

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE  
ENGENHARIA AEROESPACIAL

GUSTAVO TAMBARUSSI ZUCOLOTO

IMPLEMENTAÇÃO DE UM ALGORITMO DE REFINO DE MALHA PARA O MÉTODO  
DE LATTICE-BOLTZMANN APLICADO A ESCOAMENTOS EXTERNOS

Joinville  
2024

GUSTAVO TAMBARUSSI ZUCOLOTO

IMPLEMENTAÇÃO DE UM ALGORITMO DE REFINO DE MALHA PARA O MÉTODO  
DE LATTICE-BOLTZMANN APLICADO A ESCOAMENTOS EXTERNOS

Trabalho apresentado como requisito para  
obtenção do título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial, no Centro Tecnológico de Joinville, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador(a): Diogo Nardelli Siebert

Joinville  
2024

GUSTAVO TAMBARUSSI ZUCOLOTO

IMPLEMENTAÇÃO DE UM ALGORITMO DE REFINO DE MALHA PARA O MÉTODO  
DE LATTICE-BOLTZMANN APLICADO A ESCOAMENTOS EXTERNOS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial, no Centro Tecnológico de Joinville, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Joinville (SC), 01 de julho de 2024.

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Diogo Nardelli Siebert  
Orientador/Presidente

---

Prof. Dr. Luis Orlando Emerich dos Santos  
Membro(a)  
UFSC

---

Prof. Dr. Juan Pablo de Lima Costa Salazar  
Membro(a)  
UFSC

## RESUMO

O método de lattice-Boltzmann (LBM) ganhou notoriedade no meio acadêmico nas últimas décadas, em decorrência do seu algoritmo simples, alta eficiência computacional e capacidade de lidar com geometrias e condições de contorno complexas de forma eficiente. Além disso, esse método é bem adaptado para implementações paralelas, o que o torna eficaz em simulações de grande escala. Em sua forma original, o LBM estava restrito à aplicação em escoamentos incompressíveis e isotérmicos, tendo aplicação limitada na modelagem de problemas aerodinâmicos e aeroacústicos. Estudos mais recentes, no entanto, expandiram a aplicabilidade do LBM para lidar com uma variedade de situações mais complexas, incluindo escoamentos compressíveis, escoamentos turbulentos e problemas envolvendo transferência de calor. O presente trabalho visa implementar uma estratégia de refino de malha para o método de lattice-Boltzmann, com o objetivo de avaliar sua eficiência e acurácia para escoamentos baixo número de Reynolds. Para tanto, implementou-se o algoritmo de refino de malha local proposto por Rohde et al. (2005), visando aproveitar sua estrutura simples e processos de interpolação e extrapolação que conservam a massa local. Validou-se essa estratégia através da simulação de problemas bem estabelecidos na literatura, como o escoamento de Poiseuille, o problema da cavidade quadrada, o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado, o escoamento externo ao redor de um cilindro e o escoamento ao redor de uma esfera. Os resultados advindos das simulações com a técnica de refino de malha demonstram ótima conformidade com resultados numéricos e experimentais encontrados na literatura.

**Palavra-chave:** Método de lattice-Boltzmann. Refino de malha. Simulação numérica.

## ABSTRACT

The lattice-Boltzmann method (LBM) has gained notoriety in the academic community in recent decades due to its simple algorithm, high computational efficiency, and ability to efficiently handle complex geometries and boundary conditions. Additionally, this method is well-suited for parallel implementations, making it effective for large-scale simulations. In its original form, the LBM was restricted to applications in incompressible and isothermal flows, with limited applicability in modeling aerodynamic and aeroacoustic problems. More recent studies, however, have expanded the applicability of the LBM to handle a variety of more complex situations, including compressible flows, turbulent flows, and problems involving heat transfer. The present work aims to implement a mesh refinement strategy in the lattice-Boltzmann method, with the objective of evaluating its efficiency and accuracy for external flow problems at low Reynolds numbers. For this purpose, the local mesh refinement algorithm proposed by Rohde et al. (2005) was implemented, aiming to take advantage of its simple structure and interpolation and extrapolation processes that conserve local mass. This strategy was validated through the simulation of well-established problems in the literature, such as Poiseuille flow, the square cavity problem, internal flow around a square cylinder, external flow around a cylinder, and flow around a sphere. The results from the simulations using the mesh refinement technique demonstrate excellent conformity with numerical and experimental results found in the literature.

**Keywords:** Lattice-Boltzmann method. Grid-refinement. Numerical simulation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Arranjos de rede $D2Q9$ e $D3Q19$ . . . . .	23
Figura 2 – Representação esquemática da etapa de colisão. . . . .	25
Figura 3 – Representação esquemática da etapa de propagação. . . . .	25
Figura 4 – Fluxograma para o algoritmo do LBM. . . . .	26
Figura 5 – Esquemático da condição de contorno de bounce-back. . . . .	27
Figura 6 – Esquemático da condição de contorno de de velocidade prescrita. . . . .	28
Figura 7 – Formulações nodal (a) e volumétrica (b) para a malha de simulação. . . . .	31
Figura 8 – Representação esquemática da interface de transição entre malhas localmente inseridas no LBM. . . . .	33
Figura 9 – Localizações relativas dos centros das células na sobreposição entre uma célula de grade grossa e as células correspondentes da grade fina. . . . .	34
Figura 10 – Representação esquemática da etapa de explosão. . . . .	34
Figura 11 – Representação esquemática da etapa de coalescência. . . . .	35
Figura 12 – Representação esquemática da técnica de refino de malha proposta por Rohde et al. (2005). . . . .	36
Figura 13 – Geometria utilizada para o escoamento de Poiseuille. . . . .	37
Figura 14 – Geometria do escoamento de Poiseuille (a) com força de corpo paralela à transição entre as malhas e (b) com força de corpo paralela à transição entre as malhas. . . . .	38
Figura 15 – Perfil de velocidades ao longo da direção $y$ para o escoamento de Poiseuille com força de corpo paralela à transição entre as malhas. . . . .	39
Figura 16 – Diferença entre a solução analítica e numérica para a velocidade ao longo da direção $y$ para o escoamento de Poiseuille com força de corpo paralela à transição entre as malhas. . . . .	40
Figura 17 – Perfil de velocidade oscilante ao longo de $x$ em diferentes posições $y/L$ para o escoamento de Poiseuille com força de corpo perpendicular à transição entre as malhas. . . . .	42
Figura 18 – Diferença entre a solução analítica e numérica para a velocidade ao longo da direção $y$ para o caso do escoamento de Poiseuille com força de corpo perpendicular à transição entre as malhas. . . . .	42
Figura 19 – Geometria (a) e esquema de refino de malha (b) para o escoamento em uma cavidade quadrada. . . . .	43
Figura 20 – Padrões de linha de corrente para o escoamento em uma cavidade quadrada com $Re = 1000$ . . . . .	44

Figura 21 – Perfis de velocidade ao longo da linha de centro em $x$ (a) e em $y$ (b) para o escoamento em uma cavidade quadrada. . . . .	45
Figura 22 – Geometria para o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado. . . . .	47
Figura 23 – Esquema de refino para a simulação o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado. . . . .	47
Figura 24 – Padrões de linha de corrente para diferentes números de Reynolds para o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado. . . . .	48
Figura 25 – Comprimentos de esteira para o escoamento ao redor de um cilindro quadrado. . . . .	49
Figura 26 – Perfis de velocidade ao longo da linha de centro do domínio para $Re = 30$ para o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado. . . . .	50
Figura 27 – Perfis de velocidade ao longo da linha de centro do domínio para $Re = 100$ para o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado. . . . .	51
Figura 28 – Coeficiente de arrasto (a), coeficiente de arrasto médio (b) e número de Strouhal (c) em função do número de Reynolds para o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado. . . . .	52
Figura 29 – Geometria para o escoamento ao redor de um cilindro. . . . .	54
Figura 30 – Esquema de refino para o escoamento ao redor de um cilindro. . . . .	55
Figura 31 – Padrões de linha de corrente para diferentes números de Reynolds para o escoamento interno ao redor de um cilindro. . . . .	56
Figura 32 – Coeficiente de arrasto médio (a) e número de Strouhal (b) em função do número de Reynolds para o escoamento ao redor de um cilindro. . . . .	58
Figura 33 – Geometria para o escoamento externo ao redor de uma esfera. . . . .	60
Figura 34 – Esquema de refino para o escoamento externo ao redor de uma esfera. . . . .	60
Figura 35 – Padrões de linha de corrente para diferentes números de Reynolds para o escoamento ao redor de uma esfera. . . . .	61
Figura 36 – Coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds para o escoamento ao redor de uma esfera. . . . .	62
Figura 37 – Comprimentos de esteira estimados para o escoamento ao redor de uma esfera. . . . .	62

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Parâmetros empregados para a simulação do escoamento de Poiseuille com força de corpo perpendicular à transição entre as malhas.	39
Quadro 2 – Parâmetros empregados para a simulação do escoamento de Poiseuille com força de corpo perpendicular à transição entre as malhas.	41
Quadro 3 – Parâmetros empregados para a simulação do escoamento em uma cavidade quadrada. . . . .	44



