UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA

Júlia Boaventura Felisberto

Uma Análise do Ensino de Equações Polinomiais de Primeiro Grau com Uma Incógnita na Educação Básica à Luz do Modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática

Florianópolis – SC
2024

Júlia Boaventura Felisberto

Uma Análise do Ensino de Equações Polinomiais de Primeiro Grau com Uma Incógnita na Educação Básica à Luz do Modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao curso de Matemática – Licenciatura do Campus Reitor João David Ferreira Lima da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador(a): Profª. Dra. Rosilene Beatriz Machado

Florianópolis – SC

2024

Felisberto, Júlia Boaventura
Uma Análise do Ensino de Equações Polinomiais de Primeiro Grau com Uma Incógnita na Educação Básica à Luz do Modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática / Júlia Boaventura Felisberto ; orientadora, Rosilene Beatriz Machado, 2024.
80 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática - Licenciatura, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática - Licenciatura. 2. Conhecimento Especializado do Professor de Matemática. 3. equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita. 4. professor de matemática. 5. ensino de matemática. I. Machado, Rosilene Beatriz. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática - Licenciatura. III. Título.

Júlia Boaventura Felisberto

Uma Análise do Ensino de Equações Polinomiais de Primeiro Grau com Uma Incógnita na Educação Básica à Luz do Modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de Licenciada em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática.

Florianópolis, 18 de dezembro de 2024.

Documento assinado digitalmente
Sonia Elena Palomino Castro
Data: 17/02/2025 11:28:49-0300
CPF: ***.552.388-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Curso

Banca examinadora

Documento assinado digitalmente
Rosilene Beatriz Machado
Data: 19/12/2024 17:55:49-0300
CPF: ***.714.649-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Dra. Rosilene Beatriz Machado
Orientadora

Documento assinado digitalmente
DEBORA REGINA WAGNER
Data: 19/12/2024 19:57:24-0300
CPF: ***.540.139-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Dra. Débora Regina Wagner
UFSC

Documento assinado digitalmente
Felipe Lopes Castro
Data: 20/12/2024 09:27:43-0300
CPF: ***.060.710-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Felipes Lopes Castro
UFSC

Florianópolis, 2024.

Aos meus pais, que em toda a minha vida nunca mediram esforços
para que eu realizasse os meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, que se dedicaram desde a minha infância para que eu tivesse uma educação de qualidade. Essa base sólida fez eu me apaixonar pela educação e desejar me tornar professora. Agradeço por sempre me apoiarem em todas as decisões, vocês são a minha base e o meu porto seguro.

Aos colegas de curso que se tornaram amigos e estiveram presentes em diferentes momentos da minha formação. Cada um de vocês me ajudou de alguma forma ao longo dessa jornada: Amanda, Elisa e Luís Otávio, meu muito obrigada.

À minha falecida avó Olga, que sempre esteve ao nosso lado e, mesmo após sua partida, contribuiu para que eu pudesse continuar meus estudos. Sua memória é uma inspiração constante.

À minha avó Marileide, que, com certeza, rezou muito para que tudo desse certo. Sua força e fé me guiaram.

Aos meus amigos, que foram alívio e suporte nos momentos mais difíceis e estressantes dessa caminhada. Em especial àqueles que estiveram ao meu lado na semana e no dia da apresentação desse trabalho, suas presenças tornaram tudo mais leve e possível.

E a mim mesma, por toda a dedicação, esforço e resiliência ao longo do curso. Chegar até aqui é a realização de um sonho pelo qual trabalhei com afinco.

"Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma, continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais!"

(Rubem Alves, 2000)

RESUMO

Este estudo visa focalizar o ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita na educação básica sob a perspectiva do Modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK) de Carrillo *et al.* O problema de pesquisa central indaga sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para que ele possa abordar o ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita na educação básica, identificando as respectivas áreas do MTSK cruciais nesse contexto. A abordagem metodológica adotada é eminentemente bibliográfica, explorando, principalmente, artigos científicos e dissertações a fim de analisar criticamente o MTSK, compreender suas áreas e domínios e investigar sua aplicação no ensino de equações polinomiais de primeiro grau. Espera-se que o estudo proporcione uma compreensão aprofundada das áreas do MTSK e de suas aplicações no contexto do tema. Dentre os resultados almejados estão visões valiosas para futuros professores, com o propósito de contribuir para aprimorar práticas pedagógicas e sugerir estratégias eficazes para o ensino de álgebra na educação básica. A discussão sobre o significado dos resultados ressalta a relevância do estudo para a educação matemática, destacando a importância de abordagens específicas e do desenvolvimento contínuo do conhecimento especializado do professor de matemática. Ao utilizar o MTSK, esta pesquisa não apenas oferece contribuições práticas para a prática docente, como também avança na compreensão do conhecimento especializado necessário para promover uma educação matemática de qualidade.

Palavras chave: Conhecimento Especializado do Professor de Matemática; equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita; professor de matemática; ensino de matemática; MTSK.

ABSTRACT

This study aims to focus on the teaching of first-degree polynomial equations with one variable in basic education through the lens of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model by Carrillo *et al.* The central research problem investigates the knowledge required by mathematics teachers to effectively teach first-degree polynomial equations with one variable in basic education, identifying the crucial MTSK domains in this context. The methodological approach adopted is predominantly bibliographic, primarily exploring scientific articles and dissertations to critically analyze the MTSK, understand its areas and domains, and investigate its application in teaching first-degree polynomial equations. The study seeks to provide an in-depth understanding of the MTSK areas and their applications within the context of this topic. Among the expected outcomes are valuable insights for future teachers, aiming to enhance pedagogical practices and suggest effective strategies for teaching algebra in basic education. The discussion on the significance of the results underscores the relevance of this study to mathematics education, highlighting the importance of specific approaches and the continuous development of mathematics teachers' specialized knowledge. By utilizing the MTSK, this research not only offers practical contributions to teaching practice but also advances the understanding of the specialized knowledge required to promote high-quality mathematics education.

Keywords: Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge, first-degree equations; mathematics teacher; mathematics teaching; MTSK.

SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CCK – Conhecimento Comum do Conteúdo (*Common Content Knowledge*)

CK – Conhecimento do Currículo (*Curricular Knowledge*)

HCK – Conhecimento Horizontal do Conteúdo (*Horizontal Content Knowledge*)

KCC – Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (*Knowledge of Content and Curriculum*)

KCS – Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (*Knowledge of Content and Students*)

KCT – Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (*Knowledge of Content and Teaching*)

KFLM – Conhecimento das Características da Aprendizagem da Matemática (*Knowledge of Features of Learning Mathematics*)

KMLS – Conhecimento da Normas de Aprendizagem da Matemática (*Knowledge of Mathematics Learning Standards*)

KMT – Conhecimento do Ensino da Matemática (*Knowledge of Mathematics Teaching*)

KoT – Conhecimento dos Tópicos (*Knowledge of Topics*)

KPM – Conhecimento das Práticas Matemáticas (*Knowledge of the Practice of Mathematics*)

KSM – Conhecimento da Estrutura da Matemática (*Knowledge of the Structure of Mathematics*)

MK – Conhecimento Matemático (*Mathematical Knowledge*)

MKT – Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching*)

MTSK – Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*)

PCK – Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge*)

SCK – Conhecimento Especializado do Conteúdo (*Specialized Content Knowledge*)

SMK – Conhecimento do Conteúdo da Matéria (*Subject Matter Knowledge*)

UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A educação matemática desempenha uma função crucial no desenvolvimento cognitivo e escolar dos estudantes. No centro desse processo, encontram-se o professor de matemática e o importante papel que ele exerce. Em um esforço para aprimorar a prática docente e, por conseguinte, a qualidade do ensino e do aprendizado, destaca-se o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática – tradução livre do original *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK). Desse modo, este trabalho pretende abordar o ensino de álgebra, mais precisamente de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita, na educação básica do ponto de vista do MTSK.

Antes de nos aprofundarmos no tema, é válido destacar que o desejo de desenvolver uma pesquisa que abordasse o ensino de matemática em sala de aula se tornou latente na autora ao longo do seu curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), quando familiarizou-se com a ideia ao ter aulas sobre o tema com a orientadora deste trabalho. Por isso, a escolha da orientação foi fácil e a da temática de estudo bastou ser lapidada até chegar à decisão final.

Nessa perspectiva, o maior incentivo para a opção da álgebra, mais especificamente de equações polinomiais de primeiro grau, como objeto de investigação foi a percepção da dificuldade dos estudantes em geral, inclusive universitários, para resolver equações matemáticas relativamente simples[1]. Diz-se isso, pois a autora foi monitora de Matemática Financeira no Departamento de Matemática da UFSC e, por isso, teve contato com muitos graduandos de diferentes cursos que, para resolver um problema, aplicam a fórmula necessária mas, a partir do momento em que precisam simplesmente manuseá-la algebricamente para encontrar a solução, não conseguem ou o fazem de maneira errada, matematicamente falando. Além disso, o contato com seus colegas de outros cursos e estudantes do ensino básico com os quais estagiou e/ou trabalhou durante a graduação só reforça o exposto, visto tamanha dificuldade e, principalmente, insegurança que apresentam tanto para realizar cálculos algébricos básicos, como para ‘pensar matematicamente’. Com ‘pensar matematicamente’ refere-se, aqui, ao

[1] Aqui, quando diz-se ‘relativamente simples’, refere-se à manipulação de equações matemáticas de primeiro grau com uma incógnita com o objetivo de encontrar o valor da incógnita.

pensamento lógico matemático que desenvolve-se ao longo das aulas, pensamento esse que parece não manifestar-se em grande parte dos discentes, que optam por somente utilizar fórmulas e algoritmos prontos para a resolução dos cálculos e aparentam não entender o que realmente estão fazendo. Dessa forma, o professor, seu conhecimento e, principalmente, sua habilidade de compartilhá-lo têm papel essencial para que isso mude e evolua para melhor.

Ainda nesse contexto, no último ano da sua formação, durante o desenvolvimento deste trabalho, a autora se inseriu no Grupo de Estudos e Pesquisa em Alteridade e Educação Matemática (GEPAM). Foi, então, no âmbito do GEPAM que participou de diversas discussões aprofundadas sobre a importância da boa construção discursiva no ensino de matemática, as quais permitiram explorar como a linguagem utilizada pelo professor influencia diretamente no aprendizado dos estudantes. Assim, a partir dessas reflexões, identificamos e elencamos que um recurso para que uma boa construção discursiva seja possível é o domínio do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, o qual oferece uma base sólida para compreender como o conhecimento matemático e pedagógico do professor pode ser integrado à prática docente, potencializando a qualidade do ensino.

Ante o exposto, manifesta-se a importância do tema, a qual se dá não só pela sua atualidade, pois sempre far-se-á atual, como também pela quantidade de vezes que virá a aparecer na vida escolar dos estudantes, não somente na matemática em si, mas também em qualquer disciplina que envolva a resolução de cálculos algébricos. Além, é claro, da influência direta do tema no desenvolvimento do raciocínio lógico e do ‘pensamento matemático’ que fazem-se importantes não só na vida acadêmica, como também no cotidiano das pessoas. Porém, anterior ao processo de aprendizagem, está o processo de ensino e, no cerne dele, o professor e o seu conhecimento.

Dessa forma, Machado e Oliveira (2023) trazem o conceito da *boa construção discursiva* do professor de matemática, que será citado neste trabalho, em conjunto com o Modelo do Conhecimento Específico do Professor de Matemática de Carrillo *et al.* (2018)*,* uma vez que as autoras apontam o MTSK como uma possibilidade de recurso para o professor amparar-se na construção do seu discurso. Nessa perspectiva, em seu trabalho, elas defendem que a boa construção discursiva do professor de matemática favorece a atuação do intérprete de Libras para o ensino e aprendizado dos estudantes surdos. Porém, aqui, o foco é na boa construção discursiva em geral, sem a especificação do amparo ao intérprete de Libras. Foco esse que as próprias autoras, inclusive, citam por diversas vezes, como na seguinte passagem:

> (...) nossa aposta é que questões de ensino e aprendizagem (de estudantes surdos e não-surdos), antes de qualquer pedagogia, de viés psicologizante e cognitivista, ou até mesmo cultural, tem muito a ganhar se pensadas sob uma perspectiva da filosofia da linguagem
> Isso implica atentar para a linguagem e seus usos, em sua potencialidade de expressão e significação. Em outras palavras, o que defendemos é que a preocupação e o investimento no que temos chamado de uma *boa construção discursiva* por parte do professor (seja ele surdo ou não-surdo) é condição fundamental para todo e qualquer processo educativo (de estudantes surdos e não-surdos). (Machado e Oliveira, 2023, p. 18)

Além disso, o princípio da boa construção discursiva do professor de matemática vem ao encontro do conceito do *aprendizer*, também, de Machado (2022):

> Para além de eventuais processos psíquicos que por ventura aconteçam, aprender é uma atividade que se dá pragmaticamente no uso da linguagem. Mais que isso, aprender é tornar-se capaz de dizer. Assim, uma vez que se tenha aprendido, deve-se ser capaz de dizê-lo a outrem, de uma maneira gramaticalmente correta no jogo de linguagem em que esse dizer é produzido. (Machado, 2022, p. 5 e p. 7)

E é nesse contexto em que as duas teorias se cruzam: se por um lado temos que “aprender é tornar-se capaz de dizer”, por outro a autora defende “que ensinar está na ordem do traduzir – *ensinar-traduzir*. O que significa dar condição de possibilidade para o diálogo; buscar levar o outro a dizê-lo” (Machado, p. 10-11). Acrescenta, ainda, “que qualquer processo educativo não é mais do que, antes de tudo, um processo de comunicação e interação linguística, que se dá na prática da linguagem.” (Machado e Oliveira, 2023, p. 19). Daí, a iminência da boa construção discursiva, ora se ensinar matemática é traduzi-la – no sentido do outro entendê-la e saber dizê-la – urge a necessidade de uma boa construção do discurso do professor, a fim de que a compreensão do outro seja facilitada.

Esse argumento concorda com Roque (2012):

> Possivelmente, quando as pessoas pedem que a matemática se torne mais “concreta”, elas podem não querer dizer, somente, que desejam ver esse conhecimento aplicado às necessidades práticas, mas também que

> almejam compreender seus conceitos em relação a algo que lhes dê sentido. E a matemática pode ser ensinada desse modo, mais "concreto", desde que seus conceitos sejam tratados a partir de um contexto. Isso não significa necessariamente partir de um problema cotidiano, e sim saber com o que esses conceitos se relacionam, ou seja, como podem ser inseridos em uma rede de relações. (Roque, 2012, p. 329)

Por fim, o que Machado e Oliveira (2023, p. 20) dizem que uma boa construção discursiva se dá exatamente na "estruturação e organização do discurso do professor de matemática a partir dessa rede de relações conceituais internas necessárias para a significação de um conceito" - o que vai ao encontro, também, aos conhecimentos específicos necessários (porém não suficientes, de acordo com Machado e Oliveira, 2024, p. 12) ao professor de matemática aos quais se referem Carrillo *et al.* no MTSK. Ademais, elas afirmam que não há regras que determinam precisamente como o discurso deve ser construído, somente que "a escolha por estratégias de linguagem (...) deve buscar potencializar sua capacidade expressiva e de significação." (Machado e Oliveira, 2023, p. 20). Dessa forma, a capacidade de traduzir e tornar o aprendizado acessível é essencial no ensino de qualquer conteúdo, inclusive de equações de primeiro grau.

Diante dos fatos apresentados, este trabalho pretende estudar que conhecimentos específicos do professor de matemática precisam ser mobilizados para o ensino de equações algébricas de primeiro grau com uma incógnita na educação básica. Nesse contexto, de acordo com Carrillo *et al.* (2018, p. 4):

> Dentre as diversas tentativas de mapear o conhecimento profissional dos professores, talvez a mais influente seja o estudo de Shulman (1986), no qual ele identificou três domínios principais: Conhecimento do Conteúdo da Matéria (SMK), Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) e Conhecimento Curricular (CK). A contribuição mais significativa de Shulman foi a inclusão do PCK e do conteúdo a ser ensinado como a característica definidora do conhecimento dos professores. (Carrillo *et al.,* 2018, p. 4)

Esse modelo defende que a mera compreensão dos conteúdos acadêmicos não é suficiente para o ensino deles, pelo contrário, é preciso da habilidade de traduzir esse conhecimento de maneira eficaz para vários estudantes com diferentes formas de aprendizado. O modelo de Shulman, porém, não trata especificamente do ensino e do professor de matemática. Foi o que observaram Carrillo *et al.* (2018, p. 4):

> Após utilizar modelos existentes e compreender tanto suas limitações quanto suas forças, chegamos à proposta de um modelo que se concentra exclusivamente no conhecimento específico do professor de matemática, excluindo áreas de conhecimento profissional compartilhado com professores de outras disciplinas (sem subestimar, em momento algum, a importância dessas áreas para o ensino eficaz). (Carrillo *et al.,* 2018, p. 4)

Carrillo *et al.* criaram, então, a partir do modelo de Shulman (1986) e, principalmente, do modelo de Ball *et al.* (2008), intitulado Conhecimento Matemático para o Ensino – tradução livre de *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT, o qual por si só já teve grande inspiração no de Shulman, o modelo que será objeto de estudo deste trabalho: Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK).

