JULIO CESAR DE MELLO E SOUZA
(Catedrático da Faculdade Nacional de Arquitetura)

O ESCÂNDALO DA GEOMETRIA

"La definition et les propriétés de la ligne droit, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et, pour ainsi dire, le scandale des Eléments de Géométrie".

D'ALEMBERT

"O fim primordial da Matemática é atingir a maior glória da inteligência humana".

JACOBI.

DESENHOS GEOMÉTRICOS DO

PROF. FRANCELINO DE ARAUJO GOMES

GRÁFICA EDITORA AURORA, LTDA.
Rua Vinte de Abril, 16
Rio de Janeiro

OBRAS DO PROF. JULIO CESAR DE MELLO E SOUZA (x)

Dicionário da Matemática (1.º vol.) — A-B.
Dicionário da Matemática (2.º vol.) — C, D, E, F, G, H,.
Dicionário da Matemática (3.º vol.)
Diabruras da Matemática
As grandes fantasias da Matemática
Geometria Analítica (I Parte) — 4.ª edição
Geometria Analítica (II Parte) — 5.ª edição
Tábuas Completas de Logarítmos
Meu Caderno de Matemática (Admissão)
Alegria de ler (Antologia)
O Bom Caminho (Compêndio de educação religiosa)
O Bom Caminho (Leitura moral — 4.º e 5.º anos e admissão)
Al-Karismi (Revista de recreações matemáticas)
Matemática divertida e curiosa (esgotada)
Matemática divertida e pitoresca (esgotada)
Matemática divertida e fabulosa (esgotada)
Matemática divertida e diferente (esgotada)
Trigonometria hiperbólica (esgotada)
Funções moduladas (esgotada)
Estudo elementar das curvas (esgotada)
Histórias e Fantasias da Matemática (esgotada)

Em colaboração com a Prof. IRENE DE ALBUQUERQUE:

Tudo é fácil (Matemática primária, 3.ª série).
Diário de Lúcia (Matemática primária, 4.ª série).

Prof. Mello e Souza publicou, ainda, vários livros em colaboração com os professores: Cecil Thiré, Euclides Roxo, Jurandyr Paes Leme e Nicanor Lemgruber.

(x) Com exclusão das obras literárias.

A MATEMÁTICA E O MATEMÁTICO

Com o grau de desenvolvimento atingido hoje pela Matemática torna-se mistér o sentimento íntimo e profundo das coisas que a ela se referem.

O matemático não deve, pois, se reduzir a uma máquina de resolver equações; deve, sobretudo, pénetrar a estrutura da ciência, descobrir-lhe nas formas várias a potencialidade que ela encerra, e quê nos desvenda quase sempre o que, à primeira vista, nos parecia um tanto misterioso.

PROF. LUIZ FREIRE
(Catedrático da Escola Politécnica de Recife)

ÊNCIA . . .

Mas a finalidade principal da ciência é de ordem contemplativa. Melhorar as condições materiais da vida é útil; revelar-nos, na ordem do universo, um aspecto da verdade, é belo. E a pureza dêste olhar desinteressado vale mais que a fecundidade prática de suas aplicações. A criação é o reflexo de um pensamento divino. Pensar o mundo, dizia KEPLER, *é repensar os pensamentos de Deus. Cada ser é portador de uma revelação original; encarna uma forma divina que só êle exprime. Não existe em si, na sua essência temporal e fugaz, senão porque reproduz a semelhança de uma idéia eterna. As cousas são filhas do Espírito; revelar, a seu modo, o Espírito é a sua razão de ser essencial, a sua missão imprescritível.*

PE. LEONEL FRANCA, S. J.
"A crise do mundo moderno", pg. 235

* * *

Nada há mais inspirador e mais religioso que o estudo da Ciência quando feito numa atmosfera de objetividade e sinceridade. A mesma beleza sutil que caracteriza a Literatura e a História aparece aqui nas suas linhas mais simples e mais inteligíveis. Falta, é verdade, a infinita complexidade da vida humana, com as suas paixões, os seus pecados e as suas aspirações divinas. A natureza é fria e impessoal. Não obstante, porém, há na sua objetividade uma beleza maravilhosa e uma harmonia que reflete as coisas divinas.

J. CASTIELLO
"A humane Psychology of Education", pg. 156

O FIM DA CIÊNCIA

Tendo Afonso, o Sábio, rei de Castela (conta-nos Emile Picard) ordenado aos astrônomos árabes que construissem tábuas dos movimentos planetários, achou-as bastante complicadas e exclamou, em tom de ironia:

— "Se Deus, antes de criar o mundo tivesse me consultado, teria feito bem melhor as coisas."

Não endossamos — acrescenta Picard — a blasfêmia do rei de Castela, o repetiremos, mais modestamente a frase que o grande matemático Galois, algumas horas antes de sua morte prematura, escrevera numa espécie de testamento:

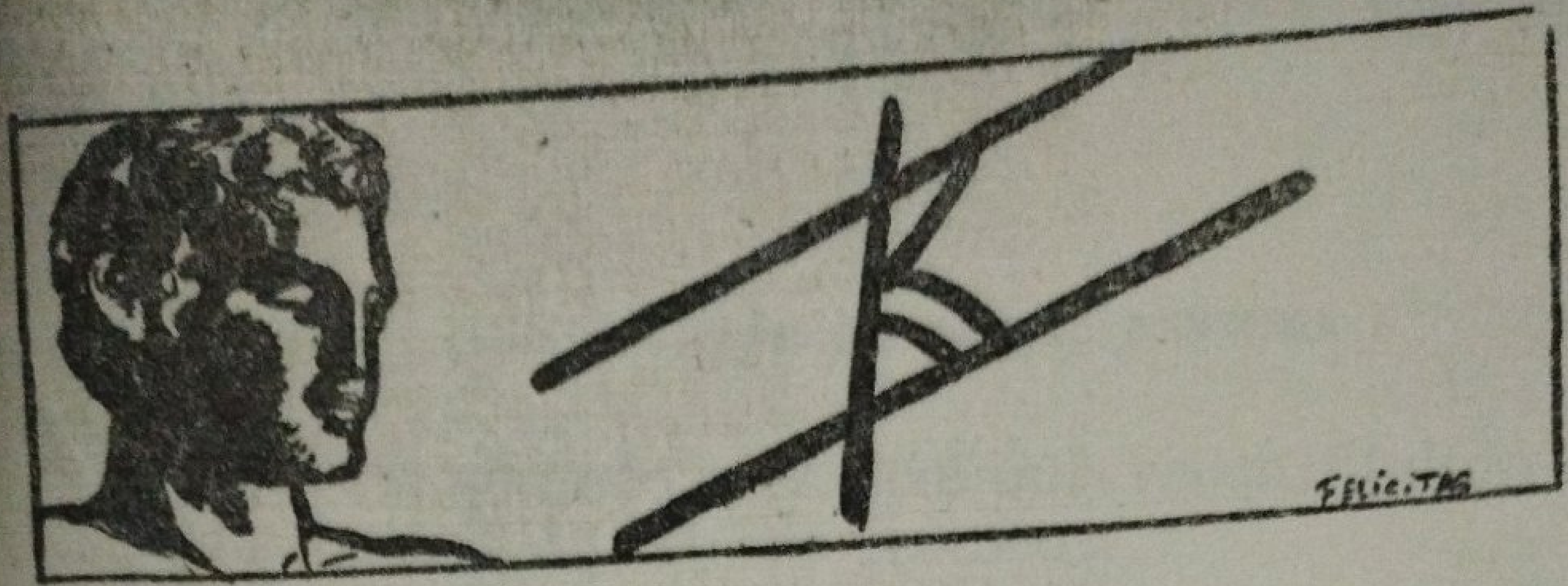
"A Ciência é obra do espírito humano, que é antes destinado a estudar do que a conhecer, a procurar a Verdade do que a achá-la".

Cfr. Mello e Souza — "*As grandes fantasias da Matemática*", *pág.* 81.

A TEORIA

A teoria estudada hoje terá aplicações no futuro? Quem poderá esclarecer êsse enigma na sua projeção através dos Séculos? Quem poderá, da equação do presente, resolver a grande incógnita dos tempos vindouros? Só Allah sabe a verdade! E' bem possível que as investigações teóricas de hojé forneçam, dentro de mil ou dois mil anos, recursos preciosos para a prática!

(*Cfr.* Malba Tahan — "*O homem que calculava*", página 115.)



Queres sorrir da minha ciência? Sorrirei contigo.

SANTAYANA.

Aquêle jovem que ali está, traçando figuras, fazendo cálculos e analisando problemas, estuda, sob a esclarecida orientação de seu mestre, uma das ciências mais admiráveis criadas pelo engenho humano: **a Geometria.**

Se tivéssemos a preocupação de usar uma linguagem rebuscada e preciosa, capaz de impressionar um leitor menos prevenido, diríamos que aquêle jovem está escalando as diversas etapas que constituem a **Geometria euclidiana.**

A expressão **Geometria euclidiana** sublinhada, assim, de modo todo especial, insinua a dúvida e leva a incerteza ao espírito dos curiosos.

— Além dessa Geometria, dos compêndios usuais, que tanto nos preocupa no ginásio, e nos sobressalta no curso científico, haverá outras Geometrias?

No decorrer da leitura dêste pequeno ensaio encontrará o leitor resposta bem clara e definitiva para essa pergunta.

Limitemo-nos, por ora, a justificar a denominação de euclidiana que é dada à Geometria.

EUCLIDES, O ALEXANDRINO

A denominação de **euclidiana** é conferida à Geometria em homenagem a Euclides, geômetra grego, que viveu no III ante século.

Os dados biográficos, relativos a Euclides, vagos e incertos, não nos permitem uma reconstituição completa da vida do célebre geômetra.

Sabemos, apenas, de modo nebuloso, que Euclídes nasceu em —330 e morreu em —275.

Estudou em Atenas com os sucessores de Platão e, uma vez terminado o seu curso, dedicou-se com brilhantismo ao ensino da Matemática, conseguindo atrair para as suas lições públicas — como era de uso entre os atenienses — um grande número de discípulos.

Euclides — cuja figura irradiava simpatia e bondade — era de caráter modesto e afável; com tolerância e benevolência orientava sempre àqueles que podiam contribuir para o desenvolvimento da Matemática.

O prestígio de Euclides, ou melhor, a celebridade alcançada por êsse alexandrino não dimanou de nenhuma descoberta por êle realizada nos domínios da Matemática. Não se encontra um único teorema, ou uma propriedade qualquer de figura, cuja originalidade seja atribuída a Euclides.

A sua obra imperecível limitou-se, afinal, à delicada tarefa de compilar os trabalhos dos geômetras anteriores e apresentá-los num conjunto metódico e bem coordenado, adotando para as demonstrações a forma mais simples e rigorosa. Foi o primeiro e grande didata da Matemática e sua obra principal é denominada "Os Elementos".

Muitas das matérias, expostas por Euclides, tinham sido larga e abundantemente tratadas anteriormente por geômetras de mais renome, não sendo, por isso, possível conhecer de uma forma segura o grau de originalidade do célebre alexandrino, como matemático, em sua faculdade criadora.

No entanto, ainda que Euclides não tivesse feito mais do que redigir e concatenar as descobertas de seus precursores, o fato de terem desaparecido os tra-

los dos primeiros escritores e a forma de exposição
ntífica dos Elementos bastavam para fazer dêste
tável livro a "Bíblia" dos geômetras. Essa obra
orredoura proporcionou ao geômetra alexandrino
erecido e imortal renome.

"OS ELEMENTOS"

Os "Elementos" de Euclides que já alcançaram
ais de 1.500 edições constituíam, sem dúvida, ainda
o começo do século XX, a obra mais difundida depois
a Bíblia.

O tratado do célebre geômetra grego compõe-se
e 13 livros ou capítulos; e a êsses livros, na parte fi-
al, foram acrescentados mais dois — atribuídos ao
strônomo Hipsiclas de Alexandria — o XIV e o XV,
ue tratam dos poliedros regulares, sendo o último o
ue menor interêsse apresenta.

Não poucas foram as modificações e truncaduras,
or vêzes despropositadas — que os diversos comenta-
ores introduziram nos "Elementos"; apesar das al-
erações que o desfiguravam foi êsse livro considera-
o, durante muitos séculos, como uma obra clássica,
erfeita e indispensável ao estudo da Matemática
ura (1).

"Introduziu Euclides em seu livro — comenta o
istoriador Montucla — êsse encadeamento tão admi-
ado pelos apreciadores do rigor geométrico... Em
ão — acrescenta — vários geômetras, não satisfeitos
om tal concatenação, pretenderam reformá-la. Seus
nproficuos esforços fizeram ver o quanto era difícil

1) — Bertrand Russel não oculta a sua indignação por ver o velho e tradicional texto de Euclides nos bancos escolares da Inglaterra e declara com certa rudeza: *"Não passa de um escândalo que ainda hoje esteja êsse compêndio nas mãos dos meninos inglêses"*. (De um artigo do Sr. Edgard de Almeida Loural).

substituir a cadeia fechada do cauteloso geômetra grego por outra igualmente estável e sólida" (2).

Constituem "Os Elementos", de Euclides, uma obra puramente teórica, equável, sem aplicações práticas, sem cálculos ou exemplos numéricos (3); as proposições são, porém, dispostas, de modo a formar um encadeamento lógico de raciocínios geométricos, que partem de hipóteses evidentes para chegar, sem dificuldade, a resultados mais complexos. As demonstrações são rigorosas, muitas vêzes até elegantes, e não embaraçam e nem confundem os estudantes neófitos.

Não passam "Os Elementos", como já dissemos, de uma compilação metódica, perlavada e bem feita de obras anteriores: os livros I e II, adotada a pressuposição dos comentaristas, são atribuídos a Pitágoras, o livro III é de Hipócrates; os livros IV, VI, XII e XI foram elaborados por diversos autores atenienses; no livro V retrilha Euclides a obra de Eudóxio. Dêsse último geômetra, e também de Pitágoras, são todos os outros capítulos da obra de Euclides.

Os treze livros que compõem a obra primacial de Euclides contêm 465 proposições, 93 problemas e 372 teoremas (4).

AS DEFINIÇÕES EUCLIDIANAS

"As definições euclidianas — assinala Francisco Vera — são nominais, à semelhança das que figuram nos dicionários e parecem não ter outro objetivo senão esclarecer a linguagem. Há mesmo, na obra de Euclides, definições superabundantes. Eis um exemplo:

(2) — Cfr. P. Barbarin — "La Geometrie non euclidienne" — pág. 4
(3) — Cfr. H. Wieleitner — "Historia de la Matemática" (Collecion Labor), pág. 36.
(4) — Gino Loria — "Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique", pág. 47.

"Diâmetro é a reta que, passando pelo centro da **unferência, divide essa curva em duas curvas** **is"** (5).

Na famosa edição de Peyrard (1816), na qual o o grego é acompanhado das traduções em francês n latim, podemos ler as seguintes definições:

Ponto — O ponto é aquilo que não tem partes.

Linha — Uma linha é um comprimento sem largura. As extremidades da linha são pontos.

Reta — A linha reta é aquela que repousa igualmente sôbre todos seus pontos.

Superfície — Superfície é aquilo que só tem comprimento e largura. As extremidades de uma superfície são linhas.

Plano — A superfície plana é aquela que repousa igualmente sôbre tôdas as retas que ela contém.

Ângulo — Ângulo retilíneo é a inclinação mútua de duas retas. Quando uma reta encontra outra fazendo com êste dois ângulos iguais de um lado e de outro, cada um dêsses ângulos se chama um ângulo reto e a primeira reta é perpendicular à segunda. O ângulo obtuso é aquêle que é maior que o reto; o ângulo agudo é aquêle que é menor que o reto.

Círculo — Círculo é uma figura plana limitada por uma só linha que se chama **circunferência**, tôdas as retas traçadas até a circunferência de um ponto situado nessa figura são iguais entre si. Êsse ponto se chama **centro**

(5) — E' evidente que bastaria dizer: "Diâmetro é a corda que passa pelo centro" — Pelo fato de passar pelo centro o diâmetro divide a circunferência em duas partes iguais.

do círculo, essas retas se chamam raios do círculo.

Sólido — Sólido é aquilo que tem comprimento, largura e espessura. As extremidades do sólido são superfícies.

Esfera — A esfera é uma superfície tal que tôdas as retas tiradas de um ponto chamado centro aos pontos dessa superfície são iguais entre si; essas retas são chamados raios da esfera (6).

Alguns autores, descurados em seus trabalhos, incluem como certas, em seus compêndios, essas definições euclidianas — já abolidas e rejeitadas pelos geômetras modernos.

OS AXIOMAS E POSTULADOS

Os **axiomas** constituem um sistema bastante defeituoso, no qual a congruência de duas figuras é admitida mediante um deslocamento, mas Euclides não tira de suas proposições tôdas as amplas consequências que elas oferecem. E' justo assinalar que os **Postulados** quase cumprem as condições exigidas pela **Axiomática** atual, muito embora Euclides não tenha cogitado de demonstrar que êles eram independentes e compatíveis (7).

A lógica clássica estabelece uma distinção essen-

(6) — Cfr. Barbarin, ob. cit. págs. 16 e 17. No ensino moderno os conceitos de ponto, reta e plano são incluídos entre as noções não definidas.

(7) — Cfr. *Francisco Vera* — "Lógica". *Marcelin Dubroça*, em seu ensaio "Le realisme einsteinien" chama a atenção, na pág. 104, para certos postulados que êle denomina *concretos* ou *particulares*. A definição de metro, por exemplo, adotada atualmente pela ciência, é baseada num postulado concreto — postulado que amanhã pode ser refutado pelo físico e isso acarretará a inaceitabilidade da aludida definição.

cial entre axiomas e postulados. Axioma, dizem os autores, é uma proposição evidente por si mesma, e indemonstrável; postulado é uma proposição igualmente indemonstrável, porém não evidente por si mesma, e que se admite a título de hipótese justificada pelas suas consequências.

Euclides denomina axioma as proposições primitivas concernentes a grandezas matemáticas quaisquer, e postulados as que exprimem propriedades dos seres geométricos.

Dado o conceito, anteriormente estabelecido, de teoria dedutiva, não há razão alguma para distinguir entre axiomas e postulados. As proposições iniciais formam um corpo homogêneo, nenhuma delas sendo privilegiada pela sua maior ou menor evidência. E', pois, indiferente adotar um ou outro dêsses dois têrmos, a menos que não se use a expressão **proposição primitiva**, como fazem Peano e Russell.

Empregaremos sempre o têrmo postulado, cujo sentido etimológico corresponde suficientemente ao que lhe atribuímos aqui. Postulado significa "o que se pede", o que se supõe concedido; no caso presente, aquilo que não nos obrigamos a demonstrar.

Os postulados de uma teoria podem pertencer a tipos diversos:

1) Os postulados de **relação** enunciam determinadas relações entre as noções primitivas. Essas relações podem ser de ordem lógica (como a relação de **inclusão**) ou de ordem mais especial (como, em Geometria, as relações de **congruência**, etc.).

2) Os postulados de **formação**, proposições essencialmente construtivas, permitem, dados certos objetos, obter outros objetos que se prendem aos primeiros por vínculos determinados.

3) Os postulados de **existência** afirmam que certos objetos ou certas classes de objetos existem efetivamente. A êste propósito, convém salientar a im-

cial entre axiomas e postulados. Axioma, dizem os autores, é uma proposição evidente por si mesma, e indemonstrável; postulado é uma proposição igualmente indemonstrável, porém não evidente por si mesma, e que se admite a título de hipótese justificada pelas suas consequências.

Euclides denomina axioma as proposições primitivas concernentes a grandezas matemáticas quaisquer, e postulados as que exprimem propriedades dos seres geométricos.

Dado o conceito, anteriormente estabelecido, de teoria dedutiva, não há razão alguma para distinguir entre axiomas e postulados. As proposições iniciais formam um corpo homogêneo, nenhuma delas sendo privilegiada pela sua maior ou menor evidência. E', pois, indiferente adotar um ou outro dêsses dois têrmos, a menos que não se use a expressão **proposição primitiva**, como fazem Peano e Russell.

Empregaremos sempre o têrmo postulado, cujo sentido etimológico corresponde suficientemente ao que lhe atribuímos aqui. Postulado significa "o que se pede", o que se supõe concedido; no caso presente, aquilo que não nos obrigamos a demonstrar.

Os postulados de uma teoria podem pertencer a tipos diversos:

1) Os postulados de **relação** enunciam determinadas relações entre as noções primitivas. Essas relações podem ser de ordem lógica (como a relação de **inclusão**) ou de ordem mais especial (como, em Geometria, as relações de **congruência**, etc.).

2) Os postulados de **formação**, proposições essencialmente construtivas, permitem, dados certos objetos, obter outros objetos que se prendem aos primeiros por vínculos determinados.

3) Os postulados de **existência** afirmam que certos objetos ou certas classes de objetos existem efetivamente. A êste propósito, convém salientar a im-

portância que os matemáticos atribuem hoje, ás proposições de existência, sejam elas postulados, sejam teoremas. Por existência, entende-se aqui a existência lógica, a ausência de contradição entre as propriedades atribuídas a um objeto. Sempre que se introduz qualquer noção derivada, é preciso demonstrar que sua definição não implica nenhuma incompatibilidade. Assim, por exemplo, a proposição: **um quiloedro é um poliedro regular de mil faces** definiria uma figura inexistente.

Na escolha dos postulados, há duas condições necessárias a satisfazer. Os postulados devem ser: 1) **suficientes** para estabelecer a teoria de um modo puramente lógico, sem que seja preciso recorrer a qualquer outra indicação sôbre as noções primitivas; 2) **compatíveis** entre si, isto é, isentos de contradição.

Os geômetras modernos (observe-se, por exemplo, a obra de Hilbert) lançam, sôbre os fundamentos da Geometria, verdadeiras rajadas de postulados.

Outros, porém, invocando a autoridade intangível da Lógica, sonham epitomar a Geometria em meia dúzia de proposições rígidas e inabaláveis.

A OBRA DE EUCLIDES

"O efeito natural e imediato da obra de Euclides — afirma David Smith — foi despertar o sentimento de que a Geometria elementar atingira à perfeição e de que um novo passo, no progresso da Matemática, deveria impor-se no sentido de ser construida uma nova Geometria superior ou de dilatar o campo de suas aplicações. Como resultado, a Matemática mareou em ambas essas direções, mas com resultados insignificantes, como, aliás, já ocorrera com os predecessores de Euclides, e só progrediu ràpidamente depois que recebeu o impulso de um outro gênio".

Le Croix faz, sôbre a obra euclidiana, uma análise concisa e bem clara:

"Para se ter uma idéia de tôda a obra, poder-se-ia considerá-la como composta de quatro partes. A primeira compreenderia os seis primeiros livros e se dividiria em três seções, a saber: a demonstração das propriedades das figuras planas, tratada de uma maneira absoluta e contida nos livros I, II, III e IV; a teoria das proporções das grandezas em geral, objeto do V livro, e a aplicação dessa teoria às figuras planas. A segunda parte encerraria os livros VII, VIII e IX, que se designam pelo epíteto de Aritmética, porque tratam das propriedades gerais dos números. A terceira parte seria constituída ùnicamente do livro X, onde o autor estuda, em minúcia/as grandezas incomensuráveis. A quarta parte, enfim, compor-se-ia dos últimos cinco livros que tratam dos planos e dos sólidos.

De todo êsse grande corpo de doutrina, passaram para o ensino apenas os seis primeiros livros, e mais o XI e XII."

EUCLIDES, O ESTIMAVEL PROFESSOR

Eis o que a respeito de Euclides, que J. Anglas considera "genialmente sutil" (8), diz Augusto Comte,

---

(8) — J. Anglas — "D'Euclide a Einstein", pág. 12.
Há muitos autores que esbanjam elogios quando aludem aos "*Elementos*". Observe-se por exemplo, a prodigalidade nababesca do Prof. Euclides Roxo ao referir-se a seu homônimo famoso da famosa Alexandria:
"O encantamento lógico das verdades geométricas é, pois, uma necessidade resultante da natureza da nossa inteligência. Dessa necessidade, porém, tiraram os gregos o princípio de sistema científico, cuja expressão mais completa está nos *Elementos*, de Euclides, que, durante séculos, foi considerada uma obra perfeita e que é, sem dúvida, um dos mais belos monumentos do pensamento humano.
Os *Elementos* representam ao mesmo tempo fim e meio. Fim, porque se destinam a fazer conhecer os teoremas essen-

ao apreciar os esforços especiais da elaboração grega na segunda fase da evolução geométrica.

"No comêço do segundo surto abstrato, figurará sempre um teórico que, sem ser original apresenta alguma importância histórica, como tipo espontâneo de uma tal positividade. O só advento de um tratado didático, digno fruto inicial da instituição alexandrina, provaria assás a consistência decisiva e a estima universal adquiridas já pela Geometria. Mas a composição de Euclides indica também a difícil existência dos verdadeiros pensadores, que eram então forçados a elaborar a ciência num meio profundamente sofístico. Foi para garantir a pureza do raciocínio geométrico contra as sutilezas dos dialéticos, que êsse estimável professor empregou precauções demasiado minuciosas, cuja empírica imitação tornou-se desde logo inescusável. Todavia, se êle tivesse sido mais eminente, teria já podido preencher uma tal condição sem alterar o verdadeiro espírito das descobertas, cujo encadeamento devia ser mais fácil de manifestar que de dissimular". (9)

O MÉTODO EUCLIDIANO

Traça Amoroso Costa, que timbrava de rigor em seus trabalhos, interessantes considerações em tôrno do método euclidiano:

"A dedução de **Euclides** parte de um grupo de proposições primeiras, subdivididas em axiomas e postulados, nos quais figuram entidades geométricas elementares: o ponto, a linha, etc. Dessas entidades são

---

ciais; meio, porque nos oferecem os instrumentos com que poderemos efetuar a demonstração de novos teoremas.
Em tudo, tanto no objeto como na demonstração, predomina a preocupação de beleza." Euclides Roxo — "A Matemática na educação secundária". (pag. 18)

(9) — *Augusto Comte*, Politique positive, III, pág. 317.

dadas definições que não passam de sugestões intuitivas e não intervêm de modo algum nas demonstrações. Os teoremas de Geometria decorrem, lògicamente, dêsse corpo de dados iniciais, escolhidos com um golpe de vista verdadeiramente genial".

Sente-se, como notou Brunschwicg, nas definições euclidianas a influência aristotélica no sentido de hierarquizar as noções básicas da ciência.

"Os Elementos" constituem, em resumo, uma obra sintética de grande valor pedagógico, cujas demonstrações são lògicamente corretas conquanto Euclides omitisse o caminho seguro para obtê-las. Entre os defeitos de sua obra famosa, cumpre destacar a não-evidência de certos axiomas e postulados, especialmente o V; a falta de generalização, a prolixidade de certos raciocínios e a timidez do emprêgo da superposição de figuras como método demonstrativo. Mas o fato de ter sido o livro de Euclides compêndio adotado durante muitos séculos é a prova mais segura de sua excelência" (10).

Observa-se — como assinala Hoefer, em sua História da Matemática — em todos os capítulos da obra de Euclides, um encadeamento perfeito. Cada proposição está relacionada com as que a precedem e vai articular-se com as que são depois formuladas.

EUCLIDES E OS CHICANISTAS

Clairaut é bem decisivo na defesa que devotadamente formulou dos métodos euclidianos:

"Não nos surpreende que Euclides se desse ao trabalho de demonstrar que dois círculos secantes não têm o mesmo centro, que um triângulo encerrado em outro tem a soma de seus lados menor que a soma dos lados do triângulo que o envolva. Êsse geômetra

(10) — *Francisco Vera*. "História de las ideas Matemáticas".

tinha de convencer sofistas obstinados, que se gloriavam de refutar as verdades mais evidentes, e então era preciso que a Geometria tivesse, como a Lógica, o auxílio de raciocínios em forma para tapar a bôca á chicana. As coisas, porém, mudaram de face. Todo raciocínio que recai sôbre o que só o bom senso de antemão decide, é hoje em pura perda: só serve para obscurecer a verdade e enfadar os leitores". (11)

O QUINTO POSTULADO

O estudo da Geometria, dentro do método euclidiano, isto é, nos **Elementos** de Euclides, é iniciado com uma série de definições, das quais já citamos as principais:

Ponto é aquilo que não tem partes. Linha é um comprimento sem largura etc.

A seguir, com seu "talento eminentemente metódico e organizador" (12), enuncia o geômetra alexandrino várias proposições que são apresentadas e admitidas sem demonstrações. Êsses princípios ou proposições são os **postulados** (13).

— **Que se aceite** (escrevia, na sua singeleza, o

---

(11) — Cfr. Cairaut — Elementos de Geometria, pág XIII, trad. de José Feliciano.

(12) — Cfr. Gino Loria — "Histoire de Sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique", pág. 56.

(13) — A verdadeira natureza dos postulados é difícil de se determinar. Não são verdades puramente a priori, como os axiomas, nem são tão pouco os resultados da observação. A teoria de Kant, que os considera como resultado da necessidade de nossa imaginação, é a que atualmente predomina. O grande matemático francês H. Poincaré, o precursor de Einstein, escreveu no livro "La Science et L'Hypothése": "Os axiomas geométricos não são nem juizos sintéticos a priori, nem fatos experimentais. São definições disfarçadas. São convenções, vêm de nossa escôlha, entre as convenções possiveis, guiadas pelos fatos experimentais, mas livres e não limitadas senão pela necessidade de evitar contradições".

cioso Euclides) que se aceite como verdade o seguinte:

I) — De um ponto a outro ponto podemos traçar uma reta.

II) — Dada uma reta é sempre possível prolongá-la num sentido e no outro.

III) — De um ponto dado, com um raio qualquer, podemos descrever um círculo.

IV — Todos os ângulos retos são iguais.

V) — Quando duas retas A e B, cortadas por uma transversal S, formarem ângulos internos do mesmo lado não suplementares, as ditas retas prolongadas suficientemente, se encontrarão do lado em que a soma dos ângulos internos fôr menor. (14)

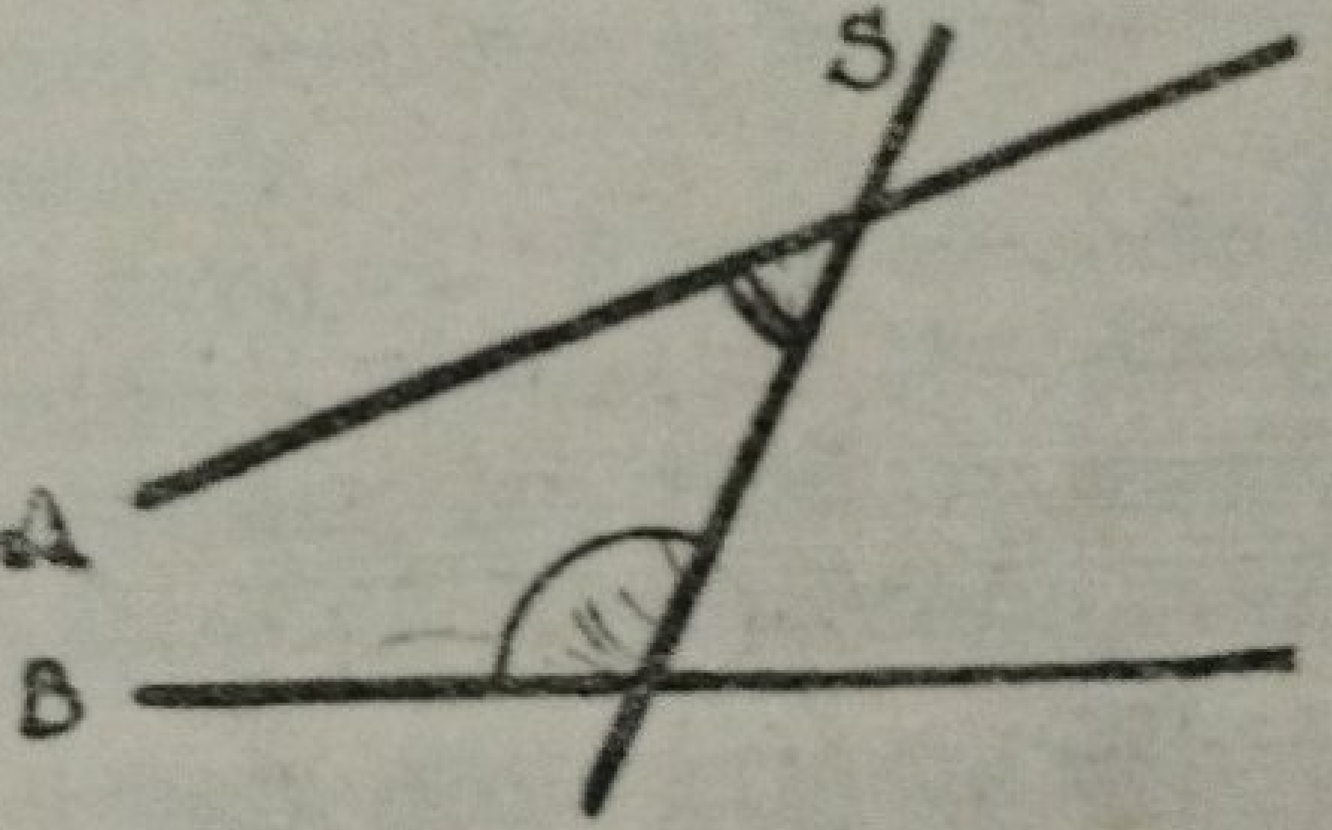


Figura famosa que esclarece o postulado de Euclides.) Quando os dois ângulos, assinalados na figura, forem suplementares, as retas A e B serão paralelas. No caso contrário serão concorrentes.

— Encontramos no livro *"Elementos de Geometria"*, segundo Euclides, com um prefácio do ilustre matemático Dr. Juan David Garcia Bacca, outro enunciado para essa proposição:

"Se uma reta incidir sôbre outras duas formando ângulos internos, do mesmo lado, menores que dois retos, prolongadas essas retas ao infinito elas se encontrarão do lado em que estão os dois ângulos menores que dois retos".

Alguns autores não hesitam em transcrever o postulado de Gergonne apontando-o, em seu enunciado corrente, como sendo o V dos "Elementos".

Assim o Prof. Jácomo Stavale, de S. Paulo, em seu livro "Geometria Plana", pág. 71, escreve:

"Postulado de Euclides — Por um ponto dado e situado

Rápido e superficial exame dêsses "postulados" mostra-nos que todos êles exprimem a possibilidade de se executar certas construções ou, então, asseguram a existência de certas figuras geométricas. O sistema de postulados, na obra de Euclides, é incompleto, isto é, o geômetra emprega outros postulados além dos que foram enunciados. Há muitos postulados não mencionados dos quais Euclides se utiliza no decorrer de suas demonstrações (15).

