UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Karina Gomez Pacheco

Resolução de sistemas de equações lineares:
o pensamento computacional no escalonamento da matriz ampliada

Florianópolis
2024

Karina Gomez Pacheco

Resolução de sistemas de equações lineares:
o pensamento computacional no escalonamento da matriz ampliada

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientadora: Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Florianópolis
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Pacheco, Karina Gomez
Resolução de sistemas de equações lineares : o pensamento computacional no escalonamento da matriz ampliada / Karina Gomez Pacheco ; orientadora, Maria Inez Cardoso Gonçalves, 2024.
288 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Pensamento Computacional. 3. Algoritmos. 4. Método de Gauss-Jordan. 5. Fluxogramas. I. Gonçalves, Maria Inez Cardoso. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

Karina Gomez Pacheco

Resolução de sistemas de equações lineares:
o pensamento computacional no escalonamento da matriz ampliada

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Edson Cilos Vargas Júnior
UFSC

Prof. Dr. Marcos André Braz Vaz
UFSC

Prof. Dr. Raphael Falcão da Hora
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 28/05/2024 17:45:39-0300
CPF: ***.897.119-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 28/05/2024 17:46:01-0300
CPF: ***.897.119-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Orientadora

Florianópolis, 2024.

Dedico este trabalho ao meu pai José Carlos Silveira Pacheco (*in memoriam*), que me ensinou a ir à luta.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à pessoa mais importante da minha vida, minha irmã Beatriz. Ao lado dela, minha prima Aliane, que sempre acreditaram na minha capacidade e sempre me incentivaram, mesmo quando tudo parecia perdido. O apoio de vocês foi um dos pilares que sustentou a escrita deste trabalho. Sem vocês, nada parece fazer sentido.

A minha amiga Keilla, por toda a disposição para me ouvir falar sobre o tema, mesmo não sendo da sua área, e compreensão pelas saídas adiadas por conta dos estudos. Aos meus amigos Tiago, pelos anos de estudos em conjunto que se iniciaram em 2013, e João pelos diversos dias de estudos em meio à pandemia e por me ensinar técnicas de respiração em momentos de ansiedade pré prova.

Aos professores Amar, Celso, Eliezer, Giles, Maria Inez e Sergio pelo conhecimento compartilhado durante esses anos e por toda a compreensão que tiveram. Aos professores que fizeram parte da minha educação escolar, pois sem eles jamais chegaria aqui. Aos meus amigos pelas horas de conversa e disponibilidade em dar sugestões para este trabalho.

Agradeço imensamente aos alunos que estiveram comigo durante o período de 2021-2024, principalmente aos alunos do período noturno que me acompanharam nas aulas de sexta-feira pós aulas do mestrado. Vocês foram o melhor apoio emocional, sempre me colocando para cima e dando sentido à minha profissão.

E por fim, gostaria de agradecer novamente à professora Maria Inez, não só pela orientação e sugestão do tema, mas por todo apoio durante os momentos difíceis. Você é uma mulher incrível.

*"Aí Strange, sabe o que é
mais irado do que magia?
Matemática."*
(Peter Parker, 2021)

RESUMO

Neste trabalho, investigamos o pensamento computacional como uma ferramenta para a resolução de problemas. A pesquisa se concentrou em como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aborda o pensamento computacional em suas competências e habilidades, bem como na inserção desse tema na formação de professores, tanto inicial quanto continuada. Além disso, examinamos como os livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para o ensino médio tratam da resolução de sistemas de equações lineares e se há alguma relação com o pensamento computacional. Observou-se uma lacuna na abordagem dos sistemas lineares nos livros didáticos, especificamente na ausência do método do escalonamento de matrizes. Como resultado escrevemos, a partir do método de Gauss-Jordan, uma fluxograma para auxiliar os estudantes nesse processo, além de dois materiais didáticos: um destinado ao professor e outro ao estudante.

Palavras-chave: Pensamento Computacional. Método de Gauss-Jordan. Algoritmos. Fluxogramas.

ABSTRACT

In this work, we investigate computational thinking as a tool for problem-solving. The research focused on how the Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [National Common Curricular Base] addresses computational thinking in its competencies and skills, as well as the integration of this theme into teacher education, both initial and continuing. Furthermore, we examined how textbooks approved by the Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) [National Textbook Program] for high school address the resolution of systems of linear equations and whether there is any relationship with computational thinking. A gap was observed in the treatment of linear systems in textbooks, specifically in the absence of the matrix scaling method. As a result, we wrote, based on the Gauss-Jordan method, a flowchart to assist students in this process, in addition to two teaching materials: one for the teacher and the other for the student.

Keywords: Computational Thinking. Gauss-Jordan method. Algorithms. Flowcharts.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AVAMEC	Ambiente Virtual de Aprendizagem do Ministério da Educação
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
OCDE	Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico
PC	Pensamento Computacional
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PNED	Política Nacional de Educação Digital
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
STEAM	Ciência, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Resolver problemas, desde os mais simples até os mais complexos, é uma das tarefas de um matemático. Reduzir sua complexidade dividindo-os em partes, extrair os dados relevantes, reconhecer padrões e criar uma estrutura lógica são alguns caminhos para resolver um problema. Esses são exemplos das habilidades que cientistas da computação desenvolvem ao resolver problemas em sua área, e a partir de pesquisas, Wing (WING, J. M., 2006) reuniu essas habilidades no que ela chamou de Pensamento Computacional (PC).

Esse tema é discutido por diversos cientistas da computação e educadores (WING, J. M., 2006; WOLFRAM, 2016; BRACKMANN, 2017; BLIKSTEIN, 2008). Apesar de ser apresentado por Wing, a resolução de problemas utilizando habilidades computacionais já despertava interesse e era motivo de pesquisas por parte do educador Seymour Papert (PAPERT; SOLOMON, 1971; PAPERT, 1980), porém exclusivamente para a educação de crianças.

Leis e documentos norteadores da educação básica atuais trazem em seus textos a inclusão do pensamento computacional. Um exemplo é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que descreve que o pensamento computacional "envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos" (BRASIL, M. d. E., 2018, p474). Já nos de cursos superiores, esse tema é trabalhado tanto na formação inicial quanto na formação continuada de professores (BRASIL, C. N. d. E., 2019). Com a relevância do tema e crescente destaque nos documentos educacionais, surge uma questão principal: como abordar esse método de resolução de problemas ou utilizá-lo em sala de aula?

No contexto da educação básica, é comum encontrar estudantes que possuem aversão a matemática. Muitos questionam a relevância e aplicação dos conteúdos matemáticos para suas vidas, como se apenas isso justificasse o estudo. No entanto, a matemática vai além de suas aplicações; ela contribui para a estruturação do pensamento, no desenvolvimento do raciocínio lógico e no desenvolvimento de habilidades para enfrentar desafios da nossa sociedade.

Uma maneira de desenvolver esses aspectos é por meio da resolução de problemas contextualizados, o que, além disso, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os estudantes. Ao envolver-se com situações problemas, os estudantes podem atribuir significado aos conceitos matemáticos, além de desenvolver habilidades que assemelham-se ao método do pensamento computacional.

No entanto, mesmo com um ensino baseado na resolução de problemas, muitos estudantes enfrentam dificuldades ao manipular expressões algébricas e equações, frequentemente devido à falta de uma base sólida ou à dificuldade em lidar com expressões algébricas. Esse desafio torna-se particularmente evidente ao abordar sistemas lineares, principalmente quando trata-se de resolver sistemas de dimensões superiores ao tradicional 2x2.

Um estudo realizado por Machado e Dutra (2022) mostrou que, diante dos desafios enfrentados no ensino de sistemas lineares de equações do 1° grau, a aplicação dos pilares do Pensamento Computacional revelou-se uma abordagem promissora. Com a análise da Prova Paraná, onde os estudantes demonstraram um desempenho insatisfatório, o PC passou a ser abordado e os estudantes apresentaram 90% de acertos na resolução de problemas de menor complexidade e 71% de acertos nos de maior. O estudo foi realizado com estudantes do 1° ano do ensino médio em uma escola localizada ao noroeste do Paraná.

Com o objetivo de contribuir para minimizar essas dificuldades apresentadas pelos estudantes do ensino médio, esta pesquisa envolve um estudo para compreender o que é pensamento computacional e como se espera que ele seja abordado na educação básica, em especial no ensino médio, explorando leis e documentos educacionais a fim de entender se há informações sobre o pensamento computacional na formação inicial e continuada dos professores. Além disso, desenvolveu-se uma investigação sobre o ensino de sistema de equações lineares a partir dos livros didáticos, em especial como é encontrada a sua solução.

Após a pesquisa e investigação nos livros do ensino médio, identificou-se uma lacuna no ensino da resolução de sistemas de equações lineares. Com o intuito de complementar os materiais didáticos disponíveis para os professores, iniciou-se o desenvolvimento de um material didático focado na resolução de sistemas, onde sugere-se o método de Gauss-Jordan como opção para a solução de um sistema. Esse material consiste em duas apostilas: uma direcionada ao professor, contendo uma proposta de 11 planos de aula, e outra destinada aos estudantes. Os anexos deste trabalho apresentam esse material didático.

Assim, o trabalho apresenta-se da seguinte forma: o segundo capítulo explora o conceito de pensamento computacional e a importância do desenvolvimento de suas habilidades para a solução de problemas. Além disso, apresentamos como a BNCC aborda o método e investigamos como os programas de graduação e de formação continuada de professores estão inserindo esse tema em seus currículos. Também são discutidos desafios associados ao ensino médio e examina-se como a metodologia de resolução de problemas contribui para ensino da matemática.

O terceiro capítulo aborda uma investigação nos livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), onde identificamos lacunas no ensino da resolução de sistemas de equações lineares. O quarto capítulo explica as fases envolvidas na criação do produto educacional. O quinto capítulo encerra o trabalho com as considerações finais. E por fim, nos anexos, encontram-se as apostilas desenvolvidas para professores e estudantes.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta-se em três seções. Na primeira seção (2.1), introduzimos o PC, com base nas definições dos principais autores do método onde destacamos que não há a necessidade do uso de um computador, uma vez que não será tratado nesse trabalho de letramento digital e programação. Também demonstramos como as habilidades desse método podem ser utilizadas para resolver problemas matemáticos.

Na segunda seção (2.2), descrevemos como o PC foi incluído na educação básica brasileira a partir de leis e documentos oficiais.

Por fim, na terceira seção (2.3) apresentamos a metodologia de resolução de problemas utilizada para o ensino da Matemática.

2.1 PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Problemas complexos sempre desafiaram diversas áreas do conhecimento, levando a humanidade a enfrentar situações imprevistas. Essas situações abriram portas para novas descobertas, que contribuíram para a construção do conhecimento humano e do avanço científico e tecnológico. Atualmente, é possível utilizar técnicas matemáticas e computacionais cada vez mais criativas e sofisticadas, seja para o sequenciamento do DNA, simulações nas engenharias, análise de grandes conjuntos de dados nas áreas sociais ou nos mais variados contextos (STADEN, 1979; MESSING; CREA; SEEBURG, 1981; UNIVERSITY, s.d.).

Fragmentar um problema difícil, reconhecer padrões, fazer abstrações e criar algoritmos são habilidades utilizadas por cientistas da computação. Com isso, é possível identificar, orientar e contribuir para o desenvolvimento de soluções dos desafios. Juntas, essas habilidades compõem um método para resolver problemas chamado de *Pensamento Computacional* (PC). Esse termo ganhou destaque por meio da pesquisadora Jeannette Wing (2006), mas como pode ser visto a seguir, foi a partir de pesquisas na área educacional que ele surgiu.

A origem do termo é atribuída ao matemático e teórico da aprendizagem Seymour Papert, pois em sua obra *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas* (1980), traduzida para o português como “LOGO: computadores e educação”, ele introduziu a expressão “pensar como um computador”. No campo educacional, Papert dedicou-se a pesquisas para compreender o uso de computadores na educação de crianças. Ele elaborou a teoria do construcionismo a partir das perspectivas trazidas a ele pela Teoria Construtivista de Piaget.

Não há uma definição de Construcionismo, embora entenda-se que nele o processo de aprendizagem ocorre com o estudante construindo o seu conhecimento a partir dos seus interesses, pois, com o seu envolvimento, a aprendizagem torna-se mais significativa. Com ideias para o uso das tecnologias, Papert entendia que “a programação e a depuração de computadores podem fornecer às crianças uma maneira de pensar sobre seu próprio pensamento e aprender sobre seu próprio aprendizado" (MIT, 2016, tradução nossa). Além disso, Papert foi responsável pelo desenvolvimento da linguagem de programação LOGO, através da qual é possível criar ambientes de aprendizagem, colaborando para a transformação na maneira como a educação poderia ser praticada.

Com o pensamento voltado para a resolução de problemas, o matemático e professor George Pólya, realizou importantes contribuições em seu livro A Arte de Resolver Problemas (PÓLYA, 1945), onde apresentou métodos para solucionar questões matemáticas que consistiam em percorrer uma lista mental de perguntas como: quais seriam os dados do problema, se existem problemas correlatos, se é possível reformular o problema, entre outros itens. Em um de seus ambientes de aprendizagem, intitulado "A Geometria da Tartaruga", Papert se apoiava em casos especiais das sugestões de Pólya, pois via uma importante forma de introduzir e relacionar as ideias de ambos.

É visível a diferença entre os métodos, pois os de Pólya não necessitavam de recursos digitais e eram voltados para problemas matemáticos, ao passo que, para Papert, a tecnologia constituía um elemento fundamental de suas abordagens educacionais. Embora a aplicação prática desses métodos fosse tanto para questões educacionais ou para questões matemáticas e computacionais, as ideias de Papert e Pólya contribuíram para os estudos e o desenvolvimento do PC no decorrer dos anos.

A primeira aparição do termo "Pensamento Computacional" surgiu no artigo *Computational Thinking* (WING, J. M., 2006) publicado na revista *Communications of the ACM*, onde Wing define que esse "envolve a resolução de problemas, projeção de sistemas, e compreensão do comportamento humano, através da extração de conceitos fundamentais da ciência da computação" (2006, p. 33). Wing defende que esse pode ser pensado para além da ciência da computação. Não há uma definição única sobre o que é o PC e Wing continuou construindo sobre o método ao longo dos anos.

No seu artigo *Computational Thinking - Benefits Society* (WING, J. M., 2014), ela refere-se ao processo mental utilizado para estruturar um problema e apresentar suas resoluções de maneira que possam ser executadas por humanos ou máquinas. Embora o método pareça ser restrito ao campo da computação, muitos pesquisadores fora da ciência da computação o utilizam para auxiliar na resolução de seus problemas.

Wing (2011) também destaca que é possível, através do PC, identificar oportunidades para empregar a computação de maneiras inovadoras, envolvendo a utilização de estratégias computacionais, além de reformular problemas e sugerir novas perguntas que agora podem ser facilmente abordadas por meio da computação. Outras definições, que serão apresentadas a seguir, sobre o PC surgiram utilizando o computador como peça chave, embora não haja a necessidade de ser um especialista em computação.

Uma das vantagens desse método é a sua simplicidade, pois não precisa-se necessariamente saber interagir ou utilizar computadores para desenvolver habilidades para solucionar problemas. Para o cientista da computação Stephen Wolfram (2016), o Pensamento Computacional "consiste em formular coisas com suficiente clareza e de forma suficientemente sistemática para que se possa dizer a um computador como fazê-las" (2016, tradução nossa). Ainda é apontado no site da empresa *Wolfram Research* que "a ênfase é aprender a levar situações da vida real e abstratas — muitas vezes para programas — para que um computador possa calcular a resposta" (RESEARCH, s.d., tradução nossa). Embora reconheça-se a importância da tecnologia, o PC não pode ser reduzido ao uso de computadores ou ao nível de letramento digital e programação.

Segundo Brackmann (2017), o Pensamento Computacional "jamais pode ser confundido com a simples aptidão de manusear aplicativos em dispositivos eletrônicos (Alfabetismo Digital) ou uma forma de pensar de forma mecânica, limitando a criatividade da mente humana". Os recursos digitais são bem recebidos como apoio, mas não devem ser vistos como uma exigência para a utilização do método e desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas. Além do mais, sabe-se da falta de acesso aos recursos digitais, principalmente por populações carentes.

Consequentemente, outra vantagem do PC é a possibilidade desenvolver o pensar dos cientistas da computação sem o contato com o computador. Para que isso seja possível, dois conceitos são apresentados: plugado (*plugged*) e desplugado (*unplugged*). O ensino plugado têm à disposição os dispositivos tecnológicos para desenvolver a programação. Por outro lado, a aprendizagem pelo meio desplugado não necessita de computadores ou outros meios digitais, pois se dá através de atividades com materiais manipuláveis de fácil acesso, buscando motivar o interesse por aspectos da computação sem ensinar a programação.

Do mesmo modo que Papert pensava em um contexto escolar, Wing (2006) descreve que é fundamental que todas as pessoas desenvolvam habilidades utilizadas pelos cientistas da computação, as quais devem ser ensinadas às crianças paralelamente ao processo de alfabetização e o ensino inicial de aritmética. Como foi visto, para desenvolver essas habilidades não há necessidade de uma máquina, uma vez que o pensamento computacional não é sobre utilizar um computador. Em geral, ocorre um menor contato com o computador nas séries iniciais do ensino escolar, mas ainda assim é possível o desenvolvimento das habilidades do PC nas crianças.

Com a popularidade e comercialização deste método na área educacional, passou a ser discutido em vários países como poderia ser incluído nas grades curriculares do ensino básico e superior e quais seriam os seus benefícios. Tornou-se importante desenvolver o PC nos estudantes desde cedo, capacitando as futuras gerações independentemente do campo profissional, pois atualmente encontram-se computadores cada vez mais intuitivos e inteligências artificiais que são capazes de resolver problemas com grande eficiência em questão de segundos. Com a expansão do pensamento computacional, há a possibilidade de mesmo aqueles que não possuem especialização na área tecnológica fazerem uso desse tipo de procedimento.

Com o objetivo de expandir o PC para contribuir em diversas áreas, a Universidade Carnegie Mellon na Pensilvânia, vem, por meio de seu Centro de Pensamento Computacional, estudando como esse método pode ser utilizado na previsão de disseminação de doenças infecciosas, coordenação de socorro a vítimas de desastres naturais, otimização de transplantes de órgãos para salvar mais vidas e compreensão do impacto de políticas governamentais (UNIVERSITY, s.d.). Percebe-se a relevância desse método, pois auxilia a solucionar problemas reais e facilitar avanços e novas descobertas.

Assim sendo, é inegável a importância que o PC possui, tanto na esfera profissional quanto na educacional. Por isso, as habilidades devem ser desenvolvidas desde os anos iniciais da vida escolar e estimuladas ao longo do percurso formativo. Entende-se também a necessidade de professores com conhecimentos sobre esse método e currículos escolares construídos para incluir o PC. Diante das definições que surgiram, assume-se aqui nesse trabalho que o PC é uma maneira de resolver problemas de diversos aspectos, tendo como base as habilidades que cientistas da computação possuem e utilizam em seus trabalhos. Essas habilidades são chamadas de Pilares do Pensamento Computacional.

2.1.1 Pilares do Pensamento Computacional

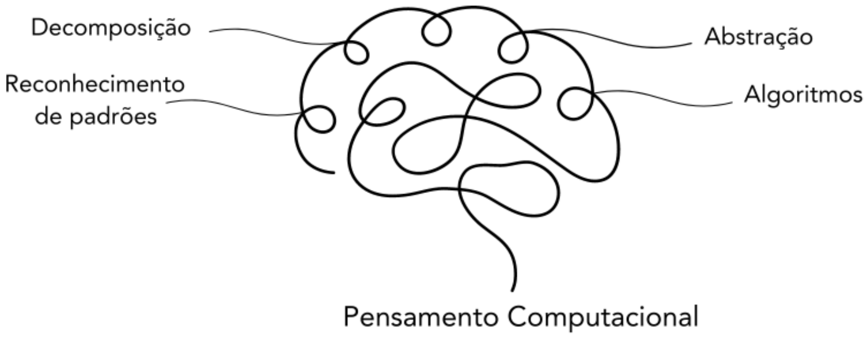
O primeiro passo para resolver um problema é entender o que de fato é um problema. De acordo com Kudlik e Rudnik (1980), conforme citado por Gil (1988, p.5), "um problema é uma situação, quantitativa ou não, para qual os indivíduos não conhecem meios ou caminhos óbvios para obtê-lo". Assim, o caminho que se percorre até a solução do problema depende de alguns fatores, como considerar um ponto de partida, as estratégias utilizadas, os conhecimentos prévios do assunto, a análise de soluções já encontradas por outros, os testes de hipóteses, o tempo disponível, a validação da solução, entre outros. A união desses fatores podem determinar o grau de dificuldade do problema a ser enfrentado.

Além do mais, é provável que de acordo com a dificuldade do problema haja um bloqueio para resolvê-lo. Para isso, Stacey e Groves (1999) sugerem entender o que está causando o bloqueio, afastar o pânico e tomar uma atitude fazendo algo. Essas sugestões parecem óbvias, mas a pessoa que está diante de um problema complexo pode ser levada a desistir por não saber como começar ou simplesmente medo de errar.

Com frequência o erro é visto como algo ruim. Porém, é interessante mudar a postura diante dele, acostumar-se que erros podem ocorrer nas tentativas e ao invés de apagá-lo deve-se tentar entender o que ocorreu, assim perde-se essa resistência e passa a vê-lo como parte do processo (PAPERT, 1980). Procurar e lidar com a correção de erros é uma habilidade comum para cientistas da computação e esse processo é chamado de debugar *(debugging)*. Outras habilidades usadas por eles também são úteis para a resolução de problemas.

O pensamento computacional é constituído por quatro habilidades: **decomposição**, **reconhecimento de padrões**, **abstração** e **algoritmos**. Juntas auxiliam na interpretação do problema, podendo reutilizar estratégias de problemas semelhantes e também desenvolver estratégias novas com uma lógica estruturada.

Figura 1 – Pilares do Pensamento Computacional



Fonte: Autoria própria.

A decomposição consiste em dividir o problema em partes menores, enquanto o reconhecimento de padrões permite identificar as semelhanças nos detalhes. A abstração, por sua vez, isola detalhes irrelevantes e concentra-se nas partes relevantes. Os algoritmos são os responsáveis por escrever a solução do problema em uma sequência de passos que podem ou não ser calculados por um computador. Entende-se que nem todo problema precise obrigatoriamente passar por todas as etapas, uma vez que elas são independentes entre si.

Pólya descreve etapas utilizadas ao resolver problemas matemáticos que se assemelham aos pilares do pensamento computacional. Para Pólya (1945, p. 4)

> Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

A diferença entre os pensamentos é apontada por Wolfram, onde descreve que "O pensamento matemático trata de formular coisas para que possamos lidar com elas matematicamente, quando isso for possível. O pensamento computacional é uma história muito maior e mais ampla, porque há muito mais coisas que podem ser tratadas computacionalmente" (2016, tradução nossa). A semelhança entre os dois pensamentos pode ser explicada devido ao PC basear-se tanto no pensamento matemático quanto no pensamento científico e da engenharia, como já havia apontado Wing (2011).

Para lidar matematicamente com os problemas, é fundamental que o problema faça sentido, seja para o mundo real ou não, e conhecer os significados das ferramentas a serem utilizadas. Por exemplo, é comum ouvir nas séries iniciais perguntas como "é adição ou multiplicação?" embora o estudante consiga executar os cálculos, essas operações só irão fazer sentido quando entenderem os seus significados, caso contrário se tornará só uma sequência de passos para obter um resultado.

Então, a partir do momento em que é possível compreender as aplicações dos conceitos e não apenas vê-los como fórmulas algébricas, consegue-se a liberdade de criar suas próprias soluções. Com a oportunidade de identificar erros e eliminar métodos que não são eficazes, o problema torna-se mais interessante, deixando de ser apenas a resolução de cálculos e possibilitando a criação de estratégias.

Além disso, é essencial trabalhar com a ideia de questionar os resultados, se é coerente com a situação apresentada e se obtém-se o mesmo resultado de outra maneira. Vale destacar também que, ao resolver um problema com base em um anterior, não se trata de uma simples repetição do que já foi feito. Isso pode significar que quem está resolvendo reconheceu algum detalhe e compreendeu que poderia utilizar a mesma estratégia novamente. Da mesma forma, é preciso ter cautela para que os exercícios não se tornem meras repetições. Deve-se encontrar problemas que fujam de modelos repetitivos ou de fixação, trazendo sempre que possível situações matemáticas com base na atualidade.

Cabe ressaltar a importância da leitura e escrita. Para Stacey e Groves, "uma leitura inicial cuidadosa reduz a probabilidade de uma compreensão incorreta e uma releitura ativa permite identificar interpretações errôneas ou informações que foram esquecidas" (p. 20 1999, tradução nossa). As anotações auxiliam na estruturação do pensamento, oferecendo a possibilidade de consultá-las sempre que surgirem dúvidas sobre onde deseja-se chegar. Além do mais, a elaboração escrita da resolução proporciona a outras pessoas, ao se depararem com situações semelhantes, a oportunidade de consultar essa solução e usá-la como referência para suas próprias questões.

Nas próximas subseções serão explorados detalhadamente cada pilar do PC, para isso serão utilizados problemas matemáticos, mais especificamente sobre Sistemas de Equações Lineares. Será utilizado uma linguagem onde autor e leitor assumirão o papel de quem irá realizar a ação solicitada no problema. Essa postura é sugerida por Morgado (2016) como estratégia para resolver problemas de Combinatória, mas que aqui será levada para problemas de Álgebra Linear.

2.1.1.1 Decomposição

Para Pólya (1945) se você não consegue resolver um problema, então encontre nele um problema mais fácil e resolva-o. O primeiro estágio do PC é a decomposição, que consiste justamente em quebrar um problema em partes menores, analisá-lo em detalhes e resolver cada pedaço construindo de maneira geral a solução do problema. Entretanto, não basta só decompor o problema, é necessário também entender de que forma cada parte pode contribuir para se chegar na conclusão e quais serão as decisões tomadas. Em geral, inicia-se atacando as partes mais trabalhosas do problema, para Morgado (2016) as dificuldades não devem ser adiadas.

A estratégia de decompor um problema em partes menores serve como ponto de partida e pode ser utilizada tanto em situações complexas quanto em situações simples do cotidiano. Segundo Wing (2006), por meio do pensamento computacional, tem-se a possibilidade de transformar um problema difícil em algo de fácil resolução ao separá-lo em pedaços menores. Desta forma, a partir da primeira leitura do problema e da compreensão do que é solicitado, a primeira atitude a ser tomada é criar subproblemas e identificar os elementos e a maneira de executar cada um deles. No problema a seguir, essas estratégias serão utilizadas.

Problema inicial: (FESP - Adaptado) Uma pessoa alimenta seu cão combinando o conteúdo de duas marcas de rações preparadas pelos fabricantes X e Y. A tabela abaixo discrimina a quantidade de unidades de vitaminas e de sais minerais em cada saco de ração e a quantidade mínima de unidades que o cão deve consumir.

Tabela 1 – Quantidade mínima de vitaminas e sais minerais

	Ração X	Ração Y	Mínimo
Vitaminas	40	20	200
Sais minerais	20	40	200

Fonte: FESP

Se o saco da ração X custa R$10,00 e o da Y, R$ 15,00, determine a quantidade inteira de cada saco a ser comprado de modo a minimizar os custos e satisfazer as quantidades mínimas requeridas.

Compreendendo o problema: O problema solicita a quantidade inteira de cada saco de ração a ser comprada, onde duas condições devem ser satisfeitas: atender à quantidade mínima de vitaminas e sais minerais e minimizar os gastos. Para isso, é fornecida uma tabela com as quantidades e os valores de cada saco de ração. À primeira vista, percebe-se que não é fácil abordar o problema de uma vez só. Portanto, vamos utilizar a decomposição e dividir o problemas em subproblemas. Inicialmente, buscaremos determinar a quantidade de sacos que atendem à condição inicial. Em seguida, encontraremos os valores correspondentes de forma inteira. Por fim, para a última condição, identificaremos as quantidades de sacos que resultam no menor custo possível.

Subproblema 1: Qual é a quantidade de sacos de ração para se ter a quantidade mínima de vitaminas e sais minerais desejada?

Nesse subproblema, nosso foco está na determinação da quantidade de sacos de ração, para isso vamos utilizar as informações que constam na tabela. Nesse sentido, as incógnitas são as quantidades de sacos de ração a serem adquiridas de cada fornecedor. Então, vamos criar uma equação para cada linha da tabela. Denotaremos por x a quantidade de sacos a serem adquiridos da Ração X e por y a quantidade de sacos a serem adquiridos da Ração Y. Dessa forma, a partir da primeira linha, obtemos a equação $40x + 20y = 200$, enquanto a segunda linha resulta na equação $20x + 40y = 200$. Como queremos que as duas equações sejam satisfeitas simultaneamente, temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 40x & + & 20y & = & 200 \\ 20x & + & 40y & = & 200 \end{cases}. \tag{1}$$

Podemos resolver o sistema por vários métodos, como, por exemplo, a adição e a substituição. Neste caso, optaremos por utilizar a adição. Para isso, começaremos multiplicando o sistema por $\frac{1}{20}$ para obter um sistema equivalente com valores menores.

$$\begin{cases} \frac{40x}{20} & + & \frac{20y}{20} & = & \frac{200}{20} \\ \\ \frac{20x}{20} & + & \frac{40y}{20} & = & \frac{200}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x & + & y & = & 10 \\ x & + & 2y & = & 10 \end{cases}. \tag{2}$$

Vamos multiplicar a equação $x - 2y = 10$ por -2 para conseguir eliminar x.

$$\begin{cases} 2x & + & y & = & 10 & (i) \\ -2x & + & -4y & = & -20 & (ii) \end{cases}.$$

Agora, somando a equação (i) com a equação (ii), temos:

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 10 \\ -2x & + & -4y & = & -20 \\ \hline & & -3y & = & -10 \end{array}$$

Resolvendo a equação $-3y = -10$,

$$\frac{-3y}{-3} = \frac{-10}{-3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10}{3}.$$

Substituindo o valor de y na equação $2x + y = 10$, obtemos

$$2x + \frac{10}{3} = 10 \Rightarrow$$

$$2x + \frac{10}{3} - \frac{10}{3} = 10 - \frac{10}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{\frac{20}{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10}{3}.$$

Concluímos que para se obter exatamente a quantidade mínima devemos ter $x = y = \frac{10}{3}$. Porém, a questão exige uma quantidade inteira de sacos, que não é o caso da quantidade x e y que encontramos. Por isso, vamos ao subproblema 2.

Subproblema 2: Qual é a quantidade inteira de cada saco que devemos comprar?

Encontramos no subproblema valores não inteiros. Temos que $\frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,6$, desta forma a quantidade mínima de sacos a ser comprada é 7. Vamos investigar quantos sacos de cada ração podemos comprar de maneira a satisfazer a quantidade mínima de vitaminas e sais minerais. Acompanhe a Tabela 2.

Tabela 2 – Cálculo das condições

(x, y)	Vitaminas	Sais minerais	Conclusão
(1, 6)	40 . 1 + 20 . 6 = 160	20 . 1 + 40 . 6 = 260	Não possui o mínimo de vitaminas
(2, 5)	40 . 2 + 20 . 5 = 180	20 . 2 + 40 . 5 = 240	Não possui o mínimo de vitaminas
(3, 4)	40 . 3 + 20. 4 = 200	20 . 3 + 40 . 4 = 220	Possui o mínimo
(4, 3)	40 . 4 + 20 . 3 = 220	20 . 4 + 40 . 3 = 200	Possui o mínimo
(5, 2)	40 . 5 + 20 . 2 = 240	20 . 5 + 40 . 2 = 180	Não possui o mínimo de sais minerais
(6, 1)	40 . 6 + 20 . 1 = 260	20 . 6 + 40 . 1 = 160	Não possui o mínimo de sais minerais

Fonte: Autoria própria.

A partir dos cálculos da tabela, observamos que é possível adquirir 3 sacos da ração X e 4 sacos da ração Y, ou então 4 sacos da ração X e 3 sacos da ração Y, uma vez que ambas as opções atendem às exigências mínimas de vitaminas e sais minerais. No entanto, o problema ainda quer saber a opção de menor custo. Portanto, vamos para a resolução do último subproblema.

Subproblema 3: Qual é a quantidade mínima de cada saco para se obter o menor custo?

O problema nos informa que o saco da ração X custa $R\$10,00$ e o saco da ração Y custa $R\$15,00$. Utilizando as informações do subproblema 2, temos que

$$\begin{aligned} (3,4) &\Rightarrow 3 \cdot 10 + 4 \cdot 15 &= R\$90,00 \\ (4,3) &\Rightarrow 4 \cdot 10 + 3 \cdot 15 &= R\$70,00 \end{aligned}$$

Portanto, podemos afirmar que a quantidade mínima de sacos necessária para minimizar os custos é de 4 para a ração X e 3 para a ração Y.

Resposta do problema principal: Deve-se comprar 4 sacos da ração do fornecedor X e 3 sacos da ração do fornecedor Y, gastando assim $R\$70,00$.

Pode-se notar que, uma vez que o problema foi dividido em partes menores, ficou mais simples resolvê-lo. Isso ocorre porque a decomposição permite uma análise detalhada de cada parte do problema e quando observado individualmente contribui para diminuir a complexidade inicial.

2.1.1.2 Reconhecimento de padrões

Identificar semelhanças ou repetições no comportamento de objetos é uma das habilidades essenciais para a prática da matemática. A vantagem é que os seres humanos possuem a habilidade de identificar padrões, seja na arte, em fenômenos físicos, estatísticos, entre outros. Embora seja algo habitual, pode parecer que seja algo fácil de identificar, ou um trabalho simples. Porém, em muitos casos é necessário um esforço maior para identificá-los.

O reconhecimento de padrões pode ser aplicado até mesmo na resolução de quebra-cabeças. Por meio dele, é possível categorizar as peças do quebra-cabeça em diversos grupos, levando em consideração características como cor, bordas e formato. Essa organização facilita o encaixe das peças nos lugares apropriados. A ideia de classificar os objetos por suas características ou classes é o que define o reconhecimento de padrões.

Além da classificação de objetos, segundo Brackmann (2017, p.36) "o Reconhecimento de Padrões é uma forma de resolver problemas rapidamente fazendo uso de soluções previamente definidas em outros problemas e com base em experiências anteriores.". A partir da classificação e identificação da estrutura dos dados do problema, é possível tomar decisões.

Uma equação linear que possui apenas duas incógnitas representa uma reta no plano. Vamos analisar sistemas 2x2 e observar o que acontece com as retas de acordo com as soluções do sistema.

Sistema 1:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}. \tag{3}$$

Resolvendo o sistema por escalonamento, obtemos a seguinte matriz:

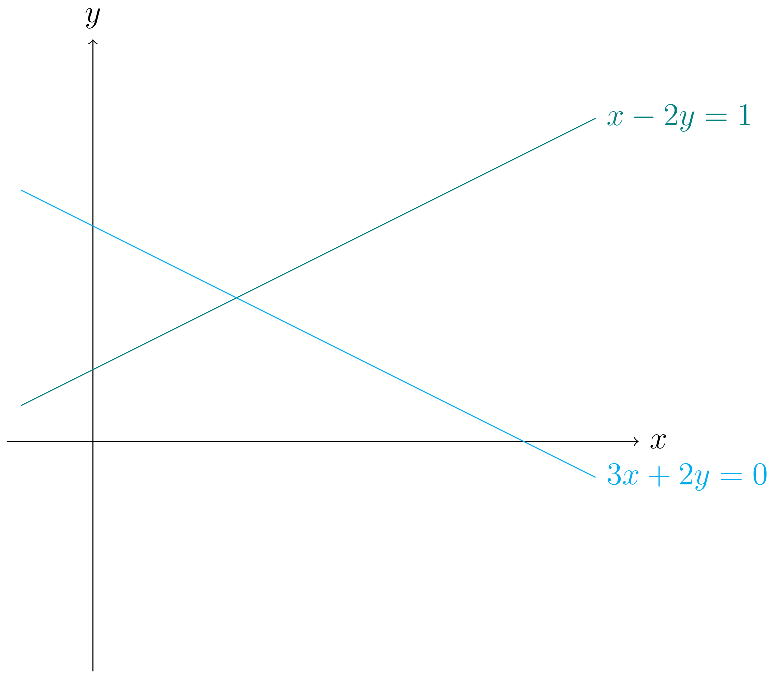
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema apresenta uma única solução $(3, 1)$. Essas duas equações representam as seguintes retas concorrentes:

O ponto onde as duas retas se intersectam é o ponto $(3, 1)$, que é a solução do sistema. Nesse caso, dizemos que o sistema é **consistente** e possui **solução única**!

Sistema 2:

Figura 2 – Sistema 1: Retas Concorrentes



Fonte: Autoria própria.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}. \tag{4}$$

Escalonando a matriz ampliada, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

A última linha da matriz escalonada ficou com todos os seus elementos nulos. Quando isso ocorre, temos apenas a equação $x - 2y = 1$, ou seja, a solução do sistema é formada por todos os pontos que pertencem a reta $y = -\frac{1-x}{2}$.

Graficamente, temos:

Como temos duas retas coincidentes, dizemos que o sistema é **consistente** e possui **infinitas soluções**!

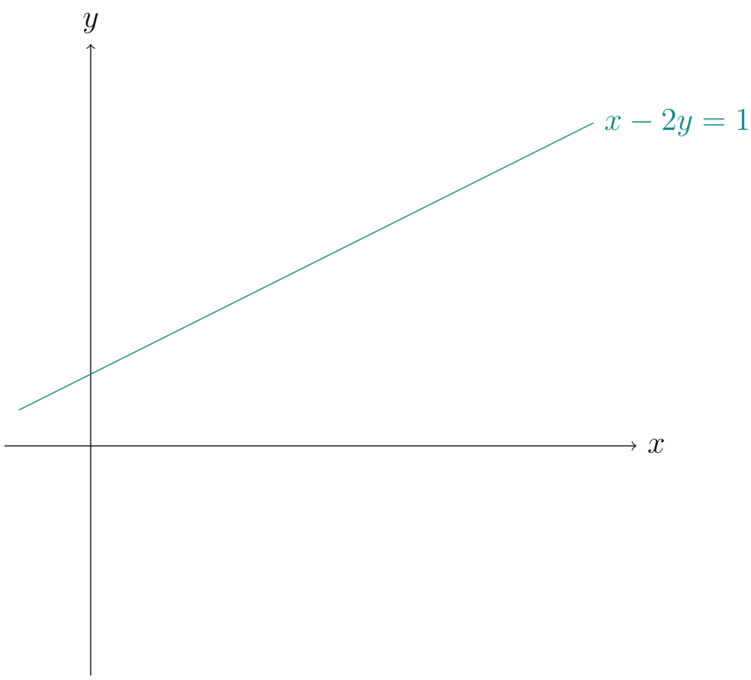
Sistema 3:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}. \tag{5}$$

Nesse sistema, escalonando a matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Figura 3 – Sistema 2: Retas Coincidentes

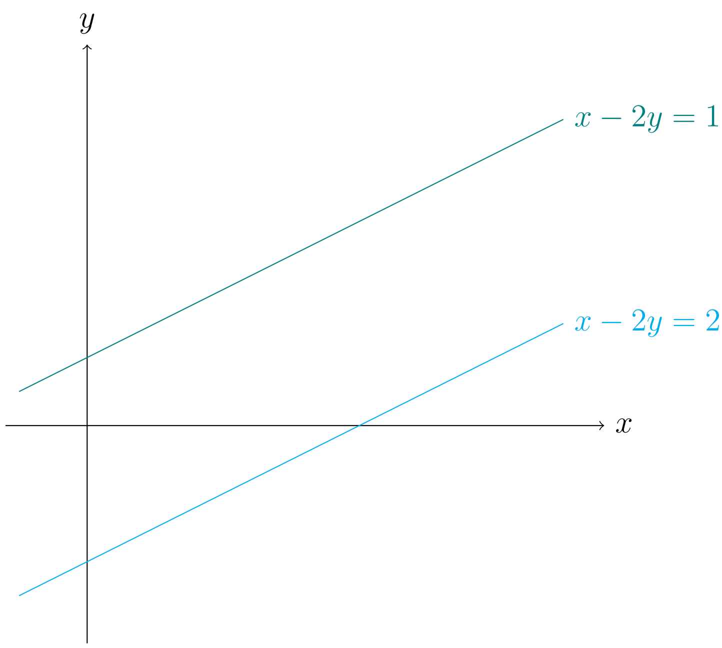


Fonte: Autoria própria.

Obtemos $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \Rightarrow 0 = 1$, o que é um absurdo. Podemos concluir que não existem valores para x e y capazes de satisfazer as duas equações do sistema.

O sistema não possui solução e as retas são paralelas como podemos observar na figura 4. Dizemos que o sistema é **inconsistente** e **não possui soluções**!

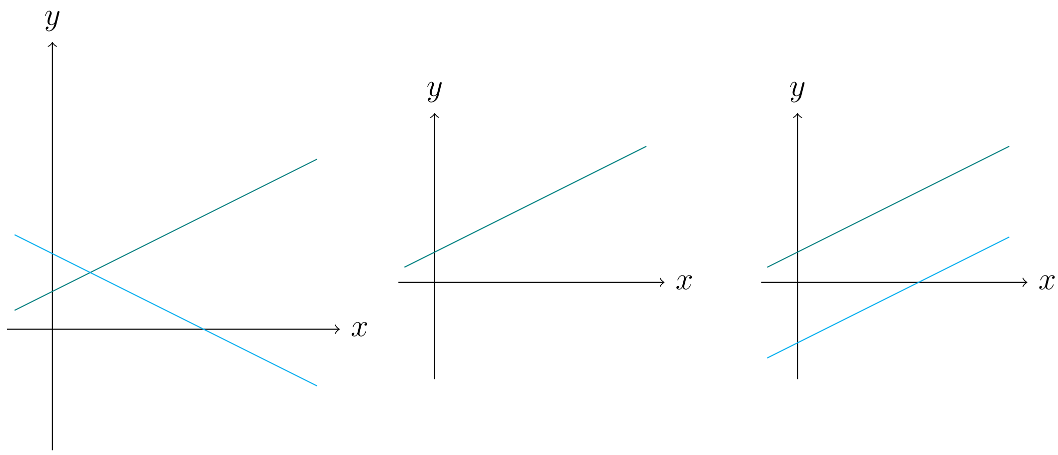
Figura 4 – Sistema 3: Retas Paralelas



Fonte: Autoria própria.

O reconhecimento de padrões permite criar uma generalização das soluções de um sistema 2x2 com base nas características observadas. Assim, existem três possibilidades: o sistema é consistente (podendo ter única solução ou infinitas soluções) ou é inconsistente (não possui soluções). As soluções dos sistemas com duas equações e duas incógnitas podem ser classificadas de acordo com as posições das retas no plano.

Figura 5 – Posições das retas no plano



Fonte: Autoria própria

2.1.1.3 Abstração

Ao deparar-se com um problema complexo, muitas vezes é necessário concentrar-se apenas nas informações mais importantes, retirando partes ou características que não são relevantes para solucionar o problema. Atividades cotidianas simples requerem essas habilidades, como, por exemplo, realizar pesquisas em sites de busca na internet. Obtém-se os resultados mais eficazes ao selecionar palavras-chave que representam melhor os interesses.

Segundo Wing (2017, p. 8),

> a abstração é usada na definição de padrões, generalização de instâncias específicas e parametrização. É usado para deixar um objeto representar muitos. É usado para capturar propriedades essenciais comuns a um conjunto de objetos enquanto esconde distinções irrelevantes entre eles.

Simplificar o problema, tornando visível o essencial, é denominado no pensamento computacional como Abstração. Na matemática, a abstração é um bom suporte para compreender alguns conceitos. Ao iniciar os estudos nos anos iniciais da educação básica, é necessário fazer abstrações para o conceito de número, e logo após nos anos seguintes trabalhar utilizando letras para representar números. Seguindo, aparecem as funções, variáveis, e dados cada vez mais complexos, mostrando a importância do desenvolvimento de abstrações desde a base dos estudos.

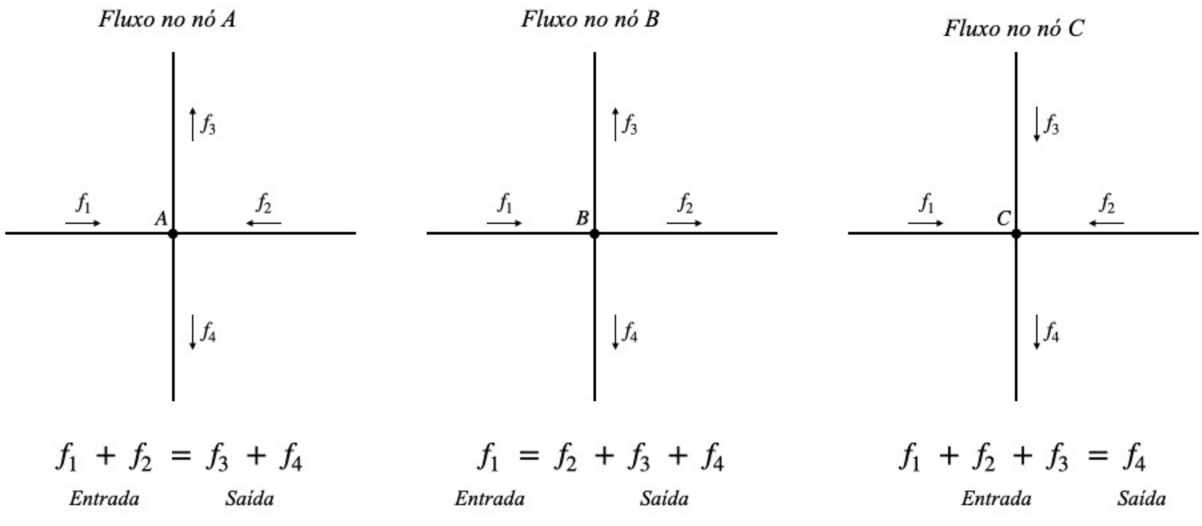
Os reflexos de não desenvolver essa habilidade desde cedo podem aparecer no futuro, especialmente ao ingressar em cursos de nível superior que envolvem disciplinas como álgebra, cálculo, análise, entre outras. Para Spinelli (2011, p. 19) "o ato de conhecer um objeto implica em vê-lo relacionado a outros, com significados diversos e que de alguma forma se aproximam." Uma das principais dificuldades reside em estabelecer significado e conexão com o mundo real, o que, por conseguinte, torna a abstração mais desafiadora.

De modo geral, a abstração permite desenvolver estratégias para solucionar problemas, pois ao enxergarmos as situações de maneira simplificada, torna-se mais fácil identificar ferramentas para resolvê-las. Dessa forma, podemos criar representações mais acessíveis do que desejamos solucionar. Para exemplificar uma abstração utilizando sistemas de equações lineares, será apresentado um problema sobre fluxo de redes, onde há conservação do fluxo.

Define-se uma rede como um conjunto finito de ramos (ou arcos) pelos quais o fluxo percorre. Em uma rede, existem pontos de encontro chamados nós ou vértices, e é nesses pontos que o fluxo se divide.

Para evitar acúmulos no meio, garantindo a livre circulação ao longo da rede, entende-se que, na conservação do fluxo, a quantidade de fluxo de entrada em cada nó é igual à quantidade de fluxo de saída. Indica-se uma direção e a quantidade que fluirá ao longo do ramo, como pode ser observado na Figura 6.

Figura 6 – Exemplos de fluxos de rede

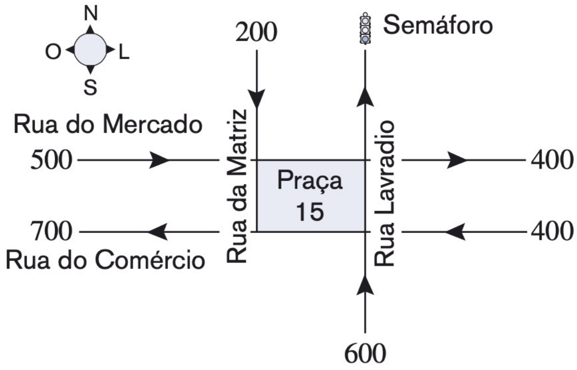


Fonte: Autoria própria

O problema de fluxo de tráfego a seguir foi extraído e adaptado do livro Álgebra Linear com Aplicações dos autores Anton e Rorres (2012, p.74).

Problema: Na Figura 7 pode-se ver o fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças, a Praça 15. Prevê-se a instalação de um semáforo computadorizado na saída norte da Rua Lavradio, e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam o complexo da praça. Todas as ruas são de mão única.

Figura 7 – Fluxo de tráfego

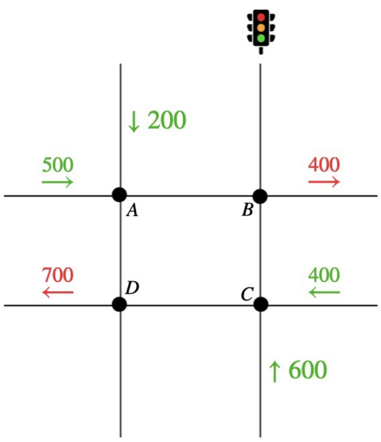


Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 75)

a) O semáforo deveria deixar passar quantos veículos por hora para garantir que o número médio de veículos por hora que entra no complexo seja igual ao número médio de veículos que sai do complexo?

