UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Tony de Aguiar

Aplicação do método de resolução de problemas de Polya em questões de aritmética da OBMEP

Blumenau
2024

Tony de Aguiar

Aplicação do método de resolução de problemas de Polya em questões de aritmética da OBMEP

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Felipe Vieira, Dr.

Blumenau
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Aguiar, Tony de
Aplicação do método de resolução de problemas de Polya em questões de aritmética da OBMEP / Tony de Aguiar ; orientador, Felipe Vieira, 2024.
90 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Blumenau, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Resolução de Problemas. 3. George Polya. 4. Ensino Fundamental. I. Vieira, Felipe. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

Tony de Aguiar

Aplicação do método de resolução de problemas de Polya em questões de aritmética da OBMEP

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Felipe Vieira, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof.ª Laura Leticia Ramos Rifo, Dra.
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Delfini Caetano Fidalgo
Data: 24/09/2024 14:03:56-0300
CPF: ***.425.308-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Vieira
Data: 24/09/2024 12:53:06-0300
CPF: ***.601.639-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Felipe Vieira, Dr.
Orientador

Blumenau, 2024.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Felipe Vieira, meu orientador, pela manifestação de incondicional apoio e disponibilidade, pela compreensão e paciência em todas minhas dificuldades, pelo aconselhamento assertivo e pelo estímulo permanente, que muito contribuíram para aumentar o desafio e melhorar a profundidade e a clareza da investigação, pela sua amizade.

À Prefeitura Municipal de Balneário Camboriú, por ter concedido licença para a realização do mestrado em tempo integral, sem a mesma, não teria tempo hábil para a conclusão da mesma.

À Universidade Federal de Santa Catarina, seus docentes e funcionários, que desde 2019 quando ingressei na primeira vez no PROFMAT, me acompanham neste meu percurso acadêmico e que contribuíram para me tornar no futuro mestre que serei.

Aos professores Doutor André Vanderlinde da Silva, Doutora Louise Reips e Doutor Rafael Aleixo de Carvalho que por diversas vezes, fizeram eu acreditar que poderia ir além do que eu imaginava ser meu limite, que demonstraram não serem apenas transmissores de conhecimento, e sim educadores em sua essência.

Agradeço a DEUS por todas as oportunidades concedidas a mim, pela força e tranquilidade nos momentos de fraqueza e dificuldades.

Ao meu Pai, minha Mãe e aos meus dois irmãos, pelo amor, carinho e atenção que sempre me deram, e por sempre me incentivarem a ser uma pessoa melhor, que eu possa ser motivo de orgulho aos mesmos.

Aos meus avós (in memorian), por todo amor recebido, e sei que estarão comemorando esse momento comigo com muita glória e com aquele sorriso que sempre existia quando estavamos juntos.

De forma incondicional ao meu grande amor Guilherme, pelo amor, pela presença constante, incentivo e paciência, me fazendo acreditar que posso mais do que imagino.

RESUMO

O principal objetivo dessa dissertação é identificar técnicas de ensino que facilitem a compreensão da matemática e promovam o interesse por essa disciplina. Para isso, busca-se especialmente estratégias que auxiliem na interpretação de problemas e no entendimento da linguagem matemática. Nesse contexto, é apresentada a Metodologia de George Polya e sua aplicação em questões da prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Essa metodologia consiste em quatro etapas: Compreensão do Problema, Estabelecimento de um Plano, Execução do Plano e Revisão. Cada problema olímpico selecionado para esta dissertação é abordado por meio dessas quatro fases, com ênfase em questões relacionadas à contagem e aritmética, apresentando conceitos fundamentais e exemplos que facilitam a compreensão.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is to identify teaching techniques that ease the understanding of mathematics. For this, strategies are sought to assist in problem interpretation and understanding of the mathematical language. In this context, George Polya's Methodology is presented, along with its application in mathematical competitions, with emphasis on the Brazilian Public School Mathematics Olympiad (OBMEP). This methodology consists of four stages: Understanding the Problem, Establishing a Plan, Executing the Plan, and Reviewing. Each selected problem is addressed through these four phases, with focus on couting and arithmetic questions, presenting fundamental concepts and examples that facilitate our understanding.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Todos os dias, nos deparamos com desafios a serem enfrentados em diversas áreas da vida e, por isso, um dos propósitos da educação é promover o crescimento da independência intelectual do estudante. É essencial que ele perceba o conhecimento acadêmico como um meio de compreender e se envolver com o mundo ao seu redor.

Entendemos um problema como uma questão que requer solução, embora não tenhamos uma abordagem pré-definida. Tal problema pode servir como um ponto inicial para a formação de conceitos, antes de sua formalização, com foco na ação do aluno: ele deve interpretar o enunciado, analisar e ponderar sobre os dados e elaborar uma ou mais estratégias para sua resolução.

Durante esse processo, esperamos que ele desenvolva um espírito investigativo, raciocínio lógico e pensamento crítico, habilidades fundamentais para desempenhar seu papel como cidadão. Porém, uma das dificuldades do aluno do ensino fundamental, na matemática, é a interpretação na resolução de problemas, em que muitos se questionam: O que fazer? Qual das quatro operações devo usar? Por onde começo?

Por isso, a resolução de exercícios por repetição de algoritmos e a resolução compreendida de problemas têm seus méritos e são importantes em diferentes contextos de aprendizagem.

Ao repetir algoritmos, o aluno pode desenvolver habilidades técnicas como a implementação precisa de procedimentos ou fórmulas. Essa prática repetida pode levar à automação dos procedimentos, tornando a resolução de problemas mais rápida e eficiente, especialmente em situações em que a rapidez é essencial. Também, pode ajudar na memorização de procedimentos ou padrões comuns, o que pode ser útil em situações em que a solução de problemas é baseada em um conjunto fixo de etapas.

Resolver um problema entendendo cada etapa do processo promove uma compreensão mais profunda dos conceitos subjacentes. Isso é essencial para a aplicação flexível do conhecimento em novas situações e desenvolver habilidades analíticas, permitindo aos alunos identificar padrões, estratégias eficazes e abordagens alternativas para resolver problemas. Além disso, a compreensão profunda dos conceitos permite aos alunos aplicar seu conhecimento de forma flexível em uma variedade de contextos, adaptando-se a cada situação.

Em última análise, uma abordagem equilibrada que combine a repetição de algoritmos para a consolidação de habilidades técnicas com a resolução compreendida de problemas para promover uma compreensão profunda e habilidades analíticas é geralmente a mais eficaz. Ambas as abordagens têm seu lugar na aprendizagem, e o desafio está em encontrar o equilíbrio certo entre elas, dependendo dos objetivos educacionais e das necessidades individuais dos alunos.

Para facilitar esse equilíbrio, o objetivo dessa dissertação é propor de uma maneira organizada e didática, para professores do ensino fundamental, a aplicação da técnica de resolução de George Polya, visto que ela contempla com exatidão as propostas elencadas na BNCC.

A BNCC é a principal guia da Educação Básica, garantindo uniformidade curricular, com foco no desenvolvimento integral dos alunos. De acordo com (PINTO, 2017), a criação da BNCC teve início em 2015, durante o I Seminário Interinstitucional, que contou com a participação de assessores e especialistas. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) tem como objetivo principal promover a formação completa do indivíduo e a construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

De acordo com a BNCC, competência é definida como a habilidade de utilizar e combinar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para solucionar questões cotidianas e responder às demandas que requerem análises críticas, condutas éticas e abordagens criativas, tanto no contexto profissional quanto em situações relacionadas à participação cidadã. O principal objetivo das competências é destacar a importância do conhecimento, atiçar a curiosidade e facilitar a comunicação entre os alunos. Adicionalmente, elas buscam preparar os alunos para aplicar seus aprendizados de maneira crítica e respeitosa em suas vidas cotidianas, incentivando-os a agir em prol da justiça social, dos direitos humanos e da sustentabilidade. É relevante salientar também a valorização do desenvolvimento emocional, cultural e físico, os quais se integram ao conhecimento intelectual para enriquecer a formação dos estudantes.

O quadro a seguir apresenta exemplos de habilidades, conforme definido na BNCC, que demonstram essa abordagem, organizadas por Unidades Temáticas e seus respectivos objetos de conhecimento, com enfâse na resolução de problemas, tema abordado nessa dissertação:

Tabela 1.1 – Habilidades da BNCC na Resolução de Problemas

Unidade Temática	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidade Envolvendo Resolução de Problemas**
Números	- Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; - Cálculo da fração de um número natural.	(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
Álgebra	- Grandezas diretamente proporcionais; - Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
Geometria	- Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas).	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
Grandezas e Medidas	- Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
Probabilidade e Estatística	- Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada e gráficos de barras.	(EF03MA26) Resolver problemas cujos dados estão apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas.

Fonte: Elaborada pelo autor

As habilidades são definidas por um código alfanumérico, como o código EF06MA09, o qual se refere à nona habilidade (09) do componente curricular Matemática (MA) do sexto ano (06) do Ensino Fundamental (EF). Vale salientar que são dez competências gerais, disponíveis em `http://basenacionalcomum.mec.gov.br`.

No segundo capítulo, foi dada ênfase à metodologia de George Polya na Resolução de Problemas. Primeiramente, ao compreender o problema, os alunos aprendem a analisar cuidadosamente a questão em mãos, identificando os dados fornecidos e o que é solicitado na resolução. Em seguida, ao estabelecer um plano, os alunos são incentivados a pensar em estratégias possíveis e a desenvolver um plano de ação claro e organizado para resolver o problema. Durante a execução do plano, os alunos implementam suas estratégias, realizando cálculos, aplicando teoremas ou testando hipóteses conforme necessário.

Finalmente, na etapa de revisão, os alunos revisam sua solução, verificam sua precisão e refletem sobre o processo utilizado, identificando possíveis erros ou áreas para melhorias futuras. Ao seguir essa metodologia, os alunos aprendem não apenas a resolver problemas de forma eficiente, mas também a desenvolver habilidades importantes, como pensamento crítico, criatividade e perseverança. Além disso, ao destacar exemplos práticos e exercícios que seguem a metodologia de Polya, o capítulo proporciona aos alunos a oportunidade de aplicar essas habilidades em uma variedade de contextos, preparando-os para enfrentar desafios acadêmicos e da vida real com confiança e sucesso.

Nesse capítulo ainda, foi contada um pouco da história da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) para enriquecer significativamente a experiência de aprendizagem dos alunos na resolução de problemas matemáticos. Ao explorar a origem e evolução da OBMEP, os alunos são expostos ao contexto e à importância dessa competição nacional, que visa promover o interesse e o estudo da matemática entre os estudantes brasileiros. A história da OBMEP também destaca o impacto positivo que a competição teve no ensino e aprendizagem da matemática no Brasil, incluindo o reconhecimento de talentos matemáticos e a criação de oportunidades educacionais para jovens talentosos.

Além disso, ao destacar os problemas matemáticos desafiadores e as soluções criativas que surgiram ao longo das edições passadas da OBMEP, o capítulo inspira os alunos a abordar problemas com confiança e criatividade. Ao combinar a história da OBMEP com exemplos práticos e exercícios baseados em problemas semelhantes aos encontrados nela, o capítulo oferece aos alunos a oportunidade de aplicar suas habilidades matemáticas em um contexto realista e desafiador, preparando-os para enfrentar não apenas a OBMEP, mas também desafios matemáticos em suas vidas acadêmicas e profissionais.

O terceiro capítulo apresenta uma seleção de alguns problemas de Aritmética da OBMEP, especificamente em questões da segunda fase, Nível 1 (alunos do sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental), sem sua resolução. O objetivo aqui é que o leitor se desafie a tentar resolvê-los utilizando a metodologia de Polya e, por isso, apresentamos dicas que podem contornar alguns dos desafios que encontramos em suas resoluções. Este capítulo é uma preparação para o próximo, onde aplicamos a metodologia de Polya em sete daqueles problemas. Ao seguir a metodologia de Polya, os alunos não apenas desenvolvem habilidades matemáticas sólidas, mas também aprimoram habilidades importantes, como pensamento crítico, criatividade e perseverança.

Por fim, no Apêndice A, apresentamos conteúdos matemáticos específicos conectados a tais problemas, para fornecer uma revisão abrangente dos conceitos fundamentais necessários para abordá-los. Isso inclui, por exemplo, revisões sobre Aritmética e Matemática Básica, de acordo com o nível de complexidade dos problemas a serem resolvidos.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

O ensino de matemática através da Resolução de Problemas tem recebido maior atenção nos últimos tempos. Isso começou a ganhar destaque por volta de 1980, em um contexto em que as principais teorias de aprendizagem eram o Construtivismo, a Psicologia Cognitiva e a Teoria Sociocultural de Vygotsky. Nessa fase, o objetivo era reintroduzir a aprendizagem pela descoberta, baseada na Resolução de Problemas, de acordo com (ONUCHIC, 2014, p. 36-37).

A partir disso, a resolução de problemas pode ser uma ferramenta fundamental para atribuir significado à Matemática, motivando os alunos a se envolverem com a disciplina e, principalmente, compreendê-la. E, neste trabalho, investiga-se a relevância da aplicação de abordagens no Ensino da Matemática, em especial, a Resolução de Problemas, que pode ter um impacto significativo na melhoria do processo de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática.

Uma das razões pelas quais os alunos podem desenvolver aversão ou desinteresse pela Matemática está relacionada ao fato de que a abordagem Matemática frequentemente adotada na escola não os incentiva a investigar, explorar e descobrir. Além disso, muitas vezes não se considera o contexto, o que torna a aprendizagem distante da realidade do aluno. Dessa forma, os estudantes frequentemente questionam: "Qual a utilidade desse conceito? Onde vou usar isso em minha vida? Por que estudar isso?" E a Matemática, ao ser apresentada como algo de difícil compreensão e com pouca conexão com a realidade, gera representações e sentimentos que podem influenciar no desenvolvimento da aprendizagem.

(VITTI, 1999, p. 19) afirma que: "O fracasso do ensino de matemática e as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não é um fato novo, pois vários educadores já elencaram elementos que contribuem para que o ensino da matemática seja assinalado mais por fracassos do que por sucessos". Portanto, é crucial compreender o processo de ensino e aprendizagem em Matemática, especialmente neste século XXI, quando ainda encontramos professores mais preocupados com a quantidade de conteúdo que conseguem cobrir em suas aulas do que com o próprio aprendizado. Nesse contexto, acredita-se que a maneira como um tema específico é apresentado em diferentes faixas etárias pode influenciar significativamente o processo de aprendizagem do aluno. Conhecer e compreender algumas das dificuldades enfrentadas por esses alunos pode ser um passo fundamental para reduzi-las ou mesmo resolvê-las.

Se o professor de Matemática dedicar todo o seu tempo em sala de aula à prática repetitiva de exercícios, aplicando diretamente algoritmos e fórmulas sem contextualização, apenas resolvendo cálculos em vez de problemas, isso não permitirá que os alunos demonstrem criatividade e variedade na resolução. Isso resultará na diminuição do interesse dos estudantes e prejudicará seu desenvolvimento intelectual.

Por outro lado, se o professor adotar uma abordagem de resolução de problemas, adaptada ao conhecimento prévio dos alunos, despertará a curiosidade, desenvolverá a capacidade de interpretação e argumentação, gerando interesse por desafios matemáticos e, principalmente, proporcionando novos aprendizados, confiança e o prazer da descoberta, como afirmado por (ONUCHIC, 2014). É fundamental que os alunos compreendam que a Matemática é uma linguagem própria, com uma lógica própria.

A Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino altamente eficaz para desenvolver o raciocínio lógico e motivar os alunos a estudar Matemática. O processo de ensino e aprendizagem pode ser construído a partir de desafios e problemas que possam ser explorados, não apenas resolvidos, já que a Resolução de Problemas está presente na vida cotidiana, exigindo soluções que frequentemente demandam estratégias específicas.

De acordo com (BRASIL, 1998), a Resolução de Problemas possibilita que os alunos mobilizem seus conhecimentos, desenvolvendo, assim, a capacidade de gerenciar as informações disponíveis. O objetivo é que o aluno amplie seus conhecimentos sobre os conceitos e procedimentos matemáticos e, dessa forma, desenvolva uma maior confiança ao enfrentar situações-problema.

Conforme aponta (DANTE, 2005), é fundamental distinguir entre exercícios de fixação e problemas matemáticos. O exercício serve para praticar e exercitar um algoritmo ou um processo matemático específico. Já o problema descreve uma situação em que se procura algo desconhecido e para o qual não existe previamente um algoritmo que garanta sua solução. Resolver problemas demanda iniciativa, criatividade e conhecimento de estratégias.

É essencial definir o que é um problema e um problema matemático, além de destacar as particularidades de cada um, apontando as principais diferenças. Para (DANTE, 1998), um problema é qualquer situação que exige o pensamento matemático e conhecimentos específicos para ser resolvido. Mas, ao desenvolver um raciocínio matemático, nem sempre se pensa em uma aplicação imediata para resolver problemas. Muitas teorias e ferramentas matemáticas, embasadas em princípios matemáticos estruturados, foram desenvolvidas anos ou séculos antes de se descobrirem aplicações práticas. Assim, é importante que o estudante compreenda que resolver um problema demanda tempo, paciência, organização e, principalmente, persistência. Quando o professor ensina o aluno a resolver problemas matemáticos através da resolução de problemas, ele está fornecendo um meio para o aluno desenvolver sua própria compreensão.

Polya (1981, Vol. 2, p.139), em (SILVER, 1985) nos deu uma bela classificação de problemas do ponto de vista pedagógico, em uma tradução livre:

1. Uma regra debaixo do seu nariz - o tipo de problema a ser resolvido pela aplicação mecânica de uma regra que acabou de ser apresentada ou discutida.

2. Aplicação com alguma escolha - um problema que pode ser resolvido pela aplicação de uma regra ou procedimento dado anteriormente na aula, de modo que o solucionador tenha que usar algum julgamento.

3. Escolha de uma combinação - um problema que exige que o solucionador combine duas ou mais regras ou exemplos dados em aula.

4. Aproximação ao nível de investigação – um problema que também exige um elevado grau de independência e a utilização de raciocínios plausíveis.

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) descrevem um problema matemático como "uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la."

Visto que um problema é uma determinada questão ou um determinado assunto que requer uma solução, podemos também compreendê-lo a nível social: trata-se de um assunto particular que, uma vez resolvido, se torna benéfico para a sociedade (por exemplo, conseguir diminuir a taxa de pobreza de um país).

A proposta de trabalhar com a resolução de problemas em sala de aula requer do professor um planejamento que inclua uma determinada sequência de passos. É preciso prever para os estudantes como iniciar a interpretação, como lidar com dificuldades significativas, a motivação para persistir, os procedimentos para iniciar a resolução, os conceitos pré-requisitos envolvidos e os novos conceitos que serão apresentados. Além disso, é necessário incluir nesse planejamento uma boa conclusão dessa proposta, incentivando os alunos a questionarem sua resolução, analisando criticamente se o que fizeram está correto ou não.

(BROUSSEAU, 2008) nos informa que "o aluno adquire conhecimento através da experiência de vida, mas aprende adaptando-se a fatores de dificuldades e desequilíbrio, por isso um meio sem intenções didáticas é incapaz de induzir o aluno a adquirir todos os conhecimentos que se espera que obtenha".

Segundo (TOLEDO; TOLEDO, 2009), muitas dessas dificuldades podem ser as razões do insucesso na matemática, como a falta de relação dos conteúdos aprendidos em sala de aula com a realidade, o contexto em que o aluno está inserido ou até mesmo a falta de recursos tecnológicos nas escolas.

