

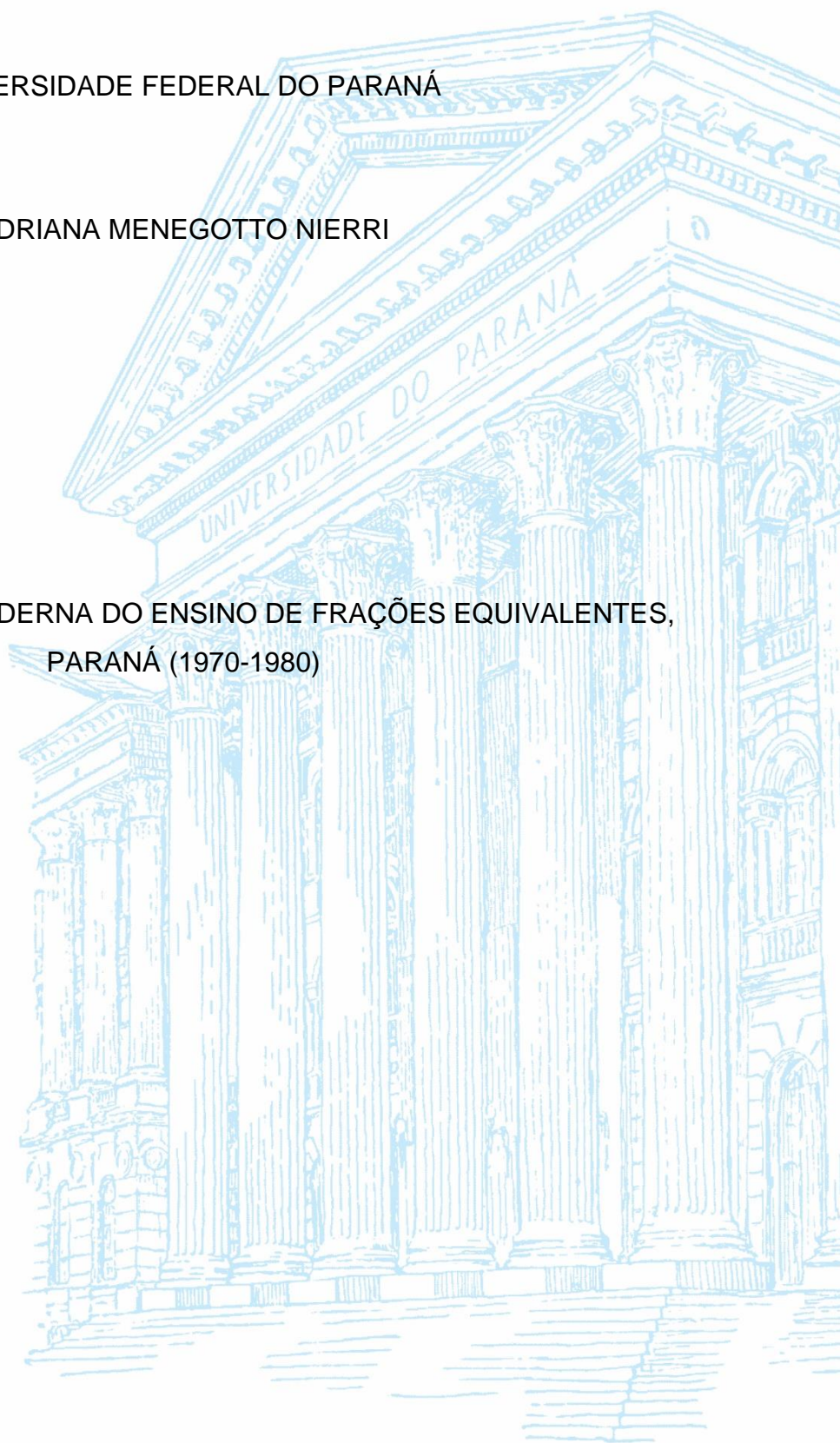
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ADRIANA MENEGOTTO NIERRI

UMA MATEMÁTICA MODERNA DO ENSINO DE FRAÇÕES EQUIVALENTES,
PARANÁ (1970-1980)

PALOTINA

2024



ADRIANA MENEGOTTO NIERRI

UMA MATEMÁTICA MODERNA DO ENSINO DE FRAÇÕES EQUIVALENTES,
PARANÁ (1970-1980)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Linha de pesquisa: Filosofia, História e Sociologia da educação em Ciências e da Educação Matemática

Orientadora: Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes

PALOTINA

2024

Universidade Federal do Paraná. Sistemas de Bibliotecas.
Biblioteca UFPR Palotina.

N676 Nierri, Adriana Menegotto
Uma matemática moderna do ensino de frações equivalentes,
Paraná (1970-1980) / Adriana Menegotto Nierri.
– Palotina, PR, 2024.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná,
Setor Palotina, Programa de Pós-Graduação em Educação em
Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas.
Orientadora: Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes.

1. Educação matemática. 2. Frações equivalentes. 3. Matemática
moderna. I. Novaes, Barbara Winiarski Diesel. II. Universidade
Federal do Paraná. III. Título.

CDU 51



**ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLOGIAS EDUCATIVAS**

No dia dezanove de março de dois mil e vinte e quatro às 14:00 horas, na sala online da Plataforma Google Meet, através do link: <https://meet.google.com/vfw-ttoi-gey>, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de dissertação da mestranda **ADRIANA MENEGOTTO NIÉRRRI**, intitulada: **Uma Matemática Moderna do ensino de frações equivalentes, Paraná (1970-1980)**, sob orientação da Profa. Dra. BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS EDUCATIVAS da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ), DANILENE GULLICH DONIN BERTICELLI (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), NEUZA BERTONI PINTO (UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela APROVAÇÃO. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de mestra está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

Palotina, 19 de Março de 2024.

Assinatura Eletrônica

19/03/2024 20:01:45.0

BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

19/03/2024 16:19:27.0

DANILENE GULLICH DONIN BERTICELLI

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

22/03/2024 19:56:52.0

NEUZA BERTONI PINTO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR PALOTINA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO EM
CIÊNCIAS, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS
EDUCATIVAS - 40001016174P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS EDUCATIVAS da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **ADRIANA MENEGOTTO NIÉRR** intitulada: **Uma Matemática Moderna do ensino de frações equivalentes, Paraná (1970-1980)**, sob orientação da Profa. Dra. BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Palotina, 19 de Março de 2024.

Assinatura Eletrônica

19/03/2024 20:01:45.0

BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

19/03/2024 16:19:27.0

DANILENE GULLICH DONIN BERTICELLI

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

22/03/2024 19:56:52.0

NEUZA BERTONI PINTO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO)

Rua Pioneiro, 2153 - Palotina - Paraná - Brasil

CEP 85950-000 - Tel: (44) 3211-8529 - E-mail: ppgeceme@ufpr.br

Documento assinado eletronicamente de acordo com o disposto na legislação federal Decreto 8539 de 08 de outubro de 2015.

Gerado e autenticado pelo SIGA-UFPR, com a seguinte identificação única: 349647

Para autenticar este documento/assinatura, acesse <https://siga.ufpr.br/siga/visitante/autenticacaoassinaturas.jsp> e insira o código 349647

Dedico esse trabalho ao César, meu querido marido, pelo incentivo, compreensão e companheirismo. Às minhas filhas, Ana Lara e Brenda, que são meus maiores motivos de persistência. Dedico também à minha orientadora, Profa. Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes, pelo incentivo, confiança e dedicação. A vocês, meu muito obrigada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus a vida que me concedeu e a família que eu tenho.

Agradeço aos meus pais, Gemi e Idalina, que são para mim exemplos de força, perseverança, carinho e amor. Aos meus irmãos, Silvana, Gustavo e Dayanna, a compreensão da ausência em muitos momentos e as orações por mim.

Agradeço ao meu marido, César, meu grande incentivador, o seu amor, carinho e respeito que sempre teve por mim. Obrigada, por se fazer ainda mais presente para com nossas filhas em minha ausência.

Agradeço às minhas queridas filhas, Ana Lara e Brenda, a paciência, compreensão e amor que sempre demonstraram nesse processo de estudo.

Agradeço à minha orientadora, professora Barbara Winiarski Diesel Novaes, não ter desistido de mim, os ensinamentos, a paciência, a dedicação, o incentivo e suas contribuições dadas durante todo o processo.

Agradeço as professoras Neuza Bertoni Pinto e Danilene Gullich Donin Berticelli, bancas da qualificação, suas contribuições são essenciais para a concretização dessa pesquisa.

Agradeço a todos os membros do Grupo de Pesquisa GHEMAT Paraná, as leituras e discussões proporcionadas, as trocas de conhecimento que as reuniões nos proporcionam, e a disponibilização do material para pesquisa.

Também agradeço aos professores que fizeram parte da minha formação, aos meus colegas de curso, as amizades que o mestrado me proporcionou, a oportunidade do convívio e a cooperação mútua.

Gratidão a todos!

“[...] tudo o que pedirdes em oração, crendo que o recebeste, será vosso”
(MARCOS, 11; 24. A Bíblia Sagrada).

RESUMO

O presente estudo busca responder a seguinte questão de pesquisa: Que matemática moderna do ensino de frações equivalentes foi sistematizada em manuais escolares para a formação de professores dos primeiros anos de escolarização que circularam no Paraná, no período de 1970 a 1980? A pesquisa objetiva caracterizar uma matemática moderna do ensino das frações equivalentes proposta em manuais escolares para a formação de professores dos primeiros anos de escolarização em circulação no estado do Paraná (1970 - 1980). Para responder à questão de pesquisa foram analisados livros didáticos e manuais pedagógicos, dirigidos para o ensino e para a formação de professores, que circularam no Paraná no marco temporal delimitado. Os referenciais teórico-metodológicos estão ancorados em conceitos da História Cultural e da História da educação matemática, principalmente a matemática do ensino e as categorias de análise: sequência, significado, graduação, exercícios e problemas (Morais; Bertini; Valente, 2021). O estudo conclui que os autores dos manuais, com vasta experiência no ensino e na formação de professores que ensinam matemática nos primeiros anos de escolarização se apropriaram do ideário do Movimento da Matemática Moderna, dos estudos de psicologia (principalmente de Jean Piaget) e ressignificaram práticas para o ensino de frações equivalentes de vagas pedagógicas anteriores. Aos materiais didáticos, como, por exemplo, o disco de frações e o quadro de equivalência são acrescentados novos elementos que contribuem para atividade reflexiva e operativa da criança, como contar, colorir, ordenar, comparar. A linha numerada foi considerada um processo visual importante para compreensão das classes de equivalência. O significado das frações equivalentes parte da noção de equivalência e segue uma graduação: concreto, semiconcreto, semiabstrato e abstrato e tinha como propósito a compreensão das operações com frações e do número racional. Vale ressaltar que as autoras paranaenses estavam na vanguarda das mudanças que ocorriam em relação as contribuições da psicologia, novos conteúdos e metodologias. Por fim, os manuais trouxeram princípios da Matemática Moderna, mobilizando a matemática do ensino, para ensinar as frações equivalentes.

Palavras-chave: História da educação matemática. Movimento da Matemática Moderna. Frações equivalentes. Livros didáticos. Matemática do ensino.

ABSTRACT

This study seeks to answer the following research question: What modern mathematics for teaching equivalent fractions was systematized in textbooks for teacher training in the first years of schooling that circulated in Paraná between 1970 and 1980? The research aims to characterize the modern mathematics of teaching equivalent fractions proposed in textbooks for the training of teachers of the first years of schooling in circulation in the state of Paraná (1970 - 1980). In order to answer the research question, textbooks and pedagogical manuals were analyzed, aimed at teaching and teacher training, which circulated in Paraná in the delimited time frame. The theoretical-methodological references are anchored in concepts from Cultural History and the History of Mathematics Education, especially the mathematics of teaching and the categories of analysis: sequence, meaning, graduation, exercises and problems (Morais; Bertini; Valente, 2021). The study concludes that the authors of the manuals, who have extensive experience in teaching and training teachers who teach mathematics in the early years of schooling, have appropriated the ideas of the Modern Mathematics Movement, psychology studies (mainly by Jean Piaget) and re-signified practices for teaching equivalent fractions from previous pedagogical waves. New elements were added to the teaching materials, such as the fraction disc and the equivalence table, which contributed to the child's reflective and operative activity, such as counting, coloring, sorting and comparing. The number line was considered an important visual process for understanding equivalence classes. The meaning of equivalent fractions is based on the notion of equivalence and follows a gradation: concrete, semi-concrete, semi-abstract and abstract, with the aim of understanding operations with fractions and rational numbers. It is worth noting that the authors from Paraná were at the forefront of the changes taking place in relation to the contributions of psychology, new content and methodologies. Finally, the manuals brought in the principles of Modern Mathematics, mobilizing the mathematics of teaching to teach equivalent fractions.

Keywords: History of mathematics education. Modern Mathematics Movement. Equivalent fractions. Didactic books. Teaching mathematics.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Referências módulo 9.4 - Projeto HAPRONT	31
FIGURA 2 – Matemática na Escola Primária Moderna	62
FIGURA 3 – Reta numerada, par ordenado com denominadores comuns.....	67
FIGURA 4 – Frações na Escola Elementar.....	71
FIGURA 5 – Frações Equivalentes na Escola Elementar	73
FIGURA 6 – Cartaz Encontrado numa Classe de 2ª Série Primária	74
FIGURA 7 – Diagramas em Cartaz para Consulta.....	76
FIGURA 8 - Equivalência/Simplificação	78
FIGURA 9 – Cartazes de Frações	79
FIGURA 10 – Linha numérica dividida em meios.....	80
FIGURA 11 – Linha numérica dividida em quartos	80
FIGURA 12 – frações equivalentes.....	81
FIGURA 13 - Métodos Modernos para o Ensino da Matemática	83
FIGURA 14 – Região Poligonal que Determinam Dois Nomes de Frações Equivalentes.....	87
FIGURA 15 – Conjuntos para Verificar a Equivalência entre Duas Frações.....	88
FIGURA 16 – Quadro de Equivalências.....	89
FIGURA 17 – Linha Numérica, Conjuntos Equivalentes	89
FIGURA 18 – Ideia de Expressões de Divisão Equivalente	90
FIGURA 19 – Nomes Equivalentes a $\frac{5}{4}$, Usando a Linha Numérica.....	91
FIGURA 20 – A Fração $\frac{8}{3}$ como $8 \times \frac{1}{3}$ Representada na Reta Numerada.....	91
FIGURA 21 – Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau (Volumes II, III e IV)	95
FIGURA 22 – Figuras equivalentes e pares ordenados correspondente	96
FIGURA 23 – Reta numerada e as Frações Equivalentes	97
FIGURA 24 – Frações equivalentes a partir de retângulos equivalentes.....	98
FIGURA 25 – Conjunto de frações equivalentes.....	98
FIGURA 26 – visualização da fração equivalente	99
FIGURA 27 – Frações equivalentes a unidade	100
FIGURA 28 – Frações equivalentes na reta numerada	101
FIGURA 29 – “Ensino Moderno de Matemática”, Volume II.....	104
FIGURA 30 – “Ensino Moderno de Matemática”, Volume III.....	105

FIGURA 31 – Frações Equivalentes	106
FIGURA 32 – Frações Equivalentes - fragmento do exercício.....	106
FIGURA 33 – Diagrama de Equivalência.....	107
FIGURA 34 – Quadro de Equivalência - fragmento do exercício.....	107
FIGURA 35 – Represente a Parte Hachurada Referente as Figuras Geométricas e os Conjuntos	108
FIGURA 36 – A fração dada “Equivale a”	108
FIGURA 37 – “Ensino Moderno da Matemática” Volume IV	109
FIGURA 38 – Figuras Geométricas Planas e Conjuntos Equipotentes.....	110
FIGURA 39 – Subconjunto equipotente 1	110
FIGURA 40 – Subconjunto equipotente 2	111
FIGURA 41 – Subconjunto equipotente 3	112
FIGURA 42 – Reta numerada e a comparação de frações.....	112
FIGURA 43 – Quadro de Equivalência	113
FIGURA 44 – Disco de frações	114
FIGURA 45 – Comparando frações com figuras geométricas, reta numerada, conjunto de equivalências	114
FIGURA 46 – Representação geométrica dos números racionais.....	116
FIGURA 47 - Operando com Números Fracionários (Módulo 9.4).....	118
FIGURA 48 – Pré - Teste Sobre as Frações.....	119
FIGURA 49 - Relação de Equivalência entre Números Fracionários.....	120
FIGURA 50 - Linguagem Simbólica	121
FIGURA 51 – Relação de Equivalência entre Número Fracionário e Número Misto	122
FIGURA 52 – Classes de Equivalência pela Multiplicação	123
FIGURA 53 – Frações Equivalentes na Reta Numerada	124
FIGURA 54 – Frações Equivalentes na Reta Numerada, Comparação.....	125
FIGURA 55 – Frações equivalentes com o uso do Quadro de Equivalência	125
FIGURA 56 – Redução e Números Fracionários à Mesma Unidade Fracionária, Isto é, ao Menor Denominador Comum	126
FIGURA 57 - Representação Geométrica dos Números Fracionários.....	127

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – Manuais Pedagógico, Livros didáticos e Guia do Professor.....	34
--	----

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

APA	- American Psychological Association
CETEPAR	- Centro de Seleção, Treinamento e Aperfeiçoamento de Pessoal do Estado do Paraná
CODEN	- Coordenação de Ensino
COLTED	- Comissão do Livro Técnico e Didático
DEF	- Departamento Ensino Fundamental
EATEP	- Equipe de Assistência Técnica do Ensino Primário
ERHISE	- Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação
FENAME	- Fundação Nacional do Material Escolar
GEEM	- Grupo de Estudo do Ensino da Matemática
GEEMPA	- Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática Porto Alegre
GEPEM	- Grupo de Estudo do Rio de Janeiro
GHEMAT	- Grupo de Pesquisa da História da Educação Matemática
Hem	- História da educação matemática
HAPRONT	- Habilitação de Professores não Titulados
HISTEMAT	- Revista de História da Educação Matemática
INEP	- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas
LDB	- Lei de Diretrizes e Bases
LOGOS	- Formação de Professores Leigos em Nível de Segundo Grau para Atuar no Magistério
MEC	- Ministério da Educação e Cultura
MMM	- Movimento da matemática Moderna
NEDEM	- Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática
PABAAE	- Programa de Assistência Brasileira – Americana ao Ensino Elementar
RCO	- Repositório de Conteúdo Digital
USAID	- United States Agency for International Development

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	4
1 APORTES TEÓRICO-METODOLÓGICOS DA PESQUISA	13
1.1 HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A APROPRIAÇÃO DE CATEGORIAS DE ANÁLISE	14
1.2 O PROCESSO DE SELEÇÃO DOS MANUAIS PEDAGÓGICOS E LIVROS DIDÁTICOS.....	24
2 A MATEMÁTICA MODERNA DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES: O QUE DIZEM AS PESQUISAS?	36
2.1 O MOVIMENTO PARANAENSE DA MATEMÁTICA MODERNA: INTERNACIONAL, NACIONAL E LOCAL.....	36
2.2 PESQUISAS SOBRE AS FRAÇÕES EQUIVALENTES EM PERSPECTIVA HISTÓRICA.....	42
2.3 PESQUISAS SOBRE AS FRAÇÕES EQUIVALENTES NA ATUALIDADE	53
3 UMA MATEMÁTICA MODERNA DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES PRESENTES NOS MANUAIS ESCOLARES EM CIRCULAÇÃO NO PARANÁ	59
3.1 FRAÇÕES EQUIVALENTES NA OBRA MATEMÁTICA NA ESCOLA PRIMÁRIA MODERNA – 2ª EDIÇÃO (OSÓRIO; PORTO, 1968).....	61
3.2 FRAÇÕES EQUIVALENTES NA OBRA FRAÇÕES NA ESCOLA ELEMENTAR – 4ª EDIÇÃO (PORTO, 1967)	70
3.3 FRAÇÕES EQUIVALENTES NA OBRA MÉTODOS MODERNOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA – 3ª REIMPRESSÃO (D'AUGUSTINE, 1981)	82
3.4 FRAÇÕES EQUIVALENTES NA COLEÇÃO DO GRUEMA CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU – VOLUMES II, III E IV	94
3.5 FRAÇÕES EQUIVALENTES NA COLEÇÃO DO NEDEM ENSINO MODERNO DE MATEMÁTICA – VOLUMES II, III E IV	101
3.6 FRAÇÕES EQUIVALENTES NO MÓDULO 9.4 OPERANDO COM NÚMEROS FRACIONÁRIOS DO PROJETO HAPRONT (PARANÁ, 1976)	116
3.7 CARACTERIZAÇÃO DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES NOS MANUAIS ESCOLARES ANALISADOS.....	129
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	133
REFERÊNCIAS	135

INTRODUÇÃO

O conceito de números racionais está entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que se trabalha no ensino que antecede o ensino médio¹, e sua importância pode ser notada nas perspectivas prática, psicológica e matemática. Dentro da perspectiva prática os números racionais atuam melhorando a capacidade de compreender e lidar com problemáticas do mundo real, do ponto de vista de uma perspectiva psicológica fornecem uma rica arena, onde as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais desenvolvendo-se intelectualmente, e na perspectiva matemática compreender os números racionais é formar uma base sobre a qual as operações algébricas elementares podem se basear posteriormente (Behr, et al., 1983).

Pesquisas no campo da Educação Matemática destacam que “[...] no Ensino Básico, um dos tópicos mais importantes é o conhecimento dos números fracionários” (Powell, 2018, p. 78) e que as frações “[...] têm sido objeto de muitas discussões didático-pedagógicas, mostrando-se um tema polêmico” (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 11). Para Scheffer e Powell (2020), o conceito de frações é a base para a aprendizagem da álgebra, sobretudo quando a compreensão do número racional se dá pela “[...] análise lógica das interpretações matemáticas da ideia do número racional tais como operações com números racionais, comparação de frações decimais e equivalência de frações” (Scheffer; Powell, 2020, p. 26).

Para Carraher; Schliemann (1992), dentre os conteúdos matemáticos que os alunos dos primeiros anos de escolarização apresentam maior dificuldades na aprendizagem, estão os conceitos de frações e de frações equivalentes. Campos e Rodrigues (2007, p. 70), vão além, e apontam que:

[...] alunos de nível médio ou superior apresentam dificuldades no trato com as frações e demonstram não conhecer aspectos relevantes do conceito de números racionais, o que acarreta prejuízo à compreensão de novos conceitos matemáticos (Campos; Rodrigues, 2007, p. 70).

Para Oliveira (1996), a escola está preocupada em transmitir o conteúdo científico, e não, a compreensão do conhecimento. Em suas pesquisas enfatiza a

¹ No texto original em inglês temos o termo “presecondary school years”.

importância de conceituar a ordem e a equivalência das frações, pois essas fundamentam as técnicas posteriores sobre as operações. Martinho (2020) ressalta que ao comparar frações, o conceito de frações equivalentes precisa estar bem compreendido pelo estudante, e sugere a utilização de materiais manipuláveis para o ensino de frações equivalentes.

Ainda, a compreensão do conceito de frações envolve conhecer bem as diferentes interpretações às frações: número, parte-todo, medida, quociente, e operador multiplicativo (Lamon, 2020). Para obter o entendimento dessas diferentes interpretações de uma fração se faz necessário a compreensão das frações equivalentes, comparação de frações, posicionamento de um número na reta, frações decimais entre outros. O conceito de fração também se faz necessário na articulação entre frações, decimais e porcentagem.

Os resultados de pesquisas do campo da Educação Matemática indicam dificuldades no ensino e na aprendizagem relacionadas aos conceitos de frações e frações equivalentes (Schastai; Silva; Soistak, 2014). Silva (2017) afirma que as pesquisas com o tema frações mostram a importância de se trabalhar com a representação de frações através das figuras geométricas, materiais manipuláveis e com notação barra-fracionária. As pesquisas ainda apontam alternativas para o ensino na compreensão das ideias de frações equivalentes, comparação e operações com frações, mas também evidenciam que em sala de aula o processo de ensino está mais voltado para a memorização de fórmulas e procedimentos sem a compreensão do conteúdo estudado (Schastai; Silva; Soistak, 2014) e (Silva, 2017).

O tema frações tem gerado muitas discussões didático pedagógicas. De acordo com Adelino (2014, p. 3)

Há aqueles que defendem que o ensino das frações deve preceder o ensino dos números decimais; há os que defendem justamente o contrário, primeiro números decimais e, posteriormente, frações; existem os que defendem o ensino simultâneo das frações e dos números decimais; e, por último, talvez os mais radicais, aqueles que afirmam que não se deve ensinar frações, apenas números decimais (Adelino, 2014, p. 3).

No Brasil, as frações equivalentes geralmente são introduzidas no quinto ano do Ensino Fundamental e repetidas em anos subsequentes, à medida que são introduzidos novos conceitos (Brasil, 2018). Nos Estados Unidos, ocorre algo parecido e, segundo Kamii e Clark (1995), apesar dessas repetições, os resultados são

decepcionantes e alguma coisa está claramente errada na maneira como as frações equivalentes são ensinadas.

No contexto americano, o estudo de Kamii e Clark (1995) chega à conclusão que a maneira com que os professores ensinam as frações equivalentes, de forma figurativa com imagens e manipulativos, assim como palavras faladas, símbolos e algoritmos, não favorece a compreensão. Ademais, ao dizer que certas frações são equivalentes, privam a criança de pensar muito sobre isso, de inventar. Outro aspecto que destacam é que se ensinam primeiro as frações próprias e depois frações impróprias e números mistos, mas que tudo isso deveria ser desenvolvido em conjunto, para que as crianças pensem nas partes e no todo, ao mesmo tempo. Ao final, sugerem que mais pesquisas sejam desenvolvidas para determinar quando e como ensinar frações equivalentes.

De forma geral, os estudos mobilizados mostram avanços nas pesquisas sobre frações e a sua importância para compreensão dos números racionais e outros conteúdos mais complexos.

Se pensarmos numa perspectiva histórica, poderíamos nos perguntar, por que a escola ensina da maneira que ensina? (Chervel, 1990). Especificamente em relação ao tema dessa pesquisa: “Por que as frações equivalentes são ensinadas de uma determinada maneira e não de outra?” ou “Quais saberes são necessários ao professor para ensinar frações equivalentes?”. Essas são questões de fundo epistemológico que podem contribuir para a compreensão de práticas atuais dos professores que ensinam matemática – frações equivalentes e que justificam a presente pesquisa.

Em seguida trago um pouquinho da minha experiência com a docência e minha motivação em realizar essa pesquisa. Na infância minha brincadeira favorita era ser professora, muitas tardes transformei a varanda de casa em escolinha, convidava amigos para brincarmos. A disciplina em que mais me identificava era a matemática, por isso escolhi cursar licenciatura em matemática. Fiz especialização em ensino de matemática e gestão escolar, mas minha inquietação era entender como ocorre o processo de aprendizagem da matemática básica, por esse motivo cursei pedagogia.

Em 2020 fui convidada pela professora Barbara Winiarski Diesel Novaes a participar do GHEMAT-Paraná², braço do GHEMAT-Brasil³. O projeto inicial do mestrado era estudar a difusão do material Cuisenaire⁴ no Brasil e sua utilização para ensinar as frações com o intuito de ampliar conhecimentos em História da educação matemática. No ano de 2021 cursei duas disciplinas de Tópicos Especiais: ensino de matemática em seus aspectos históricos da “Pós em rede⁵”, oferecida pelo GHEMAT - Brasil. Nesse mesmo ano e concomitante com a disciplina da Pós em rede, cursei duas disciplinas como aluna especial do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas, da Universidade Federal do Paraná (PPGECEMTE), Campus Palotina, sendo: “Fundamentos da Educação Matemática” ministrada pelas professoras, Dra. Barbara Cândido Braz e Dra. Danilene Gullich Donin Berticelli; e “História da educação matemática”, ministrada pelas professoras, Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes e Dra. Danilene Gullich Donin Berticelli, sendo uma disciplina no primeiro e a outra segundo semestre respectivamente.

Além da minha vontade de pesquisar, entender melhor o ensino de frações, participar do grupo de pesquisa GHEMAT- Paraná e cursar as disciplinas da “Pós em rede” e as disciplinas como aluna especial do Programa de Pós-graduação acima citado, despertaram-me o interesse em pesquisar como se deu historicamente a constituição dos saberes escolares das frações presentes da escola.

² Grupo de Pesquisa da História da Educação Matemática - Paraná, coordenado pela Profa. Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes e Profa. Dra. Mariliza Simonete Portela, e conta com a participação de pesquisadores doutores, mestres, mestrandos e estudantes de graduação.

³ GHEMAT Brasil – Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática no Brasil, fundado em 2018, “associação sem fins lucrativos, que congrega mais de vinte estados brasileiros, por meio de grupos de pesquisas alocados em diferentes programas de pós-graduação de diversas instituições de ensino superior” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 9). Seus pesquisadores enquadram-se nas categorias: pesquisador sênior, pesquisador assistente, pesquisador auxiliar, pesquisador voluntário e pesquisador júnior. Para mais informações acessar: <https://ghemat-brasil.com.br/home/>.

⁴ NIERRI, A. M. ; NOVAES, Barbara Winiarski Diesel . A descoberta das frações equivalentes e o material Cuisenaire. In: V Encontro Nacional de História da Educação Matemática, 2020, Rio Grande do Norte. Anais do V Encontro Nacional de História da Educação Matemática. Campo Grande: UFMS, 2020. v. 1. p. 1-5.

⁵ A “Pós em rede”, é um Projeto Colaborativo entre Programas de Pós-graduação e coordenado pelo GHEMAT – Brasil. São ofertadas anualmente desde 2021, de forma remota, duas disciplinas, sendo uma no primeiro e outra no segundo semestre. As disciplinas abordam referências teórico-metodológicas de pesquisas atuais relativamente à matemática presente nos ensinamentos escolares e à matemática da formação de professores em perspectiva histórica. Diferentes autores internacionais têm seus textos estudados à luz das pesquisas sobre o saber profissional do professor que ensina matemática. As disciplinas são ministradas por pesquisadores especialistas em História da educação matemática.

Ainda como professora de escola pública do estado do Paraná há 18 anos, percebo que as frações ocupam lugar emblemático, sendo um dos conteúdos que os alunos apresentam maior dificuldade na aprendizagem. Isso muitas vezes se estende do ensino fundamental ao ensino médio. Em minha prática docente percebo que uma das primeiras atitudes que os alunos apresentam ao se deparam com situações que envolvem frações é transformá-las em número decimal, quando não, a de abandonar a atividade proposta. Uma hipótese é porque os alunos não têm conhecimentos básicos, essenciais para a compreensão das frações. O ensino se pauta em memorização de regras e macetes, com isso, o aluno não compreende o significado das frações.

Em pesquisas históricas que datam de tempos longínquos, Bertini, Moraes e Valente (2017) relatam que, no final do século XIX, com a criação paulista para organizar o ensino primário, na égide do ensino intuitivo⁶, houve modificações na formação matemática do professor do ensino primário. Essas mudanças ocorreram em obras didáticas, manuais para professores, nas orientações pedagógicas e “[...] esse processo irá lapidar saberes para ensinar matemática e a estarem presentes na formação inicial de professores e, ainda, no que hoje denominamos formação continuada dos docentes” (Bertini; Moraes; Valente, 2017, p. 41). Assim, o *saber para ensinar matemática* penetra na cultura escolar, deixando marcas que podem ser identificadas na atualidade e [...] “constitui-se a partir desse tempo como a ciência de formas intuitivas para a docência dos primeiros passos da aritmética e da geometria” (Bertini; Moraes; Valente, 2017, p. 41).

De acordo com estes autores, ao pesquisador da cultura escolar cabe olhar também para o que se produz dentro da escola para ser ensinado, cabe olhar mais para a matemática do ensino, do que para o ensino de matemática. Nesse caso, eles se referem mais especificamente sobre a matemática do ensino de frações. Ancorados na cultura escolar, os autores entendem por matemática do ensino o “[...] estudo dos significados dados pela escola na produção de um saber sobre frações” (Moraes; Bertini; Valente, 2021, p.13-14).

⁶ Movimento internacional que pregava uma verdadeira revolução pedagógica (Bertini; Moraes; Valente, 2017, p. 40)

Numa perspectiva da História da educação matemática, partimos de questões do presente para analisar epistemologicamente a matemática do ensino (Morais; Bertini; Valente, 2021).

Na análise da Coleção Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau, das autoras Franchi, Sanchez e Liberman, escrita ao tempo do Movimento da Matemática Moderna (MMM), Moraes, Bertini e Valente (2021, p. 54) apontam que houve um foco na construção do número racional por meio do “[...] exaustivo trabalho das frações equivalentes” e que “[...] a matemática do ensino de frações é, antes de tudo, matemática” (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 56). Nesse sentido,

[...] há necessidade de expansão dos conjuntos numéricos e as frações são o elo que possibilita isso, servem como representação dos números racionais. A lógica de orientação do ensino guia-se pela estruturação matemática dos conteúdos. A partir dela, tomam-se as etapas piagetianas como referência para o tratamento já previamente organizado dos conteúdos (MORAIS, BERTINI, VALENTE, 2021, p. 56).

Os autores citados lançam o olhar muito fortemente para o estado de São Paulo. Mas, como ocorreu a *matemática do ensino* das frações em outros estados brasileiros, durante o MMM? Também ocorreu um exaustivo trabalho com as frações equivalentes? No estado do Paraná, o grupo do NEDEM – Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática, criado em 1962, e coordenado pelo professor Osny Antônio Dacol – diretor do Colégio Estadual do Paraná (Pinto; Novaes, 2019) teve um papel de destaque no Movimento Paranaense da Matemática Moderna. De acordo com Portela (2009), o grupo contou com dois grupos de professores, que elaboraram propostas de Matemática Moderna para serem publicadas em coleções de livros didáticos. Integrantes do NEDEM fizeram parte da elaboração de propostas curriculares de matemática para o estado do Paraná. Um grupo se dedicou aos estudos direcionados à escola primária, enquanto o outro grupo se ocupou no material para o ginásio e secundário. “O NEDEM utilizou como veículo de propagação do MMM, material impresso, palestras e cursos para a formação de professores que ministravam a disciplina em diferentes níveis de ensino” (Portela, 2009, p. 96).

Ao analisar preliminarmente a coleção do NEDEM para os primeiros anos de escolarização no que tange às frações equivalentes, Marques (2021) conclui que o ensino das frações equivalentes parte de experiências concretas, utilizando discos de frações, gradativamente, passam para a fase semiconcreta, com os quadros de

equivalência e linha numérica, chegando à fase abstrata com as classes de equivalência, a propriedade, o rigor matemático e a simbologia formal. Já, Nierri, Berticelli, Novaes, (2022), comentam que as autoras da coleção do NEDEM para os primeiros anos de escolarização, para dar ênfase ao estudo das frações equivalentes, no livro didático, volume IV, utilizaram a representação geométrica, reta numérica e as classes de equivalência rumo à compreensão do conjunto dos números racionais.

No período da MMM, estavam circulando outras propostas para ensinar frações equivalentes, entre elas o uso do material de Cuisenaire (Novaes; Nierri, 2020). No estudo sobre o uso deste material, as autoras concluíram que as frações são concebidas como operadores, o material é um suporte para a compreensão, um meio de comprovação que conduz a criança à descoberta de frações equivalentes, através da tentativa e erro, ou seja, trata-se de um concreto pensado.

Nos livros do NEDEM para os primeiros anos de escolarização e nos guias dirigidos aos professores havia indicação, nas referências de livros didáticos e manuais pedagógicos que subsidiaram a escrita. Isso levou a que se pensasse em novas possibilidades de pesquisa, em saber quais eram as propostas para ensinar frações equivalentes que estavam presentes nessas referências. Partiu-se do pressuposto que os manuais pedagógicos são fontes privilegiadas para compreensão da matemática para ensinar.

Os manuais pedagógicos representam campo propício para análise dos saberes para ensinar. [...] os saberes para ensinar, referem-se ao objeto do trabalho de ensino e de formação, ferramentas do trabalho do professor. Assim, faz-se necessário conhecer estratégias para o ensino de determinado conteúdo, àquele nível de ensino, quais os recursos didáticos a utilizar, quais as formas de aprender dos alunos e como organizar a sala e a aula, estratégias e processos de ensino, elementos constituintes do ofício de ensinar (MACIEL, 2016, p. 7).

Os manuais pedagógicos se constituem uma representação social, pois além de guiar os professores em suas ações e direcionar suas práticas através dos métodos de ensino, conteúdos e formas de ensino, são referências dadas como importantes de serem transmitidas num dado período (Chartier, 1990)⁷.

⁷ Glossário Disponível em:

<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/158952/GLOSSA%cc%81RIO%20VERSA%cc%83O%201.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 30 de abril de 2023.

Considerando os anseios pessoais em relação às frações e a problemática anunciada, construiu-se a seguinte questão de pesquisa: **Que matemática moderna do ensino de frações equivalentes foi sistematizada em manuais escolares⁸ para a formação de professores dos primeiros anos de escolarização que circularam no Paraná, no período de 1970 a 1980?**

Chartier (1990), ao analisar a História Cultural, suas práticas e representações, usa o conceito de apropriação para se referir às formas que o leitor irá conceber e interpretar o texto impresso. No estudo que ora se expõe, as propostas para ensinar frações equivalentes estão presentes nos manuais escolares.

Para alcançar respostas para a questão já anunciada e conduzida na perspectiva da História da educação matemática, a pesquisa tem por objetivo **caracterizar uma matemática moderna do ensino das frações equivalentes proposta em manuais escolares para a formação de professores dos primeiros anos de escolarização em circulação no estado do Paraná (1970 - 1980).**

Para tanto, os objetivos **específicos** do trabalho serão:

- Selecionar manuais escolares (manuais pedagógicos e livros didáticos) de matemática que circularam no Paraná, ao tempo do Movimento da Matemática Moderna, os que apresentam orientações para ensinar frações equivalentes.
- Examinar, nas orientações identificadas nos manuais pedagógicos e livros didáticos, as categorias de análise cunhadas por Moraes, Bertini e Valente (2021).
- Discutir as relações entre o Movimento da Matemática Moderna e a matemática do ensino de frações equivalentes.

Como ferramentas teórico-metodológicas, valeu-se dos autores como Dominique Julia (2001), para definir “cultura escolar”; Roger Chartier (1990), com os conceitos de “representação social” e “apropriação”; André Chervel (1990), com a

⁸ Manuais escolares é um "termo amplo que contempla tanto livros didáticos quanto manuais pedagógicos" (Mendes; Valente, 2017, p. 7). Durante o processo de pesquisa, nas discussões com o grupo de pesquisa e na qualificação, percebemos que na época, tanto os manuais pedagógicos como os livros didáticos faziam parte da formação dos professores dos primeiros anos de escolarização.

“história das disciplinas escolares”; Rita Hofstetter e Bernard Schneuwly (2017), com o conceito de “saberes a ensinar” e “saberes para ensinar”; (Bertini; Morais e Valente, 2017), com a “matemática a ensinar” e a “matemática para ensinar”; (Morais; Bertini; Valente, 2021), com a caracterização da “matemática do ensino” através das categorias: *sequência, significado, graduação, exercícios e problemas*⁹. O diálogo com esses autores propiciou pensar na cultura escolar e analisar uma matemática moderna do ensino de frações equivalentes, presentes nos manuais escolares referente à escolarização e ao período, já mencionados.

Procura-se trazer contribuições da História da educação matemática para a Educação Matemática por meio da caracterização de uma matemática do ensino de frações equivalentes, durante o MMM, em que se almeja contribuir para a compreensão dos saberes profissionais dos professores que ensinam matemática, levando em consideração que o ensino de frações na Educação Básica brasileira tem sido um tema de muitas discussões. As frações equivalentes parecem um conteúdo fundamental, mas problemático no ensino e aprendizagem, pela dificuldade de compreensão por parte dos alunos e professores. Mais especificamente, em relação a periodização, a década de 1970 trouxe muitas mudanças para as escolas brasileiras, tanto quanto ao ensino como para a formação de professores, dentre elas, a obrigatoriedade e gratuidade do ensino fundamental de 8 anos¹⁰ e a consolidação no Brasil ao Movimento da Matemática Moderna.

De acordo com Búrigo e Valente (2023) no Brasil, o Movimento da Matemática Moderna coincidiu temporalmente com a democratização do sistema educacional de ensino¹¹. A difusão da Matemática Moderna chega as escolas por meio de cursos de formação de professores, pela mídia¹² e pelas séries de livros didáticos produzidos por autores ligados a diversos grupos como é o caso do GRUEMA - Grupo de Ensino de Matemática Atualizada que produziu a coleção "Curso moderno de matemática para o ensino primário" (Villela 2009) e, do NEDEM – Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática que produziu a coleção "Ensino moderno da matemática" (Pinto; Ferreira, 2006).

⁹ Essas categorias serão detalhadas nas próximas seções.

¹⁰ Em função da lei 5692/71.

¹¹ Expansão do ensino primário e acessibilidade para jovens de classes populares (Valente; Búrigo, 2023).

¹² Na década de 1960, as principais mídias eram jornais, revistas e televisão.

Dentre as estratégias que precederam e acompanharam a reforma educativa de 1971, “Um método adotado foi a autorização de licenciaturas de curta duração, que habilitava os professores a lecionar apenas nos graus inferiores” (Búrigo; Valente, 2023, p. 411, tradução nossa). Costa (2013) complementa que em regiões com poucas Universidades, com falta de professores qualificados os governos implementaram programas de emergência que preparavam os professores para trabalhar no ensino primário.

A matemática moderna estava presente em todos esses programas de formação acelerada, seja porque estava incluída na matemática dos livros didáticos atuais, aos quais os professores tinham que recorrer por ser considerada a nova matemática da época, ou mesmo porque era endossada por professores que participavam do debate educacional (Búrigo; Valente, 2023, p. 411, tradução nossa).

Assim, considera relevante uma análise histórica para entender como esse conteúdo foi tratado, ao longo do tempo, em sala de aula.

A organização desse trabalho está dividida em três capítulos, além da introdução e das considerações finais.

O capítulo 1 foi destinado ao referencial teórico-metodológico, em que se traz, dentro da concepção da História da educação matemática os conceitos necessários para análise dos manuais pedagógicos e livros didáticos. Descreve-se o processo de seleção dos manuais escolares, fontes privilegiadas para realizar o estudo.

No segundo capítulo, volta-se o olhar para o Movimento da Matemática Moderna, brevemente para a perspectiva internacional e nacional, porém, um pouco mais apurado para a perspectiva local, o Movimento paranaense. Realizaram-se estudos em trabalhos que tratavam da temática Matemática Moderna das frações equivalentes.

No capítulo 3, há uma análise das propostas para ensinar as frações equivalentes, presente nos manuais pedagógicos e livros didáticos, seguidas das considerações finais.

