



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Gabriel Motter Jönk

**Resolução de problemas espectrais em buracos negros de Schwarzschild, Kerr
e Kerr-Papapetrou-Wald a partir das propriedades analíticas da equação
confluyente de Heun**

Florianópolis
2024

Gabriel Motter Jönk

Resolução de problemas espectrais em buracos negros de Schwarzschild, Kerr e Kerr-Papapetrou-Wald a partir das propriedades analíticas da equação confluyente de Heun

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Física. Orientador: Prof. Celso de Camargo Barros Junior, Dr.

Florianópolis
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Jönk, Gabriel Motter

Resolução de problemas espectrais em buracos negros de Schwarzschild, Kerr e Kerr-Papapetrou-Wald a partir das propriedades analíticas da equação confluyente de Heun / Gabriel Motter Jönk ; orientador, Celso de Camargo Barros Junior, 2024.

103 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Física. 2. Buracos Negros Magnetizados. 3. Equações de Heun. 4. Campo de Papapetrou-Wald. I. Junior, Celso de Camargo Barros. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Gabriel Motter Jönk

Resolução de problemas espectrais em buracos negros de Schwarzschild, Kerr e Kerr-Papapetrou-Wald a partir das propriedades analíticas da equação confluyente de Heun

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Sidney dos Santos Avancini, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira, Dr.
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Celso de Camargo Barros Junior, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2024.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos deste trabalho são destinados ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFSC, que tem agora grande influência sobre a minha formação, à FAPESC, que concedeu durante o desenvolvimento da dissertação uma bolsa de pesquisa, e ao professor Celso Barros, pela orientação e pela paciência durante o meu desenvolvimento, e o desenvolvimento dessa pesquisa.

Principalmente, gostaria de agradecer à minha esposa, Manoela Guimaraes, que esteve torcendo por mim a todo momento no decorrer do meu mestrado, apesar de todos os vícios e virtudes associados ao empreendimento científico. Se, como geralmente gosto de pensar, pesquisar é como navegar por "mares nunca dantes navegados", então tenho a certeza de ter nela sempre um porto seguro para o qual retornar.

*Flectere si nequeo superos, Acheronta movebo.*¹

¹ “Se não posso dobrar os poderes celestiais, agitarei o Inferno”, Virgílio, *Eneida*, VII, 312.

RESUMO

O presente trabalho de pesquisa tem o intuito de descrever e investigar o comportamento de campos quânticos no espaço-tempo de Schwarzschild, Kerr e no buraco negro magnetizado de Kerr-Papapetrou-Wald usando alguns elementos da Teoria Quântica de Campos em Espaço-tempo Curvo. Para esse propósito, utilizamos a equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli para campos de spin $s = 0, 1$ e 2 em torno do buraco negro de Schwarzschild e a equação mestre de Teukolsky para a análise de campos de spin $s = 0, \pm 1/2, \pm 1$ e ± 2 sob condições de contorno específicas. Além disso, apresentamos a dedução das equações de Klein-Gordon-Fock no espaço-tempo de Kerr para um campo massivo e carregado em acoplamento mínimo com o campo eletromagnético de Papapetrou-Wald, qual seja, uma solução das equações de Maxwell livre de fontes nesse espaço que representa o campo eletromagnético no exterior de um buraco negro de Kerr imerso em um campo magnético assintoticamente uniforme e alinhado com o seu eixo de rotação. Nesse caso, as equações diferenciais parciais de Euler-Lagrange para o campo escalar não são separáveis para a métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist r e θ para todo $r \in (r_+, +\infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Deste modo, fizemos uma restrição na variável angular do tipo $\theta \ll 1$ para investigar a região axial em ângulos muito pequenos. Nesse regime, as equações de movimento se separam na variável radial e angular e, assim, podemos estudar a dinâmica do campo escalar concentrado em um pequeno cone truncado $\theta \in (0, \theta_L)$, com $\theta_L \ll 1$, uma região onde a aceleração de partículas carregadas pelo campo de Papapetrou-Wald é mais intensa e pode ser fonte de raios-cósmicos ultrarelativísticos. Como veremos, todas as equações de campo referentes a direção radial supracitadas podem ser mapeadas na equação confluyente de Heun e, assim, podemos utilizar as propriedades analíticas conhecidas dessa equação até o momento para calcular a taxa de criação de radiação Hawking com greybody factor e assim obter a intensidade de radiação emitida como função dos parâmetros de cada modelo e de cada modo de frequência dos campos. Em especial, lançamos mão de novos resultados analíticos sobre uma das soluções assintóticas da equação confluyente de Heun em torno do infinito para determinar o espectro de cada partícula a partir da imposição de condições polinomiais sobre a relação de recorrência de três-termos que define os coeficientes dessa solução. Dessa forma, encontramos que os modos de frequência dos campos sob essas condições devem ser números complexos com parte imaginária negativa, ou seja, possuem um termo de atenuamento conforme a variável temporal $t \rightarrow +\infty$.

Palavras-chave: Buracos negros. Campo de Papapetrou-Wald. Equações de Heun.

ABSTRACT

The present research work aims to describe and investigate the behavior of quantum fields in the Schwarzschild, Kerr space-time and in the magnetized Kerr-Papapetrou-Wald black hole using some elements of Quantum Field Theory in Curved Space-time. For this purpose, we use the Regge-Wheeler-Zerilli master equation for spin fields $s = 0, 1$ and 2 around the Schwarzschild black hole and the Teukolsky master equation for the analysis of spin fields $s = 0, \pm 1/2, \pm 1$ and ± 2 under specific boundary conditions. Furthermore, we present the derivation of the Klein-Gordon-Fock equations in Kerr spacetime for a massive and charged field in minimal coupling with the Papapetrou-Wald electromagnetic field, that is, a source-free solution of the Maxwell equations in this space that represents the electromagnetic field outside a Kerr black hole immersed in an asymptotically uniform magnetic field which is aligned with its axis of rotation. In this case, the Euler-Lagrange partial differential equations for the scalar field are not separable for the Kerr metric in Boyer-Lindquist coordinates r and θ for all $r \in (r_+, +\infty)$ and $\theta \in [0, 2\pi]$. Therefore, we made a restriction on the angular variable of the type $\theta \ll 1$ to investigate the axial region at very small angles. In this regime, the equations of motion separate into the radial and angular variables and, thus, we can study the dynamics of the scalar field concentrated in a small truncated cone $\theta \in (0, \theta_L)$, with $\theta_L \ll 1$, a region where the acceleration of charged particles by the Papapetrou-Wald field is more intense and can be a source of ultrarelativistic cosmic rays. As we will see, all the field equations referring to the radial direction mentioned above can be mapped onto Heun's confluent equation and, thus, we can use the analytical properties known for this equation to date to calculate the rate of creation of Hawking radiation with greybody factor in order to obtain the intensity of emitted radiation as a function of the parameters of each model and each field frequency mode. In particular, we make use of new analytical results on one of the asymptotic solutions of the confluent Heun equation around infinity to determine the spectrum of each particle by imposing polynomial conditions on the three-term recurrence relation that defines the coefficients of this solution. Thus, we find that the frequency modes of the fields under these conditions must be complex numbers with a negative imaginary part, that is, they have an attenuation term as the temporal variable $t \rightarrow +\infty$.

Keywords: Black holes. Papapetrou-Wald field. Heun's equations.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Ilustração de um vetor sendo paralelamente transportado ao longo de um caminho fechado em um plano, exemplificando uma variedade sem curvatura.</p>	25
<p>Figura 2 – Ilustração de um vetor sendo paralelamente transportado ao longo de um caminho fechado na superfície de uma esfera, exemplificando uma variedade com curvatura. Perceba que o vetor no ponto <i>A</i> inicialmente tem sua direção e magnitude alteradas ao retornar a esse mesmo ponto depois de realizado o transporte paralelo.</p>	25
<p>Figura 3 – Campo elétrico(esquerda) e campo magnético(meio) em torno de um Buraco negro de Kerr imerso em um campo magnético assintoticamente uniforme e paralelamente alinhado com o seu eixo de rotação com o parâmetro adimensional de spin $a/M = 0.3$ e carga elétrica $Q = 0$. O plot é feito em coordenadas de Kerr-Schild com as distâncias sendo dadas em unidades de massa M e o campo eletromagnético em unidades de B_0. Na última figura (direita) apresentamos uma sobreposição do campo elétrico (azul) e do campo magnético (amarelo).</p>	47
<p>Figura 4 – Campo elétrico(esquerda) e campo magnético(meio) em torno de um Buraco negro de Kerr imerso em um campo magnético assintoticamente uniforme e antiparalelamente alinhado com o seu eixo de rotação com o parâmetro adimensional de spin $a/M = 0.3$ e carga elétrica $Q = 0$. O plot é feito em coordenadas de Kerr-Schild com as distâncias sendo dadas em unidades de massa M e o campo eletromagnético em unidades de B_0. Na última figura (direita) apresentamos uma sobreposição do campo elétrico (azul) e do campo magnético (amarelo).</p>	47
<p>Figura 5 – Espectro de energia ω para $n = 0$ e $\mu = \{0,1,5,50\}$, correspondendo, respectivamente, às Figuras 5(a), (b), (c) e (d) para diferentes valores de $eB_0 \in [-1,0]$ e $a/M \in [0,1]$ calculado a partir da equação(157) usando intervalos numéricos $\Delta(eB_0) = 0.01$ e $\Delta(a/M) = 0.01$.</p>	58
<p>Figura 6 – Espectro de energia ω para $n = 0$ e $\mu = \{0,1,5,50\}$, correspondendo, respectivamente, às figuras 6(a), (b), (c) e (d) para $eB_0 = -0.5$ e $a/M \in [0,1]$ calculado a partir da equação(157) usando intervalos numéricos $\Delta(a/M) = 0.01$.</p>	59

- Figura 7 – Espectro de energia ω para $n = 0$ e $\mu = \{0,1\}$, correspondendo, respectivamente, às figuras 7(a) e (b) para $eB_0 \in [-1,0]$ e $a/M \in [0,1]$ calculado a partir da equação(158) usando intervalos numéricos $\Delta(eB_0) = 0.01$ e $\Delta(a/M) = 0.01$. Nesse caso temos apenas modos ω puramente reais ou puramente imaginários. 59
- Figura 8 – Plot de raízes sobrespuestas da equação quártica para ω complexo derivado da condição polinomial (155). Esse gráfico foi feito usando os parâmetros físicos do evento GRB 190114C e com os números quânticos assumindo valores $n \in \{0,1,\dots,200\}$ e $\mu \in \{0,1,\dots,200\}$, de modo que temos 40000 estados de energia expostos nessa figura. Note como os estados de energia do 4º quadrante do ω -plano se distribuem em uma região compacta nesse caso. 61
- Figura 9 – Plot de raízes sobrespuestas da equação quártica para ω complexo derivado da condição polinomial (156). Esse gráficos foram feitos usando os parâmetros físicos do evento GRB 190114C e com os números quânticos assumindo valores $n \in \{0,1,\dots,50\}$ e $\mu \in \{0,1,\dots,50\}$. Aqui a subfigura (a) representa todos os 2500 pontos plotados do espectro ω , enquanto que as subfiguras (b) e (c) representam a magnificação de dois pontos distintos da figura (a). Ao se realizar o experimento numérico, é possível perceber que todos os aparentes pontos da subfigura (a) possuem **estrutura fina** tal qual em (b) e (c). 62
- Figura 10 – Plot de raízes sobrespuestas da equação quártica para ω complexo derivado da condição polinomial (155). Esse gráficos foram feitos usando os parâmetros físicos do AGN no centro da galáxia M-87 e com os números quânticos assumindo valores $n \in \{0,1,\dots,100\}$ e $\mu \in \{0,1,\dots,100\}$ 63
- Figura 11 – Plot de raízes sobrespuestas da equação quártica para ω complexo derivado da condição polinomial (156). Esse gráficos foram feitos usando os parâmetros físicos do AGN no centro da galáxia M-87 e com os números quânticos assumindo valores $n \in \{0,1,\dots,100\}$ e $\mu \in \{0,1,\dots,100\}$ 64
- Figura 12 – Potencial efetivo $V_{\mu,l}$ do pión negativo π^- para alguns valores dos números quânticos μ e l com ω tomando valores pequenos ($\approx 1.5 m_{\pi^-}$), $M = 4.4M_{\odot}$, $a/M = 0.4$, $\hat{B}_0 \sim 10^{10} G$ e ângulo limite $\theta_L \sim 10^{-11}$ (região de emissão de raios cósmicos ultrarelativísticos). . . . 66
- Figura 13 – Potencial efetivo $V_{\mu,l}$ do pión negativo π^- para alguns valores dos números quânticos μ e l com a energia ω tomando valores grandes ($\gtrsim 10^6 m_{\pi^-}$), $M = 4.4M_{\odot}$, $a/M = 0.4$, $\hat{B}_0 \sim 10^{10} G$ e ângulo limite $\theta_L \sim 10^{-11}$ (região de emissão de raios cósmicos ultrarelativísticos). 66

Figura 14 – Potenciais efetivos V_s da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli para $s = 0, 1$ e 2 vs variável radial r , com r partindo do horizonte de eventos $r_h = 2M$ e dado em unidades de r_h	71
Figura 15 – Greybody factor Γ_ω vs limite inferior Γ_ω^{Bound} para $s = 0$ (escalar) e diferentes valores de l usando aproximantes de Padé de ordem $[50/50]$ com $\omega \in \mathbb{R}^+$	78
Figura 16 – Greybody factor Γ_ω vs limite inferior Γ_ω^{Bound} para $s = 1$ (fótons) para diferentes valores de l usando aproximantes de pade de ordem $[50/50]$ com $\omega \in \mathbb{R}^+$	78
Figura 17 – Espectro de energia complexo $\omega_{s,n,m}$ para diferentes valores dos números quânticos s, n e m vs parâmetro de spin do buraco negro de Kerr, a , com $M = 1$. Linhas contínuas representam a parte real do espectro, enquanto que linhas tracejadas representam a parte imaginária.	83

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTOS DE RELATIVIDADE GERAL	18
2.1	NOÇÕES DE GEOMETRIA DIFERENCIAL	19
2.1.1	Sistemas de coordenadas e tensores	20
2.1.2	Transporte paralelo e derivada covariante	22
2.1.3	Tensor métrico	26
2.1.4	Equação da geodésica	28
2.1.5	Tensor de curvatura de Riemann	29
2.1.6	Isometrias do espaço-tempo e campo vetorial de Killing	30
2.2	TEORIA DA GRAVITAÇÃO DE EINSTEIN	33
3	BURACOS NEGROS	37
3.1	SOLUÇÕES DE SCHWARZCHILD E KERR	38
3.2	DERIVAÇÃO DA MÉTRICA DE KERR	40
3.3	DISCUSSÃO ACERCA DAS PROPRIEDADES DO BURACO NEGRO DE KERR	42
3.4	SOLUÇÃO DE PAPAPETROU-WALD DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL	44
4	EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON-FOCK EM TORNO DO BURACO NEGRO DE KERR-PAPAPETROU-WALD	48
4.1	SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE DO CAMPO ESCALAR	49
4.1.1	Solução angular e constante de separação λ	51
4.1.2	Solução para $R(r)$	51
4.2	SOLUÇÃO POLINOMIAL INVERSA DA EQUAÇÃO RADIAL DE KERR-PAPAPETROU-WALD LIMITADA A PEQUENOS ÂNGULOS($\theta \ll \theta_L$) A PARTIR DA SOLUÇÃO ASSINTÓTICA DA ECH	55
4.2.1	Espectro de energia para os parâmetros de buracos negros em gamma-ray bursts e núcleos ativos de galáxias	60
4.3	FORMA DE SCHRÖDINGER DA EQUAÇÃO RADIAL	64
5	MAIS SOBRE CAMPOS QUÂNTICOS NO ENTORNO DE BURACOS NEGROS: RADIAÇÃO HAWKING, GREYBODY FACTOR E ESPECTRO POLINOMIAL PARA EQUAÇÕES MESTRE	67
5.1	RADIAÇÃO HAWKING PELO MÉTODO DE DAMOUR-RUFFINI-SANNAN	68
5.1.1	Equação de mestre de Regge-Wheeler-Zerilli no espaço-tempo de Schwarzschild	68
5.1.2	Soluções polinomiais inversas da equação de Regge-Wheeler-Zerilli a partir da solução assintótica da ECH	71

5.2	GREYBODY FACTOR	72
5.2.1	Matching dos coeficientes de conexão com as constantes D^{up}, D^{ref} e D^{trans}	75
5.2.2	Uso heurístico de aproximantes de Padé para o cálculo de greybody factors de campos quânticos no buraco negro de Schwarzschild em comparação com o limite inferior exato.	75
5.3	EQUAÇÃO MESTRE DE TEUKOLSKY	79
5.3.1	Radiação Hawking para partículas sem massa no buraco negro de Kerr	80
5.3.2	Soluções polinomiais inversas da equação radial de Teukolsky a partir da solução assintótica da ECH	81
5.3.3	Equação angular de Teukolsky e constante de separação λ	83
6	CONCLUSÃO E PRÓXIMOS PASSOS	86
	APÊNDICE A – ASPECTOS BÁSICOS DE EQUACÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES POLINOMIAIS.	93
A.1	SINGULARIDADES REGULARES	93
A.2	SINGULARIDADES IRREGULARES	94
	APÊNDICE B – EQUAÇÃO CONFLUENTE DE HEUN, SOLUÇÕES LOCAIS E COEFICIENTES DE CONEXÃO DE DOIS PONTOS.	96
B.1	SOLUÇÕES EM TORNO DE $z = 1$	96
B.2	SOLUÇÕES ASSINTÓTICAS TORNO DE $z = \infty$	97
B.3	DISCUSSÃO ACERCA DO RAIOS DE CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO ASSINTÓTICA $y_1^\infty(z)$ E MÉTODOS DE CONTINUAÇÃO ANALÍTICA	99
B.4	COEFICIENTES DE CONEXÃO DE DOIS PONTOS	101
B.5	FORMA AUTO-ADJUNTA DA EQUAÇÃO CONFLUENTE DE HEUN	103

1 INTRODUÇÃO

O trabalho de pesquisa que apresentamos aqui é fruto da curiosidade em estado bruto de um estudante recém formado no bacharelado em Física cujo interesse reside, a longo prazo, em contribuir para a resolução do *problema da Gravitação Quântica*. Esse problema é motivado pelo consenso praticamente unânime da comunidade internacional de pesquisadores e pesquisadoras dos *Fundamentos da Física* a respeito de aparentes paradoxos relacionados às duas teorias fundamentais utilizadas para a criação de modelos que descrevem sistemas físicos: a Teoria Quântica de Campos (TQC) e a Relatividade Geral. Contudo, apesar da ampla concordância da comunidade científica acerca da necessidade de resolver esse problema para que obtenhamos uma descrição unificada da natureza, o alcance de nossos dispositivos experimentais ainda se encontra muito distante do regime de parâmetros previsto para a Gravitação Quântica (energia de Planck, comprimento de Planck, etc) e, portanto, qualquer teoria disponível até agora acerca da gravitação na escala de Planck permanece sendo puramente especulativa [54]. Assim, uma vez que não há qualquer dispositivo na Terra até o momento capaz de produzir um experimento de Gravitação Quântica devido a necessidade de uma fonte de energia exorbitante concentrada em uma pequena região do espaço, podemos nos perguntar se, ao menos, existem alguns sistemas físicos fora do nosso planeta capazes de servir como laboratórios naturais para nos guiar no empreendimento de construção dessa teoria. Logo, como veremos, o sistema astrofísico aqui proposto como reservatório dessa grande quantidade de energia e como emissor de fótons e partículas altamente energéticas serão os buracos negros magnetizados em rotação gerados a partir de hipernovas induzidas em sistemas binários. Esses sistemas foram propostos em [44] para explicar a emissão de gamma-ray bursts de longa duração com fótons na faixa de GeV observados pelo satélite Fermi através do mecanismo de radiação síncrotron e, em princípio, ainda há espaço nesse modelo até mesmo para a emissão dessa radiação por buracos negros na faixa de PeV (ainda longe do valor da energia de Planck de $E_p \sim 10^{19} \text{ GeV}$).

Postas essas considerações, o leitor já deve estar alertado sobre as dificuldades técnicas associadas ao teste de teorias de Gravitação Quântica e de seu consequente caráter especulativo. Deste modo, o empreendimento levado a cabo nesse trabalho pretende ser um pouco mais modesto. O que essa pesquisa oferece é a análise de um sistema astrofísico extremamente energético, representado pelos buracos negros magnetizados, sob o ponto de vista da Teoria Quântica de Campos em Espaço-tempo Curvo (TQCEC) [10]. O que se estima é que a investigação das propriedades desse sistema através da TQCEC deve oferecer ao menos uma descrição fidedigna no regime semiclássico, isto é, no regime em que a gravidade é forte o suficiente para que seu efeito seja considerado sobre a propagação de campos quânticos, mas que a reação

dos campos quânticos sobre o campo gravitacional pode ser negligenciada. Em outros termos, a TQCEC é uma teoria que descreve a evolução de campos quânticos em um espaço-tempo de fundo fixo, com o campo métrico mantendo a classicalidade. Assim, essa teoria pode ser considerada como uma boa teoria efetiva acerca dos efeitos da gravitação em campos quânticos mesmo quando esses campos se encontram muito próximos do horizonte de eventos de buracos negros [52]. Esperamos, dessa forma, que a descrição da interação de campos quânticos com buracos negros magnetizados por meio dessa teoria semiclássica possa acarretar em conhecimento relevante para a elaboração de uma teoria mais completa no futuro, assim como a equação de Dirac sujeita à ação de campos eletromagnéticos clássicos indicou a existência de novos estados de energia acessíveis ao elétron do átomo de hidrogênio no passado [55] e pavimentou o caminho para o tratamento posterior desse sistema em termos do formalismo de segunda quantização e integral de caminho da QED.

Entrando mais especificamente no tema, a ênfase do presente trabalho consiste na exposição de campos quânticos em três situações físicas diferentes. A primeira e principal situação consiste em usar a equação de Klein-Gordon-Fock para estudar o caso de um campo escalar massivo e carregado no espaço-tempo a que nos referimos aqui como buraco negro de Kerr-Papapetrou-Wald. Esse sistema é formado por um buraco negro de Kerr imerso em um campo magnético uniforme e alinhado com seu eixo de rotação longe do buraco negro (assintoticamente). Como mostraremos, essa é uma solução das equações de Einstein-Maxwell livre de fontes no espaço-tempo de Kerr que pode ser construída de maneira bastante elegante com o auxílio de propriedades interessantíssimas relativas a vetores de Killing em espaços-tempo de vácuo ($R_{\mu\nu} = 0$) [7]. Nesse caso, a solução para o campo eletromagnético de fundo pode ser considerada como decorrência de uma interação gravitomagnética, na qual a geometria do buraco negro interage com um campo magnético que possui suporte nas correntes de plasma do disco de acreção [44].

No capítulo 5 deste trabalho tratamos das outras duas situações físicas restantes. Na seção 5.1 iremos estudar campos sem massa de spin $s = 0, 1$ e 2 no entorno do buraco negro estático e com simetria esférica representado pela métrica de Schwarzschild através da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli. Essa equação é bastante conhecida no meio astrofísico e leva esse nome pois, em uma única equação para um escalar, basta substituir o valor do parâmetro s e transformar a solução por meio de um algoritmo simples para obter as soluções das equações de Klein-Gordon ($s = 0$), Maxwell ($s = 1$) e de perturbações lineares das equações de Einstein ($s = 2$) no espaço-tempo de Schwarzschild [36, Apêndice A] [39]. A última situação física consiste numa generalização do que tratamos na seção 5.1. Nesse caso, estudamos o comportamento de campos sem massa de spin $s = 0, \pm 1/2, \pm 1$ e ± 2 no buraco negro estacionário e com simetria axial de Kerr utilizando a equação mestre

de Teukolsky. Essa equação mestre é o análogo a equação de Regge-Wheeler-Zerilli só que para o caso de um buraco negro em rotação e, portanto, associa um escalar a cada uma das soluções das equações de Klein-Gordon, Dirac($s = 1/2$), Maxwell e perturbações lineares da métrica de Kerr [38] [39].

Uma vez que enunciamos o conteúdo físico apresentado nesse trabalho, agora é preciso frisar que a menção à equação confluyente de Heun no título do trabalho não é em vão: todas as situações físicas envolvendo campos quânticos em espaços-tempo de buraco negro citadas acima compartilham o fato de poderem ser mapeadas nessa equação diferencial ordinária linear depois de realizarmos a separação de variáveis das equações de campos. Dessa maneira, podemos lançar mão de propriedades específicas dessas equações especiais da classe Heun de maneira inédita para estudar problemas espectrais relacionados aos campos quânticos de cada sistema, ou seja, para calcular, construtivamente, observáveis relacionados aos modos de frequência(ou energia) dos campos sob condições de contorno específicas. Como veremos, as condições de contorno impostas às equações de campo desse trabalho são chamadas de *condições de contorno de radiação Hawking*, uma vez que usamos soluções da equação confluyente de Heun que representam a combinação linear de ondas ingoing e outgoing na vizinhança dos horizontes de eventos e ondas puramente outgoing na direção de um observador no infinito assintótico. Como ficará mais claro adiante, essas condições de contorno nos permitem calcular os observáveis do capítulo 5 associados à taxa de emissão de radiação por parte de um buraco negro devido a interação do seu horizonte de eventos com o vácuo quântico. Por fim, a organização desse trabalho em cada capítulo pode ser sumarizada como a seguir

No capítulo 2 dessa dissertação nos debruçamos sobre os fundamentos da Relatividade Geral e apresentamos todas as ferramentas matemáticas de geometria diferencial e cálculo tensorial necessárias para tornar o leitor ao menos apto a entender os cálculos realizados nos capítulos 3,4 e 5 a um nível operacional.

No capítulo 3 apresentamos as métricas de buraco negro de Schwarzschild e Kerr, assim como demonstramos como deduzir a métrica de Kerr a partir da proposição de um ansatz em coordenadas esferoidais oblatas como solução das equações de Einstein no vácuo. Depois disso, também dedicamos uma seção à discussão de alguns processos hipotéticos de extração de energia rotacional e eletromagnética de buracos negros em rotação para, então, finalizarmos o capítulo com uma seção dedicada a dedução do campo eletromagnético de Papapetrou-Wald a partir dos vetores de Killing da métrica de Kerr.

No capítulo 4 tratamos acerca do tema principal desse trabalho, qual seja, a dinâmica de campos escalares massivos e carregados no espaço-tempo de Kerr-Papapetrou-Wald. Neste capítulo, estudamos o comportamento da solução assintótica outgoing decorrente da equação radial obtida pelo método de separação de variáveis aplicado

a equação de Klein-Gordon-Fock. Em específico, nos atentamos a essa equação no limite de ângulos muito pequenos da variável angular ($\theta \ll 1$) que descreve o ângulo de abertura com relação ao eixo de rotação do buraco negro, uma vez que o campo eletromagnético nessa região deve ser extremamente intenso. Assim, para tratar a solução assintótica da equação radial utilizamos propriedades analíticas específicas da equação confluyente de Heun que nos permitem escrever essa solução em termos de polinômios e, dessa forma, também nos permitem calcular o espectro de energia associado a esses polinômios.

No capítulo 5, dedicamos uma seção ao cálculo da taxa de emissão de radiação Hawking e greybody factor de campos de spin $s = 0, 1$ e 2 usando a chamada equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli para o espaço-tempo de Schwarzschild. Neste caso específico, nos dedicamos a mostrar como funciona o método de Damour-Ruffini-Sannan para o cálculo da radiação Hawking produzida imediatamente na vizinhança do horizonte de eventos e também apresentamos brevemente um método heurístico inédito o qual usa funções racionais chamadas de aproximantes de Padé para estimar o greybody factor para os modos de energia reais positivos dos campos como um protótipo de um método mais preciso que usa a *teoria da extrapolação ressurgente* e que deve ser explorado em um artigo posterior. É importante frisar que esse cálculo com aproximantes de Padé é realizado apenas para o caso do buraco negro de Schwarzschild na seção 5.2, uma vez que esse é o único buraco negro para o qual o greybody factor dos campos analisados possui um limite inferior exato calculado em [35] e, assim, os resultados preliminares e hipóteses levantados nesta seção podem ser discutidos em meio a um substrato melhor embasado. Além dessa discussão, terminamos o capítulo 5 tratando da equação mestre de Teukolsky no espaço-tempo de Kerr, da radiação Hawking decorrente dos campos descritos por essa equação e do espectro de energia calculado a partir das soluções polinomiais associadas a sua solução assintótica, assim como fizemos com o campo escalar no capítulo 4.

Finalmente, encerramos essa introdução atentando o leitor ao material exposto no Apêndice B, em torno do qual revolvem todos os resultados físicos relacionados aos observáveis calculados nos capítulos 4 e 5. Neste espaço, tratamos acerca de algumas propriedades analíticas da equação confluyente de Heun, introduzimos o conceito de *soluções locais* dessa equação e também o conceito de *problema de conexão de dois pontos*. Especialmente, mostramos nesse apêndice que, dentro do conjunto de soluções locais, existe um conjunto de soluções chamadas de *soluções assintóticas*, as quais são representadas por séries de potências divergentes meramente formais. Dessa forma, mostraremos brevemente como é possível transformar a série divergente em uma solução analítica fazendo o uso das funções aproximantes de Padé ou utilizando o processo de soma de Borel e, alternativamente, como podemos transformar essa série de maneira mais fácil e direta em um conjunto infinito e enumerável de

soluções polinomiais inversas da equação confluyente de Heun ao impormos certas condições sobre a relação de recorrência de três-termos geradora dos coeficientes da série.

2 FUNDAMENTOS DE RELATIVIDADE GERAL

Nesse capítulo, iremos expor brevemente todas as ferramentas físico-matemáticas necessárias para o entendimento da teoria da gravitação de Einstein. O material exposto aqui é largamente baseado nas referências [56-58] e as mesmas são recomendadas ao leitor que deseje se debruçar mais profundamente sobre os conceitos que apresentamos. O conhecimento prévio assumido nessa presente exposição é apenas o conhecimento básico de Mecânica Lagrangiana e o formalismo de cálculo tensorial da teoria da Relatividade Restrita.

A Relatividade Restrita, segundo formulada por A. Einstein em 1905 [59], é uma teoria que exige invariância das leis da Física sob transformações de Poincaré (rotações, boosts e translações) entre referenciais inerciais. No entanto, essa teoria é incapaz de descrever a natureza fundamental de sistemas físicos sob a ação do fenômeno da gravitação apenas com esses requisitos. Deste modo, a teoria da Relatividade Geral nasce em 1915 [60] a partir do postulado de covariância geral, sob o qual todas as leis da Física devem ser invariantes por difeomorfismos, i.e, transformações de coordenadas arbitrárias, desde que essas transformações sejam diferenciáveis, bijetivas e possuam uma transformação inversa também diferenciável. Em outras palavras, não há nenhum sistema de coordenadas privilegiado no universo em que as leis da Física se tornam diferentes e desse fato decorre que fenômenos de gravitação até então explicados pela teoria de Newton devem sofrer uma drástica reinterpretação.

Assim, nas seções seguintes iremos apresentar ao leitor conceitos chave de geometria diferencial e da teoria de gravitação de Einstein para que os cálculos expostos nos capítulos seguintes envolvendo espaços-tempo de buracos negros possam ser entendidos ao menos a nível operacional.

Na seção 2.1 iremos percorrer por todos os objetos matemáticos necessários para a construção da famosa equação de Einstein. Nesta seção, introduziremos a intuição por trás do conceito de variedade diferenciável como a estrutura natural para descrever um espaço-tempo com curvatura, trataremos de mostrar quais são as leis de transformação de coordenadas que devem ser obedecidas por tensores, discutiremos o conceito de transporte paralelo de um vetor e sua relação com um operador diferencial chamado derivada covariante, apresentaremos o tensor métrico e sua relação com a conexão métrica do espaço-tempo, deduziremos a equação da geodésica que determina a dinâmica de uma partícula sob ação de um campo gravitacional, discutiremos a noção de curvatura do espaço-tempo através da introdução do tensor de curvatura de Riemann e seus derivados e, por fim, mostraremos como obter as equações de Killing cujas soluções permitem descrever as simetrias do espaço-tempo associadas a uma certa métrica.

