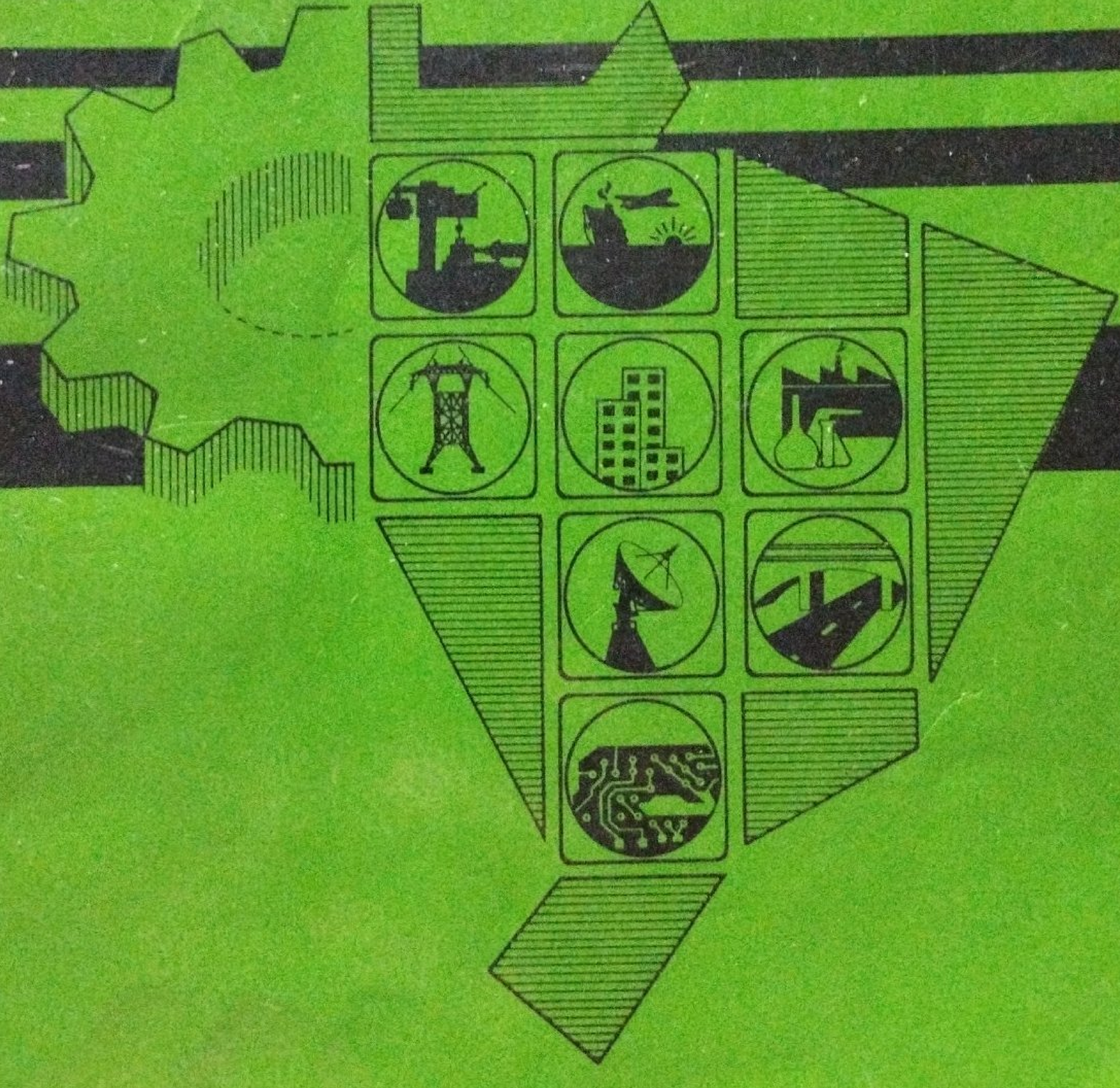
MATEMÁTICA

ETF'S E CEFET'S



TRIGONOMETRIA
FASCÍCULO III

1.880 3,49

0,º

MATEMÁTICA

ETF's e CEFET's

TRIGONOMETRIA

FASCÍCULO III

1984

MATEMÁTICA; ETF's e CEFET's /Curitiba, Centro
Federal de Educação Tecnológica do Paraná/1984
v. ilust. 23 cm.

1. Trigonometria

CDD-18.ed.
516.24
M425

PREFÁCIO

Este fascículo é um componente do Livro-Texto de Matemática, e pecífico para as Escolas Técnicas e Centros Federais, produzido por profes res destas mesmas Instituições e coordenado por uma Comissão Central Perm nente formada por: Centros Federais de Minas Gerais (coordenador) , Paraná Escolas Técnicas Federais de Fortaleza e Pernambuco.

Foi através de ENCONAM'S (Encontro Nacional de Professores de M temática das ETF'S e CEFET'S), que surgiram as primeiras propostas, no sen do da elaboração de um texto, próprio para o ensino técnico profissionaliz te.

Trata-se de uma produção científica, pois se baseia numa Pesqu sa, a nível nacional, feita também, por professores das Escolas Técnicas Centros, para se conhecerem as necessidades das disciplinas técnicas, rela vamente às aplicações dos conceitos matemáticos.

É uma primeira edição, que se pretende atingir os objetivos in ciais, levando o aluno à raciocinar, reduzindo-se a memorização; interpret graficamente as funções, dando ênfase à Geometria: apresentar o maior núme possível de problemas das áres técnicas, envolvendo conceitos matemáticos.

Com a crítica construtiva de todos os professores que adotar esta obra, nas futuras edições, conseguiremos adequar, plenamente, o conte do aos nossos objetivos.

Esperamos que os resultados advindos da adoção deste texto pos sam contribuir para uma melhor adequação da Matemática às disciplinas técni cas, sem prejuízo da formação geral.

Comissão Central Permanente para
elaboração do livro-texto

CONTEÚDO

"A História da Matemática
é o espelho da Civilização"

UNIDADE 1

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

1. INTRODUÇÃO A TRIGONOMETRIA

1.1 INTRODUÇÃO

A etimologia da palavra *TRIGONOMETRIA* significa "medida dos triângulos sendo formada pelos radícais gregos tri (três), gonos (ângulo) e metron (medir).

A *trigonometria* teve origem na antiga Grécia, em decorrência dos estudos das relações métricas entre os lados e os ângulos de um triângulo, possivelmente,com intuito de resolver problemas de navegação, agrimensura e astronomia.

O astronomo grego Hiparco (que viveu por volta de 150 a.C.), construiu a primeira tabela trigonométrica.

Com a criação da Geometria Analítica , através de René Descartes(1596-1650), e a subsequente importância adquirida pelas funções, a *trigonometria* forneceu a classe fundamental das funções circulares e angulares, em geral denominadas funções trigonométricas.

Atualmente, a *trigonometria* tem grande aplicação nas ciências exatas e em particular no campo da Eletricidade, Eletrônica, Cálculo de Estruturas e Topografia.

CURIOSIDADE.

A palavra "*SENO*"surgiu de um mal-entendido.

No ano 500 os hindus já haviam percebido a utilidade das meias cordas de circunferências e construiram tabelas com seus valores.

A palavra que eles usavam era *ARDHA-JYA*, que em sânscrito significa "*meia-corda*".

Esta palavra foi abreviada para *JYA* e numa transcrição para o árabe virou *JIBA*.

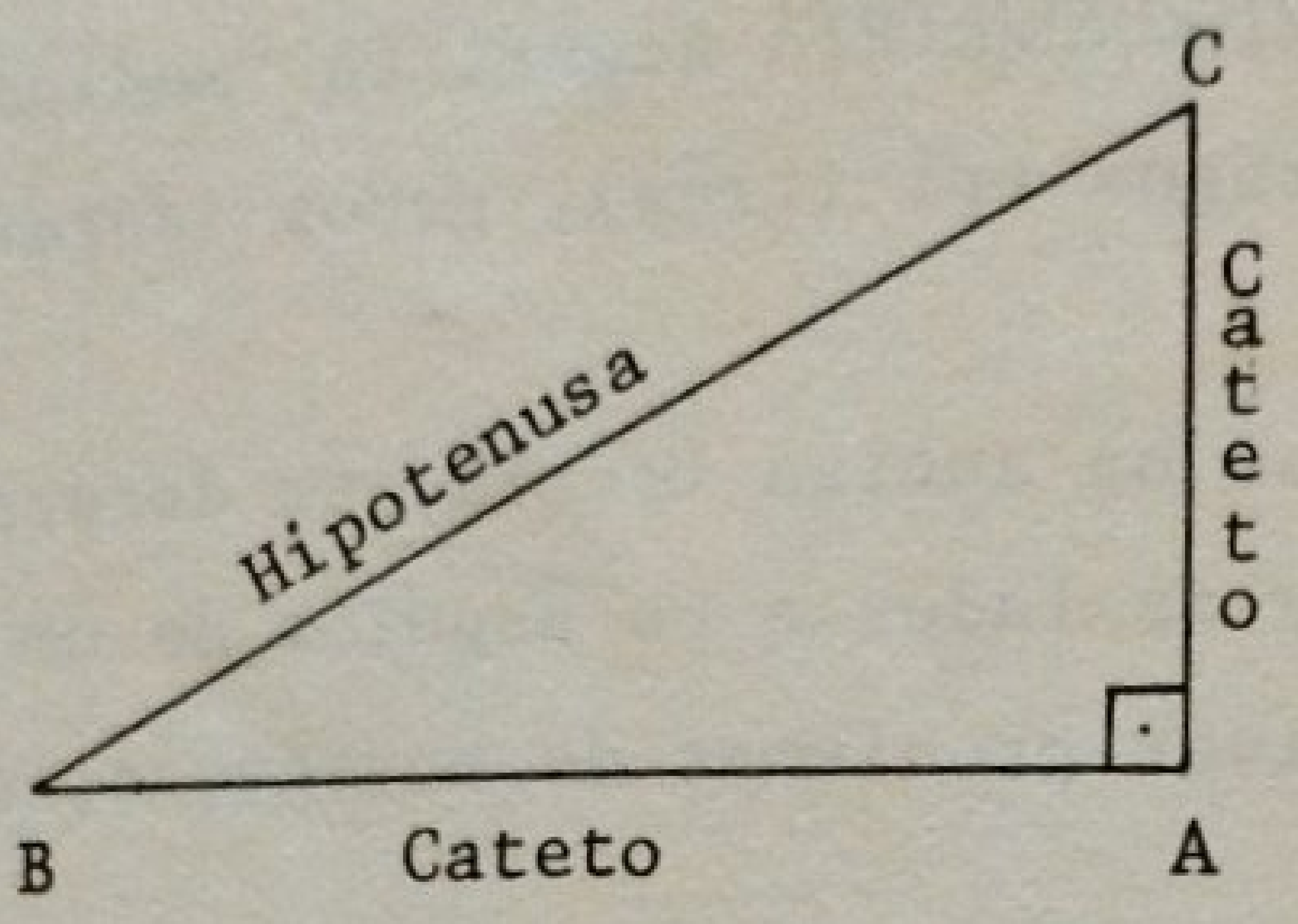
Mas os árabes na sua escrita, omitiam vogais e o símbolo para a palavra *JIBA* era *JB*, que também poderia ser lido como *JAYB*, palavra mais popular, significando golfo ou seio.

Por volta de 1150, quando os europeus traduziram os trabalhos dos árabes, foi assim que eles interpretavam o símbolo *JB* e usaram o equivalente em latim: SINUS

Originando daí, a palavra *SENO*.

1.2 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Num triângulo retângulo ABC, reto em $\hat{A}$, temos:



SENO de um ângulo agudo $= \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

COSSENO de um ângulo agudo $= \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

TANGENTE de um ângulo agudo $= \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

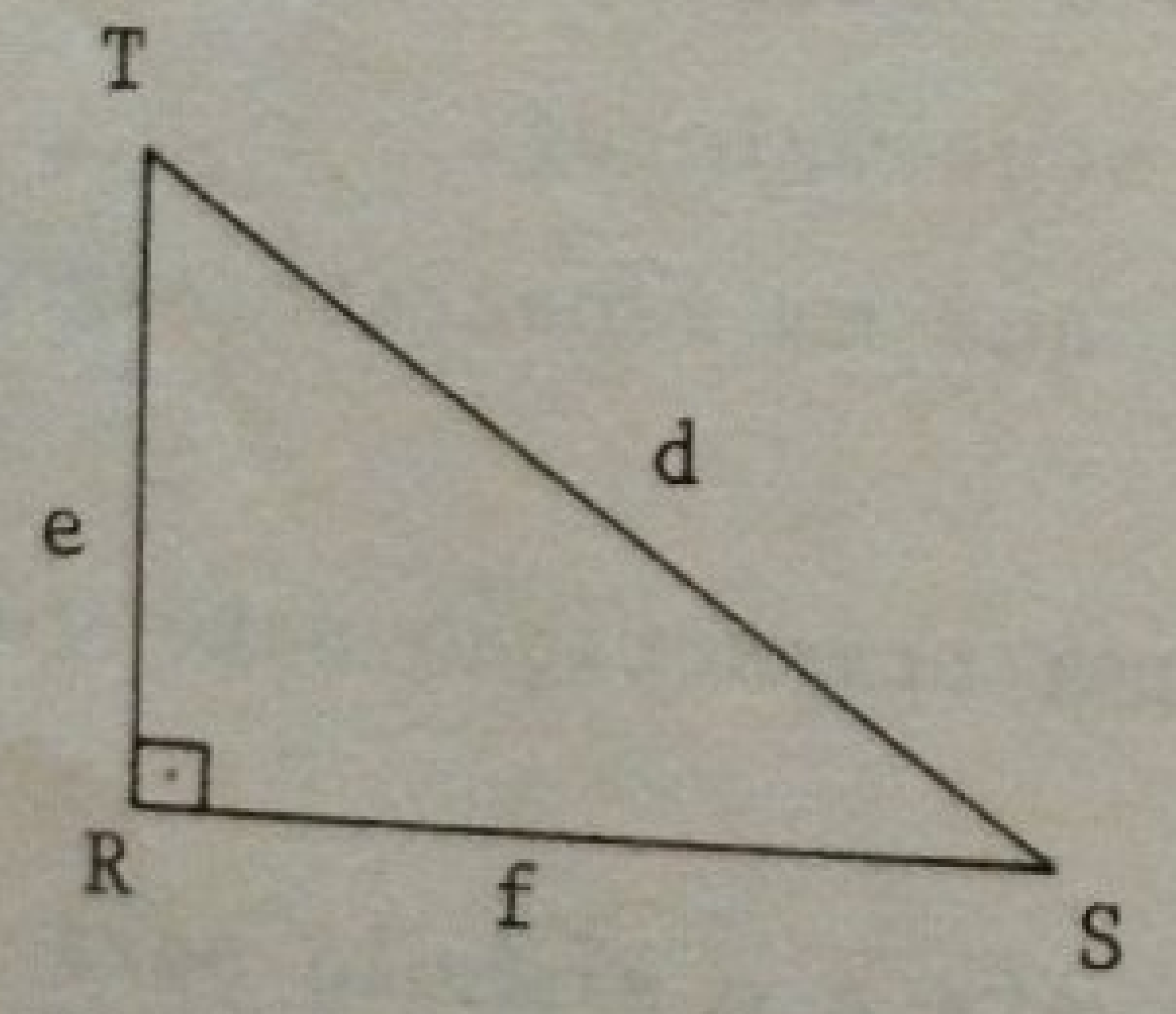
Nota: a) Num triângulo a soma de seus ângulos internos mede 180^o.

b) Num triângulo retângulo a soma dos ângulos agudos mede 90^o.

EXERCÍCIOS:

E.1 Nos triângulos retângulos abaixo, determine as relações solicitadas:

a)



$sen\ \hat{S}=$ $sen\ \hat{T}=$

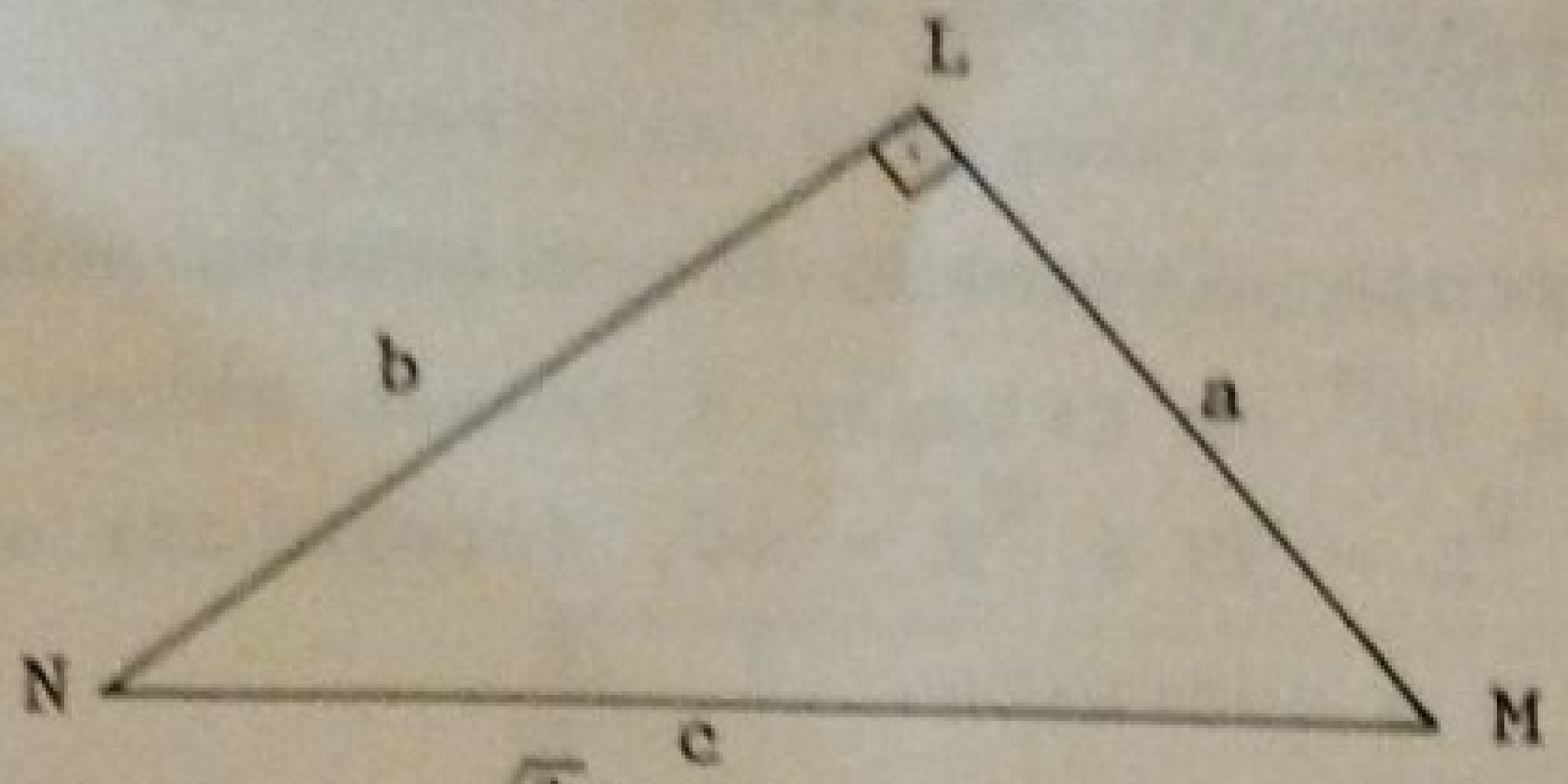
$cos\ \hat{S}=$ $cos\ \hat{T}=$

$tan\ \hat{S}=$ $tan\ \hat{T}=$

Observe que $sen\ \hat{S} = cos\ \hat{T}$ e $sen\ \hat{T} = cos\ \hat{S}$. Isto ocorre quando a soma dos ângulos mede 90^o, isto é $\hat{S} + \hat{T} = 90^o$.

Generalizando, podemos escrever $\boxed{sen\ x = cos\ (90^o - x)}$ para $0^o \leqslant x \leqslant 90^o$.

b)



sen $\hat{M}$ =

cos $\hat{M}$ =

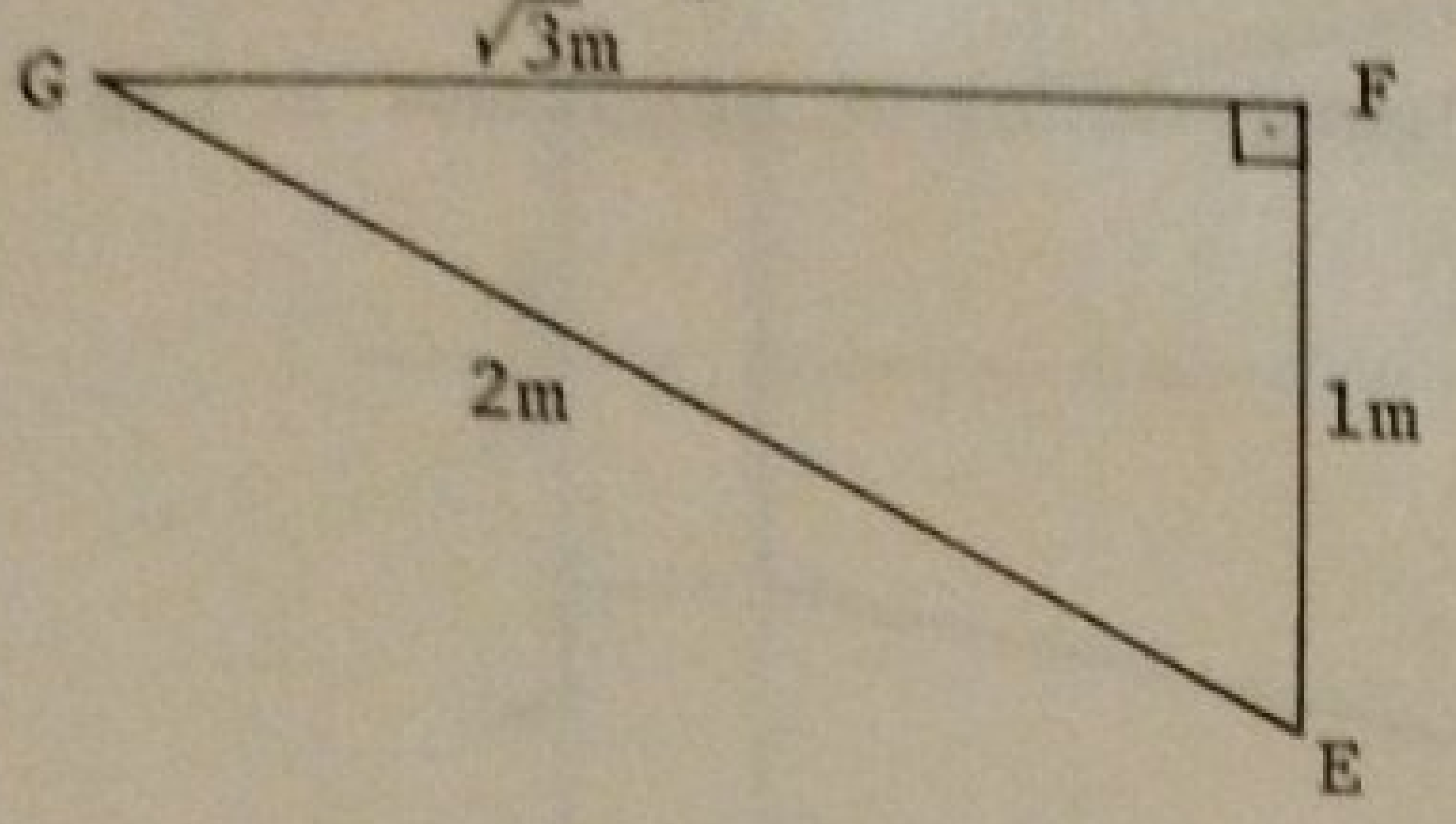
tan $\hat{M}$ =

sen $\hat{N}$ =

cos $\hat{N}$ =

tan $\hat{N}$ =

c)



sen $\hat{E}$ =

cos $\hat{E}$ =

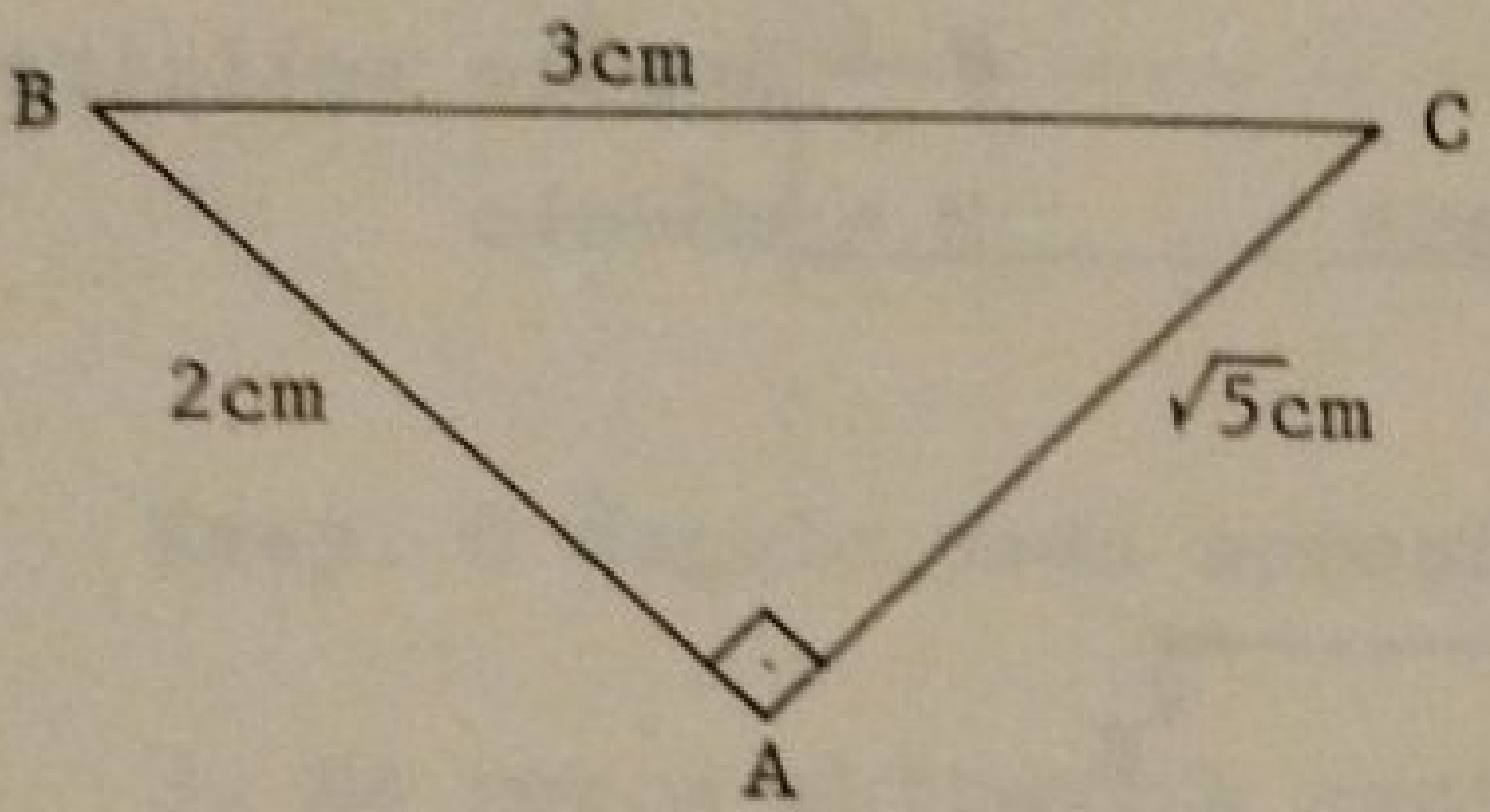
tan $\hat{E}$ =

sen $\hat{G}$ =

cos $\hat{G}$ =

tan $\hat{G}$ =

d)



sen $\hat{C}$ =

cos $\hat{C}$ =

tan $\hat{C}$ =

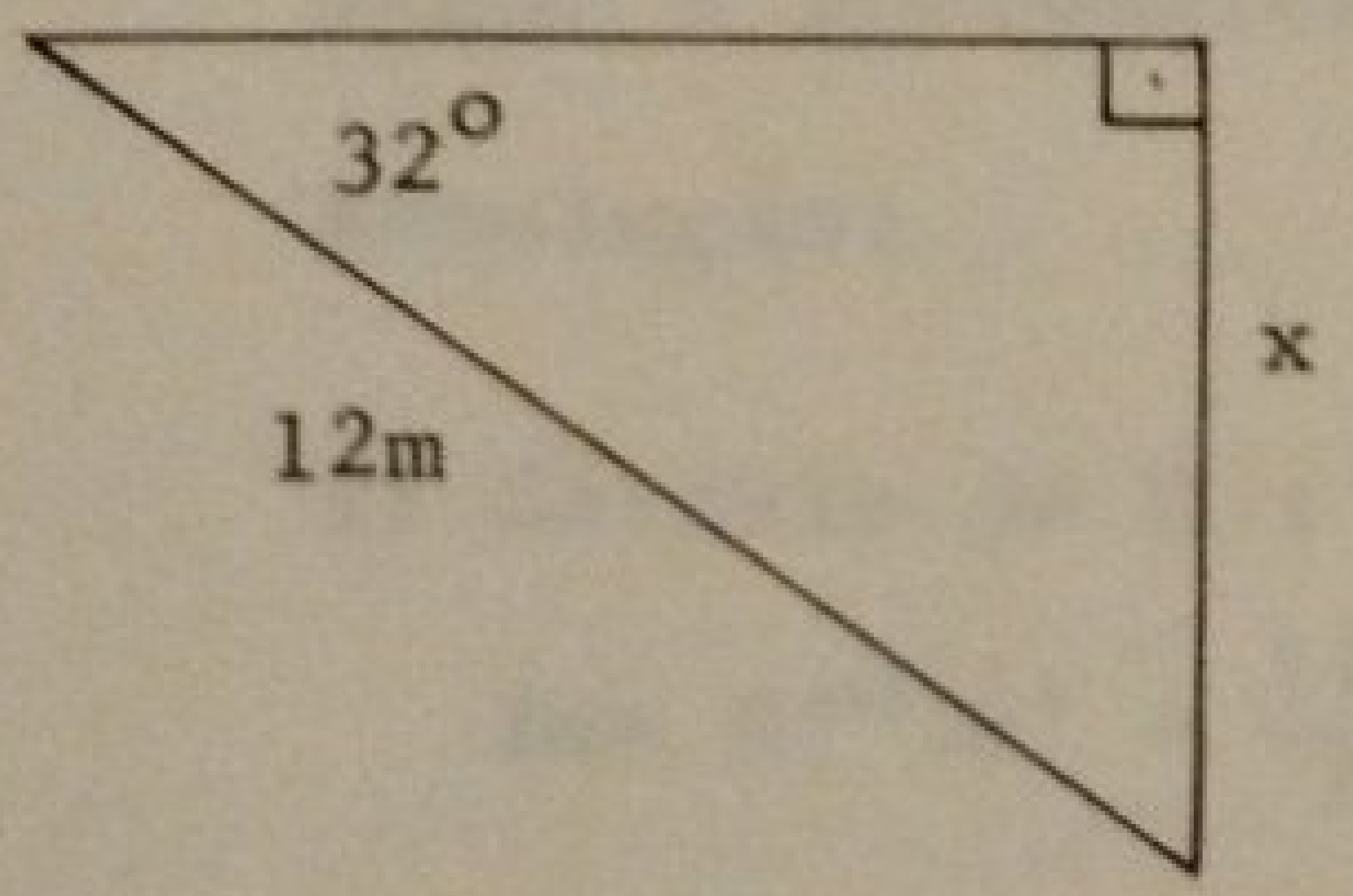
sen $\hat{B}$ =

cos $\hat{B}$ =

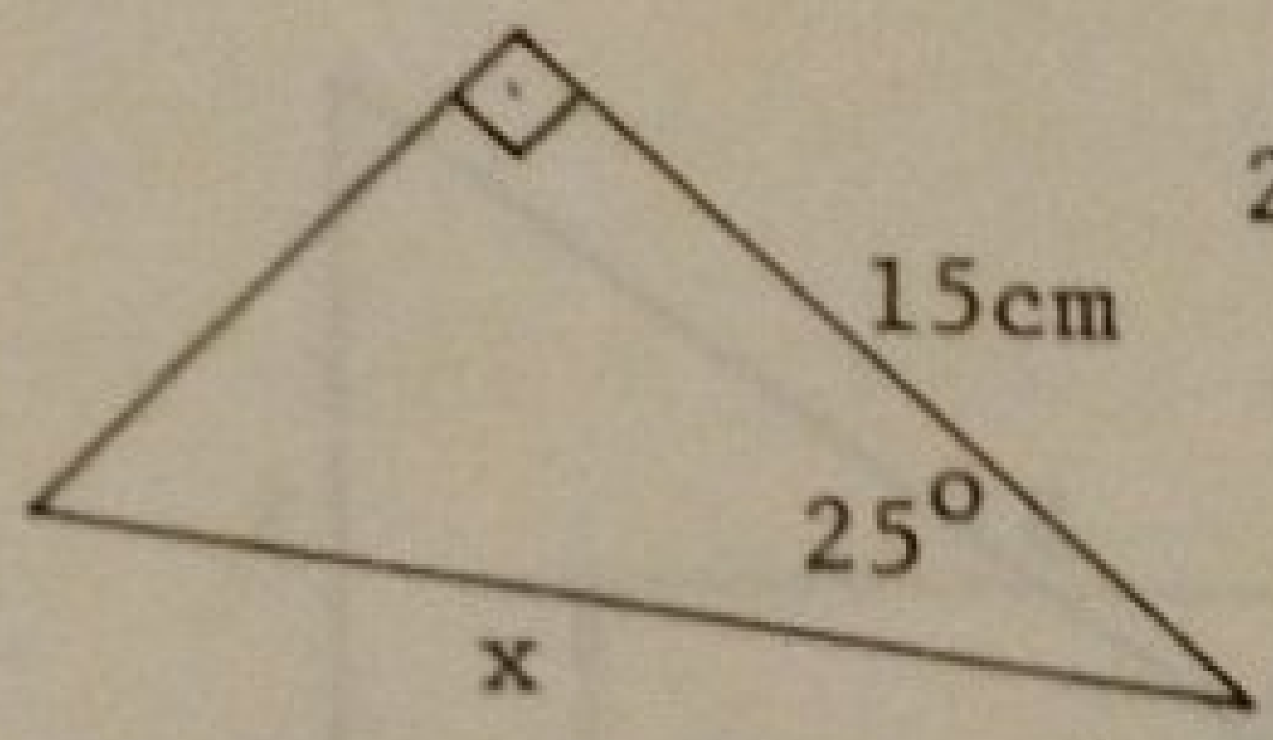
tan $\hat{B}$ =

E.2 Nos triângulos retângulos abaixo, calcule o valor de x:

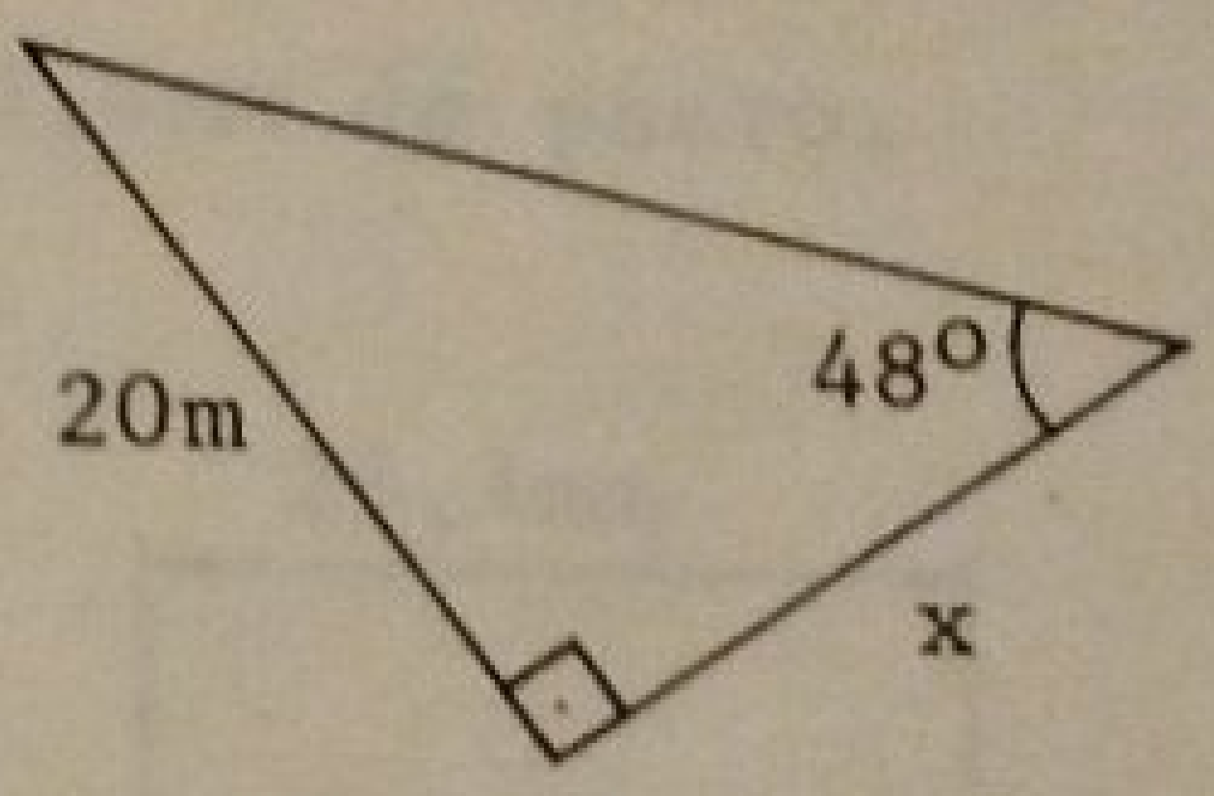
a)



b)

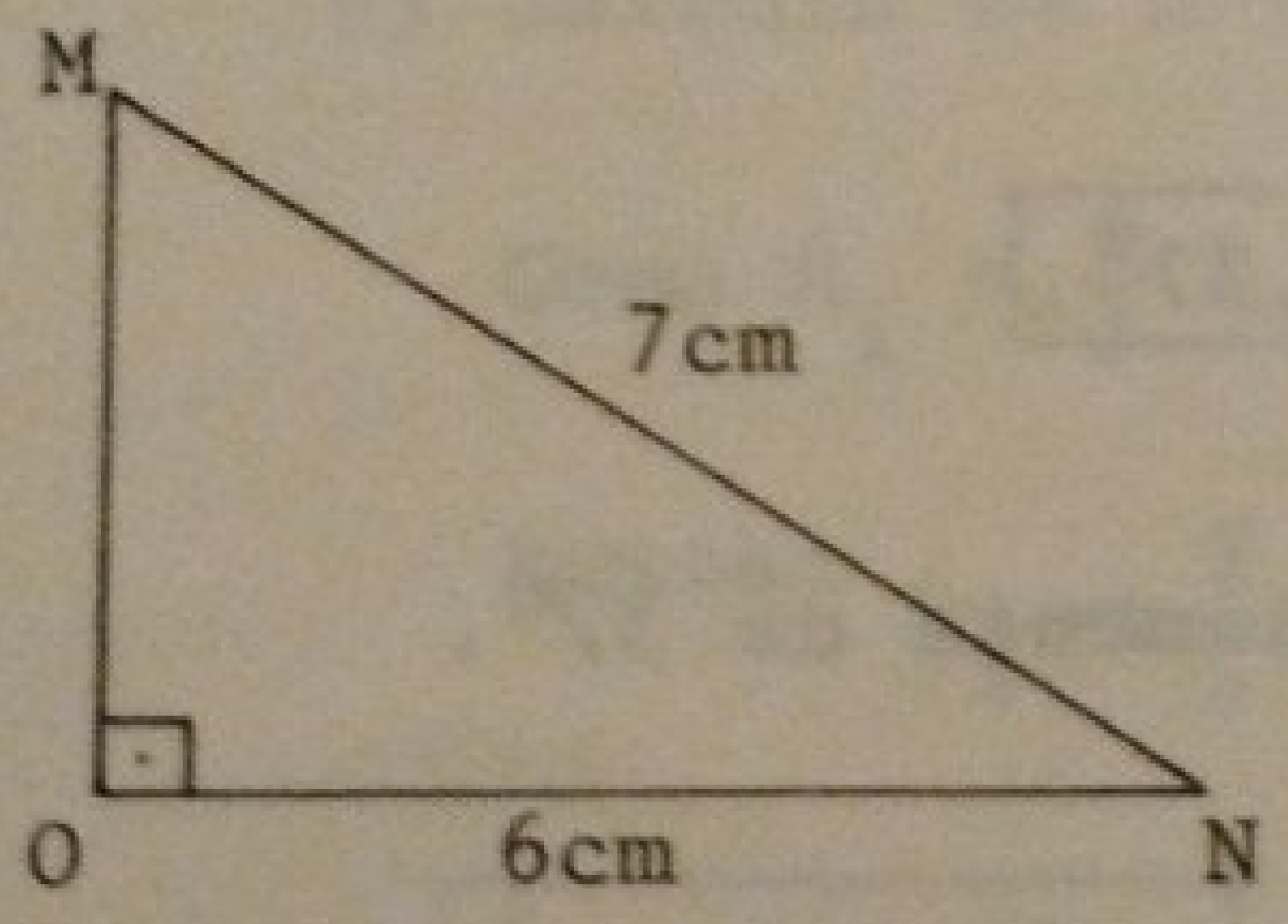


c)

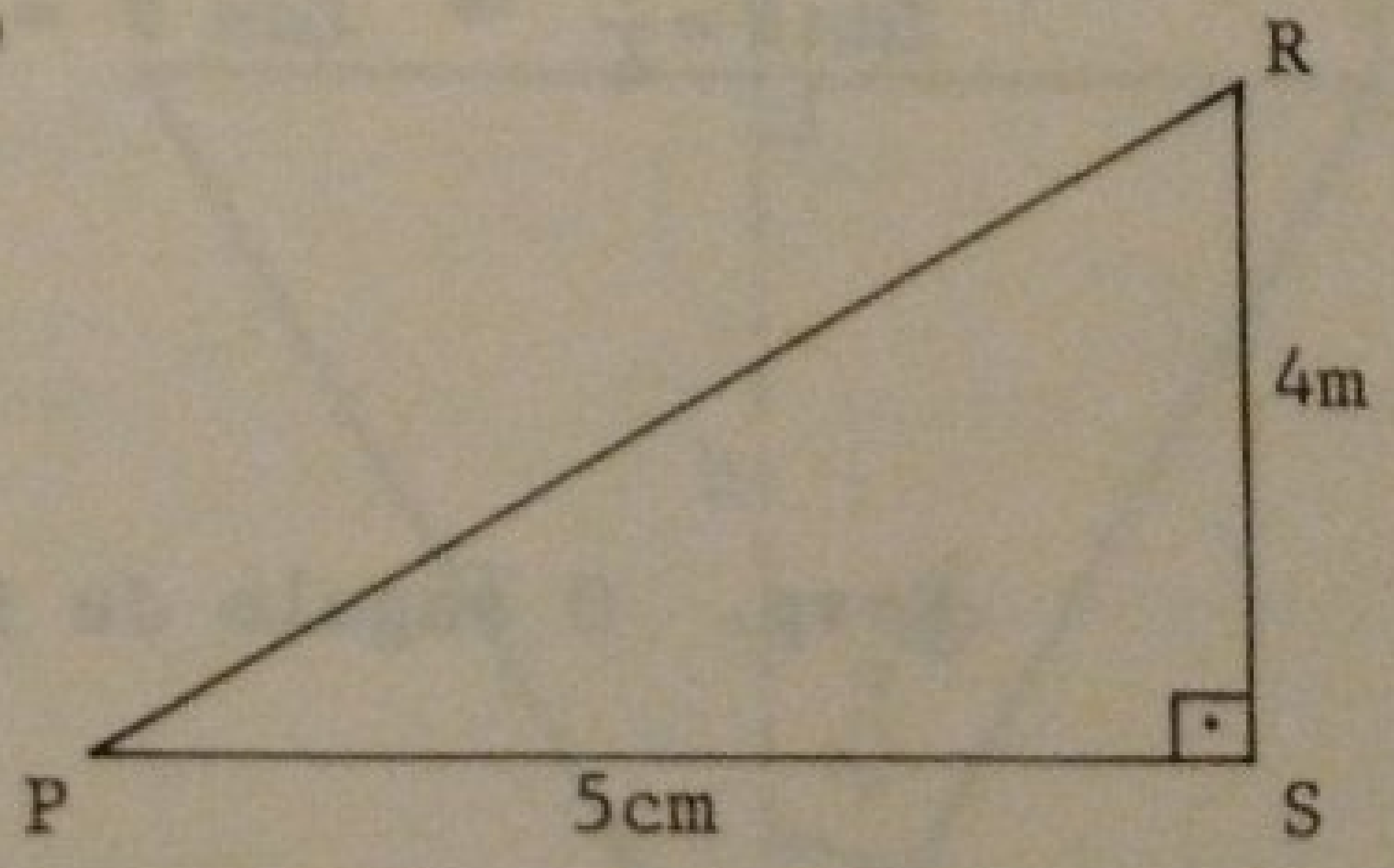


E.3 Nos triângulos retângulos abaixo, calcule os ângulos:

a)



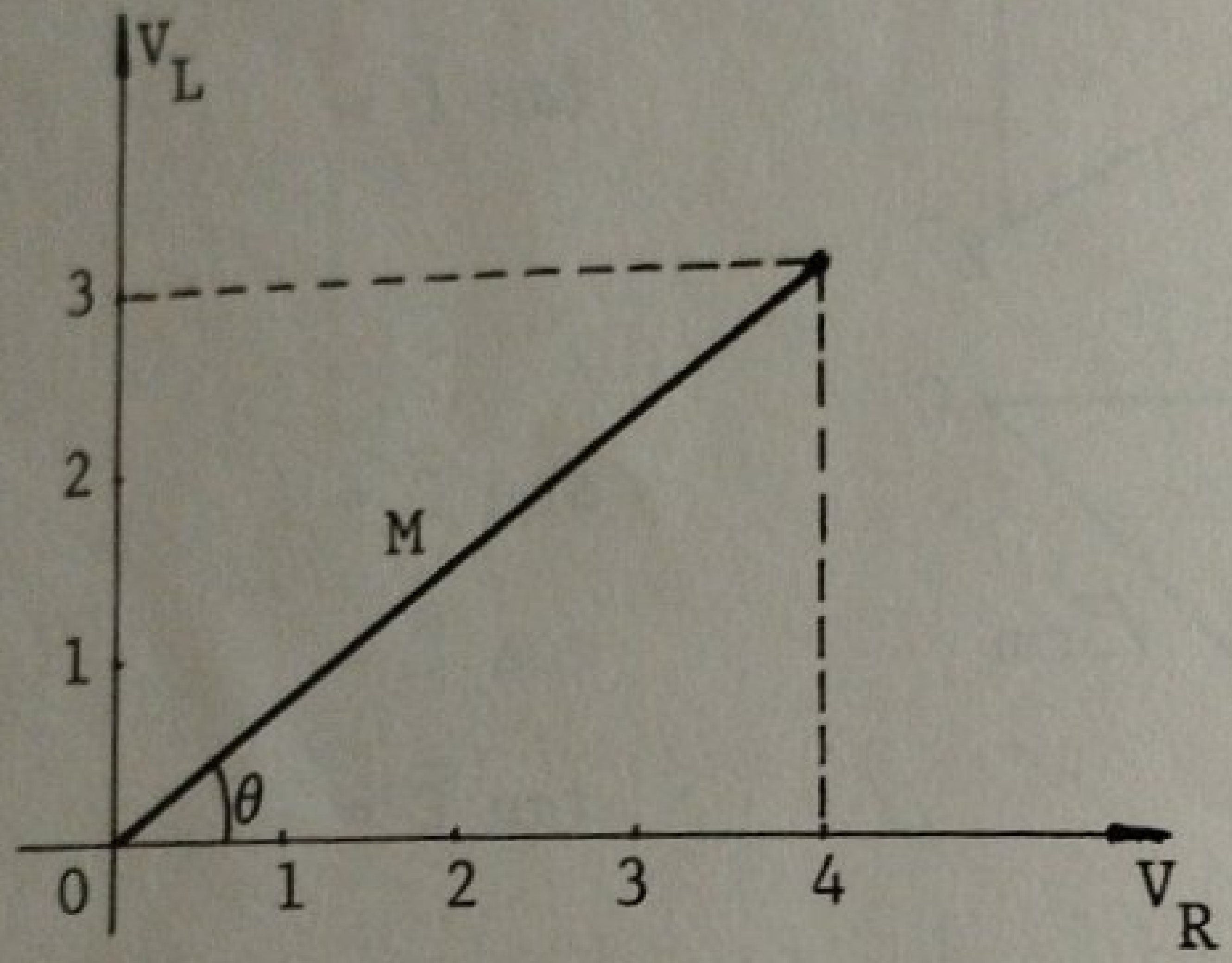
b)



1.2.1 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO PRÁTICA

1. Num circuito de corrente alternado RL, a tensão sobre o indutor L esta adiantada de 90^o em relação à tensão sobre a resistência R. Supondo que $V_L = 3V$ e $V_R = 4V$, determinar o ângulo de fase entre a tensão e a corrente.

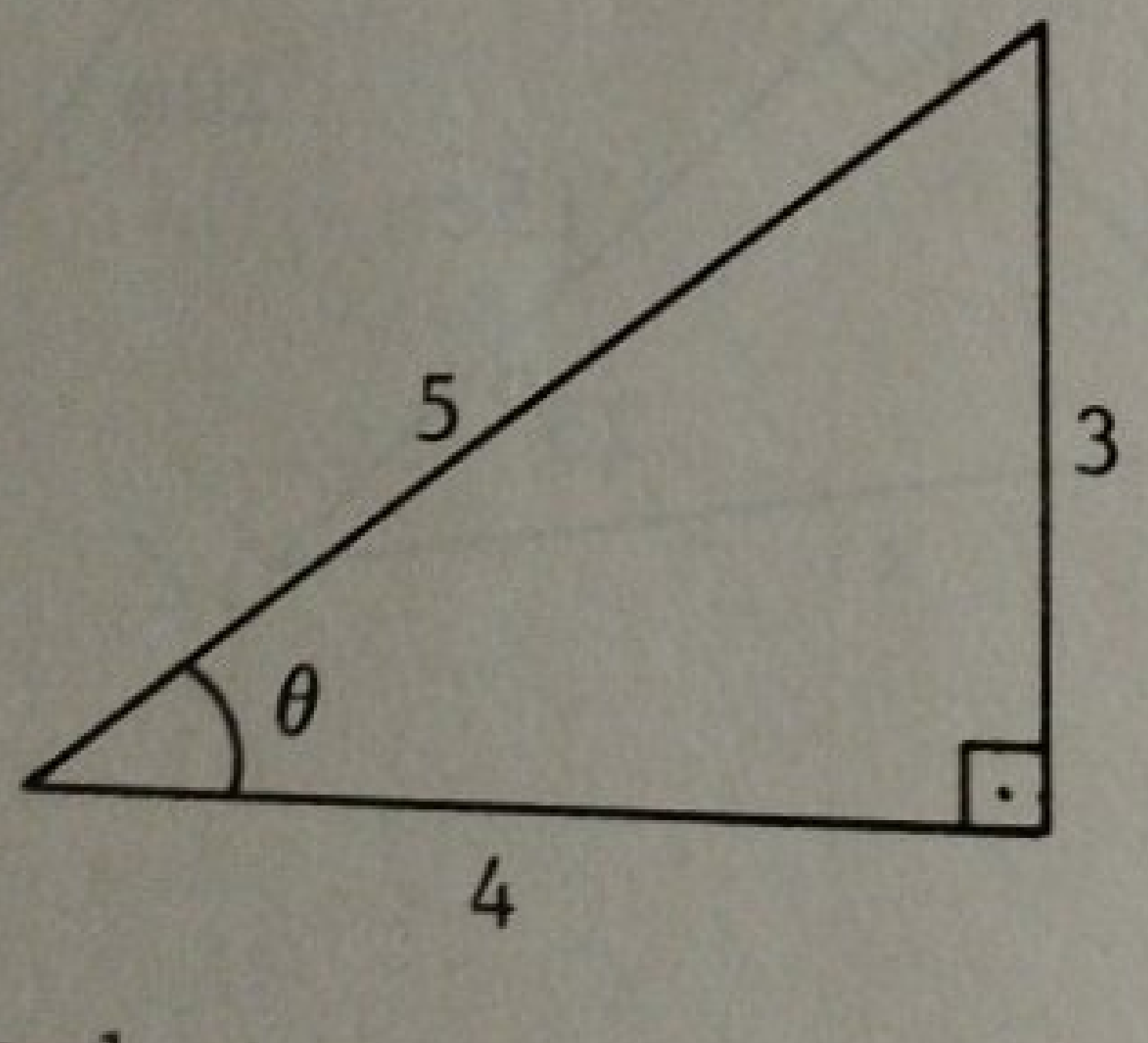
Representando no plano Argand-Gauss o problema acima, temos:



θ = ângulo solicitado

M = módulo

Para resolver o nosso problema, devemos considerar o seguinte triângulo retângulo:



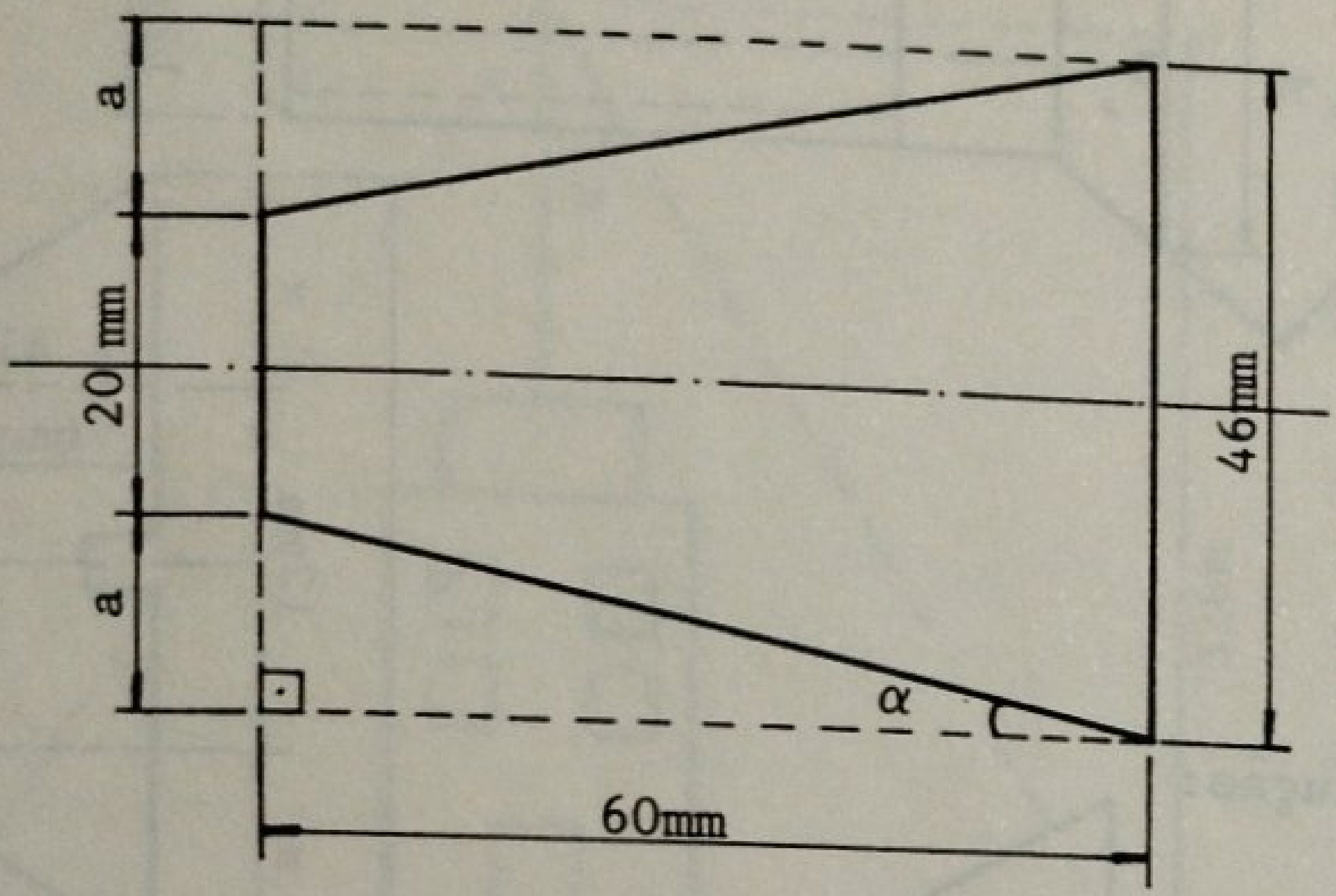
Utilizando tangente, temos:

$\tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan\theta = 0,75$, consultando a tabela, temos:

$$\boxed{\theta \cong 37^o.}$$

Resp. O ângulo de fase é aproximadamente de 37^o.

2. Para tornear uma peça de ferro, com a forma de tronco de cone (conforme a figura), cujos diâmetros tem 20mm e 46mm, e 60mm de comprimento, necessitamos do ângulo α.



Resolução:

a) $a = \frac{46-20}{2} \Rightarrow$

$a = 13\text{mm}$

b) $\tan\alpha = \frac{13}{60}$

$\tan\alpha = 0{,}23 \Rightarrow$

$\alpha \simeq 13^o$

Resp. O ângulo mede aproximadamente 13^o.

3. Na rosca whitworth conforme a figura, as faces formam entre si um ângulo de 55^o. A profundidade da rosca é $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo formado ao prolongar os lados formados pelas faces. Achar a profundidade de um filete de 25,4mm de passo.