Antes de explicitarmos as áreas do MTSK, é válido pontuarmos o MKT de Ball (2008). Nesse contexto, de acordo com Carrillo *et al.*, o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) de Ball *et al.* leva em consideração o Conhecimento do Conteúdo da Matéria (SMK) e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) de Shulman. Desse modo, o SMK se divide em Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) e Conhecimento Horizontal do Conteúdo (HCK); enquanto o PCK inclui o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT), o Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KCS) e o Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC). A explicitação dessas áreas será feita mais à frente, nesse momento o mais importante é destacar que "uma das contribuições mais significativas do modelo é o reconhecimento de um tipo de conhecimento exclusivo para professores (SCK), baseado na ideia de que o ensino exige conhecimento especializado que outras profissões não possuem", segundo Carrillo *et al.* (2018, p. 4). Ademais, outra importante contribuição foi o início da especificação do ensino e do professor de matemática, ausente no trabalho de Shulman, como afirmam Silva e Santos (2014, p. 3).

Nessa perspectiva, Carrillo *et al.* concretizaram essa associação do conhecimento especializado exigido de professores com o ensino de matemática e criaram, finalmente, o MTSK, o qual se divide em grandes áreas: três referentes ao Conhecimento Matemático (MK) – Conhecimento dos Tópicos (KoT), Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM) e Conhecimento das Práticas da Matemática (KPM) – três referentes ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) – Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT), Conhecimento das Características da Aprendizagem da Matemática (KFLM) e Conhecimento da Normas de Aprendizagem da Matemática (KMLS) – e uma central referente às Crenças (em Matemática e no Ensino e Aprendizagem de Matemática).

Diante do exposto, este trabalho será organizado em dois capítulos. O primeiro será destinado à investigação e interpretação do MTSK de Carrillo *et al.,* enquanto o segundo propõe-se a elencar o que as pesquisas têm dito sobre o ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita na educação básica à vista desse modelo.

PROBLEMA

O presente trabalho de conclusão de curso pretende explorar o modelo MTSK de Carrillo *et al.* (2018) e estudar que conhecimentos especializados do professor de matemática são usados para o ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita na educação básica. Em face disso, anuncia-se o seguinte problema de pesquisa:

Que conhecimentos devem ser mobilizados pelo professor de matemática para o ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita na educação básica à luz do modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática?

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL

Diante dos argumentos apresentados, tem-se como objetivo geral deste trabalho:

Analisar, à luz do MTSK, quais são os conhecimentos especializados do professor de matemática usados no ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita na educação básica.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Assim, os objetivos específicos são os que seguem:

a) Investigar e compreender a natureza das áreas e domínios que compõem o MTSK, bem como seus precursores;
b) Realizar uma revisão bibliográfica de estudos anteriores sobre as diferentes dimensões do MTSK e como elas se manifestam no contexto do ensino de álgebra, mais especificamente para o ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita na educação básica, destacando pontos significativos e preenchendo lacunas ausentes.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Em consideração aos argumentos apresentados, indica-se que a pesquisa deste trabalho de conclusão de curso será bibliográfica, a qual é

> elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de: livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa. (Prodanov; Freitas, 2013, p. 54 *apud* Sousa; Oliveira; Alves, 2021, p. 64).

Nesse contexto, segundo Fonseca (2002) *apud* Sousa, Oliveira e Alves (2021), a pesquisa bibliográfica é realizada:

> a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (Fonseca, 2002, p. 32 *apud* Sousa; Oliveira; Alves, 2021, p. 64).

Este, portanto, será um trabalho baseado eminentemente na pesquisa bibliográfica, como citado acima. Por isso, visa-se a reunião das melhores e mais confiáveis publicações sobre o tema, a fim de ler, refletir, dominar o assunto e teorizar sobre ele, aprimorando seus fundamentos teóricos, como sugerem Sousa, Oliveira e Alves (2021, p. 66).

É válido, ainda, destacar que “[...] a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras” (Lakatos e Marconi, 2003, p. 183 *apud* Sousa, Oliveira e Alves, 2021, p. 67), assim como pretende-se neste trabalho de conclusão de curso.

Dessa forma, a pesquisa deste trabalho de conclusão de curso foi elaborada com base em materiais já publicados, incluindo livros, artigos científicos, dissertações, teses e outros documentos, conforme os fundamentos de Prodanov e Freitas (2013, p. 54) *apud* Sousa, Oliveira e Alves (2021, p. 64). Esse tipo de pesquisa visa o levantamento de referências teóricas previamente analisadas e publicadas, em meio físico ou eletrônico, com o objetivo de explorar o que já foi estudado sobre o tema de interesse (Fonseca, 2002, p. 32 *apud* Sousa, Oliveira e Alves, 2021, p. 64). Dessa forma, não se trata de uma mera repetição de conhecimentos existentes, mas da possibilidade de examinar um tema sob nova abordagem, contribuindo com conclusões inovadoras, como apontam Lakatos e Marconi (2003, p. 183 *apud* Sousa, Oliveira e Alves, 2021, p. 67).

Portanto, a primeira etapa dessa pesquisa bibliográfica consistiu na análise de sete artigos centrais para a compreensão das bases teóricas do MTSK e dos seus precursores – o Conhecimento Matemático para o Ensino de Ball *et al.* (2008) e o estudo de Lee Shulman (1986). Esses textos, estudados no início da pesquisa, foram fundamentais para a construção do capítulo introdutório. Entre eles estão "*The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) Model*" de Carrillo et al. (2018), "*Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special?*" de Ball *et al.* (2008) e "*Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching*" também de Carrillo *et al.* (2013). Além desses, outros trabalhos relacionados ao MTSK em língua espanhola, como "*Introducción al Modelo MTSK: Origen e Investigaciones Realizadas*" mais uma vez de Carrillo *et al.* (2017), também foram traduzidos e analisados pela autora.

Com o capítulo inicial concluído, foi necessário buscar artigos que aplicassem o MTSK no ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita. Para isso, foram realizadas buscas detalhadas no Portal de Periódicos da CAPES, utilizando palavras-chave como "MTSK", "equações de primeiro grau", "*mathematics teacher's specialized knowledge*", "*first-degree equations*" e termos relacionados. Durante essa etapa, houve dificuldades para encontrar estudos que tratassem especificamente de equações de primeiro grau aplicadas ao MTSK. A maioria dos resultados estava relacionada ao ensino de funções – afim, quadrática, exponencial, entre outras – e outros até de equações de segundo grau.

Diante disso, foi buscado complementar a pesquisa com obras que abordassem equações de maneira geral. Dois trabalhos de Tatiana Roque, "História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas" (2012) e "Desmascarando a Equação. A História no Ensino de Que Matemática?" (2014), foram utilizados para embasar discussões históricas e epistemológicas sobre equações. Também foi analisada a dissertação de Silva e Costa (2014), "Equações do Primeiro Grau: Uma Proposta de Aula Baseada na Análise de Livros", que trouxe contribuições relevantes para a abordagem didática do tema.

Outro aspecto essencial da pesquisa foi o estudo da construção discursiva do professor de matemática, a partir de artigos da orientadora. Trabalhos como "Irene Vista de Dentro, Outra Vez. Ou, Sobre um *Aprendizer* e um Ensinar-Traduzir [Matemática]" (2022), "A Importância da Construção Discursiva por Parte do Professor [de Matemática] para a Atuação do Intérprete de Libras em Salas de Aula Inclusivas" (2023) e “Considerações sobre o Princípio da Boa Construção Discursiva em Libras em salas de aula inclusivas e o Modelo do Cabo de Força Equilibrado” (2024) – os dois últimos de Machado e Oliveira –, foram cruciais para fundamentar a análise sobre a relevância de uma boa construção discursiva do professor no ensino de matemática.

Por fim, devido à dificuldade inicial para localizar estudos que aplicassem o MTSK especificamente ao ensino de equações polinomiais de primeiro grau, foi necessário apoio de colegas do Grupo de Pesquisa e Extensão – o GEPAM. Eles indicaram o uso do *Google Scholar*, onde foram encontrados os estudos foram fundamentais para a conclusão desta pesquisa, como "Tarefas para o Ensino e Aprendizagem de Equação Polinomial de Primeiro Grau no 7º Ano do Ensino Fundamental" de Santos e Ferreira (2023), além de "Conhecimento Especializado do Professor de Matemática Manifestado em Relatórios de Estágio de Observação" de Oliveira e Teixeira (2022), ambos fortemente usados no capítulo principal deste trabalho.

Assim, a pesquisa bibliográfica deste trabalho permitiu reunir uma diversidade de fontes que abordam tanto a fundamentação teórica do MTSK quanto sua aplicação no ensino de equações polinomiais de primeiro grau. A combinação dessas etapas garantiu uma análise abrangente e fundamentada, atendendo ao objetivo de examinar o tema sob uma perspectiva inovadora.

1 CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA – MTSK

No cenário educacional, o professor desempenha um papel crucial na formação acadêmica e no desenvolvimento intelectual dos estudantes. Esse papel fica ainda mais evidente no contexto do ensino de matemática, uma disciplina frequentemente temida e mal compreendida por muitos estudantes. Nesse contexto, o conhecimento do professor de matemática transcende a simples compreensão de conceitos algébricos e geométricos; abrangendo uma gama complexa de habilidades pedagógicas, estratégias de ensino e compreensão dos desafios enfrentados pelos estudantes no processo de aprendizagem. Nesse cenário, Shulman (1986) afirma que

> o conhecimento de conteúdo é completamente inútil se não estiver relacionado com suas habilidades pedagógicas [...] deve-se haver uma tentativa de trazer para a cena da prática do professor não só o conhecimento do conteúdo específico, mas também uma relação atrelada do mesmo com uma dimensão didática, podendo assim, realizar uma transformação do conteúdo em formas didaticamente poderosas, a qual ele chama de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. (Shulman, 1986, p. 8)

Nessa perspectiva, Shulman introduz pela primeira vez, de uma maneira substancialmente diferente do que se idealizava até então, a importância do conhecimento do professor, particularmente o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK), o qual capacita os educadores a proporcionar uma experiência educacional enriquecedora e mais eficaz aos estudantes.

Por isso, em meio a um cenário atual que se encontra em constante evolução e no qual a demanda por habilidades matemáticas é cada vez mais valorizada em diversas esferas da vida profissional e pessoal, a qualidade do ensino de matemática é ainda mais essencial do que nunca. Dessa maneira, compreender e aperfeiçoar o conhecimento do professor de matemática emerge como elemento central na busca por uma educação matemática de maior qualidade e acessibilidade.

Nessa perspectiva, destaca-se nesta pesquisa o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK) de Carrillo *et al*. Porém, anteriores a ele, houve estudos de outros pesquisadores, os quais influenciaram Carrillo e seus colaboradores a desenvolver o MTSK. Dentre eles, estão o estudo de Lee Shulman

(1986) e o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) de Deborah Ball (2008). Esses precursores serão tratados nas próximas páginas, anteriores à abordagem do MTSK, a título de introdução e contextualização.

1.1 OS PRECURSORES DO MTSK

1.1.1 O Estudo de Shulman

O modelo precursor dos estudos sobre o conhecimento profissional dos professores e, consequentemente, dos estudos de Ball *et al.* e, posteriormente, de Carrillo *et al.* foi o estudo do educador e pesquisador Lee Shulman, de 1986. Seu trabalho pioneiro, "*Those who understand: Knowledge growth in teaching*", publicado em 1986, marcou um ponto de virada e desempenhou um papel fundamental na evolução da pesquisa educacional ao introduzir o revolucionário conceito do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK). Carrillo *et al.* afirmam que em meio às várias tentativas de esquematização do conhecimento profissional dos professores, essa foi a mais influente.

De fato, segundo Contreras-González, Montes, Climent e Carrillo (2017, p. 2):

> A ideia de conhecimento didático do conteúdo pode ser considerada revolucionária no seu tempo. É uma forma de (...) avançar para uma amálgama entre o conteúdo e a pedagogia, ou como o próprio Shulman (1986) disse, é “ir além do conhecimento do conteúdo em si, para uma dimensão do conhecimento do conteúdo para o ensino” (p. 9); é tudo que faz com que o professor consiga que os outros compreendam o conhecimento do conteúdo que ele tem: diferentes formas de representá-lo, exemplos e analogias, diferentes formas de explicá-lo, (...) como também o conhecimento das concepções erradas que os estudantes podem vir a apresentar, ou o que é adequado para certas idades. (Contreras-González *et al.,* 2017, p. 2)

Nesse contexto, em seu estudo inicial, Shulman destacou três principais domínios: Conhecimento do Conteúdo (SMK), Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) e Conhecimento do Currículo (CK). Entre esses, Carrillo *et al.* consideram que “a contribuição mais significativa de Shulman foi a inclusão do PCK” (Carrillo *et al.,* 2018, p. 4) e a importância dada ao conhecimento do conteúdo que será ensinado.

Antes de focar exclusivamente no PCK, porém, é interessante compreender o trabalho de Shulman como um todo. Assim, de acordo com Silva e Santos (2014, p. 2):

> Shulman resume diversificadas ideias acerca do conhecimento que os professores deveriam possuir para poder lecionar. Para ele, o ensino

> inicia-se com uma compreensão por parte do docente do saber para aprender e para ser ensinado, tendo sempre uma continuação. O trabalho do professor deveria ser elaborado a partir de uma série de atividades que pudessem proporcionar aos estudantes instruções específicas e oportunidades de aprendizagem, terminando com novas compressões tanto por parte do aluno como, também, do professor. (Silva e Santos, 2014, p. 2)

Dessa forma, Shulman argumentou que o ensino eficaz não se resume apenas a dominar o conteúdo acadêmico, mas que também é essencial ter um conhecimento especializado sobre como ensinar esse conteúdo de maneira significativa e acessível aos estudantes.

Nessa perspectiva, em sua primeira obra, Shulman constatou três domínios principais, o já citado PCK e, além dele, o Conhecimento do Conteúdo (SMK) e o Conhecimento do Currículo (CK). Posteriormente, em seu trabalho "*Knowledge and teaching: foundations of the new reform*" do ano seguinte, 1987, o autor criou novas categorias, ampliando essas primeiras, "embora os limites específicos e os nomes das categorias tenham variado entre as publicações" (Ball *et al.,* 2008, p. 391) foram elas: Conhecimento pedagógico geral; Conhecimento dos alunos e das suas características; Conhecimento dos contextos educativos; Conhecimento dos fins, objetivos e valores educacionais, das suas bases filosóficas; Conhecimento do conteúdo; Conhecimento do currículo e Conhecimento pedagógico do conteúdo. De acordo com Ball *et al.* (2008), "as quatro primeiras categorias abordam dimensões gerais do conhecimento do professor que eram base dos programas de formação de professores na época" (Ball *et al.*, 2008, p. 391). Ainda conforme a pesquisadora, elas não teriam sido o foco principal do trabalho de Shulman, mas ele teria deixado claro que elas

> eram cruciais e que a ênfase no conhecimento do conteúdo do professor não pretendia minimizar a importância da compreensão e habilidade pedagógicas: Shulman (1986) argumentou que "o mero conhecimento do conteúdo é provavelmente tão inútil pedagogicamente quanto a habilidade pedagógica desprovida de conteúdo" (p. 8) (Ball *et al.,* 2008, p. 391)

Ainda em concordância com Ball *et al.* (2008), as outras três categorias, que já apareciam na publicação inicial, de 1986, de Shulman definem o que ele se referia como "o Paradigma Perdido" nas pesquisas sobre ensino, "um ponto cego com relação ao conteúdo que caracteriza a maioria das pesquisas sobre ensino e, como consequência, a maioria de nossos programas de avaliação e certificação de professores" (Shulman, 1986, p. 7-8).

Ademais, quando refere-se ao Conhecimento do Conteúdo (SMK), “Shulman (1986) argumentou que conhecer uma matéria para ensinar requer mais do que conhecer seus fatos e conceitos. (...) O professor não precisa apenas entender que algo *é* de tal maneira; mas, também, *por que* o é ” (Ball *et al.,* 2008, p. 391).

Ainda, ao referir-se ao Conhecimento do Currículo (CK), ele defende que a categoria é

> representada pela gama completa de programas projetados para o ensino de disciplinas e tópicos específicos em um determinado nível, a variedade de materiais instrucionais disponíveis em relação a esses programas, e o conjunto de características que servem tanto como indicações quanto contraindicações para o uso de materiais de currículo ou programas específicos em circunstâncias particulares (Shulman, 1986, p. 10).

