Saulo Minatti Andrade

Um Estudo sobre Tetração e Hiperoperações

Florianópolis

2024

Saulo Minatti Andrade

Um Estudo sobre Tetração e Hiperoperações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemática

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática

Orientador: Dr. Paulinho Demeneghi

Florianópolis

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Andrade, Saulo Minatti
Um estudo sobre Tetração e Hiperoperações. / Saulo Minatti Andrade ; orientador, Paulinho Demeneghi, 2024.
125 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática - Licenciatura, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática - Licenciatura. 2. Tetração. 3. Hiperoperações. 4. Análise. 5. Álgebra. I. Demeneghi, Paulinho. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática - Licenciatura. III. Título.

Saulo Minatti Andrade

Um Estudo sobre Tetração e Hiperoperações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho aprovado. Florianópolis, 2024.

Documento assinado digitalmente
Felipe Lopes Castro
Data: 20/12/2024 11:56:51-0300
CPF: ***.060.710-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br
ICP-Edu

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
Paulinho Demeneghi
Data: 18/12/2024 17:36:53-0300
CPF: ***.173.280-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br
ICP-Edu

Dr. Paulinho Demeneghi (Orientador)
Universidade Federal de Santa Catarina

Documento assinado digitalmente
FRANCISCO CARLOS CARAMELLO JUNIOR
Data: 19/12/2024 12:46:44-0300
CPF: ***.801.148-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br
GOV.BR

Prof. Dr. Francisco Carlos Caramello Junior
Universidade Federal de Santa Catarina

Documento assinado digitalmente
NATA MACHADO
Data: 18/12/2024 18:18:42-0300
CPF: ***.138.409-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br
GOV.BR

Prof. Dr. Natã Machado
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis
2024

Dedico esse Trabalho de Conclusão de Curso, inteiramente, à minha mãe: a Profª. Drª. Leila Minatti Andrade. Ela foi professora de português e espanhol no Instituto Federal de Santa Catarina e no Instituto Federal Catarinense, além de outras instituições públicas e privadas. Ela atuou em vários campi pelo estado inteiro, e foi inspiração e motivação para muitos, sendo uma ótima pessoa e professora. Em suas aulas, costumava trazer músicas, dinâmicas interativas e momentos de confraternização com seus alunos. Ela também me ajudou muito durante toda a intersecção dos nossos períodos em vida, em particular, durante a produção desse trabalho. Sou eternamente grato por ter sido criado e amado incondicionalmente por ela.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu professor orientador Paulinho Demeneghi, pelo seu exímio trabalho de orientação. O Paulinho é muito inteligente, e sempre esteve à disposição para me ajudar a demonstrar da maneira mais simplificada, encontrar argumentos que eu jamais encontraria, pensou junto comigo para definir e conjecturar diversos resultados que constam no trabalho. Além de me ajudar como orientador, também me ajudou muito como amigo!

Agradeço demais à minha avó Daizi Teresinha Andrade, por sempre receber de braços abertos o seu neto criciumense para morar em sua apartamento em Florianópolis, e por sempre me receber à noite com uma deliciosa janta, e sempre se preocupar com meu bem estar. Amor de vó não existe igual! Também agradeço ao meu pai Cristian Dimitri Andrade e à minha irmã Milena Minatti Andrade, por sempre me receberem com muito amor em Criciúma quando eu os visitava aos fins de semana. Além disso, agradeço a todos os outros familiares, inclusive os de laço não-sanguíneo (isso inclui meus grandes amigos de infância de Criciúma e Araranguá). O apoio deles foi muito importante durante o meu período de luto!

Agradeço muito a toda a equipe do PET Matemática UFSC, lugar que trabalhei durante quase todo o meu tempo na graduação, e que tanto amei participar. Eu lembro que, quando eu estava começando a minha Iniciação Científica sobre tetração, eu compartilhava um pouco dos conceitos com meus colegas do PET, e muitos se impressionavam. Esses momentos foram muito importantes para mim, pois colocaram na minha cabeça que o que eu estava fazendo tinha sua beleza e não era em vão!

Por fim, agradeço a todos os grandes amigos[1] que eu fiz durante a graduação. Em particular: Augusto, Carol, Edu, Monica, Nathan e Vinícius. Em especial, agradeço à Samanta: nas semanas aós o falecimento da minha mãe, a Sam entrava em contato comigo todos os dias e me ajudava a processar minhas emoções – o apoio dela foi muito importante para mim! Também agradeço ao Samuel por ter emprestado o seu Nintendo 3DS por bastante tempo, me proporcionando muita diversão nas minhas idas e voltas de ônibus, zerando jogos dos quais eu só assistia vídeos quando eu era criança e não podia jogar, mas agora eu pude jogar e isso me deu um gás para melhorar o trabalho ainda mais!

A epígrafe apresenta citações inspiradas nas personalidades e palavras de amigos que me apoiaram ao longo desta jornada. Embora não sejam exatas, elas capturam a essência de seu encorajamento e humor que me motivaram a concluir este trabalho. Elas se referem a dois bons amigos meus que não foram nomeados anteriormente.

[1] Se você me considera como amigo e seu nome não estiver no trabalho, desculpa! Não dá para colocar todo mundo, mas saiba que você também foi muito importante!

"O estudo de matemática não precisa se limitar às barreiras computacionais."
(autoria própria)

"Quase perdeu todo o TCC? Tanto faz, a gente vai dar um jeito!"
(MEYER, Gabriel)

"O fim último da humanidade é perceber que algumas áreas da matemática, Saulo, são irracionais."
(NOLL, Isaque)

Resumo

A tetração é uma operação que envolve a repetição da exponenciação, de maneira semelhante à relação entre a exponenciação e a multiplicação, e entre a multiplicação e a soma. Operações obtidas através de tal repetição são concebidas como as hiperoperações. Ao definir a tetração e os domínios de bases e tetrapoentes, se tem como objetivo investigar a operação em tais domínios e versões alternativas dela. A investigação utiliza do o método dedutivo matemático, aplicando conceitos de cálculo, análise, espaços métricos, teoria dos números, variável complexa e álgebra. O trabalho se concentra nos aspectos numéricos da tetração, determina o comportamento das funções de tetração restritas ao intervalo $[1, \infty)$, formula conjecturas sobre o comportamento no intervalo $(0, 1)$, avalia o intervalo de convergência de sequências envolvendo tetração, define e analisa uma de suas operações inversas, introduz e analisa expressões específicas com tal operação, analisa a tetração em bases complexas, avalia estruturas algébricas ao realizar modificações na recursão das hiperoperações.

Palavras-chave: tetração, hiperoperação, recursão, exponencial.

Abstract

Tetration is an operation involving the repeated application of exponentiation, analogous to the relationship between exponentiation and multiplication, and between multiplication and addition. Operations derived from such repetition are conceptualized as hyperoperations. By defining tetration and its domains of bases and tetrational exponents, this study aims to investigate the operation within these domains and explore alternative formulations. The investigation employs the mathematical deductive method, applying concepts from calculus, analysis, metric spaces, number theory, complex analysis, and algebra. The work focuses on the numerical aspects of tetration, determines the behavior of tetration functions restricted to the interval $[1, \infty)$, formulates conjectures regarding behavior in the interval $(0, 1)$, evaluates the convergence intervals of sequences involving tetration, defines and analyzes one of its inverse operations, introduces and studies specific expressions involving this operation, examines tetration for complex bases, and evaluates algebraic structures by modifying the recursion of hyperoperations.

Keywords: tetration, hyperoperation, recursion, exponential.

Sumário

INTRODUÇÃO

O presente trabalho se baseia em estender o raciocínio de formação das operações aritméticas e entender quais propriedades tal expansão pode satisfazer. Sabe-se que as operações aritméticas de exponenciação e multiplicação podem ser concebidas como as operações de multiplicação e soma repetidas, respectivamente (CHUN, 2014). Com intuito de continuar esse raciocínio, é possível definir uma operação que se baseia na repetição da exponencial que, por sua vez, é concebida como tetração. Para melhor compreensão do raciocínio de expansão das operações, usamos o conceito de hiperoperação que são famílias de operações definidas por recursão.

Justificativa

Antes do início da pesquisa, o autor já possuía certo interesse no assunto. Em várias consultas feitas a bibliografias, encontraram-se, em alguns poucos lugares, material sobre tetração. Entretanto, na grande maioria dos materiais investigados, a tetração é apresentada de forma breve, ou também como uma parte do trabalho, raramente sendo o trabalho como um todo. E quando o trabalho é todo sobre tetração, geralmente consiste de, no máximo, 10 páginas.

A ausência de material extenso, completo e detalhado sobre o assunto motiva a exploração do assunto pelo autor para criar tal material, abordando investigações próprias e concatenando resultados encontrados como resquícios de trabalhos que falam brevemente do assunto. Relegar tal assunto não deveria ocorrer, uma vez que as operações de soma, multiplicação e exponenciação fazem parte do cotidiano, e, formada pela continuação do padrão delas, a tetração acaba tendo uma relação com a sociedade.

Uma vez que se trata de um conceito matemático relativamente simples, no sentido de ser uma continuação "natural" da maneira em que as operações aritméticas básicas são construídas, essa proposta de pesquisa se torna viável, além de o comportamento de tal operação poder ser avaliado utilizando ferramentas já desenvolvidas e conhecidas de análise e cálculo diferencial.

Revisão Bibliográfica

Para as deduções matemáticas realizadas nesse trabalho, utilizaram-se, sem bibliografias, noções de Cálculo, Análise na Reta, Espaços Métricos, Teoria dos Números e Álgebra. Para o estudo da operação de tetração, as bibliografias utilizadas foram Chun (CHUN, 2014), Neyrinck (NEYRINCK,) e Souza (SILVA; SANTOS; SOARES, 2020). A seção que trata de

Exponencial Complexa, foi utilizado o livro de Alcides. (NETO, 1993). No meio dos resultados e discussões, iremos apresentar alguns dos resultados e conceitos advindos da Revisão Bibliográfica.

Notações

“:=” significa: é definido como

$\mathbb{R}_+^*$:= conjunto dos reais positivos

$\mathbb{Q}_+^*$:= conjunto dos racionais positivos

$\mathbb{I}_+^*$:= conjunto dos irracionais positivos

$\mathbb{N}^*$:= conjunto dos naturais (sem o zero)

$\mathbb{N}$:= conjunto dos naturais (com o zero)

$\mathbb{C}^*$:= conjunto dos complexos sem o zero $(0 + 0i)$.

$\wedge$:= “e” lógico

$\vee$:= “ou” lógico

$\subset$:= é subconjunto de

$\supset$:= contém (como subconjunto)

$\in$:= pertence a

$\ni$:= contém (como elemento). Quando um desses símbolos vierem acompanhados de um “risco” em cima, queremos dizer a negação do que ele significa. Exemplo:

$\notin$:= não pertence a. Separador decimal: vírgula. Com as expressões do tipo “Seja fulano um beltrano", ou "Seja sicrano $\in C$", queremos dizer que fulano é um “beltrano” arbitrário (satisfazendo a definição de beltrano) ou que ciclano é um elemento arbitrário de tal conjunto.

Objetivos

Objetivo Geral

Analisar propriedades a respeito da tetração, operação baseada na repetição da última operação aritmética, e investigar maneiras de recursão das hiperoperações.

Objetivos Específicos

- Analisar o comportamento da operação na reta real;

- Analisar a convergência de sequências envolvendo a operação;
- Definir e compreender a operação no plano complexo;
- Investigar outras expressões envolvendo a operação;
- Avaliar estruturas algébricas envolvendo hiperoperações.

Material e Métodos

O presente trabalho utiliza, como fundamentação metodológica, o Método Dedutivo. Esse método se dá pela aplicação de regras de inferência, utilizando a lógica proposicional.

1 Tetração

Para melhor compreensão da operação, iremos, primeiramente, motivar e abstrair o que está por trás dela. Ela não possui quase nenhuma aplicação prática, mas isso não significa que não se deve estudá-la, nem que ela não seja importante. (NEYRINCK,).

1.1 Hiperoperações

A tetração surge de uma ideia relativamente simples. É notável, matematicamente, um padrão que existe na formação das três operações aritméticas mais conhecidas da matemática: soma, multiplicação e potenciação. A seguir, ilustraremos o que queremos dizer com esse tal padrão: Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Somar a com n significa tomar sucessor de a - noção primitiva da construção dos naturais - n vezes:

$$a + n := (a + (1 + (1 \ldots (1 + 1) \ldots))_n).$$

Já, multiplicar a por n significa somar a com si mesmo até aparecerem n cópias de a:

$$a \cdot n := (a + (a + (a \ldots (a + a) \ldots)))_n.$$

Agora, elevar a à n-ésima potência significa multiplicar a com si mesmo até aparecerem n cópias de a:

$$a^n := (a \cdot (a \cdot (a \ldots (a \cdot a) \ldots)))_n$$

(nas definições acima, o "n" subscrito significa que aparecem exatamente n cópias do número que está sendo repetido).

O leitor pode até já ter entendido o que se espera da tetração. Ela é a resposta para uma pergunta intrigante: "O que vem depois?" Um dos objetivos desse trabalho é responder a pergunta e desvelar essa operação misteriosa, desmascarando e formalizando propriedades e conjecturas a respeito de seu comportamento. A continuação dessa história seria definir uma operação que eleva a com si mesmo até aparecerem n cópias de a:

$$^{n}a := \left(a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right)_n.$$

Essa é a operação conhecida como **tetração**.

É possível formalizar o padrão de repetição das operações aritméticas de tal forma que se obtenha uma infinidade delas. Essa formalização é feita através da noção de **hiperoperações**. Essa formalização foi abordada no trabalho de Chun. (CHUN, 2014, p. 1)

Definição 1.1.1. *Cada operação a seguir é dita uma* <u>*n-hiperoperação*</u> *para algum* $n \in \mathbb{N}^*$*, chamada de* H_n*. São operações tais que:*

$$\begin{aligned} H_1 : \quad \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) &\longmapsto a + b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 : \quad \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b = (H_1(a, (H_1, a \ldots, H_1(a, a) \ldots)))_b = (a + a + \ldots + a)_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3 : \quad \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) &\longmapsto a^b = (H_2(a, (H_2, a \ldots, H_2(a, a) \ldots)))_b = (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4 : \quad \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) &\longmapsto {}^b a := (H_3(a, (H_3, a \ldots, H_3(a, a) \ldots)))_b = \left(a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right)_b. \end{aligned}$$

Em geral, para todo $n \in \mathbb{N}^*$*:*

$$\begin{aligned} H_{n+1} : \quad \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) &\longmapsto (H_n(a, H_n(a, H_n(\ldots H_n(a, a) \ldots))))_b. \end{aligned}$$

(os parênteses com um b subscrito denotam que aparecem exatamente b cópias de a). Em suma, H_1 *descreve a soma,* H_2 *a multiplicação,* H_3 *a potenciação e, seguindo tal raciocínio, a tetração pode ser inicialmente definida, pelo menos em* $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$*, como sendo a função* H_4*, isto é, a* 4*-hiperoperação (por isso utiliza-se o prefixo "tetra", que significa* 4 *em grego).*

No presente trabalho, definiremos a tetração da mesma forma que H_4, porém com domínio em $(\mathbb{R}_+^*) \times (\mathbb{N} \cup \{-1\})$. Assim, em $H_4(a, b)$, dizemos que a é a base, e b é o tetrapoente. Ter conhecimento sobre tal operação pode expandir significativamente os horizontes matemáticos, uma vez que ela vem junto de propriedades que exploram vários conceitos.

Por meio de revisão bibliográfica, softwares simbólicos/geométricos e deduções matemáticas, pretendemos exibir essa operação analisando seu comportamento e suas propriedades. Para isso, definiremos a tetração, apresentando propriedades/identidades elementares, apresentaremos e demonstraremos proposições e teoremas que descrevem o comportamento da operação juntamente de conjecturas encontradas ao longo do estudo. Ao longo dos resultados, apresentaremos exemplos permitindo, ao leitor, vislumbrar o comportamento numérico da operação.

1.2 Domínio

Inicialmente, antes de definir a operação de tetração, definiremos o seu domínio. Sabemos que a tetração se baseia na recursão exponencial, e, para x e $a \in \mathbb{R}$ quaisquer, a expressão a^x só é bem definida se $a \in \mathbb{R}_+^*$. De fato, tomando $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < 0$, existe a possibilidade de que x seja um fracionário (isto é, um racional não inteiro). Nesse caso, a expressão a^x fica indefinida sempre que for possível representar x com um denominador par e numerador ímpar. Por exemplo, ao tomarmos $x := \dfrac{n}{2m}$ com $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $2m \nmid n$, obtemos:

$$a^x = a^{\frac{n}{2m}} = \sqrt[2m]{a^n}.$$

Nesse caso, a^n é negativo (pois n é ímpar) e, como $2m$ é par, a raiz $(2m)$-ésima de x^n fica indefinida. Além disso, como as potências reais são limites de sequências de potências racionais, a expressão a^x fica, pela mesma razão, indefinida para qualquer x irracional também. Agora, caso $a = 0$, pode ocorrer de $x = 0$, e haveria a indeterminação matemática 0^0, Logo, em geral, é preciso que $a \in \mathbb{R}_+^*$ para que a expressão esteja bem definida. Assim sendo, a expressão a^a só está bem definida se $a \in \mathbb{R}_+^*$. Mais ainda, as tetrações de $a \in \mathbb{R}$ se baseiam em expressões da forma a^a, a^{a^a}, e assim por diante.

Em vista disso, se convém inicialmente em definir o **domínio de bases** da tetração como sendo $\mathbb{R}_+^*$, e trabalharemos com a definição de tetração através de uma recursão exponencial.

1.3 Tetração

Definição 1.3.1. *Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$ quaisquer. Recursivamente definimos a tetrado a n (ou a n-ésima tetração de a, ou a ao tetrapoente n) como:*

$$^{1}a := a$$

$$^{n+1}a := a^{^{n}a}.$$

Exemplo 1.3.2. *Notavelmente, as primeiras tetrações do número* 2 *são:*

- $^{1}2 = 2$;
- $^{2}2 = 2^{^{1}2} = 4$;
- $^{3}2 = 2^{^{2}2} = 2^4 = 16$;
- $^{4}2 = 2^{^{3}2} = 2^{16} = 65.563.$

Já, para o número 3*, as suas primeiras tetrações são:*

- ${}^{1}3 = 3$*;*
- ${}^{2}3 = 3^{{}^{1}3} = 27$*;*
- ${}^{3}3 = 3^{{}^{2}3} = 3^{27} = 7.625.597.484.987.$

Agora, com o número 1*:*

- ${}^{1}1 = 1$*;*
- ${}^{2}1 = 1^{{}^{1}1} = 1$*;*
- ${}^{3}1 = 1^{{}^{2}1} = 1^{1} = 1$*;*
- ${}^{n+1}1 = 1^{{}^{n}1} = 1^{1} = 1.$

Perceba que as primeiras tetrações das menores bases inteiras geram valores altíssimos.

A partir da definição, entendemos que ela é apenas a formalização do procedimento que desejávamos: elevar o número a si mesmo uma quantidade determinada de vezes.

Exemplo 1.3.3. *Sejam $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ e $n \in \mathbb{N}^{*}$. A relação a seguir é verdadeira:*

$$ {}^{n}a = \left(a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right)_{n} $$

Solução 1.3.4. *Vamos utilizar indução matemática: <u>Passo Base (n=1):</u>*

$$ {}^{1}a = a = (a)_{1}. $$

<u>Hipótese de Indução:</u> Suponha que, para algum $k \in \mathbb{N}^{*}$, tenhamos:

$$ {}^{k}a = \left(a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\right)_{k}. $$

<u>Passo Indutivo:</u> Utilizando a definição de tetração e a Hipótese de Indução, temos:

$$ {}^{k+1}a = a^{{}^{k}a} = a^{\left(a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\right)_{k}} = \left(a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}\right)_{k+1}. $$

Portanto, a igualdade é verdadeira por indução. ■

O leitor talvez tenha se perguntado o porque de apenas utilizarmos inteiros positivos como tetrapoentes. Na verdade, a partir da definição de tetração, podemos tentar expandi-la e defini-la para outros tetrapoentes:

Observação 1.3.5. *Para $n = 0$:*

$$a^1 = a = {}^1a = {}^{0+1}a = a^{({}^0a)}.$$

Portanto, como $a \in \mathbb{R}_+^*$ é qualquer, a última igualdade só é verdadeira em todos os casos se:

$$1 = {}^0a.$$

Para $n = -1$:

$$a^0 = 1 = {}^0a = {}^{-1+1}a = a^{{}^{-1}a}.$$

Logo,

$$0 = {}^{-1}a.$$

Definição 1.3.6 (Tetração Estendida)**.** *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$. Então:*

$${}^0a := 1, \qquad {}^{-1}a := 0.$$

Aqui, também considera-se a possivelmente igual a 1. Essa definição pode ser, em um primeiro momento, contraintuitiva, uma vez que, quando se trata de exponenciação, expoentes negativos significam potências de inversos multiplicativos, mas, quando trata-se de tetração, essa relação deixa de existir (apenas "zerando" o número).

Observação 1.3.7. *É importante notar que a tetração, da forma que definimos, consiste em realizar a exponenciação de "cima para baixo". Com isso, queremos dizer que a seguinte maneira de calcular está em desacordo com a definição 1.3.1:*

$${}^na = ((((a^a)^a)...)^a)_n = (a^{a \cdot a \ldots a})_n = a^{a^{n-1}}.$$

Essa maneira de realizar a tetração é reconhecida em alguns trabalhos, como por exemplo, em (NEYRINCK,), em que se definem duas maneiras de realizar a operação, uma delas sendo essa e a outra a forma como definimos aqui. Torna-se, então, importante ressaltar que, nesse trabalho, não se está tratando dessa maneira.

Exemplo 1.3.8. *Ao calcular a terceira tetrapotência de 3, faz-se: ${}^33 = 3^{3^3}$, mas vale notar que:*

$$(3^3)^3 = 3^{3 \cdot 3} = 3^{3^2} \neq 3^{3^3} = {}^33.$$

1.4 Outras propriedades

A seguir, veremos que propriedades algébricas análogas a propriedades da exponenciação, não ocorrem na tetração. Primeiramente, lembraremos de algumas propriedades conhecidas da exponenciação. Para isso, sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Então,

1. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$;

2. $(a^b)^c = a^{bc}$;

3. $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$.

Agora, todas as "propriedades" a seguir foram analisadas para tetração, mas todas falham.

Exemplo 1.4.1. *Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $b, c \in \mathbb{N}^*$. Então, as afirmações a seguir* ***não*** *são necessariamente verdadeiras:*

1. ${}^{bc}a = {}^{b}a^{{}^{c}a}$ *(inspirada na* (1) *anterior);*

2. ${}^{c}({}^{b}a) = {}^{b^c}a$ *(inspirada na* (2) *anterior);*

3. ${}^{c}(a^b) = {}^{c}a^{{}^{c}b}$ *(inspirada na* (3) *anterior).*

Prova. $(1) : {}^{2\cdot 3}2 = {}^{6}2 = 2^{2^5} \neq 2^{2^4} = 2^{1}6 = 4^8 = ({}^{2}2)^{{}^{3}2}$.

$(2) : {}^{2}({}^{2}2) = {}^{2}4 = 4^4 = 256$. *Porém,* ${}^{2^2}2 = {}^{4}2 = 2^{16} \neq 256$.

$(3) : {}^{3}(2^2) = {}^{3}4$. *Por outro lado:* ${}^{3}2^{{}^{3}2} = 16^{16} \neq 256 = {}^{2}4$. ■

Agora, firmamos a proposição a seguir com intuito de esclarecer a não-negatividade da tetração, sem precisar justificar *a posteriori*.

Proposição 1.4.2 (Não-negatividade da tetração)**.** *Sejam $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Então,*

$${}^{n}x \geq 0.$$

Ainda, se $n \geq 0$, então ${}^{n}x > 0$.

Prova. *Se $n \geq 1$, então, por definição, ${}^{n}x = x^{({}^{n-1}x)}$ é uma potência de $x > 0$. Logo, ${}^{n}x > 0$. Se $n = 0$, então ${}^{n}x = 1 > 0$, logo ${}^{n}x > 0$. Se $n = -1$, então ${}^{n}x = 0$, logo, ${}^{n}x \geq 0$.* ■

A partir da Proposição anterior provamos o seguinte resultado. Ele pode soar contraintuitivo (pelo menos para quando $x < 1$), mas decorreu da observação do gráfico de funções de tetração (posteriormente irá se definir essa noção).

Teorema 1.4.3 (Desigualdade da Tetração)**.** *Sejam $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Então, ${}^{n}x \geq x$. Mais ainda, se $n > 1$ e $x \neq 1$, então ${}^{n}x > x$.*

Demonstração. *Pela Proposição anterior, como $(n-2) \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, temos ${}^{n-2}x \geq 0$. Caso $x \in (0, 1)$, a exponencial de base x é decrescente. Com isso, utilizando a definição, e o fato de que ${}^{n-2}x \geq 0$, temos:*

$${}^{n-1}x = x^{({}^{n-2}x)} \leq x^0 = 1.$$

Logo, ${}^{n-1}x \leq 1$. *Portanto, segue que* ${}^{n}x = x^{{}^{n-1}x} \geq x^1 = x$. *O caso* $x = 1$ *está claro, e o caso* $x \in (1, \infty)$ *prova-se analogamente ao caso* $x \in (0, 1)$. *Além disso, para* $n > 1$ *e* $x \neq 1$, *temos* ${}^{n-2}x > 0$ *que, como* $x \neq 1$, *similarmente implica em* ${}^{n}x > x$ *(basta realizar as mesmas etapas do caso* $x \in (0, 1)$*). Portanto, a demonstração está completa.* ■

1.5 Tetração Alternativa

Nesse trabalho, utilizamos uma definição de tetração conhecida, por Neyrinck como a tetração de "cima para baixo". Isto é,

$$ {}^{n}a = \left(a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\right)_n . $$

Ou seja, calculamos, de cima para baixo, a^a, e continuamos fazendo a elevado na a^a até chegarmos em n "ases". Na observação 1.3.7 vimos que havia uma outra maneira de se realizar a tetração. O objetivo dessa seção é analisar o comportamento de tal definição alternativa. Antes de definir formalmente, vemos que, dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$:

$$ (((a^a)^a)^{\cdots a})_n = a^{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{n-1}} = a^{a^{n-1}}. $$

(em que há n cópias de a). Vimos que essa maneira de realizar a tetração é simplificada pela propriedade da exponenciação. Com essa relação encontrada, definimos:

Definição 1.5.1 (Tetração Alternativa)**.** *Sejam* $n \in \mathbb{N}^*$ *e* $a \in \mathbb{R}_+^*$. *A expressão a seguir é dita a tetração alternativa de a por n:*

$$ t(a, n) := a^{a^{n-1}}. $$

Essa definição é abordada em (NEYRINCK,), como a tetração de "baixo para cima".

Exemplo 1.5.2. *As primeiras tetrações alternativas de* 2 *e* 3 *são dadas por:*

- $t(2, 1) = 2^{2^{1-1}} = 2^{2^0} = 2^1 = 2$;
- $t(2, 2) = 2^{2^{2-1}} = 2^{2^1} = 2^2 = 4$;
- $t(2, 3) = 2^{2^{3-1}} = 2^{2^2} = 2^4 = 16$;
- $t(2, 4) = 2^{2^{4-1}} = 2^{2^3} = 2^8 = 256$;
- $t(2, 5) = 2^{2^{5-1}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65.536$;
- $t(3, 1) = 3^{3^{1-1}} = 3^{3^0} = 3^1 = 3$;
- $t(3, 2) = 3^{3^{2-1}} = 3^{3^1} = 3^3 = 27$;
- $t(3, 3) = 3^{3^{3-1}} = 3^{3^2} = 3^9 = 19.683$;

- $t(3,4) = 3^{3^{4-1}} = 3^{3^3} = 3^{27} > 10^{12}$.

Observação 1.5.3. *A tetração alternativa, ao contrário da tetração convencional, pode ser estendida sem quaisquer problemas para tetrapoentes reais. De fato, como $t(a,n) = a^{a^{n-1}}$, e é possível calcular essa expressão para qualquer $n \in \mathbb{R}$, estendemos a tetração alternativa para $\mathbb{R}$, fazendo:*

Definição 1.5.4 (Tetração Alternativa Estendida)**.** *Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $x \in \mathbb{R}$. Então, a tetração alternativa de a por x é dada por:*

$$t(a,x) = a^{a^{x-1}}.$$

Exemplo 1.5.5.

$t(a,1) = a^{a^{1-1}} = a^{a^0} = a$;

$t(a,0) = a^{a^{0-1}} = a^{a^{-1}} = a^{\frac{1}{a}}$.

A tetração alternativa, no limite, satisfaz propriedades que são constatadas a seguir:

Proposição 1.5.6. *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$. As afirmações a seguir são verdadeiras:*

1. *Se $a > 1$, então:*
   $\lim_{x\to-\infty} t(a,x) = 1$ *e* $\lim_{x\to\infty} t(a,x) = \infty$.
2. *Se $0 < a < 1$, então:*
   $\lim_{x\to-\infty} t(a,x) = 0$ *e* $\lim_{x\to\infty} t(a,x) = 1$.

Prova. (1) : *Suponha que $a > 1$:*

$$\lim_{x\to-\infty} t(a,x) = \lim_{x\to-\infty} a^{a^{x-1}} = a^{\lim_{x\to-\infty} a^{x-1}} = a^{a^{-\infty}} = a^0 = 1.$$

Ainda,

$$\lim_{x\to\infty} t(a,x) = a^{\lim_{x\to\infty} a^{x-1}} = a^{a^{\infty}} = a^{\infty} = \infty.$$

(2) : *Suponha que $0 < a < 1$:*

$$\lim_{x\to-\infty} t(a,x) = a^{a^{-\infty}} = a^{\infty} = 0.$$

Ainda,

$$\lim_{x\to\infty} t(a,x) = a^{a^{\infty}} = a^0 = 1.$$

■

Queremos estudar a tetração alternativa nos casos em que a base se aproxima de 0 ou é muito grande. Para isso, precisamos dos lemas a seguir:

Lema 1.5.7. *Seja $b \in \mathbb{R}$. Então:*

1.
$$\lim_{x\to\infty} x^b = \begin{cases} \infty, \textit{ se } b > 0; \\ 1, \textit{ se } b = 0; \\ 0, \textit{ se } b < 0. \end{cases}$$

2.
$$\lim_{x\to 0^+} x^b = \begin{cases} 0, \textit{ se } b > 0; \\ 1, \textit{ se } b = 0; \\ \infty, \textit{ se } b < 0. \end{cases}$$

Prova. (1)*: Caso $b > 0$: Seja $M > 0$. Tome $N := M^{\frac{1}{b}}$ e veja que:*

$$x > N \implies x^b > N^b = (M^{\frac{1}{b}})^b = M \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $x^b > M$ sempre que $x > N$, donde $\lim_{x\to\infty} x^b = \infty$. Caso $b = 0$: Apenas veja que $\lim_{x\to\infty} x^b = \lim_{x\to\infty} x^0 = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$. Caso $b < 0$: Note que $x^b = \frac{1}{x^{-b}}$, com $-b > 0$. Assim, utilizando o item (1) *e propriedades de limite, temos: $\lim_{x\to\infty} x^b = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-b}} = \frac{\lim_{x\to\infty} 1}{\lim_{x\to\infty} x^{-b}} = \frac{1}{\infty} = 0.$. Segue que* (1) *é verdadeiro.*

(2)*: Considere a seguinte mudança de variável:*

$$y := \frac{1}{x}.$$

Assim, $x \to 0^+ \implies y \to \infty$. Também:

$$x^b = \left(\frac{1}{y}\right)^b = \frac{1^b}{y^b} = y^{-b}.$$

Logo, utilizando (1)*, conclui-se que:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^b = \lim_{y\to\infty} y^{-b} = \begin{cases} \infty, \textit{ se } -b > 0; \\ 1, \textit{ se } -b = 0; \\ 0, \textit{ se } -b < 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^b = \begin{cases} \infty, \textit{ se } b < 0; \\ 1, \textit{ se } b = 0; \\ 0, \textit{ se } b > 0. \end{cases}$$

Como queríamos provar. ∎

Daqui para frente, vamos usar $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, conhecido como o conjunto dos reais estendidos.

Lema 1.5.8. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas e $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, tais que:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = L^M.$$

Prova. *Como $L > 0$ e f é contínua, existe uma vizinhança de x_0 ou um intervalo com extremo aberto em $+\infty$ tal que f é positiva.*

Agora perceba que, para x pertencendo, sem perda de generalidade, à vizinhança ou ao intervalo com extremo em $+\infty$, utilizando a continuidade das funções envolvidas e propriedade de logaritmo:

$$\ln\left(\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0} \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0} g(x)\ln(f(x)) = M\ln(L) = \ln\left(L^M\right).$$

Resumindo: $\ln\left(\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}\right) = \ln\left(L^M\right)$. *Logo, da injetividade de* $\ln$*:* $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = L^M$, *como queríamos provar.* ■

Lema 1.5.9. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

e que alguma das hipóteses abaixo acontece:

1. $\lim_{x\to\infty} g(x) = L \in \mathbb{R}_+^*$;
2. $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

Então,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \infty.$$

Prova. *Suponha que* (1) *ocorre e seja $M > 1$. Existe $N_1 > 0$ tal que $f(x) > M^{\frac{2}{L}}$ se $x > N_1$. Também existe $N_2 > 0$ tal que $(|g(x) - L| < \frac{L}{2}$ se $x > N_2$. Assim, $g(x) - L > -\frac{L}{2}$. Logo, $g(x) > \frac{L}{2} > 0$.Tome $N := \max\{N_1, N_2\}$, e perceba que, se $x > N$, então:*

$$f(x) > M^{\frac{2}{L}} \implies f(x)^{g(x)} > (M^{\frac{2}{L}})^{g(x)} > (M^{\frac{2}{L}})^{\frac{L}{2}} = M.$$

Portanto,

$$x > N \implies f(x)^{g(x)} > M \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \infty.$$

Agora, assuma que (2) *ocorre, e tome* $P > 1$ *(sem perda de generalidade). Então, existe* $Q_1 > 0$ *tal que* $f(x) > P^{\frac{1}{P}}$ *quando* $x > Q_1$*. Também há* $Q_2 > 0$ *tal que* $g(x) > P > 1$ *quando* $x > Q_2$*. Definindo* $Q := \max\{Q_1, Q_2\}$*, temos:*

$$x > Q \implies f(x) > P^{\frac{1}{P}} \implies f(x)^{g(x)} > (P^{\frac{1}{P}})^{g(x)} > (P^{\frac{1}{P}})^P = P \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \infty.$$

■

Teorema 1.5.10. *Seja* $a \in \mathbb{R}$*. Então:*

1.
$$\lim_{x\to 0^+} t(x,a) = \begin{cases} 1, \text{ se } a > 1 \\ 0, \text{ se } a \leq 1; \end{cases}$$

2.
$$\lim_{x\to\infty} t(x,a) = \begin{cases} \infty, \text{ se } a \geq 1 \\ 1, \text{ se } a < 1. \end{cases}$$

Demonstração. *Como* $x > 0$ *em ambas as análises, escrevemos:*

$$t(x,a) = x^{x^{a-1}} = (e^{\ln(x)})^{x^{a-1}} = e^{x^{a-1}\ln(x)}.$$

Portanto, por propriedade de limite e continuidade da exponencial, em qualquer análise:

$$\lim t(x,a) = e^{\lim x^{a-1}\ln(x)}.$$

Assim, o problema se resume a avaliar $\lim(x^{a-1}\ln(x))$*, e depois aplicar a exponencial.*

(1) : *Suponha que* $a > 1$*. Logo,* $a - 1 > 0$*. Veja que, utilizando o Lema 1.5.7, e propriedades de limite:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^{a-1}\ln(x) = \left(\lim_{x\to 0^+} x^{a-1}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\right) = 0\cdot(-\infty).$$

Vamos tentar formular esse limite de maneira que satisfaça uma indeterminação de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{a-1}\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x^{1-a}} = \frac{-\infty}{\infty}.$$

Então, utilizando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{1-a}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(1-a)x^{-a}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-a} \cdot x^{a-1} = \frac{1}{1-a} \cdot 0 = 0.$$

Logo, se $a > 1$*, então:* $\lim_{x\to 0+} t(x, a) = 1$.

Agora, se $a \leq 1$*, então* $a - 1 \leq 0$*. Assim, pelo Lema 1.5.7, temos* $\lim_{x\to 0^+} x^{a-1} = 1$ *ou* $\lim_{x\to 0^+} x^{a-1} = \infty$*. De qualquer forma, como* $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$*, por propriedades de limites, temos:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^{a-1} \ln(x) = -\infty.$$

Daí,

$$\lim_{x\to 0+} t(x, a) = 0.$$

(2) : *Suponha que* $a \geq 1$*. Perceba que* $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ *e, pelo Lema 1.5.7,* $\lim_{x\to\infty} x^{a-1} \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$*. Assim, utilizando o Lema 1.5.9, temos:*

$$\lim_{x\to\infty} t(x, a) = \lim_{x\to\infty} x^{x^{a-1}} = \infty.$$

Agora, assuma que $a < 1$*, e note que, pelo Lema 1.5.7:*

$$\lim_{x\to\infty} x^{a-1} \ln(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^{1-a}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Logo, aplicando L'Hôpital e usando, novamente, o Lema 1.5.7, conclui-se que (vide o desenvolvimento análogo na afirmação anterior):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^{1-a}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-a} \cdot x^{a-1} = \frac{1}{1-a} \cdot 0 = 0.$$

Donde,

$$\lim_{x\to\infty} t(x, a) = e^0 = 1.$$

■

2 Funções

Nesse capítulo, definimos as funções cuja lei de formação são as tetrações, para maior formalização das investigações a respeito da operação.

2.1 Introdução

Definição 2.1.1 (Função Tetracional)**.** *Seja $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Definimos a função tetracional de n-ésimo grau como:*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & {}^n x. \end{array}$$

Observação 2.1.2. *Se f_n é a função de tetração de n-ésimo grau com $n \in \mathbb{N}$, então $f_n(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$. (Lembre-se que ${}^n x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}$).*

Antes de mais nada, vamos atestar a continuidade das funções f_n com a proposição a seguir:

Proposição 2.1.3 (Continuidade das Funções Tetracionais)**.** *Seja f_n uma função tetracional. Então, f_n é contínua.*

Prova. *Para $n \in \{-1, 0\}$, é óbvio, uma vez que as tetrações por -1 e 0 são constantes (0 e 1 respectivamente). Assim, seja f_n tal que $n \in \mathbb{N}^*$, e $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pela definição de tetração, estabelecemos a seguinte relação recursiva:*

$$f_n(x) = x, \text{ se } n = 1;$$
$$f_n(x) = x^{f_{n-1}(x)}, \text{ se } n \geq 2.$$

Como a função identidade e exponencial de base x são contínuas, pela relação recursiva, assegura-se, indutivamente, que f_n é contínua, pois é composição de contínuas.

■

Agora enunciaremos alguns resultados que serão importantes para a análise do sinal das derivadas das funções de tetração. Primeiramente, lembre-se da "regra do exponente":

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

A próxima proposição irá verificar a existência de uma recursão entre as derivadas de tetrações de x, que é, nesse caso, a "regra do tetrapoente".