1 APORTES TEÓRICO-METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo, procura-se descrever alguns elementos que são constitutivos da escrita da História. De acordo com Valente (2017, p. 31) “[...] os fatos históricos

são constituídos a partir de traços, rastros deixados no presente pelo passado” e que recebem acento pelas interrogações do historiador. Para a escrita da história dos saberes profissionais dos professores que ensinam matemática, numa perspectiva sócio-histórica, é preciso levar em consideração aspectos da cultura escolar, disciplina escolar, manuais pedagógicos, livros didáticos, saberes *a ensinar* e saberes *para ensinar*, a circulação desses saberes, a disseminação do conhecimento, os objetos teóricos de conhecimento, matemática *a ensinar* e matemática *para ensinar*. A articulação entre a matemática *a ensinar* e *para ensinar* resulta na *matemática do ensino*. Bem como, o processo de seleção dos manuais escolares que se utiliza nestes estudos.

1.1 História da educação matemática e a apropriação de categorias de análise

A produção em História da educação matemática se firma como produção histórica, fazendo um diálogo com a contemporaneidade, pois, as interrogações que movem a pesquisa nascem no presente e buscam representações no passado. Para Valente (2007) esse diálogo deve ser problematizador, na medida que desnaturaliza os elementos do presente no dia a dia das práticas pedagógicas. Produzir História da educação matemática historicamente é “[...] buscar respostas a questões de fundo [...]” (Valente, 2007, p. 38). Nessa perspectiva, dentre as questões de fundo temos: Por que se ensina frações equivalentes da forma que se ensina? Que contribuições a Matemática Moderna trouxe para o ensino de frações equivalentes? Como os autores apresentavam as frações equivalentes nos manuais pedagógicos e livros didáticos para os primeiros anos de escolarização? De acordo com Valente (2007, p.38-39), essas são questões “[...] do presente, naturalizadas, não-problematizadas, que a prática da história da educação matemática tem a tarefa de desnaturalizá-las” (Valente, 2007, p.38-39).

De acordo com Moraes, Bertini e Valente (2021), a escola é uma instituição produtora de saberes, esses saberes são elaborados no seio da cultura escolar. Para Julia (2001, p. 9) a cultura escolar é compreendida como:

[...] um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos.

Ainda de acordo o autor referido, essas normas e práticas devem ser analisadas, levando em consideração a época, pois cada período da história traz uma finalidade que pode ser, por exemplo, religiosa, sociopolítica ou de socialização.

Mas, qual era a finalidade do ensino de frações em tempos da Matemática Moderna? Moraes, Bertini e Valente (2021) analisam os quatro primeiros volumes da coleção “Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º grau” do GRUEMA e concluem que em tempos de Matemática Moderna, a *matemática do ensino*¹³ de frações tem por finalidade a construção do número racional, esse conceito é construído por meio da equivalência de frações, desse conceito derivam os números decimais. Seria esta a finalidade posta em outros manuais escolares que circularam no Brasil no mesmo período histórico?

Nessa perspectiva são os agentes da educação, sobretudo os professores, os principais responsáveis em obedecer a essas normas e práticas que compõem a cultura escolar. Julia (2001) ressalta que, a história das práticas escolares é difícil de ser reconstruída, pois, geralmente, elas não deixam traços, cabe ao historiador construir esses traços por meio dos vestígios encontrados nas produções escolares, que são frutos da cultura escolar. De acordo com Novaes (2012, p. 21):

Os olhos de Julia (2001) estão voltados para o interior da escola, desafiando os historiadores da educação a se interrogarem sobre as práticas cotidianas, sobre o funcionamento do interior da escola, propondo uma história das disciplinas escolares, constituída com base em uma ampliação das fontes tradicionais que privilegiam os textos legais.

Para Valente (2007), as pesquisas em História da educação matemática, são constituídas de fatos históricos e para isso é preciso construí-los. O autor diferencia o ensino em história, da pesquisa em história. Valente (2007) cita Prost (1996), ao diferenciar que, para o ensino da história os fatos estão prontos, constituídos, o professor utiliza desses fatos para ensinar, mas, esses fatos não estiveram sempre assim, prontos, eles foram construídos por historiadores, pesquisadores “uma vez construídos, permaneceriam fatos definitivos” (Valente, 2007, p. 31).

¹³ “Análise processos e dinâmicas de construção dos saberes escolares da matemática presente na escola” (Moraes; Bertini; Valente, 2021, p. 17)

Como construir os fatos? Valente (2007) relata que foi buscar respostas em um curso¹⁴ realizado com o professor Antoine Prost, em 1996. Observa que a construção dos fatos se inicia em busca de respostas para as questões postas pelo historiador, suas hipóteses, que mobilizam a busca por fatos históricos, traços, rastros que estão presentes na atualidade, que foram deixados por um passado. Assim, a pesquisa em História se define por traços do passado deixados para o presente, que são construídos através de documentos e objetos que se constituem em fontes que passam pelas interrogações do pesquisador.

O historiador em educação matemática, assim como outros historiadores, desempenha o papel de produzir os fatos históricos. Na História da educação matemática, os fatos são produzidos através de estudos e interrogações das práticas da educação matemática que foram deixadas ao longo dos tempos,

Interrogar o que delas foi deixado, pode significar fazer perguntas para os livros didáticos de matemática utilizados em cotidianos passados. Eles – os livros didáticos, representam um traço que o passado nos deixou (Valente, 2007, p. 39).

O autor ainda considera que, para além do livro didático, tem-se uma infinidade de materiais que podem permitir a construção de uma História da educação matemática.

Fazem parte das produções escolares, livros didáticos, manuais pedagógicos, cadernos escolares do aluno e do professor, jornais, revistas, programas, diários de classe, boletins, provas escolares, relatórios, fotos e fontes orais, que são importantes elementos que permitem ao pesquisador construir representações de como essas práticas podem ter acontecido, a partir da interpretação das fontes.

Os manuais pedagógicos por muito tempo foram considerados o principal meio de transmissão de conhecimento e informações, bem como, componentes da cultura escolar que traz em si finalidades econômicas, políticas, pedagógicas e sociais, entre outras (Choppin, 2004). Mas para além do conteúdo, método de ensino e forma de ensinar, os manuais são referências aceitas como importantes de serem transmitidas

¹⁴ Wagner Rodrigues Valente em seu artigo intitulado *Interrogações metodológicas* (2007), relata que foi buscar resposta para suas inquietações quanto a metodologia da pesquisa em educação matemática, num curso de história com o historiador Antoine Prost. O curso foi realizado na *Sorbonne*, em Paris, que no ano de 1996 foi transformado no livro *Douze leçons sur l'histoire*.

em um dado tempo, constituindo-se assim como uma representação social (Chartier, 1990).

De acordo com Silva (2007), os manuais pedagógicos foram usados na Escola Normal. Proporcionavam aos alunos normalistas, aos professores, e alunos de outras instituições de ensino, apoio fundamental no ofício de ensinar. A autora trata “[...] os manuais pedagógicos como instâncias de produção e circulação dos saberes”, que fundamentam o modelo de ensino que se tem dessa forma, “[...] a história dos manuais articulou-se à difusão mundial da escola e dos conhecimentos pedagógicos” (Silva, 2007, p. 268).

O glossário¹⁵ produzido pelos membros do grupo Ghemat Brasil em 2016, define “manual pedagógico” como aqueles que:

[...] compreendem-se impressos como livros, compêndios, ou ainda um conjunto de textos reunidos, geralmente organizados por um autor, um grupo de pessoas ou uma instituição, como por exemplo, editora, escola ou instituto. Possui o objetivo de orientar e mediar a prática ou o ofício de ensinar em torno de um saber ou conjunto de saberes, como é o caso dos saberes elementares matemáticos (a aritmética, a geometria, o desenho e a álgebra). Há ainda outros termos correlatos como: manuais escolares, manuais didáticos, manuais pedagógicos, livros didáticos e outros.

Na atualidade, pesquisas históricas em livros didáticos de matemática de outros tempos escolares, geralmente são realizadas em detrimento de uma temática particular, que envolve um determinado tema, assunto, um item do conteúdo matemático (Valente, 2008). O autor propõe tomar o livro didático como objeto cultural, buscando realizar uma análise por meio da compreensão da trajetória histórica, identificando onde atuam seus elementos como: autores, editora, professores, alunos.

Para Choppin (2004) olhar para um livro didático apenas como documento histórico, é analisar os conteúdos contidos nele, o conteúdo a ser ensinado; olhar o livro didático como objeto físico é negligenciar os conteúdos inseridos, é olhar como foi fabricado, sua comercialização, distribuição, ou como foi usado consumido e avaliado dentro de um determinado contexto.

No primeiro caso, a história que o pesquisador escreve não é a história de um tema, de uma noção, de um personagem, de uma disciplina, ou de como

¹⁵Disponível

em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/158952/GLOSSA%cc%81RIO%20VERSA%cc%83O%201.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 30 de abr. de 2023.

a literatura escolar foi apresentada por meio de uma mídia particular; além disso, é frequente que os livros didáticos constituam apenas uma das fontes às quais o historiador recorre. Na segunda categoria, ao contrário, o historiador dirige sua atenção diretamente para os livros didáticos, recolocando-os no ambiente em que foram concebidos, produzidos, distribuídos, utilizados e “recebidos”, independentemente, arriscaríamos a dizer, dos conteúdos dos quais eles são portadores (Choppin, 2004, p. 554).

Ao analisarmos um livro didático como fonte de pesquisa, podemos realizar questionamentos em torno dos discursos que trazem, sobre o ensino e a disciplina em questão, os conhecimentos fundamentais, como eles são expostos, organizados, a sequência dos conteúdos, a linguagem utilizada, os métodos de aprendizagem enfatizados e a relação do livro didático com a formação do professor (Choppin, 2004).

A análise científica dos conteúdos se dá basicamente de duas maneiras: refere-se a crítica ideológica e cultural dos livros didáticos, que por muito tempo foi e atualmente ainda é privilegiada pelos pesquisadores, e, mais recentemente, final dos anos 1970, analisa os conteúdos dos livros didáticos sobre uma perspectiva epistemológica, ou seja, a didática empregada no livro didático (Choppin, 2004).

Trata-se então, ou de colocar em evidência as principais características de um livro ou de uma coleção de livros, ou, segundo uma perspectiva diacrônica, de delimitar sua evolução por meio da análise de várias gerações de manuais ou de edições sucessivas e frequentemente bastante numerosas de um mesmo livro (Choppin, 2004, p. 556).

Para Choppin (2004), os autores não são simples expectadores de seu tempo, são agentes, assim como o livro didático, “não é um simples espelho: ele modifica a realidade para educar as novas gerações” (p. 557).

Há indícios que os manuais pedagógicos e livros didáticos foram em tempos de Matemática Moderna um importante meio de disseminação do conhecimento. De acordo com Villela (2009), no Brasil, o mercado editorial atingiu uma quantidade expressiva de vendas de livros didáticos. “Pode-se afirmar também que o *boom* da edição de livros didáticos no período do MMM trouxe uma injeção às vendas da Companhia Editora Nacional” (Villela, 2009, p. 156).

A disseminação do conhecimento¹⁶, de acordo com Burke (2015, p. 113), é “[...] por vezes descrita, sobretudo no caso da tecnologia, como ‘transferência’, enfatizando

¹⁶ Apesar da tradução do livro de Peter Burke (2015) para o português estar "conhecimento" o termo que mais se adequa é "saber".

o movimento em uma direção”. O autor usa o termo tecnologia para se referir à disseminação do conhecimento através dos meios de comunicação, jornal, escrita, veículos impressos, rádio, televisão e internet. Pontua que alguns estudiosos preferem usar o termo circulação ao invés de disseminação do conhecimento.

Para Darnton (2014), o historiador desempenha o papel de um detetive, necessita do auxílio de teorias para construir os fatos históricos. Buscando construir estes, pergunta-se: Como e quais manuais pedagógicos e livros didáticos circularam no estado do Paraná (1970-1980)? Na tentativa de construir respostas para essa questão, depara-se com Oliveira ao afirmar que “tratar da circulação de um dado objeto de estudo não é tarefa fácil” (2018, p. 14). O autor não defende uma definição fechada/pronta/fixa de circulação, afirma que cada contexto pode trazer uma interpretação.

Segundo Oliveira (2018), o historiador pode ouvir homens e mulheres de uma dada sociedade, mesmo não sendo através das entrevistas, mas pela análise de documentos produzidos por ela. Cada contexto permite interpretação da noção de circulação e “para explorar o processo de difusão de algo é necessário identificar e reconstituir as dinâmicas de circulação” (Oliveira, 2018, p. 15).

Segundo Souza (1997), a sistematização é um instrumento metodológico para se elaborar conhecimento, é um conjunto de práticas que proporciona a reflexão, mudanças de pensamento e tomadas de decisões conscientes.

Essa permite conhecer os problemas e suas causas de acordo com a interpretação dos próprios sujeitos, aportar novos elementos e informações para melhorar ou superar criticamente interpretações anteriores e definir caminhos viáveis para enfrentar coletivamente os problemas identificados (Souza, 1997, p. 22).

Nesse contexto, a sistematização faz parte da construção do conhecimento, são as escolhas, neste estudo, os caminhos que os autores utilizaram para alcançar seus objetivos, a organização do conteúdo para o ensino de frações equivalentes.

Sendo as frações equivalentes um conteúdo escolar, é possível olhá-lo por meio da história das disciplinas escolares (Chervel, 1990), considerando que a escola produz uma disciplina para o ensino e aprendizagem, não sendo apenas um espaço

de transmissão dos saberes que foram elaborados fora dela. Compreendendo a noção de disciplina escolar em sua amplitude, reconhecendo que

[...] uma disciplina escolar comporta não somente as práticas docentes em aula, mas também as grandes finalidades que presidiram a sua constituição e o fenômeno de aculturação em massa que ela determina (Chervel, 1990, p. 184).

Em 2017, a partir do Projeto Temático: “A matemática na formação de professores e no ensino: processos e dinâmicas de produção de um saber profissional, 1890-1990”, financiado pela FAPESP e coordenado por Wagner Rodrigues Valente – GHEMAT Brasil, ocorreu a necessidade de ampliação do referencial teórico metodológico para dar conta dos estudos sobre os saberes profissionais dos professores que ensinam matemática em perspectiva histórica.

De acordo com Valente (2017) a formação de professores sempre foi motivo de discussões, em torno dos saberes específicos para a profissão de ensinar. O GHEMAT Brasil tem mobilizado análises sobre a organização dos saberes, estudos esses realizados pela *Equipe de Recherche em Histoire Sociale de l'Éducation* (ERHISE), coordenado por Rita Hofstetter, da Universidade de Genebra. Conforme Valente (2017), essas análises dão indícios que a constituição dos saberes dos professores do nível primário¹⁷ e do nível secundário¹⁸ se articulam. Para Hofstetter e Schneuwly (2017), os saberes formalizados estão no centro das reflexões e buscam conceitualizar o seu papel nas profissões do ensino e da formação. De um lado estão os saberes constitutivos do campo profissional, chamados de saberes *para* ensinar, “[...] os saberes que são as ferramentas do seu trabalho” (Hofstetter; Schneuwly, 2017, p. 132), e de outro, os saberes emanados dos campos disciplinares, produzidos pelas disciplinas universitárias que se constituem como saberes *a* ensinar “[...] os saberes que são objetos do seu trabalho” (Hofstetter; Schneuwly, 2017, p. 131-132).

Valente (2017) ressalta que a formação profissional do professor dos anos iniciais, historicamente se constitui como um saber *para* ensinar, demarcado por saberes *para* ensinar as diferentes rubricas escolares, as diferentes matérias de ensino, saberes do professor para ensinar o aluno. Saberes *para* ensinar, são

¹⁷ Os primeiros anos escolares.

¹⁸ Os anos escolares compreendidos após o ensino primário, e anterior ao ensino universitário.

sobretudo saberes sobre “o objeto”, da formação, do trabalho de ensino, sobre as práticas de ensino, sobre a instituição e seu campo de atividade profissional (Hofstetter; Schneuwly, 2017).

Segundo Valente (2017), o saber para ensinar matemática, desde finais do século XIX se constitui como “a ciência de formas intuitivas para a docência dos primeiros passos da aritmética e da geometria. Tal saber *para* ensinar penetra na cultura escolar e nos deixa marcas até hoje presentes na escola” (p. 216).

Já os saberes *a* ensinar são “o resultado de processos complexos que transformam fundamentalmente os saberes a fim de torná-los ensináveis” (Hofstetter; Schneuwly, 2017, p. 133). De acordo com os autores, é por meio de demonstração, explicitação, simulação, elementação¹⁹, que um saber se torna um objeto de ensino, sobre os quais o professor atua.

Conforme Bertini, Morais e Valente (2017), na caracterização dos saberes *a* ensinar e dos saberes *para* ensinar, deve-se levar em consideração a articulação entre eles. Por vezes, esses saberes estão mais próximos do campo disciplinar, os saberes *a* ensinar, em outros momentos estão caracterizados como um saber *para* ensinar no movimento de transformações das rubricas escolares, através de um conjunto de saberes colocado na grade de formação do professor. Essa mútua dependência dos saberes, faz com que se atente para o movimento de produção e transformação dos saberes profissionais, isso “indica-nos que os denominados saberes pedagógicos, didáticos, representam uma etapa histórica de promoção e reconhecimento da constituição dos saberes profissionais” (Bertini; Morais; Valente, 2017, p. 69). Ainda de acordo com os autores, esses saberes apontam para além de uma formação somatória com conhecimento matemático e didática específica de cada conteúdo, mas para a consolidação de rubricas na formação de professores, contemplando os saberes *a* ensinar, a matemática *a* ensinar, e dos saberes *para* ensinar, matemática *para* ensinar.

Filiadas aos saberes *a* ensinar e saberes *para* ensinar, Hofstetter e Schneuwly (2017), tem-se a matemática *a* ensinar e a matemática *para* ensinar, essas duas categorias de acordo com Maciel (2019), por hipótese são conjuntos de saberes que formam o saber profissional do professor que ensina matemática. A matemática *a*

¹⁹ definido por ser simples e fácil.

ensinar é “[...] aquela presente no ensino: o que professor deverá ensinar a seus alunos. Essa matemática é fruto de complexos processos históricos de elaboração, analisados” (Bertini; Valente, 2021, p. 233). Já a matemática *para* ensinar “[...] refere-se à objetivação de um saber matemático” (Bertini; Morais; Valente, 2017, p. 68).

De acordo com Morais, Bertini e Valente (2021), a escola tem papel fundamental na criação de saberes que ela produziu ao longo dos tempos. Nesse contexto, os autores têm se dedicado a investigar a *matemática do ensino* que “[...] compreende a dimensão do ensino propriamente dito e a formação de professores para o ensino” (2021, p. 10).

No livro “A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC, Morais, Bertini e Valente (2021), discutem o conceito matemática do ensino, de como esta vem sendo caracterizada ao longo do tempo. Para os autores, a matemática do ensino tem como centro as reflexões epistemológicas, então propõem um estudo histórico sobre a produção da matemática presente na escola com o passar dos tempos, levando em consideração os saberes produzidos pela cultura escolar.

Assim, ao pesquisador da cultura escolar cabe tratar *menos* do ensino de algo de fora para dentro da escola e *mais* do que a escola, ao longo do tempo, elabora para ser ensinado. Em nosso caso cabe tratar da *matemática do ensino*, antes de discutir o ensino de matemática²⁰. Mais especificamente falando, caberá estudar a matemática do ensino de frações²¹, em lugar de tratar do ensino matemático das frações (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 13).

Diante da citação, Morais, Bertini e Valente (2021), afirmam que é preciso uma análise sobre outra perspectiva: a escola não deve ser vista de fora. Os autores defendem que a escola é uma instituição produtora de saberes, que, ao longo do tempo, produziu uma matemática do ensino, mais especificamente, uma matemática do ensino de frações.

Para realizar uma análise epistemológica da matemática do ensino de frações, os autores mobilizaram as categorias: sequência, significado, graduação, exercícios e problemas.

²⁰ Os autores entendem por ensino de matemática os “[...] mecanismos didáticos voltados para problemáticas postas pela transmissão de saberes do campo disciplinares científicos para o interior da escola” (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 16).

²¹ A partir dessa obra surgiu a inspiração do título dessa dissertação.

Por sequência entendem “O lugar ocupado pelas frações no conjunto dos temas da aritmética” (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 18). Consideram que os elementos, dados pela sequência indicada nos livros didáticos e manuais pedagógicos, têm caráter histórico e esta sequência muda de acordo com a época pedagógica, apresenta-se como uma ordem de temas, que será percorrida pelo professor, visando a aprendizagem do aluno.

Compreendem por significado “[...] o modo como o professor deverá se referir a um dado tema da matemática do ensino, de maneira a introduzi-la em suas aulas, tendo em vista contato do aluno com um novo assunto” (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 18-19). Essa categoria busca uma ideia inicial que o aluno terá sobre o tema, no caso, sobre as frações.

Para o termo graduação os autores fazem referência à “estruturação de uma dada rubrica escolar nos seus diferentes temas para o ensino”. Ela “está diretamente ligada a uma dada concepção de ensino e de aprendizagem de um dado assunto pelo aluno” (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 19). Essa categoria de análise indica um cuidado ao iniciar o ensino de um dado tema, no caso do ensino de frações, considera uma progressão destas que têm relação com a vida do aluno, ou seja, são os caminhos que o professor irá trilhar para tratar as frações.

Por fim os exercícios e problemas, esses “[...] remetem as respostas esperadas pelos professores relativamente ao que ensinaram sobre frações para seus alunos (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 19). São propostos para os alunos após a realização do ensino, articularem-se com as escolhas do professor, escolhas estas para a realização do ensino, através da sequência, significado e graduação.

Considera-se que o estudo sobre as propostas para o ensino de frações equivalentes “merece uma análise histórica de modo a favorecer uma melhor compreensão da sua presença nas escolas ao longo do tempo” (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 11).

As frações equivalentes compõem um rol dos conteúdos a ensinar, de modo que o professor pode mobilizar diferentes práticas para fazê-lo. Dentre os conteúdos a ensinar, as frações equivalentes são base para a compreensão na comparação de frações, na adição e subtração daquelas com denominadores diferentes, nas frações decimais, na porcentagem e no conjunto dos números racionais. Para o ensino das frações equivalentes o professor mobiliza saberes profissionais, dentre eles “[...]”

métodos, procedimentos, dispositivos, escolha dos saberes a ensinar, modalidades de organização e de gestão” (Hofstetter; Schneuwly, 2017, p. 134). Pensando em saberes para o ensino de frações equivalentes, os manuais pedagógicos podem ser considerados um instrumento de trabalho do professor, mas também um guia que o orienta sobre as práticas do ensino. Neles também podemos identificar saberes para ensinar as frações equivalentes, como por exemplo, orientações seguidas de ilustrações, reta numerada, quadro de equivalência, figuras geométricas e representações de conjuntos.

E os saberes para ensinar as frações equivalentes, como se constituem? Para Valente (2017), o saber para ensinar matemática nos primeiros anos escolares não envolve apenas domínio dos algoritmos ligados às operações fundamentais, conhecimentos da geometria euclidiana, esses saberes se constituem como “ciência das formas intuitivas para a docência dos primeiros passos da aritmética e da geometria” (p. 216).

Com o intuito de contribuir para a escrita da História da educação matemática e de como se constituiu a matemática do ensino de frações equivalentes, em tempos de Matemática Moderna, é que o presente estudo volta o olhar para os processos e dinâmicas de uma matemática moderna do ensino das frações equivalentes, presentes em manuais pedagógicos e livros didáticos que circularam no estado do Paraná, durante o Movimento da Matemática Moderna. Caso ocorra uma ênfase maior na matemática para ensinar não exclui articular com a matemática a ensinar, ou seja, pensar em uma matemática do ensino, pois ambas se originam na cultura escolar.

Nessa perspectiva, realizou-se um levantamento inicial de fontes, manuais pedagógicos e livros didáticos, que circularam no Paraná no período da Matemática Moderna, em que se pretende caracterizar as propostas que estavam presentes nesse período para o ensino de frações equivalentes, buscando aproximações e distanciamentos entre elas.

1.2 O processo de seleção dos Manuais Pedagógicos e Livros Didáticos

Estamos num processo de “cozimento”, de acordo com Peter Burke (2015) a pesquisa é um processo que passa do “cru” para o “cozido”. Os historiadores, ao coletarem dados para a pesquisa, através do estudo de documentos estão passando por esse processo de transformação.

Burke (2015), distingue quatro estágios principais da obtenção ao uso da informação na pesquisa, que são: coleta, análise, disseminação e utilização, para ele essas categorias não são fixas. Afirma que a coleta e a análise são indispensáveis, mas a análise sempre teve mais prestígio. Segundo este autor, a análise é um termo técnico que tem diferentes significados, aqui está se tratando de uma análise histórica, que “[...] depende da síntese, a combinação de informações como peças de um quebra-cabeça com o objetivo de elaborar explicações de eventos e tendências” (p. 88). O termo “análise” faz referência ao “cozimento”, que de acordo com Burke (2015), é o processo de transformar informações em conhecimento, que ocorre por meio das práticas de descrição, quantificação, classificação e verificação. Pontua que uma descrição minuciosa é indispensável para a análise.

Conforme citado anteriormente, em nota de rodapé, sobre o uso do termo “conhecimento”, este se diferencia do termo “saber”,

[...] em termos teórico-metodológicos, entre conhecimento e saber. O primeiro mais ligado à subjetividade, às experiências vividas pelo sujeito, meios implícitos da ação, do raciocínio; o segundo, fruto de sistematização, de caráter mais consensual, passível de generalização e objetivação, produto cultural historicamente institucionalizado cujo intento é a sistematização e organização de determinados conhecimentos com o fim de propiciar a sua comunicação (Valente; Bertini; Moraes, 2017, p. 227).

A escolha dos referidos manuais não foi feita de forma aleatória, “[...] a prática, frequente, de uma amostra totalmente aleatória não pode conduzir, e não conduz efetivamente, a não ser a resultados frágeis, até mesmo caducos” (Chervel, 1990, p. 203-204).

Em busca de propostas para ensinar frações equivalentes que circularam no estado do Paraná, tendo como referência manuais pedagógicos e livros didáticos (1970-1980), encontrou-se na tese “A capacitação e aperfeiçoamento dos professores que ensinavam matemática no estado do Paraná ao tempo do Movimento da matemática Moderna – 1961 a 1982”, de Costa (2013), indícios de manuais pedagógicos e livros didáticos que foram utilizados na capacitação de professores que ensinavam matemática no Paraná, em tempos de Matemática Moderna. Costa (2013)

destaca que além da capacitação²², aperfeiçoamento e/ou atualização, dois projetos especiais foram estabelecidos neste estado: o Projeto LOGOS II e o projeto HAPRONT - Habilitação de Professor não Titulado.

O Projeto LOGOS II era uma ação do Governo Federal, e visava formar professores sem habilitação que estavam em exercício do magistério no ensino primário. Segundo Costa (2013), o Paraná foi um dos estados que deu início a essa ação, sendo que, inicialmente o projeto atendeu 1200 professores leigos²³, de oito Núcleos Regionais de Educação. “[...] o Projeto LOGOS II avançou além do período estimado, que correspondia ao ano de 1979, os materiais elaborados para o curso foram publicados até o ano de 1984” (Costa, 2013, p. 173).

No Módulos da Didática da Matemática – Projeto LOGOS II, consta nas referências a obra “Matemática na escola primária moderna”, de Rizza de Araújo Porto e Norma Cunha Osório. Costa (2013) aponta que os oito módulos de matemática que compõem o Projeto LOGOS II foram elaborados por diferentes autores, mas destaca que,

[...] alguns referenciais tinham presença constante nos materiais elaborados e distribuídos aos professores cursistas do Projeto LOGOS II. É o caso da obra de Rizza Araújo Porto e Norma Cunha Osório, adaptada para o Brasil em 1965²⁴ (Costa, 2013, p. 180).

De acordo com Costa (2013), o livro de Porto e Osório (1968) “Matemática na escola primária moderna” trazia uma ordenação curricular que evidenciava a Matemática Moderna e a elaboração do Projeto LOGOS II se assemelha com esse livro.

Também se encontra na tese de Costa (2013), as referências utilizadas nos módulos de Matemática e Didática da Matemática do Projeto HAPRONT. Dentre elas, o livro “Matemática na escola primária moderna” de Osório e Porto (1968), presente na elaboração do Projeto HAPRONT, nas matérias de Didática e de Prática e de

²² Os termos aqui utilizados: capacitação, aperfeiçoamento e atualização, estão na tese de Costa (2013). Assim eram utilizados no período, hoje o termo é formação continuada.

²³ Professor Leigo para o período se refere a professor sem habilitação.

²⁴ Tivemos acesso a segunda edição do livro “Matemática na escola primária moderna: Vamos aprender matemática” publicada no Brasil em 1968.

Ensino. Este manual também faz parte da referência bibliográfica em exemplar da Revista Currículo (Paraná, 1977, p. 458).

Diante do exposto buscou-se os manuais dos Projetos LOGOS II e Projeto HAPRONT. Foram localizados os módulos referentes à matemática do Projeto HAPRONT no Repositório²⁵ de Conteúdo Digital (RCD) do GHEMAT Brasil, porém não se obteve sucesso em relação ao Projeto LOGOS II.

Referente ao Projeto LOGOS II, foi encontrado um artigo “Os saberes matemáticos na formação do professor leigo: o currículo do projeto LOGOS II” de Costa e Bezerra (2022). De acordo com estes autores, o Projeto LOGOS II, foi desenvolvido em dezenove localidades brasileiras e tinha por objetivo qualificar e certificar professores leigos ao nível de segundo grau. O projeto era realizado na metodologia de ensino a distância²⁶, com “[...] módulos instrucionais, vinculados ao departamento de Ensino Supletivo e as ações envolviam o Ministério da Educação e Cultura, a Secretaria de Educação e Cultura e as prefeituras” (Costa; Bezerra, 2022, p. 4). O tempo de duração eram 30 meses, sendo 1330 horas as disciplinas de Educação Geral, e 2150 hora para a Formação Especial.

Dentre os conteúdos estudados que fazem parte dos oito módulos de Didática da Matemática, estão as frações, “Para o ensino de frações, orientava-se inicialmente, trabalhar com o material concreto²⁷ e semiconcreto²⁸ para então passar para a abstração” (Costa; Bezerra, 2022, p. 10). Os autores destacam que o material traz vestígios do ideário do Movimento da Matemática Moderna, como a Teoria dos Conjuntos e a utilização do material concreto, reforçando que, através da manipulação, a criança era instigada a observar, representar e verbalizar.

²⁵ Espaço virtual, que abriga as fontes digitalizadas do GHEMAT Brasil. Para consulta acessar: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>.

²⁶ Ensino a distância se configurava em moldes diferentes do que conhecemos hoje, referente ao projeto LOGOS II, os módulos eram disponibilizados e cada cursista estudava de acordo com seu tempo e seu ritmo de estudo (Costa; Bezerra, 2022).

²⁷ Na Revista Currículo (Paraná, 1977) o termo material concreto faz referência ao uso de objetos como: laranjas, tomates, pães, etc., dando-se preferência a objetos simétricos.

²⁸ O termo semiconcreto se refere a materiais confeccionados com flanelógrafo ou papel, como por exemplo os círculos de frações (Paraná, 1977). Quanto a escrita do termo semiconcreto e semiabstrato com a alteração ortográfica de 2009, palavras com prefixo só terão hífen se as letras forem iguais, mas em casos de citação direta essas aparecerão com o hífen. Por semiabstrato se refere aos desenhos utilizados para o ensino, nesse caso o ensino de frações equivalentes, como: diagramas, quadros de equivalência, reta numérica, desenhos de figuras geométricas, desenhos de conjuntos.

De posse do relatório do Projeto HAPRONT (1979), foram obtidas informações, que aqui se compartilham. Estudos, relatórios e estatísticas, realizados durante a década de 1970, apontam para uma grande quantidade de professores não habilitados que estavam em exercício do magistério no ensino primário, principalmente na Zona Rural (Paraná, 1979).

Em 1974, o estado do Paraná contava com 25.094 professores leigos, que correspondiam a quase metade do quadro dos docentes do ensino de 1º Grau²⁹, dos quais, 15.484 atuavam no Ensino Rural (Paraná, 1979).

O Ministério da Educação e Cultura (MEC) estabeleceu, através do Plano Setorial de Educação e Cultura, o Projeto de Capacitação de Recursos Humanos para o ensino de 1º Grau. O Paraná foi selecionado como a Unidade Federativa responsável por testar e desenvolver esse Projeto, que foi financiado pelo Salário Educação Quota Federal 1975/1979, e titulado como Projeto HAPRONT (Paraná, 1979).

O Projeto teve início em agosto de 1976, foi aplicado em 11 municípios do estado do Paraná, entre eles: Araucária, Cascavel, Colombo, Corbélia, Contenda, Laranjeiras do Sul, Lapa, Rio Branco do Sul, São Mateus do Sul, Nova Aurora e Telêmaco Borba, e atendeu 1.100 professores não titulados.

O Objetivo Geral que moveu o Projeto HAPRONT foi “Elaborar e experimentar modelo de curso de habilitação à distância, a nível de 2º Grau³⁰, para professores não titulados, em exercício de 1ª a 4ª série” (Paraná, 1979, p. 01).

Consta no relatório HAPRONT (1979), dentre os objetivos específicos “Habilita a nível de 2º grau 1020 professores não titulados, em exercício de 1ª a 4ª série” (Paraná, 1979, p. 02). Após dois anos do início do projeto, em 1978, o número de professores cursistas era 797 e em 1979 concluíram o curso 721 professores, uma evasão de 29,3%.

De acordo com Paraná (1979), o projeto era constituído em dois estágios. O primeiro estágio, denominado de Nivelamento, reservado para atender aos professores cursistas que tinham somente formação até a 4ª série, contendo disciplinas do currículo de 1º grau. Sua grade curricular era de 2460 horas, dessas, 320 horas faziam parte da grade curricular da matemática.

²⁹ Titulação correspondente da 1ª a 8ª série, atualmente designado por Ensino Fundamental.

³⁰ Titulação que na atualidade corresponde ao Ensino Médio.

O segundo estágio, chamado de Habilitação, composto por 2900 horas, destinava-se à formação específica do 2º grau, sendo que dessas, 80 horas eram para estudos da grade curricular da matemática,

[...] os professores leigos que participavam do processo desenvolvido no âmbito do Projeto HAPRONT foram habilitados em nível de 2º grau, mas sua formação matemática não era equivalente a este nível, e sim, ao último ano do Ensino de 1º grau (Costa, 2013, p. 184).

Os conteúdos abordados no Ensino eram os mesmos que seriam ensinados nas séries de 1º grau por esses professores formados.

O Projeto HAPRONT, destinou-se a professores leigos³¹ com formação até a quarta série, o material didático foi produzido no Paraná, por um grupo de 22 professores especialistas em diferentes disciplinas que compunham o currículo. Para elaborar esse material os professores foram treinados em Tecnologia Instrumental, através de um curso realizado no CETEPAR - Centro de Seleção, Treinamento e Aperfeiçoamento de Pessoal do Estado do Paraná, sob orientação do Professor Fernando Pizza, mestre nessa área, enviado pelo MEC/DEF – CODEN.

A execução e acompanhamento do Projeto, seguia um cronograma das ações. Houve elaboração do material instrucional, e testes realizados exigidos pelas disciplinas que faziam parte do currículo do curso, e os periódicos para controle e avaliação do próprio Projeto (Paraná, 1979).

A carga horária destinada à disciplina de Matemática correspondia a 400 horas, distribuídas em 23 módulos, dentro de um total de 5.360 horas e 254 módulos.

Os módulos, referentes à disciplina de Matemática, ficaram sob a responsabilidade de elaboração da professora Clelia Tavares Martins³², docente que

³¹ Professores sem habilitação para o magistério, que atuavam no Sistema Educacional.

³² Na década de 1960 atuou também como técnica no CEPE – Conselho de Ensino Pesquisa e Extensão. Nessa mesma década integrou o NEDEM, sendo uma das integrantes responsável pela produção de materiais didáticos para o ensino de matemática na escola primária. Na década de 1970 foi técnica da CELEPAR – Centro de Treinamento e Aperfeiçoamento de Professores do Estado do Paraná, e responsável pela elaboração do material utilizado no Projeto HAPRONT, ainda ao final dessa década e início dos anos de 1980 contribuiu com a produção de materiais para as escolas rurais do Paraná. De acordo com Costa (2020), foi considerada uma *expert*, devido sua atuação como produtora de livros didáticos, nas décadas de 1970/1980. “Clélia se fez presente no cenário educacional paranaense e, especificamente, em relação ao ensino da matemática foi uma referência no contexto estadual, seja nos materiais destinados aos alunos, nas orientações oficiais para a organização do ensino ou na formação de professores que atuaram nos anos iniciais de escolarização” (Costa, 2020, p. 209). Para mais informações sobre *expert* pesquisar em: <https://www.ghemat.com.br/experts>.

fez parte do Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática – NEDEM³³. Apenas os quatro últimos módulos, de números 105, 106, 130 e 131, referentes aos conteúdos (de equação do 1º grau, sistemas de equação do 1ª grau, equação do 2º grau e raciocínio dedutivo), teve a participação de Rosa Kazuco Miyasaki³⁴ (Costa, 2013).

Os Módulos referentes à disciplina de matemática tiveram como temas: 9.0 Noções de Conjuntos, 9.1 Linguagem simbólica, 9.2 e 9.3 Operando com números naturais, 9.4 Operando com números fracionários, 9.5 Operando com números decimais, 9.6 Linguagem simbólica, 10.0 Operando com conjuntos, 26 Produto cartesiano, 27 Operando com números naturais, 39 e 40 Noções de Geometria I e II, 58 e 59 Grandezas Mensuráveis I e II, 60 e 61 Operando com números, 80 Operando com números inteiros, 82 Operando com Proposições, 104 Linguagem Simbólica, 105 Equação de 1º grau com uma variável, 106 e 130 Linguagem simbólica, 131 Técnicas dedutivas.

Na apresentação dos módulos consta a informação que o material produzido se constitui em um instrumento que pretende assegurar a melhoria do sistema de ensino para a formação profissional dos professores leigos do estado do Paraná. Sua metodologia é a educação personalizada, preparada para habilitar professores de 1ª a 4ª séries, em exercício e sem titulação. O Projeto habilitava ao nível de 2º grau, e os módulos eram encaminhados aos professores cursistas, para serem estudados em seus locais de trabalho.

De posse do material, disponível no Repositório de Conteúdo Digital (RCO), localizaram-se as frações equivalentes, no módulo número 9.4 do Projeto HAPRONT.

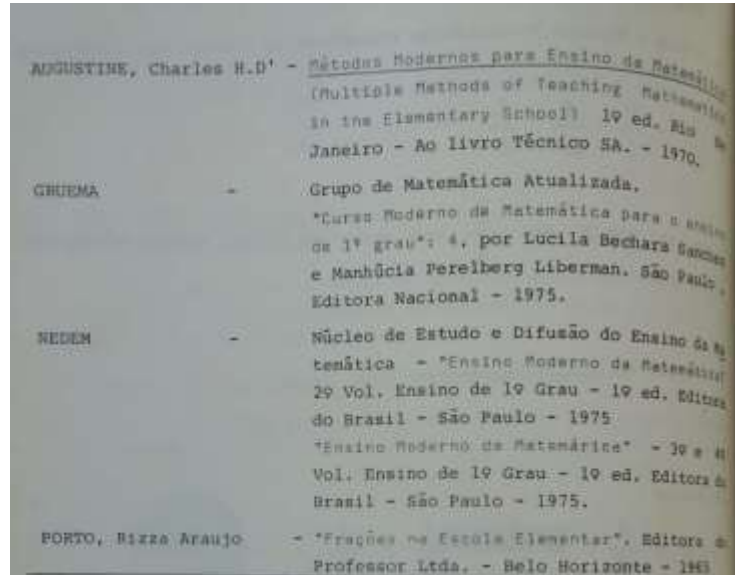
O módulo de número 9.4, destinado ao ensino de frações, tem como título: “Operando com números fracionários”. Neste manual constam seis referências, sendo: o manual pedagógico “Métodos Modernos para Ensino da Matemática” (1970), de Charles H. D. Augustine. O livro didático do GRUEMA – Grupos de Ensino de Matemática Atualizada, “Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau”, volume IV, de (1975). Os livros didáticos do NEDEM – Núcleo de Estudo e Difusão do

³³ O NEDEM foi um grupo de professores que se constituiu no Paraná que elaborou uma proposta de Matemática Moderna, e tinha como coordenador o professor Osny Antonio Dacol.

³⁴ “Autora também do ‘tratado Metodológico de Matemática’, destinado à capacitação de professores de matemática de 5ª a 8ª séries durante o período de Implementação da Reforma do Ensino de 1º grau no Estado do Paraná” (Costa, 2013, p. 184).

Ensino da Matemática, “Ensino Moderno da Matemática” Volume II, III e IV, (1974, 1975 e 1975)³⁵, livros esses destinados aos primeiros anos de escolarização. E o manual pedagógico “Frações na escola elementar”, de Rizza de Araújo Porto (1965)³⁶.

FIGURA 1 – Referências módulo 9.4 - Projeto HAPRONT



FONTE: Apostilas de Matemática e Didática da Matemática 9.4 – Projeto HAPRONT, Martins (1976, p. 66).

Entre as referências, destaca-se o manual pedagógico “Frações na escola elementar”, de Rizza de Araújo Porto (1967), o qual se pode verificar por meio da Figura 1. Esse manual faz parte das referências bibliográficas: da coleção de livros didáticos “Ensino Moderno da Matemática” volume III (Holzmann; Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975) e volume IV (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975), elaborados pelo Núcleo de Estudos e Difusão da Matemática (NEDEM) para os primeiros anos de escolarização. Por ser um manual destinado exclusivamente ao ensino de frações, considera-se uma importante fonte de pesquisa para analisar as propostas nele contidas para o ensino das frações equivalentes.

De acordo com Costa (2013), o Projeto HAPRONT foi uma referência em termos de capacitação de professores que ensinavam matemática no estado do Paraná. Desenvolvido para professores não titulados (leigos) com formação até a

³⁵ Essas datas estão na descrição do manual no RCO do Ghemat Brasil, não sendo identificada data nos livros didáticos de volumes III, e IV.

³⁶ Para nossa análise utilizamos o manual pedagógico de (1967), 4ª edição.

quarta série, dentro de um ideário do Movimento da Matemática Moderna, com ênfase na Teoria dos Conjuntos, em seus conceitos, nas noções referentes às relações, às operações e às propriedades, e no uso da linguagem simbólica. Diante do exposto, julga-se necessário que se realize uma análise no módulo de número 9.4, do Projeto HAPRONT, destinado ao ensino de frações, no qual tem como título: “Operando com números fracionários”. Esse módulo é considerado um manual pedagógico, que foi utilizado na formação de professores que ensinam matemática.