Na seção 2.2 o conhecimento matemático adquirido na seção precedente será

reunido em uma exposição sucinta da teoria física da gravitação de Einstein. Dessa forma, os pressupostos teóricos utilizados na construção dessa teoria serão elencados para que possamos prosseguir com a dedução das famosas equações tensoriais de Einstein partindo do princípio de Hamilton, usando o funcional de ação de Einstein-Hilbert. Em seguida, realizaremos a interpretação física das equações de Einstein como sendo uma teoria na qual tanto a geometria do espaço-tempo, representada pelo tensor métrico, quanto distribuição de matéria no espaço-tempo, representada pelo tensor de energia-momento, são quantidades cuja dinâmica dependem uma da outra.

2.1 NOÇÕES DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

A geometria diferencial é o ramo da matemática que lida com o estudo de objetos geométricos usando cálculo e equações diferenciais e pode ser considerada como a linguagem da Relatividade Geral. Como veremos na seção seguinte, o objeto de estudo central da gravitação Einsteiniana consiste na dinâmica do espaço-tempo, o qual, do ponto de vista da matemática da geometria diferencial, é modelado por uma *variedade diferenciável pseudo-Riemanniana* em $(3+1)$ -dimensões. Contudo, descrever rigorosamente a maneira como esse objeto matemático é construído e o significado de cada termo nesse conceito foge do propósito do presente trabalho. Assim, para fins de manter a brevidade dessa exposição, basta dizer que a variedade diferenciável pseudo-Riemanniana que descreve o espaço-tempo é idêntica a um espaço que, localmente, se assemelha ao espaço-tempo de Minkowski, é dotado de uma função que associa quaisquer dois pontos desse espaço a uma noção de distância e no qual cada ponto pode ser descrito por conjuntos de coordenadas distintos que se relacionam por meio de transformações contínuas e diferenciáveis invertíveis. Deste modo, o leitor verá que nos referiremos ao termo “espaço-tempo” de forma intercambiável com o termo “variedade” em muitas situações nessa dissertação, apesar de, a rigor, o espaço-tempo ser um tipo específico de variedade dentro da grande área da Geometria Diferencial. Para mais detalhes, o leitor é aconselhado à leitura de [58, pg. 11].

Apesar de nem sempre enunciado explicitamente em cursos de Relatividade Restrita, nessa teoria também fazemos uso de certas noções de Geometria Diferencial, de forma que é correto dizer que essa teoria também possui uma estrutura geométrica específica, ainda que possa prescindir do conceito de curvatura que introduziremos nessa seção. Nesse caso particular, sabemos que os fenômenos acontecem em um espaço-tempo de fundo dito plano, codificado pela métrica de Minkowski. Contudo, do ponto de vista empírico, quando analisamos medidas no espaço-tempo físico (usando relógios para medir o tempo e também para medir distâncias por meio do método de radar) percebemos que, a rigor, o espaço-tempo plano é puramente uma idealização,

pois, na presença de um campo gravitacional, a geometria medida por nossos instrumentos é a geometria de um espaço-tempo curvo, ou seja, é a geometria de um espaço-tempo pseudo-Riemanniano, apesar do efeito da geometria de fundo curva ser negligenciável para descrever certos processos físicos como, por exemplo, os que ocorrem em aceleradores de partículas.

No que tange a estrutura geométrica de um espaço curvo, devemos fazer uma distinção entre a sua *geometria afim* e a sua *geometria métrica*. Esses dois tipos de geometria correspondem a duas formas diferentes de determinar a curvatura de um espaço. A primeira forma passa pela noção de *transporte paralelo* de um vetor (ou mais geralmente de um tensor) no espaço-tempo, a qual, em suma, consiste em mover esse vetor ao longo de uma curva sem alterar a sua direção e magnitude com relação a geometria local dessa variedade, apesar dessa quantidade poder ser alterada ao percorrer a curva pela geometria global. Desta forma, podemos examinar a mudança de vetores quando são paralelamente transportados em um caminho fechado na variedade e, portanto, se a direção final do vetor for diferente da direção inicial, significa que estamos lidando com um espaço curvo, pois no espaço tempo plano esses vetores seriam idênticos. São essas mudanças produzidas no vetor devido ao transporte paralelo que caracterizam a geometria afim.

Complementarmente, ainda podemos detectar a curvatura de um espaço de outra forma: através de medidas de distâncias e áreas. Por exemplo, é possível desenhar um círculo na superfície de uma esfera para então checar a relação entre raio vs perímetro ou entre raio vs área do círculo. Assim, quando há desvios do que é esperado em uma superfície plana, temos a caracterização da geometria métrica.

2.1.1 Sistemas de coordenadas e tensores

Na descrição mais geral de uma variedade como as mencionadas anteriormente, podemos considerar que cada ponto nesse espaço pode ser associado a um conjunto de N coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^N) no caso de estarmos lidando com uma variedade N -dimensional, com essas coordenadas assumindo valores no conjunto dos números reais ou em um de seus subconjuntos. No entanto, apesar dessa seção poder ser conduzida assumindo o tratamento de variedades N -dimensionais, é preciso alertar o leitor de que a variedade pseudo-Riemanniana que descreve o espaço-tempo físico possui apenas quatro dimensões. Não obstante, dados os nossos propósitos visando aplicação à física, a apresentação a seguir poderia ser levada a cabo considerando esse caso específico sem perda de generalidade no tratamento do cálculo envolvendo tensores usando a convenção de soma de Einstein, uma vez que o cálculo com tensores pode ser feito de forma abstrata com o número de índices e suas contrações apenas sendo substituídos no momento final de aplicação à modelagem de um sistema físico. A não ser que tenhamos uma motivação particular dada pela boa acomodação

de um sistema de coordenadas à simetrias da variedade, não há uma necessidade específica por um sistema de coordenadas específico a ser usado para descrever pontos no espaço-tempo (como o caso do sistema cartesiano no espaço-tempo de Minkowski). Dessa forma, iremos usar aqui coordenadas curvilíneas gerais do tipo $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ para denotar as coordenadas no espaço-tempo quadridimensional. Vejamos, por exemplo, o que acontece se fizermos uma transformação de um conjunto de coordenadas arbitrário para outro. Supondo que o sistema de coordenadas inicial é representado por x^μ e o novo sistema de coordenadas por x'^μ , então as novas coordenadas são funções das iniciais, i.e,

$$x'^\mu = x'^\mu(x) \quad (1)$$

e vice-versa,

$$x^\mu = x^\mu(x'). \quad (2)$$

Por conseguinte, os diferenciais das coordenadas obedecem à seguinte lei de transformação:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu; \quad (3)$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu. \quad (4)$$

No caso das transformações do grupo de Lorentz da Relatividade Especial, as derivadas parciais $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$ são constantes. Mas agora, como estamos lidando com transformações de coordenadas gerais, essas derivadas parciais devem ser dadas em função de x'^μ ou x^μ . Uma vez que as transformações (1) e (2) devem ser a inversa uma da outra, temos,

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (5)$$

e as leis de transformação para o operador diferencial ∂_μ são

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu}. \quad (7)$$

Deste modo, trabalharemos com tensores utilizando suas propriedades sob transformações de coordenadas gerais. Um objeto de quatro componentes A^μ é dito um vetor contravariante sob transformações de coordenadas gerais (difeomorfismos) se esse objeto se transforma de acordo com,

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}. \quad (8)$$

Alternativamente, um objeto de quatro componentes B_{μ} é dito um vetor covariante se

$$B'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} B_{\nu}. \quad (9)$$

Tensores de maior rank obedecem às leis de transformação

$$A'^{\alpha\beta\dots\lambda} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \dots \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} A^{\mu\nu\dots\kappa} \quad (10)$$

e

$$B'_{\alpha\beta\dots\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \dots \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\kappa}} B_{\mu\nu\dots\kappa} \quad (11)$$

se são contravariantes e covariantes, respectivamente.

2.1.2 Transporte paralelo e derivada covariante

No espaço-tempo de Minkowski, em um sistema de coordenadas x^{μ} , é possível construir tensores de rank maior por meio da aplicação do operador diferencial ∂_{μ} . No entanto, essa propriedade não se conserva no caso mais geral de um espaço-tempo curvo, ou seja, a aplicação da derivada parcial usual em um tensor não leva a uma quantidade tensorial. Podemos observar isso diretamente ao relembrar a lei de transformação para um vetor A'_{μ} :

$$A'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} A_{\mu}, \quad (12)$$

logo

$$\frac{\partial A'_{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x'^{\beta}} + \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} A_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} A_{\mu}. \quad (13)$$

Perceba que o lado direito da equação acima difere da lei de transformação para um tensor covariante de rank-2 apenas por um termo aditivo. É possível ainda olhar pela ótica da definição da derivada $\partial A_{\mu}/\partial x^{\nu}$ para entender porque a derivação simples falha em produzir uma quantidade tensorial:

$$\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A_{\mu}(x + dx) - A_{\mu}(x)}{dx^{\nu}}. \quad (14)$$

Veja que no numerador da equação acima os vetores são avaliados em diferentes pontos da variedade. Assim, apesar da diferença entre dois vetores localizados no mesmo ponto ser um vetor, o mesmo não acontece para vetores localizados em pontos separados, pois a lei de transformação depende da posição. Isso sugere que, para obter um numerador vetorial, devemos fazer o transporte paralelo de A_{μ} de x até

$x + dx$ antes de realizar a subtração, de modo que ambos os vetores no numerador sejam avaliados no mesmo ponto. Portanto, a construção de tensores por um operador diferencial demanda primeiro a construção da descrição de transporte paralelo de um tensor ao longo de uma variedade, qual seja: transporte paralelo consiste na operação de mover um vetor ou tensor ao longo de uma curva em uma dada variedade mantendo a sua direção e magnitude relativos a geometria local conforme é movido ao longo da curva. Como exemplo simples de transporte paralelo de um vetor podemos considerar a figura 1 abaixo na qual um vetor paralelamente transportado ao longo de uma curva fechada contida em um plano leva ao mesmo vetor inicial (antes do transporte). Essa figura entra em evidente contraste com a figura 2, na qual um vetor paralelamente transportado ao longo de um caminho fechado na superfície de uma esfera- um exemplo de variedade com curvatura- se desvia do vetor inicial.

Isto posto, denotaremos matematicamente por δA_μ a mudança produzida nas componentes do vetor A_μ pelo seu transporte paralelo ao longo de um pequeno intervalo dx^β . Essa mudança δA_μ deve ser linear em dx^β e, também, deve ser linear em A_μ , pois vamos requerer que a mudança em uma soma vetorial $A_\mu + B_\mu$ produzida por transporte paralelo deve ser igual a soma das mudanças em cada vetor individualmente. Assim, δA_μ deve poder ser representado na forma,

$$\delta A_\mu = \Gamma_{\mu\beta}^\nu A_\nu dx^\beta \quad (15)$$

na qual o objeto $\Gamma_{\mu\beta}^\nu$ de 4 x 4 x 4-componentes é uma função da posição. Esse objeto geométrico está associado a noção de derivação covariante em uma variedade, como veremos adiante. Contudo, como ainda não introduzimos uma métrica para a nossa variedade(o espaço-tempo), podemos, por ora, considerar $\Gamma_{\mu\beta}^\nu$ como uma função arbitrária que caracteriza o transporte paralelo no espaço-tempo, i.e., uma função que caracteriza a geometria afim desse espaço. Na literatura, o objeto $\Gamma_{\mu\beta}^\nu$ é conhecido como *conexão afim*. Uma vez que (15) define o transporte paralelo de um vetor covariante, então o transporte paralelo de um vetor contravariante B^μ é determinado pela necessidade da quantidade $A_\mu B^\mu$ ser escalar. Logo,

$$0 = \delta(A_\mu B^\mu) = \delta A_\mu B^\mu + A_\mu \delta B^\mu \quad (16)$$

$$= \left(\Gamma_{\mu\beta}^\nu A_\nu dx^\beta B^\mu + A_\mu \delta B^\mu \right) = A_\mu \left(\Gamma_{\nu\beta}^\mu dx^\beta B^\nu + \delta B^\mu \right). \quad (17)$$

Como o lado direito da equação acima deve ser satisfeito para qualquer A_μ arbitrário, então o termo em parênteses deve ser nulo, portanto,

$$\delta B^\mu = -\Gamma_{\nu\beta}^\mu B^\nu dx^\beta. \quad (18)$$

Aqui assumiremos que a conexão é simétrica nos seus índices covariantes, i.e.,

$$\Gamma_{\mu\beta}^{\nu} = \Gamma_{\beta\mu}^{\nu}. \quad (19)$$

Dessa forma, estabelecemos a condição (19) para que nossa variedade seja livre de *torsão* ou, em outras palavras, para que de fato essa variedade seja uma boa aproximação do espaço plano localmente, ou seja, uma boa aproximação na vizinhança de qualquer ponto P arbitrário da variedade. Dessa forma, podemos proceder para a construção de um operador diferencial que mantém o caráter tensorial de qualquer tensor no espaço-tempo. Como foi dito anteriormente, para fazer o numerador em (14) ser um vetor, devemos fazer o transporte paralelo de $A_{\mu}(x)$ de x até $x + dx$ antes de realizar a subtração. Fazendo isso, obtemos

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A_{\mu}(x + dx) - A_{\mu}(x) - \delta A_{\mu}}{dx^{\nu}} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A_{\mu}(x + dx) - A_{\mu}(x)}{dx^{\nu}} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} A_{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{dx^{\nu}} \quad (20)$$

$$= \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} A_{\alpha}. \quad (21)$$

Essa é, finalmente, a definição de derivada covariante de um vetor $A_{\mu}(x)$. Na literatura é comum encontrarmos a notação de ponto e vírgula ou nabla para esse operador e apenas vírgula para a derivada parcial usual, como na expressão a seguir:

$$A_{\mu; \nu} \equiv \nabla_{\nu} A_{\mu} \equiv A_{\mu, \nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} A_{\alpha}, \quad (22)$$

na qual temos $A_{\mu, \nu} \equiv \partial_{\nu} A_{\mu}$. Perceba que, por construção, a derivada covariante de um vetor é um tensor de rank-2. Também temos uma definição análoga para o caso de um vetor contravariante B^{μ} :

$$B^{\mu}_{; \nu} = B^{\mu}_{, \nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} B^{\alpha}. \quad (23)$$

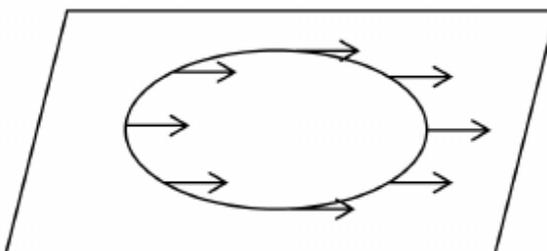


Figura 1 – Ilustração de um vetor sendo paralelamente transportado ao longo de um caminho fechado em um plano, exemplificando uma variedade sem curvatura.

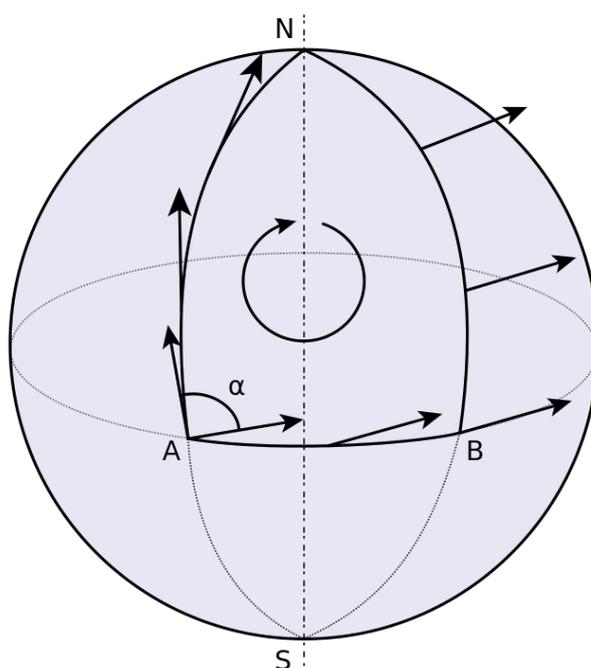


Figura 2 – Ilustração de um vetor sendo paralelamente transportado ao longo de um caminho fechado na superfície de uma esfera, exemplificando uma variedade com curvatura. Perceba que o vetor no ponto A inicialmente tem sua direção e magnitude alteradas ao retornar a esse mesmo ponto depois de realizado o transporte paralelo.

2.1.3 Tensor métrico

Qualquer campo tensorial simétrico e covariante de rank-2, como $g_{\mu\nu}(x)$, define uma *métrica* [57, pg. 81]. Uma variedade dotada de uma métrica é chamada de *variedade Riemanniana*. A métrica é um objeto matemático que pode ser utilizado para definir distâncias entre pontos e a magnitude de vetores em uma variedade. A distância infinitesimal(ou intervalo invariante, em relatividade), denotada por ds , entre dois pontos vizinhos x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ é definida por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (24)$$

na qual o quadrado do intervalo invariante, ds^2 , é geralmente chamado de *elemento de linha*.

Sem perda de generalidade, podemos considerar que o tensor métrico é simétrico, i.e., $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, pois qualquer parte antisimétrica de $g_{\mu\nu}$ seria anulada em (24) quando contraída com os tensores $dx^\mu dx^\nu$, que são simétricos. Podemos mostrar que $g_{\mu\nu}$ de fato é um tensor apelando à propriedade de invariância do intervalo no espaço-tempo ds^2 da seguinte forma,

$$ds'^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (25)$$

Pela regra da cadeia para os diferenciais, temos

$$ds'^2 = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta. \quad (26)$$

Dessa forma, podemos ver que o tensor métrico transformado para as coordenadas x'^α é dado por,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}. \quad (27)$$

Ou seja, esse objeto de fato obedece a lei de transformação para um tensor covariante de rank-2.

Agora, podemos também estabelecer uma relação entre a geometria afim e a geometria métrica, ou seja, uma relação entre a conexão afim $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ e $g_{\mu\nu}$. Essa relação decorre da necessidade de o transporte paralelo de um vetor arbitrário A^μ dever manter a sua norma $A^\nu A^\mu g_{\mu\nu}$ inalterada. Com mais generalidade, podemos considerar o transporte paralelo de dois vetores A^μ e B^μ . Nesse caso, o seu produto escalar $A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}$, deve permanecer inalterado,

$$(A^\mu B^\nu g_{\mu\nu})_{;\beta} = 0. \quad (28)$$

Como a quantidade acima é escalar, podemos substituir a derivada comum por uma derivada covariante, pois, de acordo com a definição (22), o efeito de operar com

a derivada parcial usual é o mesmo de operar com a derivada covariante quando o tensor é de rank-0 (um escalar). Assim, diferenciando termo a termo usando a regra de Leibniz, temos

$$(A^\mu B^\nu g_{\mu\nu})_{;\beta} = A^\mu_{;\beta} B^\nu g_{\mu\nu} + A^\mu B^\nu_{;\beta} g_{\mu\nu} + A^\mu B^\nu g_{\mu\nu;\beta} = 0. \quad (29)$$

Uma vez que as únicas mudanças nos vetores A^μ e B^ν são aquelas promovidas por transporte paralelo, então essas derivadas covariantes devem ser zero e a eq.(29) se reduz a

$$A^\mu B^\nu g_{\mu\nu;\beta} = 0. \quad (30)$$

Como os vetores A^μ e B^ν são arbitrários, temos

$$g_{\mu\nu;\beta} = 0. \quad (31)$$

Dessa forma, pela expressão para a derivada covariante de um tensor de rank-2, temos que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - g_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\beta\mu} - g_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\beta\nu} = 0 \quad (32)$$

Deste modo, podemos expressar as derivadas da métrica em termos da conexão afim,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + g_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\beta\nu}. \quad (33)$$

Alternativamente, podemos expressar a conexão em termos de derivadas da métrica. Para tanto, fazemos a permutação cíclica dos índices μ e ν na equação (33) para obter

$$\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} = g_{\alpha\mu} \Gamma^\alpha_{\nu\beta} + g_{\beta\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \quad (34)$$

e

$$\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} = g_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + g_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\beta}. \quad (35)$$

Agora podemos adicionar as equações (34), (35) e subtrair a eq. (33) e, considerando as simetrias da métrica e da conexão afim, teremos

$$\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} = 2g_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\nu}, \quad (36)$$

de modo que,

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right). \quad (37)$$

Dessa forma, podemos ver que o tensor métrico determina completamente a conexão e, portanto, a geometria métrica determina completamente a geometria afim. Nesse caso específico, é comum encontrar essa forma da conexão denotada na literatura pelo nome de *conexão métrica* ou *símbolo de Christoffel*.

2.1.4 Equação da geodésica

Assim como na Mecânica Newtoniana o conceito central que descreve a dinâmica de uma partícula massiva é a *trajetória* calculada a partir da força resultante no sistema, a dinâmica de uma partícula massiva(ou não) sujeita à ação de um campo gravitacional na Relatividade Geral é descrita pelo conceito de *geodésica*. No espaço-tempo curvo, uma definição possível para uma geodésica é a de que esse objeto consiste em uma curva cujo comprimento é um extremo para dois pontos fixos e distintos dessa variedade. Podemos, por meio desta definição, considerar as geodésicas do espaço-tempo a através da sua geometria métrica, ou seja, podemos definir as curvas geodésicas fazendo a extremização do intervalo invariante entre dois pontos fixos e distintos P_1 e P_2 do espaço de configurações,

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0. \quad (38)$$

É possível reescrever o intervalo invariante como em (24) considerando os diferenciais dx^μ como funções do tempo próprio da seguinte maneira,

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau = 0, \quad (39)$$

com o parâmetro τ sendo o tempo próprio, de forma que a equação de Euler-Lagrange decorrente deste princípio variacional deve ser dada por

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (40)$$

Como

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} = g_{\mu\nu,\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (41)$$

podemos escrever (40) na forma

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + g_{\mu\nu,\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (42)$$

e multiplicando por $g^{\sigma\mu}$, temos

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \left(2g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (43)$$

Devido à simetria de $dx^\alpha dx^\beta$ nos índices α e β , então o termo $2g_{\mu\beta,\alpha} (dx^\alpha/d\tau)(dx^\beta/d\tau)$ é igual a $(g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\mu\alpha,\beta})(dx^\alpha/d\tau)(dx^\beta/d\tau)$. Dessa forma podemos reconhecer que a combinação de derivadas na eq.(43) é idêntica ao símbolo de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$. Essa equação toma então a seguinte forma

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (44)$$

Deste modo, finalmente deduzimos a equação da geodésica que permite prever qual deve ser a curva percorrida por uma partícula clássica em um espaço-tempo de fundo curvo, representado pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, em função do parâmetro de tempo próprio τ .

2.1.5 Tensor de curvatura de Riemann

A maneira mais simples de detectar a curvatura em uma geometria é realizar o transporte paralelo de um vetor em torno de um caminho fechado e então verificar a diferença entre o vetor inicial e o final. Outra forma equivalente para determinar o quanto um espaço-tempo se desvia do espaço de Minkowski é tomar o transporte paralelo de um vetor saindo de um ponto P e chegando em P' por dois caminhos distintos. Matematicamente, esse procedimento pode ser codificado pela aplicação do comutador de duas derivadas covariantes ∇_μ e ∇_ν em qualquer vetor A^α arbitrário do espaço-tempo, ou seja, como

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha = \partial_\mu \left(\partial_\nu A^\alpha + \Gamma_{\gamma\nu}^\alpha A^\gamma \right) + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \left(\partial_\nu A^\beta + \Gamma_{\gamma\nu}^\beta A^\gamma \right) - \Gamma_{\nu\mu}^\beta \left(\partial_\beta A^\alpha + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha A^\gamma \right) \quad (45)$$

e como

$$\nabla_\nu \nabla_\mu A^\alpha = \partial_\nu \left(\partial_\mu A^\alpha + \Gamma_{\gamma\mu}^\alpha A^\gamma \right) + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \left(\partial_\mu A^\beta + \Gamma_{\gamma\mu}^\beta A^\gamma \right) - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \left(\partial_\beta A^\alpha + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha A^\gamma \right). \quad (46)$$

Logo,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha A^\beta + \left(\Gamma_{\mu\nu}^\gamma - \Gamma_{\nu\mu}^\gamma \right) \nabla_\gamma A^\alpha. \quad (47)$$

Como estamos interessados apenas em conexões livres de torção, então a equação acima toma a forma

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha A^\beta, \quad (48)$$

com o tensor no lado direito da equação acima sendo o *tensor de curvatura de Riemann*, cuja definição em termos da conexão e suas derivadas é dada por

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha \equiv -\Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma. \quad (49)$$

Dessa maneira, por construção, as componentes desse tensor são iguais a zero em todo ponto se estivermos no espaço-tempo plano e devem ser não-nulas ao menos na vizinhança de um ponto no espaço-tempo curvo, devido as distintas propriedades de cada espaço por transporte paralelo.

Esse tensor obedece diversas identidades importantes que são utilizadas para encontrar vários resultados em Relatividade Geral. No que segue, elencamos algumas dessas identidades:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} ; \quad (50)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} ; \quad (51)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} ; \quad (52)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0. \quad (53)$$

Podemos contrair o primeiro e último índice em $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ para obter um tensor de rank-2 $R_{\beta\mu}$:

$$R_{\beta\mu} \equiv R^{\alpha}_{\beta\mu\alpha}. \quad (54)$$

Esse tensor é chamado de *tensor de Ricci* e é simétrico nos seus índices, i.e.,

$$R_{\beta\mu} = R_{\mu\beta}. \quad (55)$$

Contraindo mais uma vez os índices no tensor de Ricci obtermos o *escalar de curvatura*

$$R \equiv R^{\beta}_{\beta} = R^{\alpha\beta}_{\beta\alpha}. \quad (56)$$

2.1.6 Isometrias do espaço-tempo e campo vetorial de Killing

Se o tensor métrico de certo espaço-tempo é invariante sob transformações de coordenadas $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x)$, então essa transformação é dita uma simetria ou uma *isometria* do espaço-tempo em questão. Como exemplo, podemos citar a já conhecida invariância da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ sob transformações de Poincaré, como translações, rotações espaciais e boosts. Isso quer dizer que em vez de considerarmos essas transformações de coordenadas como a mudança de um sistema de coordenadas para outro, podemos nos valer de um ponto de vista alternativo e apenas considerar essas mudanças de coordenadas como mudanças de posição dentro do sistema de coordenadas originário. Deste modo, as isometrias podem ser entendidas em outros termos como a invariância do tensor métrico com relação a sua avaliação em diferentes posições relativas no espaço-tempo.

Vamos considerar uma transformação de coordenadas geral de um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ em $g'_{\mu\nu}$. De acordo com o que já foi exposto acima, essa transformação deve ser dada por

$$g'_{\alpha\beta}(x'(x)) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu}(x). \quad (57)$$

No lado esquerdo dessa equação, a coordenada transformada x' está expressa como uma função de x para enfatizar que ambos os lados da equação estão sendo avaliados

no mesmo ponto do espaço-tempo. Alternativamente, a transformação inversa dessa equação deve ser dada por

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g'_{\alpha\beta}(x'(x)). \quad (58)$$

Assim, uma vez que consideramos que a transformação de coordenadas em questão é uma isometria, então o tensor métrico é invariante sob essa transformação, o que acarreta no tensor métrico transformado ser a mesma função que o tensor métrico para o seu argumento em coordenadas transformadas, isto é,

$$g'_{\alpha\beta}(x') = g_{\alpha\beta}(x') \quad \text{e} \quad g'_{\alpha\beta}(x'(x)) = g_{\alpha\beta}(x'(x)). \quad (59)$$

Portanto, a equação (58) toma a forma,

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x'(x)). \quad (60)$$

As isometrias de um certo espaço-tempo geralmente ficam evidentes a partir da inspeção das variáveis ignoráveis (ausentes) na dependência das componentes do tensor métrico representado em um sistema de coordenadas do tipo (x_0, x_1, x_2, x_3) . Caso contrário, é necessário encontrar as transformações $x'(x)$ através da solução da equação (60). Porém, na prática, essas equações são muito difíceis de resolver se $x'(x)$ é uma transformação de coordenadas finita. Deste modo, é possível simplificar enormemente essa solução se nos restringirmos ao caso mais simples de transformações de coordenadas infinitesimais do tipo,

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \varepsilon \xi^{\alpha}(x), \quad \text{com} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (61)$$

na qual $\xi^{\alpha}(x)$ é um campo vetorial gerador de uma isometria que depende da posição. Para essa transformação, temos

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \delta_{\mu}^{\alpha} + \varepsilon \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}. \quad (62)$$

Por consequência, tomando apenas termos até $\mathcal{O}(\varepsilon)$ e trocando $g'_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ a equação (58) toma a forma

$$g_{\mu\nu}(x) = \left(\delta_{\mu}^{\alpha} + \varepsilon \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right) \left(\delta_{\nu}^{\beta} + \varepsilon \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) g'_{\alpha\beta}(x'(x)) \quad (63)$$

$$\approx g'_{\mu\nu}(x'(x)) + \varepsilon \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} g_{\alpha\nu}(x'(x)) + \varepsilon \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g_{\mu\beta}(x'(x)). \quad (64)$$

Para expressar todos os termos como funções explícitas de x , vamos usar a expansão de Taylor,

$$g'_{\mu\nu}(x'(x)) \approx g'_{\mu\nu}(x) + \varepsilon \xi^\alpha \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \approx g'_{\mu\nu}(x) + \varepsilon \xi^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}. \quad (65)$$

Dessa forma, a equação (64) se torna,

$$g_{\mu\nu}(x) \approx g'_{\mu\nu}(x) + \varepsilon \xi^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha} + \varepsilon \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} g_{\alpha\nu}(x) + \varepsilon \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} g_{\mu\beta}(x). \quad (66)$$

Pela condição de invariância do tensor métrico sob isometrias infinitesimais $g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x)$, temos,

$$\xi^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} g_{\alpha\nu}(x) + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} g_{\mu\beta}(x) = 0. \quad (67)$$

Logo, essa equação é a versão de (60) para transformações infinitesimais. Ainda podemos manipular um pouco mais essa equação ao tomar as derivadas de ξ^α em termos de componentes covariantes ao diferenciar $\xi_\nu = g_{\alpha\nu} \xi^\alpha$:

$$\xi^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \left(\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} - \xi^\alpha \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \right) + \left(\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - \xi^\beta \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} \right) = 0. \quad (68)$$

É possível perceber que as derivadas da métrica na equação acima se combinam em um símbolo de Christoffel da seguinte maneira,

$$\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - 2\xi_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0 \quad (69)$$

ou, alternativamente,

$$\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0. \quad (70)$$

Essa equação diferencial covariante é chamada de *equação de Killing* e, como discutimos, sua solução são os campos vetoriais geradores da álgebra de Lie que descrevem as simetrias infinitesimais de um dado espaço-tempo.