(VEIGA, 2007) destaca que o papel do professor criativo deve estar alinhado com a seguinte proposta: "O professor criativo, de espírito transformador, está sempre buscando inovar sua prática, e um dos caminhos para isso seria dinamizar as atividades desenvolvidas em sala de aula. Uma alternativa para dinamização seria a variação das técnicas de ensino utilizadas; outra seria a introdução de inovação nas técnicas já amplamente conhecidas e empregadas".

Portanto, é importante considerar que muitas das questões de dificuldades em matemática não se referem apenas ao déficit de aprendizagem, mas também à forma como o conteúdo é abordado e à falta de contextualização. Levando em consideração a abordagem aqui tratada, destaca-se a importância de aproximar a matemática da realidade do aluno.

De acordo com (D'AMBRÓSIO, 2001), "Contextualizar a matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? [...] não se pode entender Newton descontextualizado. Será possível repetir alguns teoremas, memorizar tabuadas e mecanizar a efetuação de operações, e mesmo efetuar algumas derivadas e integrais, que nada tem a ver com qualquer coisa nas cidades [...]"

2.1 GEORGE POLYA

Segundo consta em (O'CONNOR; ROBERTSON, s.d.), George Polya nasceu em 13 de Dezembro de 1887 em Budapeste, de uma família judaica com origem polonesa. Ele foi um excelente estudante no ensino secundário, embora a escola que frequentava valorizasse muito a aprendizagem baseada na memória, prática que Polya considerava monótona e sem utilidade.

Formou-se em 1905, sendo considerado um dos quatro melhores alunos do seu ano, o que lhe permitiu ganhar uma bolsa de estudo na Universidade de Budapeste. Inicialmente, ele começou a estudar Direito, seguindo os passos de seu pai. No entanto, achou o curso tedioso e mudou para o curso de línguas e literaturas. Posteriormente, desenvolveu interesse em Latim, Física, Filosofia e, finalmente, em Matemática, concluindo seu doutorado em 1912.

No Outono de 1913, foi para Göttingen, onde conheceu Hilbert. Nesse mesmo ano, publicou um de seus maiores resultados, a solução do problema do passeio aleatório. Em 1913, foi para Paris para trabalhar em seu pós-doutorado.

Em 1914, assumiu um cargo na Universidade de Zurique, onde conheceu Hurwitz. No mesmo ano, seu país o convocou para a guerra, mas ele se recusou a prestar serviço militar. O medo de ser preso por não ter respondido à convocação fez com que ele retornasse à Hungria apenas após o fim da Segunda Guerra Mundial. Em Zurique, conheceu sua futura esposa, Stella Weber, com quem se casou em 1918, permanecendo juntos até a morte de Polya.

Em 1924, trabalhou com Hardy e Littlewood em Oxford e Cambridge. Publicou a classificação em dezessete grupos dos planos de simetria, resultado que mais tarde inspiraria Escher. Em 1925, juntamente com Szegö, publicou "Aufgaben und lehrsätze aus der Analysis" e "Die grundlehren der mathematischen wissenschaften".

Em 1940, com receio de uma possível invasão alemã da Suíça, decidiu ir para os Estados Unidos, aceitando, em 1942, um cargo de professor na Universidade de Stanford, onde permaneceu até se aposentar do ensino em 1953.

Foi um dos mais destacados educadores matemáticos de todos os tempos. Seu método de Resolução de Problemas não foi pioneiro na Matemática, mas contribuiu para a teoria do conhecimento. Muitos de seus livros foram traduzidos para diversos idiomas, destacando-se especialmente "How to Solve It" (1945), um clássico nessa área. Fundamentado em alguns membros proeminentes da comunidade húngara, contemporâneos de Polya, como Theodore von Kármán, John von Neumann, Michael Polanyi, Leo Szilard, Edward Teller e o Nobel Eugene Wigner, o método de Polya traça suas origens na matemática e na educação científica em Budapeste, por volta do século XIX, demonstra como até mesmo a Competição Matemática de Stanford (1946-1965) tinha suas raízes na Competição de Eötvös, realizada em Budapeste desde 1894. Críticos observaram com acerto que a influência de Polya ultrapassava a comunidade da educação matemática: em muitos casos, ele auxiliou na transferência da rica tradição liberal de raciocínio independente e na abordagem para resolver problemas da Hungria e do Império Austro-húngaro para os Estados Unidos.

George Polya faleceu em 7 de Setembro de 1985.

2.2 MÉTODO DE POLYA

De acordo com a proposta de (POLYA, 2006), em seu livro "A Arte de Resolver Problemas", a metodologia de Resolução de Problemas apresenta dois aspectos fundamentais no ensino de matemática: uma matemática de forma axiomática (ciência dedutiva e sistematizada), que exige rigor e conhecimentos fundamentados, e uma matemática experimental, inventiva, não sendo mais um produto acabado transmitido aos alunos.

Para resolver uma questão utilizando a técnica de resolução de Polya, segundo (PEREIRA, 2020) podemos seguir os seguintes passos:

1. Compreensão do problema:

Embora possa parecer óbvia, esta etapa é frequentemente negligenciada. Muitos iniciantes tentam fornecer uma resposta apressadamente a partir de uma leitura superficial, sem realmente compreender o que está sendo proposto e solicitado no problema. Polya sugere algumas perguntas que podem auxiliar nesta etapa:

Quais são os dados do problema?

Quais são as incógnitas?

Quais são as condições ou restrições?

É possível satisfazer as condições pedidas?

Elas são suficientes para determinar a incógnita? Não são redundantes? Não são contraditórias?

Ele também sugere algumas estratégias nesta fase: ler e reler o enunciado para entender o que é pedido, fazer um desenho ou esquema para visualizar melhor a situação, dividir os dados em partes e introduzir uma notação adequada.

2. Planejamento:

Esta é, sem dúvida, a etapa mais desafiadora e “artística”. Encontrar um plano viável dependerá tanto de conhecimentos prévios e experiência em problemas similares, quanto, em muitos casos, de uma dose de intuição e criatividade. O objetivo é estabelecer conexões entre os dados do problema e a incógnita. É claro que uma execução cuidadosa da Etapa 1 pode ser útil, além de fazer uma lista de passos a serem seguidos. Em alguns casos, uma conexão “surge” de forma aparentemente misteriosa e algumas perguntas que podem auxiliar nesta etapa crucial são:

Você lembra de algum problema semelhante?

Você consegue adaptar métodos utilizados em problemas semelhantes para este problema?

Você conhece resultados ou fórmulas que possam ser úteis?

Você pode reformular o problema de maneira diferente?

Você consegue resolver parte do problema?

Polya também propõe algumas estratégias nesta fase: transformar o problema em um caso particular ou em um caso geral mais acessível, além de transformar o problema em outro equivalente.

Uma estratégia não mencionada por Polya, mas que funciona às vezes em problemas mais difíceis, é: “deixe o problema de lado por algum tempo”. Aparentemente, o inconsciente continua trabalhando enquanto nos ocupamos de outras atividades (mas somente após já termos trabalhado bastante no problema).

3. Execução:

Se um bom plano foi identificado na Etapa 2, sua implementação frequentemente se torna uma tarefa muito mais simples.

Enquanto criatividade e habilidade são necessárias na Etapa 2, aqui, o que geralmente se requer é paciência e atenção. Um ponto importante a ser lembrado é a distinção entre intuição e formalização, isto é, entre perceber ou pressentir um fato e comprová-lo (aqui, prova significa um argumento válido com base em fatos aceitos, não uma demonstração rigorosa). As perguntas sugeridas por Polya que podem auxiliar aqui são:

Você consegue perceber claramente que cada passo está correto?

Você pode fornecer uma prova de que cada passo está correto?

Muitas vezes, surge alguma dificuldade durante a execução do plano. Essa dificuldade pode ser apenas técnica, e o que se requer é persistir no mesmo caminho, ou pode acontecer que o plano, afinal, não seja exequível ou apresente dificuldades de realização, ou até mesmo seja impossível. Nesse caso, pode ser necessário retornar à etapa anterior e modificar ou encontrar um novo plano. É crucial monitorar constantemente o processo de resolução para evitar persistir em uma direção que se revele infrutífera.

Lembrando sempre de realizar os cálculos necessários, seguindo a lista de passos definida no planejamento e verificar se os resultados obtidos fazem sentido e estão de acordo com o que foi pedido no enunciado.

4. Verificação:

Este passo é frequentemente deixado de lado, mas Polya ressalta a importância de que, ao revisar a solução, o estudante pode consolidar seu conhecimento e desenvolver sua habilidade de resolução de problemas.

Também pode ocorrer que uma revisão acabe mostrando algum erro ou imprecisão no raciocínio ou então indicar uma solução mais simples.

Polya sugere perguntar:

Você pode checar o resultado, ele parece razoável?

Você pode checar os argumentos usados, eles são mesmo convincentes?

Você pode encontrar uma maneira alternativa de resolver o problema?

Você pode usar o mesmo método em outro problema?

Você consegue testar a solução com outros exemplos ou situações semelhantes?

Cada uma dessas etapas tem sua relevância. Destaca-se que o método é apenas uma ferramenta para a resolução. Não existe uma fórmula que, se seguida, garantirá que o aluno consiga resolver todos os exercícios corretamente. É importante salientar que o método possibilita visualizar o exercício como um todo e posteriormente dividí-lo em pequenos tópicos que auxiliam e facilitam na organização das ideias.

2.3 UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DAS OLIMPÍADAS

As Olimpíadas de Matemática têm como objetivo estimular o estudo da matemática e o desenvolvimento de habilidades lógicas e de Resolução de Problemas. Essas competições ocorrem em diferentes níveis, abrangendo desde o ensino fundamental até o ensino superior, e podem ser organizadas por escolas, universidades ou instituições especializadas.

Geralmente, elas envolvem a resolução de desafios que exigem conhecimentos avançados de matemática e habilidades de raciocínio lógico. Os participantes são avaliados com base na precisão e na criatividade de suas soluções, bem como na clareza e na elegância de suas demonstrações.

Além de estimular o estudo da matemática, elas também podem auxiliar na identificação de jovens talentos e prepará-los para carreiras em áreas relacionadas, como engenharia, ciência da computação e finanças. Ademais, as Olimpíadas de Matemática promovem a cooperação e o intercâmbio cultural entre estudantes de diferentes países e regiões.

Em resumo, as Olimpíadas de Matemática proporcionam uma excelente oportunidade para os estudantes desenvolverem suas habilidades matemáticas e de raciocínio lógico, além de promoverem a cooperação e o intercâmbio cultural entre alunos de diferentes partes do mundo.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto nacional direcionado às escolas públicas e privadas do Brasil. Criada em 2005, pelo Ministério da Educação (MEC) e pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e promovido com recursos do Ministério da Educação (MEC) e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI), tem o objetivo de estimular o estudo da matemática e identificar jovens talentos na área.

A OBMEP é destinada a estudantes de escolas públicas e privadas de todo o Brasil, desde o 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio, e é composta por duas fases, sendo a primeira composta por uma prova objetiva e a segunda por uma prova discursiva. A OBMEP é considerada a maior olimpíada de matemática do mundo, com a participação de milhões de estudantes a cada edição e possui como principais objetivos:

- Estimular e promover o estudo da Matemática;

- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, proporcionando um maior acesso dos alunos brasileiros a material didático de qualidade;

- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas;

- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para sua valorização profissional;

- Promover a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, institutos de pesquisa e sociedades científicas;

- Propagar a inclusão social por meio da disseminação do conhecimento.

A seguir, apresentamos alguns programas desenvolvidos ao longo dos anos e convidamos você a conhecer um pouco mais sobre a OBMEP.

Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)

Destinado aos alunos premiados da OBMEP, o PIC é realizado por meio de uma rede nacional de professores em pólos distribuídos pelo país. Seu objetivo é despertar nos alunos o interesse pela Matemática e pela Ciência em geral. Para conhecer mais sobre o PIC, visite o site: `https://obmep.org.br/pic.htm`.

Portal da OBMEP

O Portal da OBMEP, disponível em `https://portaldaobmep.impa.br`, oferece gratuitamente uma variedade de materiais relacionados à grade curricular do ensino fundamental e médio, além de tópicos adicionais. Com o intuito de complementar o aprendizado de Matemática e Física, são disponibilizados videoaulas, exercícios resolvidos, cadernos de exercícios, material teórico e aplicativos interativos.

Olimpíada Mirim – OBMEP

O sucesso da OBMEP Nível A, voltada para alunos do 4º e 5º ano do ensino fundamental, motivou o IMPA a criar a Olimpíada Mirim - OBMEP, que busca identificar novos talentos da Matemática nos primeiros anos do ensino fundamental.

Na primeira edição da Olimpíada Mirim - OBMEP, realizada em 2022, mais de dois milhões e setecentos mil alunos do 2º ao 5º ano, de mais de dezoito mil escolas públicas, tiveram a oportunidade de testar seus conhecimentos matemáticos por meio da Prova da 1ª Fase e da Prova da 2ª Fase. Para saber mais sobre a Olimpíada Mirim, acesse: `https://olimpiadamirim.obmep.org.br`.

Portal Clubes de Matemática

Em `http://clubes.obmep.org.br`, é possível criar um clube de Matemática para participar de gincanas e competições nacionais. Além disso, o clube oferece acesso a um fórum em que se pode discutir questões relacionadas à Matemática com outros alunos do país.

POTI - Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

O programa POTI é destinado a estudantes matriculados no 8º ou 9º ano do ensino fundamental ou em qualquer série do ensino médio que desejam se preparar para as provas da OBMEP e da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Para mais informações, acesse: `https://poti.impa.br`.

PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado

O PICME oferece aos estudantes universitários que se destacaram nas Olimpíadas de Matemática a oportunidade de realizar estudos avançados em Matemática simultaneamente com sua graduação. Os participantes recebem bolsas por meio de parcerias com o CNPq (Iniciação Científica) e a CAPES (Mestrado e Doutorado).

3 PROBLEMAS SOBRE CONTAGEM E ARITMÉTICA

Conforme visto anteriormente, resolver questões é uma habilidade fundamental em muitas áreas do conhecimento, especialmente na Matemática. Neste capítulo, sugerimos alguns problemas para que o leitor, ou a leitora, teste sua habilidade nas resoluções.

O objetivo aqui é instigar você a tentar aplicar a metodologia de Polya nas questões através da apresentação de seus quatro passos.

Algumas dúvidas surgiram no decorrer da resolução de cada um dos problemas e, por isso, colocamos uma pequena lista de dicas após cada um deles.

PROBLEMA 01 (QUESTÃO 02 - OBMEP 2005)

Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira, escrevendo no quadro-negro um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

- Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.
- Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Tabela 3.1 – Regras da brincadeira

Regras da brincadeira	
Números com 1 algarismo	Números com mais de 1 algarismo
multiplicar por 2	multiplicar por 2 OU apagar os algarismos das unidades

Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2005

Depois que os alunos escrevem um novo número a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras.

Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{dobra} 406 \xrightarrow{apaga} 40 \xrightarrow{apaga} 4$$

$$4197 \xrightarrow{apaga} 419 \xrightarrow{dobra} 838 \xrightarrow{apaga} 83$$

(a) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

(b) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

(c) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

Dicas:

- Obedecer às regras estabelecidas com muita atenção;
- Observar o passo a passo de cada critério da brincadeira;
- Lembrar que pode repetir a operação dobrar ou apagar na sequência;
- Não esquecer de registrar o número após a operação;
- Uma forma ideal, seria iniciar apagando os algarismos até obter - se apenas um algarismo, e aí, iniciar as operações dobra, com apenas um algarismo facilitaria o processo.

PROBLEMA 02 (QUESTÃO 04 - OBMEP 2005)

A caminhonete do Tio Barnabé pode carregar até 2000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de 150 sacas de arroz de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

(a) Você acha possível que o Tio Barnabé faça esse serviço em cinco viagens? Por quê?

(b) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

Dicas:

- Analisar, com bastante cautela, a quantidade de sacas de arroz e de milho;
- Perceber a diferença entre a massa da saca de arroz e milho;
- Distribuir as sacas de tal forma que não extrapole o peso máximo da caminhonete;
- Ao invés de cinco ou seis viagens conforme descrito no enunciado, existem outras possibilidades;
- Carregar somente sacas de milho ou de arroz é uma opção?
- Lembrar que não há necessidade de que as cargas em cada uma das viagens seja igual.

PROBLEMA 03 - (QUESTÃO 06 - OBMEP 2005)

Pedrinho escreveu todos os números inteiros compreendidos entre 100 e 999 cuja soma dos algarismos é 12. Por exemplo, os números 129 e 750 aparecem entre os números escritos.

(a) Quantos números escritos têm apenas dois algarismos iguais?

(b) Quantos números escritos são formados apenas por algarismos ímpares?

Dicas:

- Existe a necessidade real de escrever todos os números entre 100 e 999?
- Não esquecer a diferença entre número e algarismo;
- Analisar a soma dos três algarismos de tal forma que a mesma seja 12;
- Quais algarismos ímpares que adicionados resultam na soma pedida;
- Obedecer as regras estabelecidas sem restrições.

PROBLEMA 04 - (QUESTÃO 02 - OBMEP 2006)

Os alunos do professor Augusto Matraga fizeram quatro provas bimestrais no ano. O professor pede a cada aluno que escolha três dessas provas e depois calcula a média anual, até a primeira casa depois da vírgula, pela fórmula:

$$\text{Média} = \frac{10 \times (\text{total de questões respondidas corretamente nas três provas escolhidas})}{\text{total de questões das três provas escolhidas}}$$

Veja os resultados do aluno Quim durante o ano:

Tabela 3.2 – Resultados do Quim

Resultados do Quim				
Bimestre	1º	2º	3º	4º
Questões respondidas corretamente	20	6	32	40
Número de questões da prova	20	10	40	40

Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2006

(a) Qual será a média anual do Quim se ele escolher as provas dos três primeiros bimestres? E se ele escolher as provas dos três últimos?

(b) Complete a tabela abaixo com a porcentagem de acertos do Quim em cada prova.

Tabela 3.3 – Porcentagem de acertos de Quim

Bimestre	1º	2º	3º	4º
Porcentagem de acertos				

Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2006

(c) Quim acha que sua média anual será a mais alta possível se escolher as três provas com as maiores porcentagens de acerto. Ele está certo? Por quê?

Dicas:

- Diferenciar média aritmética e ponderada;
- Utilizar a fórmula descrita no enunciado com atenção;
- Analisar a tabela dos resultados de Quin, retirando os dados para aplicar na fórmula proposta;
- Combinar os diferentes bimestres e aplicar seus valores para calcular a melhor média pedida;
- Calcular a porcentagem de diferentes formas para um entendimento mais objetivo;
- Perceber que nem sempre a maior quantidade de acertos, pode resultar em uma melhor média;
- Estabelecer uma compreensão entre média ponderada e porcentagem de acertos, pode facilitar uma melhor resolução;
- O peso de cada avaliação bimestral é um fator muito importante na obtenção da média final.

PROBLEMA 05 - (QUESTÃO 03 - OBMEP 2006)

Um número A de dois algarismos é um supernúmero se é possível encontrar dois números B e C, ambos também de dois algarismos, tais que:

- $A = B + C$;
- soma dos algarismos de A = (soma dos algarismos de B) + (soma dos algarismos de C).

Por exemplo, 35 é um supernúmero.

Duas maneiras diferentes de mostrar isto são $35 = 11 + 24$ e $35 = 21 + 14$, pois $3 + 5 = (1 + 1) + (2 + 4)$ e $3 + 5 = (2 + 1) + (1 + 4)$. A única maneira de mostrar que 21 é um supernúmero é $21 = 10 + 11$.