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Conjunto de velocidades D2Q9 na forma explícita. . . . .	23
Tabela 2 – Conjunto de velocidades D3Q19 na forma explícita. . . . .	24
Tabela 3 – Posição do vórtice central para o escoamento em uma cavidade quadrada. . . . .	45
Tabela 4 – Posição do vórtice inferior esquerdo para o escoamento em uma cavidade quadrada. . . . .	46
Tabela 5 – Posição do vórtice inferior direito para o escoamento em uma cavidade quadrada. . . . .	46
Tabela 6 – Comparação entre coeficiente de arrasto e número de Strouhal para o escoamento interno ao redor do cilindro quadrado com resultados encontrados na literatura. . . . .	53
Tabela 7 – Comparação dos tempos de simulação em segundos entre a malha uniforme e o esquema de refino de malha para o escoamento ao redor do cilindro quadrado. . . . .	54
Tabela 8 – Comparação entre comprimento de esteira, ângulo de separação e coeficiente de arrasto encontrados na literatura para o escoamento ao redor de um cilindro. . . . .	57
Tabela 9 – Comparação entre coeficiente de arrasto médio e número de Strouhal encontrados na literatura para o caso do escoamento ao redor de um cilindro. . . . .	57
Tabela 10 – Comparação dos tempos de simulação em segundos entre a malha uniforme e o esquema de refino de malha para o caso do escoamento ao redor de um cilindro. . . . .	58
Tabela 11 – Comparação dos tempos de simulação em segundos entre a malha uniforme e o esquema de refino de malha para o escoamento ao redor de uma esfera. . . . .	63

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
1.1	OBJETIVOS	13
1.1.1	<b>Objetivo geral</b>	<b>13</b>
1.1.2	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>15</b>
2.1	MECÂNICA DOS FLUIDOS	15
2.1.1	<b>Equação da Continuidade</b>	<b>15</b>
2.1.2	<b>Equação da Conservação da Quantidade de Movimento</b>	<b>15</b>
2.1.3	<b>Equação da Conservação da Energia</b>	<b>16</b>
2.2	INTRODUÇÃO À TEORIA CINÉTICA DOS GASES	17
2.2.1	<b>Função de distribuição</b>	<b>17</b>
2.2.2	<b>Função de Distribuição de Equilíbrio</b>	<b>18</b>
2.2.3	<b>A Equação de Boltzmann (BE)</b>	<b>19</b>
2.2.4	<b>Recuperação das equações macroscópicas da mecânica dos fluidos a partir da equação de Boltzmann</b>	<b>20</b>
2.3	O MÉTODO DE LATTICE-BOLTZMANN	22
2.3.1	<b>Algoritmo do LBM</b>	<b>24</b>
2.3.2	<b>Condições de contorno</b>	<b>25</b>
2.3.2.1	Condição de contorno de bounce-back	26
2.3.2.2	Condição de contorno de velocidade ou pressão prescrita	27
2.3.2.3	Condição de contorno periódica	28
2.3.2.4	Condição de contorno de gradiente nulo	29
2.3.3	<b>Método de troca de quantidade de movimento</b>	<b>29</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>30</b>
3.1	REVISÃO DE LITERATURA	30
3.2	ALGORITMO DE REFINO PROPOSTO POR ROHDE ET AL. (2005)	32
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>37</b>
4.1	ESCOAMENTO PLANO DE POISEUILLE	37
4.1.1	<b>Força de corpo paralela à interface de transição das malhas</b>	<b>38</b>
4.1.2	<b>Força de corpo perpendicular à interface de transição das malhas</b>	<b>40</b>
4.2	ESCOAMENTO EM UMA CAVIDADE QUADRADA	42
4.3	ESCOAMENTO INTERNO AO REDOR DE UM CILINDRO QUADRADO	46
4.4	ESCOAMENTO EXTERNO AO REDOR DE UM CILINDRO CIRCULAR	53
4.5	ESCOAMENTO EXTERNO AO REDOR DE UMA ESFERA	58
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>66</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos são ferramentas cruciais para a resolução de problemas em engenharia, haja vista que possibilitam a otimização de custos, recursos e tempo de trabalho durante a execução de um projeto. No escopo das indústrias aeronáutica e aeroespacial, os escoamentos externos costumam ser um aspecto crítico nos projetos, de tal forma que os métodos da dinâmica dos fluidos computacional, ou Computational Fluid Dynamics (CFD), são amplamente difundidos no processo de desenvolvimento de produto (CHUNG, 2002).

No contexto da mecânica dos fluidos, é possível identificar três abordagens principais para se modelar o comportamento de um fluido durante o escoamento: a abordagem macroscópica, microscópica e a mesoscópica. Cada uma dessas abordagens podem ser utilizadas para a interpretação de problemas distintos e resultam na derivação de equações governantes características (KRÜGER et al., 2017).

A abordagem macroscópica trata o fluido como um meio contínuo e descreve o comportamento do fluido em termos de variáveis médias, como densidade, pressão, temperatura e velocidade, sem levar em consideração as características individuais das partículas que compõem o fluido. Essa abordagem é especialmente útil em situações em que o comportamento de moléculas ou átomos não são de interesse imediato, e a atenção está voltada para comportamentos observáveis em uma escala mais ampla, como em estudos de engenharia, aerodinâmica, hidrodinâmica e muitas outras aplicações práticas (FOX et al., 2018).

As equações fundamentais que governam o comportamento macroscópico dos fluidos incluem as equações de Navier-Stokes, isto é, as equações de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia. A principal técnica numérica para resolver as equações de Navier-Stokes é o método dos volumes finitos (MVF), que divide um domínio em pequenos volumes de controle, e resolve essas equações na forma integral para cada um destes volumes. Além disso, outras técnicas comumente empregadas para a solução numérica dessas equações são o método dos elementos finitos (MEF) e o método das diferenças finitas (MDF) (KRÜGER et al., 2017).

Em contrapartida, a abordagem microscópica se concentra nas características individuais das partículas que compõem o fluido, como moléculas e átomos. Integra-se de maneira individual a trajetória dessas partículas para entender as propriedades macroscópicas do fluido. Essa abordagem é especialmente útil quando se está interessado em fenômenos que ocorrem em escalas onde o livre caminho médio entre as partículas é da mesma ordem do tamanho característico do problema, como transporte de calor em nível molecular ou o comportamento de fluidos em nanoporos. O

método de Dinâmica Molecular (MD) é o principal método numérico advindo da abordagem microscópica (FOX et al., 2018).

A abordagem mesoscópica considera um nível intermediário de descrição entre as abordagens macro e microscópica. O comportamento de cada partícula de fluido não é considerado isoladamente, mas sim o comportamento de uma coleção de partículas, através de uma função de distribuição, que descreve o comportamento dos conjuntos de partículas de maneira estatística (KRÜGER et al., 2017).

A equação comumente resultante da abordagem mesoscópica é a equação de Boltzmann (BE), que descreve a evolução temporal e espacial da distribuição de velocidades das partículas. Existem várias técnicas numéricas para resolver essa equação (XU; PRENDERGAST, 1994; ROGIER; SCHNEIDER, 1994; XU; HUANG, 2010; XU, 2014), mas a que mais encontrou sucesso dentro das aplicações usuais de CFD é o método de lattice-Boltzmann. O LBM descreve o comportamento dos fluidos de maneira estatística, tendo como base a teoria cinética dos gases. Esse método representa a distribuição de partículas fictícias ou “populações” em uma grade discreta no espaço. A evolução temporal do sistema é descrita por meio das etapas de colisão e propagação. A etapa de colisão consiste em modelar o comportamento de colisão entre as partículas em cada uma das células da grade discreta através de um operador colisional e a etapa de propagação ou advecção consiste na troca de informações entre as células da malha discreta, no intuito de modelar o comportamento subsequente das partículas após a colisão (SUCCI, 2001).

O LBM ganhou bastante notoriedade no meio acadêmico nas últimas décadas, principalmente em razão de seu algoritmo simples, localizado e baseado em etapas intuitivas, de sua alta eficiência computacional e de sua capacidade de lidar com geometrias e condições de contorno complexas de forma acurada. Além disso, uma das principais características que tornam atrativa a aplicação do LBM é a sua adaptação para implementações paralelas, o que o torna eficaz para a realização de simulações em grande escala (KRÜGER et al., 2017)

Inicialmente, o LBM foi formulado para modelar escoamentos incompressíveis e isotérmicos, de modo que era inviável empregá-lo em aplicações aerodinâmicas ou aeroacústicas, onde a compressibilidade dos escoamentos e a transferência de calor são de suma importância. Dessa forma, por muito tempo, métodos como o MVF e MEF eram preferidos nesse campo de estudo. No entanto, avanços significativos no desenvolvimento do LBM foram descritos nas últimas décadas, incluindo formulações mais sofisticadas para lidar com diferentes condições de contorno, geometrias complexas, escoamentos turbulentos, compressíveis, em meios porosos e multifásicos (ASTOUL et al., 2021). Diversos solucionadores comerciais foram desenvolvidos para o LBM, como o PowerFLOW (LOCKARD et al., 2000), o XFLOW (HOLMAN et al., 2012) e o LaBS/ProLB (FENG et al., 2021).

Problemas aerodinâmicos e acústicos podem envolver geometrias complexas, como aerofólios, carros, aviões ou edifícios. Nestas geometrias, as camadas limites próximas às superfícies sólidas são cruciais para a precisão das simulações. Nelas ocorre a formação de gradientes significativos de velocidade, pressão e temperatura, e de vórtices e estruturas turbulentas que são essenciais para a descrição acurada do comportamento do escoamento. Ademais, em problemas acústicos, é necessário capturar as variações de pressão e velocidade nos escoamentos associadas à propagação de ondas sonoras. Percebe-se, portanto, que a acurácia da simulação de problemas aerodinâmicos e acústicos depende da modelagem adequada de regiões muito pequenas, onde há interações fluido-sólido, mudanças abruptas nas condições do escoamento e a propagação de ondas sonoras através do fluido (ASTOUL et al., 2021).