Resolução do item a: Para descobrir quantos veículos o semáforo deveria deixar passar, precisamos saber quantos veículos estão entrando na região e quantos veículos já estão saindo. Para isso, vamos analisar as informações que a questão forneceu.

Figura 8 – Entrada e saída de veículos



Fonte: Autoria própria

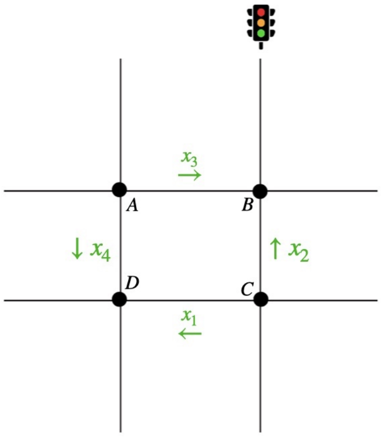
Como mostra na Figura 8, em verde temos a entrada de veículos $(500 + 400 + 600 + 200 = 1700)$ e em vermelho a saída $(700 + 400 = 1100)$. Vimos que a quantidade de entrada deve ser igual a quantidade de saída. Desta forma, pelo semáforo devem passar 600 veículos por hora.

b) Supondo que o semáforo tenha sido ajustado para equilibrar o fluxo total para dentro e para fora do complexo da praça, o que pode ser dito sobre o número médio de veículos por hora que circulará pelas ruas que circundam o complexo?

Resolução do item b:

Agora estamos interessados em saber o que acontece ao redor da praça, para isso vamos analisar o fluxo de entrada nessas vias entre os nós A, B, C e D.

Figura 9 – Fluxo em torno da Praça



Fonte: Autoria própria

Sabendo que o fluxo de entrada deve ser igual ao de saída, cada nó formará uma equação:

Nó A: $x_4 + x_3 = 500 + 200 \quad \Rightarrow \quad x_4 + x_3 = 700.$

Nó B: $x_2 + x_3 = 400.$

Nó C: $x_1 + x_2 = 600 + 400 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 1000.$

Nó D: $x_1 + x_4 = 700.$

Com essas equações montamos o sistema:

$$\begin{cases} \phantom{x_1 + x_2 +{}} x_3 + x_4 = 700 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} = 1000 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3+x_4} = 1000 \\ x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} + x_4 = 700 \end{cases}. \tag{6}$$

Escrevendo o sistema na sua forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 1000 \\ 1000 \\ 700 \end{bmatrix}.$$

Com a matriz ampliada $[A \mid b]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 700 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1000 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1000 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 700 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Ao escalonar a matriz ampliada, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 700 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_1 &= 700 - t \\ x_2 &= 300 + t \\ x_3 &= 700 - t \\ x_4 &= t. \end{aligned}$$

Temos x_4 como uma variável livre, desta forma assumiremos $x_4 = t$. Agora, para interpretar o resultado encontrado, precisamos achar quais valores t pode assumir.

Os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4 não podem ser negativos, pois nessa situação mostraria um fluxo contrário e como as ruas são de mão única, não pode ocorrer. Desta forma, como $0 \leq x_1 \leq 700$ concluímos que t pode ser no máximo 700, ou seja, $0 \leq t \leq 700$. Com isso, temos que o fluxo médio ao longo das vias ficará entre

$$\begin{gathered} 0 \leq x_1 \leq 700 \\ 300 \leq x_2 \leq 1000 \\ 0 \leq x_3 \leq 700 \\ 0 \leq x_4 \leq 700. \end{gathered}$$

O processo de abstração contribuiu para filtrar informações irrelevantes, permitindo assim concentrar-se na essência do problema: a relação entre o sentido das ruas e o tráfego de veículos. Isso resultou na formulação de equações lineares que geraram um sistema, onde os coeficientes foram utilizados para construir a matriz ampliada e resolver o sistema por meio de escalonamento.

2.1.1.4 Algoritmo

Ada Lovelace, matemática e escritora que viveu no Reino Unido entre os anos de 1815 e 1852, dedicou-se aos estudos da “Máquina Analítica”, criada pelo matemático e inventor Charles Babbage. Ao reconhecer o potencial desta máquina para realizar uma série complexa de operações matemáticas, Ada desenvolveu um algoritmo capaz de calcular a Sequência de Bernoulli. Sua contribuição fez com que ficasse conhecida como a criadora do primeiro algoritmo, sendo pioneira na programação de computadores (REED; HEWITT, s.d.).

O termo "algoritmo" é amplamente utilizado na atualidade, principalmente quando trata-se de redes sociais, serviços de streaming, mecanismos de busca na internet e assim por diante. Porém, é comum que as pessoas associem imediatamente a ideia ao computador. Contudo, não é sempre necessário que um algoritmo dependa de um computador; ele requer apenas um agente, seja humano ou máquina, capaz de compreendê-lo e implementá-lo. A seguir, serão apresentadas três definições de algoritmo de diferentes autores, que embora tenham variações convergem para alguns princípios fundamentais.

Para Ferrari e Cechinel (2008, p.15) um algoritmo é "uma sequência finita de passos (instruções) para resolver um determinado problema", destacando que essa sequência estabelece um padrão de comportamento a ser seguido para alcançar um resultado.

Moreira (2011, p.4) enfatiza que um algoritmo é "um conjunto finito de instruções que, se executadas, permitem a manipulação de um conjunto finito de dados de entrada para produzir um conjunto finito de dados de saída, dentro de um tempo finito". Salete Buffoni (2003, p.11) complementa essa perspectiva ao descrever um algoritmo como "uma sequência lógica de ações a serem executadas para se realizar uma determinada tarefa".

Em conjunto, essas definições ressaltam a ideia de que um algoritmo é uma série de passos bem definidos e lógicos que orientam a resolução de problemas ou a execução de tarefas de maneira eficaz e precisa. Considerando as definições encontradas na literatura e o emprego de algoritmos na resolução de problemas, é justificável que os algoritmos tornem-se parte essencial dos pilares do PC, sendo, possivelmente, o mais relevante deles, pois os algoritmos englobam a decomposição, o reconhecimento de padrões e a abstração.

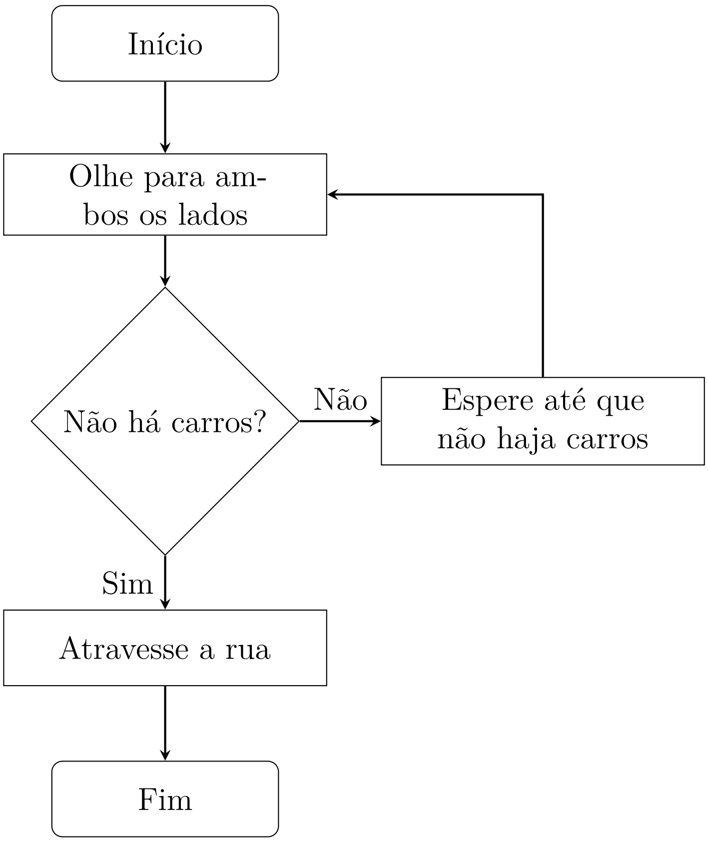
Há três formas de algoritmos mais utilizadas: a descrição narrativa, o fluxograma e o pseudocódigo. A descrição narrativa envolve a escrita de passos em uma linguagem materna, como o português. Embora não exija a aprendizagem de novos conceitos, a utilização da linguagem natural pode resultar em interpretações variadas, que pode gerar erros ao colocá-lo em um programa (ASCENCIO; CAMPOS, 2008). Um exemplo de descrição narrativa pode ser vista para descrever as situações mais simples do cotidiano como, por exemplo, atravessar a rua em segurança, como pode ser visto a seguir.

1. Olhar para os dois lados da rua;
   - Olhe ao redor para identificar uma faixa de pedestres próxima.
   - Vire-se na direção da faixa de pedestres.
   - Olhe para os dois lados da rua e observe o tráfego vindo da esquerda e da direita.

2. Verifique o tráfego;
   - Se não estiver vindo nenhum carro de nenhum dos lados OU se os carros que estiverem vindo pararem para permitir a travessia dos pedestres,
   - Então continue para o próximo passo.
3. Atravessar a rua;
   - Com cuidado e observando constantemente o tráfego, inicie a travessia da rua na faixa de pedestres.
4. Continuar observando o tráfego;
   - Enquanto atravessa a rua, continue observando o tráfego em ambos os lados. Esteja preparado para parar e esperar, se necessário.
5. Concluir a travessia;
   - Ao chegar com segurança ao lado oposto da rua, certifique-se de estar completamente fora da faixa de pedestres e continue seu caminho com segurança. Fim do Algoritmo.

Esse algoritmo pode ser escrito por meio de um fluxograma, como na Figura 10.

Figura 10 – Fluxograma: Atravessar a rua



O fluxograma, por sua vez, utiliza uma representação gráfica de passos com símbolos predefinidos. A visualização gráfica, ao invés de escrita, apresenta uma facilidade para a sua compreensão, porém há a necessidade de aprender a simbologia dos fluxogramas e pode gerar um algoritmo que não contenha detalhes suficientes (ASCENCIO; CAMPOS, 2008).

Por fim, o pseudocódigo consiste na descrição de passos com base em regras predefinidas, substituindo símbolos gráficos por termos da linguagem de programação. Com isso é possível realizar a tradução para qualquer linguagem de programação, embora exija o aprendizado das regras do pseudocódigo (ASCENCIO; CAMPOS, 2008). O mesmo algoritmo para atravessar a rua foi escrito utilizando a linguagem *Python* e pode ser visto na Figura 11.

Figura 11 – Algoritmo escrito em Python

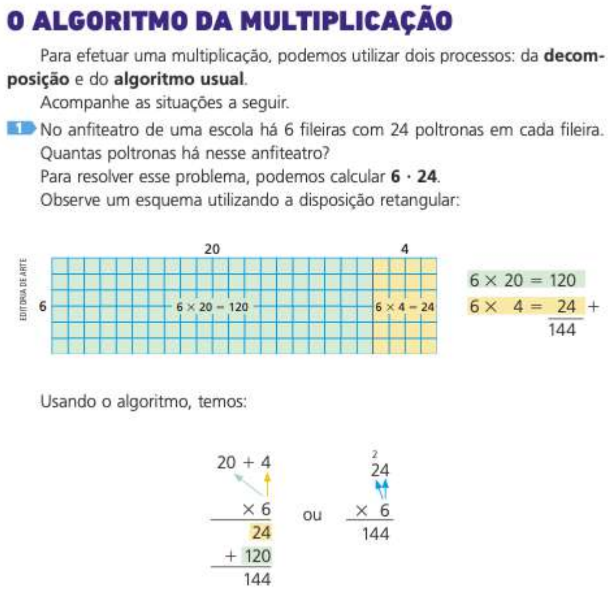
```python
import time

def observar_carros():
    carros_direita = input("Está vindo carros da direita? (sim/nao): ").lower()
    carros_esquerda = input("Está vindo carros da esquerda? (sim/nao): ").lower()
    return carros_direita, carros_esquerda

def atravessar_rua():
    print("Você está na faixa de pedestres.")
    resposta = input("É seguro atravessar? Digite 'sim' para atravessar ou 'nao' para esperar: ").lower()

    if resposta == "sim":
        print("Você está atravessando a rua...")
        time.sleep(3)  # Simulando o tempo de travessia
        print("Você atravessou com segurança.")
    elif resposta == "nao":
        carros_direita, carros_esquerda = observar_carros()
        if carros_direita == "sim" or carros_esquerda == "sim":
            print("Você decidiu esperar. Observando o tráfego...")
            time.sleep(2)  # Simulando o tempo de espera
            atravessar_rua()  # Chama recursivamente a função para continuar esperando ou atravessar quando desejado
        else:
            print("Parece seguro atravessar agora.")
            atravessar_rua()
    else:
        print("Por favor, responda com 'sim' ou 'nao'.")
        atravessar_rua()  # Chama recursivamente a função se a entrada não for reconhecida

# Início do programa
print("Você está em uma rua e deseja atravessar na faixa de pedestres.")
observar_carros()
atravessar_rua()
```

Fonte: Autoria própria

Além de situações corriqueiras do dia a dia, os algoritmos são utilizados, por exemplo, em sala de aula logo no início da vida escolar. Há exemplos, como o processo de multiplicação e divisão, que podem ser considerados alguns dos primeiros algoritmos matemáticos que os alunos realizam, mesmo sem reconhecê-los como tal. Os livros didáticos já trazem esse termo, como pode ser visto na Figura 12.

Os algoritmos são utilizados com frequência na execução de cálculos matemáticos. Por exemplo, foi abordada a resolução de sistemas de equações lineares 2x2 por meio de métodos de adição e substituição. No entanto, ao estudar álgebra linear e suas aplicações, nos deparamos com sistemas mais extensos que demandam métodos mais eficientes, inclusive executáveis por computadores.

Figura 12 – Algoritmo da multiplicação


O ALGORITMO DA MULTIPLICAÇÃO

Para efetuar uma multiplicação, podemos utilizar dois processos: da **decomposição** e do **algoritmo usual**.

Acompanhe as situações a seguir.

1 No anfiteatro de uma escola há 6 fileiras com 24 poltronas em cada fileira. Quantas poltronas há nesse anfiteatro?

Para resolver esse problema, podemos calcular **6 · 24**.

Observe um esquema utilizando a disposição retangular:

6 × 20 = 120
6 × 4 = 24 +
144

Usando o algoritmo, temos:

20 + 4
× 6
24
+ 120
144

ou

2
24
× 6
144

Giovani (2022, p.50)

Uma técnica amplamente utilizada em sistemas de equações lineares é a eliminação de Gauss-Jordan, assim denominada em homenagem aos matemáticos Karl Friedrich Gauss e Wilhelm Jordan. Este método consiste em representar o sistema na forma matricial e utilizar a matriz ampliada para realizar operações elementares sobre suas linhas, visando simplificar e resolver o sistema de forma eficiente.

Um sistema linear de m equação e n incógnitas, em geral, é apresentado da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}. \tag{8}$$

Porém, pode-se também representá-lo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Desta forma, temos $A \cdot x = b$, onde A é a matriz dos coeficientes, x a matriz das incógnitas e b a matriz dos termos independentes. Para escrever a matriz ampliada do sistema utilizamos a matriz A e a matriz b, assim

$$[\ A \mid b\ ] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}. \tag{10}$$

As operações elementares que serão feitas sobre as linhas da matriz são definidas da seguinte forma:

Definição 2.1.1 *São três as operações elementares sobre as linha de uma matriz:*

1. *Permutar duas linhas* ($L_i \leftrightarrow L_j$)*;*

2. *Multiplicar uma linha por algum escalar* α *real diferente de zero* ($L_i \leftarrow \alpha \cdot L_i$)*;*

3. *Somar uma linha com o produto de outra* ($L_i \leftarrow L_i + \alpha \cdot L_j$)*.*

Quando realizamos operações elementares sobre as linhas da matriz, podemos deixá-la na **forma escada**. Para que uma matriz esteja na sua forma escada, assumiremos a definição a seguir de Leon (1998, p.12).

Definição 2.1.2 *Uma matriz está na* ***forma escada*** *se:*

i. *o primeiro elemento não-nulo (pivô) de cada linha é 1;*

ii. *se a linha k não consiste apenas em zeros, o número de zeros no início da linha k+1 é maior do que o número de zeros no início da linha k;*

iii. *se existirem linhas com todos os elementos iguais a zero, elas ficam abaixo de todas as linhas não-nulas.*

Se continuarmos com as operações elementares até que o primeiro elemento não-nulo de cada linha seja o único elemento diferente de zero na sua coluna, dizemos que a matriz está na **forma escada reduzida**, ou simplesmente na sua **forma escalonada**.

A partir das definições apresentadas, podemos observar que para escalonar uma matriz devemos seguir uma sequência lógica de passos. Assim, podemos descrever o método de Gauss-Jordan por meio de um algoritmo escrito em descrição narrativa e por fluxograma. Seguiu-se o método apresentado por Ascencio e Campos (2008, p.4) para a escrita de algoritmos.

Algoritmo de escalonamento: Teste inicial – Se a matriz for nula, pare.

Passo 1 -

i. Localize a coluna mais à esquerda que não seja zero e, se necessário, troque a primeira linha com outra linha para trazer uma entrada não-nula (pivô) para a primeira linha desta coluna.

ii. Divida a primeira linha pelo valor do pivô para obter um pivô igual a 1.

iii. Realize operações elementares para zerar os elementos que estão abaixo do pivô encontrado no passo anterior.

Passo 2 -

i. Mova-se diagonalmente para a direita e para baixo, para a próxima linha e coluna.

ii. Se encontrar um elemento não-nulo, este será o próximo pivô. Normalize-o para 1 e use operações elementares para zerar todos os elementos abaixo dele.

iii. Se a coluna inteira for nula, não há pivô a ser estabelecido. Neste caso, continue movendo-se para a coluna seguinte até encontrar um pivô ou confirmar que todas as colunas restantes são nulas.

Passo 3 -

Continue este processo linha por linha, coluna por coluna, até que todos os pivôs estejam normalizados e todos os elementos abaixo dos pivôs estejam zerados. Quando esse processo terminar, a matriz que você obteve estará em forma escalonada. Agora, prossiga com as seguintes etapas para colocar a matriz em forma escada reduzida.

Passo 4 -

Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

Passo 5 -

Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

Passo 6 -

Ignore a linha que você acabou de usar e volte ao Passo 4 e repita o processo para a linha que está acima até concluir o escalonamento.

Vamos resolver o sistema a seguir utilizando o algoritmo descrito acima.

$$\begin{cases} x - y + z + w = 4 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - 2y + w = 1 \\ 5x + z - w = 5 \end{cases}. \tag{11}$$

Primeiro, vamos escrever a matriz ampliada do sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right].$$

Teste inicial: A matriz não é nula, seguimos com o algoritmo.

Passo 1

i. Localize a coluna mais à esquerda que não seja zero e, se necessário, troque a primeira linha com outra linha para trazer uma entrada não-nula (pivô) para a primeira linha desta coluna.

A coluna mais à esquerda é a coluna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

ii. Divida a primeira linha pelo valor do pivô para obter um pivô igual a 1.

Etapa não necessária, pois o pivô já é 1.

iii. Realize operações elementares para zerar os elementos que estão abaixo do pivô encontrado no passo anterior.

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{rrrrr} +\ 2 & -\ 1 & -\ 1 & 0 & -\ 3 \\ -\ 2 & +\ 2 & -\ 2 & -\ 2 & -\ 8 \\ \hline 0 & +\ 1 & -\ 3 & -\ 2 & -\ 11 \end{array}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{rrrrr} +\ 1 & -\ 2 & 0 & +\ 1 & +\ 1 \\ -\ 1 & +\ 1 & -\ 1 & -\ 1 & -\ 4 \\ \hline 0 & -\ 1 & -\ 1 & 0 & -\ 3 \end{array}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 5 \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{rrrrr} +\ 5 & 0 & +\ 1 & -\ 1 & +\ 5 \\ -\ 5 & +\ 5 & -\ 5 & -\ 5 & -\ 20 \\ \hline 0 & +\ 5 & -\ 4 & -\ 6 & -\ 15 \end{array}$$

Com essas operações, a matriz ficará desta forma:

$$\left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & \vdots & -11 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 5 & -4 & -6 & \vdots & -15 \end{array}\right]. \tag{12}$$

Passo 2

i. Mova-se diagonalmente para a direita e para baixo, para a próxima linha e coluna.

Vamos trabalhar com a segunda coluna

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

ii. Se encontrar um elemento não-nulo, este será o próximo pivô. Normalize-o para 1 e use operações elementares para zerar todos os elementos abaixo dele.

O pivô já é 1, vamos zerar os elementos abaixo dele:

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & - & 1 & - & 1 & & 0 & - & 3 \\ 0 & + & 1 & - & 3 & - & 2 & - & 11 \\ \hline 0 & & 0 & - & 4 & - & 2 & - & 14 \end{array}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 5 \cdot L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 5 & - & 4 & - & 6 & - & 15 \\ 0 & - & 5 & + & 15 & + & 10 & + & 55 \\ \hline 0 & & 0 & + & 11 & + & 4 & + & 40 \end{array}$$

A matriz ficará

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & \vdots & -11 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & \vdots & -14 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & \vdots & 40 \end{bmatrix}.$$

Passo 3 - Continue este processo linha por linha, coluna por coluna, até que todos os pivôs estejam normalizados e todos os elementos abaixo dos pivôs estejam zerados. Quando esse processo terminar, a matriz que você obteve estará em forma escalonada. Agora, prossiga com as seguintes etapas para colocar a matriz em forma escada reduzida.

Da terceira coluna, façamos:

- (ii) Divida a terceira linha pelo valor do pivô para obter um pivô igual a 1.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

$$L_3 \leftarrow \frac{-1}{4} \cdot L_3 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \quad 0 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{2}$$

Desta forma,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & \vdots & -11 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 11 & 4 & \vdots & 40 \end{bmatrix}.$$

- (iii) Realize operações elementares para zerar os elementos que estão abaixo do pivô encontrado no passo anterior.

$$L_4 \leftarrow L_4 - 11 \cdot L_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & + & 11 & + & 4 & + & 40 \\ 0 & 0 & - & 11 & - & \frac{11}{2} & - & \frac{77}{2} \\ \hline 0 & 0 & & 0 & - & \frac{3}{2} & + & \frac{3}{2} \end{array}$$

Realizando a operação $L_4 \leftarrow -\frac{2}{3} \cdot L_4$, temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & \vdots & -11 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Passo 4 - Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

Passo 5 - Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} \cdot L_4 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & + & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & & 0 & - & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & + & 1 & & 0 & + & 4 \end{array}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3 \cdot L_4 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 1 & - & 3 & - & 2 & - & 11 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 2 & - & 2 \\ \hline 0 & + & 1 & - & 3 & & 0 & - & 13 \end{array}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccccc} 1 & - & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 4 \\ 0 & & 0 & & 0 & - & 1 & + & 1 \\ \hline 1 & - & 1 & + & 1 & + & 0 & + & 5 \end{array}$$

Ignore a linha que você acabou de usar e volte ao Passo 4 e repita o processo para a linha que está acima até concluir o escalonamento.

Passo 4 - Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

Passo 5 - Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3 \cdot L_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} 0 & + & 1 & - & 3 & 0 & - & 13 \\ 0 & & 0 & + & 3 & 0 & + & 12 \\ \hline 0 & & 1 & & 0 & 0 & - & 1 \end{array}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} 1 & - & 1 & + & 1 & 0 & + & 5 \\ 0 & & 0 & - & 1 & 0 & - & 4 \\ \hline 1 & - & 1 & & 0 & 0 & + & 1 \end{array}$$

Ignore a linha que você acabou de usar e volte ao Passo 4 e repita o processo para a linha que está acima até concluir o escalonamento.

Passo 4 - Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

Passo 5 - Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & - & 1 & 0 & 0 & + & 1 \\ 0 & + & 1 & 0 & 0 & - & 1 \\ \hline 1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}$$

A matriz ficará na sua forma escada reduzida:

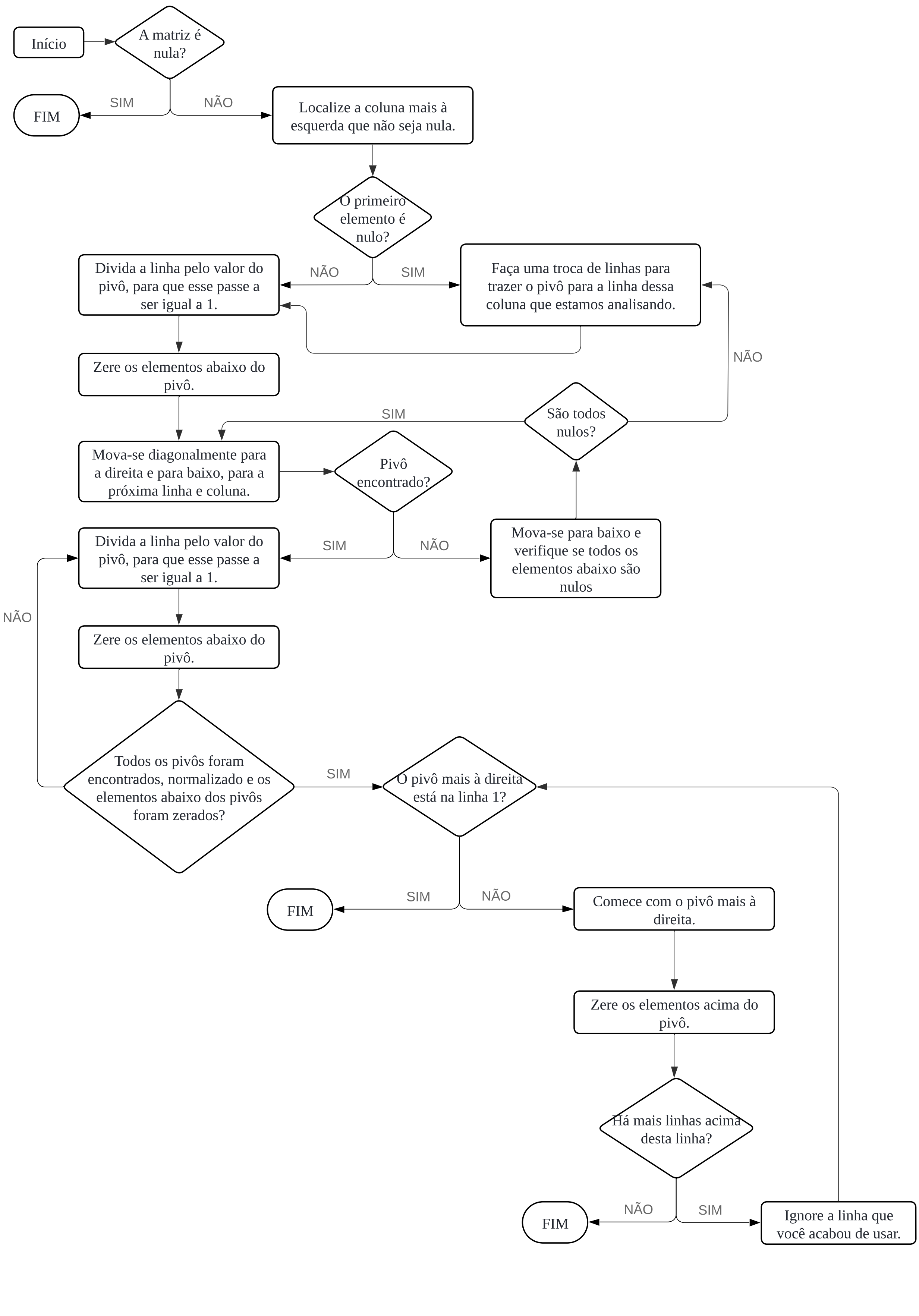
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos que $x = 0$, $y = -1$, $z = 4$ e $w = -1$ formam a solução $(0, -1, 4, -1)$ do sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Ao utilizar a abstração para concentrar-se nos coeficientes e ao criar a matriz ampliada do sistema, observou-se que o algoritmo de escalonamento não só ajuda a resolver o sistema, mas também a detectar erros em sua execução. A eliminação pelo método de Gauss-Jordan é uma ferramenta que pode ser usada para demonstrar uma organização na estrutura de cálculos aos alunos, permitindo-lhes adquirir habilidades e resolver problemas com maior rapidez através da prática. Na Figura 13, pode-se observar o algoritmo escrito em forma de fluxograma.

Figura 13 – Fluxograma - Algoritmo de escalonamento



2.2 CENÁRIO EDUCACIONAL BRASILEIRO

Nesta seção, descrevemos como a Base Nacional Comum Curricular, que atualmente é o principal documento da Educação Básica, trata do pensamento computacional. Além disso, investigamos a abordagem na formação inicial e continuada dos professores. Também exploramos dados de pesquisas nacionais e internacionais para compreender a realidade do ensino médio e dos estudantes nessa etapa escolar.

2.2.1 Base Nacional Comum Curricular

Fundamentada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (1996), a BNCC (2018) foi implementada para a Educação Básica com o objetivo de nortear os currículos e seus conteúdos mínimos. Com um ensino voltado ao desenvolvimento de competências, gerais e específicas, focadas nas aprendizagens essenciais que se desenvolvem por meio de habilidades distribuídas ao longo do percurso formativo.

Para promover a formação integral do estudante, a BNCC propõe dez Competências Gerais para o ensino fundamental e médio. Algumas competências enfatizam as habilidades de formular e resolver problemas, bem como o interesse pela integração da tecnologia, abrangendo não apenas a utilização, mas também a criação de tecnologias digitais de informação e comunicação. Para tal objetivo, a BNCC sugere que ações sejam pensadas para adequá-la às realidades locais, incluindo a seleção e aplicação de metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas.

As Competências Gerais desenvolvem-se dentro das competências específicas de cada área do conhecimento. No ensino fundamental, os componentes curriculares são estruturados em cinco áreas: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso. Quando apresentada como área do conhecimento, a Matemática não se limita apenas aos seus aspectos comuns, como os processos de contagem e medição, pois ela se dedica à construção de representações e argumentações para diversas situações, trabalhando também com eventos aleatórios e criando abstrações que podem estar relacionadas ao mundo físico ou não (BRASIL, M. d. E., 2018).

Destacam-se aqui três competências específicas da Matemática para o ensino fundamental. A competência 1 aborda a importância de

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, M. d. E., 2018, p.267)

Compreender a matemática como uma disciplina que permite novas descobertas pode transformar o olhar comum que os estudantes têm desse componente curricular. Essa competência traz consigo a oportunidade de construir a interdisciplinaridade entre as áreas, pois, conforme menciona-se na seção 2.1, a resolução de problemas também contribuiu para a evolução tecnológica e social da humanidade.

A competência 5 propõe "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (2018, p.267). Percebe-se, no geral que a BNCC apresenta termos relacionados ao meio digital, como letramento digital, pensamento computacional, a utilização de jogos eletrônicos, softwares educacionais e ambientes virtuais.

A competência 6 busca

> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BRASIL, M. d. E., 2018, p.267)

As competências 5 e 6 são voltadas para a aplicação de métodos e ferramentas matemáticas. Para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem, incluem o apoio de tecnologias digitais fornecendo um contexto de validação de estratégias e resultados com a utilização de outras linguagens para descrever algoritmos que contribuem para a formação de cidadãos críticos e criativos.

Diferente do ensino fundamental, os componentes curriculares do ensino médio estão organizados em apenas quatro áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Nessa etapa, a Matemática é voltada para a resolução de problemas mais complexos, exigindo níveis maiores de abstração, reforçando o que foi visto nos anos anteriores.

Ressalta-se que, embora na etapa do ensino médio a BNCC de 2018 aborde temas variados de forma transversal em todas as áreas do conhecimento, é apenas na área da matemática que o termo "pensamento computacional" é mencionado, ainda que suas habilidades apareçam nas competências gerais da educação básica. Ela define que o pensamento computacional "envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos" (BRASIL, M. d. E., 2018, p.474).

Com ênfase ao uso de algoritmos como objeto de estudo, a BNCC apresenta também outros pilares do pensamento computacional, como o reconhecimento de padrões, relativo ao campo da Álgebra, e a abstração, sendo a elaboração de problemas um dos responsáveis por favorecer seu desenvolvimento. Com eles, os estudantes têm a possibilidade de desenvolver técnicas para solucionar problemas, raciocinando, argumentando e se comunicando através de seus próprios modelos, fortalecendo o protagonismo juvenil.

A BNCC trouxe mudanças no currículo do Novo Ensino Médio, que agora é constituído pela parte comum, formado pelas quatro áreas do conhecimento, a parte flexível que é composta por itinerários formativos. Na matemática, os itinerários têm o foco no

> aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino; (BRASIL, M. d. E., 2018, p. 477)

Embora apareça somente na área da matemática, o pensamento computacional compõem a parte flexível do Currículo Base do Ensino Médio de Santa Catarina (SANTA CATARINA, 2021). A parte flexível consiste em disciplinas semestrais ou anuais que os estudantes podem escolher cursar, e é como um componente curricular eletivo que o PC aparece.

Esse componente pertence ao tópico “Ciência e Tecnologia” do Caderno 4 (2021, p.156) e tem por objetivos de aprendizagem a identificação e aplicação dos pilares, bem como descrever a estrutura lógica de um algoritmo, reconhecer e utilizar linguagens de programação e criar hipóteses para resolução de um problema específico, e implementá-las aplicando algoritmos lógicos. Já no tópico de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, o termo aparece como parte dos processos criativos do componente de conhecimentos científicos (2021, p.94).

Destaca-se que em 2022 foi homologado o texto complementar “BNCC Computação” onde são expostos três eixos: pensamento computacional, mundo digital e cultura digital. Com a obrigatoriedade de ser incluído nas escolas a partir de outubro de 2023, nesse texto o PC é incluído nas três etapas do ensino básico, descrevendo em cada etapa quais são os objetivos de aprendizagem. Também apresenta, por exemplo, no ensino médio a competência específica, a habilidade a ser desenvolvida, uma explicação da habilidade e exemplos de como trabalhar.

Além desse complemento e dos itinerários formativos, o pensamento computacional pode ser aplicado e ampliado através das competências específicas de matemática para o ensino médio. A competência 3 sugere

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (2018, p. 531)

Cada competência propõe suas habilidades, tendo como exemplo, a habilidade de código EM13MAT301 onde propõe-se “Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais” e a de código EM13MAT315 com o objetivo de “Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema” (2018, p. 536, 537).

Percebe-se nelas a relevância da resolução e elaboração de problemas envolvendo sistemas de equações lineares, com a possibilidade do uso de tecnologias digitais podendo investigar possibilidades de se resolver por meio de algoritmos, mais especificamente utilizando os fluxogramas.

A competência 4 conduz para a especificidade de “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (2018, p. 538). Trazendo a computação na habilidade de código EM13MAT405 onde pretende-se “Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática” (2018, p. 539).

De modo geral, presencia-se uma ênfase para três pontos: a resolução e elaboração de problemas, o desenvolvimento de algoritmos e o uso de tecnologias digitais. Assim, a BNCC influencia não só os novos materiais didáticos, como também os exames nacionais de acesso ao nível superior e a formação inicial e continuada dos professores.

2.2.2 Formação dos professores

Com a presença do Pensamento Computacional, os currículos da formação inicial dos professores foram adequados e competiu à União essa revisão. Por meio da Resolução CNE/CP nº 2 de 2019 (BRASIL, C. N. d. E., 2019), que institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica, apresenta-se o interesse para a prática profissional para que o licenciando seja preparado para planejar ações que resultem em efetivas aprendizagens, bem como garantir o princípio que todos são capazes de aprender.

Essa resolução apresenta que, no primeiro ano de curso, será reservada uma carga horária de 800 horas sendo distribuídas para a integração das competências profissionais docentes. Espera-se que o estudante adquira conhecimentos básicos sobre os fenômenos digitais e pensamento computacional, bem como suas implicações na atualidade do ensino. No contexto de desigualdades ao acesso à tecnologias no país, como ficou evidenciado durante o período de pandemia, torna-se necessário o fomento de leis e projetos para uma maior qualificação dos profissionais da educação.

Através da instituição da Política Nacional de Educação Digital (PNED), feita pela Lei nº 14.533 de 2023, observa-se as estratégias prioritárias do eixo Educação Digital Escolar, onde há a “promoção da formação inicial de professores da educação básica e da educação superior em competências digitais ligadas à cidadania digital e à capacidade de uso de tecnologia, independentemente de sua área de formação” e um destaque para a “promoção de projetos e práticas pedagógicas no domínio da lógica, dos algoritmos, da programação, da ética aplicada ao ambiente digital, do letramento midiático e da cidadania na era digital” (BRASIL, 2023).

Indo de encontro com as definições dos autores apresentados na seção 2, essa lei apresenta que o Pensamento computacional se refere à

> capacidade de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento da capacidade de criar e adaptar algoritmos, com aplicação de fundamentos da computação para alavancar e aprimorar a aprendizagem e o pensamento criativo e crítico nas diversas áreas do conhecimento; (BRASIL, 2023)

A Lei nº 14.817 de 2024, que estabelece diretrizes para a valorização dos profissionais da educação escolar básica pública, trás no artigo 3º que para uma valorização além do plano de carreira é preciso contemplar a “formação continuada que promova a permanente atualização dos profissionais”. Assim, no artigo 5º a formação continuada deve contemplar seis itens, onde destaca-se aqui a “oferta de atividades que promovam o domínio do conhecimento atualizado e das metodologias de ensino mais modernas e a elevação da capacidade de reflexão crítica sobre a realidade educacional e social” (BRASIL, 2024).

Além das leis e incentivos para a formação continuada nos estabelecimentos de ensino, a plataforma para Ambiente Virtual de Aprendizagem do Ministério da Educação (AVAMEC) oferece em torno de 270 cursos gratuitos e on-line para fortalecer o contínuo estudo e a qualificação dos professores, sendo três deles exclusivos para o estudo do pensamento computacional. O curso “Introdução ao Pensamento Computacional” tem uma ênfase no estudo e compreensão dos quatro pilares, bem como as suas utilizações na resolução de problemas. Já os cursos “Aplicações do Pensamento Computacional para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental” e “Aplicações do Pensamento Computacional para os Anos Finais do Ensino Fundamental” tem por objetivo “Estimular a reflexão e a identificação de oportunidades para a aplicação em sala de aula dos quatro pilares do Pensamento Computacional” (AVAMEC, s.d.). Nenhum curso é dedicado especificamente para o ensino médio ou para alguma disciplina ou conteúdo.

Outros cursos são fornecidos de maneira gratuita online por instituições privadas, como por exemplo a plataforma “Escolas Conectadas”, que consiste em um programa de educação digital promovido pela Fundação Telefônica e pela Fundação la Caixa. Nessa plataforma há cursos como “Introdução ao Pensamento Computacional”. Há também a plataforma “Escola Virtual” da Fundação Bradesco que apresenta o curso “Pensamento Computacional” ambos com objetivos semelhantes aos cursos do AVAMEC também sem direcionamentos a disciplinas e conteúdos específicos.

As universidades e instituições, federais e estaduais, também disponibilizam cursos sobre o PC como o Instituto Federal do Espírito Santo com o curso “Mooc de Lovelace: Pensamento Computacional com Scratch”, “Pensamento Computacional” fornecido pela Universidade de São Paulo e a Universidade Virtual do Estado de São Paulo que disponibiliza em seu canal na plataforma de vídeos YouTube, um curso completo de PC destinado à disciplina Engenharia de Computação.

A BNCC também aponta a necessidade de "criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem" (2018, p. 17). Como visto, embora existam cursos, não é possível encontrar neles a disponibilização de materiais didáticos com identificação a conteúdos matemáticos, ficando a cargo do professor preparar os materiais com o conhecimento assimilado durante o estudo.

Essa constante inserção da tecnologia nos currículos educacionais contribui para transformar o modo como se adquire e transfere conhecimento. Com isso, surgem novos desafios educacionais para os professores como, por exemplo, adequar as metodologias de ensino às necessidades e características dos estudantes e inserir novo recursos tecnológicos nas aulas. Esses desafios podem ser encarados como uma forma de proporcionar novas possibilidades de aprendizagens. Porém com a defasagem de equipamentos ou até mesmo a inexistência de de recursos tecnológicos em escolas públicas, tanto em regiões mais isoladas como em grandes centros urbanos, acaba dificultando o pleno desenvolvimento da educação tecnológica.

Para isso há vantagens no PC, enquanto recurso didático, pois como explica Wing "é uma forma como humanos, e não computadores, pensam" (WING, J. M., 2006). Pode-se desenvolver algumas habilidades da ciência da computação sem ter o contato com computadores por meio de atividades desplugadas, como visto na Seção 2.1.

Papert acreditava que "certos usos da poderosa tecnologia computacional e das ideias computacionais podem prover as crianças com novas possibilidades de aprender, pensar e crescer tanto emocional como cognitivamente" (1980, p.34). O perfil dos estudantes da educação básica brasileira está em contínua transformação. É notável que estes estão mais conectados através de computadores ou celulares.

Conforme a Base Nacional Comum Curricular,

> É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais. (BRASIL, M. d. E., 2018, p.473)

Compreende-se a importância de inserir recursos tecnológicos no percurso formativo dos estudantes. No entanto, é fundamental compreender que apenas a inserção desses recursos não garante necessariamente uma melhoria na aprendizagem. A tecnologia deve ser utilizada para construir novos saberes e não apenas como complemento das aulas, apoio em pesquisas na internet ou até mesmo escrever publicações em redes sociais. Deve-se ver a tecnologia como uma ferramenta para aprender novas formas de se comunicar, pensar e produzir, assim os estudantes estarão no domínio e não serão apenas consumidores. Para isso, é fundamental compreender o papel da tecnologia no ensino básico.

2.2.3 Desafios do Ensino Médio

O perfil dos estudantes da educação básica brasileira está em contínua transformação. É notável que eles estão cada vez mais conectados através do computador ou celular. Com isso, surgem novos desafios educacionais para os professores como, por exemplo, adequar as metodologias de ensino às necessidades e características dos estudantes e inserir novo recursos tecnológicos nas aulas. Esses podem ser encarados como uma forma de proporcionar novas possibilidades de aprendizagens. Porém, a inserção da tecnologia e as práticas didáticas não são os obstáculos mais críticos.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) é o maior estudo sobre educação a nível mundial. Atualmente, 81 países participam desse estudo, cujo objetivo é avaliar se adolescentes com idades próximas aos 15 anos possuem conhecimentos e habilidades para a vida social e econômica. Essa avaliação, composta por testes e questionários respondidos através de um computador, aborda a leitura, matemática e ciências. Em sua aplicação mais recente, em maio de 2022, o foco principal foi para a matemática.

O Brasil participa desse estudo desde 2000, e desde então têm sido revelados índices abaixo do esperado em relação à leitura e matemática. Em 2022, participaram 10.798 estudantes, dos quais 81,9% estavam cursando o ensino médio. A Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE) considera que o Nível 2 em Matemática é o mínimo necessário para exercer completamente a cidadania. No entanto, apenas 73% dos estudantes brasileiros alcançaram esse nível. Esses dados obtidos através do PISA apontam um cenário preocupante no ensino escolar.

Muitos fatores externos impactam na vida escolar dos estudantes, como o difícil acesso à escola, o ambiente familiar, questões emocionais, físicas, a busca por emprego para ajudar na renda familiar, e a distorção idade-série, entre outros. No questionário do exame, foi relatado por cerca de 32% dos estudantes brasileiros que eles não conseguem concluir bem a maioria ou todas as tarefas escolares. Outro dado relevante é a distração nas aulas por consequência do uso de dispositivos digitais, onde 45% se disseram distrair-se ao utilizar e 40% ao ver outros estudantes utilizando.

Além disso, outro problema grave é a evasão escolar. Reconhecido como a principal pesquisa estatística da educação básica, o Censo Escolar contribui com o fornecimento de dados tanto para a compreensão da realidade educacional do Brasil, como para repasses de recursos do governo federal, e repensar as políticas públicas, pois conta com a participação de todas as escolas públicas e privadas do país. O último Censo, realizado em 2022, concluiu que houve um crescimento na taxa de evasão escolar no ensino médio, tanto em escolas públicas como nas privadas (2023).

Com base nos resultados desses estudos educacionais, pode-se identificar muitos problemas a serem discutidos. Mas, destacam-se aqui a evasão escolar e o baixo nível de aprendizagens mínimas. Cabe aos órgãos governamentais criar estratégias e políticas públicas para combater a evasão escolar, principalmente na parte mais carente da sociedade e na etapa do ensino médio, que é onde há a maior demanda dos jovens para adentrarem ao mercado de trabalho. Com tudo, uma vez que os jovens estão na escola, deve-se assegurar que eles concluam o ciclo básico com conhecimentos mínimos necessários para exercer a cidadania, inclusive como utilizar os recursos tecnológicos para auxiliar nesse processo.

Embora haja um contato maior das novas gerações com esses recursos, segundo Azevedo (2018, p.6), "é preciso mais do que ter nascido e crescido em contato com os artefatos tecnológicos. O uso consciente das tecnologias deve ser ensinado e aprendido, como qualquer outra habilidade cognitiva". Para isso, é preciso que exista uma ressignificação sobre esses recursos, principalmente em ambientes escolares tanto para professores quanto para estudantes, para que contribua com um ensino de qualidade.

Para Baccega (2003),

> "o ensino de qualidade continua a ser aquele que busca, através de projetos adequados, a inserção do aluno como cidadão crítico. O uso da tecnologia poderá favorecê-lo, ampliá-lo, mas sua ausência não implicará falta de qualidade. Ao contrário, o uso da tecnologia em projetos inadequados, muitas vezes pensados apenas como vitrina de modernidade, falsa, têm-se revelado prejudiciais ao processo de educação" (BACCEGA, 2003, p.8).

É fundamental compreender que apenas a inserção de recursos não garante necessariamente uma melhoria na aprendizagem. Deve-se ver a tecnologia como uma ferramenta para aprender novas formas de se comunicar, pensar e produzir, assim os estudantes estarão no domínio e não serão apenas consumidores. A Suécia, por exemplo, está priorizando o tempo de leitura, a prática de caligrafia e as pesquisas em livros, em vez de habilidades de digitação e pesquisas na internet. Assim, decidiu abandonar o uso de tablets no ensino dos anos iniciais e investir em livros impressos para melhorar seus índices de leitura (GUARDIAN, 2023).

Em seu artigo "O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação", Blikstein (2008) expõe suas preocupações em relação ao uso da tecnologia para ensinar os educandos, para ele "estamos ensinando nossos alunos que a tecnologia serve para recombinar informações já existentes, e não para criar conhecimento novo". O que pode ser desafiador, uma vez que atualmente há um maior acesso às inteligências artificiais que são capazes de resolver problemas com certa precisão, tirando o protagonismo dos usuários.

Papert refletia sobre a tecnologia na educação e para ele era importante "não porque projetei um futuro da educação em que as crianças estarão rodeadas por alta tecnologia, mas porque acredito que certos usos da poderosa tecnologia computacional e das ideias computacionais podem prover as crianças com novas possibilidades de aprender, pensar e crescer tanto emocional como cognitivamente” (PAPERT, 1980, p. 34).

Com essa realidade, o uso consciente e responsável das tecnologias deve ser estimulado, uma vez que o estudante deve, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular,

> compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, M. d. E., 2018, p.9).

Desta forma, encontrar um caminho para mostrar que o tempo em frente à tela pode proporcionar diferentes oportunidades de obter conhecimento, pode gerar uma aprendizagem mais atrativa e significativa, uma vez que a tecnologia já faz parte do cotidiano para tarefas diárias. Para as questões de aprendizagem, é imprescindível que os estudantes saiam da posição de ouvinte e façam parte integrante da aula.

Nesse sentido, as habilidades desenvolvidas com o pensamento computacional são uma forma a contribuir para a melhora nos índices de leitura, interpretação e resolução de problemas. Uma forma também de fazer o estudante compreender seu próprio raciocínio. Sabe-se das questões estruturais das escolas, porém apesar de não necessitar de uma máquina, deve-se ter cuidado ao implementá-lo para que não fique apenas habilidades desplugadas, já que o letramento digital é de extrema importância principalmente para a inserção dos jovens no mercado de trabalho. Assim, propõem-se a discussão sobre como inserir o PC em metodologias de ensino já conhecidas de forma a contribuir com o exposto.

2.3 ENSINO DA MATEMÁTICA

Ao longo das décadas até os dias atuais, foram desenvolvidos diversos caminhos para aprender e ensinar matemática nas etapas escolares. Fiorentini (1995), em seu artigo “Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil”, apresenta algumas tendências em educação matemática. É possível que em cada uma o professor e os estudantes ocupem posições diferentes frente ao estudo. Em resumo, a abordagem formalista clássica tem o professor como centro do processo de aprendizagem, enquanto os estudantes desempenham um papel passivo, memorizando e repetindo procedimentos. A abordagem empírico-ativista, focada na qualidade em vez da quantidade, enfatiza a importância de aprender a aprender, tornando o professor um facilitador da aprendizagem e dando protagonismo ao estudante.

A formalista moderna volta a colocar o professor como centro, mas agora o estudante reproduz a linguagem e os raciocínios apresentados pelo professor com maior rigor, visando à formação de especialistas em matemática. A tendência tecnicista, bastante utilizada atualmente no ensino escolar, busca tornar o cidadão capaz e útil ao sistema, com a aprendizagem baseada em macetes, instruções e problemas modelo, reduzindo a matemática a um conjunto de regras. Esta tendência pode dar uma ideia equivocada de qualidade de ensino, pois, uma vez que os estudantes são programados, podem ter mais sucesso em vestibulares. Nesta abordagem, o professor e o estudante se tornam personagens secundários, enquanto o protagonismo é atribuído aos objetivos institucionais, aos recursos e às técnicas (FIORENTINI, 1995).