Proposição 2.1.4 (Regra do Tetrapoente)**.** *Seja $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Então f_n é diferenciável, e sua derivada é dada por*

$$f_n'(x) = f_n(x) \cdot \left(\ln(x) f_{n-1}'(x) + \frac{f_{n-1}(x)}{x} \right).$$

Prova. *Suponha $n \in \mathbb{N}$. Note que, utilizando a definição e a Regra da Cadeia, temos:* $f_n'(x) = \frac{d}{dx}({}^{n}x) = \frac{d}{dx}\left(x^{({}^{n-1}x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(x)({}^{n-1}x)}\right) = e^{\ln(x)({}^{n-1}x)}\frac{d}{dx}\left(\ln(x)\left({}^{n-1}x\right)\right) =$

$= x^{({}^{n-1}x)}\left(\frac{1}{x}({}^{n-1}x) + \ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)\right) = {}^{n}x\left(\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x) + \frac{{}^{n-1}x}{x}\right)$. *No fim das contas, temos:*

$$f_n'(x) = f_n(x) \cdot \left(\ln(x) f_{n-1}'(x) + \frac{f_{n-1}(x)}{x} \right).$$

Como $f_{-1}(x) \equiv 0$ é diferenciável e f_k diferenciável implica f_{k+1} diferenciável (pela relação recursiva), segue que que f_n é diferenciável, como queríamos. ■

Proposição 2.1.5. *1.* $\lim_{x \to 0^+} {}^{2}x = 1$;

2. $\lim_{x \to 0^+} {}^{3}x = 0$.

Prova. (1) : *Basta notar que* $\lim_{x\to 0^+} {}^{2}x = \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x)x} = e^{\lim_{x\to 0} x\ln(x)}$. *Mas,*

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} {}^{2}x = e^{\lim_{x\to 0}\ln(x)x} = e^0 = 1.$$

(2)*: Utilizando a definição e a continuidade das funções envolvidas, temos*

$$\lim_{x\to 0} {}^{3}x = \lim_{x\to 0} x^{{}^{2}x} = \lim_{x\to 0} e^{{}^{2}x\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0} {}^{2}x\ln(x)}.$$

Analogamente, avalia-se o limite do expoente (utilizando propriedades de limites):

$$\lim_{x\to 0} {}^{2}x\ln(x) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} {}^{3}x = e^{\lim_{x\to 0} {}^{2}x\ln(x)} = e^{-\infty} = 0.$$

■

2.2 Comportamento

Com esses resultados em mãos, vamos provar resultados acerca do comportamento das funções de tetração.

Teorema 2.2.1. *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Então, f_n, restrita ao domínio $[1, \infty)$ é crescente.*[1]

Demonstração. *Vamos mostrar que a restrição de f_n é crescente utilizando indução matemática.*

Passo base: ***(n = 1):*** *Notar que, como f_1 é a identidade (${}^1x = x$), a função é crescente e é uma bijeção de qualquer conjunto em si mesmo, em particular, para $[1, \infty) \to [1, \infty)$.*

Hipótese de indução: Suponha que, para algum $k \in \mathbb{N}^*$, a restrição de f_k em $[1, \infty)$ seja crescente.

Passo indutivo: Provaremos que a restrição de f_{k+1} a $[1, \infty)$ é crescente: sejam $x, y \in [1, \infty)$, satisfazendo $x < y$.

Se $x = 1$, então, pelo Teorema 1.4.3, temos:

$$f_{k+1}(x) = x < y < {}^{k+1}y = f_{k+1}(y).$$

Se $x > 1$, então, pela Hipótese de Indução, como a exponencial de base $x > 1$ é crescente, pela recursividade das funções tetracionais, e pela propriedade de desigualdade de potências reais de base positiva, temos:

$$x < y \implies f_k(x) < f_k(y) \implies x^{f_k(x)} < x^{f_k(y)} < y^{f_k(y)} \implies f_{k+1}(x) < f_{k+1}(y).$$

Portanto, f_{k+1} é crescente em $[1, \infty)$. Por indução matemática, f_n é crescente em $[1, \infty)$.

■

Corolário 2.2.2. *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Então,*

$$\lim_{x \to \infty} {}^n x = \infty.$$

Mais ainda, sob as hipóteses do Teorema anterior, a restrição $f_n^* : [1, \infty) \to [1, \infty)$ (tal que $f_n^*(x) = f_n(x)\ \forall x \in [1, \infty)]$) é uma bijeção.

Prova. *Seja $M \geq 1$. Pela Desigualdade da Tetração, ${}^nM \geq M$, daí, como $f_n(x)$ é crescente para $x > 1$ (pelo Teorema anterior), temos:*

$$x > M \implies {}^n x > {}^n M \geq M \implies {}^n x > M.$$

Logo o limite diverge para infinito.

[1] Nesse trabalho, utilizamos o termo “crescente” no sentido estrito.

Mais ainda, como f_n^* é crescente, f_n^* é injetiva. Além disso, $f_n^*([1,\infty)) = [1,\infty)$, pois funções contínuas levam conexo em conexo[2] *e* $\lim\limits_{x\to\infty}(f_n^*(x)) = \infty$.

■

Proposição 2.2.3. *O único ponto crítico de f_2 é e^{-1}. Mais ainda, f_2 é crescente em $\left(e^{-1},\infty\right)$, decrescente em $\left(0,e^{-1}\right)$ e ${}^{2}\!\left(e^{-1}\right)$ é o valor mínimo global de f_2.*

Prova. *Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto crítico de f_2. Então, $\dfrac{d}{dx}(f_2(x_0)) = 0$. Pela Proposição 2.1.4 a derivada de f_2 (lembrando que seu domínio é $\mathbb{R}_+^*$) é dada por:*

$$f_2'(x) = {}^{2}x\,(\ln(x) + 1)\,.$$

Assim, como $0 = f_2'(x_0) = {}^{2}x_0\left(\ln(x_0) + 1\right)$*. Daí, como* ${}^{2}x_0 > 0$*, obtemos* $\ln(x_0)+1 = 0$*, isto é,* $\ln(x_0) = -1$*, ou seja,* $x_0 = e^{-1}$*. Logo, e^{-1} é o único ponto crítico de f_2. Para verificar que e^{-1} é ponto de mínimo global de f_2, note que $f_2'(x) > 0$ se, e somente se,* $\ln(x) > -1$*, ou seja, $x > e^{-1}$. Analogamente, $f_2'(x) < 0$ se, e somente se, $x < e^{-1}$. Assim, conclui-se que e^{-1} é ponto de mínimo global de f_2. E, ppela análise do sinal da derivada, os intervalos de crescimento e decrescimento são, respectivamente, $\left(e^{-1},\infty\right)$ e $\left(0,e^{-1}\right)$.*

Finalmente, como e^{-1} é ponto de mínimo global de f_2, o valor mínimo global de f_2 é $f_2\left(e^{-1}\right) = {}^{2}\!\left(e^{-1}\right)$, como queríamos provar. ■

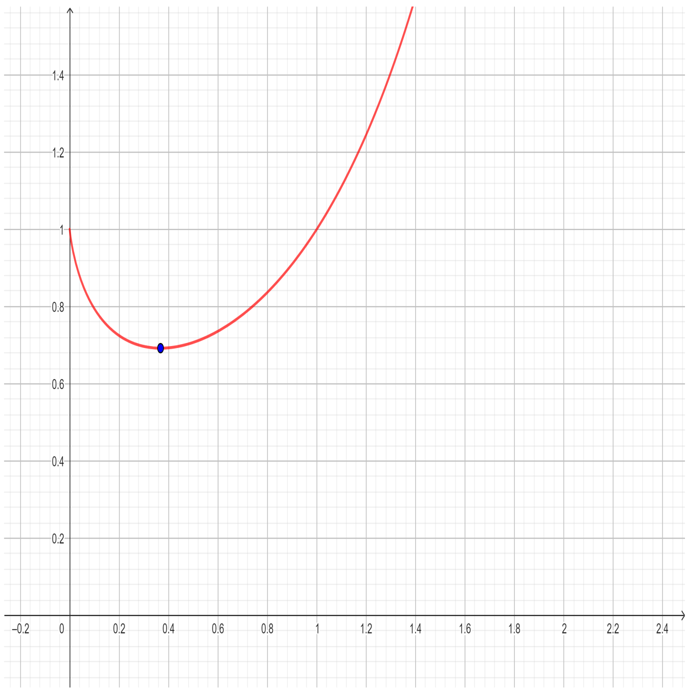

Figura 1 - Gráfico da função tetracional de grau 2 e seu único ponto crítico.

Fonte: do autor (software GeoGebra).

[2] Os conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos.

Em destaque, no gráfico acima, o ponto $\left(e^{-1}, {}^{2}\left(e^{-1}\right)\right)$, que é o ponto de mínimo global.

Também foi possível concluir a respeito do comportamento de f_3:

Proposição 2.2.4. *A função tetracional f_3 é crescente em todo o seu domínio. (CHUN, 2014, p. 4)*

Prova. *Para provar que f_3 é crescente, provaremos que sua derivada sempre é positiva. Vamos mostrar que $f_3'(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}_+^*$:*

$$f_3'(x) = {}^{3}x\left(\frac{d}{dx}({}^{2}x)\ln(x) + \frac{{}^{2}x}{x}\right) = {}^{3}x\left({}^{2}x(\ln(x)+1)\ln(x) + \frac{{}^{2}x}{x}\right) =$$

$$= {}^{3}x \cdot {}^{2}x\left((\ln(x)+1)\ln(x) + \frac{1}{x}\right) = {}^{3}x \cdot {}^{2}x\,(x(\ln(x)+1)\ln(x)+1)\,\frac{1}{x}.$$

Como ${}^{3}x, {}^{2}x, \frac{1}{x} > 0$, basta provar que:

$$x(\ln(x)+1)\ln(x)+1 > 0.$$

Para isso, separamos problema em três casos, e prova-se tal desigualdade em todos eles:

- $x \geq 1$*: Se $x \geq 1$, então, como o logaritmo natural é crescente:* $\ln(x) \geq 0$ e $\ln(x)+1 \geq 0$. *Assim,* $x(\ln(x)+1)\ln(x)+1 \geq 1 > 0$.
- $0 < x \leq e^{-1}$*: Agora, se $0 < x \leq e^{-1}$, então:* $\ln(x) \leq -1 < 0$ e $(\ln(x)+1) \leq 0$. *Donde,* $x(\ln(x)+1)\ln(x)+1 \geq 1 > 0$.
- $e^{-1} < x < 1$*: Finalmente, se $e^{-1} < x < 1$, então* $-1 < \ln(x) < 0$ e $0 < \ln(x)+1 < 1$.*Assim, como* $0 < x < 1$, *temos* $\ln(x) < 0$, *e:* $x\ln(x) > \ln(x)$. *Disso e pelo fato de que* $\ln(x)+1 > 0$, *temos* $x(\ln(x)+1)\ln(x)+1 > (\ln(x)+1)\ln(x)+1 = \left(\ln(x)+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

Assim, em todos os casos, $f_3'(x) > 0$ e portanto f_3 é crescente e a prova está completa.

■

Consequência 2.2.5. *Nas mesmas condições da Proposição anterior, f_3 não possui nenhum ponto crítico e*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}_3: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & f_3(x) \end{array}$$

é uma bijeção.

Prova. *Como $f_3'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$ (pela Prova da Proposição anterior), segue que f_3 não apresenta nenhum ponto crítico. Para verificar que $\tilde{f}_3$ é uma bijeção, note que, pelo Corolário 2.2.2,*

$$\lim_{x\to\infty} {}^3x = \infty.$$

Pela Proposição 2.1.5

$$\lim_{x\to 0^+} {}^3x = 0,$$

e como $\mathbb{R}_+^*$ é conexo e f_3 é contínua, $f_3(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$ é conexo (isto é, um intervalo da reta). Concatenando os fatos, segue que $f_3(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$ (isto é, $\tilde{f}_3 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ é sobrejetiva). Como, pela Proposição anterior, f_3 é crescente, segue que f_3 é injetiva. Portanto, $\tilde{f}_3 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ é uma bijeção, como queríamos provar. ■

Figura 2 - Gráfico da função tetracional de grau 3 e seu comportamento crescente e bijetor.

Fonte: do autor (software GeoGebra).

2.3 Conjecturas

Conjectura 2.3.1. *Seja f_n uma função tetracional. Então,*

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se } n \textit{ é ímpar}; \\ 1, & \textit{se } n \textit{ é par}. \end{cases}$$

(CHUN, 2014)

Motivação. *Em investigações utilizando o software GeoGebra, a afirmação é intuitivamente verdadeira. Na imagem a seguir, as funções que aparentam tender a 1 são as funções tetracionais de grau par entre* 2 *e* 10*. As que aparentam tender a zero são as de grau ímpar entre* 1 *e* 9*:*

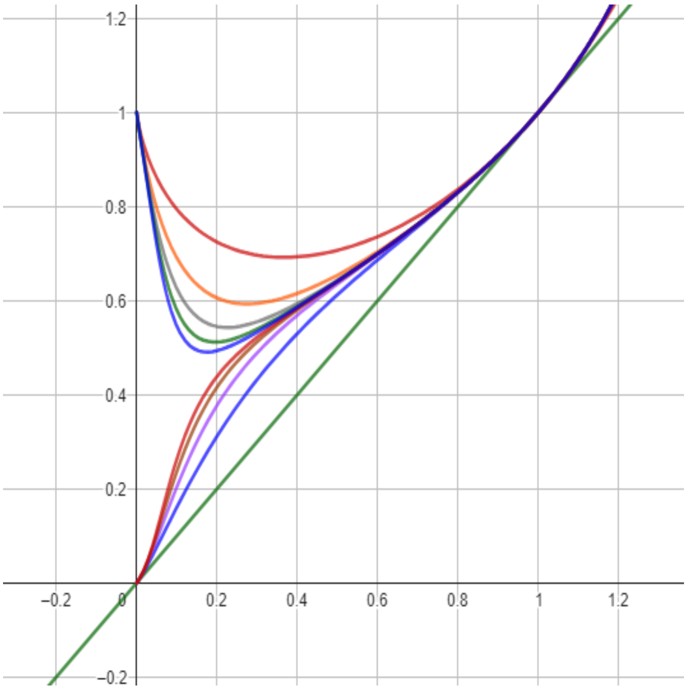

Figura 3 - Gráfico das funções tetracionais de grau entre 1 *e* 10*.*

Fonte: do autor (software GeoGebra)

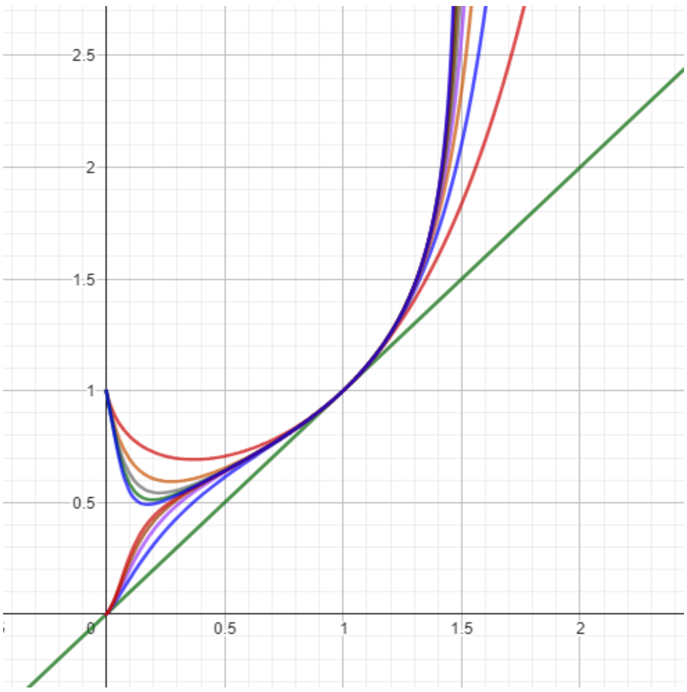

Figura 4 - Gráfico das funções tetracionais de grau entre 1 *e* 10*, desampliado.*

Fonte: do autor (software GeoGebra)

Mais ainda, quando x tende a zero, podemos assumir, sem perda de generalidade, que x está no intervalo $(0, e^{-e})$, isto é, no intervalo em que as subsequências pares e ímpares da sequência $({}^{n}x)$ convergem a valores distintos (os resultados acerca de sequências de tetração estão formalizados no Capítulo 3). Acredita-se que, a medida que x decresce, as convergências das subsequências pares e ímpares se aproximam a 1 e a 0 respectivamente. A imagem a seguir, ilustra isso. Para uma base $b = \frac{1}{50}$ as coordenadas y dos pontos próximos de $y = 1$ são, justamente, as tetrações pares de b, e, as dos pontos próximos de $y = 0$, as ímpares. A seguir, temos os pontos representando as tetrações de $b = \frac{1}{50}$, pertencentes ao gráfico da função exponencial de base b:

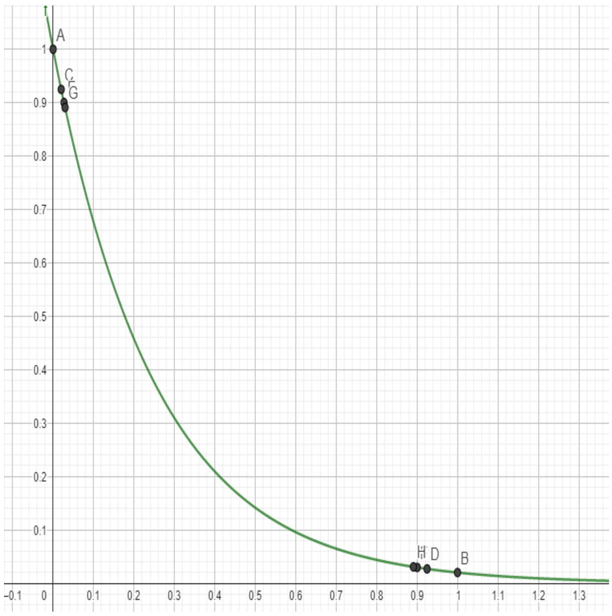

Figura 5 - primeiras tetrações de $b = \frac{1}{50}$.

Fonte: do autor (software GeoGebra).

Agora, temos os pontos representando as tetrações de $c = \frac{1}{500}$, pertencentes ao gráfico da função exponencial de base c:

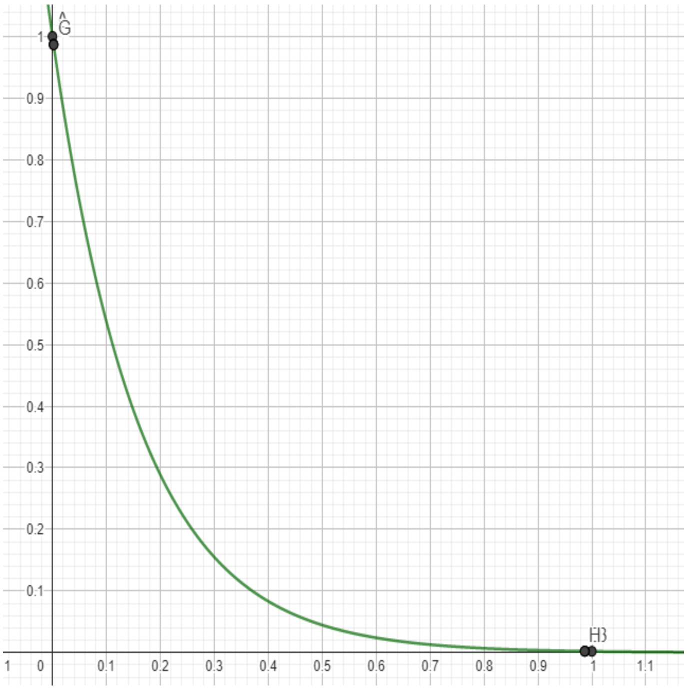

Figura 6 - primeiras tetrações de $c = \frac{1}{500}$.

Fonte: do autor (software GeoGebra).

Outra motivação é que, ao analisar os gráficos das funções de potenciação de n-ésimo grau, nota-se que as de grau par geram curvas que se assemelham a parábolas (com $(0,0)$ *sendo o vértice) e que as de grau ímpar geram sempre funções crescentes com* $(0,0)$ *sendo um ponto de inflexão (para* $n \geq 3$*). Acredita-se então que, de alguma forma, os tetrapoentes par/ímpar estejam relacionados com o comportamento das potências par/ímpar.*

A seguir, imagens ilustrando esses comportamentos:

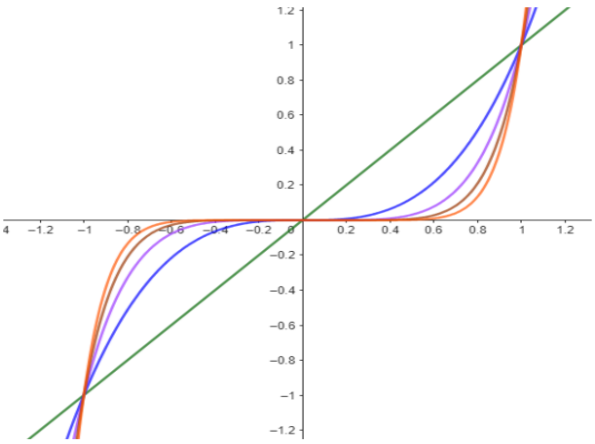

Figura 7 - Gráficos de funções de potenciação de grau ímpar

Fonte: do autor (software GeoGebra).

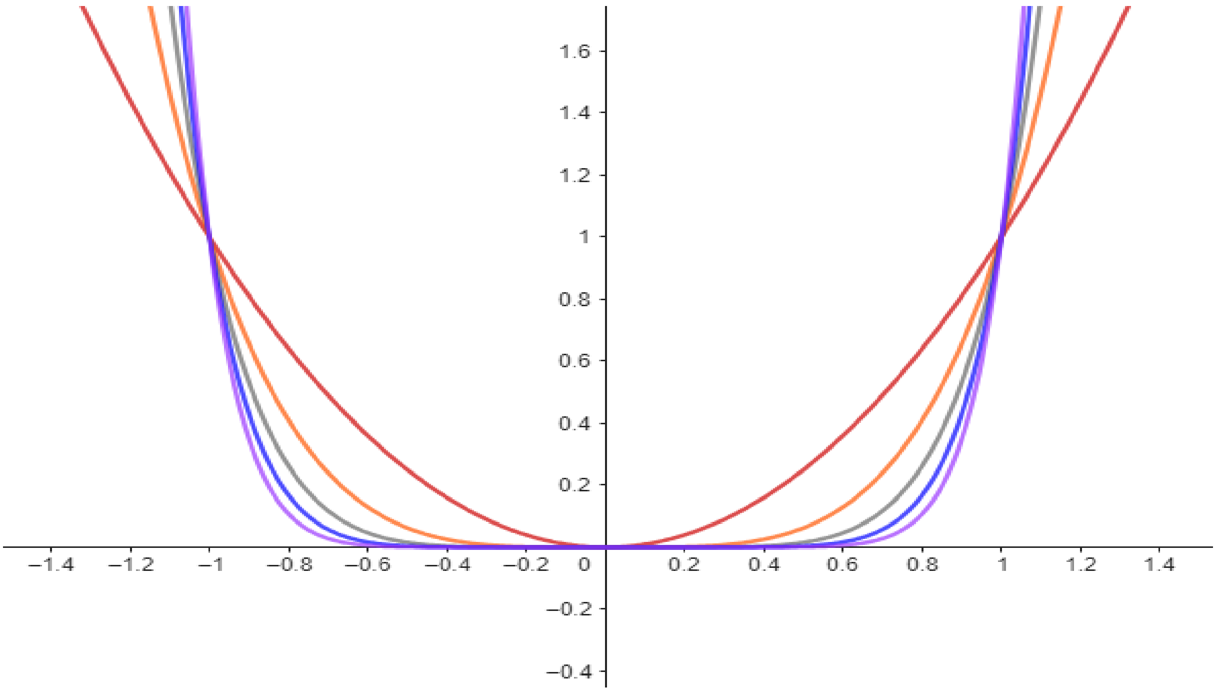

Figura 8 - Gráficos de funções de potenciação de grau par

Fonte: do autor (software GeoGebra).

Tentamos, demasiadamente, demonstrar o resultado, mas não obtivemos sucesso. A seguir, algumas das nossas tentativas.

Falsa Demonstração 1: *Vamos mostrar a afirmação por indução matemática.*

Passo Base: *Para $n = 1$, $f_1(x) = x$, e segue que $\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 0$. Para $n = 2$, o resultado segue da (2) da proposição 2.1.5.*

Hipótese de Indução: *Suponha que a afirmação seja válida para algum $k \geq 2$.* *Passo Indutivo:* *Temos*

$$f_{k+1}(x) = {}^{k+1}x = x^{{}^k x} = e^{\ln(x)\cdot {}^k x}.$$

Se k for par, então, segue que, pela continuidade das funções envolvidas:

$$\lim_{x\to 0^+} f_{k+1}(x) = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\cdot \lim\limits_{x\to 0^+} {}^k x} = e^{(-\infty)\cdot 1} = e^{-\infty} = 0.$$

Então a afirmação é verdadeira para $k+1$, que é ímpar. Se k for ímpar, então, o seguinte limite, é verdadeiro:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\ \cdot {}^k x = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} f_{k+1}(x) = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\cdot {}^k x} = e^0 = 1.$$

Assim, a afirmação é verdadeira para $k+1$, que é par. Por indução matemática, a afirmação deve ser verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$. ■

O único equívoco da falsa demonstração foi ter só afirmado que o limite abaixo é verdadeiro, para k ímpar:

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) \cdot {}^{k}x = 0.$$

Esse limite foi investigado, e, de acordo com softwares, aparenta ser verdadeiro. Assim, o problema se resume a provar esse limite para k ímpar. Se esse limite for provado, então a conjectura é verdadeira. É claro que tivemos tentativas de demonstrar o limite, a seguir uma delas.

Lema: *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Então, em condições de que $\lim_{x\to 0} {}^{n}x = 0$, a afirmação a seguir é verdadeira:*

$$\lim_{x\to 0} {}^{n}x \ln(x) = 0.$$

(Obs.: estamos considerando a tetração em bases reais positivas, logo esse limite é analisado apenas pela direita.)

Falsa Prova do Lema: *Note que, para $x \leq e^{-1}$, temos $\ln(x) \leq -1$. logo, pela desigualdade da tetração, temos:*

$${}^{n}x \geq x \implies {}^{n}x \ln(x) \leq x \ln(x) \implies -{}^{n}x \ln(x) \geq -x \ln(x).$$

Outrossim, como $\ln(x) \leq -1$, e ${}^{n}x > 0$:

$$-{}^{n}x \ln(x) \leq -{}^{n}x.$$

Assim, temos que, para todo $x \in (0, e^{-1}]$:

$$-x \ln(x) \leq -{}^{n}x \ln(x) \leq -{}^{n}x.$$

Pelo Teorema do Confronto, como: $\lim_{x\to 0^+} x \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} {}^{n}x = 0$, segue que $\lim_{x\to 0^+} -x \ln(x) = -\lim_{x\to 0^+} x \ln(x) = -0 = 0 = -\lim_{x\to 0^+} {}^{n}x = \lim_{x\to 0^+} -{}^{n}x$. Logo, $\lim_{x\to 0^+} -{}^{n}x \ln(x) = 0$. Mas, assim:

$$\lim_{x\to 0^+} {}^{n}x \ln(x) = -\lim_{x\to 0^+} -{}^{n}x \ln(x) = -0 = 0.$$

Portanto, a afirmação é verdadeira. ■

O erro da falsa prova acima foi a afirmação seguinte: "como $\ln(x) \leq -1$ e ${}^{n}x > 0$: $-{}^{n}x \ln(x) \leq -{}^{n}x$" Na verdade, a desigualdade deve ocorrer no sentido contrário.

Falsa Demonstração 2:

Como estamos avaliando o limite em $x \to 0^+$, podemos considerar, sem perda de generalidade, $x \in (0, e^{-e})$. Assim as subsequências ímpar e par de $({}^{n}x)$ convergem para valores distintos, pela Prova da Proposição 3.1.13. Mais ainda, todos os termos da subsequência *dos ímpares ficam menores que* e^{-1}, *e os da subsequência dos pares ficam maiores que* e^{-1}. *Seja g a função construída na demonstração da convergência das sequências de tetração. Pela caracterização da convergência das sequências de tetração, precisamos que alguma das subsequências par ou ímpar convirja para b, em que* $x^b = b$. *Logo,* $x = b^{\frac{1}{b}}$. *No entanto, veja que:* $\lim_{y\to 0^+} g(y) = \lim_{y\to 0^+} y^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0^+} e^{\ln(y)\frac{1}{y}}$. *Mas,* $\lim_{y\to 0+} \frac{\ln(y)}{y} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty\left(\frac{1}{0^+}\right) = -\infty\cdot\infty = -\infty$. *Logo,* $\lim_{y\to 0^+} g(y) = \lim_{y\to 0^+} e^{\ln(y)\frac{1}{y}} = e^{\lim_{y\to 0+}\frac{\ln(y)}{y}} = e^{-\infty} = 0$. *Assim sendo, quando* $y \to 0^+$, *temos* $g(y) \to 0$. *Logo, para* $x \to 0^+$, *temos* $x = b^{\frac{1}{b}} = g(b) \to 0$. *Como g é contínua, estritamente crescente em* $(0, e^{-1})$, *e* $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, *temos* $g\left(0, e^{-1}\right) = \left(0, g\left(e^{-1}\right)\right) = (0, e^{-e})$. *Assim, quando* $x = g(b) \to 0$, *temos* $b \to 0$. *Nisso, o limite b de uma das subsequências (par ou ímpar) deve se aproximar de zero, e o da outra, deve ser* $x^b \to x^0 = 1$. *Agora, como os termos da subsequência dos pares ficam todos menores que* e^{-1} *e são, é necessário que o seu limite seja menor ou igual a* e^{-1}. *Como os candidatos a limite da subsequência dos ímpares para* $x \to 0$ *são* 0 *e* 1, *é necessário que seja* 0, *uma vez que* $0 < e^{-1} < 1$. *Donde, a subsequência dos pares converge para* 1. *Logo, para* $n \in \mathbb{N}^*$ *ímpar, temos* $\lim_{x\to 0^+} {}^n x = 0$. *De fato, a subsequência das tetrações ímpares de* ${}^n x$, *quando* $x \to 0^+$, *converge para* 0, *portanto* ${}^n x \to 0$, *para todo n ímpar sempre que* $x \to 0^+$. *Analogamente, para* $n \in \mathbb{N}^*$ *par,* $\lim_{x\to 0} {}^n x = 1$. *(basta trocar 0 por 1 no argumento anterior, com exceção do* 0^+ *de "*$x \to 0^+$*"). Portanto, o resultado segue.* ■

A falha na demonstração está no início, em que se afirma: "precisamos que alguma das subsequências par ou ímpar convirja para b, em que $x^b = b$. *Logo,* $x = b^{\frac{1}{b}}$*". De fato, as subsequências pares, na realidade, são definidas pela recursão* $a_{n+1} = f(a_n) = x^{x^{a_n}}$. *Assim, se b é o limite de uma das subsequências, temos* $x^{x^b} = b$.

Outra tentativa de demonstrar:

Sabe-se que, nas condições da Falsa Demonstração 1, é possível provar que se a afirmação vale em k par, então vale em $k+1$ *ímpar. Agora, restaria apenas provar o caso em que k é ímpar* ($k \geq 3$). *É dado como conhecido que a Indução Matemática é equivalente à Indução Forte, e iremos assumir que a afirmação é verdadeira para todo* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $m \leq k$. *Inicialmente, veja que:* ${}^{k+1}x = x^{{}^k x} = (e^{\ln(x)})^{{}^k x} = e^{{}^k x \ln(x)}$. *Donde, por propriedades de continuidade do limite:*

$$\lim_{x\to 0^+}\left({}^{k+1}x\right) = e^{\lim_{x\to 0^+}\left({}^k x\ln(x)\right)}.$$

Portanto, o problema se resume a provar que $\lim_{x\to 0^+} {}^k x \ln(x) = 0$. *Perceba que:*

$$\lim_{x\to 0^+} {}^k x\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{{}^k x}} = \frac{-\infty}{\frac{1}{0^+}} = \frac{-\infty}{\infty}.$$

Em que utilizamos a hipótese de indução para fazer $\lim_{x\to 0^+} {}^k x = 0^+$ *(lembre-se que* ${}^k x > 0$ *para* *todo $x > 0$). Logo, pode-se utilizar L'Hôpital para avaliar tal limite. É o que fazemos a seguir:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}({}^k x\ln(x)) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{{}^k x}} = \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}(\ln(x))}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{{}^k x}\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\frac{d}{dx}({}^k x)}{({}^k x)^2}} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} -\frac{({}^k x)^2}{x\,{}^k x\left(\frac{d}{dx}({}^{k-1}x)\ln(x)+\frac{{}^{k-1}x}{x}\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} -\frac{{}^k x}{x\frac{d}{dx}({}^{k-1}x)\ln(x)+{}^{k-1}x}.
\end{aligned}$$

Disso, da hipótese de indução forte, e de propriedades de limites, segue que:

$$\lim_{x\to 0^+}{}^k x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{{}^k x}{x\frac{d}{dx}({}^{k-1}x)\ln(x)+{}^{k-1}x} = -\frac{0}{c+1}.$$

Em que $c = \lim_{x\to 0^+} x\frac{d}{dx}({}^{k-1}x)\ln(x)$. Nos acordemos que $-\frac{0}{c+1} = 0$ se, e somente se, c existe e $c \neq -1$. Portanto, o problema se resume a provar que a expressão $x\frac{d}{dx}({}^{k-1}x)\ln(x) \not\to -1$ quando $x \to 0^+$, e deve tender a qualquer outro valor, até mesmo $\pm\infty$. Para verificar que $x\frac{d}{dx}({}^{k-1}x)\ln(x) \not\to -1$ quando $x \to 0^+$, uma vez que temos $\ln(x) \to -\infty$, sabe-se que $\ln(x) < 0$ para x suficientemente próximo de zero. Logo, basta verificar que, para x suficientemente próximo de zero, tenha-se $\frac{d}{dx}({}^{k-1}x) < 0$. Assim, como $x > 0$, teríamos $x\frac{d}{dx}({}^{k-1}x)\ln(x) > 0$ para x suficientemente próximo de zero, donde $x\frac{d}{dx}({}^{k-1}x)\ln(x) \not\to -1$. E $\frac{d}{dx}({}^{k-1}x) < 0$ por sua vez, aconteceria se, para x suficientemente próximo de zero, f_{k-1} (função tetracional de grau $k-1$) fosse decrescente. Logo, o problema se resume mesmo a provar que f_{k-1} é decrescente em $(0, a)$ para algum $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alternativamente, como

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = 0,$$

pode-se provar que a derivada de f_{k-1} é limitada em alguma vizinhança de 0, isto é, que existem $M, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ tais que:

$$0 < x < \delta \implies |f'_{k-1}(x)| < M.$$

Mais uma tentativa de demonstrar: *É possível que o leitor tenha pensado em avaliar tal limite utilizando a definição. Suponha, por Hipótese de Indução, que o limite seja verdade para algum*

$n \in \mathbb{N}^*$ ímpar. Agora, queremos mostrar que a afirmação vale para $n+1$. Por hipótese de indução, temos, por definição, o seguinte: Para todo $\varepsilon > 0$, há $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - 0| < \delta \implies |{}^{n}x - 0| < \varepsilon.$$

Pela avaliação do limite pela esquerda (isto é, para $x > 0$), temos, equivalentemente:

$$0 < x < \delta \implies {}^{n}x < \varepsilon.$$

Agora, queremos provar, formalmente, que $\lim_{x\to 0^+}({}^{n+1}x) = 1$. Ou seja, que, para todo $\varepsilon > 0$, há $\delta > 0$ tal que:

$$0 < x < \delta \implies |{}^{n+1}x - 1| < \varepsilon.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que esse $\delta \leq 1$, assim:

$$0 < x < \delta \leq 1 \implies {}^{n+1}x < 1 \implies {}^{n+1}x - 1 < 0 \implies |{}^{n+1}x - 1| = 1 - {}^{n+1}x.$$

Nisso, $|{}^{n+1}x - 1| < \varepsilon \implies 1 - {}^{n+1}x < \varepsilon \implies 1 - \varepsilon < {}^{n+1}x$. Logo, pode-se provar, equivalentemente, que:

$$0 < x < \delta \implies {}^{n+1}x > 1 - \varepsilon.$$

Assim, pela Hipótese de Indução, pode-se pensar em tomar δ tal que $1 \geq \delta > 0$ e $0 < x < \delta \implies {}^{n}x < \varepsilon$. Desse modo, $x^{{}^{n}x} > x^{\varepsilon}$, pois $x < 1$. Assim, precisamos mostrar que:

$$x^{\varepsilon} \geq 1 - \varepsilon.$$

Ou, ainda, pelo menos encontrar $\alpha > 0$ tal que $x^{\alpha} \geq 1 - \varepsilon$. Supondo $0 < \varepsilon < 1$, obtemos $0 < 1 - \varepsilon < 1$

$$x^{\alpha} \geq 1 - \varepsilon \implies \alpha \leq \log_x(1-\varepsilon) = \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(x)}$$

Mas, $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{\ln(x)}\right) = \ln(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{-\infty} = 0 \implies \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(x)}\right) = 0$. Ou seja, é impossível encontrar tal $\alpha > 0$ pois $\alpha \leq \log_x(1-\varepsilon) = \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(x)} \to 0$ quando $x \to 0$, ou seja, $\alpha \leq 0$ (pois, nesse limite, x está tendendo a zero).

Conjectura 2.3.2. *Seja f_n uma função tetracional, com $n \in \mathbb{N}^*$. Então, as afirmações a seguir são verdadeiras:*

1. *Se n é ímpar, então, f_n é estritamente crescente e não possui nenhum ponto crítico;*
2. *Se n é par, então, f_n possui um único ponto crítico e um comportamento inicialmente decrescente e depois crescente, sendo esse ponto crítico um ponto de mínimo global.*

Motivação. *Também veio da observação dos gráficos, e pelo fato de ela ser verdadeira para $n \in \{1, 2, 3\}$. (Lembre-se que f_1 é a identidade, logo, é trivialmente estritamente crescente sem possuir pontos críticos).*

3 Sequências

Com viés de compreender alguns comportamentos ainda mais específicos da Tetração, e aumentar o ferramental para futuras investigações, nesse capítulo temos a intenção de investigar afundo sequências envolvendo a operação. O Apêndice A.1 apresenta definições e resultados envolvendo sequências.

3.1 Torre de potências

Definição 3.1.1. *Seja $x \in \mathbb{R}_+^*$. Definimos para tal x, a sequência $({}^n x)$, tal que:*

$$ {}^n x := x^{({}^{n-1}x)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. $$

Note que essa sequência corresponde exatamente às tetrações de x, em que o termo de índice n é exatamente a n-ésima tetração de x. A ideia dessa seção é encontrar o intervalo de convergência de $({}^n x)$. Isto é, responder à pergunta: "para quais valores de x a sequência $({}^n x)$ converge?".