A desproporção observada entre a clareza dos quatro primeiros postulados e a obscuridade do V levou, talvez, o próprio Euclides a duvidar da natureza da proposição enunciada.

Em seu curioso livro — "Elementos de Geometria plana e sólida segundo a ordem de Euclides, Príncipe dos Geômetras", publicada em 1735, o jesuita Manoel de Campos, referindo-se ao V postulado, escreveu:

> "A verdade dêste axioma não é tão clara que não necessite demonstração; por isso Gemino e Proclo a excluíram do número dos princípios evidentes".

E o Rev. Campos, para não perder tempo e assegurar a sua fama de geômetra, inclui em seu livro uma suposta demonstração para o postulado de Euclides (16). Avultam nessa documentação graves que-

---

fora de uma reta dada, podemos traçar sòmente uma paralela à reta dada".

E, algumas linhas abaixo, acrescenta sob a forma de retificação:

O que nós enunciamos hoje como postulado de Euclides não é exatamente "o que Euclides pediu"; veremos adiante a verdadeira forma dêsse postulado.

(15) — O postulado euclidiano, conforme salientou Zeuthen, contém implicitamente uma nova hipótese: "Que duas retas se cortam". Essa hipótese viria justificar a solução dos problemas que implicam na determinação do ponto de interseção de duas retas cortadas por uma terceira".

(16) — O livro do Padre Campos, para uso da "Real aula da Esfera do Colégio de Santo Antão da Companhia de Jesus de Lisbôa Ocidental" foi dedicado à "Majestade d'El Rey, nosso senhor, D. João V".

rigor geométrico. Com as alterações do Pe. s o livro de Euclides nada lucrou; ao contrá- mereceu.

OSTULADOS EQUIVALENTES AO V

tentativas de demonstração do postulado das as podem ser classificadas em dois grupos: as e as **indiretas.**

nsiste a demonstração direta em deduzir o pos- de outras proposições anteriormente admitidas nonstradas por Euclides fazendo, dessa forma, um outro postulado que seria equivalente ao

processo indireto, a forma de agir seria a se- Rejeitava-se a proposição euclidiana, aceitan- omo verdadeiras tôdas as outras, na esperança gar-se a uma contradição. Êsse método foi que iu os geômetras a novos postulados equivalen- le Euclides.

ualquer uma das seguintes proposições poderá uir ou, em certos casos, encobrir o postulado lides:

De um ponto tomado fora de uma reta só se rar uma paralela a essa reta.

Duas retas coplanares, que não admitem comum, são equidistantes.

Podemos construir dois triângulos semelhan- congruentes.

A soma dos ângulos internos de um triângulo a 180º (17).

presentou Theodoro Crivetz uma demonstração para o teo- ema de Thales (A soma dos ângulos internos do triângulo é ual a 180°) independente do postulado de Euclides. A de- monstração de Crivetz é baseada na noção de *reta, secante, erpendicular, oblíqua, lado, triângulo e quadrilatero* — se- ndo as definições de Eugene Rouche e Che. Comberousse.

5) A área de um triângulo retilíneo pode ser tão grande quanto se queira.

A OBRA DE EUCLIDES E O RIGOR

Por que teriam os matemáticos duvidado do V princípio euclidiano ?

A razão é simples. O livro do célebre geômetra grego é inteiramente falho do ponto de vista do rigor matemático (18).

E, tanto assim, que o autor dos "Elementos", ao elaborar sua obra, teve o cuidado de separar o V postulado dos outros, sugestionado, provàvelmente, pela impressão de que o aludido princípio não fôsse, realmente, original e indemonstrável.

Daí surgiu, como era natural, uma dúvida pertur-

---

(18) — Ao abordar o conceito de rigor, comenta o Prof. Felipe dos Santos Reis:

"Ora, examinando o conceito de rigor matemático — questão de primordial importância em uma crítica do valor da ciência — nós chegaremos à conclusão de que nunca se atinge senão um rigor relativo.

O que é uma demonstração rigorosa? A esta pergunta, cada geração de matemáticos tem respondido de modo diferente — pondera — Amoroso Costa, no seu belo livro: "As idéias fundamentais da Matemática".

Os matemáticos modernos, na ausência do uso de uma linguagem para se aproximar integralmente das coisas a definir, preferem até omitir a definição, ou defini-la por indíces, ou normas qualitativas e quantitativas. E' a fórma estatística.

Lelio Gama, por exemplo, escreve (Introdução à Teoria dos Conjuntos, Rev. Bras. Geog. e Estat., 1941): — "A noção do conjunto é aceita, no seu sentido geral, sem definição. Do ponto de vista matemático, considera-se definido um conjunto quando é conhecida a condição necessária e suficiente (ou o sistema de condições necessárias e suficientes) para que em objeto seja *elemento* do conjunto, pertença ao conjunto".

Nesse sentido poderei mostrar como se parte de definições *incertas, sem* lastro suficiente de observação e, sobretudo, sem medida dos êrros de partida.

Consequentemente vêm o risco da própria teoria não se justapor aos índices determinantes da coisa, que, ou não está definida por índices mensuráveis, ou ficou, apenas definida em jogo de palavras, dando sentidos variáveis no espaço (local) e no tempo (evolução da humanidade e suas palavras). Cfr. *Estudos brasileiros*, Ano V, Vol. X, pág. 33.

badora que por mais de dois mil anos atormentou os geômetras: — "O postulado das paralelas não seria um postulado supérfluo, demonstrável com auxílio dos postulados precedentes ?"

Não poucos foram os geômetras que se esforçaram por obter uma demonstração para o postulado das paralelas, denominado, também, o V postulado (19).

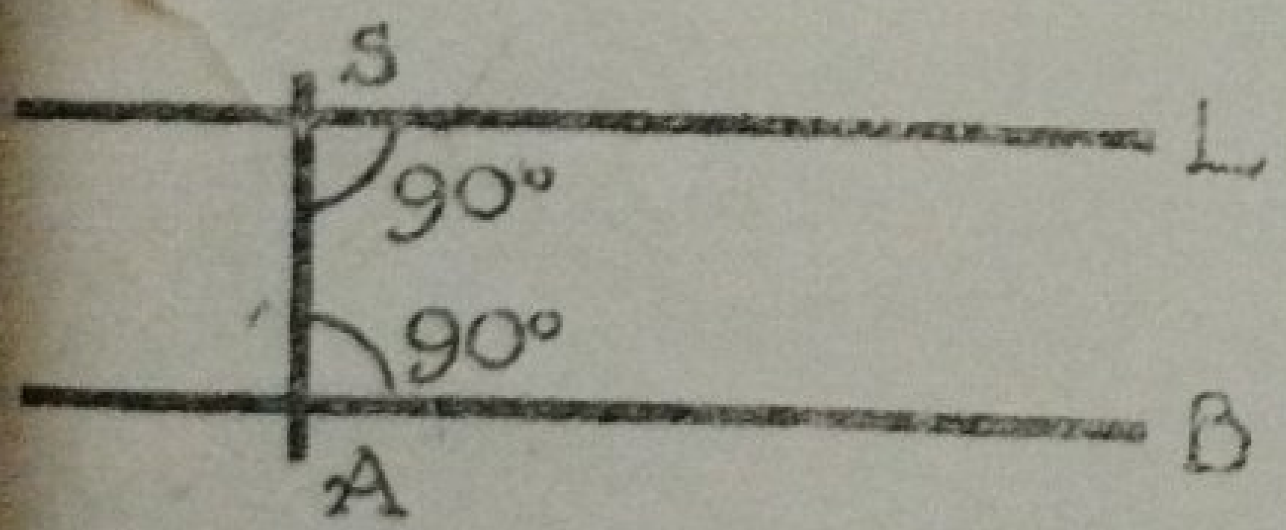
OUTROS ENUNCIADOS

O postulado das paralelas tão citado e discutido na História da Matemática, pode ser enunciado de forma mais simples ou ser substituído por outro equivalente (20).

Gergonne, matemático francês, adotou uma forma equivalente ao princípio euclidiano:

Por um ponto tomado fora de uma reta só se pode tirar uma paralela a essa reta.

E' claro que demonstrado o postulado de Gergonne, estaria, ipso facto, demonstrado o de Euclides. A equivalência dos dois princípios é evidente.



Eis a figura que lembra o postulo de Gergonne;
"Por um ponto tomado fora de a reta só se pode traçar uma paela a essa reta."
Alguns autores, que não se afern ao rigorismo dos ortodoxos, ibuem êsse enunciado ao postulade Euclides.

Com efeito. Seja **AB** uma reta e **S** um ponto fora.

Tracemos **AS** perpendicular à reta **AB**. Do ponto S, formando um ângulo de 90º com AS, só podemos tirar uma reta; essa reta **SL** será paralela à reta **AB.**

---

9) — Na verdade, observa Francisco Vera, êsse famoso postulado é um teorema que indica as condições de existência do ponto de interseção de duas retas cortadas por uma terceira, existência que os gregos precisavam admitir para raciocinar *positivamente* sôbre paralelas cuja definição é negativa. — Retas que situadas no mesmo plano não se encontram — Francisco Vera — Historias de las ideas matemáticas, tomo I).

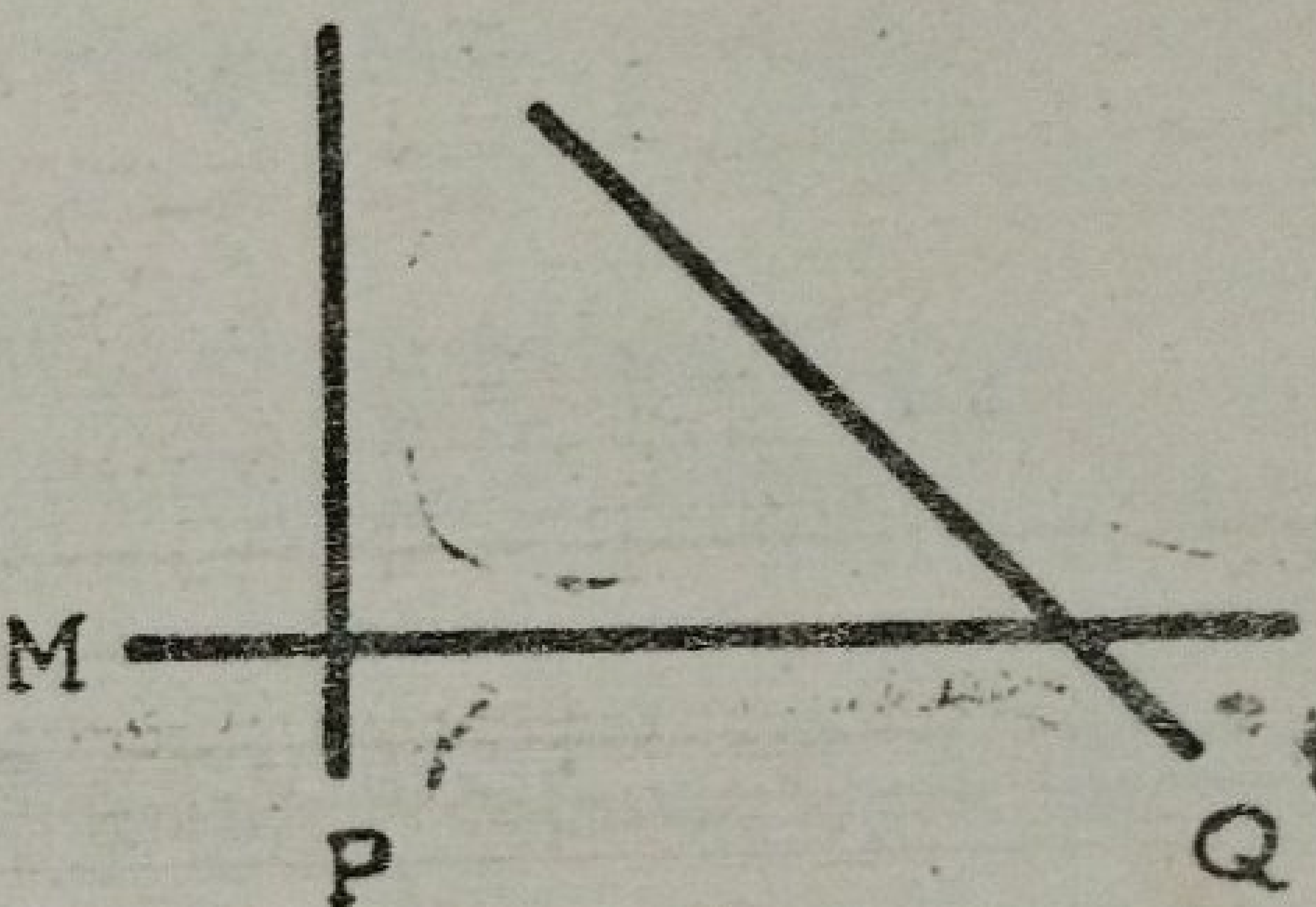
0) —.*Salomão Serebrenik* — "O postulado de Euclides"

O postulado acima enunciado, que se refere à paralela única a uma reta, é também atribuído a Proclo, matemático bizantino que viveu no V século (21).

Não deixa de ser interessante o enunciado de Joseph Bertrand, matemático suiço:

Dada uma reta M, uma perpendicular P e uma oblíqua Q a oblíqua encontra a perpendicular.

Na obra de Euclides — conforme assinala o Professor Pedro Tavares — o enunciado de várias noções e proposições não possui um sentido completo e rigoroso: são breves, até mesmo obscuras. A falta de clareza nas definições, o laconismo de várias proposições, a apresentação de certos fatos geométricos, tudo isso mereceu de d'Alembert a célebre frase: "A definição e as propriedades da linha reta e das paralelas são o escolho, e, por assim dizer, o escândalo dos Elementos de Geometria". Isto dizia o grande filósofo e matemático francês, traduzindo o pensamento de muitos geômetras, antigos e modernos.



Eis a figura que põe em evidência o postulado de Bertrand de Genebra:
"Dada uma reta M, uma perpendicular P e uma oblíqua Q a ablíqua encontra a perpendicular."
Embora pareça evidente essa proposição é indemonstrável.

OS GREGOS ATACAM

O ataque ao postulado de Euclides, com o objetivo de demonstrá-lo, foi iniciado pelos gregos.

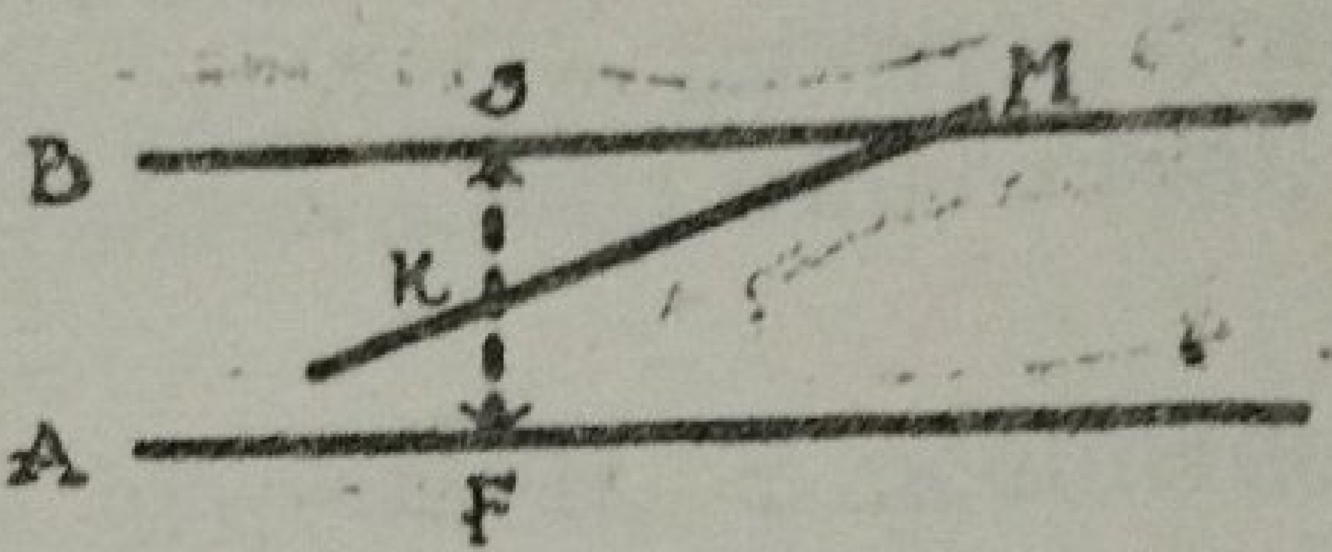
Um século antes de Cristo vamos encontrar o filósofo Posidônio (— 135 a — 49), amigo de Cicero,

(21) — Cfr. Egmont Colerus — "Desde el punto a la cuarta demensión", pág. 341.

que tomava por base a seguinte definição: Paralela a uma reta é o lugar dos pontos equidistantes dessa reta. (Os pontos, segundo decorre da exposição, são tomados sôbre o mesmo semi-plano).

Recordemos, em poucas palavras, a tentativa de demonstração de Posidônio.

Seja A uma reta. Do ponto **M** tiremos uma reta B paralela a reta **A.** A distância das retas **B** e **A** é **SF**.



Se fôsse possível, pelo ponto **M**, tirar outra paralela à reta **A** essa segunda paralela iria cortar **SF** num certo ponto **K** e teríamos de acôrdo com a definição):

$$SF = KF$$

que não é possível.

Logo, do ponto **M** só podemos tirar uma paralela reta **A.**

Alude Proclo a um geômetra **Geminos,** que teria vido 100 anos antes de Cristo, e que repelia a definição de Posidônio classificando-a como uma insentez.

Cláudio Ptolomeu, astrônomo e matemático, que ria vivido no II século depois de Cristo (22), tentou ter uma demonstração. Tomava por base o seguinte incípio:

> "Uma proposição será verdadeira para todos os pares de paralelas quando o fôr para um só."

) — Cfr. Roberto Bonola — no livro "Cuestiones relativas a la Matematica Elemental", compiladas por Frederico Enriques, capitulo 11, página 285.

E como lhe parecesse difícil demonstrar o postulado de Euclides, procurava êsse geômetra contornar a dificuldade, substituindo a proposição euclidiana por um postulado equivalente.

Ensaiava Cláudio Ptolomeu, com encanzinado empenho, demonstrar a seguinte propriedade:

> "Os ângulos colaterais internos, formados por duas paralelas e uma transversal, são suplementares."

Eis o artifício, aliás inaceitável, e acoimado de errôneo, adotado pelo geômetra grego:

Cortando-se um par de paralelas por uma transversal obtemos **dois** pares de paralelas. O que ocorrer, em relação aos ângulos, **m** e **n**, com um dos pares, deve ocorrer com os ângulos **m'** e **n'** do outro. Ora, se para um dos pares a soma dos dois ângulos colaterais internos (**m** e **n**) fôsse maior que dois retos o mesmo aconteceria com o outro par. Teríamos, nesse caso, a soma dos quatro ângulos internos maior que quatro retos, o que não é possível. Do mesmo modo: se para um dos pares a soma dos ângulos internos fôsse menor que dois retos o mesmo sucederia com o outro par. E os quatro ângulos internos dariam uma soma menor que quatro retos, o que seria absurdo. Não podendo, para o mesmo par de paralelas, a soma dos ângulos internos ser maior nem menor que dois retos é fácil concluir que será igual a dois retos.

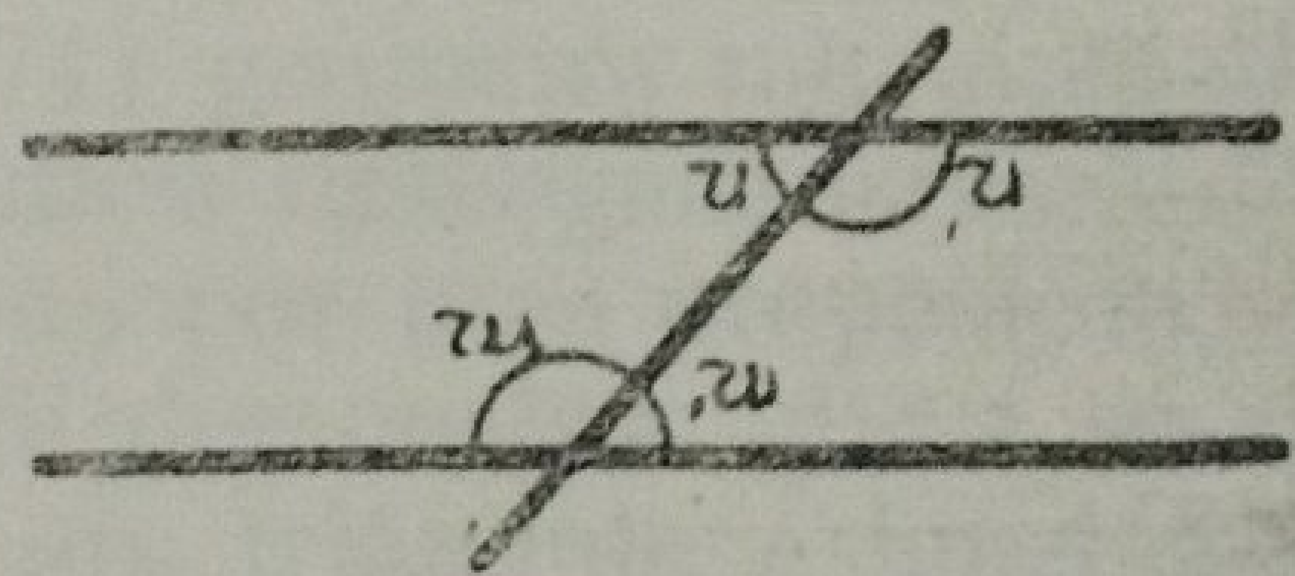


Figura de que se valia o geômetra Cláudio Ptolomeu para demonstrar o postulado de Euclides.
Os ângulos m e n, à direita, devem ser, em soma, iguais aos ângulos m' e n', à esquerda

Dois séculos depois, o filósofo bizantino Proclo Licio (410-485) comenta a obra de Euclides e põe em evidência o V postulado para o qual apresenta uma demonstração baseada na seguinte princípio:

"Quando duas retas são paralelas a reta que encontrar uma delas encontrará também a outra."

Afirma Proclo (depois de criticar Posidônio, Geninos e Ptolomeu) que seria mais prático adotar para o postulado a seguinte forma:

— Se A é paralela a G num ponto P, não há outra paralela à reta G, distinta de A, passando pelo ponto P (23)

Ao jesuita Cristóvão Clavius (1537-1612) atribui Roberto Bonola o postulado:

"O lugar dos pontos equidistantes de uma reta é outra reta" — que é equivalente ao de Euclides (24).

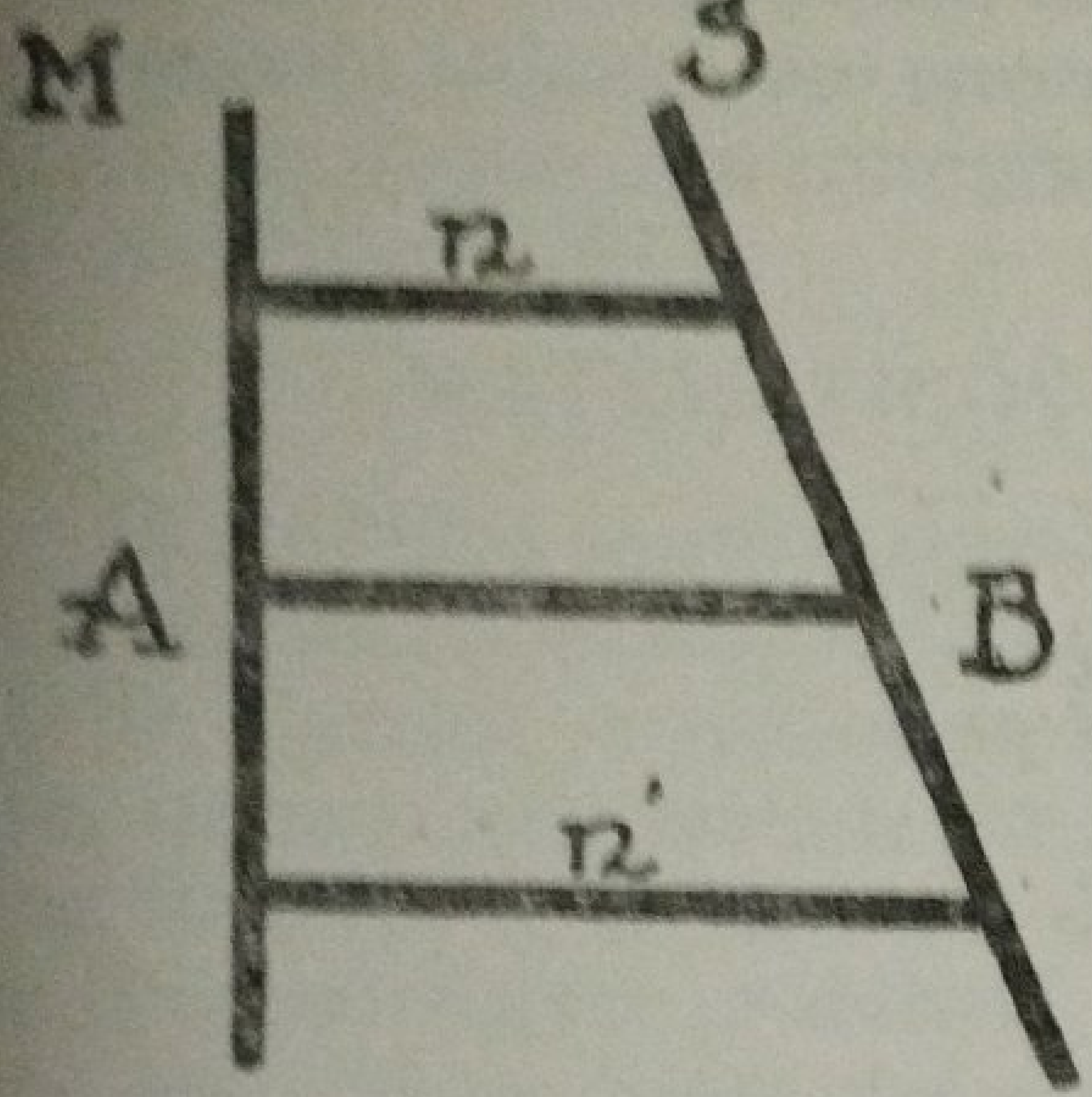
TENTATIVA DE NAZIR-EDIN

Os árabes retomaram os trabalhos dos gregos e acometeram com entusiasmo contra a barreira do postulado. Nazir-Edin (1201-1274) geômetra muçulmano, do século XIII, experimentou desenganadamente substituir o princípio euclidiano por uma proposição, com auxílio da qual seria fácil demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.

Admite Nazir-Edin, ao entrar na peleja euclidiana, como evidente uma proposição cujo longo enunciado, em sua parte essencial, exprime o seguinte:

(23) — Maximilien Marie, na sua "Histoire des Sciences mathématiques et Physiques" I vol., pág. 243, admite que Ptolomeu tenha nascido no ano de 128 e assinala o ano 168 para a data da morte dêsse astrônomo. Há na teoria das transversais um teorema famoso atribuido a Ptolomeu.

(24) — Egmont Colerus — História da Matemática". Convém ler igualmente: "Les bases de la Geomètrie et de la Physique", de Clement Laurés.



O postulado de Euclides desafiou a imaginação dos geômetras. Essa figura esclarece o artifício de que se valeu Nazir-Eddir para demonstrar a famosa proposição.

São dados um segmento **AB** e duas retas **M** e **S**, sendo a primeira (**M**) perpendicular e a outra (**S**) oblíqua ao segmento **AB**.

Tracemos de um lado e de outro de **AB** os segmentos **n** e **n'**. Um dos segmentos (n) será menor que **AB** e outro **n'** será maior.

O segmento m e n o r (n) estará na região em que o ângulo da reta S com AB for agudo. O segmento maior (n') estará na região em que o ângulo de S com AB fôr obtuso.

Dessa propriedade teríamos, como consequência imediata:

Se dois segmentos **n** e **n'**, pertencentes a uma mesma região, fossem iguais as retas **M** e **S** seriam ambas perpendiculares a **AB**. O quadrilátero formado pelas retas e os dois segmentos teria os quatro ângulos retos, isto é, seria um retângulo.

E o geômetra islamita concluía depois da mal aldravada demonstração:

> "A soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos."

E aqui, decompondo um triângulo qualquer em dois triângulos retângulos, legitimava a chamada "lei angular de Thales":

> "A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois retos."

Uma vez demonstrada essa proposição o matemá-
o islamita julgava ter encontrado, com a bússola do
atematicalismo, um caminho seguro para demonstrar
V postulado (25).

MATEMÁTICOS ITALIANOS

Decorridos muitos anos surge uma plêiade admi-
vel de matemáticos italianos: Commandido, Borelli,
talle, Cataldi — sábios da Renascença — que deixa-
m, na segunda metade do século XVI e já no início
século XVII, larga cópia de estudos e pesquisas sô-
e o inextricável problema. Cataldi, que aparece ci-
do em último lugar, foi o primeiro matemático que
creveu um trabalho ùnicamente consagrado à ques-
o das paralelas. Êste geômetra tentou, de forma es-
mbeada, demonstrar a existência de retas equidis-
ntes, quando a existência dessas retas, para os outros
mentaristas, era aceita sem demonstração. Borelli
saiou ladear a questão tomando por base o seguinte
incípio: "Os pontos equidistantes de uma reta, no
ano, formam outra reta".

Destaquemos, igualmente, o nome de Giordano
talle (1533-1611). As tentativas de Vitalle, que clau-
am em consequência de um vício fundamental, são
eressantes porque reduzem a um mínimo as condi-
es suficientes para a existência de duas retas equi-
tantes. Vitalle abandona o enunciado de Euclides e
ita uma demonstração para o axioma de Borelli.

O FRACASSO DE WALLIS

O famoso matemático inglês John Wallis (1616-
03) no século XVII, atira-se com energia contra o
blema e tenta em vão resolvê-lo. A suposta de-
nstração de Wallis é completamente inaceitável,

— O muçulmano Al-Niziri, que viveu no X século, fez igualmente pesquisas em tôrno do problema euclidiano, mas nada acrescentou ao que seus antecessores gregos haviam feito.

pois o autor da "Aritmética dos infinitos", para demonstrar a proposição de Euclides, admitiu, em substituição ao postulado euclidiano, um princípio equivalente assim enunciado: "Dado um triângulo plano é sempre possível obter outro triângulo semelhante e de área tão grande quanto se queira".

Roberto Bonola, matemático italiano de desmarcado valor, observa:

> "A equivalência entre os postulados de Wallis e de Euclides nos mostra que se fôsse possível um sistema geométrico no qual se rejeitasse o postulado euclidiano, a existência de figuras semelhantes, nesse sistema, seria impossível".

A grandeza de uma figura estaria intimamente ligada à grandeza de seus ângulos.

POSTULADOS EQUIVALENTES

Antes de prosseguirmos na análise das diferentes tentativas de demonstração, parece-nos oportuno relacionar todos os postulados que podem substituir o V, isto é, que os geômetras consideram **equivalentes** ao princípio euclidiano .

Eis os principais enunciados:

a) Os ângulos colaterais internos formados por duas paralelas são suplementares (Ptolomeu).

b) Duas retas paralelas são equidistantes (Ptolomeu).

c) Dadas duas paralelas, tôda reta que cortar uma delas corta também a outra (Proclo).

d) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.

e) De um ponto tomado fora de uma reta só se pode tirar uma paralela a essa reta (Proclo; Gergonne).

f) Pode-se construir um triângulo semelhante a um triângulo dado e de grandeza arbitrária (Wallis).

g) Por três pontos, não em linha reta, passa sem- uma esfera (Bolyai).

h) O lugar dos pontos equidistantes de uma reta ıtra reta (Cristóvão Clavius, S.J.; Borelli).

i) Dadas duas retas **P** e **O** sendo uma perpendi- ır (**P**) e outra oblíqua (**O**) a uma transversal **S** os mentos das perpendiculares a **P** compreendidos en- **P** e **O**, são menores na região em que **S** forma com ngulo agudo (Nazir-Edin).

j) A soma dos ângulos internos de um triângulo gual a dois retos (Saccheri).

k) E' possível construir um triângulo cuja área ı maior do que qualquer área dada (Gauss).

l) Dadas uma perpendicular **P** e uma oblíqua **O** a a mesma transversal **S**, a oblíqua **O** encontra a per- ıdicular do lado em que a soma dos ângulos inter- ; for a menor (Bertrand).

Basta acarear cada uma dessas proposições com o postulado para se concluir da sua inteira e com- ta equivalência com o princípio euclidiano.

Vamos, mais uma vez, transcrever aqui o enun- lo do postulado das paralelas segundo Euclides:

"que, se uma reta incidente sôbre duas retas, faz gulos internos do mesmo lado menores que dois re- , prolongadas essas duas retas ao infinito coincidi- na parte em que estão os ângulos menores que s retos."

Tal enunciado é transcrito dos **"Elementos da ometria"**, de Euclides, segundo o código Vindobon.

O V POSTULADO E O INFINITO

Não nos parece prudente avançar em nosso es- lo sem esclarecer um ponto sôbre o qual se projeta ita sombra:

Como chegou Euclides a concluir pela necessi- le do V postulado? Que obstáculo geométrico ou lógico pretendeu êle contornar pelo atalho de sua famosa proposição?

O eminente Dr. Juan Bacca em sua magnífica **"Intruduccion Filosofica"** esclarece a dúvida com argumentos irrefutáveis.

Vejamos.

Sendo Euclides, como bom grego, um visual nato, nada **pedirá** além daquilo que é dado imediatamente pela intuição. A construção não é para êle um meio **de fazer existir** o objeto geométrico para depois investigar as propriedades que se deduzem da construção. Não chega, pois, a construção, para o geômetra grego, a constituir **prova de existência,** como se pretende afirmar agora, uma vez que para Euclides só existia, realmente, um critério de existência — a **existência visível**, imediata ou não; e assim, se a **coisa** não está imediatamente visível, o processo que êle emprega não consistirá numa construção qualquer, mas sim numa **construção** que torne possível uma **visão**.

Foi, precisamente, o que ocorreu em relação ao V postulado. Aborda êsse postulado o problema das retas que se prolongam ao infinito. Ora, o infinito para o heleno clássico (argumenta o Dr. Bacca) é o mesmo que o indeterminado; ao rastilhar, portanto, uma reta ao infinito depara o heleno com o fantasma apavorante da **indeterminação**. Para fixar, portanto, o que devia ocorrer com duas retas indefinidamente prolongadas fez-se necessário pedir um suplemento à razão, pois a vista sensível não pode dar solução aceitável senão para aquilo que ocorre à distância determinada (finita).

E', pois, Euclides, impelido, mais uma vez, a postular para saltar êsse obstáculo muito sério: o infinito

O encontro das duas retas, dentro do postulado euclidiano, ocorrerá a dois passos, a cem passos, a dois milhões de estádios... mas o ponto de interseção ficará afinal, a uma **distância bem determinada**.

