

Raphael Peixoto Ferreira

Introdução ao Estudo de C^* -Álgebras

Florianópolis, Brasil

2024

Raphael Peixoto Ferreira

Introdução ao Estudo de C^* -Álgebras

Projeto de trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), para obtenção do grau de Bacharel em matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de matemática - Bacharelado em Matemática

Orientador: Dr. Alcides Buss

Florianópolis, Brasil

2024

Ferreira, Raphael Peixoto
Introdução ao Estudo de C^* -Álgebras / Raphael Peixoto
Ferreira ; orientador, Alcides Buss, 2024.
172 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática -
Bacharelado, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática - Bacharelado. 2. C^* -Álgebras. 3.
Álgebras de Operadores. I. Buss, Alcides. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática -
Bacharelado. III. Título.

Ficha de identificação da obra

Raphael Peixoto Ferreira

Introdução ao Estudo de C^* -Álgebras

Projeto de trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), para obtenção do grau de Bacharel em matemática.

Florianópolis, Brasil, 2024.

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof.Dr. Alcides Buss
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Paulinho Demeneghi
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Eliezer Batista
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Agradecimentos

Agradeço com especial carinho à minha família por todo amor, incentivo e suporte.

Agradeço por todas as valiosas amizades que fiz durante o percurso da graduação, por todo o companheirismo e todo apoio que recebi ao qual sou muito grato.

Agradeço ao meu orientador por toda a dedicação e paciência exercida durante esse projeto. Gostaria também de prestar agradecimentos a banca por ter aceitado avaliar esse material.

Resumo

O objetivo desse trabalho é produzir um texto detalhado e acessível acerca da área de álgebras de operadores. Os principais teoremas presentes no trabalho são os dois teoremas de caracterização de C^* -álgebras de Gelfand-Naimark. O texto foi dividido em três capítulos principais, primeiramente visa-se apresentar a teoria de álgebras de Banach, teoria espectral e introduzir a representação de Gelfand. O segundo capítulo trata da teoria geral de C^* -álgebras, bem como o primeiro teorema de Gelfand-Naimark e o cálculo funcional contínuo. A terceira parte dedica-se a provar o segundo teorema de Gelfand-Naimark, para isso discutiremos a teoria de representações de C^* -álgebras, elementos positivos em C^* -álgebras, funcionais lineares positivos, construção GNS e finalmente o teorema de Gelfand-Naimark para C^* -álgebras quaisquer. Quando tratarmos de funcionais lineares positivos e da construção GNS faremos frequentemente a hipótese simplificadora de exigir que certas C^* -álgebras em questão sejam unitais.

Palavras-chave: C^* -Álgebra; Gelfand-Naimark; Álgebra de Banach; Construção GNS.

Abstract

The objective of this work is to produce a detailed and accessible text about the area of operator algebras. The main theorems present in the work are the two Gelfand-Naimark C^* -algebra characterization theorems. The text was divided into three main chapters; firstly, it aims to present the theory of Banach algebras, spectral theory, and introduce the Gelfand representation. The second chapter deals with the general theory of C^* -algebras, as well as the first Gelfand-Naimark theorem and continuous functional calculus. The third part is dedicated to proving the second Gelfand-Naimark theorem; for this, we will discuss the theory of representations of C^* -algebras, positive elements in C^* -algebras, positive linear functionals, GNS construction, and finally the Gelfand-Naimark theorem. When dealing with positive linear functionals and the GNS construction, we will often make the simplifying assumption of requiring that certain C^* -algebras in question be unital.

Keywords: C^* -Álgebra; Gelfand-Naimark; Banach-Algebra; GNS construction.

Sumário

	Sumário	6
	Introdução	7
1	ÁLGEBRAS DE BANACH E TEORIA ESPECTRAL	9
1.1	Álgebras de Banach	9
1.2	Homomorfismos e Ideais	25
1.3	Elementos Inversíveis	39
1.4	Teoria Espectral	47
1.5	Teoria de Gelfand	60
2	C*-ÁLGEBRAS	73
2.1	Definições e exemplos	73
2.2	Unitização de C*-Álgebras	85
2.3	C*-Álgebras Comutativas	92
2.4	Cálculo Funcional Contínuo	100
3	REPRESENTAÇÕES DE C*-ÁLGEBRAS	108
3.1	Definição e Exemplos	108
3.2	Elementos Positivos de C*-Álgebras	112
3.3	Funcionais Positivos e Estados	123
3.4	Construção GNS	134
3.5	Teorema de Gelfand - Naimark	138
A	APÊNDICE	142
B	APÊNDICE	151
C	APÊNDICE	155
	REFERÊNCIAS	169

Introdução

A área de álgebra de operadores teve início através dos trabalhos de John Von Neumann, um físico-matemático de marcada importância, considerado um dos maiores cientistas do século XX, o objetivo naquela instância era formalizar a mecânica quântica. Os objetos estudados por Von Neumann eram subálgebras de $B(H)$ onde H é um espaço de Hilbert, atualmente as álgebras estudadas por Von Neumann são nomeadas em sua homenagem, essas são casos particulares de C^* -álgebras, protagonistas desse trabalho.

Este material se dedica a proporcionar uma introdução simples, detalhada e acessível para a área de álgebra de operadores, a ideia é que sirva de um primeiro contato para um estudante que esteja interessado na matéria mas com dificuldades para seguir a literatura padrão. Um objetivo principal é que esse trabalho seja fácil de ler, então uma boa parte dos detalhes foi mantida nas demonstrações e resultados mais simples foram enunciados e demonstrados.

Vamos então introduzir os principais objetos de estudo e alguns teoremas-chave a respeito deles. Aqui entenderemos que os espaços vetoriais (e assim também as álgebras) são definidos sobre o corpo dos números complexos.

Uma álgebra A é um espaço vetorial munido de um produto bilinear:

$$\cdot : A \times A \longrightarrow A$$

$$(a, b) \longmapsto ab$$

tal que

$$a(bc) = (ab)c$$

Isso garantirá uma estrutura de anel compatível com a estrutura de espaço vetorial. Uma álgebra será unital, bem como comutativa, se o for como anel.

Quando munida de uma norma submultiplicativa, isto é, satisfazendo:

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in A$$

dizemos ser uma álgebra normada. Definimos uma álgebra de Banach como uma álgebra normada completa com relação à métrica induzida pela norma.

Uma $*$ -álgebra é uma álgebra equipada de uma operação unária

$$* : A \longrightarrow A, \quad a \longmapsto a^*$$

tal que para todos $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned}(ab)^* &= b^*a^*; \\ (\lambda a)^* &= \bar{\lambda}a^*; \\ (a+b)^* &= a^*+b^*; \\ (a^*)^* &= a.\end{aligned}$$

Usualmente referimos a operação anterior como a *involução* da álgebra.

Teremos agora que uma $*$ -álgebra de Banach A satisfazendo a seguinte propriedade, denominada de propriedade C^* :

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in A$$

é uma C^* -álgebra

Muito do que foi feito no corpo do trabalho tem C^* -álgebras ou, mais geralmente, álgebras de Banach como objeto de estudo. Os teoremas mais fundamentais presentes aqui são enunciados abaixo, o segundo deles servirá de ponto de parada para esse material.

Com os estudos se aprofundando, foi eventualmente possível caracterizar uma C^* -álgebra através dos seguintes teoremas. Como acontecerá frequentemente durante todo o texto, estaremos montando uma identificação via isomorfismos.

Teorema 0.0.1 (Teorema de representação de Gelfand). Se A é uma C^* -álgebra comutativa, então A é isométricamente $*$ -isomorfa a $\mathcal{C}_0(X)$ para um espaço localmente compacto Hausdorff X . Este é unicamente determinado através da álgebra como o espaço de caracteres (munido da topologia pontual), ou ainda o espaço dos ideais maximais de A .

Agora, para C^* -álgebras não necessariamente comutativas em geral, poderemos derivar o seguinte teorema, por meio da *construção GNS*, em referência aos matemáticos Gelfand-Naimark-Segal:

Teorema 0.0.2 (Teorema de Gelfand Naimark). : Toda C^* -álgebra A é isométricamente isomorfa a uma C^* -álgebra “concreta” de operadores em um espaço de Hilbert H . Mais precisamente, existe um $*$ -isomorfismo isométrico (ou seja, uma representação fiel) de A na C^* -álgebra $B(H)$ de todos os operadores limitados de um espaço de Hilbert H .

Durante a leitura desse trabalho será preferível que o leitor tenha alguma familiaridade com análise funcional, topologia e variável complexa, mas nada muito aprofundado. Usualmente, os resultados necessários serão devidamente enunciados, ou pelo menos mencionados, ao longo do texto.

1 Álgebras de Banach e Teoria Espectral

Neste capítulo, abordaremos os fundamentos da teoria de álgebras de Banach, bem como da teoria espectral.

Embora o foco principal deste trabalho seja o estudo das C^* -álgebras, iniciaremos nossa discussão em um contexto mais geral. Convidamos o leitor a apreciar o maquinário adicional e as propriedades específicas das C^* -álgebras, que se destacam em comparação com o cenário mais abrangente explorado neste capítulo.

Ao longo do capítulo, todos os espaços vetoriais serão considerados sobre o corpo dos números complexos, salvo indicação explícita em contrário.

1.1 Álgebras de Banach

Começaremos definindo os principais objetos de estudo deste capítulo. O conceito a seguir pode ser entendido como um espaço vetorial no qual existe uma operação de multiplicação entre vetores.

Definição 1.1.1. Uma *álgebra* A é um espaço vetorial munido de uma aplicação bilinear associativa, isto é, uma função da forma:

$$\cdot : A \times A \longrightarrow A, \quad (a, b) \longmapsto ab,$$

tal que, para todos $a, b, c \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos:

$$a(b + c) = ab + ac,$$

$$(a + b)c = ac + bc,$$

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b).$$

Isso garantirá uma estrutura de anel compatível com a estrutura de espaço vetorial. Uma álgebra será *unital*, bem como *comutativa*, se o for como anel. Frequentemente representaremos a unidade de uma álgebra A por 1_A . Como se pode esperar, noções de subestrutura desempenharão um papel central no desenvolvimento da teoria.

Definição 1.1.2. Uma *subálgebra* B de uma álgebra A é um subespaço vetorial fechado sob o produto da álgebra, ou seja, se $b_1, b_2 \in B$, então $b_1 b_2 \in B$. Semelhante a outros contextos, B será em si uma álgebra com as operações restritas.

Diremos que uma subálgebra B de uma álgebra unital A com unidade 1_A é uma *subálgebra unital* se, além de possuir uma unidade, digamos 1_B , temos que $1_A = 1_B$.

Exemplo 1.1.3. Seja $\mathbb{C}[z]$ o conjunto de todas as funções polinomiais com coeficientes em \mathbb{C} , ou seja, um elemento $p \in \mathbb{C}[z]$ é da forma

$$p(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \cdots + \lambda_n z^n.$$

Com as operações bem conhecidas de soma e multiplicação de polinômios, além da multiplicação de um polinômio por um escalar, $\mathbb{C}[z]$ é uma álgebra. Tomando $p(z) = 1$, vemos que $\mathbb{C}[z]$ é uma álgebra unital.

Definição 1.1.4. Dizemos que uma norma $\|\cdot\|$ em uma álgebra A é *submultiplicativa* se

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in A.$$

Nesse caso, dizemos que o par $(A, \|\cdot\|)$ é uma *álgebra normada*. No caso de A ser unital e, adicionalmente, $\|1_A\| = 1$, dizemos que A é uma *álgebra normada unital*.

Com a adição de uma norma, temos uma métrica dela derivada, que, por sua vez, induz uma topologia. Seguindo essa direção, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.1.5. A operação $\cdot : A \times A \rightarrow A$, definida por $(a, b) \mapsto ab$, é contínua em uma álgebra normada A .

Demonstração. Usaremos a submultiplicatividade da norma. Seja A uma álgebra normada. Considere as sequências $(a_n), (b_n) \subset A$ tais que $a_n \rightarrow a \in A$ e $b_n \rightarrow b \in A$. Queremos mostrar que $a_n b_n \rightarrow ab$. Para isso, façamos:

$$\begin{aligned} \|ab - a_n b_n\| &= \|ab - ab_n + ab_n - a_n b_n\| \\ &\leq \|ab - ab_n\| + \|ab_n - a_n b_n\| \\ &\leq \|a\| \cdot \|b - b_n\| + \|a - a_n\| \cdot \|b_n\|. \end{aligned}$$

Como $\|a - a_n\|, \|b - b_n\| \rightarrow 0$ e tanto $\|a\|$ quanto $\|b\|$ são números, segue pelo teorema do confronto que $\|ab - a_n b_n\| \rightarrow 0$, ou seja, $a_n b_n \rightarrow ab$. Portanto, a operação é contínua. \square

Assim, como as operações em um espaço vetorial normado são também contínuas, segue que todas as operações em uma álgebra normada são contínuas. Vamos agora introduzir um dos principais objetos de estudo deste capítulo.

Definição 1.1.6. Dizemos que uma álgebra normada A é uma *álgebra de Banach* se ela for completa com respeito à métrica induzida pela norma.

Com as definições apresentadas, reunimos alguns resultados na proposição a seguir.

Proposição 1.1.7. Uma subálgebra de uma álgebra normada é, em si, uma álgebra normada com a operação restrita. O fecho de uma subálgebra é uma subálgebra. Além disso, uma subálgebra de uma álgebra de Banach é uma álgebra de Banach se, e somente se, for fechada.

Demonstração. A primeira afirmação segue do fato de que todas as propriedades necessárias são hereditárias. Para a segunda afirmação, consideremos os seguintes pontos:

- O fecho de um subespaço é ainda um subespaço. De fato, seja S um subespaço. Sejam $x, y \in \overline{S}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, existem seqüências $(x_n), (y_n) \subset S$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Como S é subespaço, $(x_n + y_n) \subset S$, e como $x_n + y_n \rightarrow x + y$, concluímos que $x + y \in \overline{S}$. Similarmente, como S é subespaço, $(\lambda x_n) \subset S$ e $(\lambda x_n) \rightarrow \lambda x$. Portanto, \overline{S} é um subespaço.
- \overline{S} é fechado sob o produto. De fato, se $a, b \in \overline{S}$, então existem seqüências $(a_n), (b_n) \subset S$ tais que $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$. Como S é uma subálgebra, $(a_n b_n) \subset S$, e pela Proposição 1.1.5, temos que $a_n b_n \rightarrow ab$. Assim, $ab \in \overline{S}$.

A terceira afirmação segue do fato de que um subespaço de um espaço completo é completo se, e somente se, for fechado. \square

Nos dedicaremos agora ao estudo de alguns exemplos. A maioria dos escolhidos aqui será de espaços que, por via de outros contextos, devem ser familiares ao leitor.

Exemplo 1.1.8. O corpo dos números complexos \mathbb{C} é uma álgebra de Banach com a norma e operações usuais.

Exemplo 1.1.9. Seja S um conjunto qualquer, o conjunto de todas as funções complexas limitadas de variável em S e denotado por $l^\infty(S)$, isto é:

$$l^\infty(S) = \{f : S \rightarrow \mathbb{C} : \sup_{x \in S} |f(x)| < \infty\},$$

é uma álgebra de Banach comutativa unital com as operações definidas ponto a ponto:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) \\ (fg)(x) &= f(x)g(x), \end{aligned}$$

e com a norma da convergência uniforme:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

As propriedades de álgebra comutativa são verificadas devido a $l^\infty(S)$ tomar valores num corpo. Claro, as operações ponto a ponto, bem como a norma, estão bem definidas devido ao fato de $l^\infty(S)$ ser o espaço das funções limitadas. A mesma observação quando aliada ao seguinte cálculo nos garantirá a propriedade de ser uma álgebra normada

$$\|fg\|_\infty = \sup_{x \in S} |(fg)(x)| = \sup_{x \in S} |f(x)g(x)| \leq \sup_{x \in S} |f(x)| \sup_{x \in S} |g(x)| = \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

A unidade de $l^\infty(S)$ é a função limitada $1 : S \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $x \mapsto 1$ como diretamente verificado.

Resta verificar que a norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|$ torna $l^\infty(S)$ num espaço completo. Para isso, considere uma sequência de Cauchy $(f_n) \subset l^\infty(S)$, dessa forma, dado um $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$ temos

$$\|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

Pela definição de $\|\cdot\|_\infty$ temos que $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ e assim para cada $x_0 \in S$ temos que $(f_n(x_0)) \subset \mathbb{C}$ é uma sequência de Cauchy. Como \mathbb{C} é completo existe $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$, podemos então construir a seguinte função:

$$f : S \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Propomos que f é o limite da sequência $(f_n) \subset l^\infty(S)$, objetivamos portanto provar que $f \in l^\infty(S)$ e $f_n \rightarrow f$.

Primeiramente provaremos que $f_n \rightarrow f$, para isso, dado um $\epsilon > 0$ vamos majorar $|f(x) - f_n(x)|$ por $\epsilon/2$ para n suficientemente grande. Pela definição de f , dado $\epsilon > 0$ temos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N_1$

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/4.$$

Como $(f_n) \subset l^\infty(S)$ é Cauchy então dado $\epsilon > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N_2$ temos

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon/4.$$

Então dado um $\epsilon > 0$ podemos tomar $n, m \geq \max\{N_1, N_2\}$ e obter que

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| \\ &< \epsilon/4 + \|f_m(x) - f_n(x)\|_\infty \\ &= \epsilon/4 + \epsilon/4 \\ &= \epsilon/2. \end{aligned}$$

Desse modo, $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/2 \forall x \in S$ e portanto

$$\sup_{x \in S} |f(x) - f_n(x)| = \|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon/2.$$

Obtemos então que dado $\epsilon > 0$ temos que $\|f - f_n\|_\infty < \epsilon$ para n suficientemente grande, isto é, $f_n \rightarrow f$.

Provaremos agora que $f \in l^\infty(S)$. Usaremos que $f_n \rightarrow f$. Como $(f_n) \subset l^\infty(S)$ então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n > 0$ tal que $|f_n(x)| < M_n$ e do fato de $f_n \rightarrow f$ então dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ temos $\|f - f_n\|_\infty < \epsilon$. Tome $\epsilon = 1$ e $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, então

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \\ &< \|f(x) - f_N(x)\|_\infty + M_N \\ &= 1 + M_N. \end{aligned}$$

Chegamos portanto a conclusão que f é limitada, ou seja, $f \in l^\infty(S)$. Achamos então o limite procurado e portanto $(l^\infty(S), \|\cdot\|_\infty)$ é completo. Segue das afirmações anteriores que $l^\infty(S)$ é uma álgebra de Banach unital.

Exemplo 1.1.10. Se Ω é um espaço topológico, o conjunto das funções complexas limitadas e contínuas:

$$C_b(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua e } \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty\};$$

é uma subálgebra unital fechada de $l^\infty(\Omega)$.

De fato, sejam $f, g \in C_b(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Como a continuidade e a limitação se comportam bem com as operações ponto a ponto, temos que $f + g, \lambda f, fg \in C_b(\Omega)$. Assim, $C_b(\Omega)$ é uma subálgebra. Além disso, a função constante $1 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $x \mapsto 1$, é limitada e contínua, com norma $\|1\|_\infty = 1$. Portanto, $C_b(\Omega)$ é uma subálgebra unital.

Para verificar que $C_b(\Omega)$ é fechada, seja $f \in \overline{C_b(\Omega)}$, ou seja, existe uma sequência $(f_n) \subset C_b(\Omega)$ tal que $f_n \rightarrow f$ em norma. Como a convergência ocorre na norma do supremo, a convergência é uniforme. Sendo assim, f é limitada e contínua. Logo, $f \in C_b(\Omega)$, e concluímos que $C_b(\Omega)$ é fechado.

Podemos concluir então que $C_b(\Omega)$ é uma álgebra de Banach unital e comutativa. Além disso, se Ω for compacto, pelo fato de que toda função contínua definida em um espaço compacto é limitada, obtemos que $C_b(\Omega) = C(\Omega)$, onde $C(\Omega)$ é o espaço das funções complexas contínuas com domínio em Ω .

Exemplo 1.1.11. Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. Dizemos que uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ se anula no infinito se, para todo $\epsilon > 0$, o conjunto

$$\{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$$

é compacto. Denotamos o conjunto das funções contínuas que se anulam no infinito por $C_0(X)$, ou seja,

$$C_0(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua e se anula no infinito}\}.$$

Afirmamos agora que $C_0(X)$ é uma subálgebra fechada de $C_b(X)$. Para demonstrar isso, utilizaremos o seguinte lema, que trata de uma caracterização de funções contínuas que se anulam no infinito.

Lema 1.1.12. Seja $C_0(X)$ o conjunto das funções contínuas que se anulam no infinito. Temos então que

$$f \in C_0(X) \iff \forall \epsilon > 0, \exists K \subset X \text{ compacto tal que } |f(x)| < \epsilon \forall x \in K^c.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $f \in C_0(X)$. Então, para todo $\epsilon > 0$, o conjunto

$$K = \{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$$

é compacto. Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe o compacto K tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in K^c$.

(\Leftarrow) Suponha agora que, dado $\epsilon > 0$, existe um compacto K tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in K^c$. Vamos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, o conjunto

$$C = \{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$$

é compacto. Para isso, é suficiente verificar que C é fechado e está contido no compacto K .

- C é fechado: Como f é contínua, $|f|$ também é contínua, e temos

$$C = |f|^{-1}([\epsilon, \infty))$$

que é a pré-imagem de um conjunto fechado sob uma função contínua, logo C é fechado.

- $C \subset K$: Vamos provar a contenção equivalente $K^c \subset C^c$. Se $x \in K^c$, então $|f(x)| < \epsilon$, o que implica que $x \notin C$. Portanto, $K^c \subset C^c$.

Logo, $C = \{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$ é compacto e, portanto, $f \in C_0(X)$. \square

Com esse lema, concluímos agora que $C_0(X)$ é uma subálgebra fechada de $C_b(X)$. Começemos provando que $C_0(X)$ é um subespaço.

- $C_0(X) \neq \emptyset$: A função constante igual a zero pertence a $C_0(X)$, logo $C_0(X)$ não é vazio.
- $C_0(X) \subset C_b(X)$: Seja $f \in C_0(X)$. Como f é contínua, resta mostrar que f é limitada. De fato, dado que $f \in C_0(X)$, para $\epsilon = 1$, existe um compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < 1$ para todo $x \in K^c$. Como funções contínuas preservam a compacidade e a união de compactos é compacta, o conjunto $W = f(K) \cup B_1[0]$ é compacto em \mathbb{C} . Logo, W é limitado. Além disso, se $x \in X$, então $f(x) \in W$, o que implica que $\text{Im}(f) \subset W$ e, portanto, f é limitada.

Agora, considere $f, g \in C_0(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Verificaremos que $f + g$, λf e fg pertencem a $C_0(X)$.

- $f + g \in C_0(X)$: Para todo $\epsilon > 0$, existem compactos $K_1, K_2 \subset X$ tal que

$$|f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo } x \in K_1^c \quad \text{e} \quad |g(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo } x \in K_2^c.$$

Como $K_1 \cup K_2$ é compacto e $(K_1 \cup K_2)^c = K_1^c \cap K_2^c$, temos que

$$|(f + g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

logo $f + g \in C_0(X)$.

- $\lambda f \in C_0(X)$: Como $f \in C_0(X)$, para todo $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ para todo $x \in K^c$. Logo, para esse mesmo compacto K ,

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda| |f(x)| < |\lambda| \frac{\epsilon}{|\lambda|} = \epsilon,$$

logo $\lambda f \in C_0(X)$.

- $fg \in C_0(X)$: Para todo $\epsilon > 0$, existem compactos $K_1, K_2 \subset X$ tal que

$$|f(x)| < \sqrt{\epsilon} \quad \text{para todo } x \in K_1^c \quad \text{e} \quad |g(x)| < \sqrt{\epsilon} \quad \text{para todo } x \in K_2^c.$$

Como $K_1 \cup K_2$ é compacto, temos que

$$|(fg)(x)| = |f(x)| |g(x)| < \sqrt{\epsilon} \sqrt{\epsilon} = \epsilon,$$

logo $fg \in C_0(X)$.

Disso segue que $C_0(X)$ é uma subálgebra de $C_b(X)$.

Finalmente, vamos provar que $C_0(X)$ é fechado. Seja (f_n) uma sequência em $C_0(X)$ tal que $f_n \rightarrow f$. Mostraremos que $f \in C_0(X)$. Como $(f_n) \subset C_0(X)$, para todo $\epsilon > 0$, existe um compacto $K_n \subset X$ tal que $|f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in K_n^c$. Além disso, como $f_n \rightarrow f$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in X$, $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, temos

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isso mostra que f é limitada e, portanto, $f \in C_0(X)$. Logo, $C_0(X)$ é fechado. Concluimos que $C_0(X)$ é uma subálgebra fechada de $C_b(X)$.

Nota: Pedimos ao leitor que observe o fato de que a condição de X ser localmente compacto não foi explicitamente utilizada no desenvolvimento do exemplo. Embora essa condição não tenha sido necessária até este ponto da discussão, garantimos que ela será relevante em contextos subsequentes, onde a hipótese de X localmente compacto será utilizada de forma mais clara. Por ora, restringimos o escopo da nossa exposição a apresentar exemplos que ilustram as propriedades de $C_0(X)$ sem recorrer diretamente a essa característica adicional de X .

Exemplo 1.1.13 (Álgebra de Operadores). Seja H um espaço de Hilbert, então $B(H) = \{T : H \rightarrow H : T \text{ é linear e limitado}\}$ é uma álgebra de Banach com as operações de espaço vetorial definidas ponto a ponto, a multiplicação de álgebra como a composição de operadores $\circ : H \rightarrow H$ dado por $(T_1, T_2) \mapsto T_1 \circ T_2$ (usualmente, o símbolo de composição “ \circ ” é omitido) e a norma considerada como a norma dos operadores:

$$\|\cdot\|_{op} : B(H) \rightarrow B(H)$$

$$T \mapsto \|T\|_{op} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|,$$

é uma álgebra de Banach.

É bem conhecido que $B(H)$ é um espaço vetorial com as operações propostas, para verificar as propriedades de álgebra tomemos $u, v, w \in B(H)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então o seguinte cálculo:

$$(u \circ (v + w))(x) = u((v + w)(x)) = u(v(x)) + u(w(x)) = (u \circ v + u \circ w)(x) \quad \forall x \in H,$$

nos garante que $u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ w$. A conclusão de que $(u + v) \circ w = u \circ w + v \circ w$ se obtém de maneira análoga. Além disso, por um cálculo semelhante, podemos concluir que $\lambda(u \circ v) = (\lambda u) \circ v = u \circ (\lambda v)$.

Também é bem conhecido que a norma dos operadores é submultiplicativa, de fato, sejam $T, S \in B(H)$ e $x \in H$, note que como T e S são multiplicativas obtemos

$$\|(TS)(x)\| = \|T(S(x))\| \leq \|T\|_{op} \|Sx\| \leq \|T\|_{op} \|S\|_{op} \|x\| \quad \forall x \in H.$$

Pela minimalidade de $\|TS\|_{op}$ temos então a desigualdade $\|TS\|_{op} \leq \|T\|_{op}\|S\|_{op}$, o que prova a afirmação.

Como H é um espaço de Hilbert, então é completo com a norma induzida pelo produto interno, segue, por um resultado bem conhecido, que $B(H)$ é completo com a norma induzida de operadores e portanto $B(H)$ é uma álgebra de Banach.

Note também que o operador linear limitado $id : H \rightarrow H$ dado por $x \mapsto x$ é a unidade de $B(H)$ o que nos garante que $B(H)$ é unital.

Os Exemplos 1.1.8 - 1.1.13 trataram de álgebras comutativas, entretanto, esse não é o caso para $B(H)$. Para ver isso, considere $H = \mathbb{C}^2$, afirmamos que a álgebra $B(\mathbb{C}^2)$ não é comutativa.

Considere os operadores $T(x, y) = (x, 2y)$, $S(x, y) = (y, x)$ em $B(\mathbb{C}^2)$, nesse caso, $TS \neq ST$, de fato:

$$(T \circ S)(x, y) = T(y, x) = (y, 2x) \text{ ao passo que } (S \circ T)(x, y) = S(x, 2y) = (2y, x)$$

Note que $B(H)$ generaliza o seguinte exemplo.

Exemplo 1.1.14. Considere $M_n(\mathbb{C})$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entrada nos complexos. Note que munida das operações matriciais bem conhecidas, $M_n(\mathbb{C})$ é uma álgebra. Fazendo uma identificação com a álgebra $B(\mathbb{C}^n)$ a tornamos numa álgebra de Banach unital.

Como a soma, multiplicação por escalar e multiplicação matricial de matrizes triangulares superiores/inferiores é ainda superior/inferior, bem como a matriz identidade é tanto triangular inferior quanto superior, então os espaços dessas matrizes são subálgebras unitais de $M_n(\mathbb{C})$.

Exemplo 1.1.15. Note que na Definição 1.1.2 exigimos que uma subálgebra unital não apenas contenha uma unidade, mas também que esta coincida com a unidade da álgebra ambiente. Vamos aqui apresentar uma subálgebra que possua uma unidade mas não seja uma subálgebra unital.

Considere a álgebra $M_2(\mathbb{C})$, denote a matriz identidade por $1_{M_2(\mathbb{C})}$ e considere a seguinte subálgebra:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{tal que } \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Note que a prova de que B é de fato uma subálgebra deve-se exclusivamente a aplicação de operações matriciais bem conhecidas. Repare também que B tem como unidade a seguinte matriz, denotada por 1_B ,

$$1_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, B é uma subálgebra unital de $M_n(\mathbb{C})$ com $1_B \neq 1_{M_n(\mathbb{C})}$.

Exemplo 1.1.16 (Álgebra do Disco). Seja $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ o disco unitário fechado centrado em 0 no plano complexo e considere o conjunto:

$$A(D) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua e analítica no interior de } D\}.$$

Quando munido das operações ponto a ponto e da norma do supremo, obtemos que $A(D)$ é uma álgebra de Banach unital e comutativa. Essa afirmação se deve ao fato de D ser compacto, da unidade de $A(D)$ ser a função contínua igual a 1 e da analiticidade, bem como a continuidade, se comportarem bem com as operações ponto a ponto, isto é, $A(D)$ é uma subálgebra de $C(D) = C_b(D)$. De fato, $A(D)$ é uma subálgebra fechada de $C(D)$, e portanto uma álgebra de Banach.

Os exemplos seguintes serão um dos raros momentos em que esse material falará um pouco de teoria da medida.

Exemplo 1.1.17. Se (X, Σ) é um espaço mensurável, então o conjunto $B_\infty(X, \Sigma)$ das funções Σ -mensuráveis e limitadas é uma subálgebra de Banach de $l^\infty(X)$.

Lembramos que dado um espaço de medida (X, Σ, μ) , duas funções em $L(X, \Sigma, \mu)$ são ditas μ -equivalentes se são iguais μ quase sempre, abreviadamente, $\mu.q.s$, denotamos então por $f \sim g$ $\mu.q.s$. A classe de equivalência de $f \in L(X, \Sigma, \mu)$, denotada por $[f]$ é o conjunto: $[f] = \{g \in L(X, \Sigma, \mu) : f \sim g \mu.q.s\}$.

É usual denotar a classe de equivalência $[f]$ simplesmente por f .

Exemplo 1.1.18. O espaço $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ consiste de todas as funções Σ -mensuráveis que são limitadas $\mu.q.s$, isto é, $f \in L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ quando existe um $M > 0$ tal que $|f| \leq M$ $\mu.q.s$. Quando munido das operações $[f] + [g] = [f + g]$, $\lambda[f] = [\lambda f]$ e $[f] \cdot [g] = [fg]$ e da norma:

$$\|f\|_\infty = \inf\{\beta : |f| \leq \beta \mu.q.s\},$$

A boa definição das operações vem da subaditividade da medida μ e a verificação de que $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ é uma álgebra é direta. A demonstração de que $(L^\infty(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial será omitida, mas segue do fato que para todo $f \in L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ temos $|f| \leq \|f\|_\infty$ $\mu.q.s$, provaremos esse fato. Dado $f \in L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ temos pela definição da norma $\|f\|_\infty$ que para $1/n > 0$, existe $\beta_n \in \{\beta : |f| \leq \beta \mu.q.s\}$ tal que

$$\beta_n \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n}.$$

Como $|f| \leq \beta_n$ $\mu.q.s$ então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $N_n \in \Sigma$ com $\mu(N_n) = 0$ tal que $|f(x)| \leq \beta_n$ para $x \in N_n^c$. Considerando $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ note que pela subaditividade da

medida temos $\mu(N) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(N_n) = 0$, portanto:

$$|f(x)| \leq \beta_n \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \quad \text{para } x \in N^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n^c.$$

Agora podemos passar o limite $n \rightarrow \infty$ e então obter que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n^c$, ou seja, $|f| \leq \|f\|_\infty$ $\mu.q.s.$

Para ver que a norma $\|\cdot\|_\infty$ é submultiplicativa note que como a norma é dada por um ínfimo é natural considerar obter a equação:

$$\|fg\|_\infty \leq (\|f\|_\infty + \epsilon)(\|g\|_\infty + \epsilon) \quad \forall f, g \in L^\infty(X, \Sigma, \mu) \text{ e } \forall \epsilon > 0.$$

e então passar o limite $\epsilon \rightarrow 0$. para isso, dados $f, g \in L^\infty(X, \Sigma, \mu)$, sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ e \mathcal{B}_3 o conjunto dos majorantes $\mu.q.s.$ de $|f|, |g|$ e $|fg|$ respectivamente. Dado $\epsilon > 0$, como $\|f\|_\infty$ é ínfimo de \mathcal{B}_1 segue que existe $\alpha \in \mathcal{B}_1$ tal que

$$\alpha < \|f\|_\infty + \epsilon.$$

Semelhantemente, como $\|g\|_\infty$ é ínfimo de \mathcal{B}_2 então existe $\beta \in \mathcal{B}_2$ tal que

$$\beta < \|g\|_\infty + \epsilon.$$

Segue portanto que $\alpha\beta < (\|f\|_\infty + \epsilon)(\|g\|_\infty + \epsilon)$. Agora por definição de \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 existem $N_1, N_2 \in \Sigma$ com $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ tal que

$$|f(x)| \leq \alpha \text{ para } x \in N_1^c \quad |g(x)| \leq \beta \text{ para } x \in N_2^c.$$

Dessa forma, considerando $N_3 = N_1 \cap N_2 \in \Sigma$ e lembrando que $\mu(N_3) \leq \mu(N_1) + \mu(N_2) = 0$ segue que $|(fg)(x)| \leq \alpha\beta$ para $x \in N_3^c = N_1^c \cup N_2^c$. Disso temos que $(\|f\|_\infty + \epsilon)(\|g\|_\infty + \epsilon)$ é um majorante $\mu.q.s.$ de $|fg|$, logo, por definição vale:

$$\|fg\|_\infty \leq (\|f\|_\infty + \epsilon)(\|g\|_\infty + \epsilon).$$

Basta agora passar o limite $\epsilon \rightarrow 0$ para obter $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$.

Assumindo conhecido que $(L^\infty(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ de fato forma um espaço normado, vamos verificar que é um espaço completo. Seja $(f_n) \subset L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ uma sequência de Cauchy, portanto, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$ temos

$$\|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que existe $N_n \in \Sigma$ com $\mu(N_n) = 0$ onde $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ para todo $x \in N_n^c$. Definindo $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ temos que $\mu(N) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(N_n) = 0$, ou ainda, $\mu(N) = 0$. Segue então que

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty, \quad x \in N^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n^c.$$

Dessa forma $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ para qualquer $x \in N^c$ e portanto $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ para $x \in N^c$. Disso segue que (f_n) é Cauchy em \mathbb{R} e portanto, o limite de f existe. Defina:

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & x \in N^c \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Segue então que $f \in l^\infty(X)$, de fato, se $x \in N$ então $f(x) = 0$ já se $x \in N^c$ então temos $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ e note que, como $(f_n) \subset L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ é Cauchy, então é limitada e existe $M > 0$ tal que $\|f_n\|_\infty \leq M$ e portanto, para $x \in N^c$ segue $|f(x)| \leq \|f\|_\infty \leq M$. Note também que como discutido no Exemplo 1.1.9, $l^\infty(X)$ é completo com a norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Definiremos a sequência $(g_n) \subset l^\infty(X)$ por

$$g_n = \begin{cases} f_n & x \in N^c \\ 0 & c.c \end{cases}$$

com isso teremos que $g_n \rightarrow f$ em $l^\infty(X)$ implicará em $f_n \rightarrow f$ em $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$. Provaremos primeiro que g_n converge para f em $l^\infty(X)$. Seja $\epsilon > 0$ qualquer e $x \in X$, se $x \in N$, seguirá por definição que $f(x) = g_n(x) = 0$, teremos então que

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g_n(x)| = \sup_{x \in N^c} |f(x) - g_n(x)|.$$

Mas caso $x \in N^c$ teremos por definição que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ e $g_n(x) = f_n(x)$, segue portanto que para n grande temos que $|f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)| \leq \epsilon/2$, passando o sup temos $\sup_{x \in N^c} |f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)| \leq \epsilon/2$ e portanto obtemos a desigualdade desejada:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)| = \sup_{x \in N^c} |f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)| \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

Provemos agora que a convergência em $l^\infty(X)$ de g_n para f implica que f_n converge para f em $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$. De fato, dado que $g_n \rightarrow f$ em $l^\infty(X)$ segue que para todo $\epsilon > 0$ e para n , mantendo em mente que $\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x \in N^c} |f(x) - f_n(x)|$ por conta da definição de g_n e f , temos que:

$$\sup_{x \in N^c} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora como $|f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in N^c} |f(x) - f_n(x)| < \epsilon/2$ segue que existe um conjunto de medida nula (o conjunto N) tal que fora dele $|f(x) - f_n(x)|$ é majorado por $\epsilon/2$, ou seja, $\epsilon/2$ é um majorante $\mu.q.s$ de $|f(x) - f_n(x)|$, segue então que:

$$\|f(x) - f_n(x)\|_\infty = \inf\{\beta : |f(x) - f_n(x)| \leq \beta \mu.q.s\} \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

Concluimos portanto que $f_n \rightarrow f$ em $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$, ou seja, $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço completo e portanto uma álgebra de Banach.

Recordamos que dado um espaço vetorial normado X é possível identificá-lo, através de uma isometria, como um subespaço denso de um espaço de Banach \widetilde{X} , este é chamado de *completamento* de X e é único a menos de isometrias. A próxima proposição usará esses conceitos para que dada uma álgebra de normada A_0 consigamos extrair uma álgebra de Banach.

Proposição 1.1.19. Suponha que A_0 é uma álgebra normada e A denota o seu completamento como espaço de Banach. Então A adquire uma estrutura natural de álgebra de Banach.

Demonstração. se $x, y \in A$ então como $A = \overline{A_0}$ podemos tomar seqüências $(x_n), (y_n) \subset A_0$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Como ambas seqüências são convergentes então são limitadas, podemos portanto tomar a constante $K > 0$ tal que $\|x_n\|, \|y_n\| \leq K \forall n \in \mathbb{N}$. Note que

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - x_m y_m\| &= \|x_n y_n - x_n y_m + x_n y_m - x_m y_m\| \\ &= \|x_n(y_n - y_m) + (x_n - x_m)y_m\| \\ &\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y_m\| + \|x_n - x_m\| \cdot \|y_m\|, \end{aligned}$$

Como (x_n) e (y_n) são convergentes então são Cauchy e para n, m suficientemente grandes podemos estipular $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon/2K$ e $\|y_n - y_m\| \leq \epsilon/2K$ e portanto, através do cálculo acima, concluímos que $(x_n y_n)$ é cauchy em $A_0 \subset A$ e disso teremos que $(x_n y_n)$ é Cauchy do espaço de Banach A , segue que essa seqüência converge em A , digamos, para xy . Defina agora o produto $\cdot : A \times A \rightarrow A$ dado por $(x, y) \mapsto xy = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n$.

Provemos que o produto proposto é definido sem ambigüidade. Considere as seqüências $(x_n), (a_n) \subset A_0$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $a_n \rightarrow x$ e $(y_n), (b_n) \subset A_0$ tal que $y_n \rightarrow y$ e $b_n \rightarrow x$ provemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n$. Para isso, basta mostrar que $\|a_n b_n - x_n y_n\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Temos que

$$\begin{aligned} \|a_n b_n - x_n y_n\| &= \|a_n b_n - x_n b_n + x_n b_n - x_n y_n\| \\ &\leq \|a_n b_n - x_n b_n\| + \|x_n b_n - x_n y_n\| \\ &\leq \|a_n - x_n\| \cdot \|b_n\| + \|x_n\| \cdot \|b_n - y_n\|, \end{aligned}$$

note que como $\|b_n\|$ e $\|x_n\|$ são limitadas e como $\|a_n - x_n\|, \|b_n - y_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ basta tomar o limite em n para obter $\|a_n b_n - x_n y_n\| \rightarrow 0$.

Resta apenas verificar que a operação definida em A obedece as condições de uma multiplicação de álgebra. Essa conclusão é alcançada aplicando as propriedades bem conhecidas do limite. \square

Seja A uma álgebra normada unital com unidade 1. Nos dedicaremos brevemente a discutir acerca da exigência $\|1\| = 1$ feita na Definição 1.1.4. Como $\|1\| = \|1 \cdot 1\| \leq \|1\| \cdot \|1\|$

obtemos $1 \leq \|1\|$, entretanto, a condição $\|1\| \geq 1$ para obter a igualdade não pode ser assegurada no contexto geral. Para ver isso, considere uma álgebra normada unital $(A, \|\cdot\|_1)$, definindo $\|\cdot\|_2 = 2\|\cdot\|_1$ então $\|\cdot\|_2$ é uma norma em A e através do cálculo:

$$\|ab\|_2 = 2\|ab\|_1 \leq 2\|a\|_1\|b\|_1 \leq 4\|a\|_1\|b\|_1 = \|a\|_2\|b\|_2 \quad \forall a, b \in A,$$

obteremos que $\|\cdot\|_2$ é submultiplicativa, entretanto, como $\|1\|_2 = 2\|1\|_1 = 2$ o par $(A, \|\cdot\|_2)$ não é um álgebra normada unital.

Vamos agora nos dedicar a provar uma equivalência a respeito da álgebra $C_0(X)$, introduzida no Exemplo 1.1.11. Entretanto, antes de prosseguirmos nessa direção, vamos introduzir algum material preliminar.

Definição 1.1.20. Seja Ω um espaço topológico e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função, definimos o *suporte* de f , denotado por $\text{supp}(f)$, como o menor subconjunto fechado contendo todos os pontos que não são levados em zero, ou seja, é o conjunto:

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Definimos também o *suporte aberto* de f como

$$\text{supp}_0(f) := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}.$$

Denotamos o *espaço das funções contínuas de suporte compacto* por $C_c(\Omega)$, isto é,

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \text{o suporte de } f \text{ é compacto}\}.$$

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que leva x em 0 se $x \leq 0$ e em 1 se $x > 0$ tem suporte $\overline{(0, +\infty)} = [0, +\infty)$. Já a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que leva x em 0 se $x > 2$ ou $x < -2$ e em $x^2 - 4$ se $x \in [-2, 2]$ tem $\text{supp}(g) = [-2, 2]$ e é contínua portanto $g \in C_c(\mathbb{R})$.

Caso X seja um Hausdorff localmente compacto então $C_c(X) \subset C_0(X)$. De fato, seja $f \in C_c(X)$, logo f é contínua de suporte compacto, resta portanto verificar que dado um $\epsilon > 0$ o conjunto $K = \{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$ é compacto. Como X é Hausdorff então é suficiente ver que K é fechado e $K \subset \text{supp}(f)$, com efeito, $K = |f|^{-1}([\epsilon, +\infty))$ e $K \subset \{x \in X : f(x) \neq 0\} \subset \text{supp}(f)$, então segue o resultado.

O seguinte teorema usualmente é referido como a “versão localmente compacta” do Lema de Urysohn (note que a hipótese exige um localmente compacto Hausdorff).

Teorema 1.1.21 (Lema de Urysohn). Seja X um localmente compacto Hausdorff, K um compacto e V um aberto tal que $K \subset V$. Então $\exists f \in C_c(X)$ tal que $\text{Im}(f) \subset [0, 1]$, $f(x) = 1 \quad \forall x \in K$ e $\text{supp}(f) \subset V$.

Ainda explicitamos o seguinte resultado de topologia.

Proposição 1.1.22. Se X é um espaço Hausdorff, então X é localmente compacto se, e somente se, para qualquer $x \in X$ existe vizinhança U de x tal que \bar{U} é compacto

Em posse disso podemos demonstrar a proposição desejada.

Proposição 1.1.23. Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. As seguintes afirmações são equivalentes

- i. X é compacto.
- ii. $C_0(X) = C(X)$.
- iii. $C_0(X)$ é unital.
- iv. $1 \in C_0(X)$ onde “1” é a função constante igual a 1.

Demonstração. (i. \Rightarrow ii.) Suponha que X é compacto, a inclusão $C_0(X) \subset C(X)$ é imediata. Para $C(X) \subset C_0(X)$ seja $f \in C(X)$, como f é contínua, então dado $\epsilon > 0$ o conjunto

$$K = \{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\},$$

é fechado. Como $K \subset X$ temos que K é um compacto, segue então que $f \in C_0(X)$.

(ii. \Rightarrow iii.) Suponha agora que $C_0(X) = C(X)$, como $C(X)$ é unital segue que $C_0(X)$ também o é.

(iii. \Rightarrow iv) Suponha agora que $C_0(X)$ é unital de unidade u , provaremos que $1 = u$.

Seja $x \in X$, pela Proposição 1.1.22 existe uma vizinhança U de x tal que \bar{U} é compacto. Pelo Teorema 1.1.21 existe $f \in C_c(X)$ tal que $\text{Im}(f) \subset [0, 1]$, $f|_{\bar{U}} = 1$. Como discutido na Definição 1.1.20 temos que $f \in C_0(X)$ já que X é Hausdorff. Assim temos

$$1 = f(x) = (uf)(x) = u(x)f(x) = u(x)1 = u(x).$$

Como x é arbitrário, segue que $u = 1$.

(iv. \Rightarrow i.) Suponha que $1 \in C_0(X)$, dessa maneira a função 1 se anula no infinito, ou seja, dado $\epsilon > 0$ o conjunto $K = \{x \in X : |1(x)| \geq \epsilon\}$ é compacto. Escolha então um $\epsilon < 1$ e obteremos que $X = K$ e, portanto, compacto. \square

Voltemos nossa discussão a respeito de subálgebras, para começar, a propriedade “ser uma subálgebra” é preservada por intersecções arbitrárias. Com efeito, se J é um conjunto de índices e $(B_\alpha)_{\alpha \in J}$ é uma família de subálgebras de uma álgebra A então $\bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha$ é ainda uma subálgebra de A . De fato, se $a, b \in \bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então do fato de cada B_α ser uma subálgebra obtemos que $a + b$, λa , $ab \in B_\alpha$ para todo $\alpha \in J$ provando a afirmação.

Podemos utilizar o fato provado no parágrafo anterior para que dado um conjunto qualquer S contido numa álgebra A extraímos uma subálgebra minimal (no sentido da inclusão). Essa álgebra é chamada de *subálgebra gerada* por S e é a protagonista da definição a seguir.

Definição 1.1.24. Seja A uma álgebra e $S \subset A$ dizemos que a intersecção de todas as subálgebras de A que contém S , isto é, o seguinte conjunto:

$$C = \bigcap \{B \subset A : B \text{ é uma subálgebra de } A \text{ e } B \supset S\}.$$

Esse conjunto é chamado de *subálgebra gerada por S* e é a menor subálgebra que contém S .

Exemplo 1.1.25. Seja A uma álgebra e $a \in A$ a subálgebra B gerada pelo singleto $\{a\}$ consiste dos elementos da forma $\sum_{i=1}^n \lambda_i a^i$. Com efeito, note que B é de fato uma subálgebra e $B \supset \{a\}$. Resta portanto verificar que B é a menor subálgebra que contém $\{a\}$, para isso, supomos que exista uma subálgebra M contendo $\{a\}$ tal que $M \subset B$. Desejamos provar que $B = M$. Seja $x \in B$, temos que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a^i$ para algum $n \in \mathbb{N}$, como $M \supset \{a\}$ então $a^i \in M$ o que nos dá $\lambda_i a^i \in M$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ que por sua vez nos concede $\sum_{i=1}^n \lambda_i a^i \in M$. Assim, B é a subálgebra gerada por $\{a\}$.

Podemos denotar a subálgebra gerada por $\{a\}$ por $C(a)$ e pela discussão acima escrever

$$C(a) = \left\{ \sum_{i=1}^{\text{finito}} \lambda_i a^i \quad : \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Quando for o caso de A ser unital e quisermos considerar a álgebra gerada por $\{1, a\}$, denotada por $C(1, a)$, convencionamos que $y^0 = 1$ para qualquer $y \in A$ e escrevemos

$$C(1, a) = \left\{ \sum_{i=0}^{\text{finito}} \lambda_i a^i \quad : \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Definição 1.1.26. Se A é uma álgebra normada, a álgebra fechada C gerada pelo conjunto S é a menor álgebra fechada contendo S . Seja B a subálgebra gerada por S , pela minimalidade de B e do fecho obtemos que $C = \overline{B}$.

Como discutido no exemplo anterior, se A é uma álgebra de Banach e $a \in A$ denotando $C(a)$ pela álgebra fechada gerada por $\{a\}$ e, se A for unital, $C(1, a)$ pela álgebra fechada gerada por $\{1, a\}$ temos

$$C(a) = \overline{\left\{ \sum_{i=1}^{\text{finito}} \lambda_i a^i \quad : \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}} \quad C(1, a) = \overline{\left\{ \sum_{i=0}^{\text{finito}} \lambda_i a^i \quad : \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}}.$$

1.2 Homomorfismos e Ideais

Vamos agora introduzir a noção de homomorfismo própria dessa teoria, esse será o mapa que preserva as operações de álgebra, em seguida definiremos a noção de ideal (será um pouco diferente do contexto de anéis) e ideal maximal. Os principais resultados dessa seção é que poderemos “consertar” álgebras que faltam unidade ou que a norma não é suficientemente boa para nos dar uma álgebra normada. Para uma álgebra A sem unidade isso será feito definindo uma álgebra relacionada unital A^1 , chamada de *unitização*, e enxergar A como uma subálgebra de A^1 . Se A não tiver uma norma suficientemente boa definiremos em A^1 uma norma equivalente que faz de A uma álgebra normada.

Definição 1.2.1. Dizemos que uma função $\varphi : A \rightarrow B$ ligando duas álgebras A e B é um *homomorfismo de álgebras* se ela preserva as operações de álgebra, isto é, se $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ e $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Por vezes dizemos, por brevidade, que φ é um *homomorfismo*. Se um homomorfismo preservar normas, isto é, $\|\varphi(a)\| = \|a\|$ para todo $a \in A$ dizemos que é uma *isometria*, note que se φ for isométrico então é uma função injetora. Se um homomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ for bijetor, dizemos que é um *isomorfismo* e as álgebras A e B são ditas *isomorfas*.

Dizemos que um homomorfismo φ é *unital* se A e B são álgebras unitais de unidades respectivamente 1_A e 1_B e, além disso, $\varphi(1_A) = 1_B$, nesse sentido, dizemos que o homomorfismo preserva unidades.

Se A e B são álgebras e $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo, então dizemos que o conjunto $\text{Ker}(\varphi) = \{a \in A : \varphi(a) = 0\}$ é o *kernel* ou *núcleo* de φ . É direto verificar que ambos o kernel e a imagem de φ , denotada por $\text{Im}(\varphi)$ são subálgebras de B .

Exemplo 1.2.2. Seja A é uma álgebra unital e defina L por

$$L : A \rightarrow B(A), \quad a \mapsto L_a$$

onde $L_a \in B(A)$ é o mapa linear limitado dado por $L_a(x) = ax$. Então L é um homomorfismo unital de álgebras. De fato, L está bem definida, é direto notar que L é linear e tomando $x \in A$, o cálculo

$$\|L_a(x)\| = \|ax\| \leq \|a\| \cdot \|x\|,$$

nos garante que L_a é limitado. Note que o fato de L_a ser linear implica que L é um linear, sejam $a, b \in A$, e $x \in A$ o cálculo $L_{ab}x = (ab)x = a(bx) = L_a(L_bx) = L_aL_bx$ nos conclui que L é um homomorfismo. Tomando $1_A \in A$ repare que $L_{1_A} = Id_A$, ou seja, aplicada na unidade de A , obtemos a unidade de $B(A)$, L é, portanto, unital. Repare que, analogamente, a função

$$R : A \rightarrow B(A) \quad a \mapsto R_a,$$

onde $R_a \in B(A)$ é o mapa $R_a(x) = xa$ é um homomorfismo unital.

Fixado um complexo $z \in \mathbb{C}$, seja $p(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \cdots + \lambda_n z^n$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, um polinômio na álgebra de polinômios $\mathbb{C}[z]$. para $a \in A$ denotamos

$$p(a) = \lambda_0 1_A + \lambda_1 a + \cdots + \lambda_n a^n.$$

Exemplo 1.2.3. Fixado um $z \in \mathbb{C}$ e $a \in A$ numa álgebra A unital, temos que a função

$$\varphi_a : \mathbb{C}[z] \longrightarrow A \quad \text{dada por} \quad p \longmapsto p(a),$$

é um homomorfismo unital.

A proposição seguinte nos concede uma maneira de concluir quanto a igualdade de dois homomorfismos em razão deles coincidirem num conjunto S .

Proposição 1.2.4. Sejam φ e ψ homomorfismos contínuos entre álgebras normadas A e B , se φ e ψ coincidem em um conjunto S tal que A é a álgebra fechada gerada por S temos que $\varphi = \psi$.

Demonstração. Basta definirmos o conjunto $C = \{a \in A : \varphi(a) = \psi(a)\}$. onde φ e ψ coincidem e provar a igualdade $A = C$, para isso, utilizaremos da minimalidade de A como menor subálgebra fechada contendo S , isto é, objetivamos mostrar que C tem essa propriedade. De fato, $0 \in C$ e $C \subset A$ agora, se $a, b \in C$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então os cálculos seguintes

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \psi(a) + \psi(b) = \psi(a + b)$$

$$\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a) = \lambda \psi(a) = \psi(\lambda a)$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a)\psi(b) = \psi(ab),$$

demonstram que C é uma subálgebra de A .

Para verificar que C é fechado, basta exibir o conjunto como a imagem inversa de um fechado, no caso, lançando mão de que φ e ψ são contínuos, ao escrever $C = (\varphi - \psi)^{-1}(\{0\})$ concluímos que C é fechado.

Pela minimalidade de A como subálgebra fechada segue que $C = A$ e como os homomorfismos coincidem em C , segue o resultado. \square

Introduziremos mais alguns conceitos próprios de álgebra que serão utilizados ao decorrer desse material.

Definição 1.2.5. Um subconjunto não vazio $I \subset A_0$ de uma álgebra normada A_0 é dito ser um *ideal* ou *ideal bilateral* de A_0 se as seguintes condições são satisfeitas para todas as escolhas de $x, y \in I$, $a \in A_0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

- i. $\lambda x + y \in I$, ou seja, I é um subespaço vetorial

- ii. $xa \in I$, ou seja, I é fechado pela multiplicação à esquerda
- iii. $ax \in I$, ou seja, I é fechado pela multiplicação à direita.

Se I satisfaz apenas i e ii então é chamado de *ideal à direita* já se satisfaz i e iii é chamado de *ideal à esquerda*, em ambos os casos, I é chamado de *ideal lateral*. Claro que se a álgebra for comutativa então ambos os ideais laterais coincidem, ademais, é importante ressaltar que se I é um ideal então também é uma subálgebra.

Note também que $\{0\}$ e A_0 satisfazem a definição de ideal, nos referiremos a ambos como *ideais triviais*. Um *ideal próprio* é um ideal I não trivial, isto é, distinto de $\{0\}$ e A_0 .

Diremos que I é um *ideal maximal* se for um ideal próprio que é maximal com respeito à operação de contenção de conjuntos, ou seja, para todo $J \subset A_0$ ideal próprio tal que $I \subset J$ então $I = J$ ou $J = A_0$.

Observação 1.2.6. Notemos que a definição de ideal concedida aqui, através da condição i, exige que conjunto candidato a ideal seja um subespaço vetorial. Portanto, o nosso entendimento de ideal nesse trabalho se difere do contexto de teoria de anéis na qual o leitor pode ter encontrado uma definição restrita ao caso $\lambda = -1$ no item i.

Notemos também que de acordo com a definição aqui empregada $\{0\}$ não é um ideal maximal. Apesar disso, para a excepcionalidade de $A_0 = \mathbb{C}$ será futuramente conveniente considerar $\{0\}$ um ideal maximal.

Alguns objetos já tratados até aqui são ideais, a saber, se $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras então $\text{Ker}(\varphi)$ é um ideal. Outro exemplo um pouco mais elaborado será tratado abaixo.

Exemplo 1.2.7. Se X é um espaço Hausdorff localmente compacto então $C_0(X)$ é um ideal de $C_b(X)$. De fato, como observado no Exemplo 1.1.11 $C_0(X)$ é uma subálgebra comutativa, portanto, basta agora verificar umas das alternativas i) e ii) na Definição 1.2.5, provaremos o item ii). Sejam $f \in C_0(X)$ e $g \in C_b(X)$. de $g \in C_b(X)$ extraímos que

$$\exists M > 0 \text{ uma constante tal que } |g(x)| < M \forall x \in X$$

Do fato de $f \in C_0(X)$ incorreremos em

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \subset X \text{ compacto tal que } |f(x)| < \epsilon/M \forall x \in K^c$$

Juntando essas duas informações obteremos que

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \subset X \text{ compacto tal que } |(fg)(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < M \cdot \epsilon/M = \epsilon \forall x \in K^c$$

Dessa argumentação concluímos que $C_0(X)$ é um ideal de $C_b(X)$.

Semelhantemente ao desenvolvido para subálgebras, apresentamos os três seguintes resultados, amalgamados numa proposição.

Proposição 1.2.8. O fecho de um ideal é ainda um ideal e a intersecção arbitrária de ideais é novamente um ideal. A imagem inversa de um ideal por um homomorfismo é também um ideal.

Demonstração. Provemos as três afirmações.

- Seja I um ideal de uma álgebra A , provemos que \bar{I} é ainda um ideal. Como já discutido \bar{I} é um subespaço vetorial, vamos então checar que I é fechado por multiplicação à esquerda e à direita. Sejam $x \in \bar{I}$ e $a \in A$ então existe $(x_n) \subset I$ tal que $x_n \rightarrow x$, como $x_n \in I$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e I é um ideal então $(ax_n), (x_na) \subset I$ e como $ax_n \rightarrow ax$ e $x_na \rightarrow xa$ segue que $ax, xa \in \bar{I}$ e portanto \bar{I} é um ideal.
- Provaremos que a intersecção arbitrária de ideais continua sendo um ideal. Considere A uma álgebra, J um conjunto de índices e $(I_\alpha)_{\alpha \in J}$ uma família de ideais em A , provaremos que $\bigcap_{\alpha \in J} I_\alpha$ é um ideal. De fato $\bigcap_{\alpha \in J} I_\alpha$ é um subespaço e dados $x \in \bigcap_{\alpha \in J} I_\alpha$ e $a \in A$ então como cada I_α é um ideal, obtemos que $ax, xa \in I_\alpha$ para todo $\alpha \in J$. Segue então que $\bigcap_{\alpha \in J} I_\alpha$ é um ideal.
- Seja $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras e $I \subset B$ um ideal de B . Sejam $x, y \in \varphi^{-1}(I)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $b \in B$, como φ é um homomorfismo e $\varphi(x), \varphi(y) \in I$ os seguintes cálculos comprovam que $\varphi^{-1}(I) \subset A$ é um ideal de A

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \in I \text{ ou seja } x + y \in \varphi^{-1}(I)$$

$$\lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x) \in I \text{ ou seja } \lambda x \in \varphi^{-1}(I)$$

$$a\varphi(x) = \varphi(ax) \in I \text{ ou seja } ax \in \varphi^{-1}(I)$$

$$\varphi(x)a = \varphi(xa) \in I \text{ ou seja } xa \in \varphi^{-1}(I).$$

□

Dado um conjunto $S \subset A$ qualquer, a segunda afirmação da proposição anterior nos permite achar um ideal minimal (com respeito a contenção de conjuntos) que contém S , a saber, nos referimos ao conjunto

$$J = \bigcap \{I \subset A : I \text{ é um ideal de } A \text{ e } I \supset S\}.$$

Podemos então definir o seguinte objeto.