Observação 3.1.2. *Nas condições da Definição acima, seja $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) := x^y$. Note que f_x é contínua e, pela definição da sequência: ${}^{n+1}x = f_x({}^n x)$. Logo, pelo Lema A.1.4, se x_n converge para $a \in \mathbb{R}$, então $a = f_x(a) = x^a$. Ou seja, $x^a = a$. Essa relação será frequentemente utilizada para identificarmos os possíveis pontos de convergência de $({}^n x)$.*

Observação 3.1.3. *Note que, se $x \geq 1$, então $({}^n x)$ é não-decrescente. Isso é verdade, pois, uma vez que ${}^2 x \geq x$, e ${}^{n+1}x \geq {}^n x$ implica $x^{({}^{n+1}x)} \geq x^{{}^n x}$, isto é, ${}^{n+2}x \geq {}^{n+1}x$. Ou seja:*

$$ {}^n x \leq {}^{n+1} x \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. $$

Com a proposição a seguir, determinamos o intervalo de convergência de $({}^n x)$ para $x \geq 1$.

Proposição 3.1.4. *Seja $x \in [1, \infty)$. Então, $x \in \left[1, e^{\frac{1}{e}}\right]$ se, e somente se, $({}^n x)$ converge.*

Prova. *Suponha que $x \in \left[1, e^{\frac{1}{e}}\right]$. Vamos provar que ${}^n x \leq e$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ utilizando indução matemática.*

*<u>Passo base **(n=1)**:</u> Sabe-se que $e^{\frac{1}{e}} < e$, pois $\dfrac{1}{e} < 1$. Assim, como $x \in \left[1, e^{\frac{1}{e}}\right]$, segue que ${}^1 x = x < e$, ou seja, é válido para $n = 1$.*

<u>Hipótese de indução:</u> Suponha que, para algum $k \in \mathbb{N}^*$, seja válido que ${}^k x \leq e$.

<u>Passo indutivo:</u> *Como $x \geq 1$, temos que f_x é não decrescente, logo ${}^k x \leq e$ e, portanto, $x^{{}^k x} \leq x^e \leq \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e^{\frac{e}{e}} = e$. Assim, ${}^{k+1}x = x^{{}^k x} \leq e$, a afirmação é válida para $k+1$. Segue que a sequência é limitada superiormente por e. Logo, $({}^n x)$ é não-decrescente e limitada superiormente. Segue, pela primeira afirmação do Lema A.1.4, que $({}^n x)$ é convergente.*

Reciprocamente, assuma que $({}^n x)$ converge para $a \in \mathbb{R}$. Pela Observação 3.1.2, temos $x^a = a$, ou seja, $a > 0$ e $x = a^{\frac{1}{a}}$.

Defina $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) := y^{\frac{1}{y}}$, e vamos encontrar os pontos críticos de g. Derivando g, obtemos, pela regra da cadeia:

$$g'(y) = \left(e^{\ln(y)\frac{1}{y}}\right)' = e^{\ln(y)\frac{1}{y}} \cdot \left(\frac{1}{y}\frac{1}{y} - \frac{\ln(y)}{y^2}\right) = y^{\frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y^2}\big(1 - \ln(y)\big)\right).$$

Logo, se y é um ponto crítico de g, temos:

$$y^{\frac{1}{y}-2}(1 - \ln(y)) = 0 \iff 1 = \ln(y) \iff y = e.$$

Também,

$$g'(y) < 0 \iff 1 - \ln(y) < 0 \iff 1 < \ln(y) \iff y > e.$$

Analogamente,

$$g'(y) > 0 \iff y < e.$$

Por essa análise do sinal da derivada, segue que e é o único ponto de máximo global de g. Logo, o valor máximo que g atinge é $g(e) = e^{\frac{1}{e}}$, isto é, $g(y) \leq e^{\frac{1}{e}}$ para todo $y \in \mathbb{R}_+^*$. Como temos que $x = a^{\frac{1}{a}} = g(a)$, segue que $x \leq e^{\frac{1}{e}}$. Disso, e como $x \geq 1$, segue que $x \in [1, e^{\frac{1}{e}}]$ e a prova está completa. ■

Em seguida, vamos analisar o caso em que $x \in (0, 1)$. O lema a seguir garante que todos os termos de $({}^n x)$ permanecem em $(0, 1)$:

Lema 3.1.5. *Seja $x \in (0, 1)$. Então, ${}^n x \in (0, 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.*

Prova. <u>*Passo base (**n=1**):*</u> *Temos ${}^1 x = x \in (0, 1)$.*

<u>*Hipótese de indução:*</u> *Assuma que ${}^n x \in (0, 1)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$.*

<u>*Passo indutivo:*</u> *Primeiramente, ${}^m x > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$ (pela Proposição 1.4.2). Assim, como $x \in (0, 1)$, utilizando que a exponencial de base x é decrescente, obtemos:*

$$0 < {}^n x \implies x^0 > x^{{}^n x} \implies 1 > {}^{n+1}x.$$

Logo, ${}^{n+1}x \in (0, 1)$. Portanto, o resultado segue por indução. ■

Agora, com esse resultado em mãos enunciamos um lema:

Lema 3.1.6. *Se $x \in (0,1)$, então, as subsequências ímpar e par de $({}^{n}x)$ são, respectivamente, crescente e decrescente. Isto é:*

$$x_1 < x_3 < x_5 < \dots \quad \text{e} \quad x_2 > x_4 > x_6 > \dots .$$

Mais ainda, $({}^{2n-1}x)$ e $({}^{2n}x)$ ambas convergem.

Prova. *Utilizaremos Indução Matemática para provar que, para todo $n \in N^*$, ${}^{n}x < {}^{n+2}x$ se n é ímpar e ${}^{n}x > {}^{n+2}x$ se n é par.*

*Passo base:**(n=1):** Pela Desigualdade da Tetração, como $x \neq 1$, segue que*

$${}^{1}x = x < {}^{3}x.$$

Hipótese de indução: Suponha que, para algum $k \in \mathbb{N}^*$ a afirmação seja verdadeira. Ou seja, se k for ímpar, então ${}^{k}x < {}^{k+2}x$. Caso contrário, a desigualdade acontece no sentido contrário.

Passo indutivo: Vamos fazer o passo indutivo em duas etapas. Primeiro, caso k seja ímpar, e, depois, caso k seja par. k é ímpar: Lembre-se que a exponencial de base x, nas condições desse lema, é decrescente, logo:

$${}^{k}x < {}^{k+2}x \implies x^{{}^{k}x} > x^{({}^{k+2}x)} \implies {}^{k+1}x > {}^{k+3}x = {}^{(k+1)+2}x.$$

Logo, a afirmação é verdade para $k+1$, que é par. k é par: Veja que, analogamente, se ${}^{k}x > {}^{k+2}x$, então ${}^{k+1}x < {}^{k+3}x = {}^{(k+1)+2}x$. Assim, a afirmação é verdadeira para $k+1$, que é ímpar. Portanto, por Indução Matemática, a afirmação vale para todo $n \in \mathbb{N}^*$, logo, as subsequências ímpar e par são crescente e decrescente respectivamente.

Mais ainda, as subsequências ambas convergem. De fato, pelo Lema anterior, ambas as subsequências são limitadas inferiormente e superiormente por 0 e 1 respectivamente. Assim, como temos uma das subsequências não-decrescente e outra não crescente, segue, pela Proposição A.1.5, que ambas convergem.

■

Proposição 3.1.7. *Seja $x \in (0,1)$, $a = \lim_{n\to\infty}(x_{2n-1})$ e $b = \lim_{n\to\infty}(x_{2n})$ (esses valores existem pelo lema anterior). Então:*

$$x^a = b \quad \text{e} \quad x^b = a.$$

Prova. *Como f_x é contínua, temos:*

$$b = \lim_{n\to\infty}(x_{2n}) = \lim_{n\to\infty}(f_x(x_{2n-1})) = f_x(\lim_{n\to\infty}(x_{2n-1})) = f_x(a) = x^a.$$

Analogamente, prova-se que $x^b = a$.

■

Observação 3.1.8. *Nas condições da Proposição anterior, temos:*

$$a = x^b = x^{x^a} \qquad \text{e} \qquad b = x^a = x^{x^b}.$$

Com isso, temos que a e b são os limites das subsequências ímpar e par de (a_n) apenas se forem raízes da função real dada por

$$h_x(y) := y - x^{x^y}.$$

Isto é, apenas se $h_x(a) = h_x(b) = 0$. Então, se h_x admitir uma única raiz, seguirá que $a = b$, e, logo, $({}^n x)$ convergirá, pela afirmação (3) da Proposição A.1.5. Logo, o problema se resume a analisar as raízes da função h_x. Utilizaremos essa análise para provar a convergência das sequências de tetração no caso $0 < x < 1$. Para isso, precisaremos das ferramentas dos próximos resultados que iremos enunciar e provar. Esses resultados foram retirados de (SILVA; SANTOS; SOARES, 2020).

Lema 3.1.9. *Sejam $x \in (0, 1)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(y) := ye^y$, e $\psi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_-$ dada por $\psi_x(y) := x^y \ln(x)$. Então, as afirmações abaixo são verdadeiras:*

(1) -1 é o único ponto crítico de ϕ, e $-e^{-1}$ é o valor de mínimo global de ϕ;

(2) ψ_x é bijetiva.

(Obs.: Utilizamos a notação $\mathbb{R}^*_- := (-\infty, 0)$. Lembre-se que $0 < x < 1$, então $\ln(x) < 0$. Sendo assim, ψ_x está bem definida.)

Prova. ***(1):*** *Para analisar o mínimo de ϕ, analisamos os pontos críticos. A derivada de ϕ é $\phi'(y) = e^y + ye^y = (y + 1)e^y$. Logo,*

$$\phi'(y) = 0 \iff (y + 1)e^y = 0 \iff y + 1 = 0 \iff y = -1.$$

Assim sendo, -1 é o único ponto crítico de ϕ. Também temos:

$$\phi'(y) > 0 \iff y + 1 > 0 \iff y > -1.$$

Analogamente,

$$\phi'(y) < 0 \iff y < -1.$$

Logo, $\phi(-1) = -e^{-1}$ é o valor de mínimo de $\phi(\mathbb{R})$.

(2): *Não é de difícil verificação, uma vez que ψ_x é inversível de maneira simples. De fato, note que*

$$z = x^y \ln(x) \iff \frac{z}{\ln(x)} = x^y \iff y = \log_x\left(\frac{z}{\ln(x)}\right).$$

Agora, defina $\psi_x^* : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ *por* $\psi_x^*(y) := \log_x\left(\dfrac{y}{\ln(x)}\right)$. *Basta notar que* $\psi_x \circ \psi_x^* = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_-^*}$ *e que* $\psi_x^* \circ \psi_x = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. *Para isso, tome* $y \in \mathbb{R}_-^*$. *Então:*

$$(\psi_x \circ \psi_x^*)(y) = \psi_x(\psi_x^*(y)) = \psi_x\left(\log_x\left(\frac{y}{\ln(x)}\right)\right) =$$

$$= x^{\log_x\left(\frac{y}{\ln(x)}\right)}\ln(x) = \frac{y}{\ln(x)}\ln(x) = y = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_-^*}(y).$$

Agora, dado $y \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$(\psi_x^* \circ \psi_x)(y) = \psi_x^*(\psi_x(y)) = \psi_x^*(x^y \ln(x)) =$$

$$= \log_x\left(\frac{x^y \ln(x)}{\ln(x)}\right) = \log_x(x^y) = y = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(y).$$

Como ψ_x *possui inversa à esquerda e à direita,* ψ_x *é bijetiva, como queríamos.* ■

Proposição 3.1.10. *Sejam* $x \in (0,1)$ *e* $h_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por* $h_x(y) = y - x^{x^y}$. *Se* $x \in [e^{-e}, 1)$, *então* h_x *é injetiva.*

Prova. *Calculamos a derivada de* h_x:

$$h_x'(y) = \frac{d}{dy}h_x(y) = \frac{d}{dy}(y - x^{x^y}) = 1 - \frac{d}{dy}\left(e^{\ln(x)x^y}\right) = 1 - e^{\ln(x)x^y}\left(\ln(x)x^y\ln(x)\right).$$

Nas condições da segunda afirmação do Lema anterior, como ψ_x *é bijetiva, é possível fazer, sem perda de generalidade, a mudança de variável* $z := \psi_x(y) = x^y \ln(x)$, *ou seja,* $y = \psi_x^{-1}(z)$. *Note que:*

$$h_x'(y) = h_x'\left(\psi_x^{-1}(z)\right) = 1 - ze^z \ln(x).$$

Como temos $x < 1$, *segue que* $\ln(x) < 0$. *Disso e da afirmação* (1) *do Lema anterior, temos:*

$$ze^z \geq -e^{-1} \implies ze^z \ln(x) \leq -e^{-1}\ln(x) \implies -ze^z\ln(x) \geq e^{-1}\ln(x).$$

Logo,

$$h_x'\left(\psi_x^{-1}(z)\right) = 1 - ze^z\ln(x) \geq 1 + e^{-1}\ln(x).$$

Primeiramente suponha $x > e^{-e}$. *Então, temos* $\ln(x) > -e$. *Assim, nesse caso:*

$$h_x'(\psi_x^{-1}(z)) = 1 - ze^z\ln(x) \geq 1 + e^{-1}\ln(x) > 1 + e^{-1}(-e) = 1 - 1 = 0.$$

Logo, $h_x'\left(\psi_x^{-1}(z)\right) > 0$. *Como* ψ_x^{-1} *é bijetiva, temos que, para esses valores de* x, h_x *é estritamente crescente, portanto,* h_x *é injetiva. Nos resta analisar o caso em que* $x = e^{-e}$. *Nesse caso, temos:*

$$h_x'(\psi_x^{-1}(z)) = 1 - ze^z\ln(x) \geq 1 + e^{-1}\ln(x) = 1 + e^{-1}(-e) = 1 - 1 = 0.$$

Assim, $h_x'\left(\psi_x^{-1}(z)\right) = 0$. *Entretanto, pela afirmação* (1) *do Lema anterior, há um único valor* z_0 *tal que* $z_0 e^{z_0} = -e^{-1}$, *sendo e esse valor* $z_0 = -1$ *(o único valor em que a última desigualdade* *não ocorre no sentido estrito). Como $z = \psi_x(y)$, e ψ_x é bijeção, temos que há um único valor $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\psi_x(y_0) = -1$. Logo, $y = y_0$ é o único ponto em que $h'_x(y) = 0$, e, de resto, $h'_x(y) > 0$. Assim, h_x é estritamente crescente com exceção de um único ponto, donde h_x é injetiva. Assim, segue que h_x é injetiva sempre que $x \in [e^{-e}, 1)$.* ■

Consequência 3.1.11. *Seja $x \in [e^{-e}, 1)$. Então, $({}^n x)$ converge.*

Prova. *De fato, como $x \in [e^{-e}, 1)$, segue, da Proposição anterior, que h_x é injetiva, e, portanto, admite uma única raiz. Logo, pela Observação 3.1.8, segue que $({}^n x)$ converge.* ■

Resta-nos verificar que, se $x \in (0, e^{-e})$, então $({}^n x)$ não converge. Para isso irá se fazer uso do seguinte lema. Tal lema utiliza (SILVA; SANTOS; SOARES, 2020) como referência.

Lema 3.1.12. *Sejam $x \in (0, 1)$ e h_x definida como na última Proposição. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $r \in \mathbb{R}$ é tal que $r \geq e^{-1}$, então $x^{x^r} > e^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{e^{-\frac{1}{r}}\right\}$;*
2. *Se $0 < x < e^{-e}$, então $h_x(e^{-1}) \neq 0$.*

Prova. *Seja $r > 0$ qualquer, e defina a seguinte função (a depender de r, assim como h_x é dependente de x):*

$$\begin{array}{cccc} j_r: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^{x^r}. \end{array}$$

(1) : *Vamos calcular a derivada de j_r e analisar o sinal:*

$$j'_r(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{x^r}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(x)x^r}\right) = e^{\ln(x)x^r}\frac{d}{dx}(\ln(x)x^r) =$$
$$= x^{x^r}\left(\frac{x^r}{x} + \ln(x)rx^{r-1}\right) = x^{r-1}x^{x^r}(1 + r\ln(x)).$$

Logo,

$$j'_r(x) = 0 \iff 1 + r\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{-1}{r} \iff x = e^{\frac{-1}{r}}.$$

Assim, $e^{-\frac{1}{r}}$ é o único ponto crítico de j_r. Agora, analisamos os intervalos de crescimento/decrescimento:

$$j'_r(x) > 0 \iff 1 + r\ln(x) > 0 \iff r\ln(x) > -1 \iff \ln(x) > \frac{-1}{r} \implies x > e^{-\frac{1}{r}}.$$

Analogamente,

$$j'_r(x) < 0 \iff x < e^{-\frac{1}{r}}.$$

Sendo assim, $e^{-\frac{1}{r}}$ é o único ponto de mínimo global de j_r. Ou seja, $j_r(x) > j_r(e^{-\frac{1}{r}})$ para todo $x \neq e^{-\frac{1}{r}}$. Logo, se $r \geq e^{-1}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{e^{-\frac{1}{r}}\right\}$, então:

$$j_r(x) > j_r(e^{-\frac{1}{r}}) \implies x^{x^r} > (e^{-\frac{1}{r}})^{(e^{-\frac{1}{r}})^r} = (e^{-\frac{1}{r}})^{e^{-1}} = e^{-\frac{1}{er}} \implies x^{x^r} > e^{-\frac{1}{er}}.$$

Mas, note que:

$$r \geq e^{-1} \implies \frac{1}{r} \leq e \implies -\frac{1}{r} \geq -e.$$

Assim sendo, temos

$$x^{x^r} > e^{-\frac{1}{er}} \geq e^{-\frac{e}{e}} = e^{-1}.$$

Ou seja, $x^{x^r} > e^{-1}$.

(2) : *Seja* $x \in (0, e^{-e})$. *Perceba que, para* $r = e^{-1}$, *temos:* $e^{-\frac{1}{r}} = e^{-\frac{1}{e^{-1}}} = e^{-e}$. *Pela afirmação* (1), *segue que:*

$$x^{x^r} = x^{x^{e^{-1}}} > e^{-1}.$$

Lembre-se que $e^{-1} - x^{x^{e^{-1}}} = h_x(e^{-1})$. *Logo,* $h_x(e^{-1}) = e^{-1} - x^{x^{e^{-1}}} < 0$, *ou seja,* $h_x(e^{-1}) \neq 0$, *e o resultado segue.* ■

Nos resta uma última proposição para que, no próximo teorema, garantimos o intervalo de convergência das sequências de tetração. Nela, irá se fazer uso do último lema, e concluir a respeito da divergência quando $x \in (0, e^{-e})$:

Proposição 3.1.13. *Seja* $x \in (0, e^{-e})$. *Então,* $({}^n x)$ *diverge.*

Prova. *Vamos provar que, nesse caso, as subsequências pares e ímpares convergem para valores distintos e, pelo item* (3) *da A.1.5, a sequência* $({}^n x)$ *deve divergir.*

Para isso, considere a seguinte afirmação:

Afirmação: Sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$. *Então:*

$${}^{2m-1}x < e^{-1} < {}^{2n}x.$$

Justificativa: Primeiro, vamos provar que ${}^{2n}x > e^{-1}$ *por indução.*

Passo base ***(n=1):*** *Perceba que:*

$${}^{2n}x = {}^{2}x = x^{x^1} > e^{-1}.$$

(Lembre-se que, nas condições do Lema anterior, a desigualdade segue pois temos $r = 1$ *e* $x \neq e^{-1}$, *pois* $x < e^{-e} < e^{-1}$.*) Logo, a afirmação é verdadeira para* $n = 1$.

Hipótese de indução: Suponha que, para algum $k \in \mathbb{N}^*$, *tenhamos* ${}^{2k}x > e^{-1}$.

Passo indutivo: Seja $r = {}^{2k}x$, *e veja que:*

$${}^{2(k+1)}x = {}^{2k+2}x = x^{({}^{2k+1}x)} = x^{x^{({}^{2k}x)}} = x^{x^r}.$$

Assim sendo, estamos nas hipóteses do lema anterior, pois, nessas condições, temos $r = {}^{2k}x > e^{-1}$, *assim,* $-\dfrac{1}{r} > -e$ *e, como* $x < e^{-e} < e^{-\frac{1}{r}}$, *temos que* $x \neq e^{-\frac{1}{r}}$. *Logo, pelo Lema, conseguimos:*

$${}^{2(k+1)}x = x^{x^{{}^{2k}x}} > e^{-1}.$$

Logo, a afirmação, por indução, vale para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Agora, vamos provar que ${}^{2m-1}x < e^{-1}$. De fato, veja que, para $m = 1$, temos:

$$ {}^{2m-1}x = {}^{1}x = x < e^{-e} < e^{-1}. $$

Já, para $m \geq 2$, como provado anteriormente, ${}^{2m-2}x > e^{-1}$ (pois $2m - 2$ é par).

Assim, como $0 < x < 1$, temos que $x^{{}^{2m-2}x} < x^{e^{-1}}$. Disso, e como $x < e^{-e}$, temos:

$$ {}^{2m-1}x = {}^{2m-1}x = x^{({}^{2m-2}x)} < x^{e^{-1}} < (e^{-e})^{e^{-1}} = e^{-1} \implies {}^{2m-1}x < e^{-1}. $$

Assim, a afirmação é verdadeira. Disso, e pelos itens (1) *e* (2) *da Proposição A.1.5, temos que ${}^{2n-1}x \to a$ e ${}^{2n}x \to b$, e sabemos que ${}^{2n-1}x < e^{-1} < {}^{2n}x$ acontece para todo $n \in \mathbb{N}^*$, e implica que $a \leq e^{-1} \leq b$. Ora, mas pela afirmação* (2) *do Lema anterior, e pela Observação 3.1.8, temos $a \neq e^{-1}$ e $b \neq e^{-1}$ (pois $h_x(a) = h_x(b) = 0 \neq h_x(e^{-1})$), logo:*

$$ a < e^{-1} < b \implies a < b \implies a \neq b. $$

Assim, as subsequências pares e ímpares convergem a valores distintos, e, pela equivalência supracitada no início da prova, segue que $({}^{n}x)$ diverge, como queríamos provar. ■

Finalmente, jutando todas os resultados dessa seção, torna-se possível estabelecer o seguinte Teorema acerca do intervalo de convergência das sequências de tetração:

Teorema 3.1.14. *Seja $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$. Então $({}^{n}x)$ converge se, e somente se, $x \in [e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$.*

3.2 Tetração no infinito

Com o que já temos em mãos, já podemos pensar em definir o que seria a tetração infinita de um número. Inicialmente, para esse feito, apresentamos a seguinte proposição:

Proposição 3.2.1. *Seja $x \in [1, \infty)$, e $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Então,*

$$ {}^{n+1}x \geq {}^{n}x. $$

Ou seja, $({}^{n}x)$, é não-decrescente. Mais ainda,

$$ {}^{n+1}x = {}^{n}x \iff x = 1. $$

Isto é, $({}^{n}x)$ é crescente se, e somente se, $x > 1$.

Prova. *Caso $n \in \{-1, 0\}$, temos:*

$$ {}^{0}x = 1 > 0 = {}^{-1}x \quad \text{e} \quad {}^{1}x = x \geq 1 = {}^{0}x. $$

Agora, caso $n \in \mathbb{N}^*$, é possível utilizar indução. Perceba que, aplicando a exponencial de base x dos dois lados, temos:

$$x \geq 1 \implies x^x \geq x \implies {}^2x \geq x.$$

Assuma, como Hipótese de Indução, que ${}^{m+1}x \geq {}^m x$, para algum $m \geq 1$. Logo, pelo mesmo argumento, como $x \geq 1$, temos:

$$x^{({}^{m+1}x)} \geq x^{({}^m x)} \implies {}^{m+2}x \geq {}^{m+1}x.$$

Segue que ${}^{n+1}x \geq {}^n x$. Mais ainda, é claro que

$$x = 1 \implies {}^{n+1}x = {}^n x.$$

Agora, assuma que ${}^{n+1}x = {}^n x$ e suponha, para obter contradição, que $x > 1$. Isso é uma contradição se $n \in \{-1, 0\}$ (pois ${}^1x = x > 1 = {}^0x = 1 \neq 0 =^{-1} x$) e segue que $n \in \mathbb{N}^*$. Assim, temos:

$${}^{n+1}x = {}^n x \implies x^{({}^n x)} = x^{({}^{n-1}x)} \implies {}^n x = {}^{n-1}x.$$

(Lembre-se que, como $x > 1$, a exponencial de base x é injetiva). Analogamente, temos:

$${}^n x = {}^{n-1}x \implies {}^{n-1}x = {}^{n-2}x.$$

Repetindo o mesmo processo até que se chegue a ${}^2x$ do lado esquerdo, conclui-se o seguinte:

$${}^1x = {}^0x = 1 \implies x = 1.$$

que é uma contradição (supusemos que $x > 1$). Logo, é necessário que $x = 1$, como queríamos provar. ■

Corolário 3.2.2. *Se $x \in \left(e^{\frac{1}{e}}, \infty\right)$, então:*

$$\lim_{n\to\infty} {}^n x = \infty.$$

Prova. *Primeiramente, pela Proposição anterior, temos que $({}^n x)$ é não decrescente, e, pelo Teorema 3.1.14, $({}^n x)$ diverge. Logo, nesse caso, $\{{}^n x\}$ não é limitado superiormente. Caso contrário, pela afirmação (1) da Proposição A.1.5, como $({}^n x)$ é não decrescente, $({}^n x)$ seria convergente.*

Seja $M > 0$. Então, como $\{x_n\}$ não é limitado superiormente, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que ${}^N x > M$. Como $({}^n x)$ é não decrescente, temos que, se $n \in \mathbb{N}$ e $n > N$, então ${}^n x \geq {}^N x > M$. Assim:

$$n > N \implies {}^n x > M.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} {}^n x = \infty$. ■

Observação 3.2.3. *O limite das sequências $({}^n x)$ (em $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) é bem definido (sendo um valor finito ou infinito) se, e somente se. $x \in [e^{-e}, \infty)$. De fato, se $x < e^{-e}$, pela prova da Proposição 3.1.13, as subsequências pares e ímpares convergem a valores distintos, logo, $({}^n x)$ não tem limite bem definido.*

Essa Observação motiva a definição a seguir.

Definição 3.2.4. *Seja $x \in [e^{-e}, \infty)$. Definimos:*

$$^{\infty}x := \lim_{n\to\infty} {^n}x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Proposição 3.2.5 (Cota Superior para as Torres Convergentes)**.** *Seja $x \in \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$. Então:*

$$^{\infty}x \leq e.$$

Prova. *Note que $({^n}x)$ converge pelo último Teorema, e seja $\mathbb{R} \ni b := {^\infty}x$. Pelo Lema A.1.4, $x^b = b$. Logo, $x = b^{\frac{1}{b}}$, e $b > 0$. Considere a função g dada por $g(y) = y^{\frac{1}{y}}$, com domínio em $\mathbb{R}_+^*$. Logo, $x = g(b)$. Ainda, como g possui apenas dois intervalos de crescência e decrescência, a pré-imagem $g^{-1}(\{x\})$ consiste de, no máximo, dois elementos. Ou seja, há até dois valores $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$ (não necessariamente distintos) tais que $g(b_1) = g(b_2) = x$, com $b_1 \leq b_2$. Ainda, se $b_1 < b_2$, então $b_1 < e < b_2$. Isso ocorre pois, os intervalos de crescimento e decrescimento de g[1] são, justamente, crescente em $(0, e]$ e decrescente em $[e, \infty)$.*

<u>Caso $x \in [e^{-e}, 1]$</u> perceba que g restrita a $(0, e)$ é crescente, g restrita a (e, ∞) é decrescente e $\lim_{y\to\infty} g(y) = \lim_{y\to\infty} y^{\frac{1}{y}} = 1$.

Dado $y \in (e, \infty)$ temos, pelas afirmações notadas pelos itens acima, que $g(y) > 1$. Logo, $g(y) \neq x$ para cada $y \in (e, \infty)$. Sendo assim, $g^{-1}(\{x\})$ é unitário (pois o único outro valor possível se encontra no intervalo em que g é crescente), então $b_1 = b_2 = b$. Assim, $b \leq 1$. De fato, caso contrário, teríamos

$$b > 1 \implies x = b^{\frac{1}{b}} > 1^{\frac{1}{b}} = 1.$$

que é uma contradição, logo $b \leq 1 \leq e$.

<u>Caso $x \in \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right]$</u>: se tivermos $b_1 = b_2 = b$, então, $b = e$ pois, como g é crescente em $(1, e)$ e decrescente em (e, ∞), e $\lim_{y\to\infty} g(y) = 1$, $g(e) = e^{\frac{1}{e}}$ é o único valor em $\left(1, e^{\frac{1}{e}}\right]$ tal que sua pré-imagem é unitária. Segue que, dentro desse caso, $b \leq e$.

Agora, caso $b_1 < b_2$, seja $c := \min\{b_1, b_2\}$ e vamos mostrar, por indução, que ${^n}x < c$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Primeiro,

$$1 < x = c^{\frac{1}{c}} \implies c > 1^c = 1 \implies c > 1.$$

(lembre-se que $c \in g^{-1}\{x\}\}$). Assim, iremos usar a propriedade da exponencial crescente de base c e, também, de base $x > 1$.

[1] Essa função apareceu na prova da Proposição 3.1.4.

Passo Base (n=1):

$$^{1}x = x = c^{\frac{1}{c}} < c^{1} = c \implies {}^{1}x < c.$$

Hipótese de indução: Suponha que $^{m}x < c$, *para algum* $m \in \mathbb{N}^*$.

Passo indutivo:

$$^{m}x < c \implies x^{^{m}x} < x^{c} = c \implies {}^{m+1}x < c.$$

Assim, como $^{n}x < c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$, *temos que* (^{n}x) *satisfaz* $x_n < c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$. *Segue que* $\lim_{n\to\infty}(^{n}x) \leq c \leq e$, *e concluímos que* $^{\infty}x \leq e$. ■

Observação 3.2.6. *Nas condições da prova da proposição anterior, note que* $^{\infty}x = c$.

Exemplo 3.2.7. *1.* $^{\infty}\left(\sqrt{2}\right) = 2$*;*

2. $^{\infty}\left(e^{\frac{1}{e}}\right) = e$*;*

3. $^{\infty}\left(\sqrt{3}\right) = \infty$*;*

4. $^{\infty}(e^{-e}) = e^{-1}$*;*

5. $^{\infty}1 = 1$.

Prova. (1) : *De fato, como* $1 \leq \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{e}}$ *(pois* $e^{\frac{1}{e}}$ *é o valor máximo global da função real definida por* $g(y) = y^{\frac{1}{y}}$, *como visto na prova da Proposição 3.1.4), a sequência* $^{n}\left(\sqrt{2}\right)$ *deve convergir. Assim sendo, se* $b := \lim_{n\to\infty} {}^{n}\left(\sqrt{2}\right) = {}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)$, *então:* $\left(\sqrt{2}\right)^{b} = b$. *Assim,* $b \in \{2, 4\}$, *pois:*

$$\left(\sqrt{2}\right)^{2} = 2 \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{2}\right)^{4} = 4.$$

(Lembre-se que $g^{-1}\left\{\left(\sqrt{2}\right)\right\}$ *admite até dois valores pela prova da proposição anterior). Como* $^{\infty}\left(\sqrt{2}\right) \leq e$, *segue que* $^{\infty}\left(\sqrt{2}\right) = 2$.

(2) : *Seja* $c := {}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{e}}\right)$. *Por um argumento similar à prova da afirmação anterior, conclui-se que*

$$e^{\frac{1}{e}} = c^{\frac{1}{c}}.$$

Assim, utilizando a mesma função g da prova da proposição 3.1.4, $e^{\frac{1}{e}} = g(c)$ *que é o valor máximo global de g, e isso ocorre somente se, e somente se,* $c = e$, *que é o único ponto de máximo global da função. Logo,* $^{\infty}\left(e^{\frac{1}{e}}\right) = e$.

(3) : *Temos* $(e^{\frac{1}{e}})^2 = e^{\frac{2}{e}} < e < 3 \implies (e^{\frac{1}{e}})^2 < 3 \implies e^{\frac{1}{e}} < \sqrt{3}$. *Pela consequência 3.2.2, segue que* $^{\infty}(\sqrt{3}) = \infty$.

(4) : *Seja* $d := {}^{\infty}(e^{-e})$. *Usando o mesmo argumento das outras afirmações, temos* $d^{\frac{1}{d}} = e^{-e} = g(d)$. *Como* $\lim_{y\to\infty} y^{\frac{1}{y}} = 1$, *e* $g(y)$, *restrita a* $y \in (0, e)$ *é crescente, a pré-imagem* $g^{-1}(z)$, *para* $z \in (0, 1)$, *deve ser unitária. Veja que:*

$$g(e^{-1}) = \left(e^{-1}\right)^{\frac{1}{e^{-1}}} = e^{-\frac{1}{e^{-1}}} = e^{-e} = g(d).$$

Logo, conclui-se que $d = e^{-1}$, *ou seja,* ${}^{\infty}(e^{-e}) = e^{-1}$.

(5) : *A sequência* $({}^{n}1)$ *é constante igual a* 1, *logo, trivialmente converge a* 1. *Portanto,* ${}^{\infty}1 = 1$. ■

Agora, veremos um resultado que irá auxiliar a assegurar que os valores de convergência de ${}^{\infty}x$ estão sempre contidos em um intervalo fechado:

Teorema 3.2.8. *Sejam* $r, s \in [e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$. *Então:*

$$r < s \iff {}^{\infty}r < {}^{\infty}s.$$

Em outras palavras, "tetração por infinito" é uma função crescente.

Demonstração. *Primeiramente, pelo Teorema 3.1.14, temos* $\{{}^{\infty}r, {}^{\infty}s\} \subset \mathbb{R}$. *Assim, sejam* $t, u \in \mathbb{R}$ *tais que* $t = {}^{\infty}r$ *e* $u = {}^{\infty}s$. *Considere a função g nas condições da prova da Proposição anterior. Pela caracterização das convergências, segue que*

$$r = t^{\frac{1}{t}} = g(t) \quad \text{e} \quad s = u^{\frac{1}{u}} = g(u).$$

Ainda, pelo estudo do sinal de g, ela é crescente em $(0, e]$ *e, pela Proposição anterior, temos* $t, u \in (0, e]$. *Agora, vamos demonstrar a dupla implicação do enunciado desse Teorema:*

$(\Longleftarrow)$: *Como g, restrita a* $(0, e]$ *é crescente, segue que:*

$${}^{\infty}r < {}^{\infty}s \implies t < u \implies g(t) < g(u) \implies r < s.$$

$(\Longrightarrow)$: *Suponha, por contrapositiva, que* ${}^{\infty}r \geq {}^{\infty}s$. *Então,*

$$t \geq u \implies g(t) \geq g(u) \implies r \geq s.$$

■

Corolário 3.2.9. *Seja* $x \in [e^{-e}, \infty)$. *Então* ${}^{\infty}x \geq e^{-1}$. *Mais ainda, se* $x \in [e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$, *então,* ${}^{\infty}x \in [e^{-1}, e]$.

Prova. *Caso* $x \in (e^{\frac{1}{e}}, \infty)$, *temos* ${}^{\infty}x = \infty > e^{-1}$. *Agora, se* $x \in [e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$, *então,* ${}^{\infty}x \leq e$, *pela última Proposição e, pelo Teorema anterior, temos*

$$x \geq e^{-e} \implies {}^{\infty}x \geq {}^{\infty}(e^{-e}) = e^{-1}.$$

Concluí-se que ${}^{\infty}x \in [e^{-1}, e]$. ■

Agora, vamos exibir um gráfico indicando os valores de ${}^{\infty}x$ para cada $x \in \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$. Pelo Teorema 3.1.14, sabemos que esses são exatamente os valores em que a sequência de tetrações converge e, pela prova da Proposição 3.2.5, ${}^{\infty}x$ é o único valor $y_x \in g^{-1}\{x\}$ tal que $y_x \leq e$, sendo $g(y) = y^{\frac{1}{y}}$ para cada $y > 0$. Sendo assim, o gráfico dos pontos de convergência se resume a fazer o gráfico da inversa local de g, ao fazer a restrição de domínio para $[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$ e contradomínio $[e^{-1}, e]$, que se encontra a seguir:

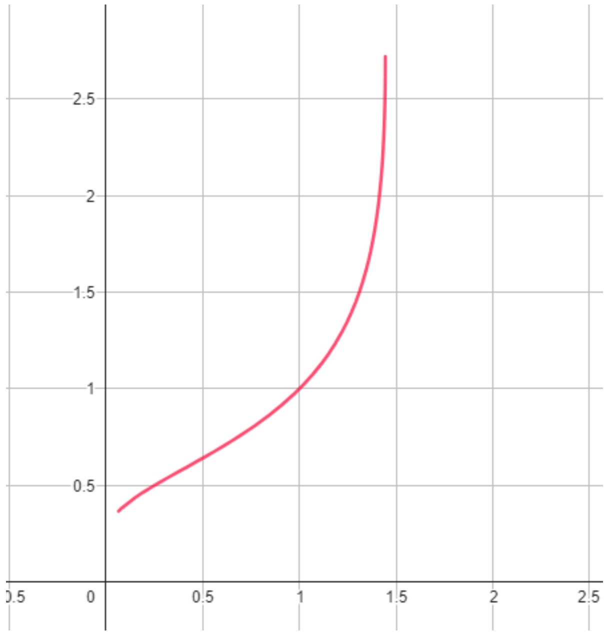

Figura 9 - Gráfico da função $y = {}^{\infty}x$, com $x \in [e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$.

Fonte: do autor (software GeoGebra).

4 Radiciação

Com esse capítulo, pretendemos trabalhar com uma noção análoga à raiz quadrada, ou ainda mesmo raiz n-ésima, mas para a tetração. Por motivos de recordação e comparação, abaixo segue a definição de raiz n-ésima, o inverso da potenciação n-ésima:

Para n ímpar, temos:

$$\sqrt[n]{a} := r \iff r^n = a \text{ e } r \in \mathbb{R}.$$

Para n par, temos:

$$\sqrt[n]{a} := r \iff r^n = a \text{ e } r \geq 0.$$

Não é difícil notar que, com essas definições, a raiz n-ésima é uma operação "inversa" da potenciação, uma vez que, em vez de elevar um número no índice, se encontra o número pelo qual, elevado pelo índice, se resulta nele.

Com a mesma lógica da raiz n-ésima, iremos definir a "super-raiz n-ésima", com objetivo de ser uma operação inversa da tetração, cuja definição se encontra seguir:

4.1 Super-raiz

Definição 4.1.1. *Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dizemos que $r \in \mathbb{R}$ é uma super-raiz n-ésima de a se ${}^n r = a$. Note que, a princípio, essa definição não está precisa, uma vez que ainda não se sabe se esse valor r existe, e nem se ele é único e, por conta disso, definimos a super-raiz n-ésima de a como o conjunto de todas as super-raiz n-ésimas de a, denotado por $\sqrt[n]{a}_s$. Nessa seção pretendemos explorar essa definição. Em particular, definimos a super-raiz segunda de a, ou, convencionalmente, super-raiz quadrada de a como:*

$$\sqrt{a}_s \ni r \iff {}^2 r = r^r = a \text{ e } r \in \mathbb{R}.$$

Note que, como na raiz quadrada normal, omitimos o índice da super-raiz quadrada.