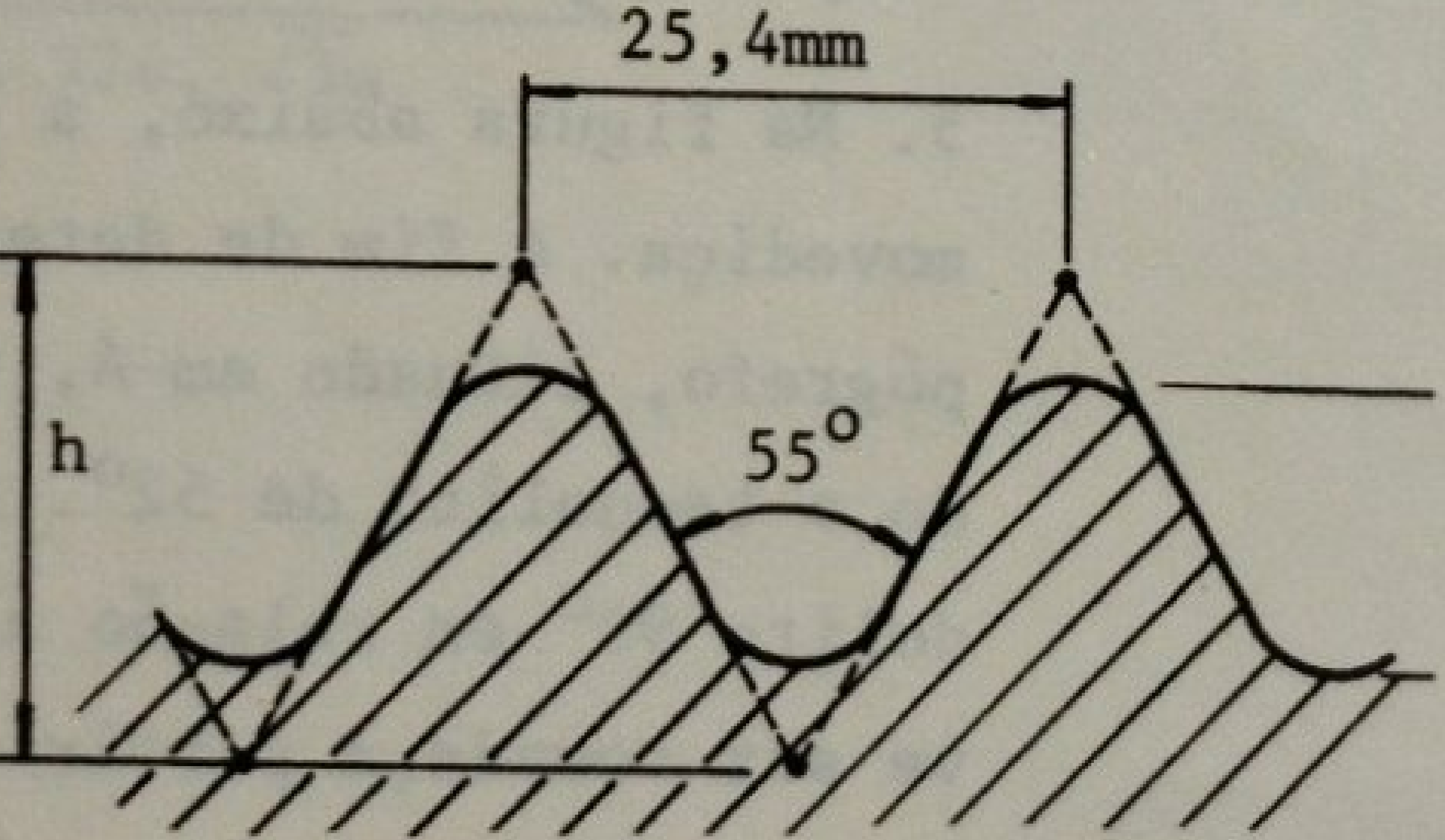
Resolução:

a) Cálculo de h :

$$\tan 27^o30' = \frac{12{,}7}{h}$$

$$h = \frac{12{,}7}{0{,}52}$$

$$\boxed{h = 24{,}42\text{mm}}$$

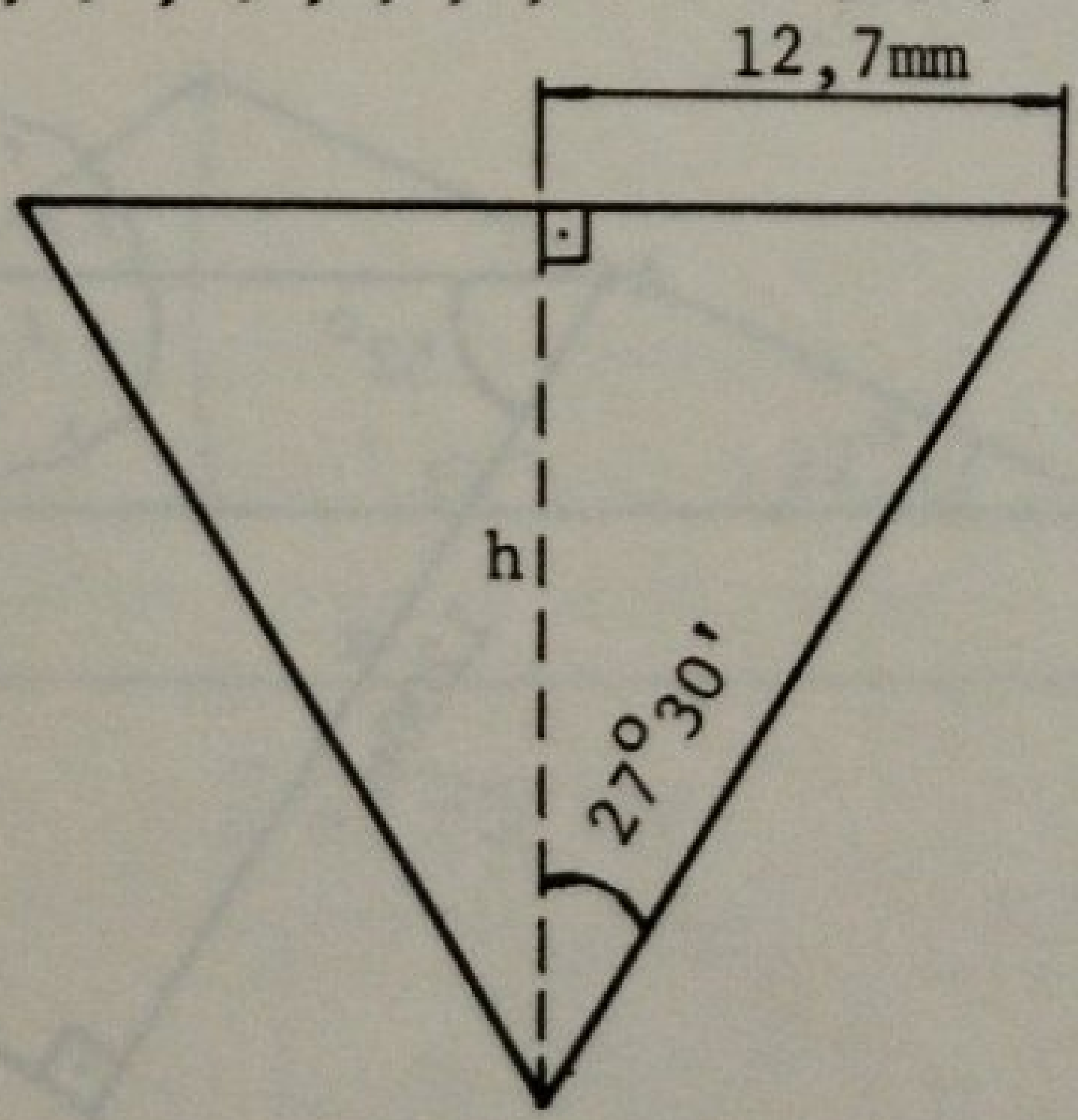


b) Cálculo de h :

Como $h_1 = \frac{2}{3}\,h$,

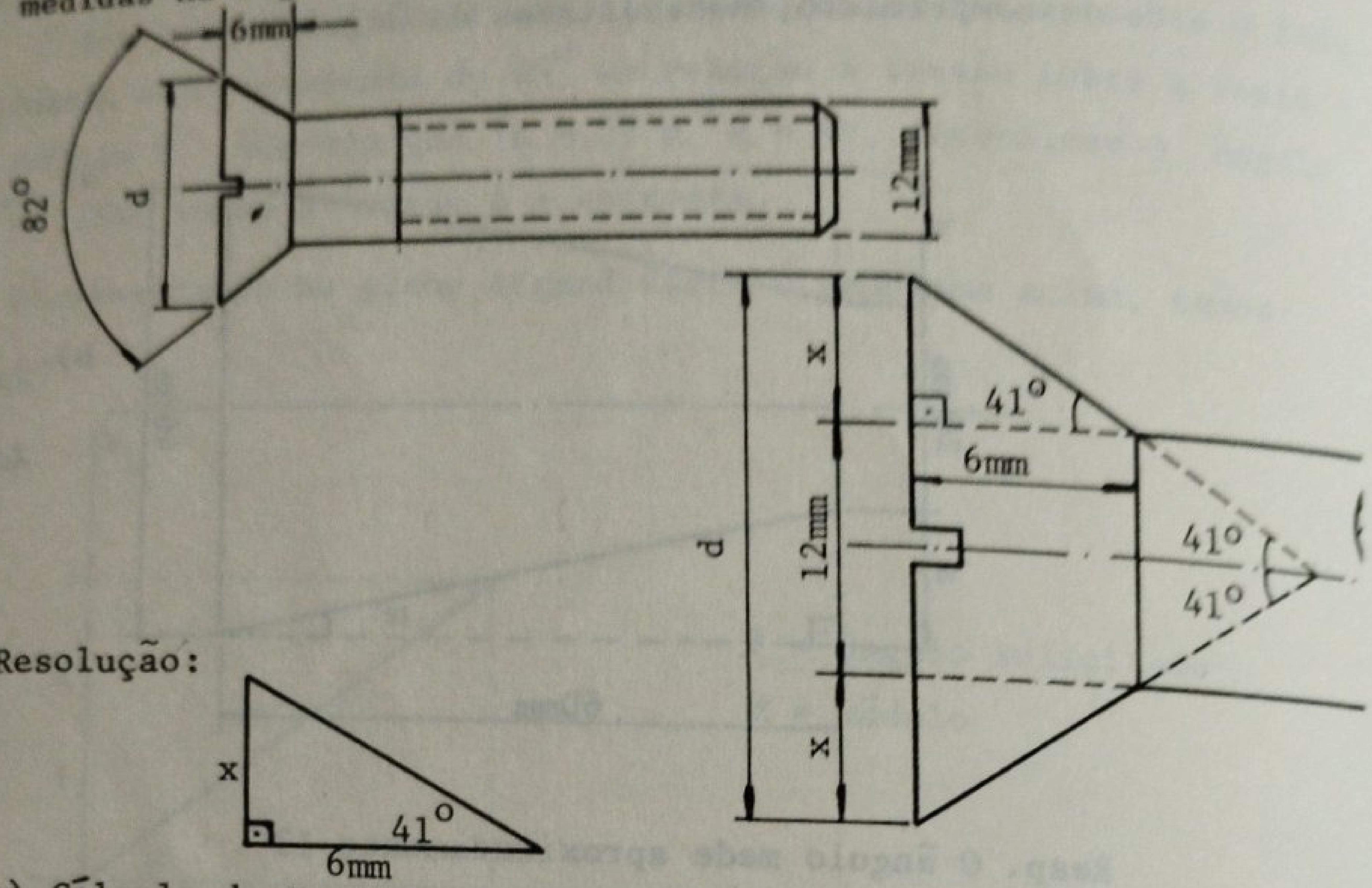
temos: $h_1 = \frac{2}{3} \cdot 24{,}42$

$$\boxed{h_1 = 16{,}28\text{mm}}$$



Resp. A profundidade do filete é de 16,28mm

4. Determinar o diâmetro d da cabeça do parafuso, conforme as medidas na figura.



Resolução:

a) Cálculo de x :

$\tan 41^{o} = \frac{x}{6}$

$x = 6 \times 0{,}87$

$\boxed{x = 5{,}22\text{mm}}$

b) Cálculo de d :

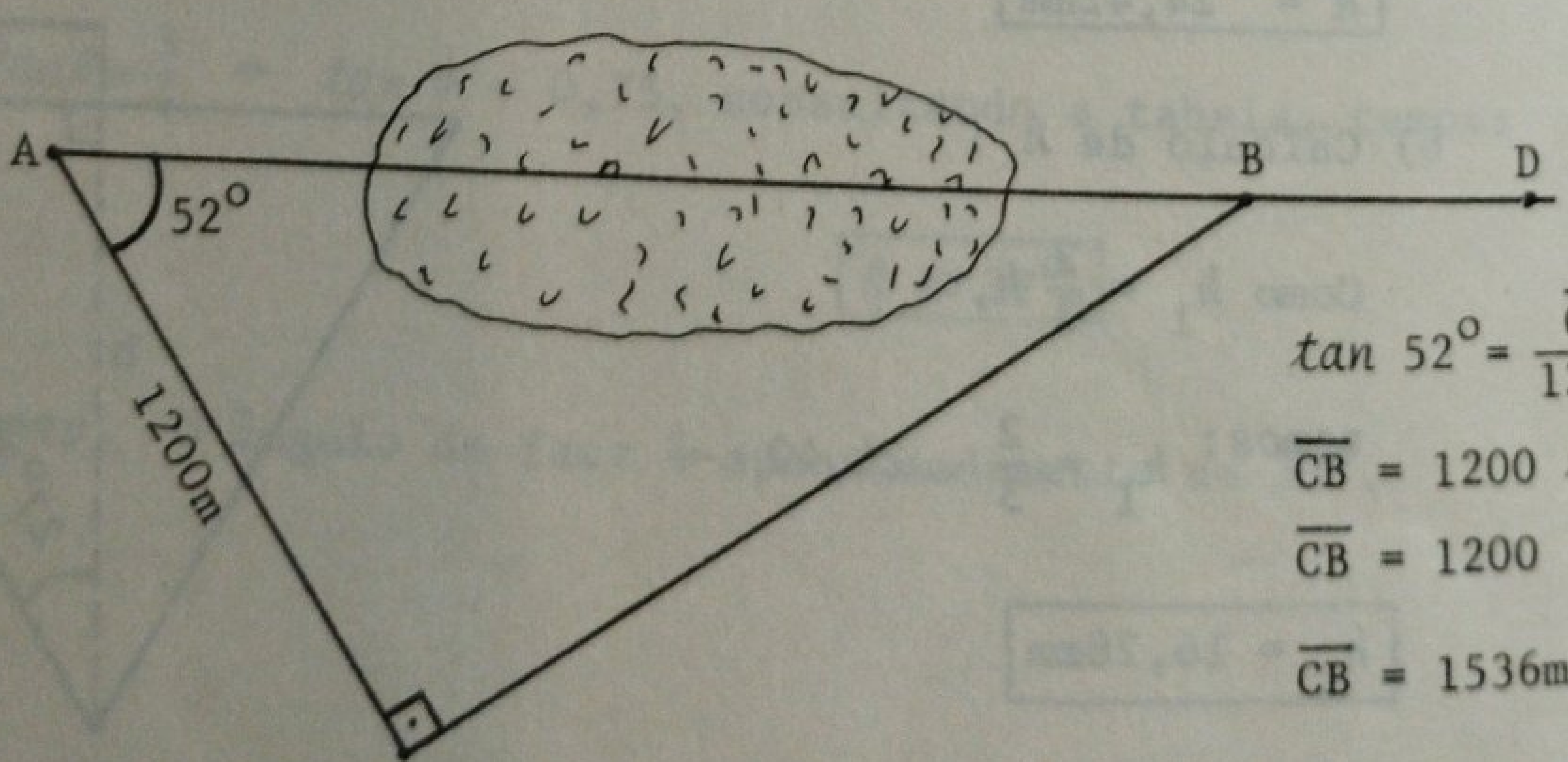
Observamos que $d = 12 + 2x$.

Logo $d = 12 + 2 \times 5{,}22$

$\boxed{d = 22{,}44\text{mm}}$

Resp. O diâmetro da cabeça do parafuso tem 22,44mm

5. Na figura abaixo, a linha AD atravessa uma região de areia movediça. A fim de determinar certo ponto B nessa linha, um topógrafo, situado em A, visou um ponto C, situado a 1200m, girando o teodolito de 52°. Mudando-se para o ponto C, girou o teodolito 90° em relação a AC, visando B. Qual a distância que deve ser tomada, a partir de C, para determinar a posição exata de B.



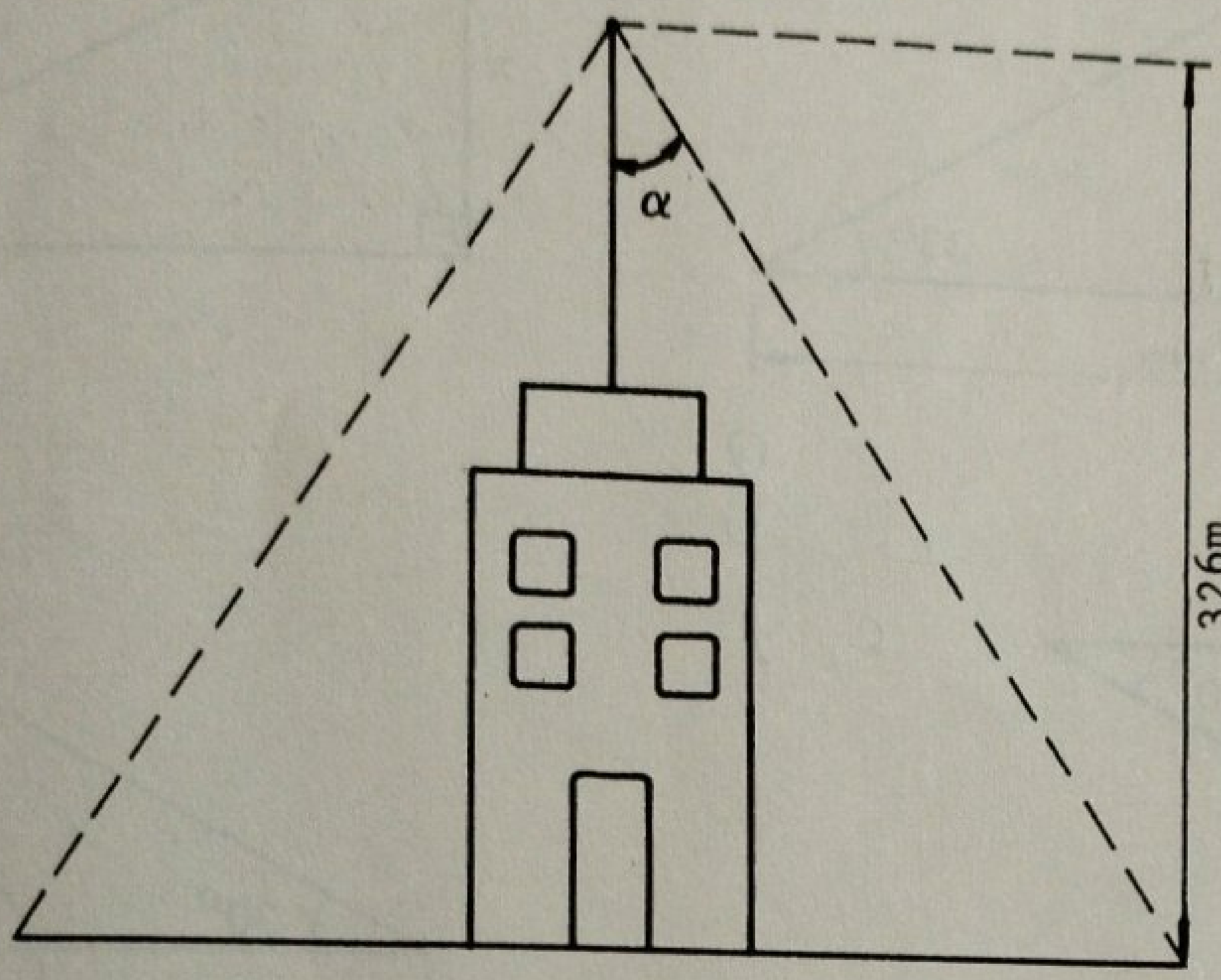
$\tan 52^{o} = \frac{\overline{CB}}{1200}$

$\overline{CB} = 1200 \tan 52^{o}$

$\overline{CB} = 1200 \ . \ 1{,}28$

$\overline{CB} = 1536\text{m}$

6. O pára-raio tipo Franklin forma um cone de proteção, cujo raio da base é sempre $R = h\sqrt{3}$. Determine o ângulo α formado nc vértice do cone, conforme figura.



$R = h\sqrt{3}$

$R = 326\sqrt{3}$

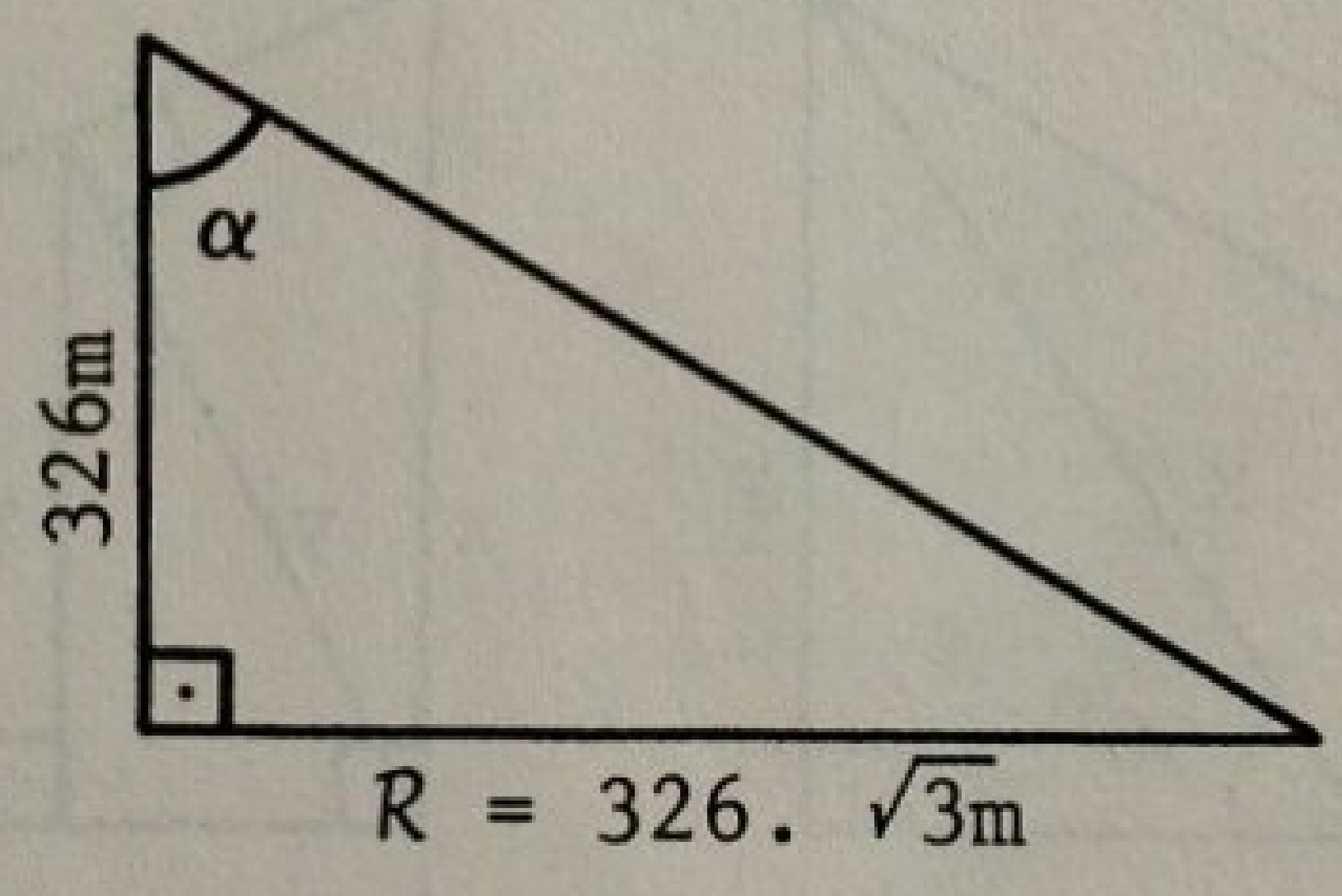
$\tan \alpha = \frac{R}{h}$

$\tan \alpha = \frac{326\sqrt{3}}{326}$

$\tan \alpha = \sqrt{3}$

$\tan \alpha = 1{,}73$

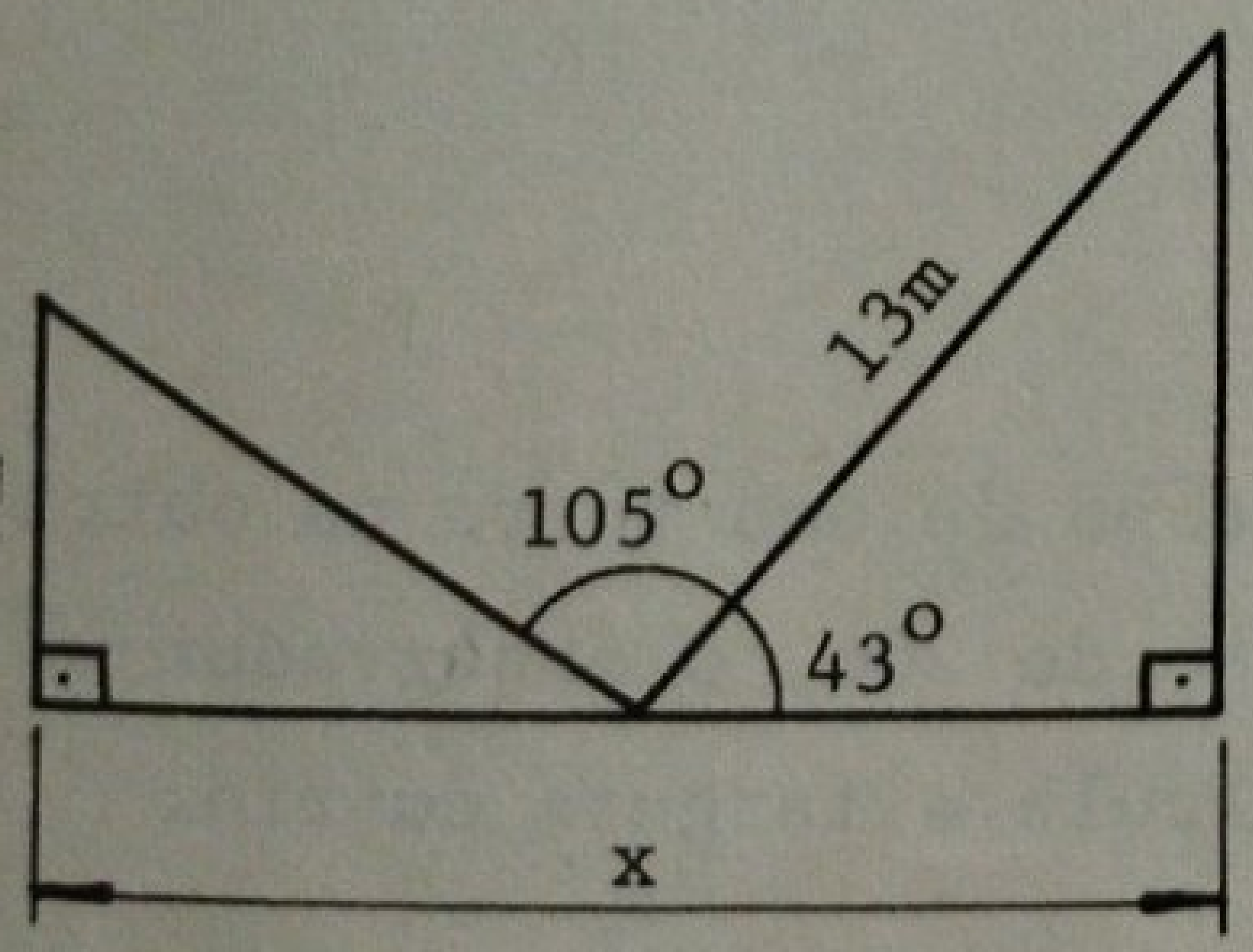
$\alpha = 60^{\circ}$



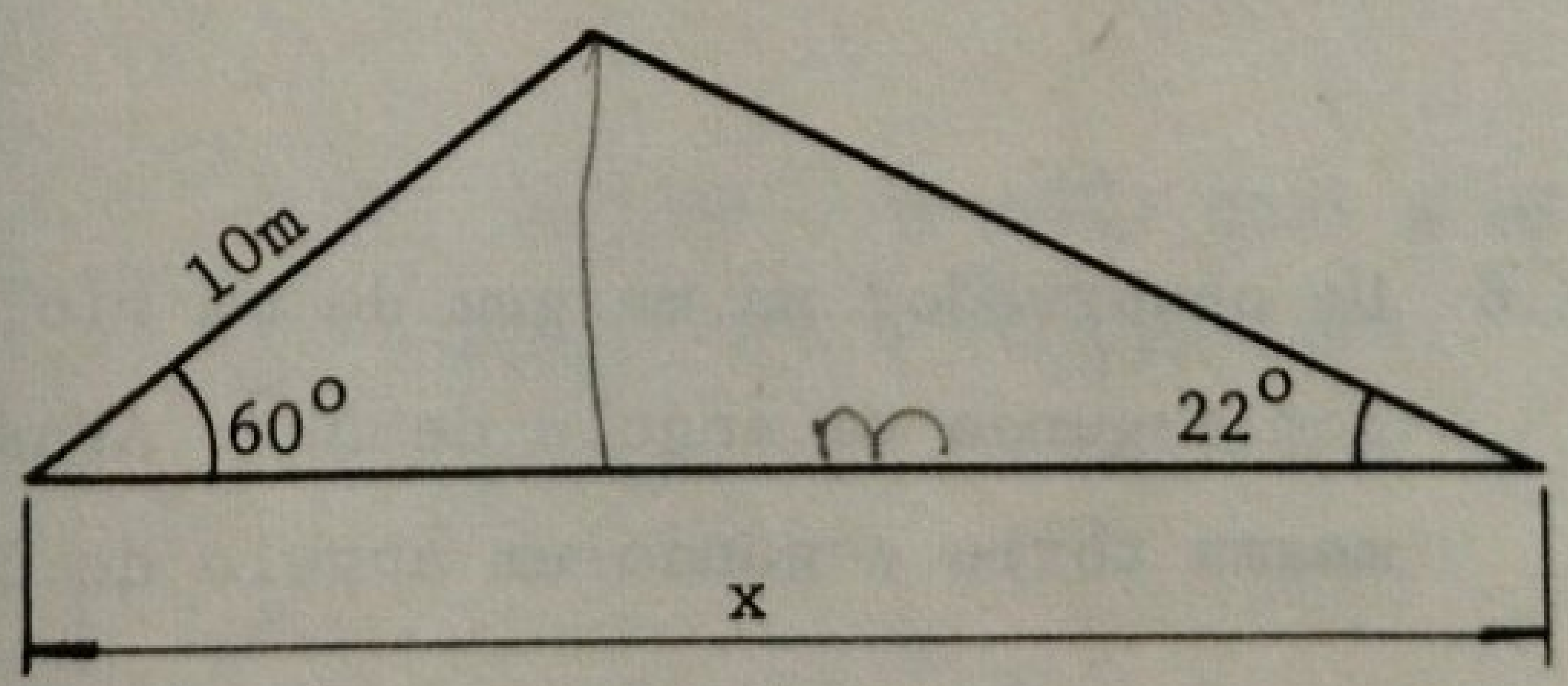
EXERCÍCIOS:

E.4 Determinar os elementos incógnitos:

a)



b)



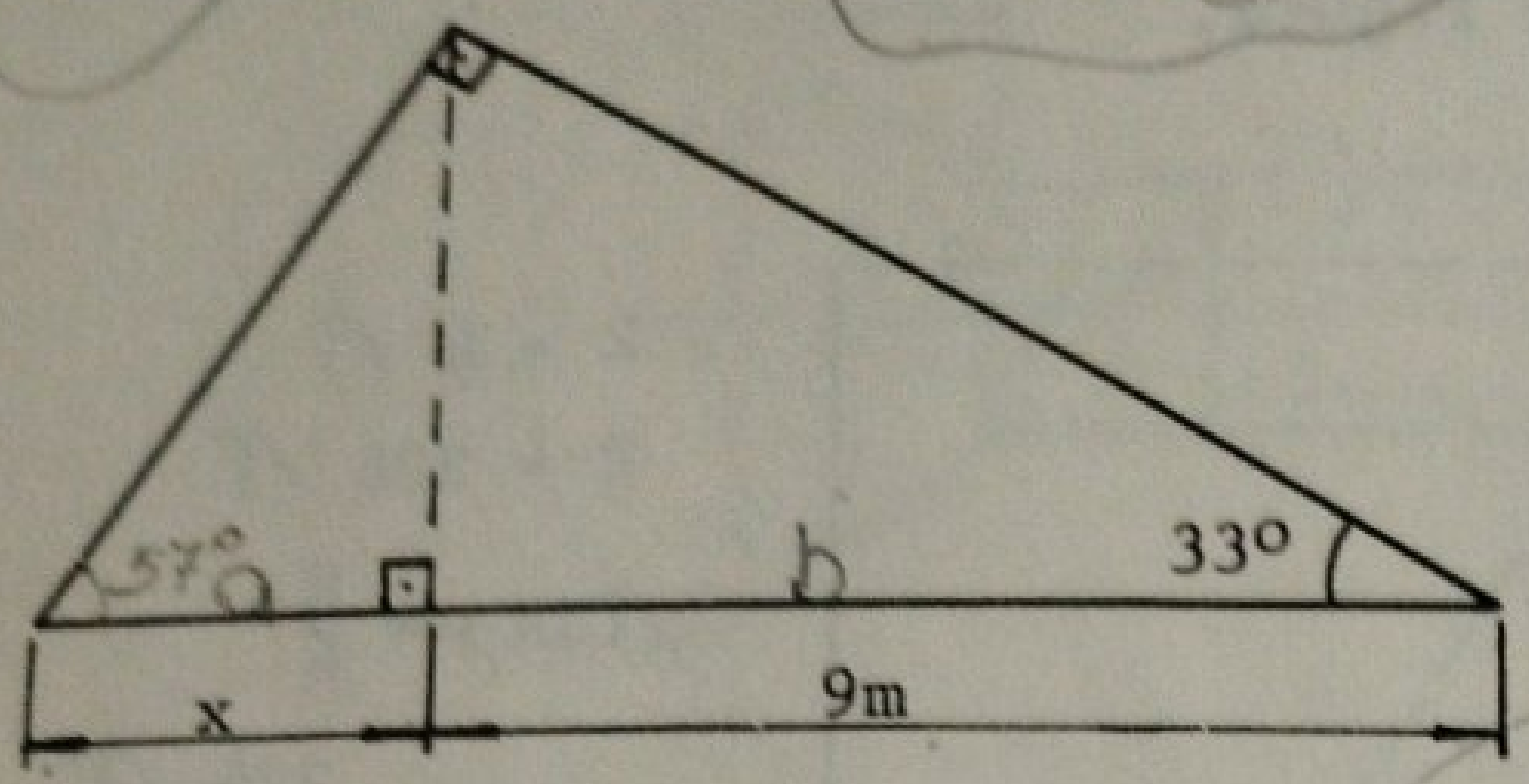
26,75 m

$sen = \frac{c.o}{h}$

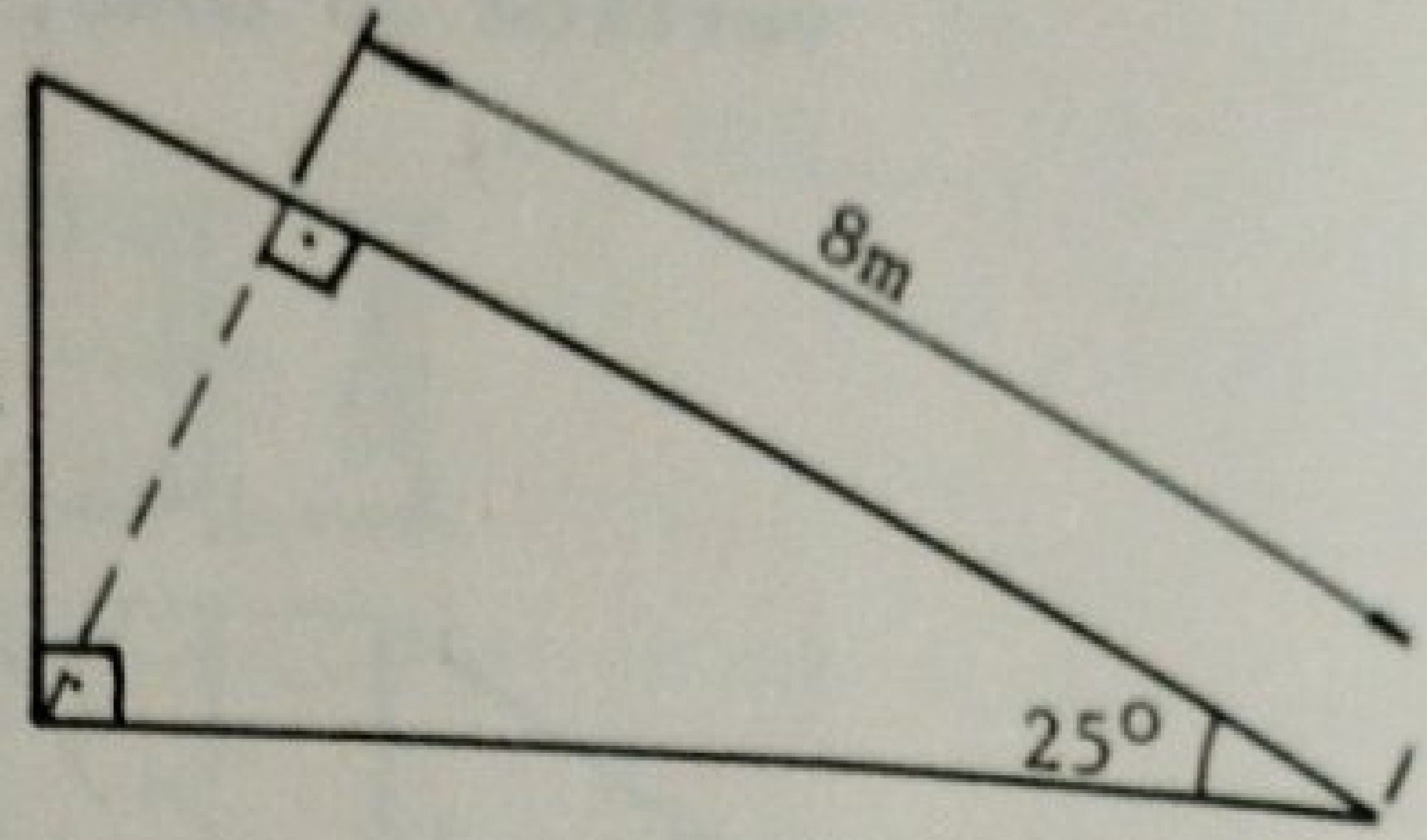
$cos = \frac{c.a}{h}$

$tan = \frac{c.o}{c.a}$

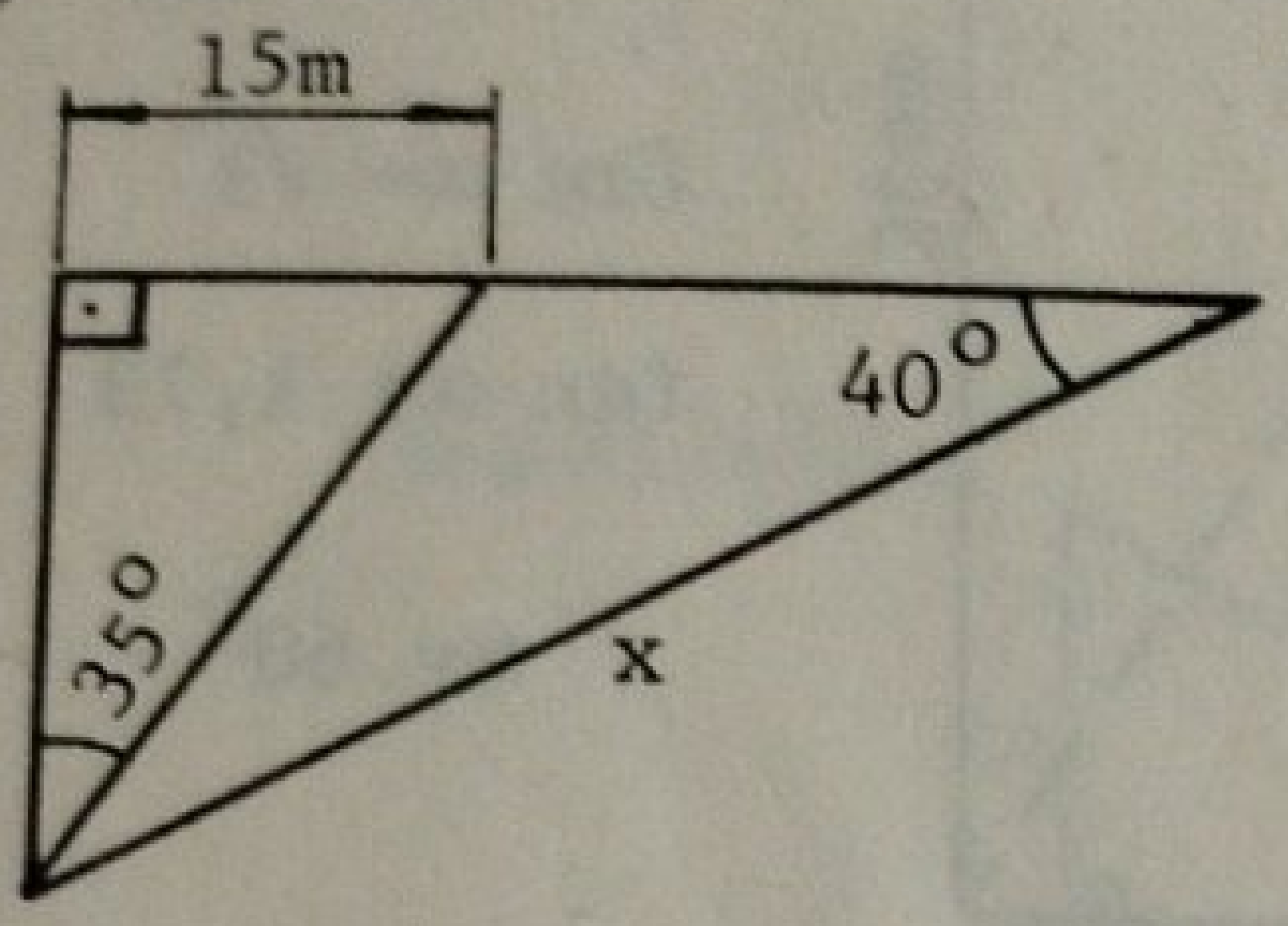
c)



d)



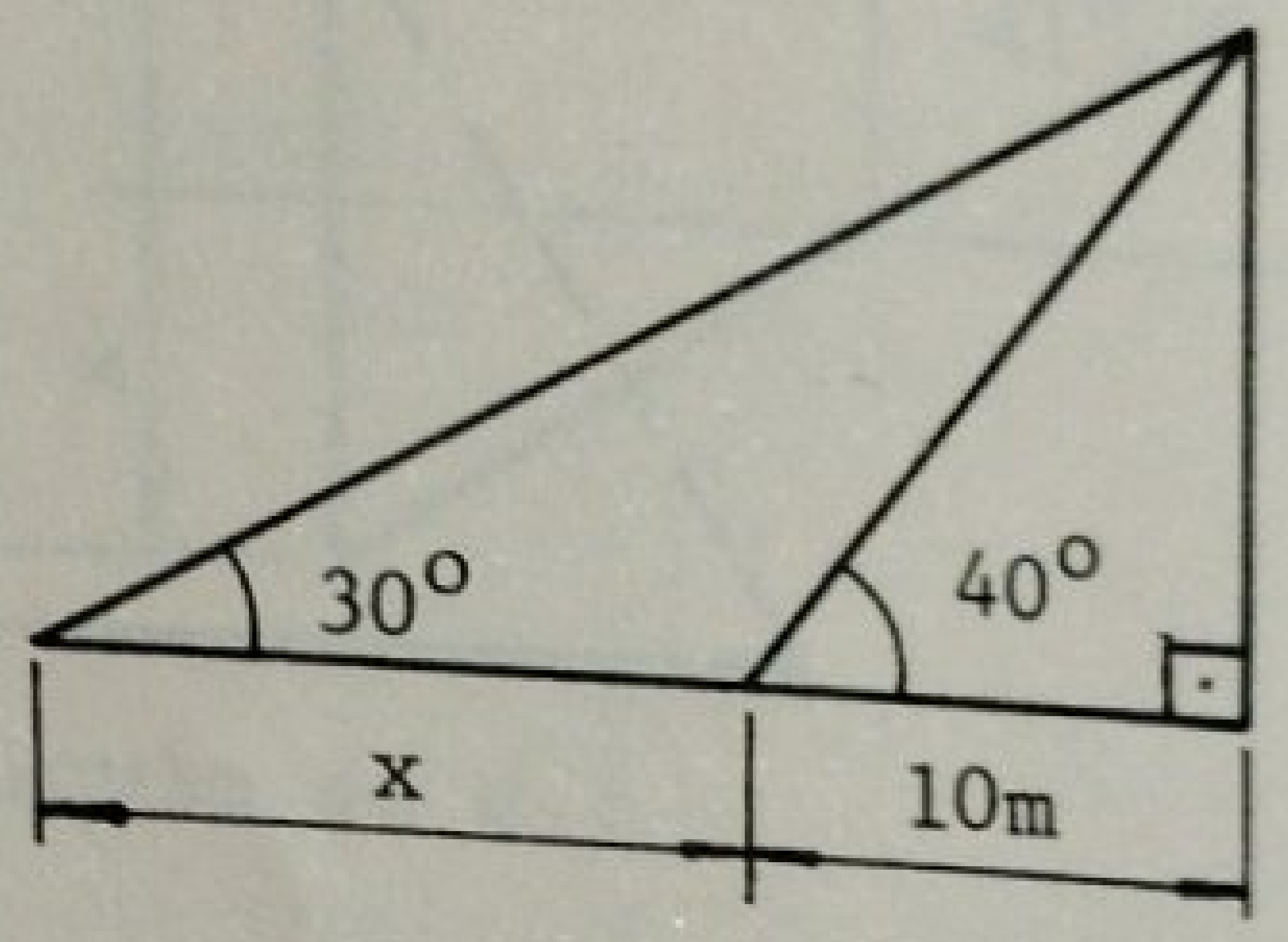
e)



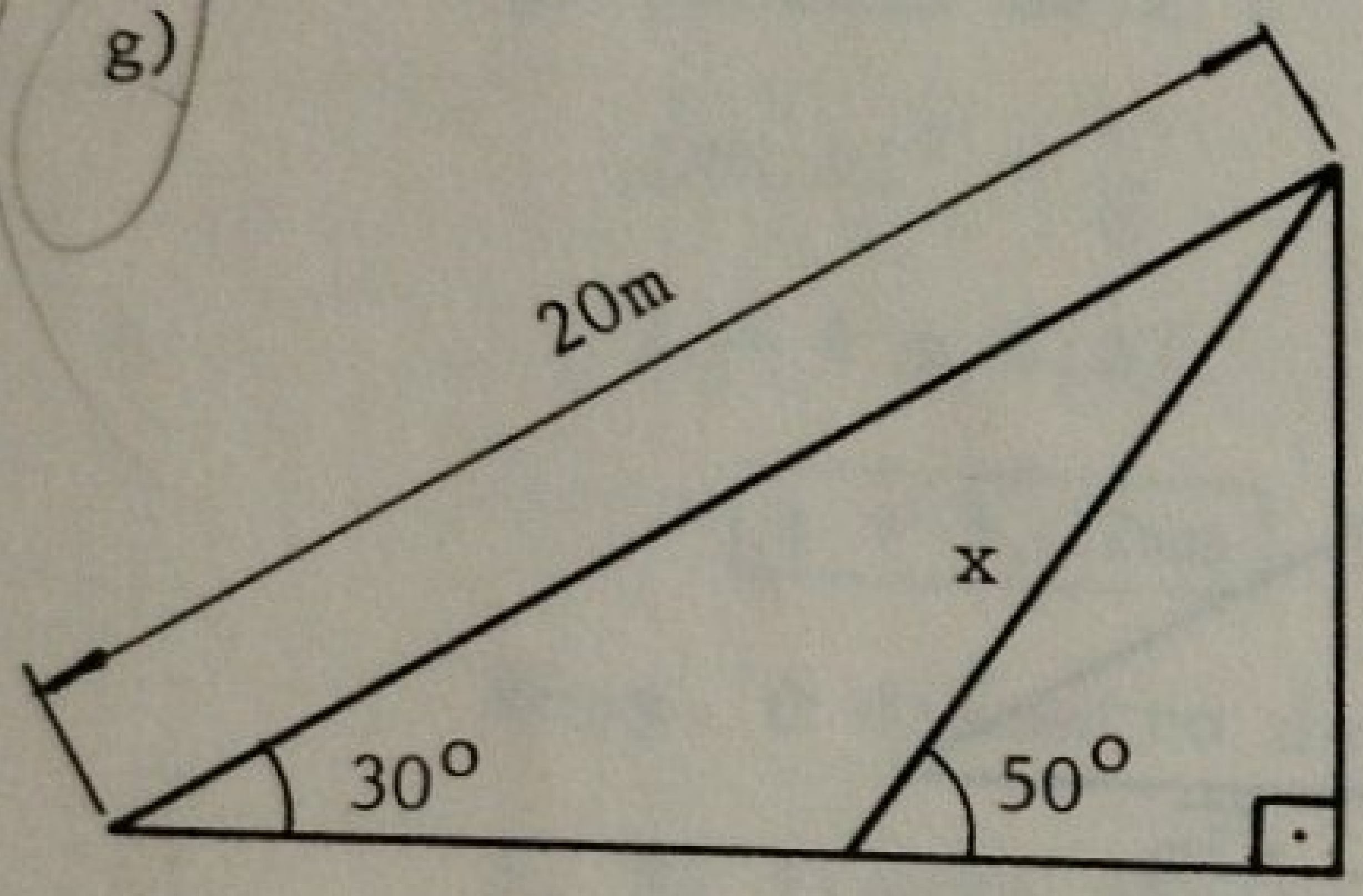
f)

$x = a+b$

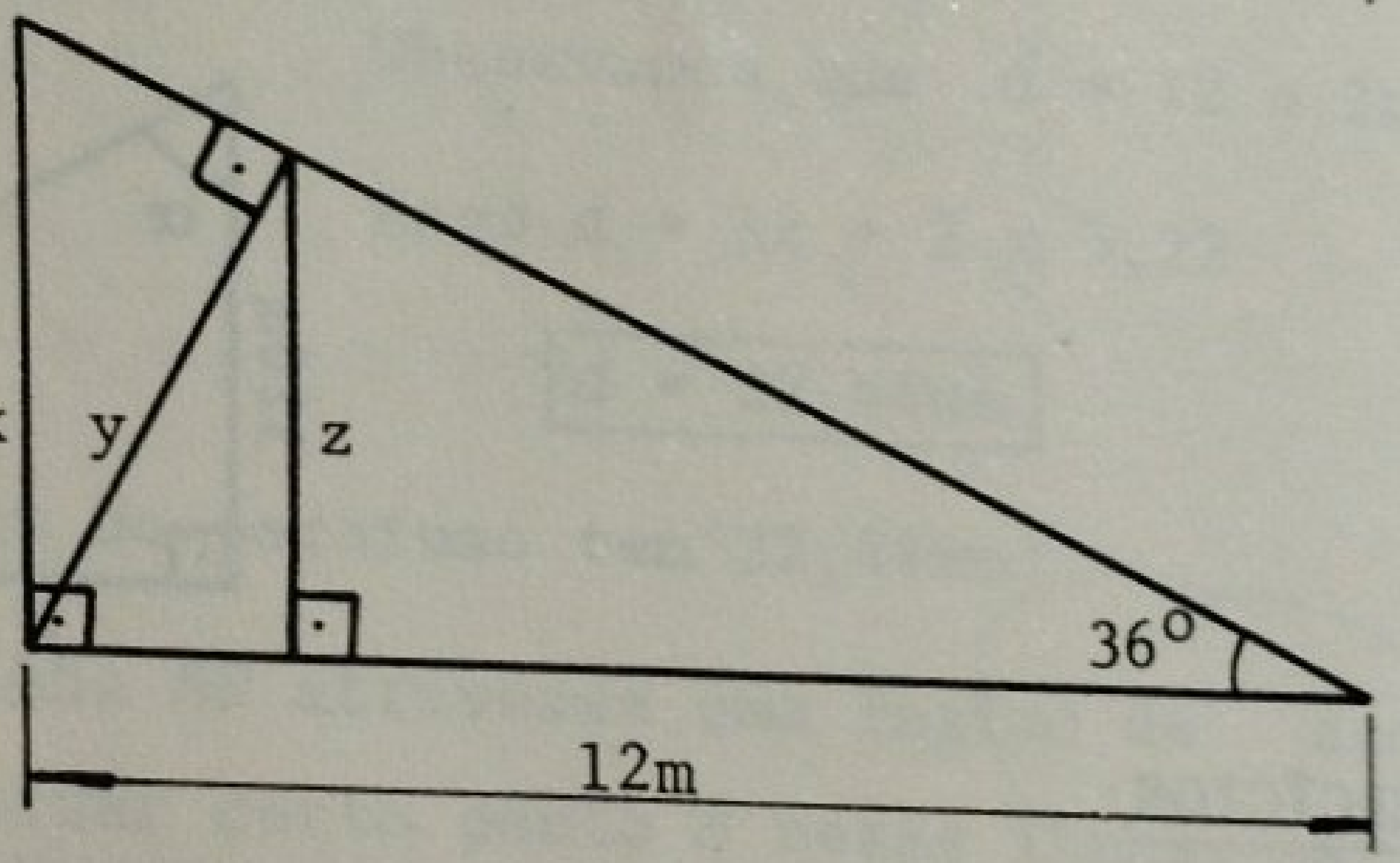
$x = 9$



g)

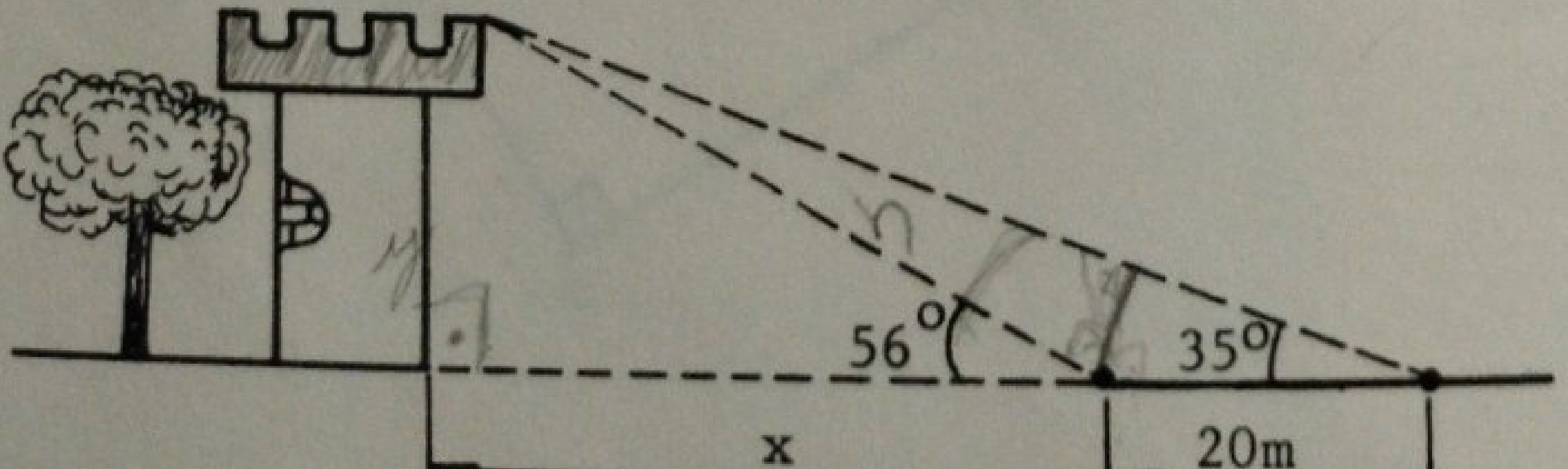


h)



E.5 Uma árvore, partida pelo vento, forma um triângulo retângulo com o solo. Se a parte quebrada faz um ângulo de 50° com o solo e se o tôpo da árvore está agora distanciado de 20m do solo, qual era a altura da árvore?

E.6 Um observador na margem de um rio, vê o tôpo de uma tôrre na outra margem segundo um ângulo de 56°. Afastando-se de 20m, o observador vê a mesma tôrre segundo um ângulo de 35°. Calcule a largura do rio.



E.7 Calcule a base e a altura de um triângulo isósceles cujo ângulo do vértice superior mede 68° e os lados congruentes medem 40m.

E.8 Calcule a área de um triângulo equilátero, cuja altura mede 12m.

E.9 Um mastro de 6 m está em cima de uma colina. De um ponto A avistamos seus pés sob um ângulo de 60° e sua ponta sob 75°. Calcule a altura d colina.

E.10 Determine a altura de um painel de propaganda em cima de um edifício sabendo-se que o observador está situado a 100 m do edifício e pode v sualizar a base inferior e superior, segundo um ângulo de 30° e 45° respectivamente.

$\tan 30° = \frac{x}{100}$

$0{,}58 = \frac{x}{100}$

$\boxed{x = 58m}$

$\tan 45° = \frac{y}{100}$

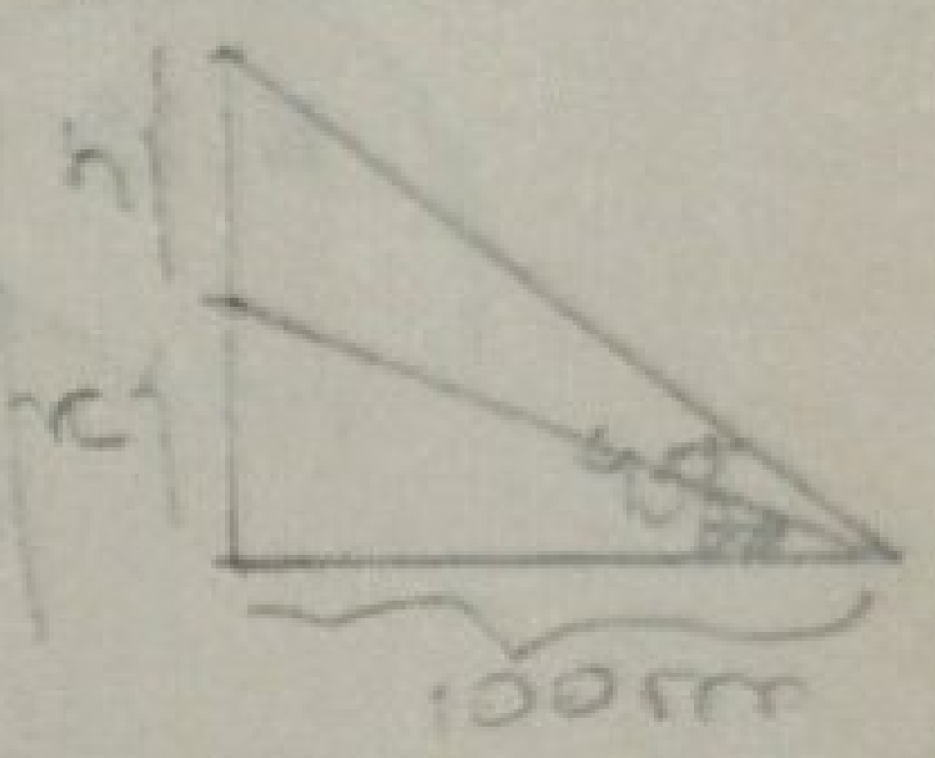
$1 = \frac{y}{100}$

$\boxed{y = 100m}$

$h = y - x$

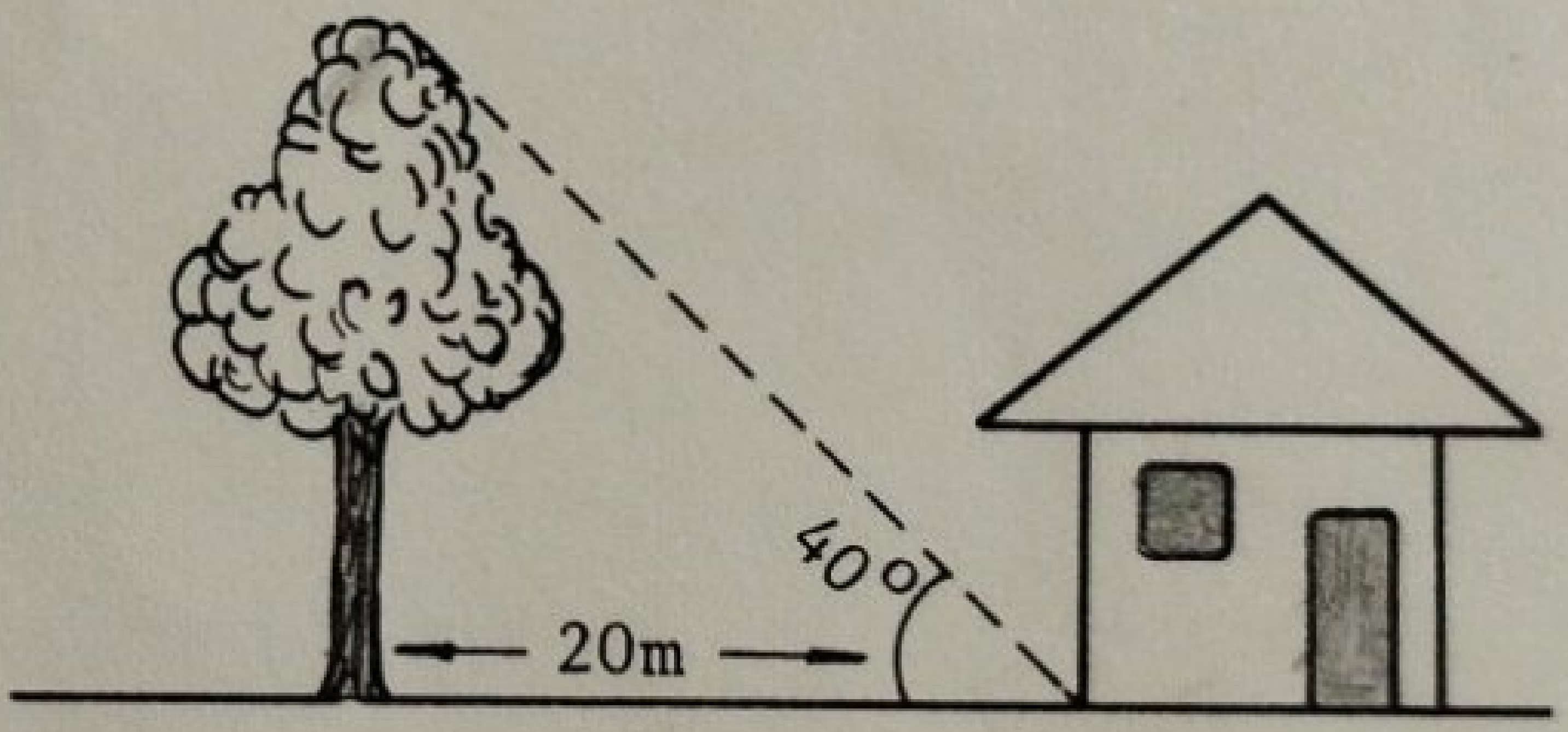
$h = 100 - 58$

$\boxed{h = 42m}$



E.11 Conhecendo-se os dados abaixo pergunta-se:

Pode-se tombar a árvore na direção da casa sem que a mesma a destrua?



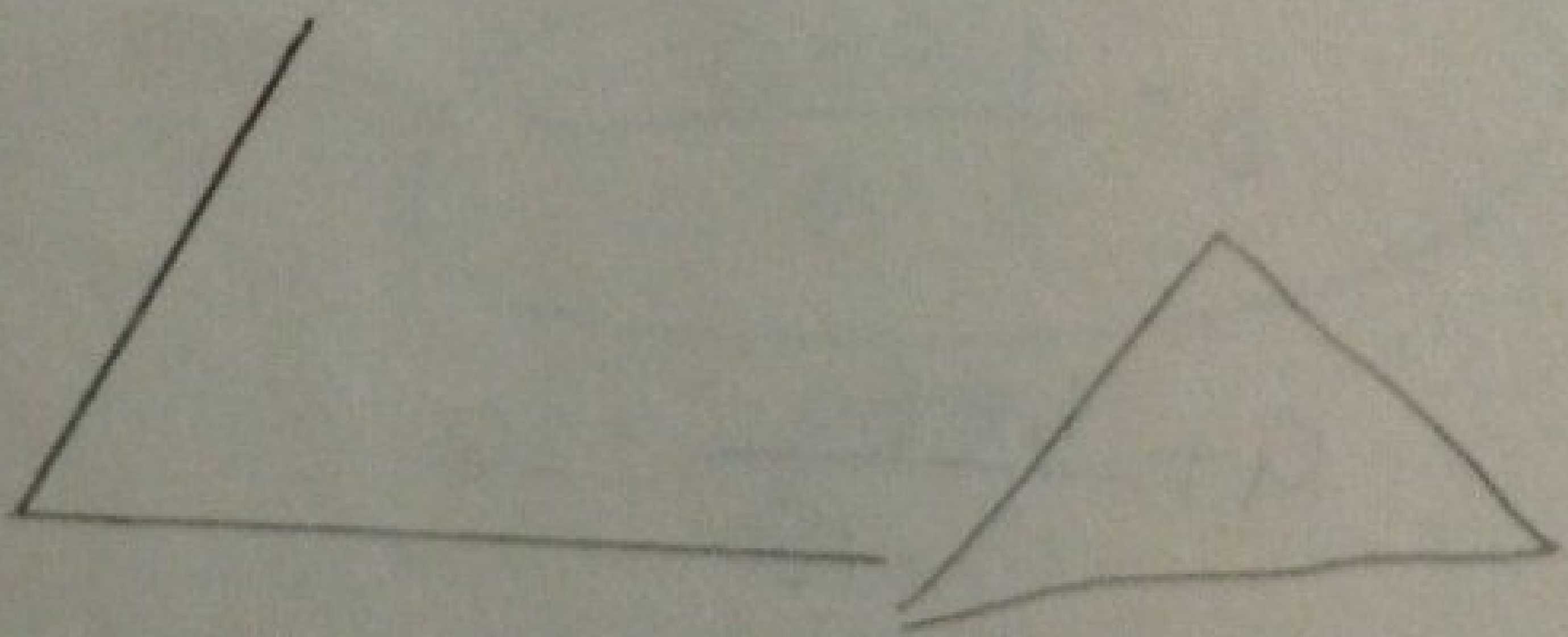
E.12 Decompor uma força de 12 *N* em duas outras ortogonais tais que:

a) Uma das componentes é de 10 *N*.