Podemos ilustrar melhor o conceito de campo vetorial de Killing e sua relação com a simetria de um espaço ao considerar o exemplo da métrica de Minkowski em coordenadas esféricas. Nesse sistema, a métrica do espaço-tempo nas coordenadas (t, r, θ, φ) é dada por,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (71)$$

de maneira que as variáveis ignoráveis da métrica que mencionamos no começo dessa subseção se tornam manifestas e, assim, nos permitem inferir qual devem ser algumas das simetrias desse espaço-tempo. Ou seja, apenas atentando à dependência

funcional das componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ podemos concluir que a métrica não tem dependência temporal e também não tem dependência com relação ao ângulo azimutal φ , de forma que temos, respectivamente, $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$ e $\partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0$. Logo, é possível demonstrar de maneira simples que os vetores $\mathbf{K}_t = K_t^\mu \partial_\mu = \partial/\partial t$ e $\mathbf{K}_\varphi = K_\varphi^\mu \partial_\mu = \partial/\partial \varphi$ associados, respectivamente, à invariância da métrica por transformações de translação temporal e rotação axial (nesse caso em torno do eixo z das coordenadas cartesianas) devem ser soluções da equação de Killing (70). Para fazer isso, basta considerar a equação (69) com a conexão expressa de maneira explícita e os vetores de Killing ξ_μ substituídos por vetores do tipo K_μ (abaixo consideramos que K_μ representa, em um único símbolo, tanto o vetor \mathbf{K}_t quanto \mathbf{K}_φ):

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial K_\mu}{\partial x^\nu} - K_\alpha g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right) = 0. \quad (72)$$

Perceba que, sendo δ_ν^μ a função delta de Kronecker, uma vez que as componentes contravariantes de cada um desses vetores de Killing \mathbf{K}_t e \mathbf{K}_φ devem ser dadas por $K_t^\mu = \delta_t^\mu$ e $K_\varphi^\mu = \delta_\varphi^\mu$, então a sua forma covariante deve ser dada por $K_{\mu t} = g_{\mu\nu} K_t^\nu = g_{\mu t}$ e $K_{\mu \varphi} = g_{\mu\nu} K_\varphi^\nu = g_{\mu\varphi}$. Deste modo, basta substituir a forma covariante dos vetores \mathbf{K} na equação (72) e então ficará evidente que, de fato, esses vetores satisfazem a equação de Killing (70). Essa discussão é particularmente importante aqui pois, como veremos adiante, campos vetoriais de Killing são objetos chave para a construção do campo eletromagnético associado ao buraco negro magnetizado de Kerr-Papapetrou-Wald que estudamos nesse trabalho.

2.2 TEORIA DA GRAVITAÇÃO DE EINSTEIN

A Relatividade Geral ou teoria da gravitação de Einstein é uma teoria proposta por Albert Einstein em 1915 para descrever a gravidade por meio da curvatura do espaço-tempo causada pela massa e energia da matéria [56-58] [60]. Em outras palavras, essa é uma teoria que permite construir modelos sobre o acoplamento entre uma certa distribuição de matéria no espaço-tempo, representada pelo tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$, e a geometria pseudo-Riemanianna do espaço-tempo decorrente dessa distribuição de matéria, representada pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$. A relação entre essas duas quantidades é dinâmica e retro-causal (a distribuição de matéria determina a geometria e a geometria determina a distribuição de matéria no espaço-tempo) e leva, inevitavelmente, à equações de campo não-lineares envolvendo $g_{\mu\nu}$ e os campos em $T^{\mu\nu}$. Por questão de concisão, adotaremos uma abordagem axiomática da teoria da Relatividade Geral para deduzir as equações de campo de Einstein e, só então, prosseguiremos para a interpretação física usual dessas equações. Antes disso, vamos discutir as condições requeridas pelas equações de campo para a métrica $g_{\mu\nu}$:

1. As equações de campo para o tensor simétrico $g_{\mu\nu}$ devem depender da distribuição de matéria no espaço-tempo, representada pelo tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$.
2. As equações de campo devem ser equações tensoriais, ou seja, devem ser dadas em forma covariante.
3. As equações são de, no máximo, segunda ordem nas derivadas de $g_{\mu\nu}$ e são lineares com relação as derivadas de segunda ordem.
4. O tensor de energia-momento se conserva no espaço-tempo curvo, de acordo com a equação $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$.
5. A teoria da gravitação de Newton deve ser recobrada no regime de campos fracos e velocidades baixas, ou seja, esse é um princípio de correspondência.
6. As equações de campo podem ser derivadas pelo princípio de Hamilton através de um funcional de ação invariante por difeomorfismos S .

Deste modo, é possível mostrar que todos os requisitos acima são satisfeitos se utilizarmos o *funcional de ação de Einstein-Hilbert* na presença de matéria, S , dado por

$$S = S_G + S_M = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{1}{2k}(R - 2\lambda) + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g} \quad (73)$$

no qual S_G e S_M são, respectivamente, a parte referente à geometria métrica do espaço-tempo e à parte referente à distribuição de energia-momento no espaço-tempo da ação S , com Ω correspondendo a uma região de integração qualquer dessa variedade, \mathcal{L}_M sendo a densidade de Lagrangiana dos campos de matéria, R o escalar de Ricci e λ o termo de constante cosmológica que descreve a expansão observada do universo (para mais detalhes ver [57, pg. 148]). Assim, as equações de campo que desejamos podem ser deduzidas do princípio variacional $\delta S = 0$ ao fazermos a extremização dessa ação com relação a variações arbitrárias $\delta g_{\mu\nu}$ que se anulam na fronteira $\partial\Omega$ de Ω . Procedendo dessa forma, temos que a variação da parte geométrica da ação, definida por

$$S_G := \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{1}{2k}(R - 2\lambda) \right] \sqrt{-g}, \quad (74)$$

é dada por

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2k} \left[\lambda g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (75)$$

uma vez que,

$$\delta R = \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (76)$$

Ainda podemos mostrar que o segundo termo do lado direito da equação (73) deve ser zero. Para isso, basta considerar que

$$R_{\mu\sigma\nu}^{\rho} = \partial_{\sigma} \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}, \quad (77)$$

dessa forma,

$$\delta R_{\mu\sigma\nu}^{\rho} = \nabla_{\sigma} (\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}), \quad (78)$$

portanto,

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = g^{\mu\nu} \left[\nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\rho\mu}^{\rho}) \right] = \nabla_{\rho} \left[g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - g^{\mu\rho} (\delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma}) \right]. \quad (79)$$

Note que no lado direito da equação acima temos um operador de quadridivergência covariante aplicado a um vetor formado pela métrica e as variações da conexão. Essas variações da conexão podem ser escritas em termos de variações da métrica e, pelo teorema da divergência, uma quadridivergência em um hipervolume Ω pode ser avaliada como uma integral sobre a hipersuperfície $\partial\Omega$. Assim, como consideramos que $\delta g_{\mu\nu} = 0$ em $\partial\Omega$, devemos ter

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (80)$$

Agora, voltando nossa atenção para a parte da ação referente ao conteúdo de matéria dessa teoria de campos, vamos definir

$$S_M := \int d^4x \mathcal{L}_M \sqrt{-g}, \quad (81)$$

cujas variações é dada por

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int d^4x T^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}, \quad (82)$$

na qual estamos definindo o *tensor de energia-momento*

$$T_{\mu\nu} := \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (83)$$

com a derivada em $\delta/\delta g_{\mu\nu}$ acima sendo a derivada funcional de Euler-Lagrange de $\sqrt{-g} \mathcal{L}_M$. Por conseguinte, juntando todos os resultados obtidos até agora, podemos ver que a variação δS pode ser escrita como

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2k} \left[\left(\frac{1}{2} R g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \right) - \Lambda g^{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right\} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}. \quad (84)$$

Dessa maneira, é possível perceber que a extremização da ação ($\delta S = 0$) para qualquer variação arbitrária $\delta g_{\mu\nu}$ deve levar a seguinte equação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (85)$$

na qual $\kappa = 8\pi G/c^4$. Portanto, podemos finalmente escrever as *equações de campo de Einstein* na forma,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (86)$$

Perceba que essa equação tensorial transparece de maneira cristalina como a geometria do espaço-tempo e o conteúdo de matéria do mesmo estão relacionados, uma vez que, no lado esquerdo da equação, temos apenas quantidades geométricas, enquanto que, no lado direito, temos o tensor de energia-momento construído puramente a partir de campos de matéria. Assim, para interpretar essa equação é comum se referir a máxima de John A. Wheeler na qual ele diz: "a matéria diz ao espaço como ele deve se curvar e o espaço determina como a matéria deve se mover". Isto posto, é importante frisar que a concepção do princípio de covariância geral (invariância das leis da Física por difeomorfismos) e as equações de Einstein decorrentes desse princípio se mostraram verdadeiramente frutíferas ao longo do tempo para expandir o conhecimento da humanidade acerca da realidade, com aplicações e previsões que não seriam possíveis com a teoria de gravitação de Newton, como, por exemplo, a previsão da precessão do periélio do planeta Mercúrio, lentes gravitacionais, o desvio ao vermelho (redshift) de ondas eletromagnéticas que se propagam para longe de um corpo massivo, ondas gravitacionais e os buracos negros estudados nesse trabalho (para uma exposição não-exaustiva sobre alguns dos testes empíricos da teoria da Relatividade ver [57, pg. 192]).

Deste modo, finalmente terminamos nossa exposição a respeito do aparato físico-matemático da teoria da Relatividade Geral e estamos em posição de avançar no campo da modelagem de sistemas físicos por meio dessa teoria da gravitação. Mais especificamente, iremos utilizar o que foi exposto até agora para estudar o comportamento da matéria quântica no espaço-tempo de uma classe importantíssima de soluções das equações de Einstein no vácuo: os buracos negros. Para tanto, iremos antes dedicar o próximo capítulo à uma exposição sucinta da dedução dessas soluções especiais e das suas motivações iniciais advindas do estudo de objetos astrofísicos. Por fim, também é importante mencionarmos que as soluções de buracos negros das equações de Einstein estudadas nesse trabalho se dão nos chamados espaços-tempo de vácuo assintoticamente planos, ou seja, em espaços em que a constante cosmológica, Λ , que determina a taxa de expansão acelerada do universo é zero e em regiões exteriores à qualquer distribuição de matéria ($T_{\mu\nu} = 0$).

3 BURACOS NEGROS

Como foi dito na Introdução, o presente trabalho é um estudo de Teoria Quântica de Campos em Espaço-tempo curvo. Dessa forma, uma vez que mostramos no capítulo anterior o que o termo "espaço-tempo curvo" significa, agora já estamos na metade do caminho necessário para o entendimento da interpretação física das equações de campos e dos problemas espectrais que resolveremos nos capítulos 4 e 5.

A motivação principal desse trabalho é chamar a atenção para algumas possibilidades de modelagem de sistemas quânticos no espaço-tempo de buracos negros cercados por campos eletromagnéticos. Esse interesse foi despertado à luz de desenvolvimentos recentes acerca da explicação do espectro de energia de gamma-ray bursts (GRBs) de longa duração (que duram mais que 2 segundos) observados pelo detector de radiação gamma do satélite Fermi. Em [44], Jorge A. Rueda, Remo Ruffini e Roy P. Kerr utilizaram o que chamaram de campo eletromagnético de Papapetrou-Wald [7] para modelar um buraco negro em rotação cercado por um plasma de baixa densidade que dá suporte a esse campo. Nesse artigo, o sistema formado pelo buraco negro e o campo eletromagnético é tido como uma configuração de equilíbrio após o colapso de uma estrela de nêutrons ser induzido por uma supernova em um sistema binário que inicialmente é formado por essa estrela de nêutrons e uma estrela moribunda com núcleo de carbono e oxigênio. Dessa forma, os autores são capazes de descrever o espectro na faixa dos GeV emitido por eventos específicos de GRBs através do cálculo da taxa de emissão de fótons gamma provenientes da aceleração de partículas carregadas (radiação síncrotron) no entorno do buraco negro utilizando a equação da geodésica para uma partícula carregada clássica minimamente acoplada ao campo eletromagnético de Papapetrou-Wald e levando em conta a reação de radiação.

Posto isso, adiantamos que a exposição desse capítulo será uma descrição de espaços-tempo de buraco negro na qual começamos descrevendo a métrica de buracos negros no sentido do mais simples ao mais complexo, culminando com a construção do que chamamos de buraco negro de Papapetrou-Wald.

Historicamente, a primeira solução exata das equações de Einstein para uma distribuição esfericamente simétrica e estática de massa, a solução de Schwarzschild, foi encontrada apenas alguns meses após a publicação das equações de campo de Relatividade Geral [40]. É possível que o desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral tivesse sido bastante diferente caso essa solução não fosse encontrada, uma vez que o próprio Einstein admitira que, devido ao caráter não-linear e tensorial das suas equações de campo, ele só possuía a esperança de realizar cálculos concretos usando pequenas correções de campos fracos da gravitação Newtoniana [42]. A existência da solução de Schwarzschild suscitou uma busca por outras soluções exatas das equações de Einstein: modelos cosmológicos puderam ser formulados com base nas

soluções de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker e Lense e Thirring[41] encontraram o campo exterior a uma esfera massiva em rotação lenta até a 1ª ordem no momento angular. Entretanto, foram necessários cerca de 50 anos desde a concepção da métrica de Schwarzschild para que uma solução exata representando a métrica para um corpo massivo em rotação fosse encontrada, ou seja, a métrica com simetria axial e estacionária de Kerr[4]. Essa é a principal métrica de buraco negro que iremos explorar nesse capítulo e mostraremos brevemente como ela pode ser deduzida utilizando um ansatz para o tensor métrico em coordenadas esferoidais oblatas.

Deste modo, na seção 3.1 iremos descrever as métricas de buraco negro de Schwarzschild e Kerr e discutiremos o significado de cada métrica do ponto de vista astrofísico.

Na seção 3.2, faremos uma breve dedução da métrica de Kerr ao resolver as equações de Einstein no vácuo, $R_{\mu\nu} = 0$, utilizando um algoritmo muito parecido com o empregado por Karl Schwarzschild em sua solução esfericamente simétrica, através de um ansatz para a métrica em coordenadas elipsoidais oblatas.

Na seção 3.4, introduziremos o leitor ao conceito de ergosfera da métrica de Kerr e discutiremos o papel desse buraco negro como fonte de energia para uma série de processos astrofísicos.

Por fim, na seção 3.4 mostramos como deduzir o campo eletromagnético de Papapetrou-Wald usando os vetores de Killing (ver subseção 2.1.6) da métrica de Kerr partindo do teorema provado em [4], o qual dita que vetores de Killing em espaços-tempo de vácuo também são, necessariamente, soluções das equações de Maxwell livre de fontes nesse espaço.

3.1 SOLUÇÕES DE SCHWARZCHILD E KERR

Como discutimos anteriormente, a métrica de um espaço-tempo também pode ser representada na forma do intervalo invariante ds^2 . Todas as métricas apresentadas nesse trabalho seguem a convenção de assinatura "mostly plus" $(-, +, +, +)$. Para o caso do espaço-tempo de Minkowski a métrica em coordenadas Cartesianas é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (87)$$

e em coordenadas esféricas por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (88)$$

Para encontrar sua solução, Schwarzschild assumiu que o espaço-tempo fora de uma distribuição de massa com simetria esférica e estática deve ser representado por uma métrica independente do tempo t e deve sofrer alterações com relação a métrica de Minkowski (86) somente na parte temporal-temporal(g_{tt}) e radial-radial(g_{rr}), com a mudança sendo apenas dada por funções de r do tipo

$$ds^2 = -e^{2v(r)} dt^2 + e^{2w(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (89)$$

Uma vez munido desse ansatz, Schwarzschild prosseguiu para a resolução das equações de Einstein no vácuo, ou seja, essa métrica permite calcular os coeficientes de conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ a partir dos quais é possível calcular o tensor de Ricci e então impor a condição $R_{\mu\nu} = 0$ na região externa à distribuição de massa para encontrar equações diferenciais para as funções $v(r)$ e $w(r)$. Dessa forma, assumindo também a consistência com a gravitação Newtoniana no regime de campos fracos, a primeira solução exata das equações de Einstein é a métrica de Schwarzschild dada por [40]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi. \quad (90)$$

Também é possível elencar as componentes covariantes não-nulas dessa métrica da seguinte forma,

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, g_{\theta\theta} = r^2, g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (91)$$

Portanto, a métrica que descreve o campo gravitacional no exterior de uma distribuição esférica e estática de massa deve ser descrita pela métrica (88) e, com ela, é possível modelar o espaço-tempo no exterior de um corpo astrofísico compacto, como uma estrela ou um buraco negro sem momento angular. Contudo, é muito pouco provável que a maioria destes objetos astrofísicos não possuam momento angular, uma vez que são criados a partir do acúmulo de gás e poeira em galáxias. Durante o processo de acumulação, esse tipo de matéria massiva que até então se encontrava fracamente coesa passa a se acumular de maneira não-uniforme com o passar do tempo, conforme a interação gravitacional entre massas promove não só a troca de forças, como também a troca de torques entre as partes dessa matéria compactamente distribuída. Assim, é natural pensar que toda estrela decorrente desse processo possui ao menos uma pequena quantidade de momento angular e, por consequência, os buracos negros criados após o colapso estelar também devem conservar uma parte do momento angular da sua estrela geradora. A métrica que descreve o campo externo de um buraco negro em rotação foi descoberta por Roy Kerr em 1963, através do estudo de espaços algébricamente especiais [4]. Nas coordenadas de Boyer-Lindquist [5] essa métrica toma a forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\varphi^2 + \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi, \quad (92)$$

na qual $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta$, com M e $a = J/M$ sendo, respectivamente, a massa e o momento angular por unidade de massa

do buraco negro.

Em representação matricial, a métrica toma a seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & g_{t\varphi} \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ g_{t\varphi} & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (93)$$

com

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right), & g_{rr} &= \frac{\Sigma}{\Delta}, \\ g_{t\varphi} &= -\frac{2Mr}{\Sigma} a \sin^2 \theta, & g_{\theta\theta} &= \Sigma, \\ g_{\varphi\varphi} &= \left[r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta\right] \sin^2 \theta = \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

E a matriz inversa é dada por,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{tt} & 0 & 0 & g^{t\varphi} \\ 0 & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ g^{t\varphi} & 0 & 0 & g^{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (94)$$

com

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{1}{\Delta} \left[r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta\right] = -\frac{A}{\Sigma\Delta}, \\ g^{t\varphi} &= -\frac{2Mr}{\Sigma\Delta} a, \\ g^{\varphi\varphi} &= \frac{\Sigma - 2Mr}{\Sigma\Delta \sin^2 \theta} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma\Delta \sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

Note que a rotação nessa métrica é indicada pelos termos fora da diagonal do tipo $g_{t\varphi}$ e $g_{\varphi t}$ e que a métrica de Kerr se reduz à métrica diagonal de Schwarzschild quando o parâmetro de spin se anula ($a = 0$).

3.2 DERIVAÇÃO DA MÉTRICA DE KERR

Nesta seção iremos deduzir a métrica de Kerr através de um algoritmo conciso, que é muito semelhante ao empregado inicialmente por Karl Schwarzschild. Dessa forma, iremos nos valer de um bom ansatz inicial para a métrica, em um sistema de coordenadas adequado à geometria de um corpo massivo em rotação, o qual, através das equações de Einstein no vácuo, levará a solução de Kerr em coordenadas de

Boyer-Lindquist(92) [5]. A vantagem de proceder dessa forma é que podemos evitar as complicações ensejadas pela introdução de novos conceitos que são usados em outros métodos de dedução comuns na literatura, como a introdução do conceito de especialidade algébrica usado por Kerr [4] ou o de tétradas nulas quando usamos o algoritmo de Newman-Janis [51].

Para começar, vamos considerar que o efeito da rotação na geometria do espaço-tempo deve produzir, ao menos, um "achatamento" com relação a geometria sem rotação de Schwarzschild. Deste modo, esse efeito aparecerá de forma mais simples se utilizarmos elipsoides oblatos para definir o sistema de coordenadas, no qual uma família de elipsoides confocais $r = cte$ se relaciona com as coordenadas cartesianas da seguinte forma

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi, \quad (95)$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi, \quad (96)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (97)$$

Assim, a métrica de Minkowski pode ser escrita em coordenadas elipsoidais oblatas como a seguir

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt^2 + \frac{\Sigma}{r^2 + a^2} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (98)$$

Ou ainda podemos reorganizar os termos da métrica acima para encontrar uma forma diagonal [42, pg.13][43]:

$$ds^2 = -\frac{r^2 + a^2}{\Sigma} dT^2 + \frac{\Sigma}{r^2 + a^2} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} d\Phi, \quad (99)$$

com $dT \equiv dt - a \sin^2 \theta d\varphi$ e $d\Phi \equiv d\varphi - \frac{a}{r^2 + a^2} dt$.

A partir daqui, podemos proceder analogamente à dedução da métrica de Schwarzschild, ou seja, vamos fazer as componentes da métrica nos termos "temporal-temporal" e "radial-radial" diferirem apenas em funções que dependem de r e θ para termos uma solução com simetria axial e estacionária da seguinte maneira,

$$ds^2 = -e^{2\nu(r,\theta)} dT^2 + e^{2\lambda(r,\theta)} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} d\Phi. \quad (100)$$

É relativamente fácil calcular o tensor de Ricci com o auxílio de um software de computação simbólica como o Mathematica ou a biblioteca Sympy na linguagem de programação Python, assim como feito em [43]. Uma vez feito isso, encontraremos equações diferenciais para $\nu(r,\theta)$ e $\lambda(r,\theta)$ através das equações de vácuo de Einstein, $R_{\mu\nu} = 0$,

que nos deixarão com o resultado $e^{\nu} = e^{-\lambda}$. Assim, podemos requerer que essa métrica se reduza a métrica de Schwarzschild quando o parâmetro de momento angular, a , se anula, i.e.,

$$\lim_{a \rightarrow 0} e^{2\nu} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (101)$$

e também podemos requerer que a métrica seja idêntica a métrica do espaço-tempo plano(99), no limite de ausência de qualquer fonte de massa M , i.e.,

$$\lim_{M \rightarrow 0} e^{2\nu} = \frac{r^2 + a^2}{\Sigma}. \quad (102)$$

Tomando em conta tudo o que foi exposto acima ficaremos com

$$e^{2\nu} = \frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (103)$$

$$(104)$$

$$e^{2\lambda} = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2}. \quad (105)$$

Dessa maneira, conseguimos deduzir a métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist na forma ortogonal dada por

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma} \left(dt - a \sin^2 \theta d\varphi \right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \left(d\varphi - \frac{a}{r^2 + a^2} dt \right)^2. \quad (106)$$

Essa métrica representa o espaço-tempo de equilíbrio após o colapso de uma estrela suficientemente massiva com momento angular, ou seja, ela representa um buraco negro em rotação.

3.3 DISCUSSÃO ACERCA DAS PROPRIEDADES DO BURACO NEGRO DE KERR

Como já discutimos na subseção 2.1.6, ao apenas atentar para as variáveis ignoráveis em uma métrica representada em um certo sistema de coordenadas, é possível inferir quais devem ser alguns de seus vetores de Killing e, conseqüentemente, quais são algumas das simetrias manifestas em um espaço-tempo. Assim, no caso da métrica de Kerr (92) fica evidente que, assim como no exemplo da subseção 2.1.6, dois dos seus vetores de Killing devem ser dados por ∂_φ e ∂_t , os quais são associados, respectivamente, à simetria axial e à estacionariedade dessa métrica. Deste modo, podemos estudar uma região proposta por J. A. Wheeler e R. Ruffini na métrica de Kerr [61, pg. 161], na qual o vetor de Killing ∂_t associado à estacionariedade dessa solução no tempo deixa de ser timelike e passa a ser spacelike em uma região fora do

horizonte de eventos. A fronteira dessa região se localiza onde esse vetor de Killing se torna nulo (lightlike):

$$\partial_t \cdot \partial_t = g_{tt} = 0 \implies r_{ergo} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (107)$$

Essa é a *superfície de limite estacionário* ou, alternativamente, a *ergosuperfície*. A região $r_+ < r < r_{ergo}$ entre o horizonte de eventos r_+ e a ergosuperfície é denominada de *ergosfera*. Nessa região é possível formular varios tipos de mecanismos de extração de energia para um buraco negro em rotação. Como exemplo, podemos citar o Processo de Penrose[45]. Nesse experimento gedanken, uma partícula com 4-momento \mathbf{p} pode assumir estados de energia negativos $E = -\mathbf{p} \cdot \partial_t$ dentro da ergosfera. O processo hipotético de Penrose consiste em considerar uma partícula que se propaga na ergosfera e que decai em duas outras partículas, com uma das partículas criadas possuindo energia negativa e caindo para dentro do buraco negro, enquanto a partícula restante é lançada ao infinito com mais energia que a partícula original, devido à necessidade de conservação da energia. Essa é, portanto, uma forma de extrair energia rotacional de um buraco negro em rotação.

No entanto, o processo original de Penrose parece não ser o suficiente para explicar a radiação proveniente de objetos astrofísicos[46]. Contudo, existe um processo mais eficiente e análogo ao processo de Penrose no qual soluções de equações de onda em torno de buracos negros eletromagnéticos podem sofrer o fenômeno de *superradiância*: o chamado processo de Blandford-Znajek[47]. Nesse caso, a energia rotacional e eletromagnética do buraco negro é extraída através do fluxo energético negativo que vai da ergosfera em direção ao buraco negro, com o campo eletromagnético possuindo suporte no plasma do disco de acreção. Outro processo, já discutido no começo desse capítulo, recentemente proposto em [44] para a extração de energia rotacional e eletromagnética de um buraco negro é através da radiação síncrotron proveniente de elétrons e íons acelerados pelo chamado *campo eletromagnético de Papapetrou-Wald*. Nesse modelo, as partículas carregadas provenientes de um plasma de baixa densidade são aceleradas a ponto de se tornarem fonte de radiação eletromagnética altamente energética e, deste modo, esse processo pode ser usado para explicar o espectro de energia de objetos como gamma-ray bursts e as emissões de núcleos ativos de galáxias. Os autores em [44] também demonstram que a região extremamente próxima do eixo de rotação pode ser uma fonte de raios cósmicos ultra-energéticos, pois nessa região a perda de energia da partícula por radiação síncrotron é negligenciável e a maior parte do trabalho realizado pelo campo elétrico é utilizada para a aceleração da partícula ao longo do eixo de rotação. Assim, por motivos que ficarão mais claros adiante, é justamente o campo de Papapetrou-Wald no regime próximo ao eixo do buraco negro de Kerr que iremos explorar no capítulo 5 usando a equação de Klein-Gordon-Fock.

Para terminar, ainda podemos dizer um pouco mais a respeito da ergosfera do buraco negro de Kerr ao explorar o efeito conhecido como *frame-dragging*. Esse efeito é utilizado para descrever o "transporte de referenciais" que deve ocorrer a partir do momento em que uma partícula cruza a superfície de limite estacionário r_{ergo} . Quando isso acontece, mesmo um fóton não é capaz de se propagar contra a rotação do buraco negro na ergosfera. Em outras palavras, isso é o que quer dizer o efeito de frame-dragging: sempre que buscamos uma transformação de coordenadas particular dentro da ergosfera para observar uma partícula em movimento estacionário, então necessariamente o sistema de referencia que adotamos deve se mover com a velocidade angular do buraco negro.

Utilizando o que foi exposto na seção 3.2 podemos calcular a velocidade angular do buraco negro dentro da ergosfera utilizando as componentes da métrica de Kerr em forma diagonal. Na prática, essa forma da métrica descreve um referencial local co-rotacionando com o buraco negro com momento angular Ω que depende do raio r e do ângulo θ com relação ao eixo de rotação. Essa velocidade angular pode ser calculada levando em consideração que uma métrica com termo de frame-dragging $dtd\varphi$ é dada forma geral por,

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 \quad (108)$$

e reordenando os termos podemos obter a forma diagonal,

$$ds^2 = \left(g_{tt} - \frac{g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}} \right) dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} \left(d\varphi + \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \right)^2. \quad (109)$$

Deste modo, a definição da velocidade angular de frame-dragging do buraco negro dentro da ergosfera é dada por[43]

$$\Omega(r, \theta) = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{2Mar}{\Sigma(r^2 + a^2) + 2Ma^2r\sin^2\theta}, \quad (110)$$

enquanto que a velocidade angular do horizonte de eventos Ω_H pode ser determinada pelo termo $d\Phi$ em (99). Isto é,

$$d\Phi = d\varphi - \frac{a}{r^2 + a^2} \implies \Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (111)$$

3.4 SOLUÇÃO DE PAPAPETROU-WALD DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL

O campo eletromagnético de Papapetrou-Wald que trataremos aqui é uma solução das equações de Einstein-Maxwell para a situação em que um buraco negro estacionário, com simetria axial e levemente carregado ($Q \ll M$), é colocado em um campo magnético que, originalmente, é uniforme e alinhado com o eixo do buraco

negro. Dessa forma, a seguir será mostrado como essa solução pode ser calculada utilizando vetores de Killing do espaço-tempo de Kerr conforme procedimento empregado em [6-7].

Como sabemos, um vetor de Killing ξ^μ satisfaz a equação

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0, \quad (112)$$

na qual ponto e vírgula denota derivada covariante. É sabido que um vetor de Killing de um espaço-tempo de vácuo gera soluções das equações de Maxwell no mesmo[9]. Ou seja, se estabelecemos

$$F_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu} - \xi_{\mu;\nu} = -2\xi_{\mu;\nu} \quad (113)$$

então $F_{\mu\nu}$ satisfaz as equações de Maxwell livres de fontes

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -2\xi^{\mu;\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (114)$$

Para provar a equação (114), usaremos a equação que define o tensor de curvatura de Riemann,

$$\xi_{\mu;\nu;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\nu} = -\xi^\lambda R_{\lambda\mu\nu\sigma}. \quad (115)$$

Permutando os índices μ, ν, σ ciclicamente, adicionando as equações resultantes, usando a equação (112) e a identidade $R^\lambda_{[\mu\nu\sigma]} = 0$, encontramos que todos os vetores de Killing devem satisfazer

$$\xi_{\mu;\nu;\sigma} = \xi^\lambda R_{\lambda\sigma\mu\nu}. \quad (116)$$

Podemos contrair os índices ν e σ para obter

$$\xi^{\mu;\nu}{}_{;\nu} = \xi^\lambda R_{\lambda\nu}{}^{\mu\nu} = R^\mu{}_\lambda \xi^\lambda, \quad (117)$$

no entanto, em um espaço-tempo de vácuo temos $R_{\mu\nu} = 0$ e, portanto, obtemos a equação (114).

Deste modo, se η e ψ são, respectivamente, os vetores de Killing time-like e space-like da métrica de Kerr, podemos ver que a solução para o 4-potencial eletromagnético, A_μ , de um buraco negro de Kerr que possui carga Q e um campo magnético de intensidade B_0 uniforme assintoticamente (longe do horizonte de eventos) é dada por

$$A_\mu = \frac{B_0}{2} \psi_\mu + aB_0 \eta_\mu - \frac{Q}{2M} \eta_\mu \quad (118)$$

Como $\eta^\mu = \delta^\mu_t$ e $\psi^\mu = \delta^\mu_\phi$, as componentes não nulas do 4-potencial nas coordenadas de Boyer-Lindquist da métrica de Kerr são dadas por

$$A_t = -\left(aB_0 - \frac{Q}{2M}\right) + \left[aB_0M(1 + \cos^2\theta - Q)\right] \frac{r}{\Sigma} \quad (119)$$

$$A_\varphi = \sin^2\theta \left\{ \frac{B_0}{2}(r^2 + a^2) - \left[a^2B_0M(1 + \cos^2\theta) - aQ\right] \frac{r}{\Sigma} \right\}. \quad (120)$$

É interessante notar que o termo $-\frac{Q}{2M}\eta_\mu$ na métrica de Kerr leva ao mesmo campo eletromagnético do espaço-tempo de Kerr-Newman a menos de uma constante aditiva na componente temporal do 4-potencial[7].

As figuras 3 e 4 demonstram como o campo eletromagnético de Papapetrou-Wald se comporta em torno do horizonte de eventos externo $r = r_+$ do buraco negro de Kerr quando o campo magnético B_0 é, respectivamente, assintoticamente paralelo e antiparalelo ao eixo de rotação. Podemos ver que a interação gravitomagnética entre buraco negro e campo magnético induz a criação de um campo elétrico em forma de cruz preenchendo o espaço e que o campo elétrico da figura 3 aponta no sentido propício para a aceleração de partículas negativamente carregadas em torno do eixo z , enquanto que partículas positivamente carregadas devem ser aceleradas para longe do buraco negro em torno desse eixo no caso da figura 4.