O leitor talvez tenha se perguntado o porquê de não separarmos em casos (por exemplo, n par e n ímpar). Logo mais, veremos que na super-raiz, assim como na raiz convencional, também há diferenças relacionadas à paridade do índice, mas nesse momento não temos as ferramentas para afirmar isso. Vejamos, a seguir, alguns exemplos de raiz n-ésima

Exemplo 4.1.2.

- $2 \in \sqrt{4}_s$, *pois,* ${}^2 2 = 4$*;*

- $3 \in \sqrt{27}_s$, *pois,* ${}^{2}3 = 27$;
- $2 \in \sqrt[3]{16}_s$, *pois,* ${}^{3}2 = 16$;
- $49 \in \sqrt[1]{49}_s$, *pois,* ${}^{1}49 = 49$;
- $1 \in \sqrt[22]{1}_s$, *pois,* ${}^{22}1 = 1$;
- $5 \in \sqrt{3125}_s$, *pois,* ${}^{2}5 = 3125$.

Para investigarmos a existência e unicidade de uma super-raiz n-ésima real, focaremos em investigar o caso $n = 2$, e tentar, a partir disso, tirar conclusões para outros valores de n.

Primeiramente, o Teorema 2.2.1 garante que, se $a \in [1, \infty]$ e $n \in \mathbb{N}^*$ então existe uma única super-raiz n-ésima de a. Agora, investigaremos o caso $n = 2$. Veja que, encontrar uma super-raiz quadrada para a se resume a encontrar a pré-imagem de a por f_2 (em que f_2 é a função tetracional do segundo grau), isto é:

$$f_2^{-1}(\{a\}) = \{r \mid {}^{2}r = a\} = \sqrt{a}_s.$$

O seguinte teorema traz critérios para existência e unicidade da super-raiz quadrada:

Teorema 4.1.3. *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$. Então, as afirmações a seguir são verdadeiras:*

$$\begin{cases} \text{Se } a < {}^{2}\left(\frac{1}{e}\right), & \text{então } \sqrt{a}_s = \varnothing; \\ \text{Se } {}^{2}\left(\frac{1}{e}\right) < a < 1, & \text{então } \left|\sqrt{a}_s\right| = 2; \\ \text{Se } a = {}^{2}\left(\frac{1}{e}\right) \text{, ou } a \geq 1, & \text{então } \left|\sqrt{a}_s\right| = 1. \end{cases}$$

Demonstração. *Pela Proposição 2.2.3, f_2 é crescente em (e^{-1}, ∞), decrescente em $(0, e^{-1})$ e ${}^{2}(e^{-1})$ é o valor mínimo global de f_2. Logo, se $a < {}^{2}\left(e^{-1}\right)$, então $\sqrt{a}_s = f_2^{-1}\{a\} = \varnothing$, e assim não há $r > 0$ tal que ${}^{2}r = a$.*

Veja que, pelo Lema 3.1.5, $0 < {}^{2}x < 1$ para cada $x \in (0, e^{-1})$. Assim, se $a \in \left({}^{2}\left(e^{-1}\right), 1\right) = \left(f_2\left(e^{-1}\right), f_2(1)\right)$, como f decresce em $(0,\ e^{-1})$ e cresce em $(e^{-1},\ \infty)$, e pelo item (2) da proposição 2.1.5, temos que $\left|\sqrt{a}_s\right| = \left|f_2^{-1}\{a\}\right| = 2$.

Se $a = {}^{2}(e^{-1})$, ou $a \geq 1$, pela mesma razão de antes, conclui-se que $\left|\sqrt{a}_s\right| = \left|f_2^{-1}\{a\}\right| = 1$, então, há um único $r > 0$ tal que ${}^{2}r = a$. ■

Esse resultado garante que, apenas quando $a \geq 1$, pode-se definir uma única super-raiz quadrada de a. Será que, com outros índices para a super-raiz, a situação muda? Ora, se a Conjectura 2.3.1 for verdadeira, então é possível afirmar que, sempre que n for ímpar, existe uma única super-raiz n-ésima de a, para todo $a \in \mathbb{R}_+^*$. Quando n é par, assim como vimos para o caso particular $n = 2$, pela Conjectura 2.3.2, temos que o intervalo de existência e unicidade de uma super-raiz n-ésima não é trivial de se determinar.

Sabe-se, pela Consequência 2.2.5 que, para todo $a \in \mathbb{R}_+^*$, existe um único $r \in \mathbb{R}_+^*$ tal que ${}^3r = a$. Em vista disso, define-se a super-raiz cúbica como um valor:

Definição 4.1.4. *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$. Nas condições da Consequência 2.2.5, identificamos, por abuso de notação:*

$$\sqrt[3]{a}_s \equiv \tilde{f}_3^{\,-1}(a).$$

E dizemos que $\sqrt[3]{a}_s$ é a super-raiz cúbica de a (que existe e é única!).

Exemplo 4.1.5.

- $\sqrt[3]{16}_s = 2$*, pois* ${}^32 = 16$*;*
- $\sqrt{0{,}22}_s = \emptyset$*, pois* $0{,}22 < {}^2\left(\frac{1}{e}\right)$*, pelo Teorema 4.1.3;*
- $\sqrt{0{,}7}_s \approx \{0{,}280901; 0{,}462338\}$*, pois ambos os números (aproximados), tetrados ao quadrado, resultam em 0,7;*
- $\sqrt{0{,}8}_s \approx \{0{,}0946497; 0{,}739534\}$*, por motivo análogo ao item anterior.*

Utilizamos o software Wolfram Alpha para determinar os conjuntos súper-raiz de $0,7$ *e* $0,8$.

4.2 Irracionalidade da Súper-Raiz

Uma propriedade interessante que relaciona a raiz quadrada convencional com a super-raiz quadrada, é o fato de que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n} \in \mathbb{N} \cup \mathbb{I}_+^*.$$

Isto é, ou n é um quadrado perfeito, ou sua raiz quadrada é irracional. Afirmamos que algo análogo (porém, "maior" em certo sentido) ocorre com a super-raiz. Essa afirmação é assegurada pelo Teorema a seguir, que tem (CHUN, 2014, p. 4) como referência.

Teorema 4.2.1 (Irracionalidade da Súper-Raiz)**.** *Seja $a \in \mathbb{Q}_+^*$. Então,*

$$\sqrt{a}_s \subset \mathbb{N}^* \cup \mathbb{I}_+^*$$

Demonstração. *Primeiramente, nos recordemos que:*

$$\sqrt{a}_s = \{r \in \mathbb{R}_+^* \mid {}^2r = a\}$$

Assim, seja $r \in \sqrt{a}_s$. Então, ${}^2r = a$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$.
Precisamos mostrar que $r \in \mathbb{N}^* \cup (\mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q})$. Veja que, caso $r \in \mathbb{I}_+^*$, não há mais o que provar,

pois, nesse caso, $r \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{I}^*_+$. Sendo assim, vamos provar o caso em que $r \in \mathbb{Q}^*_+$. Para tal, escrevemos:

$$r = \frac{p}{q}.$$

Com $p, q \in \mathbb{N}^*$ coprimos (isto é, $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$). Escrevemos $a = \frac{s}{t}$, de maneira análoga. Assim sendo,

$$\frac{s}{t} = a = {}^{2}r = {}^{2}\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{p^{\frac{p}{q}}}{q^{\frac{p}{q}}}.$$

Disso, segue que $\frac{s}{t} = \frac{p^{\frac{p}{q}}}{q^{\frac{p}{q}}}$. Então,

$$sq^{\frac{p}{q}} = tp^{\frac{p}{q}} \implies \left(sq^{\frac{p}{q}}\right)^q = \left(tp^{\frac{p}{q}}\right)^q \implies s^q q^p = t^q p^p.$$

Antes de prosseguir, vamos enunciar e verificar uma afirmação.

Afirmação: *Seja b um número primo. Então:*

$$b \mid t^q \iff b \mid q^p.$$

E, nesse caso, $b \nmid s^q$ e $b \nmid p^p$.

Verificação: *De fato, se $b \mid t^q$, então $b \mid t$, pois b é primo. Como $b \mid t$, segue que $b \nmid s$ (pois $\mathrm{mdc}(s, t) = 1$ e $b > 1$). Assim, como $b \mid t^q p^p = s^q q^p$, segue que $b \mid q^p$ e, portanto, $b \mid q$. Como $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$, $b \nmid p$, logo, $b \nmid p^p$ (pois b é primo). A recíproca é verificada analogamente.*

Prosseguindo com a demonstração, suponha, para obter uma contradição, que $r \notin \mathbb{N}^*$. Assim, como $r = \frac{p}{q}$ de maneira irredutível, segue que $q > 1$ e, por consequência, $s^q q^p > 1$.

Agora, como $t^q p^p = s^q q^p > 1$. Disso, da afirmação anterior e do Teorema Fundamental da Aritmética, existem $n, m \in \mathbb{N}^*$ tais que, há n primos p_i ($\forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$) e m primos q_j ($\forall j \in [1, m] \cap \mathbb{N}$) tais que:

$$t^q p^p = s^q q^p = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} \cdot q_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot q_m^{l_m}.$$

em que $k_i \in \mathbb{N}^*$ $\forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, $l_j \in \mathbb{N}^*$ $\forall j \in [1, m] \cap \mathbb{N}$ e, para todo $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$:

$$p_i \mid t^q, q^p \quad e \quad p_i \nmid s^q, p^p.$$

E, para todo $j \in [1, m] \cap \mathbb{N}$:

$$q_j \mid s^q, p^p \quad e \quad q_j \nmid t^q, q^p.$$

Disso, segue que t^q e q^p têm a mesma fatoração prima, donde, $t^q = q^p$. Como $q > 1$, existe um primo b tal que $b \mid q$. Por consequência, $b \mid t$. Então, há $i, j \in \mathbb{N}^*$ tais que:

$$t = kb^i \quad \text{e} \quad q = lb^j,$$

com $k, l \in \mathbb{N}^*$ *satisfazendo* $\text{mdc}(k, b) = \text{mdc}(l, b) = 1$. *Logo,*

$$t^q = q^p \implies (kb^i)^q = (lb^j)^p \implies k^q b^{iq} = l^p b^{jp}.$$

Pela escolha de k *e* l*, como* b *é primo, segue que* $b \nmid k^q, l^p$ *e, portanto,* $iq = jp$ *(pela unicidade da fatoração em primos). Assim,* $ilb^j = iq = jp$*, ou seja,* $b^j \mid jp$*. Como* $b \mid q^p$*, temos que* $b \nmid p^p$*, logo,* $b \nmid p$*, ou seja,* b *não está na fatoração prima de* p*. Mas, como* $b^j \mid jp$*,* $b^j \mid j$*, pois tal potência deve estar contida na fatoração prima de* j*, uma vez que não se faz presente na fatoração prima de* p*. Segue que* $b^j \mid j$ *e, por consequência,* $b^j \leq j$*. Por outro lado, como* $j \in \mathbb{N}^*$ *e* $b \geq 2$ *(pois* b *é primo):*

$$b^j \geq 2^j > j \implies b^j > j.$$

Isso é uma contradição, pela tricotomia da relação de ordem $\leq$ *em* $\mathbb{R}$*. Portanto,* $r \in \mathbb{N}^*$*, ou seja,* $r \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{I}_+^*$*.*

Como $r \in \sqrt{a}_s$ *é arbitrário, segue que* $\sqrt{a}_s \subset \mathbb{N}^* \cup \mathbb{I}_+^*$*, como queríamos demonstrar.*

■

Agora, para a Super-Raiz cúbica, de modo parecido (e "mais forte") que na raiz cúbica convencional, toda e qualquer super-raiz cúbica de um número racional positivo é um inteiro positivo ou um irracional positivo.

Para provar esse resultado, iremos utilizar algumas definições e resultados auxiliares.

Definição 4.2.2. *Seja* $a \in \mathbb{R}$*. Dizemos que* a *é* <u>*algébrico*</u> *quando existe* $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *tal que* $p(a) = 0$ *e* $p(x) \neq 0_{\mathbb{Z}[x]}$*.*

Em outras palavras, quando a *é raiz de algum polinômio com coeficientes inteiros que não é identicamente nulo.*

Denotamos:

$$\mathbb{A} := \{u \in \mathbb{R} \mid u \text{ é algébrico}\}.$$

Observação 4.2.3.

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}.$$

De fato, dado $q \in \mathbb{Q}$, tem-se

$$q = \frac{a}{b},$$

com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Assim,

$$bq - a = 0.$$

Logo, q é raiz de $p(x) = bx - a$ e, como $b \neq 0$, q é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros que não é identicamente nulo, logo, $q \in \mathbb{A}$ para cada $q \in \mathbb{Q}$.

Lema 4.2.4 (Teorema de Gelfond-Schneider)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{A}$. Se $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ e $b \notin \mathbb{Q}$. Então:*

$$a^b \notin \mathbb{A}.$$

Prova. *Foge do escopo desse trabalho, mas encontra-se em (??).*

Com essa Definição e esse Lema, estamos prontos para demonstrar o Teorema a seguir. Utilizamos (CHUN, 2014, p. 4) como referência.

Teorema 4.2.5 (Irracionalidade da Súper-Raiz Cúbica)**.** *Seja $a \in \mathbb{Q}_+^*$. Então:*

$$\sqrt[3]{a}_s \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{I}_+^*.$$

(lembre-se que usamos $\sqrt[3]{a}_s$ como número por abuso de notação, pela existência e unicidade)

Demonstração. *Seja $r = \sqrt[3]{a}_s \in \mathbb{R}_+^*$. Se $r \in \mathbb{I}_+^*$, então $r \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{I}_+^*$ e não há mais o que demonstrar. Nos resta o caso $r \in \mathbb{Q}_+^*$, então, assuma isso e suponha, por absurdo, que $r \notin \mathbb{N}^*$. Escreva $r := \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}^*$, e defina $s := {}^2r$. Sabe-se que $s \in \mathbb{I}_+^*$, pois, caso contrário, pela Irracionalidade da Super-Raiz:*

$$r \in \sqrt{s}_s \subset \mathbb{N}^* \cup \mathbb{I}_+^* \implies r \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{I}_+^*.$$

Isso é uma contradição, pois estamos supondo que $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \mathbb{N}^*$. Agora, veja que:

$$s = {}^2r = {}^2\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{p^{\frac{p}{q}}}{q^{\frac{p}{q}}} \implies s^q = \frac{p^p}{q^p}.$$

Logo:

$$s^q \cdot q^p = p^p \implies s^q q^p - p^p = 0.$$

Com isso, s é raiz do polinômio $P(x)$, em que:

$$P(x) = x^q q^p - p^p.$$

Como os coeficientes de $P(x)$ são inteiros não nulos, segue que $s \in \mathbb{A}$ por definição. Assim, pelo Teorema de Gelfond-Schneider, como $r \in \mathbb{A}$ (pois $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$), $s \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$ e $r \neq 1$ (pois $r \notin \mathbb{N}^*$), segue que $r^s \notin \mathbb{A}$, logo, $r^s \notin \mathbb{Q}_+^*$. Mas,

$$a = {}^3r = r^{r^{2r}} = r^s \notin \mathbb{Q}_+^*.$$

Ou seja, $a \notin \mathbb{Q}_+^*$. Isso é uma contradição, pois $a \in \mathbb{Q}_+^*$ por hipótese. Assim $r \in \mathbb{N}^*$, ou seja, $r \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{I}_+^*$. Portanto, em todos os casos, $r \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{I}_+^*$, como queríamos demonstrar. ■

Segundo (CHUN, 2014, p. 5), autores conjecturam que o que concebemos como Irracionalidade da Super-Raiz seja verdade para qualquer $n \geq 2$:

Conjectura 4.2.6 (Irracionalidade da Super-Raiz Generalizada)**.** *Sejam $a \in \mathbb{Q}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $n \geq 2$. Então:*

$$\sqrt[n]{a}_s \subset \mathbb{N}^* \cup \mathbb{I}_+^*.$$

4.3 Expansões

O leitor pode ter notado que apenas falamos de tetrapoentes inteiros, afinal, definimos a tetração apenas para tetrapoentes em $\mathbb{N} \cup \{-1\}$. Na 3-hiperoperação (exponenciação), é possível defini-la para expoentes racionais, até mesmo reais. Nos acordemos um pouco acerca dessas definições com a observação a seguir:

Observação 4.3.1. *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, e $q \in \mathbb{Q}$. Assim, podemos escrever*

$$q = \frac{m}{n} \qquad (m, n \in \mathbb{Z};\ n \neq 0).$$

Com isso, define-se:

$$a^q := \sqrt[n]{a^m}.$$

É possível provar que, a partir dessa definição, para quaisquer $m', n' \in \mathbb{Z}$ tais que $q = \dfrac{m'}{n'}$, é verdade que

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}.$$

Ou seja, independentemente da maneira de representação de $q \in \mathbb{Q}$, a potência a^q sempre resulta no mesmo valor, logo, a potenciação por expoentes racionais está bem-definida.

Pensando em generalizar ainda mais, define-se a potência por um expoente real $r \in \mathbb{R}$ a partir de uma sequência monótona $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ convergente a $r \in \mathbb{R}$ (que existe pois $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}}$):

$$a^r := \lim_{n\to\infty}(a^{q_n}).$$

Esse limite existe e é um valor real pois (q_n) é uma sequência convergente, e logo a sequência (a^{q_n}) é convergente (isso segue do fato de que é uma sequência monótona limitada). Portanto, concluímos que a potenciação por expoentes reais está bem-definida.

Observação 4.3.2. *De uma maneira análoga, para a tetração, pode-se pensar que, intuitivamente, a tetração de a pelo tetrapoente racional $q = \dfrac{m}{n}$ poderia ser dada utilizando a super-raiz n-ésima da m-ésima tetração de a, ou seja:*

$$ {}^{q}a := \sqrt[n]{{}^{m}a}_s. $$

*Infelizmente, essa definição não é boa, pois, através do seguinte exemplo, alterando as formas de representação da fração, pode-se chegar em resultados distintos. (É importante reiterar que, nesse caso, denotamos por $\sqrt[n]{a}_s$ como o **conjunto** dos valores que satisfazem a condição de super-raiz n-ésima de a). Se a definição fosse de fato, boa, precisaríamos, em particular, que:*

$$ {}^{0,5}4 = {}^{\frac{1}{2}}4 = {}^{\frac{2}{4}}4. $$

Porém,

$$ {}^{\frac{1}{2}}4 = \sqrt{4}_s = \{2\} \not\subset \sqrt[4]{256}_s = \sqrt[4]{4^4}_s = \sqrt[4]{{}^{2}4}_s = {}^{\frac{2}{4}}4 $$

A inclusão não ocorre pois, como visto no exemplo 1.3.2:

$$ {}^{4}2 = 65.563 \neq 256 \implies 2 \notin \sqrt[4]{256}_s \implies {}^{\frac{1}{2}}4 \not\subset {}^{\frac{2}{4}}4. $$

Vemos que, como nem através de nossa proposta de "inclusão" de valores (utilizando conjuntos) a definição se mostra boa, não podemos atribuir valores aos tetrapoentes racionais, pelo menos não através dessa definição. Uma vez que a tetração não está definida para tetrapoentes racionais quaisquer, não podemos trabalhar, muito menos, com tetrapoentes reais quaisquer.

5 Polinômios

Seja K um corpo, e 1_K o seu neutro multiplicativo. Um polinômio é uma expressão algébrica envolvendo potências de uma indeterminada "x", envolvendo coeficientes em K. Um polinômio em x é descrito como:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i x^i) \qquad a_i \in K, n \in \mathbb{N}.$$

A indeterminada x é meramente um símbolo que satisfaz as propriedades a seguir:

- $x^0 := 1_K$;
- Se $m, n \in \mathbb{N}$, então $x^m x^n = x^{m+n}$.

Pode-se fazer $K = \mathbb{R}$, e considerar o anel dos polinômios reais. Eles são mais conhecidos, e chamados de polinômios reais.

5.1 Hipernômios

Pensando em uma teoria análoga, mas, ao invés de potências, utilizar tetrações de uma indeterminada "x", pode-se definir o conceito de hipernômio:

Definição 5.1.1. *Seja K um corpo, nas mesmas condições de antes. Um hipernômio é uma expressão algébrica envolvendo tetrações de uma indeterminada x, com coeficientes em K. Um hipernômio em x é descrito como:*

$$h(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, {}^{i}x \qquad a_i \in K, n \in \mathbb{N}.$$

A indeterminada "x", nesse caso, é apenas um símbolo que satisfaz:

- ${}^{0}x := 1_K$;
- ${}^{n+1}x = x^{{}^{n}x}$.

Quando tratamos de números reais, fazemos $K = \mathbb{R}$, e definimos um hipernômio real. Para que as tetrações façam sentido, utilizamos uma indeterminada $x \in \mathbb{R}_+^*$.:

$$h(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, {}^{i}x; \ a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}_+^*.$$

O maior tetrapoente de x acompanhado de um coeficiente não nulo é dito o grau do hipernômio. A função:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & h(x) \end{array}.$$

é dita uma função hipernomial. O coeficiente não nulo que acompanha x elevado ao grau é chamado de termo líder.

Como estamos trabalhando, neste capítulo, apenas com números reais, iremos nos referir a um hipernômio real apenas como hipernômio, a menos que seja dito o contrário. Nesse capítulo também iremos identificar funções hipernomiais reais como os hipernômios da lei de formação das mesmas.

Exemplo 5.1.2.

- $h_1(x) = 2\,{}^{2}x + \dfrac{3}{2}x - 5$ *é um hipernômio de grau 2;*
- $h_2(x) = {}^{4}x - e\,{}^{3}x - 4$ *é um hipernômio de grau 4;*
- $h_3(x) = \sqrt{2}x + 2$ *é um hipernômio de grau 1;*
- $h_4(x) = \pi$ *é um hipernômio de grau 0 (pois $\pi = \pi\,{}^{0}x$).*

Agora, pensamos em maneiras de expressar limites envolvendo hipernômios. Inicialmente, se assumirmos a conjectura 2.3.1, então podemos concluir acerca dos limites com $x \to 0$.

Proposição 5.1.3. *Seja $h(x) = \sum_{i=0}^{2n} a_i\,{}^{i}x$ um hipernômio. Se a conjectura 2.3.1 for verdadeira, então:*

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{2i}.$$

Prova. *Veja que*

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \sum_{i=0}^{2n} a_i\,{}^{i}x = \sum_{i=0}^{2n} \lim_{x\to 0} a_i\,{}^{i}x.$$

Pela conjectura 2.3.1, temos: $\lim\limits_{x\to 0}(a_i\,{}^{i}x) = \begin{cases} a_i & \text{se i for par;} \\ 0 & \text{se i for ímpar.} \end{cases}$ *Como todos os coeficientes das potências ímpares se anulam, temos:*

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \sum_{i=0}^{2n} \lim_{x\to 0} a_i\,{}^{i}x = \sum_{i=0}^{n} \lim_{x\to 0} a_{2i}\,{}^{2i}x = \sum_{i=0}^{n} a_{2i}.$$

Como queríamos provar. ■

Exemplo 5.1.4.

- $h(x) = {}^{2}x + 2x + 1 : \lim_{x\to 0} h(x) = 1 + 1 = 2;$
- $g(x) = 7\,{}^{9}x - 4,5\,{}^{3}x - 2x : \lim_{x\to 0} g(x) = 0;$
- $f(x) = \frac{2}{3}\,{}^{31}x + 22\,{}^{30}x - 64\,{}^{3}x + \cos(1)\,{}^{2}x - 49x : \lim_{x\to 0} f(x) = 22 + \cos(1).$

Proposição 5.1.5. *Seja* $h(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,{}^{i}x$ *um hipernômio tal que* $a_i \geq 0\ \forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$. *Então,*

$$h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*}.$$

Mais ainda, se $a_i > 0\ \forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, *então* $h(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$.

Prova. *Sejam* $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ *e* $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$. *Como* ${}^{i}x > 0$ *e* $a_i \geq 0$, *temos* $a_i\,{}^{i}x \geq 0$. *Logo,*

$$h(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,{}^{i}x \geq 0$$

Além disso, como ${}^{i}x > 0$ *e* $a_i > 0$, *temos* $a_i\,{}^{i}x > 0$, *e logo* $h(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,{}^{i}x > 0$. *Assim, o resultado segue.* ■

Consequência 5.1.6. *Nem todo hipernômio possui raízes (isto é, valores nos quais a expressão se anula). Basta observar que, pela segunda parte da Proposição, existem hipernômios estritamente positivos, e, portanto, nunca se anulam. Pela Proposição anterior, temos:* $h(x) = 2\,{}^{3}x + 3 > 0$. *Logo,* $h(x)$ *tem grau ímpar mas não tem raízes. Assim, diferente dos polinômios, existem hipernômios de grau ímpar que não apresentam raízes.*

O Teorema 5.1.9, em contrapartida, apresentará um resultado que se assemelha à teoria de polinômios. Para poder demonstrar esse Teorema, iremos antes apresentar alguns resultados que serão úteis para isso:

Lema 5.1.7. *Seja* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq 2$. *Então, as afirmações a seguir são verdadeiras:*

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}({}^{n}x) = \infty$;
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{n}x}{x} = \infty$;
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{n}x}{\frac{d}{dx}({}^{n}x)} = 0.$

Prova. *Utilizaremos a Proposição 2.1.4 e indução matemática para provar os resultados.*

(1) :

Passo base ***(n=2):***

$$\lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx} {}^2x = \lim_{x\to\infty} {}^2x(\ln(x) + 1) = \infty(\infty + 1) = \infty.$$

<u>Hipótese de indução:</u> Suponha que $\lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx} {}^mx = \infty$*, para algum* $m \in \mathbb{N}$*,* $m \geq 2$*.*

<u>Passo indutivo:</u> Temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}({}^{m+1}x) = \lim_{x\to\infty} {}^{m+1}x \left(\ln(x)\frac{d}{dx}({}^mx) + \frac{{}^mx}{x} \right).$$

Agora, veja que $\lim_{x\to\infty} \frac{{}^mx}{x} = \frac{\infty}{\infty}$*. Assim, utilizando o Teorema de L'Hôpital, temos:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^mx}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}({}^mx)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}({}^mx)}{1} = \infty,$$

por hipótese de indução.

Logo, segue que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}({}^{m+1}x) = \lim_{x\to\infty} {}^{m+1}x \left(\ln(x)\frac{d}{dx}({}^mx) + \frac{{}^mx}{x} \right) = \infty(\infty \cdot \infty + \infty) = \infty.$$

Assim, por indução matemática, a afirmação (1) *é verdadeira.*

(2) : *Decorre diretamente da afirmação* (1)*. O limite em questão é uma indeterminação* $\frac{\infty}{\infty}$*. Aplicando L'Hôpital, utilizando indução matemática, chega-se em um limite calculado na afirmação anterior, que, por sua vez, é* ∞*.*

(3) : *É possível provar diretamente utilizando as afirmações anteriores. Separemos o problema em dois casos:*

(n=2):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^2x}{\frac{d}{dx}({}^2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{{}^2x}{{}^2x(\ln(x)+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(x)+1} = \frac{1}{\infty+1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

(n>2):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^nx}{\frac{d}{dx}({}^nx)} = \lim_{x\to\infty} \frac{{}^nx}{{}^nx\left(\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x) + \frac{{}^{n-1}x}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x) + \frac{{}^{n-1}x}{x}} =$$

$$= \frac{1}{\infty \cdot \infty + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

(lembre-se que, como $n > 2$*, temos* $n - 1 \geq 2$*.) Portanto, o resultado segue.* ■

Proposição 5.1.8. *Sejam* $n, m \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ *tais que* $n < m$*. Então:*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{{}^{n}x}{{}^{n+1}x} = 0$*;*

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{{}^{n}x}{{}^{m}x} = 0.$

Prova. (1) :

Caso $n = -1$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{-1}x}{{}^{0}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{0}{1} = 0.$$

Caso $n = 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{0}x}{{}^{1}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Caso $n = 1$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{1}x}{{}^{2}x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Essa é uma indeterminação em que o Teorema de L'Hôpital é aplicável, assim:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{1}x}{{}^{2}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(x)}{\frac{d}{dx}({}^{2}x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{{}^{2}x(\ln(x)+1)} = \frac{1}{\infty(\infty+1)} = 0.$$

Caso $n = 2$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{2}x}{{}^{3}x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Novamente, aplicamos o Teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{2}x}{{}^{3}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}({}^{2}x)}{\frac{d}{dx}({}^{3}x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{{}^{2}x(\ln(x)+1)}{{}^{3}x\left(\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{2}x) + \frac{{}^{2}x}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} dfrac{}^{2}x\ln(x) + {}^{2}x{}^{3}x\left[\ln(x)({}^{2}x\ln(x) + {}^{2}x) + \frac{{}^{2}x}{x}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{{}^{2}x\ln(x) + {}^{2}x}{{}^{3}x({}^{2}x)\ln^{2}(x) + {}^{3}x({}^{2}x)\ln(x) + {}^{3}x\frac{{}^{2}x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\ln(x)}}{{}^{3}x\ln(x) + {}^{3}x + {}^{3}x\frac{1}{x\ln(x)}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\ln(x)}}{{}^{3}x\left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{x\ln(x)}\right)} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{\infty(\infty + 1 + \frac{1}{\infty})} = \frac{1+0}{\infty(\infty+1+0)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Caso $n > 2$: *Nesse caso, temos* $n - 1 \geq 2$*, e iremos utilizar o Lema anterior para calcular o limite:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{n}x}{{}^{n+1}x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

De novo, o Teorema de L'Hôpital é aplicável. Assim:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^{n}x}{{}^{n+1}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}({}^{n}x)}{\frac{d}{dx}({}^{n+1}x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{{}^{n}x\left(\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x) + \frac{{}^{n-1}x}{x}\right)}{{}^{n+1}x\left(\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n}x) + \frac{{}^{n}x}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{{}^{n}x\left(\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)+\frac{{}^{n-1}x}{x}\right)}{{}^{n+1}x\left[\ln(x)\cdot {}^{n}x(\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)+\frac{{}^{n-1}x}{x})+\ {}^{n+1}x\frac{{}^{n}x}{x}\right]}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{{}^{n}x\left(\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)+\frac{{}^{n-1}x}{x}\right)}{{}^{n+1}x\left[\ln(x)\cdot {}^{n}x\left(\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)+\frac{{}^{n-1}x}{x}\right)+\ {}^{n+1}x\frac{{}^{n}x}{x}\right]}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{{}^{n}x\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)+\ {}^{n}x\frac{{}^{n-1}x}{x}}{{}^{n+1}x\ln(x)\left({}^{n}x\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)+\ {}^{n}x\frac{{}^{n-1}x}{x}\right)+\ {}^{n+1}x\frac{{}^{n}x}{x}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{{}^{n}x\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)+\ {}^{n}x\frac{{}^{n-1}x}{x}}{{}^{n+1}x({}^{n}x)\ln^2(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)+\ {}^{n+1}x({}^{n}x)\ln(x)\frac{{}^{n-1}x}{x}+\ {}^{n+1}x\frac{{}^{n}x}{x}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{{}^{n-1}x}{x\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)}}{{}^{n+1}x\ln(x)+\ {}^{n+1}x\frac{{}^{n-1}x}{\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)x}+\ {}^{n+1}x\frac{1}{x\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{{}^{n-1}x}{\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)}\cdot\frac{1}{x\ln(x)}}{{}^{n+1}x\left(\ln(x)+\frac{{}^{n-1}x}{\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)x}+\frac{1}{x\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{{}^{n-1}x}{\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)}\cdot\frac{1}{x\ln(x)}}{{}^{n+1}x\left(\ln(x)+\frac{{}^{n-1}x}{\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln(x)\frac{d}{dx}({}^{n-1}x)}\right)}=$$

$$= \frac{1+0\cdot\frac{1}{\infty\cdot\infty}}{\infty\left(\infty+0\cdot\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty\cdot\infty\cdot\infty}\right)}=$$

$$= \frac{1+0\cdot 0}{\infty(\infty+0\cdot 0+0)}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Em todos os casos, a afirmação (1) *se mostra verdadeira.*

(2) : *Como $x\to\infty$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x\in[1,\infty)$. Assim sendo, podemos usar a Proposição 3.2.1. Note que, como $n,m\in\mathbb{N}$, e $n<m$, temos $n\le m-1$. Logo, por tal Proposição, ${}^{n}x\le {}^{m-1}x$, ou seja, $\frac{{}^{n}x}{{}^{m}x}\le\frac{{}^{m-1}x}{{}^{m}x}$. Ainda, $\frac{{}^{n}x}{{}^{m}x}\ge 0$. Com isso, temos $0\le\frac{{}^{n}x}{{}^{m}x}\le\frac{{}^{m-1}x}{{}^{m}x}$, e, como, $\lim_{x\to\infty}0=\lim_{x\to\infty}\frac{{}^{m-1}x}{{}^{m}x}=0$ (pela afirmação* (1)*), segue, pelo Teorema do Confronto, que $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{{}^{n}x}{{}^{m}x}\right)=0$, como queríamos provar.* ■

Teorema 5.1.9. *Seja $h(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i\ {}^{i}x$ um hipernômio de grau $n\in\mathbb{N}^*$. Então:*

$$\lim_{x\to\infty}(h(x)) = \begin{cases} \infty & \textit{se } a_n > 0; \\ -\infty & \textit{se } a_n < 0. \end{cases}$$

Demonstração. *Como $a_n \neq 0$, podemos escrever $h(x)$ como a seguir:*

$$h(x) = \frac{a_n {}^n x}{a_n {}^n x} \sum_{i=0}^{n} a_i {}^i x = a_n {}^n x \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i {}^i x}{a_n {}^n x}.$$

Retirando o último termo do somatório, temos:

$$h(x) = a_n {}^n x \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i {}^i x}{a_n {}^n x} \right) + 1 \right).$$

Daí

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} a_n {}^n x \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i {}^i x}{a_n {}^n x} \right) + 1 \right) = \lim_{x\to\infty} a_n {}^n x \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} \cdot \frac{{}^i x}{{}^n x} \right) + 1 \right).$$

Utilizando a proposição anterior e a linearidade do limite, notamos que:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \left(a_n \cdot \infty \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} \cdot 0 \right) + 1 \right) \right) = a_n \cdot \infty \cdot (0+1) = a_n \cdot \infty.$$

Logo,

$$\lim_{x\to\infty}(h(x)) = a_n \cdot \infty = \begin{cases} \infty & \textit{se } a_n > 0; \\ -\infty & \textit{se } a_n < 0. \end{cases}$$

Como queríamos demonstrar. ■

5.2 Espaço de Hipernômios

Sabe-se que os polinômios usuais em $\mathbb{R}$ de grau no máximo $n \in \mathbb{N}$ formam um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita:

$$P_n := \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,\middle|\, a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

(observe que $P_0 = \mathbb{R}$.)

Prova-se que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ forma uma base para P_n, e logo $\dim(P_n) = n + 1$. Mais ainda, o espaço P de todos os polinômios com coeficientes reais forma um espaço vetorial de dimensão infinita e enumerável:

$$P := \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \,\middle|\, a_k \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} : \ a_k = 0 \ \forall k \geq n \right\}.$$

Em que $\{1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots\}$ é uma base enumerável para P, ou seja, $\dim(P) = |\mathbb{N}|$. Vamos, agora, de maneira análoga, estabelecer espaços vetoriais envolvendo hipernômios.

Definição 5.2.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos H_n como o conjunto de todos os hipernômios de grau no máximo n. Isto é:*

$$H_n := \left\{ h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, {}^k x \,\middle|\, a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Teorema 5.2.2. *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Então, $V := H_n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $n+1$, com as operações usuais de soma e multiplicação escalar de funções.*

Demonstração. *Damos como conhecido que o conjunto a seguir é um espaço vetorial:*

$$F := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ é função.} \}$$

Vamos provar que $V \leq F$ (i.e. V é subespaço vetorial de F). Perceba, inicialmente, que $\mathcal{N} \equiv 0$, hipernômio identicamente nulo, elemento neutro de F, é tal que $\mathcal{N} \in V$, por construção de V.

Agora, sejam $f, g \in V$, e $c \in \mathbb{R}$. Temos, então, que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, {}^k x$ e $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \, {}^k x$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Logo,

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \, {}^k x \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \, {}^k x \right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, {}^k x + b_k \, {}^k x = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \, {}^k x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Sendo assim, $f + g \in V$ por definição. Ainda,

$$(cf)(x) = c(f(x)) = c \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \, {}^k x \right) = \sum_{k=0}^{n} c(a_k \, {}^k x) = \sum_{k=0}^{n} (c a_k) \, {}^k x,$$

para cada $x \in \mathbb{R}_+^*$.. Da mesma forma, temos $cf \in V$ por definição. Portanto, $V \leq F$, donde V é um espaço vetorial. Perceba que, por construção, o conjunto $B := \{1, x, \ldots, {}^n x\}$ gera V. Vamos provar que B é linearmente independente.

Com efeito, sejam $a_k \in \mathbb{R}$ tais que $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, {}^k x = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}_+^*$. Suponha, para obter uma contradição, que $a_k \neq 0$ para algum $k \in \{0, \ldots, n\}$. Sendo assim, h possui grau $j \in \{0, \ldots, n\}$ (vide definição de grau de hipernômio). Caso $j = 0$, temos $h(x) = a_0 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, o que é uma contradição. Caso $j \geq 1$, pelo Teorema 5.1.9,

$\lim_{x\to\infty} h(x) \in \{-\infty, \infty\}$. *Assim sendo,* $\lim_{x\to\infty} |h(x)| = \infty$. *Logo, existe* $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *de forma que* $|h(x)| > 1$ *quando* $x \geq x_0$. *Logo,* $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *é tal que* $h(x_0) \neq 0$*, que também é uma contradição.*

Logo, $a_k = 0$ *para todo* $k \in \{0, \dots n\}$ *e portanto,* B *é linearmente independente por definição, e segue que* B *é uma base para* V*. Como* $|B| = n+1$*, conclui-se que* $\dim(V) = n+1$*, como queríamos demonstrar.* ■

Corolário 5.2.3. *Sejam* h, j *hipernômios dados por* $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, {}^k x$ *e* $j(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \, {}^k x$*. Então,* $h = j$ *se, e somente se,* $a_k = b_k \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$.

Prova. *Suponha que* $h = j$*. Assim,* $h - j \equiv 0$ *é o polinômio identicamente nulo. Disso, e como* $(h - j)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) \, {}^k x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$*, pelo Teorema anterior, segue que* $a_k - b_k = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$*, portanto,* $a_k = b_k \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$*, e a ida segue.*

A volta segue trivialmente.

■

Similarmente, prova-se que o conjunto de todos os hipernômios também forma um espaço vetorial.