Definição 1.2.9. Se $S \subset A$ é um subconjunto qualquer numa álgebra A definimos o *ideal gerado por S* como o menor ideal que contém S , isto é, consiste do ideal

$$J = \bigcap \{I \subset A : I \text{ é um ideal de } A \text{ e } I \supset S\}.$$

O *ideal fechado gerado por S* é o menor ideal fechado que contém S , ou seja, é o ideal exibido abaixo

$$\bar{J} = \overline{\bigcap \{I \subset A : I \text{ é um ideal de } A \text{ e } I \supset S\}}.$$

A propriedade “ser um ideal de” não se comporta bem ao se tomar uniões arbitrárias, esse problema pode, entretanto, ser contornado quando a relação “ \subset ” é totalmente ordenada. Esse fato e o lema de Zorn serão utilizados na proposição a seguir.

Proposição 1.2.10. Seja A uma álgebra de Banach comutativa unital, se $I_0 \subset A$ é um ideal próprio, então existe um ideal maximal $I \subset A$ tal que $I \supset I_0$.

Demonstração. Definimos Π como o conjunto de todos os ideais próprios de A , pela hipótese, $\Pi \neq \emptyset$. Muna Π da relação de ordem parcial (\subset) e seja $\mathcal{C} \subset \Pi$ uma cadeia, considere:

$$\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I.$$

Provaremos que $\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$ é um cota superior, isto é $\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I \supset C$ para todo $C \in \mathcal{C}$ e $\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I \in \mathcal{C}$, note que isso nos garantirá, pelo lema de Zorn, a existência de um elemento maximal e portanto, de um ideal maximal (o próprio elemento maximal). Repare que dado qualquer $C \in \mathcal{C}$ temos $C \subset \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$ por construção.

Para ver que $\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$ é um subespaço, notemos que $\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I \subset A$ e $\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I \neq \emptyset$, e pelo fato de a relação (\subset) ser uma ordem total em \mathcal{C} temos que dados $x, y \in \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$, isto é, existem $I_1, I_2 \in \mathcal{C}$ tais que $x \in I_1$ e $y \in I_2$, podemos supor sem perda de generalidade que $I_1 \subset I_2$. Segue portanto, que $x_1 + x_2 \in I_1$ e portanto, $x_1 + x_2 \in \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$. Similarmente, dado $\lambda \in \mathbb{C}$ segue que $\lambda x_1 \in \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$, ou seja, $\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$ é um subespaço.

Mostraremos agora que $\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$ é um ideal. Dado $a \in A$ e $x \in \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$, então existe $I_1 \in \mathcal{C}$ tal que $x \in I_1$, segue do fato de I_1 ser um ideal que $ax, xa \in I_1$ e portanto, $ax, xa \in \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$. Finalmente note que $\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$ é um ideal próprio, já que A tem unidade 1, como cada I é um ideal próprio, temos $1 \notin \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$.

Provamos que toda cadeia possui uma cota superior, segue por Zorn que existe um elemento maximal, digamos, I , que é um ideal maximal. \square

Definição 1.2.11. Um ideal I de uma álgebra A é dito ser um *ideal modular* se existe $u \in A$ tal que $a - au \in I$ e $a - ua \in I$ para todo $a \in A$. Note que se a álgebra é comutativa então basta provar que $a - au$ ou $a - ua$ pertence a I para qualquer escolha de $a \in A$

Pode-se mostrar, usando uma ideia parecida com a Proposição 1.2.10, ou seja, usando o lema de Zorn, a seguinte:

Proposição 1.2.12. Todo ideal modular está contido em um ideal maximal.

Observação 1.2.13. Note que se uma álgebra A é unital então obtemos que todos os seus ideais são modulares, de fato, basta tomar $1 \in A$ e obtemos $a - 1a = a - a1 = 0 \in A$. Desse modo, em proveito da Proposição 1.2.10, estipulamos a existência de um ideal maximal. Assim temos dois fatos que nos garantem a existência de ideais maximais, a saber, a existência de ideais próprios e da condição da álgebra ser unital.

Exemplo 1.2.14. Se X é localmente compacto Hausdorff e $w \in X$ então o conjunto

$$M_w = \{f \in C_0(X) : f(w) = 0\},$$

é um ideal modular da álgebra $C_0(X)$.

Veremos que M_w é de fato um ideal de $C_0(X)$, para isso, Tome $f, g \in M_w, h \in C_0(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, claro, $0 \in M_w$ e $M_w \subset C_0(X)$. O fato de $C_0(X)$ ser uma subálgebra nos garante que $f + g, \lambda f$ e $hg \in C_0(X)$ e os cálculos abaixo

$$(f + g)(w) = f(w) + g(w) = 0,$$

$$(\lambda f)(w) = \lambda f(w) = 0,$$

$$(hg)(w) = h(w)g(w) = 0,$$

nos permitem concluir que M_w é um ideal de $C_0(X)$. Para ver que M_w é modular note que basta achar uma função $u \in C_0(X)$ tal que $u(w) = 1$, pois desse modo para qualquer $a \in C_0(X)$ teremos $(a - au)(w) = (a - ua)(w) = 0$. Façamos isso usando o Lema de Urysohn, enunciado no Teorema 1.1.21.

Como X é localmente compacto Hausdorff então pela Proposição 1.1.22 existe uma vizinhança V de w tal que \bar{V} é compacto. Usando o Teorema 1.1.21 (Lema de Urysohn) temos que existe $u \in C_c(X)$ tal que $\text{Im}(u) \subset [0, 1]$, $u|_{\bar{V}} = 1$. Desse modo, temos que $u(w) = 1$ e como X é localmente compacto Hausdorff, $C_c(X) \subset C_0(X)$ e portanto conferimos a existência de um elemento $u \in C_0(X)$ com $u(w) = 1$, disso segue que M_w é um ideal modular.

Se I é um ideal de uma álgebra A podemos adquirir uma nova álgebra ao quocientar A por I . A relação de equivalência utilizada será a usual desse contexto. Definimos

$$a \sim b \text{ se, e somente se, } a - b \in I.$$

Como já bem conhecido essa é uma relação de equivalência. Denotamos o conjunto de todas as suas classes de equivalência $[a] = \{b \in A : a \sim b\}$ da maneira usual: A/I . Também consideramos bem conhecido que as seguintes operações em A/I estão bem definidas

$$(a + I) + (b + I) = a + b + I$$

$$\begin{aligned}\lambda(a + I) &= \lambda a + I \\ (a + I)(b + I) &= ab + I.\end{aligned}$$

Acerca desse novo objeto, podemos constatar os seguintes fatos.

Proposição 1.2.15. Seja A uma álgebra e I um ideal de A , concluímos que A/I é uma álgebra com as operações definidas anteriormente. Também afirmamos que I é um ideal modular se, e somente se A/I é unital. Além disso, o mapa quociente $\pi : A \rightarrow A/I$ dado por $a \mapsto a + I$ é um homomorfismo.

Demonstração. Para verificar que A/I é uma álgebra basta reparar que todas as propriedades necessárias para alcançarmos essa conclusão decorrem diretamente da sua propriedade correspondente na afirmação de que A é álgebra. Concluímos portanto que a hipótese de A ser álgebra nos garante que A/I é álgebra.

Demonstremos a afirmação I é modular se, e somente se, A/I é unital. Suponha que I seja modular, ou seja, $\exists u \in A$ tal que $a - au, a - ua \in I \forall a \in A$. Considere o elemento $u + I \in A/I$ propomos que essa é a unidade de A/I . De fato, seja $a + I \in A/I$ qualquer, os cálculos abaixo

$$\begin{aligned}(u + I)(a + I) &= ua + I = a + I \text{ (pois } a - ua \in I), \\ (a + I)(u + I) &= au + I = a + I \text{ (pois } a - au \in I),\end{aligned}$$

nos garantem que A/I é unital.

Reciprocamente, assumamos que A/I é unital, isto é, $\exists u + I \in A/I$ tal que para qualquer $a + I \in A/I$ obtemos

$$\begin{aligned}a + I &= (u + I)(a + I) = ua + I \text{ e portanto } a - ua \in I \\ a + I &= (a + I)(u + I) = au + I \text{ e portanto } a - au \in I,\end{aligned}$$

segue então que existe $u \in A$ tal que $a - au, a - ua \in I$.

O fato de que o mapa quociente é um homomorfismo segue diretamente da definição. \square

No caso de I ser um ideal fechado numa álgebra normada A podemos criar uma álgebra normada ao munir A/I da norma quociente. Nesse caso, A ser Banach é condição suficiente para A/I ser Banach. Esse é o conteúdo das duas próximas proposições.

Proposição 1.2.16. Se A é uma álgebra normada e I é um ideal fechado de A , então A/I é uma álgebra normada quando munida da norma quociente $\|a + I\| = \inf_{b \in I} \|a + b\|$. Além disso, se A é unital então A/I é uma álgebra normada unital.

Demonstração. Assumindo conhecido que $\|a + I\| = \inf_{b \in I} \|a + b\|$ é de fato uma norma, resta apenas provar a submultiplicatividade. Para isso, sejam $a + I, b + I \in A/I$ e $\epsilon > 0$ basta que provemos a desigualdade $\|ab + I\| \leq (\|a + I\| + \epsilon)(\|b + I\| + \epsilon)$ e passar o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Como $\|a + I\|$ e $\|b + I\|$ são ínfimos obtemos que $\|a + a_1\| \leq \|a + I\| + \epsilon$ para algum $a_1 \in I$ e $\|b + b_1\| \leq \|b + I\| + \epsilon$ para algum $b_1 \in I$. Disso e do fato de que A é uma álgebra normada podemos obter as seguintes minorações

$$(\|b + I\| + \epsilon)(\|a + I\| + \epsilon) \geq \|a + a_1\| \cdot \|b + b_1\| \geq \|ab + ab_1 + a_1b + a_1b_1\|.$$

Como I é um ideal de A então $ab_1 + a_1b + a_1b_1 \in I$ e pela definição de $\|ab + I\|$ obtemos que $\|ab + I\| \leq \|ab + ab_1 + a_1b + a_1b_1\|$. Portanto, como desejado obtemos $\|ab + I\| \leq (\|a + I\| + \epsilon)(\|b + I\| + \epsilon)$ e passando $\epsilon \rightarrow 0$ segue $\|ab + I\| \leq \|a + I\| \cdot \|b + I\|$, ou seja, A/I é uma álgebra normada.

Para a segunda afirmação, suponha que A é uma álgebra normada unital, isto é, existe $1 \in A$ e $\|1\| = 1$. Segue por cálculo direto que $1 + I$ é unidade de A/I , resta agora verificar que $\|1 + I\| = 1$. Com efeito, imediatamente concluímos que $\|1 + I\| \geq 1$ pois é um fato válido para qualquer unidade numa álgebra normada, quando combinamos essa observação com o cálculo a seguir

$$\|1 + I\| = \inf_{b \in I} \|1 + b\| \leq \|1 + 0\| = \|1\| = 1,$$

concluímos que $\|1 + I\| = 1$ e portanto A/I é uma álgebra normada unital com a norma proposta. \square

Para a próxima proposição, usaremos o seguinte teorema.

Teorema 1.2.17. Um espaço normado X é Banach se, e somente se, convergência absoluta implicar convergência usual, ou seja, se $(x_n) \subset X$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ converge em \mathbb{C} , então $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge em \mathbb{C} .

Proposição 1.2.18. Se A é uma álgebra de Banach, então A/I também é uma álgebra de Banach

Demonstração. Já foi provado na Proposição 1.2.16 que A/I é uma álgebra normada, então essa proposição segue da afirmação mais geral de que se X é um espaço de Banach e Y é um subespaço fechado, então X/Y é um espaço de Banach. Vamos portanto prová-la aqui.

Seja X um espaço de Banach, $x \in X$ e $x + Y \in X/Y$. Considere a sequência $(x_n + Y) \subset X/Y$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n + Y\|$ converge. Pela definição da norma em X/Y , dado um $\epsilon > 0$ existe $y_0 \in Y$ tal que $\|x_n + y_0\| \leq \|x_n + Y\| + \epsilon$. Tomando $\epsilon = \|x_n + Y\|$ e renomeando $x_n + y_0$ para a_n obtemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $a_n \in x_n + Y$ tal que

$$\|a_n\| \leq 2\|x_n + Y\|$$

Como, $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n + Y\|$ converge então, pelo critério de comparação, $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ converge. Usando que X é Banach e a caracterização vista no Teorema 1.2.17 temos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge em X , digamos, para um $x \in X$.

Provaremos agora que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n + Y = x + Y$. De fato, como Y é um subespaço fechado segue que o limite de somas parciais em Y ainda pertence a Y e por isso

$$x + Y = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + y_0 + Y = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + Y.$$

□

No caso de estarmos trabalhando com uma álgebra normada A_0 sem unidade, é possível manufacturar uma álgebra unital relacionada à álgebra inicial, mais precisamente, podemos exibir uma álgebra A_0^+ tal que A_0 seja isomorfa a um ideal de A_0^+ . Esse será o conteúdo das proposições a seguir.

Proposição 1.2.19. Seja A_0 uma álgebra normada, considere agora o conjunto

$$A_0 \oplus \mathbb{C} = \{(x, \alpha) : x \in A_0, \alpha \in \mathbb{C}\},$$

que optaremos por denotar A_0^+ .

Munindo A_0^+ das operações de espaço vetorial

$$+ : A_0^+ \times A_0^+ \longrightarrow A_0^+ \text{ dado por } ((x, \alpha), (x, \beta)) \longmapsto (x + y, \alpha + \beta)$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times A_0^+ \longrightarrow A_0^+ \text{ dado por } (\lambda, (x, \alpha)) \longmapsto (\lambda x, \lambda \alpha),$$

e da multiplicação de álgebra

$$\cdot : A_0^+ \times A_0^+ \longrightarrow A_0^+ \text{ dado por } ((x, \alpha), (y, \beta)) \longmapsto (xy + \alpha y + \beta x, \alpha \beta),$$

concluimos que A_0^+ é álgebra unital. Além disso, definindo a norma $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$ tornamos A_0^+ numa álgebra normada unital.

Demonstração. A verificação de que $A_0 \oplus \mathbb{C}$ é uma álgebra segue por cálculo direto, note que a unidade de $A_0 \oplus \mathbb{C}$ é $(0, 1)$. Para ver que $A_0 \oplus \mathbb{C}$ é uma álgebra normada, primeiramente verificaremos que a norma preserva a unidade:

$$\|(0, 1)\| = \|1\| + |0| = 1 + 0 = 1.$$

Veremos agora que a norma é submultiplicativa tome $(x, \alpha), (y, \beta) \in A_0 \oplus \mathbb{C}$, então

$$\|(x, \alpha)\| \cdot \|(y, \beta)\| = (\|x\| + |\alpha|)(\|y\| + |\beta|) = \|x\| \cdot \|y\| + |\beta|\|x\| + |\alpha|\|y\| + |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Resta majorar $\|(x, \alpha)(y, \beta)\|$ pela expressão acima

$$\begin{aligned} \|(x, \alpha)(y, \beta)\| &= \|(xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)\| = \|xy + \alpha y + \beta x\| + |\alpha\beta| \\ &\leq \|xy\| + \|\alpha y\| + \|\beta x\| + |\alpha| \cdot |\beta| \\ &\leq \|x\| \cdot \|y\| + |\alpha| \cdot \|y\| + |\beta| \cdot \|x\| + |\alpha| \cdot |\beta| \\ &= \|(x, \alpha)\| \cdot \|(y, \beta)\|. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.20. A_0^+ é uma álgebra se Banach se, e somente se, A_0 é uma álgebra de Banach.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que A_0 é uma álgebra de Banach, provemos agora que A_0^+ é uma álgebra de Banach. Considere uma sequência de Cauchy (x_n, α_n) em A_0^+ . Então

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que para } n, m > N \text{ temos } \|(x_n, \alpha_n) - (x_m, \alpha_m)\| < \epsilon,$$

como $\|(x_n, \alpha_n) - (x_m, \alpha_m)\| = \|(x_n - x_m, \alpha_n - \alpha_m)\| = \|(x_n, x_m)\| + |\alpha_n - \alpha_m| < \epsilon$, obtemos então que a partir de um índice $N \in \mathbb{N}$ $\|(x_n, x_m)\|, |\alpha_n - \alpha_m| < \epsilon$. Concluimos então que (x_n) é Cauchy em A_0 e (α_n) é Cauchy em \mathbb{C} . Como A_0 é Banach por hipótese e é bem conhecido que \mathbb{C} é Banach, segue que $\exists x \in A_0$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha_n \rightarrow \alpha$.

Podemos então construir o elemento $(x, \alpha) \in A_0^+$, propomos que o par (x, α) é o limite em A_0^+ da sequência $(x_n, \alpha_n) \subset A_0^+$. Dado $\epsilon > 0$ escolha $N \in \mathbb{N}$ grande tal que $\|x - x_n\| < \epsilon/2$ e $|\alpha - \alpha_n| < \epsilon/2$. Desse modo, para esse mesmo $N \in \mathbb{N}$ obtemos que $\|(x_n, \alpha_n) - (x, \alpha)\| = \|(x_n, x)\| + |\alpha - \alpha_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Disso concluimos que A_0^+ é uma álgebra de Banach.

(\Leftarrow) Reciprocamente, suponha que A_0^+ é uma álgebra de Banach, objetivamos provar que A_0 é Banach, para isso, considere uma sequência de Cauchy (x_n, α_n) em A_0^+ provaremos que ela converge, para isso, teremos que achar $x \in A_0$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Considere uma sequência de Cauchy (α_n) em \mathbb{C} podemos então formar a sequência de Cauchy (x_n, α_n) em A_0^+ . De fato, como ambos (x_n) e (α_n) são Cauchy nos seus respectivos espaços então dado um $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N$ temos $\|x_n - x_m\| < \epsilon/2$ e $|\alpha_n - \alpha_m| < \epsilon/2$, ou seja, a partir dessa ordem $N \in \mathbb{N}$ obtemos que $\|(x_n, \alpha_n) - (x_m, \alpha_m)\| = \|x_n - x_m\| + |\alpha_n - \alpha_m| < \epsilon$ o que prova que (x_n, α_n) é Cauchy. Como por hipótese A_0^+ é Banach então $\exists (x, \alpha) \in A_0^+$ tal que $(x_n, \alpha_n) \rightarrow (x, \alpha)$. Vamos agora verificar que o elemento $x \in A_0$ é o limite de (x_n) .

Dado $\epsilon > 0$, como $(x_n, \alpha_n) \rightarrow (x, \alpha)$ escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ temos $\|(x - x_n, \alpha - \alpha_n)\| < \epsilon$. Como $\|(x - x_n, \alpha - \alpha_n)\| = \|x - x_n\| + |\alpha - \alpha_n|$ concluimos então que a partir desse $N \in \mathbb{N}$ teremos $\|x - x_n\| < \epsilon$ e portanto $x_n \rightarrow x$. □

Proposição 1.2.21. O mapa $\varphi : A_0 \longrightarrow A_0^+$ dado por $x \longmapsto (x, 0)$ é um isomorfismo isométrico da álgebra A_0^+ na subálgebra $B = \{(x, 0) : x \in A_0\}$ de A_0^+ .

Demonstração. Provaremos cada uma das afirmações da proposição.

- $B = \{(x, 0) : x \in A_0\}$ é uma subálgebra de A_0^+ . É imediato verificar que $B \subset A_0^+$ e $B \neq \emptyset$, sejam $(x, 0), (y, 0) \in B$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ assim $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in B$, $\lambda(x, 0) = (\lambda x, 0) \in B$ e $(x, 0)(y, 0) = (xy + 0x + 0y, 0) = (xy, 0) \in B$. Do exposto segue que B é subálgebra.
- φ é um homomorfismo de álgebras: Sejam $a, b \in A_0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\varphi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(\lambda a) = (\lambda a, 0) = \lambda(a, 0) = \lambda\varphi(a)$ e $\varphi(ab, 0) = (ab, 0) = (a, 0)(b, 0) = \varphi(a)\varphi(b)$.
- φ é isometria. Seja $x \in A_0$, provemos que $\|\varphi(x)\| = \|x\|$. De fato, $\|\varphi(x)\| = \|x\| + |0| = \|x\|$.
- φ é uma bijeção. De fato, como φ é isometria segue é uma função injetora. Para ver que φ é uma sobrejeção, seja $(x, 0) \in B$, escolha agora $x \in A_0$ e então $\varphi(x) = (x, 0)$.

Combinando todas essas afirmação obtemos a proposição desejada. □

Definição 1.2.22. Concluimos que caso uma álgebra A não possua unidade, podemos, através do isomorfismo $a \longmapsto (a, 0)$ enxergá-la como uma subálgebra de uma álgebra unital, que denotamos por A^1 . Chamaremos A^1 de *unitização* de A .

Também é possível, dado um homomorfismo não unital $\varphi : A \longrightarrow B$ entre duas álgebras A e B , fazer uma “extensão” (num certo sentido) $\varphi^1 : A^1 \longrightarrow B^1$ onde A^1 e B^1 são as unitizações de A e B .

Teorema 1.2.23. Sejam A e B álgebras de Banach e A^1, B^1 suas respectivas unitizações. Nessas condições, dado um homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$, não necessariamente unital, podemos definir um único homomorfismo unital que será a “extensão” de φ

$$\varphi^1 : A^1 \longrightarrow B^1.$$

O homomorfismo unital φ^1 estenderá φ no sentido de que comutará o diagrama abaixo, aqui ι_A e ι_B denotarão as inclusões $a \longmapsto (a, 0)$ e $b \longmapsto (b, 0)$ para $a \in A$ e $b \in B$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \iota_A \downarrow & & \downarrow \iota_B \\ A^1 & \xrightarrow{\varphi^1} & B^1 \end{array}$$

A comutatividade nos diagrama acima nos permite dizer que A e B forem entendidos como subconjuntos de suas respectivas unitizações, a função φ^1 estenderá φ no sentido usual.

Demonstração. Propomos agora o homomorfismo abaixo e provaremos que é a função desejada, definiremos

$$\varphi^1 : A^1 \longrightarrow B^1 \quad \text{dado por} \quad \varphi^1((a, \lambda) = (\varphi(a), \lambda).$$

De fato, vamos verificar que φ^1 como definido acima é um homomorfismo unital. Tome $(a, \alpha), (b, \beta) \in A^1$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$\varphi^1((a, \alpha) + (b, \beta)) = (\varphi(a + b), \alpha + \beta) = (\varphi(a), \alpha) + (\varphi(b), \beta) = \varphi^1((a, \alpha)) + \varphi^1((b, \beta)),$$

$$\varphi^1(\lambda(a, \alpha)) = (\varphi(\lambda a), \lambda \alpha) = \lambda(\varphi(a), \alpha) = \lambda \varphi^1((a, \alpha)),$$

$$\begin{aligned} \varphi^1((a, \alpha)(b, \beta)) &= \varphi^1((ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)) \\ &= (\varphi(ab + \alpha b + \beta a), \alpha\beta) \\ &= (\varphi(a)\varphi(b) + \alpha\varphi(b) + \beta\varphi(a), \alpha\beta) \\ &= (\varphi(a), \alpha)(\varphi(b), \beta) \\ &= \varphi^1((a, \alpha))\varphi^1((b, \beta)), \end{aligned}$$

Com isso concluímos que φ^1 é de fato um homomorfismo, para ver que φ^1 é unital basta fazer os cálculos $\varphi^1(0, 1) = (\varphi(0), 1) = (0, 1)$. Para verificar que o diagrama comuta temos que provar a igualdade $\varphi^1 \circ \iota_A = \iota_B \circ \varphi$, para isso, tome $a \in A$ e note que

$$(\varphi^1 \circ \iota_A)(a) = \varphi^1(\iota_A(a)) = \varphi^1((a, 0)) = (\varphi(a), 0) = \iota_B(\varphi(a)) = (\iota_B \circ \varphi)(a).$$

Notemos agora que φ^1 é único nas condições do enunciado. Suponha que exista um $\psi : A^1 \longrightarrow B^1$ que comute o diagrama, nesse caso, dado $a \in A$ temos que $\psi((a, 0)) = (\varphi(a), 0)$ de fato,

$$(\psi \circ \iota_A)(a) = \psi((a, 0)) = (\iota_B \circ \varphi)(a) = \iota_B(\varphi(a)) = (\varphi(a), 0).$$

Agora como ψ é um homomorfismo segue que para qualquer $(a, \lambda) \in A^1$

$$\psi((a, \lambda)) = \psi((a, 0)) + \psi((0, \lambda)) = (\varphi(a), 0) + \psi((0, \lambda)),$$

e também,

$$\psi((0, \lambda)) = \psi((0, 1)\lambda) = \lambda\psi((0, 1)) = \lambda(0, 1) = (0, \lambda),$$

logo segue que $\varphi((a, \lambda)) = (\varphi(a), \lambda)$. □

Caso a norma definida numa álgebra A não cumpra os pré-requisitos para fazer de $(A, \|\cdot\|)$ numa álgebra normada, podemos usar a unitização A^1 para “consertar” a norma de A . Primeiramente, no entanto, será necessário enunciar um resultado de análise funcional (note que ele poderia ser ter sido usado para provar a Proposição 1.1.5).

Proposição 1.2.24. Se X é um espaço normado, então uma função bilinear $f : X \times X \rightarrow X$ é contínua se, e somente se, existe $C > 0$ tal que $\|f(x, y)\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

Proposição 1.2.25. Se $(A, \|\cdot\|)$ é um espaço normado (não trivial) e também uma álgebra tal que o produto $\cdot : A \times A \rightarrow A$ é contínuo, então existe uma norma $\|\cdot\|_0$, equivalente a $\|\cdot\|$, que faz de A uma álgebra normada (unital, caso A tenha unidade).

Demonstração. Sem perda de generalidade suponha que A é unital (algebricamente, $\|1\| = 1$ não é exigido). Caso contrário, troque A por sua unitização A^1 com a norma $\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$. Como o produto $\cdot : A \times A \rightarrow A$ é, por hipótese, bilinear e contínuo, pela Proposição 1.2.24 existe $C > 0$ tal que $\|ab\| \leq C\|a\| \cdot \|b\|$. Considere a função

$$L : A \rightarrow B(A) \quad \text{dada por, } a \rightarrow L_a$$

onde $L_a(x) = ax$. Como visto no exemplo 1.2.2, L é um homomorfismo unital de álgebras. Defina a norma

$$\|\cdot\|_0 : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|a\|_0 = \|L_a\|_{op}.$$

Provemos que $\|\cdot\|_0$ é a norma que desejamos, sejam $1_A \in A$ e $a, b \in A$, então

$$\|1_A\|_0 = \|L_{1_A}\|_{op} = \|Id_A\|_{op} = 1$$

$$\|ab\|_0 = \|L_{ab}\|_{op} = \|L_a L_b\|_{op} \leq \|L_a\|_{op} \cdot \|L_b\|_{op} = \|a\|_0 \cdot \|b\|_0.$$

Temos que $\|\cdot\|_0$ é submultiplicativa e preserva a unidade, resta ver que é equivalente a norma $\|\cdot\|$. Sejam $a, x \in A$, então pela Proposição 1.2.24 existe $C > 0$ tal que

$$\|L_a(x)\| = \|ax\| \leq C\|a\| \cdot \|x\|,$$

portanto, $\|a\|_0 = \|L_a\|_{op} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|L_a(x)\| \leq C\|a\|$. Agora note que temos $\|a\|_0 = \|L_a\|_{op} \geq \|L_a(1)\|_{op} = \|a\|$. Segue então que $\|\cdot\|_0$ é equivalente a $\|\cdot\|$. \square

Proposição 1.2.26. Se A_0 é uma álgebra normada, então $I = \{(x, 0) : x \in A_0\}$ é um ideal fechado de A_0^+ e $A_0^+/I \cong \mathbb{C}$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que I é um ideal fechado. como já discutido, I é uma subálgebra e portanto é um subespaço. Considere agora $(x, 0) \in I$ e $(y, \beta) \in A_0^+$, então obtemos

$$(x, 0)(y, \beta) = (xy + \beta x, 0) \in I$$

$$(y, \beta)(x, 0) = (yx + \beta x, 0) \in I$$

nos permitindo concluir que I é um ideal. Mostraremos agora que I é fechado, suponha que $(x_n, 0) \in I$ é tal que $((x_n, 0)) \rightarrow (x, \alpha) \in A_0^+$, provemos que $(x, \alpha) \in I$. Como $(x_n, 0) \rightarrow (x, \alpha)$, dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ obtemos

$$\|(x_n, 0) - (x, \alpha)\| = \|x - x_n\| + |\alpha - 0| < \epsilon,$$

disso extraímos que $\alpha = 0$ e portanto $(x_n, 0) \rightarrow (x, 0) \in I$ o que nos garante que I é fechado.

Resta portanto verificar que $A_0^+/I \cong \mathbb{C}$. Objetivamos então exibir um isomorfismo isométrico ligando A_0^+ a \mathbb{C} . definimos então

$$\begin{aligned} \varphi : A_0^+/I &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, \alpha) + I &\longmapsto \alpha, \end{aligned}$$

Verifiquemos que essa é a função desejada.

- φ está bem definido. Suponha que $\overline{(x, \alpha)} = \overline{(y, \beta)}$, isto é, $(x, \alpha) - (y, \beta) \in I$, mostremos que $\varphi((x, \alpha) + I) = \varphi((y, \beta) + I)$. Mas como $(x - y, \alpha - \beta) \in I$ temos que $\alpha - \beta = 0$ e portanto segue o resultado.
- φ é um homomorfismo. Sejam $(x, \alpha) + I, (y, \beta) + I \in A_0^+/I$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então

$$\varphi((x, \alpha) + I + (y, \beta) + I) = \varphi((x+y, \alpha+\beta) + I) = \alpha + \beta = \varphi((x, \alpha) + I) + \varphi((y, \beta) + I).$$

$$\varphi(\lambda[(x, \alpha) + I]) = \varphi(\lambda x, \lambda \alpha) = \lambda \alpha = \lambda(\varphi((x, \alpha) + I))$$

$$\varphi((x, \alpha) + I)((y, \beta) + I) = \varphi((xy + \alpha y + \beta x, \alpha \beta) + I) = \alpha \beta = \varphi((x, \alpha) + I)\varphi((y, \beta) + I),$$

Portanto, φ é um homomorfismo de álgebras

- φ é uma isometria. Seja $(x, \alpha) + I \in A_0^+/I$, provemos que $|\varphi((x, \alpha) + I)| = \|(x, \alpha) + I\|$, isto é, verifiquemos a igualdade $\inf_{(y,0) \in I} \|(x, \alpha) + (y, 0)\| = |\alpha|$.

Para obter $\inf_{(y,0) \in I} \|(x, \alpha) + (y, 0)\| \leq |\alpha|$, note que tomando $y = -x$ obtemos que $|\alpha| \in \{\|(x, \alpha) + (y, 0)\| : (y, 0) \in I\}$ seguindo então a desigualdade desejada.

Para a outra desigualdade $\inf_{(y,0) \in I} \|(x, \alpha) + (y, 0)\| \geq |\alpha|$ basta argumentar que $|\alpha|$ é cota inferior de $|\alpha| \in \{\|(x, \alpha) + (y, 0)\| : (y, 0) \in I\}$. Essa afirmação segue da desigualdade a seguir

$$\|(x + y, \alpha)\| = \|x + y\| + |\alpha| \geq |\alpha|,$$

obtemos assim a igualdade desejada.

- φ é uma bijeção. Como φ é uma isometria segue que é injetora, resta portanto verificar a sobrejeção. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ basta escolher $(x, \alpha) + I \in A_0^+/I$ e obtemos $\varphi((x, \alpha) + I) = \alpha$.

□

1.3 Elementos Inversíveis

Nessa seção definiremos uma noção de invertibilidade para um elemento x de uma álgebra A . Provaremos que sob certas condições um x inversível pode ser expresso como uma série: teorema 1.3.8 e alguns resultados topológicos como o conjunto de inversíveis ser fechado e a função $x \mapsto x^{-1}$ ser contínua. Por fim, definiremos uma função exponencial para o contexto de álgebras de Banach.

Usualmente, daqui em diante assumiremos que A denotará uma álgebra de Banach unital com a sua unidade representada por 1 . Assumimos também que $A \neq \{0\}$ ou equivalentemente $1 \neq 0$. Também será usual escrever λ no lugar de $\lambda 1$.

Definição 1.3.1. Dizemos que um elemento $x \in A$ é *invertível* se existe $x_1 \in A$ tal que $xx_1 = x_1x = 1$, nesse caso, x_1 é único e será chamado de *inverso* de x e representado por x^{-1} . A coleção de todos os elementos invertíveis de A é denotada por $\text{Inv}(A)$, isto é,

$$\text{Inv}(A) = \{x \in A : x \text{ é inversível}\}$$

Observação 1.3.2. Se A é uma álgebra unital podemos conceder a $\text{Inv}(A)$ uma estrutura de grupo ao restringir a operação da álgebra para o conjunto dos elementos inversíveis. De fato, se $a, b \in \text{Inv}(A)$ então $ab \in \text{Inv}(A)$, bastando para isso propor o elemento $b^{-1}a^{-1} \in A$ como o elemento inverso de ab . Isso nos permite definir a operação $\cdot : \text{Inv}(A) \times \text{Inv}(A) \rightarrow \text{Inv}(A)$ dada por $a \rightarrow a$, isto é, a restrição da operação na álgebra ao conjunto $\text{Inv}(A) \times \text{Inv}(A)$. A operação que acabamos de definir tem um elemento neutro, a saber, o elemento neutro da álgebra $1 \in \text{Inv}(A)$, além disso é hereditário que essa operação seja associativa e por definição cada elemento de $\text{Inv}(A)$ tem um inverso. Argumentamos aqui que $\text{Inv}(A)$ é um grupo com respeito a multiplicação restrita da álgebra. Chamamos esse grupo de *grupo das unidades* de A .

Vamos provar uma série de proposições envolvendo elementos invertíveis, antes disso recordaremos uma definição.

Definição 1.3.3. Seja X um espaço vetorial topológico e defina $L(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y : T \text{ é linear e contínua}\}$, escrevemos $L(X, X)$ como $L(X)$.

Proposição 1.3.4. Fixo um $x \in \text{Inv}(A)$ e definindo o mapa “multiplicação à esquerda por x ”

$$L_x : A \rightarrow A \text{ dado por } y \mapsto xy,$$

Então $L_x \in L(A)$. Nesse espaço, L_x será um operador invertível de inversa $(L_x)^{-1} = L_x^{-1}$.

Demonstração. L_x é de fato um mapa linear, tome $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então

$$L_x(a + b) = x(a + b) = xa + xb = L_x(a) + L_x(b)$$

$$L_x(\lambda a) = x\lambda a = \lambda x a = \lambda L_x(a).$$

Do fato de que a operação de multiplicação numa álgebra é contínua e de que a restrição de contínuas ser ainda uma função contínua obtemos que L_x é contínua e portanto $L_x \in L(A)$. Através de um cálculo direto provaremos que $(L_x)^{-1} = L_{x^{-1}}$. De fato, *seja* $a \in A$ obtemos então

$$((L_{x^{-1}}) \circ (L_x))(a) = (x^{-1}x)a = a = Id(a)$$

$$((L_x) \circ (L_{x^{-1}}))(a) = (xx^{-1})a = a = Id(a)$$

□

Proposição 1.3.5. Se $x \in \text{Inv}(A)$ e $y \in A$ podemos obter as seguintes equivalências

$$y \in \text{Inv}(A) \Leftrightarrow xy \in \text{Inv}(A) \Leftrightarrow yx \in \text{Inv}(A)$$

Demonstração. Vamos provar as duas bi-implicações separadamente

- $y \in \text{Inv}(A) \Leftrightarrow xy \in \text{Inv}(A)$

(\Rightarrow) se $y \in \text{Inv}(A)$ então como $x \in \text{Inv}(A)$ teremos $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ e portanto $xy \in \text{Inv}(A)$.

(\Leftarrow) se $xy \in \text{Inv}(A)$ então $\exists (xy)^{-1} \in A$. Note então que basta escrever $y = x^{-1}(xy)$ e propor $(xy)^{-1}x$ como inverso. Seguirá portanto que $y \in \text{Inv}(A)$

- $\text{Inv}(A) \Leftrightarrow yx \in \text{Inv}(A)$. A demonstração em ambas as direções é inteiramente análoga.

□

Proposição 1.3.6. Se $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset A$ é um conjunto de elementos comutativos dois a dois, ou seja, $a_i a_j = a_j a_i$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, então o produto $a_1 a_2 \dots a_n$ é invertível se, e somente se, cada elemento a_i é invertível.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $a_1 a_2 \dots a_n$ é invertível, tome um $a_i \in \{a_1, \dots, a_n\}$ arbitrário, objetivamos exibir um inverso para esse a_i .

Como $a_1 a_2 \dots a_n \in \text{Inv}(A)$ então $\exists b \in A$ tal que $(a_1 a_2 \dots a_n)b = 1 = b(a_1 a_2 \dots a_n)$. Do fato de que $\{a_1 a_2 \dots a_n\}$ é formado por elementos disjuntos dois a dois obtemos

$$1 = b(a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i a_{i+1} \dots a_n) = b(a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n) a_i$$

$$1 = (a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i a_{i+1} \dots a_n) b = a_i (a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n) b,$$

concluimos então que $(a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n) = (a_i)^{-1}$ e portanto segue que $a_i \in \text{Inv}(A) \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

(\Leftarrow) Segue imediatamente do fato de $\text{Inv}(A)$ ser um grupo, mais explicitamente, o inverso de (a_1, a_2, \dots, a_n) é $((a_n)^{-1}, \dots, (a_2)^{-1}, (a_1)^{-1})$. □

Proposição 1.3.7. Se A é uma álgebra normada unital e I é um ideal $I \neq \{0\}$ então as seguintes afirmações são equivalentes:

- i. I é um ideal próprio
- ii. $I \cap \text{Inv}(A) = \emptyset$
- iii. $1 \notin I$

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) Suponha que I é um ideal próprio e que existe $x \in I \cap \text{Inv}(A)$, desse modo, $x \in I$ e existe $x^{-1} \in A$. Note que pela definição de ideal temos que $1 = xx^{-1} \in I$, perceba agora que a presença da unidade no ideal implica que este é igual a álgebra A . Temos portanto que I não é um ideal próprio, contradizendo a hipótese.

(ii) \Rightarrow (iii) Assuma agora que $I \cap \text{Inv}(A) = \emptyset$ e então suponha para obter contradição que $1 \in I$. Note que a unidade é inversível (sua inversa é ela mesma) e portanto obtemos $1 \notin I \cap \text{Inv}(A) = \emptyset$, uma contradição.

(iii) \Rightarrow (i) Suponha que $1 \notin I$. Como por hipótese $I \neq \{0\}$ e de $1 \notin A$ temos que $I \neq A$ concluímos que I é um ideal próprio. □

É bem conhecido do cálculo que se $|r| < 1$ podemos fazer a seguinte expansão

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Ao colocar $x-1$ no papel de r então no caso de $|x-1| < 1$ obtemos

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n.$$

O teorema apresentado a seguir pode ser entendido como uma generalização dos fatos acima discutidos.

Teorema 1.3.8. Se A é uma álgebra de Banach unital, $x \in A$ e $\|x-1\| < 1$ então $x \in \text{Inv}(A)$ e

$$x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n.$$

Aqui usamos a convenção de que $y^0 = 1$. Em particular, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\|x\| < |\lambda|$ então $(x-\lambda)$ é invertível e podemos escrever

$$(x-\lambda)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Demonstração. Suponha então que $x \in A$ seja tal que $\|x - a\| < \lambda$. Primeiramente demonstraremos que $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)^n$ está bem definida, ou seja, argumentaremos que a série é convergente. Como em um espaço de Banach a convergência usual de séries é equivalente a convergência absoluta, basta argumentar que $\sum_{n=0}^{\infty} \|1 - x\|^n$ converge. Note que pela submultiplicatividade da norma obtemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(1 - x)^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|1 - x\|^n.$$

Como por hipótese obtemos que $\|x - 1\| < 1$ concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} \|1 - x\|^n$ converge. Utilizando o critério da comparação concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} \|(1 - x)^n\|$ converge e portando segue o resultado.

Verifiquemos agora que $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)^n$ é o inverso de x . Defina a soma parcial $S_k = \sum_{n=0}^k (1 - x)^n$ e seja $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ a sequência de somas parciais e denote por S o limite dessas sequência, isto é, $S = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)^n$. Mostremos que $Sx = xS = 1$. Note que o fato de $(1 - x)$ comutar com $(1 - x)^n$ implica que S_k comuta com $(1 - x)$, usando isso obteremos as igualdades

$$(1 - x)S_k = S_k(1 - x) = \sum_{n=0}^k (1 - x)^{n+1} = S_{k+1} - 1.$$

Agora passando o limite $K \rightarrow \infty$ obtemos

$$(1 - x)S = S(1 - x) = S - 1.$$

Note que de $(1 - x)S = S - 1$ e $S(1 - x) = S - 1$ obteremos respectivamente que $xS = 1$ e $Sx = 1$.

Agora trataremos da segunda parte do enunciado. Para isso, aplicaremos $1 - \frac{x}{\lambda}$ no lugar de x . De $\|1 - x\| < 1$ obteremos que $\|1 - (1 - \frac{x}{\lambda})\| < 1$ e portanto $\|x\| < |\lambda|$. Aplicando em $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)^n$ obteremos $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{x}{\lambda})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$. Já de x^{-1} teremos $(1 - \frac{x}{\lambda})^{-1}$. Portanto teremos a igualdade abaixo

$$\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n},$$

note que $(1 - \frac{x}{\lambda})^{-1} = \lambda^{-1}(\lambda - x)^{-1}$ e portanto podemos escrever

$$(\lambda - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \text{ para } \|x\| < |\lambda|.$$

□

Observação 1.3.9. Semelhantemente a breve discussão que foi feita relativamente a conceitos de cálculo, o Teorema 1.3.8 pode ser formulado da seguinte maneira: Seja $x \in A$ tal que $\|x\| < 1$, então $1 - x \in \text{Inv}(A)$ e

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é usualmente chamada de *Série de Neumann* de $(1 - a)^{-1}$.

A primeira aplicação do Teorema 1.3.8 será dada na proposição a seguir.

Proposição 1.3.10. Seja A uma álgebra de Banach unital. Então o conjunto $\text{Inv}(A)$ é aberto de A

Demonstração. Seja $a \in \text{Inv}(A)$, vamos provar que um $b \in A$ suficientemente próximo de a é ainda inversível. Seja $b \in B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a)$ então

$$\|a^{-1}\| \cdot \|a - b\| < 1.$$

Mostremos agora que $b \in \text{Inv}(A)$. Argumentaremos que objetivo traçado será consequência das duas afirmações a seguir.

- $a^{-1}b \in \text{Inv}(A)$. De fato, por $\|a^{-1}\| \cdot \|a - b\| < 1$ e pela submultiplicativa da norma

$$\|1 - a^{-1}b\| = \|a^{-1}(a - b)\| \leq \|a^{-1}\| \cdot \|a - b\| < 1.$$

Da desigualdade $\|1 - a^{-1}b\| < 1$ concluímos via o Teorema 1.3.8 que $a^{-1}b \in \text{Inv}(A)$.

- $ba^{-1} \in \text{Inv}(A)$. Analogamente ao feito na primeira afirmação, o cálculo

$$\|1 - ba^{-1}\| = \|(a - b)a^{-1}\| \leq \|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| < 1,$$

nos garante que $ba^{-1} \in \text{Inv}(A)$.

Exibiremos agora o inverso de b . Note que $b(a^{-1}(ba^{-1})^{-1}) = 1 = ((a^{-1}b)^{-1}a^{-1})b$, nos preocuparemos agora em checar a igualdade $a^{-1}(ba^{-1})^{-1} = (a^{-1}b)^{-1}a^{-1}$. O resultado requerido segue das seguintes equivalências

$$\begin{aligned} a^{-1}(ba^{-1})^{-1} = (a^{-1}b)^{-1}a^{-1} &\Leftrightarrow (ba^{-1})^{-1} = a(a^{-1}b)^{-1}a^{-1} \\ &\Leftrightarrow 1 = a(a^{-1}b)^{-1}a^{-1}ba^{-1}. \end{aligned}$$

Disso concluímos que $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subset \text{Inv}(A)$ e portanto $\text{Inv}(A)$ é aberto.

□

Proposição 1.3.11. Seja A uma álgebra de Banach unital. Então qualquer ideal maximal I é fechado.

Demonstração. Seja I um ideal maximal de A , provaremos que $\bar{I} = I$. Pela Proposição 1.2.8 temos que \bar{I} é um ideal e como I é próprio, segue pela Proposição 1.3.7 que $I \cap \text{Inv}(A) = \emptyset$. Como pela Proposição 1.3.10, $\text{Inv}(A)$ é aberto, temos que $\bar{I} \cap \text{Inv}(A) = \emptyset$, de fato, se $z \in \bar{I} \cap \text{Inv}(A)$ então $\text{Inv}(A)$ é vizinhança de z e como $z \in \bar{I}$ temos que $I \cap \text{Inv}(A) \neq \emptyset$, um absurdo. Então como $\bar{I} \cap \text{Inv}(A) = \emptyset$, segue pela Proposição 1.3.7 que \bar{I} é um ideal próprio que contém I , do fato que é I ideal maximal segue que $\bar{I} = I$. □

Provaremos agora um resultado envolvendo conceitos de diferenciação, entretanto, vamos primeiro enunciar um novo tipo de diferenciação mais adequada ao contexto de espaços de Banach.

Definição 1.3.12. Sejam X e Y espaços de Banach, $U \subset X$ um aberto, $f : U \subset X \rightarrow Y$ uma função e $a \in U$. Dizemos que f é *diferenciável à Fréchet* em $a \in U$ se existe uma transformação $T \in B(X, Y)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(a+h) - f(a) - Th}{\|h\|} = 0.$$

Usualmente dizemos apenas que f é *diferenciável* em a . Nesse contexto, chamamos T de *derivada de Fréchet* ou apenas de *derivada*.

Se f é *diferenciável à Fréchet* em a podemos explicitar os seguintes fatos

- f é contínua em a .
- A transformação T é única, denotada por $T = df_a$
- As “regras usuais de diferenciação” valem:
 - A diferenciação é linear: $d(f+g)_a = df_a + dg_a$, $df_a(\lambda f) = \lambda df_a(f)$
 - A regra da cadeia é válida: $d(f \circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a$
- Se $T \in B(X, Y)$, então $dT_a = T \forall a \in X$

Teorema 1.3.13. Seja A uma álgebra de Banach unital. Então a inversão

$$j : \text{Inv}(A) \rightarrow \text{Inv}(A)$$

$$a \mapsto a^{-1}$$

é diferenciável, com $dj_a(h) = -a^{-1}ha^{-1}$.

Demonstração. Se h é suficientemente pequena, mais especificamente, se $\|h\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, então tomando $\lambda = -h$ no Teorema 1.3.8 temos

$$\begin{aligned} (a+h)^{-1} - a^{-1} &= a^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-ha^{-1})^n - a^{-1} \\ &= a^{-1} (1 - ha^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-ha^{-1})^n) - a^{-1} \\ &= a^{-1} - a^{-1}ha^{-1} + a^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} (-ha^{-1})^n - a^{-1} \\ &= -a^{-1}ha^{-1} + a^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} (-ha^{-1})^n. \end{aligned}$$

Assim, se $\|h\| < \frac{\|a^{-1}\|^{-1}}{2} < \|a^{-1}\|^{-1}$ então usando a desigualdade triangular e a submultiplicatividade da norma:

$$\|(a+h)^{-1} - a^{-1} - (-a^{-1}ha^{-1})\| \leq \|a^{-1}\| \sum_{n=2}^{\infty} \| -h\|^n \cdot \|a^{-1}\|^n.$$

Note que pela hipótese de que $\|h\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ temos que $\|a^{-1}\| \sum_{n=2}^{\infty} \| -h\|^n \cdot \|a^{-1}\|^n$ é uma série trigonométrica, concluímos então que

$$\|a^{-1}\| \sum_{n=2}^{\infty} \| -h\|^n \cdot \|a^{-1}\|^n = \frac{\|h\|^2 \cdot \|a^{-1}\|^3}{1 - \|h\| \cdot \|a^{-1}\|}.$$

Observemos agora que a condição $\|h\| < \frac{\|a^{-1}\|^{-1}}{2}$, ou ainda, $\|h\| \cdot \|a^{-1}\| < 1/2$, nos garante que $\frac{1}{1 - \|h\| \cdot \|a^{-1}\|} < 2$. Logo, para $\|h\| < \frac{\|a^{-1}\|^{-1}}{2}$ temos:

$$\|(a+h)^{-1} - a^{-1} - (-a^{-1}ha^{-1})\| \leq \frac{\|h\|^2 \cdot \|a^{-1}\|^3}{1 - \|h\| \cdot \|a^{-1}\|} < 2\|h\|^2 \cdot \|a^{-1}\|^3.$$

Concluimos então que para $0 < \|h\| < \frac{\|a^{-1}\|^{-1}}{2}$ temos

$$\frac{\|(a+h)^{-1} - a^{-1} - (-a^{-1}ha^{-1})\|}{\|h\|} < 2\|h\| \cdot \|a^{-1}\|^3.$$

Portanto, fazendo $h \rightarrow \infty$ obtemos, como desejado, que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\|(a+h)^{-1} - a^{-1} - (-a^{-1}ha^{-1})\|}{\|h\|} = 0.$$

□

Ao observar que a inversa da função $x \mapsto x^{-1}$ é ela própria podemos extraír o seguinte corolário.

Corolário 1.3.14. A função $j : \text{Inv}(A) \rightarrow \text{Inv}(A)$ dada por $x \mapsto x^{-1}$ é um homeomorfismo.

Vamos agora nos propor a definir uma função exponencial própria desse contexto de álgebras de Banach, naturalmente, desejamos definir-la de uma forma que recorra a alguma noção prévia de exponencial.

Definição 1.3.15. Seja A uma álgebra de Banach unital e $a \in A$ definimos

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

Note que a série na Definição 1.3.15 está bem definida, isto é, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ converge. De fato, pela submultiplicatividade na norma conseguimos extrair o seguinte cálculo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{a^n}{n!} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!}.$$

Para ver que o somatório $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!}$ converge basta aplicar algum teste de convergência da preferência do leitor, por exemplo, o teste da razão. Assim, pelo teste da comparação concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!}$ converge. Como A é um espaço de Banach, então a convergência usual é equivalente a convergência absoluta disso segue que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!}$ converge.

Para provar o próximo resultado vamos primeiro evidenciar alguns resultados envolvendo diferenciação. Um mapa $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ é dito ser *diferenciável* em $x \in \mathbb{R}$ se existe o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

chamado de *derivada* de f no ponto $x \in \mathbb{R}$. Se f é diferenciável em todo o ponto então ela é simplesmente dita uma função *diferenciável*. Se é o caso que $f, g : \mathbb{R} \rightarrow A$ serem diferenciáveis com derivadas f', g' , respectivamente. Então (fg) é diferenciável de derivada $(fg)' = f'g + fg'$ (basta imitar a prova no caso de valor escalar). Já se $f' = 0$, então f é constante. A seguir, demonstraremos esse resultado.

Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ é tal que $f'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere a transformação linear e contínua $T : A \rightarrow B$ e a composição $T \circ f : \mathbb{R} \rightarrow B$. Se f' existe, então também existe $(T \circ f)'(t) = T(f'(t))$. Em particular, considerando uma função $\varphi \in A^*$ (dual topológico), temos que existe $(\varphi \circ f)'(t) = \varphi(f'(t))$.

Note então que se $f'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue, pela linearidade de φ , que $(\varphi \circ f)'(t) = 0$. Como $\varphi \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tem domínio nos reais, temos que $\varphi \circ f$ é constante, portanto, $\varphi(f(t)) = \varphi(f(0))$ para qualquer escolha de φ e t . Segue então, (como consequência de Hanh-Banach) que $f(t) = f(0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Disso concluímos que f é constante.

Teorema 1.3.16. Seja A uma álgebra de Banach unital. Podemos obter os seguintes resultados

- i. Se $a \in A$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ é diferenciável, tal que $f(0) = 1$, e $f'(t) = af(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $f(t) = e^{ta}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $a \in A$, então e^a é inversível com inversa e^{-a} .
- ii. Se $a, b \in A$ comutam então temos $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.

Demonstração.

- i. Seja $a \in A$, note que o mapa $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ dado por $t \mapsto e^{ta} \in A$ satisfaz as condições do enunciado, de fato, $f(0) = e^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n a^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n a^n}{n!} = 1$ e também

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}a^n}{n!} = a \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-1}a^{n-1}}{(n-1)!} \right) = af(t).$$

Suponha que $g : \mathbb{R} \rightarrow A$ satisfaz essas mesmas propriedades. Note que o fato de $a \in A$ comutar com $\frac{t^n a^n}{n!}$ nos implica que a e $f(t) = e^{ta}$ comutam. Essa observação nos garante que $h(t)$ definido como $h(t) = f(t)g(-t)$ é constante, de fato,

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) \\ &= af(t)g(-t) - f(t)af(-t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e como $h'(t) = 0$ segue que h é constante. Mais ainda, como $h(0) = f(0)g(0) = 1$ segue que $f(t)g(-t) = 1$.

Isso nos garante que $f(t)$ é inversível e $f(t)^{-1} = g(-t)$, tomando $g(t) = f(t)$ temos $f(t)^{-1} = f(-t)$, disso segue que $f(-t) = g(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e portanto $f = g$.

Tomando $g(t) = f(t) = e^{ta}$ temos então que $(e^{ta})^{-1} = e^{-ta}$.

- ii. Suponha agora que $a, b \in A$ comutam. Considere $f(t) = e^{ta}e^{tb}$, então $f'(t) = e^{ta}be^{tb} + ae^{ta}e^{tb}$ e como a e b comutam segue que $f'(t) = (a + b)f(t)$. Como $f(0) = 1$ e $f'(t) = (a + b)f(t)$ segue pela unicidade do item i. que $f(t) = e^{t(a+b)}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, em particular, $e^{a+b} = f(1) = e^a e^b$.

□

1.4 Teoria Espectral

Essa secção tem o objetivo de desenvolver alguns conceitos essenciais acerca da teoria espectral.

O espectro de um operador linear em um espaço vetorial de dimensão infinita é uma generalização do conjunto de autovalores de um operador linear F em um espaço vetorial de dimensão finita V .

A afirmação λ é um autovalor de $F \in \text{End}(V)$ é equivalente às seguintes afirmações:

$$\begin{aligned} \exists 0 \neq x \in V \text{ tal que } Fx = \lambda x &\Leftrightarrow \exists 0 \neq x \in V \text{ tal que } (F - \lambda 1)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(F - \lambda 1) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow (F - \lambda 1) \text{ não é injetivo} \end{aligned}$$

Como a dimensão de V é finita, podemos usar o teorema núcleo-imagem para obter a seguintes equivalência

$$(F - \lambda 1) \text{ não é injetivo} \Leftrightarrow (F - \lambda 1) \text{ não é bijetiva.}$$

Pelo teorema do mapeamento aberto concluimos que para $T \in L(E)$

$$(T - \lambda 1) \text{ bijetivo} \iff (T - \lambda 1) \in \text{Inv}(L(E)).$$

Definição 1.4.1. Seja A uma álgebra de Banach e $x \in A$. No caso de A ser unital, o espectro de x , denotado por $\sigma(x)$ é o conjunto de todos os complexos onde $x - \lambda 1$ não é invertível, ou seja,

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda 1) \notin \text{Inv}(A)\}.$$

No caso de A não ser unital, denotamos sua unitização por A^1 e definimos o espectro de um $x \in A$ de maneira análoga

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda 1) \notin \text{Inv}(A^1)\}.$$

Observação 1.4.2. Usualmente denotamos $\lambda 1$ meramente por λ . Pedimos ao leitor que se atente de que a afirmação $(x - \lambda) \in \text{Inv}(A)$ é equivalente a $(\lambda - x) \in \text{Inv}(A)$, pois algumas literaturas se valem desse fato para fazer uma definição de espectro levemente diferente.

Observação 1.4.3. Notamos que o espectro da unidade é sempre igual a 1, de fato, seja A uma álgebra unital de unidade 1, então

$$\sigma(1_A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (1_A - \lambda 1_A) \notin \text{Inv}(A)\} = 1.$$

O complemento do espectro nos complexos também será de marcada importância durante o desenvolvimento do material

Definição 1.4.4. Seja A uma álgebra de Banach e $x \in A$ definimos o conjunto resolvente de x , denotado por $\rho(x)$, como o conjunto $\mathbb{C} - \sigma(x)$, ou seja,

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda) \in \text{Inv}(A)\}.$$

Frisamos aqui que se A não for unital usaremos a sua unitização A^1

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda) \in \text{Inv}(A^1)\}.$$

Fixado um $x \in A$, o mapa

$$\begin{aligned} R_x : \rho(x) &\longrightarrow \text{Inv}(A) \\ \lambda &\longmapsto (x - \lambda)^{-1} \end{aligned}$$

é chamada de *função resolvente* de x .

Exemplo 1.4.5. Seja $A = C(\Omega)$, onde Ω é um compacto Hausdorff. Teremos então que $\sigma(f) = f(\Omega)$ para qualquer $f \in A$. Vamos provar essa afirmação.

(\subset) Tome $f \in C(\Omega)$ e seja $\lambda \in \sigma(f)$, isto é, $(f - \lambda) \notin \text{Inv}(A)$, provemos que $\lambda \in f(\Omega)$. Assuma o contrário, ou seja, $\lambda \neq f(x) \forall x \in \Omega$. Isso nos permite definir a seguinte função $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua, dada por

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - \lambda}.$$

Ocorre portanto que $g \in C(\Omega)$ e g é o inverso de $(f - \lambda)$ o que é uma contradição com o fato de $\lambda \in \sigma(f)$. Segue assim que $\lambda \in f(\Omega)$.

(\supset) Seja $\lambda \in f(\Omega)$, queremos ver que $\lambda \in \sigma(f)$, para isso, devemos exibir um $y \in \Omega$ tal que $(\lambda - f)(y) = 0$. Como $\lambda \in f(\Omega)$, então $\exists x_0 \in \Omega$ tal que $\lambda = f(x_0)$, para esse $x_0 \in \Omega$ temos que $(\lambda - f)(x_0) = \lambda 1(x_0) - f(x_0) = \lambda - \lambda = 0$. Segue então que $\lambda \in \sigma(f)$

Exemplo 1.4.6. Considere um subconjunto não vazio S e a álgebra $l^\infty(S)$. Nesse caso, dado $f \in l^\infty(S)$, temos $\sigma(f) = \overline{f(S)}$.

