

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**CENTRO TECNOLÓGICO**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**OTTO TOMASZEWSKI MILAN MOTA**

**AVALIAÇÃO DE DIFERENTES CRITÉRIOS DE GERAÇÃO DE  
CAMPOS DE PROPRIEDADES ALEATÓRIAS NA DETERMINAÇÃO  
DA ESTABILIDADE DE UM TALUDE**

**ORIENTAÇÃO: PROFESSOR RAFAEL AUGUSTO DOS REIS HIGASHI**

Florianópolis

2024

Otto Tomaszewski Milan Mota

**AVALIAÇÃO DE DIFERENTES CRITÉRIOS DE GERAÇÃO DE  
CAMPOS DE PROPRIEDADES ALEATÓRIAS NA DETERMINAÇÃO  
DA ESTABILIDADE DE UM TALUDE**

Trabalho de conclusão de curso submetido ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do Título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Rafael Augusto dos Reis Higashi

Florianópolis

2024

Otto Tomaszewski Milan Mota

**AVALIAÇÃO DE DIFERENTES CRITÉRIOS DE GERAÇÃO DE CAMPOS DE  
PROPRIEDADES ALEATÓRIAS NA DETERMINAÇÃO DA ESTABILIDADE DE UM  
TALUDE**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Engenheiro Civil e aprovado em sua forma final pela Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 01 de Novembro de 2024.

---

**Prof.<sup>a</sup> Liane Ramos da Silva, Dr<sup>a</sup>**

**Banca Examinadora**

---

**Prof. Rafael A. R. Higashi, Dr.**  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

**Prof. Naloan Coutinho Sampa, Dr.**  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

**Eng. Civil André Luis Meier**  
Universidade Federal de Santa Catarina

# **AGRADECIMENTOS**

Gostaria agradecer aqui, não apenas aqueles que participaram deste projeto, mas todos que de alguma forma contribuíram com minha caminhada durante os anos da graduação, espero um dia ser capaz de honrar as oportunidades que me foram dadas.

Agradeço especialmente ao meu irmão mais novo, por tudo que me ensinou ao longo desse tempo.

## RESUMO

MOTA, Otto T. M. **Avaliação de diferentes critérios de geração de campos de propriedades aleatórias na avaliação da estabilidade de um talude**. 2024. Trabalho de conclusão de curso – Engenharia Civil, UFSC, Florianópolis.

A análise da estabilidade de taludes é um desafio na engenharia geotécnica, modelos numéricos como o método dos elementos finitos oferecem precisão, mas demandam alto poder computacional e complexidade. Métodos de equilíbrio limite, como o Método Sueco das Fatias são mais rápidos e intuitivos, dessa forma encontrando espaço no mercado. O uso da análise do equilíbrio limite também pode ser combinada com a geração de campos aleatórios para representar a variabilidade espacial das propriedades do solo e utilizada para avaliar a probabilidade de ruptura de um talude e diferentes métodos podem ser utilizados nesse procedimento. O *Local Average Subdivision* (LAS) é técnica consagrada, porém sua implementação pode ser complexa. Este trabalho avalia, através de um *script* de programação em *Python* desenvolvido pelo autor, métodos mais rápidos e intuitivos, capazes de serem implementados por ferramenta mais simples e acessíveis na avaliação da estabilidade de um talude retirado da literatura. Foi verificado, no estudo, certa similaridade entre os resultados do *script* criado e os obtidos pela implementação do LAS, indicando uma possível alternativa ao procedimento proposto por Fenton e Griffiths (2008). Contudo, diferentemente do LAS, os métodos implementados neste trabalho apresentaram resultados sensíveis ao espaçamento da malha de propriedades do solo, havendo a necessidade de estudos mais aprofundados sobre a sua implementação. As variações geométricas da superfície de ruptura observadas, decorrentes dos diferentes campos de propriedades gerados, demonstraram ter impacto reduzido na distribuição resultante do fator de segurança.

**Palavras-chave:** Local Average Subdivision. Campos Aleatórios. Estabilidade de Taludes. Fator de Segurança. Python

## ABSTRACT

MOTA, Otto T. M. **Avaliação de diferentes critérios de geração de campos de propriedades aleatórias na avaliação da estabilidade de um talude.** 2024. Final Year Project - Civil Engineering, UFSC, Florianópolis.

The analysis of slope stability is a challenge in geotechnical engineering. Numerical models, such as the finite element method, offer precision but require high computational power and complexity. Limit equilibrium methods, like the Swedish Slices Method, are faster and more intuitive, thus finding their place in the market. The use of limit equilibrium analysis can also be combined with the generation of random fields to represent the spatial variability of soil properties, which can be used to assess the probability of slope failure, with different methods applicable to this procedure. The Local Average Subdivision (LAS) is a well-established technique, but its implementation can be complex. This work evaluates, through a Python script developed by the author, faster and more intuitive methods that can be implemented using simpler and more accessible tools in the evaluation of the stability of a slope from the literature. The study found some similarity between the results of the created script and those obtained from the LAS implementation, suggesting a possible alternative to the procedure proposed by Fenton e Griffiths (2008). However, unlike LAS, the methods implemented in this work showed sensitivity to the spacing of the soil property grid, indicating the need for further studies on their implementation. The geometric variations of the failure surface observed, resulting from the different generated property fields, demonstrated a reduced impact on the resulting distribution of the safety factor.

**Keywords:** Local Average Subdivision. Random Fields. Slope Stability. Factor of Safety. Python

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Apresentação do Problema . . . . .	1
1.2	Objetivo Geral . . . . .	2
1.3	Objetivos Específicos . . . . .	2
1.4	Organização do Texto . . . . .	2
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>4</b>
2.1	Estabilidade de Taludes . . . . .	4
2.1.1	Instabilidade em Taludes de Terra . . . . .	4
2.1.2	Método do Equilíbrio Limite . . . . .	6
2.2	Variabilidade Geotécnica . . . . .	10
2.2.1	Estabilidade Determinística . . . . .	10
2.2.2	Estabilidade Probabilística . . . . .	11
2.3	Estatística e Probabilidade . . . . .	12
2.3.1	Função Densidade de Probabilidade . . . . .	12
2.3.2	Flutuação e Correlação de Parâmetros . . . . .	14
2.3.3	Modelos Autorregressivos . . . . .	17
2.3.4	Monte Carlo . . . . .	19
2.3.5	Local Average Subdivision (LAS) . . . . .	21
2.4	Softwares Utilizados Comercialmente . . . . .	22
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODO</b>	<b>24</b>
3.1	Definição do Talude . . . . .	24
3.2	Características do Solo . . . . .	25
3.2.1	Propriedades Geomecânicas . . . . .	25
3.2.2	Variabilidade Espacial . . . . .	28
3.2.3	Função Densidade de Probabilidade . . . . .	29
3.3	Cálculo da Estabilidade . . . . .	30
3.3.1	Script . . . . .	30
3.4	Análise Determinística do Talude . . . . .	32
3.5	Geração dos Campos Aleatórios . . . . .	32
3.5.1	PROCEDIMENTO 1: Distribuição Normal de Probabilidade . . . . .	33

3.5.2	PROCEDIMENTO 2: Distribuição Normal e Correlação Cruzada de Parâmetros . . . . .	34
3.5.3	PROCEDIMENTO 3: Autocorrelação Espacial no Maciço . . . . .	35
3.5.4	PROCEDIMENTO 4: Combinação de Critérios . . . . .	36
3.5.5	PROCEDIMENTO 5: Distribuição Constante de Propriedades . . . . .	37
3.5.6	PROCEDIMENTO 6: Distribuição Constante, assim como descrito no <i>Procedimento 5</i> de Propriedades com Correlação Cruzada . . . . .	37
3.5.7	PROCEDIMENTO 7: Local Average Subdivision . . . . .	37
3.5.8	Resumo . . . . .	38
3.6	Intervalo de Confiança . . . . .	39
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>40</b>
4.1	Intervalo de Confiança . . . . .	40
4.2	Análise Determinística . . . . .	40
4.3	Procedimento 5 e 6 . . . . .	43
4.4	Procedimento 1 . . . . .	45
4.5	Procedimento 3 . . . . .	46
4.6	Procedimento 2 . . . . .	48
4.7	Procedimento 4 . . . . .	49
4.8	Procedimento 7 . . . . .	49
4.9	Distribuições Encontradas . . . . .	50
4.10	Variação da Superfície Crítica . . . . .	52
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>56</b>
5.1	Conclusões . . . . .	56
5.2	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	57
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>59</b>
5.2.1	Sensibilidade . . . . .	77
5.2.2	Convergência . . . . .	81
	<b>APÊNDICE</b>	<b>83</b>



## Lista de Figuras

1	Exemplo do processo de cálculo do equilíbrio de momentos em uma seção de solo. . . . .	8
2	Variação do FS de acordo com o centro de curvatura da superfície crítica. O resultado foi obtido pelo software da <i>Geostudio</i> . . . . .	9
3	Ilustração da diferença de perfil entre a distribuição normal e lognormal. . . . .	13
4	Ilustração da combinação da regressão linear com um critério de flutuação de parâmetros. . . . .	15
5	Ilustração da diferença entre correlação ( $\rho$ ) e covariância (cov). . . . .	16
6	Ilustração do processo criado por Fenton e Griffiths. . . . .	21
7	Ilustração em 2D do processo criado por Fenton e Griffiths (2008) . . . . .	22
8	Exemplo da aplicação do Método de Fellenius para a geometria de talude escolhida. . . . .	25
9	Correlação entre coesão e ângulo de atrito efetivos observada. . . . .	27
10	Sensibilidade do talude frente à variações dos parâmetros geomecânicos avaliada pelo Plaxis LE. . . . .	28
11	Comparação das distribuições normal e lognormal de probabilidade dados os parâmetros geomecânicos escolhidos. . . . .	29
12	Campo descontínuo de propriedades no espaço. . . . .	31
13	Ilustração do procedimento de cálculo. . . . .	32
14	Distribuição espacial da coesão, criada a partir do procedimento 1. . . . .	34
15	Campos correlacionados de coesão e ângulo de atrito . . . . .	35
16	Distribuição espacial da coesão, criada a partir do procedimento 3 . . . . .	36
17	Ilustração de campos de propriedades criados pelo LAS. . . . .	38
18	Ilustração das divergências encontradas entre o <i>script</i> criado e o programa <i>geoslope</i> pelo método determinístico. . . . .	42
19	Avaliação do impacto de diferentes superfícies críticas na estabilidade do talude. . . . .	42
20	Comparação dos resultados dos <i>Procedimentos 5 e 6</i> . . . . .	44
21	Ilustração dos Resultados obtidos pelo Procedimento 1. . . . .	45
22	Ilustração das diferenças entre o Procedimento 1 e 3 . . . . .	46
23	Ilustração do campo de propriedades criado pelo Procedimento 3. . . . .	47

24	Comportamento observado para o <i>Procedimento 3</i> frente a variações no espaçamento da malha de pontos aleatórios. . . . .	48
25	Ilustração da influência da autocorrelação espacial na distribuição de FS. . . . .	49
26	Ilustração dos resultados obtidos pelo Procedimento 7. . . . .	50
27	Comparação entre o <i>Procedimento 3</i> e o resultado obtido pelo LAS. . . . .	50
28	Procedimento 1 - Sensibilidade da Geometria da Superfície Crítica . . . . .	53
29	Procedimento 2 - Sensibilidade da Geometria da Superfície Crítica . . . . .	53
30	Procedimento 3 - Sensibilidade da Geometria da Superfície Crítica . . . . .	54
31	Procedimento 1 - Malha de 0,4m . . . . .	54
32	Volume de material movimentado. . . . .	55

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Apresentação do Problema

A variabilidade das propriedades mecânicas do solo é problema conhecido da geotecnia. Os diversos processos responsáveis pela formação do material, devido a sua complexidade e variedade, criam um substrato não homogêneo, com o qual o engenheiro precisa saber lidar. Diferentes modelos matemáticos podem ser usados para descrever a distribuição espacial destes parâmetros.

A variabilidade, aliada a um comportamento mecânico complexo, torna o uso de ferramentas computacionais para avaliação do desempenho de taludes, fundações e demais obras de terra, técnica de grande valor para o engenheiro. A análise de todas essas incertezas por meio de uma modelagem complexa, como no caso do método de elementos finitos (FEM), demanda um grande custo computacional, muitas vezes resultando em horas de processamento dos dados. O uso de alternativas mais ágeis e menos onerosas computacionalmente, além de agregar na compreensão dos fenômenos envolvidos, também permite a avaliação de um maior número de variáveis e possibilidades durante a elaboração de um projeto geotécnico.

O método de elementos finitos amplamente utilizado em diferentes problemas de engenharia, discretiza o meio contínuo em elementos de menor dimensão. Cada elemento é composto por nós, onde serão computadas as equações de interesse do problema, necessitando da solução de um grande número de equações diferenciais, o que torna esse processo computacionalmente intensivo. No contexto da estabilidade de taludes, a utilização de métodos clássicos de equilíbrio limite continua sendo vantajosa. Nesses métodos, a simplificação do comportamento do talude pela subdivisão deste em fatias, aliado à simplificação da geometria da superfície de ruptura por um arco circular, reduz a necessidade de processamento de dados e torna a análise significativamente mais rápida.

Embora o uso de *softwares* comerciais para a análise de problemas geotécnicos agilize consideravelmente o trabalho do engenheiro, o uso de maneira indiscriminada, no entanto, pode trazer problemas, sendo desejável o entendimento dos mecanismos por trás do funcionamento desse tipo de ferramenta para profissionais, tanto do meio acadêmico, como no mercado de trabalho. Alguns métodos implementados por esses *softwares*, no entanto, são complexos e pouco intuitivos, sendo um melhor entendimento dos modelos para discretização da variabilidade espacial do solo um dos objetivos do presente trabalho.

A modelagem da variabilidade espacial das propriedades do solo foi estudada por inúmeros autores na avaliação da confiabilidade de estruturas geotécnicas. Entre os métodos disponíveis para gerar campos aleatórios, o LAS (*Local Average Subdivision*), proposto por Fenton e Griffiths (2008), destaca-se entre eles.

Embora conceitualmente simples, o LAS, segundo os próprios autores, é de difícil implementação e tem os mecanismos por trás de seu funcionamento difíceis de entender. Assim, o uso de alternativas mais simples, e com sorte equivalentes, traria benefício para os profissionais da área por permitir o melhor entendimento dos resultados e suas limitações.

O custo financeiro desses softwares pode ser outra barreira para pequenas empresas e estudantes, que por vezes tem sua licença de uso limitada.

Com isso em mente e, sabendo que o uso de diferentes perspectivas tendem a agregar no entendimento de determinada situação, o Trabalho de Conclusão de Curso ganha motivação.

## **1.2 Objetivo Geral**

Avaliar a distribuição probabilística do fator de segurança frente à diferentes critérios de geração de campos de propriedades aleatórias. impacto de diferentes procedimentos de geração de campos aleatórios no comportamento previsto para um talude retirado da literatura, utilizando de um *script* próprio capaz de implementar os procedimentos e fornecer resultados de maneira mais geral e abrangente.

## **1.3 Objetivos Específicos**

Os objetivos específicos são:

- Desenvolver e implementar um algoritmo capaz de calcular o fator de segurança de um talude levando em consideração diferentes modelos de variabilidade do solo.
- Caracterização probabilística do comportamento do talude por diferentes modelos de variabilidade do solo.
- Avaliar as divergências entre os resultados obtidos.

## **1.4 Organização do Texto**

Uma vez que parte do objetivo consiste na criação de um *script* próprio para avaliação da estabilidade de determinado talude, buscando justificar os processos implementados, a descrição

de conceitos básicos de estatística e geotecnia se faz presente no referencial teórico. Outros autores e pesquisas com propostas semelhantes também são expostos nessa parte do texto e relacionadas com os conceitos físicos e matemáticos descritos.

A caracterização, estatística e geomecânica dos materiais assim como a geometria do talude e dos procedimentos utilizados na análise são expostos no capítulo de materiais e métodos.

Foi avaliada, no estudo, a distribuição do probabilística do fator de segurança e as alterações na geometria da superfície de ruptura, decorrentes da geração de diferentes campos de propriedades para o solo. Uma vez que grande volume de dados foi obtido, figuras foram amplamente utilizadas para permitir o entendimento dos resultados. Estas informações estão presentes no capítulo de Resultados.

Por fim as conclusões do estudo são apresentadas. O *script* criado é fornecido nos apêndices e as referências mencionadas logo depois da conclusão.

## **2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1 Estabilidade de Taludes**

#### **2.1.1 Instabilidade em Taludes de Terra**

De acordo com Gerscovich (2016), talude é a denominação que se dá à qualquer superfície inclinada de um maciço de solo ou rocha. Taludes são comuns em obras de engenharia civil, geotecnia e mineração, e sua ruptura resulta em deslizamentos ou colapsos que podem resultar em danos significativos à infraestrutura, propriedade e, em alguns casos, representar risco à segurança pública. A análise de taludes envolve a avaliação de fatores como a inclinação do terreno, as condições hidrogeológicas e propriedades mecânicas do solo e sua formação.

Por instabilidade, entende-se movimentação do talude. Diversas formas de movimentação podem ser observadas no campo. Varnes (1978), em 1978, criou um sistema de classificação de diferentes tipos de movimentação. Augusto Filho (1992) trouxe um novo sistema, agora agrupados em quatro categorias: Rastejo, escorregamento, Queda e Corrida (GERSCOVICH, 2016), ilustrados pela Tabela 1.

Os escorregamentos são movimentos de massa rápidos, com superfície de ruptura bem definida. Conforme as condições geomofológicas, as superfícies de ruptura podem ser planares, circulares, em cunha ou uma combinação de formas (circular e plana) denominada superfície mista. Os escorregamentos planares são comuns dadas condições de descontinuidade, como em afloramentos rochosos próximos à superfície ou planos de fraqueza, como os presentes em estruturas reliquias. Quando as descontinuidades não estão alinhadas entre si ou com a superfície do talude a ruptura tende a apresentar forma de cunha. Quando ocorrem múltiplos escorregamentos rotacionais de maneira simultânea o escorregamento é dito múltiplo (GERSCOVICH, 2016).

Tabela 1: Classificação dos tipos de movimentação de massa por Augusto Filho. (GERSCOVICH, 2016)

PROCESSOS	CARACTERÍSTICAS DO MOVIMENTO, MATERIAL E GEOMETRIA
Rastejo ou fluência	Vários planos de deslocamento (internos) Velocidades muito baixas (cm/ano) a baixas e decrescentes com a profundidade Movimentos constantes, sazonais ou intermitentes Solo, depósitos, rocha alterada/fraturada Geometria indefinida
Escorregamento	Poucos planos de deslocamento (externos) Velocidades médias (km/h) a altas (m/s) Pequenos a grandes volumes de material Geometria e materiais variáveis Planares ⇒ solos pouco espessos, solos e rochas com um plano de fraqueza Circulares ⇒ solos espessos homogêneos e rochas muito fraturadas Em cunha ⇒ solos e rochas com dois planos de fraqueza
Queda	Sem planos de deslocamento Movimentos tipo queda livre ou em plano inclinado Velocidades muito altas (vários m/s) Material rochoso Pequenos a médios volumes Geometria variável: lascas, placas, blocos etc. Rolamento de matacão Tombamento
Corrida	Muitas superfícies de deslocamento (internas e externas à massa em movimentação) Movimento semelhante ao de um líquido viscoso Desenvolvimento ao longo das drenagens Velocidades médias a altas Mobilização de solo, rocha, detritos e água Grandes volumes de material Extenso raio de alcance, mesmo em áreas planas

**Fonte: Gerscovich (2016)**

A instabilidade do talude é deflagrada quando as tensões cisalhantes mobilizadas se igualam à resistência ao cisalhamento (GERSCOVICH, 2016). Esses dois parâmetros podem ser alterados por diversos mecanismos diferentes, e o equilíbrio entre eles é necessário para manutenção do corpo do talude. Varnes (1978) criou uma tabela classificando os diferentes fatores deflagradores dos movimentos de massa (Tabela 2) de acordo com sua relação com essas duas variáveis.

As características do do material também influenciam na capacidade de absorção das solicitações à ele impostas. Conforme aponta Miranda (2012), os elementos que afetam a estabilidade podem ser geométricos (altura e inclinação), geológicos e/ou geotécnicos (planos/zonas de baixa resistência e comportamento do maciço) e hidrogeológicos (presença de água). Fraturas, falhas, foliação, descontinuidades e morfologia são variáveis geológicas que merecem destaque na discussão. A presença de água reduz a coesão aparente do solo e as tensões efetivas, sendo evidentemente nociva para a estabilidade do maciço de solo.

Tabela 2: Classificação de fatores deflagradores dos movimentos de massa (GERSCOVICH, 2016).

<b>AÇÃO</b>	<b>FATORES</b>	<b>FENÔMENOS GEOLÓGICOS / ANTRÓPICOS</b>
<b>Aumento da solicitação</b>	Remoção de massa (lateral ou da base) (Fig. 1.22)	Erosão Escorregamentos Cortes
	Sobrecarga	Peso da água de chuva, neve, granizo etc. Acúmulo natural de material (depósitos) Peso da vegetação Construção de estruturas, aterros etc.
	Solicitações dinâmicas	Terremotos, ondas, vulcões etc. Explosões, tráfego, sismos induzidos
	Pressões laterais	Água em trincas (Fig. 1.23 ) Congelamento Material expansivo
<b>Redução da resistência ao cisalhamento</b>	Características inerentes ao material (geometria, estruturas etc.)	Características geomecânicas do material
	Mudanças ou fatores variáveis	Ação do intemperismo provocando alterações físico-químicas nos minerais originais, causando quebra das ligações e gerando novos minerais com menor resistência. Processos de deformação em decorrência de variações cíclicas de umedecimento e secagem, reduzindo a resistência. Variação das poropressões (Fig. 1.24 ): Elevação do lençol freático por mudanças no padrão natural de fluxo (construção de reservatórios, processos de urbanização etc.). Infiltração da água em meios não saturados, causando redução das pressões de água negativas (sucção). Geração de excesso de poropressão, como resultado de implantação de obras. Fluxo preferencial através de trincas ou juntas, acelerando os processos de infiltração.

**Fonte: Gerscovich (2016)**

## 2.1.2 Método do Equilíbrio Limite

Frequentemente quando se trabalha com estruturas, de concreto ou aço, por exemplo, são calculados o equilíbrio de forças e momentos em um determinado elemento ou seção. De forma similar, a estabilidade de taludes pode ser avaliada com base na relação de equilíbrio entre os momentos e forças e a capacidade de resposta do maciço.

Para geometrias e solicitações menos complicadas, a superfície de falha de uma estrutura tende a apresentar comportamento previsível. Para verificação da estabilidade de uma viga, é necessário avaliar a distribuição de tensões em sua seção de maneira análoga, para verificação da estabilidade de um talude, pode-se avaliar a estabilidade em um corte do maciço de terra. Modelos mais complexos, como elementos finitos, podem ser utilizados em ambos os casos, trazendo resultados mais precisos ao custo de um tempo de análise maior, no entanto, dada determinada superfície de ruptura, pode-se avaliar, de maneira muito mais simples, o equilíbrio entre as solicitações atuantes no corpo de solo e a capacidade deste em resistir à essas solicitações (GUIDICINI; NIEBLE, 2010).



Para simplificação do processo a seção do talude pode ser dividida em segmentos trapezoidais, "fatias", e solicitações e capacidade avaliadas individualmente para cada segmento e depois somadas. A capacidade é limitada pela resistência ao cisalhamento do solo e as solicitações são influenciadas pelo peso próprio do material e pelos demais carregamentos que atuam nele. Fellenius estabeleceu método de cálculo para a capacidade do talude através da resistência da base de cada uma das "fatias" anteriormente mencionadas. O equilíbrio de momentos entre os esforços de cisalhamento na base dessas fatias e as solicitações demonstra a estabilidade do maciço de solo para aquela determinada superfície de ruptura.