Definição 5.2.4. *Definimos como* H *o conjunto de todos os hipernômios. Isto é,*

$$H := \left\{ h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, {}^k x \,\middle|\, a_k \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} : \ a_k = 0 \ \forall k \geq n \right\}.$$

Proposição 5.2.5. H *é um espaço vetorial de dimensão infinita enumerável.*

Prova. *Analogamente à Demonstração do Teorema 5.2.2, verifica-se que* $H \leq F$*, em que* F *é o espaço vetorial do espaço das funções, logo, é um espaço vetorial.*

Há apenas um detalhe: dados $f, g \in H$*, considera-se n como majorante para o grau de* f, g*, e realiza-se, então, uma soma finita. Isso é possível, uma vez que definimos os hipernômios apenas como expressões algébricas finitas, ou seja,* f, g *são somas finitas.*

Define-se $B := \{{}^k x \mid k \in \mathbb{N}\}$*. Verifica-se analogamente à Demonstração do último Teorema que* B *é uma base para* V*. Como* $|B| = |\mathbb{N}|$*, segue que* $\dim(V) = |\mathbb{N}|$*, ou seja,* V *possui dimensão infinita enumerável, como queríamos provar.* ■

5.3 Hipernômio de Newton

É provável que o leitor já tenha ideia do que o Binômio de Newton se trata. Ele utiliza coeficientes binomiais (de combinatória) e fornece uma expressão para a potência natural de uma soma.

Por exemplo, sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, o Binômio de Newton $(x+y)^n$ é dado pela expressão:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Em que, $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, expressão para a combinação simples de n elementos tomados k a k.

No entanto, ao tentar formular algo análogo para a Tetração, definimos um "bi-hipernômio" de Newton.

Em um primeiro momento, temos, para $x, y \in \mathbb{R}$:

$$^2(x+y) = (x+y)^{x+y}.$$

Dessa igualdade, para poder efetuar a expansão binomial, precisamos que $x + y \in \mathbb{N}$. Dessa forma,

$$(x+y)^{x+y} = \sum_{k=0}^{x+y} \binom{x+y}{k} x^{x+y-k} y^k.$$

Isso nos motiva a definir o seguinte:

Definição 5.3.1. *Sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$. Então, o **bi-hipernômio de Newton** é a expressão hipernomial gerada por:*

$$^n(a+b).$$

Utilizando a definição de Tetração, é possível estabelecer uma relação recursiva para com a expansão bi-hipernomial de uma soma. De fato,

$$^n(a+b) = (a+b)^{\left(^{n-1}(a+b)\right)}.$$

Note que $^{n-1}(a+b) \in \mathbb{N}$. De fato, como $a+b \in \mathbb{N}$, qualquer hiperoperação com $a+b$ resulta, no final das contas, em uma soma repetida de $a+b$, que continua em $\mathbb{N}$. Em particular, $^{n-1}(a+b) \in \mathbb{N}$. Fazendo o Binômio de Newton do número $(a+b)^{^{n-1}(a+b)}$, obtemos:

$$(a+b)^{\left(^{n-1}(a+b)\right)} = \sum_{k=0}^{^{n-1}(a+b)} \binom{^{n-1}(a+b)}{k} a^{\left(^{n-1}(a+b)-k\right)} b^k.$$

Portanto, por transitividade das igualdades, segue que:

$$^n(a+b) = \sum_{k=0}^{^{n-1}(a+b)} \binom{^{n-1}(a+b)}{k} a^{\left(^{n-1}(a+b)-k\right)} b^k.$$

Com base nesse desenvolvimento, estabelecemos o Teorema:

Teorema 5.3.2. *Sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$. Então:*

$$^{n}(a+b) = \sum_{k=0}^{^{n-1}(a+b)} \binom{^{n-1}(a+b)}{k} a^{(^{n-1}(a+b)-k)} b^{k}.$$

Nas hipóteses do Teorema, é possível notar que a expansão bi-hipernomial se trata, dependendo da magnitude de n, de somatórios dentro de somatórios. Isto é, calcula-se um somatório variando de 0 a um outro somatório. Assim, pode não ser trivial calcular um bi-hipernômio de Newton.

Observação 5.3.3. *Uma das motivações para se definir o "bi-hipernômio" de Newton surge do cálculo da derivada de uma tetração utilizando a definição de derivada. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$ e f_n a função tetracional de n-ésimo grau. Pela Proposição 2.1.4, f_n é diferenciável. Logo, por definição, para todo $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ o limite a seguir existe e é finito:*

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{^{n}(x+h) - {}^{n}x}{h}.$$

Assim, gera-se a expressão $^{n}(x+h)$. Tal expressão poderia ser interpretada utilizando o bi-hipernômio de Newton. Mas, precisaríamos que $x, h \in \mathbb{N}$. Isso não pode ser realizado com nosso ferramental, uma vez que, sendo $\mathbb{N}$ discreto, é impossível se calcular um limite de uma variável natural se aproximando de zero.

Exemplo 5.3.4. *Vamos calcular $^{2}3$ e $^{4}2$ de uma maneira digamos que não tão "convencional", utilizando o Teorema anterior e, também, usando que a soma de todos os coeficientes binomiais de $n \in \mathbb{N}^{*}$ é 2^{n} (soma da n-ésima linha do triângulo de Pascal):*

$$^{2}3 = {}^{2}(2+1) = \sum_{k=0}^{^{1}(2+1)} \binom{^{1}(2+1)}{k} 2^{(^{1}(2+1)-k)} 1^{k} = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} 2^{3-k} =$$

$$= \binom{3}{3} 2^{3} + \binom{3}{2} 2^{2} + \binom{3}{1} 2^{1} + \binom{3}{0} 2^{0} = 1 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8 + 12 + 6 + 1 = 27.$$

Logo, $^{2}3 = 27$.

$$^{4}2 = {}^{4}(1+1) = \sum_{k=0}^{^{3}(1+1)} \left(\binom{^{3}(1+1)}{k} 1^{(^{3}(1+1)-k)} 1^{k} \right) = \sum_{k=0}^{^{3}2} \binom{^{3}2}{k} = 2^{^{3}2} = 2^{16} = 65536.$$

Logo, $^{4}2 = 65.536$.

6 Tetração Complexa

Com todos os resultados que apresentamos nos 6 primeiros capítulos, se tem uma noção favorável do que significa a Tetração, pelo menos para o caso real. No entanto, sabemos que existe outro corpo que desempenha um papel importante na teoria dos números, o corpo dos números complexos. Neste trabalho, consideramos que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, e, assim, podemos tentar generalizar a tetração para quando houver uma componente imaginária não nula. Para isso, porém, é preciso entender o que significa, primeiramente, a potenciação complexa. Definições e resultados acerca disso se encontram no Apêndice A.2.

Assim, nesse capítulo, vamos trabalhar com a 4-hiperoperação em $\mathbb{C}$, que consiste da repetição recursiva da 3-hiperoperação. Por comodismo, chamaremos essa hiperoperação de Tetração Complexa. Tendo em vista a seção sobre potências arbitrárias (A.2.4), é necessário escolher um ramo do Logaritmo para trabalhar com potenciação complexa. Utilizaremos, a priori, o ramo principal do logaritmo: o aberto $U_0 := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

6.1 Definição

Similarmente à definição 1.3.1, vamos definir a Tetração Complexa principal (em U_0) da seguinte maneira utilizando a Potenciação Complexa:

Definição 6.1.1. *Sejam $z \in U_0$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Então, a n-ésima tetração complexa de z é dada por:*

$$
{}^{n}z := \begin{cases} z, \text{ se } n = 1. \\ z^{({}^{n-1}z)}, \text{ se } n \geq 2; \end{cases}
$$

Observação 6.1.2. *Nas condições da definição anterior, fazendo a recursão ${}^{n}z = z^{{}^{n-1}z}$ valer para $n = 1$, temos:*

$$
{}^{1}z = z^{({}^{1-1}z)} = z^{{}^{0}z} \implies z = z^{{}^{0}z}.
$$

Veja que, para $z \neq 1$, temos, pela Proposição A.2.35:

$$
z^{1} = z^{{}^{0}z} \implies 1 + \frac{2ki\pi}{\mathrm{Log}(z)} = {}^{0}z.
$$

(Para algum $k \in \mathbb{Z}$). Em contramão com o caso real, não há uma conclusão recursiva precisa para a "zeroésima" tetração complexa de um número. A solução para isso pode ser iniciar a definição recursiva para $n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$.

Com isso, atualizamos a definição de tetração complexa da seguinte maneira:

Definição 6.1.3. *Sejam $z \in U_0$ e $n \in \mathbb{N}$. Então:*

$$^{n}z := \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0. \\ z^{^{n-1}z}, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

Observação 6.1.4. *Nas condições de tal definição, fazendo a recursão $^{n}z = z^{(^{n-1}z)}$ valer para $n = 0$, temos:*

$$^{0}z = z^{^{-1}z} \implies z^{0} = 1 = z^{^{-1}z} \implies {}^{-1}z = 0 + \frac{2im\pi}{\mathrm{Log}(z)}.$$

(Para algum $m \in \mathbb{Z}$).

De fato, para $z \neq 1$ e todo $k \in \mathbb{Z}$, pela Proposição A.2.32 temos:

$$z^{\frac{2ik\pi}{\mathrm{Log}(z)}} = z^{0+\frac{2ik\pi}{\mathrm{Log}(z)}} = z^{0} = 1 \implies z^{\frac{2ik\pi}{\mathrm{Log}(z)}} = 1.$$

Da mesma forma, temos ^{-1}z indefinido (pois pode assumir infinitos valores distintos). Assim, pela última vez, vamos atualizar a definição.

Definição 6.1.5. *Sejam $z \in U_0$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Então:*

$$^{n}z = \begin{cases} 0, \text{ se } n = -1; \\ z^{(^{n-1}z)}, \text{ se } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Observação 6.1.6. *A motivação para tais atualizações na definição segue do fato de que queremos fazer com que a Tetração Complexa seja uma extensão da Tetração Real, isto é, que a Tetração Complexa equivalha à Tetração Real quando aplicada em bases reais puras, assim como ocorre com Logaritmo Complexo e Logaritmo Natural para logaritmandos reais positivos (vide a seção de Logaritmo Complexo do último capítulo). Isso pode ser ilustrado da seguinte maneira: caso a definição desatualizada fosse utilizada, teríamos:*

$$^{-1}2 = \frac{2im\pi}{\mathrm{Log}(2)} \quad \text{para algum } m \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, $^{-1}2 = 0$. Então, $0 = \dfrac{2im\pi}{\mathrm{Log}(2)} \implies 0 = 2im\pi \implies m = 0$.

Exemplo 6.1.7. *Seja $z \in U_0$. Então:*

- $^{0}z = z^{^{-1}z} = z^{0} = 1$;
- $^{1}z = z^{^{0}z} = z^{1} = z$;
- $^{2}z = z^{^{1}z} = z^{z}$;
- $^{3}z = z^{^{2}z} = z^{z^{z}}$;

Tendo em vista esse exemplo, pensamos em uma relação da definição recursiva utilizada em $\mathbb{C}$ com o Teorema 1.3.3. Estabelecemos um resultado análogo a ele, mas para o caso complexo:

Exemplo 6.1.8. *Seja $z \in U_0$, e $n \in \mathbb{N}^*$. Então:*

$$^{n}z = \left(z^{z^{z^{\cdots^{z}}}}\right)_n.$$

Demonstração. *Mostraremos o resultado utilizando indução matemática:*

Passo Base (n=1):

$$^{1}z = z = (z)_1.$$

Hipótese de Indução: Suponha que, para algum $k \in \mathbb{N}^*$, tenha-se:

$$^{k}z = \left(z^{z^{z^{\cdots^{z}}}}\right)_k.$$

Passo Indutivo: Utilizando a definição de tetração complexa, temos:

$$^{k+1}z = z^{(^{(k+1)-1}z)} = z^{^{k}z} = z^{\left(z^{z^{\cdots^{z}}}\right)_k} = \left(z^{z^{z^{\cdots^{z}}}}\right)_{k+1}.$$

Portanto, a igualdade é verdadeira por indução. ■

Outra maneira de enxergar a recursão da tetração complexa, é utilizando a definição de potência arbitrária complexa, dada no capítulo anterior. A observação a seguir exibe tal maneira:

Observação 6.1.9. *Seja $n \in \mathbb{N}$, e $z \in U_0$. Então:*

$$^{2}z = z^{(^{n-1}z)} = e^{(^{n-1}z)\,\mathrm{Log}(z)}.$$

Observação 6.1.10. *Vamos compreender o que seria a segunda tetração de um número em U_0. Assim, seja $z = a + bi \in U_0$. Então:*

$$\begin{aligned}
z^z &= e^{z\,\mathrm{Log}(z)} = e^{z(\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z))} = e^{z\ln|z| + iz\,\mathrm{Arg}(z)} = e^{z\ln|z|}e^{iz\,\mathrm{Arg}(z)} = \\
&= \left(e^{\ln|z|}\right)^z \cdot e^{i(z\,\mathrm{Arg}(z))} = |z|^z \cdot e^{a\,\mathrm{Arg}(z)}\big(\cos(b\,\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(b\,\mathrm{Arg}(z))\big) = \\
&= |z|^a\big(\cos(b\ln|z|) + i\sin(b\ln|z|)\big)\cdot e^{a\,\mathrm{Arg}(z)}\big(\cos(b\,\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(b\,\mathrm{Arg}(z))\big) = \\
&= |z|^a e^{a\,\mathrm{Arg}(z)}\big(\cos(b\ln|z|)\cos(b\,\mathrm{Arg}(z)) - \sin(b\ln|z|)\sin(b\,\mathrm{Arg}(z))\big) = \\
&\quad + |z|^a e^{a\,\mathrm{Arg}(z)}\big(\cos(b\ln|z|)\sin(b\,\mathrm{Arg}(z)) + \sin(b\ln|z|)\cos(b\,\mathrm{Arg}(z))\big)i = \\
&= |z|^a e^{a\,\mathrm{Arg}(z)}\cos\big(b(\ln|z| + \mathrm{Arg}(z))\big) + |z|^a e^{a\,\mathrm{Arg}(z)}\sin\big(b(\ln|z| + \mathrm{Arg}(z))\big)i = \\
&= |z|^a e^{a\,\mathrm{Arg}(z)}\Big[\cos\big(b(\ln|z| + \mathrm{Arg}(z))\big) + i\sin\big(b(\ln|z| + \mathrm{Arg}(z))\big)\Big].
\end{aligned}$$

Assim, conclui-se que:

$$\begin{cases} \Re({}^2z) = |z|^a e^{a\,\mathrm{Arg}(z)}(\cos(b(\ln|z| + \mathrm{Arg}(z)))); \\ \Im({}^2z) = |z|^a e^{a\,\mathrm{Arg}(z)}(\sin(b(\ln|z| + \mathrm{Arg}(z)))). \end{cases}$$

Logo, avaliar o gráfico da função complexa $F_2 : U_0 \to \mathbb{C}$ tal que $F(z) = {}^2z$ não parece ser uma tarefa trivial.

6.2 Funções

Vamos falar novamente sobre funções, com intuito de avaliar limites, e verificar se se comportam de maneira similar ao caso real.

Definição 6.2.1. *Seja $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Definimos a função **tetracional complexa** de n-ésimo grau como sendo:*

$$\begin{array}{rccc} F_n: & U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & {}^nz. \end{array}$$

Observação 6.2.2. *De imediato, tais funções estendem as funções tetracionais reais. De fato, seja $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Então, F_n, restrita a $\mathbb{R}_+^*$ no domínio e $\mathbb{R}$ no contradomínio é igual a f_n, pelo fato de definirmos a tetração complexa para ser equivalente à tetração real quando se aplica em uma base real pura.*

Proposição 6.2.3. *Seja $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Então, F_n é contínua.*

Prova. *Para $n = -1$, F_n é constante, logo é contínua. Por hipótese de indução, suponha que F_n é contínua. Seja $z \in U_0$. Pela observação 6.1.9, temos que $F_{n+1}(z) = {}^{n+1}z = e^{{}^nz\,\mathrm{Log}(z)} =$ $\mathrm{Exp}(F_n(z)\,\mathrm{Log}(z))$. Logo, F_{n+1} é contínua pois consiste de composição e produto de funções contínuas.* ■

Proposição 6.2.4. *Seja $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Então, F_n é holomorfa.*

Prova. *Para $n = -1$, F_n é constante, logo é holomorfa. Agora, pela observação 6.1.9, $F_{n+1}(z) = e^{{}^nz\,\mathrm{Log}(z)}$. De maneira análoga à Proposição 2.1.4, utilizando a regra da cadeia para funções complexas (supondo, por hipótese de indução, que F_n é holomorfa), verifica-se que, para $z \in U_0$,*

$$F'_{n+1}(z) = F_{n+1}(z) \cdot \left(\mathrm{Log}(z) F'_n(z) + \frac{F_n(z)}{z} \right).$$

Pela Proposição anterior, F_{n+1} é contínua. Logo, da expressão acima, segue que F'_{n+1} possui derivada contínua, logo é holomorfa. ■

Ao observar o comportamento do gráfico de tal família de funções complexas, chega-se a conjecturar o mesmo resultado para o caso real:

Conjectura 6.2.5. *Seja $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Então:*

$$\lim_{z\to 0} F_n(z) = \begin{cases} 0 & \textit{se } n \textit{ é ímpar;} \\ 1 & \textit{se } n \textit{ é par.} \end{cases}$$

A Conjectura é claramente verdadeira para $n \in \{-1, 0, 1\}$. Agora, para os casos $n \in \{2, 3\}$, a Conjectura é verdadeira. Para verificar isso, enunciamos:

Lema 6.2.6.

$$\lim_{z\to 0} \operatorname{Log}(z) = -\infty.$$

Prova. *Dado $z \in U_0$, temos*

$$\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z).$$

Ainda, Arg *é uma função limitada, tal que $|\operatorname{Arg}(z)| \leq \pi$. Agora,*

$$\lim_{z\to 0} \ln|z| = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty,$$

pois $z \to 0$ se, e somente se, $|z| \to 0^+$, e fizemos a mudança de variável $x = |z|$. Logo, como Arg *é limitada,*

$$\lim_{z\to 0} \operatorname{Log}(z) = \lim_{z\to 0} \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z) = -\infty.$$

∎

Agora sim, vamos provar que vale para $n \in \{2, 3\}$.

Proposição 6.2.7. *A Conjectura anterior vale para $n \in \{2, 3\}$.*

Prova. *Seja $z \in U_0$. Pela Observação 6.1.9, temos $F_2(z) = {}^2z = e^{z \operatorname{Log}(z)}$ e $F_3(z) = {}^3z = e^{{}^2z \operatorname{Log}(z)}$. Veja que, por abuso de notação,*

$$\lim_{z\to 0} z \operatorname{Log}(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\frac{1}{\operatorname{Log}(z)}} = \frac{0}{0}.$$

Pelo Teorema de L'Hôpital para funções complexas, temos:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\frac{1}{\operatorname{Log}(z)}} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{-\frac{\frac{1}{z}}{\operatorname{Log}^2(z)}} = \lim_{z\to 0} \frac{-z}{\operatorname{Log}^2(z)} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

Logo, pela continuidade da exponencial complexa,

$$\lim_{z\to 0} F_2(z) = \lim_{z\to 0} e^{z \operatorname{Log}(z)} = e^0 = 1.$$

E além disso,

$$\lim_{z\to 0} F_3(z) = \lim_{z\to 0} e^{{}^2z \operatorname{Log}(z)} = e^{1\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0.$$

∎

A seguir, apresentamos alguns dos gráficos resultantes das observações de $\lim_{z\to 0} F_n(z)$. Vale ressaltar que os gráficos estão em malha de cores, pois tratam-se de funções complexas, ou seja, as imagens de cada elemento no plano têm unidade real e imaginária.

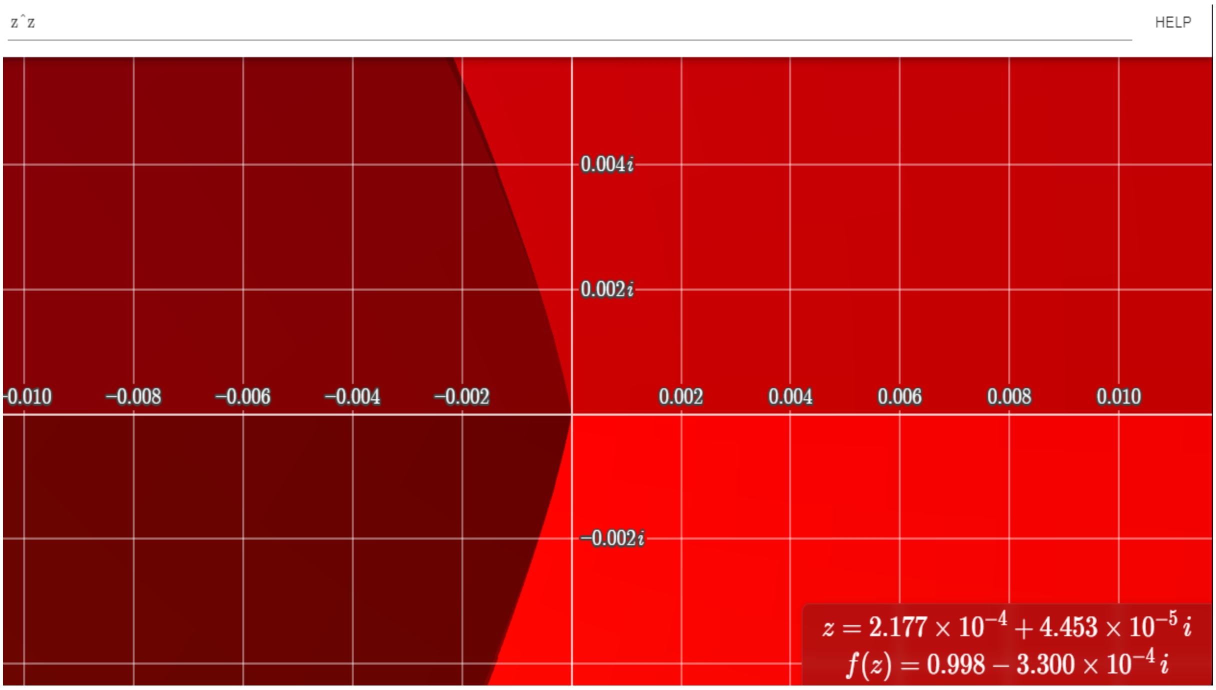

Figura 10 - Limite de $F_2(z)$ quando $z \to 0$.

Fonte: <https://samuelj.li/complex-function-plotter/#z%5Ez>.

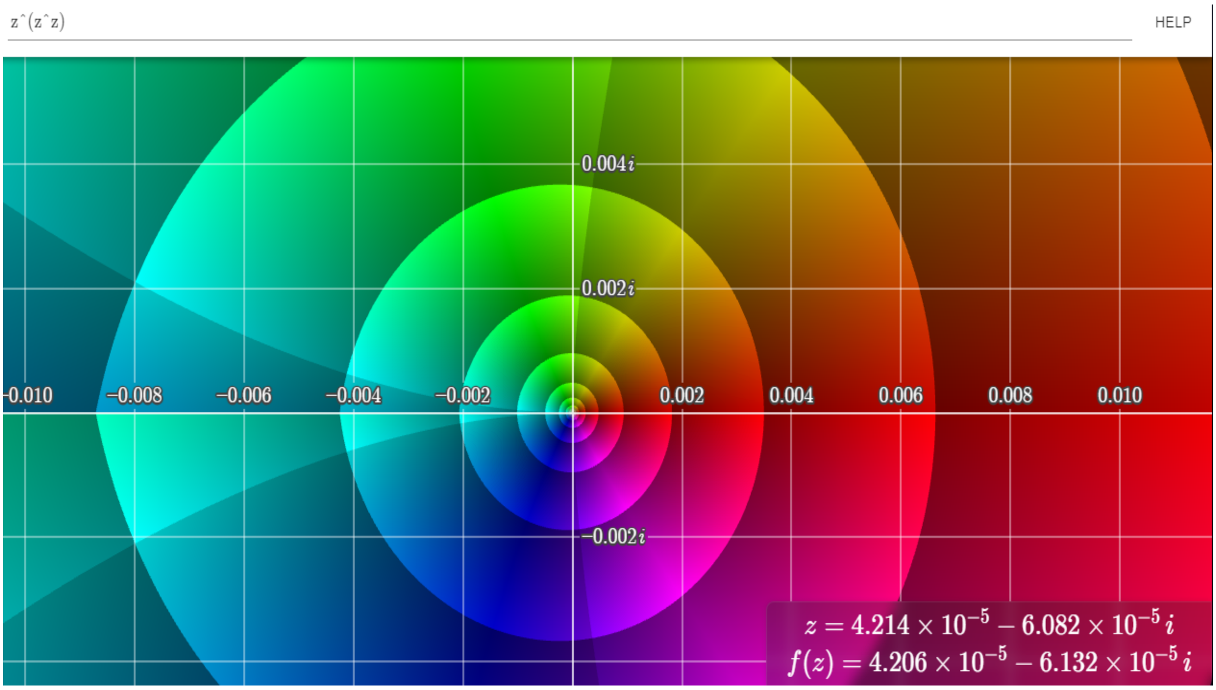

Figura 11 - Limite de $F_3(z)$ quando $z \to 0$.

Fonte: <https://samuelj.li/complex-function-plotter/#z%5E(z%5Ez)>.

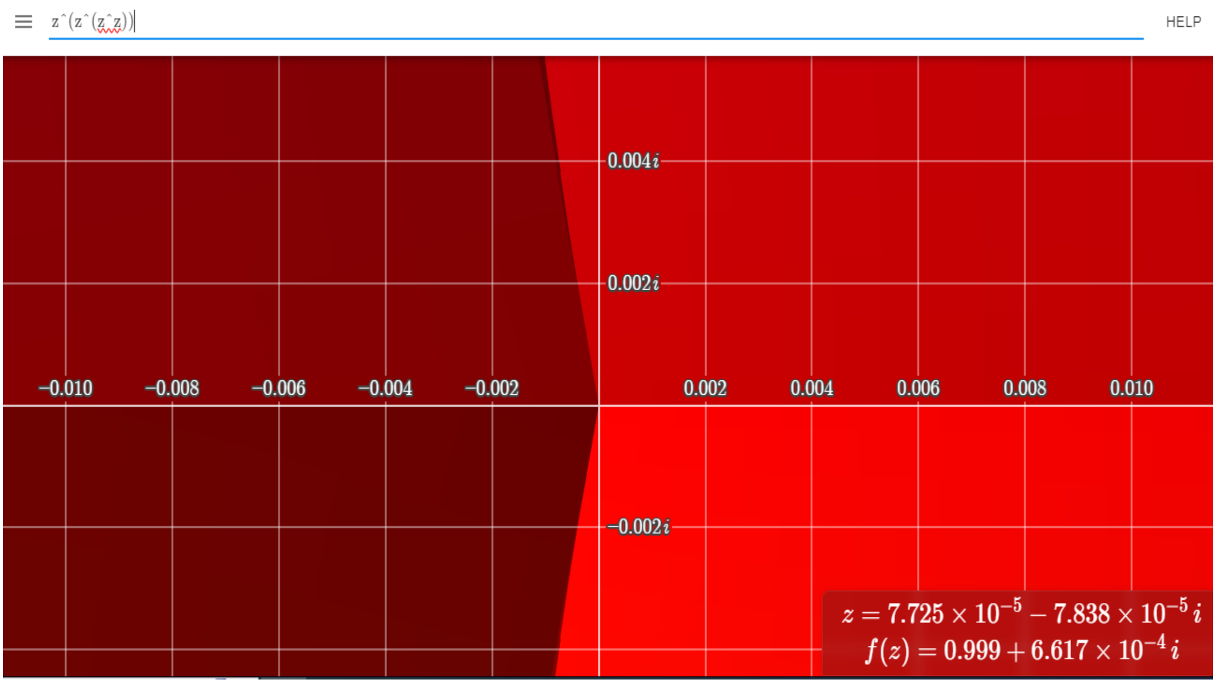

Figura 12 - Limite de $F_4(z)$ quando $z \to 0$.

Fonte: <https://samuelj.li/complex-function-plotter/#z%5E(z%5E(z%5Ez))>.

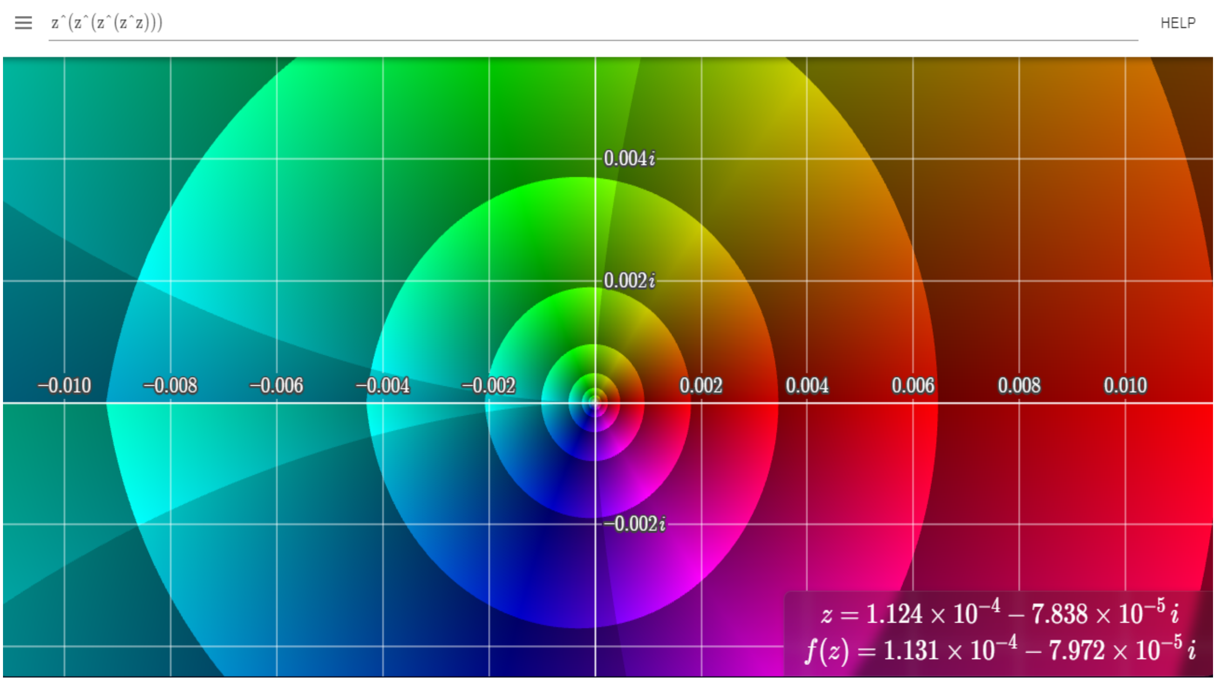

Figura 13 - Limite de $F_5(z)$ quando $z \to 0$.

Fonte: <https://samuelj.li/complex-function-plotter/#z%5E(z%5E(z%5E(z%5Ez)))>.

7 Hiperoperações Exponenciais

Algo notável das hiperoperações convencionais é que, pelo menos a partir da 3-hiperoperação, elas não satisfazem muitas propriedades algébricas. De fato, a potenciação já não é comutativa nem associativa.

A seguir, veja alguns contraexemplos de propriedades da potenciação convencional que fazem com que seja impossível formar uma estrutura algébrica eficaz com ela e a multiplicação (operação antecessora).

Exemplo 7.0.1. *Não comutativa:*

$$3^2 = 9 \neq 8 = 2^3 \implies 3^2 \neq 2^3.$$

Não associativa:

$$(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 \neq 2^8 = 2^{(2^3)} \implies (2^2)^3 \neq 2^{(2^3)}.$$

Não distribui sobre a multiplicação:

$$2^{2\cdot 3} = 2^6 \neq 2^5 = 2^{2+3} = (2^2)\cdot(2^3) \implies 2^{2\cdot 3} \neq (2^2)\cdot(2^3).$$

Há elemento neutro, mas apenas à direita e ainda é o mesmo da multiplicação:

$$x^1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ 1^3 = 1 \neq 3 = 3^1 \implies 1^3 \neq 3^1.$$

Como a potenciação já não satisfaz várias propriedades algébricas desejáveis, muito menos as hiperoperações (repetições iteradas da potenciação) subsequentes satisfarão tais propriedades.

É com vista nisso que, nesse capítulo, iremos procurar uma operação que satisfaça propriedades algébricas desejáveis, e distribua sobre a multiplicação (da mesma forma que a multplicação distribui sobre a soma), sendo uma candidata à sucessora algébrica da multiplicação. Mais ainda, temos como objetivo encontrar uma família de hiperoperações "corrigidas" de maneira a satisfazer propriedades algébricas fortes.

Conceituações e alguns resultados que serão usados envolvendo corpos ordenados utilizados nesse capítulo encontram-se no Apêndice A.3.

7.1 A primeira Hiperoperação Exponencial

Definição 7.1.1. *Seja $b \in \mathbb{R}_+^*$. Definimos a função exponencial de base b como:*

$$\begin{aligned} \exp_b :\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto b^x. \end{aligned}$$

Agora, enunciaremos um resultado que declara a forma de uma hiperoperação "corrigida" para que satisfaça propriedades algébricas desejáveis:

Teorema 7.1.2. *Seja $*$ uma operação binária em $\mathbb{R}$. Isto é, há uma função f tal que:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array}.$$

Suponha que $*$ satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- *$*$ distribui à direita sobre a multiplicação. Isto é, $(x \cdot y) * z = (x * z) \cdot (y * z)$*
- *$*$ é contínua na primeira variável*[1]*;*
- *Há um elemento neutro à esquerda $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Isto é, $b * x = x$.*
- *Operar com 1 à esquerda resulta em 1. Isto é, $1 * x = 1$.*

Sob tais hipóteses:

$$x * y = \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Observe que supomos propriedades para que, com a multiplicação, a operação possa formar um corpo em $\mathbb{R}$, e tenha um comportamento que possa ser descrito por uma expressão contínua. Lembre-se que, nesse possível corpo, o 1 seria o neutro da "soma" (pois a multiplicação faria o papel de soma), e assim, as duas últimas condições acabam fazendo sentido, pelas afirmações (2) e (3) do Lema A.3.7.

Demonstração. *A demonstração desse resultado não é tão trivial. Com efeito, sejam $x, y \in \mathbb{R}$ em que $x \neq 0$. Primeiramente, vamos mostrar a seguinte afirmação:* ***Afirmação:***

$$f(x, y)^n = f(x^n, y) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(Ou seja, essa operação está relacionada com a potenciação). ***Verificação:*** *Vamos verificar essa afirmação utilizando indução: <u>Passo Base (n=0):</u> Usando que operar com 1 resulta em 1, temos:*

$$f(x, y)^0 = 1 = f(1, y) = f(x^0, y).$$

<u>Hipótese de Indução:</u> Suponha que, para $k \in \mathbb{N}$, tenha-se:

$$f(x^k, y) = f(x, y)^k.$$

<u>Passo Indutivo:</u> Utilizando a Hipótese de Indução e a propriedade distributiva à direita da operação, conclui-se que:

$$f(x^{k+1}, y) = f(x^k \cdot x, y) = f(x^k, y) \cdot f(x, y) = f(x, y)^k \cdot f(x, y) = f(x, y)^{k+1}.$$

[1] Com contínua na primeira variável, queremos dizer que, para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, a função dada por $g_{y_0}(x) := f(x, y_0)$ é contínua.