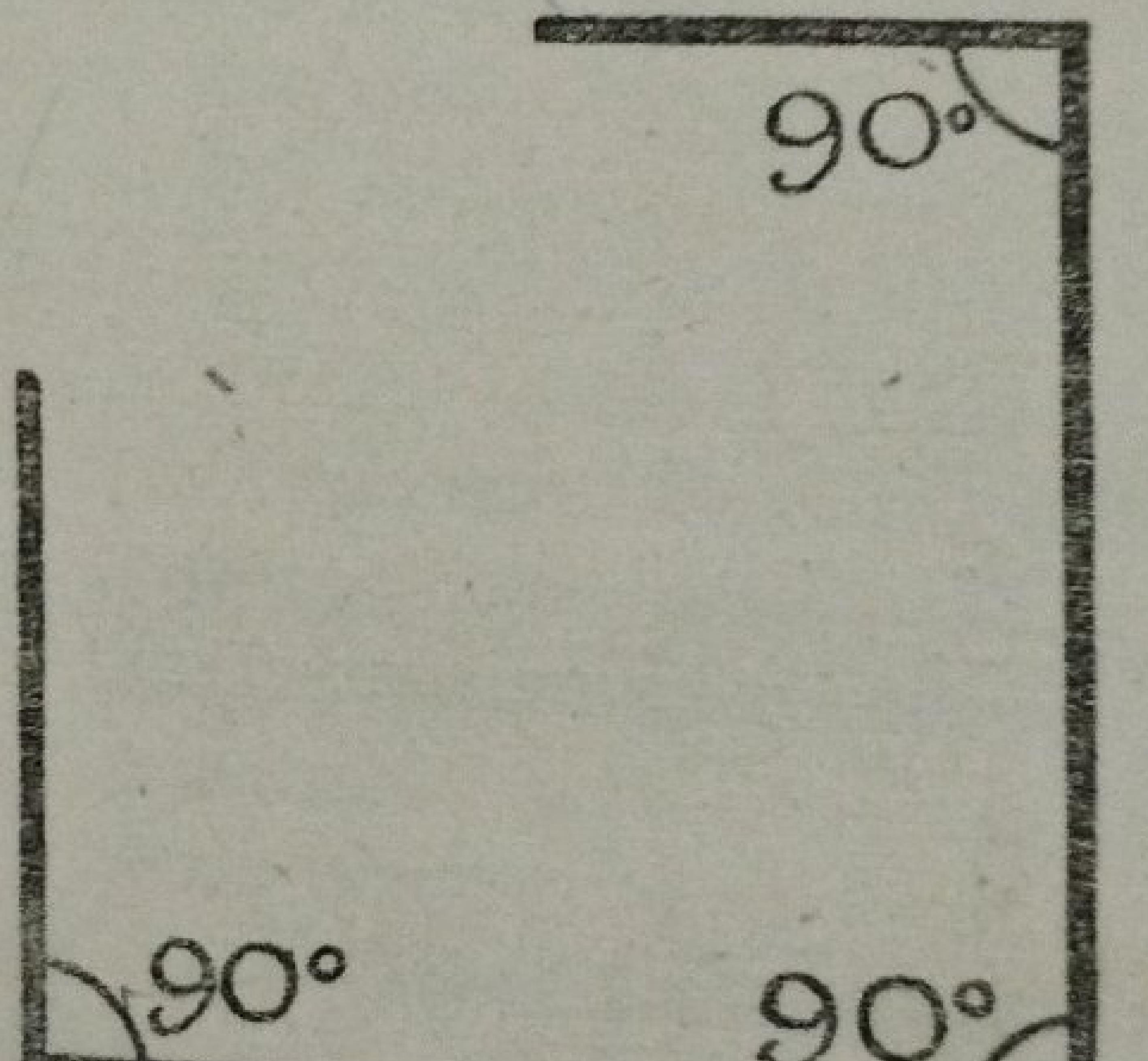
A OBRA DE SACCHERI

O espaço dos antigos geômetras é uma abstração sugerida pela experiência.

MARCEL BOLL

O padre Gerolamo Saccheri, S. J. (1667-1733), udicioso geômetra genovês, é igualmente atraído pela lificuldade insuperável do problema. O jesuita Saccheri foi o primeiro a tentar para o postulado uma lemonstração por absurdo e, na esperança de chegar a ıma contradição, admitia uma hipótese diferente da le Euclides.

Para aclarar o problema considerava Saccheri ım quadrilátero tendo três ìngulos retos, e distinguia, em relação ao terceiro ângulo, três hipóteses.



Quadrilátero tri-retângulo de Saccheri. Prolongue os lados e procure **fechar a figura**.

Como será o quarto ângulo dêsse quadrilátero?

Na hipótese do quarto ângulo ser reto temos a Geometria euclidiana.

A hipótese do ângulo obtuso corresponde a Geometria riemanniana, **elíptica (Klein) ou duplamente abstrata** (de Tilly).

Para a hipótese do ângulo agudo resultaria a Geometria lobatschewskiana, **hiperbólica (Klein) ou abstrata** (de Tilly). Esta última recebeu igualmente as denominações de Geometria **imaginária** (Lobatschewsky) ou **Geometria astral** (Schweikart).

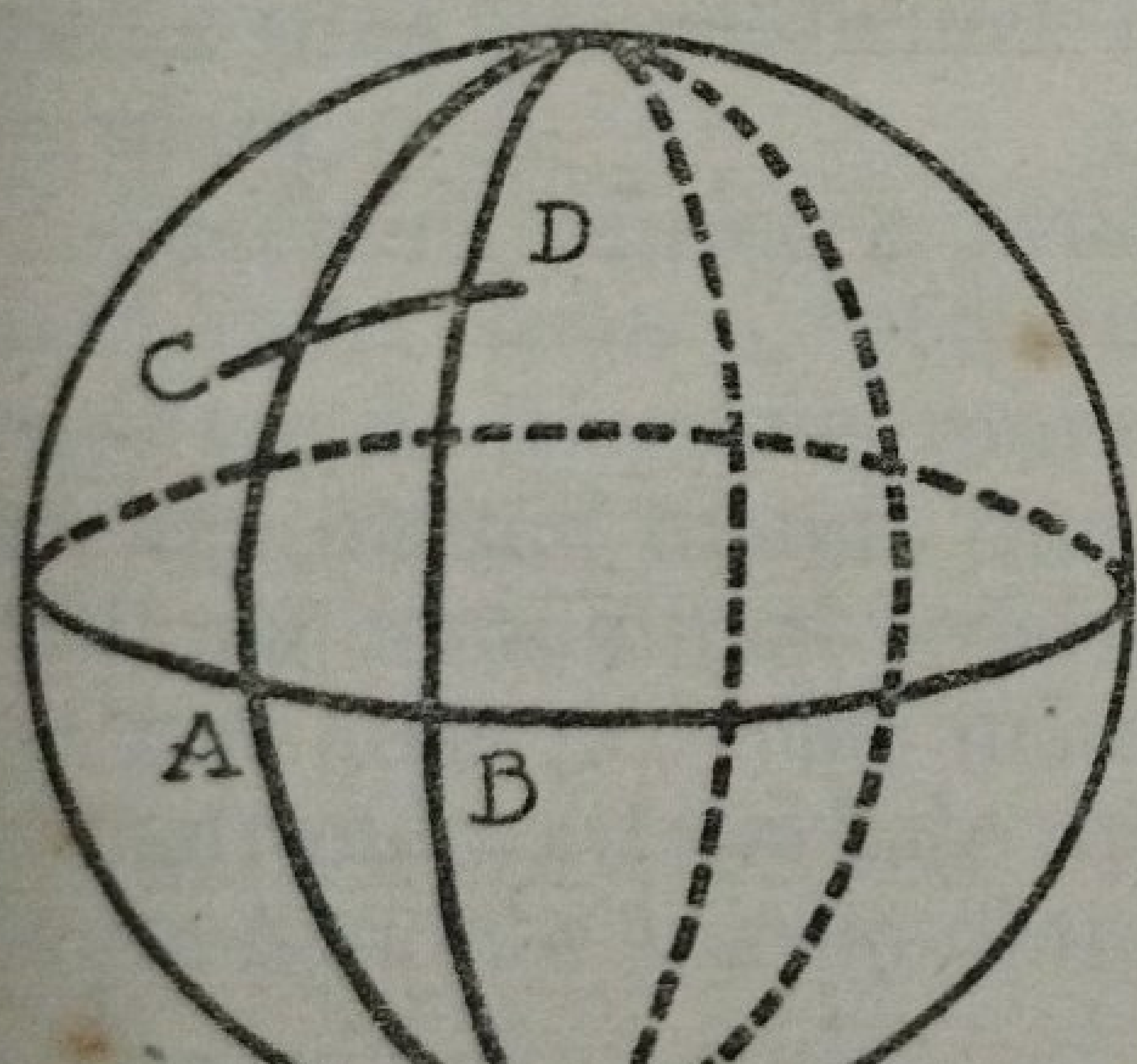
O terceiro ângulo poderia ser **reto, obtuso** ou **agudo.** O geômetra italiano demonstrava, a seguir, que cada caso era verificado para todos os quadriláteros, uma vez que fôsse admitido, como verdadeiro, para um só. Estabelece para cada um dos três casos as propriedades características de duas retas coplanares perpendiculares a uma terceira reta: no primeiro caso são equidistantes (postulado de Euclides); no segundo, divergem uma da outra a partir da perpendicular; no terceiro caso, aproximam-se uma da outra.

AS HIPÓTESES SACCHERIANAS

Admitida a primeira hipótese (ângulo reto) concluia o ilustre jesuita Saccheri que "a soma dos ângulos internos de um triângulo era igual a dois retos".

E, a seguir, com um raciocínio análogo ao de Nazir-Edin, e com auxílio do postulado de Arquimedes, concluia pela demonstração rigorosa do postulado de Euclides.

No segundo caso (ângulo obtuso) a soma dos ângulos de um triângulo seria maior que dois retos. Firmando-se, ainda, na hipótese de ser a reta infinita, inferia pela validez do V postulado. Mas dêsse postulado decorria que a soma dos ângulos internos de um triângulo era igual a dois retos. Logo a hipótese do ângulo obtuso era contraditória e, por êsse motivo, devia ser rejeitada.



Admitida a hipótese do espaço esférico a distância mais curta entre os pontos A e C será dada pelo arco de circulo máximo que passa por êsses pontos.

As retas dêsse espaço serão circulos máximos e assim dada uma "reta" AC' e um ponto fora B, por êsse ponto não se pode tirar nenhuma paraleia a essa reta. Com efeito, a reta que passar por B encontrará a reta AC em dois pontos que são os polos do espaço. Verifica-se em relação ao quadrilátero ABCD a 3.ª hipótese de Saccheri (ângulo obtuso).

Aceita a terceira hipótese (ângulo agudo) a soma dos ângulos internos de um triângulo seria menor que dois retos.

"Com a intenção de demolir também a hipótese do ângulo agudo, desenvolve Saccheri várias proposições, as quais, (tivesse êle permanecido no campo puramente dedutivo) não o levariam à contradição que o torturava. Tão forte e arrojada, porém, era a idéia de que o postulado euclidiano não podia ser indemonstrável, que Saccheri, à semelhança de seus antecessores, assentou o seu edifício lógico numa nova proposição intuitiva que o permitia destruir a terceira hipótese. Essa proposição era a seguinte: "Não podemos admitir a existência de duas retas que se aproximam indefinidamente sem encontrar-se" (retas assintóticas).

Com o raciocínio circunscrito por tal hipótese, conseguiu Saccheri declarar falsa a hipótese do ângulo agudo, que era por êle desaceitada.

Das três hipóteses angulares assim formuladas — concluía, com segurança, Saccheri — só a primeira é possível e verdadeira.

E como a única hipótese admissível era compatível com o enunciado euclidiano, acreditava Saccheri ter demonstrado o V postulado." (26).

A hipótese saccheriana distinguia, para duas retas do plano, três situações distintas: 1.º secantes; 2.º paralelas; 3.º não-secantes. Neste último caso admitiam as retas uma perpendicular comum, a partir da qual divergiam.

Saccheri, afirma o prudente Veronese, deve ser considerado como o verdadeiro precursor de Lobatschewsky e de Riemann, muito embora, vítima dos preconceitos de seu tempo, que impunham a geometria euclidiana como única possível, fôsse conduzido a destruir por suas próprias mãos a obra que havia feito, demonstrando a falsidade das duas últimas hipóteses. (ângulo agudo e ângulo obtuso) (27).

A OBRA DE LAMBERT

Surge no cenário da grande competição euclidiana um vulto verdadeiramente genial: Lambert.

Johann-Heinrich Lambert (1728-1777) geômetra

(26) — Veja o livro: "Questiones relativas a la matématica elemental", compilado por Frederico Enriques — O capitulo X dessa obra da autoria de *Roberto Bonola* tem por objetivo: "História de la teoria de las paralelas".

(27) — Obr. P. Barbarin — "La géometrie non Euclidienne", pág. 20 (em nota).

suiço, na segunda metade do século XVIII, retomou a questão, já convencido, certamente, de que o postulado de Euclides era indemonstrável. Lambert admitiu como ponto de partida o quadrilátero tri-retângulo de Saccheri, isto é, um quadrilátero com três ângulos retos. (28).

Demonstrou Lambert que, afastada no quadrilátero de Saccheri a hipótese do ângulo reto, existiria uma espécie de **unidade de medida natural ou absoluta**, isto é, uma unidade definida por suas relações com o plano, ao passo que na Geometria de Euclides nada de semelhante a isso poderia existir. Uma vez aceita a hipótese do ângulo obtuso estaria suprimida a propriedade que tem a reta de ser infinita, e, ainda mais, a soma dos ângulos internos de um triângulo seria maior que dois ângulos retos. Verificada a hipótese de ser agudo o quarto ângulo de Saccheri a soma dos ângulos internos de um triângulo seria menor que dois ângulos retos.

Chamando S a área de um triângulo e **E** o valor absoluto da diferença entre 180.º e a soma dos ângulos internos dêsse triângulo e **K** um coeficiente constante (que Gauss denominou **constante especial**) teríamos:

$$S = KE$$

Observou Lambert, que a hipótese saccheriana, do ângulo agudo é realizada para um triângulo esférico (supondo que as retas, lados, são arcos de círculo máximo da esfera) e que a hipótese do ângulo obtuso é realizada sôbre uma esfera de raio imaginário.

A área de um triângulo — dentro da concepção

(28) — É bem possível que a obra de Saccheri não tivesse chegado ao conhecimento de Lambert.

se geômetra (20) — seria proporcional a diferença o — S, na qual S indica a soma dos ângulos interdo triângulo.

LAGRANGE RECONSIDERA

Joseph-Louis Lagrange, o imortal criador dos mé-os analíticos, autor do "Cálculo das Variações", n o prestígio de seu incalculável saber, apresentou cademia de Ciências de Paris uma memória sôbre roblema das paralelas.

Ao fazer, porém, a exposição oral aos seus pares, errompeu de súbito a leitura, retirou o manuscrito xclamou desolado:

— "Il faut que j'ai y songe encore!

O postulado de Euclides resistia, assim, a todos os orços tornando-se um tormento para os geômetras. ita razão tinha d'Alembert ao qualificar rasgada-nte a definição de paralelismo como o "escândalo Geometria".

"La definition et les propriétés la ligne droite, si que des lignes paralléles son l'écueil et pour ainsi e le scandale des Elements de Géométrie".

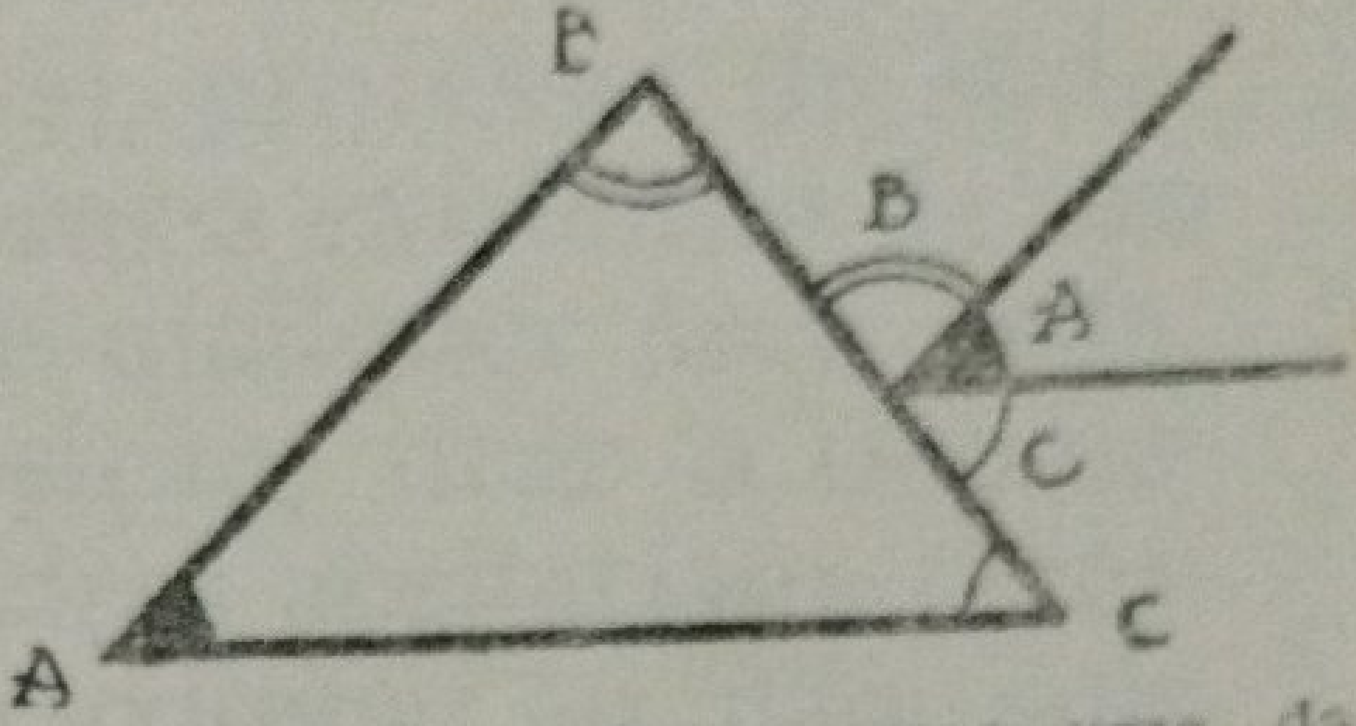
O fracasso das contínuas tentativas dos grandes stres não conturbava o ânimo dos pertinazes com-entes (30).

— O valor de Lambert é posto em relêvo por M. Charles que em sua "Histoire de la Geométrie" (pág. 186) referindo-se ao geômetra suíço escreveu: "O célebre Lambert, outro Leibniz pela universabilidade e profundeza de seus conhecimentos..."

— Em um interessante estudo — "Notice sur l'influence scientifique de Guillaume-Jules Houel" — apresenta Brunel uma relação das principais tentativas do V postulado. Só para as publicadas na primeira metade do século XIX indica Brunel nada menos de setenta e cinco análises, sendo algumas bem desenvolvidas. Em Stackel vamos encontrar a relação completa dos ensaios desde 1482 até 1837.

Carnot, Laplace Fourier, Legendre, Bertrand e muitos outros, abordaram com entusiasmo o problema das paralelas.

Fourier (1768-1830) propunha, para aperfeiçoar a teoria das paralelas, refugar as velhas concepções e dar novas definições para os conceitos de retas e de plano; Carnot e Laplace, acolchetados ao roteiro de Wallis, queriam substituir o postulado de Euclides por outro que "assegurava a existência de figuras semelhantes" (31) O genial matemático francês Legendre (1752-1833), forçado a transigir com os renovadores, chega à seguinte conclusão conciliadora:



Na figura acima vemos uma das demonstrações do teorema famoso da Geometria de Euclides: "A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°."

"Há pelo menos um triângulo em que a soma dos ângulos é igual a dois retos."

O TRABALHO DE GAUSS

Gauss, matemático alemão, que Klein considerava como o maior geômetra do século XVIII, consagrou ao problema das paralelas trinta e cinco anos de sua existência. Tudo nos leva a crer que Gauss tenha che-

(31) — Em seu livro "Demonstração do postulado de Euclides", o Sr. Salomão Serebrenick analisa a crítica, demolindo impiedosamente, as tentativas feitas por vários autores: Tribaut, Bertrand, Legendre, T. Crivetz, L. Aubry, M. Sauger — e encerra o livro apresentando uma demonstração de sua autoria.

Dentro, ainda, de nossa literatura poderíamos citar um opúsculo intitulado *"O postulado de Euclides"* da autoria do Sr. Adel da Silveira, com elogioso prefácio do Prof. Luiz Caetano de Oliveira. O Sr. Adel da Silveira chega a demonstrar o postulado de Euclides firmado no princípio de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos. (Veja Al Karismi, n. 4, artigo do Prof. Fran-

ado à conclusão de que seria possível construir-se
ma nova Geometria — que êle denominara "não-eu-
lidiana", baseada num postulado diferente do de Eu-
lides.

Em 1799 o laureado filósofo alemão escrevia a seu
migo, o húngaro Wolfang Bolyai, professor de Mate-
ática. "Se eu pudesse demonstrar a existência de um
riângulo de área maior do que qualquer área dada,
er-me-ia possível, dessa proposição, tirar a Geome-
ia. A maior parte dos geômetras aceitariam, certa-
nente, essa proposição como um axioma; eu, não; pois
eria bem possível que, por mais afastados que estives-
em os vértices do triângulo, a área dêsse triângulo
ermanecesse inferior a um certo limite".

Os fundamentos da Geometria foram, ainda, sub-
etidos a um minucioso escabichar por dois ilustres e
ngenhosos contemporâneos de Gauss: Fernando Car-
os Schweikart (1780-1857) e Franz Adolph Taurinus
1794-1874).

Schweikart, que era jurista e cultivava a Geome-
ria, faz chegar às mãos de Gauss uma teoria (que não
e animou a publicar) na qual mostra, com notável e
ivulgar clareza, a possibilidade de ser construído um
ovo edifício geométrico desligado em seus fundamen-
os da proposição euclidiana por êle impugnada.

O segundo analista, Taurinus, sobrinho de Sch-
weikart, convencido embora da verdade absoluta do
postulado, pregava a possibilidade lógica de serem
ceitas outras hipóteses já contidas nos estudos de Sac-
heri e Lambert. Mas Taurinus para não se afastar da
rilha que adotara, terminou reafirmando a validez do
ostulado euclidiano.

"O postulado das paralelas — afirmara Gauss —
indemonstrável, isto é, não pode ser deduzido dos
undamentos do espaço, exatamente porque adiciona
m elemento novo a seus fundamentos; logo, negando-
e aquêle postulado, é possível construir uma nova

geometria tão lógica e coerente como a Geometria de Euclides".

A essa Geometria possível deu Gauss o qualificativo de **anti-euclidiana**, depois o de **astral**, por fim o de **não-euclidiana**. Em correspondência trocada com Bessel, dizia Gauss que a questão dos fundamentos da Geometria o agitava desde os mais verdes anos, levando-o a pensar que essa ciência não podia ser construída a priori, pois deve a teoria ajustar-se aos fatos; ao que Bessel responde (10 de Fevereiro de 1829) na mesma ordem de idéias, convencido de que a nossa Geometria — a Geometria de Euclides — incompleta e exige correções que só se tornariam dispensáveis se a experiência viesse confirmar que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180º. Nenhuma experiência pode demonstrar rigorosamente essa proposição e Bessel conclui: — "Então a verdadeira Geometria será a que se obtiver estabelecendo as convenientes correções e a Geometria euclidiana ficará sendo a Geometria prática pelo menos para as figuras terrestres". X

AS PESQUISAS DE TAURINUS

Voltemos a Franz Adolph Taurinus, contemporâneo de Gauss.

Em 1826 (e essa data merece muita atenção) manifestou a sua maneira de encarar o problema, opinando que da inveracidade do V postulado decorreria, fatalmente, a existência de certas superfícies onde as curvas teriam as mesmas propriedades que apresentam as retas no plano. Teve, assim, Taurinus a intuição da existência de uma desacomodada superfície — a pseudoesfera — que só foi descoberta quarenta anos ... geômetra italiano Eugenio Beltrami

1835-1900). Construia Taurinus um sistema analíti-
o, enquadrado na Trigonometria esférica o raio ima-
inário RI pelo raio real R da esfera.

O TEMOR DE GAUSS

Em carta a seu amigo Wolfang Bolyai, pai de ohan Bolyai (em 1811), Gauss teve a fraqueza de con-essar"... **sou levado muitas vêzes a duvidar da ver-ade da Geometria"**. Por um sigular excesso de pru-ência, e receiando a **"gritaria dos beócios"** não se ani-nava Gauss publicar os resultados a que havia chega-o (32). Afinal, vencendo as hesitações e receios, de-berou Gauss tornar conhecidas as suas investigações; eve, nessa ocasião, conhecimento da **Geometria Abso-uta** do matemático João Bolyai, cujas idéias coincidiam om as suas. Resolveu, então, desistir da projetada pu-licação.

Ora, por êsse tempo, um matemático russo, Nico-au Lobatschewsky (33), professor da Universidade

---

32) — A teoria das paralelas, já no tempo de Gauss, preocupava os matemáticos. Veja-se êste trecho de uma carta de Gauss a W. Bolyai, em Dezembro de 1799: "Encontra-se em Brunswick um emigrado chamado *Chauvelot*, que não é mau geômetra e que pretende ter estabelecido a teoria completa das paralelas; seu trabalho aparecerá em breve, mas não espero encontrar nêle nada de aproveitável. Nos *"Arquivos de Hindeburg"*, 9.ª parte, encontra-se uma nova pesquisa, de um certo *Hauff*, sôbre o mesmo assunto: está abaixo de qualquer crítica". Cfr. Paulo Stackel e Fredrich Engel — "Gauss, les deux Bolyai et la Geometrie non euclidienne", Trad. de L. Laugel.

33) — Aqui confessamos a nossa dúvida sôbre a grafia exata do nome do célebre geômetra criador da Pan-Geometria. Encontramos, em vários autores, as formas: Lobatchewsky, Lobachevski, Lobatchevisky, Lobatchevski e Lobatschewsky. Adotamos esta última que aparece em P. Barbarin. Ob. cit. A Geometria do inovador russo será denominada *lobatschewskiana* fazendo, na formação do adjetivo, a substituição do *y* pelo i.

A forma Lobattcheffski é apresentada por E. Rouché e Ch. de Comberousse.

de Kazan, ignorando por completo os trabalhos e pesquisas de Bolyai, entrou na arena das competições euclidianas, publicando uma **Geometria Imaginária**, denominada posteriormente **Pan-Geometria**

A OBRA DE LOBATSCHEWSKY

A obra revolucionária de Lobatschewsky, publicada em 1826, é altamente interessante. O geômetra russo conservou os axiomas primordiais da Geometria com exceção do V postulado, que foi substiuído pelo seguinte:

Por um ponto tomado fora de uma reta podemos tirar duas paralelas a essa reta, uma infinidade de secantes e uma infinidade de não secantes.

Há uma perfeita harmonia entre os diversos princípios dessa nova Geometria; as suas figuras, entretanto, só podem ter representação simbólica.

Na Geometria de Lobatschewsky a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior a dois retos.

A curva que o geômetra russo denominou, por exemplo, **horiciclo** é inconcebível dentro da Geometria clássica. Nessa curva a perpendicular ao meio de uma corda qualquer é paralela a uma reta fixa.

As definições de ângulo, de ângulo reto, de ângulo agudo, de ângulo obtuso, de perpendicular e de obliqua são idênticas nas duas Geometrias, isto é, em Euclides e Lobatschewsky.

Apresentam essas Geometrias, tão contraditórias em suas conclusões, muitos teoremas comuns. Eis um deles:

"Dois triângulos são iguais quando têm um ângulo igual compreendido entre lados respectivamente iguais".

Essa proposição exprime, aliás, um dos **casos de** igualdade ou congruência de triângulos.

GEOMETRIA LOBATSCHEWSKIANA

Vamos indicar, de modo sucinto, as primeiras no-ões sôbre a Geometria não-euclidiana de Lobatsche-sky.

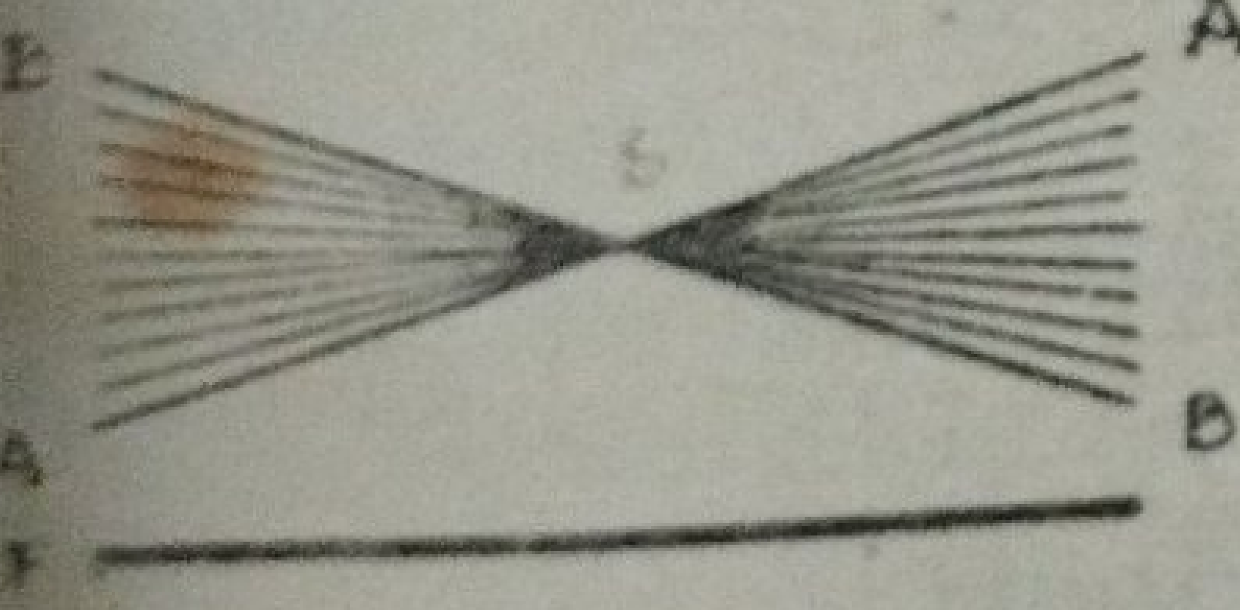
Sôbre um plano **P** tracemos uma reta **E** e seja **S** m ponto fora da reta.

Pelo S, segundo Lobatschewsky, passam:

1.º — uma infinidade de retas que encontram F secantes).

2.º — uma infinidade de retas que não encon-ram F (não secantes).

As secantes são separadas das não secantes por luas retas AA' e BB' que são denominadas paralelas.



A figura nos mostra uma reta F as duas paralelas AA' e BB' e as o-secantes no sentido de Lo-tschewsky. Qualquer reta que pas-r pelo ponto fora do ângulo for-ado pelas paralelas será uma se-nte.

Cada uma dessas "paralelas" tem um determinado **sentido de paralelismo.**

O ângulo por elas formado (aparece hachuriado na figura) é chamado **ângulo de paralelismo.**

Adotando-se para uma delas o sentido direto a outra definirá o sentido inverso.

Do ponto **S** tiremos uma perpendicular a reta **E.** Essa perpendicular forma com uma das paralelas um certo ângulo **V.** Êsse ângulo **V** é função da distância em que o ponto **S** se acha da reta **E.**

Para a Geometria de Euclides, **V** é constante igual a 90.º.

O ângulo de paralelismo que as paralelas AA' e

BB' formam entre si é função da distância a que o ponto S se acha da reta.

Lobatschewsky demonstra, ainda, várias proposições notáveis. Citemos as seguintes:

O paralelismo de duas retas é recíproco e transitivo. Uma reta conserva, em relação a outra, o caráter do paralelismo em todos os seus pontos.

O lugar dos pontos do plano equidistante de uma reta fixa é uma curva. — princípio já previsto pelo genial Saccheri.

As curvas assim obtidas eram por Bolyai denominadas "Curvas paralelas a uma reta".

A figura denominada retângulo não pode existir. Se um quadrilátero tiver três ângulos retos, o quarto ângulo é, forçosamente, agudo.

A existência de figuras semelhantes não é possível. (35)

A celebridade dêste estudo não permite que ampliemos o estudo das teorias da Geometria de Lobatschewsky.

OBSERVAÇÃO

O postulado de Lobatschewsky pode ser melhor interpretado no plano euclidiano, mediante uma curiosa convenção. (36)

Tracemos um círculo de raio **R**.

Vamos admitir as seguintes definições para **plano, ponto** e **reta**, no sentido de Lobatschewsky.

(35) — Por um caminho diferente daquele que foi adotado por Lobatschewsky o austríaco Jean Bolyai chegou a conclusões notáveis. Léchalas, filósofo não-euclidiano, considera a obra de Bolyai superior à obra de Lobatschewsky.

(36) — Adotamos aqui o chamado "modelo de Klein". Cfr. Manuel Balazaut — Introduccion a la Matematica Moderna", página 76.

Plano — Conjunto dos ntos do círculo de raio . A porção do plano ocu- da pelo círculo será um ano (no sentido de Lo- tschewsky).

Ponto — Ponto inte- or do círculo (Exemplo: ponto S.

Ponto do infinito — ualquer ponto da circun- rência. Ex., o ponto A.

