \in \Omega$.
- (iv) Para $s_1, s_2 > 0$ e para quase todo $x \in \Omega$, vale que

$$\begin{aligned} & \left| s_2^{\alpha(x)-1} - s_1^{\alpha(x)-1} \right| \\ & \leq \frac{|s_2^{\alpha_0-1} - s_1^{\alpha_0-1}|}{\alpha_0} + \frac{|s_2^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}-1} - s_1^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}-1}|}{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}}. \end{aligned}$$

Demonstração. Os itens (i), (ii) e (iii) são facilmente verificados, de acordo com a Observação 1.10 e pelo fato de que $\alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}$ para quase todo $x \in \Omega$.

Agora, para provarmos o item (iv) será necessária uma explanação mais detalhada.

Assuma $0 < \theta < \beta < \gamma < 1$ e considere a função $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = 1 - \frac{(\theta - 1)t^{\theta-\beta}}{(\beta - 1)\theta} - \frac{(\gamma - 1)t^{\gamma-\beta}}{(\beta - 1)\gamma}.$$

Ao derivarmos $g(t)$, identificamos a existência de um ponto crítico t_* tal que a função g é crescente em $(0, t_*)$ e decrescente em (t_*, ∞) , onde

$$t_* = \left[\frac{(1 - \theta)(\beta - \theta)\gamma}{(1 - \gamma)(\gamma - \beta)\theta} \right]^{1/(\gamma - \theta)}.$$

Mas, então, para cada $t \in (0, \infty) \setminus \{t_*\}$, é válido que $g(t) < g(t_*)$. No entanto, o Lema 3.10 nos dá que

$$(1 - \beta)t_*^\beta \leq \frac{(1 - \theta)}{\theta}t_*^\theta + \frac{(1 - \gamma)}{\gamma}t_*^\gamma,$$

o que é equivalente a $g(t_*) \leq 0$. E, por sua vez, isso nos dá que $g(t) \leq 0$, para cada $t \in (0, \infty)$. Portanto, se considerarmos $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = t^{\beta-1} - \frac{t^{\theta-1}}{\theta} - \frac{t^{\gamma-1}}{\gamma},$$

como $f'(t) = (\beta - 1)t^{\beta-2}g(t)$, podemos concluir que $f(t)$ não é decrescente em $(0, \infty)$.

Consequentemente, se considerarmos, sem perda de generalidade, que $s_1 < s_2$, então $f(s_1) \leq f(s_2)$, e mais, podemos deduzir que

$$\left| s_1^{\beta-1} - s_2^{\beta-1} \right| = s_1^{\beta-1} - s_2^{\beta-1}$$

$$\begin{aligned}
&= f(s_1) - f(s_2) + \frac{s_1^{\theta-1} - s_2^{\theta-1}}{\theta} + \frac{s_1^{\gamma-1} - s_2^{\gamma-1}}{\gamma} \\
&\leq \frac{s_1^{\theta-1} - s_2^{\theta-1}}{\theta} + \frac{s_1^{\gamma-1} - s_2^{\gamma-1}}{\gamma} \\
&= \left| \frac{s_1^{\theta-1} - s_2^{\theta-1}}{\theta} \right| + \left| \frac{s_1^{\gamma-1} - s_2^{\gamma-1}}{\gamma} \right|.
\end{aligned}$$

Com um argumento de limite simples, podemos provar que a desigualdade acima é válida mesmo quando tomamos $0 < \theta \leq \beta \leq \gamma \leq 1$.

Por fim, tomando $\theta = \alpha_0$, $\beta = \alpha(x)$, e $\gamma = \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}$, o item (iv) é válido.

E a prova está completa. $\square$

Observação 3.12. Se assumirmos que $\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} < 1$, podemos obter, através de uma prova similar, porém relativamente mais simples que a apresentada acima, que para $s_1, s_2 > 0$,

$$\left| s_2^{\alpha(x)-1} - s_1^{\alpha(x)-1} \right| \leq \frac{|s_2^{\alpha_0-1} - s_1^{\alpha_0-1}|}{1 - \alpha_0} + \frac{|s_2^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}-1} - s_1^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}-1}|}{1 - \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}},$$

para quase todo $x \in \Omega$.

Entretanto, este resultado não fortalece nossos teoremas principais e, principalmente, não nos permite considerar o caso $\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$, desse modo optamos por mencioná-lo aqui sem fornecer uma prova detalhada e muito menos utilizá-lo na construção de nossa teoria.

Outro resultado importante que apresentamos agora é o que diz respeito à continuidade da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha(x)$ em espaços L^p , conforme descrito abaixo.

Corolário 3.13. *Se $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ e existe $0 < \alpha_0 < 1$ tal que $\alpha(x) \in [\alpha_0, 1]$ para quase todo $x \in \Omega$, e $\varphi \in L^r(0, b; L^p(\Omega))$, para $1 \leq r, p \leq \infty$, então $J_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x)$ pertence a $L^r(0, b; L^p(\Omega))$ e*

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^b \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(\cdot)-1} \varphi(s, \cdot) ds \right\|_{L^p(\Omega)}^r dt \right)^{1/r} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} \left[\frac{b^{\alpha_0}}{\alpha_0} + \frac{b^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}}}{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}} \right] \|\varphi\|_{L^r(0, b; L^p(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Dado que $\alpha \in L^\infty(\Omega)$, $t^{\alpha(x)-1}$ é uma função mensurável de Lebesgue para cada $(t, x) \in [0, b] \times \Omega$. Portanto, como $\phi(t)$ é uma função mensurável de Bochner-Lebesgue, $(t-s)^{\alpha(\cdot)-1}\varphi(s, \cdot)$ é uma função mensurável de Bochner-Lebesgue para quase todo $t \in [0, b]$ (cf. [37, Capítulo XIV - Lema 1.1]).

Agora, devido aos itens (i), (ii) e (iii) do Teorema 3.11, observe que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(x)-1} \varphi(s, x) ds \right| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} \int_0^t (t-s)^{\alpha_0-1} |\varphi(s, x)| ds \\ & \quad + \frac{1}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} \int_0^t (t-s)^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}-1} |\varphi(s, x)| ds, \end{aligned}$$

para quase todo $(t, x) \in [0, b] \times \Omega$, o que implica, graças à desigualdade integral de Minkowski (ver [26, Teorema 202]), que

$$\begin{aligned} & \|J_t^{\alpha(\cdot)} \varphi(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} \Gamma(\alpha_0) J_t^{\alpha_0} \|\varphi(t)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \quad + \frac{1}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}) J_t^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}} \|\varphi(t)\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, b]$.

Assim, para $1 \leq r < \infty$ temos que

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^b \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(\cdot)-1} \varphi(s, \cdot) ds \right\|_{L^p(\Omega)}^r dt \right)^{1/r} \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} \left(\int_0^b \left[\Gamma(\alpha_0) J_t^{\alpha_0} \|\varphi(t)\|_{L^p(\Omega)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}) J_t^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}} \|\varphi(t)\|_{L^p(\Omega)} \right]^r dt \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Finalmente, a desigualdade clássica de Minkowski e a limitação da integral fracionária de Riemann-Liouville (ver [13, Teorema 3.1] para

detalhes) garantem que

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^b \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(\cdot)-1} \varphi(s, \cdot) ds \right\|_{L^p(\Omega)}^r dt \right)^{1/r} \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} \left[\frac{b^{\alpha_0}}{\alpha_0} + \frac{b\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}} \right] \|\varphi\|_{L^r(0,b;L^p(\Omega))}. \end{aligned}$$

O caso em que $r = \infty$ é omitido aqui, pois pode ser verificado diretamente. $\square$

Observação 3.14. Alguns pontos que achamos importante enfatizar:

- (i) O Corolário 3.13 garante que a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha(x)$, quando $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ e $\alpha_0 \leq \alpha(x)$ com $\alpha_0 \in (0, 1)$, é um operador linear limitado de $L^r(0, b; L^p(\Omega))$ em $L^r(0, b; L^p(\Omega))$ para cada $1 \leq r, p \leq \infty$. Portanto, com este resultado estamos melhorando o Teorema 3.1 de [13] para o caso em que $X = L^p(\Omega)$.
- (ii) Se $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ e $\alpha_0 \leq \alpha(x)$ com $0 < \alpha_0 < 1$, e mais, se $b > 0$ é tal que $\varphi \in L^1(0, b; L^p(\Omega))$ e $J_t^{1-\alpha(x)}\varphi(t, x)$ pertence ao espaço de Bochner-Sobolev $W^{1,1}(0, b; L^p(\Omega))$, então a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha(x)$ de $\varphi(t, x)$ existe para quase todo $(t, x) \in [0, b] \times \Omega$. Além do mais, se $\varphi \in C([0, b]; L^p(\Omega))$, então a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha(x)$ de $\varphi(t, x)$ também existe para quase todo $(t, x) \in [0, b] \times \Omega$.

Exemplo 3.15. Este exemplo nos servirá para mostrarmos que mesmo que $\varphi \in L^1(0, \infty; L^p(\Omega))$, $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ e $\alpha_0 \leq \alpha(x)$ com $0 < \alpha_0 < 1$, então $J_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x)$ geralmente não pertence a $L^1(0, \infty; L^p(\Omega))$. De fato, isto já pode ser verificado no caso em que $\alpha(x)$ é constante.

Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\alpha(x) = 1/2$, e $\varphi : [0, \infty) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{se } t > 1, \end{cases}$$

Então, para $1 \leq p \leq \infty$, $\varphi \in L^1(0, \infty; L^p(0, 1))$.

Agora, note que

$$J_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x) = \begin{cases} \frac{t^{1/2}}{\Gamma(3/2)}, & \text{if } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{t^{1/2} - (t-1)^{1/2}}{\Gamma(3/2)}, & \text{if } t > 1, \end{cases}$$

e

$$\|J_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x)\|_{L^1(0, \infty; L^p(0, 1))} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{M^{3/2} - (M-1)^{3/2}}{\Gamma(5/2)} \right] = \infty,$$

ou seja, $J_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x)$ não pertence a $L^1(0, \infty; L^p(0, 1))$.

Por fim, apresentamos dois resultados importantes referentes à integral fracionária de Riemann-Liouville e à derivada de ordem $\alpha(x)$. Estas propriedades se mostraram essenciais para a análise das soluções discutidas na Seção 3.2.

