



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT
CAMPUS DE FLORIANÓPOLIS

**Exploração da Sequência de Fibonacci com Geometria Dinâmica:
Desenvolvimento de Ferramentas e o Teorema de Zeckendorf**

Matheus Pimenta Carracelas
Florianópolis/SC

2024



EXPLORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI COM GEOMETRIA DINÂMICA:
DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTAS E O TEOREMA DE ZECKENDORF

Matheus Pimenta Carracelas

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Raphael da Hora

Florianópolis/SC

2024

Carracelas, Matheus Pimenta

Exploração da sequência de Fibonacci com geometria dinâmica: desenvolvimento de ferramentas e o teorema de Zeckendorf / Matheus Pimenta Carracelas ; orientador, Raphael Falcao da Hora, 2024.

34 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Sequência de Fibonacci. 3. Geometria Dinâmica. 4. Software interativo. 5. Ferramentas educativa. I. Hora, Raphael Falcao da . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

Matheus Pimenta Carracelas

**Exploração da Sequência de Fibonacci com Geometria Dinâmica:
Desenvolvimento de Ferramentas e o Teorema de Zeckendorf**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Raphael da Hora, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) Leandro Batista Morgado, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) Silvia Martini de Holanda, Dra.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) Felipe Lopes Castro, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof.(a) Raphael da Hora, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2024.

Dedico esta dissertação aos meus alunos , cuja curiosidade e entusiasmo foram fontes constantes de inspiração, aos meus professores que com sua sabedoria, paciência e dedicação me guiaram ao longo desta jornada acadêmica e à minha família, pelo amor incondicional, apoio e compreensão durante toda esta jornada.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Raphael Falcão da Hora, por sua instrução, apoio incondicional e valiosos conselhos ao longo de toda a realização desta dissertação. Sua expertise e dedicação foram essenciais para o desenvolvimento e sucesso deste trabalho.

Sou grato à UFSC, não apenas pela infraestrutura e recursos oferecidos, mas principalmente pelos professores e colegas que tornaram essa jornada inesquecível. Agradeço especialmente aos meus colegas de mestrado, Ana Paula, Andrey e Mayara, pela parceria, pela troca de ideias e por terem formado um quarteto tão especial durante o curso.

Um agradecimento especial aos meus familiares, que sempre me incentivaram e apoiaram ao longo desta jornada. Sem o apoio e compreensão de Antônio Miguel Carracelas Soto e Teresa Lucia Pimenta Carracelas, este trabalho não teria sido possível. Agradeço também meu tio Sérgio Eloy Pimenta por me apresentar o livro "Tio Petros e a Conjectura de Goldbach" (DOXIADIS, 2000) e dar início ao meu amor pela matemática.

Sou profundamente grato à minha companheira, Maria Eduarda Pierri, por seu amor, apoio e compreensão inabaláveis ao longo desta jornada. Sua paciência e encorajamento foram fundamentais para que eu pudesse concluir esta dissertação. Agradeço por estar sempre ao meu lado, oferecendo palavras de incentivo nos momentos difíceis e celebrando cada pequena conquista comigo. Esta dissertação é tanto minha quanto sua, pois sem você, este trabalho não teria sido possível.

Gostaria também de expressar minha gratidão aos meus amigos professores Mateus Patrício, Gabriel Graciani, Yuri Lorscheider, Pedro Lourenço Mendes Júnior e Andresa de Liz. Agradeço pela amizade, pelo apoio e pelas valiosas trocas de ideias que enriqueceram minha trajetória acadêmica. Suas contribuições e companheirismo foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho e para meu crescimento como profissional e como pessoa.

"Arquimedes será lembrado quando Ésquilo tiver sido esquecido, porque as línguas morrem, mas as ideias matemáticas, não. 'Imortalidade' talvez seja uma palavra tola, mas ao matemático, provavelmente, é dada a melhor oportunidade de descobrir seu significado."

Godfrey Harold Hardy

Resumo

A Sequência de Fibonacci é um tópico de pesquisa contínua e profundo em diversas universidades ao redor do mundo, devido à sua importância e aplicações em vários campos da matemática e ciências naturais. Nesta dissertação, exploramos aspectos elementares e interessantes dos números de Fibonacci, com foco nas propriedades fundamentais e suas aplicações em problemas matemáticos. O principal objetivo deste trabalho é fornecer ferramentas interativas e dinâmicas que facilitem o ensino e a compreensão dos números de Fibonacci. Desenvolvemos e avaliamos ferramentas em softwares educativos que incorporam visualizações interativas e métodos de aprendizado baseados em tecnologia, alinhadas com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para ajudar estudantes e pesquisadores a explorar e entender as propriedades e aplicações da sequência de Fibonacci de maneira mais envolvente e eficaz. Além disso, investigamos a relação entre a sequência de Fibonacci e um jogo de azar, um campo onde essas propriedades matemáticas podem ter aplicações inesperadas. Finalmente, nos transportamos para um cenário lúdico e pedagógico onde o teorema de maior complexidade do trabalho é apresentado: o Teorema de Zeckendorf. Esta dissertação apresenta uma contribuição significativa para a educação matemática, oferecendo novas ferramentas interativas que facilitam o aprendizado dos números de Fibonacci e atendem aos requisitos da BNCC. A pesquisa também destaca a relevância prática da sequência em um jogo de azar e oferece uma abordagem inovadora para o ensino do Teorema de Zeckendorf. A integração de tecnologias educativas e a exploração de conexões inesperadas entre matemática e jogos proporcionam novas perspectivas para o ensino e a aplicação da teoria dos números de Fibonacci.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci. Ferramentas educativas. Software interativo. Visualização matemática. Jogos de azar. Teorema de Zeckendorf. BNCC.

Abstract

The Fibonacci Sequence is a topic of ongoing and profound research at universities worldwide due to its significance and applications across various fields of mathematics and natural sciences. This dissertation explores fundamental and intriguing aspects of Fibonacci numbers, focusing on their essential properties and applications to mathematical problems. The primary goal of this work is to provide interactive and dynamic tools that facilitate the teaching and understanding of Fibonacci numbers. We have developed and evaluated educational software tools incorporating interactive visualizations and technology-based learning methods, aligned with the guidelines of the Base Nacional Comum Curricular (BNCC), to help students and researchers explore and comprehend the properties and applications of the Fibonacci sequence in a more engaging and effective manner. Additionally, we investigate the relationship between the Fibonacci sequence and a game of chance, an area where these mathematical properties may have unexpected applications. Finally, we transition to a playful and pedagogical scenario where the most complex theorem of the work is presented: the Zeckendorf Theorem. This dissertation makes a significant contribution to mathematical education by offering new interactive tools that enhance the learning of Fibonacci numbers and comply with BNCC requirements. The research also highlights the practical relevance of the sequence in a game of chance and provides an innovative approach to teaching the Zeckendorf Theorem. The integration of educational technologies and the exploration of unexpected connections between mathematics and games offer new perspectives for teaching and applying the theory of Fibonacci numbers.

Keywords: Fibonacci Sequence. Educational Tools. Interactive Software. Mathematical Visualization. Games of Chance. Zeckendorf Theorem. BNCC.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Leonardo Fibonacci	1
Figura 2 – Evolução de um casal de coelhos.	2
Figura 3 – Primeira geração de ancestrais de Leonardo.	4
Figura 4 – Árvore de rastreamento genético.	5
Figura 5 – Gráfico de convergência da Razão Áurea	12
Figura 6 – Segmento dividido em média e extrema razão.	12
Figura 7 – Retângulo Áureo.	14
Figura 8 – Triângulo Áureo	15
Figura 9 – Triângulo Áureo com $x = 1$	16
Figura 10 – Pentágono Regular de lado 1	16
Figura 11 – Pentágono Regular com triângulo evidenciado	17
Figura 12 – Relação de Stifel	20
Figura 13 – Diagonais Ascendentes do Triângulo de Pascal	21
Figura 14 – Soma da sétima diagonal ascendente do Triângulo de Pascal	22
Figura 15 – Exemplos de situações do jogo Cara-Cara	23
Figura 16 – As probabilidades de KK , KC e C são 25%, 25% e 50%, respectivamente	24
Figura 17 – Construção das sequências sucessos de seis lançamentos	26

Lista de tabelas

Tabela 1 – Quantidade de coelhos no ano em questão.	3
Tabela 2 – Quantidades de cromossomos X na primeira geração de ancestrais de Leonardo.	4
Tabela 3 – Quantidades de cromossomos X na segunda geração de ancestrais de Leonardo.	5
Tabela 4 – Número de sucessos e Sequência de Fibonacci	26
Tabela 5 – Base de indução	32