O processo utilizado por Fellenius, ilustrado pela Figura 1 é de fácil compreensão. Primeiro são calculadas as forças normais na base das fatias através de:

$$\sigma = W_n \cdot \cos(\alpha_n) / \Delta L_n \quad (1)$$

Em seguida, dado que:

$$\sum_{n=1}^{n=p} W_n \sin(\alpha_n) = \frac{1}{FS} \tau \cdot \Delta L_n \cdot r \quad (2)$$

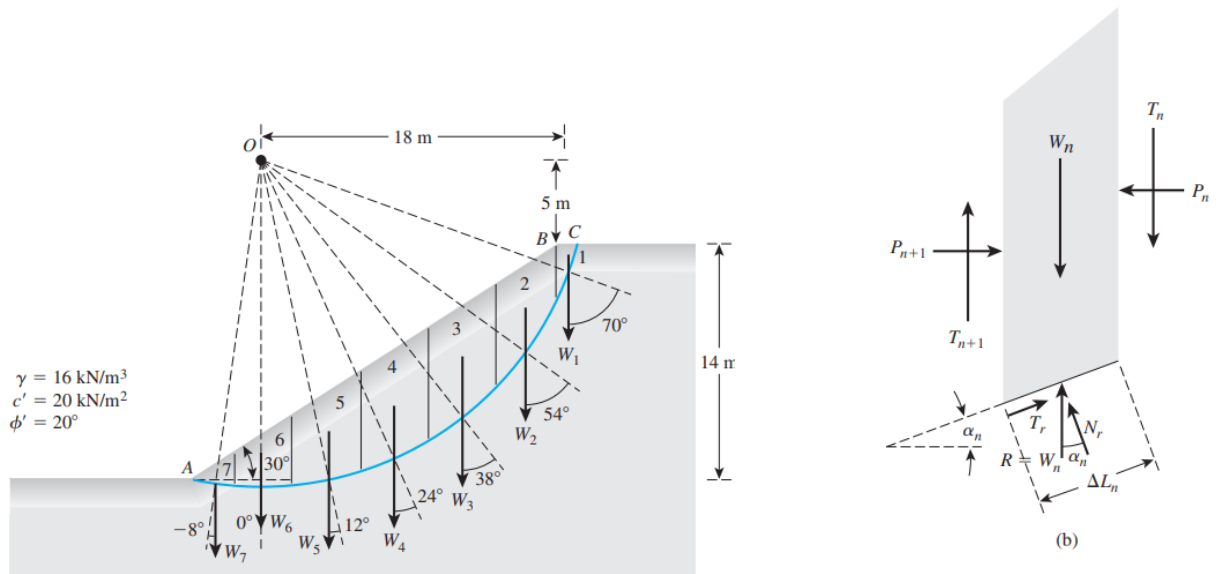
E substituindo ?? em 2:

$$\sum_{n=1}^{n=p} W_n \sin(\alpha_n) = \frac{1}{FS} (c + \sigma \tan(\phi)) \cdot \Delta L_n \cdot r \quad (3)$$

Tem-se que:

$$FS = \frac{\sum_{n=1}^{n=p} (c \Delta L_n + W_n \cdot \cos(\alpha_n) \cdot \tan(\phi))}{\sum_{n=1}^{n=p} W_n \sin(\alpha_n)} \quad (4)$$

Figura 1: Exemplo do processo de cálculo do equilíbrio de momentos em uma seção de solo.



(a) Ilustração do processo de verificação do equilíbrio limite.

(b) Forças atuantes em uma fatia qualquer de material.

Fonte: Das (2010)

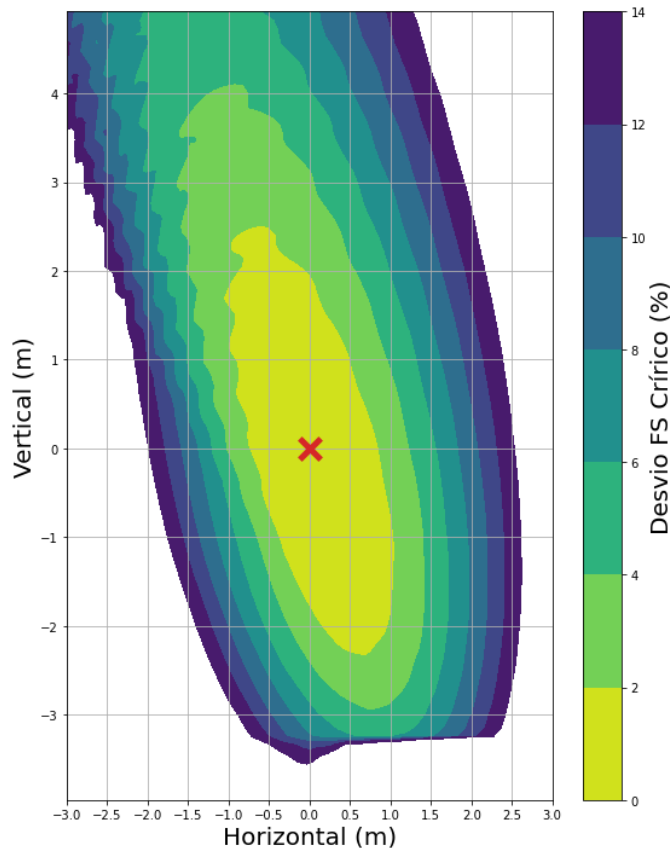
A Equação (4) é de fácil implementação e representa o fator de segurança obtido pelo equilíbrio de momentos no talude. Ela, no entanto, não leva em consideração a relação tensão-deformação do solo nem a relação entre tensão vertical e horizontal, impossibilitando a identificação da verdadeira forma de ruptura (BOLTON; GROENWOLD, 2003). Surge portanto, a necessidade de testar diferentes superfícies de ruptura, buscando pela de maior instabilidade (GUIDICINI; NIEBLE, 2010).

Superfícies de falha podem ser definidas através de um raio e um centro de curvatura. Uma malha de pontos representando os centros de curvatura, pode ser combinada com uma sequência de raios para dar origem às superfícies que serão utilizadas na análise. Através dessa técnica, regiões da malha que resultaram em menores valores para o fator de segurança podem ser facilmente visualizadas. A Figura (2) ilustra isolinhas (isoregiões) de fatores de segurança comumente utilizadas nos modelos baseados em equilíbrio limite, auxiliando na compreensão do problema e avaliação das superfícies de ruptura escolhidas (GERSCOVICH, 2016).

A superfície dita como crítica, portanto, será aquela que, dentre todas as superfícies testadas, apresentar menor fator de segurança. No caso da análises probabilísticas, diferentes cenários são testados a cada iteração. De forma rigorosa, a posição da superfície crítica (com menor fator de segurança) varia de acordo com o conjunto de parâmetros gerados. Nesse caso, o número de superfícies críticas possíveis é indefinido, e numa simulação computacional, será tão grande quanto o número de cenários testados. Para modelos mais simplificados, pode-se inicialmente definir uma superfície crítica, com base nos parâmetros médios do material, e fixá-la nas iterações subsequentes.

Diferentes autores também propuseram métodos alternativos ao de Fellenius. Bishop propôs uma análise considerando as forças atuantes entre as fatias. Jambu adicionou a não linearidade da pressão neutra à análise. Morgenstern-Price se aprofundou ainda mais nas interações entre fatias. O método, por considerar o menor número de variáveis relacionadas à capacidade do talude, tende a ser o mais conservador dentre as análises de estabilidade, com  $FS_{Bishop} \approx 1,25 \cdot FS_{Fellenius}$  (GERSCOVICH, 2016).

Figura 2: Variação do FS de acordo com o centro de curvatura da superfície crítica. O resultado foi obtido pelo software da *Geostudio*.



## 2.2 Variabilidade Geotécnica

A heterogeneidade das propriedades mecânicas é característica dos materiais geotécnicos. Diferenças minerais e granulométricas podem ocorrer para pequenas variações espaciais, mesmo dentro de uma mesma litologia. Esta variabilidade é influenciada por múltiplos fatores que abrangem aspectos geológicos, climáticos, hidrogeológicos, além de processos de formação e históricos da área em questão (CRAIG, 1997).

Baecher e Christian (2003) apresentam 3 categorias de incertezas geotécnicas: Variabilidade natural do material, incerteza no conhecimento e incerteza no modelo de decisão

A *incerteza no conhecimento* tem origem na escolha do modelo matemático utilizado, erros e representatividade dos ensaios, e na precisão com que os parâmetros podem ser estimados. Esse tipo de incerteza pode ser minimizado durante a elaboração do projeto. A incerteza no modelo de decisão é relacionada à construção, fatores humanos e deterioração, podendo ser reduzida com melhorias no processo construtivo. Já as incertezas sobre a variabilidade natural do material são inerentes a ele.

A variabilidade intrínseca dos parâmetros geotécnicos, pode ser discretizada no espaço, seguindo a proposta de Phoon e Kulhawy (1999). Essa abordagem, que se fundamenta nos conceitos de Fenton e Vanmarcke (1990), permite decompor a variabilidade de um parâmetro em duas componentes: uma determinística, que representa a tendência espacial (geralmente relacionada à profundidade), e uma estocástica, que captura as flutuações aleatórias em torno dessa tendência (PHOON; KULHAWY, 1999). A componente aleatória, por sua vez, pode ser modelada por uma função densidade de probabilidade.

Embora aleatórias, as propriedades também são correlacionadas entre si e espacialmente. Dois pontos próximos dificilmente apresentam propriedades consideravelmente distintas. Viviescas, Griffiths e Osorio (2021) observou a anisotropia desse fenômeno, e afirmou que a correlação horizontal estaria relacionada ao processo de formação dos materiais, enquanto a vertical estaria mais relacionada às tensões efetivas.

De forma parecida um ponto com valores relativamente altos de coesão tende a apresentar ângulo de atrito reduzido, Wang Yu em seu estudo demonstra a correlação cruzada entre esses parâmetros (WANG; AKEJU, 2016).

### 2.2.1 Estabilidade Determinística

A análise determinística do comportamento de um talude baseia-se na atribuição de

valores fixos e definidos para as propriedades geotécnicas do solo. A análise determinística utiliza valores médios ou típicos para os parâmetros geotécnicos, como coesão e ângulo de atrito. Essa abordagem simplificada assume que as propriedades do solo são homogêneas e isotrópicas (FENTON; GRIFFITHS, 2008).

A abordagem por vezes subestima a incerteza inerente aos parâmetros geotécnicos, podendo levar a resultados conservadores ou inseguros. No entanto, pela menor complexidade, maior agilidade no processamento e mais fácil compreensão, a metodologia ainda se faz atrativa, principalmente para avaliações preliminares (FENTON; GRIFFITHS, 2008).

### **2.2.2 Estabilidade Probabilística**

A análise probabilística de estabilidade de taludes, comumente empregada em geotecnia, envolve a quantificação da probabilidade de falha pela comparação do número de insucessos e o número total de simulações utilizadas na avaliação. Cada simulação é criada a partir da geração de campos que representem a distribuição espacial das propriedades geotécnicas do solo, como a coesão e o ângulo de atrito. A geração desses campos pode considerar a autocorrelação espacial das propriedades, bem como a correlação cruzada entre elas, refletindo a dependência estatística entre os parâmetros. Modelos geostatísticos são empregados para simular a variabilidade espacial dessas propriedades (FENTON; GRIFFITHS, 2008).

Na análise são gerados diversos campos e para cada um deles é realizada a análise da estabilidade do talude. Através desse processo é possível a obtenção de uma distribuição de probabilidade para o fator de segurança.

A abordagem permite quantificar a incerteza associada à avaliação da estabilidade do talude, fornecendo informações mais confiáveis para a tomada de decisões em projetos geotécnicos. A metodologia permite, ainda, analisar a influência de diferentes variáveis aleatórias nos resultados da estabilidade.

A escolha de uma função densidade de probabilidade apropriada, como a distribuição normal ou lognormal, assim como dos critério de correlação utilizados, são necessários para modelagem da variabilidade do solo e conseqüentemente impactam no resultado obtido (MOSIMANN, 2024).

A forma de implementação desses diferentes critérios da origem à diferentes métodos. Um dos mais utilizados é o *Local Average Subdivision*, criado por Fenton e Griffiths (2008) e implementado pelo *software* da Bentley, *Plaxis LE*. Outros métodos também são recorrentes e são implementados por outros programas.

## 2.3 Estatística e Probabilidade

### 2.3.1 Função Densidade de Probabilidade

Diferentemente das variáveis aleatórias discretas, que assumem valores em um conjunto contável, as variáveis contínuas podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo real. A função densidade de probabilidade (FDP) oferece uma maneira de quantificar a probabilidade de uma variável contínua assumir um valor específico ou um intervalo de valores (ROSS, 2007).

A área sob a curva da FDP em um determinado intervalo corresponde à probabilidade de a variável aleatória cair nesse intervalo. É importante notar que, para uma variável contínua, a probabilidade de ela assumir um valor exato é nula, pois há infinitos valores possíveis dentro de um intervalo (MONTGOMERY; RUNGER, 2014).

Existem diversas distribuições de probabilidade contínuas, cada uma com sua própria FDP característica. Algumas delas são a distribuição normal, lognormal, de Weibull e gamma. A escolha da distribuição adequada depende da natureza do fenômeno aleatório em estudo e das informações disponíveis sobre os dados. A função densidade de probabilidade de Gauss, também conhecida como distribuição normal ou curva em sino, é definida por dois parâmetros, a média ( $\mu$ ) e o desvio padrão ( $\sigma$ ) (ROSS, 2007).

Um dos principais motivos para a ampla utilização da curva de Gauss, Equação 5, na representação de fenômenos probabilísticos é o Teorema do Limite Central. Esse teorema estabelece que a média de um grande número de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tende a seguir uma distribuição normal, independentemente da distribuição original das variáveis (MONTGOMERY; RUNGER, 2014). Essa propriedade torna a distribuição aplicável a uma vasta variedade de fenômenos naturais e sociais.

$$G(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

A distribuição lognormal (Equação 6), por sua vez, descreve uma variável aleatória cujo logaritmo natural segue uma distribuição normal. De forma análoga ao teorema do limite central, a distribuição surge de maneira natural com o produto de variáveis aleatórias independentes e também é amplamente utilizada na geotecnia. A distribuição não apresenta valores negativos, e tende a se assemelhar com a curva de Gauss para menores valores do desvio padrão, esse comportamento é ilustrado pela Figura 3.

$$L(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (6)$$

É importante notar que o teorema mencionado se refere à distribuição da média e não à distribuição das próprias variáveis. Outras distribuições podem ser utilizadas para modelar o comportamento de variáveis aleatórias, como por exemplo a distribuição Weibull.

Lacasse e Nadim (1998) mostraram em seu estudo o amplo uso das distribuições normais e lognormais no contexto da geotecnia. Mosimann (2024) realizou um levantamento de soluções aplicadas para a estabilidade de taludes observando em sua maioria a utilização da distribuição lognormal (Tabela 3). Os valores negativos inexistentes nessa distribuição porém admitidos pela curva de Gauss, justificam essa escolha.

Quando o desvio padrão não é grande, no entanto, a curva de normal se aproxima da lognormal, como mostrado pela Figura 3 e a substituição de uma pela outra em pouco influência no resultado.

Figura 3: Ilustração da diferença de perfil entre a distribuição normal e lognormal.

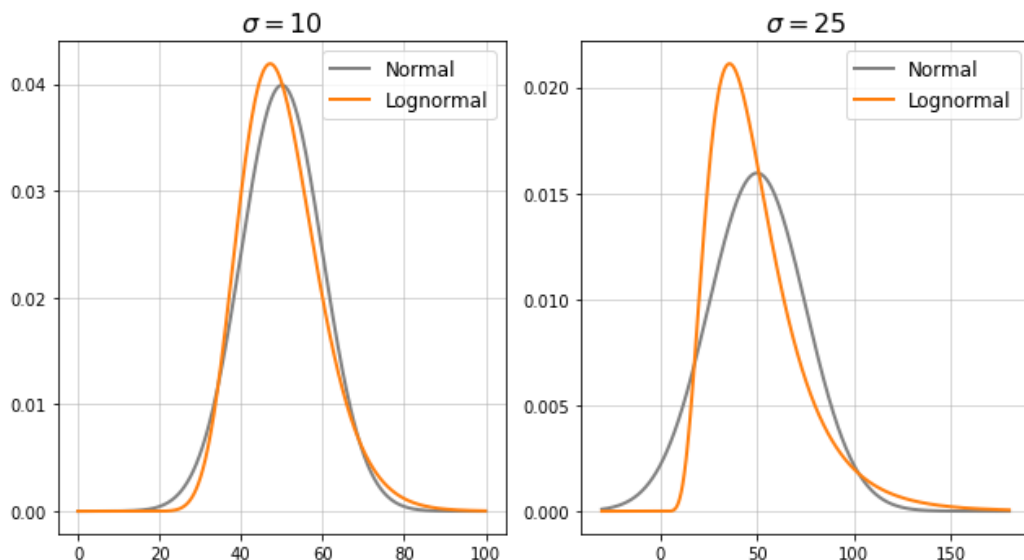


Tabela 3: Referências de Estudo de Mozimann.

Referência	Método / Software de análise	FDP	Variável aleatória
Branco (2014)	Equilíbrio Limite - Slide	Lognormal	$c, \phi$
Jiang e Huang (2016)	-	Lognormal	$c, \phi, S_u$
Liu et al. (2018)	Elementos finitos - Abaqus	Lognormal	$S_u$
Wang et al. (2020)	Elementos Finitos - Abaqus	Lognormal	$c, \phi, S_u$
Viviescas et al. (2021)	Elementos Finitos – RFEM	-	$N_{SPT}$
Ziesman (2022)	Elementos Finitos – RFEM e Abaqus	Lognormal	$q_c, q_t, f_s, S_u$
Wu et al. (2024)	Elementos Finitos – RFEM, Plaxis 2D e 3D	Lognormal	Módulo Young, Coeficiente de Poisson, peso específico

Fonte: Mosimann (2024)

### 2.3.2 Flutuação e Correlação de Parâmetros

O conjunto de ferramentas estatísticas utilizadas para modelar e explorar relações entre variáveis que estão relacionadas de maneira não determinística é chamado de análise de regressão (MONTGOMERY; RUNGER, 2014). A análise da variância pode ser utilizada para testar a significância da regressão.

A regressão linear, tradicionalmente pressupõe que os coeficientes do modelo são constantes e conhecidos (HAMILTON, 1994). Essa suposição pode ser restritiva quando se busca modelar a complexidade inerente a certos conjuntos de dados. Ao incorporar a flutuação de parâmetros os modelos de regressão ganham flexibilidade para capturar algumas das incertezas presentes nos dados.

Para determinados modelos, como o campo aleatório de uma propriedade de solo, pode-se considerar duas componentes: um componente de tendência determinístico, ditado pela regressão, e um componente de flutuação, controlado por uma função de probabilidade (PHOON; KULHAWY, 1999). A Equação 7 foi criada por Phoon para descrever esse mesmo fenômeno, e pode ser melhor ilustrada pela Figura 4.

$$\xi(x) = t(x) + w(x) \quad (7)$$

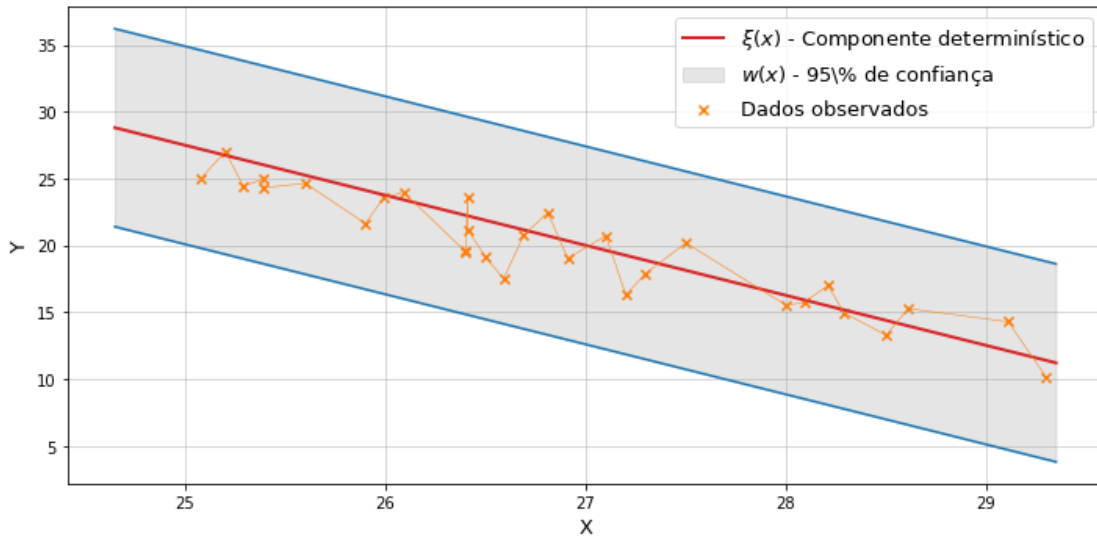
$\xi(x)$  é o parâmetro modelado.

$t(x)$  representa a componente determinística.

$w(x)$  é a componente de flutuação, função de Gauss por exemplo.



Figura 4: Ilustração da combinação da regressão linear com um critério de flutuação de parâmetros.



Quando duas ou mais variáveis aleatórias são definidas em um espaço de probabilidade, é útil descrever como elas variam juntas; ou seja, é útil medir a relação entre as variáveis (MONTGOMERY; RUNGER, 2014). A covariância (cov) serve justamente essa função, sendo uma medida da relação linear entre duas variáveis.

$$cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

$$\therefore$$

$$cov(X, Y) = E(X, Y) - \mu_X \mu_Y \quad (8)$$

A correlação é definida como o quociente entre a covariância e o produto dos desvios padrão das variáveis estudadas. A correlação assim como a covariância é uma medida da relação linear entre duas variáveis e a diferença conceitual entre as duas é que a primeira mede a intensidade da relação entre duas variáveis, enquanto a segunda avalia o impacto que uma tem no valor esperado da outra. A Figura 5 ilustra essa diferença.

Uma correlação positiva indica que as variáveis tendem a variar na mesma direção, uma correlação negativa indica que as variáveis tendem a variar em direções opostas. A magnitude da correlação é expressa pelo coeficiente de correlação. O coeficiente de correlação de Pearson, Equação 9, denotado por  $\rho$ , pode ser utilizado para expressar a correlação linear entre os parâmetros (WEISSTEIN, 2024), variando de -1 a 1, sendo zero o indicador de que não há correlação linear entre as variáveis.

A correlação cruzada entre dois parâmetros do solo (por exemplo,  $c$  e  $\phi$ ) refere-se a uma relação entre os parâmetros do solo, de modo que uma variação nos valores de um parâmetro (por exemplo,  $c$ ) leva a variação nos valores do outro parâmetro. A correlação cruzada entre  $c$  e  $\phi$  é conhecida no meio geotécnico, e uma correlação cruzada negativa entre  $c$  e  $\phi$  é amplamente utilizada (WANG; AKEJU, 2016).

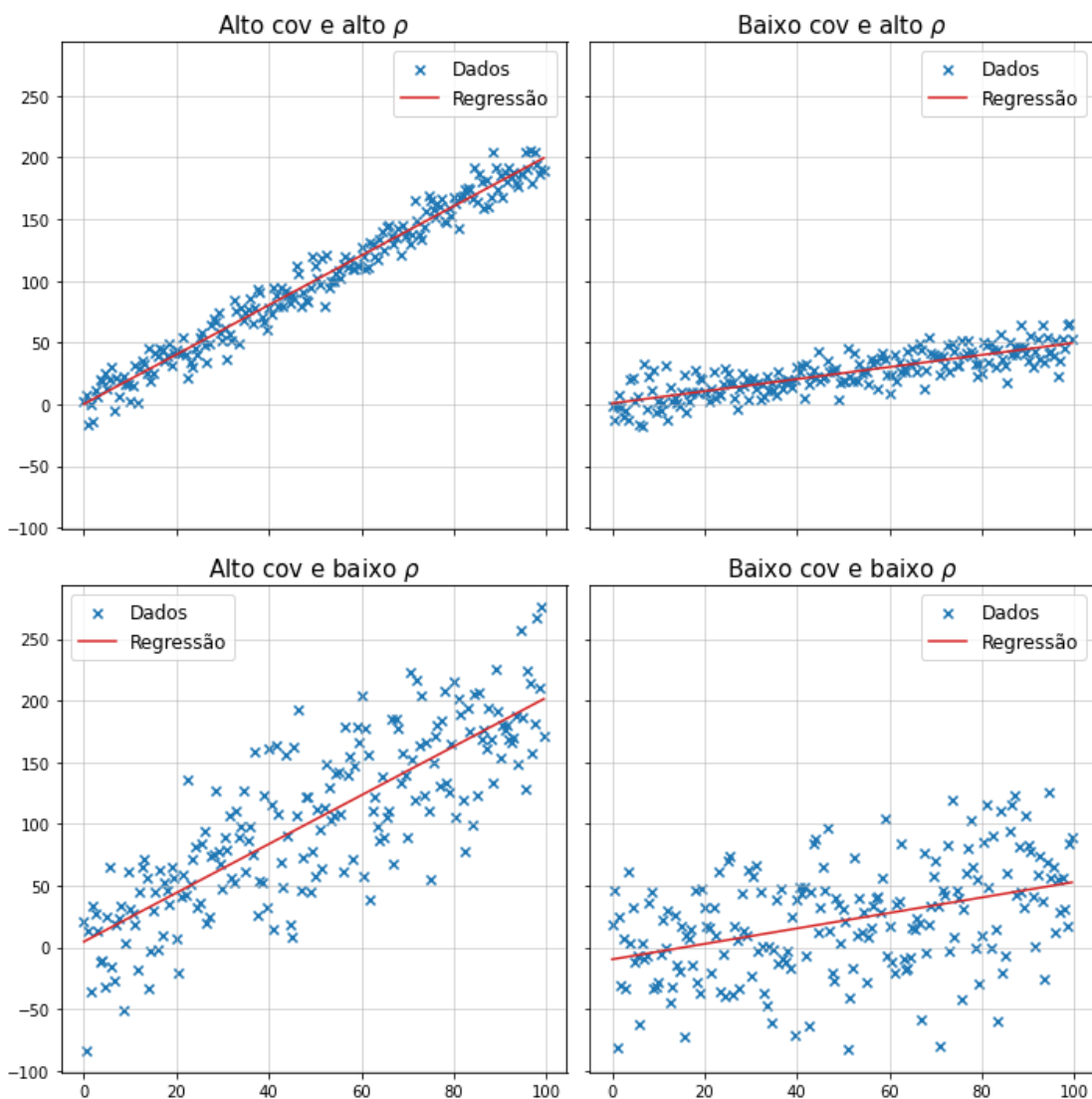
$$\rho(X,Y) = cov(X,Y)/(\sigma_X \cdot \sigma_Y) \quad (9)$$

Onde:

$\rho$  = coeficiente de correlação de Pearson

$\sigma$  = Desvio padrão dos dados.