Esses plots foram realizados através da transformação do sistema de coordenadas de Boyer-Lindquist para as pseudo-coordenadas cartesianas de Kerr-Schild cuja relação é dada por,

$$r^2 = \frac{r_f^2 - a^2 + \sqrt{(r_f^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2}}{2}, \quad (121)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{r}{z} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2}} \right), \quad (122)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) + \arctan \left(\frac{a}{r} \right), \quad (123)$$

com $r_f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Os campos elétrico e magnético podem ser obtidos diretamente através das componentes do tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$, com suas componentes sendo dadas por $E_i = F_{0i}$ e $B_i = \varepsilon_{ijk}F^{jk}$, respectivamente. Para mais detalhes sobre as transformações de coordenadas de Boyer-Lindquist para Kerr-Schild, $(t, r, \theta, \varphi) \mapsto (t, x, y, z)$, ver [44, Apêndice A.2].

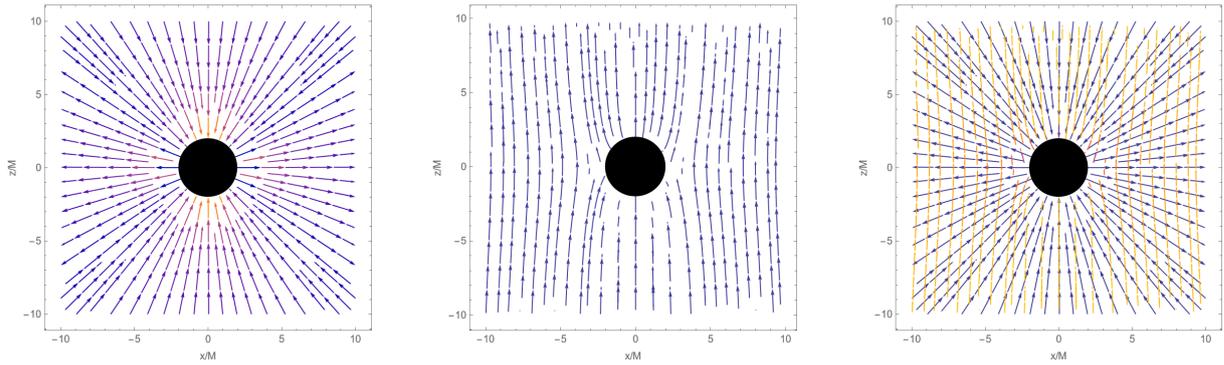


Figura 3 – Campo elétrico(esquerda) e campo magnético(meio) em torno de um Buraco negro de Kerr imerso em um campo magnético assintoticamente uniforme e paralelamente alinhado com o seu eixo de rotação com o parâmetro adimensional de spin $a/M = 0.3$ e carga elétrica $Q = 0$. O plot é feito em coordenadas de Kerr-Schild com as distâncias sendo dadas em unidades de massa M e o campo eletromagnético em unidades de B_0 . Na última figura (direita) apresentamos uma sobreposição do campo elétrico (azul) e do campo magnético (amarelo).

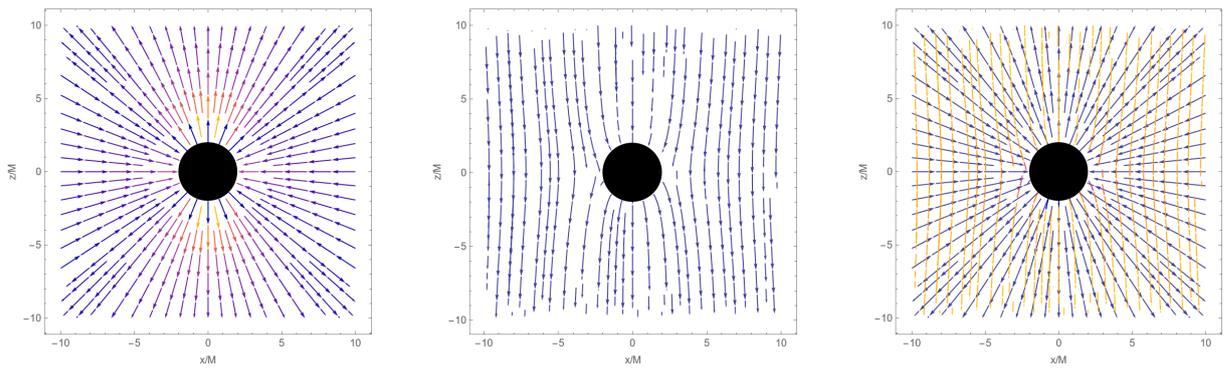


Figura 4 – Campo elétrico(esquerda) e campo magnético(meio) em torno de um Buraco negro de Kerr imerso em um campo magnético assintoticamente uniforme e antiparalelamente alinhado com o seu eixo de rotação com o parâmetro adimensional de spin $a/M = 0.3$ e carga elétrica $Q = 0$. O plot é feito em coordenadas de Kerr-Schild com as distâncias sendo dadas em unidades de massa M e o campo eletromagnético em unidades de B_0 . Na última figura (direita) apresentamos uma sobreposição do campo elétrico (azul) e do campo magnético (amarelo).

Deste modo, terminamos nosso objetivo de expor os objetos principais utilizados nas equações de campos quânticos dos capítulos seguintes, qual seja, a métrica de Schwarzschild e Kerr, representadas por $g_{\mu\nu}$, e o 4-potencial eletromagnético de Papapetrou-Wald, representado por A_μ .

4 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON-FOCK EM TORNO DO BURACO NEGRO DE KERR-PAPAPETROU-WALD

Agora que já fizemos toda a exposição do espaço-tempo de Kerr e do campo eletromagnético de Papapetrou-Wald, estamos em posição de tratar a respeito do principal objetivo desse trabalho: o estudo de partículas quânticas massivas e carregadas de spin-0 sob a ação de campos eletromagnéticos intensos no que chamamos de espaço-tempo de Kerr-Papapetrou-Wald, de acordo com a proposta de Rueda et al em [44]. Dessa forma, podemos partir da ação para um campo escalar complexo carregado em espaço-tempo curvo na forma minimamente acoplada dada por ([10], pg. 407)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[(D^\mu \psi)^\dagger (D_\mu \psi) - m^2 |\psi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (124)$$

na qual $D_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu$ é a derivada covariante de gauge em espaço-tempo curvo. As equações de Euler-Lagrange correspondentes a essa ação são dadas por

$$(D^\mu D_\mu^\dagger + m^2)\psi = 0. \quad (125)$$

Como foi mostrado na seção 3.4, o quadripotencial A_μ que lidaremos aqui, dado pela expressão (118), é uma combinação linear de vetores de Killing, que possuem quadri-divergência nula. Portanto, temos que $\nabla_\mu A^\mu = 0$ e a equação (125) toma a forma

$$(\square + ieA^\mu \partial_\mu - e^2 A^\mu A_\mu + m^2)\psi = 0. \quad (126)$$

Assim, na seção 4.1 desse capítulo iremos deduzir as equações de Euler-Lagrange (126) no que chamamos de *região de emissão de raios cósmicos ultra-relativísticos*, na qual fazemos uma restrição de pequenos ângulos na variável de Boyer-Lindquist θ correspondente ao ângulo de abertura com relação ao eixo de rotação z (em coordenadas pseudo-cartesianas de Kerr-Schild) do buraco negro ($\theta \ll 1$). Em seguida, essa equação é resolvida pelo método de separação de variáveis em coordenadas de Boyer-Lindquist e a equação radial é mapeada em uma equação confluyente de Heun na forma canônica (233). Na seção 4.2, exploramos uma das propriedades analíticas da equação confluyente de Heun (233) expostas no Apêndice B para encontrar o espectro de energia complexo associado às soluções polinomiais inversas decorrentes da solução assintótica dessa equação. Dessa forma, demonstraremos qual é a forma tomada pelo espectro de energia ω para diferentes valores dos parâmetros físicos do buraco negro e do campo escalar, assim como fazemos uma simulação numérica desse espectro para o caso realístico de gamma-ray-bursts e núcleos ativos de galáxias. A seção 4.3 é dedicada ao estudo da equação radial proveniente das equações parciais de Euler-Lagrange citadas acima por meio de uma transformação na variável independente e dependente que colocam essa equação

na forma de uma equação de Schrödinger. Ao final desta seção, usamos a forma de Schrödinger da equação radial e o seu potencial efetivo para discutir porque a dinâmica do campo escalar não depende do parâmetro de intensidade do campo magnético, B_0 , na vizinhança do horizonte de eventos para o campo escalar aproximado até a primeira ordem.

4.1 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE DO CAMPO ESCALAR

Uma vez munidos da métrica de Kerr e do quadripotencial A_μ , podemos escrever a equação (126) explicitamente. Deste modo, essa equação toma a forma

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu) + ieA^\mu \partial_\mu - e^2 A^\mu A_\mu + m^2 \right) \psi = 0. \quad (127)$$

Assim, uma vez que $\sqrt{-g} = \Sigma \sin \theta$, podemos analisar a equação (127) termo a termo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu) = \frac{1}{\Sigma} \left\{ -\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \partial_t^2 + \partial_r \Delta \partial_r - \frac{a^2}{\Delta} \partial_\varphi^2 - \frac{4Mar}{\Delta} \partial_\varphi \partial_t + \right. \\ \left. + a^2 \sin^2 \theta \partial_t^2 + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^\mu \partial_\mu &= \left[\frac{B_0}{2} \delta_\varphi^\mu + \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right) \delta_t^\mu \right] \partial_\mu \\ &= \frac{B_0}{2} \partial_\varphi + \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right) \partial_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^\mu A_\mu &= A^t A_t + A^\varphi A_\varphi \\ &= -\left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right)^2 + \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right) \left[aB_0 M (1 + \cos^2 \theta) - Q \right] \frac{r}{\Sigma} \\ &\quad + \frac{B_0}{2} \sin^2 \theta \left\{ \frac{B_0}{2} (r^2 + a^2) - \left[a^2 B_0 M (1 + \cos^2 \theta) - aQ \right] \frac{r}{\Sigma} \right\}. \end{aligned}$$

Como neste trabalho estamos interessados em estudar o comportamento do campo escalar sob a ação de campos eletromagnéticos extremamente intensos, vamos nos restringir a estudar a região de emissão de raios cósmicos ultra-relativísticos muito próxima do eixo de rotação do buraco negro discutida em [44]. Para tanto, vamos substituir os termos acima na equação (127) fazendo uma restrição de pequenos ângulos na variável angular $\theta \ll 1$ e tomando apenas a aproximação até $O(\theta)$. Deste modo, ficamos com

$$\left\{ \square + ie \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right) \partial_t + i \frac{eB_0}{2} \partial_\varphi + e^2 \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right)^2 - e^2 2M \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right)^2 \frac{r}{\Sigma} + m^2 \right\} \psi = 0 \quad (128)$$

Uma vez que a métrica e o campo eletromagnético possuem simetria axial e são estacionários, podemos propor a seguinte separação de variáveis,

$$\psi = R(r)S(\theta)e^{i\mu\varphi}e^{-i\omega t}. \quad (129)$$

Assim, substituindo a solução proposta e multiplicando a equação (128) por Σ , ficaremos com

$$\left\{ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \omega^2 + \partial_r(\Delta \partial_r) + \frac{a^2}{\Delta} \mu^2 - \frac{4Mar}{\Delta} \omega \mu + \frac{1}{\theta} \partial_\theta(\theta \partial_\theta) - \frac{\mu^2}{\theta^2} + \right. \\ \left. + \left[e \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right) \omega - e \frac{B_0}{2} \mu \right] \Sigma + \right. \\ \left. - e^2 \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right)^2 \Sigma + 2e^2 M \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right)^2 r + m^2 \Sigma \right\} R(r)S(\theta) = 0 \quad (130)$$

Dividindo por $R(r)S(\theta)$ e reorganizando a equação acima, temos

$$\left\{ \frac{1}{R} \left\{ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \omega^2 + \frac{d}{dr} \Delta \frac{d}{dr} + \frac{a^2}{\Delta} \mu^2 - \frac{4Mar}{\Delta} \omega \mu \right. \right. \\ \left. + \left[e \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right) \omega - e \frac{B_0}{2} \mu - e^2 \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right)^2 + m^2 \right] \Sigma + \right. \\ \left. + 2e^2 M \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right)^2 r \right\} R + \\ \left. + \frac{1}{S} \left[\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\theta \frac{d}{d\theta} \right) - \frac{\mu^2}{\theta^2} \right] S \right\} = 0 \quad (131)$$

Tomando λ como constante de separação, temos as equações separadas, dadas por

$$\left[\frac{d}{dr} \Delta \frac{d}{dr} + \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \omega^2 + \frac{a^2}{\Delta} \mu^2 - (4Ma\omega\mu) \frac{r}{\Delta} + \right. \\ \left. + \lambda(r^2 + a^2) + 2e^2 M \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right)^2 r - \lambda \right] R(r) = 0 \quad (132)$$

$$\left[\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\theta \frac{d}{d\theta} \right) - \frac{\mu^2}{\theta^2} + \lambda \right] S(\theta) = 0 \quad (133)$$

$$\text{com } \lambda = e \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right) \omega - e \frac{B_0}{2} \mu - e^2 \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right)^2 + m^2.$$

4.1.1 Solução angular e constante de separação λ

A equação diferencial para $S(\theta)$ é dada por

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} - \frac{\mu^2}{\theta^2} + \lambda \right] S(\theta) = 0, \quad (134)$$

multiplicando por θ^2 , temos

$$\left[\theta^2 \frac{d^2}{d\theta^2} + \theta \frac{d}{d\theta} + (\sqrt{\lambda}\theta)^2 - \mu^2 \right] S(\theta) = 0. \quad (135)$$

Sabemos que a equação de Bessel de ordem p é dada por

$$\left[z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + z^2 - p^2 \right] w(z) = 0, \quad (136)$$

assim, é possível verificar que a equação para $S(\theta)$ é uma forma da equação de Bessel com $z = \sqrt{\lambda}\theta$ e $p = \mu$, tal que μ é um número inteiro. Portanto, uma vez que $S(\theta = 0) < \infty$ a solução angular é dada por uma função de Bessel de primeira espécie, i.e.

$$S(\theta) = c_1 J_\mu(\sqrt{\lambda}\theta). \quad (137)$$

Vamos impor a condição de contorno no ângulo limite θ_L dada por,

$$S(\theta_L) = c_1 J_\mu(\sqrt{\lambda}\theta_L) = 0, \quad (138)$$

e deste modo, obtemos o autovalor da equação angular, dado por,

$$\lambda = \left(\frac{\kappa_{\mu l}}{\theta_L} \right)^2, \text{ tal que } l = 0, 1, 2, \dots, \quad (139)$$

com $\kappa_{\mu l}$ sendo o l -ésimo zero da função de Bessel de ordem μ e, dessa forma, a solução da equação angular fica completamente determinada.

4.1.2 Solução para $R(r)$

Usando $\Delta = (r - r_+)(r - r_-)$ e considerando agora a equação radial (132), a equação diferencial para $R(r)$ é dada por

$$\begin{aligned}
 & (r - r_+)(r - r_-) \frac{d^2 R}{dr^2} + [(r - r_-) + (r - r_+)] \frac{dR}{dr} + \\
 & + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 \omega^2 + a^2 \mu^2 - (4M a \omega \mu) r}{(r - r_+)(r - r_-)} + \Lambda(r^2 + a^2) + 2e^2 M \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right)^2 r - \lambda \right] R = 0.
 \end{aligned}
 \tag{140}$$

Dividindo a equação acima por $(r - r_+)(r - r_-)$, temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 R}{dr^2} + \left(\frac{1}{r - r_+} + \frac{1}{r - r_-} \right) \frac{dR}{dr} + \\
 & + \frac{1}{(r - r_+)(r - r_-)} \left[\frac{((r^2 + a^2)\omega - a\mu)^2}{(r - r_+)(r - r_-)} + \Lambda(r^2 + a^2) + 2e^2 M \left(aB_0 - \frac{Q}{2M} \right)^2 r - \lambda + 2a\mu\omega \right] R = 0
 \end{aligned}
 \tag{141}$$

e para transformar a equação acima na equação confluyente de Heun (233) apresentada no Apêndice B, vamos fazer uma substituição de Möbius, dada por

$$x = \frac{r - r_-}{r_+ - r_-}
 \tag{142}$$

e uma decomposição em frações parciais do termo que acompanha R . Dessa forma, podemos escrever (141) da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) \frac{dR}{dx} + \left\{ (r_+ - r_-)^2 (\omega^2 + \Lambda) \right. \\
 & \quad + \left[\frac{(r_-^2 + a^2)\omega - a\mu}{r_+ - r_-} \right]^2 \frac{1}{x^2} \\
 & \quad + \left[\frac{(r_+^2 + a^2)\omega - a\mu}{r_+ - r_-} \right]^2 \frac{1}{(x-1)^2} \\
 & \quad + \frac{2 \left(a^2 \mu^2 - 2a^3 \mu \omega - 2ar_+ r_- \mu \omega + a^4 \omega^2 + 2a^2 r_+ r_- \omega^2 + 2r_+ r_-^3 \omega^2 - r_-^4 \omega^2 \right)}{(r_+ - r_-)^2 x} \\
 & \quad + \frac{-r_- e^2 Q^2 + 2M\lambda - 2a^2 M\lambda - 2r_-^2 M\lambda - 4aM\mu\omega + 4ar_- e^2 MQB_0 - 4a^2 r_- e^2 M^2 B_0^2}{2Mx} \\
 & \quad + \frac{2 \left(-a^2 \mu^2 + 2a^3 \mu \omega + 2ar_+ r_- \mu \omega - a^4 \omega^2 + r_+^4 \omega^2 - 2a^2 r_+ r_- \omega^2 - 2r_+^3 r_- \omega^2 \right)}{(r_+ - r_-)^2 (x-1)} \\
 & \quad \left. + \frac{r_+ e^2 Q^2 - 2M\lambda + 2a^2 M\lambda + 2r_+^2 M\lambda + 4aM\mu\omega - 4ar_+ e^2 MQB_0 + 4a^2 r_+ e^2 M^2 B_0^2}{2M(x-1)} \right\} R = 0.
 \end{aligned} \tag{143}$$

Agora, para eliminar o termo constante e a potência dos termos proporcionais a $1/x^2$ e $1/(x-1)^2$, vamos realizar uma transformação s-homotópica na variável dependente, $R(x) \mapsto y(x)$, dada por

$$R(x) = e^{B_1 x} x^{B_2} (x-1)^{B_3} y(x) \tag{144}$$

na qual os coeficientes B_1 , B_2 e B_3 são dados por:

$$B_1 = i(r_+ - r_-) \sqrt{(\omega^2 + \Lambda)} \tag{145}$$

$$B_2 = i \frac{(r_-^2 + a^2)\omega - a\mu}{r_+ - r_-} \tag{146}$$

$$B_3 = i \frac{(r_+^2 + a^2)\omega - a\mu}{r_+ - r_-}. \tag{147}$$

A equação diferencial para $y(x)$ fica

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(2B_1 + \frac{1+2B_2}{x} + \frac{1+2B_3}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} \\
 & \quad + \left\{ \frac{B_1 - B_2 + 2B_1 B_2 - B_3 - 2B_2 B_3 + B_4}{x} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{B_1 + B_2 + B_3 + 2B_1 B_3 + 2B_2 B_3 + B_5}{x-1} \right\} y = 0 \tag{148}
 \end{aligned}$$

ou ainda podemos rearranjar alguns termos, de modo que a equação acima tome a forma de uma equação confluyente de Heun em forma canônica (233) (ver Apêndice B)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(2B_1 + \frac{1+2B_2}{x} + \frac{1+2B_3}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} + \left\{ \frac{(2B_1 + 2B_1 B_2 + 2B_1 B_3 + B_4 + B_5)x - (B_1 - B_2 + 2B_1 B_2 - B_3 - 2B_2 B_3 + B_4)}{x(x-1)} \right\} y = 0 \quad (149)$$

com B_4 e B_5 dados por:

$$B_4 = \frac{2 \left(a^2 \mu^2 - 2a^3 \mu \omega - 2ar_+ r_- \mu \omega + a^4 \omega^2 + 2a^2 r_+ r_- \omega^2 + 2r_+ r_-^3 \omega^2 - r_-^4 \omega^2 \right)}{(r_+ - r_-)^2} + \frac{-r_- e^2 Q^2 + 2M\lambda - 2a^2 M\lambda - 2r_-^2 M\lambda - 4aM\mu\omega + 4ar_- e^2 MQB_0 - 4a^2 r_- e^2 M^2 B_0^2}{2M} \quad (150)$$

$$B_5 = \frac{2 \left(-a^2 \mu^2 + 2a^3 \mu \omega + 2ar_+ r_- \mu \omega - a^4 \omega^2 + r_+^4 \omega^2 - 2a^2 r_+ r_- \omega^2 - 2r_+^3 r_- \omega^2 \right)}{(r_+ - r_-)^2} + \frac{r_+ e^2 Q^2 - 2M\lambda + 2a^2 M\lambda + 2r_+^2 M\lambda + 4aM\mu\omega - 4ar_+ e^2 MQB_0 + 4a^2 r_+ e^2 M^2 B_0^2}{2M}. \quad (151)$$

Logo, os coeficientes da ECH (233) que descrevem esse modelo são dados por:

$$q = -\frac{r_- e^2 Q^2}{2M} + \lambda - a^2 \lambda - r_-^2 \lambda + \frac{2ia\mu}{r_+ - r_-} + \frac{4a^2 \mu^2}{(r_+ - r_-)^2} - \frac{2ia^2 \omega}{r_+ - r_-} - \frac{2ir_+ r_-^2 \omega}{(r_+ - r_-)^2} + \frac{2ir_-^3 \omega}{(r_+ - r_-)^2} - 2a\mu\omega - \frac{8a^3 \mu \omega}{(r_+ - r_-)^2} - \frac{4ar_+ r_- \mu \omega}{(r_+ - r_-)^2} - \frac{4ar_-^2 \mu \omega}{(r_+ - r_-)^2} + \frac{4a^4 \omega^2}{(r_+ - r_-)^2} + \frac{4a^2 r_+ r_- \omega^2}{(r_+ - r_-)^2} + \frac{4a^2 r_-^2 \omega^2}{(r_+ - r_-)^2} + \frac{4r_+ r_-^3 \omega^2}{(r_+ - r_-)^2} + \left(ir_+ - ir_- + 2a\mu - 2a^2 \omega - 2r_-^2 \omega \right) \sqrt{\lambda + \omega^2} + 2ar_- e^2 QB_0 - 2a^2 r_- e^2 MB_0^2, \quad (152)$$

$$\alpha = \frac{r_+ e^2 Q^2}{2M} - \frac{r_- e^2 Q^2}{2M} + r_+^2 \lambda - r_-^2 \lambda + 2r_+^2 \omega^2 - 2r_-^2 \omega^2 + \left(2ir_+ - 2ir_- + 4a\mu - 4a^2 \omega - 4r_-^2 \omega \right) \sqrt{\lambda + \omega^2} - 2ar_+ e^2 QB_0 + 2ar_- e^2 QB_0 + 2a^2 r_+ e^2 MB_0^2 - 2a^2 r_- e^2 MB_0^2 \quad (153)$$

$$\gamma = 1 + 2i \frac{(r_-^2 + a^2)\omega - a\mu}{r_+ - r_-}, \quad \delta = 1 + 2i \frac{(r_+^2 + a^2)\omega - a\mu}{r_+ - r_-}, \quad \varepsilon = 2i(r_+ - r_-) \sqrt{(\omega^2 + \lambda)}. \quad (154)$$

Caso o leitor deseje converter os parâmetros físicos do modelo de unidades Planckianas para o sistema de unidades CGS, basta fazer $e = \frac{\hat{e}}{\hbar c}$, $m = \frac{\hat{m}c}{\hbar}$, $M = \frac{G\hat{M}}{c^2}$, $a = \frac{\hat{a}}{c}$ e $B_0 = \frac{G^{1/2}}{c^2} \hat{B}_0$, nas quais as quantidades com chapéu denotam os parâmetros no sistema CGS.

4.2 SOLUÇÃO POLINOMIAL INVERSA DA EQUAÇÃO RADIAL DE KERR-PAPAPETROU-WALD LIMITADA A PEQUENOS ÂNGULOS($\theta \ll \theta_L$) A PARTIR DA SOLUÇÃO ASSINTÓTICA DA ECH

Nesta seção iremos explorar o espectro de energia ω complexo associado às soluções polinomiais inversas decorrentes da solução assintótica da equação confluyente de Heun apresentadas no Apêndice B, com a finalidade de representar ondas escalares outgoing longe do horizonte de eventos do buraco negro de Kerr-Papapetrou-Wald. Por questão de simplicidade, podemos aproveitar que a segunda condição polinomial em (246) para a série assintótica está escrita de maneira fatorada. Logo, essa condição é satisfeita se

$$n \varepsilon + \alpha = 0 \quad (155)$$

ou

$$(n + 1 - \gamma)\varepsilon + \alpha = 0. \quad (156)$$

Portanto, podemos substituir os parâmetros da ECH pelos parâmetros físicos do modelo e, fazendo isso, obteremos duas equações algébricas para ω com um termo sendo múltiplo da raiz quadrada $\sqrt{\omega^2 + \lambda}$. Devemos isolar esse termo e então elevar ambos os lados das equações ao quadrado para retirar os termos de dentro da raiz. Dessa forma, conseguimos uma equação algébrica de quarto grau em ω para cada condição (155) e (156), cuja solução exata pode ser dada pela conhecida fórmula da quártica. As equações quárticas para o espectro ω decorrentes das equações (155) e (156) foram obtidas por meio de um software de computação simbólica como o Mathematica e são bastante grandes. Deste modo, as quatro soluções exatas de cada equação de quarto grau se tornam igualmente convolutas e representá-las aqui na forma mais geral em termo de todos os parâmetros físicos M, a, e, m, B_0, n e μ apenas fatigará o leitor com um exercício inútil de reconhecimento de padrões. No que segue, iremos apenas demonstrar os resultados da experimentação numérica das soluções ω ilustradas por gráficos para diferentes valores específicos dos parâmetros do modelo em questão com o intuito de analisar a estabilidade das soluções polinomiais $\mathcal{P}_n(r)$ da equação confluyente de Heun que representam a solução radial $R(r)$ em torno de $r = \infty$ (ver Apêndice B). Por simplicidade, estamos fixando os parâmetros em unidades Planckianas em $M = 1$ ($\sim 10^{-6} M_\odot$), $B_0 = 1$ ($\sim 10^{24} G$) e $m = 0$ para gerar as figuras 5, 6 e 7 abaixo, de modo que é possível dizer que elas representam o espectro polinomial ω de um campo escalar sem massa em torno de um buraco negro em rotação de massa planetária cercado por um campo magnético extremamente intenso. Assim, com essas restrições as equações quárticas para ω decorrentes das condições (155) e (156) podem ser, respectivamente, escritas da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
 & 16(-1 + 2\sqrt{1 - a^2}) \omega^4 + \left[16ia^2(1 + n) + 16i(-1 + \sqrt{1 - a^2})(1 + n) + \right. \\
 & \quad \left. - 16a(-1 + \sqrt{1 - a^2})\mu \right] \omega^3 + \\
 & \quad - 4 \left[-1 + 4a^4 e^2 - 2n - n^2 - 2e\mu + 4\sqrt{1 - a^2} e\mu \right. \\
 & \quad \left. + a((4 - 8\sqrt{1 - a^2})e + 2i\sqrt{1 - a^2}(1 + n)\mu) \right. \\
 & \quad \left. + a^2(1 + 8(-1 + \sqrt{1 - a^2})e^2 + 2n + n^2 + \mu^2) \right] \omega^2 + \\
 & \quad + \left[8e(-2a + 2a^2 e + \mu)(-ia^2(1 + n) - i(-1 + \sqrt{1 - a^2})(1 + n) \right. \\
 & \quad \left. + a(-1 + \sqrt{1 - a^2})\mu) \right] \omega + \\
 & \quad + \left[e(\mu(-2 - 4n - 2n^2 + e\mu) + 4a^4 e(2n + n^2 + \mu^2) + \right. \\
 & \quad \left. - 4a^3(1 + n^2 + (-1 - 2i\sqrt{1 - a^2})e\mu + \mu^2) + \right. \\
 & \quad \left. + n(2 - 2i\sqrt{1 - a^2}e\mu)) + \right. \\
 & \quad \left. - a^2(-2\mu(1 - 4i\sqrt{1 - a^2} + (2 - 4i\sqrt{1 - a^2})n + \right. \\
 & \quad \left. + n^2 + \mu^2) + e(8n + 4n^2 + \mu^2)) + \right. \\
 & \quad \left. + 4a(1 + n^2 - e\mu + i\sqrt{1 - a^2}\mu^2) + \right. \\
 & \quad \left. + n(2 + i\sqrt{1 - a^2}\mu^2)) \right] = 0 \quad (157)
 \end{aligned}$$

e

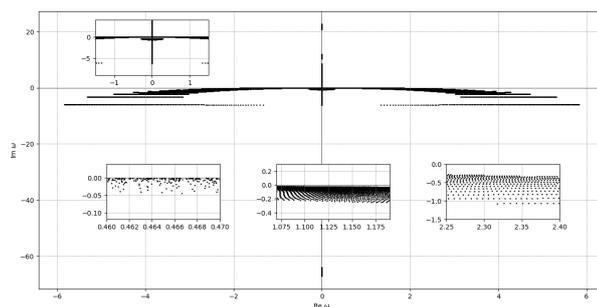
$$\begin{aligned}
 & 16(-1 + a^2) \omega^4 + (1 - a^2)(-16ae - 4(1 + n)^2 + 8e\mu) \omega^2 + \\
 & \quad + (1 - a^2)(-4a^2 e^2 - 4ae(1 + n)^2 \\
 & \quad + 4a^2 e^2(1 + n)^2 + 4ae^2\mu + 2e(1 + n)^2\mu - e^2\mu^2) = 0. \quad (158)
 \end{aligned}$$

As soluções das equações quárticas em ω apresentadas nas figuras 5, 6 e 7 foram plotadas no ω -plano complexo usando códigos em Python com funções da biblioteca de precisão arbitrária mpmath. Deste modo, o que o leitor está vendo nessas figuras é o resultado de uma sobreposição de raízes das quárticas (157) e (158) tomando valores sobre o espaço de parâmetros formado pela carga elétrica da partícula escalar $e \in [-1, 0]$ e pelo parâmetro de momento angular $a \in [0, 1]$ em intervalos de $\Delta e = 0.01$ e $\Delta a = 0.01$ com números quânticos $n = 0$ e μ variando. Cada um dos subplots dentro de cada figura representam uma região do ω -plano complexo magnificada para que a estrutura de raízes das quárticas seja evidenciada. É preciso frisar que a região de interesse da nossa análise é o 4º quadrante do ω -plano, no qual se encontram as

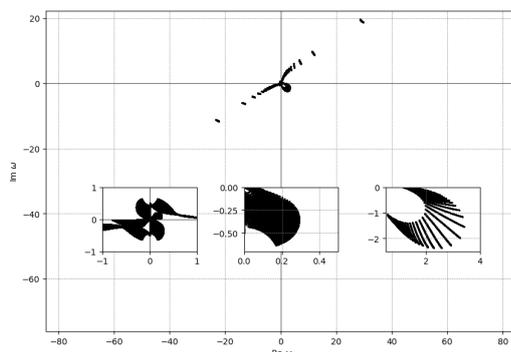
soluções estáveis da equação de Klein-Gordon-Fock. Nas figuras 5 e 6 encontramos 4 tipos morfológicamente distintos da estrutura de raízes do polinômio conforme ocorre a variação em μ . Nesse caso conseguimos encontrar tanto modos ω com parte real positiva quanto com parte imaginária negativa, mas, mesmo que alguns modos pareçam tocar o eixo real em alguns dos gráficos, a magnificação desses modos sempre demonstra a existência de uma pequena parte imaginária negativa. Isso pode ser visto no subplot à direita do gráfico da figura 6(a), na qual fixamos um valor para o produto da carga elétrica da partícula e do campo magnético, dado por $eB_0 = -0.5$, para cada $a \in [0,1]$ variando em intervalos de $\Delta a = 0.01$. A figura 7 gerada pela sobreposição de raízes de (158) apresenta uma estrutura morfológicamente mais simples, com apenas padrões em formato de cruz. Nesse caso, mesmo após a magnificação extrapolar a precisão numérica de 100 casas decimais que adotamos, não apareceu a presença de uma pequena parte imaginária nas soluções próximas ao eixo real, de modo que assumiremos que, de fato, essa equação algébrica possui valores puramente reais para o espectro. Deste modo, essas soluções representam ondas outgoing sem atenuamento no tempo $t \rightarrow +\infty$. Por completude, é interessante notar que a solução completa das equações de Euler-Lagrange do campo escalar na região de emissão de raios cósmicos ultrarelativísticos, dada pela equação (128), pode ser escrita de maneira mais geral em termos das soluções polinomiais inversas advindas das condições (246) imposta sobre a série assintótica (241) da ECH da através da seguinte combinação linear:

$$\psi = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,\mu,l} e^{i(\mu\varphi - \omega_{n,\mu}t)} J_{\mu} \left(\frac{K\mu l}{\theta_L} \theta \right) e^{\frac{\varepsilon}{2}x} x^{\frac{\gamma-1}{2}} (x-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \mathcal{P}_{n,\mu,l}^{\infty}(x), \quad (159)$$

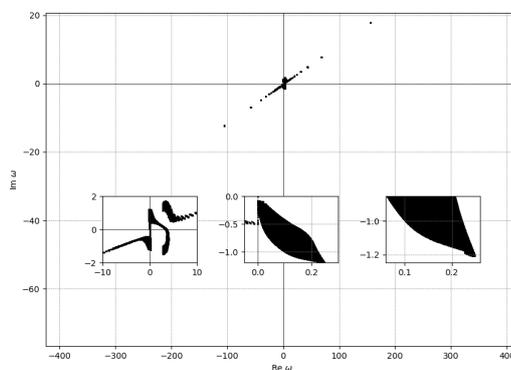
na qual $a_{n,\mu,l}$ são constantes e as funções polinomiais inversas geradas pelas equações (155) e (156) usando os parâmetros do buraco negro de Kerr-Papapetrou-Wald possuem a seguinte dependência $\mathcal{P}_{n,\mu,l}^{\infty} = \mathcal{P}_{n,\mu,l}^{\infty}(M, a, e, B_0, m; r)$ para cada um dos números quânticos n, μ e l . Note que, como discutido no Apêndice B, para construir as soluções do tipo \mathcal{P}_l^{∞} basta impor a condição polinomial (246) e usar as relações de recorrência de três-termos (242) para obter os coeficientes de cada solução polinomial inversa particular de ordem n .