Proposição 3.16. *Sejam $0 < \alpha_0 < 1, b > 0, 1 \leq p \leq \infty$. Se $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ é tal que $\alpha(x) \in [\alpha_0, 1]$ para quase todo $x \in \Omega$ e φ é uma função que pertence a $C([0, b]; L^p(\Omega))$, então $J_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x)$ pertence a $C([0, b]; L^p(\Omega))$ e $J_t^{\alpha(x)}\varphi(t, x)|_{t=0} = 0$ para quase todo $x \in \Omega$.*

Demonstração. Como $\alpha(x) \in (\alpha_0, 1]$, se considerarmos $t \in (0, b]$ e usarmos a desigualdade de Hölder junto com os itens (i) – (iii) do Teorema 3.11, obtemos que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(\cdot)-1} \varphi(s, \cdot) ds \right\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq \int_0^t \left\| \frac{(t-s)^{\alpha(\cdot)-1}}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \varphi(s, \cdot) \right\|_{L^p(\Omega)} ds \\ & \leq \|\varphi\|_{C([0, b]; L^p(\Omega))} \int_0^t \left\| \frac{(t-s)^{\alpha(\cdot)-1}}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \right\|_{L^\infty(\Omega)} ds \\ & \leq \|\varphi\|_{C([0, b]; L^p(\Omega))} \left[\frac{t^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}}}{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}} + \frac{t^{\alpha_0}}{\alpha_0} \right] \frac{1}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})}. \end{aligned}$$

Logo, a expressão está bem definida para todo $t \in [0, b]$ e é contínua no ponto $t = 0$.

Resta-nos verificar a continuidade em $(0, b]$. Para isso, fixemos $t_0 \in (0, b]$. Se $t \in (t_0, b)$, podemos deduzir que

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(\cdot)-1} \varphi(s, \cdot) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \int_0^{t_0} (t_0-s)^{\alpha(\cdot)-1} \varphi(s, \cdot) ds \right\|_{L^p(\Omega)} \quad (3.2)$$

é limitado por

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \left\| \frac{(t-s)^{\alpha(\cdot)-1}}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \varphi(s, \cdot) \right\|_{L^p(\Omega)} ds \\ & + \int_0^{t_0} \left\| \left[\frac{(t_0-s)^{\alpha(\cdot)-1} - (t-s)^{\alpha(\cdot)-1}}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \right] \varphi(s, \cdot) \right\|_{L^p(\Omega)} ds. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder e realizando uma mudança de variáveis em (3.3), obtemos que (3.2) é limitado por

$$\begin{aligned} & \|\varphi\|_{C([0, T]; L^p(\Omega))} \left[\int_0^{t-t_0} \left\| \frac{w^{\alpha(\cdot)-1}}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \right\|_{L^\infty(\Omega)} dw \right. \\ & \left. + \int_0^{t_0} \left\| \left[\frac{w^{\alpha(\cdot)-1} - (t-t_0+w)^{\alpha(\cdot)-1}}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \right] \right\|_{L^\infty(\Omega)} dw \right]. \end{aligned}$$

E, novamente, dos itens (i) – (iv) do Teorema 3.11, obtemos que (3.2) é limitado por

$$\begin{aligned} & \frac{\|\varphi\|_{C([0, T]; L^p(\Omega))}}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} \left[\int_0^{t-t_0} (w^{\alpha_0-1} + w^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}-1}) dw \right. \\ & + \int_0^{t_0} \frac{(w^{\alpha_0-1} - (t-t_0+w)^{\alpha_0-1})}{\alpha_0} \\ & \left. + \frac{(w^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}-1} - (t-t_0+w)^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}-1})}{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}} dw \right]. \end{aligned}$$

Por fim, segue que (3.2) é limitado por

$$\frac{\|\varphi\|_{C([0,T];L^p(\Omega))}}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} \left[\frac{(1 + \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})(t - t_0)^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}} + t_0^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}} - t^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}}}{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}^2} + \frac{(1 + \alpha_0)(t - t_0)^{\alpha_0} + t_0^{\alpha_0} - t^{\alpha_0}}{\alpha_0^2} \right].$$

Portanto, concluímos a continuidade de $J_t^{\alpha(\cdot)}\varphi(t, \cdot)$ em relação a t , conforme desejado, visto que para $t \in (0, t_0)$ podemos obter uma estimativa de maneira semelhante. $\square$

Observação 3.17. A restrição $0 < \alpha_0 \leq \alpha(x)$ é essencial para a validade da Proposição 3.16, pois, sem essa condição, não seria possível aplicar o Teorema 3.11. Isso comprometeria, em particular, a conclusão de que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \left\| \frac{(t-s)^{\alpha(x)-1}}{\Gamma(\alpha(x))} \right\|_{L^\infty(\Omega)} ds = 0.$$

Exemplo 3.18. O exemplo a seguir fornece uma justificativa mais concreta para a necessidade da condição destacada na observação anterior. Considere $\Omega = (0, 1] \subset \mathbb{R}$, $I = [0, e^{\psi(1)}] \subset \mathbb{R}$, e $\alpha(x) = x$. Aqui, a função $\psi(x)$ representa a função Digama, apresentada no Capítulo 1. $t \in (0, e^{\psi(1)}]$, e observe que

$$\int_0^t \left\| \frac{(t-s)^{\alpha(\cdot)-1}}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \right\|_{L^\infty(\Omega)} ds = \int_0^t \left\| \frac{s^{(\cdot)-1}}{\Gamma(\cdot)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} ds.$$

Também note que para cada $s \in (0, t) \subset (0, e^{\psi(1)})$, temos

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{s^{x-1}}{\Gamma(x)} \right) = \left[\frac{s^{x-1}}{\Gamma(x)} \right] [\log(s) - \psi(x)].$$

Lembrando que, de acordo com a Observação 1.17 a função Digama é estritamente crescente em $(0, \infty)$ e também

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \psi(y) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y) = \infty,$$

deduzimos, então, a existência de um valor único $x_s \in (0, 1)$ tal que $\log s = \psi(x_s)$.

Portanto, concluímos que $(0, 1) \ni x \mapsto s^{x-1}/\Gamma(x)$ é crescente em $(0, x_s)$ e decrescente em $(x_s, 1)$, o que nos permite computar

$$\left\| \frac{s^{x-1}}{\Gamma(x)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} = \frac{s^{x_s-1}}{\Gamma(x_s)} = \frac{s^{\psi^{-1}(\log(s))-1}}{\Gamma(\psi^{-1}(\log(s)))}.$$

Disto, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\| \frac{(t-s)^{x-1}}{\Gamma(x)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} ds &= \int_0^t \frac{s^{\psi^{-1}(\log(s))-1}}{\Gamma(\psi^{-1}(\log(s)))} ds \\ &= \int_0^{\psi^{-1}(\log(t))} \frac{e^{w\psi(w)} \psi'(w)}{\Gamma(w)} dw. \end{aligned}$$

Por fim, observe que:

- (i) como $t \in (0, e^{\psi(1)})$, temos que $\psi^{-1}(\ln(t)) \in (0, 1)$;
- (ii) para $0 < w < 1$ temos o limite inferior $w\psi(w) \geq -e^{-1} - 1$ (para mais detalhes ver [25, Lema 1]);
- (iii) para $0 < w < 1$ temos o limite inferior $\psi'(w) \geq 1/(2w^2)$ (para mais detalhes ver [25, Lema 1]);
- (iv) para $0 < w < 1$ temos o limite superior $\Gamma(w+1) \leq (w^2+2)/(w+2)$ (para mais detalhes ver [3]).

Os itens (i) – (iv) são suficientes para concluirmos que

$$\int_0^t \left\| \frac{(t-s)^{x-1}}{\Gamma(x)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} ds \geq \frac{e^{(-e^{-1}-1)}}{2} \int_0^{\psi^{-1}(\log(t))} \frac{w+2}{w^2(w^2+2)} dw = \infty,$$

para todo $t \in (0, e^{\psi(1)})$.

Por fim, apresentamos um resultado que tem como objetivo generalizar partes do Teorema 1.39 para o caso em que as derivadas e integrais possuem ordem variável.

Proposição 3.19. *Sejam $0 < \alpha_0 < 1, b > 0, 1 \leq p \leq \infty$. Se $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ é tal que $\alpha(x) \in [\alpha_0, 1]$ para quase todo $x \in \Omega$ e $\varphi(t, x) \in C([0, b]; L^p(\Omega))$, então:*

(i) $cD_t^{\alpha(x)} \left[J_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x) \right] = \varphi(t, x)$, para todo $t \in [0, b]$ e quase todo $x \in \Omega$.

(ii) Se $\varphi \in C^1([0, b]; L^p(\Omega))$, então $cD_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x)$ pertence ao espaço $C([0, b]; L^p(\Omega))$ e satisfaz

$$cD_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x) = J_t^{1-\alpha(x)} \varphi'(t, x),$$

para todo $t \in [0, b]$ e quase todo $x \in \Omega$.

(iii) Se $J_t^{1-\alpha(x)} [\varphi(t, x) - \varphi(0, x)]$ pertence a $C^1([0, b]; L^p(\Omega))$, então $cD_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x)$ pertence a $C([0, b]; L^p(\Omega))$. E mais ainda, vale

$$J_t^{\alpha(x)} \left[cD_t^{\alpha(x)} \varphi(t) \right] = \varphi(t, x) - \varphi(0, x),$$

para todo $t \in [0, b]$ e quase todo $x \in \Omega$.

Demonstração.

(i) Como consequência da Proposição 3.16, sabemos que $J_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x)$ existe para cada $t \in [0, b]$ e quase todo $x \in \Omega$, pertence ao espaço $C([0, b]; L^p(\Omega))$ e satisfaz $J_s^{\alpha(x)} \varphi(s, x)|_{s=0} = 0$ para quase todo $x \in \Omega$.

Portanto, também existe $J_t^{1-\alpha(x)} \left[J_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x) \right]$ e pertence ao espaço $C([0, b]; L^p(\Omega))$. Então, temos que

$$\begin{aligned} cD_t^{\alpha(x)} \left[J_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x) \right] &= D_t^{\alpha(x)} \left[J_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x) - J_s^{\alpha(x)} \varphi(s, x)|_{s=0} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ J_t^{1-\alpha(x)} \left[J_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x) \right] \right\} \\ &= \varphi(t, x), \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, b]$ e quase todo $x \in \Omega$, como desejado.

(ii) Note, primeiramente, que

$$\begin{aligned} J_t^{1-\alpha(x)} [\varphi(t, x) - \varphi(0, x)] \\ = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(x)} [\varphi(s, x) - \varphi(0, x)] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha(x))} \int_0^t \frac{d}{ds} (t-s)^{1-\alpha(x)} [\varphi(s, x) - \varphi(0, x)] ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha(x)} \varphi'(s, x) ds = J_t^{2-\alpha(x)} \varphi'(t, x),
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, b]$ e quase todo $x \in \Omega$. Disto podemos concluir que

$$cD_t^\alpha \varphi(t, x) = J_t^{1-\alpha(x)} \varphi'(t, x)$$

para todo $t \in [0, b]$ e quase todo $x \in \Omega$, o que, juntamente com a Proposição 3.16 prova o item (ii).