A abordagem construtivista apresenta o conhecimento matemático a partir das ações do homem com o meio ambiente e com as atividades, priorizando mais o processo do que o produto. Nessa abordagem, o erro é valorizado, pois não é visto como algo negativo, e o professor está mais próximo do estudante, que está com seus pares desenvolvendo o pensamento e interiorizando individualmente as reflexões (FIORENTINI, 1995).

Pode-se perceber que ensinar matemática sempre esteve longe de ser uma tarefa fácil. Encontrar uma abordagem que se adequa ao ambiente escolar, aos recursos disponíveis e, principalmente, às necessidades dos estudantes, demanda tempo. Em muitas escolas, principalmente escolas públicas, há uma imensa rotatividade de professores, o que dificulta o trabalho contínuo. O professor, ao receber uma turma nova, precisa desconstruir ideias criadas ao longo das gerações, como por exemplo, a ideia de que a matemática é difícil, algo que está acabado e uma área para poucos. Essas ideias se tornam medos que causam bloqueios no processo de aprendizagem.

Também cabe a responsabilidade de atribuir significado aos objetos de estudo e despertar o interesse por conteúdos muitas vezes distantes da realidade dos estudantes e aparentemente desvinculados do “mundo real”. Embora seja uma tendência na educação matemática, é possível repensar e redefinir a concepção de que a aula de matemática se limita a reproduzir os cálculos do professor. É possível proporcionar a construção do conhecimento em vez de simplesmente repetir técnicas, permitindo assim que os estudantes construam seus conhecimentos para além da sala de aula e não restringindo seu aprendizado apenas ao ambiente escolar.

No ensino escolar, especialmente nos primeiros anos, a matemática é abordada de maneira lúdica. Essa abordagem permite que os estudantes tenham uma experiência diferente, onde a aprendizagem é facilitada pelo uso de materiais didáticos adequados para cada idade e por situações do cotidiano das crianças. No entanto, essa abordagem se diferencia nos anos finais e, principalmente, no ensino médio, quando abstrações, algoritmos e aplicações são introduzidos. Nessa etapa os professores trabalham com os conhecimentos adquiridos e desenvolvidos ao longo dos anos iniciais pelos estudantes.

A importância de estudar e analisar qual abordagem metodológica utilizar se dá principalmente no momento de planejar e executar as aulas, pois a forma como o professor conduz esse processo é também um reflexo da sua própria compreensão do que é a matemática ou de experiências como aprendeu determinados conteúdos. Ao conhecer a teoria, é possível traçar estratégias para planejar aulas que contemplem os objetivos de aprendizagem. Para o ensino da matemática, existem diversas metodologias, como etnomatemática, modelagem, história da matemática, informática, engenharia didática, jogos, projetos e a resolução de problemas, que podem ser exploradas pelos professores, não se limitando à utilização de apenas uma.

Segundo Romanatto, a resolução de problemas significa

> envolver-se em uma tarefa ou atividade cujo método de solução não é conhecido imediatamente. Para encontrar uma solução, os estudantes devem aplicar seus conhecimentos matemáticos. Solucionar problemas não é apenas buscar aprender Matemática e, sim, fazê-la. Os estudantes deveriam ter oportunidades frequentes para formular, tentar e solucionar problemas desafiadores que requerem uma quantidade significativa de esforço e deveriam, então, ser encorajados a refletir sobre seus conhecimentos. Assim, solucionar problemas não significa apenas resolvê-los, mas aplicar sobre eles uma reflexão que estimule seu modo de pensar, sua curiosidade e seus conhecimentos. (ROMANATTO, 2012, p.302)

Segundo Boavida (2008), confrontar os estudantes com a resolução de problemas "facilita o desenvolvimento do raciocínio, da organização do pensamento e da capacidade de elaborar estratégias para lidar com situações desconhecidas, pelo que estimula a maturidade intelectual" (BOAVIDA *et al.*, 2008, p.127). Ao trabalhar em conjunto com o professor, os estudantes assumem a postura de investigadores analisando os problemas, criando estratégias, compreendendo e registrando seus próprios passos e raciocínios e, principalmente, valorizando os erros.

Segundo Papert, "muitas crianças têm sua aprendizagem retardada porque possuem um modelo de aprendizagem onde só existe o "acertou" e o "errou"" (PAPERT, 1980, p.39). Não compreender o erro numa perspectiva positiva leva o estudante a criar percepções erradas sobre sua própria aprendizagem. Entende-se que a resolução de problemas não se trata de dar uma resposta ou caminho pronto e nem transformar as aulas em um ensino padronizado.

Conforme exposto na seção 2.2.1, com base em dados obtidos de pesquisas educacionais, observa-se não apenas dificuldades em matemática básica, mas também um destaque em problemas relacionados à leitura e interpretação. Existe uma busca por parte dos educadores de contextualizar situações e conteúdos no mundo real, mas é importante ver que apenas isso não garante necessariamente o interesse dos estudantes, pois muitas vezes os contextos estão distantes de seus cotidianos. Observa-se que é necessário estimular estudantes a identificar aplicações dos conteúdos em seu próprio cotidiano, desenvolvendo a habilidade de formular seus próprios problemas. Para isso, o professor deve ter um conhecimento profundo do conteúdo, pois cabe a ele a responsabilidade de avaliar a correção do raciocínio desenvolvido pelo estudante.

A interdisciplinaridade é valorizada nos documentos que norteiam a educação, pois trabalhando com situações que envolvem áreas como as ciências da natureza ou as ciências sociais, é possível auxiliar na maneira de pensar, no desenvolvimento crítico, e a melhorar aspectos da vida através da matemática. No próximo capítulo será apresentada uma investigação na abordagem que os livros didáticos utilizam para a resolução de problemas e do pensamento computacional no ensino de sistemas de equações lineares.

3 LIVROS DIDÁTICOS

Este capítulo destina-se a uma investigação dos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2021 para o ensino médio, onde foi possível entender os métodos utilizados para a resolução de sistemas de equações lineares e o uso do pensamento computacional.

3.1 ABORDAGEM DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Conforme estabelecido pela BNCC, os sistemas de equações lineares são apresentados como objetos do conhecimento e abordados no ensino fundamental, especificamente na unidade temática de Álgebra do 8º ano. Isso inclui o estudo das resoluções algébricas e geométricas relacionadas aos sistemas. Nessa etapa escolar, os sistemas são introduzidos com duas equações e duas incógnitas, sendo ensinados os métodos de resolução através da adição e da substituição.

Entretanto, na etapa do ensino médio, inicia-se a abordagem de sistemas de equações lineares compostos por m equações e n incógnitas, conforme descrito na habilidade EM13MAT301 da BNCC. Essa habilidade é definida como a capacidade de "resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais" (BRASIL, M. d. E., 2018, p.536).

Dessa forma, utiliza-se métodos para a resolução de sistemas de equações lineares, uma vez que possui relevância nas duas etapas da educação básica, estendendo-se também ao ensino superior, especialmente na disciplina de Álgebra Linear. Conforme destacado por Lima (LIMA, 1993), "os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais".

Assim, nesse capítulo é apresentada uma investigação a partir dos livros didáticos do ensino médio com o objetivo de detectar eventuais lacunas no método apresentado nos materiais sobre o ensino de sistemas de equações lineares, visando contribuir para o aprimoramento dos materiais didáticos e, consequentemente, aperfeiçoar a experiência de aprendizado dos estudantes.

De acordo com o Decreto Nº 9.099, de 18 de julho de 2017, o PNLD apresenta-se como uma política pública executada pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) em colaboração com o Ministério da Educação (MEC). Este programa assegura o fornecimento de materiais didáticos nas escolas públicas brasileiras, com a finalidade de aprimorar a qualidade da educação, promover a democratização do acesso a fontes de informação e cultura, e apoiar a implementação da BNCC (BRASIL, 2017).

Além de disponibilizar gratuitamente os livros, o PNLD desempenha a função de aprovar obras didáticas, pedagógicas, literárias, assim como softwares e jogos educacionais.

Ao serem entregues diretamente aos professores e estudantes, os livros didáticos se tornam a ferramenta mais acessível, constituindo-se como fonte de pesquisa e suporte para o planejamento das aulas.

No ano de 2021, o PNLD aprovou 10 coleções de livros didáticos destinados ao componente curricular de Matemática. Foram analisados 9 dos 10 conjuntos aprovados. A exceção foi a coleção "Matemática nos dias" de hoje da Editora SEI, pois no momento da pesquisa sua versão digital não foi localizada no Guia do Programa Nacional do Livro e do Material Didático, acessível por meio do link www.pnld.nees.ufal.br. As coleções analisadas foram:

- Diálogo - Matemática e suas Tecnologias - Editora Moderna, (TEIXEIRA, 2020).
- Conexões - Matemática e suas Tecnologias - Editora Moderna, (LEONARDO, 2020).
- Prisma - Matemática - Editora FTD, (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020).
- Multiversos - Matemática - Editora FTD, (SOUZA, 2020).
- Matemática em contextos - Editora Ática, (DANTE, 2020).
- Matemática Interligada - Editora Scipione, (ANDRADE, 2020).
- Quadrante - Matemática e suas Tecnologias - Editora sm, (CHAVANTE; PRESTES, 2020).
- Ser Protagonista - Matemática e suas Tecnologias - Editora sm, (FERREIRA; SMOLE; DINIZ, 2020).
- Interação Matemática - Editora do Brasil, (FREITAS; LONGEN; BLANCO, 2020).

Em 2022, de acordo com os dados fornecidos no site do FNDE, o investimento de recursos para livros nas cinco áreas do ensino médio totalizou R$ 288.869.076,57. Dentre essas obras, 2.203.206 exemplares, incluindo livros destinados aos estudantes e professores, foram adquiridos contendo o ensino de sistemas lineares. O último dado não inclui a obra não analisada da coleção Matemática nos dias de hoje da Editora SEI.

Com a implementação do novo ensino médio conforme estabelecido pela Lei nº 13.415/2017 e a adoção da BNCC, os livros didáticos foram reorganizados por áreas do conhecimento, dividindo o conteúdo em seis volumes, com variações entre as editoras. Nesse contexto, a investigação concentrou-se especificamente no volume de cada editora que abordava o conteúdo referente a sistemas de equações lineares.

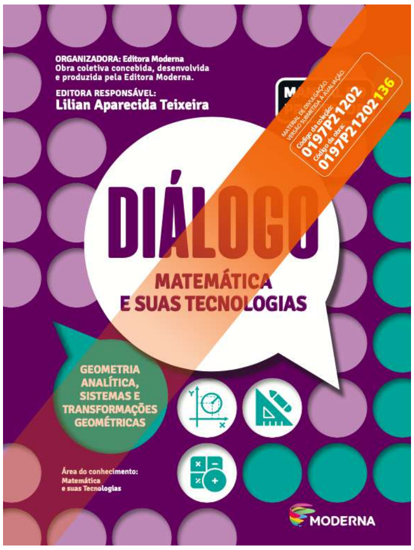
Ao examinar esses livros, buscou-se entender como o assunto é apresentado aos estudantes e professores, considerando o conteúdo, a contextualização, a abordagem pedagógica, os problemas propostos, sendo o foco da investigação o método utilizado para a resolução de sistemas e se são utilizadas características do pensamento computacional, como norteia a BNCC.

3.1.1 Diálogo - Matemática e suas tecnologias, Editora Moderna

Elaborada para o ensino médio, a coleção "Diálogo - Matemática e suas Tecnologias" é uma obra coletiva, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. A editora responsável pelo livro, Lilian Aparecida Teixeira, possui doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. A coleção é composta por seis volumes que exploram temas relacionados à área de Matemática e suas Tecnologias.

- Volume 1 - Grandezas, Medidas e Matemática financeira (Código do Obra: 0197P21202133)
- Volume 2 - Geometria plana (Código do Obra: 0197P21202134)
- Volume 3 - Geometria espacial (Código do Obra: 0197P21202135)
- Volume 4 - Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas (Código do Obra: 0197P21202136)
- Volume 5 - Estatística e Probabilidade (Código do Obra: 0197P21202137)
- Volume 6 - Funções e Progressões (Código do Obra: 0197P21202138)

Figura 14 – Capa do Volume 4



Fonte: Editora Moderna

Cada volume apresenta a versão do livro destinada ao professor, que inclui uma seção com sugestões sobre o uso e a estrutura do material, textos relacionados ao ensino médio e à Base Nacional Comum Curricular nesta etapa. Além disso, o volume conta com orientações didáticas e metodológicas, objetivos, comentários e sugestões, juntamente com as resoluções dos exercícios e problemas propostos.

O quarto volume aborda catorze tópicos, dos quais os tópicos 7 e 8 concentram-se para o ensino de sistemas lineares. Para trabalhar com esse conteúdo, o manual do professor apresenta temas contemporâneos transversais, como ciência e tecnologia, educação alimentar e nutricional, educação financeira e saúde. Esses temas aparecem no início de cada tópico ou como contextualização para os problemas.

Os objetivos específicos apresentados são: compreender o conceito de equações lineares e sistemas lineares, interpretar e representar problemas, aplicar o método mais adequado para a resolução, utilizar o conceito de matriz, resolver um sistema linear pelo método de escalonamento e resolver possíveis problemas do cotidiano utilizando o conceito de matriz e o de sistema linear.

Destaca-se que, nessas páginas do manual voltados ao conteúdo de sistemas lineares, o termo "pensamento computacional" não foi mencionado. Quando apresentado no manual do professor, aparece de maneira separada dos conteúdos, e é descrito que o incentivo ao PC surge em

> tarefas que envolvem a organização do pensamento; no registro e na análise de resultados e dados por meio de planilhas e gráficos; no uso de softwares de geometria dinâmica; nas construções de algoritmos e fluxogramas; por meio de linguagem de programação usando o software VisualG – programa que possibilita a criação, edição, interpretação e execução de algoritmos, bastante utilizado para o ensino da lógica de programação por ser de fácil manipulação. (TEIXEIRA, 2020, p. XXIV)

Embora seja focado ao uso do computador, a autora reconhece a estrutura e falta de recursos tecnológicos das escolas, em especial nas escolas públicas. Para isso, sugere o ensino *unplugged* que possa utilizar o próprio material do estudante.

O tópico 7 intitulado "Sistemas Lineares" começa com uma abordagem sobre a internet e a troca de mensagens na atualidade, um assunto capaz de capturar a atenção dos jovens leitores, dada a relevância desse tema em seu dia a dia. Em seguida, apresenta-se uma situação-problema como ponto de partida onde supõe-se que o leitor já tenha estudado conceitos como equações lineares e sistemas 2x2.

Já o tópico 8 sobre escalonamento de sistemas lineares inicia explorando uma aplicação na área da física, introduzindo uma abordagem interdisciplinar ao conteúdo. Em seguida, oferece uma explicação sobre matrizes associadas a sistemas lineares. Ressalta-se aqui que o ensino sobre matrizes está no mesmo volume, nos temas 2 a 5.

A classificação dos sistemas é apresentada e sua representação gráfica, especificamente para sistemas 2x2, é sugerido o uso do software GeoGebra como ferramenta tecnológica. O método de resolução de sistemas por escalonamento é detalhado a partir da página 93, sendo executado diretamente no sistema. O procedimento é feito, destacando as três operações elementares como pode ser observado na Figura 15.

Figura 15 – Resolução de um sistema linear

Exemplo 1

- $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2x + y + 2z = -9 \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases}$

Inicialmente, transformamos a 2ª e a 3ª equação, de maneira a obter equações com o coeficiente de x igual a zero.

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2x + y + 2z = -9 \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases} \cdot(-2) \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 8y + 3z = 1 \end{cases}$$

Por fim, no novo sistema, podemos substituir a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por 4.

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 8y + 3z = 1 \end{cases} \cdot 4 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 7z = -35 \end{cases}$$

Note que o sistema obtido está na forma escalonada e é equivalente ao sistema linear dado inicialmente. Resolvendo esse sistema escalonado, estamos também resolvendo o sistema inicial.

- $7z = -35 \Rightarrow z = -5$
- $-2y + z = -9 \Rightarrow -2y + (-5) = -9 \Rightarrow y = 2$
- $2x - 3y - z = 0 \Rightarrow 2x - 3 \cdot 2 - (-5) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD) e possui como solução a terna $\left(\frac{1}{2}, 2, -5\right)$.

Teixeira (2020, p.96)

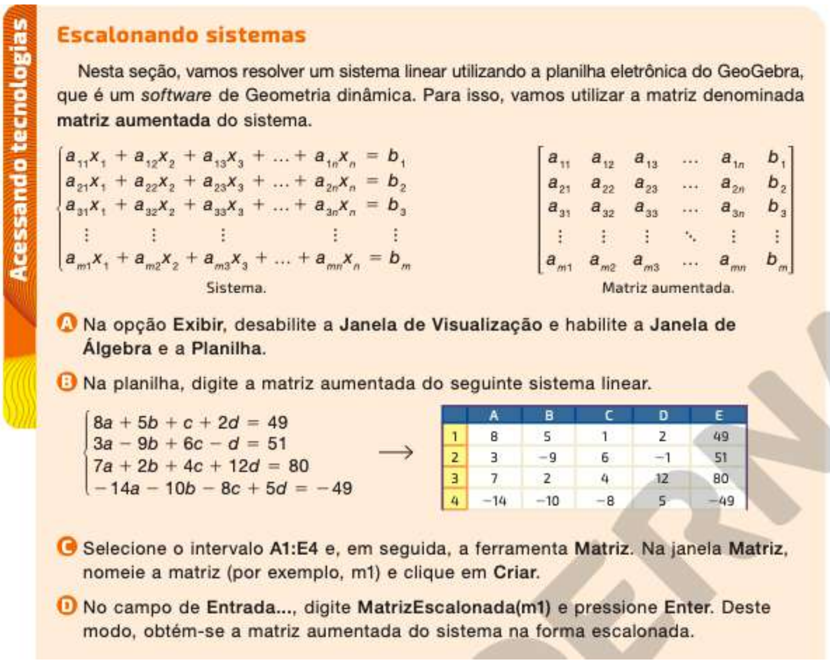
Vale destacar que são oferecidos aos estudantes exercícios de fixação, problemas em diferentes contextos e questões como preparação para exames como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares de diferentes regiões do Brasil. Porém no manual do professor não há a resolução dos tópicos 7 e 8 descritos aqui, ao contrário de outros que possuem as resoluções.

Na página 99, é proposto o uso do GeoGebra para o escalonamento da matriz aumentada do sistema. Um guia passo a passo é fornecido para auxiliar no software como pode ser observado na Figura 16, incluindo um exercício como sugestão. Importante notar que, nos tópicos relacionados a matrizes, o escalonamento delas sem o uso de softwares não é abordado.

O livro inclui exercícios chamados de "Resolvendo por etapas", nos quais são elaborados guias passo a passo que auxiliam o leitor na criação de estratégias para a resolução de problemas, assemelhando-se aos pilares do pensamento computacional, que pode ser visto na Figura 17.

O tópico 8 termina com a discussão do sistema linear, utilizando o determinante da matriz associada. Ficou evidente a falta da história da matemática sobre o conteúdo de sistemas lineares durante a leitura.

Figura 16 – Acessando a tecnologia



Acessando tecnologias

Escalonando sistemas

Nesta seção, vamos resolver um sistema linear utilizando a planilha eletrônica do GeoGebra, que é um *software* de Geometria dinâmica. Para isso, vamos utilizar a matriz denominada **matriz aumentada** do sistema.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistema.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada.

A Na opção **Exibir**, desabilite a **Janela de Visualização** e habilite a **Janela de Álgebra** e a **Planilha**.

B Na planilha, digite a matriz aumentada do seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} 8a + 5b + c + 2d = 49 \\ 3a - 9b + 6c - d = 51 \\ 7a + 2b + 4c + 12d = 80 \\ -14a - 10b - 8c + 5d = -49 \end{cases} \longrightarrow$$

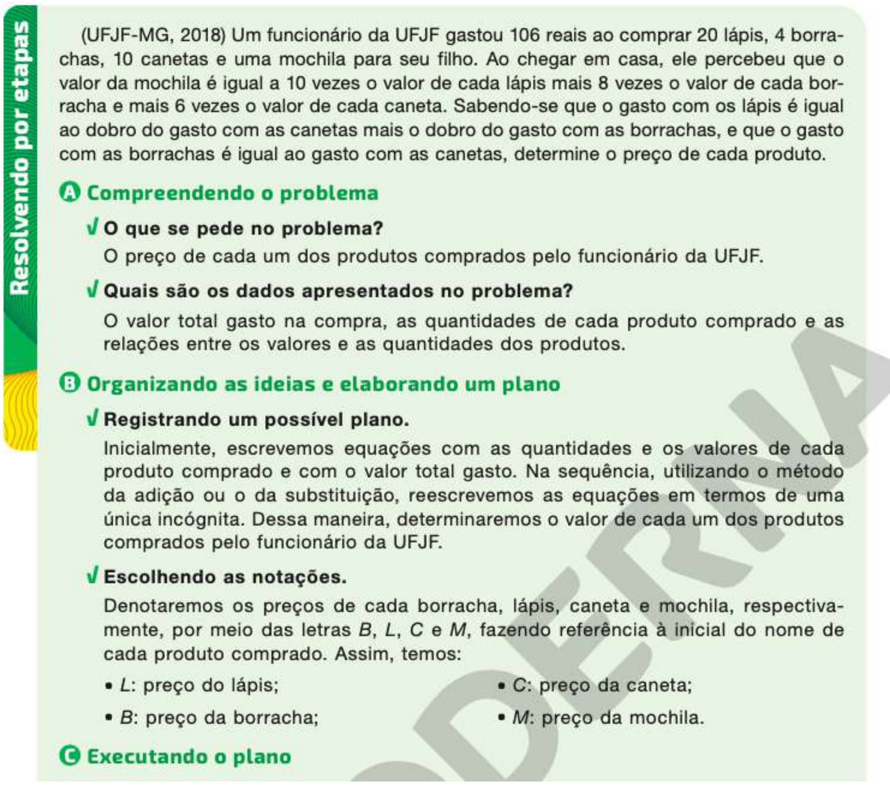
	A	B	C	D	E
1	8	5	1	2	49
2	3	−9	6	−1	51
3	7	2	4	12	80
4	−14	−10	−8	5	−49

C Selecione o intervalo **A1:E4** e, em seguida, a ferramenta **Matriz**. Na janela **Matriz**, nomeie a matriz (por exemplo, m1) e clique em **Criar**.

D No campo de **Entrada...**, digite **MatrizEscalonada(m1)** e pressione **Enter**. Deste modo, obtém-se a matriz aumentada do sistema na forma escalonada.

Teixeira (2020, p.99)

Figura 17 – Resolvendo por etapas



Resolvendo por etapas

(UFJF-MG, 2018) Um funcionário da UFJF gastou 106 reais ao comprar 20 lápis, 4 borrachas, 10 canetas e uma mochila para seu filho. Ao chegar em casa, ele percebeu que o valor da mochila é igual a 10 vezes o valor de cada lápis mais 8 vezes o valor de cada borracha e mais 6 vezes o valor de cada caneta. Sabendo-se que o gasto com os lápis é igual ao dobro do gasto com as canetas mais o dobro do gasto com as borrachas, e que o gasto com as borrachas é igual ao gasto com as canetas, determine o preço de cada produto.

A Compreendendo o problema

√ **O que se pede no problema?**

O preço de cada um dos produtos comprados pelo funcionário da UFJF.

√ **Quais são os dados apresentados no problema?**

O valor total gasto na compra, as quantidades de cada produto comprado e as relações entre os valores e as quantidades dos produtos.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ **Registrando um possível plano.**

Inicialmente, escrevemos equações com as quantidades e os valores de cada produto comprado e com o valor total gasto. Na sequência, utilizando o método da adição ou o da substituição, reescrevemos as equações em termos de uma única incógnita. Dessa maneira, determinaremos o valor de cada um dos produtos comprados pelo funcionário da UFJF.

√ **Escolhendo as notações.**

Denotaremos os preços de cada borracha, lápis, caneta e mochila, respectivamente, por meio das letras B, L, C e M, fazendo referência à inicial do nome de cada produto comprado. Assim, temos:

- L: preço do lápis;
- B: preço da borracha;
- C: preço da caneta;
- M: preço da mochila.

C Executando o plano

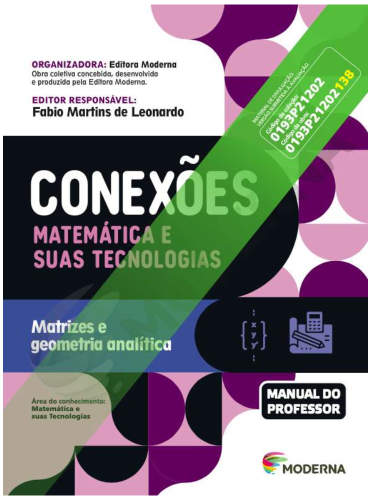
Teixeira (2020, p.80)

3.1.2 Conexões - Matemática e suas tecnologias, Editora Moderna

A coleção destinada ao ensino médio “Conexões - Matemática e suas tecnologias” da editora Moderna é composta por seis volumes. O editor responsável pela obra, Fábio Martins de Leonardo, é licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo.

- Volume 1 - Grandezas, álgebra e algoritmos (Código do Obra: 0193P21202133)
- Volume 2 - Funções e aplicações (Código do Obra: 0193P21202134)
- Volume 3 - Estatística e probabilidade (Código do Obra: 0193P21202135)
- Volume 4 - Trigonometria (Código do Obra: 0193P21202136)
- Volume 5 - Geometria plana e espacial (Código do Obra: 0193P21202137)
- Volume 6 - Matrizes e geometria analítica (Código do Obra: 0193P21202138)

Figura 18 – Capa do Volume 6



Fonte: Editora Moderna

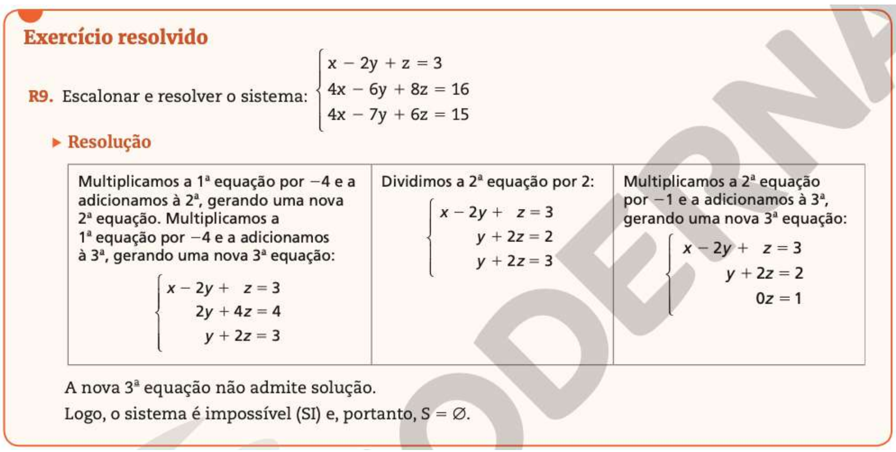
O livro do professor começa com um guia separado em parte geral, onde são apontados os pressupostos teórico-metodológicos, a organização e estrutura da obra, sugestões de livros e artigos para o professor, além das referências bibliográficas utilizadas. Já na parte específica, é apresentada a forma como a BNCC é trabalhada no livro, bem como a apresentação dos quatro capítulos que compõem o volume, acompanhados de sugestões de ampliação, avaliação e resoluções de exercícios e comentários.

A investigação desse volume concentra-se no capítulo 2, onde a introdução ao conteúdo é feita por meio de exemplos de aplicações na área das ciências da natureza. Os objetivos do capítulo são apresentados da seguinte forma: representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares, reconhecer e classificar sistemas lineares, apresentar sistemas lineares em forma de equação matricial e vice-versa, e aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.

O livro continua com explicações iniciais, e na página 40, inicia o tópico de sistemas de equações lineares, introduzindo problemas da área da química. Para a visualização gráfica do sistema, é sugerido o uso de software para a construção de gráficos, embora nenhum específico seja recomendado.

As matrizes relacionadas ao sistema são expostas, mas sua aplicação se limita à representação. O escalonamento dos sistemas, utilizado para encontrar soluções, é realizado diretamente no sistema, fazendo uso das três operações elementares durante o processo. O tópico de sistemas lineares encerra com um artigo onde mostra que o estudo de sistemas lineares indeterminados pode ser utilizado na área de nutrição.

Figura 19 – Escalonamento do sistema



Exercício resolvido

R9. Escalonar e resolver o sistema: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 4x - 6y + 8z = 16 \\ 4x - 7y + 6z = 15 \end{cases}$

Resolução

Multiplicamos a 1ª equação por -4 e a adicionamos à 2ª, gerando uma nova 2ª equação. Multiplicamos a 1ª equação por -4 e a adicionamos à 3ª, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2y + 4z = 4 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$	Dividimos a 2ª equação por 2: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$	Multiplicamos a 2ª equação por -1 e a adicionamos à 3ª, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ 0z = 1 \end{cases}$

A nova 3ª equação não admite solução.
Logo, o sistema é impossível (SI) e, portanto, $S = \varnothing$.

Leonardo (2020, p.54)

O livro apresenta uma variedade de exercícios destinados a contribuir com a absorção do conteúdo, sugerindo tanto problemas relacionados ao cotidiano quanto questões de exames como o ENEM e vestibulares. Em determinados momentos, o autor promove reflexões com o leitor por meio de caixas intituladas “Reflita”. Nos exemplos de exercícios resolvidos, o autor se envolve ativamente na resolução, proporcionando ao leitor uma experiência de participação direta na ação.

Na página XIII do manual do professor, o autor apresenta o PC relacionado a resolução de problemas, explicando cada habilidade e formas de trabalhar esse tema na escola. Assim como no livro da mesma editora apresentado na seção 3.1.1, a parte histórica não é mencionada.

3.1.3 Prisma - Matemática, Editora FTD

Coordenada pelos editores José Roberto Bonjorno, bacharel e licenciado em física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo; José Ruy Giovanni Júnior, licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo; e Paulo Roberto Câmara de Sousa, mestre em Educação pela Universidade Federal da Paraíba, a coleção "Prisma - Matemática" da editora FTD, é destinada ao ensino médio e é composta por seis volumes:

- Volume 1 - Conjunto e Funções (Código do Obra: 0226P21202133)
- Volume 2 - Funções e Progressões (Código do Obra: 0226P21202134)
- Volume 3 - Geometria e Trigonometria (Código do Obra: 0226P21202135)
- Volume 4 - Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas (Código do Obra: 0226P21202136)
- Volume 5 - Geometria (Código do Obra: 0226P21202137)
- Volume 6 - Estatística, Combinatória e Probabilidade (Código do Obra: 0226P21202138)

Figura 20 – Capa do Volume 4

Fonte: FTD

Os volumes apresentam uma seção dedicada a orientações para o professor, contendo textos sobre o novo ensino médio, a BNCC, o ensino da matemática e a avaliação. A estrutura da obra, a bibliografia consultada e comentada, além de comentários e sugestões de abordagem para os volumes, são explicados. A resolução das atividades propostas para os estudantes também está inclusa no livro do professor.

O volume específico analisado, intitulado "Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas", está dividido em quatro capítulos. O foco desta investigação é o capítulo 1, chamado "Matrizes e sistemas lineares". O capítulo inicia com um texto sobre fenômenos físicos e químicos, apresentando as competências gerais e específicas, assim como as habilidades da BNCC relacionadas ao conteúdo a ser estudado.

Na página 34, inicia-se o conteúdo de Sistemas Lineares, trazendo situações para introduzir o assunto. A interpretação geométrica é abordada para sistemas 2x2, junto com os métodos de resolução, como adição e substituição. As matrizes associadas a um sistema linear são introduzidas na página 48, sendo utilizadas para auxiliar no processo de escalonamento do sistema linear. Na página 51, um exemplo demonstra como o escalonamento é realizado diretamente no sistema e na matriz completa do sistema. Em seguida, o livro apresenta uma atividade resolvida passo a passo, mostrando um escalonamento utilizando a matriz ampliada do sistema.

Figura 21 – Escalonamento da matriz

ATIVIDADE RESOLVIDA

15. Resolva o sistema: $\begin{cases} 2x - y + 2z = 8 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ 3x - 3y - z = 7 \end{cases}$.

Resolução

Vamos determinar a forma escalonada desse sistema. Para isso, vamos escalonar a matriz completa do sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Antes de iniciar as operações entre as linhas da matriz, vamos trocar a posição da primeira e da segunda linha.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por -2 os elementos da primeira linha da matriz e adicionamos aos elementos correspondentes da segunda. Além disso, multiplicamos por -3 os elementos da primeira linha e adicionamos aos elementos correspondentes da terceira.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2L_1 + L_2 \rightarrow \\ -3L_1 + L_3 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -9 & -13 & -8 \end{pmatrix}$$

Agora, multiplicamos por $-\frac{9}{5}$ os elementos da segunda linha da matriz e adicionamos aos elementos correspondentes da terceira e obtemos a matriz escalonada do sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -9 & -13 & -8 \end{pmatrix} -\frac{9}{5}L_2 + L_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{22}{5} \end{pmatrix}$$

Com isso, obtemos o sistema linear escalonado, ao lado, equivalente ao inicial.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ -5y - 6z = -2 \\ -\frac{11}{5}z = -\frac{22}{5} \end{cases}$$

Esse sistema é possível e determinado. Resolvendo de baixo para cima as equações, obtemos:

$-\frac{11}{5}z = -\frac{22}{5} \Rightarrow z = 2$

Substituindo z por 2 na segunda equação, obtemos:

$-5y - 6 \cdot 2 = -2 \Rightarrow y = -2$

Substituindo y por -2 e z por 2 na primeira equação, obtemos:

$x + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = 5 \Rightarrow x = 1$.

Portanto, $S = \{(1, -2, 2)\}$.

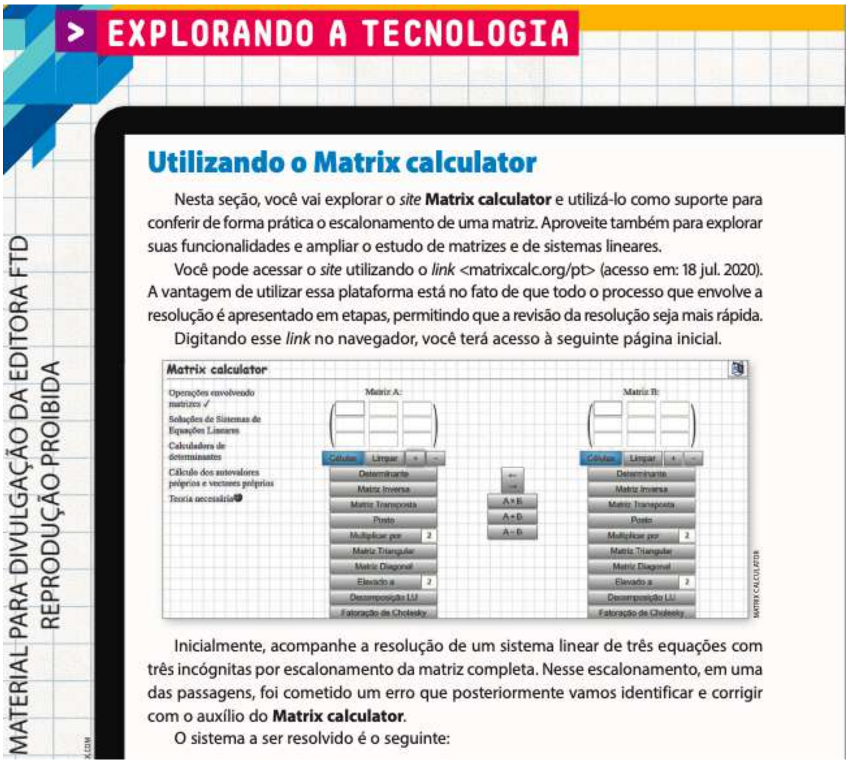
Bonjorno, Giovanni Júnior e Sousa (2020, p.53)

São apresentadas seções de atividades complementares quem incluem exercícios em diversos contextos, assim como quesões de vestibulares de universidades estaduais e federais e do ENEM. Além disso, o capítulo traz uma página com informações históricas da matemática, em referência aos estudos do matemático Gottfried W. Leibniz.

Na página 182 do manual do professor, o termo PC é apresentado em um texto onde é entendido como um processo de formulação e resolução de problemas. É sugerido que o professor proponha aos estudante a escrita de soluções utilizando fluxogramas e o passo a passo das resoluções dos exercícios. Recursos tecnológicos sugeridos e, no capítulo analisado, percebeu-se a presença do Geogebra para visualizações.

O capítulo conclui com uma seção chamada "Explorando a Tecnologia", apresentando o site Matrix Calculator para verificar o escalonamento de uma matriz.

Figura 22 – Matrix Calculator



> EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Utilizando o Matrix calculator

Nesta seção, você vai explorar o *site* **Matrix calculator** e utilizá-lo como suporte para conferir de forma prática o escalonamento de uma matriz. Aproveite também para explorar suas funcionalidades e ampliar o estudo de matrizes e de sistemas lineares.

Você pode acessar o *site* utilizando o *link* <matrixcalc.org/pt> (acesso em: 18 jul. 2020). A vantagem de utilizar essa plataforma está no fato de que todo o processo que envolve a resolução é apresentado em etapas, permitindo que a revisão da resolução seja mais rápida.

Digitando esse *link* no navegador, você terá acesso à seguinte página inicial.

Inicialmente, acompanhe a resolução de um sistema linear de três equações com três incógnitas por escalonamento da matriz completa. Nesse escalonamento, em uma das passagens, foi cometido um erro que posteriormente vamos identificar e corrigir com o auxílio do **Matrix calculator**.

O sistema a ser resolvido é o seguinte:

Bonjorno, Giovanni Júnior e Sousa (2020, p.56)

3.1.4 Multiversos - Matemática, Editora FTD

Joamir Roberto de Souza, mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR), é o autor da coleção "Multiversos - Matemática" da editora FTD destinada ao ensino médio que é composta por seis volumes:

- Volume 1 - Conjunto e função afim (Código do Obra: 0218P21202133)
- Volume 2 - Funções e suas aplicações (Código do Obra: 0218P21202134)
- Volume 3 - Sequências e Trigonometria (Código do Obra: 0218P21202135)
- Volume 4 - MTM Financeira, gráficos e sistemas (Código do Obra: 0218P21202136)
- Volume 5 - Geometria (Código do Obra: 0218P21202137)

- Volume 6 - Estatística e Probabilidade (Código do Obra: 0218P21202138)

Figura 23 – Capa do Volume 4

Fonte: FTD

A versão destinada aos professores oferece orientações no final do livro, abordando os fundamentos teóricos e metodológicos da coleção. Além disso, explora temas como o novo ensino médio, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), dimensões físicas, sociais, emocionais e culturais dos estudantes do ensino médio, saberes docentes para o ensino de matemática, estratégias de avaliação e a bibliografia utilizada na elaboração da coleção. O livro também fornece orientações específicas para cada volume e a resolução das atividades propostas no livro do estudante.

A obra analisada "Matemática Financeira, Gráficos e Sistemas" foi dividida em três unidades: Matemática Financeira, Estatística, Matrizes, sistemas lineares e transformações de figuras.

A unidade 3, inicia na página 90 e é intitulada "Matrizes, Sistemas Lineares e Transformações de Figuras", traz as Competências e Habilidades da BNCC. O autor inicia o conteúdo com um texto sobre a Teoria dos Grafos, contribuindo para a exploração das matrizes.

Na página 104, inicia-se o tópico de sistemas lineares, introduzido por uma situação prática que contextualiza o conteúdo. A solução de sistemas lineares é apresentada, incluindo sua classificação e representação gráfica, com foco em sistemas 2x2. Para sistemas com m linhas e n colunas, o uso do escalonamento é sugerido na página 112, acompanhado de exemplos resolvidos diretamente no sistema.

Figura 24 – Escalonamento do sistema

Utilizando as propriedades descritas anteriormente, vamos escalonar o sistema linear 3×3 da página anterior, ou seja, realizar uma sequência de operações de maneira a obter um sistema linear escalonado equivalente a ele.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ 8x + 20y + 10z = 72 \\ 10x + 16y + 14z = 84 \end{cases}$$

Inicialmente, vamos anular o coeficiente de x na segunda e na terceira equação. Para isso, podemos:

- substituir a segunda equação pela soma dela com o produto da primeira equação por -4;
- substituir a terceira equação pela soma dela com o produto da primeira equação por -5.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 & \boxed{\cdot(-4)} \quad \boxed{\cdot(-5)} \\ 8x + 20y + 10z = 72 & \oplus \\ 10x + 16y + 14z = 84 & \oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ 12y + 6z = 24 \\ 6y + 9z = 24 \end{cases}$$

Agora, no sistema linear obtido, vamos anular o coeficiente de y na terceira equação. Para isso, podemos substituir a terceira equação pela soma dela multiplicada por -2 com a 2ª equação.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ 12y + 6z = 24 & \oplus \\ 6y + 9z = 24 & \boxed{\cdot(-2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ 12y + 6z = 24 \\ -12z = -24 \end{cases}$$

Por fim, podemos resolver o sistema linear escalonado obtido, equivalente ao sistema linear inicial, com os seguintes passos.

- Determinar o valor de z a partir da terceira equação:

$$-12z = -24 \Rightarrow z = 2$$

- Considerar $z = 2$ e determinar o valor de y a partir da segunda equação:

$$12y + 6z = 24 \rightarrow 12y + 6 \cdot 2 = 24 \Rightarrow 12y = 12 \Rightarrow y = 1$$

- Considerar $z = 2$, $y = 1$ e determinar o valor de x a partir da primeira equação:

$$2x + 2y + z = 12 \rightarrow 2x + 2 \cdot 1 + 2 = 12 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, a solução desse sistema linear é (4, 1, 2), ou seja, a mãe utilizou quatro caixas amarelas, uma caixa verde e duas caixas azuis para acomodar todos os brinquedos de seus filhos.

Souza (2020, p.112)

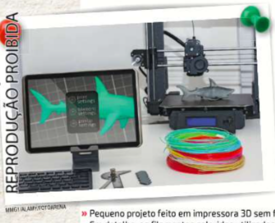
O tópico conclui com a interpretação geométrica de um sistema linear 3x3, aliado a um texto sobre impressoras 3D.

Figura 25 – Interpretação geométrica

Interpretação geométrica de um sistema linear 3×3

O avanço tecnológico, em especial nas últimas décadas, potencializou o processo de reconstrução tridimensional de objetos, que ocupa um papel importante em diferentes áreas do conhecimento, como na Medicina, nas engenharias, na indústria cinematográfica, entre outras. Um dos equipamentos usados para a fabricação desses objetos tridimensionais é a impressora 3D, que pode imprimir objetos com comprimento, largura e profundidade. Você já ouviu falar nesse tipo de impressora?

Essas impressões podem ser realizadas em diferentes tipos de materiais, como plástico, borracha, metal etc. Os polímeros, um tipo de plástico, são as matérias-primas mais utilizadas. No entanto, além do tipo da impressora, para escolher o material mais adequado para realizar a impressão 3D é importante considerar a funcionalidade do objeto a ser impresso. O filamento ABS (acrilonitrila butadieno estireno), por exemplo, é um termoplástico rígido derivado do petróleo e resistente a altas temperaturas, muito utilizado nas indústrias, na fabricação de peças de automóveis e eletrodomésticos. Já o plástico e o titânio podem ser utilizados em próteses 3D, com características semelhantes às partes humanas substituídas por elas, como a réplica de uma mão ou de um joelho.



MMG1/ALAMY/FOTOARENA

» Pequeno projeto feito em impressora 3D sem fio. Em detalhe, os filamentos coloridos utilizados nesse tipo de impressão.

Souza (2020, p.120)

3.1.5 Matemática em contextos, Editora Ática

A coleção "Matemática em Contextos" da Editora Ática, voltada para a área de conhecimento em Matemática e suas Tecnologias no ensino médio, foi elaborada pelos autores Luiz Roberto Dante, mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo, com doutorado em Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, e Fernando Viana, licenciado e mestre em Matemática, além de doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba.

- Volume 1 - Função exponencial, logarítmica e sequências (Código da Obra: 0159P21202133)
- Volume 2 - Função Afim e Quadrática (Código da Obra: 0159P21202134)
- Volume 3 - Geometria plana e espacial (Código da Obra: 0159P21202135)
- Volume 4 - Trigonometria e Sistemas Lineares (Código da Obra: 0159P21202136)
- Volume 5 - Análise, Probabilidade e computação (Código da Obra: 0159P21202137)
- Volume 6 - Estatística e Matemática Financeira (Código da Obra: 0159P21202138)

Figura 26 – Capa do Volume 4

Fonte: Editora Ática

O livro "Trigonometria e Sistemas Lineares" está dividido em dois capítulos, sendo o primeiro dedicado ao tema da Trigonometria e o segundo abordando os tópicos de Matrizes e Sistemas Lineares.

No início do capítulo 2, na página 87, são delineados os objetivos, como "determinar as soluções de sistemas lineares por meio de diferentes métodos, como substituição, adição e escalonamento, além de representá-los graficamente". Também é proposto a "criação de um algoritmo que descreva os passos para resolver um sistema linear" e a "discussão de sistemas lineares utilizando o determinante da matriz dos coeficientes e o escalonamento do sistema". O tema de sistemas lineares é introduzido na página 115, utilizando situações cotidianas como motivação para a compreensão do conceito.

Figura 27 – Situação problema

Tatevosian Yana/Shutterstock

As feiras livres têm características próprias em cada região, com variação na diversidade de produtos vendidos em função da produção local e da época do ano.

Situação 2

Maçãs e peras

As feiras livres são caracterizadas como uma manifestação cultural urbana brasileira, nas quais podemos encontrar frutas, verduras, legumes, temperos e diversos tipos de produto. As frutas, por exemplo, costumam ser vendidas por medida de massa ou por unidade, mas também é comum que os feirantes ofereçam promoções de um ou mais produtos.

Por exemplo, em uma barraca da feira, 1 maçã e 1 pera custam R$ 1,40, enquanto 2 maçãs e 1 pera custam R$ 1,80. Podemos relacionar essas duas situações a um **sistema de equações**.

a) Compare as duas situações. Quantas maçãs ou peras foram acrescentadas à primeira situação para obter a segunda? E qual foi a variação no preço? 1 maçã. Aumentou R$ 0,40.

b) Quanto custa 1 maçã? E quanto custa 1 pera? Escreva no caderno o sistema de equações que representa as duas situações e verifique se os valores que você calculou estão corretos.
R$ 0,40. R$ 1,00. Indicando por *a* o preço da maçã e por *p* o preço da pera, ambos em reais, temos: $\begin{cases} a + p = 1{,}40 \\ 2a + p = 1{,}80 \end{cases}$.

115

Dante e Viana (2020, p. 115)

A partir da página 119, são apresentadas explicações sobre a solução de um sistema linear, seguidas dos métodos de substituição e adição, juntamente com uma lista de atividades contendo 7 exercícios, entre fixação, problemas contextualizados e vestibulares. A representação gráfica é sugerida na página 127, com a utilização do software GeoGebra, onde são apresentados sistemas 2x2 e 3x3 bem como suas classificações.

O "Escalonamento de sistemas lineares" tem início na página 132, com o processo de escalonamento iniciando-se na página 135. Neste método, não se faz uso da matriz associada ao sistema linear para realizar o escalonamento; em vez disso, ele é executado diretamente no sistema.

Figura 28 – Escalonamento do sistema

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 7 & \cdot(-2) \quad \cdot 3 \\ 2x + 7y + z = 21 & + \\ -3x - 5y + 2z = -8 & + \end{cases}$

Para anular os coeficientes de x na segunda e terceira equações do sistema dado, podemos:

- multiplicar a primeira equação do sistema por -2 e adicionar com a segunda;
- multiplicar a primeira equação do sistema por 3 e adicionar com a terceira.

Depois, podemos trocar as posições das duas últimas equações obtidas para que o coeficiente de y seja 1 na nova segunda equação.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 3y - z = 7 \\ y + 5z = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ y + 5z = 13 & \cdot(-3) \\ 3y - z = 7 & + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ y + 5z = 13 \\ -16z = -32 \end{cases}$$

Fique atento

É conveniente, mas não obrigatório, que o primeiro coeficiente da equação que vai ser multiplicada seja 1 ou -1.

O sistema linear obtido está escalonado e é equivalente ao sistema linear dado. Podemos agora resolvê-lo.

- $-16z = -32 \Rightarrow z = 2$
- $y + 5 \cdot 2 = 13 \Rightarrow y = 13 - 10 = 3$
- $x + 2 \cdot 3 + 2 = 7 \Rightarrow x = 7 - 6 - 2 = -1$

O sistema linear é possível e determinado, com $S = \{(-1, 3, 2)\}$.

Dante e Viana (2020, p. 135)

O capítulo conclui com 21 exercícios e um tópico abordando sistemas lineares, matrizes e determinantes, onde o determinante da matriz associada ao sistema é utilizado para classificá-lo. Ao longo do capítulo, os autores se comunicam com o leitor por meio de avisos como “Fique atento” e “Reflita”. O livro encerra na página 162 com o início do Manual do Professor, que contém orientações gerais sobre o novo ensino médio, BNCC, abordagens metodológicas e avaliação em matemática, além de observações específicas dos dois capítulos.