Figura 5: Ilustração da diferença entre correlação ( $\rho$ ) e covariância (cov).



### 2.3.3 Modelos Autorregressivos

Um modelo auto-regressivo (AR) postula que o valor de uma variável em um determinado instante de tempo pode ser expresso como uma combinação linear de seus próprios valores passados, juntamente com um termo de erro aleatório (HAMILTON, 1994). A Equação (10), mostrada por Montgomery (MONTGOMERY; RUNGER, 2014), representa matematicamente um modelo AR de ordem p.

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (10)$$

Em que:

$X_t$ : Representa o valor da variável que estamos analisando no tempo t.

c: É a constante ou intercepto do modelo.

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ : São os coeficientes autoregressivos.

$X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$ : São os valores passados da variável.

$\varepsilon_t$ : É o termo de erro

Os coeficientes auto-regressivos ( $\phi$ ) quantificam a influência dos valores passados na previsão do valor presente. Um coeficiente  $\phi_i$  alto indica que o valor da série no instante t-i tem um grande impacto no valor de  $X_t$ . A ordem do modelo (p) determina o número de defasagens incluídas no modelo.

Como mostrado por Basawa (1972), para análises autorregressivas, o coeficiente de correlação de Markov, Equação 11, é uma medida da relação entre duas séries temporais geradas por um processo de Markov. O coeficiente é uma generalização do coeficiente de correlação de Pearson.

$$\rho_{Markov}(X, Y) = Cov(X_t, Y_{t+h}) / (\sigma_X \sigma_Y) \quad (11)$$

Se tratando de uma autorregressão de Markov, Hamilton (1994) mostra que os coeficientes  $\phi_i$  são equivalentes aos coeficientes obtidos pela Equação 11.

A autocorrelação espacial entre dois pontos é definida pela da distância de autocorrelação. Esta pode ser relacionada com a correlação existente pela função de autocorrelação de primeira ordem de Markov. Viviescas, Griffiths e Osorio (2021) utiliza a Equação 12 para definir a o valor da distância de autocorrelação, onde  $\tau$  é distância entre os pontos,  $\theta$  a distância de autocorrelação e  $\rho$  o valor de correlação.

$$\rho(\tau) = e^{-\frac{2|\tau|}{\theta}} \quad (12)$$

A autocorrelação em solos é um fenômeno estatístico que descreve a dependência espacial entre as propriedades de um ponto e outro em um determinado depósito de solo. Matematicamente, a autocorrelação é representada pela função de autocorrelação espacial, que mede a correlação entre os valores de uma propriedade em dois pontos separados por uma determinada distância. A representação matemática varia de acordo com o modelo escolhido, sendo os modelos exponencial, Gaussiano e e de Markov alguns dos utilizados na literatura (FENTON; GRIFFITHS, 2008).

Um aspecto importante da autocorrelação espacial é a anisotropia, que ocorre quando a magnitude da correlação varia de acordo com a direção espacial. A anisotropia é frequentemente observada em solos devido a processos de intemperismo e deposicionais que resultam em estruturas preferenciais. A representação matemática da anisotropia é incorporada aos modelos pela consideração de diferentes valores de distância de autocorrelação para o eixo horizontal e vertical (VIVIESCAS; GRIFFITHS; OSORIO, 2021). Viviescas, Griffiths e Osorio (2021) observaram que a primeira era cerca de 20 vezes superior à segunda no material de seu estudo, Phoon e Kulhawy (1999) observou diferenças de mais de 30 vezes. Mosimann (2024) em sua tese elaborou a Tabela 4 ilustrando alguns resultados da literatura.

Tabela 4: Valores de literatura para escala de flutuação.

Tipo de material	Referência	Ensaio utilizados	Aplicação - software utilizado	Escala horizontal	Número de ensaios para escala horizontal	Escala vertical	Número de ensaios para escala vertical
Areia, argila	Phoon et al. (1995)	CPT	-	3 - 80 m	11	0,1 - 2,2 m	7
Solo residual de granito	Branco (2014)	Cisalhamento direto	Análise probabilística de estabilidade - Slide	0,29 - 0,42 m	40	-	-
Rejeitos de mineração de ouro	Perini (2021)	CPTu	Análise da variabilidade - Abaqus	-	-	0,14 - 2,23 m	11
Solo residual	Viviescas et al. (2021)	SPT	-	20,2 - 22,73	146	0,74 - 1,32	146
Fluxo de lama	Viviescas et al. (2021)	SPT	-	5,21 - 10,3 m	132	1,1 - 1,56 m	132
Argila	Huang et al. (2022)	CPT	-	-	-	0,24 - 1,01 m	16
Argila	Huang et al. (2022)	SPT	-	-	-	0,96 - 3,99 m	15
Solo sedimentar argiloso	Ziesmann (2023)	CPTu	Análise probabilística de estabilidade - RFEM e	-	-	0,34 - 4,22 m	1

Fonte: Mosimann (2024).

### 2.3.4 Monte Carlo

Até o advento de métodos computacionais poderosos e acessíveis, o experimentador frequentemente se deparava com a difícil escolha entre descrever um modelo preciso de um fenômeno, o que geralmente impediria o cálculo de respostas explícitas, ou escolher um modelo padrão que permitisse esse cálculo, mas que talvez não fosse uma representação próxima de um modelo realista (ROBERT; CASELLA, 2004).

O Método de Monte Carlo é frequentemente utilizado em problemas físicos e matemáticos e são mais úteis quando é difícil ou impossível usar outras abordagens (KROESE et al., 2014). Em essência, o método consiste em realizar um grande número de simulações aleatórias, onde cada simulação produz um resultado. A distribuição desses resultados pode então ser analisada para obter uma estimativa da solução do problema original, quanto maior o número de iterações maior é a precisão dos resultados (KROESE et al., 2014).

Sabe-se que, se o tamanho da amostra  $n$  for grande, o teorema do limite central implica que  $\bar{X}$  tem aproximadamente uma distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Verifica-se que para  $n > 40$ , substituir  $\sigma$  pelo desvio padrão amostral tem pouco efeito na distribuição (MONTGOMERY; RUNGER, 2014). Com base nessas premissas o comportamento observado para uma amostra pode então ser extrapolado, com determinado grau de confiança, para a população.

A Equação 13, é utilizada para determinação do intervalo de confiança da média observada na distribuição da amostra (MONTGOMERY; RUNGER, 2014).

$$\bar{x} - ts/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + ts/\sqrt{n} \quad (13)$$

Em que:

**s:** Desvio padrão da amostra

**t:** Constante correspondente à confiança desejada (ex. 95%)

A resposta de um problema de estabilidade de taludes costuma ser avaliada em relação a estabilização do valor médio do fator de segurança (MOSIMANN, 2024). Buscando quantificar a precisão do método, Fishman (1995), estudando a aplicação do método para definição do fator de segurança médio de taludes, propôs as Equações 14 e 15, relacionado o número de simulações realizadas e o intervalo de confiança dos resultados. De acordo com o autor, a Equação 14 é obtida através da inequação de Chebyshev, sendo o valor de  $n_c$  calculado superior ao real número de interações necessárias para um dado intervalo de confiança, sendo a Equação 15 ( $n_N$ ) mais próxima da realidade. A partir delas, Baecher e Christian (2003) criaram a Tabela 5.

$$n_c(\xi, \delta) = 1/(4 \cdot \delta \cdot \xi^2) \quad (14)$$

$$n_N(\xi, \delta) = \left[ \frac{\theta^{-1}(1 - \delta/2)}{2\xi} \right]^2 \quad (15)$$

Em que:

$\xi$  = erro

$\delta$  = confiança

$\theta^{-1}(x)$  = expressão inversa da função distribuição acumulada

Tabela 5: Modelos de Autocorrelação. (MOSIMANN, 2024)

$\xi$	90% de confiança		95% de confiança	
	$n_C$	$n_N$	$n_C$	$n_N$
0,005	100.000	27.056	200.000	38.415
0,01	25.000	6.764	50.000	9.604
0,02	6.250	1.691	12.500	2.401
0,03	2.778	752	5.556	1.068
0,04	1.563	423	3.126	600
0,05	1.000	271	2.000	385
0,1	250	68	500	97
0,2	63	17	126	25
0,3	28	8	56	11
0,4	16	5	32	4
0,5	10	3	20	4

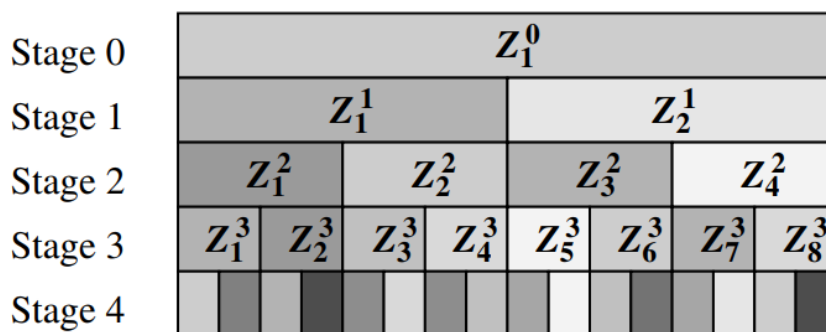
Fonte: Alexandre Mosimann (MOSIMANN, 2024).

### 2.3.5 Local Average Subdivision (LAS)

O método Local Average Subdivision (LAS) é um método de geração de campo aleatório foi inicialmente proposto por Fenton e Vanmarcke (1990). Fenton e Griffiths (2008) introduzem a metodologia explicando que sua motivação surgiu da necessidade de considerar propriamente que a maioria das propriedades de engenharia são médias locais (ZIESMANN, 2023).

A abordagem LAS consiste na subdivisão progressiva do espaço, de forma que a média local dos pontos formados a partir de cada subdivisão permaneça constante. A Figura 17 exemplifica esse processo em quatro estágios, nela as células são divididas e recebem valores aleatórios, sempre preservando a média global. Esse princípio, aplicado a um campo unidimensional, pode ser estendido para dimensões superiores.

Figura 6: Ilustração do processo criado por Fenton e Griffiths.



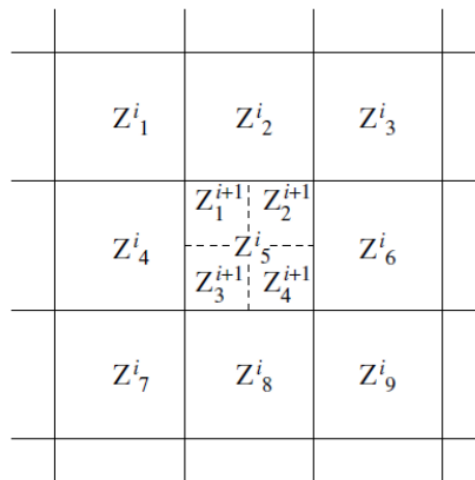
Fonte: Fenton e Griffiths (2008).

Para o caso de duas dimensões, ilustrado pela Figura 7, a célula original é dividida em quatro novas células. O processo pode ser representado vetorialmente pela Equação 16, onde  $Z^{i+1}$  é a célula filho e  $Z^i$  é a célula pai. A aleatoriedade é implementada a partir do vetor  $U$  e a covariância a partir das matrizes  $A$  e  $L$ .

$$Z^{i+1} = A^T + Z^i + LU \quad (16)$$

O uso combinado desse modelo com o método de Monte Carlo da origem ao procedimento implementado originalmente no pacote de programas RFEM - Random Finite Elements Method de Fenton e Griffiths (2008), utilizado, como o nome sugere, em combinação com o método de elementos finitos. Mais recentemente o software comercial PLAXIS LE (BENTLEY, 2021), incorporou o método na análise do equilíbrio limite de taludes. No próximo item são apresentados alguns dos aspectos básicos dos softwares utilizados no presente trabalho.

Figura 7: Ilustração em 2D do processo criado por Fenton e Griffiths (2008)



Fonte: Fenton e Griffiths (2008).

## 2.4 Softwares Utilizados Comercialmente

Um *software*, seja ele comercial ou não, é ferramenta que executa, de maneira sistemática, uma série de ordens e procedimentos. Para procedimentos padronizados, seja por normas ou pela literatura, dado que ambos os softwares realizam o mesmo tipo de análise, frequentemente é escolhido o de maior praticidade.



Embora exista extensa pesquisa e literatura sobre a modelagem da variabilidade do solo, os procedimentos de análise da variabilidade do solo ainda são pouco padronizados. Diferentes *softwares*, dessa forma, utilizam diferentes procedimentos para criar a malha de propriedades do solo. Dentre as opções comerciais 3 se destacam: o *Slide 2*, da empresa *rocscience*, *Slope* do *Geostudio* e o *Plaxis LE*, da *Bentley*.

A modelagem pelo *Local Average Subdivision* combinada com o método de equilíbrio limite foi inicialmente implementada pelo *Plaxis LE* (BENTLEY, 2021), e mais recentemente pelo *Slide 2* (ROCSIENCE, 2024). O método necessita que o usuário escolha a função covariância que será utilizada na análise, e variações dos modelos de decaimento de Markov e Gauss podem ser utilizadas. O software da *Geostudio*, através da Equação (17), incorpora a correlação cruzada de coesão e ângulo de atrito em sua análise. Este, no entanto, não é capaz de gerar campos de propriedades, e sua análise probabilística é realizada utilizando uma amostragem aleatória de valores de coesão e ângulo de atrito, a partir de uma distribuição Gaussiana, para cada propriedade geomecânica das camadas de solo, ou a partir de pontos criados ao longo da superfície de ruptura, sejam eles as bases das fatias, ou espaçados de maneira equidistante (BENTLEY, 2024).

Ambos os *softwares* permitem a avaliação da estabilidade de problemas bidimensionais pela análise de equilíbrio limite por diferentes métodos (Fellenius, Bishop etc.). Modelos de falha como o de Mohr-Coulomb estão implementados nos programas assim como formas de otimização do número de processos necessários para a análise, como o *Latin Hypercube*.

$$N_a = N_1 k + (1 - |k|) N_2 \quad (17)$$

Onde:

$N_a$  = Valor normalizado ajustado da coesão.

$k$  = Coeficiente de Correlação.

$N_1$  = Valor normalizado do ângulo de atrito

$N_2$  = Valor normalizado da coesão

### 3 MATERIAIS E MÉTODO

No presente capítulo, são apresentados os materiais, ou seja, seção utilizada e parâmetros geotécnicos e métodos de análise.

Em relação à seção e parâmetros utilizados, optou-se por utilizar dados da literatura como características geométricas e mecânicas de um talude hipotético, utilizado para ilustrar as divergências entre o comportamento previsto pelos diferentes modelos teóricos.

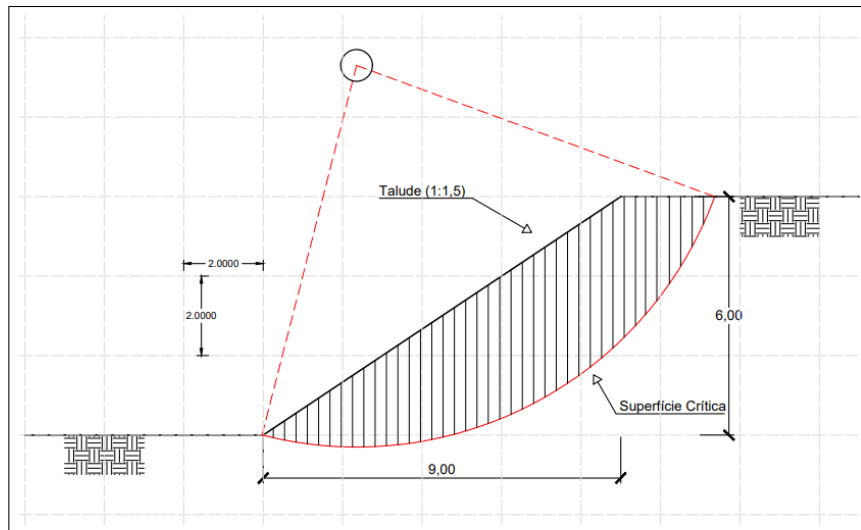
Para o cálculo da estabilidade foi desenvolvido um *script* de programação. Softwares já consolidados no mercado foram utilizados para complementar e validar os resultados. Os procedimentos de cálculo foram escolhidos em concordância com o que se mostrava possível de implementar no programa criado pelo autor.

Nesse trabalho foi estudado o comportamento de um talude em uma situação de heterogeneidade do solo, onde as propriedades mecânicas de cada ponto são geradas a partir de critérios probabilísticos. Criado o campo de propriedades do solo, a metodologia utilizada no cálculo da estabilidade é o equilíbrio limite de Fellenius, tão extensivamente presente na literatura.

#### 3.1 Definição do Talude

Buscando ilustrar o comportamento previsto por um determinado modelo de estabilidade, uma geometria de talude pode ser escolhida e analisada. Diferentes taludes teóricos propostos na literatura foram consultados: Gerscovich (2016) exemplifica o método de cálculo do equilíbrio limite através de um talude de inclinação 1,54:1 (H:V) e altura de 6 metros, Das (DAS, 2010) usa um talude de 14 metros e 1:0,78 (H:V) de inclinação, Craig (1997) utiliza um de 6 metros de altura e 1,50:1,00 (H:V). Para a análise proposta por este trabalho a geometria utilizada por Craig (1997), ilustrada pela Figura 8, foi escolhida.

Figura 8: Exemplo da aplicação do Método de Fellenius para a geometria de talude escolhida.



## 3.2 Características do Solo

Além de coesão, peso específico e ângulo de atrito, para o estudo proposto neste trabalho são necessários também parâmetros que representem a variabilidade do solo e sua distribuição espacial. Dois estudos foram utilizados para suprir essa demanda, um focado na caracterização dos parâmetros geomecânicos e a correlação cruzada existente entre eles, e outro onde o autor avalia a distância de autocorrelação vertical de um solo residual de granito.

### 3.2.1 Propriedades Geomecânicas

O primeiro, escrito por Wang e Akeju (2016), estabelece valor de correlação entre coesão e ângulo de atrito. Os dados das amostras recolhidas no estudo estão mostrados na Tabela 6 e foram utilizados neste trabalho para caracterização do solo e determinação dos seus parâmetros estatísticos. A coesão média encontrada no artigo para seu maior conjunto de amostras foi de 20kPa e seu desvio padrão de 4,2 kPa ( $CoV = 21\%$ ), enquanto o ângulo de atrito foi de  $27^\circ$  e  $1,2^\circ$  de desvio padrão ( $CoV = 4,4\%$ ). Dados os parâmetros médios observados, de 20 kPa e  $27^\circ$  para coesão e ângulo de atrito, respectivamente, imagina-se que se trata de um material arenoso com quantidade significativa de argila.

Tabela 6: Propriedades geomecânicas encontradas por Wang e Akeju (2016) no grupo de amostras escolhido para o trabalho.

Amostra	c'(kPa)	$\phi'$ (°)	Amostra	c'(kPa)	$\phi'$ (°)	Amostra	c'(kPa)	$\phi'$ (°)
1	16.3	27.2	11	21.63	25.9	21	24.43	25.29
2	17.5	26.59	12	14.94	28.29	22	19.03	26.91
3	15.73	28.09	13	15.52	28	23	20.76	26.69
4	23.56	26.41	14	23.98	26.09	24	17.91	27.3
5	21.17	26.41	15	13.29	28.5	25	10.12	29.3
6	24.97	25.39	16	27.03	25.2	26	25.05	25.08
7	15.27	28.61	17	19.52	26.4	27	24.64	25.6
8	22.45	26.81	18	23.56	25.99	28	19.56	26.4
9	24.31	25.39	19	20.18	27.5	29	17	28.21
10	14.28	29.11	20	19.11	26.5	30	20.72	27.1

Em relação aos valores de COV e médios a serem utilizados foi consultada a tabela geral proposta por Lacasse e Nadim (1998), Tabela 8. De acordo com o autor a faixa de variação do ângulo de atrito para solos arenosos é de 2 a 13%, condizente com o valor de 4,4% encontrado nas amostras de Wang e Akeju (2016). O coeficiente de variação da coesão foi de 21% e está de acordo com o compilado por Mosimann (2024) em seu trabalho, ilustrado pela Tabela 7.

Tabela 7: Intervalos de coeficientes de variação de propriedades geotécnicas

Tipo de material	Propriedade	Referência	COV (%)
Areia	ângulo de atrito	Phoon e Kulhawy (1995)	5 a 11
Argila e silte	ângulo de atrito	Phoon e Kulhawy (1995)	10 a 50
Argila	ângulo de atrito	Beacher e Christian (2003)	12 a 56
Argila	ângulo de atrito	White et al. (2005)	0,2 a 0,48
Argila	ângulo de atrito	Campello et al. (2019)	8 a 16
Argila - colúviar	ângulo de atrito	Sousa (2020)	9,2
Argila - residual	ângulo de atrito	Sousa (2020)	8
Silte arenoso	ângulo de atrito	Riselo et al. (2021)	16,2
Argila	coesão	Guedes (1997)	8 a 14
Argila	coesão	White et al. (2005)	0,22 a 1,86
Areia e argila	coesão	Forrest e Orr (2010)	20 a 40
Areia e argila	coesão	Shahin e Cheung (2011)	10 a 70
Argila	coesão	Campello et al. (2019)	35 a 66
Argila - colúviar	coesão	Sousa (2020)	40,1
Argila - residual	coesão	Sousa (2020)	51,4
Silte arenoso	coesão	Riselo et al. (2021)	34,2
Grão fino	peso específico	Phoon e Kulhawy (1995)	3 a 20
Argila	peso específico	White et al. (2005)	0,08 a 0,11
Argila	peso específico	Campello et al. (2019)	3 a 5
Argila - colúviar	peso específico	Sousa (2020)	2,6
Argila - residual	peso específico	Sousa (2020)	3,5

Fonte: Mosimann (2024)

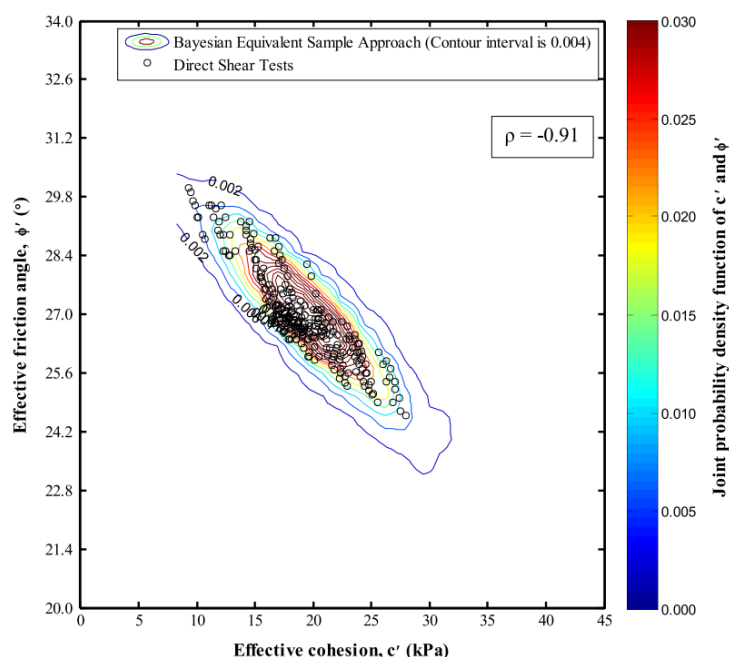
Tabela 8: Valores padrão de CoV e FDP.