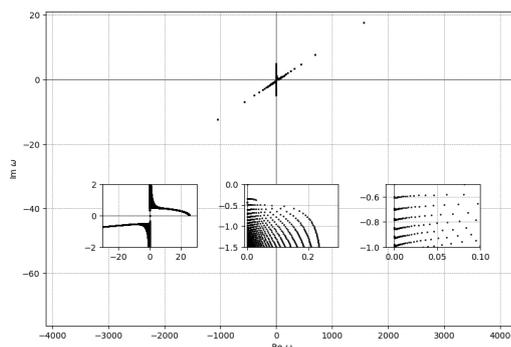
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5 – Espectro de energia ω para $n = 0$ e $\mu = \{0, 1, 5, 50\}$, correspondendo, respectivamente, às Figuras 5(a), (b), (c) e (d) para diferentes valores de $eB_0 \in [-1, 0]$ e $a/M \in [0, 1]$ calculado a partir da equação(157) usando intervalos numéricos $\Delta(eB_0) = 0.01$ e $\Delta(a/M) = 0.01$

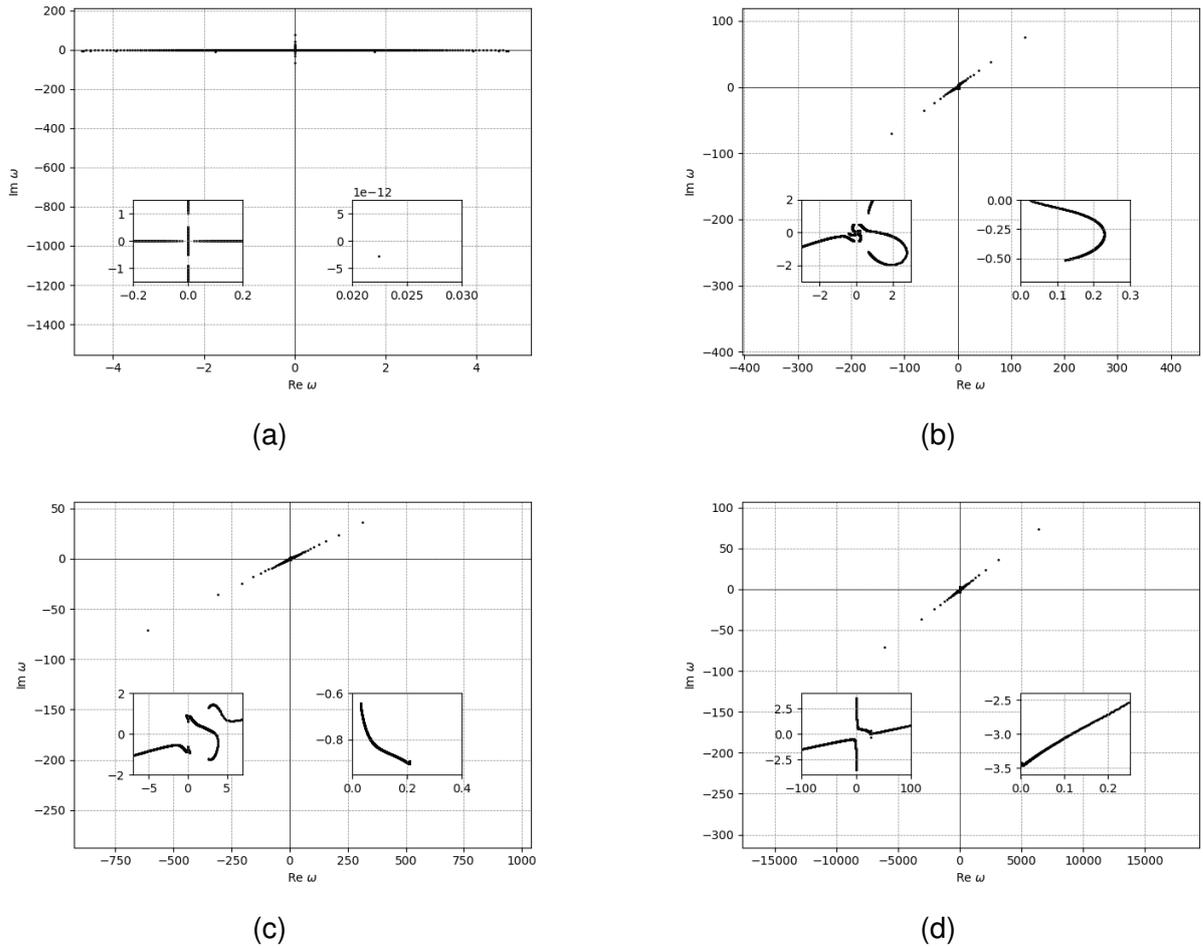


Figura 6 – Espectro de energia ω para $n = 0$ e $\mu = \{0, 1, 5, 50\}$, correspondendo, respectivamente, às figuras 6(a), (b), (c) e (d) para $eB_0 = -0.5$ e $a/M \in [0, 1]$ calculado a partir da equação(157) usando intervalos numéricos $\Delta(a/M) = 0.01$.

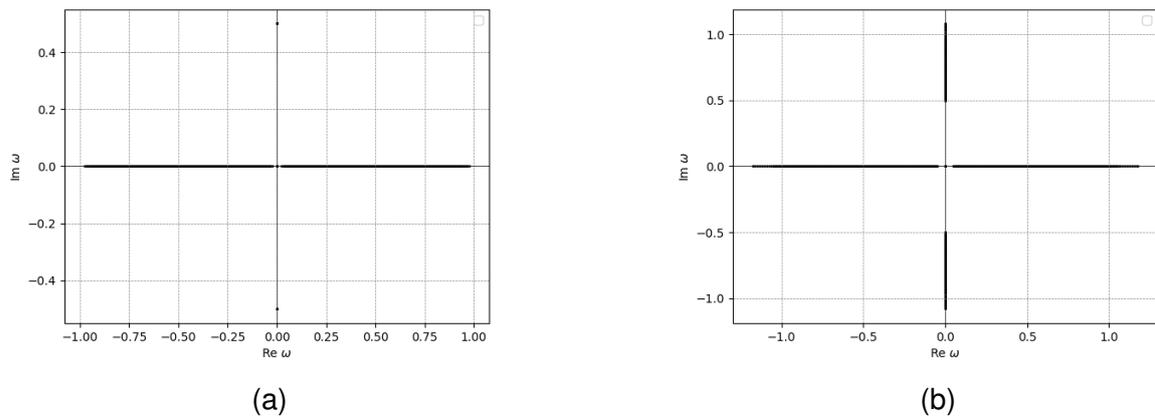


Figura 7 – Espectro de energia ω para $n = 0$ e $\mu = \{0, 1\}$, correspondendo, respectivamente, às figuras 7(a) e (b) para $eB_0 \in [-1, 0]$ e $a/M \in [0, 1]$ calculado a partir da equação(158) usando intervalos numéricos $\Delta(eB_0) = 0.01$ e $\Delta(a/M) = 0.01$. Nesse caso temos apenas modos ω puramente reais ou puramente imaginários.

4.2.1 Espectro de energia para os parâmetros de buracos negros em gamma-ray bursts e núcleos ativos de galáxias

Ainda nos referindo ao espectro de energia ω do campo escalar determinado pelas condições polinomiais (155) e (156), agora iremos calcular os estados de energia acessíveis à modos outgoing polinomiais do campo no caso mais realístico de píons de carga negativa π^- , cuja massa é dada por $m_{\pi^-} \approx 139.58 \text{ MeV}$, e para os parâmetros M, a e B_0 do buraco negro de Kerr e campo eletromagnético de Papapetrou-Wald associados ao GRB 190114C e ao núcleo ativo da galáxia M-87 (AGN- M-87), cujos valores dos parâmetros físicos podem ser encontrados em [62].

GRB 190114C, $\hat{M} = 4.4M_{\odot}$, $a/M = 0.4$ e $\hat{B}_0 = 4 \times 10^{10} \text{ G}$:

No caso do evento de gamma-ray-burst GRB 190114C podemos notar pela figura 8 que o espectro polinomial ω (agora em unidades de GeV) associado à condição (155) para diferentes valores dos números quânticos n e μ se distribui em uma região compacta da região de estabilidade (4º quadrante) do ω -plano mesmo quando calculamos 40000 níveis de energia, apesar desse espectro ainda se manter teoricamente discreto devido a sua dependência dos parâmetros inteiros n e μ .

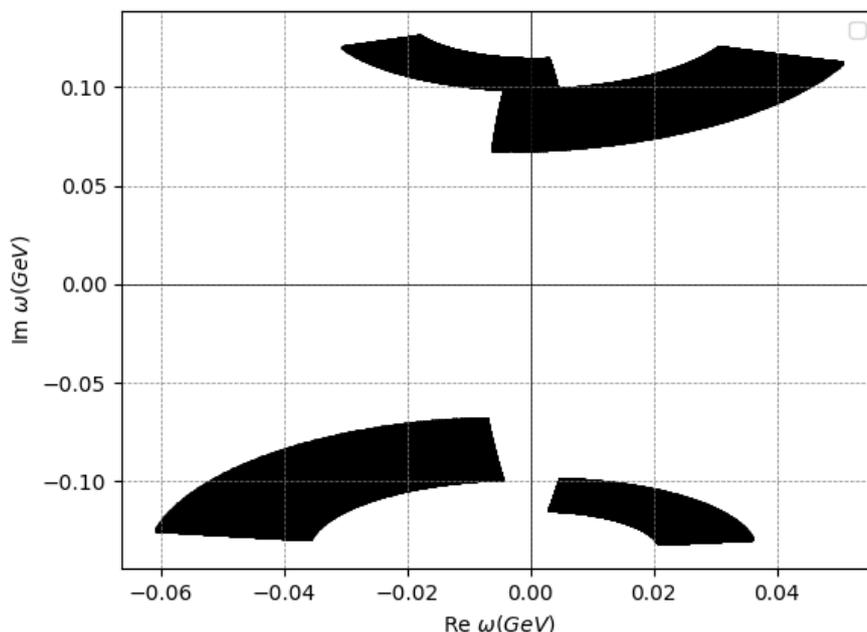
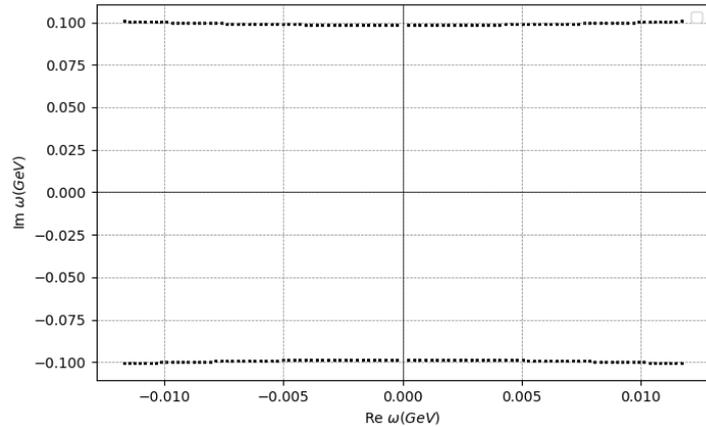
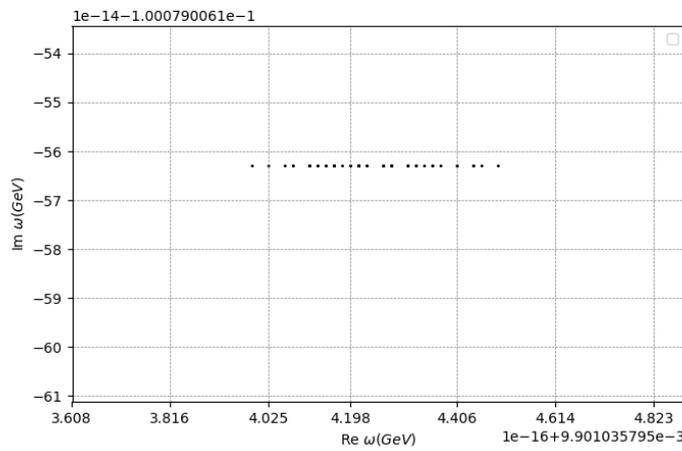


Figura 8 – Plot de raízes sobrepostas da equação quártica para ω complexo derivado da condição polinomial (155). Esse gráfico foi feito usando os parâmetros físicos do evento GRB 190114C e com os números quânticos assumindo valores $n \in \{0,1,\dots,200\}$ e $\mu \in \{0,1,\dots,200\}$, de modo que temos 40000 estados de energia expostos nessa figura. Note como os estados de energia do 4º quadrante do ω -plano se distribuem em uma região compacta nesse caso.

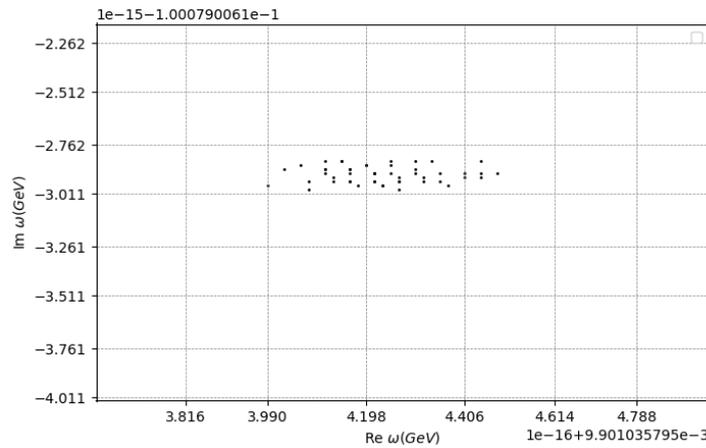
Já no caso da figura 9 é possível perceber que o espectro ω associado à condição polinomial (156) apresenta o interessante fenômeno de **estrutura fina**. Usamos esse termo aqui para nos referir aos estados de energia aglomerados em torno de uma certa região no 4º quadrante do ω -plano. Em outras palavras, é possível perceber que, apesar de parecer que a figura 9(a) possui uma distribuição em pontos razoavelmente paralelos ao eixo real, na verdade cada um desses pontos podem ser magnificados em algumas vezes para percebermos a estrutura fina em uma escala de ω mais refinada, conforme ilustrado para pontos distintos nas figuras 9(b) e 9(c).



(a)



(b)

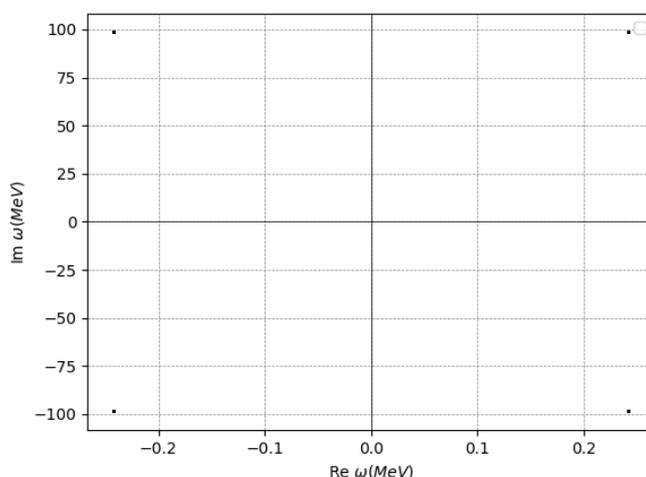


(c)

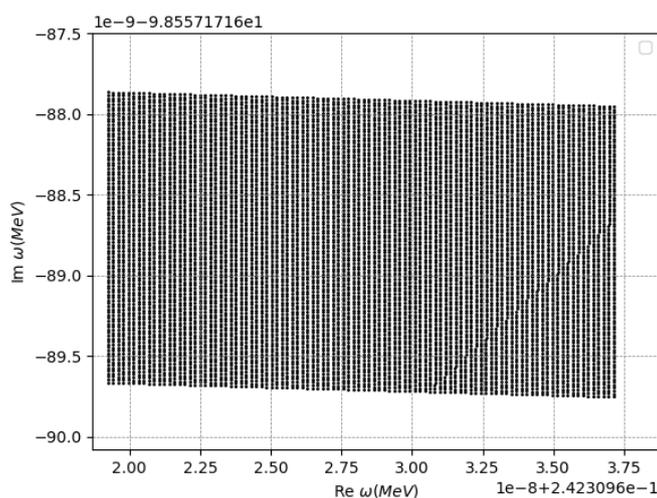
Figura 9 – Plot de raízes sobrepostas da equação quártica para ω complexo derivado da condição polinomial (156). Esse gráficos foram feitos usando os parâmetros físicos do evento GRB 190114C e com os números quânticos assumindo valores $n \in \{0,1,\dots,50\}$ e $\mu \in \{0,1,\dots,50\}$. Aqui a subfigura (a) representa todos os 2500 pontos plotados do espectro ω , enquanto que as subfiguras (b) e (c) representam a magnificação de dois pontos distintos da figura (a). Ao se realizar o experimento numérico, é possível perceber que todos os aparentes pontos da subfigura (a) possuem **estrutura fina** tal qual em (b) e (c).

AGN (M-87), $\hat{M} = 6 \times 10^9 M_{\odot}$, $a/M = 0.1$ e $\hat{B}_0 = 10G$:

Agora vamos discutir o espectro ω polinomial (em MeV) para o caso dos parâmetros físicos atribuídos ao núcleo ativo da galáxia M-87, na qual há a presença de um buraco negro supermassivo central cercado por um campo magnético relativamente fraco. Perceba que nesse caso o espectro é radicalmente diferente do que vimos para o GRB 190114C, apesar de também possuímos estrutura fina associada ao espectro ω gerado pela condição polinomial (155), de acordo com o que está ilustrado na figura 10 e na magnificação dos pontos do 4º quadrante na figura 10(b).



(a)

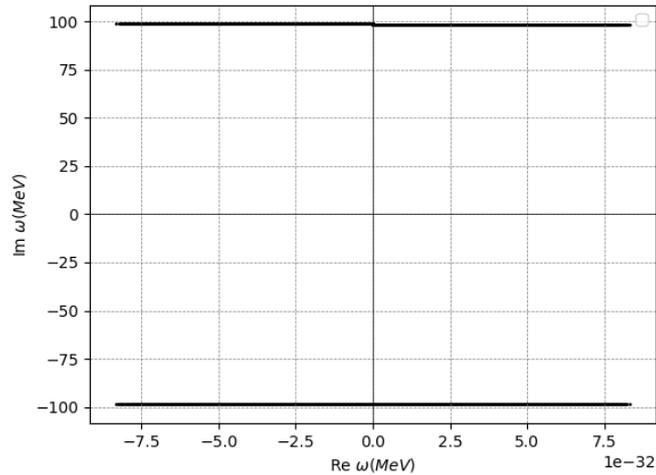


(b)

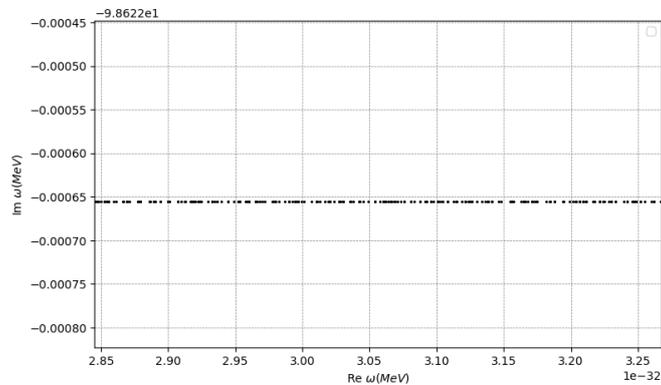
Figura 10 – Plot de raízes sobrepostas da equação quártica para ω complexo derivado da condição polinomial (155). Esse gráficos foram feitos usando os parâmetros físicos do AGN no centro da galáxia M-87 e com os números quânticos assumindo valores $n \in \{0,1,\dots,100\}$ e $\mu \in \{0,1,\dots,100\}$.

Alternativamente, podemos considerar o espectro ω decorrente da condição

polinomial (156) para o AGN-M-87 ilustrado na figura 11. Perceba que neste caso os estados de energia ω se distribuem de maneira que a sua parte imaginária se mantém relativamente constante, enquanto a parte real varia para diferentes valores de n e μ . Também é possível notar que a magnificação do 4º quadrante, ilustrado na figura 11(b), demonstra uma distribuição "granular" em uma linha horizontal para o espectro ω .



(a)



(b)

Figura 11 – Plot de raízes sobrespuestas da equação quártica para ω complexo derivado da condição polinomial (156). Esse gráficos foram feitos usando os parâmetros físicos do AGN no centro da galáxia M-87 e com os números quânticos assumindo valores $n \in \{0,1,\dots,100\}$ e $\mu \in \{0,1,\dots,100\}$.

4.3 FORMA DE SCHRÖDINGER DA EQUAÇÃO RADIAL

É interessante notar que a equação radial (132) também pode ser escrita na forma de uma equação Schrödinger, principalmente por conta da discussão a ser realizada na seção 5.1 acerca do potencial efetivo da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli. Para mostrar isso, vamos realizar uma transformação para coordenadas tortoise r_* , definidas por

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \quad (160)$$

e transformar a variável dependente da seguinte forma

$$\mathcal{Y}_{PW} = (r^2 + a^2)^{1/2} R. \quad (161)$$

Dessa maneira, podemos reescrever a equação radial(132) na forma

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + V_{\mu,l} \right) \mathcal{Y}_{PW} = 0 \quad (162)$$

na qual $V_{\mu,l}$ é um potencial efetivo dado por

$$V_{\mu,l}(r) = \frac{\Delta}{(r^2 + a^2)^3} \left[\Delta \left(\frac{3r^2}{r^2 + a^2} - 1 \right) - \Delta' r \right] + \frac{\Delta}{(r^2 + a^2)^2} \left[\frac{\left((r^2 + a^2)\omega - a\mu \right)^2}{\Delta} + 2a\omega\mu + \Lambda(r^2 + a^2) + 2e^2 M \left(aB_0 + \frac{Q}{2M} \right)^2 r - \left(\frac{\kappa_{\mu l}}{\theta_L} \right)^2 \right]. \quad (163)$$

Note que que no regime próximo ao horizonte de eventos externo ($r \approx r_+$) nas coordenadas de Boyer-Lindquist, o potencial efetivo (163) pode ser aproximado da seguinte forma,

$$V_{\mu,l}(r) = \left[\frac{(r^2 + a^2)\omega - a\mu}{r_+^2 + a^2} \right]^2; \quad r \rightarrow r_+, \quad (164)$$

de modo que a equação (162) nesse regime pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \left(\frac{(r^2 + a^2)\omega - a\mu}{r_+^2 + a^2} \right)^2 \right] \mathcal{Y}_{PW} = 0; \quad r \rightarrow r_+. \quad (165)$$

Assim, é possível perceber que a solução da equação (165) na vizinhança do horizonte de eventos r_+ deve ser dada por uma combinação linear de ondas outgoing e ingoing com relação ao horizonte da seguinte forma,

$$R \sim A^{out} e^{i \left[\frac{(r^2 + a^2)\omega - a\mu}{r_+^2 + a^2} \right] r_*} + A^{in} e^{-i \left[\frac{(r^2 + a^2)\omega - a\mu}{r_+^2 + a^2} \right] r_*}, \quad r \rightarrow r_+ (r_* \rightarrow -\infty), \quad (166)$$

na qual as constantes A^{out} e A^{in} acompanham a solução outgoing e ingoing, respectivamente. Desta maneira, podemos inferir que a dinâmica do campo muito próxima

do horizonte não depende do parâmetro físico B_0 relacionado ao campo magnético do nosso modelo quando consideramos aproximações do campo escalar em ordem baixa. Na verdade, é possível comparar essa expressão com a solução em torno do horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr sem campo magnético ($B_0 = 0$) para ver que as soluções são idênticas e, deste modo, a taxa de criação de radiação Hawking na vizinhança do horizonte calculada na subseção 5.3.1 para o buraco negro de Kerr deve ser idêntica à taxa de radiação Hawking para o caso do buraco negro de Kerr-Papapetrou-Wald quando usamos o método de Damour-Ruffini-Sannan a ser apresentado na seção 5.1.

As figuras 12 e 13 abaixo ilustram qual é a forma tomada pelo potencial efetivo $V_{\mu,l}$ quando tomamos novamente os parâmetros físicos do evento GRB 190114C para o caso do pión negativo π^- em uma região extremamente próxima do eixo de rotação do buraco negro ($\theta_L \sim 10^{-11}$). Nessas figuras, é possível perceber que cada modo de energia do campo está sujeito a um potencial diferente e, se a interpretação de equação de Schrödinger com potencial efetivo for tomada literalmente, então os potenciais efetivos das figuras 12 e 13 devem permitir estados ligados, uma vez que possuem um valor mínimo.

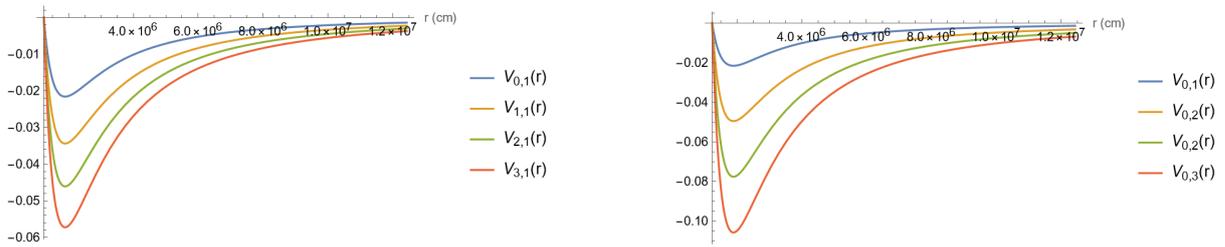


Figura 12 – Potencial efetivo $V_{\mu,l}$ do pión negativo π^- para alguns valores dos números quânticos μ e l com ω tomando valores pequenos ($\approx 1.5 m_{\pi^-}$), $M = 4.4M_{\odot}$, $a/M = 0.4$, $\hat{B}_0 \sim 10^{10}G$ e ângulo limite $\theta_L \sim 10^{-11}$ (região de emissão de raios cósmicos ultrarelativísticos).

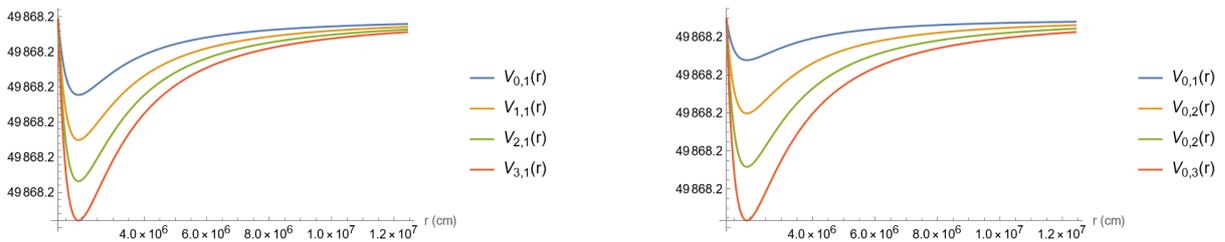


Figura 13 – Potencial efetivo $V_{\mu,l}$ do pión negativo π^- para alguns valores dos números quânticos μ e l com a energia ω tomando valores grandes ($\gtrsim 10^6 m_{\pi^-}$), $M = 4.4M_{\odot}$, $a/M = 0.4$, $\hat{B}_0 \sim 10^{10}G$ e ângulo limite $\theta_L \sim 10^{-11}$ (região de emissão de raios cósmicos ultrarelativísticos).

5 MAIS SOBRE CAMPOS QUÂNTICOS NO ENTORNO DE BURACOS NEGROS: RADIÇÃO HAWKING, GREYBODY FACTOR E ESPECTRO POLINOMIAL PARA EQUAÇÕES MESTRE

Neste capítulo iremos explorar alguns aspectos de equações de onda e suas soluções nos espaços-tempo de buracos negros de Schwarzschild e Kerr. Como se sabe, soluções de equações de campo como para escalares, spinores, vetores e tensores de rank-2 são representantes abstratos das partículas do modelo padrão. Também já é sabido desde o artigo seminal de S. Hawking[52] que buracos negros devem emitir radiação em uma distribuição de corpo negro associada a uma certa temperatura fixa. Deste modo, iremos investigar, no que segue, exclusivamente equações de onda cujas condições de contorno correspondem a emissão de radiação Hawking do horizonte de eventos externo dos buracos negros até um observador no infinito. Para fazer isso, lançaremos mão do método de Damour-Ruffini-Sannan[16,17] para calcular o número médio de partículas Hawking criadas por unidade de tempo para cada modo de vibração dos campos que estudaremos no horizonte de eventos, assim como utilizaremos o *método do Wronskiano* para calcular a probabilidade de tunelamento desses modos através do potencial efetivo gerado pelos campos externos ao horizonte de eventos para um observador no infinito, ou seja, o *greybody factor*.

Inicialmente, na seção 5.1, iremos exemplificar como a taxa de emissão Hawking pode ser calculada pelo método de Damour-Ruffini-Sannan usando a equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli que permite descrever campos de spin $s = 0, 1$ e 2 no espaço-tempo de Schwarzschild, assim como calculamos o espectro de energia dos campos quânticos associado as soluções polinomiais inversas, as quais já foram melhor expostas no capítulo precedente e no Apêndice B.

Na seção 5.2 discutimos melhor o conceito de greybody factor e de que maneira podemos adaptar o método do Wronskiano empregado em [18] para o nosso caso em que os espaços-tempo são assintoticamente planos através do uso de funções racionais chamadas de aproximantes de Padé para realizar a continuação analítica da série assintótica da equação confluyente de Heun (241). Dessa forma, conseguimos estabelecer alguns resultados preliminares interessantes, apesar de imperfeitos, os quais indicam que métodos de continuação analítica mais avançados apresentados em [30-33] podem fornecer uma maneira de calcular o greybody factor de maneira exata e com precisão arbitrária em trabalhos futuros.