Na página 211, começam as orientações sobre o capítulo 2, apresentando um parágrafo que destaca as abordagens teórico-metodológicas da coleção. Além disso, são apresentadas propostas de exploração dos conteúdos em diversos contextos, incluindo ações pedagógicas que promovem a resolução e elaboração de problemas, a argumentação de descobertas e opiniões, a investigação científica, o pensamento computacional, o uso de tecnologias digitais e o pluralismo de ideias, juntamente com a ênfase no cuidado com a saúde. Percebe-se que o pensamento computacional foi bem relacionado com o conteúdo do capítulo, pois é possível realizar abstrações ao longo dos exercícios selecionados, bem como a criação de algoritmos para resolver os problemas.

3.1.6 Matemática Interligada, Editora Scipione

A coleção “Matemática Interligada” da Editora Scipione, tem como editora responsável Thais Marcelle de Andrade que possui licenciatura em Matemática e é especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. A coleção é composta por seis livros.

- Volume 1 - Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica Código da Obra: 0182P21202133)
- Volume 2 - Trigonometria e programação Código da Obra: 0182P21202134)
- Volume 3 - Grandezas, Sequências e Matemática Fina (Código da Obra: 0182P21202135)
- Volume 4 - Matrizes e Geometria Analítica Código da Obra: 0182P21202136)
- Volume 5 - Estatística, Análise e Probabilidade Código da Obra: 0182P21202137)
- Volume 6 - Geometria Espacial e Plana Código da Obra: 0182P21202138)

O livro “Matrizes, Sistemas Lineares e Geometria Analítica” está estruturado em cinco capítulos, a saber: Matrizes e determinantes, Sistemas lineares, Transformações geométricas, Ponto e reta, e Circunferência. O capítulo 2, dedicado aos Sistemas lineares, é subdividido em cinco tópicos: Introdução, Equações lineares, Sistemas lineares, Escalonamento de um sistema linear e Discussão de um sistema linear.

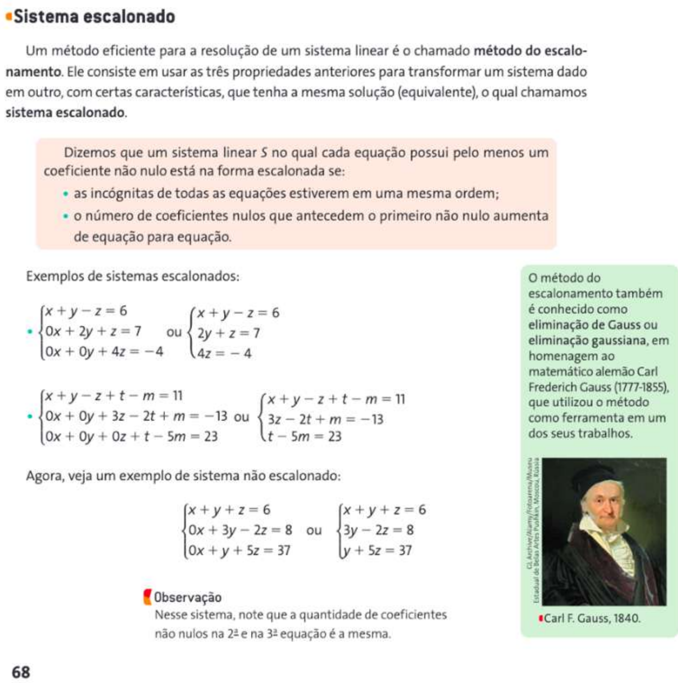
Figura 29 – Capa do Volume 4

Fonte: Editora Scipione

Na introdução do capítulo, são apresentados exemplos contextualizados para despertar o interesse do leitor. Em seguida, o tópico de equações lineares oferece sete exercícios destinados à classificação de equações e à verificação de pares ou ternas de soluções.

O tópico de sistemas tem início na página 57 e inclui uma lista exercícios. Dentro desse tópico, na página 60, a autora introduz a "Matriz de um sistema linear" para calcular o determinante da matriz e, assim, classificar o sistema. Para a visualização das soluções dos sistemas, recomenda-se o uso do GeoGebra. O tópico 4, "Escalonamento de um sistema linear", começa na página 67 e aborda diversos exemplos, observações aos leitores e questões históricas relacionadas ao tema.

Figura 30 – Sistemas escalonados



Sistema escalonado

Um método eficiente para a resolução de um sistema linear é o chamado **método do escalonamento**. Ele consiste em usar as três propriedades anteriores para transformar um sistema dado em outro, com certas características, que tenha a mesma solução (equivalente), o qual chamamos **sistema escalonado**.

Dizemos que um sistema linear S no qual cada equação possui pelo menos um coeficiente não nulo está na forma escalonada se:

- as incógnitas de todas as equações estiverem em uma mesma ordem;
- o número de coeficientes nulos que antecedem o primeiro não nulo aumenta de equação para equação.

Exemplos de sistemas escalonados:

- $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 0x+2y+z=7 \\ 0x+0y+4z=-4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 2y+z=7 \\ 4z=-4 \end{cases}$

- $\begin{cases} x+y-z+t-m=11 \\ 0x+0y+3z-2t+m=-13 \\ 0x+0y+0z+t-5m=23 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y-z+t-m=11 \\ 3z-2t+m=-13 \\ t-5m=23 \end{cases}$

Agora, veja um exemplo de sistema não escalonado:

$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 0x+3y-2z=8 \\ 0x+y+5z=37 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3y-2z=8 \\ y+5z=37 \end{cases}$

Observação
Nesse sistema, note que a quantidade de coeficientes não nulos na 2ª e na 3ª equação é a mesma.

O método do escalonamento também é conhecido como **eliminação de Gauss** ou **eliminação gaussiana**, em homenagem ao matemático alemão Carl Frederich Gauss (1777-1855), que utilizou o método como ferramenta em um dos seus trabalhos.

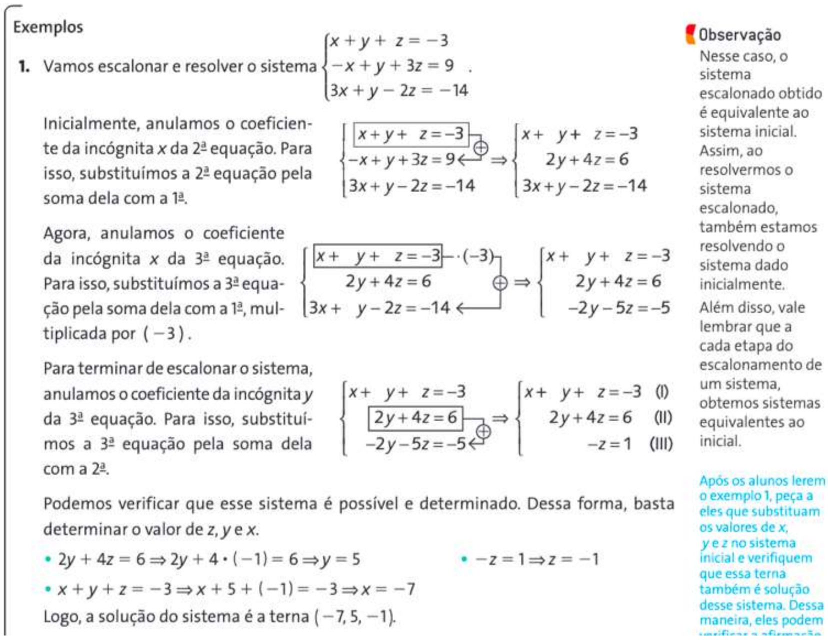
Carl F. Gauss, 1840.

68

Andrade (2020, p. 67)

Na página 71, estão apresentadas as operações para o escalonamento, acompanhadas por três exemplos elucidativos. Prosseguindo, há uma seção composta por 10 exercícios que abrangem aspectos de fixação, contextuais e voltados para preparação vestibular.

Figura 31 – Escalonamento do sistema


Exemplos

1. Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} x+y+z=-3 \\ -x+y+3z=9 \\ 3x+y-2z=-14 \end{cases}$.

Inicialmente, anulamos o coeficiente da incógnita x da 2ª equação. Para isso, substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª.

$$\begin{cases} \boxed{x+y+z=-3} \\ -x+y+3z=9 \\ 3x+y-2z=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=-3 \\ 2y+4z=6 \\ 3x+y-2z=-14 \end{cases}$$

Agora, anulamos o coeficiente da incógnita x da 3ª equação. Para isso, substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por (-3).

$$\begin{cases} \boxed{x+y+z=-3}\cdot(-3) \\ 2y+4z=6 \\ 3x+y-2z=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=-3 \\ 2y+4z=6 \\ -2y-5z=-5 \end{cases}$$

Para terminar de escalonar o sistema, anulamos o coeficiente da incógnita y da 3ª equação. Para isso, substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª.

$$\begin{cases} x+y+z=-3 \\ \boxed{2y+4z=6} \\ -2y-5z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=-3 & \text{(I)} \\ 2y+4z=6 & \text{(II)} \\ -z=1 & \text{(III)} \end{cases}$$

Podemos verificar que esse sistema é possível e determinado. Dessa forma, basta determinar o valor de z, y e x.

- $-z=1 \Rightarrow z=-1$
- $2y+4z=6 \Rightarrow 2y+4\cdot(-1)=6 \Rightarrow y=5$
- $x+y+z=-3 \Rightarrow x+5+(-1)=-3 \Rightarrow x=-7$

Logo, a solução do sistema é a terna $(-7, 5, -1)$.

Observação

Nesse caso, o sistema escalonado obtido é equivalente ao sistema inicial. Assim, ao resolvermos o sistema escalonado, também estamos resolvendo o sistema dado inicialmente.

Além disso, vale lembrar que a cada etapa do escalonamento de um sistema, obtemos sistemas equivalentes ao inicial.

Após os alunos lerem o exemplo 1, peça a eles que substituam os valores de x, y e z no sistema inicial e verifiquem que essa terna também é solução desse sistema. Dessa maneira, eles podem

Andrade (2020, p. 71)

Em seguida, dá-se início ao tópico dedicado à “Discussão de um sistema linear”, mesmo considerando que exercícios relacionados ao mesmo tema já foram abordados ao longo dos outros tópicos. O encerramento do capítulo é marcado por uma aplicação prática de sistemas lineares, destacando o seu uso no balanceamento de equações químicas.

Nota-se que nessa obra o pensamento computacional é mais associado ao uso da tecnologia do que ao método de resolver problemas.

3.1.7 Quadrante - Matemática e suas Tecnologias, Editora SM

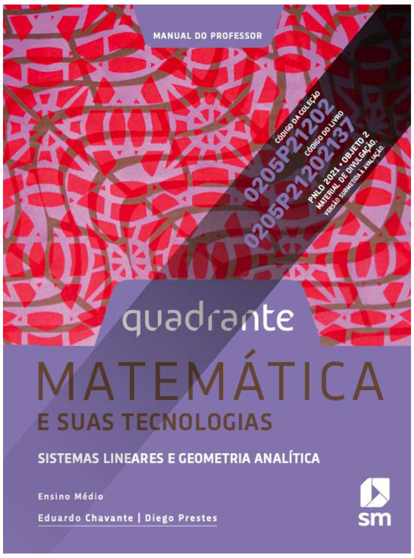
Composta por seis livros, a coleção “Quadrante - Matemática e suas tecnologias” da Editora sm foi editada por Eduardo Chavante que possui licenciatura em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná e é especialista em Mídias na Educação pela Universidade Estadual do Centro-Oeste, e Diego Prestes Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina.

- Volume 1 - Funções (Código do Obra: 0205P21202133)
- Volume 2 - Trigonometria e Sequências (Código do Obra: 0205P21202134)
- Volume 3 - Estatística, Probabilidade e Matemática Financeira (Código do Obra: 0205P21202135)

- Volume 4 - Geometria Plana e Espacial (Código do Obra: 0205P21202136)
- Volume 5 - Sistemas Lineares e Geometria Analítica (Código do Obra: 0205P21202137)
- Volume 6 - Grandezas, Medidas e Programação (Código do Obra: 0205P21202138)

O livro "Sistemas Lineares e Geometria Analítica" está dividido em cinco capítulos, enquanto a edição do livro do professor oferece 128 páginas de orientações destinadas ao docente. Os cinco capítulos abrangem os seguintes temas: Sistemas lineares, Matrizes, Determinantes, Ponto e reta, e Cônicas.

Figura 32 – Capa do Volume 5

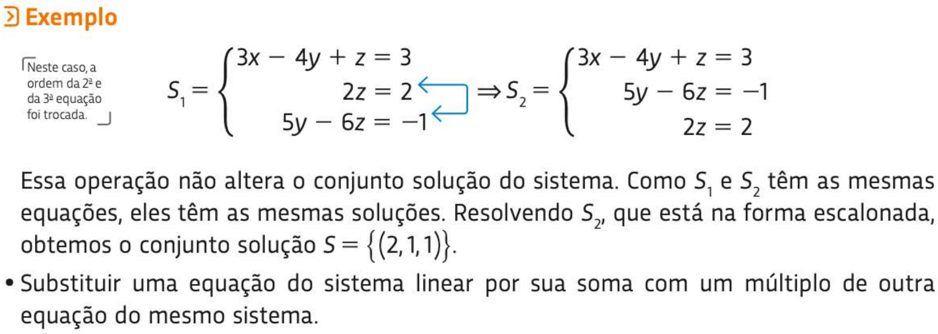


Fonte: Editora SM

O primeiro capítulo inicia sua abordagem com exemplos de Equações lineares, utilizando também o plano cartesiano para resolver equações com duas incógnitas. A explicação evolui para sistemas de equações lineares, sua classificação e o plano cartesiano para visualizar soluções. Vale ressaltar que todas as visualizações gráficas são baseadas em sistemas 2x2 e os métodos sugeridos para resolver esses sistemas são os de adição e subtração.

O tópico de escalonamento de um sistema linear é introduzido com uma abordagem histórica da nomenclatura e exemplos. As páginas 28 e 29 são dedicadas à resolução passo a passo de um problema, explicando como construir uma estratégia para a sua solução. O capítulo inclui uma série de exercícios resolvidos, bem como listas de exercícios adicionais. O capítulo subsequente é dedicado ao estudo de matrizes.

Figura 33 – Operações elementares



Exemplo

Neste caso, a ordem da 2ª e da 3ª equação foi trocada.

$$S_1 = \begin{cases} 3x - 4y + z = 3 \\ 2z = 2 \\ 5y - 6z = -1 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \begin{cases} 3x - 4y + z = 3 \\ 5y - 6z = -1 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

Essa operação não altera o conjunto solução do sistema. Como S_1 e S_2 têm as mesmas equações, eles têm as mesmas soluções. Resolvendo S_2, que está na forma escalonada, obtemos o conjunto solução $S = \{(2, 1, 1)\}$.

- Substituir uma equação do sistema linear por sua soma com um múltiplo de outra equação do mesmo sistema.

Chavante e Prestes (2020, p.26)

As orientações para os professores trazem textos sobre as mudanças no ensino médio e as competências e habilidades da BNCC nessa etapa. A proposta teórico-metodológica é apresentada, além de comentários e sugestões para o uso da coleção. Ao final das orientações são apresentadas as resoluções dos exercícios destinado aos estudantes e as referências bibliográficas.

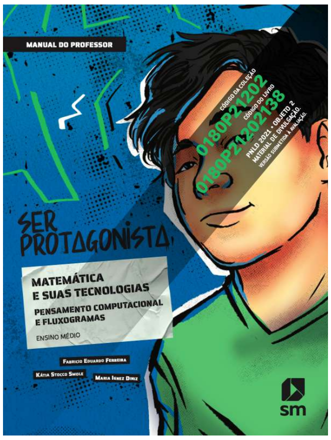
3.1.8 Ser protagonista - Matemática e suas Tecnologias, Editora sm

A coleção "Ser protagonista - Matemática e suas Tecnologias" da editora sm é uma obra elaborada pelos autores Fabricio Eduardo Ferreira, Mestre em Matemática pela Unesp de São José do Rio Preto, São Paulo; Kátia Stocco Smole, Doutora em Educação pela FE-USP; e Maria Ignez Diniz, Doutora em Matemática pelo IME-USP. Composta por seis livros, a coleção é destinada ao ensino médio.

- Volume 1 - Números e Álgebra (Código do Obra: 0180P21202133)
- Volume 2 - Álgebra e Educação Financeira (Código do Obra: 0180P21202134)
- Volume 3 - Grandezas e Medidas e Trigonometria (Código do Obra: 0180P21202135)
- Volume 4 - Geometria Plana e Espacial (Código do Obra: 0180P21202136)
- Volume 5 - Estatística e Probabilidade (Código do Obra: 0180P21202137)
- Volume 6 - Pensamento Computacional e Fluxogramas (Código do Obra: 0180P21202138)

No livro destinado aos professores, há um manual que fornece orientações gerais e específicas, além de resoluções comentadas dos problemas. As orientações gerais abordam temas como educação integral, perfil dos estudantes do ensino médio, Base Nacional Comum Curricular (BNCC), orientações didático-metodológicas na área da matemática, integração de tecnologia e pensamento computacional, papel do professor, e instrumentos e formas de avaliação.

Figura 34 – Capa do Volume 6



Fonte: Editora SM

Os autores trazem no livro "Pensamento Computacional e Fluxogramas" um capítulo dedicado ao pensamento computacional, diferenciando-se de outras coleções analisadas. Esse livro analisado é composto por duas unidades. A primeira, intitulada "Programação e Pensamento Computacional" e a segunda, denominada "Sistemas Lineares e Projeções Cartográficas". O ponto de destaque está na unidade 2, onde sistemas lineares são apresentados em um texto introdutório sobre computadores.

Nessa seção, são abordados sistemas lineares 2x2, sugerindo o uso de softwares de geometria dinâmica para encontrar soluções. Para sistemas 3x3, os autores propõem a resolução comparando equações duas a duas, substituindo uma equação por outra equivalente com menos incógnitas. Diversos problemas resolvidos são apresentados para facilitar a compreensão dos métodos sugeridos.

Figura 35 – Resolução do sistema

Multiplicamos a equação 1 por −10 e a adicionamos à equação 2, temos:

$$+\begin{cases} -20x - \cancel{20y} - \cancel{10z} = -120 \\ 8x + \cancel{20y} + \cancel{10z} = 72 \end{cases}$$
$$-12x = -48$$
$$x = 4 \quad (4)$$

Multiplicamos a equação 1 por −8 e a adicionamos à equação 3, temos:

$$+\begin{cases} -16x - \cancel{16y} - 8z = -96 \\ 10x + \cancel{16y} + 14z = 84 \end{cases}$$
$$-6x + 6z = -12 \quad (5)$$

Como $x = 4$, fazendo a substituição na equação 5, temos:

$$-6 \cdot 4 + 6z = -12$$
$$6z = 12$$
$$z = 2$$

Substituindo na equação 1 os valores de $x = 4$ e $z = 2$, obtemos:

$$2 \cdot 4 + 2y + 2 = 12$$
$$y = 1$$

Ferreira e Smole (2020, p.83)

Além disso, o livro aborda a visualização gráfica de sistemas 3x3, introduzindo o tópico de matrizes na página 93. As listas de exercícios são elaboradas com questões contextualizadas e também incluem questões de exames como ENEM e vestibulares.

3.1.9 Interação - Matemática, Editora do Brasil

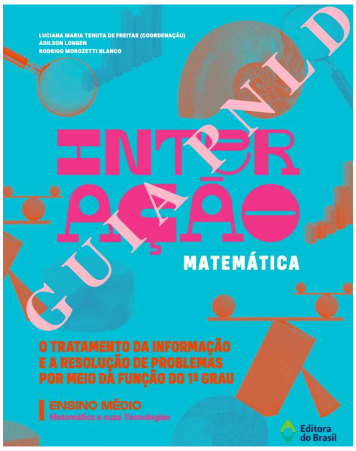
A coleção "Interação - Matemática" da Editora do Brasil conta com seis volumes na qual os conteúdos do ensino médio são distribuídos. Os editores responsáveis são Luciana Maria Tenuta de Freitas que possui mestrado em Ensino de Matemática dela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, bacharelado e licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais, Adilson Longen que possui doutorado e mestrado em Educação e licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Paraná e Rodrigo Morozetti Blanco que possui mestrado pelo programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional e licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo.

- Volume 1 - O tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da Função do 1º grau (Código da Obra: 0149P21202133)
- Volume 2 - As Unidades de Medida e a Resolução de Problemas por meio da Função do 2º Grau (Código da Obra: 0149p21202134)
- Volume 3 - A Matemática financeira e a Resolução de Problemas por meio das Funções Exponencial e Logarítmica (Código da Obra: 0149P21202135)
- Volume 4 - A Estatística e a Resolução de Problemas por meio de Análise Combinatória e Probabilidade (Código da Obra: 0149P21202136)
- Volume 5 - A Resolução de Problemas por meio da Geometria Plana e da Trigonometria (Código da Obra: 0149P21202137)
- Volume 6 - A Resolução de Problemas por meio da Geometria Espacial (Código da Obra: 0149P21202138)

O livro do professor apresenta textos sobre o novo ensino médio e a BNCC, além dos conteúdos com os objetivos e suas respectivas justificativas. Ao final do livro são expostas as competências e habilidades sugeridas no início.

Os conteúdos do livro "O tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da Função do 1º grau" utilizado para a investigação estão divididos em três unidades: a primeira aborda Função Afim, a segunda trata de Progressão Aritmética, funções e sistemas lineares, enquanto a terceira é dedicada ao raciocínio lógico e ao tratamento da informação.

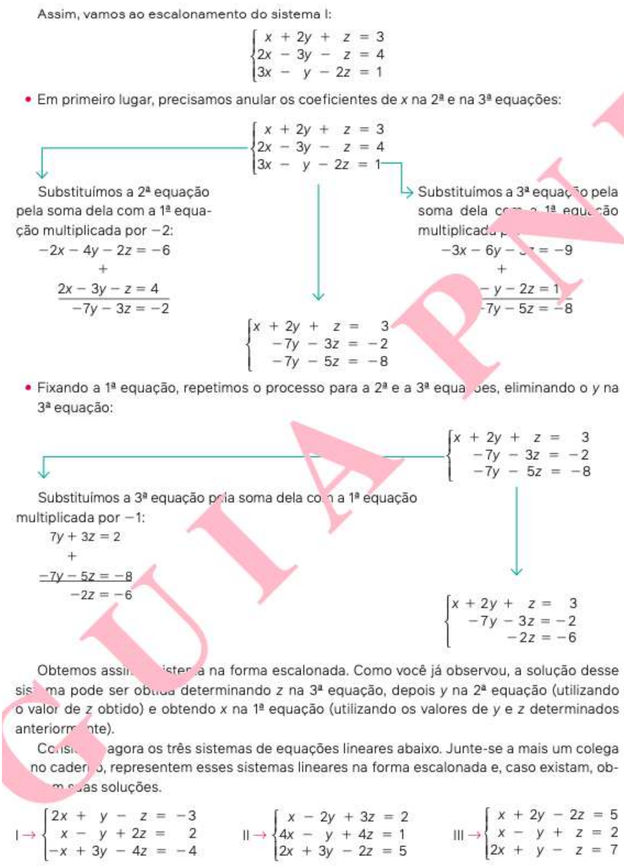
Figura 36 – Capa do Volume 1



Fonte: Editora do Brasil

A investigação específica ocorre na unidade 2, nas páginas 74 a 83, com foco no tópico de sistemas lineares. Esse tópico começa com uma contextualização usando o balanceamento de equações químicas como motivador para o leitor e segue com uma série de exemplos e exercícios. Na página 79, aborda-se a "Resolução de um sistema de equações lineares" utilizando o método de escalonamento no próprio sistema.

Figura 37 – Escalonamento do sistema



Assim, vamos ao escalonamento do sistema I:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

- Em primeiro lugar, precisamos anular os coeficientes de x na 2ª e na 3ª equações:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -2:

$$\begin{array}{r} -2x - 4y - 2z = -6 \\ + \\ 2x - 3y - z = 4 \\ \hline -7y - 3z = -2 \end{array}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -3:

$$\begin{array}{r} -3x - 6y - 3z = -9 \\ + \\ 3x - y - 2z = 1 \\ \hline -7y - 5z = -8 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

- Fixando a 1ª equação, repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equações, eliminando o y na 3ª equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -1:

$$\begin{array}{r} 7y + 3z = 2 \\ + \\ -7y - 5z = -8 \\ \hline -2z = -6 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

Obtemos assim o sistema na forma escalonada. Como você já observou, a solução desse sistema pode ser obtida determinando z na 3ª equação, depois y na 2ª equação (utilizando o valor de z obtido) e obtendo x na 1ª equação (utilizando os valores de y e z determinados anteriormente).

Considere agora os três sistemas de equações lineares abaixo. Junte-se a mais um colega e, no caderno, representem esses sistemas lineares na forma escalonada e, caso existam, obtenham suas soluções.

$$\text{I} \rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y - 4z = -4 \end{cases} \quad \text{II} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases} \quad \text{III} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases}$$

Freitas, Longen e Blanco (2020, p.81)

A explicação estende-se até a página 82, encerrando com uma lista de exercícios. É importante destacar que a classificação do sistema e sua visualização gráfica são mencionadas apenas nos exercícios recomendados aos estudantes. O livro propõe uma abordagem para a resolução de problemas. Na página 126, são apresentadas explicações sobre algoritmos e fluxogramas, porém, na parte relacionada a sistemas, esses elementos não foram empregados.

3.2 CONCLUSÕES SOBRE A INVESTIGAÇÃO

Durante a investigação nos capítulos destinados ao conteúdo de sistemas de equações lineares, percebeu-se a necessidade de procurar tópicos específicos nos capítulos sobre matrizes. Da investigação, destacaram-se os seguintes temas: escalonamento de matrizes, forma matricial de um sistema e escalonamento da matriz ampliada. Esses podem ser observados a partir da Tabela 3, onde é possível verificar a presença de cada um.

Tabela 3 – Análise de temas

Coleção	Escalonamento de matrizes	Forma matricial	Escalonamento da matriz ampliada
Diálogo	x	x	x
Conexões	x	✓	x
Prisma	x	✓	✓
Multiversos	x	x	x
MTM em contextos	x	✓	x
MTM interligada	x	✓	x
Quadrante	x	x	x
Ser protagonista	x	x	x
Interação MTM	x	x	x

Fonte: Autoria própria.

Pode-se notar que não há a presença do tópico sobre escalonamento de matrizes em nenhuma das nove coleções analisadas. Já nos capítulos destinados ao conteúdo de sistemas, apenas quatro coleções apresentaram a forma matricial de um sistema. Porém, apenas uma coleção abordou a resolução de um sistema por meio do escalonamento da matriz ampliada. Destaca-se que, em geral, todas abordam a resolução por escalonamento no próprio sistema de equações.

Por meio dessa investigação nos livros, concluiu-se que há uma lacuna ao abordar a resolução de sistemas através do escalonamento de matrizes, pois sabe-se que os estudantes possuem dificuldades em trabalhar com expressões algébricas. Esse método pode contribuir para a aprendizagem dos estudantes, já que pela matriz escreve-se apenas os coeficientes e os termos independentes e opera-se apenas com os números. Outro destaque vai para a falta de menção ao pensamento computacional em meio aos conteúdos, embora existam sugestões de recursos tecnológicos.

Desta forma, no próximo capítulo será apresentado um material didático que relaciona o pensamento computacional com a resolução de sistemas por meio do fluxograma de escalonamento visto na Seção 2.1.1.4.

4 MATERIAL DIDÁTICO

4.1 MOTIVAÇÃO

A partir da investigação nos livros didáticos apresentada na Seção 3, evidenciou-se uma lacuna: a ausência da resolução de sistemas de equações lineares por meio do escalonamento da matriz ampliada. Como forma de suprir essa ausência, pensou-se em desenvolver um material que atendesse tanto o professor quanto o estudante.

A sugestão para resolver sistemas por escalonamento das matrizes veio através de estudos sobre o pensamento computacional, em especial sobre o pilar de abstração. Nesse pilar, a ideia é focar nos dados que são relevantes, e ao resolver utilizando a matriz ampliada, foca-se apenas nos coeficientes e termos independentes do sistema, deixando assim o problema visualmente mais simples, principalmente para estudantes que possuem dificuldade. A partir daí, com leituras sobre a criação de algoritmos, foi descrito, por meio de um fluxograma, o método de Gauss-Jordan.

Também foi realizada uma pesquisa no banco de dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que conta com um total de 7229 trabalhos sendo, até o dia 12 de janeiro de 2024, 16 voltados ao tema pensamento computacional defendidas entre os anos de 2019 a 2023. Em 2019 foram apresentados 2, em 2020 foram apresentados 3, em 2021 foram apresentados 7, em 2022 foram apresentados 2 e por fim em 2023 foram apresentados 2. Algumas dissertações apresentam como material didático sequências didáticas para uso dos professores. Dos trabalhos destinados ao ensino médio, nenhum apresentou como objeto de estudo a resolução de sistemas de equações lineares relacionada com o PC.

4.2 DESENVOLVIMENTO DO MATERIAL

Com o conteúdo já definido, passou-se para a etapa de criação de uma possível sequência de aulas que envolvesse a resolução de sistemas, mas principalmente que envolvesse a resolução de problemas utilizando o pensamento computacional. Essa etapa resultou em um material com dez aulas desenvolvidas da seguinte maneira:

- Aula 1 - Revisão sobre sistemas:

  Esta aula foi planejada para revisar o conceito de equações lineares e os métodos de adição e subtração geralmente aprendidos no ensino fundamental. Com esta aula, o professor pode avaliar a compreensão dos estudantes em relação à manipulação algébrica.

- Aula 2 - Forma matricial:

Após a aula 1, inicia-se o processo de relacionar as matrizes com os sistemas; espera-se que os estudantes já estejam familiarizados com o conceito de matriz, pois geralmente este conteúdo é ensinado antes de sistemas.

- Aula 3 - Escalonamento de matrizes:

  Para iniciar o processo de escalonamento, esta aula começa com as operações elementares e uma resolução sem nenhum procedimento, apenas utilizando-as e tentando chegar à matriz escalonada. A partir daí, apresenta-se o fluxograma de escalonamento. Espera-se que os estudantes percebam como os fluxogramas podem ser utilizados para organizar o pensamento e criar processos lógicos.

- Aula 4 - Praticar o escalonamento:

  Esta aula serve como uma oportunidade para os estudantes praticarem o escalonamento e sanarem dúvidas que possam surgir ao resolverem os exercícios, que consistem principalmente em exercícios de fixação.

- Aula 5 - Solução de um sistema:

  Com as aulas anteriores concluídas, nesta aula os estudantes observarão o que acontece geometricamente com as soluções dos sistemas 2x2. Posteriormente, é apresentada a classificação dos sistemas de acordo com suas soluções. Também é proposto o uso de duas plataformas educacionais, que podem ser acessadas pelo computador ou pelo celular, para a classificação dos sistemas.

- Aula 6 - Pensamento computacional:

  Nesta aula, é introduzido o conceito de pensamento computacional e seus pilares que contribuem para a resolução de problemas.

- Aula 7 - Como resolver problemas:

  Para essa aula, é sugerido um problema que envolve sistemas e sua resolução é feita utilizando os pilares do pensamento computacional, mais especificamente a decomposição.

- Aula 8 - Problemas: Fluxo de tráfego:

  Para diversificar os problemas, é apresentado o conceito de fluxo de tráfego, onde os estudantes aprendem a resolver problemas a partir da observação de imagens de fluxo.

- Aula 9 - Problemas: Balanceamento de equações químicas:

  Considerando as dificuldades dos estudantes em química, esta aula foi planejada para trazer uma interdisciplinaridade entre as duas disciplinas. Em geral, o balanceamento é feito por tentativa e erro para igualar os lados da equação. Nesta aula, é proposto um método passo a passo para balancear equações químicas por meio de sistemas lineares.

- Aula 10 - Resolvendo problemas:

  Nesta aula, com o mesmo objetivo da aula 5, são propostos problemas que podem ser resolvidos com os procedimentos apresentados nas aulas anteriores. Esses não são de fixação, pois envolvem a interpretação de situações diversificadas.

- Aula 11 - ENEM e Vestibulares:

  Esta aula apresenta uma lista de exercícios retirados do banco de questões do ENEM e de vestibulares.

Todo o desenvolvimento do material se deu a partir das habilidades EM13MAT301, EM13MAT315 e EM13MAT405 para o ensino médio que constam na BNCC. Para a diagramação do material, utilizou-se, com algumas modificações, o modelo de livro para a Editora UnB em LaTeX, produzido por Leonardo Luiz e Castro. Como o material didático é disponível na versão digital, pensou-se em criar separadamente uma lista contendo os exercícios da apostila, assim pode ser facilmente impresso apenas essa parte.

4.3 SOBRE O MATERIAL

Embora o pensamento computacional esteja também relacionado a computação, entende-se o contexto em que muitas escolas se encontram em relação aos recursos tecnológicos. Por isso, o material limita-se a atividades que podem ser desenvolvidas, em sua maioria, sem o uso de computadores ou celulares. Porém, também sabe-se do valor que as ferramentas tecnológicas possuem, para isso o material traz um capítulo para mostrar duas plataformas que podem auxiliar para a aprendizagem de sistemas lineares. Como citado anteriormente, o material é composto pelo material do professor e a apostila do estudante. Embora haja essa distinção, espera-se que a apostila do estudante também sirva para estudos sem a necessidade do acompanhamento do professor.

4.3.1 Apostila do estudante

O material destinado ao estudante foi desenvolvido com o propósito de permitir que ele estude tanto com o acompanhamento do professor quanto de forma independente. A apostila inicia com o capítulo 1, onde são fornecidas explicações sobre sistemas de equações lineares, o conceito de matrizes ampliadas e o procedimento para escaloná-las seguindo o fluxograma apresentado nesta dissertação na seção 2.1.1.4, e a partir disso resolver o sistema. Neste capítulo, são incluídos exercícios de fixação para a prática do fluxograma, uma vez que este será utilizado para a resolução de problemas.

Já no capítulo 2, apresenta-se as habilidades do pensamento computacional e como podem auxiliar na resolução de problemas, especialmente problemas matemáticos. O capítulo 3 reúne uma coletânea de problemas retirados de livros didáticos que constam nas referências bibliográficas do material, vestibulares e do ENEM. No capítulo 4, são expostas duas plataformas online, recomendando-se o uso consciente, apenas para auxiliar nos estudos. Ao final, são fornecidas as soluções dos exercícios propostos e as referências bibliográficas.

4.3.2 Material do professor

O material do professor se difere da apostila do estudante, pois ele foi pensado com uma proposta de 11 aulas, sendo cada aula apresentada com seus objetivos, competências e habilidades da BNCC e as linhas de ação que é onde se dá o desenvolvimento metodológico e do conteúdo da aula.

Essas aulas encontram-se no capítulo 1, seguido pelo capítulo 2 que são apresentadas duas plataformas educacionais. O capítulo 3 conta com as resoluções passo a passo de alguns exercícios e as soluções dos outros. Para facilitar a impressão dos materiais, para a distribuição aos estudantes em sala de aula, a lista de exercícios e os fluxogramas estão lá disponíveis.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A comercialização de propostas inovadoras, como Ciência, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática (STEAM), cultura maker, gamificação e design thinking, tem se destacado no cenário educacional. Ao iniciar as pesquisas para essa dissertação, observou-se a inclusão do pensamento computacional na BNCC, o que levantou questões sobre como esse conceito é compreendido pela BNCC, como é inserido na formação inicial e continuada de professores e qual é a abordagem nos livros didáticos do ensino médio, especialmente no conteúdo de sistemas de equações lineares.

A partir do estudo feito na BNCC, foi possível concluir que além de utilizar o PC na resolução de problemas, há o interesse em desenvolver algoritmos, em especial através de fluxogramas, além do uso de ferramentas tecnológicas. No entanto, no que diz respeito à formação de professores, embora o tema do pensamento computacional tenha sido incluído na formação inicial por meio da legislação (BRASIL, C. N. d. E., 2019), evidenciou-se a necessidade de oferecer suporte objetivo aos professores já formados, pois estes geralmente têm pouco ou nenhum tempo disponível para complementar seus estudos. As oportunidades de formação continuada são oferecidas principalmente por meio de cursos online como na plataforma AVAMEC ou por plataformas de empresas privadas.

Em relação aos livros didáticos, a análise dos capítulos sobre sistemas de equações lineares revelou algumas lacunas: o termo pensamento computacional não é explicitamente mencionado, e poucos livros oferecem exemplos detalhados de resolução de problemas ou fluxogramas para auxiliar na compreensão do conteúdo e na resolução de exercícios.

Com isso, foi possível identificar lacunas que levaram à elaboração do material didático, cujo propósito era facilitar o ensino da resolução de problemas de sistemas, usando o PC e o escalonamento da matriz ampliada. Esse material, podendo ser utilizando como complemento ou apoio para estudante e professores, resultou em duas versões: uma para os estudantes, que apresenta o conteúdo em formato de apostila contendo exercícios selecionados de diversos autores de livros sobre álgebra linear; e outra para os professores, que sugere a utilização da apostila dos estudantes em formato de aulas, com 11 planos de aula.

Embora o material seja destinado para o uso em sala de aula, não foi possível até a conclusão dele aplicar o material com outros professores no ensino médio, primeiro devido à limitação de tempo e segundo pela necessidade de adequação ao cronograma escolar anual de matemática das escolas. Sabe-se da importância de avaliar e aprimorar um plano de aula por meio de sua aplicação e retorno didático. Porém, a professora pesquisadora tem utilizado o material em sua prática didática e vem obtendo resultados satisfatórios. Além disso, compreende-se que, mesmo dentro de uma mesma instituição de ensino, existem turmas com características distintas e estudantes com ritmos de aprendizagem variados.

Desta forma, recomenda-se para quem vier a pesquisar o tema ou desenvolver material com os mesmos propósitos que reserve um tempo para a aplicação com diferentes professores e seus estudantes, coletando dados e sugestões, e a partir das experiencias aperfeiçoar o material.

Este estudo explorou o potencial do método de solução de problemas com base nas habilidades desenvolvidas pelo PC, fornecendo uma contribuição prática para o ensino de matemática. Espera-se que os professores que vierem a ler este trabalho compreendam o conceito do PC e, caso se interessem pelo tema, sintam-se motivados a inseri-lo em sua prática pedagógica.

Por fim, para pesquisas futuras, além de aplicar o material desenvolvido e avaliar os seus impactos nas aulas, desejamos investigar e inserir mais informações sobre o que os pivôs da matriz escalonada nos fornecem de informações sobre o sistema, bem como o estudo de linguagens de programação para o desenvolvimento de materiais tanto no conteúdo de sistemas estendendo para o de matrizes e como inseri-los no ensino médio.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática Interligada: Matrizes, Sistemas lineares e Geometria analítica**. São Paulo: Scipione, 2020. P. 174.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações-10**. [*S.l.*]: Bookman Editora, 2012.

ASCENCIO, Ana Fernanda Gomes; CAMPOS, Edilene Aparecida Veneruchi de. **Fundamentos da programação de computadores**. [*S.l.*]: Pearson Educación, 2008.

AVAMEC. **Aplicações do Pensamento Computacional para os Anos Finais do Ensino Fundamental**. Acesso em: 15 de ago. 2023. Disponível em: `www.avamec.mec.gov.br/#/instituicao/seb/curso/4701/informacoes`.

AZEVEDO, Daniela Simone de *et al.* Letramento digital: uma reflexão sobre o mito dos "nativos digitais". **RENOTE**, v. 16, n. 2, p. 615–625, 2018.

BACCEGA, Maria Aparecida. Tecnologia e construção da cidadania. **Comunicação & Educação**, n. 27, p. 7–14, 2003.

BLIKSTEIN, Paulo. **Pensamento Computacional e Ensino**. Acessado em 12 de agosto de 2023. Dez. 2008. Disponível em: `http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html`.

BOAVIDA, Ana Maria *et al.* **A experiência matemática no ensino básico: programa de formação contínua em matemática para professores dos 1. º e 2. º ciclos do ensino básico**. [*S.l.*]: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento ..., 2008.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni;
SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma - Matemática: Sistemas, Matemática Financeira e Grandeza**. São Paulo: FTD, 2020.

BRACKMANN, Christian Puhlmann. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica, 2017.

BRADESCO, Fundação. **Pensamento Computacional**. Acesso em: 20 de nov. 2023. 2023. Disponível em: `www.ev.org.br/cursos/pensamento-computacional`.

BRASIL. **Lei nº 14533. Política Nacional de Educação Digital (PNED)**. Acesso em: 22 de nov. 2023. Jan. 2023. Disponível em: `www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2023-2026/2023/Lei/L14533.htm`.

________. **Lei nº 14817. Valorização dos profissionais da educação escolar básica pública**. Acesso em: 30 de jan. 2024. Jan. 2024. Disponível em:

www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2024/lei/l14817.htm#:~:text=LEI%20N%C2%BA%2014.817%2C%20DE%2016,Art..

BRASIL. **Lei nº 9.394. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Acesso em: 10 de dez. 2023. Jan. 1996. Disponível em: www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm.

________. Programa Nacional do Livro e do Material Didático, 2017. DECRETO Nº 9.099, DE 18 DE JULHO DE 2017. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/decreto/d9099.htm.

BRASIL, Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CP No 2**. Acesso em: 20 de nov. 2023. Dez. 2019. Disponível em: www.portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2019-pdf/135951-rcp002-19/file.

BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. **Brasília: MEC**, 2018.

________. Computação - Complemento à BNCC. **Brasília: MEC**, 2022.

BUFFONI, Salete. **Apostila de Algoritmo Estruturado**. 4. ed. [*S.l.*: *s.n.*], ago. 2003.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante - Matemática e suas Tecnologias: Sistemas lineares e Geometria analítica**. São Paulo: SM, 2020.

COMUNICAÇÃO SOCIAL DO MEC, Assessoria de. **Divulgado resultado da 2ª etapa do Censo Escolar 2022**. Acesso em: 29 de ago. 2023. 2023. Disponível em: www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/2023/maio/divulgado-resultado-da-2a-etapa-do-censo-escolar-2022#:~:text=Entretanto%2C%20a%20taxa%20de%20abandono,acima%20do%20observado%20em%202019.

DANTE, Luiz Roberto et al. **Matemática em Contextos: trigonometria e sistemas lineares**. São Paulo: Ática, 2020.

FERRARI, FABRICIO; CECHINEL, CRISTIAN. Introdução a algoritmos e programação. **Bagé: Universidade Federal do Pampa**, 2008.

FERREIRA, Fabricio Eduardo; SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ser protagonista - Matemática e suas Tecnologias: Pensamento Computacional e Fluxogramas**. São Paulo: SM, 2020.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, v. 3, n. 1, 1995.

FREITAS, Luciana Maria Tenuta de; LONGEN, Adilson; BLANCO, Rodrigo Morozetti. **Interação - Matemática: O tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da Função do 1º grau**. São Paulo: Editora do Brasil, 2020.

FUNDAÇÃO TELEFÔNICA VIVO, Fundação la Caixa. **Introdução ao Pensamento Computacional**. Acesso em: 20 de nov. 2023. 2023. Disponível em: `www.escolasconectadas.org.br/introducao-pensamento-computacional`.

GIL PÉREZ, Daniel *et al.* La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación. **Revista Investigación en la Escuela, 6, 3-20.**, Universidad de Sevilla, 1988.

GIOVANI, J. **A conquista da matemática, 6 ano**. Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2022.

GUARDIAN, The. **Switching off: Sweden says back-to-basics schooling works on paper**. 2023. Disponível em: `https://www.theguardian.com/world/2023/sep/11/sweden-says-back-to-basics-schooling-works-on-paper`.

LEON, Steven J. **Álgebra Linear com aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1998.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões - Matemática e suas Tecnologia: Matrizes e geometria analítica**. São Paulo: Moderna, 2020.

LIMA, Elon Lages. Sobre o ensino de sistemas lineares. **Revista do Professor de Matemática**, v. 23, p. 8–18, 1993.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A matemática do ensino médio**. [*S.l.*]: SBM Rio de Janeiro, 2016. v. 2.

MACHADO, Kheronn Khennedy; DUTRA, Alessandra. Para além da programação: desenvolvimento do pensamento computacional nos conteúdos escolares. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), v. 13, n. 3, p. 1, 2022.

MESSING, Joachim; CREA, Roberto; SEEBURG, Peter H. A system for shotgun DNA sequencing. **Nucleic Acids Research**, v. 9, n. 2, p. 309–321, jan. 1981. ISSN 0305-1048. DOI: `10.1093/nar/9.2.309`. eprint: `https://academic.oup.com/nar/article-pdf/9/2/309/6964357/9-2-309.pdf`. Disponível em: `https://doi.org/10.1093/nar/9.2.309`.

MIT, NEWS. **Professor Emeritus Seymour Papert, pioneer of constructionist learning, dies at 88**. Acesso em: 01 de Ago. de 2023. 2016. Disponível em:

https://news.mit.edu/2016/seymour-papert-pioneer-of-constructionist-learning-dies-0801.

MOREIRA, Jander. Introdução à algoritmos, 2011.

PAPERT, Seymour. **Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas**. [*S.l.*]: Basic Books, New York, 1980. Traduzido para o Português em 1985, como Logo:Computadores e Educação, Editora Brasiliense, São Paulo.

PAPERT, Seymour; SOLOMON, Cynthia. Twenty things to do with a computer. **Studying the novice programmer**, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., p. 3–28, 1971.

PÓLYA, George. **How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945. Traduzido para o Português em 1978, como A Arte de Resolver Problemas, Editora Interciência, Rio de Janeiro.

REED, Willa; HEWITT, Alison. **A Victorian-era computer pioneer gets to speak for herself**. Disponível em: https://newsroom.ucla.edu/stories/victorian-era-computer-pioneer-gets-to-speak-for-herself.

RESEARCH, Wolfram. **Computational Thinking Website**. Acesso em: 23 de Ago. de 2023. Disponível em: https://www.computationalthinking.org.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299–311, 2012.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação. **Currículo Base do Território Catarinense do Ensino Médio, Novo Ensino Médio Componentes Curriculares Eletivos: Construindo e Ampliando Saberes**. [*S.l.*]: Gráfica COAN, 2021. v. 4.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos - Matemática: Matemática Financeira, gráficos e sistemas**. São Paulo: FTD, 2020.

SPINELLI, Walter. **A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar: o caso do ensino da matemática**. 2011. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.

STACEY, Kaye; GROVES, Susie. **Resolver problemas: estrategias: unidades para desarrollar el razonamiento matemático**. [*S.l.*]: Narcea Ediciones, 1999. v. 145.

STADEN, R. A strategy of DNA sequencing employing computer programs. **Nucleic Acids Research**, v. 6, n. 7, p. 2601–2610, jun. 1979. ISSN 0305-1048. DOI: 10.1093/nar/6.7.2601. eprint: https://academic.oup.com/nar/article-pdf/6/7/2601/7063509/6-7-2601.pdf. Disponível em: https://doi.org/10.1093/nar/6.7.2601.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida. **Diálogo - Matemática e suas Tecnologia: Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas**. São Paulo: Moderna, 2020.

UNIVERSITY, Carnegie Mellon. **Center for computational thinking**. Disponível em: `http://www.cs.cmu.edu/~CompThink/index.html`.

WING, Jeannette. Computational thinking's influence on research and education for all. **Italian Journal of Educational Technology**, Edizioni Menabò-Menabò srl, v. 25, n. 2, p. 7–14, 2017.

WING, Jeannette M. Computational thinking. **Communications of the ACM**, ACM New York, NY, USA, v. 49, n. 3, p. 33–35, 2006.

________. Computational Thinking Benefits Society. **Social Issues in Computing**, New York, N.Y., USA, 2014.

________. Computational Thinking—What and Why? **The Link, News from the School of Computer Science**, The Link, Carnegie Mellon University, USA, p. 20–23, 2011.

WOLFRAM, Stephen. **How to Teach Computational Thinking**. Acessado em 17 de maio de 2023. Set. 2016. Disponível em: `https://writings.stephenwolfram.com/2016/09/how-to-teach-computational-thinking/`.

Anexos

ANEXO A – MATERIAL DO PROFESSOR

Resolução de sistemas de equações lineares por escalonamento

Karina Gomez Pacheco

Material do professor

Universidade Federal de Santa Catarina

Campus Florianópolis

Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Coordenação Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Dissertação do Profmat Este ebook é um produto oriundo da dissertação do PROFMAT intitulada "Resolução de sistemas de equações lineares: o pensamento computacional no escalonamento da matriz ampliada", defendida em 2024

Autora Karina Gomez Pacheco

Orientadora Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Carta ao leitor

Cara Professora, Caro Professor,

Compartilho com você este material que preparei com base na minha dissertação para o Programa de Mestrado Profissional em Matemática (Profmat). O objetivo deste material é contribuir para o ensino da resolução de sistemas de equações lineares por meio do escalonamento de matrizes, utilizando conceitos do pensamento computacional para a compreensão e resolução de problemas.

Procurei complementar o que os livros didáticos oferecem. Em muitos casos, o livro didático torna-se o único material disponível para os estudantes. Através de investigações nos livros didáticos, notei que na maioria deles não há a resolução de sistemas por meio do escalonamento de matrizes. Sabemos das dificuldades que os alunos enfrentam em manipular expressões algébricas, então surgiu a ideia de escrever este material.