Acredita-se que uma análise desse material possa ajudar a identificar proposta para ensinar as frações equivalentes, presentes na formação e capacitação do professor leigo que atuava no estado do Paraná, em tempos da Matemática Moderna.

Outro manual pedagógico que compõe as referências do módulo de número 9.4, “Operando com números fracionários”, do Projeto HAPRONT, é “Métodos Modernos para o Ensino de Matemática” (1981), de Charles H. D’Augustine³⁷ (Costa, 2013). Esse manual pedagógico também está entre as referências da Revista Currículo n. 24 (Paraná, 1977); na coleção do NEDEM, “Ensino Moderno da Matemática” (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975); no manual destinado a professores das escolas rurais de Estado do Paraná (Costa, 2013); em manuais pedagógicos destinados a professores de primeira à quarta série das escolas rurais e aos distritos (Paraná, 1979).

Diante da circulação dos manuais pedagógicos que trazem em sua referência Charles H. D’Augustine, em “Métodos Modernos para o Ensino de Matemática”, e do próprio manual pedagógico em questão, há vestígios que levam a selecioná-lo para análise. O manual que se utiliza para o estudo é uma reimpressão que data de 1981, possui carimbo do Colégio Francisco Carneiro Martins, do município de Guarapuava, estado do Paraná, e faz parte do Arquivo Pessoal da professora Elenir Terezinha Paluch Soares, que o doou ao GHEMAT Paraná, em 20 de setembro de 2021. Na ficha de controle de devolução da biblioteca há datas de empréstimo do ano de 1994.

³⁷ Charles D’Augustine foi um dos autores bem aceitos e tomados como referência nos cursos de formação inicial e continuada de professores paranaenses, por meio de sua obra *Métodos Modernos para o Ensino da Matemática*, tradução do original *Multiple Methods of Teaching Mathematics in the Elementary Scholl*, lançado em 1968, editado pela primeira vez no Brasil em 1970, pela Editora Ao Livro Técnico, reimpresso em 1976, 1979, 1981, 1982, 1984, 1985, 1986, e editado novamente em 1994 (Soares, 2014, p. 147).

Também há indícios da circulação dos livros didáticos da coleção NEDEM na formação de professores. De acordo com Portela (2009), a disseminação do Movimento da Matemática Moderna no Paraná foi marcada pela atuação do NEDEM na publicação de livros didáticos, intitulada “Ensino Moderno de Matemática”, a autora evidencia que a coleção de livros destinados à escola primária foi primeiramente testada e melhorada por meio de Cadernos de Atividades.

Ao que tudo indica, o material produzido pelo NEDEM foi o veículo difusor da Matemática Moderna e adotado pelo Instituto de Educação do Paraná para modernizar a formação matemática dos futuros professores, tendo em vista a inserção da Matemática Moderna no Currículo do Curso de Formação (Portela, 2009, p. 123).

Costa (2013) destaca que a autora dos Módulos referentes a disciplina de matemática do Projeto HAPRONT, Clélia Tavares Martins, faz uso dos referenciais dos principais protagonistas do Movimento da Matemática Moderna, destacando o do NEDEM e do GRUEMA. Dos 23 módulos produzidos para a formação em matemática o NEDEM é referência de 19 módulos e o GRUEMA de 13 módulos. Referenciais elaborados pelo GRUEMA e pelo NEDEM, também estavam presentes nos manuais destinados as escolas rurais do estado do Paraná (Costa, 2013).

A coleção de livros didáticos GRUEMA referentes ao ensino primário, foi produzida pelas autoras: Anna Franchi, Lucília Bechara Sanchez e Manhúcia Liberman. De acordo com Morais, Bertini e Valente (2021), essa coleção foi testada em escolas experimentais durante a década de 1960, as autoras da coleção faziam parte do GEEM³⁸ - Grupo de Estudo do Ensino da Matemática, e ministravam cursos referente a Matemática Moderna por todo o país.

Em 1967, as autoras lançam a coleção “Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar” destinado aos quatro primeiros anos do curso elementar e em 1973, lançaram uma segunda coleção de livros "Curso Moderno de Matemática para a Escola de 1º Grau (GRUEMA)" com oito volumes para atender as mudanças na legislação. Os livros das duas coleções diferiam bastante em termos visuais e número de páginas. Segundo Villela (2009, p. 178):

Nas ilustrações dos volumes da primeira série foram utilizadas várias cores. Nos demais volumes utilizou-se uma única cor em todas as ilustrações: no terceiro volume, a cor azul; no quarto volume, verde e no quinto volume, a cor

³⁸ Grupo de Estudos da Matemática, sob liderança de Osvaldo Sangiorgi, criado no ano de 1961, no estado de São Paulo.

vermelha. A Coleção Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau recebeu um tratamento gráfico que a diferiu radicalmente dos demais didáticos de matemática produzidos até então.

De acordo com Costa (2013), os professores do Paraná tiveram suas primeiras orientações referentes ao Movimento da Matemática Moderna através do GEEM, e posteriormente pelo NEDEM. O propósito do GEEM era quanto a formação matemática do professor, com poucas orientações didáticas dando ênfase na aprendizagem dos conteúdos através de demonstrações de como trabalhar com o uso da linguagem, das práticas modernas, e com as disciplinas: Teorias dos Conjuntos e Lógica Matemática (Costa, 2013).

Em sua tese Villela (2009) apresenta um estudo, que aponta o segundo lugar em vendagem da coleção “Curso Moderno para o ensino de primeiro grau” no período de 1964 a 1980 entre as coleções publicadas pela Companhia Editora Nacional. Observamos que o livro didático (1975) dessa coleção é referência da coleção “Ensino Moderno de Matemática”, nos volumes III e IV.

Diante do exposto, pode-se afirmar que há indícios da difusão e circulação dos referidos manuais pedagógicos e livros didáticos no Paraná, por diferentes vias, e que as propostas presentes nesses manuais para o ensino de frações equivalentes foram mobilizadas para a formação de professores primários neste estado. A tabela I traz dados dos manuais pedagógicos e livros didáticos que serão objetos desta pesquisa.

QUADRO 1 – Manuais Pedagógicos Livros Didáticos e Guia do Professor

Categoria	Título	Autores	Ano	Edição	Editora
Manual Pedagógico	Frações na Escola Elementar	Rizza Araújo Pôrto	1967	4ª ed.	Editora do Professor
Manual Pedagógico	Matemática na Escola Primária Moderna	Norma Cunha Osório Rizza de Araújo Porto	1968	2ª ed.	Ao Livro Técnico S. A
Manual Pedagógico	Métodos Modernos para o ensino de matemática	Charles H. D'Augustine	1981	1ª ed.	Ao Livro Técnico S. A
Manual Pedagógico	Projeto Hapront, Módulo 9.4	Clelia Tavares Martins	1976	Não consta	MEC/DEF/SEEC/CETEPAR

Livro Didático	Ensino Moderno de Matemática, v. II	Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda	1974	Não consta	Editora do Brasil S/A
Livro Didático	Ensino Moderno de Matemática, v. III	Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda	1975	Não consta	Editora do Brasil S/A
Livro Didático	Ensino Moderno de Matemática, v. IV	Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda	1975	Não consta	Editora do Brasil S/A
Livro Didático	Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau, v. II	Manhúcia Perelberg Liberman; Anna Franchi, Lucilia Bechara Sanchez	1974	Não consta	Companhia Editora Nacional
Livro Didático	Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau, v. III	Lucilia Bechara Sanchez, Manhúcia Perelberg Liberman	1974	Não consta	Companhia Editora Nacional
Livro Didático	Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau, v. IV	Lucilia Bechara Sanchez, Manhúcia Perelberg Liberman	1975a	Não consta	Companhia Editora Nacional
Guia do Professor	Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau, v. II	Manhúcia Perelberg Liberman, Anna Franchi, Lucilia Bechara Sanchez	1975	Não consta	Companhia Editora Nacional
Guia do Professor	Curso Moderno de Matemática	Lucilia Bechara Sanchez,	1975b	Não consta	Companhia Editora Nacional

	para o ensino de 1º grau, v. III	Manhúcia Perelberg Liberman			
Guia do Professor	Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau, v. IV	Manhúcia Perelberg Liberman, Lucilia Bechara Sanchez	1978	Não consta	Companhia Editora Nacional

Fonte: elaborado pela autora

Para esse processo, a partir das fontes destacadas, como manuais pedagógicos, livros didáticos e guia do professor, busca-se caracterizar uma matemática moderna do ensino das frações equivalentes propostas em manuais escolares.

2 A MATEMÁTICA MODERNA DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES: O QUE DIZEM AS PESQUISAS?

Neste capítulo, o olhar se voltou a entender o que foi o Movimento da Matemática Moderna na perspectiva Internacional, como esse movimento chegou ao Brasil, suas apropriações em nível nacional, mas também, teve-se a atenção mais direcionada para o estado do Paraná, onde se delimita regionalmente esta pesquisa.

Dentro desse Movimento se buscou conhecer o que as pesquisas recentes avaliaram sobre o ensino das frações equivalentes, no Movimento da Matemática Moderna, bem como identificar quais as perspectivas para esse ensino na atualidade.

As pesquisas deram indícios de que, em tempos da Matemática Moderna, as frações equivalentes envolviam, entre outros, Classes de Equivalência, Diagramas, Reta Numérica, Relações de Equivalência, Conjuntos e Linguagem. Assim, pretendeu-se trazer uma compreensão de como esses conceitos são apresentados em documentos escolares, nos livros didáticos e em manuais pedagógicos, por meio de uma breve revisão da literatura.

2.1 O Movimento Paranaense da Matemática Moderna: internacional, nacional e local

A década de 1970 marcou uma grande virada no sistema de ensino brasileiro, com a obrigatoriedade e gratuidade da escola de oito anos para estudantes na idade escolar (Morais; Bertini; Valente, 2021). Nas décadas de 1950 e 1960 chegam ao Brasil propostas de ensino de uma matemática moderna, que propunham uma reforma curricular que abarcasse todos os níveis de ensino. Para tanto, foram escritos (ou traduzidos) manuais pedagógicos que dessem suporte ao professor, assim como congressos e cursos preparatórios para apresentar essa nova matemática. O mesmo ocorreu com os livros didáticos direcionados aos alunos. Esse período ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna e foi protagonista na organização da matemática do ensino em território brasileiro.

Decorrente de um intenso debate de dimensão internacional, o Movimento da Matemática Moderna (MMM), iniciado no período pós segunda guerra, surge na década de 1950, tendo como marco o Seminário de Royaumont, realizado na França, em 1959. No Brasil e na América Latina, a repercussão do Seminário ocorre por meio de iniciativas norte-americanas, através da divulgação de propostas de modernização do ensino de matemática (Oliveira; Silva; Valente, 2011).

O Movimento da Matemática Moderna pode ser caracterizado por suas mudanças no ensino de matemática, pois havia uma insatisfação por parte dos professores e profissionais da área da educação com o modelo de ensino dos níveis básicos e das universidades onde vinha sendo adotado. No final da década de 1950, o ensino de matemática brasileira já passava por reformas, mas foi entre 1960 e 1980 que o Movimento da Matemática Moderna esteve no cume de suas discussões (Santos, 2007).

Os autores, Búrigo e Valente (2023), no livro “Modernizando o ensino da matemática: diálogos internacionais³⁹”, relatam a participação do Brasil em movimentos internacionais referente ao currículo de matemática. Dentre os movimentos destacam o Movimento da Matemática Moderna. Conforme os autores citados, no início dos anos 1950, os educadores brasileiros acompanhavam as mudanças curriculares à distância. Em meados da década de 1950, mais precisamente de 4 a 9 de setembro de 1955, ocorre no Brasil o primeiro Congresso

³⁹ Título original em inglês, *Brazil and the Modern Mathematics Movement*.

nacional de Educação Matemática, as discussões foram centralizadas no ensino secundário brasileiro.

No segundo Congresso realizado no Rio Grande do Sul, de 29 de junho a 4 de julho, 1957, foi citada a primeira publicação do CIEAEM⁴⁰, intitulada *L'Enseignement des Mathématiques*⁴¹, esse escrito

[...] reunia textos de Jean Piaget, Evert W. Beth, Jean Dieudonné, André Lichnerowicz, Gustave Choquet e Caleb Gattegno, condensando as preocupações dos matemáticos em alinhar a matemática elementar à matemática avançada, que eles consideravam imperativa. Esta questão didática e epistemológica ganhou cientificidade através dos estudos de Jean Piaget e do paralelo assumido entre as estruturas cognitivas e matemáticas (Búrigo; Valente, 2023, p. 407, tradução nossa)

De acordo com os autores esta publicação propiciou discussões visando melhorias no ensino da matemática.

O terceiro Congresso foi realizado no Rio de Janeiro de 20 a 25 de julho de 1959, pouco se viu avançar em relação a modernização do currículo (Búrigo; Valente, 2023). Diferente do quarto Congresso Brasileiro de Educação Matemática, realizado de 22 a 28 de julho de 1962 no Pará, em que professores do ensino secundário e universitário de São Paulo já haviam criado o grupo GEEM (1961), liderado por Osvaldo Sangiorgi. Essa diferença se deve ao fato que este ocorreu após o Seminário de Royaumont. Nesse momento muitos dos manuais pedagógicos e livros didáticos de origem europeia que circulavam no Brasil apresentavam uma nova matemática escolar, “[...] os escritos de Piaget validavam a ênfase nas estruturas matemáticas” (Búrigo; Valente, 2023, p. 408, tradução nossa).

De acordo com Novaes (2012), em sua tese “O Movimento da Matemática Moderna em Escolas Técnicas Industriais do Brasil e de Portugal: Impactos na Cultura Escolar”, para Piaget a reforma do ensino de matemática, denominada de Matemática Moderna, exigia uma nova forma de ensinar e de avaliar, onde o ensino partia de estruturas mais concretas e o êxito estava na organização das ações das crianças, com o cuidado de não queimar etapas do seu desenvolvimento. A grande reforma se aproximava mais das operações espontâneas do sujeito, “Para ele [Piaget], a

⁴⁰ Comissão Internacional para o Estudo e Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática.

⁴¹ O ensino da Matemática.

construção do edifício matemático provém de constantes abstrações reflexionantes, partindo de estruturas mais concretas” (Novaes, 2012). As experiências lógico-matemáticas preparam a criança para a dedução, que ocorre entre 7 e 11 anos, antes disso a criança não é capaz de raciocinar a partir de hipóteses expressas verbalmente, tendo a necessidade de aplicar o uso de objetos manipuláveis (Piaget, 1986).

Este movimento teve como marco uma virada no sistema escolar brasileiro, liderado pelo GEEM, no qual “as ações do GEEM visavam a escrita de livros textos, a realização de congressos, simpósios e cursos relativos à MM para professores” (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 39).

Para Búrigo (1990), a criação do GEEM foi o marco decisivo para a constituição do Movimento da Matemática Moderna no Brasil, “que permitiu a divulgação ampla da nova proposta para além dos currículos restritos de educadores e a realização de experiências apoiadas numa discussão articulada” (p.104). O ponto de partida da fundação do GEEM foi um curso de aperfeiçoamento para professores, tendo como articulador o professor Osvaldo Sangiorgi, quando foi apresentada a proposta de reformulação de ensino dos Estados Unidos. Desde sua fundação promoveu e desenvolveu atividades de divulgação das propostas do Movimento da Matemática Moderna.

O grupo objetivava, além de uma reforma curricular e a escrita de livros didáticos adaptados à Matemática Moderna, formar professores para fazer bom uso desse material (Santos, 2020). Nos anos 1960,

[...] a política governamental de ações emergenciais orientadas para a formação de professores do ensino secundário seria especialmente focada nas áreas de matemática e das chamadas “ciências”, seguindo uma tendência internacional (Oliveira; Silva; Valente, 2011, p. 20).

Nesse contexto, em busca de soluções para as exigências momentâneas e reformulação do ensino, a união de professores se constituiu em grupos de estudos como: GEEM, NEDEM, Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre (GEEMPA), Grupo de Estudos do Rio de Janeiro (GPEM). De acordo com Búrigo (1989) a divulgação da Matemática Moderna não foi fruto de decisões em gabinete, mas de um movimento articulado por um grupo de professores do ensino secundário e universitário que debatia experiências concretas de ensino com produção de materiais para professores e alunos, adaptados às suas realidades.

No Paraná, o NEDEM foi o principal meio de divulgação do Movimento da Matemática Moderna. O grupo foi criado em 1962. Nessa época seus estudos eram destinados ao Ginásio. Tinha como coordenador o professor Osny Antonio Dacol⁴², que era diretor do Colégio Estadual do Paraná, local onde aconteciam os encontros. De acordo com Pinto e Ferreira (2006), a trajetória do NEDEM consta registradas nos arquivos do colégio citado.

As ideias modernizadoras para o ensino de matemática no ensino primário, conforme Portela (2009), tiveram início em 1965. O coordenador do NEDEM, professor Osny Antonio Dacol, convidou um grupo de professores para participar dos encontros e desenvolver estudos sobre a matemática moderna.

Segundo Portela (2009), em informações recolhidas por depoimento oral de Henrieta Diminski Arruda, o grupo que desenvolveu estudos e disseminou a Matemática Moderna nas séries iniciais era composto inicialmente por: “Clélia Tavares Martins, Esther Holzmann, Gliquéria Yarentchuk e Henrieta Diminski Arruda e Nelly Humphreys, sendo que a última participou do grupo por cerca de dois anos” (Portela, 2009, p. 74).

Conforme Portela (2009), para a produção e validação das atividades da Matemática Moderna nos primeiros anos de escolarização, o grupo recebia orientações do professor Osny Antonio Dacol, “Inicialmente, apoiados nos livros de Sangiorgi⁴³, posteriormente nos livros do NEDEM para o Ginásio (1º e 2º Volume da Coleção “Ensino Moderno da Matemática” – “Os números de hoje”, lançado em 1968)” (Portela, 2009, p. 75).

Com base nas experiências desenvolvidas em sala de aula com os alunos, através das atividades elaboradas e a produção artesanal de cadernos de atividades, o grupo de autoras elaborou sua proposta de Matemática Moderna. Essas propostas resultaram na coleção “Ensino Moderno de Matemática”, organizada em quatro volumes e destinadas às primeiras séries de escolarização.

De acordo com Pinto e Ferreira (2006), as duas⁴⁴ coleções de livros didáticos produzidos pelo NEDEM, foram adotadas pelas escolas paranaenses por mais de

⁴² Osny Antônio Dacol, nascido em 1930, formado em matemática pela Universidade Federal do Paraná. De acordo com Pinto e Ferreira (2006), foi o principal representante do Movimento da Matemática Moderna no Paraná.

⁴³ Osvaldo Sangiorgi, professor de matemática, autor de diversos livros didáticos na época do M.M.M., presidente do GEEM.

⁴⁴ Uma destinada para o curso ginásial e outra para os primeiros anos de escolarização.

duas décadas. “[...] a Coleção do NEDEM em circulação, os cursos e palestras sobre a nova forma de abordar os conteúdos, a proposta paranaense foi intensamente divulgada e assumida nas escolas” (Pinto; Ferreira, 2006, p. 118).

Segundo Pinto e Ferreira (2006), os livros continham vários exercícios, eram bem ilustrados, apresentavam uma proposta interdisciplinar. Na entrevista que realizaram com Henrieta Arruda, esta afirma que a introdução da proposta moderna ocorreu gradativamente.

A participação do professor Osny Antonio Dacol em Congressos Brasileiros de Ensino de Matemática e sua relação com demais professores que buscavam as mesmas ideias de modernização do ensino “[...] trouxe ao Paraná a possibilidade de mudanças nas práticas de ensino da matemática” (Portela, 2009, p. 122).

Percebe-se que as coleções de livros didáticos do NEDEM, foram um importante veículo de propagação do Movimento da Matemática Moderna no Paraná, mas, para além do material impresso, conforme Pinto e Ferreira (2006), o NEDEM proporcionou palestras e cursos para professores paranaenses que ocorreram na capital e no interior do estado e eram direcionados a professores que ministravam a disciplina de matemática em diferentes níveis de ensino.

Se a intenção do movimento era desestruturar a matemática tradicional, o NEDEM cumpriu sua missão, propiciando grandes discussões e oferecendo propostas concretas de reformulação curricular para a disciplina de Matemática. Com o trabalho desenvolvido pelo NEDEM intensificou-se a democratização da participação de professores em congressos, cursos e palestras, com isso imprimindo novos rumos à história da educação matemática paranaense. Professores de outros estados vinham à capital paranaense não apenas para proferirem palestras, também vinham participar dos cursos de férias, buscando atualizar-se e conhecer a proposta paranaense de Matemática Moderna (Pinto; Ferreira, 2006, p. 121).

O movimento paranaense proporcionou mudanças de currículos, com novos conteúdos a serem trabalhados, mesmo não sendo essa a ideia inicial do NEDEM, o grupo tinha como principal intenção modificar normas e práticas pedagógicas e formas de apropriação do conteúdo do ensino da matemática (Pinto; Ferreira, 2006).

Para Búrigo (1990), o objetivo principal do Movimento da Matemática Moderna não era a mudança curricular, mas criar um momento de estudos, discussões, confronto de ideias entre educação e sociedade, ciência e tecnologia.

De acordo com as Diretrizes curriculares de matemática (Paraná, 1973), o que estava previsto sobre as frações equivalentes é que por meio das classes de

equivalência, iria adicionar e subtrair frações heterogêneas. Já, na revista currículo de número 24 estava previsto estabelecer relação de equivalência entre frações aparentes e inteiros; entre as frações estudar as classes de equivalência; e, através destas, realizar as operações de adição e subtração de frações heterogêneas (Paraná, 1977).

Esse período trouxe para a educação matemática mudanças, avanços em relação ao ensino, “[...] foram dados os primeiros passos para articularem o ensino da Matemática com o desenvolvimento científico e tecnológico” (Pinto; Ferreira, 2006, p. 121).

Com isso, pode-se dizer que o NEDEM teve um papel fundamental na difusão do Movimento da Matemática Moderna no Paraná. De acordo com Pinto e Ferreira (2006), e Portela (2009), os integrantes do NEDEM foram persistentes, almejavam mudanças na forma tradicional de ensinar, para isso não mediram esforços para entregar um material de qualidade. No que tange a coleção de livros do ensino primário, “[...] o livro que era consumível, vinha acompanhado do livro do mestre com o direcionamento do trabalho” (Portela, 2009, p. 103). De acordo com Pinto e Ferreira (2006), o grupo juntamente com seu fundador, manteve, durante duas décadas, os professores paranaenses envolvidos com propostas modernas para o ensino de matemática.

Diante dos fatos, há de se dizer que o Movimento da Matemática Moderna paranaense pode ser caracterizado por suas mudanças no ensino de matemática. É perceptível que esse período trouxe modificações na forma de ensinar, desestruturando a matemática então ensinada, que possibilitou aos professores participarem de congressos, cursos e palestras. Destaca-se o grupo paranaense NEDEM, que, pautado na apropriação do ideário da Matemática Moderna e aliado com a experimentação em sala de aula, elaborou propostas para o ensino da Matemática objetivadas em coleções de livros didáticos e mudanças curriculares. Dentre todos os avanços, percebeu-se a virada na forma de ensinar matemática, a qual estava em consonância com o projeto nacionalista de desenvolvimento científico e tecnológico.

2.2 Pesquisas sobre as frações equivalentes em perspectiva histórica

O livro “A matemática no ensino de frações: do século XIX a BNCC”, de Moraes, Bertini e Valente (2021), tem dois objetivos, divulgar e sistematizar resultados das pesquisas desenvolvidas pelo grupo GHEMAT Brasil, bem como, compreender a formação de professores para o ensino das frações nos primeiros anos escolares em diferentes vagas pedagógicas. Dentro dessa temática os autores discutem os conceitos de matemática do ensino e ensino de matemática. Trazendo contribuições de como, ao longo do tempo, a matemática do ensino das frações vem sendo caracterizada.

Para os autores, em tempos de matemática tradicional⁴⁵ do ensino de frações, o ensino parece ter como propósito preparar o aluno para vida fora da escola, para que tenha destreza nos cálculos. Num próximo momento, em tempos de matemática nova do ensino de frações, as frações deverão estar articuladas nas atividades que envolvam o aluno, no momento em que “[...] a ação tem predominância e dá sentido àquilo que os alunos deverão experimentar na escola” (Moraes; Bertini; Valente, 2021, p. 73). Na matemática moderna do ensino de frações, as frações são uma passagem para se chegar ao número racional. Nesse período “[...] a graduação do ensino passa ser o foco central nas orientações para o trabalho do professor e se toma como fundamento a Pedagogia de Jean Piaget com as operações concretas” (Moraes; Bertini; Valente, 2021, p. 73). Como resultado desta pesquisa em perspectiva histórica, aponta-se que o ensino de frações sofreu alterações ao longo do tempo, em termos de materiais, metodologias de ensino, significados em suas diferentes representações, graduação, sequência, exercícios e problemas.

Marques (2021), em seu trabalho de conclusão de curso de graduação, “A matemática “moderna” do ensino das frações equivalentes nos livros do NEDEM”, buscou caracterizar as frações equivalentes, presentes no material produzido pelo Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM), nas décadas de 1960 e 1970. Esse material é composto por dois cadernos de atividades e a coleção Ensino Moderno de Matemática destinada a primeira, segunda, terceira e quarta série do ensino primário respectivamente, mais o Livro do Mestre, que foram escritos por: Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminsky Arruda, Nelly Humphreys.

⁴⁵ Século XIX e início do século XX.

Conforme mencionado na seção anterior, os cadernos de atividades eram elaborados para serem testados com os alunos, após, eram realizadas correções necessárias, a fim de melhorar o material. Com esse processo, a coleção foi produzida.

Marques (2021) buscou caracterizar o material, acima mencionado, utilizando-se das categorias de análise de Moraes, Bertini e Valente (2021). Identificando que as autoras das obras do NEDEM se apropriaram dos conteúdos e das inovações pedagógicas proposta para o ensino da Matemática Moderna. As noções de frações equivalentes aparecem no volume III, e no volume IV se trabalha a propriedade das frações equivalentes.

A autora evidencia que a graduação no ensino de frações equivalentes teve início a partir dos números naturais, com a noção de equivalência, como por exemplo, $\frac{15}{3} = 5$ (quinze terços é equivalente a cinco). Em seguida, apresenta a definição de frações e as características das frações equivalentes, aprofunda as relações de equivalência entre: números naturais e fracionários, números fracionários e números mistos, enfatizando a comparação das frações equivalentes com os números naturais. Traz o conceito das frações equivalentes por meio das propriedades e das classes de equivalência e tem seu ponto de chegada, nas relações entre frações equivalentes e números racionais. Os problemas e exercícios apresentam atividades com frações equivalentes, fazendo relação com quadro de frações equivalentes, reta numérica, conjunto de frações equivalentes e classes de equivalência (Marques, 2021).

Novaes e Pinto (2021) no artigo “Estudos sobre frações no campo da História da educação Matemática: avanços e desafios”, examinaram quinze estudos com o tema frações, realizados em pesquisas da História da educação matemática entre 2019 e 2020. Observamos que, cinco deles fazem referência às frações equivalentes. Segundo as autoras, Kuhn (2019), na análise das frações nas edições da Segunda Aritmética da Série Concórdia de 1940, verifica que o livro desenvolve a ideia de frações equivalentes a partir de representações geométricas retangulares, e conceitua as classes de equivalência por meio das frações unitárias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$.

O estudo de Domingues, Gregório e Costa (2020) “Matemática a ensinar e matemática para ensinar fração: algumas considerações das produções de Bezerra”, tem por objetivo explicar o referencial teórico-metodológico, e a matemática *a* e *para* ensinar frações, presentes no material Blocofração, produzido pelo professor Manoel

Jairo Bezerra (1958)⁴⁶. Para tanto, em busca das orientações didáticas e pedagógicas para o ensino de frações, os autores realizaram uma análise no artigo publicado pela Revista do Ensino, RS – 1962, onde Bezerra apresenta orientações metodológicas para ensinar frações. Para cotejar informações buscaram por outras produções de Bezerra como: caderno MEC de (1968); e do Guia Metodológico do Caderno MEC (1970). Ainda destacam que em suas obras há orientações acerca do uso do material Blocofração para muitos conteúdos relacionados as frações.

Os autores observam que o artigo analisado oferece orientações metodológicas para ensinar frações, essas orientações servem para o primário, mas também para outros níveis de escolaridade. Observam que o material didático Blocofração é um auxiliar para o ensino de frações, e que “[...] as orientações metodológicas e didático-pedagógicas vistas nas produções de Bezerra, em relação ao ensino de Frações, apresentam aderência ao Movimento da Matemática Moderna” (Domingues; Gregório; Costa, 2020, p. 16). Em relação ao ensino de frações equivalentes, expõem uma atividade sobre simplificação de frações, fazendo relação com o conceito de frações equivalentes, através da comparação de peças de cores iguais e diferentes.

Novaes e Nierri (2020), por meio da análise do livro “Didática das Matemáticas Elementares” de Angel Diego Márquez (1967), debruçaram-se nas propostas para ensinar frações equivalentes recorrendo as barras Cuisenaire⁴⁷. O número é percebido como uma grandeza contínua e as frações são concebidas como operadores. Por intermédio da manipulação das barras, pela tentativa e erro, as crianças descobrem as frações equivalentes.

No estudo de Marques e Novaes (2019), “Saberes para ensinar frações equivalentes em livros didáticos e manuais pedagógicos (1960-1970)”, as autoras buscaram compreender os saberes para ensinar frações equivalentes nas propostas de ensino de livros didáticos e manuais pedagógicos. O estudo apontou que, os materiais analisados enfatizam a importância das crianças compreenderem os conceitos das frações, porém recorrem e enfatizam o uso das regras e algoritmos para o ensino das frações equivalentes.

⁴⁶ Manoel Jairo Bezerra, nascido em 1920 no Rio Grande do Norte, graduado em Matemática pela Faculdade Nacional de Filosofia, professor em várias instituições de ensino, produziu dezenas de livros, artigos científicos para o Ensino Primário, Secundário e, para a formação de professores. <https://www.ghemat.com.br/itens/manoel-jairo-bezerra>

⁴⁷ O conjunto de Barras Cuisenaire compõe a Escala Cuisenaire.

Novaes, Berticelli e Pinto (2020) analisam três manuais pedagógicos, e apresentam o estudo “Transformações nos saberes para ensinar frações no curso primário relacionadas ao uso de materiais escolares (1930-1970)”, e destacam o manual de Albuquerque (1958). Dentre suas contribuições, o manual sugere o quadro de equivalência de frações, pois julga o conceito de equivalência importante para a apropriação do conhecimento de frações.

Nas produções realizadas em 2021, na revista HISTEMAT⁴⁸, identificou-se o Dossiê – Ensino de Frações: história e perspectivas atuais. O Dossiê é composto por um editorial apresentado por Novaes e Ramires (2021), e 21 artigos sobre a temática frações, em que 7 desses estão compreendidos no período da Matemática Moderna. Para dialogar com o objeto desta pesquisa, bem como o período no qual ele se insere, destacam-se 6 desses artigos, por trazerem contribuições sobre as frações equivalentes: Portela, Pires e Costa (2021), no artigo intitulado “O ensino de frações na década de 1960 e os saberes docentes do professor da escola primária”, voltam-se para uma análise de dois manuais pedagógicos que circularam no estado do Paraná, “Matemática na Escola Primária Moderna” de Osório e Pôrto (1965), e “A Escola Viva” de Fontoura (1964). Os autores observam que, em ambos os manuais, o ensino de frações parte do concreto, através de materiais que são do cotidiano do aluno (laranja, bolo, pão, pudim, litro de leite). O manual pedagógico de Osório e Pôrto (1965), apresenta uma única ilustração referente as frações, com uma imagem em que as frações equivalentes estão representadas na reta numérica.

O estudo apresentado por Rodrigues, Godoi e Costa (2021), tem por objetivo analisar as propostas didáticas para o ensino de frações presentes no manual pedagógico de Rizza Porto (1968). O trabalho tem como título, “O manual pedagógico “ver, sentir, descobrir a aritmética: o ensino de frações através das partes. De acordo com os estudos de Rodrigues, Godoi e Costa (2021), o livro em questão foi desenvolvido para atender propostas da Escola Nova, e fica evidente, pois, além das resoluções acontecerem por meio da manipulação e exploração do material por parte do estudante, o ensino de frações estava relacionado com o cotidiano do aluno. Apesar disso, circulou no Brasil em tempos do Movimento da Matemática Moderna.

⁴⁸A opção pelos artigos da Histemat é por ser uma revista especializada em História da educação matemática, e que organizou um Dossiê sobre frações em perspectiva histórica.

Verificam que o ensino de frações é reforçado pelo manuseio dos discos de frações e pela verificação visual, afirmam que a manipulação do material concreto possibilita a compreensão das operações fracionárias de adição subtração, multiplicação e divisão. A equivalência de frações pode ser verificada pela superposição de parte, como exemplo, metade do disco é equivalente a duas partes fracionárias de $\frac{1}{4}$. A adição de frações mistas com denominadores distintos é realizada através de frações equivalentes e o material com as partes fracionárias se caracteriza como uma metodologia para o ensino de frações (Rodrigues; Godoi; Costa, 2021).

O artigo “A matemática moderna do ensino de frações na escola de oito anos (décadas de 1960 e 1970)”, de Bertini e Morais (2021), traz uma análise sobre o ensino de frações presente nos cinco primeiros livros da coleção “Curso moderno de matemática para o ensino de primeiro grau” (1967, 1968, 1974, 1975, 1977). As autoras justificam que a escolha desses livros se deu em virtude de serem publicações finais da fase experimental, por terem passado por ajustes necessários para a adequação da escola básica de oito anos e por serem da década de 1970.

As autoras apontam uma graduação do ensino, que vai do intuitivo, frações mais familiares aos alunos a um trabalho exaustivo com as frações equivalentes. O trabalho com frações equivalentes se inicia na segunda série, pois são bases para a adição e subtração de frações em séries posteriores. Destacam uma sistematização na linguagem, através da sequência de exercícios e ilustrações, como exemplo “as ideias de frações equivalentes, de fração irredutível, de mínimo múltiplo comum, e os procedimentos de comparar, adicionar ou subtrair frações” (Bertini, Morais, 2021, p. 17). Esse exemplo possibilita melhor compreender a graduação do ensino que as autoras citam. Ainda destacam que, no livro da 5ª série, “[...] a fração é tratada como uma das representações dos números racionais” (Bertini; Morais, 2021, p. 15).

O estudo apresentado por Alves (2021), intitulado “A matemática do ensino de frações: uma história lida a partir de livros didáticos produzidos no Rio Grande do Sul (1960-1970)”, apresenta as transformações decorrentes do Movimento da Matemática Moderna e as abordagens no ensino de frações presentes em três livros didáticos voltados à 4ª série. As coleções em questão são: Estrada Iluminada (1961) e Nossa Terra Nossa Gente (em duas versões, não constam datas). O autor destaca que os três livros apresentam a matemática a ser ensinada na 4ª série de escolarização, a partir de exercícios e problemas.

Nas obras “Estrada Iluminada” e “Nossa Terra Nossa Gente 1” não aparecem elementos da matemática moderna, nem frações equivalentes ou as classes de equivalência. Já no livro da 4ª série, da Coleção “Nossa Terra Nossa Gente 2”, as classes de equivalência são abordadas, evidenciando a Teoria dos Conjuntos no qual Alves (2021) destaca que fica evidente o uso dos sinais de desigualdade presentes nas proposições de comparação de frações, elementos que permitem inferir a presença do Movimento da Matemática Moderna, nesta coleção elaborada por autora do Rio Grande do Sul.

Trindade e Búrigo (2021), com seu trabalho intitulado “O Guia Curricular Riograndense de 1972 e as orientações sobre ensino de frações para as séries iniciais”, apresentam as orientações para o ensino de frações em documento elaborado pela Secretaria de Educação e estado do Rio Grande do Sul. As autoras percebem a ênfase dada ao ensino de frações por meio da partição de conjuntos, partição de figuras e medidas de grandezas variadas. As últimas orientações referentes ao ensino de matemática para as séries iniciais fazem referência à construção de classes de equivalência e para algumas propriedades de frações equivalentes em que “[...] a infinidade de elementos de uma classe de frações equivalentes é salientada por meio de uma situação de experiências orientando uma discussão sobre o tema” (Trindade; Búrigo, 2021, p. 12). A noção de frações equivalentes é construída através da partição de conjuntos e subconjuntos equivalentes, recortes em cartolina, seguindo para estudos de algumas propriedades de equivalência como: a construção de frações equivalentes por meio da multiplicação do numerador e denominador por um fator comum e pela propriedade da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se, e somente, se $ad = bc$.

Wrobel, Kill (2021), com o estudo “Classes de equivalência: uma abordagem moderna para o ensino de frações” apresenta propostas para o ensino de classes de equivalência, presentes em dois livros didáticos de inspiração modernista, o paulista “Matemática Curso Moderno” de Sangiorgi (1965), e o capixaba, “Coleção Matemática Orgânica” de Merigueti e D’Avila (1974, 1975, 1976). No primeiro, as frações são apresentadas em diferentes interpretações: parte todo, medida e classes de equivalência. Já na Coleção Matemática Orgânica, todo o conjunto dos números racionais é construído através dos conjuntos, relações e classes de equivalência. “Tal

subconstructo⁴⁹ permeia o capítulo inteiro dos números racionais, sem que outra abordagem para frações seja disponibilizada” (Wrobel, Kill, 2021, p. 1). Diante das obras analisadas concluíram que não havia consenso no ensino de frações, mesmo os autores se assumindo como modernistas. Para Wrobel e Kill (2021), o pilar do modernismo estava na teoria dos conjuntos.

Dos trabalhos publicados no 20º Seminário Temático⁵⁰ Internacional História da Produção Curricular em Matemática: Saberes para o ensino e formação de professores (2022), somente o trabalho de Nierri, Berticelli e Novaes (2022) trouxe a temática frações como resultado parcial da dissertação de mestrado. O trabalho apresenta uma análise das frações equivalentes no período do Movimento da Matemática Moderna, do livro “Ensino Moderno de Matemática” para a 4ª série. Para análise, as autoras se utilizaram da proposta de Moraes, Bertini e Valente (2021): sequência, significado, graduação, exercícios e problemas. O estudo aponta que o livro traz uma linguagem de fácil compreensão, em que o ensino das frações equivalentes ocorre por representação geométrica, utilizando a reta numérica, e também, por classes de equivalência, rumo à compreensão dos números racionais. Nesse estudo, as autoras observam que o livro didático em questão trabalhou as frações equivalentes, fazendo uso da representação geométrica, da reta numérica e das classes de equivalência. Observaram que, para efetuar adição e subtração de frações, consultavam-se as classes de equivalência.

Em análises a livros didáticos de diferentes momentos históricos, Gomes (2006) destaca que, no contexto do Movimento da Matemática Moderna, das cinco obras analisadas, correspondente ao primeiro ano da escola secundária, duas, a de Quintella (1967) e a de Castrucci e Bóscolo (1966), definem o número racional via classes de equivalência de uma fração. E quatro, das cinco, apresentam, “[...] a classe de equivalência de uma fração como o conjunto das frações a ela equivalentes” (Gomes, 2006, p. 19). De acordo com Gomes (2006), características marcantes

⁴⁹ Terminologia semelhante a interpretação.

⁵⁰ O Seminário Temático Internacional é organizado por professores pesquisadores que compõem o GHEMAT Brasil, tem como linha de pesquisa a História da educação matemática, por esse motivo buscamos analisar as produções que foram desenvolvidas dentro do período e da temática que este trabalho foi realizado. Os últimos anais do Seminário estão disponíveis em: <https://anais.ghemat-brasil.com.br/index.php/STI/>.

defendidas pelos modernistas, presentes nos livros didáticos, eram as estruturas algébricas, linguagem dos conjuntos e o estudo das relações.

Estudos, como o de Villela (2009), comentam que os livros da coleção “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau”, tiveram milhares de exemplares vendidos, que a matemática utilizada na coleção estava totalmente em consonância com o ideário da Matemática Moderna, e que as inovações não foram apenas no conteúdo, “Inovaram na forma e na maneira de trabalhar os conceitos matemáticos ao longo das duas coleções” (Villela, 2009, p. 203).

Durante sua pesquisa de doutorado, Gouveia (2021) buscou nos livros da coleção “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau”, do GRUEMA volumes II, III, e IV, que fazem referências a 2ª, 3ª e 4ª série do ensino primário respectivamente, orientações sobre que matemática para ensinar estava presente ao introduzir o ensino de frações. Desse estudo, tem-se que o ensino de frações ocorreu de forma gradual. Há presença marcante da reta graduada, na 3ª série, possibilitando que, de forma visual, o aluno realize associações e descobertas sobre as frações e sua representação na reta numérica, “[...] utilizando gráficos e ilustrações, bem como propõem situações com o uso de material concreto, sugerindo, para isso, o Material Dourado de Montessori⁵¹” (Gouveia, 2021, p. 12).

De acordo com Gouveia (2021), entende-se que as representações gráficas são facilitadores para perceber a existência das frações equivalentes. Após o manuseio do material concreto, é mostrado para o aluno a construção das classes de equivalência, que servem de auxílio para resolver as operações de adição e subtração de frações.

Ao realizar a pesquisa sobre frações, Gouveia (2021, p. 14), destaca que o estudo de conjuntos não foi mobilizado, “[...] percebemos pelo arranjo, na qual as atividades eram propostas, que a ideia de grupos se fazia muito presente, por mais que não estivesse explícito o uso do ideário de conjuntos, que era uma objetivação clara do M.M.M”.

Cada livro da coleção acima citada, apresenta um Guia do Professor, com informações básicas como regras e definições sobre o conteúdo, caminhos que o professor possa trilhar.

⁵¹ Apesar desse material ser criado na primeira década do século XX, ele continuou sendo utilizado na década de 1970, até os dias atuais.

Por fim, é possível dizer que a coleção GRUEMA, ao propor o estudo de frações, se revela como um documento importante que objetivava uma matemática para ensinar em tempo do M.M.M. Ela significou um guia de orientações para o professor e para o aluno (Gouveia, 2021, p. 15).

Jandrey (2022), em sua dissertação “A matemática do ensino de frações na coleção “Matemática, metodologia e complementos” de Ruy Madsen Barbosa (1966)”, considera as classes de equivalência uma importante relação no estudo das frações equivalentes.

A utilização de classes de equivalência é evidente em todo o capítulo de frações, e apresenta uma sequência para o conteúdo de números racionais, partindo dos números fracionários para depois introduzir os números decimais (Jandrey, 2022, p. 149).