(iii) Aplicando os itens (i), (ii) e a Proposição 3.16, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&J_t^{\alpha(x)} \left[cD_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x) \right] \\
&= J_t^{\alpha(x)} \left\{ \frac{d}{dt} \left[J_t^{1-\alpha(x)} (\varphi(t, x) - \varphi(0, x)) \right] \right\} \\
&= D_t^{1-\alpha(x)} \left[J_t^{1-\alpha(x)} (\varphi(t, x) - \varphi(0, x)) \right] \\
&= \varphi(t, x) - \varphi(0, x),
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, b]$ e quase todo $x \in \Omega$.

O que prova o item (iii) e a prova está completa.

□

3.2 Caso do Problema Linear com o Operador Limitado

Nesta seção, com base nos conceitos e resultados apresentados anteriormente, investigaremos o problema de Cauchy associado a uma equação de linear fracionária cuja ordem depende da variável espacial, ou seja, da forma $\alpha(x)$.

Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $A : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ um operador linear limitado.

Dada uma função $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\alpha(x) \in [\alpha_0, 1]$ para algum $0 < \alpha_0 < 1$, e uma condição inicial $u_0 \in L^p(\Omega)$, consideramos o seguinte problema:

$$cD_t^{\alpha(x)} u(t, x) = Au(t, x), \quad (3.4a)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (3.4b)$$

para todo $t > 0$ e quase todo $x \in \Omega$.

Embora este problema possa parecer simples à primeira vista, mostraremos que apresenta desafios significativos e exige uma compreensão profunda antes de passar para casos mais complexos.

Antes de iniciarmos os resultados precisamos primeiramente dar a definição de solução que norteará esta seção.

Definição 3.20. Diremos que $\varphi \in C(I; L^p(\Omega))$ é *solução* do problema (3.4) em $I \times \Omega$ se:

$$(i) \quad cD_t^{\alpha(x)} \varphi(t, x) = A\varphi(t, x), \text{ para todo } t \in I \text{ e quase todo } x \in \Omega.$$

$$(ii) \quad \varphi(0, x) = u_0(x), \text{ para quase todo } x \in \Omega.$$

Abaixo uma versão geral do teorema clássico que relaciona as soluções de equações integrais e diferenciais.

Proposição 3.21. Se $b > 0$ e $\varphi \in C([0, b]; L^p(\Omega))$, então $\varphi(t, x)$ é uma solução do problema (3.4) em $[0, b] \times \Omega$ se, e somente se, $\varphi(t, x)$ satisfaz a equação integral

$$\varphi(t, x) = u_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(x)-1} A\varphi(s, x) ds, \quad (3.5)$$

para todo $t \in [0, b]$ e quase todo $x \in \Omega$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\varphi(t, x)$ uma solução da equação (3.4), então podemos concluir que $A\varphi(t, x)$ pertence a $C([0, b]; L^p(\Omega))$, pois $A \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$.

Daí, podemos aplicar o operador $J_t^{\alpha(x)}$ em ambos os membros da equação (3.4a), juntamente com as Proposições 3.16 e 3.19, e a equação (3.4b), para concluir que

$$\varphi(t, x) = u_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(x)-1} A\varphi(s, x) ds,$$

para todo $t \in [0, b]$ e quase todo $x \in \Omega$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\varphi(t, x)$ satisfaz a equação integral (3.5). Já que $A \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$, temos que $A\varphi(t, x)$ pertence a $C([0, b]; L^p(\Omega))$, assim podemos aplicar $cD_t^\alpha(x)$ em ambos os membros da equação (3.5) e usar item (i) da Proposição 3.19 para obter (3.4a).

Finalmente, a Proposição 3.16 é suficiente para verificarmos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\varphi(t, \cdot) - u_0(\cdot)\|_{L^p(\Omega)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \|J_t^{\alpha(\cdot)} \varphi(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

isto é, que (3.4b) vale. Portanto, $\varphi(t, x)$ é uma solução do problema (3.4).

E a prova está completa. $\square$

Com base nas noções e resultados estabelecidos até este momento, podemos agora apresentar um dos principais resultados desta seção. Não devemos subestimar a complexidade que as derivadas fracionárias e a dependência da variável espacial na derivada introduzem na prova deste resultado. É por isso que fornecemos uma análise detalhada para garantir sua compreensão.

Teorema 3.22. *O problema abstrato de Cauchy (3.4) tem uma solução única em $[0, \infty) \times \Omega$.*

Demonstração. Defina

$$\tau = \min \left\{ \left(\frac{\alpha_0 \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})}{2\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}} \right)^{\frac{1}{\alpha_0}}, \frac{1}{2} \right\},$$

e considere o operador $T : C([0, \tau]; L^p(\Omega)) \longrightarrow C([0, \tau]; L^p(\Omega))$ dado por

$$T\varphi(t, x) := u_0(x) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha(x)-1}}{\Gamma(\alpha(x))} A\varphi(s, x) ds. \quad (3.6)$$

Tal operador está bem definido graças à Proposição 3.16.

Agora, sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in C([0, \tau]; L^p(\Omega))$. Podemos usar os itens (i) e (ii) do Teorema 3.11 para obter que

$$\begin{aligned} & \|T\varphi_1(t, \cdot) - T\varphi_2(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C([0, \tau]; L^p(\Omega))} \int_0^t \left\| \frac{(t-s)^{\alpha(\cdot)-1}}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \right\|_{L^\infty(\Omega)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C([0,\tau];L^p(\Omega))} \int_0^t \frac{w^{\alpha_0-1}}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} dw \\
&\leq \underbrace{\frac{\tau^{\alpha_0} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}}{\alpha_0 \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})}}_{\leq 1/2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C([0,\tau];L^p(\Omega))},
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \tau]$.

Desse modo, temos que $T(C([0, \tau]; L^p(\Omega)))$ é uma contração. Segue então, Teorema de ponto fixo de Banach, que T possui um único ponto fixo $u_1 \in C([0, \tau]; L^p(\Omega))$.

Agora, defina o conjunto

$$\begin{aligned}
H_{2\tau} = \Big\{ \varphi \in C([0, 2\tau]; L^p(\Omega)) : \varphi(t, x) = u_1(t, x), \\
\text{para todo } t \in [0, \tau] \text{ e quase todo } x \in \Omega \Big\}.
\end{aligned}$$

A Proposição 3.16 nos permite definir o operador $T : H_{2\tau} \longrightarrow C([0, 2\tau]; L^p(\Omega))$ com a mesma fórmula dada em (3.6). Além disso, observe que para cada $\varphi \in H_{2\tau}$, temos que

$$T\varphi(t, x) = Tu_1(t, x) = u_1(t, x)$$

para todo $t \in [0, \tau]$ e quase todo $x \in \Omega$. Desse modo, podemos interpretar $T : H_{2\tau} \longrightarrow H_{2\tau}$.

Usando um argumento similar, podemos provar que para $\varphi_1, \varphi_2 \in H_{2\tau}$, se $t \in [0, \tau]$ temos

$$\|T\varphi_1(t, \cdot) - T\varphi_2(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

e se $t \in (\tau, 2\tau]$ então

$$\begin{aligned}
&\|T\varphi_1(t, \cdot) - T\varphi_2(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C([\tau, 2\tau]; L^p(\Omega))} \int_\tau^t \left\| \frac{(t-s)^{\alpha(\cdot)-1}}{\Gamma(\alpha(\cdot))} \right\|_{L^\infty(\Omega)} ds \\
&\leq \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C([\tau, 2\tau]; L^p(\Omega))} \int_\tau^t \frac{(t-s)^{\alpha_0-1}}{\Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} ds
\end{aligned}$$

$$\leq \underbrace{\frac{\tau^{\alpha_0} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}}{\alpha_0 \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})}}_{\leq 1/2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C([0, \tau]; L^p(\Omega))},$$

ou seja, que

$$\|T\varphi_1(t, \cdot) - T\varphi_2(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq \underbrace{\frac{\tau^{\alpha_0} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}}{\alpha_0 \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})}}_{\leq 1/2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C([0, \tau]; L^p(\Omega))},$$

para todo $t \in [0, 2\tau]$.

Portanto, concluímos mais uma vez que o operador T possui um único ponto fixo $u_2 \in C([0, 2\tau]; L^p(\Omega))$ tal que $u_2(t, x) = u_1(t, x)$ para todo $t \in [0, \tau]$ e quase todo $x \in \Omega$.

Repetindo esse procedimento iterativamente e aplicando a Proposição 3.21 a cada etapa, obtemos a existência de uma única função $u \in C([0, \infty); L^p(\Omega))$ que resolve o problema (3.4) em $[0, \infty) \times \Omega$, conforme desejado.

Com isso, a prova está concluída. $\square$

Observação 3.23. Ressaltamos que, a nosso ver, a prova do Teorema 3.22 já se encontra em sua forma mais simples. Uma abordagem mais tradicional consistiria em demonstrar que alguma potência do operador T é uma contração em toda a semirreta, ao invés de nos restringirmos à escolha específica de $\tau \in (0, 1/2)$.

No entanto, tal estratégia exigiria a obtenção de uma fórmula explícita para estimar a constante de contração, uma vez que dependeria do uso dos itens (ii) e (iii) do Teorema 3.11, o que introduziria dificuldades técnicas consideráveis. De fato, não sabemos se essa abordagem seria viável até o fim e, mesmo que fosse, resultaria em uma prova substancialmente mais complexa e menos direta.

Nosso objetivo agora é entender melhor a solução obtida no Teorema 3.22 para o problema (3.4).

Vale lembrar que quando $\alpha(x)$ é constante (ou seja, $\alpha(x) = \alpha$, com $0 < \alpha < 1$), a solução para o problema fracionário abstrato de Cauchy

$$\begin{aligned} cD_t^\alpha u(t, x) &= Au(t, x), \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e quase todo $x \in \Omega$ pode ser expressa em termos da função de Mittag-Leffler (veja mais detalhes na Seção 2.1) como

$$u(t, x; u_0(x)) = E_\alpha(t^\alpha A)u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k} A^k u_0(x)}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (3.7)$$

para todo $t \in [0, \infty)$ e quase todo $x \in \Omega$.

Baseado nesta fórmula, é bastante razoável assumirmos que a única solução para o problema (3.4) poderia ser dada por

$$E_{\alpha(x)}(t^{\alpha(x)} A)u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha(x)k} A^k u_0(x)}{\Gamma(\alpha(x)k + 1)}, \quad (3.8)$$

para todo $t \geq 0$ e quase todo $x \in \Omega$.