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	O problema dos coelhos	2
1.2	Rastreamento genético e a Sequência de Fibonacci	4
1.2.1	Padrão observado	5
1.3	Uma outra maneira de definir a Sequência de Fibonacci	6
2	PROPRIEDADES MATEMÁTICAS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI	8
2.1	Somas de termos da Sequência de Fibonacci - Aritmética	8
2.1.1	Soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci	8
2.1.2	A soma dos quadrados dos n primeiros termos da Sequência de Fibonacci	9
2.2	Razão Áurea - Geometria	10
2.2.1	Um limite	10
2.2.2	Golden Section	12
2.2.3	Retângulo Áureo	14
2.2.4	Triângulo Áureo	15
2.2.5	Conexão com pentágonos	16
2.3	O Triângulo de Pascal - Análise Combinatória	17
2.3.1	Relação com os números de Fibonacci	21
3	JOGO DE CARA OU COROA COM PADRÕES DE FIBONACCI	23
3.1	O jogo Cara-Cara	23
3.2	A conexão com números de Fibonacci	25
3.2.1	O motivo por trás do resultado	26
3.2.2	Valor exato para o retorno médio	27
4	OS PESOS DE LEONARDO FIBONACCI	28
4.1	Fibonacci sempre conseguirá realizar seu trabalho?	28
4.2	Caso Leonardo perca um de seus pesos, ainda conseguirá realizar seu trabalho?	29
4.3	Caso Leonardo perca dois de seus pesos, ainda conseguirá realizar seu trabalho?	30
4.4	Leonardo precisa pesar com o menor número de pesos possível	31
4.4.1	O Teorema de Zeckendorf	32
5	CONCLUSÃO	34
	REFERÊNCIAS	35

1 Introdução

Leonardo Fibonacci, um inovador matemático do século XIII, destacou-se como uma chama solitária de genialidade matemática durante a Idade Média. Nascido em Pisa, na Itália, ele também era conhecido como Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa. Enquanto seu pai trabalhava como coletor de alfândega em Bugia, na costa norte da África (atual Bougie, na Argélia), Fibonacci foi apresentado ao sistema de numeração hindu-arábico e aos métodos de cálculo por um professor mouro.

Após extensas viagens e estudos aprofundados sobre sistemas de cálculo, Fibonacci escreveu, em 1202, o *Liber Abaci*, no qual explicou os numerais hindu-arábicos e como eles podem ser usados para calcular. Este famoso livro foi fundamental para substituir o desajeitado sistema de numeração romano e introduzir métodos de cálculo semelhantes aos usados hoje. Ele também abordou tópicos de geometria e álgebra.

Embora tenha escrito sobre uma variedade de tópicos matemáticos, Fibonacci é lembrado especialmente pela sequência de números...

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

para a qual seu nome foi aplicado. Esta sequência, ainda hoje, é objeto de pesquisa contínua em diversas universidades ao redor do mundo. Vamos estudar alguns aspectos elementares e interessantes dos números de Fibonacci neste trabalho de mestrado.



Figura 1 – Leonardo Fibonacci

1.1 O problema dos coelhos

Um homem tem um casal de coelhos adultos em um local fechado no dia primeiro de Janeiro e deseja saber quantos coelhos serão gerados a partir desse casal inicial ao longo de um ano, considerando que os coelhos começam a se reproduzir um mês após o nascimento. O texto acima é uma tradução livre do famoso problema dos coelhos, proposto por Leonardo Fibonacci em sua obra-prima, o *Liber Abaci – O Livro do Cálculo*. Esse parágrafo servirá como base para toda esta seção. Para resolver esse problema devemos fazer algumas ressalvas e considerações iniciais.

- Os coelhos podem e conseguem reproduzir-se após o primeiro mês de nascimento;
- Nenhum coelho morre no processo;
- Existem sempre machos e fêmeas em número suficiente que possibilite essa reprodução;
- Cada casal gera outro casal de coelhos.

Vamos denotar por A o número de pares de coelhos adultos e B o número de pares de coelhos filhotes. Coelhos filhotes possuem menos de um mês de idade e coelhos adultos possuem idade maior ou igual a um mês. Desta forma, em primeiro de Janeiro temos apenas um A . Em primeiro de Fevereiro temos um A e um B . Em primeiro de Março teremos o A original, um novo B e o antigo B já se tornou A . A partir dessa lógica, é possível prever a árvore de descendência de um jovem casal de coelhos.

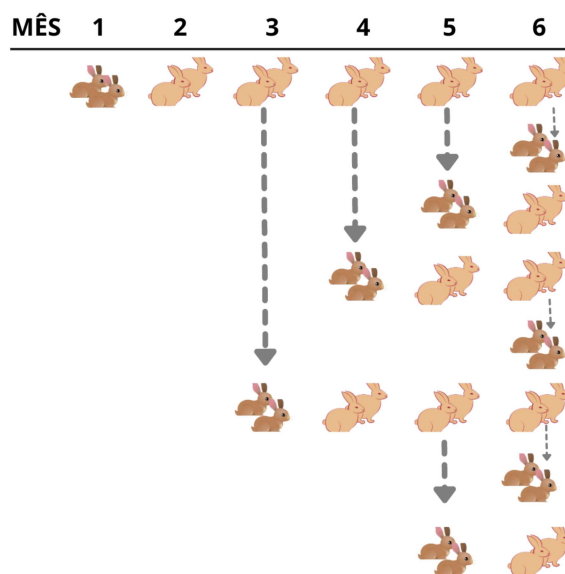


Figura 2 – Evolução de um casal de coelhos.

Na figura acima, cada linha representa a evolução de um casal de coelhos ao longo do tempo e as setas representam os nascimentos de novos coelhos filhotes (B). Podemos assim, contemplar a sequência formada pelo número de casais ao longo do tempo. Olhando coluna por coluna, a árvore nos dá os valores dos seis primeiros meses: 1, 1, 2, 3, 5, 8... Fibonacci observou que, a cada mês, a população de coelhos era igual a soma dos dois meses anteriores:

$$1 + 1 = 2; \quad 1 + 2 = 3; \quad 2 + 3 = 5; \quad 3 + 5 = 8$$

Note que, a cada mês, o número de casais que nasce, que se soma aos coelhos já existentes, é igual ao número de casais em idades de procriar do mês anterior, ou seja, igual ao número de casais que já haviam nascido dois meses antes. Completemos a tabela da quantidade de coelhos neste ano.

	Mês	Número de A	Número de B	Total de pares
1	Janeiro	1	0	1
2	Fevereiro	1	1	2
3	Março	2	1	3
4	Abril	3	2	5
5	Maiο	5	3	8
6	Junho	8	5	13
7	Julho	13	8	21
8	Agosto	21	13	34
9	Setembro	34	21	55
10	Outubro	55	34	89
11	Novembro	89	55	144
12	Dezembro	144	89	233
13	Janeiro	233	144	377

Tabela 1 – Quantidade de coelhos no ano em questão.

Portanto, respeitando as condições estabelecidas pelo problema, o número de pares de coelhos depois de um ano seria 377. (HENSLEY; JR., 1969) Podemos fazer algumas considerações a respeito da tabela construída acima.

- É possível perceber que o número de A 's em fevereiro será 377. Desses, 376 eram originalmente B 's descendentes do primeiro casal adulto.
- Se somarmos todos os elementos da coluna *Número de B* teremos:

$$S = 0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 = 376$$

e assim, é possível perceber que o resultado obtido é exatamente uma unidade a menos do valor que obteríamos ao somar todas as doze entradas da coluna *Número de A*. Esse é um caso específico de um resultado geral que será demonstrado no presente trabalho.

1.2 Rastreamento genético e a Sequência de Fibonacci

Outro problema interessante é o rastreamento da linhagem ancestral do cromossomo X de um homem específico, identificando e contabilizando quantos antepassados transmitiram esse cromossomo ao longo de cada geração até chegar ao indivíduo em questão. Este processo permitirá compreender a transmissão genética do cromossomo X e mapear a herança genética através das gerações.

Um indivíduo do sexo masculino possui um cromossomo X, recebido de sua mãe e um cromossomo Y, recebido de seu pai. Vamos nomear esse indivíduo do sexo masculino por Leonardo.

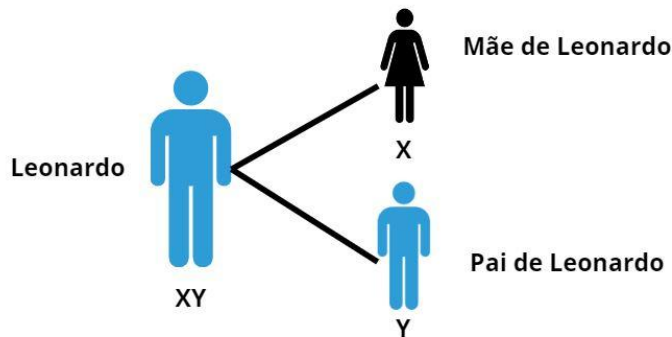


Figura 3 – Primeira geração de ancestrais de Leonardo.

Vamos analisar as duas gerações citadas e contabilizar quantos antepassados transmitiram o cromossomo X. Leonardo é a origem do seu próprio cromossomo X. Portanto, na primeira geração, temos apenas um cromossomo X, o seu. Na segunda geração, a dos pais de Leonardo, ele recebe um cromossomo X de sua mãe, mas não de seu pai. Portanto, nesta geração, temos apenas um cromossomo X.

Rastreamento do cromossomo X	
Geração	Cromossomos X
1	1
2	1

Tabela 2 – Quantidades de cromossomos X na primeira geração de ancestrais de Leonardo.

A mãe de Leonardo recebeu um cromossomo X de sua própria mãe, a avó materna, e um de seu pai, o avô materno, portanto na terceira geração temos dois membros com aquele cromossomo X e o terceiro termo da nossa sequência é igual a 2.