Portanto, por Indução Matemática, a afirmação deve ser verdadeira. Agora, vamos mostrar que isso também vale para expoentes inteiros negativos. Isto é:

$$f(x^{-n}, y) = f(x, y)^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, para $n = 1$, temos:

$$f(x^{-1}, y) = f(x, y)^{-1}.$$

Isso ocorre, pois:

$$f(x^{-1}, y) \cdot f(x, y) = f(x^{-1} \cdot x, y) = f(1, y) = 1.$$

Agora, para n natural qualquer:

$$f(x^{-n}, y) = f((x^{-1})^n, y) = (f(x^{-1}, y))^n = ((f(x, y))^{-1})^n = f(x, y)^{-n}.$$

Logo,

$$f(x^z, y) = f(x, y)^z \quad \forall z \in \mathbb{Z}.$$

Esse raciocínio pode ser estendido para expoentes racionais. Porém, para poder realizar tal extensão, é preciso que $x \in \mathbb{R}_+^*$. Então, vamos supor isso e provar que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x^{\frac{1}{n}}, y) = (f(x, y))^{\frac{1}{n}}.$$

De fato, pela afirmação anterior:

$$f(x^{\frac{1}{n}}, y)^n = f((x^{\frac{1}{n}})^n, y) = f(x, y) \implies f(x^{\frac{1}{n}}, y) = (f(x, y))^{\frac{1}{n}}.$$

Como $x > 0$, temos $x = (x^{\frac{1}{2}})^2$, logo:

$$f(x^{\frac{1}{n}}, y) = f(((x^{\frac{1}{2}})^2)^{\frac{1}{n}}, y) = f(x^{\frac{1}{2n}}, y)^2 \geq 0.$$

para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Assim, quando n for par, não há problemas com $f(x^{\frac{1}{n}}, y)$ ser a raiz n-ésima de $f(x, y)$, pois não será um valor negativo. Agora veja que, para todo $q \in \mathbb{Q}$:

$$f(x^q, y) = (f(x, y))^q.$$

De fato, sem perda de generalidade, temos $q = \dfrac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Assim:

$$f(x^q, y) = f(x^{\frac{m}{n}}, y) = f((x^m)^{\frac{1}{n}}, y) = f(x^m, y)^{\frac{1}{n}} = (f(x, y)^m)^{\frac{1}{n}} = f(x, y)^{\frac{m}{n}} = f(x, y)^q.$$

A ideia agora é provar isso para um expoente real qualquer, ou seja, provar que:

$$f(x^r, y) = f(x, y)^r \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Para isso, seja $r \in \mathbb{R}$. Tome uma sequência $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(q_n) = r$. (Tal sequência existe pois $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}}$). Então, utilizando a definição de potenciação com expoente real, o fato de f ser contínua na primeira variável e que $(q_n) \subset \mathbb{Q}$:

$$f(x^r, y) = f(\lim_{n\to\infty}(x^{q_n}), y) = \lim_{n\to\infty}(f(x^{q_n}, y)) = \lim_{n\to\infty}(f(x, y)^{q_n}) = (f(x, y))^r.$$

Note que $x = b^{\log_b(x)}$. Assim, temos que, por b ser o elemento neutro à esquerda de $*$, utilizando a afirmação provada a respeito dos expoentes e supondo que $y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x, y) = f(b^{\log_b(x)}, y) = (f(b, y))^{\log_b(x)} = y^{\log_b(x)}.$$

Conclui-se que:

$$x * y = f(x, y) = y^{\log_b(x)} = (b^{\log_b(y)})^{\log_b(x)} = b^{\log_b(y)\cdot\log_b(x)} = \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)).$$

Ou seja:

$$x * y = \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

Como queríamos demonstrar. ■

De posse resultado, definimos:

Definição 7.1.3. *Seja $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. A (1)-hiperoperação exponencial de base b é dada por:*

$$\begin{array}{rccc} *_b : & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & (x, y) & \longmapsto & \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)) \end{array}$$

Agora, o conjunto dos números reais positivos com tal operação, juntamente da multiplicação, formam um corpo:

Teorema 7.1.4. *Seja $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Então, $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b)$ é um corpo.*

Demonstração. *Vamos verificar que $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b)$ satisfaz todas as condições da Definição A.3.2.*

Para a boa definição e fechamento das operações em $\mathbb{R}_+^*$, tome $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Então, $x \cdot y \in \mathbb{R}_+^*$. De fato, como $x > 0$, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ é corpo ordenado, e $y > 0$, segue que

$$x > 0 \implies x \cdot y > 0 \cdot y \implies x \cdot y > 0 \implies x \cdot y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ainda,

$$x *_b y = \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)) \in \exp_b(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^* \implies x *_b y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Portanto, as operações estão bem definidas e fechadas em $\mathbb{R}_+^*$. $(1), (2), (3), (4)$ são satisfeitas automaticamente, pois, $\oplus = \cdot$ se trata da multiplicação usual em $\mathbb{R}_+^*$. Nesse caso, $0_{\mathbb{R}_+^*} := 1$ (para a afirmação (3)), e a afirmação (4) é verdade pois $0_{\mathbb{R}} := 0 \notin \mathbb{R}_+^*$. Portanto, vamos verificar apenas as afirmações $(5), (6), (7), (8)$ e (9). Para tal, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. Então: (5) :

$$x *_b y = \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)) = \exp_b(\log_b(y) \cdot \log_b(x)) = y *_b x \implies$$

$$\implies x *_b y = y *_b x.$$

(6) :

$$(x *_b y) *_b z = (\exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y))) *_b z = \exp_b(\log_b((\exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)))) \log_b(z)) =$$

$$= \exp_b((\log_b(x) \cdot \log_b(y)) \cdot \log_b(z)) = \exp_b((\log_b(x) \cdot \log_b(y)) \cdot \log_b(z)) =$$

$\exp_b(\log_b(x) \cdot (\log_b(y) \cdot \log_b(z))) = \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(\exp_b(\log_b(y) \cdot \log_b(z)))) = x *_b (\exp_b(\log_b(y) \cdot \log_b(z))) =$

(7) : *O elemento neutro à esquerda de $*_b$ é b, por construção. Como $*_b$ é comutativa, b é elemento neutro de $*_b$.* (8) : *Para $x \neq 0_{\mathbb{R}_+^*} = 1$, tome $\hat{x} := \exp_b\left(\dfrac{1}{\log_b(x)}\right) \implies \log_b(\hat{x}) = \dfrac{1}{\log_b(x)}$. Assim,*

$$x *_b \hat{x} = \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(\hat{x})) = \exp_b\left(\log_b(x) \cdot \frac{1}{\log_b(x)}\right) = \exp_b(1) = b \implies$$

$$\implies x *_b \hat{x} = b.$$

(9) : *Por construção, $*_b$ distribui à direita sobre a multiplicação. Como $*_b$ é comutativa, $*_b$ distribui sobre a multiplicação. Sendo assim, como $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b)$ satisfaz os 9 axiomas da Definição A.3.2, tal tripla é um corpo, como queríamos demonstrar.* ■

Se quisermos, talvez, induzir uma ordem e possivelmente tornar esse corpo um corpo ordenado, a proposição a seguir garante uma forma de induzir tal ordem via isomorfismo:

Proposição 7.1.5. *Sejam $(K_1, +_1, \cdot_1), (K_2, +_2, \cdot_2)$ corpos tais que $K_1 \cong_\varphi K_2$. Suponha que $(K_2, \leq_2)$ é um corpo ordenado. Então, a seguinte relação em K_1 o torna um corpo ordenado:*

$$a \leq_1 b \iff \varphi(a) \leq_2 \varphi(b) \qquad \forall a, b \in K_1.$$

Mais ainda,

$$(K_1, +_1, \cdot_1, \leq_1) \equiv_\varphi (K_2, +_2, \cdot_2, \leq_2).$$

Prova. *Vamos, primeiramente, mostrar que $(K_1, \leq_1)$ é um conjunto ordenado. Com efeito, sejam $a, b, c, \in K_1$. Então, utilizando o fato de $(K_2, \leq_2)$ ser ordenado: Antissimetria:*

$$a \leq_1 b \text{ e } b \leq_1 a \implies \varphi(a) \leq_2 \varphi(b) \text{ e } \varphi(b) \leq_2 \varphi(a) \implies \varphi(a) = \varphi(b) \implies a = b.$$

Transitividade:

$$a \leq_1 b \text{ e } b \leq_1 c \implies \varphi(a) \leq_2 \varphi(b) \text{ e } \varphi(b) \leq_2 \varphi(c) \implies \varphi(a) \leq_2 \varphi(c) \implies a \leq_1 c.$$

Totalidade: Como $a, b \in K_1$, temos $\varphi(a), \varphi(b) \in K_2$. Assim, pela totalidade de $\leq_2$:

$$\varphi(a) \leq_2 \varphi(b) \text{ ou } \varphi(b) \leq_2 \varphi(a) \implies a \leq_1 b \text{ ou } b \leq_1 a.$$

Ou seja, $a \leq_1 b$ ou $b \leq_1 a$, de forma que $(K_1, \leq_1)$ é ordenado. Agora, mostremos que se trata de um corpo ordenado. Utilizaremos o fato de que $(K_2, \leq_2)$ é um corpo ordenado.

$$a \leq_1 b \implies \varphi(a) \leq_2 \varphi(b) \implies \varphi(a) +_2 \varphi(c) \leq_2 \varphi(b) +_2 \varphi(c) \implies$$

$$\implies \varphi(a +_1 c) \leq_2 \varphi(b +_1 c) \implies a +_1 c \leq_1 b +_1 c.$$

Agora, assuma que $c >_1 0_{K_1}$*. Assim, temos que* $\varphi(c) \geq_2 \varphi(0_{K_1}) = 0_{K_2}$*. Como* $c \neq 0_{K_1}$ *e* φ *é bijetora, temos que* $\varphi(c) >_2 0_{K_2}$*. Assim:*

$$a \leq_1 b \implies \varphi(a) \leq_2 \varphi(b) \implies \varphi(a) \cdot_2 \varphi(c) \leq_2 \varphi(b) \cdot_2 \varphi(c) \implies$$

$$\implies \varphi(a \cdot_1 c) \leq_2 \varphi(b \cdot_1 c) \implies a \cdot_1 c \leq_1 b \cdot_1 c$$

Mais ainda, diretamente da definição da relação:

$$a \leq_1 b \implies \varphi(a) \leq_2 \varphi(b).$$

Disso, e do fato de que $(K_1, +_1, \cdot_1) \cong_\varphi (K_2, +_2, \cdot_2)$*, segue que:*

$$(K_1, +_1, \cdot_1, \leq_1) \equiv_\varphi (K_2, +_2, \cdot_2, \leq_2),$$

como queríamos provar. ■

Outra característica forte dessa operação é de que, na verdade, $\mathbb{R}_+^*$ com as operações do último Teorema é isomorfo a $\mathbb{R}$ com as operações usuais. Isso é garantido pela proposição a seguir:

Proposição 7.1.6. *Seja* $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$*. Então,*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b).$$

Mais ainda:

- *Se* $b > 1$*, então,* $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \leq)$ *é corpo ordenado e* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \equiv (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \leq)$*;*
- *Se* $0 < b < 1$*, então,* $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \geq)$ *é corpo ordenado e* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \equiv (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \geq)$*.*

Em que $\leq$ *denota a relação de ordem usual em* $\mathbb{R}$*.*

Prova. *Precisamos exibir um isomorfismo entre os dois corpos. Pela Proposição A.3.12, sabemos que, se* φ *é um isomorfismo entre os dois corpos, então:*

$$\varphi(0) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi(1) = b.$$

Uma escolha natural de função bijetiva que satisfaz a afirmação acima é $\varphi := \exp_b$*. Verifiquemos se* $\mathbb{R} \cong_{\exp_b} \mathbb{R}_+^*$*. Com efeito, sejam* $x, y \in \mathbb{R}$*. Então:*

$$\exp_b(x + y) = b^{x+y} = b^x \cdot b^y = \exp_b(x) \cdot \exp_b(y)$$

e, ainda,

$$\exp_b(x) *_b \exp_b(y) = \exp_b(\log_b(\exp_b(x)) \cdot \log_b(\exp_b(y))) = \exp_b(x \cdot y)$$

Assim, $\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *é uma bijeção entre corpos que satisfaz as duas propriedades de homomorfismo, portanto,* $(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\exp_b} (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b)$*. Pela A.3.11, como* $\log_b = (\exp_b)^{-1}$ *temos, equivalentemente:*

$$(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b) \cong_{\log_b} (\mathbb{R}, +, \cdot).$$

Mais ainda, tome $x, y \in \mathbb{R}_+^*$*. Se* $b > 1$*, então, pela Proposição anterior, faz-se* $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \leq_b)$ *um corpo ordenado com a seguinte relação de ordem induzida via isomorfismo:*

$$x \leq_b y \iff \log_b(x) \leq \log_b(y).$$

Entretanto, como $b > 1$*:*

$$\log_b(x) \leq \log_b(y) \iff x \leq y.$$

Assim, pela Proposição anterior:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \equiv (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \leq).$$

Se $0 < b < 1$*, então, similarmente, induz-se uma relação de ordem via isomorfismo, porém, dessa vez:*

$$\log_b(x) \leq \log_b(y) \iff x \geq y.$$

De forma que, pela Proposição anterior:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \equiv (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \geq).$$

E a prova está completa. ■

7.2 As outras Hiperoperações Exponenciais

Observação 7.2.1. *A exibição desse isomorfismo nos leva a pensar: será que é possível continuar esse raciocínio e criar uma operação* $\Diamond_b$ *tal que* $\Diamond_b$ *distribua sobre* $*_b$ *e satisfaça propriedades de corpo em algum subconjunto de* $\mathbb{R}_+^*$*? A resposta é: sim. Mais ainda, esse raciocínio pode ser estendido de maneira recursiva, assim como nas hiperoperações convencionais. Na verdade, um dos motivos pelo qual decidimos incluir "Hiperoperações" no título desse capítulo foi por causa de tal relação recursiva que é possível estabelecer.*

Ao perceber que $\exp_b$ estabelece um isomorfismo entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$, será que é possível "fabricar" um corpo $(K_b, *_b, \Diamond_b)$, em que $K_b \subset \mathbb{R}_+^*$, deduzido pela relação $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b) \cong_{\exp_b} (K_b, *_b, \Diamond_b)$? A proposição a seguir assegura uma relação recursiva capaz de fabricar tal corpo:

Proposição 7.2.2. *Seja* $b \in (1, \infty)$*. Se* K_b *é um corpo tal que* $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b) \cong_{\exp_b} (K_b, *_b, \Diamond_b)$*, então:*

$$x \Diamond_b y = \exp_b(\log_b(x) *_b \log_b(y)) \quad \forall x, y \in (1, \infty).$$

Prova. *Sejam* $x, y \in (1, \infty)$*. Então,* $\log_b(x), \log_b(y) \in (0, \infty) = \mathbb{R}_+^*$*. Disso, e pelo fato de* $\exp_b$ *ser um isomorfismo entre* $\mathbb{R}_+^*$ *e* K_b*, segue que:*

$$\exp_b(\log_b(x) *_b \log_b(y)) = \exp_b(\log_b(x)) \diamondsuit_b \exp_b(\log_b(y)) = x \diamondsuit_b y,$$

como queríamos. ∎

Observação 7.2.3. *Observe que supomos* $b > 1$ *para fazer as contas. Essa suposição permite que* $x > 1 \implies \log_b(x) > \log_b(1) = 0$*.*

Como $\diamondsuit_b$ é gerada via isomorfismo de corpos, pensa-se, indutivamente, em formar uma cadeia de operações com o objetivo de formar uma sequência de recursiva corpos.

A seguir, enunciamos o que queremos dizer com tal cadeia:

Definição 7.2.4. *Sejam* $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ *e* $n \in \mathbb{N}^*$*. A n-ésima hiperoperação exponencial de base b é definida por:*

$$\begin{cases} x \cdot_b^1 y := x *_b y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \text{ se } n = 1; \\ x \cdot_b^n y := \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^{n-1} \log_b(y)), \text{ se } n \geq 2. \end{cases}$$

Em que a segunda linha é aplicada para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *tais que* $\log_b(x), \log_b(y)$ *estão no domínio de* $\cdot_b^{n-1}$*. Mais ainda, definimos o domínio "maximal", isto é, o conjunto de todos os valores em que* $\cdot_b^n$ *está bem definida como sendo o conjunto* $K_b^n \subset \mathbb{R}$*. Isto é:*

$$K_b^n \times K_b^n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot_b^n y \text{ está bem definido}\}$$

Agora, vamos para uma proposição que dá a "cara" dos conjuntos K_b^n, pelo menos para $b > 1$ e, intrigantemente, relaciona esse conceito com as tetrações de b.

Proposição 7.2.5 (Domínio Exponencial Maximal)**.** *Sejam* $b \in (1, \infty)$ *e* $n \in \mathbb{N}^*$*. Então,*

$$K_b^n = ({}^{n-2}b, \infty).$$

Prova. *Vamos provar utilizando indução. Passo Base (n=1): Por definição, temos* $\cdot_b^1 = *_b$*. Como o domínio de* $*_b$ *é* $\mathbb{R}_+^*$ *(pela Definição 7.1.3), segue que, pelo* (-1)*-ésimo tetrapoente (Definição 1.3.6):*

$$K_b^1 = \mathbb{R}_+^* = (0, \infty) = ({}^{-1}b, \infty) = ({}^{1-2}b, \infty).$$

Hipótese de Indução: Suponha que, para algum $m \in \mathbb{N}^*$*, se tenha:*

$$K_b^m = ({}^{m-2}b, \infty).$$

Passo Indutivo: *Sejam* $x, y \in K_b^{m+1}$. *Temos que:*

$$x \cdot_b^{m+1} y = \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(y)).$$

Disso, e por Hipótese de Indução, temos que $\log_b(x) \in K_b^m = ({}^{m-2}b, \infty)$. *Assim, como* $b > 1$, *temos:*

$$\log_b(x) > {}^{m-2}b \implies x > b^{({}^{m-2}b)} = {}^{m-1}b \implies x > {}^{m-1}b.$$

Ou seja, $x \in ({}^{m-1}b, \infty) = ({}^{(m+1)-2}b, \infty)$. *Pela arbitrariedade de* $x \in K_b^{m+1}$, *segue que* $K_b^{m+1} \subset ({}^{(m+1)-2}b, \infty))$. *Agora, seja* $z \in ({}^{(m+1)-2}b, \infty))$. *Por um desenvolvimento análogo à inclusão anterior, segue que* $\log_b(z) \in ({}^{m-2}b, \infty)$. *Por Hipótese de indução,* $\log_b(z) \in K_b^m$. *Assim,*

$$z \cdot_b^{m+1} y = \exp_b(\log_b(z) \cdot_b^m \log_b(y)).$$

Como $\log_b(z) \in K_b^m$, *tal expressão é bem definida. Ou seja,* $z \in K_b^{m+1}$. *Portanto,* $({}^{(m+1)-2}b, \infty)) \subset K_b^{m+1}$. *Pela dupla inclusão,*

$$K_b^{m+1} = ({}^{(m+1)-2}b, \infty).$$

Por indução, a afirmação deve ser válida para n, como queríamos provar. ■

Consequência 7.2.6. *Sejam* $b \in (1, \infty)$ *e* $n \in \mathbb{N}^*$. *Então:*

1. $K_b^{n+1} \subset K_b^n$;
2. $K_b^{n+1} = \exp_b(K_b^n)$ *ou, equivalentemente,* $\log_b(K_b^{n+1}) = K_b^n$;
3. *A operação* $\cdot_b^n$ *está bem definida e fechada em* K_b^n *(isto é, se* $x, y \in K_b^n$ *então* $x \cdot_b^n y \in K_b^n$*).*

Prova. (1) : *De fato, como* $b > 1$, *segue, pela Observação 3.1.3 que* ${}^n b < {}^{n+1}b$, *donde:*

$$({}^{n+1}b, \infty) \subset ({}^n b, \infty).$$

Pela Proposição anterior, segue que:

$$K_b^{n+1} \subset K_b^n.$$

(2) : *Utilizando a Proposição anterior, temos:*

$$x \in K_b^{n+1} \iff x \in ({}^{n-1}b, \infty) \iff x > {}^{n-1}b \iff x > b^{{}^{n-2}b} \iff x > \exp_b({}^{n-2}b) \iff$$

$$\iff \log_b(x) > {}^{n-2}b \iff \log_b(x) \in ({}^{n-2}b, \infty) \iff x \in \exp_b(({}^{n-2}b, \infty)) = \exp_b(K_b^n).$$

Resumindo, $x \in K_b^{n+1} \iff x \in \exp_b(K_b^n)$. *Donde,* $K_b^{n+1} = \exp_b(K_b^n)$.

(3) : *Vamos provar essa afirmação por Indução Matemática:*

Passo Base (n=1): *Segue do fato de* $(K_b^1, \cdot_b^0, \cdot_b^1) = (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b)$ *ser um corpo, pelo Teorema 7.1.4.*

Hipótese de Indução *Suponha que, para* $m \in \mathbb{N}^*$, *a operação* $\cdot_b^m$ *esteja bem definida e fechada em* K_b^m.

Passo Indutivo: *Vamos provar que a operação* $\cdot_b^{m+1}$ *está bem definida e fechada em* K_b^{m+1}. *De fato, sejam* $x, y \in K_b^{m+1}$. *Então, pela afirmação* (2)*:*

$$\log_b(x), \log_b(y) \in K_b^m.$$

Assim, por Hipótese de Indução, $\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(y) \in K_b^m$. *Disso, e da afirmação anterior:*

$$x \cdot_b^{m+1} y = \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(y)) \in \exp_b(K_b^m) = K_b^{m+1}.$$

Pela arbitrariedade de $x, y \in K_b^{m+1}$*, a operação está fechada e bem definida em* K_b^{m+1} *e, por indução matemática, a operação* $\cdot_b^n$ *está bem definida e fechada em* K_b^n. ■

Sob posse de tais resultados, afirmamos que existe uma sequência de corpos. Antes disso, vamos estender a noção de hiperoperação exponencial para $n \in \{-1, 0\}$. Essa definição faz aparecer a soma e multiplicação usuais como sendo casos particulares de hiperoperações exponenciais.

Definição 7.2.7. *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\}$. *Então:*

$$x \cdot_b^0 y := x \cdot y.$$

Além disso,

$$x \cdot_b^{-1} y := x + y.$$

E, de imediato, $K_b^0 = K_b^1 = \mathbb{R}$.

Motivação. *Essa definição faz sentido, pois faz continuar a regra de recursão das hiperoperações exponenciais. De fato, sejam* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. *Então:*

$$x \cdot_b^1 y = x *_b y = \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)) = \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^0 \log_b(y))$$

Além disso,

$$x \cdot_b^0 y = x \cdot y = \exp_b(\log_b(x)) \cdot \exp_b(\log_b(y)) = \exp_b(\log_b(x) + \log_b(y)) = \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^{-1} \log_b(y)).$$

Também, a Consequência 7.2.6 continua valendo, uma vez que:

$$K_b^0 = \mathbb{R} \supset \mathbb{R}_+^* = K_b^1,$$

e,

$$K_b^{-1} = \mathbb{R} = K_b^0.$$

Observação 7.2.8. *Com essa Definição, da mesma forma que as hiperoperações tradicionais, as hiperoperações exponenciais iniciam em soma e multiplicação, porém, dessa vez, uma outra regra de recursão é aplicada. Veremos que essa regra de recursão garante que se forme uma sequência de corpos ordenados completos.*

Teorema 7.2.9 (dos Corpos Exponenciais)**.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $b \in (1, \infty)$. Então, a tripla a seguir é um corpo:*

$$(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n).$$

Demonstração. *Com efeito, para $n = 0$, temos:*

$$(K_b^0, \cdot_b^{-1}, \cdot_b^0) = (\mathbb{R}, +, \cdot),$$

que é $\mathbb{R}$ com a soma e multiplicações usuais, notavelmente um corpo. Vamos mostrar o Teorema para os restantes valores de n possíveis, fazendo Indução Matemática sobre n:

Passo Base (n=1): Perceba que

$$(K_b^1, \cdot_b^{1-1}, \cdot_b^1) = (\mathbb{R}_+^*, \cdot_b^0, *_b) = (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b)$$

é um corpo, pelo Teorema 7.1.4. Hipótese de Indução: Suponha que, para algum $m \in \mathbb{N}$, a tripla a seguir seja um corpo:

$$(K_b^m, \cdot_b^{m-1}, \cdot_b^m).$$

Passo Indutivo: Vamos mostrar que a tripla

$$(K_b^{m+1}, \cdot_b^m, \cdot_b^{m+1})$$

é um corpo, mostrando que ela satisfaz os 9 axiomas de corpo. Inicialmente, vamos mostrar que tais operações estão bem definidas e fechadas em K_b^{m+1}. De fato, como $\cdot_b^m$ tem domínio maximal $K_b^m \supset K_b^{m+1}$, a operação $\cdot_b^m$ está bem definida com valores de K_b^{m+1}. Nos resta verificar que ela é fechada em K_b^{m+1}. Para tal, sejam $x, y \in K_b^{m+1}$. Assim, $\log_b(x), \log_b(y) \in K_b^m$ (pela Proposição A.3.12). Por Hipótese de Indução, a operação $\cdot_b^{m-1}$ é fechada em K_b^m, donde:

$$x \cdot_b^m y = \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^{m-1} \log(y)) \in \exp_b(K_b^m) = K_b^{m+1}.$$

Ainda, pela Consequência 7.2.6, a operação $\cdot_b^{m+1}$ está bem definida e fechada em K_b^{m+1}. Assim, as operações estão ambas bem definidas e fechadas em K_b^{m+1}. Os axiomas 1 e 2 são satisfeitos automaticamente. De fato, uma vez que, por Hipótese de Indução, $(K_b^m, \cdot_b^{m-1}, \cdot_b^m)$, é um corpo, a operação $\cdot_b^m$ é associativa e comutativa em K_b^m. Como pela Consequência 7.2.6, $K_b^{m+1} \subset K_b^m$, a operação é, em particular, associativa e comutativa em K_b^{m+1}. 3): Temos que $\cdot_b^m$ possui elemento neutro $c \in K_b^m$ (por Hipótese de Indução). Precisamos mostrar que $c \in K_b^{m+1}$. Mais ainda, por Hipótese de Indução, o elemento neutro de $\cdot_b^{m-1}$ é $d \in K_b^m$. Assim, $d \in ({}^{m-2}b, \infty)$. Vamos mostrar que $c = \exp_b(d)$. De fato, seja $x \in K_b^m$. Então:

$$x \cdot_b^m \exp_b(d) = \exp_b\Big(\log_b(x) \cdot_b^{m-1} \log_b\big(\exp_b(d)\big)\Big) = \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^{m-1} d) = \exp_b(\log_b(x)) = x.$$

Assim, pela unicidade do elemento neutro, $c = \exp_b(d)$. Como $b > 1$ e $d > {}^{m-2}b$, segue que $c = b^d > {}^{m-1}b$, ou seja, $c \in ({}^{m-1}b, \infty) = K_b^{m+1} \implies c \in K_b^{m+1}$. 4): Seja $x \in K_b^{m+1}$. Assim, $\log_b(x) \in K_b^m$. Logo, por Hipótese de Indução, $\log_b(x)$ possui um elemento inverso

$\tilde{x} \in K_b^m$ *relativo à operação* $\cdot_b^{m-1}$. *Vamos mostrar que* $\exp_b(\tilde{x}) \in K_b^{m+1}$ *é o inverso de* x *relativo à operação* $\cdot_b^m$. *De fato:*

$$x \cdot_b^m \exp_b(\tilde{x}) = \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^{m-1} \tilde{x}) = \exp_b(d) = c.$$

Disso, e do fato de a operação ser comutativa, o axioma em questão vale. 5) : *Vamos mostrar que a operação* $\cdot_b^{m+1}$ *é comutativa. Com efeito, sejam* $x, y \in K_b^{m+1}$. *Então, utilizando a comutatividade de* $\cdot_b^m$ *em* $K_b^m \supset K_b^{m+1}$*:*

$$x \cdot_b^{m+1} y = \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(y)) = \exp_b(\log_b(y) \cdot_b^m \log_b(x)) = y \cdot_b^{m+1} x.$$

6) : *Vamos mostrar que a operação* $\cdot_b^{m+1}$ *é associativa. Para tal, sejam* $x, y, z \in K_b^{m+1}$. *Então, utilizando a associatividade de* $\cdot_b^m$ *em* K_b^m*:*

$$x \cdot_b^{m+1} \left(y \cdot_b^{m+1} z\right) = x \cdot_b^{m+1} \Big(\exp_b \left(\log_b(y) \cdot_b^m \log_b(z)\right) \Big) =$$

$$= \exp_b \Bigg(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b \Big(\exp_b \left(\log_b(y) \cdot_b^m \log_b(z)\right) \Big) \Bigg) = \exp_b \Big(\log_b(x) \cdot_b^m \left(\log_b(y) \cdot_b^m \log_b(z)\right) \Big) =$$

$$= \exp_b \Big(\left(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(y)\right) \cdot_b^m \log_b(z) \Big) = \exp_b \Bigg(\log_b \Big(\exp_b \left(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(y)\right) \Big) \cdot_b^m \log_b(z) \Bigg) =$$

$$= \exp_b \left(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(y)\right) \cdot_b^{m+1} z = (x \cdot_b^{m+1} y) \cdot_b^{m+1} z.$$

7)*: Temos que* $c \in K_b^{m+1}$ *é o elemento neutro de* K_b^{m+1} *relativo à operação* $\cdot_b^m$. *Assim,* $a = \exp_b(c) \in K_b^{m+2} \subset K_b^{m+1}$. *Mostra-se, analogamente ao que foi provado em* 3)*, que* a *é o elemento neutro de* K_b^{m+1} *relativo à operação* $\cdot_b^{m+1}$. *Apenas "some um" ao índice das hiperoperações, troque* c *por* a *e* d *por* c. 8)*: Seja* $x \in K_b^{m+1}$ *tal que* $x \neq c$. *Vamos mostrar que* x *possui um inverso relativo à operação* $\cdot_b^{m+1}$. *Pela injetividade de* $\log_b$, *temos:* $K_b^m \ni \log_b(x) \neq \log_b(c) = d \implies \log_b(x) \neq d$. *Assim, por Hipótese de Indução, há um elemento* $\hat{x} \in K_b^m$ *inverso de* $\log_b(x)$ *relativo à operação* $\cdot_b^m$. *Mostra-se, similarmente ao que foi provado em* 4)*, que* $\exp_b(\hat{x}) \in K_b^{m+1}$ *é inverso de* x *relativo à operação* $\cdot_b^{m+1}$. *Basta "somar um" ao índice das hiperoperações, trocar* $\tilde{x}$ *por* $\hat{x}$*,* d *por* c *e* c *por* a. 9) : *Vamos provar que* $\cdot_b^{m+1}$ *distribui sobre* $\cdot_b^m$. *Para tal, sejam* $x, y, z \in K_b^{m+1}$. *Ora, por Hipótese de Indução,* $\cdot_b^m$ *distribui sobre* $\cdot_b^{m-1}$ *em* K_b^m. *Veja que:*

$$x \cdot_b^{m+1} (y \cdot_b^m z) = \exp_b \left(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(y \cdot_b^m z)\right) = \exp_b \Bigg(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b \Big(\exp_b \left(\log_b(y) \cdot_b^{m-1} \log_b(z)\right) \Big) \Bigg)$$

$$= \exp_b \Big(\log_b(x) \cdot_b^m \left(\log_b(y) \cdot_b^{m-1} \log_b(z)\right) \Big) = \exp_b \Big(\left(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(y)\right) \cdot_b^{m-1} \left(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(z)\right) \Big) =$$

$$= \exp_b \Bigg(\log_b \Big(\exp_b \left(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(y)\right) \Big) \cdot_b^{m-1} \log_b \Big(\exp_b \left(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(z)\right) \Big) \Bigg)$$

$$= \Big(\exp_b \left(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(y)\right) \Big) \cdot_b^m \Big(\exp_b \left(\log_b(x) \cdot_b^m \log_b(z)\right) \Big) = (x \cdot_b^{m+1} y) \cdot_b^m (x \cdot_b^{m+1} z)$$

Portanto, $(K_b^{m+1}, \cdot_b^m, \cdot_b^{m+1})$ *é um corpo, pois satisfaz os* 9 *axiomas de corpo. Assim, por Indução Matemática, a tripla*

$$(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n).$$

é um corpo, como queríamos demonstrar. ■

Agora que todas essas triplas são, de fato, corpos, nada mais justo que definir o seguinte:

Definição 7.2.10 (Corpos Exponenciais)**.** *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $b \in (1, \infty)$.*
O n-ésimo corpo exponencial de base b é dado pela tripla:

$$(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n).$$

Proposição 7.2.11. *Sejam $b \in (1, \infty)$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, $(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq)$ é um corpo ordenado e:*

$$(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq) \equiv_{\exp_b} (K_b^{n+1}, \cdot_b^n, \cdot_b^{n+1}, \leq).$$

Prova. *Pela Consequência 7.2.6, temos que a função a seguir é uma bijeção:*

$$\exp_b : K_b^n \to K_b^{n+1}$$

De fato, $\exp_b(K_b^n) = K_b^{n+1}$ e $\exp_b$ é injetiva por propriedade de exponencial. Assim, $\exp_b$ é, de fato, uma bijeção entre os conjuntos. Agora, para as propriedades de morfismo, tome $x, y \in K_b^n$. Assim, pela Consequência 7.2.6 $x, y \in K_b^{n-1}$, logo:

$$\exp_b(x \cdot_b^{n-1} y) = \exp_b(\log_b(\exp_b(x)) \cdot_b^{n-1} \log_b(\exp_b(y))) = \exp_b(x) \cdot_b^n \exp_b(y).$$

Analogamente,

$$\exp_b(x \cdot_b^n y) = \exp_b(x) \cdot_b^{n+1} \exp_b(y).$$

Assim,

$$(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n) \cong_{\exp_b} (K_b^{n+1}, \cdot_b^n, \cdot_b^{n+1},).$$

Equivalentemente,

$$(K_b^{n+1}, \cdot_b^n, \cdot_b^{n+1}) \cong_{\log_b} (K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n)$$

Vamos, por tal equivalência e por Indução Matemática, provar que $(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq)$ é um corpo ordenado e que $(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq) \equiv_{\log_b} (K_b^{n+1}, \cdot_b^n, \cdot_b^{n+1}, \leq)$:

Passo Base (n=0): Temos que $(K_b^0, \cdot_b^{-1}, \cdot_b^0, \leq) = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ é o corpo dos Reais, com as operações usuais e relação de ordem usual, notavelmente um corpo ordenado. Além disso, como $b > 1$, pela Proposição 7.1.6, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \equiv_{\log_b} (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \leq)$.

Hipótese de Indução: Suponha que, para algum $m \in \mathbb{N}$, $(K_b^m, \cdot_b^{m-1}, \cdot_b^m, \leq)$ seja um corpo ordenado.

Passo Indutivo: Pela equivalência quanto aos isomorfismos (que foi provado primeiramente), temos $(K_b^{m+1}, \cdot_b^m, \cdot_b^{m+1}) \cong_{\log_b} (K_b^m, \cdot_b^{m-1}, \cdot_b^m)$. Assim, como $(K_b^m, \leq)$ é corpo ordenado, por Hipótese de Indução, segue que, pela Proposição 7.1.5, ordena-se o corpo K_b^{m+1} com a seguinte relação de ordem induzida via isomorfismo:

$$x \leq_b y \iff \log_b(x) \leq \log_b(y) \quad \forall x, y \in K_b^{m+1}.$$

Entretanto, como $b > 1$,

$$\log_b(x) \leq \log_b(y) \iff x \leq y.$$

Portanto, a Proposição 7.1.5 assegura que $(K_b^{m+1}, \cdot_b^m, \cdot_b^{m+1}, \leq)$ *é um corpo ordenado e que*

$$(K_b^{m+1}, \cdot_b^m, \cdot_b^{m+1}, \leq) \equiv_{\log_b} (K_b^m, \cdot_b^{m-1}, \cdot_b^m, \leq).$$

Logo, por Indução Matemática, segue que $(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq)$ *é um corpo ordenado e que* $(K_b^{n+1}, \cdot_b^n, \cdot_b^{n+1}, \leq) \equiv_{\log_b} (K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq)$*, ou seja, que* $(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq) \equiv_{\exp_b} (K_b^{n+1}, \cdot_b^n, \cdot_b^{n+1}, \leq)$*, como queríamos provar.* ■

Agora, pensamos em exibir o comportamento de um isomorfismo entre $\mathbb{R}$ e um corpo exponencial qualquer. Para tal, enunciamos, primeiramente, lemas e uma definição.

Lema 7.2.12. *Sejam* $(K_1, +_1, \cdot_1), (K_2, +_2, \cdot_2), (K_3, +_3, \cdot_3)$ *corpos. Suponha que* $K_1 \cong_\varphi K_2$ *e* $K_2 \cong_\psi K_3$*. Então:*

$$K_1 \cong_{\psi\circ\varphi} K_3.$$

Prova. *Como* $\varphi : K_1 \to K_2$, $\psi : K_2 \to K_3$ *são bijeções, a função* $\psi\circ\varphi : K_1 \to K_3$ *também é. Agora, iremos provar as propriedades de morfismo. Para tal, sejam* $a, b \in K_1$*. Assim:*

$$(\psi\circ\varphi)(a +_1 b) = \psi(\varphi(a +_1 b)) = \psi(\varphi(a) +_2 \varphi(b)) = \psi(\varphi(a)) +_3 \psi(\varphi(b)) = (\psi\circ\varphi)(a) +_3 (\psi\circ\varphi)(b).$$

Analogamente, prova-se que:

$$(\psi\circ\varphi)(a \cdot_1 b) = (\psi\circ\varphi)(a) \cdot_3 (\psi\circ\varphi)(b).$$

■

Definição 7.2.13. *Seja* $f : A \to B$ *uma função e* $n \in \mathbb{N}^*$*. Suponha que* $f(A) \subset A$*. Utilizamos a notação abaixo para a n-ésima composição de* f *com si mesma:*

$$f^0 := \mathrm{Id}_A \quad \text{e} \quad f^n := f\circ f^{n-1}.$$

Lema 7.2.14. *Ainda nas condições da Definição anterior, para* $k \in \mathbb{N}$*, tem-se*

$$f\circ f^k = f^k\circ f.$$

Mais ainda, se f *é bijetora, então,* f^k *é bijetora e:*

$$(f^k)^{-1} = (f^{-1})^k.$$

Prova. *Provamos primeiro que* $f\circ f^k = f^k\circ f$.

Passo Base (k=0): $f\circ f^0 = f\circ Id_A = f = Id_A\circ f = f^0\circ f$.

Hipótese de Indução: Suponha que, para algum $m \in \mathbb{N}$*, tenhamos:*

$$f\circ f^m = f^m\circ f.$$

Passo Indutivo: $f \circ f^{m+1} = f \circ (f \circ f^m) = f \circ (f^m \circ f) = (f \circ f^m) \circ f = f^{m+1} \circ f$. *Logo, por indução,* $f \circ f^k = f^k \circ f$. *Mais ainda, provamos agora que se* f *é bijetora, então* $(f^k)^{-1} = (f^{-1})^k$, *utilizando o que foi provado anteriormente.* *Passo Base (k=0):*

$$(f^0)^{-1} = (Id_A)^{-1} = Id_A = (f^{-1})^0.$$

Hipótese de Indução: Suponha que, para algum $m \in \mathbb{N}$, *tenhamos:*

$$(f^m)^{-1} = (f^{-1})^m.$$

Passo Indutivo: $(f^{m+1})^{-1} = (f \circ f^m)^{-1} = (f^m)^{-1} \circ f^{-1} = (f^{-1})^m \circ f^{-1} = f^{-1} \circ (f^{-1})^m = (f^{-1})^{m+1}$. *Portanto, por Indução Matemática,* $(f^k)^{-1} = (f^{-1})^k$. ■

Teorema 7.2.15. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $b \in (1, \infty)$. *Considere a função* $\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Então:*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\exp_b^n} (K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n).$$

Demonstração. *Utilizaremos indução.*

Passo Base (n=0):

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}} (\mathbb{R}, +, \cdot) = (K_b^0, \cdot_b^{-1}, \cdot_b^0).$$

Como $Id_{\mathbb{R}} = \exp_b^0$, *segue que:*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\exp_b^0} (K_b^0, \cdot_b^{-1}, \cdot_b^0).$$

Hipótese de Indução Suponha que, para algum $m \in \mathbb{N}$, *tenha-se:*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\exp_b^m} (K_b^m, \cdot_b^{m-1}, \cdot_b^m).$$

Passo Indutivo: Vamos provar que $(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\exp_b^{m+1}} (K_b^{m+1}, \cdot_b^m, \cdot_b^{m+1})$. *Ora, pela Proposição 7.2.11, temos:*

$$(K_b^m, \cdot_b^{m-1}, \cdot_b^m) \cong_{\exp_b} (K_b^{m+1}, \cdot_b^m, \cdot_b^{m+1}).$$

Como $(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\exp_b^m} (K_b^m, \cdot_b^{m-1}, \cdot_b^m)$, *por Hipótese de Indução, disso, e do último Lema, segue que:*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\exp_b \circ \exp_b^m} (K_b^{m+1}, \cdot_b^m, \cdot_b^{m+1}).$$

Ainda, pela Definição anterior, $\exp_b^{m+1} = \exp_b \circ \exp_b^m$, *de forma que*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\exp_b^{m+1}} (K_b^{m+1}, \cdot_b^m, \cdot_b^{m+1}).$$

Assim, segue, por Indução Matemática, que

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\exp_b^n} (K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n),$$

como queríamos demonstrar. ■

q

Corolário 7.2.16. *Nas mesmas condições do Teorema anterior:*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \equiv_{\exp_b^n} (K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq).$$

Prova. *Como* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *é ordenado,* $(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n) \cong_{\log_b^n} (\mathbb{R}, +, \cdot)$ *(pelo Lema anterior) e* $b > 1$*, pela prova da Proposição 7.2.11, ordena-se* K_b^n *com a mesma relação de ordem de* $\mathbb{R}$*. Assim, pela Proposição 7.1.5, e pela simetria de isomorfismos via função inversa, que:*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \equiv_{\exp_b^n} (K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq).$$

■

O último Teorema nos motiva a definir o seguinte:

Definição 7.2.17. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$*,* $b \in (1, \infty)$*, e* $S \subset \mathbb{R}$*. Utilizando o Teorema anterior, denotamos:*

$$\exp_b^n(S) := S_b^n.$$

Nos referiremos a S_b^n *como a cópia isomorfa de* S *dentro de* K_b^n*. Assim sendo,*

$$\mathbb{R}_b^n := K_b^n.$$

Exemplo 7.2.18. *Nas condições de tal definição, o conjunto:*

$$\exp_b^n(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_b^n.$$

Representa o "equivalente" aos inteiros em K_b^n*. Acreditamos que tais números, com as operações do corpo exponencial* K_b^n*, formam uma estrutura muito parecida com a dos números inteiros, ou seja, que* $(\mathbb{Z}_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n)$ *é um domínio de integridade, assim como* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$*.*

Uma característica intrigante das hiperoperações **usuais** é que 2 operado com 2 sempre resulta em 4. Vamos provar isso no lema a seguir:

Lema 7.2.19. *Seja* $n \in \mathbb{N}^*$*. Então,* $H_n(2,2) = 4$*.*

Prova. *Não é difícil verificar isso por indução.*

Passo Base (n=1):

$$H_1(2,2) = 2 + 2 = 4.$$

Hipótese de Indução Suponha que, para algum $m \in \mathbb{N}$*, tenha-se* $H_m(2,2) = 4$*.*

Passo Indutivo:

$$H_{m+1}(2,2) = (H_m(2,2))_2 = H_m(2,2)\text{[2]} = 4.$$

Logo, por indução matemática, $H_n(2,2) = 4$*, como queríamos.* ■

[2] Lembre-se que, para $k \in \mathbb{N}^*$, $H_{m+1}(2,k)$ executa, por definição, $(H_m(2, H_m(2, \dots H_m(2,2)) \dots))_k$, em que há k cópias de 2. Mas, no caso, $H_{m+1}(2,2) = H_m(2,2)$, com apenas 2 cópias de 2

Agora, pensamos em como fazer com que as Hiperoperações Exponenciais não só obedeçam a "leis algébricas", mas também a essa peculiaridade ditada pelo Lema anterior. Em vista disso, enunciamos o Teorema a seguir, que estabelece uma base "natural" para as Hiperoperações Exponenciais.