Com isto em mente, antes de tentar qualquer prova, devemos primeiro assegurar que tal série converge.

Teorema 3.24. *A série definida em (3.8) é convergente em $L^p(\Omega)$ para cada $t \geq 0$. Além disso, existe $M > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} & \|E_{\alpha(\cdot)}(t^{\alpha(\cdot)} A)u_0(\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq \begin{cases} M e^{\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^{1/\alpha_0} t} \|u_0\|_{L^p(\Omega)}, & \text{se } t \in [0, 1], \\ M e^{\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^{1/\alpha_0} t^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}/\alpha_0}} \|u_0\|_{L^p(\Omega)}, & \text{se } t \in (1, \infty), \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. De acordo com o item (iv) da Observação 1.10, temos que a função $\frac{1}{\Gamma(z)}$ está diminuindo em (γ_0, ∞) , logo existe $k_0^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha(x)n + 1)} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_0 n + 1)}, \quad (3.10)$$

para todo $n \geq k_0^*$ e quase todo $x \in \Omega$.

Também, observe que a desigualdade de Hölder nos dá

$$\left\| \frac{t^{\alpha(\cdot)n} A^n u_0(\cdot)}{\Gamma(\alpha(\cdot)n + 1)} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\| \frac{t^{\alpha(\cdot)n}}{\Gamma(\alpha(\cdot)n + 1)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^n \|u_0\|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $t \geq 0$.

Agora, vamos dividir o restante da prova em dois casos.

- (i) Para $0 < t \leq 1$, o item (iv) da Observação 1.10, o item (ii) do Teorema 3.11 e (3.10), garantem que

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha(\cdot)n} A^n u_0(\cdot)}{\Gamma(\alpha(\cdot)n + 1)} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \left[\sum_{n=0}^{k_0^*} \frac{t^{\alpha_0 n} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^n}{\Gamma(\gamma_0 + 1)} \right] \|u_0\|_{L^p(\Omega)} + \left[\sum_{n=k_0^*}^{\infty} \frac{t^{\alpha_0 n} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^n}{\Gamma(\alpha_0 n + 1)} \right] \|u_0\|_{L^p(\Omega)}.$$

E ainda mais, podemos concluir (veja Proposição 1.18 e Definição 1.19)

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha(x)n} A^n u_0(x)}{\Gamma(\alpha(x)n + 1)} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \left[\sum_{n=0}^{k_0^*} \frac{t^{\alpha_0 n} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^n}{\Gamma(\eta)} \right] \|u_0\|_{L^p(\Omega)} + E_{\alpha_0}(t^{\alpha_0} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}) \|u_0\|_{L^p(\Omega)} < \infty,$$

para todo $0 < t \leq 1$.

- (ii) Para $t > 1$, o item (iv) da Observação 1.10, o item (iii) do Teorema 3.11 e (3.10), justificam que

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha(x)n} A^n u_0(x)}{\Gamma(\alpha(x)n + 1)} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \left[\sum_{n=0}^{k_0^*} \frac{t^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} n} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^n}{\Gamma(\eta)} \right] \|u_0\|_{L^p(\Omega)} + E_{\alpha_0}(t^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}) \|u_0\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

Agora, de acordo com (1.2), existe $\tilde{M} > 0$ tal que para qualquer $\beta \in (0, 1]$ e $t \geq 0$, temos

$$E_\beta(t) \leq \tilde{M} e^{t^{1/\beta}}. \quad (3.11)$$

Isto, juntamente com as conclusões dos casos anteriores, mostra que existe $M \geq 0$ tal que (3.9) é válido.

E a prova está completa.

□

Embora o Teorema 3.24 garanta que a série definida em (3.8) seja sempre convergente para $t \geq 0$, ela nem sempre representa a solução única para o problema (3.4), cuja existência é garantida pelo Teorema 3.22.

Abaixo, apresentamos um teorema que fornece condições suficientes para que isso seja verdade.

Teorema 3.25. *Se para cada $\phi \in L^p(\Omega)$, vale que*

$$\left(\frac{s^{\alpha(x)}}{\Gamma(\alpha(x) + 1)} \right) A\phi(x) = A \left(\frac{s^{\alpha(x)}}{\Gamma(\alpha(x) + 1)} \phi(x) \right), \quad (3.12)$$

para todo $s \geq 0$ e quase todo $x \in \Omega$, então a solução do Problema (3.4) é dada por (3.8).

Demonstração. Seja $U_0(t, x) = u_0(x)$ e, para $n \geq 1$, defina as funções

$$U_n(t, x) = u_0(x) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha(x)-1}}{\Gamma(\alpha(x))} AU_{n-1}(s, x) ds.$$

Observe que, devido ao Teorema 3.22 e à unicidade do ponto fixo para a função $T : C([0, k\tau]; L^p(\Omega)) \rightarrow C([0, k\tau]; L^p(\Omega))$ definido em (3.6), para qualquer $k \in \mathbb{N}$, a solução única $u(t, x)$ do problema (3.4) satisfaz

$$u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t, x),$$

na topologia de $L^p(\Omega)$, uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$.

Contudo, considerando a identidade fundamental (3.12), a Definição 1.19 e a Proposição 1.11, podemos estabelecer a identidade

$$U_n(t, x) = \sum_{k=0}^n \frac{t^{k\alpha(x)} A^k u_0(x)}{\Gamma(k\alpha(x) + 1)},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, como é padrão na teoria clássica.

Portanto,

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha(x)} A^k u_0(x)}{\Gamma(k\alpha(x) + 1)} = E_{\alpha(x)}(t^{\alpha(x)} A) u_0(x).$$

E a prova está completa. $\square$

Abaixo, fornecemos um exemplo para ilustrar uma situação em que podemos aplicar o Teorema 3.25 para obter a representação (3.8) para nossa solução.

Exemplo 3.26. Seja $\psi \in L^\infty(\Omega)$ fixo e defina $A : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ dada por $A(\phi(x)) = \psi(x)\phi(x)$.

Observe que para cada $s \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} A\left(\frac{s^{\alpha(x)}}{\Gamma(\alpha(x)+1)}\phi(x)\right) &= \psi(x)\left(\frac{s^{\alpha(x)}}{\Gamma(\alpha(x)+1)}\phi(x)\right) = \\ &= \left(\frac{s^{\alpha(x)}}{\Gamma(\alpha(x)+1)}\right)\psi(x)\phi(x) = \left(\frac{s^{\alpha(x)}}{\Gamma(\alpha(x)+1)}\right)A(\phi(x)), \end{aligned}$$

para quase todo $x \in \Omega$.

Portanto, o Teorema 3.25 garante que a solução do problema (3.4) satisfaz

$$u(t, x) = E_{\alpha(x)}(t^{\alpha(x)}A)(u_0(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha(x)}\psi^k(x)u_0(x)}{\Gamma(k\alpha(x)+1)},$$

para todo $t \geq 0$ e quase todo $x \in \Omega$.

Por fim, apresentamos um exemplo em que o Teorema 3.25 não pode ser aplicado, o que torna a caracterização da solução substancialmente mais complexa.

Nesse caso, acreditamos não ser possível obter uma expressão explícita para a série que descreveria a lei de formação da solução. Embora tenhamos obtido uma representação integral que sugere a inexistência de tal estrutura em forma de série, não podemos afirmar isso com rigor sem uma demonstração mais substancial.

Exemplo 3.27. Seja $A : L^p(0, 1) \longrightarrow L^p(0, 1)$ dada por

$$A\phi(x) = \int_0^x \phi(y)dy.$$

Claramente, A não satisfaz (3.12) em geral, impedindo uma aplicação direta do Teorema 3.25. Além disso, não é trivial estabelecer uma fórmula bem compreendida para a solução deste problema.

Com isto em mente, para facilitar nossa discussão, vamos supor que

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1, & \text{se } x \in (0, 1/2], \\ \alpha_2, & \text{se } x \in (1/2, 1), \end{cases}$$

para valores fixos, positivos e diferentes de zero, isto é, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$, com $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Desta forma, o problema pode ser dividido em duas partes.

- (i) Dado que a solução $u(t, x)$ já existe (ver as conclusões do Teorema 3.22), ao nos restringirmos aos valores de $x \in (0, 1/2]$, o problema pode ser reinterpretado como

$$\begin{aligned} cD_t^{\alpha_1} u(t, x) &= A_1 u(t, x), \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{3.13}$$

para todo $t > 0$ e quase todo $x \in (0, 1/2]$, com $A_1 : L^p(0, 1/2) \longrightarrow L^p(0, 1/2)$ sendo dado por

$$A_1 \phi(x) = \int_0^x \phi(y) dy.$$

Como $A_1 \in \mathcal{L}(L^p(0, \frac{1}{2}))$, podemos aplicar o Teorema 2.4 a (3.13) e obter

$$u(t, x) = E_{\alpha_1}(t^{\alpha_1} A_1) u_0(x), \tag{3.14}$$

para todo $t \geq 0$ e quase todo $x \in (0, 1/2]$.

- (ii) Agora que temos a fórmula para a solução $u(t, x)$ quando $x \in (0, 1/2]$, para $x \in (1/2, 1)$, podemos reformular o problema original como

$$\begin{aligned} cD_t^{\alpha_2} u(t, x) &= \int_0^{1/2} E_{\alpha_1}(t^{\alpha_1} A_1) u_0(y) dy + A_2 u(t, x), \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e quase todo $x \in (1/2, 1)$, em que o operador $A_2 : L^p(1/2, 1) \longrightarrow L^p(1/2, 1)$ é dado por

$$A_2 \phi(x) = \int_{1/2}^x \phi(y) dy.$$

Novamente, como $A_2 \in \mathcal{L}(L^p(1/2, 1))$, podemos aplicar o Teorema 2.10 para obter que

$$u(t, x) = E_{\alpha_2}(t^{\alpha_2} A_2) u_0(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} E_{\alpha_2, \alpha_2}((t-s)^{\alpha_2} A_2) \left[\int_0^{1/2} E_{\alpha_1}(s^{\alpha_1} A_1) u_0(y) dy \right] ds, \quad (3.15)$$

para todo $t \geq 0$ e quase todo $x \in (1/2, 1)$.

Portanto, a solução do problema (3.4) para o operador A considerado é dada de forma seccional: pela expressão (3.14) quando $x \in (0, \frac{1}{2}]$ e pela expressão (3.15) quando $x \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Para concluir esta seção, apresentamos uma discussão importante sobre a limitação da família de operadores que define a solução de (3.4).

Lembremos que para qualquer $\phi \in L^p(\Omega)$, o Teorema 3.22 garante a unicidade e existência da solução para o problema (3.4), denotada aqui por $u(t, x; \phi)$.