Outro indício da Matemática Moderna que Jandrey (2022) destacou estar presente na coleção de Ruy Madsen Barbosa, foi a utilização de uma linguagem matemática bem definida, com orientações de como o professor deveria desenvolver o ensino dos números racionais, progredindo da ideia de conjuntos para as definições, regras e conceitos. O autor ainda destaca que

[...] utilização de uma linguagem simbólica, a utilização de conceitos e elementos da Teoria dos Conjuntos e das Estruturas Algébricas, advindas do campo do ensino superior para o ensino primário, característico do Movimento da Matemática Moderna (Jandrey, 2022, p. 110).

De acordo com o estudo realizado por Jandrey (2022) na coleção “Matemática, metodologia e complementos” de Ruy Madsen Barbosa (1966), o ensino das frações parte do concreto para o abstrato, na *sequência* apresentada na coleção, o ensino dos números fracionários vem antes do ensino dos números decimais, a linguagem presente é bem definida, utiliza-se de símbolos e definições. A teoria dos conjuntos está presente na coleção, com ênfase nas frações equivalentes, sendo um pré-requisito para o ensino das operações de adição e subtração de frações.

Diante dos trabalhos selecionados que fazem referência ao Movimento da Matemática Moderna, dentro da temática frações e frações equivalentes, percebe-se que esse período trouxe mudanças para o ensino das frações e das frações equivalentes como por exemplo a linguagem e as classes de equivalência. Porém, nem todos os livros didáticos e manuais pedagógicos que foram objetos de pesquisa

dos trabalhos analisados apresentam as mesmas características quanto ao ensino das frações equivalentes, permanências como o quadro de equivalência e os discos de frações são recorrentes.

Pode-se observar a partir das análises feitas pelos autores ora citados que livros como: “Matemática na Escola Primária” (Osório; Porto, 1965), “Ver, Sentir, Descobrir a aritmética” (Porto, 1968), “A Escola Viva” (Fontoura, 1964), circularam em tempos de Matemática Moderna, mas foram produzidos para atender propostas da Escola Nova.

Livros como, Caminhos Iluminados, Nossa Terra Nossa Gente 1, produzidos nesta época, traziam diferentes formas de ensinar as frações, e não apresentam elementos da matemática moderna. As coleções “Matemática Curso Moderno” de Sangiorgi (1965), “Coleção Matemática Orgânica” de Meriguetti e D’Avila (1974, 1975, 1976), mesmo os autores se assumindo como modernistas, não havia um consenso na forma de ensinar as frações. No primeiro, as frações são trabalhadas a partir de ideias como: parte todo, medida e classes de equivalência, já no segundo, o conjunto dos números racionais é construído através dos conjuntos, relações e classes de equivalência.

Sangiorgi inclui em seus livros didáticos, o tópico classes de equivalência como proposta para o ensino de frações, mas ainda assim apresenta uma transição mais suave as ideias modernistas. Enquanto os livros de Meriguetti e D’Avila, os autores foram mais radicais ao apresentar o conjunto dos números racionais pelo prisma das estruturas algébricas⁵².

Em algumas coleções, o trabalho com frações equivalentes inicia ainda na 2ª série, como é o caso da coleção “Curso moderno de matemática para o ensino de primeiro grau” do GRUEMA, já na coleção do NEDEM, “Ensino Moderno de Matemática”, inicia na 3ª série. Essas coleções de acordo com: Moraes, Bertini e Valente (2021); Marques (2021); Villela (2009); Nierri, Berticelli e Novaes (2022), a matemática utilizada estava em consonância com a Matemática Moderna.

⁵² O termo prisma das estruturas algébricas se refere a forma que o conteúdo foi apresentado, trazendo termos e conteúdos com: substrato teórico nas noções de conjunto; menção do par ordenado como elemento do conjunto referido; propriedades da relação de equivalência em questão, até a culminância com as classes de equivalência grupo aditivo e o conjunto dos números racionais, munido das operações de adição e produto, constituindo um corpo.

Verifica-se que dentre os trabalhos analisados, os autores Moraes, Bertini, Valente (2021); Marquez (2021); Bertini, Morais (2021); Nierri, Berticelli, Novaes, (2022); Jandrey (2022), afirmam que o ensino de frações é uma passagem gradual e progressiva para se chegar ao número racional.

Percebe-se que a ênfase dada ao ensino das frações equivalentes, e às classes de equivalência, pode ser considerada um marco do MMM, dentro do ensino das frações. No que tange a uma matemática a ensinar, vários trabalhos apresentam a reta numerada para ensinar a desigualdade e a equivalência das frações; as representações geométricas e noção de frações equivalentes, através da partição de conjuntos e subconjuntos equivalentes. As transformações nos saberes para ensinar frações ocorrem a partir do uso de materiais didáticos como o Disco de Frações, a Escala Cuisenaire e o Blocofração.

Nos trabalhos analisados, principalmente nos que se referem a manuais pedagógicos, Guias do Professor, ou Livro do Professor, denota-se um cuidado quanto a matemática para ensinar, entendida como “[...] ferramenta do trabalho docente, expressa o saber que o professor precisa ter para ensinar” (Morais; Bertini; Valente, 2021, p. 75). Em virtude das orientações de como o professor deveria proceder para ensinar as frações, os caminhos a percorrer, levando o aluno a uma construção dos saberes em questão.

As classes de equivalência, uso de diagramas, reta numérica relações de equivalência, conjuntos e linguagem são características presentes em tempos de Matemática Moderna. No entanto as classes de equivalência, o uso do quadro de frações equivalentes e as relações de equivalências através de figuras geométricas são conceitos que vinham de vagas pedagógicas anteriores, como Escola Nova. Teriam suas práticas outras finalidades durante o MMM?

A partir do panorama das pesquisas em perspectiva histórica, cuja temática são as frações, percebe-se que nenhuma aprofunda a temática das frações equivalentes que, durante o Movimento da Matemática Moderna, em muitos manuais pedagógicos e livros didáticos parecem ser trabalhadas de forma exaustiva, rumo a construção do número racional.

2.3 Pesquisas sobre as frações equivalentes na atualidade

A relação presente o passado permite compreender permanências de longa data em relação as frações equivalentes mas também rupturas com o passado.

O campo dos números racionais surge da necessidade humana de medir grandezas contínuas, percebendo que a unidade de medida não cabia quantidades inteiras de vezes na grandeza a ser medida e sendo os números naturais insuficientes para atender a essa necessidade, “[...] para fazer a subdivisão da parte inteira, era necessário superar o campo numérico já conhecido para um novo conceito, as frações e depois, o campo dos números racionais” (Romeiro; Moretti, 2021, p. 468). Nesse sentido, é preciso ter cuidado ao se trabalhar as ideias básicas das frações, onde o numerador e o denominador de uma fração são tidos como dois números naturais independentes, o denominador representa a quantidade de parte que um inteiro foi dividido e o numerador a quantidade de partes que foram tomadas. Para Romeiro; Moretti (2021), apesar das frações remeterem ao conceito de continuidade, muitas vezes, no ensino, o conceito de fração fica limitado ao significado parte-todo, onde a grandeza discreta fica evidenciada. Afirmando que, nesse caso, o conjunto dos números naturais é suficiente.

Para Monteiro; Groenwald (2014), ao se trabalhar o conceito parte-todo deve-se trabalhar também com frações maiores que uma unidade, facilitando assim a compreensão das frações equivalentes pois “[...] a equivalência de frações foi um dos conceitos que os alunos apresentaram grandes dificuldades iniciais, talvez, resultado da falta de compreensão de alguns significados das frações” (Monteiro; Groenwald, 2014, p. 120). Nesse sentido, no desenvolvimento do conceito de frações equivalentes, é importante que o aluno reconheça que as frações podem ser escritas de diferentes formas: frações próprias, impróprias, mistas e aparentes.

De acordo com Monteiro; Groenwald (2014), entender a fração como um número é fundamental para a compreensão de equivalência, e Romeiro e Moretti (2021, p. 469) apontam que a “[...] necessidade de pensar teoricamente, num processo mediado pelo conceito de fração equivalente, se deu a partir de situações envolvendo a comparação de grandezas contínuas subdivididas em quantidades diferentes”. Garcez (2013) Martinho (2020) afirmam que o conceito de frações equivalentes, pode ser visto na comparação e ordenação de frações, e nas operações de adição e subtração de frações e que “[...] o entendimento da fração como número é imprescindível para que o aluno inicie a compreensão de equivalência e

posteriormente realize os algoritmos das operações corretamente” (Monteiro; Groenwald, 2013, p. 117).

O conhecimento aprendido mecanicamente, sem interligações, relações entre conteúdos, fica isolado. A “ideia” é algo que se conhece, ou que não se conhece, mas isso é diferente de compreender. Por exemplo a fração $\frac{6}{8}$, a maioria dos estudantes sabe ler, identificar o numerador e o denominador, dizer que $\frac{6}{8}$ é maior que $\frac{1}{2}$, pelo fato de, talvez, associar que os números 6 e 8 são maiores que 1 e 2. Ao comparar frações equivalentes como $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{4}$, muitas vezes não compreendem que essas representam uma mesma quantidade, são números idênticos, pensando até que $\frac{3}{4}$ é menor que $\frac{6}{8}$. Isso são ideias erradas que os alunos trazem por não compreender as frações que fazem parte de outro campo numérico diferente dos números naturais (Van de Walle, 2009).

Outros estudantes com uma compreensão melhor podem utilizar de vários modelos para explicar a igualdade dessas frações através do conceito de equivalência em que “[...] cada estudante traz um conjunto diferente de pontos ao seu conhecimento de frações. Cada um ‘compreende’ frações de um modo diferente” (Van de Walle, 2009, p. 45).

Para o autor, uma abordagem que ajuda na construção de uma compreensão de frações equivalentes é usar modelos para encontrar diferentes nomes para uma fração. Sugere o uso do modelo de área no qual a criança, ao manipular fatias circulares, encontre outros nomes de frações equivalentes. A ideia é que os nomes equivalentes encontrados vão além do que o material possa representar, que a partir dele, através de uma “[...] abordagem puramente de ‘tentativa e erro’ outros nomes equivalentes surjam” (Van de Walle, 2009, p. 338). Outras formas indicadas por ele são: malha pontilhada em papel, dobraduras de papel, papel com malha geométrica, para que, através da área, identifiquem-se frações equivalentes.

Outra atividade com equivalência de frações consiste em: dadas duas frações, por exemplo: $\frac{6}{8} = \frac{\quad}{12}$, determinar o número desconhecido, podendo ser o numerador ou o denominador, em que, neste caso, é o numerador. O resultado é encontrado através de múltiplos simples de números inteiros entre as frações equivalentes, além disso essas frações não se apresentam em sua forma reduzida, o que Van de Walle (2009, p. 340) considera ser mais interessante, pois “essa atividade é surpreendentemente desafiadora, especialmente se for cobrado dos alunos modelos com conjuntos”.

De acordo com Van de Walle (2009), para dar continuidade ao estudo de frações equivalentes, faz-se necessário retomar atividades de comparações de frações, assim, as crianças ao compararem frações buscam por outros nomes até encontrar frações com denominadores iguais, para ajudar no raciocínio de qual fração é maior. A comparação tem como meta ajudar o aluno a perceber que se multiplicarem os números da parte superior e da parte inferior de uma fração por um mesmo número, encontrarão uma fração equivalente.

Para mostrar a equivalência com uma abordagem de área, divide quadrados equivalentes em $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{20}$, mostrando que esses são resultados da multiplicação de $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ e $\frac{5}{5}$ respectivamente.

Para os pesquisadores Petit, Laird, Marsden (2010), as frações equivalentes apresentam grandes ideias, dentre elas duas propriedades são centrais: duas frações são equivalentes, quando apresentam nomes diferentes para o mesmo número, e existem infinitas frações equivalentes. Afirmam que muitos alunos encontram dificuldades em comparar, ordenar e operar com frações.

Porém para Kami e Clark (1995), a maneira com que os professores ensinam as frações equivalentes com palavras faladas, símbolos e algoritmos não favorece, a compreensão, gerando um problema. Inclusive eles criticam um ensino que privilegia e se baseia somente nos aspectos figurativos, como os apresentados por Van de Walle (2009).

De acordo com os autores supracitados, Kamii e Clark (1995, p. 367 e 369):

[...] pesquisadores geralmente consideram o conhecimento de frações equivalentes como a capacidade de chamar o mesmo número por nomes diferentes, a capacidade de ignorar ou imaginar linhas divisórias e/ou uma manifestação de pensamento flexível.

Por outro lado, Jean Piaget “fez uma distinção entre o aspecto figurativo do conhecimento (baseado em formas, que são observáveis) e o aspecto operatório (baseado em relacionamentos, que não são observáveis)” (Kamii; Clark, 1995, p. 369). Os autores trazem um exemplo da metade de um retângulo, que pode ser retangular ou triangular. Do ponto de vista figurativo, a metade retangular parece maior que a metade triangular, mas, do ponto de vista operativo nos permite deduzir que as duas metades são iguais. Complementa que em relação às frações equivalentes há dois

aspectos relacionados ao pensamento operativo, o pensamento multiplicativo e a conservação do todo e das partes.

Dentre as grandes ideias sobre frações, para Lamon (2012) está o conceito de frações equivalentes em que “muitos nomes fracionários diferentes designam a mesma quantidade. Duas frações diferentes que representam a mesma quantidade são chamadas de equivalentes” (Lamon, 2012, p. 145).

Compreender a equivalência é ter procedimentos eficientes para encontrá-la, daí a importância em mostrar para o aluno estratégias eficientes e generalizadas para encontrar frações equivalentes.

As ideias de ordem e equivalência são conceitos fundamentalmente importantes. [...] Compreender a equivalência de frações é crucial para a capacidade do aluno de somar e subtrair frações e comparar e ordenar frações (PETIT; LAIRD; MARSDEN, 2010, p. 133).

Destacam-se os modelos indicados por Petit, Laird, Marsden (2010), para desenvolver a compreensão conceitual de equivalência. Através da reta numérica mostram que as frações $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ e $\frac{12}{16}$ são localizados no mesmo ponto, em modelos de área as frações equivalentes são representadas pelas mesmas regiões e nos conjuntos as frações equivalentes resultam na mesma contagem de objetos.

De acordo com Lamon (2012, p. 136), “[...] as crianças precisam de muitas experiências informais com frações antes de prosseguir para as operações formais de frações, porque precisam desenvolver algum senso de fração⁵³”. Isso quer dizer que o aluno precisa ter experiências que o ajudem a estabelecer conexões entre as frações, comparar, ordenar, estabelecer relações de equivalência, e saber julgar se as respostas encontradas são, ou não, razoáveis ao que se está sendo pedido, por exemplo: “Que parte de uma pizza” [...] requer uma resposta fracionária.

Para essas experiências informais, Lamon (2012, p. 148) diz que “[...] a unitização é a base para a compreensão de frações equivalentes”. A unitização ajuda a gerar nomes equivalentes para a mesma quantidade. Considerando que $\frac{3}{5}$ de um retângulo está sombreado, isso significa que dividimos o retângulo em cinco partes iguais e estamos comparando a área de três dessas partes em relação ao todo, que

⁵³ Na dissertação não será aprofundado esse conceito, mas poderia ser aprofundado em trabalhos futuros.

é a área das cinco partes. Poderíamos pensar no mesmo retângulo divididos em vinte partes congruentes e sombrear doze dessas, a fração que representa a área sombreada é $\frac{12}{20}$. Assim facilita a criança a perceber que as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{12}{20}$ são equivalentes. Segundo a autora a unitização envolve a coordenação do número total de peças e os tamanhos das peças, envolve o princípio da medição, que ela considera fundamental no desenvolvimento do senso de fração (LAMON, 2012).

Garcez (2003) destaca que a compreensão do conceito de frações equivalentes, sem recorrer ao uso de regras deve ser priorizado, e destaca que três pontos são fundamentais para compreender o conceito de frações equivalentes. Frações são equivalentes quando representam a mesma quantidade, ao se multiplicar ou dividir o numerador e o denominador por um mesmo número encontram-se frações equivalentes, e pela propriedade da multiplicação cruzada, sejam duas frações $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ com b e d diferentes de zero são equivalentes, se, e somente se, $ad = bc$.

Nunes (2003) ressalta que as frações equivalentes devem ser ensinadas pelo professor de maneira conceitual e não através de um conjunto de regras, pois os alunos precisam entender o conteúdo e suas aplicações, bem como, esse se relaciona com os contextos escolares, reconhece não ser tarefa fácil, mas necessária para uma aprendizagem mais significativa, não somente vinculada à memorização de regras e algoritmos.

Com base nas pesquisas apresentadas, uma proposta atual para se trabalhar as frações equivalentes seria compreender a representação de uma fração, utilizando modelos. A igualdade de frações resulta do uso de diferentes nomes para uma fração, esses podem ser percebidos através de modelos de área, determinar um número desconhecido entre duas frações equivalentes, comparar frações, reta numérica, perceber a fração com o conceito de continuidade, trabalhar as frações equivalentes na forma de frações próprias, frações impróprias, mista e aparente.

Para o ensino de frações, sugere-se que as crianças tenham muitas experiências informais antes de formalizá-las. Partindo do uso do material concreto, mas que as experiências vão além do material para que o aluno possa “operar” as frações equivalentes, desenvolver o pensamento multiplicativo tornando o conhecimento sobre os números racionais mais flexível.

Neste capítulo trouxemos uma ideia do que foi o Movimento da Matemática Moderna em nível internacional, nacional e local, e as contribuições desse movimento

para a matemática do ensino no Paraná. Buscamos em pesquisas de cunho histórico o que já foi produzido sobre o ensino das frações equivalentes em tempos de Matemática Moderna, bem como a matemática do ensino das frações vem sendo caracterizada. Em pesquisas recentes buscamos relatar como está sendo trabalhado a matemática do ensino das frações equivalentes, mesmo sem ser o objetivo principal destacamos que em alguns aspectos o ensino das frações equivalentes se assemelha, ou seja, que há indícios de permanência da matemática moderna na atualidade, como perceber a equivalência de frações através de modelos de área, pela comparação de frações e com o uso da reta numérica.

No capítulo 3 trouxemos uma análise de quatro manuais pedagógico e de duas coleções de livros didáticos juntamente com seus guias do professor, buscando compreender a matemática do ensino de frações equivalentes que circulou no Paraná no período de 1970 a 1980, através das categorias de análise: sequência, significado, graduação, exercícios/problemas (Morais; Bertini; Valente, 2021).

3 UMA MATEMÁTICA MODERNA DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES PRESENTES NOS MANUAIS ESCOLARES EM CIRCULAÇÃO NO PARANÁ

As obras que compõem este capítulo foram selecionadas a partir de muitas buscas e leituras, por vestígios⁵⁴, indicando que essas circularam no Paraná em tempos do Movimentos da Matemática Moderna e que fizeram parte do ensino e da formação de professores que ensinaram matemática nos primeiros anos de escolarização no que tange as frações equivalentes.

Mobilizou manuais escolares que orientaram o trabalho dos professor sendo as obras selecionadas: “Matemática na Escola Primária Moderna” de Norma Cunha Osório e Rizza de Araújo Porto (1968); “Frações na escola elementar” (1967), de autoria Rizza Araújo Porto; “Métodos Modernos para o Ensino da Matemática” (1981), por Charles D’Augustine, lançada em 1968 nos Estados Unidos; O módulo do Projeto HAPRONT de número 9.4, “Operando com números fracionários” (Martins, 1976), coleção “Ensino Moderno da Matemática” de Esther Holzmann, Clélia Tavares

⁵⁴ Esses vestígios estão descritos na seção 1.2 O processo de seleção dos Manuais Pedagógicos e Livros Didáticos.

Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda, Volume II, III e IV, de (1974, 1975, e 1975a) respectivamente, e a coleção “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau” de Manhúcia Perelberg Liberman; Anna Franchi; Lucilia Bechara Sanchez (1974, 1974, 1975a) acompanhada dos Guia do Professor, de mesma autoria que datam (1975, 1975b, 1978).

Como dito anteriormente, os livros didáticos se constituem em preciosos documentos para a escrita sobre os saberes escolares e para a pesquisa da História da educação matemática (Valente, 2008). Para o autor cabe ao historiador da educação matemática analisar o livro didático como um produto cultural completo⁵⁵, para além do conteúdo, deve considerar elementos como a concepção da obra, os autores, editora, de como esses chegaram nas mãos dos professores e alunos. Ir além da análise interna dos conteúdos, buscar dados que evidenciam práticas pedagógicas, [...] o historiador da educação matemática tem, por tarefa, organizar um conjunto de obras didáticas sobre as quais irá se debruçar para investigar a trajetória da educação matemática num determinado período” (Valente, 2008, p. 143).

A validade de um documento pertencer a categoria de manuais escolares⁵⁶ está na “[...] apresentação dos conteúdos seguidos de uma progressão que vai do simples ao complexo” (Choppin, 2009, p. 49). Os manuais antes de estarem sob uso dos alunos, foram produzidos para o professor, esses compreendem em duas categorias: os livros e as revistas. O primeiro como ‘livro do mestre’, ‘livro do professor’, geralmente associado a um determinado manual do aluno e que, [...] seguido das disciplinas e das épocas, dá as respostas às questões ou às correções dos exercícios, ou fornece ao professor as pistas para exploração pedagógica ou ainda documentos ou atividades complementares (Choppin, 2009, p. 54). O segundo faz parte dos livros que orientam os professores em questões pedagógicas ou didáticas, como formas de conduzir a aula e os métodos de aprendizagem, também utilizados na “[...] formação inicial dos professores, (nesse caso, os mestres estão ainda na posição de aluno, eles

⁵⁵ Considerando os elementos internos e externos da obra. Segundo Choppin (2009), compreendem os elementos externos o local de publicação, edição, tradução se for o caso, a trajetória que são os rastros as marcas deixadas no material, e os elementos internos compostos pela parte pré-textual e pós-textual.

⁵⁶ termo correlato a manuais pedagógicos, Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/158952/GLOSSA%cc%81RIO%20VERSA%cc%83O%201.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 08 de setembro de 2023.

podem aprender nos manuais como os outros) ou ao longo de sua vida ativa (aqueles da literatura profissional)” (Choppin, 2009, p. 54-55).

Considerando a importância da utilização dos livros didáticos e manuais pedagógicos como fontes de pesquisa, a partir das nossas análises e comparações, do material por nós selecionados, tendo como base para análise interna as categorias de análise que compõem a *matemática do ensino*, de Moraes, Bertini e Valente (2021), os encaminhamentos didáticos podem sinalizar possível ‘vulgata’, esse fenômeno é definido por Chervel (1990, p. 202):

Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais, ou quase todos, dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a tecnologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do corpus de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas. (Chervel (1990, p. 202)

Sobre esse fenômeno, será possível afirmar que durante o Movimento da Matemática Moderna no Paraná, mais precisamente de (1970-1980), o ensino de frações equivalentes presente no material por nós selecionado podem fornecer elementos que nos permitem observar pequenas variações, ou inovações, algo inédito?

Nas seções seguintes trazemos manuais escolares representativos de uma matemática moderna do ensino de frações equivalentes que circularam no estado do Paraná da década de 1970. Analisaremos as obras seguindo as críticas internas e externas as fontes e utilizando as categorias sequência, significado, graduação, exercícios/problemas.

3.1 Frações equivalentes na obra Matemática na Escola Primária Moderna – 2ª edição (Osório; Porto, 1968)

Na apresentação da obra “Matemática na Escola Primária Moderna”, de Norma Cunha Osório e Rizza de Araújo Porto (1968), consta que é um livro básico, destinado à Escola Primária, publicado pela *Scott, Foresman and Company*, nos Estados Unidos

em 1960 e adaptado⁵⁷ pelas autoras para professores e alunos das escolas brasileiras.

FIGURA 2 – Matemática na Escola Primária Moderna



FONTE: Osório, Porto (1968, capa)

Devido à expansão e a obrigatoriedade do ensino primário, aprovada pela LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação 1961 (Lei 4.024/61), o que resultou no aumento de crianças na escola, ampliação da rede escolar, contratação de professores, crescimento do mercado de livro didático (Batista et al., 2016), houve necessidades próprias do novo contexto escolar. Foram criadas pelo MEC – Ministério da Educação e Cultura, o COLTED – Comissão do Livro Técnico e Didático em 1966, e o FENAME – Fundação Nacional do Material Escolar em 1967. As autoras do livro em questão, participaram do Programa de Assistência Brasileiro-Americana ao Ensino Elementar – PABAE⁵⁸.

⁵⁷ As autoras brasileiras prepararam o livro baseado no original CHARTING THE COURSE FOR ARITHMETIC, de Maurice L. Hartung, Henry Van Engen, Lois Knowles e E. Gladine Glibb que foi publicado pela primeira vez em 1960.

⁵⁸ O PABAE foi um acordo estabelecido entre o Governo Brasileiro e a *United States Operation Mission to Brasil* – USOM/B, com a proposta de melhorias no Ensino Primário, através da qualificação

Norma Cunha Osório formou-se professora primária na Escola Normal Carmela Dutra no Rio de Janeiro. Mas tarde, na mesma escola, assumiu a cadeira de Prática de Ensino Primário do Curso Normal, ensinou Metodologia da Matemática, participou como bolsista do Programa de Treinamentos em Educação Elementar do acordo MEC/INEP/USAID, ministrou cursos de treinamento promovidos pela COLTED/MEC, para implantação do Programa Nacional do Livro Didático. De 1966 a 1968 fez parte da EATEP - Equipe de Assistência Técnica do Ensino Primário (Batista et al., 2016).

Rizza de Araújo Porto foi integrante do corpo docente do Instituto de Educação de Minas Gerais, uma das responsáveis pela formação matemática dos cursistas que eram enviados ao PABAAE, “[...] principal integrante do Departamento de Aritmética, trabalhava diretamente com a técnica americana Evelyn L. Bull (Arithmetic Advisor)” (Batista, et al., 2006, p. 88).

Para realização desse trabalho utilizou-se a 2ª edição do livro, datada de 1968, sendo sua primeira edição de 1965 e reimpressão 1967. O livro está organizado em seis níveis de dificuldades, separados em estágios, que vão do preliminar ao estágio 5⁵⁹, com sugestões metodológicas, trazendo em seu contexto uma organização e distribuição de conteúdo dentro do que se entendia (na época) por Matemática Moderna.

De acordo com Osório e Porto (1968, p. 78-79), “[...] a fração, de grande importância em Matemática, tem sido considerada dos assuntos mais difíceis, provavelmente pelo fato de sua compreensão exigir muitas ideias”. Buscou-se conhecer as propostas presentes no livro “Matemática na Escola Primária Moderna”, no que se refere ao ensino de frações equivalentes.

Um primeiro olhar para o manual foi o de identificar a *sequência* indicada para a matemática do ensino de frações, podendo-se destacar que, dentro dos temas da aritmética, essa ordem varia um pouco de acordo com cada estágio de forma gradual. No primeiro, terceiro e quarto estágios, o assunto sucede ao ensino dos números

do professor primário. Conforme Costa (2013), o PABAAE, preocupado com a melhoria do Ensino Primário, objetivava dar formação mínima para os trabalhadores analfabetos, tinha como concepção de ensino que “[...] o desenvolvimento educacional deveria ser o elemento necessário ao crescimento do capital” (COSTA, 2013, p. 88). O programa possibilitou o treinamento de professores nos Estados Unidos pelo período de um ano; a elaboração e distribuição de materiais; e, a ampliação da escola primária para seis anos (Costa, 2013).

⁵⁹ Consta na apresentação que os estágios correspondem de 1ª a 5ª série, mas que “[...] o aluno de um Estágio, Nível ou Série deverá usar o livro compatível com o grau de adiantamento” (Osório; Porto, 1968, p. 5)

naturais. No segundo estágio são trabalhados, primeiramente, o sistema monetário e os conceitos geométricos; e, no quinto estágio são trabalhadas as razões para exprimir correspondência de: relação, comparação, porcentagem, geometria com os conceitos de volume, frações e linha numerada.

O tema frações antecede o sistema de medidas com uso de objetos, no primeiro estágio; no segundo estágio, esse é o último assunto a ser tratado; no terceiro, quarto e quinto estágios, antecede o trabalho com os números racionais na sua forma decimal.

O tema das frações equivalentes é trabalhado após o ensino de razão, onde o assunto já traz ideias de equivalência, através de exemplos como: “[...] se 6 laranjas custam NCr\$ 0,30, 12 laranjas custam NCr\$ 0,60” (Osório; Porto, 1968, p. 77), essas antecedem as operações de adição e subtração. Ressalta-se que as frações equivalentes são tratadas com mais nitidez a partir do quarto estágio.

Buscando uma análise do manual citado e percorrendo os seis estágios, tem-se que no estágio preliminar não é tratado o tema frações. No estágio 1, o ensino de frações objetiva desenvolver duas ideias, “Podemos considerar o inteiro separado em duas partes de mesmo tamanho”. Nossa atenção pode ser focalizada em uma dessas partes iguais” (Osório; Porto, 1968, p. 17). Nesse estágio, pretende-se dar o *significado* de metade, através do todo separado em dois conjuntos equivalentes, como exemplo, em um conjunto discreto com oito objetos, as crianças podem perceber dois subconjuntos equivalentes com quatro objetos cada, adquirindo, assim, a noção de metade, sem introduzir o símbolo fracionário.

No segundo estágio, o ensino de frações se desenvolve no plano concreto, através de manipulação de materiais, ampliando o trabalho de meios para quartos, “[...] o inteiro pode ser separado em duas ou em quatro partes iguais” (Osório; Porto, 1968, p. 40). Trabalhando com meios e quartos a criança deverá identificar, contar, separar e agrupar os conjuntos, cabendo ao professor levá-la a perceber que cada conjunto separado em dois ou quatro subconjuntos iguais representam metade do conjunto ou a quarta parte do conjunto respectivamente. Nesse estágio o *significado* dado à fração, é a representação de partes em que o todo foi dividido.

No terceiro estágio, a criança é levada a perceber que um inteiro pode ser repartido em outras quantidades de partes iguais. O símbolo da fração é apresentado com os termos numerador e denominador, a comparação de frações acontece com

denominadores comuns e numeradores diferentes, exemplo $(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4})$, quanto maior o numerador, maior a quantidade que a fração representa. Com numeradores unitários e denominadores diferentes, exemplo $(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, quanto maior o denominador, menor a quantidade representada pela fração. Para as autoras “[...] comparando frações, a criança chega ao conceito fundamental de equivalência” (Osório; Porto, 1968, p. 53). Nesse manual as frações equivalentes são introduzidas nesse estágio e é através da comparação de frações que se chegam aos conceitos fundamentais de frações equivalentes. As autoras apontam que devem ser realizadas muitas e variadas atividades de comparação com frações para que a criança possa entender o *significado* das frações equivalentes e o porquê que determinadas frações se equivalem. Na obra o significado dado as frações equivalentes é de que diferentes pares ordenados podem ser usados para exprimir a mesma razão, correspondem a diferentes maneiras de partir um objeto, assim “Cada um desses numerais é um nome para uma fração diferente, mas que representa o mesmo número racional” (Osório; Porto, 1968, p. 80)

Ainda no terceiro estágio, no rol de conteúdo sobre frações, aparecem as frações impróprias, número misto, parte de um todo (litro, quilo, metro e da hora), representação decimal de uma fração. Os alunos são levados a reconhecer que os princípios básicos do sistema de numeração, também se aplicam nas frações decimais “Depois de ter aprendido que uma fração pode ser representada por diferentes numerais fracionários, pouca dificuldade terá o aluno em ver que podemos adotar para as frações nomes como: $(\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{20}{100}, \text{ ou } 0,2; 0,20)$ ” (Osório; Porto, 1968, p. 53).

No quarto estágio o trabalho com as frações é aprofundado, a *sequência* apresentada é retomando os conceitos de frações, estudados nos estágios anteriores como: metades, quartos, frações próprias, impróprias, números mistos, frações equivalentes. Aqui, a compreensão de fração depende do reconhecimento da distinção entre o numeral e o símbolo da fração, através de uma problematização. Mais uma vez é evidenciado que a razão é base para o ensino das frações equivalentes, pois estas são utilizadas para substituir um par ordenado por outro equivalente. Como também, a partir da equivalência de frações que são trabalhadas as operações de adição e subtração de frações e os números mistos. Para fazer distinção entre número e numeral, Osório e Porto (1968) dizem que, “[...] a

compreensão de fração depende do reconhecimento da distinção entre o numeral – símbolo da fração – e a ideia que o numeral representa – fração em si” (p. 79). Para orientar o professor, apresentam a seguinte situação problema:

Suponhamos que um menino parta uma barra de chocolate em quatro partes iguais e coma uma parte, deixando somente três. Ele pode descrever a parte restante da barra de chocolate dizendo três quartos, ou escrevendo o numeral $\frac{3}{4}$. Entretanto poderá usar outras formas, por exemplo, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{75}{100}$ para descrever a mesma fração ou parte da barra. Portanto os numerais $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ podem ser pensados como duas diferentes maneiras de representar a mesma quantidade (Osório; Porto, 1968, p. 79).

Partindo da ideia de que, diferentes pares ordenados⁶⁰ podem representar a mesma razão e que frações podem ser substituídas em termos maiores ou menores, no caso $\frac{4}{5}$ e $\frac{8}{10}$ representam um mesmo número racional, mas não são iguais, pois demonstram maneiras diferentes de partir um determinado conjunto, ou objeto. Osório, Porto (1968, p. 80) dizem que o “[...] número racional é um conceito abstrato que se deriva do ato de pensar em todo um conjunto de frações equivalentes como caso $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{16}{20}$ etc”. Justificam assim, o fato de o conceito de números decimais ser trabalhado nos últimos estágios, desta forma não encontram a necessidade de distinguir o número fracionário do número decimal durante o ensino primário, mas de modo informal essa ideia pode ser apresentada trabalhando com a reta numerada.

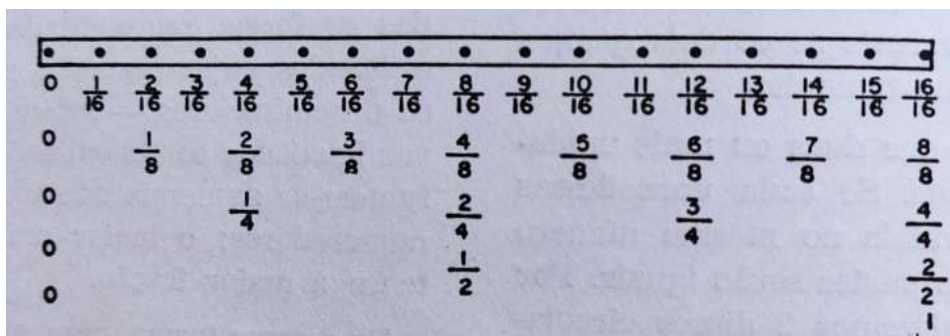
No ensino de razões, o aluno aprenderá a substituir um par ordenado por outro equivalente, realizando a multiplicação, ou divisão de ambos os termos do par ordenado por um mesmo número. Como exemplo o par ordenado “[...] $\frac{6}{10}$ pode ser substituído pelo par $\frac{3}{5}$, dividindo 6 e 10 por 2” (Osório; Porto, 1968, p. 80). Afirmam que esta é uma situação importante de ser trabalhada, pois é fundamental na solução de uma variedade de problemas, “[...] encontramos seu emprego na adição e subtração de frações, quando é preciso substituir frações por outras equivalentes que tenham um denominador comum” (Osório; Porto, 1968, p. 80). Pode-se observar que as frações equivalentes são base para a adição e subtração de frações.

⁶⁰ O par ordenado era uma forma de representar as frações no MMM. Muitos livros da época trazem esta representação (a,b); e o manual pedagógico, em questão, usa o termo par ordenado, para se referir à fração $\frac{a}{b}$.

Primeiramente, deve-se ensinar a ideia de denominador comum, pois as autoras acreditam que, se a criança tiver habilidade e compreensão em trocar numerais fracionários por outros que tiverem o mesmo denominador comum, esse processo facilitará a realização da adição e subtração de frações.

O trabalho com denominador comum será realizado em duas etapas. Através da comparação de frações, utilizando-se da linha numerada⁶¹, dispondo as frações em ordem crescente, e pela comparação, através da observação do par ordenado. A imagem abaixo é uma representação da linha numerada com denominadores comum que ilustra a equivalência de frações. Ainda, destaca-se que a linha numerada apresentada na Figura 3, é a única imagem referente ao ensino de frações que o manual pedagógico, em questão, apresenta.

FIGURA 3 – Reta numerada, par ordenado com denominadores comuns



FONTE: Osório; Porto (1968, p. 82).

Apesar dos denominadores comuns serem fundamentais para a realização das operações de adição e subtração de frações, para Osório e Porto (1968), não devem ser vistos como uma preliminar, “[...] mas como um estudo importante em si mesmo, fundamental ao processo de comparação de frações e ao trabalho com linha numerada” (p. 82). Pode-se perceber que a linha numerada forma classes de equivalência, como exemplo: $(\frac{8}{16}, \frac{4}{8}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2})$. Ainda possibilita, por processos visuais, realizar comparações $\frac{2}{8} < \frac{3}{4}$. Nota-se que o *significado* dado na construção da

⁶¹ *Number line* – tradução é reta numérica. O manual apresenta a reta numérica com a escrita linha numerada, acreditamos que possa ser um equívoco de tradução do inglês para o português. Neste trabalho utilizamos linha numerada e reta numérica como sinônimos.

equivalência, para se chegar a um denominador comum entre duas ou mais frações, não é apenas para realizar operações de adição e subtração.

Consideram que, no quinto estágio, a reta numerada é recurso importante para entender a ideia fundamental das frações, assim como conduz a um importante conhecimento matemático, com aplicação em régua, escalas, gráficos e mapas. A linha numerada possibilita representar o sistema numérico.

Nesse estágio é importante representar as frações na linha numerada para realizar comparações, exemplo “[...] $\frac{3}{4}$ que pode ser representado por $\frac{6}{8}$ ou $\frac{9}{12}$ e $\frac{5}{6}$ por $\frac{10}{12}$ ou $\frac{15}{18}$. Consequentemente será simples comparar $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ usando outros nomes para as duas frações, por exemplo $\frac{9}{12}$ e $\frac{10}{12}$ ” (Osório; Porto, 1968, p. 102). Para as autoras é indispensável a compreensão de equivalência antes de introduzir técnicas para achar o denominador comum. A linha numerada servirá de auxílio para o aluno encontrar frações equivalentes, pois proporciona uma organização de forma paralela, permitindo que ele visualize um conjunto de frações equivalentes.

Quanto ao denominador comum, as autoras dizem que as frações não teriam utilidade se não fosse possível comparar, adicionar e subtrair com elas, sendo o denominador comum a base para realizar essas operações e se pode determiná-lo através da equivalência de frações, “[...] uma vez compreendida a ideia de denominador comum, o aluno poderá aprender a procurá-lo usando métodos mais abstratos” (Osório; Porto, 1968, p. 102). Percebe-se que existe uma preocupação com a construção do conhecimento. Primeiramente, a aprendizagem se dá de forma concreta (conjunto de objetos), passando para o uso de diagramas com símbolo para representar, linha numerada, até chegar num estágio mais abstrato, (a fração).

Para a adição e subtração de frações, o trabalho se inicia com frações cujo denominador comum está em torno das frações dadas $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{8}$, sendo o 8, o maior denominador e comum às duas frações.

Progredindo para frações, por exemplo, em $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{10}$, o 10 não sendo o denominador comum, experimentará 2×10 que é 20, não serve, 3×10 que é 30 e, “Como 30 é divisível por 6, 30 será o denominador conveniente” (Osório; Porto, 1968, p. 103). A dificuldade maior será nos casos em que os denominadores são primos entre si $\frac{5}{13}$ e $\frac{8}{17}$, nesse caso, o denominador comum será o produto dos dois

denominadores 13×17 . A construção dos conceitos de adição e subtração de frações se dá de forma gradativa.

Para Osório e Porto (1968), o desenvolvimento da ideia de denominadores comum vai além da operação de adição e subtração. “Esse conhecimento tem grande importância, pois além de fundamentar a comparação de frações, permite desenvolver a noção de *conjunto de números*” (Osório; Porto, 1968, p. 103).

O uso da linha numerada é um recurso que fundamenta a construção dos conceitos de frações equivalentes e comparação de frações.

Pode-se dizer que existe uma *graduação* no ensino de frações, começando com atividades mais simples para a criança adquirir seus significados, por meio de análise de conjuntos e subconjuntos iguais a objetos; por ações que devem ser experienciadas no plano concreto, através da manipulação de objetos, possibilitando identificá-los, contá-los, compará-los e agrupá-los, progredindo para o uso de representação através de imagens de conjuntos e da reta numerada, até chegar aos processos mais abstratos nos cálculos com frações.

Em relação aos *problemas/exercícios* este manual pedagógico não apresenta lista de exercícios e problemas sobre frações, mas durante a apresentação dos conteúdos traz alguns exemplos que o professor pode ter como base para desenvolver atividades para serem trabalhadas com o aluno. No final do manual apresenta um quadro com diferentes tipos de problemas aritméticos para ser utilizado pelo professor, porém nenhum relacionados às frações equivalentes.

Para Osório e Porto (1968, p. 18), “[...] é conveniente um desenvolvimento gradual, mas definido, antes de se trabalhar com problemas”. Para as autoras as crianças precisam de uma *sequência* definida de atividades para adquirir conceitos de cada conteúdo trabalhado, a resolução de problemas torna-se mais conveniente quando os objetos são representados por símbolos numéricos, “Muitas situações problemáticas quantitativas na vida seriam difíceis ou quase impossíveis de resolver se precisássemos usar os próprios objetos a situação” (Osório; Porto, 1968, p.19).

Em síntese a *matemática do ensino* presente no manual pedagógico em estudo nessa seção apresenta a *sequência* dos conteúdos dentro da temática das frações: meios e quartos avançando para outras quantidades que o inteiro pode ser repartido, símbolo da fração, razão, comparação de frações, frações equivalentes, frações impróprias, número misto, representação decimal de uma fração e as operações com

frações. Destacamos que é através da comparação de frações que se chega a compreensão das frações equivalentes.

O *significado* dado a fração equivalente, é que uma fração pode ser representada por diferentes numerais fracionários, essa ideia está relacionada com diferentes pares ordenados que podem ser usados para exprimir uma mesma razão.

Para o ensino de frações equivalentes nesse manual escolar segue uma *graduação*, inicia com frações que são mais comuns aos alunos como meios e quartos, estendendo-se às demais partições do inteiro por meio de análise, de agrupamento e reagrupamento de conjuntos e objetos, às vezes, os objetos são reunidos apenas mentalmente, as autoras afirmam que diferentes experiências são necessárias para que as crianças adquiram os conceitos de frações. Seguindo a *graduação*, deve-se analisar a natureza de situações problemas para exprimir a relação numérica de forma simbólica, fazer uso de diagramas (classes de equivalência, linha numerada, tabelas de equivalência), uma vez compreendido o processo para chegar à fração equivalente essas poderão ser encontradas através da multiplicação e da divisão.