Por fim, na seção 5.3 utilizamos a equação mestre de Teukolsky para estudar campos de spin $s = 0, \pm 1/2, \pm 1$ e ± 2 no espaço-tempo de Kerr. Deste modo, procedemos com o cálculo da taxa de emissão de radiação Hawking por um buraco negro em rotação pelo método de Damour-Ruffini-Sannan de maneira análoga a executada na seção precedente 5.1 para, em seguida, investigarmos o comportamento do espectro

de energia a partir da imposição da condição polinomial inversa analogamente ao que foi feito nas seções 4.2 e 5.1. Dessa maneira, terminamos a seção 5.3 demonstrando como o autovalor da equação angular de Teukolsky pode ser obtido de maneira exata e com precisão arbitrária, de acordo com cálculos análogos realizados em [18].

5.1 RADIAÇÃO HAWKING PELO MÉTODO DE DAMOUR-RUFFINI-SANNAN

Em 1975, Stephen Hawking foi o primeiro a calcular a radiação que deveria ser emitida por buracos negros. Para tanto, ele se valeu de um procedimento altamente dependente do processo de colapso gravitacional e do formalismo de segunda quantização dos campos emitidos. Segundo o cálculo de Hawking, existe um desacordo entre os estados de vácuo observados por um observador no horizonte de eventos e um observador assintoticamente distante do buraco negro. Deste modo, em virtude da curvatura do espaço-tempo no horizonte de eventos ser diferente da curvatura do espaço-tempo plano no infinito, o observador no infinito irá medir o estado de vácuo do observador no horizonte como sendo um estado populado por partículas em uma distribuição Planckiana [3], [10], [52]. Desde então, novos desenvolvimentos analíticos e interpretações do processo de evaporação de buracos negros foram criados [24-26], com muitos destes levando a procedimentos de cálculo mais concisos, ao passo que também concordam numericamente com os resultados obtidos por Hawking.

No presente caso, iremos utilizar um método desenvolvido por T. Damour e R. Ruffini e posteriormente aperfeiçoado por S. Sannan. Esse método foi construído com base em uma interpretação de tunelamento de funções de onda através de uma barreira classicamente proibida e faz uso apenas de uma transformação de coordenadas relativamente simples para a métrica de buracos negros, na qual apenas o horizonte de eventos futuro é levado em consideração [16], [53]. Esse método foi então aperfeiçoado em [17] ao se demonstrar a íntima conexão entre a estatística de partículas bosônicas e fermiônicas e as suas distribuições espectrais obtidas através das amplitudes de probabilidade relativa calculadas através do método de Damour e Ruffini.

5.1.1 Equação de mestre de Regge-Wheeler-Zerilli no espaço-tempo de Schwarzschild

Para exemplificar o que foi exposto acima, iremos primeiro calcular a radiação Hawking emitida para o caso mais simples de campos sem massa de spin $s = 0, 1$ e 2 no exterior de um buraco negro sem momento angular. Isso pode ser feito com o auxílio da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli (para uma dedução completa dessa equação mestre ver [36, Apêndice A]), que descreve perturbações lineares da métrica desse buraco negro devido a ação desses campos de spin s . Neste caso, a métrica usada é a de Schwarzschild, dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi. \quad (167)$$

na qual M é a massa do buraco negro e o sistema de unidades usado assume $G = c = \hbar = 1$.

A equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli é dada por,

$$f(r) \frac{d}{dr} \left(f(r) \frac{d}{dr} R(r) \right) + (\omega^2 - V_s) R(r) = 0 \quad (168)$$

com

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad V_s(r) = f(r) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - (1-s^2) \frac{2M}{r^3} \right). \quad (169)$$

É possível demonstrar que essa equação se transforma em uma equação do tipo Schrödinger quando efetuamos a transformação da coordenada radial para coordenadas tortoise, dadas por

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{1}{f} \Leftrightarrow r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (170)$$

Dessa maneira, a equação correspondente na coordenada r_* é dada por

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - V_s \right) R = 0. \quad (171)$$

Essa equação nos permite interpretar a emissão de radiação Hawking pelo buraco negro de Schwarzschild como o tunelamento de uma função de onda através do potencial efetivo V_s . Podemos perceber através da figura 14 que os potenciais efetivos devem oferecer resistência à emissão das partículas criadas no horizonte de eventos, representadas por ψ , até um observador distante do buraco negro.

Também é possível mapear a equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli(168) na equação confluyente de Heun. Para isso, basta fazer a transformação para coordenadas adimensionais $z = r/(2M)$ e a seguinte transformação na variável dependente:

$$R(z) = z^{1+s} (z-1)^{-2iM\omega} e^{2iM\omega z} y(z). \quad (172)$$

Deste modo, a equação de Regge-Wheeler-Zerilli é mapeada na equação confluyente de Heun na forma canônica, dada por

$$y''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \varepsilon \right) y'(z) + \frac{\alpha z - q}{z(z-1)} y(z) = 0 \quad (173)$$

com

$$q = l(l+1) - s(s+1) + 4iM\omega(1+2s), \quad \alpha = (4M\omega)^2 + 4iM\omega(1+s), \quad (174)$$

$$\gamma = 1 + 2s, \quad \delta = 1 - 4iM\omega, \quad \varepsilon = 4iM\omega. \quad (175)$$

Uma partícula Hawking criada pela interação das flutuações do vácuo quântico com o horizonte de eventos de um buraco negro tem tanto a possibilidade de ser enviada a um observador assintoticamente distante do horizonte (representada por uma onda outgoing) quanto a possibilidade de ser refletida pela barreira de potencial externa ao buraco negro e ser reabsorvida (representada por uma onda ingoing) [18]. Deste modo, a forma de representar matematicamente a condição de contorno obedecida por uma partícula Hawking na vizinhança do horizonte de eventos do buraco negro deve ser dada por [64]

$$R(r) \sim C_1(r - r_h)^{\frac{1-\delta}{2}} + C_2(r - r_h)^{-\frac{(1-\delta)}{2}} \quad (176)$$

Portanto, considerando apenas a parte temporal e radial, as soluções ingoing e outgoing no horizonte externo são dadas por

$$\psi_{in} = e^{-i\omega t} (r - r_h)^{-\frac{(1-\delta)}{2}} \quad (177)$$

$$\psi_{out}(r > r_h) = e^{-i\omega t} (r - r_h)^{\frac{1-\delta}{2}}. \quad (178)$$

A solução outgoing não é analítica no horizonte de eventos $r_h = 2M$. Assim, de acordo com o método desenvolvido por T.Damour e R.Ruffini em [16], podemos fazer a continuação analítica da solução outgoing de fora do horizonte de eventos para o seu interior ao fazer uma rotação de $-\pi$ sobre o plano complexo formado pela variável r , ou seja,

$$(r - r_h) \rightarrow |r - r_h| e^{-i\pi} = (r_h - r) e^{-i\pi} \quad (179)$$

Logo, a solução outgoing imediatamente no interior do horizonte de eventos $r = r_+$ é dada por

$$\psi_{out}(r < r_h) = e^{-i\omega t} \left[(r_h - r) e^{-i\pi} \right]^{\frac{1-\delta}{2}}, \quad (180)$$

dessa forma, a probabilidade relativa de espalhamento é dada por

$$\rho_\omega = \left| \frac{\psi_{out}(r > r_h)}{\psi_{out}(r < r_h)} \right|^2 = e^{2i\pi(1-\delta)} = e^{-8\pi M\omega}. \quad (181)$$

Uma vez que todos os campos considerados na equação de Regge-Wheeler-Zerilli possuem spin s inteiro, podemos considerar o argumento heurístico de Sannan[17] para calcular o número médio de partículas bosônicas que devem ser criadas na vizinhança do horizonte de eventos no modo de frequência ω por unidade de tempo, dado por

$$\bar{N}_\omega = \frac{\Gamma_\omega}{e^{8\pi M\omega - 1}}. \quad (182)$$

É importante frisar que essa é exatamente a distribuição espectral obtida por Hawking em [52] para bósons sendo emitidos por um buraco negro de Schwarzschild. Podemos perceber que o espectro é de corpo negro a menos de um fator Γ_ω que é determinado pela interação dos modos de frequência ω outgoing dos campos com o potencial efetivo gerado pelo campo gravitacional e eventuais campos eletromagnéticos externos ao horizonte de eventos que o buraco negro possa possuir em situações mais gerais, por isso ele leva o nome de *greybody factor*. Deste modo, essa quantidade pode ser interpretada como a probabilidade de tunelamento de uma partícula Hawking de energia ω através da barreira de potencial externa a um buraco negro até um observador no infinito(muito longe do buraco negro).

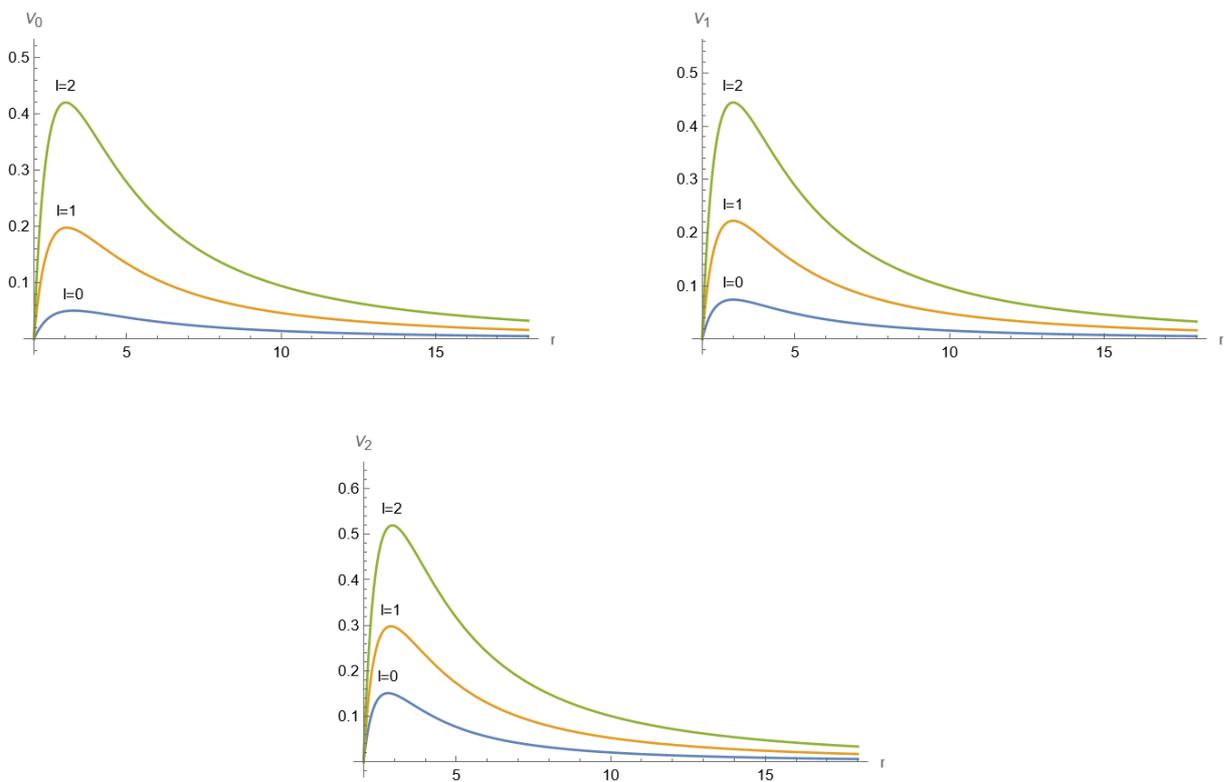


Figura 14 – Potenciais efetivos V_s da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli para $s = 0,1$ e 2 vs variável radial r , com r partindo do horizonte de eventos $r_h = 2M$ e dado em unidades de r_h .

5.1.2 Soluções polinomiais inversas da equação de Regge-Wheeler-Zerilli a partir da solução assintótica da ECH

Para encontrar soluções da equação de Regge-Wheeler-Zerilli no infinito, podemos usar as condições polinomiais (246) para a solução assintótica da ECH expostas no Apêndice B, de modo que, substituindo os parâmetros da equação confluyente de Heun (233) pelos parâmetros físicos do modelo dessa seção na segunda das equações em (246), ficaremos com uma equação algébrica de segundo grau em ω dada

por:

$$\omega^2 + \frac{i}{2M}(n+1)\omega - \frac{(n+1)^2 - s^2}{16M^2} = 0, \quad (183)$$

cuja solução é dada por,

$$\omega_{n,s} = -i \left[\frac{(n+1) \pm s}{4M} \right]. \quad (184)$$

Ou seja, nesse caso, todas as soluções polinômiais inversas \mathcal{P}_l^∞ descritas no apêndice B possuem espectro de energia puramente imaginário negativo. Dessa forma, todos os modos polinômiais inversos dos campos devem sofrer atenuamento conforme $t \rightarrow \infty$. Deste modo, a solução mais geral da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli escrita em termos de polinômios inversos pode ser dada por,

$$R_s(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{P}_{n,s}^\infty(r) \quad (185)$$

com a_n sendo constantes quaisquer e $\mathcal{P}_{n,s}^\infty$ representando soluções polinômiais inversas particulares com os números quânticos n e s advindos solução da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli colocados em evidência.

5.2 GREYBODY FACTOR

Existe uma vasta miríade de métodos dedicados ao cálculo do greybody factor. No que diz respeito a espaços-tempo do tipo Kerr ou Kerr-de Sitter, a grande maioria desses métodos recorrem a aproximações em regimes de alta/baixa frequência ou de rotação lenta, como as aproximações WKB ou eikonal no limite de altas frequências [49]. No entanto, recentemente em [18,19], os autores aplicaram com sucesso aquilo que chamaram de método da *função de Heun local* ou *método do Wronskiano* para calcular observáveis como modos quasinormais e greybody factor relacionados às equações de Teukolsky no espaço-tempo de Kerr-Newmann-de Sitter de maneira exata, sem qualquer restrição sobre os parâmetros do modelo e com precisão arbitrária. A partir do que foi exposto nesses artigos, se as equações angular e radial do problema em questão podem ser transformadas na equação de Heun esse método se mostra bastante simples e direto quando comparado ao formalismo de Mano-Suzuki-Takasugi [20-23]. Contudo, se estivermos lidando com um buraco negro da família Kerr-Newman, i.e., sem constante cosmológica e, portanto, assintoticamente plano a aplicação desse método não é tão direta. Isso acontece pois, no limite de $\Lambda \rightarrow 0$, a equação de Heun que é a equação radial do problema de Kerr-de Sitter passa pelo processo de confluência de uma de suas singularidades com o ponto no infinito e se transforma em uma equação confluyente de Heun. A princípio, isso deveria ser problemático para a aplicação do método da função de Heun local pois a equação confluyente

de Heun possui uma singularidade irregular no infinito, em contraste com a equação de Heun que possui 4 singularidades regulares. Deste modo, a expansão da solução da equação confluyente de Heun em séries assintóticas em torno infinito se torna divergente. Todavia, como discutimos no Apêndice B, é possível extrair informação relevante dos coeficientes dessas séries e, por conseguinte, séries divergentes não são necessariamente inúteis.

No que segue, apresentamos uma nova proposta para calcular o greybody factor para campos no entorno buracos negros através de adaptações do método da função de Heun local. Esse cálculo será feito apenas para campos no espaço-tempo de Schwarzschild por questão de simplicidade e porque possuímos limites inferiores analíticos bem estabelecidos para o greybody factor nesse caso [35]. Porém, para começar a demonstrar nosso método adaptado, vamos antes atentar aos seguinte fatos:

Perceba que a equação radial (132) está escrita na forma auto-adjunta. Dessa maneira é possível realizar uma simples manipulação para encontrar que

$$\Delta W[R_1, R_2] = cte \quad (186)$$

para quaisquer duas soluções R_1 e R_2 , com $W[R_1, R_2]$ sendo o Wronskiano entre elas. Como estamos lidando com o processo de emissão de radiação Hawking por horizontes de eventos até um observador distante do buraco negro, as condições de contorno naturais para estudar esse processo devem ser dadas pela combinação linear de ondas outgoing e ingoing na vizinhança do horizonte, representadas, respectivamente, pelo comportamento dominante das soluções que acompanham as constantes D^{up} e D^{ref} , assim como pelo requisito de que haja uma onda outgoing transmitida ao observador no infinito, representada pelo comportamento dominante da solução assintótica (241) que acompanha a constante D^{trans} (para mais detalhes sobre as condições de contorno ver [18]). Assim, as condições de contorno de emissão de radiação Hawking do horizonte de eventos $r = r_+$ até o infinito podem ser matematicamente representadas por,

$$R(r) \sim \begin{cases} D^{up}(r - r_h)^{\frac{1-\delta}{2}} + D^{ref}(r - r_h)^{-\frac{1-\delta}{2}}, & r \rightarrow r_h \\ D^{trans} \frac{e^{\frac{\epsilon}{2}z} z^{\frac{\gamma+\delta}{2} - \frac{\alpha}{\epsilon}}}{z}, & r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (187)$$

com os parâmetros representados por letras gregas acima sendo os mesmos parâmetros da equação confluyente de Heun que descreve as equações de onda. Como o potencial efetivo obedece $V_s^*(r) = V_s(r)$, pela equação (171), o complexo conjugado de R deve ser outra solução linearmente independente da equação radial, cujas condições de contorno relacionadas são dadas por,

$$R^*(r) \sim \begin{cases} D^{up*}(r-r_h)^{-\frac{1-\delta}{2}} + D^{ref*}(r-r_h)^{\frac{1-\delta}{2}}, & r \rightarrow r_h \\ D^{trans*} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{2}z} z^{-\left(\frac{\gamma+\delta}{2}-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)}}{z}, & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (188)$$

Deste modo, se $r \rightarrow r_h$, temos

$$W[R(r), R^*(r)] = -(1-\delta)(D^{up} D^{up*} - D^{ref} D^{ref*})(r-r_h)^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta W[R(r), R^*(r)] = -(1-\delta) r_h (D^{up} D^{up*} - D^{ref} D^{ref*})$$

e se $r \rightarrow \infty (z \rightarrow \infty)$,

$$\Delta W[R(r), R^*(r)] = -2\varepsilon r_h D^{trans} D^{trans*}.$$

Logo, pela equação (186)

$$\lim_{r \rightarrow r_h} \Delta W[R(r), R^*(r)] = \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta W[R(r), R^*(r)]$$

Portanto, arrumando os termos para que representem amplitudes de probabilidade normalizadas teremos o coeficiente de reflexão da radiação Hawking, \mathcal{R} , e o coeficiente de transmissão da radiação a um observador no infinito, \mathcal{T} ,

$$1 = \frac{D^{ref} D^{ref*}}{D^{up} D^{up*}} + \left(\frac{2\varepsilon}{1-\delta} \right) \frac{D^{trans} D^{trans*}}{D^{up} D^{up*}}, \quad (189)$$

com

$$\mathcal{R} = \frac{D^{ref} D^{ref*}}{D^{up} D^{up*}} = \left| \frac{W_x[y_1^\infty, y_1]}{W_x[y_1^\infty, y_2]} \right|^2 \quad (190)$$

$$\mathcal{T} = \left(\frac{2\varepsilon}{1-\delta} \right) \frac{D^{trans} D^{trans*}}{D^{up} D^{up*}} = \Gamma_\omega. \quad (191)$$

Assim, conseguimos uma expressão para o greybody factor em termos dos Wronskianos entre soluções locais da equação confluyente de Heun,

$$\Gamma_\omega = \left(\frac{2\varepsilon}{1-\delta} \right) \left| \frac{W_x[y_1, y_2]}{W_x[y_1^\infty, y_2]} \right|^2. \quad (192)$$

A quantidade acima é, finalmente, o greybody factor que queríamos calcular, a qual representa a probabilidade de um modo de frequência outgoing, ω , de radiação Hawking criada no horizonte de eventos tunelar através da barreira de potencial externa ao buraco negro e atingir um observador assintoticamente distante do horizonte.

5.2.1 Matching dos coeficientes de conexão com as constantes D^{up} , D^{ref} e D^{trans}

Aqui iremos demonstrar como as constantes D^{up} , D^{ref} e D^{trans} se relacionam com os coeficientes de conexão (256) e (260) da equação confluyente de Heun discutidos no Apêndice B. Voltando às condições de contorno (187), temos

$$R(r) \sim \begin{cases} D^{up}(r-r_h)^{\frac{1-\delta}{2}} + D^{ref}(r-r_h)^{-\frac{1-\delta}{2}}, & r \rightarrow r_h \\ D^{trans} \frac{e^{\frac{\epsilon}{2}z} z^{\frac{\gamma+\delta}{2}-\frac{\alpha}{\epsilon}}}{z}, & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (193)$$

Uma vez que a solução radial da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli pode ser representada por soluções locais da equação confluyente de Heun, podemos escrever a solução $R(r)$ em termos das soluções y_1, y_2 e y_1^∞ do Apêndice B (aqui representadas, respectivamente, por R_1, R_2 e R_1^∞) cujo comportamento assintótico dominante sugere que

$$R(r) \sim \begin{cases} D_{11}R_1(r) + D_{12}R_2(r), & r \rightarrow r_h \\ R_1^\infty(r), & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (194)$$

Assim, podemos encontrar a relação entre as constantes em (193) e os coeficientes de conexão em (194) ao igualar ambas as condições de contorno para solução $R(r)$ quando $r \rightarrow r_+$ e $r \rightarrow \infty$, portanto

$$D^{up} = e^{B_1} D_{11}, \quad D^{ref} = e^{B_1} D_{12}, \quad D^{trans} = 1. \quad (195)$$

5.2.2 Uso heurístico de aproximantes de Padé para o cálculo de greybody factors de campos quânticos no buraco negro de Schwarzschild em comparação com o limite inferior exato.

Nesta subseção iremos apresentar resultados preliminares de uma linha de investigação ainda em andamento, de modo que o exposto a seguir consiste em uma tentativa exploratória bem motivada por novos métodos de continuação analítica de séries de potências divergentes. Deste modo, aqui iremos fazer o uso heurístico de aproximantes de Padé para calcular o greybody factor de partículas de spin $s = \{0,1\}$ e frequência $\omega \in \mathbb{R}^+$ a partir da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli. Como mencionado no Apêndice B, aproximantes de Padé de séries de potência possuem a propriedade de *extrapolação* e *aceleração de convergência* quando aplicados à séries de potência convergentes e, com frequência, podem ser usados para aproximar séries divergentes/assintóticas do seu valor "correto". Para mais detalhes sobre a motivação por trás do uso essa função, sugerimos a leitura de [36,apêndice C] e [48]. A seguir, iremos apenas fazer algumas ponderações acerca dos resultados encontrados através de experimentos numéricos usando aproximantes de Padé, discutiremos porque

esse método falha em certos regimes de frequência e argumentaremos porque esses resultados indicam que a continuação analítica das soluções locais da ECH usando *extrapolação ressurgente* pode levar a uma aproximação para o greybody factor com maior grau de precisão numérica. Para nos orientar na seguinte exposição usaremos um resultado já estabelecido em [35] para o limite inferior do greybody factor Γ_{ω}^{Bound} de partículas no espaço-tempo de Schwarzschild, dado por

$$\Gamma_{\omega}^{Bound} \geq \operatorname{sech}^2 \left[\frac{2l(l+1) + (1-s^2)}{8M\omega} \right] \quad (196)$$

Por simplicidade, podemos escrever o greybody factor calculado acima como,

$$\Gamma_{\omega} = 1 - \mathcal{R}. \quad (197)$$

Usando aproximantes de Padé para extrapolar as soluções da ECH além do seu raio de convergência, temos

$$\Gamma_{\omega} = 1 - \left| \frac{W_x[y_1^{\infty[N/M]}, y_1^{[N/M]}]}{W_x[y_1^{\infty[N/M]}, y_2^{[N/M]}]} \right|^2 \Bigg|_{z=z_0, \omega \in \mathbb{R}^+} \quad (198)$$

Aqui as funções do tipo $y_i^{[N/M]}(z)$ são os aproximantes de Padé diagonais de ordem $[N/M]$ das séries de potências y_i (ver definição dessa função em [36, Apêndice C]), z_0 é qualquer ponto no intervalo real $(1^+, \infty)$ e, nesse trabalho, vamos nos restringir a valores de ω na semi-reta positiva \mathbb{R}^+ . Aqui iremos escolher o ponto $z_0 = 8$, em linha com o conhecimento já consolidado em [36] acerca do uso de aproximantes de Padé para o cálculo de modos quasinormais da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli. Nesse artigo, os autores são capazes de calcular os modos quasinormais com concordância de até 30 casas decimais usando aproximantes de Padé de ordem $[60/60]$ quando comparados com o método mais antigo e estabelecido de Leaver[37], que usa frações continuadas para resolver problemas de conexão em EDO's lineares.

Sem mais delongas, vamos discutir brevemente o resultado dos experimentos numéricos realizados para o cálculo do greybody factor Γ_{ω} em (198) e seu limite inferior exato Γ_{ω}^{Bound} , dado por (196), no caso de $s = 0,1$ e $l = 0,1,2,3,4$ e 5, conforme ilustrado nos gráficos da figura 2 e figura 3. Nesses casos, podemos perceber quatro comportamentos notáveis que elencamos pelo nome de características: 1. em todos esses gráficos é possível perceber uma anomalia numérica conforme ω se aproxima de zero, ou seja, no regime de baixas frequências; 2. no regime de altas frequências Γ_{ω} sempre concorda com Γ_{ω}^{Bound} para qualquer valor de s e l , em outros termos, ambos preveem que o potencial efetivo é transparente para partículas de alta energia; 3. fora do regime de baixas frequências, o greybody factor concorda com a normalização imposta em (189), i.e, temos $0 \leq \Gamma_{\omega} \leq 1$, como é de se esperar de uma quantidade

probabilística; 4. Γ_ω sempre cumpre a condição imposta por Γ_ω^{Bound} para $l \geq 3$ em ambos os casos de $s = 1$ e 2 .

Posto isso, é possível perceber que o que temos em mãos é, de fato, um método plausível para resolver problemas de conexão de dois pontos envolvendo soluções locais da ECH. As características 2.,3. e 4. enunciadas acerca dos gráficos deixam evidente que o método do Wronskiano combinado com as soluções locais representadas em termos de aproximantes de Padé observa vários requisitos teóricos necessários ao valor verdadeiro do greybody factor (preservação da interpretação probabilística e observância do limite inferior Γ_ω^{Bound} no regime de altas frequências e valores altos de l) para cada frequência $\omega \in \mathbb{R}^+$ e que, no mínimo, esse método funciona bem para altas frequências.

Ainda temos o que comentar sobre a anomalia evidenciada na característica 1. dos gráficos. Aqui conjecturamos que essa falha de aproximação acontece pois até mesmo a função transformada de Borel (252) (discutida no Apêndice B) da série assintótica y_1^∞ tem seu raio de convergência tendendo a zero conforme a massa M do buraco negro ou a frequência real positiva ω tendem a zero no p -plano de Borel. Em outros termos, podemos calcular o raio de convergência \mathcal{R}_c da transformada de borel $B(p) = \mathcal{L}^{-1}\{x^{\frac{\alpha}{\varepsilon}-1} y_1^\infty\}(p)$ através da solução assintótica da relação de recorrência de três termos (250) da seguinte maneira,

$$\left| \frac{n!}{(n+1)!} \frac{b_{n+1}}{b_n} p \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} p \right| < 0 \implies |p| < |\varepsilon| \quad (199)$$

e portanto temos $\mathcal{R}_c = |\varepsilon| = 4M\omega$. Deste modo, é possível perceber que a conjectura que fazemos para explicar a característica 1. está fundamentada na evidente perda de informação analítica acerca da função $B(p)$ no plano de Borel no limite de $M\omega \rightarrow 0$. Esse defeito deverá ser sanado em um trabalho posterior utilizando o método de extrapolação ressurgente de Padé-Borel-Uniformizante(PBU), conforme apresentado em [33]. Segundo o que foi elaborado pelos autores, uma vez que a localização das singularidades da função transformada de Borel $B(p)$ da série assintótica em questão é encontrada no p -plano de Borel, então devemos fazer uma transformação ou *mapa uniformizante* da variável independente $p = p(\zeta)$, tomar os aproximantes de Padé da série de Taylor truncada da transformada de Borel $B(\zeta)$, retornar à variável original através da transformação inversa $\zeta = \zeta(p)$ para, em seguida, finalmente ressomar a série assintótica usando a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{B_{PBU}(p)\}(x)$. Está demonstrado por teoremas em [33] que esse método mais avançado usando mapas uniformizantes é ótimo, ou seja, não há outra transformação da variável independente melhor do que $p = p(\zeta)$ para adquirir informação global a respeito de séries assintóticas como $y_1^\infty(x)$.

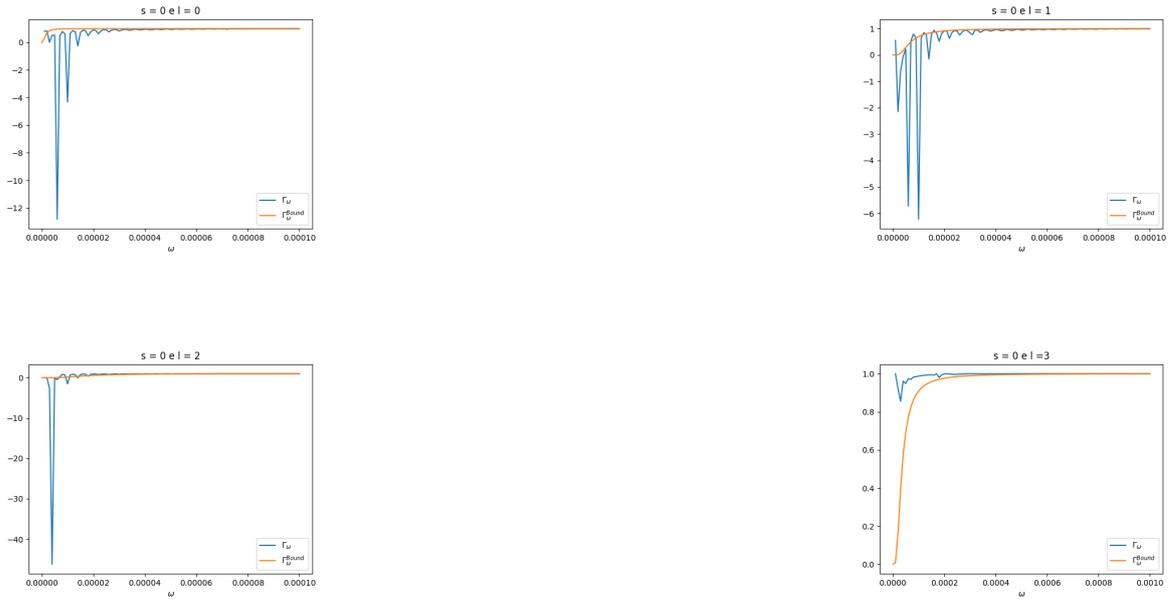


Figura 15 – Greybody factor Γ_ω vs limite inferior Γ_ω^{Bound} para $s = 0$ (escalar) e diferentes valores de l usando aproximantes de Padé de ordem $[50/50]$ com $\omega \in \mathbb{R}^+$.