O trabalho do estadunidense, porém, é particularmente significativo, como já citado anteriormente, pela inclusão do PCK como um dos domínios fundamentais do conhecimento do professor. Por isso, esse é o domínio significativamente mais ressaltado na maioria dos estudos posteriores. Nesse contexto, Shulman (1986) afirma que

> as formas mais úteis de representação das ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações - em uma palavra, as formas mais úteis de representar e formular o assunto de maneira compreensível para os outros… O PCK também inclui uma compreensão do que torna a aprendizagem de tópicos específicos fácil ou difícil: as concepções e preconcepções que os estudantes de diferentes idades e origens trazem consigo para a aprendizagem desses tópicos e lições mais frequentemente ensinados. (p. 9) (Ball *et al.,* 2008, p. 391-392)

Desse modo, com o PCK, Shulman destacou que o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico são interdependentes e desenvolvem-se em conjunto ao longo da carreira docente. Com isso, ele argumentou que os professores precisam entender não apenas os conceitos subjacentes a uma disciplina, como também como esses conceitos podem ser ensinados de maneira satisfatória, levando em consideração as características individuais dos estudantes, os métodos didáticos mais adequados e os objetivos de aprendizagem específicos. Mais que isso, nas próprias palavras dele, “O PCK é a categoria mais provável de distinguir a compreensão do especialista da compreensão do pedagogo” (Shulman, 1987, p. 8). Por isso, ao reconhecer a importância da interseção entre o conhecimento do conteúdo e as habilidades pedagógicas, ele influenciou significativamente no emergente argumento de que ensinar é um trabalho profissional, com sua própria base de conhecimento.

Em suma, a proposta de Shulman é essencial ao evidenciar que o conhecimento do conteúdo não deve ser apenas reconhecido, como já o era feito, mas ao destacar “a forma de conhecê-lo, substancialmente diferente do que se concebia até então” (Contreras-González *et al.,* 2017, p. 2). O legado de Shulman ressoou no mundo todo, moldando a teoria e a prática da chamada educação significativa, inspirando professores a promover um ensino de alta qualidade e impacto positivo na aprendizagem dos seus estudantes. Além disso, “desde a publicação do trabalho inovador de Shulman, várias alternativas para a conceptualização do conhecimento dos professores foram propostas, cada uma destacando diferentes elementos e características” (Carrillo *et al.,* 2018, p. 3-4).

Porém, a despeito da relevância desse estudo, Silva e Santos (2014, p. 3) destacam uma lacuna expressiva nesse trabalho: a pesquisa era muito ampla, dessa forma não tratava de explorar e especificar a manifestação do PCK em disciplinas específicas, como a matemática, por exemplo. Foi, então, que surgiu o trabalho de Deborah Ball e seus colaboradores, os quais criaram um modelo inspirado na pesquisa de Shulman, porém com o enfoque na matemática, chamado Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), que será abordado a seguir.

1.1.2 Conhecimento Matemático para o Ensino

O modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), desenvolvido por Deborah Ball e colaboradores, de acordo com Carrillo *et al.* (2013) “provou-se poderoso especialmente por descrever o conhecimento necessário para os professores em sua prática, destacando suas relações com a Matemática e, ao mesmo tempo, considerando elementos inerentes ao processo de ensino” (adaptado de Carrillo *et al.,* 2013, p. 2985). Ou seja, de maneira análoga ao estudo de Shulman, que destacava basicamente o conhecimento necessário ao professor para que ele pudesse ensinar, o estudo de Ball aborda a complexidade desse conhecimento necessário, especificamente, ao professor de matemática.

Nesse contexto, Ball, Thames e Phelps (2008) afirmam que a pesquisa deles

> estabelece as bases para uma teoria baseada na prática do conhecimento matemático para o ensino (...) e com “conhecimento matemático para o ensino”, nós queremos dizer o conhecimento matemático necessário para realizar o trabalho de ensinar matemática. É importante observar aqui que nossa definição começa com o ensino, não com os professores. (...) Porque o ensino envolve mostrar aos estudantes como resolver problemas, responder às suas perguntas e verificar o trabalho deles, isso exige uma compreensão do conteúdo do currículo escolar (Ball; Thames e Phelps, 2008, p. 395).

Além disso, Ball *et al.* (2008, p. 398) destacam que o ponto deles não é o que o professor precisa ensinar, mas o que ele precisa saber para poder, de fato, transmitir seu conhecimento. Por isso, afirmam (em Ball *et al.,* 2008, p. 395) que decidiram focar seus estudos em como os professores de matemática precisam saber o conteúdo, pois, segundo eles, é óbvio que os professores precisam saber os tópicos e procedimentos do que eles ensinam.

Desse modo, o MKT inclui uma compreensão sofisticada dos princípios subjacentes aos conceitos matemáticos, bem como a capacidade de representar esses conceitos de maneiras acessíveis aos estudantes. Ball (2008, p. 395) propõe que os professores precisam não apenas dominar a matemática em si, mas também entender profundamente como os estudantes aprendem matemática e quais são os obstáculos comuns ao aprendizado dela. Nesse contexto, afirma-se que “os professores enfrentam todos os tipos de soluções [de exercícios] dos estudantes. Eles têm que descobrir o que os estudantes fizeram, se o pensamento é matematicamente correto para o problema e se a abordagem funcionaria em geral" (Ball *et al.,* 2008, p. 397).

Com esses pensamentos e baseando-se no estudo de Shulman (1986), Ball *et al.* (2008) propuseram um novo modelo para o conhecimento específico do professor, dessa vez especificamente de matemática, o MKT. O qual dividia dois dos domínios de Shulman (1986) em seis subdomínios (três subdomínios cada), o SMK foi dividido em conhecimento comum do conteúdo (CCK), conhecimento especializado do conteúdo (SCK) e conhecimento horizontal do conteúdo (HCK), enquanto o PCK dividiu-se em conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS), conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) e conhecimento do conteúdo e do currículo (KCC).

Das subdivisões do SMK, Ball *et al.* (2008, p. 399) definem o CCK da seguinte maneira:

> representa (...) simplesmente calcular uma resposta ou, mais genericamente, resolver corretamente problemas matemáticos. (...) definimos como o conhecimento e a habilidade matemática usados em outros ambientes que não o ensino. (...) conhecimento e habilidade matemática que outros também possuem – portanto, não é especial para o trabalho de ensino. Por "comum" (...) pretendemos indicar que se trata de um tipo de conhecimento utilizado numa ampla variedade de contextos – por outras palavras, não exclusivo do ensino (Ball *et al.*, 2008, p. 399).

O segundo domínio, SCK, refere-se ao "conhecimento e habilidades matemáticas exclusivos do ensino" (Ball *et al.,* 2008, p. 400). Por Carrillo *et al.*, "o SCK reconhece a natureza especializada do conhecimento do professor, em oposição ao conhecimento matemático exigido de outros profissionais que usam a matemática." (Carrillo *et al.*, 2018, p. 5)

Ademais, por Silva e Santos (2014), o HCK é

> caracterizado como o entendimento por inter-relações entre termos e/ou tópicos, ao longo de toda extensão curricular. Um exemplo, está na competência do professor relacionar os conteúdos que ele está lecionando em um determinado ano, com os que serão abordados em algum ano posterior ou vice-versa. (Silva e Santos, 2014, p. 5)

Por sua vez, das subdivisões do PCK, o KCS combina o conhecimento da matemática com o conhecimento dos estudantes. Diante disso, de acordo com Ball *et al.* (2008),

> os professores devem antecipar o que os alunos provavelmente pensarão e o que acharão confuso. Ao escolher um exemplo, os professores precisam prever o que os alunos acharão interessante e motivador. Ao atribuir uma tarefa, os professores precisam antecipar o que os alunos provavelmente farão com ela e se a acharão fácil ou difícil. Os professores também devem ser capazes de ouvir e interpretar o pensamento emergente e incompleto dos alunos, expresso nas formas como os alunos usam a linguagem. Cada uma dessas tarefas requer uma interação entre a compreensão matemática específica e a familiaridade com os alunos e seu pensamento matemático. (Ball *et al.,* 2008, p. 401)

Adiante, o domínio do KCT combina o conhecimento da matemática e o conhecimento sobre o ensino, ou seja, basicamente define o conhecimento de como ensinar matemática. Ball *et al.* (2008, p. 401) afirmam que os professores precisam saber os exemplos adequados para iniciar um conteúdo, como também quais exemplos podem usar para aprofundá-lo, assim como avaliar vantagens e desvantagens de usar determinadas abordagens para ensinar certo assunto. Além de tomar decisões como quais contribuições dos estudantes podem ser aproveitadas e quais devem guardar para outro momento, quais ideias precisam de mais esclarecimento e que perguntas fazer para instigar os estudantes a desenvolverem certo raciocínio. Enfim, “cada uma destas decisões requer coordenação entre a matemática e as opções e propósitos instrucionais em jogo” (Ball *et al.,* 2008, p. 401).

Finalmente, o KCC é “caracterizado como o conhecimento dos objetivos educacionais, dos padrões, das avaliações ou dos níveis de ensino onde determinados temas são habitualmente ensinados” (Silva e Santos, 2014, p. 5).

Perante o exposto e de acordo com Carrillo *et al.* (2018), “entre as contribuições mais significativas do modelo está o reconhecimento de um tipo de conhecimento exclusivo dos professores (SCK), baseado na ideia de que o ensino requer conhecimentos especializados que outras profissões não exigem” (Carrillo *et al.*, 2018, p. 5).

Assim, o MKT de Ball, Thames e Phelps (2008) já aproxima-se consideravelmente do MTSK, modelo que será usado neste trabalho. Porém, ainda havia lacunas no trabalho, como por exemplo quando define-se que "por ‘conhecimento matemático para ensinar’, queremos dizer o conhecimento matemático *necessário* para realizar o trabalho de ensinar matemática” (Ball *et al.,* 2008, p. 395). Carrillo e seus colaboradores (2018, p. 5) afirmam que o objeto de análise desse modelo é simplesmente o conhecimento matemático *necessário* para os professores de matemática ensinarem, ao invés de todo conhecimento de fato *usado* para realizarem seus trabalhos. Foi, então, que eles propuseram um novo modelo, o MTSK.

1.2 O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA – MTSK [PROPRIAMENTE]

O ponto de partida de Carrillo e colaboradores foi "o pressuposto de que, para desempenhar o seu papel – incluindo o planeamento das aulas, o contato com os colegas, a ministração das aulas e a reflexão posterior sobre elas –, o professor necessita de conhecimentos específicos" (Carrillo *et al.,* 2008, p. 6). Ou seja, mais do que o conhecimento *necessário* para ensinar matemática, mas sim todo o conhecimento *usado* no processo de ensino, que não se limita somente à sala de aula.

Além disso, de acordo com Contreras-González *et al.* (2017, p. 3), existem alguns problemas práticos no uso do MKT de Ball *et al*. (2008). Por exemplo, quando o MKT define conhecimento comum como 'aquele em que uma pessoa instruída em matemática possui', não há limites nesta instrução, o que torna a diferenciação do conhecimento comum para o conhecimento especializado inviável. Na mesma vertente, Carrillo *et al.* (2013, p. 2986-2987) expõem o problema de delimitação de "onde o CCK termina e onde o SCK começa, como um resultado da própria definição do CCK". Além, também, da "dificuldade de distinguir o SCK do HCK e o SCK do KCS, de novo como um resultado da definição do SCK".

Então, "estimulados por uma análise crítica do MKT, o principal objetivo [de Carrillo *et al.*] era construir um modelo de conhecimento dos professores que levasse em conta de forma holística a natureza especializada do conhecimento dos professores [de matemática]." (adaptado de Carrillo *et al.,* 2018, p. 7)

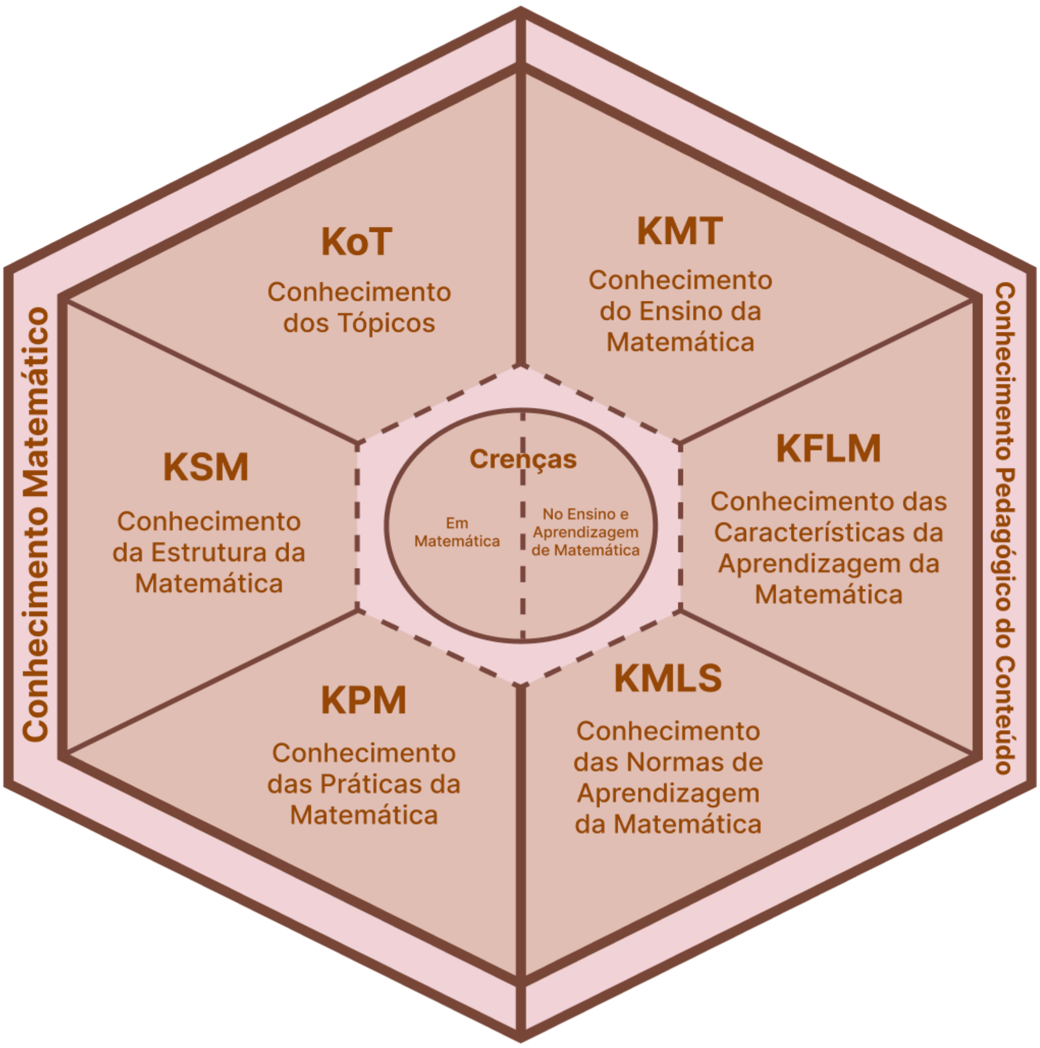
À face do exposto, surgiu, então, o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK), o qual, segundo Luís *et al.* (2021, p. 36):

> Difere-se dos demais modelos do conhecimento do professor por incluir apenas conhecimento e ser específico do professor de Matemáticas. O termo "especializado" na denominação do modelo refere-se, precisamente, a essa especificação do conhecimento. A especialização do conhecimento do modelo MTSK permite diferenciá-lo do conhecimento de pedagogia ou psicologia geral e do conhecimento especializado do professor que ensine outras disciplinas quaisquer, distinguindo, também, o conhecimento do professor de Matemática de qualquer outro profissional que use a matemática como ferramenta de trabalho, sendo este um conhecimento profundo e particular do professor que ensina Matemática. (Luís *et al.,* 2021, p. 36)

Desse modo, inspirados em Shulman (1986), Carrillo *et al.* consideraram duas grandes áreas de conhecimento: Conhecimento Matemático (MK) e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK). Com base no MKT de Ball *et al.*, o novo modelo "apresenta uma reconfiguração do conhecimento matemático, uma reinterpretação do conhecimento pedagógico do conteúdo e uma nova forma de conceituar a noção de especialização" (Carrillo *et al.,* 2018, p. 9).

Dessa forma, apresenta-se a imagem (Figura 1) com a esquematização elaborada por Carrillo *et al.* para facilitar a compreensão dos domínios ao leitor. Além disso, definem-se, em seguida, os subdomínios que compõem o MTSK.

Figura 1 – Modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK)



Fonte: elaborada pela autora, baseada e traduzida de Carrillo *et al.* (2017)

1.2.1 Conhecimento Matemático

Nessa perspectiva, no que diz respeito à primeira grande área do conhecimento que Carrillo *et al.* definiram, o MK, eles afirmam:

> Entendemos a matemática como uma rede de conhecimento sistêmico estruturada segundo regras próprias. Ter um bom entendimento dessa rede – dos nós e conexões entre eles –, das regras e características pertinentes ao processo de criação do conhecimento matemático permite ao professor ensinar conteúdos de forma conectada e validar suas próprias conjecturas matemáticas e as de seus alunos. Assim, dividimos o *conhecimento matemático* do professor em três subdomínios: o próprio conteúdo matemático (*Conhecimento dos tópicos*), os sistemas interligados que vinculam a matéria (*Conhecimento da Estrutura da Matemática*), e como se procede em matemática (*Conhecimento de Práticas em Matemática*). (Carrillo *et al.*, 2018, p. 10)

1.2.1.1 Conhecimento dos Tópicos (KoT)

O Conhecimento dos Tópicos (KoT) é descrito como "*o que* e *de que maneira* o professor de matemática sabe os tópicos que ensina" (Carrillo *et al,* 2018, p. 11). Abrange todo "o conhecimento que se espera que os alunos aprendam, porém com uma compreensão mais profunda, formal e rigorosa" (Carrillo *et al,* 2018, p. 11). Assim, isso implica em um conhecimento detalhado e profundo do conteúdo matemático, como conceitos, definições, teoremas, propriedades, regras, conexões com itens do mesmo assunto, contextos em que pode ser aplicado, diferentes representações imagéticas, algébricas, geométricas, assim como exemplos, problemas, algoritmos, condições suficientes e condições necessárias para se realizar algo, tudo isso está incluso no KoT, segundo Carrillo *et al.* (2018, p. 11-13).