Os exercícios/problemas são escassos, os que são apresentados servem de exemplos para a aplicação de conceitos apresentados. Destacamos que os exercícios/problemas apresentados enfatizam as frações equivalentes.

3.2 Frações equivalentes na obra Frações na Escola Elementar – 4ª edição (PORTO, 1967)

O manual pedagógico “Frações na escola elementar” (1967) (Figura 4), da autora Rizza Araújo Porto, é fruto de estudos e observações que foram colhidos na orientação de professoras das classes experimentais no Grupo Escolar de Demonstração do Instituto de Educação de Belo Horizonte (PORTO, 1967).

FIGURA 4 – Frações na Escola Elementar



FONTE: Porto (1967, capa)

Conforme a autora ia produzindo o material, as ideias eram observadas e aplicadas por professoras das classes experimentais. O material produzido também foi revisto e complementado com sugestões do PABAAE - Programa de Assistência Brasileira – Americana ao Ensino Elementar.

Segundo a autora, o ensino da aritmética era discutido por professores e estudiosos, no que resultou em críticas e sugestões que contribuíram com as mudanças do processo de ensino. Com isso se identifica a

[...] necessidade de se conhecer como a criança pensa para que se possa acompanhá-la, impulsioná-la, guiando-a no trabalho sistematizado de localizar-se no problema, buscar e descobrir a solução, selecionar o melhor processo, elaborar generalizações, fórmulas ou definições, criticar a resposta encontrada, etc. (PORTO, 1967, p. 11).

Apoiada em princípios de que a aprendizagem é um processo de crescimento que envolve conquista pessoal, experiências passadas, nível mental e prontidão para um novo trabalho, escreveu o manual pedagógico sobre o ensino de frações,

indicando que considera uma das áreas mais prejudicadas pelo ensino tradicional⁶² (PORTO, 1967).

A autora destaca que as pesquisas mostram que, as frações como partes da unidade de medida são as mais comuns na vida da criança. Trabalhar com números muito grandes, com longas operações, levam a criança ao erro, o que causa confusão, desencorajamento, fracasso e desgosto pela aritmética.

Critica o ensino de frações divididos por série, para ela o mais importante não é a organização do currículo que pré-estabelece conteúdos extensos a serem cumpridos no ensino em cada série, mas “[...] a organização das experiências julgadas autênticas, numa linha de continuidade que servirá ao desenvolvimento harmonioso da criança” (PORTO, 1967, p. 19).

Afirma que a ordem das experiências, encontradas em muitos programas de ensino primário, contraria os princípios básicos da aprendizagem, e são contraditórios a estudos desenvolvidos no campo da psicologia. Para Porto (1967), “Os conceitos de frações serão apreendidos pelo aluno durante todo o curso primário, de forma que haja uma linha crescente, permitindo uma aprendizagem gradativa, onde um novo conceito possa ser elaborado por meio de experiências anteriormente adquiridas” (PORTO, 1967, p. 19).

A autora evidencia a importância da *graduação* no ensino, para isso, utiliza-se do exemplo que, na 4ª série, quando se trabalha as operações de adição e subtração de frações, essas só serão bem-sucedidas se a criança tiver vivido experiências anteriores que possibilite enfrentar etapas mais difíceis e abstratas.

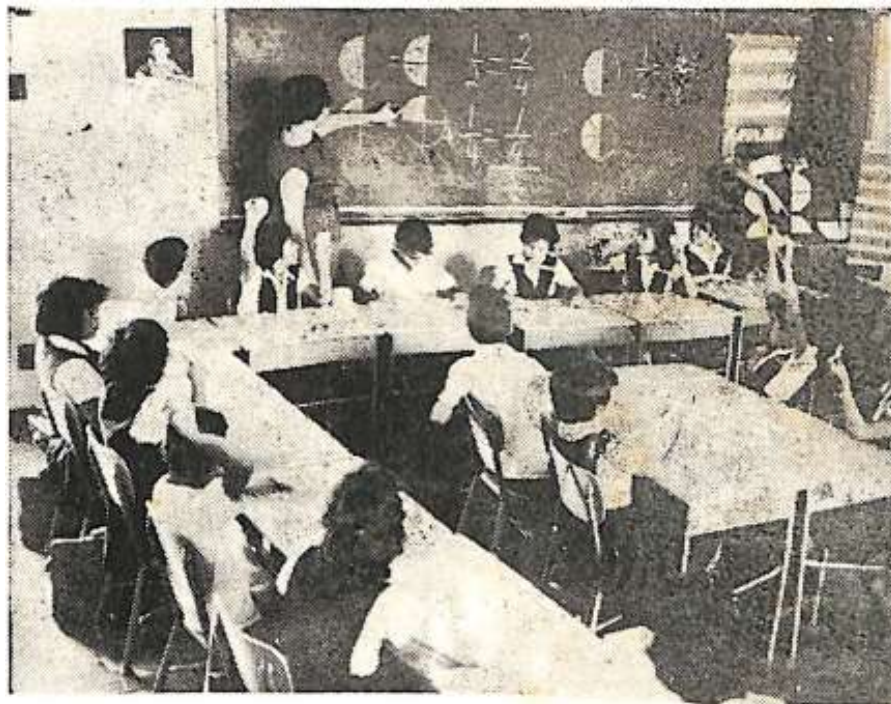
Aponta a importância do uso do material concreto no ensino da aritmética. Para além do uso, diz que a importância está no “como” se usa, pois, a “[...] criança necessita de muitas experiências, nas quais usa material manipulativo e visual, para construir conceitos adequados do significado das frações” (PORTO, 1967, p. 22).

De acordo com Porto (1967), o material manipulável possibilita a elaboração conceitual das frações, dele ocorre a transição do concreto para o abstrato. Se configurando em um caminho para a compreensão de atividades mais difíceis sobre as frações, e de maneira haja uma graduação no ensino de frações, o uso de objetos

⁶² Para a autora o ensino tradicional está relacionado ao “[...] faça o que estou dizendo” (Porto, 1967, p. 11), não proporcionando à criança a aprendizagem através de atividades com uso de material concreto. Segundo a autora, a criança necessita de muitas experiências visuais e manipulativas para construir conceitos do significado de frações.

e gravuras são substituídos apenas pelos símbolos matemáticos. Na Figura 5, vê-se a imagem de uma sala de aula, onde os alunos estão em grupos, visualizando e manipulando modelos de figuras geométrica representadas na lousa, utilizando os mesmos modelos sobre suas carteiras, através desses se pode estabelecer relações de equivalência entre frações. De acordo com Piaget (1983) o aspecto figurativo (baseado em formas que são observáveis), guiado pelas sensações e percepções e submetidos a um processo de compreensão geram as imagens mentais.

FIGURA 5 – Frações Equivalentes na Escola Elementar



FONTE: Porto (1967, p. 5)

Porto (1967) apresenta no manual pedagógico em estudo, a seguinte *sequência* para se trabalhar com as frações: um significado matemático para as frações, frações de um inteiro, de um grupo e das medidas, identificação, comparação e equivalência das frações, frações próprias, impróprias e número misto, e as operações com frações. Em relação à *sequência* para se chegar nas frações equivalentes, a comparação de frações antecede as frações equivalentes. As frações equivalentes são um pré-requisito para a simplificação de frações, assim como para a adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

A ideia de equivalência aparece nos capítulos 4, 5, e 6, estes (capítulos) se referem às 2^a, 3^a e 4^a séries, respectivamente. O manual em questão está dividido em

10 capítulos, ao descrever como esse conteúdo é tratado em cada série, pode-se perceber que na *seqüência* o conteúdo é trabalhado de modo que os conceitos são explorados de diferentes formas.

Na 2ª série, a descoberta de que algumas frações se equivalem, será construída a partir da comparação de frações visualmente com o uso do flanelógrafo (Figura 6), através de atividades da forma: “Ponham meio círculo sobre as carteiras. Coloquem quartos sobre ele; de quantos quartos precisaram para cobrir um meio? Por que são precisos dois quartos para cobrir um meio?” (PORTO, 1967, p. 71).

FIGURA 6 – Cartaz Encontrado numa Classe de 2ª Série Primária



FONTE: Porto (1967, p. 72)

Porto (1967) destaca a importância da criança fazer as relações de equivalência entre o inteiro e as partes fracionárias, dois meios e um inteiro, quatro quartos e um inteiro. Afirma que o aluno precisa ter a percepção do número de partes para formar um inteiro, para assim ver o *significado* nas frações maiores que um inteiro.

Na 3ª série, a autora traz a importância da retomada do que foi estudado na 2ª série e o “reensino” (Porto, 1967) dos conhecimentos que não foram adquiridos. Ela

não afirma que trabalhar com oitavos seja mais fácil do que se trabalhar com $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{5}$, mas acredita que dividir um círculo em oitavos facilitará para o aluno que pode dividir em quartos e cada quarto dividir ao meio, formando assim oitavos. Desse trabalho através da comparação descobrirá a equivalência de um meio e quatro oitavos, um quarto e dois oitavos, três quartos e seis oitavos. Nessa série é trabalhado com o aluno os conceitos de numerador e denominador e a escrita da fração com o uso do símbolo.

No decorrer do capítulo 5, a equivalência de frações é considerada pela autora como fundamental. Destaca que “[...] o princípio que rege a equivalência de frações é chamado por alguns autores ‘*Golden rule of fractions*’. É, de fato, a ‘regra de ouro’ (PORTO, 1967, p. 103). A ‘regra de ouro das frações’, “Multiplicar ou dividir ambos os termos da fração pelo mesmo número não alteram o valor da fração” (PORTO, 1967, p. 134). Afirmando que, o sucesso no ensino das operações com frações depende da compreensão desta regra, ou seja, o sucesso no ensino das operações com frações está diretamente ligado à compreensão sobre as frações equivalentes.

No manual pedagógico, Porto (1967) indica a importância da escrita simbólica $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, e $\frac{4}{8}$ de algo (um queijo, um retângulo), estar relacionado com a figura da representação, para a criança chegar à percepção que “elas são iguais em valor. Mas os números que usamos em cada uma, são diferentes” (PORTO, 1967, p. 105). Essa questão irá exigir da criança muito pensamento, até formular essa justificativa, e, dessa compreensão, a turma descobre novas equivalências, outras relações, atingindo generalizações mais difíceis, afirma a autora.

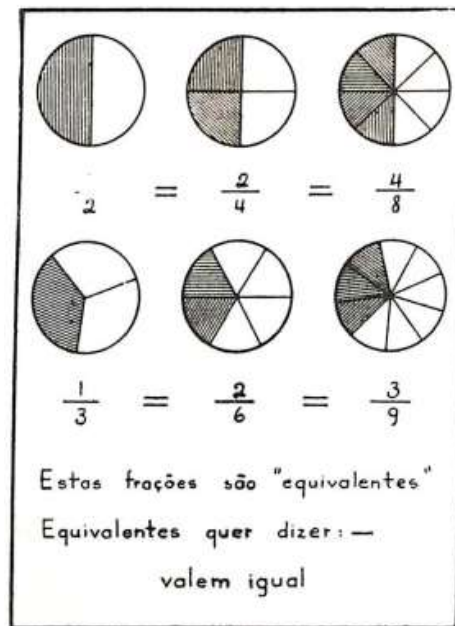
Por exemplo, se a criança percebe através das relações que uma “laranja” pode ser dividida em várias partes iguais e quantas partes são necessárias para se formar meia laranja, “De quantos quartos necessita para ter a metade de uma laranja? De quantos oitavos? [...] e se estiver dividida em 14?” (PORTO, 1967, p. 106), até concluir que “[...] sempre que o numerador for a metade do denominador, a fração será igual a um meio” ou ainda “[...] sempre que o denominador for o dobro do numerador, a fração será igual a um meio” (PORTO, 1967, p. 107).

Até esse momento o termo “equivalência” não será mencionado ao aluno. Conforme Porto (1967), a partir das experiências mencionadas, esse conceito será introduzido.

O manual pedagógico traz o significado da palavra equivalência: “[...] equi = igual; vale = valer” (PORTO, 1967, p. 107).

Sugere que a professora crie um cartaz para consulta, conforme Figura 7.

FIGURA 7 – Diagramas em Cartaz para Consulta



FONTE: Porto (1967, p. 108).

Ainda na 3ª série, induz o aluno a realizar as descobertas que, quando o numerador e denominador são iguais, a fração representa um número inteiro.

O *significado* dado às frações equivalentes se deu pela comparação de frações, num primeiro momento o termo equivalência não foi utilizado, esse será introduzido após variadas atividades de comparação até a criança perceber que as frações que têm valor igual recebem um nome especial, para a autora “Estas e outras generalizações serão atingidas pelo trabalho de pensamento, em face de vários exemplos, através dos quais a criança percebe os elementos idênticos” (Porto, 1967, p. 107).

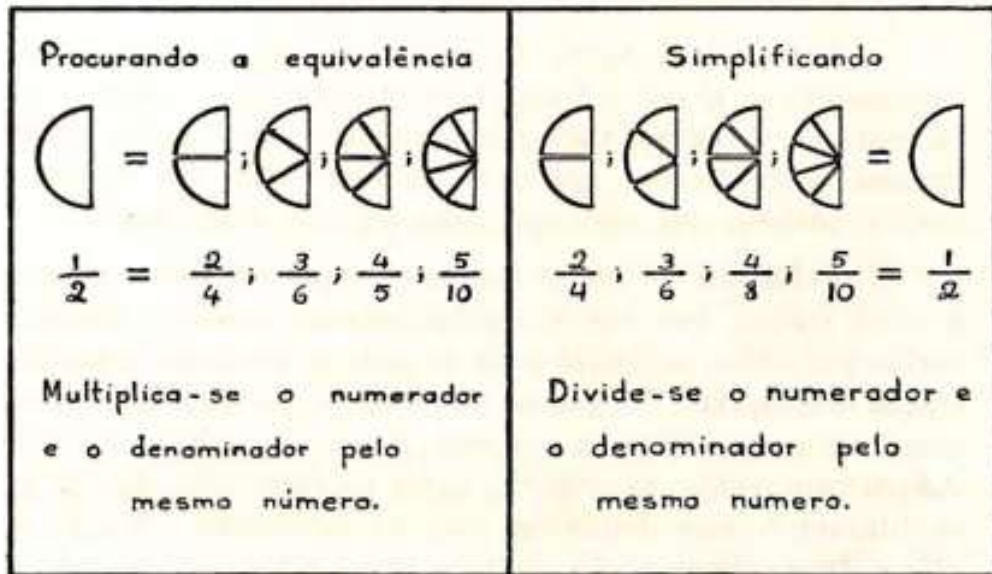
Quando o numerador é menor que o denominador, a fração representa um número menor que um inteiro, caso contrário, o número é maior que um inteiro, que se conhece como “frações próprias” e “frações impróprias”. Porém, a autora enfatiza que não faz uso dos termos, pois na essência de seu trabalho o que pretende “[...] deixar impresso que o ensino tem sua base na aquisição da ideia, preparando a

criança para receber depois, com possibilidade de êxito, o vocabulário específico que, em geral, é abstrato e sem significado social para o aluno” (PORTO, 1967, p. 109). Aqui a relação de equivalência ocorre entre a fração imprópria e o número misto, entre a fração e o número inteiro.

O ensino segue uma *graduação*, no manual pedagógico de Porto (1967), a partir da 3ª série começa um trabalho mais abstrato, as frações equivalentes deixam de ser encontradas por meio de materiais concreto, diagramas e desenhos. Para Porto (1967), o uso do material limita encontrar frações equivalentes com números maiores, nessa etapa “[...] queremos que descubra, por si mesma, um meio, uma regra geral, que funcione no momento em que necessitar das equivalentes” (PORTO, 1967, p. 133).

Sugere que isso aconteça através da escrita das classes de equivalência, para que o aluno compreenda “[...] se multiplicamos ambos os termos de uma fração pelo mesmo número, não se altera o valor” (PORTO, 1967, p. 134). Através da simplificação de frações, levando a perceber que “[...] dividindo ambos os termos da fração pelo mesmo número, o valor não fica alterado” (PORTO, 1967, p. 135). A Figura 8 traz um cartaz que explica a regra com o auxílio de imagens de metade do círculo, mostrando a equivalência de frações, através da multiplicação e da divisão. As classes de equivalência somadas a compreensão das frações equivalentes por parte da ação dos alunos sobre os materiais manipulável podem ser caracterizadas como uma matemática moderna das frações equivalentes.

FIGURA 8 - Equivalência/Simplificação



FONTE: Porto (1967, p. 135)

Aponta para a necessidade de realizar vários *exercícios/problemas* para a fixação do conhecimento, sempre que necessário usar o material concreto para verificar a veracidade da regra. Afirma que, mesmo estando na etapa abstrata, é muito bom voltar ao concreto para entender o “porquê”.

Na parte III desse manual, os capítulos 7, 8, 9, e 10, tratam das operações com as frações. Para Porto (1967), o trabalho, com as operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, deve inicialmente ocorrer com o auxílio de cartazes de frações, onde o aluno pode estabelecer relações entre as frações equivalentes. Fazendo uso da Figura 9, a criança pode concluir que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} +$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

FIGURA 9 – Cartazes de Frações⁶³

1							
$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1											
$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

FONTE: Porto (1967, p. 179).

Indica que seja apresentado ao aluno cartazes com vários círculos, para que ele perceba as equivalências, assim como seja estimulado a fazer sua própria tabela de equivalência, partindo das frações mais familiares até a aquisição do processo mais abstrato, pois “É importante que o aluno compreenda o sentido matemático da regra que nos possibilita encontrar equivalentes, quando necessitamos somar frações com denominadores diferentes” (Porto, 1967, p. 185). Esse material servirá de consulta para o aluno, sempre que for necessário.

Os quadros de equivalência apresentados na Figura 9, de acordo com Santos, França e Ramires (2022), constituem-se como dispositivos didáticos⁶⁴, são utilizados para tratar de diferentes saberes sobre frações, articulam saberes *a* e *para* ensinar matemática. As autoras, através de seus estudos concluíram que os “[...] saberes inerentes a ele podem ser compreendidos como vestígios de ressignificações de diferentes apropriações de autores de manuais didáticos” (Santos, França, Ramires, 2022, p. 1).

Em análise do dispositivo didático, aqui apresentado Figura 9, do manual pedagógico “Frações na Escola Elementar” (Porto, 1967), Santos, França e Ramires (2022) percebem que

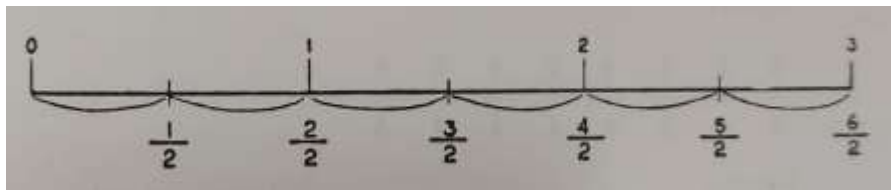
[...] o ensino tendia ao conceito de classes de equivalências ou frações equivalentes. A partir do ensino desse saber a ensinar, o professor poderia seguir à próxima etapa: ensinar a realizar as operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes (Santos; França; Ramires, 2022, p. 14).

⁶³ O termo cartazes de frações foi utilizado por este manual, por isso optamos em utilizá-lo, mas faz referência ao quadro de frações.

⁶⁴ A palavra dispositivo didático faz referência a instrumento, artifício, artefato, material didático, ferramental (Santos, França e Ramires, 2022).

Para a operação de adição de frações o manual pedagógico enfatiza a construção de linhas numéricas. Marca na linha numerada do zero ao três, em seguida marca os meios e o meio de cada espaço, utilizando a unidade escrita da forma fracionária $1 = \frac{2}{2}$, $2 = \frac{4}{2}$, $3 = \frac{6}{2}$, conforme pode-se observar na Figura 10.

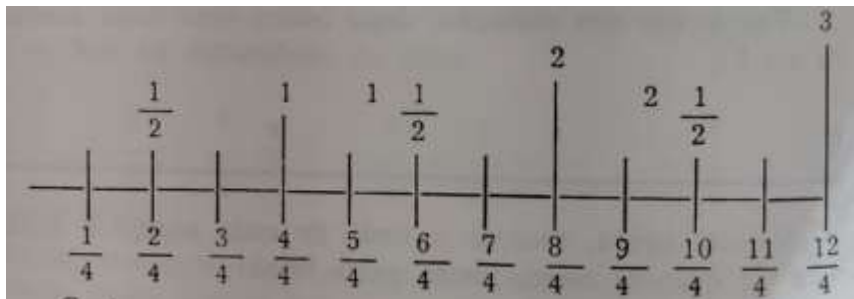
FIGURA 10 – Linha numérica dividida em meios



FONTE: Porto (1967, p. 157)

Com a mesma orientação, trabalha-se com a linha numérica dividida em quartos, podendo observar na Figura 11.

FIGURA 11 – Linha numérica dividida em quartos



FONTE: Porto (1967, p. 158)

A partir das linhas numéricas a criança pode estabelecer relações de equivalência como exemplo $2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4}$, e ainda $\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$. Assim para a adição de frações, se parte das descobertas já feitas, através do uso de materiais concretos, semiconcretos e semiabstratos, pode-se organizar tabelas de equivalência e o aluno encontrar denominadores comum às frações que deverão ser somadas.

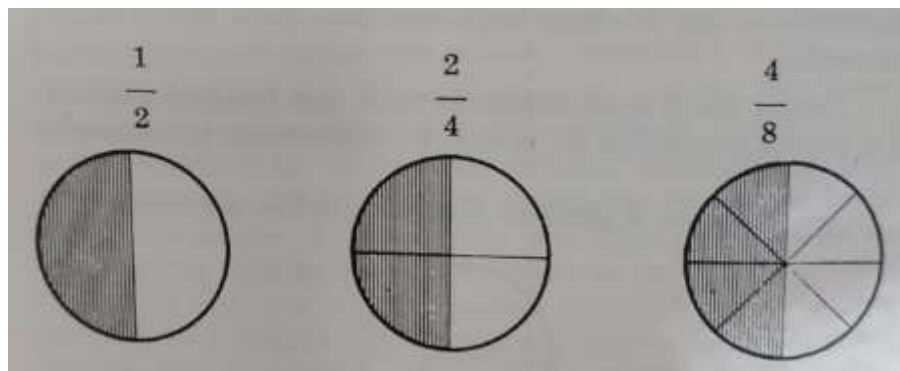
O ensino de frações equivalentes segue uma progressão, que são os caminhos trilhados para a construção do conceito de frações equivalentes, chamada de *graduação*. Nessa *graduação*, a construção do conceito de frações equivalentes

inicia-se com o uso de materiais concretos (como por exemplo queijos) e segue com o uso de materiais semiconcretos, como círculos feitos de “flanelógrafo”. Comparando frações, o aluno perceberá que precisa de dois quartos de círculo para cobrir meio círculo. Com essa compreensão, segue-se para o uso de materiais semiabstratos, utilizando-se de diagramas ou imagens (desenho de retângulos, círculos, linha numerada).

A autora sugere que esse trabalho seja feito lentamente até chegar à “regra de ouro”, regra geral, “abstração” (PARANÁ, 1977, p. 321), uso do símbolo matemático. Percebe-se que orientações presentes no livro de Porto (1967) também estavam presentes no programa de ensino do Estado do Paraná, para ser ensinado aos alunos da 2ª série.

Os *exercícios/problemas* são apresentados durante todo o processo de construção do conceito de frações, através dos exemplos dados. Destaca-se um exemplo: “Eu tenho três queijos. Um está partido em meios, o outro, está partido em quartos, e o outro em oitavos. De cada um dos queijos eu quero metade. Quanto tomarei do 1º queijo? E do 2º? E do 3º?” (PORTO, 1967, p. 103-104). A resolução do problema pode ser observada na Figura 12.

FIGURA 12 – frações equivalentes



FONTE: Porto (1967, p. 105)

Durante a realização dos exemplos, a autora indica que “[...] vários exercícios serão feitos, a fim de haver a fixação do conhecimento” (PORTO, 1967, p. 134). A autora recomenda que não sejam dadas frações com denominadores muito grandes na escola primária, o trabalho deve ocorrer com denominadores que se possa

visualizar, pois o sucesso do trabalho do aluno com a aritmética está na *graduação* do ensino de acordo com as possibilidades de cada um.

O ensino de frações acontece com o uso de elementos contínuos, como ênfase nos círculos e alguns retângulos em que as divisões em partes já estão prontas. O manual em estudo na seção 3.2 demonstra indícios da matemática moderna enfatizando o ensino das frações equivalentes, sendo essas um caminho para chegar nas operações com frações, também traz o uso dos quadros de equivalência, classes de equivalência e a reta numérica e não enfatiza a construção do número racional. Destacamos que o manual apresenta uma sequência de experiências a ser desenvolvida com os alunos, de maneira que essas possibilitam as relações matemáticas até chegar as generalizações necessárias para o sucesso no ensino de frações, sobre tudo das frações equivalentes.

3.3 Frações equivalentes na obra Métodos Modernos para o Ensino de Matemática – 3ª reimpressão (D'AUGUSTINE, 1981)

A obra “Métodos Modernos para o Ensino da Matemática”, foi lançada em 1968, nos Estados Unidos, tendo como título original “*Multiple methods of teaching mathematics in the elementary school*”, por Charles D’Augustine⁶⁵, foi traduzida por Maria Lucia F. E. Peres e publicada pela editora Ao Livro Técnico S/A, em 1970. A obra teve reimpressões nas décadas de 1970 e 1980, em 1976, 1979, 1981, 1982, 1984, 1985 e 1987.

⁶⁵ Charles H. D’Augustine (1932-2021), nascido em Orlando na Flórida-Estados Unidos, foi professor na Universidade de Ohio, permaneceu nessa Universidade e continuou escrevendo e ensinando na Faculdade de Educação e, nos anos posteriores, na Faculdade de Negócios. Para mais informações veja-se: <https://obituaries.neptunesociety.com/obituaries/plantation-fl/charles-daugustine-10481723>

FIGURA 13 - Métodos Modernos para o Ensino da Matemática

FONTE: D'Augustine (1981, capa)

No prefácio, D'Augustine (1981) esclarece que este livro se destinou às escolas normais e aos cursos de aperfeiçoamento do magistério primário e que foi produzido dentro das tendências do movimento moderno (MMM) que estava afluindo na educação primária, oferecendo aos professores oportunidades de adaptação às inovações que vinham ocorrendo no currículo. Já na capa (figura 13), observa-se uma criança manipulando ativamente cartões retangulares que lembram um quadro de equivalência. Um dispositivo didático utilizado desde muito tempo nas aulas de matemática, mas agora seguindo os preceitos da matemática moderna.

Consta no prefácio da tradutora⁶⁶ da edição brasileira, que todos os professores ouviam falar em Matemática Moderna e que tinham interesse em conhecer o que havia de novo para o ensino de matemática, mas muitos livros que se diziam da “Matemática

⁶⁶ Maria Lucia F. E. Peres, escreveu o Prefácio da Edição Brasileira.

Moderna”, na sua grande maioria, apresentavam uma releitura de exercícios tradicionais, ilustrados de maneira diferente (Peres, *In* D’Augustine, 1981).

De acordo com a Introdução Histórica, presente no manual pedagógico em estudo, o termo “moderno” seria um nome errado para o atual programa de matemática da escola primária, no contexto dos Estados Unidos. A Matemática Moderna, deveria ser chamada de matemática revolucionária, “[...] porque a reforma do currículo contém muitas características que normalmente são associadas a uma revolução” (D’Augustine, 1981, p. 21).

Segundo D’Augustine (1981) as sementes para a modificação do currículo foram plantadas a pelo menos três décadas. O começo da revolução consistia em:

1. Informações contínuas sobre o modo pelo qual as crianças aprendiam.
2. Melhor conhecimento da estrutura básica da Matemática.
3. Tentativas bem-sucedidas de unificar os conceitos matemáticos.
4. Reconhecimento de que a continuidade do ensino nas diferentes séries era o suficiente.
5. Reconhecimento de que o ensino da Aritmética era totalmente orientado para desenvolver habilidades de computação.
6. Reconhecimento de que a sequência no ensino da Matemática na escola primária era mais história do que lógica.
7. Reconhecimento de que o comércio e a indústria da sociedade contemporânea requerem maior competência em matemática.
8. Reconhecimento de que os conhecimentos e o preparo do professor primário são mais profundos do que no passado (D’Augustine, 1981, p. 21–22).

Diante do exposto, D’Augustine (1981) considerava que fazer mudanças no currículo não era fácil, pois existiam muitos empecilhos. Destacava que, os métodos indicados para formar e aperfeiçoar os professores atrapalhavam a reforma do currículo da escola primária. Alguns outros fatores eram professores próximos da aposentadoria, com defasagem de conteúdo, orgulhosos, leigos e que não realizavam uma análise prévia do currículo, diretores que tinham por objetivo agradar pais e colegas.

No contexto americano, com tantos desafios, houve a necessidade de criar um “Conselho Nacional de Professores de Matemática⁶⁷”, que tinha por finalidade divulgar a “Nova” Matemática, promover pesquisas e inovar o currículo. Esse conselho trouxe estabilidade para a revolução, “[...] divulgando amplamente os resultados de

⁶⁷ Em inglês *National Council of Teachers of Mathematics*, criado em 1920. Disponível em: <https://www.nctm.org/About/> acessado em 20 de março de 2023.

pesquisas e inovações surgidas, bem como fornecendo novas apreciações críticas de cada novo projeto de currículo” (D’Augustine, 1981, p. XXII).

Em 1957, foi criada a “*National Science Foundation*”, que tinha por função levantar fundos para formar professores, promover pesquisas sobre currículos, e manter projetos de currículo de matemática. Dentre os projetos que foram financiados estava o “Grupo de estudos de ensino de matemática” (*School Mathematics Study Group* - SMSG).

Para D’Augustine (1981) o que faz a Matemática ser Moderna não é o conteúdo, o conteúdo em si não é moderno, salvo exceções. O que consiste na Matemática Moderna, é o programa que tem:

[...] uma estrutura que permite maior participação do aluno; é mais flexível; procura atender as diferenças individuais; dá maior ênfase a um trabalho sólido e unificado; exige melhor equilíbrio entre o aspecto computacional da Matemática; sua aplicação social e os aspectos criativos que ela encerra; dá maior ênfase ao significado dos conceitos e à aplicação, nos currículos, dos resultados de pesquisas sobre a aprendizagem realizadas no campo da Educação e da Psicologia (D’Augustine, 1981, p. 1)

Com isso o autor explicava que não tinha pretensão de dizer que, no currículo de matemática da escola primária, não se encontravam novas ideias. Citava tópicos como: desigualdade, representação simbólica de conjuntos, variáveis que foram inseridas no currículo com o objetivo de unificar e dar uma certa flexibilidade ao mesmo. Nota-se que estes conteúdos eram parte inovadora do currículo em tempos da Matemática Moderna, como destacam também Santos, França e Ramires (2022),

Na análise dos manuais de Sanchez e Liberman (1969), Sangiorgi (1965) e Ferreira e Carvalho (s.d.), vemos indícios da matemática moderna, tais como: organização dos conteúdos de forma lógica, conteúdos relacionados pela teoria de conjuntos e baseado nas estruturas matemáticas; quanto ao saber fração, este vinha articulado a representações numéricas e pictóricas, as quais eram apresentadas, concomitantemente, para se desenvolver ideias a fim de gerar a compreensão e análise das relações entre as quantidades representadas pelos números fracionários (Santos; França; Ramires, 2022, p. 15).

Ao final de cada capítulo há uma vasta lista de referências que sustentam teoricamente o que está sendo apresentado. Dentre elas estão: Edward L. Thorndike (1922); *School Mathematics Study Group* (1962, 1963); *National Council of Teachers of Mathematics* (1959, 1960, 1961, 1963).

Por meio da análise da obra como um todo, de suas finalidades e concepções, pode-se perceber que Charles D'Augustine estava na vanguarda do ideário do MMM, o que ele chamou de Movimento Revolucionário.

O ensino de frações no manual pedagógico "Métodos Modernos para o ensino da Matemática" de D'Augustine (1981), apresenta um rol de conteúdo para serem tratados no ensino primário. O ensino das frações tem início no capítulo 8. Na introdução desse capítulo, o autor ressalta que o conceito de número fracionário é mais sofisticado do que o conceito de número natural, dessa maneira há necessidade da criança ter mais maturidade e maior base matemática para estudá-lo.

A *seqüência* da matemática moderna do ensino das frações equivalentes, no manual referido, se dá a partir de técnicas em repartir conjuntos contínuos, definição, uso da terminologia e representação simbólica, seguindo para a construção do conceito de frações equivalentes. Esse conceito antecede o ensino das operações com números fracionários. Dentro do conjunto dos temas da aritmética, o ensino de frações ordinais antecede o ensino das frações decimais.

Na busca de um *significado* inicial sobre as frações equivalentes para se trabalhar com o aluno, o manual apresenta que a ideia de número fracionário pode ser associada

1 - A partilha de um conjunto determinado; 2 - A razão das propriedades numéricas de dois conjuntos; 3 - Um número associado a partilha de um conjunto contínuo; 4 - Um número que representa o cociente de dois números naturais (sendo o divisor diferente de zero) (D'AUGUSTINE, 1981, p. 144).

Nas primeiras séries do curso primário deveria ser dada ênfase a um conceito mais intuitivo de número fracionário, por meio do trabalho com "[...] regiões de polígonos, segmentos de reta, linhas e conjuntos determinados" (D'Augustine, 1981, p. 145) além de "[...] desenvolver um conceito intuitivo de nomes equivalentes para o mesmo número fracionário, através do trabalho com regiões congruentes e segmentos congruentes" (D'Augustine, 1981, p. 145). Já nas séries mais avançadas dar-se-ia "[...] ênfase à extensão do conceito de número fracionário e frações equivalentes e ao desenvolvimento das operações" (D'Augustine, 1981, p. 145), numa aprendizagem gradual.

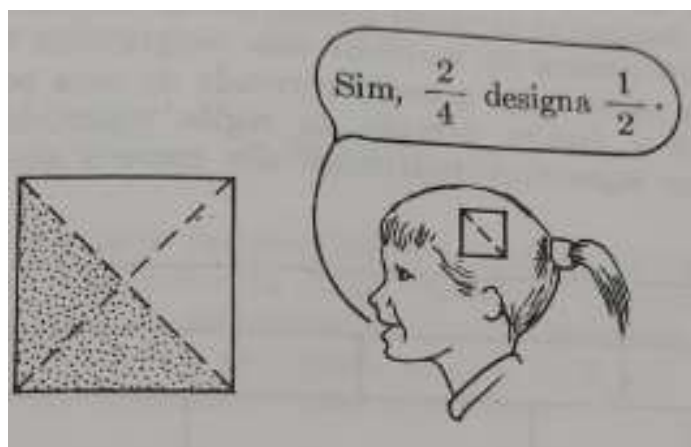
Para mostrar a ideia de que um número fracionário permite muitos nomes equivalentes, o autor sugere que "[...] recorte uma região ou um dos segmentos repartidos, sobrepondo-a às demais regiões e segmentos, para verificar se são

congruentes” (D’Augustine, 1981, p. 148-149). Para esse experimento não usa o círculo, pois não facilita a divisão em partes congruentes pela criança, mas sugere outros polígonos regulares como o quadrado e o hexágono, que podem ser divididos facilmente. Destacamos que nesse manual pedagógico não são usados só círculos, são usados outros polígonos, pensamento flexível. Nesta parte a criança tem que dividi-los.

Logo após apresenta o conceito de números fracionários como sendo o cociente de dois números naturais, de modo que o divisor seja um número diferente de zero, ou seja, “[...] qualquer número que pode ter o nome $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais e $b \neq 0$ ” (D’Augustine, 1981, p. 146). Cabe ao professor estruturar situações que levem a criança a descobrir o *significado* dado às frações equivalentes, que é um número fracionário que tem muitos nomes, porém dentro de uma situação problema é aquele que representa o que foi interrogado.

A comparação entre subconjuntos das partes fracionárias em que o inteiro foi dividido possibilitará essa descoberta (Figura 14). Através de situações do tipo: “Maria tem dois quartos de uma barra de chocolate e João tem um meio da mesma barra. Quem tem mais?” (D’Augustine, 1981, p. 152-153). Esse trabalho também pode ser realizado através de regiões poligonais, onde um inteiro dividido por dois métodos pode representar a mesma área. O termo ‘subconjunto’ utilizado por D’Augustine, é outro indício do MMM.

FIGURA 14 – Região Poligonal que Determinam Dois Nomes de Frações Equivalentes

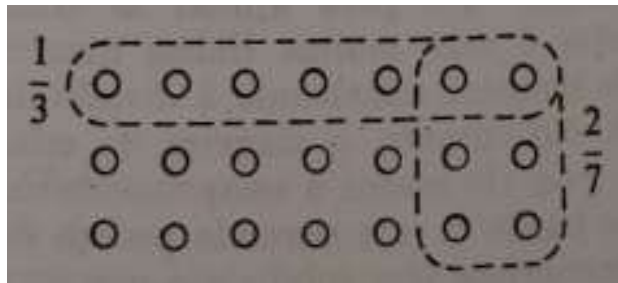


FONTE: D’Augustine (1981, p. 153)

Destacamos que o quadrado (Figura 14) foi dividido pelas diagonais, seria isso intencional? Seria para destacar o “aspecto operativo” (Kamii, Clark, 1995) das frações equivalentes?

Há exemplos de frações discretas. Por exemplo, para verificar se dois nomes de fração são equivalentes, usando conjuntos, faz-se necessário ter um conjunto que possa ser repartido por esses denominadores. No caso $\frac{2}{7}$ e $\frac{1}{3}$ são equivalentes? O conjunto deveria conter 3 linhas e sete colunas com objetos (bolinhas), conforme Figura 15.

FIGURA 15 – Conjuntos para Verificar a Equivalência entre Duas Frações



FONTE: D'Augustine (1981, p. 153)

Dessa maneira facilita perceber que $\frac{1}{3}$ desse conjunto é sete, assim como $\frac{2}{7}$ desse conjunto é seis. São exemplos que possibilitam “[...] mostrar à criança por que se pode dizer se $\frac{a}{b}$ é igual, maior ou menor do que $\frac{c}{d}$, dependendo da relação entre a vezes d e b vezes c ” (D'Augustine, 1981, p. 154).

Na sequência é apresentada uma região retangular repartida em várias partes fracionárias (Figura 16). Ressalta que este é um recurso⁶⁸ muito útil que leva a criança à descoberta das frações equivalentes.

⁶⁸ O termo recurso muito útil, são palavras do autor.

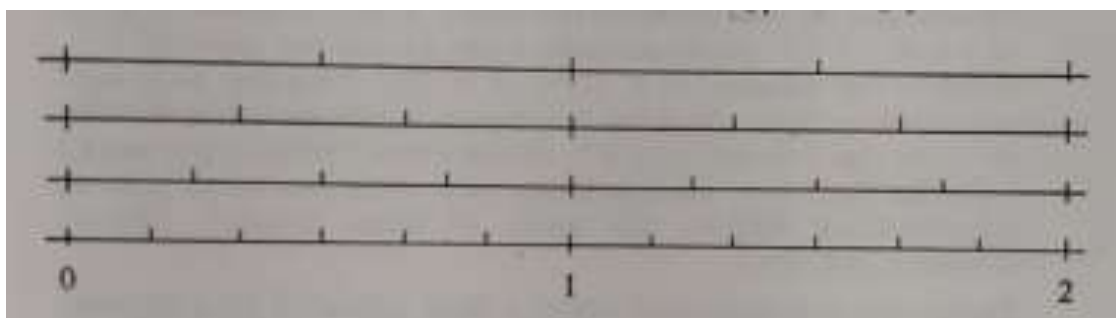
FIGURA 16 – Quadro de Equivalências

1											
$\frac{1}{2}$											
$\frac{1}{3}$											
$\frac{1}{4}$											
$\frac{1}{5}$											
$\frac{1}{6}$											
$\frac{1}{8}$											
$\frac{1}{9}$											
$\frac{1}{10}$											
$\frac{1}{12}$											

FONTE: D'Augustine (1981, p. 154)

Os quadros de equivalência constituem um saber profissional de longa data, assim como podemos observar nos dois manuais já analisados anteriormente, esse dispositivo permanece como uma boa estratégia para ensinar as frações equivalentes por descoberta. O quadro (Figura 16) está preenchido somente com as frações unitárias, isso seria intencional? Em relação aos quadros dos manuais analisados anteriormente, nesse, a criança teria que deduzir que as partes são iguais e as linhas coincidem são equivalentes?

D'Augustine (1981), afirma que outro recurso, muito útil para a descoberta das frações equivalentes, é o uso de linhas numérica (Figura 17). Essas deverão ser repartidas de maneira semelhante ao quadro de equivalência. Para fazer uso desse recurso, a criança marca o comprimento de uma divisão fracionária em outro pedaço de papel e verifica se “[...] outras linhas numéricas têm subdivisão que correspondem àquele comprimento” (D'Augustine, 1981, p. 154). Sendo a linha numerada uma outra forma de representar a divisão em partes, apresenta a relação parte-todo, e é mais uma preparação da apresentação da fração como um número.

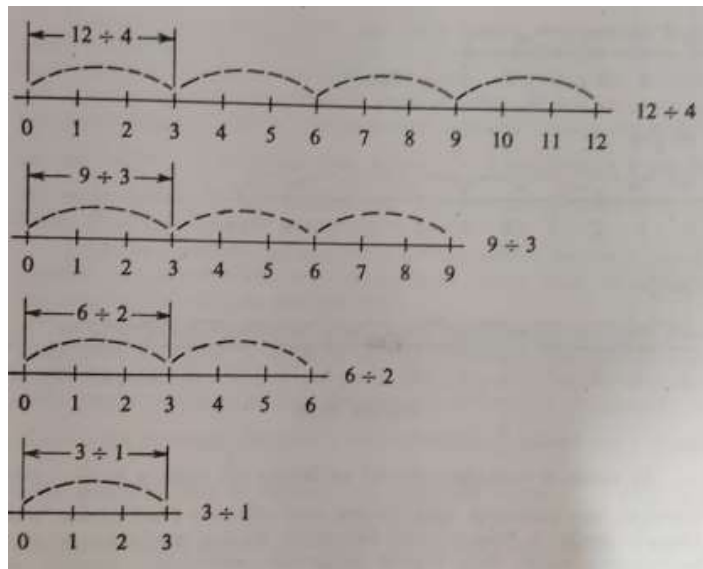
FIGURA 17 – Linha Numérica, Conjuntos Equivalentes

FONTE: D'Augustine (1981, p. 155)

Usando a linha numérica, a criança pode descobrir conjuntos de frações equivalentes como: “ $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}\}$, $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}\}$, $\{\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}\}$, $\{\frac{4}{8}, \frac{3}{6}\}$, $\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}\}$, $\{\frac{5}{3}, \frac{10}{6}\}$, $\{\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{12}{6}\}$ ” (D'Augustine, 1981, p. 155), formando as classes de equivalência, característica do MMM.