(a) Mostre de duas maneiras diferentes que 22 é um supernúmero e de três maneiras diferentes que 25 é um supernúmero.

(b) De quantas maneiras diferentes é possível mostrar que 49 é um supernúmero?

(c) Quantos supernúmeros existem?

Dicas:

- Entender com clareza, o conceito de supernúmero descrito no enunciado da questão;
- Compreender através de exemplos que não existe somente uma maneira de demonstrar um supernúmero;
- Ter bastante atenção ao somar os algarismos, não misturar os números; e observar se misturar há divergência no resultado;
- Estabelecer uma conjectura entre a soma dos algarismos de A com B e C;
- Aplicar a propriedade comutativa da adição com bastante atenção;
- Utilizar uma tabela com a soma dos algarismos facilita a visualização e compreensão do resultado.

PROBLEMA 06 - (QUESTÃO 05 - OBMEP 2006)

Diadorim, Mimita e Riobaldo dividiram todo o conteúdo de uma garrafa de suco em três copos iguais, enchendo metade do copo de Diadorim, um terço do copo de Mimita e um quarto do copo de Riobaldo.

(a) Como cada um queria um copo cheio de suco, eles abriram outras garrafas iguais a primeira até encher completamente os copos. Quantas garrafas a mais eles tiveram que abrir?

(b) Se o suco de uma garrafa tivesse sido dividido igualmente entre eles, que fração de cada copo conteria suco?

Dicas:

- Compreender como foi feito a divisão do suco entre as três pessoas;
- Após a primeira garrafa, perceber que os copos não precisam ser preenchidos com a mesma quantidade adicionada pela primeira garrafa, e sim ate completar o copo;
- Todas as garrafas possuem a mesma quantidade de suco, e os copos são do mesmo tamanho;
- Identificar se existe a necessidade de saber a quantidade em ml, de cada copo ou

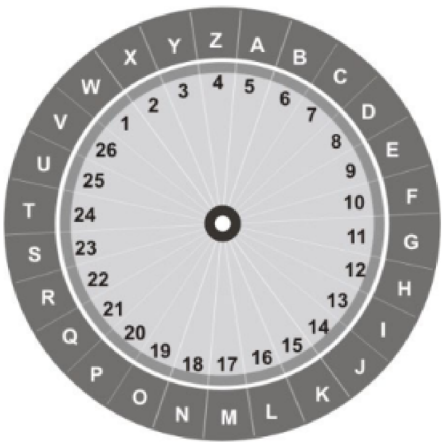
de cada garrafa, ou se a solução é geral;

- Calcular a soma das frações de cada copo;
- Relacionar a divisão de frações com números decimais;
- Transformar frações impróprias em números decimais;
- Observar que pode sobrar suco na garrafa, porém os copos devem estar cheios.

PROBLEMA 07 - (QUESTÃO 02 - OBMEP 2007)

Um antigo método para codificar palavras consiste em escolher um número de 1 a 26, chamado chave do código, e girar o disco interno do aparelho ilustrado na figura até que essa chave corresponda à letra A. Depois disso, as letras da palavra são substituídas pelos números correspondentes, separados por tracinhos. Por exemplo, na figura a seguir a chave é 5 e a palavra PAI é codificada como 20-5-13.

Figura 3.1 – Disco para codificar palavras



Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2007

(a) Usando a chave indicada na figura, descubra qual palavra foi codificada como 23-25-7-25-22-13.

(b) Codifique OBMEP usando a chave 20.

(c) Chicó codificou uma palavra de 4 letras com a chave 20, mas esqueceu-se de colocar os tracinhos e escreveu 2620138. Ajude o Chicó colocando os tracinhos que ele esqueceu e depois escreva a palavra que ele codificou.

(d) Em uma outra chave, a soma dos números que representam as letras A, B e C é 52. Qual é essa chave?

Dicas:

- Não esquecer de separar com tracinhos os números correspondentes a cada letra;
- Fazer uma tabela de correspondência com cada letra, de acordo com a chave pedida;
- A chave do disco é sempre correspondente a letra A;
- Na questão da soma de números correspondentes as letras A, B e C, que são consecutivas, é de fundamental importância que se observe que a soma de três números consecutivos é sempre um número múltiplo de 3;
- Na troca da chave percebe-se que basta adicionar, a cada letra, a quantidade que foi aumentada na chave e subtrair 26, caso a soma ultrapasse 26, pois é o maior número da chave.

PROBLEMA 08 - (QUESTÃO 04 - OBMEP 2007)

A professora da Dorinha passou para seus alunos um questionário com duas perguntas:(1) “Você come peixe?” e (2) “Você come verdura?”. Todos os alunos responderam às duas perguntas e a professora, depois de ler as respostas, calculou as frações

$$\frac{\text{número de alunos que comem peixe}}{\text{total de alunos}} = \frac{13}{18}$$

e

$$\frac{\text{número de alunos que comem verdura}}{\text{total de alunos}} = \frac{5}{12}.$$

(a) Ajude a professora, completando a tabela com as frações que estão faltando.

Tabela 3.4 – Frações de peixe e verdura

	peixe	verdura
sim	13/18	5/12
não		

Fonte: Prova - OBMEP 2007

(b) Observando a tabela, Dorinha afirmou que havia alunos que comiam tanto peixe como verdura. Explique como ela chegou a essa conclusão.

(c) Analisando os questionários, a professora notou que todos os alunos que comem verdura também comem peixe e que 22 alunos comem peixe mas não comem verdura. Quantos alunos não comem verdura?

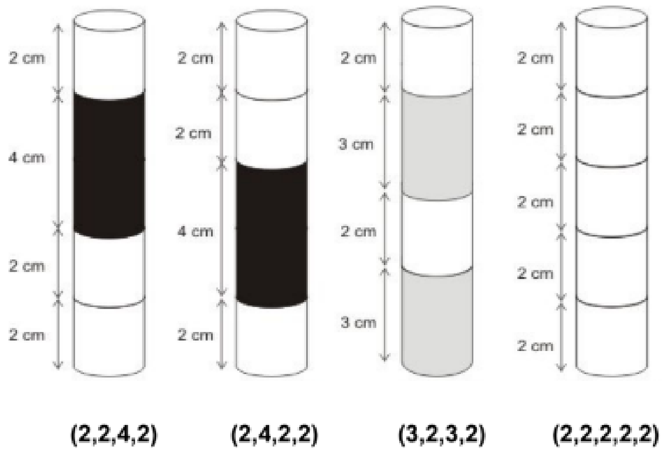
Dicas:

- Usar o complemento de uma fração para determinar o inteiro;
- Alguns alunos responderam que gostam de peixe e de verdura, e alguns que não comem verdura conforme enunciado;
- A análise dos dados foi fundamental para determinar que alguns não comiam verdura;
- Ter muita atenção que os denominadores das frações dadas são diferentes, deixando o mesmo denominador em ambas frações facilita a visualização do resultado;
- Com três perguntas, a análise dos dados seria a mesma? E se os alunos pudessem deixar a resposta em branco?
- Compreender o conceito de fração própria e imprópria facilita na resolução.

PROBLEMA 09 - (QUESTÃO 05 - OBMEP 2007)

Caroba tem várias peças em forma de cilindro, de três tipos: brancas de 2 cm de altura, cinzas de 3 cm de altura e pretas de 4 cm de altura. Com essas peças ela pode montar torres de 10 cm de altura de várias maneiras diferentes, algumas delas ilustradas na figura. Descrevemos cada torre listando as alturas de suas peças, de baixo para cima; por exemplo, as torres ao lado são descritas por (2,2,4,2), (2,4,2,2), (3,2,3,2) e (2,2,2,2,2).

Figura 3.2 – Peças em forma de cilindro



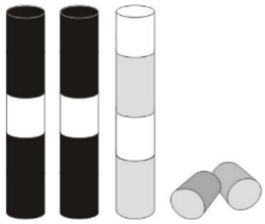
Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2007

(a) Descreva todas as diferentes torres de 10 cm que a Caroba pode fazer com três peças.

(b) Com 12 peças, sendo 4 de cada uma das cores, a Caroba conseguiu montar 3 torres de 10 cm, tendo sobrado 2 peças de 3 cm, como na figura abaixo. Descreva como a

Caroba pode montar 7 torres de 10 cm, se ela possuir 27 peças, sendo 9 de cada uma das cores.

Figura 3.3 – Torres com duas peças sobrando



Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2007

(c) Explique porque a Caroba não vai conseguir montar 8 torres de 10 cm, se ela possuir 27 peças, sendo 9 de cada uma das cores.

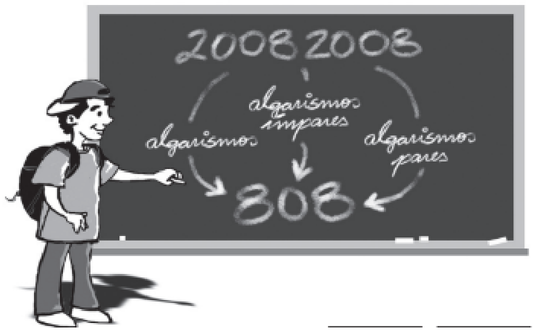
Dicas:

- Perceber que não existem tamanhos diferentes da mesma cor;
- Agrupar as peças de forma que a soma seja dez;
- Trocar a posição de uma peça dentro da mesma torre não formará uma nova torre;
- Uma peça de 4 cm pode ser substituída por duas de 2 cm;
- Dentro de um mesmo exercício pode se usar torres iguais desde que não se use as mesmas peças para ambas torres.

PROBLEMA 10 - (QUESTÃO 03 - OBMEP 2008)

Para obter o resumo de um número de até 9 algarismos, deve-se escrever quantos são seus algarismos, depois quantos são seus algarismos ímpares e finalmente quantos são seus algarismos pares. Por exemplo, o número 9103405 tem 7 algarismos, sendo 4 ímpares e 3 pares, logo seu resumo é 743.

Figura 3.4 – Resumo de algarismos



Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2008

(a) Encontre um número cujo resumo seja 523.

(b) Encontre um número que seja igual ao seu próprio resumo.

(c) Para qualquer número de até 9 algarismos, podemos calcular o resumo do resumo de seu resumo. Mostre que esse procedimento leva sempre a um mesmo resultado, qualquer que seja o número inicial.

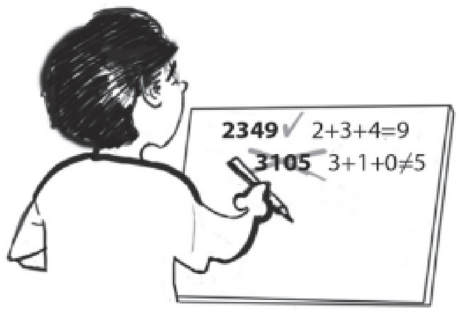
Dicas:

- Diferenciar números pares e ímpares;
- Identificar com clareza a definição de "resumo" de um número;
- Perceber que a soma do segundo com o terceiro algarismo, no resumo, sempre resulta no primeiro algarismo;
- Fazer a correspondência de algarismos com letras para facilitar a visualização do "resumo";
- Não alterar a ordem proposta pela definição, para evitar possíveis erros, e caso feito, perceber se houve mudanças.

PROBLEMA 11 - (QUESTÃO 01 - OBMEP 2009)

Joãozinho coleciona números naturais cujo algarismo das unidades é a soma dos outros algarismos. Por exemplo, ele colecionou 10023, pois $1 + 0 + 0 + 2 = 3$.

Figura 3.5 – Joãozinho



Fonte: Prova da 2ª Fase - OBMEP 2009

(a) Na coleção de Joãozinho há um número que tem 4 algarismos e cujo algarismo das unidades é 1. Que número é esse?

(b) Qual é o maior número sem o algarismo 0 que pode aparecer na coleção?

(c) Qual é o maior número sem algarismos repetidos que pode aparecer na coleção?

Dicas:

- O último algarismo é sempre a soma dos outros;
- Usando diversos zeros, entre o primeiro e o último algarismo, torna a coleção de Joãozinho infinita;
- A soma dos alagarismos nunca poderá ser superior a nove;
- Os números não podem começar com o algarismo zero;
- Não deve somar o último algarismo com os demais.

PROBLEMA 12 - (QUESTÃO 03 - OBMEP 2009)

Ana e Cristina estão jogando contra Beatriz e Diana. No início de cada partida, elas embaralham nove cartões numerados de 1 a 9 e cada uma pega dois cartões, sobrando sempre um cartão na mesa. Cada menina calcula seus pontos somando os números de seus cartões e o número de pontos da dupla é a soma dos pontos das duas parceiras. Vence a dupla que fizer o maior número de pontos. Veja um exemplo de uma partida na tabela:

Tabela 3.5 – Pontuação das partidas

	Ana	**Cristina**	**Beatriz**	**Diana**
Cartões Recolhidos	1 e 4	5 e 7	2 e 9	3 e 6
Pontos de cada menina	$1+4=5$	$5+7=12$	$2+9=11$	$3+6=9$
Pontos da dupla	$5+12=17$		$11+9=20$	
Resultado	Beatriz e Diana ganhariam, pois 20 é maior que 17			

Fonte: OBMEP-2009

(a) Numa partida, Ana e Cristina tiraram somente cartões com números ímpares, e sobrou o cartão de número 7. Qual foi o resultado da partida? Por quê?

(b) Uma partida pode terminar empatada se sobrar o cartão de número 8? Por quê?

(c) Uma partida pode terminar empatada se sobrar o cartão de número 5? Por quê?

(d) Em outra partida, uma das meninas tirou o cartão de número 3. Ana fez um ponto a menos que Beatriz, que fez um ponto a menos que Cristina, que fez um ponto a menos que Diana. Quantos pontos fez a dupla que ganhou?

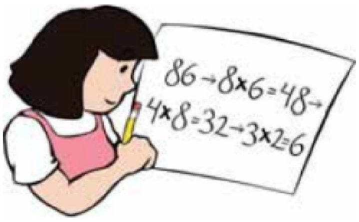
Dicas:

- Usar as iniciais dos nomes e separar cartões fictícios facilita a resolução;
- Fazendo a soma máxima com todos os cartões, e subtraindo o cartão que sobra em cada rodada, ajuda na análise dos resultados;
- Construir tabelas com os resultados é uma boa estratégia de resolução;
- Somar os cartões da dupla juntos quando não havia restrição também facilitou o resultado final;
- O exemplo do enunciado em que sobrou o cartão 8, demonstrou de forma clara a estratégia utilizada.

PROBLEMA 13 - (QUESTÃO 01 - OBMEP 2010)

Daniela gosta de brincar com números de dois ou mais algarismos. Ela escolhe um desses números, multiplica seus algarismos e repete o procedimento, se necessário, até chegar a um número com um algarismo, que ela chama de número-parada do número escolhido. Por exemplo, o número-parada de 32 é 6, pois $32 \to 3 \times 2 = 6$ e o número-parada de 236 é 8, pois $236 \to 2 \times 3 \times 6 = 36 \to 3 \times 6 = 18 \to 1 \times 8 = 8$.

Figura 3.6 – Número Parada



Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2010

(a) Qual é o número-parada de 93?

(b) Ache um número de 4 algarismos, sem o algarismo 1, cujo número-parada seja 6.

(c) Quais são os números de dois algarismos, cujo número-parada é 2?

Dicas:

- O conceito de número parada é uma sequência de multiplicações de algarismos;
- O elemento neutro da multiplicação é 1;
- Multiplicar os algarismos até se obter apenas um algarismo final;
- Diferenciar o conceito de número e algarismo.

PROBLEMA 14 - (QUESTÃO 02 - OBMEP 2010)

Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

- some 1, se o cartão for verde;
- some 2, se o cartão for amarelo;
- some 3, se o cartão for azul;
- some 4, se o cartão for vermelho.

Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu".

(a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

(b) Mariazinha disse "Setenta e seis" para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

(c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse “Sessenta e um” e o matemágico respondeu “Você errou alguma conta”. Explique como o matemágico pôde saber isso.

Dicas:

- Lembrar das operações inversas da adição e multiplicação, que são a subtração e divisão respectivamente;
- Atividades práticas facilitam o entendimento dos alunos;
- O domínio de operações básicas é fundamental no processo;
- Divisões com resto excluem o resultado correto na execução do exercício;
- Relacionar as cores com os números que devemos adicionar é fundamental para encontrar o resultado correto.

PROBLEMA 15 - (QUESTÃO 04 - OBMEP 2010)

Dois números naturais formam um casal quando eles têm o mesmo número de algarismos e em sua soma aparece apenas o algarismo 9. Por exemplo, 225 e 774 formam um casal, pois ambos têm três algarismos e $225 + 774 = 999$.

(a) Qual é o número que forma um casal com 2010?

(b) Quantos são os casais formados por números de dois algarismos?

Casais especiais são casais em que os dois números têm os mesmos algarismos e, em cada número, os algarismos dão distintos. Por exemplo, 36 e 63 formam um casal especial, mas 277 e 722 não.

(c) Dê um exemplo de um casal especial com números de quatro algarismos.

(d) Explique por que não existem casais especiais com números de três algarismos?

Dicas:

- Esquematizar adições em que a soma ou total seja 9, foi a primeira estratégia;
- Assimilar o conceito de casal e de casais especias do enunciado do problema;
- Diferenciar algarismo de número;
- Aplicar a propriedade comutativa com muita cautela.

PROBLEMA 16 - (QUESTÃO 06 - OBMEP 2010)

Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é $5+8+2=15$ e a soma dos números da segunda coluna é $9+7+8=24$. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 18 e 24.

Figura 3.7 – Quadrado de Gabriel

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2010

(a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando ?

(b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

(c) Preencha o quadrado de modo que as somas sejam 7, 13, 14, 26, 18 e 22.

Dicas:

- Entender a estrutura do quadrado mágico, é uma matriz de números onde a soma de cada linha, coluna e diagonal principal deve ser a mesma;

- Se estiver resolvendo um quadrado mágico de ordem ímpar (como 3x3, 5x5), começar preenchendo o número 1 no centro superior. Depois, siga para a célula superior direita. Se essa célula estiver ocupada ou fora dos limites, mova-se para a célula diretamente abaixo da última preenchida, também conhecido como método siamês;

- À medida que preenche o quadrado, fazer verificações constantes para garantir que a soma das linhas, colunas e diagonais se aproxima da constante mágica. Isso ajuda a corrigir possíveis erros cedo;

- Um quadrado mágico deve conter cada número apenas uma vez, sem repetições. Certifique-se de não repetir nenhum número ao preencher o quadrado;

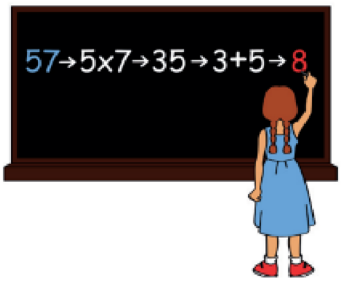
- Resolver um quadrado mágico pode ser desafiador, especialmente em ordens maiores. Mantenha a calma e seja metódico, conferindo cada passo para evitar erros;

- Fazer rascunhos e anotações ajuda a visualizar a disposição dos números e a entender a lógica da construção.

PROBLEMA 17 - (QUESTÃO 01 - OBMEP 2011)

Cláudia gosta de brincar com números de dois ou mais algarismos. Ela escolhe um desses números, multiplica seus algarismos e, caso o produto tenha mais de um algarismo, ela os soma. Ela chama o resultado final de transformado do número escolhido. Por exemplo, o transformado de 187 é 11, pois $1 \times 8 \times 7 = 56$ e $5 + 6 = 11$; já o transformado de 23 é 6, pois $2 \times 3 = 6$.