Originalmente, o LBM é formulado para uma malha discreta uniforme em todo o domínio de simulação. Tal formulação está intrinsecamente ligada ao método uma vez que o uso desse tipo de malha resulta em conjunto de velocidades discretas com propriedades específicas de simetria necessárias para recuperar as equações de Navier-Stokes. Adicionalmente, a uniformidade da malha resulta em uma implementação simples e eficiente, pois simplifica os cálculos e a manipulação dos dados. No entanto, essa abordagem pode resultar em uma alocação de recursos computacionais que não é otimizada para todos os aspectos do escoamento, especialmente em regiões onde são necessárias resoluções mais finas. As técnicas de refino de malha permitem ajustar a resolução da grade discreta de uma simulação numérica de forma adaptativa, concentrando recursos computacionais em regiões mais críticas do domínio. Ao otimizar a resolução das malhas essas técnicas contribuem para maior eficiência e maior viabilidade em termos de custo computacional para a realização das simulações.

Deste modo, no que tange aplicar o LBM a problemas aerodinâmicos e acústicos é de fundamental importância o desenvolvimento de técnicas de refino de malha, para que seja economicamente viável realizar uma modelagem fidedigna das regiões de interesse e obter resultados confiáveis.

Rohde et al. (2005) propõem um algoritmo de refino de malha local para o LBM, que se baseia na inserção de malhas uniformemente espaçadas com um maior grau de refino em regiões de interesse de uma malha base. As malhas refinadas operam em uma escala temporal e espacial diferentes da malha base, no entanto, ambas são simuladas simultaneamente e a comunicação entre as malhas refinadas e a malha base ocorrem em cada passo de tempo. Esse processo de comunicação entre as malhas é feito adicionando-se duas novas etapas ao LBM, uma etapa de explosão (conversão da informação da malha grosseira em refinada) e uma de coalescência (conversão da informação da malha refinada para a malha grosseira).

A transferência de informações entre as malhas durante a fase de explosão e coalescência é feita de forma que a conservação da massa seja respeitada. Métodos como os propostos por Filippova e Hänel (2000), Lin e Lai (2000) e Dupuis e Chopard (2003) aplicam interpolações de primeira e segunda ordem no espaço e no tempo para realizar a transferências das distribuições de partícula de uma malha para outra, e não conseguem garantir a conservação da massa. Além disso, Rohde et al. (2005) evitam a interpolação da função de distribuição de não-equilíbrio, como fazem Filippova e Hänel (2000) e Dupuis e Chopard (2003). Isto faz com que o método de Rohde et al. (2005) seja independente do operador colisional, tornando-o versátil para a aplicação a problemas em esquemas de lattice-Boltzmann mais sofisticados. A independência do operador colisional e a fácil imposição da conservação da massa consolidam a escolha do algoritmo de Rohde et al. (2005) como opção sólida e eficiente para a resolução de uma gama variada de problemas com o LBM.

O Grupo de Pesquisa em Meios Porosos do Laboratório de Computação Científica da UFSC desenvolveu um código para a realização da simulação de escoamentos em meios porosos através do LBM. Este código é bem estabelecido, tendo sido complementado com implementação paralela para CPUs ou GPUs e já tendo sido empregado em projetos de instituições públicas e privadas. Esta implementação, no entanto, foi desenvolvida para malhas uniformemente espaçadas, não incorporando técnicas de refino de malha. O presente trabalho busca aprimorar o código existente, estendendo-o para incorporar o algoritmo de refino de malha proposto por Rohde et al. (2005).

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo geral

Implementar a técnica de refino de malha proposta por Rohde et al. (2005) para o método de Lattice-Boltzmann, avaliando sua capacidade de aumentar a qualidade da solução e eficiência computacional.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Revisar as técnicas de refino de malha propostas para o método de lattice-Boltzmann;
- Implementar a técnica de refino de malha proposta em Rohde et al. (2005) no código de LBM desenvolvido pelo grupo de pesquisa PORO da UFSC/Joinville;
- Verificar essa implementação considerando o escoamento de Poiseuille, a cavidade quadrada e o escoamento no entorno de obstáculos;
- Analisar a qualidade dos resultados e eficiência do algoritmo com base no escoamento ao redor de obstáculos, comparando este com resultados numéricos e

experimentais encontrados na literatura.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo revisa os conceitos fundamentais da teoria cinética dos gases e da mecânica dos fluidos, no intuito de construir uma base teórica sólida para a compreensão e derivação do LBM. Utiliza-se, ao longo deste capítulo, uma notação em negrito para se descrever vetores e os subíndices  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  para descrever as componentes genéricas desses respectivos vetores.

### 2.1 MECÂNICA DOS FLUIDOS

As equações fundamentais da mecânica dos fluidos são as equações de conservação que afirmam que em um sistema fechado, a massa, a quantidade de movimento e a energia total são conservados. Essas equações são descritas em uma escala macroscópica, de acordo com a hipótese do contínuo. Essa hipótese considera que o fluido não é composto por átomos e espaço vazio permitindo que suas propriedades macroscópicas sejam descritas de maneira suave e diferenciável. Denomina-se esse conjunto de equações como Equações de Navier-Stokes (NSE).

#### 2.1.1 Equação da Continuidade

A Equação da Continuidade ou Equação da Conservação da Massa enuncia que, para um volume de controle, a massa deve se conservar. Isto é, o fluxo de massa total que entra no volume de controle subtraído do fluxo de massa total que sai do volume de controle deve ser igual à taxa líquida de variação de massa no interior do volume de controle (CENGEL; CIMBALA, 2017).

A forma diferencial da Equação da Continuidade é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

onde  $\rho$  é a massa específica ou densidade,  $\mathbf{u}$  é o vetor velocidade,  $t$  é o tempo.

É válido ressaltar que, para um fluido incompressível, onde a densidade não varia com as coordenadas espaciais ou com o tempo, a equação da continuidade resume-se a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

#### 2.1.2 Equação da Conservação da Quantidade de Movimento

A equação de conservação da quantidade de movimento é derivada a partir da aplicação da segunda lei de Newton a um volume de controle e é conhecida como a



equação de Navier-Stokes. Essa equação descreve como a quantidade de movimento de um sistema muda ao longo do tempo devido às forças atuando sobre ele.

A equação de conservação da quantidade de movimento para um fluido newtoniano é dada por

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (3)$$

onde o termo  $-\nabla p$  captura a influência dos gradientes de pressão que atuam acelerando ou desacelerando o fluido,  $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$  descreve as forças viscosas que atuam internamente no fluido, tendendo a resistir ao movimento e dissipar quantidade de movimento, e o termo  $\mathbf{F}$  representa a influência de forças de corpo atuando sobre o fluido, como as forças gravitacionais.

A equação de conservação de quantidade de movimento pode também ser escrita em uma forma mais geral, chamada de equação de momento de Cauchy,

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{F}. \quad (4)$$

Na Equação 4,  $\mathbf{\Pi}$  é o tensor densidade de fluxo de quantidade de movimento, definido de forma explícita como

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \sigma_{\alpha\beta}, \quad (5)$$

onde o termo  $\sigma_{\alpha\beta}$  é o tensor de tensões. A definição da equação de momento de Cauchy será útil posteriormente para a recuperação das equações macroscópicas da mecânica dos fluidos através da equação de Boltzmann.

### 2.1.3 Equação da Conservação da Energia

A equação da conservação da energia é derivada a partir da primeira lei da termodinâmica, que afirma que a energia não pode ser criada nem destruída, apenas convertida de uma forma para outra. Esse princípio é aplicado à energia de um elemento de fluido, levando em consideração as energias cinética, potencial e interna. A forma geral da equação de conservação da energia é dada na forma

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (\mathbf{q} + p \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}. \quad (6)$$

onde  $E$  representa a energia total por unidade de massa, também denominada energia específica. O termo  $\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u})$  representa a taxa na qual a energia específica do fluido varia ao longo do tempo devido a processos como geração ou dissipação de energia, além do transporte convectivo de energia.  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  diz respeito à taxa de transferência de calor por condução e  $\nabla \cdot (p \mathbf{u})$  é o trabalho por unidade de tempo realizado pela pressão sobre o volume de controle. Já o termo  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$ , representa a taxa na qual trabalho é realizado sobre o fluido em resposta a forças externas.

## 2.2 INTRODUÇÃO À TEORIA CINÉTICA DOS GASES

O comportamento dos gases em nível molecular é caracterizado por um movimento caótico, onde cada molécula colide com várias outras em um curto período de tempo. Uma interpretação microscópica do fluido implicaria em acompanhar cada uma das partículas do sistema descrevendo como ocorrem as colisões entre elas. Devido ao vasto número de partículas e à impossibilidade de se descrever seus estados iniciais, torna-se impraticável realizar um acompanhamento individual de cada partícula.

Diante desse desafio, a abordagem estatística proposta por James C. Maxwell e Ludwig Boltzmann surge como uma solução viável, permitindo descrever um sistema a partir de funções distribuições de partículas, variáveis que descrevem valores esperados do número de partículas em uma determinada região do espaço com uma determinada velocidade. Desta forma, a descrição do fluido deixa de ser microscópica e passa a ser mesoscópica.

### 2.2.1 Função de distribuição

Um conjunto de partículas pode ser descrito por uma função de densidade de probabilidade  $f_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$  como

$$dN = f_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} dt, \quad (7)$$

onde  $dN$  é o número total de partículas localizadas entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ , viajando com velocidades microscópicas entre  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}$  e no intervalo de tempo entre  $t$  e  $t + dt$ .

Assumindo que o gás em questão tenha partículas monoatômicas de massa idêntica  $m$ , pode-se definir a função  $f_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$  em termos da distribuição de densidade de probabilidade  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ , tal que

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = m f_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) \quad (8)$$

Com essa definição, as quantidades macroscópicas de interesse podem ser recuperadas. A densidade local  $\rho(\mathbf{x}, t)$  pode ser encontrada como o momento estatístico de 0-ésima ordem da função de distribuição. A densidade de quantidade de movimento  $\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  e a densidade total de energia  $\rho E(\mathbf{x}, t)$  são recuperados computando-se, respectivamente, os momentos de primeira e segunda ordem dessa função.