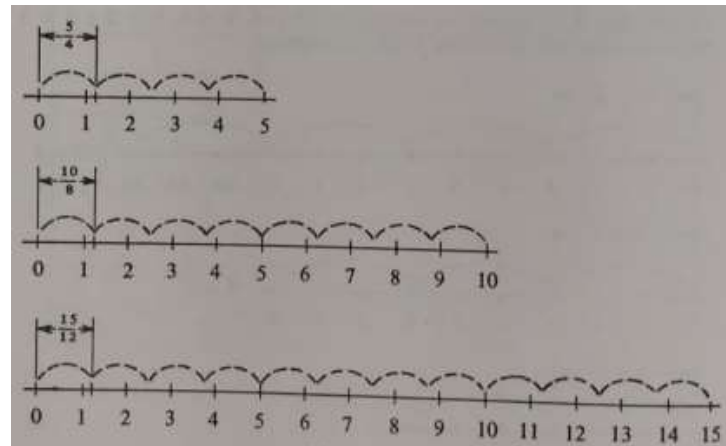
Para elaborar o conceito de frações equivalentes, usando a linha numérica, o manual propõe que anteriormente se trabalhe o conceito de cocientes de números naturais, para começar a desenvolver a ideia de expressões de divisão equivalentes. Por exemplo: $12 \div 4$, $9 \div 3$, $6 \div 2$, $3 \div 1$, podemos observar na Figura 18 abaixo.

FIGURA 18 – Ideia de Expressões de Divisão Equivalente



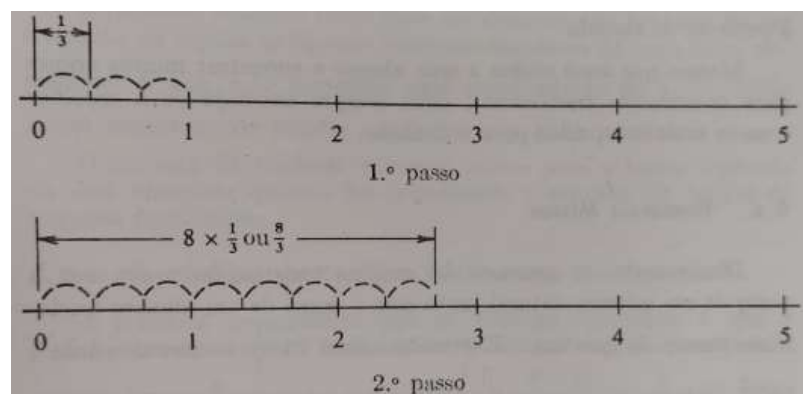
FONTE: D'Augustine (1981, p. 155)

Partindo desse exemplo, o professor pode instigar os alunos a citarem outros nomes que representam três unidades, numa *graduação* para exemplos matemáticos de números fracionários, até se estender ao conceito de frações equivalentes, conforme descrito na Figura 19.

FIGURA 19 – Nomes Equivalentes a $\frac{5}{4}$, Usando a Linha Numérica

FONTE: D'Augustine (1981, p. 156)

Nessa abordagem a fração é pensada como $5 \times \frac{1}{4}$, por exemplo. Nas primeiras experiências com números fracionários, costuma-se pedir à criança que determine frações equivalentes pela comparação entre duas regiões poligonais repartidas. D'augustine traz outras abordagens para comparar duas regiões, mas o conceito é o mesmo, só que com a reta numerada. Quando se considera que $\frac{a}{b}$ representa $a \times \frac{1}{b}$ numa linha numérica, será importante para a criança dividir primeiro a parte relativa a $\frac{1}{b}$ e, então, mostrar a divisão $\frac{a}{b}$. Para melhor compreender podemos analisar a Figura 20 que primeiramente mostra $\frac{8}{3}$ como $8 \times \frac{1}{3}$, e na sequência $\frac{8}{3}$.

FIGURA 20 – A Fração $\frac{8}{3}$ como $8 \times \frac{1}{3}$ Representada na Reta Numerada

FONTE: D'Augustine (1981, p. 157)

Ressalta-se que houve preocupação com o *significado* dado às frações, assim como na construção do conceito de frações equivalentes.

Para a construção do conceito dado às frações equivalentes, pode-se identificar uma *graduação*, nessa graduação o ensino percorreu as etapas: inicia-se com a comparação de regiões e segmentos repartidos, sobrepondo-as às demais regiões para verificar a congruência; segmentos e polígono dividido por métodos diferentes produzem a mesma área; relação de equivalência em subconjuntos equipotentes⁶⁹; quadro de equivalência; linha numerada rumo a construção das frações como número.

Conforme D’Augustine (1981), todo número fracionário pode ser escrito por uma fração equivalente, o que permite o desenvolvimento de um pensamento flexível. Anterior ao Movimento da Matemática Moderna, apenas frações reduzidas às *expressões mais simples* eram aceitas como corretas ao responder um problema.

O autor considera que a fração reduzida à expressão mais simples é a mais adequada, por exemplo, numa operação de multiplicação; mas, a “[...] fração escolhida para expressar a resposta de um problema depende do conteúdo do problema, bem como dos conceitos para os quais os alunos estão sendo preparados” (D’Augustine, 1981, p. 156) ou seja, do significado e a aplicação.

Se o aluno estiver sendo preparado para a notação decimal, a fração $\frac{4}{10}$ deve ser a resposta esperada ao invés de $\frac{2}{5}$, pois, quando o aluno estudar a precisão de medidas, perceberá que a medida $\frac{4}{10}$ foi feita comparada a $\frac{1}{10}$ do centímetro, bem como, que a fração $\frac{2}{5}$ do centímetro, poder-lhe-ia enganar quanto a precisão da medida. Assim como, se quiser utilizar a ideia $\frac{1}{3}$ com relação a dúzia, a fração $\frac{4}{12}$ transmite maior significado (D’Augustine, 1981). Essa passagem, reflete bem a matemática moderna do ensino das frações equivalentes pois, ancorados na cultura escolar, o autor se preocupa com os significados dados pela escola na produção de um saber escolar. Para o campo disciplinar da Matemática, não seria necessário fazer todas essas distinções.

O autor afirma que, ao se trabalhar com as frações equivalentes, mesmo que se ensine ao aluno que podemos encontrar muitos nomes para o número fracionário, deve-se sempre buscar pelo nome mais apropriado. Nesse contexto a interpretação

⁶⁹ Dizemos que dois subconjuntos são equipotentes quando estão formados pela mesma quantidade de elementos.

dada à escrita da fração é aquele que melhor representa o que foi interrogado, dentro da situação problema.

Os *exercícios/problemas* são apresentados no final do capítulo referente ao ensino das frações equivalentes, num total de nove atividades. Estas são bem diversificadas, fazendo relação com os *exercícios/problemas* relatados no capítulo, buscam verificar através de polígonos que duas frações podem ser equivalentes, conjuntos equipotentes também geram frações equivalentes, a equivalência de frações a partir de material concreto (chocolate), e em diferentes exercícios, o autor solicita o uso da linha numérica.

A proposta apresentada para os *exercícios/problemas*, articula-se com os caminhos que foram trilhados para o ensino, uma retomada dos exemplos dados com mudanças no número fracionário, seguindo a mesma graduação.

Em síntese, destacamos que o manual pedagógico “Métodos Modernos para o Ensino de Matemática” (1981) de autoria de Charles H. D’Augustine, se apropriou das ideias presentes na Matemática Moderna, apresenta uma flexibilidade na introdução das frações equivalentes, utilizando de diferentes polígonos, assim como a divisão desses polígonos em partes congruentes são feitas pelas crianças. Essa flexibilidade também está presente no uso da linguagem moderno, como é o caso da palavra congruentes. As classes de equivalência, a linha numerada são outros recursos característicos do MMM, presentes no manual, sendo esses recursos semiabstratos.

Para construir o conceito de frações equivalentes, o manual segue uma graduação, parte de modelos de áreas com recortes e comparação de partes congruentes, como por exemplo um círculo dividido em duas partes e em quatro partes, para mostrar que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Seguido de modelos com contadores discretos. Com o auxílio de um quadro de frações, a criança manipula um pedaço de papel para descobrir segmentos congruentes. O uso da linha numerada dividida em segmentos congruentes realiza comparações para verificar se outras linhas numéricas têm subdivisões que correspondem a aquele segmento, chegando ao conjunto das classes de frações equivalentes. Assim afirmamos que D’Augustine tem um trabalho exaustivo com as frações equivalentes, tendo como foco a construção do conceito do número racional.

3.4 Frações equivalentes na coleção do GRUEMA Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau – volumes II, III e IV

Compõem essa seção de estudo os livros didáticos da coleção “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau” Volume II⁷⁰, III e IV (Figura 21), e o Guia do Professor referente a cada Volume. Esses Volumes são referentes a 2ª, 3ª e 4ª série do ensino primário respectivamente. Foram responsáveis pela coleção as autoras Anna Franchi⁷¹, Lucília Bechara Sanchez⁷² e Manhúcia Perelberg Liberman⁷³.

⁷⁰ Não trabalhamos com o Volume I da coleção pois não consta o conteúdo de frações

⁷¹ Lecionou durante seis anos numa em escolas de ensino primário, estudou no ensino secundário, no Instituto de Educação de Jundiaí. Em 1958 iniciou matemática na Universidade de São Paulo (USP). Em 1960 desenvolveu trabalho no Experimental da Lapa, foi professora e orientadora da área de Matemática, participando de pesquisas em avaliação e currículo permanecendo lá com algumas interrupções, até 1980. Anna Franchi, foi membra do GEEM, dentre seus trabalhos realizados, destaca-se o livro “Introdução da Matemática Moderna na Escola Primária” (1963), além dela tinham mais duas autoras: Manhúcia Perelberg Liberman e Lucília Bechara Sanchez. Na década de 1970 compôs a equipe GRUEMA, na qual participou na elaboração da coleção “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau” Volumes I, II. Foi supervisora na elaboração do Caderno VII, que traz o planejamento de ensino da área de matemática para as primeiras séries do curso fundamental – 1.º grau. Esse Documento pertencente a Secretaria de Estado dos Negócios da Educação do Estado de São Paulo. Dados disponíveis em: (<https://www.ghemat.com.br/itens/anna-franchi->).

⁷² Possui graduação pela Pontifícia Universidade Católica de Campinas (1957), mestrado em Educação pela Universidade de São Paulo (1991) e doutorado em Educação pela Universidade de São Paulo (1997). Atuou como diretora pedagógica da Escola Vera Cruz e diretora geral do Instituto Superior de Educação Vera Cruz. Foi membro do GEEM, ministrou cursos para professores da rede pública, elaborou livros didáticos, consultora de guias curriculares no estado de São Paulo, assessora de currículos em outros estados brasileiros (Filho, 2019).

⁷³ Licenciada em Matemática pela Faculdade Nacional de Filosofia do Rio de Janeiro em 1947, trabalhou no Serviço de Medidas e Pesquisas Educacionais, coordenou a equipe responsável pela elaboração do Programa da Escola Primária de São Paulo (1968-1969), foi uma das fundadoras do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), autora de livros didáticos (França; Duarte, 2017).

FIGURA 21 – Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau (Volumes II, III e IV)



FONTE: Liberman; Franchi; Sanchez, (1974a capa); Sanchez; Liberman, (1974b capa); e Sanchez; Liberman, 1975a capa).

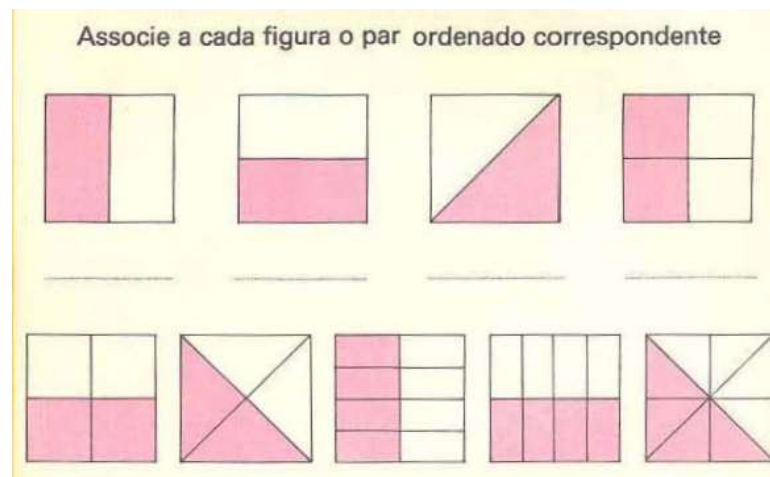
Na coleção “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau” Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA⁷⁴), o ensino de frações traz como subtítulo número racional, tendo início na segunda série do ensino primário e surge da necessidade de tornar possível a operação da divisão. O Guia do Professor “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau” (1975), Volume II, referente a 2ª série, traz a definição: “Chama-se de número racional a todo número n , solução da equação: $n \times b = a$, onde a e b são números naturais e b diferente de zero. O número n pode ser expresso na forma $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ ” (Liberman; Franchi; Sanchez, 1975, p. 42).

Quanto às frações equivalentes, o livro didático “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau” (Liberman; Franchi; Sanchez, 1974a) da 2ª série, tem por objetivo associar figuras equivalentes a pares ordenados⁷⁵ equivalentes. Na Figura 22, pode-se perceber por exemplo a equivalência entre as figuras e os pares ordenados (1,2), (2,4), e (4,8), a construção do número racional. Essa linguagem matemática era uma característica do Matemática Moderna.

⁷⁴ De acordo com Vilela (2009) na coleção referida sua autoria ficou associada a sigla GRUEMA, onde Manhúcia Perelberg Liberman, Lucília Bechara Sanchez e Anna Franchi eram integrantes do grupo.

⁷⁵ A escrita do número fracionário na forma $\frac{a}{b}$, na coleção “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau”, pode ser associado ao par ordenado (a, b) .

FIGURA 22 – Figuras equivalentes e pares ordenados correspondente

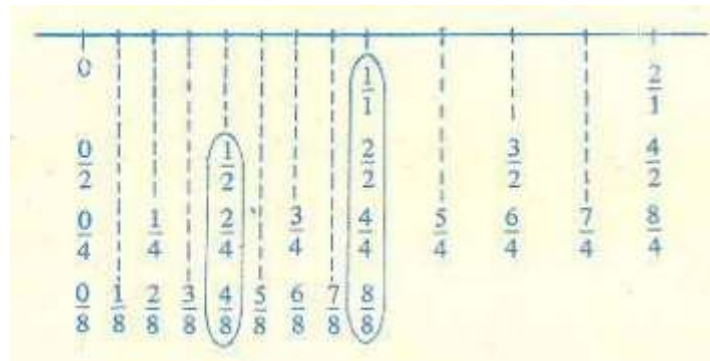


FONTE: Liberman, Franchi, Sanchez (1974a, p. 131)

No livro didático “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau” Volume III, (Sanchez; Liberman, 1974b), e Volume IV de (Sanchez; Liberman, 1975a), o conceito de frações equivalentes não é mencionado. O Guia do Professor referente ao Volume III, traz como *significado* para as frações equivalentes que “Duas frações são equivalentes quando representam o mesmo número racional” (Sanchez; Liberman, 1975b, p. 28), indicando que as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ podem ser escritas com o uso do sinal de igualdade $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$. O Guia do professor de Volume IV, indica que o entendimento da equivalência entre frações ocorreu na série anterior e na 4ª série essas ideias são retomadas a fim de que “[...] as crianças descubram regras para encontrar ou identificar frações equivalentes” (Liberman; Sanchez, 1978, p. 13), que a equivalência leva ao conceito do número racional.

O Guia do professor Volume III, traz a imagem da reta numerada, indicando que esta é uma maneira de visualizar os números racionais, assim como destaca algumas frações equivalentes (Figura 23).

FIGURA 23 – Reta numerada e as Frações Equivalentes



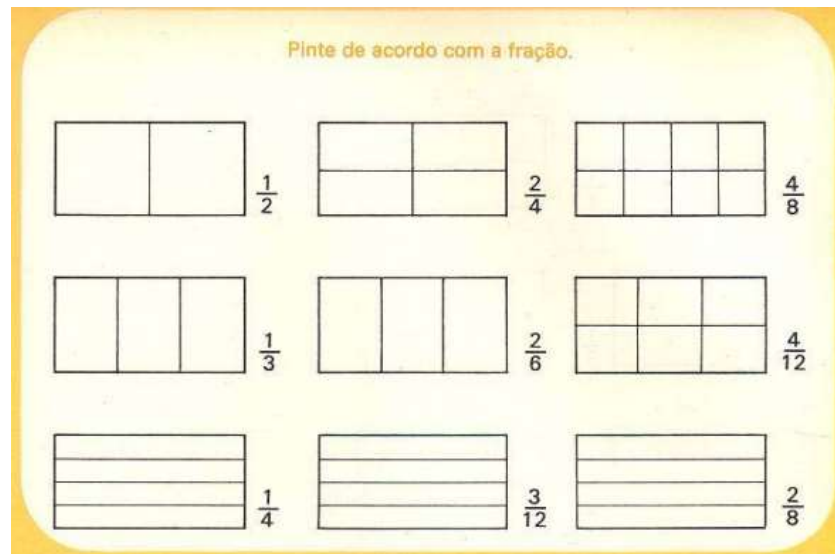
FONTE: Sanchez; Liberman, (1975b, p. 29)

A *sequência* da matemática do ensino de frações, apresentada no livro didático referente à 3ª série é: representação do número racional na forma $\frac{a}{b}$, frações equivalentes, classes de equivalência, número misto, representação fracionária do número inteiro, comparação de frações, operações de adição e subtração de números fracionários.

Um dos primeiros conteúdos trabalhados dentro do número racional na forma fracionária são as frações equivalentes e seguem uma *graduação* para o ensino. Essa se dá a partir de retângulos equivalentes; conjunto de frações equivalentes através do quadro de equivalências; equivalência de frações com o uso de objetos como (carrinhos, laços), com a reta numérica e as frações equivalentes a unidade. No Guia do Professor, Volume 3 (Sanchez; Liberman, 1975 b), indica o uso de materiais como: círculos, retângulos, ou outras formas recortadas em 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 12 partes congruentes para auxiliar o aluno a descobrir congruências, sugerem que esses polígonos sejam confeccionados de flanelógrafo e cartolina.

As relações de equivalência entre frações no livro didático de 3ª série podem ser verificadas a partir das imagens apresentadas a seguir. A Figura 24 pede que o aluno pinte o retângulo de acordo com a fração dada. Este exercício possibilita o aluno visualizar que ao pintar $\frac{1}{2}$ do retângulo, pintou a mesma quantidade do retângulo que indicava para pintar $\frac{2}{4}$, o mesmo ocorre com a quantidade $\frac{4}{8}$.

FIGURA 24 – Frações equivalentes a partir de retângulos equivalentes



FONTE: Sanchez; Liberman, (1974b, p. 104)

Os quadros apresentados na Figura 25, permitem representar frações e compará-las visualmente. Primeiramente através da pintura referente a fração dada e em seguida escrevendo o conjunto de frações equivalentes que foram descobertos através da parte pintada.

FIGURA 25 – Conjunto de frações equivalentes

Pinte de acordo com a fração indicada.

	$(\frac{1}{2})$	
	$(\frac{2}{4})$	
	$(\frac{3}{6})$	
	$(\frac{4}{8})$	
	$(\frac{5}{10})$	
	$(\frac{6}{12})$	

Em Matemática:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} =$$

$$= \frac{4}{8} = \dots = \dots$$

$\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots \}$

Conjunto de frações equivalentes.

Escreva as frações correspondentes.

	(\quad)	
	(\quad)	
	(\quad)	
	(\quad)	
	(\quad)	
	(\quad)	

Em Matemática:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \dots = \dots =$$

$$= \dots = \dots$$

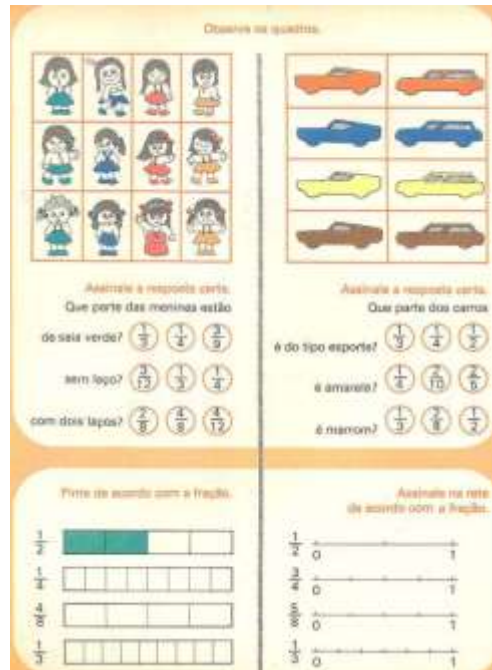
Escreva o conjunto de frações equivalentes que você descobriu.

$\{ \dots, \dots, \dots, \dots \}$

FONTE: Sanchez; Liberman, (1974b, p. 106)

Para visualização de frações equivalentes, o livro didático Volume III também apresenta esquemas que associam as frações a uma situação mais concreta e ao uso da reta numerada, conforme Figura 26.

FIGURA 26 – visualização da fração equivalente



FONTE: Sanchez; Liberman, (1974b, p. 107)

Observando a Figura 55 “[...] que parte das meninas estão com dois laços?” (Sanchez; Liberman, 1974, p. 7), tendo a opção $\frac{4}{12}$ para ser assinalada, ainda no quadro, do lado direito, “[...] que parte dos carros é amarela?” (Sanchez; Liberman, 1974, p. 7), nesse caso tem-se $\frac{2}{8}$ dos carros na cor amarela, porém nas opções para serem assinaladas apresentam as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{5}$. Nesse caso o aluno precisa estabelecer a relação de equivalência entre as frações $\frac{2}{8}$ e $\frac{1}{4}$. Ainda, na Figura 55 pode-se observar um exercício que associa as frações a sua representação na reta numérica.

O Guia do professor referente a 3ª série indica que “As conclusões de equivalência de frações a que os alunos devem chegar decorrente dos exercícios e só depois de percebidas pela maioria é que o professor poderá ressaltá-las” (Sanchez; Liberman, 1975b, p. 30), que pode indicar orientações para que possibilite ao aluno a construção do conceito de frações equivalentes.

Para se trabalhar as frações equivalentes a unidade, o guia do professor Volume III indica que se utilize de materiais concretos como o círculo dividido em oito partes, então o inteiro pode ser representado por $\frac{8}{8}$. Pode-se observar esse exemplo conforme indicado na Figura 27.

FIGURA 27 – Frações equivalentes a unidade

Quantos $\frac{1}{4}$ contêm a figura A? e a figura B?

As figuras A e B juntas contêm $\frac{1}{4}$.

Quantos $\frac{1}{2}$ contêm a figura A? e a figura B?

As figuras A e B juntas contêm $\frac{1}{2}$.

A figura A contém $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{6}$.

As figuras A e B juntas contêm $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{6}$.

Quantos quintos contêm uma figura inteira?

Quantos quintos contêm duas figuras inteiras?

FONTE: Sanchez; Liberman, (1974b, p. 110)

Observa-se que no ensino de frações equivalentes não foram contemplados os problemas, já os exercícios são coloridos, geralmente acompanhados com uma imagem que auxilia na interpretação para a resolução.

O livro didático referente a 4ª série de Sanchez e Liberman (1975a), estabelece a *sequência* para o ensino do número racional na forma fracionária, através da equivalência, ordem, operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações. Já a sequência estabelecida para o ensino de frações equivalentes se dá através da comparação de frações, classes de equivalência e a regra.

Para essa *sequência* seguiu a *graduação*, comparar frações com o auxílio de retângulos divididos em partes congruentes, construção das classes de equivalência através do quadro de equivalências e da reta numerada, chegando à regra: Frações equivalentes representam o mesmo número racional. A ênfase quanto a descoberta da regra para encontrar frações equivalentes é apresentada também no Guia do Professor Volume IV (Liberman; Sanchez, 1978).

No livro didático da 4ª série de Sanchez e Liberman (1975a), o conteúdo é apresentado através de exercícios, seguindo a graduação apresentada acima, numa

sequência que o aluno ao realizar o que lhe é proposto, pode fazer novas descobertas em relação as frações.

Os *exercícios/problemas* estão em função da construção do conceito de frações equivalentes, são da forma: pinte de acordo com a igualdade; complete a igualdade; complete com sinais de maior, menor ou igual; escreva outras frações no conjunto de frações equivalentes; represente na reta numerada.

Um exemplo de representação da equivalência na reta numerada, está representado na Figura 28 em que são representados valores menores que a unidade.

FIGURA 28 – Frações equivalentes na reta numerada



FONTE: Sanchez; Liberman, (1975a, p. 69)

Ao realizar o exercício, o aluno visualiza que o ponto na reta que representa a fração $\frac{1}{2}$, coincide com o ponto que representa as frações $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{10}{20}$. Enfatizando assim a definição dada à equivalência, que duas frações são equivalentes quando representam o mesmo número racional.

Ainda observamos que o livro é colorido, consumível, sendo um diferencial desse material em relação aos outros materiais por nós analisados que fazem referência à mesma época, e também, o livro é para uso exclusivo do aluno, pois traz espaços para resolver e completar as atividades no próprio livro.

3.5 Frações equivalentes na coleção do NEDEM Ensino Moderno de Matemática – volumes II, III e IV

No Preâmbulo do 1º Caderno de atividades⁷⁶ “Ensino Moderno de Matemática”, as autoras (Holzmann, Martins, Yaremtchuk, Arruda, Humphreys, 1969) explicam que estavam em um período denominado Matemática Moderna fase inicial, onde circulava entre autores de manuais escolares uma diversidade de vocabulários e conceitos, mas que iriam seguir a linha do NEDEM. Como a obra não pretendiam apresentar algo novo, ou traçar diretrizes para o Ensino Moderno de Matemática no ensino primário, destacam que

Surgiu como fruto do estudo de um grupo de professores interessados em buscar uma solução para o tão discutido problema de uma precária aprendizagem em matemática por um grande número de nossos escolares (Holzmann et al., 1969, p. 2).

As autoras ainda afirmam que não teriam publicado sem ter experimentado o material em sala de aula e ter tido êxito. No entanto, para elas o material em si não solucionaria o problema que coloca a matemática como um “tabu”, isso dependeria também dos professores, o “[...] dinamismo do professor, a sua vontade de acertar e conceito que é o ‘aluno que aprende’ e não ‘o professor que ensina’” (Holzmann *et al.*, 1969, p. 2). O aluno deveria formar seus próprios conceitos, o professor proporcionaria momentos e disporia de elementos que possibilitassem o aluno para isso. De acordo com as autoras o material foi elaborado com base nos princípios de aprendizagem de Jean Piaget, considerando que a criança não adquire o conceito de número antes dos seis anos e meio a sete anos. Complementam que as crianças só aprendem de fato a partir de experiências concretas, de forma gradativa passarão para atividades semiconcretas até chegar à abstração, cabendo ao professor estimular essas etapas a partir de situações problema que despertem o interesse e a vontade do aluno em aprender (Holzmann et al., 1969).

A coleção “Ensino Moderno de Matemática”, disposta em quatro Volumes e destinada as primeiras séries de escolarização, foi organizada pelo NEDEM. O NEDEM, teve como coordenador geral Osny Antônio Dacol, e a coleção teve como

⁷⁶ Os cadernos de atividades de Matemática Moderna foram elaborados pelas professoras citadas no texto, de forma artesanal, com folhas destacáveis aos alunos. Esses foram produzidos com base em experiências desenvolvidas em sala de aula com os alunos, destinados ao ensino primário, o caderno contém orientações ao professor para realização das atividades.

autoras: Esther Holzmann⁷⁷, Clélia Tavares Martins⁷⁸, Gliquéria Yaremtchuk⁷⁹, Henrieta Dyminski Arruda⁸⁰, Nelly Humphreys⁸¹. Destacamos que alguma das autoras não participaram de todos os volumes da coleção. Nessa sessão será realizada uma análise na coleção completa, pois diferente dos manuais pedagógicos, o conteúdo das frações equivalentes está distribuído entre os anos e será necessário analisar todos os volumes para caracterizar a matemática moderna do ensino de frações equivalentes por meio das categorias já anunciadas sequência, significado, graduação e exercícios/problemas.

Na coleção dos livros didáticos do NEDEM Volume I, II, III e IV, referentes respectivamente à 1ª, 2ª, 3ª e 4ª série do ensino primário, a matemática do ensino de frações tem início na 2ª série, mas o ensino de frações equivalentes é tratado a partir da 3ª série.

Para este estudo, realizou-se uma análise dos livros didáticos da coleção “Ensino Moderno de Matemática” séries iniciais, produzido pelo NEDEM, Volume II (Holzmann *et al.*, 1974), III (Holzmann; *et al.*, 1975), IV (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975a) respectivamente e Livro do mestre (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975b).

Na coleção dos livros do NEDEM o ensino de frações tem início na 2ª série com o livro didático Volume II conforme capa Figura 29, a temática é tratada através de

⁷⁷ Licenciada em Pedagogia, coordenou o Grupo de Ensino Primário, professora de Teoria e Prática da Matemática do Instituto de Educação do Paraná, lecionou matemática nas classes integrais do Colégio Estadual do Paraná. Fez parte do quadro efetivo de professores do Instituto de Educação, atuando no curso de formação e especialização de professores (Portela, 2009).

⁷⁸ Citada anteriormente, na análise do módulo 9.4 “Operando com Números Fracionários, Projeto HAPRONT.

⁷⁹ Gliquéria Yaremtchuk, fez licenciatura em Pedagogia pela Universidade Federal do Paraná, foi professora da Secretaria de Educação do Paraná efetivada em 1961, professora da disciplina de Teoria e Prática de Matemática na formação de Normalistas do Instituto de Educação do Paraná. Em 1967 compôs a equipe que elaborou as Diretrizes Curriculares da Secretaria de Estado da Educação do Paraná, referente a disciplina de Matemática ensino de 1º grau. Diante do seu trabalho realizado com o grupo de professoras e coordenador que produziram a coleção “Ensino Moderno de Matemática”, foi considerada uma *expert* (para mais informações sobre *expert*, pesquisar em: <https://www.ghemat.com.br/experts>).

⁸⁰ Henrieta Dyminski Arruda cursou a Escola Normal no Instituto de Educação do Paraná, concluindo em 1954. Licenciada em Pedagogia pela Universidade Federal do Paraná, atuou como professora de 1º ano em escola pública no Paraná, produziu juntamente com outros professores, a coleção de livros “Ensino Moderno da Matemática”. “Ao participar na elaboração de materiais didáticos que circulam no estado do Paraná, conforme fontes apresentadas, Henrieta configura-se como uma *expert*, destacando-se como uma peça fundamental na educação primária paranaense” (Berticelli; Portella, 2021, s.p.). Participou da elaboração de documentos para o ensino e formação de professores vinculada a CELEPAR, atuou como assessora pedagógica no Instituto de Educação do Paraná na década de 1970 e foi Coordenadora do Ensino de Matemática na Rede Municipal de Ensino de Curitiba.

⁸¹ Nelly Humphreys foi Professora Normalista, orientadora pedagógica do Centro de Pesquisas Educacionais, professora de Prática no Instituto de Educação do Paraná, participou do volume I da coleção “Ensino Moderno de Matemática” (1970).

unidades fracionárias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, e $\frac{1}{5}$, de uma figura geométrica e de elementos de um conjunto.

FIGURA 29 – “Ensino Moderno de Matemática”, Volume II



FONTE: Holzmann, *et al.* (1974, capa).

O livro didático Volume III “Ensino Moderno da Matemática” (Holzmann et al. 1975), referente a 3ª série apresenta a capa (Figura 30).

FIGURA 30 – “Ensino Moderno de Matemática”, Volume III



FONTE: Holzmann, et al (1975, capa).

Nesse Volume, o ensino de frações apresenta a *sequência*: unidade fracionária, fração, representação de números fracionários na reta numérica, relação de igualdade, desigualdade, ordem e equivalência, adição e subtração de frações homogêneas e heterogêneas.

As frações equivalentes são trabalhadas após as relações de igualdade entre unidade fracionária e unidade inteira, como exemplo “Pinte $\frac{3}{3}$ de cada bolo de uma cor” (Holzmann et al. 1975) e das relações de desigualdade e ordem.

O Livro didático “Ensino Moderno de Matemática” de Holzmann, et al. (1975) Volume III, apresenta o rol de conteúdo a serem tratados na 3ª série, sendo que a terminologia “fração” é apresentada no índice. O conteúdo de frações se inicia na página 121⁸², não trazendo nenhum título ou subtítulo que conste o termo frações. As frações equivalentes são apresentadas a partir da Figura 31, através da qual destacamos o *significado* dado as frações equivalentes, duas formas distintas de representar uma mesma quantidade.

⁸² O livro didático não apresenta a página numerada, usamos paginação a partir da contagem, por indicar no sumário que o conteúdo de frações se inicia na página 121.

FIGURA 31 – Frações Equivalentes

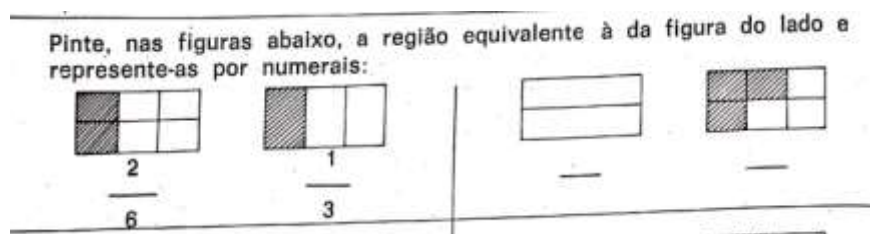


FONTE: Holzmann et al. (1975, p.137)

O livro apresenta uma *gradação* para o ensino das frações equivalentes, através de situação problemas, retângulos congruentes; diagramas; quadros de equivalência e conjuntos equipotentes.

Em seguida vários *exercícios/problemas* que trabalham a ideia de equivalência, conforme Figura 32, em que os alunos, pelas ações de pintar, estariam experienciando uma situação de equivalência. No retângulo da esquerda a noção de metade foi representada numa imagem na qual o aluno teria que fazer uma “operação” mental para compreender que $\frac{1}{2}$ equivaleria a $\frac{3}{6}$, seguindo os pressupostos piagetianos.

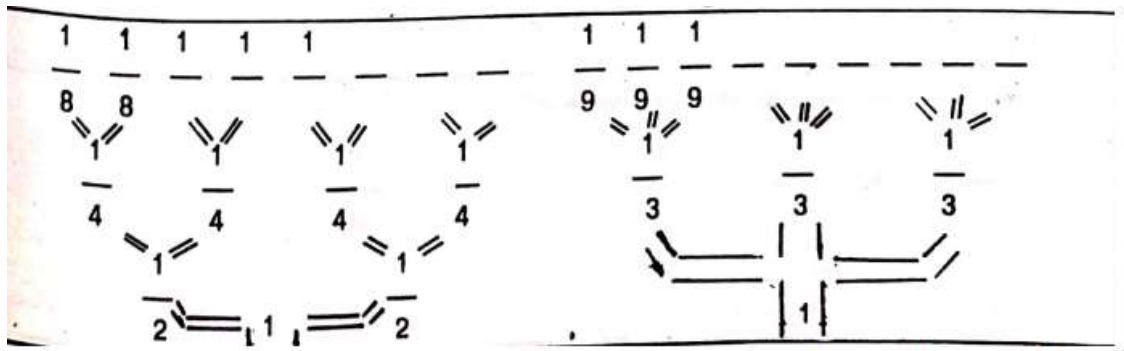
FIGURA 32 – Frações Equivalentes - fragmento do exercício



FONTE: Holzmann et al. (1974, p. 137)

Também traz *exercícios* da forma: pinte, nos diagramas frações equivalentes; olhe o quadro de equivalências e responda; complete as equivalências. Mas não para por aí. Em seguida aos exercícios descritos, o livro traz um diagrama conforme Figura 33. No diagrama tem espaços para completar com as frações que faltam e estabelecer relações de equivalências, como: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, são equivalentes a $\frac{1}{4}$. E que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, são equivalentes a $\frac{1}{2}$, assim $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ são equivalentes a 1. Sendo essa a única atividade que apresenta soma de frações, apesar do livro trazer sumário adição e subtração de frações homogêneas e heterogêneas.

FIGURA 33 – Diagrama de Equivalência

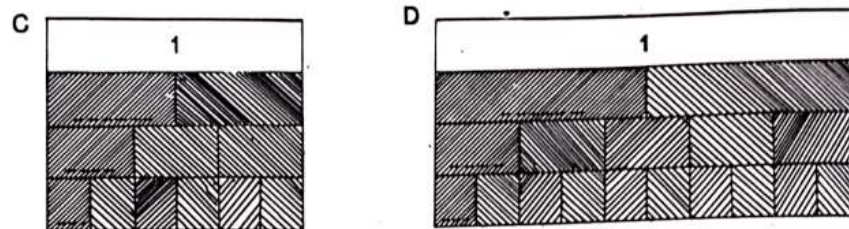


FONTE: Holzmann et al. (1974, p.137)

Para o ensino das frações equivalentes no Volume III, apresenta ainda mais três *exercícios/problemas* da forma: Complete as equivalências utilizando o quadro de equivalência conforme Figura 34, represente a parte hachurada por numerais (Figura 35), relacione no sentido de “equivale a” (Figura 36).

FIGURA 34 – Quadro de Equivalência - fragmento do exercício

Complete:



Use os quadros acima para completar as equivalências:

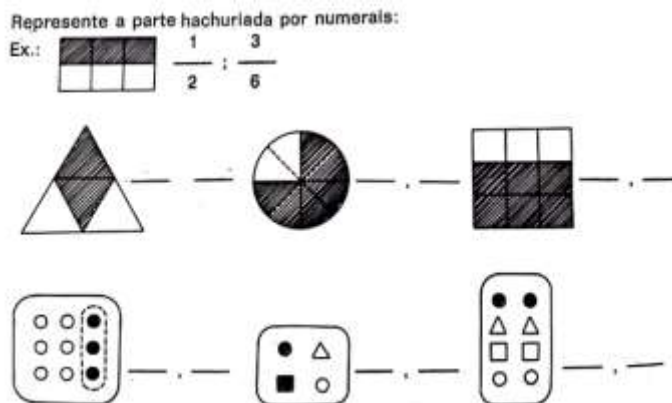
$$\frac{1}{2} \longleftrightarrow \frac{\quad}{6} \quad \frac{5}{5} \longleftrightarrow \dots \quad \frac{1}{5} \longleftrightarrow \frac{\quad}{10}$$

FONTE: Holzmann et al. (1975, p.138)

Os quadros de equivalências são dispositivos semiabstratos, observando a Figura 34 destacamos a compreensão do todo, sendo que o 1 equivale a $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{6}$,...etc. Nesse exercício está sendo pedido que através da observação do dispositivo se encontre frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ cujo denominador seja 6, onde a criança chegará à fração $\frac{3}{6}$, concluindo assim que $\frac{1}{2}$ é equivalente a $\frac{3}{6}$.

A Figura 35 apresenta uma outra forma da criança construir o conceito de frações equivalentes. A partir da observação de figuras geométricas divididas em partes congruentes e elementos discretizados (pequenos círculos, quadrados e triângulos) escrever diferentes frações que representam a mesma quantidade.

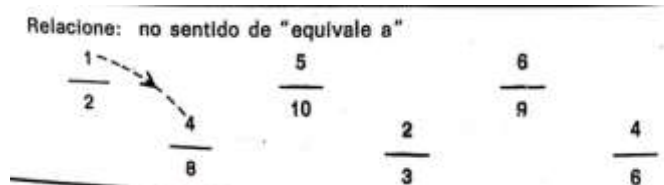
FIGURA 35 – Represente a Parte Hachurada Referente as Figuras Geométricas e os Conjuntos



FONTE: Holzmann et al. (1975, p. 138)

Seguindo uma *gradação* no nível de dificuldade, na Figura 36 já não há mais nenhum auxílio, somente a linguagem matemática.

FIGURA 36 – A fração dada “Equivale a”



FONTE: Holzmann et al. (1975, p. 138)

Destacamos que os exercícios no Volume III da coleção “Ensino Moderno da Matemática” (Holzmann et al. 1975), não são numerados e trazem um exemplo, um passo a passo de como o aluno deve proceder para a resolução.

O Livro didático “Ensino Moderno de Matemática” de Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975a) Volume IV, que apresenta a capa conforme Figura 37, ao iniciar as atividades propostas sobre as frações não se faz menção a essa terminologia e não consta orientações sobre o assunto a ser tratado, o que leva a conjecturar que o *significado* não é trabalhado inicialmente.

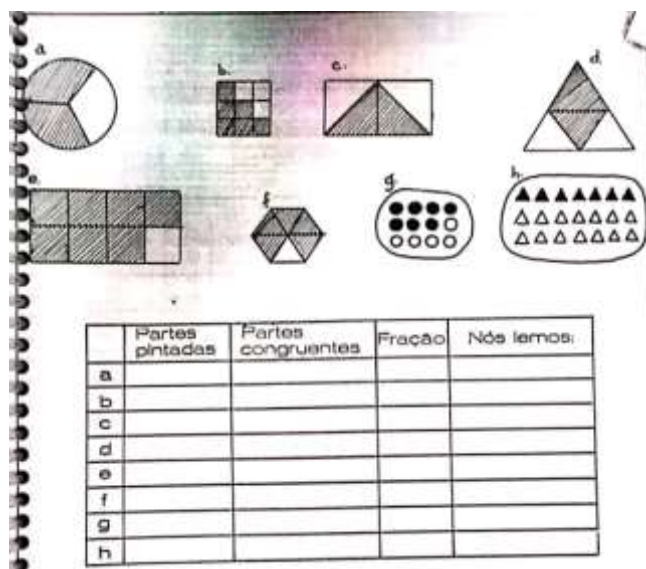
FIGURA 37 – “Ensino Moderno da Matemática” Volume IV



FONTE: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975a, capa).

Apresenta o rol de conteúdo a serem tratados na 4ª série, sendo que a terminologia “fração” é apresentada no índice. O conteúdo de frações é iniciado por meio de figuras geométricas planas divididas em partes congruentes e por conjuntos que contém figuras, (bolinhas, triângulos), uma retomada do Volume III. Acrescentado de uma tabela para ser preenchida com os dados: partes pintadas, partes congruentes, fração e a escrita de como se lê a fração (Figura 38).

FIGURA 38 – Figuras Geométricas Planas e Conjuntos Equipotentes



FONTE: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975a, p. 133)

Dentro do tema frações a *sequência* a ser trabalhada no Volume IV é: Relação de equivalência entre número fracionário e o número natural; relação de igualdade, desigualdade e ordem; relação de equivalência, classes de equivalência; adição e subtração de frações homogêneas e heterogêneas; noção de número racional na forma decimal; e problemas com frações.