Espero sinceramente que este material seja útil para suas aulas e para os seus estudantes, que estimule o interesse pelo conteúdo de sistemas e principalmente pela matemática. Agradeço pela sua atenção e interesse no meu trabalho, e estou à disposição para qualquer esclarecimento adicional que possa ser necessário através do email karina_gpacheco@hotmail.com.

Atenciosamente,
Karina Pacheco.

Sumário

Capítulo 1

Planos de aula

Este capítulo apresenta uma proposta de planos de aula voltada para a resolução de problemas que abordam sistemas lineares, com a utilização da apostila do estudante como recurso principal. Os planos foram pensados para serem executados em 50 minutos para cada aula.

Cada aula apresenta os seguintes tópicos: conteúdo, objetivos, Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que apresenta a unidade temática, objetos do conhecimento, as competências e habilidades, e linhas de ação onde são desenvolvidas a metodologia e o conteúdo, assim como os recursos utilizados e a avaliação. As referências estão incluídas na seção de referências ao final deste material.

1.1 Aula 1 - Sistema de equações lineares

1.1.1 Conteúdo

Sistema de equações lineares.

1.1.2 Objetivos

a. Identificar se os alunos possuem conhecimento sobre sistemas lineares;

b. Revisar métodos de adição e substituição;

1.1.3 Base Nacional Comum Curricular

a. **Unidade temática:** Álgebra.

b. **Objetos do conhecimento:** Sistema de equações lineares e métodos de resolução.

c. **Competências:**

Competência 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

d. **Habilidades:**

(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. (Para a revisão do conteúdo).

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

1.1.4 Linhas de ação

a. **Tempo de aula:** 50 minutos.

b. **Desenvolvimento metodológico e do conteúdo:**

MOMENTO 1: Revisão.

Título: Sistema de equações lineares.

EQUAÇÃO LINEAR

A equação $2 \cdot x + 5 \cdot y = 10$ é chamada de equação linear. Essa equação é formada pelos números reais 2, 5 e 10 e pelas incógnitas x e y. Assim, temos que

2 e 5 são os coeficientes;

x e y são as incógnitas;

10 é o termo independente.

Exercício 1.1

Para cada equação abaixo, identifique: os coeficientes, as incógnitas e o termo independente.

a) $x - y = 3$

b) $-x - 8 \cdot y = 0$

c) $7 \cdot x - 2 \cdot y = 6$

d) $-3 \cdot x + 5 \cdot y - \frac{1}{3} \cdot z = 2$

Assim, uma equação linear é uma equação da forma

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... a_n \cdot x_n = b,$$

com $a_1, \cdots, a_n$ e b números reais, onde $a_1, \cdots, a_n$ são os coeficientes, $x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas e b o termo independente.

No exemplo inicial, podemos assumir que $x = 1$ e assim $y = 1$ para solucionar a equação.

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 5 \cdot y &= 10 \Rightarrow \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 &= 10 \Rightarrow \\ 2 + 5 &= 10 \Rightarrow \\ 10 &= 10. \end{aligned}$$

Desta forma, dizemos que o par ordenado $(2, 5)$ é solução da equação linear $2 \cdot x + 5 \cdot y = 10$. Os pares $(5, 0)$ e $(0, 2)$ também são exemplos que solucionam a equação.

Sistema de equações lineares

Quando resolvermos duas ou mais equações lineares simultaneamente, estamos resolvendo um sistema de equações lineares. Por exemplo,

$$\begin{cases} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x & + & y & = & 7 \\ x & - & 5y & = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x & + & y & - & 3 \cdot z & = & 8 \\ x & - & 5 \cdot y & + & 4 \cdot z & = & -2 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

Sugestão: Peça aos alunos para irem à lousa escrever alguns sistemas lineares.

Um conjunto de equações lineares a serem satisfeitas simultaneamente é chamado de sistema de equações lineares e se apresenta na forma:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & ... & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & ... & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & ... & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{cases}.$$

Esse sistema é formado por m equações e n incógnitas. Nosso interesse é resolvê-lo, encontrando uma n-upla $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ que satisfaz todas as equações.

. . . .

MOMENTO 2: Revisar sistemas 2x2.

TÍTULO: Por que resolver sistemas lineares?

Observe o seguinte problema:

Exemplo 1.1. Se a soma das idades de João e Pedro é 65 e a diferença é 25, quais são as idades de João e Pedro?

Para resolver esse problema, podemos escrever duas equações lineares com as informações fornecidas, onde j é a idade de João e p é a idade de Pedro:

$$\begin{cases} j + p = 65 \\ j - p = 25 \end{cases}.$$

No ensino fundamental, estudamos sistemas que possuem duas equações e duas incógnitas. Para resolvê-los, utilizamos métodos como adição ou substituição. O sistema acima possui duas equações e duas incógnitas, podemos chamá-lo de um sistema "2x2" (2 por 2). Acompanhe a resolução, primeiro pelo método da adição e depois pelo método da substituição.

MÉTODO DA ADIÇÃO

Vamos somar a primeira equação $j + p = 65$ com a segunda equação $j - p = 25$:

$$\begin{array}{rrcrcr} & j & + & p & = & 65 \\ + & j & - & p & = & 25 \\ \hline & 2j & + & 0 & = & 90 \end{array}$$

$$2j = 90 \Rightarrow j = 45.$$

Agora que encontramos a idade de João ($j = 45$), basta substituir em uma das equações para encontrar a idade de Pedro (p). Escolhendo a primeira, temos

$$j \;+\; p \;=\; 65 \quad\Rightarrow\quad 45 \;+\; p \;=\; 65 \quad\Rightarrow\quad p \;=\; 20.$$

Encontramos o par $(45, 20)$, vamos verificar se de fato é a solução do sistema:

$$\begin{aligned} j \;+\; p \cdot y \;&=\; 65 \;\Rightarrow \\ 45 \;+\; 20 \;&=\; 65 \;\Rightarrow \\ 65 \;&=\; 65. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j \;-\; p \cdot y \;&=\; 25 \;\Rightarrow \\ 45 \;-\; 20 \;&=\; 25 \;\Rightarrow \\ 25 \;&=\; 25. \end{aligned}$$

A solução do sistema é o par $(45, 20)$. Logo, João tem 45 anos e Pedro tem 20 anos.

Método da Substituição

Começamos escolhendo uma das duas incógnitas para isolar, nesse caso será a incógnita j. Assim,

$$j \;-\; p \;=\; 25 \;\Rightarrow\; j \;=\; 25 \;+\; p.$$

Substituindo a expressão encontrada na primeira equação, temos

$$j \;+\; p \;=\; 65 \quad\Rightarrow\quad 25 \;+p \;+\; p \;=\; 65 \quad\Rightarrow\quad 2j \;=\; 40 \quad\Rightarrow\quad p \;=\; 20.$$

Voltando para a expressão encontrada,

$$j \;=\; 25 \;+\; p \quad\Rightarrow\quad j \;=\; 25 \;+20 \quad\Rightarrow\quad j \;=\; 45.$$

Encontramos o par $(45, 20)$, vamos verificar se de fato é a solução do sistema:

$$\begin{aligned} j + p \cdot y &= 65 \Rightarrow \\ 45 + 20 &= 65 \Rightarrow \\ 65 &= 65. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j - p \cdot y &= 25 \Rightarrow \\ 45 - 20 &= 25 \Rightarrow \\ 25 &= 25. \end{aligned}$$

A solução do sistema é o par $(45, 20)$. Logo, João tem 45 anos e Pedro tem 20 anos.

Exercício 1.2

Resolva os problemas que envolvem sistemas $2x2$. Escolha um dos dois métodos para resolver.

a) 3 cadernos grandes e 2 cadernos pequenos custam R\$ $185,00$. 5 cadernos grandes e 3 cadernos pequenos custam R\$ $285,00$. Encontre o valor do caderno grande e do caderno pequeno.

b) Se o custo de 3 chocolates e 2 biscoitos é de R\$ $35,00$ e o de 2 chocolates e 3 biscoitos é de R\$ $42,50$. Qual é o custo dos biscoitos?

c) Em uma turma há 44 estudantes entre meninos e meninas. A diferença entre o número de meninos e o de meninas é 10. Encontre a quantidade de meninos e meninas nessa turma.

Porém, em problemas aplicados em áreas como administração, economia, engenharia, física, entre outros, os sistemas possuem muitas equações e incógnitas (milhares de incógnitas). Esses dois métodos apresentados não são suficientes e nem práticos para resolver sistemas maiores.

Vamos aprender outro método que consiste em escalonar uma matriz. Para isso, precisamos escrever o sistema em sua forma matricial.

. . . .

c. **Recursos utilizados:**

Apostila do estudante, lista de exercícios impressa (opcional) e lousa.

d. **Avaliação:**

A avaliação se dará através da mediação do professor durante a exposição do conteúdo e da interação e participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos.

e. **Conteúdo da aula anterior:**

Não se aplica.

1.2 Aula 2 - Forma matricial

1.2.1 Conteúdo

Sistema de equações lineares.

1.2.2 Objetivos

a. Revisar o conceito de matriz;

b. Escrever um sistema na sua forma matricial e escrever a matriz ampliada.

1.2.3 Base Nacional Comum Curricular

a. **Unidade temática:** Álgebra.

b. **Objetos do conhecimento:**

Forma matricial de um sistema de equações lineares.

c. **Competências:**

Competência 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

d. **Habilidades:**

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

1.2.4 Linhas de ação

a. **Desenvolvimento metodológico e do conteúdo:**

> MOMENTO 1: Revisão sobre como escrever uma matriz.
>
> TÍTULO: Forma matricial de um sistema de equações linear.
>
> OBSERVAÇÃO: Os exercícios propostos para esse momento estão disponíveis na lista para impressão.

Representar o sistema na sua forma matricial implica em escrever: uma matriz com os coeficientes, que chamaremos de A; uma matriz com as incógnitas, que chamaremos de x; uma matriz com os termos independentes, que chamaremos de b;

Assim, temos $\mathrm{A} \cdot x = b$. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 9 \end{cases}$$

Escrevendo as matrizes A, x e b, obtemos

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Em geral, temos o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}.$$

que apresenta a sua forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Assim, temos $\mathrm{A} \cdot x \ = \ b$.

Exercício 1.3

PRATIQUE! Escreva a forma matricial dos sistemas abaixo.

a. $\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & = & 8 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \end{cases}$

. . . .

MOMENTO 2: Escrever a matriz ampliada do sistema.

TÍTULO: Matriz ampliada.

Para resolver o sistema pelo método do escalonamento, utilizaremos a matriz ampliada. Essa matriz é formada pela matriz A dos coeficientes e pela matriz b dos termos independentes, sendo escrita como [A | b].

$$[\ \mathrm{A} \mid b\ ] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}.$$

Observe o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 9 \end{cases}.$$

A matriz ampliada desse sistema é da forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & : & 1 \\ 2 & 5 & 1 & : & 9 \\ 1 & 3 & 4 & : & 9 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.4

Escreva a matriz ampliada dos sistemas do exercício 1.3

b. **Recursos utilizados:**

Apostila do estudante, algoritmo do escalonamento impresso (opcional) e lousa.

c. **Avaliação:**

A avaliação se dará através da mediação do professor durante a exposição do conteúdo e da interação e participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos.

d. **Conteúdo da aula anterior:**

Sistema de equações lineares, forma matricial e matriz ampliada.

1.3 Aula 3 - Escalonamento de matrizes

1.3.1 Conteúdo

Sistema de equações lineares.

1.3.2 Objetivos

a. Analisar e entender o algoritmo de escalonamento através de fluxogramas;

b. Compreender o que o processo de escalonamento diz sobre o sistema;

c. Encontrar a solução do sistema.

1.3.3 Base Nacional Comum Curricular

a. **Unidade temática:** Álgebra.

b. **Objetos do conhecimento:**

Escalonamento de matrizes.

c. **Competências:**

COMPETÊNCIA 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

COMPETÊNCIA 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

COMPETÊNCIA 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

d. **Habilidades:**

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

1.3.4 Linhas de ação

a. **Desenvolvimento metodológico e do conteúdo:**

MOMENTO 1: Explicar o que é um sistema escalonado e apresentar as operações elementares.

TÍTULO: Sistema escalonado.

Na matriz escalonada, os primeiros elementos não nulos de cada linha da matriz dos coeficientes são chamados de **pivôs** e os valores que aparecem na matriz dos coeficientes são **soluções do sistema**. Para escalonar a matriz utilizamos três operações elementares.

O processo de realizar operações elementares nos permite escrever a matriz de duas formas: na forma escalonada, cujo método é conhecido como *Método de Gauss*, e na forma escalonada reduzida (ou forma escalonada reduzida), que é conhecido como *Método de Gauss-Jordan*. Acompanhe como são definidas as três operações elementares:

1. Definição: São três as **operações elementares** sobre as linha de uma matriz:

(a) Permutar duas linhas ($\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$);

(b) Multiplicar uma linha por algum escalar α real diferente de zero ($\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha \cdot \mathrm{L}_i$);

(c) Somar uma linha com o produto de outra ($\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha \cdot \mathrm{L}_j$).

Sugestão: Durante a explicação deixe que os alunos façam sugestões de quais operações utilizar, pois assim é possível evitar possíveis erros futuros.

Para compreendermos as operações, vamos analisar a matriz ampliada abaixo.

$$\begin{cases} \phantom{2x + {}} 2y - 2z = 1 \\ 2x + 5y + z = 9 \\ x + 3y + 4z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & : & 1 \\ 2 & 5 & 1 & : & 9 \\ 1 & 3 & 4 & : & 8 \end{bmatrix}.$$

1. Permutar linhas $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$

Observe que a matriz não possui o primeiro elemento da primeira linha diferente de zero.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & : & 1 \\ 2 & 5 & 1 & : & 9 \\ 1 & 3 & 4 & : & 8 \end{bmatrix}.$$

Vamos realizar uma permutação entre as linha L_1 e L_3 para que o primeiro elemento dessa linha seja diferente de zero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & : & 8 \\ 2 & 5 & 1 & : & 9 \\ 0 & 2 & -2 & : & 1 \end{bmatrix}.$$

Para representar essa troca, escrevemos $L_1 \leftrightarrow L_3$.

2. Multiplicar por um escalar $\quad L_i \leftarrow \alpha \cdot L_i$

Da última matriz, vamos multiplicar a terceira linha da matriz por $\frac{1}{2}$:

$$0 \cdot \tfrac{1}{2} = 0 \qquad 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1 \qquad -2 \cdot \tfrac{1}{2} = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \\ 2 & 5 & 1 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Para representar essa operação, escrevemos $L_3 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot L_3$.

3. Somar uma linha com o produto de outra $\quad L_i \leftarrow L_i + \alpha \cdot L_j$

Observando a última matriz obtida, podemos notar que os elementos abaixo dos pivôs não são todos zeros. Vamos fazer a seguinte operação:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} & 2 & & 5 & & 1 & & 9 \\ - & 2 & - & 6 & - & 8 & - & 16 \\ \hline & 0 & - & 1 & - & 7 & - & 7 \end{array}.$$

Assim, a matriz ficará da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \\ 0 & -1 & -7 & \vdots & -7 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos fazer a seguinte operação para zerar o elemento que está abaixo do pivô da segunda linha:

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} & 0 & & 1 & - & 1 & & \frac{1}{2} \\ + & 0 & - & 1 & - & 7 & - & 7 \\ \hline & 0 & & 0 & - & 8 & - & \frac{13}{2} \end{array}$$

A matriz após essas operações ficará da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -8 & \vdots & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

Essa matriz não apresenta seus pivôs iguais a 1 e os elementos acima dos pivôs ainda não estão zerados. Porém, quando a matriz apresenta essa forma, dizemos que a matriz está na **forma escada**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -8 & \vdots & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

Continuando com as operações elementares para deixar a matriz escalonada, podemos multiplicar a linha L_3 por $-\frac{1}{8}$. Assim

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{8} \cdot L_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & + & 0 & + & \frac{8}{\frac{1}{8}} & + & \frac{\frac{13}{2}}{\frac{1}{8}} \\ \hline 0 & & 0 & + & 1 & + & \frac{13}{16} \end{array}$$

E agora, fazendo a operação na linha L_2:

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & + & 1 & - & 1 & + & \frac{1}{2} \\ 0 & + & 0 & + & 1 & + & \frac{13}{16} \\ \hline 0 & + & 1 & + & 0 & + & \frac{21}{16} \end{array}.$$

A matriz ficará da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & : & 8 \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{21}{16} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{13}{16} \end{bmatrix}$$

Por fim, vamos realizar duas operações sobre a linha L_1:

$$L_1 \leftarrow L_1 - 3 \cdot L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & + & 3 & + & 4 & + & 8 \\ 0 & - & 3 & & 0 & - & \frac{63}{16} \\ \hline 1 & & 0 & + & 4 & + & \frac{65}{16} \end{array}.$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 4 \cdot L_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & & 0 & + & 4 & + & \frac{65}{16} \\ 0 & & 0 & - & 4 & - & \frac{52}{16} \\ \hline 1 & & 0 & & 0 & + & \frac{13}{16} \end{array}$$

A matriz escalonada fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{13}{16} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{21}{16} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{13}{16} \end{bmatrix}.$$

Onde encontramos como solução $x = \frac{13}{16}$, $y = \frac{21}{16}$ e $z = \frac{13}{16}$.

Vamos verificar se de fato os valores encontrados satisfazem simultaneamente as três equações:

Primeira equação: $2 \cdot y \ - \ 2 \cdot z \ = \ 1$

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \frac{21}{16} \; - \; 2 \cdot \frac{13}{16} \; &= \; 1 \; \Rightarrow \\
\frac{21}{8} \; - \; \frac{13}{8} \; &= \; 1 \; \Rightarrow \\
\frac{8}{8} \; &= \; 1 \; \Rightarrow \\
1 \; &= \; 1.
\end{aligned}
$$

Segunda equação: $2 \cdot x + 5 \cdot y \; + \; z \; = \; 9$

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \frac{13}{16} + 5 \cdot \frac{21}{16} \; + \; \frac{13}{16} \; &= \; 9 \; \Rightarrow \\
\frac{26}{16} + \frac{105}{8} \; + \; \frac{13}{16} \; &= \; 9 \; \Rightarrow \\
\frac{144}{16} \; &= \; 9 \; \Rightarrow \\
9 \; &= \; 9.
\end{aligned}
$$

Terceira equação: $x \; + \; 3 \cdot y \; + \; 4 \cdot z \; = \; 8$

$$
\begin{aligned}
\frac{13}{16} \; + \; 3 \cdot \frac{21}{16} \; + \; 4 \cdot \frac{13}{16} \; &= \; 8 \; \Rightarrow \\
\frac{13}{16} \; + \; \frac{63}{16} \; + \; \frac{52}{16} \; &= \; 8 \; \Rightarrow \\
\frac{128}{16} \; &= \; 8 \; \Rightarrow \\
8 \; &= \; 8.
\end{aligned}
$$

MOMENTO 2: Apresentar o algoritmo do escalonamento.

TÍTULO: Algoritmo de escalonamento.

SUGESTÃO: Imprima os fluxogramas que estão em anexo e distribua para os estudantes, caso eles não possuam a apostila.

Agora que já vimos as operações elementares para escalonar uma matriz, observe o algoritmo do escalonamento que auxilia nesse processo e como o sistema pode ser resolvido. Esse algoritmo apresenta-se de duas formas: por meio de descrição narrativa e por fluxograma.

ALGORITMO DE ESCALONAMENTO:

Teste inicial – Se a matriz for nula, pare.

Passo 1 -

i. Localize a coluna mais à esquerda que não seja zero e, se necessário, troque a primeira linha com outra linha para trazer uma entrada não-nula (pivô) para a primeira linha desta coluna.
ii. Divida a primeira linha pelo valor do pivô para obter um pivô igual a 1.
iii. Realize operações elementares para zerar os elementos que estão abaixo do pivô encontrado no passo anterior.

Passo 2 -

i. Mova-se diagonalmente para a direita e para baixo, para a próxima linha e coluna.
ii. Se encontrar um elemento não-nulo, este será o próximo pivô. Normalize-o para 1 e use operações elementares para zerar todos os elementos abaixo dele.
iii. Se a coluna inteira for nula, não há pivô a ser estabelecido. Neste caso, continue movendo-se para a coluna seguinte até encontrar um pivô ou confirmar que todas as colunas restantes são nulas.

Passo 3 -

Continue este processo linha por linha, coluna por coluna, até que todos os pivôs estejam normalizados e todos os elementos abaixo dos pivôs estejam zerados. Quando esse processo terminar, a matriz que você obteve estará em forma escalonada. Agora, prossiga com as seguintes etapas para colocar a matriz em forma escada reduzida.

Passo 4 -

Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

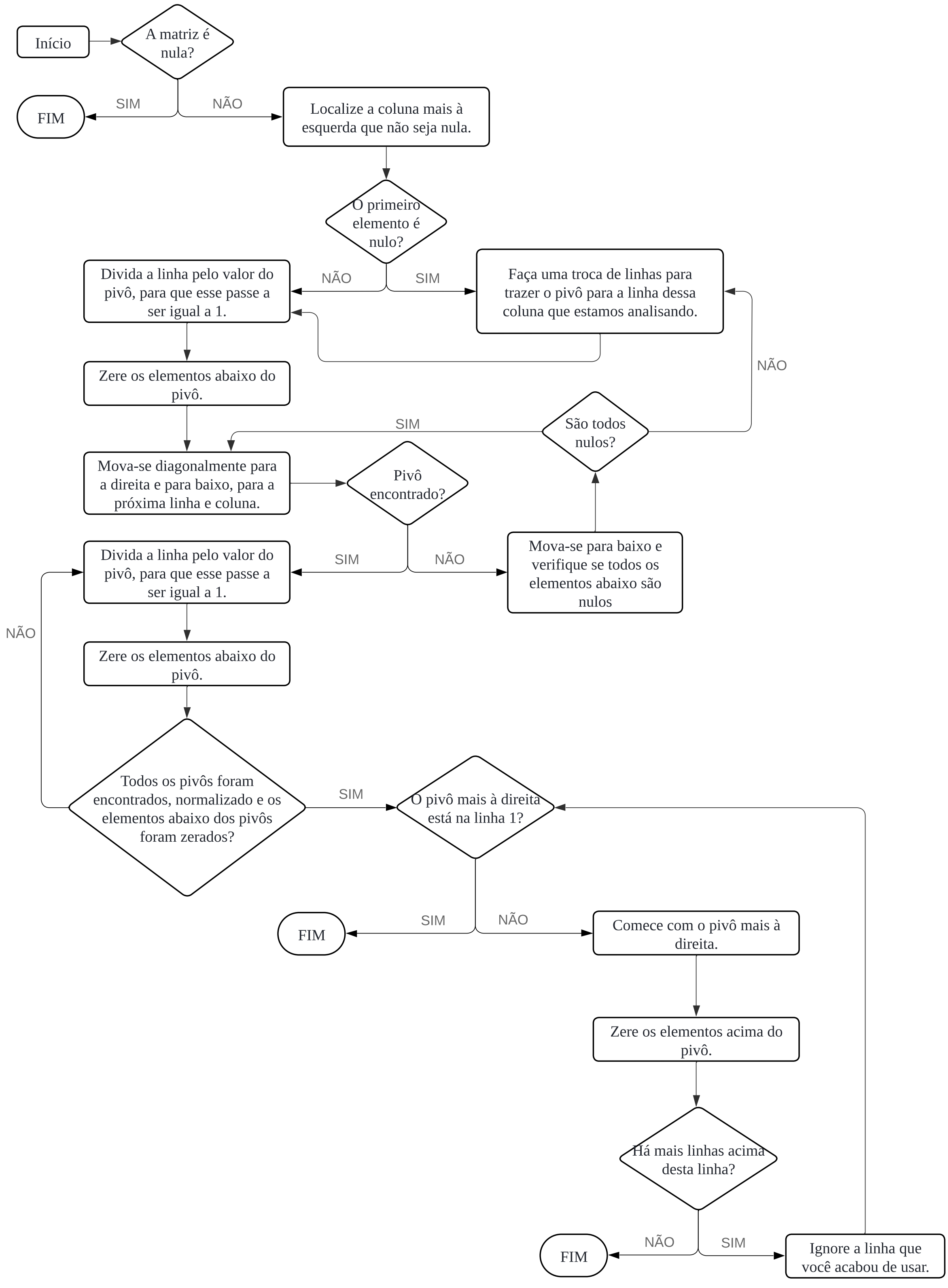
Passo 5 -

Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

Passo 6 -

Ignore a linha que você acabou de usar e volte ao Passo 4 e repita o processo para a linha que está acima até concluir o escalonamento.

Fluxograma - Algoritmo de escalonamento



Fonte: Autoria própria

Exemplo 1.3. Teste: Algoritmo de escalonamento

Vamos resolver o sistema a seguir utilizando o algoritmo descrito acima.

$$\begin{cases} x - y + z + w = 4 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - 2y + w = 1 \\ 5x + z - w = 5 \end{cases}$$

Primeiro, vamos escrever a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & \vdots & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 5 \end{bmatrix}$$

Teste inicial: A matriz não é nula, seguimos com o algoritmo.

Passo 1

i. Localize a coluna mais à esquerda que não seja zero e, se necessário, troque a primeira linha com outra linha para trazer uma entrada não-nula (pivô) para a primeira linha desta coluna.

A coluna mais à esquerda é a coluna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ii. Divida a primeira linha pelo valor do pivô para obter um pivô igual a 1.

Etapa não necessária, pois o pivô já é 1.

iii. Realize operações elementares para zerar os elementos que estão abaixo do pivô encontrado no passo anterior.

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrrrrrrrr} + & 2 & - & 1 & - & 1 & & 0 & - & 3 \\ - & 2 & + & 2 & - & 2 & - & 2 & - & 8 \\ \hline & 0 & + & 1 & - & 3 & - & 2 & - & 11 \end{array}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrrrrrrrr} + & 1 & - & 2 & & 0 & + & 1 & + & 1 \\ - & 1 & + & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 4 \\ \hline & 0 & - & 1 & - & 1 & & 0 & - & 3 \end{array}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 5 \cdot L_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrrrrrrrr} + & 5 & & 0 & + & 1 & - & 1 & + & 5 \\ - & 5 & + & 5 & - & 5 & - & 5 & - & 20 \\ \hline & 0 & + & 5 & - & 4 & - & 6 & - & 15 \end{array}$$

Com essas operações, a matriz ficará desta forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & \vdots & -11 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 5 & -4 & -6 & \vdots & -15 \end{bmatrix}.$$

Passo 2

i. Mova-se diagonalmente para a direita e para baixo, para a próxima linha e coluna.

Vamos trabalhar com a segunda coluna

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ii. Se encontrar um elemento não-nulo, este será o próximo pivô. Normalize-o para 1 e use operações elementares para zerar todos os elementos abaixo dele.

O pivô já é 1, vamos zerar os elementos abaixo dele:

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & - & 1 & - & 1 & & 0 & - & 3 \\ 0 & + & 1 & - & 3 & - & 2 & - & 11 \\ \hline 0 & & 0 & - & 4 & - & 2 & - & 14 \end{array}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 5 \cdot L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 5 & - & 4 & - & 6 & - & 15 \\ 0 & - & 5 & + & 15 & + & 10 & + & 55 \\ \hline 0 & & 0 & + & 11 & + & 4 & + & 40 \end{array}$$

A matriz ficará

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & \vdots & -11 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & \vdots & -14 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & \vdots & 40 \end{bmatrix}.$$

Passo 3 - Continue este processo linha por linha, coluna por coluna, até que todos os pivôs estejam normalizados e todos os elementos abaixo dos pivôs estejam zerados. Quando esse processo terminar, a matriz que você obteve estará em forma escalonada. Agora, prossiga com as seguintes etapas para colocar a matriz em forma escada reduzida.

Da terceira coluna, façamos:

ii. Divida a terceira linha pelo valor do pivô para obter um pivô igual a 1.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{L}_3 \leftarrow \frac{-1}{4} \cdot \mathrm{L}_3 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \quad 0 \ + \ 1 \ + \ \tfrac{1}{2} \ + \ \tfrac{7}{2}$$

Desta forma,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & : & -11 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & : & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 11 & 4 & : & 40 \end{bmatrix}.$$

iii. Realize operações elementares para zerar os elementos que estão abaixo do pivô encontrado no passo anterior.

$$L_4 \leftarrow L_4 - 11 \cdot L_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & + & 11 & + & 4 & + & 40 \\ 0 & 0 & - & 11 & - & \frac{11}{2} & - & \frac{77}{2} \\ \hline 0 & 0 & & 0 & - & \frac{3}{2} & + & \frac{3}{2} \end{array}$$

Realizando a operação $L_4 \leftarrow -\frac{2}{3} \cdot L_4$, temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & : & -11 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & : & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & -1 \end{bmatrix}.$$

Passo 4 - Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

Passo 5 - Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} \cdot L_4 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & + & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & & 0 & - & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & + & 1 & & 0 & + & 4 \end{array}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3 \cdot L_4 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccccccccc} 0 & + & 1 & - & 3 & - & 2 & - & 11 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 2 & - & 2 \\ \hline 0 & + & 1 & - & 3 & & 0 & - & 13 \end{array}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & - & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 4 \\ 0 & & 0 & & 0 & - & 1 & + & 1 \\ \hline 1 & - & 1 & + & 1 & + & 0 & + & 5 \end{array}$$

Ignore a linha que você acabou de usar e volte ao Passo 4 e repita o processo para a linha que está acima até concluir o escalonamento.

Passo 4 - Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

Passo 5 - Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3 \cdot L_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 1 & - & 3 & & 0 & - & 13 \\ 0 & & 0 & + & 3 & & 0 & + & 12 \\ \hline 0 & & 1 & & 0 & & 0 & - & 1 \end{array}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & - & 1 & + & 1 & & 0 & + & 5 \\ 0 & & 0 & - & 1 & & 0 & - & 4 \\ \hline 1 & - & 1 & & 0 & & 0 & + & 1 \end{array}$$

Ignore a linha que você acabou de usar e volte ao Passo 4 e repita o processo para a linha que está acima até concluir o escalonamento.

Passo 4 - Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

Passo 5 - Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

$$\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_4 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

A matriz ficará na sua forma escada reduzida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos que $x = 0$, $y = -1$, $z = 4$ e $w = -1$ formam a solução $(0, -1, 4, -1)$ do sistema.

b. **Recursos utilizados:**

Apostila do estudante, algoritmo do escalonamento impresso (opcional) e lousa.

c. **Avaliação:**

A avaliação se dará através da mediação do professor durante a exposição do conteúdo e da interação e participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos.

d. **Conteúdo da aula anterior:**

Sistema de equações lineares, forma matricial e matriz ampliada.

1.4 Aula 3 - Praticar o escalonamento

1.4.1 Conteúdo

Sistema de equações lineares.

1.4.2 Objetivos

a. Praticar o escalonamento da matriz ampliada;

b. Encontrar a solução do sistema;

1.4.3 Base Nacional Comum Curricular

a. **Unidade temática:** Álgebra.

b. **Objetos do conhecimento:**

Algoritmo do escalonamento de matrizes.

c. **Competências:**

COMPETÊNCIA 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

COMPETÊNCIA 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

COMPETÊNCIA 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

d. **Habilidades:**

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

1.4.4 Linhas de ação

a. **Desenvolvimento metodológico e do conteúdo:**

MOMENTO 1: Exercícios de fixação.

TÍTULO: Prática do escalonamento.

Nesse momento, peça para que os estudantes escalonem a matriz ampliada de cada item. A resolução de cada um está na seção 3. Esses exercícios estão na lista para impressão e na apostila do estudante.

Exercício 1.5

Escreva a matriz ampliada de cada sistema e faça o escalonamento para obter a solução de cada sistema.

a. $$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 10x + 9y = 11 \end{cases}$$

c. $\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 1 \\ 4x & + & y & = & 17 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x & + & 4y & = & 1 \\ 2x & + & 7y & = & 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x & + & 12y & + & 17z & = & 53 \\ x & + & 5y & + & 7z & = & 22 \\ 3x & + & 22y & + & 19z & = & 35 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x & + & 3y & - & z & = & 7 \\ 3x & + & 7y & + & z & = & 11 \\ 2x & + & 7y & - & 4z & = & 19 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & - & 5y & + & 2z & = & 1 \\ 4x & - & y & + & 8z & = & 3 \end{cases}$

b. **Recursos utilizados:**

Apostila do estudante, lista de exercícios impressa (opcional) e lousa.

c. **Avaliação:**

A avaliação se dará através da mediação do professor durante a exposição do conteúdo e da interação e participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos.

d. **Conteúdo da aula anterior:**

Escalonamento da matriz ampliada.

1.5 Aula 4 - Solução de um sistema

1.5.1 Conteúdo

Sistema de equações lineares.

1.5.2 Objetivos

a. Compreender a solução de um sistema no plano cartesiano;

b. Classificar um sistema de acordo com a solução.

1.5.3 Base Nacional Comum Curricular

a. **Unidade temática:** Álgebra.

b. **Objetos do conhecimento:**

Solução do sistema de equações lineares.

c. **Competências:**

Competência 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

d. **Habilidades:**

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

1.5.4 Linhas de ação

a. **Desenvolvimento metodológico e do conteúdo:**

MOMENTO 1: Compreender a solução do sistema.

TÍTULO: Solução de um sistema.

Uma equação linear que possui apenas duas incógnitas representa uma reta no plano. Vamos analisar sistemas 2x2 e observar o que acontece com as retas de acordo com as soluções do sistema.

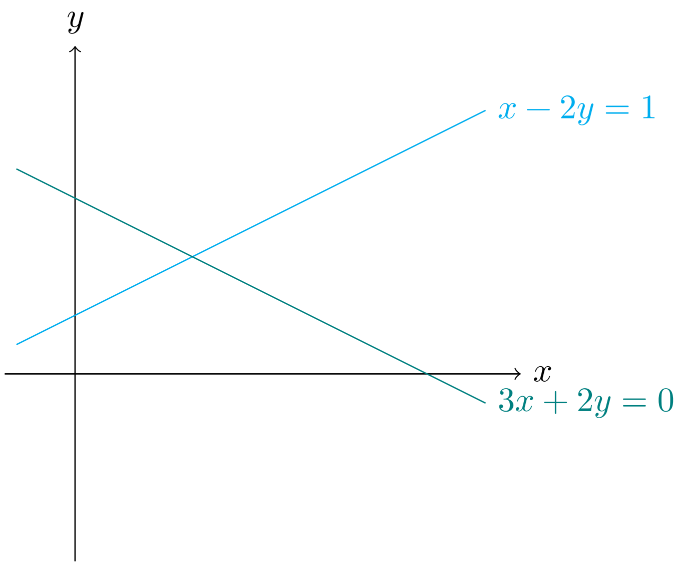
SISTEMA 1

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por escalonamento, obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema apresenta uma única solução $(3, 1)$. Essas duas equações representam as seguintes retas concorrentes:



O ponto onde as duas retas se intersectam é o ponto $(3, 1)$, que é a solução do sistema. Nesse caso, dizemos que o sistema é **consistente** e possui **solução única**!

SISTEMA 2

$$\begin{cases} x & - & 2y & = & 1 \\ 2x & - & 4y & = & 2 \end{cases}$$

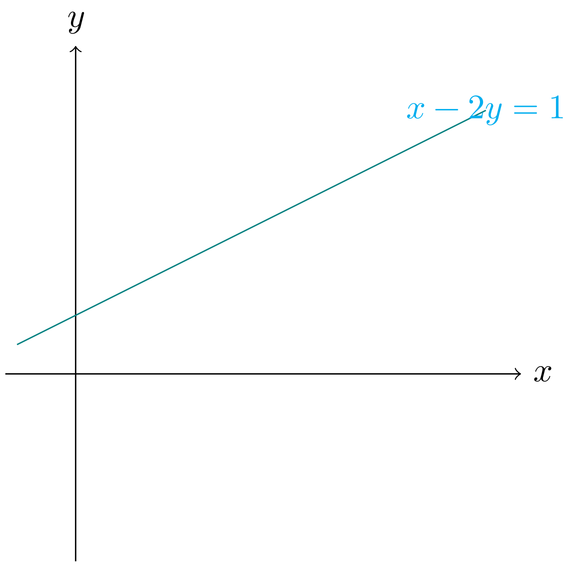
Escalonando a matriz ampliada, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

A última linha da matriz escalonada ficou com todos os seus elementos nulos. Quando isso ocorre, temos apenas a equação $x - 2y = 1$, ou seja, a solução do sistema é formada por todos os pontos que pertencem a reta $y = -\frac{1-x}{2}$.

Graficamente, temos:

Como temos duas retas coincidentes, dizemos que o sistema é **consistente** e possui **infinitas soluções**!



Sistema 3

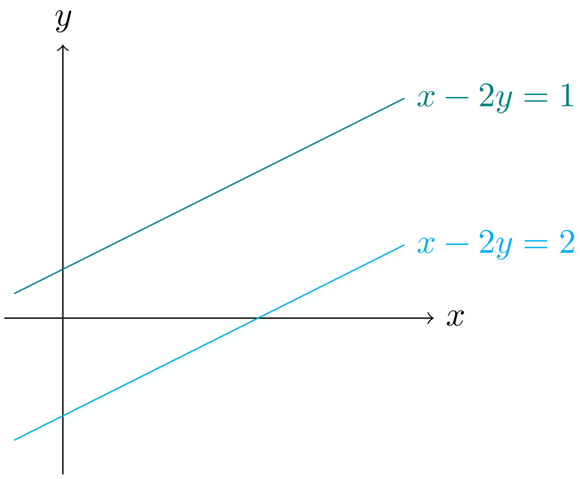
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

Nesse sistema, escalonando a matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \Rightarrow 0 = 1$, o que é um absurdo. Podemos concluir que não existem valores para x e y capazes de satisfazer as duas equações do sistema. Observando as retas no planos:

Figura 1.1: Sistema 3: Retas Paralelas



O sistema não possui solução e as retas são paralelas. Dizemos que o sistema é **inconsistente** e **não possui soluções**!

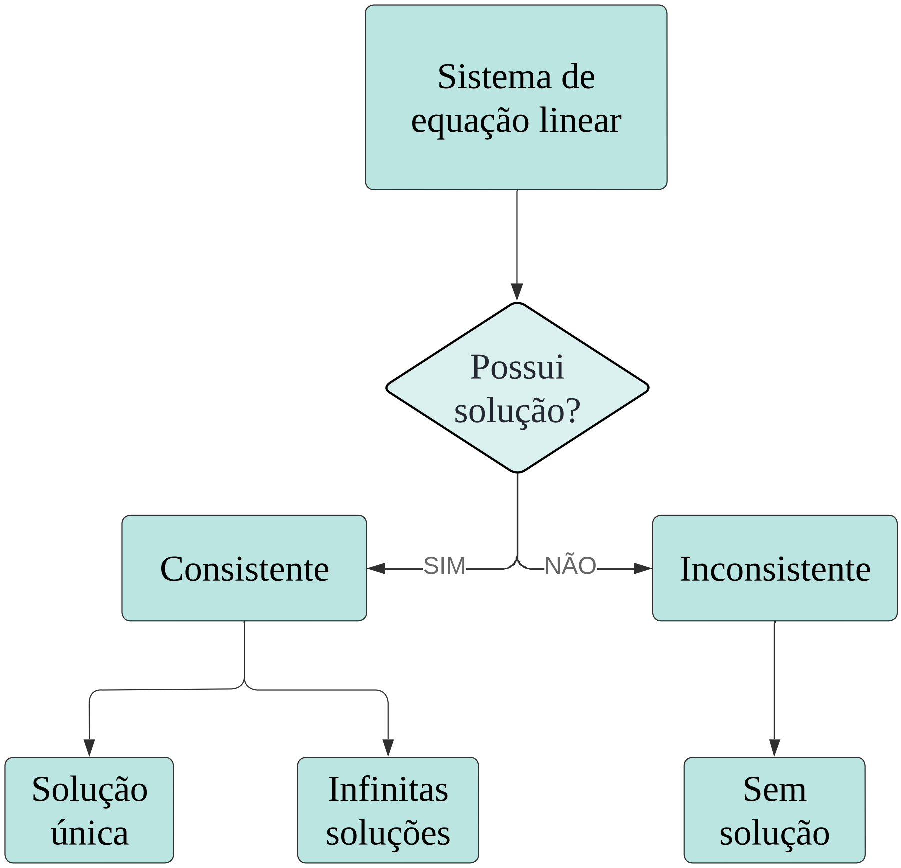
. . . .

MOMENTO 2: Classificar o sistema.

TÍTULO: Classificação do sistema

Na seção 2.3 há exercícios para a classificação de sistemas através das plataformas apresentadas na seção. Caso haja na escola computadores disponíveis, é um recurso interessante. Caso contrário, os alunos podem baixar no celular os aplicativos sugeridos.

Os sistemas de equações lineares podem ser classificados da seguinte maneira:



b. **Recursos utilizados:**

Apostila do estudante, lista de exercícios impressa (opcional) e lousa.

c. **Avaliação:**

A avaliação se dará através da mediação do professor durante a exposição do conteúdo e da interação e participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos.

d. **Conteúdo da aula anterior:**

Exercícios de fixação para a prática do escalonamento.

1.6 Aula 5 - Pensamento computacional

1.6.1 Conteúdo

Sistema de equações lineares.

1.6.2 Objetivos

a. Conhecer o pensamento computacional como método para resolver problemas;

b. Desenvolver uma pesquisa sobre o tema da aula.

1.6.3 Base Nacional Comum Curricular

a. **Unidade temática:** Álgebra.

b. **Objetos do conhecimento:**

Pensamento computacional.

c. **Competências:**

Competência 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

d. **Habilidades:**

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

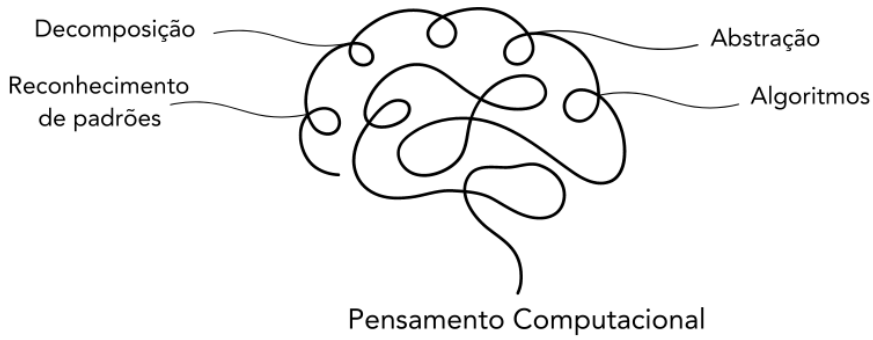
1.6.4 Linhas de ação

a. **Desenvolvimento metodológico e do conteúdo:**

MOMENTO 1: Sobre o pensamento computacional.

TÍTULO: Pensamento computacional.

SUGESTÃO: Separe a turma em grupos e distribua para cada grupo um pilar do pensamento computacional para eles façam pesquisas e apresentem para a turma.



Problemas complexos sempre desafiaram diversas áreas do conhecimento, levando a humanidade a enfrentar situações imprevistas. Essas situações abriram portas para novas descobertas, que contribuíram para a construção do conhecimento humano e do avanço científico e tecnológico.

Atualmente, é possível utilizar técnicas matemáticas e computacionais cada vez mais criativas e sofisticadas, seja para o sequenciamento do DNA, simulações nas engenharias, análise de grandes conjuntos de dados nas áreas sociais ou nos mais variados contextos.

Fragmentar um problema difícil, reconhecer padrões, fazer abstrações e criar algoritmos são habilidades utilizadas por cientistas da computação. Com isso, é possível identificar, orientar e contribuir para o desenvolvimento de soluções dos desafios. Juntas, essas habilidades compõem um método para resolver problemas chamado de pensamento computacional, que é constituído por quatro habilidades:

Decomposição: A decomposição consiste em dividir o problema em partes menores.

Reconhecimento de padrões: O reconhecimento de padrões permite identificar as semelhanças nos detalhes.

Abstração: A abstração, por sua vez, isola detalhes irrelevantes e concentra-se nas partes relevantes.

ALGORITMOS: Os algoritmos são os responsáveis por escrever a solução do problema em uma sequência de passos que podem ou não ser calculados por um computador.

Juntas auxiliam na interpretação do problema, podendo reutilizar estratégias de problemas semelhantes e também desenvolver estratégias novas com uma lógica estruturada. Entende-se que nem todo problema precise obrigatoriamente passar por todas as etapas, uma vez que elas são independentes entre si. Vamos agora explorar como essas habilidades podem nos ajudar a resolver problemas que envolvem a resolução de sistemas de equações lineares.

b. **Recursos utilizados:**

Apostila do estudante e lousa.

c. **Avaliação:**

A avaliação se dará através da mediação do professor durante a exposição do conteúdo e da interação e participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos. Se possível, avaliar os alunos pela apresentação do trabalho sugerido.

d. **Conteúdo da aula anterior:**

Soluções de um sistema.

1.7 Aula 6 - Como resolver problemas

1.7.1 Conteúdo

Sistema de equações lineares.

1.7.2 Objetivos

a. Interpretar problemas com o auxílio dos pilares do pensamento computacional;

b. Resolver problemas que envolvem sistemas.

1.7.3 Base Nacional Comum Curricular

a. **Unidade temática:** Álgebra.

b. **Objetos do conhecimento:**

Pensamento computacional.

c. **Competências:**

Competência 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

d. **Habilidades:**

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

1.7.4 Linhas de ação

a. **Desenvolvimento metodológico e do conteúdo:**

MOMENTO 1: Resolver problemas em geral.

TÍTULO: Problemas em geral.

Exemplo 1.4. (FESP - Adaptado): Uma pessoa alimenta seu cão combinando o conteúdo de duas marcas de rações preparadas pelos fabricantes X e Y. A tabela abaixo discrimina a quantidade de unidades de vitaminas e de sais minerais em cada saco de ração e a quantidade mínima de unidades que o cão deve consumir.

	Ração X	Ração Y	Mínimo
Vitaminas	40	20	200
Sais minerais	20	40	200

Se o saco da ração X custa R$10,00 e o da Y, R$ 15,00, determine a quantidade inteira de cada saco a ser comprado de modo a minimizar os custos e satisfazer as quantidades mínimas requeridas.

Compreendendo o problema

O problema solicita a quantidade inteira de cada saco de ração a ser comprada, onde duas condições devem ser satisfeitas: atender à quantidade mínima de vitaminas e sais minerais e minimizar os gastos. Para isso, é fornecida uma tabela com as quantidades e os valores de cada saco de ração.

À primeira vista, percebe-se que não é fácil abordar o problema de uma vez só. Portanto, vamos utilizar a decomposição e dividir o problemas em subproblemas. Inicialmente, buscaremos determinar a quantidade de sacos que atendem à condição inicial. Em seguida, encontraremos os valores correspondentes de forma inteira.

Por fim, para a última condição, identificaremos as quantidades de sacos que resultam no menor custo possível.

Subproblema 1

Qual é a quantidade de sacos de ração para se ter a quantidade mínima de vitaminas e sais minerais desejada?

Aqui, nosso foco está na determinação da quantidade de sacos de ração, para isso vamos utilizar as informações que constam na tabela. Nesse sentido, as incógnitas são as quantidades de sacos de ração a serem adquiridas de cada fornecedor. Então, vamos criar uma equação para cada linha da tabela.

Denotaremos por x a quantidade de sacos a serem adquiridos da Ração X e por y a quantidade de sacos a serem adquiridos da Ração Y. Dessa forma, a partir da primeira linha, obtemos a equação $40x + 20y = 200$, enquanto a segunda linha resulta na equação $20x + 40y = 200$. Como queremos que as duas equações sejam satisfeitas simultaneamente, temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 40x & + & 20y & = & 200 \\ 20x & + & 40y & = & 200 \end{cases}.$$

Vamos escrever a matriz ampliada desse sistema:

$$\begin{bmatrix} 40 & 20 & \vdots & 200 \\ 20 & 40 & \vdots & 200 \end{bmatrix}$$

Podemos multiplicar as duas linhas por $\frac{1}{20}$, assim $L_1 \leftarrow \frac{1}{20} \cdot L_1$ e $L_2 \leftarrow \frac{1}{20} \cdot L_2$ e também permutar as duas linhas $L_1 \leftrightarrow L_2$ deixando a matriz assim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 10 \\ 2 & 1 & \vdots & 10 \end{bmatrix}$$

Continuando com o processo de escalonamento:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccc} + & 2 & + & 1 & + & 10 \\ - & 2 & - & 4 & - & 20 \\ \hline & 0 & - & 3 & - & 10 \end{array}$$

$$L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} \cdot L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & - & \frac{3}{-\frac{1}{3}} & - & \frac{10}{-\frac{1}{3}} \\ \hline 0 & + & 1 & + & \frac{10}{3} \end{array}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccc} + & 1 & + & 2 & + & 10 \\ & 0 & - & 2 & - & \frac{20}{3} \\ \hline & 1 & & 0 & & \frac{10}{3} \end{array}$$

Assim, a matriz ampliada escalonada fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Concluímos que para se obter exatamente a quantidade mínima devemos ter $x = y = \frac{10}{3}$. Porém, a questão exige uma quantidade inteira de sacos, que não é o caso da quantidade x e y que encontramos. Por isso, vamos ao próximo subproblema.

SUBPROBLEMA 2

Qual é a quantidade inteira de cada saco que devemos comprar?

Encontramos no subproblema valores não inteiros. Temos que $\frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,6$, desta forma a quantidade mínima de sacos a ser comprada é 7. Vamos investigar quantos sacos de cada ração podemos comprar de maneira a satisfazer a quantidade mínima de vitaminas e sais minerais. Acompanhe a Tabela 1.1.