Reta — Qualquer cor- a do círculo Exemplo: **AB.**

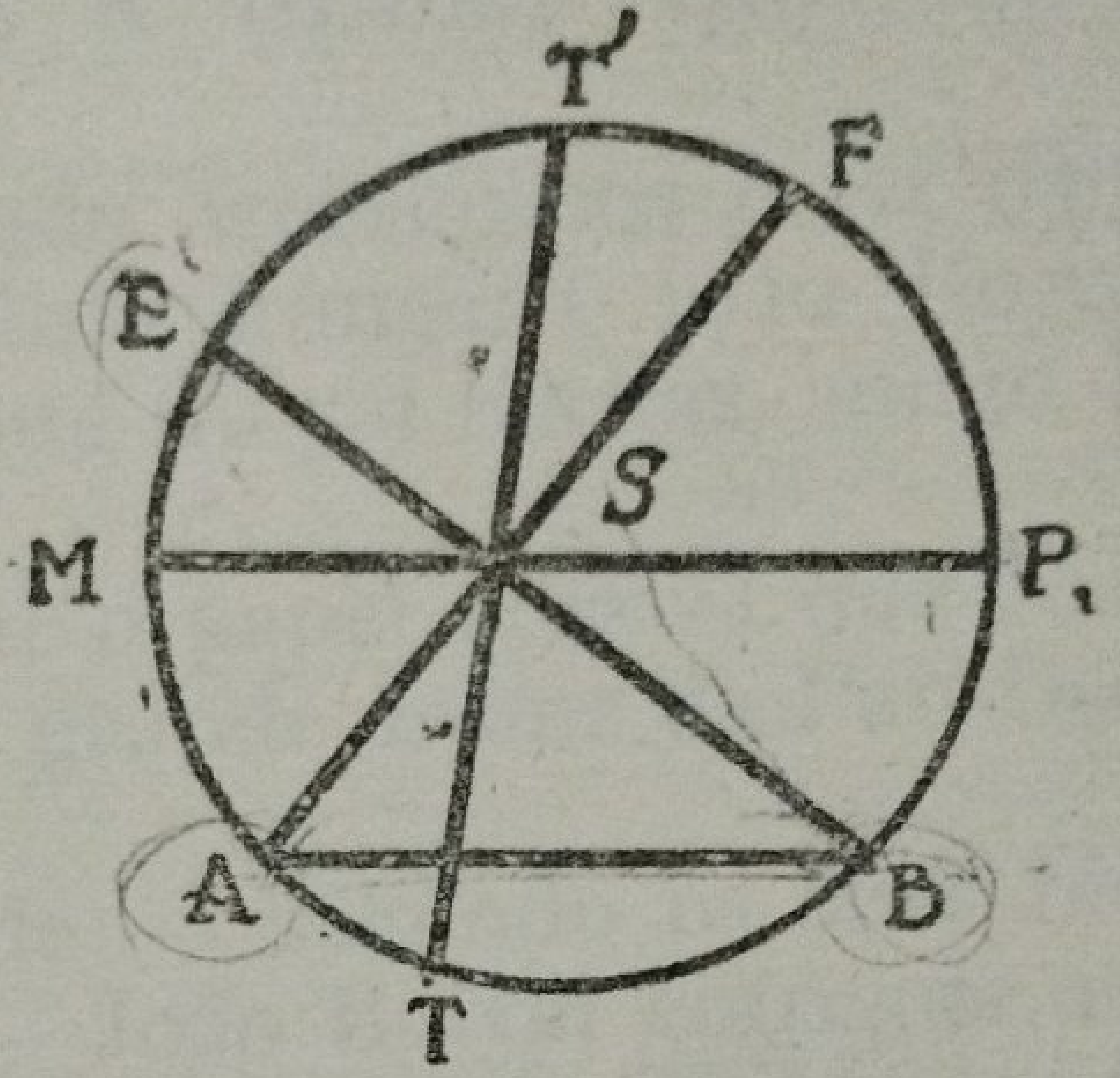


Imagem do plano de Lobatschewsky segundo Klein.

Paralelas —Duas retas serão paralelas quando o onto de interseção dessas retas estiver sôbre a cir- unferência. Exemplo: **EB** e **AB** são paralelas.

Secantes — Duas retas **secantes** quando se cor- am no interior do círculo. Exemplo: **MP** e **EB.**

Não secantes — Duas retas são denominadas não ecantes quando não se cortam, nem no interior do cir- ulo nem sôbre a circunferência. Exemplo: **MP** e **AB** ão retas **não secantes.**

Assentadas essas convenções vejamos como inter- retar o instalado de Lobatschewsky.

Seja **AB** uma reta do plano.

Tomemos um ponto **S** fora da reta.

Dêsse ponto podemos tirar duas paralelas (**FA** e **EB**), uma infinidade de secantes (**TT'** é uma delas) e ma infinidade de não secantes (**MP** é uma das não- ecantes).

O ângulo de paralelismo **ASE** é função da distân- ia do ponto S à reta **AB.**

JOÃO BOLYAI E A GEOMETRIA

No decorrer dêste estudo ocorreu-nos fazer ligeira alusão ao nome do sábio húngaro João Bolyai (1802-1860) filho de Wolfang Bolyai Farkas, amigo de Gauss. (37)

E' interessante mostrar o papel notável que João Bolyai desempenhou nesse grande drama da Pan-Geometria.

As nove anos de idade — segundo os seus biógrafos mais autorizados — João Bolyai entregue aos folguedos infantís, mal sabia ler e era incapaz de efetuar a adição de dois números inteiros. Aos treze anos de idade, isto é, quatro anos depois, conhecia o Cálculo Integral e a Mecânica a ponto de maravilhar, com suas conclusões e respostas, aquêles que o arguiam em tão difíceis assuntos.

Em 1816, notando que seu filho possuía invulgar aptidão para a Matemática, escreveu Wolfang uma carta a Gauss, pedindo ao grande geômetra alemão aceitasse, em casa, em Gattenguer o jovem João como discípulo e que o orientasse nos estudos da ciência. Gauss não respondeu a essa carta, silenciou sôbre o caso, e essa desconsideração do filósofo fêz com que o velho Bolyai, sem recurso para custear a educação do jovem, o encaminhasse para a carreira militar.

E' incalculável o dano que a atitude egoista ou displicente de Gauss causou à Humanidade. Não podemos expurgá-lo dêsse êrro. Tivesse êle tomado sob seus cuidados João Bolyai e orientado a educação dêsse gênio, teríamos mais um colosso no mundo científico — cujas descobertas viriam certamente assom-

---

(37) — No livro "Geométrie plane" de B. Niewenglowski e C. Giraud, pág. 17, encontramos esta nota:
"Lobatschewsky, geômetra russo, e Bolyai, oficial húngaro...".
O confronto não pode passar sem comentário: um, o geômetra e outro, o oficial húngaro!

os homens através dos séculos e trazer incalculá-
benefícios à coletividade.

Sem conhecer os trabalhos de Lobatschewsky, encorajado por um amigo, Charles Szazs, e fortado pelos ensinamentos de seu pai, encravilhou-se Bolyai nos estudos do problema que êle delibera-nvestigar. Em carta dirigida de Temesvar, a seu em 1823, anunciou a descoberta de novas mara-as, afirmando "ter tirado um Universo do nada". nova teoria do espaço foi publicada em apêndice Tentamen, de Wolfang Bolyai, sob o título — pendix scientiam spatii **absolute veram exhibens** 32).

Um exemplar do **Appendix**, foi, nesse mesmo ano, riado a Gauss que, em carta, datada do dia 6 de mar-de 1832, manifestou uma grande surpresa: a coin-ência era quase completa entre as conclusões de o Bolyai e os resultados de suas meditações e estu-. A êsses estudos e meditações êle, Gauss, já vinha onsagrando havia trinta e cinco anos! Sentia-se afi-feliz, por ver que aquela descoberta — que êle ti-a a intenção de publicar — fôra constituir um títu-le glória para o filho de velho amigo (38).

Era tal o entusiasmo de Wolfang Bolyai pelo pro-ma euclidiano, ao qual dedicou longos anos de sua stência, que chegou a declarar:

"Considero minha vida fracassada por não ter nseguido demonstrar o postulado das paralelas".)).

— Cfr. "Gauss, les deux Bolyai et la Géometrie non Euclidienne" por Paul Stackel et Friedrich Engel. Trad. de L. Langel. Na pág. 17 podemos ler as seguintes palavras de Gauss, em sua famosa carta a W. Bolyai:

"Falemos agora um pouco do trabalho de teu filho. Começo por dizer que *não posso elogiar êsse trabalho...*'

— Cfr. Walther Brand e Marie Deutschbein — "Introduccion a la filosofia matemática", pág. 197.

O ESPAÇO DE BOLYAI

As proposições de João Bolyai, posta em relêvo no **Appendix** formam um corpo de conhecimentos que denominamos **Ciência absoluta do espaço.** São tôdas elas demonstradas sem auxílio do V postulado.

Citemos, como exemplo, a seguinte:

As três circunferências que têm os raios iguais, respectivamente, aos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

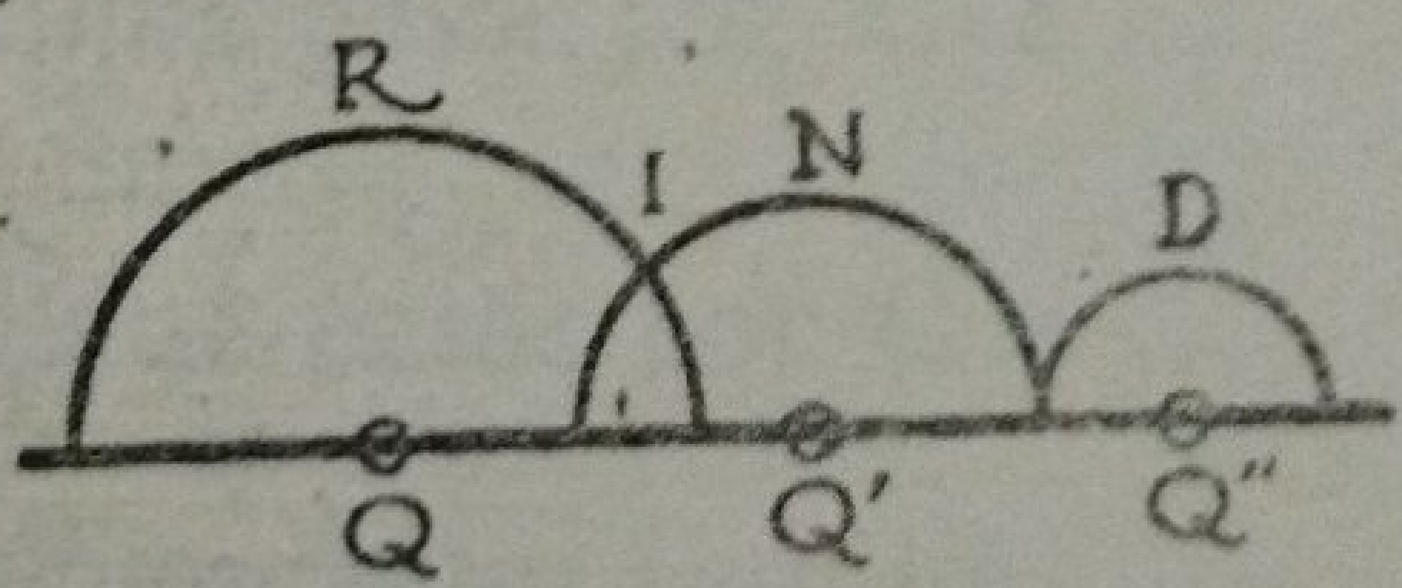
Termina Bolyai o seu **Appendix** com esta afirmação desconcertante:

"Ou o axioma de Euclides é verdadeiro ou a quadratura do círculo é possível".

O MODELO DA GEOMETRIA LOBATSCHEWSKIANA DE POINCARE' (40)

Em suas memoráveis pesquisas sôbre as funções fuchsianas, Henri Poincaré (1854-1912) foi conduzido a uma Geometria que poderá, mediante uma notação especial, exprimir quase tôdas as proposições da Geometria de Lobatschewsky.

Tentemos desurdir a concepção notável do ilustre geômetra.



Modêlo de Geometria de Lobatschewsky.
Nessa Geometria não pode existir contradição, pois a cada contradição na Geometria do russo iria corresponder uma contradição na Geometria de Euclides.

Tracemos sôbre o plano uma reta e consideremos um dos semi-planos limitados por S. Êsse semi-plano será um espaço no sentido de Lobatschewsky. Uma semi-circunferência que tiver o centro sôbre S será **uma reta** dêsse espaço.

(40) — Cfr. Lucien Godeaux — "Les géométries", pág. 109.

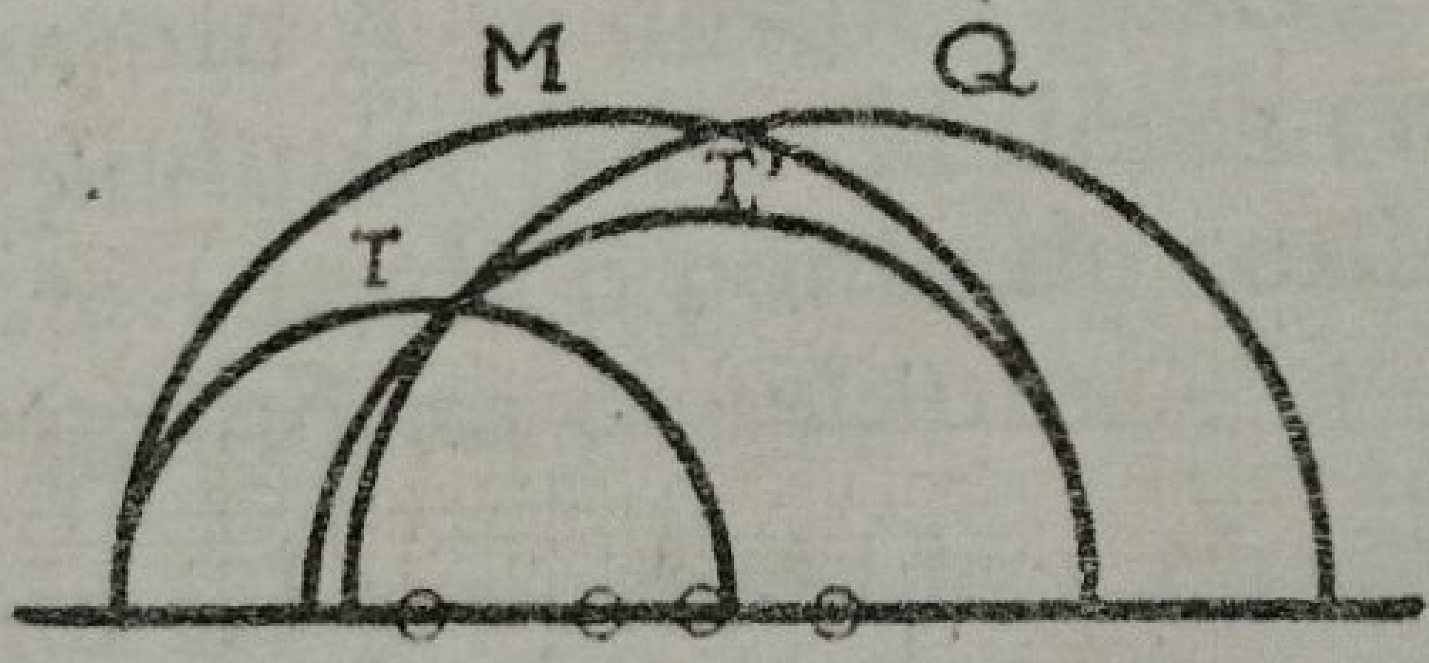
Assim a reta **R** e a reta **N** passam pelo ponto I. Di-mos, nesse caso, que **R** e **N** são **secantes.**

Duas **retas** são paralelas quando tiverem o ponto interseção sôbre S (no infinito). (40) Exemplo. As etas" **N** (centro em **Q'**) e a reta **D** (centro em **Q"**) io paralelas.

As "retas" **R** e **D** são ditas **não-secantes,** e, na ver-ade, não se encontram e deixam também de atender condição de paralelismo. (41)

Para um feixe qualquer de "retas" (segundo as otações convencionais) odemos ter:

retas secantes
retas não-secantes
retas paralelas.



Isso pôsto, tracemos uma reta qualquer e consi-eremos um ponto **C** do espaço, fora dessa reta.

Por êsse ponto podemos tirar (em relação à reta I) duas paralelas (**T** e **T'**), uma infinidade de não se-antes e uma infinidade de secantes (**Q** é uma delas).

Qualquer semi-circunferência que passe por **C** e ão corte **M** será uma não-secante.

Qualquer semi-circunferência que passe por **C** e orte **M** será secante.

E' fácil provar que tôdas as não-secantes (em nú-nero infinito) estão compreendidas entre as duas pa-alelas.

41) — A expressão "ponto do infinito", para designar um ponto infinitamente distante, foi empregada, pela primeira vez, em 1630, por Desargues e em 1687 por Newton. Formulou Steiner a seguinte proposição: "As retas paralelas estão dirigidas para o mesmo ponto do infinito". Cfr. G. Mahler — "Geometria del plano", pág. 18.

A TRACTRIZ

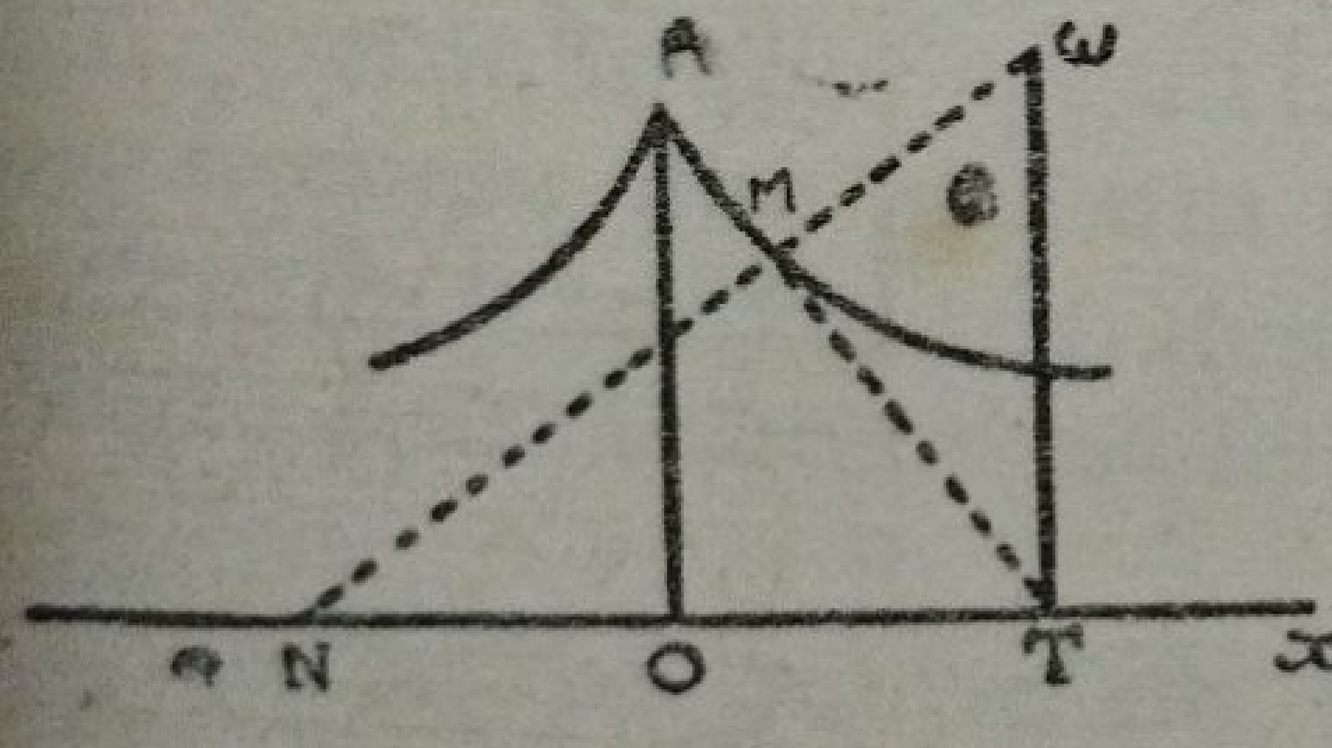
Notável papel desempenha no estudo das Geometrias não-euclidianas uma curva que recebeu a denominação de **tractriz** ou **tractória.**

Vejamos como explicar, de forma elementar, a origem dessa curva famosa.

Consideremos um ponto **A** que se acha a uma distância **AO** do eixo dos **x.**

Vamos supor que o ponto **A** se desloca descrevendo uma curva tal que em qualquer ponto M dessa curva a segmento **MT** da tangente (desde o ponto de contacto até o eixo dos **x**) seja de grandeza constante.

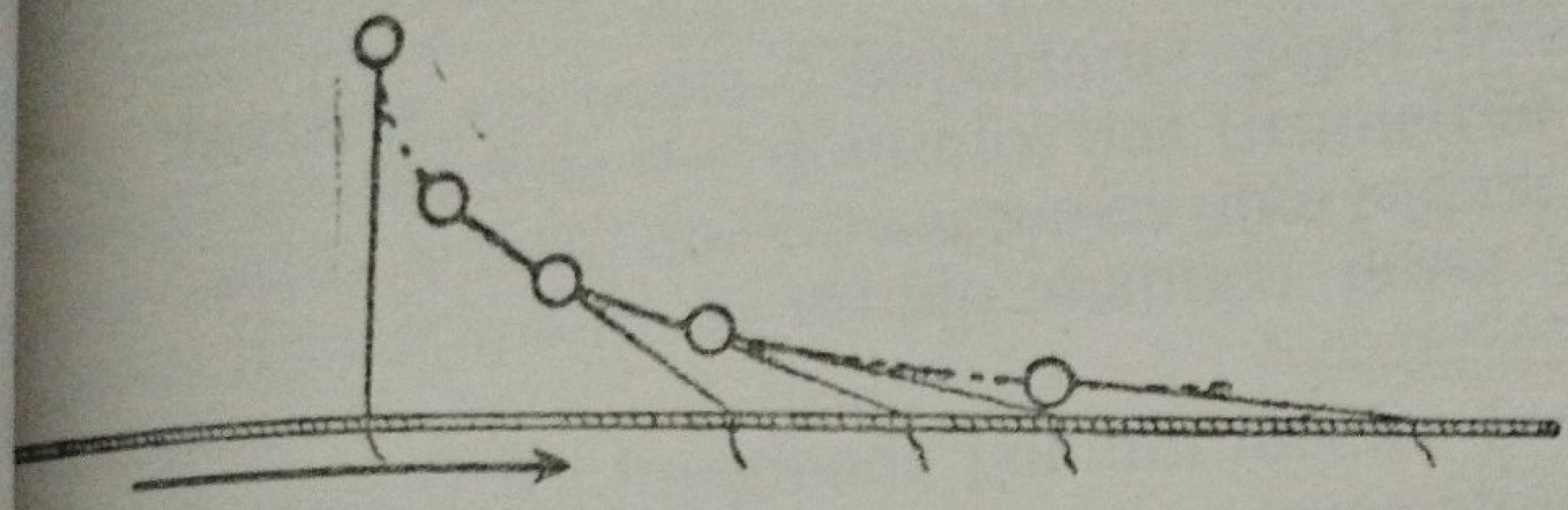
A curva que apresenta tal propriedade é chamada a **tractiz.**



A tractriz admite um ponto de reversão A no qual a tangente **AO** é perpendicular ao eixo dos **x.** Êsse eixo é uma assíntota da curva. O centro de curvatura w é obtido pela interseção da normal **NM** com a perpendicular ao eixo do **x** no ponto **T.**

A **tractriz** não pode ser construída com régua e compasso, mas Huyghens indicou, para essa curva, vários processos mecânicos que permitem o seu traçado com relativa facilidade.

Observemos ainda, que a **tractriz** apresenta um eixo de simetria que é a reta que serve de suporte ao segmento **AO.** Admite, portanto, a curva, dois ramos que se prolongam indefinidamente para a direita e para a esquerda da perpendicular **OA.**

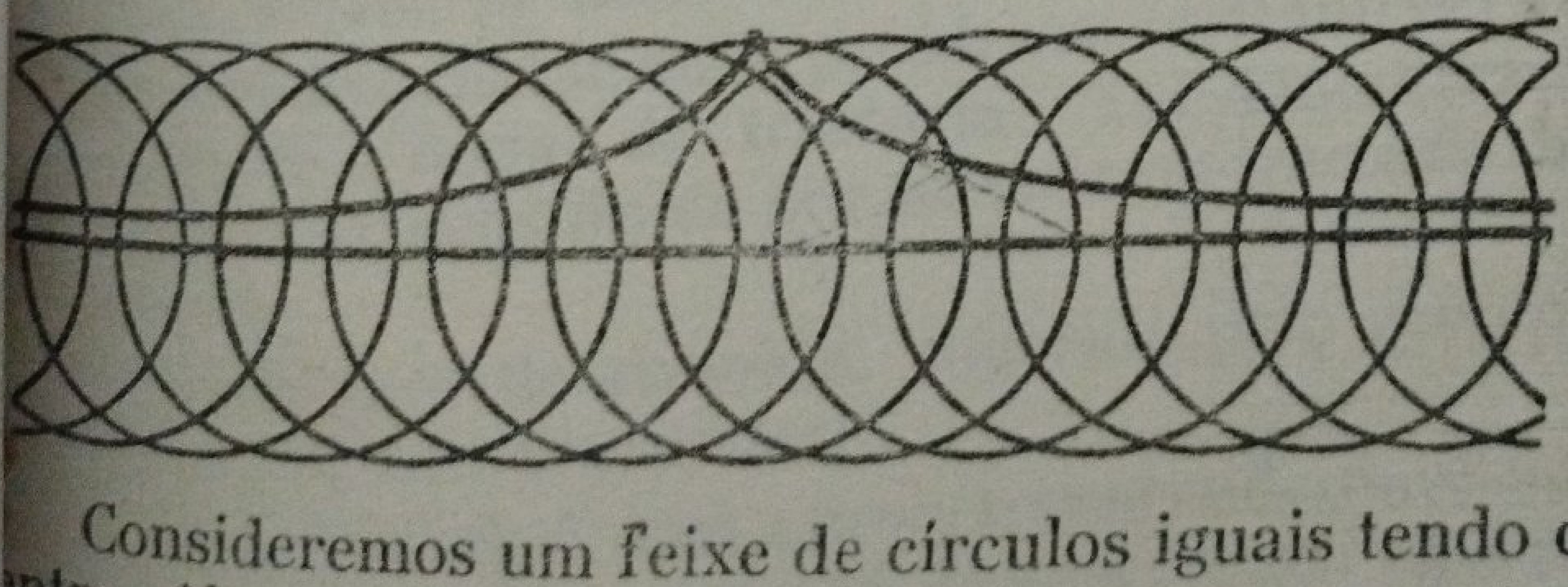


Vemos na figura acima um artifício engenhoso ra se obter a tractriz. Desloca-se um pequeno disco bre uma superfície plana admitindo-se que êsse dis- é solicitado por um fio rígido de comprimento cons-nte, fazendo com que a extremidade do fio, durante movimento, permaneça sempre apoiado numa reta xa.

O centro do disco, arrastado dessa forma, descre-erá a **tractriz.**

A **tractriz** é também denominada **linha de tração ou inha do cão"** pois o seu traçado recorda de certo odo, o caminho que seguiria um cão ao ser puxado or um homem, que procura forçá-lo a andar por um minho que o animal não desejaria seguir. (42)

Outra forma interessante de se obter a tractriz:



Consideremos um feixe de círculos iguais tendo o ntro sôbre uma reta fixa. Imaginemos uma curva e seja normal a todos os círculos dêsse feixe. A cur-, assim obtida, é uma **tractriz.**

2) — *Alexondre Niklitschek* — "El prodigioso jardin de las Matematicas", pág. 397.

Tendo-se em conta o importante papel desempenhado pela **tractriz** nos domínios das Geometrias não-euclidianas, é justo que consagremos uma página dêste nosso ligeiro ensaio ao estudo analítico dessa curva famosa.

A **tractriz** foi imaginada por um médico francês, Cláudio Perrault (1613-1688), que a apresentou, sob a forma de simples problema, a vários matemáticos de renome, inclusive ao genial Leibniz, o criador do Cálculo Diferencial:

"Qual seria a curva descrita, sôbre um plano horizontal, por um ponto pesado prêso ao extremo de um fio, supondo que o outro extremo dêsse fio percorresse uma reta fixa." (Cfr. Gino Lória — "Curve piane speciali algebriche e trascendenti", pág. 213).

Reconheceu Leibniz que essa curva apresentava uma propriedade notável:

"A porção da tangente, num ponto M, compreendida entre êsse ponto e a reta fixa era de comprimento constante".

A análise do lugar geométrico do Dr. Perrault foi feita, afinal, de maneira brilhante por Huyghens que, depois de generalizar o problema, atribuiu à curva resultante o nome de **tractória**. Tal denominação foi, mais tarde substituída por **tractriz ou tractória de Huyghens**.

O nome de **alysoide**, sugerido pelo geômetra Ribancour, não prevaleceu.

A tractriz é uma curva transcendente e podemos obter, com os recursos da Análise, a sua equação cartesiana.

Consideremos um feixe de círculos:

$$(x - m)^2 + y^2 = R^2$$

sendo m um parâmetro variável e R

na constante (todos os círculos do feixe são iguais fig. da pág. 51).

Diferenciando a equação do feixe, temos:

$$(x - m)\, dx + y dy = O \qquad \text{(II)}$$

Eliminando, entre as equações (I) e (II) o parâ-etro variável m chegamos à equação diferencial do ixe. Se nessa equação do feixe substituirmos

$$\frac{dy}{dx} \quad por \quad -\frac{dx}{dy} \quad ou \quad -p$$

amos obter imediatamente, sob uma forma muito egante, a equação diferencial da tractriz

$$y^2 \;(1 + p^2) = R^2$$

A integração dessa equação oferece certa dificul-ade, mas vai nos permitir escrever a equação carte-ana (finita) da célebre **tractória de Huyghens.**

Podemos escrever a equação cartesiana da tractriz dotando a forma exponencial ou recorrendo, como z Lord Brougham, a uma função da forma

$$x = f(y)$$

a qual f(y) é uma função logarítmica.

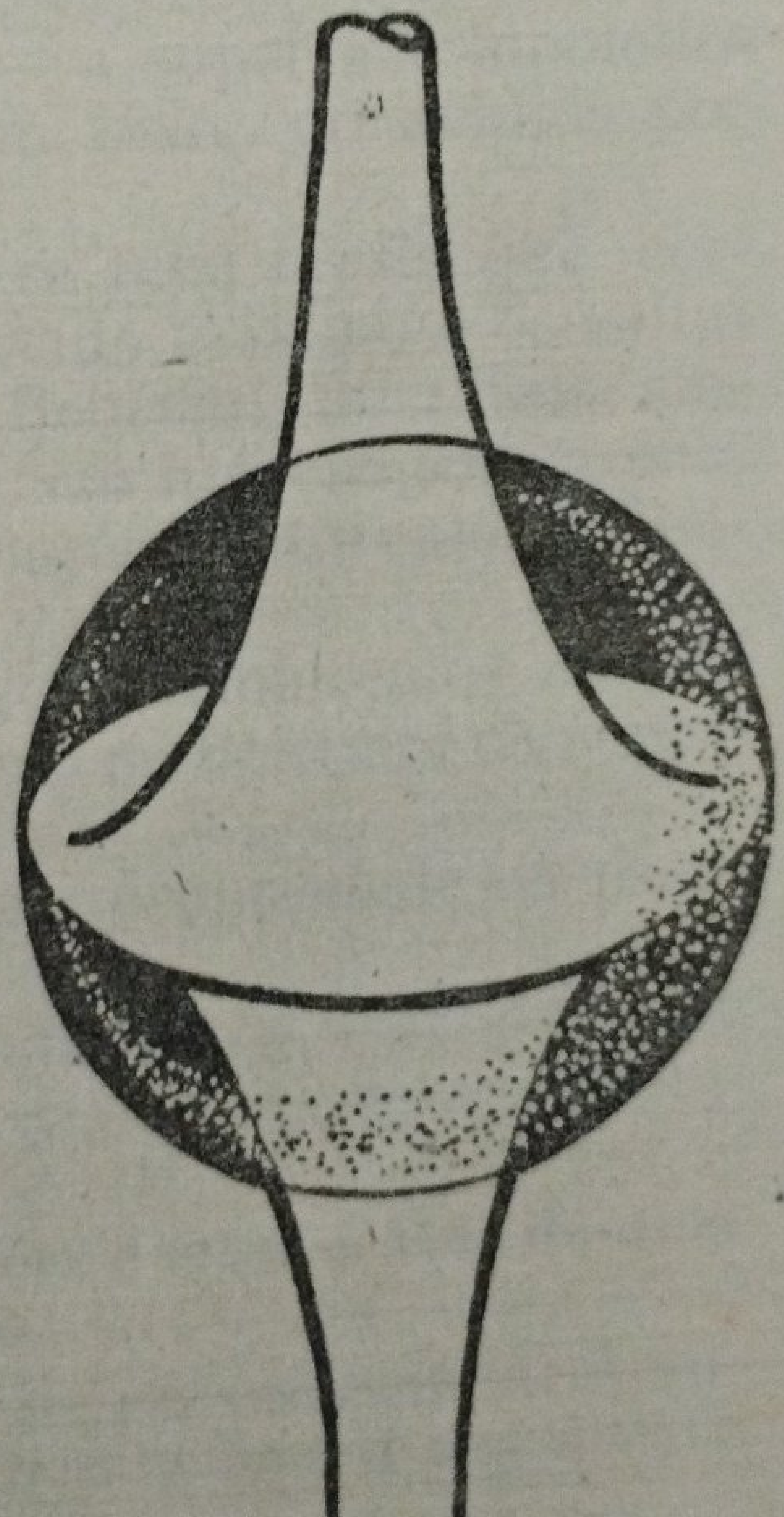
A área compreendida entre a tractriz e o eixo dos é finita e igual à metade da área de um círculo de io R.

O estudo das propriedades dessa curva, as suas lações com a catenária e as suas analogias com a piral logarítmica são assuntos que ficariam além dos mites dêste trabalho.

A PSEUDO-ESFERA

A ciência começa onde o bom-senso termina.
JOSEPH PÈRÈS — *"Les sciences exactes".*

Uma vez conhecida a singular **tractriz** vamos admitir que essa curva — a curva do cão teimoso — gira em torno de suas assíntota. No fim de uma rotação completa vai essa curva gerar uma superfície de revolução.



Singular aspecto, nada disgracioso, apresentará essa nova superfície. Lembra, por sua forma, duas imensas trombetas opostas pelas bôcas e que se prolongassem, a perder de vista, pelo espaço. As "trombetas" vão se estreitando, vão se afunilando, cada vez mais, mas só no infinito apresentarão a "ponta" final fechada.

Ao primeiro exame essa superfície em nada se assemelha à **esfera**. Um estudo mais aprofundado vem nos revelar, porém, que existem analogias notáveis entre a esfera e essas trombetas infinitas. Por êsse motivo a superfície gerada pela tractriz recebeu a denominação de **falsa-esfera** ou **pseudo-esfera** e foi revelada em 1866 pelo matemático italiano Eugênio Beltrami.

O leitor que se contentar com a simples observação las formas não hesitará em afirmar que entre a es-'era e a **pseudo-esfera** não existe, nem pode existir ifinidade alguma. Mas essas afinidades existem e é lêsse parentesco geométrico que decorre o prestígio la pseudo-esfera.

Citemos, de início, a mais importante:

Assim como na esfera a curvatura é constante e ositiva, na pseudo-esfera a curvatura é constante e legativa. (43)

Realiza, pois, a pseudo-esfera — que teve por enitora a curva da tração — a superfície hipotética uja existência tinha sido, em 1826, pressentida por 'aurinus.