(\subset). Verificaremos a contenção equivalente $\overline{f(S)}^c \subset \sigma(f)^c$, para isso, tome $\lambda \in \overline{f(S)}^c$, provaremos que $f - \lambda 1_A \in \text{Inv}(l^\infty(S))$. Como $\lambda \notin \overline{f(S)}^c$, então existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\lambda) \cap f(S) \neq \emptyset$. Dessa forma, temos que

$$|\lambda - f(x)| \geq \delta \quad \forall x \in S.$$

Note agora que isso nos garante a existência da função $g : S \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{\lambda - f(x)}.$$

Como $|g(x)| \leq \frac{1}{\delta}$, temos que g é limitada, isto é, $g \in l^\infty$, repare agora que g é o inverso da função $f = |\lambda - f|$, isto é, $f \in \sigma(f)^c$.

(\supset) Seja $\lambda \in \overline{f(S)}$, então para todo $\epsilon > 0$ $B_\epsilon(\lambda) \cap f(S) \neq \emptyset$, suponha por absurdo que $\lambda \notin \sigma(f)$, isto é, $f - \lambda 1_A \in \text{Inv}(l^\infty(S))$. Nesse caso, temos um $g \in l^\infty(S)$ tal que $(f - \lambda 1_A)g = 1_A$. Como g é limitada, existe $K > 0$ donde:

$$1 = \|1_A\| = \|(f - \lambda 1_A)g\| \leq |f - \lambda 1_A| \cdot \|g\| \leq |f - \lambda 1_A| K,$$

portanto, $\frac{1}{K} \leq |f(x) - \lambda 1_A(x)| = |f(x) - \lambda|$ para todo $x \in S$. Entretanto, isso é uma contradição com o fato que λ é arbitrariamente próximo de $f(S)$, mais precisamente, é uma incoerente com o fato que $B_K(\lambda) \cap f(S) \neq \emptyset$.

Exemplo 1.4.7. Seja A uma álgebra de matrizes triangulares $n \times n$. Se $a \in A$ é da forma

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

então $\sigma(a) = \{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{nn}\}$. De fato, $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda Id \notin \text{Inv}(A)\}$, ou seja, $\sigma(a) = \text{Ker}\{a - \lambda Id\}$ e então $\sigma(a)$ é não trivial se, e somente se, $\det(a - \lambda Id) = 0$, significando que λ é a raiz do polinômio característico $f(\lambda) = \det(a - \lambda Id)$.

Proposição 1.4.8. Seja A uma álgebra de Banach unital, então para qualquer $x \in A$ o seu espectro $\sigma(x) \subset \mathbb{C}$ é um conjunto fechado.

Demonstração. Seja A uma álgebra de Banach unital e $x \in A$, vamos provar que $\rho(x) = \mathbb{C} - \sigma(x)$ é um conjunto aberto. Para verificar isso iremos provar que $\rho(x)$ é a imagem inversa de um aberto por uma contínua.

Considere a função contínua $r : \mathbb{C} \rightarrow A$ dada por $\lambda \mapsto \lambda - x$. É prontamente verificado que $\rho(x) = r^{-1}(\text{Inv}(A))$, de fato, se $\lambda \in r^{-1}(\text{Inv}(A))$ então $r(\lambda) = \lambda - x \in \text{Inv}(A)$. Segue então que $\rho(x)$ é aberto, segue portanto que o seu complementar $\sigma(x)$ é fechado. \square

Os exemplos anteriores nos permitem interpretar o espectro tanto como uma generalização dos autovalores como também uma generalização da imagem de uma função. O seguinte exemplo pode ser provado analogamente ao Exemplo 1.4.5 e nos servirá posteriormente para provar contra-exemplos

Exemplo 1.4.9. Considere a álgebra do disco $A(D)$, então para qualquer $f \in A(D)$ temos que $\sigma(f) = f(D)$. De fato analogamente ao feito no Exemplo 1.4.5 se tomarmos $f \in A(D)$ e $\lambda \in \sigma(f)$, então caso $\lambda \notin f(D)$ segue que podemos definir a função analítica $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = 1 \setminus (f - \lambda)(z)$. Essa será o inverso de $f - \lambda$, o que entrará em contradição com o fato $\lambda \in \sigma(f)$.

Reciprocamente, se $\lambda \in f(D)$ segue que existe $x_0 \in D$ tal que $\lambda = f(x_0)$ e portanto $(\lambda - f)(x_0) = 0 \notin \text{Inv}(A(D))$, isto é, $\lambda \in \sigma(f)$.

Estamos agora em posição de provar acerca da compacidade do espectro.

Proposição 1.4.10. Seja A uma álgebra de Banach unital e $x \in A$, então $\sigma(x) \subset B_{\|x\|}[0]$, em particular, o espectro $\sigma(x)$ é compacto.

Demonstração. Seja A uma álgebra de Banach unital e $x \in A$ provemos que $\sigma(x) \subset B_{\|x\|}[0]$, com isso estabelecido e juntamente da proposição anterior, poderemos concluir que $\sigma(x)$ é um limitado e fechado em \mathbb{C} e portanto compacto. Nos dedicaremos agora a provar a contenção equivalente $(B_{\|x\|}[0])^c \subset \rho(x)$. Seja então $\lambda \in (B_{\|x\|}[0])^c$, isto é, $|\lambda| > \|x\|$, disso temos que $\|\frac{1}{|\lambda|}x\| < 1$ e usando o Teorema 1.3.8 sabemos que existe $(1 - \frac{1}{|\lambda|}x)^{-1}$, ou equivalentemente, $(1 - \frac{1}{|\lambda|}x) \in \text{Inv}(A)$.

Concluimos então que $(x - \lambda) = -\lambda(1 - \frac{1}{|\lambda|}x) \in \text{Inv}(A)$ e portanto $\lambda \in \rho(x)$, ou seja, $(B_{\|x\|}[0])^c \subset \rho(x)$ e segue o resultado. \square

Proposição 1.4.11. Seja A uma álgebra de Banach unital e $a, b \in A$, então se $1 - ab$ é invertível com inversa c temos que $1 - ba$ também é invertível com inversa $1 + bca$.

Demonstração. De fato,

$$(1 - ba)(1 + bca) = 1 + bca - ba - babca.$$

Resta agora verificar que $bca - babca = ba$

$$bca - babca = b(ca - abca) = b(c - abc)a = b[c(1 - ab)]a = ba.$$

Assim $(1 - ba)(1 + bca) = 1$, e a verificação de que $(1 + bca)(1 - ba) = 1$ é análoga. \square

A Proposição 1.4.11 acima pode ser utilizada para garantir o seguinte resultado

Proposição 1.4.12. Se A é uma álgebra de Banach unital e $a, b \in A$ temos que

$$\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}.$$

Demonstração. (C) Seja $\lambda \in \sigma(ab) \setminus \{0\}$, assim $\lambda \neq 0$ e $\lambda \in \sigma(ab)$, isto é, $(ab - \lambda) \notin \text{Inv}(A)$. Se $\lambda \notin \sigma(ba) \setminus \{0\}$ então $\lambda \in \rho(ba) \cup \{0\}$, como $\lambda \neq 0$ temos então que $\lambda \in \rho(ba)$, ou seja, $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - ba \in \text{Inv}(A)\}$. Ainda, como $\lambda \neq 0$ temos que existe λ^{-1} e do fato de $\lambda - ba \in \text{Inv}(A)$ temos então que

$$1 - \lambda^{-1}ba = (\lambda^{-1}(\lambda - ba)) \in \text{Inv}(A).$$

Como $1 - a\lambda^{-1}b \in \text{Inv}(A)$ segue pela Proposição 1.4.11 que $1 - a\lambda^{-1}b \in \text{Inv}(A)$. Da definição de multiplicação em uma álgebra temos que $1 - a\lambda^{-1}b = 1 - \lambda^{-1}ab$ e então

$$\lambda - ab = \lambda(1 - \lambda^{-1}ab) \in \text{Inv}(A).$$

Chegamos então a um absurdo com a hipótese de que $\lambda \in \sigma(ab)$.

(D) A outra contenção é análoga. \square

Seja $p(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \cdots + \lambda_n z^n$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, um polinômio na álgebra de polinômios $\mathbb{C}[z]$. para $a \in A$ denotamos

$$p(a) = \lambda_0 1_A + \lambda_1 a + \cdots + \lambda_n a^n.$$

Com essas definições e os resultados anteriores estamos agora preparados para provar o resultado conhecido como *Teorema do mapeamento espectral*.

Teorema 1.4.13 (Teorema do Mapeamento Espectral). Seja A uma álgebra unital, e sejam $a \in A$ e $p \in \mathbb{C}[z]$. Se $\sigma(a) \neq \emptyset$, então:

$$p(\sigma(a)) = \sigma(p(a)).$$

Demonstração. Seja A uma álgebra unital, $a \in A$ e $p \in \mathbb{C}[z]$. Suponha primeiro que p seja o polinômio constante $p = \lambda_0$, nesse caso é imediato que $p(\sigma(a)) = \{\lambda_0\}$ e temos também que $\sigma(p(a)) = \sigma(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda_0 - \lambda) \notin \text{Inv}(A)\} = \{\lambda_0\}$. Supomos então que $p \in \mathbb{C}[z]$ não é constante.

(C) Primeiramente vamos propor uma equivalência para a condição $u \in \sigma(p(a))$. Seja $u \in \mathbb{C}$, considere o polinômio $p - u$. Como o polinômio está em \mathbb{C} podemos fazer a seguinte decomposição

$$p(z) - u = \lambda_0(\lambda_1 - z)\dots(\lambda_n - z).$$

para algum $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ e $\lambda_0 \neq 0$. Pela Proposição 1.3.6, $p(a) - u1_A \in \text{Inv}(A)$ se, e somente se, $\lambda_i 1_A - a \in \text{Inv}(A)$ para qualquer $i \in \{1, \dots, n\}$. Desse modo, como $u \in \sigma(p(a))$ significa que $p(a) - u1_A \notin \text{Inv}(A)$ temos a seguinte equivalência

$$u \in \sigma(p(a)) \Leftrightarrow \exists i_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ tal que } \lambda_{i_0} \in \sigma(a).$$

Com isso estabelecido, tome $u \in \sigma(p(a))$, portanto existe um índice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\lambda_{i_0} - a \notin \text{Inv}(A)$. Aplicando esse $\lambda_{i_0} \in \mathbb{C}$ em $p - u$ obtemos

$$p(\lambda_{i_0}) - u = \lambda_0(\lambda_1 - \lambda_{i_0})\dots(\lambda_{i_0} - \lambda_{i_0})\dots(\lambda_n - \lambda_{i_0}) = 0,$$

assim achamos um $\lambda_{i_0} \in \sigma(a)$ tal que $u = p(\lambda_{i_0})$ e portanto $u \in p(\sigma(a))$.

(D) Tome $u \in p(\sigma(a))$, nesse caso, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que, pela decomposição abordada anteriormente

$$0 = p(\lambda) - u = \lambda_0(\lambda_1 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda),$$

segue que existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\lambda_{i_0} = \lambda \in \sigma(a)$. Da equivalência anterior garantimos que $u \in \sigma(p(a))$. □

Observação 1.4.14. Como um exemplo de utilização do teorema anterior, tomando os polinômios x^n , $-x$ e λx ($\lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$), obteremos, respectivamente, as igualdades $\sigma(x)^n = \sigma(x^n)$, $-\sigma(x) = \sigma(-x)$ e $\lambda\sigma(x) = \sigma(\lambda x)$. Embora, nesse material, demorará para utilizar as aplicações desse teorema, frisamos que é um resultado de grande importância para a teoria.

A Proposição 1.4.10 nos mostrou que o espectro de um dado $x \in A$ é um conjunto limitado, note que isso nos garante a existência de um menor disco centrado no $0 \in \mathbb{C}$ que contém o espectro. Esse será o objeto da próxima definição.

Definição 1.4.15. Seja A uma álgebra de Banach unital e $x \in A$, definimos o *raio espectral* de x como o conjunto

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Note que a segunda parte do Teorema 1.3.8 nos garante que dado um x pertencendo uma álgebra de Banach unital A teremos que $r(x) \leq \|x\|$. De fato, temos que se $\|x\| < |\lambda|$ então $(x - \lambda) \in \text{Inv}(A)$. A contrapositiva dessa afirmação nos garante que dado $\lambda \in \sigma(x)$, isto é, $(x - \lambda) \notin \text{Inv}(A)$, teremos que $|\lambda| \leq \|x\|$. Disso concluímos que $r(x) \leq \|x\|$.

Exemplo 1.4.16. Seja Ω um compacto Hausdorff e $f \in C(\Omega)$, então $r(f) = \|f\|_\infty$.

De fato, como discutido no Exemplo 1.4.5, podemos dizer que $\sigma(f) = f(\Omega)$ e portanto $r(f) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in f(\Omega)\} = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} = \|f\|_\infty$.

Utilizaremos alguns resultados elementares de análise complexa na próxima proposição. Vamos primeiramente relembrar alguns conceitos.

Definição 1.4.17. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto, X um espaço de Banach e $X^* = \{\phi : X \rightarrow \mathbb{C} \mid \phi \text{ é linear e contínua}\}$ o seu espaço dual. Dizemos que uma função $f : U \rightarrow X$ é *fracamente analítica* se para qualquer $\phi \in X^*$ temos que $\phi \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica.

Proposição 1.4.18. Se A uma álgebra de Banach unital e $x \in A$, então,

- i. $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|R_x(\lambda)\| = 0$
- ii. É válida a chamada *equação resolvente*: $R_x(\lambda) - R_x(\mu) = (\lambda - \mu)R_x(\lambda)R_x(\mu) \forall \lambda, \mu \in \rho(x)$
- iii. A função resolvente é fracamente analítica, isto é, se $\phi \in A^*$ então o mapa $\phi \circ R_x : \rho(x) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica.

Demonstração.

- i. Pelo Teorema 1.3.8, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\|x\| < \lambda$ então $(x - \lambda)$ é invertível e

$$(x - \lambda)^{-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Então temos que

$$\|R_x(\lambda)\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x^n\|}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x\|^n}{|\lambda|^n}.$$

Como $\|x\| < |\lambda|$, então $\frac{\|x\|^n}{|\lambda|^n} < 1$ e portanto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x\|^n}{|\lambda|^n}$ converge. Disso segue que existe uma constante $C = \frac{\|x\|^n}{|\lambda|^n} > 0$ tal que

$$\|R_x(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} C$$

Passando o limite $|\lambda| \rightarrow \infty$ obtemos

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|R_x(\lambda)\| = 0.$$

ii. Sejam $\lambda, \mu \in \rho(x)$ então

$$\begin{aligned}
 (\lambda - \mu)R_x(\lambda)R_x(\mu) &= R_x(\lambda)(\lambda - \mu)R_x(\mu) \\
 &= (x - \lambda)^{-1}(\lambda - \mu)(x - \mu)^{-1} \\
 &= (x - \lambda)^{-1}(\lambda - x + x - \mu)(x - \mu)^{-1} \\
 &= (x - \lambda)^{-1}[(x - \mu) - (x - \lambda)](x - \mu)^{-1} \\
 &= [(x - \lambda)^{-1}(x - \mu) - 1](x - \mu)^{-1} \\
 &= (x - \lambda)^{-1} - (x - \mu)^{-1} \\
 &= R_x(\lambda) - R_x(\mu)
 \end{aligned}$$

iii. seja $\phi \in A^*$ um funcional linear contínuo em A provemos a diferenciabilidade e portanto, a analiticidade de $\phi \circ R_x$. Tomando $\mu \in \rho(x)$ e usando que R_x é contínua e ϕ é linear e contínua, além da equação resolvente provada acima, para fazer o cálculo abaixo

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{\phi \circ R_x(\lambda) - \phi \circ R_x(\mu)}{\lambda - \mu} &= \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{\phi(R_x(\lambda) - R_x(\mu))}{\lambda - \mu} \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{\phi((\lambda - \mu)R_x(\lambda)R_x(\mu))}{\lambda - \mu} \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \phi(R_x(\lambda)(R_x(\mu))) \\
 &= \phi(R_x(\mu))^2
 \end{aligned}$$

Isso estabelece que $\phi \circ R_x$ é diferenciável e portanto analítica.

□

Vamos posteriormente provar que um elemento numa álgebra de Banach tem espectro não vazio, antes disso, vamos introduzir alguns resultados que iremos utilizar. Primeiramente, vamos enunciar o *Teorema de Liouville*.

Teorema 1.4.19 (Teorema de Liouville). Se f é uma *função inteira*, ou seja, uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, e limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|f(\lambda)| \leq M \forall \lambda \in \mathbb{C}$, então f é uma função constante.

Também enunciaremos o *Teorema de Hanh-Banach* e um corolário

Teorema 1.4.20 (Teorema de Hanh-Banach). Seja X um espaço normado e X_0 um subespaço de X . Suponha que $\phi_0 \in X_0$, então existe um $\phi \in X$ tal que

- i. $\phi|_{X_0} = \phi_0$
- ii. $\|\phi\| = \|\phi_0\|$.

Como consequência desse teorema temos o seguinte resultado.

Corolário 1.4.21. Seja X um espaço normado e X^* o seu dual. Se $0 \neq x_0 \in X$, então existe um $\phi \in X^*$ tal que $\|\phi\| = 1$ e $\phi(x_0) = \|x_0\|$.

Vamos agora nos dedicar ao resultado conhecido como *Teorema de Gelfand*.

Teorema 1.4.22 (Teorema de Gelfand). Se A é uma álgebra de Banach e $x \in A$ então temos que $\sigma(x) \neq \emptyset$.

Demonstração. Seja A uma álgebra de Banach e $x \in A$, suponha por contradição que $\sigma(x) = \emptyset$ e seja $\phi \in A^*$. Nos dedicaremos a provar via o Teorema 1.4.19 (Liouville) que $\phi \circ R_x = 0$.

Por hipótese $\rho(x) = \mathbb{C}$ e da Proposição 1.4.18(iii) temos que $\phi \circ R_x : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função inteira (analítica em todo o \mathbb{C}). Usando o fato de que ϕ é um funcional linear contínuo e a Proposição 1.4.18(i), sabemos que $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \phi(R_x(\lambda)) = \phi(0) = 0$. Concluimos assim que

$$\forall \epsilon > 0 \exists M > 0 \text{ tal que } \forall |\lambda| > M \text{ temos } |(\phi \circ R_x)(\lambda)| < \epsilon.$$

Vamos agora argumentar que $\phi \circ R_x$ é limitada. Escolha $\epsilon = 1$, portanto para esse ϵ existe $M > 0$ tal que para todo $|\lambda| > M$ temos $|(\phi \circ R_x)(\lambda)| < 1$. Veremos então que $Im(\phi \circ R_x) \subset \phi \circ R_x(\overline{B_M(0)}) \cup B_1(0)$.

Se $|\lambda| > M$ então temos imediatamente que $Im(\phi \circ R_x) \subset B_1(0)$.

Agora se $|\lambda| \leq M$ então obtemos prontamente que $Im(\phi \circ R_x) \subset \phi \circ R_x(B_M(0)) \subset \phi \circ R_x(\overline{B_M(0)})$.

Como $\overline{B_M(0)}$ é um compacto e ambas ϕ e R_x são contínuas seguirá que $\phi \circ R_x(\overline{B_M(0)})$ é um compacto de \mathbb{C} e portanto um limitado. Segue então que $\phi \circ R_x$ é uma função inteira e limitada, desse modo, lançando mão do Teorema 1.4.19 (Liouville) concluiremos que $\phi \circ R_x$ é uma função constante. Disso tiramos que $\phi \circ R_x = 0$, de fato, como $\phi \circ R_x$ tem limite 0 e é constante, então a função é 0 sempre.

Agora utilizaremos a Corolário 1.4.21 para obter uma contradição. Tome $x \in A$, como $\rho(x) = \mathbb{C}$ segue que tomando $\lambda = 0$ temos que $x - 01 \in \text{Inv}(A)$ e existe x^{-1} . Como $x^{-1} \neq 0$ podemos usar a Corolário 1.4.21 e disso sabemos que existe $\phi \in A^*$ tal que $\phi(x^{-1}) = \|x^{-1}\|$, claro, $\|x^{-1}\| \neq 0$ pois $x^{-1} \neq 0$. Note que como $\phi \circ R_x = 0$ podemos fazer o seguinte cálculo:

$$0 = (\phi \circ R_x)(0) = \phi(R_x(0)) = \phi(x^{-1}) = \|x^{-1}\|.$$

Chegamos portanto a uma contradição, disso segue que $\sigma(x) \neq \emptyset$. □

Foi anteriormente estabelecido que toda álgebra abordada nesse material utiliza os complexos como seu corpo de escalares, notemos agora que essa exigência é essencial para que valha o Teorema 1.4.22. Considere a álgebra de Banach $M_n(\mathbb{R})$ tomada sobre o corpo dos reais, o elemento

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

possui espectro dado pelas soluções da equação $\lambda^2 + 1 = 0$ que sabemos não ter solução real, portanto, $\sigma(A) = \emptyset$.

Nos voltemos agora para a tarefa de obter uma maneira de calcular o raio espectral, entretanto, para isso será necessário enunciar alguns resultados úteis.

Teorema 1.4.23 (Princípio da Limitação Uniforme - Teorema de Banach-Steinhaus). Suponha que X e Y são espaços de Banach e seja $\{T_i : i \in I\}$ uma família de operadores pertencendo a $B(X, Y)$. Acerca dessa família, as seguintes condições são equivalentes.

- i. $\{T_i : i \in I\}$ é *uniformemente limitada* no seguinte sentido: $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.
- ii. $\{T_i : i \in I\}$ é *limitada pontualmente* no seguinte sentido: para cada $x \in X$, a família $\{T_i x : i \in I\}$ é limitada em Y , ou seja, $\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$.

Corolário 1.4.24. Se S é um subconjunto de um espaço normado X , dizemos que S é *fracamente analítico* se $\phi(S)$ é um conjunto limitado de \mathbb{C} para qualquer $\phi \in X^*$. Caso $S \subset X$ seja fracamente analítico, então S é limitado no sentido usual, ou seja, $\sup\{\|x\| : x \in S\} < \infty$.

O próximo Teorema nos concede uma fórmula para calcular o raio espectral, usualmente, é chamada de *fórmula do raio espectral* ou *fórmula de Beurling*. Esse resultado pode ser visto como uma expressão quantitativa do Teorema 1.4.22. (Gelfand).

Teorema 1.4.25 (Fórmula de Beurling). Se A é uma álgebra de Banach unital e se $x \in A$, então

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração. Começaremos fazendo duas observações

- $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x\|$.
- $r(x)^n = r(x^n)$. De fato, usando o Teorema 1.4.13 no polinômio $p(z) = z^n$, temos que $\sigma(x^n) = \sigma(x)^n$, isto é, $\sigma(x^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(x)\}$, portanto:

$$r(x^n) = \sup_{\lambda \in \sigma(x^n)} |\lambda|^n = \left(\sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| \right)^n = r(x)^n.$$

Do fato de $r(x) \leq \|x\|$ e da igualdade $r(x)^n = r(x^n)$ temos que $r(x) = r(x^n)^{\frac{1}{n}} \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ e portanto:

$$r(x) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Resta portanto demonstrar a desigualdade $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$ e obteremos a igualdade $r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Seja $\phi \in A^*$ e defina $F = \phi \circ R_x$, onde R_x é a função resolvente. Pelo Teorema 1.3.8, para $|\lambda| \geq \|x\|$ se verifica a seguinte igualdade

$$R_x(\lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Portanto, pela linearidade e continuidade de $\phi \in A^*$ temos:

$$F(\lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(x^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

Dessa forma, F é analítica em $\{\lambda : |\lambda| > \|x\|\}$ e portanto na região $\{\lambda : |\lambda| > r(x)\}$. Assim, para qualquer $|\lambda| > r(x)$, como a série acima é convergente, seu termo geral vai para zero quando n vai para o infinito, multiplicando esse limite por λ obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(x^n)}{\lambda^n} = 0 \quad \forall |\lambda| > r(x).$$

Desse modo, o conjunto $\{\frac{\phi(x^n)}{\lambda^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado, como $\phi \in A^*$ é arbitrário, $\{\frac{x^n}{\lambda^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é fracamente limitado no sentido introduzido pelo Corolário 1.4.24. Utilizando o mesmo corolário, concluímos que $\{\frac{x^n}{\lambda^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado. Podemos então achar um $K > 0$ tal que $\|\frac{x^n}{\lambda^n}\| \leq K$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, reescrevendo essa desigualdade obtemos que $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| K^{\frac{1}{n}}$ para $n \in \mathbb{N}$ e $|\lambda| > r(x)$.

Concluímos assim que $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| \lim_{n \rightarrow \infty} K^{\frac{1}{n}} = |\lambda|$ para qualquer $|\lambda| > r(x)$. Isso justamente significa que $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$. Assim provamos a igualdade desejada. \square

Alertamos ao leitor de que a noção de espectro é dependente da álgebra ambiente. Com isso queremos dizer que dada uma álgebra unital A e uma subálgebra unital $B \subset A$, o espectro de um $x \in B \subset A$, relativamente a B , não necessariamente coincidirá com o espectro relativo a A (ele fica maior). Introduziremos essas noções na próxima definição.

Definição 1.4.26. Suponha que A é uma álgebra de Banach unital, $B \subset A$ uma subálgebra unital de A e $x \in B \subset A$. Para qualquer subálgebra de Banach C tal que $B \subseteq C \subseteq A$ podemos definir o resolvente de x relativamente a C da maneira natural:

$$\rho_C(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists z \in C \text{ tal que } z(x - \lambda) = (x - \lambda)z = 1\}.$$

Convidamos ao leitor que aprecie o fato de que a exigência da unidade de uma subálgebra unital coincidir com a subálgebra maior foi necessária para fazer essa definição. Claro, utilizando esse conjunto resolvente podemos definir o espectro de x relativamente a C

$$\sigma(x) = \mathbb{C} - \rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \nexists z \in C \text{ tal que } z(x - \lambda) = (x - \lambda)z = 1\}.$$

Claro que tanto o espectro quanto o conjunto resolvente introduzidos anteriormente podem ser manifestados como particulares da nova noção aqui introduzida, isto é, $\sigma(x) = \sigma_A(x)$ e $\rho(x) = \rho_A(x)$.

Relembrando que a *fronteira topológica* de um subconjunto $\Sigma \subset \mathbb{C}$, denotada $\partial\Sigma$, é definida por

$$\partial\Sigma = \overline{\Sigma} = \overline{\mathbb{C} - \Sigma}.$$

Portanto temos que $\lambda \in \partial\Sigma$ se, e somente se, existem sequências $(\lambda_n) \subset \Sigma$ e $(z_n) \subset \mathbb{C} - \Sigma$ tal que $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

O resultado a seguir descreve algumas relações entre as noções de espectro

Proposição 1.4.27. Seja A uma álgebra de Banach unital e $B \subset A$ uma subálgebra de Banach unital de A . Se $x \in B$ temos as seguintes relações:

- i. se $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo unital de álgebras e $x \in A$ temos

$$\sigma_A(\varphi(x)) \subset \sigma_B(x).$$

Em particular, se φ é o homomorfismo inclusão então

$$\sigma_B(x) \supset \sigma_A(x).$$

- ii. $\partial(\sigma_B(x)) \subset \partial(\sigma_A(x))$

Demonstração.

- i. Suponha A e B unitais, $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo unital e $x \in B \subset A$. Note que para mostrar o resultado desejado basta provar a inclusão $\rho_B(x) \subset \rho_A(\varphi(x))$. Se $\lambda \in \rho_B(x)$ então $\exists z \in B$ tal que

$$z(x - \lambda) = (x - \lambda)z = 1.$$

Aplicando o homomorfismo unital φ na equação acima temos

$$\varphi(z)(\varphi(x) - \lambda\varphi(1)) = (\varphi(x) - \lambda\varphi(1))\varphi(z) = \varphi(1).$$

Como $\varphi(1) = 1$ obtemos então que $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $\exists \varphi(z) \in A$ tal que $\varphi(z)$ é o inverso de $(\varphi(x) - \lambda)$. Concluimos portanto que $\lambda \in \rho_A(\varphi(x))$, ou seja, $\sigma_A(\varphi(x)) \subset \sigma_B(x)$. Em particular, ao tomar φ como a inclusão obtemos $\sigma_B(x) \supset \sigma_A(x)$.

ii. Seja $\lambda \in \partial(\sigma_B(x))$, assim existe uma sequência $(\alpha_n) \subset \sigma_B(x)$ tal que $\alpha_n \rightarrow \lambda$, como pela Proposição 1.4.8, o espectro é fechado, segue que $\lambda \in \sigma_B(x)$. Por definição, também garantimos a existência de uma sequência $(\lambda_n) \subset \rho_B(x)$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Como pelo item i. temos que $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$, temos que $\rho_B(x) \subset \rho_A(x)$ e portanto $\lambda_n \in \rho_A(x)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Obtemos então uma sequência no complementar de $\sigma_A(x)$ convergindo para λ , resta apenas concluir que $\lambda \in \sigma(x)$ e teremos uma sequência em $\sigma_A(x)$ convergindo para λ (essa seria a sequência $a_n = \lambda \forall n \in \mathbb{N}$).

Suponha então que $\lambda \notin \sigma_A(A)$, nesse caso, existe $(x - \lambda)^{-1}$. Repare que do fato de λ_n convergir para λ temos que $(x - \lambda_n) \rightarrow (x - \lambda)$ e pelo Corolário 1.3.14, o fato de $\lim_{n \rightarrow \infty} (x - \lambda_n) = (x - \lambda)$ nos garante que $(x - \lambda_n)^{-1} \rightarrow (x - \lambda)^{-1}$. Observe agora que como B é uma subálgebra de Banach, então B é fechado, e já que $(x - \lambda_n)^{-1}$ pertence a B para todo $n \in \mathbb{N}$ segue que $(x - \lambda)^{-1} \in B$, contradizendo que $\lambda \in \sigma_B(x)$.

□

Observação 1.4.28. Frisamos que a exigência, na Definição 1.1.2, de que a unidade de uma subálgebra unital coincida com a unidade da álgebra ambiente é crucial para a validade da proposição anterior. Como contraexemplo, considere a subálgebra B de $A = M_2(\mathbb{C})$ apresentada no Exemplo 1.1.15. Nesse caso, temos:

$$\sigma_B \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \{1\} \neq \sigma_A \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \{1, 0\}.$$

Portanto, encontramos um elemento a tal que $\sigma_A(a) \not\supseteq \sigma_B(a)$.

O próximo exemplo se dedicará a provar que é possível achar uma inclusão restrita na Proposição 1.4.27 - i.

Exemplo 1.4.29. Considere $D = B_1[0]$ e $S_1 = S_1(0)$, respectivamente, o disco e o círculo de raio 1 no plano complexo. Considere a álgebra do disco $A(D)$ e a álgebra das funções complexas contínuas em S_1 , ambas são álgebras de Banach pelos exemplos 1.1.16 e 1.1.10. Considere a função:

$$\varphi : A(D) \longrightarrow C(S_1) \quad \text{dado por} \quad f \longmapsto f|_{S_1},$$

é um isomorfismo isométrico. De fato, as propriedades de homomorfismo são garantidas pelo fato da restrição se comportar bem com a soma e multiplicação por escalar. Já para a isometria, utilizares o Princípio do Máximo, que nos garante que o sup de uma função é encontrado no seu bordo, podemos fazer o seguinte cálculo:

$$\|f\|_{A(D)} := \sup_{z \in D} |f(z)| = \sup_{z \in S_1} |f(z)| = \|f\|_{C(S_1)}.$$

Note que como φ é um isomorfismo, então ele é unital, como por meio da identificação φ temos que $A(D)$ pode ser “vista” dentro de $C(S_1)$, segue que a Proposição 1.4.27 nos garante que para qualquer $f \in A(D)$ temos

$$\sigma_{A(D)}(f) \subset \sigma_{C(S_1)}(f|_{S_1}).$$

Entretanto, usando os exemplos 1.4.5 e 1.4.9 concluímos que dados $f \in A(D)$ e $g \in C(S_1)$ segue:

$$\sigma_{A(D)}(f) = \text{Im}(f) \quad \text{e} \quad \sigma_{C(S_1)}(g) = \text{Im}(g).$$

Logo, tomando a função dada por $f(z) = z$, ou seja, a função identidade, segue que $\sigma_{A(D)}(f) = D$ e $\sigma_{C(S_1)}(g) = S_1$, o que nos traz: $\sigma_{C(S_1)}(g) \subset \sigma_{A(D)}(f)$, contradizendo a Proposição 1.4.27.

1.5 Teoria de Gelfand

Nos dedicaremos agora a introduzir um importantíssimo conceito relacionado a álgebras de Banach: a noção de espectro de uma álgebra. Dentre os primeiros resultados importantes relacionada a esse espectro, poderemos caracterizar o espectro de um elemento qualquer numa álgebra de Banach em função do espectro da álgebra ambiente. Em particular, muniremos esse novo espectro, denotado por \hat{A} de uma topologia, que tornará \hat{A} num localmente compacto Hausdorff, e exibiremos um homomorfismo contrativo entre uma álgebra de Banach comutativa A e o espaço $C_0(\hat{A})$.

Nessa seção vamos usualmente assumir que A é uma álgebra de Banach comutativa e unital.

Proposição 1.5.1. Se A é uma álgebra de Banach comutativa e unital e $x \in A$, então as seguintes são equivalentes

- i. x não é invertível;
- ii. existe um ideal maximal I em A tal que $x \in I$.

Demonstração. (i. \Rightarrow ii.) Aqui vamos utilizar repetidamente a Proposição 1.2.10. Suponha que x não é invertível. Caso $x = 0$, a hipótese de que A é comutativa junta da Proposição 1.2.10, obtemos a existência um ideal maximal, note então que $x = 0$ está nesse ideal.

Caso $x \neq 0$ ainda vamos recorrer a Proposição 1.2.10. basta agora criarmos um ideal próprio contendo x . Defina $I_0 = \{ax : a \in A\}$ um ideal de A que contém x , de fato, como A é unital $1x = x \in A$. Note agora que $I_0 \neq \{0\}$ basta ver que $x \in I_0$ e $x \neq 0$. Também temos que $I_0 \neq A$, repare que $1 \notin I_0$ pois se esse fosse o caso então do fato que

A é comutativa, $\exists a \in A$ tal que $ax = 1 = xa$. Assim, como I_0 é um ideal próprio numa álgebra comutativa temos pela Proposição 1.2.10. que existe um I ideal maximal tal que $I \supset I_0$. Portanto achamos um ideal maximal I tal que $x \in I$.

(ii. \Rightarrow i.) Se existe um ideal maximal I de A tal que $x \in I$ então utilizando a Proposição 1.3.6 temos que $I \cap \text{Inv}(A) = \emptyset$ e portanto x não é inversível. \square

A proposição anterior nos mostra que qualquer álgebra de Banach comutativa que contém um $0 \neq x \notin \text{Inv}(A)$ deve conter um ideal maximal. A próxima proposição, chamada de *Teorema de Gelfand-Mazur*, nos ajuda a restringir as álgebras que satisfazem esse requerimento. Primeiramente, vamos introduzir algumas definições.

Definição 1.5.2. Uma álgebra A é chamada *álgebra de divisão* se todo elemento diferente de zero é invertível. Além disso, A é dita ser *simples* se não existem ideais próprios em A

Teorema 1.5.3 (Teorema de Gelfand-Mazur). Seja A uma álgebra de Banach comutativa e unital, as seguintes condições são então equivalentes:

- i. A é uma álgebra de divisão
- ii. A é simples
- iii. $A = \mathbb{C}1_A$.

Demonstração. (i. \Rightarrow ii.): Provaremos a contrapositiva. Se A não é simples, isto é, contém um ideal próprio, então pela Proposição 1.2.10 ele contém ideais maximais. Usando a proposição 1.3.1 obtemos que existem elementos não zero invertíveis.

(ii. \Rightarrow iii.): Basta verificar que $A \subset \mathbb{C}1$ dado que a inclusão contrária segue imediatamente do fato de A ser unital.

Seja $x \in A$. Pelo Teorema 1.4.22. sabemos que $\sigma(x) \neq \emptyset$ e portanto podemos tomar $\lambda \in \sigma(x)$. Considere $I = A(x - \lambda)$, a verificação de que I é um subspaço é direta, para ver que I é um ideal, seja $b \in A$ e $a(x - \lambda) \in I$. Temos que $ba(x - \lambda) \in I$ e para ver que $a(x - \lambda)b \in I$ basta utilizar que A é comutativa, de fato, $a(x - \lambda)b = a(xb - \lambda 1b) = a(bx - b\lambda 1) = ab(x - \lambda)$.

Vamos agora verificar que $I \neq A$ e como por hipótese A é uma álgebra simples, podemos concluir que $I = A(x - \lambda) = \{0\}$ e portanto $x = \lambda 1$. Suponha então que $I = A$, como A é unital, então da igualdade $A(x - \lambda) = A$ temos que $\exists a \in A$ tal que $a(x - \lambda) = 1 \in A$ e como A é comutativo, ao utilizar o mesmo raciocínio do parágrafo anterior temos que $a(x - \lambda) = (x - \lambda)a$ e portanto a é o inverso de $(x - \lambda)$ o que contradiz o fato de que $(x - \lambda) \notin \text{Inv}(A)$.

(iii. \Rightarrow i.): Segue imediatamente do fato de que todo $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ é inversível. \square

Definição 1.5.4. Um *homomorfismo complexo* numa álgebra de Banach comutativa A é uma função $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ que é um homomorfismo de álgebra não-nulo, ou seja, Para todos $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos que

- i. $\varphi(\lambda a + b) = \lambda\varphi(a) + \varphi(b)$
- ii. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
- iii. $\varphi \neq 0$.

A coleção de todos os homomorfismos complexos, denotada por \widehat{A} , é o conjunto:

$$\widehat{A} = \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ é um homomorfismo complexo}\}.$$

\widehat{A} é chamado de *espectro* ou *espaço dos caracteres* da álgebra A e os seus elementos $\varphi \in \widehat{A}$ são chamados de *caracteres*. Podemos resumir as condições i.,ii. e iii. dizendo que φ é um funcional linear multiplicativo não nulo.

Fixado um $x \in A$ podemos definir a seguinte função

$$\begin{aligned} \widehat{x} : \widehat{A} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \widehat{x}(\varphi) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Essa função é frequentemente referida como *função avaliação*

Observação 1.5.5. Devemos observar que para uma álgebra de Banach unital a condição iii. da Definição 1.5.4 é equivalente ao requerimento de que $\varphi(1) = 1$. De fato, se $\varphi \neq 0$ então $\exists a \in A$ tal que $\varphi(a) \neq 0$. Portanto $\varphi(a) = \varphi(a1) = \varphi(a)\varphi(1)$ implicando que $\varphi(1) = 1$. Agora se $\exists 1 \in A$ tal que $\varphi(1) = 1 \neq 0$ então $\varphi \neq 0$.

Vamos agora provar um lema de grande importância, para isso, nos dedicaremos a desenvolver as duas seguintes proposições preliminares.

Proposição 1.5.6. Seja I um ideal numa álgebra A , então existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos ideais de A/I : $M = \{J : J \text{ é um ideal de } A/I\}$ e o conjunto dos ideais de A que contém I : $N = \{J : J \text{ é um ideal de } A \text{ e } J \supset I\}$.

Demonstração. Considere a função $f : M \rightarrow N$ dada por $J \mapsto \pi^{-1}(J)$ onde $\pi : A \rightarrow A/I$ é o mapa quociente, propomos que essa é a bijeção procurada. Primeiramente verifiquemos que está bem definida, como π é um homomorfismo e J é um ideal, segue do fato que π é um homomorfismo e pela Proposição 1.2.8 que $\pi^{-1}(J)$ é um ideal.

Provemos agora que $\pi^{-1}(J)$ contém I . Seja $x \in I$, veremos que $\pi(x) \in J$, note que $\pi(x) = x + I = 0 + I$. Como J é ideal de A/I , contém o elemento neutro $0 + I$ de A/I , segue então que $\pi(x) \in J$, ou ainda, $x \in \pi^{-1}(J)$.

O fato de f ser uma bijeção é direto: basta notar que se $\pi^{-1}(J_1) = \pi^{-1}(J_2)$ então $J_1 = J_2$ e que dado um elemento $\pi^{-1}(J_0)$ pertencendo a N podemos escolher $J_0 \in N$ tal que $f(J_0) = \pi^{-1}(J_0)$. \square

Proposição 1.5.7. Seja A uma álgebra de Banach unital e comutativa e $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ um caractere, então $\text{Ker}(\varphi)$ é um ideal maximal.

Demonstração. Lembremos que $\text{Ker}(\varphi)$ é de fato um ideal, note que como A é unital segue que $\text{Ker}(\varphi)$ é próprio, provaremos agora $\text{Ker}(\varphi)$ é ideal maximal. Suponha para obter contradição que exista um ideal I de A contendo $\text{Ker}(\varphi)$ propriamente, segue então que existe $x \in I$ tal que $x \notin \text{Ker}(\varphi)$.

Note agora que via a Observação 1.5.5 e o fato de φ ser um homomorfismo complexo temos que $\varphi(x)1 - x \in \text{Ker}(\varphi)$, segue então que $\varphi(x)1 - x \in I$, e do fato que $x \in I$ temos ainda que $\varphi(x)1 \in I$. Perceba que como $x \notin \text{Ker}(\varphi)$ temos que $\varphi(x) \neq 0$ e portanto $1 \in I$. O fato da unidade estar mo I implica que dado qualquer $a \in A$ temos $a1 \in I$, isto é, $I = A$. Disso segue que $\text{Ker}(\varphi)$ é maximal. \square

O próximo lema contém uma coleção de afirmações de grande importância. Usaremos a notação $\text{Max}(A)$ para indicar a coleção de todos os ideais maximais de uma álgebra de Banach A .

Lema 1.5.8. Seja A uma álgebra de Banach unital e comutativa. Temos então que

- i. \widehat{A} é não vazio e a função $f : \widehat{A} \rightarrow \text{Max}(A)$ dada por $\varphi \rightarrow \text{Ker}(\varphi)$ é uma bijeção entre o espectro de A e a coleção de todos os ideais maximais em A ;
- ii. $\widehat{x}(\widehat{A}) = \sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \widehat{A}\}$
- iii. A condição $\|\varphi\| = 1$ nos garante que as seguintes afirmações acerca do mapa $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ são equivalentes:
 - a. $\varphi \in \widehat{A}$;
 - b. $\varphi \in A^*$, $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \forall x, y \in A$.

Demonstração.

- i. Defina então a função $f : \widehat{A} \rightarrow \text{Max}(A)$ dada por $\varphi \rightarrow \text{Ker}(\varphi)$, vamos provar que é uma bijeção:
 - Injetividade: sejam $\phi, \psi \in \widehat{A}$ tal que $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(\psi)$. Seja $a \in A$, note que como $\phi(1) = 1$, (Observação 1.5.5) então $a - \phi(a)1 \in \text{Ker}(\phi)$, já o fato que $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(\psi)$ nos garante que $\psi(a - \phi(a)1) = 0$, ou seja, $\psi(a) = \phi(a)$ e pela arbitrariedade de a , segue que $\psi = \phi$.

- Sobrejetividade: seja I um ideal maximal de A , pela Proposição 1.3.11 I é fechado, portando, A/I é uma álgebra de Banach unital.

Pela Proposição 1.5.6 um ideal de A/I corresponde a um ideal J de A tal que $J \supset I$ então, como I é maximal, A/I é simples. Usando o Teorema de Gelfand-Mazur 1.5.3, obtemos um isomorfismo $\eta: A/I \rightarrow \mathbb{C}$. Obtemos assim um homomorfismo sobrejetivo, ou seja, um caracter $\varphi := \eta \circ \pi: A \rightarrow \mathbb{C}$, onde $\pi: A \rightarrow A/I$ é o homomorfismo quociente. Mais ainda, temos

$$\ker(\varphi) = \ker(\pi) = I.$$

- ii. (C) Tome $\lambda \in \sigma(a)$, provemos que existe $\varphi \in \widehat{A}$ tal que $\varphi(a) = \lambda$. Primeiramente, proceda como na prova do Teorema 1.5.3 para concluir que $A(a - \lambda)$ é um ideal próprio, note então que pela Proposição 1.2.10 existe um ideal maximal I tal que $A(a - \lambda) \subset I$.

Note agora que devido a bijeção explicitada no item i. do Lema 1.5.8 existe um $\varphi \in \widehat{A}$ tal que $\text{Ker}(\varphi) = I$, portanto, tomando $1 \in A$ obtemos que $\varphi(a - \lambda 1) = 0$, ao que concluímos que $\varphi(a) = \lambda$ e então a contenção desejada está demonstrada.

(D) Tome $\varphi \in \widehat{A}$, verificaremos que $\varphi(a) \in \sigma(a)$. De fato, $\varphi(a)1 - \varphi(a) = \varphi(a - a) = 0$ e portanto $\varphi(a)1 - \varphi(a) \notin \text{Inv}(A)$, ou seja, $\varphi(a) \in \sigma(\varphi(a))$. Como A é unital e $\varphi \in \widehat{A}$, pela Observação 1.5.5 temos que φ é um homomorfismo unital, segue então pela Proposição 1.4.27 que $\sigma(\varphi(a)) \subset \sigma(a)$ e portanto $\varphi(a) \in \sigma(a)$, como desejado.

- iii. (a. \Rightarrow b.) Suponha que $\varphi \in \widehat{A}$. Note que basta verificar a condição de que $\|\varphi\| = 1$. Pelo item ii. desse lema temos que dado um $x \in A$, temos que $\varphi(x) \in \widehat{\sigma(x)} = \sigma(x)$. E do fato que $r(x) \leq \|x\|$ (Equação abordada na Definição 1.4.15), obtemos o seguinte cálculo

$$|\varphi(x)| \leq r(x) \leq \|x\|,$$

Segue então que $\|\varphi\| \leq 1$. Como $\varphi(1) = 1$ e $\|1\| = 1$ então $1 \in \{|\varphi(x)| : \|x\| \leq 1\}$ e portanto $\|\varphi\| \geq 1$. Temos portanto que $\|\varphi\| = 1$.

(b. \Rightarrow a.) Suponha agora que $\varphi \in A^*$, $\|\varphi\| = 1$, e $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \forall x, y \in A$. Resta apenas verificar que $\varphi \neq 0$. Isso segue diretamente da hipótese de que $\|\varphi\| = 1$.

□

Dentre os primeiros resultados que colheremos em virtude do lema anterior será que o espectro \widehat{A} de uma álgebra de Banach comutativa está contido no conjunto $\{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \in A^*, \|\varphi\| \leq 1\}$. Essa afirmação é obtida juntando o item ii. do lema anterior com a proposição a seguir.

Proposição 1.5.9. Seja A uma álgebra de Banach comutativa não unital. Nessas hipóteses, se $\varphi \in \widehat{A}$ então temos que $\varphi \in A^*$ e $\|\varphi\| \leq 1$.

Demonstração. Seja A^1 a unitização de A e defina

$$\varphi^1 : A^1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, \alpha) \longmapsto \varphi^1((x, \alpha)) = \varphi(x) + \alpha.$$

Desse modo, $\varphi^1 \in \widehat{A^1}$. A verificação de que φ^1 é um funcional linear multiplicativo é direta e $\varphi^1((0, 1)) = \varphi(0) + 1 = 1$ nos garante que φ^1 é não nulo.

Usando o Lema 1.5.8. (ii) temos que $\varphi^1 \in (A^1)^*$ e $\|\varphi^1\| \leq 1$, com isso tiraremos a conclusão desejada. Da hipótese já temos que $\varphi \in A^*$, resta ver que $\|\varphi\| \leq 1$. Note que tomando $\alpha = 0$ obtemos a seguinte inclusão de conjuntos

$$\{|\varphi(x)| : \|x\| \leq 1\} \subset \{|\varphi^1((x, \alpha))| : \|(x, \alpha)\| \leq 1\}.$$

Disso concluímos que $\|\varphi\| \leq \|\varphi^1\|$ e como $\|\varphi^1\| \leq 1$, segue o resultado. \square

Note que pelo desenvolvido na proposição e lema anteriores temos que, se A é uma álgebra de Banach, todo homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ é contrativo, em particular, contínuo.

Para a próxima proposição deixemos em mente o homomorfismos $\varphi^1 : A^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $(x, \alpha) \longmapsto \varphi^1((x, \alpha)) = \varphi(x) + \alpha$. No caso de $\varphi = 0$, denotamos φ^1 por φ_∞ , ou seja, o homomorfismo $(x, \alpha) \longmapsto \alpha$.

Proposição 1.5.10. Seja A uma álgebra de Banach comutativa, então

$$\widehat{A^1} = \{\varphi^1 : \varphi \in \widehat{A}\} \cup \{\varphi_\infty\}.$$

Demonstração. (⊂) Proceda como na demonstração da Proposição anterior (1.5.9) para concluir que se $\varphi \in \widehat{A}$ tanto φ^1 como φ_∞ são funcionais lineares multiplicativos não nulos.

(⊃) Seja $\varphi \in \widehat{A^1}$ e $(a, \alpha) \in A^1$. Note que devido ao fato de φ ser um elemento do espectro de uma álgebra de Banach unital:

$$\begin{aligned} \varphi((a, \alpha)) &= \varphi((a, 0) + (0, \alpha)) \\ &= \varphi((a, 0)) + \varphi((0, \alpha)) \\ &= \varphi((a, 0)) + \alpha\varphi((0, 1)) \\ &= \varphi((a, 0)) + \alpha. \end{aligned}$$

Defina agora $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $\tau(a) = \varphi((a, 0))$. Provemos que τ é um funcional linear multiplicativo. De fato, sejam $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$\tau(a + b) = \varphi((a + b, 0)) = \varphi((a, 0)) + \varphi((b, 0)) = \tau(a) + \tau(b);$$

$$\tau(\lambda a) = \varphi((\lambda a, 0)) = \lambda \varphi((a, 0)) = \lambda \tau(a);$$

$$\tau(ab) = \varphi((ab, 0)) = \varphi((a, 0)(b, 0)) = \varphi((a, 0))\varphi((b, 0)) = \tau(a)\tau(b).$$

Observe que no caso de $\tau = 0$ temos que, devido ao fato de termos escrito $\varphi((a, \alpha)) = \tau(a) + \alpha$, temos que $\varphi = \tau_\infty$, já caso $\tau \in \widehat{A}$, então $\varphi = \tau^1$, dessa forma temos $\widehat{A}^1 \subset \{\varphi^1 : \varphi \in \widehat{A}\} \cup \{\varphi_\infty\}$. \square

Teorema 1.5.11. Sejam A uma álgebra de Banach comutativa e $a \in A$. Obtemos os seguintes resultados.

i. Se A é unital, temos então que

$$\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \widehat{A}\}.$$

ii. Se A não é unital então

$$\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \widehat{A}\} \cup \{0\}.$$

Demonstração. i. Já foi feita no Lema 1.5.8.

ii. Supomos agora que A não é unital e tomemos $a \in A$. Lembremos que, nesse caso, $\sigma_A(a) = \sigma_A^1(i(a)) = \sigma_A^1((a, 0))$ onde $i : A \rightarrow A^1$ é dado por $a \mapsto (a, 0)$. Pelo item i. desse teorema temos que

$$\sigma_A^1((a, 0)) = \{\varphi((a, 0)) : \varphi \in \widehat{A}, \}$$

e pela Proposição 1.5.10, o espectro da unitização pode ser expresso como

$$\widehat{A}^1 = \{\varphi^1 : \varphi \in \widehat{A}\} \cup \{\varphi_\infty\}.$$

Disso obtemos que

$$\sigma_A^1((a, 0)) = \{\varphi(a) : \varphi \in \widehat{A}\} \cup \{0\}.$$

\square

Podemos fazer uma interessante aplicação do teorema acima, se A for uma álgebra de Banach qualquer, então o espectro de um elemento da álgebra de Banach não é submultiplicativo nem subaditivo com respeito a “ \subset ”, de fato, considere

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ab = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a + b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

calculando seus autovalores obtemos $\sigma(a) = \sigma(b) = 0$, $\sigma(ab) = \{0, 1\}$ e $\sigma(a + b) = \{-1, 1\}$. Nota-se portanto, que não temos a desejada propriedade $\sigma(ab) \subset \sigma(a)\sigma(b)$ e $\sigma(a + b) \subset \sigma(a) + \sigma(b)$.

Proposição 1.5.12. Seja A uma álgebra de Banach unital e $x, y \in B$ dois elementos que comutam entre si ($xy = yx$). Nessas condições:

- i. $\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y)$.
- ii. $\sigma(x + y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$.

Demonstração.

- i. Suponha primeiramente que A é comutativa. Pelo Teorema 1.5.11, dado um $\gamma \in \sigma(xy)$ existe um $\varphi \in \widehat{A}$ tal que $\gamma = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Note agora que, pelo mesmo teorema, existe $\lambda \in \sigma(x)$ tal que $\lambda = \varphi(x)$ e existe $\eta \in \sigma(y)$ tal que $\eta = \varphi(y)$. Disso tiramos que $\gamma = \lambda \cdot \eta$ e portanto $\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y)$.

Trataremos agora do caso geral. Considere $\lambda \notin \sigma_B(x)$ e $\eta \notin \sigma_B(y)$, além disso, seja D a álgebra de Banach gerada por $x, y, 1(x - \lambda 1)^{-1}$ e $(y - \eta)^{-1}$. Nesse caso, B é comutativa e unital, ainda, $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ e $\sigma_A(y) = \sigma_B(y)$. Temos portanto:

$$\sigma_B(xy) \subset \sigma_A(xy) \subset \sigma_A(x)\sigma_A(y) = \sigma_B(x)\sigma_B(y).$$

- ii. Provemos a outra proposição analogamente, considerando primeiro A comutativa, através do Teorema 1.5.11 dado um $\gamma \in \sigma(x + y)$ existe $\varphi \in \widehat{A}$ tal que $\gamma = \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Semelhantemente, existe $\lambda \in \sigma(x)$ e $\eta \in \sigma(y)$ tal que $\lambda \in \varphi(x)$ e $\eta \in \varphi(y)$. Nesse caso, $\gamma = \lambda + \eta$, e segue o resultado. Para o caso geral mais uma vez seguimos a mesma receita do item anterior

□

Vamos agora definir uma topologia no espectro \widehat{A} de uma álgebra de Banach comutativa. Uma vez havendo definido essa topologia usaremos do *teorema de Banach-Alaoglu*, enunciado abaixo (sem prova), para demonstrar que \widehat{A} é um localmente compacto Hausdorff.

Definição 1.5.13. Dados X um conjunto qualquer, I um conjunto de índices, $(Y_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda \in I}$ uma família de espaços topológicos e uma família de aplicações $(f_\lambda)_{\lambda \in I}$ da forma:

$$f_\lambda : X \longrightarrow (Y_\lambda, \tau_\lambda).$$

Então a *topologia inicial* induzida pela família τ_λ é a menor topologia em X que torna todas as aplicações f_λ contínuas, ou seja, é a topologia:

$$\{f^{-1}(U_\lambda) : U_\lambda \in \tau_\lambda\}.$$

Dada uma álgebra de Banach A , definimos a *topologia fraca estrela* como a menor topologia em \widehat{A} tal que para qualquer $a \in A$ o seguinte operador é contínuo

$$\widehat{a} : \widehat{A} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ dado por } \varphi \longmapsto \varphi(a).$$

Definição 1.5.14. Um *conjunto dirigido* é um conjunto J munido de uma relação de ordem parcial \preceq tal que para cada par $\alpha, \beta \in J$ temos que existe um elemento $\gamma \in J$ tal que $\alpha \preceq \gamma$ e $\beta \preceq \gamma$.

Seja X um espaço topológico e J um conjunto dirigido, uma *rede* em X é uma função $f : J \rightarrow X$ dada por $\alpha \mapsto f(\alpha)$, usualmente denotamos $f(\alpha)$ por x_α e a rede f por $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ ou simplesmente por (x_α) .

Uma rede (x_α) é dita ser *convergente* para um ponto $x \in X$ se para cada vizinhança U de x existe um $\alpha_0 \in J$ tal que para $\alpha \succeq \alpha_0$ temos $x_\alpha \in U$. Nesse caso, denotamos $x_\alpha \rightarrow x$. Reparamos na semelhança a noção usual de convergência em espaços topológicos, de fato, \mathbb{N} é um conjunto dirigido quando munido da ordem parcial \leq , note que quando $J = \mathbb{N}$ a rede $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ coincide com a definição de sequência.

Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função entre os espaços topológicos X e Y então f é contínua se, e somente se, é sequencialmente contínua no seguintes sentido: se (x_α) é uma rede em X convergindo para x temos que $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$. Isso implica que se estamos em um espaço X com soma e produto definidos e temos duas redes $(x_\alpha), (y_\alpha)$ convergindo respectivamente para x e y então valem as seguintes propriedades de sequências: $(x_\alpha + y_\alpha) \rightarrow x + y$, $(x_\alpha)(y_\alpha) \rightarrow xy$ e $(\lambda x_\alpha) \rightarrow \lambda x$. Nesse caso, para ver que um conjunto $S \subset X$ é fechado, basta ver que se $(x_\alpha) \subset S$ é tal que $x_\alpha \rightarrow x$, então $x \in S$.

Também nos será útil reparar que um espaço topológico X é Hausdorff se, e somente se, o limite de uma rede qualquer em X é único.

Definimos a topologia fraca estrela como a menor topologia que faz das avaliações funções contínuas, entretanto, para realizar demonstrações é frequentemente necessário caracterizar essa definição por meio de redes.

Observação 1.5.15. Utilizando a caracterização de continuidade via redes note que o fato de todas as funções $\hat{a} : \hat{A} \rightarrow \mathbb{C}$ serem contínuas é dizer que dada uma rede $(\varphi_i)_{i \in I} \subset \hat{A}$ temos que $\varphi_i \rightarrow \varphi$ implica que $\hat{a}(\varphi_i) \rightarrow \hat{a}(\varphi)$, equivalentemente, $\varphi_i(a) \rightarrow \varphi(a)$. Em virtude do que acabou de ser discutido, dizer que uma rede $(\varphi_i)_{i \in I}$ de caracteres converge na topologia fraca estrela é dizer que essa rede converge “pontualmente”, nesse sentido, nos referimos a topologia fraca estrela como a topologia da convergência pontual.

Afirmaremos que é possível provar, embora não ofereçamos uma prova aqui, que a convergência na topologia fraca estrela não apenas implica mas é equivalente a convergência pontual, ou seja, dada uma rede $(\varphi_i)_{i \in I}$ de caracteres:

$$\varphi_i \rightarrow \varphi \text{ (fraca estrela)} \Leftrightarrow \varphi_i(a) \rightarrow \varphi(a).$$

Por fim, enunciaremos um resultado de topologia: se for retirado um ponto de um espaço compacto Hausdorff temos um localmente compacto Hausdorff, e um de análise funcional: a bola unitária em X^* é um compacto na topologia fraca estrela.

Proposição 1.5.16. Se X é um espaço topológico compacto e Hausdorff e $x_0 \in X$, então $X \setminus \{x_0\}$ é um localmente compacto Hausdorff

Teorema 1.5.17 (Teorema de Banach-Alaoglu). Se X é um espaço normado e X^* o seu dual (topológico). Então a *bola unitária de X^** , definida por

$$\text{bola}X^* = \{\phi \in X^* : \|\phi\| \leq 1\}$$

é um conjunto compacto Hausdorff quando munido com a topologia fraca estrela.

Teorema 1.5.18. Seja A uma álgebra de Banach comutativa e \hat{A} o seu espectro. Quando munido da topologia fraca estrela, \hat{A} é um espaço Hausdorff localmente compacto. Se A é unital, então \hat{A} é compacto.