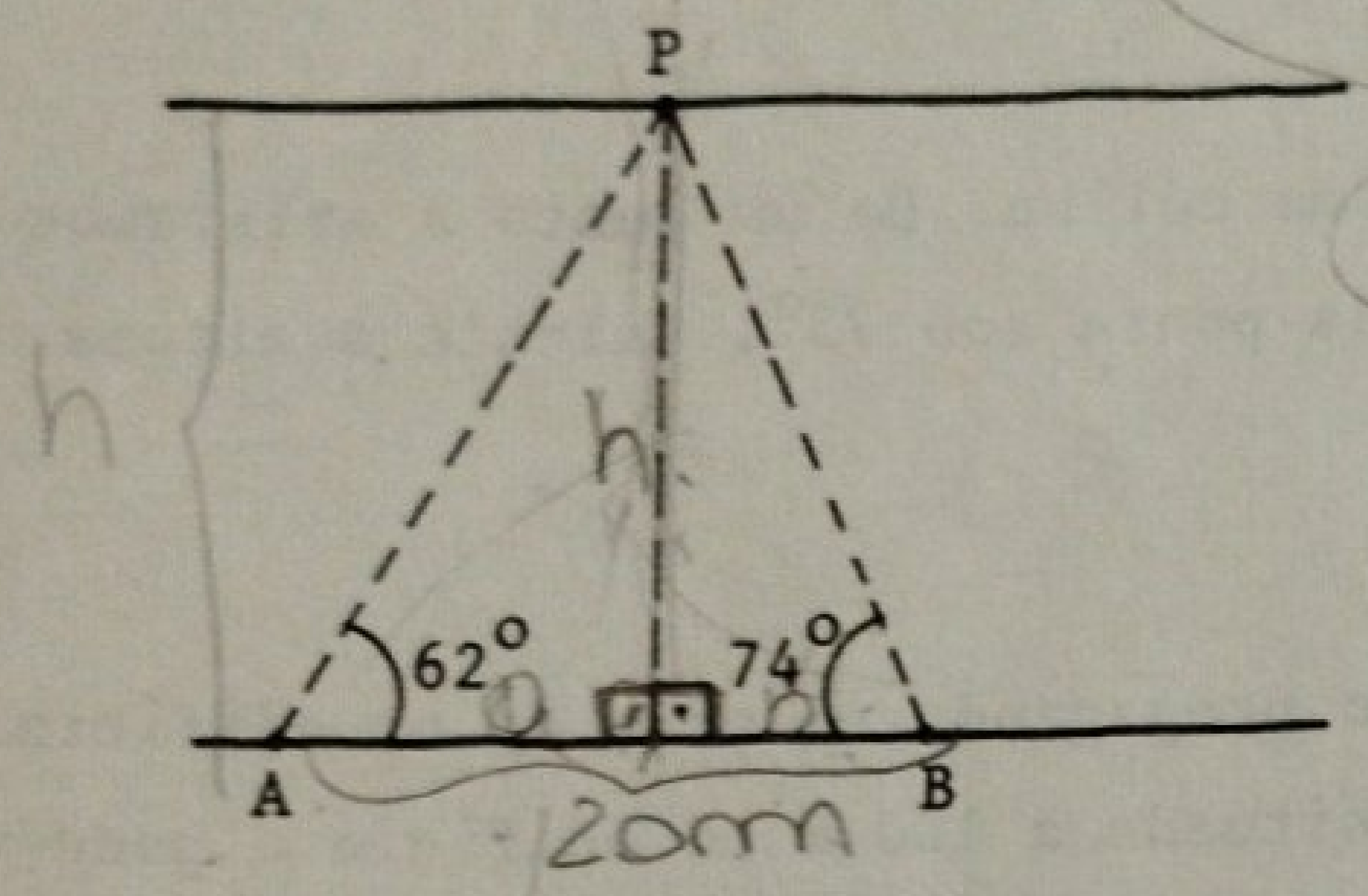
b) A soma de suas intensidades é de 15 *N*.

c) As duas componentes têm igual intensidade.

E.13 Um carpinteiro diz que o " caimento " do telhado é de 40%. Qual a medida aproximada do ângulo formado pelo telhado com a horizontal?



E.14 Dois observadores situados na mesma margem de um rio, e distantes de 20 m, avistam uma pedra na outra margem, segundo ângulos de 74° e 62°, conforme figura. Determine a largura do rio.



$\tan 62° = \frac{h}{a}$

$\tan 74 = \frac{h}{b}$

$a + b = 20$

E.15 Um engenheiro civil que constrói uma estrada diz que, em certo trecho, há uma " rampa " de 33%. Qual, então, a medida aproximada do ângulo que a estrada faz com a horizontal?

$1,88 = \frac{h}{a}$ $\quad a = \frac{h}{1,88}$ $\quad 3,49 = \frac{1,88a}{b}$

$3,49 = \frac{h}{b}$ $\quad b = \frac{h}{3,49}$

~~$h = 1,88$~~

$h = 1,88a$

~~$a = 20 -$~~

$a + 0,54a = 20$

$1,54a = 20$

$\boxed{a = 12,99}$

$$\begin{cases} a + b = 20 \\ 3,49 = \frac{1,88a}{b} \end{cases}$$

$b = \frac{1,88a}{3,49}$

$a + \frac{1,88a}{3,49} = 20$

~~$\frac{1,88a}{3,49} = 20$~~

“Objetivo 02” e

" " 03"

UNIDADE 2

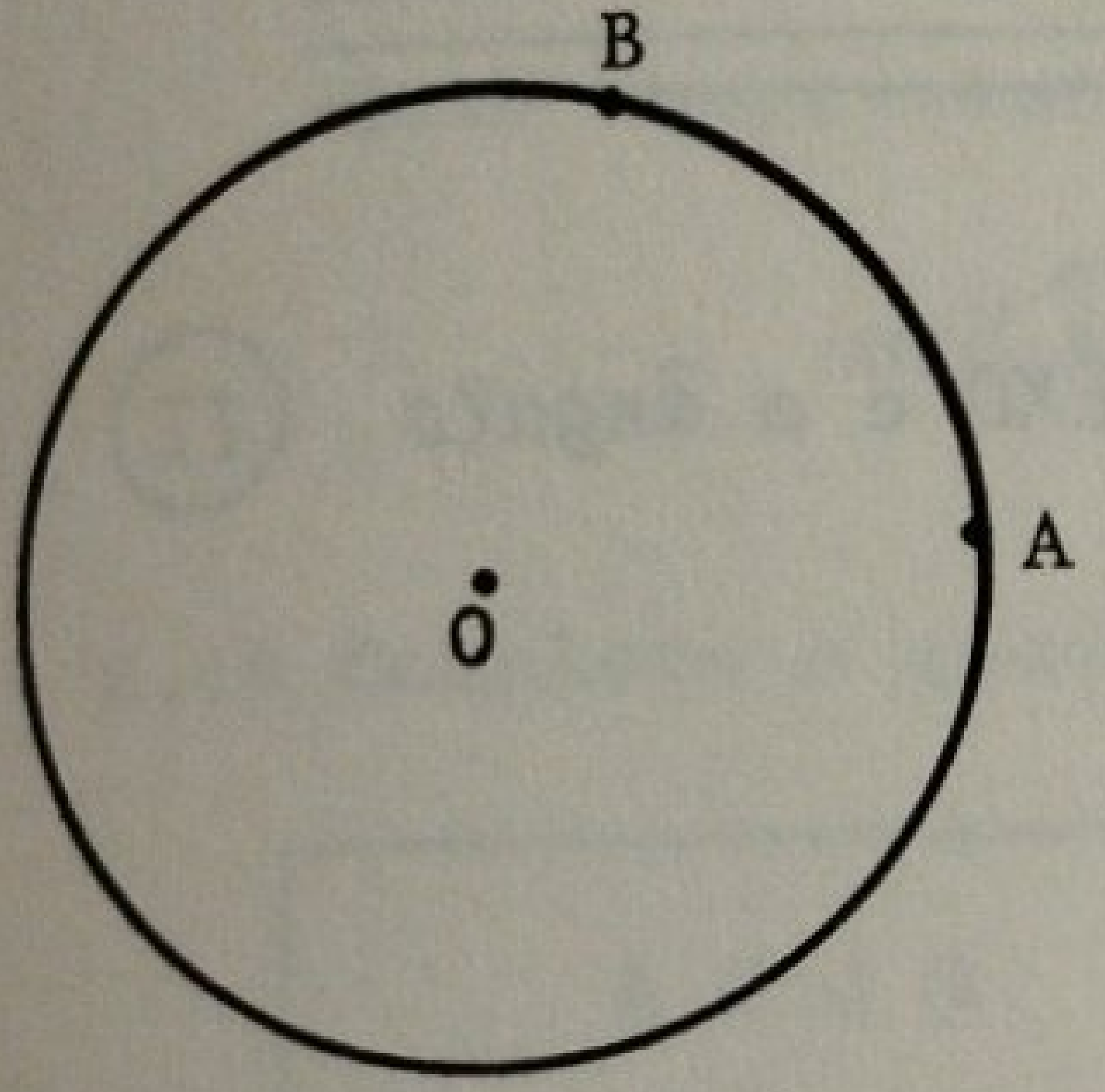
ARCOS E ÂNGULOS

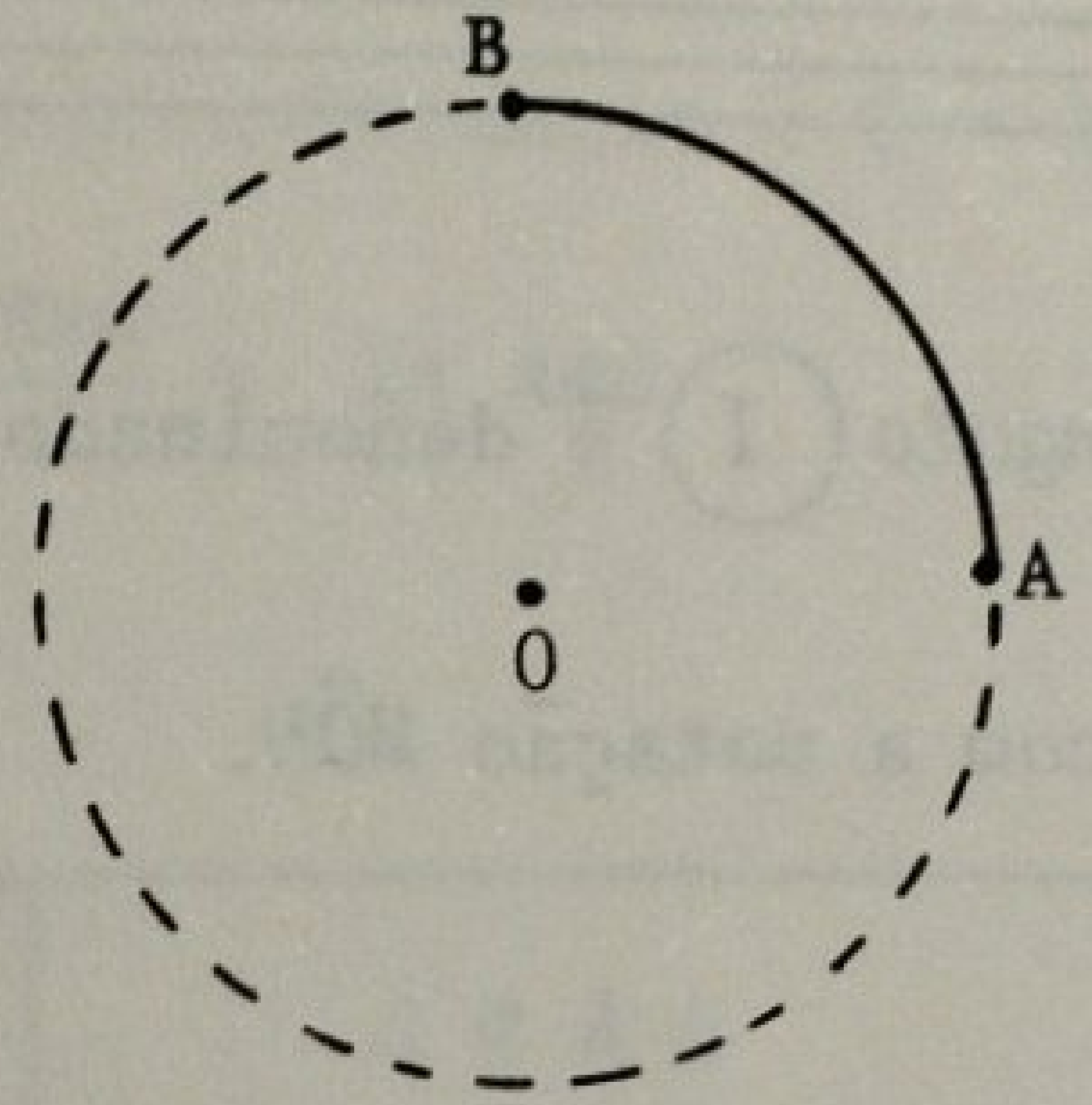
2. ARCOS E ÂNGULOS

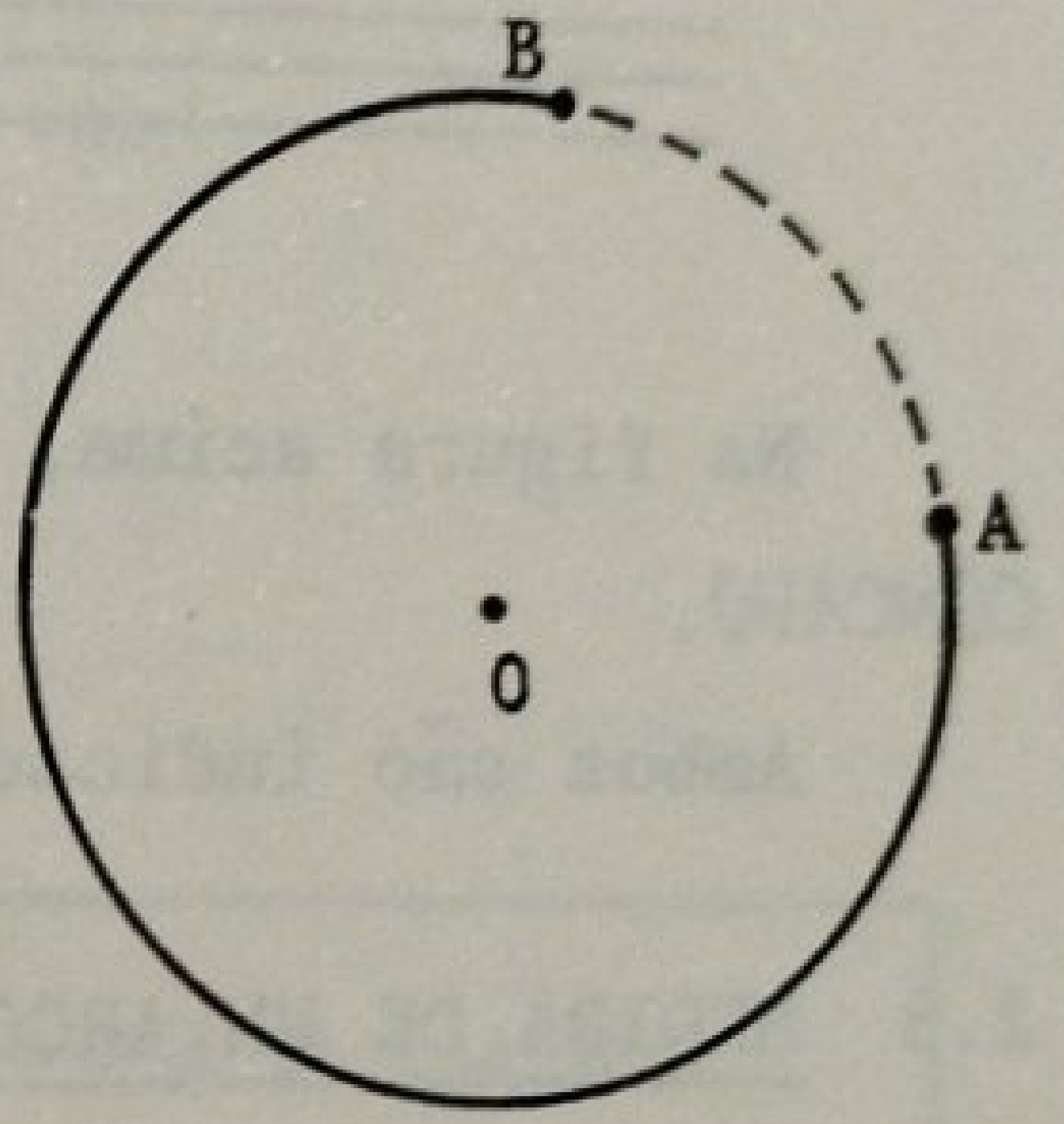
2.1 ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

Se dois pontos A e B são tomados sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes, denominadas ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA ou, simplesmente, ARCOS.

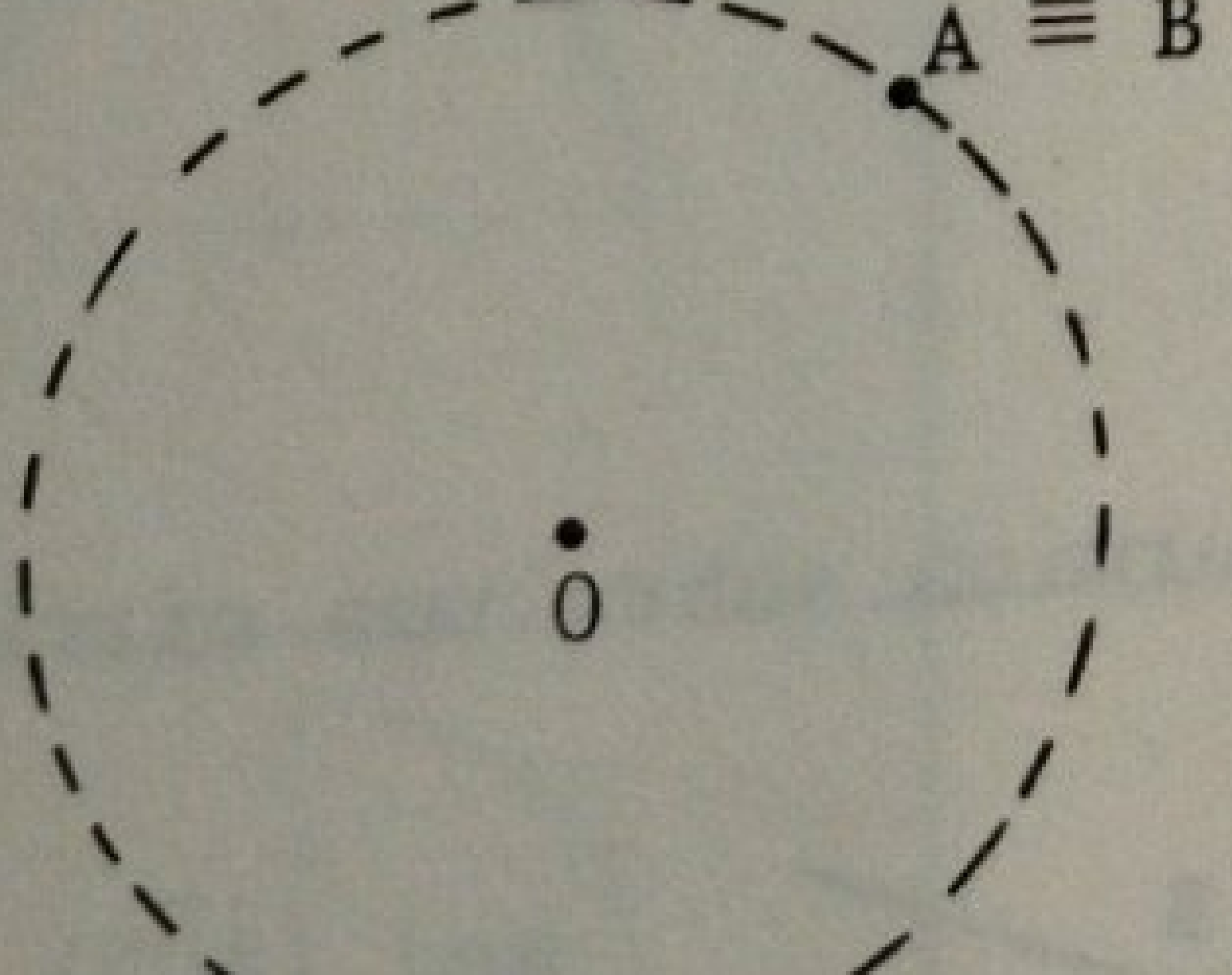
A e B são as extremidades desses *arcos*.



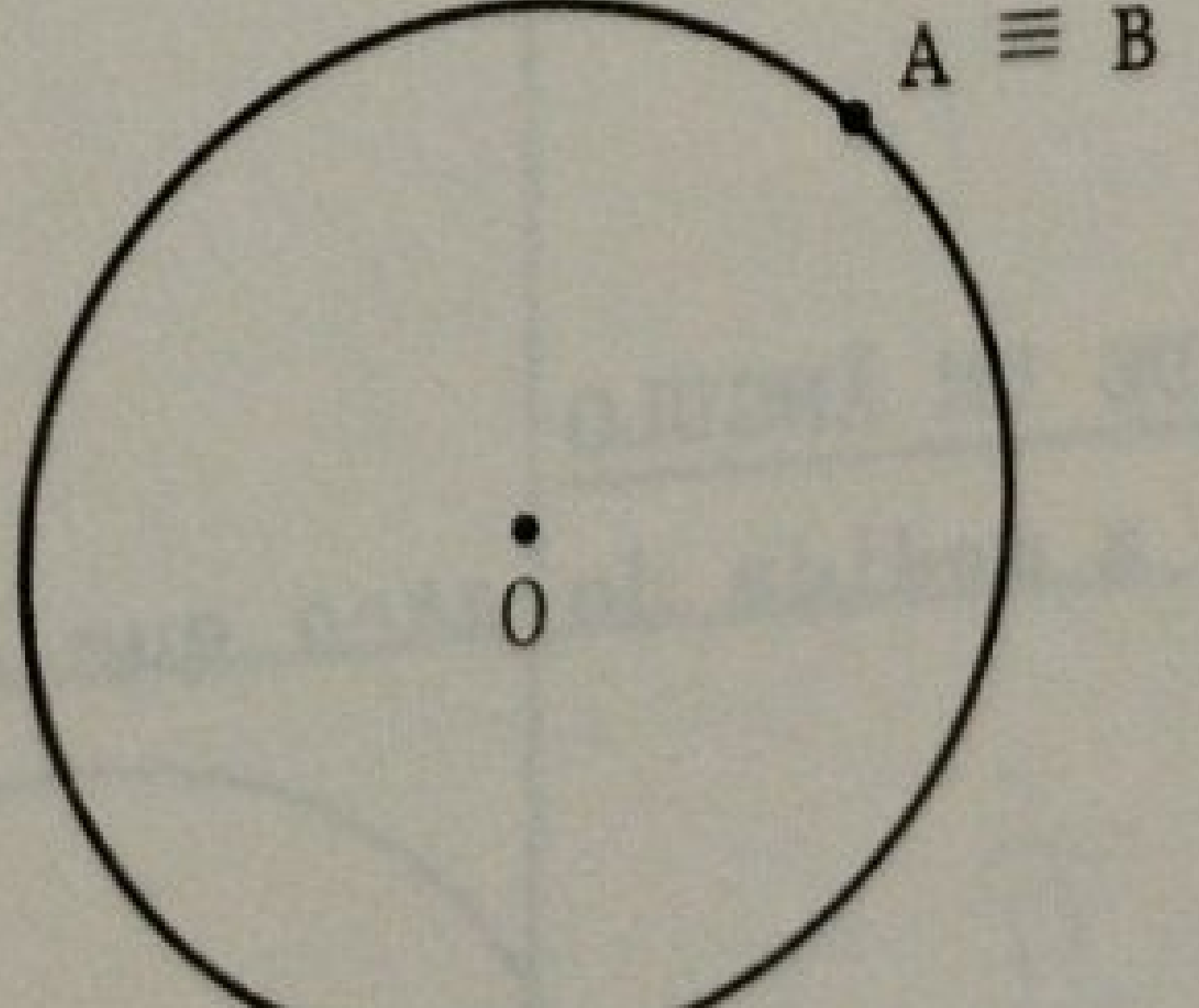




Se A e B coincidem, um dos *arcos* fica reduzido a um ponto; o outro é a própria circunferência. São chamados, respectivamente, ARCO NULO e ARCO DE UMA VOLTA.



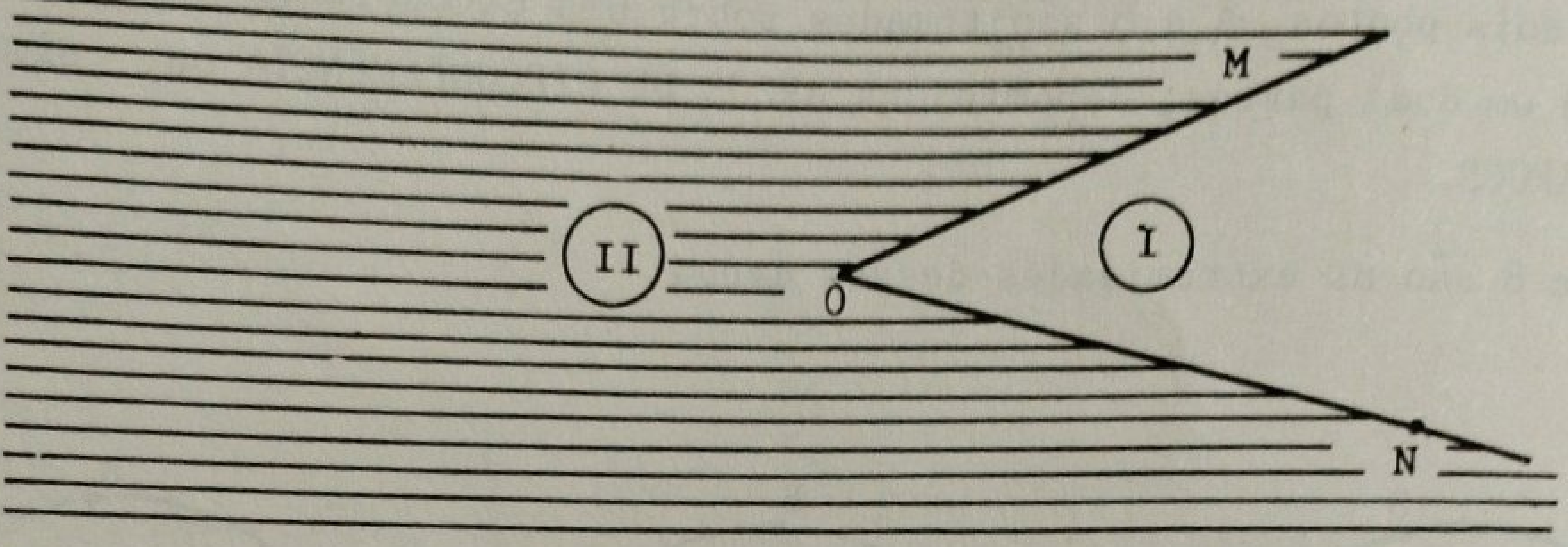
ARCO NULO



ARCO DE UMA VOLTA

2.2 ÂNGULOS

As semi-retas OM e ON, de origem comum O, dividem o plano em duas regiões (ambas contendo as semi-retas). Cada uma dessas regiões é denominada *ÂNGULO*.

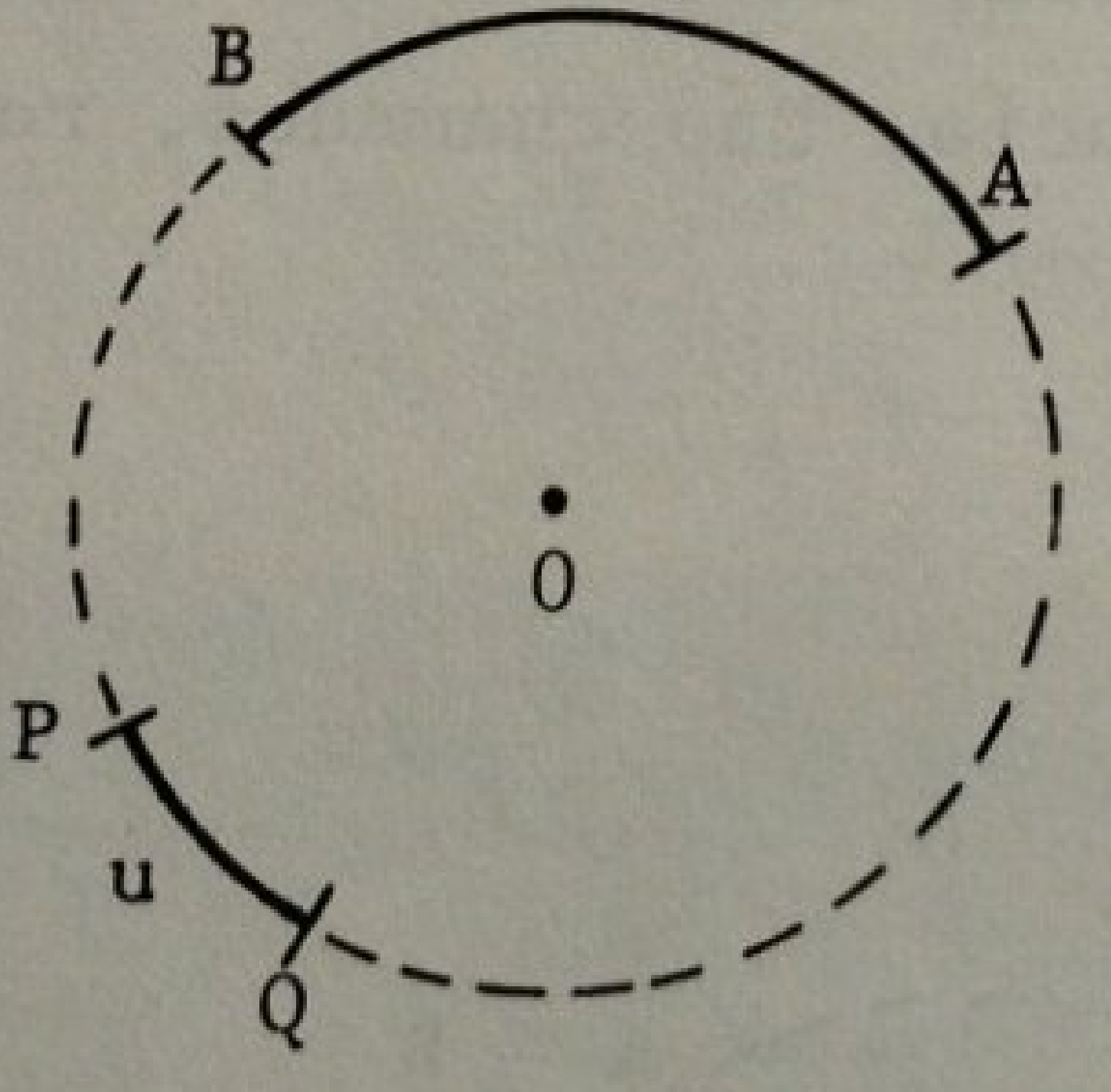


Na figura acima, o *ângulo* (I) é denominado *CONVEXO* e o *ângulo* (II), *CÔNCAVO*.

Ambos são indicados com a notação $M\hat{O}N$.

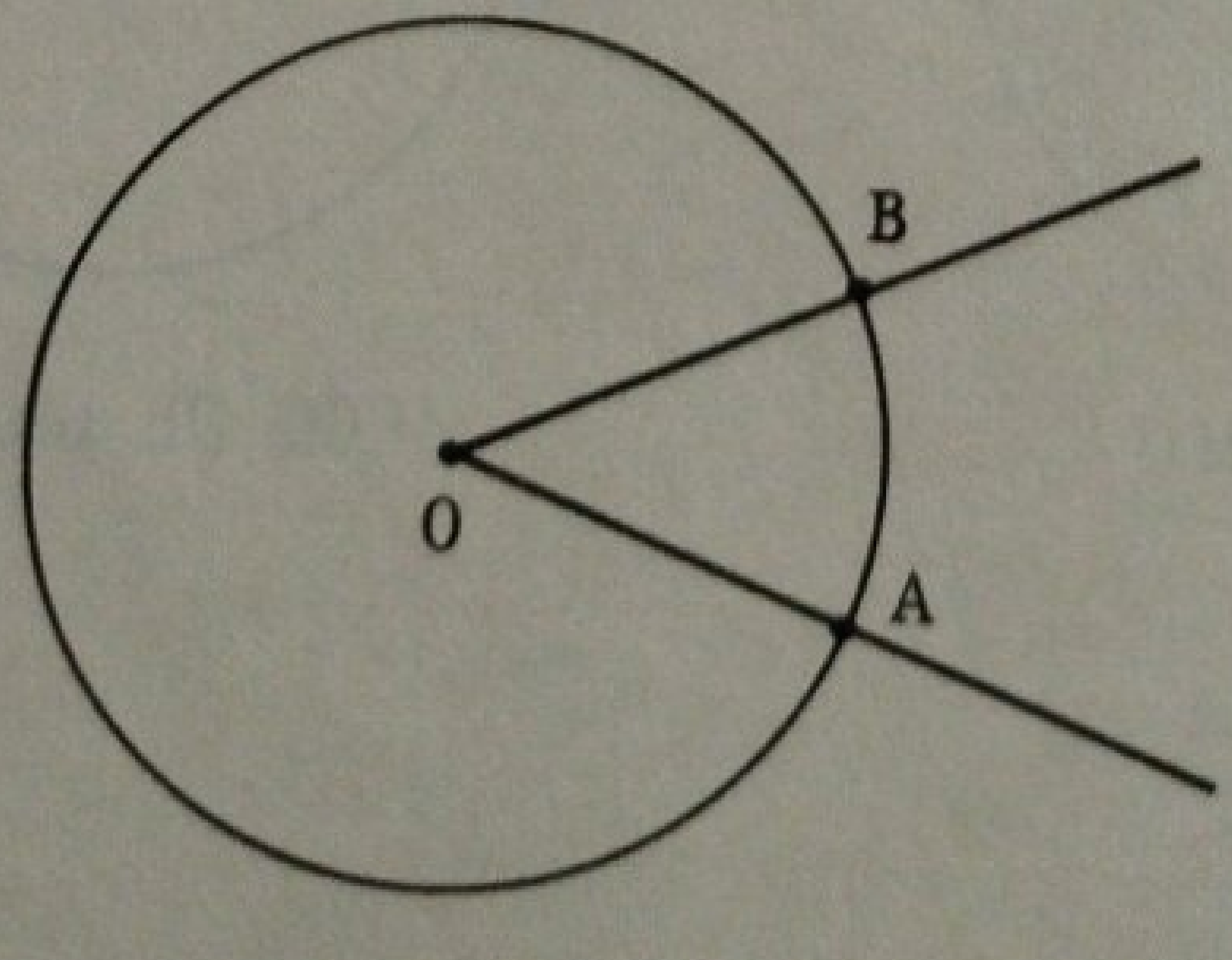
2.3 MEDIDA DE UM ARCO

Fixando-se sobre uma circunferência um *arco* $\overset{\frown}{PQ}$, não nulo, define-se *MEDIDA DE UM ARCO* $\overset{\frown}{AB}$ da mesma circunferência, como sendo a razão entre os comprimentos de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{PQ}$. Em outros termos: é o número de vezes que o *arco* $\overset{\frown}{PQ}$ "cabe" no *arco* $\overset{\frown}{AB}$.



2.4 MEDIDA DE UM ÂNGULO

É igual a medida do *arco* que êle determina sobre uma circunferência.



med $(A\hat{O}B)$ = med $\overset{\frown}{AB}$

Logo, a cada *arco* da circunferência corresponde a um ângulo central.

2.5 UNIDADES DE ARCOS

As unidades usuais de *arcos* são:

a) *GRAU* é um *arco* unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o *arco* a ser medido.

b) *RADIANO* é um *arco* unitário cujo comprimento é igual ao do raio d circunferência que contém o *arco* a ser medido.

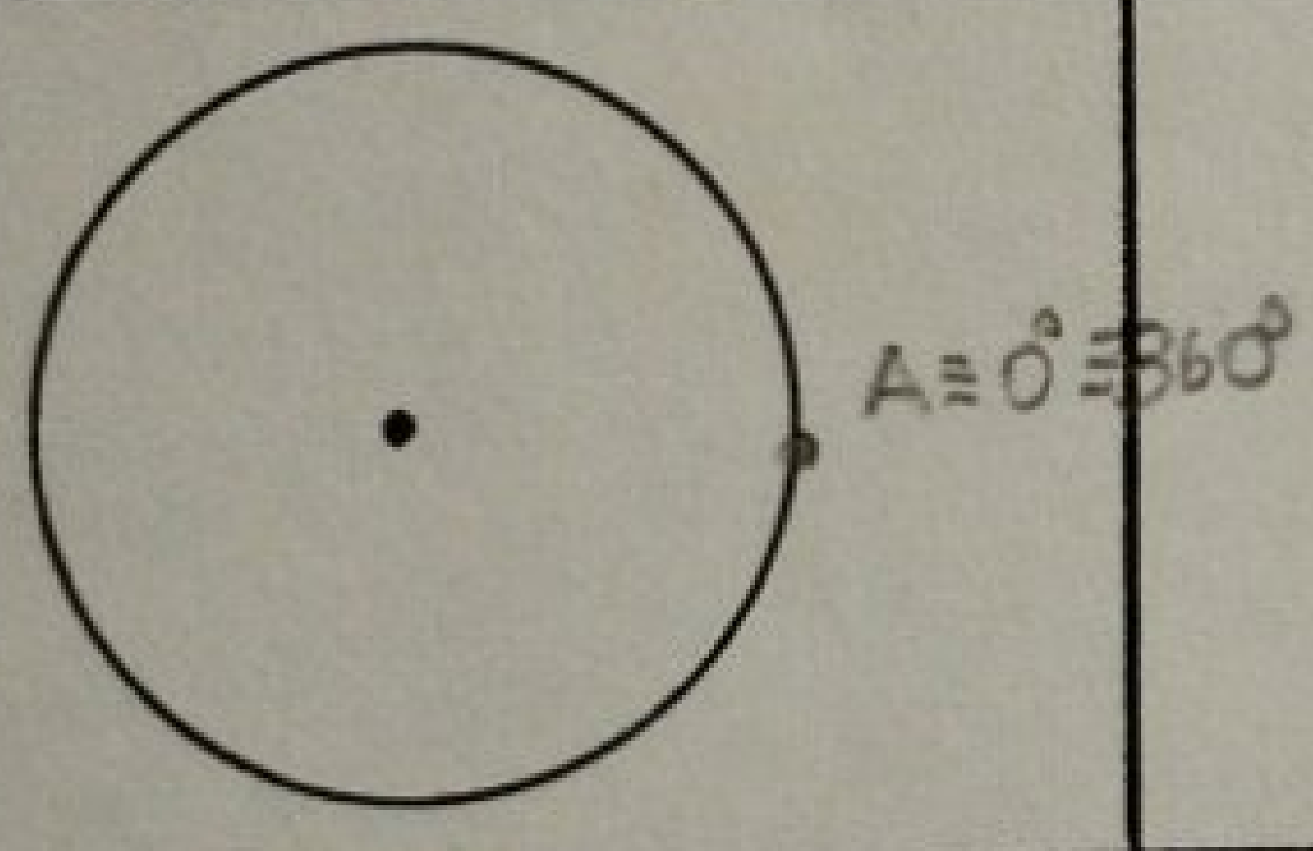
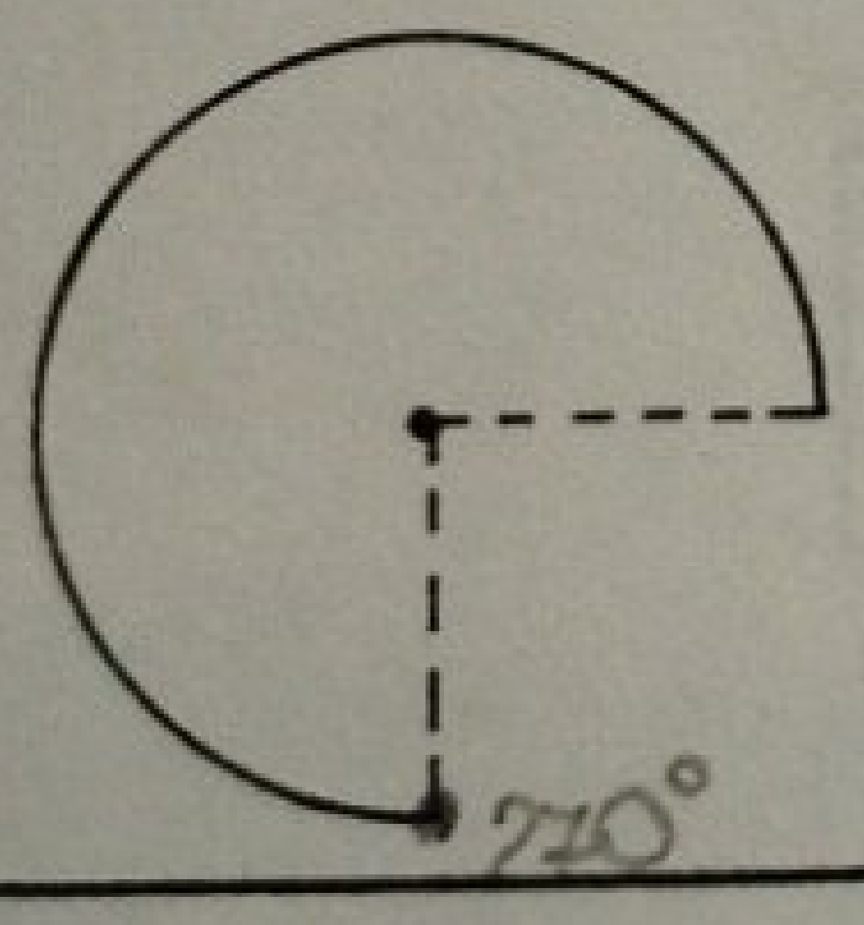
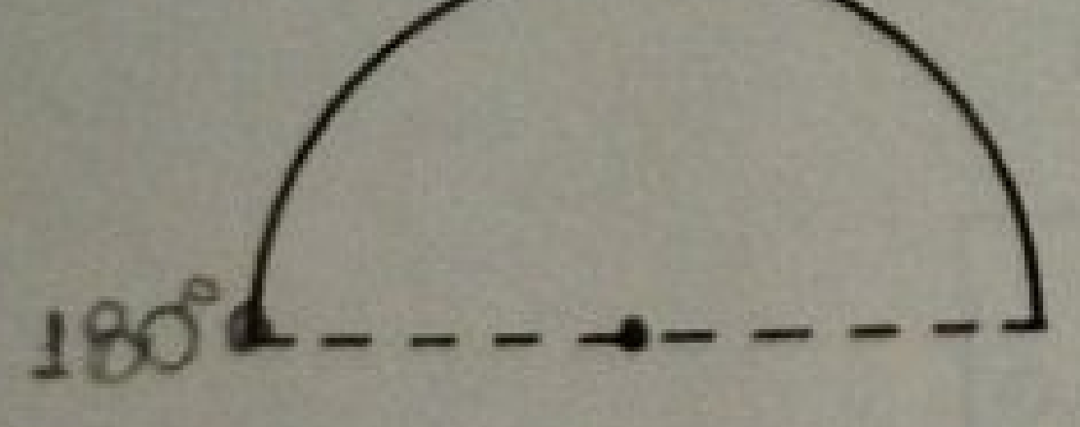
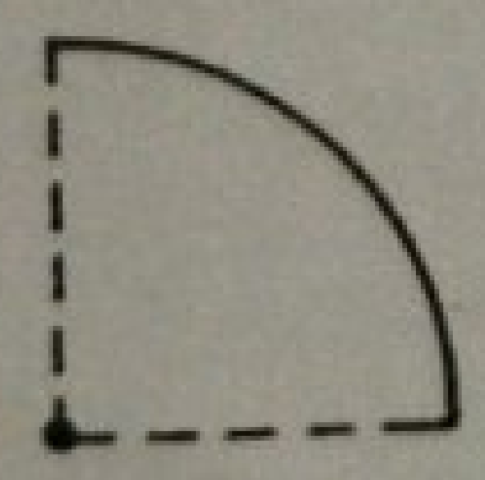
OBS.: Se $\widehat{AB}$ é o *arco* de uma volta, sua medida em *radianos* é 2π.

De fato, se $med\ \widehat{AB} = \dfrac{\text{comprimento de } \widehat{AB}}{\text{comprimento da unidade}} = \dfrac{c}{r}$,

Como comprimento da circunferência é $C = 2\pi r$, vem:

$$med\ \widehat{AB} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ rad$$

E.16 Complete o quadro:

A R C O	G R A U	R A D I A N O
 	360°	2π
 	270°	$\frac{3\pi}{2}$
 	180°	π
	90°	$\frac{\pi}{2}$

2.6 CONVERSÃO DE UNIDADES

Exemplos:

a) Converter 150° em *radianos*

Resolução: Como as grandezas são diretamente proporcionais, podemos estabelecer a seguinte regra de três:

180° — πrad

150° — x

$$x = \frac{150^{\circ}\ \pi rad}{180^{\circ}} \quad \text{logo} \quad \boxed{x = \frac{5\pi}{6}\ rad}$$

b) Converter $40^{\circ}\ 20'$ em *radianos*

Resolução:

180° — πrad

transformando em minutos, temos:

$40^{\circ}\ 20'$ — x

$10800'$ — $\pi\ rad$

$2420'$ — x

$$x = \frac{2420'\pi}{10800'} \Rightarrow \boxed{x = \frac{121\pi}{540}\ rad}$$

c) Converter $\frac{5\pi}{3}$ *rad* em *graus*

Resolução: Sabemos que $\pi\ rad = 180^{\circ}$, então:

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{5\ .\ 180^{\circ}}{3} = 300^{\circ} \Rightarrow \boxed{\frac{5\pi}{3}\ rad = 300^{\circ}}$$

d) Converter 2 *rad* em *graus*

$\pi\ rad$ — 180°

$2\ rad$ — x

$$x = \frac{180^{\circ}\ .\ 2}{\pi}$$

$$x = \frac{360^{\circ}}{3,14}$$

$$\boxed{x = 114^{\circ}\ 38'\ 58''}$$

EXERCÍCIOS:

E.17 Transforme em *radianos*:

a) 30^o $\frac{\pi}{6}$

b) 45^o $\frac{\pi}{4}$

c) 60^o $\frac{\pi}{3}$

d) 90^o $\frac{\pi}{2}$

e) 135^o $\frac{3\pi}{4}$

f) 120^o $\frac{2\pi}{3}$

g) 300^o $\frac{2\pi}{3}$

h) 240^o $\frac{4\pi}{3}$

i) 144^o $\frac{4\pi}{5}$

j) $22^o\ 30'$ $\frac{\pi}{8}$

l) $7^o\ 30'$ $\frac{\pi}{24}$

m) $17^o\ 35'$ $\frac{211\pi}{2160}$

n) $112^o\ 30'$ $\frac{5\pi}{8}$

o) $4^o\ 12'\ 10''$ $\frac{1513\pi}{64800}$

p) $7^o\ 5'\ 30''$ $\frac{851\pi}{21600}$

E.18 Transforme em *graus*:

a) $\frac{\pi}{10}$ *rad* 18

b) $\frac{\pi}{6}$ *rad* 30

c) $\frac{\pi}{2}$ *rad* 90

d) $\frac{\pi}{4}$ *rad* 45

e) $\frac{\pi}{3}$ *rad* 60

f) $\frac{3\pi}{5}$ *rad* 108

g) $\frac{5\pi}{4}$ *rad* 225°

h) $\frac{3\pi}{13}$ *rad* 41°32'18''

i) $\frac{12\pi}{7}$ *rad* 308°34'17''

j) $\frac{7\pi}{11}$ *rad* 114°32'43''

l) $\frac{\pi}{16}$ *rad* 11°15'

m) $\frac{25\pi}{24}$ *rad* 187°30'

n) 2,5 *rad* 143°18'43''

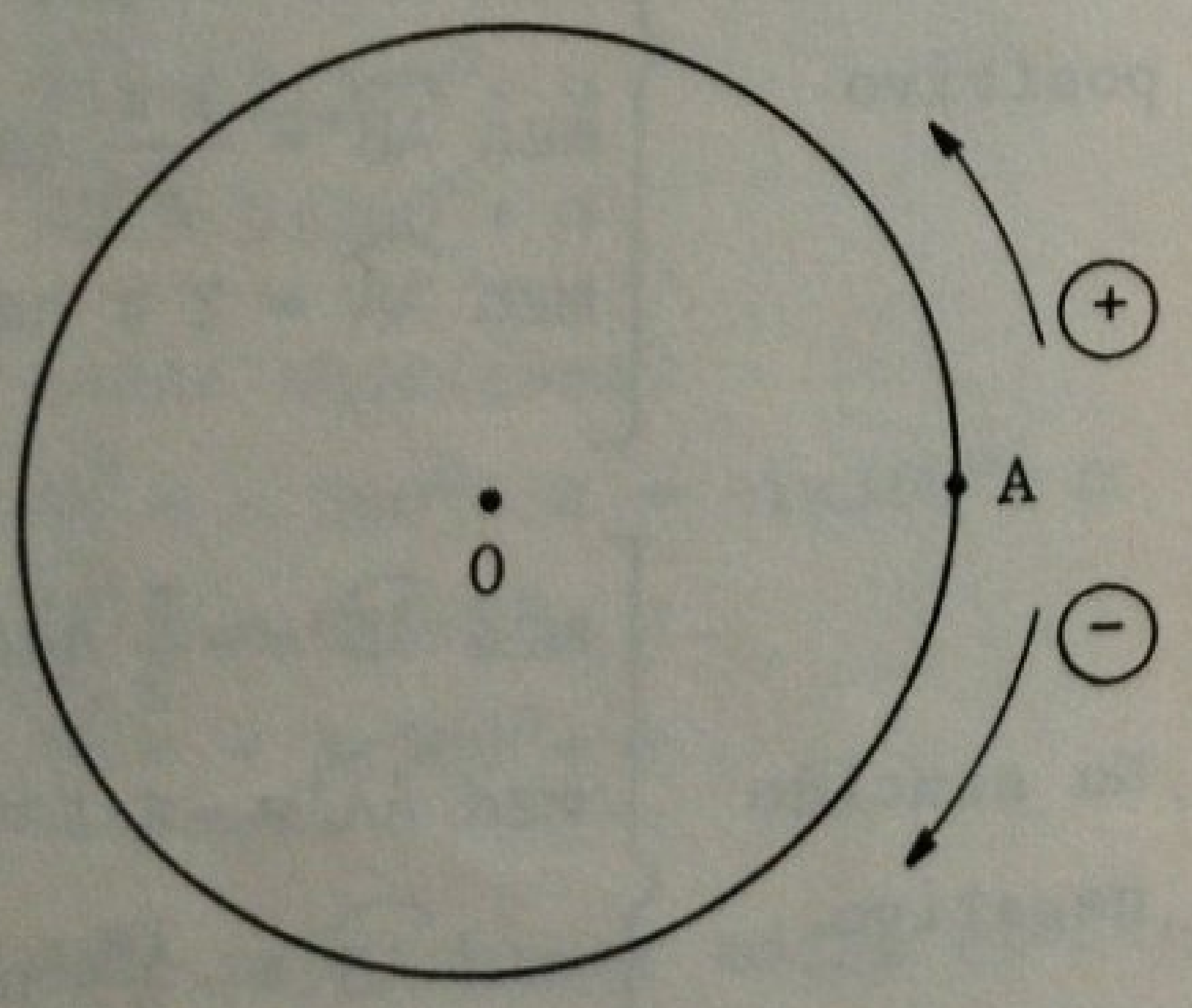
o) 1 *rad* 57°19'29''

p) 3,7 *rad* 212° 6'6''

2.7 CIRCUNFERÊNCIA ORIENTADA OU CICLO

É a circunferência sobre a qual se fixou uma origem A e se escolheu u sentido de deslocamento.

Convenciona-se tomar como sentido positivo, o sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio. O sentido oposto é negativo.



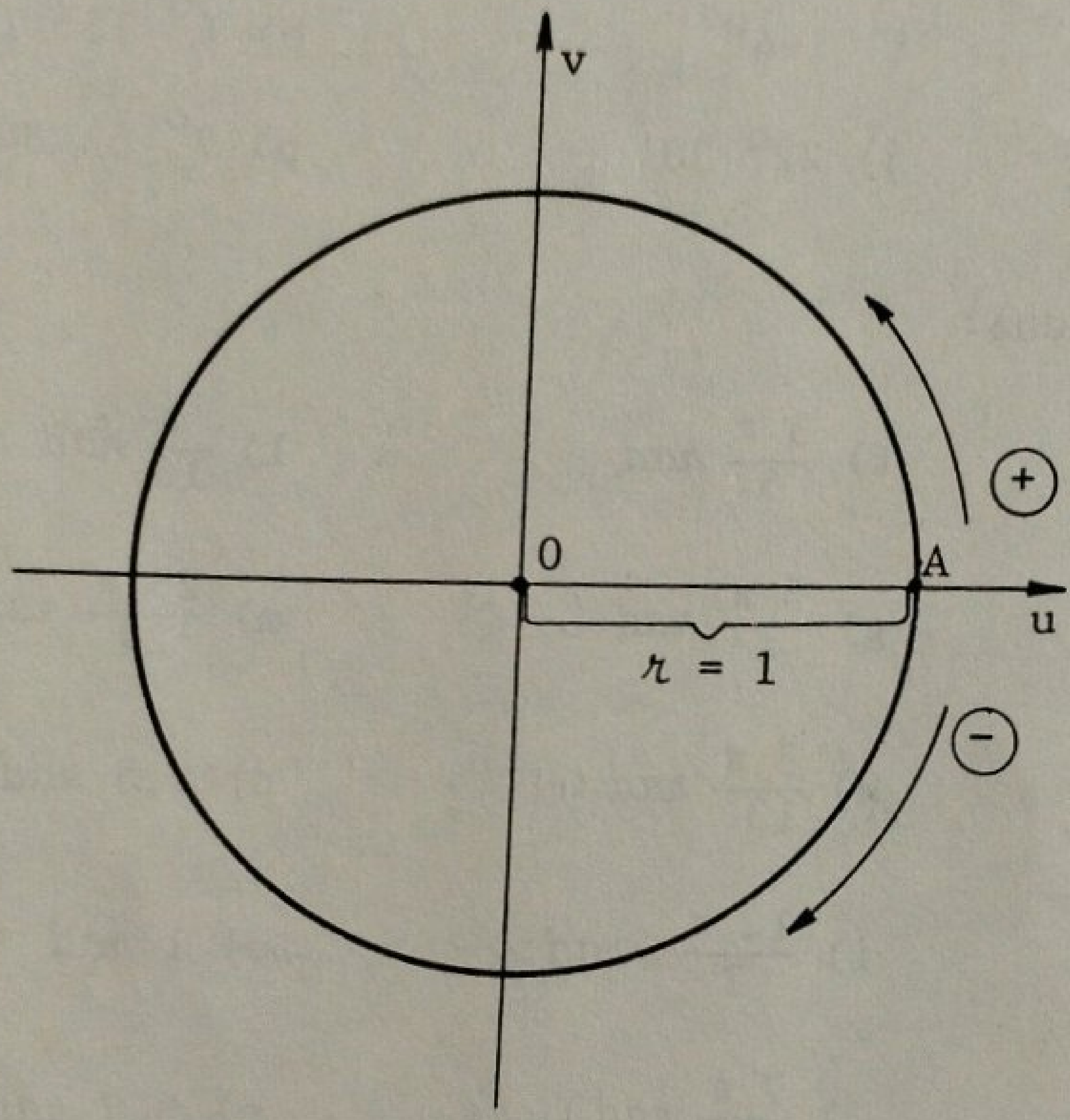
2.8 CICLO TRIGONOMÉTRICO OU CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

É uma circunferência orientada que satisfaz as seguintes condições:

a) O centro da circunferência será o ponto de interseção dos eixos cartesianos;

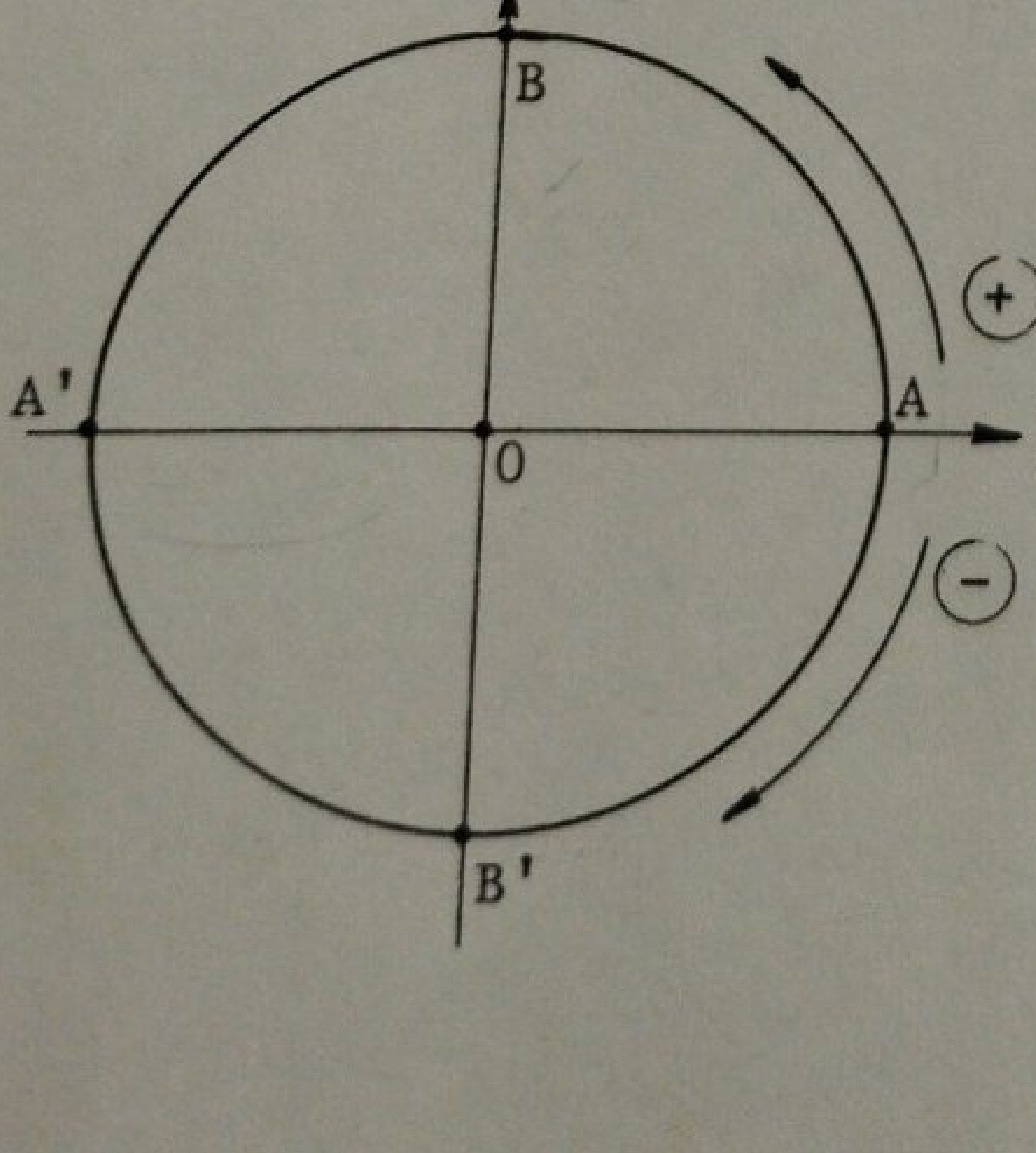
b) O raio é tomado como unidade de comprimento ($r = 1$);

c) A origem dos *arcos* é o ponto A (1,0).



2.9 MEDIDA ALGÉBRICA DE UM ARCO TRIGONOMÉTRICO

Será positiva ou negativa, conforme a orientação do *arco* seja concordante ou discordante com a orientação positiva da circunferência orientada.



No sentido positivo

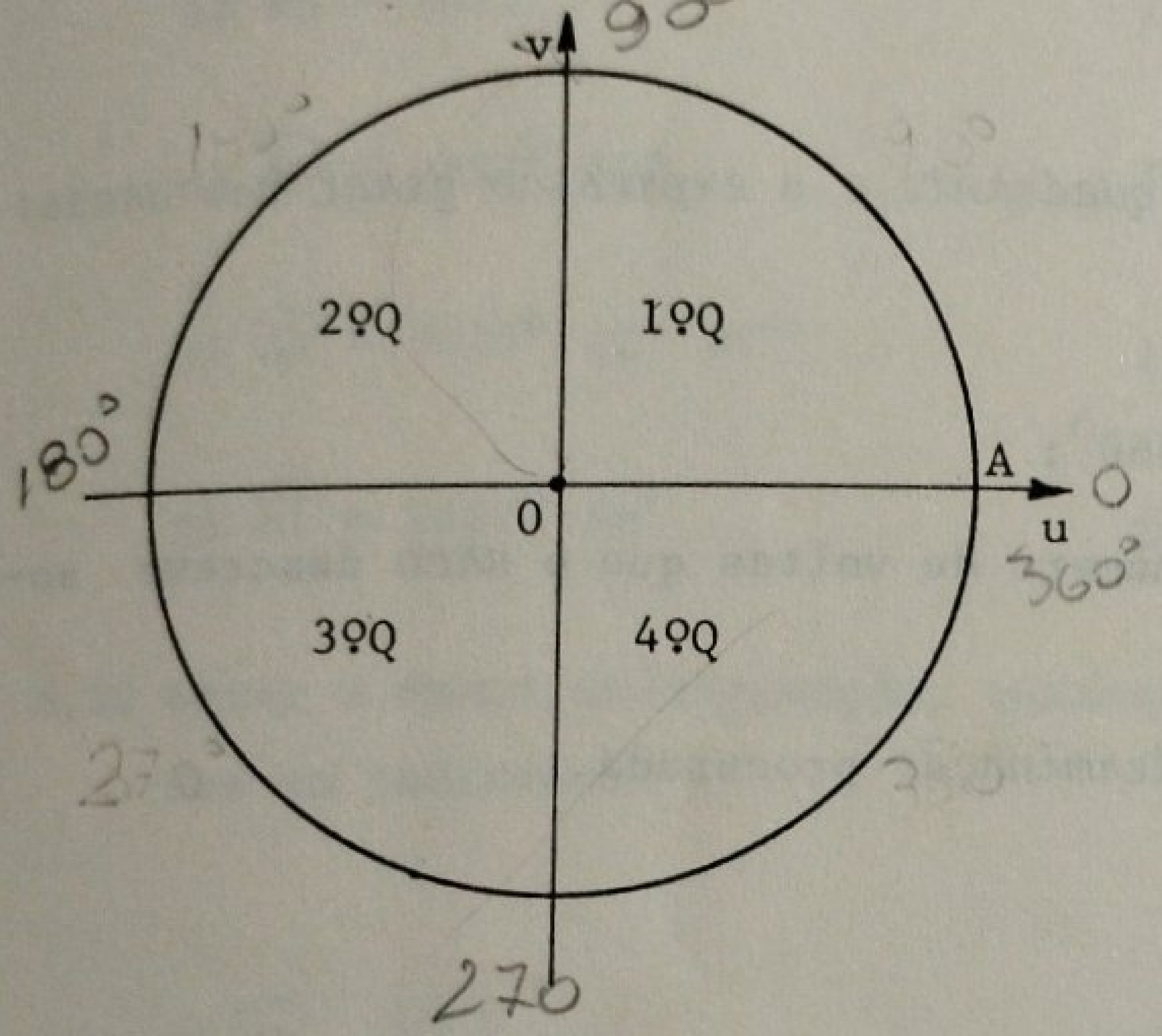
$$\begin{cases} med\ \widehat{AB} = \dfrac{\pi}{2}\ rad \\ med\ \widehat{AA'} = \pi\ rad \\ med\ \widehat{AB'} = \dfrac{3\ \pi}{2}\ rad \\ med\ \widehat{AA} = 2\ \pi\ rad \end{cases}$$

No sentido negativo

$$\begin{cases} med\ \widehat{AB'} = -\dfrac{\pi}{2}\ rad \\ med\ \widehat{AA'} = -\pi\ rad \\ med\ \widehat{AB} = -\dfrac{3\pi}{2}\ rad \\ med\ \widehat{AA} = -\ 2\ \pi\ rad \end{cases}$$

2.10 QUADRANTES

Os eixos *U* e *V* dividem o plano em quatro regiões denominadas *quadrantes*. Tomando o sentido positivo dos *arcos*, a partir da origem, a primeira região é denominada 1º *quadrante*, a segunda região 2º *quadrante*, e assim por diante. O *quadrante* de um *arco* fica determinado pela sua extremidade. Os *arcos* que possuem suas extremidades situadas sobre os eixos não pertencem a quaisquer dos quadrantes.