Parâmetro do Solo	Símbolo	CoV (%)	FDP
Peso específico	$\gamma$	3 – 8	-
Peso específico submerso	$\gamma'$	0 – 10	N
Índice de vazios	$e$	7 – 30	N
Ângulo de atrito (areias)	$\phi$	2 – 13	N
Ângulo de atrito (argilas)	$\phi$	10 – 50	-
Limite de liquidez (argilas)	LL	3 – 20	N
Limite de plasticidade (argilas)	LP	3 – 20	N
Resistência drenada (areias)	S	3.7 – 12	-
Resistência drenada (argilas)	S	7.5 – 10	-
Resistência não drenada	$S_u$	13 – 40	LN
Índice de compressibilidade	$C_c$	10 – 37	-
Tensão de pré-consolidação	$\sigma_p$	10 – 35	-
Coef. de permeabilidade de argilas saturadas	k	68 -90	-
Coef. de permeabilidade de argilas não saturadas	k	130 – 240	-
Coef. de consolidação vertical	$C_v$	33 – 68	-
Número de pancadas SPT	N	15 – 45	-
Resistência de ponta CPT elétrico	$q_c$	5 – 15	N, LN
Resistência de ponta CPT mecânico	$q_c$	15 – 37	N, LN
Resistência ao ensaio dilatométrico	$q_{dmt}$	5 – 15	-
Resistência ao corte não drenada do ensaio de molinete	$S_u$	10 – 20	-
Módulo de elasticidade	E	2 – 42	-

Fonte: Adaptado de Lacasse e Nadim (1998).

Wang e Akeju (2016) através de uma regressão linear, também estabelece uma equação de correlação entre coesão e ângulo de atrito, mostrando que o crescimento de um normalmente vem acompanhado do decréscimo do outro. A reta que melhor se adequou à esses dados tinha coeficiente angular de  $-0.2671^\circ/\text{kPa}$  e a correlação encontrada foi de 0,9, como mostrado pela Figura 9.

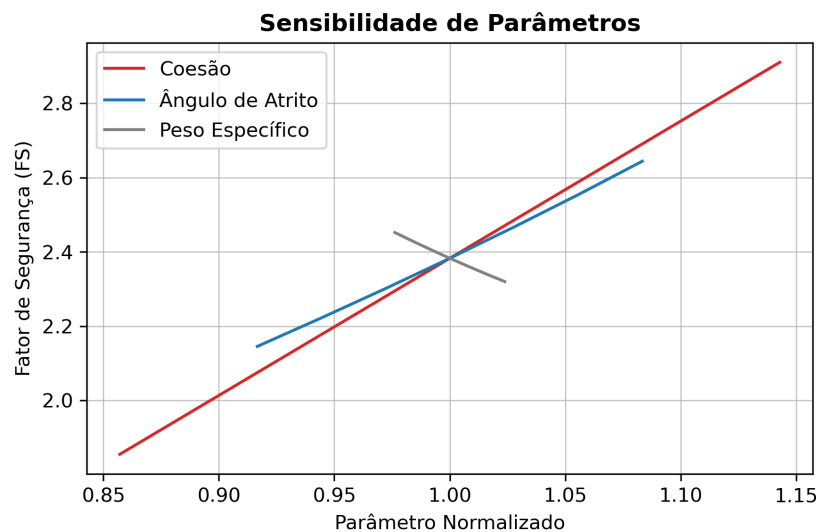
Figura 9: Correlação entre coesão e ângulo de atrito efetivos observada.



Fonte: Wang e Akeju (2016)

Como observado por Lacasse e Nadim (1998), o peso específico, dentre os 3 parâmetros geomecânicos utilizados pelo método de Fellenius, é o que apresenta menor coeficiente de variação. Quando utilizados os valores numa análise de sensibilidade (Figura 10), percebe-se ainda que a variação do peso específico resultou em alterações pequenas do fator de segurança, quando comparadas ao efeito de coesão e ângulo de atrito.

Figura 10: Sensibilidade do talude frente à variações dos parâmetros geomecânicos avaliada pelo Plaxis LE.



Tendo em mente que o *script* criado requer tempo de processamento muito superior aos *softwares* pagos, e o aumento da instabilidade nos resultados causada pelo uso de uma terceira variável probabilística resultou em elevado tempo de processamento necessário. Nas análises apresentadas no presente trabalho, optou-se por fixar o peso específico do solo em  $18\text{kN/m}^3$ .

### 3.2.2 Variabilidade Espacial

Viviescas, Griffiths e Osorio (2021), através de ensaios de SPT, foi capaz de determinar O valor da de autocorrelação vertical e horizontal em um solo residual de granito. Outros autores utilizaram métodos mais precisos para o estudo da autocorrelação espacial do solo, estes no entanto caracterizaram apenas uma das dimensões. Por causa do processo de formação do solo estudado pelo autor, o valor vertical desse parâmetro, cerca de 1m, foi consideravelmente inferior ao encontrado na horizontal, cerca de 20m. Os valores encontrados por Viviescas, Griffiths e Osorio (2021) foram reproduzidos nas simulações deste trabalho.

### 3.2.3 Função Densidade de Probabilidade

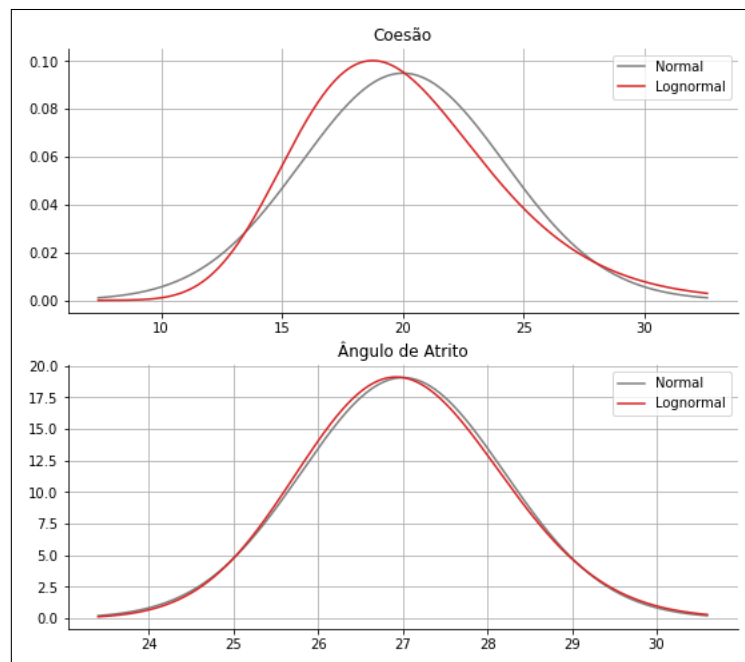
Para coeficientes de variação relativamente altos, a distribuição de Gauss resulta frequentemente em valores negativos. Mosimann (2024) em sua dissertação de mestrado ressaltou a ampla utilização da distribuição lognormal na caracterização da variabilidade do solo. Os coeficientes de variação escolhidos para este trabalho, no entanto, são baixos e a distribuição lognormal em pouco difere da curva proposta por Gauss, mostrada pela Figura 11. Como essa função permite o aparecimento de valores negativos, foi adotada medida responsável por impedir o uso de tais valores na análise, que será comentada mais a frente.

Os parâmetros definidos estão resumidos na Tabela 9.

Tabela 9: Propriedades escolhidas para a análise do talude.

Parâmetros	$\mu$	$\sigma$	CoV	$\tau_h$	$\tau_v$	Distribuição
c	20 kPa	4.2 kPa	21%	20m	1m	Normal
$\phi$	27°	1.2°	4.4%	20m	1m	Normal
$\gamma$	18 kN/m <sup>3</sup>	-	-	-	-	Constante

Figura 11: Comparação das distribuições normal e lognormal de probabilidade dados os parâmetros geomecânicos escolhidos.



### 3.3 Cálculo da Estabilidade

O método das fatias é muito utilizado em estudos de estabilidade pois não apresenta restrições quanto à homogeneidade do solo e geometria do talude (GERSCOVICH, 2016). Dentre os diversos procedimentos de cálculo criados, o de Fellenius, por sua facilidade de implementação e o custo computacional reduzido, foi o escolhido para aplicação neste trabalho.

#### 3.3.1 Script

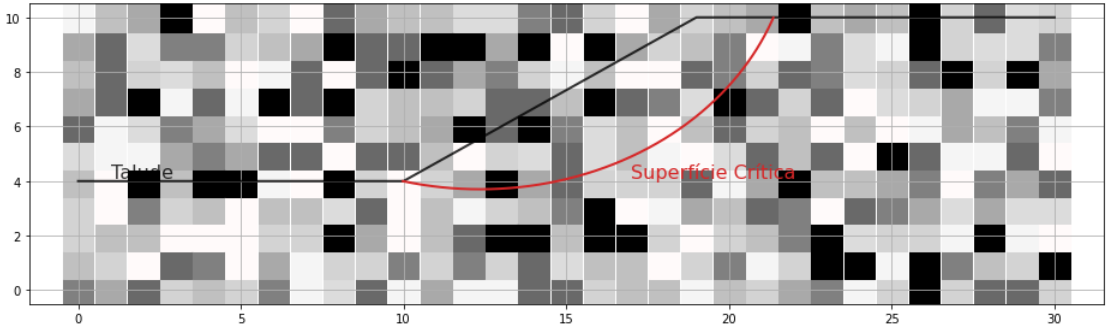
A implementação do método pelo *script* se inicia pela definição da geometria do talude e parâmetros estatísticos e geomecânicos do solo, mencionados no item anterior. Em seguida é criada uma função capaz de extrair as coordenadas das diferentes geometrias utilizadas. Uma segunda função também é criada para definir a superfície de ruptura circular. A malha de centros e raios que serão testados na análise é também definida.

Uma matriz é utilizada para representar o campo de propriedades aleatórias. Cada elemento dessa matriz representa o valor atribuído a um ponto da malha de propriedades do solo. Quando a análise determinística do talude for realizada, a malha é multiplicada inteira por um escalar, resultando num campo constante de propriedades. Quando solicitada uma análise probabilística, será definido, para cada elemento da matriz, um valor calculado de maneira aleatória. O campo é definido para toda a malha de pontos criada, sendo função da geometria inicialmente atribuída, mesmo para os pontos exteriores ao talude, como é percebido nas Figuras 14 e 16.

Logo depois, o talude é dividido em 40 fatias de mesma espessura, a Equação 4 é então aplicada e o fator de segurança determinado. Diversos centros e raios são testados e a combinação com menor fator de segurança é definida como geradora da superfície crítica daquele campo.



Figura 12: Campo descontínuo de propriedades no espaço.



Após divididas as fatias é necessário associá-las ao campo aleatório gerado. Embora existam softwares comerciais com implementação de campos aleatórios em estabilidade de taludes por métodos de equilíbrio limite, não há especificação clara de como é feita a associação. Em um primeiro momento seria intuitivo inicialmente atribuir o campo aleatório e a partir do campo subdividir as fatias para que a base destas seja posicionada em uma região geométrica de mesmo parâmetro aleatório. Essa premissa já é dificultada quando as fatias possuem base na região vertical. Além dessa dificuldade a programação fica amarrada as características de entrada do campo. Nesse sentido optou-se por estabelecer um tamanho fixo de fatias e a partir da geração da superfície e das fatias, calcular parâmetros médios para a base. Para tanto, é realizada a média ponderada entre os pontos vizinhos à base das fatias de solo, o inverso da distância entre este e os pontos vizinhos é utilizado como critério da ponderação, conforme a Equação 18. Esse processo assegura a transição gradual das propriedades pelo espaço, como mostrado pela Figura 14, sem as discontinuidades vistas na Figura 12.

$$p_b = \left( \frac{p_{i,j}}{d_{i,j}} + \frac{p_{i,j+1}}{d_{i,j+1}} + \frac{p_{i+1,j}}{d_{i+1,j}} + \frac{p_{i+1,j+1}}{d_{i+1,j+1}} \right) \cdot \frac{1}{(1/d_{i,j} + 1/d_{i+1,j} + 1/d_{i+1,j} + 1/d_{i+1,j+1})} \quad (18)$$

$p_b$  = Propriedade geomecânica atribuída à base da fatia do talude (coesão ou ângulo de atrito)

$p_{i,j}$  = Propriedade geomecânica dos pontos vizinhos (coesão ou ângulo de atrito)

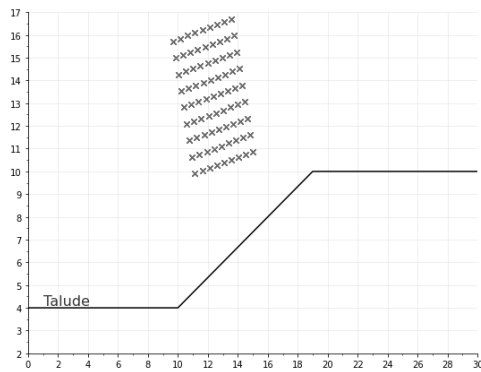
$d_{i,j}$  = Distância dos pontos vizinhos à base da fatia.

Para uma análise probabilística diversas distribuições de propriedades são testadas e as informações de cada processo salvas. O tempo demandado por cada análise variou especialmente em função do número de superfícies de ruptura testadas, os demais critérios em pouco influenciaram nesse aspecto.

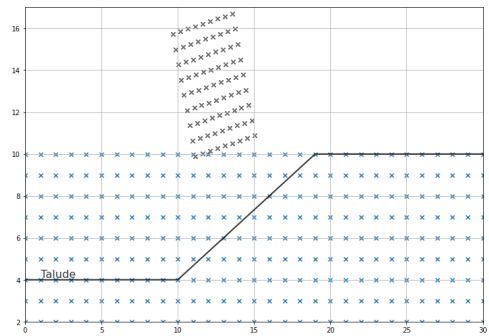
O processo como um todo ser simplificado em 4 etapas, ilustradas pela Figura 13 e repetidas quantas vezes forem solicitadas.

Figura 13: Ilustração do procedimento de cálculo.

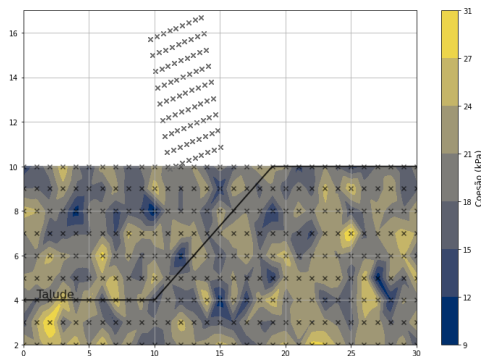
(a) Definição da geometria, materiais e superfícies de ruptura.



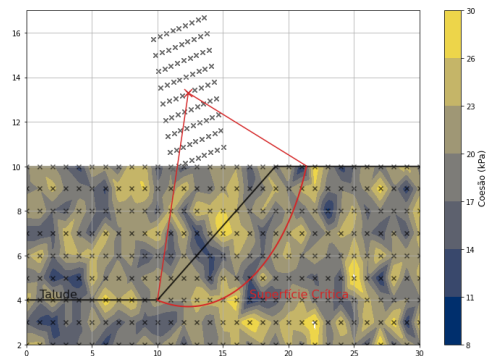
(b) Definição da malha de pontos utilizadas para gerar os campos aleatórios.



(c) Geração do campo de propriedades.



(d) Avaliação da estabilidade.



### 3.4 Análise Determinística do Talude

A primeira análise realizada para avaliar a situação do talude foi através do método determinístico, utilizando o software da *Geostudio*. Coesão e ângulo de atrito foram tidos como constantes por toda a região e então calculado o fator de segurança através de uma malha de centros e raios. O método foi utilizado na avaliação do impacto de alterações na superfície crítica no fator de segurança e na calibração do *script* criado.

### 3.5 Geração dos Campos Aleatórios

Diferentes critérios foram utilizados para a geração dos campos aleatórios. Foi avaliado o impacto da autocorrelação espacial na distribuição probabilística do fator de segurança e também a influência da correlação cruzada entre parâmetros geomecânicos. Vários espaçamentos da malha de propriedades também foram avaliados.

Para a geração de uma malha de propriedades para o talude primeiro deve ser definido o espaçamento dos pontos e a região aonde deve ser criado. Foi utilizada, exceto quando dito o contrário, malhas com 1m de espaçamento entre os pontos. O valor de 1m foi escolhido com base na distância de autocorrelação vertical do material.

Os valores dos parâmetros são, então, calculados individualmente para cada ponto, seguindo a ordem da esquerda para a direita, da fileira mais baixa para a mais alta.

Nas situações mais simples, onde as correlações são desprezadas, apenas valores de média, desvio padrão e uma curva de distribuição de probabilidade são o suficiente para o procedimento. Como discutido anteriormente, a curva normal (5) foi escolhida para este estudo.

Embora, para os coeficiente de variação adotados (21% e 4,4%), a chance de aparecerem valores negativos seja muito próxima de zero, ela ainda existe. Como tal situação é incompatível com a realidade do solo, foi criado um mecanismo que recalcula esse valor toda vez que este for inferior a zero.

Quando calculados de maneira independente, pontos vizinhos podem apresentar propriedades significativamente diferentes, situação normalmente distante da esperada dentro de uma mesma camada de material, uma simples distribuição Gaussiana não é capaz de incorporar tal fenômeno para a análise. Tem-se ainda que, variações de um dos parâmetros mecânicos do solo normalmente vem acompanhado da alteração dos demais. A ausência de um critério capaz de integrar esses fenômenos torna a modelagem do material mais distante da realidade.

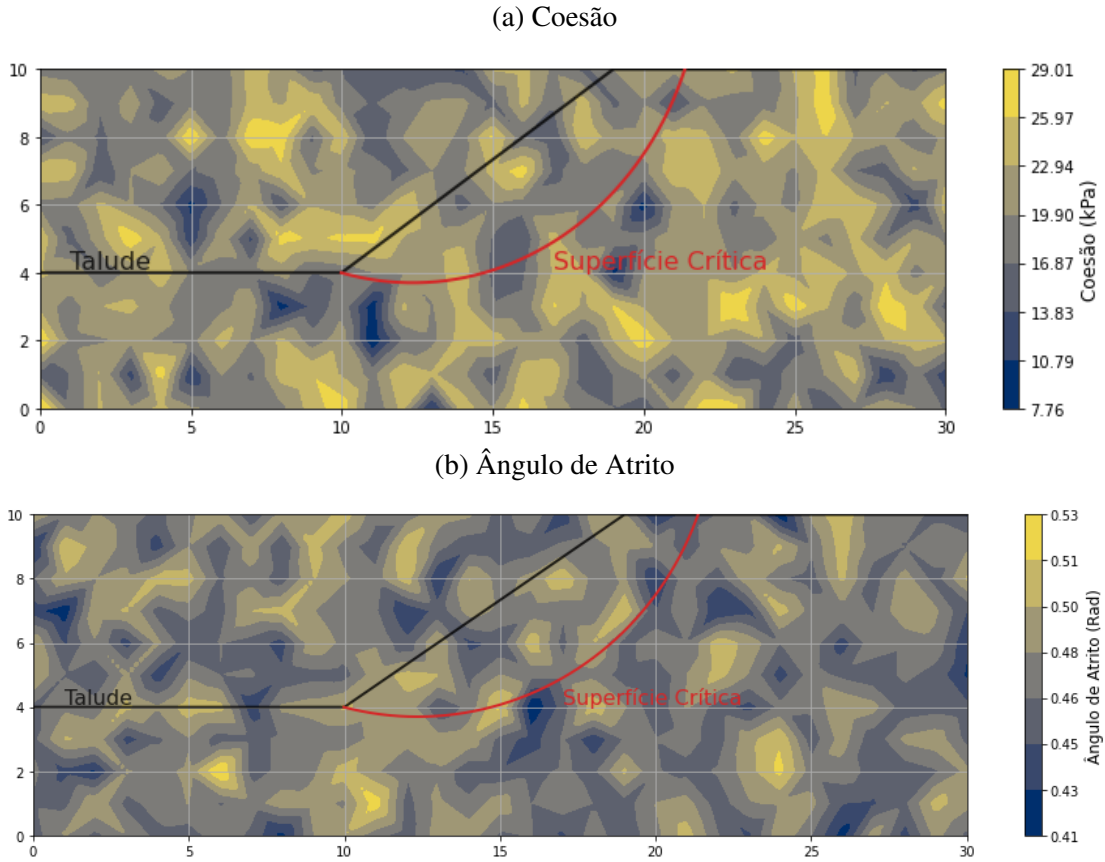
Buscando avaliar o impacto dessas considerações na análise de estabilidade do talude, sete procedimentos foram propostos para criar variabilidade no solo, seis deles implementados através de um *script* do próprio autor e um calculado através do *Plaxis LE* para fins comparativos.

As diferenças resultantes do uso de uma superfície de ruptura fixa e uma variável para os procedimentos implementados através do *script* também foram avaliadas.

### **3.5.1 PROCEDIMENTO 1: Distribuição Normal de Probabilidade**

As propriedades são calculadas para cada ponto através de uma curva gaussiana de probabilidade, desconsiderando qualquer correlação entre os parâmetros e considerando um material com coesão e ângulo de atrito médios de 20 kPa e 27° e desvio padrão de 4,2 kPa e 1,2°, respectivamente. Possivelmente a forma mais simples de criar um campo heterogêneo de propriedades. O método é ilustrado pela Figura 14.

Figura 14: Distribuição espacial da coesão, criada a partir do procedimento 1.



### 3.5.2 PROCEDIMENTO 2: Distribuição Normal e Correlação Cruzada de Parâmetros

As propriedades mecânicas neste procedimento estão correlacionadas, dessa forma pontos com valores altos para o ângulo de atrito tendem a apresentar valores baixos para a coesão, e vice versa, mostrado pela Figura 15. O critério matemático utilizado nessa correlação é expresso pela Equação 21.

O procedimento implementado pelo *script* neste caso consiste primeiro na geração, de forma idêntica ao descrito no *Procedimento 1* de um campo de propriedades para o ângulo de atrito. A Equação 21, adaptação da Equação 7, é então aplicada nessa malha gerada para dar origem à coesão de cada ponto.

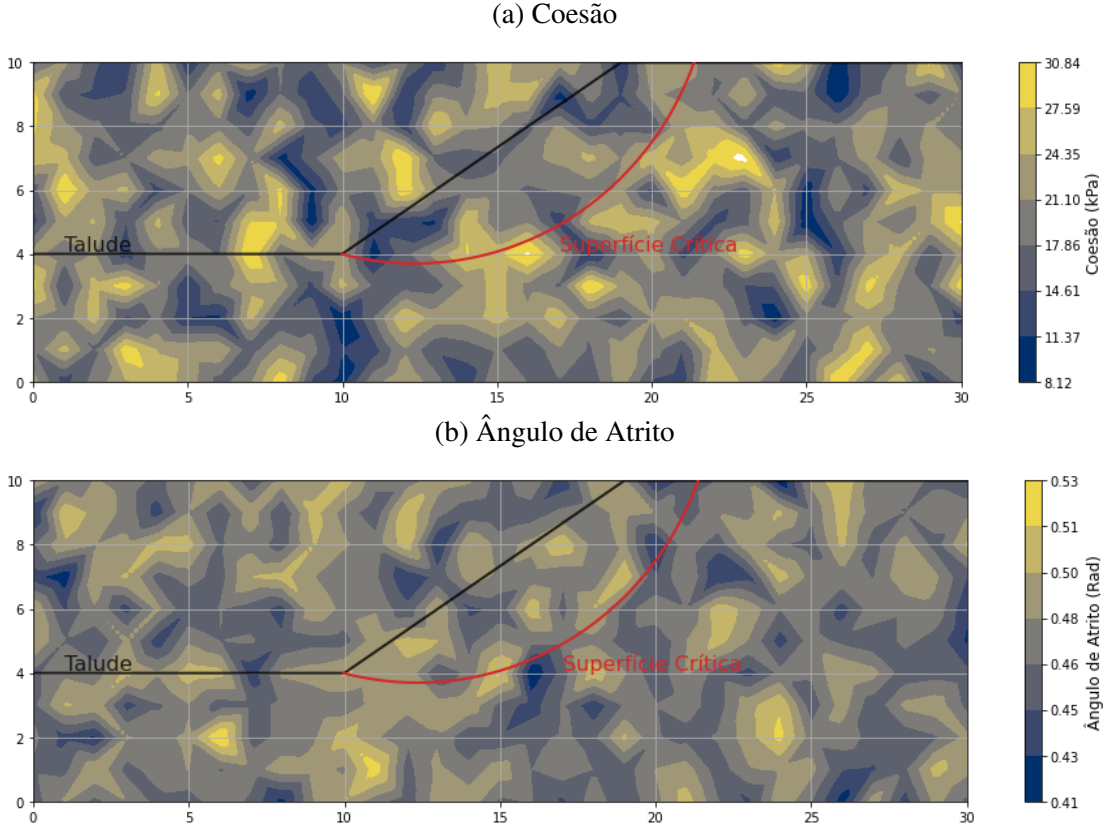
$G(X)$  é a distribuição Gaussiana dos parâmetros observados,  $\rho$  o coeficiente de correlação de Pearson obtido para as amostras (-0.9),  $\phi_{i,j}$  o ângulo de atrito calculado para o ponto  $i,j$  e  $\phi_{medio}$  o ângulo de atrito médio das amostras ( $27^\circ$ ).

$$c_{i,j} = G(X) - \rho \cdot (\phi_{i,j} - \phi_{medio}) / 0.2671 \quad (19)$$

∴

$$c_{i,j} = G(X) - 0.9 \cdot (\phi_{i,j} - 27) / 0.2671 \quad (20)$$

Figura 15: Campos correlacionados de coesão e ângulo de atrito



### 3.5.3 PROCEDIMENTO 3: Autocorrelação Espacial no Maciço

Neste modelo, as propriedades de um ponto passam a ser calculadas com base nas propriedades dos pontos vizinhos a este. Pontos próximos dessa forma, mais dificilmente apresentarão propriedades contrastantes.