Demonstração. Vamos provar que \hat{A} é Hausdorff. Notemos que $\hat{A} \subset \text{bola}A^*$, basta utilizar a Proposição 1.5.9. Agora, pelo Teorema 1.5.17 temos que \hat{A} é Hausdorff, pois é um subespaço de um Hausdorff.

Provaremos agora que \hat{A} é localmente compacto. Defina o conjunto $\hat{A} \cup \{0\}$ onde 0 é o homomorfismo nulo, provaremos que $\hat{A} \cup \{0\}$ é compacto e então, pela Proposição 1.5.16 \hat{A} é um localmente compacto.

Para ver que $\hat{A} \cup \{0\}$ é compacto, note que do fato já discutido que $\hat{A} \subset \text{bola}A^*$ e do fato que 0 é um homomorfismo de norma $\|0\| = 0$, temos a contenção $\hat{A} \cup \{0\} \subset \text{bola}A^*$, e como $\text{bola}A^*$ é um compacto, resta apenas ver que $\hat{A} \cup \{0\}$ é fechado. Considere uma rede $(\varphi_i) \subset \hat{A} \cup \{0\}$ tal que $\varphi_i \rightarrow \varphi$, pela definição da topologia fraca estrela temos que dado $a \in A$ segue a convergência $\varphi_i(a) \rightarrow \varphi(a)$. Observamos que como $\hat{A} \cup \{0\}$ é Hausdorff, o limite da sua rede (φ_i) é único, segue então, para qualquer $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi_i(a+b) = \varphi_i(a) + \varphi_i(b) \rightarrow \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi_i(a+b) \rightarrow \varphi(a+b) \Rightarrow \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\varphi_i(\lambda a) = \lambda \varphi_i(a) \rightarrow \lambda \varphi(a), \quad \varphi_i(\lambda a) \rightarrow \varphi(\lambda a) \Rightarrow \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$$

$$\varphi_i(ab) = \varphi_i(a)\varphi_i(b) \rightarrow \varphi(a)\varphi(b), \quad \varphi_i(ab) \rightarrow \varphi(ab) \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Note então que φ é um funcional linear multiplicativo que pode ser o homomorfismo nulo, isto é, $\varphi \in \hat{A} \cup \{0\}$. Segue portanto que $\hat{A} \cup \{0\}$ é fechado, portanto compacto, logo, \hat{A} é localmente compacto.

Agora supondo que A é unital vamos concluir que \hat{A} é compacto. Como \hat{A} está contido em $\text{bola}A^*$, um compacto na fraca-estrela, é suficiente garantir que \hat{A} é fechado. Considere agora uma rede (φ_i) em \hat{A} tal que $\varphi_i \rightarrow \varphi$, como estamos na topologia fraca-estrela, temos que $\varphi_i(a) \rightarrow \varphi_i(a)$ para qualquer a em A . O cálculo feito anteriormente nos garante que φ é um funcional linear multiplicativo, como assumimos agora que A é unital, é possível concluir que φ não pode ser o homomorfismo nulo, note que

$$1 = \varphi_i(1_A) \rightarrow \varphi(1_A).$$

Como \widehat{A} é Hausdorff, pela unicidade do limite concluímos que $\varphi(1_A) = 1$, segue então que $\varphi \in \widehat{A}$. Garantimos então que \widehat{A} é um fechado contido em um compacto, logo é também compacto. \square

Teorema 1.5.19. Seja A uma álgebra de Banach comutativa, o mapa $\Gamma : A \longrightarrow C_0(\widehat{A})$ dado por $a \longmapsto \widehat{a}$ é um homomorfismo contrativo mais que isso, $\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a)$, ou seja, o seguinte vale para quaisquer $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

- i. $\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a) \leq \|a\|$;
- ii. $\Gamma(\lambda a + b) = \lambda\Gamma(a) + \Gamma(b)$;
- iii. $\Gamma(ab) = \Gamma(a)\Gamma(b)$.

Nos referimos ao mapa Γ como a *transformação de Gelfand*.

Demonstração. Provemos que Γ está bem definida, para isso, devemos ver que fixado um $a \in A$ segue que $\widehat{a} \in C_0(\widehat{A})$. Note que como \widehat{A} está munida da topologia fraca-estrela, segue por definição que \widehat{a} é contínua. Para ver que a função \widehat{a} se anula no infinito, seja $\epsilon > 0$ qualquer e defina o conjunto:

$$K := \{\varphi \in \widehat{A} : |\widehat{a}(\varphi)| \geq \epsilon\}.$$

Pelo Teorema 1.5.17 temos que o conjunto $\text{bola}X^*$ é um compacto Hausdorff quando munido da topologia fraca-estrela, portanto, resta apenas verificar que K é um subconjunto fechado de $\text{bola}X^*$. A Proposição 1.5.9 nos garante automaticamente que $K \subset \widehat{A}$ é subconjunto de $\text{bola}X^*$, para ver que K é fechado basta escrever $K = |\widehat{a}|^{-1}[\epsilon, \infty)$ e então notar que K é a imagem inversa de um fechado por uma contínua. Segue por Banach-Alaoglu que K é compacto, logo, \widehat{a} é contínua e se anula no infinito.

Provemos agora que Γ é um mapa linear multiplicativo. Sejam $a, b \in A$, mostremos que $\Gamma(a + b) = \Gamma(a) + \Gamma(b)$, pra isso, seja $\varphi \in \widehat{A}$, o resultado segue do cálculo

$$\widehat{(a + b)}(\varphi) = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = (\widehat{a} + \widehat{b})(\varphi),$$

Veremos agora que para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $a \in A$ temos $\Gamma(\lambda a) = \lambda\Gamma(a)$. Seja $\varphi \in \widehat{A}$, o cálculo abaixo nos garante o resultado

$$\widehat{\lambda a}(\varphi) = \varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a) = \lambda\widehat{a}(\varphi).$$

Para $\Gamma(ab) = \Gamma(a)\Gamma(b)$ para qualquer $a, b \in A$, basta tomar $\varphi \in \widehat{A}$ e fazer:

$$\widehat{(ab)}(\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \widehat{a}(\varphi)\widehat{b}(\varphi) = (\widehat{a}\widehat{b})(\varphi).$$

Veremos agora que Γ é contrativo. Seja $a \in A$, temos então que

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = \|\widehat{a}\|_\infty = \sup_{\varphi \in \widehat{A}} |\widehat{a}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \widehat{A}} |\varphi(a)|.$$

Como visto no Teorema 1.5.11 temos

$$\sup_{\varphi \in \widehat{A}} |\varphi(a)| = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| = r(a).$$

Temos então que $\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a)$, lembre agora que, como observado na Definição 1.4.15, temos que $r(a) \leq \|a\|$ para qualquer $a \in A$, segue então que $\|\Gamma(a)\|_\infty \leq \|a\|$, isto é, Γ é um homomorfismo contrativo. \square

Terminaremos essa seção com um resultado que nos permitirá interpretar o espaço dos caracteres como uma espécie de espectro generalizado.

Teorema 1.5.20. Seja A uma álgebra de Banach unital, tome $a \in A$ e considere a subálgebra de Banach gerada por $\{1, a\}$, denotada por $C(1, a)$. Então $C(1, a)$ é comutativa e a aplicação

$$\widehat{a} : \widehat{C(1, a)} \longrightarrow \sigma(a), \quad \text{dado por } \varphi \longmapsto \varphi(a),$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Notemos que \widehat{a} está bem definida, de fato, isso é uma consequência do Teorema 1.5.11. O resto da demonstração seguirá nas seguintes partes:

- **Injeção.** Sejam $\widehat{a}(\varphi) = \widehat{a}(\psi)$, queremos obter $\varphi = \psi$. Note que $\varphi(a) = \psi(a)$, ou seja, φ e ψ coincidem em a , como $C(1, a)$ é unital segue também que $\varphi(1) = \psi(1) = 1$. Por conta disso, como $C(1, a)$ é a álgebra gerada por 1 e a , e ambos φ e ψ são contínuos pois são caracteres, segue pela Proposição 1.2.4 que $\varphi = \psi$.
- **Sobrejetividade.** Seja $\lambda \in \sigma(a)$, provemos que existe $\varphi \in \widehat{C(1, a)}$ tal que $\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a) = \lambda$. Basta então usar o Teorema 1.5.11 para escrever $\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \widehat{A}\}$
- **Continuidade.** Seja $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in J}$ uma rede em $\widehat{C(1, a)}$, supondo que $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in J} \longrightarrow \varphi$, desejo concluir que $\widehat{a}((\varphi_\alpha)_{\alpha \in J}) \longrightarrow \widehat{a}(\varphi)$. Notemos que a convergência desejada é meramente que os caracteres convirjam pontualmente, isto é, $\varphi_\alpha(a) \longrightarrow \varphi(a)$, note que, como discutido na Observação 1.5.15 isso é justamente uma caracterização da convergência na topologia fraca estrela, que é a topologia de $\widehat{C(1, a)}$.
- **h é um homeomorfismo.** De fato, como $C(1, a)$ é unital, segue do Teorema 1.5.18 que $\widehat{C(1, a)}$ é compacto. Naturalmente, $\sigma(a)$ é visto como um subespaço de \mathbb{C} ou seja, um Hausdorff, segue então pela Proposição 2.4.1 que \widehat{a} é um homeomorfismo.

\square

Como uma ilustração, considere a álgebra do disco $A(D)$ e a função identidade $\lambda \mapsto \lambda$ em $A(D)$, denotada por z . Temos então que $A(D) = C(1, z)$ (ver Murphy, pg. 5). Pelo Exemplo 1.4.9 temos que $\sigma(z) = \text{Im}(z) = D$, e portanto, pelo teorema acima, obtemos

$$\widehat{A(D)} \cong D.$$

2 C^* -Álgebras

Nesse capítulo introduzimos um dos principais objetos desse trabalho: C^* -álgebras. Trata-se apenas de munir uma álgebra de Banach com uma operação unária $*$: $A \rightarrow A$ e estipular que a norma obedeça uma certa equação envolvendo a operação $*$.

Essas exigências enriquecerão a estrutura da álgebra de Banach de várias formas, por exemplo, os mapas que preservam a estrutura, chamamos $*$ -homomorfismos serão automaticamente contínuos, mais especificamente, uma contração. Entretanto, o mais importante resultado nos permitirá enxergar uma C^* -álgebra comutativa dentro de um espaço $C_0(X)$ para X localmente compacto.

2.1 Definições e exemplos

Nos dedicaremos agora a apresentar as definições e propriedades iniciais além de exemplos e contra-exemplos, em particular, o principal resultado desse capítulo é que existe apenas uma norma numa $*$ -álgebra A tornando-a uma C^* -álgebra.

Definição 2.1.1. Uma *involução* numa álgebra A é uma operação unária $*$: $A \rightarrow A$ dada por $a \mapsto a^*$ satisfazendo as seguintes propriedades para quaisquer $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\text{i } (a + b)^* = a^* + b^*$$

$$\text{ii } (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$$

$$\text{iii } (a^*)^* = a$$

$$\text{iv } (ab)^* = b^* a^*.$$

Nessas condições, o par $(A, *)$ é dito ser uma *álgebra involutiva* ou *$*$ -álgebra*.

Dado um elemento a numa $*$ -álgebra A , nos referimos a a^* como *adjunto* de a . Dizemos que $a \in A$ é *auto-adjunto* se for igual ao seu adjunto, ou seja, $a = a^*$. Um elemento $a \in A$ que comuta com o seu adjunto: $aa^* = a^*a$, é chamado de *normal*. Quando A é uma álgebra unital e $u \in A$ é um elemento normal tal que $u^*u = uu^* = 1$, isto é, $u^{-1} = u^*$, dizemos que u é *unitário*. Note que como $(u^*)^* = u$, então se u é unitário, u^* também é. Usualmente, o conjunto de elementos auto-adjuntos de uma $*$ -álgebra A é denotado por A_{sa} ao conjunto de elementos unitários denotamos por $U(A)$.

Deve-se notar que o conjunto de elementos auto-adjuntos de uma $*$ -álgebra A é sempre não trivial (estamos sob a suposição de que $A \neq \{0\}$). De fato, note que usando as propriedades iii. e iv. obtemos que $aa^*, a^*a \in A_{sa}$.

Definição 2.1.2. Dizemos que um elemento $p \in A$ onde A é uma $*$ -álgebra é uma *projeção* se $p^* = p^2 = p$. Dizemos também que o *centro* duma $*$ -álgebra A é o conjunto de todos os elementos de A que comutam com todos os outros elementos de A , ou seja, nos referimos ao conjunto:

$$Z(A) := \{a \in A : ab = ba \ \forall b \in A\},$$

um elemento $a \in Z(A)$ é dito ser *central* em A .

Exemplo 2.1.3. A álgebra dos números complexos \mathbb{C} é uma $*$ -álgebra tomando a involução como a conjugação complexa.

Exemplo 2.1.4. A álgebra das funções complexas contínuas com valor num X localmente compacto e que se anulam no infinito $C_0(X)$ é uma $*$ -álgebra tomando a involução como a operação $*$: $C_0(X) \rightarrow C_0(X)$ dada por $f \mapsto \bar{f}$. Note que a operação está bem definida devido ao fato de a conjugação complexa ser contínua e preservar normas: $|\bar{f}| = |f|$. Semelhantemente, se S for um conjunto qualquer e Ω um espaço topológico, $l^\infty(S)$ e $C_b(\Omega)$ também são $*$ -álgebras com essa mesma involução.

Exemplo 2.1.5. A álgebra $B(H)$ de operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert H é uma $*$ -álgebra com a involução dada pela adjunta de Hilbert: $*$: $H \rightarrow H$ dada por $T \mapsto T^*$.

Atentamos ao leitor para que repare a concordância de nomenclatura acerca de elementos auto-adjuntos, normais e unitários definidos para um operador $T \in B(H)$ em comparação com o estabelecido na Definição 2.1.1.

Reuniremos alguns simples resultados operacionais na proposição seguinte.

Proposição 2.1.6. Se A é uma $*$ -álgebra e $a \in A$ então as seguintes afirmações são válidas:

- i $0^* = 0$;
- ii $(-a)^* = -a^*$;
- iii se A é unital, então $1^* = 1$;
- iv se A é unital e $a \in \text{Inv}(A)$, então $a^* \in \text{Inv}(A)$ e $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

Demonstração.

i $0^* = (0 + 0)^* = 0^* + 0^* \Rightarrow 0^* = 0$

ii Usamos aqui o item i: $a^* + (-a)^* = (a + (-a))^* = ((-a) + a)^* = 0^* = 0$. Assim $(-a)^* = -a^*$.

iii Suponha que A é unital, então $1 = (1^*)^* = (11^*)^* = 1^*(1^*)^* = 1^*1 = 1^*$.

iv Se A é unital e $a \in \text{Inv}(A)$, então usando o item iii podemos fazer o seguinte cálculo:

$$1 = 1^* = (aa^{-1})^* = (a^{-1})^*a^* \text{ e } 1 = 1^* = (a^{-1}a)^* = a^*(a^{-1})^*.$$

□

Como consequência do item iv da Proposição 2.1.6 temos que o espectro do adjunto é o adjunto do espectro.

Proposição 2.1.7. Para qualquer $a \in A$ onde A é uma $*$ -álgebra temos que

$$\sigma(a^*) = \sigma(a)^* = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Demonstração. (\subset) Queremos mostrar que $\sigma(a^*) \subset \sigma(a)^*$, para isso, verificaremos a contenção equivalente $(\sigma(a)^*)^c \subset \rho(a^*)$.

Seja $\lambda \in (\sigma(a)^*)^c$, portanto $\bar{\lambda} \notin \sigma(a)$, isto é, $a - \bar{\lambda} \in \text{Inv}(A)$. Desse modo, existe um $b \in A$ tal que

$$b(a - \bar{\lambda}) = (a - \bar{\lambda})b = 1,$$

basta agora aplicar a operação de involução para obter

$$b^*(a^* - \lambda) = (a^* - \lambda)b^* = 1.$$

Com isso concluímos que $\lambda \in \rho(a^*)$.

(\supset) Mostraremos agora que $\sigma(a)^* \subset \sigma(a^*)$, mais uma vez apelaremos para uma contenção equivalente: $\rho(a^*) \subset (\sigma(a)^*)^c$.

Seja $\lambda \in \rho(a^*)$, portanto existe $b \in A$ tal que

$$b(a^* - \lambda) = (a^* - \lambda)b = 1,$$

aplicando a operação de involução temos

$$(a - \bar{\lambda})b^* = b^*(a - \bar{\lambda}) = 1.$$

Segue portanto que $\bar{\lambda} \in \sigma(a)$, ou seja, $\lambda \in \sigma(a)^*$. □

Definição 2.1.8. Seja A uma $*$ -álgebra e $S \subset A$ um subconjunto qualquer. Dizemos que S é *auto-adjunto* se for fechado para a operação de involução, isto é, $S = S^*$ onde $S^* = \{a^* \mid a \in S\}$.

Dizemos que uma subálgebra $B \subset A$ de uma $*$ -álgebra A é uma *$*$ -subálgebra* se, em adição, B for auto-adjunto. Uma $*$ -subálgebra é em si uma $*$ -álgebra com a involução dada pela restrição: $*|_B$.

A intersecção arbitrária de $*$ -subálgebras é ainda uma $*$ -subálgebra, com isso, ao fixar um conjunto $S \subset A$, podemos definir uma $*$ -subálgebra minimal contendo S .

Definição 2.1.9. Se A é uma $*$ -álgebra e $S \subset A$ é um conjunto qualquer, então ao definir a seguinte menor $*$ -subálgebra que contém S :

$$C = \bigcap \{B \mid B \text{ é } * \text{-subálgebra de } A \text{ e } B \supset S\}.$$

Dizemos que C é a $*$ -álgebra gerada por B

Definição 2.1.10. Dada uma C^* -álgebra A , defina o espaço $A \oplus \mathbb{C} := \{(a, \lambda) : a \in A \text{ e } \lambda \in \mathbb{C}\}$ munido das mesmas operações utilizadas na proposição 1.2.19. Ou seja, definimos nele a soma vetorial e multiplicação por escalar ponto a ponto e a multiplicação de álgebra por:

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) := (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta).$$

Proposição 2.1.11. Se I é um ideal auto-adjunto de uma $*$ -álgebra A , então a álgebra quociente A/I é uma $*$ -álgebra com a involução dada por $(a + I)^* = a^* + I$. Definimos uma involução em $A \oplus \mathbb{C}$ fazendo $(a, \alpha)^* = (a^*, \bar{\alpha})$, desse modo, $A \oplus \mathbb{C}$ é uma $*$ -álgebra e A se identifica canonicamente com o ideal auto-adjunto $A \oplus 0$ de $A \oplus \mathbb{C}$.

Demonstração.

- Seja I um ideal auto-adjunto de A , uma vez que a operação $(a + I)^* \mapsto (a^* + I)$ seja provada estar bem definida, a afirmação de que $(A/I, *)$ é uma $*$ -álgebra segue diretamente da definição.

Tome $a + I, b + I \in A/I$ tais que $a + I = b + I$, desse modo, $a - b \in I$ e como I é auto-adjunto segue que $a^* - b^* = (a - b)^* \in I$, disso segue que $a^* + I = b^* + I$ como desejado.

- A operação $*$: $A \oplus \mathbb{C} \times A \oplus \mathbb{C} \rightarrow A \oplus \mathbb{C}$ dada por $(a, \alpha) \mapsto (a^*, \bar{\alpha})$ é de fato uma involução em $A \oplus \mathbb{C}$. Sejam $(a, \alpha), (b, \beta) \in A \oplus \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então:

$$((a, \alpha) + (b, \beta))^* = (a^* + b^*, \bar{\alpha} + \bar{\beta}) = (a^*, \bar{\alpha}) + (b^*, \bar{\beta}) = (a, \alpha)^* + (b, \beta)^*,$$

$$(\lambda(a, \alpha))^* = ((\lambda a)^*, \bar{\lambda\alpha}) = \bar{\lambda}(a^*, \bar{\alpha}) = \bar{\lambda}(a, \alpha)^*,$$

$$((a, \alpha)^*)^* = (a^*, \bar{\alpha})^* = ((a^*)^*, \bar{\bar{\alpha}}) = (a, \alpha),$$

$$((a, \alpha)(b, \beta))^* = ((ab + \beta a + \alpha b)^*, \overline{\alpha\beta}) = (b^*a^* + \bar{\beta}a^* + \bar{\alpha}b^*, \overline{\alpha\beta}) = (b, \beta)^*(a, \alpha)^*.$$

O conjunto $A \oplus 0 = \{(a, 0) : a \in A\}$ foi provado ser um ideal de $A \oplus \mathbb{C}$ na Proposição 1.2.26, resta provar que é auto adjunto, mas como $(a, 0)^* = (a^*, 0) \in A \oplus 0$ a afirmação segue diretamente.

Para achar uma identificação de A com $A \oplus 0$ definiremos a função $\varphi : A \rightarrow A \oplus 0$ dado por $a \rightarrow (a, 0)$. Para mostrar que φ é um isomorfismo de álgebras basta utilizar a demonstração dada na Proposição 1.2.21.

□

Relembramos que no caso de um $\lambda \in \mathbb{C}$ podemos sempre escrever $x = \lambda_1 + i\lambda_2$ onde $\lambda_1 = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i}$. Semelhantemente, para o caso de um $T \in B(H)$ onde H é um espaço de Hilbert temos que T pode ser unicamente escrito como $T = T_1 + iT_2$ onde T_1 e T_2 são auto-adjuntos, de fato, $T_1 = \frac{T+T^*}{2}$ e $T_2 = \frac{T-T^*}{2i}$ onde T^* é o adjunto de Hilbert. Imitando a prova desse último fato, poderemos obter uma generalização para o contexto de $*$ -álgebras.

Proposição 2.1.12. Qualquer elemento $a \in A$ onde A é uma $*$ -álgebra pode ser unicamente expresso na forma $a = a_1 + ia_2$ onde a_1 e a_2 são elementos auto-adjuntos. Chamamos a_1 e a_2 respectivamente de *parte real* e *parte imaginária* de a e escrevemos $a_1 = \text{Re}(a)$ e $a_2 = \text{Im}(a)$.

Demonstração. Seja A uma $*$ -álgebra e $a \in A$. Sejam $a_1 = \frac{a+a^*}{2}$ e $a_2 = \frac{a-a^*}{2i}$, note que $a_1, a_2 \in A_{sa}$ e $a = a_1 + ia_2$.

Vamos agora demonstrar a unicidade desses elementos. Suponha que existam $b_1, b_2 \in A$ tal que $a = b_1 + ib_2$. Como $a^* = b_1 - ib_2$ temos

$$a + a^* = 2b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{a + a^*}{2} \quad \text{e} \quad a - a^* = 2ib_2 \Rightarrow b_2 = \frac{a - a^*}{2i}.$$

Portanto, $b_1 = a_1$ e $b_2 = a_2$. □

Definição 2.1.13. Sejam A e B $*$ -álgebras e $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Se φ preserva adjuntos, isto é, $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ para todo $a \in A$ então dizemos que φ é um *$*$ -homomorfismo*. Se A e B são unital de unidades 1_A e 1_B respectivamente e φ é um $*$ -homomorfismo que preserva unidade no sentido de que $\varphi(1_A) = 1_B$ dizemos que φ é um *$*$ -homomorfismo unital*. Ademais, se φ é um $*$ -homomorfismo e, além disso, uma função bijetora, chamamos φ de *$*$ -isomorfismo*.

Se $\varphi : A \rightarrow B$ é um $*$ -homomorfismo então $\text{Ker}(\varphi)$ é um ideal auto-adjunto. De fato, se $x \in \text{Ker}(\varphi)$ então o cálculo $\varphi(x^*) = \varphi(x)^* = 0^* = 0$ nos garante que $x^* \in \text{Ker}(\varphi)$. Também ocorre de $\text{Im}(\varphi)$ ser uma $*$ -subálgebra de B . De fato, se $\varphi(x_1) \in \text{Im}(\varphi)$ então $\varphi(x_1)^* = \varphi(x_1^*) \in \text{Im}(\varphi)$.

É importante observar que se $\varphi : A \rightarrow B$ é um $*$ -homomorfismo entre as $*$ -álgebras A e B e $a \in A_{sa}$ então $\varphi(a) \in B_{sa}$. De fato, $\varphi(a)^* = \varphi(a^*) = \varphi(a)$.

Definição 2.1.14. Se uma $*$ -álgebra completa A for munida de uma norma submultiplicativa tal que $\|a^*\| = \|a\| \forall a \in A$ então A é dita ser uma *$*$ -álgebra de Banach*. Se, em adição a isso, A for unital tal que $\|1\| = 1$ então dizemos que A é uma *$*$ -álgebra de Banach unital*.

Exemplo 2.1.15. A álgebra do disco $A(D)$ é uma $*$ -álgebra de Banach quando munida da involução $*$: $A(D) \rightarrow A(D)$, $f \mapsto f^*$ dada por $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. É bem conhecido que a operação é bem definida e a demonstração de que $*$ é uma involução é direta. Note também que o fato do conjugado definir uma bijeção em D nos garante que

$$\|f^*\|_\infty = \sup_{z \in D} |f^*(z)| = \sup_{z \in D} |\overline{f(\bar{z})}| = \sup_{z \in D} |f(z)| = \|f\|_\infty.$$

O fato de $A(D)$ ser uma álgebra de Banach unital já foi discutido no Exemplo 1.1.16.

Proposição 2.1.16. Se A uma $*$ -álgebra de Banach, então o conjunto A_{sa} de seus elementos auto-adjuntos é fechado.

Demonstração. Considere uma sequência $(a_n) \subset A_{sa}$, ou seja, $a_n^* = a_n$, tal que $a_n \rightarrow a$, provemos que $a \in A_{sa}$. Para isso, mostraremos que $a^* = a$, basta então mostrar $\|a - a^*\| = 0$. Note agora que pela isometria da involução temos que

$$\|a_n^* - a^*\| = \|(a_n - a)^*\| = \|a_n - a\|.$$

Portanto, usando esse fato e a hipótese $(a_n) \subset A_{sa}$ podemos fazer o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} \|a - a^*\| &\leq \|a - a_n\| + \|a_n - a_n^*\| + \|a_n^* - a^*\| \\ &= \|a - a_n\| + 0 + \|a_n - a\| \\ &= 2\|a_n - a\| \end{aligned}$$

Passando o limite de ambos os lados temos que $\|a - a^*\| = 0$, portanto, $a \in A_{sa}$. Logo, A_{sa} é fechado \square

Observação 2.1.17. Note que pela submultiplicatividade da norma e pelo fato de que $*$ é isometria temos que $\|a^*a\| \leq \|a^*\| \cdot \|a\| = \|a\| \cdot \|a\| = \|a\|^2$.

A exigência da desigualdade $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$ (e portanto da igualdade $\|a^*a\| = \|a\|^2$) será utilizada para formular uma das definições mais importantes de toda a teoria.

Definição 2.1.18. Se A é uma $*$ -álgebra de Banach tal que a seguinte identidade, chamada *igualdade C^** , é válida para todo $a \in A$:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \text{ (igualdade } C^*)$$

então A será dita ser uma C^* -álgebra.

Observação 2.1.19. A condição $\|a^*a\| = \|a\|^2$ é equivalente a $\|aa^*\| = \|a\|^2$ para ver isso basta colocar a^* no papel de a na igualdade C^* e usar a propriedade $(a^*)^* = a$.

Exigimos a condição $\|1\| = 1$ na definição de uma $*$ -álgebra de Banach unital, essa opção não é coerente em todas as literaturas, no caso de uma C^* -álgebra unital, entretanto, essa condição é automática. Se uma C^* -álgebra A tem unidade, então $\|1\| = 1$, basta para isso utilizar o fato de que $1^* = 1$ junto da igualdade C^* : $\|1\|^2 = \|1^*1\| = \|1\| \Rightarrow \|1\| = 1$.

Observação 2.1.20. Fizemos a exigência de que $\|a^*\| = \|a\|$ para uma $*$ -álgebra de Banach entretanto no caso de uma C^* -álgebra a equação C^* nos garante a isometria de $*$. De fato,

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\| \cdot \|a\| \Rightarrow \|a\| \leq \|a^*\|.$$

Basta agora trocar os papéis de a e a^* e usar a propriedade $(a^*)^* = a$ para então obter $\|a^*\| \leq \|a\|$ e assim temos que $\|a\| = \|a^*\|$.

Com isso segue que para verificar a igualdade C^* basta apenas verificar a desigualdade $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$.

Trataremos agora de alguns exemplos de C^* -álgebras, recorreremos para exemplos já apresentados anteriormente enriquecendo-os com estrutura adicional.

Exemplo 2.1.21. A álgebra dos números complexos \mathbb{C} é uma C^* -álgebra com a norma usual e a involução como a conjugação complexa é uma C^* -álgebra.

Exemplo 2.1.22. A álgebra $C_0(X)$ para um X localmente compacto Hausdorff é uma C^* -álgebra com a involução dada por $f \mapsto \bar{f}$ e a norma do sup $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Exemplo 2.1.23. Dado um conjunto qualquer S , então $l^\infty(S)$ é uma C^* -álgebra com a operação de involução $f \mapsto \bar{f}$ e a norma do supremo.

Exemplo 2.1.24. A álgebra $B(H)$ onde H é um espaço de Hilbert é uma C^* -álgebra com a involução dada pela adjunta de Hilbert $T \mapsto T^*$ e com a norma dos operadores $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$. Vamos verificar a igualdade C^* . Seja $T \in B(H)$, então o cálculo abaixo

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T^*T\| \cdot \|x\|^2,$$

nos garante então que $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sqrt{\|T^*T\|}$. Tomando o supremo com $\|x\| = 1$ temos $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sqrt{\|T^*T\|}$ e portanto $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$.

Como explicitado na Observação 2.1.20 isso basta para verificar a igualdade C^* . Quando visto como uma C^* -álgebra, $B(H)$ é dito ser uma *álgebra de operadores*.

Note que $B(H)$ generaliza o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1.25. Seja $M_n(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes complexas n por n . $M_n(\mathbb{C})$ é uma C^* -álgebra com as seguintes operações:

- A soma vetorial, multiplicação por escalar e multiplicação da álgebra dadas pelas operações matriciais
- O operador $*$ será dado pela conjugação Hermitiana $A^* = A^\dagger$ (lembre-se que A^\dagger é a conjugada transposta de A).

- A norma $\|\cdot\|$ é a norma dos operadores $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ onde a norma em \mathbb{C}^n é a norma padrão dada pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exemplo 2.1.26. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida, então o conjunto $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ das funções essencialmente limitadas é uma C^* -álgebra com a norma dada por $\|f\|_\infty = \inf\{\beta > 0 : |f| \leq \beta \mu.q.s\}$ e a involução dada por $[f]^* = [\bar{f}]$.

De fato, o Exemplo 1.1.18 nos garante que $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ é uma álgebra de Banach, as propriedades da involução seguem diretamente, resta portanto verificar a propriedade C^* . Como visto na Observação 2.1.20, é suficiente mostrar a igualdade $\|f\|_\infty^2 \leq \|f\bar{f}\|_\infty$. Considere os conjuntos:

$$\mathcal{B}_1 := \{\alpha > 0 : |f|^2 \leq \alpha \mu.q.s\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 := \{\beta > 0 : |f| \leq \beta \mu.q.s\},$$

então $\|f\bar{f}\|_\infty = \inf \mathcal{B}_1$ e $\|f\|^2 = (\inf \mathcal{B}_2)^2$, provemos que $\|f\|^2 \leq \|f\bar{f}\|_\infty$. Para isso seja $\alpha \in \mathcal{B}_1$, então $|f|^2 \leq \alpha \mu.q.s$ e portanto $|f| \leq \sqrt{\alpha} \mu.q.s$, disso segue que $\sqrt{\alpha} \in \mathcal{B}_2$ e portanto $\|f\|_\infty \leq \sqrt{\alpha}$. Como provamos que para qualquer $\alpha \in \mathcal{B}_1$ temos $\|f\|_\infty^2 \leq \alpha$, podemos concluir que $\|f\|_\infty^2 \leq \|f\bar{f}\|_\infty$.

Nos dedicaremos agora a explorar alguns contra-exemplos.

Exemplo 2.1.27. Seja D o disco unitário no plano complexo, e seja $A(D)$ a álgebra de funções contínuas analíticas no interior de D .

Seja $\|\cdot\|_\infty$ a norma do supremo e defina a seguinte involução:

$$* : A(D) \longrightarrow A(D), \text{ dada por } f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Nesse caso, $A(D)$ é uma $*$ -álgebra de Banach e $*$ é uma isometria, entretanto, a igualdade C^* não é satisfeita.

Seja $f(z) = z - i$, assim, $f^*(z) = z + i$, portanto: $(ff^*)(z) = f(z)f^*(z) = z^2 + 1$ e temos que

$$\|f\|_\infty^2 = 2^2 = 4 \quad \text{e} \quad \|ff^*\|_\infty = 2.$$

Exemplo 2.1.28. Pelo Exemplo 2.1.25 $M_n(\mathbb{C})$ é uma C^* -álgebra com a operação $*$ dada por \dagger e a norma $\|\cdot\|$ induzida pela norma de operadores, onde vemos uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ como operador no espaço de Hilbert \mathbb{C}^n , ou seja,

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Entretanto, apenas a norma de Hilbert em \mathbb{C}^n faz de $M_n(\mathbb{C})$ uma C^* -álgebra. Como um exemplo considere as norma $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ dadas por

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i| \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|.$$

Essas normas induzem as seguintes normas de operadores em $M_n(\mathbb{C})$, para $A \in M_n(\mathbb{C})$:

$$\|A\|_1 = \text{Módulo do máximo das somas das colunas de } A$$

$$\|A\|_\infty = \text{Módulo do máximo das somas das linhas de } A$$

Desse modo, $\|A\|_1 = \|A^\dagger\|_\infty$, e se tomarmos qualquer matrix A tal que $\|A\|_1 \neq \|A\|_\infty = \|A^\dagger\|_1$ vemos que \dagger não é uma isometria. Portanto, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ não são normas C^* .

Definição 2.1.29. Se B é uma $*$ -subálgebra fechada de uma C^* -álgebra A então B é ela mesma uma C^* -álgebra com as operações induzidas, chamaremos B de C^* -subálgebra de A .

Exemplo 2.1.30. Sendo X um espaço localmente compacto Hausdorff, a C^* -álgebra $C_0(X)$ é uma C^* -subálgebra de $l^\infty(X)$.

Note que como a intersecção de $*$ -subálgebras é ainda uma $*$ -subálgebra e a intersecção de fechados continua sendo fechado, então dado um conjunto $S \subset A$ podemos garantir a existência de uma menor C^* -subálgebra contendo S .

Definição 2.1.31. Seja A uma C^* -álgebra e $S \subset A$ um subconjunto arbitrário. Dizemos que a menor C^* -subálgebra de A que contém S , isto é, o conjunto

$$C^*(S) := \bigcap \{B : B \text{ é uma } C^* \text{-subálgebra de } A \text{ e } B \supset S\},$$

é a C^* -subálgebra gerada por S . Quando S for um único elemento, digamos a , $C^*(S)$ será denotada por $C^*(a)$, semelhantemente, se A tem unidade denotamos a C^* -subálgebra gerada por $\{1_A, a\}$ como $C^*(1_A, a)$. Em geral, denotamos uma C^* -subálgebra gerada através do símbolo C^* seguido pela listagem de seus geradores.

Observação 2.1.32. Note que pela minimalidade de $C^*(a)$, se a for auto-adjunto podemos escrever $C^*(a)$ como o fecho do conjunto de certos somatórios finitos, mais especificamente, algo da forma

$$\overline{\left\{ \sum_{n,m \geq 0, n+m \geq 1}^{\text{finito}} \lambda_{n,m} a^n (a^*)^m : \lambda_{n,m} \in \mathbb{C} \right\}}.$$

Semelhantemente, para $C^*(1, a)$ podemos escrever como o conjunto de somatórios finitos da forma

$$\overline{\left\{ \sum_{n,m \geq 0}^{\text{finito}} \lambda_{n,m} a^n (a^*)^m \quad \lambda_{n,m} \in \mathbb{C} \right\}}.$$

Essa exposição de uma C^* -subálgebra como os somatórios acima é usualmente referida como a caracterização “abstrata” de uma C^* -subálgebra, em oposição a caracterização “concreta” de uma subálgebra como vista na Definição 2.1.31

Nota: Para o leitor interessado, existe uma discussão mais detalhada das C^* -subálgebras geradas, em particular, de $C^*(a)$ e $C^*(1, a)$, feita no Apêndice B.

Exemplo 2.1.33. Considere a C^* -álgebra $M_2(\mathbb{C})$ e um elemento $a \in M_n(\mathbb{C})$ tal que

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que como a é real e simétrica, temos que $a^\dagger = a$. Repare agora que em vista do desenvolvido no Exemplo 1.1.25 a C^* -subálgebra gerada por $\{a\}$ consiste ainda dos elementos da forma $\sum_{i=1}^n \lambda_i a^i$, denotaremos então por $C^*(a)$. De fato, note que $C^*(a)$ é auto adjunto pois $a^\dagger = a$ e é fechado em razão de ser de dimensão finita. Note agora que $a^n = a$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e isso nos garante que

$$C^*(a) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

Provemos ainda que $C^*(a)$ é isométricamente $*$ -isomorfa ao corpo dos complexos \mathbb{C} . Defina

$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow C^*(a) \text{ dado por } \lambda \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

veremos que φ é a função desejada. De fato, note que o fato de φ ser um $*$ -homomorfismo segue de operações matriciais bem conhecidas e é imediato verificar que φ é bijetora. Para provar que φ é isometria tome $\lambda \in \mathbb{C}$ e note que, denotando por ζ o vetor $(x, y)^T$

$$\left\| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sup_{\|\zeta\| \leq 1} \left\| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sup_{|x|^2 + |y|^2 \leq 1} \left\| \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sup_{|x|^2 + |y|^2 \leq 1} |\lambda x| = |\lambda|$$

Exemplo 2.1.34. Considere novamente a C^* -álgebra $M_2(\mathbb{C})$, note que essa é uma C^* -álgebra unital cuja unidade (a matriz identidade 2×2) será representada por 1. Considere o seguinte elemento a e o seu adjunto $a^* = a^\dagger$:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note agora que o conjunto formado por $\{a, a^\dagger, aa^\dagger, a^\dagger a, \}$ é o conjunto das matrizes formadas inteiramente por zeros e por 1's em coordenadas distintas, ou seja, um conjunto linearmente independente. Como estamos estipulando que um elemento elevado a zero é a unidade, segue que o conjunto L.I $\{a, a^\dagger, aa^\dagger, a^\dagger a, \}$ pertence a

$$C^*(1, a) = \overline{\left\{ \sum_{n,m \geq 0}^{\text{finito}} \lambda_{n,m} a^n (a^\dagger)^m \right\}} \quad \lambda_{n,m} \in \mathbb{C}.$$

Disso concluímos que a dimensão da subálgebra $C^*(1, a)$ é maior ou igual a 4, isto é, $C^*(1, a) = M_2(\mathbb{C})$.

Proposição 2.1.35. Se I é um conjunto de índices e $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de C^* -álgebras então o seu *produto* é definido por

$$\prod_{i \in I} A_i = \{a = (a_i) : a_i \in A_i, \sup_{i \in I} \|a_i\| < \infty\},$$

é uma C^* -álgebra com as operações definidas ponto a ponto e a norma, bem definida pela construção do espaço, $\|(a_i)\| = \sup_{i \in I} \|a_i\|$.

Demonstração. Provaremos primeiramente que as operações estão bem definidas, note que dado um $i \in I$ o fato de A_i ser uma C^* -álgebra nos garante que $\|a_i + b_i\| \leq \|a_i\| + \|b_i\|$, $\|\lambda a_i\| = |\lambda| \cdot \|a_i\|$, $\|a_i b_i\| \leq \|a_i\| \cdot \|b_i\|$ e $\|a_i^*\| = \|a_i\|$, portanto, dados $a, b \in \prod_{i \in I} A_i$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos:

$$\begin{aligned} \|a + b\| &= \sup_{i \in I} \|a_i + b_i\| \leq \sup_{i \in I} \|a_i\| + \sup_{i \in I} \|b_i\| \leq \infty; \\ \|\lambda a\| &= \sup_{i \in I} \|\lambda a_i\| = \sup_{i \in I} |\lambda| \cdot \|a_i\| = |\lambda| \sup_{i \in I} \|a_i\| \leq \infty; \\ \|ab\| &= \sup_{i \in I} \|a_i b_i\| \leq \sup_{i \in I} \|a_i\| \sup_{i \in I} \|b_i\| \leq \infty; \\ \|a^*\| &= \sup_{i \in I} \|a_i^*\| = \sup_{i \in I} \|a_i\| \leq \infty. \end{aligned}$$

A verificação de que as operações definidas obedecem as propriedades de $*$ -álgebra é direta e segue do fato de que cada A_i é uma $*$ -álgebra

Note agora que o cálculo $\|ab\| = \sup_{i \in I} \|a_i b_i\| \leq \sup_{i \in I} \|a_i\| \sup_{i \in I} \|b_i\| = \|a\| \cdot \|b\|$ nos diz que a norma $\|\cdot\|$ é submultiplicativa, além disso, sabendo que $\|a_i^* a_i\| = \|a_i\|^2$, o cálculo abaixo nos garante que a igualdade C^* vale em $\prod_{i \in I} A_i$:

$$\|a^* a\| = \sup_{i \in I} \|a_i^* a_i\| = \sup_{i \in I} \|a_i\|^2 = \left(\sup_{i \in I} \|a_i\|\right)^2 = \|a\|^2.$$

Provemos agora que $\prod_{i \in I} A_i$ é completo, para isso, considere uma sequência de Cauchy $(a_n) \subset \prod_{i \in I} A_i$, portanto dado um $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$ temos

$$\|a_n - a_m\| \leq \epsilon.$$

Como $\|a_n - a_m\| = \sup_{i \in I} \|a_n^i - a_m^i\| \geq \|a_n^{i_0} - a_m^{i_0}\|$ temos que para cada $i_0 \in I$ $(a_n^{i_0})_{n \in \mathbb{N}} \subset A_{i_0}$ é uma sequência de Cauchy em A_{i_0} . Como A_{i_0} é completo, toda sequência de Cauchy converge, disso segue que existe a^{i_0} tal que $a_n^{i_0} \rightarrow a^{i_0}$. Considere o seguinte elemento:

$$a := (a_1^{i_0}, a_2^{i_0}, \dots, a_n^{i_0}, \dots),$$

propomos que $a \in \prod_{i \in I} A_i$ e $a_n \rightarrow a$. Para ver que $a \in \prod_{i \in I} A_i$ note que o fato de (a_n) ser de Cauchy implica que é uma sequência limitada, portanto, existe $M > 0$ tal

que $\|a_n\| \leq M$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, desse modo, $\|a_n^i\| \leq M$ para $i \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$. Como $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^i$ segue que

$$\begin{aligned} \|a_n\| &= \lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} \|a_n^i\| \Rightarrow \|a_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \|a\| \leq M \\ &\Rightarrow a \in \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i. \end{aligned}$$

Agora para provar que $\|a_n - a\| \rightarrow 0$ seja $\epsilon > 0$ e tome $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que valha $\sup_{i \in I} \|a_n^i - a_m^i\| \leq \epsilon$. Fixando $n \geq n_0$ e fazendo $m \rightarrow \infty$ deduzimos que:

$$\sup_{i \in I} \|a_n^i - a\| \leq \epsilon \quad \text{ou seja} \quad \|a_n - a\| \leq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma concluímos que $\|a_n - a\| \rightarrow 0$, ou seja $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Pela arbitrariedade de (a_n) concluímos que toda sequência de Cauchy converge para um elemento do espaço e portanto, $\prod_{i \in I} A_i$ é um espaço de Banach.

As observações acima nos garantem que o fato de $\{A_i\}_{i \in I}$ ser uma família de C^* -álgebras nos garantem que $\prod_{i \in I} A_i$ é uma C^* -álgebra. \square

Vamos agora provar alguns resultados acerca de C^* -álgebras que nos explicitarão a importância da igualdade C^* .

Proposição 2.1.36. Se u é um elemento unitário de uma C^* -álgebra unital A , então $\|u\| = 1$. Além disso, $\sigma(u) \subset S_1(0)$.

Demonstração. Como u é unitário, $u^* = u^{-1}$, e uma simples aplicação a igualdade C^* nos garante que $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1$.

Para provar que $\sigma(u) \subset S_1(0)$, tome $\lambda \in \sigma(u)$ qualquer, temos então que $\lambda \in \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*)$, e como $u \in U(A)$, segue que u^* também é unitário, e portanto $\|u^*\| = 1$. Disso segue o seguinte cálculo:

$$|\lambda| \leq r(u) \leq \|u\| = 1 \quad \text{e} \quad |\lambda^{-1}| \leq r(u^*) \leq \|u^*\| = 1.$$

Como majoramos $|\lambda|$ e $|\lambda^{-1}|$ por 1, segue que $|\lambda| = 1$, e portanto temos $\sigma(u) \subset S_1(0)$. \square

O próximo resultado Teorema possui uma prova relativamente simples mas também um fato de grande importância como corolário

Teorema 2.1.37. Se $a \in A$ é um elemento auto-adjunto de uma C^* -álgebra A então $r(a) = \|a\|$.

Demonstração. Pela igualdade C^* e do fato de que $a \in A_{sa}$ temos que $\|a^2\| = \|a\|^2$. Usando esse fato como base de indução temos que através da seguinte conta

$$\|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k} \Rightarrow \|a^{2^{k+1}}\| = \|(a^2)^{2^k}\| = \|a^2\|^{2^k} = \|a\|^{2^{k+1}} \quad (K \in \mathbb{N})$$

obtemos por indução que $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Esse fato nos permitirá provar o resultado desejada através da fórmula de Beurling (Teorema 1.4.25):

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} \quad \forall a \in A.$$

Usando do sequência dos termos de índice 2^n obtemos

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a\| = \|a\|.$$

Como desejado, $r(a) = \|a\|$ □

Corolário 2.1.38. Tem no máximo uma norma numa $*$ -álgebra fazendo-a ser uma C^* -álgebra.

Demonstração. Se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são normas numa $*$ -álgebra A tal que a façam uma C^* -álgebra, então tomando $a \in A$, como $aa^* \in A_{sa}$, ao usar o Teorema 2.1.37 temos

$$\|a\|_j^2 = \|a^*a\|_j^2 = r(a^*a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^*a)\} \quad (j = 1, 2).$$

Segue portanto que $\|a\|_1 = \|a\|_2$. □

Observação 2.1.39. Desse modo, uma norma que faz uma $*$ -álgebra ser uma C^* -álgebra é da forma

$$\|a\| = \sqrt{r(a^*a)}.$$

Como expressamos $\|a\|$ em função do raio espectral de a^*a , que por sua vez é definido por meio do espectro de a^*a , um conceito estabelecido puramente em termos algébricos, sintetizamos a observação acima por meio do bordão: “a norma numa C^* -álgebra é determinada por sua estrutura algébrica.”

2.2 Unitização de C^* -Álgebras

Semelhantemente ao feito para álgebras de Banach, podemos, via um isomorfismo, identificar uma C^* -álgebra A dentro de uma C^* -álgebra unital relacionada a álgebra inicial. Entretanto, aqui encontramos um problema: caso procedêssemos do mesmo modo ao feito para álgebras de Banach, embora $A \oplus \mathbb{C}$ seja uma $*$ -álgebra, como discutido na Proposição 2.1.11, caso o muníssemos com a norma $\|(a, \alpha)\| = \|a\| + |\alpha|$ então $A \oplus \mathbb{C}$

não necessariamente será uma C^* -álgebra. Por exemplo, se $A = \mathbb{C}$ e $(a, \alpha) = (-2, 1)$, teremos $\|(-2, 1)\|^2 = (|-2| + |1|)^2 = 9$ e $\|(-2, 1)^*(-2, 1)\| = \|(4 - 2 - 2, 1)\| = \|(0, 1)\| = |0| + |1|^2 = 1$.

O teorema seguinte se dedicará a nos conceder uma maneira de enxergar uma C^* -álgebra não unital A como um ideal fechado e auto-adjunto de uma C^* -álgebra relacionada. Denotamos essa C^* -álgebra maior por A^1 e nos referimos a ela como a *unitização* de A .

Teorema 2.2.1 (Unitização - caso não unital). Seja A uma C^* -álgebra **sem unidade** e defina $A^1 = A \oplus \mathbb{C}$. Então a seguinte é uma C^* -álgebra

$$(A^1, \|(a, \lambda)\| = \|\Lambda_{(a, \lambda)}\|_{op}, (a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\alpha})).$$

onde $\Lambda : A^1 \rightarrow B(A)$ é dado por $(a, \lambda) \mapsto \Lambda_{(a, \lambda)}$ e a nova função $\Lambda_{(a, \lambda)} \in B(A)$ é definida por $b \mapsto \Lambda_{(a, \lambda)}(b) = (a, \lambda) \cdot b = ab + \lambda b$.

Teremos também que a C^* -álgebra A é isométricamente $*$ -isomorfa ao ideal fechado $I = \{(a, 0) : a \in A\}$ de A^1 .

Demonstração. Observe que fixando um $(a, \lambda) \in A^1$, a função $\Lambda_{(a, \lambda)} \in B(A)$ é bem definida. Com efeito, por cálculo direto vemos que é uma transformação linear e para provar a limitação seja $b \in A$ e então

$$\|\Lambda_{(a, \lambda)}(b)\| = \|ab + \lambda b\| \leq \|ab\| + \|\lambda b\| \leq \|a\| \cdot \|b\| + |\lambda| \cdot \|b\| = (\|a\| + |\lambda|)\|b\|,$$

e como a e λ são fixados, achamos um $c = \|a\| + |\lambda| > 0$ tal que $\|\Lambda_{(a, \lambda)}(b)\| \leq c\|b\|$.

Note também que a função $\Lambda : A^1 \rightarrow B(A)$ é um homomorfismo de álgebras. De fato, tomando $(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2) \in A^1$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ por cálculo direto concluímos $\Lambda_{(a_1, \lambda_1) + (a_2, \lambda_2)} = \Lambda_{(a_1, \lambda_1)} + \Lambda_{(a_2, \lambda_2)}$, $\Lambda_{\alpha(a, \lambda)} = \alpha\Lambda_{(a, \lambda)}$ e $\Lambda_{(a_1, \lambda_1)(a_2, \lambda_2)} = \Lambda_{(a_1, \lambda_1)} \circ \Lambda_{(a_2, \lambda_2)}$.

Procedemos agora nas seguintes etapas.

i Λ é injetiva: Seja $(a, \lambda) \in A^1$ com $(a, \lambda)b = 0$ para todo $b \in A$, vamos ver que $(a, \lambda) = (0, 0)$, dessa forma $\text{Ker}(\Lambda) = \{(a, \lambda) | \Lambda_{(a, \lambda)} = 0\} = (0, 0)$. Separamos em dois casos.

a Caso $\lambda = 0$. Do fato de que $ab + \lambda b = 0$, obtemos $ab = 0$ para qualquer $b \in A$. Escolhemos então $b = a^*$ e recorremos a igualdade C^* , de fato, de $aa^* = 0$ temos que $\|a\|^2 = \|aa^*\| = 0$ e portanto $a = 0$. Como já assumimos que $\lambda = 0$ segue que $(a, \lambda) = (0, 0)$, como desejado.

b Caso $\lambda \neq 0$. Nessa hipótese, do fato de que $ab + \lambda b = 0$ e $\lambda \neq 0$ obtemos que $b = \frac{-ab}{\lambda}$ para qualquer $b \in A$. Note então que o elemento $e = \frac{-a}{\lambda}$ é uma inversa à esquerda; veremos também que é uma inversa à direita, o que contradiz a

hipótese de A não ser unital. Note que como e é uma inversa à esquerda teremos $(ce - c)b = 0$ para quaisquer $c, b \in A$, de fato,

$$(ce - c)b = ceb - cb = cb - cb = 0.$$

Aplicaremos agora a igualdade C^* . Tome $b = (ce - c)$, então $(ce - c)(ce - c)^* = 0$, isso implica então que $\|ce - c\|^2 = 0$, ou seja, $ce - c = 0$ e portanto $ce = c$ para qualquer $c \in A$ significando que e é uma unidade.

ii $\|(a, \lambda)\| = \|\Lambda_{(a, \lambda)}\|_{op}$ é uma norma. Isso segue do fato de que Λ é um homomorfismo injetivo de álgebras (provado no item i). De fato, mais geralmente, de $\rho : B \rightarrow C$ ser um homomorfismo injetivo entre as álgebras B e C e de $\|\cdot\|$ ser uma norma em C , segue que

$$\|b\|_\rho := \|\rho(b)\|,$$

define uma norma em B . Note que todas as operações necessárias para verificar que $\|\cdot\|_\rho$ é uma norma segue do fato de $\|\cdot\|$ ser uma norma. A injetividade nos garante que se $\|\rho(b)\| = 0$ então $b = 0$.

iii A^1 é uma C^* -álgebra. Seja $(a, \lambda) \in A^1$, mostremos que $\|(a, \lambda)^*(a, \lambda)\| = \|(a, \lambda)\|^2$, para isso, como abordado na Observação 2.1.20, basta verificar que $\|(a, \lambda)^*(a, \lambda)\| \geq \|(a, \lambda)\|^2$, ou seja, desajamos:

$$\sup_{\|b\| \leq 1} \|ab + \lambda b\|^2 \leq \sup_{\|b\| \leq 1} \|a^*ab + \lambda a^*b + \bar{\lambda}ab + |\lambda|^2b\|.$$

Note que A é uma C^* -álgebra, logo a igualdade C^* se aplica, portanto:

$$\|ab + \lambda b\|^2 = \|(ab + \lambda b)^*(ab + \lambda b)\| = \|b^*a^*ab + \lambda b^*a^*b + \bar{\lambda}b^*ab + |\lambda|^2b^*b\|.$$

Dessa forma, usando o fato de que $*$ é isometria, podemos efetuar os cálculos abaixo

$$\begin{aligned} \sup_{\|b\| \leq 1} \|ab + \lambda b\|^2 &= \sup_{\|b\| \leq 1} \|b^*a^*ab + \lambda b^*a^*b + \bar{\lambda}b^*ab + |\lambda|^2b^*b\|, \\ &\leq \sup_{\|b\| \leq 1} \|b^*\| \cdot \|a^*ab + \lambda a^*b + \bar{\lambda}ab + |\lambda|^2b\|, \\ &\leq \sup_{\|b\| \leq 1} \|a^*ab + \lambda a^*b + \bar{\lambda}ab + |\lambda|^2b\|, \end{aligned}$$

isso nos garante que $(A^1, \|\cdot\|)$ é de fato uma C^* -álgebra.

iv $\|(a, 0)\| = \|a\| \forall a \in A$. Lembremos que $\|(a, 0)\| = \|\Lambda_{(a, 0)}\|_{op} = \sup_{\|b\| \leq 1} \|ab\|$, provaremos ambas as desigualdades necessárias.

a $\sup_{\|b\| \leq 1} \|ab\| \leq \|a\|$. Provaremos que $\|a\|$ é cota superior de $\{\|ab\| : \|b\| \leq 1\}$. Suponha então que $\|b\| \leq 1$, basta então fazer o cálculo $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \leq \|a\|$.

b $\|a\| \leq \sup_{\|b\| \leq 1} \|ab\|$. Basta ver que $\|a\| \in \{\|ab\| : \|b\| \leq 1\}$, para isso, tome $b = \frac{a^*}{\|a\|}$ e pela isometria de $*$ segue que $\|b\| = 1$. Apelamos agora para a igualdade C^* :

$$\|ab\| = \left\| \frac{aa^*}{\|a\|} \right\| = \frac{\|aa^*\|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

Dessa maneira obtemos que $\|a\| \leq \sup_{\|b\| \leq 1} \|ab\|$, como desejado.

v A^1 é Banach. Seja (a_n, λ_n) uma sequência de Cauchy em A^1 , provaremos que ela é convergente. Defina o homomorfismo $q : A^1 \rightarrow A^1/A$ dada por $(a, \lambda) \mapsto (a, \lambda) + A$. Note que q é contrativa, de fato, basta tomar $x = 0$ no ínfimo abaixo:

$$\|q((a, \lambda))\| = \inf_{x \in A} \|(a, \lambda) + x\| \leq \|(a, \lambda)\|.$$

Imitando a prova na Proposição 1.2.26 podemos averiguar que a função $\eta : A^1/A \rightarrow \mathbb{C}$ é um isomorfismo isométrico. Como q é contrativa então notemos que, em virtude de (a_n, λ_n) ser Cauchy, $(q(a_n, \lambda_n))$ é Cauchy em A^1/A . Disso e do fato que η é isométrico, segue que $\lambda_n = \eta(q(a_n, \lambda_n))$ é Cauchy em \mathbb{C} , portanto, existe $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Note agora que $(a_n, 0) = (a_n, \lambda_n) - (0, \lambda_n)$ é uma sequência de Cauchy, isso é devido ao fato de que (a_n, λ_n) é uma sequência de Cauchy e $(0, \lambda_n)$ é convergente, portanto Cauchy. Como a função $\varphi : A \rightarrow A \oplus 0$ dada por $a \mapsto (a, 0)$ é um isomorfismo isométrico, temos que $(a_n) \subset A$ é Cauchy e portanto existe $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in A$. Segue portanto que (a_n, λ_n) converge para (a, λ) , provando assim que A^1 é Banach.

vi A é isométricamente $*$ -isomorfa ao ideal fechado $I = \{(a, 0) : a \in A\}$ de A^1 . Isso segue das observações feitas acerca da função $\varphi : A \rightarrow I, a \mapsto (a, 0)$ no item anterior.

□

Abordaremos um ponto importante: o teorema anterior se baseia na hipótese de que A é uma C^* -álgebra sem unidade. De fato, caso A seja unital, a norma proposto não estará bem definida, note que escolhendo $a = 1_A$ e $\lambda = -1$ temos que

$$\|(1_A, -1)\| = \|\Lambda_{(1_A, -1)}\|_{op} = \sup_{\|b\| \leq 1} \|1_A b + (-1)b\| = 0.$$

Para alguns casos será fundamental definirmos uma unitização para todas as álgebras envolvidas, incluindo aquelas que já são unitais. Nasce portanto a necessidade de enunciar e provar o seguinte teorema adicional.

Teorema 2.2.2 (Unitização - caso unital). Dada uma C^* -álgebra A **com unidade**, podemos achar uma C^* -álgebra relacionada A^1 que contenha A , por meio duma identificação, como C^* -subálgebra. Mais precisamente, como um ideal.