Por exemplo:

a) 355° é do 4º Q

b) 135° é do 2º Q

c) $\frac{5\,\pi}{4}$ *rad* é do 3º Q

d) $\frac{\pi}{6}$ *rad* é do 1º Q

2.11 MENOR DETERMINAÇÃO. EXPRESSÃO GERAL. ARCOS CÔNGRUOS.

Seja um *arco* $\overset{\frown}{AM}$, de medida α.

Podemos obter infinidades de *arcos* $\overset{\frown}{AM}$, com mesmas extremidades:

a) *Arcos positivos:*

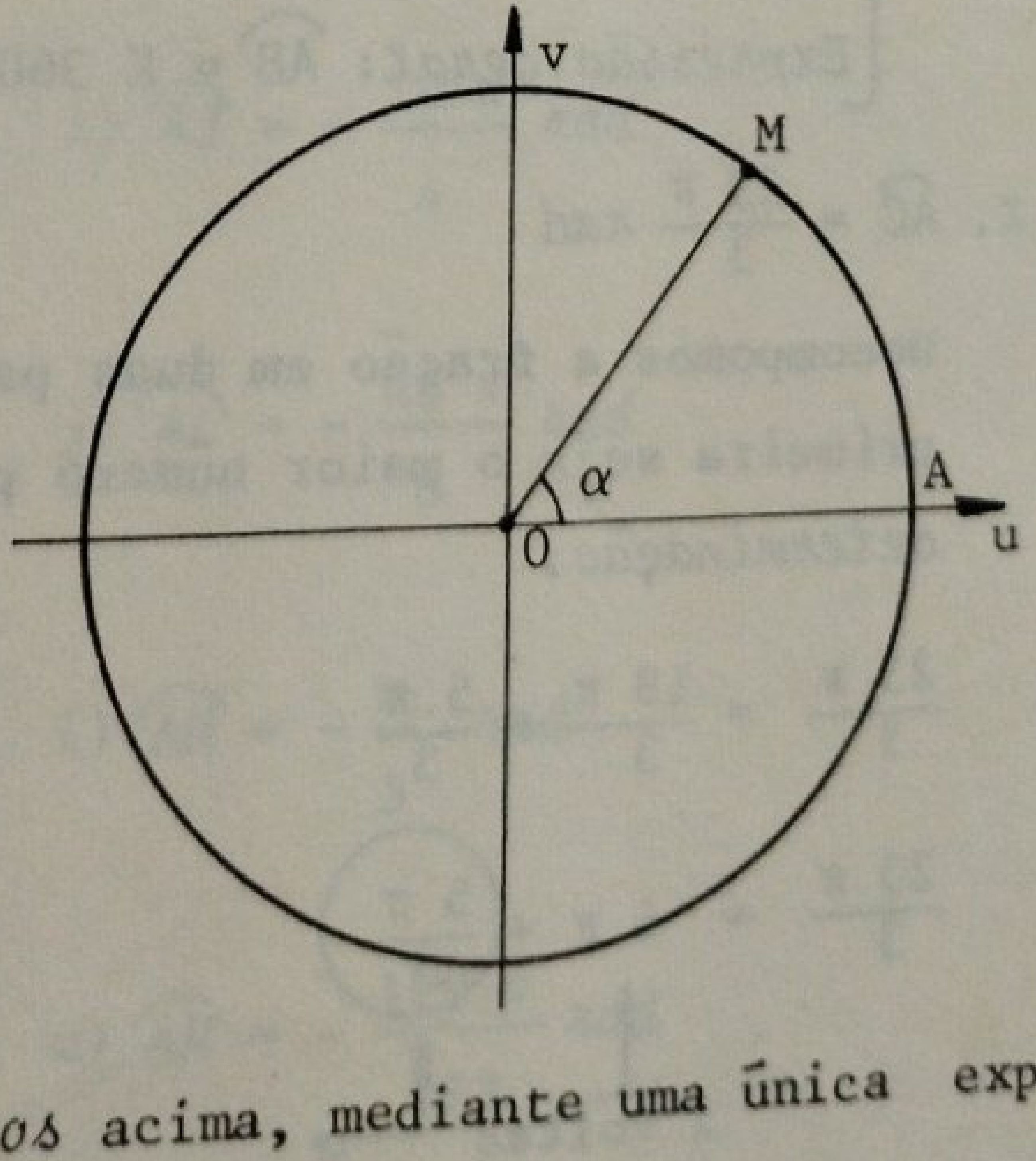
$\overset{\frown}{AM} = \alpha = 0 \times 360^{\circ} + \alpha$

$\overset{\frown}{AM} = 360^{\circ} + \alpha = 1 \times 360^{\circ} + \alpha$

$\overset{\frown}{AM} = 2 \times 360^{\circ} + \alpha$

$\overset{\frown}{AM} = 3 \times 360^{\circ} + \alpha$

....



b) *Arcos negativos:*

$\overset{\frown}{AM} = -\ 360^{\circ} + \alpha = -1 \times 360^{\circ} + \alpha$

$\overset{\frown}{AM} = -\ 2 \times 360^{\circ} + \alpha$

$\overset{\frown}{AM} = -\ 3 \times 360^{\circ} + \alpha$

....

Podemos representar todos os *arcos* acima, mediante uma única expressão, denominada *EXPRESSÃO GERAL DOS ARCOS* $\overset{\frown}{AM}$:

$\boxed{\overset{\frown}{AM} = K\ 360^{\circ} + \alpha}$ onde $K \in Z$

Se o *arco* α estiver em *radianos*, a *expressão geral* será:

$$\boxed{\widehat{AM} = 2K\pi + \alpha}$$

Arcos côngruos são *arcos* que possuem mesmas extremidades.

Menor determinação α é o *menor arco*, não negativo, dentre todos os *côngruos*. Assim, podemos afirmar: $0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$.

Exemplos:

Obter a *menor determinação*, o *quadrante* e a *expressão geral* dos *arcos*:

1. $\widehat{AB} = 1690^\circ$

Dividimos o *arco* dado por 360°:

a) O quociente representa número de voltas que o *arco* descreve sobre o *ciclo*;

b) O resto será a *menor determinação* procurada.

$$\begin{array}{l|l} 1690^\circ & 360^\circ \\ \hline \underline{250^\circ} & 4 \text{ voltas} \\ \quad \hookrightarrow \alpha & \end{array}$$

$$\begin{cases} \textit{Menor determinação: } \alpha = 250^\circ \\ \textit{Quadrante: } 3º \\ \textit{Expressão geral: } \widehat{AB} = K\,360^\circ + 250^\circ \end{cases}$$

2. $\widehat{AC} = \frac{23\,\pi}{3}$ *rad*

Decompomos a fração em duas parcelas, de modo que o quociente da primeira seja o maior número par. A segunda parcela será a *menor determinação*.

$$\frac{23\,\pi}{3} = \frac{18\,\pi}{3} + \frac{5\,\pi}{3}$$

$$\frac{23\,\pi}{3} = \underbrace{6\,\pi}_{3 \text{ voltas}} + \underbrace{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\!\!\;\frac{5\,\pi}{3}}_{\alpha}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{5\,\pi}{3} \textit{ rad} \\ 4º \textit{ quadrante} \\ \widehat{AC} = 2K\pi + \frac{5\,\pi}{3} \end{cases}$$

E.19 Obter a *menor determinação, quadrante* e *expressão geral* dos *arcos*, dados em *graus*:

a) $\overset{\frown}{AM} = 920^o$

b) $\overset{\frown}{AN} = 535^o$

c) $\overset{\frown}{AG} = 1815^o$

d) $\overset{\frown}{AH} = 912^o\ 15'$

e) $\overset{\frown}{AX} = 2625^o\ 30'\ 59''$

f) $\overset{\frown}{AI} = 2327^o\ 36'$

g) $\overset{\frown}{AL} = -\ 430^o$

h) $\overset{\frown}{AF} = -\ 523^o$

i) $\overset{\frown}{AB} = -\ 3452^o$

j) $\overset{\frown}{AS} = -\ 1318^o\ 15'$

1) $\overset{\frown}{AT} = -\ 2102^o\ 12'\ 27''$

m) $\overset{\frown}{AR} = -\ 1079^o\ 23''$

E.20 Obter a *menor determinação, quadrante* e *expressão geral* dos *arcos*, dados em *radianos*:

a) $\overset{\frown}{AB} = \frac{16\ \pi}{3}$ *rad*

b) $\overset{\frown}{AC} = \frac{26\ \pi}{5}$ *rad*

c) $\overset{\frown}{AD} = \frac{41\ \pi}{8}$ *rad*

d) $\overset{\frown}{AE} = \frac{37\ \pi}{7}$ *rad*

e) $\overset{\frown}{AF} = \frac{134\ \pi}{7}$ *rad*

f) $\overset{\frown}{AG} = \frac{76\ \pi}{7}$ *rad*

g) $\overset{\frown}{AH} = -\ \frac{16\ \pi}{3}$ *rad*

h) $\overset{\frown}{AI} = -\ \frac{43\ \pi}{11}$ *rad*

i) $\overset{\frown}{AJ} = -\ \frac{19\ \pi}{4}$ *rad*

j) $\overset{\frown}{AL} = -\ \frac{43\ \pi}{8}$ *rad*

1) $\overset{\frown}{AM} = -\ \frac{\pi}{5}$ *rad*

m) $\overset{\frown}{AN} = -\ \frac{129\ \pi}{13}$ *rad*

UNIDADE 3

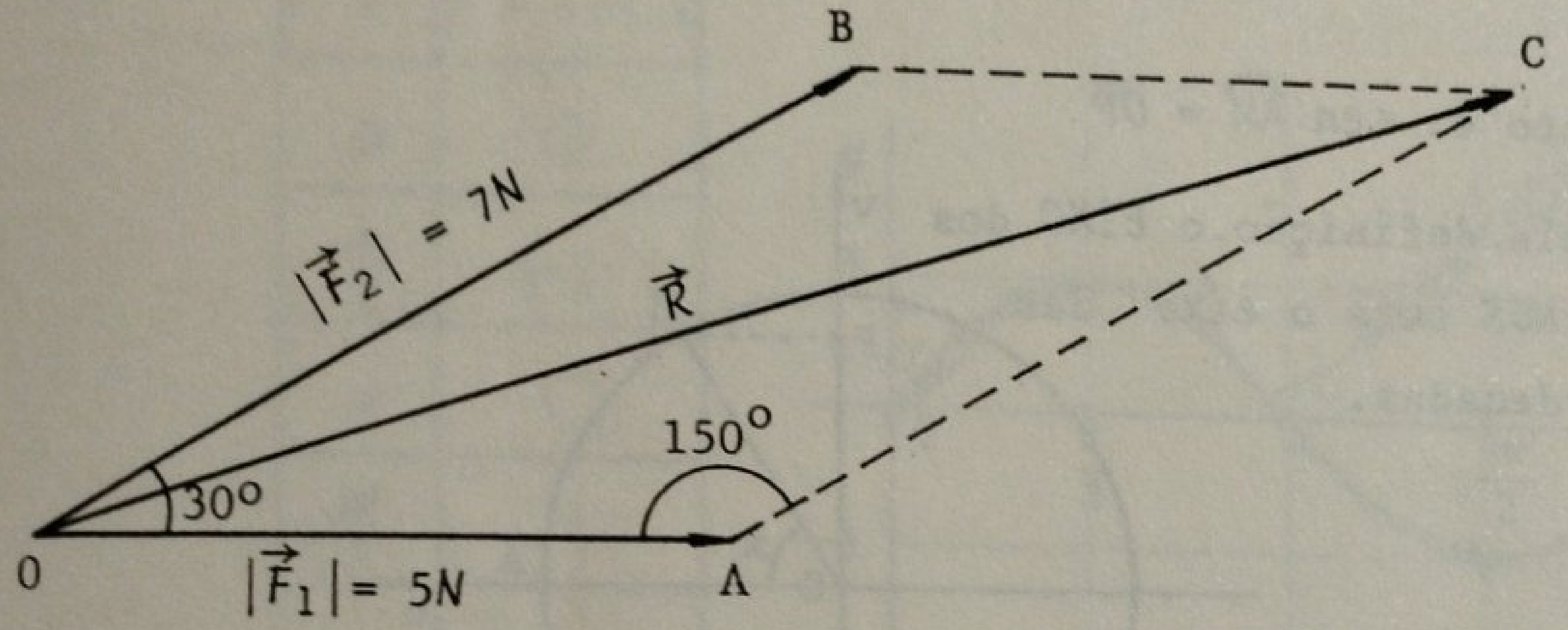
FUNÇÕES CIRCULARES

3. FUNÇÕES CIRCULARES

3.1 INTRODUÇÃO

Existem muitos problemas cuja solução seria útil que se dispusesse de uma *Trigonometria* que não ficasse restrita aos *ângulos agudos*.

Se queremos, por exemplo, calcular a intensidade aproximada da resultante de duas forças de intensidades $5N$ e $7N$, sabendo que elas estão aplicadas a um mesmo ponto e formam um *ângulo* de 30^o:



A resultante $\vec{R}$ das mesmas se obtém com a regra do paralelogramo.

Para o cálculo da intensidade de $\vec{R}$ devemos observar o triângulo OAC : dele conhecemos dois lados: $\overline{OA} = 5N$ e $\overline{AC} = 7N$ e o *ângulo* formado por eles: $180^o - 30^o = 150^o$.

Calculando o terceiro lado deste triângulo obteremos o valor de $\vec{R}$:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC} \cdot \cos 150^o$$

(Esta fórmula para calcular o terceiro lado de um triângulo, conhecidos dois lados e o ângulo por eles formado, ainda iremos estudar na TRIGONOMETRIA).

Para conseguirmos resolver este problema precisamos do valor de $\cos 150^o$. E para isso é preciso libertarmo-nos do triângulo retângulo, já que no mesmo não existem *ângulos obtusos*.

Mas esta libertação deve ser feita tendo-se o cuidado de preservar as noções e relações anteriores.

Neste capítulo, pois, estenderemos as noções de *seno*, *cosseno* e *tangente*.

Aqueles conceitos definidos anteriormente através dos lados de um triângulo retângulo passarão a ser meros casos particulares.

Definiremos, também, outras razões *trigonométricas*.

Todo este trabalho de ampliação de idéias será feito no *CICLO TRIGONOMÉTRICO*.

Objetivo 04

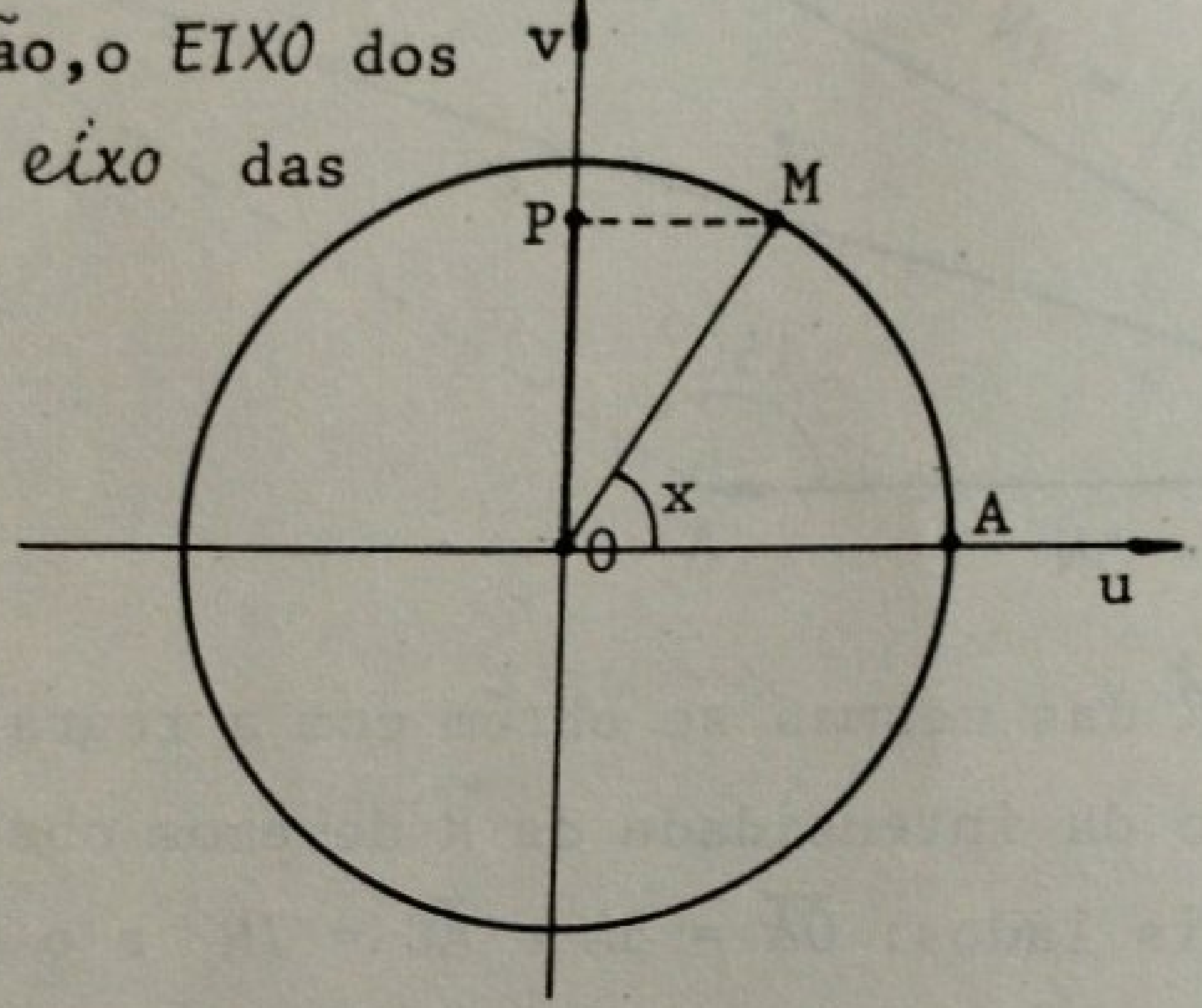
3.2 FUNÇÃO SENO

3.2.1 DEFINIÇÃO

SENO de um arco $\widehat{AM}$ *é a ordenada do ponto M*

Isto é: $\mathit{sen}\ \widehat{AM} = \overline{OP}$

Pela definição, o *EIXO* dos *SENOS* será o *eixo* das ordenadas.



A cada *arco* x corresponderá uma única ordenada *y*, definindo assim, uma função denominada *FUNÇÃO SENO*:

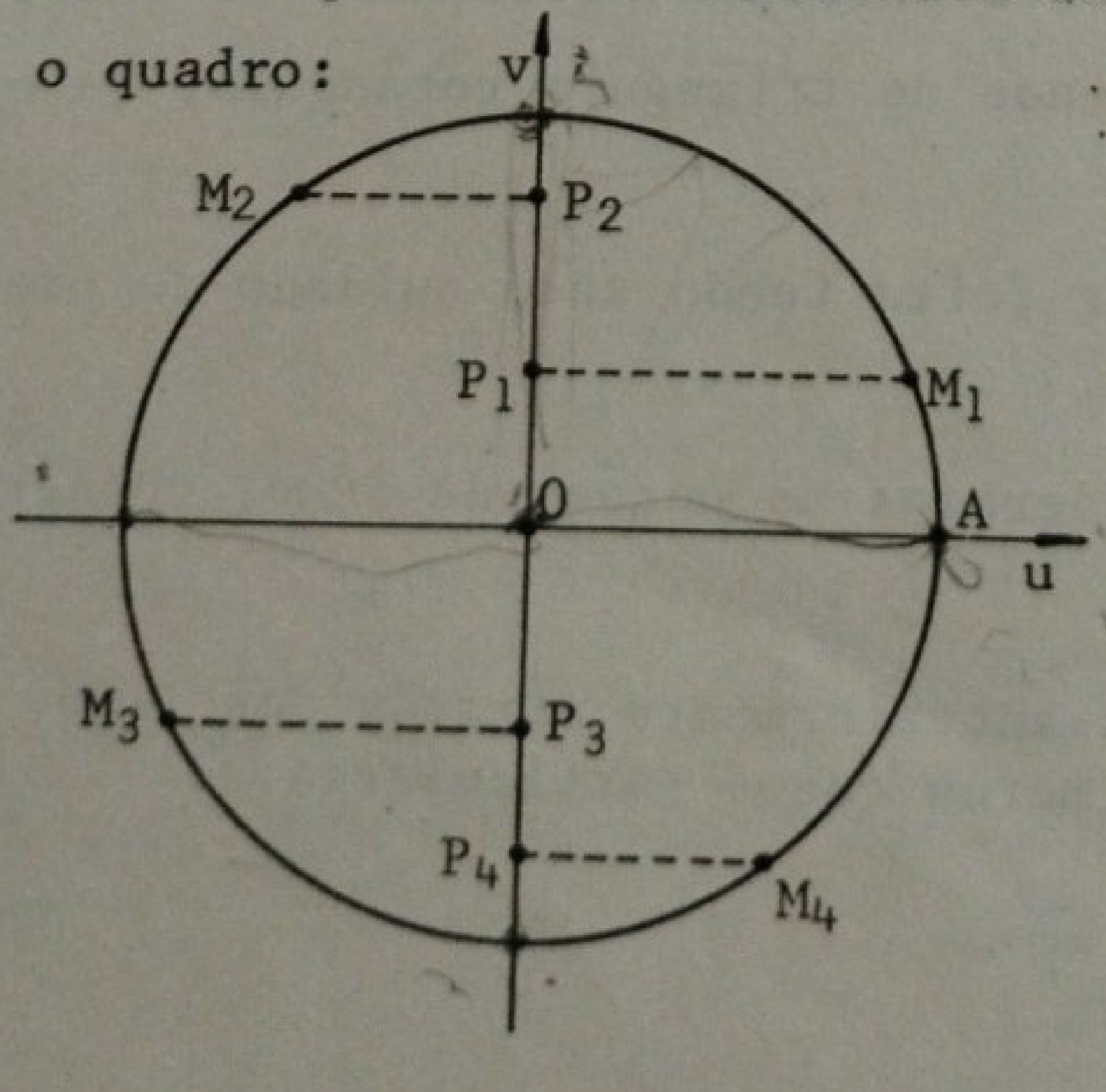
$$\boxed{y = \mathit{sen}\ x}$$

arcos

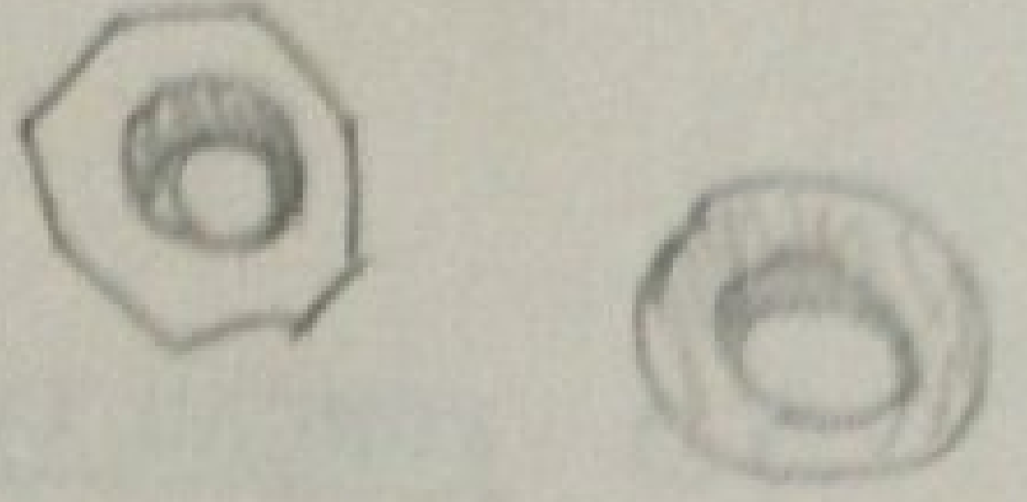
ordenadas

3.2.2 SINAIS

Sabendo que *seno* é a ordenada da extremidade do *arco*, complete o quadro:



Quadrantes	1º	2º	3º	4º
Sinais	+	+	−	−



3.2.3 VALORES NOTÁVEIS

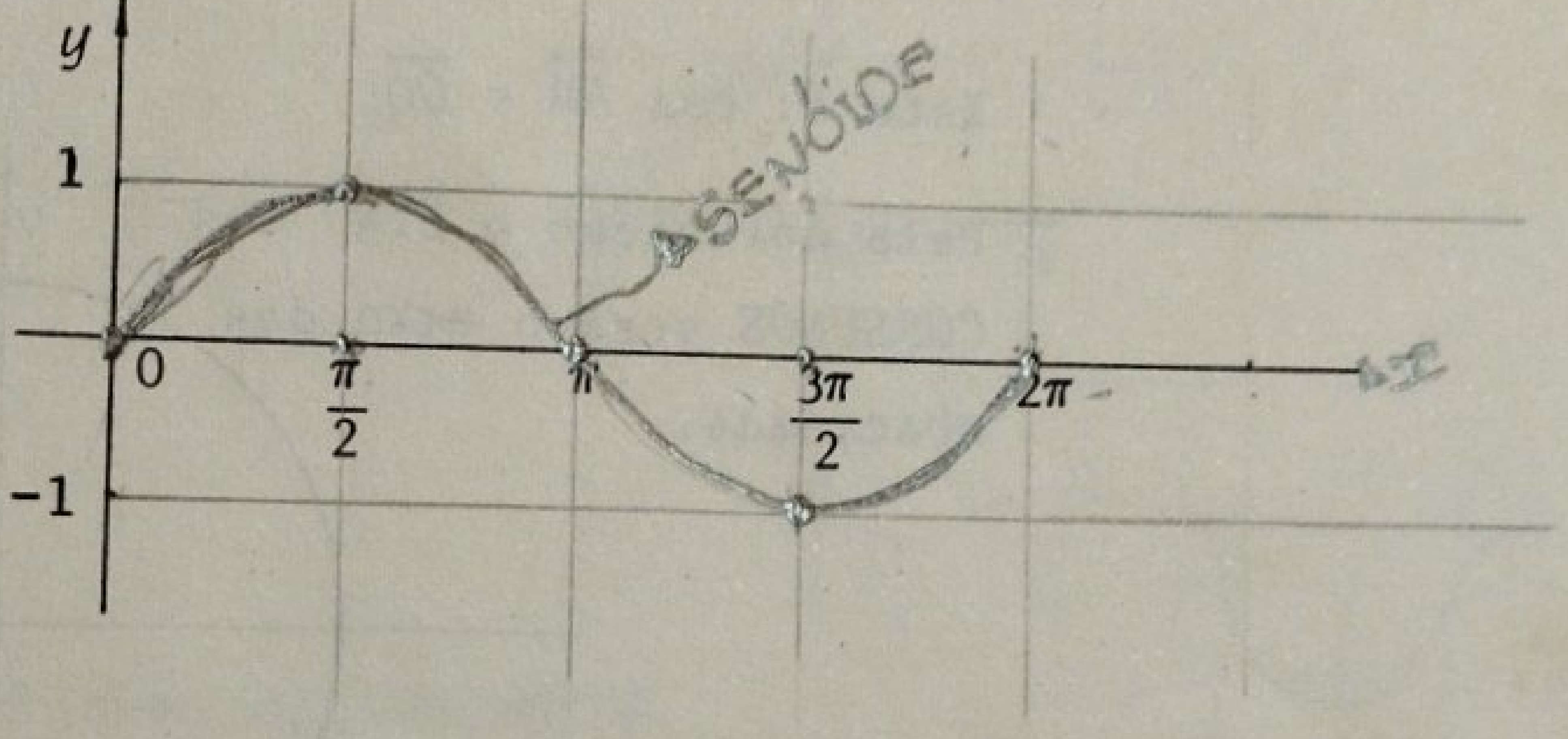
Utilizando a definição do *seno*, complete:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = senx$	0	+1	0	-1	0

↑ordenada do pto (M)

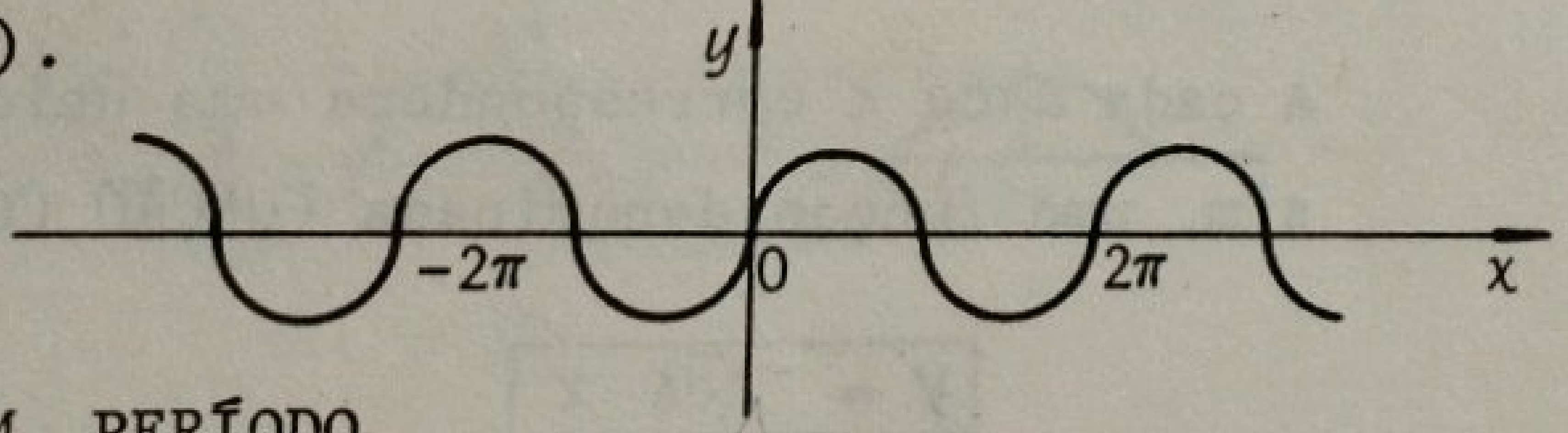
3.2.4 GRÁFICO

x	$y = sen\ x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	+1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0



OBS.: a) O gráfico é chamado *SENÓIDE*.

b) A *senóide* continua à direita de 2π e à esquerda de 0 (zero).



3.2.5 DOMÍNIO. IMAGEM. PERÍODO.

Observando o gráfico da função *seno*, concluímos que:

a) *Domínio*: $\boxed{D = \mathbb{R}}$

b) *Imagem*: $\boxed{Im = [-1; 1]}$ isto é, $-1 \leqslant sen\ x \leqslant 1$

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO PERIÓDICA - Uma função $y = F(x)$ é periódica se existir um número p que satisfaz a condição $f(x)=f(x+p)$ para todo x do domínio.

O menor número p, positivo, que satisfaz a condição, recebe o nome de *PERÍODO*.

Observando o gráfico da função *seno*, concluimos que:

$$\boxed{p = 2\pi\ rad}$$

3.3 FUNÇÃO COSSECANTE

Função cossecante é definida por $y = cscx$, onde $\boxed{cscx = \frac{1}{senx}}$, para $x \neq K\pi$.

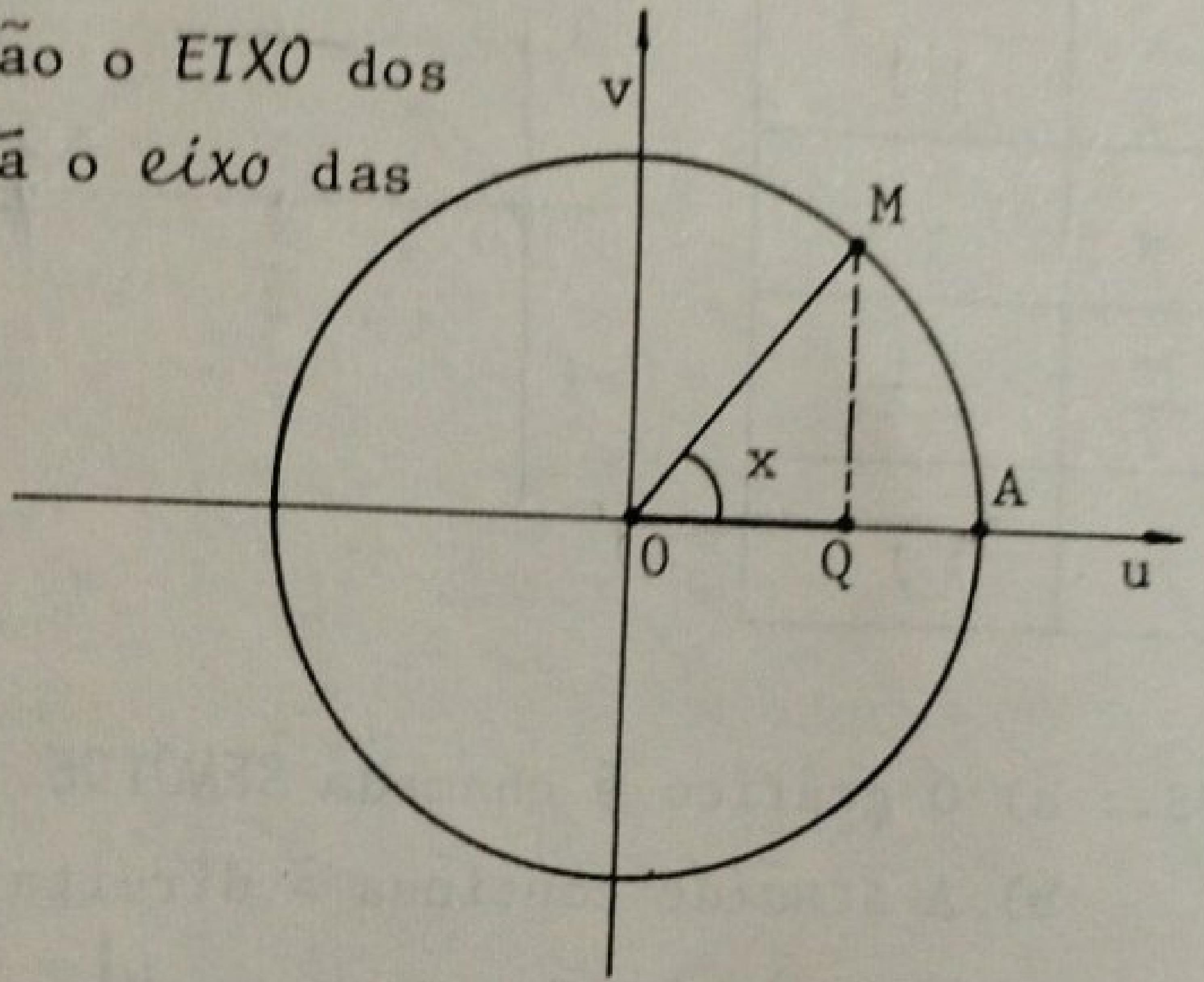
3.4 FUNÇÃO COSSENO

3.4.1 DEFINIÇÃO

$\boxed{\text{COSSENO de um arco } \overset{\frown}{AM} \text{ é a abscissa do ponto M}}$

Isto é: $cos\ \overset{\frown}{AM} = \overline{OQ}$

Pela definição o *EIXO* dos *COSSENOS* será o *eixo* das *abscissas*.

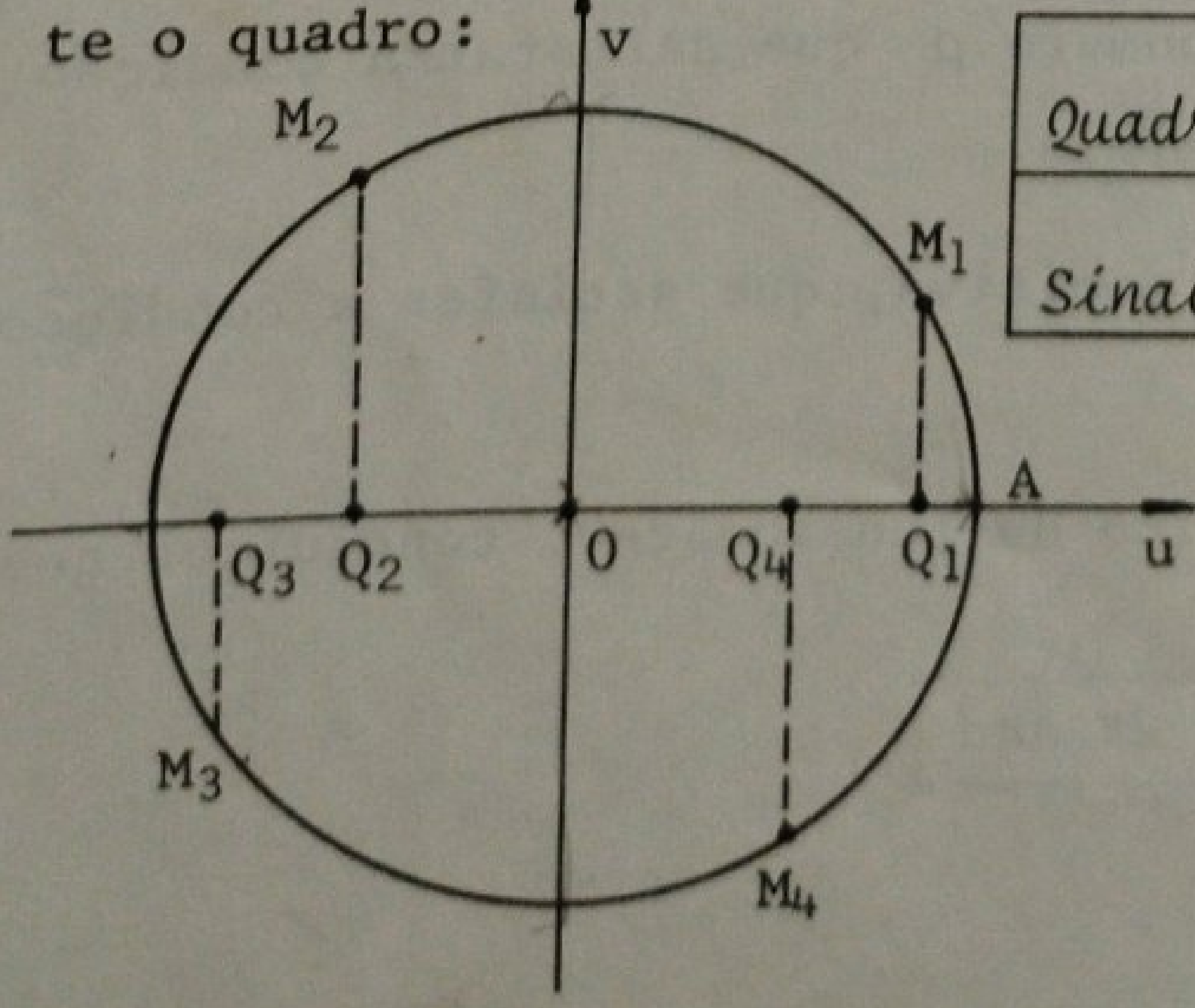


A cada *arco* x corresponderá uma única *abscissa y*, definindo assim, uma função denominada *FUNÇÃO COSSENO*:

$$\boxed{\underset{\text{abscissas}}{y} = cos\ \underset{\text{arcos}}{x}}$$

3.4.2 SINAIS

Sabendo que *cosseno* é a *abscissa* da extremidade do *arco*, complete o quadro:



Quadrantes	1º	2º	3º	4º
Sinais	+	−	−	+

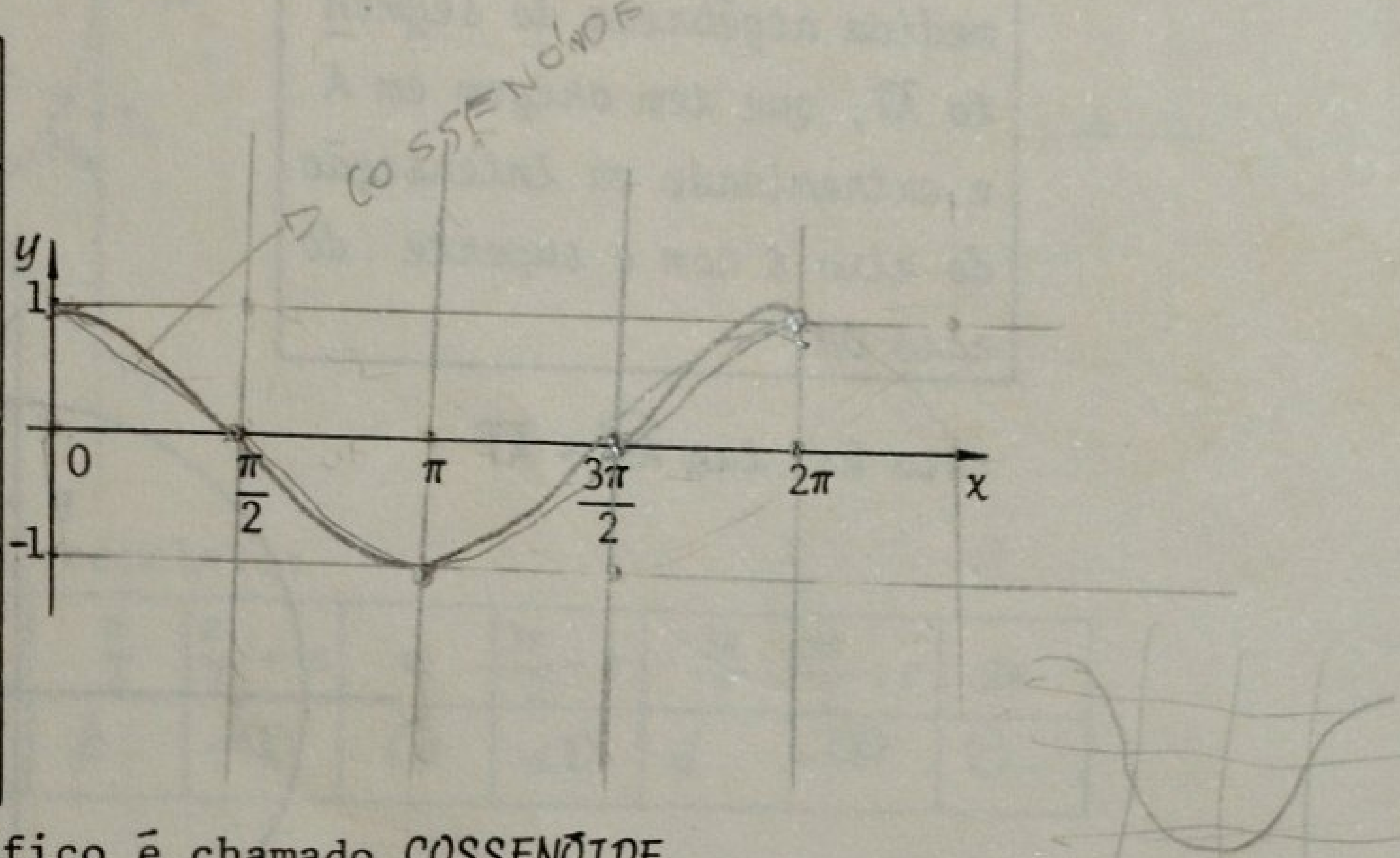
3.4.3 VALORES NOTÁVEIS

Utilizando a definição do *cosseno*, complete:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	$+1$	0	-1	0	$+1$

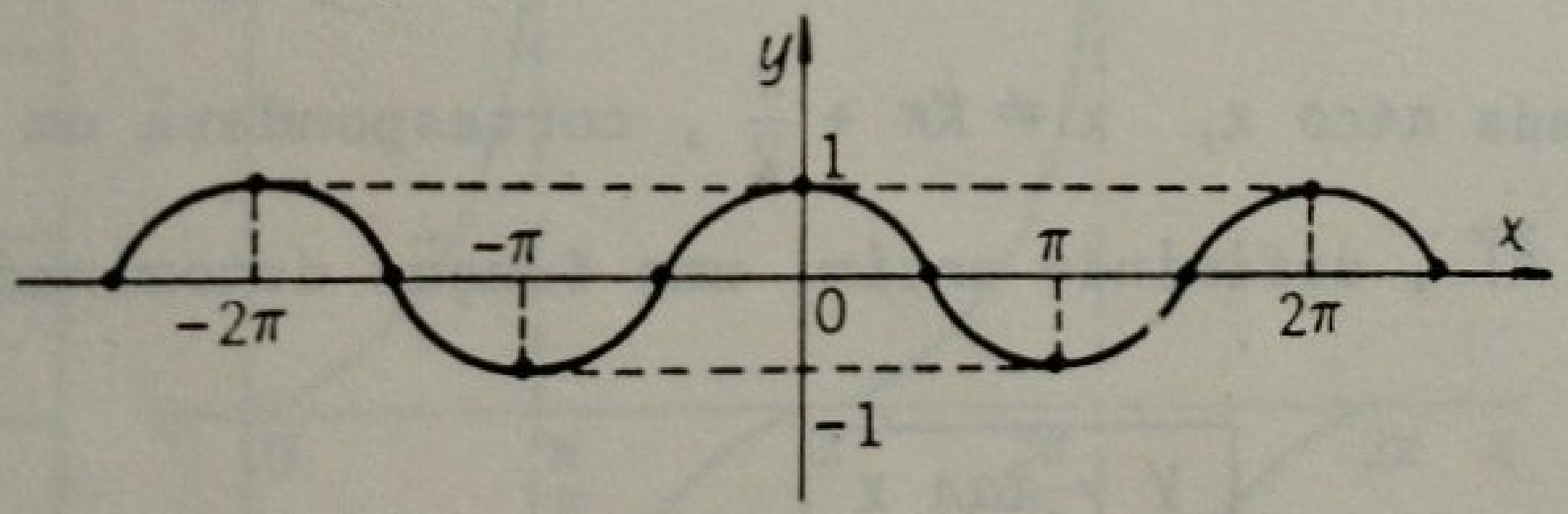
3.4.4 GRÁFICO

x	$y = \cos x$
0	$+1$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	$+1$



OBS.: a) O gráfico é chamado *COSSENÓIDE*.

b) A *cossenóide* continua à direita de 2π e à esquerda de 0 (zero).



3.4.5 DOMÍNIO. IMAGEM. PERÍODO.

Observando o gráfico da função *cosseno*, concluimos que:

a) *Domínio*: $\boxed{D = \mathbb{R}}$

b) *Imagem*: $\boxed{Im = [-1;1]}$ isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$

c) *Período*: $\boxed{p = 2\pi \ rad}$

3.5 FUNÇÃO SECANTE

Função secante é definida por $y = \sec x$,

onde $\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$, para $x \neq K\pi + \frac{\pi}{2}$

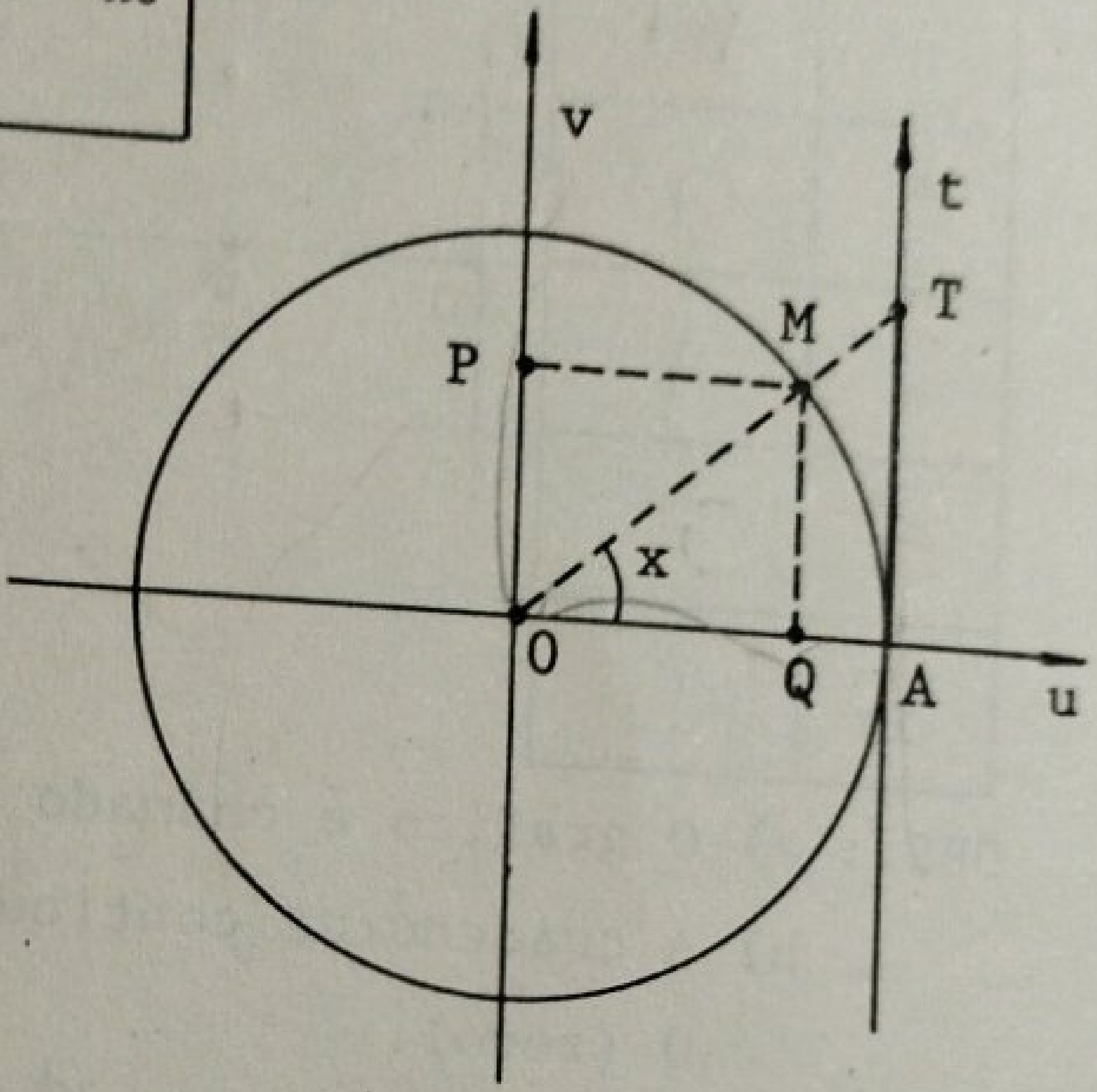
3.6 FUNÇÃO TANGENTE

3.6.1 DEFINIÇÃO

Eixo das tangentes é o *eixo t*, tangente ao *ciclo* no ponto A, e orientado no mesmo sentido do *eixo* das ordenadas.

> TANGENTE *de um arco* $\widehat{AM}$ *é a medida algébrica do segmento* $\overline{AT}$, *que tem origem em A e extremidade na interseção do eixo t com o suporte do raio OM.*

Isto é: $\tan \widehat{AM} = \overline{AT}$



A cada *arco* x, $x \neq K\pi + \frac{\pi}{2}$, corresponderá um único número real $y = \overline{AT}$, definindo assim, uma função denominada FUNÇÃO TANGENTE:

$$\boxed{y = \tan x}$$

Pela semelhança dos triângulos OQM e OAT, temos:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \frac{\tan x}{1} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

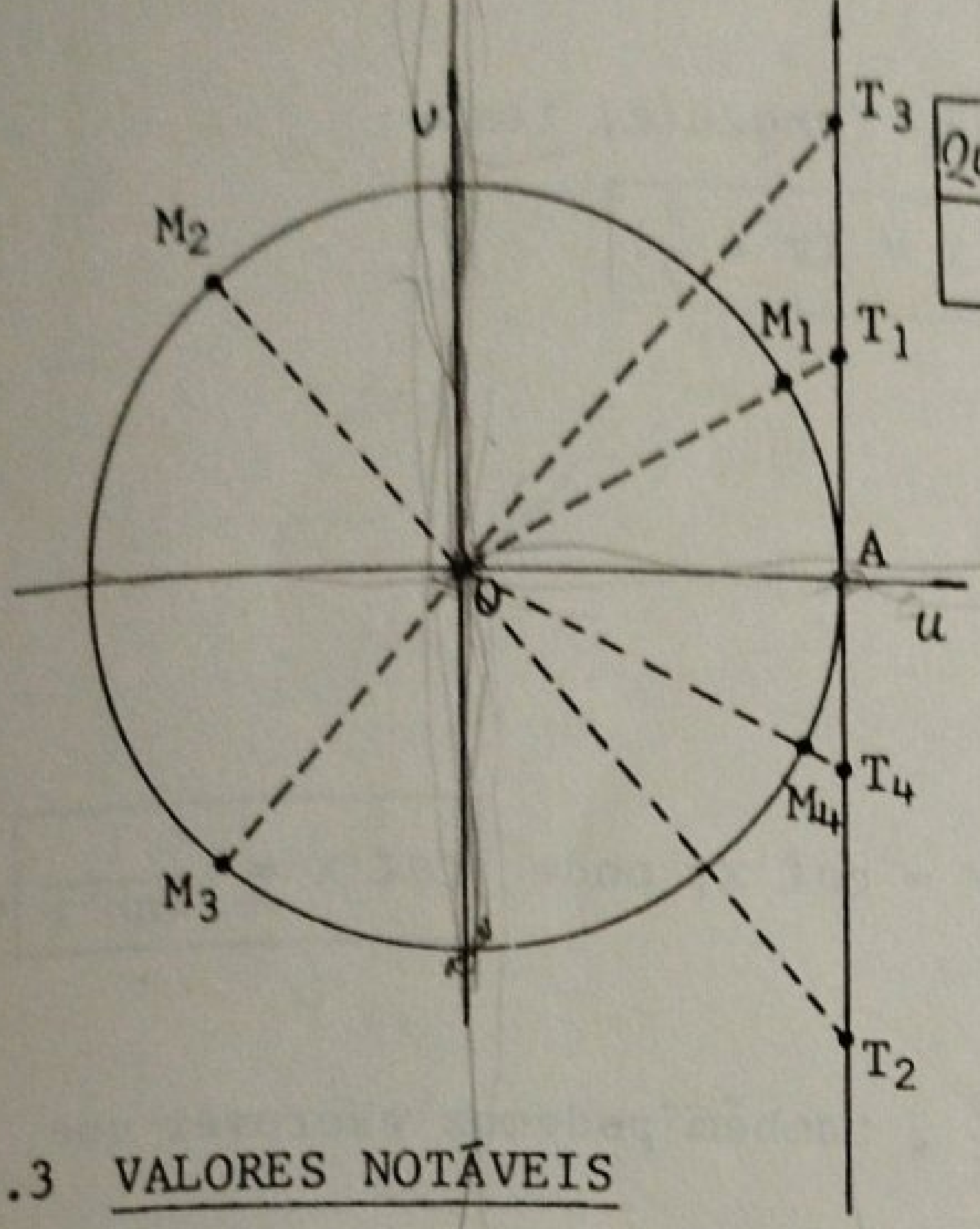
Logo:

$$\boxed{\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$$ onde $\cos x \neq 0$, isto é

$$x \neq K\pi + \frac{\pi}{2}$$

3.6.2 SINAIS

Baseando-se na definição complete o quadro:



Quadrantes	1º	2º	3º	4º
Sinais	+	−	+	−

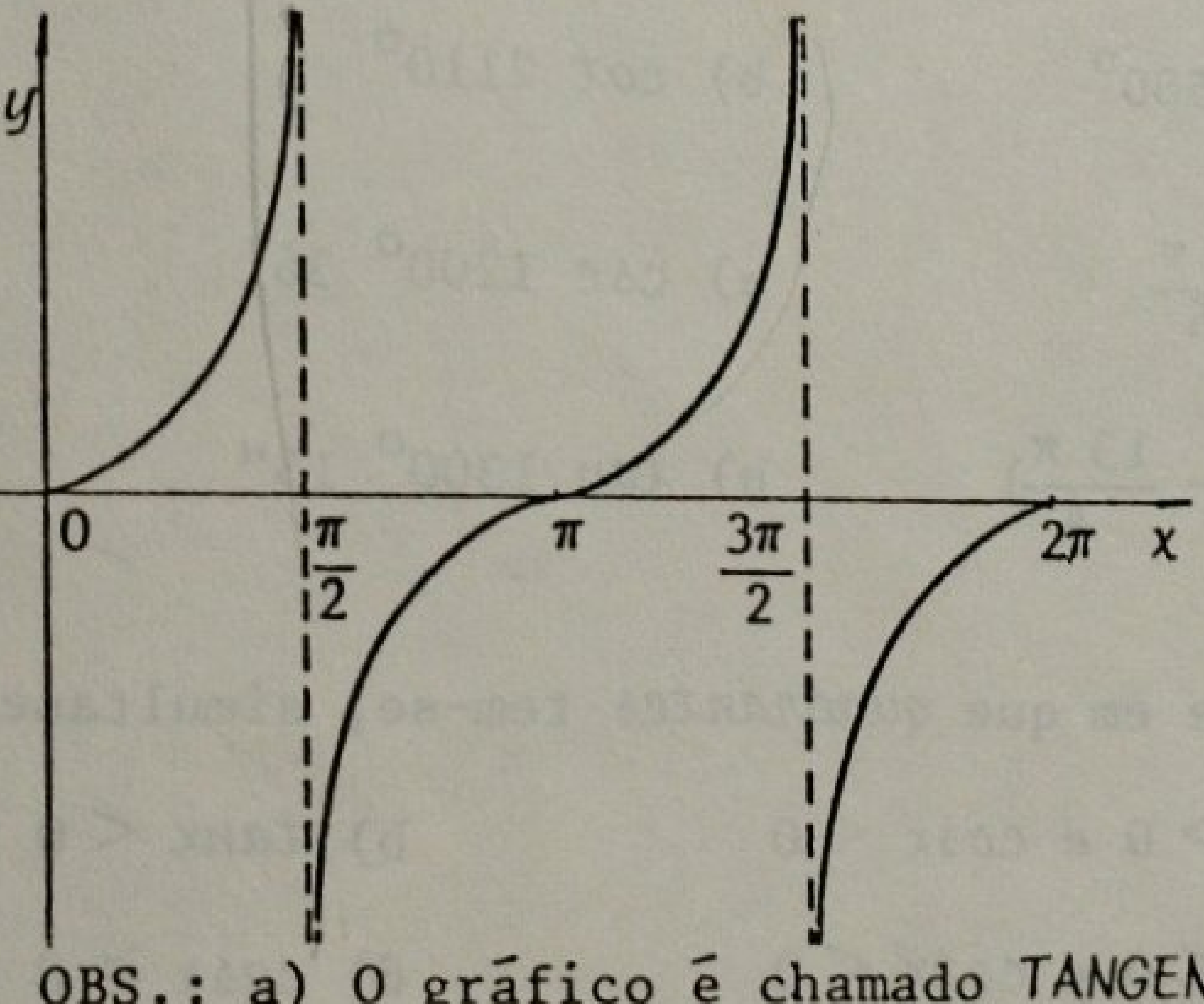
3.6.3 VALORES NOTÁVEIS

Mediante a definição, complete:

x	0	$\frac{\pi}{2}-\epsilon$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+\epsilon$	π	$\frac{3\pi}{2}-\epsilon$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}+\epsilon$	2π
$y = \tan x$	0	+∞	∄	−∞	0	+∞	∄	−∞	0

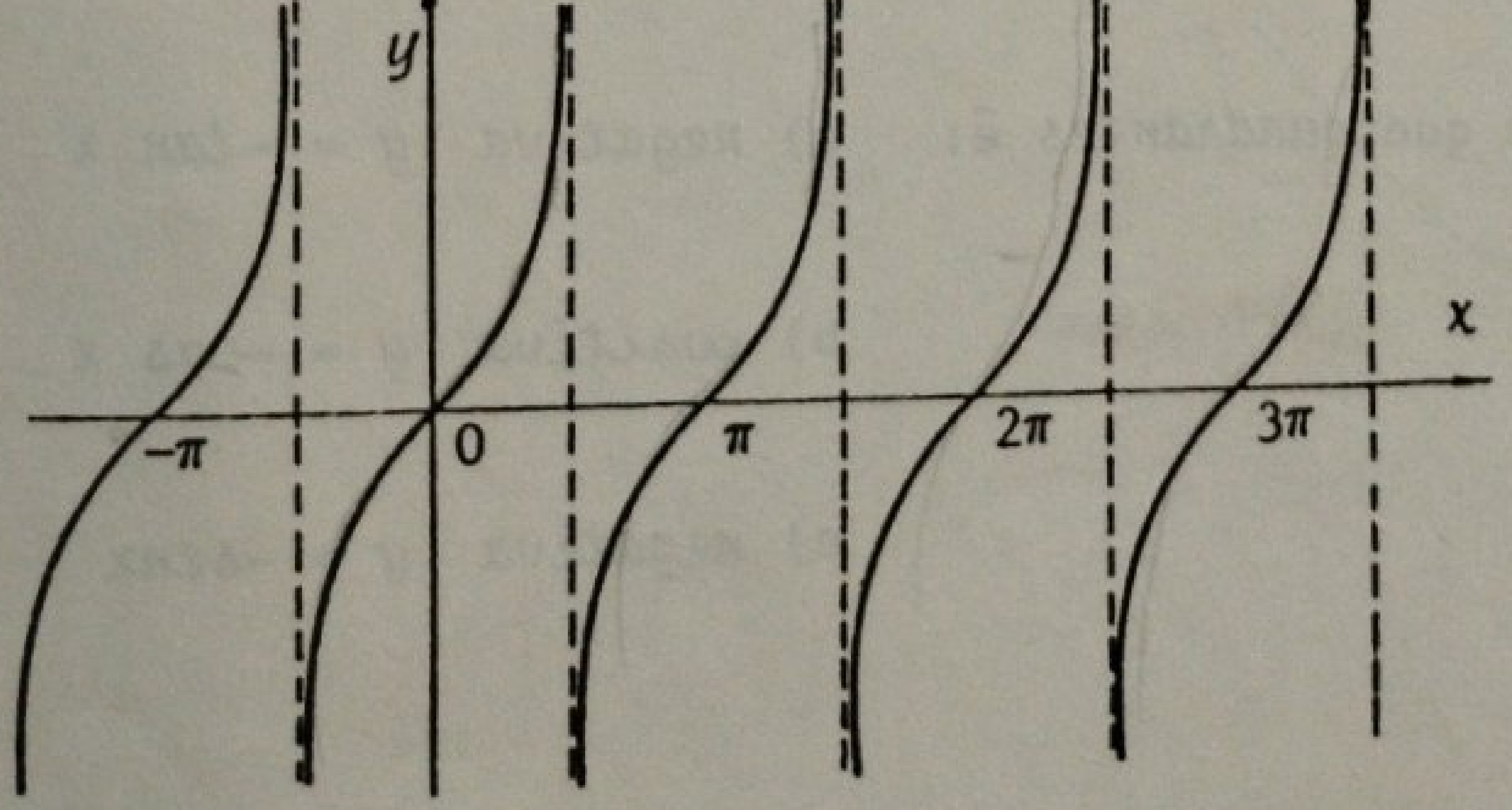
3.6.4 GRÁFICO

x	$y = \tan x$
0	0
$\frac{\pi}{2}-\epsilon$	+∞
$\frac{\pi}{2}$	∄
$\frac{\pi}{2}+\epsilon$	−∞
π	0
$\frac{3\pi}{2}-\epsilon$	+∞
$\frac{3\pi}{2}$	∄
$\frac{3\pi}{2}+\epsilon$	−∞
2π	0



OBS.: a) O gráfico é chamado *TANGENTÓIDE*.

b) A *tangentóide* continua à direita de 2π e a esquerda de 0.