Consequentemente, podemos definir uma família de operadores limitados $\{S(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(L^p(\Omega))$, dada por

$$S(t)\phi(x) = u(t, x; \phi). \quad (3.16)$$

No caso em que $\alpha(x) = \alpha$ é constante em Ω , lembrando a fórmula em (3.7) e a estimativa (3.11), podemos provar que

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} &= \|E_\alpha(t^\alpha A)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \\ &\leq E_\alpha(t^\alpha \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}) \\ &\leq \tilde{M} e^{\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^{1/\alpha} t}, \end{aligned}$$

para cada $t \geq 0$.

Em outras palavras, demonstramos que o operador em questão é exponencialmente limitado — um comportamento que desempenha papel fundamental, por exemplo, no cálculo de sua transformada de Laplace, ao fornecer informações estruturais importantes.

Diante disso, é natural investigar se uma limitação exponencial semelhante pode ser obtida no caso em que $\alpha(x)$ varia com a posição

x .

Para isso, observe que, se a condição (3.12) for satisfeita, então podemos concluir que

$$S(t)u_0(x) = E_{\alpha(x)}(t^{\alpha(x)}A)u_0(x).$$

Relembrando os passos da prova do Teorema 3.24, fica claro que provar que a família $\{S(t) : t \geq 0\}$ é exponencialmente limitada não é simples. Por exemplo, quando $t > 1$, a prova apenas nos dá

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq Me^{\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} t^{\|\alpha\|_{\infty}/\alpha_0}},$$

onde $\|\alpha\|_{\infty}/\alpha_0 > 1$.

Entretanto, em certos casos, a limitação exponencial pode ser provada diretamente. Este é o principal tema abordado no próximo resultado, que também é o último resultado desta seção.

Teorema 3.28. *Suponha que (3.12) seja válido. Se existirem subconjuntos $\{\Omega_j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ tais que $\cup_{j=1}^m \Omega_j = \Omega$ e $\{\alpha_j\}_{j=1}^m \subset (0, 1]$, com $\alpha(x) = \alpha_j$ para $x \in \Omega_j$, então existem constantes positivas Λ e M tais que a família de operadores $\{S(t) : t \geq 0\}$, definidas em (3.16), satisfazem a desigualdade*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq Me^{\Lambda t},$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Seja $t > 0$ e $k \in \mathbb{N}$. É trivial perceber que

$$\left\| \frac{t^{\alpha(\cdot)k}}{\Gamma(\alpha(\cdot)k + 1)} \right\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^m \left[\frac{t^{\alpha_j k}}{\Gamma(\alpha_j k + 1)} \right],$$

para quase todo $x \in \Omega$.

Assim, do Teorema 3.25 temos que

$$S(t)u_0(x) = E_{\alpha(x)}(t^{\alpha(x)}A)u_0(x),$$

e mais,

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0(\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{t^{\alpha(\cdot)k}}{\Gamma(\alpha(\cdot)k+1)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^k \|u_0\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m \left[\frac{t^{\alpha_j k}}{\Gamma(\alpha_j k+1)} \right] \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^k \|u_0\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

O que resulta em

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq \sum_{j=1}^m E_{\alpha_j}(t^{\alpha_j} \|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}),$$

para todo $t \geq 0$.

Finalmente, relembrando (3.11) obtemos

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq \sum_{j=1}^m M_j e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^{1/\alpha_j}},$$

para todo $t \geq 0$.

Da desigualdade acima, basta definirmos

$$\begin{aligned} M &= m \max \{M_j : j \in \{1, \dots, m\}\} \\ \text{e} \quad \Lambda &= \max \{\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}^{1/\alpha_j} : j \in \{1, \dots, m\}\}, \end{aligned}$$

para, enfim, obtermos

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq M e^{\Lambda t},$$

para todo $t \geq 0$.

E a prova está completa. □

3.3 Caso do Problema Semilinear com o Operador Limitado

Além das hipóteses declaradas no início da Seção 3.2, introduzimos uma função $f : I \times L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ para formular o problema fracionário semilinear de Cauchy para a equação de evolução fracionária dependente do espaço de ordem $\alpha(x)$, dada pelas equações

$${}_c D_t^{\alpha(x)} u(t, x) = Au(t, x) + f(t, u(t, x)), \quad (3.17a)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (3.17b)$$

para todo $t > 0$ e quase todo $x \in \Omega$.

Observe que as etapas subsequentes desta seção consistiriam na definição da noção de solução e no estabelecimento da equivalência entre o problema (3.17) e sua forma integral correspondente — de maneira análoga ao que foi feito por meio da Definição 3.20 e da Proposição 3.21 no caso linear.

Com o intuito de evitar repetições desnecessárias de argumentos e preservar a clareza da exposição, optamos por omitir as demonstrações que seguem a mesma linha de raciocínio apresentada na Seção 3.2. Essa escolha contribui para uma apresentação mais concisa e direta dos resultados.

Definição 3.29. Diremos que $\varphi \in C(I; L^p(\Omega))$ é *solução* do problema (3.17) em $I \times \Omega$ se:

- (i) ${}_c D_t^{\alpha(x)} u(t, x) = Au(t, x) + f(t, u(t, x))$, para todo $t \in I$ e quase todo $x \in \Omega$.
- (ii) $u(0, x) = u_0(x)$, para quase todo $x \in \Omega$.

Agora, apresentamos uma versão geral da Proposição 3.21.

Proposição 3.30. Se $T > 0$, $f \in C([0, \infty) \times L^p(\Omega); L^p(\Omega))$ e φ uma função tal que $\varphi \in C([0, T]; L^p(\Omega))$, então $\varphi(t, x)$ é uma solução de (3.17) em $[0, T] \times \Omega$ se, e somente se, $\varphi(t, x)$ satisfaz a equação integral

$$\varphi(t, x) = u_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(x)-1} A\varphi(s, x) ds$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(x)-1} f(s, x, \varphi(s, x)) ds, \quad (3.18)$$

para todo $t \in [0, T]$ e quase todo $x \in \Omega$.

Demonstração. É importante destacar que as hipóteses assumidas sobre $f : [0, \infty) \times L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ são suficientes para que a prova da Proposição 3.21 possa ser adaptada ao contexto atual sem dificuldades adicionais. Por esse motivo, e conforme já mencionado, optamos por omitir tais argumentos, a fim de evitar repetições desnecessárias. $\square$

Neste ponto, torna-se necessário introduzir uma definição específica de noção local de Lipschitz que será adotada nesta seção.

Destacamos que esta definição difere ligeiramente das versões mais usuais encontradas na literatura. Em geral, o termo *localmente Lipschitz* se refere apenas à variável de interesse (neste caso, a segunda variável), sem exigir qualquer uniformidade em relação à outra variável. No entanto, para os propósitos desta tese, especialmente devido à dependência da ordem fracionária em relação à variável espacial x , é fundamental assegurar um controle mais rígido sobre o comportamento da função não linear f . Por isso, adotamos a seguinte definição:

Definição 3.31. Diremos que $f : [0, \infty) \times L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ é *localmente Lipschitz na segunda variável, uniformemente em relação à primeira variável*, se para cada $(t_0, \phi_0) \in [0, \infty) \times L^p(\Omega)$ fixado existem constantes $r_0, L_0 > 0$ tais que

$$\|f(t, \psi) - f(t, \phi)\|_{L^p(\Omega)} \leq L_0 \|\psi - \phi\|_{L^p(\Omega)}, \quad (3.19)$$

para todo $(t, \psi), (t, \phi) \in B_{r_0}(t_0, \phi_0)$, onde

$$B_{r_0}(t_0, \phi_0) := \{(s, \lambda) \in [0, \infty) \times L^p(\Omega) : |s - t_0| + \|\lambda - \phi_0\|_{L^p(\Omega)} < r_0\}.$$

Essa formulação nos permitirá trabalhar com maior flexibilidade e segurança nas demonstrações subseqüentes, particularmente no tratamento de problemas com ordem fracionária variável no espaço.

Com base nas noções e resultados estabelecidos até o momento neste artigo, apresentamos agora um dos principais resultados desta seção.

Teorema 3.32. *Se $f \in C([0, \infty) \times L^p(\Omega); L^p(\Omega))$ e satisfaz (3.19), então existe $\tau_0 > 0$ tal que (3.17) tem uma solução única em $[0, \tau_0] \times \Omega$.*

Demonstração. Para a condição inicial $(0, u_0) \in [0, \infty) \times L^p(\Omega)$, suponha que os parâmetros $r_0, L_0 > 0$ e o conjunto $B_{r_0}(0, u_0)$ são determinados conforme a Definição 3.31. Considere, então, os seguintes valores:

$$\beta \in (0, r_0), \quad M_0 = \max \{ \|f(s, u_0(\cdot))\|_{L^p(\Omega)} : s \in [0, r_0] \},$$

e τ_0 como sendo

$$\min \left\{ r_0 - \beta, \left[\frac{\alpha_0 \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})}{2(\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} + L_0)} \right]^{1/\alpha_0}, \left[\frac{\beta \alpha_0 \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})}{2M_0 + 1} \right]^{1/\alpha_0} \right\}.$$

Definimos, a seguir, o conjunto

$$K_0 = \{ \varphi \in C([0, \tau_0]; L^p(\Omega)) : \varphi(0, x) = u_0(x) \text{ para quase todo } x \in \Omega, \text{ e } \|\varphi(t, \cdot) - u_0(\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq \beta, \text{ para todo } t \in [0, \tau_0] \},$$

e, por fim, o operador $T : K_0 \rightarrow C([0, \tau_0]; L^p(\Omega))$ dado por

$$\begin{aligned} T\varphi(t, x) &= u_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(x)-1} A\varphi(s, x) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(x)-1} f(s, \varphi(s, x)) ds. \end{aligned}$$

Inicialmente, observe que, se $\varphi \in K_0$, então, pela Proposição 3.16, temos que $T\varphi(0, x) = u_0(x)$ para quase todo $x \in \Omega$, e que $T\varphi \in C([0, \tau_0]; L^p(\Omega))$. Além disso, como $(s, u_0(x))$ e $(s, \varphi(s, x))$ pertencem a $B_{r_0}(0, u_0)$ para todo $s \in [0, \tau_0]$ e quase todo $x \in \Omega$, podemos aplicar as estimativas estabelecidas na prova do Teorema 3.22, obtendo:

$$\begin{aligned} &\|T\varphi(t, \cdot) - u_0(\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \frac{\tau_0^{\alpha_0} (\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} + L_0)}{\alpha_0 \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} \|\varphi - u_0\|_{C([0, \tau_0]; L^p(\Omega))} \\ &\quad + \frac{\tau_0^{\alpha_0} M_0}{\alpha_0 \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})} \leq \beta, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \tau_0]$. Assim, temos que $T(K_0) \subset K_0$.