Teorema 7.2.20. *Seja* $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. *Então:*

$$2 \cdot_b^n 2 = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1\} \iff b = \sqrt{2}.$$

Demonstração. $(\implies)$: *Assuma que* $2 \cdot_b^n 2 = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. *Em particular, para* $n = 1$, $2 \cdot_b^1 2 = 4$. *Logo,* $\exp_b(\log_b(2) \cdot \log_b(2)) = 4 = b^{\log_b(4)}$. *Ou seja:*

$$\exp_b((\log_b(2))^2) = \exp_b(\log_b(4)) \implies (\log_b(2))^2 = \log_b(4) = \log_b(2^2) = 2\log_b(2) \implies$$

$$\implies (\log_b(2))^2 = 2\log_b(2).$$

Seja $u := \log_b(2)$. *Assim, temos:*

$$u^2 = 2u \implies u^2 - 2u = 0 \implies u(u-2) = 0 \implies u = 0 \quad \text{ou} \quad u = 2.$$

Como $u = \log_b(2) \neq \log_b(1) = 0$, *segue que* $u = 2$, *ou seja,* $\log_b(2) = 2$. *Por definição de* $\log_b(2)$, *temos que* $b^2 = 2$ *e, como* $b > 0$, *segue que* $b = \sqrt{2}$. $(\impliedby)$: *Reciprocamente, assuma que* $b = \sqrt{2}$. *Vamos utilizar Indução Matemática para provar a recíproca:*

Passo Base (n=-1):

$$2 \cdot_b^{-1} 2 = 2 + 2 = 4.$$

Hipótese de Indução: Assuma que, para algum $m \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, *tenha-se que* $2 \cdot_b^m 2 = 4$.

Passo Indutivo: Primeiramente, observe que, como $b = \sqrt{2}$, *temos* $\log_b(2) = \log_{\sqrt{2}}(2) = 2$ *e* $\exp_b(4) = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$. *Agora veja que, disso, da definição recursiva das Hiperoperações Exponenciais usuais, e da Hipótese de Indução:*

$$2 \cdot_b^{m+1} 2 = \exp_b(\log_b(2) \cdot_b^m \log_b(2)) = \exp_b(2 \cdot_b^m 2) = \exp_b(4) = 4.$$

Logo, por Indução Matemática,

$$2 \cdot_b^n 2 = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 7.2.21. *Vale ressaltar que, pela Prova da Proposição 3.2.5, como* ${}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right) = 2$ *e* $\sqrt{2} > 1$, *temos* ${}^{n}\left(\sqrt{2}\right) < 2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *logo,* $2 \in \left({}^{n-2}\left(\sqrt{2}\right), \infty\right) = K_b^n$ *para qualquer* $n \in \mathbb{N}^*$, *ou seja, as expressões da forma* $2 \cdot_{\sqrt{2}}^n 2$ *estão bem-definidas para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ *(lembre-se que* $2 \in \mathbb{R} = K_{\sqrt{2}}^0 = K_{\sqrt{2}}^{-1}$*). Além disso, pelo que foi observado, temos*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n = [2, \infty).$$

Ou seja, a base $b = \sqrt{2}$ *garante que todos os seus corpos exponenciais tenham um intervalo infinito em comum no domínio. Isso é interessante de notar pois, caso* $b > e^{\frac{1}{e}}$*, pela Consequência 3.2.2, temos:*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n = \varnothing.$$

Vamos provar em detalhes o que foi observado acime:

Proposição 7.2.22 (Intersecção dos Corpos Exponenciais)**.** *Seja* $b \in (1, \infty)$*. Então, as afirmações a seguir são verdadeiras:*

(1): Se $b \leq e^{\frac{1}{e}}$*, então* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n = [{}^{\infty}b, \infty)$*;*

(2): Se $b > e^{\frac{1}{e}}$*, então* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n = \varnothing$*.*

Prova. *(1): Como* $b > 1$*, temos* $b \in (1, e^{\frac{1}{e}})$*. Denote* $c := {}^{\infty}b$*. Pelo Teorema 3.1.14, temos* $c \in \mathbb{R}$*. Vamos provar a dupla inclusão: seja* $x \in [c, \infty)$*. Ou seja,* $x \geq c$*. Veja que, pela Prova da Proposição 3.2.5, como* $b \in (1, e^{\frac{1}{e}})$*, segue que, para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* ${}^{n}b < c \leq x$*, ou seja,* $x > {}^{n}b$*, isto é* $x \in [{}^{n}b, \infty) = K_b^{n+2}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}^*$*. Como* $x \geq c \geq 1 = {}^{0}b$*, temos* $x \geq^0 b$*, temos* $x \in [{}^{0}b, \infty) = K_b^2$*, e, claramente,* $x \in \mathbb{R}_+^* = K_b^1$*, logo,* $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n$*, donde* $[c, \infty) \subset \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n$*. Agora, dado* $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n$*, suponha, para obter contradição, que* $x \notin [c, \infty)$*. Isto é,* $x < c = \lim\limits_{n \to \infty} {}^{n}b$*. Como* $b > 1$*, temos que* $({}^{n}b)$ *é uma sequência crescente. Logo, pela Proposição A.1.5,* $c = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} {}^{n}b$*. Como* $x < c$*, por definição de supremo, existe* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $x < {}^{n_0}b$*, isto é,* $x \notin [{}^{n_0}b, \infty)$*, logo,* $x \notin \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n$*, o que é uma contradição. Portanto,* $x \in [c, \infty)$*. Disso, e pela dupla inclusão, temos que* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n = [{}^{\infty}b, \infty)$*.*

(2): Suponha, para obter contradição, que exista $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n$*. Logo, temos* $x \geq {}^{n}b \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$*. Como* $b > e^{\frac{1}{e}}$*, pela Consequência 3.2.2, temos que* ${}^{\infty}b = \lim\limits_{n \to \infty} {}^{n}b = \infty$*. Como* $x \geq {}^{0}x = 1 > 0$*, por esse limite, deve existir* $n_1 \in \mathbb{N}^*$ *tal que* ${}^{n}b > x$ *quando* $n \geq n_1$*. Veja que* $n_1 + 2$ *é tal que* ${}^{n_1+2}b > x$*, isto é,* $x \notin ({}^{n_1+2}b, \infty) = K_b^{n_1}$*, com* $n_1 \in \mathbb{N}^*$*, ou seja,* $x \notin \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n$*, o que é uma contradição. Portanto,* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} K_b^n = \varnothing$*, como queríamos provar.* ■

Após esses estudos, imaginou-se que tal relação entre 2 e 4 nas Hiperoperações aconteceria para mais algum par de números reais, e não fosse apenas uma peculiaridade de ambos. Em vista disso, tentamos procurar todos os números $a \in (1, \infty)$ tais que $a \cdot_b^n a = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$, para algum $c \in \mathbb{R}_+^*$, e $b := a^{\frac{1}{a}}$. A escolha da base b vem pelo fato de que, pela Prova da Proposição 3.2.5, como $e^{\frac{1}{e}} \geq a^{1/a} > 1$, nas condições de tal prova, tem-se que ${}^{n}\left(a^{\frac{1}{a}}\right) < a \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Concluímos acerca da unicidade de a com a proposição a seguir:

Proposição 7.2.23. *Seja $a \in (1, \infty)$ e $b := a^{\frac{1}{a}}$. Então,*

$$a \cdot_b^n a = a \cdot_b^{n+1} a \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1\} \iff a = 2.$$

Prova. $(\implies)$: *Assuma que $a \cdot_b^n a = a \cdot_b^{n+1} a \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Em particular, $a \cdot_b^{-1} a = a \cdot_b^0 a$. Ou seja, $a + a = a \cdot a$. Pelo desenvolvimento quadrático realizado na Demonstração do Teorema anterior, segue que $a \in \{0, 2\}$. Por $a > 1$, temos que $a = 2$, como queríamos.*

$(\impliedby)$:*Reciprocamente, suponha que $a = 2$. Temos $b = a^{\frac{1}{a}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, assim, pelo Teorema anterior:*

$$2 \cdot_b^n 2 = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela transitividade da relação de igualdade, segue que:

$$2 \cdot_b^n 2 = 2 \cdot_b^{n+1} 2 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e o resultado segue. ■

8 Conclusão

Nesse trabalho, conseguimos estabelecer resultados e discussões acerca de um ramo não muito discutido na matemática, bem como formalizações e introdução de conceitos envolvendo o mesmo e, a quantidade de áreas da matemática envolvidas por trás dessa pesquisa foi extremamente satisfatório e positivo para mim, pois foi constantemente me lembrando que, mesmo fragmentada, a matemática é uma só, e bela por si só.

Embora a pesquisa nessa temática tenha sido uma iniciativa minha, não sendo uma especialização do orientador, o professor Paulinho não hesitou em me orientar e participar de encontros semanais discutindo avanços e escrituras realizadas, sempre dando ótimos conselhos sobre como demonstrar de maneira mais sutil, sobre a possibilidade de generalização de conceitos, sobre a viabilidade de demonstração de possíveis resultados, entre outros, bem como apresentação e propostas de estudo e revisão de conceitos envolvendo variável complexa, análise na reta, espaços métricos, álgebra e teoria dos números.

Sendo assim, junto com meu professor, eu não só solidifiquei conceitos e resultados sobre tetração e hiperoperações, mas também aprendi e reaprendi muito sobre várias áreas da matemática. Mais ainda, tendo um objetivo de pesquisa em mente, se tornam bem mais motivante e cativante as revisões bibliográficas, pois dessa forma o aprendizado deixou de ser algo passivo para ativo, e assim eu me senti, de fato, fazendo matemática, uma vez que, junto de meu professor, eu fui a pessoa por trás da maioria dos resultados e proposições nesse trabalho abrangendo a tetração e as hiperoperações.

Outro ponto positivo foi que, embora alguns dos resultados discutidos nesse trabalho já existam, eles sempre pertenciam a pequenos folhetos de no máximo 10 páginas. Porém, agora, eles estão compilados e descomplicados: suas demonstrações foram destrinchadas de forma que facilite ao leitor a compreensão de cada uma das implicações lógicas envolvidas.

Referências

CHUN, J. H. What is... tetration? *online article: https://math. osu. edu/sites/math. osu. edu/files/chun_tetration. pdf*, 2014.

NETO, A. L. *Funções de uma variável complexa*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.

NEYRINCK, M. Extended essay title: An investigation of arithmetic operations.

SILVA, P. N. da; SANTOS, A. L. C. dos; SOARES, A. de S. A note on the convergence of iterated infinite exponentials of real numbers. *Cadernos do IME-Série Matemática*, n. 15, p. 1–8, 2020.

A Apêndice

A.1 Sequências

Definição A.1.1. *Uma sequência em um conjunto X é uma função $f_s : \mathbb{N}^* \to X$ em que X é um conjunto. As imagens dos elementos de $\mathbb{N}^*$ pela função f_s são chamados de termos da sequência e são denotados como $s_n := f_s(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$. É usual também denotarmos uma sequência por (s_n). Chamamos o conjunto dos termos da sequência (s_n) de $\{s_n\}$, isto é, $\{s_n\} := \{s_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.*

Definição A.1.2. *Seja (s_n) uma sequência em um espaço topológico X. Dizemos que (s_n)* ***converge*** *para $s \in X$ quando, para qualquer aberto $U \subset X$ que contiver s, há $N \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$n > N \implies s_n \in U.$$

Dizemos que s é limite de (s_n), ou $s_n \to s$, ou, ainda, ainda, que $s = \lim_{n\to\infty}(s_n)$ quando o limite for único.

Também pode ser que apenas digamos que (s_n) converge. Nesse caso, queremos dizer que (s_n) converge para algum valor, sem especificá-lo.

Observação A.1.3. *É possível provar, com essa definição que, em um espaço de Hausdorff, se s_n converge a s, então s_n não pode convergir a mais nenhum outro valor, isto é, o limite de s_n é único.*

Ainda, para $X = \mathbb{R}$, com a topologia usual, prova-se que s_n converge a s se, e somente se, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > N \implies |s_n - s| < \varepsilon.$$

Nesse trabalho, se utilizará, principalmente, sequências em $\mathbb{R}$. As sequências serão sempre em $\mathbb{R}$ com a topologia usual, salvo dito o contrário.

Também, mais para frente, usaremos a topologia usual em $\mathbb{C}$, a não ser que digamos o contrário.

A seguir, alguns resultados envolvendo sequências.

Lema A.1.4. *Seja f uma função real contínua com domínio $D \subset \mathbb{R}$, $r \in D$ e $(s_n) \subset D$ uma sequência convergente a $s \in D$ definida, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, como:*

$$s_1 = r \text{ e } s_{n+1} = f(s_n).$$

Então, $s = f(s)$.

Prova. *Note que, como a sequência transladada* (s_{n+1}) *converge para o mesmo valor* s *e, como* f *é continua:*

$$s = \lim_{n\to\infty}(s_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(f(s_n)) = f(\lim_{n\to\infty}(s_n)) = f(s).$$

Portanto, $s = f(s)$. ■

Proposição A.1.5. *Seja* $(s_n) \subset \mathbb{R}$ *uma sequência. Então, as afirmações a seguir são verdadeiras:*

1. *Se* s_n *é tal que* $s_n \leq s_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$ *e* $\{s_n\}$ *é limitado superiormente, então* $\lim_{n\to\infty}(s_n) = \sup\{s_n\}$;
2. *Se* s_n *é tal que* $s_n \geq s_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$ *e* $\{s_n\}$ *é limitado inferiormente, então* $\lim_{n\to\infty}(s_n) = \inf\{s_n\}$;
3. (s_n) *converge a* s *se, e somente se,* (s_{2n-1}) *e* (s_{2n}) *ambas convergem a* s.

Prova. (1) : *Vamos mostrar que* s_n *converge ao supremo dos elementos da sequência. Seja* $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, *e* $s := \sup\{s_n\}$. *Assim,* $s - \varepsilon < s$ *não pode ser cota superior de* $\{s_n\}$, *isto é, deve haver* $N \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $s - \varepsilon < s_N$. *Ainda, pela condição não-decrescente dos termos de* (s_n), *temos que, para todo* $n \geq N$, $s_N \geq s_n$. *Ainda, como* s *é cota superior dos elementos de* s, *segue que* $s_n \leq s$, *para todo* $n \in N^*$. *Assim, para* $n > N$:

$$s - \varepsilon < s_N \leq s_n \leq s < s + \varepsilon.$$

Ou seja,

$$|s_n - s| < \varepsilon.$$

Portanto (s_n) *converge a* s, *como queríamos.*

(2) : *Análogo à prova de* (1), *apenas com desigualdades invertidas e* inf *no lugar de* sup.

(3) : *Seja* $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ *qualquer. Assuma que* (s_n) *converge a* $s \in \mathbb{R}$. *Então, há* $N \in \mathbb{N}^*$ *tal que:*

$$n > N \implies |s_n - s| < \varepsilon.$$

Em particular, para todo n *ímpar a implicação vale, utilizando o mesmo* N. *O mesmo para todo* n *par. Segue que* (s_{2n-1}) *e* (s_{2n}) *ambas convergem a* s.

Reciprocamente, se (s_{2n}) *e* (s_{2n-1}) *ambas convergem a* s, *então, há* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ *tais que:*

$$n > N_1 \implies |s_{2n-1} - s| < \varepsilon,$$

e

$$n > N_2 \implies |s_{2n} - s| < \varepsilon.$$

Logo, tomando $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$, *temos, para* $n > N_0$:

$$|s_{2n-1} - s| < \varepsilon \text{ e } |s_{2n} - s| < \varepsilon.$$

Segue que $|s_n - s| < \varepsilon$ *(quando* $n > 2N_0$*). Assim,* (s_n) *converge a* s*, como queríamos provar.* ■

Proposição A.1.6. *Seja* (s_n) *uma sequência convergente. Então,* $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$ *é limitado.*

Prova. *Seja* $s = \lim_{n\to\infty}(s_n)$*. Então, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$n > N \implies |s_n - s| < 1.$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > N$*, pela desigualdade triangular reversa:*

$$|s_n| - |s| < |s_n - s| < 1 \implies |s_n| < 1 + |s|.$$

Ainda, para todo $n \in [1, N] \cap \mathbb{Z}$*, temos:*

$$|s_n| \leq \max\{|s_m| \mid m \in [1, N] \cap \mathbb{Z}\} =: K.$$

Agora, defina $M := \max\{K, 1 + |s|\}$*. Assim, para todo* $n \in \mathbb{N}$:

$$|s_n| \leq M.$$

Portanto, $\{s_n\}$ *é limitado, como queríamos provar.* ■

Consequência A.1.7. *Seja* (s_n) *uma sequência convergente. Então, as afirmações a seguir são verdadeiras:*

1. *Se* (s_n) *é tal que* $s_n \leq s_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$*, então* $s = \sup\{s_n\}$*;*
2. *Se* (s_n) *é tal que* $s_n \geq s_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$*, então* $s = \inf\{s_n\}$*.*

Prova. *Primeiramente, pela proposição anterior* $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto limitado. Ou seja, ele é limitado superiormente e inferiormente.*

(1) : *Como* $\{s_n\}$ *é limitado superiormente, segue, pelo item* (1) *da Proposição A.1.5, que* $s = \sup\{s_n\}$.

(2) : *Como* $\{s_n\}$ *é limitado inferiormente segue, pelo item* (2) *da Proposição A.1.5, que* $s = \inf\{s_n\}$. ■

A.2 Potenciação Complexa

Para essa seção, consideramos que o leitor tem conhecimento acerca de definições e propriedades elementares de números complexos (parte real, imaginária, módulo, argumento, conjugado).

O logaritmo complexo, diferente da função real ln, possui múltiplas interpretações. Isso por que, em $\mathbb{C}$, estamos considerando valores em um plano, que contém infinitas retas, isto é, infinitos ramos em que podemos definir o logaritmo.

A.2.1 Exponencial Complexa

Sabemos que a série de Maclaurin da exponencial real é, para $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Assim, para se falar de expoente complexo, o primeiro passo é definir o seguinte:

Definição A.2.1. *Para $z \in \mathbb{C}$ definimos:*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

e^z está bem definido, uma vez que a série converge. De fato, sendo $a_n := \dfrac{z^n}{n!}$, com $z \neq 0$ (caso $z = 0$ é trivial), aplicando o teste da razão, temos:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{\frac{|z|^{n+1}}{|z|^n}}{\frac{(n+1)!}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0 < 1.$$

Assim, pelo Teste da Razão, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente, logo, convergente.

Observação A.2.2. *A partir da definição, utilizando-se propriedades de derivação em $\mathbb{C}$ provadas em (NETO, 1993)[1], mostra-se:*

$$(e^z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} =$$

[1] No livro em questão, propriedades de diferenciabilidade complexa foram provadas (regra da cadeia, regra do produto, teorema da função inversa, etc.), e serão dadas como conhecidas nesse trabalho.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Isto é, que $(e^z)' = e^z$ *para cada* $z \in \mathbb{C}$ *(a derivada da função* $\mathrm{Exp}(z) := e^z$*).*

Agora, vamos mostrar um resultado, que fundamenta a exponencial complexa. Embora se diga, em algumas obras, que o resultado a seguir é uma definição, o aluno acredita nele como um resultado das séries de Taylor, aplicando o comportamento da unidade imaginária. Por isso, consideramos como um Teorema, e não uma Definição.

Teorema A.2.3. *Seja* $x \in \mathbb{R}$. *Então,*

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x).$$

Demonstração. *Consideramos como conhecidas as séries de Maclaurin de* $\cos(x)$ *e* $\mathrm{sen}(x)$*, e notamos que:*

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^{2n} i) x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x).$$

■

Esse poderoso resultado nos permite enxergar a função exponencial complexa como sendo a parametrização de uma circunferência com centro na origem do plano complexo! Desse resultado, temos o seguinte corolário:

Corolário A.2.4. *Seja* $x \in \mathbb{R}$. *Então,* $|e^{ix}| = 1$. *Além disso,* e^{ix} *parametriza a circunferência unitária com centro na origem do plano complexo.*

Prova. *Observe que*

$$|e^{ix}| = |\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)| = \sqrt{(\cos(x))^2 + (\mathrm{sen}(x))^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Outrossim, e^{ix} *parametriza tal circunferência justamente por que, para todo* $x \in \mathbb{R}$*, a distância de* e^{ix} *até a origem é* $|e^{ix} - 0| = |e^{ix}| = 1$. *Reciprocamente, dado* $w \in \mathbb{C}$ *na circunferência unitária, sabemos que* $w = \cos(x_0) + i\,\mathrm{sen}(x_0)$*, para algum* $x_0 \in \mathbb{R}$*, em que* x_0 *pode ser, por exemplo, o comprimento do arco de circunferência do ponto* $1 + 0i$ *até* w. *Logo,* $w = e^{ix_0}$. ■

Proposição A.2.5. *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Então:*

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}.$$

Prova. *Foge do escopo do trabalho. Essa prova envolve o produto formal das séries de e^z e e^w, e se encontra em (NETO, 1993), na página 86.*

Consequência A.2.6. *Seja $z \in \mathbb{C}$, com $z = x + yi$. Então:*

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)).$$

Além disso, $|e^z| = e^x$ e $e^z \neq 0$.

Prova. *Veja que*

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)).$$

Além disso,

$$|e^z| = |e^x e^{yi}| = |e^x||e^{yi}| = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Como $e^x \neq 0$, segue que $|e^z| \neq 0$, logo, $e^z \neq 0$.

■

Lema A.2.7. *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ Então, $e^z = e^w$ se, e somente se, $z = w + 2k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.*

Prova. *Escreva $z = a + bi$ e $w = x + yi$ com $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Pela segunda afirmação da Consequência A.2.6 e injetividade da exponencial real, temos:*

$$|e^z| = |e^w| \implies e^a = e^x \implies a = x.$$

Aplicando isso com a primeira afirmação da mesma Consequência, obtemos:

$$e^{a+bi} = e^{x+yi} \implies e^a(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)) = e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)) \implies e^a(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)) =$$

$$= e^a(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)) \implies \cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b) = \cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y).$$

Da igualdade de números complexos, obtemos $\cos(b) = \cos(y)$ e $\mathrm{sen}(b) = \mathrm{sen}(y)$. Como $\cos(b) = \cos(y)$, temos $b = y + 2k\pi$ ou $b = -y + 2k\pi$. Mas, como $\mathrm{sen}(b) = \mathrm{sen}(y)$, temos $b = y + 2k\pi$ ou $b = \pi - y + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. A única possibilidade é que $b = y + 2k\pi$. Portanto,

$$z = a + bi = x + (y + 2k\pi)i = x + yi + 2k\pi i = w + 2k\pi i.$$

Donde $z = w + 2k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Reciprocamente, se $z = w + 2k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, então, pela Proposição A.2.5:

$$e^z = e^{w+2k\pi i} = e^w \cdot e^{2k\pi i} = e^w \cdot (\cos(2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(2k\pi)) = e^w \cdot 1 = e^w.$$

■

Por fins de notação, definimos a função exponencial complexa:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Exp}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^z. \end{array}$$

Vimos até então, como funcionam as potências complexas de e. Entretanto, para podermos falar das potências complexas de um número qualquer $z \in \mathbb{C}^*$, precisamos da noção de Logaritmo Complexo.

A.2.2 Logaritmo Complexo

Para se definir o logaritmo complexo, iremos definir a noção de ramos, da mesma maneira que em (NETO, 1993, p. 94):

Definição A.2.8. *Seja $U \subset \mathbb{C}^*$ um aberto. Dizemos que uma função contínua $f : U \to \mathbb{R}$ é um **ramo do argumento** em U se:*

$$\frac{z}{|z|} = e^{if(z)} \quad (\forall z \in U).$$

*Também dizemos que uma função contínua $g : U \to \mathbb{C}$ é um **ramo do logaritmo** em U se:*

$$e^{g(z)} = z \quad (\forall z \in U).$$

Essas definições podem parecer, à primeira vista, separadas mas o Teorema a seguir e sua demonstração, com base em (NETO, 1993, p. 95), garantem o contrário.

Teorema A.2.9. *Seja $U \subset \mathbb{C}^*$ um aberto. Então, existe um ramo do logaritmo definido em U se, e somente se, existe um ramo do argumento definido em U.*

Demonstração. *Suponha que exista um ramo do logaritmo g definido em U. Então, como g é uma função complexa contínua, podemos escrever:*

$$g(z) = a(z) + ib(z)$$

Em que a e b são funções de U em $\mathbb{R}$ contínuas[2] e representam a parte real e imaginária, respectivamente, do complexo $g(z)$. Como g é ramo do logaritmo, e pela Consequência A.2.6, temos, para todo $z \in U$:

$$z = e^{a(z)+ib(z)} \quad \text{e} \quad |z| = e^{a(z)}.$$

Assim,

$$z = e^{a(z)}e^{ib(z)} = |z|e^{ib(z)} \implies \frac{z}{|z|} = e^{ib(z)}.$$

A última igualdade mostra que b é um ramo do argumento em U (lembre-se que $0 \notin U$). Reciprocamente, assumindo que f seja um ramo do argumento definido em U, defina:

$$l : U \to \mathbb{C}^* \ , \ l(z) = \ln|z| + if(z).$$

[2] Lembre-se que $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Note que l está bem definida pois, como $z \neq 0$, temos $|z| > 0$. Além disso, l é contínua pois suas funções componente reais e imaginárias são contínuas. Agora, veja que, como f é ramo do argumento:

$$e^{l(z)} = e^{\ln|z|+if(z)} = e^{\ln|z|}e^{if(z)} = |z|\frac{z}{|z|} = z \implies e^{l(z)} = z$$

Portanto, l é um ramo do logaritmo em U, como queríamos. ■

Corolário A.2.10. *Seja $U \subset \mathbb{C}^*$ aberto e $z \in U$. Se g é um ramo do logaritmo definido em U, então:*

$$g(z) = \ln|z| + if(z),$$

em que f é um ramo do argumento em U. (Note que, nesse caso, f é a função componente imaginária de g).

Prova. *Segue diretamente da demonstração do Teorema anterior.*

Com o Teorema, podemos encontrar um aberto de $\mathbb{C}^*$ "conveniente" para construir o que iremos definir como o **logaritmo complexo**. A conveniência desse aberto seria, por exemplo, que potências complexas utilizando um ramo do argumento específico nele continuam no mesmo aberto. Isso será mostrado futuramente. A proposição a seguir relaciona a noção de ramo do logaritmo com o logaritmo natural:

Proposição A.2.11. *Seja g um ramo do logaritmo em um aberto $U \subset \mathbb{C}^*$. Então, para cada $x \in \mathbb{R}_+^* \cap U$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que:*

$$g(x) = \ln(x) + i(2k\pi).$$

Prova. *Pelo Corolário A.2.10, temos que:*

$$g(x) = \ln(x) + if(x).$$

Em que f é um ramo do argumento em U. Assim, como $e^{if(x)} = \dfrac{x}{|x|} = 1$ temos que:

$$1 = e^{if(x)} = \cos(f(x)) + i\,\mathrm{sen}(f(x))$$

Nisso, $\mathrm{sen}(f(x)) = 0$ e $\cos(f(x)) = 1$. Logo, $f(x) = 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e o resultado segue. ■

Observação A.2.12. *Note que, se tivéssemos $f(U) \subset (-\pi, \pi)$ (isto é, a imagem do ramo do argumento restrita a um intervalo que contenha no máximo uma "revolução"do ciclo trigonométrico contendo o zero), teríamos $g(x) = \ln(x)$, ou seja, uma coincidência de valores entre o ramo do logaritmo e o logaritmo natural.*

Há também uma relação intrínseca entre as derivadas do logaritmo natural e do ramo do logaritmo, estabelecida pela proposição a seguir:

Proposição A.2.13. *Seja g um ramo do logaritmo definido em U. Então, g é holomorfa (isto é "diferenciável"no plano complexo), e, mais ainda, para todo $z \in U$:*

$$g'(z) = \frac{1}{z}.$$

Prova. *Foge do escopo do trabalho mas é provado em (NETO, 1993, p. 96). A prova envolve relacionar g com uma função h inversa da exponencial restrita a domínio e contradomínio relevantes a g, em que as derivadas coincidem. Assim, utilizando-se o Teorema da Função Inversa do caso complexo, prova-se que:*

$$g'(z) = h'(z) = \frac{1}{e'(h(z))} = \frac{1}{e^{h(z)}} = \frac{1}{z}.$$

Nessa prova, foi utilizado o fato de U_0 ser um aberto. Isso possivelmente contribuiu para definir os ramos do argumento e logaritmo apenas em abertos de $\mathbb{C}^*$.

Definição A.2.14. *Pensando em um aberto "conveniente", vamos, definir:*

$$U_o := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}.$$

Note que U_o é aberto, pois seu complementar é fechado. Além disso, dizemos que U_0 é o domínio principal. Mais a frente, esclareceremos o porquê desse nome.

Proposição A.2.15. *Seja $\alpha : (-\pi, \pi) \to \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$, definida por $\alpha(t) = e^{it}$. Então, α é um homeomorfismo,[3] Denotamos $\beta := \alpha^{-1}$. (Obs.: $\mathbb{S}^1$ denota a circunferência unitária centrada na origem).*

A prova da Proposição acima foge do escopo do trabalho, mas é verificado por (NETO, 1993), na seção Exponencial e Logaritmo, que α é contínua, bijetora e tem inversa contínua. Nessa parte, é essencial que α tenha $(-\pi, \pi)$ como domínio e $\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ como imagem. Se seu domínio fosse $[-\pi, \pi)$ ou $(-\pi, \pi]$ (ou seja, incluindo a volta completa), sua imagem seria $\mathbb{S}^1$, e, nesse caso, é possível verificar que β não seria contínua.

Agora, com esse resultado em mãos, vamos definir um ramo do argumento em U_0. Veremos também que, de fato, esse ramo irá satisfazer a "conveniência" que estabelecemos.

Definição A.2.16. *Considere α e β como na Proposição anterior. Definimos:*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Arg}: & U_0 & \longrightarrow & (-\pi, \pi) \\ & z & \longmapsto & \beta\left(\dfrac{z}{|z|}\right). \end{array}$$

Além disso, dizemos que Arg *é o ramo principal do argumento.*

[3] Isto é, α é uma bijeção contínua com inversa contínua.

Observação A.2.17. *Note que* Arg *é um ramo do argumento em* U_0. *De fato, seja* $z \in U_0$. *Perceba que:*

$$e^{i\operatorname{Arg}(z)} = e^{i\beta\left(\frac{z}{|z|}\right)} = \alpha\left(\beta\left(\frac{z}{|z|}\right)\right) = \frac{z}{|z|} \quad \forall z \in U_0.$$

Segue que Arg *é um ramo do argumento em* U_0. □

Definição A.2.18. *Como* Arg *é um ramo do argumento em* U_0, *pela demonstração do Teorema A.2.9, temos que*

$$\operatorname{Log}(z) := \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)$$

é o ramo do logaritmo em U_0 *induzido por* Arg*, chamado de* ***ramo principal do logaritmo***. *Mais ainda, para* $z \in U_0$, *dizemos que* $\operatorname{Log}(z)$ *é o* <u>*logaritmo complexo*</u> *de* z. *Essa definição é natural, pois, pela Observação A.2.12, temos que, se* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *então:*

$$\operatorname{Log}(x) = \ln(x).$$

(Lembre-se que $\mathbb{R}_+^* \cap U_0 = \mathbb{R}_+^*$*). Mais ainda, a restrição presente na função complexa* Log*, é exatamente a mesma restrição na função real* ln*, que é* $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

Teorema A.2.19. *Sejam* $z, w \in U_0$. *Se* $|\operatorname{Arg}(z)|, |\operatorname{Arg}(w)| < \frac{\pi}{2}$, *então:*

1. $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$;
2. $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$.

Demonstração. (1) : *Repare que*

$$e^{i(\operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(w))} e^{i\operatorname{Arg}(z)+i\operatorname{Arg}(w)} = e^{i\operatorname{Arg}(z)} e^{i\operatorname{Arg}(w)} = e^{i\beta\left(\frac{z}{|z|}\right)} e^{i\beta\left(\frac{w}{|w|}\right)} =$$

$$= \left(\frac{z}{|z|}\right) \cdot \left(\frac{w}{|w|}\right) = \frac{zw}{|z||w|} = \frac{zw}{|zw|} = e^{i\operatorname{Arg}(zw)}.$$

Assim, segue que: $\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)) = \operatorname{Arg}(zw) + 2k\pi$ *(para algum* $k \in \mathbb{Z}$*). Agora, note que, pela desigualdade triangular:*

$$|\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)| \leq |\operatorname{Arg}(z)| + |\operatorname{Arg}(w)| < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Então,

$$|\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)| = |\operatorname{Arg}(zw) + 2k\pi| < \pi.$$

Como, por definição, $\operatorname{Arg}(zw) \in (-\pi, \pi)$, *o único valor inteiro de* k *que satisfaz a última desigualdade mencionada é 0. De fato, temos* $-\pi < \operatorname{Arg}(zw) < \pi$ *e* $-\pi < \operatorname{Arg}(zw) + 2k\pi < \pi$, *assim,* $\pi > -\operatorname{Arg}(zw) - 2k\pi > -\pi$. *Somando as inequações, obtemos:*

$$-2\pi < -2k\pi < 2\pi \implies -1 < -k < 1.$$

Como $k \in \mathbb{Z}$*, segue que* $k = 0$*. Portanto,* $\mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w) = \mathrm{Arg}(zw)$.

(2) : *Perceba que*

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(zw) &= \ln|zw| + i\,\mathrm{Arg}(zw) = \\ &= \ln(|z||w|) + i(\mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w)) = \\ &= (\ln|z| + \ln|w|) + (i\,\mathrm{Arg}(z) + i\,\mathrm{Arg}(w)) = \\ &= (\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)) + (\ln|w| + i\,\mathrm{Arg}(w)) = \\ &= \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w).\end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)$*, como queríamos demonstrar.* ■

(Note que, para mostrar (2), utilizamos (1), e propriedades elementares de ln). Antes de prosseguir, apresentamos uma notação utilizada para a parte real e imaginária de um número complexo:

Definição A.2.20. *Para* $z = x + yi \in \mathbb{C}$*, com* $x, y \in \mathbb{R}$*, definimos* $\mathfrak{R}(z) := x$ *e* $\mathfrak{I}(z) := y$.

Proposição A.2.21. *Se* $z = x + yi \in \mathbb{C}$*, com* $x, y \in \mathbb{R}$*, é tal que* $|y| < \pi$*, então:*

$$\mathrm{Log}(e^z) = z.$$

Mais ainda, Log *é a inversa de* Exp *restrita ao domínio* $V_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathfrak{I}(z)| < \pi\}$.

Prova. *Não é de difícil verificação, pois, dado* $z \in V_0$*, utilizando a definição de* Log*, a Proposição A.2.5 e sua consequência, temos:*

$$\mathrm{Log}(e^z) = \ln|e^z| + i\,\mathrm{Arg}(e^z) = \ln(e^x) + i\beta\left(\frac{e^z}{|e^z|}\right) = x + i\beta(e^{iy}) = x + iy = z.$$

Portanto, $\mathrm{Log}(e^z) = z$*. (Lembre-se que, nesse caso,* $y \in (-\pi, \pi)$*; ou seja,* $\beta(e^{iy}) = \beta(\alpha(y)) = y$*.) Obtemos que, para todo* $w \in V_0$*, pelo que foi recém-provado, e, também, pelo fato de* Log *ser um ramo do logaritmo em* U_0*, é verdade que:*

$$\mathrm{Log}(e^w) = w \quad \text{e} \quad e^{\mathrm{Log}(w)} = w.$$

Isto é, as composições de Log *com* Exp *à direita e esquerda resultam na identidade. Portanto,* Log *é a inversa de* Exp *restrita ao domínio* V_0*, e o resultado segue.* ■

A próxima proposição estabelece uma maneira para calcular valores de Arg:

Proposição A.2.22. *Seja* $z = x + yi \in U_0$*, com* $x, y \in \mathbb{R}$*. Então, as afirmações a seguir são verdadeiras:*

1. *Se* $x \geq 0$*, então:* $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{arcsen}\left(\frac{y}{|z|}\right)$*;*

2. *Se* $x < 0$ *e* $y > 0$*, então:* $\operatorname{Arg}(z) = \arccos\left(\dfrac{x}{|z|}\right)$;

3. *Se* $x < 0$ *e* $y < 0$*, então:* $\operatorname{Arg}(z) = -\arccos\left(\dfrac{x}{|z|}\right)$.

Prova. *Inicialmente, note que, como* $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$*, e* β *é o inverso de* α*, que é a função de parametrização* $(-\pi, \pi) \to \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$*, tomamos*

$$t = \beta\left(\frac{z}{|z|}\right) = \operatorname{Arg}(z).$$

Dessa forma,

$$\frac{z}{|z|} = \alpha(t) = e^{it} = \cos(t) + i\operatorname{sen}(t),$$

para algum $t \in (-\pi, \pi)$*. Mas,*

$$\frac{z}{|z|} = \frac{x + yi}{|z|} = \frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}i \implies \cos(t) + i\operatorname{sen}(t) = \frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}i.$$

Portanto, temos:

$$\cos(t) = \frac{x}{|z|} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(t) = \frac{y}{|z|}.$$

Como não sabemos, exatamente, em que parte do intervalo $(-\pi, \pi)$ *está* t*, apenas podemos afirmar:*

1. $t \in \left\{\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{y}{|z|}\right), \pi - \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{y}{|z|}\right), -\pi - \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{y}{|z|}\right)\right\}$;

2. $t \in \{\arccos\left(\dfrac{x}{|z|}\right), -\arccos\left(\dfrac{x}{|z|}\right)\}$.

Agora sim, vamos provar cada afirmação. (1) : *Se* $x > 0$*, então:*

$$\operatorname{Arg}(z) = \beta\left(\frac{z}{|z|}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Isso é verdade, pois:

$$\alpha\left(\beta\left(\frac{z}{|z|}\right)\right) \in \alpha\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Que segue do fato de:

$$\alpha\left(\beta\left(\frac{z}{|z|}\right)\right) = \frac{z}{|z|} \quad \text{e} \quad \alpha\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \{w \in \mathbb{S}^1 \mid \Re(w) \geq 0\}.$$

Assim, como $x \geq 0$*, temos:*

$$\operatorname{Arg}(z) = \beta\left(\frac{z}{|z|}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Como $\operatorname{Arg}(z) \in \left\{ \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{|z|}\right), \pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{|z|}\right), -\pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{|z|}\right) \right\}$ *e* $\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{|z|}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *segue que* $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{|z|}\right)$.