3.6.5 DOMÍNIO. IMAGEM. PERÍODO

Observando o gráfico da *função tangente*, temos:

a) *Domínio*: $\boxed{D = \{X \in \mathbb{R} \ / \ X \neq K\pi + \frac{\pi}{2}\}}$

b) *Imagem*: $\boxed{Im = \mathbb{R}}$

c) *Período*: $\boxed{p = \pi rad}$

3.7 FUNÇÃO COTANGENTE

Função cotangente é definida por $y = cot\ x$, onde $\boxed{cot\ x = \frac{1}{tan\ x}}$, para $x \neq K\pi$.

Por outro lado, como $tan\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$, também podemos escrever que $\boxed{cot\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x}}$, para $x \neq K\pi$.

EXERCÍCIOS:

E.21 Determine os *sinais*:

a) $cos\ 1580^{o}$

b) $cot\ 2110^{o}$

c) $tan\ \frac{12\pi}{5}$

d) $sec\ \frac{5\pi}{6}$

e) $csc\ 1200^{o}\ 36'$

f) $sen\ (-2008^{o})$

g) $cos\ (-\frac{13\pi}{4})$

h) $tan\ 1300^{o}\ 15''$

i) $csc\ \frac{27\pi}{5}$

E.22 Verifique em que *quadrantes* tem-se, simultaneamente:

a) $senx > 0$ e $cosx < 0$

b) $tanx < 0$ e $secx > 0$

c) $senx < 0$ e $cotx < 0$

d) $cosx > 0$ e $cscx < 0$

e) $secx < 0$ e $cscx < 0$

f) $cotx > 0$ e $cosx > 0$

E.23 Em que *quadrantes* é:

a) *negativa* $y = -tan\ x$

b) *positiva* $y = -cos\ x$

c) *negativa* $y = -senx$

E.24 Indique os *quadrantes* onde:

a) $y = \tan x . \operatorname{sen} x$ *é negativo*

b) $y = \operatorname{sen} x . \sec x$ *é positivo*

c) $y = -\cos x . \cot x$ *é negativo*

d) $y = -\operatorname{sen} x . \cos x$ *é positivo*

e) $y = \operatorname{sen} x . \tan x . \sec x$ *é negativo*

f) $y = -\csc x . \sec x . \tan x$ *é negativo*

E.25 Dê o *sinal* de cada expressão:

a) $y = \dfrac{\sec x \; . \; \operatorname{sen} x}{\csc x \; . \; \tan x}$ para x do 4º *quadrante*

b) $y = \dfrac{\tan x \; . \; \cos x}{\operatorname{sen} x \; (\cos x + \sec x)}$ para x do 2º *quadrante*

c) $y = \dfrac{\operatorname{sen} 240^{o} \; . \; \cos 330^{o}}{\cot 212^{o} \; . \; \csc 49^{o}}$

d) $y = \dfrac{\tan 932^{o} \; . \; \sec 1950^{o}}{\operatorname{sen} 1110^{o} \; . \; \csc 1600^{o}}$

e) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(-1670^{o}) \; . \; \sec(-680^{o})}{\cot(-1000^{o}) \; . \; \cos(-955^{o})}$

f) $y = \dfrac{\cot 3431^{o} \; . \; \sec \dfrac{3\pi}{5}}{\operatorname{sen}(-\dfrac{16\pi}{3}) \; . \; \tan(-1081^{o})}$

E.26 Determinar os *quadrantes* do *arco* x:

a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

b) $\cot x = -\dfrac{1}{3}$

c) $\cos x = \dfrac{1}{3}$

d) $\csc x = \sqrt{2}$

e) $\tan x = 31$

f) $\sec x = \sqrt{3}$

g) $\sec x = -4$

h) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{5}$

E.27 Determine os *valores*:

a) $\cos 450^{o}$ b) $\operatorname{sen} 900^{o}$ c) $\cos 1620^{o}$ d) $\sec(-1530^{o})$

e) $\operatorname{sen}(-990^{o})$ f) $\tan 64\pi$ g) $\cos 27\pi$ h) $\tan \dfrac{7\pi}{2}$

E.28 Calcule o *valor*:

a) $$y = \frac{3sen90^\circ - 2cos180^\circ + sen270^\circ}{5cos0^\circ + 3sen360^\circ - 2cos90^\circ}$$

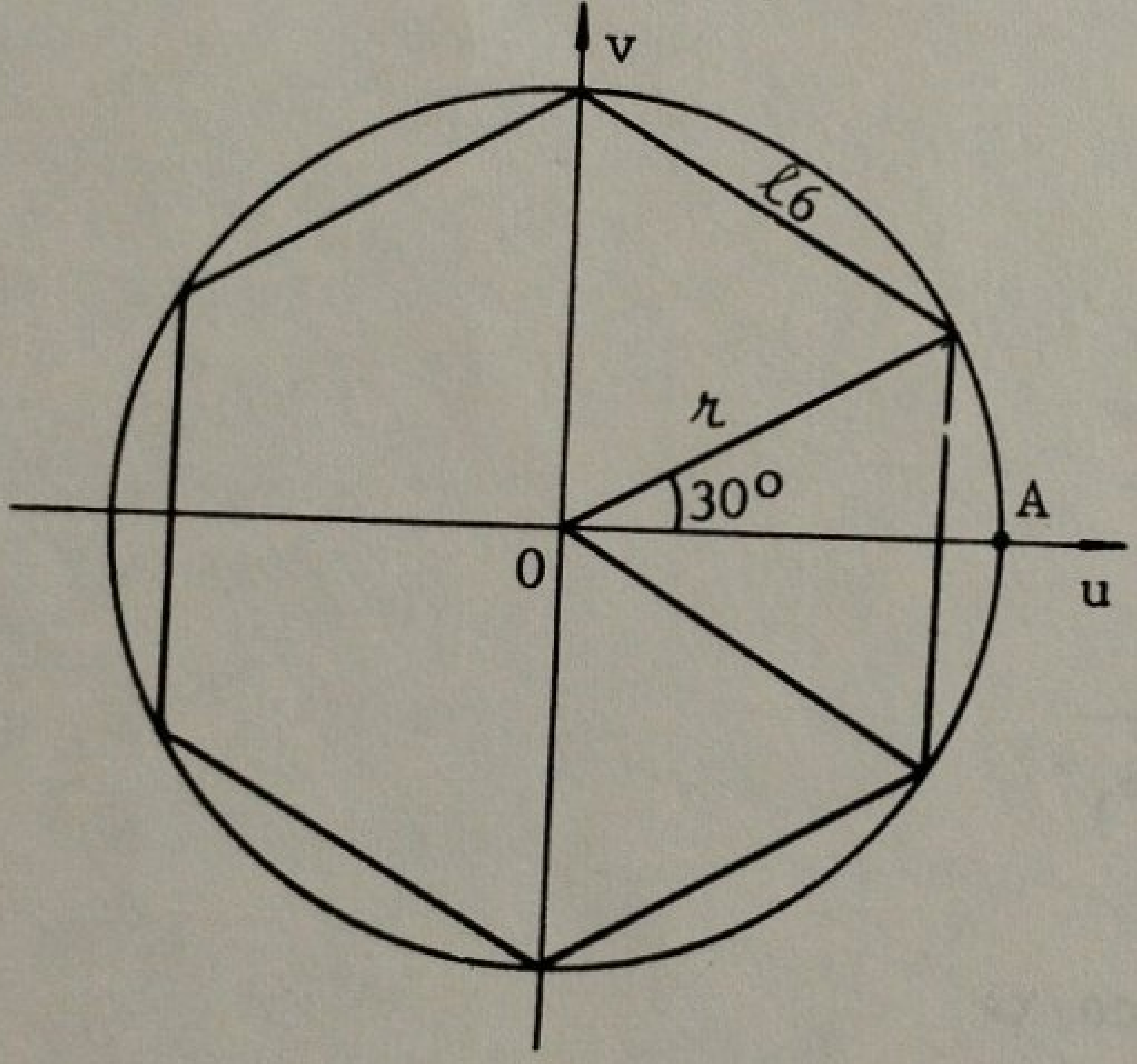
b) $$y = \frac{sen90^\circ + cos360^\circ + 2sen270^\circ}{cos180^\circ + tgn180^\circ + cot90^\circ}$$

c) $$y = \frac{sen\,\frac{3\,\pi}{2} + cos\ 2\pi - tan\ 73\pi}{cos98\pi + tan14\pi + sen\ 45\pi}$$

d) $$y = \frac{2cos97\pi + 3sec46\pi - 5sen33\pi}{csc\,\frac{9\pi}{2} + 3csc\,\frac{3\pi}{2} - 2sen\,\frac{\pi}{2}}$$

3.8 VALORES DAS FUNÇÕES CIRCULARES DOS ARCOS DE 30°, 45° e 60°

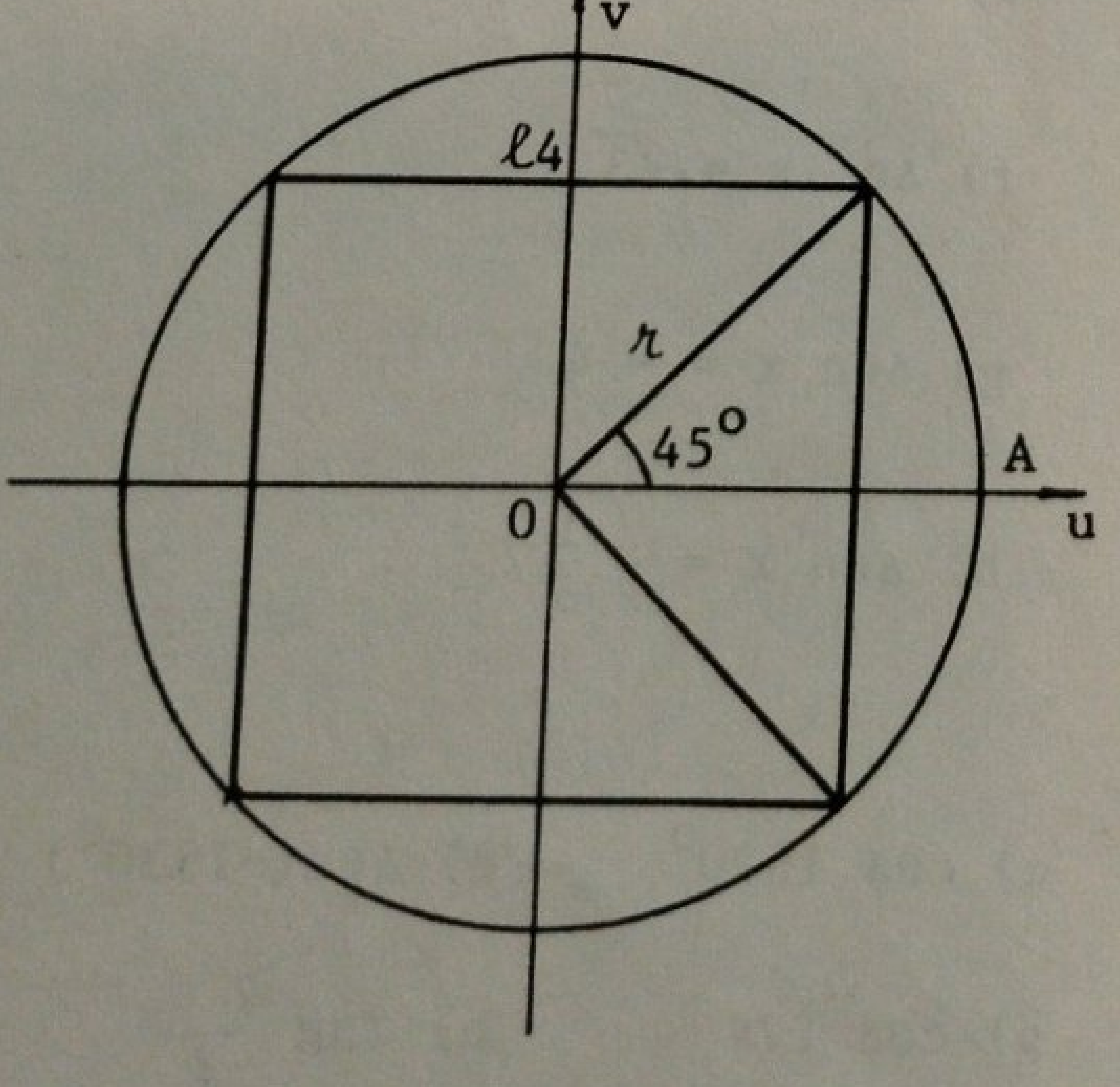
SENO DE 30°, 45° e 60°:



Como no *hexágono regular inscrito* temos: $\ell_6 = r$:

$sen\ 30^\circ = \frac{\ell_6}{2} = \frac{r}{2}$, como $r = 1$,

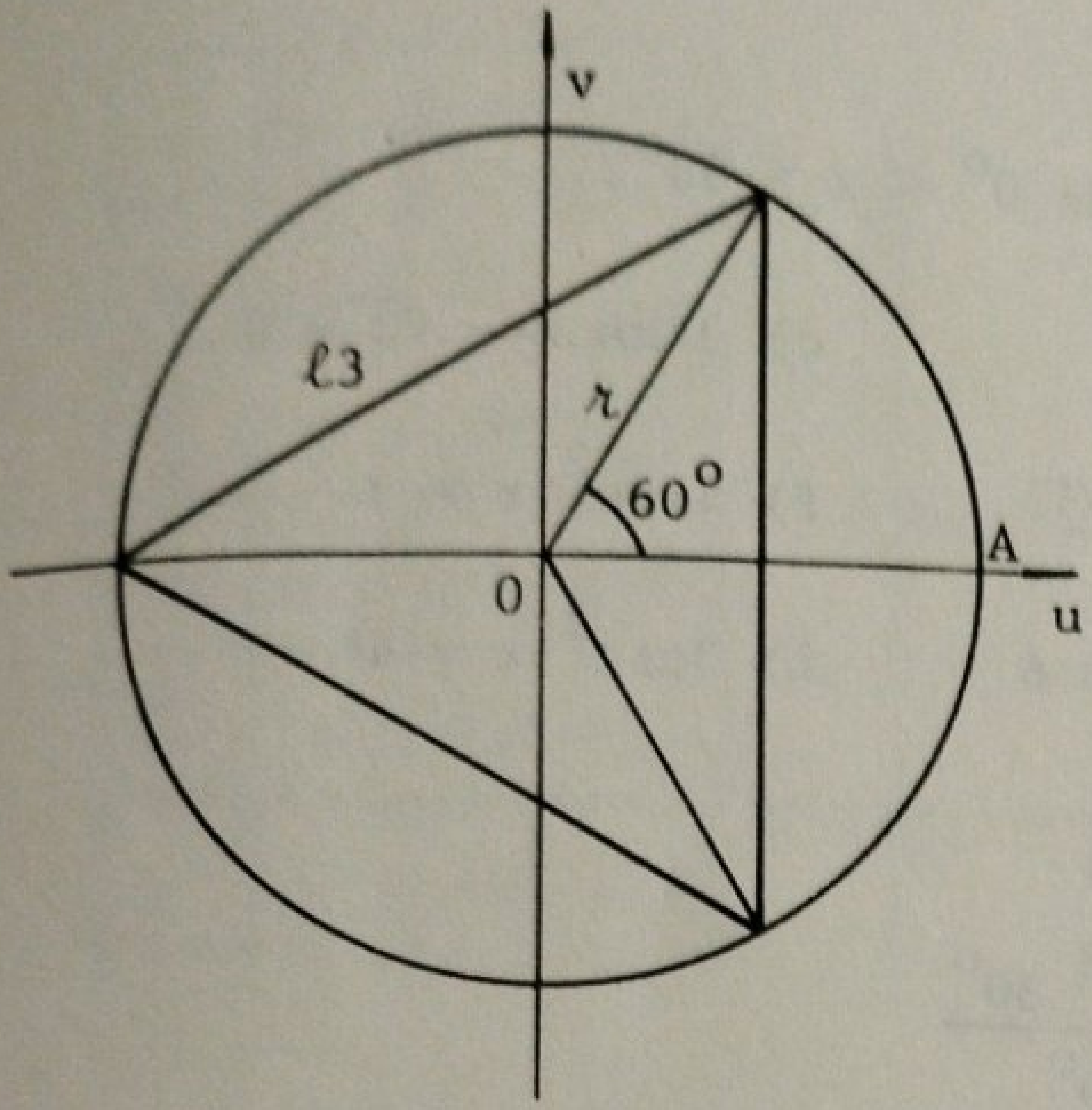
$$\boxed{sen\ 30^\circ = \frac{1}{2}}$$



Como no *quadrado inscrito* temos: $\ell_4 = r\sqrt{2}$:

$sen\ 45^\circ = \frac{\ell_4}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$,como $r = 1$,

$$\boxed{sen\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$



Como no *triângulo equilátero inscrito* temos: $\ell_3 = r\sqrt{3}$:

$$sen\ 60^\circ = \frac{\ell_3}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$, como $r = 1$,

$$\boxed{sen\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Complete a tabela, sabendo que:

a) $\cos x = sen\,(90^\circ - x)$

b) $\tan x = \frac{sen\ x}{\cos x}$

c) $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ ou $\cot x = \tan\,(90^\circ - x)$

d) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

e) $\csc x = \frac{1}{sen\ x}$ ou $\csc x = \sec\,(90^\circ - x)$

— fazer no caderno

	sen	*cos*	*tan*	*cot*	*sec*	*csc*
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

EXERCÍCIOS:

E.29 Determinar o valor de x, sabendo que $0^o < x < 90^o$:

a) $sen\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $sec\ x = 2$ c) $3tan\ x - \sqrt{3} = 0$

d) $\sqrt{3}\ cot\ x = 1$ e) $2cos\ x = \sqrt{3}$ f) $4sen^2\ x = 3$

g) $7tan^2\ x + 5 = 12$ h) $2+2sec\ x = 6$ i) $3csc^2\ x = 4$

E.30 Calcular o valor de cada *expressão*:

a) $y = \dfrac{3tan\ 30^o - 2sen\ 60^o + 9sec^2\ 30^o}{tan\ 45^o + sec\ 60^o - 5cos\ 60^o}$

b) $y = \dfrac{sen^2\ 45^o - 3tan\ 30^o + 3cot\ 60^o}{3cos^2\ 45^o - cot^2\ 30^o + cos\ 60^o}$

c) $y = \dfrac{2tan\ 45^o - 6cos^2\ 30^o - 5sec\ 60^o}{-3sec^2\ 30^o + 4sen\ 45^o - 2csc\ 45^o}$

d) $y = \dfrac{4sec^2\ \frac{\pi}{6} - 3tan\ \frac{\pi}{4} + 6cos^2\ \frac{\pi}{4}}{4cot^2\ \frac{\pi}{4} - 9cot^2\ \frac{\pi}{3} + sec\ \frac{\pi}{4}}$

e) $y = \dfrac{3cos\ \frac{\pi}{3} + 2cos^2\ \frac{\pi}{4} - 2cot\ \frac{\pi}{4}}{3tan^2\ \frac{\pi}{6} - 2sec\ \frac{\pi}{3} + sen^2\ \frac{\pi}{4}}$

f) $y = \dfrac{2sen\ \frac{\pi}{6} - 4cot\ \frac{\pi}{4} + 3csc^2\ \frac{\pi}{6}}{3tan\ \frac{\pi}{6} + 2cos^2\ \frac{\pi}{6} - cot\ \frac{\pi}{6}}$

Exemplos:

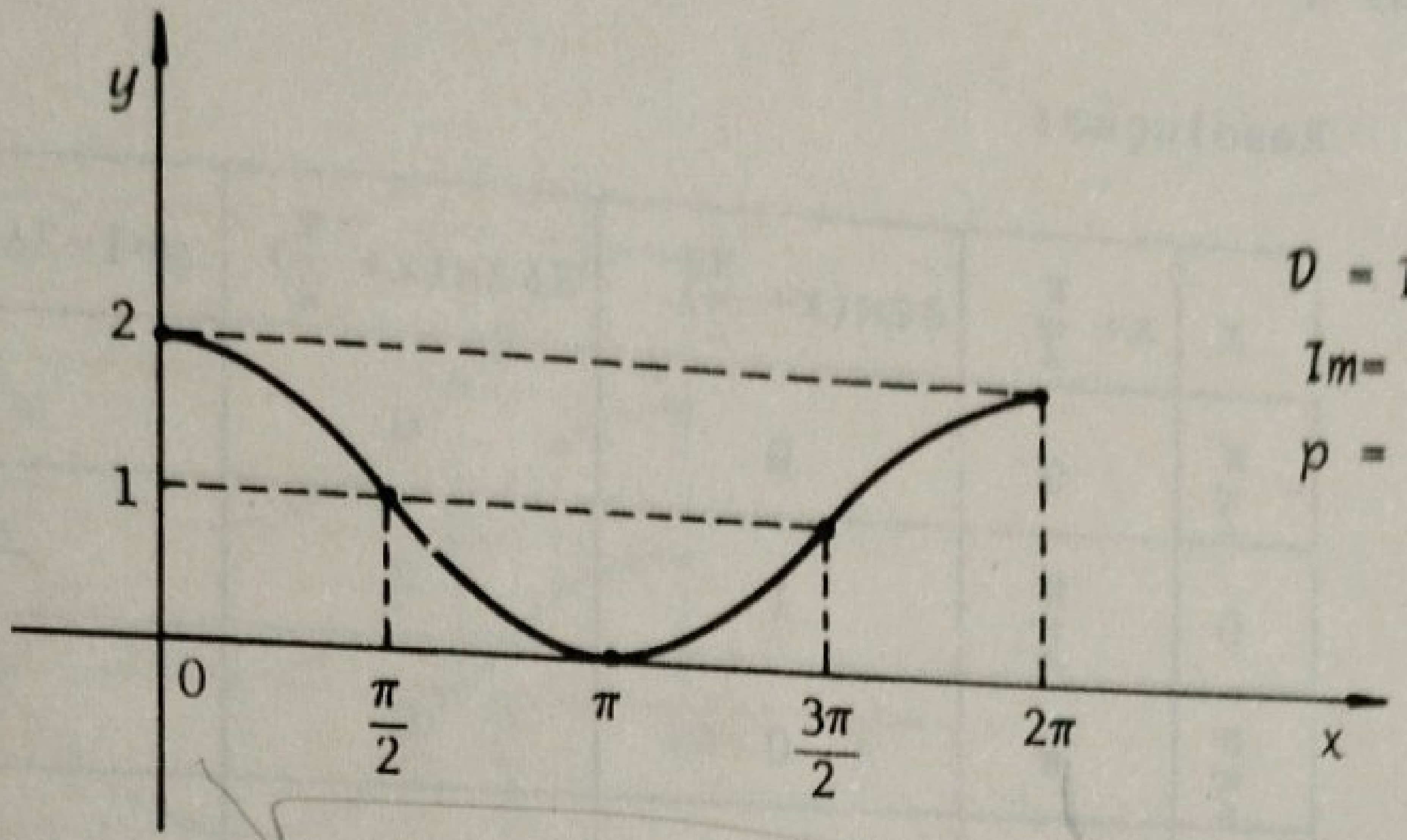
1. Construir o gráfico e dar o *domínio*, *imagem* e o *período das funções*:

a) $y = 1 + cos\ x$

Resolução:

Atribuindo à x, *valores de arcos* para uma volta no *ciclo*, temos a seguinte tabela:

x	cos x	y=1+cos x
0	1	1+1 = 2
$\frac{\pi}{2}$	0	1+0 = 1
π	-1	1+(-1)=0
$\frac{3\pi}{2}$	0	1+0 = 1
2π	1	1+1 = 2

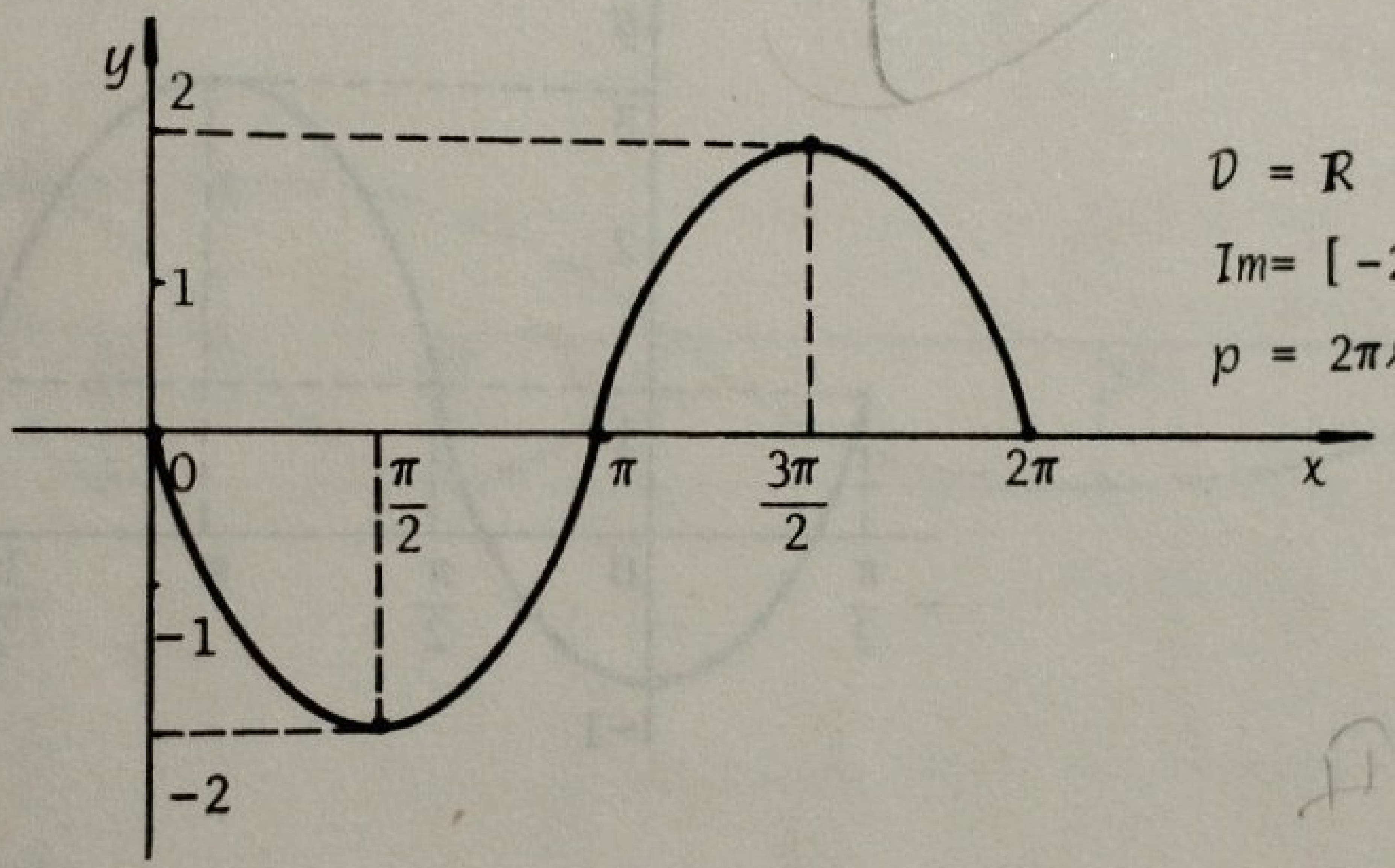


D = R
Im= [0;2
p = 2πra

b) $y = -2\ sen\ x$

Resolução:

x	sen x	y=-2sen x
0	0	-2.0 = 0
$\frac{\pi}{2}$	1	-2.1 =-2
π	0	-2.0 = 0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2.(-1)=2
2π	0	-2.0 = 0

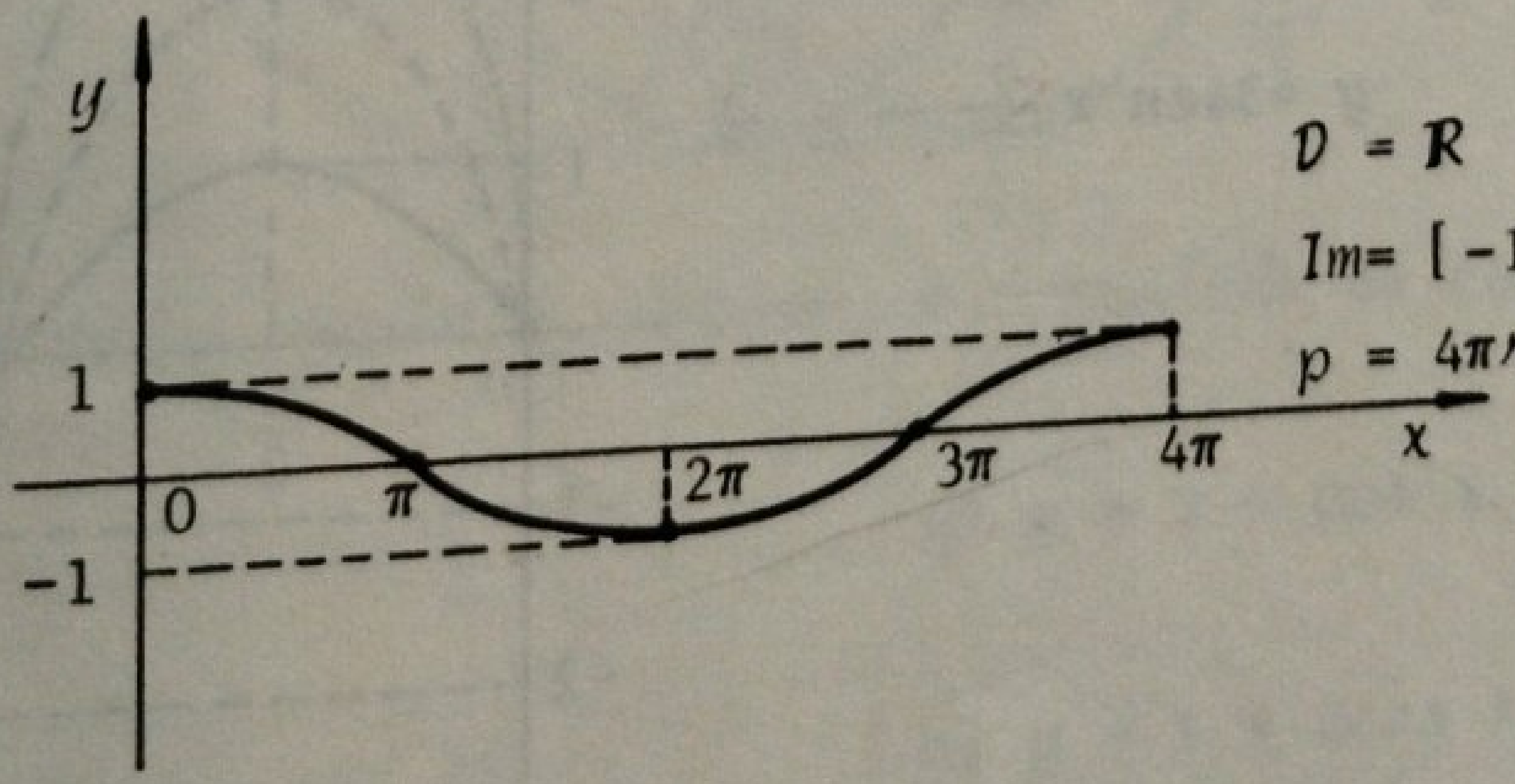


D = R
Im= [-2;2]
p = 2πrad

c) $y = cos\ \frac{x}{2}$

Resolução:

x	$\frac{x}{2}$	$y=cos\ \frac{x}{2}$
0	0	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
2π	π	-1
3π	$\frac{3\pi}{2}$	0
4π	2π	1



D = R
Im= [-1;1]
p = 4πrad

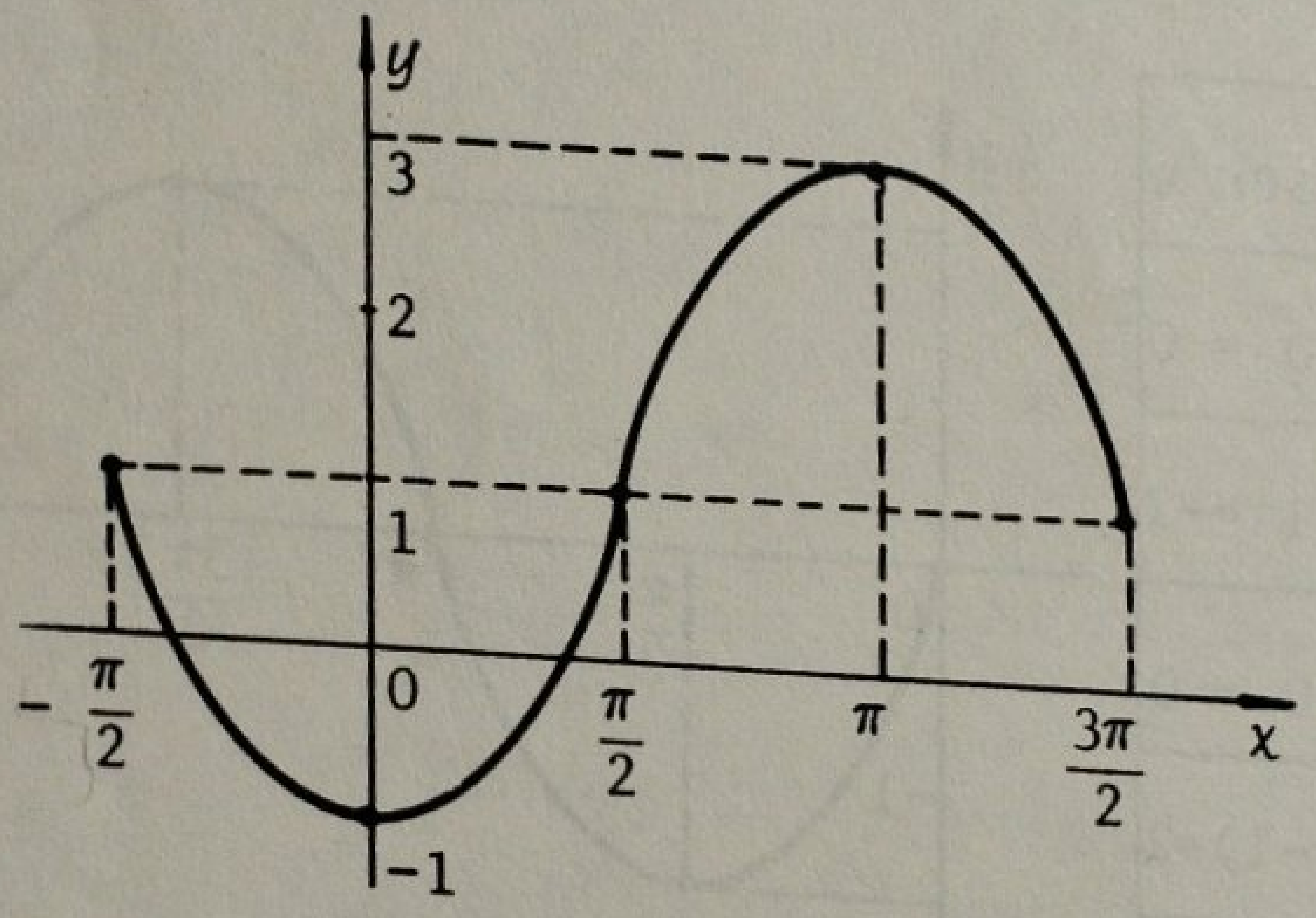
d) $y = 1 - 2\ sen\ (x + \frac{\pi}{2})$

$x+\frac{\pi}{2}=0$

$x=-\frac{\pi}{2}$

Resolução:

x	$x+\frac{\pi}{2}$	$sen(x+\frac{\pi}{2})$	$2sen(x+\frac{\pi}{2})$	$y=1-2sen(x+\frac{\pi}{2})$
$-\frac{\pi}{2}$	0	0	0	1
0	$\frac{\pi}{2}$	1	2	−1
$\frac{\pi}{2}$	π	0	0	1
π	$\frac{3\pi}{2}$	−1	−2	3
$\frac{3\pi}{2}$	2π	0	0	1



$D = \mathbb{R}$

$Im = [-1;3]$

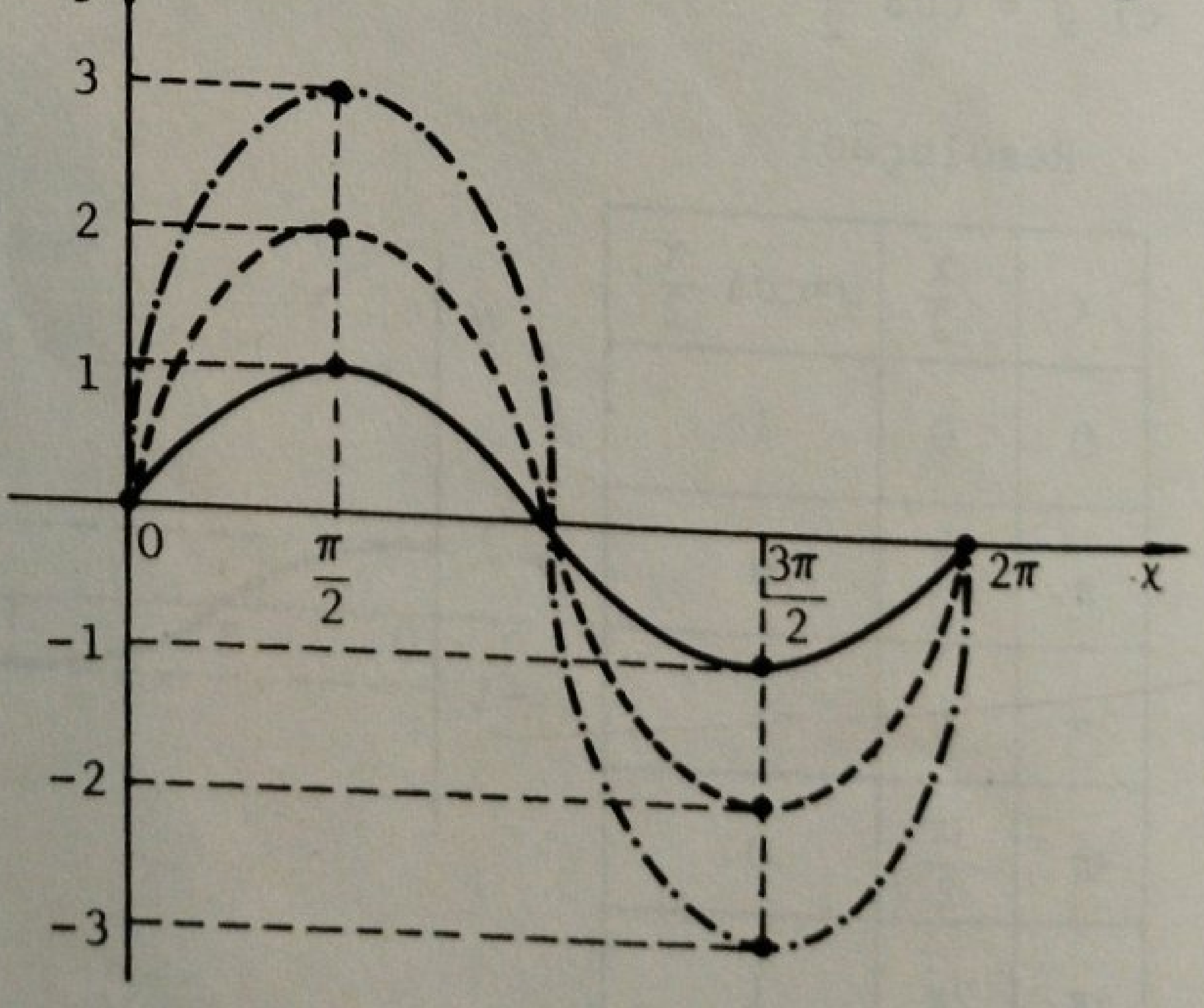
$p = 2\pi rad$

2. Construir os gráficos das *funções* abaixo, num mesmo sistema de *eixos*:

a) $y = sen\ x$; (————)

$y = 2sen\ x$; (------)

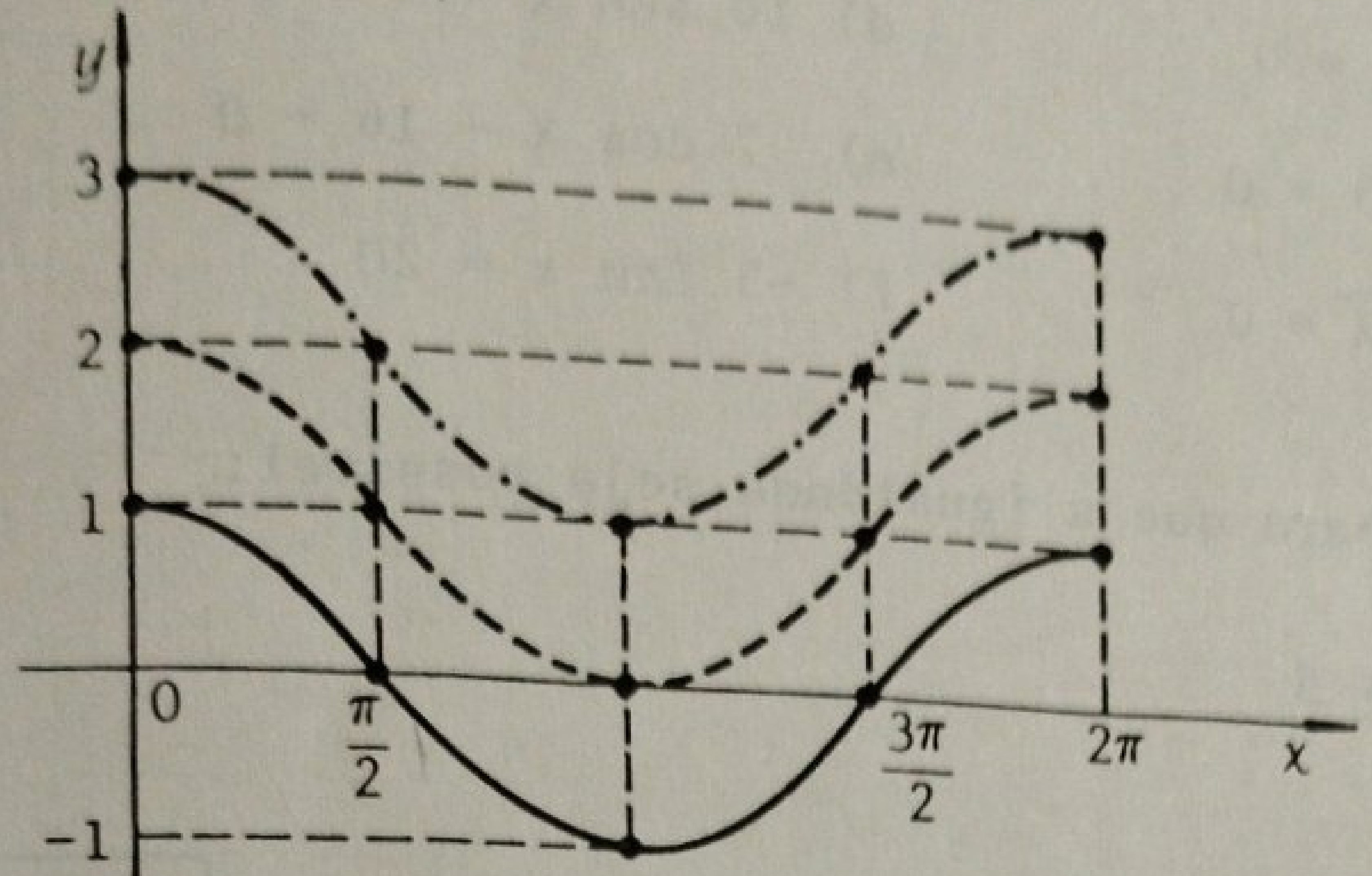
$y = 3sen\ x$; (—·—·—·)



b) $y = cos\ x$; (————)

$y = 1 + cos\ x$; (– – – – – –)

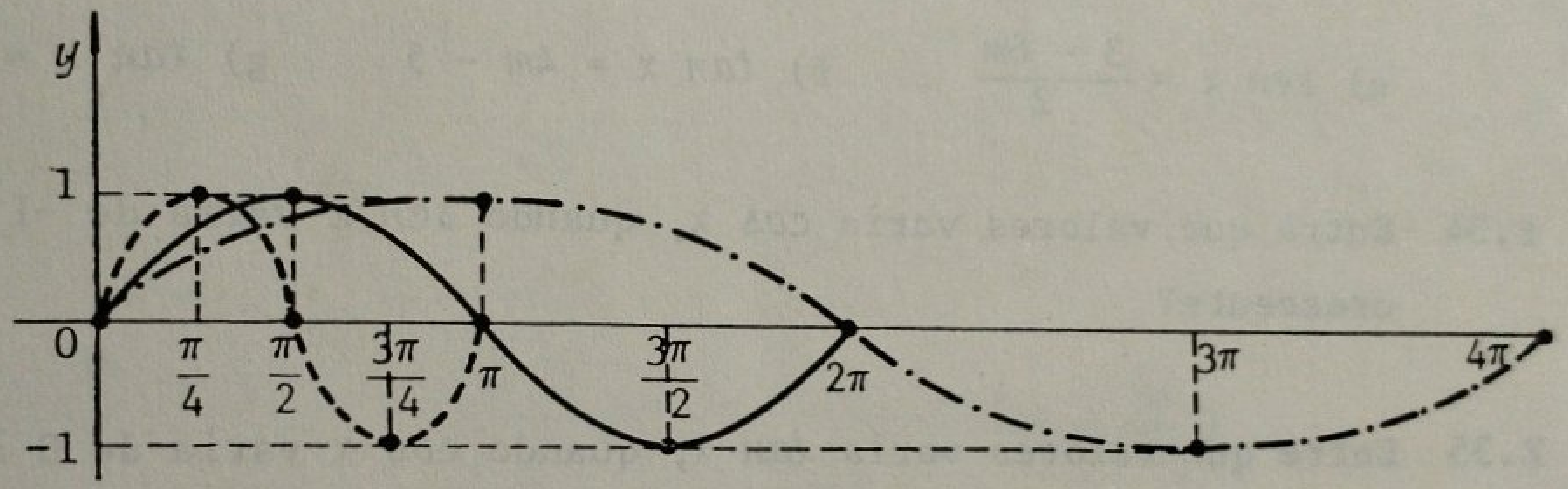
$y = 2 + cos\ x$; (—·—·—·—)



c) $y = sen\ x$; (————)

$y = sen\ 2x$; (– – – – – –)

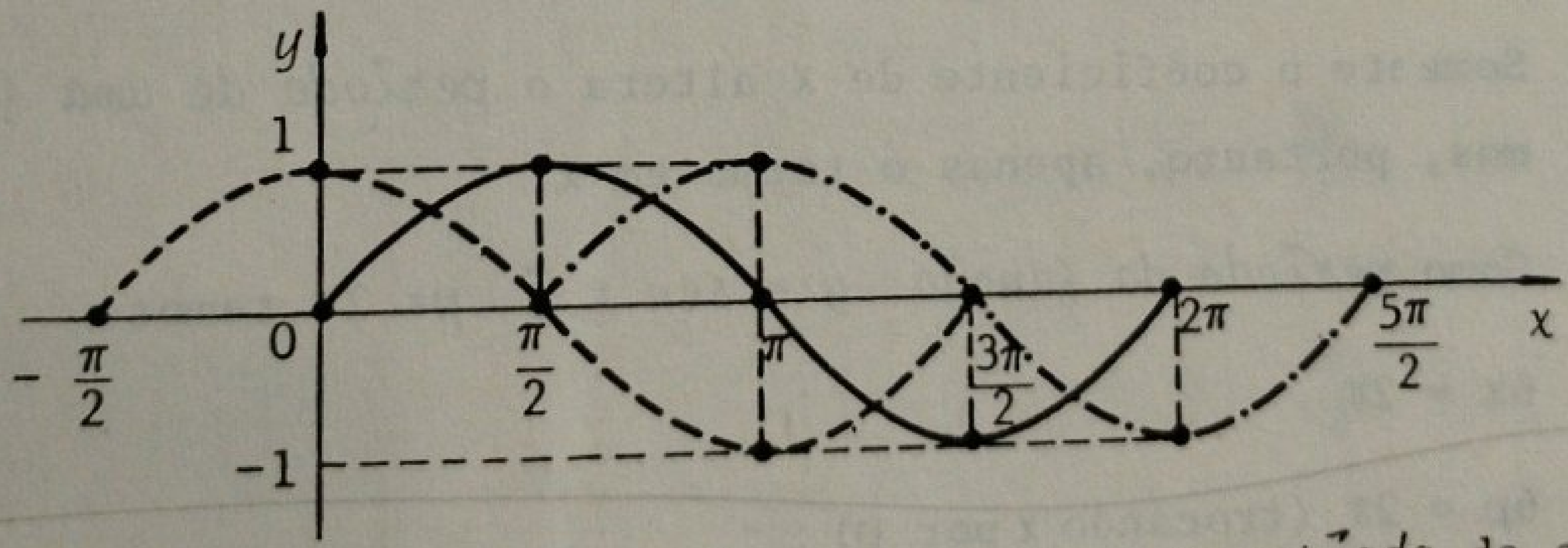
$y = sen\ \frac{x}{2}$; (—·—·—·—)



d) $y = sen\ x$; (————)

$y = sen\ (x - \frac{\pi}{2})$; (—·—·—·—)

$y = sen\ (x + \frac{\pi}{2})$; (– – – – – –)



E.31 Construir o gráfico e dar o *domínio*, *imagem* e o *período* de cada função:

a) $y = 2 + sen\ x$

b) $y = -\ cos\ x$

c) $y = 2sen\ x$

d) $y = sen\ \frac{x}{2}$

e) $y = cos\ 2x$

f) $y = |sen\ x|$

g) $y = 3 - cos\ x$

h) $y = 1 + 2cos\ x$

i) $y = 2 + sen\ (2\ x - \pi)$

E.32 Verificar se as igualdades são verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) $5\,sen\ x + 4 = 0$

b) $3\,tan\ x - 15 = 0$

c) $4\cos x + \sqrt{2} = 0$

d) $10\,sen\ x + 7 = 0$

e) $7\cos x - 16 = 0$

f) $-5\,tan\ x = 20$

E.33 Determinar m para que a igualdade seja possível:

a) $sen\ x = 2m - 5$

Resolução:

Como $-1 \leqslant sen\ x \leqslant 1$, temos: $-1 \leqslant 2m - 5 \leqslant 1 \Rightarrow \boxed{2 \leqslant m \leqslant 3}$

b) $\cos x = \frac{2m - 4}{3}$

c) $\cos x = 3 - 4m$

d) $sen\ x = 11 - 3m$

e) $sen\ x = \frac{3 - 6m}{2}$

f) $tan\ x = 4m - 5$

g) $tan\ x = \sqrt{2 - m}$

E.34 Entre que valores varia $\cos x$, quando $sen\ x$ varia de -1 a 0, para x crescente?

E.35 Entre que valores varia $tan\ x$, quando $\cos x$ varia de 0 à -1, para x crescente?

E.36 Determinar o *período das funções*, sem construir tabelas ou gráfico:

a) $y = 2 - 3sen\ (6x + \frac{\pi}{2})$

Somente o coeficiente de x altera o *período de uma função*. Tomamos, portanto, apenas o termo em x.

Como *período da função* $y = sen\ x$ é $p = 2\pi$ temos:

$6x = 2\pi$

$6p = 2\pi$ (trocando x por p)

$$\boxed{p = \frac{\pi}{3}\ rad}$$

b) $y = 5 + 2\,tan\ (2x - \frac{\pi}{4})$

Sabemos que *período da função* $y = tan\ x$ é $p = \pi\ rad$.

$2x = \pi \rightarrow 2p = \pi \rightarrow \boxed{p = \frac{\pi}{2}\ rad.}$

c) $y = 3\cos\left(\frac{x}{8} - \pi\right)$

d) $y = 5 - sen\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)$

e) $y = 1 - 3\cos(4x + \pi)$

f) $y = 4 - \tan\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$

g) $y = 1 + 3\, sen\left(11x + \frac{\pi}{2}\right)$

h) $y = 2 - 4\tan\left(\frac{5x}{2} - \pi\right)$

E.37 Determinar o *domínio das funções*:

a) $y = 3 - 2\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

A *função* $y = \tan x$ possui o *domínio* $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq K\pi + \frac{\pi}{2}\}$

Logo o *arco* $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$, deverá ser diferente de $K\pi + \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \neq K\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2x - \pi \neq 4K\pi + 2\pi$$

$$2x \neq 4K\pi + 3\pi$$

$$x \neq 2K\pi + \frac{3\pi}{2}$$

O *domínio da função será* $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2K\pi + \frac{3\pi}{2}\}$

b) $y = \tan 2\, x$

c) $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

d) $y = 2\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

e) $y = 4 - \cot\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

f) $y = 3 + 2\cot\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

g) $y = 2 + \sec(2x + 140^{o})$

h) $y = \sec\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)$

i) $y = 6\csc\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

j) $y = 1 - \csc\left(\frac{x}{3} - \frac{3\pi}{2}\right)$

l) $y = 2 + \sec\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

m) $y = 2 - 5\, sen\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$

n) $y = 10 + 3\cos(2x - \pi)$

E.38 Uma partícula realiza *MHS* obedecendo à lei horária $e = 4\cos\frac{\pi}{4}t$, onde t é medido em s e a elongação e em cm.

Determinar: a) *o período T do movimento*

b) *o valor da elongação quando* $t = 2s$

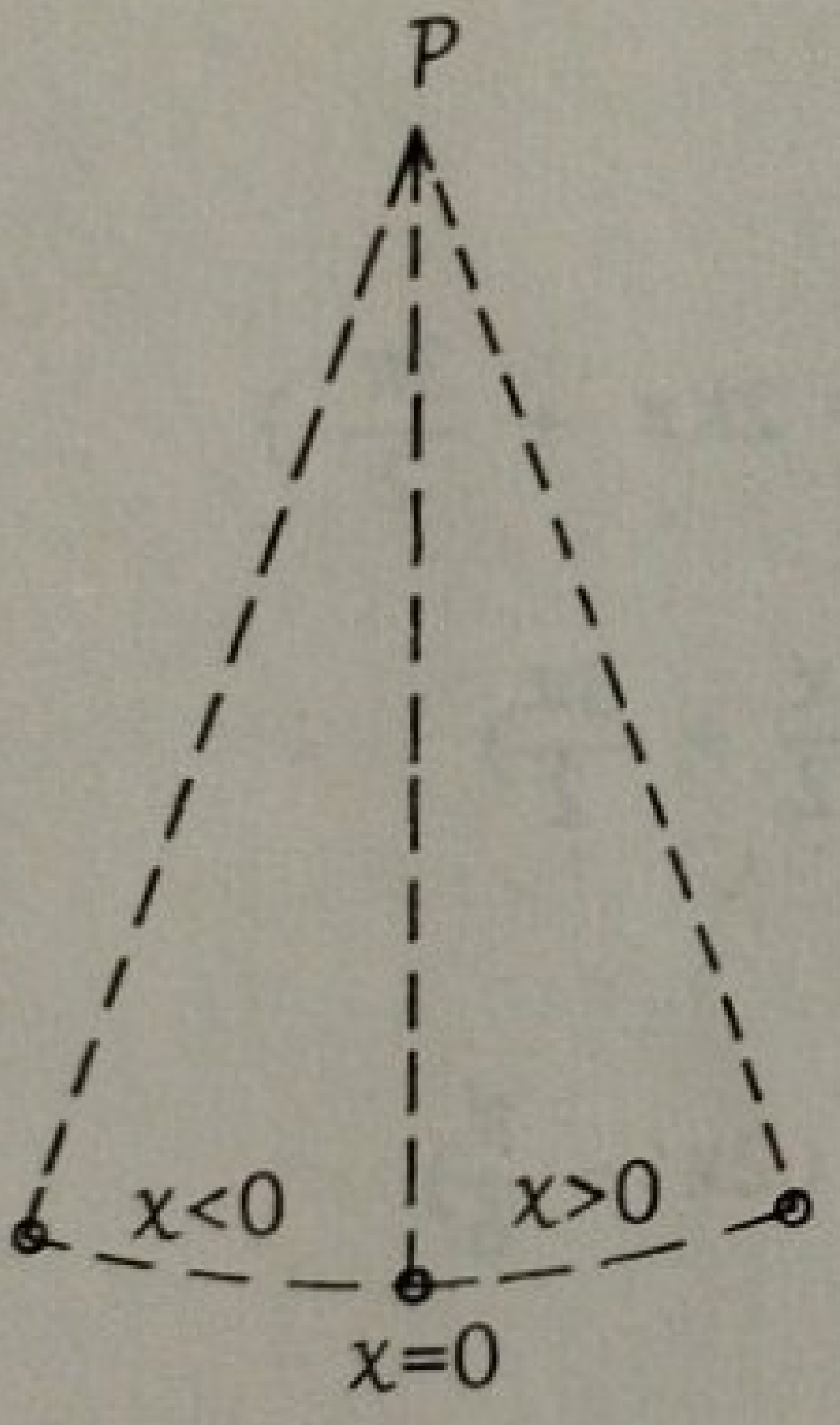
APLICAÇÃO PRÁTICA DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Certos fenômenos naturais apresentam comportamentos oscilatórios e se assemelham às variações das *FUNÇÕES SENO e COSSENO*. Por essa razão, a Física e a Engenharia, utilizam desta semelhança para melhor descrever tais fenômenos.

Exemplos:

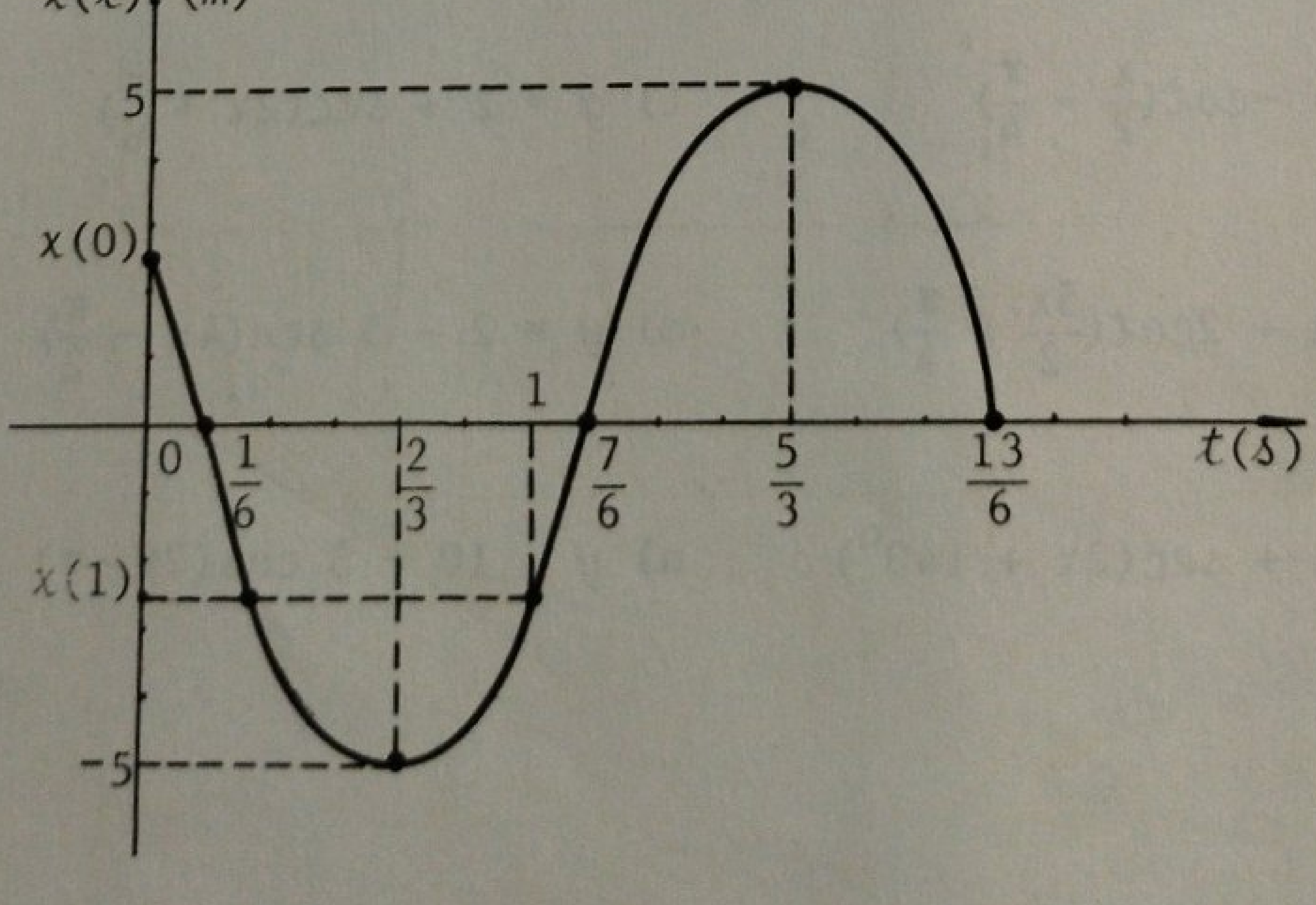
1. No movimento de um pêndulo, se o comprimento do fio é muito grande, comparado ao deslocamento, e o atrito é desprezado, o movimento pode ser caracterizado pela equação $x = A\cos(wt + \delta)$.

Onde A, W e δ são constantes, chamados *parâmetros do movimento*, e x é a posição do corpo no instante t, em relação à posição de equilibrio ($x = 0$). Convencionando o deslocamento à direita como positivo, e à esquerda como negativo.



Tomando por exemplo, o movimento caracterizado pelos *parâmetros* $A = 5$m $W = \pi\ rad/s$ e $\delta = \frac{\pi}{3}\ rad$, temos:

$x = 5\cos(\pi t + \frac{\pi}{3})$ que é a equação do deslocamento em função do tempo, cujo gráfico é:



Determinar:

a) A distância máxima do corpo à posição de equilíbrio (Amplitude);

b) O período (tempo gasto para uma oscilação completa);

c) A distância do corpo à posição de equilíbrio em $t = 0s$ (fase inicial);

d) A posição do corpo em $t = 1\ s$.