Rastreamento do cromossomo X	
Geração	Cromossomos X
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5

Tabela 3 – Quantidades de cromossomos X na segunda geração de ancestrais de Leonardo.

1.2.1 Padrão observado

A partir deste ponto, podemos identificar o seguinte padrão para as gerações subsequentes: sempre que temos um homem, a geração seguinte terá uma mulher transmitindo o cromossomo X. Quando temos uma mulher, a geração seguinte terá tanto um homem quanto uma mulher transmitindo o cromossomo X.

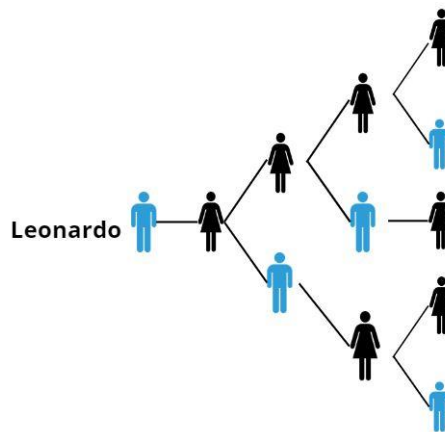


Figura 4 – Árvore de rastreamento genético.

Com base nisso, nota-se que: Para cada pessoa em uma geração n , existe uma mulher na geração $n-1$. Ou seja, o número de ancestrais com o cromossomo X de Leonardo em uma determinada geração é igual ao número de mulheres com esse cromossomo na geração subsequente. Portanto, basta estudar o comportamento do número de mulheres, e o que for deduzido para elas será válido para o total de ancestrais.

Afirmção: Seja a o número de mulheres em uma geração n , b o número de mulheres na geração $n-1$ e c o número de homens na geração $n-1$. Portanto,

$$a = b + c$$

E como c é também a quantidade de mulheres na geração $n-2$ temos:

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$$

em que M_n representa o número de mulheres na geração n . Acontece que esse é o exato padrão da Sequência de Fibonacci e como os dois primeiros termos da sequência são iguais a 1, podemos afirmar que o número de ancestrais com cromossomo X em cada geração é dado exatamente pela sequência de Fibonacci.

Exemplo 1. O número de ancestrais de Leonardo com cromossomo X na sétima geração é igual a 13, uma vez que $F_7 = 13$.

Observação: Note que isso assume que todos os ancestrais de um descendente são independentes. No entanto, se qualquer genealogia for rastreada longe o suficiente no tempo, ancestrais começam a aparecer em múltiplas linhas da genealogia, até que, eventualmente, um fundador da população apareça em todas as linhas da genealogia.

1.3 Uma outra maneira de definir a Sequência de Fibonacci

O Número de Fibonacci F_m , para um número inteiro e positivo m , pode ser definido como o número de maneiras de escrever m como a soma de uma sequência de termos, cada um igual a 1 ou igual a 2.

Exemplo 2. O número 4 pode ser expresso de qualquer uma das maneiras abaixo

- $4 = 2 + 2$
- $4 = 1 + 2 + 1$
- $4 = 1 + 1 + 1 + 1$
- $4 = 2 + 1 + 1$
- $4 = 1 + 1 + 2$

dessa forma, o número 4 pode ser escrito de cinco maneiras distintas, isto é, $F_4 = 5$.

O padrão sequencial associado aos números de Fibonacci satisfaz a seguinte relação de recorrência.

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$$

para $m \geq 3$. Para verificar se o padrão se mantém, vamos considerar todas as sequências de 1s e 2s com soma m e separá-las em duas classes. A primeira classe será formada por todas as sequências terminadas em 1 e a segunda classe conterá todas as sequências terminadas em 2, como apresentado nas listas abaixo.

Terminadas em 1

$$2 + 1 + \cdots + 2 + 1 = m$$

$$1 + 2 + \cdots + 1 + 1 = m$$

⋮

$$1 + 1 + \cdots + 1 + 1 = m$$

Terminadas em 2

$$1 + 2 + \cdots + 1 + 2 = m$$

$$2 + 2 + \cdots + 1 + 2 = m$$

⋮

$$1 + 1 + \cdots + 1 + 2 = m$$

Perceba que, pela definição apresentada de Número de Fibonacci, na primeira classe temos exatamente F_{m-1} seqüências, uma vez que a soma de todos os termos, com exceção do último, é igual a $m - 1$.

Terminadas em 1

$$F_{m-1} \text{ seqüências } \left\{ \begin{array}{l} 2 + 1 + \cdots + 2 = m - 1 \\ 1 + 2 + \cdots + 1 = m - 1 \\ \vdots \\ 1 + 1 + \cdots + 1 = m - 1 \end{array} \right.$$

De maneira análoga, existem F_{m-2} seqüências na segunda classe. Como não existe intersecção entre as duas classes e todas as seqüências pertencem a uma das classes, a relação de recorrência prossegue.

$$F_{m-1} + F_{m-2} = F_m$$

Pergunta: Usando apenas os números 1 e 2, quantas seqüências podem ser formadas de modo que a soma de todos os elementos tenha como resultado o número 10? Observe alguns exemplos de seqüências diferentes.

- $2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$
- $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$
- $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$
- $2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$

Resposta: Pela definição de Número de Fibonacci apresentada nesta seção, basta calcular o décimo número da Sequência de Fibonacci, $F_{10} = 34$ maneiras diferentes.

Observação I: Perceba que nesta forma de se definir a Sequência de Fibonacci estamos considerando $F_1 = 1$ e $F_2 = 2$, diferentemente da maneira usual que teríamos $F_1 = F_2 = 1$. Com isso, todos os elementos apresentados nesta subseção estão com os índices subtraídos de uma unidade em relação a forma usual de representação.

Observação II: A definição alternativa da Sequência de Fibonacci é discutida em (CAMERON; FON-DER-FLAASS, 1994).

2 Propriedades Matemáticas da Sequência de Fibonacci

Neste capítulo, vamos explorar propriedades algébricas e geométricas da Sequência de Fibonacci que serão úteis em capítulos seguintes. Também faremos comparações com tópicos do ensino básico de matemática no Brasil, para mostrar como a sequência de Fibonacci se relaciona com o que é ensinado nas escolas.

2.1 Somas de termos da Sequência de Fibonacci - Aritmética

Segundo a habilidade da BNCC (EF07MA16), o aluno deve ser capaz de reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes. A ideia aqui é utilizar como base a Sequência de Fibonacci e as suas propriedades para trabalhar essa habilidade. (CLANCY, 2007)

2.1.1 Soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci

Teorema 1. *A soma dos n primeiros números de Fibonacci pode ser expressa da seguinte maneira*

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$$

Demonstração. A definição de número de Fibonacci garante, por sua relação de recorrência, garante que $F_3 = F_1 + F_2$, ou seja, $F_1 = F_3 - F_2$. Podemos generalizar escrevendo que $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ sempre que $n \in \mathbb{N}$. Observe a seguinte coleção de equações envolvendo números de Fibonacci.

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ F_3 &= F_5 - F_4 \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned}$$

Agora ao somarmos todas as equações teremos uma soma telescópica. O resultado dessa soma pode ser escrito como

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - F_2$$

Como $F_2 = 1$, o teorema está demonstrado. □

Teorema 2. *A soma de n termos de ordem ímpar da Sequência de Fibonacci é dada por*

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Demonstração. O argumento para a demonstração é similar ao utilizado anteriormente, a soma telescópica. Vamos escrever os números de ordem ímpar em função dos de ordem par.

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ F_3 &= F_4 - F_2 \\ F_5 &= F_6 - F_4 \\ &\vdots \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2} \end{aligned}$$

Se agora somarmos essas equações, termo a termo, encontraremos o resultado procurado \square

Teorema 3. *A soma dos termos de ordem par da Sequência de Fibonacci é dada por*

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

Demonstração. Utilizando o resultado obtido no Teorema 1 podemos escrever

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+2} - 1$$

Subtraindo da equação a soma dos termos de ordem ímpar, teremos o resultado que queríamos demonstrar,

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 - F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

\square

2.1.2 A soma dos quadrados dos n primeiros termos da Sequência de Fibonacci

Teorema 4. *A soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci pode ser escrita como*

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

Demonstração. Em um primeiro momento, vamos nos concentrar na seguinte subtração do produto de termos da Sequência de Fibonacci.

$$F_k \cdot F_{k+1} - F_{k-1} \cdot F_k$$

Colocando o termo F_k em evidência, teremos

$$F_k \cdot F_{k+1} - F_{k-1} \cdot F_k = F_k(F_{k+1} - F_{k-1})$$

Note que, $F_{k+1} - F_{k-1} = F_k$, por definição. Sendo assim, podemos afirmar que

$$F_k \cdot F_{k+1} - F_{k-1} \cdot F_k = F_k^2$$

Se somarmos todas as próximas equações, encontraremos uma soma telescópica

$$F_1^2 = F_1 \cdot F_2$$

$$F_2^2 = F_2 \cdot F_3 - F_1 \cdot F_2$$

$$F_3^2 = F_3 \cdot F_4 - F_2 \cdot F_3$$

⋮

$$F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} - F_{n-1} \cdot F_n$$

Como resultado dessa soma, encontraremos o resultado desejado.