Figura 3.8 – Transformado do número



Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2011

(a) Qual é o transformado de 79?

(b) Quais são os números de dois algarismos cujo transformado é 3?

(c) Quantos são os números de três algarismos cujo transformado é 0?

Dicas:

- Entender o processo de transformação é fundamental;
- Verificar a decomposição correta do número no processo da resolução;
- Utilizar a multiplicação e soma com cuidado;
- Pode perceber que alguns números têm um transformado recorrente. Por exemplo, todos os números que contêm zero ou incluem um algarismo 1 no processo de multiplicação tendem a ter transformados semelhantes. Para números como 10, 100, etc., que contêm um zero, o transformado será sempre 0 (pois a multiplicação por zero anula o resultado);

- Se for um número com três ou mais algarismos, a multiplicação dos algarismos pode gerar um produto grande;

- Praticar com diferentes números de dois ou mais algarismos para reconhecer possíveis padrões. Isso ajudará a entender melhor o comportamento dos números no processo de transformação;

- O transformado deve ser sempre um único dígito. Portanto, ao final do processo, você sempre vai chegar a um número entre 0 e 9.

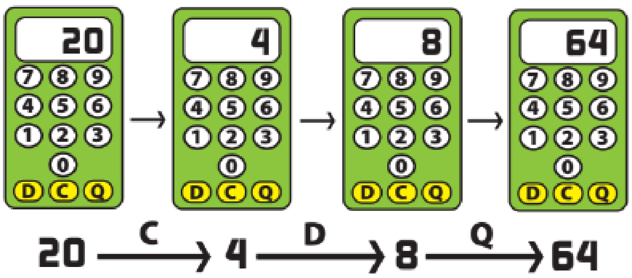
PROBLEMA 18 - (QUESTÃO 02 - OBMEP 2012)

A calculadora de Raquel é um pouco diferente. Além das 10 teclas numéricas de 0 a 9, ela só tem três teclas de operações:

- a tecla Q, que multiplica o número do visor por ele mesmo;
- a tecla D, que multiplica o número do visor por 2;
- a tecla C, que divide o número do visor por 5.

Raquel se diverte colocando um número inteiro no visor e produzindo novos números usando apenas as teclas de operações. Por exemplo, começando com o número 20 e usando a sequência de teclas CDQ, Raquel obteve o número 64, como se pode ver na figura.

Figura 3.9 – Calculadora de Raquel



Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2012

(a) Raquel começou com 15 e obteve 18 apertando três teclas de operações. Qual foi a sequência de teclas que ela usou?

(b) Usando a sequência de teclas DCQC, Raquel obteve o número 7,2. Com qual número ela começou?

(c) Apresente uma maneira de Raquel obter o número 0,08 em sua calculadora, indicando o número inicial e a sequência de teclas de operações.

Dicas:

- Essa questão envolve dedução e experimentação para entender como cada sequência de operações afeta o número inicial;
- Compreender as operações de cada letra do enunciado;
- Aplicar as operações inversas com muita atenção;
- Testar diferentes combinações de três operações a partir de 15 até encontrar a sequência que resulta em 18;
- A ordem das operações comutativas pode mudar drasticamente o resultado. Testar diferentes sequências requer atenção e paciência;
- Lidar com números decimais pode ser um desafio, especialmente ao realizar operações como multiplicação ao quadrado ou divisão por 5, onde resultados fracionários surgem.

PROBLEMA 19 - (QUESTÃO 03 - OBMEP 2012)

Alberto, Beatriz, Carlos, Dulce e Eduardo ainda dormiam quando sua mãe saiu e deixou uma vasilha com jabuticabas e a instrução para que fossem divididas igualmente entre eles. Alberto acordou primeiro, pegou 1/5 das jabuticabas e saiu. Beatriz acordou depois, mas pensou que era a primeira a acordar e, por este motivo, pegou 1/5 das jabuticabas restantes e também saiu. Os outros três irmãos acordaram juntos, perceberam que Alberto e Beatriz já haviam saído e dividiram as jabuticabas restantes igualmente entre eles.

(a) Que fração do total de jabuticabas coube a Beatriz?

(b) Quem ficou com a menor quantidade de jabuticabas? Quem ficou com a maior quantidade de jabuticabas?

(c) Ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 20 jabuticabas. Quantas jabuticabas havia na vasilha?

Dicas:

- A questão apresentada envolve a divisão fracionada de uma quantidade desconhecida de jabuticabas, exigindo uma compreensão sólida de frações, partição de um todo e raciocínio lógico para interpretar as ações de cada questão;
- A principal dificuldade do problema é lidar com a divisão sucessiva das jabuticabas em frações, onde cada irmão retira uma parte do que sobrou. Quando Alberto pega 1/5 das jabuticabas, o que resta é 4/5 do total. Quando Beatriz pega 1/5 do que restou, isso

significa que ela retira 1/5 de 4/5, o que pode confundir muitos alunos;

- A compreensão de que, após cada retirada, a fração que representa a nova quantidade de jabuticabas muda. Trabalhar com frações sucessivas e seus produtos exige atenção;

- Manter o controle sobre as frações retiradas e as quantidades que permanecem após cada ação é essencial. O erro comum aqui é perder a noção de quanto da quantidade original permanece a cada etapa;

- Determinar com precisão quanto sobrou para os três últimos irmãos, o que envolve trabalhar com frações compostas e uma divisão entre três, o que pode ser um ponto difícil para quem não domina frações;

- Comparar as frações para determinar quem ficou com a menor e a maior parte. O desafio aqui é visualizar que, embora Alberto e Beatriz tenham pegado 1/5 em diferentes momentos, Beatriz ficou com menos, porque pegou 1/5 de uma quantidade já reduzida.

4 APLICAÇÃO DA METODOLOGIA DE POLYA

Agora, finalmente vamos aplicar a metodologia de Polya, na resolução de algumas questões do capítulo anterior. Faremos uma leitura cuidadosa do problema, identificando dados importantes e compreendendo as condições apresentadas.

Em seguida, aplicaremos métodos específicos para resolvê-los, explicando cada etapa do processo. O objetivo é não apenas fornecer soluções, mas também ensinar o raciocínio por trás de cada método, capacitando o leitor a enfrentar problemas semelhantes no futuro.

Resolveremos tais exemplos garantindo que cada conceito seja bem compreendido antes de avançarmos para o próximo, no intuito de aprimorar suas habilidades de Resolução de Problemas e aprofundar seu entendimento sobre as técnicas matemáticas.

Em cada problema, dentro do Passo 1, apresento percepções e dificuldades que obtive no estudo das mesmas, que podem ser situações que o leitor também enfrentará para o pleno entendimento de cada uma delas.

Para isso, busquei aprimorar não apenas minha habilidade de encontrar respostas corretas, mas também aprofundar meu entendimento sobre os conceitos abordados. Sua resolução me permitiu explorar diferentes abordagens, além de testar minha criatividade na busca por soluções alternativas e expandir meus horizontes além do conteúdo básico exigido.

Além disso, pude desenvolver minha capacidade analítica, melhorar minha autoconfiança e fortalecer minha resiliência diante desafios acadêmicos.

PROBLEMA 07 - (QUESTÃO 02 - OBMEP 2007)

Um antigo método para codificar palavras consiste em escolher um número de 1 a 26, chamado chave do código, e girar o disco interno do aparelho ilustrado na figura até que essa chave corresponda à letra A. Depois disso, as letras da palavra são substituídas pelos números correspondentes, separados por tracinhos. Por exemplo, na figura a seguir a chave é 5 e a palavra PAI é codificada como $20 - 5 - 13$.

Figura 4.1 – Disco para codificar palavras

Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2007

(a) Usando a chave indicada na figura, descubra qual palavra foi codificada como $23 - 25 - 7 - 25 - 22 - 13$.

(b) Codifique OBMEP usando a chave 20.

(c) Chicó codificou uma palavra de 4 letras com a chave 20, mas esqueceu-se de colocar os tracinhos e escreveu 2620138. Ajude o Chicó colocando os tracinhos que ele esqueceu e depois escreva a palavra que ele codificou.

(d) Em uma outra chave, a soma dos números que representam as letras A, B e C é 52. Qual é essa chave?

1. Compreender o problema:

Alguns aspectos foram fundamentais na resolução, como a importância de não esquecer de separar com tracinhos os números correspondentes a cada letra. Também, foi importante fazer uma tabela de correspondência com cada letra, de acordo com a chave pedida.

Ademais, perceba que a chave do disco é sempre correspondente a letra A e, na questão da soma de números correspondentes às letras A, B e C, que são consecutivas, é de fundamental importância que se observe que a soma de três números consecutivos é sempre um número múltiplo de 3

Na troca da chave, percebe-se que basta adicionar a cada letra a quantidade que foi aumentada na chave, e subtrair 26, caso a soma ultrapasse 26, pois é o maior número da chave.

2. Planejar a solução:

O ideal é inicialmente fazer a correspondência das letras-números de acordo com a chave escolhida, utilizando uma tabela, pois isso facilita a resolução e visualização do resultado.

Em (c), Chicó codificou a palavra usando a chave 20, então a letra correspondente ao número 26 na sequência codificada deve ser o início da palavra, já que a chave 20 corresponde à letra A. Portanto, o número 26 representa a primeira letra da palavra codificada, e como a palavra tem 4 letras, devem haver 3 tracinhos separando os números.

Em (d), para encontrar a chave que satisfaz a condição de que a soma dos números que representam as letras A, B e C seja 52, precisamos determinar quais são os números correspondentes a essas letras usando a nova chave. Como 52 não é múltiplo de 3, e a soma de três números consecutivos sempre é múltipla de 3, já podemos começar sabendo que esses números codificados não são consecutivos.

3. Executar o plano:

(a) Usando a tabela de correspondência com a chave 5, descrita no enunciado do problema temos:

Tabela 4.1 – Correspondência com a chave 5

Letra	Número
A	5
B	6
C	7
D	8
E	9
F	10
G	11

Letra	Número
H	12
I	13
J	14
K	15
L	16
M	17

Letra	Número
N	18
O	19
P	20
Q	21
R	22
S	23

Letra	Número
T	24
U	25
V	26
W	1
X	2
Y	3
Z	4

Fonte: Elaborada pelo autor

Substituindo os números pelas letras correspondentes na tabela acima, temos a seguinte palavra:

Tabela 4.2 – Correspondência com a palavra Sucuri

23	25	7	25	22	13
S	U	C	U	R	I
SUCURI					

Fonte: Elaborada pelo autor

(b) Precisamos usar a chave 20, para codificar OBMEP, sendo assim, temos a seguinte tabela:

Tabela 4.3 – Correspondência com a chave 20

Letra	Número	Letra	Número	Letra	Número	Letra	Número
A	20	H	1	N	7	T	13
B	21	I	2	O	8	U	14
C	22	J	3	P	9	V	15
D	23	K	4	Q	10	W	16
E	24	L	5	R	11	X	17
F	25	M	6	S	12	Y	18
G	26					Z	19

Fonte: Elaborada pelo autor

Fazendo a correspondência com a nova tabela com a chave 20, temos:

Tabela 4.4 – Correspondência com a palavra OBMEP

O	B	M	E	P
8	21	6	24	9
8-21-6-24-9				

Fonte: Elaborada pelo autor

(c) Sabemos que não temos o número 0 no disco, sendo assim, um dos números do seu código certamente será 20. Após o 20 na sequência temos 138, como no disco não temos 138 e nem 38, e como temos números antes do 20, descartando a possibilidade de termos 1,3 e 8, pois a palavra possui apenas quatro letras, obviamente os números associados as letras são 13 e 8, o que já nos da três letras, $20 - 13 - 8$. Logo 26 é o número codificado que falta para completar a palavra com 4 letras, e o código seria:

Tabela 4.5 – Correspondência com a palavra gato

26	20	13	8
G	A	T	O
GATO			

Fonte: Elaborada pelo autor

(d) Sabemos que a soma de três números consecutivos é sempre um múltiplo de 3, como 52 não é múltiplo de 3, temos que os números correspondentes às letras A, B e C não são consecutivos, isso somente é possível, caso um dos números seja 26.

Temos então três opções:

A=26, B=1 e C=2; $26 + 1 + 2 = 29$;

A=25, B=26 e C=1; $25 + 26 + 1 = 52$;

A=24, B=25 e C=26; $24 + 25 + 26 = 75$.

Sendo assim, a chave correspondente a sequência pedida é 25.

4. Verificar a solução:

Na alternativa (b), como mudamos a chave de 5 para 20, outra forma, seria adicionar 15 aos números do disco da figura inicial, tendo em vista, que se a soma for maior que 26, deve-se subtrair 26.

$$O = 19 + 15 - 26 = 8$$
$$B = 6 + 15 = 21$$
$$M = 17 + 15 - 26 = 6$$
$$E = 9 + 15 = 24$$
$$P = 20 + 15 - 26 = 9.$$

Logo, OBMEP é codificada como $8 - 21 - 6 - 24 - 9$.

PROBLEMA 05 - (QUESTÃO 03 - OBMEP 2006)

Um número A de dois algarismos é um supernúmero se é possível encontrar dois números B e C, ambos também de dois algarismos, tais que:

- $A = B + C$;
- soma dos algarismos de A = (soma dos algarismos de B) + (soma dos algarismos de C).

Por exemplo, 35 é um supernúmero.

Duas maneiras diferentes de mostrar isto são $35 = 11 + 24$ e $35 = 21 + 14$, pois $3 + 5 = (1 + 1) + (2 + 4)$ e $3 + 5 = (2 + 1) + (1 + 4)$. A única maneira de mostrar que 21 é um supernúmero é $21 = 10 + 11$.

(a) Mostre de duas maneiras diferentes que 22 é um supernúmero e de três maneiras diferentes que 25 é um supernúmero.

(b) De quantas maneiras diferentes é possível mostrar que 49 é um supernúmero?

(c) Quantos supernúmeros existem?

1. Compreender o problema:

Ao iniciar a resolução foi necessário entender com clareza, o conceito de supernúmero descrito no enunciado da questão e assimilar através de exemplos que não existe somente uma maneira de demonstrar um supernúmero.

Também, foi preciso ter bastante atenção ao somar os algarismos, e estabelecer uma conjectura entre a soma dos algarismos de A com B e C, além de aplicar a propriedade comutativa da adição. Ademais, utilizar uma tabela com a soma dos algarismos facilita a visualização e compreensão do resultado.

Analisando o problema, temos que um supernúmero é um número A de dois algarismos que pode ser representado como a soma de dois números B e C, ambos também de dois algarismos, e que satisfaz a condição de que a soma dos algarismos de A é igual à soma dos algarismos de B mais a soma dos algarismos de C. Na alternativa (a) o objetivo é mostrar de duas maneiras diferentes que 22 é um supernúmero e de três maneiras diferentes que 25 é um supernúmero., na alternativa (b) precisamos demonstrar de quantas maneiras é possível mostrar que 49 é um supernúmero, e na alternativa (c) quantos supernúmeros existem.

2. Planejar a solução:

Em (a), para determinar por que o número 22 só pode ser escrito de duas maneiras como a soma de dois números de dois algarismos, precisamos examinar suas propriedades. Primeiro, vamos considerar a soma dos algarismos de 22. A soma de seus algarismos é $2 + 2 = 4$.

Agora, queremos encontrar dois números de dois algarismos cuja soma seja 22. No entanto, como a soma dos algarismos de 22 é 4, isso significa que a soma dos algarismos de B e C, que somam 22, também deve ser 4.

Para obter a soma de 4 usando dois algarismos, temos apenas algumas opções. Podemos ter $1 + 3 = 4$ ou $2 + 2 = 4$, logo precisamos encontrar números com dois algarismos cuja soma seja 1 e 3, e também que seja 2 e 2.

Para entender por que o número 25 pode ser escrito de três maneiras como a soma de dois números de dois algarismos, precisamos também examinar suas propriedades.

Primeiro, vamos considerar a soma dos algarismos de 25. A soma de seus algarismos é $2+5 = 7$. Agora, queremos encontrar dois números de dois algarismos cuja soma seja 25. No entanto, como a soma dos algarismos de 25 é 7, isso significa que a soma dos algarismos de B e C, que somam 25, também deve ser 7.

Para obter a soma de 7 usando dois algarismos, temos algumas opções. Podemos ter $1 + 6 = 7$, $2 + 5 = 7$ ou $3 + 4 = 7$.

Em (b), encontrar pares de números com dois algarismos que a soma seja 49, e em seguida verificar a soma dos algarismos de cada par seja 13, obedecendo a propriedade comutativa.

Em (c), encontrar a quantidade de supernúmeros existentes.

3. Executar o plano:

(a) Para mostrar que 22 é um supernúmero:

uma maneira é $22 = 11 + 11$, pois $2 + 2 = (1 + 1) + (1 + 1)$;

outra maneira é $22 = 10 + 12$, pois $2 + 2 = (1 + 0) + (1 + 2)$.

E para mostrar que 25 é um supernúmero, temos que:

uma maneira é $25 = 12 + 13$, pois $2 + 5 = (1 + 2) + (1 + 3)$;

outra maneira é $25 = 11 + 14$, pois $2 + 5 = (1 + 1) + (1 + 4)$;

a terceira maneira é $25 = 10 + 15$, pois $2 + 5 = (1 + 0) + (1 + 5)$.

(b) Para mostrar que 49 é um supernúmero:

Primeiro, vamos encontrar todos os pares de números B e C, ambos também de dois algarismos, que somam 49. Esses pares são: (10, 39), (11, 38), (12, 37), ..., (39, 10).

Em seguida, verificamos se a soma dos algarismos de cada par de números é igual à soma dos algarismos de 49. Por exemplo, para o par (10, 39), temos $(1+0)+(3+9) = 13$, que é igual à soma dos algarismos de 49, $(4 + 9 = 13)$. Da mesma forma, para o par (11, 38), temos $(1 + 1) + (3 + 8) = 13$, e assim por diante, conforme tabela abaixo:

Tabela 4.6 – Soma dos algarismos de um supernúmero

A	**B**	**C**	$\mathbf{A = B + C}$	**Soma dos algarismos**
49	10	39	$49 = 10 + 39$	$4 + 9 = (1 + 0) + (3 + 9)$ $13 = 1 + 12$ $13 = 13$
49	11	38	$49 = 11 + 38$	$4 + 9 = (1 + 1) + (3 + 8)$ $13 = 2 + 11$ $13 = 13$
49	12	37	$49 = 12 + 37$	$4 + 9 = (1 + 2) + (3 + 7)$ $13 = 3 + 10$ $13 = 13$
49	13	36	$49 = 13 + 36$	$4 + 9 = (1 + 3) + (3 + 6)$ $13 = 4 + 9$ $13 = 13$
49	14	35	$49 = 14 + 35$	$4 + 9 = (1 + 4) + (3 + 5)$ $13 = 5 + 8$ $13 = 13$
49	15	34	$49 = 15 + 34$	$4 + 9 = (1 + 5) + (3 + 4)$ $13 = 6 + 7$ $13 = 13$
49	16	33	$49 = 16 + 33$	$4 + 9 = (1 + 6) + (3 + 3)$ $13 = 7 + 6$ $13 = 13$
49	17	32	$49 = 17 + 32$	$4 + 9 = (1 + 7) + (3 + 2)$ $13 = 8 + 5$ $13 = 13$

49	18	31	$49 = 18 + 31$	$4 + 9 = (1 + 8) + (3 + 1)$ $13 = 9 + 4$ $13 = 13$
49	19	30	$49 = 19 + 30$	$4 + 9 = (1 + 9) + (3 + 0)$ $13 = 10 + 3$ $13 = 13$
49	20	29	$49 = 20 + 29$	$4 + 9 = (2 + 0) + (2 + 9)$ $13 = 2 + 11$ $13 = 13$
49	21	28	$49 = 21 + 28$	$4 + 9 = (2 + 1) + (2 + 8)$ $13 = 3 + 10$ $13 = 13$
49	22	27	$49 = 22 + 27$	$4 + 9 = (2 + 2) + (2 + 7)$ $13 = 4 + 9$ $13 = 13$
49	23	26	$49 = 23 + 26$	$4 + 9 = (2 + 3) + (2 + 6)$ $13 = 5 + 8$ $13 = 13$
49	24	25	$49 = 24 + 25$	$4 + 9 = (2 + 4) + (2 + 5)$ $13 = 6 + 7$ $13 = 13$

Fonte: Elaborada pelo autor

Contamos 15, o número total de pares que satisfazem as condições dadas no problema.