A autocorrelação vertical e horizontal adotadas são diferentes e foram escolhidas, conforme discutido anteriormente, de acordo com a distância de autocorrelação obtida por Vieviascas, Griffiths e Osorio (2021). As letras  $\rho_v$  e  $\rho_h$  serão utilizadas, respectivamente, para representar autocorrelação vertical e horizontal.

O *script* implementa o processo da seguinte forma:

1. É calculada a propriedade do ponto mais à esquerda da primeira linha da malha, independente de todos os outros.

$$G(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

2. O ponto imediatamente à direita é calculado, desta vez considerando a correlação deste com o anterior e assim sucessivamente até o final da primeira linha.

$$P(X) = G(X) + (X_{i-1,j} - \mu) \cdot \rho_h$$

3. Terminada essa etapa o programa passa para a linha de cima. O ponto mais à esquerda agora é calculado considerando a correlação deste com o ponto vizinho de baixo.

$$P(X) = G(X) + (X_{i,j-1} - \mu) \cdot \rho_v$$

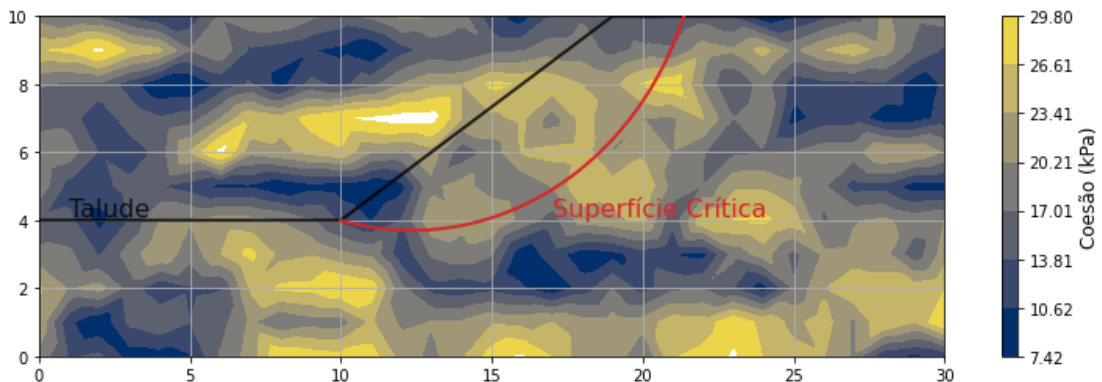
4. O ponto imediatamente à direita é calculado, agora, considerando a correlação com os pontos à esquerda e abaixo dele.

$$P(X) = G(X) + (X_{i-1,j} - \mu) \cdot \rho_h + (X_{i,j-1} - \mu) \cdot \rho_v$$

5. Esse padrão se segue até o final da segunda linha.
6. O sistema da segunda linha se repete pelas demais linhas.

As propriedades do solo utilizadas nesse procedimento foram as mesmas dos itens anteriores e a distância de correlação vertical e horizontal foi de respectivamente, 1m e 20m, assim como observado por Viviescas, Griffiths e Osorio (2021). Os resultados desse processo podem ser visualizados na Figura 16.

Figura 16: Distribuição espacial da coesão, criada a partir do procedimento 3



### 3.5.4 PROCEDIMENTO 4: Combinação de Critérios

Foram consideradas tanto a autocorrelação espacial através da modelagem considerando distâncias de correlação, como também foi considerada a correlação entre variáveis coesão ângulo de atrito sendo incorporado o descrito no *Procedimento 2* ao *Procedimento 3*.

### 3.5.5 PROCEDIMENTO 5: Distribuição Constante de Propriedades

Nesse procedimento foi realizada análise probabilística variando parâmetros a cada iteração, porém desconsiderando a variação espacial, sendo o talude homogêneo onde as propriedades variam para cada nova iteração. Os valores são definidos a partir de uma distribuição normal de probabilidade, Equação (5).

### 3.5.6 PROCEDIMENTO 6: Distribuição Constante, assim como descrito no Procedimento 5 de Propriedades com Correlação Cruzada

Assim como no *Procedimento 2*, a influência da correlação entre ângulo de atrito e coesão também pode ser introduzida na análise da distribuição constante de propriedades do talude. A incorporação da Equação 21 ao procedimento 5 da origem ao procedimento 6.

$$C = G(X) - 0.9 \cdot (\phi - 27) / 0.2671 \quad (21)$$

### 3.5.7 PROCEDIMENTO 7: Local Average Subdivision

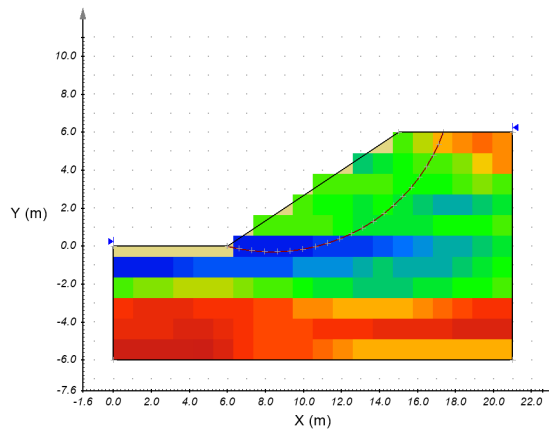
O campo de propriedades será criado a partir do método desenvolvido por Fenton e Griffiths (2008) e descrito em seu respectivo capítulo da revisão bibliográfica. Diferente dos procedimentos anteriores essa análise foi realizada não pelo *script* criado, mas através do software da Bentley, *Plaxis LE*.

O software, diferente do *script*, não realiza a interpolação entre as propriedades dos pontos da malha gerada, adotando um modelo discreto para a distribuição espacial, como mostrado pela Figura 17. A função de covariância utilizada foi o decaimento exponencial de Markov (*dlavx2:2-D*), Equação 22.

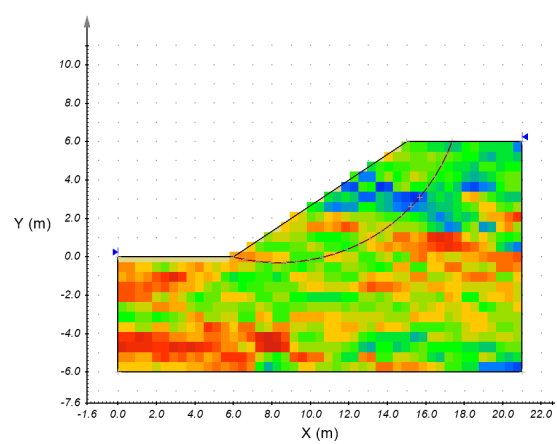
$$B(x,y) = var \cdot \exp(-\sqrt{(2 \times x/dthx)^2 + (2 \times y/dthy)^2}) \quad (22)$$

Figura 17: Ilustração de campos de propriedades criados pelo LAS.

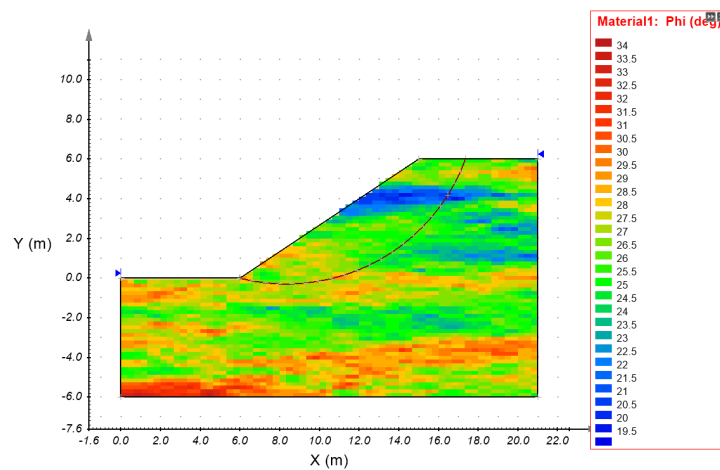
(a) 252 pontos (12x21)



(b) 1152 pontos (48x24)



(c) 4096 pontos (64x64)



### 3.5.8 Resumo

Os critérios implementados em cada um dos 7 procedimentos estão ilustrados na Tabela 10.

Procedimento	Distância de Autocorrelação		Correlação Cruzada $\rho$	PDF
	Vertical (m)	Horizontal (m)		
1	-	-	-	Normal
2	-	-	0.9	Normal
3	1	20	-	Normal
4	1	20	0.9	Normal
5	-	-	-	Normal
6	-	-	0.9	Normal
7	1	20	-	Normal

Tabela 10: Critérios para implementação em cada Procedimento.



### **3.6 Intervalo de Confiança**

Assim como no estudo de Mosimann (2024), foram avaliados mil campos de propriedades aleatórias para cada *Procedimento*. Sendo de 95% o nível de confiança considerado, pela Equação 14, decorrente da inequação de Chebyshev, o intervalo de confiança (I.C.) é de 0,071. Pela Equação 15, observa-se pela Tabela 5 que o valor é de cerca de 0,03.

## 4 RESULTADOS

Utilizando dos métodos descritos no capítulo anterior, foram investigados os diferentes critérios de geração de campos aleatórios. Primeiro será avaliado a confiança nos dados obtidos, a partir das equações e tabelas mostradas no referencial teórico. Em seguida serão avaliados os resultados obtidos pelos Procedimentos propostos no capítulo de materiais e métodos. Os resultados obtidos em um Procedimento favorecem o entendimento dos demais; dessa forma, os Procedimentos não serão apresentados em ordem crescente, do 1 ao 7, mas na ordem que melhor favorecer a explicação dos fenômenos.

### 4.1 Intervalo de Confiança

Como comentado anteriormente foram avaliados mil campos de propriedades aleatórias para cada *Procedimento*. Sendo o intervalo de confiança (C.I.) de 0,071 por Chebyshev e de 0,03 pela Tabela 5.

A Equação 13 foi aplicada de acordo com o desvio padrão obtido em cada *Procedimento* testado pelo *script*, resultando na Tabela 11.

Tabela 11: Ilustração dos resultados obtidos.

<b>Procedimento</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
Media	2.306	2.288	2.259	-	2.32	2.31	-
Desvio Padrão	0.051	0.058	1.93	-	0.26	0.36	-
C.I.	0.003	0.004	0.120	-	0.016	0.022	-

### 4.2 Análise Determinística

Como descrito no capítulo anterior, foi utilizada a média dos parâmetros geomecânicos nessa análises, resultando em um fator de segurança encontrado de 2,32. A média do fator de segurança obtido nos demais Procedimentos, como será mostrado mais à frente, permanece próxima desse valor.

O centro de curvatura da superfície crítica é localizado 2,35m a frente do pé do talude e 9,3m para cima. As superfícies críticas encontradas nos diferentes *Procedimentos* são em sua maioria, próximas à obtida nessa análise.

O procedimento foi implementado tanto pelo *script* quanto pelo *Geostudio*, ambos resultaram em valores parecidos, como ilustrado pelo Figura 19

Tabela 12: Tabela comparativa entre os resultados do *script* e *Geostudio*.

	<b>FS</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Raio</b>
<b>Geostudio</b>	2.38	2.36	9.32	9.61
<b>Script</b>	2.32	2.35	9.3	9.6

A região de maior propensão ao aparecimento do centro da superfície crítica pode ser mapeada e ilustrada pela Figura 19 (a). Um retângulo de cerca de 4 metros na horizontal e 6 na vertical parece definir essa região. Os raios das superfícies de menor FS para os pontos nessa região variaram de 7,1 a 13,1 metros, ilustrados na Figura 19 (b).

A malha de centros utilizada para formação das superfícies de ruptura no *script* foi definida com base nessa análise e é representada pelos pontos de cor cinza nas Figuras 19 (a) e (b). Os raios escolhidos foram uma sequência que varia de 7,1m a 13,1m com 0,5m de espaçamento.

Definida a malha que será utilizada no estudo foi avaliado a precisão do *script* desenvolvido, comparando-o com o software comercial. A comparação mostrou diferença inferior a 2,5% no valor obtido para o fator de segurança e a coincidência das superfícies críticas encontradas, demonstrando a adequação do Procedimento criado para as análises subsequentes.

Figura 18: Ilustração das divergências encontradas entre o *script* criado e o programa *geoslope* pelo método determinístico.

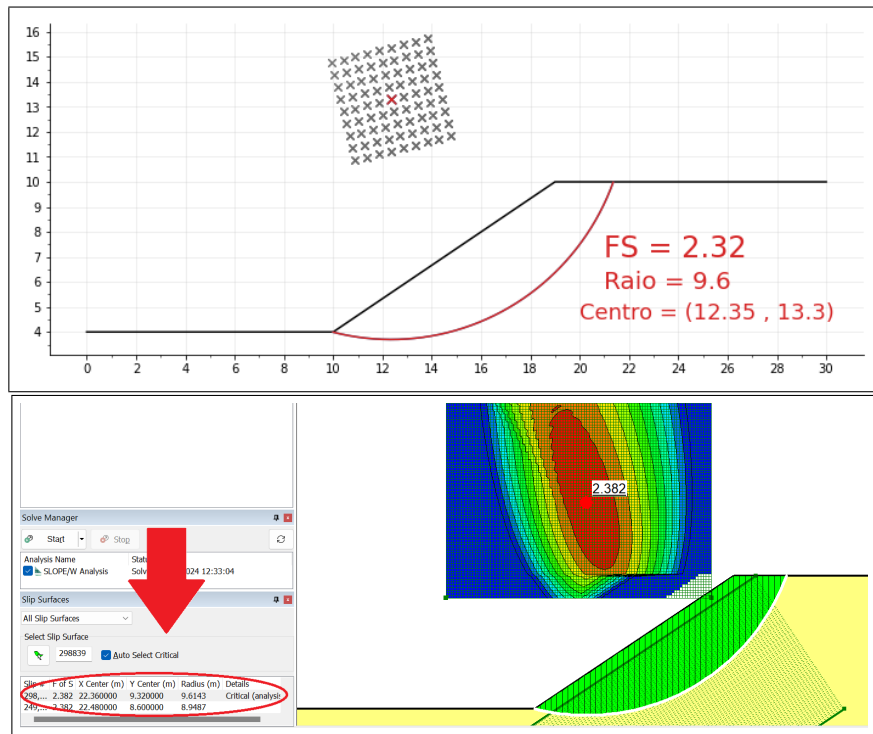
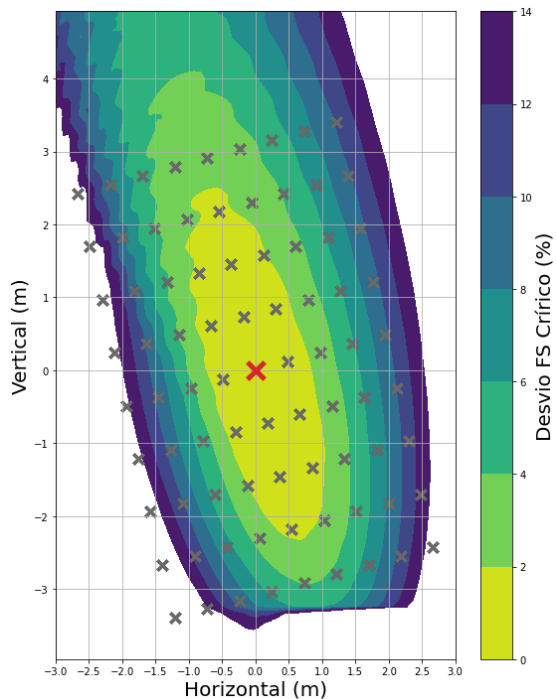
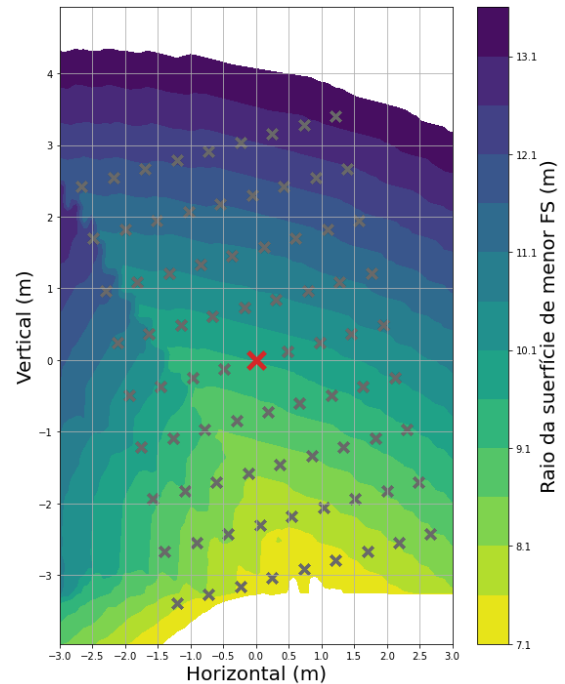


Figura 19: Avaliação do impacto de diferentes superfícies críticas na estabilidade do talude.

(a) Mapeamento dos valores de FS obtidos.



(b) Raio do menor FS encontrado.



### 4.3 Procedimento 5 e 6

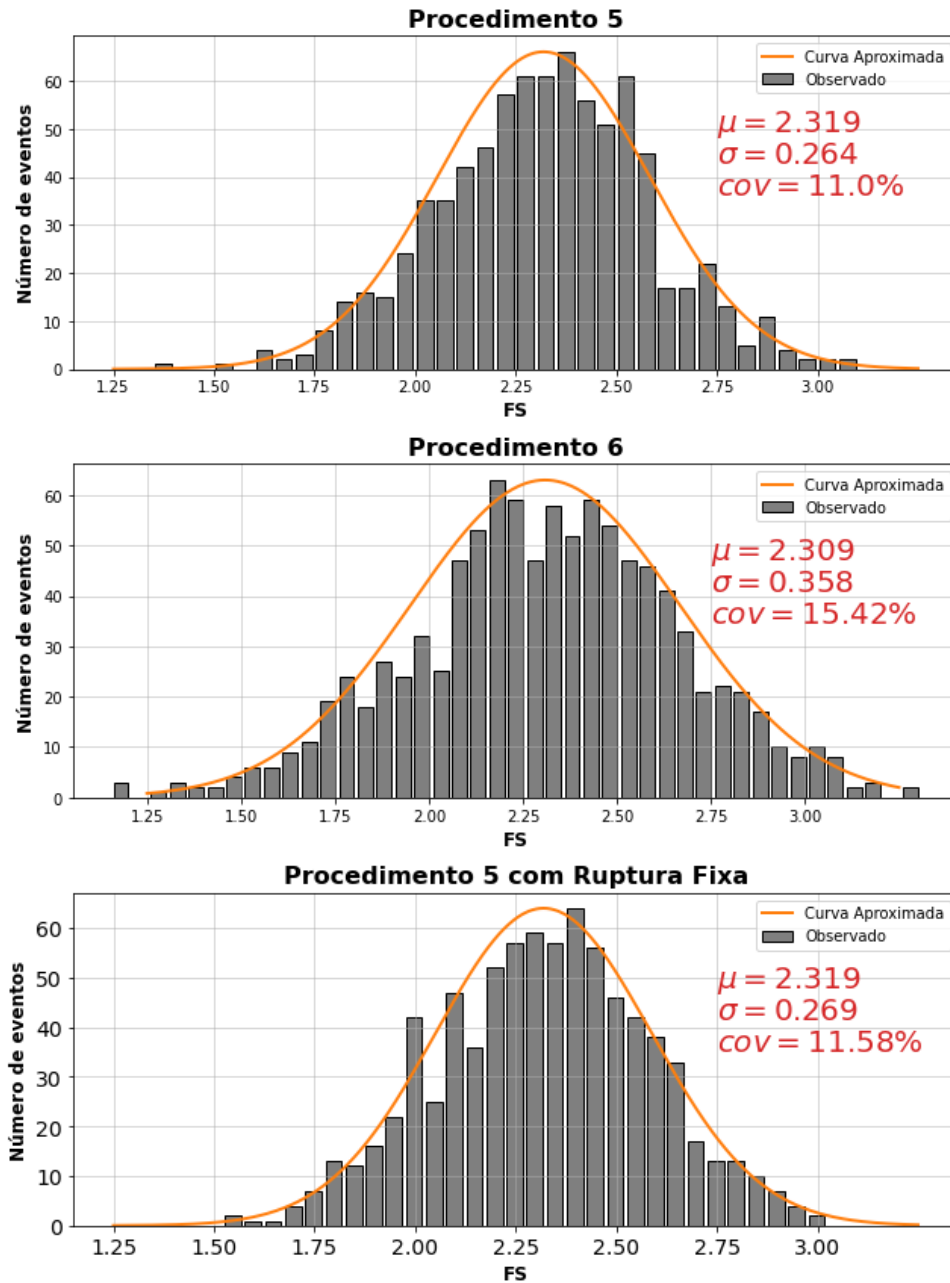
Os Procedimentos 5 e 6 consistem em considerar os parâmetros aleatórios de cada iteração com distribuição espacial constante. A diferença entre os dois é que no *Procedimento 6* foi considerada a correlação cruzada entre as propriedades. Os resultados são apresentados na Figura 20

Em ambos os casos o fator de segurança médio observado coincidiu com o obtido pelo método determinístico ( $FS = 2.32$ ). No entanto, observou-se uma diferença no desvio padrão do FS, assumindo valor de 0,26 (CoV = 11%) para o *Procedimento 5* e de 0,36 (CoV = 15%) no *Procedimento 6*. O uso de parâmetros geomecânicos não co-relacionados nesses tipo de análise, portanto, resultou em menor variabilidade prevista para o comportamento do talude. A curva de distribuição do FS apresentou padrão de comportamento semelhante à uma distribuição normal.

Como observado por Viviescas, Griffiths e Osorio (2021), o solo pode apresentar forte correlação entre suas propriedades. A desconsideração desse fenômeno, para o tipo de análise mencionado, por levar à redução do desvio padrão da distribuição de FS obtida, e portanto da probabilidade de falha, se mostrou desfavorável à segurança.

Quando o Procedimento 5 foi testado com uso superfície de ruptura fixa, pouca foi a diferença nos resultados, sendo a média e desvio padrão observados de, respectivamente, 2,32 e 0,27 (CoV = 12%). Seu uso, neste caso, parece trazer poucos prejuízos ao estudo.