Tabela 1.1: Cálculo das condições

(x, y)	Vitaminas	Sais minerais	Conclusão
(1, 6)	40 + 120 = 160	20 + 240 = 260	Não possui o mínimo de vitaminas
(2, 5)	80 + 100 = 180	40 + 200 = 240	Não possui o mínimo de vitaminas
(3, 4)	120 + 80 = 200	60 + 160 = 220	Possui o mínimo
(4, 3)	160 + 60 = 220	80 + 120 = 200	Possui o mínimo
(5, 2)	200 + 40 = 240	100 + 80 = 180	Não possui o mínimo de sais minerais
(6, 1)	240 + 20 = 260	120 + 40 = 160	Não possui o mínimo de sais minerais

A partir dos cálculos da tabela, observamos que é possível adquirir 3 sacos da ração X e 4 sacos da ração Y, ou então 4 sacos da ração X e 3 sacos da ração Y, uma vez que ambas as opções atendem às exigências mínimas de vitaminas e sais minerais. No entanto, o problema ainda quer saber a opção de menor custo. Portanto, vamos para a resolução do último subproblema.

Subproblema 3

Qual é a quantidade mínima de cada saco para se obter o menor custo?

O problema nos informa que o saco da ração X custa R$10, 00 e o saco da ração Y custa R$15, 00. Utilizando as informações do subproblema 2, temos que

$$\begin{aligned}(3,4) \Rightarrow 3\cdot 10 + 4\cdot 15 \quad &= R\$90,00\\ (4,3) \Rightarrow 4\cdot 10 + 3\cdot 15 \quad &= R\$70,00\end{aligned}$$

Portanto, podemos afirmar que a quantidade mínima de sacos necessária para minimizar os custos é de 4 para a ração X e 3 para a ração Y.

Resposta do problema principal

Deve-se comprar 4 sacos da ração do fornecedor X e 3 sacos da ração do fornecedor Y, gastando assim R$70, 00.

b. **Recursos utilizados:**

Apostila do estudante e lousa.

c. **Avaliação:**

A avaliação se dará através da mediação do professor durante a exposição do conteúdo e da interação e participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos.

d. **Conteúdo da aula anterior:**

Pensamento computacional.

1.8 Aula 7 - Problemas: Fluxo de tráfego

1.8.1 Conteúdo

Sistema de equações lineares.

1.8.2 Objetivos

a. Interpretar problemas com o auxílio dos pilares do pensamento computacional;

b. Compreender o que é fluxo de tráfego e resolver sistemas que envolvem esse conceito;

c. Resolver problemas.

1.8.3 Base Nacional Comum Curricular

a. **Unidade temática:** Álgebra.

b. **Objetos do conhecimento:**

Problemas sobre fluxo de tráfego.

c. **Competências:**

COMPETÊNCIA 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

COMPETÊNCIA 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

COMPETÊNCIA 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

d. **Habilidades:**

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

1.8.4 Linhas de ação

a. **Desenvolvimento metodológico e do conteúdo:**

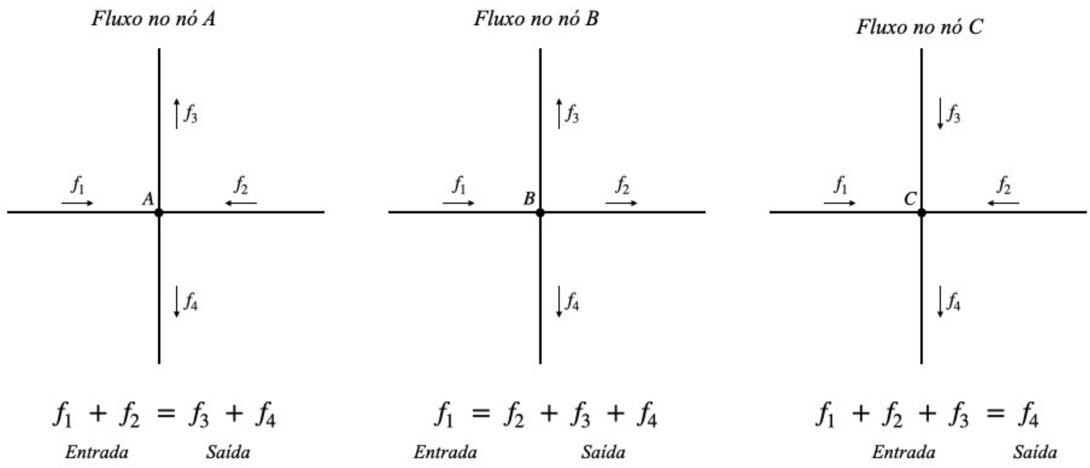
MOMENTO 1: Sobre o pensamento computacional.
TÍTULO: Fluxo de tráfego.

Define-se uma rede como um conjunto finito de ramos (ou arcos) pelos quais o fluxo percorre. Em uma rede, existem pontos de encontro chamados nós ou vértices, e é nesses pontos que o fluxo se divide.

Para evitar acúmulos no meio, garantindo a livre circulação ao longo da rede, entende-se que, na conservação do fluxo, a quantidade de fluxo de entrada em cada nó é igual à quantidade de fluxo de saída. Indica-se uma direção e a quantidade que fluirá ao longo do ramo.

O problema de fluxo de tráfego a seguir foi extraído e adaptado do livro Álgebra Linear com Aplicações dos autores Anton e Rorres (ANTON; RORRES, 2012).

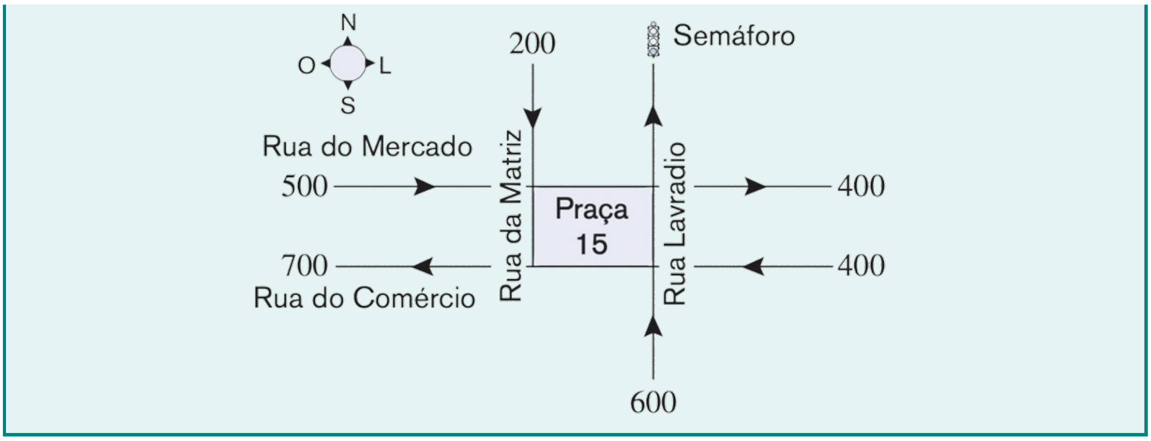
Figura 1.2: Exemplos de fluxos de rede



Exemplo 1.5. Na Figura 1.5 pode-se ver o fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças, a Praça 15. Prevê-se a instalação de um semáforo computadorizado na saída norte da Rua Lavradio, e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam o complexo da praça. Todas as ruas são de mão única.

a) O semáforo deveria deixar passar quantos veículos por hora para garantir que o número médio de veículos por hora que entra no complexo seja igual ao número médio de veículos que sai do complexo?

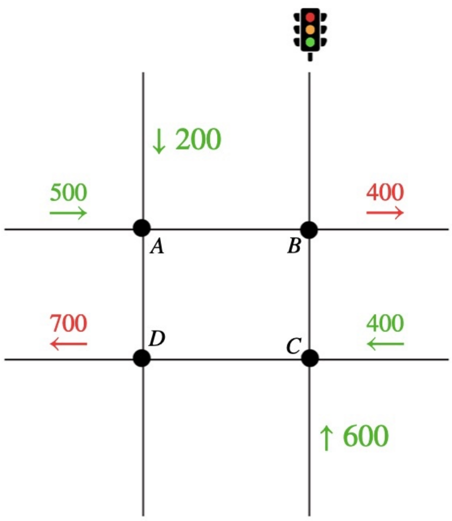
b) Supondo que o semáforo tenha sido ajustado para equilibrar o fluxo total para dentro e para fora do complexo da praça, o que pode ser dito sobre o número médio de veículos por hora que circulará pelas ruas que circundam o complexo?



Resolução do item a

Para descobrir quantos veículos o semáforo deveria deixar passar, precisamos saber quantos veículos estão entrando na região e quantos veículos já estão saindo. Para isso, vamos analisar as informações que a questão forneceu.

Figura 1.3: Entrada e saída de veículos

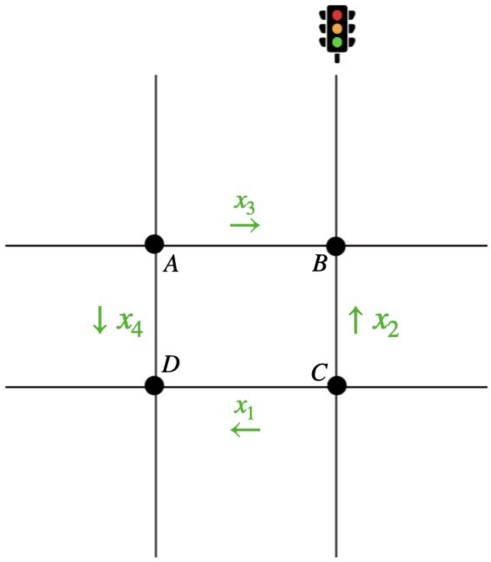


Como mostra na figura 1.3, em verde temos a entrada de veículos $(500 + 400 + 600 + 200 = 1700)$ e em vermelho a saída $(700 + 400 = 1100)$. Vimos que a quantidade de entrada deve ser igual a quantidade de saída, portando pelo semáforo devem passar 600 veículos por hora.

Resolução do item b

Agora estamos interessados em saber o que acontece ao redor da praça, para isso vamos analisar o fluxo de entrada nessas vias entre os nós A, B, C e D.

Figura 1.4: Fluxo em torno da Praça



Sabendo que o fluxo de entrada deve ser igual ao de saída, cada nó formará uma equação.

Nó A: $x_4 + x_3 = 500 + 200 \quad \Rightarrow \quad x_4 + x_3 = 700.$

Nó B: $x_2 + x_3 = 400.$

Nó C: $x_1 + x_2 = 600 + 400 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 1000.$

Nó D: $x_1 + x_4 = 700.$

Com essas equações montamos o sistema:

$$\begin{cases} & & & & x_3 & + & x_4 & = & 700 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1000 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1000 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & = & 700 \end{cases}$$

Escrevendo o sistema na sua forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 1000 \\ 1000 \\ 700 \end{bmatrix}$$

Com a matriz ampliada [A | b]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 700 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1000 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1000 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 700 \end{bmatrix}$$

Ao escalonar a matriz ampliada, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 700 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$x_1 = 700 - t.$$

$$x_2 = 300 + t.$$

$$x_3 = 700 - t.$$

$$x_4 = t.$$

Temos x_4 como uma variável livre, desta forma assumiremos $x_4 = t$. Agora, para interpretar o resultado encontrado, precisamos achar quais valores t pode assumir.

Os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4 não podem ser negativos, pois nessa situação mostraria um fluxo contrário e como as ruas são de mão única, não pode ocorrer. Desta forma, como $0 \leq x_1 \leq 700$ concluímos que t pode ser no máximo 700, ou seja, $0 \leq t \leq 700$. Com isso, temos que o fluxo médio ao longo das vias ficará entre

$$0 \leq x_1 \leq 700$$

$$300 \leq x_2 \leq 1000$$

$$0 \leq x_3 \leq 700$$

$$0 \leq x_4 \leq 700\ .$$

b. **Recursos utilizados:**

Apostila do estudante e lousa.

c. **Avaliação:**

A avaliação se dará através da mediação do professor durante a exposição do conteúdo e da interação e participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos.

d. **Conteúdo da aula anterior:**

Resoluções de problemas em geral.

1.9 Aula 8 - Problemas: Balanceamento de equações químicas

1.9.1 Conteúdo

Sistema de equações lineares.

1.9.2 Objetivos

a. Interpretar problemas com o auxílio dos pilares do pensamento computacional;

b. Resolver problemas que envolver o balanceamento de equações químicas.

1.9.3 Base Nacional Comum Curricular

a. **Unidade temática:** Álgebra.

b. **Objetos do conhecimento:**

Problemas de balanceamento de equações químicas.

c. **Competências:**

Competência 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

d. **Habilidades:**

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

1.9.4 Linhas de ação

a. **Desenvolvimento metodológico e do conteúdo:**

MOMENTO 1: Sobre o pensamento computacional.
TÍTULO: Balanceamento de equações químicas.

Uma equação química é apresentada da seguinte forma:

$$CH_4 + O_2 \quad \rightarrow \quad CO_2 + H_2O$$

Ela descreve quais são os produtos e reagentes de uma reação. Além disso, uma equação química balanceada especifica uma relação numérica das quantidades de reagentes e produtos de uma reação (RUSSEL, 1994).

A equação acima descreve na queima de metano, o metano (CH_4) e o oxigênio estável (O_2) reagem para formar dióxido de carbono (CO_2) e água (H_2O). Nesse caso, $CH_4 + O_2$ são os reagentes e $CO_2 + H_2O$ são os produtos.

Dizemos que uma reação química está **balanceada** se aparecer o mesmo número de átomos em cada lado da seta para cada tipo de átomo na reação. Por exemplo, equilibrando a equação apresentada ela ficada seguinte forma:

$$\mathrm{CH_4 + 2O_2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{CO_2 + 2H_2O}$$

Um dos métodos para deixar a equação balanceada utiliza sistemas de equações lineares. Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo 1.6. Observe a equação da reação química da fermentação do açúcar

$$\mathrm{C_6H_{12}O_6} \quad \rightarrow \quad \mathrm{CO_2 + C_2H_5OH}$$

Faça o balanceamento dessa equação.

Compreendendo a equação

Para que a equação esteja na sua forma balanceada, devemos ter para cada um dos átomos da equação, o número de átomos à esquerda igual ao número de átomos à direita. Assim, devemos encontrar os menores valores x, y e z de tal forma que

$$x \cdot (\mathrm{C_6H_{12}O_6}) \rightarrow y \cdot (\mathrm{CO_2}) + z \cdot (\mathrm{C_2H_5OH})$$

Retirando os dados

Vamos escrever as informações em uma tabela para nos auxiliar na organização dos dados:

	Lado esquerdo	Lado direito
C		
H		
O		

Para preencher essa tabela, vamos usar a propriedade distributiva da seguinte maneira:

$$x \cdot (C_6H_{12}O_6)$$

	Lado esquerdo	Lado direito
C	6x	
H	12x	
O	6x	

$$y \cdot (CO_2)$$

	Lado esquerdo	Lado direito
C	6x	y
H	12x	
O	6x	2y

$$z \cdot (C_2H_5OH)$$

	Lado esquerdo	Lado direito
C	6x	y +2z
H	12x	6z
O	6x	2y +z

Como o lado direito deve ser igual ao lado esquerdo, temos

$$\begin{array}{rcrcr} 6x & = & y & + & 2z \\ 12x & = & & & 6z \\ 6x & = & 2y & + & z \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrl} 6x & - & y & - & 2z & = 0 \\ 12x & & & - & 6z & = 0 \\ 6x & - & 2y & - & z & = 0 \end{array}$$

podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 12x & & & - & 6z & = & 0 \\ 6x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema, vamos escalonar a matriz ampliada utilizando o algoritmo do escalonamento apresentado na **Aula 3 - Escalonamento de matrizes**.

Escalonando a matriz

Escrevendo a matriz ampliada do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 & : & 0 \\ 12 & 0 & -6 & : & 0 \\ 6 & -2 & -1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando as operações elementares, vamos deixar o primeiro elemento da linha L_1 igual a 1:

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{6} \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccc} \frac{6}{6} & - & \frac{1}{6} & - & \frac{2}{6} & \frac{0}{6} \\ \hline 1 & - & \frac{1}{6} & - & \frac{1}{3} & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \vdots & 0 \\ 12 & 0 & -6 & \vdots & 0 \\ 6 & -2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Escrevendo a matriz ampliada do sistema, temos:

Partindo para a linha L_2, realizamos a seguinte operação:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 12 \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} & 12 & & 0 & - & 6 & & 0 \\ - & 12 & + & 2 & + & 4 & & 0 \\ \hline & 0 & + & 2 & - & 2 & & 0 \end{array}$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccc} 0 & + & \frac{2}{2} & - & \frac{2}{2} & \frac{0}{2} \\ \hline 0 & + & 1 & - & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 6 & -2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, na linha L_3:

$$L_3 \leftarrow L_3 - 6 \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} & 6 & - & 2 & - & 1 & & 0 \\ - & 6 & + & 1 & + & 2 & & 0 \\ \hline & 0 & - & 1 & + & 1 & & 0 \end{array}$$

$$
L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \qquad \Rightarrow \qquad
\begin{array}{rrrrrrr}
 & 0 & - & 1 & + & 1 & 0 \\
+ & 0 & + & 1 & - & 1 & 0 \\
\hline
0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \vdots & 0 \\
0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \vdots & 0
\end{bmatrix}
$$

Retornando a linha L_1:

$$
L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{6} \cdot L_2 \qquad \Rightarrow \qquad
\begin{array}{rrrrrrr}
 & 1 & - & \frac{1}{6} & - & \frac{1}{3} & 0 \\
+ & 0 & - & \frac{1}{6} & - & \frac{1}{6} & 0 \\
\hline
1 & & 0 & - & \frac{1}{2} & & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -\frac{1}{2} & \vdots & 0 \\
0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \vdots & 0
\end{bmatrix}
$$

Como a última linha possui todos os seus elementos nulos, temos que z é uma variável livre. Assumindo $z = t$, temos:

$$
\begin{aligned}
x &= \tfrac{1}{2} \cdot t \\
y &= 1 \cdot t \\
z &= t
\end{aligned}
$$

Matematicamente, esse sistema possui infinitas soluções. Porém, para esse problema os valores de x, y e z devem ser os menores inteiros possíveis. Sendo assim, tomando $t = 2$:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} \cdot 2 \\ y &= 1 \cdot 2 \\ z &= 2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

A equação balanceada fica da forma:

$$\mathrm{C_6H_{12}O_6} \rightarrow 2\mathrm{CO_2} + 2\mathrm{C_2H_5OH}$$

b. **Recursos utilizados:**

Apostila do estudante e lousa.

c. **Avaliação:**

A avaliação se dará através da mediação do professor durante a exposição do conteúdo e da interação e participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos.

d. **Conteúdo da aula anterior:**

Resolução de problemas sobre fluxo de tráfego.

1.10 Aula 9 - Resolvendo problemas

1.10.1 Conteúdo

Sistema de equações lineares.

1.10.2 Objetivos

a. Interpretar problemas com o auxílio dos pilares do pensamento computacional;

b. Resolver problemas em geal.

1.10.3 Base Nacional Comum Curricular

a. **Unidade temática:** Álgebra.

b. **Objetos do conhecimento:**

Pensamento computacional e o escalonamento para resolver sistemas.

c. **Competências:**

Competência 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

d. **Habilidades:**

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

1.10.4 Linhas de ação

a. **Desenvolvimento metodológico e do conteúdo:**

MOMENTO 1: Resolução de problemas.

TÍTULO: Resolução de problemas em geral.

Os exercícios foram selecionados a partir dos seguintes livros:

(LEON, 1998; KüHLKAMP, 2007; ANTON; RORRES, 2012; POOLE, 2017; INEP, 2024)

Exercício 1.6

Escreva uma equação balanceada para a reação química da queima do propano

$$C_3H_8 + O_2 \to CO_2 + H_2O$$

Exercício 1.7

Escreva uma equação balanceada para a reação química

$$\mathrm{NH_3 + 0_2 \rightarrow N_2 + H_2O}$$

Exercício 1.8

Escreva uma equação balanceada para a reação química

$$\mathrm{F}e\mathrm{S_2 + O_2 \rightarrow F}e_2\mathrm{O_3 + SO_2}$$

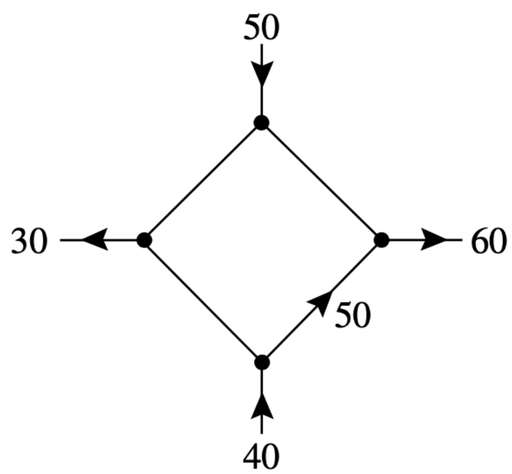
Exercício 1.9

Escreva uma equação balanceada para a reação química

$$\mathrm{C_4H_{10} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O}$$

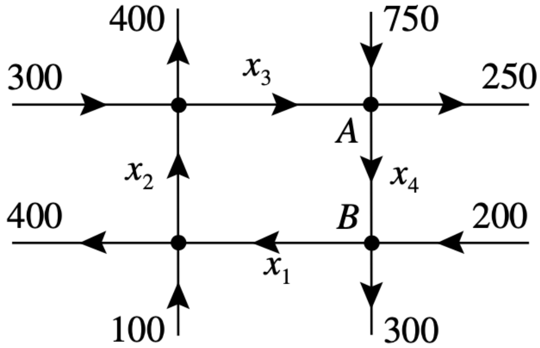
Exercício 1.10

A figura dada mostra uma rede na qual são conhecidos a taxa de fluxo e o sentido do fluxo em alguns ramos. Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo nos demais ramos.



Exercício 1.11

A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora. Monte um sistema linear e encontre as taxas de fluxo desconhecidas.



b. **Recursos utilizados:**

Apostila do estudante, lista de exercícios impressa (opcional) e lousa.

c. **Avaliação:**

A avaliação se dará através da mediação do professor durante a exposição do conteúdo e da interação e participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos.

d. **Conteúdo da aula anterior:**

Resolução de problemas em geral.

1.11 Aula 10 - ENEM e vestibulares

1.11.1 Conteúdo

Sistema de equações lineares.

1.11.2 Objetivos

a. Interpretar problemas com o auxílio dos pilares do pensamento computacional;

b. Resolver questões do ENEM e vestibulares.

1.11.3 Base Nacional Comum Curricular

a. **Unidade temática:** Álgebra.

b. **Objetos do conhecimento:**

Pensamento computacional e o escalonamento para resolver sistemas.

c. **Competências:**

Competência 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

d. **Habilidades:**

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

1.11.4 Linhas de ação

a. **Desenvolvimento metodológico e do conteúdo:**

MOMENTO 1: Resolução de problemas.

TÍTULO: Resolução de problemas em geral.

Os exercícios foram selecionados a partir dos seguintes livros:

(LEON, 1998; KüHLKAMP, 2007; ANTON; RORRES, 2012; POOLE, 2017; INEP, 2024)

EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO - ENEM

Exercício 1.12

(ENEM 2018) Visando atingir metas econômicas previamente estabelecidas, é comum no final do mês algumas lojas colocarem certos produtos em promoção. Uma determinada loja de departamentos colocou em oferta os seguintes produtos: televisão, sofá e estante. Na compra da televisão mais o sofá, o cliente pagaria R\$ 3800,00. Se ele levasse o sofá mais a estante, pagaria R\$ 3400,00. A televisão mais a estante sairiam por R\$

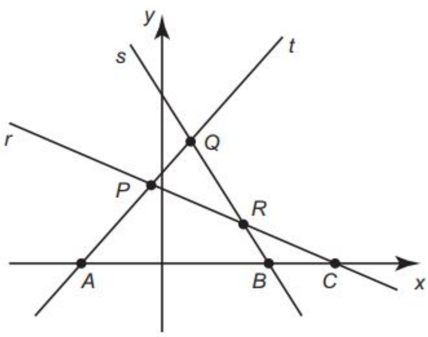
4200,00. Um cliente resolveu levar duas televisões e um sofá que estavam na promoção, conseguindo ainda mais 5% de desconto pelo pagamento à vista. O valor total, em real, pago pelo cliente foi de quantos reais?

Exercício 1.13

(ENEM 2015) Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$100,00. Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

Exercício 1.14

(ENEM 2016) Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

c) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

Exercício 1.15

Uma pessoa pretende viajar por uma companhia aérea que despacha gratuitamente uma mala com até 10 kg. Em duas viagens que realizou, essa pessoa utilizou a mesma mala e conseguiu 10 kg com as seguintes combinações de itens:

Viagem	Camisetas	Calças	Sapatos
I	12	4	3
II	18	3	2

Para ter certeza de que sua bagagem terá massa de 10 kg, ela decide levar essa mala com duas calças, um sapato e o máximo de camisetas, admitindo que itens do mesmo tipo têm a mesma massa. Qual a quantidade máxima de camisetas que essa pessoa poderá levar?

Vestibulares

Exercício 1.16

(UFSCar) Uma loja vende três tipos de lâmpada (x, y e z). Ana comprou 3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z, pagando R$ 42,10 pela compra. Beto comprou 4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z, o que totalizou R$ 47,30. Nas condições dadas, a compra de três lâmpadas, sendo uma de cada tipo, custa nessa loja a) R$ 30,50. b) R$ 31,40. c) R$ 31,70. d) R$ 32,30. e) R$ 33,20.

Exercício 1.17

(FGV) Num escritório há 3 impressoras: A, B e C. Em um período de 1 hora: A e B juntas imprimem 150 folhas; A e C juntas imprimem 160 folhas; B e C juntas imprimem 170 folhas. Em 1 hora, a impressora A imprime sozinha: a) 60 folhas b) 65 folhas c) 75 folhas d) 70 folhas e) 80 folhas

Exercício 1.18

(PUC-SP) Sabe-se que na compra de uma caixa de lenços, dois bonés e três camisetas gasta-se um total de R$ 127,00. Se três caixas de lenços, quatro bonés e cinco camisetas, dos mesmos tipos que os primeiros, custam juntos R$ 241,00, a quantia a ser desembolsada na compra de apenas três unidades desses artigos, sendo um de cada tipo, será A) R$ 72,00 B) R$ 65,00 C) R$ 60,00 D) R$ 57,00 E) R$ 49,00

Exercício 1.19

(Mack) Considere três números inteiros tais que as somas de dois a dois deles, distintos, resultam 20, 15 e 19. A diferença entre o maior e o menor desses números é: a) 7 b) 4 c) 3 d) 6 e) 5

Exercício 1.20

(UFSC) O sistema é indeterminado para $m = 2$ e $p = -1$

$$\begin{cases} x - 2y + mz = 1 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y - 2z = p \end{cases}$$

Exercício 1.21

(UFSC) Se

$$\begin{cases} x - 2y - z = a \\ -x + 4y + 2z = b \\ 3x + 3y + 5z = c \end{cases}$$

então o sistema tem solução para quaisquer valores a, b, $c \in \mathbb{R}$.

b. **Recursos utilizados:**

Apostila do estudante, lista de exercícios impressa (opcional) e lousa.

c. **Avaliação:**

A avaliação se dará através da mediação do professor durante a exposição do conteúdo e da interação e participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos.

d. **Conteúdo da aula anterior:**

Resolução de problemas sobre balanceamento de equações químicas e fluxo de tráfego.

Capítulo 2

Plataformas educacionais

Neste capítulo, iremos explorar duas plataformas educacionais: Wolfram Alpha e Symbolab. Ambas têm como objetivo fornecer soluções detalhadas para problemas matemáticos, auxiliando os estudantes em seu aprendizado. Em suas versões pagas, essas plataformas oferecem recursos avançados que incluem a exposição passo a passo das soluções, o que pode ser extremamente útil para entender os conceitos e resolver problemas que apresentam certo nível de dificuldade.

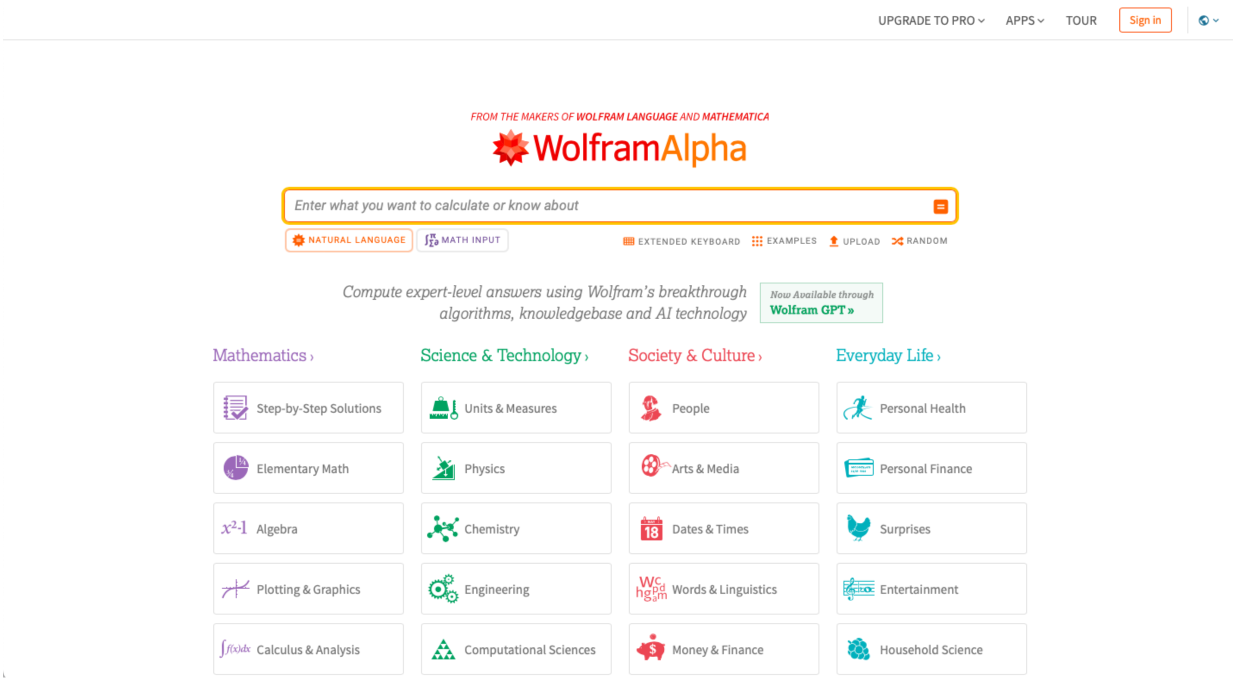
No entanto, é importante ressaltar que o uso desses recursos deve ser feito com sabedoria. É importante que você utilize as ferramentas para complementar seu aprendizado, em vez de depender exclusivamente delas. Afinal, o seu aprendizado será desenvolvido com a compreensão dos conteúdos e problemas, não apenas com as respostas dos sites ou ao final dos livros.

2.1 Wolfram Alpha

A plataforma Wolfram|Alpha foi criada pela empresa Wolfram Research e é voltada para estudos matemáticos. Com o objetivo de acessar respostas através de cálculos dinâmicos baseados em uma vasta coleção de dados, algoritmos e métodos incorporados, tornando o conhecimento acessível para todos.

Essa plataforma pode ser acessada através do site www.wolframalpha.com ou por dispositivos móveis disponível na App Store ou Google Play. A versão gratuita desta plataforma possui algumas limitações, como resoluções passo a passo restritas, enquanto a versão paga oferece acesso a recursos adicionais.

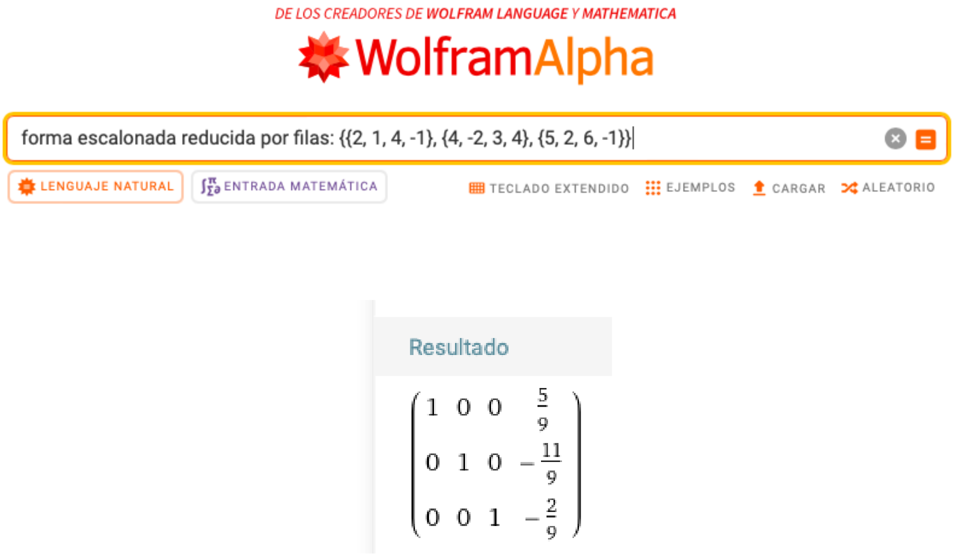
A página inicial do site é configurada da seguinte maneira:



A plataforma está disponível em três idiomas, mas o português não está entre as opções. Assim, para escalonar uma matriz ampliada, selecionamos o idioma espanhol e inserimos o seguinte texto:

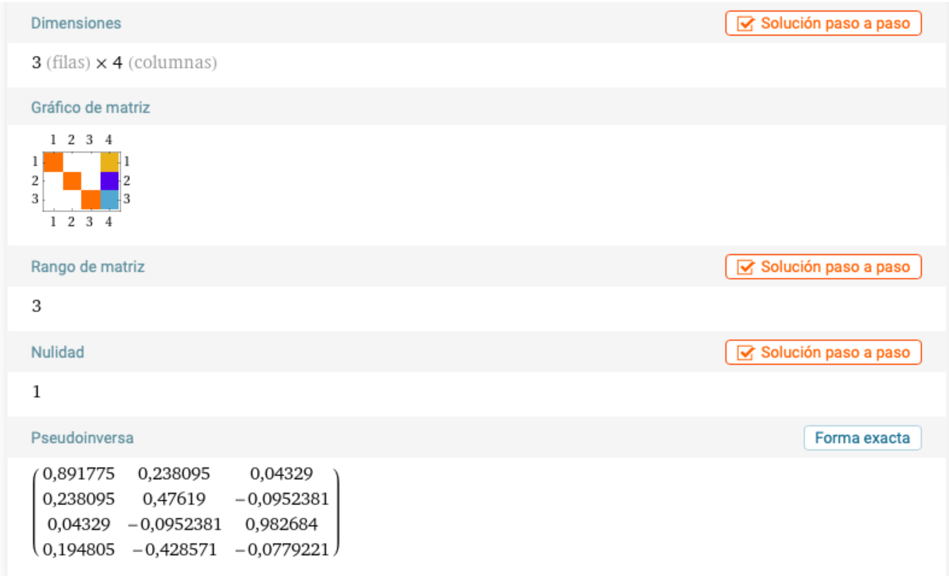
forma escalonada reducida por filas: $\{\{2, 1, 4, -1\}, \{4, -2, 3, 4\}, \{5, 2, 6, -1\}\}$

Assim, obtemos a matriz na sua forma escalonada e os valores das incógnitas aparecem na última coluna:



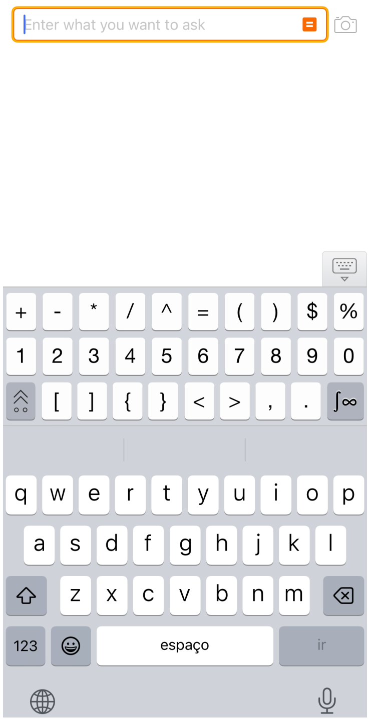
Essa plataforma não disponibiliza o passo a passo na sua versão gratuita, mostrando apenas o início da resolução:

Porém, além do escalonamento, a plataforma nos dá mais informações sobre a matriz:



Como o detalhamento passo a passo dessa solução só está disponível na versão paga, esta ferramenta pode ser útil para nos orientar na verificação das respostas que obtivemos no final.

Por fim, a tela inicial do aplicativo para dispositivos móveis:



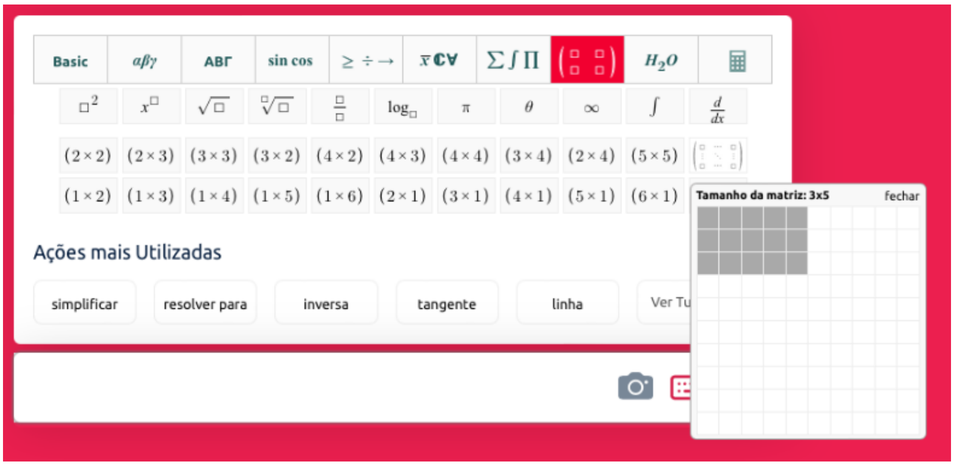
2.2 Symbolab

A plataforma foi criada pela Course Hero Symbolab Ltd. Uma das metas da empresa é promover a aprendizagem da matemática. Com um design simples e intuitivo, a plataforma Symbolab oferece não apenas soluções passo a passo, mas também um aprendizado personalizado e avaliações.

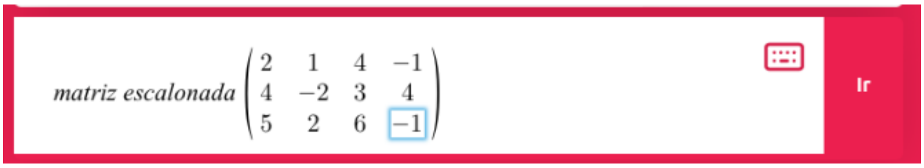
Essa plataforma pode ser acessada através do site www.pt.symbolab.com ou por dispositivos móveis disponível na App Store ou Google Play. A versão gratuita desta plataforma possui algumas limitações, como resoluções passo a passo restritas, enquanto a versão paga oferece acesso a recursos adicionais.

A página inicial do site é configurada da seguinte maneira:

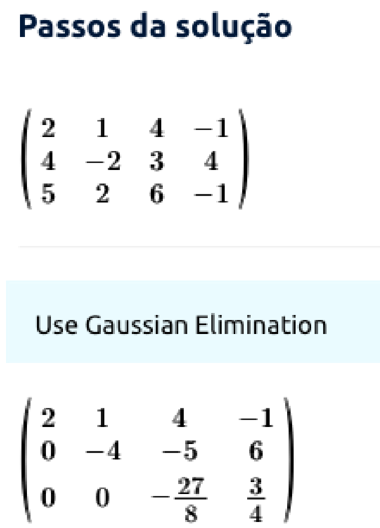
Na área de entrada de texto, são exibidas ferramentas que permitem inserir informações de forma intuitiva e direta.



Um exemplo de solicitação para escalonar uma matriz ampliada seria:

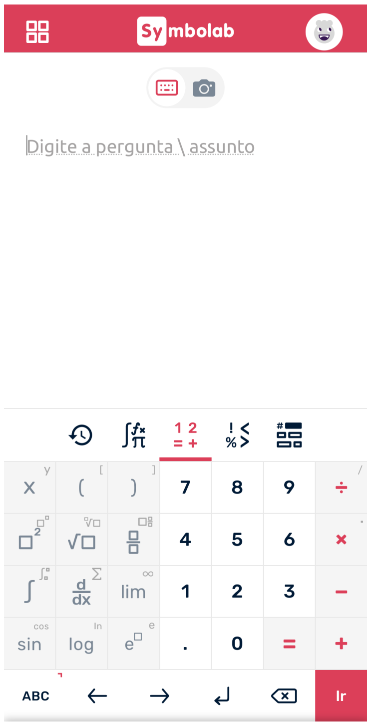


No entanto, observe que a solução fornecida está na forma de escada, e não na forma escalonada conforme visto na **Aula 3 - Escalonamento de matrizes**.



Como o detalhamento passo a passo dessa solução só está disponível na versão paga, esta ferramenta pode ser útil para nos orientar na verificação das respostas que obtivemos no final.

Por fim, a tela inicial do aplicativo para dispositivos móveis:



2.3 Exercícios

Para praticar como classificar os sistemas visto na seção 1.5, utilize uma das plataformas para escalonar as matrizes a seguir e classifique se elas formas um sistema consistente, com uma ou infinitas soluções, ou inconsistente.

Exercício 2.1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 4x & - & y & + & z & = & 9 \end{array}\right.$$

Exercício 2.2

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercício 2.3

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - 5 + 2z = 1 \\ 4x - y + 8z = 3 \end{cases}$$

Exercício 2.4

$$\begin{cases} 2x - 6y = 5 \\ 3x - 9y = 1 \end{cases}$$

Capítulo 3

Soluções dos exercícios

Solução 1.3

a. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$

Solução 1.4

a. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 3 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & \vdots & 8 \\ 4 & -3 & \vdots & 6 \end{bmatrix}.$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ -1 & 2 & 3 & \vdots & 7 \end{bmatrix}.$

Solução 1.5

a. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 3 \\ 2 & -1 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2 \cdot \mathrm{L}_1 \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{3} \cdot \mathrm{L}_2 \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 2 \cdot \mathrm{L}_2$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

A solução é o par $(5, 1)$.

b. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 10 & 9 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 5 \cdot L_1 \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{6} \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3 \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot L_1$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

A solução é o par $(2, -1)$.

c. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 4 & 1 & \vdots & 17 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{5} \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3 \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow -\frac{1}{2} \cdot L_1$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

A solução é o par $(5, -3)$.

d. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & \vdots & 1 \\ 2 & 7 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad L_2 \leftarrow -1 \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 4 \cdot L_2$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -7 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

A solução é o par $(-7, 2)$.

e. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad L_2 \leftarrow -1 \cdot L_2 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}.$$

A solução é a tripla $(1, 2, 3)$.

f. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 17 & \vdots & 53 \\ 1 & 5 & 7 & \vdots & 22 \\ 3 & 22 & 19 & \vdots & 35 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot L_2 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3 \cdot L_3$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{7} \cdot L_3 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \qquad L_3 \leftarrow -\frac{14}{25} \cdot L_3$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} \cdot L_3 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 5 \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 7 \cdot L_3$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{bmatrix}.$$

A solução é a tripla $(2, -3, 5)$.

g. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & \vdots & 7 \\ 3 & 7 & 1 & \vdots & 11 \\ 2 & 7 & -4 & \vdots & 19 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3 \cdot L_1 \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} \cdot L_2 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2 \cdot L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 -$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & \vdots & -8 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos notar que a última linha da matriz possui todos os seus elementos nulos. Assim, esse sistema terá infinitas soluções como veremos na **Aula 4 - Solução de um sistema**

h. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & -5 & 2 & \vdots & 1 \\ 4 & -1 & 8 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 4 \cdot L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \qquad L_3 \leftarrow \frac{1}{6} \cdot L_3$$

$$L_2 \leftarrow -\frac{1}{9} \cdot L_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{9} \cdot L_3 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 4 \cdot L_3$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{19}{9} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, temos que $0 = 1$, ou seja, um absurdo! Assim, esse sistema não possui solução. Veremos isso na **Aula 4 - Solução de um sistema**.

Solução 1.6

$C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$

Solução 1.7

$4NH_3 + 30_2 \rightarrow 2N_2 + 6H_2O$

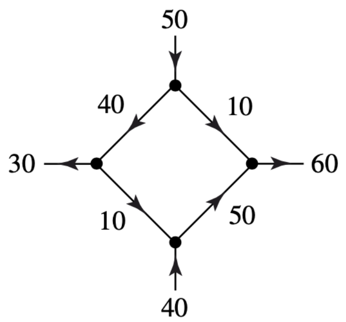
Solução 1.8

$4\mathrm{F}e\mathrm{S}_2 + 11\mathrm{O}_2 \to 2\mathrm{F}e_2\mathrm{O}_3 + 8\mathrm{SO}_2$

Solução 1.9

$2\mathrm{C}_4\mathrm{H}_{10} + 13\mathrm{O}_2 \to 8\mathrm{CO}_2 + 10\mathrm{H}_2\mathrm{O}$

Solução 1.10



Solução 1.11

$x = -100 + t, \quad y = -400 + t, \quad z = -500 + t, \quad w = t$

Solução 1.12

R$ 5795,00.

Solução 1.13

30.

Solução 1.14

D.

Solução 1.15

B.

Solução 1.16

C.

Solução 1.17

D.

Solução 1.18

D.

Solução 1.19

E.

Solução 1.20

Solução 1.21

Solução 2.1

Consistente, única solução.

Solução 2.2

Consistente, infinitas soluções.

Solução 2.3

Inconsistente, sem solução.

Solução 2.4

Inconsistente, sem solução.

Capítulo 4

Materiais para Impressão

1. Lista de exercícios;

2. Fluxograma - Algoritmo do escalonamento.

1 Exercícios de fixação

Exercício 1.
Escreva a forma matricial dos sistemas abaixo.

a. $\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{cases}.$

b. $\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & = & 8 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 6 \end{cases}.$

c. $\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \end{cases}.$

Exercício 2.
Escreva a matriz ampliada dos sistemas do exercício anterior.

Exercício 3.
Escreva a matriz ampliada de cada sistema e faça o escalonamento para obter a solução de cada sistema.

a $\begin{cases} x & - & 2y & = & 3 \\ 2x & - & y & = & 9 \end{cases}.$

b $\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 1 \\ 10x & + & 9y & = & 11 \end{cases}.$

c $\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 1 \\ 4x & + & y & = & 17 \end{cases}.$

d $\begin{cases} x & + & 4y & = & 1 \\ 2x & + & 7y & = & 0 \end{cases}.$

e $\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \end{cases}.$

f $\begin{cases} 2x & + & 12y & + & 17z & = & 53 \\ x & + & 5y & + & 7z & = & 22 \\ 3x & + & 22y & + & 19z & = & 35 \end{cases}.$

g $\begin{cases} x & + & 3y & - & z & = & 7 \\ 3x & + & 7y & + & z & = & 11 \\ 2x & + & 7y & - & 4z & = & 19 \end{cases}.$

h $\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & - & 5y & + & 2z & = & 1 \\ 4x & - & y & + & 8z & = & 3 \end{cases}.$

2 Resolução de problemas

Exercício 4.
Determinar uma função polinomial f de grau dois, tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ e $f(5) = 18$.

Exercício 5.
Se ao iniciar a utilização da água de um reservatório, o nível da superfície da mesma está 12m acima do fundo, após dois dias de utilização 11,2m e após cinco dias o nível cai para 8,5m, determinar uma função polinomial de grau dois que retrate esta situação.

Admitindo que se possa utilizar esta função para calcular o nível aproximado da água também após o quinto dia de utilização, em quanto tempo o reservatório esvaziará?

Exercício 6.
Determinar a função polinomial de grau três cujo gráfico passa pelos pontos (1, -7), (-1, -9), (3,-5) e (4,11).

Exercício 7.
Suponha que numa construção foram utilizados quatro tipos de concreto preparados, misturando-se os ingredientes em volumes cujas proporções são dadas pela tabela que segue.

	Concreto I	Concreto II	Concreto III	Concreto IV
Cimento	1	1	1	1
Brita	2	2	1	2
Areia	3	4	5	6
Água	2	2	3	3

Determinar a proporção em que cada tipo de concreto foi aplicado, se foram utilizados $7m^3$ de cimento, $11m^3$ de brita, $32m^3$ de areia e $18m^3$ de água.