Demonstração. Suponha que B é uma C^* -álgebra unital com unidade $1_B \in B$ e I é um ideal de B com unidade $1_I \neq 1_B$. Renomeando 1_B para 1 e 1_I para $p := 1_I$, observamos que p é uma projeção e, além disso, é central em B , de fato, dado $b \in B$ e usando que I é um anel:

$$1_I^* = 1_I^2 = 1_I \quad \text{e} \quad pb = 1_I b = (1_I b)1_I = b1_I.$$

Com isso conseguimos deduzir que $1 - p \in Z(B)$ pois dado $b \in B$ temos $(1 - p)b = b - pb = b - bp = b(1 - p)$. Como dado $b \in B$ podemos escrever $b = pb - (1 - p)b$ e $pB \cap (1 - p)B = \{0\}$ segue que

$$B = pB \oplus (1 - p)B.$$

Observando que $pB = \{b \in B : pb = b\} = I$ e renomeando $(1 - p)B := J$, onde

$$\begin{aligned} J &= \{b \in B : bx = a \forall x \in I\} \\ &= \{b \in B : (1 - p)b = b\} \\ &= \{b \in B : pb = 0\} \end{aligned}$$

Naturalmente, $I \times J$ é uma C^* -álgebra com as operações usuais e podemos criar o seguinte $*$ -isomorfismo de álgebras:

$$f : I \oplus J \longrightarrow I \times J \quad \text{dado por} \quad b = pb + (1 - p)b \longmapsto (pb, (1 - p)b).$$

No caso particular em que A é uma C^* -álgebra com unidade, e $A^1 = A \oplus \mathbb{C} := \{(a, \lambda) : a \in A \text{ e } \lambda \in \mathbb{C}\}$, a Proposição 2.1.11 nos garante que, através da identificação $A \longrightarrow A \oplus 0$, A pode ser visto como um ideal de A^1 . Dessa forma, denotando $p := 1_A$, a discussão anterior nos proporciona um $*$ -isomorfismo:

$$\psi : A^1 \longrightarrow pA^1 \oplus (1 - p)A^1 \quad \text{dado por} \quad \psi((a, \lambda)) \longmapsto (p(a, \lambda), (1 - p)(a, \lambda)).$$

Escreveremos o $*$ -isomorfismo ψ como $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ onde ψ_1 e ψ_2 são os $*$ -isomorfismos:

$$\psi_1 : A^1 \longrightarrow pA^1 \quad \text{dado por} \quad (a, \lambda) \longmapsto p(a, \lambda),$$

$$\psi_2 : A^1 \longrightarrow (1 - p)A^1 \quad \text{dado por} \quad (a, \lambda) \longmapsto (1 - p)(a, \lambda).$$

Note agora que denotando um elemento $(a, \lambda) \in A \oplus \mathbb{C}$, por $a + \lambda$, o fato de $p(a, \lambda) = (1_A, 0)(a, \lambda) = (a + \lambda 1_A, 0) = a + \lambda 1_A$ nos garante que

$$\begin{aligned} pA^1 &= \{p(a + \lambda 1) = pa + \lambda p : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(1_A, 0)(a, \lambda) : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \{a + \lambda 1_A : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Semelhantemente, ao notar que

$$(1 - p)(a, \lambda) = (-1_A, 1)(a, \lambda) = (-a - \lambda 1_A + a, \lambda) = (-\lambda 1_A, \lambda) = \lambda(1 - p),$$

temos:

$$\begin{aligned} (1 - p)A^1 &= \{(1 - p)(a, \lambda) : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\lambda(1 - p) : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \mathbb{C}(1 - p). \end{aligned}$$

Agora considere o $*$ -isomorfismo:

$$\eta : \mathbb{C}(1 - p) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{dada por} \quad \lambda(1 - p) \longmapsto \lambda.$$

Agora obteremos um $*$ -isomorfismo de $*$ -álgebras:

$$\varphi : A^1 \longrightarrow A \times \mathbb{C} \quad \text{dado por} \quad (a, \lambda) \longmapsto (a + \lambda 1_A, \lambda).$$

De fato, podemos escrever φ como $\varphi = (\psi_1, \eta\psi_2)$.

Observação 2.2.3. A discussão anterior foi feita como motivação para definir a função φ acima, se for do desejo do leitor, bastaria verificar que φ é um $*$ -isomorfismo e o desenvolvimento posterior pode ser lido sem perdas.

Podemos concluir agora, usando a proposição 2.1.35 que A^1 é uma C^* -álgebra (no caso em que A é unital) quando munida da norma:

$$\|\cdot\| : A^1 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \|(a, \lambda)\| = \max\{\|a + \lambda 1_A\|, |\lambda|\}.$$

Mais ainda, $\varphi : A^1 \longrightarrow A \times \mathbb{C}$ é um $*$ -isomorfismo isométrico.

Usaremos agora o seguinte lema:

Lema 2.2.4. Se B é uma $*$ -álgebra e C é uma C^* -álgebra, então caso exista um isomorfismo:

$$\psi : B \longrightarrow C, \quad b \longmapsto \psi(b),$$

podemos definir uma norma em B que a torna numa C^* -álgebra, essa norma será dada por $\|b\| = \|\psi(b)\|$ para qualquer $b \in B$. Ainda, se B e C são unitais então B é uma C^* -álgebra unital.

Demonstração. Sejam B uma $*$ -álgebra, C uma C^* -álgebra e $\psi : B \longrightarrow C$ um $*$ -isomorfismo. Definindo uma norma em B por $\|b\| = \|\psi(b)\|$, notemos que a injetividade de ψ faz a norma ser bem definida, de fato, tome $b \in B$ tal que $\|b\| = 0$, então $\|b\| = \|\psi(b)\| = 0$ implica que $\psi(b) = 0$ e pela injetividade temos que $b = 0$. As outras propriedades da norma seguem diretamente.

Mostraremos agora que B é C^* -álgebra, particionaremos a prova em diversos itens:

- A norma é submultiplicativa: Dados $b_1, b_2 \in B$ temos:

$$\|b_1 b_2\| = \|\psi(b_1 b_2)\| = \|\psi(b_1)\psi(b_2)\| \leq \|\psi(b_1)\| \cdot \|\psi(b_2)\| \leq \|b_1\| \cdot \|b_2\|.$$

- Se B e C forem unitais de unidades 1_B e 1_C respectivamente, do fato que um isomorfismo preserva unidade e de $\|1_C\| = 1$ por definição, concluímos que:

$$\|1_B\| = \|\psi(1_B)\| = \|1_C\| = 1.$$

- B é completo. Seja $(b_n) \subset B$ uma sequência de Cauchy, então dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N$ temos:

$$\|b_n - b_m\| < \epsilon.$$

Como $\|b_n - b_m\| = \|\psi(b_n - b_m)\| = \|\psi(b_n) - \psi(b_m)\|$ concluímos que $(\psi(b_n))$ é uma sequência de Cauchy em C , que sabemos ser completo, logo existe $c \in C$ tal que $\psi(b_n) \rightarrow c$. Temos então que dado $\epsilon > 0$, para n grande obtemos:

$$\|\psi(b_n) - c\| < \epsilon.$$

Agora como ψ é isomorfismo, existe $b_0 \in B$ tal que $c = \psi(b_0)$ e portanto o cálculo:

$$\|\psi(b_n) - c\| = \|\psi(b_n) - \psi(b_0)\| = \|\psi(b_n - b_0)\| = \|b_n - b_0\|,$$

nos garante que b_n converge para b_0 , portanto, segue que B é completo.

- Propriedade C^* : Seja $b \in B$, note que:

$$\|bb^*\| = \|\psi(bb^*)\| = \|\varphi(b)\varphi(b)^*\| = \|\varphi(b)\|^2 = \|b\|^2.$$

□

Com esse lema estabelecido, notemos que o $*$ -isomorfismo $\varphi: A^1 \rightarrow A \times \mathbb{C}$ entre a $*$ -álgebra A^1 e a C^* -álgebra $A \times \mathbb{C}$ (usamos aqui a Proposição 2.1.35) nos concede uma norma em A^1 dada por:

$$\|(a, \lambda)\| = \|\varphi((a, \lambda))\| = \|(a + \lambda 1_A, \lambda)\| = \max\{\|a + \lambda 1_A\|, |\lambda|\},$$

faz de A^1 uma C^* -álgebra. Agora resta apenas “enxergar” A dentro de A^1 , para isso, basta propor a identificação:

$$\phi: A \rightarrow A \oplus \mathbb{C}, \quad a \mapsto (a, 0).$$

usar a Proposição 2.1.11 para identificar A com $A \oplus \mathbb{C}$ e verificar que ϕ é de fato uma isometria: seja $a \in A$ qualquer, então:

$$\|\phi(a)\| = \max\{\|a + 0 1_A\|, |0|\} = \|a\|.$$

Portanto pegamos uma C^* -álgebra não unital A e a identificamos canonicamente com uma subálgebra $A \oplus \mathbb{C}$ duma álgebra unital relacionada A^1 . □

Os teoremas de unitização feitos acima nos concede uma maneira contornar a dificuldade de uma álgebra A não ser unital, usando justamente essa capacidade de unitizar álgebras, podemos fazer um teorema muito semelhante para um $*$ -homomorfismo entre $*$ -álgebras que não necessariamente é unital.

Teorema 2.2.5 (Unitização de $*$ -homomorfismos). Se $\varphi : A \rightarrow B$ é um $*$ -homomorfismo entre $*$ -álgebras A e B , então ele se “estende” unicamente a um $*$ -homomorfismo unital $\varphi^1 : A^1 \rightarrow B^1$.

O significado de “estender” a função $\varphi : A \rightarrow B$ para $\varphi^1 : A^1 \rightarrow B^1$ é que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \iota_A \downarrow & & \downarrow \iota_B \\ A^1 & \xrightarrow{\varphi^1} & B^1 \end{array}$$

onde ι_A e ι_B são as funções

$$\iota_A : A \rightarrow A^1 \quad a \mapsto (a, 0) \quad \iota_B : B \rightarrow B^1 \quad b \mapsto (b, 0).$$

Nesse sentido, quando A e B são enxergados dentro das suas respectivas unitizações via as funções ι_A e ι_B temos que φ^1 estenderia φ no sentido usual.

Demonstração. Dada um $*$ -homomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ entre $*$ -álgebras A e B basta unitizar A e B e definir o $*$ -homomorfismo unital

$$\varphi : A^1 \rightarrow B^1 \quad \text{dado por} \quad \varphi^1((a, \lambda)) = (\varphi(a), \lambda).$$

Para verificar que φ^1 como definido acima é um $*$ -homomorfismo unital note que basta recorrermos a prova do Teorema 1.2.23 onde definimos a exata mesma função. Para ver que φ^1 é de fato um $*$ -homomorfismo tomamos o elemento $(a, \lambda) \in A^1$ e fazemos o cálculo

$$\varphi^1((a, \alpha)^*) = (\varphi(a^*), \bar{\alpha}) = (\varphi(a), \alpha)^* = \varphi^1(a, \alpha)^*.$$

Para verificar que φ^1 é o único, é suficiente recorrer mais uma vez a prova do Teorema 1.2.23. \square

Observação 2.2.6. Existe um outro tipo de unitização que é útil na teoria de C^* -álgebra, a saber, a teoria de álgebras de multiplicadores, veja Apêndice A.

2.3 C^* -Álgebras Comutativas

Nessa seção vamos continuar a discutir as propriedades de uma c^* -álgebra, em particular, objetivaremos caracterizar uma C^* -álgebra comutativa via isomorfismos. Mais

ainda, como uma aplicação desse resultado podemos identificar uma C^* -álgebra comutativa e unital com um espaço de funções contínuas.

Algumas literaturas exigem que um homomorfismo de álgebras seja contínuo (não foi feito nesse material). No caso de C^* -álgebras, como será demonstrado no próximo Teorema, essa condição nos é automaticamente garantida.

Teorema 2.3.1. Seja A uma $*$ -álgebra de Banach e B uma C^* -álgebra, então todo $*$ -homomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ é uma contração, ou seja,

$$\|\varphi(a)\| \leq \|a\| \quad \forall a \in A.$$

Em particular, φ é contínua.

Demonstração. Sejam A uma $*$ -álgebra de Banach e B uma C^* -álgebra, e $\varphi : A \rightarrow B$ um $*$ -homomorfismo. Vamos unitizar A , B e φ de maneira a considerarmos A , B e φ como unitais. Fazer isso significa que, no lugar de φ , provaremos que a função $\varphi^1 : A^1 \rightarrow B^1$ é uma contração, isso nos é conveniente pois ao provar $\|\varphi^1(a_1)\|_{B^1} \leq \|a_1\|_{A^1}$ para qualquer $a_1 \in A^1$, automaticamente provaremos que $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$ para qualquer $a \in A$. De fato, suponha que vale

$$\|\varphi^1(a_1)\|_{B^1} \leq \|a_1\|_{A^1} \quad \forall a_1 \in A^1,$$

nesse caso, para $a \in A$ temos que $(a, 0) \in A^1$ e portanto $\|\varphi^1((a, 0))\|_{B^1} \leq \|(a, 0)\|_{A^1}$, pela comutatividade do diagrama exposto no Teorema 2.2.5 temos que $(\varphi^1 \circ \iota_A)(a) = (\iota_B \circ \varphi)(a)$ e portanto temos $\varphi^1((a, 0)) = (\varphi(a), 0) = \iota_B(\varphi(a))$, logo, podemos escrever:

$$\|\iota_B(\varphi(a))\|_{B^1} \leq \|(a, 0)\|_{A^1}.$$

Note agora que como ι_B é uma isometria, segue que $\|\iota_B(\varphi(a))\|_{B^1} = \|\varphi(a)\|_B$, similarmemente, como ι_A é isometria temos $\|(a, 0)\|_{A^1} = \|a\|_A$. Logo, ao provar que φ^1 é contração provaremos que φ é contração. Diremos então que estamos unitizando φ , significando que assumiremos tanto φ como A e B como unitais.

Como B é uma C^* -álgebra e lembrando que $a^*a \in A_{sa}$ e portanto $\varphi(a^*a) \in B_{sa}$:

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a^*a)\| = r(\varphi(a^*a)).$$

Como $\varphi : A \rightarrow B$ é unital, pela Proposição 1.4.27 o espectro decresce:

$$\sigma_B(\varphi(a^*a)) \subset \sigma_A(a^*a).$$

Assim concluiremos que $r(\varphi(a^*a)) \leq r(a^*a)$, de fato, lembre que

$$r(\varphi(a^*a)) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\varphi(a^*a))\} \text{ e } r(a^*a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^*a)\},$$

Como $\sigma_B(\varphi(a^*a)) \subset \sigma_A(a^*a)$, então temos:

$$\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\varphi(a^*a))\} \subset \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^*a)\},$$

disso segue que $r(\varphi(a^*a)) \leq r(a^*a)$.

Assim temos portanto que $\|\varphi(a)\|^2 \leq r(a^*a) = \|a\|^2$ e portanto $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$. Provamos então que φ é uma contração e, em particular, contínua. \square

Teorema 2.3.2. Se A é uma C^* -álgebra e $a \in A$ é um elemento auto-adjunto, então $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.

Demonstração. Podemos supor que A é unital, note que como $a \in A_{sa}$ então $e^{ia} \in U(A)$, de fato, pela continuidade da adjunção: (lembre-se que pelo Teorema 1.3.16 a inversa de e^a é e^{-a})

$$(e^{ia})^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia)^n}{n!} \right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ia)^n}{n!} = e^{(-ia)}.$$

Disso e da Proposição 2.1.36 temos que $\sigma(e^{ia}) \subset S_1(0)$. Agora tome $\lambda \in \sigma(a)$, temos então

$$e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{ia-i\lambda+i\lambda} - e^{i\lambda} = e^{(ia-i\lambda)}e^{i\lambda} - e^{i\lambda} = (e^{i(a-\lambda)} - 1)e^{i\lambda}.$$

(note que para obter a segunda igualdade foi necessário observar que $i\lambda$ e $ia - i\lambda$ comutam e usar o Teorema 1.3.16). Defina $b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(a-\lambda)^{n-1}}{n!}$, veremos que $(e^{i(a-\lambda)} - 1)e^{i\lambda} = (a - \lambda)be^{i\lambda}$,

$$\begin{aligned} (e^{i(a-\lambda)} - 1)e^{i\lambda} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(a-\lambda)^n}{n!} - 1 \right) e^{i\lambda} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(a-\lambda)^n}{n!} \right) e^{i\lambda} \\ &= (a-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(a-\lambda)^{n-1}}{n!} e^{i\lambda} \\ &= (a-\lambda)be^{i\lambda}. \end{aligned}$$

Note que b comuta com a e, por conta da Proposição 1.3.6, o fato de $(a - \lambda)$ não ser invertível implica que o produto $(a - \lambda)be^{i\lambda}$ não é invertível. Disso segue que $(e^{i(a-\lambda)} - 1)e^{i\lambda}$ não é invertível e portanto $e^{i\lambda} \in S_1(0)$, assim temos que $\lambda \in \mathbb{R}$. De fato, para ver isso escreveremos $\lambda = x + yi$ e provaremos que $y = 0$, note que $e^{i\lambda} \in S_1(0)$ implica que $1 = |e^{i\lambda}| = |e^{ix}|e^{-y} = e^{-y}$, seguindo então que $y = 0$ e portanto $\lambda = x \in \mathbb{R}$. Segue então que $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. \square

É possível utilizar o teorema acima para fortalecer a discussão feita no Exemplo 2.1.27.

Exemplo 2.3.3. Caso se muna a álgebra do disco $A(D)$ com a involução dada por $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ então ela não obedecerá as condições do Teorema 2.3.2. De fato, considere a função identidade $Id \in A(D)$, nesse caso Id é auto adjunta: dado $z \in D$ temos:

$$Id^*(z) = \overline{Id(\bar{z})} = \bar{z} = z = Id(z),$$

entretanto, pelo Exemplo 1.4.9, segue que $\sigma(Id) = Id(D)$, e portanto temos:

$$\sigma(Id) = Id(D) = D \not\subseteq \mathbb{R}.$$

Segue então que $A(D)$ não é uma C^* -álgebra com a involução proposta.

Relembremos que um $\varphi \in \widehat{A}$ é definido como um funcional linear multiplicativo não identicamente nulo, a princípio, não se afirma que φ preserva adjuntas quando A é uma $*$ -álgebra. O próximo resultado, entretanto, nos garante que φ é um $*$ -homomorfismo no caso A ser uma C^* -álgebra.

Proposição 2.3.4. Se A é uma C^* -álgebra e $\varphi \in \widehat{A}$ um caractere de A , então φ preserva adjuntas.

Demonstração. Seja $a \in A$, usando a Proposição 2.1.12 podemos escrever de maneira única $a = a_1 + ia_2$, onde $a_1, a_2 \in A_{sa}$. Argumentaremos que $\varphi(a_1) \in \sigma(a_1)$ e $\varphi(a_2) \in \varphi(a_2)$. Para fazermos a prova, suponha que A é unital, se necessário recorrendo a sua unitização.

Note que se $\varphi(a_1) \notin \sigma(a_1)$ então $\exists z \in A$ tal que

$$z(a_1 - \varphi(a_1)1) = (a_1 - \varphi(a_1)1)z = 1$$

Lembramos que pela Observação 1.5.5 o fato de A ser unital nos garante que $\varphi(1) = 1$. Aplicando agora o φ na equação acima obtemos

$$\varphi(z)(\varphi(a_1) - \varphi(a_1)) = (\varphi(a_1) - \varphi(a_1))\varphi(z) = 1.$$

Temos então que $0 = 1$, um absurdo (lembramos que supomos aqui que $A \neq \{0\}$).

Argumentando analogamente concluímos que $\varphi(a_2) \in \sigma(a_2)$. Usando o Teorema 2.3.2, do fato de que $a_1, a_2 \in A_{sa}$ concluímos que $\varphi(a_1), \varphi(a_2) \in \mathbb{R}$.

Veremos agora que $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$. De fato,

$$\begin{aligned} \varphi(a^*) &= \varphi(a_1 + ia_2) = \varphi(a_1) + i\varphi(a_2) = \overline{\varphi(a_1)} - i\overline{\varphi(a_2)} \\ &= \overline{\varphi(a_1) + i\varphi(a_2)} \\ &= \overline{\varphi(a_1 + ia_2)} \\ &= \overline{\varphi(a)}. \end{aligned}$$

□

Voltemos a discussão para a prova do teorema usualmente referido como *Teorema da Representação de Gelfand* (o leitor também pode encontrar os nomes *Teorema de Gelfand-Naimark* ou simplesmente *Teorema de Gelfand*) é importante frisar que se trata de um dos mais fundamentais de toda a teoria. Esse resultado nos permite uma completa caracterização de uma C^* -álgebra comutativa: são sempre, via um isomorfismo, da forma de um $C_0(X)$ para um X localmente compacto Hausdorff. O teorema também pode ser visto como uma forma preliminar do teorema espectral e ainda nos permite construir a importante ferramenta do cálculo funcional.

Antes de provar o teorema de representação de Gelfand é necessário introduzir alguns resultados preliminares.

Lema 2.3.5. Se A é uma C^* -álgebra comutativa, (aqui estamos convencendo que $A \neq \{0\}$, é importante para a hipótese) então $\widehat{A} \neq \emptyset$.

Demonstração. Por hipótese, temos que $A \neq \{0\}$, existe portanto, um $0 \neq a \in A$. Pela Proposição 2.1.12 existem $a_1, a_2 \in A_{sa}$, unicamente determinados, tal que $a = a_1 + ia_2$. Note que como $a \neq 0$, a_1 e a_2 não podem ser ambos nulos, segue então que existe um $0 \neq b \in A_{sa}$ (esse seria o a_1 ou a_2).

Pelo Teorema 2.1.37, $r(b) = \|b\|$, onde $r(b) = \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(b)\}$. Pelo fato de $\|b\|$ ser o supremo de $|\lambda|$ onde λ é tomado em $\sigma(b)$ então existe λ_0 tal que $\frac{\|b\|}{2} < |\lambda_0| \leq \|b\|$, disso concluímos que $\lambda_0 \neq 0$. Logo, pelo Teorema 1.5.11 item (ii), existe $\varphi \in \widehat{A}$ tal que $\varphi(b) = \lambda_0$, portanto, $\widehat{A} \neq \{0\}$. \square

Lema 2.3.6. Se X e Y são espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ é um mapa linear isométrico, então $T(X)$ é um fechado de Y .

Introduziremos agora o chamado *Teorema de Stone-Weierstrass*, mais especificamente, usaremos o teorema para o caso localmente compacto. Vamos traçar uma breve discussão acerca do teorema.

O *Teorema de Weierstrass* nos diz que a álgebra de polinômios é densa no conjunto $C_{\mathbb{R}}[a, b]$, ou seja, toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser aproximada por um polinômio. Esse teorema pode ser generalizado no chamado *Teorema de Stone-Weierstrass*: Sendo X um compacto Hausdorff, uma subálgebra A é densa em $C_{\mathbb{R}}(X)$ se forem satisfeitas as duas condições a seguir:

- i A contém as funções constantes.
- ii A separa pontos de X no seguinte sentido: se x e y são dois pontos distintos de X então existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Usaremos uma versão levemente diferente desse teorema, especializada para o caso em que X é um localmente compacto.

Teorema 2.3.7 (Teorema de Stone-Weierstrass). Seja X um localmente compacto Hausdorff e B uma $*$ -subálgebra de $C_0(X)$. Se em B existem funções não identicamente nulas e funções que separam pontos, respectivamente:

- i Se $x \in X$, então existe $f \in B$ tal que $f(x) \neq 0$.
- ii Se x e y são dois pontos distintos de X então existe $f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Então B é denso em $C_0(X)$, isto é, $\overline{B} = C_0(X)$.

O próximo teorema nos garantirá uma caracterização completa de uma C^* -álgebra comutativa, note que durante toda a demonstração utilizaremos o Lema 2.3.5.

Teorema 2.3.8 (Teorema da Representação de Gelfand). Se A é uma C^* -álgebra comutativa, então a representação de Gelfand

$$\Gamma : A \longrightarrow C_0(\widehat{A}), \text{ dada por } a \longmapsto \widehat{a}$$

é um $*$ -isomorfismo isométrico

Demonstração. Pelo Teorema 1.5.19, sabemos que Γ é um homomorfismo contrativo. Provaremos que Γ é um $*$ -homomorfismo, isto é, $\Gamma(a^*) = (\Gamma(a))^*$ para qualquer escolha de $a \in A$, ou ainda, $\widehat{a^*} = \overline{\widehat{a}}$. Para isso, seja $\varphi \in \widehat{A}$ e $a \in \widehat{A}$, então, lembrando que caracteres preservam adjuntos (Proposição 2.3.4):

$$\widehat{a^*}(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \overline{\widehat{a}(\varphi)}.$$

Onde o resultado segue pela arbitrariedade de $\varphi \in \widehat{A}$. Mostraremos agora que Γ é uma isometria, por conta do Teorema 1.5.19, temos que $\|\Gamma(a^*a)\| = r(a^*a)$ e como $a^*a \in A_{sa}$, segue pelo Teorema 2.1.37 que $r(a^*a) = \|a^*a\|$. Usando repetidamente a igualdade C^* , bem como os fatos anteriormente abordados, podemos fazer o seguinte cálculo:

$$\|\Gamma(a)\|_\infty^2 = \|\Gamma(a)^*\Gamma(a)\| = \|\Gamma(a^*a)\| = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Isso nos conclui que Γ é de fato uma isometria. Para provar que Γ é um isomorfismo resta apenas mostrar a sobrejeção, note que como Γ é um mapa linear isométrico, o Lema 2.3.6 nos garante que $\Gamma(A) = \overline{\Gamma(A)}$, basta portanto cair nas hipótese de Stone-Weierstrass para concluir que $\Gamma(A) = C_0(\widehat{A})$. Primeiramente, note que $\Gamma(A)$ é de fato uma $*$ -subálgebra de $C_0(\widehat{A})$, note também que

- i Seja $\varphi \in \widehat{A}$, por definição, $\varphi \neq 0$, ou seja, existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) \neq 0$, disso achamos $\Gamma(a) \in \Gamma(A)$ tal que $(\Gamma(a))(\varphi) \neq 0$.
- ii Tome $\varphi, \psi \in \widehat{A}$ tal que $\varphi \neq \psi$. portanto, existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) \neq \psi(a)$, note que o elemento a nos determina uma função $\Gamma(a) \in \Gamma(A)$ tal que $(\Gamma(a))(\varphi) \neq (\Gamma(a))(\psi)$.

Juntando esses fatos, o Teorema 2.3.7 nos garante que $\Gamma(A) = C_0(\widehat{A})$, ou seja, Γ é um isomorfismo. \square

Observação 2.3.9. Caso A seja uma C^* -álgebra comutativa unital, então segue do Teorema 1.5.18 que \widehat{A} é compacto, e disso obtemos, pela Proposição 1.1.23 termos que $C_0(\widehat{A}) = C(\widehat{A})$. Dessas observações segue do Teorema 2.3.8 que a representação de Gelfand $\Gamma : A \rightarrow C(\widehat{A})$ é um $*$ -isomorfismo isométrico. Nesse sentido, toda C^* -álgebra comutativa e unital A é isomorfa a um espaço de funções contínuas $C(X)$ para X compacto.

Veremos agora alguns resultados utilizando o Teorema da Representação de Gelfand 2.3.8. Para as suas aplicações, a principal ideia é “reduzir” o problema para C^* -álgebras (subálgebras em geral) comutativas, via a utilização de Γ para representar um elemento dentro de uma álgebra de funções contínuas (ou também que se anulam no infinito).

Note que uma maneira padrão de gerar subálgebras comutativas é gerá-las por elementos auto-adjuntos, vide a caracterização abstrata de uma C^* -subálgebra vista na observação 2.1.32. Semelhantemente, podemos construir C^* -subálgebras unitais ao colocar a unidade no conjunto gerador. Caso quisermos criar elementos auto-adjuntos, basta pegar um elemento a e considerar a^*a ou aa^* . Essa discussão ficará mais clara no resultado a seguir.

Teorema 2.3.10. Seja B uma C^* -subálgebra unital de uma álgebra unital A ($1_A \in B$) então para qualquer $b \in B$ temos:

$$\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$$

Demonstração. Provaremos as contenções nos complementares, para provarmos que $\rho_B(b) \subset \rho_A(b)$ basta notar que se um elemento é inversível em B , então é inversível em A . Para demonstrar a contenção contrária, assumamos que um $b \in B$ é inversível em A , provemos que $b^{-1} \in B$.

Sem perda de generalidade, assumiremos que $\|b\| \leq 1$, (caso contrário trabalharemos com $\frac{b}{\|b\|}$) defina $c = b^*b$ e note que c é um elemento de B , auto-adjunto e como $b \in \text{Inv}(A)$ teremos que $b^* \in \text{Inv}(A)$ c é inversível em A (de inversa $b^{-1}(b^{-1})^*$). Considere também o elemento $d = c^*c = c^2$, pelas exatas mesmas razões c é um elemento de B auto-adjunto e inversível. Ademais, $\|d\| = \|c^*c\| = \|b^*bb^*b\| \leq \|b\|^4 \leq 1$.

Seja $C^*(c, c^{-1}, 1)$ a C^* -subálgebra gerada pela terma $\{1, c^{-1}, c\}$. Então $C^*(c, c^{-1}, 1)$ é comutativa pois c comuta com c^{-1} e também unital. Como discutido na Observação 2.3.9 a transformada de Gelfand $\Gamma : C^*(c, c^{-1}, 1) \longrightarrow C(X)$ nos garante um $*$ -isomorfismo isométrico para algum espaço X compacto.

Como c é auto-adjunto, $d^{-1} = c^{-2} \in C^*(c, c^{-1}, 1)$, dessa forma, d é inversível em $C^*(c, c^{-1}, 1) = C(X)$. Iremos agora, através do isomorfismo $\Gamma : C^*(c, c^{-1}, 1) \longrightarrow C(X)$ “considerar” d como uma função

$$\Gamma(d) : X \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{dada por} \quad x \longmapsto (\Gamma(d))(x).$$

Nesse sentido, o fato de d ser inversível implica que a sua identificação $\Gamma(d)$ também é inversível em \mathbb{C} , ou seja, $(\Gamma(d))(x) \neq 0$ para qualquer $x \in X$.

Além disso, como $d = c^*c = c^2$ e $c \in C^*(c, c^{-1}, 1)$, via a mesma identificação de antes podemos dizer que $(\Gamma(d))(x) = ((\Gamma(c)(x))^2 = |(\Gamma(c))(x)|^2 \geq 0$, para qualquer $x \in X$. Também note que fato de $\|d\| \leq 1$ implica que $\|\Gamma(d)\|_\infty \leq 1$, $(\Gamma(d) \in (C(X), \|\cdot\|_\infty))$ ou seja $|\Gamma(d)(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$.

Juntando esses fatos temos que $\Gamma(d)(X)$ é um subconjunto compacto de $(0, 1]$. De fato, note que como $c \in A_{sa}$ e Γ é isomorfismo, temos que $\Gamma(c) \in C(X)_{sa}$ e portanto, em virtude do Teorema 2.3.2, temos que $\sigma(\Gamma(c)) \subset \mathbb{R}$. Note agora que $\|c\| \leq \|b\|^2 \leq 1$ e portanto, $|\Gamma(c)| \leq 1$, ainda, sabemos que $\|r(\Gamma(c))\| \leq \|\Gamma(c)\|$ e disso concluímos que $\sigma(\Gamma(c)) \subset [-1, 1]$. Usando o polinômio x^2 no Teorema 1.4.13 temos que

$$\sigma(\Gamma(d)) = \sigma(\Gamma(c^*c)) = \sigma(\Gamma(c^2)) = \sigma(\Gamma(c)^2) = \sigma(\Gamma(c))^2.$$

Ou seja, temos que $\sigma(\Gamma(d)) \subset [0, 1]$. Como $d \in A_{sa}$, segue que $\Gamma(d) \in C(X)_{sa}$ e pelo Exemplo 1.4.5 temos que $\sigma(\Gamma(d)) = \Gamma(d)(X)$, segue então que $\Gamma(d)(X) \subset [0, 1]$. Mais ainda, como visto antes, $\Gamma(d)$ não se anula e assim $\Gamma(d)(X) \subset (0, 1]$. Note também que a Proposição 1.4.10 concluímos que $\Gamma(d)(X)$ é um subconjunto compacto de $(0, 1]$.

Considere agora a série de Taylor da função $z \longmapsto z^{-1}$ ao redor de 1:

$$z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (z - 1)^n.$$

Aqui os λ_n são certos números complexos correspondentes a expansão de Taylor. É um resultado de Variável Complexa que essa série converge na maior bola centrada em 1 onde a função está definida, ou seja, $B_1(0)$, em particular, converge uniformemente em subconjuntos compactos da bola de raio 1 e centro 1. Particularmente, converge uniformemente no compacto $K := \Gamma(d)(X) \subset (0, 1] \subset B_1(0)$. Ou seja, para qualquer escolha de $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $N \geq n_0$ temos, para qualquer $z \in K$:

$$\left| z^{-1} - \sum_{n=0}^N \lambda_n (z - 1)^n \right| \leq \epsilon$$

Como a convergência uniforme se dá em $\Gamma(d)(X)$, substituindo $z = \Gamma(d)(x)$ com $x \in X$, segue que para todo $x \in X$ temos

$$\left| \Gamma(d)(x)^{-1} - \sum_{n=0}^N \lambda_n (\Gamma(d)(x) - 1)^n \right| \leq \epsilon.$$

Note que como a convergência é uniforme, e portanto, garantimos a convergência na norma do sup, que é a norma do espaço $C(X)$ onde $\Gamma(d)$ se encontra, garantimos a seguinte convergência

$$\Gamma(d)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (\Gamma(d) - 1)^n.$$

Do fato que Γ é um isomorfismo e $\Gamma(d)^{-1} = \Gamma(d^{-1})$ podemos aplicar Γ^{-1} de ambos os lados da equação acima e ainda do fato de Γ ser um isomorfismo, portanto em particular contínuo, temos

$$d^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (d - 1)^n.$$

Agora como $d, 1 \in B$ e B é uma C^* -subálgebra de A , portanto fechada, segue que $d^{-1} \in B$, portanto, como $d = b^*bb^*$ temos que $b^{-1} = d^{-1}b^*bb^*$ e conseguimos escrever b^{-1} em função de elementos que pertençam a B , disso segue que b^{-1} pertence a B . \square

Nota Quando unida com outro teorema de representação, a representação de Gelfand para o caso de A ser unital, como elaborado na Observação 2.3.9, possui uma outra interessante aplicação: trata-se de uma equivalência categórica. O leitor interessado pode ler a respeito no Apêndice C.

2.4 Cálculo Funcional Contínuo

Essa seção de dedicará a discutir uma importante aplicação do Teorema de Representação de Gelfand 2.3.8. Considere um elemento $a \in A$ onde A é uma álgebra de Banach, podemos aplicar esse elemento a em polinômios ou funções bem comportadas, obtendo, por exemplo, $p(a)$ ou e^a . Note que não é possível, entretanto, garantir a boa definição de uma função como $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a^n$ ($\lambda_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}$). Considere um $\lambda \in \mathbb{C}$, através da fórmula de Cauchy:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \lambda} dz,$$

podemos, dado um $a \in A$ e tomando $z \in \sigma(a)$, definir a seguinte $f(a)$:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z - a)^{-1} dz.$$

Aqui consideramos $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ onde U é uma região em \mathbb{C} e γ uma curva que contém $\sigma(a)$ (possível pois o espectro é compacto). A definição de $f(a)$ vista acima é

referida como o *cálculo funcional analítico*, nesse capítulo desenvolveremos uma teoria mais geral ao considerar a um elemento normal numa C^* -álgebra unital.

Dados A uma C^* -álgebra unital e $a \in A$ um elemento normal definiremos um outro elemento $f(a) \in A$ para $f : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua de tal forma que este processo estenda o cálculo polinomial, isto é:

$$f(z) = 1 \Rightarrow f(a) = 1_A$$

$$f(z) = z^n \Rightarrow f(a) = a^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Antes de abordar o tema desse capítulo nos dedicaremos a provar alguns lemas, antes ainda, enunciaremos uma proposição de topologia.

Proposição 2.4.1. Sejam X e Y espaços topológicos com X compacto e Y Hausdorff. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua e bijetiva, então é um homeomorfismo.

Lema 2.4.2. Sejam φ e ψ são $*$ -homomorfismos da C^* -álgebra A para a C^* -álgebra B , se S é um conjunto tal que $\varphi|_S = \psi|_S$ e $A = C^*(S)$, então segue que $\varphi = \psi$.

Demonstração. Definiremos o conjunto C dos elementos nos quais φ e ψ coincidem e provar que $C = A$:

$$C := \{a \in A : \varphi(a) = \psi(a)\}.$$

Naturalmente, basta apenas provar que $A \subset C$, note então que como pelo Teorema 2.3.1 segue que φ e ψ são contínuos, portanto, prosseguindo como o desenvolvido na prova da Proposição 1.2.4 apenas nos resta verificar que C é uma $*$ -subálgebra. Para isso tome $a \in C$, como φ e ψ são homomorfismo podemos fazer as implicações

$$\varphi(a) = \psi(a) \Rightarrow \varphi(a)^* = \psi(a)^* \Rightarrow \varphi(a^*) = \psi(a^*),$$

logo segue que C é uma $*$ -subálgebra fechada que contém S , pela minimalidade de $C^*(S)$ segue que $A = C^*(S) \subset C$. \square

Lema 2.4.3. Seja A uma C^* -álgebra unital e $a \in A$ um elemento normal de A , então a aplicação:

$$h : \widehat{C^*(1, a)} \rightarrow \sigma(a), \quad \varphi \mapsto \varphi(a),$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Notemos que h está bem definida, de fato, isso é uma consequência da Proposição 1.5.10. O resto da demonstração seguirá nas seguintes partes:

- Injeção. Sejam $h(\varphi) = h(\psi)$, queremos obter $\varphi = \psi$. Note que $\varphi(a) = \psi(a)$, ou seja, φ e ψ coincidem em a , como $C^*(1, a)$ é unital segue também que $\varphi(1) = \psi(1) = 1$, mais ainda, como φ e ψ são caracteres, ambos são contínuos. Por conta desses fatos, como $C^*(1, a)$ é a álgebra gerada por 1 e a , segue pela Proposição 2.4.2 que $\varphi = \psi$.
- Sobrejetividade. Seja $\lambda \in \sigma(a)$, provemos que existe $\varphi \in \widehat{C^*(1, a)}$ tal que $h(\varphi) = \varphi(a) = \lambda$. Basta então usar o Teorema 1.5.11 para escrever $\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \widehat{A}\}$
- Continuidade. Seja $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in J}$ uma rede em $\widehat{C^*(1, a)}$, supondo que $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in J} \rightarrow \varphi$, desejo concluir que $h((\varphi_\alpha)_{\alpha \in J}) \rightarrow h(\varphi)$. Notemos que a convergência desejada é meramente que os caracteres convirjam pontualmente, isto é, $\varphi_\alpha(a) \rightarrow \varphi(a)$, note que, como discutido na Observação 1.5.15 isso é justamente uma caracterização da convergência na topologia fraca estrela, que é a topologia de $\widehat{C^*(1, a)}$.
- h é um homeomorfismo. De fato, como $C^*(1, a)$ é unital, segue do Teorema 1.5.18 que $\widehat{C^*(1, a)}$ é compacto. Naturalmente, $\sigma(a)$ é visto como um subespaço de \mathbb{C} ou seja, um Hausdorff, segue então pela Proposição 2.4.1 que h é um homeomorfismo.

□

Lema 2.4.4. Sejam X e Y espaços topológicos e $h : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo entre X e Y , então enxergando $C(X)$ e $C(Y)$ como $*$ -álgebras, a função

$$h_* : C(Y) \rightarrow C(X), \quad f \mapsto f \circ h,$$

é um $*$ -homomorfismo.

No caso de X e Y serem localmente compactos Hausdorff, então h_* definido de $C_0(Y)$ para $C_0(X)$ é um $*$ -isomorfismo isométrico.

Demonstração. A verificação de que h_* é bem definido vem do fato da composição de funções contínuas ser ainda contínua. Para ver que h_* é um homomorfismo, sejam $f, g \in C(Y)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$h_*(f + g) = (f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h = h_*(f) + h_*(g),$$

$$h_*(\lambda f) = (\lambda f) \circ h = \lambda f \circ h = \lambda h_*(f),$$

$$h_*(fg) = (fg) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h) = h_*(f) \cdot h_*(g).$$

Para ver que é um $*$ -homomorfismo basta verificarmos que $f^* \circ h = (f \circ h)^*$ e teremos $h_*(f^*) = (h_*(f))^*$. De fato, para $y \in Y$ temos

$$(f \circ h)^*(y) = \overline{f(h(y))} = f^*(h(y)) = (f^* \circ h)(y).$$

Provemos agora que h_* é uma bijeção. Para a injetividade, suponha que $h_*(f) = h_*(g)$, isto é, $f \circ g = g \circ h$, note agora que como h tem inversa garantimos que $f = g$.

Para ver que h é uma sobrejeção tome $g \in C(X)$, como h tem inversa contínua basta tomar $f = g \circ h^{-1} \in C(Y)$ e obtemos que $h_*(f) = g$.

Agora para a hipótese de X e Y serem localmente compactos Hausdorff devemos verificar que $h_* : C_0(Y) \rightarrow C_0(X)$ é bem definida. Seja $f \in C_0(Y)$, então dado $\epsilon > 0$ o conjunto:

$$K_\epsilon(f) \subset \{y \in Y : |f(y)| \geq \epsilon\} \text{ é compacto em } Y.$$

Como h é um homeomorfismo, segue que $h^{-1}(K_\epsilon(f))$ é um compacto em X , note agora que $K_\epsilon(h_*(f)) = K_\epsilon(f \circ h) = \{x \in X : |f(h(x))| \geq \epsilon\}$ é igual a $h^{-1}(K_\epsilon(f))$. De fato, se $x \in K_\epsilon(f \circ h)$ então $|f(h(x))| \geq \epsilon$, isto é, $h(x) \in K_\epsilon(f)$, ou seja, $K_\epsilon(f \circ h) \subset h^{-1}(K_\epsilon(f))$. Para a inclusão contrária, seja $x \in h^{-1}(K_\epsilon(f))$, nesse caso, $h(x) \in K_\epsilon(f)$, ou ainda, $x \in K_\epsilon(f \circ h)$. Disso concluímos que $K_\epsilon(h_*(f))$ é um compacto, ou seja, $h_*(f) \in C_0(X)$ sempre que $f \in C_0(Y)$. Analogamente concluímos que $(h^{-1})_* : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ está bem definido.

Por argumentos idênticos ao feito no caso onde X e Y são compactos, temos que h_* é uma bijeção, resta então provar h_* é uma isometria. Seja $f \in C(Y)$, então

$$\|h_*(f)\| = \sup_{x \in X} |h_*(f)| = \sup_{x \in X} |f(h(x))|.$$

Como h é uma bijeção podemos fazer

$$\sup_{x \in X} |f(h(x))| = \sup_{y \in Y} |f(y)| = \|f\|.$$

□

O seguinte teorema é usualmente referido como *cálculo funcional contínuo*. Deve-se notar que algumas literaturas usam esse termo para se referir a função φ do teorema.

Teorema 2.4.5. Seja A uma C^* -álgebra unital e $a \in A$ um elemento normal. Nessas hipóteses, existe um único $*$ -homomorfismo $\varphi : C(\sigma(a)) \rightarrow A$ tal que $\varphi(z) = a$, aqui z é a função identidade $\lambda \rightarrow \lambda$ em $\sigma(a)$. Utilizaremos a notação $f(a) := \varphi(f)$.

Demonstração. Seja $a \in A$ um elemento normal de uma C^* -álgebra unital, então a C^* -subálgebra $C^*(1, a) = \overline{\{\sum_{n,m \geq 1}^{\text{finito}} \lambda_{n,m} a^n (a^*)^m\}}$ é comutativa. Usando o Teorema 2.3.8 temos que existe um $*$ -isomorfismo isométrico $\Gamma : C^*(1, a) \rightarrow C(\widehat{C^*(1, a)})$. Pelo Lema 2.4.3 temos que a seguinte função é um homeomorfismo:

$$h : \widehat{C^*(1, a)} \rightarrow \sigma(a), \quad \tau \mapsto \tau(a).$$

Agora para esse homeomorfismo h , o Lema 2.4.4 nos garante que a seguinte função é um $*$ -isomorfismo isométrico:

$$h_* : C(\sigma(a)) \longrightarrow C(\widehat{C^*(1, a)}) \quad f \longmapsto f \circ h.$$

Defina agora a seguinte função $\varphi := \Gamma^{-1} \circ h_* : C(\sigma(a)) \longrightarrow C^*(1, a) \subset A$.

$$C(\sigma(a)) \xrightarrow{h_*} C(\widehat{C^*(1, a)}) \xrightarrow{\Gamma^{-1}} C^*(1, a)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\varphi}$

Resta agora ver que o φ previamente definido é a função do cálculo funcional contínuo. Note que φ é um $*$ -isomorfismo devido ao fato de ser uma composição de $*$ -isomorfismos. Para ver que φ é unital note que φ é um isomorfismo entre duas álgebras unitais $C(\sigma(a))$ e $C^*(1, a)$ e disso segue que φ preserva unidades.

Provemos que $\varphi(z) = a$. Temos que $\varphi(z) = \Gamma^{-1}(h_*(z))$, veremos que é o $h_*(z) \in C(\widehat{C^*(1, a)})$. Para isso seja $\tau \in C(\widehat{C^*(1, a)})$, então temos:

$$h_*(z)(\tau) = (z \circ h)(\tau) = z(h(\tau)) = z(\tau(a)) = \tau(a).$$

Dessa forma, temos que $h_*(z) = \hat{a}$, portanto segue que $\Gamma^{-1}(h_*(z)) = \Gamma^{-1}(\hat{a}) = a$. Concluímos então que $\varphi(z) = a$.

Para a unicidade de φ suponha que $\psi : C(\sigma(a)) \longrightarrow A$ seja um $*$ -homomorfismo unital tal que $\psi(z) = a$. Portanto, φ e ψ coincidem em 1 e z , pelo Lema 2.4.2 φ e ψ também coincidem na C^* -subálgebra $C^*(1, z)$ gerada por $\{1, z\}$. Argumentaremos por Stone-Weierstrass que $C^*(1, z) = C(\sigma(a))$. Note que como $C^*(1, z)$ é da forma $\overline{\{\sum_{n,m \geq 0}^{\text{finito}} \lambda_{n,m} z^n \bar{z}^m \mid \lambda_{n,m} \in \mathbb{N}\}}$ é conveniente definir o seguinte conjunto:

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{n,m \geq 0}^{\text{finito}} \lambda_{n,m} z^n \bar{z}^m, \lambda_{n,m} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Provaremos então que \mathcal{P} é denso em $C(\sigma(a))$ o que nos garantirá o resultado desejado $C^*(1, z) = C(\sigma(a))$. Note primeiramente que \mathcal{P} é $*$ -subálgebra de $C(\sigma(a))$ pois $\{1, z\} \subset C(\sigma(a))$, vamos agora verificar que \mathcal{P} corresponde às hipótese do Teorema 2.3.7 de Stone-Weierstrass.

- Dado $\lambda \in \sigma(a)$, queremos achar uma função $f \in \mathcal{P}$ tal que $f(\lambda) \neq 0$, para tal, note que escolhendo $n = m = 0$ no conjunto $\mathcal{P} = \{\sum_{n,m \geq 0}^{\text{finito}} \lambda_{n,m} z^n \bar{z}^m\}$ temos que os polinômios constantes pertencem a \mathcal{P} basta então escolher um desses polinômios.
- Sejam agora $\lambda, \alpha \in \sigma(a)$ distintos, é suficiente considerar $z \in \mathcal{P}$ para termos $z(\lambda) = \lambda \neq \alpha = z(\alpha)$.

Disso segue pelo Teorema 2.3.7 de Stone-Weierstrass que \mathcal{P} é denso em $C(\sigma(a))$, como $C^*(1, z) = \overline{\mathcal{P}}$, segue que $C^*(1, z) = C^*(\sigma(a))$. \square

Observação 2.4.6. Note que pela prova do teorema anterior, apresentada acima, a função φ é um $*$ -isomorfismo isométrico. A maioria dos materiais que tratam do assunto omitem esse fato, portanto optamos aqui por enunciar o teorema sem fazer essa exposição

Observação 2.4.7. Se A é uma C^* -álgebra unital, notemos que o cálculo funcional contínuo se comporta bem com os polinômios, no sentido de que se $p(z) \in C[z]$ então $\varphi(p_n(z)) = p_n(a)$. De fato

$$\begin{aligned}\varphi(p(z)) &= \varphi(\lambda_0 1_A + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \dots + \lambda_n z^n) \\ &= \lambda_0 \varphi(1_A) + \lambda_1 \varphi(z) + \lambda_2 \varphi(z)^2 + \dots + \lambda_n \varphi(z)^n \\ &= \lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \dots + \lambda_n a^n.\end{aligned}$$

Usamos aqui o fato que φ é um $*$ -homomorfismo unital e $\varphi(z^k) = \varphi(a)^k$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Vamos também introduzir uma versão desse teorema para o caso em que A não é unital, é possível fazer a prova através de passos muito semelhantes aos tomados no teorema anterior, optaremos entretanto, por unitizar e aplicar o teorema anterior. Antes de começar vamos introduzir algumas notações e resultados.

Lema 2.4.8. Se A é uma C^* -álgebra e $a \in A$ é normal, então definimos o conjunto $\mathcal{C}_0(\sigma(a))$ como o conjunto de funções contínuas $f : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$ que levam o zero no zero, isto é:

$$\mathcal{C}_0(\sigma(a)) = \{f \in C(\sigma(a)) : f(0) = 0\},$$

onde convencionamos que, se $0 \notin \sigma(a)$, a condição acima é vazia, e neste caso $\mathcal{C}_0(\sigma(a)) = C(\sigma(a))$.

Então $\mathcal{C}_0(\sigma(a))$ é um ideal de $C(\sigma(a))$, e existe um $*$ -isomorfismo isométrico entre $\mathcal{C}_0(\sigma(a))$ e $C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$, ainda mais: $C_0(\sigma(a) \setminus \{0\}) = C^*(z)$, onde z é a função identidade.

Demonstração. A verificação de que $\mathcal{C}_0(\sigma(a))$ é um ideal de $C(\sigma(a))$ é direta. Notemos que $\sigma(a) \setminus \{0\}$ é um localmente compacto, pois se $0 \in \sigma(a)$ o resultado segue pela Proposição 1.5.16 já se $0 \notin \sigma(a)$ então $\sigma(a) \setminus \{0\} = \sigma(a)$, logo, já é um compacto e portanto um localmente compacto, portanto, faz sentido falar de $C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$.

Vamos exibir um $*$ -isomorfismo isométrico entre $\mathcal{C}_0(\sigma(a))$ e $C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$, defina a função:

$$\varphi : \mathcal{C}_0(\sigma(a)) \rightarrow C_0(\sigma(a) \setminus \{0\}) \quad \text{dado por} \quad f \mapsto \varphi(f) = f|_{\sigma(a) \setminus \{0\}}.$$

Verificaremos que a função acima está bem definida, ou seja, $f|_{\sigma(a)\setminus\{0\}} \in C_0(\sigma(a)\setminus\{0\})$, para isso basta notar que a restrição de uma função contínua é ainda contínua e que dado $\epsilon > 0$ segue que o conjunto

$$\{x \in \sigma(a)\setminus\{0\} : |f|_{\sigma(a)\setminus\{0\}}(x)| \geq \epsilon\} = |f|_{\sigma(a)\setminus\{0\}}^{-1}[\epsilon, \infty),$$

é um compacto, devido a ser a imagem inversa de uma contínua por um fechado, portanto um fechado dentro do compacto $\sigma(a)$.

Para verificar a injetividade de φ , considere $f, g \in \mathcal{C}_0(\sigma(a))$ tal que $\varphi(f) = \varphi(g)$, nesse caso, temos $f|_{\sigma(a)\setminus\{0\}} = g|_{\sigma(a)\setminus\{0\}}$, ou seja, f e g coincidem em $\sigma(a)\setminus\{0\}$. Agora como $f, g \in \mathcal{C}_0(\sigma(a)\setminus\{0\})$ segue que $f(0) = g(0) = 0$ e portanto, f e g coincidem em 0 também.

Para verificar a sobrejetividade tome $f \in C_0(\sigma(a)\setminus\{0\})$, considere o elemento $g \in \mathcal{C}_0(\sigma(a))$ dado por

$$g = \begin{cases} f & x \in \sigma(a)\setminus\{0\} \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Resta argumentar que φ é isométrico, para isso, seja $f \in \mathcal{C}_0(\sigma(a))$, note então que como $f(0) = 0$ o supremo de $|f(x)|$ não é atingido no 0, logo,

$$\|f|_{\sigma(a)\setminus\{0\}}\|_\infty = \sup_{x \in \sigma(a)\setminus\{0\}} |f|_{\sigma(a)\setminus\{0\}}(x)| = \sup_{x \in \sigma(a)} |f(x)| = \|\varphi(f)\|_\infty.$$

Usaremos o Teorema 2.3.7 de Stone-Weierstrass para concluir que $C_0(\sigma(a)\setminus\{0\}) = C^*(z)$. Defina o seguinte conjunto

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{n,m \geq 0, n+m \geq 1}^{\text{finito}} \lambda_{n,m} z^n (z^*)^m : \lambda_{n,m} \in \mathbb{C} \right\},$$

e note que $\overline{\mathcal{P}} = C^*(z)$, resta portanto verificar por Stone-Weierstrass que \mathcal{P} é denso em $C_0(\sigma(a)\setminus\{0\})$. Para isso basta notar que

- i Se $\lambda \in \sigma(a)\setminus\{0\}$ então basta tomar $z \in \mathcal{P}$ e temos $z(\lambda) = \lambda \neq 0$.
- ii Se λ_1 e λ_2 são dois pontos distintos de $\sigma(a)\setminus\{0\}$ então existe $z \in \mathcal{P}$ tal que $z(\lambda_1) = \lambda_1 \neq \lambda_2 = z(\lambda_2)$.

Segue então que $C^*(z) = \overline{\mathcal{P}} = C_0(\sigma(a)\setminus\{0\})$. □

Teorema 2.4.9. Seja A uma C^* -álgebra não unital e a um elemento normal de A , então definindo o conjunto (note que não tem relação com o espaço $C_0(X)$):

$$\mathcal{C}_0(\sigma(a)) = \{f \in C(\sigma(a)) : f(0) = 0\},$$

temos que existe um único $*$ -homomorfismo $\varphi_0 : \mathcal{C}_0(\sigma(a)) \rightarrow A$ tal que $z \mapsto a$ onde z é a função identidade em $\sigma(a)$.

Demonstração. Vamos aplicar o caso unital discutido no Teorema 2.4.5 e aplicar para a “visto” na unitização A^1 , ou seja, $a \rightarrow (a, 0) \in A^1$. O caso unital do cálculo funcional contínuo nos dá portanto um único $*$ -homomorfismo unital $\varphi: C(\sigma(a, 0)) \rightarrow A^1$ tal que $\varphi(z) = (a, 0)$. Agora observe que

$$\sigma(a, 0) = \sigma(a) \cup \{0\} \Rightarrow \sigma(a, 0) \setminus \{0\} = \sigma(a) \setminus \{0\}.$$

Finalmente, “restringindo” φ à $\mathcal{C}_0(\sigma(a)) = \mathcal{C}_0(\sigma(a, 0))$ obteremos um $*$ -homomorfismo:

$$\varphi_0: \mathcal{C}_0(\sigma(a)) \rightarrow A^1 \quad \text{dado por} \quad z \mapsto (a, 0).$$

Como $\mathcal{C}_0(\sigma(a)) = C^*(z)$ temos então que $Im(\varphi_0) = C^*(a) \times \{0\}$, assim podemos “ver” φ_0 como um $*$ -homomorfismo $\varphi_0: \mathcal{C}_0(\sigma(a)) \rightarrow A$.

□

Observação 2.4.10. Note que do exposto na prova do teorema anterior, a função φ_0 obtida pelo cálculo funcional contínuo é também um $*$ -isomorfismo isométrico. Semelhantemente ao feito na Observação 2.4.6, em concordância com a maioria dos materiais nesse assunto, omitimos esse fato.

Observação 2.4.11. Análogo ao discutido na Observação 2.4.11 temos que φ_0 também se comporta bem com os polinômios no sentido que dado $p_n(z) \in C[z]$ temos $\varphi_0(p_n(z)) = p_n(a)$. A prova desse fato é inteiramente análoga ao apresentado na Observação 2.4.7.

Corolário 2.4.12. Se a é um elemento normal de uma C^* -álgebra A , então $r(a) = \|a\|$.

Demonstração. Se $a \in A$ é normal, então usando o cálculo funcional podemos garantir a existência de um $*$ -isomorfismo isométrico $\varphi: C(\sigma(a)) \rightarrow C^*(\{1, a\})$ tal que $\varphi(z) = a$. Estabelecido isso, basta fazer o cálculo abaixo

$$\|a\| = \|\varphi(z)\| = \|z\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = r(a).$$

□

3 Representações de C^* -Álgebras

Historicamente, C^* -álgebras foram inicialmente pensadas como uma subestrutura das álgebras de operadores $B(H)$, apenas com os trabalhos de Gelfand e Naimark foram desenvolvidos os axiomas necessários para chegarmos a Definição 2.1.18. Existe portanto uma ligação entre C^* -álgebras, como foram abstratamente definidas nesse trabalho, e sua contraparte concreta: uma subestrutura de $B(H)$, o objeto matemático responsável por essa correspondência chama-se *representação* e será o protagonista dessa seção.

3.1 Definição e Exemplos

Começaremos essa seção introduzindo a noção de *representação*, talvez o leitor já tenha entrado em contato com um objeto semelhante no contexto de teoria de grupos: uma representação de um grupo G é um homomorfismo $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ onde V é um espaço vetorial, φ for injetora, chamamos de *fiel*. Aqui teremos uma definição muito semelhante, usaremos $B(H)$ no lugar do grupo dos endomorfismos de V inversíveis $GL(V)$.

Definição 3.1.1. Uma *representação* de uma C^* -álgebra A é um par (H, π) em que H é um espaço de Hilbert e $\pi: A \rightarrow B(H)$ é um $*$ -homomorfismo. Dizemos que a representação (H, π) é *fiel* se π for injetiva.

Observação 3.1.2. Aqui optaremos frequentemente por nos referir ao par (π, H) como representação, algumas literaturas se referem somente a função π como representação.

Exemplo 3.1.3. Seja X um conjunto qualquer, considere a C^* -álgebra $l^\infty(X)$ e o espaço de Hilbert

$$l^2(X) = \left\{ \xi: X \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{x \in X} |\xi(x)|^2 < \infty \right\}.$$

Munido do produto interno usual $\langle \xi, \zeta \rangle = \sum_{x \in X} \xi(x) \overline{\zeta(x)}$ e da sua norma induzida $\|\xi\|_2 = \left(\sum_{x \in X} |\xi(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, produziremos uma representação $(l^2(X), M)$, ou seja, exibiremos um $*$ -homomorfismo M entre $l^\infty(X)$ e $B(l^2(X))$.

Defina a função $M: l^\infty(X) \rightarrow B(l^2(X))$ dada por $f \mapsto M_f$ onde $M_f(\xi) = f \cdot \xi$, ou seja, o produto pontual das funções f e ξ . Naturalmente, temos que como $f \in l^\infty(X)$ e $\xi \in l^2(X)$ então $f\xi \in l^2(X)$, isso nos garante a boa definição de M_f . Para ver que M está bem definida, ou seja, $M_f \in B(l^2(X))$, basta notar que se $f \in l^\infty(X)$ então existe $K \geq 0$ tal que $|f| \leq K$, e portanto, dado $\xi \in l^2(X)$:

$$\|M_f(\xi)\|_2 = \|(f\xi)\|_2 = \left(\sum_{x \in X} |(f\xi)(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{x \in X} K|\xi(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = K \left(\sum_{x \in X} |\xi(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = K\|\xi\|_2.$$

Em particular, isto mostra, tomando $K = \|f\|_\infty$, segue que

$$\|M_f\| \leq \|f\|_\infty.$$

Vamos agora mostrar que M é um $*$ -homomorfismo isométrico, assim uma representação fiel. Para ver que M é um homomorfismo basta pegar $f, g \in l^\infty(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e notar que como $l^\infty(X)$ e $l^2(X)$ são espaços vetoriais segue que $M_{f+g}(\xi) = (f+g) \cdot \xi = f \cdot \xi + g \cdot \xi = M_f + M_g$ e $M_{\lambda f}(\xi) = (\lambda f) \cdot \xi = \lambda(f \cdot \xi) = \lambda M_f(\xi)$ para qualquer $\xi \in l^2(X)$. Similarmente, temos $M_{fg} = M_f M_g$. Logo M é um $*$ -homomorfismo.