1.2.1.2 Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM)

No que diz respeito ao Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM), de acordo com Carrillo *et al.* (2013, p. 2989-2990), inclui o conhecimento de propriedades e noções de itens específicos, assim como a habilidade para fazer conexões entre tópicos anteriores, atuais e futuros, além da capacidade de pôr a matemática em perspectiva, ou seja, ver a matemática básica de um ponto de vista avançado e a avançada de um ponto de vista básico.

Além disso, "o subdomínio considera apenas conexões inter-conceituais, enquanto conexões intra-conceituais são consideradas no KoT por estarem localizadas na proximidade de um único conceito" (Carrillo *et al,* 2018, p. 13). Aqui, também são excluídas conexões com outras disciplinas, que não a matemática.

Nesse contexto, quando fala-se de conexões inter-conceituais, existem as "considerações temporais, que respondem a questões de sequenciamento – não curriculares, mas relacionadas com a matemática – e produzem conexões associadas a um aumento na complexidade ou à simplificação" (Carrillo *et al,* 2018, p. 13). Ademais, "um tipo [de conexões inter-conceituais], que chamamos de conexões auxiliares, diz respeito à participação necessária de um item em processos maiores. Um exemplo é o uso de equações como elemento auxiliar no cálculo das raízes de uma função" (Carrillo *et al,* 2018, p. 15).

1.2.1.3 Conhecimento das Práticas em Matemática (KPM)

Para finalizar a grande área de MK, o Conhecimento das Práticas em Matemática (KPM) foca no próprio funcionamento da matemática por ela mesma, não no processo de ensino dela.

> Nós a definimos como qualquer atividade matemática realizada de forma sistemática, que representa um pilar da criação matemática e que se conforma a uma base lógica da qual podem ser extraídas regras. Entre muitas outras coisas, o conhecimento do professor de matemática sobre esta prática inclui saber demonstrar, justificar, definir, fazer deduções e induções, dar exemplos e compreender o papel dos contra-exemplos. (Carrillo *et al.,* 2018, p. 16)

Segundo Carrillo *et al.* (2018, p. 17), o KPM também está ligado à capacidade do professor de avaliar, contestar ou aprimorar o raciocínio matemático manifestado pelos estudantes conforme necessário durante as aulas.

1.2.2 Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Adiante, uma ressalva importante de se fazer ao tratar do PCK considerado pelo MTSK é que Carrillo *et al.* (2018) consideram que o PCK precisa ser complementado pelo MK. Desse modo, afirma-se que

> o foco específico do PCK está relacionado com a própria matemática. Mais do que se tratar da intersecção entre o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico geral, é um tipo específico de conhecimento da pedagogia que deriva principalmente da matemática. Assim, não incluímos neste subdomínio conhecimentos pedagógicos gerais aplicados a contextos matemáticos, mas apenas aqueles conhecimentos em que o conteúdo matemático *determina* o ensino e a aprendizagem que ocorrem. (Carrillo *et*

> *al.,* 2018, p. 18)

1.2.2.1 Conhecimento das Características de Aprendizagem da Matemática (KFLM)

Nessa perspectiva o subdomínio do Conhecimento das Características de Aprendizagem da Matemática (KFLM) "engloba conhecimentos associados a características inerentes à aprendizagem da matemática, colocando o foco no conteúdo matemático – como objeto de aprendizagem – e não no aluno" (Carrillo *et al.*, 2018, p. 19). Assim, o KFLM

> refere-se à necessidade de o professor estar ciente de como os estudantes pensam e constroem conhecimento ao lidar com atividades e tarefas matemáticas. (...) o subdomínio leva em consideração o conhecimento do professor sobre o modo como seus estudantes raciocinam e procedem na matemática, incluindo erros, áreas de dificuldade e concepções equivocadas, (...) inclui a consciência de onde os estudantes têm dificuldades e, de modo semelhante, de onde mostram pontos fortes. (Carrillo *et al.*, 2018, p. 19)

1.2.2.2 Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)

Por sua vez, o subdomínio do Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT) "envolve a consciência do potencial das atividades, estratégias e técnicas para o ensino de conteúdos matemáticos específicos, bem como de possíveis limitações e obstáculos que possam surgir" (Carrillo *et al.*, 2018, p. 21). Além disso, também inclui "o conhecimento de recursos e materiais didáticos, incluindo livros didáticos, materiais manipulativos, recursos tecnológicos, quadros interativos e assim por diante" (Carrillo *et al.*, 2018, p. 21), mas não só a consciência desses recursos, como também a de quando e como será mais vantajoso utilizá-los, quais seus potenciais e suas limitações.

1.2.2.3 Conhecimento das Normas de Aprendizagem da Matemática (KMLS)

Por fim, para completar a grande área do PCK, está o Conhecimento das Normas de Aprendizagem da Matemática (KMLS). Aqui, entende-se "qualquer instrumento concebido para medir o nível de capacidade dos alunos na compreensão, construção e utilização da matemática" (Carrillo *et al.*, 2018, p. 21).

> Também de relevância para este subdomínio é a questão da sequenciação dos tópicos. As exigências colocadas aos alunos em termos de conhecimentos e competências necessárias para qualquer tarefa específica levam o professor a localizar os tópicos tanto retrospectivamente, em

> termos de conhecimentos previamente adquiridos, como prospectivamente, de acordo com os conhecimentos que terão de ser adquiridos para abordar outros tópicos posteriormente. (Carrillo *et al.,* 2018, p. 22)

Finalmente, de acordo com Luís *et al.* (2021, p. 37) "o domínio das Crenças [em Matemática e no Ensino e Aprendizagem de Matemática] encontra-se no centro do modelo delimitado com linha descontínua que representa o fato das crenças influenciarem o conhecimento." Os autores acrescentam, ainda, que as crenças dos professores são "filtros e amplificadores da sua atividade." Este domínio, porém, não será abordado no trabalho que segue, uma vez que diz respeito às crenças individuais de cada professor, que não podem ser generalizadas e categorizadas.

Diante dos esclarecimentos apresentados, cabe ressaltar que

> o MTSK não tem interesse em outros tipos de conhecimento compartilhados com professores de outras disciplinas, nem em saber se alguns elementos do conhecimento são partilhados com outros profissionais que utilizam a matemática. O ponto chave para o MTSK é que o elemento de conhecimento em questão é significativo para o professor de matemática e que é a matemática que condiciona esse conhecimento. (Carrillo *et al.,* 2018, p. 23)

Para encerrar a discussão sobre o MTSK, é importante destacar que este modelo oferece uma visão detalhada e específica do conhecimento necessário ao professor de matemática para que ele possa realizar seu trabalho, diferenciando-o de modelos que abordam o conhecimento docente em geral e, também, de outras profissões que utilizam a matemática no seu dia a dia. Desse modo, ao focar na natureza especializada do conhecimento matemático e pedagógico do conteúdo, o MTSK ressalta a importância de um entendimento profundo e interconectado dos tópicos matemáticos, suas estruturas e práticas, além de suas características de ensino e aprendizagem eficazes. Nesse viés, o capítulo que segue fará uma análise do ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita baseada no MTSK.

2 O ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE PRIMEIRO GRAU COM UMA INCÓGNITA À LUZ DO MTSK

O aprendizado de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita é de crucial importância na trajetória escolar matemática dos estudantes, visto que é quando a matemática, de fato, começa a tornar-se mais abstrata, com a introdução do uso de letras para representar incógnitas, por exemplo. Além de que a grande maioria dos assuntos a serem estudados após as equações polinomiais de primeiro grau envolvem manipulações matemáticas ensinadas ali, ou mais complexas, que exigem a compreensão das mais simples – as feitas em equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita – para serem realizadas. Por isso, a importância de tratar do tema. Nesse viés, Ribeiro e Oliveira (2015) afirmam que

> Equação é um dos conceitos mais importantes que permeiam a Matemática. As equações são utilizadas na Aritmética, na Álgebra, na Geometria, etc. Porém, não apenas na Matemática: as equações também são importantes em diversas áreas das Ciências, em que existem inúmeras aplicações, como, por exemplo, na Física, na Química, na Biologia, na Economia, nas Engenharias etc. A importância das equações extrapola os muros da academia, uma vez que são muito utilizadas no cotidiano, em diferentes níveis educacionais, e, geralmente, começam a ser estudadas no Ensino Fundamental, como ocorre no Brasil (Brasil, 1997) e nos Estados Unidos da América (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). (Ribeiro e Oliveira, 2015, p. 312)

Porém, anterior ao aprendizado e, mais do que isso, de extrema importância para que ele ocorra, está o ensino e, responsável pelo ensino, o professor de matemática. Nesse viés e de acordo com Van de Walle (2009), "o professor deve conjugar dois conhecimentos essenciais: o conhecimento matemático e o conhecimento de como os alunos aprendem matemática" (Van de Walle, 2009 *apud* Santos e Ferreira, 2023, p. 3). Por isso, eis um apanhado do que as pesquisas têm dito sobre o conhecimento necessário ao professor de matemática para o ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita, com base no Modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK) de Carrillo *et al*.

No que diz respeito ao *Conhecimento dos Tópicos* (KoT), entendem-se, por exemplo, o conhecimento das definições do que é uma equação polinomial de primeiro grau; uma incógnita; a representação canônica de uma equação de primeiro grau com uma incógnita; as regras e propriedades para a resolução de uma equação; as condições para operá-la; o conceito de equivalência, intrínseco a toda e qualquer equação; os contextos em que uma equação de primeiro grau pode ser usada, como os tipos de exercícios ou problemas, contextualizados ou não, tanto para introduzi-las como para aprofundá-las e suas representações imagéticas e algébricas (Santos e Ferreira, 2023).

Por sua vez, o *Conhecimento da Estrutura da Matemática* (KSM) prevê que o professor seja capaz de enxergar os conteúdos matemáticos de maneira interligada, compreendendo as conexões entre conceitos aparentemente distintos e situando o atual conteúdo em relação ao que já foi ensinado e ao que será trabalhado futuramente, além de ver a matemática básica de um ponto de vista avançado e a avançada de um ponto de vista básico (Carrillo *et al.*, 2013, p. 2989-2990); ou seja, no caso das equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita, é fundamental que o professor perceba como esse tópico serve de base para conteúdos futuros mais avançados e como dialoga com conhecimentos prévios.

Para finalizar a grande área do Conhecimento Matemático, temos o *Conhecimento das Práticas em Matemática* (KPM). Porém, antes de prosseguirmos e tratarmos do KPM, faz-se necessário trazer uma citação de Roque (2012, p. 156), que afirma que as equações – muito antes de serem como as que conhecemos hoje – já são resolvidas a partir de uma técnica desenvolvida há muitos anos, na idade média, a qual era chamada de *al-jabr*, termo árabe que veio a dar origem à palavra "álgebra" e que, na época, era usado para designar "restauração". Além disso, outra palavra que dá nome a "um dos livros árabes mais importantes da idade média, o *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala,* escrito por Al-Khwarizmi" (Roque, 2012, p. 156) é *al-muqabala* que pode ser entendida como "balanceamento". Assim, as equações eram resolvidas em processos de restauração (*al-jabr*) e balanceamento (*al-muqabala*), as quais, por implicações lógicas reversíveis, em cada etapa forneciam uma equação equivalente à anterior até que se chegasse ao resultado. Não obstante, essas técnicas são utilizadas até os dias atuais e, inclusive, não somente em equações polinomiais de primeiro grau, como também em muitas outras.

Por isso, o KPM, no contexto do ensino de equações de primeiro grau, exige que o professor possua o domínio não apenas das técnicas algébricas envolvidas nas etapas de restauração e balanceamento, como também de como essas técnicas estão inseridas em práticas matemáticas mais amplas. Nessa perspectiva, o professor deve estar apto para demonstrar e justificar as operações envolvidas na resolução de uma equação de primeiro grau, como a adição ou subtração de termos de ambos os lados da equação, ou a divisão ou multiplicação por constantes, por exemplo (Santos e Ferreira, 2023, p. 13-14).

Após a grande área do MK, composta pelo KoT, pelo KSM e pelo KPM, seguimos para a área do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK), que tem como foco “um tipo específico de conhecimento da pedagogia que deriva principalmente da matemática. Assim, (...) incluímos (...) apenas aqueles conhecimentos em que o conteúdo matemático *determina* o ensino e a aprendizagem que ocorrem” (Carrillo *et al.,* 2018, p. 18).

Desse modo, relembrando, o primeiro tópico que compõe o PCK é o *Conhecimento das Características de Aprendizagem da Matemática* (KFLM), o qual engloba a capacidade de prever

> o modo como seus estudantes raciocinam e procedem na matemática, incluindo erros, áreas de dificuldade e concepções equivocadas, (...) inclui a consciência de onde os estudantes têm dificuldades e, de modo semelhante, de onde mostram pontos fortes (Carrillo *et al.*, 2018, p. 19).

Ou seja, no contexto do ensino de equações de primeiro grau com uma incógnita, refere-se à consciência do professor dos erros e das dificuldades que os estudantes enfrentam ao aprenderem a matéria (Santos e Ferreira, 2023, p. 10 e Oliveira e Teixeira, p. 18). Esse conhecimento não se limita apenas a identificar as falhas nos raciocínios dos estudantes, mas envolve, principalmente, a antecipação desses erros, a fim de preveni-los ou corrigi-los no momento certo (Santos e Ferreira, 2023, p. 18).

Adiante, o próximo domínio é o *Conhecimento do Ensino da Matemática* (KMT), o qual envolve a capacidade do professor de selecionar e implementar atividades, estratégias e recursos que promovam o aprendizado efetivo. Nesse viés, no que diz respeito ao ensino de equações de primeiro grau, um exemplo clássico de recurso didático que pode ser utilizado para introduzir o assunto são os modelos de balança de dois pratos, que permitem que os estudantes façam uma analogia e visualizem o equilíbrio entre os dois lados da equação, auxiliando na compreensão do conceito de equivalência e na necessidade de preservar esse equilíbrio durante a realização das operações (Santos e Ferreira, 2023, p. 20).

E enfim, para completar a grande área do PCK e finalizar os seis subdomínios do MTSK, temos o *Conhecimento das Normas de Aprendizagem da Matemática* (KMLS). O KMLS está relacionado ao planejamento cuidadoso do conteúdo e à organização sequencial dos tópicos, considerando os diferentes níveis de habilidade dos estudantes, sempre com foco em promover a progressão do aprendizado e, geralmente, baseado no que diz a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Santos e Ferreira, 2023, p. 18).

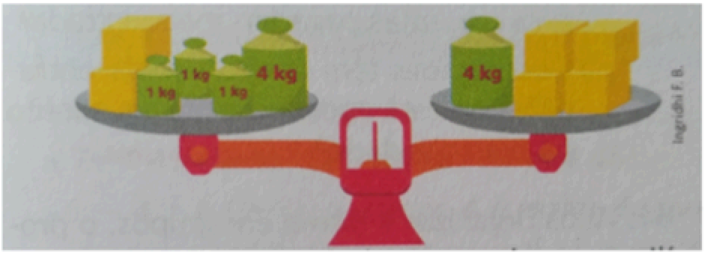
Finalmente, após essa recapitulação e posicionamento do objeto de pesquisa equações polinomiais de primeiro grau no contexto do MTSK, os próximos tópicos trarão um apanhado do que é discutido no artigo “Tarefas para o ensino e aprendizagem de equação polinomial de primeiro grau no 7º ano do Ensino Fundamental” de Santos e Ferreira, de 2023, que faz uma análise de que forma o MTSK se manifesta em três diferentes tarefas matemáticas utilizadas em aulas sobre equações polinomiais de primeiro grau do 7º ano.

2.1 ANÁLISE DO TAREFAS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL À LUZ DO MTSK

Em seu estudo, Santos e Ferreira (2023, p. 12) apresentam a figura a seguir da primeira tarefa – a qual classificam como tarefa do tipo exercício – dada ao 7º ano que consiste em uma imagem de uma balança de dois pratos com diferentes pesos de valores conhecidos de ambos os lados e blocos iguais de pesos desconhecidos também.

Figura 2 – Tarefa 1 (do tipo exercício)

Na balança abaixo, as caixas possuem medidas de massas iguais.