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} \quad (9)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int \boldsymbol{\xi} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} \quad (10)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t)E(\mathbf{x}, t) = \int \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} \quad (11)$$

Para um gás monoatômico, para o qual as colisões são assumidas como elásticas, a energia total  $E(\mathbf{x}, t)$  pode ser considerada como sendo a soma da energia interna  $e(\mathbf{x}, t)$  e da energia cinética  $\frac{1}{2}|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2$ .

$$\rho(\mathbf{x}, t)E(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)e(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\rho(\mathbf{x}, t)u^2 \quad (12)$$

A energia interna  $e(\mathbf{x}, t)$  está ligada ao movimento aleatório das partículas no nível microscópico em relação à velocidade média e pode ser expressa na forma

$$\rho(\mathbf{x}, t)e(\mathbf{x}, t) = \int \frac{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}|^2}{2} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} \quad (13)$$

A temperatura  $T(\mathbf{x}, t)$  pode então ser recuperada a partir da energia interna  $e(\mathbf{x}, t)$ ,

$$T(\mathbf{x}, t) = \frac{e(\mathbf{x}, t)}{c_v}, \quad (14)$$

onde  $c_v$  é o calor específico do gás definido a volume constante, definida por

$$c_v = \frac{RD}{2}. \quad (15)$$

Para partículas pontuais, sem forças intermoleculares, a pressão pode ser obtida a partir da lei dos gases ideais, tomando-se

$$p(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)RT(\mathbf{x}, t) \quad (16)$$

onde  $R$  é a constante específica do gás.

### 2.2.2 Função de Distribuição de Equilíbrio

Quando duas partículas colidem entre si em nível microscópico, suas velocidades são alteradas. Suas novas velocidades dependem de suas posições e velocidades pré-colisão e das forças intermoleculares durante a colisão. Pode-se assumir que as colisões tendem a distribuir as velocidades das partículas uniformemente em todas as direções ao redor de sua velocidade média. Isso significa que se tomarmos um gás de partículas com qualquer distribuição inicial e o deixarmos por tempo suficiente, ele eventualmente atingirá um estado de equilíbrio.

Para um gás de partículas pontuais, esse estado será descrito pela função de distribuição de equilíbrio de Maxwell-Boltzmann dada por

$$f^{eq}(\mathbf{v}) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{m|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}|^2}{2k_B T} \right), \quad (17)$$

onde  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}$  é a velocidade relativa de uma partícula em relação à velocidade de escoamento média,  $m$  é a massa da partícula e  $k_B$  é a constante de Boltzmann.

A Equação 17 também pode ser escrita na forma

$$f^{eq}(\mathbf{v}) = \left( \frac{\rho}{2\pi RT} \right)^{D/2} \exp \left( -\frac{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}|^2}{2RT} \right), \quad (18)$$

onde  $R$  é a constante específica do gás.

### 2.2.3 A Equação de Boltzmann (BE)

A Equação de Boltzmann torna possível a análise da variação temporal das funções de distribuição das partículas. A taxa de variação de probabilidade ao longo da trajetória de uma partícula sob a ação exclusiva de uma força externa é nula. No entanto, se a partícula pode colidir com outras partículas, pode ocorrer uma mudança na probabilidade. A taxa de variação na probabilidade devido às colisões entre partículas é denominada operador de colisão, representado por  $\Omega(f)$ . Isso resulta na seguinte relação

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \Omega(f), \quad (19)$$

onde o termo  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$  é a variação da posição  $\mathbf{x}$  com o tempo, isto é, a velocidade  $\boldsymbol{\xi}$ . O termo  $\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{g}$  é a aceleração resultante devido à aplicação de uma força externa  $\mathbf{g}$ . Pode-se escrever então:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \Omega(f). \quad (20)$$

A Equação 36 é a chamada Equação de Boltzmann. Considerando que ocorram colisões elásticas entre as partículas, o operador colisional  $\Omega(f)$  deve conservar a massa, a quantidade de movimento e a energia durante o processo de colisão. Tais relações de conservação podem ser expressas, respectivamente, como

$$\int \Omega(f) d\boldsymbol{\xi} = 0, \quad (21)$$

$$\int \boldsymbol{\xi} \Omega(f) d\boldsymbol{\xi} = 0, \quad (22)$$

e

$$\int |\boldsymbol{\xi}|^2 \Omega(f) d\boldsymbol{\xi} = 0. \quad (23)$$

O operador de colisão originalmente formulado por Boltzmann é integral e não-linear, resultando em uma equação complexa que possui soluções analíticas apenas para casos extremamente simples. Para superar essas dificuldades, foi introduzido o

operador colisional de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) (BHATNAGAR et al., 1954), na forma

$$\Omega_{BGK} = -\frac{1}{\tau} (f - f^{eq}). \quad (24)$$

O operador colisional de BGK modela a variação da probabilidade devido às colisões entre as partículas como uma relaxação para a distribuição de equilíbrio, sendo  $\tau$  denominado tempo de relaxação.

Além do operador colisional BGK, existem diversos outros operadores colisionais que podem ser aplicados na BE. No entanto, o operador BGK é amplamente usado devido à sua simplicidade de implementação, eficiência computacional e capacidade de capturar os principais efeitos das colisões em muitos sistemas práticos, e desse modo, será o operador empregado ao longo do presente estudo.

#### 2.2.4 Recuperação das equações macroscópicas da mecânica dos fluidos a partir da equação de Boltzmann

As equações macroscópicas da mecânica dos fluidos podem ser recuperadas diretamente a partir dos momentos da equação de Boltzmann. Para tomar os momentos da equação de Boltzmann, multiplica-se a BE por funções de  $\xi$  e integra-se ao longo do espaço de velocidades. Introduce-se a seguir, uma notação geral para os momentos de  $f$ :

$$\Pi_0 = \int f d\xi = \rho, \quad (25)$$

$$\Pi_\alpha = \int \xi_\alpha f d\xi = \rho u_\alpha, \quad (26)$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int \xi_\alpha \xi_\beta f d\xi, \quad (27)$$

e

$$\Pi_{\alpha\beta\gamma} = \int \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma f d\xi. \quad (28)$$

Uma vez que na equação de Boltzmann aparecem derivadas de  $f$ , a obtenção das equações macroscópicas requer, também, os momentos das derivadas dos monômios presentes nas equações anteriores. Esses podem ser encontrados através do uso combinado de integração por partes, do teorema de Gauss e da hipótese de que a densidade de probabilidade vai a zero quando a velocidade tende ao infinito resultando em

$$\int \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} d\xi = 0, \quad (29)$$

$$\int \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} d\xi = - \int f \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \xi_\beta} d\xi = -\rho \delta_{\alpha\beta}, \quad (30)$$

e

$$\int \xi_\alpha \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} d\xi = - \int f \frac{\partial (\xi_\alpha \xi_\alpha)}{\partial \xi_\beta} d\xi = -2\rho u_\beta. \quad (31)$$

A equação da conservação da massa (Equação 1) pode ser encontrada a partir da integração da equação de Boltzmann (Equação 36) ao longo do espaço de velocidades.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f d\xi + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int \xi_\beta f d\xi + g_\beta \int \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} d\xi = \int \Omega(f) d\xi \quad (32)$$

Substituindo as Equações 21, 25, 26 e 29 em 32, encontra-se a equação macroscópica para a conservação da massa a partir da equação de Boltzmann na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_\beta)}{\partial x_\beta} = 0. \quad (33)$$

Similarmente, ao multiplicar a equação de Boltzmann (Equação 36) por  $\xi_\alpha$ , integrar ao longo do espaço de velocidades e substituir as Equações 22, 27 e 30, obtém-se

$$\frac{\partial (\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = g_\alpha, \quad (34)$$

que é a equação geral de movimento de Cauchy (Equação 4).

A equação macroscópica de conservação da energia (Equação 6) pode ser encontrada de maneira similar ao se multiplicar a equação de Boltzmann (Equação 36) por  $\xi_\alpha \xi_\alpha / 2$ , integrar ao longo do espaço de velocidades, substituir as Equações 23, 28 e 31. Obtém-se, então

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_\beta E)}{\partial x_\beta} = \frac{\partial (u_\alpha \sigma_{\alpha\beta})}{\partial x_\beta} + g_\beta u_\beta - \frac{\partial q_\beta}{\partial x_\beta}. \quad (35)$$

A capacidade de se recuperar as equações macroscópicas da mecânica dos fluidos mostra que, sob as devidas hipóteses, a equação de Boltzmann é capaz de obter soluções consistentes com a teoria macroscópica da mecânica dos fluidos. Uma descrição em maior detalhe da obtenção das equações macroscópicas da mecânica dos fluidos a partir da equação de Boltzmann pode ser encontrada em He e Luo (1997).

### 2.3 O MÉTODO DE LATTICE-BOLTZMANN

A função de distribuição  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ , que é a variável fundamental da equação de Boltzmann, é uma função de sete parâmetros:  $x, y, z, \xi_x, \xi_y, \xi_z$  e  $t$ . Isso faz com que a sua solução analítica se torne ainda mais complexa do que a solução das NSE e inviável para casos práticos. Desse modo, surge o método de lattice-Boltzmann, uma técnica numérica para a solução da equação de Boltzmann (KRÜGER et al., 2017).

A obtenção do método de lattice-Boltzmann a partir da equação de Boltzmann envolve primeiro uma discretização no espaço de velocidades e depois a discretização espacial e temporal dessa equação. Ao longo deste trabalho, empregou-se o operador colisional BGK para a realização das simulações, de modo que, a seguir, a obtenção do método de lattice-Boltzmann será conduzida com o operador colisional BGK.