Apresenta a pseudo-esfera uma aresta que corresponderia, na esfera, ao círculo máximo e constitui ssa aresta, na superfície de Beltrami, uma linha sinular. Daremos a essa linha, em homenagem ao maemático italiano, a denominação de **Círculo de Beltrami.**

Para abreviar a linguagem chamaremos **raio da seudo-esfera**, ao raio do **círculo** de Beltrami da superície.

Convém insistir sôbre uma propriedade da pseuo-esfera:

A sua superfície é ilimitada, isto é, estende-se até infinito; verifica-se, apesar disso, esta relação notáel:

A área de uma pseudo-esfera é igual a área de uma sfera que tenha o mesmo raio.

Eis uma conclusão digna de ser assinalada: A superfície da pseudo-esfera é infinita mas a sua área é inita.

---

3) — Convém lêr as *noções de curvatura* incluídas em *nota*, na parte final dêste volume. Devemos notar que a curvatura, na pseudo-esfera, é constante embora os raios de curvatura sejam variáveis. Ainda mais: Na pseudo-esfera a curvatura média é variável, ao passo que na esfera a curvatura média é constante.

Em relação ao volume não se observa equivalência entre a pseudo-esfera e a esfera de mesmo raio.

Sendo V o volume da esfera de raio R, o volume da pseudo-esfera do mesmo raio será ½ V.

GEOMETRIA DA PSEUDO-ESFERA

Imaginemos que as figuras, as figuras mais simples da vida corrente, não são mais traçadas sôbre o plano, mas sim sôbre a superfície de uma pseudo-esfera. Teríamos, nesse caso, de discernir uma nova Geometria pois as figuras apresentam novas propriedades e os princípios euclidianos deixam de ser válidos.

A Geometria, sôbre a pseudo-esfera, foi deseuclidianizada.

Essa nova Geometria seria chamada **hiperbólica** e admite, como verdadeiro, o postulado de Lobatschewsky.

Na **Geometria hiperbólica** a soma dos ângulos de um triângulo é menor que 180º. Se os três vértices do triângulo estiverem no infinito, (nas pontas incríveis da pseudo-esfera) a soma dos três ângulos internos do triângulo será igual a zero. Eis uma figura irrealizável sôbre o plano de Euclides: Um triângulo equiângulo com os três ângulos internos nulos!

O círculo, na pseudo-esfera, é uma figura diversa daquela que estamos habituadíssimos a ver no mundo euclidiano.

Conclusão: A superfície da pseudo-esfera realiza a Geometria de Lobatschewsky para um espaço de duas dimensões. (44)

---

(44) — "Uma Geometria não-euclidiana, no espaço de duas dimensões, apresenta-se hoje como a Geodesia de uma superfície não desenvolvível sôbre o plano. A livre escolha dessa superfície mostra-nos como é ampla a opção para êste ou aquele tipo geométrico".

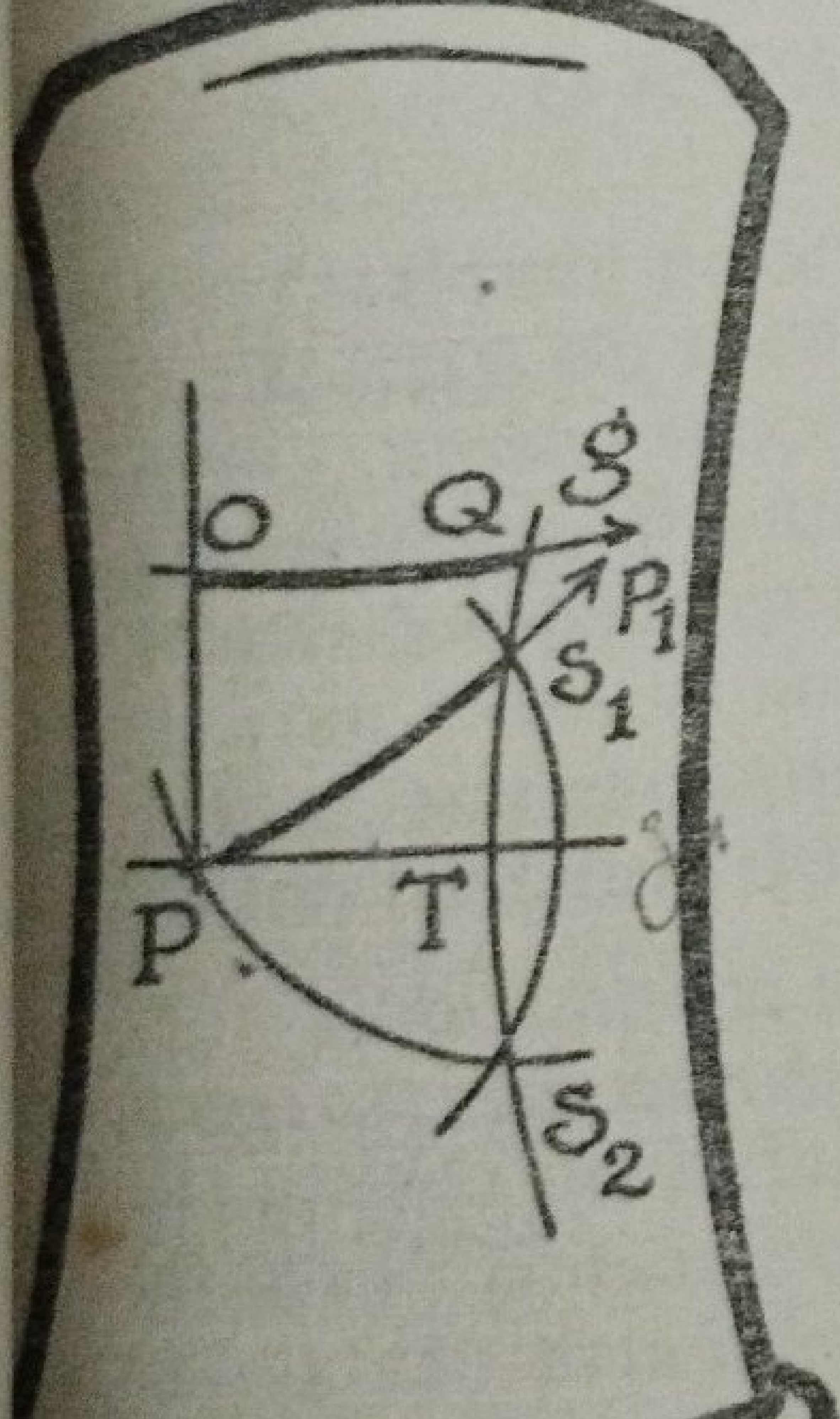
"Cfr. G. Bouligand" "L'intuition et le paradoxe", no livro "L'évolution des sciences physiques et mathématiques", pág. 133.

PARALELAS DE LOBATSCHEWSKY

Imaginemos um geômetra que disponha de um quadro negro cuja superfície apresenta a forma pseudo-esférica. Vejamos como construir sôbre êsse estranho quadro-negro as paralelas no sentido de Lobatschewsky (45).

Seja g uma reta e **P** um ponto fora.

Vamos traçar por **P** as duas paralelas a **g**.



Com auxílio de uma régua pseudo-esférica tiremos do ponto **P** uma perpendicular **PO** à reta **g**, e do ponto **P** tracemos g_1, perpendicular a **OP**.

A partir de **O** (que é o pé da perpendicular) marquemos um segmento arbitrário **S** cujo comprimento é **Q**. Tracemos por **Q** uma perpendicular **QT** a g_1.

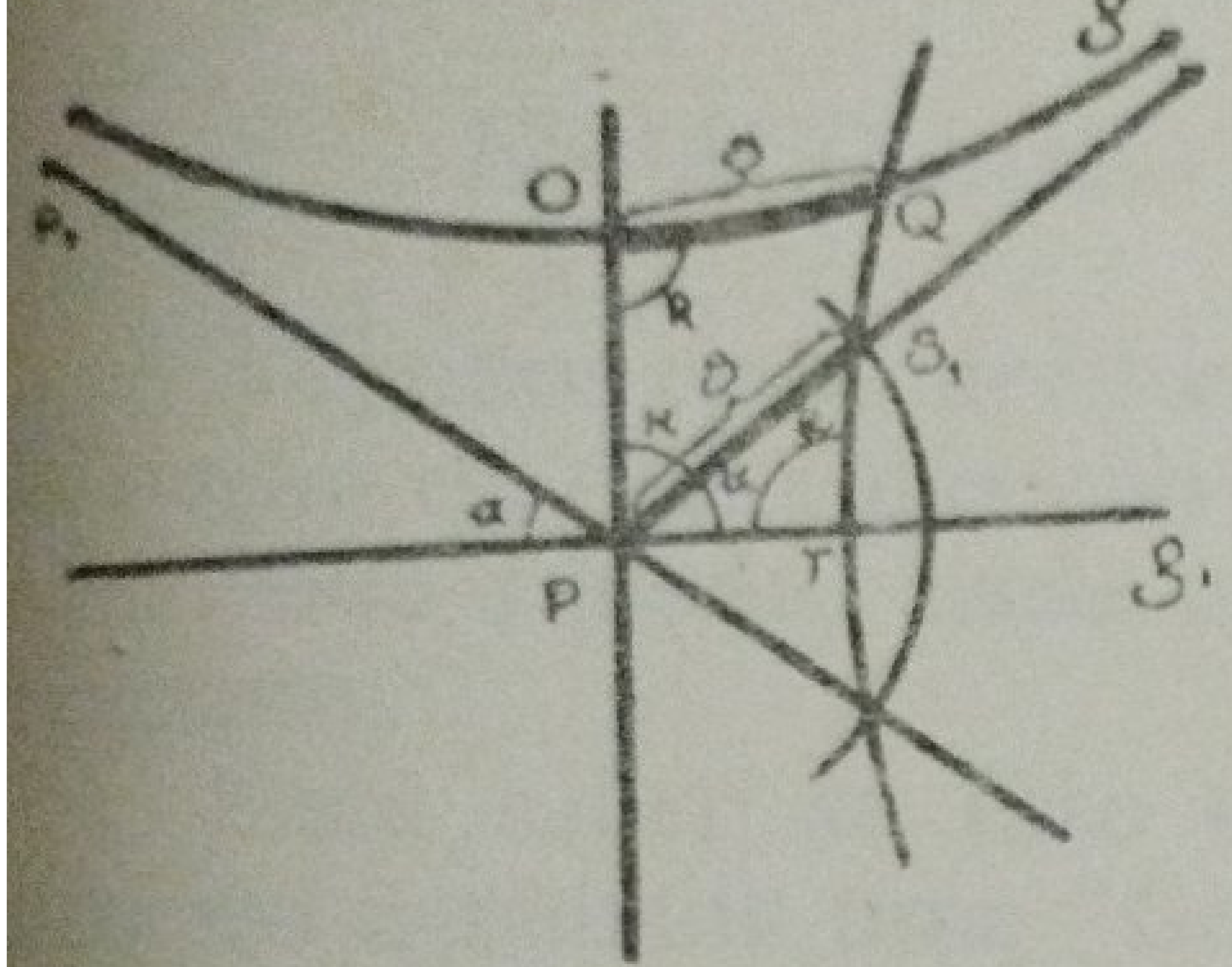
Com o centro em **P** e com um raio **S** tracemos um arco de círculo que vai interceptar a perpendicular **QT** nos pontos S_1 e S_2.

Êsses pontos determinam as paralelas P_1 e P_2 à reta g tiradas do ponto **P.**

Designemos por α o ângulo que cada paralela faz com **PT.**

(45) — Cfr. Egmon Colerus — Ob. cit., pág. 348.

Tôda reta que passar pelo ponto P fazendo com **PT** um ângulo menor do que α não será paralela a g e não terá, também, ponto comum com g. Será uma **não-secante** à reta **g.**



Tôda reta que passar pelo ponto P fazendo com **PT** um ângulo maior do que α será uma secante em relação a **g.**

O ESPAÇO E A GEOMETRIA

Qualquer pessoa medianamente inteligente tem a noção mais ou menos nítida do espaço em que vivemos e, nesse espaço, a Astronomia, com seus poderosos recursos, já sondou até distâncias imensas. E' dentro dêsse espaço que a Geometria clássica foi construída com tôdas as suas belíssimas proposições. E' fácil provar, por exemplo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180º.

Vamos agora supor, por um momento, que o espaço — essa entidade tão necessária — não existe. A Geometria euclidiana continuará a ser legítima e verdadeira? E' claro que sim. Logo, as verdades geométricas não dependem da existência física do espaço, mas tão sòmente da sua existência **lógica.**

Admitida a inexistência do espaço, é evidente que a construção física das figuras seria impossível; as figuras euclidianas só seriam construídas **lógicamente**.

Essa distinção entre a existência **física** e a existência puramente lógica do Espaço, essa impossibilidade de se construir fisicamente as figuras de uma Geometria verdadeira mas que não existe, senão lògicamente, permite fazer uma idéia bem clara do que chamamos espaço-lobatschewskiano. (46)

ESPAÇO LOBATSCHEWSKIANO

Vejamos como definir o espaço lobatschewskiano. A noção de reta (mas não a **reta**) e a noção de plano (mas não o **plano**) serão mantidas como no espaço euclidiano.

Para saber se êsse espaço existe lògicamente é preciso construir uma "Geometria" nesse espaço. Se essa nova Geometria fôr, porém, coerente em todos os seus teoremas e corolários, êsse espaço **existirá lògicamente**. (47)

Èsse trabalho está feito em tôda sua magistralidade. Tomou Lobatschewsky por modêlo a Geometria Euclidiana com tôdas as suas proposições, propriedades, teoremas, etc., e, paralelamente, construiu uma nova **Geometria** do espaço lobatschewskiano, mantendo, rejeitando, ou modificando dentro dos princípios lógicos — as diversas proposições.

---

(46) — Muitas inteligências recusam esposar essas fantasias em tôrno da Geometria não-euclidiana. Já ouvimos literato brasileiro, o Sr. Bastos Tigre, de elevada cultura, proferir durante uma conferência: — "Houve um russo, chamado Lobatschewsky, que inventou uma Geometria histérica..."

E o Sr. Berilo Neves, escritor de renome e crítico autorizado, ao ouvir de um amigo matemático rápida explicação sôbre o problema não-euclidiano comentou:

"— Tenho bastante bom senso para aceitar e admitir essas teorias; tenho, porém, bom senso suficiente para jamais levá-la a serio."

Bom senso!

Bem assinalou com fina ironia, o genial Descartes:

— "O bom senso é a coisa mais bem repartida do mundo, porquanto pensa cada qual ser dêle tão bem provido que aqueles mesmos, que mais custam a se contentar com qualquer outra coisa, não costumam desejar mais do que tem. Cfr. Ivan Lins — "Descartes", pág. 540.

(47) — A verdade geométrica não depende da *existência física* do espaço mas sòmente de sua *existência lógica* — *Albert Turc* — "Introduction elementaire a la Geometrie Lobatschewskienne".

Três foram ùnicamente os princípios que servi-
am de base para a construção lógica dessa Geometria:

a noção de reta;

a noção de plano

e o princípio de que a soma dos ângulos internos
le um triângulo é menor do que dois retos.

A Geometria assim construída é coerente, perfei-
amente lógica e, portanto, verdadeira.

Conclusão:

O espaço lobatschewskiano existe lògicamen-
te. (48)

EXISTÊNCIA LÓGICA DO ESPAÇO

No primeiro momento, somos compelidos a con-
siderar como impossível a hipótese da existência de ou-
tro espaço. Semelhante concepção parece envesgar a
própria natureza das coisas e projeta conclusões for-
çadas que se acham fora dos limites de nossa inteli-
gência. O gênio de Lobatschewsky, vencendo tôdas as
dificuldades, imaginou (a título puramente de con-
cepção) um novo espaço ordinário, também chamado
não-euclidiano ou lobatschewskiano.

Não dispomos de meios para provar a existência
física do espaço de Lobatschewsky.

Os fatos observados avigoram em nosso espírito
a convicção clara e inabalável de que existimos num
espaço cem por cento euclidiano. E' claro, portanto
que só a Geometria de Euclides atende aos reclamos

(48) — Formulado um corpo de postulados, para servir de base a uma Geometria, um problema logo avulta para o geômetra: "Como provar que não existe contradição entre êsses postulados?" Alfredo Errera, matemático belga, mostrou que só há uma maneira de demonstrar a não-contradição dos postulados. E' construir um *modelo* capaz de abranger por completo êsses postulados. (Cfr. A. Errera — "Sur la demonstration des non-contrad'ctions".

Para um estudo mais meditado convém ler a nota II que foi incluída no livro de E. Rouché e Ch. de Comberousse — "Traité de Géometrie", II volume, pág. 575.

da imaginação e tem cabimento nas pesquisas científicas dentro da realidade.

Mas o interêsse que a Geometria de Lobatschewsky oferece ao espírito curioso cresce de dia para dia. Levamos nossas especulações ao espaço não-euclidiano convencidos de que êsse espaço não existe, mas essa não-existência não nos demove a abandonar nossas pesquisas pois é bem possível que possamos nele descobrir verdades que, mais tarde, reconduzidas à realidade espacial, venham colaborar com o progresso da ciência e servir ao bem estar da humanidade. (49)

A Geometria de Lobatschewsky, do ponto de vista do rigor e impecabilidade lógica nada fica a dever á Geometria euclidiana.

Surgirá, fatalmente, esta advertência: — "Mas as figuras de Lobatschewsky não existem!"

Que nos importam as figuras para esta ou para aquela Geometria?

"Já Leibniz — pondera, com a influência insinuativa de sua autoridade, o ilustre Prof. Djacir Menezes — já Leibniz formulara, a propósito da obra de Euclides, o que se veio a redizer mais tarde, sob variadas maneiras: aos geômetras, a fôrça da demonstração não reside no tracejo das figuras, nem supõe a análise superficial. A figura é um meio de fixar a atenção, o trabalho do pensamento. O essencial, na demonstração geométrica, são as definições, os postulados, que se arcabouçam na estrutura do raciocínio." Djacir Menezes — "Preparação ao método científico", pág. 135.

---

(49) — O problema da *existência* é um dos mais delicados entre os que podemos assinalar nos imensos domínios da Filosofia Matemát.ca. Para alguns filósofos uma vez demonstrada a não contradição de um ser matemático fica, *ipso facto*, admitida a sua existência.

Para os nominalistas a existência só é aceita depois que o ser é efetivamente construido". Cfr. Albert Lautman — "De la réalité inhérente aux théor es mathématiques".

FIGURAS LOBATSCHEWSKIANAS

Uma vez provado que o espaço lobatschewskiano existe lògicamente, quer nos parecer que seria interessante apontar as principais singularidades que o distinguem do espaço euclidiano.

Sôbre um plano, traçamos fàcilmente as figuras planas euclidianas, pois êsse plano está no espaço euclidiano, noção perfeitamente percebida pela nossa inteligência. Na representação das figuras lobatschewskianas esbarramos diante de uma dificuldade que seria irrisório encarecer. Vejamos o porque dessa dificuldade. Não concebemos, também, o plano do espaço lobatschewskiano, muito difícil será imaginar as linhas e superfícies dêsse novo espaço. No triângulo de Lobatschewsky a soma dos ângulos internos é menor do que 180º e o lugar dos pontos equidistantes de uma reta é uma curva.

Vivendo em certo espaço não poderá o homem traçar figura de outro espaço. Sôbre a superfície de uma esfera, por exemplo, não seria possível traçar-se um triângulo plano.

A Geometria de Lobatschewsky só poderá ser estudada, portanto, com auxílio de figuras simbólicas; tal dificuldade não impede porém, que essa Geometria continue a ser cultivada pelos matemáticos e enriquecida com novas e notáveis proposições.

Quando as dimensões de uma figura E (de Lobatschewsky) tendem para zero, isto é, diminuem indefinidamente, a geometria do matemático russo tende para a Geometria de Euclides.

A Geometria de Lobatschewsky — comenta Bouligand — para um espaço com duas dimensões, assinala, para os triângulos, propriedades que só se verificam sôbre uma categoria especial de superfícies — as superfícies de curvatura constante negativa. (G. Bouligand "L'évolution des sciences physiques e mathématiques", pág. 133).

TRIGONOMETRIA DE LOBATSCHEWSKY

A Trigonometria, sôbre o plano de Lobatschewsky difere profundamente da Trigonometria plana euclidiana. E' possível, porém, passar da Trigonometria esférica (conforme assinalou Lambert) para a Trigonometria de Lobatschewsky atribuindo um valor imaginário Ki ao raio da esfera. Essa propriedade justifica o nome de **Geometria imaginária** proposto pelo próprio Lobatschewsky. Para evitar o emprêgo dos imaginários poderíamos substituir as funções trigonométricas ordinárias pelas **funções hiperbólicas** correspondentes. Inspirado nessa transformação, Klein julgou que seria mais acertado atribuir à Geometria de Lobatschewsky a denominação de **Geometria Hiperbólica**.

Veja-se, por exemplo, que a superfície da esfera (na Geometria de Lobatschewsky) é dada pela fórmula: $S = 4\pi S.h^2 R$ na qual S. h. indica, o **seno hiperbólico**, sendo a unidade de área o quadrado hiperbólico de base igual a **1**.

EUCLIDES E LOBATSCHEWSKY

Haverá teoremas que sejam comuns a essas duas Geometrias?

Seria fácil citar várias proposições que exprimam verdades euclidianas e que se enquadrem na concepção do geômetra russo.

Citemos as seguintes:

1) Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.
2) No triângulo isósceles os ângulos de base são iguais.
3) De um ponto dado pode-se baixar uma perpendicular a uma reta dada e sòmente uma.
4) O centro de um círculo que passa por três pon-

tos dados A, B e C é o ponto de interseção da
mediatrizes dos segmentos AB, BC e CA

A demonstração dêste último teorema é feita exa
tamente como na Geometria euclidiana.

PARALELISMO E CURVAS

E' preciso distinguir o conceito euclidiano de pa
ralelismo do conceito de paralelismo no sentido de Lo
batschewsky.

Na Geometria de Euclides, duas retas paralela
nunca se encontram e conservam entre si uma distân
cia constante.

Coisa bem diversa ocorre na Geometria de Lobat
chewsky, onde duas retas paralelas não se encontram
mas não são equidistantes. A distância de uma pa
outra tende para zero. Verifica-se, entre duas paral
las, o fenômeno do assintotismo.

A noção de linha reta, da Geometria Euclidian
permanece inalterável na Geometria de Lobatschewsk
É, pois, fàcilmente demonstrável, no espaço lobatsch
wskiano, a seguinte proposição:

"Por dois pontos dados podemos passar uma re
e sòmente uma"

Da noção de paralelismo decorre esta proposiçã

"Duas retas não secantes admitem uma perpend
cular comum".

Surge, porém, na Geometria Hiperbólica uma cu
va que não pode existir euclidianamente.

Essa curva — denominada **hiperciclo** — é defi
da do seguinte modo:

Lugar dos pontos equidistantes de uma reta.

Essa reta é o **eixo** do hiperciclo.

As mediatrizes de tôdas as cordas do hiperci
são perpendiculares ao eixo e qualquer raio do hip
ciclo é também, perpendicular ao eixo.

Fácil seria demonstrar que dois hiperciclos do mesmo eixo são equidistantes.

Essa demonstração, entretanto, aqui incluída, viria dar a êste trabalho uma extensão exagerada incompatível com a sua finalidade — que consiste, apenas, em ser obra elementar de divulgação.

O ÊRRO DE LOBATSCHEWSKY

Depois de provar que o espaço de Lobatschewsky é variável, observa Clement Laurés em seu livro "Les bases de la Geométrie et de la Physique".

> "Essa imperfeição do espaço Lobatschewskiano é grave. E, ainda mais, constata-se completo desacôrdo entre Wallis e Lobatschewsky. No espaço de Lobatschewsky verifica-se a existência de figuras semelhantes. A prova ressalta da construção de uma infinidade de triângulos isósceles com o mesmo ângulo no vértice".

O êrro estará no espaço abstrato de Lobatschewsky ou nas considerações abstratas e meio esguelhadas das objurgações de Laurés?

Parece-nos que seria aplicável, ao caso, a estranha sentença de Emile Meyerson:

— "Os sistemas são verdadeiros no que negam e falsos no que afirmam".

Mas a verdade ressalta. A porta aferrolhada por Euclides foi descerrada por Lobatschewsky e novos espaços foram abertos à investigação do geômetra.

Não é mais possível atarracar a Geometria.

BERNHARD RIEMANN

O geômetra alemão Bernhard Riemann, discípulo de Gauss, que F. Enriques considera "o maior filósofo

fo da Geometria" (50), afastando-se igualme
modêlo euclidiano, fêz uma obra que sôbre-ex
tôdas as anteriores, criando novas geometrias n
clidianas que vieram trazer prodigiosos recu
Análise Matemática.

Realmente. Partindo-se do postulado de Eu
três hipóteses podem ser formuladas.

Dada a reta **F** e um ponto **S**:

1.º) Pode-se tirar por **S** uma só reta qu
encontre **F** (Euclides).
2.º) Pode-se tirar por **S** uma infinidade de
que não encontrem **F** (Lobatschew
3.º) Não se pode tirar por **S** reta algum
não encontre **S** (Riemann).

Riemann na sua admirável concepção geom
rejeitou as duas primeiras hipóteses e admitiu,
verdadeira, a terceira.

Na Geometria de Riemann a reta tem um
primento finito, é uma espécie de linha fechad
soma dos ângulos de um triângulo é sempre maio
dois retos.

O PSEUDO-PLANO DE RIEMANN

Observa A. F. Vasconcelos em sua obra "
ria das Matemáticas na Antiguidade" (pág. 298)

Riemann, admitindo um **pseudo-plano** cuja c
tura não é nula, parte da hipótese de que se a
limitada (como ilimitada é a superfície da esfe
Geometria ordinária) mas não é infinita, para co
que, por um ponto, **tomado fora de uma reta n
pode tirar nenhuma paralela a essa reta;** depois c

(50) — Cfr. Frederico Enriques — "Les Concepts fundamen
la Science", trad. de L. Rougier, pág. 63.

constrói uma Geometria inteiramente lógica, em que chega, por exemplo, à conclusão de que a **soma dos ângulos internos** de um triângulo é maior do que dois retos.

HIPÓTESE DE RIEMANN

E' verdadeiramente genial a hipótese formulada pelo célebre geômetra alemão. Assim como há uma variedade infinita de linhas e superfícies, haverá, igualmente, uma infinidade de espaços diferentes com três dimensões, e só a experiência é que nos poderá mostrar qual é a espécie do espaço em que vivemos. Os axiomas da Geometria plana são verdadeiros no limite da experiência que permite a superfície de uma fôlha de papel, muito embora essa fôlha de papel, imperfeita em muitos pontos, não seja geomètricamente plana. Analisar um determinado fenômeno num espaço pequeno e limitado é o mesmo que estudar linhas sôbre um terreno cheio de colinas sem sair de uma dessas colinas (51).

Aquêle que estuda a Geometria com as figuras sôbre uma dessas **colinas** do espaço poderá concluir alguma coisa sôbre as propriedades dessas figuras consideradas em outras regiões?

UMA VISÃO DO MUNDO NÃO-EUCLIDIANO

Interessante é a imagem que Poincaré em seu livro "La science et l'Hypothése" (pág. 84) nos apresen-

(51) — "Não há dúvida — adverte Pedro Rache — que a continuidade imposta, naturalmente, à Geometria riemanniana aproxima-a da euclidiana, que, sob êste aspecto, parece um caso particular daquela.

Daí a legitimidade da idéia de Riemann em aplicar ao elemento infinitesimal de qualquer espaço o teorema de Pitágoras que toma, dessa forma, o caráter de uma integral especial, no caso euclidiano finito". Pedro Rache — A Relatividade, pág. 60.

ta de um espaço onde seria admissível a Geometria de Lobatschewsky.

Vamos supor que exista um mundo num certo espaço limitado por uma superfície esférica de raio **R** e que êsse espaço esteja submetido às seguintes leis:

A temperatura nesse espaço não é uniforme; é máxima no centro e diminui à medida que o ponto se aproxima da superfície esférica, para se reduzir ao zero absoluto quando o ponto atingisse a superfície limite.

Convém esclarecer, desde logo, a lei segundo a qual varia essa temperatura. Seja **R** o raio da superfície esférica; seja **r** a distância do ponto considerado ao centro da esfera. A temperatura absoluta será proporcional a $\mathbf{R}^2 - \mathbf{r}^2$.

Admitamos ainda que todos os corpos dêsse espaço tenha o mesmo coeficiente de dilatação, de modo que se possa definir a temperatura pela dimensão linear de qualquer dêles.

Impõe-se outra suposição; que um corpo, transportado de um ponto para o outro, entre logo em equilíbrio calorífico com o novo meio.

E somos forçados, finalmente, a incluir mais uma hipótese : vamos supor que a luz atravessa os diversos meios desigualmente refrigerantes de modo que o índice de refração seja inversamente proporcional a $\mathbf{R}^2 - \mathbf{r}^2$.

Que pensariam sêres inteligentes que jamais tivessem saído de semelhante mundo.

Como as dimensões de dois pequenos objetos que transportassem de um ponto para outro variariam na mesma proporção, devido à igualdade dos coeficientes de dilatação, os sêres dêsse mundo não se aperceberiam da variação das dimensões, nem teriam idéia do que chamamos diferença de temperatura que nenhum termômetro lhes poderia revelar, por ser a dilatação do invólucro a mesma que a do corpo termométrico.

Êsses sêres acreditariam na infinitude de sua esfera a cuja superfície jamais poderiam atingir, porque, à medida que dela se aproximassem, entrariam em regiões cada vez mais frias, tornar-se-iam cada vez menores e os seus passos, por seu turno, diminuiriam".

AS LINHAS RETAS QUE SÃO CURVAS

Linhas retas, para êles — continuemos a transcrever a fantasia co-natural de Poincaré — linhas retas seriam circunferências ortogonais à esfera **S**, e isso por três razões:

1.º—Por serem as trajetórias dos raios luminosos;

2.º — Porque, quando medissem diversas curvas com um metro, achariam que essas circunferências constituíam o caminho mais curto entre dois pontos, pois o metro dêles se dilataria ou se contraíria quando passassem de uma região à outra e êles não se aperceberiam disso.

3.º — E, finalmente porque, quando um corpo sólido girasse de modo que uma de suas linhas permanecesse imóvel, essa linha não poderia ser senão uma dessas circunferências; assim é que quando um corpo sólido gira sôbre dois mancais e é aquecido lateralmente, o lugar dos pontos que permanece imóvel, longe de ser uma reta, é uma curva convexa para o lado aquecido.

Para tais sêres a Geometria seria a que descreveu Lobatschewsky:

Quem, então, poderá admirar-se de que êste autor, pela negação do postulado de Euclides, não tenha chegado a princípios contraditórios e absurdos? A sua Geometria, por mais paradoxal que pareça, é a Geometria para um espaço possível e para sêres concebíveis.

COMO ESCOLHER A GEOMETRIA

Mas como optar entre as três Geometrias? Que prova temos nós de que o nosso mundo não seja, guardadas as devidas proporções, o que imaginou e descreveu Poincaré?

Em ligação com a Geometria de Riemann a teoria de Einstein que considera o fenômeno da gravidação como uma consequência da curvatura do **espaço-tempo** em torno das massas pesadas, e supõe todo o volume do espaço finito, ainda que ilimitado, chamou de novo a atenção para o problema que consiste em determinar qual a Geometria cujo sistema e desenvolvimento melhor se ajustam ao mundo real (52).

Nas suas "Leçons de Géométrie" (1917), J. Hadamard propõe que "se meça com toda a precisão que comportam os nossos infrumentos de ótica os três ân-gulos de um triângulo afim de se verificar se efetiva-mente são, em soma, iguais a dois retos", ou pelo menos que se possa averiguar se "a divergência dessa soma é inferior às constantes dos erros experimentais".

Se nos entregarmos a êssa verificação, cremos poder afirmar que para o espaço homogêneo e simétrico, como o que é concebido pela Geometria euclidiana, a soma dos três ângulos de um triângulo não é, nem superior, nem inferior, em soma, a dois retos, ou pelo menos que "a divergência dessa soma é inferior às constantes dos erros experimentais".

Segundo os cálculos de Lobatschewsky para um triângulo ABC tendo os lados iguais e medindo cada um dêles uma unidade astronômica (distância da Terra ao Sol) a soma S dos ângulos internos dêsse triângulo é inferior a 180°. Essa diferença, porém, entre

---

(52) — Cfr. Fernando de Almeida e Vasconcelos — "História das

S e 180º não chega a 3 décimos milésimos do segundo (53).

Ensina, com sua sábia tranquilidade, o Professor Pedro Tavares:

"A preferência que se dá ao grupo de postulados euclididanos, na interpretação dos fenômenos físicos, é devida, tão sòmente, à simplicidade matemática e à comodidade prática. Efetivamente, as equações euclidianas são mais simples(há menos termos) que as traduções analíticas não euclidianas, por isso que certos deslocamentos euclidianos são intermutáveis entre si, como exprimem essas duas propriedades características do espaço ordinário: pode-se deslocar uma figura invariável sem deformá-la" e "podem existir figuras semelhantes" (54).

A META-GEOMETRIA

Muitas são as proposições geométricas que independem do V postulado e que, portanto, são inteiramente válidas nas três principais Geometrias: Euclides, Lobatschewsky e Riemann.

A parte da Matemática que analisa e estuda êsses teoremas, sem subordinação ao princípio euclidiano, constitui um importante capítulo dessa ciência denominado "Geometria absoluta", ou "Geometria invariante", ou "Geometria Geral" ou, ainda, "Meta-Geometria" (55).

Há proposições que não seriam admissíveis numa "Geometria absoluta" a não ser que o enunciado fôsse convenientemente adaptado.

---

(53) — Cfr. J. Houel — "Essai critique sur les principes fondamentaux de la Geométrie Elémentaire", pág. 84.
(54) — Pedro Tavares — "Revista Bras. de Matemática".
(55) — Encontramos em Egmont Colerus a denominação de Pan-Geometria. Cfr. "Desde el ponto a la cuarta dimension", pág. 348.

Citemos um exemplo.

Na Geometria euclidiana encontramos a seguinte proposição:

Em todo quadrilátero convexo inscrito num círculo a soma de dois ângulos opostos é constante e igual a dois retos.

Essa proposição é falsa em Geometria não-euclidiana, pois a soma dos dois ângulos opostos de um quadrilátero convexo inscrito pode ser maior ou menor que dois retos.

Para que a propriedade do quadrilátero convexo inscrito fôsse condizente com a **Meta-Geometria** forçoso seria apresentá-la sob outra forma:

Em todo quadrilátero convexo inscrito num círculo a soma de dois dos ângulos opostos é igual à soma dos outros dois.