Agora, sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in K_0$. Como $(s, \varphi_1(s, x))$ e $(s, \varphi_2(s, x))$ pertencem a $B_{r_0}(0, u_0)$ para todo $s \in [0, \tau_0]$ e quase todo $x \in \Omega$, segue que

$$\begin{aligned} & \|T\varphi_1(t, \cdot) - T\varphi_2(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq \underbrace{\frac{\tau_0^{\alpha_0} (\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} + L_0)}{\alpha_0 \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})}}_{\leq 1/2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C([0, \tau_0]; L^p(\Omega))}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \tau_0]$.

Resumindo, concluímos que $T(K_0) \subset K_0$ e que T é uma contração. Pelo Teorema do ponto fixo de Banach, segue que T admite um único ponto fixo em K_0 . Com isso, a prova está completa. $\square$

A partir deste ponto, nos concentramos em apresentar resultados relativos às extensões da solução cuja existência foi estabelecida pelo teorema acima. Adicionalmente, pretendemos justificar a sua existência máxima, no sentido de que define o maior intervalo em que a solução permanece válida. Para tanto, apresentamos primeiro alguns conceitos necessários.

Definição 3.33. (i) Seja $\varphi : [0, \tau] \rightarrow L^p(\Omega)$ a solução única para (3.17) em $[0, \tau] \times \Omega$. Se $\tau^* > \tau$ e $\varphi^* : [0, \tau^*] \rightarrow L^p(\Omega)$ é uma solução para (3.17) em $[0, \tau^*] \times \Omega$, então diremos que φ^* é uma *continuação* de φ sobre $[0, \tau^*] \times \Omega$.

(ii) Se $\varphi : [0, \tau^*) \rightarrow L^p(\Omega)$ é a solução única para (3.17) em $[0, \tau] \times \Omega$ para todo $\tau \in (0, \tau^*)$ e não pode ser estendida para $[0, \tau^*] \times \Omega$ como solução para (3.17), então diremos que φ é a *solução maximal* para (3.17) em $[0, \tau^*) \times \Omega$.

Lema 3.34. Se $f \in C([0, \infty) \times L^p(\Omega); L^p(\Omega))$, satisfaz (3.19) e $\varphi \in C([0, \tau]; L^p(\Omega))$ é uma solução de (3.17) em $[0, \tau] \times \Omega$, então existe uma continuação única φ^* de φ para um intervalo estendido $[0, \tau + \tau^*] \times \Omega$ para algum $\tau^* > 0$.

Demonstração. Seja φ a solução para (3.17) em $[0, \tau] \times \Omega$. Como f é de Classe $L_{\alpha(x)}$, para $(\tau, \varphi(\tau)) \in [0, \infty) \times L^p(\Omega)$, suponha que $r_\tau, L_\tau > 0$

e $B_r(\tau, \varphi(\tau))$ são seus parâmetros obtidos.

Defina

$$\beta \in (0, r_\tau), \quad M_\tau = \max \{ \|f(s, \varphi(\tau, \cdot))\|_{L^p(\Omega)} : s \in [0, r_\tau] \},$$

e τ^* por

$$\min \left\{ r_\tau - \beta, \left[\frac{\alpha_0 \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})}{2(\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} + L_\tau)} \right]^{1/\alpha_0}, \left[\frac{\beta \alpha_0 \Gamma(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)})}{2L_\tau M_\tau + 1} \right]^{1/\alpha_0} \right\}.$$

Agora, defina, também, o conjunto

$$\begin{aligned} K_\tau = \Big\{ \psi \in C([0, \tau + \tau^*]; L^p(\Omega)) : \psi(s, x) = \varphi(s, x) \\ \text{para todo } t \in [0, \tau] \text{ e quase todo } x \in \Omega \\ \text{e } \|\psi(t, \cdot) - \varphi(\tau, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq \beta, \text{ para todo } t \in [\tau, \tau + \tau^*] \Big\}, \end{aligned}$$

bem como o operador $T : K_\tau \rightarrow C([0, \tau]; L^p(\Omega))$ dado por

$$\begin{aligned} T\psi(t, x) = u_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(x)-1} A\psi(s, x) ds \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(x)-1} f(s, \psi(s, x)) ds. \end{aligned}$$

Seguindo as mesmas ideias contidas na prova do Teorema 3.32, conseguimos mostrar que $T(K_\tau) \subset K_\tau$ e que T é uma contração.

Portanto, pelo princípio de contração de Banach, concluímos que existe uma solução única φ^* em $[0, \tau + \tau^*] \times \Omega$ para (3.17), que é a continuação única de φ sobre $[0, \tau^*] \times \Omega$.

E a prova está completa. $\square$

Apresentamos, a seguir, o resultado final que consolida a teoria desenvolvida nesta seção sobre equações diferenciais semilineares envolvendo a derivada fracionária de Caputo de ordem variável $\alpha(x)$ e operadores limitados $A \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$.

Esse teorema desempenha um papel central na análise do comportamento das soluções, permitindo-nos tratar tanto a ocorrência de explosão em tempo finito quanto a existência global de soluções em $[0, \infty)$.

Teorema 3.35. *Se $f \in C([0, \infty) \times L^p(\Omega); L^p(\Omega))$, satisfaz (3.19) e mapeia conjuntos limitados em conjuntos limitados, então, ou o problema (3.17) admite uma solução global $\varphi \in C([0, \infty); L^p(\Omega))$, ou existe $\omega \in (0, \infty)$ tal que $\varphi \in C([0, \omega); L^p(\Omega))$ é uma solução maximal de (3.17) em $[0, \omega) \times \Omega$ com*

$$\limsup_{t \rightarrow \omega^-} \|\varphi(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} = \infty.$$

Demonstração. Defina o conjunto

$$H = \{\tau \in [0, \infty) : \text{existe } \varphi_\tau \in C([0, \tau]; L^p(\Omega)) \\ \text{única solução para (3.17) em } [0, \tau] \times \Omega\},$$

o que, de acordo com o Teorema 3.32, tal conjunto é não vazio.

Denote $\omega = \sup H$ e defina a função contínua $\varphi : [0, \omega) \rightarrow L^p(\Omega)$, que também é uma solução para (3.17) em $[0, \omega) \times \Omega$, por

$$\varphi(t, x) = \varphi_\tau(t, x), \text{ para } t \in [0, \tau] \text{ e quase todo } x \in \Omega.$$

- (i) Se $\omega = \infty$, então φ é uma solução para o problema (3.17) em $[0, \infty) \times \Omega$, e não há mais nada a provar.
- (ii) Se $\omega < \infty$, precisamos provar que φ não admite continuação e que

$$\limsup_{t \rightarrow \omega^-} \|\varphi(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} = \infty. \quad (3.20)$$

- (a) Suponha, para obter contradição, que φ possui extensão para $[0, \omega] \times \Omega$ enquanto permanece uma solução para (3.17) em $[0, \omega] \times \Omega$.

Então, pelo Lema 3.34, existe $\tau^* > 0$ tal que $\varphi^* : [0, \omega + \tau^*] \rightarrow L^p(\Omega)$ é a única continuação de φ em $[0, \omega + \tau^*] \times \Omega$.

No entanto, isso implica que $\omega + \tau^* \in H$, levando à contradição $\omega + \tau^* \leq \omega$, ou equivalentemente, $\tau^* \leq 0$, o que é impossível.

Portanto, φ é uma solução maximal para (3.17) em $[0, \omega) \times \Omega$.

- (b) Suponha que (3.20) não seja válido. Então, existe uma cons-

tante $K > 0$ tal que

$$\|\varphi(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq K, \quad \text{para todo } t \in [0, \omega).$$

Como o conjunto $\{(t, \varphi(t, \cdot)) : t \in [0, \omega)\}$ é limitado em $[0, \infty) \times L^p(\Omega)$, definimos

$$S = \sup_{t \in [0, \omega)} \|f(t, \varphi(t, \cdot))\|_{L^p(\Omega)}.$$

Agora, considere a sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \omega)$ tal que $t_n \rightarrow \omega$. Segue do Teorema 3.11, e usando estimativas semelhantes às do Teorema 3.32, que $\{\varphi(t_n, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$.

E mais, φ pode ser estendido para $[0, \omega]$ de uma maneira bem definida, satisfazendo (3.18) para todo $t \in [0, \omega]$ e quase todo $x \in \Omega$. Como isso decorre de um argumento padrão, omitimos os detalhes.

Além disso, pelo Teorema 3.35, a solução pode ser estendida para um intervalo maior, contradizendo a definição de ω .

Portanto, se $\omega < \infty$, a contradição acima implica que (3.20) deve ser válida.

E a prova está completa. □

3.4 Uma possível aplicação da Teoria de Ordem Variável

Nesta seção, expomos o raciocínio que fundamenta uma adaptação de determinado modelo matemático à luz do referencial teórico desenvolvido ao longo deste trabalho. Como exemplo motivador, consideraremos o modelo SIR (Susceptível–Infectado–Recuperado), amplamente empregado na modelagem da dinâmica de propagação de doenças infecciosas.

3.4.1 Modelo Clássico SIR

O modelo SIR constitui-se de uma estrutura matemática que permite examinar de que forma os processos de infecção e recuperação influenciam a disseminação de patógenos em uma população, fornecendo subsídios analíticos para a compreensão dos mecanismos subjacentes que regem a dinâmica epidêmica.

Esse modelo é composto por três compartimentos fundamentais, os quais descrevem a evolução temporal da população sob análise:

- (i) Suscetíveis, $S(t)$: indivíduos que apresentam risco de infecção;
- (ii) Infectados, $I(t)$: indivíduos infectados e capazes de transmitir a doença;
- (iii) Recuperados, $R(t)$: indivíduos que se recuperaram ou foram afastados da população infecciosa e não são mais suscetíveis.

O sistema de equações diferenciais não lineares que regem o modelo SIR são

$$\begin{aligned}S'(t) &= -\beta S(t)I(t), \\I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\R'(t) &= \gamma I(t),\end{aligned}\tag{3.21}$$

em que β é a taxa de transmissão, representando a probabilidade de que uma interação entre um indivíduo suscetível e um indivíduo infectado resulte em uma nova infecção e γ é a taxa de recuperação, que determina a taxa na qual os indivíduos infectados se recuperam e transitam para o compartimento recuperado.

3.4.2 Algumas limitações do Modelo Clássico SIR

Ressaltamos que o modelo SIR (3.21) assume que a transmissão da enfermidade ocorre unicamente por meio de interações diretas e locais entre indivíduos. Entendemos que tal hipótese constitui-se numa simplificação que desconsidera explicitamente a influência dos fluxos populacionais entre distintas regiões geográficas — um fator determinante na dinâmica de propagação de doenças infecciosas em cenários reais. Em virtude desta limitação estrutural, o modelo pode não ser suficientemente capaz de descrever com fidelidade a complexidade dos

processos epidêmicos, sobretudo em ambientes urbanos caracterizados por alta conectividade e mobilidade.