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

□

Animação Interativa: A seguir, você encontrará um link para uma animação interativa no GeoGebra que ilustra os resultados obtidos com exemplos específicos.

- [Animação Fibonacci - Quadrados](#)

2.2 Razão Áurea - Geometria

O valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$ é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$ e geralmente é referenciada pela letra ϕ . Este número irracional é tão frequente na matemática e apresenta tantas propriedades interessantes que é comumente conhecido como a *razão áurea*.

2.2.1 Um limite

Dois elementos consecutivos da Sequência de Fibonacci são chamados de elementos adjacentes. Ao calcularmos a razão entre dois desses elementos adjacentes, digamos

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

podemos notar que a medida que n tende ao infinito, a razão se aproxima de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. O seguinte teorema formaliza a essa questão envolvendo as sucessivas razões de termos adjacentes.

Teorema 5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Demonstração. Por definição, sabemos que

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Como $F_n \neq 0$,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

Agora, iremos escrever o seguinte limite sem demonstrar que ele existe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = L$$

Utilizando aritmética e propriedades de limites, podemos escrever

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{L}$$

E com isso temos a seguinte afirmação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

Que, por outro lado, corresponde à equação

$$L = 1 + \frac{1}{L}$$

Que pode ser reescrita como

$$L^2 - L - 1 = 0$$

Essa equação polinomial do segundo grau pode ser resolvida através da fórmula de resolução de equações quadráticas, também conhecida como Fórmula de Bháskara. Suas duas raízes são:

$$L_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad L_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

E assim, como L_2 é negativo, chegamos ao resultado esperado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

□

Exemplo 3. É interessante notar que, mesmo para valores moderados de n , a razão já resulta em um erro extremamente pequeno. Vejamos um exemplo em que $n = 10$.

- | | | | |
|-----------------------|--------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| • $\frac{1}{1} = 1$ | • $\frac{5}{3} \approx 1,6666$ | • $\frac{21}{13} \approx 1,6153$ | • $\frac{89}{55} \approx 1,6182$ |
| • $\frac{2}{1} = 2$ | • $\frac{8}{5} = 1,6$ | • $\frac{34}{21} \approx 1,6190$ | • $\frac{144}{89} \approx 1,6179$ |
| • $\frac{3}{2} = 1,5$ | • $\frac{13}{8} = 1,625$ | • $\frac{55}{34} \approx 1,6176$ | • $\frac{233}{144} \approx 1,6181$ |

Exemplo 4. Vamos definir a sequência $(R_n)_{n \in \mathbb{N}} = \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Por meio do gráfico abaixo, em que o eixo horizontal indica o índice n e o eixo vertical os valores associados à sequência R_n pode-se perceber que a sequência está limitada superiormente pelo número 2, inferiormente por 1,5 e além disso está convergindo para um valor fixo, ϕ .

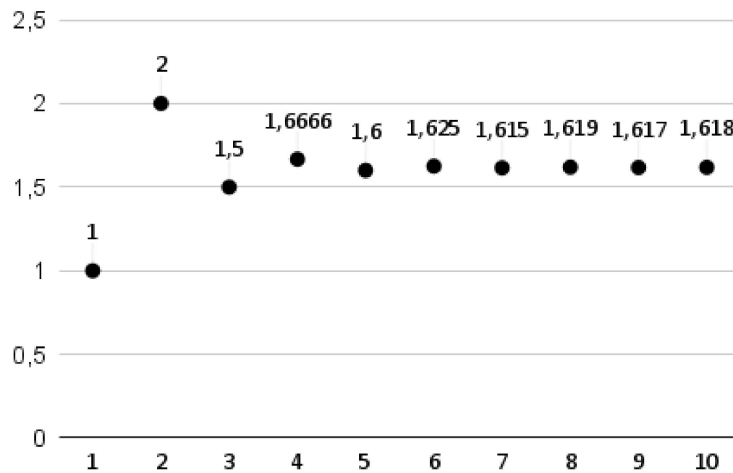


Figura 5 – Gráfico de convergência da Razão Áurea

2.2.2 Golden Section

A habilidade (EF02MA15) da BNCC consiste em: reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos. Iremos relacionar a razão áurea com alguns exemplos de figuras planas em que a razão mencionada se torna aparente.

Em Os Elementos de Euclides, (EUCLID, 1956) no livro *VI*, definição *III*, Euclides apresentou a seguinte definição

Definição 1. Um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo.



Figura 6 – Segmento dividido em média e extrema razão.

Na figura acima, seja \overline{AB} um segmento de reta, e $C \in \overline{AB}$, um ponto que divide \overline{AB} em média e extrema razão, isto é:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Primeiramente vamos encontrar um valor positivo para uma das razões a serem estudadas, por conveniência, seja

$$x = \frac{AB}{AC}$$

Dessa forma, podemos calcular

$$x = \frac{AB}{AC} = \frac{AC + CB}{AC} = 1 + \frac{CB}{AC} = 1 + \frac{1}{\frac{AC}{CB}} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = 1 + \frac{1}{x}$$

Em resumo, teremos

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Multiplicando ambos os lados por x , encontraremos a equação polinomial do segundo grau que chamaremos de **Equação Quadrática de Fibonacci**.

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{2.1}$$

As raízes dessa equação quadrática são dadas por:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Note que o valor positivo obtido é justamente a razão áurea que foi encontrada através de um limite na seção acima, logo

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

Animação Interativa: A seguir, você encontrará um link para uma animação interativa que ilustra o segmento em questão

- [Golden Section](#)

Observação: A Equação Quadrática de Fibonacci (2.1) pode ser expressa em outras palavras da seguinte maneira: "O quadrado da razão áurea é igual à razão áurea acrescida de um".

2.2.3 Retângulo Áureo

O retângulo $ABCD$, mostrado na figura abaixo, é chamado de Retângulo Áureo uma vez que segue a propriedade: se o dividirmos em um quadrado e em um outro retângulo, o novo retângulo será proporcional ao original.

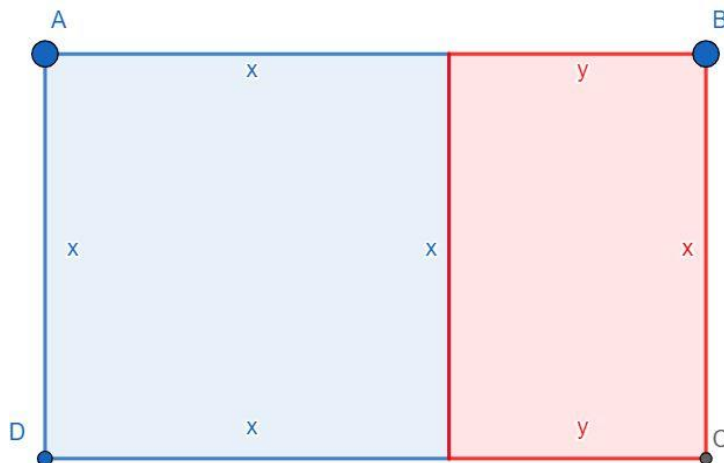


Figura 7 – Retângulo Áureo.

Ou seja, considerando x e $x + y$ como as dimensões do retângulo, teremos

$$\frac{x}{y} = \frac{x + y}{x}$$

Podemos reescrever a equação da seguinte maneira

$$\frac{x}{y} = 1 + \frac{y}{x}$$

Agora, multiplicando ambos os lados por $\frac{x}{y}$, teremos a seguinte equação

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} + 1 \iff \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$$

Que por sua vez se encontra no formato da Equação Quadrática de Fibonacci com variável agora sendo $\frac{x}{y}$. Como tanto x quanto y são números positivos, ficaremos com o valor positivo de $\frac{x}{y}$.

$$\frac{x}{y} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Portanto, a razão entre as dimensões dos dois retângulos mencionados é a razão áurea.

Animação Interativa: A seguir, você encontrará um link para uma animação interativa que ilustra o retângulo em questão

- [Retângulo Áureo](#)

2.2.4 Triângulo Áureo

O triângulo isósceles apresentado na figura abaixo, é um exemplo de triângulo áureo. Perceba que as notações x e y foram apresentadas de acordo com as propriedades de triângulos isósceles.

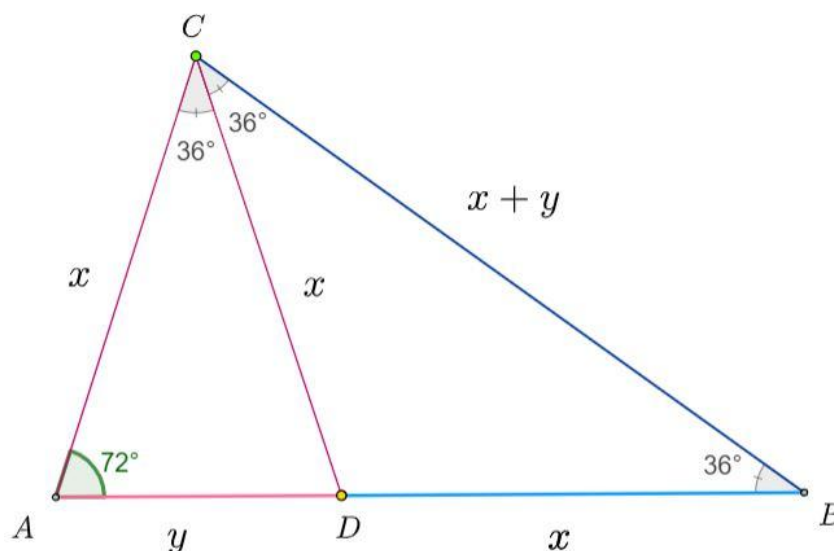


Figura 8 – Triângulo Áureo

Veja que, os triângulos ACD e ABC são semelhantes, uma vez que possuem os mesmos ângulos internos. Dessa forma, podemos escrever

$$\frac{x + y}{x} = \frac{x}{y}$$

A partir dessa relação, encontraremos novamente a equação

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} + 1 \iff \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$$

o resultado positivo encontrado é ϕ .