Figura 20: Comparação dos resultados dos *Procedimentos 5 e 6*



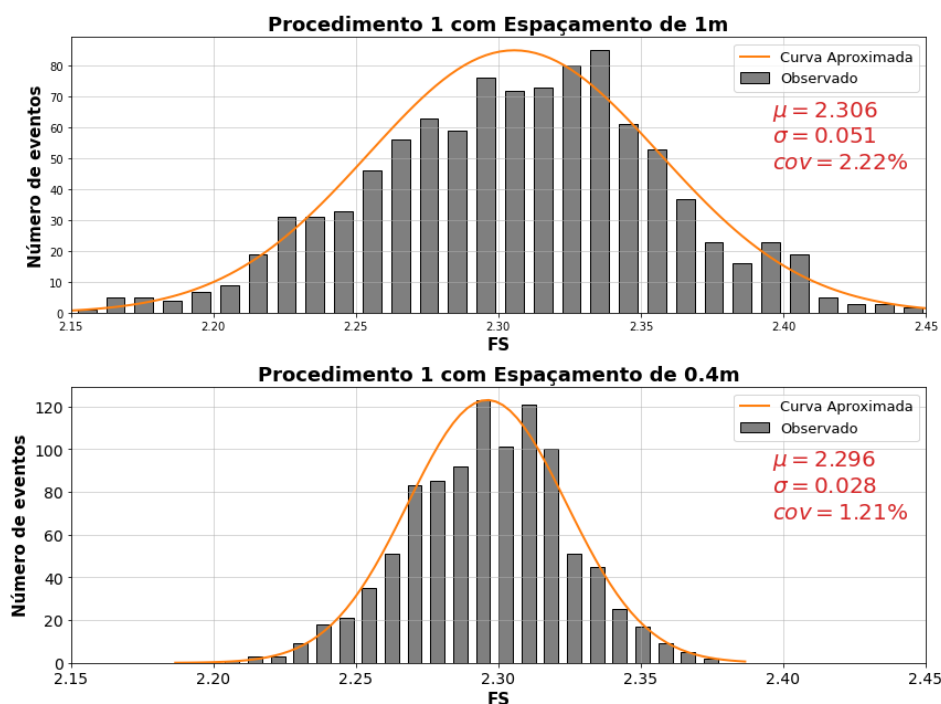
## 4.4 Procedimento 1

O *Procedimento 1* consiste na definição do campo aleatório somente através da média e desvio padrão, de acordo com a equação de curva de Gauss. Nessa análise foram testados diferentes espaçamentos para a geração do campo. Os resultados são apresentados na Figura 21, resultando também numa distribuição normal do fator de segurança, observado na Figura 21.

Embora a média tenha permanecido praticamente inalterada, o desvio padrão, cerca de 0,051, foi consideravelmente menor quando comparado ao *Procedimento 5* (0,26). O resultado pode ser justificado, uma vez que a probabilidade de aparecer um ponto com grande desvio da média é menor que a probabilidade de aparecerem dois pontos vizinhos também distantes. De forma parecida, se uma região de  $x$  metros quadrados no talude é representada por  $y$  pontos, a probabilidade dessa região apresentar desvio significativo da média é menor quanto maior for  $x$ . Surge portanto o questionamento sobre a influência do número de pontos no resultado previsto pelo modelo.

Quando alterado o espaçamento da malha de pontos para 0,4m o desvio padrão observado foi de 0,028, quase a metade do obtido anteriormente. O número de pontos utilizados, portanto, não influencia apenas na precisão da análise, mas na própria distribuição de propriedades resultante do método.

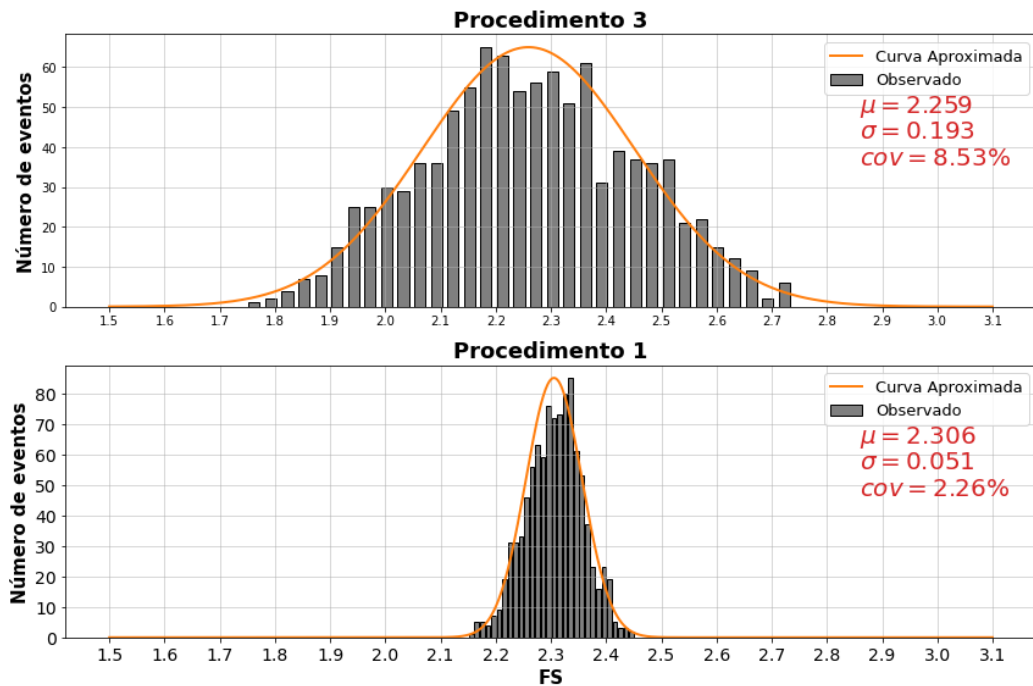
Figura 21: Ilustração dos Resultados obtidos pelo Procedimento 1.



## 4.5 Procedimento 3

Neste Procedimento, a probabilidade de pontos vizinhos apresentarem propriedades similares é consideravelmente maior, e o valor superior observado para o desvio padrão, cerca de 0,193, era esperado. O valor médio do fator de segurança, no entanto, foi menor que os observados anteriormente, cerca de 2,26. A distribuição manteve formato de sino como pode ser visto na Figura 22.

Figura 22: Ilustração das diferenças entre o Procedimento 1 e 3

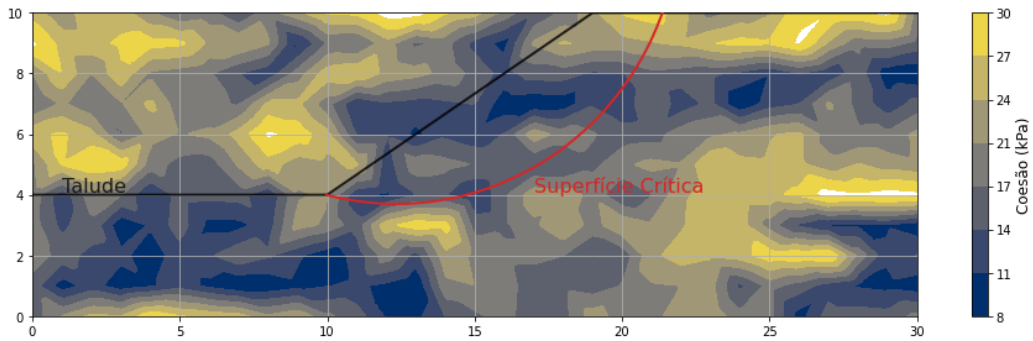


Ocorre que, neste cenário, os pontos no meio da malha estão correlacionados verticalmente e horizontalmente, enquanto os pontos na extremidade esquerda e inferior não, apresentando maior instabilidade nos resultados por possuírem menos amarras. Os pontos vizinhos a esses, então, que tendem a se conformar, criam uma tendência diagonal para a propagação dessa instabilidade, resultando muitas vezes na estratificação da seção em camadas diagonais de propriedades similares, como pode ser visualizado na Figura 23.

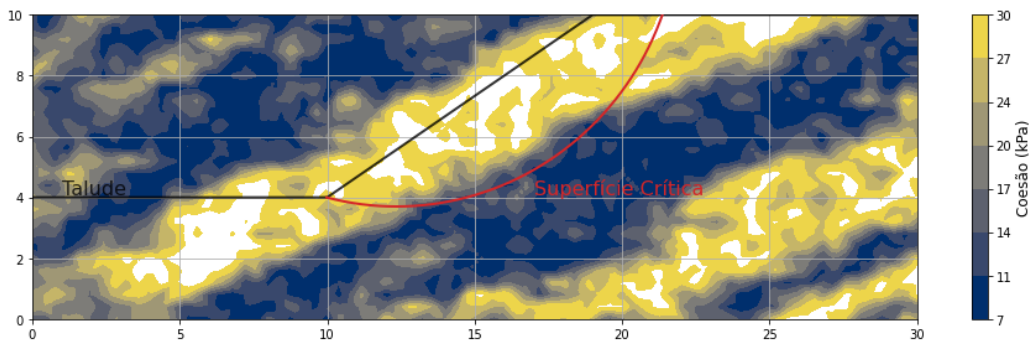


Figura 23: Ilustração do campo de propriedades criado pelo Procedimento 3.

(a) Espaçamento de malha de 1m

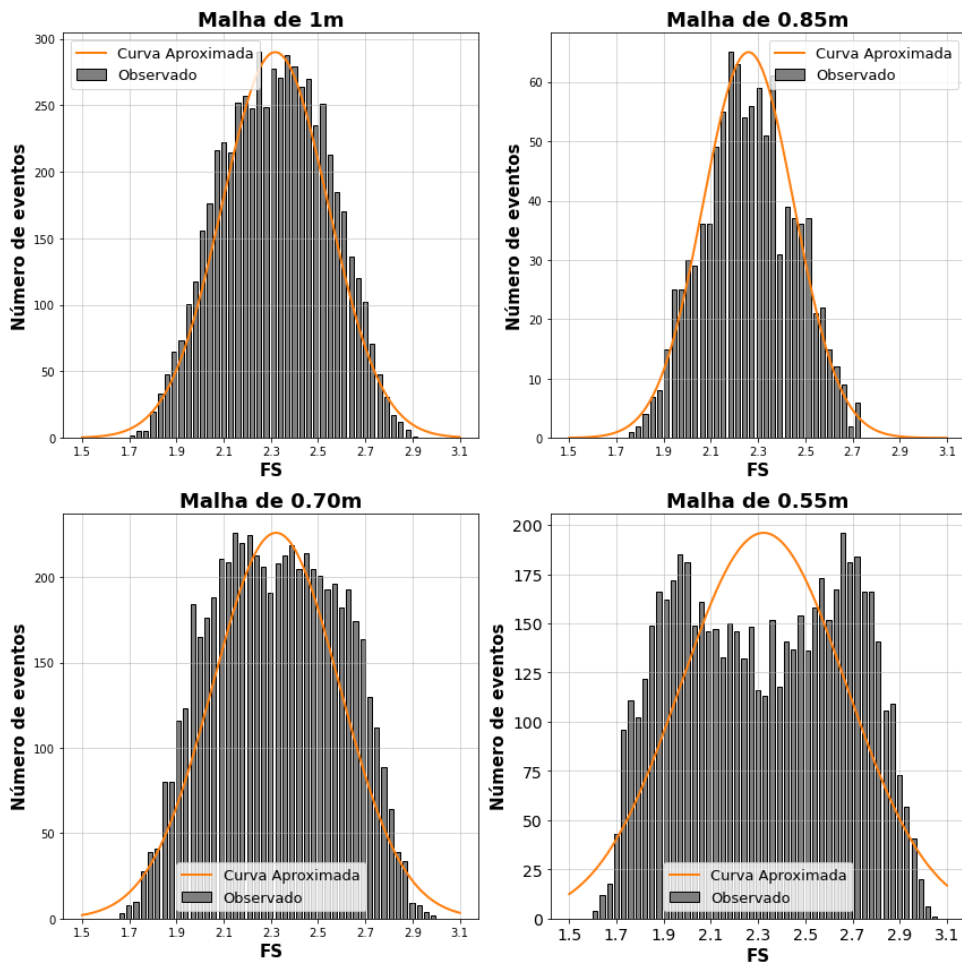


(b) Espaçamento de malha de 0,4m



Diferentes valores de espaçamento de malha foram testados, e a redução progressiva deste parâmetro resultou na instabilidade crescente dos resultados. Como a proximidade entre pontos vizinhos aumenta a influência das propriedades de uns sobre os outros, ao contrário do observado anteriormente, a redução no espaçamento dos pontos resultou na maior dispersão dos resultados. Na Figura 24, observa-se a tendência de formação de uma segunda crista na distribuição do FS, imagina-se que o fenômeno é resultado da tendência de diagonalização citada no parágrafo anterior, combinado com a instabilidade crescente do campo.

Figura 24: Comportamento observado para o *Procedimento 3* frente a variações no espaçamento da malha de pontos aleatórios.



## 4.6 Procedimento 2

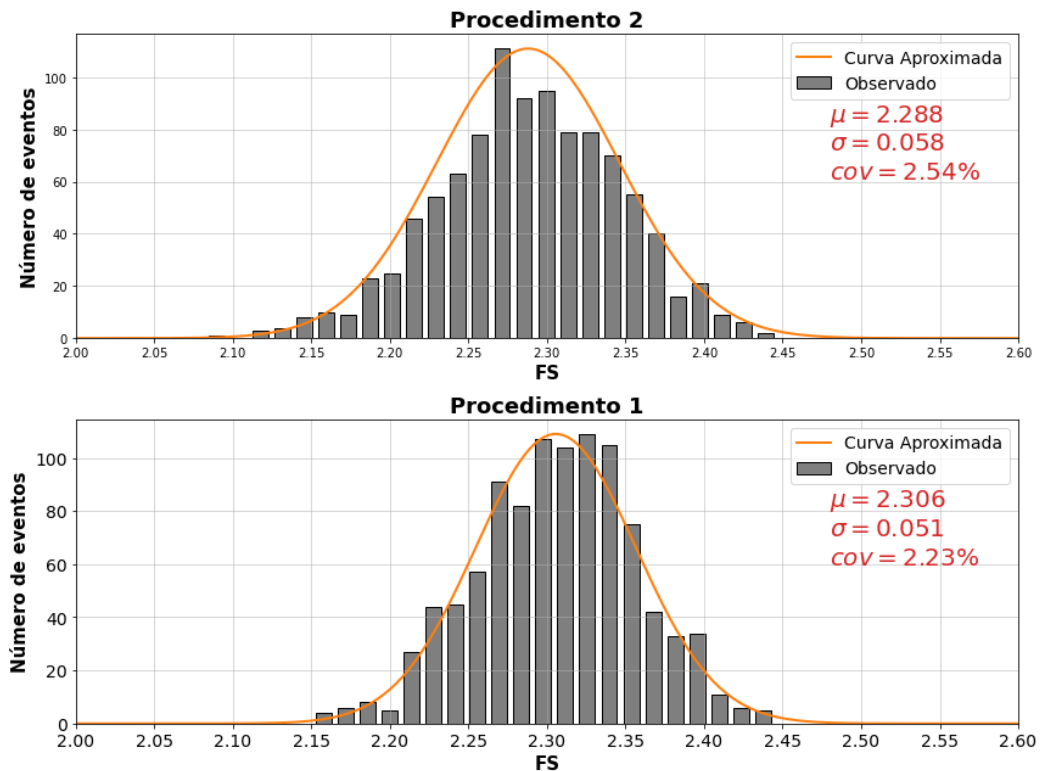
O *Procedimento 2* consiste na definição do campo aleatório não apenas através da média e desvio padrão, mas também considerando a correlação cruzada dos parâmetros. Assim como nas situações anteriores foi testado o espaçamento da malha de propriedades aleatórias. Os resultados estão ilustrados na Figura 25.

A média observada foi de 2,29 e o desvio padrão de 0,06. Diferente do observado no *Procedimento 6*, o incremento desse critério na análise pouco alterou o resultado, sendo praticamente o mesmo obtido para uma distribuição sem correlação de parâmetros (*Procedimento 1*).

O espaçamento da malha de pontos usada na geração dos campos aleatórios, portanto, parece ter influência considerável no efeito da correlação cruzada, onde o efeito passa a ter influência desprezível a partir de um determinado ponto.

Um segundo teste foi realizado com dois metros de espaçamento da malha, resultando no aumento do desvio padrão para 0,9 e corroborando a afirmação anterior.

Figura 25: Ilustração da influência da autocorrelação espacial na distribuição de FS.



#### 4.7 Procedimento 4

O *Procedimento 4* consistia no uso combinado da autocorrelação espacial, *Procedimento 3* e da correlação cruzada de parâmetros, *Procedimento 2*. Para esse cenário houve demasiada instabilidade na geração de campos e os valores das propriedades tendiam ao infinito constantemente, impossibilitando a análise deste método.

#### 4.8 Procedimento 7

Foram testados espaçamentos de malha de 1m e 0,5m. Os desvios padrão obtidos para ambos os casos foram de 0,177 e 0,193, respectivamente, Figura ???. A pequena diferença entre esses valores indica que a variação no espaçamento entre os pontos da malha não influenciou significativamente o desvio padrão dos resultados, Figura 26, possivelmente devido ao esquema de subdivisão iterativo característico do LAS.

Figura 26: Ilustração dos resultados obtidos pelo Procedimento 7.

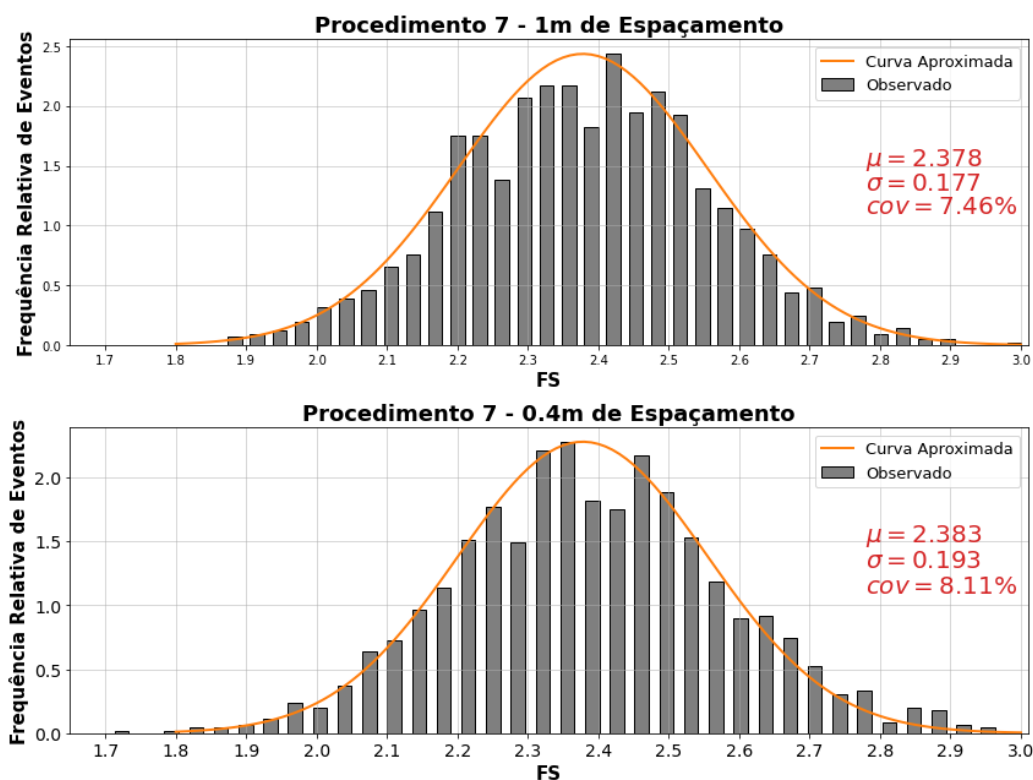
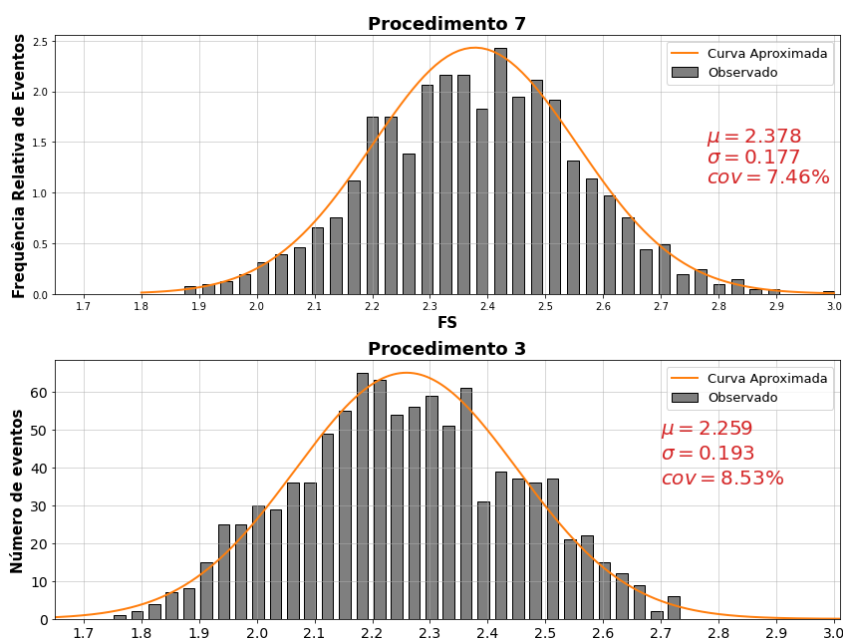


Figura 27: Comparação entre o Procedimento 3 e o resultado obtido pelo LAS.



## 4.9 Distribuições Encontradas

Os valores representativos das distribuições de probabilidade encontrados pelos diferentes Procedimentos estão ilustrados na Tabela 13.

Tabela 13: Distribuição do FS observada para os diferentes Procedimentos.

<b>Espaçamento da Malha</b>	1 m	1 m	0.4 m	0.4 m
	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
Procedimento 1	2.306	0.051	2.296	0.028
Procedimento 2	2.228	0.058	2.306	0.051
Procedimento 3	2.259	0.193	2.306	0.051
Procedimento 4	-	-	-	-
Procedimento 5	2.32	0.26	-	-
Procedimento 6	2.31	0.36	-	-
Procedimento 7	2.378	0.177	2.383	0.193

#### 4.10 Variação da Superfície Crítica

Pequena foi a diferença percebida na distribuição do FS obtida pelo uso de uma superfície fixa e o teste de múltiplas cunhas de ruptura (Tabela 14), mesmo para o Procedimento 3, de maior instabilidade. Buscando melhor entender esse fenômeno, foram mapeadas as superfícies críticas. Para o *Procedimento 1* apenas cerca de um terço das superfícies de ruptura encontradas apresentavam o mesmo centro de curvatura, ilustrado pela Figura 28, demonstrando que a geometria da superfície crítica é sensível à aleatoriedade criada pela geração de campos. O que parece ocorrer, dessa forma, é que assim como evidenciado para a análise determinística, ilustrada pela Figura 19, a variação da superfície de ruptura, desde que dentro de uma certa região, em pouco impacta no valor resultante do fator de segurança.

Pelo mapeamento também percebe-se que, embora ocorram variações na superfície crítica, estas tendem a apresentar centro de curvatura e raio próximos aos observados pela análise determinística, não sendo verificada forte tendência de formação do centro de ruptura fora da região analisada.

A correlação cruzada, representada pela Figura 29, em pouco alterou o padrão observado no *Procedimento 1*. A redução do espaçamento da malha, mostrada pela Figura 31 demonstrou a maior influência na sensibilidade da superfície crítica.

A análise do volume de material mobilizado não demonstrou padrão normal ou lognormal para os dois primeiros *Procedimentos*, sendo difícil determinar um padrão de comportamento, Figuras 32 (a) e (b). Para o *Procedimento 3* a distribuição observada se assemelha à da curva lognormal, ilustrado pela Figura 32 (c).

Tabela 14: Comparação da distribuição de FS entre superfície de ruptura fixa e variável.