Compreender os fatores ambientais e estruturais que influenciam a propagação de doenças infecciosas é fundamental para o desenvolvimento de estratégias de mitigação e prevenção eficazes, conforme destacado por [48]. Uma questão central, levantada por [22], refere-se ao papel das cidades no processo de disseminação: seriam os centros urbanos, por si só, catalisadores da transmissão da COVID-19, ou seria o fluxo interurbano de indivíduos o verdadeiro vetor de aceleração das pandemias?

Diversos estudos recentes oferecem subsídios importantes para essa discussão. De acordo com [48], verificou-se uma correlação significativa entre densidade populacional e taxas elevadas de morbidade em áreas urbanas da província de Hubei e em diversos estados norte-americanos, sugerindo que a concentração populacional pode amplificar a disseminação viral. E mais, [22] argumenta que a dinâmica de transmissão se mostra heterogênea entre os grandes centros urbanos e outras regiões, indicando que a conectividade — medida por fluxos de mobilidade e redes de transporte — pode exercer influência mais determinante do que a mera densidade demográfica.

Resumindo, o modelo SIR clássico (3.21), ao assumir que a transmissão ocorre exclusivamente por interações locais e homogêneas entre os indivíduos, desconsidera de forma explícita os efeitos da mobilidade populacional entre regiões geográficas distintas. Essa simplificação estrutural limita sua capacidade de descrever adequadamente a complexidade dos processos epidêmicos reais, particularmente em contextos urbanos densamente povoados e interconectados. Assim, torna-se evidente a necessidade de modelos epidemiológicos mais sofisticados, capazes de incorporar heterogeneidades espaciais, fluxos de mobilidade e estruturas de rede para uma compreensão mais acurada da propagação de doenças infecciosas em escala global.

Estas observações indicam que um modelo epidemiológico mais realista deve incorporar tanto as interações espaciais como a mobilidade humana.

3.4.3 Algumas justificativas do Modelo Fracionário SIR

O modelo clássico SIR pressupõe que os indivíduos transitam entre os compartimentos Suscetível, Infectado e Recuperado segundo taxas constantes e independentes do histórico do processo, o que implica numa estrutura markoviana subjacente. Tal formulação assume que a evolução temporal do sistema depende exclusivamente do estado atual da população, desconsiderando quaisquer efeitos de memória associados ao tempo de permanência em cada compartimento. No entanto, evidências empíricas demonstram que a dinâmica de transmissão de diversas doenças infecciosas, como a COVID-19 e o Ebola, frequentemente viola essa hipótese simplificadora.

De fato, conforme argumentado por [4, 5], a probabilidade de um indivíduo permanecer no estado infeccioso ou de transitar para o estado recuperado é fortemente dependente do tempo decorrido desde a infecção. Tal dependência temporal induz comportamentos dinâmicos mais complexos, que não podem ser adequadamente capturados por modelos diferenciais clássicos de ordem inteira, exigindo, assim, uma generalização da estrutura matemática tradicional para incorporar efeitos de memória e heterogeneidades temporais.

Uma motivação fundamental para a introdução de derivadas fracionárias na modelagem epidemiológica advém da análise de processos estocásticos subjacentes à dinâmica de disseminação de doenças infecciosas. Em particular, [4, 5] demonstram que, ao considerar uma formulação baseada em caminhadas aleatórias de tempo contínuo (CTRW – Continuous-Time Random Walks), é possível derivar, de maneira natural, um modelo SIR de ordem fracionária. Nesta estrutura, quando a função de distribuição associada à infectividade possui cauda pesada — típica de distribuições do tipo lei de potência —, as equações diferenciais fracionárias emergem como consequência direta da dinâmica não-exponencial de transição entre compartimentos.

A principal implicação dessa abordagem é a incorporação explícita de efeitos de memória nos mecanismos de infecção e recuperação. Diferentemente dos modelos clássicos de ordem inteira, nos quais as taxas de transição dependem unicamente do estado atual do sistema, os modelos fracionários permitem que a evolução do sistema seja influenciada por todo o histórico do processo. Essa dependência temporal introduz uma

estrutura de memória de longo alcance, que confere maior realismo ao modelo ao capturar comportamentos anômalos frequentemente observados em dados epidemiológicos, como transmissões tardias, períodos de incubação variáveis e recuperação heterogênea entre os indivíduos.

3.4.4 Um possível Modelo Fracionário Espaço Dependente SIR

Em contextos em que mobilidade e conectividade são cruciais, mesmo modelos SIR fracionários frequentemente falham em capturar a complexidade total da disseminação da doença. Enquanto esses modelos introduzem efeitos de memória na infecção e recuperação, eles ainda assumem transmissão local, negligenciando interações espaciais. Entretanto, epidemias do mundo real são fortemente influenciadas pela mobilidade populacional, onde indivíduos interagem em múltiplas regiões, permitindo transmissão não local. Um modelo epidemiológico mais realista deve levar em conta tanto a transmissão não local quanto a dinâmica de infecção dependente da região.

Embora modelos fracionários do tipo SIR representem um avanço significativo na incorporação de efeitos de memória aos processos de infecção e recuperação, tais abordagens ainda se mostram limitadas em contextos onde a mobilidade e a conectividade espacial desempenham papel determinante na disseminação da doença. Em geral, esses modelos assumem que a transmissão ocorre de forma puramente local, ou seja, restrita a interações dentro de uma mesma população homogênea, desconsiderando os mecanismos de acoplamento espacial que caracterizam a propagação de epidemias em sistemas geograficamente distribuídos.

No entanto, diversas evidências empíricas apontam que surtos epidêmicos em larga escala são fortemente condicionados por fluxos populacionais entre diferentes regiões, através de redes de transporte, deslocamentos pendulares e migrações, que viabilizam interações não locais e contribuem para a sincronização de surtos entre localidades distantes [7, 17]. Nesse sentido, a conectividade espacial — tanto estrutural quanto funcional — constitui um fator determinante na dinâmica global de propagação de doenças infecciosas.

Para representar adequadamente tais fenômenos, torna-se necessário adotar uma estrutura matemática que combine a memória intrínseca

dos processos infecciosos, modelada por equações diferenciais fracionárias, com mecanismos de acoplamento espacial. Modelos epidemiológicos mais realistas, portanto, devem incorporar explicitamente a transmissão não local e a heterogeneidade espacial da população, permitindo que a taxa de infecção em uma determinada região dependa não apenas do estado local, mas também do estado de regiões conectadas por redes de mobilidade [10]. Essa abordagem é particularmente relevante para a compreensão da disseminação de doenças em ambientes urbanos altamente interconectados e globalizados.

Para abordar a complexidade da propagação epidêmica em sistemas espacialmente distribuídos, propomos a incorporação explícita de interações espaciais no processo de infecção. Uma estratégia natural para tal tarefa é a introdução de um termo integral na equação de infecção, de modo que a taxa de infecção em uma posição espacial x dependa não apenas de interações locais, mas também da distribuição espacial dos indivíduos infectados ao longo do domínio. Modelos recentes têm adotado equações fracionárias de reação-difusão para representar de forma mais realista os mecanismos de transmissão não locais, permitindo a captura de heterogeneidade espacial e fornecendo uma descrição mais fiel da dinâmica epidêmica observada em cenários do mundo real [34]. Em contraste, a abordagem proposta neste trabalho introduz uma estrutura matemática distinta, visando refinar ainda mais a representação da interação entre as populações e a dispersão espacial da infecção.

Matematicamente, introduzimos a seguinte equação de infecção espacialmente dependente:

$$\frac{\partial I(t, x)}{\partial t} = \beta S(t, x) \int_0^x I(t, y) dy - \gamma I(t, x). \quad (3.22)$$

Aqui, o termo integral

$$\int_0^x I(t, y) dy,$$

representa o número cumulativo de indivíduos infectados no domínio espacial. Esta formulação garante que a taxa de infecção local leve em consideração as localizações espaciais anteriores em que interações ocorreram, incorporando efeitos de transmissão baseados em movimento. Tal abordagem é particularmente relevante em ambientes urbanos, onde o movimento entre bairros ou centros de transporte afeta significativa-

mente a disseminação de doenças.

Embora a alteração da segunda equação de (3.21) para (3.22) melhore o modelo ao introduzir transmissão de doenças não local, ela não leva em consideração totalmente os efeitos de memória em diferentes regiões. Em particular, as taxas de infecção e recuperação podem variar no espaço devido a diferenças na densidade populacional, disponibilidade de assistência médica e comportamentos sociais. Para abordar esta limitação, introduzimos uma derivada de tempo fracionária com ordem dependendo da posição espacial x , capturando efeitos de memória dependentes da região.

A introdução de derivadas fracionárias dependentes do espaço é motivada pela sua capacidade de modelar dinâmicas de infecção heterogêneas em diferentes regiões espaciais. Como demonstrado por [5], as derivadas fracionárias surgem de forma natural em modelos epidemiológicos caracterizados por processos de difusão anômala ou por tempos de espera com distribuições de lei de potência. A extensão desses modelos para sistemas espacialmente heterogêneos permite a inclusão de efeitos de memória que variam conforme a região, onde infecções anteriores influenciam a progressão da doença de maneira distinta em cada local.

Com isso em mente, agora propomos o seguinte modelo SIR fracionário generalizado:

$$\begin{aligned} {}^cD_t^{\alpha(x)}S(t, x) &= -\beta S(t, x) \int_0^x I(t, y) dy, \\ {}^cD_t^{\alpha(x)}I(t, x) &= \beta S(t, x) \int_0^x I(t, y) dy - \gamma I(t, x), \\ {}^cD_t^{\alpha(x)}R(t, x) &= \gamma I(t, x), \end{aligned} \tag{3.23}$$

em que $t \in (0, \infty)$, $x \in [0, 1]$ representa a posição da população, e ${}^cD_t^{\alpha(x)}$ é a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha(x)$ introduzida na Seção 3.1.

Portanto, dada uma condição inicial, os Teoremas 3.32 e 3.35 fornecem condições suficientes para garantir a existência e unicidade de uma solução para (3.23), ao mesmo tempo em que garantem sua existência global.

Capítulo 4

Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Neste capítulo, apresentamos as reflexões finais sobre o trabalho desenvolvido ao longo desta tese, cujo objetivo foi construir um arcabouço teórico robusto para o estudo de equações diferenciais fracionárias abstratas com ordem de derivação dependente do espaço. Mais especificamente, investigamos condições necessárias e/ou suficientes para a existência e unicidade de soluções em contextos lineares e semilineares, considerando operadores limitados em espaços de Banach apropriados.