Exercício 8.
Escreva uma equação balanceada para a reação química da queima do propano

$$C_3H_8 + O_2 \to CO_2 + H_2O$$

Exercício 9.
Escreva uma equação balanceada para a reação química

$$NH_3 + 0_2 \to N_2 + H_2O$$

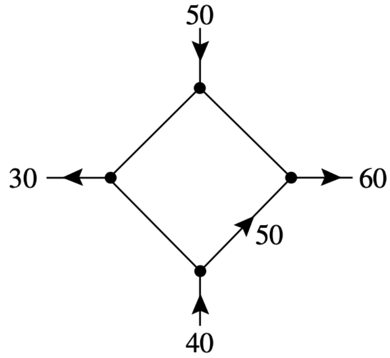
Exercício 10.
Escreva uma equação balanceada para a reação química

$$FeS_2 + O_2 \to Fe_2O_3 + SO_2$$

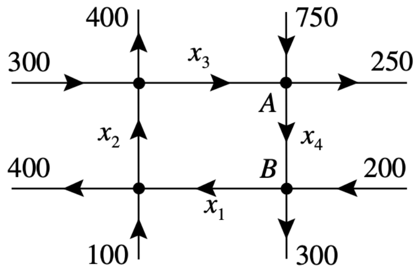
Exercício 11.
Escreva uma equação balanceada para a reação química

$$C_4H_{10} + O_2 \to CO_2 + H_2O$$

Exercício 12.
A figura dada mostra uma rede na qual são conhecidos a taxa de fluxo e o sentido do fluxo em alguns ramos. Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo nos demais ramos.



Exercício 13.
A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora. Monte um sistema linear e encontre as taxas de fluxo desconhecidas.



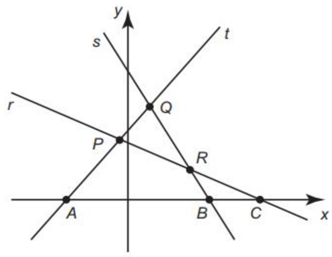
3 Questões do ENEM e vestibulares

3.1 Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM

Exercício 14.
(ENEM 2018) Visando atingir metas econômicas previamente estabelecidas, é comum no final do mês algumas lojas colocarem certos produtos em promoção. Uma determinada loja de departamentos colocou em oferta os seguintes produtos: televisão, sofá e estante. Na compra da televisão mais o sofá, o cliente pagaria R$ 3800,00. Se ele levasse o sofá mais a estante, pagaria R$ 3400,00. A televisão mais a estante sairiam por R$ 4200,00. Um cliente resolveu levar duas televisões e um sofá que estavam na promoção, conseguindo ainda mais 5% de desconto pelo pagamento à vista. O valor total, em real, pago pelo cliente foi de quantos reais?

Exercício 15.
(ENEM 2015) Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$100,00. Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

Exercício 16.
(ENEM 2016) Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

c) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

Exercício 17.
Uma pessoa pretende viajar por uma companhia aérea que despacha gratuitamente uma mala com até 10 kg. Em duas viagens que realizou, essa pessoa utilizou a mesma mala e conseguiu 10 kg com as seguintes combinações de itens:

Viagem	Camisetas	Calças	Sapatos
I	12	4	3
II	18	3	2

Para ter certeza de que sua bagagem terá massa de 10 kg, ela decide levar essa mala com duas calças, um sapato e o máximo de camisetas, admitindo que itens do mesmo tipo têm a mesma massa. Qual a quantidade máxima de camisetas que essa pessoa poderá levar?

4 Vestibulares

Exercício 18.
(UFSCar) Uma loja vende três tipos de lâmpada (x, y e z). Ana comprou 3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z, pagando R$ 42,10 pela compra. Beto comprou 4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z, o que totalizou R$ 47,30. Nas condições dadas, a compra de três lâmpadas, sendo uma de cada tipo, custa nessa loja a) R$ 30,50. b) R$ 31,40. c) R$ 31,70. d) R$ 32,30. e) R$ 33,20.

Exercício 19.
(FGV) Num escritório há 3 impressoras: A, B e C. Em um período de 1 hora: A e B juntas imprimem 150 folhas; A e C juntas imprimem 160 folhas; B e C juntas imprimem 170 folhas. Em 1 hora, a impressora A imprime sozinha: a) 60 folhas b) 65 folhas c) 75 folhas d) 70 folhas e) 80 folhas

Exercício 20.
(PUC-SP) Sabe-se que na compra de uma caixa de lenços, dois bonés e três camisetas gasta-se um total de R$ 127,00. Se três caixas de lenços, quatro bonés e cinco camisetas, dos mesmos tipos que os primeiros, custam juntos R$ 241,00, a quantia a ser desembolsada na compra de apenas três unidades desses artigos, sendo um de cada tipo, será A) R$ 72,00 B) R$ 65,00 C) R$ 60,00 D) R$ 57,00 E) R$ 49,00

Exercício 21.
(Mack) Considere três números inteiros tais que as somas de dois a dois deles, distintos, resultam 20, 15 e 19. A diferença entre o maior e o menor desses números é: a) 7 b) 4 c) 3 d) 6 e) 5

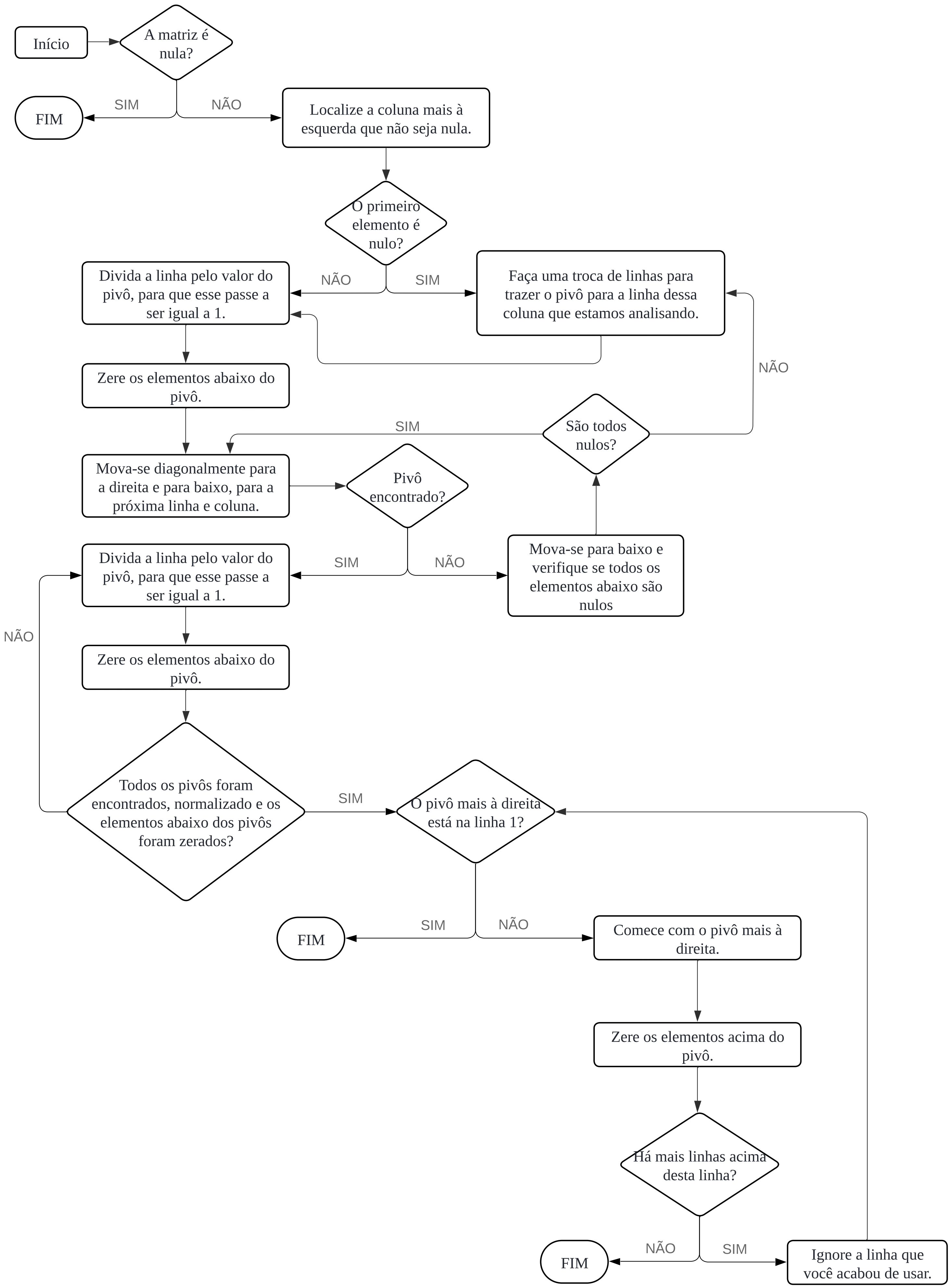
Exercício 22.
(UFSC) O sistema é indeterminado para $m = 2$ e $p = -1$

$$\begin{cases} x - 2y + mz = 1 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y - 2z = p \end{cases}$$

Exercício 23.
(UFSC) Se

$$\begin{cases} x - 2y - z = a \\ -x + 4y + 2z = b \\ 3x + 3y + 5z = c \end{cases}$$

então o sistema tem solução para quaisquer valores a, b, $c \in \mathbb{R}$.


Início
A matriz é nula?
SIM
NÃO
FIM
Localize a coluna mais à esquerda que não seja nula.
O primeiro elemento é nulo?
NÃO
SIM
Divida a linha pelo valor do pivô, para que esse passe a ser igual a 1.
Faça uma troca de linhas para trazer o pivô para a linha dessa coluna que estamos analisando.
NÃO
Zere os elementos abaixo do pivô.
SIM
São todos nulos?
Mova-se diagonalmente para a direita e para baixo, para a próxima linha e coluna.
Pivô encontrado?
SIM
NÃO
Divida a linha pelo valor do pivô, para que esse passe a ser igual a 1.
Mova-se para baixo e verifique se todos os elementos abaixo são nulos
NÃO
Zere os elementos abaixo do pivô.
Todos os pivôs foram encontrados, normalizado e os elementos abaixo dos pivôs foram zerados?
SIM
O pivô mais à direita está na linha 1?
SIM
NÃO
FIM
Comece com o pivô mais à direita.
Zere os elementos acima do pivô.
Há mais linhas acima desta linha?
NÃO
SIM
FIM
Ignore a linha que você acabou de usar.

Referências Bibliográficas

ANTON, H. et al. *Álgebra Linear com Aplicações-10*. Porto Alegre, RS: Bookman Editora, 2012.

INEP, I. *Provas e Gabaritos*. [S.l.: s.n.], 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/inep> – acesso em 24 fev. 2023.

KüHLKAMP, N. *Matrizes e sistemas de equações lineares*. 2. ed. Florianópolis, SC: UFSC, 2007.

LEON, S. J. *Álgebra Linear com aplicações*. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1998.

POOLE, D. *Álgebra Linear: uma introdução moderna*. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2017.

RUSSEL, J. B. Química geral. *Tradução: Márcia Guekezian e colaboradores*, 1994.

ANEXO B – APOSTILA DO ESTUDANTE

Resolução de sistemas de equações lineares por escalonamento

Karina Gomez Pacheco

Apostila do estudante

Universidade Federal de Santa Catarina

Campus Florianópolis

Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Coordenação Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Dissertação do Profmat Este ebook é um produto oriundo da dissertação do PROFMAT intitulada "Resolução de sistemas de equações lineares: o pensamento computacional no escalonamento da matriz ampliada", defendida em 2024

Autora Karina Gomez Pacheco

Orientadora Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Carta ao estudante

Caro(a) estudante,

Compartilho com você este material criado a partir da minha dissertação feita para o Programa de Mestrado Profissional em Matemática (Profmat). No material que você tem em mãos, meu objetivo foi complementar o estudo da resolução de sistemas lineares de equações por meio do escalonamento de matrizes, utilizando conceitos do pensamento computacional para a compreensão e a resolução de problemas.

Procurei selecionar problemas que possuem elementos dele, visando não apenas facilitar a compreensão da resolução de sistemas, mas também para que você tenha mais ferramentas para a resolução de problemas.

Espero sinceramente que este material seja útil para você, estimulando o seu interesse pela matemática e que contribua para o seus estudos. Agradeço antecipadamente pela sua atenção e interesse em meu trabalho.

Atenciosamente,

Karina Pacheco.

"Aí Strange, sabe o que é
mais irado do que magia?
Matemática."
(Peter Parker, 2021)

Sumário

Capítulo 1

Sistemas de equações lineares

1.1 Sistema de equações lineares

Equação linear

A equação $2 \cdot x \ + \ 5 \cdot y \ = \ 10$ é chamada de equação linear. Essa equação é formada pelos números reais 2, 5 e 10 e pelas incógnitas x e y. Assim, temos que

2 e 5 são os coeficientes;

x e y são as incógnitas;

10 é o termo independente.

Assim, uma equação linear é uma equação da forma

$$a_1 \cdot x_1 \ + \ a_2 \cdot x_2 \ + \ ... \ a_n \cdot x_n \ = \ b,$$

com $a_1, \cdots, \ a_n$ e b números reais, onde $a_1, \cdots, \ a_n$ são os coeficientes, $x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n$ são as incógnitas e b o termo independente.

Exercício 1.1

Para cada equação abaixo, identifique: os coeficientes, as incógnitas e o termo independente.

a) $x - y = 3$

b) $-x - 8 \cdot y = 0$

c) $7 \cdot x - 2 \cdot y = 6$

d) $-3 \cdot x + 5 \cdot y - \dfrac{1}{3} \cdot z = 2$

No exemplo inicial, podemos assumir que $x = 1$ e assim $y = 1$ para solucionar a equação.

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 5 \cdot y &= 10 \Rightarrow \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 &= 10 \Rightarrow \\ 2 + 5 &= 10 \Rightarrow \\ 10 &= 10. \end{aligned}$$

Desta forma, dizemos que o par ordenado $(2, 5)$ é solução da equação linear $2 \cdot x + 5 \cdot y = 10$. Os pares $(5, 0)$ e $(0, 2)$ também são exemplos que solucionam a equação.

Sistema de equações lineares

Quando resolvermos duas ou mais equações lineares simultaneamente, estamos resolvendo um sistema de equações lineares. Por exemplo,

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 5y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x + y - 3 \cdot z = 8 \\ x - 5 \cdot y + 4 \cdot z = -2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

Um conjunto de equações lineares a serem satisfeitas simultaneamente é chamado de sistema de equações lineares e se apresenta na forma:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}.$$

Esse sistema é formado por m equações e n incógnitas. Nosso interesse é resolvê-lo, encontrando uma n-upla $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ que satisfaz todas as equações.

. . . .

Observe o seguinte problema:

Exemplo 1.1. Se a soma das idades de João e Pedro é 65 e a diferença é 25, quais são as idades de João e Pedro?

Para resolver esse problema, podemos escrever duas equações lineares com as informações fornecidas, onde j é a idade de João e p é a idade de Pedro:

$$\begin{cases} j + p = 65 \\ j - p = 25 \end{cases}.$$

No ensino fundamental, estudamos sistemas que possuem duas equações e duas incógnitas. Para resolvê-los, utilizamos métodos como adição ou substituição. O sistema acima possui duas equações e duas incógnitas, podemos chamá-lo de um sistema "2x2" (2 por 2). Acompanhe a resolução, primeiro pelo método da adição e depois pelo método da substituição.

Método da Adição

Vamos somar a primeira equação $j + p = 65$ com a segunda equação $j - p = 25$:

$$\begin{array}{rcccr} & j & + & p & = & 65 \\ + & j & - & p & = & 25 \\ \hline & 2j & + & 0 & = & 90 \end{array}$$

$$2j = 90 \Rightarrow j = 45.$$

Agora que encontramos a idade de João ($j = 45$), basta substituir em uma das equações para encontrar a idade de Pedro (p). Escolhendo a primeira, temos

$$j + p = 65 \Rightarrow 45 + p = 65 \Rightarrow p = 20.$$

Encontramos o par $(45, 20)$, vamos verificar se de fato é a solução do sistema:

$$\begin{aligned} j + p \cdot y &= 65 \Rightarrow \\ 45 + 20 &= 65 \Rightarrow \\ 65 &= 65. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j - p \cdot y &= 25 \Rightarrow \\ 45 - 20 &= 25 \Rightarrow \\ 25 &= 25. \end{aligned}$$

A solução do sistema é o par $(45, 20)$. Logo, João tem 45 anos e Pedro tem 20 anos.

Método da Substituição

Começamos escolhendo uma das duas incógnitas para isolar, nesse caso será a incógnita j. Assim,

$$j - p = 25 \Rightarrow j = 25 + p.$$

Substituindo a expressão encontrada na primeira equação, temos

$$j + p = 65 \Rightarrow 25 + p + p = 65 \Rightarrow 2j = 40 \Rightarrow p = 20.$$

Voltando para a expressão encontrada,

$$j = 25 + p \Rightarrow j = 25 + 20 \Rightarrow j = 45.$$

Encontramos o par $(45, 20)$, vamos verificar se de fato é a solução do sistema:

$$\begin{aligned} j + p \cdot y &= 65 \Rightarrow \\ 45 + 20 &= 65 \Rightarrow \\ 65 &= 65. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j - p \cdot y &= 25 \Rightarrow \\ 45 - 20 &= 25 \Rightarrow \\ 25 &= 25. \end{aligned}$$

A solução do sistema é o par $(45, 20)$. Logo, João tem 45 anos e Pedro tem 20 anos.

Exercício 1.2

Resolva os problemas que envolvem sistemas $2x2$. Escolha um dos dois métodos para resolver.

a) 3 cadernos grandes e 2 cadernos pequenos custam R\$ 185,00. 5 cadernos grandes e 3 cadernos pequenos custam R\$ 285,00. Encontre o valor do caderno grande e do caderno pequeno.

b) Se o custo de 3 chocolates e 2 biscoitos é de R\$ 35,00 e o de 2 chocolates e 3 biscoitos é de R\$ 42,50. Qual é o custo dos biscoitos?

c) Em uma turma há 44 estudantes entre meninos e meninas. A diferença entre o número de meninos e o de meninas é 10. Encontre a quantidade de meninos e meninas nessa turma.

Porém, em problemas aplicados em áreas como administração, economia, engenharia, física, entre outros, os sistemas possuem muitas equações e incógnitas (milhares de incógnitas). Esses dois métodos apresentados não são suficientes e nem práticos para resolver sistemas maiores.

Vamos aprender outro método que consiste em escalonar uma matriz. Para isso, precisamos escrever o sistema em sua forma matricial.

1.2 Forma matricial de um sistema de equações linear

Representar o sistema na sua forma matricial implica em escrever: uma matriz com os coeficientes, que chamaremos de A; uma matriz com as incógnitas, que chamaremos de x; uma matriz com os termos independentes, que chamaremos de b;

Assim, temos $A \cdot x = b$. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 9 \end{cases}$$

Escrevendo as matrizes A, x e b, obtemos

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Em geral, temos o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}.$$

que apresenta a sua forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Assim, temos $\mathrm{A} \cdot x \; = \; b$.

Exercício 1.3

PRATIQUE! Escreva a forma matricial dos sistemas abaixo.

a. $\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & = & 8 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \end{cases}$

. . . .

1.2.1 Matriz ampliada

Para resolver o sistema pelo método do escalonamento, utilizaremos a matriz ampliada. Essa matriz é formada pela matriz A dos coeficientes e pela matriz b dos termos independentes, sendo escrita como [A | b].

$$[\ \mathrm{A} \mid b\ ] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}.$$

Observe o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 9 \end{cases}.$$

A matriz ampliada desse sistema é da forma:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & : & 1 \\ 2 & 5 & 1 & : & 9 \\ 1 & 3 & 4 & : & 9 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.4

Escreva a matriz ampliada dos sistemas do exercício 1.3

1.3 Escalonamento de matrizes

Na matriz escalonada, os primeiros elementos não nulos de cada linha da matriz dos coeficientes são chamados de **pivôs** e os valores que aparecem na matriz dos coeficientes são **soluções do sistema**. Para escalonar a matriz utilizamos três operações elementares.

O processo de realizar operações elementares nos permite escrever a matriz de duas formas: na forma escalonada, cujo método é conhecido como *Método de Gauss*, e na forma escalonada reduzida (ou forma escalonada reduzida), que é conhecido como *Método de Gauss-Jordan*. Acompanhe como são definidas as três operações elementares:

1. Definição: São três as **operações elementares** sobre as linha de uma matriz:

1. Permutar duas linhas ($\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$);
2. Multiplicar uma linha por algum escalar α real diferente de zero ($\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha \cdot \mathrm{L}_i$);
3. Somar uma linha com o produto de outra ($\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha \cdot \mathrm{L}_j$).

Para compreendermos as operações, vamos analisar a matriz ampliada abaixo.

$$\begin{cases} \phantom{2x + {}} 2y - 2z = 1 \\ 2x + 5y + z = 9 \\ x + 3y + 4z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & \vdots & 1 \\ 2 & 5 & 1 & \vdots & 9 \\ 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \end{bmatrix}.$$

1. Permutar linhas $\quad \mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$

Observe que a matriz não possui o primeiro elemento da primeira linha diferente de zero.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & \vdots & 1 \\ 2 & 5 & 1 & \vdots & 9 \\ 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \end{bmatrix}.$$

Vamos realizar uma permutação entre as linha L_1 e L_3 para que o primeiro elemento dessa linha seja diferente de zero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \\ 2 & 5 & 1 & \vdots & 9 \\ 0 & 2 & -2 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Para representar essa troca, escrevemos $\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3$.

2. Multiplicar por um escalar $\quad \mathrm{L}_i \leftarrow \alpha \cdot \mathrm{L}_i$

Da última matriz, vamos multiplicar a terceira linha da matriz por $\frac{1}{2}$:

$$0 \cdot \tfrac{1}{2} = 0 \qquad 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1 \qquad -2 \cdot \tfrac{1}{2} = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \\ 2 & 5 & 1 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Para representar essa operação, escrevemos $\mathrm{L}_3 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \mathrm{L}_3$.

3. Somar uma linha com o produto de outra $L_i \leftarrow L_i + \alpha \cdot L_j$

Observando a última matriz obtida, podemos notar que os elementos abaixo dos pivôs não são todos zeros. Vamos fazer a seguinte operação:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{rrrr} 2 & 5 & 1 & 9 \\ -\ 2 & -\ 6 & -\ 8 & -\ 16 \\ \hline 0 & -\ 1 & -\ 7 & -\ 7 \end{array}.$$

Assim, a matriz ficará da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \\ 0 & -1 & -7 & \vdots & -7 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos fazer a seguinte operação para zerar o elemento que está abaixo do pivô da segunda linha:

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{rrrr} 0 & 1 & -\ 1 & \frac{1}{2} \\ +\ 0 & -\ 1 & -\ 7 & -\ 7 \\ \hline 0 & 0 & -\ 8 & -\ \frac{13}{2} \end{array}$$

A matriz após essas operações ficará da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -8 & \vdots & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

Essa matriz não apresenta seus pivôs iguais a 1 e os elementos acima dos pivôs ainda não estão zerados. Porém, quando a matriz apresenta essa forma, dizemos que a matriz está na **forma escada**.

Continuando com as operações elementares para deixar a matriz escalonada, podemos multiplicar a linha L_3 por $-\frac{1}{8}$. Assim

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -8 & \vdots & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{8} \cdot L_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & + & 0 & + & \frac{8}{\frac{1}{8}} & + & \frac{\frac{13}{2}}{\frac{1}{8}} \\ \hline 0 & & 0 & + & 1 & + & \frac{13}{16} \end{array}$$

E agora, fazendo a operação na linha L_2:

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & + & 1 & - & 1 & + & \frac{1}{2} \\ 0 & + & 0 & + & 1 & + & \frac{13}{16} \\ \hline 0 & + & 1 & + & 0 & + & \frac{21}{16} \end{array}.$$

A matriz ficará da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{21}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{13}{16} \end{bmatrix}$$

Por fim, vamos realizar duas operações sobre a linha L_1:

$$L_1 \leftarrow L_1 - 3 \cdot L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & + & 3 & + & 4 & + & 8 \\ 0 & - & 3 & & 0 & - & \frac{63}{16} \\ \hline 1 & & 0 & + & 4 & + & \frac{65}{16} \end{array}.$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 4 \cdot L_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & & 0 & + & 4 & + & \frac{65}{16} \\ 0 & & 0 & - & 4 & - & \frac{52}{16} \\ \hline 1 & & 0 & & 0 & + & \frac{13}{16} \end{array}$$

A matriz escalonada fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{13}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{21}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{13}{16} \end{bmatrix}.$$

Onde encontramos como solução $x = \frac{13}{16}$, $y = \frac{21}{16}$ e $z = \frac{13}{16}$.

Vamos verificar se de fato os valores encontrados satisfazem simultaneamente as três equações:

Primeira equação: $2 \cdot y \ - \ 2 \cdot z \ = \ 1$

$$2 \cdot \frac{21}{16} \ - \ 2 \cdot \frac{13}{16} \ = \ 1 \ \Rightarrow$$

$$\frac{21}{8} \ - \ \frac{13}{8} \ = \ 1 \ \Rightarrow$$

$$\frac{8}{8} \ = \ 1 \ \Rightarrow$$

$$1 \ = \ 1.$$

Segunda equação: $2 \cdot x + 5 \cdot y \ + \ z \ = \ 9$

$$2 \cdot \frac{13}{16} + 5 \cdot \frac{21}{16} \ + \ \frac{13}{16} \ = \ 9 \ \Rightarrow$$

$$\frac{26}{16} + \frac{105}{8} \ + \ \frac{13}{16} \ = \ 9 \ \Rightarrow$$

$$\frac{144}{16} \ = \ 9 \ \Rightarrow$$

$$9 \ = \ 9.$$

Terceira equação: $x \ + \ 3 \cdot y \ + \ 4 \cdot z \ = \ 8$

$$\begin{aligned}
\frac{13}{16} + 3\cdot\frac{21}{16} + 4\cdot\frac{13}{16} &= 8 \Rightarrow \\
\frac{13}{16} + \frac{63}{16} + \frac{52}{16} &= 8 \Rightarrow \\
\frac{128}{16} &= 8 \Rightarrow \\
8 &= 8.
\end{aligned}$$

1.3.1 Algoritmo de escalonamento

Agora que já vimos as operações elementares para escalonar uma matriz, observe o algoritmo do escalonamento que auxilia nesse processo e como o sistema pode ser resolvido. Esse algoritmo apresenta-se de duas formas: por meio de descrição narrativa e por fluxograma.

ALGORITMO DE ESCALONAMENTO:

Teste inicial – Se a matriz for nula, pare.

Passo 1 -

i. Localize a coluna mais à esquerda que não seja zero e, se necessário, troque a primeira linha com outra linha para trazer uma entrada não-nula (pivô) para a primeira linha desta coluna.

ii. Divida a primeira linha pelo valor do pivô para obter um pivô igual a 1.

iii. Realize operações elementares para zerar os elementos que estão abaixo do pivô encontrado no passo anterior.

Passo 2 -

i. Mova-se diagonalmente para a direita e para baixo, para a próxima linha e coluna.

ii. Se encontrar um elemento não-nulo, este será o próximo pivô. Normalize-o para 1 e use operações elementares para zerar todos os elementos abaixo dele.

iii. Se a coluna inteira for nula, não há pivô a ser estabelecido. Neste caso, continue movendo-se para a coluna seguinte até encontrar um pivô ou confirmar que todas as colunas restantes são nulas.

Passo 3 -

Continue este processo linha por linha, coluna por coluna, até que todos os pivôs estejam normalizados e todos os elementos abaixo dos pivôs estejam zerados. Quando esse processo terminar, a matriz que você obteve estará em forma escalonada. Agora, prossiga com as seguintes etapas para colocar a matriz em forma escada reduzida.

Passo 4 -

Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

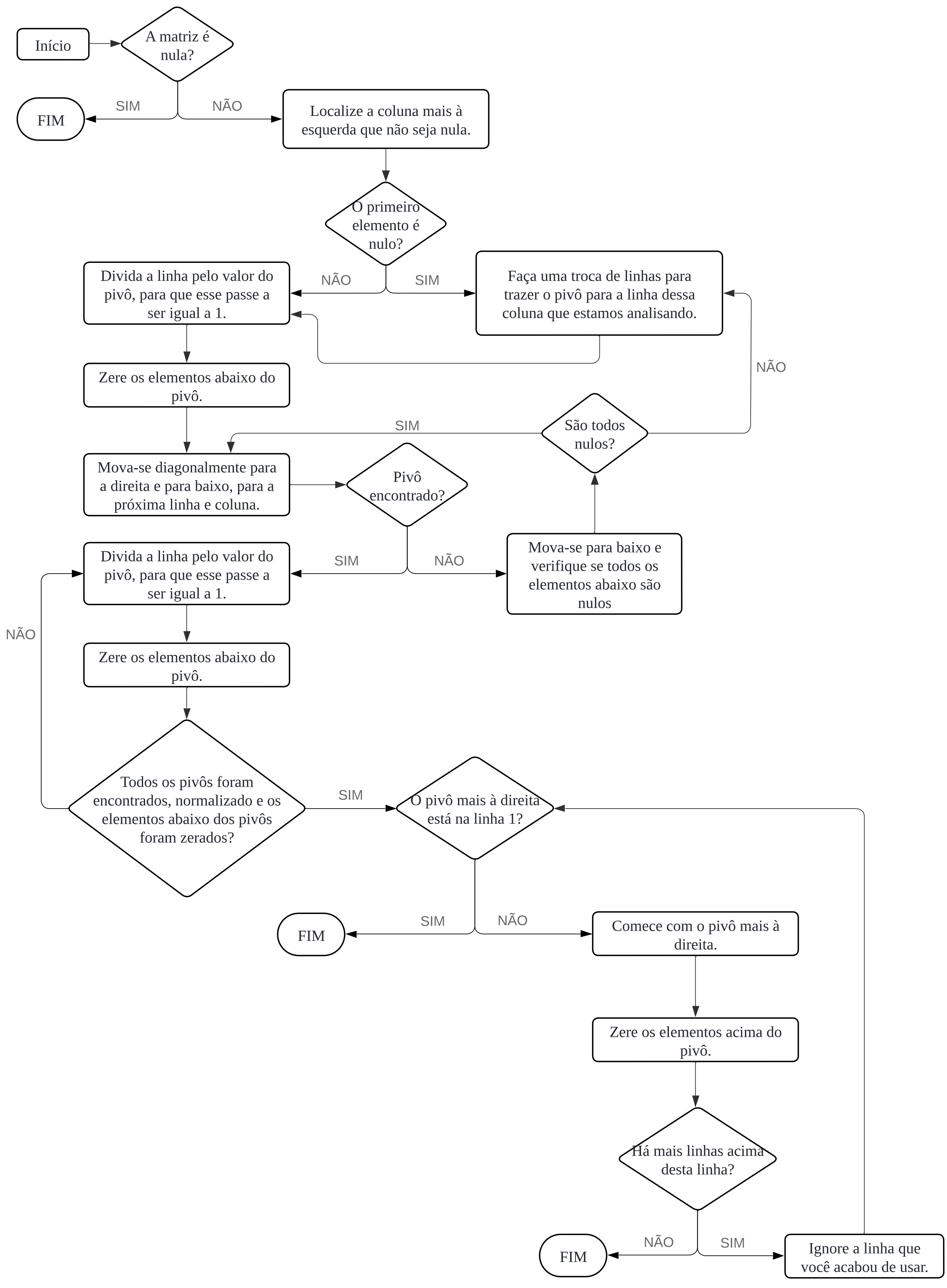
Passo 5 -

Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

Passo 6 -

Ignore a linha que você acabou de usar e volte ao Passo 4 e repita o processo para a linha que está acima até concluir o escalonamento.

Fluxograma - Algoritmo de escalonamento



Fonte: Autoria própria

Exemplo 1.3. Teste: Algoritmo de escalonamento

Vamos resolver o sistema a seguir utilizando o algoritmo descrito acima.

$$\begin{cases} x - y + z + w = 4 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - 2y + w = 1 \\ 5x + z - w = 5 \end{cases}$$

Primeiro, vamos escrever a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & \vdots & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 5 \end{bmatrix}$$

Teste inicial: A matriz não é nula, seguimos com o algoritmo.

Passo 1

i. Localize a coluna mais à esquerda que não seja zero e, se necessário, troque a primeira linha com outra linha para trazer uma entrada não-nula (pivô) para a primeira linha desta coluna.

   A coluna mais à esquerda é a coluna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ii. Divida a primeira linha pelo valor do pivô para obter um pivô igual a 1.

   Etapa não necessária, pois o pivô já é 1.

iii. Realize operações elementares para zerar os elementos que estão abaixo do pivô encontrado no passo anterior.

$$
L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad
\begin{array}{cccccccccc}
+ & 2 & - & 1 & - & 1 & & 0 & - & 3 \\
- & 2 & + & 2 & - & 2 & - & 2 & - & 8 \\
\hline
& 0 & + & 1 & - & 3 & - & 2 & - & 11
\end{array}
$$

$$
L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad \Rightarrow \qquad
\begin{array}{cccccccccc}
+ & 1 & - & 2 & & 0 & + & 1 & + & 1 \\
- & 1 & + & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 4 \\
\hline
& 0 & - & 1 & - & 1 & & 0 & - & 3
\end{array}
$$

$$
L_4 \leftarrow L_4 - 5 \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad
\begin{array}{cccccccccc}
+ & 5 & & 0 & + & 1 & - & 1 & + & 5 \\
- & 5 & + & 5 & - & 5 & - & 5 & - & 20 \\
\hline
& 0 & + & 5 & - & 4 & - & 6 & - & 15
\end{array}
$$

Com essas operações, a matriz ficará desta forma:

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\
0 & 1 & -3 & -2 & \vdots & -11 \\
0 & -1 & -1 & 0 & \vdots & -3 \\
0 & 5 & -4 & -6 & \vdots & -15
\end{bmatrix}.
$$

Passo 2

i. Mova-se diagonalmente para a direita e para baixo, para a próxima linha e coluna.

Vamos trabalhar com a segunda coluna

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ii. Se encontrar um elemento não-nulo, este será o próximo pivô. Normalize-o para 1 e use operações elementares para zerar todos os elementos abaixo dele.

O pivô já é 1, vamos zerar os elementos abaixo dele:

$$\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & - & 1 & - & 1 & & 0 & - & 3 \\ 0 & + & 1 & - & 3 & - & 2 & - & 11 \\ \hline 0 & & 0 & - & 4 & - & 2 & - & 14 \end{array}$$

$$\mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - 5 \cdot \mathrm{L}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 5 & - & 4 & - & 6 & - & 15 \\ 0 & - & 5 & + & 15 & + & 10 & + & 55 \\ \hline 0 & & 0 & + & 11 & + & 4 & + & 40 \end{array}$$

A matriz ficará

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & : & -11 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & : & -14 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & : & 40 \end{bmatrix}.$$

Passo 3 - Continue este processo linha por linha, coluna por coluna, até que todos os pivôs estejam normalizados e todos os elementos abaixo dos pivôs estejam zerados. Quando esse processo terminar, a matriz que você obteve estará em forma escalonada. Agora, prossiga com as seguintes etapas para colocar a matriz em forma escada reduzida.

Da terceira coluna, façamos:

ii. Divida a terceira linha pelo valor do pivô para obter um pivô igual a 1.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \frac{-1}{4} \cdot L_3 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \quad 0 \ + \ 1 \ + \ \tfrac{1}{2} \ + \ \tfrac{7}{2}$$

Desta forma,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & : & -11 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & : & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 11 & 4 & : & 40 \end{bmatrix}.$$

iii. Realize operações elementares para zerar os elementos que estão abaixo do pivô encontrado no passo anterior.

$$L_4 \leftarrow L_4 - 11 \cdot L_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & + & 11 & + & 4 & + & 40 \\ 0 & 0 & - & 11 & - & \frac{11}{2} & - & \frac{77}{2} \\ \hline 0 & 0 & & 0 & - & \frac{3}{2} & + & \frac{3}{2} \end{array}$$

Realizando a operação $L_4 \leftarrow -\frac{2}{3} \cdot L_4$, temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & \vdots & -11 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Passo 4 - Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

Passo 5 - Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} \cdot L_4 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & + & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & & 0 & - & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & + & 1 & & 0 & + & 4 \end{array}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3 \cdot L_4 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 1 & - & 3 & - & 2 & - & 11 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 2 & - & 2 \\ \hline 0 & + & 1 & - & 3 & & 0 & - & 13 \end{array}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & - & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 4 \\ 0 & & 0 & & 0 & - & 1 & + & 1 \\ \hline 1 & - & 1 & + & 1 & + & 0 & + & 5 \end{array}$$

Ignore a linha que você acabou de usar e volte ao Passo 4 e repita o processo para a linha que está acima até concluir o escalonamento.

Passo 4 - Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

Passo 5 - Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3 \cdot L_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 1 & - & 3 & & 0 & - & 13 \\ 0 & & 0 & + & 3 & & 0 & + & 12 \\ \hline 0 & & 1 & & 0 & & 0 & - & 1 \end{array}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & - & 1 & + & 1 & & 0 & + & 5 \\ 0 & & 0 & - & 1 & & 0 & - & 4 \\ \hline 1 & - & 1 & & 0 & & 0 & + & 1 \end{array}$$

Ignore a linha que você acabou de usar e volte ao Passo 4 e repita o processo para a linha que está acima até concluir o escalonamento.

Passo 4 - Se o pivô igual a 1 mais à direita estiver na linha 1, pare.

Passo 5 - Comece com o pivô igual a 1 mais à direita - este estará na última linha não nula. Use-o para anular cada entrada acima dele em sua coluna.

$$\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_4 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & - & 1 & 0 & 0 & + & 1 \\ 0 & + & 1 & 0 & 0 & - & 1 \\ \hline 1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}$$

A matriz ficará na sua forma escada reduzida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos que $x = 0$, $y = -1$, $z = 4$ e $w = -1$ formam a solução $(0, -1, 4, -1)$ do sistema.

Exercício 1.5

Escreva a matriz ampliada de cada sistema e faça o escalonamento para obter a solução de cada sistema.

a. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - y = 9 \end{cases}.$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 10x + 9y = 11 \end{cases}.$

c. $\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 1 \\ 4x & + & y & = & 17 \end{cases}$.

d. $\begin{cases} x & + & 4y & = & 1 \\ 2x & + & 7y & = & 0 \end{cases}$.

e. $\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \end{cases}$.

f. $\begin{cases} 2x & + & 12y & + & 17z & = & 53 \\ x & + & 5y & + & 7z & = & 22 \\ 3x & + & 22y & + & 19z & = & 35 \end{cases}$.

g. $\begin{cases} x & + & 3y & - & z & = & 7 \\ 3x & + & 7y & + & z & = & 11 \\ 2x & + & 7y & - & 4z & = & 19 \end{cases}$.

h. $\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & - & 5y & + & 2z & = & 1 \\ 4x & - & y & + & 8z & = & 3 \end{cases}$.

1.4 Solução de um sistema

Uma equação linear que possui apenas duas incógnitas representa uma reta no plano. Vamos analisar sistemas 2x2 e observar o que acontece com as retas de acordo com as soluções do sistema.

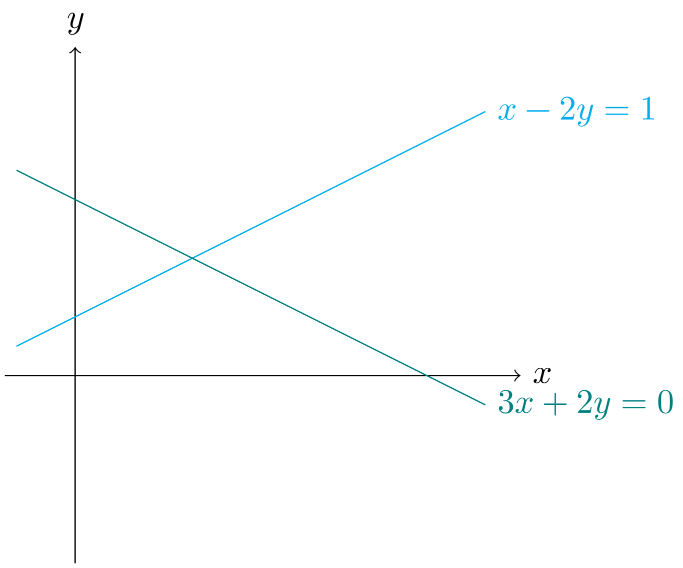
Sistema 1

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por escalonamento, obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema apresenta uma única solução $(3, 1)$. Essas duas equações representam as seguintes retas concorrentes:



O ponto onde as duas retas se intersectam é o ponto $(3, 1)$, que é a solução do sistema. Nesse caso, dizemos que o sistema é **consistente** e possui **solução única**!

Sistema 2

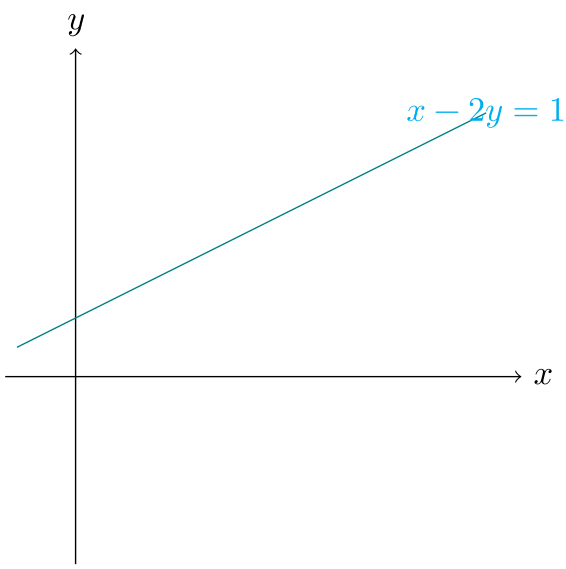
$$\begin{cases} x & - & 2y & = & 1 \\ 2x & - & 4y & = & 2 \end{cases}$$

Escalonando a matriz ampliada, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

A última linha da matriz escalonada ficou com todos os seus elementos nulos. Quando isso ocorre, temos apenas a equação $x - 2y = 1$, ou seja, a solução do sistema é formada por todos os pontos que pertencem a reta $y = -\frac{1-x}{2}$.

Graficamente, temos:



Como temos duas retas coincidentes, dizemos que o sistema é **consistente** e possui **infinitas soluções**!

SISTEMA 3

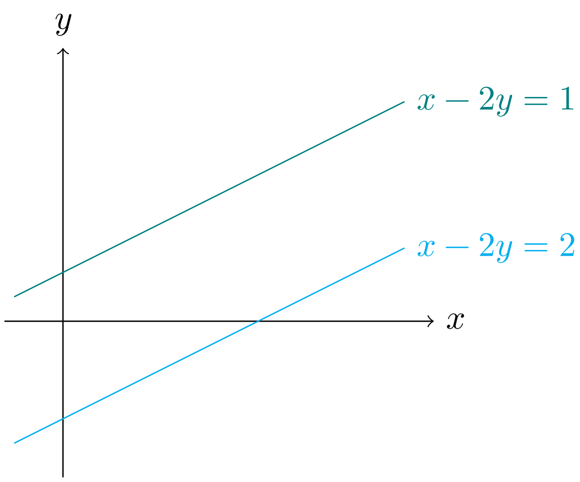
$$\begin{cases} x & - & 2y & = & 1 \\ x & - & 2y & = & 2 \end{cases}$$

Nesse sistema, escalonando a matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \Rightarrow 0 = 1$, o que é um absurdo. Podemos concluir que não existem valores para x e y capazes de satisfazer as duas equações do sistema. Observando as retas no planos:

Figura 1.1: Sistema 3: Retas Paralelas

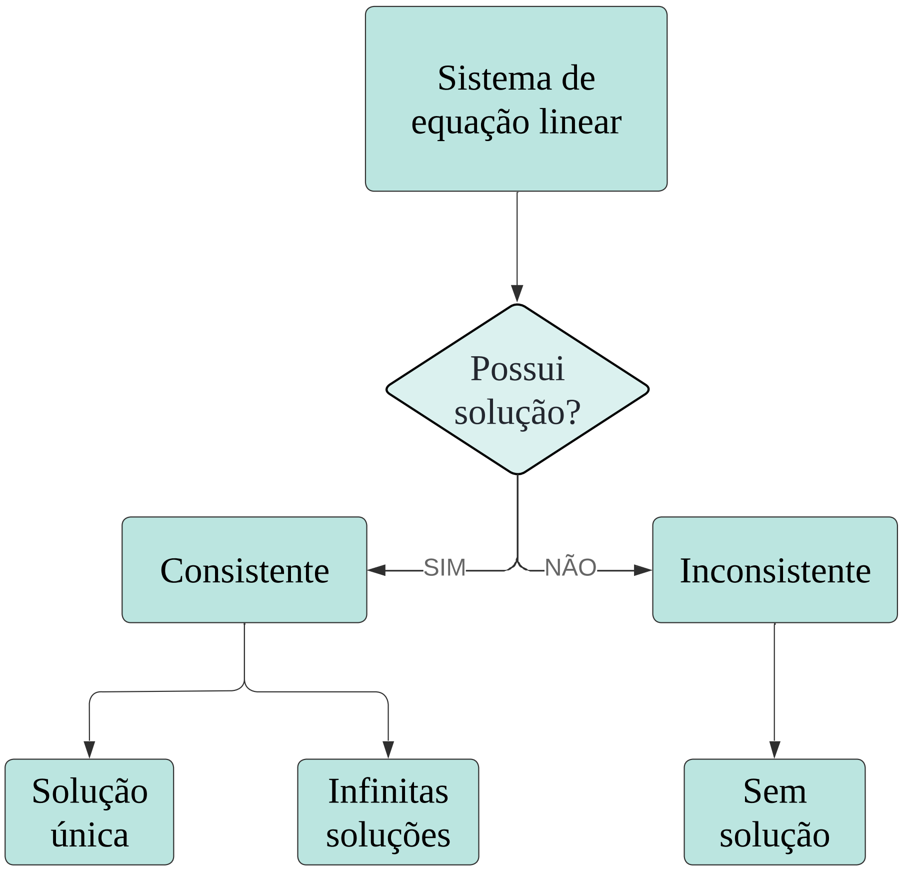


O sistema não possui solução e as retas são paralelas. Dizemos que o sistema é **inconsistente** e **não possui soluções**!

1.4.1 Classificação do sistema

Os sistemas de equações lineares podem ser classificados da seguinte maneira:

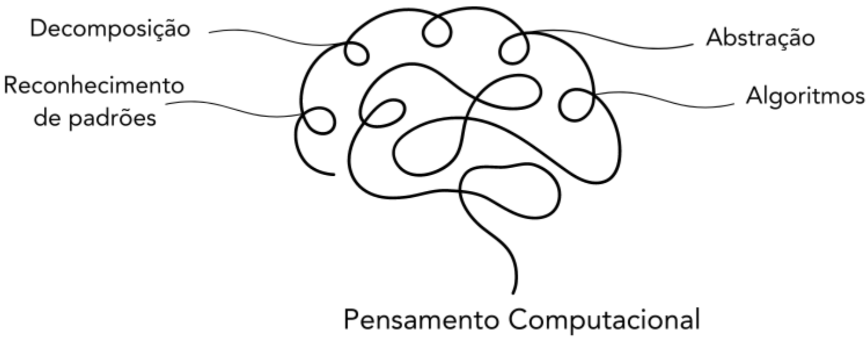
Na seção 4.3 há exercícios para a classificação de sistemas através das plataformas apresentadas.


Sistema de equação linear
Possui solução?
SIM
NÃO
Consistente
Inconsistente
Solução única
Infinitas soluções
Sem solução

Capítulo 2

Como resolver problemas

2.1 Pensamento Computacional



Problemas complexos sempre desafiaram diversas áreas do conhecimento, levando a humanidade a enfrentar situações imprevistas. Essas situações abriram portas para novas descobertas, que contribuíram para a construção do conhecimento humano e do avanço científico e tecnológico.

Atualmente, é possível utilizar técnicas matemáticas e computacionais cada vez mais criativas e sofisticadas, seja para o sequenciamento do DNA, simulações nas engenharias, análise de grandes conjuntos de dados nas áreas sociais ou nos mais variados contextos.

Fragmentar um problema difícil, reconhecer padrões, fazer abstrações e criar algoritmos são habilidades utilizadas por cientistas da computação. Com isso, é possível identificar, orientar e contribuir para o desenvolvimento de soluções dos desafios. Juntas, essas habilidades compõem um método para resolver problemas chamado de pensamento computacional, que é constituído por quatro habilidades:

Decomposição: A decomposição consiste em dividir o problema em partes menores.

Reconhecimento de padrões: O reconhecimento de padrões permite identificar as semelhanças nos detalhes.

Abstração: A abstração, por sua vez, isola detalhes irrelevantes e concentra-se nas partes relevantes.

Algoritmos: Os algoritmos são os responsáveis por escrever a solução do problema em uma sequência de passos que podem ou não ser calculados por um computador.

Juntas auxiliam na interpretação do problema, podendo reutilizar estratégias de problemas semelhantes e também desenvolver estratégias novas com uma lógica estruturada. Entende-se que nem todo problema precise obrigatoriamente passar por todas as etapas, uma vez que elas são independentes entre si. Vamos agora explorar como essas habilidades podem nos ajudar a resolver problemas que envolvem a resolução de sistemas de equações lineares.

2.2 Resolução de problemas

Nesta seção, vamos apresentar alguns problemas para que você possa explorar as habilidades do pensamento computacional, bem como utilizar o algoritmo do escalonamento para resolver sistemas.

2.2.1 Problemas em geral

Exemplo 2.1. (FESP - Adaptado): Uma pessoa alimenta seu cão combinando o conteúdo de duas marcas de rações preparadas pelos fabricantes X e Y. A tabela abaixo discrimina a quantidade de unidades de vitaminas e de sais minerais em cada saco de ração e a quantidade mínima de unidades que o cão deve consumir.

	Ração X	Ração Y	Mínimo
Vitaminas	40	20	200
Sais minerais	20	40	200

Se o saco da ração X custa R$10,00 e o da Y, R$ 15,00, determine a quantidade inteira de cada saco a ser comprado de modo a minimizar os custos e satisfazer as quantidades mínimas requeridas.