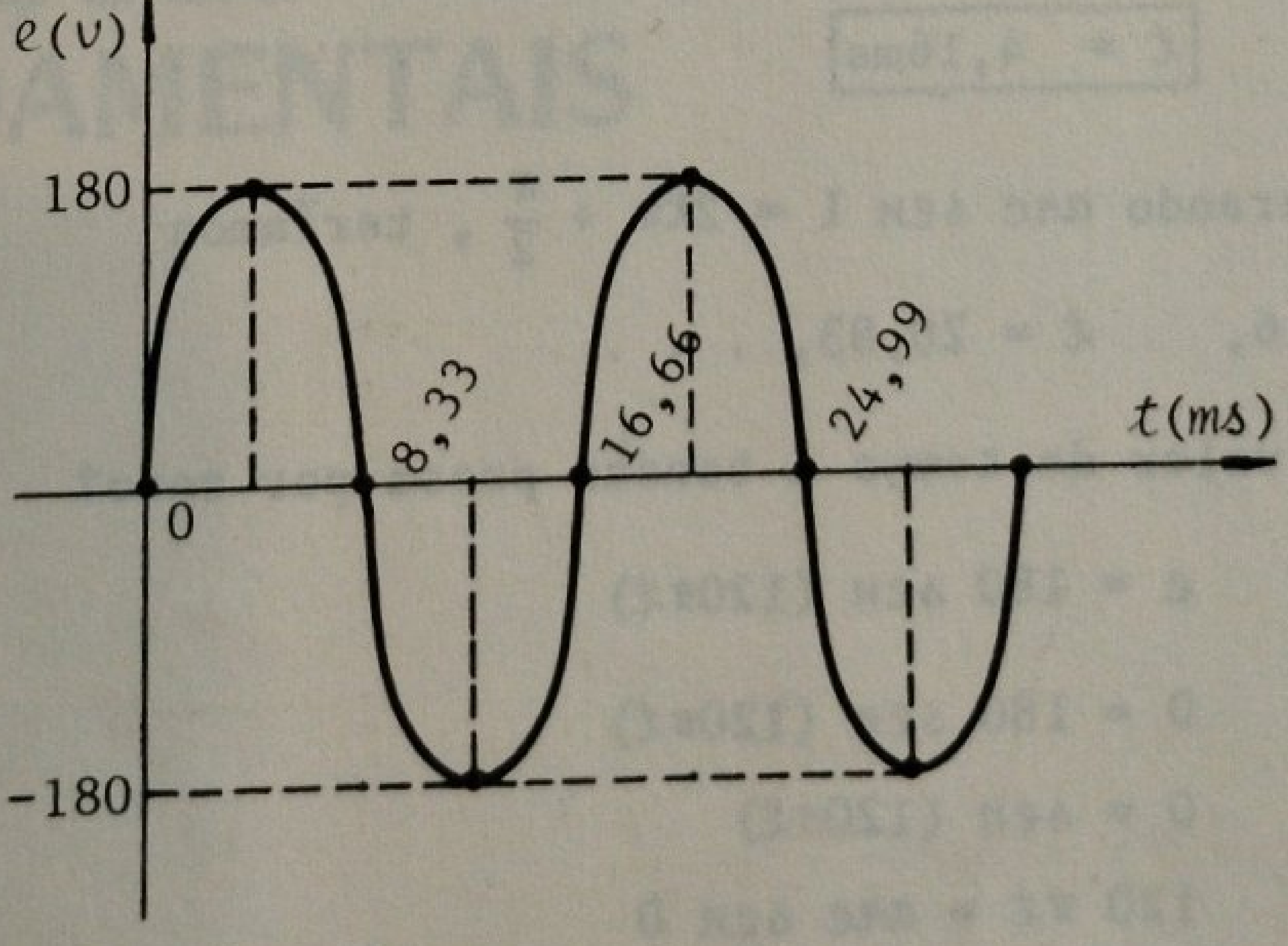
Respostas:

Observando o gráfico, concluimos que:

a) 5m ; b) 2s ; c) 2,5m ; d) 2,5m à esquerda do posição de equilíbrio.

2. A equação $e = Emax.\ sen\ (2\pi\ Ft)$, representa a tensão elétrica em função do tempo. Consideremos um sistema elétrico com 60 Hz de frequência (F) e 127 V de valor eficaz (Eef).

Como o período (T) é obtido pela igualdade $T = \frac{1}{F}$, obtemos $T = 16,66 \times 10^{-3} s$. Sabendo ainda que, $Emax = Eef\ .\ \sqrt{2}$, temos $Emax$ = 180V. A senóide abaixo, representa o gráfico do sistema descrito, cuja equação é $e = 180\ sen\ (120\ \pi t)$. onde e = *valor instantâneo da tensão*.



Determinar:

a) A tensão após 4ms.

Resolução: $e = 180\ sen\ (120\pi t)$

$e = 180\ sen\ (120\pi\ 4.10^{-3})$

$\boxed{e =\ 179,64\ V}$

) A tensão após 6ms.

esolução: $e = 180\ sen\ (120\pi t)$

$e = 180\ sen\ (120\pi\ .6.10^{-3})$

$\boxed{e =\ 138,69\ V}$

) A tensão após 9ms.

esolução: $e = 180\ sen\ (120\pi\ .9.10^{-3})$

$\boxed{e =\ -44,78\ V}$

) Em que valor de tempo a tensão atinge seu máximo positivo?

esolução: $e = 180\ sen\ (120\pi t)$

$180 = 180\ sen\ (120\pi t)$

$1 = sen\ (120\pi t)$

$120\pi t = arc\ sen\ 1$

$120\pi t = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{t =\ 4,16ms}$

BS.: Considerando $arc\ sen\ 1 = 2K\pi + \frac{\pi}{2}$, teríamos

$t = 4,16, \qquad t = 20,83, \ . . .$

) Para qual valor de tempo a tensão passa por zero?

Resolução: $e = 180\ sen\ (120\pi t)$

$0 = 180\ sen\ (120\pi t)$

$0 = sen\ (120\pi t)$

$120\ \pi t = arc\ sen\ 0$

$120\ \pi t = 0$ $\boxed{t = 0}$

BS.: Para $arc\ sen 0 = K\pi$, teríamos, $t = 0, t = 8,33, t = 16,66, ...$

UNIDADE 4

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS

4. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS

4.1 INTRODUÇÃO

Nesta unidade obteremos algumas fórmulas que relacionam os *valores das funções circulares* de um mesmo *arco* x, chamadas *relações trigonométricas fundamentais*.

4.2 RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

a) Aplicando o teorema de *Pitágoras* no triângulo retângulo OQM, temos:

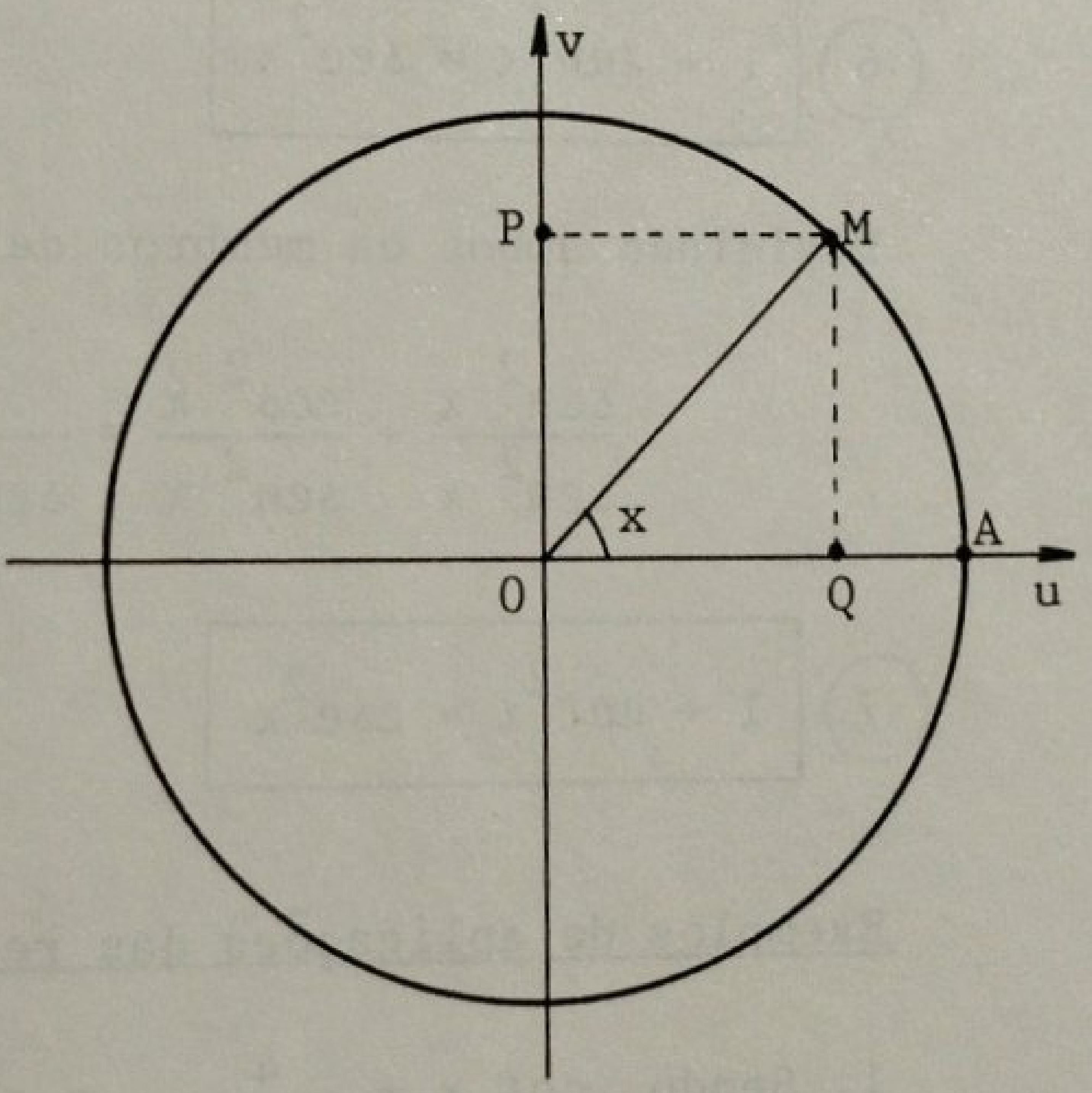
$$(\overline{QM})^2 + (\overline{OQ})^2 = (\overline{OM})^2$$

Pelo estudo já feito, sobre as *funções circulares*, podemos escrever:

$\overline{QM} = \overline{OP} = sen\ x$

$\overline{OQ} = cos\ x$

$\overline{OM} = R = 1$



então:

① $\boxed{sen^2\ x + cos^2\ x = 1}$

b) No estudo das *funções trigonométricas*, já vimos que:

② $\boxed{tan\ x = \dfrac{sen\ x}{cos\ x}}$ para $x \neq K\pi + \dfrac{\pi}{2}$

③ $\boxed{cot\ x = \dfrac{cos\ x}{sen\ x}}$ para $x \neq K\pi$

Das relações ② e ③ decorre: $\boxed{cot\ x = \dfrac{1}{tan\ x}}$ para $x \neq K\pi$

④ $\boxed{\sec x = \dfrac{1}{\cos x}}$ para $x \neq K\pi + \dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\boxed{\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}$ para $x \neq K\pi$

c) Destas *relações fundamentais*, podemos obter outras *relações decorrentes*.

Dentre elas, apresentaremos duas que são de grande importância nos cálculos *trigonométricos*:

Dividindo ambos os membros da *relação* ① por $\cos^2 x$ $(x \neq K\pi + \frac{\pi}{2})$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

⑥ $\boxed{1 + \tan^2 x = \sec^2 x}$

Dividindo ambos os membros da *relação* ① por $\operatorname{sen}^2 x$ $(x \neq K\pi)$, temos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

⑦ $\boxed{1 + \cot^2 x = \csc^2 x}$

Exemplos de aplicações das relações fundamentais:

1. Sendo $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule as demais *linhas trigonométricas do arco x*.

Resolução:

a) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + (-\frac{4}{5})^2 = 1$

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{16}{25} = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{9}{25}$$

$$\operatorname{sen} x = \pm \frac{3}{5}$$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos: $\boxed{\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}}$

b) $\tan x = \dfrac{sen\ x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \boxed{\tan x = \frac{3}{4}}$

c) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} \Rightarrow \boxed{\cot x = \frac{4}{3}}$

d) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \boxed{\sec x = -\frac{5}{4}}$

e) $\csc x = \dfrac{1}{sen\ x} \Rightarrow \boxed{\csc x = -\frac{5}{3}}$

2. Calcule o valor da *expressão* $y = \dfrac{\sec x + sen\ x}{\csc x + \cos x}$, sabendo-se que $\cot x = -\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Resolução:

$$y = \frac{\dfrac{1}{\cos x} + sen\ x}{\dfrac{1}{sen\ x} + \cos x} = \frac{\dfrac{1 + sen\ x\ .\ \cos x}{\cos x}}{\dfrac{1 + sen\ x\ .\ \cos x}{sen\ x}}$$

$$y = \frac{1 + sen\ x\ .\ \cos x}{\cos x} \cdot \frac{sen\ x}{1 + sen\ x\ .\ \cos x} = \frac{sen\ x}{\cos x} = \tan x$$

Logo: $\boxed{y = -\frac{3}{2}}$

3. Calcule $\cos x$, sabendo que $3sen\ x + 4\cos x = 5$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Resolução: A equação dada forma com a *relação* ①, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3\ sen\ x + 4\ \cos x = 5 \\ sen^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Isolando $sen\ x$ na primeira equação temos:

$$sen\ x = \frac{5 - 4\cos x}{3}$$

Substituindo o valor do $sen\ x$ na segunda equação:

$$\left(\frac{5 - 4\cos x}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 25\cos^2 x - 40\cos x + 16 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$\cos x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1600}}{50} \qquad \boxed{\cos x = \frac{4}{5}}$$

4. Calcule os valores de m que verificam simultaneamente as igualdades: $\tan x = 2m + 3$ e $\cot x = m + 1$.

Resolução:

Como $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, temos:

$$m + 1 = \frac{1}{2m + 3} \Rightarrow (2m + 3)(m + 1) = 1 \Rightarrow 2m^2 + 5m + 2 = 0$$

Resolvendo a equação temos:

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{m = -2}$$

EXERCÍCIOS:

E.39 Dado $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule as demais *linhas trigonométricas do arco x*.

E.40 Dado $\cos x = -\frac{5}{13}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule as demais *linhas trigonométricas do arco x*.

E.41 Sendo $\cot a = -\frac{4}{3}$ e $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, calcule as demais *linhas trigonométricas do arco a*.

E.42 Sendo $\sec x = -\sqrt{2}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule $\tan x$ e $\operatorname{sen} x$.

E.43 Sabendo que $\tan x = -\sqrt{3}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

E.44 Sabendo que $\sec a = -\frac{13}{5}$ e $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\tan a$ e $\csc a$.

E.45 Dado $\cot x = \frac{24}{7}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule o valor de

$$y = \frac{\tan x \, . \, \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$

E.46 Dado $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule o valor de

$$y = \frac{\csc x - \operatorname{sen} x}{\cot x \, . \, \sec x}$$

E.47 Dado $\cot a = 3$ e $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, calcule o valor de

$$y = \frac{\sec a + \operatorname{sen} a}{\csc a + \cos a}$$

E.48 Dado $cos\ a = \frac{3}{5}$ e $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, calcule o valor de

$$y = \frac{sec\ a - csc\ a}{1 - cot\ a}$$

E.49 Sendo $sec\ x + tan\ x = 4$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor da *tan* x.

E.50 Sendo $3tan\ a + 3cot\ a = 10$, calcule o valor da *cot* a.

E.51 Sendo $32\ sen^2 x + 16\ cos^2 x = 25$, calcule o valor do *sen* x.

E.52 Sendo $5\ sen\ x - 5\ cos\ x = 1$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule o valor de *cos* x

E.53 Sendo $2\ sen^2 x + 5\ cos\ x = 4$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor de *cos* x.

E.54 Calcule *m*, de modo que se tenha simultaneamente:

$$cot\ x = \frac{m + 1}{2} \quad e \quad csc\ x = \sqrt{m + 2}$$

E.55 Calcule *m*, de modo que se tenha simultaneamente:

$$sen\ x = \frac{m + 2}{8} \quad e \quad cos\ x = \frac{\sqrt{5 - m}}{2}$$

E.56 Calcule *m*, de modo que se tenha simultaneamente:

$$tan\ a = 5m - 2 \quad e \quad cot\ a = m - \frac{2}{3}$$

E.57 Calcule *m*, de modo que se tenha simultaneamente:

$$sen\ x = m + 2 \quad e \quad cos\ x = \sqrt{1 - m^2}$$

4.3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Uma igualdade entre *funções trigonométricas* é chamada *IDENTIDADE TRIGONOMÉTRICA*, quando a igualdade é satisfeita para todos os valores que pertencem aos *domínios das funções* que envolvem.

Todas as *relações fundamentais e consequências*, são *identidades trigonométricas*.

Para provarmos uma *identidade trigonométrica*, podemos proceder de duas maneiras:

a) Tomando um dos membros (geralmente o mais complicado) transformand no outro;

b) Tomando os dois membros e transformando simultaneamente em *expressões iguais*.

xemplos:

. Provar a *identidade:* $\csc x - \operatorname{sen} x = \cot x \cdot \cos x$

Tomando por exemplo, o 1º membro e transformando-o, utilizando as *relações fundamentais*, temos:

$$\csc x - \operatorname{sen} x = \cot x \cdot \cos x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x =$$

$$\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x =$$

$$\cot x \cdot \cos x = 2º \text{ membro}$$

2. Provar a *identidade:* $2\cos^2 x - 1 = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$

$$\begin{aligned} &= (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)\,(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \\ &= 1.\,(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \\ &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \end{aligned}$$

$$1º \text{ membro} = 2\cos^2 x - 1$$

3. Provar a *identidade:* $\dfrac{\sec x - \csc x}{1 - \cot x} = \operatorname{sen} x \cdot \tan x + \cos x$

$$\frac{\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}{1 - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \cos x$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\sec x = \sec x$$

EXERCÍCIOS:

E.58 Provar as *identidades*:

a) $\csc^2 x \cdot \tan x \cdot \cot x = 1 + \cot^2 x$

b) $\sec x \cdot \csc x = \tan x + \cot x$

c) $\sec^2 x - \csc^2 x = (\tan x + \cot x)(\tan x - \cot x)$

d) $\tan^4 x + 2\tan^2 x = \operatorname{sen}^4 x - 1$

e) $1 - \operatorname{sen}^2 a = \dfrac{\cot^2 a}{1 + \cot^2 a}$

f) $(1 + \tan x)^2 + (1 - \tan x)^2 = 2\sec^2 x$

g) $\sec^2 x - \csc^2 x = \tan^2 x - \cot^2 x$

h) $\sec^2 x \cdot \csc^2 x = \sec^2 x + \csc^2 x$

i) $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x = 1$

j) $(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 + (\cos x + \operatorname{sen} x)^2 = 2$

l) $\dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \dfrac{\sec x}{1 + \cos x}$

m) $\dfrac{\sec x + \tan x}{\cos x + \cot x} = \sec x \cdot \tan x$

n) $\dfrac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b} = \tan a \cdot \tan b$

o) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

p) $\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x} + 1 = \tan^2 x + \cot^2 x$

ESTUDAR

3ª feira → prova

UNIDADE 5

REDUÇÃO AO 1.º QUADRANTE

RESUMO!

ARCOS COMPLEMENTARES (1º Q)
$(90^\circ - \alpha)$

2º → 1º $(180^\circ - \alpha)$
3º → 1º $(\alpha - 180^\circ)$
4º → 1º $(360^\circ - \alpha)$

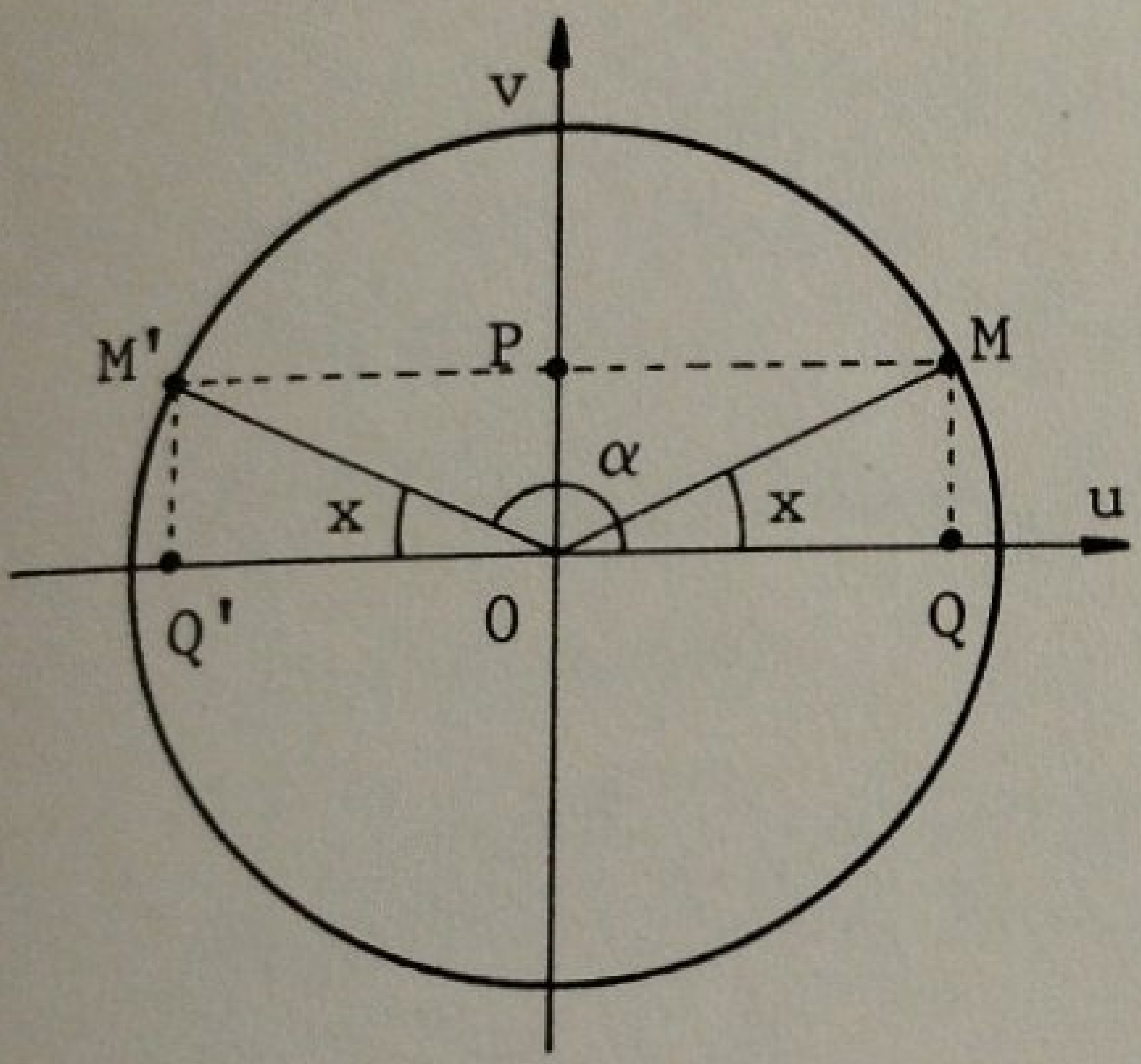
5. REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

5.1 REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Dado um *arco* α, onde a extremidade do *arco* não pertence ao 1º *quadrante*, reduzir ao 1º *QUADRANTE uma função trigonométrica do arco* α, é obter um *arco* x, onde $0^o < x < 90^o$, de modo que a *função* para os *arcos* α e x, tenham o mesmo valor absoluto.

5.1.1 ARCOS DO 2º QUADRANTE

Observamos que: $\boxed{180^o - \alpha = x}$



a) $sen\ \alpha = sen(180^o - \alpha) = sen\ x$

b) $cos\ \alpha =$

c) $tan\ \alpha =$

EXERCÍCIOS:

E.58 Reduzir ao 1º *quadrante*:

a) $sen\ 130^o =$

b) $cos\ 120^o =$

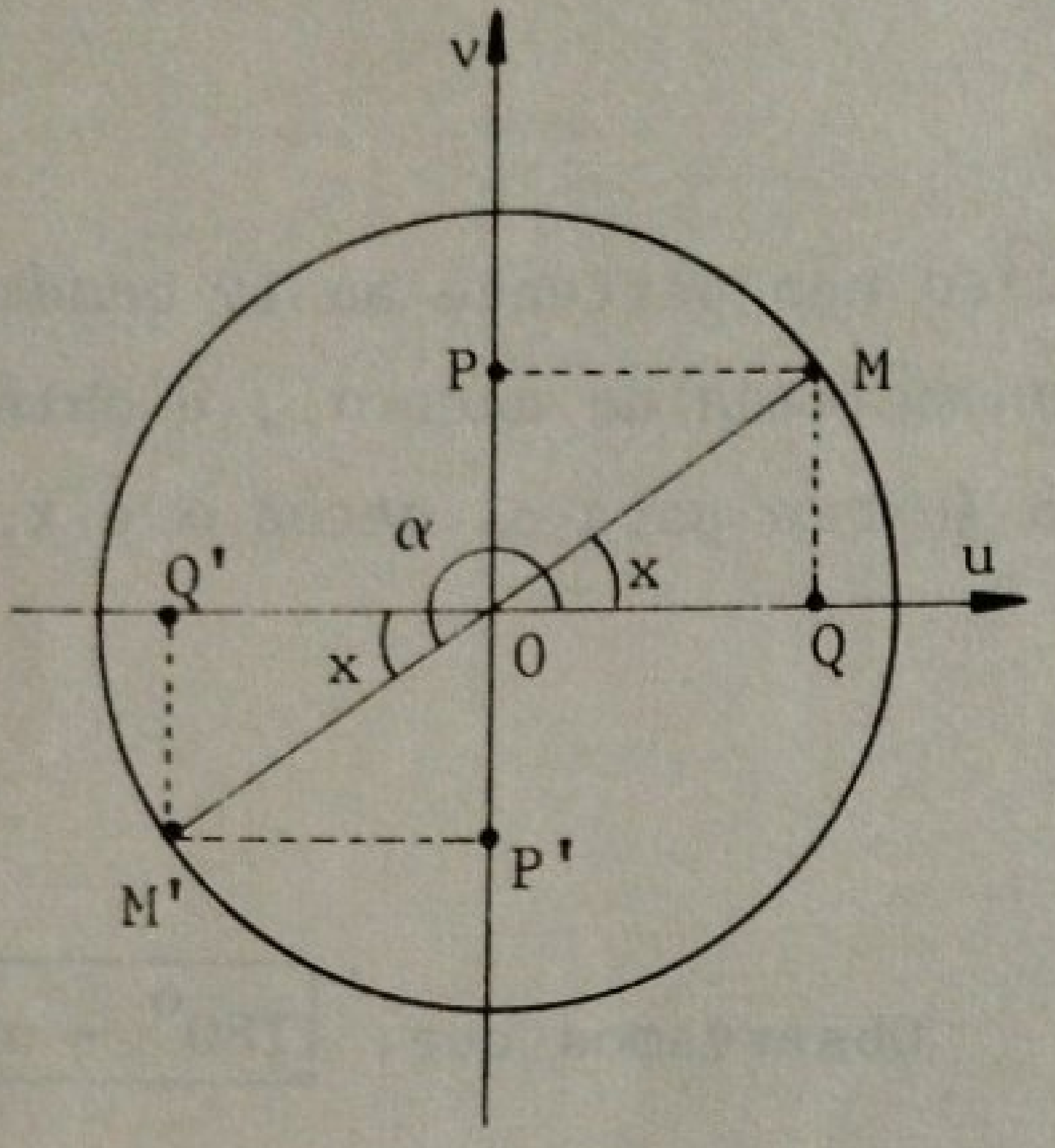
c) $tan\ 137^o =$

d) $cot\ 156^o =$

e) $sec\ \ 98^o =$

f) $csc\ 104^o =$

.1.2 ARCOS DO 3º QUADRANTE



Da figura, obtemos: $\boxed{\alpha - 180^{o} = x}$

a) $sen\ \alpha = -sen(\alpha - 180^{o}) = -sen\ x$

b) $cos\ \alpha =$

c) $tan\ \alpha =$

XERCÍCIOS:

.59 Reduzir ao 1º *quadrante*:

a) $sen\ 200^{o} =$

b) $cos\ 265^{o} =$

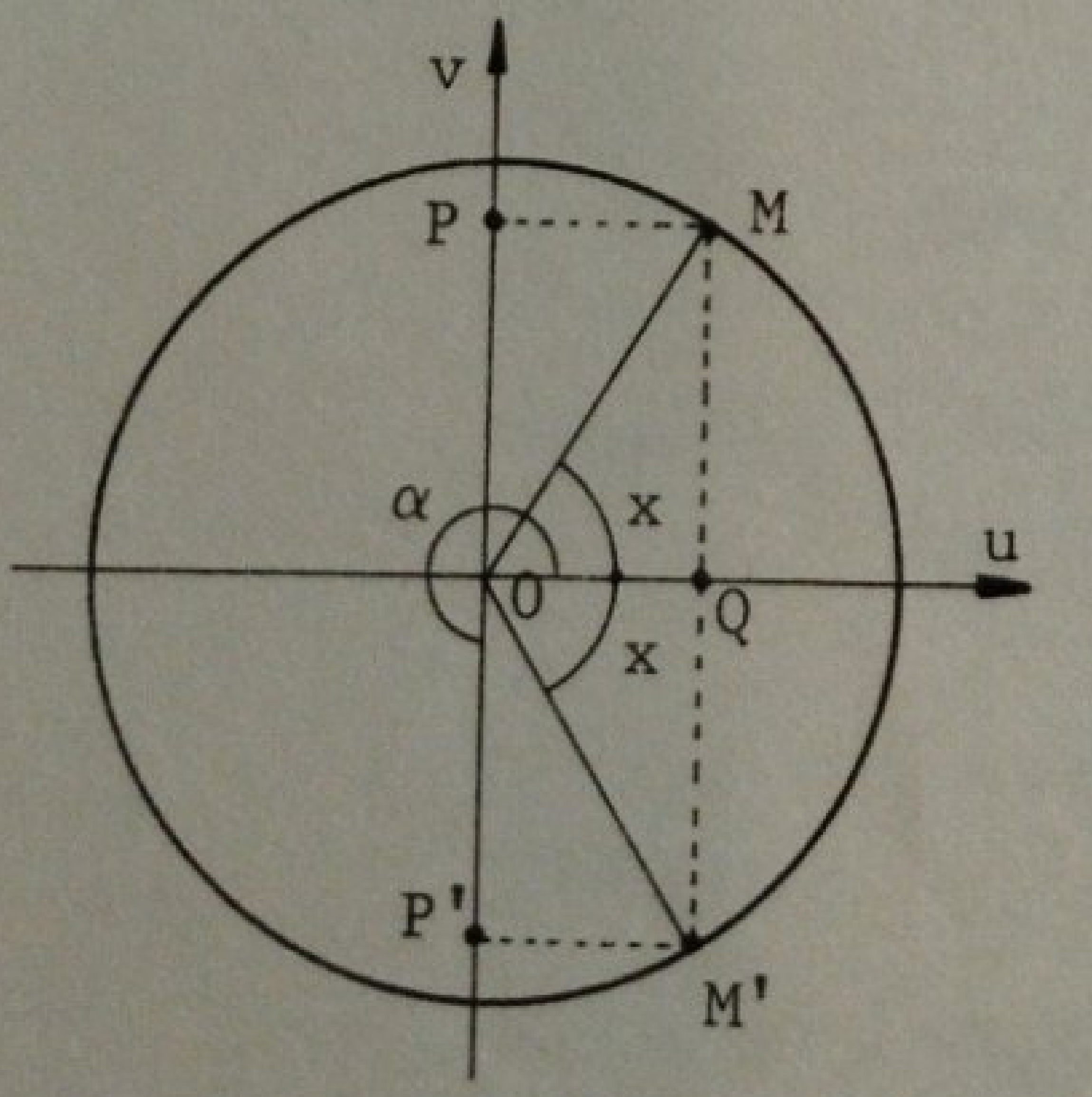
c) $tan\ 210^{o} =$

d) $cot\ 190^{o} =$

e) $sec\ 242^{o} =$

f) $csc\ \frac{4\pi}{3} =$

.1.3 ARCOS DO 4º QUADRANTE



Concluimos que: $\boxed{360^{o} - \alpha = x}$

a) $sen\ \alpha = -\ (360^{o} - \alpha) = -sen\ x$

b) $cos\ \alpha =$

c) $tan\ \alpha =$

EXERCÍCIOS:

E.60 Reduzir ao 1º *quadrante*:

a) $sen\ 330^o =$

b) $cos\ 275^o =$

c) $tan\ \frac{7\pi}{4} =$

d) $cot\ \frac{9\pi}{5} =$

e) $sec\ 290^o =$

f) $csc\ 351^o =$

5.2 SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para simplificarmos *expressões trigonométricas*, utilizaremos igualdades que veremos a seguir.

Considere o *arco* x no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

5.2.1 ARCO DA FORMA $(\pi - x)$.

Arco $(\pi - x)$ tem extremidade no ..... *quadrante*.

Complete as igualdades:

a) $sen\ (\pi - x) = sen\ [\pi - (\pi - x)] = sen\ x$

b) $cos\ (\pi - x) =$ d) $cot\ (\pi - x) =$

c) $tan\ (\pi - x) =$ e) $sec\ (\pi - x) =$ f) $csc\ (\pi - x) =$

5.2.2 ARCO DA FORMA $(\pi + x)$.

Arco $(\pi + x)$ tem extremidade no ..... *quadrante*.

Complete as igualdades:

a) $sen\ (\pi + x) = -\ sen\ [(\pi + x) - \pi] = -\ sen\ x$

b) $cos\ (\pi + x) =$ d) $cot\ (\pi + x) =$

c) $tan\ (\pi + x) =$ e) $sec\ (\pi + x) =$ f) $csc\ (\pi + x) =$

5.2.3 ARCO DA FORMA $(2\pi - x)$ ou $(-x)$.

Arco $(2\pi - x)$ tem extremidade no ..... *quadrante*.

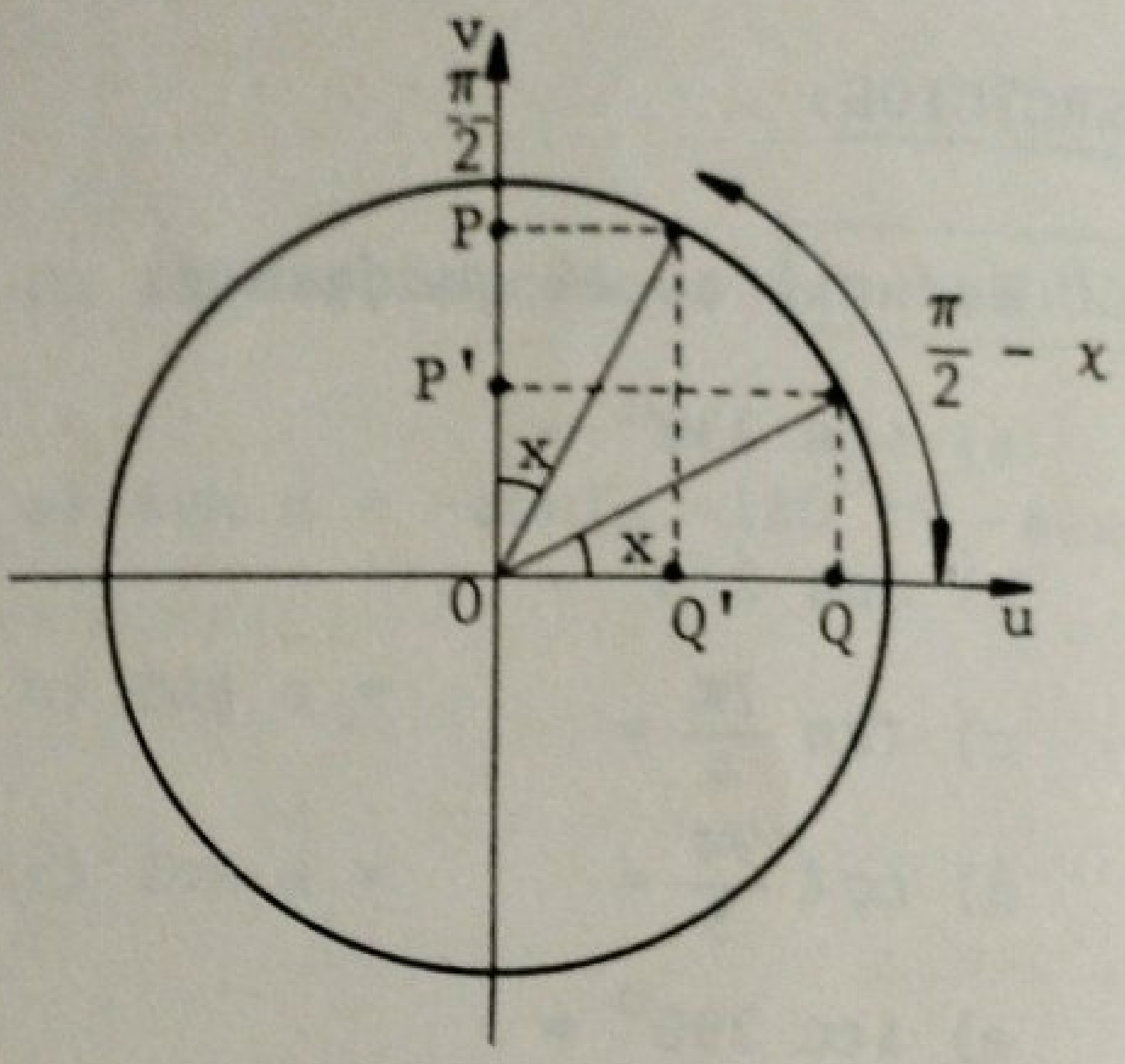
Complete as igualdades:

a) $sen\ (2\pi - x) = -\ sen\ [2\pi - (2\pi - x)] = -\ sen\ x$

b) $cos\ (2\pi - x) =$ d) $cot\ (2\pi - x) =$

c) $tan\ (2\pi - x) =$ e) $sec\ (2\pi - x) =$ f) $csc\ (2\pi - x) =$

5.2.4 ARCO DA FORMA $(\frac{\pi}{2} - x)$



Da figura, tiramos:

$\overline{OP} = sen\ (\frac{\pi}{2} - x)$ ①

$\overline{OP'} = sen\ x$ ②

$\overline{OQ} = cos\ x$ ③

$\overline{OQ'} = cos\ (\frac{\pi}{2} - x)$ ④

São verdadeiras as igualdades:

a) $\overline{OP} = \overline{OQ}$:

Usando ① e ③ : $\boxed{sen\ (\frac{\pi}{2} - x) = cos\ x}$

b) $\overline{OQ'} = \overline{OP'}$

Usando ② e ④ : $\boxed{cos\ (\frac{\pi}{2} - x) = sen\ x}$

c) $tan(\frac{\pi}{2} - x) =$

d) $cot(\frac{\pi}{2} - x) =$

e) $sec(\frac{\pi}{2} - x) =$

f) $csc(\frac{\pi}{2} - x) =$

5.2.5 ARCO DA FORMA $(\frac{\pi}{2} + x)$

Arco $(\frac{\pi}{2} + x)$ tem extremidade no ...... *quadrante*.

Complete as igualdades:

a) $sen\ (\frac{\pi}{2} + x) = sen\ [\pi - (\frac{\pi}{2} + x)] = sen(\frac{\pi}{2} - x) = cos\ x$

b) $cos\ (\frac{\pi}{2} + x) =$

c) $tan\ (\frac{\pi}{2} + x) =$

d) $cot\ (\frac{\pi}{2} + x) =$

e) $sec\ (\frac{\pi}{2} + x) =$

f) $csc\ (\frac{\pi}{2} + x) =$

5.2.6 ARCO DA FORMA $(\frac{3\pi}{2} - x)$

Arco $(\frac{3\pi}{2} - x)$ tem extremidade no ..... quadrante.

Complete as igualdades:

a) $sen\ (\frac{3\pi}{2} - x) = -\ sen\ [\ (\frac{3\pi}{2} - x) - \pi] = -sen(\frac{\pi}{2} - x) = -\ cos\ x$

b) $cos\ (\frac{3\pi}{2} - x) =$

c) $tan\ (\frac{3\pi}{2} - x) =$

d) $cot\ (\ \frac{3\pi}{2} - x) =$

e) $sec\ (\frac{3\pi}{2} - x) =$

f) $csc\ (\frac{3\pi}{2} - x) =$

5.2.7 ARCO DA FORMA $(\frac{3\pi}{2} + x)$

Arco $(\frac{3\pi}{2} + x)$ tem extremidade no ..... quadrante.

Complete as igualdades:

a) $sen\ (\frac{3\pi}{2} + x) = -\ sen\ [\ 2\pi - (\frac{3\pi}{2} + x)] = -\ sen\ x$

b) $cos\ (\frac{3\pi}{2} + x) =$

c) $tan\ (\frac{3\pi}{2} + x) =$

d) $cot\ (\frac{3\pi}{2} + x) =$

e) $sec\ (\frac{3\pi}{2} + x) =$

f) $csc\ (\frac{3\pi}{2} + x) =$

EXERCÍCIOS:

E.61 Determinar o valor, reduzindo ao 1º *quadrante:*

a) $\cot 690^{\circ}$

b) $\sec 960^{\circ}$

c) $\csc(-\ 840^{\circ})$

d) $\tan(-\ 510^{\circ})$

e) $\cos \frac{35\pi}{4}$

f) $\text{sen}(-\ \frac{43\pi}{6})$

E.62 Calcular o valor de cada *expressão:*

a) $y = \dfrac{\cos\ 1305^{\circ}\ -\ \text{sen}\ 1035^{\circ}}{\sec\ 1740^{\circ}\ +\ \tan\ 855^{\circ}}$

b) $y = \dfrac{\tan\ 315^{\circ}\ .\ \csc\ 1200^{\circ}}{\text{sen}\ 1560^{\circ}\ +\ \cos\ 1650^{\circ}}$

c) $y = \dfrac{\text{sen}\ (-2040^{\circ}).\ \tan\ 1590^{\circ}}{\sec\ \ 1950^{\circ}\ .\ \cot(-780^{\circ})}$

d) $y = \dfrac{\tan(-1395^{\circ})\ .\ \csc\ 2100^{\circ}}{\text{sen}(-1680^{\circ}).\ \cos\ 840^{\circ}}$

e) $y = \dfrac{6\tan 570^{\circ}\ +\ 4\text{sen}(-420^{\circ})\ +\ 5\csc^{2}\ 2025^{\circ}}{\cot\ 1665^{\circ}\ +\ \csc 3390^{\circ}\ +\ 2\ \cos^{2}\ 2400^{\circ}}$

E.63 Simplificar as *expressões*, utilizando redução ao 1º *quadrante:*

a) $y = \dfrac{\text{sen}\ (13\pi\ -\ x)\ .\ \cos\ (\frac{\pi}{2}\ -\ x)\ .\ \tan(7\pi\ +\ x)}{\cos\ (43\pi\ -\ x)\ .\ \text{sen}\ (\pi\ -\ x)\ .\ \tan(12\pi\ -x)}$

b) $y = \dfrac{\text{sen}\ (\frac{\pi}{2}\ -\ x)\ .\ \tan\ (7\pi\ +\ x)\ .\ \sec\ (8\pi\ -\ x)}{\tan\ (35\pi\ +\ x)\ .\ \cos(17\pi\ -\ x)}$

c) $y = \dfrac{-\text{sen}\ (8\pi\ -\ a)\ +\ 3\text{sen}\ (15\pi\ +\ a)\ +\ 2\text{sen}\ (-a)}{\text{sen}\ (\frac{\pi}{2}\ -\ a)\ +\ \cos(\pi\ -\ a)\ +\ \cos(64\pi\ +\ a)}$

d) $y = \dfrac{\text{sen}\ (-x)\ .\ \cos(\frac{\pi}{2}\ +\ x)}{\tan\ (2\pi\ -\ x)\ .\ \cos(\pi\ -\ x)}$

e) $y = \dfrac{\tan\ (\pi\ +\ a)\ +\ \cot(2\pi\ -\ a)\ +\ \tan(\frac{\pi}{2}\ -\ a)}{\tan\ (\pi\ -\ a)\ .\ \cot(\frac{\pi}{2}\ -\ a)}$

f) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\tan(2\pi - x) \cdot \cos(\pi + x)}$

g) $y = \dfrac{2\operatorname{sen}(180^\circ + x) + 3\cos x + 2\cos(90^\circ - x)}{3\operatorname{sen}(180^\circ - x)}$

h) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi - x) \cdot \tan(\frac{\pi}{2} + x)}{\cot(\frac{3\pi}{2} + x) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} - x)}$

i) $y = \dfrac{\sec(5\pi - x) \cdot \tan(\frac{3\pi}{2} + x)}{\csc(9\pi - x) \cdot \cot(-x)}$

j) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi + x) \cdot \cos(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan(\frac{11\pi}{2} + x)}{\cos(3\pi + x) \cdot \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} - x) \cdot \operatorname{sen}(2\pi - x)}$

l) $y = \dfrac{\tan(\frac{\pi}{2} + x) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} - x) \cdot \cos(-x)}{\cot(5\pi + x) \cdot \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + x) \cdot \operatorname{sen}(8\pi - x)}$

m) $y = \dfrac{\tan(\frac{3\pi}{2} + a) \cdot \cos(\frac{5\pi}{2} - a) \cdot \operatorname{sen}(-a)}{\cot(3\pi + a) \cdot \sec(\frac{3\pi}{2} + a)}$

n) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} - x) \cdot \cos(2\pi - x) \cdot \tan(\frac{3\pi}{2} + x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \operatorname{sen}(\pi + x)}$

EU SOU
+ EU

UNIDADE 6

OPERAÇÕES COM ARCOS

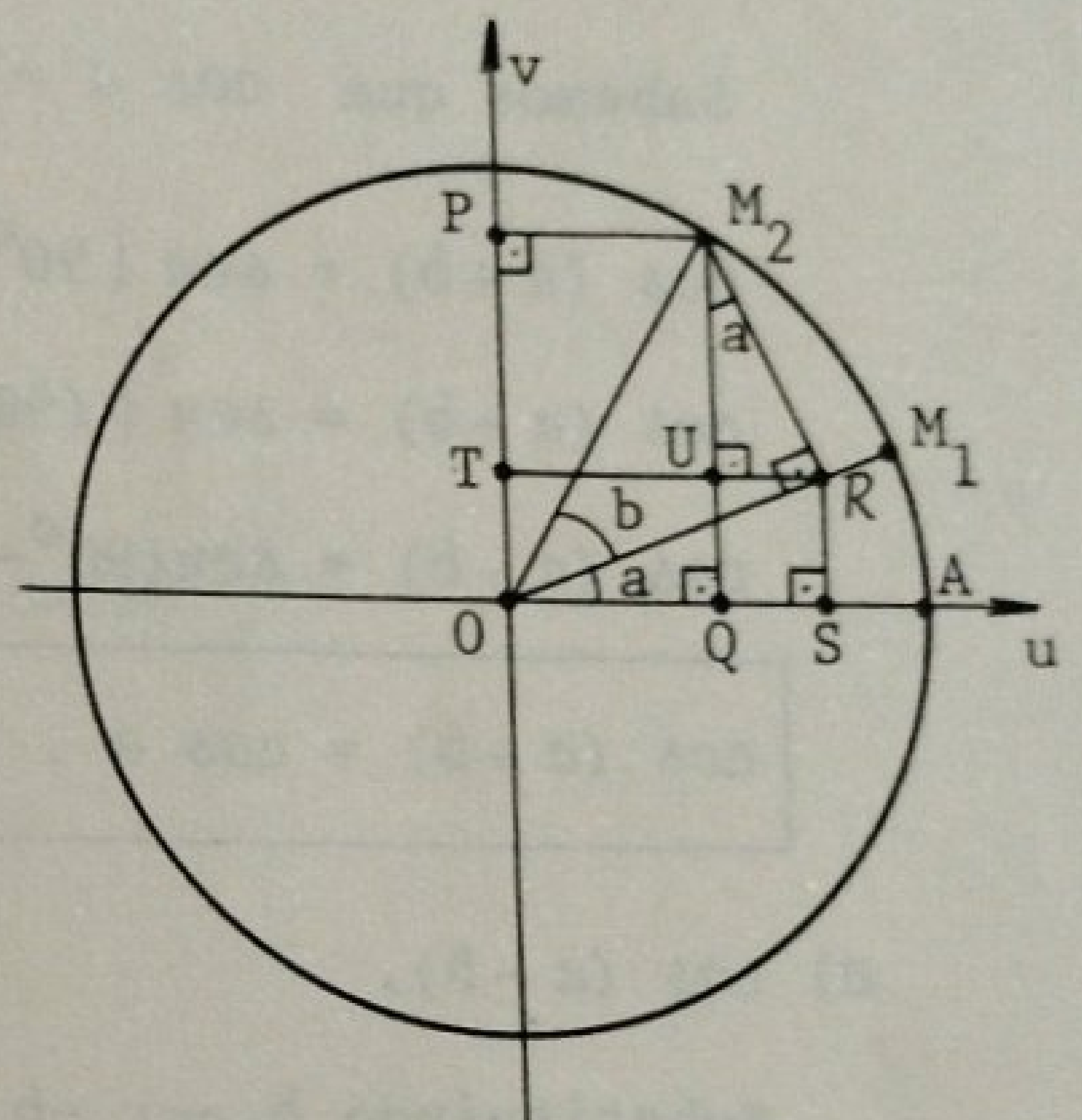
Obj. 09

6. OPERAÇÕES COM ARCOS

6.1 INTRODUÇÃO

Conhecidas as *linhas trigonométricas* dos *arcos* a e b, determinaremos as *funções circulares* dos *arcos* da forma $a + b$, $a - b$, $2a$ e $\frac{a}{2}$.

6.2 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS



a) $sen\ (a+b)$.

Demonstração:

Sejam os *arcos* $\overset{\frown}{AM_1}$ e $\overset{\frown}{M_1M_2}$, cujas medidas são respectivamente a e b.

Pela definição, temos $sen\ (a+b) = \overline{OP}$

Do triângulo retângulo ORM_2, podemos obter as seguintes relações:

$sen\ b = \frac{\overline{M_2R}}{\overline{OM_2}}$ mas como $\overline{OM_2} = 1$, temos $\boxed{sen\ b = \overline{M_2R}}$

$cos\ b = \frac{\overline{OR}}{\overline{OM_2}} \Rightarrow \boxed{cos\ b = \overline{OR}}$

Do triângulo retângulo M_2UR, temos:

$cos\ a = \frac{\overline{M_2U}}{\overline{M_2R}}$ mas como $\overline{M_2R} = sen\ b$, logo $\boxed{M_2U = sen\ b . cos\ a}$

Do triângulo retângulo OSR, temos:

$sen\ a = \frac{\overline{RS}}{\overline{OR}}$ mas $\overline{OR} = cos\ b$, logo $\boxed{\overline{RS} = sen\ a\ .\ cos\ b}$

Finalmente, temos:

$\overline{OP} = \overline{UQ} + \overline{M_2U}$ mas $\begin{cases} \overline{UQ} = \overline{RS} = sen\ a\ .\ cos\ b \\ \overline{M_2U} = sen\ b\ .\ cos\ a \end{cases}$

então temos $\boxed{sen\ (a+b) = sen\ a\ .\ cos\ b + sen\ b\ .\ cos\ a}$ ①

b) $sen\ (a - b)$.

Substituindo b por $-b$, em ①, temos:

$sen\ [a + (-b)] = sen\ a \cdot cos(-b) + sen(-b) cos\ a$, mas $\begin{cases} sen(-b) = -sen\ b \\ cos(-b) = cos\ b \end{cases}$

$$\boxed{sen\ (a - b) = sen\ a \cdot cos\ b \ - \ sen\ b \cdot cos\ a} \quad ②$$

c) $cos(a + b)$.

Sabemos que $cos\ a = sen(90^o - a)$. Logo:

$$cos\ (a + b) = sen\ [90^o - (a + b)]$$

$$cos\ (a + b) = sen\ [\ (90^o - a) - b\ ]$$

$$cos\ (a + b) = sen(90^o - a)\ .\ cos\ b - sen\ b . cos(90^o - a)$$

$$\boxed{cos\ (a + b) = cos\ a\ .\ cos\ b - sen\ a \cdot sen\ b} \quad ③$$

d) $cos\ (a - b)$.

Substituindo b por $-b$, em ③, temos:

$$cos\ [a + (-b)] = cos\ a . cos\ (-b) + sen\ a \cdot sen\ (-b)$$

$$\boxed{cos\ (a - b) = cos\ a \cdot cos\ b + sen\ a \cdot sen\ b} \quad ④$$

e) $tan\ (a + b)$

$$tan\ (a + b) = \frac{sen\ (a + b)}{cos\ (a + b)}$$

$$tan\ (a + b) = \frac{sen\ a \cdot cos\ b + sen\ b \cdot cos\ a}{cos\ a \cdot cos\ b - sen\ a \cdot cos\ a}$$

Dividindo numerador e denominador da fração por $cos\ a \cdot cos\ b \neq 0$, temos:

$$tan\ (a + b) = \frac{\dfrac{sen\ a \cdot cos\ b}{cos\ a \cdot cos\ b} + \dfrac{sen\ b \cdot cos\ a}{cos\ a \cdot cos\ b}}{\dfrac{cos\ a \cdot cos\ b}{cos\ a \cdot cos\ b} - \dfrac{sen\ a \cdot cos\ b}{cos\ a \cdot cos\ b}}$$

$$\boxed{tan\ (a + b) = \frac{tan\ a + tan\ b}{1 - tan\ a\ tan\ b}} \quad ⑤$$

f) $tan\ (a - b)$.

Substituindo b por $-b$ em ⑤, temos:

$$tan\ [a + (-b)] = \frac{tan\ a + tan\ (-b)}{1 - tan\ a\ .\ tan\ (-b)}$$ mas, como $tan\ (-b) = -\ tan\ b$

$$\boxed{tan\ (a - b) = \frac{tan\ a - tan\ b}{1 + tan\ a \cdot tan\ b}}$$ ⑥

Exemplos:

1. Calcular $sen\ 75^{\circ}$

Resolução

$$sen\ 75^{\circ} = sen\ (30^{\circ} + 45^{\circ})$$

$$= sen\ 30^{\circ}\ .\ cos 45^{\circ} + sen 45^{\circ}\ .\ cos 30^{\circ}$$

$$= \frac{1}{2}\ .\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ .\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{sen\ 75^{\circ} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}$$

2. Sabendo que $sen\ x = \frac{8}{17}$, $cos\ y = -\frac{3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < y < \pi$, calc lar $sen(x - y)$, $cos\ (x + y)$ e $tan\ (x + y)$.

a) Cálculo de $cos\ x$:

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

$$(\frac{8}{17})^2 + cos^2 x = 1$$

$$\boxed{cos\ x = \frac{15}{17}}$$

b) Cálculo de $sen\ y$:

$$sen^2 y + cos^2\ y = 1$$

$$sen^2 y + (-\frac{3}{5})^2 = 1$$

$$\boxed{sen\ y = \frac{4}{5}}$$

c) Cálculo de $sen\ (x - y)$

$$sen\ (x - y) = sen\ x\ .\ cos\ y - sen\ y\ .\ cos\ x$$

$$sen\ (x - y) = \frac{8}{17}\ .\ (-\frac{3}{5}) - \frac{4}{5}\ .\ \frac{15}{17}$$

$$sen\ (x - y) = -\frac{24}{85} - \frac{60}{85}$$

$$\boxed{sen\ (x - y) = -\frac{84}{85}}$$

d) Cálculo de $\cos(x + y)$:

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x + y) = \frac{15}{17} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{8}{17} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\cos(x + y) = -\frac{45}{85} - \frac{32}{85}$$

$$\boxed{\cos(x + y) = -\frac{77}{85}}$$

e) Cálculo de $\tan x$:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}}$$

$$\boxed{\tan x = \frac{8}{15}}$$

f) Cálculo de $\tan y$:

$$\tan y = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}$$

$$\tan y = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}$$

$$\boxed{\tan y = -\frac{4}{3}}$$

g) Cálculo de $\tan(x + y)$:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\frac{8}{15} + \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 - \frac{8}{15} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\frac{8 - 20}{15}}{1 + \frac{32}{45}}$$

$$\tan(x + y) = \frac{-\frac{12}{15}}{\frac{45 + 32}{45}}$$

$$\tan(x + y) = -\frac{12}{15} \cdot \frac{45}{77}$$

$$\boxed{\tan(x + y) = -\frac{36}{77}}$$

EXERCÍCIOS:

E.64 Simplifique:

a) $sen\ (\frac{3\pi}{2} + x)$

b) $cos\ (270^\circ - x)$

c) $tan\ (90^\circ + x)$

d) $y = sen(45^\circ + x) - sen(45^\circ - x)$

e) $y = sen(x - 60^\circ) + cos(x + 30^\circ)$

f) $y = \dfrac{sen(\frac{\pi}{2} + x)}{sen(\frac{\pi}{3} + x) - sen(\frac{\pi}{3} - x)}$

g) $y = \dfrac{cos\ (a+b) + cos\ (a-b)}{sen\ (a+b) + sen\ (a-b)}$

h) $y = \dfrac{sen\ b\ .\ cos(a-b) + cos\ b\ .\ sen(a-b)}{sen\ (a-60^\circ) + sen\ (a+60^\circ)}$

i) $y = \dfrac{sen^2(a-b) + 2sen\ b.\ cos\ a\ .\ sen(a-b)}{sen\ (a+b)\ .\ sen(a-b)}$

E.65 Calcule:

a) $cos\ 15^\circ$ b) $tan\ 75^\circ$ c) $sen\ 105^\circ$

E.66 Sabendo que $sen\ a = -\frac{8}{17}$ e $180^\circ < a < 270^\circ$, calcule:

a) $sen\ (60^\circ + a)$ b) $cos\ (45^\circ - a)$

c) $tan\ (45^\circ + a)$ d) $sec\ (45^\circ - a)$

E.67 Sabendo que $sen\ x = \frac{15}{17}$, $sen\ y = -\frac{3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$,

Calcule: $sen\ (x+y)$ e $cos\ (x-y)$

E.68 Dados $cos\ x = \frac{4}{5}$ e $sen\ y = -\frac{12}{13}$, calcule: $cos\ (x+y)$, sabendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < \cancel{x}\,y < 2\pi$.

69 Sabendo que $\cot a = 2$, $\sec b = -\sqrt{2}$ e $\pi < b < \frac{3\pi}{2}$, calcule: $\tan(a-b)$.

.70 Dados $\tan a = \frac{2}{3}$ e $\text{sen}\, b = \frac{4}{5}$, com $\frac{\pi}{2} < b < \pi$, calcule: $\cot(a+b)$.

.71 Achar a $\sec(a-b)$, dados $\tan a = \frac{4}{3}$, $\csc b = -\frac{13}{12}$, $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < b < 2\pi$.

.72 Sabendo que $\tan x = 2\sqrt{3}$ e $x - y = 60^\circ$, calcule: $\tan y$.

.73 Sabendo que $\tan x = \frac{1}{4}$ e $x + y = \frac{\pi}{4}$, calcule: $\tan y$.

.74 Sabendo que $\cos a = \frac{12}{13}$, $a + b = 120^\circ$ e $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule: $\cos b$.

.75 Calcular $\text{sen}\, a$, sabendo que $a + b = 150^\circ$, $\text{sen}\, b = \frac{3}{4}$ e $\frac{\pi}{2} < b < \pi$.

.3 ARCO DUPLO

a) $\text{sen}2a$

Substituindo b por a na fórmula $\text{sen}(a+b)$, temos:

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a,$

$\text{sen}(a+a) =$

$\text{sen}2a =$ ______________________ ⑦

b) $\cos 2a$

Substituindo b por a na fórmula $\cos(a+b)$, temos:

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$

$\cos(a+a) =$

$\cos 2a =$ ______________________ ⑧

c) $\tan 2a$

Substituindo b por a na fórmula $\tan(a+b)$, temos:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$\tan(a+a) =$ ______________________

$\tan 2a =$ ______________________ ⑨

Exemplo:

1. Sabendo que $sen\ x = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

obter $sen2x$, $cos2x$ e $sec2x$.

a) Cálculo de $cos\ x$:

$$(\frac{1}{3})^2 + cos^2x = 1$$

$$cos^2x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\boxed{cos\ x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

b) Cálculo de $sen2x$:

$$sen2x = 2\ sen\ x \cdot cos\ x$$

$$sen2x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\frac{2\sqrt{2}}{3})$$

$$\boxed{sen2x = -\frac{4\sqrt{2}}{9}}$$

c) Cálculo de $cos2x$:

$$cos2x = cos^2x - sen^2x$$

$$cos2x = (-\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 - (\frac{1}{3})^2$$

$$cos2x = \frac{8}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\boxed{cos2x = \frac{7}{9}}$$

d) Cálculo de $sec2x$:

como $sec2x = \frac{1}{cos2x}$

temos $\boxed{sec2x = \frac{9}{7}}$

2. Calcular $tan\ 2x$, sabendo que $sec\ x = \sqrt{3}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

a) Cálculo de $tan\ x$

$$1 + tan^2x = sec^2x$$

$$1 + tan^2x = (\sqrt{3})^2$$

$$tan^2x = 2$$

$$\boxed{tan\ x = -\sqrt{2}}$$

b) Cálculo de $tan2x$:

$$tan2x = \frac{2\ tan\ x}{1 - tan^2\ x}$$

$$tan2x = \frac{2\ .(-\sqrt{2})}{1 - (-\sqrt{2})^2}$$

$$tan2x = \frac{-\ 2\ \sqrt{2}}{1 - 2}$$

$$\boxed{tan2x = 2\ \sqrt{2}}$$

EXERCÍCIOS:

E.76 Sabendo que $sen\ a = \frac{2}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, calcule: $sen\ 2a$ e $sec\ 2a$.

E.77 Seja $\sec a = -\sqrt{26}$ e $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$. Calcule $\tan 2a$.

E.78 Sendo $\cos x = \frac{5}{13}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule $\cos 2x$.

E.79 Calcule $\cos 2x$, sendo $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$

E.80 Sabendo que $\sec a = -\frac{5}{4}$ e $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, calcule: $\csc 2a$.

E.81 Sendo $\cos x = -\frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule: $\operatorname{sen} 2x$ e $\cos 2x$. Qual o quadrante de $2x$?

E.82 Dada $\tan x = \sqrt{2} - 1$, calcule: $\tan 2x$.

E.83 Calcule $\operatorname{sen} 2x$, sendo $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

E.84 Sendo $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{6}{5}$, calcule: $\operatorname{sen} 2x$.

E.85 Sendo $\operatorname{sen} a + \cos a = m$, obter $\operatorname{sen} 2a$.

6.4 ARCO METADE

a) $\operatorname{sen} \frac{a}{2}$.

Tomando a fórmula de $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Substituindo $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$:

$$\cos 2x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Fazendo $2x = a$, temos $x = \frac{a}{2}$, logo:

$$\cos a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

$$\boxed{\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}} \qquad ⑩$$

b) $\cos \frac{a}{2}$.

Sabemos que:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Fazendo $2x = a$, temos $x = \frac{a}{2}$, logo:

$$\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \cos a$$

$$\boxed{\cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}} \quad ⑪$$

c) $\tan \frac{a}{2}$.

Dividindo $\text{sen} \frac{a}{2}$ por $\cos \frac{a}{2}$, obtemos a fórmula para $\tan \frac{a}{2}$:

$$\boxed{\tan \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}} \quad ⑫$$

Exemplo:

Sabendo que $\text{sen}\, x = -\frac{4}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular:

$\text{sen} \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$ e $\tan \frac{x}{2}$.

a) Cálculo de $\cos x$:

$$(-\frac{4}{5})^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\boxed{\cos x = -\frac{3}{5}}$$

b) Quadrante do arco $\frac{x}{2}$:

Se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$,

Dividindo todos os termos por 2,temos

$$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

Isto é,

$\frac{x}{2}$ é um arco do 2º quadrante.

c) Cálculo de $sen\ \frac{x}{2}$:

$$sen\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ x}{2}}$$

$$sen\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{3}{5})}{2}}$$

$$sen\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\frac{5 + 3}{5}}{2}}$$

$$sen\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$sen\ \frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{sen\ \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

d) Cálculo de $cos\ \frac{x}{2}$:

$$cos\ \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 + cos\ x}{2}}$$

$$cos\ \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 + (-\frac{3}{5})}{2}}$$

$$cos\ \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{\frac{5 - 3}{5}}{2}}$$

$$cos\ \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$cos\ \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{cos\ \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

e) Cálculo de $tan\ \frac{x}{2}$:

$$tan\ \frac{x}{2} = \frac{sen\ \frac{x}{2}}{cos\ \frac{x}{2}}$$

$$tan\ \frac{x}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$\boxed{tan\ \frac{x}{2} = -2}$$

EXERCÍCIOS:

E.86 Sabendo que $sen\ a = -\frac{3}{5}$ e $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, calcular $sen\ \frac{a}{2}$, $cos\ \frac{a}{2}$ e $tan\ \frac{a}{2}$.