Durante a formulação da teoria, optamos por restringir a análise ao caso em que o operador A é limitado. Essa decisão foi motivada por dificuldades técnicas significativas encontradas na abordagem com operadores não limitados, cujo tratamento exigiria ferramentas adicionais e tornaria o texto excessivamente longo e potencialmente inacessível. Ainda assim, o caso com operadores limitados já impôs desafios teóricos consideráveis e representa um passo fundamental na direção de uma teoria mais geral. O presente trabalho, portanto, estabelece uma base sólida para a investigação futura de problemas mais complexos que envolvem operadores não limitados, os quais estão atualmente sob análise em nossos estudos em andamento.

Cabe destacar que, apesar das limitações impostas pelo escopo e pelo tempo disponível, o conteúdo aqui apresentado já constitui uma contribuição relevante para a literatura, tanto por sua originalidade

quanto pelo rigor teórico. Por esse motivo, decidimos não incluir as ideias ainda em desenvolvimento sobre a extensão da teoria para operadores não limitados, preservando a coesão e a consistência da Tese.

Adicionalmente, introduzimos um modelo epidemiológico baseado em equações fracionárias com ordem de derivação espacialmente variável, o qual representa uma aplicação direta da teoria desenvolvida. Este modelo incorpora três modificações fundamentais em relação ao modelo SIR clássico:

- (i) Efeitos de memória espacialmente variáveis: Diferentes regiões apresentam distintos níveis de memória, afetando a dinâmica de infecção. Ambientes urbanos, por exemplo, podem ter uma propagação mais rápida, enquanto áreas rurais tendem a apresentar progressões mais lentas.
- (ii) Transmissão não local: A inclusão de um termo integral garante que a taxa de infecção em um ponto dependa da exposição acumulada ao longo de toda a região considerada, o que reflete mais fielmente os padrões de disseminação observados em epidemias reais.
- (iii) Acoplamento entre integração espacial e diferenciação fracionária: A combinação desses dois elementos permite descrever com maior precisão a dinâmica da propagação, considerando tanto a heterogeneidade espacial quanto os efeitos de memória histórica. A ordem fracionária variável $\alpha(x)$ reforça essa capacidade, adaptando-se às particularidades regionais na transmissão e recuperação.

Com base nesse modelo, identificamos várias linhas promissoras de investigação futura:

- (i) Análise da estabilidade e comportamento assintótico das soluções sob diferentes perfis para $\alpha(x)$, visando compreender a evolução de epidemias em ambientes heterogêneos;
- (ii) Desenvolvimento de estratégias de controle específicas para diferentes contextos populacionais, contribuindo para políticas públicas mais eficazes;

- (iii) Construção de métodos numéricos eficientes e estáveis para equações diferenciais fracionárias com ordem variável, com foco em precisão e viabilidade computacional;
- (iv) Validação empírica do modelo proposto por meio de dados reais, a fim de testar seu poder preditivo e a aplicabilidade em cenários concretos de epidemias.

A integração entre heterogeneidade espacial, memória e transmissão não local constitui um avanço relevante para a modelagem de fenômenos complexos. Ao ultrapassar as limitações dos modelos compartimentais tradicionais, o modelo aqui proposto abre caminho para uma compreensão mais refinada da dinâmica epidêmica, com potencial impacto prático em saúde pública, planejamento urbano e políticas de mitigação.

Concluimos, assim, que os resultados teóricos e aplicados desta tese representam uma contribuição significativa para o avanço do estudo de equações fracionárias e suas aplicações, especialmente no contexto de populações heterogêneas. A continuidade desta linha de pesquisa promete novos desenvolvimentos matemáticos e aplicações de grande relevância interdisciplinar.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover, 1972.
- [2] E. Adams and L. Gelhar. Field study of dispersion in a heterogeneous aquifer. *Water Resources Research*, 28(3293-3307), 1992.
- [3] H. Alzer and M. Kwong. On Ivády’s bounds for the Gamma function and related results. *Periodica Mathematica Hungarica*, 82:115–124, 2021.
- [4] C. Angstmann, A. Erickson, B. Henry, A. McGann, J. Murray, and J. Nichols. Fractional order compartment models. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 77(2):430–446, 2017.
- [5] C. Angstmann, B. Henry, and A. McGann. A fractional order recovery SIR model from a stochastic process. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 452:86–93, 2016.
- [6] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Birkhäuser: Basel, 2011.
- [7] D. Balcan, V. Colizza, B. Gonçalves, H. Hu, J. Ramasco, and A. Vespignani. Multiscale mobility networks and the spatial spreading of infectious diseases. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(51):21484–21489, 2009.
- [8] H. Bateman. *Higher Transcendental Functions*. McGraw-Hill, 1955.

- [9] E. Bazhlekova. *Fractional evolution equations in Banach spaces*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2001.
- [10] D. Brockmann and D. Helbing. The hidden geometry of complex, network-driven contagion phenomena. *Science*, 342(6164):1337–1342, 2013.
- [11] J. Carcione, F. Sanchez-Sesma, F. Luzón, and J. Gavilán. Theory and simulation of time-fractional fluid diffusion in porous media. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46, 2013.
- [12] P. Carvalho Neto. *Equações diferenciais fracionárias: um novo estudo de soluções locais e globais em espaços de Banach*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2013.
- [13] P. Carvalho Neto and R. Fehlbeg Júnior. The Riemann-Liouville fractional integral in Bochner-Lebesgue spaces I. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 21(3667-3700), 2022.
- [14] P. Carvalho Neto and R. Fehlbeg Júnior. On continuously differentiable vector-valued functions of non-integer order. *arXiv:2503.22854*, 2025.
- [15] V. Chechkin, R. Gorenflo, and I. Sokolov. Fractional diffusion in inhomogeneous media. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(679-684), 2005.
- [16] C. Colcord and W. Deming. The minimum in the Gamma function. *Nature*, 135(917), 1935.
- [17] V. Colizza, A. Barrat, M. Barthélemy, and A. Vespignani. The role of the airline transportation network in the prediction and predictability of global epidemics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(7):2015–2020, 2006.
- [18] A. Compte. Stochastic foundations of fractional dynamics. *Physical Review E*, 53(4191-4193), 1996.
- [19] J. Conway. *Functions of one complex variable*. Springer-Verlag, 1978.

- [20] V. Daftardar-Gejji and A. Babakhani. Analysis of a system of fractional differential equations. *The American Mathematical Monthly*, 66(849-869), 1959.
- [21] S. Fedotov and S. Falconer. Subdiffusive master equation with space-dependent anomalous exponent and structural instability. *Physical Review of the American Physical Society*, 85, 2012.
- [22] M. Gerritse. COVID-19 transmission in cities. *European Economic Review*, 150, 2022.
- [23] I. Golding and E. Cox. Physical nature of bacterial cytoplasm. *Physical Review Letters*, 96, 2006.
- [24] A. Goulart, M. Lazo, and J. Suarez. A new parameterization for the concentration flux using the fractional calculus to model the dispersion of contaminants in the planetary boundary layer. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 518:38–49, 2019.
- [25] B. Guo and F. Qi. Refinements of lower bounds for Polygamma functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 141(3):1007–1015, 2013.
- [26] G. Hardy, J. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 2 edition, 1952.
- [27] R. Hilfer and L. Anton. Fractional master equations and fractal time random walks. *Physical Review E*, 51(848-851), 1995.
- [28] E. Hille and R. Phillips. *Functional Analysis and Semi-groups*. volume 31 of Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 1957.
- [29] Y. Kian, E. Soccorsi, and M. Yamamoto. On time-fractional diffusion equations with space-dependent variable order. *Annales Henri Poincaré*, 19(3855–3881), 2018.
- [30] A. Kilbas, H. Srivastava, and J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.

- [31] A. Kobuchei. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 340(252-281), 2008.
- [32] Z. Li, Y. Kian, and E. Soccorsi. Initial-boundary value problem for distributed order time-fractional diffusion equations. *Asymptotic Analysis*, 2017.
- [33] Q. Liu and L. Chen. Time-space fractional model for complex cylindrical ion-acoustic waves in ultrarelativistic plasmas. *Complexity*, 2020(3):1007–1015, 2020.
- [34] Z. Lu, Y. Yu, G. Ren, C. Xu, and X. Meng. Global dynamics for a class of reaction–diffusion multigroup SIR epidemic models with time fractional-order derivatives. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 27(1):142–162, 2022.
- [35] N. Makris, G. Dargush, and C. Constantinou. Dynamic analysis of generalized viscoelastic materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(8):1663–1679, 1993.
- [36] R. Metzler and J. Klafter. The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 339(1-77), 2000.
- [37] J. Mikusiński. *The Bochner Integral*. Birkhauser-Basel, 1978.
- [38] E. Orsingher, C. Ricciuti, and B. Toaldo. On semi-Markov processes and their Kolmogorov’s integro-differential equations. *Journal of Functional Analysis*, 275(830-868), 2018.
- [39] J. Peng and K. Li. A note on property of the Mittag–Leffler function. *J. Math. Anal. Appl.*, 370(635–638), 2010.
- [40] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.
- [41] J. Pruss. *Evolutionary Integral Equations and Applications*. Springer Basel, 1993.
- [42] C. Ricciuti and B. Toaldo. Semi-Markov models and motion in heterogeneous media. *Journal of Statistical Physics*, 169(340-361), 2017.

- [43] F. Santamaria, S. Wils, E. Schutter, and G. Augustine. Anomalous diffusion in purkinje cell dendrites caused by spines. *Neuron*, 52(635-648), 2006.
- [44] M. Saxton. Anomalous subdiffusion in fluorescence photobleaching recovery: A Monte Carlo study. *Biophysical Journal*, 81(2226-2240), 2001.
- [45] H. Sun, W. Chen, and Y. Chen. Variable-order fractional differential operators in anomalous diffusion modeling. *Physica A*, 388(4586-4592), 2009.
- [46] R. Wang, D. Chen, and T. Xiao. Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators. *Journal of Differential Equations*, 252(202-235), 2012.
- [47] B. West, R. Grigolini, R. Metzler, and T. Nonnenmacher. Fractional diffusion and Lévy stable processes. *Physical Review E*, 55, 1997.
- [48] T. Yin, T. Sun, L. Yao, T. Jiao, L. Ma, L. Lin, J. Graff, L. Aleya, A. Postlethwaite, W. Gu, and H. Chen. Association between population density and infection rate suggests the importance of social distancing and travel restriction in reducing the COVID-19 pandemic. *Environmental Science and Pollution Research International*, 28(30):40424–40430, 2021.