Sabendo que a balança está em equilíbrio, qual das equações abaixo pode ser utilizada para determinar a medida da massa de uma dessas caixas? Determine essa medida.

a) $x + 4 = x - 7$

b) $4x + 4 = 2x + 7$

c) $6x + 4 = 7$

Fonte: Santos e Ferreira (2023, p. 12)

Nela, é solicitado que o aluno identifique, dentre as opções propostas, qual equação poderia representar aquela situação, sabendo-se que a balança está em equilíbrio. Ainda, é solicitada a determinação da massa dos bloquinhos. Em seguida, é feita uma análise dos “possíveis conhecimentos a serem mobilizados pelo professor, na tentativa de explorar e potencializar a tarefa (...), inspirados em Carrillo *et al.* (2013) e Moriel Júnior e Carrillo (2014), a partir do modelo MTSK.” (Santos e Ferreira, 2023, p. 13)

Antes de afirmarem qualquer coisa, eles ressaltam que “o professor precisa ter em mente que não se deve simplesmente responder a tarefa na lousa e deixar que os alunos a copie, mas manter a postura de intermediador, sempre dialogando e auxiliando os alunos em suas dificuldades e descobertas" (Santos e Ferreira, 2023, p. 13), ação a qual afirmam que confere ao professor o conhecimento da prática matemática (KPM). Em seguida, indicam que a tarefa faz uso da linguagem pictórica – que faz uso de imagem – com a imagem da balança e menciona-se que pode-se "relacionar o equilíbrio da balança ao conceito de equação e de equivalência, o que demanda conhecimento de tópicos (KoT) e de estrutura (KSM)." (Santos e Ferreira, 2023, p. 13) Além disso, complementam que o professor deve ser capaz de construir em conjunto com os estudantes a representação algébrica da situação, o que indica domínio do KoT. (Santos e Ferreira, 2023, p. 13)

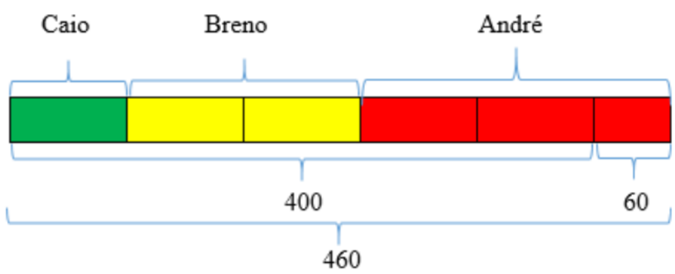
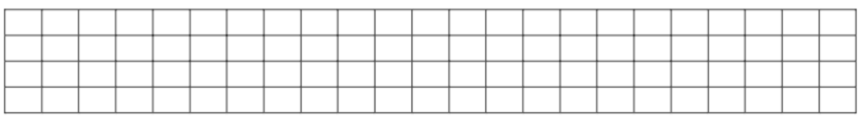
Adiante, afirmam ainda que a escolha de tal tarefa "revela um conhecimento sobre o ensino de matemática (KMT), visto que por meio dela procura desenvolver procedimentos como representar e resolver situação-problema por meio de equação." (Santos e Ferreira, 2023, p. 14) Além disso, dizem que

> o conhecimento das características de aprendizagem da matemática (KFLM) faz-se necessário para que o professor conheça os processos de obtenção e construção do conhecimento matemático pelo aluno, possíveis erros e dificuldades apresentadas, estabelecimento de conexões; na presente tarefa, uma dificuldade possível poderia estar relacionada à representação do objeto em linguagem algébrica, como poderia acontecer erros durante a resolução, como por exemplo, aplicação equivocada da transposição ou ainda dificuldade de compreensão de equações equivalentes. (Kieran *apud* Santos e Ferreira, 2023, p. 14 e Santos e Ferreira, 2023, p. 14)

Para finalizar, Santos e Ferreira (2023) alegam que "o conhecimento dos parâmetros de aprendizagem de matemática (KMLS) envolve o entendimento de como o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau se apresenta em currículos e documentos curriculares orientadores." (Santos e Ferreira, 2023, p. 14) Nessa perspectiva, trazem que a BNCC propõe desde os anos iniciais o desenvolvimento de generalização de padrões e propriedades de igualdade, sem o uso de letras. Porém, para o 7º ano é proposta a "habilidade de resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade" (Brasil, 2018, p. 307). Desse modo, é possível concluir que em uma única tarefa de aprendizagem de equações polinomiais de primeiro grau seria necessário que o professor de matemática mobilizasse pelo menos um aspecto de cada um dos seis subdomínios do MTSK. Adiante, serão analisadas outras duas tarefas trazidas pelos autores.

A atividade seguinte é o que eles chamam de “tarefa do tipo problema” (Santos e Ferreira, 2023, p. 15), que consiste basicamente em uma situação-problema descrita, no exemplo, como “Luiza repartiu 460 figurinhas entre André, Breno e Caio, de modo que Breno recebesse o dobro de Caio e André ficasse com 60 figurinhas a mais que Breno. Quantas figurinhas André recebeu?” (Silveira, 2018, p. 147 *apud* Santos e Ferreira, 2023, p. 15) Novamente, usa-se “Carrillo *et al.* (2013) e Moriel Júnior e Carrillo (2014) para subsidiar a análise dos possíveis conhecimentos mobilizados pelo professor durante a implementação dessa tarefa.” (Santos e Ferreira, 2023, p. 17)

Assim, apresentam as seguintes soluções para essa situação-problema:

> (i) Por meio da linguagem algébrica (equação).
> Representando por x o número de figurinhas que Caio deve receber, tem-se a seguinte disposição:
> Caio = x; Breno = $2x$ (o dobro de Caio); André = $2x + 60$ (60 a mais que Breno)
> Colocando em forma de equação, tem-se:
> $x + 2x + 2x + 60 = 460 \rightarrow 5x + 60 = 460 \rightarrow 5x + 60 - 60 = 460 - 60 \rightarrow 5x = 400 \rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{400}{5} \rightarrow x = 80.$
> Dessa forma, André receberá $2 \cdot 80 + 60 = 220$.
>
> (ii) Por meio de diagrama.
>
> **Figura 2** – Uso de diagrama na resolução de problema
>
> 
>
>
> Fonte: Santos e Ferreira (2023, p. 16)
>
> Nota-se pela imagem, que o diagrama (todo) está dividido em 6 partes, sendo 5 delas iguais. Além disso, as 5 partes iguais totalizam 400. Assim, cada uma dessas 5 partes vale $\frac{400}{5} = 80$. Logo, pela imagem conclui-se que André receberá $2 \cdot 80 + 60 = 220$.
>
> (iii) Com o uso de grelha.
> A grelha 4x23 representa o todo, isto é, as 460 figurinhas.
>
> **Figura 3** – Uso de grelha na resolução de problema
>
> 

Fonte: Santos e Ferreira (2023, p. 17)

> A partir da grelha, calcular o valor de uma coluna: $\frac{460}{23} = 20$ ou então por tentativa, percebendo que se uma coluna valesse 10, as 23 colunas dariam $10 \cdot 23 = 230$ o que corresponde à metade de 460. Logo, cada coluna deve valer 20. Em qualquer dos casos, seguindo as regras da partilha, deve-se retirar do todo 3 colunas (3 colunas = 60) para reservar as 60 figurinhas de André receberá a mais que Breno e as 20 colunas restantes devem ser divididas em 5 partes iguais (uma para Caio, duas para Breno e duas para André). Nesse caso, cada uma dessas 5 partes é composta por 4 colunas. Dessa forma, a fração de André é composta de 11 colunas (4+4+3). Portanto, André receberá $11 \cdot 20 = 220$. (Santos e Ferreira, 2023, p. 16-17)

Então, no que diz respeito ao domínio do conhecimento matemático, Santos e Ferreira (2023, p. 17) afirmam que fez-se uso do KoT para "saber determinar a solução por vários métodos, usar vários registros de representação, procedimentos e propriedades diversas". Além disso, afirmam que o KSM se fez presente

> quando o professor representa e resolve o problema por meio de diagrama (...), relacionando-o com os conceitos de fração, seus termos e significados, demonstrando conhecer que o uso de figura geométrica é mais adequado para desenvolver uma interpretação parte-todo. (Moreira; Ferreira, 2008 *apud* Santos e Ferreira, 2023)

Além disso, é necessário e diz respeito ao KSM também, o conhecimento de conceitos como o de equações equivalentes e de números multiplicativos. Ademais, "a capacidade de selecionar representações, de argumentar com o aluno, fazendo uso de uma comunicação clara e objetiva, seja oral ou simbólica" (Santos e Ferreira, 2023, p. 18) enquadra-se no KPM.

Adiante, no âmbito do conhecimento pedagógico do conteúdo, afirmam que a escolha dessa tarefa constitui um exemplo do KMT, "revelando a intenção do professor em desenvolver procedimentos [de diferentes tipos de resoluções], como também identificar se os alunos desenvolveram compreensão acerca das noções parte-todo, divisão proporcional, representação por diagrama." (Santos e Ferreira, 2023, p. 18) Para mais, diz-se que o KFLM se faz presente quando o professor conhece os processos de construção do conhecimento por parte dos estudantes, o modo como pensam, os erros que cometem, as dificuldades que apresentam e as conexões que realizam (Santos e Ferreira, 2023, p. 18). Citam, ainda, que nessa tarefa em específico uma dificuldade que pode vir a aparecer é a dificuldade de equacionar o problema.

Por fim, dizem que o KMLS, novamente, manifesta-se no conhecimento de como a abordagem de equações polinomiais de primeiro grau se dá nos currículos e documentos orientadores, como a BNCC. Nesse sentido,

> No tocante a BNCC, esse documento relata que o estudo de Álgebra tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, o qual fornece modelos matemáticos para compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas, e situações e estruturas matemáticas, por meio do uso de letras e símbolos, sendo necessário para isso, que os alunos identifiquem regularidades e padrões, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas, bem como de ser capaz de criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas usando equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. Esse trabalho deve incluir ideias fundamentais como equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. No caso específico do 7º ano em relação às equações, propõe que os alunos devem desenvolver habilidade de resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade. (Brasil, 2018, p. 307).

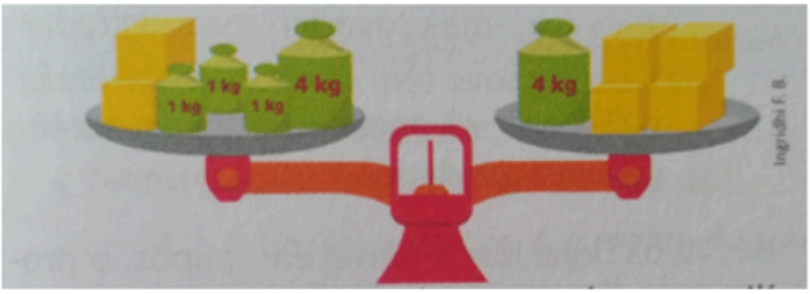
Pode-se observar, então, que – assim como na primeira tarefa – em uma única tarefa de aprendizagem de equações polinomiais de primeiro grau foi identificado que seria necessário que o professor de matemática mobilizasse ao menos um aspecto de cada um dos seis subdomínios do MTSK.

Na terceira e última tarefa – a qual eles denominam tarefa investigativa – trazem a mesma imagem da primeira, porém com propostas de questionamentos diferentes. Da seguinte forma:

Figura 4 – Tarefa 3 (do tipo investigativa)

Tarefa: **a balança**

Na balança abaixo, as caixas possuem medidas de massa iguais.



Sobre a imagem, responda:

a) O que é possível observar?

b) De que forma podemos escrever matematicamente a situação expressa na balança? Justifique o que você fez.

c) Como você faria para descobrir a medida de massa de cada caixa? Justifique.

d) Qual o valor da medida de massa de cada caixa?

Fonte: Santos e Ferreira (2023, p. 19)

Dessa vez, apesar de a mesma imagem, a tarefa foi reelaborada e, então, são feitas as seguintes perguntas: “a) O que é possível observar? b) De que forma podemos escrever matematicamente a situação expressa na balança? Justifique o que você fez. c) Como você faria para descobrir a medida de massa de cada caixa? Justifique. e d) Qual o calor da medida de massa de cada caixa?” (Santos e Ferreira, 2023, p. 19)

Por se tratar de uma tarefa com comandos abertos, que dão mais liberdade ao estudante para desenvolver estratégias pessoais, Santos e Ferreira (2023, p. 21) afirmam que o professor deve conceder bastante autonomia a eles na busca de soluções para a situação. Além disso, afirmam que pode-se realizar a atividade em grupos, para que os estudantes discutam suas estratégias de resolução, enquanto o professor funciona como um interlocutor e orientador. Ao fim, abre-se espaço para a discussão, o compartilhamento dos resultados e as complementações a serem feitas pelo professor. Assim, segundo Santos e Ferreira (2023, p. 21), o professor demonstra KPM, KFLM e KMT.

Adiante, afirma-se que os itens (a) e (b) da atividade estão intimamente ligados, uma vez que o segundo é consequência do primeiro e, caso o estudante não consiga perceber a relação de equivalência que a balança representa, não conseguirá realizar o processo de resolução. Alegam, ainda, que o professor deve dar liberdade e tempo suficiente para o estudante refletir e construir seu raciocínio, sem inclusive impor modo de representar a incógnita nem método específico de resolução e intermediando, caso o estudante apresente dificuldade, com questionamentos pertinentes ao problema, usando os conhecimentos prévios dele, sem, contudo, induzi-lo à resposta. (Santos e Ferreira, 2023, p. 21) Nesse viés,

> Mantendo essa postura, o professor mobiliza conhecimentos referentes aos subdomínios KoT (saber representar a equivalência por meio de vários registros, conhecer vários métodos de resolução), KFLM (conhecer o modo como os alunos estão raciocinando, identificar erros e dificuldades), KMT (realização de trabalho em grupo, apresentação dos resultados e discussão coletiva), KPM (saber comunicar oral e simbolicamente), KSM (realizar conexões com conhecimentos prévios ou com conhecimentos futuros como propriedades da igualdade) e KMLS (saber avaliar cada participação e descoberta). (Santos e Ferreira, 2023, p. 21)

Em seguida, o autores continuam afirmando que no caso de representar a incógnita por x – ou qualquer outra letra ou símbolo – o peso do prato esquerdo da expressão deve ser representado por $2x + 7$ e o do prato direito por $4x + 4$. E, como a balança está equilibrada, deve ser feita a equivalência entre as expressões de modo que $4x + 4 = 2x + 7$ (Santos e Ferreira, 2023, p. 21). Então, são apresentados três métodos como exemplos de possíveis resoluções para a equação:

> (i) Método de tapar. Significa “tapar” um certo termo e descobrir qual o seu valor.
> “Tapando” o 7 na equação $4x + 4 = 2x + 7$, descobre-se que $7 = 2x + 4$, pois $2x$ para chegar em $4x + 4$, falta $2x + 4$. Aplicando mais uma vez o método na equação $7 = 2x + 4$, agora tapando o $2x$, tem-se que $2x = 3$, pois 4 para 7, faltam 3. E, por fim, tapando o x na equação $2x = 3$, descobre-se que $x = 1,5$ pois $2 \cdot 1,5 = 3$.
> (ii) Transposição de termos. Significa mudar um termo de membro, mudando de operação.
> $4x + 4 = 2x + 7 \rightarrow 4x - 2x = 7 - 4 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow x = 1,5$
> (iii) Método das equações equivalentes. Significa efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação.
> $4x + 4 = 2x + 7 \rightarrow 4x + 4 - 4 = 2x + 7 - 4 \rightarrow 4x = 2x + 3 \rightarrow$
> $4x - 2x = 2x - 2x + 3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow x = 1,5$ (Santos e Ferreira, 2023, p. 22)

Nesse contexto, afirmam que para proceder de tal maneira, na grande área do conhecimento matemático, o professor precisa dominar o KoT que se faz presente no “conceito e definição de equação polinomial de primeiro grau, em reconhecer e representar uma equivalência, assim como também dispor de vários métodos de resolução.” (Santos e Ferreira, 2023, p. 22) O KSM, por sua vez, “torna-se indispensável na medida em que o professor necessita conhecer o conceito de equações equivalentes, como obtê-las e o fato de elas não alterarem a solução da equação original” (Santos e Ferreira, 2023, p. 22), assim como relacionar a solução a um conjunto-solução – necessitando, então, conhecer e definir os diferentes conjuntos. Por fim, o KPM diz respeito à capacidade de “exercer uma comunicação clara e precisa, tanto na fala como no uso da escrita para realizar definições e algoritmos matemáticos, como nos processos de resolução demonstrados em (i), (ii) e (iii)” (Santos e Ferreira, 2023, p. 22), o que vai ao encontro do conceito da boa construção discursiva de Machado e Oliveira (2023).

Já em relação à grande área do conhecimento pedagógico do conteúdo, os autores afirmam que a simples escolha de trabalhar com esse tipo de tarefa em sala de aula já demonstra que o professor possui KMT, “pois tal escolha está relacionada com o desenvolvimento de experiências matemáticas efetivas e de capacidades como autonomia e enfrentamento de situações complexas.” (Santos e Ferreira, 2023, p. 22) O KFLM se manifesta na necessidade de o professor compreender como os alunos pensam, os erros que cometem e as dificuldades que apresentam. No caso dessa tarefa, possíveis erros poderiam “ocorrer no processo de resolução, como por exemplo na transposição de termos, o aluno aplicar a regra mudar de membro-mudar de sinal e nesse caso, usar subtração como inversa de multiplicação ou ainda tratar a relação estrutural $4x + 4 = 2x + 7$ como processual e somar termos não semelhantes.” (Santos e Ferreira, 2023, p. 23) O KMLS é relatado, novamente, na necessidade de compreensão do professor de como os objetos de aprendizagem se manifestam nos documentos curriculares orientadores, como a BNCC.