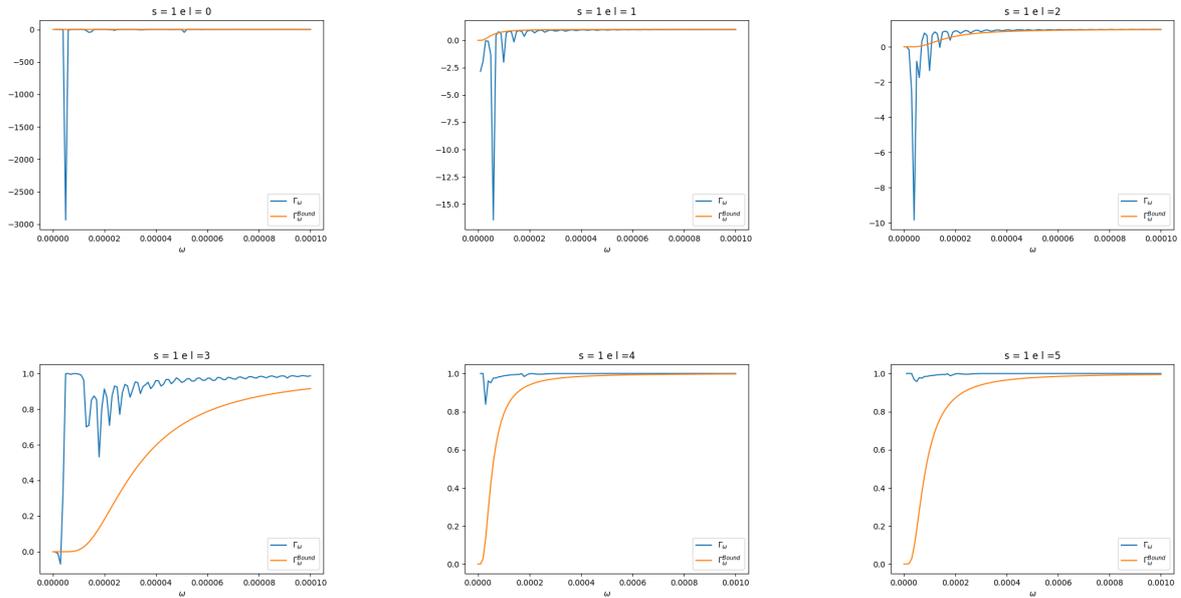


Figura 16 – Greybody factor Γ_ω vs limite inferior Γ_ω^{Bound} para $s = 1$ (fótons) para diferentes valores de l usando aproximantes de pade de ordem $[50/50]$ com $\omega \in \mathbb{R}^+$.

Como já foi dito anteriormente, esses cálculos usando aproximantes de Padé foram feitos de forma exploratória, de modo a mostrar como o método da função de Heun local adaptado pode ser usado e acreditamos que muito trabalho ainda deve ser feito até que resultados totalmente confiáveis possam ser obtidos. Contudo, esperamos conseguir isso em trabalhos futuros ao fazer a uniformização do plano de Borel da série

assintótica e ao estudar o comportamento da função erro associada a representação em séries prescrita pelo método mais rigoroso de Padé-Borel-Uniformizante de [33].

5.3 EQUAÇÃO MESTRE DE TEUKOLSKY

A equação mestre de Teukolsky é a ferramenta básica utilizada para estudar as perturbações lineares da métrica de Kerr para campos sem massa e com spin $s = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2$ e constitui uma generalização da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli para o caso do buraco negro de Schwarzschild. Essa equação surge a partir das equações de Einstein linearizadas e permite estudar vários aspectos da métrica de Kerr, como, por exemplo, a sua estabilidade frente a pequenas perturbações e equações de campo de spin s em condições de contorno específicas (o nosso caso). No formalismo empregado por S. Teukolsky[38], todos esses campos podem ser descritos através de uma única equação diferencial para um escalar do tipo $\psi(t, r, \theta, \varphi) = e^{i(m\varphi - \omega t)} R(r) S(\theta)$ em coordenadas de Boyer-Lindquist. Partindo desse ansatz é possível separar a equação diferencial parcial de Teukolsky em duas EDO's lineares: a equação radial de Teukolsky e a equação angular de Teukolsky.

A equação radial de Teukolsky(ERT) é dada por,

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \frac{d}{dr} R(r) \right) + \left(\frac{K^2}{\Delta} - is \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dr} K - L \right) R(r) = 0 \quad (200)$$

com λ sendo a constante de separação e o número azimutal podendo assumir apenas os valores $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ para campos de spin inteiro e $\pm 1/2, \pm 3/2, \dots$ para o caso de spin semi-inteiro. Aqui definimos $K := \omega(r^2 + a^2) - ma$ e $L := \lambda - s(s+1) + a^2\omega^2 - 2maw - 4iswr$.

Expandindo a ERT ficamos com,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dr^2} R(r) + (s+1) \left(\frac{1}{r-r_+} + \frac{1}{r-r_-} \right) \frac{d}{dr} R(r) + \\ & + \frac{1}{(r-r_+)(r-r_-)} \left[\frac{K^2}{(r-r_+)(r-r_-)} - is \left(\frac{1}{r-r_+} + \frac{1}{r-r_-} \right) K - L \right] R(r) = 0 \end{aligned} \quad (201)$$

É possível mostrar que a ERT pode ser mapeada na equação confluyente de Heun pelo menos através de oito maneiras distintas[45]. Como queremos escrever essa equação para qualquer valor de s na forma canônica da ECH (233), então devemos escolher a seguinte transformação de Möbius

$$z = \frac{r-r_-}{r_+ - r_-} \quad (202)$$

e escolher dentre o triplo de transformações s -homotópicas $R(z) = z^{B_1^\pm} (z-1)^{B_2^\pm} e^{B_3^\pm} y(z)$. Definindo $K_\pm := \frac{\omega(r_\pm^2 + a^2) - ma}{r_+ - r_-}$, temos que,

$$B_1^+ = -iK_-, \quad B_1^- = -s + iK_-, \quad (203)$$

$$B_2^+ = -iK_+, \quad B_2^- = -s + iK_+, \quad (204)$$

e

$$B_3^\pm = \pm i(r_+ - r_-)\omega \quad (205)$$

Por simplicidade, vamos escolher apenas os valores B_1^+ , B_2^+ e B_3^+ para a transformação da variável dependente. Assim, a ERT toma a forma

$$y''(z) + \left(\frac{1+s+2B_1^+}{z} + \frac{1+s+2B_2^+}{z-1} + 2B_3^+ \right) y'(z) + \left(\frac{\alpha z - q}{z(z-1)} \right) y(z) = 0. \quad (206)$$

Deste modo, podemos ver que a ERT pode ser mapeada na ECH na forma canônica (233) com os seguintes parâmetros,

$$\gamma = 1 + s + 2B_1^+, \quad \delta = 1 + s + 2B_2^+, \quad \varepsilon = 2B_3^+, \quad (207)$$

$$\alpha = 2\omega \left(r_+ + (1+i)r_+s - r_-(1+(1+i)s) + (1-i)r_+^2\omega - (1+i)r_-^2\omega + 2ia(m-aw) \right),$$

$$\begin{aligned} q = & \frac{1}{(r_+ - r_-)^2} \left(-8a^3m\omega + (1+i)r_+^3(1+s)\omega + 4a^4\omega^2 + \right. \\ & + r_+r_- \left(2(s+s^2-\lambda) + r_-((3+i) + (3+5i)s)\omega + (4+4i)r_-^2\omega^2 \right) + \\ & - r_+^2 \left(s+s^2-\lambda + (3+3i)r_-s\omega - (1-i)r_-\omega((-1-2i) + 2r_-\omega) \right) + \\ & - r_-^2 \left(s+s^2-\lambda + (1+3i)r_-s\omega + (1+i)r_-\omega(1+2r_-\omega) \right) + \\ & + 2iam \left((1+2i)r_+^2\omega + r_-(1+s+(1+2i)r_-\omega) - r_+(1+s+2r_-\omega) \right) + \\ & \left. + a^2 \left(4m^2 - i\omega \left((2+3i)r_+^2\omega - 2r_+(1+s+(2-i)r_-\omega) + r_-(2+2s+(2+3i)r_-\omega) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

5.3.1 Radiação Hawking para partículas sem massa no buraco negro de Kerr

Agora que conseguimos mapear a equação radial de Teukolsky na equação confluyente de Heun (233), podemos calcular a radiação Hawking emitida por um buraco negro de Kerr. Para isso, basta utilizar o método de Damour-Ruffini-Sannan exposto na seção 5.1. Procedendo dessa forma, a probabilidade relativa de espalhamento é dada por

$$\rho_\omega = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_+)}{\Psi_{out}(r < r_+)} \right|^2 = |e^{i\pi(1-\delta)}| = e^{-\frac{\pi}{\kappa}(\omega-\omega_0)} \quad (208)$$

com $w_0 = \frac{am}{r_+^2 + a^2} = m \Omega_H$, $\kappa = \frac{1}{2} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2}$ e Ω_H sendo a velocidade angular do horizonte de eventos externo. Assim, é possível obter a distribuição espectral da radiação Hawking através do argumento heurístico de Sannan para bósons[17], dada por,

$$\bar{N}_\omega = \frac{\Gamma_\omega}{e^{\frac{\pi}{\kappa}(\omega - \omega_0)} - 1}, \quad (209)$$

enquanto que para partículas de spin semi-inteiro a distribuição é fermiônica e dada por,

$$\bar{N}_\omega = \frac{\Gamma_\omega}{e^{\frac{\pi}{\kappa}(\omega - \omega_0)} + 1}. \quad (210)$$

No limite de ω contínuo podemos calcular o fluxo total de partículas emitidas.

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \bar{N}_\omega \omega d\omega. \quad (211)$$

5.3.2 Soluções polinomiais inversas da equação radial de Teukolsky a partir da solução assintótica da ECH

Para encontrar soluções outgoing da equação radial de Teukolsky no infinito, podemos usar as condições polinomiais (246) da solução assintótica da ECH expostas no Apêndice B, de modo que ficaremos com uma equação algébrica de segundo grau em ω dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{2(r_+ + r_-) \left((1+i)a^2 + ir_+^2 + r_-^2 \right)}{r_+ - r_-} \omega^2 + \\ & - \left[\frac{(2+2i)a(r_+ + r_-)m + 2a^2(-i - in + s)}{r_+ - r_-} + \right. \\ & \left. - \frac{(1-i) \left(r_-^2((1+i) + (1+i)n + is) - r_+^2(2 + 2n + (1+2i)s) \right)}{r_+ - r_-} \right] \omega + \\ & - \frac{(1+n+is)(2im + r_+(1+n+(1+i)s) - r_-(1+n+(1+i)s))}{r_+ - r_-} = 0, \quad (212) \end{aligned}$$

cujas soluções são dadas por

$$\omega_{1s,n} = -\frac{1}{2}(1+i) \frac{(1+n+is)}{r_+ + r_-} \quad (213)$$

e

$$\omega_{s,n,m} = \frac{-ir_+ + ir_- + 2am - ir_+n + ir_-n + (1-i)r_+s - (1-i)r_-s}{2a^2 + (1+i)r_+^2 + (1-i)r_-^2}. \quad (214)$$

A solução $\omega_{1s,n}$ pode ser ignorada, uma vez que sua parte real é sempre negativa e, assim, não acarreta em uma solução fisicamente aceitável para os modos de frequência

outgoing dos campos. Já a solução $\omega_{s,n,m}$ apresenta um comportamento fisicamente mais interessante. Como podemos ver na figura 17, os plots realizados para diferentes valores dos números quânticos s, n e m demonstram que existem valores para o parâmetro de momento angular, $a \in [0, 1]$, tal que o espectro possui, simultaneamente, parte real positiva e parte imaginária negativa. Isso significa que, para certos estados de rotação do buraco negro de Kerr, devemos ter que as soluções polinomiais representam a emissão de ondas outgoing atenuadas no futuro ($t \rightarrow +\infty$) por parte do buraco negro, cuja possibilidade de observação por um observador a uma certa distância do buraco negro depende do tempo de decaimento desses modos do campo até zero. Os gráficos na figura 17 também expõem que, uma vez fixados s e m , então a variação de n acarreta em um afastamento do ponto de transição a da origem, no qual temos $\Re(\omega_{s,n,m}) \geq 0$, enquanto que o contrário vale se fixamos s e n e variamos m .

Assim, a solução mais geral da equação de Teukolsky escrita em termos de polinômios inversos pode ser representada na forma,

$$\Psi_s(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(m\varphi - \omega_{s,n,m}t)} S_{s,n,m}(\theta) e^{\frac{\epsilon}{2}z} z^{\frac{\gamma-1}{2}} (z-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \mathcal{P}_{s,n,m}^{\infty}(z), \quad (215)$$

na qual $S_{s,n,m}(\theta)$ corresponde a solução da equação angular de Teukolsky apresentada na próxima subseção com a sua dependência dos números quânticos evidenciada, enquanto que a função $\mathcal{P}_{s,n,m}^{\infty}(r)$ é a solução polinomial inversa da equação confluyente de Heun discutida no Apêndice B.

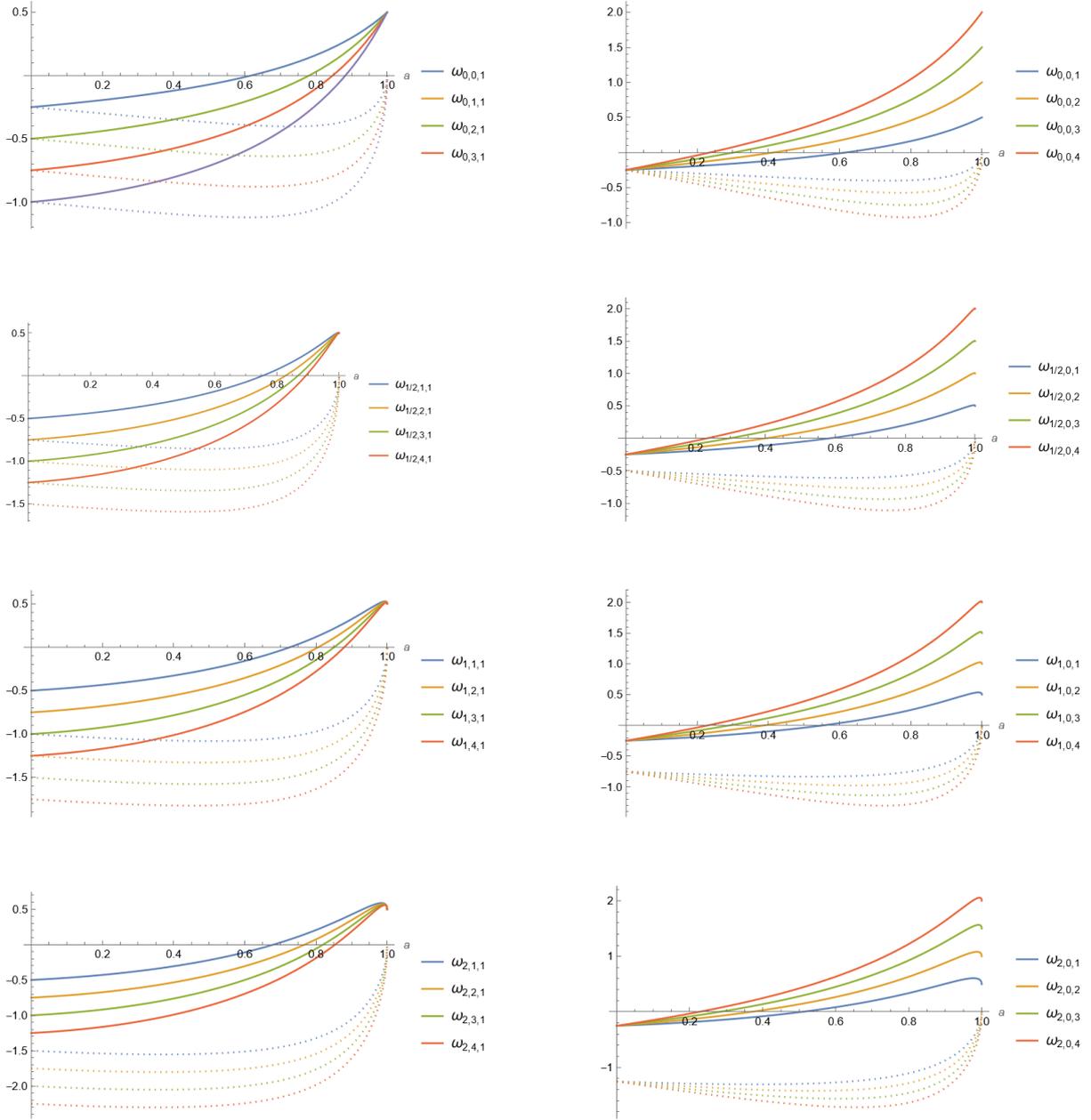


Figura 17 – Espectro de energia complexo $\omega_{s,n,m}$ para diferentes valores dos números quânticos s, n e m vs parâmetro de spin do buraco negro de Kerr, a , com $M = 1$. Linhas contínuas representam a parte real do espectro, enquanto que linhas tracejadas representam a parte imaginária.

5.3.3 Equação angular de Teukolsky e constante de separação λ

A equação angular de Teukolsky(EAT) é dada por,

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} S(\theta) \right) + \left[\lambda + a^2 \omega^2 \cos^2\theta - 2saw \cos\theta - \frac{(m^2 + s^2 + 2ms \cos\theta)}{\sin^2\theta} \right] S(\theta) = 0 \quad (216)$$

Nesta subseção demonstraremos como é possível obter o autovalor λ da EAT para qualquer valor dos parâmetros do modelo com precisão arbitrária. Fazendo $x = \cos \theta$ e definindo $\Theta(x) = \sin^2 \theta = (1-x)(1+x)$, conseguimos uma equação na seguinte forma,

$$\frac{d}{dx} \left(\Theta \frac{d}{dx} S(x) \right) + \left[\lambda + a^2 \omega^2 x^2 - 2sa\omega x - \frac{(m^2 + s^2 + 2msx)}{\Theta} \right] S(x) \quad (217)$$

Tornando essa equação ainda mais explícita, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} S(x) + \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) \frac{d}{dx} S(x) + \\ + \frac{1}{(1-x)(1+x)} \left[\lambda + a^2 \omega^2 x^2 - 2sa\omega x - \frac{(m^2 + s^2 + 2msx)}{(1-x)(1+x)} \right] S(x). \end{aligned} \quad (218)$$

Essa é uma equação diferencial que pode ser mapeada tanto na forma simétrica da ECH[11,12] quanto na forma canônica (233). Contudo, a equação (218) basta para a exposição que faremos a seguir. De acordo com o que foi exposto no Apêndice A, essa equação possui duas singularidades regulares em $x = \pm 1$ e uma singularidade irregular em $x = \infty$. Entretanto, ao contrário do que aconteceu na subseção 5.2.2 na qual conectamos uma singularidade regular com uma singularidade irregular da ECH, aqui devemos apenas encontrar os coeficientes de conexão entre duas soluções de Frobenius cujos intervalos de convergência são não-disjuntos. Em outros termos, uma vez que as soluções de Frobenius em torno de $x = -1$ e $x = 1$ são necessariamente convergentes, respectivamente, em $|x + 1| < 2$ e $|x - 1| < 2$, é possível perceber que podemos encontrar o comportamento assintótico da solução angular através da equação indicial em torno de cada singularidade, dado por

$$S_{01,s}(x) \sim (1+x)^{(m-s)/2} [1 + \mathcal{O}(1+x)], \quad S_{02,s}(x) \sim (1+x)^{(s-m)/2} [1 + \mathcal{O}(1+x)], \quad (x \rightarrow -1), \quad (219)$$

$$S_{11,s}(x) \sim (1-x)^{-(m+s)/2} [1 + \mathcal{O}(1-x)], \quad S_{02,s}(x) \sim (1+x)^{(m+s)/2} [1 + \mathcal{O}(1-x)], \quad (x \rightarrow 1). \quad (220)$$

A solução geral $S(x)$ de (218) é dada por uma combinação linear das soluções $S_{li,s}(x)$, com índices $l = \{0,1\}$ e $i = \{0,1\}$. Para que a solução angular seja regular em $x = \pm 1$ (ou, equivalentemente, em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$) devemos escolher, respectivamente, $S_{01,s}$ ou $S_{02,s}$ para $s - m \lesseqgtr 0$ e $S_{11,s}$ ou $S_{12,s}$ para $m + s \lesseqgtr 0$. Dessa forma, além de requerer regularidade da solução geral em $x \pm 1$, também requeremos que as soluções regulares tenham o mesmo comportamento próximas das singularidades.

Assim, podemos demandar que as soluções exatas devem possuir dependência linear, codificada pelo Wronskiano da seguinte forma,

$$W_Z [S_{0i,s}, S_{1j,s}] = 0, \quad i = \begin{cases} 1, & (m - s \geq 0), \\ 2, & (m - s < 0), \end{cases} \quad j = \begin{cases} 1, & (m + s \leq 0), \\ 2, & (m + s > 0). \end{cases} \quad (221)$$

Essa equação é satisfeita exatamente para um buraco negro sem momento angular com $a = 0$ pelo autovalor $\lambda = l(l + 1) - s(s - 1)$ do caso da equação de Regge-Wheeler-Zerilli. Já para o caso de um buraco negro em rotação, temos que a equação (221) depende implicitamente de λ e ω . Deste modo, uma vez que temos as soluções de Frobenius $S_{li,s}$ e fixamos $x = x_0$ para qualquer $x_0 \in (-1, 1)$, é possível determinar λ para cada ω fixo utilizando um algoritmo de root-finding como o método de Newton-Raphson. Nesse caso, é preciso colocar um input inicial suficientemente próximo das raízes λ para que a convergência ocorra mais rapidamente (ver [18] para uma aplicação completa desse método).

6 CONCLUSÃO E PRÓXIMOS PASSOS

No início dessa dissertação, apresentamos o objetivo geral dessa pesquisa como sendo a exploração das propriedades de campos quânticos quando sujeitos aos campos gravitacionais intensos de buracos negros e discutimos porque buracos negros magnetizados podem ser vistos como grandes reservatórios de energia e como emissores de radiação altamente energética, principalmente quando considerados a luz de artigos recentes desenvolvidos por Rueda et al. [44] nos quais os autores são capazes de explicar emissão de fótons gamma pelo buraco negro de Kerr-Papapetrou-Wald através do mecanismo clássico de radiação síncrotron.

No capítulo 2, apresentamos todos os conceitos chave de Geometria Diferencial necessários para o entendimento da teoria da Relatividade Geral, assim como mostramos a dedução das equações tensoriais de Einstein a partir de um princípio de ação mínima que usa o funcional de ação de Einstein-Hilbert. Assim, mostramos ao final desse capítulo como essas equações tensoriais relacionam quantidades referentes a geometria do espaço-tempo com a distribuição de matéria no mesmo, de modo que a Relatividade Geral pode ser interpretada como uma teoria que associa o fenômeno da gravitação a curvatura do espaço-tempo.

Uma vez que obtivemos o conhecimento necessário acerca da teoria da Relatividade Geral para os propósitos desse trabalho, prosseguimos no capítulo 3 com uma discussão a respeito das soluções de buraco negro das equações de Einstein e de sua motivação astrofísica como sendo o estado de equilíbrio da métrica do espaço-tempo após o colapso de uma estrela suficientemente massiva. Nesse capítulo, também mostramos uma breve dedução da solução de Kerr para buracos negros em rotação ao nos utilizarmos de um ansatz em coordenadas elipsoidais oblatas para a métrica e um procedimento análogo ao utilizado por Karl Schwarzschild na dedução da métrica externa a um corpo massivo com simetria esférica e estático. Deste modo, passamos então a discutir as propriedades específicas que surgem com a rotação de um buraco negro e prosseguimos para a dedução do campo eletromagnético de Papapetrou-Wald a partir das propriedades de vetores de Killing em espaços-tempo de vácuo ($R_{\mu\nu} = 0$).

No capítulo 4, uma vez munidos da métrica de Kerr $g_{\mu\nu}$ e do potencial eletromagnético A_μ de Papapetrou-Wald, passamos a estudar as propriedades de campos escalares massivos e carregados em torno do buraco negro de Kerr-Papapetrou-Wald usando a equação de Klein-Gordon-Fock em um modelo dependente de 5 parâmetros físicos, M , a , e , B_0 e m , dados, respectivamente, pela massa do buraco negro, pelo parâmetro de spin do buraco negro, pela carga do campo escalar, pela intensidade do campo magnético longe do buraco negro e pela massa do campo escalar. Dessa forma, realizamos a solução dessa equação pelo método de separação de variáveis fazendo uma restrição na variável angular para o regime de pequenos ângulos ($\theta \ll 1$)

com a finalidade de estudar o campo escalar no que chamamos de *região de emissão de raios cósmicos ultrarelativísticos*. Depois disso, no restante do capítulo estudamos o espectro de energia ω complexo do campo escalar associado a propriedades especiais da equação confluyente de Heun, ou seja, utilizamos as soluções polinomiais inversas dessa equação diferencial ordinária geral expostas no Apêndice B e as condições polinomiais (246) para determinar ω em diferentes situações físicas. Em especial, estudamos o caso mais realístico do espectro de energia do pión π^- usando os parâmetros físicos do evento GRB 190114C e do buraco negro supermassivo no centro da galáxia M-87, para, em seguida, terminar o capítulo dando lugar a uma discussão sobre a equação radial que descreve o campo escalar fazendo uma transformação dessa equação em uma equação de Schrödinger.

Por fim, no capítulo 5, realizamos o estudo de campos de spin $s = 0, 1$ e 2 no espaço-tempo de Schwarzschild através da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli. Nesse capítulo, mostramos como é possível calcular a radiação Hawking criada imediatamente na vizinhança do horizonte de eventos de um buraco negro para cada modo real de energia ω dos campos por unidade de tempo pelo método de Damour-Ruffini-Sannan, assim como também apresentamos o conceito de greybody factor como sendo a probabilidade destes modos de energia ω escaparem dos potenciais efetivos externos a região do horizonte de eventos até um observador no infinito assintótico. Especificamente no caso do greybody factor, fizemos uma discussão sobre o estado da arte dos métodos disponíveis para o cálculo desse observável e expressamos o nosso descontentamento com a impossibilidade atual de calculá-lo de maneira exata e com precisão arbitrária para espaços-tempo de buracos negros assintoticamente planos, em contraste com o que acontece na situação de um espaço-tempo assintoticamente de Sitter estudados por H. Motohashi e S. Noda em [18]. Deste modo, seguimos pelos passos de Motohashi e Noda para então propor na seção 5.1.2, de maneira preliminar e heurística, como o método do Wronskiano empregado pelos autores em [18] pode ser utilizado em espaços-tempo assintoticamente planos com o auxílio das funções aproximantes de Padé apresentadas em [36, Apêndice C] para realizar a continuação analítica da série assintótica divergente que representa a solução radial da equação mestre de Regge-Wheeler-Zerilli expandida em torno de $r = \infty$. Assim, os resultados preliminares apresentados na seção 5.1.2 demonstram que de fato devemos ter em mãos um método plausível para o cálculo do greybody factor, ainda que de forma imperfeita, e que esse método deve poder ser melhorado com técnicas de continuação analítica mais avançadas em trabalhos posteriores. Além dessa discussão, no capítulo 5 também estudamos a equação mestre de Teukolsky que permite o estudo de campos de spin $s = 0, \pm 1/2, \pm 1$ e ± 2 no espaço-tempo de Kerr. Nesse caso, também realizamos o cálculo da taxa de radiação Hawking dos modos de energia ω reais pelo método de Damour-Ruffini-Sannan, mas sem o cálculo do greybody factor, uma vez que, como

já foi dito, o nosso método ainda precisa funcionar de maneira mais robusta para o caso mais elementar de campos no espaço-tempo de Schwarzschild. Não obstante, prosseguimos para o cálculo do espectro ω complexo da equação mestre de Teukolsky de maneira análoga ao que foi feito no capítulo 4 para o campo escalar e descobrimos que ω pode assumir valores estáveis no 4º quadrante do ω -plano com parte real e negativa simultaneamente, em contraste com o que acontece no espaço-tempo de Schwarzschild estudado na seção 5.1.2 que só possui espectro polinomial puramente imaginário.

Isto posto, gostaríamos de salientar que a exposição realizada aqui acerca de modos ω complexos de campos em torno de buracos negros decorrentes de soluções polinomiais construídas a partir da solução assintótica da equação confluyente de Heun é um estudo inédito e, no momento, não fazemos mais do que apontar a sua existência, assim como realizar a sua exploração em alguns experimentos numéricos. Deste modo, uma vez que nesse trabalho colocamos um foco maior em discutir os modos ω no 4º quadrante do ω -plano complexo, podemos dizer ao menos que soluções desse tipo podem ser interessantes para estudar a dinâmica de campos quânticos logo após a formação do horizonte de eventos de um buraco negro, já que a parte imaginária negativa em ω aponta para uma situação física em que um horizonte de eventos pode inicialmente estar cercado por uma certa distribuição de campos que é então atenuada até que os campos atinjam o estado de vácuo no futuro assintótico ($t \rightarrow \infty$).

Por fim, outra linha de pesquisa que podemos perseguir no futuro se relaciona ao supracitado cálculo do greybody factor em espaços-tempo de buracos negros assintoticamente planos de maneira exata e com precisão arbitrária. Como comentamos nas seções 5.1.2 e no Apêndice B, acreditamos que isso pode ser feito ao se encontrar as singularidades da solução assintótica divergente da equação confluyente de Heun no plano de Borel e através do estudo da função erro da aproximação relacionada aos métodos de extrapolação ressurgente apresentados em [30-33]. Acreditamos que esses artigos desenvolvidos por O. Costin e G. V. Dunne devem ser suficientes para convencer o leitor de que séries divergentes não são necessariamente inúteis e de que podem ser utilizadas no cálculo de observáveis físicos de maneira rigorosa. Caso, ainda assim, esses artigos não sejam suficientes para convencê-lo sugerimos a leitura do breve artigo [63].

REFERÊNCIAS

1. Ruffini, R., Moradi, R., Rueda, J. A., et al. 2019b, *ApJ*, 820 886, 82, doi: 10.3847/1538-4357/ab4ce6.
2. Moradi, R., Rueda, J. A., Ruffini, R., Wang, Y. 2021a, 783 AA, 649, A75, doi: 10.1051/0004-6361/201937135.
3. “Quantum Field Theory in Curved Space-Time” by L. E. Parker and D. J. Toms (2009).
4. Kerr, R. P. 1963, *PhRvL*, 11, 237, 773 doi: 10.1103/PhysRevLett.11.237
5. Boyer, R. H., Lindquist, R. W. 1967, *Journal of Mathematical Physics*, 8, 265, doi: 10.1063/1.1705193
6. Carter, B. 1968, *Physical Review*, 174, 1559, 743 doi: 10.1103/PhysRev.174.1559
7. Wald, R. M. 1974, *PhRvD*, 10, 1680, 833 doi: 10.1103/PhysRevD.10.1680
8. Damour, T., Hanni, R. S., Ruffini, R., Wilson, J. R. 751 1978, *PhRvD*, 17, 1518, doi: 10.1103/PhysRevD.17.1518
9. Papapetrou, A. 1966, *Annales de L'Institut Henri Poincare* 792 Section (A) Physique Theorique, 4, 83
10. “Quantum Field Theory in Curved Space” by Birrell and Davies (1994).
11. A. Ronveaux, *Heun's differential equations*, (Oxford University Press, New York, 1995)
12. Slavyanov S Y and Lay W 2000 *Special Functions, A Unified Theory Based on Singularities* (Oxford: Oxford Mathematical Monographs)
13. P. P. Fiziev, *J. Phys. A: Math. Theor.* 43, 035203 (2010)
14. Yoon Seok Choun. Special functions and reversible three-term recurrence formula (r3trf). arXiv preprint arXiv:1310.7811, 2013.
15. Ivan Gonoskov. Closed-form solution of a general three-term recurrence relation. *Advances in Difference Equations*, 2014(1):1–12, 2014.
16. T.Damour and R.Ruffini, *Phys. Rev. D* 14, 332 (1976)
17. Sannan, S. Heuristic derivation of the probability distributions of particles emitted by a black hole. *Gen Relat Gravit* 20, 239–246 (1988). <https://doi.org/10.1007/BF0075>
18. Hayato Motohashi , Sousuke Noda, Exact solution for wave scattering from black holes: Formulation, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Volume 2021, Issue 8, August 2021, 083E03, <https://doi.org/10.1093/ptep/ptab097>
19. Y. Hatsuda, *Class. Quantum Grav.* 38, 025015 (2020) [arXiv:2006.08957 [gr-qc]] [Search INSPIRE].