Essa forma, além de ser mais geral, apresenta sôbre o enunciado euclidiano uma vantagem que é interessante encarar. Põe em relêvo a correlação que existe entre uma propriedade do quadrilátero convexo inscrito e outra propriedade do quadrilátero circunscrito.

Em todo quadrilátero circunscrito a soma de dois dos lados opostos é igual à soma dos outros dois.

Em Geometria Geral — esclarece Barbarin — duas retas coplanares nem sempre formam um ângulo; a figura por elas formada é um **bilátero** que pode conter duas paralelas ou duas retas com a normal comum. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas é uma reta considerada como **bissectriz** do bilátero.

A figura formada por três retas do plano é um **trilátero**. Em Geometria riemanniana o trilátero é tanto um triângulo ou um feixe de oito triângulos, ao passo que sôbre o plano de Lobatschewsky o trilátero apresenta um grande número de formas, pois que cada **bilátero** pode oferecer três aspectos.

Não nos demoramos no estudo da "Geometria bsoluta" pois esquadrinhá-la em tôdas as suas faces eria fugir ao plano dêste ligeiro trabalho.

INDEMONSTRABILIDADE DO V POSTULADO

São do maior interêsse, para o estudo das Geometrias não-euclidianas, as seguintes e judiciosas ponderações de Roberto Bonola:

"O fato de terem resultado inúteis tôdas as tentativas feitas para se chegar a uma demonstração para o postulado de Euclides parece suficiente para impor ao nosso espírito a dúvida de que o V postulado é, realmente, indemonstrável. Acresce que o instinto geométrico como que assegura que uma proposição tão simples (tal é o caso do postulado das paralelas), uma vez demonstrável, deve admitir perfeita demonstração por meio de raciocínios igualmente simples.

Tais considerações, entretanto, não podem bastar, isto é, não chegam a constituir prova suficiente da **indemonstrabilidade** em questão.

E' bem verdade que prescindindo-se do postulado de Euclides e seguindo os ditames de Gauss, Lobatschewsky e Bolyai pode-se construir um **edifício geométrico** no qual não repontam contradições lógicas e que, por isso mesmo, parece confirmar a possibilidade lógica das hipóteses não-euclidianas, ou, em outras palavras, a independência do postulado de Euclides dos primeiros princípios da Geometria e, portanto, a sua **indemonstrabilidade** Mas do fato de "não terem sido assinaladas contradições" não decorre a inexistência dessas contradições, pois seria preciso mostrar que mesmo levando por diante as teorias e concepções não-euclidianas "jamais dariam elas oportunidade às tais contradições".

Tal consideração pode surgir de modo seguro, de uma apreciação das fórmulas da Trigonometria não-euclidiana. Com efeito: Se nos referirmos a um sistema de todos os termos de números (x, y e z) e considerarmos todo **termo** como um ponto analítico, podemos definir **distância** de dois pontos analíticos partindo das fórmulas da Geometria não-euclidiana. Construimos, dêsse modo, um sistema analítico que oferecendo uma interpretação convencional da Geometria não-euclidiana, demonstra a sua possibilidade lógica.

Nesse sentido as fórmulas da Trigonometria não-euclidiana de Lobatschewsky-Bolyai provam **a independência do postulado de Euclides** dos **primeiros princípios da Geometria.**

Os fundamentos da Geometria, segundo as teorias de Riemann (que estende a um espaço de três dimensões os conceitos da Geometria das superfícies), oferece a prova completa da **indemonstrabilidade** baseada na existência de um sistema analítico **não-euclidiano**. Trata-se, por conseguinte, de outra prova analítica.

O mesmo poderíamos dizer dos desenvolvimentos de **Helmholtz e Lie**, pois estes oferecem, dentro do ponto de vista em que se colocaram, uma prova geométrica baseada na existência de grupos de transformação do espaço euclidiano semelhantes a grupos de movimentos das geometrias não-euclidianas.

O ESPAÇO DE RIEMANN

"À primeira vista — escreve E. Cartan (56) — A Geometria riemanniana distingue-se de Geometria euclidiana por um certo número de caracteres importantes.

---

(56) — Cfr. "Revista Brasileira de Matemática", pág. 128.

Eis uma primeira diferença entre os pontos de vista euclidiano e riemanniano. As propriedades globais do espaço intervém desde o início da Geometria; afirmando que duas retas diferentes não podem ter dois pontos comuns, enuncia-se, seja qual for a cadeia de fenômenos que se associe a uma reta, uma propriedade do espaço todo e não sòmente a porção de espaço acessível à nossa experiência.

Êsse caráter da Geometria euclidiana é ainda mais frizante na definição de duas retas paralelas. Manifesta-se igualmente quando se admite que tôda reta divide o plano em duas partes distintas, hipótese invocada mais ou menos implícitamente na demonstração do teorema que de um ponto só se pode abaixar uma perpendicular sôbre uma reta. Não sòmente é a Geometria euclidiana uma Geometria integral, mas ainda é acompanhada de hipóteses sôbre a natureza do espaço considerado do ponto de vista da Analysis situs (espaço infinito em todos os sentidos etc.).

A Geometria riemanniana é, ao contrário, baseada ùnicamente nas propriedades locais do espaço, pois que a única fonte das propriedades geométricas é a expressão da distância entre dois pontos infinitamente próximos; neste sentido, ela harmoniza bem melhor que a Geometria euclidiana com a tendência geral da física moderna; ela é, pois, compatível com tôda e qualquer hipótese feita **a priori** sôbre a forma do espaço. Parece que, para Riemann, o espaço ilimitado, isto é, na linguagem da Topologia moderna, é uma variedade que não tem senão pontos interiores, mas que nada obriga a supô-lo infinito (a superfície de uma esfera dá-nos a noção de uma variedade de duas dimensões ilimitadas e finitas). A análise moderna oferece-nos vários exemplos de espaços riemannianos seja abertos, como o espaço euclidiano, ou fechados como a esfera, e muito diferentes uns dos outros do ponto de vista qualitativo da "Analysis situs". De resto, não se deve esquecer que o fundador da "Analysis situs" é o próprio Riemann, que mostrou sua importância fundamental na teoria das funções, disciplina esta que está se tornando cada vez mais fecunda nos diversos ramos da Matemática (57).

ESPAÇO EUCLIDIANO E ESPAÇO NÃO EUCLIDIANO

Assinalemos um último caráter distintivo entre o espaço euclidiano e um espaço riemanniano.

O espaço não-euclidiano, em geral, não é homogêneo.

"O espaço euclidiano, do qual julgamos dar idéia clara e perfeita, possui, segundo a ciência clássica, as seguintes propriedades:

E' uma realidade objetiva (existe no domínio real); é **contínuo** (não apresenta lacunas); é **tridimensional** (tem comprimento, largura e altura); é **homogêneo** (não tem pontos privilegiados ou singulares); é **isótropo** (apresenta-se igualmente para qualquer direção); é **infinito** e **ilimitado** (não tem limites nem extremos); é finalmente, o continente de tôda a matéria que existe ou possa a vir existir." (58).

Um corpo mergulhado no espaço euclidiano tem propriedades geométricas que se conservam quando se desloca êsse corpo no aludido espaço. A noção de deslocamento desempenha um papel fundamental em Geometria euclidiana e aparece em ligação estreita com a noção de igualdade geométrica, da qual, no fundo, não é mais que um aspecto particular.

Na Geometria riemanniana — para citar um exemplo — um corpo não tem existência independente da posição que ocupa. De resto, o próprio Riemann de-

(57) — Cfr. J. L. Coolidge — "A history of geometricals methods" — o artigo: "The non-eucledean Geometries", pág. 68.
(58) — Cfr. Samuel de Oliveira — "O relativismo de Einstein para todos", pág. 51.

terminou todos os espaços riemannianos homogêneos, ou, antes, aquêles em que os corpos têm o mesmo grau de mobilidade que no espaço euclidiano; êle obteve, assim, o espaço não euclidiano de Lobatschewsky e, ainda, o espaço esférico, limitado mas finito. (59)

O UNIVERSO E A GEOMETRIA

Com seus poderosos instrumentos mede o astrônomo distâncias imensas dentro de nosso universo visível. Surge uma dúvida no espírito do geômetra. Essas avaliações geométricas, no interior da esfera sideral que nos envolve, enquadram-se na Geometria euclidiana ou seriam aceitáveis para um panorama espacial não-euclidiano ?

Mais forte se reafirmou essa dúvida a partir dos estudos e descobertas de Einstein.

A linha reta do físico e do astrônomo **é, por definição**, a trajetória do raio luminoso num meio homogêneo. Será essa reta, assim concebida, idêntica à reta do geômetra ? Os fatos desaconselham uma resposta afirmativa. (60)

---

(59) — As "Geometrias" de Riemann e Lobatschewsky, como todos os exageros da "Meta-Matemática", juntamente com as fantasias dos espaços ene-dimensionais, pertencem a essas concepções imaginadas sempre mas jamais confirmadas pela experiência.

(Cfr. Casimir Wize — "La Geométrie analytique de Descartes et l'empirisme philosophique".

(60) — São dignas de reparo as considerações que F. Enriques e G. de Santillana no livro — "Pequena história do pensamento científico" — fazem em tôrno dêsse tema: "Os criadores da Geometria não-euclidiana não hesitaram em interpretar o resultado obtido segundo os princípios do empirismo; o postulado euclidiano, que não é absolutamente necessário de vez que se pode admitir lògicamente sua negação, deve exprimir segundo êles uma verdade de fato reconhecível pela experiência (medida dos ângulos de um triângulo); a dedução matemática induz antes a indagar se esta verdade não é apenas aproximada devendo ser corrigida numa ordem de medidas mais ampla, que é oferecida pela Astronomia. Digamos, desde já, que as medidas tentadas não conduziram a uma correção que se deixe firmar acima dos êrros inevitáveis das observações."

As mais recentes observações de eclípses demonstraram a concordância absoluta das teorias de Einstein com os dados numéricos obtidos com as medidas óticas, ficando cabalmente demonstrado o desvio da luz das estrelas em consequência da massa do Sol.

Em nosso Universo, portanto, a luz não se propaga em linha reta o que nos leva a conclusão de que a realidade tem uma tendência francamente não-euclidiana. (61)

MEDIDAS NÃO-EUCLIDIANAS

Alguns filósofos matemáticos repelem de forma categórica, como fantasias sem sentido, tôdas as hipóteses tentadas sôbre o não-euclidianismo do espaço.

Aferram-se, com incrível persistência, ao seguinte princípio: O espaço é euclidiano; as medidas nele realizadas é que são, por vêzes, **não-euclidianas !**

Vejamos o comentário que a tal respeito formulou Léon Brunschvicg ao vasculhar o problema:

> "Os lados de um imenso triângulo retilíneo são apresentados, na realidade, como raios luminosos. Se as medidas feitas sôbre os lados de um triângulo forem discordantes da Geometria de Euclides não estamos obrigados a inferir da realidade não-euclidiana do espaço; e, aliás, como observa Lotzer, "devemos sòmente pensar na descoberta de uma nova e singular refração, cujo efeito é desviar os raios que servem para deter-

(61) — As Geometrias não-euclidianas de Lobatschewsky e Riemann terão alguma aplicação? Passemos a palavra a Edward Kasner e James Newman que poderão responder:

"Essas Geometrias são indispensáveis na Física do átomo e das estrelas em regiões do espaço que não formam parte da nossa experiência imediata".

Cfr. "Matemáticas e imaginacion", pág. 173.

minar uma direção" (Las etapas de la filosofia matemática, pág. 556).

A GEOMETRIA E EXPERIÊNCIA

Discorre com muita clareza e atualidade, o ilus-tre matemático Prof. Elísio de Carvalho Lisbôa:

"O matemático italiano Beltrami, em seus estu-dos sôbre as Geometrias não-euclidianas, formula a conclusão de que estas são ramos da Geometria ordi-nária. Imaginemos, com êle, que uma figura seja tra-çada numa tela flexível e inextensível sôbre uma su-perfície, de maneira que, quando a tela se desloca e se deforma, as diferentes linhas dessa figura possam mudar de forma, conservando, entretanto, o mesmo comprimento. A flexibilidade e a inflexibilidade im-pedirão, em geral, a figura de se deslocar sem deixar a superfície, mas existem superfícies particulares para as quais tal movimento seria possível: são as superfí-cies de **curvatura constante**. E estas se nos apresen-tam em duas espécies: umas de curvatura **positiva**, podendo ser deformadas de modo a se aplicarem sô-bre uma esfera, e nos conduzem à Geometria de Rie-mann. As outras são de **curvatura negativa** e Beltra-mi faz ver, por outro lado, que a Geometria destas superfícies é a lobatschewskiana. A Geometria com duas dimensões, de Riemann e de Lobatschewsky, es-tão, assim, ligadas à Geometria de Euclides.

Dêsses trabalhos sôbre as Geometrias não-eucli-dianas não se deve concluir pela imprecisão da Geo-metria de Euclides. Os três sistemas, considerados do ponto de vista puramente lógico, são igualmente ver-dadeiros. Conforme disse magistralmente Poincaré "uma Geometria não pode ser mais certa que outra", é, sòmente, mais ou menos cômoda.

De perfeita harmonia com as propriedades dos corpos sólidos que nos rodeiam, pode parecer que a Geometria euclidiana seja a única apropriada aos resultados das medidas físicas e, neste caso, as outras Geometrias não passariam de meras abstrações, sem nenhuma utilidade prática. Entretanto, por mais aperfeiçoada que seja a técnica, medida alguma poderá permitir a conclusão de que o espaço é, realmente, euclidiano. Medindo-se, por exemplo, com o máximo rigor possível, os três ângulos de um triângulo retilíneo, só raramente, excpecionalmente, se obterá como soma o valor euclidiano de 180°.

Os triângulos da experiência se comportam, ora como lobatschewskianos, ora como riemannianos, isto é, com a soma dos ângulos maior ou menor que dois retos e, embora pequenas sejam as diferenças, elas não são nulas, geralmente. A solução intermediária da Geometria euclidiana corresponde, então, a um cômodo critério de medida.

E concluímos com Amoroso Costa:

"Compete ao Físico e não ao Geômetra escolher o tipo de Geometria que melhor convenha à representação dos fenômenos naturais, quando mesmo se tenha de recorrer a uma concepção pouco conforme ao senso comum. Mas o geômetra é livre de erguer as suas construções abstratas, respeitando apenas as leis da razão". (62)

AS CONTRADIÇÕES

Por mais paradoxais que pareçam as contradições entre as diferentes Geometrias essas contradições fi-

(62) — A Geometria riemanniana inclui em si tôdas as Geometrias — Pedro Rache, Ob. cit., pág. 62.

ram, de certo modo, atenuadas quando analisamos certas proposições que figuram em duas Geometrias.

Comparemos, por exemplo, a Geometria esférica e a Geometria de Lobatschewsky.

A linha que, sôbre a esfera, desempenha o papel análogo ao da reta no plano é o arco de círculo máximo. Com efeito, o arco de círculo máximo define, sôbre a superfície da esfera, a distância mais curta de um ponto a outro. Por dois pontos dados, não diametralmente opostos, passa um arco de círculo máximo e sòmente um.

Assim na Geometria de Lobatschewsky não há triângulos semelhantes; a mesma coisa ocorre na Geometria esférica. (63)

O ESPAÇO NÃO HOMOGÊNEO

A concepção devida a Riemann de um espaço não homogêneo tem grande importância filosófica; afirmando-a com Einstein como resultado de experiência, nega-se o princípio de causalidade, assim como o entende Painlevé, segundo o qual as mesmas causas, que atuam em duas regiões distintas do espaço e em dois instantes diferentes da duração, devem produzir os mesmos efeitos; verdadeiramente falando, aniquila-se toda a significação do próprio enunciado dêsse princípio.

---

(63) — Além das Geometrias de Lobatschewsky e de Riemann criaram os geômetras outras geometrias não-euclidianas. Poderíamos, como exemplo, citar a Geometria não-euclidiana de Klein e Cayley. No livro de Jules Richard — "Sur la Philosophie des Mathematiques" (pág. 96) o leitor poderá apreciar uma rápida exposição elementar dessa Geometria. No livro "La Geometrie", de Lucien Godeaux (pág. 74) encontrará o leitor um pequeno estudo sôbre as chamadas "Geometrias cayleyanas", que o autor francês pretende esgarabulhar em tôdas as modalidades.

OS ESPAÇOS GEOMÉTRICOS

Perguntareis: — Essas Geometrias tão estranhamente distantes de nossa intuição imediata não conduzirão a consequências contraditórias no decorrer dos teoremas ? "Cônsequências lógicamente contraditórias" é preciso acrescentar porque sòmente estas interessam à Matemática pura.

Mas a mesma pergunta não poderia ser feita para a Geometria de Euclides, que não repousa exclusivamente em bases lógicas ?

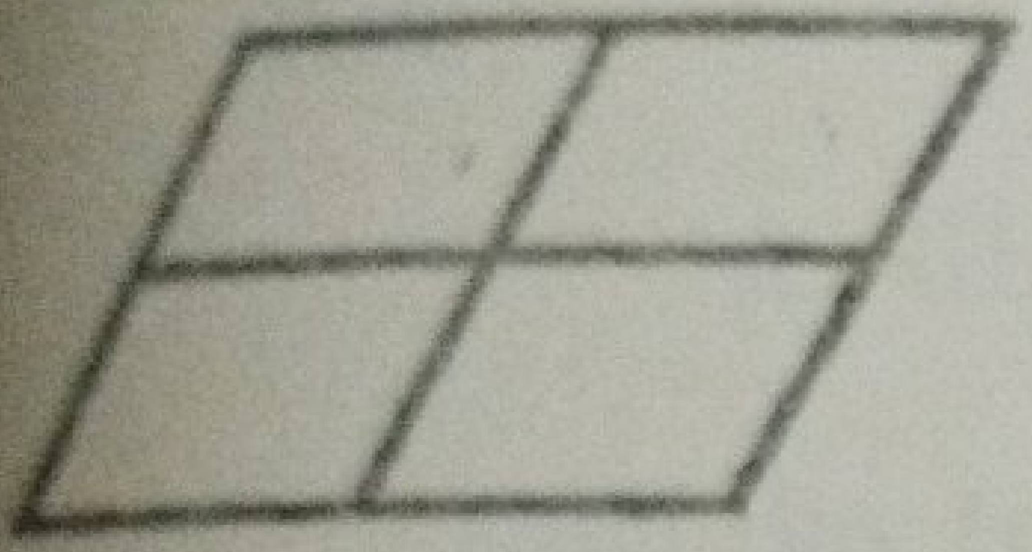
Resolveu Beltrami a questão demonstrando que entre as três Geometrias há uma correspondência unívoca e recíproca, de modo que a cada contradição em uma das geometrias não-euclidianas "corresponderia a mesma contradição lógica na Geometria de Euclides". A demonstração de Beltrami, que não podemos reproduzir, prende-se à noção de dimensionalidade e curvatura do espaço. Beltrami prova que a Geometria de Euclides para poder usar a noção de deslocamento, que é a base da congruência das figuras, precisa supor apenas um espaço de curvatura uniforme e não um espaço de curvatura nula, que é caso particular.

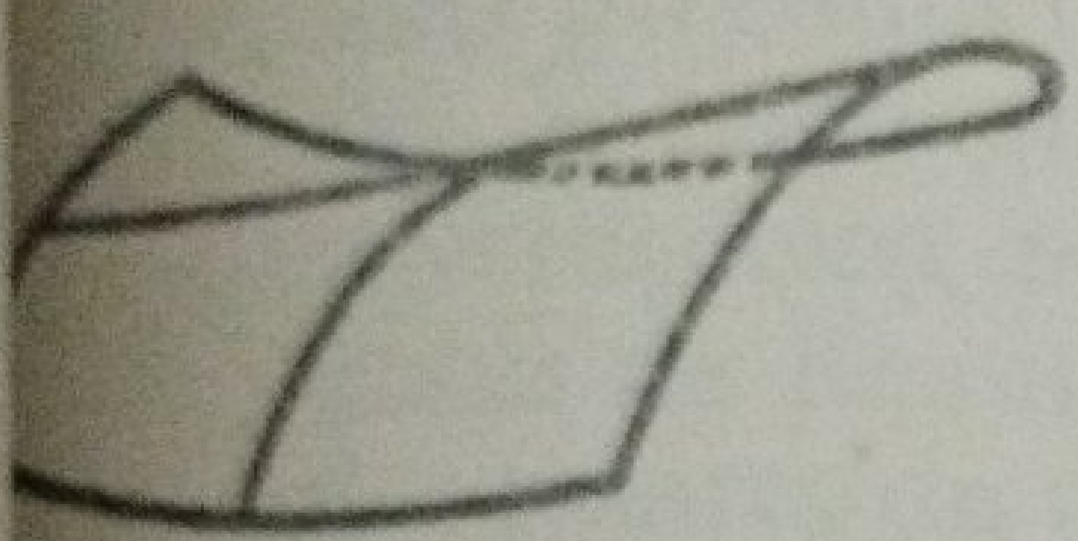
Os três casos de curvatura uniforme que são de curvatura nula, curvatura constantemente positiva e curvatura constantemente negativa,correspondem, respectivamente, às três geometrias. A de Euclides supõe uma curvatura "nula", isto é, de raio infinito; a de Lobatschewsky um espaço de curvatura constante "negativa" e a de Riemann um espaço de curvatura constantemente "positiva".

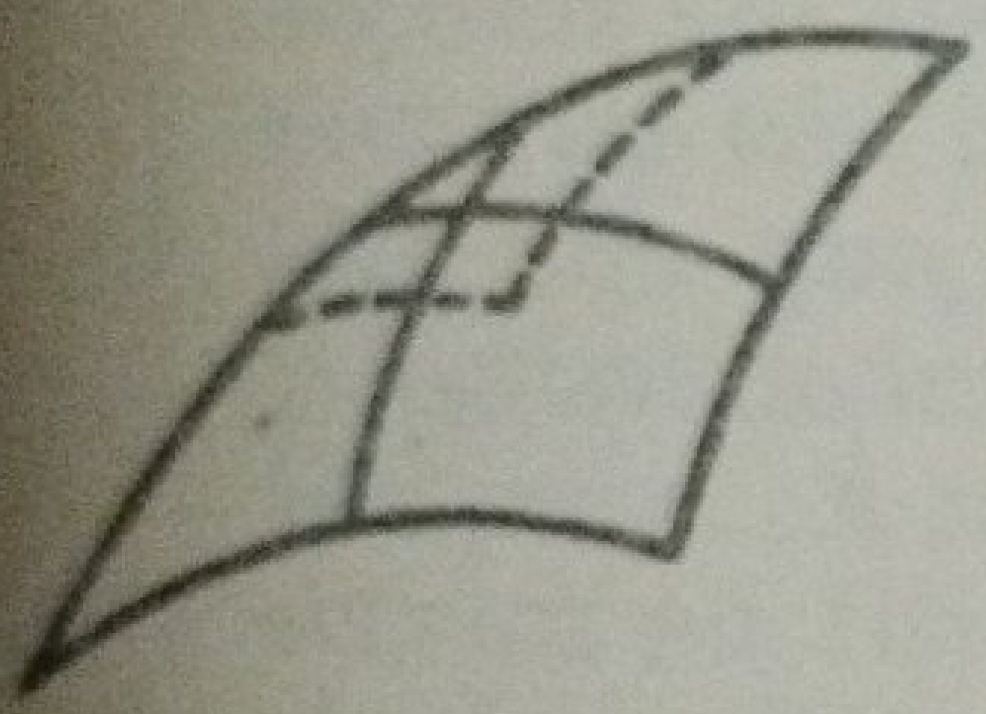
Podereis compreender o que seja curvatura do espaço supondo um espaço bidimensional, o que é

(64) — Incluímos, sob êsse título, um trecho do livro "Conceitos fundamentais da Matemática", do Dr. Antonio de Miranda Neto.

muito fácil. E' um espaço superficial, apenas. Imaginemos, portanto:







I) um plano;
II) uma esfera;
III) uma pseudo-esfera.

No plano, a curvatura é nula (o raio de curvatura é infinito); na esfera, a curvatura é constante e positiva; na pseudo-esfera, (superfície gerada pela rotação de uma tractória em tôrno da assíntota) a curvatura é constante e negativa.

Teremos, assim, três universos bidimensionais para as quais as Geometrias serão, respectivamentas de Euclides, Riemann e Lobatschewsky. Um servador colocado em um ponto de vista tridimenal verá os triângulos de Euclides como os triângu planos, os de Riemann como triângulos esféricos s de Lobatschewsky como triângulos desenhados re a pseudo-esfera por três geodésicas dêsse unio bidimensional.

Se o espaço físico, no qual vivemos, é euclidiano ão-euclidiano não interessa absolutamente ao geôra puro. Para êle os diversos modos de curvatura spaço são estudados no mais absoluto pé de iguale. E não só para os espaços tridimensionais, como ce ser o nosso espaço físico, como qualquer tipo spaço polidimensional. (65)

— Para alguns geômetras o espaço não é uma forma subjetiva, mas sim um dado do mundo exterior. Os pontos, linhas e círculos que imaginamos, no mundo geométrico, são — segundo observa Stuart Mill — cópias de pontos, linhas

Os teoremas da Geometria não-euclidiana se apresentam sob um aspecto que fere a nossa intuição imediata.

A GEOMETRIA VERDADEIRA

Qual das três Geometrias é a verdadeira? Eis uma pergunta que lògicamente não tem razão de existir. E' como se perguntássemos, diz Poincaré, qual é o verdadeiro, se o centímetro ou a polegada, se os graus de Reaumur ou os de Celsius, se as coordenadas polares ou as cartesianas... Lògicamente, as Geometrias são apenas quadros formais. Elas podem oferecer ou não adequação aos fenômenos do mundo físico sem que, por isso diminua a coerência lógica e a legitimidade delas no corpo de ciência da Matemática pura. A maior ou menor adequação ao fenômeno servirá ao físico ou ao geômetra prático como critério de escôlha. Já vimos que Einstein escolheu em casos determinados a Geometria de Riemann para a interpretação de fenômenos de Física Matemática. A questão do modo de curvatura do espaço físico tão ao parecer tridimensional, escapa ao quadro da Geometria pura.

"A única limitação para ela, como assevera Poincaré, é a "necessidade de evitar contradições". Dentro da ordem lógica, tudo é possível para a Matemática, o que levou Peirce a definí-la como sendo a "ciência que formula conclusões necessárias". Não é apenas um jôgo inútil de símbolos essa criação de harmonia e coerência. Aí estão as provas na aplicação imediata das teorias mais paradoxais à moderna Física Matemática, que fêz com que Weierstrass, um dos criadores da teoria geral das funções, escrevesse em

e círculos que conhecemos por experiência. As definições geométricas são apenas, as primeiras e as mais evidentes ia obra: "Nunca será um matemático completo aquê- que não for um pouco poeta". Através dêsse sim-olismo complicado está a ordem e a harmonia, apa-ágio das manifestações máximas da estética" (A. G. iranda Neto).

A GEOMETRIA MAIS CÔMODA

Três são as hipóteses, já nesse estudo assinala-s, que podemos formular em relação ao quarto ân-lo do quadrilátero de Saccheri. Cada uma delas será ui especialmente considerada.

I) — **O ângulo é agudo.**

Temos, nêsse caso, a Geometria de **Lobatschewsky** Geometria hiperbólica (de Klein) ou **abstrata** (de ly).

II) — **O ângulo é reto.**
A Geometria será euclidiana ou **parabólica**.
III) — **O ângulo é obtuso.**
A Geometria será riemanniana ou elílica (de ein) ou duplamente abstrata (de Tilly).
Esta última admite como caso particular a Geo-tria esférica.
Como saber se o nosso espaço é hiperbólico, elí- ou parabólico (euclidiano)?
Qual será, na verdade, a Geometria perfeitamente patível com a natureza do espaço?
Gauss procurou certificar-se medindo os ângulos um triângulo muito grande formado, na terra, por pontos. O geômetra alemão acreditava que a na-eza do espaço seria determinada pela soma **S dos** ângulos. Três hipóteses seriam admitidas.
I) — S maior que 180°: o espaço seria elítico emann);
II) — S igual a 180°: o espaço seria parabólico clides);

III) — S maior que 180º: o espaço seria hiperbólico (Lobatschewsky). (67)

As medidas, porém, não permitiram que Gauss pudesse formular conclusão alguma. A diferença entre a soma S, obtida pelas medidas, e o total de 180º, não excedia o limite do èrro provável. Se o espaço possui curvatura (ponderou Gauss) a superfície, relativamente pequena do triângulo, não permitirá apreciá-la.

Pretendeu Lobatschewsky, como já dissemos, fazer a experiência com um triângulo que tivesse por vértice estrêlas fixas, mas nada obteve nessa tentativa irrisória de vasculhar o espaço.

"Se outro tivesse sido o resultado — adverte Amoroso Costa — haveria a escolha, ainda, entre duas hipóteses: 1.ª, conservar a Geometria euclidiana, admitindo, porém, que os raios luminosos não são retilíneos; 2.ª, considerar os raios luminosos como retilíneos, apelando, então, para uma Geometria não-euclidiana.

Se a Geometria e a Física forem, assim, conjuntamente desenvolvidas, segundo a métrica euclidiana e segundo a métrica de Riemann, a experiência decidirá qual dessas métricas convém melhor à representação da realidade (68).

---

(67) — Cfr. Julien Lowell Coolidge — "The elements of non-euclidean Geometry". Para um estudo mais completo aconselhamos a leitura dêsse excelente volume de J. L. Coolidge.

(68) — As recentes pesquisas da Física da Relatividade vêm nos assegurar de modo inequívoco que a escolha das Geometrias está nos fatos pelo que se tem a sua tendência a uma crescente fiscalização.

E já vimos, como Max Morand observara, que a Geometria nada mais é que uma Física teórica muito simplificada. São as propriedades físicas do espaço que nos impõem a escolha das Geometrias, que assim não mais se desligam do conteúdo espacial.

Se como tal a Geometria pode estudar as relações espaciais abstraindo-se de seu conteúdo para ater-se, apenas, às suas formas, não fica aí estritamente fixado o seu objeto, porque essas formas sòmente passarão a ter expressão em suas relações físicas. (MARIO LINS "Espaço, tempo e relações sociais", pág. 159).

Como construções ideais, tôdas as Geometrias são igualmente verdadeiras. Cabe-nos, pois, a liberdade de escolher aquela que em cada ordem de fatos permita univocamente, e de maneira mais simples, traduzir os resultados das nossas medidas. "E' preciso procurar — concluiu Paul Longevin — uma Geometria determinada para o conteúdo real do espaço".

Parece pouco provável que o homem consiga determinar o curvatura do espaço por meio de medidas terrestres ou siderais. A escolha de **Geometria verdadeira não será, pois, ditada pela experiência.**

Uma Geometria — conclui Poincaré, com rara elegância — não poderá ser mais verdadeira do que a outra; poderá apenas, ser **mais cômoda.**

Aqui esbarramos com erudito astrônomo Th. Moux que é inflexível em sua conclusão:

"Afirmar que a Geometria Euclidiana é simplesmente cômoda é desconhecer as relações entre o objetivo e o subjetivo: é negar tôda correspondência entre dados fornecidos pelo mundo exterior e nossas percepções; é pôr em dúvida a legitimidade de nosso ato de conhecimento e abrir caminho para o subjetivismo mais exagerado". (69).

Numa tentativa de conciliação A. N. Whitead, para afastar as dúvidas ou dirimir as divergências, pondera, ao analisar o problema do espaço:

"E na verdade a "espaciosidade" do espaço não interfere de modo algum em nosso raciocínio geométrico".

AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS E A ANÁLISE MATEMÁTICA

Já não seria pequeno o interêsse das Geometrias não-euclidianas — opina o esclarecido geômetra Hadamard — se ficasse a sua finalidade adstrita a esta-

— Cfr. Jacques Hadamard — "Nature des mathématiques" — Encyclopédie française — 1.52.10.

belecer a impossibilidade da demonstração do V postulado. (70)

É preciso observar que tal não acontece. Já assinalamos que as figuras ligadas e definidas por meio de relações obtidas não-euclidianamente, podem ser construidas partindo de princípios atinentes exclusivamente à Geometria ordinária — conforme mostraram, em seus trabalhos, Poincaré e Beltrami. Vemos que é possível, com auxílio de proposição não-euclidiana, enunciar propriedades de círculos ortogonais a um círculo fixo do plano e de esfera, que cortam, em ângulo reto, uma esfera fixa do espaço.

Ademais, uma interpretação conveniente dada a diferentes conceitos não-euclidianos (deslocamento, linhas, retas, planos, curvas) pode esclarecer questões importantes de Geometria Projetiva.

Mas a fecundidade da doutrina de Lobatschewsky e Bolyai foi, particularmente, revelada a partir de

---

(70) — Será limitado o número das Geometrias não-euclidianas? Não poderá o futuro nos oferecer outros panoramas para a ciência de Euclides? Ouçamos a opinião insuspeita do Prof. Felipe dos Santos Reis que é um profundo conhecedor da Filosofia da Matemática:

"Euclides e seus sucessores viram a natureza, observaram-na graças as propriedades dos mecanismos psico-fisiológicos de seus cérebros. Viram o fio da teia de aranha esticado, viram o contôrno da lua cheia e nesse levantamento psico-fisiológico da Natureza, criaram a reta e a circunferência de círculo. Esqueceram-se de suas proporções pequenas, seus triângulos das terras do Nilo, muito pequenos, ultra-sensibilidade que teve o grande Gaüss quando tentou medir um triângulo na Alemanha, de grandes proporções e ver se realmente a soma dos ângulos dos triângulos dava dois retos. Gaüss duvidava da base da Geometria. Dirigia uma carta a Bessel, como seu amigo confidente, onde dizia que nada divulgaria a respeito, com medo dos beócios de seu tempo.

E as geometrias não-euclidianas nasceram no passado, nascem hoje, nascerão amanhã. Eu devo mesmo lançar no meu curso dêste ano, as geometrias não-Mongeanas. Sabe-se hoje, que é tão certo a soma dos ângulos internos de um triângulo valer dois retos, como ser maior, ou menor do que tal valor, conforme a escolha da hipótese básica sôbre o postulado das paralelas.

"Cfr. "Estudos brasileiros". Ano V, Vol. X, pág. 34.

82, quando Poincaré descobriu as suas célebres fun-
es fuchsianas que abriram novos horizontes para a
ria das funções algébricas e o estudo da integração
s equações diferenciais. Com efeito. A formação
ssas novas funções, um dos maravilhosos progres-
; da Análise moderna, tem essencialmente por base
ncípios geométricos que decorrem da Geometria
-euclidiana. E assim, aquêle que se apresentava
n cabimento, reveste-se de uma significação bem di-
ente. Não sòmente outras circunstâncias são possí-
s além das que eram previstas pela Geometria Eu-
liana, mas o seu estudo oferece à Ciência novos e
undos campos de pesquisa.