A discretização no espaço de velocidades é feita através de uma expansão em série de polinômios de Hermite, transformando as integrais contínuas em somas discretas avaliadas em apenas alguns pontos do espaço de velocidades  $\boldsymbol{\xi}$ . Essa discretização reduz o espaço contínuo de velocidades a um pequeno número de velocidades discretas, sem comprometer a validade das equações macroscópicas. A partir da discretização no espaço de velocidades da BE sem termos de força e com o operador BGK, obtém-se a equação de velocidades discretas de Boltzmann dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{1}{\tau} (f - f^{eq}). \quad (36)$$

onde  $\mathbf{c}_i$  representa as velocidades microscópicas discretizadas. O processo de expansão em série de polinômios de Hermite deve ser feito também para a função de distribuição de equilíbrio, que adquire a forma

$$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = w_i \rho \left( 1 + 3 \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{c_s^4} - \frac{3}{2} \frac{u^2}{c_s^2} \right), \quad (37)$$

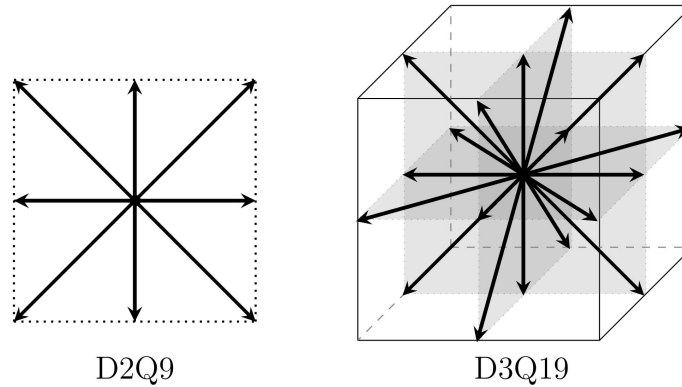
onde  $c_s$  é a velocidade do som dada em unidades de malha. Uma descrição em maior detalhe sobre a discretização da equação de Boltzmann no espaço de velocidades através dos polinômios de Hermite pode ser encontrada em Shan et al. (2006).

Essa discretização acarreta na escolha de um conjunto de velocidades discretas  $\mathbf{c}_i$ , que por sua vez definirá um arranjo de rede. Para a descrição dos arranjos de rede no LBM emprega-se a terminologia  $DnQm$ . O valor  $n$  leva em conta as dimensões do problema, variando de 1 a 3. E a grandeza  $m$  refere-se ao número de velocidades discretas onde a função de distribuição será conhecida.

Existem diversos arranjos de rede possíveis, e a escolha do arranjo impacta diretamente na precisão e na eficiência da simulação. Modelos com mais direções de velocidades discretas capturam melhor os fenômenos físicos, enquanto modelos mais simples são computacionalmente mais eficientes. Ao longo deste trabalho, utilizar-se-á o arranjo de rede  $D2Q9$  para a realização de simulações bidimensionais e o arranjo

$D3Q19$  para simulações tridimensionais. A Figura 1 é uma representação gráfica dos arranjos de rede  $D2Q9$  e  $D3Q19$ . Os pesos  $w_i$  e as direções das velocidades discretas  $c_i$  para o arranjo  $D2Q9$  e para o arranjo  $D3Q19$  estão dispostos nas Tabelas 1 e 2, respectivamente. Para ambos os arranjos  $D2Q9$  e  $D3Q19$ , a velocidade do som em unidades de malha é igual a  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Figura 1 – Arranjos de rede  $D2Q9$  e  $D3Q19$ .



Fonte: Astoul et al. (2021, p. 32).

Tabela 1 – Conjunto de velocidades D2Q9 na forma explícita.

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$w_i$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$c_{ix}$	0	1	0	-1	0	1	-1	-1	1
$c_{iy}$	0	0	1	0	-1	1	1	-1	-1

Fonte: Krüger et al. (2017, p. 88).

O próximo passo na obtenção do LBM é a discretização temporal e espacial da equação de velocidades discretas de Boltzmann, que pode ser feita através do método das diferenças finitas. Obtém-se, então, a equação de lattice-Boltzmann com o operador colisional BGK na forma

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)], \quad (38)$$

onde  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ .

A partir da discretização das funções de distribuição, pode-se estimar as variáveis macroscópicas através de

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (39)$$

e



Tabela 2 – Conjunto de velocidades D3Q19 na forma explícita.

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$w_i$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$c_{ix}$	0	1	-1	0	0	0	0	1	-1	1
$c_{iy}$	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0
$c_{iz}$	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1
$i$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
$w_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$c_{ix}$	-1	0	0	1	-1	1	-1	0	0	
$c_{iy}$	0	1	-1	-1	1	0	0	1	-1	
$c_{iz}$	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1	

Fonte: Krüger et al. (2017, p. 89).

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t). \quad (40)$$

### 2.3.1 Algoritmo do LBM

A implementação do LBM em código consiste em dividir a Equação 38 em duas etapas: a colisão e a propagação.

A etapa de colisão pode ser expressa na forma

$$f_i^*(\mathbf{x}, t) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\tau} f_i^{eq}(\mathbf{x}, t), \quad (41)$$

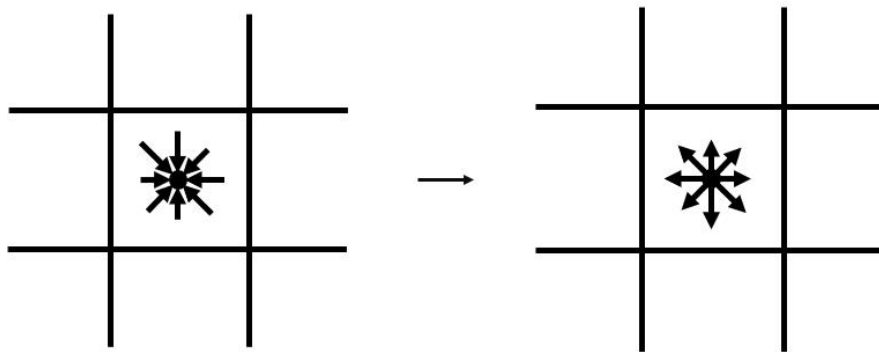
onde  $f_i^*(\mathbf{x}, t)$  indica o estado da função de distribuição após a colisão. Essa etapa consiste apenas em uma operação matemática e é local, isto é, não depende dos valores de sítios adjacentes. A Figura 2 faz uma representação esquemática da etapa de colisão para uma malha bidimensional utilizando o conjunto de velocidades  $D2Q9$ . As setas que apontam para o centro da célula representam as funções de distribuição em seu estado após a propagação, enquanto as setas que apontam do centro da célula em direção a suas bordas representam as funções de distribuição em seus estados pós-colisionais.

A etapa de propagação consiste na troca de informações entre sítios vizinhos da rede. Essa troca pode ser expressa algebricamente como

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t). \quad (42)$$

Em termos práticos, é necessário copiar os valores pós-colisionais das funções de distribuição  $f_i^*(\mathbf{x}, t)$  para um sítio na posição  $\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t$ . A Figura 3 ilustra a

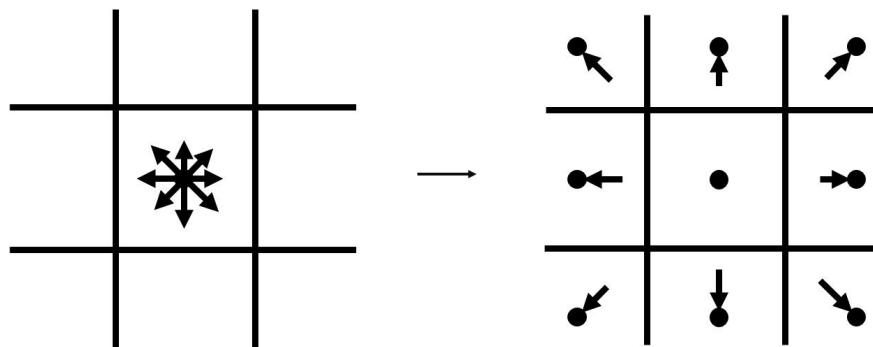
Figura 2 – Representação esquemática da etapa de colisão.



Fonte: Autoria própria (2024).

troca de informações que ocorre entre os sítios vizinhos durante o processo de propagação para uma malha bidimensional com o arranjo de velocidades  $D2Q9$ .

Figura 3 – Representação esquemática da etapa de propagação.