20. H. Suzuki, E. Takasugi, and H. Umetsu, *Prog. Theor. Phys.* 100, 491 (1998) [arXiv:gr-qc/9805064] [Search INSPIRE].
21. S. Mano, H. Suzuki, and E. Takasugi, *Prog. Theor. Phys.* 95, 1079 (1996) [arXiv:gr-qc/9603020] [Search INSPIRE].
22.] S. Mano, H. Suzuki, and E. Takasugi, *Prog. Theor. Phys.* 96, 549 (1996) [arXiv:gr-qc/9605057] [Search INSPIRE].
23. M. Shuhei and T. Eiichi, *Prog. Theor. Phys.* 97, 213 (1997) [arXiv:gr-qc/9611014] [Search INSPIRE].
24. Jiaqi Han 2020 *J. Phys.: Conf. Ser.* 1634 012097
25. Zhu Jianyang and Zhao Zheng 1993 *Chinese Phys. Lett.* 10 510
26. Maulik K. Parikh and Frank Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5042
27. Saber Elaydi, *An Introduction Difference Equations*, (Springer, 2005)
28. Frank W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, (New York: Academic Press, 1974)
29. Ovidiu Costin, *Asymptotics and Borel Summability*, (CHAPMAN & HALL/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 2008)
30. Ovidiu Costin and Gerald V Dunne 2019 *J. Phys. A: Math. Theor.* 52 445205
31. Ovidiu Costin, Gerald V. Dunne, *Physical resurgent extrapolation*, (*Physics Letters B*, Volume 808, 2020).
32. Costin, O., Dunne, G.V. Conformal and uniformizing maps in Borel analysis. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **230**, 2679–2690 (2021)
33. Costin, O., Dunne, G.V. Uniformization and Constructive Analytic Continuation of Taylor Series. *Commun. Math. Phys.* **392**, 863–906 (2022).
34. Yoshishige Haraoka, *Linear Differential Equations in the Complex Domain*, (Springer, 2020)
35. Petarpa Boonserm e Matt Visser, *Phys. Rev. D* **78**, 101502(R), 2008
36. Yasuyuki Hatsuda e Masashi Kimura, arXiv:2111.15197v2 [gr-qc], 2021
37. E. W. Leaver, An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes, *Proc. R. Soc. Lond. A.* 402 (1985) 285–298.
38. S. A. Teukolsky, Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations, *Astrophys. J.* 185, 635 (1973).
39. P. P. Fiziev, arXiv:0902.1277v3 [gr-qc](2009)

40. Schwarzschild K 1916 Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. 189-196* [Traduzido em inglês em arXiv:physics/9905030 (1999)]
41. Lense J e Thirring H 1918 Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie *Phys. Zeit.* **19** 156 [tradução em inglês em *Gen. Rel. Grav.* **16** 727-741 (1984)]
42. S. A Teukolsky, The Kerr Metric, arXiv:1410.2130 (2015)
43. Chou, M. D. Y. (2017). A derivation of the Kerr metric by ellipsoid coordinate transformation. *International Journal of Physical Sciences*, 12(11), 130-136.
44. J. A. Rueda *et al* 2022 *ApJ* 929 56.
45. Penrose R and Floyd R M 1971 Extraction of rotational energy from a black hole *Nature* 229 177–179
46. Bardeen J M, Press W H and Teukolsky S A 1972 Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation *Astrophys. J.* 178 347–370
47. Blandford R D and Znajek R L 1977 Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 179 433–456
48. G. A. Baker, Jr. and P. Graves-Morris, *Pade Approximants: Encyclopedia of Mathematics and It's Applications*, Vol. 59, Cambridge University Press, January 1996.
49. T. Harmark, J. Natário and Ricardo Schiappa, <https://doi.org/10.48550/arXiv.0708.0017>, (2007).
50. Pinho, E.O., Barros, C.C. Spin-0 bosons near rotating stars. *Eur. Phys. J. C* **83**, 745 (2023).
51. Che-Yu Chen and Pisin Chen, *Phys. Rev. D* 100, 104054, (2019).
52. Hawking, S.W. Particle creation by black holes. *Commun.Math. Phys.* **43**, 199–220 (1975).
53. M. Martellini and A. Treves, *Phys. Rev. D* 15, 2415, (1977).
54. Experimental Search for Quantum Gravity, arXiv:1010.3420v1 [gr-qc], (2010)
55. Bjorken, J.D. and Drell, S.D., *Relativistic Quantum Mechanics*, (1965).
56. *Gravitation and Spacetime*, Hans C. Ohanian and Remo Ruffini, 3rd edition, Cambridge University Press, (2013).
57. *Introducing Einstein's Relativity*, Ray d'Inverno, Oxford University Press, (1992)

58. General Relativity, Robert M. Wald, The University of Chicago Press, (1984).
59. Einstein, Albert. "On the Electrodynamics of Moving Bodies." *Annalen der Physik* (1905): 891–921.
60. Einstein, Albert. "On the General Theory of Relativity", Prussian Academy of Science, (1915).
61. The Kerr Spacetime: Rotating Black Holes in General Relativity, Remo Ruffini, Cambridge University Press, (2009).
62. R. Moradi, J. A. Rueda, R. Ruffini, Y. Wang, arXiv:1911.07552v3 [astro-ph.HE], (2019).
63. Ovidiu Costin and Gerald V Dunne 2018 *J. Phys. A: Math. Theor.* 51 04LT01
64. H.S. Vieira, V.B. Bezerra, G.V. Silva, Analytic solutions in the dyon black hole with a cosmic string: Scalar fields, Hawking radiation and energy flux, *Annals of Physics*, (2015) <https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.08.027>.

APÊNDICE A – ASPECTOS BÁSICOS DE EQUACÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES POLINOMIAIS.

Por questão de completude e para tornar esse trabalho relativamente autocon-tido, iremos expor nesse apêndice alguns resultados solidamente estabelecidos acerca de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem. Os resultados aqui enunciados não serão acompanhados de provas matemáticas rigorosas. Deste modo, recomendamos [11,12,28,34] ao leitor que deseje se debruçar sobre as propriedades dessas equações de maneira mais aprofundada e rigorosa.

Para começar, vamos considerar a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$y''(z) + P_1(z)y'(z) + P_2(z)y(z) = 0. \quad (222)$$

Aqui assumiremos que $P_1(z)$ e $P_2(z)$ são funções racionais, isto é, que são funções formadas pela razão entre polinômios. É fácil perceber que as equações da classe hipergeométrica e Heun são desse tipo.

O primeiro passo para analisar a equação diferencial (222) é investigar o comporta-mento dos coeficientes $P_1(z)$ e $P_2(z)$ em torno de singularidades (polos, pontos de ramificação, singularidades logarítmicas, etc). Uma propriedade interessante de EDO's lineares é a seguinte:

$$\text{pontos singulares das soluções de (222)} \implies \text{pontos singulares de (222)}, \quad (223)$$

apesar da proposição contrária não ser geralmente válida.

Se tanto $P_1(z)$ quanto $P_2(z)$ forem analíticas em $z = z_0$, esse ponto é dito um *ponto ordinário* de (222). Contudo, se $P_1(z)$ possui no máximo um polo simples em $z = z_0$ e $P_2(z)$ tem no máximo um polo duplo nesse mesmo ponto, então $z = z_0$ é dito um ponto singular regular ou uma *singularidade regular* de (222). Caso contrário, a singularidade nesse ponto é chamada de *singularidade irregular*. Como aqui estamos considerando funções definidas na esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, então as singularidades em $z = \infty$ podem ser estudadas através da transformação de variáveis $z = 1/\xi$. Como veremos a seguir, é possível construir soluções de (222) em termos de séries potências multiplicadas por funções elementares (monômios, exponenciais, logaritmos, etc) na vizinhança de cada ponto singular.

A.1 SINGULARIDADES REGULARES

Em virtude da definição enunciada acima, as expansões de Laurent dos coeficientes $P_1(z)$ e $P_2(z)$ em torno de uma singularidade regular z_0 devem ser dadas por

$$P_1(z) = \frac{p_1}{z - z_0} + \mathcal{O}(1), \quad P_2(z) = \frac{p_2}{(z - z_0)^2} + \mathcal{O}\left((z - z_0)^{-1}\right), \quad z \rightarrow z_0. \quad (224)$$

Por conseguinte, é sempre possível construir duas soluções de Frobenius linearmente independentes de (222) que devem possuir *expoentes característicos* ρ dados pelas raízes da seguinte *equação indicial*:

$$\rho(\rho - 1) + p_1\rho + p_2 = 0, \quad (225)$$

na qual podemos escrever p_1 e p_2 , alternativamente, em termos de resíduos no ponto z_0 como a seguir:

$$p_1 = \text{Res}_{z=z_0} P_1(z), \quad p_2 = \text{Res}_{z=z_0} (z - z_0) P_2(z). \quad (226)$$

Vamos supor que ρ_i ($i = 1, 2$) são duas raízes da equação indicial. Deste modo, se $(\rho_1 - \rho_2) \notin \mathbb{Z}$, então duas soluções de Frobenius linearmente independentes podem ser construídas através de

$$y_i(z) = (z - z_0)^{\rho_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}(z - z_0)^k, \quad i = 1, 2. \quad (227)$$

Já no caso de $(\rho_1 - \rho_2) \in \mathbb{Z}$, uma vez que obtemos $y_1(z)$ como na forma acima, podemos construir uma segunda solução $y_2(z)$ linearmente independente com um termo logarítmico na seguinte forma,

$$y_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}(z - z_0)^k + C_0 y_1(z) \log(z - z_0). \quad (228)$$

É importante frisar que todas as soluções acima em termos de séries são necessariamente convergentes ao menos em uma vizinhança da singularidade. Para ser mais exato, o raio de convergência de cada expansão de Frobenius em torno de uma singularidade arbitrária z_0 é dado pela distância dessa singularidade até o ponto singular mais próximo de z_0 no plano complexo. Dessa forma, é possível perceber que as expansões de Frobenius levam a soluções analíticas, em contraste com o que acontece no caso de expansões em séries em torno de uma singularidade irregular.

A.2 SINGULARIDADES IRREGULARES

A construção de soluções analíticas em torno de singularidades irregulares não é tão direta como no caso regular. Para não fugir muito do escopo desse trabalho, iremos assumir a seguir apenas o caso particular de uma singularidade irregular em

$z = \infty$. No geral, soluções formais (geralmente divergentes) podem ser construídas em torno de $z = \infty$ em termos de séries assintóticas do tipo

$$y_i^{formal}(z) = z^{\alpha_{i0}} \exp\left(\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{ik} z^k\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_{ik} (z - z_0)^k, \quad i = 1, 2, \quad (229)$$

nas quais os multiplicadores na frente das séries são conhecidos como *multiplicadores característicos* e determinam o comportamento assintótico dominante dessas soluções conforme $z \rightarrow \infty$. Na expressão (229) r é chamado de *rank* da singularidade irregular e os coeficientes α_{ik} são chamados de coeficientes característicos de ordem k [12].

É possível obter o rank r da singularidade irregular em $z = \infty$ a partir dos coeficientes da equação diferencial (222). Se $P_1(z)$ e $P_2(z)$ em (222) se comportam assintoticamente da seguinte forma

$$P_1(z) = \mathcal{O}(z^{K_1}), \quad P_2(z) = \mathcal{O}(z^{K_2}), \quad z \rightarrow \infty, \quad (230)$$

então o rank r é dado por

$$r = 1 + \max\left(K_1, \frac{K_2}{2}\right) \quad (231)$$

e os coeficientes α_{ik} e c_{ik} podem ser obtidos substituindo a solução (229) na equação diferencial (222).

Como exemplo do que foi exposto acima, podemos considerar a equação confluyente de Heun (233) mostrada abaixo no Apêndice B. Nesse caso, os coeficientes análogos a $P_1(z)$ e $P_2(z)$ se comportam da seguinte forma:

$$P_1^{ECH}(z) = \mathcal{O}(1), \quad P_2^{ECH}(z) = \mathcal{O}(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (232)$$

Assim, temos $K_1^{ECH} = K_2^{ECH} = 0$ e, portanto, a singularidade irregular dessa equação em $z = \infty$ é de rank-1. Deste modo, as soluções assintóticas da ECH são dadas por (239) com seus coeficientes podendo ser determinados ao se substituir as séries da forma (229) em (233), como era de se esperar da teoria geral das séries assintóticas.

APÊNDICE B – EQUAÇÃO CONFLUENTE DE HEUN, SOLUÇÕES LOCAIS E COEFICIENTES DE CONEXÃO DE DOIS PONTOS.

Neste apêndice vamos estudar a equação confluyente de Heun (ECH), que é uma equação especial bastante geral que aparece em várias áreas da física e da matemática. No que diz respeito as aplicações à física, essa equação tem se mostrado útil para descrever sistemas desde em Física Atômica e Molecular até equações de onda em sistemas astrofísicos (o nosso caso) e de cosmologia. A ECH faz parte de uma classe de equações investigadas pelo matemático alemão Karl Heun, cujo interesse na época era estudar uma classe de equações que generalizassem a equação hipergeométrica [11-12]. Na dita *forma canônica*, a equação confluyente de Heun, dada por

$$y''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \varepsilon \right) y'(z) + \frac{\alpha z - q}{z(z-1)} y(z) = 0, \quad (233)$$

é uma equação diferencial ordinária com duas singularidades regulares em $z = 0$ e $z = 1$ e uma singularidade irregular de rank-1 em $z = \infty$ (para mais detalhes ver apêndice A). Essa equação leva esse nome pois pode ser obtida pelo processo de *confluência* [12, pg. 17], isto é, pela união de duas singularidades regulares da equação de Heun geral e, como veremos, o entendimento de alguns dos seus aspectos nos permitirá calcular observáveis relacionados a campos quânticos no entorno de buracos negros, uma vez que as principais equações diferenciais que descrevem esses campos nos espaços-tempo que estamos estudando podem ser mapeadas nessa equação e, portanto, compartilham suas propriedades analíticas.

B.1 SOLUÇÕES EM TORNO DE $z = 1$

Observando a equação (233) a luz do que foi exposto sobre a teoria geral das EDO's lineares no Apêndice A, podemos notar que o ponto $z = 1$ é um ponto singular regular dessa equação com expoentes característicos das soluções de Frobenius dados por $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 = 1 - \delta$. No nosso caso, não há motivo físico para impor que $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, as duas soluções de Frobenius linearmente independentes devem ser dadas pelas seguintes séries de potência,

$$y_i(z) = (z-1)^{\rho_i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} (z-1)^n; \quad i = 1, 2, \quad (234)$$

com coeficientes definidos pela seguinte *relação de recorrência de três termos* [36, pg. 31]:

$$A_n^i a_{n+1}^{(1)} + B_n^i a_n^{(1)} + C_n^i a_{n-1}^{(i)} = 0, \quad (235)$$

com

$$A_n^i = (n + \rho_j)(n + \rho_j + 1) + \delta(n + \rho_j + 1), \quad (236)$$

$$B_n^i = (n + \rho_j)(n + \rho_j + \gamma + \delta + \varepsilon - 1) + \alpha - q, \quad (237)$$

$$C_n^i = (n + \rho_j - 1)\varepsilon + \alpha. \quad (238)$$

É possível mostrar que essa série é convergente no disco $|z - 1| < 1$ através do comportamento assintótico da relação de recorrência (235), mas, devido a um teorema atribuído a Cauchy, já podemos observar que de fato essa deve ser a região de convergência da série de potências em torno de $z = 1$, pois a singularidade mais próxima da ECH partindo desse ponto se encontra em $z = 0$.

B.2 SOLUÇÕES ASSINTÓTICAS TORNO DE $z = \infty$

Ainda é possível encontrar mais um par de soluções linearmente independentes da ECH quando fazemos a análise de (233) em torno do ponto em $z = \infty$. Para tanto, é necessário fazer a mudança de variáveis $z = 1/\xi$ e então propor uma solução em série de potências em torno de $\xi = 0$ multiplicada pelos fatores dominantes conforme $\xi \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) [12, pg. 11]. Procedendo dessa forma, ficaremos com duas soluções do tipo,

$$y_i^\infty(z) = e^{a_i z} z^{b_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}; \quad i = 1, 2, \quad (239)$$

na qual

$$(a_1, b_1) = (0, -\frac{\alpha}{\varepsilon}) \quad e \quad (a_2, b_2) = (-\varepsilon, -\gamma - \delta + \frac{\alpha}{\varepsilon}). \quad (240)$$

Apesar de possuírmos duas soluções assintóticas linearmente independentes, é importante frisar que, até o momento, as soluções em torno do infinito são meramente formais, ou seja, apesar de satisfazerem a equação (233) não há garantia de analiticidade e, muitas vezes, soluções desse tipo relacionadas a singularidades irregulares são divergentes (possuem raio de convergência nulo).

Para os propósitos desse trabalho iremos utilizar uma solução assintótica dada por

$$y_1^\infty(z) = z^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}, \quad (241)$$

pois essa solução nos permite descrever o comportamento de ondas outgoing longe do horizonte de eventos de buracos negros nos capítulos 4 e 5 referentes à equações de campos quânticos. Uma vez que essa solução é introduzida na ECH ficaremos com a seguinte relação de recorrência de três termos

$$A_n^\infty b_{n+2} + B_n^\infty b_{n+1} + C_n^\infty b_n = 0, \quad (242)$$

com

$$A_n^\infty = (n+2)\varepsilon \quad (243)$$

$$B_n^\infty = -n^2 + n \left(\gamma + \delta - \varepsilon - 3 - \frac{2\alpha}{\varepsilon} \right) + q - \alpha - \gamma + \delta - \varepsilon - 2 - \frac{2\alpha}{\varepsilon} + \frac{\alpha(\gamma + \delta - 1)}{\varepsilon} - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} \quad (244)$$

$$C_n^\infty = \left(n + \frac{\alpha}{\varepsilon} \right) \left(n + 1 - \gamma + \frac{\alpha}{\varepsilon} \right). \quad (245)$$

Deste modo, é possível mostrar que existe um modo simples e direto para transformar a série assintótica (241) em uma expressão analítica, independentemente da análise da sua convergência. Nesse caso, basta que façamos a imposição de que a série (241) seja truncada acima de certa ordem n para dar lugar a soluções em termos de polinômios inversos. Em outras palavras, devemos impor as seguintes condições sobre a relação de recorrência de três termos(242) e o seu coeficiente(245):

$$b_{n+1} = 0 \quad e \quad C_n^\infty = 0. \quad (246)$$

Fazendo isso, é possível obter uma quantidade infinita e enumerável de soluções polinômiais inversas a partir da solução assintótica (241), que denotaremos por $\mathcal{P}_l^\infty(x)$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, analíticas em $z \in (0^+, \infty)$, as quais serão utilizadas nos capítulos 4 e 5 para representar ondas outgoing no infinito, com a segunda das condições (253) permitindo encontrar também o espectro de energia ω relativo a essas soluções quando substituirmos os parâmetros da equação confluyente de Heun pelos parâmetros físicos dos modelos tratados aqui, de acordo com o indicado em [50]. Para o caso dos modelos de campos quânticos apresentados nesse trabalho, estamos considerando o índice l em \mathcal{P}_l^∞ como o conjunto de todos os valores permitidos aos números quânticos pertinentes a cada modelo dos capítulos 4 e 5, de modo que devemos ter, por exemplo, $l \in \{s, n, m, \mu, l\}$, com s sendo o spin do campo, m e μ representando os números quânticos azimutais e assim por diante. Para entender melhor essa notação, o leitor deve se atentar a quais números quânticos aparecem em cada modelo, uma vez que as soluções mais gerais de cada equação diferencial na seção 4.2 (eq. (159)) e nas subseções 5.1.2 (eq. (185)) e 5.3.2 (eq. (215)) são representadas por combinações lineares infinitas de soluções específicas em cada variável (t, r, θ, φ) de Boyer-Lindquist sobre todos valores admissíveis para esses números quânticos.

B.3 DISCUSSÃO ACERCA DO RAIOS DE CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO ASSINTÓTICA $y_1^\infty(z)$ E MÉTODOS DE CONTINUAÇÃO ANALÍTICA

Uma equação do tipo (242) em uma variável discreta n também é conhecida na literatura especializada como uma *equação de diferença linear de segunda ordem de Poincaré-Perron* [27, pg. 340]. Muitos dos teoremas e ferramentas que são utilizados em equações diferenciais ordinárias lineares possuem uma contraparte análoga aplicável a equações de diferença lineares. Um exemplo disso é que a ordem dessas equações em variável discreta também determina o número de soluções linearmente independentes que devemos obter para obter a solução mais geral, assim como existem transformadas análogas à transformada de Laplace para as equações de diferença, chamadas de Z-transformadas [27, pg. 273] e assim por diante. A seguir, iremos apenas analisar o comportamento assintótico da solução da equação (242) quando n é um número natural grande.

Para analisar como os coeficientes b_n se comportam para $n \gg 1$, vamos tomar os termos mais relevantes na equação (242) e vamos substituir $b_n = s^n$, com s sendo uma constante qualquer. Deste modo, ficaremos com a seguinte equação algébrica de segundo grau para s ,

$$n\varepsilon s^2 - n^2 s + n^2 = 0. \quad (247)$$

Resolvendo essa equação, obteremos duas soluções assintóticas em n :

$$s = \frac{n \pm n\sqrt{1 - \frac{4\varepsilon}{n}}}{2\varepsilon}, \quad (248)$$

o que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n}{\varepsilon}. \quad (249)$$

Ou seja,

$$b_n \sim \frac{n!}{\varepsilon^n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (250)$$

Em outros termos, a equação acima determina que a série de potências (241) possui raio de convergência nulo, isto é, é uma série divergente e portanto essa é uma solução meramente formal da ECH. No entanto, ao contrário do que é geralmente propagado em cursos de Física a nível de graduação, séries divergentes não são necessariamente inúteis [63]. A partir do que sabemos a respeito de b_n , há duas vias de investigação possíveis nas quais a série divergente (241) pode se transformar em uma função analítica no intervalo de interesse para nossos propósitos, i.e., o intervalo $z \in (1, \infty)$. A primeira dessas vias consiste na investigação das soluções polinomiais inversas já expostas na seção precedente. Por outro lado, o tratamento

analítico de séries divergentes, ou dizendo mais precisamente, de séries assintóticas, foi alvo de investigação por Henri Poincaré no século XIX [28]. O trabalho de Poincaré et al estabeleceu as bases do que hoje é chamado de Teoria Clássica das Séries Assintóticas, na qual essas séries são definidas em setores do plano complexo e a sua representação analítica aproximada pode ser obtida através do que é chamado de *ponto ótimo de truncamento* da série, que consiste em truncar a série assintótica na ordem a partir da qual a adição de mais termos torna a aproximação pior, em contraste com o que acontece com séries convergentes[29, pg. 113]. Contudo, após o período clássico vários outros pesquisadores se debruçaram sobre o problema das séries assintóticas e foram capazes de criar ferramentas ainda mais potentes para encontrar a soma correta dessas séries de maneira sistemática. Um desses procedimentos, que é mais rudimentar e heurístico(portanto menos rigoroso), consiste em utilizar funções chamadas de aproximantes de Padé que possuem as interessantes propriedades de *extrapolação e aceleração de convergência* [48], as quais são brevemente exploradas na seção 5.2.2. Outra forma- agora mais sistemática e rigorosa- de somar uma série assintótica é utilizando o procedimento de *soma de Borel*. Esse procedimento consiste em aplicar a transformada de Laplace inversa na série assintótica para encontrar a função kernel chamada de *transformada de Borel*, ou seja, se temos uma série do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{x^{n+1}}, \quad (251)$$

então podemos aplicar a transformada de Laplace inversa, dada por,

$$B(p) = \mathcal{L}^{-1}\{y(x)\}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} p^n \quad (252)$$

e assim a série assintótica pode **potencialmente** ser convertida em uma expressão analítica desde que algumas condições sejam satisfeitas[29, pg.103]. A função $B(p)$ é conhecida na literatura como *função transformada de Borel*. Uma vez que tomemos a transformada de Laplace da expressão acima a ressonância de Borel da série assintótica toma a forma

$$y_{Borel}(x) = \mathcal{L}\{B(p)\} = \int_0^{\infty} B(p) e^{-px} dp. \quad (253)$$

Note que no caso da série assintótica da ECH (241), os coeficientes b_n crescem, no máximo, de maneira fatorial. Deste modo, uma série assim é dita de tipo Gevrey-1 e sua função transformada de Borel leva a uma série **convergente** na variável $p \in \mathbb{C}$ no chamado *plano de Borel*. Portanto, essa série é passível de ser ressonada pelo procedimento de soma de Borel[29, pg.103] e, de acordo com desenvolvimentos recentes criados por O. Costin e G.V. Dunne usando *Teoria da Ressurgência*, expansões em séries de potências como essas em torno do infinito podem ser extrapoladas de

maneira precisa para toda a semi-reta $x \in (0^+, \infty)$ ou até mesmo para todo o plano complexo[30-33]! Contudo, apesar de termos pincelado alguns aspectos da teoria clássica das séries assintóticas, da teoria da somabilidade de Borel e da *teoria da extrapolação ressurgente*, não iremos utilizar esses resultados analíticos nesse trabalho, uma vez que a sua aplicação para o nosso propósito enseja alguns problemas relacionados a implementação numérica que deverão ser sanados em um artigo posterior. Dessa forma, como já dissemos, das funções discutidas nessa seção iremos utilizar apenas as funções aproximantes de Padé para encontrar resultados preliminares e exploratórios na seção 5.2.2 envolvendo o cálculo de um observável (greybody factor) através desse método mais rudimentar de continuação analítica da série assintótica (241).

B.4 COEFICIENTES DE CONEXÃO DE DOIS PONTOS

É comum em cursos de Física-Matemática que os estudantes sejam introduzidos a equações diferenciais e funções especiais sujeitas a certas condições de contorno dependentes do sistema físico a ser decrito. No geral, esses problemas chamados de *problemas de autovalor* ou *problemas de condição de contorno* são resolvidos ao se impor valores específicos em pontos regulares do domínio de equações diferenciais e funções especiais como, por exemplo, as conhecidas funções de Legendre e de Bessel. No entanto, como mencionado no Apêndice A, há uma classe mais geral de equações diferenciais que possuem singularidades de caráter regular ou irregular. Nesses casos, é possível que o problema físico associado a essas equações necessite que condições de contorno sejam impostas **tendendo a** certos pontos singulares. Deste modo, soluções de problemas de autovalor podem se tornar mais complicadas devido aos raios de convergência restritos de soluções em termos de séries de potência, como as mostradas acima, e então precisamos recorrer a abordagem de *problemas de conexão de dois pontos* para resolvê-los [12, pg. 37][34, pg. 101]. Problemas de conexão de dois pontos geralmente são formulados usando dois pares de soluções da equação diferencial em questão, com essas soluções sendo expansões em séries de Frobenius ou séries assintóticas. O problema de conexão é então resolvido quando as condições de contorno são impostas à equação e, conseqüentemente, as constantes ou *coeficientes de conexão de dois pontos* são encontrados em termos dos parâmetros da equação diferencial. Para equações relativamente gerais como as da classe hipergeométrica, já existem soluções em forma fechada para esses coeficientes que conectam várias soluções em pontos singulares[12, pg. 55][34, pg. 111], todavia, para as equações ainda mais gerais da classe Heun, a solução exata para os coeficientes de conexão ainda é um problema em aberto. Não obstante, podemos contornar essa ausência de soluções exatas utilizando o *método do Wronskiano* para

conectar diferentes soluções de EDO's lineares em torno de pontos singulares ($z = 1$ e $z = \infty$, no nosso caso), como mostraremos a seguir.

Como a ECH é uma equação diferencial linear, as suas soluções locais (em torno de um ponto) em $z = 1$ são relacionadas às soluções locais em $z = \infty$ através de combinações lineares:

$$y_1(z) = C_{11}y_1^\infty(z) + C_{12}y_2^\infty(z), \quad (254)$$

$$y_2(z) = C_{21}y_1^\infty(z) + C_{22}y_2^\infty(z). \quad (255)$$

É fácil mostrar que os coeficientes de conexão devem ser formalmente dados pela razão entre os Wronskianos da seguinte maneira,

$$C_{11} = \frac{W_x[y_1, y_2^\infty]}{W_x[y_1^\infty, y_2^\infty]}, \quad C_{12} = \frac{W_x[y_1, y_1^\infty]}{W_x[y_2^\infty, y_1^\infty]}, \quad C_{21} = \frac{W_x[y_2, y_2^\infty]}{W_x[y_1^\infty, y_2^\infty]}, \quad C_{22} = \frac{W_x[y_2, y_1^\infty]}{W_x[y_2^\infty, y_1^\infty]}, \quad (256)$$

com $W_z[u, v] \equiv u \frac{dv}{dz} - \frac{du}{dz} v$.

Alternativamente, as soluções locais da equação confluyente de Heun em $z = \infty$ podem ser expressas da seguinte forma:

$$y_1^\infty(z) = D_{11}y_1(z) + D_{12}y_2(z), \quad (257)$$

$$y_2^\infty(z) = D_{21}y_1(z) + D_{22}y_2(z), \quad (258)$$

com

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{W_x[y_1^\infty, y_2^\infty]}{W_x[y_1, y_2]} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix}, \quad (259)$$

ou seja,

$$D_{11} = \frac{W_x[y_1^\infty, y_2]}{W_x[y_1, y_2]}, \quad D_{12} = \frac{W_x[y_1^\infty, y_1]}{W_x[y_2, y_1]}, \quad D_{21} = \frac{W_x[y_2^\infty, y_2]}{W_x[y_1, y_2]}, \quad D_{22} = \frac{W_x[y_2^\infty, y_1]}{W_x[y_2, y_1]}. \quad (260)$$

Perceba que até agora os coeficientes de conexão obtidos acima são relações meramente formais. Assim, para que possamos obter um valor numérico para eles em termos dos parâmetros da ECH a partir das suas soluções, basta que os Wronskianos sejam avaliados em qualquer ponto $z = z_0$ do conjunto formado pela intersecção do intervalo de convergência de cada solução e, portanto, esses intervalos não podem ser conjuntos disjuntos.

B.5 FORMA AUTO-ADJUNTA DA EQUAÇÃO CONFLUYENTE DE HEUN

Para mostrar que os coeficientes definidos em termos de razões entre Wronskianos supracitados de fato correspondem a constantes, vamos lançar mão da forma auto-adjunta da equação (233). Para reescrever essa equação nessa forma, basta multiplicar ambos os lados da equação pelo fator $z^\gamma(z-1)^\delta e^{\epsilon x}$. Dessa forma, a equação é dada por

$$\frac{d}{dz} \left[z^\gamma(z-1)^\delta e^{\epsilon x} \frac{d}{dz} y(z) \right] + \left[\alpha z^\gamma(z-1)^{\delta-1} e^{\epsilon x} - qz^{\gamma-1}(z-1)^{\delta-1} e^{\epsilon x} \right] y(z) = 0. \quad (261)$$

Assim, se $y_1(z)$ e $y_2(z)$ são duas soluções arbitrárias e linearmente independentes da equação confluyente de Heun, então é possível usar a equação acima para provar que

$$z^\gamma(z-1)^\delta e^{\epsilon z} W[y_1, y_2] = cte \quad (262)$$

e, portanto,

$$\frac{W[y_1, y_2]}{W[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2]} = cte \quad (263)$$

para quaisquer soluções $y_1(z), y_2(z), \tilde{y}_1(z), \tilde{y}_2(z)$ linearmente independentes da ECH e para qualquer valor de $z \in \mathbb{C}/\{0, 1, \infty\}$.

Através da forma auto-adjunta da ECH ainda poderíamos ir além e estudar a ortogonalidade das soluções dentro do intervalo de interesse $x \in (1, \infty)$, uma vez que, manipulando a equação (261) através do método clássico de Sturm-Liouville, podemos mostrar que

$$\int_{1^+}^{\infty} w(x) y_1(x) y_2(x) dx = \left[z^\gamma(z-1)^\delta e^{\epsilon z} W[y_1(x), y_2(x)] \right]_{1^+}^{\infty} \quad (264)$$

com a função peso dada por $w(x) = z^{\gamma-1}(z-1)^{\delta-1} e^{\epsilon x}$. Dessa forma, para que as soluções y_1 e y_2 em (261) sejam ortogonais no intervalo $(1^+, \infty)$ é necessário investigar sob quais condições o lado direito da equação acima se anula. Contudo, ir mais a fundo nessa discussão foge do escopo do presente trabalho.