(c) Considerando que 10 é o menor número de dois algarismos, então $10 + 10 = 20$ representa o menor número de dois algarismos que pode ser formado pela soma de dois números de dois algarismos. Agora, se tomarmos qualquer número x de dois algarismos, igual ou superior a 20, onde a é o algarismo das dezenas e b é o algarismo das unidades, podemos explorar o número $x - 10$. Este número é pelo menos 10 (pois x é pelo menos 20), o que significa que possui dois algarismos; seu algarismo das dezenas é $a - 1$ e seu algarismo das unidades é b, como podemos observar pela subtração a seguir:

$$\begin{array}{rcc} & a & b \\ - & 1 & 0 \\ \hline & (a-1) & b \end{array}$$

4. Verificar a solução:

Na alternativa (a), provando que 22 é um supernúmero, temos que

$$22 = 11 + 11$$

e

$$2 + 2 = (1 + 1) + (1 + 1) \Rightarrow 4 = 2 + 2$$

Além disso,

$$22 = 10 + 12$$

e

$$2 + 2 = (1 + 0) + (1 + 2) \Rightarrow 4 = 1 + 3$$

Na mesma alternativa, para provar que 25 é um supernúmero, basta perceber que:

$$25 = 12 + 13$$

e

$$2 + 5 = (1 + 2) + (1 + 3) \Rightarrow 7 = 3 + 4$$

ou também,

$$25 = 11 + 14$$

com

$$2 + 5 = (1 + 1) + (1 + 4) \Rightarrow 7 = 2 + 5$$

Na alternativa (c), podemos usar um exemplo, para melhor representar o resultado. Por exemplo, com $x = 57$ temos que:

$$\begin{array}{ccc} & 5 & 7 \\ - & 1 & 0 \\ \hline & 4 & 7 \end{array}$$

ou seja, $x - 10 = 47$. Assim, a expressão $x = 10 + (x - 10)$, neste caso, é $57 = 10 + 47$, o que mostra que 57 é um supernúmero, pois:

$$5 + 7 = 12 = 1 + 0 + 4 + 7$$

Sendo assim, todos os números de 20 a 99, são supernúmeros, ou seja, existem $99 - 20 + 1 = 80$ supernúmeros.

PROBLEMA 16 - (QUESTÃO 06 - OBMEP 2010)

Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é $5 + 8 + 2 = 15$ e a soma dos números da segunda coluna é $9 + 7 + 8 = 24$. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 18 e 24.

Figura 4.2 – Quadrado de Gabriel

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2010

(a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando ?

(b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

(c) Preencha o quadrado de modo que as somas sejam 7, 13, 14, 26, 18 e 22.

1. Compreender o problema:

O problema diz que Gabriel desenha tabelas 3×3, onde os números naturais de 1 a 9 são escritos em cada uma das nove casas, garantindo que cada número seja utilizado uma única vez. Ele calcula então a soma dos números em cada linha e coluna para verificar se resultam no mesmo valor. Se todas as somas forem iguais, ele construiu um quadrado mágico. Caso contrário, ele faz ajustes nos números para tentar alcançar a igualdade nas somas das linhas e colunas.

Ao iniciar a resolução da questão alguns questionamentos surgiram: como verificar se a soma de cada linha, coluna e diagonal é igual à soma indicada? Quais números devem ser usados em um quadrado, ou se fosse possível usar números negativos ou não inteiros, as soluções seriam infinitas? As rotações e reflexões de um quadrado mágico contam como soluções diferentes? No início, foi feita a tentativa de ir colocando números aleatórios e somando linhas e colunas, e trocando-os onde a soma era maior que a solicitada. Porém, somente ao somar todos os números de 1 a 9 que o caminho para a solução da questão foi obtido.

2. Planejar a solução:

Para entender a soma que está faltando no quadrado, podemos observar que somar as somas das linhas é o mesmo que somar todos os números no quadrado. Por exemplo, se somarmos as somas das linhas, obteremos $(1+2+3+4+5+6+7+8+9=45)$. O mesmo princípio se aplica à soma das somas das colunas. Assim, concluímos que a soma de todas as somas é $2 \times 45 = 90$.

3. Executar o plano:

(a) Para encontrar a soma que está faltando, subtraímos a soma total das somas das linhas e das colunas do quadrado (que é 90) da soma dos números conhecidos (9, 13, 14, 17 e 18). Isso nos dá $90-(9+13+14+17+18) = 90-71 = 19$. Portanto, a soma que está faltando no quadrado é 19.

(b) Temos que se todas as somas das linhas do quadrado fossem números pares, isso significaria que cada linha individualmente teria uma soma par. Ao somar as somas das três linhas, obteríamos um resultado par, já que a soma de números pares é sempre par. No entanto, isso contradiz a realidade, pois sabemos que a soma das somas das três linhas é 45, um número ímpar. Portanto, a hipótese de que todas as somas das linhas são pares é impossível.

(c) Vamos ampliar um pouco essa abordagem para determinar não apenas um, mas todos os quadrados que possuem as somas especificadas. Antes de iniciar, é importante observar que a troca da ordem de duas linhas (ou de duas colunas) não afeta as somas de um quadrado. Os seis números resultantes precisam ser agrupados em dois conjuntos de três números cada, onde as somas de ambos os grupos sejam iguais a 45.

No primeiro conjunto, cada número representa a soma de uma linha, enquanto no segundo conjunto, representa a soma de cada coluna. Conforme discutido anteriormente, cada grupo deve conter um número ímpar; portanto, os números 7 e 13 devem ser atribuídos a grupos diferentes. Isso nos leva à única possibilidade de dividir as somas nos grupos 7, 16, 22 e 13, 14, 18, de tal forma que seja 45 a soma de ambos. Assim, podemos supor que as somas das linhas são 7, 16 e 22, enquanto as somas das colunas são 13, 14 e 18.

Dado que a única combinação para alcançar a soma 7 é $1+2+4=7$, podemos iniciar o preenchimento do quadrado conforme mostrado abaixo:

1	**2**	**4**	7

Vamos considerar o cenário em que a soma da segunda linha seja 22. As únicas combinações possíveis para alcançar a soma de 22 são $5+8+9=22$ e $6+7+9=22$, que iremos analisar individualmente.

Vamos considerar primeiro a situação em que os números 5, 8 e 9 aparecem na segunda linha. Neste caso, o número 5 não pode estar na mesma coluna que o 4, pois $4 + 5 = 9$. Para alcançar uma das somas 13, 14 ou 18 nessa coluna, o terceiro número precisaria ser 4, 5 ou 9, respectivamente. No entanto, isso não é possível, pois o número 4 já foi utilizado na primeira linha, enquanto os números 5 e 9 estão na segunda linha.

Um raciocínio semelhante mostra que o número 9 também não pode estar na mesma coluna que o 4. Portanto, o número 8 deve estar abaixo do 4. Como $4 + 8 = 12$ e tanto o 1 quanto o 2 já foram utilizados, a soma desta coluna não pode ser 13 ou 14. Consequentemente, a soma deve ser 18.

1	**2**	**4**	7
		8	22
		6	16
		18	

Completando agora de duas maneiras distintas, temos:

1	**2**	**4**	7
5	**9**	**8**	22
7	**3**	**6**	16
13	14	18	

1	**2**	**4**	7
9	**5**	**8**	22
3	**7**	**6**	16
13	14	18	

4. Verificar a solução:

Na alternativa (a), adicionando o resultado à soma dos números conhecidos (9, 13, 14, 17 e 18), teremos $19 + 9 + 13 + 14 + 17 + 18 = 90$, que seria a soma de todas as somas.

Na alternativa (b), perceba que os cinco ímpares só podem ser distribuídosnas três linhas, como 2, 3 e 0; 1, 1 e 3 ou 2, 1 e 2.

Dessa forma, concluímos que, ao preencher o quadrado, pelo menos uma linha conterá um ou três números ímpares, enquanto os restantes serão pares. Portanto, em qualquer caso, teremos uma linha cuja soma será ímpar.

Na alternativa (c), quando na segunda linha aparecem os números 6, 7 e 9, as possibilidades são as seguintes:

1	**2**	**4**	7
7	**9**	**6**	22
5	**3**	**8**	16
13	14	18	

1	**2**	**4**	7
9	**6**	**7**	22
8	**5**	**3**	16
18	13	14	

1	**2**	**4**	7
9	**7**	**6**	22
3	**5**	**8**	16
13	14	18	

1	**2**	**4**	7
9	**7**	**6**	22
8	**5**	**3**	16
18	13	14	

PROBLEMA 12 - (QUESTÃO 03 - OBMEP 2009)

Ana e Cristina estão jogando contra Beatriz e Diana. No início de cada partida, elas embaralham nove cartões numerados de 1 a 9 e cada uma pega dois cartões, sobrando sempre um cartão na mesa. Cada menina calcula seus pontos somando os números de seus cartões e o número de pontos da dupla é a soma dos pontos das duas parceiras. Vence a dupla que fizer o maior número de pontos. Veja um exemplo de uma partida na tabela:

Tabela 4.7 – Pontuação das partidas

	Ana	**Cristina**	**Beatriz**	**Dianah**
Cartões Recolhidos	1 e 4	5 e 7	2 e 9	3 e 6
Pontos de cada menina	$1+4=5$	$5+7=12$	$2+9=11$	$3+6=9$
Pontos da dupla	$5+12=17$		$11+9=20$	
Resultado	Beatriz e Dianah ganhariam, pois 20 é maior que 17			

Fonte: OBMEP-2009

(a) Numa partida, Ana e Cristina tiraram somente cartões com números ímpares, e sobrou o cartão de número 7. Qual foi o resultado da partida? Por quê?

(b) Uma partida pode terminar empatada se sobrar o cartão de número 8? Por quê?

(c) Uma partida pode terminar empatada se sobrar o cartão de número 5? Por quê?

(d) Em outra partida, uma das meninas tirou o cartão de número 3. Ana fez um ponto a menos que Beatriz, que fez um ponto a menos que Cristina, que fez um ponto a menos que Diana. Quantos pontos fez a dupla que ganhou?

1. Compreender o problema:

Sabe-se que Ana e Cristina estão jogando contra Beatriz e Diana. No início de cada partida, elas embaralham nove cartões numerados de 1 a 9 e cada uma pega dois cartões, sobrando sempre um cartão na mesa. Cada menina calcula seus pontos somando os números de seus cartões e o número de pontos da dupla é a soma dos pontos das duas parceiras. Vence a dupla que fizer o maior número de pontos. A questão pergunta qual foi o resultado da partida em que Ana e Cristina tiraram somente cartões com números ímpares, e sobrou o cartão de número 7. Também se questiona, se sobrar o cartão com número 8 ou 5 na mesa, se existe a possibilidade de empate nessa suposta rodada.

Para resolver a questão algumas dúvidas podem surgir: como é feita a distribuição dos cartões? o que significa "sobrando um cartão na mesa"? Qual é a importância dos cartões restantes na análise do resultado? Porém, utilizando cartões com os números e fazendo simulações, a tarefa de obter o resultado fica mais acessível.

2. Planejar a solução:

Para resolver o problema, na alternativa (a) podemos seguir os seguintes passos:
- Determinar quais são os números possíveis dos cartões que Ana e Cristina tiraram.

- Calcular os pontos de Ana e Cristina somando os números dos cartões ímpares que elas tiraram.

- Comparar os pontos obtidos com os pontos da outra dupla para determinar o vencedor.

Para resolver (b) e (c), podemos seguir os seguintes passos:

- Somar a pontuação de todos os cartões e subtrair o cartão que sobrou na mesa, para que aja empate, o resultado necessariamente deverá ser um número par, pois o dobro de qualquer número sempre será um número par.

E para o item (d), de acordo com o menor e o maior cartão que podem sobrar, vamos analisar a variação da soma dos pontos feitos pelas duplas e com a pontuação verificar as possibilidades restantes para definirmos qual delas se encaixa na situação apresentada.

3. Executar o plano:

(a) Como Ana e Cristina tiraram somente cartões com números ímpares, e o cartão 7, ficou na mesa, temos que os cartões que elas pegaram foi: 1, 3, 5, e 9. Logo a soma dos seus cartões é, $1+3+5+9 = 18$. Como Ana e Cristina pegaram somente cartões ímpares, certamente, Beatriz e Dianah pegaram somente os cartões pares, 2, 4, 6 e 8, tendo em vista que o cartão 7 ficou na mesa. Logo a soma dos seus cartões é, $2 + 4 + 6 + 8 = 20$. Comparando as duas somas, temos que Ana e Cristina perderam para Beatriz e Dianah.

(b) A soma dos valores de todos os cartões é 45, pois, $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. Se o 8 permanece na mesa, como $45 - 8 = 37$, para que a partida termine empatada os 37 pontos devem ser divididos igualmente pelas duas duplas. Contudo, essa divisão é impossível, já que 37 é um número ímpar.

(c) Quando o cartão de número 5 sobra na mesa, a soma dos pontos das duplas é $45 - 5 = 40$, um número par. Se uma partida terminar em empate nessa situação, cada dupla deve ter feito $40 : 2 = 20$ pontos cada. Para justificar que um empate pode de fato ocorrer nesse cenário, é necessário apresentar uma partida que termine empatada em 20 a 20. Um exemplo disso é quando uma dupla seleciona os cartões de números 1, 2, 8 e 9, enquanto a outra escolhe os cartões restantes, 3, 4, 6 e 7.

(d) O cartão com o menor número que pode sobrar é 1, enquanto o de maior número é 9. Portanto, a soma dos pontos feitos pelas duas duplas varia de $45 - 9 = 36$, até $45 - 1 = 44$. Em outras palavras, os pontos das meninas formam quatro números consecutivos cuja soma está entre 36 e 44.

As possibilidades $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{4, 5, 6, 7\}$, $\{5, 6, 7, 8\}$, além de $\{6, 7, 8, 9\}$ e $\{7, 8, 9, 10\}$ não são viáveis, pois em cada uma delas a soma dos números é menor que 36. Da mesma forma, $\{10, 11, 12, 13\}$, $\{11, 12, 13, 14\}$, $\{12, 13, 14, 15\}$, $\{13, 14, 15, 16\}$ e $\{14, 15, 16, 17\}$ também não são adequadas, pois a soma dos números em cada caso é maior que 44.

Restam as possibilidades $\{8, 9, 10, 11\}$ e $\{9, 10, 11, 12\}$. No primeiro caso, o cartão que ficou na mesa é o de número 45 menos a soma de 8, 9, 10 e 11, o que resulta em 7. No segundo caso, o cartão que ficou na mesa é o de número 45 menos a soma de 9, 10, 11 e 12, que é igual a 3. Como o cartão que ficou na mesa não foi o de número 3, só resta a primeira possibilidade.

Concluímos, então, que Ana fez 8 pontos, Beatriz fez 9, Cristina fez 10 e Diana fez 11. A dupla vencedora foi Beatriz e Diana, com $9 + 11 = 20$ pontos, contra $8 + 10 = 18$, de Ana e Cristina.

4. Verificar a solução:

Em (a) também podemos descobrir a pontuação de Beatriz e Dianah da seguinte forma: $45 - 18 - 7 = 20$, sendo que 45 seria a soma de todos os cartões, 18 a soma dos cartões de Ana e Cristina e 7 o cartão que sobrou na mesa.

Já em (b), de maneira mais ampla, note que se um cartão de número par permanece na mesa, a soma dos pontos das duplas é igual a 45 menos o número par, resultando em um número ímpar, o que impede um empate nesse caso.

PROBLEMA 14 - (QUESTÃO 02 - OBMEP 2010)

Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

- some 1, se o cartão for verde;
- some 2, se o cartão for amarelo;
- some 3, se o cartão for azul;
- some 4, se o cartão for vermelho.

Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu".

(a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

(b) Mariazinha disse "Setenta e seis" para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

(c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse "Sessenta e um" e o matemágico respondeu "Você errou alguma conta". Explique como o matemágico pôde saber isso.

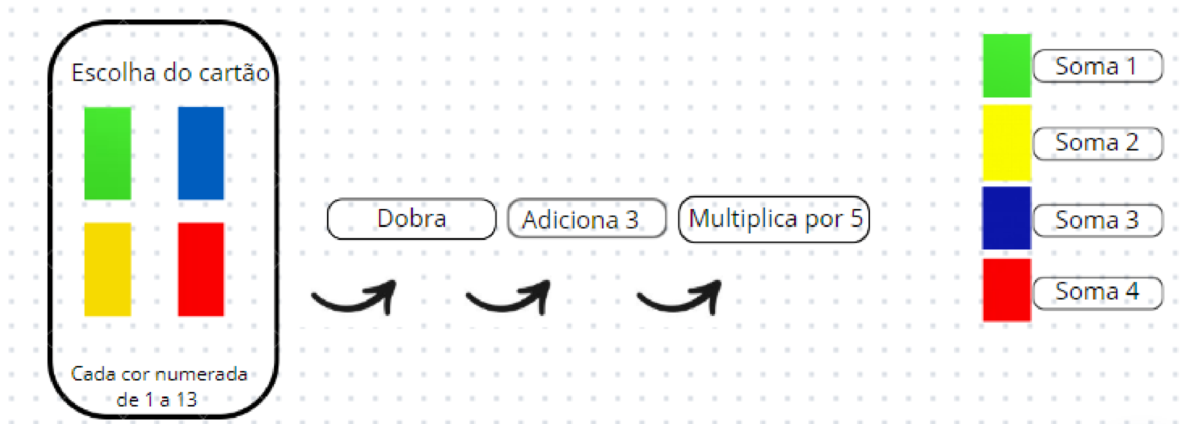
1. Compreender o problema:

O matemágico mistura cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele pede para uma criança escolher um cartão, calcular o dobro do número desse cartão, somar 3 e multiplicar o resultado por 5. Depois, a criança deve somar 1, 2, 3 ou 4, dependendo da cor do cartão escolhido, de acordo com a Figura 4.3, o matemágico então diz qual é a cor e o número do cartão escolhido pela criança.

A principal dica para resolver os itens do problema foi lembrar das operações inversas da adição e multiplicação, que são a subtração e divisão respectivamente, além de que o domínio de operações básicas é fundamental no processo.

Também é importante lembrar que divisões com resto excluem o resultado correto do exercício, e que relacionar as cores com os números que devemos adicionar é fundamental para encontrar o resultado correto.

Figura 4.3 – Compreensão do Matemágico



Fonte: Elaborado pelo autor.

2. Planejar a solução:

Para descobrir o número que Joãozinho deve dizer ao matemágico, deve-se seguir os passos que o matemágico pediu para a criança seguir.