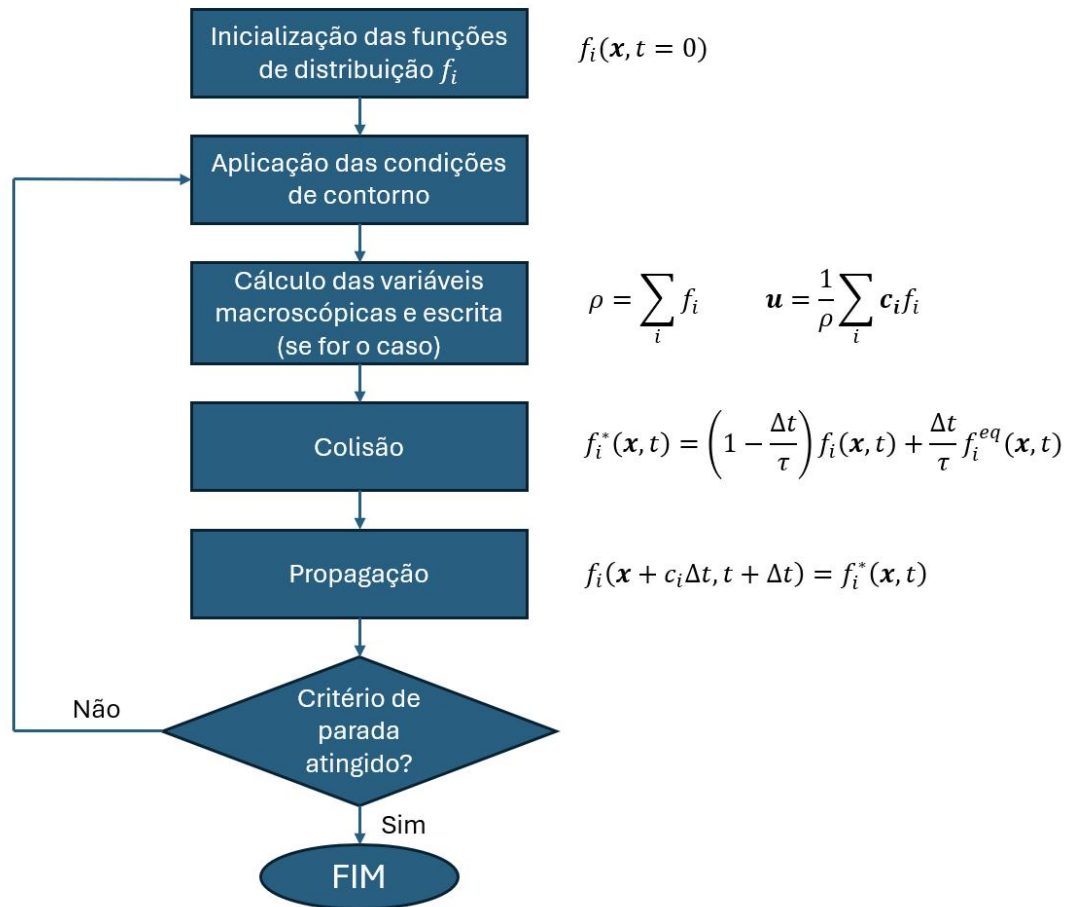
Fonte: Autoria própria (2024).

A Figura 4 ilustra as etapas principais do algoritmo do LBM em um fluxograma. O primeiro passo para a implementação do LBM é atribuir valores iniciais às funções de distribuição no domínio. Geralmente, isso é feito definindo  $f_i(\mathbf{x}, t = 0) = f_i^{eq}(\mathbf{x}, t = 0)$ . Em seguida, inicia-se o laço temporal principal. Durante este laço, aplicam-se as condições de contorno específicas do problema a ser resolvido. Posteriormente, calculam-se as variáveis macroscópicas e registram-se os resultados. Após essa etapa, ocorre a fase de colisão, realizada localmente, seguida pela fase de propagação. O laço temporal é iterado até que um critério de convergência ou de parada seja alcançado.

### 2.3.2 Condições de contorno

Nos métodos numéricos para resolução da NSE, as condições de contorno são restrições ou especificações aplicadas às fronteiras de um domínio onde uma

Figura 4 – Fluxograma para o algoritmo do LBM.



Fonte: Autoria própria (2024).

equação diferencial está sendo resolvida. Elas são essenciais para garantir a existência de uma solução única, estável e fisicamente significativa para os problemas em questão (WENDT, 2009).

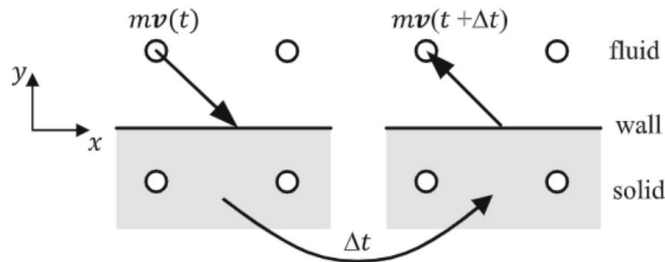
Para o LBM, o mesmo cuidado com o estabelecimento das condições iniciais e de contorno é necessário. No LBM, designar uma condição de contorno consiste em estabelecer valores para as funções de distribuição  $f_i(\mathbf{x}, t)$  nos sítios da fronteira. Vários modelos de condições de contorno foram elaborados para o LBM, sendo as mais comuns entre estas a bounce-back, a velocidade prescrita e a periódica. A seguir são apresentadas os modelos empregados no presente trabalho.

### 2.3.2.1 Condição de contorno de bounce-back

O princípio da condição de contorno de bounce-back é o de que as populações que se propagam em direção a uma parede sólida serão refletidas de volta para o sítio de onde elas originalmente estavam se propagando (Figura 5). O bounce-back das partículas implica na não permeabilidade do fluido na barreira e na condição de

velocidade nula na parede (KRÜGER et al., 2017).

Figura 5 – Esquemático da condição de contorno de bounce-back.



Fonte: Krüger et al. (2017, p. 176).

As populações deixando um dado nó na posição  $x$  e no tempo  $t$  encontrarão a parede na metade do passo incremental de tempo, isto é,  $t + \frac{\Delta t}{2}$ . Serão refletidas com uma velocidade de igual magnitude e direção, mas sentido oposto  $c'_i = -c_i$  e chegarão de volta ao sítio originário no tempo  $t + \Delta t$ . A Equação 43 descreve este processo matematicamente.

$$f'_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t) \quad (43)$$

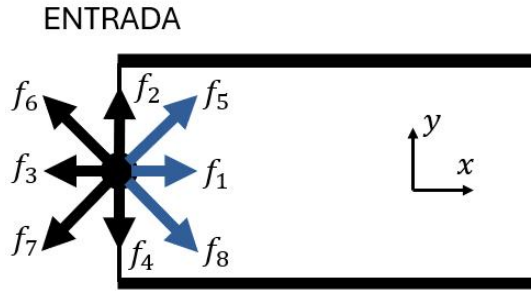
Existem dois métodos para implementar essa condição de contorno no LBM: o fullway bounce-back e o halfway bounce-back. O método utilizado na equação acima é o halfway bounce-back, que é o adotado neste trabalho. Embora o fullway bounce-back possa ser facilmente integrado em implementações eficientes para arquiteturas paralelas, ele apresenta erros de primeira ordem no espaçamento entre os sítios, comprometendo a precisão do método. Em contraste, o esquema de halfway bounce-back apresenta erros de segunda ordem no espaçamento entre os sítios, oferecendo maior precisão (HE et al., 1997).

### 2.3.2.2 Condição de contorno de velocidade ou pressão prescrita

Zou e He (1997) propuseram uma forma de encontrar as informações faltantes nos sítios das fronteiras de um domínio quando se deseja impor uma condição de contorno de velocidade prescrita ou pressão prescrita através das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento e de uma etapa de bounce-back da função de distribuição de equilíbrio na direção normal dos sítios da fronteira.

Considerando o nó da fronteira para o caso um caso simplificado bidimensional de uma malha  $D2Q9$  mostrado na Figura 6, após a propagação, os valores de  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$ ,  $f_6$  e  $f_7$  são conhecidos. Se  $u_x$  e  $u_y$  forem determinados na fronteira, pode-se determinar  $f_1$ ,  $f_5$ ,  $f_8$  e  $\rho$  para esses sítios.

Figura 6 – Esquemático da condição de contorno de de velocidade prescrita.



Fonte: Autoria própria (2024).

Pode-se escrever  $\rho$ ,  $u_x$  e  $u_y$  através das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento (Equações 9 e 10). Ao rearranjar-se as variáveis de interesse, obtém-se

$$f_5 + f_1 + f_8 = \rho - (f_0 + f_2 + f_3 + f_4 + f_6 + f_7), \quad (44)$$

$$f_5 + f_1 + f_8 = \rho u_x - (f_3 - f_6 - f_7), \quad (45)$$

e

$$f_5 - f_8 = \rho u_y - (f_2 - f_4 + f_6 - f_7). \quad (46)$$

Assume-se que ocorre o bounce-back da função de distribuição de não-equilíbrio na direção normal à fronteira, isto é,  $f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq}$ . Com  $f_1$  conhecido, pode-se determinar  $f_5$  e  $f_8$ . De modo que todas as direções da função de distribuição de probabilidade sejam definidas.

Uma extensão para o caso tridimensional e o tratamento para nós localizados no encontro de duas ou mais fronteiras pode ser encontrada em Zou e He (1997).

### 2.3.2.3 Condição de contorno periódica

A condição de contorno periódica é aplicada em situações especiais de simetria, quando parte do escoamento se repete ciclicamente. Esse tipo de condição de contorno especifica que o fluido saindo do domínio de um lado entrará instantaneamente pelo lado oposto. Consequentemente, esse tipo de condição de contorno sempre conserva massa e quantidade de movimento.

Utiliza-se essa condição de fronteira para modelar canais infinitos, ou também para o caso de um escoamento externo, para evitar os efeitos de borda, nos casos em que se considera que as fronteiras do domínio estão suficientemente distantes do obstáculo e que ali não existem grandes gradientes de velocidade.

#### 2.3.2.4 Condição de contorno de gradiente nulo

A condição de contorno de gradiente nulo, ou condição de contorno de Neumann, especifica que não ocorre a variação de uma variável específica em relação à direção normal de uma fronteira. Praticamente, essa condição de contorno é implementada em um plano, e consiste em realizar uma cópia dos valores das funções de distribuição de um plano adjacente para o plano do contorno, de modo a impor um gradiente nulo.