	<b>Superfície</b>	<b>Procedimento 1</b>	<b>Procedimento 2</b>	<b>Procedimento 3</b>
$\mu$	Variável	2.306	2.288	2.259
	Fixa	2.309	2.317	2.309
	Diferença	0%	3%	2%
$\sigma$	Variável	0.051	0.058	0.193
	Fixa	0.056	0.054	0.199
	Diferença	10%	7%	5%
Cov	Variável	2.21%	2.53%	8.54%
	Fixa	2.42%	2.33%	8.62%

Figura 28: Procedimento 1 - Sensibilidade da Geometria da Superfície Crítica

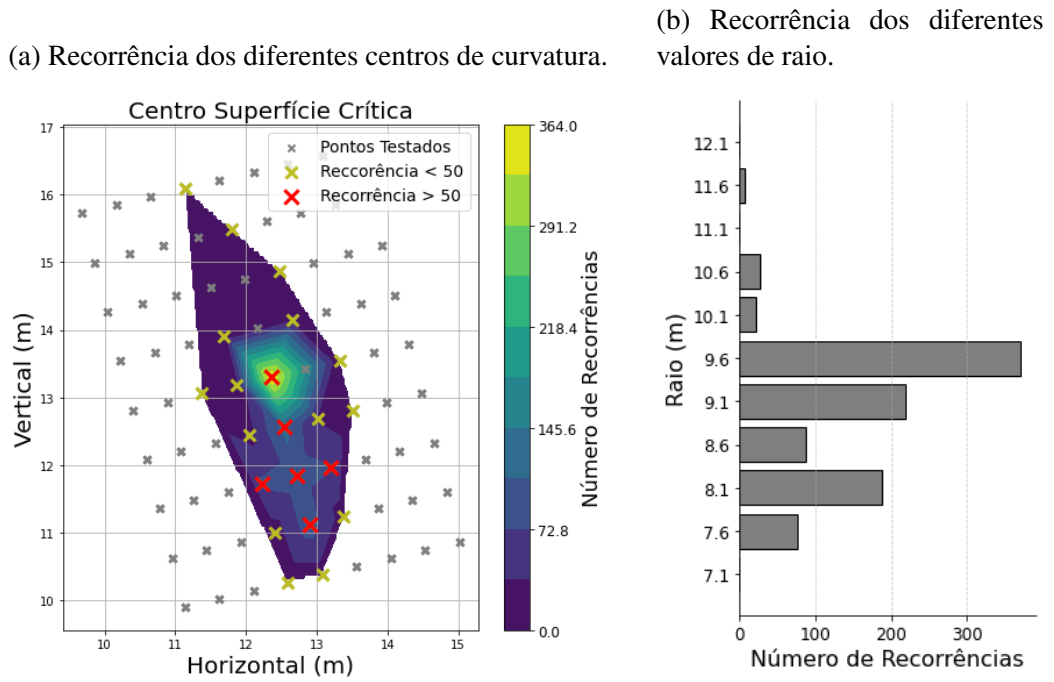


Figura 29: Procedimento 2 - Sensibilidade da Geometria da Superfície Crítica

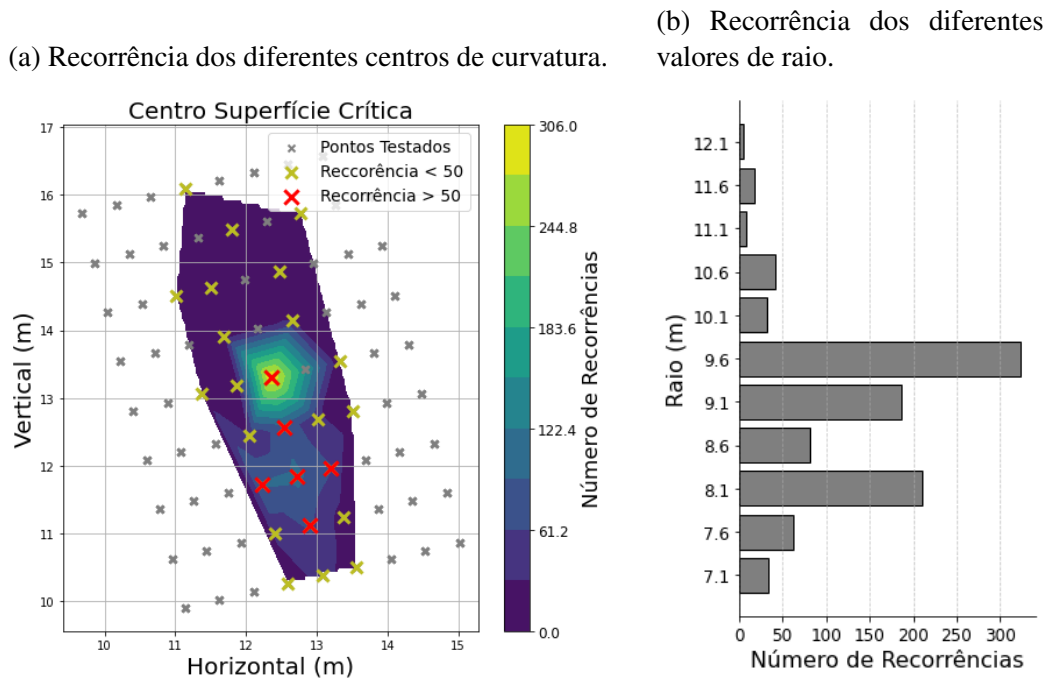
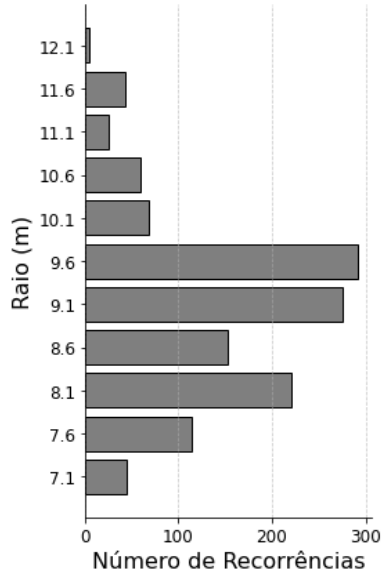


Figura 30: Procedimento 3 - Sensibilidade da Geometria da Superfície Crítica

(a) Recorrência dos diferentes valores de raio.



(b) Recorrência dos diferentes centros de curvatura.

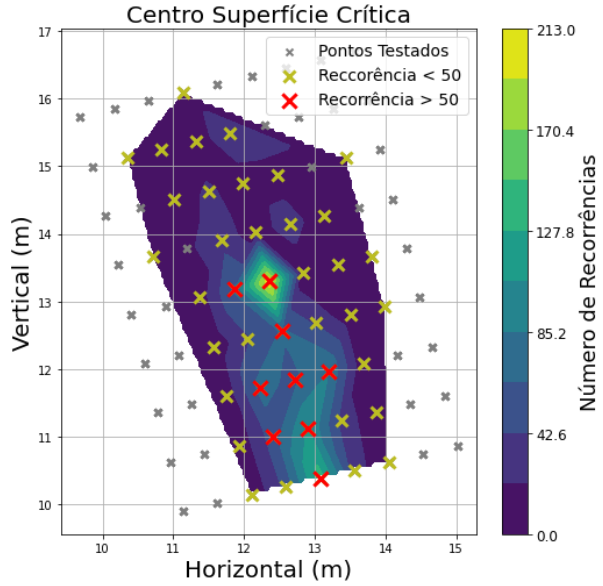
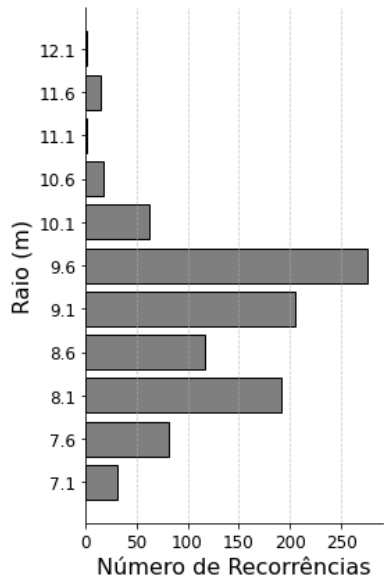


Figura 31: Procedimento 1 - Malha de 0,4m

(a) Recorrência dos diferentes valores de raio.



(b) Recorrência dos diferentes centros de curvatura.

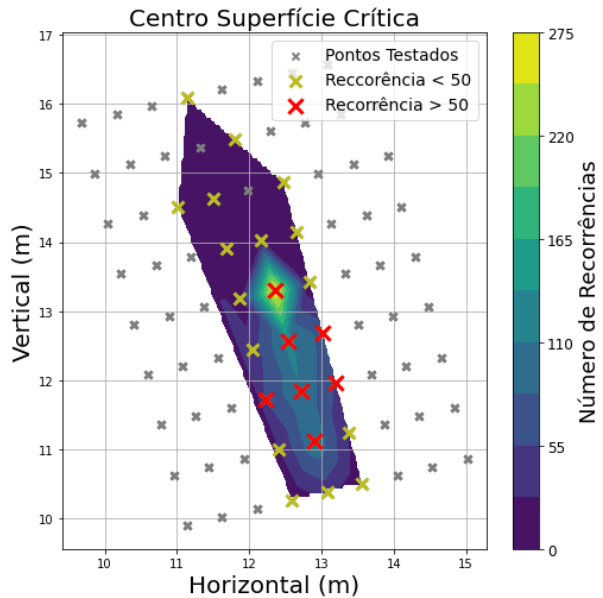
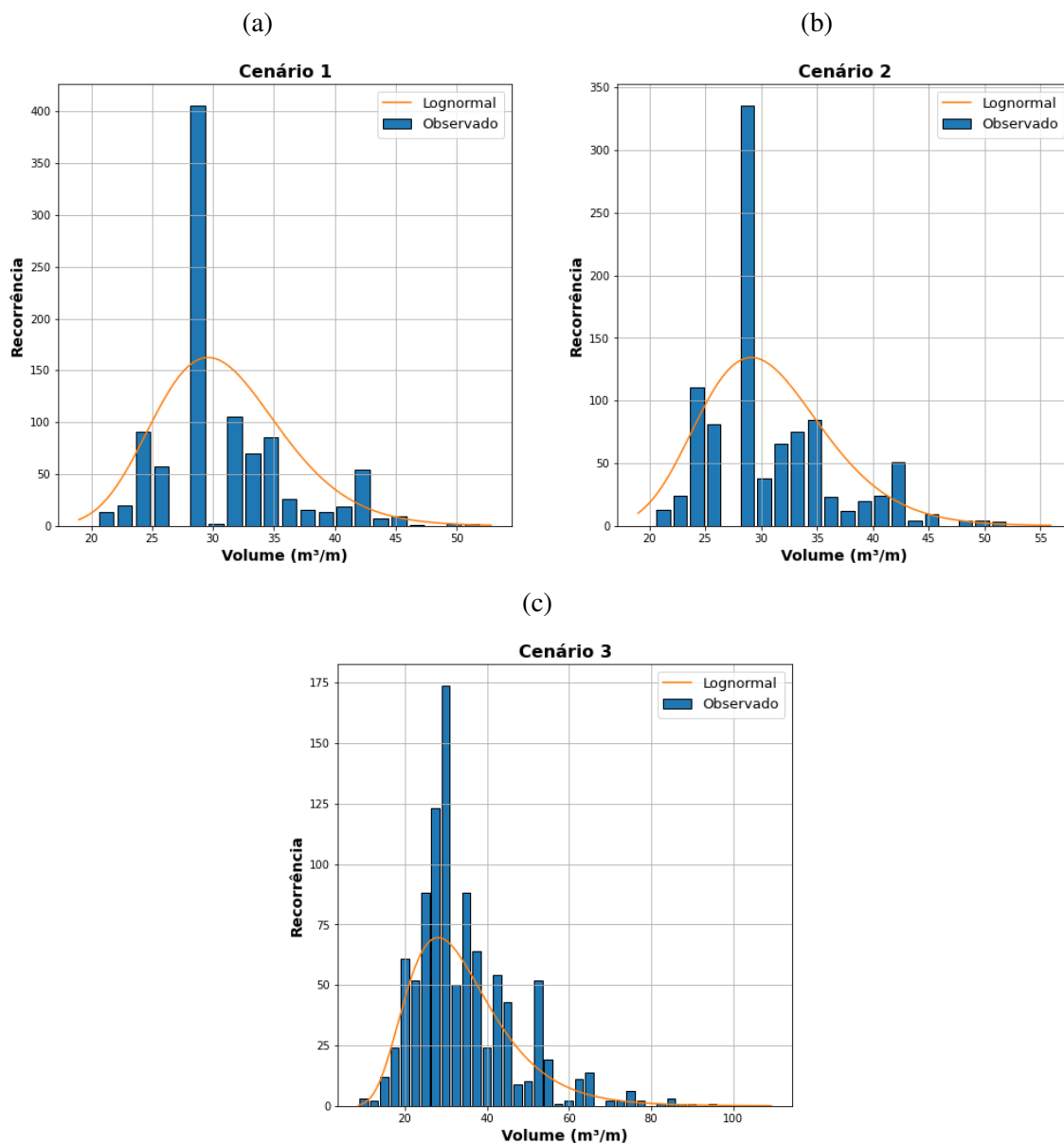




Figura 32: Volume de material movimentado.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 Conclusões

No presente trabalho foi realizada a implementação do método de Fellenius para o cálculo da estabilidade de taludes através de um *script* em linguagem *python*. O objetivo geral do trabalho, além da implementação das equações básicas, foi a consideração das incertezas das propriedades geotécnicas através da discretização espacial dos mesmos.

A consideração da variabilidade espacial do solo, embora não tenha permitido a avaliação da probabilidade de ruptura do talude, permitiu a determinação da distribuição de valores prováveis do fator de segurança. Para o *Procedimento 7*, o desvio padrão foi de cerca de 0,18, e portanto a confiança de 95% do fator de segurança é próxima de 1,9, consideravelmente menor que a prevista pela análise determinística. Para o *Procedimento 7* a diferença é ainda maior, demonstrando a importância da consideração desse tipo de variável.

Verificou-se que a consideração da correlação cruzada de parâmetros, representada pelo *Procedimento 2*, resultou em pequena diferença quando comparada com o simples uso da distribuição normal de probabilidade, *Procedimento 1*. A consideração da autocorrelação espacial, no entanto, apresentou significativa divergência, com desvio padrão superior e se aproximando, dependendo do espaçamento da malha de propriedades aleatórias, do obtido pelo *Procedimento 7*, como pode ser visto pela Figura 27.

Os 3 primeiros *Procedimentos* tiveram os resultados ditados pelo espaçamento da malha de propriedades, diferente do *Procedimento 7*, que permaneceu estável independente disso. Os resultados do *Procedimento 7* foram similares aos observados no *Procedimento 3*, indicando que, desde que a razão entre a distância de autocorrelação e o espaçamento entre os pontos não seja demasiadamente grande ou pequena, o procedimento pode apresentar resultados coerentes. O uso de um procedimento parecido, portanto, se investigado mais a fundo, poderia ser uma alternativa ao LAS de implementação mais simples.

O *Procedimento 4* levou a valores com ordens de grandeza fora das esperadas para o material e, portanto, não apresentou resultados.

O uso de campos de propriedades constante, *Procedimentos 5 e 6*, apresentaram desvio padrão consideravelmente superior ao observado pelo LAS e aos demais procedimentos. O fator de segurança médio observado foi em todos os casos, próximo ao obtido pela análise determinística, sendo a maior diferença observada no *Procedimento 3*, com valor de 2,6%.

O uso de superfície de ruptura fixa em pouco parece trazer prejuízo para os resultados, com diferenças de menos de 10% quando comparadas às análises de superfícies variáveis e havendo reduzida necessidade de processamento de dados. A sensibilidade maior da distribuição do FS parece ser em função dos campos criados que da geometria escolhida. O volume de material movimentado apenas apresentou padrão reconhecível para o *Procedimento 3*, e poderia ser estudado para avaliar o impacto da ruptura do talude.

## 5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

A avaliação da estabilidade também pela análise em elementos finitos através do *Strength Reduction Factor* criaria uma visão mais completa do cenário, e a utilização de diferentes softwares de equilíbrio limite poderia incorporar mais alternativas para a avaliação do problema.

A análise direta da probabilidade de falha pelo método de Monte Carlo poderia ser realizada para taludes com fator de segurança menor, assim como a avaliação do impacto de variações do nível d'água, que possivelmente teriam influência ainda maior no resultados que a variabilidade das propriedades do solo.

Como a resistência de determinados solos tende a aumentar com a profundidade, poderia ser avaliado o impacto da implementação de um critério que considerasse esse fenômeno. O uso dos procedimentos de Bishop, Jambu e Morgenstern-Price também auxiliariam na compreensão do problema.

As seis sugestões propostas dessa forma são:

1. A utilização de elementos finitos na análise pelo *strength reduction factor*.
2. A utilização de diferentes softwares comerciais para a análise probabilística, como *slide* e *slope* do *geostudio*.
3. A análise da probabilidade de ruptura do talude e não apenas da curva que descreve a distribuição do FS.
4. A análise probabilística do nível d'água e sua influência no fator de segurança.
5. A consideração de um critério que leve ao aumento das propriedades geomecânicas de acordo com a profundidade.
6. A utilização de outros critérios para avaliação do FS, que não o de Fellenius.

## Referências

- BAECHER, G. B.; CHRISTIAN, J. T. Reliability of slopes: Incorporating qualitative information. *Transportation Research Record 1343*, 2003.
- BASAWA, I. V. Estimation of the autocorrelation coefficient in simple markov chains. *Biometrika*, [Oxford University Press, Biometrika Trust], v. 59, n. 1, p. 85–89, 1972. ISSN 00063444, 14643510. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2334618>.
- BENTLEY, S. C. *Stability Modeling with Geostudio*. 2024.
- BENTLEY, S. T. *PLAXIS LE Slope Stability Theory Manual*. 2021.
- BOLTON, H. H. G.; GROENWOLD, A. *Global search for critical failure surface in slope stability analysis*. [S.l.]: Engineering Optimization, 2003.
- CRAIG, R. F. *Soil Mechanics*. 6. ed. [S.l.]: Spon Press, 1997.
- DAS, B. M. *Principles of Geotechnical Engineering*. 7. ed. [S.l.]: CENGAGE Learning, 2010.
- FENTON, G. A.; GRIFFITHS, D. V. *Risk assessment in geotechnical engineering*. [S.l.]: John Wiley and Sons Ltd., 2008.
- FENTON, G. A.; VANMARCKE, E. H. Simulation of random fields via local average subdivision. *Journal of Engineering Mechanics*, 08 1990.
- FILHO, O. A. Caracterização geológico-geotécnica voltada à estabilização de encostas: uma proposta metodológica. In: *Conferência Brasileira sobre Estabilidade de Encostas-COBRAE. Anais*. [S.l.: s.n.], 1992. p. 721–733.
- FISHMAN, G. Monte carlo: Concepts, algorithms and applications. *Springer-Verlag*, 1995.
- GERSCOVICH, D. M. S. *Estabilidade de taludes*. 2. ed. [S.l.]: Oficina de Textos, 2016.
- GUIDICINI, G.; NIEBLE, C. M. *Principles of Geotechnical Engineering*. 7. ed. [S.l.]: CENGAGE Learning, 2010.
- HAMILTON, J. D. *Time Series Analysis*. [S.l.]: Princeton University Press, 1994.
- KROESE, D. P. et al. Why the monte carlo method is so important today. *WIREs Comput Stat*, 2014.
- LACASSE, S.; NADIM, F. Risk and reliability in geotechnical engineering. *Fourth International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering*, 03 1998.
- MIRANDA, T. *Taludes Rochosos - Material de apoio à geotecnia II*. [S.l.]: Departamento de Engenharia Civil. Universidade do Minho UMINHO, 2012.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. [S.l.]: John Wiley Sons, Inc., 2014.
- MOSIMANN, A. S. *ANÁLISE PROBABILÍSTICA DA ESTABILIDADE DE UM TALUDE DE CORTE EM SOLO RESIDUAL DE GRANITO DE COCAL DO SUL/SC*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2024.

PHOON, K. K.; KULHAWY, F. *Characterization of Geotechnical Variability*. 1999.

ROBERT, C. P.; CASELLA, G. *Monte Carlo Statistical Methods*. [S.l.]: Springer Science+Business Media Inc., 2004.

ROCSIENCE. *Slide 2 User Guide*. 2024. Disponível em: <https://www.rocsience.com/help/slide2/documentation/slide-model/project-settings/statistics/spatial-variability>).

ROSS, S. M. *Introduction to Probability Models*. [S.l.]: Elsevier Inc, 2007.

VARNES, D. *Slope movement types and processes*. [S.l.]: Transportation Research Board Special Report, 1978.

VIVIESCAS, J.; GRIFFITHS, D.; OSORIO, J. Geological influence on the spatial variability of soils. *International Journal of Geotechnical Engineering*, v. 16, p. 1–9, 03 2021.

WANG, Y.; AKEJU, V. Quantifying the cross-correlation between effective cohesion and friction angle of soil from limited site-specific data. *Soils and Foundations*, v. 56, 12 2016.

WEISSTEIN, E. W. *Evaluation of geotechnical property variability*. 2024. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/StatisticalCorrelation.html>).

ZIESMANN, N. *Análise probabilística utilizando campos aleatórios aplicada à estabilidade de aterros sobre solos moles*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2023.

# APÊNDICE

## Bibliotecas

```
import numpy as np
from scipy.interpolate import interp1d
from matplotlib import pyplot as plt
from functools import partial
from tqdm import tqdm
import pandas as pd
import time
import sys
```

## Definições

DEFININDO SUPERFÍCIE DO TALUDE

```
talude = np.array([[0, 4], [10, 4], [19, 10], [30, 10]]).T
contorno = np.array([[0, 30], [0, 10]])
```

DEFININDO PROPRIEDADES B SICAS

```
coesao, coesao_std, coesao_dist = 20, 4.2, 0.5 #kPa
phi, phi_std, phi_dist = np.deg2rad(27), np.deg2rad(1.2), 0.5 #degree
h_auto_distance = 20
v_auto_distance = 1
gamma = 18 # kN/m
```

```
h_spacing = 1
v_spacing = 1
grid = np.ones((int((talude[1][-1] - talude[1][0] + 4)/h_spacing) + 1,
                 int((talude[0][-1] - talude[0][0])/h_spacing) + 1))
```

DEFININDO MALHA DE CENTROS E RAIOS

```
margem_centro = 2
margem_raio = 0.5
Xs = np.arange(0, margem_centro*2+0.01, 0.5)
```

```

Ys = np.arange(0, margem_centro*2+0.01, 0.5)
centro_falha = np.array([[12.35], [13.3]])
raio_falha = 9.6

df_centros = malha_centros(margem_centro, margem_raio, Xs, Ys,
                           centro_falha, raio_falha)

```

## DEFININDO MALHA DE PROPRIEDADES

```

malha_friccao = grid.copy()
malha_friccao = malha_friccao.copy()*phi
malha_friccao = cov_grid(malha_friccao, phi, phi_std,
                          h_auto_distance, v_auto_distance, h_spacing, v_spacing)
malha_coesao = malha_friccao.copy()
malha_coesao = cov_grid(malha_coesao, coesao, coesao_std,
                          h_auto_distance, v_auto_distance, h_spacing, v_spacing)
malha_gamma = grid.copy()*gamma

```

## Malha de Centros

```

def malha_centros(margem_centro, margem_raio, Xs, Ys,
                 centro_falha, raio_falha):
    aux = []
    for e in Ys:
        aux.append([np.vstack((Xs, np.ones(len(Xs)) * e))])
    tetha = np.arctan(1/4)# + np.pi/4
    M = np.array([[np.cos(tetha), -np.sin(tetha)],
                  [np.sin(tetha), np.cos(tetha)]])
    M1_aux = np.array([[1, 0], [0, 1.5]])
    M = np.dot(M, M1_aux)
    vec = np.array([[margem_centro], [margem_centro]])
    aux_origem = centro_falha - vec

```

```

centro_falha_aux = (aux_origem +
                    np.dot(M, centro_falha - aux_origem))

center_grid = []
for e in aux:
    center_grid.append(np.dot(M, e[0]) + aux_origem
                       - (centro_falha_aux - centro_falha))

Rs = np.arange(-2.5, 3.05, 0.5) + raio_falha

centros = np.array(center_grid[0].T)
for line in center_grid[1:]:
    centros = np.vstack((centros, line.T))

df = pd.DataFrame({'X' : centros.T[0], 'Y' : centros.T[1],
                  'Raio' : np.ones(len(centros))*Rs[0]})
for R in Rs[1:]:
    aux = pd.DataFrame({'X' : centros.T[0], 'Y' : centros.T[1],
                       'Raio' : np.ones(len(centros))*R})
    df = pd.concat([df, aux])
return df.reset_index()

```

## Cálculo da Estabilidade

```

def y_superficie(x, topo):
    if x > min(topo[0]) and x < max(topo[0]):
        topo = topo.T
        topo = np.vstack((topo[topo[:, 0] < x][-1],
                          topo[topo[:, 0] > x][0])).T
        X = topo[0]
        Y = topo[1]
        f = interp1d(X, Y, kind='linear')
        return f(x)
    else:

```



```

        return

def y_topo(x):
    return y_superficie(x, talude)

def filtro(y):
    if y[1] <= y_topo(y[0]).item():
        return y[1]
    else:
        return

def y_circulo(x, raio, centro):
    y = -(raio**2 - (x - centro[0])**2)**0.5 + centro[1]
    return y

def alfa_circulo(x, raio, centro):
    alfa = (x - centro[0]) / np.sqrt(
        raio**2 - (x - centro[0])**2)
    return np.arctan(alfa)

def circ_draw(raio, centro, talude, delta_theta):

    if centro[1] < talude[1][-1]:
        return 'Error'

    if ((talude[0][2] - centro[0])**2 + (
        talude[1][2] - centro[1])**2)**0.5 < raio:

        n = np.deg2rad(delta_theta)