Agora, para descobrir o número e a cor do cartão escolhido por Mariazinha, devemos seguir os passos inversos que o matemágico pediu para as crianças seguirem. Primeiro, devemos subtrair 4, 3 , 2 e 1 de 76, já que o matemágico somou esses valores, dependendo da cor do cartão escolhido pela criança. Em seguida, faremos o inverso das operações para poder concluir qual o número e cor do cartão dele.

Já no item (*c*), usamos a mesma técnica desenvolvida na alternativa anterior, para se ter a certeza de que realmente não é possível obter o número apresentado por Pedrinho.

3. Executar o plano:

(a) Primeiro, devemos calcular o dobro do número do cartão escolhido por Joãozinho: $3 \times 2 = 6$. Depois, somamos 3, ou seja, $6 + 3 = 9$. Em seguida, multiplicamos por 5: $9 \times 5 = 45$. Por fim, somamos 4, já que o cartão escolhido por Joãozinho é vermelho: $45 + 4 = 49$. Portanto, Joãozinho deve dizer ao matemágico o número 49.

(b) Usamos o caminho inverso: Mariazinha disse o número 76, subtraindo cada uma das cores, vamos observar qual será, múltiplo de 5, pois a operação seguinte precisa-se ser divisível por 5, sendo assim, temos:

- Caso verde: $76 - 1 = 75; 75 \div 5 = 15; 15 - 3 = 12; 12 \div 2 = 6$, nesse caso o cartão seria 6 verde.

- Caso amarelo: $76 - 2 = 74; 74 \div 5 = 14{,}8$, nesse caso como não temos um número natural, é impossível o cartão ser amarelo.

- Caso azul: $76 - 3 = 73; 73 \div 5 = 14{,}6$, nesse caso como não temos um número natural, é impossível o cartão ser azul.

- Caso vermelho: $76 - 4 = 72; 72 \div 5 = 14{,}4$, nesse caso como não temos um número natural, é impossível o cartão ser vermelho.

(c) Temos que Pedrinho disse o número 61, e o matemágico disse, que ele errou alguma conta, vamos descobrir o erro, utilizando a operação inversa, conforme item (b):

- Caso verde: $61 - 1 = 60; 60 \div 5 = 12; 12 - 3 = 9; 9 \div 2 = 4{,}5$, nesse caso como não temos um número natural, é impossível o cartão ser verde.

- Caso amarelo: $61 - 2 = 59; 59 \div 5 = 11{,}8$, nesse caso como não temos um número natural, é impossível o cartão ser amarelo.

- Caso azul: $61 - 3 = 58; 58 \div 5 = 11{,}6$, nesse caso como não temos um número natural, é impossível o cartão ser azul.

- Caso vermelho: $61 - 4 = 57; 57 \div 5 = 11{,}4$, nesse caso como não temos um número natural, é impossível o cartão ser vermelho.

Logo, Pedrinho errou alguma conta.

4. Verificar a solução:

Podemos também em (b), analisar o que acontece com o número de um cartão ao realizar as operações indicadas. Independentemente do número inicial, após a terceira operação, obtemos um múltiplo de 5, ou seja, um número cujo algarismo das unidades é 0 ou 5. Portanto, se todas as contas estiverem corretas, o algarismo das unidades do número informado ao matemático será:

1 ou 6, se o cartão escolhido é verde;

2 ou 7, se o cartão escolhido é amarelo;

3 ou 8, se o cartão escolhido é azul;

4 ou 9, se o cartão escolhido é vermelho.

Assim, se Mariazinha informou o número 76 ao matemático, seu cartão era verde e o resultado da terceira operação foi $76 - 1 = 75$. O resultado da segunda operação foi $75 : 5 = 15$. O resultado da primeira operação foi $15 - 3 = 12$, e o número no cartão escolhido por Mariazinha foi $12 : 2 = 6$.

Já em (c), baseado no item anterior, quando Pedrinho disse 61 ao matemágico, ele também pode ter raciocinado da seguinte forma: se os cálculos de Pedrinho estiverem corretos, o cartão deve ser verde (já que o algarismo das unidades de 61 é 1). Após a terceira operação, o número obtido seria $61 - 1 = 60$. Após a segunda operação, o número seria $60 : 5 = 12$. Após a primeira operação, o número seria $12 - 3 = 9$. Portanto, o número no cartão deveria ser $9 : 2 = 4{,}5$, o que é impossível, pois os números nos cartões são inteiros. Logo, Pedrinho deve ter cometido um erro em algum cálculo.

PROBLEMA 08 - (QUESTÃO 04 - OBMEP 2007)

A professora da Dorinha passou para seus alunos um questionário com duas perguntas: (1) “Você come peixe?” e (2) “Você come verdura?”. Todos os alunos responderam às duas perguntas e a professora, depois de ler as respostas, calculou as frações

$$\frac{\text{número de alunos que comem peixe}}{\text{total de alunos}} = \frac{13}{18}$$

e

$$\frac{\text{número de alunos que comem verdura}}{\text{total de alunos}} = \frac{5}{12}.$$

(a) Ajude a professora, completando a tabela com as frações que estão faltando.

Tabela 4.8 – Frações de peixe e verdura

	peixe	verdura
sim	13/18	5/12
não		

Fonte: Prova - OBMEP 2007

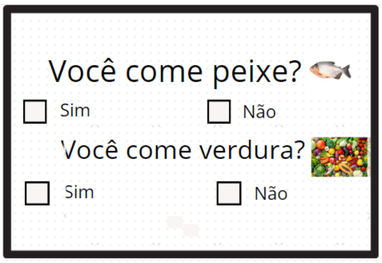
(b) Observando a tabela, Dorinha afirmou que havia alunos que comiam tanto peixe como verdura. Explique como ela chegou a essa conclusão.

(c) Analisando os questionários, a professora notou que todos os alunos que comem verdura também comem peixe e que 22 alunos comem peixe mas não comem verdura. Quantos alunos não comem verdura?

1. Compreender o problema:

A professora da Dorinha deu aos seus alunos um questionário contendo duas perguntas: uma sobre se eles comem peixe e outra sobre se eles comem verduras.

Figura 4.4 – Peixe e/ou verdura



Fonte: Elaborado pelo autor

Todos os alunos responderam a ambas as perguntas, sendo necessário completar a tabela iniciada pela professora, e explicar, analisando as frações, porque Dorinha afirmou que tem alunos que comem peixe e verdura. Após analisar os questionários, a professora notou algumas peculiaridades, tais quais, quem come verdura, também come peixe e 22 alunos comem peixe, mas não comem verdura, e questiona quantos não comem verdura.

Aqui é importante perceber que alguns alunos responderam que gostam de peixe e de verdura, e que alguns não comem verdura. Assim, juntamente com a análise dos dados, conseguimos determinar que alguns não comiam verdura.

Também, deve-se ter muita atenção que os denominadores das frações dadas são diferentes; assim, deixá-las com o mesmo denominador facilita a visualização do resultado.

2. Planejar a solução:

Utilizando operações com frações, e as comparando conseguimos resolver as questões propostas. Para isso, poderemos analisar as respostas, dos que comem e não comem peixe, com a quantidade total, assim como os que comem e não comem verdura.

Por fim, usaremos denominadores iguais, para uma melhor comparação.

3. Executar o plano:

(a) Uma forma de expressar o número total de alunos é somando o número de alunos que comem peixe com o número de alunos que não comem peixe, ou seja,

$$\frac{\text{não comem peixe} + \text{comem peixe}}{\text{total}} = \frac{\text{não comem peixe}}{\text{total}} + \frac{\text{comem peixe}}{\text{total}}$$
$$= 1$$

que nos diz que,

$$\begin{aligned}
\frac{\text{não comem peixe}}{\text{total}} &= 1 - \frac{\text{comem peixe}}{\text{total}} \\
&= 1 - \frac{13}{18} \\
&= \frac{18}{18} - \frac{13}{18} \\
&= \frac{5}{18}.
\end{aligned}$$

Para calcular a quantidade de alunos que não comem verdura, calculamos de forma semelhante:

$$\begin{aligned}
\frac{\text{não comem verdura}}{\text{total}} &= 1 - \frac{\text{comem verdura}}{\text{total}} \\
&= 1 - \frac{5}{12} \\
&= \frac{12}{12} - \frac{5}{12} \\
&= \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

Completando a tabela pedida temos:

Tabela 4.9 – Frações de peixe e verduras completas

	peixe	verdura
sim	13/18	5/12
não	5/18	7/12

Fonte: Prova - OBMEP 2007

(b) Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\text{comem peixe} + \text{comem verdura}}{\text{total}} &= \frac{\text{comem peixe}}{\text{total}} + \frac{\text{comem verdura}}{\text{total}} \\
&= \frac{13}{18} + \frac{5}{12} \\
&= \frac{26}{36} + \frac{15}{36} \\
&= \frac{41}{36} \\
&> 1
\end{aligned}$$

como

$$\frac{41}{36} > 1,$$

isso só é possível quando parte dos alunos coma peixe e verdura.

(c) Por definição temos que todos os alunos que comem verdura também comem peixe, sendo assim para descobrirmos os que comem peixes mas não comem verdura temos:

$$\begin{aligned}\frac{\text{comem peixe mas não comem verdura}}{\text{total}} &= \frac{\text{comem peixe - comem verdura}}{\text{total}}\\ &= \frac{\text{comem peixe}}{\text{total}} - \frac{\text{comem verdura}}{\text{total}}\\ &= \frac{13}{18} - \frac{5}{12}\\ &= \frac{26}{36} - \frac{15}{36}\\ &= \frac{11}{36}.\end{aligned}$$

Temos então que 11/36 equivalem a 22 alunos, dividindo ambos por 11, temos ainda que 1/36 equivale a 2 alunos, e assim descobrimos o número total de alunos que é 72. Como já descobrimos que a fração equivalente a quantidade de alunos que não comem verduras é 7/12, temos que:

$$\frac{7}{12} \times 72 = \frac{504}{12} = 4{,}2.$$

Conforme solicitado temos que 42 alunos não comem verdura.

4. Verificar a solução:

Ao somarmos as frações que equivalem a porção que comem e nao comem peixe, temos que:

$$\frac{13}{18} + \frac{5}{18} = 1.$$

Ao somarmos as frações que equivalem a porção que comem e nao comem verdura, temos que:

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{12} = 1.$$

Na alternativa (b), temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\text{não comem peixe + não comem verdura}}{\text{total}} &= \frac{\text{não comem peixe}}{\text{total}} + \frac{\text{não comem verdura}}{\text{total}}\\ &= \frac{5}{18} + \frac{7}{12}\\ &= \frac{10}{36} + \frac{21}{36}\\ &= \frac{31}{36}\end{aligned}$$

como

$$\frac{31}{36} < 1,$$

isso só é possível se, um dos alunos comer peixe e verdura.

Outra forma seria comparar as frações dos alunos que comem verdura e dos alunos que não comem peixe, como

$$\frac{5}{12} > \frac{5}{18}.$$

Assim como comparar as frações dos alunos que não comem verdura e dos alunos que comem peixe, conforme a seguir:

$$\frac{7}{12} < \frac{13}{18}.$$

A comparação entre as frações 13/18 e 7/12 mostra que há uma maior proporção de alunos que comem peixe do que alunos que não comem verdura. Portanto, há uma sobreposição, implicando que pelo menos um aluno que come peixe também come verdura.

Alternativamente, a comparação entre as frações 5/12 e 5/18 mostra que há uma maior proporção de alunos que comem verdura do que alunos que não comem peixe. Isso também implica sobreposição, indicando que pelo menos um aluno que come verdura também come peixe.

Essas comparações permitem concluir que a distribuição de preferências alimentares entre os alunos tem interseções, garantindo que algumas preferências coincidem.

PROBLEMA 04 - (QUESTÃO 02 - OBMEP 2006)

Os alunos do professor Augusto Matraga fizeram quatro provas bimestrais no ano. O professor pede a cada aluno que escolha três dessas provas e depois calcula a média anual, até a primeira casa depois da vírgula, pela fórmula:

$$\text{Média} = \frac{10 \times (\text{total de questões respondidas corretamente nas três provas escolhidas})}{\text{total de questões das três provas escolhidas}}$$

Veja os resultados do aluno Quim durante o ano:

Tabela 4.10 – Resultados do Quim

Resultados do Quim				
Bimestre	1º	2º	3º	4º
Questões respondidas corretamente	20	6	32	40
Número de questões da prova	20	10	40	40

Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2006

(a) Qual será a média anual do Quim se ele escolher as provas dos três primeiros bimestres? E se ele escolher as provas dos três últimos?

(b) Complete a tabela abaixo com a porcentagem de acertos do Quim em cada prova.

Tabela 4.11 – Porcentagem de acertos de Quim

Bimestre	1º	2º	3º	4º
Porcentagem de acertos				

Fonte: Solução - Prova da 2ª Fase - OBMEP 2006

(c) Quim acha que sua média anual será a mais alta possível se escolher as três provas com as maiores porcentagens de acerto. Ele está certo? Por quê?

1. Compreender o problema:

Alguns pontos foram cruciais na resolução dessa questão como:

- Diferenciar média aritmética e ponderada;

- Utilizar a fórmula descrita no enunciado com atenção;

- Analisar a tabela dos resultados de Quin, retirando os dados para aplicar na fórmula proposta;

- Combinar os diferentes bimestres e aplicar seus valores para calcular a melhor média pedida;

- Calcular a porcentagem de diferentes formas para um entendimento mais objetivo;

- Perceber que nem sempre a maior quantidade de acertos, pode resultar em uma melhor média;

- Estabelecer uma compreensão entre média ponderada e porcentagem de acertos, pode facilitar uma melhor resolução;

- O peso de cada avaliação bimestral é um fator muito importante na obtenção da média final.

2. Planejar a solução:

Na resolução dessa questão, utiliza-se o conceito de média ponderada, conforme fórmula já enunciada no contexto, para o desenvolvimento da alternativa (a). Para a alternativa (b), usamos conceito básico de porcentagem, para que seja preenchida a tabela adequadamente. Com os resultados preenchidos na tabela da alternativa (b), e utilizando a fórmula de média ponderada da questão, faz-se as combinações possíveis e analisa-se em qual delas a sua média anual será maior.

3. Executar o plano:

(a) Para calcular a média anual de Quim usando os três primeiros bimestres, temos:

$$\text{Média Anual} = \frac{10 \times (20{+}6{+}32)}{20 + 10 + 40} = \frac{10 \times 58}{70} = \frac{580}{70} \approx 8{,}3.$$

Já escolhendo as provas dos três últimos bimestres, temos a seguinte média:

$$\text{Média Anual} = \frac{10 \times (6{+}32{+}40)}{10 + 40 + 40} = \frac{10 \times 78}{90} = \frac{780}{90} \approx 8{,}7.$$

(b) Vamos completar a tabela com as porcentagens de acerto em cada bimestre, sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}
1^\circ \text{ Bimestre} &= \frac{20}{20} \times 100 = 100\% \\
2^\circ \text{ Bimestre} &= \frac{6}{10} \times 100 = 60\% \\
3^\circ \text{ Bimestre} &= \frac{32}{40} \times 100 = 80\% \\
4^\circ \text{ Bimestre} &= \frac{40}{40} \times 100 = 100\%.
\end{aligned}$$

Tabela 4.12 – Porcentagem de acertos de Quim, com respostas

Bimestre	1°	2°	3°	4°
Porcentagem de acertos	100%	60%	80%	100%

Fonte: Elaborada pelo autor

(c) De acordo com o que Quim acha que seria sua maior média, tendo em vista as maiores porcentagens de acerto, que seriam do primeiro, terceiro e quarto bimestre, sua média anual seria:

$$\text{Média Anual} = \frac{10 \times (20{+}32{+}40)}{20 + 40 + 40} = \frac{10 \times 92}{100} = \frac{920}{100} = 9{,}2.$$

Porém se usarmos as notas do primeiro, segundo e quarto bimestre, sua média anual será maior, conforme cálculo a seguir:

$$\text{Média Anual} = \frac{10 \times (20{+}6{+}40)}{20 + 10 + 40} = \frac{10 \times 66}{70} = \frac{660}{70} \approx 9{,}4.$$

Logo, Quim está errado

4. Verificar a solução:

A aplicação correta das fórmulas de média ponderada e porcentagem em (a) e (b) nos permite a validação das mesmas.

Já em (c) não é uma garantia absoluta, optar pelas três provas com as maiores taxas de acerto para obtenção da média anual mais alta possível. Isso se deve ao fato de que o peso de cada prova, ou seja, a contribuição de cada uma delas para a média final, também tem a sua importância.

Por exemplo, se uma prova com uma alta taxa de acerto possui um peso menor na média final em comparação com uma prova com uma taxa ligeiramente menor de acerto, selecionar as três provas com as maiores taxas de acerto pode não resultar na maior média anual possível, conforme Quim achou que seria.

Portanto, para alcançar a média anual mais elevada, o aluno precisa levar em conta não apenas as taxas de acerto de cada prova, mas também os pesos relativos atribuídos a elas. Isso implica em realizar uma análise minuciosa das notas e dos pesos de todas as provas, a fim de determinar a combinação ideal que resultará na maior média possível.

5 CONCLUSÃO

Em 2021, ao assistir a apresentação da dissertação de uma colega do PROFMAT, a mesma falou da grande dificuldade enfrentada por seus alunos do ensino médio na resolução das questões da OBMEP, após refletir com mais calma, percebi que meus alunos do sexto e sétimo ano também possuem essa grande dificuldade, principalmente na interpretação dos problemas olimpícos, e, por isso, surgiu a ideia de construir essa dissertação.

O ponto inicial deste estudo foi explorar metodologias de ensino de matemática com abordagens inovadoras com o intuito de facilitar a resolução de problemas. No entanto, algumas abordagens despertaram um interesse particular, alinhando-se com seus objetivos para aplicação em sala de aula. É comum encontrar propostas teoricamente promissoras, porém elas se revelam desafiadoras para serem implementadas na prática, dadas as complexidades do ambiente escolar cotidiano. Por esse motivo, a busca por estratégias de ensino capazes de estimular o interesse dos alunos pela matemática foi o principal impulso deste trabalho. No contexto escolar diário, nem sempre é viável abordar a matemática de maneira significativa e motivadora, devido às limitações de tempo e recursos para explorar novas metodologias. Diante dessa realidade, dediquei-me a buscar mais formação, novas ideias e aprofundamento nos estudos como uma forma de suprir essa lacuna, e de alguma forma contribuir com êxito para o conhecimento de seus alunos.

Apesar da vasta quantidade de conteúdo curricular, projetos e atividades escolares que consomem o tempo em sala de aula, é necessário estabelecer uma rotina nas aulas de matemática com o intuito de instruir os alunos na habilidade de “interpretar problemas”. Em outras palavras, é possível reservar momentos, mesmo que quinzenalmente, dedicados a compreender a linguagem matemática e a desenvolver as quatro etapas sugeridas para a resolução de problemas. Dessa forma, busca-se ensinar aos alunos uma abordagem sistemática para compreender enunciados, planejar soluções, expressar suas ideias de forma mais clara, validar seus resultados e, além disso, fomentar o desenvolvimento de sua criatividade e autonomia.

Após ter tido aulas de aritmética com meu orientador, o mesmo despertou o interesse por exemplos de problemas da disciplina. Seus exercícios foram fundamentais para a compreensão dos conceitos necessários, contribuindo para o aprofundamento do meu conhecimento, refletindo na qualidade do ensino e também contribuindo no embasamento dessa dissertação. Seu apoio e estímulo acabaram influenciando positivamente na escolha do tema.