Para mostrar que M é involutiva, ou seja, preserva adjuntos, vamos mostrar que $M_{\bar{f}}$ é o adjunto de M_f . Para isso, utilizando da unicidade, basta demonstrar que dados quaisquer $\zeta, \eta \in l^2(X)$ verificamos que $\langle M_f(\zeta), \eta \rangle = \langle \zeta, M_{\bar{f}}(\eta) \rangle$, de fato:

$$\langle M_f(\zeta), \eta \rangle = \sum_{x \in X} (f \cdot \zeta)(x) \overline{\eta(x)} = \sum_{x \in X} \overline{(\bar{f} \cdot \zeta)(x) \eta(x)} = \overline{\langle M_{\bar{f}}(\eta), \zeta \rangle} = \langle \eta, M_{\bar{f}}(\zeta) \rangle.$$

Para provar que $\|f\|_\infty \leq \|M_f\| = \sup_{\|\xi\|_2 \leq 1} |f(x)\xi(x)|$ tome $x_0 \in X$ e considere a função $\xi: X \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\xi(x) = 1$ se $x = x_0$ e $\xi(x) = 0$ caso contrário. Temos então que $\|\xi\|_2 = (\sum_{x \in X} |\xi(x)|^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1$ e também $|f(x_0)| \leq (\sum_{x \in X} |f(x)\xi(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$ portanto, segue que $\sup_{x \in X} |f(x)| \leq \sup_{\|\xi\|_2 \leq 1} |f(x)\xi(x)|$, isto é $\|f\|_\infty \leq \|M_f\|$.

Exemplo 3.1.4. Seja agora X um espaço topológico. Então, vendo X como conjunto, obtemos uma representação isométrica de $C_b(X) \subseteq l^\infty(X)$ em $\ell^2(X)$, a saber, a restrição da representação fiel (de fato, isométrica) por operadores de multiplicação do exemplo anterior:

$$M: C_b(X) \rightarrow B(\ell^2(X)), \quad M_f(\xi) = f \cdot \xi.$$

Em particular, obtemos uma representação fiel (isométrica), novamente por restrição:

$$M: C_0(X) \rightarrow B(\ell^2(X)).$$

Exemplo 3.1.5. A C^* -álgebra das matrizes $n \times n$, ou seja, $M_n(\mathbb{C})$ pode ser representada fielmente como operadores sobre o espaço de Hilbert \mathbb{C}^n de dimensão n já que toda matriz $n \times n$ pode ser vista como um operador em \mathbb{C}^n . Obtemos assim uma representação fiel canônica

$$M_n(\mathbb{C}) \rightarrow B(\mathbb{C}^n).$$

Exemplo 3.1.6. Usando a identificação óbvia $B(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, podemos ver todo caracter $\chi: A \rightarrow \mathbb{C}$ de uma C^* -álgebra A como uma representação de A . Uma tal representação é sempre sobrejetiva, mas somente injetiva (ou seja, fiel) se $\dim(A) = 1$.

Observação 3.1.7. A partir de agora apelaremos frequentemente para a seguinte notação: escreveremos simplesmente $\pi(a)\zeta$ quando quisermos nos referir a composição $\pi(a)(\zeta)$.

Proposição 3.1.8 (Somadas diretas de representações). Se I é um conjunto de índices e $(\pi_i, H_i)_{i \in I}$ é uma família de representações de uma C^* -álgebra A , definimos a sua *soma direta*, pelo par (H, π) , dado por

$$H := \bigoplus_{i \in I} H_i = \{ \zeta = (\zeta_i) : \zeta_i \in H_i, \sum_{i \in I} \|\zeta_i\|^2 < \infty \}$$

$$\pi := \bigoplus_{i \in I} \pi_i : A \longrightarrow B(H), \pi(a)(\zeta_i) = (\pi_i(a)\zeta_i).$$

Nesse caso, cada um dos homomorfismos π_i são da forma $\pi_i : A \longrightarrow B(H_i)$ e dados por $a \mapsto \pi_i(a)$, a notação $\pi_i(a)\zeta_i$ significa que estamos aplicando $\zeta_i \in H_i$ em cada homomorfismo $\pi_i(a) : H_i \longrightarrow H_i$, ou seja, $\pi_i(a)\zeta_i = \pi_i(a)(\zeta_i) \in H_i$. Nessas condições, temos que (H, π) é uma representação.

Demonstração. Do fato de que cada H_i é um espaço de Hilbert, é possível provar que $\bigoplus_{i \in I} H_i$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno $\langle \zeta_i, \eta_i \rangle = \sum_{i \in I} \langle \zeta_i, \eta_i \rangle_{H_i}$. Nesse caso, o produto interno está bem definido devido a junção do fato que $\sum_{i \in I} \|\zeta_i\|, \sum_{i \in I} \|\eta_i\| < \infty$ com a desigualdade de Cauchy:

$$\sum_{i \in I} \|\zeta_i\| \cdot \|\eta_i\| \leq \left(\sum_{i \in I} \|\zeta_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i \in I} \|\eta_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Estabelecendo isso, resta provar que $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$ é um $*$ -homomorfismo. Seja $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então, mantendo em mente que cada π_i é homomorfismo:

- $\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b)$. Seja $\zeta_i \in H_i$, então:

$$(\pi(a + b))(\zeta_i) = \pi_i(a + b)(\zeta_i) = \pi_i(a)(\zeta_i) + \pi_i(b)(\zeta_i) = (\pi(a) + \pi(b))(\zeta_i).$$

- $\pi(\lambda a) = \lambda \pi(a)$. Seja $\zeta_i \in H_i$, então:

$$\pi(\lambda a)(\zeta_i) = \pi_i(\lambda a)(\zeta_i) = (\lambda \pi_i(a))(\zeta_i) = \lambda \pi(a)(\zeta_i).$$

- $\pi(a)\pi(b) = \pi(ab)$. Seja $\zeta_i \in H_i$, então:

$$\begin{aligned} (\pi(a)\pi(b))(\zeta_i) &= \pi(a)(\pi(b)(\zeta_i)) = \pi(a)(\pi_i(b)(\zeta_i)) = (\pi_i(a)(\pi_i(b)(\zeta_i))) \\ &= (\pi_i(ab)\zeta_i) \\ &= \pi(ab)(\zeta_i). \end{aligned}$$

□

Iremos construir uma representação fiel que será soma direta de certas representações. Nesse sentido, o seguinte critério nos será eventualmente útil:

A representação $(H, \pi) = (\oplus_{i \in I} H_i, \oplus_{i \in I} \pi_i)$ é fiel se, e somente se, para todo $0 \neq a \in A$, existe $i \in I$ tal que $\pi_i(a) \neq 0$.

De fato, para que π seja fiel ela é injetiva, portanto se $\pi(a) = 0$ segue que $a = 0$, equivalentemente, se $a \neq 0$ segue que existe $i \in I$ tal que $\pi_i(a) \neq 0$.

Uma noção natural de equivalência entre duas representações (H_1, π_1) e (H_2, π_2) de uma C^* -álgebra A é, por definição, implementada por um isomorfismo entre os espaços de Hilbert H_1 e H_2 que “comuta” com as representações. Mais precisamente:

Definição 3.1.9. Duas representações (H_1, π_1) e (H_2, π_2) de uma C^* -álgebra A são ditas serem *unitariamente equivalentes* se existe um mapa unitário $U : H_1 \rightarrow H_2$ tal que:

$$U\pi_1(a)U^* = \pi_2(a) \quad \forall a \in A.$$

Ou ainda, $U\pi_1(a) = \pi_2(a)U$ para qualquer $a \in A$.

Observação 3.1.10. A relação de equivalência unitária entre representações é uma relação de equivalência.

- **Reflexividade.** Para ver que (H_1, π_1) está relacionada a (H_1, π_1) basta reparar que o operador identidade $Id : H_1 \rightarrow H_1$ é unitário
- **Simetria.** Suponha que (H_1, π_1) se relaciona com (H_2, π_2) , ou seja, existe $U : H_1 \rightarrow H_2$ unitário tal que $U\pi_1(a)U^* = \pi_2(a)$ para qualquer $a \in A$. Note que como $U^* = U^{-1}$ então $U = (U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$, isso implica que $U^{-1} : H_2 \rightarrow H_1$ é unitário. Propomos que esse é o operador procurado, de fato:

$$U\pi_1U^* = \pi_2(a) \quad \forall a \in A \quad \Rightarrow \quad U^{-1}\pi_2(a)(U^{-1})^* = \pi_1(a) \quad \forall a \in A.$$

- **Transitividade.** Suponha agora que (H_1, π_1) se relaciona com (H_2, π_2) e (H_2, π_2) se relaciona com (H_3, π_3) , isto é, existe $U : H_1 \rightarrow H_2$ unitário tal que

$$U\pi_1(a)U^* = \pi_2(a) \quad a \in A,$$

e existe $V : H_2 \rightarrow H_3$ unitário tal que

$$V\pi_2(a)V^* = \pi_3(a) \quad a \in A.$$

Proponha o operador $VU : H_1 \rightarrow H_3$. Note que ele é unitário: $(VU)^* = U^*V^* = U^{-1}V^{-1} = (VU)^{-1}$ e dado $a \in A$ temos:

$$\begin{aligned} VU\pi_1(a)(VU)^* &= VU\pi_1(a)U^*V^* \\ &= V\pi_2(a)V^* \\ &= \pi_3(a). \end{aligned}$$

Com isso concluímos que (H_1, π_1) se relaciona a (H_3, π_3) .

Definição 3.1.11. Uma representação (H, π) de uma C^* -álgebra A é dita ser

- *cíclica* quando existe $\zeta \in H$ tal que $\{\pi(a)\zeta : a \in A\}$ é densa em H , isto é

$$\overline{\pi(A)\zeta} = H.$$

Aqui definimos $\pi(A)\zeta$ como $\{\pi(a)\zeta : a \in A\} \subset H$.

- *não-degenerada* se

$$\overline{\text{span}\pi(A)H} = H.$$

Observação 3.1.12. Observe que toda representação cíclica é não degenerada. De fato, seja (π, H) uma representação cíclica e $\zeta \in H$ um vetor cíclico, isto é, $\overline{\pi(A)\zeta} = H$. Nesse caso temos

$$H = \overline{\{\pi(a)\zeta \mid a \in A\}} = \overline{\{\pi(a)\zeta \mid a \in A, \zeta \in H\}} = \overline{\pi(A)H} \subset H.$$

Logo, segue que $\overline{\pi(A)H} = H$ e com isso obtemos $\overline{\text{span}\pi(A)H} = H$.

Definição 3.1.13. Se H for um espaço de Hilbert e K um subespaço fechado de H , dizemos que K é *A-invariante* relativamente a uma C^* -subálgebra A de $B(H)$ se $Tv \in K$ para qualquer $T \in A$ e $v \in K$.

Dizemos que A é *irredutível* sobre H se os únicos subespaços fechados A -invariantes de H forem $\{0\}$ e H .

Definição 3.1.14. Dada uma C^* -álgebra A , dizemos que uma representação (H, π) de A é irredutível se $\varphi(A)$ for uma C^* -subálgebra irredutível sobre H .

3.2 Elementos Positivos de C^* -Álgebras

Nessa seção introduzimos a noção de positividade de um elemento auto-adjunto de uma C^* -álgebra, os principais resultados são os de que para cada elemento positivo existe uma única raiz quadrada e que um elemento da forma a^*a é positivo. O leitor perceberá que muitos, embora não todos, os resultados presentes nessa seção coincidem com a noção de positividade na reta real, bem como nos definem uma relação de ordem e uma noção de norma. Nessa seção usaremos bastante tanto o cálculo funcional contínuo como o teorema do mapeamento espectral 1.4.13.

Definição 3.2.1. Se A é uma C^* -álgebra e $a \in A_{sa}$, então dizemos que a é um *elemento positivo*, ou simplesmente, *positivo*, se $\sigma(a) \subset [0, \infty)$. Se a é um elemento positivo, expressamos esse fato escrevendo $a \geq 0$. Denotamos o conjunto de todos os elementos positivos por A_+ .

Note que exigimos que um elemento positivo seja também auto-adjunto, dessa forma, em virtude do Teorema 2.3.2 o espectro de a é real. Sendo assim, a condição $\sigma(a) \subset [0, \infty)$ apenas nos adiciona que o espectro seja positivo.

A Definição 3.2.1 nos permite definir uma ordem parcial no conjunto A_{sa} , onde A é uma C^* -álgebra. Para isso basta dizer que, para $a, b \in A_{sa}$ $a \leq b$ se $b - a \geq 0$. Trataremos desse fato em discussão posterior.

Observação 3.2.2. Note que $*$ -homomorfismos preservam positividade. Relembramos que o fato φ preservar adjuntos significa que $\varphi(a)$ é auto-adjunto quando a é auto-adjunto. Além disso, se A é uma C^* -álgebra, $a \in A$ for um elemento positivo, e $\varphi : A \rightarrow B$ um $*$ -homomorfismo entre A e uma C^* -subálgebra B , segue que pela Proposição 1.4.27 (podemos unitizar se necessário) o espectro de $\varphi(a)$ estará contido no espectro de a , utilizando isso e a informação anterior, o espectro de $\varphi(a)$ é real, isso nos diz que $\varphi(a) \geq 0$.

Note por exemplo que se A é unital, $1_A \in A_+$, de fato, pela Observação 1.4.3 $\sigma(1_A) = \{1\}$. Posteriormente, veremos que todo elemento da forma a^*a é positivo e observando que $1 = 1^*1$ teremos que 1 é positivo

Exemplo 3.2.3. Considere o corpo dos complexos \mathbb{C} é de se esperar que os elementos positivos de \mathbb{C} são os reais positivos \mathbb{R}^+ , veremos que esse é o caso. Tome um elemento $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \geq 0$, nesse caso, z é auto-adjunto, ou seja, $z = \bar{z}$ e portanto $z \in \mathbb{R}$. Calculando o espectro $\sigma(z)$ devemos selecionar os complexos λ tais que $z - \lambda \notin \text{Inv}(\mathbb{C})$, isto é, $z - \lambda = 0$, temos então que $\sigma(z) = z$, a requisição de que $\sigma(z) \subset [0, \infty)$ nos diz que os elementos positivos de \mathbb{C} são justamente \mathbb{R}^+ .

Exemplo 3.2.4. Seja Ω um espaço compacto Hausdorff e considere a C^* -álgebra $C(\Omega)$. Seja $f \in C(\Omega)_{sa}$, vamos verificar em que condições f será um elemento positivo.

Note que, como desenvolvido no Exemplo 1.4.5, $\sigma(f) = f(\Omega)$, e como f é auto-adjunto segue que $f = \bar{f}$, ou seja, f toma valores reais. Segue portanto que $f \in C(\Omega)_+$ se, e somente se, $f(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \Omega$.

Exemplo 3.2.5. Semelhantemente ao feito no Exemplo 3.2.5, dado um conjunto S qualquer, um elemento $f \in l^\infty(S)$ é positivo no sentido da Definição 3.2.1 se, e somente se, $f(x) \geq 0$ para todos $x \in S$.

De fato, se $f \in l^\infty(S)$ é positivo, então $\sigma(f) \subset [0, \infty)$, como discutido no Exemplo 1.4.6 temos que $\sigma(f)$ é o fecho da imagem de f e portanto $\overline{f(S)} \subset [0, \infty)$, segue portanto que $f(S) \subset [0, \infty)$, isto é, $f(x) \geq 0$ para qualquer $x \in S$. Supondo reciprocamente que $f(x) \geq 0$ para qualquer $x \in S$ temos que $f(S) \subset [0, \infty)$ e pela minimalidade do fecho $\overline{f(S)} \subset [0, \infty)$. Usando mais uma vez o Exemplo 1.4.6 segue que $f \in l^\infty(S)_+$.

Definição 3.2.6. Antes de continuarmos vamos definir uma notação para ajudar na fluidez das demonstrações. Definimos o *comutador* de dois elementos a e b como $[a, b] = ab - ba$ dessa forma, podemos dizer que a e b comutam escrevendo $[a, b] = 0$.

Proposição 3.2.7. Cada elemento positivo numa C^* -álgebra tem uma única raiz quadrada positiva, significando que existe um único $b \in A_+$ tal que $b^2 = a$. Denotamos essa única raiz quadrada de a por \sqrt{a} .

Demonstração. Seja $a \geq 0$ numa C^* -álgebra A . Como $a^* = a$, em particular, a é normal, portanto podemos usar as ferramentas do cálculo funcional contínuo: pelo Teorema 2.4.9 existe um único $*$ -isomorfismo isométrico $\varphi_0 : C_0(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a)$ tal que $\varphi_0(z) = a$.

Como $a \geq 0$ temos que $\sigma(a) \subset [0, \infty)$ e portanto, a função z é positiva, ou seja, $z(\lambda) = \lambda \geq 0$. Segue portanto que existe a função $z^{\frac{1}{2}} : \sigma(a) \rightarrow \sigma(a)$ dada por $z^{\frac{1}{2}}(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}}$, note que $z^{\frac{1}{2}} \in C_0(\sigma(a))$ pois é contínua e $z(0) = 0$.

Defina b como $\varphi_0(z^{\frac{1}{2}}) \in C^*(a) \subset A$, como φ_0 é um $*$ -isomorfismo isométrico temos então que $b \geq 0$. Note também que $b^2 = \varphi_0(z^{\frac{1}{2}})^2 = \varphi_0((z^{\frac{1}{2}})^2) = \varphi_0(z) = a$. Achamos portanto uma raiz quadrada de a , resta verificarmos sua unicidade.

Suponha que $c \geq 0$ em A tal que $c^2 = a$ vamos provar que $c = b$. Como $c^2 = a$, então c comuta com a (pois $ca = c^3$), na notação recém acordada, $[c, a] = 0$ note que isso implica que $[c, b] = 0$. De fato, por definição, $b = \varphi(z^{\frac{1}{2}})$ onde $z \in C(\sigma(a))$ é a função identidade, sabemos por Stone-Weistrass que $C[z] \subset C(\sigma(a))$ é denso, como $z^{\frac{1}{2}} \in C(\sigma(a))$ então da densidade de $C[z]$ existe um polinômio $(p_n(z)) \subset C[z]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) = z^{\frac{1}{2}}.$$

Agora como por definição φ_0 é um $*$ -homomorfismo, segue do Teorema 2.3.1 que φ_0 é contínuo, disso e do fato que $\varphi_0(p_n(z)) = p_n(a)$, (foi discutido na Observação 2.4.11) concluímos que

$$b = \varphi_0(z^{\frac{1}{2}}) = \varphi_0\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(p_n(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(a).$$

Agora já que a multiplicação é contínua (Proposição 1.1.5) e que $[c, a] = 0$ temos que $[c, b] = 0$. De fato, como $[c, a] = 0$ podemos fazer o cálculo

$$p_n(a)c = (\lambda_0 + \lambda_1 a + \dots + \lambda_n a^n)c = c(\lambda_0 + \lambda_1 a + \dots + \lambda_n a^n) = c(p_n(a))c,$$

e então a continuidade da multiplicação garante que

$$cb = c \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (cp_n(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n(a)c) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(a)\right)c = bc$$

Como $[c, b] = 0$ temos que $b \in C^*(a)$ e portanto, $C^*(b, c)$ é comutativa. Segue então pelo Teorema 2.3.8 que para um X localmente compacto Hausdorff, $\Gamma : C^*(b, c) \rightarrow C_0(X)$

é um $*$ -isomorfismo isométrico, em virtude da Observação 3.2.2, tais homomorfismos preservam a positividade, portanto, a cada elemento positivo de $C^*(b, c)$ corresponde um elemento positivo de $C_0(X)$:

$$\begin{aligned} 0 \leq b &\xrightarrow{\Gamma} \Gamma(b) \geq 0, \\ 0 \leq c &\xrightarrow{\Gamma} \Gamma(c) \geq 0, \\ 0 \leq a &\xrightarrow{\Gamma} \Gamma(a) \geq 0. \end{aligned}$$

Agora como $\Gamma(b)^2$ e $\Gamma(c)^2$ são funções positivas iguais a $\Gamma(a)$, logo, pela unicidade da raiz quadrada de funções temos que $\Gamma(b) = \Gamma(c)$ e, portanto, $b = c$. \square

Proposição 3.2.8. Se A é uma C^* -álgebra e $a \in A_{sa}$ então existem elementos positivos a_+ e a_- tal que $a = a_+ - a_-$ e $a_+a_- = a_-a_+ = 0$. Nesse contexto, dado um elemento positivo a , dizemos que a_+ e a_- são suas partes *positiva* e *negativa* respectivamente.

Demonstração. Seja A uma C^* -álgebra e $a \in A_{sa}$, provaremos primeiro para o caso em que $A = C_0(X)$ para um X Hausdorff localmente compacto. Nesse caso, a é igual a uma função $a : X \rightarrow \mathbb{C}$ contínua que se anula no infinito. Defina as funções $a^+, a^- : X \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$a^+(x) = \begin{cases} a(x) & a(x) > 0 \\ 0 & a(x) \leq 0 \end{cases} \quad a^-(x) = \begin{cases} 0 & a(x) > 0 \\ -a(x) & a(x) \leq 0 \end{cases}$$

Note agora que $a = a^+ - a^-$, $a^+a^- \geq 0$, $a^+, a^- \geq 0$ e $a^+, a^- \in C_0(X)$. De fato, as três primeiras afirmações seguem diretamente da definição e a última vem do fato de $C_0(X)$ ser uma álgebra, $|f| \in C_0(X)$ se $f \in C_0(X)$ e das igualdades $a^+ = \frac{a+|a|}{2}$ e $a^- = \frac{|a|-a}{2}$ (obtidas usando que $a = a^+ - a^-$ e $|a| = a^+ + a^-$). Logo, verificamos a propriedade para o caso particular de $A = C_0(X)$.

Para o caso geral, tome $a \in A_{sa}$, lembre que isso torna $C^*(a)$ uma C^* -álgebra comutativa e use o Teorema 2.3.8 para obter o isomorfismo $\Gamma : C^*(a) \rightarrow C_0(X)$ para um X Hausdorff localmente compacto. Como um $*$ -homomorfismo preserva positividade (Observação 3.2.2), note que $\Gamma(a) \in C_0(X)_{sa}$. Lançando mão do já provado anteriormente podemos escrever

$$\Gamma(a) = \Gamma(a)^+ - \Gamma(a)^-, \quad \Gamma(a)^+\Gamma(a)^- = 0$$

Usando agora a transformada inversa, definimos $a_+ := \Gamma^{-1}(\Gamma(a)^+)$ e $a_- := \Gamma^{-1}(\Gamma(a)^-)$. Dessa forma, $a_+, a_- \in A_+$ com $a_+, a_- = 0$ e $a = a_+ - a_-$. \square

Será futuramente útil escrever um elemento positivo como combinação linear de outros, mas especificamente, como combinação de uma quádrupla de elementos positivos. Podemos extrair esse fato como um corolário da proposição anterior.

Corolário 3.2.9. Todo elemento de uma C^* -álgebra A é combinação linear de elementos positivos de A .

Demonstração. Seja A uma C^* -álgebra e $a \in A$. A Proposição 2.1.12 nos permite escrever $a = a_1 + ia_2$ onde $a_1, a_2 \in A_{sa}$, utilizando a Proposição 3.2.8 a_1 e a_2 podem ser expressos, respectivamente, como $(a_1)_+ - (a_1)_-$ e $(a_2)_+ - (a_2)_-$. Com isso, conseguimos escrever a como a seguinte combinação:

$$a = (a_1)_+ - (a_1)_- + i(a_2)_+ - i(a_2)_-.$$

□

Proposição 3.2.10. Todo elemento de uma C^* -álgebra unital A é combinação linear de elementos unitários de A .

Demonstração. Como todo elemento numa C^* -álgebra A é combinação linear de positivos (Corolário 3.2.9), podemos nos restringir ao caso $a \in A_+$. Mais que isso, normalizando se necessário, podemos supor que $\|a\| \leq 1$, de fato, se obtermos uma combinação linear com $\frac{a}{\|a\|}$, basta multiplicar por $\|a\|$ e obtermos uma combinação linear com a .

O caso $a = 0$ é trivial, suponha então que $a \neq 0$. Observe que $\sigma(a) \subset [0, 1]$, de fato, como $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$, $\sigma(a) \subset B_{\|a\|}(0)$ (Proposição 1.4.8) e $\|a\| \leq 1$ temos $\sigma(a) \subset [0, 1]$.

Disso segue que para cada $\lambda \in \sigma(a)$, temos que $0 \leq 1 - \lambda^2 \leq 1$, definiremos as seguintes $g, h \in C(\sigma(a))$ por $g(\lambda) = \lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2}$ e $h(\lambda) = \lambda - i\sqrt{1 - \lambda^2}$. Observe que $g, h \in S_1(0) = \{\lambda \in C : |\lambda| = 1\}$, isso nos garante que $g, h \in U(C[0, 1])$ (unitários da $*$ -álgebra $C[0, 1]$), de fato, basta reparar que $|g| = \bar{g}g = g\bar{g} = 1$ e $|h| = \bar{h}h = h\bar{h} = 1$.

Note agora que, se id é a identidade em $C[0, 1]$, temos que $id = \frac{g+h}{2}$ e denotando a restrição de id para $\sigma(a)$ por z , ainda temos que $z = \frac{g+h}{2}$. Para $a \in A$, pelo cálculo funcional contínuo temos que existe um isomorfismo $\varphi : C(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a)$ tal que $\varphi(z) = a$. Desse modo temos

$$a = \varphi(z) = \varphi\left(\frac{g+h}{2}\right) = \frac{\varphi(g) + \varphi(h)}{2},$$

e como φ é um isomorfismo, ele preserva unitários, segue portanto que podemos, como acima, escrever um positivo como soma de unitários. □

Observemos que a demonstração anterior pode ser adaptada para o caso de $a \in A_{sa}$, de fato, com essa modificação teremos $\sigma(a) \subset [-1, 1]$ e a definição das funções g e h anteriores permanece inalterada. Podemos analogamente argumentar que $a = \frac{u+v}{2}$ para u e v unitários.

Lema 3.2.11. Seja A uma C^* -álgebra unital. Se $a \in A_{sa}$ e $u \geq \|a\|$, então $a \geq 0$ se, e somente se, $\|a - u1_A\| \leq u$.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $a \geq 0$, nesse caso, $a = a^*$ e $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$, mais ainda, pela Proposição 1.4.8 temos que $\sigma(a) \subset [0, \|a\|]$. Usando o cálculo funcional contínuo, temos uma isometria $\varphi : C(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a, 1_A)$ tal que leve z (função identidade) em a .

Desse modo, ao tomar $u \geq \|a\|$ temos que a condição $\|a - u1_A\| \leq u$ é equivalente a $\|z - u1_A\| \leq u$. De fato, como $a = \varphi(z)$ e φ é isometria, temos que $\|a - u1_A\| = \|\varphi(z) - u1_A\| = \|\varphi(z - u1_A)\| = \|z - u1_A\|$.

Como $z - u1_A$ está sendo enxergado dentro de $C(\sigma(a))$, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$\|z - u1_A\| = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |z(\lambda) - u|.$$

De maneira que a desigualdade $\|z - u1_A\| \leq u$ será provada se demonstrarmos $|z(\lambda) - u| \leq u$ para qualquer $\lambda \in \sigma(a)$. Note entretanto que para qualquer escolha de $\lambda \in \sigma(a)$ temos $z(\lambda) = \lambda \in \sigma(a) \leq [0, \|a\|] \subset [0, u]$.

(\Leftarrow) Suponha reciprocamente que para qualquer $a \in A_{sa}$ e $u \geq \|a\|$ temos $\|a - u1_A\| \leq u$, queremos provar que $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$. Como A é unital podemos usar o Teorema 2.4.5 para obter um $*$ -isomorfismo unital e isométrico

$$\varphi : C(\sigma(a)) \rightarrow C^*(1_A, a) \subset A.$$

Note que por conta de φ ser uma isometria e levar z em a podemos reescrever a afirmação $\|a - u1_A\| \leq u$ como $\|z - u1_A\| \leq u$ através do processo a seguir

$$\|z - u1_A\|_{C(\sigma(a))} = \|\varphi(z - u1_A)\|_{C^*(1_A, a)} = \|a - u1_A\| \leq u.$$

Note agora que como em $C(\sigma(a))$ temos a norma do supremo, segue então que $|\lambda - u| \leq \|z - u1_A\| \leq u$ para qualquer $\lambda \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Já da desigualdade $|\lambda - u| \leq u$ obtemos $0 \leq \lambda \leq 2u$ o que nos garante que $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$. Concluimos portanto que $a \geq 0$ □

Notemos que a caracterização acima é coerente com a noção de positividade da reta real. De fato, a distância de um número negativo para um majorante de seu módulo é sempre menor ou igual ao majorante caso o número seja real e maior que esse majorante caso o número seja negativo. Essa observação pode mais facilmente ser observada ao desenhar esses objetos numa reta real.

Em particular, tomando $u = \|a\|$ no lema anterior, teremos que $a \geq 0$ se, e somente se, $\|a - \|a\|1_A\| \leq \|a\|$. Isso será útil nos resultados seguintes.

Proposição 3.2.12. Se A é uma C^* -álgebra, então A_+ é um fechado de A .

Demonstração. Suponha primeiramente que A é unital. Dada uma sequência $(a_n) \subset A_+$ com $a_n \rightarrow a \in A$, então tomando $u = \|a\|$ no Lema 3.2.11 temos que $\|a_n - \|a\|1_A\| \leq \|a_n\|$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando o limite e usando a continuidade das operações e o fato que A_{sa} é fechado (Proposição 2.1.16), obtemos que $\|a - \|a\|1_A\| \leq \|a\|$, e disso temos que $a \in A_+$.

Para o caso em que A não é unital basta considerar a unitização A^1 de A , notar que A é um fechado de A^1 e $A_+ = (A^1)_+ \cap A$. \square

Lema 3.2.13. Seja A uma C^* -álgebra e $a, b \in A_+$. então, $a + b \in A_+$.

Demonstração. Usando a unitização A^1 se necessário, podemos supor que A é unital. Usando $u = \|a\|$ no Lema 3.2.11 temos que $\|a - \|a\|1_A\| \leq \|a\|$ e $\|b - \|b\|1_A\| \leq \|b\|$, desse modo, $\|a + b - (\|a\| + \|b\|)1_A\| \leq \|a - \|a\|1_A\| + \|b - \|b\|1_A\| \leq \|a\| + \|b\|$. Mais uma vez utilizando o Lema 3.2.11, agora com $u = \|a\| + \|b\|$, a desigualdade $\|a + b - (\|a\| + \|b\|)1_A\| \leq \|a\| + \|b\|$ e o fato que $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ nos garantem que $a + b \geq 0$. \square

Proposição 3.2.14. Se A é uma C^* -álgebra, $\lambda \in [0, +\infty)$ e $a \in A_+$, então $\lambda a \in A_+$.

Demonstração. Note que como λ é real, $(\lambda a)^* = \lambda a$, isto é, $\lambda a \in A_{sa}$. Como $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$, usando o polinômio λx no Teorema 1.4.13 temos que $\sigma(\lambda a) = \lambda(\sigma(a))$ e portanto $\sigma(\lambda a) \subset [0, +\infty)$. \square

Lema 3.2.15. Seja A uma C^* -álgebra e $a \in A$. Se $a, -a \geq 0$, então $a = 0$.

Demonstração. Se $a \geq 0$, isso quer dizer que $a \in A_{sa}$ e $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$. Utilizando o polinômio $-x$ no Teorema 1.4.13, segue que $\sigma(-a) = -\sigma(a) \subset (-\infty, 0]$, como por hipótese $-a \geq 0$, temos que $\sigma(-a) \subset (-\infty, 0] \cap [0, +\infty)$. Isso nos conclui que $\sigma(a) = \sigma(-a) = \{0\}$, em particular, $r(a) = 0$ e portanto, lembrando que $a \in A_{sa}$ e a norma de um auto-adjunto é o raio espectral (Teorema 2.1.37), temos que $\|a\| = r(a) = 0$, ou seja, $a = 0$. \square

Se for da preferência do leitor, as três proposições imediatamente anteriores podem, respectivamente, ser escritas como $A_+ + A_+ \subset A_+$, $\mathbb{R}_+ \cdot A_+ \subset A_+$ e $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$.

É um tema recorrente que muitas propriedades dos números positivos na reta real tem sua contraparte análoga com os elementos positivos numa C^* -álgebra. Infelizmente nem todas as propriedades na reta podem ser seguramente transportadas para os elementos positivos.

Exemplo 3.2.16. Se A_+ é uma C^* -álgebra e $a, b \in A_+$ então não se segue que ab é sempre positivo. De fato, basta achar um exemplo onde o produto ab é diferente do seu adjunto $(ab)^*$.

Considere a C^* -álgebra $M_2(\mathbb{C})$ e os seguintes elementos positivos:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de fato, lembrando que a involução $*$ é dada pela conjugada transposta \dagger é direto ver que $a^\dagger = b^\dagger$ e dada que os polinômios característicos de a e b são respectivamente $-\lambda(-\lambda - 1)$ e $\lambda(\lambda - 2)$ tempos que $\sigma(a), \sigma(b) \subset [0, \infty)$, ou seja, $a, b \in M_2(\mathbb{C})_+$. Note agora que

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (ab)^\dagger.$$

Lema 3.2.17. Seja A uma C^* -álgebra e $a \in A$. Se temos que $-a^*a \geq 0$, então $a = 0$.

Demonstração. Seja $a \in A$. Pela Proposição 2.1.12 podemos escrever a como $a = c + id$, onde c e d são respectivamente sua parte real e imaginária. Recorde também que $c, d \in A_{sa}$, e como $\sigma(c)^2, \sigma(d)^2 \subset [0, +\infty)$, segue, usando o polinômio x^2 no Teorema 1.4.13, que $c^2, d^2 \geq 0$. Note agora que:

$$\begin{aligned} a^*a + aa^* &= (c - id)(c + id) + (c + id)(c - id) \\ a^*a + aa^* &= 2c^2 + 2d^2 \\ aa^* &= 2c^2 + 2d^2 - a^*a. \end{aligned}$$

Como pelo Lema 3.2.13 a soma de positivos é ainda positiva, temos que $aa^* \in A_+$. Note que o fato de A ser unital nos permite usar a Proposição 1.4.12 para concluir que $\sigma(a^*a) \setminus \{0\} = \sigma(aa^*) \setminus \{0\}$, lançando mão novamente do Teorema 1.4.13 do mapeamento espectral temos que

$$\sigma(aa^*) \setminus \{0\} = -\sigma(-a^*a) \setminus \{0\}.$$

Dessa igualdade e do fato que $aa^*, -a^*a \in A_+$ concluímos que $\sigma(aa^*) = \{0\}$, de fato, basta notar que $\sigma(a^*a) \subset [0, \infty) \cap (-\infty, 0]$. Disso temos que $r(aa^*) = 0$. Já como $aa^* \in A_{sa}$, o Teorema 2.1.37 e a igualdade C^* nos permitem escrever $\|a\|^2 = \|aa^*\| = r(aa^*) = 0$, ou seja, $a = 0$. \square

Teorema 3.2.18. Sejam A uma C^* -álgebra e $a \in A$. Então $a^*a \in A_+$.

Demonstração. Seja $b = a^*a \in A_{sa}$. Pela Proposição 3.2.8 podemos escrever $b = b_+ - b_-$ em que $b_+, b_- \in A_+$. Objetivaremos agora provar que $b_- = 0$, note que com isso teremos $b = b_+ \geq 0$. Considere $c = ab_-$, então

$$-c^*c = -(ab_-)^*ab_- = -(b_-)^*a^*ab_- = -b_-^*bb_- = -b_-(b_+ - b_-)b_- = -b_-b_+b_- - (b_-)^3 = (b_-)^3,$$

note agora que como $b_- \in A_+$ temos que $(b_-)^3 \in A_{sa}$, de fato, o Teorema 1.4.13 nos garante que $\sigma((b_-)^3) = (\sigma(b_-))^3 \subset \mathbb{R}_+$. Disso tiramos que $-c^*c = (b_-)^3 \geq 0$, logo, pelo lema 3.2.17 concluímos que $c = 0$. Note agora que $(b_-)^3 = c^*c = c^*0 = 0$ e portanto $\sigma((b_-)^3) = (\sigma(b_-))^3 = \sigma(0) = 0$, ou seja, $\sigma(b_-) = 0$. Com isso teremos que $b_- = 0$, de fato, o fato que $\sigma(b_-) = 0$ teremos que $r(b_-) = 0$ e como $b_- \in A_{sa}$ o Teorema 2.1.37 nos garante que $\|b_-\| = r(b_-) = 0$, ou seja, $b = b_+ - b_- = b_+ \in A_+$. \square

Recordemos ao leitor que para qualquer $z \in \mathbb{C}$ temos que sua norma é definida por $|z| = \sqrt{\bar{z}z}$. Os resultados anteriores nos permitem fazer uma definição similar para o caso de uma C^* -álgebra A e um $a \in A$. De fato, considere $a^*a \in A$, temos, pelo Teorema 3.2.18, que $a^*a \geq 0$, já pela Proposição 3.2.7 garantimos a unicidade de sua raiz quadrada, esses resultados nos permitem definir $|a| := \sqrt{a^*a}$. Semelhantemente a essa discussão, retornaremos à questão de definir uma ordem parcial em A_{sa} .

Proposição 3.2.19. Seja A uma C^* -álgebra e $a, b \in A_{sa}$. Diremos que $a \leq b$ se $b - a \in A_+$. A relação \leq é uma ordem parcial em A_{sa} .

Demonstração.

- **Reflexividade.** Como $a - a = 0$, basta ver que $\sigma(0) \subset [0, +\infty)$.
- **Simetria.** Se $a - b \geq 0$, ou seja, $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$, note que pelo Teorema 1.4.13, $\sigma(b - a) = -\sigma(a - b)$ (basta utilizar o polinômio $-x$). Isso implica que $\sigma(a - b), \sigma(b - a) = 0$ e portanto $a = b$.
- **Transitividade.** Suponha agora que $a \leq b$ e $b \leq c$, isto é, $b - a, c - b \in A_+$. Usando o fato que a soma de positivos é ainda positiva (Lema 3.2.13) temos que $b - a + c - b = c - a \geq 0$, isto é, $a \leq c$.

□

Provado que \leq é uma relação de ordem parcial em A_{sa} , listamos algumas propriedades elementares que essa relação satisfaz, como esperado, são análogas a propriedades bem conhecidas. Sejam $a, b, c \in A_{sa}$, então:

- i Se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$;
- ii Se $\lambda \in \mathbb{R}_+$ e $a \leq b$, então $\lambda a \leq \lambda b$;
- iii Se $a \leq b$ então $-b \leq -a$

Aqui o item i) é devido ao Lema 3.2.13, o item ii) já foi enunciado e provado na forma da Proposição 3.2.14 e o item iii) é consequência de escrever $b - a \geq 0$ como $-a - (-b) \geq 0$.

Estamos finalmente em posição de caracterizar os elementos positivos em termos de elementos auto-adjuntos:

Teorema 3.2.20. Seja A uma C^* -álgebra.

$$A_+ = \{a^*a : a \in A\}$$

Demonstração. (⊂). Tome $x \in A_+$, então pela Proposição 3.2.7 existe um elemento $a \in A_+$ tal que $a^2 = x$. Ainda do fato que a é positivo, segue que $a = a^*$, e portanto $x = aa^*$.

(⊃) Já foi provada no Teorema 3.2.18. □

Proposição 3.2.21. Se A é uma C^* -álgebra:

i Se $a, b \in A_{sa}$, $a \leq b$ e $c \in A$ então $c^*ac \leq c^*bc$

ii Se A é unital e $a \in A_{sa}$ então $a \leq \|a\|1_A$

Demonstração.

i Suponha que $a, b \in A_{sa}$, $a \leq b$ e $c \in A$. Como $a \leq b$ segue que $b - a \geq 0$, assim, pelo item i) segue que existe $d \in A$ tal que $b - a = d^*d$. Dessa forma, o cálculo:

$$c^*bc - c^*ac = c^*(b - a)c = c^*d^*dc = (dc)^*dc,$$

nos conclui, ainda pelo item i), que $c^*bc - c^*ac \in A_+$, isto é, $c^*ac \leq c^*bc$.

ii Suponha que A é unital e $a \in A_{sa}$. Como $a \in A_{sa}$, segue, pela Proposição 1.4.8 e o Teorema 2.3.2 temos que $\sigma(a) \subset [-\|a\|, \|a\|]$. Usando o polinômio $-x$ no Teorema 1.4.13 temos que $-\sigma(a) = \sigma(-a)$, disso tiramos que $\sigma(-a) \subset [-\|a\|, \|a\|]$. Como A é unital, observando que a e $\|a\|1_A$ comutam, podemos utilizar repetidamente a Proposição 1.5.12 e o fato que $\sigma(1_A) = 1$ para obter:

$$\begin{aligned} \sigma(\|a\|1_A - a) &\subset \sigma(\|a\|1_A) + \sigma(-a) \\ &= \sigma(\|a\|1_A) - \sigma(a) \\ &= \|a\|\sigma(1_A) - \sigma(a) \\ &= \|a\| - \sigma(a) \\ &\subset \|a\| + [-\|a\|, \|a\|] \\ &= [0, 2\|a\|]. \end{aligned}$$

Desse modo, temos que o espectro de $\|a\|1_A - a \in A_{sa}$ é real, ou seja, $\|a\|1_A - a \in A_+$. □

Corolário 3.2.22. Se A é uma C^* -álgebra unital e $a, b \in A$ então:

$$b^*a^*ab \leq \|a^*a\|b^*b.$$

Demonstração. De fato, como $a^*a \in A_{sa}$ então pelo item ii. da Proposição 3.2.21 temos que $a^*a \leq \|a^*a\|1_A$. Agora usando que $a^*a \leq \|a^*a\|1_A$ e $c = b$ o item i. da mesma proposição temos que

$$b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|1_Ab = \|a^*a\|b^*b.$$

□

Apresentaremos uma primeira aplicação dos elementos positivos, note que juntamente com isso estaremos fazendo uma aplicação do teorema de representação de Gelfand.

Proposição 3.2.23. Seja a um elemento inversível de uma C^* -álgebra A . Nesse caso, a é unitário se, e somente se, $\|a^{-1}\| = \|a\| = 1$.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha primeiramente que a é unitário, então $a^{-1} = a^*$ e portanto:

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &= \|a^*a\| = \|1\| = 1, \\ \|a^{-1}\| &= \|a^*\| = \|a\|. \end{aligned}$$

Disso segue que $\|a\| = \|a^{-1}\| = 1$.

(\Leftarrow) Suponha reciprocamente que $\|a\| = \|a^{-1}\| = 1$ e defina $b = a^*a$. Como $a \in \text{Inv}(A)$, segue que $a^* \in \text{Inv}(A)$ e disso tiramos que b é inversível, note também que $b \in A_{sa}$ e pelos cálculos abaixo

$$1 = 1^2 = \|a\|^2 = \|a^*a\| = \|b\|,$$

$$1 = \|a^{-1}\|^2 = \|(a^{-1})(a^{-1})^*\| = \|(a^*a)^{-1}\| = \|b^{-1}\|,$$

temos que $\|b\| = \|b^{-1}\| = 1$. Considere agora a C^* -subálgebra $C^*(b, b^{-1})$, isto é, a C^* -subálgebra gerada por b e b^{-1} , como $1 = bb^{-1} \in C^*(b, b^{-1})$ e, além disso, b e b^{-1} comutam, segue que $C^*(b, b^{-1})$ é comutativa e unital. Pelo Teorema de Representação de Gelfand, (mais especificamente, pela Observação 2.3.9) temos que $C^*(b, b^{-1})$ é isométricamente $*$ -isomorfa a uma álgebra $C(X)$ para um X compacto. Vamos, via a transformação de Gelfand, representar o elemento $b \in C^*(b, b^{-1})$ como a função:

$$\Gamma(b) : X \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{dada por} \quad x \longmapsto \Gamma(b)(x).$$

Note que como Γ é um homomorfismo unital (no caso um isomorfismo), temos que $b \in \text{Inv}(A)$ implica em $\Gamma(b) \in \text{Inv}(C(X))$, de fato, $(\Gamma(b))^{-1} = \Gamma(b^{-1})$. O fato de Γ ser isométrico nos garante que

$$\|\Gamma(b)\|_\infty = \|b\| = 1 = \|b^{-1}\| = \|\Gamma(b)^{-1}\|_\infty,$$

nesse caso, $\|\Gamma(b)\|_\infty = \sup_{x \in X} \|\Gamma(b)(x)\| = 1$. O Teorema 3.2.18 nos garante que $b = a^*a \geq 0$ e como isomorfismos preservam a positividade segue que $\Gamma(b) = \Gamma(a^*a) \geq 0$ então temos que $|\Gamma(b)(x)| = \Gamma(b)(x)$ para qualquer $x \in X$, assim temos

$$\|\Gamma(b)\|_\infty = \sup_{x \in X} \Gamma(b)(x).$$

Temos então

$$\|\Gamma(b)\|_\infty = \sup_{x \in X} \Gamma(b)(x) = 1 = \sup_{x \in X} \frac{1}{\Gamma(b)(x)} = \|\Gamma(b)^{-1}\|_\infty.$$

Isso nos garante que $\Gamma(b)(x) \leq 1$ e $\Gamma(b)(x) \geq 1$ para qualquer $x \in X$, ou seja, $\Gamma(b)(x) = 1$ para qualquer $x \in X$, ou seja, $\Gamma(b)$ é a função unidade. Ainda por conta de Γ ser um isomorfismo segue que $b = 1$, portanto temos $a^*a = 1$ e disso segue que $a^{-1} = a^*$, isto é, a é unitário. \square

3.3 Funcionais Positivos e Estados

Para uma C^* -álgebra comutativa A , podemos, lançando mão do Teorema 2.3.8 caracterizá-la completamente em termos de seu espaço de caracteres \widehat{A} , nesse sentido, determinamos a estrutura de uma C^* -álgebra comutativa em função de uma representação unidimensional. Para o caso de uma C^* -álgebra não comutativa o Teorema 2.3.8 já não é mais válido, devemos portanto estudar representações de dimensão arbitrária.

Dedicamos este capítulo a introduzir o conceito de funcionais lineares positivos numa C^* -álgebra, as inter-relações destes com as representações serão investigadas na próxima seção.

Fixado um funcional linear positivo τ numa C^* -álgebra A , o usaremos para definir um semi produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em A , bem como uma semi norma induzida $\|\cdot\|_\tau$. Por fim, quocientaremos A pelo núcleo da norma induzida: $N_\tau = \{a \in A : \|a\|_\tau = 0\}$ e definiremos um produto interno no espaço quociente A/N_τ .

Nesse capítulo usaremos frequentemente a hipótese simplificadora de A ser unital, essa hipótese não é necessária mas a utilizaremos para escapar do uso de unidades aproximadas, que não serão tratadas nesse material.

Definição 3.3.1. Dizemos que um mapa linear $\varphi : A \rightarrow B$ entre C^* -álgebras A e B é *positivo* se $\varphi(A_+) \subset B_+$. Noutras palavras, φ é positivo se $a \geq 0$ implicar $\varphi(a) \geq 0$.

Observação 3.3.2. Se A e B são C^* -álgebras e $\varphi : A \rightarrow B$ ser positivo, temos que $\varphi(A_{sa}) \subset B_{sa}$. Mais que isso, φ preserva a ordem nos auto-adjuntos.

- Para a primeira afirmação suponha que φ é uma transformação positiva e $a \in A_{sa}$. Temos pela Proposição 3.2.8 que $a = a_+ - a_-$ com $a_+, a_- \in A_{sa}$, como φ é linear, concluímos que $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in B_{sa}$.

- Provaremos agora que φ positiva preserva a ordem nos auto adjuntos. Sejam $a, b \in A_{sa}$ com $a \leq b$, isto é, $b - a \geq 0$ e como φ é positiva, segue que $\varphi(b - a) \geq 0$. Pela linearidade tiramos que $\varphi(b) - \varphi(a) \geq 0$ e portanto $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Exemplo 3.3.3. Considere a C^* -álgebra $C([0, 1])$ e considere a função $\varphi : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(f) = \int_{[0,1]} f d\mu$ para qualquer $f \in C([0, 1])$ e em que μ é uma medida de Borel sobre $[0, 1]$. Nesse caso, φ é um funcional linear positivo sobre $C(X)$.

Exemplo 3.3.4. Considere a C^* -álgebra $M_n(\mathbb{C})$ e a função traço $tr : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $(a_{ij}) \mapsto tr(a_{ij}) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$, é um funcional linear positivo sobre $M_n(\mathbb{C})$. De fato, caso consideremos uma matriz $(a_{ij}) \geq 0$, por definição o seu espectro é real. Agora como $M_n(\mathbb{C})$ tem dimensão finita, segue que o espectro é o conjunto de autovalores da matriz, isso e o fato do traço da matriz ser a soma de seus autovalores nos garante que $tr(a_{ij}) \geq 0$.

Da maneira com que foi definido, uma função linear positivo não necessita ser limitada. Se estivermos falando de um funcional linear positivo, ou seja, um mapa linear positivo da forma $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ esse será o caso, investigaremos nessa direção. Usaremos o símbolo τ pra nos referir a funcionais lineares positivos de A para \mathbb{C} .

Note que pelo Exemplo 3.2.3 um funcional linear positivo leva elementos positivos em A para números reais positivos.

Exemplo 3.3.5. Seja A uma C^* -álgebra e (H, π) uma representação de A num espaço de Hilbert H . Considere um $\zeta \in H$ qualquer e a função

$$\tau : A \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{dada por} \quad a \mapsto \tau(a) = \langle \pi(a)\zeta, \zeta \rangle,$$

então τ é um funcional linear positivo. De fato, como π é um $*$ -homomorfismo, então pela Observação 3.2.2 sabemos que dado $a \in A$ positivo, segue que $\pi(a)$ é também positivo, disso e do Teorema 3.2.20 concluímos que $\pi(a) = T^*T$ para algum $T \in B(H)$. Dessa forma temos que:

$$\langle \pi(a)\zeta, \zeta \rangle = \langle T^*T\zeta, \zeta \rangle = \langle T\zeta, T\zeta \rangle = \|T\zeta\|^2 \geq 0,$$

logo, $\tau(a) \geq 0$, ou seja, um positivo da C^* -álgebra \mathbb{C} .

Lema 3.3.6. Se τ é um funcional linear positivo numa C^* -álgebra A tal que exista $M > 0$ tal que $|\tau(a)| \leq M$ para qualquer $a \in A_+$ com $\|a\| \leq 1$, então τ é limitado com $\|\tau\| \leq 4M$.

Demonstração. Tome $a \in A$ com $\|a\| \leq 1$. Como visto na prova do Corolário 3.2.9 podemos escrever a como

$$a = (a_1)_+ - (a_1)_- + i(a_2)_+ - i(a_2)_-.$$

Note que cada um dos membros da soma $(a_1)_+ - (a_1)_- + i(a_2)_+ - i(a_2)_-$ tem norma menor ou igual a 1. Por exemplo, $a_1 = (a + a^*)/2$ tem norma $\|a_1\| \leq 1$, e daí também $(a_1)_+ = f(a_1)$, com $f(x) := (x + |x|)/2$, tem $\|(a_1)_+\| \leq \|f\|_{C(\sigma(a_1))} \leq \|a_1\| \leq 1$. Dessa forma, utilizando a hipótese obteremos a desigualdade:

$$|\tau(a)| = |\tau((a_1)_+) - \tau((a_1)_-) + i\tau((a_2)_+) - i\tau((a_2)_-)| \leq 4M.$$

Agora tomando o supremo sobre $a \in A$ com norma $\|a\| \leq 1$ obtemos:

$$\|\tau\| = \sup_{\|a\| \leq 1} |\tau(a)| \leq 4M.$$

□

Teorema 3.3.7. Se $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear positivo, então τ é limitado.

Demonstração. Suponha para obter contradição que τ não é limitado, nesse caso, não existe um $M > 0$ como no Lema 3.3.6, nesse sentido, considere o conjunto $S := \{a \in A_+ : \|a\| \leq 1\}$, $|\tau(a)|$ não é limitada para $a \in S$ e portanto existe uma sequência $(a_n) \subset S$ tal que $\tau(a_n) > 2^n \forall n \in \mathbb{N}$. Definimos o elemento

$$a := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k},$$

Note que a está bem definido, isso é devido ao fato de A ser Banach e a desigualdade $\sum_{k=1}^{\infty} \|\frac{a_k}{2^k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ nos garantir que a converge absolutamente. Note também que pelo Lema 3.2.13 e Proposição 3.2.14 o elemento $\sum_{k=1}^l \frac{a_k}{2^k}$ pertence a A_+ . Agora do fato que $a = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^l \frac{a_k}{2^k}$ e da Proposição 3.2.12 nos garantir que A_+ é fechado, temos que $a \in A_+$. Do fato que $\tau(a_k) > 2^k$ temos que $\tau(\frac{a_k}{2^k}) > 1$, portanto, dado $n \in \mathbb{N}$ temos

$$n = 1+1+\dots+1 = \tau\left(\frac{a_1}{2}\right) + \tau\left(\frac{a_2}{2^2}\right) + \dots + \tau\left(\frac{a_n}{2^n}\right) = \tau\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}\right) \leq \sup_{l \in \mathbb{N}} \tau\left(\sum_{k=1}^l \frac{a_k}{2^k}\right) = \tau(a).$$

De fato, a sequência $\left(\sum_{k=1}^l \frac{a_k}{2^k}\right)_l$ é crescente, no sentido da relação “ \leq ” em A_{sa} e como τ preserva a ordem (Observação 3.3.2) temos que $\tau\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}\right) \leq \tau(a)$. Naturalmente, essa conclusão é absurda devido aos naturais serem ilimitados. Segue portanto que τ é limitado. □

Veremos que os funcionais positivos codificam muito da informação de uma C^* -álgebra, um dos principais resultados desse trabalho será devido a construção de uma representação fiel de uma C^* -álgebra qualquer “dentro” de uma álgebra de operadores.

Neste trabalho entenderemos uma *forma sesquilinear* em A mudando um pouco o sentido usual, significando que é uma aplicação $\langle | \rangle : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ linear no segundo fator e conjugado linear no primeiro fator.

Definição 3.3.8. Dada uma C^* -álgebra A e um funcional linear positivo $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$. A função

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_\tau : A \times A \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{dada por } (a, b) \mapsto \langle a | b \rangle_\tau = \tau(a^*b),$$

define uma forma sesquilinear em A . O fato de $\langle \cdot | \cdot \rangle_\tau$ ser linear na segunda coordenada segue do fato que τ é um mapa linear, semelhantemente vemos que é sesquilinear na primeira entrada.

A aplicação $\langle \cdot | \cdot \rangle_\tau$ pode ser vista como “positiva” no sentido que se $a \in A$ é qualquer, então $a^*a \geq 0$ (Teorema 3.2.18) e portanto, como τ preserva positividade (Observação 3.3.2), temos que $\tau(a^*a) \geq 0$. Em particular, segue que $\tau(a^*a) \in \mathbb{R}$.

Pelas observações feitas no parágrafo anterior e na Definição 3.3.8, temos que $\langle \cdot | \cdot \rangle_\tau$ é linear na primeira entrada, $\langle a | a \rangle_\tau \geq 0$ para todo $a \in A$. Observando agora que $\langle a | b \rangle_\tau = \tau(a^*b) = \overline{\tau(b^*a)} = \overline{\langle b | a \rangle_\tau}$ concluímos que $\langle \cdot | \cdot \rangle_\tau$ é um semi-produto interno sobre A .

A discussão anterior nos permite definir a semi-norma $\|a\|_\tau = \sqrt{\langle a | a \rangle_\tau}$ e nesse sentido, ao reparar que a demonstração da *desigualdade de Cauchy-Schwartz* pode ser, sem perda, repetida para semi-normas, podemos demonstrar:

$$|\langle a | b \rangle_\tau| \leq \|a\|_\tau \cdot \|b\|_\tau \quad \forall a, b \in A.$$

Ou ainda:

$$|\tau(a^*b)|^2 \leq \tau(a^*a) \cdot \tau(b^*b) \quad \forall a, b \in A.$$

Nos dedicaremos em breve a provar a desigualdade acima, antes disso, devemos provar uma proposição auxiliar. Funcionais lineares positivos tomando da forma $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ levam auto-adjuntos em reais e preservam adjuntas.

Proposição 3.3.9. Seja A uma C^* -álgebra unital. Dado $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear positivo e $a \in A_{sa}$, temos $\tau(a) \in \mathbb{R}$. Como consequência, $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$ para todo $a \in A$.

Demonstração. Para a primeira asserção tome $a \in A_{sa}$. Como τ é um funcional linear temos que

$$\tau((a + 1_A)^*(a + 1_A)) = \tau(a^*a) + 2\tau(a) + \tau(1_A^*1_A).$$

Lembrando que em virtude de τ ser um funcional linear positivo, para qualquer $x \in A$ temos que $\tau(x^*x) \in \mathbb{R}$, podemos, ao passar $\tau(a^*a)$ e $\tau(1_A^*1_A)$ para o lado esquerdo da equação acima, observar que $\tau(a)$ pode ser escrito como combinação de números reais, isto é, $\tau(a)$ é real. Para a segunda afirmação tome um $a \in A$ qualquer. Pela Proposição 2.1.12 existem $a_1, a_2 \in A_{sa}$ tais que $a = a_1 + ia_2$, dessa forma, $\tau(a^*) = \tau(a_1 - ia_2)$, agora note que, do fato de $\tau(a_1), \tau(a_2) \in \mathbb{R}$:

$$\tau(a_1) - ia_2 = \tau(a_1) - i\tau(a_2) = \overline{\tau(a_1) + i\tau(a_2)} = \overline{\tau(a_1 + ia_2)} = \overline{\tau(a)}.$$

□

Proposição 3.3.10. Se $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear positivo numa C^* -álgebra unital A , então vale a Desigualdade de Cauchy Schwarz:

$$|\tau(a^*b)|^2 \leq \tau(a^*a) \cdot \tau(b^*b) \quad \forall a, b \in A.$$

Demonstração. Se $|\tau(a^*b)| = 0$ então a desigualdade segue do fato de $a^*a, b^*b \geq 0$ e τ preservar a ordem. Suponha portanto que $|\tau(a^*b)| \neq 0$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$ podemos definir:

$$\alpha_x = \frac{x\tau(b^*a)}{|\tau(b^*a)|}.$$

Note que pela Proposição 3.3.9 temos que $\alpha_x = \frac{x\overline{\tau(a^*b)}}{|\tau(a^*b)|}$. Considere agora o elemento $a + \alpha_x b \in A$, utilizando o fato de $(a + \alpha_x b)^*(a + \alpha_x b) \geq 0$ e τ preservar adjuntos e as igualdades:

$$\begin{aligned} \alpha_x \tau(a^*b) &= \frac{x\overline{\tau(a^*b)}}{|\tau(a^*b)|} \tau(a^*b) = \frac{x|\tau(a^*b)|^2}{|\tau(a^*b)|} = x|\tau(a^*b)| \\ \overline{\alpha_x} \tau(b^*a) &= \frac{x\overline{\tau(b^*a)}}{|\tau(b^*a)|} \tau(b^*a) = \frac{x|\tau(b^*a)|^2}{|\tau(b^*a)|} = x|\tau(b^*a)|, \end{aligned}$$

temos então que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tau((a + \alpha_x b)^*(a + \alpha_x b)) \\ &= \tau((a^* + \overline{\alpha_x} b^*)(a + \alpha_x b)) \\ &= \tau(a^*a + \alpha_x a^*b + \overline{\alpha_x} b^*a + |\alpha_x|^2 b^*b) \\ &= \tau(a^*a) + \alpha_x \tau(a^*b) + \overline{\alpha_x} \tau(b^*a) + x^2 \tau(b^*b) \\ &= \tau(a^*a) + x|\tau(a^*b)| + x|\tau(b^*a)| + x^2 \tau(b^*b) \\ &= \tau(a^*a) + 2x|\tau(a^*b)| + x^2 \tau(b^*b). \end{aligned}$$

Podemos agora definir $A = \tau(b^*b)$, $B = 2\tau(a^*b)$ e $C = \tau(a^*a)$ e assim obtendo:

$$Ax^2 + Bx + C \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Note agora que a equação acima expressa uma parábola inteiramente acima dos eixo das abcissas ou com um ponto de intersecção e portanto o seu determinante Δ deve ser maior ou igual a zero, ou seja, $\Delta = B^2 - 4AC \leq 0$. Renomeando A, B e C desigualdade anterior nos diz que $4|\tau(a^*b)|^2 \leq 4\tau(a^*a)\tau(b^*b)$ e portanto segue:

$$|\tau(a^*b)|^2 \leq \tau(a^*a) \cdot \tau(b^*b) \quad \forall a, b \in A.$$

□

Semelhantemente ao que ocorre no caso usual, uma primeira consequência da Desigualdade de Cauchy é a continuidade do seu produto interno associado.