Por isso, mais uma vez – assim como nas duas tarefas anteriores –, em uma simples atividade é possível observar a mobilização de ao menos um tópico de cada um dos seis subdomínios do MTSK. Desse modo, “fica claro que a potencialização de uma tarefa para a aprendizagem de matemática (...) requer do professor a mobilização de conhecimentos múltiplos” (Santos e Ferreira, 2023, p. 23).

Com isso, encerra-se a reflexão a partir do trabalho de Santos e Ferreira, em que foi possível observar que “para qualquer tipo de tarefa o conhecimento especializado do professor, seja no âmbito do conhecimento do conteúdo ou pedagógico, se mostra como imprescindível ao professor no exercício de sua prática profissional” (Santos e Ferreira, 2023, p. 24).

No que segue, será discutido o artigo “Conhecimento Especializado do Professor de Matemática manifestado em relatórios de Estágio de Observação” de Oliveira e Teixeira, publicado em 2022, o qual faz uma análise de relatos da disciplina de Estágio Curricular Supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina identificando quais áreas do MTSK se manifestam em cada relatório das aulas trazidos pelos estagiários.

2.2 ANÁLISE DO CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA MANIFESTADO EM RELATÓRIOS DE ESTÁGIO DE OBSERVAÇÃO À LUZ DO MTSK

No primeiro relato trazido para a análise no artigo, um estagiário de uma turma de 8º ano cita que “o objetivo da aula era relembrar o que era uma equação do primeiro grau e como resolvê-la, é possível que seja para dar início a sistema de equações pois a equação do primeiro grau é conteúdo do 7º ano. (Estagiário 9; 8º ano; Equações do primeiro grau).” (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 11) Assim, quando faz essa referência, os autores afirmam que o trecho apresenta indício do KMLS, uma vez que demonstra o conhecimento dos conteúdos matemáticos a serem ensinados nos respectivos anos escolares – neste caso, equações de primeiro grau no 7º e sistemas de equações no 8º ano. Além disso, o sequenciamento de tópicos evidenciado no trecho quando pensa-se na matéria que o aluno já teve anteriormente – equações de primeiro grau –, na que irá iniciar – sistemas de equações – e na ligação entre elas – a necessidade do conhecimento da primeira para compreender a segunda – é outro fator do KMLS. (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 11)

Em outro trecho, relativo a uma aula de 9º ano, onde estudava-se o conteúdo de equações fracionárias, o estagiário relata que “o professor escolheu exercícios com condições diferenciadas, algumas apresentavam a incógnita no numerador outras no denominador de modo a prepará-los para condições variadas na hora de resolver equações desse tipo. (Estagiário 9; 9º ano; Equações fracionárias).” (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 12) Nesse relato, os autores afirmam que é possível relacioná-lo ao KMT, uma vez que “esse subdomínio engloba o conhecimento de tarefas e exemplos típicos ‘que os professores consideram potentes na abordagem de um conteúdo matemático e um momento particular de ensino’ (Flores-Medrano *et al.*, 2014, p. 83).” (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 13)

Outro relato de uma observação de uma aula de 7º ano sobre equações é o seguinte:

> O que tentaria fazer de diferente seria tentar mostrar aos alunos o porquê das coisas, [...] os alunos falaram: professora, eu “passo” pra lá, “passo” pra cá, e etc. [...] acredito que seja mais essencial ao aluno saber o real motivo do “passa pra lá e pra cá”, ou seja, eu tentaria dizer o seguinte: Veja, temos uma equação, então, se eu opero um mesmo valor dos dois lados, não se

> altera nada [...]. Então quando eu “passo” um número que está somando, subtraindo para o outro lado, eu estou subtraindo-o dos dois lados da equação [...]. (Estagiário 10; 7º ano; Equações). (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 16-17)

Na análise dos conhecimentos referentes ao MTSK mobilizados nesse trecho, é trazido o KFLM na evidência do conhecimento do vocabulário utilizado pelos estudantes ao trabalharem com equações. Além da manifestação do mesmo subdomínio quando o estagiário reflete

> acerca da importância de que os alunos aprendam os motivos de realizarem determinados procedimentos [...] quando salienta que é preciso que os alunos saibam o porquê de o procedimento realizado por eles para resolver equações ser de determinado modo” (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 17)

e acrescenta a explicação que considera de bom potencial na abordagem do conteúdo, está demonstrando traços do KMT. Ainda, “ao desenvolvê-la, expressa um conhecimento do como se faz e do porquê se faz de determinado modo um procedimento de resolução de equações, o que pertence ao KoT” (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 17).

Mais adiante, o estagiário 11, observando e relatando uma aula de equações racionais em um 9º ano, faz elogios à forma que o professor estruturou a sua aula, complementando que os estudantes compreendiam e tentavam resolver os exercícios de uma matéria que ele julgava ser um dos mais difíceis da matemática para a maioria. A partir desse relato, o autores identificam que o estagiário expressou um KFLM quando destacou que o conteúdo era geralmente considerado difícil, uma vez que “esse subdomínio possui como uma de suas características o conhecimento de interesses e expectativas dos alunos” (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 18), o que inclui saber “se estes consideram fácil ou não um conteúdo, processo ou procedimento” (García, 2017, p. 34 *apud* Oliveira e Teixeira, 2022, p. 18).

O próximo relato é de um estagiário que observava uma aula de equações do 8º ano:

> Em um momento da aula uma aluna disse que não gostava de contas com x, a professora questionou o porquê e a aluna disse que não conseguia entender, que não fazia sentido pra ela [...]. Ao meu ver, a professora poderia ter ido até a carteira ajudá-la. É possível que mais alguém tenha ficado com dúvida [...]. (Estagiário 9; 8º ano; Equação) (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 18)

Os autores afirmam que ao demonstrar que, em sua opinião, a professora poderia ter ajudado a estudante que disse não gostar de “contas com x” pois não as entendia, o estagiário revela um KFLM, tanto do conteúdo – de equações – como possivelmente da Álgebra em geral, “já que um dos elementos que integram esse subdomínio refere-se ao conhecimento de concepções de alunos a respeito da Matemática, o que relaciona-se aos seus interesses e expectativas” (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 18), como já mencionado. Assim como, as “preconcepções de facilidade ou dificuldade que [...] associam às distintas áreas da matemática” (Flores-Medrano *et al.*, 2014, p. 82 *apud* Oliveira e Teixeira, 2022, p. 18).

Ambos os artigos que foram analisados apresentam as características do MTSK evidenciadas em cada atividade específica – seja ela uma tarefa, no caso do primeiro, ou um relato, no segundo – inclusive, dois subdomínios do MK, o KPM e o KSM, nem chegam a manifestar-se nos relatos relacionados a equações polinomiais de primeiro grau trazidos no segundo artigo. Dessa forma, o interesse da autora em finalizar este trabalho reside em organizar e separar os seis subdomínios do MTSK para destacar, de forma sistemática, as características e os elementos que encaixam-se em cada um deles, no contexto das equações de primeiro grau com uma incógnita. Essa abordagem permite uma análise mais categorizada, contribuindo para uma melhor compreensão de como cada subdomínio se manifesta no contexto das práticas analisadas. Além disso, essa organização facilita a identificação das conexões entre as atividades propostas nos artigos analisados e o conhecimento especializado requerido para o ensino da matemática, conforme delineado no modelo MTSK.

2.3 ANÁLISE DO ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE PRIMEIRO GRAU COM UMA INCÓGNITA À LUZ DO MTSK [DE ACORDO COM SEUS SUBDOMÍNIOS]

Recapitulando o primeiro domínio do MK, o KoT, que de acordo com Carrillo *et al.* (2018, p. 11) diz respeito ao conhecimento que o professor deve ter do que espera-se que os estudantes aprendam, de uma maneira mais profunda, formal e rigorosa, é claro. Pode-se entender, então, com base em Santos e Ferreira (2023) e Oliveira e Teixeira (2022), que esse subdomínio abrange a definição de uma equação polinomial de primeiro grau; o que é uma incógnita; a representação canônica de uma equação polinomial de primeiro grau; as diferentes regras e propriedades para a resolução de uma equação; o conceito de equivalência e os contextos e tipos de exercícios a serem utilizados para ensiná-las.

Assim, é necessário que o professor de matemática saiba que "'equação' é toda sentença matemática aberta – uma expressão matemática que contém uma ou mais variáveis e que pode ser avaliada como verdadeira ou falsa assim que as variáveis sejam substituídas por valores específicos – que exprime uma relação de igualdade. A palavra 'equação' tem o prefixo *'equa'*, que em latim quer dizer *'igual'*" (Silva e Costa, 2014, p. 15). Então, são equações, por exemplo:

$$3x + 9 = 0;$$
$$5x - 2 = 4x + 25;$$
$$a + 2b = 7$$
e $a + b - c = 101.$

Ao passo em que não são equações sentenças como:

$3 + 6 = 4 + 5$ (não é uma sentença aberta);
$x - 10 > 2$ (não é uma igualdade);
$x \neq 44$ (não é uma igualdade);
$9 \neq 16$ (não é nem sentença aberta, nem igualdade).

Além disso, é imprescindível que o professor saiba o que é uma incógnita e o que é um coeficiente. Nesse contexto, Roque (2014) afirma que

> A incógnita é uma quantidade que está desconhecida e que será conhecida a partir das restrições representadas pela equação, já o coeficiente é uma quantidade conhecida genérica que está, portanto, indeterminada na expressão de uma equação qualquer. Ambos os casos pressupõem indeterminações, mas em níveis distintos: a determinação dos coeficientes é obtida pela escolha de uma equação particular (arbitrária) e a determinação do valor da incógnita, pela resolução (não arbitrária) desta equação. (Roque, 2014, p. 179)

Desse modo, retoma-se um dos exemplos anteriores para auxiliar nessa definição: em $3x + 9 = 0$ temos o x como uma quantidade desconhecida, um valor a ser encontrado, o chamamos, então, de incógnita, ao passo em que temos o 3 e o 9 como quantidades já conhecidas e, portanto, os chamamos de coeficientes. Em suma, a incógnita é o valor que pretende-se encontrar na equação e o qual, comumente, utilizam-se letras do alfabeto latino – o nosso alfabeto – para representá-lo e o(s) coeficiente(s) os valores previamente definidos e postos.

Adiante, o que chamamos de representação canônica de uma equação de primeiro grau com uma incógnita é a equação dada da seguinte forma: $ax + b = 0$, onde a e b são números conhecidos, os coeficientes, com $a \neq 0$ e x a incógnita a ser encontrada. Equações desse tipo são solucionadas, de acordo com Roque (2012, p. 156), por meio das técnicas de restauração e balanceamento, que implicam em equações equivalentes até que se chegue no resultado.

Assim, para encontrar o resultado de uma equação de primeiro grau com uma incógnita representada na forma canônica $ax + b = 0$, por exemplo, basta subtrairmos b de ambos os lados da igualdade, obtendo-se a equação equivalente $ax = \ -b$ e, em seguida, dividir ambos os lados por a, obtendo-se outra equação equivalente, que também representa o resultado final de que $x = \ -\frac{b}{a}$. As equações, porém, nem sempre aparecerão exatamente na forma canônica e, então, cabe ao professor ter conhecimento de que precisará saber ensinar aos seus estudantes como resolvê-las de modo geral, na forma em que aparecerem. Modo esse que continua sendo nada mais nada menos do que o mesmo processo de restaurar e balancear a equação original, a fim de encontrar equações equivalentes até que se chegue no resultado final da incógnita.

Nesse contexto e em concordância com Machado e Oliveira (2023), faz-se fundamental o uso da boa construção discursiva do professor para evitar confusões ou não-entendimentos por parte dos estudantes do que está acontecendo matematicamente durante a resolução de uma equação. Por exemplo, “dizer que numa equação um termo ‘passa de um lado para outro da igualdade trocando o sinal’, (...) pode causar confusões” (Silveira, 2020, p. 2). Por isso, é essencial que o professor ressalte que está “subtraindo b de ambos os lados da equação”, obtendo-se, então, uma equação equivalente à anterior, pois fez somente uma restauração e balanceamento dela, justamente com o objetivo de chegar à outra equação equivalente na qual a incógnita estará isolada. E, em seguida, que está “dividindo ambos os lados da equação por a” – no caso em que a equação de primeiro grau com uma incógnita está escrita na forma canônica, por exemplo; porém é semelhante para todos os outros casos –, novamente somente encontrando, por implicações lógicas, outra equação equivalente – e, nesse caso da equação em sua forma canônica, já encontrando o resultado da incógnita, pois a mesma estará isolada.

Além disso, é essencial justificar que essas operações, de fato, podem ser feitas uma vez que uma equação é uma igualdade – que pode ser comparada a uma balança de dois pratos equilibrada, como em Santos e Ferreira (2023) –, então pode-se fazer o que quiser de um dos lados dessa equação – pode-se colocar ou retirar o peso que quiser de um dos pratos da balança –, *desde que* o faça do outro lado da equação também – desde que se coloque ou retire a mesma quantidade do outro prato da balança também –, desse modo se manterá a igualdade dos termos da equação – o equilíbrio da balança –, e, novamente, em todas as etapas encontram-se equações equivalentes por meio de implicações lógicas reversíveis de restauração e balanceamento, citadas por Roque (2012). Todos esses processos são defendidos por Santos e Ferreira (2023):

> Usando o método (...) o qual faz uso das propriedades da igualdade, isto é, dos princípios aditivo e multiplicativo, [o professor] conduz o aluno a perceber que quando se soma o mesmo valor a ambos os membros de uma igualdade a mesma continua verdadeira, e que o mesmo acontece quando multiplica ambos os membros por um mesmo número diferente de zero. (...) Procedendo de tal maneira, o professor demonstraria possuir KoT (saber definir equação, usar procedimentos e propriedades, calcular a solução), KPM (saber conduzir a tarefa por meio de uma linguagem clara e precisa, tanto para realizar definição como no processo de resolução) e KSM (saber

> a definição de raiz e de conjunto-solução, isto é, se a situação tem solução ou não, conforme o conjunto-solução). (Santos e Ferreira, 2023, p. 13-14)

Por exemplo, seja a equação dada por $5x - 18 = 2$, defende-se que ao invés de os passos da resolução serem os seguintes:

$$5x - 18 = 2$$

$$5x = 2 + 18$$

(com a orientação de que passa-se o 18 para o outro lado com o sinal trocado)

$$5x = 20$$

$$x = \frac{20}{5}$$

(com a orientação de que passa-se o 5 dividindo)

$$x = 4$$

Sejam assim:

$$5x - 18 = 2$$

$$5x - 18 + 18 = 2 + 18$$

(com a orientação de que soma-se 18 em ambos os lados – lembrando-se dos processos de restauração e balanceamento a fim de encontrar equações equivalentes)

$$5x = 20$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{20}{5}$$

(com a orientação de que divide-se ambos os lados por 5 – novamente, encontrando-se equações equivalentes por meio das etapas de restauração e balanceamento)

$$x = 4$$

Nesse exemplo, o que faz-se nas linhas destacadas – em conjunto com as orientações entre parênteses – é o ponto principal, pois muitas vezes esses passos são ocultos ou abstraídos com o objetivo de ganhar tempo e espaço, o que na verdade é uma grande perda, afinal, que tipo de ganho seria deixar de escrever e explicar, de maneira lógica e compreensível, algumas linhas durante a resolução da equação ao custo de arriscar que muitos estudantes não entendam o que está acontecendo? Afinal, “passar para o outro lado com a operação contrária” não dá sentido algum à operação, diferente da justificativa de que o processo está sendo feito de ambos os lados de uma igualdade e, então, estão encontrando-se equações equivalentes à inicial em todas as etapas – explicação essa, sim, dotada de sentido e significação. E, mais que o problema de os estudantes não entenderem o que está acontecendo no momento – se adotada a abordagem que não justifica as etapas do processo de resolução da equação de primeiro grau –, eles não entenderão operações mais complexas que surgem posteriormente, como potenciação e radiciação, por exemplo, ou a resolução de equações de segundo grau; afinal, o não-entendimento do que está ocorrendo nas equações mais simples – as polinomiais de primeiro grau com uma incógnita – acarretará em um não entendimento de operações posteriores mais complexas.

Além disso, mais do que não poupar detalhes da resolução, defende-se a fundamentalidade de que, mesmo que esse processo não apareça mais por escrito no quadro, mantenha-se sempre no discurso do professor, para que incessantemente o aluno esteja em contato com o significado do que está fazendo, a fim de relembrar e aprimorar seu entendimento a todo momento.