Animação Interativa: A seguir, você encontrará um link para uma animação interativa no GeoGebra que ilustra o triângulo áureo.

- [Triângulo Áureo](#)

Além disso, se considerarmos $x = 1$, podemos visualizar a razão áurea na figura de maneira mais evidente, como mostrada na figura abaixo.

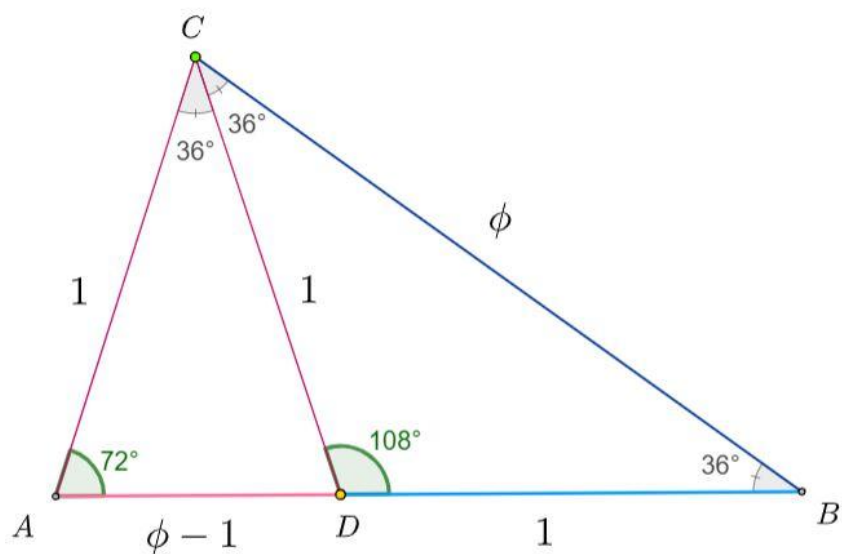


Figura 9 – Triângulo Áureo com $x = 1$.

2.2.5 Conexão com pentágonos

A razão áurea também aparece na geometria dos pentágonos regulares. Iremos começar com um pentágono regular cujos lados têm comprimento igual a 1. Traçando as cinco diagonais desse pentágono, iremos formar uma estrela com cinco pontas, como representado abaixo.

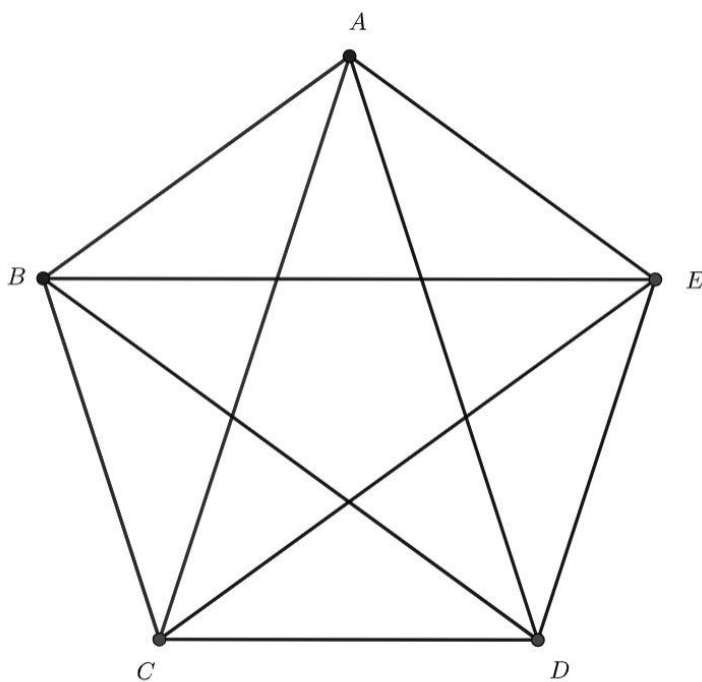


Figura 10 – Pentágono Regular de lado 1

Perceba que, no interior deste pentágono regular, podemos destacar o triângulo ABC . Esse triângulo é isósceles com ângulos da base medindo 36° , como mostrado na figura abaixo.

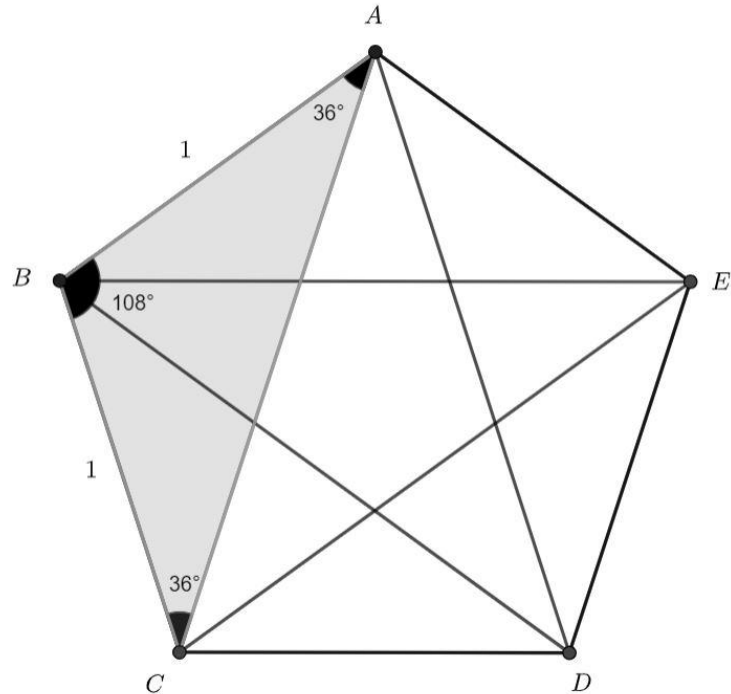


Figura 11 – Pentágono Regular com triângulo evidenciado

Agora, é possível notar que este exato triângulo já foi mencionado na seção que aborda o Triângulo Áureo. Naquela ocasião, foi mostrado que o lado AC deste triângulo tem medida igual a ϕ . Deste modo, todas as diagonais do pentágono regular cujos lados têm medida igual a 1 medem ϕ .

2.3 O Triângulo de Pascal - Análise Combinatória

Os números de Fibonacci têm uma conexão fascinante com o triângulo dos coeficientes binomiais, conhecido como Triângulo de Pascal. Abaixo, apresentamos o referido triângulo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & & & & & & \\
 1 & 1 & & & & & \\
 1 & 2 & 1 & & & & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

Nesta representação, orientamos o Triângulo de Pascal na forma de triângulo retângulo para facilitar seu uso em nossa aplicação futura. O Triângulo de Pascal é um triângulo em que o elemento superior é 1 e cada elemento subsequente é a soma do termo diretamente acima com o termo acima e à esquerda.

$$\begin{array}{cccccc}
 C_0^0 & & & & & \\
 C_1^0 & C_1^1 & & & & \\
 C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & \\
 C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & \\
 C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & \\
 C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

Nessa versão do Triângulo de Pascal temos o conceito de combinação, também conhecida como coeficiente binomial, é um conceito fundamental na matemática combinatória. Abaixo está a definição formal de uma combinação usando a notação fatorial:

$$C_k^i = \binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

Na notação $\binom{k}{i}$, i representa a posição do termo na coluna e k refere-se à posição na linha do Triângulo de Pascal. Além disso, a primeira linha foi descrita como linha zero e a primeira coluna como coluna zero.

Animação Interativa: A seguir, você encontrará um link para uma animação interativa que ilustra a relação entre combinações e o Triângulo de Pascal

- [Combinações e Triângulo de Pascal](#)

O teorema a seguir é conhecido como a Relação de Stifel. Primeiramente, apresentaremos uma demonstração algébrica do resultado, seguida por uma justificativa utilizando argumentos combinatórios.