Proposição 3.3.11. Se A é uma C^* -álgebra unital e $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear positivo então o semi-produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle_\tau$ é contínuo.

Demonstração. Trata-se apenas de usar de demonstração usual: veremos que $|\langle a|b \rangle_\tau - \langle a_n|b_n \rangle_\tau|$ tende a zero ao adicionar e subtrair o termo $\langle a_n|b \rangle_\tau$ e usar a desigualdade de Cauchy-Schwartz. Suponha que $(a_n) \subset A$, $(b_n) \subset A$ e $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$

$$\begin{aligned} |\langle a|b \rangle_\tau - \langle a_n|b_n \rangle_\tau| &= |\langle a|b \rangle_\tau - \langle a_n|b \rangle_\tau + \langle a_n|b \rangle_\tau - \langle a_n|b_n \rangle_\tau| \\ &= |\langle a - a_n|b \rangle_\tau| + |\langle a_n|b_n - b \rangle_\tau| \\ &= \|a_n\|_\tau \cdot \|b - b_n\|_\tau + \|a - a_n\|_\tau \cdot \|b\|_\tau. \end{aligned}$$

Como $\|a - a_n\|_\tau \rightarrow 0$ e $\|b - b_n\|_\tau \rightarrow 0$ segue que $\langle a_n|b_n \rangle_\tau \rightarrow \langle a|b \rangle_\tau$. \square

Provaremos agora uma caracterização de positividade para um funcional $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ numa álgebra unital, antes disso entretanto, provaremos um lema auxiliar.

Lema 3.3.12. Seja A uma C^* -álgebra unital. Se $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear limitado com $\|\tau\| = \tau(1_A)$, então $\tau(a) \in \mathbb{R}$ para todo $a \in A_{sa}$.

Demonstração. Como mostrar que $\tau(a) \in \mathbb{R}$ é equivalente a mostrar que a sua normalização $\frac{\tau(a)}{\|a\|}$ pertence aos reais, então podemos supor que $\|\tau\| = 1$. Similarmente, o seguinte fato: $\tau(a) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \tau(a/\|a\|) \in \mathbb{R}$ nos permite supor que $\|a\| \leq 1$.

Podemos escrever $\tau(a) = \alpha + i\beta$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são suas partes real e imaginária respectivamente, provaremos que $\beta = 0$. Como mostrar que $\tau(a) \in \mathbb{R}$ é o mesmo que mostrar que $\tau(-a) \in \mathbb{R}$ segue que podemos supor $\beta \leq 0$. Agora observe que o fato de a ser auto adjunto nos garante que $\|a\|^2 = \|aa\| = \|a^2\|$ e portanto, para $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned} \|a - in1_A\|^2 &= \|(a - in1_A)^*(a - in1_A)\| \\ &= \|a^*a - ina^* + ina - n^2\| \\ &= \|a^2 - n^2\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 \\ &\leq 1 + n^2 \end{aligned}$$

Disso e do fato que $\|\tau\| = 1$ segue que:

$$|\tau(a - in1_A)|^2 \leq \|a - in1_A\|^2 \leq 1 + n^2$$

Por outro lado, ainda usando que $\|\tau\| = 1$ e da hipótese que $\|\tau\| = \tau(1_A)$ temos:

$$\tau(a - in1_A) = \tau(a) - in\tau(1_A) = \tau(a) - in = \alpha + i\beta - in = \alpha + i(\beta - n).$$

Obtemos portanto a desigualdade $|\alpha + i(\beta - n)|^2 \leq 1 + n^2$, calculando o módulo temos $\alpha^2 + (\beta - n)^2 \leq 1 + n^2$, abrindo essas contas conseguimos:

$$\alpha^2 - \beta^2 - 2\beta n \leq 1.$$

Isso é, entretanto, um absurdo, como $\beta \leq 0$, caso assumirmos que $\beta < 0$ teremos $-2\beta n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, dessa forma, basta passar o limite $n \rightarrow \infty$ na desigualdade acima para obtermos um absurdo.

Concluimos portanto que $\beta = 0$, ou seja, $\tau(a) = \alpha + i\beta = \alpha \in \mathbb{R}$ para qualquer $a \in A_{sa}$. \square

Teorema 3.3.13. Seja A uma C^* -álgebra com unidade 1_A . Seja $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear limitado. Então τ é positivo se, e somente se, $\|\tau\| = \tau(1_A)$.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha primeiramente que τ é um funcional linear positivo. Considere $a \in A$ tal que $a \geq 0$, nesse caso, pela Proposição 1.4.10 temos que $\sigma(a) \subset [-\|a\|, \|a\|]$. Mantendo esse fato em mente e utilizando o polinômio $x - \|a\|$ no Teorema 1.4.13 temos que:

$$\begin{aligned} \sigma(-a + \|a\|1_A) &= -\sigma(a) + \|a\| \\ &\subset [-\|a\|, \|a\|] + \|a\| \\ &= [0, 2\|a\|]. \end{aligned}$$

Disso concluímos que $-a + \|a\|1_A \geq 0$ e pela Observação 3.3.2 se extrai que $\tau(-a + \|a\|1_A) \geq 0$. Portanto, por linearidade, $\tau(-a + \|a\|1_A) = -\tau(a) + \tau(\|a\|1_A) \geq 0$, e $\tau(a) \leq \tau(\|a\|1_A) = \|a\|\tau(1_A)$, assim, $\tau(a) \leq \|a\|\tau(1_A)$ para qualquer $a \in A_+$. Agora considere $x \in A$ qualquer, usaremos a desigualdade de Cauchy e o fato de x^*x ser positivo (Teorema 3.2.18) para fazer os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} |\tau(x)|^2 &= |\tau(x1_A)|^2 \leq \tau(x^*x)\tau(1_A^*1_A) \\ &= \tau(1_A)\tau(x^*x) \\ &\leq \tau(1_A)\tau(1_A)\|x^*x\| \\ &= \tau(1_A)^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Temos então que $|\tau(x)|^2 \leq \tau(1_A)^2\|x\|^2$, notando que o fato de 1_A ser positivo implica que $\tau(1_A) \geq 0$ podemos concluir que $|\tau(x)| \leq \tau(1_A)\|x\|$. Do fato de τ ser um funcional complexo, tiramos pelo Teorema 3.3.7 que τ é limitado, portanto, pela desigualdade que acabamos de demonstrar segue que $|\tau| \leq \tau(1_A)$. Ainda nesse sentido, $\tau(1_A) \leq \|1_A\| = \|\tau\|$, concluimos então que $\|\tau\| = \tau(1_A)$.

(\Leftarrow) Suponha agora que $\|\tau\| = \tau(1_A)$. Seja $a \in A_{sa}$, queremos concluir que $\tau(a) \geq 0$, como provar esse fato é equivalente a provar a asserção análoga usando o a normalizado:

$\tau(\frac{a}{\|a\|}) \geq 0$, podemos portanto supor, sem perda de generalidade, que $\|a\| \leq 1$. Utilizando o Lema 3.2.11 obtemos que o fato de a ser positivo é equivalente a $\|1 - a\| \leq 1$ (note que utilizamos a majoração $\|a\| \leq 1$). Como $1 - a$ é auto adjunto, o Lema 3.3.12 nos garante que $\tau(1 - a)$ é real, disso e da hipótese $\|\tau\| = \tau(1_A)$ temos:

$$\tau(1 - a) \leq |\tau(1 - a)| \leq \|1 - a\| \leq 1.$$

Obtemos portanto o resultado desejado pois $1 - \tau(a) = \tau(1 - a) \leq 1$ implica que $\tau(a) \geq 0$. \square

Corolário 3.3.14. Se τ, τ' são funcionais lineares positivos numa C^* -álgebra unital A , então temos o seguinte: $\|\tau + \tau'\| = \|\tau\| + \|\tau'\|$.

Demonstração. De fato, a soma de funcionais lineares é um funcional linear e usando o Teorema 3.3.13 a positividade de τ e τ' são equivalentes a $\|\tau\| = \tau(1_A)$ e $\|\tau'\| = \tau'(1_A)$. Além disso, basta notar que

$$\|\tau\| + \|\tau'\| = \tau(1_A) + \tau'(1_A) = (\tau + \tau')(1_A) = \|\tau + \tau'\|,$$

e a demonstração segue pelo mesmo teorema. \square

Definição 3.3.15. Dizemos que um *estado* numa C^* -álgebra A é um funcional linear positivo em A que é de norma 1. Denotamos o conjunto de todos os estados de A por $S(A)$. Naturalmente, em vista do Teorema 3.3.13, no caso de A ser unital podemos dizer que τ é um estado se, e somente se, $\tau(1_A) = 1 = \|\tau\|$.

Exemplo 3.3.16. Seja A uma C^* -álgebra e (π, H) uma representação, a função τ definida como no Exemplo 3.3.5 é um estado no caso de $\pi(1) = id$ e $\|\zeta\| = 1$.

Proposição 3.3.17 (Desigualdade de Kadison). Seja A uma C^* -álgebra e $\tau \in S(A)$. Então

$$|\tau(a)|^2 \leq \tau(a^*a) \quad \forall a \in A.$$

Demonstração. Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz temos:

$$|\tau(b^*a)|^2 \leq \tau(b^*b)\tau(a^*a) \quad \forall a, b \in A.$$

Aplicando-a para $b \in A$ tal que $\|b\| \leq 1$, temos $|\tau(b^*a)|^2 \leq \tau(a^*a)$ para qualquer $a, b \in A$ e $\|b\| \leq 1$. De fato, como pelo Teorema 3.2.18 $b^*b \geq 0$ segue pela Observação 3.3.2 que $\tau(b^*b) \geq 0$, disso temos que $\tau(b^*b) = |\tau(b^*b)|$. Agora usando o Teorema 3.3.7 temos que τ é limitado, usando agora que $\tau \in S(A)$ obtemos:

$$|\tau(b^*b)| \leq \|\tau\| \cdot \|b^*b\| \leq \|\tau\| \cdot \|b\| \cdot \|b^*\| \leq \|\tau\| \cdot 1 = 1.$$

Logo

$$|\tau(b^*a)|^2 \leq \tau(b^*b)\tau(a^*a) \leq \tau(a^*a). \tag{3.1}$$

Então a desigualdade desejada segue por Cauchy-Schwartz. A fim de continuar a demonstração, nos dedicaremos agora a provar um resultado auxiliar:

Lema 3.3.18. Seja A uma C^* -álgebra e $a \in A$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (aa^*)^{\frac{1}{n}} a = a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a (a^*a)^{\frac{1}{n}} = a.$$

Demonstração. Usando o fato que $a^*a \in A$ é um elemento normal e o Teorema 2.4.9, obtemos para cada $n \in \mathbb{N}$ uma função “raiz n -ésima” $f_n \in \mathcal{C}_0(\sigma(a^*a))$ definida por $f_n(t) = t^{\frac{1}{n}}$, isto é, a função que leva um elemento $t \in \sigma(a^*a)$ no elemento $f_n(t)$ ao qual, vale $f_n(t)^n = t$. Usando o cálculo funcional contínuo, temos $(a^*a)^{\frac{1}{n}} := f_n(a^*a) \in A$. Provaremos o seguinte fato: Para isso, vamos demonstrar que $\|a - (aa^*)^{\frac{1}{n}} a\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, aplicando a igualdade C^* obtemos:

$$\begin{aligned} \|a - (aa^*)^{\frac{1}{n}} a\|^2 &= \|(a - (aa^*)^{\frac{1}{n}} a)(a - (aa^*)^{\frac{1}{n}} a)^*\| \\ &= \|aa^* - aa^*(aa^*)^{\frac{1}{n}} - (aa^*)^{\frac{1}{n}} aa^* + (aa^*)^{\frac{1}{n}} aa^*(aa^*)^{\frac{1}{n}}\|. \end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos, renomearemos aa^* para x :

$$\begin{aligned} \|x - xx^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}} x + x^{\frac{1}{n}} xx^{\frac{1}{n}}\| &\leq \|x - xx^{\frac{1}{n}}\| + \|x^{\frac{1}{n}} x - x^{\frac{1}{n}} xx^{\frac{1}{n}}\| \\ &\leq \|x - xx^{\frac{1}{n}}\| + \|x^{\frac{1}{n}}\| \cdot \|x - xx^{\frac{1}{n}}\|. \end{aligned}$$

Basta então que argumentemos que $x^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ sempre que $n \rightarrow \infty$. Como exposto na Observação 2.4.10, a função f_n obtida do cálculo funcional é um $*$ -isomorfismo isométrico, ou seja, os espaços $\mathcal{C}_0(\sigma(x))$ e $C^*(x)$ são isomorfismos como C^* -álgebras. Nesse sentido, para cada n fixado temos $g_n(x) = x = xx^{\frac{1}{n}} \in C^*(x)$, onde g_n é uma função dada por $g_n(t) := t - t \cdot t^{\frac{1}{n}} = t - t^{1+\frac{1}{n}}$. O máximo desta função no intervalo $[0, 1] \supseteq \sigma(a)$ é atingido em $t_n := (1 + \frac{1}{n})^{-n}$ (note que $t_n \rightarrow e^{-1} < 1$). Temos então que

$$\|x - xx^{\frac{1}{n}}\| = \|g_n\| = \sup_{t \in \sigma(x)} |g_n(t)| \leq g_n(t_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}\right) \rightarrow 0.$$

Isto demonstra o primeiro limite do enunciado. O segundo é análogo, e também segue do primeiro trocando a por a^* . \square

Agora, para terminar a demonstração da desigualdade de Kadison, basta substituir em (3.1) $b_n = b_n^* = (aa^*)^{\frac{1}{n}}$, obtendo

$$|\tau(b_n a)|^2 \leq \tau(a^* a).$$

Tomando o limite em $n \rightarrow \infty$ e usando o lema anterior, concluímos a demonstração:

$$|\tau(a)|^2 \leq \tau(a^* a).$$

\square

Teorema 3.3.19. Se a é um elemento normal de uma C^* -álgebra unital A , então existe um estado τ de A tal que $|\tau(a)| = \|a\|$.

Demonstração. Considere A uma C^* -álgebra unital e $a \in A$ um elemento normal, nesse caso, $C^*(1, a)$ é uma subálgebra comutativa. Pelo Teorema 2.3.8 existe um $*$ -isomorfismo isométrico $\Gamma : C^*(1, a) \rightarrow \widehat{C^*(1, a)}$ e então $\|a\| = \|\Gamma(a)\| = \|\widehat{a}\| = \sup_{\varphi \in \widehat{C^*(1, a)}} |\widehat{a}(\varphi)|$. Como $C^*(1, a)$ é unital, segue que $\widehat{C^*(1, a)}$ é compacto e portanto existe um $\varphi \in \widehat{C^*(1, a)}$ tal que $\|a\| = |\varphi(a)|$.

Usando o Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.4.20) temos que para o subespaço $C^*(1, a) \subset A$ e o funcional $\varphi : C^*(1, a) \rightarrow \mathbb{C}$, existe um funcional $\tau \in A^*$ que estende φ e $\|\tau\| = \|\varphi\| = 1$. Como φ é um caractere numa álgebra de Banach unital, então como explicitado na Observação 1.5.5 temos $\varphi(1) = 1$, como τ é uma extensão de φ e tem a mesma norma então:

$$\tau(1) = \varphi(1) = \|\varphi\| = \|\tau\|.$$

Dessa forma, $\tau \in S(A)$, e como τ estende φ temos $|\tau(a)| = |\varphi(a)| = \|a\|$. □

Proposição 3.3.20. Seja τ um funcional linear positivo sobre A . Então

- i Para cada $a \in A$, $\tau(a^*a) = 0$ se, e somente se $\tau(ba) = 0$ para qualquer $b \in A$;
- ii Para cada $a \in A$, $\tau(a^*a) = 0$ se, e somente se $\tau(ab) = 0$ para qualquer $b \in A$;
- iii Se A é unital, então qualquer $a, b \in A$ temos $\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\tau(b^*b)$.

Demonstração.

- i (\Rightarrow) Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e o fato da operação $*$ nos garantir uma bijeção de A em A temos

$$|\tau(ba)|^2 = |\tau((b^*)^*a)|^2 \leq \tau(a^*a)\tau((b^*)^*b^*) = 0.$$

Portanto segue que $\tau(ba) = 0$ para qualquer $b \in A$.

(\Leftarrow) Se $\tau(ba) = 0$ para qualquer $b \in A$ basta pegar o caso $b = a^*$.

- ii Basta repetir o argumento dado no item i), mas dessa vez trocando a por b e usando a desigualdade de Cauchy da seguinte forma:

$$|\tau(ab)|^2 = |\tau((a^*)^*b)|^2 \leq \tau(b^*b)\tau((a^*)^*a^*) = 0$$

- iii Note que o Corolário 3.2.22 nos garante que $b^*a^*ab \leq \|a\|^2b^*b$ e usando o fato de τ preservar a positividade temos

$$b^*a^*ab \leq \|a\|^2b^*b \quad \Rightarrow \quad \tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\tau(b^*b).$$

□

Fixado um funcional linear positivo $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ e definindo o conjunto N_τ a seguir, note que a proposição anterior nos permite verificar as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} N_\tau &:= \{a \in A : \|a\|_\tau = 0\} = \{a \in A : \tau(a^*a) = 0\} \\ &= \{a \in A : \tau(ca) = 0 \forall c \in A\} \\ &= \{a \in A : \tau(b^*a) = 0 \forall b \in A\} \\ &= \{a \in A : \langle b|a \rangle_\tau = 0 \forall b \in A\}. \end{aligned}$$

Escrevendo N_τ dessa maneira teremos mais facilidade para provar a proposição seguinte.

Proposição 3.3.21. Seja $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear positivo, o conjunto N_τ definido anteriormente é um ideal à esquerda fechado de A .

Demonstração. Sejam $x, y \in N_\tau$, $c, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então os cálculos:

$$\tau(b^*(x+y)) = \tau(b^*x + b^*y) = \tau(b^*x) + \tau(b^*y) = 0 + 0 = 0$$

$$\tau(b^*\lambda x) = \tau(\lambda b^*x) = \lambda \tau(b^*x) = \lambda 0 = 0$$

$$\tau(c(ax)) = \tau((ca)x) = 0,$$

provam que N_τ é um ideal à esquerda. Estabelecido isso, provaremos que N_τ é fechado, seja $(x_n) \subset N_\tau$ tal que $x_n \rightarrow x$, veremos que $x \in N_\tau$. Mas como é bem conhecido que o produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ é contínuo, se $x - x_n \rightarrow 0$ temos

$$\langle b|x_n \rangle_\tau - \langle b|x \rangle_\tau = \langle b|x - x_n \rangle_\tau \rightarrow \langle b|0 \rangle_\tau = 0.$$

Portanto, para n suficientemente grande, temos $\langle b|x_n \rangle_\tau = \langle b|x \rangle_\tau$, ou seja, $\langle b|x \rangle_\tau = 0$. □

Baseando-se no semi-produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle_\tau$ e no ideal N_τ podemos definir um produto interno relacionado ao tomar o espaço quociente A/N_τ . Para isso, defina a relação de equivalência $a \sim b$ se $a - b \in N_\tau$, ou seja, $\langle c|a \rangle_\tau = \langle c|b \rangle_\tau$ para todo $c \in A$. Note que é de fato uma relação de equivalência, a simetria e reflexividade são imediatas para a transitividade basta supor $a \sim b$ e $b \sim c$ e tomar $d \in A$ qualquer para obter:

$$\langle d|c - a \rangle_\tau = \langle d|c - b + b - a \rangle_\tau = \langle d|c - b \rangle_\tau + \langle d|b - a \rangle_\tau = 0 + 0 = 0$$

Proposição 3.3.22. Seja A uma C^* -álgebra unital, $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear positivo e $N_\tau = \{a \in A : \langle b|a \rangle_\tau = 0 \forall b \in A\}$ então a função:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \frac{A}{N_\tau} \times \frac{A}{N_\tau} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{dado por} \quad (a + N_\tau, b + N_\tau) \mapsto \langle a + N_\tau, b + N_\tau \rangle := \tau(a^*b)$$

está bem definida e é um produto interno sobre o espaço vetorial A/N_τ .

Demonstração. Provaremos a boa definição da operação apresentada e depois argumentaremos que é de fato um produto interno:

- **Boa definição.** Sejam $(a_1 + N_\tau, b_1 + N_\tau) = (a_2 + N_\tau, b_2 + N_\tau)$, então $a_1 - a_2 \in N_\tau$ e $b_1 - b_2 \in N_\tau$, dessas afirmações segue, usando os itens i) e ii) da Proposição 3.3.20 e o discutido na caracterização de N_τ

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 \in N_\tau &\Rightarrow \tau((a_1 - a_2)c) = 0 \quad \forall c \in A, \\ b_1 - b_2 \in N_\tau &\Rightarrow \tau(c(b_1 - b_2)) = 0 \quad \forall c \in A. \end{aligned}$$

Desejamos obter a igualdade $\tau(a_1^*b_1) = \tau(a_2^*b_2)$, vamos escrever uma condição equivalente, note que a igualdade desejada é o mesmo que $\tau(a_1^*b_1 - a_2^*b_2) = 0$, podemos então escrever

$$0 = \tau(a_1^*b_1 - a_2^*b_2) = \tau(a_1^*b_1 - a_2^*b_1 + a_2^*b_1 - a_2^*b_2) = \tau((a_1 - a_2)^*b_1) + \tau(a_2^*(b_1 - b_2)).$$

Nessa forma, para provar a proposição basta tomar $c = a_2^*$ em $\tau(c(b_1 - b_2)) = 0$ para qualquer $c \in A$ e, ao notar que $a_1 - a_2 \in N_\tau$ implica em $(a_1 - a_2)^* \in N_\tau$ (basta lembrar que $*$ é isometria), resta tomar $c = b_1$ em $\tau((a_1 - a_2)c) = 0$ para qualquer $c \in A$. Segue então a boa definição do produto interno.

- **Produto interno:** À exceção da propriedade $\langle a + N_\tau | a + N_\tau \rangle = 0 \Leftrightarrow a + N_\tau = 0 \quad \forall a + N_\tau \in A/N_\tau$, todas as outras propriedades de produto interno derivam automaticamente do fato de $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ser um semiproduto interno.

Nesse sentido, seja $a + N_\tau \in A/N_\tau$ tal que $\langle a + N_\tau | a + N_\tau \rangle = 0$, ou seja, $\tau(a^*a) = 0$. A Desigualdade de Cauchy Schwartz nos permite concluir que:

$$|\tau(a^*b)|^2 \leq \tau(a^*a) \cdot \tau(b^*b) \quad \forall a, b \in A \quad \Rightarrow \quad \tau(a^*b) = 0 \quad \forall b \in A.$$

□

3.4 Construção GNS

Nessa seção apresentaremos um dos principais resultados da teoria de álgebras de operadores: a construção GNS, referida desse modo em homenagem aos matemáticos Israel Gelfand, Mark Naimark e Irving segal.

Embora na teoria geral de álgebras de operadores a construção GNS tenha um papel protagonista, para os objetivos desse trabalho ela será utilizada como um lema técnico objetivando a prova do teorema de Gelfand-Naimark.

É importante explicitar que aqui será feita a hipótese simplificadora da C^* -álgebra A ser unital, essa hipótese **não** é necessária e o teorema vale também no caso não unital.

Fizemos essa abordagem aqui para evitar o uso de unidades aproximadas e facilitar a prova.

Definição 3.4.1. Fixados os espaços vetoriais V e W , denotaremos o espaço de todas as transformações lineares de V para W por $\mathcal{L}(V, W)$. No caso de $V = W$ denotamos $\mathcal{L}(V)$.

Teorema 3.4.2. Seja X um espaço com produto interno. Nesse caso existe um espaço de Hilbert H tal que X é isomorfo a um subespaço denso de H . Também temos que o espaço H é único a menos de isomorfismos.

Teorema 3.4.3. Seja X um espaço vetorial normado e $T : X \rightarrow X$ uma transformação linear. Se T for uma transformação linear limitada, isto é, existe $c > 0$ tal que $\|Tx\| \leq c\|x\|$ para qualquer $x \in X$, e seja Y o complemento de X como espaço de Banach, então existe uma única extensão:

$$T_Y : Y \rightarrow Y$$

tal que $\|T_Y\| \leq c$.

Teorema 3.4.4 (Construção GNS). Seja A uma C^* -álgebra unital. Dado um funcional linear positivo $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ então existe uma tripla $(\pi_\tau, H_\tau, \zeta_\tau)$ tal que:

- H_τ é um espaço de Hilbert;
- $\pi_\tau : A \rightarrow B(H_\tau)$ é uma representação;
- $\zeta_\tau \in H_\tau$ é um vetor cíclico tal que

$$\|\zeta_\tau\|^2 = \|\tau\| \quad \text{e} \quad \tau(a) = \langle \zeta_\tau, \pi_\tau(a)\zeta_\tau \rangle.$$

Demonstração. Para facilitar a exposição, dividiremos a prova em algumas etapas:

- i Considere o espaço $H_\tau^\circ := A/N_\tau$ munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ da Proposição 3.3.22. Use o Teorema 3.4.2 para considerar H_τ o complemento de H_τ° como espaço de Hilbert. Considere também a norma $\|\cdot\|_\tau$ induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Defina

$$\begin{aligned} \pi_\tau^\circ : A &\longrightarrow \mathcal{L}(H_\tau^\circ) \\ a &\longmapsto \pi_\tau^\circ(a), \end{aligned}$$

onde

$$\pi_\tau^\circ(a) : H_\tau^\circ \longrightarrow H_\tau^\circ \quad \text{é dada por} \quad \zeta + N_\tau \longmapsto \pi_\tau^\circ(a)(\zeta + N_\tau) := a\zeta + N_\tau.$$

Faremos as seguintes observações:

- Fixado um $a \in A$, $\pi_\tau^\circ(a)$ está bem definido. De fato, sejam $\zeta_1 + N_\tau = \zeta_2 + N_\tau$, isto é, $\zeta_1 - \zeta_2 \in N_\tau$, a Proposição 3.3.21 nos garante que N_τ é um ideal à esquerda e portanto, $a(\zeta_1 - \zeta_2) = a\zeta_1 - a\zeta_2 \in N_\tau$, equivalentemente, $\pi_\tau^\circ(a)(\zeta_1) = \pi_\tau^\circ(a)(\zeta_2)$.
- π_τ° é um homomorfismo de álgebras. De fato, sejam $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos então:

$$\begin{aligned} (\pi_\tau^\circ(a)\pi_\tau^\circ(b))(\zeta + N_\tau) &= \pi_\tau^\circ(a)(\pi_\tau^\circ(b)(\zeta + N_\tau)) \\ &= \pi_\tau^\circ(a)(b\zeta + N_\tau) \\ &= ab\zeta + N_\tau \\ &= \pi_\tau^\circ(ab)(\zeta + N_\tau) \quad \forall \zeta + N_\tau \in H_\tau^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\pi_\tau^\circ(a) + \pi_\tau^\circ(b))(\zeta + N_\tau) &= \pi_\tau^\circ(a)(\zeta + N_\tau) + \pi_\tau^\circ(b)(\zeta + N_\tau) \\ &= a\zeta + N_\tau + b\zeta + N_\tau \\ &= a\zeta + b\zeta + N_\tau \\ &= (a + b)\zeta + N_\tau \\ &= \pi_\tau^\circ(a + b)(\zeta + N_\tau) \quad \forall \zeta + N_\tau \in H_\tau^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\pi_\tau^\circ(\lambda a))(\zeta + N_\tau) &= \lambda a\zeta + N_\tau \\ &= \lambda(a\zeta + N_\tau) \\ &= \pi_\tau^\circ(a)(\zeta + N_\tau) \quad \forall \zeta + N_\tau \in H_\tau^\circ \end{aligned}$$

- Fixado $a \in A$ temos: $\langle \pi_\tau^\circ(a)(\zeta + N_\tau), \eta + N_\tau \rangle = \langle \zeta + N_\tau, \pi_\tau^\circ(a^*)(\eta + N_\tau) \rangle$ para quais quer $\eta + N_\tau, \zeta + N_\tau \in H_\tau^\circ$. De fato:

$$\langle \pi_\tau^\circ(a)(\zeta + N_\tau), \eta + N_\tau \rangle = \langle a\zeta + N_\tau, \eta + N_\tau \rangle = \tau((a\zeta + N_\tau)^*(\eta + N_\tau)) = \tau(\zeta^* a^* \eta + N_\tau).$$

$$\langle \zeta + N_\tau, \pi_\tau^\circ(a^*)(\eta + N_\tau) \rangle = \langle \zeta + N_\tau, a^* \eta + N_\tau \rangle = \tau((\zeta + N_\tau)^*(a^* \eta + N_\tau)) = \tau(\zeta^* a^* \eta + N_\tau).$$

Concluimos então que $\pi_\tau^\circ : A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\tau^\circ)$ é um $*$ -homomorfismo bem definido.

- ii Seja $a \in A$ fixado, nos dedicaremos agora a “estender” $\pi_\tau^\circ(a)$ à um operador limitado no espaço de Hilbert H_τ de modo da obter a função $\pi_\tau : A \longrightarrow B(H_\tau)$. Para isso, tome $\zeta + N_\tau \in H_\tau^\circ$ e, recordando do item ii. na Proposição 3.3.20, note que:

$$\begin{aligned} \|\pi_\tau^\circ(a)(\zeta + N_\tau)\|^2 &= \langle a\zeta + N_\tau, a\zeta + N_\tau \rangle \\ &= \tau((a\zeta)^*(a\zeta)) \\ &= \tau(\zeta^* a^* a \zeta) \\ &\leq \|a\|^2 \tau(\zeta^* \zeta) \\ &= \|a\|^2 \langle \zeta + N_\tau, \zeta + N_\tau \rangle \\ &= \|a\|^2 \cdot \|\zeta + N_\tau\|^2. \end{aligned}$$

O cálculo precedente nos garante portanto que $\|\pi_\tau^\circ(a)(\zeta + N_\tau)\| \leq \|a\| \cdot \|\zeta + N_\tau\|$ para qualquer escolha $\zeta + N_\tau \in H_\tau^\circ$. Usando agora o Teorema 3.4.3 sabemos que existe uma extensão $\pi_\tau(a) \in B(H_\tau)$ de $\pi_\tau^\circ(a)$ com $\|\pi_\tau(a)\| \leq \|a\|$. Note que π_τ e π_τ° são contínuos. Garantimos então a boa definição da função

$$\pi_\tau : A \longrightarrow B(H_\tau) \quad \text{dada por} \quad a \longmapsto \pi_\tau(a),$$

concluiremos agora que o par (H_τ, π_τ) é uma representação. Para verificar que π_τ é um $*$ -homomorfismo, sejam $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tome também $x \in H_\tau = \overline{\frac{A}{N_\tau}}$, nesse caso, existe uma sequência $(\zeta_n + N_\tau) \subset H_\tau^\circ$ tal que $\zeta_n \longrightarrow x$. Note que o fato de π_τ° ser um $*$ -homomorfismo, bem como a continuidade das operações envolvidas e de π_τ e π_τ° , além do fato que π_τ estende π_τ° nos permitem verificar as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \pi_\tau(a + b)(x) &= \pi_\tau(a + b)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\zeta_n + N_\tau)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\tau(a + b)(\zeta_n + N_\tau) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\tau^\circ(a + b)(\zeta_n + N_\tau) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\tau^\circ(a)(\zeta_n + N_\tau) + \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\tau^\circ(b)(\zeta_n + N_\tau) \\ &= \pi_\tau(a)(x) + \pi_\tau(b)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_\tau(\lambda a)(x) &= \pi_\tau(\lambda a)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\zeta_n + N_\tau)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\tau(\lambda a)(\zeta_n + N_\tau) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\tau^\circ(\lambda a)(\zeta_n + N_\tau) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \pi_\tau^\circ(a)(\zeta_n + N_\tau) \\ &= \lambda \pi_\tau^\circ(a)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\zeta_n + N_\tau)\right) \\ &= \lambda \pi_\tau(a)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_\tau(ab)(x) &= \pi_\tau(ab)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\zeta_n + N_\tau)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\tau(ab)(\zeta_n + N_\tau) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\tau^\circ(ab)(\zeta_n + N_\tau) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi_\tau^\circ(a)(\zeta_n + N_\tau) \pi_\tau^\circ(b)(\zeta_n + N_\tau)) \\ &= \pi_\tau^\circ(a)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n + N_\tau\right) \pi_\tau^\circ(b)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n + N_\tau\right) \\ &= \pi_\tau(a)(x) \pi_\tau(b)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \pi_\tau(a^*)(x) &= \pi_\tau(a^*)(\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n + N_\tau) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\tau(a^*)(\zeta_n + N_\tau) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\tau^\circ(a^*)(\zeta_n + N_\tau) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi_\tau^\circ(a)(\zeta_n + N_\tau))^* \\
 &= (\pi_\tau^\circ(a)(\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n + N - \tau))^* \\
 &= (\pi_\tau(a)(x))^*.
 \end{aligned}$$

Segue então que π_τ é um $*$ -homomorfismo, como por definição o completamento H_τ é um espaço de Hilbert, segue que (H_τ, π_τ) é uma representação.

- iii Defina agora o vetor $\zeta_\tau := 1_A + N_\tau \in H_\tau^\circ \subset H_\tau$, mostraremos que ζ_τ é um vetor cíclico. Note que $\pi_\tau(a)\zeta_\tau = a1_A + N_\tau = a + N_\tau$, dessa forma o conjunto $\pi_\tau(A)\zeta_\tau := \{\pi_\tau(a)\zeta_\tau : a \in A\}$ é igual a H_τ° . Por construção de H_τ , o completamento como espaço de Hilbert de H_τ° temos que $\pi_\tau(A)\zeta_\tau$ é denso em H_τ . Portanto ζ_τ é cíclico.
- iv Provaremos as duas igualdades referentes ao vetor cíclico ζ_τ . Por hipótese, a álgebra A é unital e τ é um funcional linear positivo, o Teorema 3.3.13 nos permite portanto escrever $\|\tau\| = \tau(1_A)$. Concluimos portanto:

$$\begin{aligned}
 \|\zeta_\tau\|^2 &= \langle \zeta_\tau, \zeta_\tau \rangle \\
 &= \langle 1_A + N_\tau, 1_A + N_\tau \rangle \\
 &= \tau(1_A^* 1_A) \\
 &= \tau(1_A) \\
 &= \|\tau\|.
 \end{aligned}$$

Temos também:

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta_\tau, \pi_\tau(a)\zeta_\tau \rangle &= \langle 1_A + N_\tau, a + N_\tau \rangle \\
 &= \tau(1_A^* a) \\
 &= \tau(a)
 \end{aligned}$$

□

Observação 3.4.5. Dado um funcional linear positivo $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$, chamamos a função $\pi_\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ do Teorema 3.4.4 de *representação GNS associada*, ou ainda, *representação GNS*.

3.5 Teorema de Gelfand - Naimark

Nessa seção nos dedicaremos inteiramente a provar o resultado principal desse trabalho. Obteremos aqui o que é chamado de caracterização concreta de uma C^* -álgebra

A qualquer significando que, em oposição a sua caracterização abstrata vista na Definição 2.1.18, A será vista como uma C^* -subálgebra de uma álgebra de operadores, isto é, um $B(H)$ onde H é um espaço de Hilbert.

Lema 3.5.1. Seja I um conjunto de índices, $\{H_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços de Hilbert, $\{\pi_i\}_{i \in I}$ uma família de $*$ -homomorfismos da forma $\pi_i : A \rightarrow B(H_i)$ e definindo:

$$H = \bigoplus_{i \in I} H_i \quad \text{e} \quad \pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i : A \rightarrow B(H).$$

Então temos que $\|\pi(a)\| = \sup_{i \in I} \|\pi_i(a)\|$.

Demonstração. Sabemos que $\pi(a)(\zeta_i) = (\pi(a)\zeta_i)_{i \in I}$, e que a norma de $\pi(a)$ é dada por $\|\pi(a)\| = \sup_{\|\zeta_i\| \leq 1} \|\pi(a)(\zeta_i)\|$ onde a norma de $(\zeta_i)_{i \in I}$ é a norma no espaço de Hilbert $\bigoplus_{i \in I} H_i$, ou seja, $\|(\zeta_i)_{i \in I}\| = (\sum_{i \in I} \|\zeta_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Denotaremos $\sup_{i \in I} \|\pi_i(a)\| = M$, note agora que pelo fato de $\pi(a)(\zeta_i) = (\pi(a)\zeta_i)_{i \in I}$ ser um elemento de $\bigoplus_{i \in I} H_i$ e um operador limitado e assumindo que $\|\zeta_i\| \leq 1$ temos

$$\left(\sum_{i \in I} \|\pi_i(a)\zeta_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i \in I} \|\pi_i(a)\|^2 \cdot \|\zeta_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i \in I} M^2 \|\zeta_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = M \left(\sum_{i \in I} \|\zeta_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M.$$

O cálculo acima nos garante que $\|\pi(a)\| = \sup_{\|\zeta_i\| \leq 1} \|\pi(a)(\zeta_i)\| \leq M$, resta provar que $M \leq \|\pi(a)\|$. Para isso, basta ver que $\|\pi_{i_0}(a)\| \leq \|\pi(a)\|$ para i_0 fixo. Se $\zeta_{i_0} \in H_{i_0}$ e $\|\zeta_{i_0}\| \leq 1$ considere $\zeta = (\zeta_i)$ onde

$$\begin{cases} \zeta_i = \zeta_{i_0}, & i = i_0 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Então teremos $\|\pi_{i_0}(a)\zeta_{i_0}\| = \|\pi(a)\zeta\|$ de fato, pela definição de ζ_i temos

$$\|\pi(a)\zeta\| = \left(\sum_{i \in I} \|\pi_i(a)\zeta_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\pi_{i_0}(a)\zeta_{i_0}\|.$$

Similarmente temos $\|\zeta\| = \|\zeta_{i_0}\|$ e portanto, supondo $\|\zeta\| \leq 1$ temos

$$\|\pi(a)\zeta\| = \|\pi_{i_0}(a)\zeta_{i_0}\| \leq \|\pi(a)\| \cdot \|\zeta_{i_0}\| \leq \|\pi(a)\|.$$

Segue portanto que $\|\pi(a)\| = M = \sup_{i \in I} \|\pi_i(a)\|$. □

Teorema 3.5.2 (Teorema de Gelfand-Naimark). Seja A uma C^* -álgebra, então existe uma representação fiel (isométrica)

$$\pi : A \rightarrow B(H)$$

de A sobre um espaço de Hilbert H . Então co-restringindo o contra domínio $B(H)$ para a imagem de π achamos um $*$ -isomorfismo isométrico de A para uma C^* -subálgebra $\pi(A)$ de $B(H)$.

Demonstração. Como a unitização A^1 de A é C^* -álgebra e a inclusão canônica $A \rightarrow A^1$ é um $*$ -homomorfismo isométrico, substituindo A por sua unitização, podemos supor sem perda de generalidade que A é unital. De fato, como exibido no diagrama abaixo:

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota} \\ \xrightarrow{\pi = \pi^1 \circ \iota} \\ \end{array} A^1 \xrightarrow{\pi^1} B(H)$$

Basta então provarmos que existe um $*$ -homomorfismo isométrico π^1 entre A^1 e $B(H)$ e então usar a inclusão $\iota : A \rightarrow A^1$ para obter o novo $*$ -homomorfismo isométrico $\pi^1 : A \rightarrow B(H)$.

Assumimos então que A é uma C^* -álgebra unital. Dado um estado $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ consideremos a representação GNS associada

$$\pi_\tau : A \rightarrow B(H_\tau),$$

com vetor cíclico $\zeta_\tau \in H_\tau$. Como a soma direta de espaços de Hilbert é ainda um espaço de Hilbert e pela Proposição 3.1.8 a soma direta de representações é ainda uma representação, podemos considerar a representação :

$$\bigoplus_{\tau \in S(A)} \pi_\tau \rightarrow B\left(\bigoplus_{\tau \in S(A)} H_\tau\right).$$

Chamando $\pi = \bigoplus_{\tau \in S(A)} \pi_\tau$ e $H = \bigoplus_{\tau \in S(A)} H_\tau$ provaremos que (H, π) é a representação procurada, isto é, falta provar que π é uma isometria. Pelo teorema 2.3.1 temos automaticamente que $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$, devemos demonstrar a desigualdade contrária. Usando o Lema 3.5.1, objetivamos obter:

$$\sup_{i \in I} \|\pi_i(a)\| \geq \|a\|.$$

Para isso, basta mostrar que dada $a \in A$, existe $\tau \in S(A)$ tal que $\|\pi_\tau(a)\| \geq \|a\|$, da construção GNS (Teorema 3.4.4) temos $\tau(a) = \langle \zeta_\tau, \pi_\tau(a)\zeta_\tau \rangle$. Note agora que como por hipótese $\tau \in S(A)$ e pelo GNS: $\|\zeta_\tau\|^2 = \|\tau\|^2 = 1$, temos então:

$$\tau(a^*a) = \langle \zeta_\tau, \pi_\tau(a^*a)\zeta_\tau \rangle = \langle \zeta_\tau, \pi_\tau(a)^* \pi_\tau(a)\zeta_\tau \rangle = \langle \pi_\tau(a)\zeta_\tau, \pi_\tau(a)\zeta_\tau \rangle = \|\pi_\tau(a)\|^2 \leq \|a\|^2.$$

Como A é uma C^* -álgebra unital, aplicando o Teorema 3.3.19 no elemento normal a^*a temos que existe $\tau \in S(A)$ tal que $\tau(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$, logo:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \tau(a^*a) \leq \|\pi_\tau(a)\|^2.$$

Disso segue que $\|a\| \leq \|\pi_\tau(a)\|$, de fato, $\|\pi(a)\| = \sup_{i \in I} \|\pi_i(a)\| \geq \|\pi_\tau(a)\| \geq \|a\|$, dessa forma π é uma isometria e portanto achamos uma representação isométrica, e portanto fiel. \square

O teorema anterior é uma caracterização de uma C^* -álgebra qualquer, usualmente, é útil ter em mente a seguinte consequência do Teorema de Gelfand-Naimark:

Corolário 3.5.3. Toda C^* -álgebra é isometricamente $*$ -isomorfa à uma C^* -álgebra concreta de operadores num espaço de Hilbert.

A Apêndice

O processo de unitização de uma C^* -álgebra pode ser feito por meio de outros métodos, no que será exposto aqui objetivamos ainda associar a cada C^* -álgebra A uma outra C^* -álgebra -dessa vez unital- que contenha A como ideal, dessa maneira pensando que A está contida nessa nova álgebra unital. Entretanto o modo escolhido para criar essa C^* -álgebra unital, denotada aqui por $M(A)$, é um pouco mais surpreendente em relação ao caminho enveredado na seção 2.1 desse material.

Enfatizamos aqui que a utilidade da álgebra $M(A)$ está longe de ser exaurida pelos propósitos desse apêndice.

Definição A.0.1. Definimos um *duplo centralizador* de uma C^* -álgebra A como uma par ordenado (L, R) de mapas lineares limitados de A em A tal que

$$L(ab) = L(a)b, \quad R(ab) = aR(b) \quad R(a)b = aL(b).$$

Denotamos o conjunto de duplos centralizadores de uma álgebra A por $M(A)$.

Note que fixando um $c \in A$ e definindo os seguintes operadores lineares limitados: $L_c, R_c : A \rightarrow A$ definidos por $L_c(a) = ca$ e $R_c(a) = ac$ temos que eles obedecem as condições da Definição A.0.1 e portando (L_c, R_c) é um duplo centralizador.

Agora vamos checar que as normas de L_c e R_c como operadores são ambas iguais a norma de c como vetor

Proposição A.0.2. Fixando um c numa C^* -álgebra A teremos que $\|L_c\| = \|R_c\| = \|c\|$.

Demonstração. Vamos provar que $\|L_c\| = \|c\|$ a igualdade $\|R_c\| = \|c\|$ segue analogamente

Para provar $\|L_c\| \leq \|c\|$ usaremos o fato de que L_c é limitada. Tome $a \in A$ temos então que $\|L_c(a)\| \leq \|c\| \cdot \|a\|$ e então obtemos que $\|L_c\| \leq \|c\|$.

Resta verificar que $\|c\| \leq \|L_c\|$ basta mostrarmos que $\|c\| \in \{\|cb\| : \|b\| \leq 1\}$. Tome $b = \frac{c^*}{\|c\|}$, então $\|b\| = 1$ e usando a igualdade C^* temos que $\|cb\| = \frac{\|cc^*\|}{\|c\|} = \frac{\|c\|^2}{\|c\|} = \|c\|$. Segue portanto que $\|c\| \leq \|L_c\|$.

Procedendo analogamente para R_c obtemos que $\|L_c\| = \|R_c\| = \|c\|$. □

Vamos agora definir uma norma para o espaço $M(A)$ do seguinte modo $\|\cdot\| : M(A) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\|(L, R)\| = \|L\| = \|R\|$. Para fortalecer nossa preferência por essa opção provaremos o seguinte lema.

Lema A.0.3. Se (L, R) é um duplo centralizador de uma C^* -álgebra A , então $\|L\| = \|R\|$.

Demonstração. Seja (L, R) um duplo centralizador de uma C^* -álgebra A e $ab \in A$. Usando a igualdade C^* teremos que $\|L(b)\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|aL(b)\|$. De fato, para $\|L(b)\| \leq \sup_{\|a\| \leq 1} \|aL(b)\|$ basta tomar $a = \frac{L(b)^*}{\|L(b)\|}$ então $\|a\| = 1$ e $\|aL(b)\| = \frac{\|L(b)^*L(b)\|}{\|L(b)\|} = \|L(b)\|$, disso segue que $\|L(b)\| \in \{\|aL(b)\| : \|a\| \leq 1\}$ e portanto $\|L(b)\| \leq \sup_{\|a\| \leq 1} \|aL(b)\|$. Para a outra desigualdade provaremos que $\|aL(b)\|$ é cota superior do conjunto $\{\|aL(b)\| : \|a\| \leq 1\}$, para isso suponha $\|a\| \leq 1$, disso temos que $\|aL(b)\| \leq \|a\| \cdot \|L(b)\| \leq \|L(b)\|$.

Por definição temos que $\|aL(b)\| = \|R(a)b\| \leq \|Ra\| \cdot \|b\| \leq \|R\| \cdot \|a\| \cdot \|b\|$. Podemos então fazer o seguinte cálculo:

$$\|L(b)\| \leq \sup_{\|a\| \leq 1} \|aL(b)\| \leq \|R\| \cdot \|b\|,$$

garantimos então que $\|L\| \leq \|R\|$.

Basta proceder analogamente para a outra desigualdade. Temos que $\|R(a)b\| = \|aL(b)\| \leq \|L\| \cdot \|a\| \cdot \|b\|$ e pela igualdade C^* extraímos que $\|Ra\| = \sup_{\|b\| \leq 1} \|R_a(b)\|$. Desse modo o cálculo

$$\|R(a)\| = \sup_{\|b\| \leq 1} \|R(a)b\| \leq \|L\| \cdot \|a\|,$$

nos garante que $\|R\| \leq \|L\|$. Segue portanto que $\|L\| = \|R\|$. \square

Objetivaremos definir as operações algébricas necessárias para tornar $M(A)$ numa C^* -álgebra.

Nos dedicaremos agora a munir $M(A)$ de uma estrutura de álgebra. A soma, multiplicação por escalar e composição de mapas lineares e limitados é ainda um mapa linear limitado, verificaremos que os pares ordenados $(L_1 + L_2, R_1 + R_2)$, $(\lambda L_1, \lambda R_1)$ e $(L_1 L_2, R_2 R_1)$ são duplos centralizadores se $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ (estamos omitindo a notação de composição de funções). Dessa forma, objetivamos definir em $M(A)$ a seguinte estrutura de álgebra:

$$+ : M(A) \times M(A) \longrightarrow M(A), \text{ dado por } ((L_1, R_1), (L_2, R_2)) \longmapsto (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times M(A) \longrightarrow M(A) \text{ dado por } (\lambda, (L_1, R_1)) \longmapsto (\lambda L_1, \lambda R_1)$$

$$\cdot : M(A) \times M(A) \longrightarrow M(A) \text{ dado por } ((L_1, R_1), (L_2, R_2)) \longmapsto (L_1 L_2, R_2 R_1).$$

- se os pares (L_1, R_1) e (L_2, R_2) são duplos centralizadores de uma C^* -álgebra A então $(L_1 + L_2, R_1 + R_2)$ é um duplo centralizador de A . De fato, sejam $a, b \in A$, então:

$$(L_1 + L_2)(ab) = L_1(ab) + L_2(ab) = L_1(a)b + L_2(a)b = (L_1 + L_2)(a)b,$$

$$(R_1 + R_2)(ab) = R_1(ab) + R_2(ab) = aR_1(b) + aR_2(b) = a(R_1 + R_2)(b),$$

$$(R_1 + R_2)(a)b = R_1(a)b + R_2(a)b = aL_1(b) + aL_2(b) = a(L_1 + L_2)(b).$$

- Veremos agora que se $\lambda \in \mathbb{C}$ e (L_1, R_1) é um duplo centralizador de uma C^* -álgebra A , então $(\lambda L_1, \lambda R_1)$ é um duplo centralizador de A . De fato, sejam $a, b \in A$, então:

$$(\lambda L_1)(ab) = \lambda L(ab) = \lambda L(a)b = (\lambda L)(a)b,$$

$$(\lambda R)(ab) = \lambda R(ab) = \lambda aR(b) = a\lambda R(b) = a(\lambda R)(b),$$

$$(\lambda R)(a)b = \lambda R(a)b = \lambda aL(b) = a\lambda L(b) = a(\lambda L)(b).$$

- Resta apenas provarmos que se (L_1, R_1) e (L_2, R_2) forem duplos centralizadores de uma C^* -álgebra A então (L_1L_2, R_2R_1) também é um duplo centralizador de A . Tome $a, b \in A$ então:

$$(L_1L_2)(ab) = L_1(L_2(ab)) = L_1((L_2a)b) = L_1(L_2a)b = (L_1L_2)(a)b,$$

$$(R_2R_1)(ab) = R_2(R_1(ab)) = R_2(aR_1(b)) = aR_2(R_1(b)) = aR_2R_1(b),$$

$$(R_2R_1)(a)b = R_2(R_1a)b = R_1aL_2b = aL_1(L_2b) = a(L_1L_2)(b).$$

Com essa discussão bem estabelecida podemos fazer a seguinte proposição

Proposição A.0.4. Munindo $M(A)$ das operações de espaço vetorial $+((L_1, L_2)) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$, $\cdot(\lambda, (L_1, R_1)) = (\lambda L_1, \lambda R_1)$ e $\cdot((L_1, R_1), (L_2, R_2)) = (L_1L_2, R_2R_1)$, $\forall (L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(A)$ e $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. A tornamos numa álgebra.

Demonstração. A boa definição das operações apresentadas é garantida pela discussão acima. Já a prova das propriedades de álgebra é trabalhosa mas direta. \square

Note que as operações de soma vetorial e multiplicação por escalar definidas em $M(A)$ é a operação restrita do espaço $B(A) \oplus B(A) = B(A) \times B(A)$, com isso em mente, provamos a próxima proposição. Lembre que munido com a norma do máximo:

$$\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$$

$B(A) \oplus B(A)$ é um espaço de Banach. Note também que restringindo essa norma para o conjunto $M(A)$ temos a norma $\|(L, R)\| = \|L\| = \|R\|$.

Proposição A.0.5. Se A é uma C^* -álgebra, então $M(A)$ é um subespaço vetorial fechado de $B(A) \oplus B(A)$. Desse modo, $M(A)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. $M(A) \neq \emptyset$, de fato, é direto verificar que $(Id, Id) \in M(A)$ onde Id é o mapa identidade. Também note que $M(A) \subset B(A) \oplus B(A)$. A verificação de que $M(A)$ é fechado pelas operações de soma vetorial e multiplicação por escalar já foi feita na Proposição A.0.4.

Para verificar que $M(A)$ é fechado considere uma sequência $((L_n, R_n)) \subset M(A)$ tal que $(L_n, R_n) \rightarrow (L, R)$, provaremos que $(L, R) \in M(A)$. Como (L_n, R_n) converge para (L, R) :

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N, \|(L_n - L, R_n - R)\| < \epsilon$. Como $\|(L_n - L, R_n - R)\| = \|L_n - L\| = \|R_n - R\|$ então dado um ϵ temos que existe um N grande tal que $\|L_n - L\| < \epsilon$ e $\|R_n - R\| < \epsilon$, ou seja, $L_n \rightarrow L$ e $R_n \rightarrow R$. Como A é Banach, o limite de mapas lineares limitados é ainda um mapa linear limitado ($B(A)$ é fechado), resta apenas verificar que (L, R) é um duplo centralizador. (L_n, R_n) concorda com as condições da Definição A.0.1 usando que um operador limitado é contínuo e a multiplicação da álgebra também é contínua (Proposição 1.1.5), passaremos o limite $n \rightarrow \infty$. Dado $a, b \in A$ temos

$$L_n(ab) = L_n(a)b \Rightarrow L(ab) = L(a)b,$$

$$R_n(ab) = aR_n(b) \Rightarrow R(ab) = aR(b),$$

$$R_n(a)b = aL_n(b) \Rightarrow R(a)b = aL(b).$$

Disso temos que $(L, R) \in M(A)$ e portanto $M(A)$ é subálgebra fechada de $B(A) \oplus B(A)$. Como $B(A)$ é Banach, então a sua soma direta também o é, segue que $M(A)$ é um espaço de Banach. \square

Continuaremos adicionando uma nova estrutura algébrica em $M(A)$, objetivamos agora definir uma operação de involução $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$.

Proposição A.0.6. Se A é uma C^* -álgebra e $L : A \rightarrow A$ é um mapa linear limitado definimos $L^*(a) = (L(a^*))^*$. Então L^* é linear e o mapa $\mu : B(A) \rightarrow B(A)$ dado por $L \mapsto L^*$ é bem definido e é isométrico e conjugado linear tal que $(L^*)^* = L$ e $(L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*$.

Demonstração. Provaremos cada uma das afirmações da proposição. Seja A uma C^* -álgebra, $L \in B(A)$, $L^*(a) = (L(a^*))^*$ e $\mu : B(A) \rightarrow B(A)$ dado por $L \mapsto L^*$.

- L^* é linear: seja $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então:

$$L^*(a+b) = (L((a+b)^*))^* = (L(a^*) + L(b^*))^* = (L(a^*))^* + L(b^*)^* = L^*(a) + L^*(b).$$

$$L^*(\lambda a) = (L((\lambda a)^*))^* = (\overline{\lambda} L(a^*))^* = \lambda L(a^*)^* = \lambda L^*(a).$$

- O mapa $\mu : B(A) \rightarrow B(A)$ dado por $L \mapsto L^*$ está bem definido. De fato, já foi provado nesta mesma proposição que L^* é linear, veremos agora que é limitado. Seja $a \in A$, como L é limitada e $*$ é isometria temos

$$\|L^*(a)\| = \|(L(a^*))^*\| = \|L(a^*)\| \leq c\|a^*\| = c\|a\|.$$

Onde $c > 0$ é tal que $\|Lb\| \leq c\|b\|$ para todo $b \in A$. Segue então que L^* é limitada. u é isométrico e conjugado linear. Provaremos primeiro que é conjugado linear. Sejam $T, L \in B(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, portanto:

$$(T+L)^*(a) = ((T+L)(a^*))^* = (Ta^* + La^*)^* = (Ta^*)^* + (La^*)^* = (T^* + L^*)(a) \forall a \in A,$$

$$(\lambda T)^*(a) = ((\lambda T)(a^*))^* = (\lambda T(a^*))^* = \bar{\lambda}(T(a^*))^* = \bar{\lambda}T^*(a) \forall a \in A.$$

Desse modo $(T + L)^* = T^* + L^*$ e $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^* \forall T, L \in B(A)$ e $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Provaremos agora que μ é uma isometria. Queremos que dado $T \in B(A)$, $\|\mu(T)\| = \|T\|$. Seja então $T \in B(A)$, usando que $*$ é isometria:

$$\|\mu(T)\| = \|T^*\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|T^*(a)\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|(Ta^*)^*\| = \sup_{\|a^*\| \leq 1} \|Ta^*\|.$$

Note que $(a^*)^* = a$, então $*$: $A \rightarrow A$ nos garante uma sobrejeção, também repare que como $*$ é uma isometria, então é injetiva, ou seja, uma bijeção. Dessa observação, para cada a^* podemos corresponder um $b \in A$ tal que

$$\sup_{\|a^*\| \leq 1} \|Ta^*\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|Ta\| = \|T\|.$$

Desse modo, garantimos que $\|\mu(T)\| = \|T\| \forall T \in B(A)$ e portanto, μ é uma isometria.

- $L^{**} = L$. De fato, sejam $a \in A$ e $L \in B(A)$, temos então

$$L^{**}(a) = (L^*(a^*))^* = (L((a^*)^*))^* = L(a) \forall a \in A.$$

isso nos garante que $L^{**} = L$.

- $(L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*$. De fato, sejam $a \in A$ e $L_1, L_2 \in B(A)$, então

$$(L_1^* L_2^*)(a) = L_1^*(L_2(a^*)^*) = (L_1(L_2(a^*))^*)^* = L_1^*((L_2(a^*))^*)^* = L_1^*(L_2^*(a)) = (L_1^* L_2^*)(a),$$

como a é arbitrário, segue que $(L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*$.

□

Agora estamos em condições de definir uma involução em $M(A)$, ou seja, nosso próximo passo é exibir $M(A)$ como uma $*$ -álgebra.

Proposição A.0.7. A operação $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ dada por $(L, R) \mapsto (L, R)^* = (R^*, L^*)$ é uma involução em $M(A)$. Portanto, $M(A)$ é uma $*$ -álgebra.