Há uma particularidade singularmente instrutiva
ublinhar. Reconhecer-se que um axioma funda-
ntal é independente de outros, indagar o que ocor-
a com o corpo de doutrina quando se renuncia a
axioma, já não é, apenas, um exercício de Lógica
ortante por si mesmo: é oferecer a possibilidade de
quecer com novos capítulos a teoria já existen-
71).

O EUCLIDIANISMO DO ESPAÇO

"As dúvidas quanto ao euclidianismo do espaço
desde a origem da Hipergeometria, com Lobats-
wsky, com Riemann (1854, Helmholtz (1876) e os
ais que reclamaram observações astronômicas
e sentido. À insistência em atender aos movimen-
moleculares no espaço euclidiano atribuía Ernest
ht a falta de teoria satisfatória de eletricidade. Des-

— Convém incluir aqui esta arrojada asserção de Becquerel:
— "Temos atualmente a certeza de que o campo de gravita-
ção é a manifestação do caráter não-euclidiano de estru-
tura geométrica do espaço". (J. Becquerel — *Principe de
la Relativité et la Theorie de la Gravitation*".

de 1876, Zollner ligava a quarta dimensão à ação gravitacional à distância. E à curvatura do espaço aludiu Tait como possível, se o sistema solar chegasse a certas regiões.

Depois há os trabalhos de Minkowski e de Einstein, que calculou o raio de curvatura do espaço.

O que nos interessa neste movimento científico é a proposição que, para nós, o sintetiza: não se deve admitir, a priori, a Geometria pela qual se tenham de reger os fenômenos; os fatos é que devem decidir, de modo que a experiência seja o fundamento da adoção de uma ou outra Geometria, e não a Geometria que intuitivamente se imponha.

"Pretendeu o racionalismo — adverte o Prof. Pontes de Miranda num dispêndio inútil de erudição — a ciência fundada na racionalidade do real, o conhecimento redutível a elementos só provenientes da razão. Eram as Matemáticas (72) o maior e o melhor domínio de tal convicção e os matemáticos os que levaram aos extremos a explicabilidade racional da natureza. Mas se, nas ciências físicas e naturais, foi grande o desmentido às pretensões de tão audaz epistologia, as verificações físicas do espaço não-euclidiano vieram mostrar que, nas próprias Matemáticas, seria arbitrário postular a racionalização do real. É a experiência que decida da Geometria (73).

O valor da Geometria euclidiana deve ser apreciado segundo a exatidão e a precisão com que ela representa os fatos do mundo físico em que vivemos. (74)

Na vida corrente — observa A. T. Bell — nas medidas de distâncias, áreas, ângulos, etc., as diferenças

(72) — Conservamos a expressão "as Matemáticas", nessa transcrição, muito embora não aceitemos a adoção do plural, mesmo sob forma literária, à ciência de Lagrange.

(73) — Pontes de Miranda — "Introdução à Sociologia Geral", pág. 92.

(74) — E. Borel e R. Delthell — "La Geometrie et les imaginaries", pág. 12.

ntre a Geometria de Euclides e de Lobatschewsky são
ínimas e não chegam a ser levadas em linha de con-
. O importante, no caso, é que Lobatschewsky abo-
iu o dogma da verdade absoluta de que aparecia re-
estida a Geometria Euclidiana e abriu, com sua ino-
ação, caminho para suas sucessoras; e algumas des-
as sucessoras — sirva de exemplo a Geometria da Re-
ltividade geral de Riemann — são tão vivas em cer-
os capítulos modernos da Física, como era, e ainda é,
Geometria de Euclides nas partes em que a Física
ais ou menos estabilizada, não se afastou dos moldes
ássicos. Para certos problemas a Geometria de Eu-
lides é a mais indicada e também suficiente; surgem,
orém, na ciência situação em que as coisas exigem,
ra perfeita compreensão, uma Geometria-não-eucli-
iana. (75)

SER OU NÃO SER

A Geometria — adverte com simplicidade o filó-
ofo Gonseth — deve exprimir a verdade, isto é, paten-
ar de maneira absoluta a estrutura do espaço sensí-
el; tudo leva a crer que a construção lógica deva se
xprimir por uma existência material: o espaço é ou
ão euclidiano. Não há outra forma de encarar o pro-
lema. Urge pois decidir, com os recursos da Lógica,
e a Geometria de Euclides é falsa ou verdadeira. E'
nteressante assinalar que, mesmo para Bolyai, a ques-

75) — Ouçamos, a tal respeito, a palavra autorizada do Prof. P. Sergescu: "Nova concepção do espaço foi aberta pelas Geometrias não-euclidianas; e era isso indispensável para a edificação da Teoria da Relatividade? Propôs Einstein adotar um espaço não-euclidiano, riemanniano, gozando de certas propriedades *a priori*. Intervindo nesse dificílimo problema, criou E. Cartan uma concepção de espaços com analogias euclidianas, estudo de que se valeu Einstein para aperfeiçoar sua Teoria." — Cfr. P. Sergescu — "L'évolution des sciences physiques et mathématiques", pág. 104.

tão não se apresentava senão sob êsse aspecto. Ser ou não ser!

Cabe, pois, ao geômetra não obnubilar o problema e dirimir essa dúvida cruciante (76).

ESPAÇO ILIMITADO E FINITO

"Um espaço limitado — afirma Amoroso Costa — é necessáriamente finito, mas um espaço ilimitado não é necessáriamente infinito. E' o que mostra o espaço esférico de Riemann, de que se pode ter uma imagem de duas dimensões na superfície de uma esfera, sôbre a qual um ponto pode se deslocar em todos os sentidos sem nunca encontrar um bordo que o detenha. No espaço de Riemann nunca se chega a uma su-

(76) — "Em verdade, à simples pergunta do que seja espaço, ninguém alcança formular uma contestação clara e satisfatória; — pois, a que outra coisa mais simples podemos reduzir o espaço? A Geometria aceita, do mesmo modo que a Física, o espaço como algo dado, realmente. Ela nos ensina que o espaço tem três dimensões — comprimento, largura, altura ou profundidade — e que uma superfície tem duas e a linha apenas uma. Para o geômetra, como para o fundador de nossa mecânica, o espaço não tem limites. E' o vaso, o recipiente onde ocorrem os sucessos e estão encerradas tôdas as coisas. Isto, porém, não é uma explicação, e sim, antes, uma nova descrição.

Dentro dêste espaço — assim pensa o físico do período clássico — transcorre o tempo. O tempo é um fluir silencioso, eterno decorrer, um perpétuo e uniforme avançar na idade do espaço. Espaço e tempo, porém, não se nos apresentam como fatos da mesma categoria, porquanto, ao passo que podemos conceber um espaço sem tempo, não podemos conceber um tempo sem espaço.

Dentro do espaço e do tempo parece-nos encerrada a matéria. A matéria é aquilo que percebemos de modo imediato pelos sentidos, é a base de todo fenômeno, é o fúlcro e a fonte das fôrças, que atuam no espaço e no tempo. Também sofre a matéria inanimada uma constante variação; a mais importante é o seu movimento. Já Newton se persuadira de que a matéria universal está em contínuo movimento. Tôdas as estrelas, incluídos os sistemas estelares, se movem; tôdas as partes e partículas imagináveis nos corpos estão em perpétuo movimento e incessante fluência." Cfr. Rodolpho Dammel — "Fácil acesso à teoria da Relatividade", trad. de Pedro Gratacós, pág. 18.

rficie fronteira: de qualquer de seus pontos pode-
e partir em tôdas as direções, mas as geodésicas dês-
espaço são linhas fechadas, como os círculos máxi-
os da esfera. Em uma região pequena, compreende-
e fàcilmente que o espaço de Riemann se confunde
uase com um espaço euclidiano, assim como a esfera
ouco difere de um plano tangente (77).

Em seu notável e curioso "Essai sur l'Hyperespa-
" assinalou o matemático Maurice Boucher (pág.
2) esgrimindo com a quarta dimensão:

"O espaço euclidiano, produto de nossa sensação
ue exclui o infinito, não pode ser para nós infinito,
as apenas ilimitado, comparável, de certo modo, com
perfície tri-espacial que envolvesse uma hiper-esfe-
(esferoide da 4.ª dimensão). "Na propriedade do
paço de ser ilimitado — diz Riemann — existe maior
ma de certeza empírica do que em qualquer outro
do externo da experiência, mas a infinitude do es-
ço não decorre necessàriamente como uma conse-
ência dessa extensão ilimitada".

A DUPLA ETERNIDADE

"A crenças ingênuas dos antigos para os quais o
undo era limitado, substituiu o Renascimento, a
déia de um Universo infinito no espaço e no tempo,
ontendo uma infinidade de astros. Se refletirmos um
omento sôbre essas duas idéias opostas, elas parece-
ão igualmente inconcebíveis.

Como compreender a dupla eternidade de um pas-
ado que nunca começou, de um futuro que nunca ter-
minará? Como compreender, porém, o tempo limitado
entre um instante inicial que nenhum precedeu e um
instante final que não está seguido de outro?

Como compreender um espaço que, em tôdas as di-

(77) — Amoroso Costa — "Teoria da Relatividade".

reções, é um abismo sem fim? Como compreender, ao contrário, um espaço limitado, sem que exista exteriormente senão o Nada absoluto?

Ora, essas duas hipóteses não esgotam a nossa capacidade lógica. Um Universo do tipo riemanniano seria finito, se bem que não limitado, e escaparia à dificuldade apontada. A teoria da relatividade concebe a matéria como índice de curvatura do Universo: resta ver se essa curvatura é tal que o espaço físico se possa fechar sôbre si mesmo.

Recorda Born, na "Teoria da Relatividade", que, segundo estimação do astrônomo De Sitter, o contôrno do Universo, isto é, o comprimento de uma linha universal geodésica que volui sôbre si mesma, é de uns **cem milhões de anos-luz.**

Êsse Universo finito não está limitado, não tem divisas. Desenvolve o sábio essa idéia analisando o que aconteceria a um sêr dotado apenas de duas dimensões (**homoide**, segundo o Dr. Cabrera) colocado sôbre a superfície de uma esfera. Embora a superfície fôsse finita, o **homoide** nela não encontraria um fim.

Limitado e *finito* não são, pois, termos idênticos.

"Fora da matéria — afirma Schleick — não há espaço. O espaço existe enquanto a matéria existe, porque o espaço não é senão um produto de abstração" (78).

COPERNICO E LOBATSCHEWSKY

Acreditava a Humanidade que a Terra fôsse fixa e que o Sol se movia em tôrno dela. Surgiu o sábio italiano Copérnico e, investindo contra o conceito unânime da ciência do seu tempo, declarou:

— As concepções do mundo estão erradas! A Terra não é fixa. A Terra gira em tôrno do Sol!

---

(78) — Fr. Luiz Urbano, D.P. — "Einstein y Santo Tomás".

Durante mais de vinte séculos, todos os homens de ciência admitiram cegamente que a Geometria de Euclides fôsse a única possível e que o sistema fundado pelo geômetra grego correspondesse a uma verdade absoluta. A ciência parecia eternamente cingida aos ensinamentos do imortal alexandrino.

Surge o russo Lobatschewsky, abala os fundamentos euclidianos da Geometria, tumultua os conceitos e postulados dessa ciência, deseuclidianiza as formas, e renova, por completo, a concepção de espaço (79).

Einstein afirmou, certa vez, que Lobatschewsky, com a sua obra, havia "desafiado um axioma" (80).

Não nos parece muito justa a expressão do sábio alemão.

Lobatschewsky, com sua retaliação violenta, lançou um verdadeiro desafio a tôda a ciência do mundo. Foi um verdadeiro Copérnico da Geometria.

---

(79) — Observa com rara oportunidade G. Bachelard: "Tôda renovação feita na estrutura do Espaço ou na estrutura do Tempo acarreta sempre uma profunda reação sôbre a estrutura de nosso espírito.

(80) — Chamamos a atenção de nossos leitores para o capítulo — Lobatschewsky — que aparece no livro de E. T. Bell — "Les Grands mathématiciens".

Escreve L. Hogben em seu livro *"Maravilhas da Matemática"*:

Nossa geração presenciou uma verdadeira revolução no conceito clássico da Geometria. Hoje, associamo-la principalmente aos nomes de Ernst Mach e Einstein. Já sabemos que a Geometria de Euclides não é a que melhor nos faculta a medição do espaço. Isto não quer dizer que não seja, ainda, um conhecimento útil. Sempre o foi e ainda o é. As novas descobertas mostraram apenas que ela tem suas limitações. Julgo conveniente mencionar, desde logo, algumas, ao invés de relegá-las tôdas para o fim do livro. Para muitos propósitos, a Geometria grega ainda é o melhor instrumento à nossa disposição. Qualquer balança de venda é de mais serventia, no lar, que uma balança química. A própria natureza desta, que lhe permite estimar as dimensões do átomo, torna-a inconveniente para usos domésticos. Pois bem, aprendemos, ainda hoje, a Geometria de Euclides, para usos domésticos.

Cfr. Hogben, Ob. cit., pág. 71. Tradução de Paulo Moreira da Silva.

APÊNDICE

AS GEOMETRIAS NÃO-ARQUIMEDIANAS

Amoroso Costa (*)

Diz-se não-arquimediana tôda a Geometria consuída sôbre a negação do chamado postulado de Arimedes.

Êsse postulado pode ser expresso sob a forma P.14 de Veblen, ou ainda sob esta outra:

Dados dois segmentos, existe um múltiplo do mer, que é superior ao maior.

Convém notar que esta proposição não é de Arimedes e já se encontra em geômetras anteriores. sua denominação atual foi proposta por Stoltz 1881).

O postulado de Arquimedes está implícito na uarta definição do Quinto Livro de Euclides: "Exis- uma relação entre grandezas que podem exceder-se útuamente por multiplicação". Sôbre êle se funda noção de medida das grandezas contínuas. Convenonando tomar um certo segmento para unidade de mprimento, a relação entre um segmento qualquer êsse segmento unitário é um número real. A todo

(*) Do livro "As idéias fundamentais da Matemática".

o segmento corresponde assim, univocamente, um número real, e a reciprocidade dessa correspondência é afirmada, como já vimos, por um postulado como o de Cantor-Dedekind. O conjunto dêsse postulado e do de Arquimedes exprime a representação cartesiana da grandeza linear.

Resulta do postulado de Arquimedes a não-existência de um segmento infinitamente pequeno atual, isto é, constante e inferior a qualquer segmento dado. A existência de tal segmento será, ao contrário, característica de todo o sistema não-arquimediano, implicando, por sua vez, a existência de um número infinitamente pequeno atual.

Daí a criação dos números não-arquimedianos de Veronese, cujo tipo mais simples se obtém do seguinte modo. Adotemos, além da unidade finita 1, uma unidade transfinitamente pequena **p**, tal que se verifique, para qualquer número finito **n** a desigualdade seguinte, contrária ao postulado de Arquimedes:

$$np<1.$$

Nestas condições, se **a** e **b** são números ordinários — que qualificaremos de arquimedianos — obtém-se um novo tipo de números, representados pela expressão **a + b p**.

E' patente a analogia com o modo de definição dos complexos. Os números de Veronese conservam as propriedades formais das operações sôbre os números ordinários, e nada impede de imaginar novas extensões, análogas à dos complexos superiores, pela introdução de um número qualquer de unidades.

Ora, os números **a + b p** podem ser considerados como em correspondência com os pontos de um ser abstrato, que se chamará a reta não-arquimediana. Sôbre essa reta existem, além dos pontos da reta arquimediana, outros pontos intermediários, em número infinito, o que equivale a conceber o espaço não-arquimediano com um contínuo de um tipo mais complexo que o habitual.

Os trabalhos de Veronese foram ainda generalizados por Levi-Civita (números monosêmios) e por Hilbert (números funcionais). Os números de Hilbert são coordenadas de pontos em um espaço não-arquimediano; como se conservam todos os outros postulados euclidianos, a Geometria que daí resulta é euclidiana não-arquimediana.

Nada impede, entretanto, de prosseguir na criação de sistemas cada vez mais abstratos. Entre os trabalhos realizados nessa ordem de idéias, citemos a Geometria lobatschewskiana não-arquimediana de Dehn, Schur e Hilbert." (*)

(*) Entre os geômetras que mais contribuiram para o progresso da Matemática no Brasil poderíamos citar *Gomes de Souza* (Souzinha), *Teodoro Ramos*, *Raja Gabaglia*, *Trompowsky*, *Oto de Alencar*, *Licínio Cardoso*, *Octacílio de Novais* e *Amoroso Costa*.

O eminente Prof. Luiz Freire, ao traçar a biografia de Amoroso Costa, escreveu:

> "Era Amoroso Costa um beneditino da Matemática...
> Os seus trabalhos são verdadeiros modêlos de do bem dizer matemático: precisos, concisos, simples e elegantes, dessa elegância matemática em que Poincaré via "o sentimento da beleza, da harmonia dos números e das formas que só os verdadeiros matemáticos sabem adivinhar."
> Nota-se em tudo que fazia Amoroso um especial cuidado — que a muitos poderá parecer exagerado — daquela síntese a que uma hora corresponde a muitas de análise.
> A perfeição lógica de seus trabalhos é notável: sempre que podia reduzia ao mínimo o número de princípios independentes — e é por êsse trabalho de recorrência que se pode bem aferir o seu espírito de elite."

Cfr. Mello e Souza — "*Dicionário da Matemática*" — 1.º volu...

CONCEITOS SINGULARES E AFIRMAÇÕES CURIOSAS

A clareza é a boa fé dos filósofos. — *Vauvenargues.*

O espaço é euclidiano?

Sim.

Diremos que o espaço é euclidiano pelas seguintes razões:

1.º) — é o mais simples;

2.º) — porque nada prova o contrário;

3.º)— o raio luminoso é o único instrumento do qual dispomos para verificar a "planitude" do espaço.

Gustavo Bessière — "La Relativité vue simplement", pág. 135, ed. de 1930.

* * *

O ponto geométrico, por mais que afirmem os compêndios, não é uma figura desprovida de dimensões, tem uma que não se vê mas se sente, é a existência, coordenada temporal imprescindível a tôda identificação.

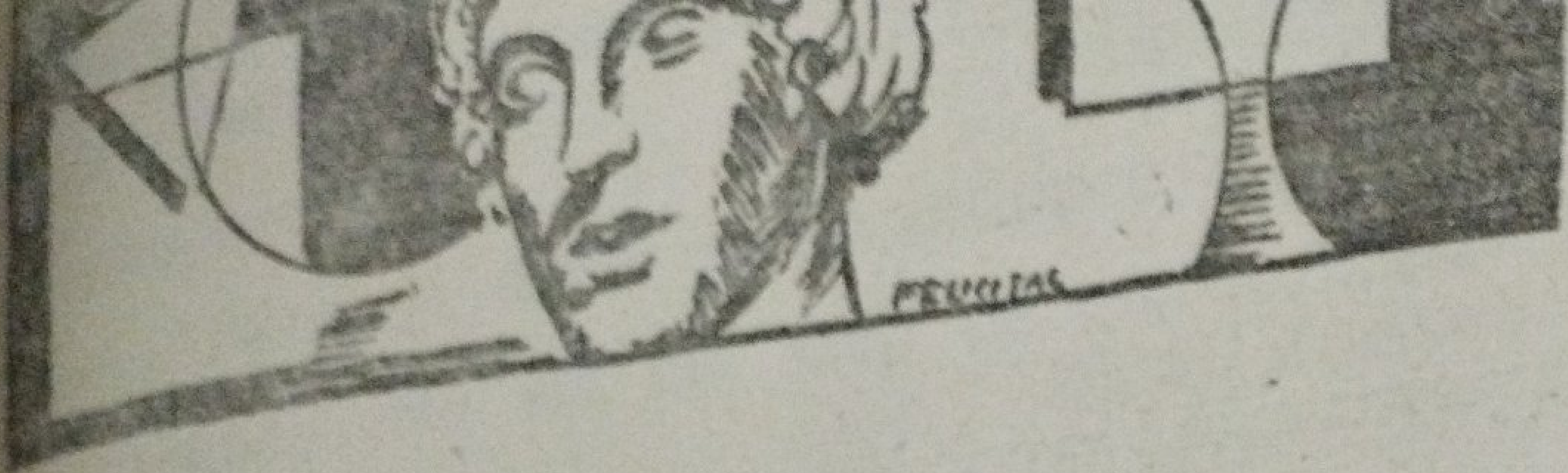
Silveira Sobrinho — "O molusco de Einstein" — pág. 18.

* * *

Conta-se que Kant, já muito idoso, tentou rever a obra que havia realizado durante a sua idade madura. Desistiu, porém, da emprêsa, dizendo:

— Quando eu a escreví só Deus e eu podíamos compreendê-la; mas agora, para entender e elucidar aquilo, só Deus é capaz, pois só Deus compreende tudo.

Cfr. *Marcelin Dubroca* — "Le realisme einsteinien" — pág. 11.



PRIMEIRAS NOÇÕES ELEMENTARES DE CURVATURA

Do livro "Pontos curiosos da Matemática".

Durante uma excursão de automóvel é muito comum ouvirmos do companheiro, mais cauteloso, que viaja ao nosso lado: — "Veja que curva fechada!" — "Esta curva é mais suave!" — "Cuidado! Vem agora uma curva forte!"

Percebe-se que a pessoa que assim nos adverte, mesmo sendo profana na ciência de Euclides, tem uma noção bastante clara do importante conceito geométrico que o matemático denomina **curvatura**.

Saberá ela, porém, definir o que se chama curvatura?

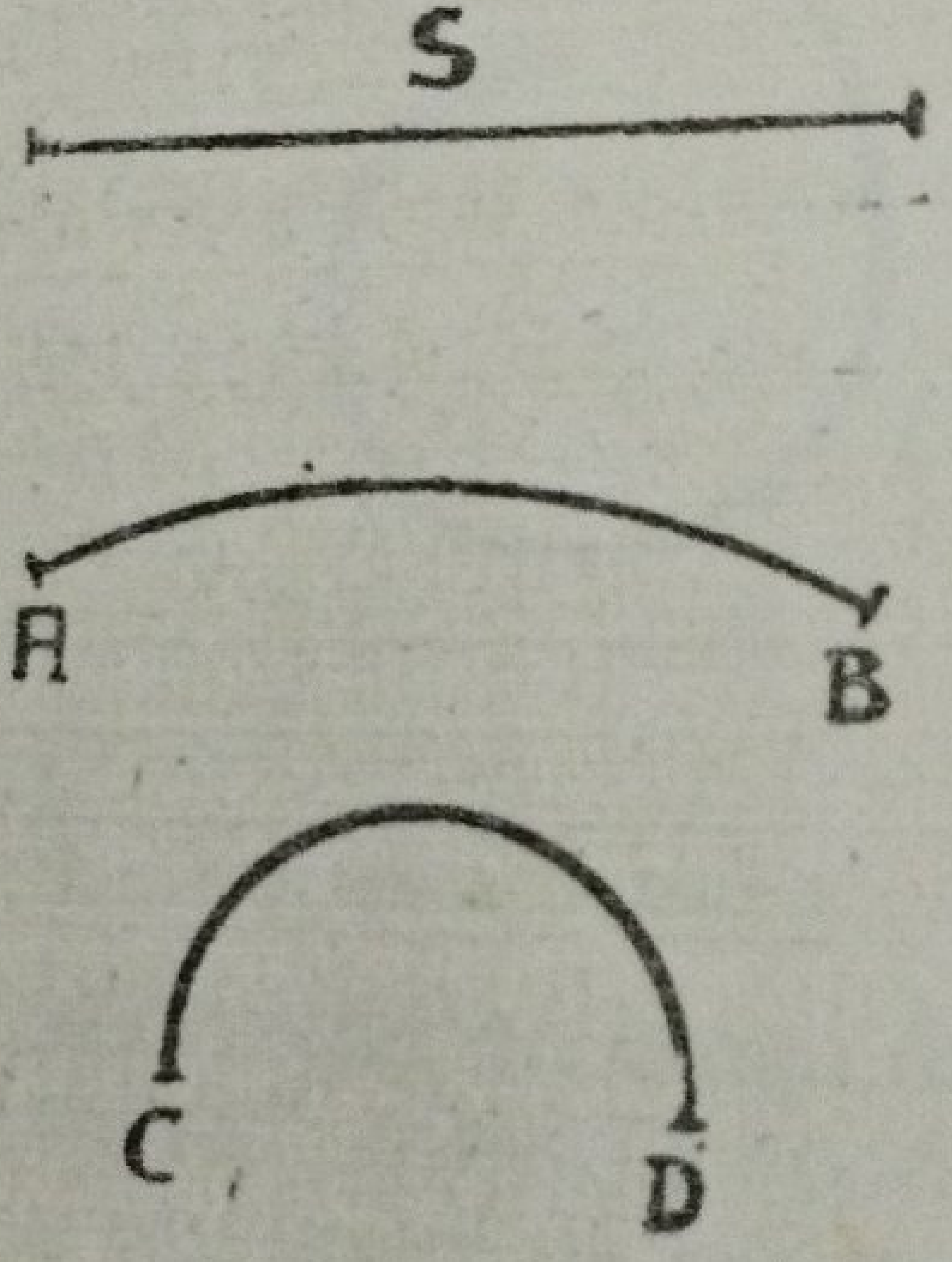
Ora, definir — proclamam os mestres — é difícil. Explicar talvez seja mais fácil.

Tentemos explicar, de modo bem simples, a noção de curvatura.

Tomo de um pedaço de arame rigorosamente retilíneo S. E' claro que êsse fio não apresenta a menor curvatura. O matemático diria que a curvatura do fio é igual a zero.

Deixemos, porém, o matemático em paz com suas fantasias e continuemos, sem preocupações de rigorismo, a nossa conversa.

Tomo, como já disse, do fio retilíneo S, entorto-o, formando com êle um arco de circunferência. Já, nesse caso, passa êle a apresentar **uma certa curvatura.** — E essa curvatura é diferente de zero — dirá logo o matemático.



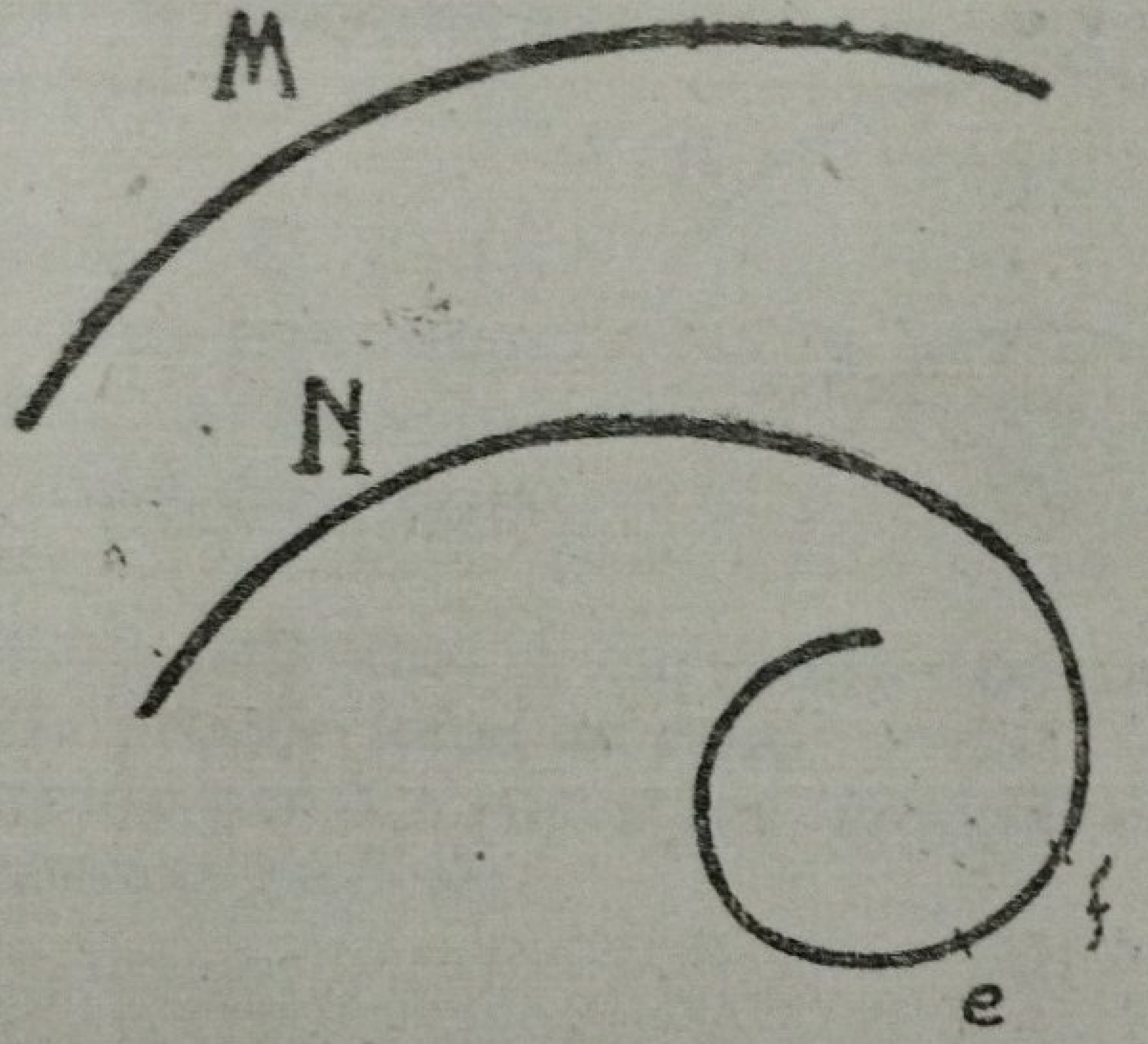
Posso entortá-lo, um pouco mais ainda, de modo a obter outro arco **CD de circunferência.** Maior será sua curvatura. (Veja a figura). Admitamos que **AB** e **CD** são arcos de círculo para esclarecer o problema e simplificar a explicação.

A noção é intuitiva. E' claro que a curvatura de uma curva pode ser maior ou menor, isto é, crescer ou diminuir.

A CURVATURA NO CÍRCULO

Consideremos um arco circular **M** (que eu suponho feito de um fio indeformável); assinalemos sôbre M um pequeno arco **ij** (também indeform...

Posso fazer êsse arco escorregar ao longo do arco M. Êle se ajustará sempre, ponto por ponto, com o arco M.



Já o mesmo não ocorrerá com o arco **ef** de uma curva **N** não circular. O arco **ef** (que supomos indeformável) não poderá escorregar ao longo da curva N. Não é possível fazer o arco ef coincidir (ponto por ponto) com outro arco qualquer da mesma curva.

Conclusão: Diremos que no arco de círculo a **curvatura** é constante.

Em outra curva plana (não circular) a **curvatura** deixará de ser constante.

COMO MEDIR A CURVATURA

Mostramos que no círculo a curvatura é constante.

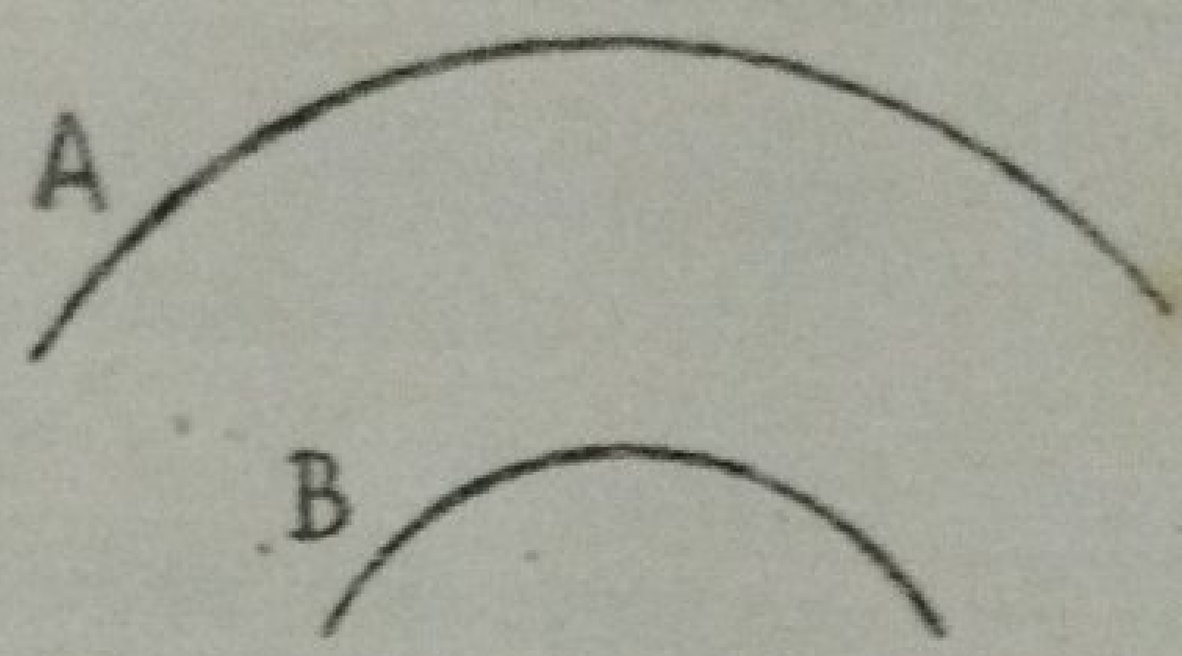
Resta agora resolver o problema:

— Como apreciar essa curvatura? Será possível medi-la, isto é, exprimi-la por meio de um número?

Vejamos.

O arco A, de círculo, tem um certo raio R. Se êsse raio aumentar a curvatura diminui; se êsse raio diminuir a curvatura aumenta.

Veja, na figura, dois arcos A e B. O raio do arco A é o dôbro do raio de B.



Diremos que a curvatura de B é o dôbro da curvatura de **A**.

Conclusão: O raio crescendo duas três, quatro vêzes, etc., a curvatura diminui duas, três, quatro vêzes, etc.

Em outras palavras: A curvatura (no círculo) é inversamente proporcional ao raio.

Designando por **K** a curvatura (sendo **R** o raio do círculo) podemos escrever:

$$K = \frac{1}{R}$$

A fórmula nos mostra claramente, que o raio crescendo a curvatura diminui; quando o raio se torna infinito a curvatura é nula. E' o caso da reta.