Teorema 6. *A soma de dois elementos consecutivos de uma mesma linha do Triângulo de Pascal obtém como resultado o elemento situado abaixo da última parcela.*

$$C_k^i + C_k^{i+1} = C_{k+1}^{i+1}$$

Demonstração. Para demonstrar essa relação, começamos utilizando a definição das combinações:

$$C_k^i = \binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!} \quad \text{e} \quad C_k^{i+1} = \binom{k}{i+1} = \frac{k!}{(i+1)!(k-i-1)!}$$

Agora, somamos essas duas combinações:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \frac{k!}{i!(k-i)!} + \frac{k!}{(i+1)!(k-i-1)!}$$

Para somar as frações, precisamos de um denominador comum. Observamos que:

$$(i+1)!(k-i)! = (i+1) \cdot i!(k-i)! = i!(i+1)(k-i)!$$

Então, reescrevemos as frações com o denominador comum $(i+1)!(k-i)!$:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \frac{k!(i+1)}{(i+1)!i!(k-i)!} + \frac{k!}{(i+1)!(k-i-1)!}$$

Simplificando, obtemos:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \frac{k!}{(i+1)!(k-i)!} + \frac{k!}{(i+1)!(k-i-1)!}$$

Agora, combinamos os termos:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \frac{k!}{(i+1)!(k-i)!} \left[1 + \frac{(k-i)!}{(k-i-1)!} \right]$$

Simplificando a fração dentro do colchete, obtemos:

$$1 + \frac{(k-i)!}{(k-i-1)!} = 1 + (k-i) = k-i+1$$

Portanto, a expressão se torna:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \frac{k!(k-i+1)}{(i+1)!(k-i)!}$$

E isso pode ser reescrito como:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \frac{(k+1)!}{(i+1)!((k+1)-(i+1))!} = \binom{k+1}{i+1}$$

2.3.1 Relação com os números de Fibonacci

As diagonais presentes no Triângulo de Pascal apresentam diversas propriedades interessantes. A figura abaixo apresenta o que chamaremos de diagonais ascendentes do Triângulo de Pascal.

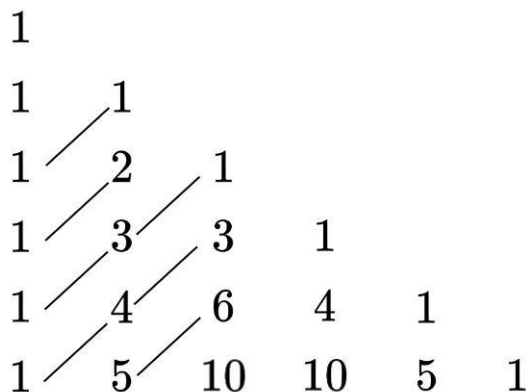


Figura 13 – Diagonais Ascendentes do Triângulo de Pascal

Agora, iremos relacionar as diagonais ascendentes do Triângulo de Pascal com os números de Fibonacci. Perceba que a soma dos elementos 1, 3, 1 de uma dessas diagonais é igual a 5. Já a somas dos elementos 1, 4, 3 resulta em 8. Percebendo o padrão estabelecido, podemos generalizar o resultado com o auxílio do teorema abaixo. (VOROB'EV, 2002)

Teorema 7. *A soma dos números em uma diagonal ascendente no Triângulo de Pascal é um número de Fibonacci.*

Demonstração. Observe que a primeira diagonal ascendente é composta apenas pelo número 1, assim como a segunda diagonal ascendente. Essas duas linhas correspondem aos primeiros dois números da sequência de Fibonacci.

Para demonstrar o resultado em questão basta mostrar que a soma de todos os números da $(n - 2)$ -ésima diagonal e da $(n - 1)$ -ésima diagonal será igual à soma de todos os números na n -ésima diagonal no Triângulo de Pascal. Perceba que esse é justamente o padrão estabelecido pela sequência de Fibonacci.

A diagonal de número $(n - 2)$ é composta pela seguinte sequência de números

$$C_{n-3}^0, C_{n-4}^1, C_{n-5}^2, C_{n-6}^3, \dots$$

A diagonal de número $(n - 1)$ é composta pela seguinte sequência de números

$$C_{n-2}^0, C_{n-3}^1, C_{n-4}^2, C_{n-5}^3, \dots$$

Somando todos esses números, teremos

$$C_{n-2}^0 + (C_{n-3}^0 + C_{n-3}^1) + (C_{n-4}^1 + C_{n-4}^2) + \dots$$

Porém, aplicando a Relação de Stifel em cada parênteses e levando em consideração que $C_{n-2}^0 = C_{n-1}^0 = 1$, encontraremos a seguinte expressão para representar a soma dos termos da n -ésima diagonal ascendente do Triângulo de Pascal.

$$C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + C_{n-4}^3 + \dots$$

Assim, como sabemos que as duas primeiras diagonais são ambas 1, e agora vimos que a soma de todos os números na diagonal $(n - 1)$ mais a soma de todos os números na diagonal $(n - 2)$ é igual à soma da n -ésima diagonal, provamos que a soma dos termos na n -ésima diagonal é sempre equivalente ao n -ésimo número de Fibonacci. \square

Exemplo 5. Ao somarmos todos os termos na sétima diagonal ascendente do Triângulo de Pascal, isto é,

$$1 + 5 + 6 + 1 = 13$$

encontraremos o sétimo termo da Sequência de Fibonacci, $F_7 = 13$. Podemos perceber que os índices da diagonal a ser somada e do número de Fibonacci estão devidamente alinhados.

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & & & & & & & \\
 1 & 1 & & & & & & \\
 1 & 2 & 1 & & & & & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
 \end{array}
 = F_7 = 13$$

Figura 14 – Soma da sétima diagonal ascendente do Triângulo de Pascal

3 Jogo de Cara ou Coroa com Padrões de Fibonacci

Neste capítulo, apresentamos um jogo de cara ou coroa que usa a sequência de Fibonacci para definir quais sequências de jogadas são consideradas um sucesso. O objetivo é explorar como padrões matemáticos podem ser aplicados em jogos de azar e analisar os resultados inesperados que surgem dessa abordagem.

3.1 O jogo Cara-Cara

Os donos de jogos de azar são especialistas em fazer com que seus clientes gastem dinheiro. O caso deste jogo não é diferente. Ele consiste em dar ao jogador uma nota de cinco reais e uma moeda. O jogador deve lançar a moeda até conseguir duas caras seguidas. A cada lançamento realizado o jogador devolve um real ao comerciante. Usaremos K como notação para cara e C para coroa. Veja alguns exemplos:

Jogada realizada	Quanto devemos pagar ao comerciante
KK	R\$2
CKK	R\$3
KCKK	R\$4
KCKKK	R\$5
KCCCKK	R\$6

Figura 15 – Exemplos de situações do jogo Cara-Cara

Perceba que a partir de seis lançamentos o jogador já está sendo prejudicado financeiramente. A pergunta natural é:

Quantas jogadas seriam necessárias, em média, para conseguir KK ?

Para responder a essa pergunta, seja A o número esperado de jogadas para obter KK . Metade do tempo você joga C . Isso efetivamente te deixa de volta ao ponto de partida, tendo usado uma única jogada. Em outras palavras, quando você joga C , você usou uma jogada e ainda tem o mesmo esperado A a percorrer, então o número esperado de jogadas quando você começa com C é $1 + A$. Jogar C acontece apenas metade do tempo; na outra metade do tempo, você joga K . Dessa forma podemos escrever

$$A = \frac{1}{2} \cdot (1 + A) + \frac{1}{2}(X)$$

em que X é o número esperado de jogadas quando você começa com K . Curiosamente, o valor de A , o número esperado de jogadas para obter duas caras seguidas, depende dele mesmo. Em outras palavras, temos uma relação de recorrência. Agora, vamos calcular X , o número esperado de jogadas quando você começa com K . Quando você começa com K , metade das vezes você obtém KK , e metade das vezes KC . KK é um sucesso e leva duas jogadas. KC também leva duas jogadas, mas você volta ao ponto de partida novamente – como se nunca tivesse jogado.

Em resumo, o número esperado de jogadas quando você começa com K é:

$$X = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}(2 + A)$$

Substituindo o valor de X na equação desenvolvida anteriormente podemos escrever

$$A = \frac{1}{2}(1 + A) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}(2 + A)\right)$$

E assim, KK ocorre um quarto do tempo e leva duas jogadas, KC acontece um quarto do tempo e leva $2 + A$ jogadas, e C ocorre metade do tempo e leva $1 + A$ jogadas. Iremos multiplicar ambos os lados por 4 e resolver

$$4A = 2(1 + A) + 2 + (2 + A) = 3A + 6$$

Dessa forma, $A = 6$, ou seja, o número esperado de jogadas para obter duas caras consecutivas é seis.

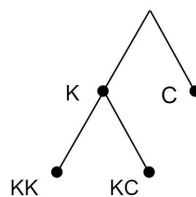


Figura 16 – As probabilidades de KK , KC e C são 25%, 25% e 50%, respectivamente

3.2 A conexão com números de Fibonacci

Para obter KK , você precisa lançar pelo menos duas moedas. Existem quatro maneiras de virar duas moedas: KK , CK , KC e CC . Apenas uma dessas quatro combinações é KK , então 25% do tempo você precisa exatamente de duas viradas para ter sucesso, e isso vai custar dois reais. Em 75% do tempo, você precisará lançar mais moedas e conseqüentemente pagar mais. Há oito maneiras de fazer os lançamentos

- KKK
- KCK
- KCC
- CCK
- KKC
- CKK
- CKC
- CCC

Dentre essas oito seqüências, existe apenas um sucesso. Se trata da seqüência CKK . Logo, um oitavo das vezes você deverá fazer três lançamentos.

Para descobrir o número médio de jogadas e, assim, o número médio de reais devolvidos para conseguir KK , devemos levar nossa análise adiante para quatro moedas, cinco moedas, e assim por diante, porque pode ser necessário um número arbitrário de moedas para finalmente alcançar KK .