Foram analisadas questões de 2005 a 2012 da segunda fase da OBMEP, Nível 1, sobre Contagem e Aritmética. Juntamente com meu orientador, debatemos seu grau de dificuldade e necessidade de um melhor entendimento por parte dos alunos. Espero que esse material seja de grande serventia e eficácia para professores do ensino fundamental, sendo que os mesmos também encontram dificuldades, em diversos aspectos:

- No desenvolvimento do pensamento crítico, ao enfrentar desafios e buscar soluções, as pessoas são incentivadas a analisar a situação de forma crítica, avaliar diferentes opções e tomar decisões informadas.

- Na melhoria das habilidades de resolução de problemas, ja que na prática constante de resolver problemas ajuda a aprimorar as habilidades de identificação de problemas, formulação de estratégias e implementação de soluções eficazes.

- No aumento da resiliência, já que a resolução de problemas muitas vezes envolve enfrentar obstáculos e lidar com a frustração. A capacidade de persistir diante de desafios e superar dificuldades contribui para o desenvolvimento da resiliência e da perseverança.

- No fortalecimento da autoconfiança, ao superar obstáculos e encontrar soluções para problemas, as pessoas ganham confiança em suas próprias habilidades e capacidades. Como estímulo à criatividade, a resolução de problemas muitas vezes requer pensamento criativo e inovador para encontrar soluções eficazes. Esse processo estimula a criatividade e a capacidade de pensar fora do padrão.

- Na aplicação prática de conhecimentos: resolver problemas do mundo real permite que as pessoas apliquem os conhecimentos teóricos adquiridos em situações concretas, tornando o aprendizado mais significativo e relevante.

Enfim, para que a Resolução de Problemas não apenas ajude a encontrar soluções para desafios específicos, mas também promova o crescimento pessoal, fortalecendo habilidades essenciais para o sucesso em diversas áreas da vida.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini, 6º ano**. São Paulo - SP: Moderna, 2016.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática**. São Paulo - SP: Moderna, 2013.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) de Matemática**. Brasília, DF, 1998.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**. São Paulo, SP: Ática, 2008.

D'AMBRÓSIO, UBIRATAN. **Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade.** Belo Horizonte - MG: Editora Autêntica, 2001.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 2. ed. São Paulo, SP: Ática, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo, SP: Ática, 2005. v. 1.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade.** São Paulo - SP: Saraiva, 2024.

JR, José Ruy Giovanni; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática.** 4. ed. São Paulo - SP: FDT, 2018.

MORI, Iracema; ONEGA, Dulce. **Matemática - Ideias e Desafios.** São Paulo - SP: Saraiva, 2012.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Biography of George Polya**. Scotland: School of Mathematics e Statistics University of St Andrews. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Polya. Acesso em: 28/03/2024.

ONUCHIC, L. De La R. **Ensino-aprendizagem de matemática através de resolução de problemas. In: Bicudo, M. A. V.(Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS.** 1. ed. São Paulo: Editora UNESP, 2014. v. 1.

PEREIRA, Antônio L. **Os 4 passos de Polya**. Instituto de Matemática e Estatística da USP- Brasil: Seminário de Resolução de Problemas - IMEUSP, 2020.

PINTO, A. H. **A Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar.** Rio Claro: Bolema, 2017. v. 31.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro, RS: Inter ciência, 2006.

SILVER, Edward A. **Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Persectives**. Hillsdale - New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.

TOLEDO, Marília Barros de Almeida; TOLEDO, Mauro de Almeida. **Teoria e Prática de Matemática: Com Dois e Dois.** São Paulo - SP: FDT, 2009.

VEIGA, I. P. A. (Org.) **Técnicas de ensino: por que não?** Campinas - SP: Papirus Editora, 2007.

VITTI, C. M. **Matemática com prazer, a partir da história e da geometria.** 2. ed. Piracicaba, SP: Editora UNIMEP, 1999.

Apêndices

APÊNDICE A – CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Neste capítulo encontram-se alguns conteúdos utilizados na etapa da execução da resolução das questôes do Capítulo 4. Nos inspiramos nas seguintes bibliografias: (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2024), (BIGODE, 2013), (BIANCHINI, 2016), (JR; CASTRUCCI, 2018) e (MORI; ONEGA, 2012).

A.1 SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Estudar e solucionar questões envolvendo o sistema de numeração decimal é relevante por várias razões:

- Base da matemática cotidiana: O sistema decimal é amplamente utilizado no cotidiano, em situações como cálculos financeiros e medições. Entendê-lo torna mais simples a execução de operações aritméticas básicas (como adição, subtração, multiplicação e divisão) e a compreensão de dados numéricos.

- Fundamento para outras áreas: Diversos conceitos matemáticos e científicos têm o sistema decimal como ponto de partida. Um bom domínio dele facilita o entendimento de disciplinas mais avançadas, como álgebra, estatística e física.

- Desenvolvimento do raciocínio lógico: Resolver problemas com base no sistema decimal contribui para o aprimoramento do raciocínio lógico, habilidade que é aplicada em áreas como programação, engenharia e ciências exatas.

- Conversão entre sistemas numéricos: O conhecimento do sistema decimal é também necessário para lidar com outros sistemas, como o binário (fundamental na computação), o octal e o hexadecimal, importantes em áreas como eletrônica e ciência da computação.

- Educação financeira: Entender o sistema decimal é indispensável para a realização de operações financeiras, como o cálculo de juros, a elaboração de orçamentos e a gestão de impostos, permitindo uma administração mais eficiente das finanças pessoais.

- Habilidade de resolução de problemas: Ao praticar a resolução de problemas no sistema decimal, desenvolvemos capacidades que são valiosas não apenas para a matemática, mas para qualquer situação que exija uma abordagem analítica e estruturada.

Portanto, estudar o sistema de numeração decimal é fundamental para construir uma base matemática sólida e aplicar conceitos numéricos em diversas áreas práticas.

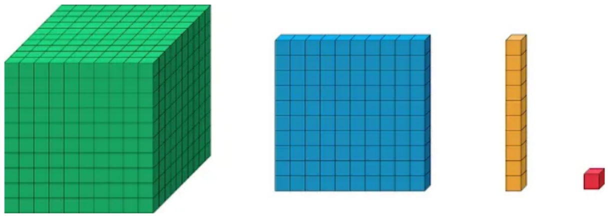
O sistema de numeração decimal é organizado a partir da junção de algarismos indo-arábicos. Com eles, é possível escrever qualquer número para representar qualquer quantidade numérica. São eles:

$$0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9$$

Cada um desses algarismos representam determinada quantidade. Essas quantidades são denominadas de unidades.

Uma das principais características desse sistema é que, a cada 10 unidades, formamos 1 dezena (10 unidades); a cada 10 dezenas, formamos 1 centena (100 unidades); a cada 10 centenas, formamos 1 unidade de milhar (1.000 unidades). Sempre que o algarismo 0 é acrescentado, devemos multiplicar a ordem por 10.

Figura A.1 – Representação milhar, centena, dezena e unidade



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/sistema-de-numeracao-decimal.htm

A.1.1 Ordem e classe no sistema decimal

Dado um número, cada um de seus algarismos representa uma ordem. Sempre devemos começar a análise da direita para esquerda. Para determinar a classe de um número, devemos separá-lo de três em três algarismos. De modo geral, fica assim:
Classe das unidades: 1ª ordem até a 3ª ordem;
Classe dos milhares: da 4ª ordem até a 6ª ordem;
Classe do milhão: da 7ª ordem até a 9ª ordem;

Figura A.2 – Ordem e Classe

9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidade de milhar	Centena	Dezenas	Unidades

Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/sistema-de-numeracao-decimal.htm

A.2 EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Estudar e resolver problemas com expressões numéricas é relevante por diversos motivos:

- Base da matemática: Expressões numéricas são fundamentais para muitas operações matemáticas. Compreender como resolvê-las nos permite dominar operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão, que são essenciais para o entendimento de conceitos mais avançados.

- Desenvolvimento do raciocínio lógico: Resolver expressões numéricas exige o segmento de regras e etapas, como a ordem das operações, o que promove o desenvolvimento do raciocínio lógico e da habilidade de pensar de forma organizada e estruturada.

- Aprimoramento das habilidades de solução de problemas: Trabalhar com expressões numéricas melhora nossa capacidade de identificar, analisar e resolver problemas de forma eficiente, habilidades que são úteis em muitas situações do cotidiano.

- Utilidade prática: Expressões numéricas são frequentemente encontradas em tarefas diárias, como cálculos financeiros, medições, receitas e projetos de construção. Saber resolvê-las facilita a execução dessas tarefas de maneira mais precisa e rápida.

- Preparação para matemática avançada: Estudar expressões numéricas prepara o aluno para conceitos mais complexos, como álgebra, equações e cálculo, que dependem de uma compreensão sólida de operações básicas e da manipulação de números.

- Tomada de decisões precisas: Ser capaz de resolver expressões numéricas rapidamente nos auxilia a tomar decisões informadas, como comparar preços, calcular descontos ou organizar um orçamento de forma eficaz.

Portanto, o estudo e a resolução de expressões numéricas são essenciais para fortalecer habilidades matemáticas, melhorar o raciocínio lógico e lidar com desafios tanto no cotidiano quanto em áreas mais complexas da matemática.

Nelas, aparecem adições, subtrações, multiplicações e divisões. Todas as operações podem acontecer em uma única expressão e, para resolver as expressões numéricas de forma consistente e de forma indiscutível, utilizamos alguns procedimentos. Por exemplo, se em uma expressão numérica aparecerem as quatro operações, devemos resolver a multiplicação ou a divisão primeiramente, na ordem em que elas aparecerem, e, somente depois, a adição e a subtração.

Além disso, temos à disposição símbolos que nos ajudam a indicar quais partes da expressão devem ser analisadas primeiramente: os símbolos ( ), [ ] e { }.

Esses símbolos são chamados de sinais de associação cujos nomes são:

( ) $\rightarrow$ Parênteses

[ ] $\rightarrow$ Colchetes

{ } $\rightarrow$ Chaves

Assim como acontece com as operações, esses sinais de associação possuem uma ordem que deve ser respeitada. Primeiro, resolvemos os parênteses, quando acabarem os cálculos dentro dos parênteses, resolvemos os colchetes; e quando não houver mais o que calcular dentro dos colchetes, resolvemos as chaves.

Exemplo 1

$$\begin{aligned} 10 + (12 - 6) + 7 &= 10 + 6 + 7 \\ &= 16 + 7 \\ &= 23. \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} (40 - 9 \times 4) + 23 &= (40 - 36) + 23 \\ &= 4 + 23 \\ &= 27. \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned} 13 \times 3 - 14 \times 2 &= 39 - 28 \\ &= 11. \end{aligned}$$

Exemplo 4

$$\begin{aligned} [123 + (120 - 65) + 39 \times 3] - 83 &= [123 + 55 + 117] - 83 \\ &= [178 + 117] - 83 \\ &= 295 - 83 \\ &= 212. \end{aligned}$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} (138 - 15 \times 6) + 31 + 60 \times 2 &= (138 - 90) + 31 + 120 \\ &= 48 + 31 + 120 \\ &= 199. \end{aligned}$$

Exemplo 6

$$\{100 - 413 \times (20 - 5 \times 4) + 25\} : 5 = (*).$$

Inicialmente devemos resolver os parênteses, mas como dentro dos parênteses há subtração e multiplicação, vamos resolver a multiplicação primeiro, em seguida, resolvemos a subtração:

$$\begin{aligned} (*) &= \{100 - 413 \times (20 - 5 \times 4) + 25\} : 5 \\ &= \{100 - 413 \times (20 - 20) + 25\} : 5 \\ &= \{100 - 413 \times 0 + 25\} : 5 = (@). \end{aligned}$$

Agora que não temos mais os parênteses, vamos resolver as chaves. Dentro das chaves há subtração, multiplicação e adição, portanto, vamos resolver a multiplicação primeiro, em seguida resolvemos a subtração e a adição, seguindo a ordem em que aparecem.

$$\begin{aligned}(@) &= \{100 - 413 \times 0 + 25\} : 5\\ &= \{100 - 0 + 25\} : 5\\ &= \{100 + 25\} : 5\\ &= 125 : 5\\ &= 25.\end{aligned}$$

Portanto, o resultado da expressão $\{100 - 413 \times (20 - 5 \times 4) + 25\} : 5$ é 25.

Exemplo 7

$$\begin{aligned}27 + \{14 + 3 \times [100 : (18 - 4 \times 2) + 7]\} : 13 &= 27 + \{14 + 3 \times [100 : (18 - 8) + 7]\} : 13\\ &= 27 + \{14 + 3 \times [100 : 10 + 7]\} : 13\\ &= 27 + \{14 + 3 \times [10 + 7]\} : 13\\ &= 27 + \{14 + 3 \times 17\} : 13\\ &= 27 + \{14 + 51\} : 13\\ &= 27 + 65 : 13\\ &= 27 + 5\\ &= 32.\end{aligned}$$

A.3 PARIDADE

Explorar e resolver problemas que envolvem números pares e ímpares, além do conceito de dobro, é importante por diversas razões:

- Entendimento das propriedades numéricas: Conhecer as características dos números pares e ímpares permite identificar padrões e propriedades fundamentais da matemática. Por exemplo, a soma de dois números pares ou dois ímpares resulta sempre em um número par, enquanto a soma de um número par e um ímpar resulta em um número ímpar.

- Solução de problemas básicos: A distinção entre números pares e ímpares é frequentemente utilizada para simplificar e resolver questões matemáticas e lógicas. Dominar a manipulação desses números facilita a resolução de problemas e a compreensão de conceitos mais avançados.

- Eficiência nos cálculos: Trabalhar com o dobro de um número, que consiste em multiplicar por dois, é uma operação básica comum em cálculos diários e problemas matemáticos. Compreender o conceito de dobro é fundamental para resolver problemas que exigem multiplicação rápida e precisa.

- Aplicações práticas: Números pares e ímpares, assim como o conceito de dobro, são úteis em diversas situações práticas, como organizar eventos, dividir itens igualmente ou calcular quantidades dobradas em receitas e medições.

- Desenvolvimento do raciocínio lógico: Contribui para aprimorar o raciocínio lógico e a capacidade de aplicar regras matemáticas, o que é valioso para enfrentar problemas mais complexos.

- Programação e algoritmos: Em ciência da computação, conceitos de números pares e ímpares são frequentemente empregados em algoritmos e programação. Compreender como esses números funcionam é essencial para criar códigos eficientes e resolver problemas computacionais.

Portanto, estudar números pares e ímpares e o conceito de dobro é fundamental para fortalecer a base matemática, desenvolver habilidades de resolução de problemas e aplicar esses conhecimentos em uma variedade de contextos práticos e acadêmicos.

A.3.1 Números pares

Assim como o conjunto dos números naturais é subconjunto dos números inteiros, o conjunto dos números pares também é. Em um primeiro momento, aprendemos a reconhecer os elementos do conjunto dos números pares por meio de brincadeiras. A regra usada é: todo número par termina com 0, 2, 4, 6 ou 8. Dessa maneira, 224, por exemplo, é um número par porque termina com o algarismo 4.

Entretanto, essa é uma consequência da definição formal de número par, que pode ser compreendida como: "Todo número par é múltiplo de 2."

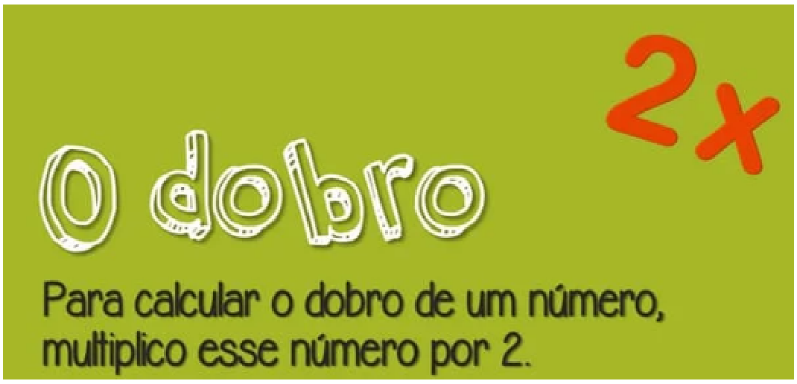
Existem outras definições para os elementos desse subconjunto dos números inteiros, por exemplo: "Todo número par é divisível por 2." A "definição algébrica" usada para reconhecer os elementos desse conjunto é: dado um número p, pertencente ao conjunto dos números inteiros, p será par se: $p = 2n$ em que n é um elemento do conjunto dos números inteiros. Note que essa é a "tradução" da primeira definição em termos algébricos.

Em particular, é comum utilizarmos o termo "dobro": ele é utilizado para descrever uma situação em que uma quantidade é multiplicada por dois, resultando em um valor duas vezes maior. É um conceito matemático fundamental que pode ser aplicado em diversas áreas do conhecimento, como a Matemática, a Física e a Economia.

Na Matemática, por exemplo, o dobro de um número é obtido multiplicando-se esse número por dois. Já na Física, o dobro de uma grandeza pode representar uma quantidade maior de energia ou de massa. Na Economia, o dobro de um valor pode indicar um aumento significativo no preço de um produto ou serviço.

Para entender melhor o conceito de dobro, é possível utilizar alguns exemplos práticos. Suponha que você tenha uma caixa com 10 maçãs e queira calcular o dobro dessa quantidade. Para isso, basta multiplicar o número de maçãs por dois, o que resultaria em 20 maçãs. Outro exemplo seria o dobro de um salário. Se uma pessoa recebe um salário mínimo em 2024, de 1412 reais, o dobro desse valor seria 2824 reais.

Figura A.3 – Dobro



Fonte: Elaborado pelo autor

Existem algumas curiosidades interessantes sobre o conceito de dobro. Por exemplo, o dobro de um número par sempre será um número par, e o dobro de um número ímpar sempre será um número par também. Além disso, o dobro de zero é sempre zero, pois qualquer número multiplicado por zero resulta em zero. Essas propriedades do dobro são fundamentais para a resolução de problemas matemáticos e para o entendimento de conceitos mais avançados.

A.3.2 Números ímpares

Os números ímpares são os elementos do conjunto dos números inteiros que não são pares, ou seja, são os números que terminam com algum dos algarismos 1, 3, 5, 7 ou 9. Formalmente, o conjunto dos números ímpares é um subconjunto dos números inteiros, e a definição de seus elementos é: "Todo número ímpar não é múltiplo de 2."

Os elementos desse subconjunto ainda podem ser definidos: "Todo número ímpar não é divisível por 2". Além disso, também é possível escrever a definição algébrica para os elementos do conjunto dos números ímpares, dado um número inteiro i, ele será ímpar se: $i = 2n+1$, nessa definição, n é um número pertencente ao conjunto dos números inteiros.

A.3.3 Propriedades

As propriedades a seguir são resultados da definição de números pares e ímpares e da ordenação do conjunto dos números inteiros.

Propriedade 1: Entre dois números ímpares consecutivos sempre existe um número par.

É por esse motivo que não precisa haver dúvidas quanto ao número zero. Como ele está entre -1 e 1, que são inteiros ímpares consecutivos, então ele é par.

Propriedade 2: Entre dois números pares consecutivos sempre existe um número ímpar.

Propriedade 3: A soma entre dois números inteiros consecutivos sempre será um número ímpar.

Para mostrar a Propriedade 3, considere n um número inteiro e observe a adição entre $2n$ e $2n+1$, que são os inteiros consecutivos formados por ele:

$$\begin{aligned} 2n + (2n+1) &= 4n + 1 \\ &= 2(2n) + 1. \end{aligned}$$

Sabendo que $2n$ é igual ao número inteiro k, temos:

$$2(2n) + 1 = 2k + 1.$$

que cai justamente na definição de número ímpar.