```

```

    tetha = np.arange(0, np.deg2rad(360), n)
    x = raio*np.cos(tetha) + centro[0]
    y = raio*np.sin(tetha) + centro[1]
    y = np.vstack((x, y))
    mask = y[0, :] > talude[0][0]
    y = y[:, mask]
    mem = [filtro(e) for e in y.T]
    mem = np.array(mem)
    mem = np.vstack((y[0], mem))
    mask = mem[1, :] != np.array(None)
    mem = mem[:, mask]
    superficie_critica = np.array(mem, dtype =float)

    return superficie_critica

else:
    return 'Error'

def estabilidade(R, centro):
    superficie_critica = circ_draw(
        R, centro, talude, 1)

    if isinstance(superficie_critica, str):
        return 'Error'

    limite_horizontal_sup_critica = np.array(
        [superficie_critica[0].min(),
         superficie_critica[0].max()])

GEOMETRIA
N = 40 # INSERIR N MERO DE FATIAS
x = np.linspace(limite_horizontal_sup_critica[0],

```

```

        limite_horizontal_sup_critica[1], N)
y_tal = np.array([y_superficie(
    e, talude).item() for e in x[1:-1]])
y_crit = np.array(
    [y_circulo(e, R, centro) for e in x[1:-1]])
alfa = np.array(
    [alfa_circulo(e, R, centro) for e in x[1:-1]])

func = partial(continuidade_espacial, h_spacing=h_spacing,
               v_spacing=v_spacing, grid=malha_coesao,
               contorno=contorno, mean=coesao,
               std=coesao_std, auto_distance=coesao_dist)

coesao_circulo = np.apply_along_axis(
    func, axis=0, arr=np.vstack((x[1:-1], y_crit)))

coesoes = np.array([x[1:-1], coesao_circulo])

func = partial(continuidade_espacial, h_spacing=h_spacing,
               v_spacing=v_spacing, grid=malha_friccao,
               contorno=contorno, mean=phi, std=phi_std,
               auto_distance=phi_dist)

friccao_circulo = np.apply_along_axis(
    func, axis=0, arr=np.vstack((x[1:-1], y_crit)))

phis = np.array([x[1:-1], friccao_circulo])

height = y_tal - y_crit

base = [abs(x[e-1] - x[e])/2 + abs(
    x[e] - x[e+1])/2 for e in range(1, len(x)-1)]

l_i = base/np.cos(alfa)

```

```

x = x[1:-1]

#CALCULO ESTABILIDADE
weight = height*gamma*base
normal = weight*(np.cos(alfa))/l_i
resistido = (coesoes[1] + np.tan(phis[1])*normal)*l_i
solicitado = weight*np.sin(alfa)
FS = resistido.sum()/solicitado.sum()

return FS

def estabilidade_linhas(row):
    return estabilidade(row['Raio'],
                       np.array([row['X'], row['Y']]))

FS = df_centros.progress_apply(estabilidade_linhas, axis=1)
df = df_centros.copy()
df['FS'] = FS
df = df.reset_index().drop('index', axis = 1)
df = df[~df.map(lambda x: isinstance(x, str)).any(axis=1)]
critico = df.loc[df['FS'].idxmin()]

```

## Gráficos

```

def chart(talude, centro_falha, df, raio_falha, critico):
    plt.figure(figsize = (12, 5))

    plt.plot(talude[0], talude[1], color = 'black')
    plt.scatter(centro_falha[0], centro_falha[1],
                color = 'tab:blue', s = 60,
                marker = 'x', zorder = 10)

    plt.scatter(df['X'], df['Y'], marker = 'x',
                color = 'dimgray', linewidths=0.7)

```

```

superficie_critica = circ_draw(
    raio_falha , centro_falha , talude , 0.2)
plt.plot(superficie_critica[0], superficie_critica[1],
         color = 'tab:blue')

ax = plt.gca()
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['bottom'].set_color('black')
ax.spines['left'].set_visible(True)
plt.grid(True)

ax.tick_params(colors = 'black')
ax.grid(axis = 'x', color = 'silver', alpha = 0.3)
major_ticks = np.arange(0, 31, 2)
minor_ticks = np.arange(0, 31, 1)
ax.set_xticks(major_ticks)
ax.set_xticks(minor_ticks, minor = True)

ax.tick_params(colors = 'black')
ax.grid(axis = 'y', color = 'silver', alpha = 0.3)
major_ticks = np.arange(0, 18, 1)
minor_ticks = np.arange(0, 18, 0.5)
ax.set_yticks(major_ticks)
ax.set_yticks(minor_ticks, minor = True)

plt.scatter(critico['X'], critico['Y'], color = 'tab:red',
           s = 60, marker = 'x', zorder = 10)

superficie_critica = circ_draw(
    critico['Raio'], np.array(
        [critico['X'], critico['Y']]), talude , 0.2)

```

```

plt.plot(superficie_critica[0], superficie_critica[1],
         color = 'tab:red')

plt.text(21, 7, 'FS = ' + str(round(critico['FS']*100)/100),
         fontsize=24, color='tab:red')

plt.text(21, 5.75, 'Raio = ' + str(
    round(critico['Raio']*100)/100), fontsize=20,
    color='tab:red')

plt.text(20, 4.5, 'Centro = ' + '(' + str(round(
    critico['X']*100)/100) + ', ' + str(
    round(critico['Y']*100)/100) + ')',
    fontsize=18, color='tab:red')

plt.show()

```

```

def prop_map(grid, talude, h_spacing, v_spacing, correcao):
    y = list(range(len(grid)))
    x = list(range(len(grid[0])))
    comb = list(itertools.product(x, y))
    X = []
    Y = []
    C = []
    for e in comb:
        X.append(e[0])
        Y.append(e[1])
        C.append(grid[e[1], e[0]])

plt.figure(figsize=(13, 4))

x = np.array(X)*h_spacing
y = np.array(Y)*v_spacing
z = np.array(C)
grid_x, grid_y = np.meshgrid(np.linspace(

```

```

x.min(), x.max(), 200), np.linspace(y.min(),
                                     y.max(), 200))

grid_z = griddata((x, y), z, (grid_x, grid_y),
                  method='linear')

levels = np.arange(z.min(), z.max()*1.001,
                  z.max()/correcao)

desenho = plt.contourf(grid_x, grid_y, grid_z,
                       levels=levels, cmap='cividis')

colorbar = plt.colorbar(format='%.2f')
plt.plot(talude[0], talude[1], color='black',
         linewidth=2, zorder=100, alpha=0.8)

centro_falha = np.array([[12.35], [13.3]])
aux = circ_draw(9.6, centro_falha, talude, 0.1)
plt.plot(aux[0], aux[1], color='tab:red',
         linewidth=2, zorder=100)

plt.text(1, 4.1, 'Talude', fontsize=16,
         color='black', alpha=0.8)

plt.text(17, 4.1, 'Superfície Crítica',
         fontsize=16, color='tab:red')

plt.grid()
plt.show()

```

### **Campo de propiedades**

```

def cov_grid(grid, mean, std, h_auto_distance, v_auto_distance,
             h_spacing, v_spacing):

```

```

for i in range(len(grid)):
    for j in range(len(grid[i])):
        start_time = time.time()
        current_time = time.time()
        lim = 10

        if j != 0 and i != 0:
            grid[i, j] = np.random.normal(mean, std, 1)[0]
            while ((grid[i, j] < 0 or grid[i, j] <
                mean - 3*std) or grid[i, j] > 3*std +
                mean) and current_time - start_time < lim:
                grid[i, j] = np.random.normal(
                    mean, std, 1)[0]
                current_time = time.time()
            if current_time - start_time > lim:
                grid[i, j] = np.random.normal(mean, std, 1)[0]
                print('Timeout Error')

        elif i == 0 and j == 0:
            grid[i, j] = np.random.normal(mean, std, 1)[0]

        elif i == 0:
            grid[i, j] = np.random.normal(mean, std, 1)[0]
            while ((grid[i, j] < 0 or grid[i, j] <
                mean - 3*std) or grid[i, j] > 3*std +
                mean) and current_time - start_time < lim:
                grid[i, j] = np.random.normal(mean, std, 1)[0]
                current_time = time.time()
            if current_time - start_time > lim:
                grid[i, j] = np.random.normal(mean, std, 1)[0]
                print('Timeout Error')

        elif j == 0:

```



```

        grid[i, j] = np.random.normal(mean, std, 1)[0]
        while ((grid[i, j] < 0 or grid[i, j] <
mean - 3*std) or grid[i, j] > 3*std +
mean) and current_time - start_time < lim:
            grid[i, j] = np.random.normal(mean, std, 1)[0]
            current_time = time.time()
            if current_time - start_time > lim:
                grid[i, j] = np.random.normal(mean, std, 1)[0]
                print('Timeout Error')

return grid

def continuidade_espacial(position, h_spacing, v_spacing, grid,
contorno, mean, std, auto_distance):
M = np.array([[1/h_spacing, 0], [0, 1/v_spacing]])
position = position + contorno.T[0]
j, i = np.dot(position, M.T)
i0, j0 = int(np.floor(i)), int(np.floor(j))
i1, j1 = i0 + 1, j0 + 1

a = grid[i0, j0]
b = grid[i0, j1]
c = grid[i1, j0]
d = grid[i1, j1]

y = i-i0
x = j-j0

t = (x**2 + y**2)**0.5
u = ((1-x)**2 + y**2)**0.5
v = (x**2 + (1-y)**2)**0.5
w = ((1-x)**2 + (1-y)**2)**0.5

if i%1 == 0 and j%1 ==0:
    res = grid[i0, j0]

```

```

elif i%1 == 0:
    res = (a/t + b/u)/(1/t + 1/b)
elif j%1 == 0:
    res = (a/t + c/v)/(1/t + 1/c)
else:
    res = (a/t + b/u + c/v + d/w)/(1/t+1/u+1/v+1/w)
return res

```

## Estrutura

```

FS = df_centros.progress_apply(estabilidade_linhas, axis=1)
df = df_centros.copy()
df['FS'] = FS
df = df.reset_index().drop('index', axis = 1)
df = df[~df.map(lambda x: isinstance(x, str)).any(axis=1)]
critico = df.loc[df['FS'].idxmin()]

chart(talude, centro_falha, df, raio_falha, critico)

#centro_falha = np.array([[ critico['X']], [ critico['Y']]])
#inserir coordenadas do centro da superficie critica esperada
#raio_falha = critico['Raio']
#df_centros = malha_centros(margem_centro, margem_raio,
Xs, Ys, centro_falha, raio_falha)

end_time = time.time()

print(end_time - start_time)
print('FS = {0}'.format(critico['FS']))

x_malha = []
y_malha = []
for i in range(len(grid)):
    for j in range(len(grid[0])):

```

```

x_malha.append([i*v_spacing])
y_malha.append([j*h_spacing])

prop_map(malha_coesao, talude, h_spacing, v_spacing, 10)
prop_map(malha_friccao, talude, h_spacing, v_spacing, 32)

#sys.exit()

n_tentativas = 0
memoria = np.array([])
divergencia = 1

n_min, div_max = 1300, 1
memoria_FS = np.array([critico['FS']])
memoria_raio = np.array([critico['Raio']])
memoria_centros = np.array([[critico['X'], critico['Y']]])
n_tentativas = 0
falha = 1
prob_falha = np.array([])
divergencia = 1
#while n_tentativas < n_min or divergencia > div_max:
for e in tqdm(np.arange(0, n_min, 1)):

    #DEFININDO MALHA DE PROPRIEDADES
    malha_friccao = grid.copy()*phi
    malha_friccao = cov_grid(malha_friccao, phi, phi_std,
    h_auto_distance, v_auto_distance, h_spacing, v_spacing)

    malha_coesao = malha_friccao.copy()
    malha_coesao = cov_grid(malha_coesao, coesao, coesao_std,
    h_auto_distance, v_auto_distance, h_spacing, v_spacing)

    malha_gamma = grid*gamma

```

```

FS = df_centros.apply(estabilidade_linhas , axis=1)
df = df_centros.copy()
df['FS'] = FS
df = df.reset_index().drop('index', axis = 1)
df = df[~df.map(lambda x: isinstance(x, str)).any(axis=1)]
critico = df.loc[df['FS'].idxmin()]
aux = np.array([critico['FS']])
aux2 = np.array([critico['Raio']])
aux3 = np.array([critico['X']])
aux4 = np.array([critico['Y']])
aux5 = np.concatenate(([aux3, aux4]))
n_tentativas += 1
memoria_FS = np.concatenate((memoria_FS, aux))
memoria_raio = np.concatenate((memoria_raio, aux2))
memoria_centros = np.vstack((memoria_centros, aux5))

prob = np.sum(memoria_FS < falha) / n_tentativas
prob_falha = np.concatenate((prob_falha, np.array([prob])))

df = pd.DataFrame({'FS' : memoria_FS, 'X' : memoria_centros.T[0], 'Y' :
    memoria_centros.T[1], 'Raio' : memoria_raio})

save = 'D:\\TCC\\Script\\{0}'
tentativa = 10
df.to_csv(save.format('memoria_df{0}.csv'.format(tentativa)))

```

## **Análises Distribuição**

```

nome2 = 'malha_pequena.csv'
nome1 = 'D:\\TCC\\Script\\Normal\\' + 'normal.csv'

```

```

def teste(text):
    return 'Error' in text

def gaussian(x, mu, sigma):
    coefficient = 1 / (sigma * np.sqrt(2 * np.pi))
    exponent = -((x - mu) ** 2) / (2 * sigma ** 2)
    return coefficient * np.exp(exponent)

def engine(nome):
    df = pd.read_csv(nome, sep = ',', encoding='utf-8')
    df.columns = ['Lixo', 'FS', 'X', 'Y', 'R']
    df.drop(columns=['Lixo'], inplace=True)

    df['X'] = df['X']
    df['Y'] = df['Y']
    df['R'] = df['R']

    FS = np.array(df['FS'])

    return FS

FS2 = engine(nome2)
FS1 = engine(nome1)

x = np.arange(FS2.min(), FS2.max()+0.01, 0.007)
y = [len(FS2[(FS2 > x[e]) & (FS2 < x[e+1])]) for e in range(len(x)-1)]
x = [(x[e] + x[e+1])/2 for e in range(len(x)-1)]

x_plot = np.arange(2.15, 2.460000001, 0.0002)
x_label = np.arange(2.15, 2.46, 0.05)

fig, axs = plt.subplots(nrows=2, ncols=1, figsize = (12,10))
axs[0].bar(x, y, color='tab:gray', edgecolor='black', width = 0.005)
axs[0].grid(axis='y', linewidth=0.7, alpha=0.7)

```

```

axs[0].grid(axis='x', linewidth=0.7, alpha=0.7)
axs[0].spines['top'].set_visible(False)
axs[0].spines['right'].set_visible(False)
axs[0].spines['bottom'].set_color('black')
axs[0].spines['left'].set_visible(True)
axs[0].set_title('Distribuição do FS com 0.4m de Espaçamento de Malha',
fontsize = 16, fontweight = 'bold')
axs[0].set_xlabel('FS', fontsize = 12, fontweight = 'bold')
axs[0].set_ylabel('Número de eventos', fontsize = 12, fontweight = 'bold')
axs[0].text(min(x_plot) + ((max(x_plot) - min(x_plot))*0.9),
max(y)*8/10, r'$ \mu = {0}$'.format(round(FS2.mean(), 2)),
fontsize=20, color='tab:red')
axs[0].text(min(x_plot) + ((max(x_plot) - min(x_plot))*0.9),
max(y)*7/10, r'$ \sigma = {0}$'.format(round(FS2.std(), 2)),
fontsize=20, color='tab:red')
axs[0].text(min(x_plot) + ((max(x_plot) - min(x_plot))*0.9),
max(y)*6/10, r'$ cov = {0} \%$'.format(int(round(FS2.std()/FS2.mean()*100,
0))), fontsize=20,
color='tab:red')
axs[0].set_xticks(x_label)

x = np.arange(FS2.min(), FS2.max()+0.01, 0.0025)
y_g = gaussian(x_plot, FS2.mean(), FS2.std())
y_g = max(y)/max(y_g)*y_g
axs[0].plot(x_plot, y_g, linewidth = 2, color = 'tab:orange')
axs[0].legend(['Curva Aproximada', 'Observado'])

plt.yticks(fontsize=14)
plt.xticks(fontsize=14)

x = np.arange(FS1.min(), FS1.max()+0.01, 0.008)
y = [len(FS1[(FS1 > x[e]) & (FS1 < x[e+1])]) for e in range(len(x)-1)]
x = [(x[e] + x[e+1])/2 for e in range(len(x)-1)]

```

```

axs[1].bar(x, y, color='tab:gray', edgecolor='black', width = 0.006)
axs[1].grid(axis='y', linewidth=0.7, alpha=0.7)
axs[1].grid(axis='x', linewidth=0.7, alpha=0.7)
axs[1].spines['top'].set_visible(False)
axs[1].spines['right'].set_visible(False)
axs[1].spines['bottom'].set_color('black')
axs[1].spines['left'].set_visible(True)
axs[1].set_title('Distribuição do FS com 1m de Espaçamento de Malha',
fontsize = 16, fontweight = 'bold')
axs[1].set_xlabel('FS', fontsize = 12, fontweight = 'bold')
axs[1].set_ylabel('Número de eventos', fontsize = 12, fontweight = 'bold')
axs[1].text(min(x_plot) +
((max(x_plot) - min(x_plot))*0.9), max(y)*8/10, r'$ \mu = {0}$'.format(round(F
axs[1].text(min(x_plot) +
((max(x_plot) - min(x_plot))*0.9), max(y)*7/10, r'$ \sigma = {0}$'.format(roun
axs[1].text(min(x_plot) +
((max(x_plot) - min(x_plot))*0.9), max(y)*6/10, r'$ cov = {0} \%$'.format(int(
axs[1].set_xticks(x_label)

x = np.arange(FS1.min(), FS1.max()+0.01, 0.0025)
y_g = gaussian(x_plot, FS1.mean(), FS1.std())
y_g = max(y)/max(y_g)*y_g
axs[1].plot(x_plot, y_g, linewidth = 2, color = 'tab:orange')
axs[1].legend(['Curva Aproximada', 'Observado'])

plt.tight_layout()

plt.show()

```

### 5.2.1 Sensibilidade

```

margem_centro = 2
margem_raio = 0.5
Xs = np.arange(0, margem_centro*2+0.01, 0.5)
Ys = np.arange(0, margem_centro*2+0.01, 0.5)

```

```

centro_falha = np.array([[12.35], [13.3]])
#inserir coordenadas do centro da superficie critica esperada
raio_falha = 9.6

df centros = malha_centros(margem_centro, margem_raio,
Xs, Ys, centro_falha, raio_falha)

#nome = 'C:\\Users\\ottod\\Python\\Spyder\\TCC\\' + 'sensibilidade_geometria_0
nome = 'malha_pequena.csv'

def teste(text):
    return 'Error' in text

centro_falha = np.array([[12.35], [13.3]])
#inserir coordenadas do centro da superficie critica esperada
raio_falha = 9.1

df = pd.read_csv(nome, sep = ',', encoding='utf-8')
df.columns = ['Lixo', 'FS', 'X', 'Y', 'R']
df.drop(columns=['Lixo'], inplace=True)

critico = df.iloc[df['FS'].idxmin()]

X = {'mean' : df['X'].mean(), 'std' : df['X'].std()}
Y = {'mean' : df['Y'].mean(), 'std' : df['Y'].std()}
R = {'mean' : df['R'].mean(), 'std' : df['R'].std()}
mem = [X, Y, R]

def gaussian(x, mu, sigma):
    coefficient = 1 / (sigma * np.sqrt(2 * np.pi))
    exponent = -((x - mu) ** 2) / (2 * sigma ** 2)
    return coefficient * np.exp(exponent)

#df = df[df['Desvio'] <= 0.5]

```



```

df['X'] = df['X']
df['Y'] = df['Y']
df['R'] = df['R']
df_c = df.groupby(['X', 'Y']).count()

x = df_c.index.get_level_values('X')
y = df_c.index.get_level_values('Y')
z = df_c['FS']

fig = plt.figure(figsize=(8, 8))

grid_x, grid_y = np.meshgrid(np.linspace(x.min(), x.max(), 100),
np.linspace(y.min(), y.max(), 100))
grid_z = griddata((x, y), z, (grid_x, grid_y), method='linear')

for e in range(len(df_c)):
    plt.scatter(x[e], y[e], marker='x',
color = 'tab:red', zorder = 30, linewidths=3, s=100)

for e in range(len(df_centros)):
    plt.scatter(df_centros['X'].iloc[e], df_centros['Y'].iloc[e], marker='x',
color = 'tab:gray', zorder = 3, linewidths=2)

levels = np.arange(0, z.max()*1.001, z.max()/10)
desenho = plt.contourf(grid_x, grid_y, grid_z, levels=levels, cmap='viridis')
colorbar = plt.colorbar()
#colorbar.set_label('Desvio FS Cr rico (%)', fontsize=20)
colorbar.ax.tick_params(labelsize=12)
#plt.scatter([0], [0], marker='x', color = 'tab:red', zorder = 3, linewidths=3)
plt.grid()
plt.xlabel('Horizontal (m)', fontsize=20)
plt.ylabel('Vertical (m)', fontsize=20)
plt.title('Centro Superf cie Cr tica ', fontsize=20)

```

```

plt.show()

n = 7
#save = 'D:\\TCC\\Script\\' + 'sensibilidade_geometria_critica_random {0}.png'.
#fig.savefig(save, dpi = 600)

df_r = df.groupby(['R']).count()
df_r = df_r['FS']

Rs = np.arange(-2, 3.05, 0.5) + raio_falha
mem = []
for e in Rs:
    aux = round(e, 1)
    if aux in df_r.index:
        mem.append([aux, df_r.loc[aux]])
    else:
        mem.append([aux, 0])
mem = np.array(mem).T

fig = plt.figure(figsize=(4, 6))
plt.barh(mem[0], mem[1], 0.4, color='tab:gray', edgecolor='black')
plt.yticks(mem[0])
plt.grid(axis='x', linestyle='--', linewidth=0.7, alpha=0.7)
plt.xticks(fontsize=12)
plt.yticks(fontsize=12)
ax = plt.gca()
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['bottom'].set_color('black')
ax.spines['left'].set_visible(True)
plt.ylabel('Raio (m)', fontsize=16)
plt.xlabel('N mero de Recorr ncias', fontsize=16)
plt.tight_layout()
plt.show()

```

## 5.2.2 Convergência

```
normal = 'normal.csv'
small = 'malha_pequena.csv'
parametros = 'parametros.csv'
espacial = 'espacial.csv'
espacial_small = 'espacial_pequena.csv'

def teste(text):
    return 'Error' in text

centro_falha = np.array([[12.35], [13.3]])
#inserir coordenadas do centro da superf cie cr tica esperada
raio_falha = 9.1

def df_preparation(nome):
    df = pd.read_csv(nome, sep = ',', encoding='utf-8')
    df.columns = ['Lixo', 'FS', 'X', 'Y', 'R']
    df.drop(columns=['Lixo'], inplace=True)

    def gaussian(x, mu, sigma):
        coefficient = 1 / (sigma * np.sqrt(2 * np.pi))
        exponent = -((x - mu) ** 2) / (2 * sigma ** 2)
        return coefficient * np.exp(exponent)

    #df = df[df['Desvio'] <= 0.5]
    df['X'] = df['X']
    df['Y'] = df['Y']
    df['R'] = df['R']

    monte_carlo = np.array(df['FS'])
    return monte_carlo

normal = df_preparation(normal)
small = df_preparation(small)
```

```

parametros = df_preparation(parametros)
espacial = df_preparation(espacial)
espacial_small = df_preparation(espacial_small)

def convergence_chart(df):
    mem = []
    for e in range(len(df)):
        aux = df[:e+1]
        mem.append(aux.std())
    return mem

mem_normal = convergence_chart(normal)
mem_small = convergence_chart(small)
mem_parametros = convergence_chart(parametros)
mem_espacial = convergence_chart(espacial)
mem_espacial_small = convergence_chart(espacial_small)

fig = plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(list(range(len(normal))), mem_normal)
plt.plot(list(range(len(small))), mem_small)
plt.plot(list(range(len(parametros))), mem_parametros)
plt.plot(list(range(len(espacial))), mem_espacial)
plt.plot(list(range(len(espacial_small))), mem_espacial_small)
plt.grid(axis='y', linewidth=0.7, alpha=0.7)
plt.grid(axis='x', linewidth=0.7, alpha=0.7)
plt.xticks(fontsize=12)
plt.yticks(fontsize=12)
ax = plt.gca()
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['bottom'].set_color('black')
ax.spines['left'].set_visible(True)
plt.title(r'$\sigma$ M dio vs N de Itera es ', fontsize = 16)
plt.xlabel('N de Itera es ', fontsize = 12)

```

```

plt.ylabel(r'\sigma$ M dio ', fontsize = 12)
plt.legend([r'\emptyset$ Correla o ',
'Malha Pequena', 'Correla o de Par metros ',
' Autocorrela o Espacial (1m)',
' Autocorrela o Espacial (0,4m)'], ncol = 3)
#plt.ylim(2.1, 2.45)
plt.ylim(0, 0.6)

plt.show()

```