O *significado* dado às frações equivalentes é apresentado por meio da relação de equivalência, através de subconjuntos equipotentes “achar a fração de um conjunto, é semelhante ao trabalho com subconjuntos equipotentes” (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975a, p. 134). Podemos observar na Figura 39.

FIGURA 39 – Subconjunto equipotente 1



FONTE: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975a, p. 134).

No Volume III as frações equivalentes são iniciadas por meio do exemplo do bolo, aqui, já há uma *gradação*, são apresentadas por meio de subconjuntos equipotentes.

O ensino de frações equivalentes no Volume IV⁸³ segue a *graduação*, revisar o conteúdo de frações trabalhado em anos anteriores através de conjuntos de figuras em cartolinas, fichas, tampinhas, usar recortes, dobraduras e pinturas de figuras em cartolina (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975b), subconjuntos equipotentes, equivalência entre número fracionário e número natural, comparação de frações através da reta numérica, equivalência de frações através do quadro de equivalências, classes de equivalência, imagens de disco de frações, até chegar à propriedade: “Multiplicando os termos de um número fracionário pelo mesmo número natural, diferente de zero, obtém-se um número fracionário equivalente ao número dado” (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975a, p. 144).

Acompanhado de uma lista de *exercícios/problemas* para aplicação do conceito, sem fazer menção ao termo equivalência.

Para a representação fracionária do número natural se utiliza de várias situações e exercícios como exemplo Figuras 40 e 41.

FIGURA 40 – Subconjunto equipotente 2

De quantos terços é formado o conjunto B? _____

Pinte cada $\frac{3}{3}$ com uma cor diferente.

Quantas unidades simples você pode formar com os terços do conjunto B?

Complete a contagem dos elementos de B.

$\frac{1}{3}$ ————— $\frac{6}{3}$

No conjunto acima, risque os numerais que representem frações menores do que uma unidade simples.

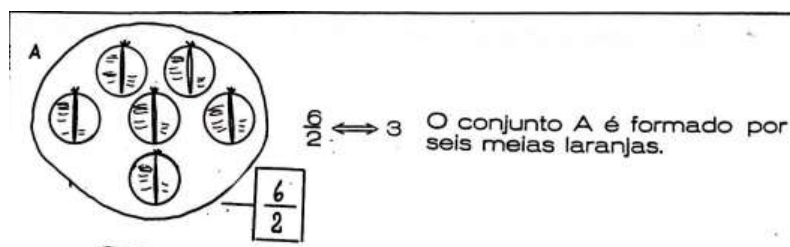
FONTE: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975a, p. 137).

A apresentação da noção de equivalência foi feita por meio da relação de equivalência de frações impróprias e número inteiro. Observa-se que na Figura 40, o exercício explora unidades simples, frações próprias, frações impróprias, conjunto de

⁸³ Para a análise do Volume IV, recorremos ao Livro do mestre (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975b), referente a esse Volume para observar as orientações atribuídas ao professor no trabalho com o ensino de frações equivalentes.

elementos na sequência. Os conceitos são apresentados não de forma isolada, mas em conjunto.

FIGURA 41 – Subconjunto equipotente 3

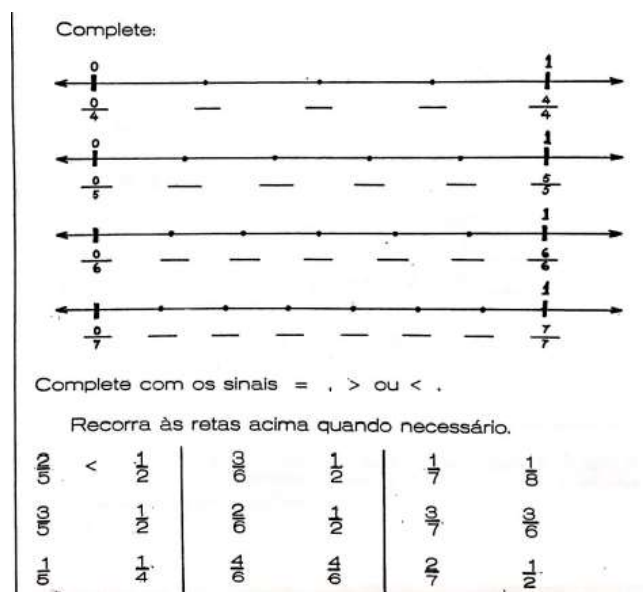


FONTE: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975a, p. 142).

Na Figura 41 destacamos o uso do símbolo de equivalência, onde $\frac{6}{2}$ é equivalente a 3.

Seguindo uma *gradação*, a comparação de números fracionários também acontece por meio da reta numérica, quadro de frações, figuras geométricas, onde é possível comparar frações e utilizando os sinais de maior, menor ou igual, para representar essa comparação, um pouco desse trabalho podemos conferir na Figura 42.

FIGURA 42 – Reta numerada e a comparação de frações

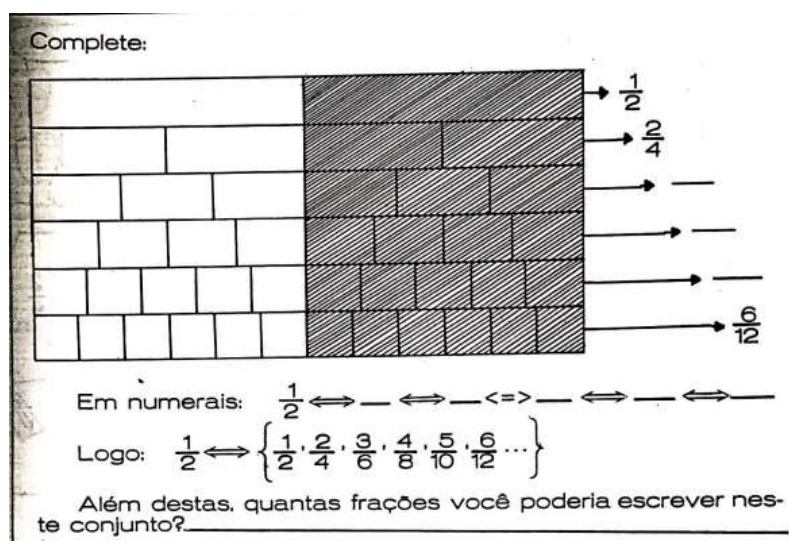


FONTE: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975a, p. 139).

Dentre as comparações, pode-se concluir, por exemplo, que $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ que $\frac{3}{6}$ equivale a $\frac{2}{4}$, aqui aparece a representação do zero através das frações $\frac{0}{4}, \frac{0}{5}$, etc. Nesse exemplo são trabalhadas somente as frações menores que a unidade. Ainda na Figura 45, um exercício em que o aluno deve recorrer a reta somente se necessário, pois se compreendeu já não precisa mais do semiabstrato.

As autoras também se valem do dispositivo didático do quadro de frações para que o aluno compare se duas ou mais frações são equivalentes. Esse também possibilita estabelecer visualmente relações de ordem e de equivalência entre frações. Na Figura 43 pode-se perceber que a fração $\frac{1}{2}$ é equivalente às frações: $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots\}$ escrevendo assim a classe de equivalência da fração $\frac{1}{2}$.

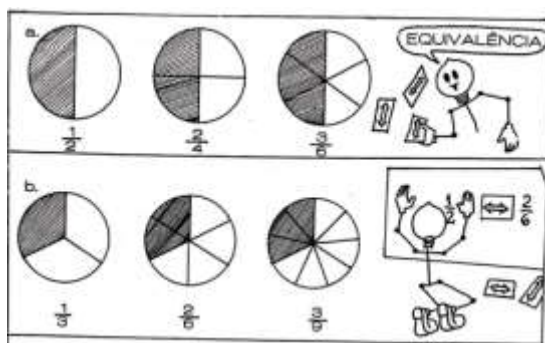
FIGURA 43 – Quadro de Equivalência



FONTE: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975a, p. 143).

O livro apresenta um quadro com discos de frações, sendo as imagens um recurso semiabstrato que possibilita estabelecer relação de equivalência entre as frações (Figura 44).

FIGURA 44 – Disco de frações



FONTE: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975a, p. 144).

Em seguida a relação de equivalência é estabelecida através da propriedade, “multiplicando os termos de um número fracionário pelo mesmo número natural, diferente de zero, obtém-se um número fracionário equivalente ao número dado” (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975b, p. 144). Nessa *graduação* o conceito de frações equivalentes foi apresentado de diferentes formas, numa progressão às operações mais sistematizadas e abstratas. Essa progressão é possível de ser identificada na Figura 45.

FIGURA 45 – Comparando frações com figuras geométricas, reta numerada, conjunto de equivalências

VOCÊ JÁ COMPAROU FRAÇÕES USANDO:

1. figuras geométricas

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$

2. retas numeradas

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$

3. Agora use os conjuntos de frações equivalentes.

$\frac{1}{3} \leftrightarrow \left\{ \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \frac{8}{24}, \frac{9}{27}, \frac{10}{30}, \frac{11}{33}, \frac{12}{36}, \dots \right\}$ Multiplique:

$\frac{2}{6} \leftrightarrow \left\{ \frac{4}{12}, \frac{6}{18}, \frac{8}{24}, \frac{10}{30}, \dots \right\}$ Multiplique:

Troque as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ por equivalentes homogêneas:

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} : 2 : 2 \text{ ou } \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cdot 2 : 2$

Complete com os sinais > ou < :

$\frac{1}{3} \dots \frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{4} \dots \frac{2}{6}$

FONTE: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975a, p. 146).

Referente aos exercícios apresentados na Figura 48, temos que o primeiro apresenta figuras geométricas na representação $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, possibilitando visualmente estabelecer a relação de desigualdade. O de número 2, traz a reta numerada com seis divisões proporcionais entre zero e um, para serem completados por frações equivalentes às indicadas, ou com a fração que corresponde a medida indicada na reta. No terceiro exercício apresenta conjuntos de frações equivalentes, indicando que as frações equivalentes à fração inicial dada, foram concebidas a partir da propriedade acima citada. Posteriormente solicita trocar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$ por equivalentes homogêneas.

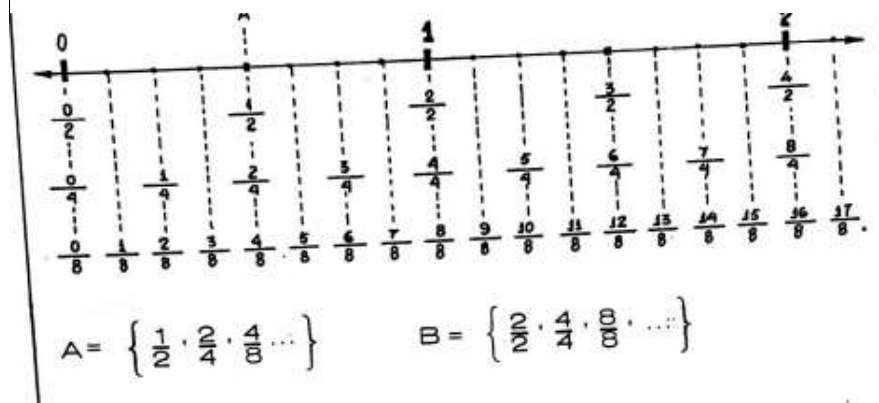
O livro propõe que as operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes sejam resolvidas pela equivalência de frações. “Efetue as adições, consultando as classes de equivalência (página anterior)” e em seguida “efetue as subtrações” (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975a, p. 143).

Como exemplo: para efetuar a adição $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$, consultava-se as classes de equivalências construídas anteriormente, nesse caso as classes de equivalência seriam: $\frac{2}{3} \Leftrightarrow \{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \dots\}$; $\frac{1}{2} \Leftrightarrow \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots\}$ operando assim $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$ (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975a).

O conteúdo de frações é finalizado com a imagem da reta numérica (Figura 46) e com várias relações de equivalências e definições. Observamos que esta é a mesma imagem que aparece no Projeto HAPRONT⁸⁴, inclusive com os mesmos números, as mesmas considerações e a mesma definição “Cada conjunto de frações equivalentes representa um número, o NÚMERO RACIONAL” (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975a, p. 154).

⁸⁴ O módulo 9.4 do Projeto HAPRONT, “Operando com números fracionários” será analisado na próxima seção.

FIGURA 46 – Representação geométrica dos números racionais



FONTE: Martins, Yaremtchuk, Arruda (1975a, p. 154).

Dentre as definições se destaca, “cada conjunto de frações equivalentes representa um número, o número racional” (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975a, p. 154).

O ensino do número racional na forma fracionária vem antes do ensino do número racional na forma decimal. As frações equivalentes são bem exploradas através de uma gama de *exercícios*, já os *problemas* estão presentes de forma sucinta, trazendo no contexto a problemática envolvendo objetos de conhecimento do aluno, como: chocolate, folha de cartolina, canteiro de cenoura.

Podemos perceber que o livro apresenta através dos *exercícios e problemas*, com o trabalho das frações equivalentes, a construção do conceito de número decimal. Assim são trabalhadas outras interpretações da fração, dentre elas, a de um número racional.

Observamos que o livro não faz menção ao uso de materiais concretos (mas não podemos afirmar que isso não ocorria nas classes), o ensino de frações equivalentes apresentado no Volume III e IV, apresenta figuras, na qual são recursos semiabstratos, progredindo numa *graduação* para as operações mais sistematizadas (abstratas).

3.6 Frações equivalentes no Módulo 9.4 Operando com Números Fracionários do Projeto HAPRONT (PARANÁ, 1976)

O manual pedagógico⁸⁵ a ser apresentado nessa seção é produção da autora paranaense, Clélia Tavares Martins⁸⁶. A proposta paranaense é o módulo do Projeto HAPRONT de número 9.4, “Operando com números fracionários” (Martins, 1976), e tem como assunto a ser tratado no curso, conhecimento do conjunto de números fracionários, e as quatro operações. Enuncia por objetivo: utilizar procedimento variados para demonstração de fatos e propriedades. E por objetivo terminal: operar com números fracionários, resolvendo situações-problema e utilizando suas propriedades e técnicas operatórias com precisão.

Apresentando a capa do módulo 9.4, na Figura 47, salienta-se que os demais módulos que se referem à disciplina de matemática trazem a mesma imagem na capa. Não se pode afirmar que isso é comum às outras disciplinas, pois não tivemos acesso a esse material.

⁸⁵ Destacamos aqui que o material produzido pelo Projeto HAPRONT não foi comercializado, foi reproduzido pela SEED - Secretaria de Estado e Educação do Paraná. Conforme o Glossário em um manual pedagógico deve-se predominar os saberes para ensinar. <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/158952/GLOSSA%cc%81RIO%20VERSA%cc%83O%201.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

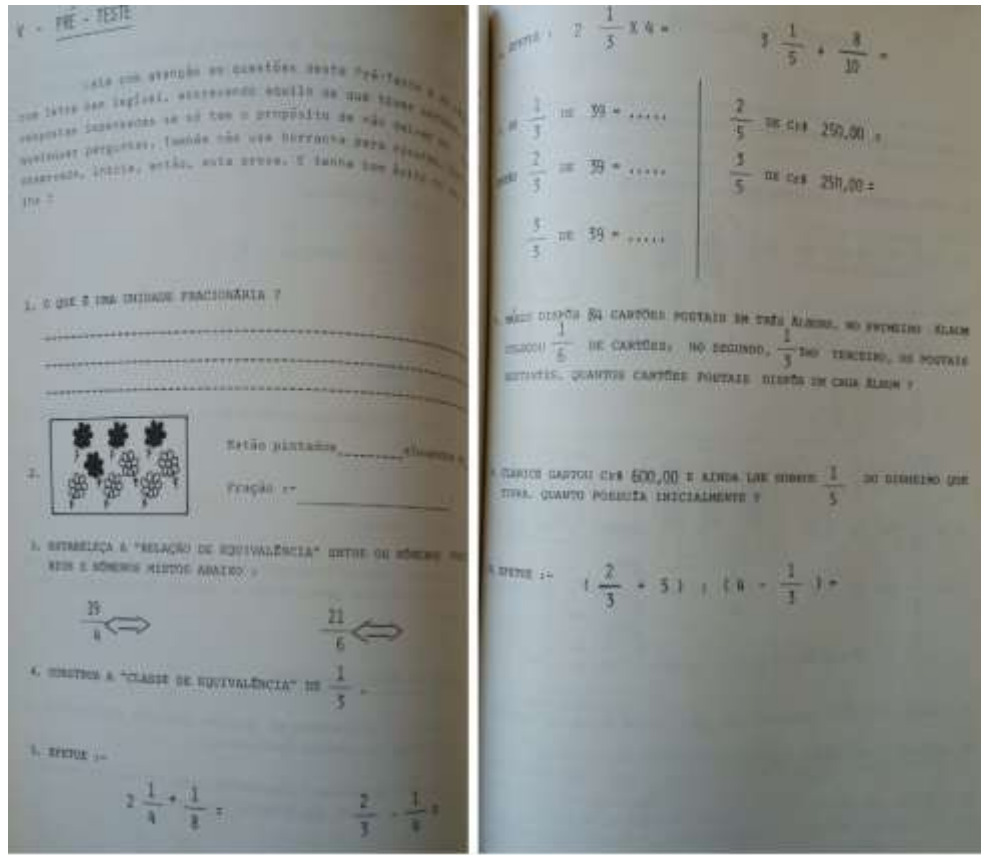
⁸⁶ Na década de 1960 a autora atuou como técnica no CEPE – Conselho de Ensino Pesquisa e Extensão. Nessa mesma década integrou o NEDEM, sendo uma das integrantes responsável responsáveis pela produção de materiais didáticos para o ensino de matemática na escola primária. Na década de 1970 foi técnica da CETEPAR – Centro de Treinamento e Aperfeiçoamento de Professores do Estado do Paraná, e responsável pela elaboração do material utilizado no Projeto HAPRONT. Ainda no final dessa década e início dos anos de 1980, contribuiu com a produção de materiais para as escolas rurais do Paraná. De acordo com Costa (2020), foi considerada uma *expert*, devido sua atuação como produtora de livros didáticos, nas décadas de 1970/1980. “Clélia se fez presente no cenário educacional paranaense e, especificamente, em relação ao ensino da matemática foi uma referência no contexto estadual, seja nos materiais destinados aos alunos, nas orientações oficiais para a organização do ensino ou na formação de professores que atuaram nos anos iniciais de escolarização” (Costa, 2020, p. 209). Para mais informações sobre *expert* pesquisar em: <https://www.ghemat.com.br/experts>.

FIGURA 47 - Operando com Números Fracionários (Módulo 9.4)

FONTE: Martins (1976, capa)

Antes de iniciar o conteúdo, o módulo traz um pré-teste com 10 questões, descritas na Figura 48. Entende-se como sendo uma avaliação diagnóstica para que o cursista detecte seu conhecimento sobre o assunto a ser estudado.

FIGURA 48 – Pré - Teste Sobre as Frações



FONTE: Martins (1976, p. 2-3)

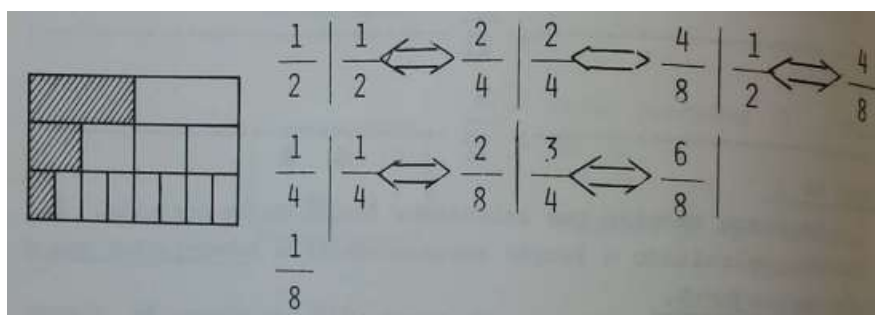
Dessas 10 questões, destacam-se 4 (figura 48), sendo a questão de número 3 “Estabeleça a ‘relação de equivalência’ entre o número fracionário e números mistos abaixo: $\frac{19}{4}$ (com a seta representando se, e somente se), e $\frac{21}{6}$ (com a seta representando se, e somente se)” (Martins, 1976, p. 2); a questão de número 4: “Construa a ‘classe de equivalência’ de $\frac{1}{3}$ ” (Martins, 1976, p. 2); a questão de número 5 contendo operações de adição e subtração frações: “Efetue: $2\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, e $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ ” (Martins, 1976, p. 2); e a questão de número 10: “Efetue: $(\frac{2}{5} + 5) : (4 - \frac{1}{3})$ ” (Martins, 1976, p. 3). No pré-teste destacamos indícios da Matemática Moderna, na linguagem – relação de equivalência, classes de equivalência, na linguagem matemática “se e somente se”, nas operações com número misto, no uso de conjuntos. É perceptível que o conhecimento de frações equivalentes era um tema relevante para o ensino de frações, pois saber operar com essas frações ajudaria a resolver as questões do pré-teste.

No ensino das frações, o conteúdo “números fracionários”, é apresentado como aquele que foi “[...] criado para representar a divisão de números naturais cujo resultado não é um número natural” (Martins, 1976, p. 5). A *sequência* da matemática do ensino das frações equivalentes se dá a partir da relação de equivalência entre números fracionários, entre números fracionários e número natural, entre número fracionário e número misto, seguindo para a equivalência, com a simplificação de números fracionários e das classes de equivalência, até chegar à equivalência entre conjuntos equipotentes e o número de elementos do conjunto. O conceito de frações equivalentes antecede o ensino das operações com números fracionários.

Dentro do conjunto dos temas da aritmética, o lugar ocupado pelas frações sucede o ensino dos números naturais e as operações com números fracionários, é um pré-requisito para o ensino dos números racionais.

O ensino de frações equivalentes tem início com a definição “Os números fracionários que representam a mesma porção ou fração do todo são chamados equivalentes” (Martins, 1976, p. 10), sendo este o *significado* dado às frações equivalentes dentro do ensino dos números fracionários. Essa definição vem acompanhada da imagem de um quadro de equivalência, representando as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, e $\frac{1}{8}$, e as relações de equivalência: $\frac{1}{2}$ equivale $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{4}$ equivale $\frac{4}{8}$, e que $\frac{1}{2}$ equivale a $\frac{4}{8}$, as relações de equivalência também são feitas para as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$, conforme Figura 49.

FIGURA 49 - Relação de Equivalência entre Números Fracionários



FONTE: Martins (1976, p. 10)

A relação de equivalência entre números fracionários com o uso do símbolo de equivalência é uma característica da Matemática Moderna e se destaca que essa

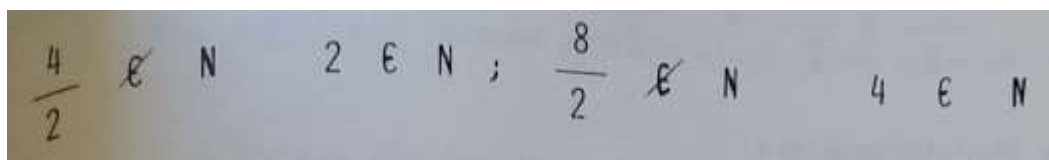
maneira de ensinar também está presente nos livros didáticos do NEDEM (Nierri; Berticelli; Novaes, 2022) dos primeiros anos de escolarização, “Ensino Moderno da Matemática”, Volume II, III (Holzmann *et al.*, 1974, 1975) e Volume IV, (Martins *et al.*, 1975a), material esse que consta nas referências do Projeto HAPRONT, módulo 9.4. Todavia, essa simbologia não está presente no livro didático GRUEMA “Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau”, Volume IV, de (Sanchez; Liberman, 1975), e nos outros dois manuais pedagógicos que também compõem as referências: “Frações na escola elementar”, de (Porto, 1967) e “Métodos Modernos para Ensino da Matemática” (D’Augustine, 1981).

Para mostrar a equivalência entre um número fracionário e número natural, utiliza-se um conjunto de círculos. No exemplo, dois círculos divididos ao meio $\frac{4}{2}$ correspondem a 2 círculos inteiros (unidade fracionária). Ainda indica que os conjuntos podem conter unidades fracionárias e unidades simples (conjunto contendo dois patos, esses não podem ser representados em unidades fracionárias). Ideia similar, utilizando conjuntos de círculos, aparece nos manuais de (Porto, 1967), (D’Augustine, 1981), (Martins, *et al.*, 1975b).

A equivalência entre o número fracionário e um número natural ocorre quando “[...] o numerador é múltiplo do denominador, ou melhor, é um produto do denominador” (Martins, 1976, p. 11).

A linguagem simbólica aparece através dos símbolos de ‘pertence’ e ‘não pertence’, indicando que uma fração no caso $\frac{4}{2}$, não pertence ao conjunto dos números naturais, mesmo sendo equivalente a 2 (Figura 24), e das setas de ‘se, e somente se’ (Figura 50).

FIGURA 50 - Linguagem Simbólica

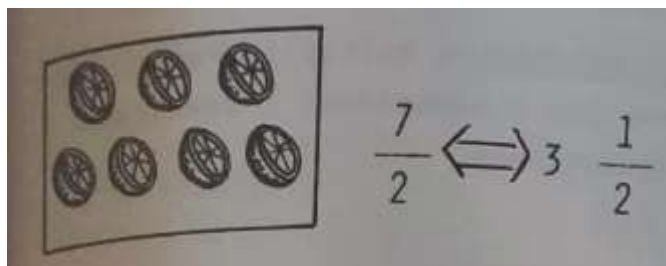


FONTE: Martins (1976, p.10)

A relação de equivalência entre número fracionário e número misto, é apresentada através de imagem (laranjas e círculos), Figura 51. O exemplo apresenta

sete metades de uma laranja, $\frac{7}{2}$, que equivalem a $3\frac{1}{2}$ indicando que “Cada duas metades laranjas correspondem a uma laranja” (Martins, 1976, p. 11).

FIGURA 51 – Relação de Equivalência entre Número Fracionário e Número Misto



FONTE: Martins (1976, p. 10)

Para determinar um número misto equivalente ao número fracionário, utiliza-se de “regras práticas”, conforme a autora indica. Para obter um número misto nessas condições, a regra é “[...] divide-se o numerador pelo denominador. O quociente é o número natural; o resto da divisão é a quantidade de unidades fracionárias” (Martins, 1976, p. 11), e para determinar o número fracionário equivalente ao número misto, utiliza do exemplo: “ $3\frac{1}{2}$, como a unidade fracionária é $\frac{1}{2}$, 3 unidades simples transformam-se em $\frac{6}{2}$, com mais $\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ ” (Martins, 1976, p. 11) seguido da regra, “[...] multiplica-se o número natural pelo denominador e soma-se com o numerador. O resultado é o numerador do número fracionário equivalente” (Martins, 1976, p. 12).

Percebe-se que a escrita das frações equivalentes em números misto e vice-versa, é apresentada pelo manual pedagógico 9.4, com ênfase no uso da regra. O conteúdo teve a utilização de desenhos ‘semiabstrato’⁸⁷ seguidos da regra. Parece que, por ser um manual para formar professores, direcionado a um público adulto, a autora foi mais direta, não dando importância ao uso de ‘materiais concretos’, (uso de objetos) e ‘semiconcretos’ (recortes de figuras para manipulação).

A construção da ideia de simplificação de números fracionários se dá, primeiramente, pelo reconhecimento de frações redutíveis e irredutíveis, em que as

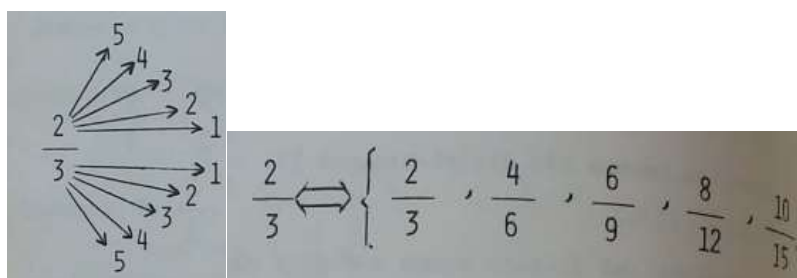
⁸⁷ O termo semiabstrato refere-se aos desenhos e semiconcreto aos recortes de figuras de flanelógrafo (Paraná, 1977)

reduzíveis podem ser simplificadas, sendo esse processo um auxiliar para a construção da classe de equivalência.

As classes de equivalência são trabalhadas a partir do quadro de equivalência. Martins (1976) destaca que, para formar uma classe de equivalência, deve-se partir de uma fração irredutível.

Apresenta a propriedade “[...] multiplicando ou dividindo ambos os termos de um número fracionário por um mesmo número natural, diferente de zero (0), obtém-se um número fracionário equivalente” (Martins, 1976, p. 14). Como exemplo, utiliza a fração irredutível $\frac{2}{3}$, e multiplicando ambos os termos por 1, 2, 3, 4, ..., obtém a classe de equivalência da fração dada, conforme se pode visualizar na Figura 52.

FIGURA 52 – Classes de Equivalência pela Multiplicação



FONTE: Martins (1976, p.14)

As classes de equivalência são apresentadas através do quadro de equivalência e figuras geométricas circulares.

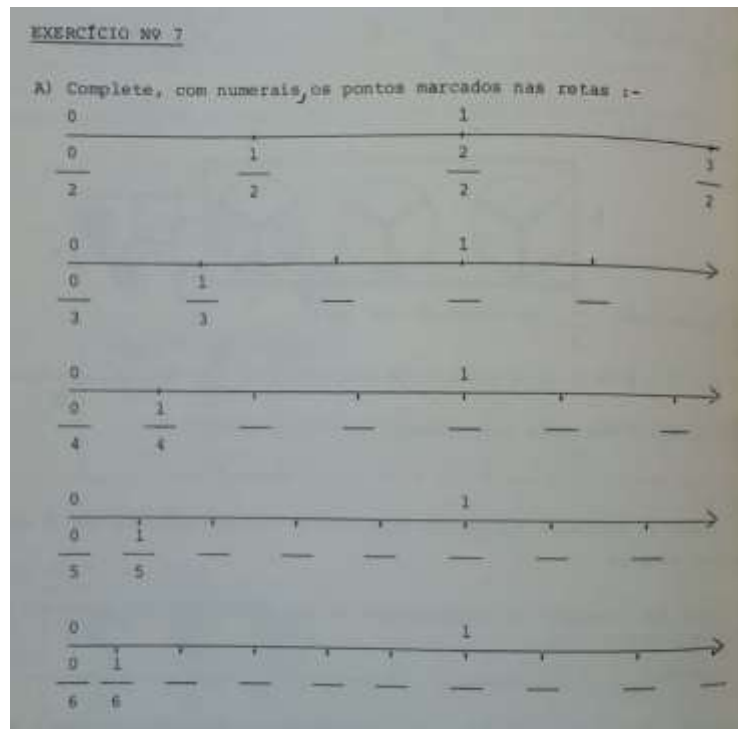
Na construção do conceito de frações equivalentes há uma *graduação* que segue uma progressão, quadros de equivalência, círculos divididos em partes congruentes, diagramas, subconjuntos equipotentes, reta numérica, apenas quando se trata de operações com frações aparecem outros polígonos além do círculo. A compreensão das frações equivalentes ocorre sem o auxílio do concreto e do semiconcreto, a graduação do ensino ocorre por meio de uma proposta semiabstrata (diagramas, imagens, dispositivo) progredindo para o abstrato, uso da regra do mínimo múltiplo comum.

A equivalência também é trabalhada entre subconjuntos equipotentes e o número de elementos do conjunto. Os conjuntos apresentam imagens de piões, bandeirinhas, ferraduras, flores, para demonstrar através da imagem, por exemplo,

que $\frac{1}{4}$ de oito piões, é equivalente a $\frac{2}{8}$ de oito piões; em seguida, uma diversidade de exercícios, contemplando a equivalência de frações.

Dentre os *exercícios/problemas*, o de numeração 7 trouxe uma reta numerada, os pontos marcados por números fracionários, abaixo mais quatro retas com espaços marcados para indicar os números que correspondem cada marcação na reta. Verifica-se na figura 53, a imagem descrita.

FIGURA 53 – Frações Equivalentes na Reta Numerada

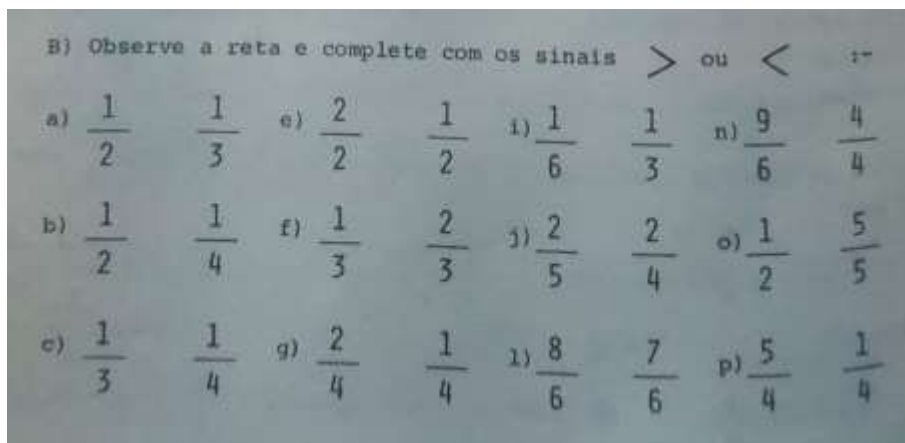


FONTE: Martins (1976, p. 18)

Após completar esses espaços, com as frações correspondentes, é possível estabelecer relações de equivalência entre, por exemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, ou ainda entre as frações unitárias $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, e $\frac{6}{6}$. Também o zero é representado através das frações $\frac{0}{2}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{0}{4}$, $\frac{0}{5}$, e $\frac{0}{6}$. Essa proposta de representação do zero é encontrada também nos livros didáticos da coleção do NEDEM, (Martins et al., 1975) e (Holzmann, et al., 1975).

Esse exercício traz uma complementação, letra B, conforme Figura 54, que através do uso das retas é possível realizar comparações e preencher, usando os sinais de maior ou de menor entre as frações.

FIGURA 54 – Frações Equivalentes na Reta Numerada, Comparação.



FONTE: Martins (1976, p. 18)

Também são apresentados *exercícios e problemas* utilizando o quadro de equivalência (Figura 55), para representar frações equivalente à fração dada, conservando o denominador estabelecido pelo exercício.

FIGURA 55 – Frações equivalentes com o uso do Quadro de Equivalência

EXERCÍCIO Nº 9

A) COMPLETE :-

C

D

Use os quadros acima para completar as equivalências :-

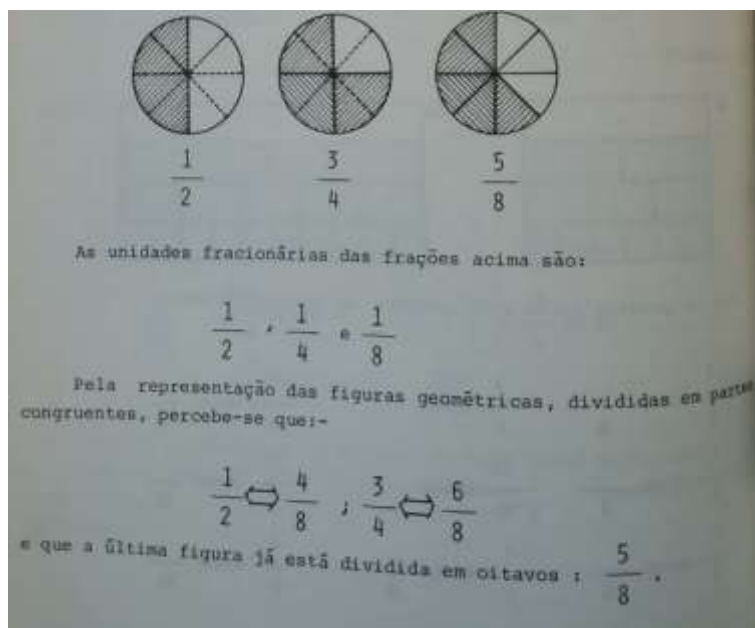
$\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{\quad}{6}$	$\frac{5}{5} \leftrightarrow \dots\dots$	$\frac{1}{5} \leftrightarrow \frac{\quad}{10}$
$\frac{1}{3} \leftrightarrow \frac{\quad}{6}$	$\frac{10}{10} \leftrightarrow \dots\dots$	$\frac{3}{5} \leftrightarrow \frac{\quad}{10}$
$\frac{2}{3} \leftrightarrow \frac{\quad}{6}$	$\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{\quad}{10}$	$\frac{4}{5} \leftrightarrow \frac{\quad}{10}$

FONTE: Martins (1976, p. 21)

Ainda, referente ao módulo 9.4. do projeto em questão, a autora apresenta três figuras geométricas, divididas em partes congruentes, conforme Figura 56,

representando as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, e $\frac{5}{8}$, e realiza a redução de números fracionários à mesma unidade fracionária. Essas frações são equivalentes a $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{8}$, e $\frac{5}{8}$, respectivamente.

FIGURA 56 – Redução e Números Fracionários à Mesma Unidade Fracionária, Isto é, ao Menor Denominador Comum



FONTE: Martins (1976, p. 22)

Observa-se que o trabalho com as frações equivalentes não ocorre de forma sucinta. Para o ensino dessas, a autora trouxe uma *graduação*, através de exemplos com: imagens, conjuntos, reta numerada, quadro de equivalência. Considera-se que um dos objetivos do ensino das frações equivalentes é o ensino das operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, que vem em seguida, outro objetivo bem importante das frações equivalentes é a compreensão do número racional por parte da criança. Afirma-se isto, pois a autora aponta que, tendo calculado a equivalência de várias frações como, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \text{ e } \frac{1}{12}; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \text{ e } \frac{1}{6}; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \text{ e } \frac{1}{4})$ e tantas outras, “[...] você está apto a transformar frações com esses denominadores em frações homogêneas, isto é, frações com a mesma unidade fracionária” (Martins, 1976, p. 23).

Dentro de uma variedade de exemplos, são apresentados $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, que têm por unidade fracionária $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$; para achar a equivalência dessas frações, basta pensar em um número que contém 3 e 4 ao mesmo tempo, no caso o 12, pois é dividido

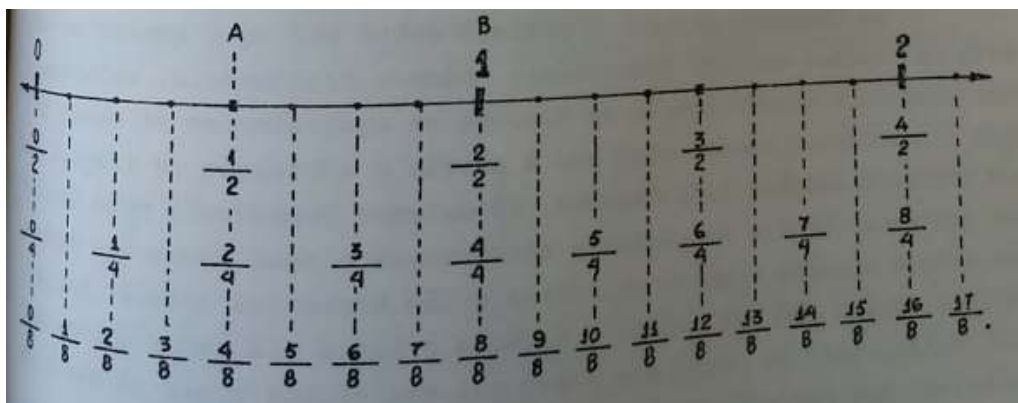
exatamente por 3 e por 4, sendo $\frac{1}{12}$ a unidade fracionária que estabelece a equivalência.

Outra maneira de reduzir um número fracionária à unidade fracionária é construindo a classe de equivalência. A autora constrói as classes de equivalência de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, chegando as frações $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$, que são equivalentes as frações indicadas, e apresentam denominadores comum.

Seguindo o conteúdo, é apresentada a regra para o cálculo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.), através da escrita dos múltiplos do número indicado. Para reduzir duas frações ao menor múltiplo comum faz-se o m.m.c. dos denominadores e “Em seguida, multiplica-se cada numerador pelo quociente da divisão do menor múltiplo comum (m.m.c.) pelo denominador correspondente” (Martins, 1976, p. 23).

Assim como os números naturais, os números fracionários também podem ser representados geometricamente na reta numerada, Figura 57. Observando a reta abaixo percebemos elementos que não são comuns nas retas apresentadas nos manuais analisados anteriormente, a representação do zero na fração $(0) - \frac{0}{2}, \frac{0}{4}, \frac{0}{8}, \dots$, a classe de equivalência do 1 - $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \dots$, que está presente também no manual pedagógico (D’Augustine, 1981).

FIGURA 57 - Representação Geométrica dos Números Fracionários



FONTE: Martins (1976, p. 27)

No ponto A (indicado na figura 57), estão indicadas frações equivalentes a $\frac{1}{2}$, e no ponto B (indicado na figura 57), frações equivalentes a 1. A autora conclui que “Cada conjunto de frações equivalentes representa um número, o NÚMERO

RACIONAL” (Martins, 1976, p. 28), e que, assim como no conjunto dos números naturais, cada número é um ponto na reta, no conjunto dos números racionais “[...] cada conjunto de frações equivalentes é um ponto na reta” (Martins, 1976, p. 28).

O uso da reta numerada para trabalhar o conceito de frações equivalentes, está presente em cinco das seis referências consultadas, que fazem parte das referências do módulo 9.4: manual pedagógico “Métodos Modernos para Ensino da Matemática” (D’Augustine, 1981); “Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau”, volume IV (Sanchez; Liberman, 1975); “Ensino Moderno da Matemática”, Volume II e III (Holzmann et al., 1974, 1975); “Ensino Moderno da Matemática”, Volume IV (Martins et al., 1975); e, “Frações na escola elementar” (Porto, 1967). Também está presente no manual pedagógico de Osório e Porto (1968). Assim, de acordo com os conceitos de sistematização (Souza, 1997) e de circulação (Oliveira, 2018), pode-se afirmar que o ensino de frações equivalentes, por meio da reta numérica, circulou e foi apropriado no manual do Projeto HAPRONT.

Dentre as obras que são referências do Projeto HAPRONT, em “Ensino Moderno da Matemática”, Volume IV (Martins et. al., 1975), e em “Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau”, Volume IV (Sanchez; Liberman, 1975) a reta numerada expressa uma forte relação com o número racional. Em “Ensino Moderno da Matemática” Volume II e Volume III (Holzmann et al., 1974, 1975), a fração é uma passagem para o número racional, mas é dada pouca ênfase para o uso da reta numérica, na obra “Frações na escola elementar” (Porto, 1967), a reta numérica está presente, porém não traz em nenhum momento que a fração é um caminho para se chegar no número racional. A reta numérica é considerada uma apropriação forte do MMM.