Para finalizar o KoT, tem-se o conhecimento dos contextos em que equações polinomiais de primeiro grau podem ser usadas. No que tange a esses contextos, é essencial que o professor domine os exercícios clássicos que reforçam as técnicas algébricas de resoluções de equações de balanceamento e restauração – como os apresentados em Santos e Ferreira (2023) –, mas também problemas contextualizados, que demonstrem a utilidade prática das equações. Isso inclui situações como o cálculo básico de valores desconhecidos em situações cotidianas, proporções, problemas iniciais de matemática financeira, entre outros, para introduzi-las e trabalhar inicialmente, por exemplo, assim como cálculos mais avançados envolvendo grandezas físicas, problemas geométricos ou problemas financeiros mais elaborados para aprofundá-las e trabalhar posteriormente. Nessa perspectiva, o KoT abrange o conhecimento por parte do professor de quais tipos de atividades podem ser utilizadas em cada situação para abordar diferentes formas de representação e aplicação das equações polinomiais de primeiro grau a fim de potencializar o ensino; ao passo que o conhecimento das dificuldades e erros mais comuns cometidos pelos estudantes durante a feição desses exercícios aparecerá no tópico do KFLM, mais adiante.

Em seguida, aparece o subdomínio do KSM, o qual espera que o professor tenha a capacidade de visualizar os conteúdos de matemática de maneira interligada, compreendendo as conexões entre conceitos que inicialmente se parecem disjuntos e situando o conteúdo em uma linha temporal, entre o que já foi ensinado e o que há de ser (Carrillo *et al.*, 2013, p. 2989-2990). Nesse sentido, é necessário compreender que o ensino de equações de primeiro grau vai muito além de ensinar os estudantes a resolverem equações isoladas, mas que deve prepará-los, por exemplo, para o estudo de funções afins (Santos e Ferreira, 2023, p. 10), que utilizarão amplamente equações de primeiro grau para encontrar as raízes de uma função ou o valor da função para um x específico; ou, então, durante a resolução de sistemas lineares com duas ou mais incógnitas (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 11), que exigirão habilidades de resolução de equações mais avançadas, porém que encontram no processo de solução da equação de primeiro grau sua maneira elementar; ou, ainda, na resolução de equações polinomiais de segundo grau, por exemplo, que inicialmente podem aparentar possuir um método de resolução muito diferente, mas que consiste em nada mais nada menos que a restauração e balanceamento por meio de implicações lógicas a fim de encontrar equações equivalentes – assim como nas equações de primeiro grau, claro, de uma maneira mais avançada e sofisticada, mas que continua sendo *al-jabr* e *al-muqabala* no seu âmago.

Além disso, o KSM se manifesta na capacidade do professor de enxergar as raízes conceituais das equações de primeiro grau em conteúdos mais básicos, como nas operações fundamentais de adição, subtração, multiplicação e divisão que a resolução de equações exige fluência, assim como o entendimento de seus respectivos inversos (Santos e Ferreira, 2023, p. 10) – a soma é o inverso da subtração e a multiplicação da divisão, e vice-versa –, assim como a manipulação de números fracionários e decimais que podem vir a aparecer nas equações e as propriedades de igualdade e equivalência, que estão na essência de toda e qualquer equação (Santos e Ferreira, 2023). Dessa maneira, o KSM capacita o professor a situar o ensino de equações polinomiais de primeiro grau dentro do percurso de aprendizado do estudante, conectando conhecimentos elementares passados e tópicos futuros. Essa visão integrada permite que o professor proporcione um ensino e aprendizado mais coeso, mostrando como a matemática se desenvolve como uma estrutura interligada e lógica.

No que tange o subdomínio do KPM, Carrillo *et al.* (2018, p.17-18) afirmam que inclui o conhecimento de demonstrar, justificar, definir, fazer deduções e induções, dar exemplos e também contra-exemplos, assim como avaliar, contestar e aprimorar o raciocínio manifestado pelos estudantes. Por isso, o professor deve dominar as técnicas de restauração e balanceamento envolvidas na resolução de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita, mas não só isso, como também ter ciência de que essas técnicas são utilizadas em práticas matemáticas ainda mais amplas. Ademais, em concordância com Santos e Ferreira (2023, p. 13-14), deve saber justificar e demonstrar as operações envolvidas na resolução das equações, como adicionar ou subtrair termos de ambos os lados da igualdade ou dividi-la ou multiplicá-la por constantes.

Além disso, o KPM envolve a habilidade do professor de, ao corrigir um erro com seu conhecimento prático, saber demonstrar a resolução incorreta por meio de exemplos, o porquê daquela abordagem estar equivocada e orientar como arrumá-la para chegar à solução correta. Esse tipo de ensino permite que os estudantes não apenas aprendam a resolver equações, como também a justificá-las, envolvendo uma compreensão mais profunda dos conceitos utilizados e desenvolvendo e aprimorando o raciocínio lógico matemático nas suas próprias práticas. É bastante destacado, ainda, tanto em Santos e Ferreira (2023), como em Oliveira e Teixeira (2022), que o KPM expressa-se na postura de intermediador que o professor mantém, dialogando com os estudantes e auxiliando-os a desenvolver seus raciocínios com uma comunicação clara e objetiva, o que também vai ao encontro, mais uma vez, do conceito da boa construção discursiva de Machado e Oliveira (2023).

Dessa forma, finaliza-se a grande área do MK e dá-se início à outra grande área do MTSK, o PCK. Lembrando, o PCK tem foco em "um tipo específico da pedagogia que deriva (...) da matemática." (Carrillo *et al.*, 2018, p. 18) Assim, estão incluídos somente "aqueles conhecimentos em que o conteúdo matemático *determina* o ensino e a aprendizagem que ocorrem" (Carrillo *et al.*, 2018, p. 18).

Nesse viés, o primeiro subdomínio que abordaremos do PCK é o KFLM, o qual visa prever "o modo como seus estudantes raciocinam e procedem na matemática, (...) inclui a consciência de onde os estudantes têm dificuldades e, de modo semelhante, de onde mostram pontos fortes" (Carrillo *et al.*, 2018, p. 19). Assim, ao ensinar a resolução de uma equação como $3x + 13 = 66$, por exemplo, é importante que o professor saiba que muitos estudantes têm dificuldade de saberem em que ordem realizar as operações de simplificação (Santos e Ferreira, 2023, p. 10) – muitos estudantes costumam “passar o 3 dividindo” antes de subtrair 13 em ambos os lados, ou seja, realizam os seguintes passos:

$$3x + 13 = 66$$
$$x + 13 = \frac{66}{3}$$
$$x + 13 = 22$$
$$x = 22 - 13$$
$$x = 9$$

Encontrando, claramente, um resultado incorreto. Esse erro é típico da falta de compreensão do conceito de equivalência e da ideia de que a equação deve ser tratada como uma balança de dois pratos, onde qualquer alteração feita de um lado deve ser acompanhada pela mesma operação no outro e da imprecisão de significação que falas como “passar o 3 dividindo” e “passar o 13 subtraindo” geram (Oliveira e Teixeira, 2022, p. 16-17). Nesse sentido, um erro como esse poderia ser evitado com uma boa construção discursiva do professor que, ao invés de reproduzir tais falas sem sentido e operações sem significado, deveria-se utilizar o discurso que evidencia o conceito de equivalência entre os dois lados da equação. Desse modo, teria-se a seguinte resolução:

$$3x + 13 = 66$$
$$3x + 13 - 13 = 66 - 13$$

(com a orientação precisa de que subtrai-se 13 de ambos os lados, mantendo-se a igualdade e encontrando-se uma equação equivalente à anterior)

$$3x = 53$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{53}{3}$$

(com a orientação de que divide-se ambos os lados por 3, mantendo-se a igualdade e encontrando-se outra equação equivalente)

$$x = \frac{53}{3}$$

Obtendo, desse modo, o resultado correto. Ao orientar os estudantes dessa maneira precisa, o professor estará, de fato, construindo um conhecimento com significação nos estudantes. Assim, mesmo que o estudante opte por operar em outra ordem, ainda encontraria o resultado correto, como por exemplo:

$$3x + 13 = 66$$

$$\frac{3x + 13}{3} = \frac{66}{3}$$

(com a orientação de que dividiria-se ambos os lados por 3, mantendo-se a igualdade e encontrando-se uma equação equivalente à anterior)

$$x + \frac{13}{3} = 22$$

$$x + \frac{13}{3} - \frac{13}{3} = 22 - \frac{13}{3}$$

(com a orientação de que subtrai-se $\frac{13}{3}$ de ambos os lados, mantendo-se a igualdade e encontrando-se outra equação equivalente)

$$x = \frac{66-13}{3}$$

$$x = \frac{53}{3}$$

Mesmo resultado anterior, como esperado.

Ademais, equívocos na manipulação de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita, não só não são raros, como são extremamente comuns. É o que se evidencia ainda mais no aparecimento de frações, como em $\frac{5x}{4} - 10 = 90$, por exemplo, comumente os estudantes costumam achar que podem resolvê-la “passando o 4 multiplicando e o 5 dividindo” antes de somar 10 de ambos os lados da igualdade, da seguinte forma:

$$\frac{5x}{4} - 10 = 90$$

$$5x - 10 = 90 \cdot 4$$

$$x - 10 = \frac{360}{5}$$

$$x - 10 = 72$$

$$x = 72 + 10$$

$$x = 82$$

No caso de uma boa construção discursiva por parte do professor, nesse caso, enfatizando-se que todas as operações devem ser realizadas com base nas propriedades das frações e da distributividade, erros como esse poderiam ser sanados. Desse modo, uma maneira de explicar a resolução dessa equação com clareza poderia ser a seguinte:

$$\frac{5x}{4} - 10 = 90$$

$$4 \cdot (\frac{5x}{4} - 10) = 4 \cdot 90$$

(com a orientação de que multiplica-se ambos os lados por 4)

$$\frac{4 \cdot 5x}{4} - 4 \cdot 10 = 4 \cdot 90$$

(com a orientação de que deve-se aplicar a distributiva)

$$5x - 40 = 360$$

$$\frac{5x}{5} - \frac{40}{5} = \frac{360}{5}$$

(com a orientação de que dividem-se ambos os lados por 5)

$$x - 8 = 72$$

$$x - 8 + 8 = 72 + 8$$

(com a orientação de que somam-se 8 de ambos os lados)

$$x = 80$$

Nesse exemplo, a partir da orientação e aplicação correta da distributividade, que garante que cada termo seja tratado de forma adequada, o professor pode evitar erros comuns por parte dos estudantes. Além disso, o resultado correto também poderia ser encontrado independente da ordem das operações, por exemplo:

$$\frac{5x}{4} - 10 = 90$$

$$\frac{5x}{4} - 10 + 10 = 90 + 10$$

(com a orientação de que somam-se 10 de ambos os lados)

$$\frac{5x}{4} = 100$$

(com a orientação de que, agora, pode-se até multiplicar ambos os lados por 4 e dividi-los por 5 o mesmo tempo, sem receios)

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5x}{4} = \frac{4}{5} \cdot 100$$

$$x = 80$$

Igual ao anterior, como esperado.

Ademais, outro erro bastante comum que pode ser abordado no KFLM é a dificuldade dos estudantes com a simplificação de frações. Muitos estudantes, ao se depararem com somas ou diferenças nos numeradores de uma fração, simplificam apenas um dos números, ignorando que os termos devem ser todos tratados com o mesmo denominador. Por exemplo, em $\frac{6x-9}{3} = 1$, muitos acabam simplificando somente o 6 por 3, ignorando que o 9 também precisa dividido por ele, assim:

$$\frac{6x-9}{3} = 1$$

$$2x - 9 = 1$$

$$2x = 1 + 9$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

Desse modo, o professor precisa estar atento a esses equívocos e guiar os estudantes a entender a relação entre esses termos. Nesse exemplo, deveria ser enfatizado que o 3 está dividindo todos os termos do numerador, desse jeito:

$$\frac{6x-9}{3} = 1$$

(com a orientação de que ambos os termos do numerador devem ser divididos por 3)

$$2x - 3 = 1$$

$$2x - 3 + 3 = 1 + 3$$

(com a orientação de que somam-se 3 de ambos os lados)

$$2x = 4$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

(com a orientação de que dividem-se ambos os lados por 2)

$$x = 2$$

Para mais, essa mesma equação poderia ser tratada com uma sequência diferente de operações, da seguinte maneira:

$$\frac{6x - 9}{3} = 1$$

$$3 \cdot \frac{6x - 9}{3} = 1 \cdot 3$$

(com a orientação de que multiplica-se ambos os lados por 3, a fim de eliminarmos a fração)

$$6x - 9 = 3$$

$$6x - 9 + 9 = 3 + 9$$

(com a orientação de que somam-se 9 de ambos os lados)

$$6x = 12$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{12}{6}$$

(com a orientação de que dividem-se ambos os lados por 6)

$$x = 2$$

Também igual ao anterior, como esperado.

Outra dificuldade significativa, diretamente ligada ao KFLM, que os estudantes enfrentam no contexto do ensino de equações de primeiro grau é a interpretação e a tradução de situações-problema para a linguagem algébrica (Santos e Ferreira, 2023). Essa habilidade é essencial, uma vez que permite que os estudantes traduzam questões contextualizadas para a linguagem matemática a fim de resolvê-las. No entanto, é comum que encontrem barreiras nessa etapa do processo de aprendizagem e, desse modo, cabe ao professor estar ciente dessas barreiras para antecipá-las e tentar evitá-las ou torná-las menores.

Nesse contexto, essas dificuldades têm origens diversas. Um dos principais fatores é a falta de familiaridade dos estudantes com a leitura e interpretação de enunciados, principalmente matemáticos. Desse modo, muitos têm dificuldade em identificar quais informações são fornecidas, quais representam coeficientes, qual seria a incógnita e como todas elas se conectam. Por exemplo, em um problema como “a soma de três vezes um número com 15 resulta em 45”, muitos estudantes podem não conseguir traduzir esse problema para a equação $3x + 15 = 45$, vários, inclusive, podem nem enxergar a incógnita e simplesmente acharem que é uma afirmação verdadeira do tipo “três vezes o número 15 resulta em 45”. Além disso, quando enfrentam problemas com relações mais complexas, como “Amanda tem o dobro da idade de Bárbara, e juntas somam 36 anos”, é comum que os estudantes se confundam para organizar as incógnitas. Nesse caso, muitos acabam nomeando duas incógnitas diferentes – sem necessidade, e o que deixaria a resolução mais trabalhosa –, ou até não estabelecendo as relações corretas entre elas.

Outro aspecto crítico está no entendimento da modelagem matemática como um processo sistemático e lógico. Por isso, muitos estudantes tendem a tentar adivinhar as respostas ao invés de estruturar uma equação baseada no problema apresentado para, de fato, resolvê-la. Dessa forma, para prevenir – ou até superar – essas dificuldades, é fundamental que o professor planeje e utilize estratégias pedagógicas que facilitem a transição do contexto verbal para o algébrico, e é aí que entra o KFLM. Assim, uma das estratégias mais eficazes é trabalhar com exemplos progressivos, começar com enunciados simples, onde as relações sejam diretas, como “um número acrescido de 5 resulta em 12”, pode ajudar os estudantes a compreender o conceito básico antes de avançar para problemas mais elaborados. Além disso, o uso de diagramas ou esquemas visuais pode ser extremamente útil. Nesse sentido, representações gráficas e tabelas auxiliam os estudantes a organizar as informações fornecidas no enunciado, possibilitando que eles visualizem as relações de maneira mais clara. Outra abordagem que pode ser eficaz está ligada ao conceito do *aprendizer,* defende-se que o professor pode incentivar os estudantes a praticarem a linguagem matemática, verbalizando seus pensamentos ao analisar um problema e procurando conectar os termos do enunciado com as respectivas operações matemáticas correspondentes. E, por fim, outro recurso que pode ser utilizado é o de incluir problemas contextualizados com a realidade dos alunos, a fim de tornar o aprendizado mais interessante e significativo. Por exemplo, situações como “se um ônibus tem 40 lugares e já embarcaram 18 pessoas, quantas ainda podem se sentar?” ajudam a criar uma ligação entre o cotidiano e a abstração matemática necessária para resolver equações.

Por fim, o KFLM reforça a importância de uma abordagem pedagógica que antecipe as dificuldades dos estudantes e forneça estratégias claras e consistentes para evitá-las. Em suma, o professor precisa ser capaz de prever os erros mais comuns, como a manipulação na ordem inadequada da equação, a simplificação incorreta de frações e a dificuldade de tradução e abstração matemática de problemas verbalizados. Desse modo, ao antecipar essas dificuldades, ele será capaz de fornecer abordagens didático-pedagógicas que ajudem os estudantes a superarem esses equívocos e compreenderem verdadeiramente o conteúdo, desenvolvendo um raciocínio matemático mais robusto e fundamentado para lidar com os problemas atuais e com problemas mais avançados.

Em seguida, temos o KMT, que se manifesta na capacidade do professor de selecionar atividades, estratégias e recursos pedagógicos que facilitem o aprendizado (Santos e Ferreira, 2023). Assim, como já citado anteriormente, um bom exemplo de recurso a ser utilizado para o ensino de equações polinomiais de primeiro grau é o modelo da balança de dois pratos, citado em Santos e Ferreira (2023), que proporciona uma boa analogia entre o equilíbrio da balança e seus dois pratos e a equivalência da equação e seus dois lados. Além disso, outro recurso que pode ser amplamente utilizado neste domínio é a proposição de atividades que conectem o assunto com a vivência dos estudantes. Nesse sentido, há inúmeras questões que utilizam equações de primeiro grau e abordam situações cotidianas para serem utilizadas, como por exemplo questões sobre divisão de contas em um restaurante, compras com promoções ou juros, contas de água ou luz, cálculo de combustível ou tempo para uma viagem, custo de serviços contratados, conta da telefonia, compras no supermercado ou lanchonete, dentre muitos outros.