O número total de seqüências de jogadas dobra a cada nova jogada. Para quatro moedas, são 16 seqüências, e para cinco moedas, são 32, e assim por diante. Isso ocorre porque cada nova seqüência pode começar com K ou C e continuar com uma seqüência de uma moeda a menos. Assim, adicionar uma jogada dobra o número de seqüências.

A seqüência de caras e coroas que fornecerem KK no final da seqüência serão chamadas de *sucessos*. Lembre-se de que KK é a única seqüência de sucesso entre quatro possíveis para duas jogadas, e CKK é a única seqüência de sucesso entre oito para três jogadas. Das 16 seqüências possíveis para quatro moedas, apenas $CCKK$ e $KCKK$ são bem-sucedidas. E das 32 seqüências possíveis para cinco moedas, apenas $CKCKK$, $CCCKK$ e $KCCCKK$ precisam de cinco jogadas para ter sucesso. Para seis moedas, cinco das 64 seqüências são bem-sucedidas: $KCCCKK$, $KCKCKK$, $CCKCKK$, $CCCKK$ e $CKCCCKK$.

Número de jogadas	Total de seqüências	Sucessos
1	2	0
2	4	1
3	8	1
4	16	2
5	32	3
6	64	5
7	128	8
8	256	13
9	512	21
10	1024	34

Tabela 4 – Número de sucessos e Sequência de Fibonacci

3.2.1 O motivo por trás do resultado

Para entender por que o número de seqüências bem-sucedidas para n lançamentos é igual ao n ésimo número de Fibonacci é importante notar que ambos compartilham a mesma estrutura recursiva, em que o próximo número é a soma dos dois anteriores.

Observe que qualquer seqüência de lançamentos bem-sucedida de três ou mais lançamentos não pode começar com duas caras, então deve começar com C ou KC . Começando com C , podemos continuar com qualquer seqüência bem-sucedida de $n - 1$ lançamentos, e começando com CK , podemos seguir com qualquer seqüência bem-sucedida de $n - 2$ lançamentos. Por exemplo, a seqüência de sucessos para seis lançamentos é construída através das seqüências de quatro e cinco lançamentos.

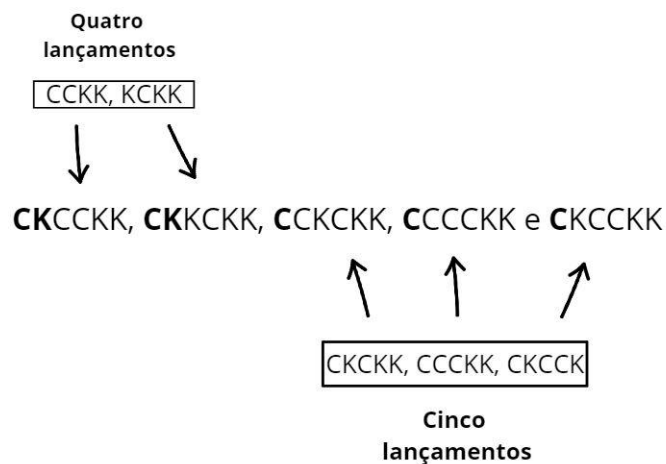


Figura 17 – Construção das seqüências sucessos de seis lançamentos

Portanto, das 2^n maneiras de virar n moedas, o número de sequências que precisam de todas as n viradas para terminar em KK é igual ao n -ésimo número de Fibonacci.

3.2.2 Valor exato para o retorno médio

Somando todos os números de sequências de viradas bem-sucedidas de dois até o infinito, o valor exato para o retorno médio, em reais, até KK é dado pela seguinte série infinita.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \times F(n)}{2^n}$$

Podemos escrever alguns termos desta série

$$\frac{2 \times 1}{4} + \frac{3 \times 1}{8} + \frac{4 \times 2}{16} + \frac{5 \times 3}{32} + \frac{6 \times 5}{64} + \frac{7 \times 8}{128} + \dots$$

Convenientemente, não será necessário concluir se essa série é convergente e para onde está convergindo uma vez que já sabemos que o retorno médio é igual a 6.

Observação: O jogo apresentado acima, que utiliza conceitos dos números de Fibonacci, foi adaptado de (SIMONSON, 2019).

4 Os pesos de Leonardo Fibonacci

Neste capítulo, vamos nos transportar para um cenário onde Leonardo Fibonacci desempenha o papel de um pesador profissional, cuja jornada o leva a viajar pelo mundo, realizando pesagens com seus pesos. Cada um desses pesos de Leonardo é correlacionado a um número da sequência de Fibonacci.

$$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \dots, F_n, \dots$$

O propósito de Leonardo em suas jornadas é garantir que ele possa pesar qualquer objeto que possua um peso expresso em números inteiros de quilogramas. (HENSLEY; JR., 1969)

4.1 Fibonacci sempre conseguirá realizar seu trabalho?

Sim, desde que o peso do objeto a ser pesado possua uma quantidade inteira de quilogramas. A definição a seguir formaliza a pergunta feita no início desta seção e nos auxilia com a comprovação deste resultado.

Definição 2. Uma sequência de inteiros positivos é chamada de completa, com respeito ao conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} se, e somente se, todo inteiro positivo m pode ser escrito como a soma de um número finito de elementos da sequência, em que cada elemento pode ser usado no máximo uma vez em cada representação dada.

Note que, a pergunta que fizemos anteriormente poderia ser refeita da seguinte forma:

A Sequência de Fibonacci é completa?

Teorema 8. *A Sequência de Fibonacci é uma sequência completa.*

Demonstração. Sabemos, por um resultado obtido anteriormente, que

$$F_n - 1 = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-2}$$

Além disso, é possível observar que, para $3 \leq n \leq 6$, todo inteiro $m \leq F_n - 1$ pode ser representado como a soma de alguns ou todos os números de Fibonacci F_1, F_2, \dots, F_{n-2} . Vamos usar esse fato como base para nossa indução.

Para a segunda parte da demonstração vamos assumir que todo número inteiro da forma $m = 1, 2, 3, \dots, F_k - 1$, para $k \geq 3$, pode ser representado usando apenas os seguintes números de Fibonacci e essa será nossa hipótese de indução.

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_{k-2}$$

Agora, devemos provar que todo inteiro $m = 1, 2, 3, \dots, F_{k+1} - 1$, para $k \geq 3$, pode ser representado usando apenas os números

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_{k-1}$$

A estratégia para terminar a demonstração será somar em ambas as representações o termo F_{k-1} .

$$1 + F_{k-1}, 2 + F_{k-1}, 3 + F_{k-1}, \dots, F_k - 1 + F_{k-1},$$

Assim teremos representações para as seguintes seqüências

- $\{1, 2, 3, \dots, F_k - 1\}$
- $\{1 + F_{k-1}, 2 + F_{k-1}, 3 + F_{k-1}, \dots, F_{k+1} - 1\}$

Que por sua vez são seqüências de números inteiros consecutivos uma vez que, por definição de número de Fibonacci,

$$F_k + F_{k-1} - 1 = F_{k+1} - 1$$

Dessa forma, quando unidas garantem que todo inteiro $m = 1, 2, 3, \dots, F_{k+1} - 1$, para $k \geq 3$ pode ser representado usando os números $F_1, F_2, F_3, \dots, F_{k-1}$, como queríamos demonstrar.

□

Exemplo 6. Suponha que um Sino de Bronze pesando exatamente 100 quilogramas seja pesado usando os pesos de Fibonacci, perceba que ele poderia fazer essa pesagem de pelo menos duas formas.

- $100 = 89 + 8 + 2 = F_{11} + F_6 + F_3$
- $100 = 55 + 34 + 5 + 3 + 1 + 1 = F_{10} + F_9 + F_5 + F_4 + F_2 + F_1$

4.2 Caso Leonardo perca um de seus pesos, ainda conseguirá realizar seu trabalho?

Agora podemos garantir que, desde que o objeto a ser pesado possua uma quantidade inteira de quilogramas, Leonardo Fibonacci irá conseguir fazer seu trabalho. O novo questionamento investiga se Leonardo conseguiria realizar seu trabalho sem um de seus pesos, digamos F_n . O teorema a seguir garante que sim.

Teorema 9. *A Sequência de Fibonacci, sem um elemento arbitrário F_n é completa.*

Demonstração. Do último teorema demonstrado, pode-se notar que podemos representar qualquer número inteiro $m = 1, 2, 3, \dots, F_{n+1} - 1$ usando somente os seguintes números de Fibonacci.

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1}$$

Ou seja, podemos fazer a representação sem utilizar F_n . Dessa forma, F_{n+1} pode se autorrepresentar e quando somamos F_{n+1} nas representações de $m = 1, 2, 3, \dots, F_{n+1} - 1$, teremos representações para

$$m = 1, 2, 3, \dots, 2 \cdot F_{n+1} - 1$$

Como $2F_{n+1} - 1 > F_{n+2} - 1$,¹ podemos concluir que a sequência ainda permanece completa. \square

4.3 Caso Leonardo perca dois de seus pesos, ainda conseguirá realizar seu trabalho?

Neste momento, a pergunta natural a ser feita é: se retirarmos um número finito de elementos da Sequência de Fibonacci, ela ainda permanecerá completa? Depende da quantidade de elementos retirados. Se apenas um elemento for retirado, vimos que a completude permanece intacta. O teorema a seguir formaliza o que aconteceria se Leonardo perdesse dois ou mais pesos de sua coleção.