#### 2.3.3 Método de troca de quantidade de movimento

Ao longo desse estudo, utilizou-se o método de troca de momentum para estimar as forças que o fluido exerce sobre um obstáculo imerso nele. De acordo com Mei et al. (2002), a troca de quantidade de movimento entre duas direções opostas de células vizinhas de uma malha no LBM pode ser calculada fazendo a diferença  $c_i f_i(\mathbf{x}, t) - c_j f_j(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ , onde  $c_j \equiv -c_i$ . Dessa forma, para cada célula que representa um sólido  $\mathbf{x}_s$ , a troca de quantidades de movimento com as correspondentes células vizinhas que compõem o fluido será dada por

$$\sum_{i \neq 0} c_i [f_i(\mathbf{x}_s, t) + f_j(\mathbf{x}_s + \mathbf{c}_i \Delta t, \Delta t)]. \quad (47)$$

Ao somar-se as contribuições de todas as células sólidas que compõem o obstáculo, encontra-se a força exercida pelo fluido sobre o obstáculo (Equação 48).

$$\mathbf{F} = \sum_{\mathbf{x}_s} \sum_{i \neq 0} c_i [f_i(\mathbf{x}_s, t) + f_j(\mathbf{x}_s + \mathbf{c}_i \Delta t, \Delta t)] \quad (48)$$

### 3 METODOLOGIA

A condução desta pesquisa se manifestou em uma abordagem sistemática dos esquemas de refino de malha para o LBM, que pode ser delineada em três etapas fundamentais: uma revisão de literatura, a programação do algoritmo de refinamento escolhido e a validação do código.

Buscou-se, na revisão de literatura, identificar as principais abordagens e escolher uma estratégia simples e acurada, que permitisse a integração na implementação do LBM já existente sem grandes mudanças na estrutura do código e sem afetar sua eficiência computacional. Esta fase culminou na seleção do método proposto por Rohde et al. (2005).

A segunda etapa envolveu a programação do algoritmo escolhido. Utilizou-se o código de lattice-Boltzmann gradLBM, implementado por professores e estudantes do Laboratório de Computação Científica (LabCC) da Universidade Federal de Santa Catarina. Este código foi adaptado para poder ler geometrias com regiões refinadas sobrepondo uma região grosseira, com a criação de interfaces de comunicação entre as malhas. Isso foi realizado através da classe *vtkOverlappingAMR* da biblioteca VTK. Além disso, implementou-se as etapas de explosão e coalescência do algoritmo de refinamento escolhido.

Por fim, a terceira etapa consistiu na validação do método implementado por meio da simulação de problemas de referência (*benchmark*) bem estabelecidos na comunidade científica. Esta fase não apenas atestou a fidedignidade da implementação, mas também evidenciou sua adaptabilidade e desempenho.

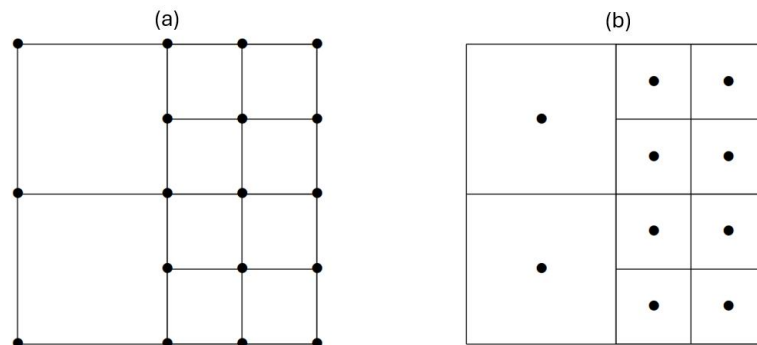
#### 3.1 REVISÃO DE LITERATURA

O refinamento de malha é uma técnica usada nos métodos numéricos para melhorar a precisão e resolução dos problemas. Essa técnica envolve dividir o domínio computacional em células ou elementos menores para resolver fenômenos locais com maior precisão. O refinamento de grade é particularmente útil ao estudar padrões de escoamentos complexos, turbulência ou situações em que há variações significativas nas propriedades do escoamento (LAGRAVA et al., 2012).

No contexto do LBM com malhas estruturadas, as técnicas podem ser segmentadas de acordo com a maneira com que a informação é armazenada na malha, isto é, se as funções de distribuição são armazenadas no centro nas células, a denominada formulação volumétrica, ou nos vértices das células, chamada de formulação nodal (STAUBACH, 2013). A Figura 7(a) mostra uma malha formulada com as funções de distribuição nos vértices e a Figura 7(b) uma malha com as funções de distribuição

localizadas no centro da célula.

Figura 7 – Formulações nodal (a) e volumétrica (b) para a malha de simulação.



Fonte: Astoul (2021, p. 126).

Percebe-se que para o caso da malha com as informações nos vértices, diferentes níveis de refino compartilham certos nós, o que permite a troca direta de informação entre eles. Filippova e Hänel (1998) e Dupuis e Chopard (2003) propuseram esquemas de refino de malha baseados nessa formulação, adotando uma estratégia em que uma malha refinada sobrepoë uma malha mais grosseira e a simulação acontece em ambas as malhas ao mesmo tempo. Nesses trabalhos, a troca de informações entre as malhas é feita assumindo que as funções de distribuição de equilíbrio de ambas as malhas eram iguais, ou seja  $f_i^{eq} = f_i^{eq, grosseira} = f_i^{eq, refinada}$ . A partir dessa relação, e dos valores de  $f_i^{grosseira}$  e  $f_i^{refinada}$ , realiza-se uma interpolação da função de distribuição de não-equilíbrio, baseada no valor dos operadores colisionais das malhas. A diferença é que Filippova e Hänel (1998) interpolam as funções de distribuição em seu estado pós-colisional, enquanto Dupuis e Chopard (2003) o fazem com as funções de distribuição após a etapa de propagação. Ainda baseados na formulação nodal, outros autores como Yu et al. (2003) e Peng et al. (2006), propuseram algoritmos mais eficientes, onde apenas uma camada de células era utilizada para a comunicação entre as malhas, sem a necessidade de dois níveis inteiros se sobrepondo.

Nos esquemas para os quais as funções de distribuição estão armazenadas no centro das células, os diferentes níveis de refino não compartilham nós, o que impede a troca direta de informação entre eles. Algoritmos de refino baseados nessa formulação de malha consistem na existência de níveis hierárquicos, com aqueles mais refinados sobrepondo níveis mais grosseiros, e se utilizam de duas operações características para realizar a comunicação entre os diferentes níveis: a coalescência e a explosão. Emprega-se, geralmente, uma camada de sítios sobreposta entre os diferentes níveis de refino na região imediata da transição dos domínios chamada de interface, onde ocorrem as operações de coalescência e explosão.



Chen (1998) propôs um esquema de refino baseado na formulação volumétrica, e argumentam que, nessa formulação, as funções de distribuição podem ser consideradas partículas de massa se propagando de células da malha grosseira para células da malha refinada ou vice-versa, de modo que a massa é conservada de uma forma natural. Nesse esquema, os valores das funções de distribuição são obtidos através da interpolação temporal e espacial dos valores contidos na interface. Os autores propõem um esquema de interpolação temporal e espacial de segunda ordem para realizar a troca de informação entre as malhas. Rohde et al. (2005) também propõem um esquema de refino de malha baseado na formulação volumétrica, que garante a conservação da massa. No entanto, o esquema de interpolação e extrapolação definido aqui é mais simples, uma vez que só ocorre a interpolação espacial.

Diversos outros autores dedicaram-se a estudar formas para melhor definir a malha de simulação no que diz respeito ao LBM com malhas não-estruturadas. He e Doolen (1997) e Mei e Shyy (1998), por exemplo, propõem a definição de uma malha em coordenadas cilíndricas, enquanto Peng et al. (1999) propuseram uma formulação baseada em elementos triangulares.

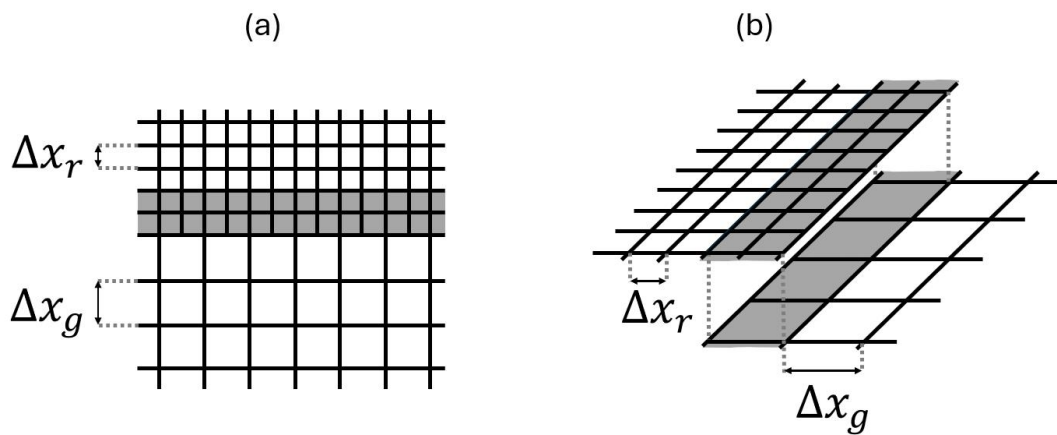
Para o presente trabalho, implementa-se o método proposto por Rohde et al. (2005), que sobrepõe malhas refinadas a uma malha base mais grosseira, operando em escalas temporais e espaciais diferentes, mas simuladas simultaneamente. Em cada passo de tempo da malha grosseira, as informações são transferidas entre as malhas na fase de explosão e coalescência. Ao contrário de métodos anteriores como os propostos por Dupuis e Chopard (2003), Lin e Lai (2000) e Filippova e Hänel (1998), o método de Rohde et al. não requer que a mesma região seja simulada em ambas as malhas e não depende de interpolações espaciais e temporais de primeira e segunda ordem que não garantem a conservação da massa. Contrariamente ao método de Chen (1998), a transferência de informação entre as malhas é feita por um processo de interpolação e extrapolação simples, baseado no método dos vizinhos mais próximos. Além disso, essa técnica é independente do operador colisional, uma vez que não realiza a interpolação das funções de distribuição de não-equilíbrio de uma malha para outra. Dessa forma, o método de Rohde et al. (2005) emerge como uma escolha sólida e versátil para a presente pesquisa, devido à sua independência com relação ao operador colisional, sua formulação que conserva massa e quantidade de movimento, e sua intrínseca simplicidade algorítmica.