Outro recurso que pode ser utilizado nesse contexto de ensino é o uso de materiais manipulativos, como blocos ou peças que representem as incógnitas e as constantes, que podem facilitar a visualização das operações matemáticas realizadas em cada etapa. No entanto, o KMT não se limita ao uso de materiais físicos. Assim, em concordância com Santos e Ferreira (2023, p. 10), nos dias atuais, recursos tecnológicos, como aplicativos ou quadros interativos e *softwares* educativos que simulam diferentes formas e etapas de simplificação na resolução de equações e permitem que os estudantes participem ativamente do ensino, proporcionam um estudo e uma visão mais criativa, lúdica e curiosa do assunto.

Por outro lado, o KMT exige uma abordagem crítica e reflexiva do professor a respeito dos recursos a serem utilizados em sala de aula. Nesse contexto, embora a tecnologia e os materiais manipulativos tenham grande potencial de ensino e aprendizado, é essencial que o professor tenha consciência das limitações que eles trazem. Desse modo, é importante que eles não substituam o ensino das ideias fundamentais e não tornem o aprendizado superficial. Por exemplo, o uso excessivo de *softwares* que calculam rapidamente as contas envolvidas em uma equação para o estudante, ou até mesmo de calculadoras, pode impedir que eles desenvolvam habilidades fundamentais de cálculo mental e raciocínio lógico.

Por fim, temos o KMLS, finalizando os seis subdomínios do MTSK. Esse subdomínio está ligado ao planejamento cuidadoso do conteúdo e à sequência dos tópicos, levando em consideração os níveis de habilidade e conhecimento dos estudantes, por isso, aparece comumente relacionado à BNCC – como em Santos e Ferreira (2023), por exemplo. Outrossim, também diz respeito à consciência do professor de organizar as atividades e exemplos em níveis progressivos de dificuldade, para guiar a progressão do aprendizado. Dessa forma, inicialmente é importante que trabalhem-se problemas menos complexos e equações mais simples, como por exemplo $x + 5 = 10$, para garantir que os estudantes compreendam os conceitos básicos de equivalência, restauração, balanceamento e reversão de operações. A partir disso, pode-se avançar gradualmente para problemas mais elaborados e equações mais avançadas, que envolvam múltiplos passos em sua resolução, como $3x + 7 = 22$, relembrando os mesmos conceitos de equivalência, restauração, balanceamento e reversão de operações e enfatizando-se o raciocínio lógico necessário para isolar a incógnita. *A posteriori*, pode e deve-se propor situações-problema mais desafiadoras e contextualizadas e que envolvam a manipulação de equações mais complexas, como aquelas em que aparecem frações ou números decimais, estimulando-se, assim, o pensamento crítico, a criatividade e as habilidades adquiridas pelos estudantes nas situações anteriores.

Além da sequenciação dos conteúdos, o KMLS também considera as exigências que o professor deve fazer, levando em consideração a localização do conteúdo em relação ao que já foi aprendido e ao que ainda será abordado, garantindo que os estudantes possuam a base necessária para progredir em todos os momentos. Dessa forma, o professor deve ser capaz de relacionar o ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita com conteúdos já vistos anteriormente pelos estudantes e exigir que eles tenham fluência em operações elementares de soma, subtração, multiplicação e divisão ou o uso do mínimo múltiplo comum (MMC) para somar ou subtrair frações, por exemplo. Além disso, é essencial que o professor saiba a relevância que o estudo de equações de primeiro grau com uma incógnita terá para conteúdos futuros, como o estudo de funções afins, sistemas de equações lineares, inequações, equações polinomiais de segundo grau, dentre tantos outros assuntos da matemática que utilizarão os principais conceitos utilizados nas equações de primeiro grau de equivalência, restauração, balanceamento e reversão de operações e, desse modo, consiga determinar os conhecimentos mínimos que os estudantes devem adquirir ao estudarem a matéria, para que possam ser utilizados *a posteriori*.

Finalmente, outro aspecto fundamental do KMLS é o uso de instrumentos de avaliação para monitorar o progresso do aprendizado dos estudantes e identificar suas dificuldades. Isso pode incluir testes diagnósticos para avaliar o nível inicial deles, assim como exercícios que desafiam diferentes habilidades ou até avaliações clássicas de desempenho, na qual devem justificar os passos realizados corretamente. Porém, no viés do *aprendizer* de Machado (2022), pode-se propor atividades em que os estudantes tenham que explicar verbalmente os passos das resoluções, aplicar os conceitos de equivalência, restauração e balanceamento para resolver diferentes equações polinomiais de primeiro grau. Ainda, pode-se propor atividades em que os estudantes tenham que identificar, em equações resolvidas erroneamente – possivelmente até pelos próprios colegas – em qual etapa se encontra o equívoco da resolução e justificar por que aquilo está errado. Esses tipos de abordagem não apenas avaliam o aprendizado, como também incentivam o desenvolvimento do pensamento crítico e do raciocínio lógico para a resolução de problemas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo identificar os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para ensinar equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita, à luz do modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK). Ao longo do estudo, observou-se como os subdomínios do MTSK se manifestam na prática docente e como eles podem ser aplicados para melhorar o ensino de equações de primeiro grau.

Com base nos artigos explorados, concluiu-se que o Conhecimento dos Tópicos (KoT) se manifesta tanto no domínio de tópicos elementares, como a definição de uma equação e de uma incógnita, quanto na capacidade do professor de relacionar conceitos fundamentais como a equivalência de equações com o equilíbrio da balança de dois pratos – amplamente utilizada no ensino do assunto. Além disso, esse domínio garante que o professor deve dominar diferentes formas de representação de uma equação, assim como múltiplos métodos de resolução.

O Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM) destaca-se ao permitir ao professor realizar conexões importantes entre diferentes conteúdos, relacionando conhecimentos prévios dos estudantes com conteúdos atuais e futuros, o que facilita o desenvolvimento de estratégias de ensino mais adequadas para tornar o aprendizado mais coeso. No contexto de equações de primeiro grau, por exemplo, é necessário ter o domínio das operações fundamentais de adição, subtração, multiplicação e divisão e da manipulação de frações para que se possa trabalhar o conteúdo. É importante ter em mente, também, que as equações de primeiro grau serão base para assuntos futuros como funções afim e sistemas lineares. Além disso, esse subdomínio também auxilia na escolha do método de resolução mais adequado para cada tarefa.

O Conhecimento das Práticas da Matemática (KPM) reflete a importância da postura do professor como intermediador do aprendizado, alinhando-se, também, à boa construção discursiva do professor de matemática. Assim, de acordo com esse domínio, o docente deve comunicar-se de forma clara e objetiva, utilizando linguagem matemática apropriada e acessível – tanto oral como simbólica. Ademais, ao corrigir um erro, o professor deve saber justificar porque aquela resolução está incorreta e demonstrar a forma correta de resolver o exercício, aprimorando, assim, a compreensão dos estudantes sobre as práticas matemáticas.

O Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT) diz respeito à capacidade de planejar e selecionar atividades que desafiem os estudantes a refletir sobre os procedimentos usados para resolver os problemas. A escolha de atividades que trabalhem com a balança de dois pratos, por exemplo, se apresenta com grande potencial para introduzir o conteúdo. Além disso, o estudo destacou a importância da escolha de atividades que ofereçam a liberdade de explorar diferentes métodos de resolução, principalmente quando realizadas em grupo. Essas atividades não só desenvolvem o pensamento crítico, mas também permitem uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, ao promoverem o trabalho colaborativo.

O Conhecimento das Características de Aprendizagem da Matemática (KFLM) está relacionado à habilidade do professor de compreender os equívocos e dificuldades comuns dos estudantes ao aprenderem o conteúdo. Foram citados erros comuns como a representação incorreta de situações em linguagem algébrica, falhas no processo de resolução ou dificuldade em entender o conceito de equações equivalentes e como elas apresentam o mesmo resultado. Este domínio também abrange a habilidade de antecipar essas dificuldades a fim de evitar que esses enganos aconteçam, bem como considerar os interesses e expectativas dos estudantes na seleção de atividades.

Finalmente, o Conhecimento das Normas de Aprendizagem da Matemática (KMLS) refere-se à capacidade do professor de alinhar o ensino às diretrizes da BNCC, avaliando não apenas os resultados finais, mas também o processo de aprendizagem. Este subdomínio inclui o entendimento do sequenciamento dos conteúdos ao longo dos anos escolares e a habilidade de analisar as participações, descobertas e estratégias utilizadas pelos estudantes, assegurando que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados.

Outro ponto importante da análise foi o impacto da boa construção discursiva do professor na compreensão dos estudantes. Embora não tenha sido o foco principal do estudo, percebeu-se que a clareza e a precisão na comunicação influenciam significativamente na aprendizagem. Construir um discurso matemático acessível e preciso é um desafio constante que o professor deve enfrentar, mas que pode ser facilitado pelo uso do MTSK como guia.

Em suma, este trabalho promoveu uma reflexão significativa sobre o papel do professor de Matemática no ensino de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita. Ao se aprofundar no MTSK, ficou evidente que o docente deve ser mais do que um transmissor de conteúdos, tornando-se um facilitador da construção de conhecimento e um mediador capaz de adaptar sua prática para atender às diversas demandas da sala de aula. Esse papel exige uma combinação de habilidades técnicas, pedagógicas e interpessoais, que, quando bem desenvolvidas, contribuem para o sucesso do processo educativo. O professor deve ser visto como um profissional em constante aprendizado, buscando aprimorar suas estratégias de ensino e refinar sua capacidade de comunicação com os estudantes. O modelo do MTSK, por sua vez, serve como um categorizador que auxilia o professor a aprimorar essas práticas, oferecendo uma base sólida para o desenvolvimento de metodologias de ensino que atendam às necessidades dos estudantes e promovam uma compreensão profunda dos conteúdos, garantindo que eles não apenas aprendam a resolver equações, mas também compreendam seu significado e suas aplicações no contexto mais amplo da matemática.

Nesse viés, futuras pesquisas podem dar continuidade a este trabalho, investigando como o modelo MTSK se aplica a outros tópicos matemáticos, como funções ou geometria, por exemplo, ou explorando sua implementação em diferentes contextos educacionais, como em escolas públicas ou privadas, e em turmas de diferentes faixas etárias e níveis de desempenho. Essas investigações poderiam ampliar ainda mais o entendimento sobre as possibilidades e desafios do modelo no contexto do ensino da Matemática.

Por fim, destaca-se o impacto educacional desta pesquisa. Os professores podem se beneficiar diretamente dos *insights* aqui apresentados, especialmente no que diz respeito ao desenvolvimento do conhecimento necessário para aprimorar suas práticas docentes. O MTSK oferece um norte para que o professor possa organizar e refletir sobre seus próprios saberes, promovendo uma prática mais consciente, eficiente e alinhada às necessidades dos estudantes e às exigências do ensino contemporâneo.

REFERÊNCIAS

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey Charles. **Content Knowledge for Teaching What Makes It Special?** Journal of Teacher Education, v. 59, n. 5, p. 389-407. Universidade de Michigan, novembro de 2008. DOI: http://dx.doi.org/10.1177/0022487108324554

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CARRILLO, José *et al*. **The Mathematics Teacher´s Specialized Knowledge (MTSK) model**, Research in Mathematics Education, 20:3, p. 236-253. Universidade de Huelva, Espanha, 19 de julho de 2018. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14794802.2018.1479981

CONTRERAS-GONZÁLEZ, Luis Carlos; CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; MUÑOZ-CATALÁN, María Cinta. **Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching.** Universidade de Huelva, Espanha, fevereiro de 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/269762274_Determining_Specialised_Knowledge_For_Mathematics_Teaching

CONTRERAS-GONZÁLEZ, Luís Carlos; MONTES, Miguel Ángel; CLIMENT, Nuria; CARRILLO, José. **Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas**. Universidade de Huelva, Espanha, janeiro de 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/313824049_Introduccion_al_modelo_MTSK_origen_e_investigaciones_realizadas

FLORES-MEDRANO, Eric; MONTES, Miguel A.; CARRILLO, José; CONTRERAS, Luis C. MUÑOZ-CATALÁN, M. Cinta; LIÑÁN, M. Mar. **El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático**. Bolema, Rio Claro, SP, v. 30, n. 54, p. 204- 221, abr. 2016. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

LUÍS, Mónica; SOARES, Susel; LIMA, Stela; MARQUES, Melissa. **Desenvolvimento dos Modelos de Conhecimento Especializado de professores de Biologia, Física e Química**. Revista Multidisciplinar, v. 3, n. 1, p. 33-53. 2021. DOI: https://doi.org/10.23882/DI2151. Disponível em: https://revistamultidisciplinar.com/index.php/oj/article/view/52

MACHADO, Rosilene Beatriz. **Irene vista de dentro, outra vez. Ou, sobre um aprender e um ensinar-traduzir [matemática]**. Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT, Florianópolis, v. 17, p. 01-20, 2022. Universidade Federal de Santa Catarina. ISSN 1981-1322. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2022.e86726

MACHADO, Rosilene Beatriz; OLIVEIRA, Janine Soares de. **A IMPORTÂNCIA DA CONSTRUÇÃO DISCURSIVA POR PARTE DO PROFESSOR [DE MATEMÁTICA] PARA A ATUAÇÃO DO INTÉRPRETE DE LIBRAS EM SALAS DE AULA INCLUSIVAS**. Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT, Florianópolis, v.18, p. 01-28, 2023. Universidade Federal de Santa Catarina. ISSN 1981-1322. DOI:https://doi.org/10.5007/1981-1322.2023.e93517

MACHADO, Rosilene Beatriz; OLIVEIRA, Janine Soares de. **Considerações sobre o Princípio da Boa Construção Discursiva em Libras em salas de aula inclusivas e o Modelo do Cabo de Força Equilibrado**. Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT, Florianópolis, v.19, p. 01-21, 2024. Universidade Federal de Santa Catarina. ISSN 1981-1322. DOI:https://doi.org/10.5007/1981-1322.2024.e101092

MELLO, Geison; MORIEL JUNIOR, Jeferson Gomes; WIELEWSKI, Gladys Denise. **Base de Conhecimento de Professores de Matemática: do Genérico ao Especializado**. Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas, v. 18, n. 2, p. 126-133, 2017.

OLIVEIRA, Gabriela da Silva; TEIXEIRA, Bruno Rodrigo. **CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA MANIFESTADO EM RELATÓRIOS DE ESTÁGIO DE OBSERVAÇÃO**. Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 13, n. 1, p. 1-24, 2022. Universidade Federal de Pernambuco. DOI: https://doi.org/10.51359/2177-9309.2022.248843

RIBEIRO, Alessandro Jacques; OLIVEIRA, Felipe Augusto Pereira Vasconcelos Santos e. **Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações**. Zetetike, Campinas, SP, v. 23, n. 44, p. 311-327, dezembro de 2015. DOI: https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646541

ROQUE, Tatiana. **Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática?** Revista Brasileira de História da Ciência, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 167-185. 2014.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Zahar, Rio de Janeiro, RJ, Capítulo 4. 3 de setembro de 2012. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

SANTOS, Francelino Bomfim; FERREIRA, Joubert Lima. **Tarefas para o ensino e aprendizagem de equação polinomial de primeiro grau no 7º ano do Ensino Fundamental.** Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (REMat), São Paulo, SP, v. 20, n. 01, p. 1-27. 2023. DOI: https://doi.org/10.37001/remat25269062v20id596

SHULMAN, Lee S. **Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching**. American Educational Research Association, v. 15, n. 2, p. 4-14. Fevereiro de 1986.

SHULMAN, Lee S. **Knowledge and teaching: foundations of the new reform**. Harvard Education Review, v. 57, n. 1, p. 1-21. Fevereiro de 1987.

SILVA, Alexandre de Azevedo; COSTA, Gabriela Marques Pereira da. **Equações do Primeiro Grau: Uma proposta de aula baseada na análise de livros**. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Mestrado em Matemática – PROFMAT. Rio de Janeiro, RJ. 2014.

SILVA, Darlysson Wesley da; SANTOS, João Viola Ricardo dos Santos. **CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UM ‘NOVO’ OLHAR SOBRE UMA TEORIZAÇÃO**. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Anais do VIII Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática, v. 8, n. 1, 2014.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **A ÊNFASE DA LINGUAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DAS PALAVRAS INCERTAS ÀS PALAVRAS COM SENTIDO**. Universidade Federal do Pará. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. REnCiMa, v. 11, p. 1-12. 2020. DOI: doi.org/10.26843/rencima

SOUSA, Angélica Silva de; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; ALVES, Laís Hilário. **A PESQUISA BIBLIOGRÁFICA: PRINCÍPIOS E FUNDAMENTOS**. Cadernos da Fucamp, v. 20, n. 43, p. 64-83. 2021.