Teorema 10. *A Sequência de Fibonacci, sem dois elementos arbitrários, digamos F_n e F_p , é incompleta.*

Demonstração. Usaremos o seguinte fato demonstrado anteriormente,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1$$

Agora suponha, sem perda de generalidade, que um número de Fibonacci $F_p < F_k$ esteja faltando, isto é,

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{p-1} + F_{p+1} + \dots + F_k = F_{k+2} - F_p - 1$$

Mas se tivermos outro número de Fibonacci, $F_n > F_p$ faltando, podemos escrever a seguinte igualdade

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{p-1} + F_{p+1} + \dots + F_{n-1} = F_{n+1} - F_p - 1$$

¹ A desigualdade ocorre pelo fato de que $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ e também por conta da Sequência de Fibonacci ser estritamente crescente a partir de F_2 .

Porém, como a sequência de Fibonacci é estritamente crescente para $n \geq 2$, podemos escrever

$$F_{n+1} - F_p - 1 < F_{n+1} - 1$$

E assim, teremos

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{p-1} + F_{p+1} + \cdots + F_{n-1} < F_{n+1} - 1$$

Ou seja, o número inteiro $m = F_{n+1} - 1$ não possui nenhuma representação utilizando-se apenas os números de Fibonacci disponíveis. Esse fato se dá uma vez que a soma de todos eles é **menor** que m . Logo, a sequência perde sua completude uma vez que são retirados dois elementos dela. \square

Exemplo 7. Suponha que seja necessário representar o número 20 sem usar os números $F_5 = 5$ e $F_7 = 13$. Os números de Fibonacci disponíveis são F_1, F_2, F_3, F_4 e F_6 . Perceba que o valor máximo atingível é

$$1 + 1 + 2 + 3 + 8 = 15$$

O próximo número de Fibonacci é $F_8 = 21$. Note que sem $F_5 = 5$ e $F_7 = 13$ não teríamos representações para 16, 17, 18, 19 e 20.

4.4 Leonardo precisa pesar com o menor número de pesos possível

Se cada número inteiro m precisar ser representado usando o menor número possível de números de Fibonacci, quais são as condições para essa representação minimal?

- Certamente não poderemos F_1 e F_2 em uma representação mínima. Sendo assim, usaremos apenas $F_2 = 1$.
- Dada a representação de um inteiro m , seja F_n o maior número de Fibonacci nesta representação. Como gostaríamos de ter uma representação mínima, com certeza não teremos F_{n-1} , caso contrário bastaria trocar $F_n + F_{n-1}$ por F_{n+1} .

Usando essa forma de pensar sucessivas vezes, podemos concluir que em qualquer representação mínima não podemos ter dois números de Fibonacci adjacentes.

4.4.1 O Teorema de Zeckendorf

Teorema 11 (Teorema de Zeckendorf). *Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de forma única, como a soma de termos da Sequência de Fibonacci distintos e não adjacentes.*

Demonstração. Vamos iniciar a demonstração pela existência da representação, para isso usaremos um argumento indutivo. Para construir nossa base de indução, observe a seguinte tabela:

Base de indução	
Número inteiro positivo	Representação mínima
1	F_2
2	F_3
3	F_4
4	$F_4 + F_2$
5	F_5
6	$F_5 + F_2$

Tabela 5 – Base de indução

Dessa forma, o resultado vale para todo $n \leq 6$. Agora, vamos supor que o resultado é válido até um certo $k \in \mathbb{N}$, essa será nossa hipótese de indução. Caso $k + 1$ seja um termo da Sequência de Fibonacci, o resultado está provado. Caso contrário, existe um número $j \in \mathbb{N}$, de tal modo que

$$F_j < k + 1 < F_{j+1}$$

Subtraindo o termo F_j em ambos os lados, teremos

$$0 < k + 1 - F_j < F_{j+1} - F_j = F_{j-1}$$

E como conclusão, temos

$$a = k + 1 - F_j < F_{j-1}$$

Assim, por hipótese de indução, segue que o número $a \in \mathbb{N}$ é soma de termos não adjacentes, dentre os quais o maior deles é menor que F_{j-1} . Portanto, $k + 1$ pode ser escrito como soma de termos não adjacentes da Sequência de Fibonacci e a existência da representação está provada.

Agora, iremos comprovar a unicidade dessa representação. Para isso, suponha que a representação seja única até um certo $k \in \mathbb{N}$ e para $k + 1$ existam duas representações, como mostraremos abaixo

$$k + 1 = F_{a_0} + F_{a_1} + \cdots + F_{a_r}$$

$$k + 1 = F_{b_0} + F_{b_1} + \cdots + F_{b_s}$$

em que, $a_i + 1 < a_{i+1}$ e $b_j + 1 < b_{j+1}$.

Dessa forma, podemos prosseguir com a seguinte desigualdade

$$F_{a_r} \leq F_{b_0} + F_{b_1} + \cdots + F_{b_s} \leq F_{b_s} + F_{b_{s-2}} + F_{b_{s-4}} + \cdots + F_t = F_{b_{s+1}} - 1 \quad (4.1)$$

em que

$$t = \begin{cases} 2, & \text{se } b_s \text{ é par} \\ 3, & \text{se } b_s \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é importante ressaltar que caso b_s seja par, o resultado utilizado foi a soma finita dos termos da sequência de Fibonacci de ordem par. Analogamente, caso b_s seja ímpar, o resultado usado será o de ordem ímpar. Dessa, forma, temos

$$F_{a_r} \leq F_{b_{s+1}} \implies a_r < b_s + 1 \implies a_r \leq b_s$$

De maneira análoga, podemos mostrar que $a_r \geq b_s$, portanto $a_r = b_s$. Usando esse fato e a hipótese de indução, está provado que a representação é única. \square

Observação: A demonstração apresentada acima foi adaptada de Brown Jr. (JR, 1969).

5 Conclusão

A sequência de Fibonacci, com suas ricas propriedades matemáticas e amplas aplicações, continua a ser um tópico de investigação profundo e relevante. Nesta dissertação, exploramos tanto os aspectos elementares quanto as nuances avançadas dos números de Fibonacci, focando em suas propriedades fundamentais e aplicações práticas. Nossa pesquisa concentrou-se no desenvolvimento e avaliação de ferramentas interativas e dinâmicas em softwares educativos, projetadas para facilitar o ensino e a compreensão dos números de Fibonacci, alinhadas com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

As ferramentas educativas desenvolvidas proporcionam visualizações interativas e métodos de aprendizado baseados em tecnologia, oferecendo uma abordagem mais envolvente e eficaz para estudantes e pesquisadores. A integração dessas ferramentas no ensino não apenas melhora a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também motiva os alunos a explorar mais profundamente a teoria dos números de Fibonacci.

Além disso, investigamos a aplicação das propriedades da sequência de Fibonacci em um contexto de jogo de azar, revelando conexões inesperadas e potencialmente úteis entre a matemática pura e problemas práticos. A exploração dessas aplicações demonstra a versatilidade e a relevância prática dos números de Fibonacci em diferentes campos.

No ápice deste trabalho, apresentamos o Teorema de Zeckendorf de maneira lúdica e pedagógica, destacando sua complexidade e beleza matemática. A introdução de tecnologias educativas e a investigação de conexões entre matemática e jogos oferecem novas perspectivas para o ensino da teoria dos números de Fibonacci.

Em resumo, esta dissertação contribui significativamente para a educação matemática ao oferecer novas ferramentas interativas que atendem aos requisitos da BNCC, ao mesmo tempo em que explora aplicações práticas e teóricas dos números de Fibonacci. A integração de métodos interativos e a investigação de cenários inesperados fornecem uma abordagem inovadora que enriquece tanto o ensino quanto a pesquisa na área.

Referências

CAMERON, P. J.; FON-DER-FLAASS, D. G. Fibonacci notes. *The Fibonacci Quarterly*, v. 32, n. 3, p. 214–218, 1994.

CLANCY, T. The fibonacci numbers. *Journal of Mathematics*, Mathematical Publishing, v. 45, n. 3, p. 123–135, 2007.

DOXIADIS, A. *Tio Petros e a Conjectura de Goldbach*. São Paulo: Companhia das Letras, 2000.

EUCLID. *Elements*. New York: Dover Publications, 1956. A modern reprint of the classic text.

HENSLEY, D.; JR., V. E. H. *Fibonacci and Lucas Numbers*. New York: Citadel Press, 1969.

JR, J. L. B. Zeckendorf's theorem and some applications. *Fibonacci Quarterly*, v. 7, n. 1, p. 17–24, 1969.

MORGADO, A. C. d. O.; PITOMBEIRA, J. B.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020. ISBN 9786599039539.

SIMONSON, S. *Looking for Math in All the Wrong Places*. Washington, D.C.: MAA Press, 2019. ISBN 978-1-61444-623-2.

VOROB'EV, N. N. *Fibonacci Numbers*. Mineola, NY: Dover Publications, 2002. (Popular Lectures in Mathematics). ISBN 9780486420095.