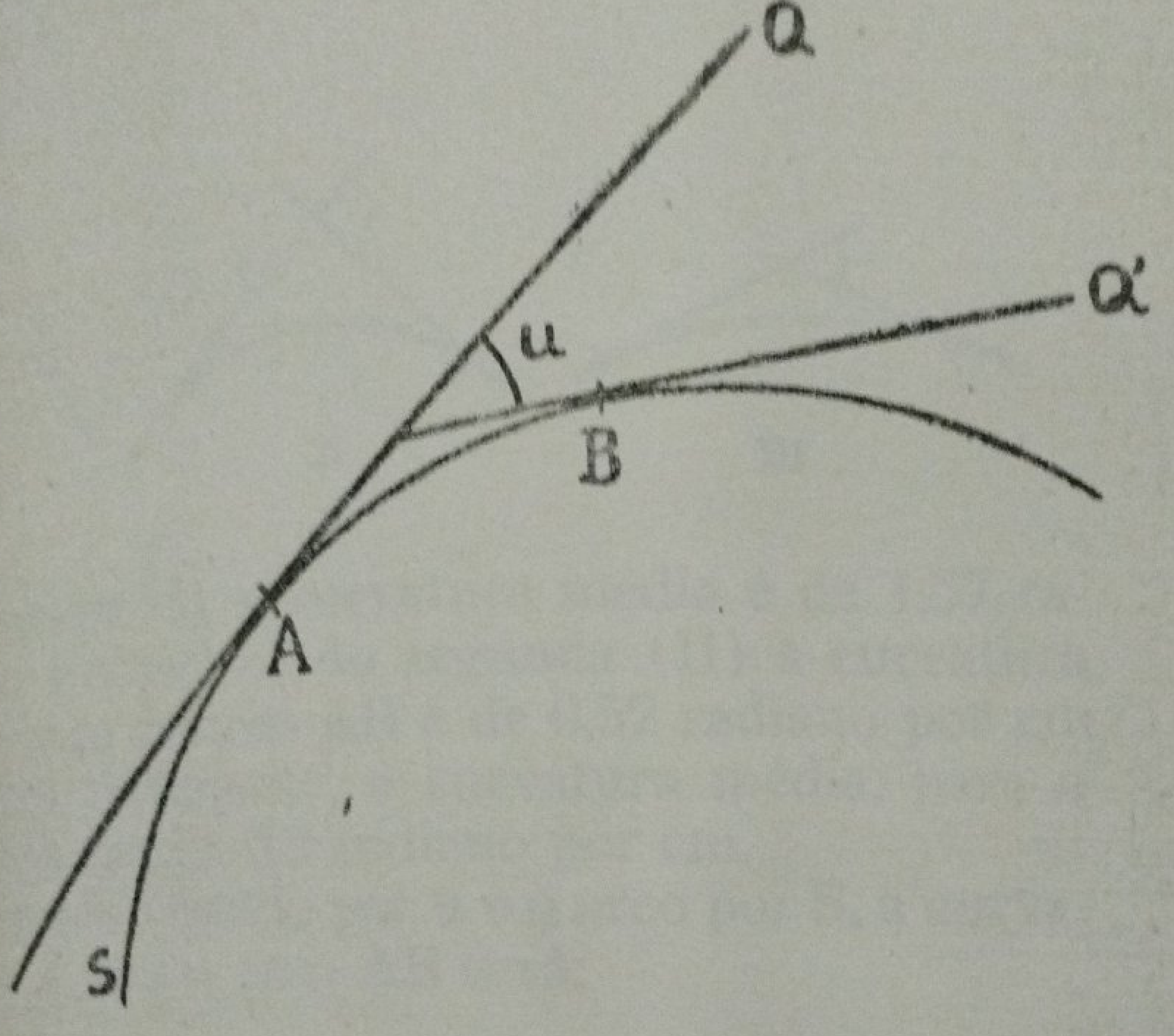
A reta é, pois, uma circunferência de raio infinito

PRIMEIRA OBJEÇÃO

Surge a primeira objeção:

— Tudo isso é muito simples, é mesmo lógico e racional. Qualquer pessoa compreende que no círculo a curvatura é constante e igual ao inverso do raio. Mas se eu entortar o arame de modo a formar uma curva C qualquer (não circular), uma parábola, por exem-

Essas tangentes formam entre si um certo ângulo u.



A curvatura média, ao longo de **AB**, será por definição a razão entre o ângulo **u** (medido em radianos) e o arco **AB** (medido em centímetros).

Como justificar essa definição?

Não nos parece difícil.

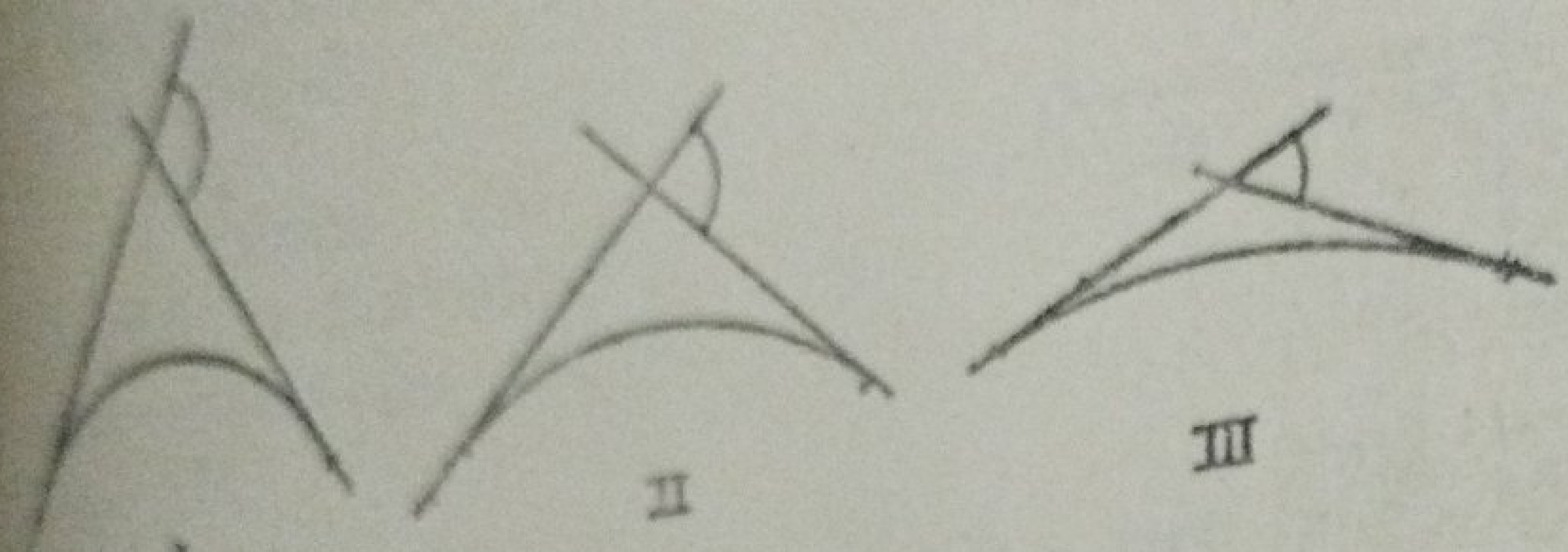
Vamos supor que um ponto percorre o arco **AB** indo de A para **B.**

Em cada ponto dêsse percurso o ponto tem, como sabemos, uma certa direção. E essa **direção** é dada pela tangente.

Em **A** a direção era **AQ;** em **B** já a direção passou a ser BQ'. Houve um desvio nessa direção; êsse desvio é apreciado pelo ângulo **u.** Repare bem: Quanto maior fôr a curvatura maior será o desvio.

Um exemplo numérico poderá melhor esclarecer a questão.

Consideremos três arcos do mesmo comprimento s digamos S =3cm. Com êsse arco de comprimento S formam três curvas (I), (II) e (III).



I II III

Na primeira (I) a curvatura média é de 1,57 radianos por centímetro, na segunda (II) a curvatura média, ao longo do arco AB é de 0,52 radiano por cm e na terceira, finalmente, a curvatura média, para o arco AB, não chega a 0,2 radiano por cm.

Designando o desvio por **u** e o arco por **S**, a curvatura média **K** para o arco **AB** será:

$$K = \frac{u}{S}$$

A curvatura média, como já dissemos, é dada em radianos por centímetros.

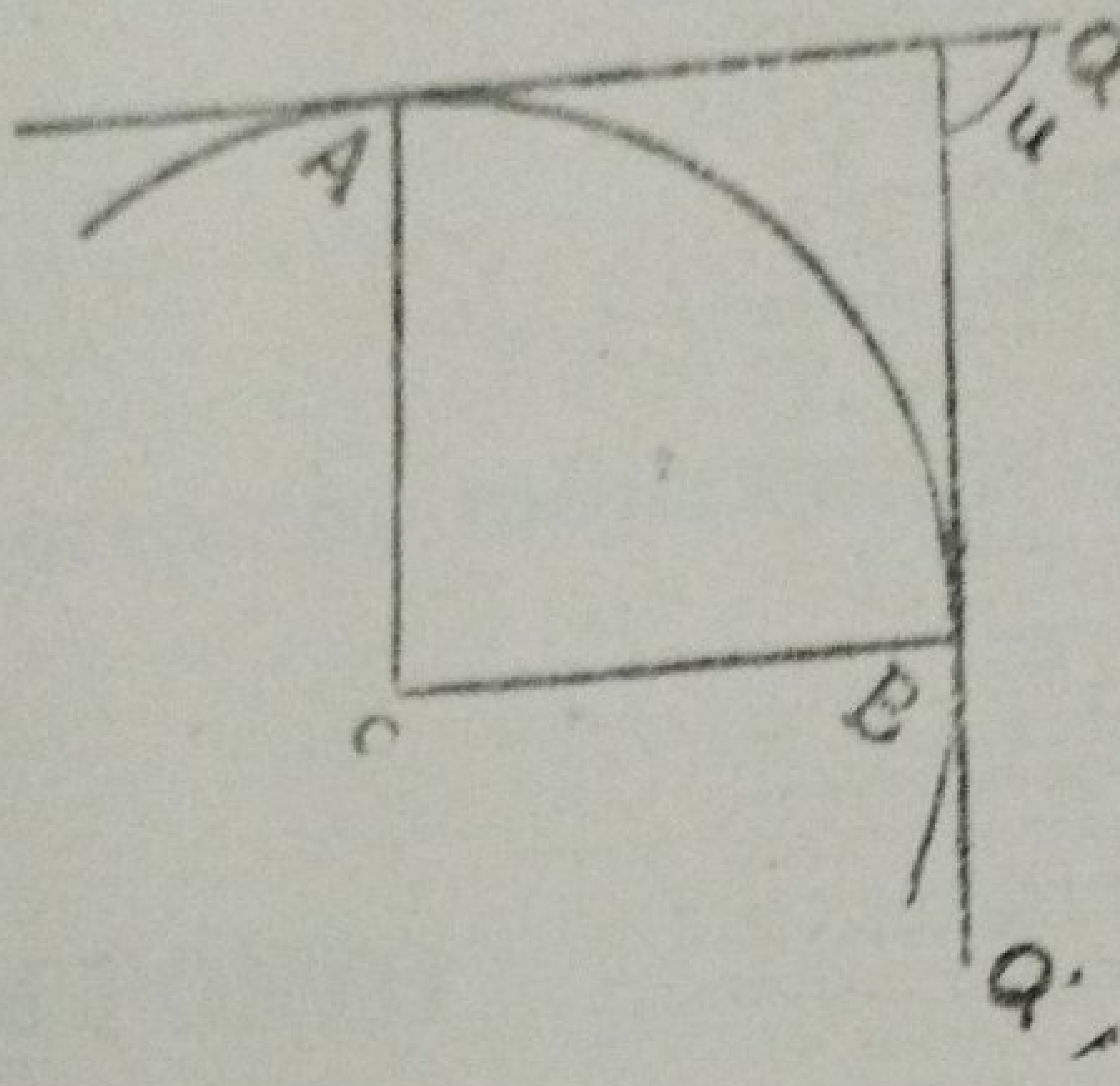
Uma vez definida a curvatura média será fácil determinar o raio médio de curvatura. Êsse raio será o inverso da curvatura:

$$R_{(m)} = \frac{1}{K}$$ *K* designa a curvatura média:

CURVATURA MÉDIA NO CIRCULO

Apliquemos ao círculo o conceito de **curvatura** média.

Seja AB ou S um arco tomado sôbre uma circunferência de raio R e centro O.



Vamos calcular a curvatura média do arco AB.

Tracemos as tangentes **AQ** e **BQ'**

O ângulo u, formado pelas tangentes, medirá o desvio da direção quando o ponto móvel passa da posição A para B.

Tracemos os raios AO e BO. O ângulo AOB é igual ao ângulo u. (São ângulos de lados respectivamente perpendiculares com as aberturas voltadas para lados diferentes mas não opostos).

A curvatura média K do arco **AB** ou por definição, será:

$$K = \frac{u \text{ (medido em radianos)}}{s \text{ (medido em cm)}}$$

Ora o arco S, em centímetros, será igual a produto uR. Temos:

$$S = u\,R$$

Podemos, pois, para o caso do círculo, escrever:

$$K = \frac{u}{uR}$$

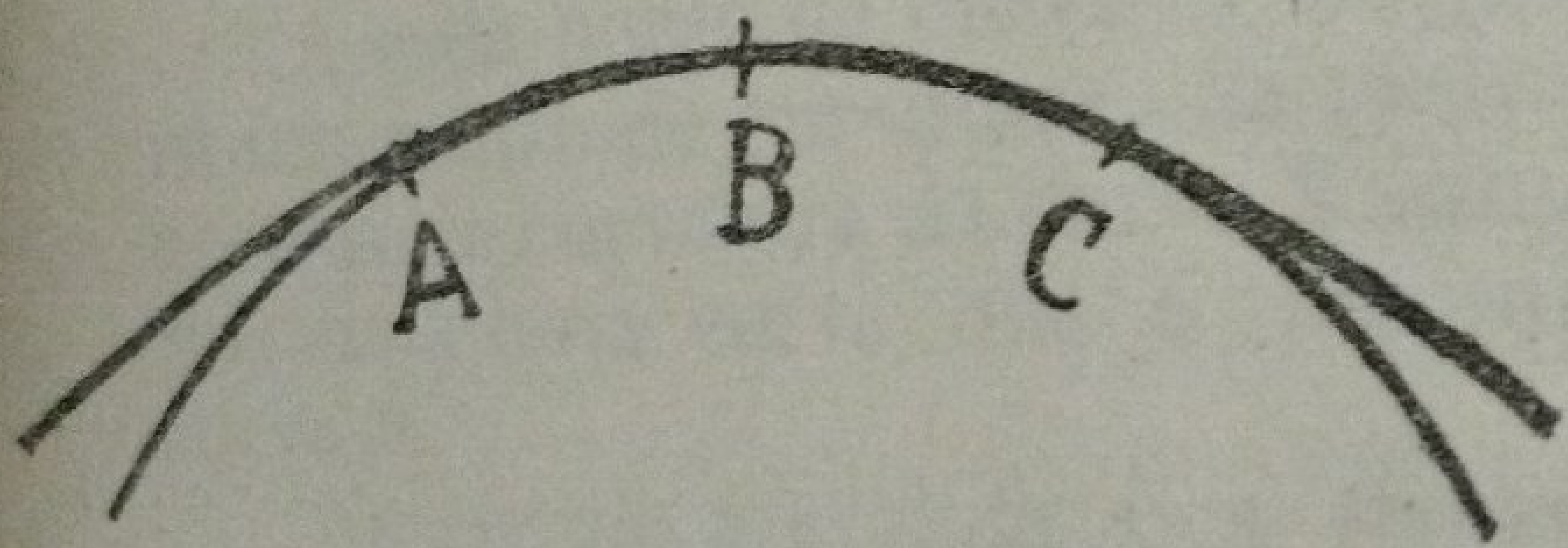
Simplificando essa expressão, resulta:

$$K = \frac{1}{R}$$

Conclusão: No círculo a curvatura média constante é igual ao inverso do raio.

CURVATURA NUM PONTO

Procuremos, agora, estabelecer o conceito de curvatura num ponto. Seja **S** uma curva e assinalemos três pontos **A**, **B** e **C** dessa curva.



Pelos pontos **A**, **B** e **C** (não em linha reta) será possível fazer passar uma circunferência de centro **O** e raio **R**.

Se os pontos **A**, **B** e **C** ficam bem vizinhos um do outro, é possível que a circunferência de centro **c** pouco difira da curva. Com auxílio dessa circunferência poderíamos apreciar a curvatura no segmento **AC** da curva.

Vamos, supor, porém, que os pontos **A** e **C** se aproximam do ponto **B**. E' evidente que a circunferência de centro **O** (variável, nesse caso) tenderá para um certo limite.

Vamos supor que os pontos **A** e **C** se tornem infinitamente vizinhos do ponto **B**.

Chegamos, assim, a um limite para a tal circ

Nesse limite o raio **R** será o raio de curvatura no ponto B.

Podemos chegar a essa concepção notável partindo de uma imagem um pouco afastada da realidade e bem pouco ortodoxa do ponto de vista do rigor matemático. Mas é uma imagem simples e pode auxiliar o nosso leitor.

Imaginemos que uma curva S é formada de uma infinidade de pedacinhos circulares. Admitamos que cada pedacinho A da curva S forme um **arco infinitesimal!** Êsse arco terá um raio — que será o raio da curvatura no ponto **M**, e o centro dêsse arco será o centro de curvatura em **M**.

A cada ponto da curva S, em geral, corresponderá um centro de curvatura. Se assinalarmos todos os centros de curvatura da curva S vamos obter (em geral) uma nova curva que é denominada **evoluta** da curva S.

No círculo a evoluta fica reduzida a um ponto, que é o centro.

SENTIDO DA CURVATURA. PONTO DE INFLEXÃO

Consideremos a curva S e dois pontos **M** e **M'** dessa curva.

O ponto **M** terá o seu centro de curvatura **C**; o ponto **M'** terá o centro de curvatura **C'**.

Acontece, porém, que os centros **C** e **C'** estão de um lado e de outro da curva.

Vamos supor que a curvatura em **M** seja positiva; a curvatura em **M'** será negativa.

O ponto em que a curvatura muda de sinal é denominado **ponto de inflexão** da curva.

No ponto de inflexão a tangente corta a própria curva e a curvatura no ponto de inflexão, é zero.

O círculo, a elipse, a parábol

apresentam ponto de inflexão; a senóide, por exemplo, apresenta uma infinidade de pontos de inflexão.

CURVATURA NO ESPAÇO

Até aqui estudamos a curvatura para o caso em que a curva S é plana.

Podemos apreciar também o caso da curva não-plana, isto é, o caso da curva **reversa.**

Façamos com um pedaço de arame um **anel** circular e sujeitemos êsse anel a uma deformação, torcendo-o para cima, numa parte, e para baixo na outra. O pedaço do arame já não mais formará uma **curva plana;** a curva obtida será **reversa.**

Observa-se na curva **reversa** duas curvaturas: a curvatura de **flexão** e a curvatura de **torsão**.

Podemos compreender melhor a dupla curvatura imaginando uma serpente que deslize tortuosamente sôbre uma esfera. O corpo da serpente está sujeito a duas curvaturas: **flexão** (resultante do movimento tortuoso) e **torsão** (pelo fato do movimento ocorrer sôbre a superfície esférica).

E' claro que a serpente escorregando tortuosamente sôbre um **plano** só apresentaria uma curvatura.

Para as curvas reversas, isto é, dotadas de **flexão** e **torsão** somos forçados a considerar dois raios de curvatura: raio de flexão e raio de torsão.

Há uma curva notável na qual a **flexão** e a **torsão** são constantes. Essa curva é a **hélice cilíndrica** ou **hélice de Arquimedes.**

A hélice desempenha no espaço (em relação à curvatura) o mesmo papel que o círculo desempenha no plano.

CURVATURA DE UMA SUPERFÍCIE

Uma vez compreendido o problema da curvatura nas linhas planas e reversas será fácil abordar o conceito de curvatura para uma superfície qualquer S.

Devemos a Gauss o estudo da curvatura nas superfícies.

Sôbre um elemento da superfície traçamos dois planos P e P' normais a superfície. (*)

Cada plano ao cortar o elemento da superfície determinará um elemento de curva, cada elemento de curva, terá seu raio de curvatura e seu centro de curvatura.

Designemos por g e g' êsses raios de curvatura.

Denominamos **curvatura total** de superfície S, no elemento Q, ao produto inverso do produto gg'. Podemos escrever:

$$K = \frac{1}{gg'}$$

Quando as curvas são tais que os centros de curvatura estão situados do mesmo lado da superfície diremos que g e g' são do mesmo sinal.

A curvatura total da superfície será **positiva**.

Se os centros de curvatura estiverem separados pela superfície o produto gg' será negativo e a curvatura

(*) Êsses planos normais são planos perpendiculares ao plano tangente. Os planos *P* e *P'* são perpendiculares entre si.

$$\frac{1}{gg'}$$

Será também negativa. (**)

Denomina-se curvatura média de uma superfície a expressão:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{g}+\frac{1}{g'}\right)$$

Imaginemos que uma certa porção J da superfície é limitada por um certo contôrno: (J é medida em centímetros quadrados).

Ao longo dessa linha de contôrno tracemos as diferentes normais à superfície.

De um ponto P qualquer do espaço tiremos paralelas a essas normais.

Essas paralelas formam um ângulo sólido f. Êsse ângulo sólido é medido em esferodianos).

Denomina-se curvatura média da superfície S, dentro de área J, a razão: **f ÷ J.**

Quando J tende para zero, a razão

$$\frac{f}{J}$$

será a curvatura num ponto da superfície.

(**) Seria impossível alongar êste estudo, sem torná-lo incompatível com a finalidade dêste livro. Para uma leitura completa indicamos — E. Stoffaes — Cours ... périeures" — pág. 282

CURVATURA DAS SUPERFÍCIES

Vemos na figura da pág. 83 três superfícies. A primeira (plana) tem a sua curvatura nula.

A segunda (com a forma de um selim) tem a sua curvatura negativa. A terceira tem a curvatura positiva. No caso da esfera a curvatura é constante e positiva.

A superficie denominada **pseudo-esfera**, gerada pela rotação de uma tractriz em tôrno de sua assíntota, tem a curvatura constante e negativa. (*)

Convém observar que no caso da esfera os raios

$$g \text{ e } g'$$

são constantes, ao passo que na pseudo-esfera g e g' são variáveis. O produto

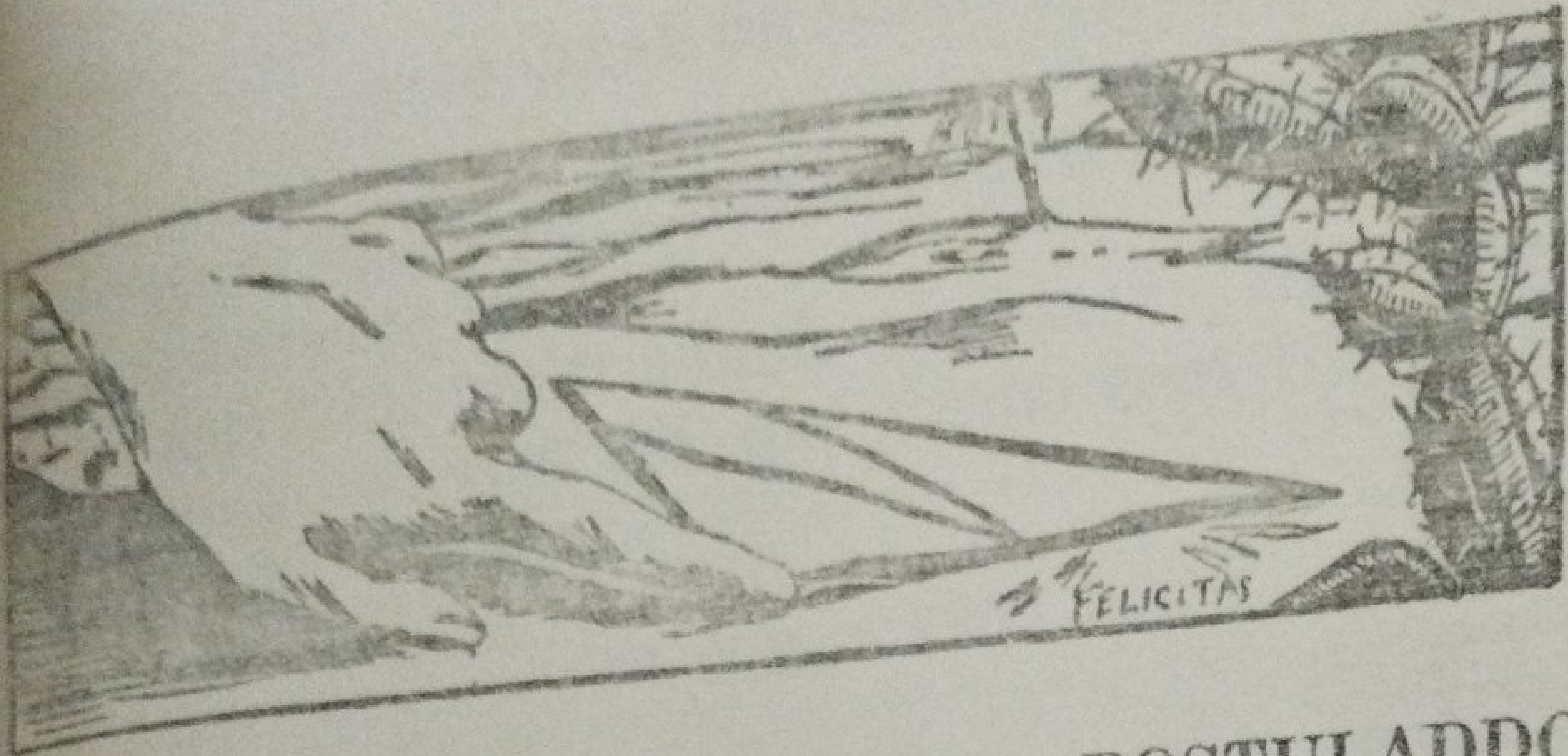
$$gg'$$

é (na pseudo-esfera) uma constante.

Conclusão: Na pseudo-esfera a curvatura negativa é constante embora os raios de curvatura sejam variáveis.

Há uma superfície chamada **Catenóide,** gerada por uma catenária, que apresenta a curvatura média nula em todos os pontos. Nessa superfície os raios de curvatura são iguais (em valor absoluto e de sinais contrários). Numa superfície desenvolvível qualquer a curvatura total num ponto P dessa superfície é nula.

(*) O fato da pseudo-esfera apresentar a curvatura $K = \frac{1}{gg'}$ levou Beltrami a considerar tal superfície como imaginária.



A LEI ANGULAR DE TALES E O POSTULADDO DE EUCLIDES

Professor F. Araújo Gomes

O sr. Adel da Silveira publicou, em 1942, um pequeno trabalho intitulado "O Postulado de Euclides — Demonstração", no qual aborda nova solução para o secular problema das paralelas.

Nas sessenta e poucas páginas de seu livrinho, exaltado, aliás, por um honroso prefácio do Prof. Caetano de Oliveira, investe o jovem matemático contra a nebulosa questão do V postulado e pretende chegar a uma solução.

Asseguram, com efeito, os geômetras que uma vez demonstrada a lei angular de Tales — "a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos" — fica, **ipso facto**, demonstrado o postulado de Euclides.

Como demonstrar, porém, a lei angular de Tales sem recorrer à teoria das paralelas?

Eis a marcha seguida pelo sr. Adel da Silveira:

Prova que a todo triângulo **ABC** é sempre possível circunscrever um círculo.

Seja pois, **ABC** um triângulo inscrito num círculo.

A soma dos ângulos internos dêsse triângulo (que passam a ser ângulos inscritos num círculo) será equivalente a um arco igual a uma circunferência.

Ora, o ângulo correspondente a um arco de circunferência completa é constante.

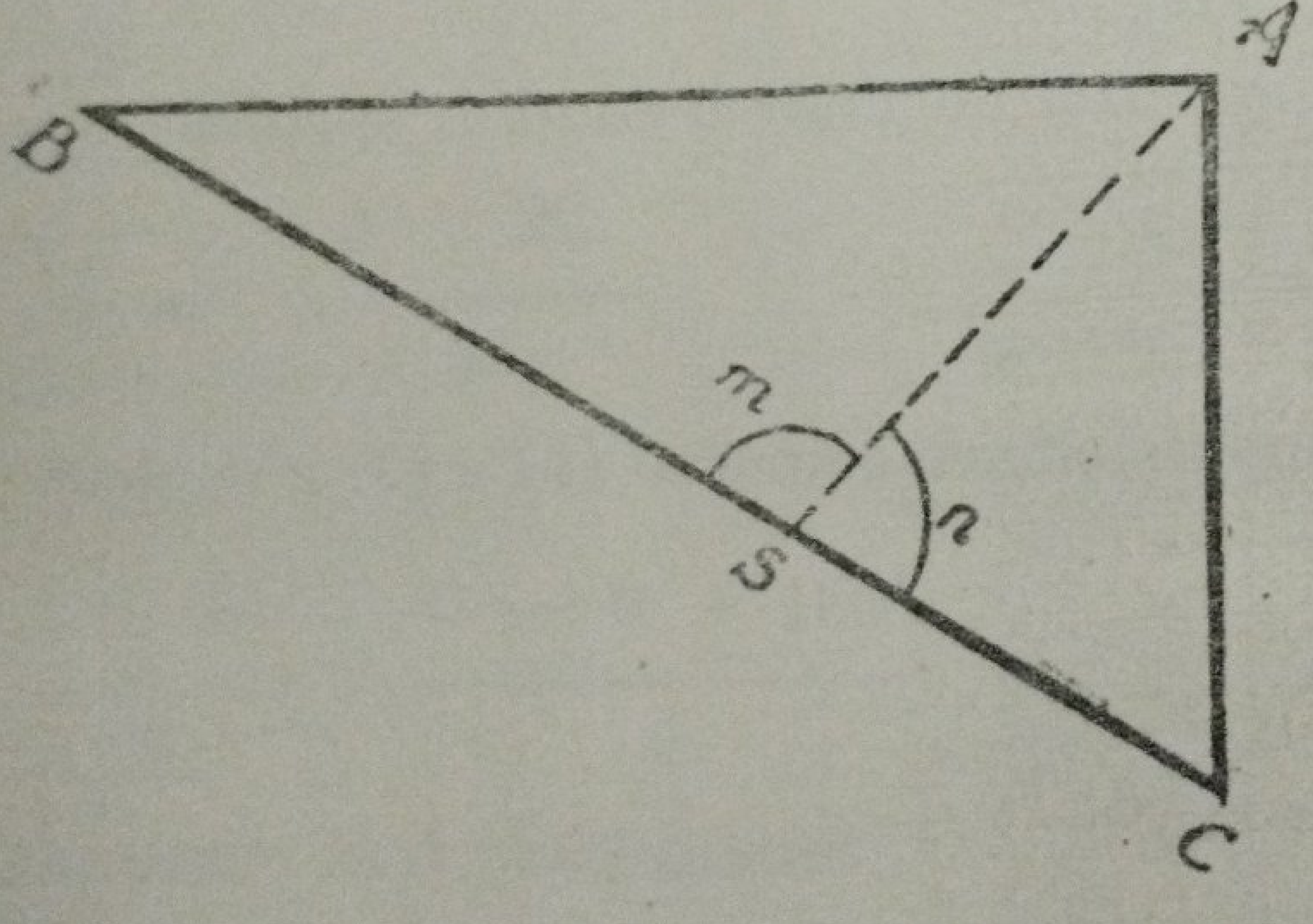
Logo, a soma dos três ângulos internos de um triângulo é constante.

Resta, agora, demonstrar que essa soma constante é precisamente 180°.

Seja ABC um triângulo qualquer. Do vértice A tiremos a bissectriz AS, que forma com BC os ângulos m e n. Temos:

$$m + n = 180^\circ \qquad (1)$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante, pode-se escrever que a soma dos ângulos internos do triângulo ABS é igual à soma dos ângulos internos do triângulo ACS.



Temos, portanto:

$$\frac{A}{2} + B + m = \frac{A}{2} + C + n$$

e dessa igualdade resulta

$$m - n = C - B \qquad (2)$$

Somando membro a membro as igualdades (1) e (2), temos:

$$2m = C - B + 180^o$$

e obtemos, dêsse modo, o valor de **m**;

$$m = \frac{C - B + 180^o}{2} \qquad (3)$$

Em virtude, porém, de ser constante a soma dos ângulos internos de um triângulo será lícito escrever (considerando os triângulos ABS e ABC):

$$\frac{A}{2} + B + m = A + B + C$$

E dessa igualdade tiramos o valor de **m**:

$$m = \frac{A + 2C}{2} \qquad (4)$$

Das igualdades (3) e (4) teríamos imediatamente:

$$\frac{A + 2C}{2} = \frac{C - B + 180^o}{2}$$

Ou, expelindo os denominadores:

$$A + 2C = C - B + 180^o$$

e transpondo e reduzindo:

$$A + B + C = 180^o$$

relação que demonstra a lei angular de Tales.

Uma vez demonstrada a lei de Tales estaria obtida a demonstração indireta do princípio euclidiano que o Prof. Tales Melo Carvalho considera o Postulado Fundamental da Geometria Plana (Cfr. Matemática Cursos Clássico e Científico, 1.ª série, pág. 311).

(Êste artigo foi transcrito da revista "Al-Karismi", n.º 4, página 48.)

CONCEITOS SINGULARES E AFIRMAÇÕES CURIOSAS

A Geometria de Euclides é ensinada e continuará eternamente a ser ensinada aos nossos escolares, aos nossos engenheiros e aos nossos arquitetos. Essa Geometria, e mais nenhuma outra, governará as atividades incessantes do mundo em que nos achamos.

Visconte de Güell — "L'espace, la relation e la position" — pág. 89.

* * *

Em sua obra intitulada "Espaço, tempo, gravitação", Eddington escreveu:

"Para o Prof. De Sitter, no caso do tempo real, o Espaço-tempo é esférico em suas dimensões espaciais, mas nos dois sentidos dos eixos do tempo é aberto como um hiperboloide. O Prof. Einstein prefere outra teoria: seu Espaço-tempo é cilíndrico, curvo nas três dimensões do espaço e retilíneo no tempo".

Êsse Espaço-tempo cilíndrico encaminha-nos a idéia do tema absoluto.

G. Fontené — "La relativité restreinté, — — pág. 146.

* * *

Tenhamos sempre presentes, no pensamento, aquelas palavras de Lord Balfour, o ensaista incomparável: "O êxito futuro da indústria depende das pesquisas abstratas ou científicas do presente e será aos homens de ciência que trabalham para fins puramente científicos, sem nenhum intuito de aplicação de suas doutrinas, que a humanidade ficará devedora nos tempos futuros". Já Condorcet observava: "O marinheiro, que a exata determinação da latitude preserva do naufrágio, deve a uma teoria concebida vinte séculos mais cedo por homens de gênio que tinham em vista meras especulações geométricas".

Fernando Raja Gabaglia — de um discurso pronunciado no Colégio Pedro II

ÍNDICE ALFABETICO DOS AUTORES CITADOS

ÍNDICE GERAL

APÊNDICE