E.87 Dada $csc\ x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular $tan\ \frac{x}{2}$.

E.88 Sabendo que $csc\ a = -\frac{25}{24}$ e $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, calcular $sec\ \frac{a}{2}$.

E.89 Calcular $cot\ \frac{a}{2}$, sabendo que $sec\ a = -\frac{5}{4}$ e $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

E.90 Sabendo que $tan\ a = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ e $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, calcular $sen\ \frac{a}{2}$, $cos\ \frac{a}{2}$, $tan\ \frac{a}{2}$.

E.91 Dada $cot\ 2a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < 2a < \pi$, obter $cos\ a$ e $tan\ a$.

E.92 Calcular $sen\ \frac{a}{2}$, $cos\ \frac{a}{2}$ e $tan\ \frac{a}{2}$, sabendo que $sen\ a = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $\frac{\pi}{2} < a <$

E.93 Calcular $sec\ \frac{x}{2}$, sabendo que $sec\ x = -3$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

E.94 Sabendo que $sec\ x = 4$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, obter $tan\ (\frac{\pi + x}{2})$.

UNIDADE 7

TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

7.1 INTRODUÇÃO

Estudaremos *transformações* de expressões da forma $sen\,p \pm sen\,q$ e $cos\,p \pm cos\,q$, em produto, cujas fórmulas são de grande importância nas simplificações e outros problemas relacionados com *transformações*.

7.2 FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÕES EM PRODUTOS

Sabemos que:

$$sen\,(a+b) = sen\,a\;cos\,b + sen\,b\;cos\,a \longrightarrow \text{(I)}$$

$$sen\,(a-b) = sen\,a\;cos\,b - sen\,b\;cos\,a \longrightarrow \text{(II)}$$

$$cos\,(a+b) = cos\,a\;cos\,b - sen\,a\;sen\,b \longrightarrow \text{(III)}$$

$$cos\,(a-b) = cos\,a\;cos\,b + sen\,a\;sen\,b \longrightarrow \text{(IV)}$$

Fazendo $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases}$ temos $a = \dfrac{p+q}{2}$ e $b = \dfrac{p-q}{2} \longrightarrow \text{(V)}$

a) $\underline{sen\,p + sen\,q}$

Efetuando (I) + (II) :

$$sen\,(a+b) + sen\,(a-b) = 2sen\,a\;cos\,b$$

Usando (V) :

$$\boxed{sen\,p + sen\,q = 2sen\,\frac{p+q}{2} \cdot cos\,\frac{p-q}{2}}$$

b) $\underline{sen\,p - sen\,q}$

Efetuando (I) - (II) e usando (V) :

$$sen\,(a+b) - sen\,(a-b) = 2sen\,b\;cos\,a$$

$$\boxed{sen\,p - sen\,q = 2sen\,\frac{p-q}{2} \cdot cos\,\frac{p+q}{2}}$$

c) $\underline{cos\,p + cos\,q}$

Efetuando (III) + (IV) e usando (V) :

$$cos\,(a+b) + cos\,(a-b) = 2cos\,a\;cos\,b$$

$$\boxed{cos\,p + cos\,q = 2cos\,\frac{p+q}{2} \cdot cos\,\frac{p-q}{2}}$$

d) cos p − cos q

Efetuando Ⓘ̲ (III) − (IV) e usando (V) :

$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\,\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b$

$$\boxed{\cos p - \cos q = -2\,\mathrm{sen}\,\frac{p+q}{2}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{p-q}{2}}$$

Exemplos:

1. Transformar em produto a expressão $y = \mathrm{sen}30^\circ + \mathrm{sen}80^\circ$

Resolução:

$y = \mathrm{sen}30^\circ + \mathrm{sen}80^\circ$

$y = 2\mathrm{sen}\,\frac{30^\circ + 80^\circ}{2}\cdot\cos\frac{30^\circ - 80^\circ}{2}$

$y = 2\mathrm{sen}55^\circ\cdot\cos(-25^\circ)$

como $\cos(-a) = \cos a$, temos:

$$\boxed{y = 2\mathrm{sen}55^\circ\cdot\cos25^\circ}$$

2. Transformar em produto a expressão $y = \mathrm{sen}\,9a - \mathrm{sen}\,3a + \mathrm{sen}\,a - \mathrm{sen}5a$

Resolução:

$y = (\mathrm{sen}3a + \mathrm{sen}9a) + (\mathrm{sen}\,a - \mathrm{sen}5a)$

$y = 2\mathrm{sen}\,\frac{3a+9a}{2}\cdot\cos\frac{3a-9a}{2} + 2\mathrm{sen}\,\frac{a-5a}{2}\cdot\cos\frac{a+5a}{2}$

$y = 2\mathrm{sen}\,6a\cdot\cos(-3a) + 2\mathrm{sen}(-2a)\cdot\cos3a$

Lembrando que $\mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}\,x$ e $\cos(-x) = \cos x$, temos:

$y = 2\mathrm{sen}6a\cdot\cos3a - 2\mathrm{sen}2a\cdot\cos3a$

Colocando $2\cos3a$ em evidência e fatorando, temos:

$y = 2\cos3a\,(\mathrm{sen}\,6a - \mathrm{sen}\,2a)$

$y = 2\cos3a\cdot2\mathrm{sen}\,\frac{6a-2a}{2}\cdot\cos\frac{6a+2a}{2}$

$y = 2\cos3a\cdot2\mathrm{sen}2a\cdot\cos4a$

$$\boxed{y = 4\cos3a\cdot\mathrm{sen}2a\cdot\cos4a}$$

3. Simplificar a expressão: $y = \dfrac{sen2x + sen4x}{cos2x - cos4x}$

Resolução:

$$y = \frac{sen2x + sen4x}{cos2x - cos4x}$$

$$y = \frac{2sen3x \,.\, cos\,(-x)}{-2sen3x \,.\, sen\,(-x)}$$

$$y = \frac{\cancel{2sen3x} \,.\, cos\,x}{\cancel{2sen3x} \,.\, sen\,x}$$

$$\boxed{y = ctan\ x}$$

EXERCÍCIOS:

E.95 Transforme em produto:

a) $cos\ 53^{o} + cos\ 27^{o}$

b) $sen\ 28^{o} - sen\ 52^{o}$

c) $sen23^{o}17' + sen64^{o}48'$

d) $cos10^{o} - sen39^{o}40''$

e) $sen40^{o} + cos80^{o}$

f) $tan20^{o} + tan60^{o}$

g) $cot75^{o} - tan33^{o}$

h) $tan48^{o} - tan17^{o}42'35''$

i) $cot87^{o} - tan62^{o}45''$

j) $1 - cos19^{o}09'$

l) $sen7a - sen15a$

m) $2sen\ x + sen2x$

n) $cos20^{o} + cos40^{o} + cos60^{o}$

o) $sen5a + sen\ a + sen9a - sen3a$

p) $sen\ x + sen3x + sen9x - sen5x$

q) $sen7a + sen5a - sen3a - sen\ a$

r) $cos9a + cos5a - cos3a - cos\ a$

s) $sen\ a + 2sen3a + sen5a$

t) $1 + cos\ a + cos2a$

u) $cos(a+b+c) + cos(a+b-c) + cos(a+c-b) + cos(b+c-a)$

E.96 Simplifique:

p-q

a) $y = \dfrac{\cos a - \cos b}{\text{sen } a + \text{sen } b}$

p+q

b) $y = \dfrac{\cos 2a + \cos a}{\text{sen} 2a - \text{sen } a}$

c) $y = \dfrac{\text{sen} 3x - \text{sen } x}{\cos 3x + \cos x}$

d) $y = \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{\text{sen} 4x + \text{sen} 2x}$

e) $y = \dfrac{\cos 6x - \cos 2x}{\cos 4x - 1}$

f) $y = \dfrac{\text{sen} 5x + \text{sen } x + \text{sen} 3x}{\cos 3x + \cos 7x + \cos 5x}$

g) $y = \dfrac{\text{sen} 40^\circ + \text{sen} 50^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 50^\circ}$

h) $y = \dfrac{\cos 14^\circ + \cos 8^\circ}{\text{sen} 14^\circ - \text{sen} 8^\circ}$

i) $y = \dfrac{\text{sen} 100^\circ - \text{sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ - \cos 100^\circ}$

j) $y = \dfrac{\text{sen} 40^\circ + \text{sen} 50^\circ + \text{sen} 72^\circ + \text{sen} 82^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 50^\circ + \cos 72^\circ - \cos 82^\circ}$

UNIDADE 8

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

8. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

8.1 INTRODUÇÃO

Equação trigonométrica é toda igualdade que possui uma ou mais *funções trigonométricas* de certos *arcos* e que só é verificada para determinados valores desses *arcos*.

Resolver uma *equação trigonométrica* consiste em determinar os valores desses *arcos* que verificam a *equação*. Dada a natureza das *funções trigonométricas*, um determinado valor da *função circular* corresponde a infinidade de valores de *arcos*.

Estudaremos somente *equações simples* e que envolvam apenas *funções trigonométricas* de um só *arco*.

8.2 EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS

São as equações da forma:

a) $sen\ x = a$

b) $cos\ x = a$

c) $tan\ x = a$

d) $cot\ x = a$

e) $sec\ x = a$

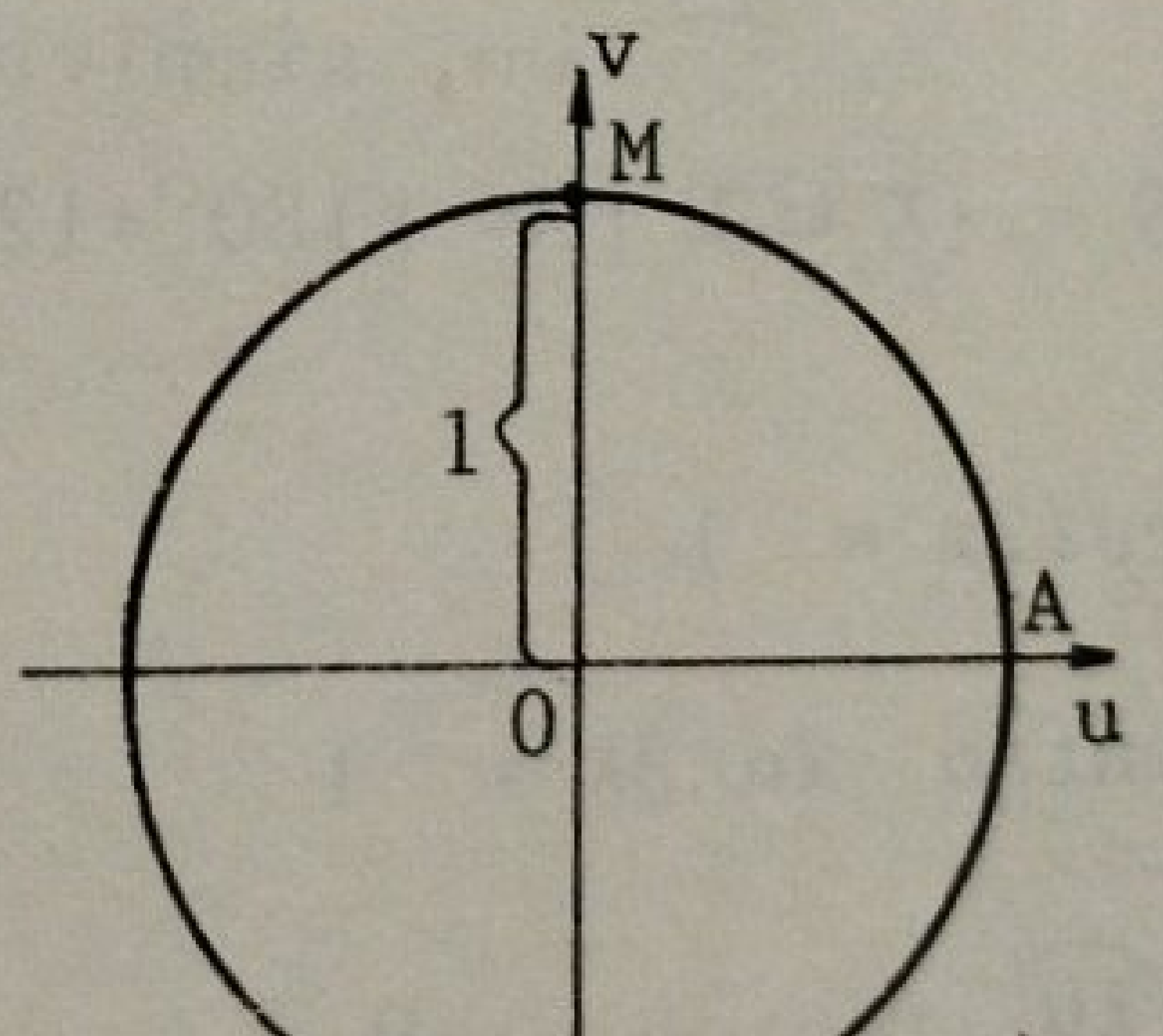
f) $csc\ x = a$

Onde "a" é um número real que pertence ao conjunto imagem de cada funç

Exemplos:

1. $sen\ x = 1$

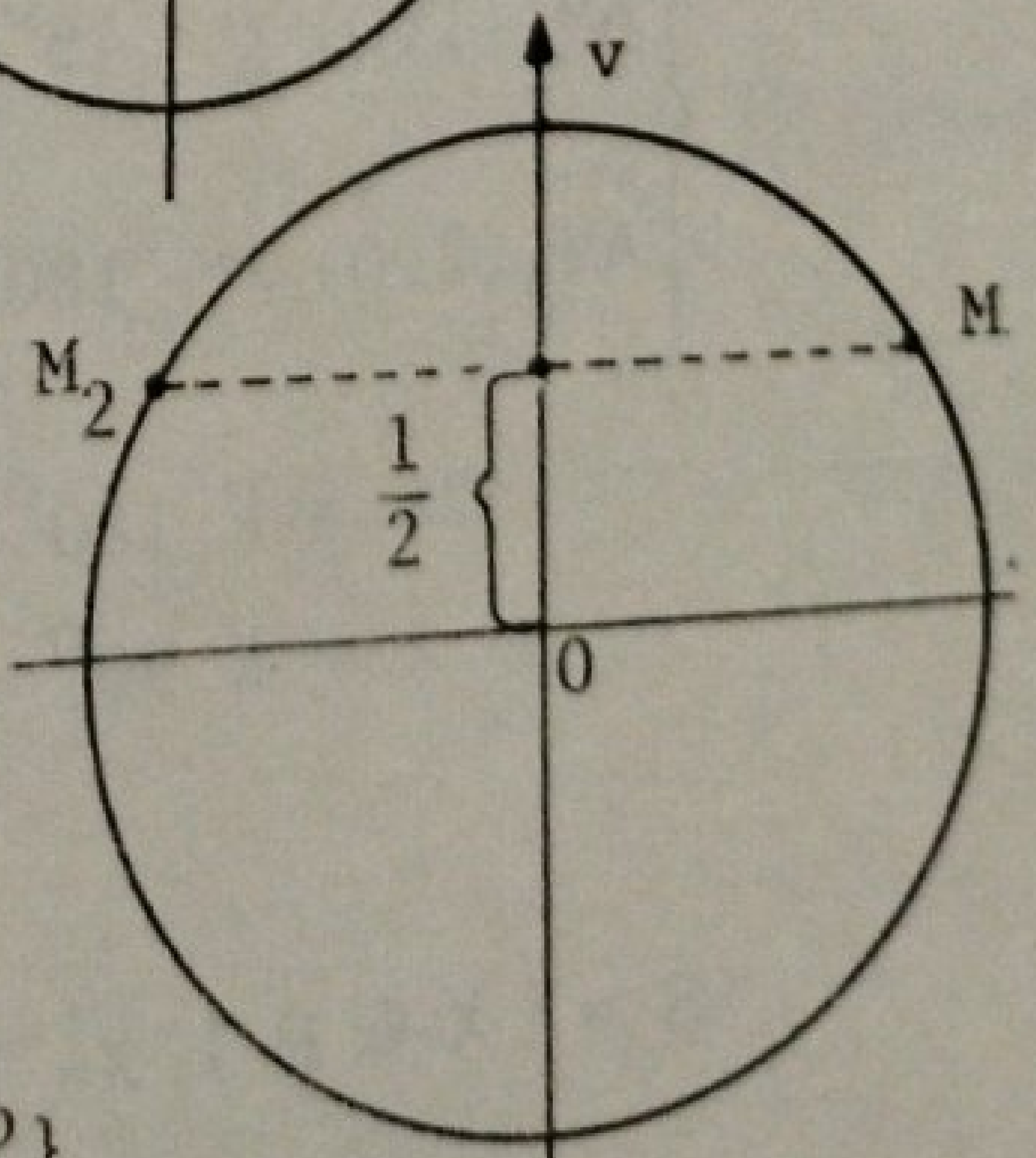
$\overset{\frown}{AM} \rightarrow 90^o$



$S = \{X \in \mathbb{R} \mid X = K\ 360^o + 90^o\}$

2. $csc\ x = 2$

então $sen\ x = \frac{1}{2}$



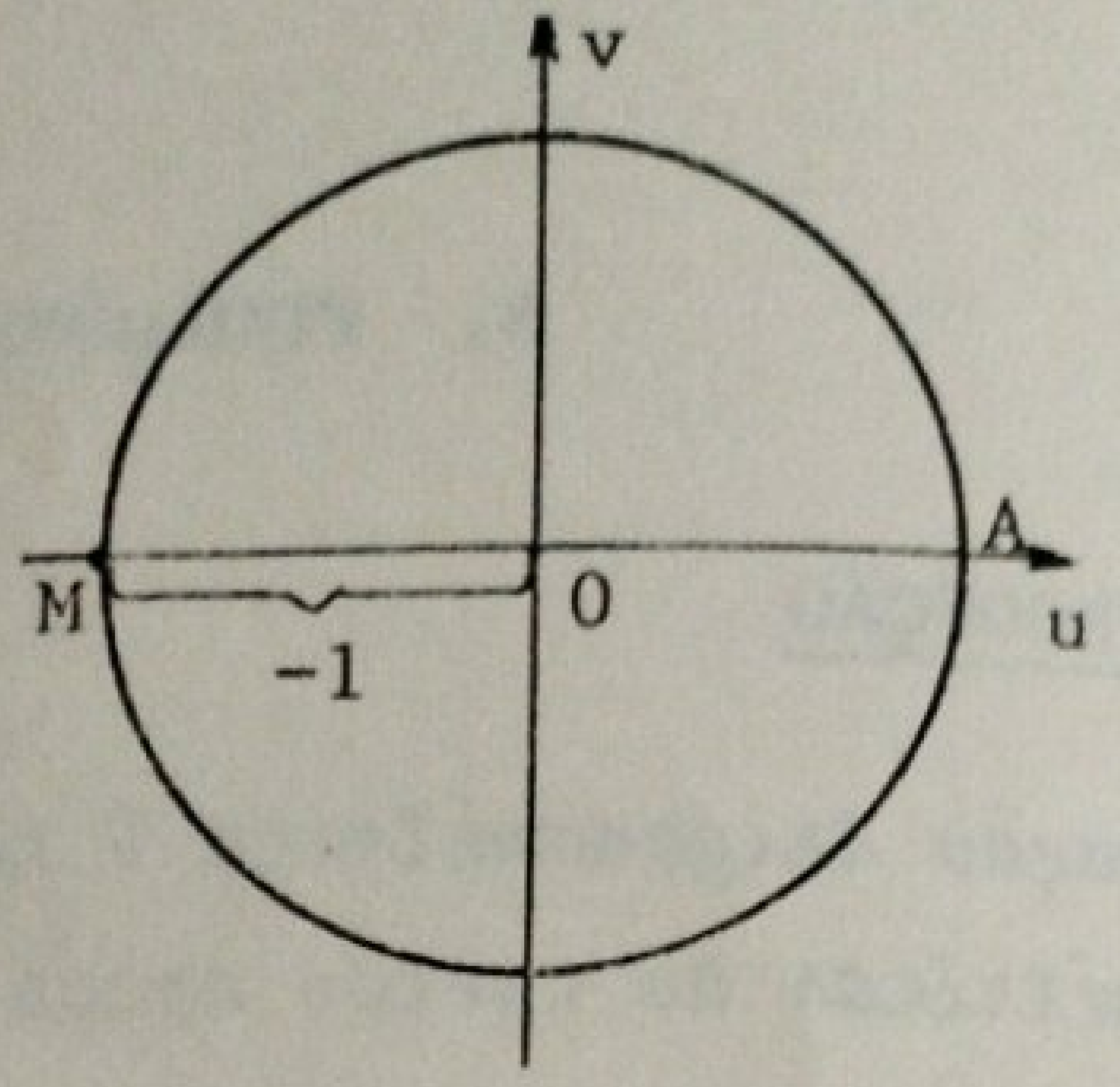
$$\begin{cases} \overset{\frown}{AM_1}\ (1º Q) \Rightarrow 30^o \\ AM_2\ (2º Q) \Rightarrow 180^o - 30^o = 150^o \end{cases}$$

$S = \{X \in \mathbb{R} \mid X = K\ 360^o + 30^o \text{ ou } X = K\ 360^o + 150^o\}$

3. $\cos x = -1$

$\widehat{AM} \to 180^{o}$

$S = \{X \in \mathbb{R} \mid X = K\,360^{o} + 180^{o}\}$

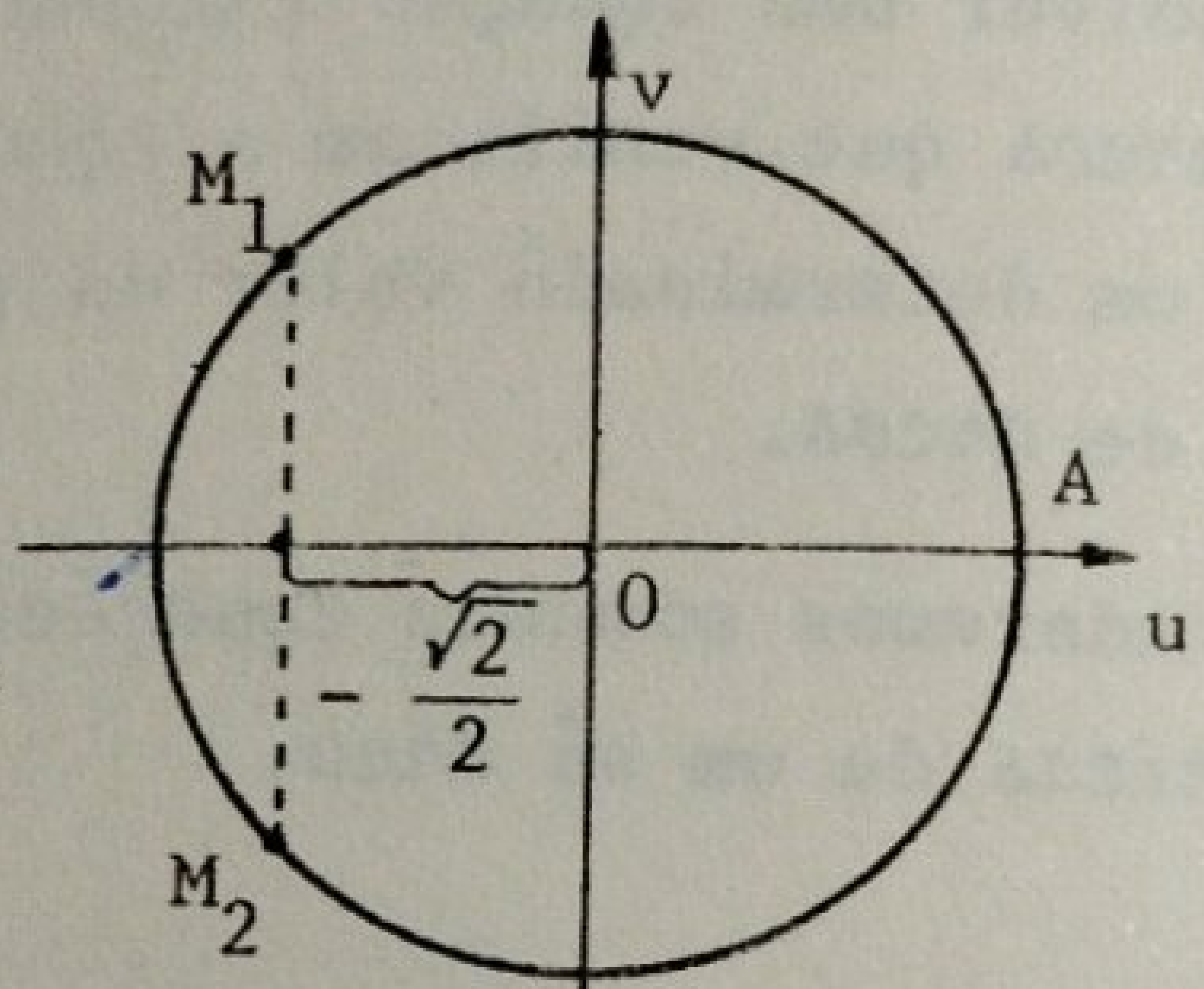


4. $\sec x = -\sqrt{2}$

então $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} \widehat{AM_1}\,(2^{\circ}Q) \Rightarrow 180^{o} - 45^{o} = 135^{o} \\ \widehat{AM_2}\,(3^{\circ}Q) \Rightarrow 180^{o} + 45^{o} = 225 \text{ ou } -135^{o} \end{cases}$$

$S = \{X \in \mathbb{R} \mid X = K\,360 \pm 135^{o}\}$



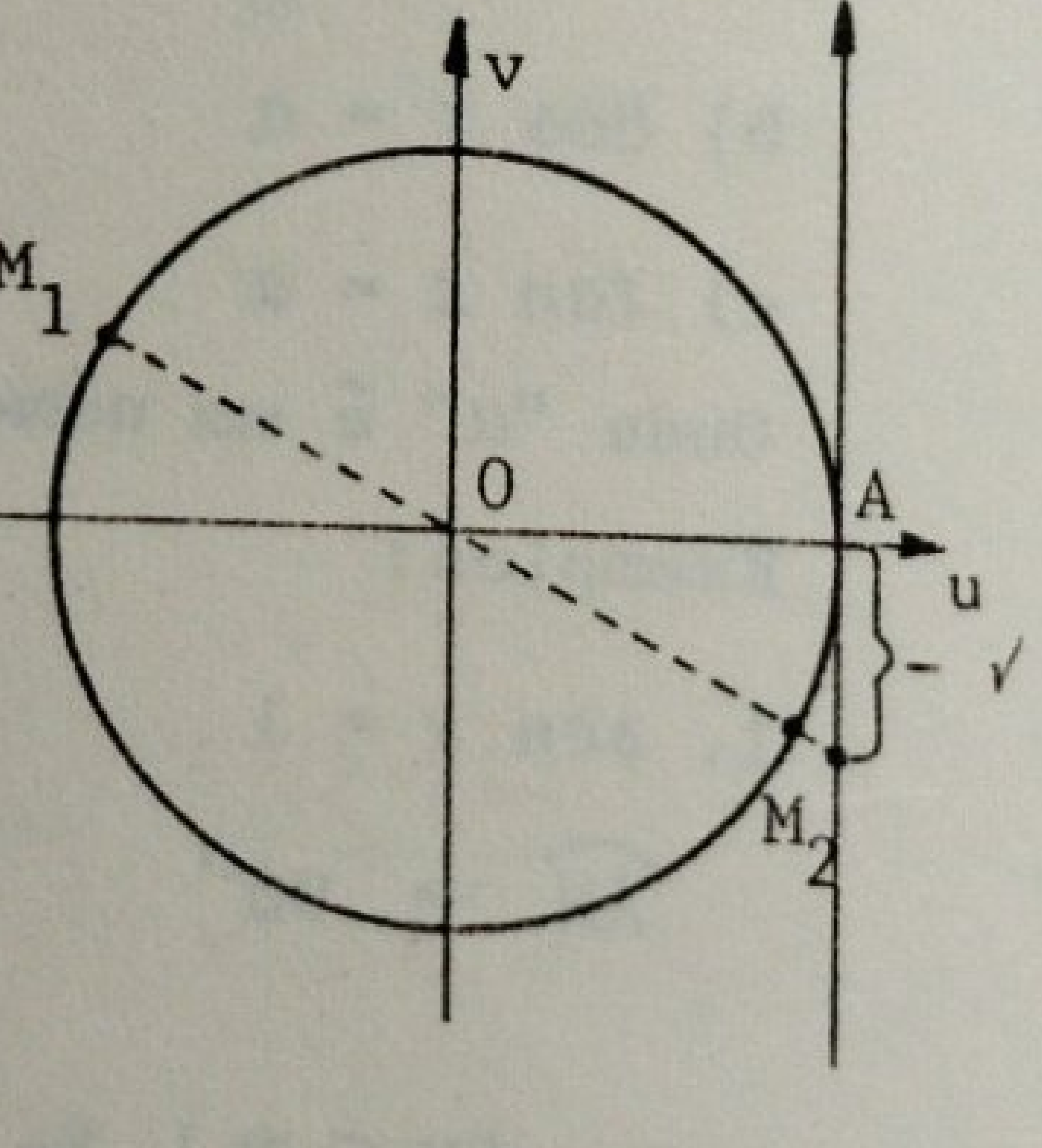
5. $\tan x = -\sqrt{3}$

$$\begin{cases} \widehat{AM_1}\,(2^{\circ}Q) \Rightarrow 180^{o} - 60^{o} = 120^{o} \\ \widehat{AM_2}\,(4^{\circ}Q) \Rightarrow 360^{o} - 60^{o} = 300^{o} \end{cases}$$

$S = \{X \in \mathbb{R} \mid X = K360^{o} + 120^{o} \text{ ou } X = K360^{o} + 300^{o}\}$

ou, simplesmente

$S = \{X \in \mathbb{R} \mid X = K180^{o} + 120^{o}\}$



6. $\cot 2x = 1$

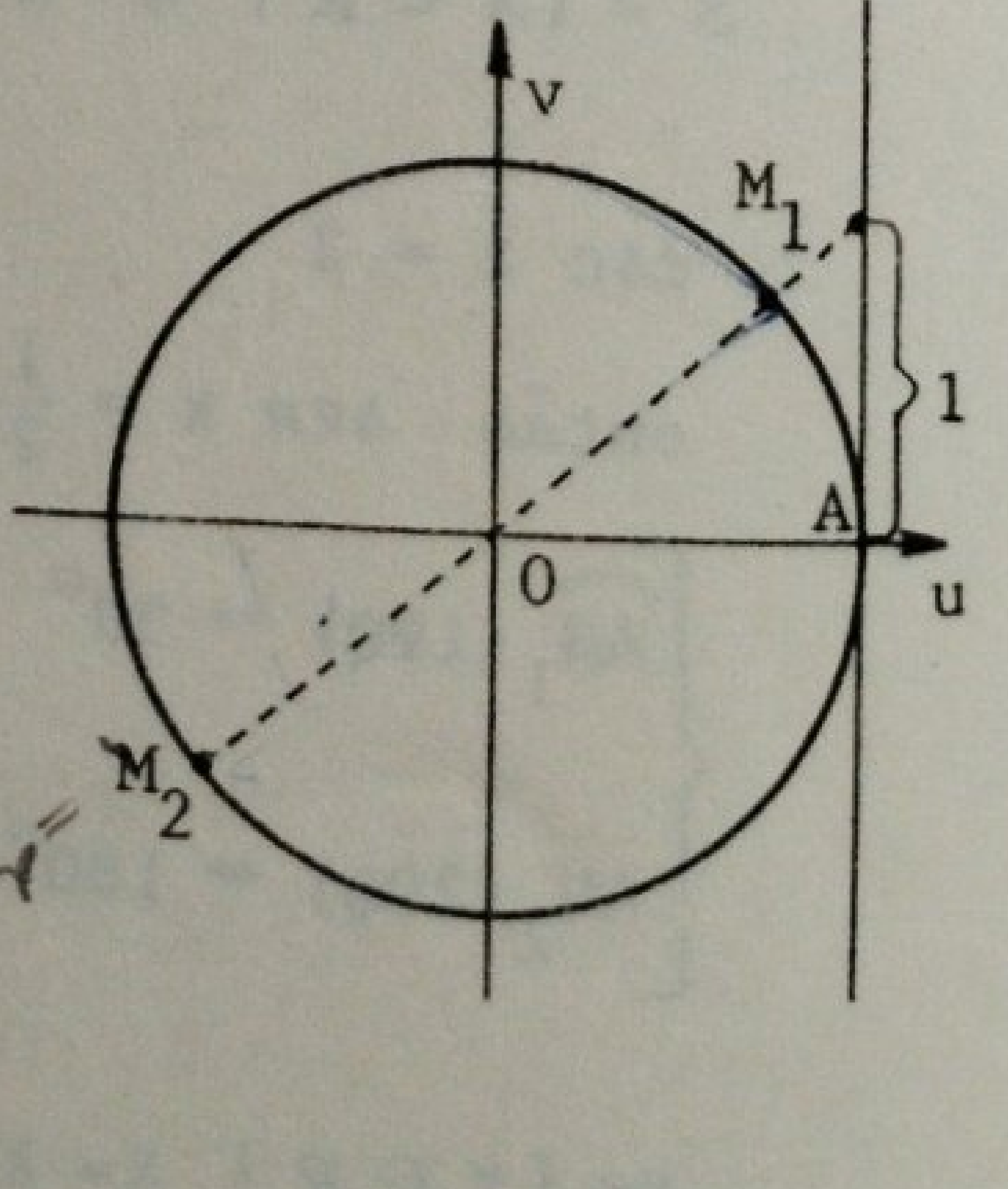
então $\tan 2x = 1$

$$\begin{cases} \widehat{AM_1}\,(1^{\circ}Q) \Rightarrow 45^{o} \\ \widehat{AM_2}\,(2^{\circ}Q) \Rightarrow 180^{o} + 45^{o} = 225^{o} \end{cases}$$

$2x = K\,180^{o} + 45^{o}$

$x = K\,90^{o} + 22^{o}30'$

$S = \{X \in \mathbb{R} \mid X = K\,90^{o} + 22^{o}30'\}$



$sen^2x + cos^2x =$

cos 1 −

OBS.: As soluções destas *equações* podem ser resumidas no seguinte quadro:

a) $sen\ x = a \rightarrow \begin{cases} x = K\ 360^o + m_1 \\ x = K\ 360^o + m_2 \end{cases}$ para $-1 < a < 1$

b) $cos\ x = a \rightarrow x = K\ 360^o \pm m$ para $-1 < a < 1$

c) $tan\ x = a \rightarrow x = K\ 180^o + m$

8.3. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS REDUTÍVEIS ÀS FUNDAMENTAIS

Exemplos:

1. $sen^2 x + 3cos\ x - 3 = 0$

Colocando a *equação* em função de $cos\ x$, temos:

$$(1 - cos^2 x) + 3cos\ x - 3 = 0$$

$$- cos^2 x + 3cos\ x - 2 = 0 \quad \therefore \quad cos^2 x - 3cos\ x + 2 = 0$$

Resolvendo a *equação* do 2º grau:

$$cos\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} cos\ x = 2 & \text{(impossível)} \\ cos\ x = 1 \end{cases}$$

Recaímos na *equação fundamental* $cos\ x = 1$, logo

$$S = \{X \in \mathbb{R} \mid X = K\ 360^o\}$$

2. $3tan^2 3x - 7sec3x + 5 = 0$

Colocando a *equação* em função de $sec3x$, temos:

$$3(sec^2 3x - 1) - 7sec3x + 5 = 0$$

$$3sec^2 3x - 7sec3x + 2 = 0$$ resolvendo a *equação* do 2º grau.

$$sec3x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} \Rightarrow \begin{cases} sec3x = 2 \Rightarrow cos3x = \frac{1}{2} \\ sec3x = \frac{1}{3} \Rightarrow cos3x = 3 \text{ (impossível)} \end{cases}$$

Recaímos na *equação fundamental* $cos3x = \frac{1}{2}$

$$3x = K\ 360^o \pm 60^o$$

$$x = K\ 120^o \pm 20^o$$

$$S = \{X \in \mathbb{R} \mid X = K\ 120^o \pm 20^o\}$$

EXERCÍCIOS:

E.97 Resolver as *equações trigonométricas:*

a) $sen\ x = -1$ b) $sen\ x = 0$ c) $cos\ x = 1$

d) $cos\ x = 0$ e) $tan\ x = 0$ f) $sen\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $cos\ x = \frac{1}{2}$ h) $cos\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i) $tan\ x = \sqrt{3}$

j) $tan2x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 1) $cot3x = -\sqrt{3}$ m) $csc\ x = -\sqrt{2}$

n) $3cot\ x = \sqrt{3}$ o) $sen(x - \frac{\pi}{6}) = 1$ p) $2sec(x + 20^{o}) = 4$

E.98 Resolver as *equações trigonométricas:*

a) $2sen^2x - 3sen\ x + 1 = 0$ b) $2cos^2x - 5cos\ x + 3 = 0$

c) $sen^2x - sen\ x = 0$ d) $2sen\ x - \dfrac{3}{sen\ x} = 5$

~~e) $2sec^23x - 5sec3x + 2 = 0$~~ f) $4cos^22x - 8cos2x + 3 = 0$

g) $2cos^2\frac{x}{2} + 7sen\frac{x}{2} = 5$ h) $tan\ x + sec^2x = 1$

i) $3tan^2x + 5 = 7secx$ j) $2sen^2x + 4cos^2x = 3 + cos\ x$

1) $cos^23x + 2sen^23x = 2$ m) $sen^4x + cos^4x = \frac{5}{8}$

n) $2sec\ x = tan\ x + cot\ x$

$sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$

$1 + sec^2x = tan^2x$

$sec^2x = tan^2x - 1$

$sec^2x = \frac{sen}{cos}$

$sec^2x =$

UNIDADE 9

Obj. 12

TRIÂNGULO QUALQUER

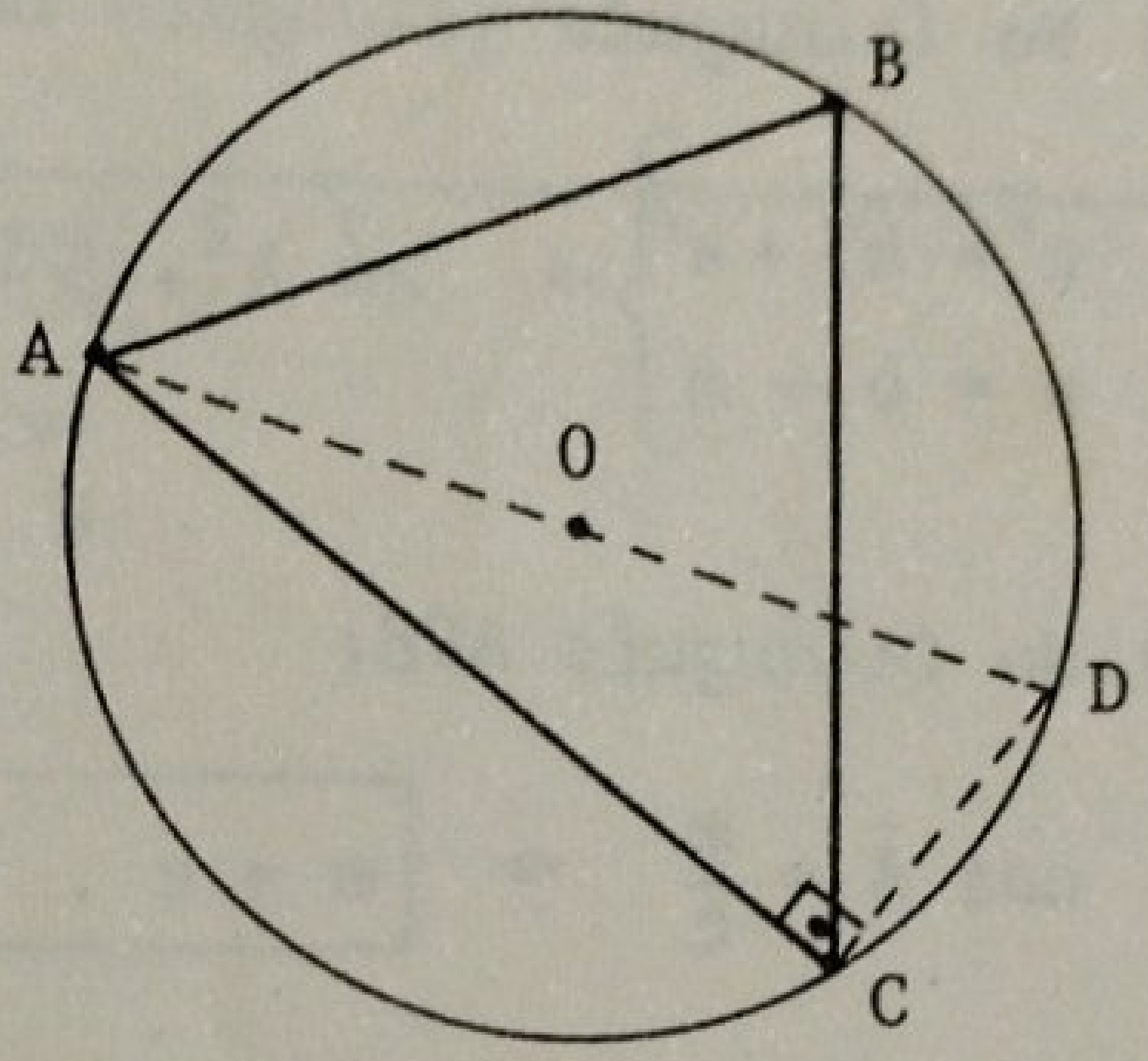
9. TRIÂNGULO QUALQUER

9.1 LEI DOS SENOS

> " *Num triângulo qualquer, a razão entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual ao diâmetro da circunferência circunscrita.*"

Demonstração

Dado um *triângulo* ABC, inscrito numa circunferência de raio r e centro O, temos:



a) $\overline{AD} = 2r$;

b) *Triângulo* ACD é *retângulo*, pois está inscrito numa semi-circunferência;

c) $\hat{D} = \hat{B}$, pois determinam cordas iguais $\overline{AC}$;

d) No *triângulo* ACD, temos:

$$sen\ \hat{D} = \frac{b}{2r} \quad \text{mas como } \hat{D} = \hat{B}\ , \quad sen\ \hat{B} = \frac{b}{2r} \Rightarrow \boxed{\frac{b}{sen\ \hat{B}} = 2r} \qquad (1)$$

Do mesmo modo podemos obter:

$$sen\ \hat{A} = \frac{a}{2r} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{sen\hat{A}} = 2r} \qquad (2)$$

$$sen\hat{C} = \frac{c}{2r} \Rightarrow \boxed{\frac{c}{sen\hat{C}} = 2r} \qquad (3)$$

De (1) , (2) e (3) , concluimos que:

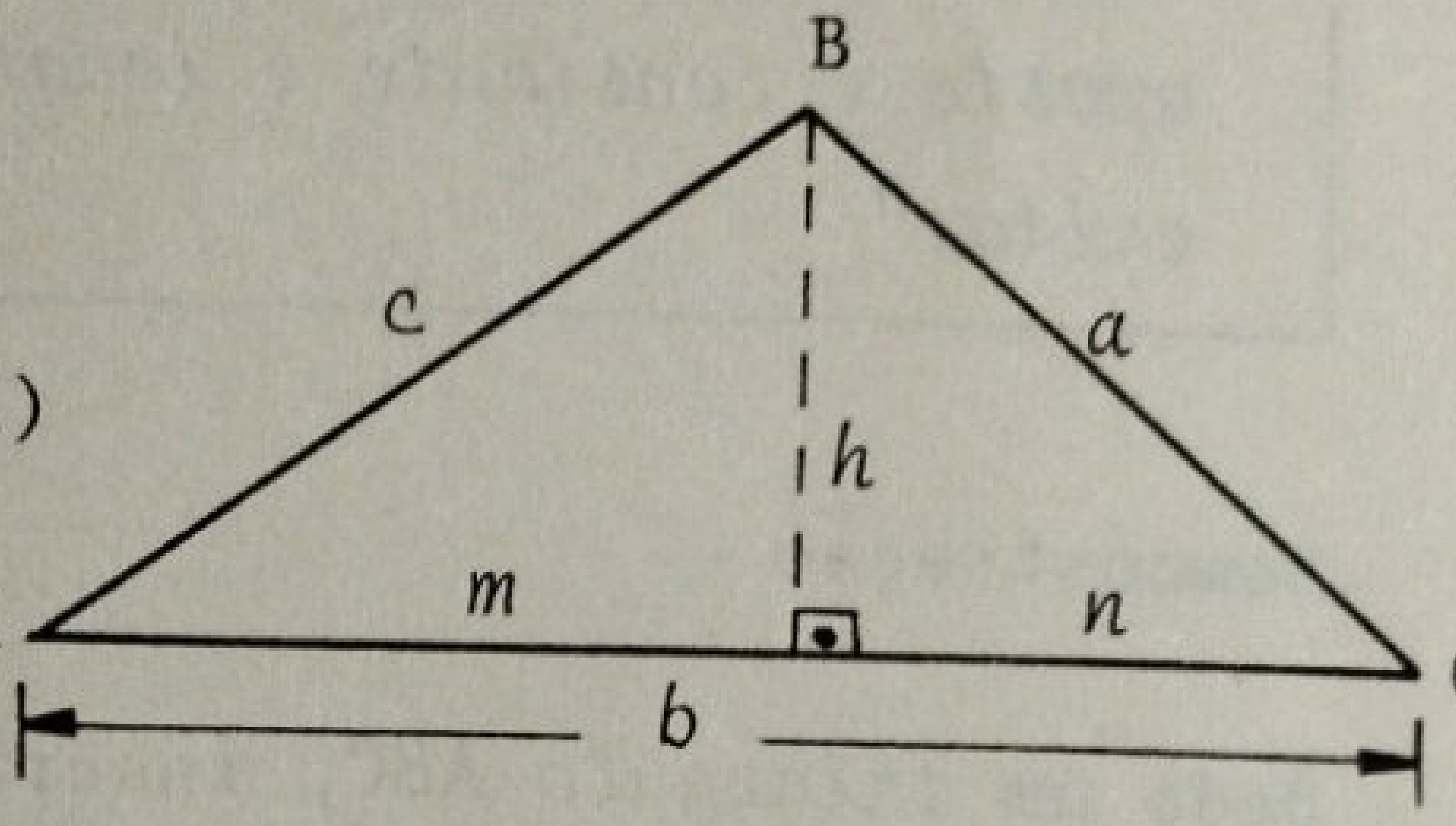
$$\boxed{\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2r}$$

que se denomina LEI DOS SENO

9.2 LEI DOS COSSENOS

> " *Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto das medidas dos dois lados pelo cosseno do ângulo que êles formam*".

Demonstração



a) No *triângulo retângulo ADB*:

$$c^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2 \qquad (1)$$

b) No *triângulo retângulo BDC*:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = h^2 + n^2 \\ n = b - m \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = h^2 + (b-m)^2 \Rightarrow \boxed{a^2 = h^2 + b^2 - 2bm + m^2} \qquad (2)$$

c) No *triângulo ADB*:

$$\cos\hat{A} = \frac{m}{c} \Rightarrow \boxed{m = c \cdot \cos\hat{A}} \qquad (3)$$

d) Substituindo (1) e (3) em (2), temos:

$$a^2 = c^2 - m^2 + b^2 - 2bc\cos\hat{A} + m^2$$

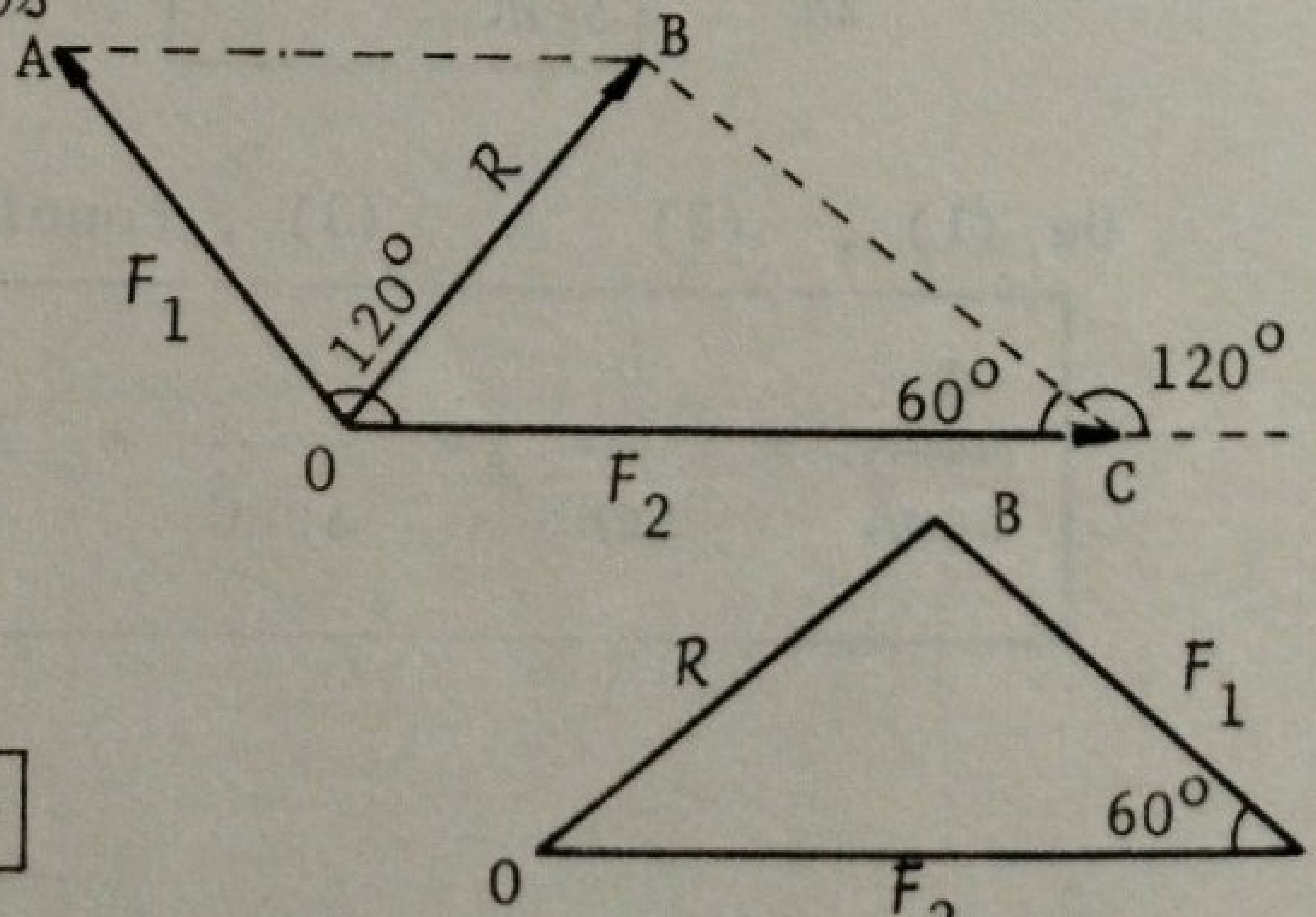
$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$ denominada LEI DOS COSSENOS.

Exemplos:

1. Dadas duas forças concorrentes $F_1 = 10Kgf$, $F_2 = 15Kgf$, sabendo que formam um ângulo de 120°, calcular a resultante.

Resolução:

Aplicando a lei dos *cossenos* no *triângulo OBC*, temos:



$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos 60°$$

$$R^2 = 10^2 + 15^2 - 2.10.15.\frac{1}{2}$$

$$R^2 = 100 + 225 - 150$$

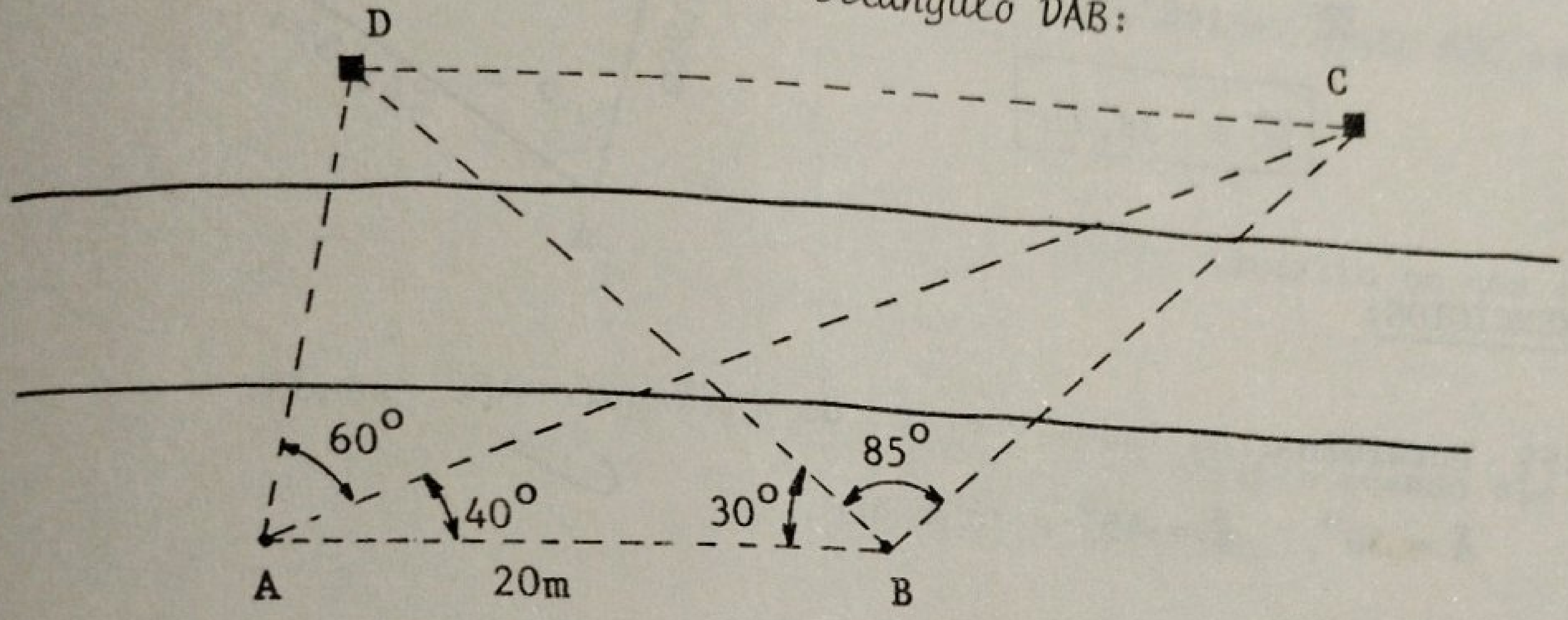
$$R^2 = 175$$

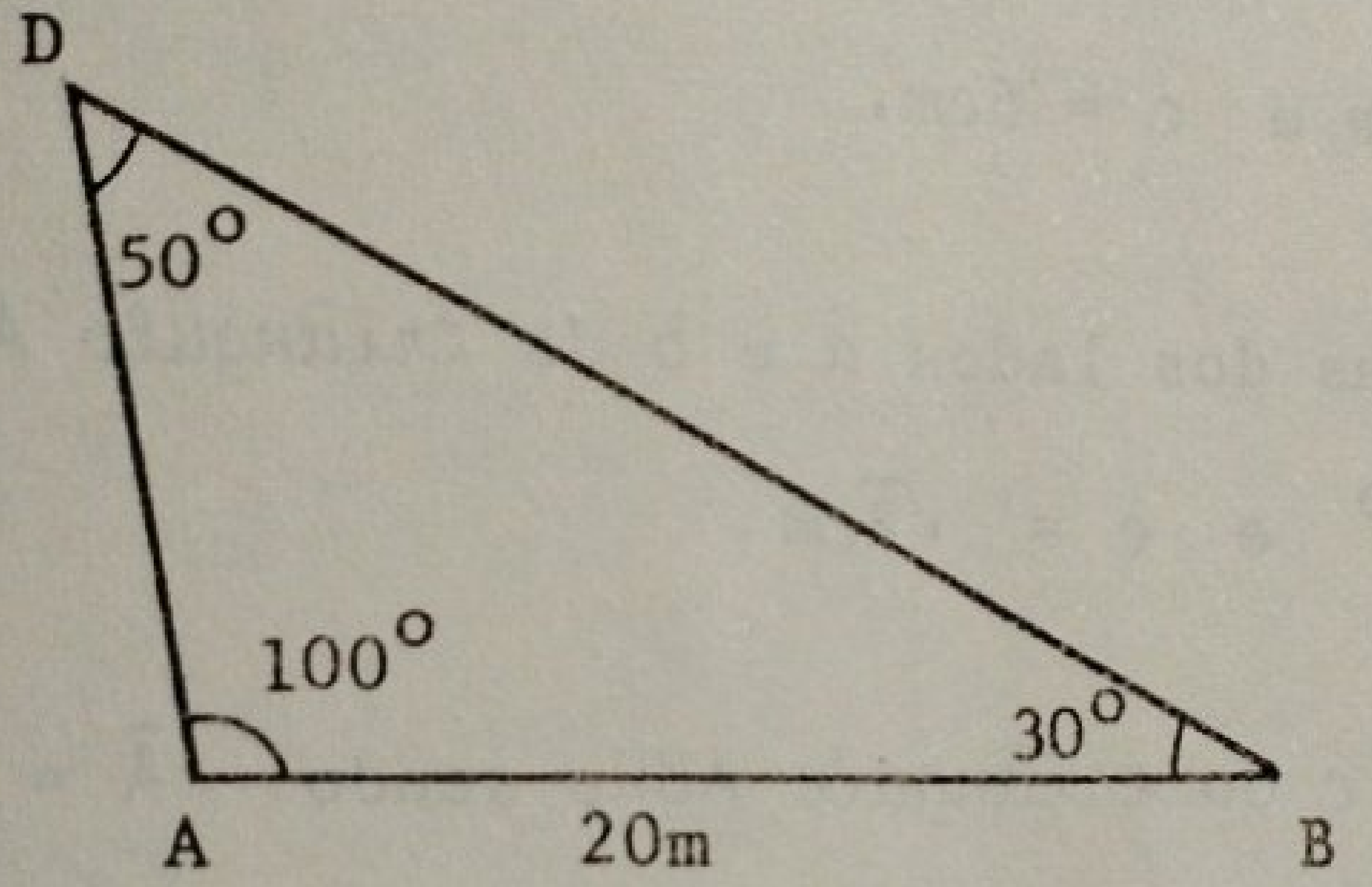
$$R = \sqrt{175} \qquad \boxed{R = 5\sqrt{7}kgf}$$

2. Um topógrafo na margem de um rio, à partir dos pontos A e B , distantes 20m, visualiza duas torres de alta tensão na outra margem , e com auxilio do teodolito determina os ângulos conforme a figura. Calcular a distância $\overline{DC}$ entre as torres.

Resolução:

a) Aplicando a *lei dos senos no triângulo* DAB:





$$\frac{\overline{AD}}{sen30^{o}} = \frac{20}{sen50^{o}}$$

$$\overline{AD} = \frac{20\ .\ sen30^{o}}{sen50^{o}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{20\ .\ 0{,}50}{0{,}77} \Rightarrow \boxed{\overline{AD} = 12{,}99m}$$

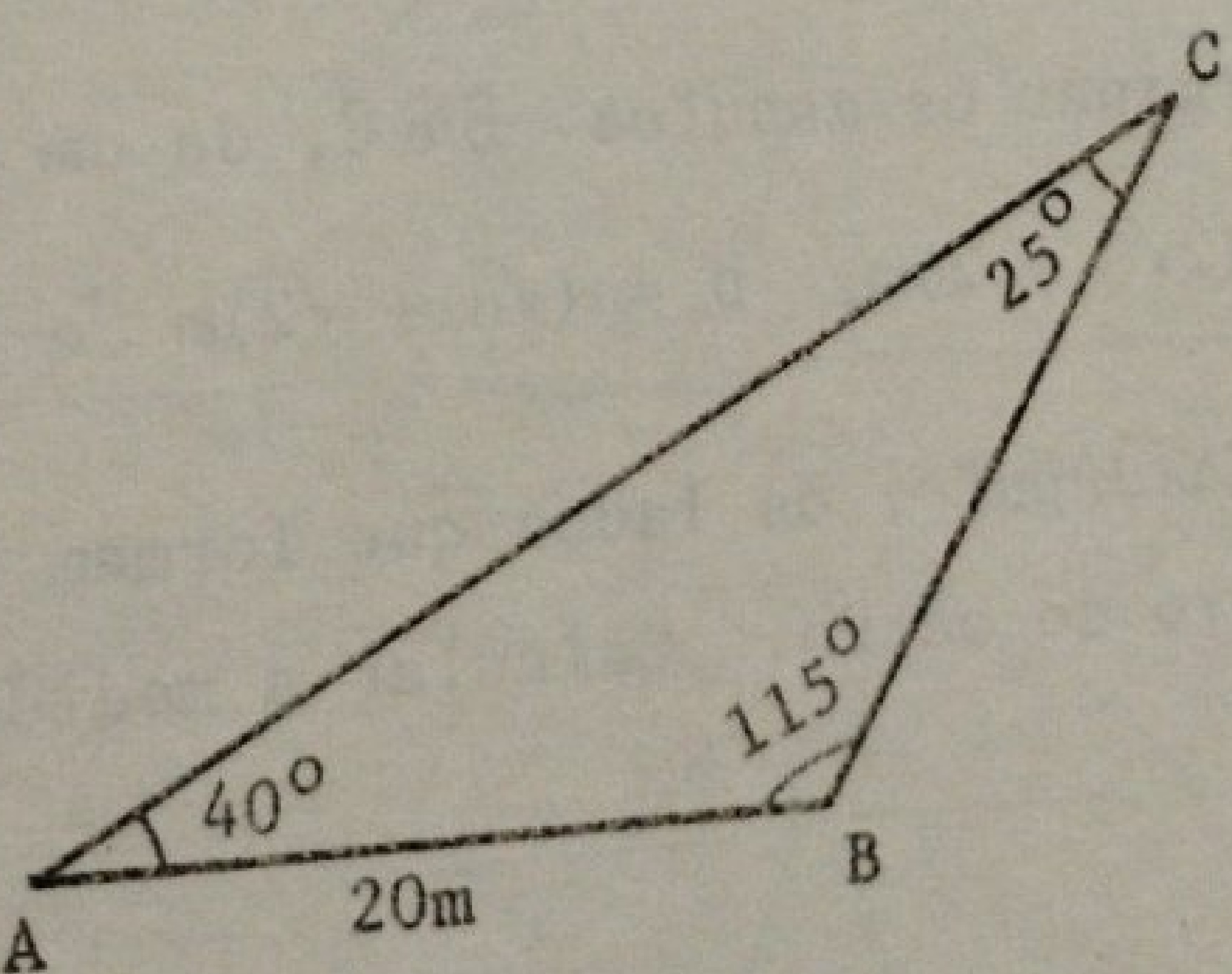
b) Aplicando a *lei dos senos no triângulo* ABC:

$$\frac{\overline{AC}}{sen115^{o}} = \frac{20}{sen25^{o}}$$

$$\overline{AC} = \frac{20\ .\ sen115^{o}}{sen25^{o}}$$

$$\overline{AC} = \frac{20\ .\ 0{,}91}{0{,}42}$$

$$\boxed{\overline{AC} = 43{,}33m}$$



c) Aplicando a *lei dos cossenos no triângulo* DAC:

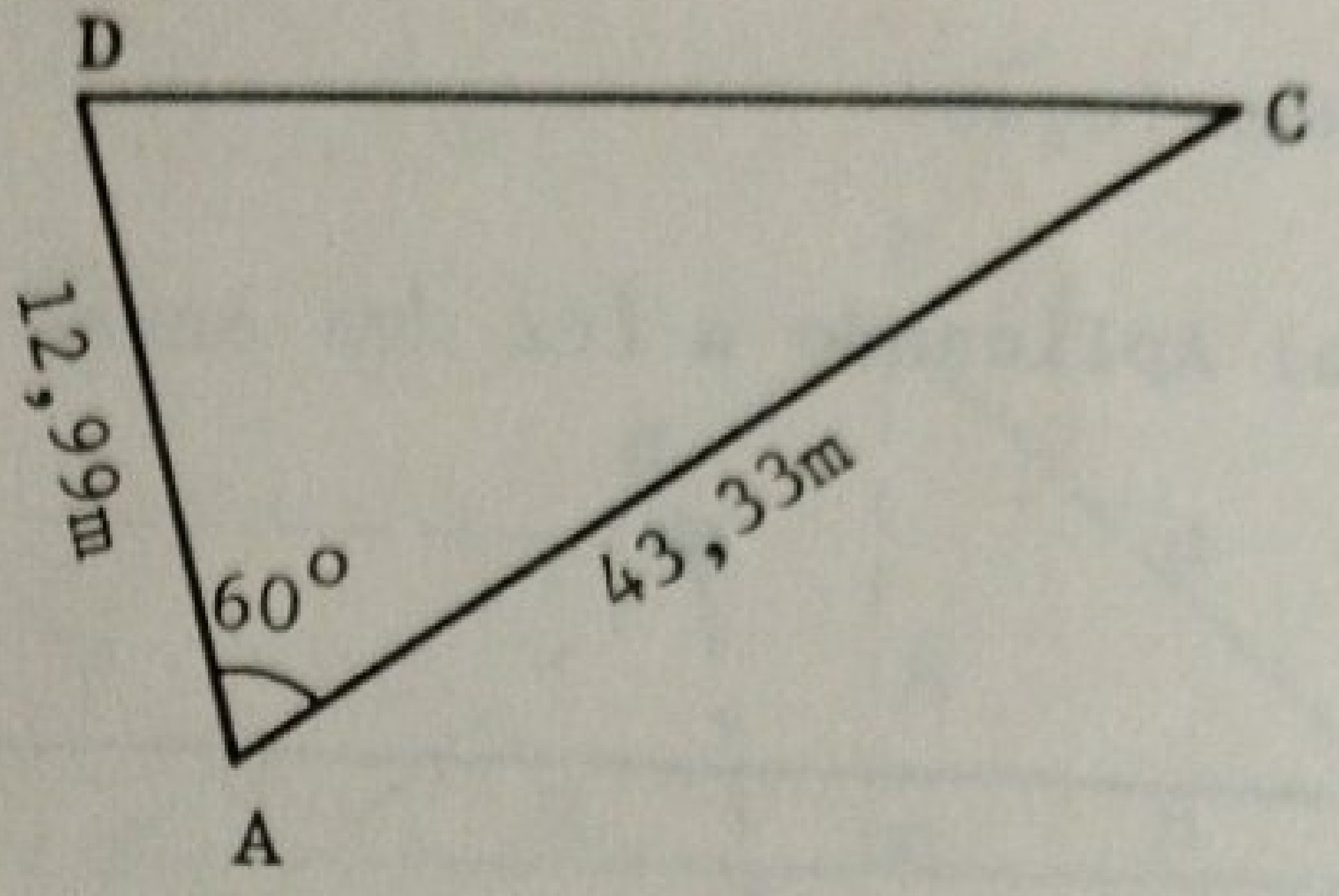
$$\overline{DC}^2 = 12,99^2 + 43,33^2 - 2.12,99.\ 43,33.\ cos60^\circ$$

$$\overline{DC}^2 = 168,74 + 1877,49 - 1125,71 \times 0,5$$

$$\overline{DC}^2 = 2046,23 - 562,86$$

$$\overline{DC}^2 = 1483,37$$

$$\boxed{\overline{DC} \cong 38,51m}$$



XERCÍCIOS:

.99 Determinar os lados b e c do *triângulo* ABC, sendo:

$\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ e $a = 4cm$.