Demonstração. Vamos primeiramente demonstrar que a função $*$ está bem definida. Já verificamos na Proposição A.0.6 que (R^*, L^*) é um par de operadores lineares e limitados, resta agora satisfazer a Definição A.0.1 (note a posição dos operadores no par ordenado (R^*, L^*)). Sejam $a, b \in A$, então o seguinte cálculo nos garante que (R^*, L^*) é de fato um duplo centralizador

$$R^*(ab) = (R((ab)^*))^* = (R(b^*a^*))^* = (b^*R(a^*))^* = (R(a^*))^*(b^*)^* = R^*(a)b,$$

$$L^*(ab) = (L((ab)^*))^* = (L(b^*a^*))^* = (L(b^*)a^*)^* = (a^*)^*(L(b^*))^* = aL^*(b),$$

$$L^*(a)b = (L(a^*))^*b = (b^*L(a^*))^* = (R(b^*)a^*)^* = a(R(b^*))^* = aR^*(b).$$

Vamos agora verificar que $*$: $M(A) \longrightarrow M(A)$ é uma involução. Seja $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$((L_1, R_1)^*)^* = (R_1^*, L_1^*)^* = (L_1^{**}, R_1^{**}) = (L_1, R_1),$$

$$((L_1, R_1)(L_2, R_2))^* = (L_1L_2, R_2R_1)^* = ((R_2R_1)^*, (L_1L_2)^*) = (R_2^*R_1^*, L_1^*L_2^*) \text{ e também}$$

$$(L_2, R_2)^*(L_1, R_1)^* = (R_2^*, L_2^*)(R_1^*, L_1^*) = (R_2^*R_1^*, L_1^*L_2^*),$$

$$\text{o que nos garante } ((L_1, R_1)(L_2, R_2))^* = (L_2, R_2)^*(L_1, R_1)^*,$$

$$((L_1, R_1) + (L_2, R_2))^* = ((R_1 + R_2)^*, (L_1 + L_2)^*) = (R_1^*, L_1^*) + (R_2^*, L_2^*) = (L_1, R_1)^* + (L_2, R_2)^*$$

$$(\lambda(L_1, R_1))^* = ((\lambda L, \lambda R))^* = ((\lambda R)^*, (\lambda L)^*) = (\bar{\lambda}R^*, \bar{\lambda}L^*) = \bar{\lambda}(R^*, L^*) = \bar{\lambda}(L, R)^*.$$

Concluimos então que $*$: $M(A) \longrightarrow M(A)$ é de fato uma involução e portanto $M(A)$ é uma $*$ -álgebra. \square

Podemos finalmente provar que $M(A)$ é uma C^* -álgebra. Isso será feito munindo $M(A)$ da norma e das operações vistas no decorrer da discussão até agora.

Teorema A.0.8 ($M(A)$ é uma C^* -álgebra). Se A é uma C^* -álgebra, então $M(A)$ é também uma C^* -álgebra quando munida da norma, soma vetorial, multiplicação por escalar, multiplicação da álgebra e involução como definidas acima.

Demonstração. Resta apenas mostrar que $M(A)$ é uma álgebra normada e que satisfaz a equação C^* . Mostremos primeiro que $M(A)$ é uma álgebra normada. Sejam $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(A)$, então o temos:

$$\|(L_1, R_1)(L_2, R_2)\| = \|(L_1L_2, R_2R_1)\| = \|L_1L_2\| \leq \|L_1\| \cdot \|L_2\| = \|(L_1, R_1)\| \cdot \|(L_2, R_2)\|.$$

Isso nos garante que $\|\cdot\|$ é submultiplicativa e portanto $M(A)$ é uma álgebra normada. Resta agora provar a igualdade C^* , isto é, dado $(L, R) \in M(A)$ temos $\|(L, R)^*(L, R)\| =$

$\|(L, R)\|^2$. Em vista da Observação 2.1.20, basta mostrar que $\|(L, R)\| \leq \|(L, R)^*(L, R)\|$. Note que $\|(L, R)\| = \|L\|$ e

$$\|(L, R)^*(L, R)\| = \|(R^*, L^*)(L, R)\| = \|(R^*L, L^*R)\| = \|R^*L\|,$$

mostremos então que $\|L\| \leq \|R^*L\|$. Tome $a \in A$ tal que $\|a\| \leq 1$, objetivamos aqui mostrar que $\|L(a)\|^2 \leq \|(R^*L)(a)\|$ e passar o supremo com $\|a\| \leq 1$. Note que

$$\|L(a)\|^2 = \|L(a)^*L(a)\| = \|L^*(a^*)L(a)\|,$$

e aplicando a definição de duplo centralizador em a^* e $L(a)$ temos

$$\|L^*(a^*)L(a)\| = \|a^*R^*(L(a))\| \leq \|a\| \cdot \|R^*(L(a))\| \leq \|R^*L\|.$$

Dessa forma, temos $(\sup_{\|a\| \leq 1} \|L(a)\|)^2 \leq \sup_{\|a\| \leq 1} \|(R^*L)(a)\|$, ou seja, $\|L\|^2 \leq \|R^*L\|$, como queríamos. segue então que $M(A)$ é uma C^* -álgebra. \square

Observação A.0.9. Notemos que $M(A)$ é uma álgebra unital, de fato, a unidade é o duplo centralizador (id_A, id_A) onde $id_A : A \rightarrow A$ é o mapa identidade (que é linear e limitado).

Definição A.0.10. Munida da estrutura mencionada no Teorema A.0.8 temos $M(A)$, como demonstrado, é uma C^* - álgebra. Chamamos essa álgebra de *Álgebra de Multiplicadores* de A .

O próximo resultado será dedicado a identificar A como uma C^* -subálgebra de $M(A)$, chamamos esse processo de *unitização* de uma C^* -álgebra.

Teorema A.0.11 (Unitização). O mapa $\varphi : A \rightarrow M(A)$, dado por $a \mapsto (L_a, R_a)$ é injetivo e um $*$ -homomorfismo isométrico. Desse modo, identificamos A com a imagem $\varphi(A)$ em $M(A)$, nesse sentido, A é um ideal de $M(A)$.

Demonstração. Primeiramente, provemos que φ é injetora e um $*$ -homomorfismo isométrico. Note que como discutido anteriormente, L_a é um mapa linear, sejam $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ os cálculos a seguir:

$$\varphi(a+b) = (L_{a+b}, R_{a+b}) = (L_a + L_b, R_a + R_b) = (L_a, L_b) = (L_a, R_a) + (L_b, R_b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\lambda a) = (L_{\lambda a}, R_{\lambda a}) = (\lambda L_a, \lambda R_a) = \lambda(L_a, R_a) = \lambda\varphi(a),$$

$$\varphi(ab) = (L_{ab}, R_{ab}) = (L_a L_b, R_b R_a) = (L_a, R_a) \cdot (L_b, R_b) = \varphi(a)\varphi(b),$$

nos garantem que φ é um homomorfismo. Para ver que φ é auto adjunto note que $\varphi(a^*) = (L_{a^*}, R_{a^*})$ e $(\varphi(a))^* = (L_a, R_a)^* = (R_a^*, L_a^*)$ e basta provarmos que $L_{a^*} = R_a^*$ e $R_{a^*} = L_a^*$. De fato, seja $x \in A$, então

$$R_a^*(x) = (R_a(x^*))^* = (x^* a)^* = a^* x = L_{a^*}(x),$$

$$L_a^*(x) = (L_a(x^*))^* = (ax^*)^* = xa^* = R_{a^*}(x)$$

Desse modo $L_{a^*} = R_a^*$ e $L_a^* = R_{a^*}$, isto é, $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*$.

Para ver que φ é uma injeção basta usar a Proposição A.0.2 para ver que dado um $a \in A$ temos $\|\varphi(a)\| = \|(L_a, R_a)\| = \|a\|$.

Provemos que φ é injetora, para isso veremos que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Seja $a \in A$ tal que $\varphi(a) = 0$, isto é, $(L_a, R_a) = (0, 0)$. Note que temos $ax = 0 \forall x \in A$, em particular, para $x = \frac{a^*}{\|a\|}$ temos pela igualdade C^* que $xa = \frac{a^*a}{\|a\|} = \|a\|$ e portanto $a = 0$. Desse modo, φ é injetiva.

Resta agora provar que $\varphi(A)$ é um ideal de A . Sejam $(L_a, R_a), (L_b, R_b) \in \varphi(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então pela linearidade de L_c para qualquer $c \in A$ temos que $(L_a, R_a) + (L_b, R_b) = (L_{a+b}, R_{a+b}) \in \varphi(A)$ e $\lambda(L_a, R_a) = (L_{\lambda a}, R_{\lambda a}) \in \varphi(A)$ e portanto $\varphi(A)$ é subespaço.

Para provar que $\varphi(A)$ é um anel tome $(L, R) \in M(A)$, veremos que $(L, R)(L_a, R_a) \in \varphi(A)$. Note que $(L, R)(L_a, R_a) = (LL_a, R_aR)$, se provarmos que $LL_a = L_{L_a}$ e $R_aR = R_{L_a}$ chegaremos ao resultado desejado. Seja então $x \in A$ temos então

$$LL_a(x) = L(L_a(x)) = L(ax) = L(a)x = L_{L_a}(x),$$

$$R_aR(x) = R_a(Rx) = R(x)a = xL(a) = R_{L_a}(x).$$

Segue portanto que $(L, R)(L_a, R_a) \in \varphi(A)$. A prova de que $(L_a, R_a)(L, R) \in \varphi(A)$ é análoga, basta notar que $(L_a, R_a)(L, R) = (L_aL, RR_a)$ e provar que $L_aL = L_{R_a}$ e $RR_a = R_{R_a}$.

Temos portanto que $\varphi(A)$ é um ideal de $M(A)$. □

Corolário A.0.12. Sobre a identificação acima, $A = M(A)$ se, e somente se, A for unital.

Demonstração. Se A é unital, como A é um ideal de $M(A)$ segue que $A = M(A)$. Suponha reciprocamente que $A = M(A)$, então como $M(A)$ é unital segue que A é unital. □

Teorema A.0.13. Se A é uma C^* -álgebra **sem unidade**, então A^1 está imerso em $M(A)$, mais precisamente, a inclusão canônica

$$\varphi : A \longrightarrow M(A) \quad a \longmapsto (L_a, R_a),$$

pode ser “estendida” à um $*$ -isomorfismo isométrico

$$\varphi^1 : A^1 \longrightarrow M(A) \quad (a, \lambda) \longmapsto \varphi(a) + \lambda 1_{M(A)} = (L_a + \lambda id_A, R_a + \lambda id_A).$$

Naturalmente, subentende-se que a “extensão” se dá através da comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & M(A) \\ \iota_A \downarrow & & \downarrow id_{M(A)} \\ A^1 & \xrightarrow{\varphi^1} & M(A) \end{array}$$

O fato de que $\varphi^1 \circ \iota_A = id \circ \varphi$ nos permite dizer que se A for entendido como contido em A^1 então φ^1 vai estender φ no sentido usual de uma extensão, isto é, $\varphi^1|_A = \varphi$.

Demonstração. Provemos que φ^1 é um $*$ -homomorfismo. sejam $(a, \alpha), (b, \beta) \in A^1$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, e lembrando que $L_{a^*} = R^*a$ e $R_{a^*} = L^*a$ temos portanto

$$\begin{aligned} \varphi^1((a, \alpha) + (b, \beta)) &= \varphi^1((a + b, \alpha + \beta)) \\ &= (L_{a+b} + (\alpha + \beta)id_A, R_{a+b} + (\alpha + \beta)id_A) \\ &= (L_a + L_b + \alpha id_A + \beta id_A, R_a + R_b + \alpha id_A + \beta id_A) \\ &= (L_a + \beta id_A, R_b + \beta id_A) + (L_b + \beta id_A, R_b + \beta id_A) \\ &= \varphi^1((a, \alpha)) + \varphi^1((b, \beta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^1(\lambda(a, \alpha)) &= \varphi^1((\lambda a, \lambda \alpha)) \\ &= (L_{\lambda a} + \lambda \alpha id_A, R_{\lambda a} + \lambda id_A) \\ &= (\lambda(L_a + \alpha id_A), \lambda(R_a + \alpha id_A)) \\ &= \varphi^1(a, \alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^1((a, \alpha)^*) &= (L_{a^*} + \bar{\alpha}id_A, R_{a^*} + \bar{\alpha}id_A) \\ &= (R_a + \alpha id_A)^*, (L_a + id_A)^* \\ &= (L_a + id_A, R_a + \alpha id_A)^* \\ &= \varphi^1((a, \alpha))^* \end{aligned}$$

Provaremos agora que φ^1 é uma isometria, aqui usaremos o fato de que A não tem unidade para definir a norma $\|(a, \lambda)\| := \sup_{\|b\| \leq 1} \|L_a + \lambda id_A\|$ que, como visto no Teorema 2.2.1, faz de A^1 uma C^* -álgebra (portanto a norma é única via o Corolário 2.1.38)

$$\|\varphi^1((a, \lambda))\| = \|L_a + \lambda id_A\| = \sup_{\|b\| \leq 1} \|ab + \lambda b\| = \|(a, \lambda)\|.$$

Resta mostrar que o diagrama comuta, para isso, basta tomar $a \in A$ e fazer o seguinte cálculo

$$(\iota_A \circ \varphi)(a) = \varphi^1((a, 0)) = (L_a + 0, R_a + 0) = id_A \circ (L_a, R_a) = id_A \circ (\varphi(a)) = (id_A \circ \varphi)(a).$$

□

B Apêndice

Ao definir uma C^* -subálgebra gerada por um $S \subset A$ de uma C^* -álgebra A , conseguimos mostrar uma descrição existencial da C^* -álgebra $C^*(S)$, é a menor C^* -subálgebra de A que contém S :

$$C^*(S) = \bigcap \{B : S \subset B, \text{ é uma } C^*\text{-subálgebra de } A\}.$$

Nos dedicaremos agora a propor uma descrição construtiva de uma C^* -subálgebra gerada por um conjunto $S \subset A$.

Definição B.0.1. Seja A uma C^* -álgebra e seja S um subconjunto qualquer de A . denotemos por S_1 o conjunto de todas as *palavras finitas* em $S \cup S^*$, significando que S_1 considere de todos os elementos da forma:

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

onde n é um número natural e $a_i \in S$ ou $a_i \in S^*$ para qualquer $i \in \{1, \dots, n\}$. Isto é, $S_1 := \{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i \in S \cup S^*, n \in \mathbb{N}\} \subset A$.

Observe que S_1 é um $*$ -subsemigrupo do $*$ -semigrupo multiplicativo A ; de fato, S_1 é o $*$ -subsemigrupo gerado por S .

Proposição B.0.2. Mostremos que a C^* -álgebra gerada por S , isto é, $C^*(S)$, é o fecho de todas as combinações lineares finitas de elementos de S_1 , isto é, queremos provar que:

$$C^*(S) = \overline{\text{span} S_1} := \overline{\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{C} \ x_i \in S_1 \right\}}.$$

Demonstração. É suficiente provar que $\overline{\text{span} S_1}$ é uma $*$ -álgebra contendo S e é minimal com respeito à relação (\subset) . Primeiramente note que $S \subset \text{span} S_1$ de fato, como qualquer elemento $s \in S$ pode ser expressado como uma palavra trivial s de $S \cup S^*$ então $S \subset S_1$. Agora como o span é um subspaço que contém S_1 temos $S \subset \text{span} S_1 \subset \overline{\text{span} S_1}$.

Provemos agora que $\overline{\text{span} S_1}$ é uma $*$ -álgebra, para isso, como as operações $+$, \cdot e $*$ são contínuas, basta mostrar que $\text{span} S_1$ é uma $*$ -álgebra. Sejam $x, y \in \text{span} S_1$, nesse caso:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{e} \quad y = \sum_{i=1}^m \beta_i y_i \quad \text{para} \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}, \ x_i, y_i \in S_1.$$

Note agora que:

- $\text{span}S_1$ é fechado pela soma vetorial, assumindo sem perda de generalidade que $n > m$ temos:

$$x + y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^m \beta_i y_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta_i y_i \in \text{span}S_1.$$

- $\text{span}S_1$ é fechado pela multiplicação por escalar: Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, temos então:

$$\lambda x = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i) \in \text{span}S_1.$$

- $\text{span}S_1$ é fechado pela multiplicação de álgebra, Supondo sem perda de generalidade que $n > m$ temos:

$$xy = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \beta_i y_i \right) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i)(\beta_i) x_i y_i \in \text{span}S_1.$$

- $\text{span}S_1$ é fechado pela operação de involução $*$:

$$x^* = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right)^* = \left(\sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i x_i^* \right) \in \text{span}S_1.$$

Com isso concluímos que $\text{span}S_1$ é uma $*$ -álgebra e portanto $\overline{\text{span}S_1}$ é uma $*$ -álgebra. Resta provar que $\overline{\text{span}S_1}$ é minimal com respeito à (C). Suponha que exista uma $*$ -subálgebra fechada B tal que $S \subset B$, provemos que $\overline{\text{span}S_1} \subset B$, como B é fechada, é suficiente ver que $\text{span}S_1 \subset B$. Considere $x \in \text{span}S_1$ então

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{com} \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad x_i \in S_1 = S \cup S^*.$$

Agora como B é $*$ -subálgebra segue que $B \subset S \cup S^* = S_1$ e como $\text{span}S_1$ contém S_1 segue que $B \subset \text{span}S_1$, como desejado. \square

Segue agora algumas proposições básicas que foram usadas com frequência durante o esse material para criar subálgebras com propriedades convenientes.

Proposição B.0.3. Seja A uma C^* -álgebra e $a \in A$, então a C^* -álgebra gerada por a é o conjunto:

$$C^*(a) = \overline{\left\{ \sum_{n,m \geq 0, n+m \geq 1}^{\text{finito}} \lambda_{n,m} a^n (a^*)^m : \lambda_{n,m} \in \mathbb{C} \right\}}.$$

Proposição B.0.4. Seja A uma C^* -álgebra unital e $a \in A$, então a C^* -álgebra gerada por $\{1_A, a\}$ é o conjunto:

$$C^*(1_A, a) = \overline{\left\{ \sum_{n,m \geq 0}^{\text{finito}} \lambda_{n,m} a^n (a^*)^m : \lambda_{n,m} \in \mathbb{C} \right\}},$$

onde estipulamos que para qualquer elemento $y \in A$ fazemos a convenção $y^0 = 1_A$.

Proposição B.0.5. Seja S um subconjunto qualquer de uma C^* -álgebra A e suponha que S_1 é comutativo, isto é, $ab = ba$ para qualquer $a, b \in S$, então segue que $C^*(S)$ é comutativo.

Demonstração. Pela Proposição B.0.2 sabemos que $C^*(S) = \overline{\text{span}S_1}$, com isso, do fato de $\text{span}S_1$ ser comutativo implicar, pela continuidade da multiplicação, que $\overline{\text{span}S_1}$ é comutativo, basta provar que $\text{span}S_1$ é comutativo. Considere $a, b \in \text{span}S_1$, então existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{e} \quad y = \sum_{i=1}^m \beta_i y_i \quad \text{para} \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}, \quad x_i, y_i \in S_1.$$

Supondo sem perda de generalidade que $n \geq m$ temos que

$$xy = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \beta_i y_i \right) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \beta_i) x_i y_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \beta_i) y_i x_i = \left(\sum_{i=1}^m \beta_i y_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) = yx,$$

portanto, $\text{span}S_1$ é comutativo, veremos agora que $\overline{\text{span}S_1}$ comuta. Sejam $a, b \in \overline{\text{span}S_1}$ então existem sequências $(x_n), (y_n) \subset \text{span}S_1$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Pelo fato que x_n e y_n comutam, usando a Proposição 1.1.5 podemos fazer o seguinte cálculo

$$xy = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = yx,$$

que nos diz que $C^*(S) = \overline{\text{span}S_1}$ é comutativa. \square

Corolário B.0.6. Se A é uma C^* -álgebra e $a \in A$ é um elemento normal ($a^*a = aa^*$) segue que $C^*(a)$ é comutativa.

Caso, em adição, A seja unital, temos que $C^*(1, a)$ é comutativa.

Demonstração. Seja A uma C^* -álgebra e $a \in A$ um elemento normal, considere o conjunto $S = \{a\}$, nesse caso temos

$$S_1 = \{a^k (a^*)^l : k + l \geq 1\}.$$

Veremos agora que S_1 é comutativa, sejam $x, y \in S_1$, então são da forma

$$x = a^k (a^*)^l \quad \text{para} \quad k + l \geq 1 \quad a^n (a^*)^m \quad \text{para} \quad n + m \geq 1,$$

como a é norma, podemos ver que $(a^*)^{k_1}$ comuta com a^{k_2} para quaisquer $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, disso segue que

$$\begin{aligned} xy &= a^k (a^*)^l (a^n (a^*)^m) = a^{k+n} (a^*)^{l+m} \\ yx &= a^n (a^*)^m (a^k (a^*)^l) = a^{k+n} (a^*)^{l+m}, \end{aligned}$$

ou seja, S_1 é comutativa, da Proposição B.0.5 segue que $C^*(a)$ é uma álgebra comutativa.

Caso A seja unital, então considerando $S = \{1, a\}$ segue que S_1 é da forma

$$S_1 = \{a^k(a^*)^l : k, l \geq 1\}.$$

Segue de um argumento inteiramente análogo que o conjunto S_1 é comutativo, ainda pela Proposição [B.0.5](#) tiramos que $C^*(1, a)$ é comutativo. \square

C Apêndice

A Teoria de Categorias é uma parcela da matemática usualmente dedicada a prover uma linguagem universal para tratar de diferentes áreas das ciências formais, ela concede um ambiente adequado para apresentar e relacionar conceitos de diferentes áreas do conhecimento. Na definição de categoria, é apresentada uma noção que engloba ao mesmo tempo as definições de espaço topológico, espaço vetorial, grupo, anel, etc, e permite que se reconheçam semelhanças entre diversas teorias matemáticas.

Um dos principais conceitos utilizados é a noção de *dualidade* a idéia é que dada uma afirmação P , qualquer relacionada a ela está uma afirmação dual P^* a qual será verdade se, e somente se, a afirmação inicial P for verdadeira. Esse apêndice se dedicará a usar os seguintes teoremas seguintes para obter uma dualidade no sentido de teoria de categorias.

Teorema C.0.1. [Teorema de Representação de Gelfand (caso unital)]

Seja A uma C^* -álgebra comutativa e unital. A função de Gelfand:

$$\Gamma : A \longrightarrow C(\hat{A}), \quad a \longmapsto \Gamma(a) := \hat{a},$$

é um $*$ -isomorfismo isométrico.

O primeiro desses teoremas foi enunciado e provado no capítulo 2.3 como o Teorema 2.3.8. faremos agora uma prova para o segundo teorema. Antes disso, precisamos enunciar alguns resultados de topologia

Teorema C.0.2 (Lema de Urysohn). Se X é um espaço topológico normal e A, B são fechados disjuntos de X , então existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) \subset \{0\}$ e $f(B) \subset \{1\}$.

A prova do teorema acima é muito longa e difícil e portanto não será feita aqui. A observação abaixo não é trivial mas muito mais acessível, ainda assim não será demonstrada nesse material.

Observação C.0.3. Se X é um espaço topológico compacto e Hausdorff, então também é normal, logo, o Lema de Urysohn se aplica para dois fechados disjuntos de X .

Agora vamos demonstrar o teorema de interesse para esse trabalho.

Teorema C.0.4. [Teorema de representação de espaços compactos Hausdorff]

Seja X um espaço topológico compacto Hausdorff. Então a função:

$$\delta : X \longrightarrow \widehat{C(X)} \quad x \longmapsto \delta(x) := \delta_x,$$

é um homeomorfismo. Aqui a função $\delta_x \in \widehat{C(X)}$ é dada por $\delta_x(f) = f(x)$ para qualquer $f \in C(X)$. Usualmente nos referimos a δ_x como a função *avaliação* em x .

Demonstração. Seja X um espaço topológico Hausdorff e defina o mapa $\delta : X \longrightarrow \widehat{C(X)}$, dado por $x \longmapsto \delta(x) := \delta_x$, então o mapa está bem definido. De fato, fixando $x \in X$ e dados $f, g \in C(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, os cálculos:

$$\delta_x(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \delta_x(f) + \delta_x(g),$$

$$\delta_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \delta_x(f),$$

$$\delta_x(fg) = (fg)(x) = f(x)g(x),$$

juntamente do fato que $\delta_x(1_{C(X)}) = (1_{C(X)})(x) = 1$, nos garante que $\delta_x \in \widehat{C(X)}$, isto é, δ está bem definida. Como X é compacto e $\widehat{C(X)}$ é Hausdorff (naturalmente, estamos munindo $\widehat{C(X)}$ da topologia fraca-estrela e usando o Teorema 1.5.18) então pelo Lema 2.4.3 é suficiente ver que δ é uma bijeção contínua. dividiremos o resto da prova em etapas.

- O mapa δ é contínuo. De fato, se (x_α) é uma rede tal que $x_\alpha \longrightarrow x$, então pela continuidade de uma $f \in C(X)$ qualquer segue que $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$. Nesse caso, a rede (δ_{x_α}) converge para δ_x na topologia fraca-estrela, de fato, se $x_\alpha \longrightarrow x$ então pelo observado anteriormente:

$$\delta_{x_\alpha}(f) = f(x_\alpha) \longrightarrow \delta_x(f) = f(x).$$

Concluimos então que δ é contínua.

- O mapa δ é injetivo. De fato, se $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 \neq x_2$ então como X é compacto e Hausdorff, segue que é um espaço normal, portanto, dados os fechados $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$ com $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$, o Teorema C.0.2 (Lema de Urysohn) nos garante a existência de uma função $f \in C(X)$ tal que $f(x_1) = 0 \neq 1 = f(x_2)$. Segue por definição que $\delta_{x_1} \neq \delta_{x_2}$, isto é, δ é injetiva.
- O mapa δ é sobrejetivo. Considere $\tau \in \widehat{C(X)}$, queremos achar $x \in X$ tal que $\tau = \delta_x$. Como τ é um caractere, temos pela Proposição 1.5.7 que $\text{Ker}(\tau)$ é um ideal maximal e pela Proposição 1.3.11 temos que $\text{Ker}(\tau)$ é fechado. Disso e do fato que $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$ (Proposição 2.3.4) temos que $\text{Ker}(\tau)$ é uma C^* -subálgebra própria de $C(X)$.

Tome agora $x_1, x_2 \in X$ tal que $x_1 \neq x_2$, como já abordado no item anterior, o lema de Urysohn nos garante que existe $f \in C(X)$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Considere $g: f - \tau(f)1$, note que $g \in \text{Ker}(\tau)$ e

$$g(x_1) = f(x_1) - \tau(f) \neq f(x_2) - \tau(f) = g(x_2).$$

Segue então que o Teorema 2.3.7 de Stone-Weierstrass nos garante que existe $x \in X$ tal que $f(x) = 0$ para todo $f \in \text{Ker}(\tau)$. De fato, caso contrário, como $\text{Ker}(\tau)$ é uma C^* -subálgebra fechado temos $\text{Ker}(\tau) = C(X)$, o que é contraditório pois $\text{Ker}(\tau)$ é um ideal próprio.

Temos então que para todo $f \in C(X)$, $f - \tau(f)1 \in \text{Ker}(\tau)$ e portanto $\delta_x(f) = f(x) = \tau(x)$, segue então que $\delta_x = \tau$.

Provamos então que δ é uma bijeção contínua, podemos usar o Lema 2.4.3 para nos garantir que δ é um homeomorfismo. □

Apresentaremos agora a definição de uma categoria, nela e nas proposições a seguir preferiremos a palavra “coleção” e não a palavra “conjunto”, isso se deve ao fato de que muitas categorias utilizadas, mesmo as mais simples, não se tratam de conjuntos. Nesse mesmo sentido o símbolo \in será utilizado como abuso de notação. Devido a sua grande generalidade, a definição de categoria evita definir o que são “objetos” e “morfismos”, esses serão dados como noções primitivas da linguagem, eventualmente exporemos vários exemplos para explicitar as ideias.

Definição C.0.5. Dizemos que uma *Categoria* \mathcal{C} consiste de:

- Uma coleção de objetos, denotados por $\text{Obj}(\mathcal{C})$;
- Uma coleção de morfismos, denotada por $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, definidos para cada par (X, Y) de objetos em $\text{Obj}(\mathcal{C})$;
- Para cada objeto $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ definimos um morfismo $id_X : X \rightarrow X$, chamado de *morfismo identidade*;
- Para quaisquer X, Y e Z em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, definimos uma operação, chamada *composição*, dada por:

$$\begin{aligned} \circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

Ainda demandamos que a operação composição satisfaça as seguintes condições para qualquer escolha $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, onde $X, Y, Z, W \in \text{Obj}(\mathcal{C})$:

- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
- $f \circ id_X = id_Y \circ f = f$.

Observação C.0.6. É usual pensar em uma categoria imaginando os objetos como pontos e os morfismos como setas ligando esses pontos. Em algumas literaturas, morfismos são ainda referidos como setas.

Definição C.0.7. Se \mathcal{C} é uma categoria e $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo entre os objetos X e Y , então se existe um morfismo $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = g \circ f = \text{id}_X$, dizemos que f é um *isomorfismo*, nesse caso, X e Y são ditos serem *isomorfos*. Verificando que g é único, denotaremos g por f^{-1} .

Exemplo C.0.8 (Categoria SET). Definida como se segue, SET é dita ser a categoria dos conjuntos.

- Obj_{SET} são os conjuntos;
- Dados $X, Y \in \text{Obj}_{\text{SET}}$, $\text{Hom}_{\text{SET}}(X, Y)$ constitui em todas as funções de X para Y ;
- A operação de composição na categoria é definida como a operação de composição entre funções.

De fato, SET será uma categoria, note que o morfismo $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\text{SET}}(X, X)$ é a função identidade pois dado qualquer $X, Y \in \text{Obj}_{\text{SET}}$, $f \in \text{Hom}_{\text{SET}}(X, Y)$ e $x \in X$ temos

$$(f \circ \text{id}_X)(x) = f(\text{id}_X(x)) = f(x) = \text{id}_Y(f(x)) = (\text{id}_Y \circ f)(x),$$

ou seja, $f \circ \text{id}_X = \text{id}_Y \circ f = f$. Para ver que a composição é associativa, tome $f \in \text{Hom}_{\text{SET}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\text{SET}}(Y, Z)$ e $h \in \text{Hom}_{\text{SET}}(Z, W)$ e note que dado $x \in X$ temos:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g \circ f(x)) = (h \circ (g \circ f))(x),$$

isto é, argumentamos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Apresentamos então os objetos, morfismos, composição e propomos um morfismo identidade, verificando que a composição é associativa e se comporta bem com a identidade percebemos que SET é uma categoria.

A generalidade da definição de categoria também nos permite exibir exemplos quase se nenhum estrutura

Exemplo C.0.9 (Categoria 0). Podemos definir a chamada Categoria 0 ao colocar tanto dos seus objetos como os morfismos como o vazio. Nesse caso, a verificação de que 0 é uma categoria segue por vacuidade.

Exemplo C.0.10 (Categoria 1). Fixado um objeto matemática A qualquer, podemos fazer uma categoria, denominada de categoria 1, da seguinte forma:

- $\text{Obj}_1 = \{A\}$;

- $\text{Hom}_1(A, A) = \{1_A\}$.

Nesse caso, o morfismo identidade é o único morfismo disponível, a saber, 1_A , e a composição é a trivial: $(1_A, 1_A) \mapsto 1_A$. A verificação de que 1 satisfaz a Definição C.0.5 é direta.

Exemplo C.0.11 (Categoria 2). Fixados dois objetos matemáticos A e B quaisquer, construímos a seguinte categoria, referida como 2 :

- $\text{Obj}_2 = \{A, B\}$;
- $\text{Hom}_2(A, A) = \text{id}_A$, $\text{Hom}_2(B, B) = \text{id}_B$ e $\text{Hom}_2(A, B) = f$.

Exemplo C.0.12 (Categoria dos Naturais). Fixado um objeto matemático A qualquer, definimos a categoria MAT_A da seguinte maneira:

- $\text{Obj}_{\text{MAT}} = \mathbb{N}$;
- Se $m, n \in \text{Obj}_{\text{MAT}}$ então $f \in \text{Hom}_{\text{MAT}}(m, n)$ se for o caso de f ser uma matriz $m \times n$ com entradas no objeto matemático A .
- Dados $m, n, p \in \text{Obj}_{\text{MAT}}$ definimos a composição:

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(n, p) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m, n) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m, p)$$

$$(g, f) \mapsto g \circ f,$$

onde definimos $g \circ f := f * g$ com $*$ representando o produto usual de matrizes.

Nesse caso, o morfismo identidade é a matriz identidade e as requisições da Definição C.0.5 são satisfeitas devido a serem serem satisfeitas na multiplicação de matrizes.

Naturalmente, a Definição C.0.5 também é utilizada para se referir a objetos matemáticos mais usuais. A verificação que os dois exemplos seguintes são de fato categorias é usualmente apenas notar que a composição de homomorfismos de anéis/grupos é ainda um homomorfismo de anéis/grupos e a composição é associativa.

Exemplo C.0.13 (Categoria GRP). Nessa categoria, os objetos são os grupos (G, \cdot) e dados $G_1, G_2 \in \text{Obj}_{\text{GRP}}$ definimos os morfismos como:

$$\text{Hom}_{\text{GRP}}(G_1, G_2) = \{f : G_1 \longrightarrow G_2 : f \text{ é homomorfismo de grupos}\}.$$

O morfismo identidade é o homomorfismo identidade e a composição é dada pela composição de funções

Exemplo C.0.14 (Categoria Rng). Nessa categoria, os objetos são os anéis com unidade e dados $R_1, R_2 \in \text{Obj}_{\text{Rng}}$ definimos os morfismos como:

$$\text{Hom}_{\text{Rng}}(R_1, R_2) = \{f : R_1 \longrightarrow R_2 : f \text{ é homomorfismo de anéis}\}.$$

O morfismo identidade é o homomorfismo identidade e a composição é dada pela composição de funções

Até aqui todos os exemplos discutidos tiveram os seus morfismos desempenhando o papel de funções ligando dois objetos. É necessário enfatizar, no entanto, que a generalidade da definição de categoria permite formarmos exemplos menos naturais.

Exemplo C.0.15 (Exemplo “1 grupo”). É a categoria formada por escolher como objetos um único grupo qualquer (G, \cdot) , definir os morfismos como os elementos $g \in G$ desse grupo, e definir como composição a operação de multiplicação do grupo: \cdot . Note que os axiomas de grupo nos garantem que o objeto definido é de fato uma categoria.

Exemplo C.0.16 (Categoria C^* -ALG). é a categoria no qual os objetos são as C^* -álgebras e os morfismos são os $*$ -homomorfismos entre C^* -álgebras.

Exemplo C.0.17 (Categoria $\text{TOP}_{\text{K,H}}$). É a categoria cujos objetos são os espaços topológicos compactos e Hausdorff e os morfismos são as funções contínuas entre eles.

Exemplo C.0.18 (Categoria $C^* - \text{ALG}_{\text{ab,un}}$). É a Categoria cujos objetos são as C^* -álgebras unitais e comutativas, já os morfismos são os $*$ -homomorfismos unitais entre elas.

Dada uma categoria \mathcal{C} , também podemos introduzir sua contraparte ‘dual’, essa seria a categoria formada pelos mesmos objetos mas com as setas invertidas.

Exemplo C.0.19 (Categoria Oposta). Seja \mathcal{C} uma categoria qualquer, definiremos sua categoria oposta \mathcal{C}^{op} . Essa nova categoria consiste do seguinte:

- $\text{Obj}_{\mathcal{C}^{op}} = \text{Obj}_{\mathcal{C}}$.
- Dados $X, Y \in \mathcal{C}^{op}$ definiremos $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.
- O morfismo identidade não muda: $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$.
- Dados $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y, Z)$, portanto, $f : Y \longrightarrow X$ e $g : Z \longrightarrow Y$, definimos a composição da categoria oposta \mathcal{C}^{op} como a pré composição da categoria \mathcal{C} , isto é,

$$\circ^{op} : \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Z)$$

$$(g, f) \longmapsto g \circ^{op} f = f \circ g.$$

É possível relacionar duas categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} ao obter uma relação entre os objetos de \mathcal{C} com os objetos de \mathcal{D} e os morfismos entre eles. O instrumento utilizado para fazer isso chama-se *functor*, enunciaremos dois tipos quase idênticos: *covariante* e *contravariante*.

Definição C.0.20. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas categorias, dizemos que um *functor covariante* é um $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ composto das duas “funções”:

- Uma função relacionando os objetos das duas categorias:

$$F : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D}) \quad \text{dada por} \quad X \mapsto F(X).$$

- Uma função relacionando os morfismos entre dois objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ com os morfismos entre os objetos $F(X), F(Y) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$.

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \quad \text{dada por} \quad f \mapsto F(f).$$

Podemos representar esse processo com o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ F \downarrow & & F \downarrow \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \end{array}$$

Também é necessário que essas relações sejam feitas de maneira “boa”, no sentido de que F deve se comportar bem com a composição e o morfismo identidade, ou seja, as propriedades a seguir devem ser satisfeitas:

- i Para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ devemos ter $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$, diagramaticamente:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ F \downarrow & & F \downarrow \\ F(X) & \xrightarrow{\text{id}_{F(X)}} & F(X) \end{array}$$

- ii Para quaisquer morfismos f, g tais que a composição faça sentido: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Diagramaticamente temos:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ F \downarrow & & F \downarrow & & F \downarrow \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) & \xrightarrow{F(g)} & F(Z) \\ & \searrow & \xrightarrow{F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)} & \swarrow & \end{array}$$

Observação C.0.21. O que foi definido anteriormente é chamado de *functor covariante* entretanto, aqui como em outras literaturas, chamaremos apenas de *functor*.

Observação C.0.22. o processo de relacionar, via um funtor, objetos X a sua contraparte “funtorizada” $F(X)$ e morfismos f ao seu respectivo $F(f)$ é usualmente referido como *funtorizar* ou *funtorização* do objeto X e morfismo f respectivamente.

Exemplo C.0.23 (Funtor identidade). Seja \mathcal{C} uma categoria, o *funtor identidade* $\text{id}_{\mathcal{C}}$ relaciona $\text{id}_{\mathcal{C}} : \text{Obj}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Obj}_{\mathcal{C}}$ por $\text{id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $\text{id}_{\mathcal{C}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ por $\text{id}_{\mathcal{C}}(f) = f$.

Exemplo C.0.24 (Funtor imagem). Sejam SET a categoria dos conjuntos, cujos morfismos são funções, e POS a categoria dos conjuntos parcialmente ordenados, cujos morfismos são as funções não-decrescentes. O *funtor imagem direta*, denotado por P é o funtor que associa:

- A cada $X \in \text{Obj}(\text{SET})$ (um conjunto) ao seu conjunto das partes, ou seja, $P : \text{Obj}(\text{SET}) \rightarrow \text{Obj}(\text{POS})$ dado por $P(X) = \mathbb{P}(X)$.
- A cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ (uma função de X em Y) a sua imagem direta, ou seja, $P : \text{Hom}_{\text{SET}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{SET}}(\mathbb{P}(X), \mathbb{P}(Y))$ dado por $P(f) = \{f(x) : x \in X\}$.

Sabemos que a dadas duas C^* -álgebras A e B podemos unitizar e associar C^* -álgebras relacionadas A^1 e B^1 , também a cada $*$ -homomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ podemos unitizar e associar um $*$ -homomorfismo $\varphi^1 : A^1 \rightarrow B^1$. Esse processo, que associa objetos e morfismos da categoria de C^* -álgebras pode ser enxergado como um funtor.

Exemplo C.0.25 (Unitização de C^* -álgebras). Definiremos um funtor na categoria de C^* -álgebras, a nível dos objetos associaremos uma C^* -álgebra a sua unitização e a nível dos morfismos associaremos ao seu morfismo unitizado. Lembremos que φ^1 é dado por $\varphi^1((a, \alpha)) = (\varphi(a), \alpha)$ para $(a, \alpha) \in A^1$.

$$F : \text{Obj}(C^* \text{-ALG}) \rightarrow \text{Obj}(C^* \text{-ALG}) \quad \text{dado por} \quad A \mapsto F(A) = A^1,$$

já para os morfismos

$$F : \text{Hom}_{C^* \text{-ALG}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{C^* \text{-ALG}}(A^1, B^1) \quad \text{dado por} \quad \varphi \mapsto F(\varphi) = \varphi^1.$$

Para verificar os axiomas de funtor note que o cálculo abaixo $F(\text{id}_A) = \text{id}_{A^1}$ é igual a id_{A^1} .

$$\text{id}_{A^1}^1((a, \alpha)) = (\text{id}_A(a), \alpha) = (a, \alpha) = \text{id}_A(a, \alpha).$$

Devemos também verificar que para os morfismos $\varphi \in \text{hom}_{C^* \text{-ALG}}(A, B)$ e $\psi \in \text{hom}_{C^* \text{-ALG}}(B, C)$ temos $(\psi \circ \varphi)^1 = \psi^1 \circ \varphi^1$, para isso tome $(a, \alpha) \in A^1$ e note que

$$(\psi^1 \circ \varphi^1)(a, \alpha) = \psi^1(\varphi^1(a, \alpha)) = \psi^1((\varphi(a), \alpha)) = ((\psi \circ \varphi)(a), \alpha) = (\psi \circ \varphi)^1(a, \alpha).$$

O outro tipo mencionado de funtor, o contravariante, funciona de maneira semelhante ao funtor covariante mudando apenas as direções das setas na funtorização.

Definição C.0.26. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias, dizemos que um *funtor contravariante* é um $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ formado pelas duas seguintes “funções”:

- Uma função relacionando os objetos das duas categorias:

$$F : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D}) \quad \text{dada por} \quad X \mapsto F(X).$$

- Uma função relacionando os morfismos entre dois objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ com os morfismos entre os objetos $F(Y), F(X) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$.

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X)) \quad \text{dada por} \quad f \mapsto F(f).$$

Note que aqui temos a primeira diferença com a Definição C.0.20: $F(X)$ e $F(Y)$ trocam de lugar.

É necessário que a funtorização se comporte bem com o morfismo identidade e a operação de composição, devendo levar em conta que a seja do morfismo $F(f)$ foi invertida. Exigiremos que as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

- i Para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ devemos ter $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$, diagramaticamente:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ F \downarrow & & F \downarrow \\ F(X) & \xleftarrow{\text{id}_{F(X)}} & F(X) \end{array}$$

- ii Para quaisquer morfismos f, g tais que a composição faça sentido: $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$. Diagramaticamente temos:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ F \downarrow & & F \downarrow & & F \downarrow \\ F(X) & \xleftarrow{F(f)} & F(Y) & \xleftarrow{F(g)} & F(Z) \\ & \xleftarrow{F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)} & & & \end{array}$$

Exemplo C.0.27 (Funtor imagem inversa). Sejam SET a categoria dos conjuntos e POS a categoria dos conjuntos parcialmente ordenados. O *funtor imagem inversa* é o funtor P^{-1} que:

- A cada conjunto, (objeto de SET) associa o seu conjunto das partes $\mathbb{P}(X)$.

- A cada função $f : X \rightarrow Y$, associa a sua imagem inversa, ou seja:

$$P : \mathbb{P}(Y) \rightarrow \mathbb{P}(X), \quad \text{dado por} \quad P^{-1}(B) = \{y \in Y \mid f(y) \in B\}.$$

Entre as propriedades que o functor satisfaz está o fato que ele preserva isomorfismos, isto é, se F é functor e $f : X \rightarrow Y$ é isomorfismo, segue que $F(f) : X \rightarrow F(Y)$ é isomorfismo, para ver isso, basta propor $F(f^{-1})$ como o morfismo inverso. Outra propriedade conveniente é que a composição de funtores é ainda um functor: Caso ambos os funtores sejam covariantes então a composta será covariante, se forem os dois contravariantes a composta será ainda covariante, já se um for covariante e outro contravariante, a composta é contravariante.

Funtores se dedicam a relacionar duas categorias, também será necessário definir uma noção de como dois funtores se relacionam, nesse sentido, fazemos a definição a seguir.

Definição C.0.28 (Transformação Natural). Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias e F e G funtores da forma $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Uma transformação natural $\mu : F \rightarrow G$ é uma coleção de morfismos $\mu = \{\mu_X : F(X) \rightarrow G(X) : X \in \text{Obj}_{\mathcal{C}}\}$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\mu_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\mu_Y} & G(Y) \end{array}$$

Ou ainda, $G(f) \circ \mu_X = \mu_Y \circ F(f)$ para quais quer objetos X e Y em $\text{Obj}_{\mathcal{C}}$ e qualquer morfismo em \mathcal{C} , $f : X \rightarrow Y$.

Definição C.0.29. Se $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ forem funtores ligando as categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} , e $\mu = \{\mu_X : F(X) \rightarrow G(X) : X \in \text{Obj}_{\mathcal{C}}\}$ for uma transformação natural, então se cada μ_X for um isomorfismo, dizemos que μ é um *isomorfismo natural*, nesse caso, os funtores F e G são ditos serem equivalentes. Nesse caso, denotaremos essa equivalência por \cong e escrevemos $F \cong G$ se F e G forem equivalentes.

Definição C.0.30. Uma equivalência entre duas categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} consiste de funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tais que $F \circ G \cong Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \cong id_{\mathcal{C}}$, dizemos então que \mathcal{C} e \mathcal{D} são equivalentes.

Nosso principal objetivo neste apêndice é mostrar que as categorias $\mathbf{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}$ e $\text{TOP}_{\mathbf{K,H}}^{\text{OP}}$ (a categoria oposta de $\text{TOP}_{\mathbf{K,H}}$) são equivalentes. Para isso vamos construir funtores entre estas categorias e mostrar que temos um isomorfismo natural.

Definição C.0.31. O primeiro functor

$$F : \mathbf{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}} \rightarrow \text{TOP}_{\mathbf{K,H}}^{\text{OP}}$$

no nível dos objetos, toma uma C^* -álgebra comutativa e unital A e leva no seu espectro $X = \widehat{A}$, ou seja, $F(A) = \widehat{A}$.

$$F : \text{Obj}(C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}) \longrightarrow \text{Obj}(\text{TOP}_{\text{K,H}}^{\text{op}}), \quad \text{dado por } A \longmapsto \widehat{A}.$$

Dado um $*$ -homomorfismo unital $\varphi: A \rightarrow B$, ou seja, um morfismo de $C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}$, obtemos uma função contínua $F(\varphi): \widehat{B} \rightarrow \widehat{A}$ através da fórmula

$$F(\varphi)(\tau) := \tau \circ \varphi.$$

Ou seja,

$$F : \text{Hom}_{C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{TOP}_{\text{K,H}}^{\text{op}}}(\widehat{A}, \widehat{B}) = \text{Hom}_{\text{TOP}_{\text{K,H}}}(\widehat{B}, \widehat{A}) \quad \varphi \longmapsto F(\varphi).$$

Primeiramente observemos que o funtor está bem definido a nível dos objetos e dos morfismos, de fato, se A é unital segue pelo Teorema 1.5.18 que \widehat{A} é um compacto Hausdorff. Para provar que $F(\varphi)$ é contínua vamos ver que ambos τ e φ são contínuas, bastando para isso recorrer a Proposição 1.5.9, concluindo que τ é contínua. Para verificar a continuidade de φ usaremos o Teorema 2.3.1. Provaremos agora que F é um funtor contra-variante.

- Tome $A \in \text{Obj}(C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}})$, devemos verificar que $F(id_A) = id_{F(A)}$, note para isso que dado $\tau \in \widehat{A}$, $F(id_A) = \tau \circ id_A = \tau$, ou seja, a identidade $id_{\widehat{A}}$.
- Tome $A, B, C \in \text{Obj}(C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}})$, e considere os morfismos $\varphi \in \text{Hom}_{C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}}(A, B)$ e $\psi \in \text{Hom}_{C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}}(B, C)$, verificaremos que $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ^{op} F(\varphi) := F(\varphi) \circ F(\psi)$. De fato, temos

$$(F(\varphi) \circ F(\psi))(\tau) = F(\varphi)(F(\psi)(\tau)) = F(\varphi)(\tau \circ \psi) = (\tau \circ \psi) \circ \varphi = \tau \circ (\psi \circ \varphi) = F(\psi \circ \varphi)(\tau).$$

Lema C.0.32. F definido acima é um funtor (covariante) $F: C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}} \rightarrow \text{TOP}_{\text{K,H}}^{\text{op}}$, ou seja, um funtor contra-variante $F: C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}} \rightarrow \text{TOP}_{\text{K,H}}$.

Definição C.0.33. Agora construímos o funtor $G: \text{TOP}_{\text{K,H}}^{\text{op}} \rightarrow C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}$. Este toma um espaço Hausdorff compacto X e associa a C^* -álgebra comutativa unital $G(X) := C(X)$. Ou seja,

$$G : \text{Obj}(\text{TOP}_{\text{K,H}}^{\text{op}}) \longrightarrow \text{Obj}(C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}) \quad X \longmapsto C(X).$$

A nível dos morfismos, dada uma função contínua $h: X \rightarrow Y$, associamos $G(h) := h_*$, ou seja, a mesma função abordada no Lema 2.4.4: $G(h)(f) := f \circ h$.

$$G : \text{Hom}_{\text{TOP}_{\text{K,H}}^{\text{op}}}(Y, X) = \text{Hom}_{\text{TOP}_{\text{K,H}}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{C^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}}(C(Y), C(X)) \quad h \longrightarrow h_*.$$

Vamos provar que G é um funtor covariante

- Tome $X \in \text{Obj}(\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}})$, devemos verificar que $G(id_X) = id_{G(X)} = id_{C(X)}$. Para isso, basta notar que $G(id_X) = (id_X)_*$ leva $f \in X$ em $f \circ id_X = f \in X$, ou seja, a identidade $id_{C(X)}$.
- Tome $h \in \text{Hom}_{\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}}(Y, Z)$, verificaremos que $G(g \circ h) = G(g) \circ G(h)$, para isso, tome $f \in C(X)$ e note que

$$\begin{aligned} (G(g) \circ G(h))(f) &= g_*(h_*(f)) = g_*(f \circ h) = (f \circ h)(g) \\ &= f \circ (h \circ g) = (h \circ g)_*(f) = G(h \circ g)(f). \end{aligned}$$

Isto demonstra o seguinte:

Lema C.0.34. G definido acima é um funtor covariante $G: \text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}$, ou seja, um funtor contra-variante $G: \text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}$.

Definiremos agora a noção de *dualidade* entre duas categorias. Se duas categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} são duais então a cada afirmação P que vale em uma categoria corresponde uma afirmação dual P^* na outra categoria, a vantagem disso é que a validade de P é equivalente a validade de P^* .

Definição C.0.35. Uma categoria \mathcal{C} é dita ser *dual* a uma categoria \mathcal{D} se \mathcal{C} é equivalente a \mathcal{D}^{op} .

Teorema C.0.36. As categorias $\mathbb{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}$ e $\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}$ são equivalentes. Ou seja, $\mathbb{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}$ e $\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}$ são duais.

Demonstração. Considere os funtores das Definições C.0.31 e C.0.33, $F: \mathbb{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}} \rightarrow \text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}$ e $G: \text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}$. Devemos mostrar que $F \circ G \cong id_{\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}}$ e $G \circ F \cong id_{\mathbb{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}}$. Vamos dividir a prova de cada uma das equivalências.

- $F \circ G \cong id_{\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}}$. Devemos exibir uma família de morfismos $\mu = \{\mu_X : (F \circ G)(X) \rightarrow id_{\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}}(X) : X \in \text{Obj}(\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}})\}$, é importante lembrar aqui que μ_X é um morfismo na categoria oposta $\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}$, logo ele liga $id_{\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}}(X)$ a $(F \circ G)(X)$. Notemos agora que $id_{\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}}(X) = X$ e $(F \circ G)(X) = F(G(X)) = F(C(X)) = \widehat{C(X)}$. Note que, como X é um compacto Hausdorff o Teorema C.0.4, nos garante, a cada $X \in \text{Obj}(\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}})$ o homeomorfismo (isomorfismo na categoria $\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}$ tanto como na categoria $\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{\text{op}}$):

$$\delta_X : X \longrightarrow \widehat{C(X)} \quad \text{dado por} \quad x \longmapsto \delta_x.$$

Com isso, propomos a coleção de isomorfismos

$$\mu = \{\delta_X : X \longrightarrow \widehat{C(X)} : X \in \text{Obj}(\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}})\}.$$

Dados $X, Y \in \text{Obj}((\text{TOP}_{\mathbb{K}, \mathbb{H}}^{\text{op}}))$ e $f \in \text{Hom}_{\text{TOP}_{\mathbb{K}, \mathbb{H}}^{\text{op}}}(Y, X)$ queremos que o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccc} (F \circ G)(Y) & \xrightarrow{\mu_Y} & id(Y) \\ (F \circ G)(f) \downarrow & & \downarrow id(f) \\ (F \circ G)(X) & \xrightarrow{\mu_X} & id(X) \end{array}$$

Como os $\mu_X = \delta_X$ e $\mu_Y = \delta_Y$ são morfismos nas categorias opostas, $(F \circ G)(X) = \widehat{C(X)}$, $id(X) = X$ e $id(f) = f$ temos que comutar o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C(Y)} & \xrightarrow{\mu_Y} & Y \\ (F \circ G)(f) \downarrow & & \downarrow f \\ \widehat{C(X)} & \xrightarrow{\mu_X} & X \end{array}$$

Onde $(F \circ G)(f): \widehat{C(Y)} \rightarrow \widehat{C(X)}$ é dado por $\tau \mapsto F(f_*)(\tau) = \tau \circ f_*$. Para comutar o diagrama, devemos verificar a igualdade $(F \circ G)(f) \circ \delta_Y = \delta_X \circ f$. Tome $y \in Y$, denotando a função de avaliação num ponto z por δ_z temos

$$(\delta_X \circ f)(y) = \delta_x(f(y)) = \delta_{f(y)}$$

$$((F \circ G)(f))(y) = \delta_Y(y) \circ f_* = \delta_y \circ f_*.$$

Devemos portanto verificar que $\delta_y \circ f_* = \delta_{f(y)}$. Tome $h \in C(X)$ então

$$(\delta_y \circ f_*)(h) = \delta_y(f_*(h)) = \delta_y(h \circ f) = a(f(y)) = \delta_{f(y)}(a).$$

Concluimos portanto que $F \circ G \cong id_{\text{TOP}_{\mathbb{K}, \mathbb{H}}^{\text{op}}}$.

- $G \circ F \cong id_{C^* - \text{Alg}_{\text{Ab}, \text{un}}}$. Devemos exibir uma família de isomorfismos $\mu = \{\mu_A : (G \circ F)(A) \rightarrow id_{C^* - \text{Alg}_{\text{Ab}, \text{un}}}(A) : A \in \text{Obj}(C^* - \text{Alg}_{\text{Ab}, \text{un}})\}$, notemos que $(G \circ f)(A) = G(F(A)) = G(\widehat{A}) = C(\widehat{A})$ e $id_{C^* - \text{Alg}_{\text{Ab}, \text{un}}}(A) = A$ ainda, como estamos numa categoria oposta, μ_A deve ser um morfismo entre A e $C(\widehat{A})$. Note que como A é uma C^* -álgebra comutativa e unital, o Teorema C.0.1 nos permite exibir um isomorfismo na categoria $C^* - \text{Alg}_{\text{Ab}, \text{un}}$ dado por

$$\Gamma : A \rightarrow C(\widehat{A}) \quad \text{dado por} \quad a \mapsto \widehat{a}.$$

Como para cada A C^* -álgebra comutativa e unital existe uma representação de Gelfand Γ_A , podemos propor a seguinte coleção de isomorfismos

$$\mu = \{\Gamma_A : id_{C^* - \text{Alg}_{\text{Ab}, \text{un}}}(A) \rightarrow (G \circ F)(A) : A \in \text{Obj}(C^* - \text{Alg}_{\text{Ab}, \text{un}})\}.$$

Tome $A \in \text{Obj}(\mathbb{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}})$ e $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}}(A, B)$, note que precisamos comutar o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \Gamma_A \downarrow & & \downarrow \Gamma_B \\ C(\widehat{A}) & \xrightarrow{(G \circ F)(\varphi)} & C(\widehat{B}) \end{array}$$

ou seja, queremos obter $(G \circ F)(\varphi) \circ \Gamma_A = \Gamma_B \circ \varphi$. Tome $a \in A$ e note que

$$(\Gamma_B \circ \varphi)(a) = \Gamma_B(\varphi(a)) = \widehat{\varphi(a)}$$

ao passo que

$$\begin{aligned} ((G \circ F)(\varphi) \circ \Gamma_A)(a) &= (G \circ F)(\varphi)(\Gamma_A(a)) = ((G \circ F)(\varphi))(\widehat{a}) \\ &= G(F(\varphi))(\widehat{a}) \\ &= F(\varphi)_*(\widehat{a}) \\ &= \widehat{a} \circ F(\varphi). \end{aligned}$$

Resta então mostrar que $\widehat{a} \circ F(\varphi) = \widehat{\varphi(a)}$, para isso, tome $\tau \in \widehat{B}$ e note que

$$(\widehat{a} \circ F(\varphi))(\tau) = \widehat{a}(F(\varphi)(\tau)) = \widehat{a}(\tau \circ \varphi) = (\tau \circ \varphi)(a) = \tau(\varphi(a)) = \widehat{\varphi(a)}(\tau).$$

Dessa forma concluímos que o diagrama comuta e portanto segue que $G \circ F \cong \text{id}_{\mathbb{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}}$.

Do exposto acima temos que as categorias $\mathbb{C}^* - \text{Alg}_{\text{Ab,un}}$ e $\text{TOP}_{\mathbb{K},\mathbb{H}}^{op}$ são duais. \square

Referências

- 1 MURPHY, G. J. *C*-algebras and operator theory*. [S.l.]: Academic press, 2014.
- 2 STRUNG, K.; PERERA, F. *An Introduction to C*-Algebras and the Classification Program*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2020. (Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona). ISBN 9783030474645.
- 3 SUNDER, V. *Functional Analysis: Spectral Theory*. [S.l.]: Springer, 1997. (Basler Lehrbücher). ISBN 9783764358921.
- 4 KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. [S.l.]: Wiley, 1991. (Wiley Classics Library). ISBN 9780471504597.
- 5 MUNKRES, J. *Topology*. Prentice Hall, Incorporated, 2000. (Featured Titles for Topology). ISBN 9780131816299. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XjoZAQAIAAJ>>.
- 6 BARTLE, R. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley, 2014. (Wiley Classics Library). ISBN 9781118626122. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=aE1YBAAAQBAJ>>.
- 7 DORAN, R. *Characterizations of C* Algebras: the Gelfand Naimark Theorems*. CRC Press, 2018. ISBN 9781351461771. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3XlaDwAAQBAJ>>.
- 8 MOREIRA, P. S. E. *Homomorfismo em C*-álgebras*. Repositório UFSC, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/174544>>.
- 9 CALDEIRA, C. E. *Álgebras de Banach e Teorema de Gelfand*. Repositório UFSC, 2019. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203180>>.
- 10 GERMANO, G. F. *Uma introdução a álgebras de banach e c*-álgebras*. Universidade Federal da Paraíba, 2014.
- 11 CORREIA, J. M. *A transformada de Gelfand*. 2013. Disponível em: <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~ppinto/alunos/Joana_Correia_2014.pdf>.
- 12 ECHTERHOFF, S. *Operator Algebras*. Disponível em: <<https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/echters/K-Theorie/Operatoralgebren.pdf>>.
- 13 RIBEIRO, M. F. S. *Teoria das categorias para matemáticos; uma breve introdução*. SBM, Rio de Janeiro, 2020.
- 14 BLACKADAR, B. *Operator Algebras: Theory of C*-Algebras and Von Neumann Algebras*. Springer, 2006. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, v. 13). ISBN 9783540284864. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=6b_T1j3Ib8oC>.
- 15 MORTARI, F. d. L. *Notas de aula sobre álgebra de operadores*. Notas de aula.

-
- 16 BRAGA, B. d. M. *Notas de aula sobre teoria espectral*. Notas de aula.
 - 17 RODRIGUES, V. S. *Notas de aula sobre estruturas algébricas*. Notas de aula.
 - 18 CORDEIRO, L. G. *Álgebra de operadores, aula de 04/06/2021*. Notas de aula.