(2) : *Similar a* (1), *mas, agora, como* $x < 0$ *e* $y > 0$, *utilizam-se os fatos:*

$$\operatorname{Arg}(z) = \beta\left(\frac{z}{|z|}\right) \in (0, \pi);$$

$$\operatorname{Arg}(z) \in \{\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right), -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right)\}.$$

E, por último:

$$\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) \in (0, \pi).$$

(3) : *Análogo a* (2), *mas, agora, como* $y < 0$, *temos:*

$$\operatorname{Arg}(z) = \beta\left(\frac{z}{|z|}\right) \in (-\pi, 0).$$

Mas agora, como temos $\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) \in (0, \pi)$, *segue que* $-\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) \in (-\pi, 0)$, *e o sinal negativo precisa ser usado antes do* arccos. *Pelo mesmo procedimento, conclui-se que a afirmação é verdadeira.* ∎

Corolário A.2.23. *Seja* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Então,*

$$\operatorname{Arg}(x) = 0.$$

Prova. *Basta verificar que, como* $x \geq 0$, *podemos utilizar a proposição anterior e concluir que:*

$$\operatorname{Arg}(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{0}{|x|}\right) = \operatorname{arcsen}(0) = 0.$$

Ou, ainda, pode ser visto como corolário da Definição A.2.18, pois, nesse caso:

$$\operatorname{Log}(x) = \ln(x) \iff \ln(x) + i \operatorname{Arg}(x) = \ln(x) \iff i \operatorname{Arg}(x) = 0 \iff \operatorname{Arg}(x) = 0.$$

∎

Exemplo A.2.24. *Vamos calcular* Arg *para alguns valores em* U_0, *utilizando a proposição anterior:*

- $\operatorname{Arg}(i) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\Im(i)}{|i|}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$;
- $\operatorname{Arg}(1 - i) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\Im(1 - i)}{|1 - i|}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

- $\text{Arg}(-3+4i) = \arccos\left(\dfrac{\Re(-3+4i)}{|-3+4i|}\right) = \arccos\left(\dfrac{-3}{5}\right) \approx 2,21;$

- $\text{Arg}(-1-\sqrt{3}i) = -\arccos\left(\dfrac{\Re(-1-\sqrt{3})}{|-1-\sqrt{3}i|}\right) = -\arccos\left(\dfrac{-1}{2}\right) = -\dfrac{2\pi}{3};$

- $\text{Arg}(e+\pi i) = \text{arcsen}\left(\dfrac{\pi}{|e+\pi i|}\right) = \text{arcsen}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{e^2+\pi^2}}\right) \approx 0,86;$

A seguir, calculamos o logaritmo complexo de alguns valores:

- $\text{Log}(i) = \ln|i| + i\,\text{Arg}(i) = \ln(1) + i\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}i;$
- $\text{Log}(1-i) = \ln|1-i| + i\,\text{Arg}(1-i) = \ln\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{4}i;$
- $\text{Log}(-3+4i) = \ln|-3+4i| + i\,\text{Arg}(-3+4i) \approx \ln(5) + 2,21i;$
- $\text{Log}(e+\pi i) = \ln|e| + i\,\text{Arg}(e+\pi i) \approx 1 + 0,86i;$
- $\nexists\,\text{Log}(-49)$, *pois* $-49 \notin U_0$;
- $\text{Log}(e) = \ln(e) = 1;$
- $\text{Log}(64+0i) = \ln(64);$

A.2.3 Ramo arbitrário

Na seção anterior, definimos o ramo principal do logaritmo e argumento. Entretanto, há outras maneiras de escolha do ramo. Mais especificamente, o teorema a seguir garante a existência de infinitos (não-enumeráveis) ramos do argumento e logaritmo.

Teorema A.2.25. *Seja $\phi \in \mathbb{R}$, e $U_\phi := \mathbb{C} \setminus \{xe^{i\phi} \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \leq 0\}$. Então, U_ϕ é aberto, $\gamma : (-\pi+\phi, \pi+\phi) \to \mathbb{S}^1 \setminus \{-e^{i\phi}\}$, dada por $\gamma(t) := e^{it}$ é um homeomorfismo, e, sendo $\delta := \gamma^{-1}$, a seguinte função:*

$$\text{Arg}_\phi : U_\phi \to (-\pi+\phi, \pi+\phi) \quad \text{Arg}_\phi(z) = \delta\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

é um ramo do argumento em U_ϕ.

Demonstração. *U_ϕ é aberto pois seu complementar é fechado. Notavelmente, $\{xe^{i\phi} \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \leq 0\}$ é uma semirreta no plano complexo, logo é um fechado de $\mathbb{C}$. Agora, temos que γ contínua. De fato,*

$$\gamma(t) = e^{it} = \cos(t) + i\,\text{sen}(t).$$

*Veja que γ tem as funções componentes (real/imaginária) ambas contínuas (*cos *e* sen*). Ainda, γ está bem definida, pois, se $t \in (-\pi + \phi, \pi + \phi)$, então*

$$\gamma(t) = e^{it} \neq e^{i(\pm\pi+\phi)} = e^{\pm i\pi + i\phi} = e^{\pm i\pi}e^{i\phi} = -1 \cdot e^{i\phi} = -e^{i\phi} \implies \gamma(t) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-e^{i\phi}\}.$$

O fato de γ ser definida em $(-\pi + \phi, \pi + \phi)$ sem os extremos, garante, (analogamente a β) que γ é bijeção e δ é contínua. Note, também, que, se $z \in U_\phi$, então:

$$e^{i\,\mathrm{Arg}_\phi(z)} = e^{i\delta\left(\frac{z}{|z|}\right)} = \gamma\left(\delta\left(\frac{z}{|z|}\right)\right) = \frac{z}{|z|} \implies e^{i\,\mathrm{Arg}_\phi(z)} = \frac{z}{|z|}.$$

Portanto, Arg_ϕ *é um ramo do argumento em U_ϕ. Isso conclui a demonstração.* ■

Isso mostra que existem infinitos ramos do argumento, pois, de fato, nas denominações do teorema, se $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi)$ com $\phi_1 \neq \phi_2$, então $\mathrm{Arg}_{\phi_1} \neq \mathrm{Arg}_{\phi_2}$, pois as funções têm domínios distintos, e, como $[0, 2\pi)$ é não enumerável, deve haver uma quantidade não enumerável de ramos do argumento.

A próxima proposição retrata o comportamento dos ramos do logaritmo associados aos ramos do argumento construídos no teorema anterior:

Proposição A.2.26. *Seja $\phi \in \mathbb{R}$, e considere o ramo do argumento* Arg_ϕ *de U_ϕ, definido como no Teorema anterior. Seja* Log^ϕ *o ramo do logaritmo associado a* Arg_ϕ*, isto é, para $z \in U_\phi$:*

$$\mathrm{Log}^\phi(z) := \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_\phi(z).$$

Então, $\mathrm{Log}^\phi(U_\phi) = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{I}(z) \in (-\pi + \phi, \pi + \phi)\}$.

Prova. *A afirmação que se quer provar é uma igualdade de conjuntos. Assim, vamos mostrar que um está contido no outro. Seja $E := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{I}(z) \in (-\pi + \phi, \pi + \phi)\}$.*

Notavelmente, como $\mathrm{Arg}_\phi(U_\phi) \subset (-\pi + \phi, \pi + \phi)$*, segue que, dado $z \in U_\phi$:*

$$\mathfrak{I}(\mathrm{Log}^\phi(z)) = \mathrm{Arg}_\phi(z) \subset (-\pi + \phi, \pi + \phi).$$

Ou seja, $\mathrm{Log}^\phi(U_\phi) \subset E$.

Reciprocamente, dado $z \in E$, com $z = x + iy$, sabe-se que $y \in (-\pi + \phi, \pi + \phi)$. Além disso, $e^z = e^x e^{iy} \in U_\phi$, pois $e^x > 0$, e $y \neq \pm\pi + \phi$. Assim,

$$\mathrm{Log}^\phi(e^z) = \ln|e^z| + i\,\mathrm{Arg}_\phi(e^z) = \ln(e^x) + i\gamma\left(\frac{e^z}{|e^z|}\right) = x + i\gamma\left(\frac{e^z}{e^x}\right) = x + i\gamma(e^{iy}) = x + iy = z.$$

Portanto, $z \in$ $\mathrm{Log}^\phi(U_\phi)$*. Logo, $E \subset$* $\mathrm{Log}^\phi(U_\phi)$*. Conclui-se que* $\mathrm{Log}^\phi(U_\phi) = E$*, como queríamos provar.* ■

Observação A.2.27. *Note que, se $z \in U_\phi \cap U_0$, então, para algum $k \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}_\phi(z) + 2k\pi$$

Isto é, na prática, os ramos do argumento principal e os definidos no teorema anterior têm comportamento similar. Segue que o mesmo vale para os ramos do logaritmo principal e os definidos na Proposição anterior.

A.2.4 Potências Arbitrárias

A partir da definição do logaritmo complexo, irá se definir o que é uma potência arbitrária de um complexo qualquer em U_0:

Definição A.2.28. *Sejam $z \in U_0$ e $w \in \mathbb{C}$:*

$$z^w := e^{w\,\mathrm{Log}(z)}.$$

Observação A.2.29. *A definição acima é natural, pois, se $w = n \in \mathbb{N}^*$, então:*

$$z^n = (e^{\mathrm{Log}(z)})^n = [(e^{\mathrm{Log}(z)}) \cdot (e^{\mathrm{Log}(z)}) \cdot \ldots \cdot (e^{\mathrm{Log}(z)})]_n = e^{n\,\mathrm{Log}(z)}.$$

Outro fato é que, fixando $w \in \mathbb{C}$, a derivada da função com domínio em U_0 e lei de formação $f(z) = z^w$ se dá por:

$$(z^w)' = (e^{w\,\mathrm{Log}(z)})' = e^{w\,\mathrm{Log}(z)} \cdot (w\,\mathrm{Log}(z))' = z^w \cdot w \cdot \frac{1}{z} = wz^{w-1}.$$

Coincidindo com o caso real. Uma proposição futura com propriedades de potências arbitrárias garante o salto da penúltima igualdade para a última.

Observação A.2.30. *Note que, segundo nossa definição de potenciação:*

$$i^i = e^{i\,\mathrm{Log}(i)} = e^{i \cdot \frac{\pi}{2} i} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, a segunda

Algumas propriedades das potências arbitrárias, com a definição dada, são "herdadas" do caso real, mas não todas. A proposição a seguir resume como essas propriedades se comportam em $\mathbb{C}$:

Proposição A.2.31. *Sejam $z \in U_0$; $w, \lambda \in \mathbb{C}$; $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}$ com $w = a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. *$1^w = 1$;*
2. *$z^{w+\lambda} = z^w \cdot z^\lambda$;*
3. *$(z^w)^\lambda = z^{w\lambda}$ nem sempre vale;*
4. *$x^w = x^a\{\cos[b\ln(x)] + i\,\mathrm{sen}[b\ln(x)]\}$;*

5. $(x^y)^w = x^{yw}$; *6.* $z^w \in \mathbb{C}^*$.

Prova. (1) : *Perceba que*

$$1^w = e^{w\,\mathrm{Log}(1)} = e^{w\ln(1)} = e^{w\cdot 0} = e^0 = 1.$$

(2) : *Note que*

$$z^{w+\lambda} = e^{(w+\lambda)\,\mathrm{Log}(z)} = e^{w\,\mathrm{Log}(z)+\lambda\,\mathrm{Log}(z)} = e^{w\,\mathrm{Log}(z)} \cdot e^{\lambda\,\mathrm{Log}(z)} = z^w \cdot z^\lambda.$$

(3) : *Observe que:*

$$i^{3i} = e^{3i\cdot\mathrm{Log}(i)} = e^{3i\frac{\pi}{2}i} = e^{-3\frac{\pi}{2}}.$$

Porém, por outro lado:

$$(i^3)^i = (-i)^i = e^{i\,\mathrm{Log}(-i)} = e^{i\cdot\frac{-\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{2}} \neq e^{-3\frac{\pi}{2}} = i^{3i}.$$

Assim,

$$(i^3)^i \neq i^{3i}.$$

Como a afirmação não vale em um caso, ela nem sempre vale.

(4) : *Veja que*

$$\begin{aligned} x^w = e^{w\,\mathrm{Log}(x)} = e^{w\ln(x)} = e^{(a+bi)\ln(x)} = e^{a\ln(x)+ib\ln(x)} = e^{a\ln(x)}e^{ib\ln(x)} = \\ = (e^{\ln(x)})^a \cdot e^{i(b\ln(x))} = x^a(\cos(b\ln(x)) + i\,\mathrm{sen}(b\ln(x)). \end{aligned}$$

(5) : *Temos* $x^y \in \mathbb{R}_+^*$. *Assim, pelo item anterior:*

$$\begin{aligned} (x^y)^w = (x^y)^a\Big(\cos\big(\ln(x^y)\big) + i\,\mathrm{sen}\big(b\ln(x^y)\big)\Big) = x^{ya}\Big(\cos\big(by\ln(x)\big) + i\,\mathrm{sen}\big(by\ln(x)\big)\Big) = \\ = x^{ya}\Big(\cos\big((yb)\ln(x)\big) + i\,\mathrm{sen}\big((yb)\ln(x)\big)\Big). \end{aligned}$$

Novamente, utilizando o item anterior:

$$x^{ya}\Big(\cos\big((yb)\ln(x)\big) + i\,\mathrm{sen}\big((yb)\ln(x)\big)\Big) = x^{ya+(yb)i} = x^{y(a+bi)} = x^{yw}.$$

Logo, por transitividade, $(x^y)^w = x^{yw}$.

(6) : *Note que* $z^w = e^{w\,\mathrm{Log}(z)}$. *Como* $e^c \in \mathbb{C}^*$ *para todo* $c \in \mathbb{C}$, *segue que* $e^{w\,\mathrm{Log}(z)} \in \mathbb{C}^*$, *isto é,* $z^w \in \mathbb{C}^*$, *como queríamos.* ■

Como as potências arbitrárias se resumem, no fundo, em exponenciação complexa, que é uma função periódica, é compreensível assumir que as potências arbitrárias também assumam um papel periódico. De fato, a proposição a seguir prova isso:

Proposição A.2.32. *Sejam $z \in U_0 \setminus \{1\}$, $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então:*

$$z^w = z^{w + \frac{2n\pi}{\mathrm{Log}(z)} i}.$$

Prova.

$$z^w = e^{w\,\mathrm{Log}(z)} = e^{w\,\mathrm{Log}(z) + 2n\pi i} = e^{\mathrm{Log}(z)\left(w + \frac{2n\pi}{\mathrm{Log}(z)} i\right)} = z^{w + \frac{2n\pi}{\mathrm{Log}(z)} i}.$$

■

Observação A.2.33. *A definição de potência arbitrária pode ser feita utilizando um ramo arbitrário do logaritmo, em que, dado $\phi \in \mathbb{R}$, e $z \in U_\phi$:*

$$\exp_z^\phi(w) := e^{w\,\mathrm{Log}^\phi(z)}.$$

Porém, a definição utilizando o ramo principal é mais usual.

Exemplo A.2.34. *A seguir, alguns exemplos calculando potências complexas arbitrárias, algumas vezes utilizando a proposição anterior.*

$$3^{2i} = 3^{0+2i} = 3^0(\cos(2\ln(3)) + i\,\mathrm{sen}(2\ln(3)) = \cos(2\ln(3)) + i\,\mathrm{sen}(2\ln(3)));$$

$$(1-i)^{3-4i} = e^{(3-4i)\,\mathrm{Log}(1-i)} = e^{(3-4i)(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i)} = e^{3(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i) - 4i((\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i)} = e^{3\ln\sqrt{2}} e^{-3\frac{\pi}{4}i} e^{-4i\ln\sqrt{2}} e^{-\pi} =$$

$$= e^{3\ln\sqrt{2} - \pi} e^{i(-3\frac{\pi}{4} - 4\ln\sqrt{2})} = \; = e^{3\ln\sqrt{2} - \pi}(\cos(-3\frac{\pi}{4} - 4\ln\sqrt{2}) + i\,\mathrm{sen}(-3\frac{\pi}{4} - 4\ln\sqrt{2}));$$

$$49^{2+2i} = 49^2(\cos(2\ln(49)) + i\,\mathrm{sen}(2\ln(49)) \approx 2401(\cos(7,78) + i\,\mathrm{sen}(7,78))).$$

A.2.5 Base arbitrária

A partir da definição de potências arbitrárias, pode-se pensar em expandir o conceito de Logaritmo Complexo para uma base qualquer, isto é, criar uma função que, dados $z \in U_0$ e $w \in \mathbb{C}^*$, encontre um $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que:

$$z^\lambda = w.$$

Assim, definiríamos $\lambda := \mathrm{Log}_z(w)$. Entretanto, não sabemos se λ existe, nem se é único. É isso é o que pretendemos investigar nessa seção.

Proposição A.2.35. *Sejam $z, w \in U_0$, com $z \neq 1$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfaz $z^\lambda = w$ então,*

$$\lambda = \frac{\mathrm{Log}(w) + 2n\pi i}{\mathrm{Log}(z)},$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$. Além disso, dado $\mu \in \mathbb{C}$, temos $z^\lambda = z^\mu$ se, e somente se, $\lambda = \mu + \dfrac{2k\pi i}{\mathrm{Log}(z)}$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Prova. *Note que, como* $z^{\lambda} = w$*, por definição de potência arbitrária, temos:*

$$e^{\lambda \operatorname{Log}(z)} = w.$$

Como $w \in U_0$*, podemos aplicar* Log *em ambos os lados da igualdade:*

$$\operatorname{Log}(e^{\lambda \operatorname{Log}(z)}) = \operatorname{Log}(w).$$

Lembrando que $\operatorname{Log}(e^{\lambda \operatorname{Log}(z)}) = \lambda \operatorname{Log}(z) + 2k\pi i$*, para algum* $k \in \mathbb{Z}$*, (uma vez que a exponencial complexa é periódica). Disso, segue que:*

$$\lambda \operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(w) + 2n\pi i,$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$*.*

Como $z \neq 1$*, sabemos que* $\operatorname{Log}(z) \neq 0$ *(caso contrário, teríamos* $z = e^{\operatorname{Log}(z)} = e^0 = 1$*, ou seja,* $z = 1$*, o oposto do que estamos supondo). Assim, conseguimos:*

$$\lambda = \frac{\operatorname{Log}(w) + 2n\pi i}{\operatorname{Log}(z)}.$$

Além disso, utilizando a definição e o Lema A.2.7, temos:

$$z^{\lambda} = z^{\mu} \iff e^{\operatorname{Log}(z)\lambda} = e^{\operatorname{Log}(z)\mu} \iff \operatorname{Log}(z)\lambda = \operatorname{Log}(z)\mu + 2k\pi i \iff \lambda = \mu + \frac{2k\pi i}{\operatorname{Log}(z)}.$$

Como queríamos provar. ■

Observação A.2.36. *Note que na proposição anterior supomos* $w \in U_0$*. De fato, se* $w \notin U_0$*, não seria possível aplicar o* Log *dos dois lados durante um dos passos da prova. Ainda, utilizando os símbolos nas mesmas condições da Proposição anterior, temos que, pela Proposição A.2.21 , se* $\lambda \operatorname{Log}(z)$ *for tal que:* $|\Im(\lambda \operatorname{Log}(z))| < \pi$*, então:*

$$\operatorname{Log}(e^{\lambda \operatorname{Log}(z)}) = \lambda \operatorname{Log}(z).$$

Assim, por um procedimento análogo à prova da proposição anterior, segue que:

$$\lambda = \frac{\operatorname{Log}(w)}{\operatorname{Log}(z)}.$$

Isto é, o $n \in \mathbb{Z}$ *em meio a essas hipóteses é zero.*

Observação A.2.37. *A igualdade encontrada na última observação talvez tenha feito o leitor se acordar do caso real de logaritmos de base qualquer. Pela observação anterior, segue que, se* $z, w \in \mathbb{R}_+^*$*, e* $z \neq 1$*, então:*

$$\lambda = \frac{\operatorname{Log}(w)}{\operatorname{Log}(z)} + \frac{2n\pi i}{\operatorname{Log}(z)} = \frac{\ln(w)}{\ln(z)} + \frac{2n\pi i}{\ln(z)} = \log_z(w) + \frac{2n\pi i}{\ln(z)}.$$

Utilizamos a propriedade da mudança de base dos logaritmos reais. Assim, há uma relação certeira entre λ *e o logaritmo real de base* z*. Com isso, podemos estabelecer uma definição acerca do Logaritmo Complexo de base* z *qualquer em* $U_0 \setminus \{1\}$*, inspirada na mudança de base do caso real:*

Definição A.2.38. *Sejam $z, w \in U_0$, com $z \neq 1$. Então:*

$$\mathrm{Log}_z(w) := \frac{\mathrm{Log}(w)}{\mathrm{Log}(z)}.$$

Teorema A.2.39. *Se z, w são como na definição anterior e satisfazem $|\Im(\mathrm{Log}(z)w)| < \pi$, então:*

$$z^{\mathrm{Log}_z(w)} = w \quad \text{e} \quad \mathrm{Log}_z(z^w) = w$$

Demonstração. *De fato,*

$$z^{\mathrm{Log}_z(w)} = z^{\frac{\mathrm{Log}(w)}{\mathrm{Log}(z)}} = e^{\mathrm{Log}(z)\frac{\mathrm{Log}(w)}{\mathrm{Log}(z)}} = e^{\mathrm{Log}(w)} = w.$$

(Lembre-se que Log *é um ramo do logaritmo em U_0, de onde a última igualdade segue.) Ainda,*

$$\mathrm{Log}_z(z^w) = \frac{\mathrm{Log}(z^w)}{\mathrm{Log}(z)} = \frac{\mathrm{Log}(e^{\mathrm{Log}(z)w})}{\mathrm{Log}(z)} = \frac{\mathrm{Log}(z)w}{\mathrm{Log}(z)} = w.$$

■

Observação A.2.40. *Para $\mathrm{Log}_z(z^w) = w$ ocorrer, pela Proposição A.2.21, foi necessário que $|\Im(\mathrm{Log}(z)w)| < \pi$. Para verificar em que condição temos que $|\Im(\mathrm{Log}(z)w)| < \pi$, notamos que:*

$$\Im(\mathrm{Log}(z)w) = \Im[(\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z))(a+bi)] = \Im(\ln|z|a - \mathrm{Arg}(z)b + (\mathrm{Arg}(z)a + \ln|z|b)i) =$$

$$= \mathrm{Arg}(z)a + \ln|z|b.$$

Ou seja, precisamos que

$$|\mathrm{Arg}(z)a + \ln|z|b| < \pi.$$

Ainda, se, como no Teorema anterior, concebermos z como fixo e w como variável, sabe-se que, controlar a expressão $\mathrm{Arg}(z)a + \ln|z|b$ para que $|\mathrm{Arg}(z)a + \ln|z|b|| < \pi$, pode depender apenas de somar um múltiplo inteiro de 2π. Mas como a, b variam, não se pode garantir que o múltiplo de 2π somado seja sempre o mesmo, assim, não se pode definir $\mathrm{Log}_z(w)$ de forma a sempre satisfazer a condição de função inversa de $\exp_z(\lambda)$, mesmo se restringíssemos w a algum subconjunto de U_0. Sendo assim, não seria possível encontrar uma definição "boa" para um logaritmo complexo de base qualquer.

Entretanto, se utilizar a mesma definição de ramo do logaritmo, mas, ao invés de e, utilizar z, notavelmente, com a primeira afirmação, teríamos que Log_z é um "z-ramo do logaritmo."

A.3 Corpos Ordenados

Definição A.3.1. *Seja S um conjunto. Qualquer função*

$$*: S \times S \to S,$$

é dita uma operação bem definida e fechada em S. Nesse caso, iremos denotar, para $a, b \in S$, $*\,(a, b) := a * b$.

Definição A.3.2. *Seja K um conjunto, e $\oplus, \odot$ operações bem definidas e fechadas em K.*

Dizemos que $(K, \oplus, \odot)$ é um corpo (ou, apenas que K é um corpo, se as operações já estão subentendidas) quando satisfaz, para quaisquer $a, b, c \in K$, os 9 axiomas abaixo:

1. *Comutatividade de $\oplus$:* $a \oplus b = b \oplus a$;
2. *Associatividade de $\oplus$:* $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
3. *Elemento neutro de $\oplus$:* *Há $0_K \in K$ tal que $a \oplus 0_K = a$, para cada $a \in K$;*
4. *Inversibilidade de $\oplus$:* *Para cada $a \in K$, há $\ominus a \in K$ tal que $a \oplus (\ominus a) = 0_K$;*
5. *Comutatividade de $\odot$:* $a \odot b = b \odot a$;
6. *Associatividade de $\odot$:* $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$;
7. *Elemento neutro de $\odot$:* *Há $1_K \in K$ tal que $a \odot 1_K = a \quad \forall a \in K$;*
8. *Inversibilidade de $\odot$:* *Para cada $a \in K \setminus \{0_K\}$ há $\oplus\!\!\!\!\div a \in K$ tal que $a \odot (\oplus\!\!\!\!\div a) = 1_K$;*
9. *Distributividade de $\oplus$ sobre $\odot$:* $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

Denotamos, para quaisquer $a, b \in K$:

$$a \ominus b := a \oplus (\ominus b).$$

Similarmente, se $b \neq 0_K$, denotamos:

$$a \oplus\!\!\!\!\div b := a \odot (\oplus\!\!\!\!\div b).$$

Também pensamos em hiperoperações que não só satisfaçam propriedades algébricas, mas que obedeçam a ordem usual de $\mathbb{R}$. Para isso, definimos primeiramente alguns conceitos:

Definição A.3.3. *Seja S um conjunto. Dizemos que $(S, \leq)$ é um conjunto ordenado quando há uma relação de ordem em S denotada por $\leq$. Por relação de ordem, queremos dizer que a relação satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer elementos a, b e c em S:*

1. *Antissimetria:* *Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$;*

2. *Transitividade: Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$;*

3. *Totalidade: $a \leq b$ ou $b \leq a$.*

Notações:

Sejam $a, b \in S$. Escrevemos $b \geq a$ se, e somente se, $a \leq b$; Escrevemos $a < b$ se, e somente se, $a \leq b$ e $a \neq b$; Escrevemos $b > a$ se, e somente se, $a < b$.

Definição A.3.4. *Seja $(K, \oplus, \odot)$ um corpo nas mesmas condições da Definição A.3.2. Dizemos que $(K, \oplus, \odot, \leq)$ é um corpo ordenado quando $(K, \leq)$ é ordenado e a relação de ordem é compatível com as operações de K. Isto é:*

1. *Para quaisquer $a, b, c \in K$: Se $a \leq b$, então $a \oplus c \leq b \oplus c$.*

2. *Para quaisquer $a, b, c \in K$ com $c > 0_K$: Se $a \leq b$, então $a \odot c \leq b \odot c$.*

Lema A.3.5. *Nas condições da Definição acima, temos:*

1. *Para quaisquer $a, b, c \in K$: Se $a < b$, então $a \oplus c < b \oplus c$.*

2. *Para quaisquer $a, b, c \in K$ com $c > 0_K$: Se $a < b$, então $a \odot c < b \odot c$.*

Prova. *(1): Veja que*

$$a \oplus c = b \oplus c \implies a = b.$$

Mas, como $a < b$, temos $a \leq b$ e $a \neq b$, logo, $a \oplus c \leq b \oplus c$ e, pela relação acima, como $a \neq b$, temos $a \oplus c < b \oplus c$

(2): Similar ao item 2, apenas notando que, como $c \neq 0_K$, temos que, ao multiplicar a equação por $\oplus c$:

$$a \odot c = b \odot c \implies a = b.$$

■

Definição A.3.6 (Elementos positivos do corpo)**.** *Seja $(K, \oplus, \odot, \leq)$ um corpo ordenado. Definimos o conjunto dos elementos positivo de K da seguinte forma:*

$$P := \{x \in K \mid x > 0_K\}.$$

Lema A.3.7. *Seja $(K, \oplus, \odot)$ um corpo nas mesmas condições da Definição A.3.2. Então, as afirmações a seguir são verdadeiras:*

1. *Os elementos neutros para as operações $\oplus$ e $\odot$ são únicos;*

2. $a \odot 0_K = 0_K \quad \forall a \in K$;

3. Se $|K| \geq 2$, então $0_K \neq 1_K$;

4. Se $(K, \leq)$ é corpo ordenado e $a, b \in K$ são tais que $a, b > 0_K$, então $a \odot b > 0_K$.

Prova. (1) : *Seja $\mathcal{N}$ um elemento neutro para a operação $\oplus$. Então, utilizando o axioma* (3) *em $\mathcal{N}$ e 0_K:*

$$\mathcal{N} = \mathcal{N} \oplus 0_K = 0_K \implies \mathcal{N} = 0_K.$$

Analogamente, prova-se que o elemento neutro para a operação $\odot$ é único.

(2) : *Seja $a \in K$. Utilizando os axiomas* (3), (4) *e* (9), *temos:*

$$a \odot 0_K = a \odot (0_K \oplus 0_K) = (a \odot 0_K) \oplus (a \odot 0_K) \implies (a \odot 0_K) \oplus (a \odot 0_K) = a \odot 0_K \implies$$

$$\implies (a \odot 0_K) \oplus (a \odot 0_K) \ominus (a \odot 0_K) = (a \odot 0_K) \ominus (a \odot 0_K) = 0_K.$$

(3) : *Suponha, para obter contradição, que $0_K = 1_K$. Assim, como $|K| \geq 2$, há $c \in K$ tal que $c \neq 0_K$. Utilizando a afirmação anterior e o axioma* 7, *segue que:*

$$c = c \odot 1_K = c \odot 0_K = 0_K.$$

O que é uma contradição, pois $c \neq 0_K$. Portanto, $0_K \neq 1_K$.

(4) : *Veja que $a > 0_K$. Como K é corpo ordenado, multiplicando a inequação por b, obtemos $a \odot b > 0_K \odot b = 0_K \implies a \odot b > 0_K$, em que a afirmação* (2) *foi utilizada.* ■

Lema A.3.8. *Sejam $(K, \oplus, \odot, \leq)$ um corpo ordenado e $P \subset K$ o conjunto dos elementos positivos. Então, as afirmações a seguir são verdadeiras:*

(a) Se $x, y \in P$, então $x \oplus y, x \odot y \in P$;

(b) Se $x \in K$, então, ou $x \in P$, ou $x = 0_K$, ou $\ominus x \in P$.

Prova. *(a): Veja que, como $x > 0_K$ e $y > 0_K$, pelo axioma (1) de corpo ordenado, temos $x \oplus y \geq 0_K \oplus y \geq 0_K \oplus 0_K = 0_K$, logo, por transitividade, $x \oplus y \geq 0_K$. Note que $x \oplus y \neq 0_K$ pois, caso contrário, $x \oplus y = 0_K$, ou seja $y = \ominus x$. Nesse caso, como $x \geq 0_K$ temos $0_K = x \ominus x \geq 0_K \ominus x = \ominus x$, logo, $y = \ominus x \leq 0_K$, o que é uma contradição, pois $y > 0_K$. Portanto, $x \oplus y > 0_K$, ou seja, $x \oplus y \in P$. Agora, pelo axioma (2) de corpo ordenado, como $x, y > 0_K$, temos $x \odot y \geq x \odot 0_K = 0_K$. Veja que $x \odot y \neq 0_K$ pois $x, y \neq 0_K$ e K não possui divisores de zero. Logo, $x \odot y > 0_K$, ou seja, $x \odot y \in P$.*

(b): Seja $x \in K$. Pela totalidade da relação de ordem, temos $x \geq 0_K$, ou $x \leq 0_K$. Suponha que $x \neq 0_K$. Então, $x > 0_K$ ou $x < 0_K$. Perceba que, se os dois ocorrerem ao mesmo tempo, então $x > 0_K$ e $\ominus x > 0_K$. Pelo item anterior, temos $0_K = x \ominus x > 0_K$, ou seja, $0_K > 0_K$, o que é um absurdo. Portanto, ou $x > 0_K$, ou $x < 0_K$ (assumindo que $x \neq 0_K$). Agora,

assumindo que $x = 0_K$, segue por definição que os outros dois não acontecem. Conclui-se que, ou $x > 0_K$, ou $x = 0_K$, ou $x < 0_K$. Caso $x < 0_K$, tem-se que $\ominus x > 0_K$. Ou seja, ou $x \in P$, ou $x = 0_K$, ou $\ominus x \in P$. ■

Lema A.3.9. *Seja $(K, \oplus, \odot)$ um corpo, e $P \subset K$ satisfazendo os itens (a) e (b) do Lema anterior. Defina a relação:*

$$x \leq y \iff y \ominus x \in P \cup \{0_K\}.$$

Então, $(K, \leq)$ é um corpo ordenado.

Prova. *Primeiramente, vamos provar que $\leq$ é uma relação de ordem em K. Para tal, sejam $x, y, z \in K$.*

Antissimetria Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então, $y \ominus x, x \ominus y \in P \cup \{0_K\}$. Suponha que $x \neq y$. Então, $y \ominus x > 0_K$. Logo, $x \ominus y = \ominus(y \ominus x) < 0_K$. Ou seja, $x \ominus y \notin P \cup \{0_K\}$, o que é uma contradição. Portanto, $x = y$.

Transitividade Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $y \ominus x, z \ominus y \in P \cup \{0_K\}$. Veja que, pelo item (a), caso $y \ominus x, z \ominus y \in P$, temos

$$z \ominus x = (z \ominus y) + (y \ominus x) \in P \subset P \cup \{0_K\}.$$

Agora, caso $y \ominus x = 0_K$, temos $z \ominus x = (z \ominus y) + (y \ominus x) = z \ominus y + 0_K = z \ominus y \in P \cup \{0_K\}$, ou seja, $z \ominus x \in P \cup \{0_K\}$ Analogamente, caso $z \ominus y = 0_K$, prova-se que $z \ominus x \in P \cup \{0_K\}$. Em qualquer caso, $z \ominus x \in P \cup \{0_K\}$, portanto, $x \leq z$.

Totalidade Veja que, pelo item (b), temos que $y \ominus x \in P \cup \{0_K\}$ ou $x \ominus y \in P \cup \{0_K\}$. Em outras palavras, $x \leq y$, ou $y \leq x$.

Agora, vamos provar que a relação se comunica com as operações do corpo K: (1) : *Se $x \leq y$, então $y \ominus x \in P \cup \{0_K\}$. Veja que:*

$$(y \oplus z) \ominus (x \oplus z) = y \ominus x \in P \cup \{0_K\}.$$

Logo, $x \oplus z \leq y \oplus z$ por definição.

(2) *Ainda assumindo $x \leq y$, mas agora com $z > 0_K$. Assim, $z = z \ominus 0_K \in P \cup \{0_K\}$, mas, como $z \neq 0_K$, temos $z \in P$. Veja que, pela propriedade distributiva:*

$$(y \odot z) \ominus (x \odot z) = (y \ominus x) \odot z.$$

Caso $y \ominus x \in P$, segue que, pelo item (a) e observação acima, $(y \odot z) \ominus (x \odot z) \in P \subset P \cup \{0_K\}$. Caso $y \ominus x = 0_K$, segue que, pela observação acima, que $(y \odot z) \ominus (x \odot z) = 0_K \in P \cup \{0_K\}$. Em qualquer caso, $(y \odot z) \ominus (x \odot z) \in P \cup \{0_K\}$, ou seja, $x \odot z \leq y \odot z$. Segue que $(K, \leq)$ é um corpo ordenado, como queríamos provar.

■

Definição A.3.10. *Sejam $(K_1, +_1, \cdot_1)$ e $(K_2, +_2, \cdot_2)$ corpos e $\varphi : K_1 \to K_2$ uma função. Dizemos que φ é um <u>isomorfismo</u> entre K_1 e K_2 se φ é bijetora e satisfaz:*

$$\varphi(a +_1 b) = \varphi(a) +_2 \varphi(b);$$

$$\varphi(a \cdot_1 b) = \varphi(a) \cdot_2 \varphi(b).$$

Para quaisquer $a, b \in K_1$. Dizemos que K_1 e K_2 são <u>isomorfos</u> se existe um isomorfismo entre K_1 e K_2. Nesse caso, denotamos $K_1 \cong_\varphi K_2$ (ou apenas $K_1 \cong K_2$ caso não se queira especificar o isomorfismo). Além disso se $(K_1, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ e $(K_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ são corpos ordenados e $K_1 \cong_\varphi K_2$, dizemos que φ é um <u>isomorfismo de ordem</u> quando:

$$a \leq_1 b \implies \varphi(a) \leq_2 \varphi(b) \quad \forall a, b \in K_1.$$

Nesse caso, dizemos que K_1 e K_2 são <u>ordenadamente isomorfos</u>, e denotamos $K_1 \equiv_\varphi K_2$ (ou apenas $K_1 \equiv K_2$ quando não queiramos especificar o isomorfismo de ordem).

Observação A.3.11. *Nas condições da definição anterior (incluindo operações e relações respectivas), observe que, se φ é um isomorfismo de ordem, então:*

$$\varphi(a) \leq_2 \varphi(b) \implies a \leq_1 b.$$

De fato, suponha, para obter contradição, que $a >_1 b$. Então, $b \leq_1 a$, logo, $\varphi(b) \leq_2 \varphi(a)$. Como $\varphi(a) \leq_2 \varphi(b)$, pela antissimetria, temos que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Como φ é injetora, temos que $a = b$, o que é uma contradição, pois supomos $a >_1 b$, ou seja, $a \neq b$. Sendo assim, é fácil ver que:

$$K_1 \cong_\varphi K_2 \iff K_2 \cong_{\varphi^{-1}} K_1.$$

E, também,

$$K_1 \equiv_\varphi K_2 \iff K_2 \equiv_{\varphi^{-1}} K_1.$$

A proposição a seguir nos dá uma condição necessária para um isomorfismo entre dois corpos:

Lema A.3.12. *Sejam K_1, K_2 corpos como na Definição anterior tais que $K_1 \cong_\varphi K_2$. Então:*

$$\varphi(0_{K_1}) = 0_{K_2} \quad \text{e} \quad \varphi(1_{K_1}) = 1_{K_2}.$$

Prova. *Seja $b \in K_2$. Então, como φ é bijetora, há $a \in K_1$ tal que $b = \varphi(a)$. Assim:*

$$b +_2 \varphi(0_{K_1}) = \varphi(a) +_2 \varphi(0_{K_1}) = \varphi(a +_1 0_{K_1}) = \varphi(a) = b \implies b +_2 \varphi(0_{K_1}) = b.$$

Assim, pela arbitrariedade de $b \in K_2$ e unicidade do elemento neutro (afirmação (1) *do Lema A.3.7), segue que $\varphi(0_{K_1}) = 0_{K_2}$. Prova-se, similarmente, que $\varphi(1_{K_1}) = 1_{K_2}$.* ■