.100 Obter a medida do lado a do *triângulo* ABC, sendo:

$\hat{A} = 60^\circ$, $b = 7cm$ e $c = 5cm$.

.101 Calcular as medidas dos lados a e b do *triângulo* ABC, sabendo que $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ e $c = \sqrt{2}cm$.

.102 Determinar o lado c do *triângulo* ABC, sendo: $\hat{A} = 75^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ e $b = 10m$.

.103 Os lados consecutivos de um *paralelogramo* medem 8cm e 12cm, e formam um ângulo de 120°. Calcular medidas das diagonais.

.104 Determinar os *ângulos internos* de um *triângulo* ABC, sabendo que:

$a = 2\sqrt{3}m$, $b = 2\sqrt{2}m$, e $c = (\sqrt{6} + \sqrt{2})m$.

.105 Determinar os *ângulos* $\hat{B}$ e $\hat{C}$, de um *triângulo* ABC, sendo:

$a = (2\sqrt{3} + 2)m$, $b = (\sqrt{6} + \sqrt{2})m$ e $\hat{A} = 135^\circ$.

.106 Num *triângulo*, os lados que formam um *ângulo* de 60°, a medida de um é o dobro do outro. Calcular a medida dos demais *ângulos internos*.

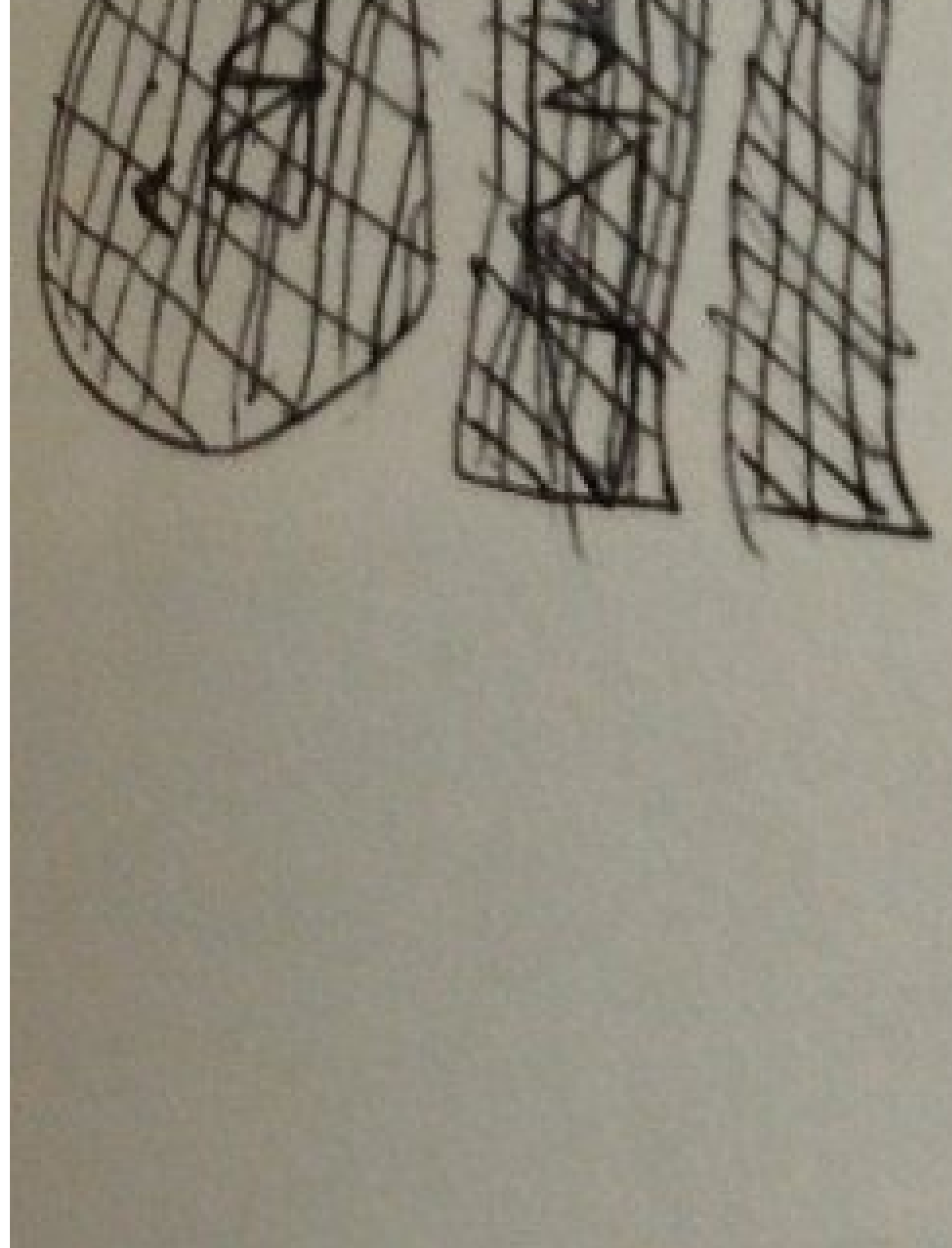
E.107 Dadas duas forças concorrentes F_1 = 8kgf e F_2 = 5kgf, sabendo que formam um *ângulo* de 120°, calcular a *força resutante*.

E.108 Determinar as medidas das *diagonais de um losango*, cujos lados medem 8cm e um dos *ângulos* mede 60°.

E.109 Calcular o *raio da circunferência* circunscrita ao *triângulo* ABC, sendo a = 10cm e $\hat{A} = 15^\circ$.

E.110 Calcular a *diagonal menor* de um *hexágono regular* inscrito em uma circunferência de 6cm de raio.

E.111 O *ângulo* sob o qual um observador vê uma torre duplica quando ele se aproxima 110m e triplica quando se aproxima mais 50m . Calcular a *altura* da torre.



E.107 Dadas duas forças concorrentes $F_1 = 8kgf$ e $F_2 = 6kgf$, e que formam um ângulo de 120°, calcular a força resultante.

E.108 Determinar as medidas das diagonais de um losango, cujo lado mede 8cm e um dos ângulos mede 60°.

E.109 Calcular o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, onde

$a = 10cm$ e $\hat{A} = 45°$

E.110 Calcular a diagonal menor de um eneágono regular inscrito numa circunferência de 8cm de raio.

E.111 O ângulo sob o qual um observador vê uma torre duplica quando ele se aproxima 110m e triplica quando se aproxima mais 50m.
Calcular a altura da torre.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

UNIDADE 1

E.1 a) $sen\ \hat{S}=\frac{e}{d}$, $cos\ \hat{S}=\frac{f}{d}$, $tan\ \hat{S}=\frac{e}{f}$, $sen\ \hat{T}=\frac{f}{d}$, $cos\ \hat{T}=\frac{e}{d}$ e $tan\ \hat{T}=\frac{f}{e}$

b) $sen\ \hat{M}=\frac{b}{c}$, $cos\ \hat{M}=\frac{a}{c}$, $tan\ \hat{M}=\frac{b}{a}$, $sen\ \hat{N}=\frac{a}{c}$, $cos\ \hat{N}=\frac{b}{c}$ e $tan\ \hat{N}=\frac{a}{b}$

c) $sen\ \hat{E}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\ \hat{E}=\frac{1}{2}$, $tan\ \hat{E}=\sqrt{3}$, $sen\ \hat{G}=\frac{1}{2}$, $cos\ \hat{G}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $tan\ \hat{G}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $sen\ \hat{C}=\frac{2}{3}$, $cos\ \hat{C}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $tan\ \hat{C}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $sen\ \hat{B}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $cos\ \hat{B}=\frac{2}{3}$ e $tan\ \hat{B}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

E.2 a) $x = 6,36m$ b) $x = 16,48cm$ c) $x = 18m$

E.3 a) $\hat{M} = 59^o$ e $\hat{N} = 31^o$ b) $\hat{P} = 39^o$ e $\hat{R} = 51^o$

E.4 a) $x = 20,78m$ b) $x = 26,75m$ c) $x = 3,80m$

d) $x = 4,13m$ e) $x = 33,48m$ f) $x = 4,48m$

g) $x = 12,99m$ e $y = 10m$

h) $x = 9,24m$, $y = 7,48m$ e $z = 6,05m$

E.5 56*m*

E.6 17,95*m*

E.7 44,80*m* e 33,20*m*

E.8 $82,74m^2$

E.9 5,19*m* ou 5,22*m*

E.10 42*m*

E.11 h= 16,80*m*

E.12 a) $2\sqrt{11}\ N$ b) 11,48*N* e 3,52*N* c) $6\sqrt{2}\ N$

E.13 $\alpha \cong 22^o$

E.14 24,40*m*

E.15 $\alpha \cong 18^o$

UNIDADE 2

E.17 a) $\frac{\pi}{6}$ *rad* b) $\frac{\pi}{4}$ *rad* c) $\frac{\pi}{3}$ *rad*

d) $\frac{\pi}{2}$ *rad* e) $\frac{3\pi}{4}$ *rad* f) $\frac{2\pi}{3}$ *rad*

g) $\frac{5\pi}{3}$ *rad* h) $\frac{4\pi}{3}$ *rad* i) $\frac{4\pi}{5}$ *rad*

j) $\frac{\pi}{8}$ *rad* l) $\frac{\pi}{24}$ *rad* m) $\frac{211\pi}{2160}$ *rad*

n) $\frac{5\pi}{8}$ *rad* o) $\frac{1513\pi}{64800}$ *rad* p) $\frac{851}{21600}$ *rad*

E.18 a) 18° b) 30° c) 90°

d) 45° e) 60° f) 108°

g) 225° h) $41^\circ 32' 18''$ i) $308^\circ 34' 17''$

j) $114^\circ 32' 43''$ l) $11^\circ 15'$ m) $187^\circ 30'$

n) $143^\circ 18' 43''$ o) $57^\circ 19' 29''$ p) $212^\circ 6' 6''$

E.19

a) $\begin{cases} \alpha = 200^\circ \\ \text{3º quadrante} \\ \widehat{AM} = K360^\circ + 200^\circ \end{cases}$ b) $\begin{cases} \alpha = 175^\circ \\ \text{2º quadrante} \\ \widehat{AN} = K360^\circ + 175^\circ \end{cases}$ c) $\begin{cases} \alpha = 15^\circ \\ \text{1º quadrante} \\ \widehat{AG} = K360^\circ + 15^\circ \end{cases}$

d) $\begin{cases} \alpha = 192^\circ 15' \\ \text{3º quadrante} \\ \widehat{AH} = K360^\circ + 192^\circ 15' \end{cases}$ e) $\begin{cases} \alpha = 105^\circ 30' 59'' \\ \text{2º quadrante} \\ \widehat{AX} = K360^\circ + 105^\circ 30' 59'' \end{cases}$ f) $\begin{cases} \alpha = 167^\circ 36' \\ \text{2º quadrante} \\ \widehat{AI} = K360^\circ + 167^\circ 36' \end{cases}$

g) $\begin{cases} \alpha = 290^\circ \\ \text{4º quadrante} \\ \widehat{AL} = K360^\circ + 290^\circ \end{cases}$ h) $\begin{cases} \alpha = 197^\circ \\ \text{3º quadrante} \\ \widehat{AF} = K360^\circ + 197^\circ \end{cases}$ i) $\begin{cases} \alpha = 148^\circ \\ \text{2º quadrante} \\ \widehat{AB} = K360^\circ + 148^\circ \end{cases}$

j) $\begin{cases} \alpha = 121^\circ 45' \\ \text{2º quadrante} \\ \widehat{AS} = K360^\circ + 121^\circ 45' \end{cases}$ l) $\begin{cases} \alpha = 57^\circ 47' 33'' \\ \text{1º quadrante} \\ \widehat{AT} = K360^\circ + 57^\circ 47' 33'' \end{cases}$ m) $\begin{cases} \alpha = 59' 37'' \\ \text{1º quadrante} \\ \widehat{AR} = K360^\circ + 59' 37'' \end{cases}$

E.20

a) $\begin{cases} \alpha = \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \\ \text{3ºquadrante} \\ \widehat{AB} = 2K\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \alpha = \frac{6\pi}{5} \text{ rad} \\ \text{3ºquadrante} \\ \widehat{AC} = 2K\pi + \frac{6\pi}{5} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \alpha = \frac{9\pi}{8} \text{ rad} \\ \text{3ºquadrante} \\ \widehat{AD} = 2K\pi + \frac{9\pi}{8} \end{cases}$

$$d)\begin{cases} \alpha = \frac{9\pi}{7} \text{ rad} \\ \text{3º quadrante} \\ \widehat{AE} = 2K\pi + \frac{9\pi}{7} \end{cases} \quad e)\begin{cases} \alpha = \frac{8\pi}{7} \text{ rad} \\ \text{3º quadrante} \\ \widehat{AF} = 2K\pi + \frac{8\pi}{7} \end{cases} \quad f)\begin{cases} \alpha = \frac{6\pi}{7} \text{ rad} \\ \text{2º quadrante} \\ \widehat{AG} = 2K\pi + \frac{6\pi}{7} \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \\ \text{2º quadrante} \\ \widehat{AH} = 2K\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad h)\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{11} \text{ rad} \\ \text{1º quadrante} \\ \widehat{AI} = 2K\pi + \frac{\pi}{11} \end{cases} \quad i)\begin{cases} \alpha = \frac{5\pi}{4} \text{ rad} \\ \text{3º quadrante} \\ \widehat{AJ} = 2K\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$j)\begin{cases} \alpha = \frac{5\pi}{8} \text{ rad} \\ \text{2º quadrante} \\ \widehat{AL} = 2K\pi + \frac{5\pi}{8} \end{cases} \quad l)\begin{cases} \alpha = \frac{9\pi}{5} \text{ rad} \\ \text{4º quadrante} \\ \widehat{AM} = 2K\pi + \frac{9\pi}{5} \end{cases} \quad m)\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{13} \text{ rad} \\ \text{1º quadrante} \\ \widehat{AN} = 2K\pi + \frac{\pi}{13} \end{cases}$$

UNIDADE 3

E.21 a) (-) b) (-) c) (+) d) (-) e) (+)
f) (+) g) (-) h) (+) i) (-)

E.22 a) 2º quadrante b) 4º quadrante c) 4º quadrante
d) 4º quadrante e) 3º quadrante f) 1º quadrante

E.23 a) 1º e 3º quadrantes b) 2º e 3º quadrantes c) 1º e 2º quadrantes

E.24 a) 2º e 3º quadrantes b) 1º e 3º quadrantes c) 1º e 2º quadrantes
d) 2º e 4º quadrantes e) Nenhum quadrante f) Todos os quadrantes

E.25 a) (-) b) (-) c) (-) d) (-) e) (-) f) (+)

E.26 a) 1º e 2º quadrantes b) 2º e 4º quadrantes c) 1º e 4º quadrantes
d) 1º e 2º quadrantes e) 1º e 3º quadrantes f) 1º e 4º quadrantes
g) 2º e 3º quadrantes h) 3º e 4º quadrantes

E.27 a) 0 b) 0 c) − 1 d) ∄ e) 1 f) 0
g) − 1 h) ∄

E.28 a) $y = \frac{4}{5}$ b) $y = 0$ c) $y = 0$ d) $y = -\frac{1}{4}$

.29 a) $x = 60^o$ b) $x = 60^o$ c) $x = 30^o$

d) $x = 60^o$ e) $x = 30^o$ f) $x = 60^o$

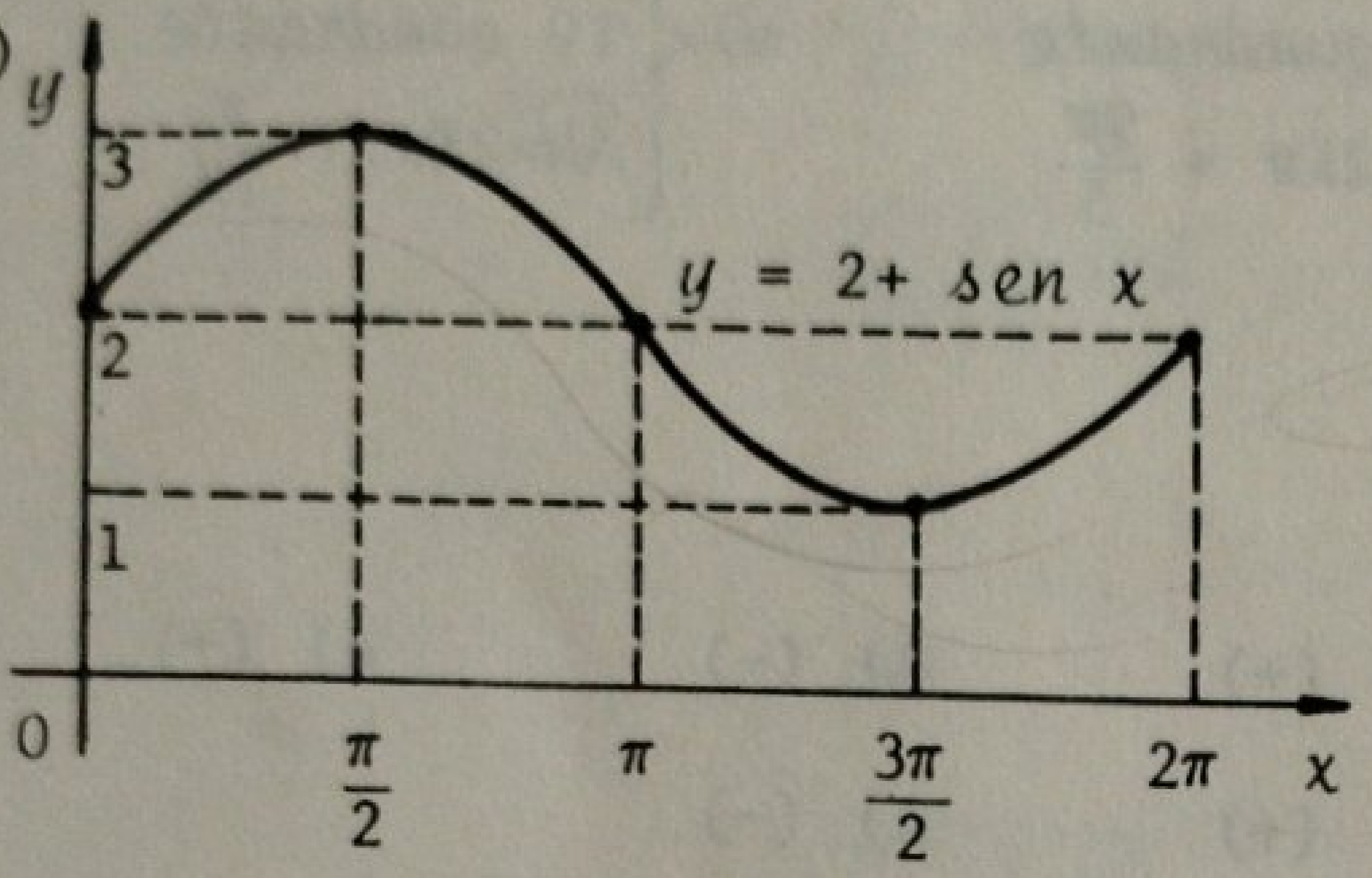
g) $x = 45^o$ h) $x = 60^o$ i) $x = 60^o$

.30 a) $y = 24$ b) $y = -\frac{1}{2}$ c) $y = \frac{25}{8}$

d) $y = \frac{-16+16\sqrt{2}}{3}$, e) $y = -\frac{1}{5}$ f) $y = 6$

.31

a)

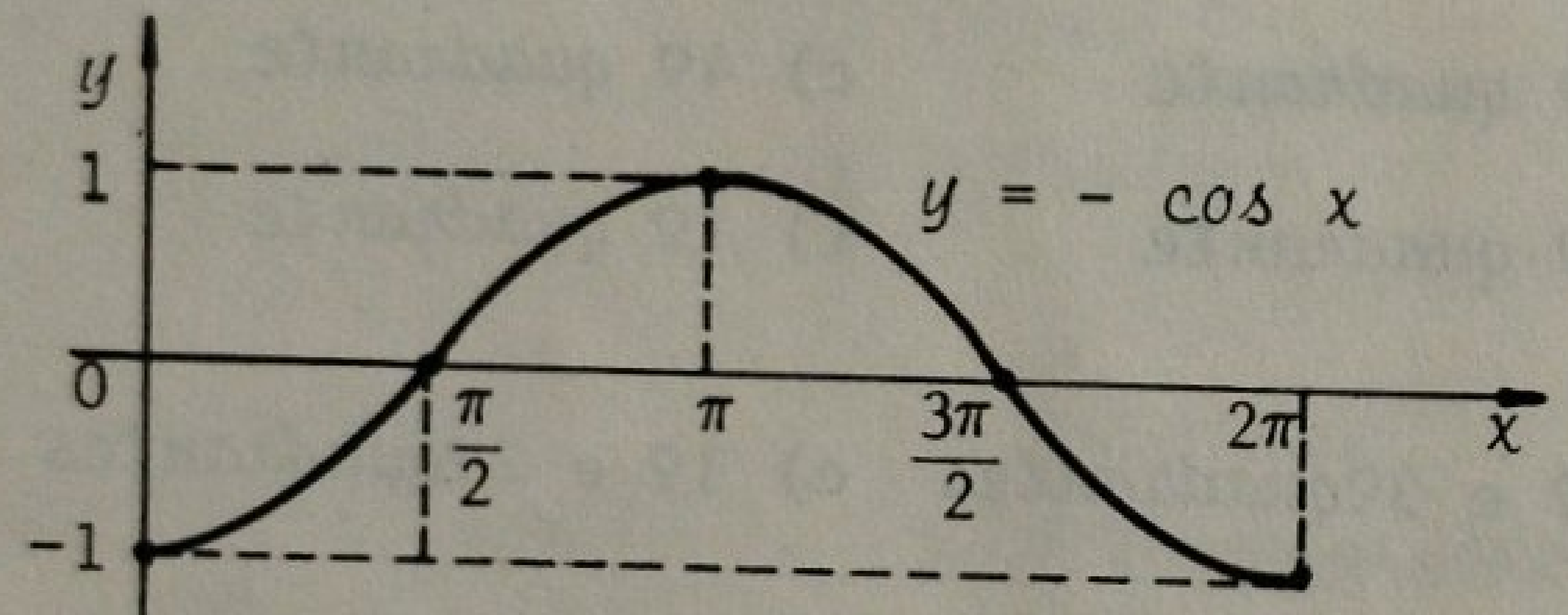


$D = \mathbb{R}$

$Im = [1;3]$

$p = 2\pi$ rad

b)

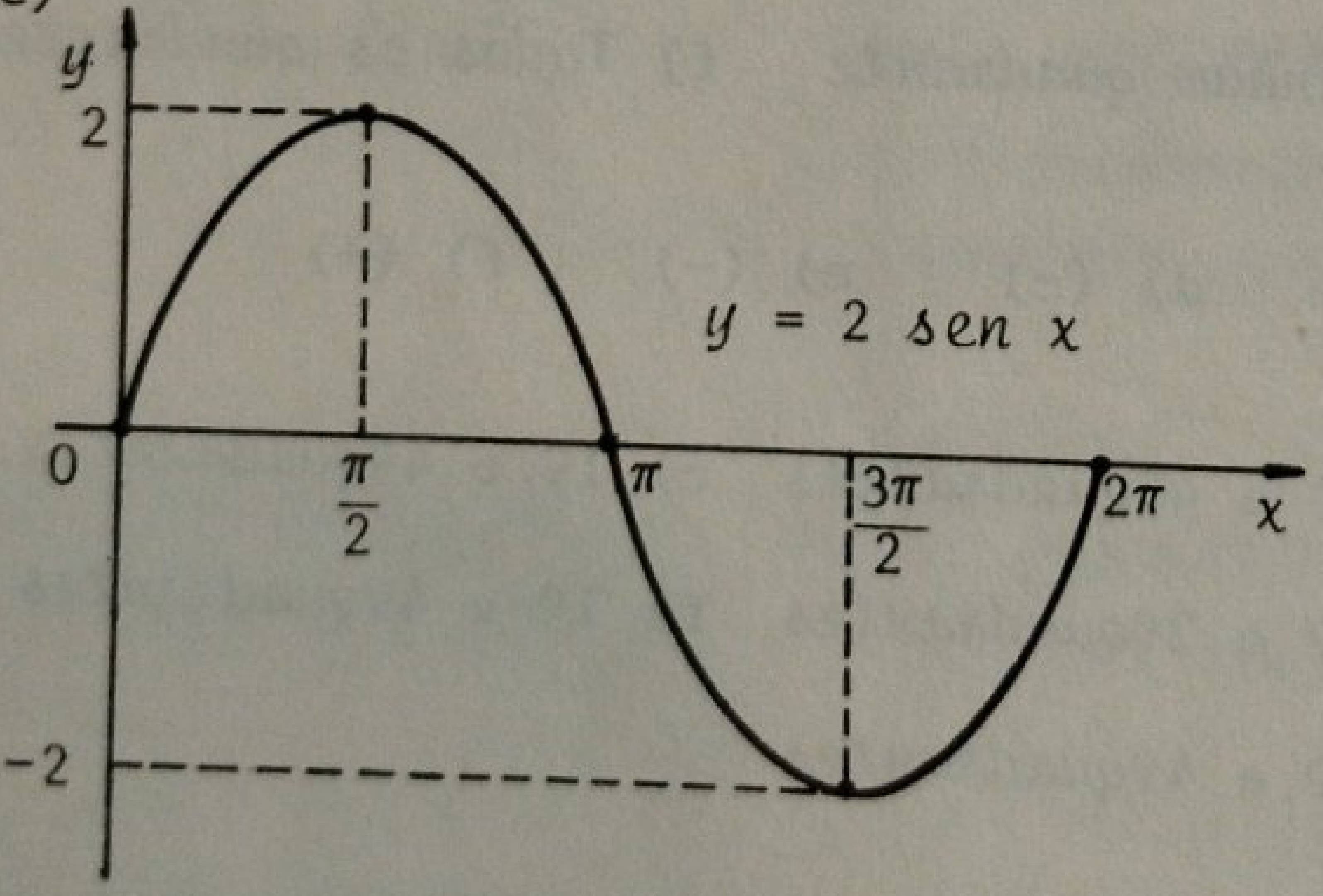


$D = \mathbb{R}$

$Im = [-1;1]$

$p = 2\pi$ rad

c)

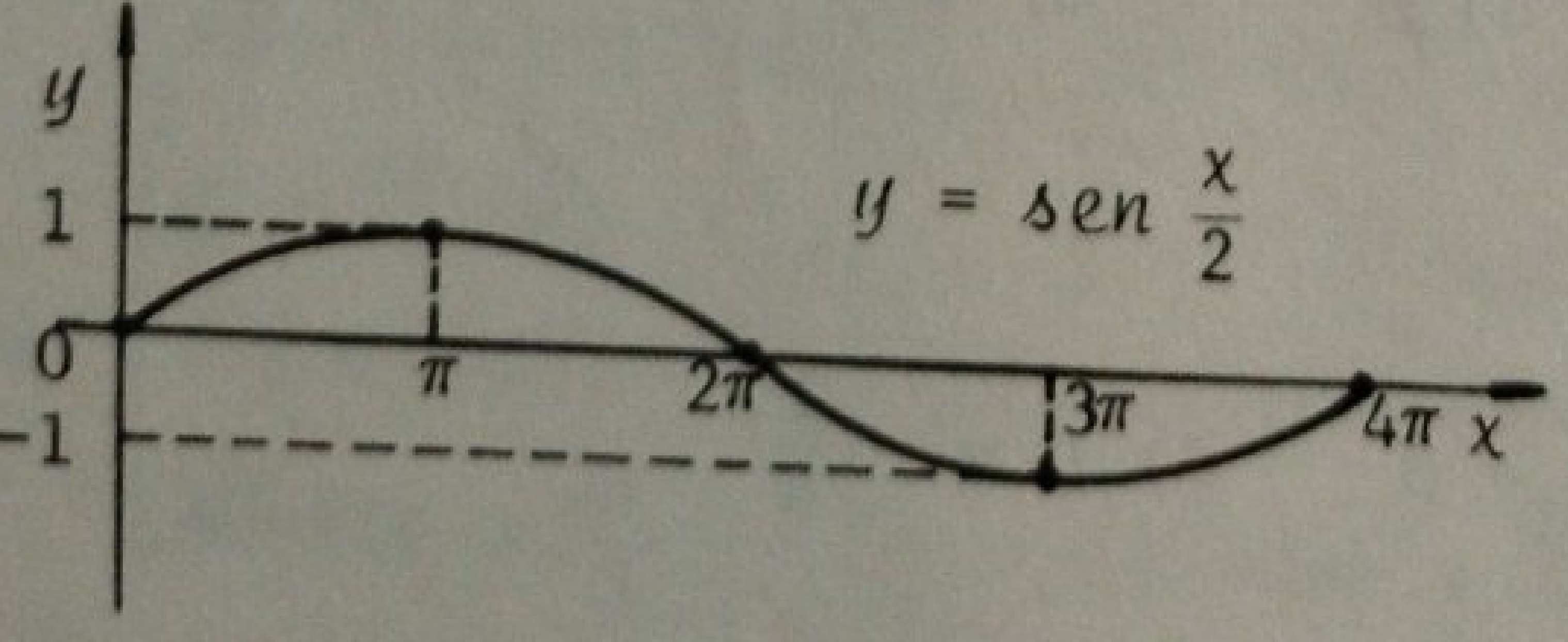


$D = \mathbb{R}$

$Im = [-2;2]$

$p = 2\pi$ rad

d)

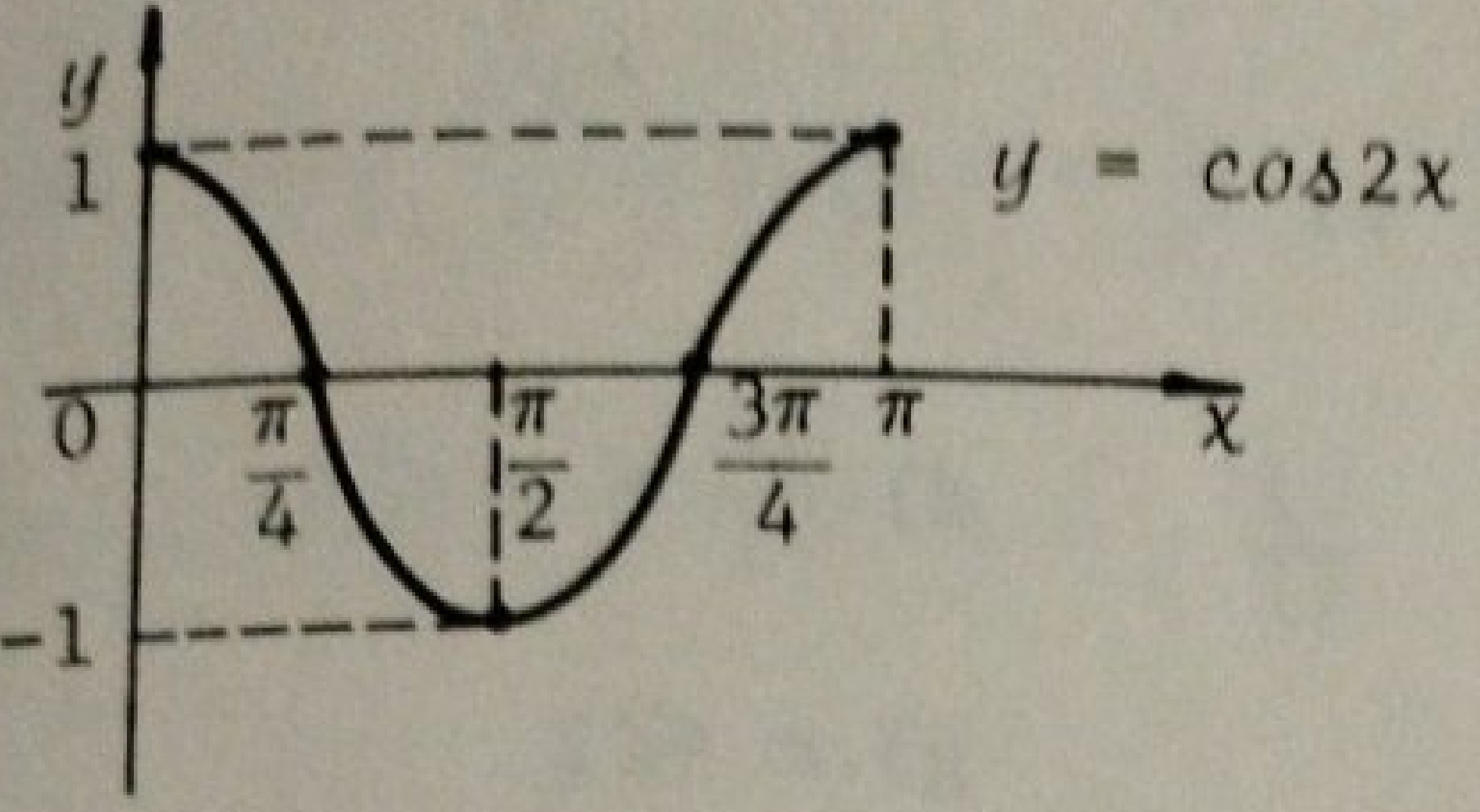


$D = \mathbb{R}$

$Im = [-1;1]$

$p = 4\pi$ rad

e)

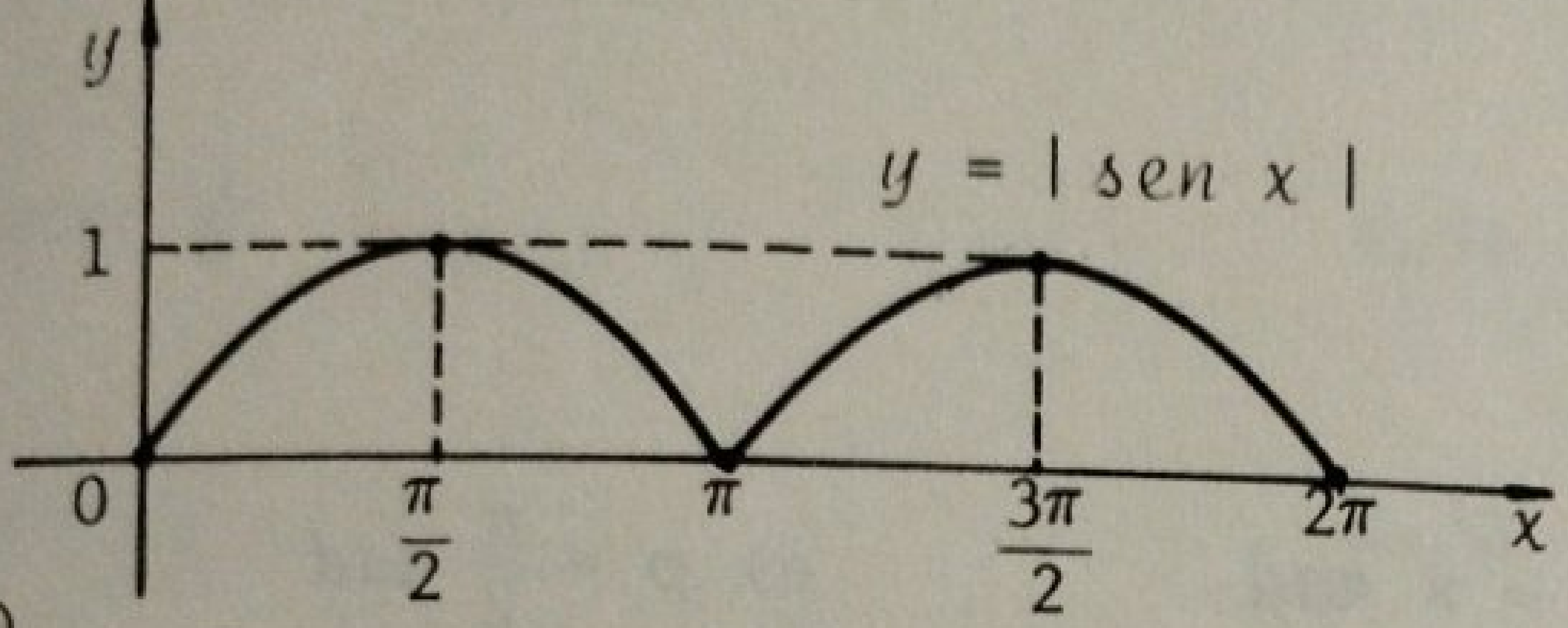


$D = \mathbb{R}$

$Im = [-1;1]$

$p = \pi rad$

f)

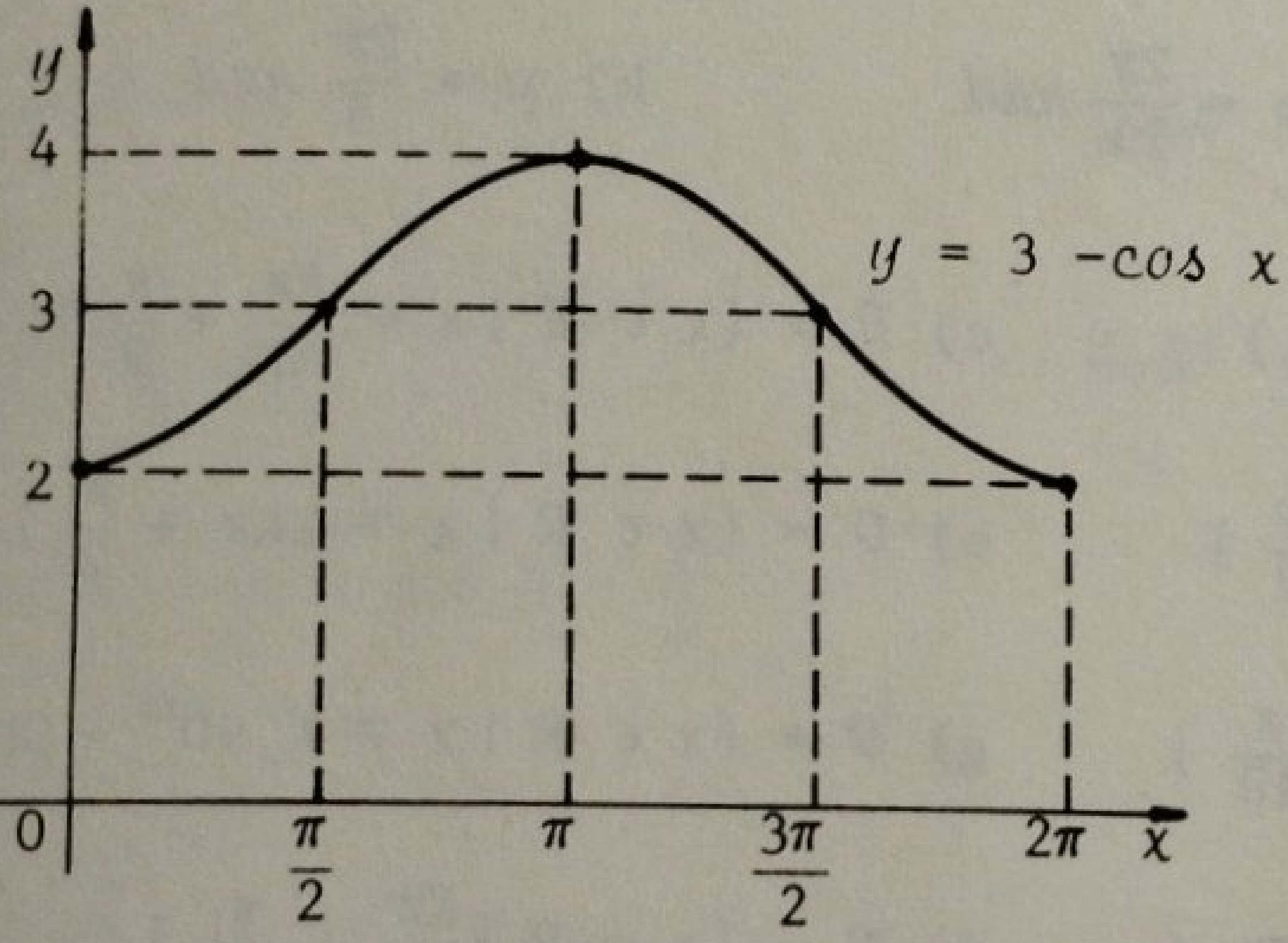


$D = \mathbb{R}$

$Im = [0;1]$

$p = \pi rad$

g)

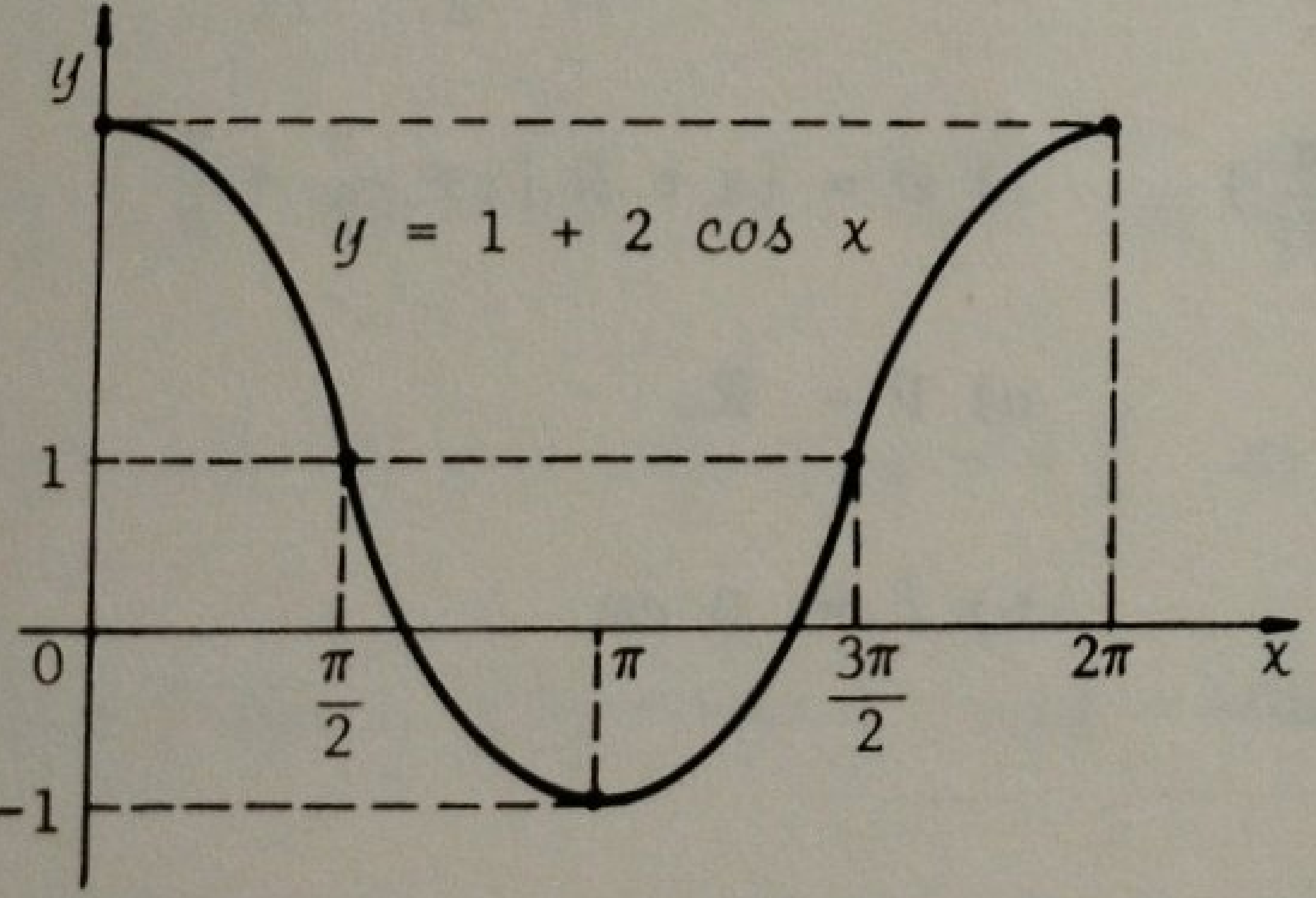


$D = \mathbb{R}$

$Im = [2;4]$

$p = 2\pi rad$

h)

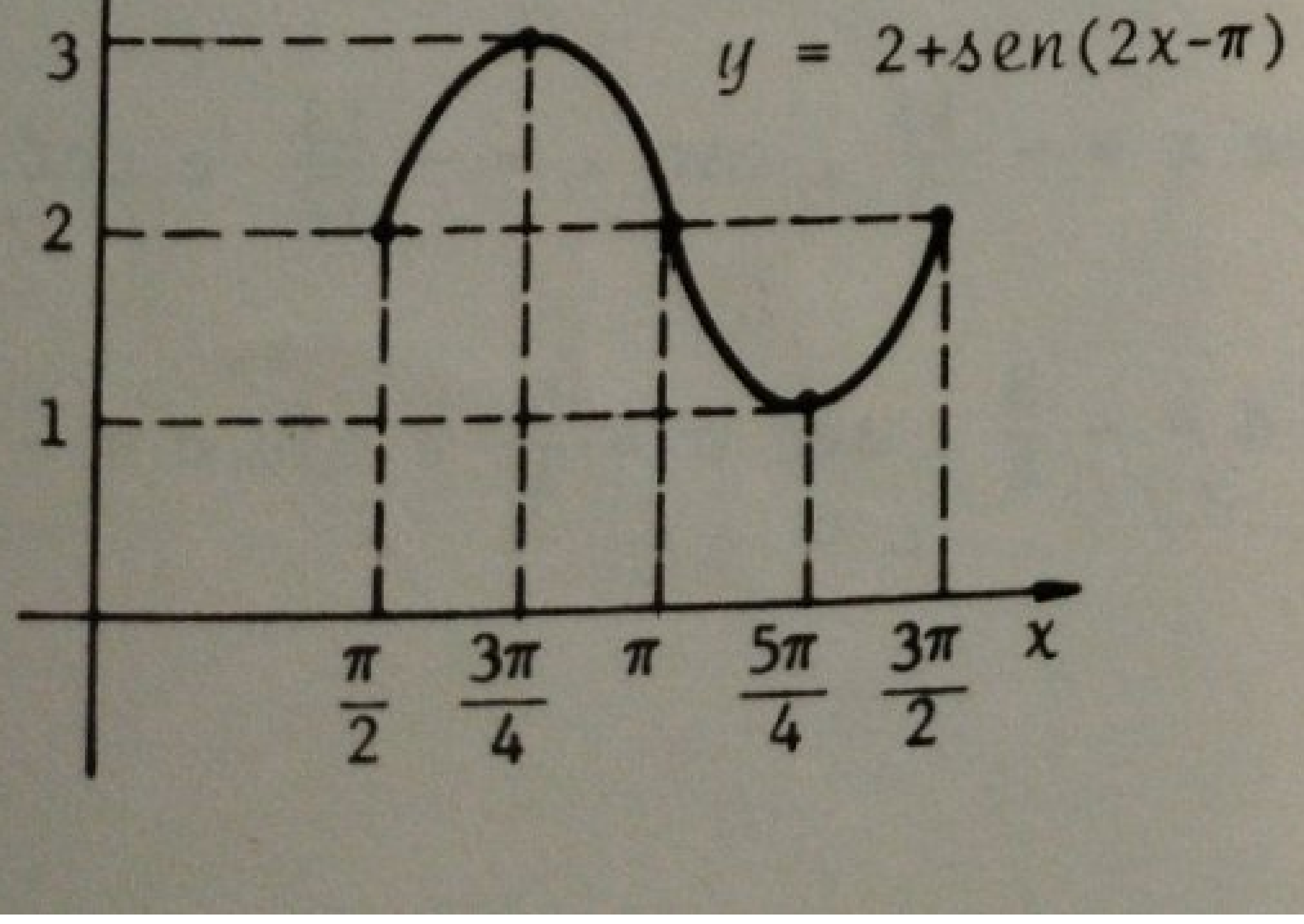


$D = \mathbb{R}$

$Im = [-1;3]$

$p = 2\pi rad$

i)



$D = \mathbb{R}$

$Im = [1;3]$

$p = \pi rad$

E.32 a) V b) V c) V d) V e) F f) V

E.33 b) $\frac{1}{2} < m < \frac{7}{2}$ c) $\frac{1}{2} < m < 1$ d) $\frac{10}{3} < m < 4$

e) $\frac{1}{6} < m < \frac{5}{6}$ f) $m \in \mathbb{R}$ g) $m < 2$

E.34 0 até 1

E.35 $- \infty$ até 0

E.36 c) $p = 16\pi$ *rad* d) $p = \pi$ *rad* e) $p = \frac{\pi}{2}$ *rad*

f) $p = \frac{\pi}{7}$ *rad* g) $p = \frac{2\pi}{11}$ *rad* h) $p = \frac{2\pi}{5}$ *rad*

E.37 b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\}$ c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{K\pi}{3} + \frac{\pi}{9}\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{K\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\}$ e) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2K\pi + \frac{\pi}{2}\}$

f) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{2K\pi}{5} - \frac{\pi}{10}\}$ g) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq K\ 90^\circ - 25^\circ\}$

h) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2K\pi - 2\pi\}$ i) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\}$

j) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3K\pi + \frac{9\pi}{2}\}$ 1) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\}$

m) $D = \mathbb{R}$ n) $D = \mathbb{R}$

E.38 a) $T = 8$ *s* b) $E = 0$ *cm*

UNIDADE 4

E.39 $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\tan x = -\frac{3}{4}$, $\sec x = -\frac{5}{4}$, $\csc x = \frac{5}{3}$ e $\cot x = -\frac{4}{3}$

E.40 $\operatorname{sen} x = -\frac{12}{13}$, $\tan x = \frac{12}{5}$, $\sec x = -\frac{13}{5}$, $\csc x = -\frac{13}{12}$ e $\cot x = \frac{5}{12}$

E.41 $\operatorname{sen} a = -\frac{3}{5}$, $\cos a = \frac{4}{5}$, $\tan a = -\frac{3}{4}$, $\sec a = \frac{5}{4}$ e $\csc a = -\frac{5}{3}$

E.42 $\tan x = -1$ e $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

E.43 $sen\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $cos\ x = \frac{1}{2}$

E.44 $tan\ a = \frac{12}{5}$ e $csc\ a = -\frac{13}{12}$

E.45 $y = -\frac{25}{7}$

E.46 $y = \frac{3}{4}$

E.47 $y = \frac{1}{3}$

E.48 $y = \frac{5}{3}$

E.49 $tan\ x = \frac{15}{8}$

E.50 $cot\ a = 3$ e $cot\ a = \frac{1}{3}$

E.51 $sen\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$

E.52 $cos\ x = \frac{4}{5}$

E.53 $cos\ x = \frac{1}{2}$

E.54 $m = \pm 3$

E.55 $m = 2$

E.56 $m = 1$ e $m = \frac{1}{15}$

E.57 $m = -7$

UNIDADE 5

E.61 a) $-\sqrt{3}$ b) -2 c) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

E.62 a) $y = 0$ b) $y = -\frac{2}{3}$ c) $y = -\frac{3}{4}$ d) $y = \frac{8}{3}$ e) $y = \frac{20}{7}$

E.63 a) $y = tan\ x$ b) $y = -sec\ x$ c) $y = 4tan\ a$ d) $y = sen\ x$ e) $y = -cot\ a$

f) $y = 2$ g) $y = cot\ x$ h) $y = -cot^2 x$ i) $y = -tan\ x$ j) $y = -sec\ x$

l) $y = 1$ m) $y = sen^3 a$ n) $y = -cot^3 x$

UNIDADE 6

E.64 a) $-\cos x$ b) $-\text{sen}\, x$ c) $-\cot x$ d) $\sqrt{2}\,\text{sen}\, x$ e) 0
f) $\cot x$ g) $\cot a$ h) 1 i) 1

E.65 a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $2+\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

E.66 a) $\frac{-8-15\sqrt{3}}{34}$ b) $-\frac{23\sqrt{2}}{34}$ c) $\frac{23}{7}$ d) $\frac{17\sqrt{2}}{23}$

E.67 $-\frac{84}{85}$ e $-\frac{77}{85}$

E.68 $\frac{56}{65}$

E.69 $-\frac{1}{3}$

E.70 $-\frac{17}{6}$

E.71 $\frac{65}{33}$

E.72 $\frac{\sqrt{3}}{7}$

E.73 $\frac{3}{5}$

E.74 $\frac{-12+5\sqrt{3}}{26}$

E.75 $\frac{-\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}$

E.76 $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ e 9

E.77 $-\frac{5}{12}$

E.78 $-\frac{119}{169}$

E.79 $\frac{7}{9}$

E.80 $-\frac{25}{24}$

E.81 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$ e 3º *quadrante*

E.82 1

E.83 $-\frac{3\sqrt{7}}{8}$

E.84 $\frac{11}{25}$

E.85 m^2-1

E.86 $\frac{\sqrt{10}}{10}$, $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ e -3

E.87 $\sqrt{3}$

E.88 $-\frac{5}{4}$

E.89 $-\frac{1}{3}$

E.90 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $-\frac{\sqrt{14}}{4}$ e $-\frac{\sqrt{7}}{7}$

E.91 $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$

E.92 $\frac{\sqrt{10}}{4}$, $\frac{\sqrt{6}}{4}$ e $\frac{\sqrt{15}}{3}$

E.93 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

E.94 $\frac{\sqrt{15}}{2}$

UNIDADE 7

E.95 a) $2\cos 40^{\circ}\cos 13^{\circ}$ b) $-2\operatorname{sen} 12^{\circ}\cos 40^{\circ}$

c) $2\operatorname{sen} 44^{\circ}02'31''.\ \cos 20^{\circ}45'30''$ d) $2\operatorname{sen} 20^{\circ}29'40''.\ \cos 59^{\circ}30'20''$

e) $2\operatorname{sen} 25^{\circ}\ \cos 15^{\circ}$ f) $\dfrac{2\operatorname{sen} 80^{\circ}}{\cos 20^{\circ}}$

g) $-\dfrac{\operatorname{sen} 18^{\circ}}{\cos 15^{\circ}\ \cos 33^{\circ}}$ h) $\dfrac{\operatorname{sen} 30^{\circ}17'25''}{\cos 48^{\circ}.\ \cos 17^{\circ}42'35''}$

i) $-\dfrac{\operatorname{sen} 59^{\circ}59'15''}{\cos 3^{\circ}.\cos 62^{\circ}45''}$ j) $2\operatorname{sen}^2 9^{\circ}34'30''$

l) $-2\operatorname{sen} 4a\ .\ \cos 11a$ m) $4\operatorname{sen} x\ \cos^2 \dfrac{x}{2}$

n) $4\cos^2 40^{\circ}\ \cos 20^{\circ}$ o) $4\operatorname{sen} 3a\ \cos 4a\ \cos 2a$

p) $4\operatorname{sen} 2x\ \cos 4x\ \cos 3x$ q) $4\cos a\ \operatorname{sen} 2a\ \cos 4a$

r) $-4\cos 2a\ \operatorname{sen} 3a\ \operatorname{sen} 4a$ s) $4\operatorname{sen} 3a\ \cos^2 a$

t) $4\cos a\ \cos\left(\dfrac{a}{2} + 30^{\circ}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2} - 30^{\circ}\right)$

u) $4\cos a\ \cos b\ \cos c$

E.96 a) $\tan \dfrac{b-a}{2}$ b) $\cot \dfrac{a}{2}$ c) $\tan x$ d) $-\tan x$ e) $2\cos 2x$

f) $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 5x}$ g) 1 h) $\cot 3^{\circ}$ i) $\cot 80^{\circ}$ j) $\cot 5^{\circ}$

UNIDADE 8

E.97 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^{\circ} + 270^{\circ}\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K180^{\circ}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^{\circ}\}$ d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K180^{\circ} + 90^{\circ}\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K180^{\circ}\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^{\circ} + 240^{\circ}$ ou $x = K360^{\circ} + 300^{\circ}\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^{\circ} \pm 60^{\circ}\}$ h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K120^{\circ} \pm 50^{\circ}\}$

i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K180^{\circ} + 60^{\circ}\}$ j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K90^{\circ} + 75^{\circ}\}$

l) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K60^{\circ} + 50^{\circ}\}$

m) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^{\circ} + 225^{\circ}$ ou $x = K360^{\circ} + 315^{\circ}\}$

n) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K180^{\circ} + 60^{\circ}\}$ o) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2K\pi + \dfrac{2\pi}{3}\}$

p) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^{\circ} - 80^{\circ}$ ou $x = K360^{\circ} + 40^{\circ}\}$

E.98 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^\circ + 90^\circ$, $x = K360^\circ + 30^\circ$ ou $x = K360^\circ + 150^\circ\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^\circ\}$ c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^\circ$ ou $x = K360^\circ + 90$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^\circ + 90^\circ\}$ e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K120^\circ \pm 20^\circ\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K180^\circ \pm 30^\circ\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K720^\circ + 60^\circ$ ou $x = K720^\circ + 300^\circ\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K180^\circ + 135^\circ$ ou $x = K180^\circ\}$

i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^\circ \pm 60^\circ\}$

j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^\circ$ ou $x = K360^\circ \pm 120^\circ\}$

l) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K60^\circ + 30^\circ\}$

m) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K90^\circ \pm 30^\circ\}$

n) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = K360^\circ + 30^\circ$ ou $x = K360^\circ + 150^\circ\}$

UNIDADE 9

E.99 $b = 4\sqrt{2}m$ e $c = (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2})m$

E.100 $a = \sqrt{39}$ cm

E.101 $a = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ cm e $b = \sqrt{3}m$

E.102 $c = \dfrac{10\sqrt{6}}{3}$ m

E.103 $4\sqrt{7}$cm e $4\sqrt{19}$cm

E.104 $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ e $\hat{C} = 75^\circ$

E.105 $\hat{B} = 30^\circ$ e $\hat{C} = 15^\circ$

E.106 30° e 90°

E.107 7Kgf

E.108 8cm e $8\sqrt{3}$cm

E.109 $(5\sqrt{6} + 5\sqrt{2})$cm

E.110 $6\sqrt{3}$cm E.111 88m

TABELA TRIGONOMÉTRICA

Ângulo	sen	cos	tan	Ângulo	sen	cos	tan
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000				

COMPOSIÇÃO:
Erlei Franceschi
Lilian Mendes

FOTOLITO:
Paulo Delavigne

DIAGRAMAÇÃO:
Arlete Lubasinski
Maria Aparecida Ovande Ramos
Janice Molenda

IMPRESSÃO:
José Carlos Zeni
Luiz Tabajara Vaz dos Santos
Divaldo Messias do Nascimento

CAPA: Escola Técnica Federal do Maranhão

SUPERVISÃO GRÁFICA: W. Wladika

Pedidos: Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná – Diretoria
de Apoio às Atividades de Ensino. Av. Sete de Setembro, 3165
CEP 80.000 – Curitiba - Paraná.

O S Φ O D
A R O B O
[illegible] S G N
A P B G B
N A M D
O B D
R R
O

S T
I A
N N
A I
P A
O

PARANÁ

COMPOSTO E IMPRESSO NA DIVISÃO DE RECURSOS DIDÁTICOS DO CEFET-PR

N N A N
A I O
P A

DOIS

TRES

S I N A
R O
A
A N A P
E

S I N A
B

A N A
E

246-6229
Márcia Soara