Compreendendo o problema

O problema solicita a quantidade inteira de cada saco de ração a ser comprada, onde duas condições devem ser satisfeitas: atender à quantidade mínima de vitaminas e sais minerais e minimizar os gastos. Para isso, é fornecida uma tabela com as quantidades e os valores de cada saco de ração.

À primeira vista, percebe-se que não é fácil abordar o problema de uma vez só. Portanto, vamos utilizar a decomposição e dividir o problemas em subproblemas. Inicialmente, buscaremos determinar a quantidade de sacos que atendem à condição inicial. Em seguida, encontraremos os valores correspondentes de forma inteira.

Por fim, para a última condição, identificaremos as quantidades de sacos que resultam no menor custo possível.

Subproblema 1

Qual é a quantidade de sacos de ração para se ter a quantidade mínima de vitaminas e sais minerais desejada?

Aqui, nosso foco está na determinação da quantidade de sacos de ração, para isso vamos utilizar as informações que constam na tabela. Nesse sentido, as incógnitas são as quantidades de sacos de ração a serem adquiridas de cada fornecedor. Então, vamos criar uma equação para cada linha da tabela.

Denotaremos por x a quantidade de sacos a serem adquiridos da Ração X e por y a quantidade de sacos a serem adquiridos da Ração Y. Dessa forma, a partir da primeira linha, obtemos a equação $40x + 20y = 200$, enquanto a segunda linha resulta na equação $20x + 40y = 200$. Como queremos que as duas equações sejam satisfeitas simultaneamente, temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 40x & + & 20y & = & 200 \\ 20x & + & 40y & = & 200 \end{cases}.$$

Vamos escrever a matriz ampliada desse sistema:

$$\begin{bmatrix} 40 & 20 & \vdots & 200 \\ 20 & 40 & \vdots & 200 \end{bmatrix}$$

Podemos multiplicar as duas linhas por $\frac{1}{20}$, assim $\mathrm{L}_1 \leftarrow \frac{1}{20} \cdot \mathrm{L}_1$ e $\mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{20} \cdot \mathrm{L}_2$ e também permutar as duas linhas $\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2$ deixando a matriz assim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 10 \\ 2 & 1 & \vdots & 10 \end{bmatrix}$$

Continuando com o processo de escalonamento:

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2 \cdot \mathrm{L}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccc} + & 2 & + & 1 & + & 10 \\ - & 2 & - & 4 & - & 20 \\ \hline & 0 & - & 3 & - & 10 \end{array}$$

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow -\frac{1}{3} \cdot \mathrm{L}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & - & \frac{3}{-\frac{1}{3}} & - & \frac{10}{-\frac{1}{3}} \\ \hline 0 & + & 1 & + & \frac{10}{3} \end{array}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccc} + & 1 & + & 2 & + & 10 \\ & 0 & - & 2 & - & \frac{20}{3} \\ \hline & 1 & & 0 & & \frac{10}{3} \end{array}$$

Assim, a matriz ampliada escalonada fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Concluímos que para se obter exatamente a quantidade mínima devemos ter $x = y = \frac{10}{3}$. Porém, a questão exige uma quantidade inteira de sacos, que não é o caso da quantidade x e y que encontramos. Por isso, vamos ao próximo subproblema.

Subproblema 2

Qual é a quantidade inteira de cada saco que devemos comprar?

Encontramos no subproblema valores não inteiros. Temos que $\frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,6$, desta forma a quantidade mínima de sacos a ser comprada é 7. Vamos investigar quantos sacos de cada ração podemos comprar de maneira a satisfazer a quantidade mínima de vitaminas e sais minerais. Acompanhe a Tabela 2.1.

A partir dos cálculos da tabela, observamos que é possível adquirir 3 sacos da ração X e 4 sacos da ração Y, ou então 4 sacos da ração X e 3 sacos da ração Y, uma vez que ambas as opções atendem às exigências mínimas de vitaminas e sais minerais. No entanto, o problema ainda quer saber a opção de menor custo. Portanto, vamos para a resolução do último subproblema.

Subproblema 3

Qual é a quantidade mínima de cada saco para se obter o menor custo?

O problema nos informa que o saco da ração X custa R\$$10,00$ e o saco da ração Y custa R\$$15,00$. Utilizando as informações do subproblema 2, temos que

Tabela 2.1: Cálculo das condições

(x, y)	Vitaminas	Sais minerais	Conclusão
(1, 6)	40 + 120 = 160	20 + 240 = 260	Não possui o mínimo de vitaminas
(2, 5)	80 + 100 = 180	40 + 200 = 240	Não possui o mínimo de vitaminas
(3, 4)	120 + 80 = 200	60 + 160 = 220	Possui o mínimo
(4, 3)	160 + 60 = 220	80 + 120 = 200	Possui o mínimo
(5, 2)	200 + 40 = 240	100 + 80 = 180	Não possui o mínimo de sais minerais
(6, 1)	240 + 20 = 260	120 + 40 = 160	Não possui o mínimo de sais minerais

$$
\begin{aligned}
(3,4) \Rightarrow 3 \cdot 10 + 4 \cdot 15 \quad &= R\$90,00 \\
(4,3) \Rightarrow 4 \cdot 10 + 3 \cdot 15 \quad &= R\$70,00
\end{aligned}
$$

Portanto, podemos afirmar que a quantidade mínima de sacos necessária para minimizar os custos é de 4 para a ração X e 3 para a ração Y.

Resposta do problema principal

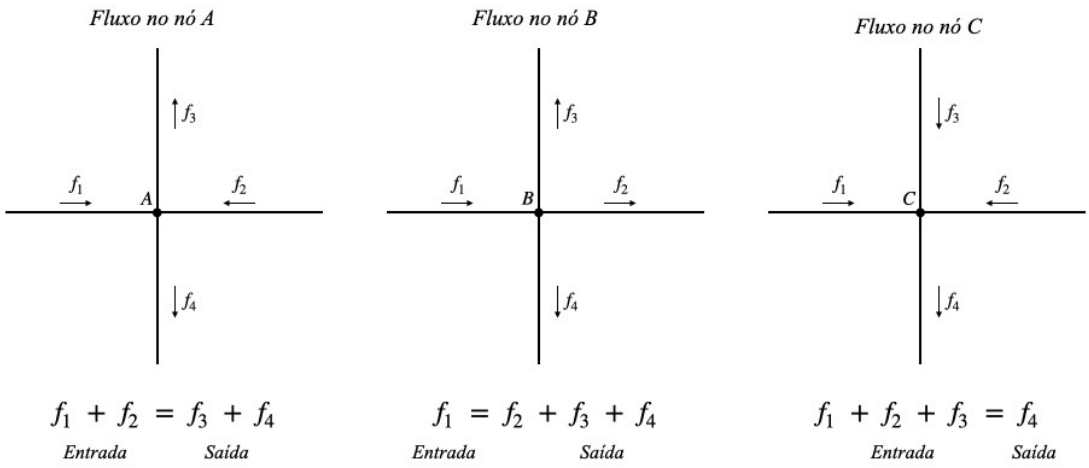
Deve-se comprar 4 sacos da ração do fornecedor X e 3 sacos da ração do fornecedor Y, gastando assim $R\$70,00$.

2.2.2 Fluxo de tráfego

Define-se uma rede como um conjunto finito de ramos (ou arcos) pelos quais o fluxo percorre. Em uma rede, existem pontos de encontro chamados nós ou vértices, e é nesses pontos que o fluxo se divide.

Para evitar acúmulos no meio, garantindo a livre circulação ao longo da rede, entende-se que, na conservação do fluxo, a quantidade de fluxo de entrada em cada nó é igual à quantidade de fluxo de saída. Indica-se uma direção e a quantidade que fluirá ao longo do ramo.

Figura 2.1: Exemplos de fluxos de rede

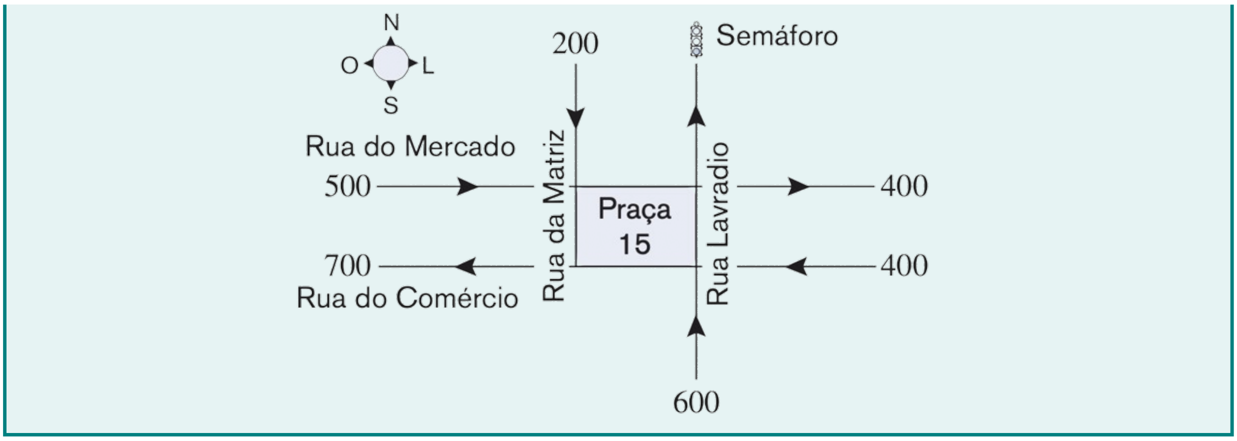


O problema de fluxo de tráfego a seguir foi extraído e adaptado do livro Álgebra Linear com Aplicações dos autores Anton e Rorres (ANTON; RORRES, 2012).

Exemplo 2.2. Na Figura 2.2 pode-se ver o fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças, a Praça 15. Prevê-se a instalação de um semáforo computadorizado na saída norte da Rua Lavradio, e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam o complexo da praça. Todas as ruas são de mão única.

a) O semáforo deveria deixar passar quantos veículos por hora para garantir que o número médio de veículos por hora que entra no complexo seja igual ao número médio de veículos que sai do complexo?

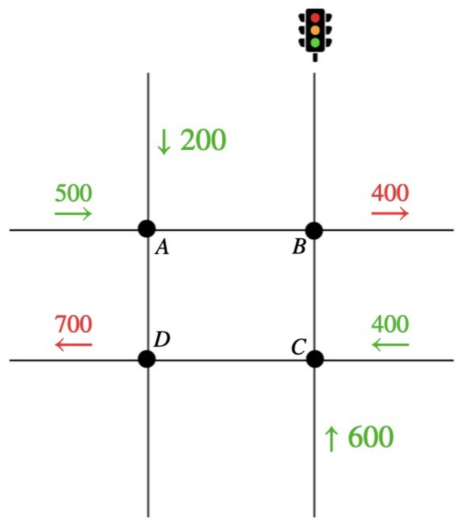
b) Supondo que o semáforo tenha sido ajustado para equilibrar o fluxo total para dentro e para fora do complexo da praça, o que pode ser dito sobre o número médio de veículos por hora que circulará pelas ruas que circundam o complexo?



Resolução do item a

Para descobrir quantos veículos o semáforo deveria deixar passar, precisamos saber quantos veículos estão entrando na região e quantos veículos já estão saindo. Para isso, vamos analisar as informações que a questão forneceu.

Figura 2.2: Entrada e saída de veículos

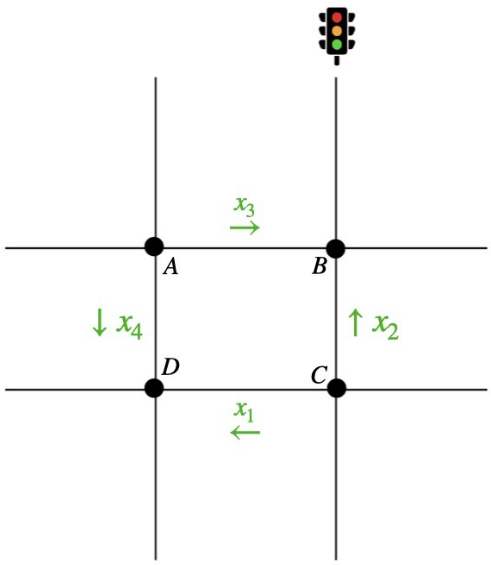


Como mostra na figura 2.2, em verde temos a entrada de veículos $(500 + 400 + 600 + 200 = 1700)$ e em vermelho a saída $(700 + 400 = 1100)$. Vimos que a quantidade de entrada deve ser igual a quantidade de saída, portando pelo semáforo devem passar 600 veículos por hora.

Resolução do item b

Agora estamos interessados em saber o que acontece ao redor da praça, para isso vamos analisar o fluxo de entrada nessas vias entre os nós A, B, C e D.

Figura 2.3: Fluxo em torno da Praça



Sabendo que o fluxo de entrada deve ser igual ao de saída, cada nó formará uma equação.

Nó A: $x_4 + x_3 = 500 + 200 \quad \Rightarrow \quad x_4 + x_3 = 700.$

Nó B: $x_2 + x_3 = 400.$

Nó C: $x_1 + x_2 = 600 + 400 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 1000.$

Nó D: $x_1 + x_4 = 700.$

Com essas equações montamos o sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & & & x_3 & + & x_4 & = & 700 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1000 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1000 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & = & 700 \end{array}\right. .$$

Escrevendo o sistema na sua forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 1000 \\ 1000 \\ 700 \end{bmatrix}.$$

Com a matriz ampliada [A | b]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 700 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1000 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1000 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 700 \end{bmatrix}.$$

Ao escalonar a matriz ampliada, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 700 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$x_1 = 700 - t.$$

$$x_2 = 300 + t.$$

$$x_3 = 700 - t.$$

$$x_4 = t.$$

Temos x_4 como uma variável livre, desta forma assumiremos $x_4 = t$. Agora, para interpretar o resultado encontrado, precisamos achar quais valores t pode assumir.

Os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4 não podem ser negativos, pois nessa situação mostraria um fluxo contrário e como as ruas são de mão única, não pode ocorrer. Desta forma, como $0 \leq x_1 \leq 700$ concluímos que t pode ser no máximo 700, ou seja, $0 \leq t \leq 700$. Com isso, temos que o fluxo médio ao longo das vias ficará entre

$$0 \leq x_1 \leq 700.$$
$$300 \leq x_2 \leq 1000.$$
$$0 \leq x_3 \leq 700.$$
$$0 \leq x_4 \leq 700.$$

2.2.3 Balanceamento de equações químicas

Uma equação química é apresentada da seguinte forma:

$$\mathrm{CH_4 + O_2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{CO_2 + H_2O}$$

Ela descreve quais são os produtos e reagentes de uma reação. Além disso, uma equação química balanceada especifica uma relação numérica das quantidades de reagentes e produtos de uma reação (RUSSEL, 1994).

A equação acima descreve na queima de metano, o metano (CH_4) e o oxigênio estável (O_2) reagem para formar dióxido de carbono (CO_2) e água (H_2O). Nesse caso, $CH_4 + O_2$ são os reagentes e $CO_2 + H_2O$ são os produtos.

Dizemos que uma reação química está **balanceada** se aparecer o mesmo número de átomos em cada lado da seta para cada tipo de átomo na reação. Por exemplo, equilibrando a equação apresentada ela ficada seguinte forma:

$$\mathrm{CH_4 + 2O_2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{CO_2 + 2H_2O}$$

Um dos métodos para deixar a equação balanceada utiliza sistemas de equações lineares. Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo 2.3. Observe a equação da reação química da fermentação do açúcar

$$C_6H_{12}O_6 \quad \rightarrow \quad CO_2 + C_2H_5OH$$

Faça o balanceamento dessa equação.

Compreendendo a equação

Para que a equação esteja na sua forma balanceada, devemos ter para cada um dos átomos da equação, o número de átomos à esquerda igual ao número de átomos à direita. Assim, devemos encontrar os menores valores x, y e z de tal forma que

$$x \cdot (C_6H_{12}O_6) \rightarrow y \cdot (CO_2) + z \cdot (C_2H_5OH)$$

Retirando os dados

Vamos escrever as informações em uma tabela para nos auxiliar na organização dos dados:

	Lado esquerdo	Lado direito
C		
H		
O		

Para preencher essa tabela, vamos usar a propriedade distributiva da seguinte maneira:

$$x \cdot (C_6H_{12}O_6)$$

	Lado esquerdo	Lado direito
C	6x	
H	12x	
O	6x	

$$y \cdot (\mathrm{CO_2})$$

	Lado esquerdo	Lado direito
C	6x	y
H	12x	
O	6x	2y

$$z \cdot (\mathrm{C_2H_5OH})$$

	Lado esquerdo	Lado direito
C	6x	y +2z
H	12x	6z
O	6x	2y +z

Como o lado direito deve ser igual ao lado esquerdo, temos

$$\begin{array}{rcrcr} 6x &=& y &+& 2z \\ 12x &=& & & 6z \\ 6x &=& 2y &+& z \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{rcrcrl} 6x &-& y &-& 2z &= 0 \\ 12x & & &-& 6z &= 0 \\ 6x &-& 2y &-& z &= 0 \end{array}$$

podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 12x & & & - & 6z & = & 0 \\ 6x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema, vamos escalonar a matriz ampliada utilizando o algoritmo do escalonamento apresentado na Seção 1.3.1.

Escalonando a matriz

Escrevendo a matriz ampliada do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 & \vdots & 0 \\ 12 & 0 & -6 & \vdots & 0 \\ 6 & -2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando as operações elementares, vamos deixar o primeiro elemento da linha L_1 igual a 1:

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{6} \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} \frac{6}{6} & - & \frac{1}{6} & - & \frac{2}{6} & & \frac{0}{6} \\ \hline 1 & - & \frac{1}{6} & - & \frac{1}{3} & & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \vdots & 0 \\ 12 & 0 & -6 & \vdots & 0 \\ 6 & -2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Partindo para a linha L_2, realizamos a seguinte operação:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 12 \cdot L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccccc} & 12 & & 0 & - & 6 & & 0 \\ - & 12 & + & 2 & + & 4 & & 0 \\ \hline & 0 & + & 2 & - & 2 & & 0 \end{array}$$

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \mathrm{L}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccccc} 0 & + & \frac{2}{2} & - & \frac{2}{2} & \frac{0}{2} \\ \hline 0 & + & 1 & - & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 6 & -2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, na linha L_3:

$$\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 6 \cdot \mathrm{L}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} & 6 & - & 2 & - & 1 & 0 \\ - & 6 & + & 1 & + & 2 & 0 \\ \hline & 0 & - & 1 & + & 1 & 0 \end{array}$$

$$\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} & 0 & - & 1 & + & 1 & 0 \\ + & 0 & + & 1 & - & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 0 & & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Retornando a linha L_1:

$$\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \frac{1}{6} \cdot \mathrm{L}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ccccccc} & 1 & - & \frac{1}{6} & - & \frac{1}{3} & 0 \\ + & 0 & - & \frac{1}{6} & - & \frac{1}{6} & 0 \\ \hline & 1 & & 0 & - & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Como a última linha possui todos os seus elementos nulos, temos que z é uma variável livre. Assumindo $z = t$, temos:

$$x = \frac{1}{2} \cdot t$$
$$y = 1 \cdot t$$
$$z = t$$

Os valores de x, y e z devem ser os menores inteiros possíveis. Sendo assim, tomando $t = 2$:

$$\begin{matrix} x = \frac{1}{2} \cdot 2 & & x = 1 \\ y = 1 \cdot 2 & \rightarrow & y = 2 \\ z = 2 & & z = 2 \end{matrix}$$

A equação balanceada fica da forma:

$$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2CO_2 + 2C_2H_5OH$$

Capítulo 3

Exercícios

3.1 Problemas

Os exercícios foram selecionados a partir dos seguintes livros:

(LEON, 1998; KüHLKAMP, 2007; ANTON; RORRES, 2012; POOLE, 2017; INEP, 2024)

Exercício 3.1

Determinar uma função polinomial f de grau dois, tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ e $f(5) = 18$.

Exercício 3.2

Se ao iniciar a utilização da água de um reservatório, o nível da superfície da mesma está 12m acima do fundo, após dois dias de utilização 11,2m e após cinco dias o nível cai para 8,5m, determinar uma função polinomial de grau dois que retrate esta situação.

Admitindo que se possa utilizar esta função para calcular o nível aproximado da água também após o quinto dia de utilização, em quanto tempo o reservatório esvaziará?

Exercício 3.3

Determinar a função polinomial de grau três cujo gráfico passa pelos pontos (1, -7), (-1, -9), (3,-5) e (4,11).

Exercício 3.4

Suponha que numa construção foram utilizados quatro tipos de concreto preparados, misturando-se os ingredientes em volumes cujas proporções são dadas pela tabela que segue.

	Concreto I	Concreto II	Concreto III	Concreto IV
Cimento	1	1	1	1
Brita	2	2	1	2
Areia	3	4	5	6
Água	2	2	3	3

Determinar a proporção em que cada tipo de concreto foi aplicado, se foram utilizados $7m^3$ de cimento, $11m^3$ de brita, $32m^3$ de areia e $18m^3$ de água.

Exercício 3.5

Escreva uma equação balanceada para a reação química da queima do propano

$$\mathrm{C_3H_8} + \mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O}$$

Exercício 3.6

Escreva uma equação balanceada para a reação química

$$\mathrm{NH_3} + 0_2 \rightarrow \mathrm{N_2} + \mathrm{H_2O}$$

Exercício 3.7

Escreva uma equação balanceada para a reação química

$$\mathrm{FeS_2} + \mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{F}e_2\mathrm{O_3} + \mathrm{SO_2}$$

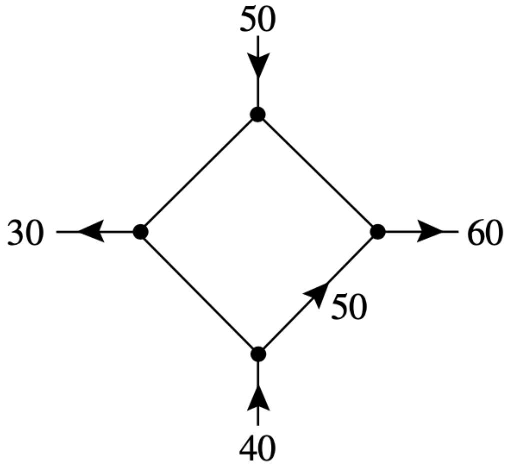
Exercício 3.8

Escreva uma equação balanceada para a reação química

$$C_4H_{10} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

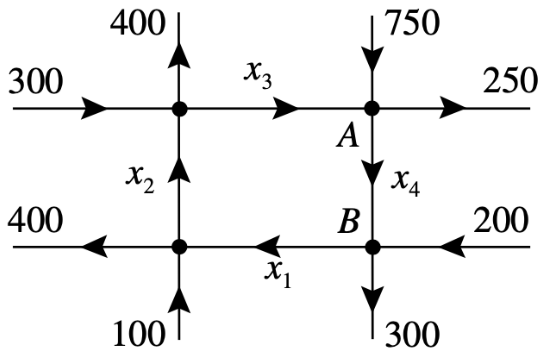
Exercício 3.9

A figura dada mostra uma rede na qual são conhecidos a taxa de fluxo e o sentido do fluxo em alguns ramos. Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo nos demais ramos.



Exercício 3.10

A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora. Monte um sistema linear e encontre as taxas de fluxo desconhecidas.



3.2 Questões do ENEM e vestibulares

3.2.1 Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM

Exercício 3.11

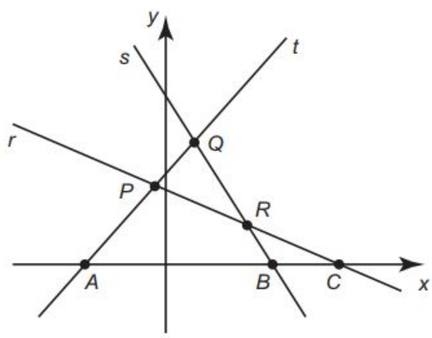
(ENEM 2018) Visando atingir metas econômicas previamente estabelecidas, é comum no final do mês algumas lojas colocarem certos produtos em promoção. Uma determinada loja de departamentos colocou em oferta os seguintes produtos: televisão, sofá e estante. Na compra da televisão mais o sofá, o cliente pagaria R$ 3800,00. Se ele levasse o sofá mais a estante, pagaria R$ 3400,00. A televisão mais a estante sairiam por R$ 4200,00. Um cliente resolveu levar duas televisões e um sofá que estavam na promoção, conseguindo ainda mais 5% de desconto pelo pagamento à vista. O valor total, em real, pago pelo cliente foi de quantos reais?

Exercício 3.12

(ENEM 2015) Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$100,00. Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

Exercício 3.13

(ENEM 2016) Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

c) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

Exercício 3.14

Uma pessoa pretende viajar por uma companhia aérea que despacha gratuitamente uma mala com até 10 kg. Em duas viagens que realizou, essa pessoa utilizou a mesma mala e conseguiu 10 kg com as seguintes combinações de itens:

Viagem	Camisetas	Calças	Sapatos
I	12	4	3
II	18	3	2

Para ter certeza de que sua bagagem terá massa de 10 kg, ela decide levar essa mala com duas calças, um sapato e o máximo de camisetas, admitindo que itens do mesmo tipo têm a mesma massa. Qual a quantidade máxima de camisetas que essa pessoa poderá levar?

3.3 Vestibulares

Exercício 3.15

(UFSCar) Uma loja vende três tipos de lâmpada (x, y e z). Ana comprou 3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z, pagando R$ 42,10 pela compra. Beto comprou 4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z, o que totalizou R$ 47,30. Nas condições dadas, a compra de três lâmpadas, sendo uma de cada tipo, custa nessa loja a) R$ 30,50. b) R$ 31,40. c) R$ 31,70. d) R$ 32,30. e) R$ 33,20.

Exercício 3.16

(FGV) Num escritório há 3 impressoras: A, B e C. Em um período de 1 hora: A e B juntas imprimem 150 folhas; A e C juntas imprimem 160 folhas; B e C juntas imprimem 170 folhas. Em 1 hora, a impressora A imprime sozinha: a) 60 folhas b) 65 folhas c) 75 folhas d) 70 folhas e) 80 folhas

Exercício 3.17

(PUC-SP) Sabe-se que na compra de uma caixa de lenços, dois bonés e três camisetas gasta-se um total de R$ 127,00. Se três caixas de lenços, quatro bonés e cinco camisetas, dos mesmos tipos que os primeiros, custam juntos R$ 241,00, a quantia a ser desembolsada na compra de apenas três unidades desses artigos, sendo um de cada tipo, será A) R$ 72,00 B) R$ 65,00 C) R$ 60,00 D) R$ 57,00 E) R$ 49,00

Exercício 3.18

(Mack) Considere três números inteiros tais que as somas de dois a dois deles, distintos, resultam 20, 15 e 19. A diferença entre o maior e o menor desses números é: a) 7 b) 4 c) 3 d) 6 e) 5

Exercício 3.19

(UFSC) O sistema é indeterminado para $m = 2$ e $p = -1$

$$\begin{cases} & x & - & 2y & + & mz & = 1 \\ & x & - & y & - & z & = 2 \\ - & x & + & 2y & - & 2z & = p \end{cases}$$

Exercício 3.20

(UFSC) Se

$$\begin{cases} & x & - & 2y & - & z & = a \\ - & x & + & 4y & + & 2z & = b \\ & 3x & + & 3y & + & 5z & = c \end{cases}$$

então o sistema tem solução para quaisquer valores a, b, $c \in \mathbb{R}$.

Capítulo 4

Plataformas educacionais

Neste capítulo, iremos explorar duas plataformas educacionais: Wolfram Alpha e Symbolab. Ambas têm como objetivo fornecer soluções detalhadas para problemas matemáticos, auxiliando os estudantes em seu aprendizado. Em suas versões pagas, essas plataformas oferecem recursos avançados que incluem a exposição passo a passo das soluções, o que pode ser extremamente útil para entender os conceitos e resolver problemas que apresentam certo nível de dificuldade.

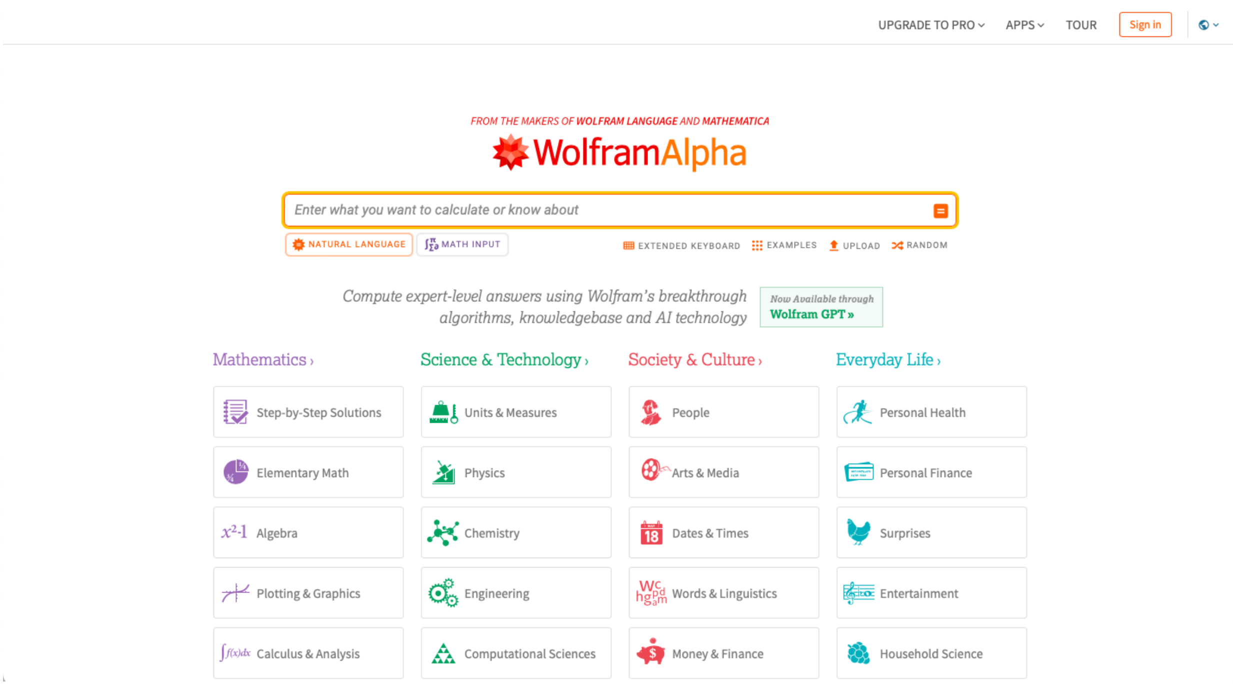
No entanto, é importante ressaltar que o uso desses recursos deve ser feito com sabedoria. É importante que você utilize as ferramentas para complementar seu aprendizado, em vez de depender exclusivamente delas. Afinal, o seu aprendizado será desenvolvido com a compreensão dos conteúdos e problemas, não apenas com as respostas dos sites ou ao final dos livros.

4.1 Wolfram Alpha

A plataforma Wolfram|Alpha foi criada pela empresa Wolfram Research e é voltada para estudos matemáticos. Com o objetivo de acessar respostas através de cálculos dinâmicos baseados em uma vasta coleção de dados, algoritmos e métodos incorporados, tornando o conhecimento acessível para todos.

Essa plataforma pode ser acessada através do site www.wolframalpha.com ou por dispositivos móveis disponível na App Store ou Google Play. A versão gratuita desta plataforma possui algumas limitações, como resoluções passo a passo restritas, enquanto a versão paga oferece acesso a recursos adicionais.

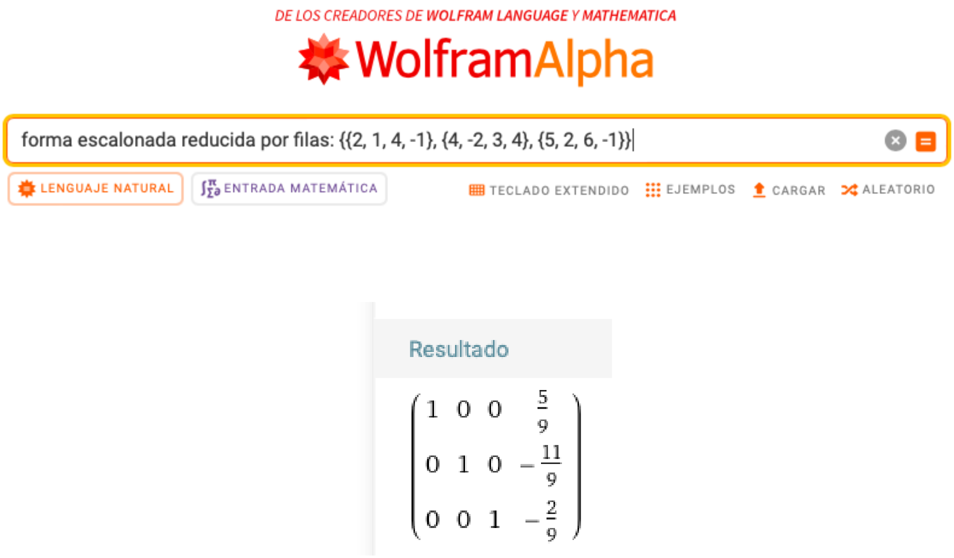
A página inicial do site é configurada da seguinte maneira:



A plataforma está disponível em três idiomas, mas o português não está entre as opções. Assim, para escalonar uma matriz ampliada, selecionamos o idioma espanhol e inserimos o seguinte texto:

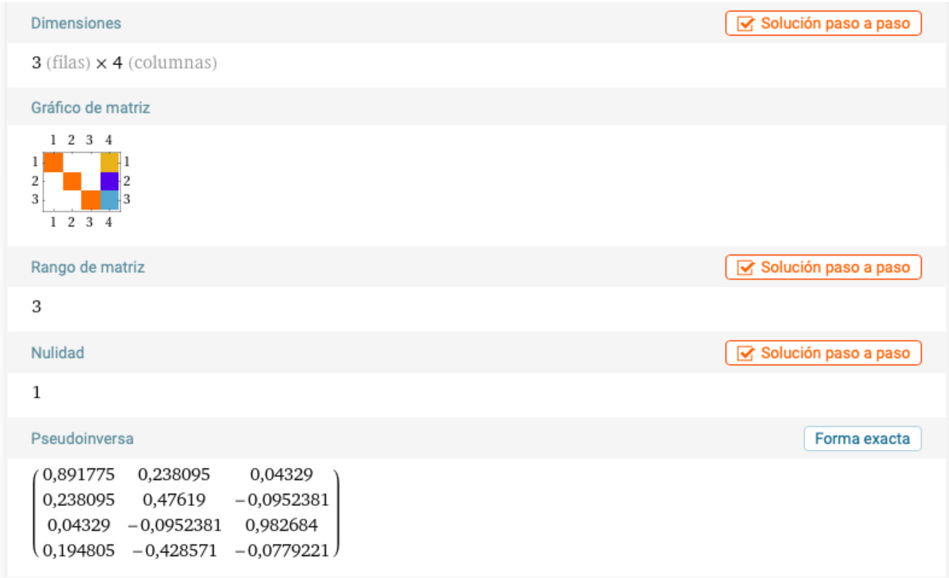
forma escalonada reducida por filas: $\{\{2, 1, 4, -1\}, \{4, -2, 3, 4\}, \{5, 2, 6, -1\}\}$

Assim, obtemos a matriz na sua forma escalonada e os valores das incógnitas aparecem na última coluna:



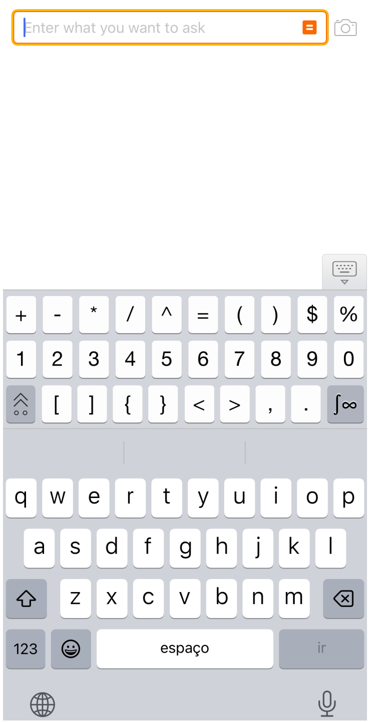
Essa plataforma não disponibiliza o passo a passo na sua versão gratuita, mostrando apenas o início da resolução:

Porém, além do escalonamento, a plataforma nos dá mais informações sobre a matriz:



Como o detalhamento passo a passo dessa solução só está disponível na versão paga, esta ferramenta pode ser útil para nos orientar na verificação das respostas que obtivemos no final.

Por fim, a tela inicial do aplicativo para dispositivos móveis:

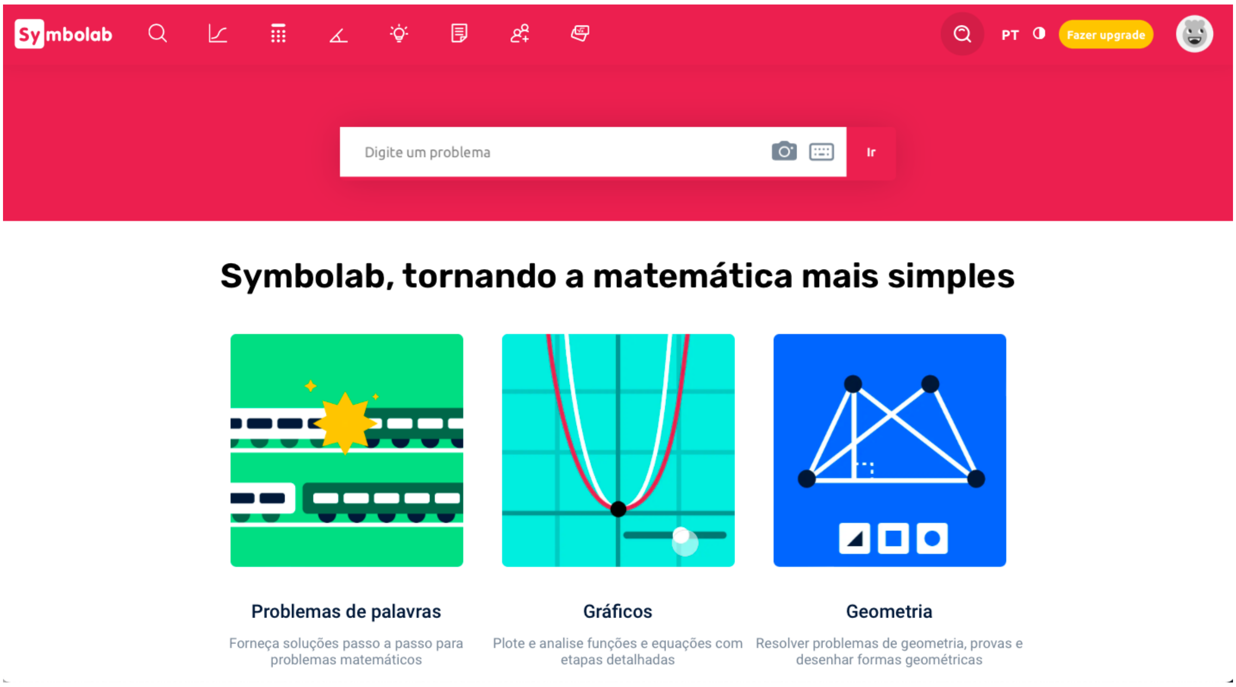


4.2 Symbolab

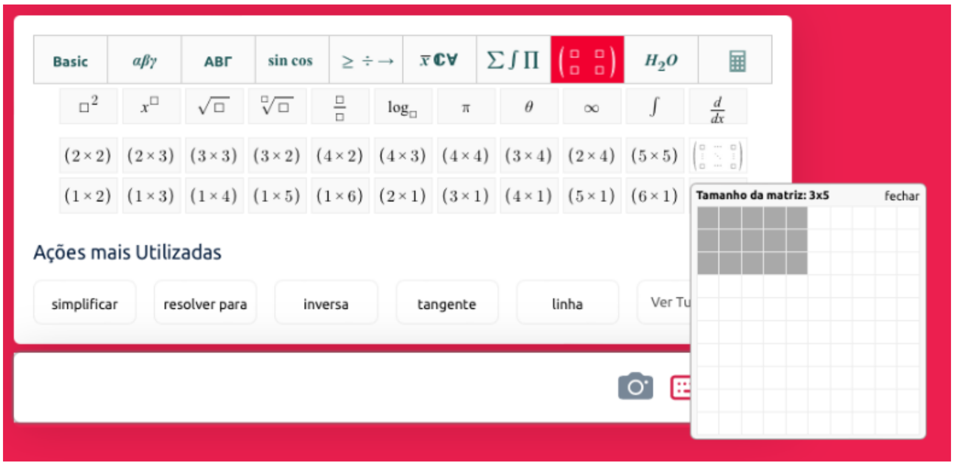
A plataforma foi criada pela Course Hero Symbolab Ltd. Uma das metas da empresa é promover a aprendizagem da matemática. Com um design simples e intuitivo, a plataforma Symbolab oferece não apenas soluções passo a passo, mas também um aprendizado personalizado e avaliações.

Essa plataforma pode ser acessada através do site www.pt.symbolab.com ou por dispositivos móveis disponível na App Store ou Google Play. A versão gratuita desta plataforma possui algumas limitações, como resoluções passo a passo restritas, enquanto a versão paga oferece acesso a recursos adicionais.

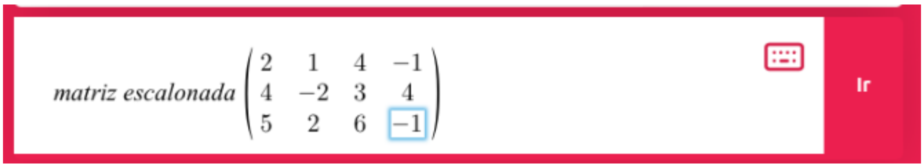
A página inicial do site é configurada da seguinte maneira:



Na área de entrada de texto, são exibidas ferramentas que permitem inserir informações de forma intuitiva e direta.



Um exemplo de solicitação para escalonar uma matriz ampliada seria:



No entanto, observe que a solução fornecida está na forma de escada, e não na forma escalonada conforme descrita na seção 1.3.

Passos da solução

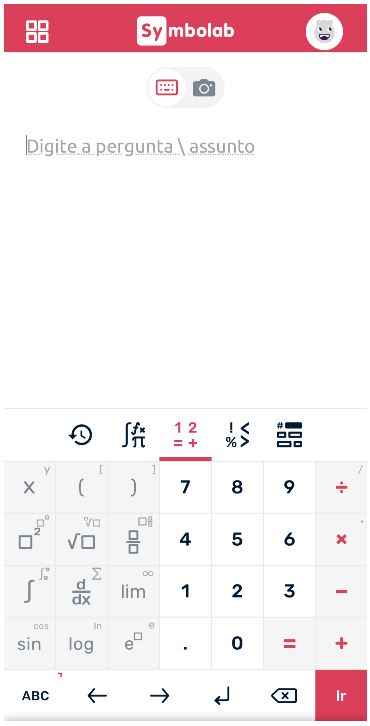
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Use Gaussian Elimination

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -\frac{27}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Como o detalhamento passo a passo dessa solução só está disponível na versão paga, esta ferramenta pode ser útil para nos orientar na verificação das respostas que obtivemos no final.

Por fim, a tela inicial do aplicativo para dispositivos móveis:



4.3 Exercícios

Para praticar como classificar os sistemas visto na seção 1.4, utilize uma das plataformas para escalonar as matrizes a seguir e classifique se elas formas um sistema consistente, com uma ou infinitas soluções, ou inconsistente.

Exercício 4.1

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 9 \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x - y + z = 9 \end{cases}$$

Exercício 4.2

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & - & y & & & = & -1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

Exercício 4.3

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & - & 5 & + & 2z & = & 1 \\ 4x & - & y & + & 8z & = & 3 \end{cases}$$

Exercício 4.4

$$\begin{cases} 2x & - & 6y & = & 5 \\ 3x & - & 9y & = & 1 \end{cases}$$

APÊNDICE A

Soluções

Solução 1.3

a. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$

Solução 1.4

a. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 3 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$.

b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & \vdots & 8 \\ 4 & -3 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$.

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ -1 & 2 & 3 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$.

Solução 1.5

a. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 3 \\ 2 & -1 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2 \cdot \mathrm{L}_1 \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{3} \cdot \mathrm{L}_2 \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 2 \cdot \mathrm{L}_2$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

A solução é o par $(5, 1)$.

b. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 10 & 9 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 5 \cdot L_1 \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{6} \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3 \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot L_1$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

A solução é o par $(2, -1)$.

c. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 4 & 1 & \vdots & 17 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{5} \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3 \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow -\frac{1}{2} \cdot L_1$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

A solução é o par $(5, -3)$.

d. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & \vdots & 1 \\ 2 & 7 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad L_2 \leftarrow -1 \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 4 \cdot L_2$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -7 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

A solução é o par $(-7, 2)$.

e. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad L_2 \leftarrow -1 \cdot L_2 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}.$$

A solução é a tripla $(1, 2, 3)$.

f. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 17 & \vdots & 53 \\ 1 & 5 & 7 & \vdots & 22 \\ 3 & 22 & 19 & \vdots & 35 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot L_2 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3 \cdot L_3$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{7} \cdot L_3 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \qquad L_3 \leftarrow -\frac{14}{25} \cdot L_3$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} \cdot L_3 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 5 \cdot L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 7 \cdot L_3$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{bmatrix}.$$

A solução é a tripla $(2, -3, 5)$.

g. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & \vdots & 7 \\ 3 & 7 & 1 & \vdots & 11 \\ 2 & 7 & -4 & \vdots & 19 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3 \cdot \mathrm{L}_1 \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{L}_2 \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2 \cdot \mathrm{L}_1 \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 -$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & \vdots & -8 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos notar que a última linha da matriz possui todos os seus elementos nulos. Assim, esse sistema terá infinitas soluções como veremos na seção Solução de um sistema

h. A matriz ampliada é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & -5 & 2 & \vdots & 1 \\ 4 & -1 & 8 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Realizando as seguintes operações:

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\cdot\mathrm{L}_1 \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 4\cdot\mathrm{L}_1 \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \frac{1}{6}\cdot\mathrm{L}_3$$

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow -\frac{1}{9}\cdot\mathrm{L}_2 \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \frac{7}{9}\cdot\mathrm{L}_3 \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\cdot\mathrm{L}_2 \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 4\cdot\mathrm{L}_3$$

A matriz escalonada fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{19}{9} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, temos que $0 = 1$, ou seja, um absurdo! Assim, esse sistema não possui solução. Veremos isso na Seção Solução de um sistema.

Solução 3.1

$f(x) = x^2 - 2x + 3.$

Solução 3.2

$t = 10.$

Solução 3.3

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5.$

Solução 3.4

$(1, 2, 3, 1).$

Solução 3.5

$\mathrm{C_3H_8} + 5\mathrm{O_2} \to 3\mathrm{CO_2} + 4\mathrm{H_2O}$

Solução 3.6

$4\mathrm{NH_3} + 30_2 \to 2\mathrm{N_2} + 6\mathrm{H_2O}$

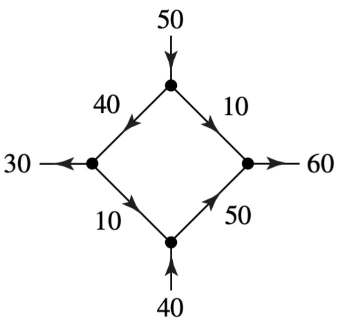
Solução 3.7

$4\mathrm{F}e\mathrm{S_2} + 11\mathrm{O_2} \to 2\mathrm{F}e_2\mathrm{O_3} + 8\mathrm{SO_2}$

Solução 3.8

$2\mathrm{C_4H_{10}} + 13\mathrm{O_2} \to 8\mathrm{CO_2} + 10\mathrm{H_2O}$

Solução 3.9



Solução 3.10

$x = -100 + t, \quad y = -400 + t, \quad z = -500 + t, \quad w = t$

Solução 3.11

R$ 5795,00.

Solução 3.12

30.

Solução 3.13

D.

Solução 3.14

B.

Solução 3.15

C.

Solução 3.16

D.

Solução 3.17

D.

Solução 3.18

E.

Solução 3.19

Solução 3.20

Solução 4.1

Consistente, única solução.

Solução 4.2

Consistente, infinitas soluções.

Solução 4.3

Inconsistente, sem solução.

Solução 4.4

Inconsistente, sem solução.

Referências Bibliográficas

ANTON, H. et al. *Álgebra Linear com Aplicações-10*. Porto Alegre, RS: Bookman Editora, 2012.

INEP, I. *Provas e Gabaritos*. [S.l.: s.n.], 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/inep> – acesso em 24 fev. 2023.

KüHLKAMP, N. *Matrizes e sistemas de equações lineares*. 2. ed. Florianópolis, SC: UFSC, 2007.

LEON, S. J. *Álgebra Linear com aplicações*. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1998.

POOLE, D. *Álgebra Linear: uma introdução moderna*. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2017.

RUSSEL, J. B. Química geral. *Tradução: Márcia Guekezian e colaboradores*, 1994.

STRANG, G. *Introduction to Linear Algebra*. 4. ed. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 2009.