Propriedade 4: Dados os números a e b consecutivos, com a par e b ímpar, a diferença entre eles sempre será igual a:

$$1, \text{ se } a < b$$

$$-1, \text{ se } a > b.$$

Propriedade 5: A soma entre dois números ímpares, ou entre dois números pares, tem como resultado um número par.

Dados os números $2n$ (par) e $2m$ (par), teremos:

$$2n + 2m = 2(n+m)$$

que é um número par. De forma semelhante, dados $2n+1$ (ímpar) e $2m+1$ (ímpar), teremos:

$$\begin{aligned} (2n+1) + (2m+1) &= 2(n+m) + 2 \\ &= 2(n+m+1). \end{aligned}$$

que é um número par.

Usando cálculos semelhantes, podemos concluir todas as demais propriedades.

Propriedade 6: A soma entre um número par e um número ímpar é sempre igual a um número ímpar.

Propriedade 7: A diferença entre dois números ímpares, ou entre dois números pares, é sempre igual a um número par.

Propriedade 8: O produto entre dois números ímpares é igual a um número ímpar.

Propriedade 9: O produto entre dois números pares terá como resultado um número par.

Propriedade 10: O produto entre um número par e um número ímpar é sempre um número par.

A.4 DIVISÃO COM RESULTADO DECIMAL

Estudar e resolver problemas envolvendo divisões com resultado decimal é fundamental por diversos motivos:

- Uso no cotidiano: Divisões com números decimais ocorrem frequentemente em situações diárias, como calcular preços por unidade, dividir despesas, realizar medições precisas ou distribuir quantidades de maneira exata. Dominar essas operações facilita a execução dessas tarefas de forma precisa.

- Exatidão nos cálculos: Muitas vezes, o resultado de uma divisão não é um número inteiro. Saber lidar com números decimais permite realizar cálculos com maior precisão, o que é especialmente importante em áreas como finanças, engenharia e ciência, onde a exatidão é essencial.

- Educação financeira: Operações com decimais são comuns em cálculos financeiros, como juros, prestações, impostos e descontos. Entender como trabalhar com resultados decimais é fundamental para administrar as finanças de forma eficiente e tomar decisões econômicas corretas.

- Base para matemática avançada: Números decimais estão presentes em muitos conceitos matemáticos mais avançados, como equações, funções e cálculo. Aprender a lidar com divisões decimais desde cedo prepara os estudantes para temas mais complexos no futuro.

- Solução de problemas práticos: Divisões que resultam em números decimais são úteis para resolver problemas que exigem precisão, como medir distâncias, calcular tempos ou dividir recursos de maneira justa e equilibrada.

- Aprimoramento do raciocínio lógico: Resolver divisões com números decimais reforça o raciocínio lógico, uma vez que envolve o entendimento de conceitos como o ajuste da vírgula e a distribuição precisa de valores.

- Análise de dados e estatísticas: Muitos gráficos, relatórios e estatísticas utilizam números decimais. Compreender divisões decimais facilita a análise e interpretação correta desses dados, auxiliando na tomada de decisões informadas.

Portanto, estudar e resolver problemas com divisões que resultam em números decimais é fundamental para aprimorar habilidades matemáticas, garantir precisão nos cálculos e enfrentar desafios práticos e acadêmicos com confiança.

Ao dividir um número inteiro por outro, temos dois caminhos a seguir: o primeiro é a simples divisão euclidiana, o que nos obriga a discorrer sobre os elementos presentes nesta divisão, que é o algoritmo conhecido no Brasil como "método da chave":

Dividendo – É o número que será dividido e geralmente é representado por D;

Divisor – É o número que divide e geralmente é representado por d.

Quociente – É o resultado da divisão. Representado por q.

Resto – Muitas vezes, não é possível realizar uma divisão de forma exata. Nesses casos, sobram quantidades, de certo modo, indivisíveis. Essas quantidades são o resto, que é representado por r.

O procedimento para realizar uma divisão qualquer envolve fortemente a tabuada. Assim, para resolver uma divisão, procure na tabuada do divisor a melhor aproximação para o dividendo. Esse número que se aproxima do dividendo deve ser menor ou igual a ele, mas nunca maior. Exemplo: para dividir 25 por 4, escrevemos $25 : 4$ e procuramos na tabuada do 4 a melhor aproximação de 25. Como $4 \times 6 = 24$, então 6 é a aproximação considerada. O resultado da divisão de 25 por 4, portanto, é 6, e o resto dessa divisão é 1. Em outras palavras:

$$25 = 4 \times 6 + 1$$

No algoritmo da divisão, escreveríamos:

$$\begin{array}{r|l} 2\,5 & \underline{\;4\;} \\ -\,2\,4 & 6 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Essa divisão foi criada para situações em que o dividendo não pode ser dividido, como no caso em que é resultado de um problema prático. Por exemplo, suponha que precisamos deslocar 25 pessoas em carros que possuem apenas 4 lugares. Nesse caso, serão necessários seis carros, se uma pessoa desistir de ir, ou sete carros para caberem todas as pessoas.

Agora, quando a situação é extraída de problemas em que o dividendo representa um objeto que pode ser fracionado, é possível continuar a divisão de 25 por 4. Para tanto, basta adicionar uma vírgula ao quociente. Isso permite adicionar também um zero no resto, como se ele tivesse sido multiplicado por 10. Feito isso, continue a divisão como se o zero tivesse sido obtido do dividendo em um processo comumente conhecido como "baixar".

$$\begin{array}{r|l} 2\,5 & 4 \\ \cline{2-2} -\,2\,4 & 6{,}2 \\ \cline{1-1} 1\,0 & \\ -\,8 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Observe que o resto dessa nova etapa da divisão foi 2. É possível continuar a divisão, mas não é possível colocar outra vírgula no dividendo, afinal, números decimais possuem apenas uma vírgula. Mas, como o resto é menor que o dividendo, basta colocar mais um zero nesse resto (como se o tivesse multiplicado por 10) e prosseguir dividindo normalmente.

$$\begin{array}{r|l} 2\,5 & 4 \\ \cline{2-2} -\,2\,4 & 6{,}2\,5 \\ \cline{1-1} 1\,0 & \\ -\,8 & \\ \cline{1-1} 2\,0 & \\ -\,2\,0 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Encontrando resto zero, a divisão foi finalizada, e o resultado exato da divisão de 25 por 4 é 6,25.

É de extrema importância lembrar que nem sempre a divisão proposta terá apenas duas casas decimais no resultado. Existem números que possuem infinitas casas decimais, como é o caso do resultado da divisão de 10 por 3, que é 3,333.... Aqueles que prosseguissem em divisões como essa jamais as terminariam. Portanto, para saber dividir bem, é importante considerar quantas casas decimais são relevantes para o resultado da divisão.

A.5 FRAÇÕES

Estudar e resolver problemas envolvendo frações e operações com números fracionários é essencial por diversas razões:

- Entendimento de partes e proporções: As frações representam porções de um todo, sendo úteis para compreender divisões proporcionais em várias situações, como repartir alimentos, calcular áreas ou distribuir recursos de forma justa.

- Uso em atividades cotidianas: Frações fazem parte do nosso dia a dia, aparecendo em receitas, medições de tempo, conversões de unidades e cálculos financeiros. Dominar frações permite executar essas tarefas com precisão e eficiência.

- Desenvolvimento do raciocínio lógico: Trabalhar com frações melhora o raciocínio matemático, já que as operações com números fracionários requerem o uso de regras específicas, como a busca do denominador comum, a multiplicação cruzada e a simplificação.

- Interpretação de dados e estatísticas: Frações são frequentemente usadas em gráficos, tabelas e relatórios estatísticos. Saber lidar com elas ajuda a interpretar informações quantitativas e tomar decisões informadas.

- Educação financeira: Muitas operações financeiras, como cálculos de juros, prestações e orçamentos, envolvem frações. Saber utilizá-las é fundamental para realizar cálculos financeiros precisos e gerenciar bem as finanças.

- Versatilidade nas operações matemáticas: Frações proporcionam uma forma flexível de trabalhar com números, especialmente quando os inteiros não são suficientes para expressar uma quantidade exata, sendo úteis em medições ou distribuições parciais.

Assim, estudar frações e operações com números fracionários é indispensável para uma sólida compreensão matemática, resolução de problemas cotidianos e preparação para conceitos mais avançados e amplamente aplicáveis em diversas áreas.

O numerador e o denominador são os termos de uma fração. O denominador indica em quantas partes iguais a unidade foi dividida, enquanto o numerador indica quantas dessas partes foram consideradas.

A simplificação de frações é uma operação que não muda o valor da fração, mas altera o numerador e o denominador para que a fração seja escrita de uma maneira mais simples. Isso deve ser feito dividindo os termos da fração por um mesmo número inteiro maior que 1. Quando não é mais possível utilizar o mesmo número para realizar essa operação, significa que a fração chegou à sua forma mais simples. Por exemplo, $\frac{3}{4}$ é uma fração reduzida, pois não há nenhum outro número além de 1 capaz de dividir 3 e 4 ao mesmo tempo.

Agora observe a fração $\frac{2}{4}$. Ela pode ser simplificada, dividindo o numerador e o denominador por 2, e terá como resultado $\frac{1}{2}$. Ou seja, para realizar a simplificação basta dividir o numerador e o denominador pelo mesmo número natural, diferente de um, até chegar a uma fração que não mais seja simplificável.

Exemplo 10:

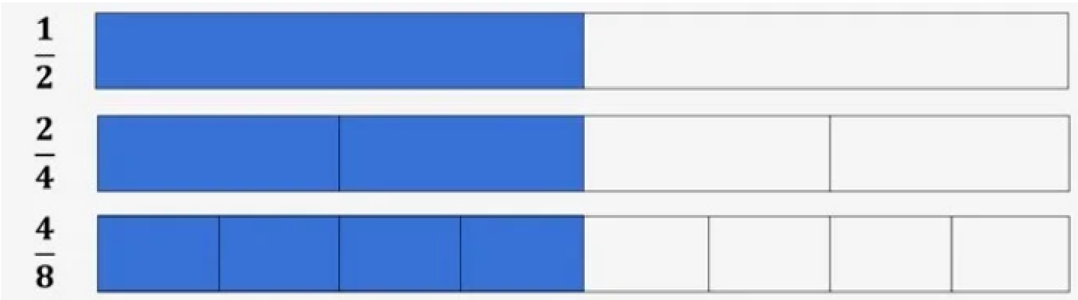
$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4}.\frac{2}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.\frac{2}{2} = \frac{1}{2}$$

Observe que realizando a divisão do numerador pelo denominador, o mesmo resultado é encontrado em todas as frações.

$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Isso ocorre porque se tratam de frações equivalentes, ou seja, elas são aparentemente diferentes, mas apresentam o mesmo resultado. Confira a representação das frações na imagem a seguir.

Figura A.4 – Frações equivalentes



Fonte: https://https://www.todamateria.com.br/simplificacao-de-fracao/

A.5.1 Adição

Para somar frações é necessário identificar se os denominadores são iguais ou diferentes. Se forem iguais, basta repetir o denominador e somar os numeradores. Contudo, se os denominadores são diferentes, antes de somar, devemos transformar as frações em frações equivalentes de mesmo denominador.

Neste caso, calculamos o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre os denominadores das frações que queremos somar. Esse valor passa a ser o novo denominador das frações. Além disso, devemos dividir o MMC encontrado pelo denominador e o resultado multiplicamos pelo numerador de cada fração. Esse valor passa a ser o novo numerador.

Exemplo 11:

$$\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5+2}{9}=\frac{7}{9}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{3\times 1+5\times 2}{15}=\frac{3+10}{15}=\frac{13}{15}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{10\times 1+15\times 1+6\times 2}{30}=\frac{10+15+12}{30}=\frac{37}{30}.$$

A.5.2 Subtração

Para subtrair frações temos que ter o mesmo cuidado que temos na soma, ou seja, verificar se os denominadores são iguais. Se forem, repetimos o denominador e subtraímos os numeradores. Se forem diferentes, fazemos os mesmos procedimentos da soma, para obter frações equivalentes de mesmo denominador, aí sim podemos efetuar a subtração.

Exemplo 12:

$$\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$$
$$\frac{6}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3 \times 6 - 7 \times 1}{21} = \frac{18 - 7}{21} = \frac{11}{21}.$$

A.5.3 Multiplicação

A multiplicação de frações é feita multiplicando os numeradores entre si, bem como seus denominadores.

Exemplo 13:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3 \times 1}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$$
$$\frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{8 \times 5} = \frac{21}{40}$$
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{1 \times 1 \times 5}{2 \times 3 \times 7} = \frac{5}{42}.$$

A.5.4 Divisão

Na divisão entre duas frações, multiplica-se a primeira fração pelo inverso da segunda, ou seja, inverte-se o numerador e o denominador da segunda fração.

Exemplo 14:

$$\frac{3}{4} : \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{15}{8} : 3 = \frac{15}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$
$$\frac{3}{8} : \frac{15}{2} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{15} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}.$$

A.6 MÉDIA ARITMÉTICA E PORCENTAGEM

Estudar e resolver questões de média aritmética e de porcentagem é importante por várias razões:

- Uso no dia a dia: A média aritmética e a porcentagem são amplamente aplicadas em situações cotidianas. A média é utilizada para avaliar notas escolares, medir desempenhos e interpretar resultados. A porcentagem aparece em situações como descontos, aumentos de preços, juros e outras questões financeiras.

- Interpretação de dados: A média aritmética facilita a análise de grandes quantidades de dados, oferecendo uma visão geral. Por sua vez, a porcentagem torna mais simples a comparação entre valores e a avaliação de variações proporcionais, como crescimento ou redução em diferentes cenários.

- Educação financeira: Resolver problemas envolvendo porcentagem é crucial para entender aspectos financeiros, como o cálculo de juros, impostos, investimentos e empréstimos, sendo essencial para a gestão eficiente das finanças pessoais e a tomada de decisões econômicas.

- Base para outras disciplinas: A média e a porcentagem servem de base para conceitos mais avançados em áreas como estatística, economia e ciências sociais, sendo ferramentas úteis tanto em pesquisas acadêmicas quanto no mercado de trabalho.

- Tomada de decisões conscientes: A habilidade de calcular médias e porcentagens permite interpretar corretamente gráficos, tabelas e relatórios, o que é de suma importância para fazer escolhas em áreas como saúde, educação, economia e planejamento pessoal.

- Desenvolvimento de habilidades analíticas: O estudo desses conceitos fortalece o raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas, habilidades essenciais em diversas áreas da vida, seja na escola, no trabalho ou no dia a dia.

Portanto, entender e dominar a média aritmética e a porcentagem é fundamental para enfrentar desafios práticos do cotidiano, bem como questões mais complexas no campo financeiro, acadêmico e profissional.

A Média Aritmética de um conjunto de dados é obtida somando todos os valores e dividindo o valor encontrado pelo número de dados desse conjunto. É muito utilizada em estatística como uma medida de tendência central. Pode ser simples, onde todos os valores possuem a mesma importância, ou ponderada, quando considera pesos diferentes aos dados.

A.6.1 Média Aritmética Simples

Esse tipo de média funciona de forma mais adequada quando os valores são relativamente uniformes. Por ser insensível aos dados, nem sempre fornece os resultados mais adequados, pois todos os dados possuem a mesma importância (peso).

A fórmula para o cálculo da média aritmética simples é:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

em que:

- M: média aritmética simples

- n: quantidade de dados

- x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n: valores dos dados.

Exemplo 8: Sabendo que as notas de um aluno foram: 8,2; 7,6; 10,0; 9,5; 6,7, qual a média aritmética simples que ele obteve no curso?

$$\text{Média} = \frac{8{,}2 + 7{,}6 + 10 + 9{,}5 + 6{,}7}{5} = \frac{42}{5} = 8{,}4$$

A.6.2 Média Aritmética Ponderada

A média aritmética ponderada é calculada multiplicando cada valor do conjunto de dados pelo seu peso. Depois, encontra-se a soma desses valores que será dividida pela soma dos pesos, conforme a expressão:

$$M_p = \frac{p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + p_3 \times x_3 + ... + p_n \times x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}$$

em que:

- M_p: Média aritmética ponderada
- x_1, x_2,...,x_n: valores dos dados
- p_1, p_2,..., p_n: pesos.

Exemplo 9: Considerando as notas e os respectivos pesos de cada uma delas, indique qual a média ponderada que o aluno obteve no curso:

Disciplina	**Nota**	**Peso**
Biologia	8,2	3
Filosofia	10,0	2
Física	9,5	4
Geografia	7,8	2
História	10,0	2
Língua Portuguesa	9,5	3
Matemática	6,7	4

$$\begin{aligned} M_p &= \frac{3 \times 8{,}2 + 2 \times 10 + 4 \times 9{,}5 + 2 \times 7{,}8 + 2 \times 10 + 3 \times 9{,}5 + 4 \times 6{,}7}{3 + 2 + 4 + 2 + 2 + 3 + 4} \\ &= \frac{24{,}6 + 20 + 38 + 15{,}6 + 20 + 28{,}5 + 26{,}8}{20} \\ &= \frac{173{,}5}{20} \\ &= 8{,}675. \end{aligned}$$

A.6.3 Porcentagem

A porcentagem é empregada nas relações comerciais e em várias outras situações do cotidiano. É bastante comum ver, em vitrines de lojas ou em contas de energia, por exemplo, o uso do símbolo de porcentagem para passar alguma informação. Chamamos de porcentagem qualquer razão que tenha como denominador o número 100, e utilizamo-la para comparar a partes de um todo.

Para representar a porcentagem de um número, é bastante comum escrevermos ele seguido do símbolo %, ou seja, a representação 5%, por exemplo, é lida como cinco por cento. Considerando-se essa representação pelo símbolo da porcentagem, existem três formas de representar-se a porcentagem: a percentual, a fracionária e a decimal.

Representação percentual

É a representação que utiliza o símbolo %, como nos exemplos a seguir:

→ 20% (lê-se: vinte por cento)

→ 5% (lê-se: cinco por cento)

→ 13,25% (lê-se: treze vírgula vinte e cinco por cento).

Representação fracionária

Outra representação bastante comum é a fracionária, utilizada para cálculos envolvendo porcentagem. Basta escrever uma fração do número sobre 100:

$$20\% \rightsquigarrow \frac{20}{100}$$

$$5\% \rightsquigarrow \frac{5}{100}$$

$$13{,}25\% \rightsquigarrow \frac{13{,}25}{100}.$$

Representação decimal

Também pode ser utilizada para realização de cálculos, como vimos, 20% significa a divisão de 20 por 100, então, para representar-se essa porcentagem na forma decimal, basta efetuar a divisão:

$$20\% \rightsquigarrow 20 : 100 = 0{,}20 = 0{,}2$$

$$5\% \rightsquigarrow 5 : 100 = 0{,}05$$

$$13{,}25\% \rightsquigarrow 13{,}25 : 100 = 0{,}1325$$

Exemplo 15: Calcule 20% de 400.

Método 1:

Para isso, podemos realizar a representação fracionária de 20% e, posteriormente, multiplicar essa fração por 400:

$$20\% \rightsquigarrow \frac{20}{100}$$
$$\frac{20}{100} \times 400 = \frac{8000}{100} = 80$$

Método 2:

Caso queira, em vez de representar 20% como uma fração, podemos utilizar a representação decimal, ficando assim:

$$20\% \rightsquigarrow 0{,}2$$
$$0{,}2 \times 400 = 80$$

O que significa que 80 corresponde a 20% de 400.