Sobre o ensino de frações equivalentes, Martins (1976) traz uma citação de Rizza Araújo Porto (1965) – “Frações na Escola Elementar”, o qual se buscou no original, edição de 1967.

O ensino de adição e subtração de frações deve ser feito paralelamente para que a criança possa perceber os princípios fundamentais que informam estes dois processos e a relação que guardam entre si. Tradicionalmente, o ensino era feito separadamente e cada processo subdividido em “casos específicos”, que eram ensinados um por um por meio de exercícios mecânicos. Esta forma de conduzir a aprendizagem dificulta a percepção de princípios gerais (Porto, 1967. p. 155).

Martins (1976), concordando com Porto (1965), complementa que utilizando a *sequência* para o ensino do “conceito de frações, unidade fracionária, números fracionário, relações, equivalências e transformações de frações equivalentes de mesma unidade fracionária” (Martins, 1976, p. 28), presentes no material estudado, é um preparo para realizar a adição e a subtração de frações sem maiores dificuldades, e que, tomando esse cuidado com o ensino, não se corre o risco de a criança somar denominadores.

Após a explanação de cada tópico, dentro de uma *sequência* apresentada para tratar do conteúdo números fracionários, são apresentados *exercícios/problemas*. Esses são do tipo: simplificação de frações, até chegar a uma fração irredutível; a partir de uma fração dada, construir classes de equivalência; escrever a fração que representa cada figura circular hachurada, estabelecendo, assim, frações equivalentes a partir das figuras geométricas circulares, o uso da reta numerada para representar os números fracionários. Estes articulam-se com a proposta que foi desenvolvida para o ensino das frações, o mesmo ocorre com relação às frações equivalentes, conforme exemplos já mencionados no texto.

Por meio das classes de equivalência são estabelecidas relação de ordem, igualdades e desigualdades, simplificação e redução ao denominador comum, adição e subtração de frações não homogêneas durante apresentação dos conteúdos e não somente ao final do manual pedagógico.

3.7 Caracterização das frações equivalentes nos manuais escolares analisados

Para caracterizar a matemática do ensino das frações equivalentes nos manuais escolares desse estudo, foram utilizadas as categorias de análise: sequência, significado, graduação, exercícios/problemas (Morais; Bertini; Valente, 2021).

Estes manuais circularam no estado do Paraná, ao tempo do Movimento da Matemática Moderna e nesta pesquisa constituíram-se como fontes a fim de caracterizar as propostas no que tange a matemática do ensino de frações equivalentes, buscando categorizá-las conforme os elementos já mencionados.

Fez-se um estudo minucioso dos manuais pedagógicos: “Matemática na Escola Primária Moderna” de Norma Cunha Osório e Rizza de Araujo Porto (1968); “Frações na escola elementar” (1967), de autoria Rizza Araújo Porto; “Métodos Modernos para

o Ensino da Matemática” (1981), por Charles D’Augustine; O módulo do Projeto HAPRONT de número 9.4, “Operando com números fracionários” de Clélia Tavares Martins (1976); A coleção “Ensino Moderno de Matemática” Volume II (Holzmann *et al.*, 1974), III (Holzmann; *et al.*, 1975) e IV (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975) respectivamente; e nos livros da coleção “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau” de Manhúcia Perelberg Liberman; Anna Franchi; Lucilia Bechara Sanchez (1974, 1974, 1975a) acompanhados do Guia do Professor, de mesma autoria que datam (1975, 1975b, 1978).

Conforme a Introdução Histórica presente em um dos manuais estudados, o Movimento Moderno trouxe uma revolução na reforma do currículo. Entende-se que essa revolução ocorreu em função da forma de ensinar; novos métodos; novas práticas pedagógicas; e, pela preocupação para o entendimento do conteúdo, em virtude de que o ensino dava maior ênfase ao significado dos conceitos e sua aplicação.

Os resultados apontam que os autores dos manuais pedagógicos em questão se apropriaram das ideias presentes na Matemática Moderna. Pode-se identificar o uso da linguagem simbólica como: diferenças e igualdade; se e somente se; pertence e não pertence, o uso da palavra “congruentes”; o uso de conjuntos e subconjuntos equipotentes para reconhecer frações equivalentes, exceto em (Porto, 1967); (Osório; Porto, 1968).

Identificamos uma *sequência* para o ensino das frações equivalentes nos manuais pedagógicos em estudo, nessa *sequência* destacamos que todos os manuais usam da comparação de frações para se chegar ao conceito de frações equivalentes. Bem como, que as frações equivalentes antecedem o ensino de operações com frações.

O *significado* dado às frações equivalentes é apresentado nos manuais pedagógicos como: Uma fração pode ser representada por diferentes numerais fracionários, essa ideia está relacionada com diferentes pares ordenados que podem ser usados para exprimir uma mesma razão (Osório; Porto, 1968); Valer igual, frações com mesmo valor (Porto, 1967); Um número que tem muitos nomes equivalentes (D’Augustini, 1981); Números fracionários que representam a mesma porção ou fração do todo (Holzmann *et al.*, 1974), (Holzmann; *et al.*, 1975) e (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975); Cada conjunto de frações equivalentes representam um

número, o número racional, Manhúcia Perelberg Liberman; Anna Franchi; Lucilia Bechara Sanchez (1974, 1974, 1975a).

Na construção do *significado* dado às frações equivalentes, os manuais pedagógicos em estudo seguem uma *graduação*, orientando os caminhos a serem trilhados para o ensino das frações equivalentes. Nessa graduação a construção do conceito de frações equivalentes ocorre através do uso de materiais concretos, semiconcretos e semiabstratos proposta presente em (D'Augustini, 1981); (Porto, 1967); (Osório; Porto, 1968); (Holzmann et al., 1974), (Holzmann; et al., 1975); (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975); (Liberman; Franchi; Sanchez, 1974); (Sanchez; Liberman, 1974); e (Sanchez; Liberman, 1975a). No manual pedagógico (Martins 1976) apenas pelo semiabstrato.

O passo a passo que será seguido pelo professor para o ensino de frações equivalentes, dentro das categorias de análise de Moraes, Bertini e Valente (2021) denomina-se *graduação*, e de maneira progressiva destacamos o que foi proposto em cada manual pedagógico. Em Osório e Porto, (1968) por meio de análise de conjuntos de objetos⁸⁸, e através da manipulação desses materiais formar subconjuntos iguais (concreto), progredindo para o uso de diagramas (círculos e quadrados), linha numérica e tabelas (semiabstrato), uma vez compreendida essa ideia, o trabalho será realizado por métodos mais abstratos, no caso por múltiplos para encontrar frações equivalentes.

No manual “Frações na escola elementar” (Porto, 1967), o ensino de frações se dá por meio de materiais concretos (queijo, tampinhas, laranjas), passando para ideias com materiais semiconcretos (figuras de flanelógrafo), semiabstratos (desenhos de retângulos, círculos, diagramas, cartazes de equivalências), até chegar à regra: “multiplicar ou dividir ambos os termos da fração pelo mesmo número não altera o valor da fração” (Porto, 1967, p.135) (abstrato).

Em D'Augustine (1981), as experiências com frações tem início em serrar uma tábua em pedaços, repartir um conjunto de balas em subconjuntos iguais, repartir um bolo ou uma torta em pedaços iguais (concreto), caminhando para repartir segmentos de reta, regiões geométricas em partes congruentes (hexágono, quadrado, losango, pentágono). Essa partição será feita pela criança, e afirma que o círculo não presta

⁸⁸ Esses objetos não são explícitos, dando a entender que pode ser qualquer objeto possível de manusear e que faça parte do cotidiano do aluno, em um exemplo sugere barra de chocolate.

para ser repartido pela criança devido o nível de dificuldade, (semiconcreto), progredindo para o uso de imagens de polígonos, conjuntos, quadro de equivalência e reta numérica (semiabstrato), classes de equivalência até chegar a regra (abstrato).

O manual pedagógico em estudo do Projeto HAPRONT (Martins 1976), tem início com o quadro de equivalência, desenhos de figuras geométricas (círculos), conjuntos e subconjuntos equipotentes, reta numérica, classes de equivalência (semiabstrato), em construção de um conceito abstrato ao uso da regra.

A coleção do NEDEM “Ensino Moderno de Matemática” (Holzmann et al., 1974), (Holzmann; et al., 1975); (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975a), e (Martins; Yaremtchuk; Arruda, 1975b) indica que o ensino de frações deve iniciar com uso de fichas, tampinhas (concreto), usando recortes de cartolina, através de dobraduras e pinturas (semiconcreto), passando para as atividades do livro do aluno usando as ilustrações para formar subconjuntos equipotentes, reta numérica, quadro de equivalência, classes de equivalência, disco de frações (semiabstrato), até chegar à propriedade das frações equivalentes, uso da regra (abstrato).

Na coleção “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau” (Lieberman; Franchi; Sanchez, 1974), (Lieberman; Franchi; Sanchez, 1975), (Sanchez; Lieberman, 1974), (Sanchez; Lieberman, 1975a), (Sanchez; Lieberman, 1975b), (Lieberman; Sanchez, 1978), a graduação tem início com a construção de um jogo de círculos de flanelógrafo, recorte de cartolina que serão divididas em partes congruentes, uso de faixas retangulares de cores diferentes para a descoberta da equivalência (semiconcreto)⁸⁹, utilizando de diferentes formas gráficas (figuras geométricas, conjuntos, diagramas e reta numérica), (semiabstrato); até chegar às regras para encontrar ou identificar frações equivalentes (abstrato).

Todos os manuais trazem ou indicam a construção das classes de equivalência. Nossas análises nos levam a concluir que para os autores de cada manual, o aluno tendo percorrido as etapas indicadas para a construção do conceito de frações equivalentes, ao chegar nas classes de equivalência o aluno está apto a usar a regra⁹⁰ para encontrar frações equivalentes.

⁸⁹ Apesar das autoras se referirem que essas são atividades concretas de acordo com Paraná (1977) são consideradas semiconcretas.

⁹⁰ Multiplicando ou dividindo o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, obtém-se uma fração equivalente.

O uso de quadro de equivalências e/ou quadro de frações, em Porto (1968) é usado o termo tabela, assim como a reta numérica é uma proposta para o ensino de frações equivalentes presente em todos os manuais pedagógicos em análise. A forma com que a reta numérica é apresentada mostra diferenças e semelhanças dentro das atividades propostas, mas converge para a construção do conceito das frações equivalentes, com objetivo principal de concluir que cada conjunto de frações equivalentes representa um número racional. Destaca-se que o Manual do Projeto HAPRONT e na coleção do NEDEM, a reta numérica traz a representação fracionária para o zero $\frac{0}{2}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{0}{4}$, $\frac{0}{5}$, e $\frac{0}{6}$, nos demais manuais o zero é representado apenas pelo numeral (0).

As figuras geométricas, sejam por meio de recortes ou de desenhos para ensinar as frações equivalentes, também estão presentes em todos os manuais que compõem este estudo. Observamos a presença de círculos para o ensino do número fracionário em todos os manuais pedagógicos, mas nos chamou atenção que em D'Augustine (1981) apesar de trazer um círculo dividido ao meio, o autor indica que a partição de figuras em partes congruentes seja feita pelo aluno, que o professor deve escolher modelos que sejam fáceis de repartir como quadrados e hexágonos.

Norma Cunha Osório e Rizza de Araujo Porto (1968); Rizza Araújo Porto (1967); Charles D'Augustine (1981); Clélia Tavares Martins (PARANÁ, 1976); Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda (1974, 1975); Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda (1975a, 1975b); Manhúcia Perelberg Liberman, Anna Franchi, Lucilia Bechara Sanchez (1974, 1975); Lucilia Bechara Sanchez, Manhúcia Perelberg Liberman (1974, 1975a, 1975b); e Manhúcia Perelberg Liberman, Lucilia Bechara Sanchez (1978) demonstraram um vasto conhecimento sobre a “matemática do ensino”, incorporando saberes de referência para ensinar as frações equivalentes, articulando elementos do “Movimento da Matemática Moderna”, mas mantendo práticas de períodos anteriores.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo caracterizar uma matemática moderna do ensino das frações equivalentes proposta em manuais escolares para a formação

de professores dos primeiros anos de escolarização em circulação no estado do Paraná (1970 - 1980).

Nesta análise, a matemática do ensino das frações equivalentes foi considerada como um saber produzido no seio da cultura escolar e não fora dela. Os autores dos manuais, com vasta experiência no ensino e na formação de professores que ensinam matemática nos primeiros anos de escolarização se apropriaram do ideário do Movimento da Matemática Moderna, dos estudos de psicologia (principalmente de Jean Piaget) e ressignificaram práticas para o ensino de frações equivalentes de vagas pedagógicas anteriores e acrescentando outras.

Aos materiais didáticos, como, por exemplo, o disco de frações e o quadro de equivalência são acrescentados novos elementos que contribuem para atividade reflexiva e operativa da criança, como contar, colorir, ordenar, comparar. Outros modelos de áreas e comprimentos também foram explorados nos manuais privilegiando a atividade da criança.

A linha numerada foi considerada um processo visual importante para compreensão das classes de equivalência em que cada conjunto de frações equivalentes representa um mesmo número racional.

O *significado* das frações equivalente parte da compreensão da noção de equivalência e isso vem sendo construído, com diferentes representações, desde o início da apresentação do conteúdo, como por exemplo, a metade de um bolo equivale a dois quartos do bolo. Os diferentes significados perpassam o entendimento que diferentes numerais fracionários representam uma mesma razão, uma mesma fração do todo e que, um conjunto de frações equivalentes representam um número racional.

O estudo das frações equivalentes seguiu uma *graduação*: concreto, semiconcreto, semiabstrato e abstrato. Em alguns manuais iniciando já no segundo ano e em outros no terceiro ano de escolarização. Os autores seguem uma *sequência* partindo de materiais manipulativos, associando seu estudo à representação geométrica, reta numérica, quadro de equivalência, classes de equivalência, linguagem matemática e simbologia, rumo à compreensão das operações com frações e as frações como uma das representações do número racional.

Outra questão que aparece em todos os manuais é que ao final do estudo das frações equivalentes o aluno estaria apto a utilizar a regra “Multiplicando ou dividindo o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, obtém-se uma fração equivalente” com segurança e compreensão.

As propostas apresentadas para os *exercícios e problemas*, articulam-se com os caminhos que foram trilhados para o ensino, seguindo a mesma *graduação*.

As autoras paranaenses, estavam na vanguarda das mudanças que ocorriam em relação as contribuições da psicologia, novos conteúdos e metodologias. Comparado aos outros manuais, os paranaenses eram mais carregados na simbologia (pertence, não pertence, equivalente, etc) e na linguagem matemática (congruente, conjuntos equipotentes). Há estratégias para ensinar frações equivalentes que ocorrem somente nos manuais paranaenses como a classe de frações equivalentes na linha numérica para o zero $\frac{0}{2}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{0}{4}$, $\frac{0}{5}$, e $\frac{0}{6}$. Os exemplos de equivalência com elementos discretos (coleções) são indicados com muitos exemplos nos manuais paranaenses.

Como trabalhos futuros, sugerimos que as frações equivalentes sejam estudadas em outras vagas pedagógicas bem como sejam mobilizadas outras fontes de pesquisa para os estudos como cadernos e provas. Isso permitiria analisar, por exemplo as transformações que ocorreram nesse conteúdo específico e também, analisar os erros em perspectiva histórica.

A partir das fontes consultadas, os conceitos mobilizados neste estudo permitem constatar que os manuais analisados, além de orientarem o professor no seu trabalho diário a ser desenvolvido em sala de aula, participaram da formação profissional do professor primário. Os manuais trouxeram princípios da Matemática Moderna, mobilizando a matemática do ensino, para ensinar as frações equivalentes.

Por fim, a caracterização de uma matemática moderna do ensino das frações equivalentes permitiu que compreendêssemos sobre rupturas e permanências nas práticas e dessa forma ensinar esse conteúdo de forma mais flexível e significativa.

REFERÊNCIAS

ADELINO, Paula. Resende. **O que ensinar primeiro: frações ou números decimais?** Anais da Anped Sudeste. 2014. Disponível em: <https://anpedsudeste2014.files.wordpress.com/2015/04/paula-resende-adelino.pdf>. Acesso em: 29 abr. de 2023.

ALVES, Antônio Mauricio Medeiros. A matemática do ensino de frações: uma história lida a partir de livros didáticos produzidos no Rio Grande do Sul (1960-1978). **HISTEMAT – História Da Educação Matemática**, v.7, p. 1-22, UNIFESP- SP. julho 2021. Disponível em

<http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/410>. Acesso em: 09 ago. 2023.

BEHR, Merlyn; LESH, Richard; POST, Thomas; SILVER, Edward. "Rational number concepts". In R. Lesh & M. Landau (Eds.), **Acquisition of mathematical concepts and processes**. New York: Academic, p. 91-126, 1983.

BERTICELLI, Danilene Gullich Donin; PORTELA, Mariliza Simonete. **Dicionário dos Experts**: matemática para o ensino e formação de professores. São Paulo, ed.1, 2021. Disponível em: <https://www.ghemat.com.br/itens/henrieta-dyminski-arruda>. Acesso em: 09 ago. 2023.

BERTINI, Luciane de Fatima; MORAIS, Rosilda dos Santos. A matemática moderna do ensino de frações na escola de oito anos (décadas de 1960 e 1970). **Revista De História Da Educação Matemática**. UNIFESP- SP, v. 7, p. 1-19, 2021. Disponível em: <http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/414>. Acesso em: 09 ago. 2023.

BERTINI, Luciane de Fatima; MORAIS, Rosilda dos Santos; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A matemática a ensinar e a matemática para ensinar**: novos estudos para a formação de professores. 1.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

BERTINI, Luciane de Fatima; VALENTE, Wagner Rodrigues. Problemas aritméticos como elementos da matemática do ensino. **Cad. Cedes, UNICAMP**, Campinas, v. 41, n. 115, p.230-238, Set. - Dez., 2021. Disponível em: <https://moodle.utfpr.edu.br/mod/folder/view.php?id=1361468>. Acesso em: 30 abr. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. 2018.

BURIGO, Elisabete Zardo. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: Da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 145f. Dissertação de mestrado (Educação área de ensino) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 1989.

BURIGO, Elisabete Zardo. Matemática moderna: progresso e democracia na visão de educadores brasileiros nos anos 60. **Revista Teoria & Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 225-265. 1990. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/166108>. Acesso em 09 ago. 2023.

BURIGO, Elisabete Zardo; VALENTE, Wagner Rodrigues. Modernizing Mathematics Teaching: International Dialogues from Brazil. In *BOCK, Dirk De (org.)*. **Modern Mathematics**: An International movement? 1ª ed. Estados Unidos: Springer, 2023. 403 – 421.

BURKE, Peter. **O que é história do conhecimento**. Tradução Claudia Freire. São Paulo: Unesp, 2015.

CARRAHER, David Willian; SCHILIEMANN, Analúcia Dias. A compreensão de frações como magnitudes relativas. **Revista Psicologia: Teoria e Pesquisa**. Brasília,

v.8, p. 67-78, 1992. Disponível em <https://periodicos.unb.br/index.php/revistapt/article/view/17124/15610>. Acesso em: 09 ago. 2023.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; RODRIGUES, Wilson Rodrigues. A idéia de unidade na construção do conceito do número racional. **REVEMAT– Revista Eletrônica de Educação Matemática**. UFSC, v.2. 4, p. 68-93. Jan. 2007. Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12992/12093>. Acesso em: 09 ago. 2023.

CHARTIER, Roger. **História Cultural: entre práticas e representações**. Tradução Maria Manuela Galhardo. Ed. Bertrand Brasil. Rio de Janeiro, RJ. 1990.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**; v.2, p. 177-229. 1990.

CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**. São Paulo, USP, v.30, n.3, p. 549-566, 2004.

CHOPPIN, Alain. O manual escolar: uma falsa evidência histórica. **História da Educação, ASPHE/FaE/UFPel**. Pelotas, v. 13, n. 27 p. 9-75, Jan./Abr., 2009. Disponível em: <http://fae.ufpel.edu.br/asphe>. Acesso em: 11 ago. 2023.

COSTA, Reginaldo Rodrigues da. **A capacitação e aperfeiçoamento dos professores que ensinavam matemática no Estado do paraná ao tempo do Movimento da Matemática Moderna – 1961 a 1982**. 2013. 212f. Tese de Doutorado em Educação – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2013.

COSTA, Reginaldo Rodrigues da; BEZERRA, Fabiane Aparecida de Almeida. Os saberes matemáticos na formação do professor leigo: o currículo do projeto LOGOS II. **Zetetiké**. Campinas, SP, v.30, p.1-15, 2022. Disponível em: <https://anais.ghemat-brasil.com.br/index.php/STI/article/view/22>. Acesso em: 9 ago. 2023.

COSTA, Reginaldo Rodrigues da. Clélia Tavares Martins e sua influência na formação de professores e no ensino de matemática no Paraná: 1960 – 1980. **REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura**. V. 15, n. 34, p. 195-211, 2020. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/270>. Acesso em: 13 fev. 2023.

DARNTON, Robert. **Poesia e Política: redes de comunicação na Paris do século XVIII**. Tradutor: FIGUEREDO, Rubens. 1 ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2014.

D'AUGUSTINE, Charles H. **Métodos Modernos para o Ensino de Matemática**. Tradutora: PERES, Maria Lucia F.E. 4 ed. Rio de Janeiro: Ao livro Técnico S.A., 1981.

DOMINGUES, Jonathan Machado; GREGÓRIO, Janine Marques da Costa; COSTA, David Antonio da. Matemática a ensinar e matemática para ensinar fração: algumas considerações das produções de Bezerra. **Caminhos da Educação Matemática**, em

Revista/Online. V.10, n. 3, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/218037>. Acesso em 09 ago. 2023.

Editora Conceitos.com – Referência autoral (APA): **Conceito de Sistematização**. Em <https://conceitos.com/sistematizacao/>. São Paulo, Brasil. Maio, 2014.

ELLERTON, Nerida F.; CLEMENTS, M. A. Ken. Modern Mathematics: An International Movement? *In*: BÚRIGO, Elisabete Zardo; VALENTE, Wagner Rodrigues. **Modernizing Mathematics Teaching**: International. EUA, 2023. p. 403-421.

FRANÇA, Denise Medina de Almeida; DUARTE, Aparecida Rodrigues Silva. A implementação do Movimento da Matemática Moderna nos anos iniciais no estado de São Paulo. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. V. 8, n. 3, p. 1-15, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/204941>. Acesso em 09 ago. 2023.

FILHO, Francisco de Oliveira. A Professora Lucília Bechara Sanches e o (APLBS): uma trajetória profissional de professora-formadora em tempos do Movimento da Matemática Moderna (MMM) e suas possibilidades teórico-metodológicas. **Revista De História Da Educação Matemática**, ano 5, n. 3, p. 60-75, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/204957/A%20PROFESSORA%20LUC%20C%8DLIA%20BECHARA%20SANCHES%20E%20O%20%28APLBS%29.pdf?sequence=1>. Acesso em: 09 ago. 2023.

GARCEZ, Wagner Rohr. **Tópicos sobre o ensino de frações**: Equivalência. 2013. 78f. Dissertação de mestrado profissional em matemática - PROFMAT. Rio de Janeiro, 2013.

GOMES, Maria Laura Magalhães. Os números racionais em três momentos da história da matemática escolar brasileira. **Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro, SP, v.19, n. 25, p.17-44, 2006.

GOUVEIA, Relicler Pardim. Interpretação do ensino de frações em livros do GRUEMA. **Revista do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade de Mato Grosso do Sul (UFMS)**. V. 14, n. 35, p. 1-17. Jun. 2021. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/353938990_Interpretacao_do_Ensino_de_Fracoes_em_Livros_do_GRUEMA. Acesso em: 09 ago. 2023.

HOFSTETTER, Rita; SCHNEUWLY, Bernard. Saberes: um tema central para a profissão do ensino e da formação. *In* HOFSTETTER, Rita; VALENTE, Wagner Rodrigues. R. (org.) **Saberes em (trans)formação**: tema central da formação de professores. São Paulo: L F Editorial, 2017.

HOLZMANN, Esther; MARTINS, Clélia Tavares; YAREMTCHUK, Glikéria; ARRUDA, Henrieta Dyminski; HUMPHREYS, Nelly. **Ensino Moderno da Matemática**. Curso primário, 1ª série, 1º caderno. São Paulo, Editora do Brasil S/A, 1969. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219740>. Acesso em: 28 ago. 2023.

HOLZMANN, Esther; MARTINS, Clélia Tavares; YAREMTCHUK, Gliquéria; ARRUDA, Henrieta Dyminski; HUMPHREYS, Nelly. **Ensino Moderno da Matemática**, vol. I. São Paulo, Editora do Brasil S/A, 1970. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219786>. Acesso em: 28 ago. 2023.

HOLZMANN, Esther; MARTINS, Clélia Tavares; YAREMTCHUK, Gliquéria; ARRUDA, Henrieta Dyminski. **Ensino Moderno da Matemática**, vol. II. São Paulo, Editora do Brasil S/A, 1974. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219784>. Acesso em: 03 jan. 2023.

HOLZMANN, Esther.; MARTINS, Clélia Tavares; YAREMTCHUK, Gliquéria; ARRUDA, Henrieta Dyminski. **Ensino Moderno da Matemática**, vol. III. São Paulo, Editora do Brasil S/A, 1975. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219785>. Acesso em: 03 jan. 2023.

JANDREY, Diogo Ferreira. **A matemática do ensino de frações na coleção “matemática metodologia e complementos” de Ruy Madsen Barbosa**. 2022. 158f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul - UFMS, Campo Grande, MS, 2022.

JULIA, Dominique. A. Cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**. N.1, p. 9-43. Jan/Jun 2001. Disponível em: <https://repositorio.unifesp.br/handle/11600/39195>. Acesso em: 09 ago. 2023.

KAMII, Constance; CLARK, Faye B. *Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications*. **Journal of Mathematical**. BEHAVIOR 14, p. 365-378. 1995.

KUHN, Malcus Cassiano. As frações nas edições da segunda aritmética da série Concórdia. In **Anais do ENAPHEM – Encontro Nacional De Pesquisa Em História Da Educação Matemática**. Campo Grande, MS, n.4, p.1-13. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. 2019.
Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/6366>, Acesso em: 28 jul. 2023.

LAMON, Susan J. **Teaching fractions and ratios for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. New York: Routledge, 3 ed. 2012.

LAMON, Susan J. **Teaching fractions and ratios for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. New York: Routledge, 4 ed. 2020.

LIBERMAN, Manhúcia Perelberg; FRANCHI, Anna; SANCHEZ, Lucília Bechara. **Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau**: vol. II. São Paulo: Editora Nacional, 1974a. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208851>. Acesso em: 21 de jul. 2023.

LIBERMAN, Manhúcia Perelberg.; FRANCHI, Anna; SANCHEZ, Lucília Bechara. **Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau**, vol. II. Guia do Professor.

São Paulo: Editora Nacional, 1975. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208851>. Acesso em: 21 de jul. 2023.

LIBERMAN, Manhúcia Perelberg; SANCHEZ, Lucilia Bechara. **Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau**, vol. IV, Guia do Professor. São Paulo: Editora Nacional, 1978. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208851>. Acesso em: 21 de jul. 2023.

MACIEL, Viviane Barros. **Elementos do Saber profissional do professor que ensina matemática: uma aritmética para ensinar nos manuais pedagógicos (1880-1920)**. 2019. 312f. Tese de Doutorado em Ciências: Educação e Saúde na Infância e na Adolescência - Universidade Federal de São Paulo, Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Guarulhos, 2019.

MACIEL, Viviane Barros. Manuais pedagógicos: considerações sobre suas potencialidades na pesquisa dos saberes para ensinar aritmética nos primeiros anos escolares. **ANAIS do XIV Seminário Temáticos**. Saberes Elementares Matemáticos do Ensino primário (1890-1970). Universidade Federal Rio Grande do Norte. Natal – Rio Grande do Norte; 2016. Disponível em: https://xivseminariotematico.paginas.ufsc.br/files/2016/05/MACIEL_T2_vf.pdf. Acesso em 05 de dezembro de 2022.

MARQUES, Maria Eduarda de Bastos. **A matemática “moderna” do ensino de frações equivalentes nos livros do NEDEM**. 76f. Trabalho de conclusão de curso de graduação - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2021.

MARQUES, Maria Eduarda de Bastos; NOVAES, Barbara Winiarski Diesel. Saberes para ensinar frações equivalentes em livros didáticos e manuais pedagógicos (1960 - 1970). In: **Anais do XXIV SICITE – Seminário de Iniciação Científica da UTFPR**, 2019, Pato Branco, v. 1. p. 1-6, out., 2019. Disponível em: <https://eventos.utfpr.edu.br/sicite/sicite2019/paper/viewFile/5108/1866>. Acesso em: 22 de ago. 2023.

MÁRQUEZ, Ángel Diego. **Didática das matemáticas elementares: o Ensino das Matemáticas pelo Método dos Números em Côm ou Método Cuisenaire**. Rio de Janeiro: Letras e Artes LTDA, 1967.

MARTINHO, Gesiel Alisson. **O ensino de equivalência de frações para a compreensão das operações como adição e subtração**. 2020. 277f. Dissertação de Mestrado em Educação e Docência. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG. 2020.

MARTINS, Clélia Tavares; ARRUDA, Henrieta Dyminski; YAREMTCHUK, Gliquéria. **Ensino Moderno da Matemática**, vol. IV, Livro do Mestre. São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1975b. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219743>. Acesso em: 03 jan. 2023.

MARTINS, Clélia Tavares; YAREMTCHUCK, Gliquéria; ARRUDA, Henrieta Dyminski. **Ensino moderno da matemática**, vol. IV. São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1975a.

Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219789>. Acesso em: 09 ago. 2023.

MARTINS, Clélia Tavares. **Operando com números fracionários**. Projeto HAPRONT, módulo 9.4. Paraná: Coordenação Central Curitiba: MEC/DEF/SEEC/CETEPAR, 1976.

MENDES, I. A. (Org.); VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). A matemática dos manuais escolares - curso primário, 1890-1970. 1. ed. São Paulo: LF Editorial, 2017. v. 1. 213p.

MONTEIRO, Alexandre Branco; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. Dificuldades na Aprendizagem de Frações: Reflexões a partir de uma Experiência Utilizando Testes Adaptativos, **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.7, n.2, p.103-135. Nov. 2014. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6170854>. Acesso em: 22 de ago. 2023.

MORAIS, Rosilda dos Santos; BERTINI, Luciane de Fatima; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A Matemática do ensino de frações**: do século XIX à BNCC. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

NIERRI, Adriana Menegotto; BERTICELLI, Danilene Gullich Donin; NOVAES, Barbara Winiarski Diesel. Frações equivalentes na reta numérica: a aritmética moderna nos livros do NEDEM. In **Anais do XX Seminário Temático Internacional história da produção curricular em matemática**: Saberes para o ensino e formação de professores. p. 1-19, Osasco, SP; maio, 2022.

NOVAES, Barbara Winiarski Diesel. **O Movimento da Matemática Moderna em escolas técnicas industriais do Brasil e de Portugal**: impactos na cultura escolar. 2012. 235f. Tese de Doutorado em Educação - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2012.

NOVAES, Barbara Winiarski Diesel; BERTICELLI, Danilene Gullich Donin; PINTO, Neuza Bertoni. Transformações nos saberes para ensinar frações no curso primário relacionadas ao uso de materiais escolares (1930-1970). In: **Anais Do ENAPHEM – Encontro Nacional De Pesquisa Em História Da Educação Matemática**, n. 5, p. 1-5; 2020. Disponível em <https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/11150>. Acesso em: 22 ago. 2023.

NOVAES, Barbara Winiarski Diesel; NIERRI, Adriana Menegotto. A descoberta das frações equivalentes e o material Cuisenaire. **Anais Do ENAPHEM - Encontro Nacional De Pesquisa Em História Da Educação Matemática**, n.5, p. 1-5. out. 2020. Disponível em <https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/11210>. Acesso 28 de junho de 2021.

NOVAES, Barbara Winiarski Diesel; PINTO, Neuza Bertoni. Estudos recentes sobre frações no campo da História da educação matemática: avanços e desafios. **Revista**

de Ensino de Ciências e Matemática. V.12, n. 5, p. 1-20. 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/234424>. Acesso em: 22 ago. 2023.

NOVAES, Barbara Winiarski Diesel; RAMIRES, Késia. Dossiê. Ensino de frações: história e perspectivas atuais. **Revista de História da Educação Matemática**. São Paulo, V.7, p.1-4. 2021.

NUNES, Terezinha. Criança pode aprender frações. E gosta! *In*: GROSSI, E. P. (org.). **Por que ainda há quem não aprende? A teoria**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003.

OLIVEIRA, Marcus Aldenison. **Circulação**. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2018.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo; SILVA, Maria Célia Leme da; VALENTE, Wagner Rodrigues. **O Movimento da Matemática Moderna**: história de uma revolução curricular. Juiz de Fora – MG: Editora Universidade Federal JF, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/227765> Acesso em: 15 ago. 2023.

OLIVEIRA, Raquel Gomes de. **Aprendizagem de frações**: uma análise comparativa de dois processos de ensino na 5ª série do 1º grau. 1996. 165f. Dissertação de mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas - SP, 1996.

OSÓRIO, Norma Cunha; PORTO, Rizza de Araújo. **Matemática na escola primária moderna**: Vamos aprender matemática. 2 ed. Rio de Janeiro: Ao livro técnico S.A., 1968.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares** - Matemática. 1973.

PARANÁ, CETEPAR. **Sugestões de atividades para professores de 1ª a 4ª séries**. Curitiba. 1979.

PARANÁ. **Revista Currículo nº 24** – Currículo do Estado do Paraná. 1977.

PARANÁ. **Relatório HAPRONT I** – Paraná Coordenação Central Curitiba: 1976-1979 MEC/DEF/SEEC/CETEPAR, 1979.

PETIT, Marjorie M.; LAIRD, Robert E.; MARSDEN, Edwin L. **A focus on fractions: bringing research to the classroom**. 5 ed. New York: Routledge, 2010.

PIAGET, Jean. **A epistemologia genética, sabedoria e ilusões da filosofia e problemas de epistemologia genética**. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Os Pensadores)

PIAGET, Jean. La iniciación Matemática, Las Matemáticas Modernas Y La psicología del niño. *In*: HERNÁNDEZ, Jesus (org.). **La enseñanza de las matemáticas modernas**. 3 ed. Madrid: Alianza Editorial, 1986, p. 182-186.

PINTO, Neuza Bertoni; FERREIRA, Ana Célia da Costa. O Movimento da Matemática Moderna: O papel do NEDEM. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n.18,

p.113-122. Mai./ago. 2006. Disponível em:
<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160490>.

PINTO, Neuza Bertoni; NOVAES, Barbara Winiarski Diesel. “Não é Difícil Ensinar Matemática”: o protagonismo do NEDEM na difusão da Matemática Moderna no Paraná. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 21, n. especial, p.109-122, maio/Jun. 2019. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/>. Acesso em: 22 ago. 2023.

PINTO, Neuza Bertoni. A SBEM e a produção de conhecimento em educação matemática. **Bolema**. Rio Claro, SP, v.33, n.65, p. 1-16, dez 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/204924>. Acesso em: 30 abr. 2023.

PORTELA, Mariliza Simonete; PIRES, Licéia Alvez; COSTA, Reginaldo Rodrigues da. O ensino de frações na década 1960 e os saberes docentes do professor da escola primária. **Revista de História da Educação Matemática**. v. 7, p.1-19, maio 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/235210>. Acesso em: 22 ago. 2023.

PORTELA, Mariliza Simonete. **Práticas de matemática moderna na formação de normalistas no instituto de educação do Paraná na década de 1970**. 2009. 137f. Tese de Doutorado em Educação – Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba. 2009.

PORTO, Rizza Araújo. **Frações na Escola Elementar**. 4 ed. Belo Horizonte: Editora do Professor Ltda, 1967.

POWELL, Arthur. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática Ensino e Cultura**. v.13, n.29, p.78-93. 2018. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/330116966_Melhorando_a_Epistemologia_de_Numeros_Fracionarios_uma_Ontologia_baseada_na_Historia_e_Neurociencia. Acesso em: 22 ago. 2023.

PROST, Antoine. **Douze leçons sur l’histoire**. Paris: Éditions du Seuil, 1996.

RODRIGUES, Jeremias Stein; GODOI, Anieli Joana de; COSTA, David Antonio da. O manual pedagógico “ver, sentir, descobrir a aritmética”: o ensino de frações através das partes fracionárias. **Revista De História Da Educação Matemática**. UNIFESP - São Paulo, v. 7, p. 1-25. Jul., 2021. Disponível em <http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/406>. Acesso em: 22 ago. 2023.

ROMEIRO, Irají Oliveira; MORETTI, Vanessa Dias. Partes, medidas e frações equivalentes: o movimento do pensamento teórico de professores que ensinam matemática. **Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**. Uberlândia – MG, v.5, n.2, p. 458-483. mai/ago 2021. Disponível em https://www.academia.edu/49161365/Partes_Medidas_e_Fra%C3%A7%C3%B5es_Romeiro_e_Moretti_Obutchenie. Acesso em: 15 ago. 2023.

SANCHEZ, Lucilia Bechara; LIBERMAN, Manhúcia Perelberg. **Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau**, v. III. São Paulo: Editora Nacional, 1974. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208851>. Acesso em: 21 de jul. 2023.

SANCHEZ, Lucilia Bechara; LIBERMAN, Manhúcia Perelberg. **Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau**, v. III. Guia do Professor. São Paulo: Editora Nacional, 1975b. Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208851>. Acesso em: 03 de jan. 2023.

SANCHEZ, Lucilia Bechara; LIBERMAN, Manhúcia Perelberg. **Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau**, v. IV. São Paulo: Editora Nacional, 1975a. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208851>. Acesso em: 03 de jan. 2023.

SANTOS, Edilene Simões Costa dos; FRANÇA, Denise Medina; RAMIRES, Késia. Saberes de referência para a docência mobilizados com um dispositivo didático para o ensino de frações. **Centro de Ciências da Educação**, Florianópolis, v.40, n. 2, p. 01. Abr./jun. 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/242794>. Acesso em: 22 ago. 2023.

SANTOS, Monica Bertoni dos. O Grupo de Estudos para o Ensino de Matemática de Porto Alegre (GEEMPA): sua fundação e suas ações no ano de 1970. **Anais – IV Seminário Temático: A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e Portugal: estudos históricos comparativos**. Almada - Portugal. Anais Lisboa. 2007.

SCHASTAI, Marta Burda; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da; SOISTAK, Maria Marilei. A abordagem do conteúdo de frações em um curso de formação de professores dos anos iniciais. **Espacios**, v. 35, n. 5, p. 1-15, 2014.

SCHEFFER, Nilce Fátima; POWELL, Arthur B. Frações na educação básica: o que revelam as pesquisas públicas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. v.09, n.20, p.08-37, dez., 2020.

SILVA, Paulo Henrique Freitas. **Ensino-aprendizagem de frações: Um olhar para as pesquisas e para a sala de aula**. 2017. 166 f. Dissertação de Mestrado, apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande – PB, 2017.

SILVA, Vivian Batista. Saberes em viagem nos manuais pedagógicos: construções da escola em Portugal e no Brasil (1870-1970). **Brasileira de Educação**, v. 12, n. 35, p. 268-277. Mai/ago. 2007. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/5bKjDbCbM4CYtLWv5zmb79K/?format=pdf>. Acesso em: 22 ago. 2023.

SOARES, Elenir Terezinha Paluch. **Zoultan Paul Dienes e o Sistema de Numeração Decimal na cultura escolar paranaense (1960-1989)**. 2014. 288f. Tese de Doutorado em Educação – Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba. 2014.

SOUZA, João Francisco de. Sistematização da experiência por seus próprios sujeitos. *In: Tópicos Educacionais*, Recife - PE: UFPE, Centro de Educação, v. 15 n. 1/3. 1997.

SOUZA, Mônica Menezes de; BATISTA, Carmyra Oliveira; SANTOS, Edilena Simões Costa dos; CARVALHO, Rosália Policarpo Fagundes de. Um olhar atento ao manual didático “Vamos Aprender Matemática: guia do professor Preliminar”. **HISTEMAT – Revista De História Da Educação Matemática**. UNIFESP- São Paulo, v. 2, n. 1, p. 84-95, 2016. Disponível em <https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/59>. Acesso em 22 ago. 2023.

TRINDADE, Stéphanie da Silva; BÚRIGO, Elizabete Zardo. O guia curricular riograndense de 1972 e as orientações sobre ensino de frações para as séries iniciais. **Revista De História Da Educação Matemática**. UNIFESP- São Paulo, v. 7, p. 1-16, 2021. Disponível em <http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/385>. Acesso em: 22 ago. 2023.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: os saberes para o educador matemático. *In: Hofstetter, R., & Valente, W. R. (Org.) Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores*. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, p. 201-226, 2017.

VALENTE, Wagner Rodrigues; BERTINI, Luciane Fatima; MORAIS, Rosilda dos Santos. Novos aportes teórico-metodológicos sobre os saberes profissionais na formação de professores que ensinam matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 2, p.224-235, mar./abr., 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/185666>. Acesso em 30 de abr. de 2023.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da educação matemática: interrogações metodológicas. **Revista Eletrônica da Educação Matemática**. V.2.2, p.28-49. 2007. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/160378>. Acesso em: 22 ago. 2022.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **ZETETIKÉ**. V.16, n.30, p.139-161, jul./dez., 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/160373>. Acesso em: 11 set. 2023.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Saber objetivado e formação de professores: reflexões pedagógico-epistemológicas. **Revista História Da Educação**. Guarulhos – São Paulo, v. 23. e77747, 2019. Disponível em <https://seer.ufrgs.br/index.php/asphe/article/view/77747>. Acesso em: 03 de jan. 2023.

VAN de WALLE, John A. A. **Matemática no ensino fundamental [recurso eletrônico]**: formação de professores em sala de aula. 6 ed. Porto Alegre; Ed. Artmed. 2009.

VILELA, Lucia Maria Aversa. **GRUEMA**: uma contribuição para a história da educação matemática no Brasil. 2009. 230f. Tese Doutorado em Educação Matemática - Universidade Bandeirante, São Paulo, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/161992>. Acesso em 12 jan. 2023.

WROBEL, Julia Schaeztle.; KILL, Tercio Girelli. Classes de equivalência uma abordagem moderna para o ensino de frações. **Revista de História da Educação Matemática**. UNIFESP - São Paulo, v.7, p.1-27, 2021. Disponível em: <http://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/>. Acesso em: 22 ago. 2023.

ANAIS do XX Seminário Temático Internacional história da produção curricular em matemática: Saberes para o ensino e formação de professores. Recuperado de <http://www.anais.ghemat-brasil.com.br/>.