### 3.2 ALGORITMO DE REFINO PROPOSTO POR ROHDE ET AL. (2005)

A metodologia proposta por Rohde et al. (2005) consiste em um técnica de refino baseada na inserção local de malhas mais refinadas sobre uma malha base mais grosseira. As células da malha grosseira e da malha refinada existirão em escalas temporais e espaciais diferentes. A Figura 8(a) mostra uma malha bidimensional não

uniforme, onde as células da malha grosseira tem um tamanho  $\Delta x_g$  e as células da malha refinada um tamanho  $\Delta x_r = \Delta x_g/n$ . Para o caso representado na Figura 8(a) e para as simulações realizadas ao longo desse trabalho, o nível de refino entre as malhas sempre é tomado de forma que  $n = 2$ . A região de sobreposição entre as malhas, onde coexistem células da malha grosseira e da malha refinada, é denominada interface. A sobreposição entre as malhas é representada na Figura 8(b). É nessa região de sobreposição que ocorre a transferência de informações entre as malhas, através das etapas de explosão e coalescência.

Figura 8 – Representação esquemática da interface de transição entre malhas localmente inseridas no LBM.



Fonte: Autoria própria (2024).

Para que a troca de informações seja feita de forma fisicamente consistente, a velocidade do som em unidades de malha deve ser igual para ambas as malhas. Assim, a divisão do domínio espacial implicará também numa divisão do domínio temporal. Se  $\Delta x_r = \Delta x_g/n$ , relaciona-se os passos de tempo na forma  $\Delta t_r = \Delta t_g/n$ . Conseqüentemente, as velocidades de ambas as malhas serão iguais  $u_g = u_r$ .

Além disso, o operador colisional e a viscosidade em unidades de malha devem ser ajustados para as diferentes malhas. Essas grandezas são relacionadas entre as malhas pelas equações

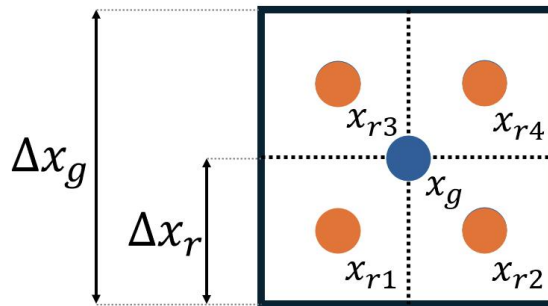
$$\tau_g = \frac{\tau_r - \frac{1}{2}}{n} + \frac{1}{2} \quad (49)$$

e

$$\nu_g = \frac{1}{n} \nu_r. \quad (50)$$

A Figura 9 mostra a relação existente entre as células da malhas refinada (em laranja) para uma célula da malha base (em azul) na interface. As etapas de explosão e coalescência consistem numa etapa de interpolação espacial que considera o

Figura 9 – Localizações relativas dos centros das células na sobreposição entre uma célula de grade grossa e as células correspondentes da grade fina.



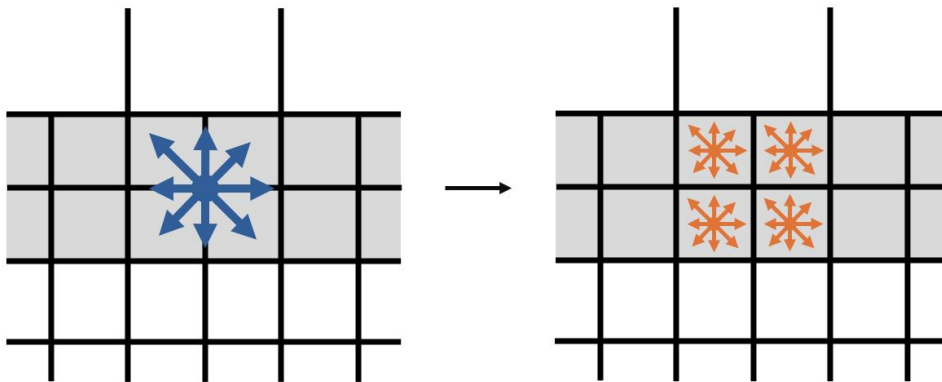
Fonte: Autoria própria (2024).

vizinho mais próximo. A explosão pode então ser considerada como a redistribuição homogênea das densidades de partículas da malha grosseira para a malha refinada, na forma

$$[f_i^*(x_{rj}, t)]_{refinada} = \frac{1}{n^D} \cdot [(f_i^*(x_g, t)]_{grosseira}, \quad (51)$$

onde  $x_{rj}$  representa as células da malha refinada que correspondem a uma célula da malha base  $x_c$ , com o subíndice  $j = 1, 2, \dots, n^D$ , onde  $D$  é o número de dimensões da malha e  $n$  é o nível de refino. Uma representação esquemática da etapa de explosão é dada na Figura 10.

Figura 10 – Representação esquemática da etapa de explosão.



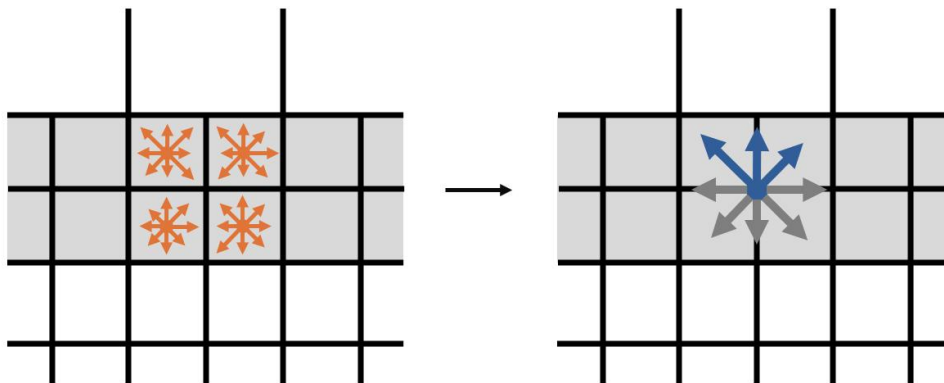
Fonte: Autoria própria (2024).

A coalescência consiste na transferência de informação da malha refinada para a grosseira, realizada pela soma das populações nas direções de interesse das  $n^D$  células  $x_{rj}$  da malha refinada que correspondem à uma célula  $x_c$  da malha base, conforme

$$[f_i(x_g, t)]_{\text{grosseira}} = \sum_{j=1}^{n^D} [(f_i(x_{rj}, t))]_{\text{refinada}} \cdot \quad (52)$$

A etapa de coalescência encontra-se representada esquematicamente na Figura 11. É importante ressaltar que, enquanto na explosão todas as direções das funções de distribuição de equilíbrio são levadas em consideração, na etapa de coalescência apenas as direções que se propagarão em direção à malha grosseira (mostradas em azul na Figura 11) são levadas em conta.

Figura 11 – Representação esquemática da etapa de coalescência.



Fonte: Autoria própria (2024).

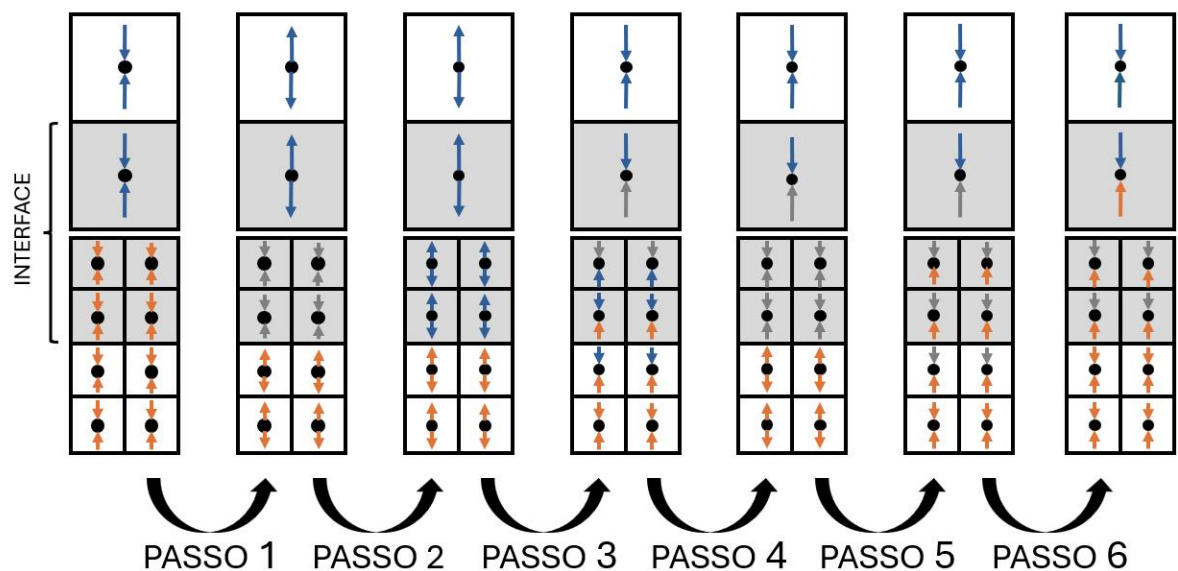
A Figura 12 representa esquematicamente as operações realizadas durante um passo de tempo de uma simulação que utiliza a técnica de refino de malha de Rohde et al. (2005) considerando o nível de refino entre as malhas como sendo  $n = 2$ . Representa-se apenas duas direções das funções de distribuição para fins de simplicidade. As células representadas em cinza são células da interface. As setas que apontam em direção ao centro da célula representam as funções de distribuição após a propagação, enquanto as setas que apontam do centro da célula para suas bordas representam o estado pós-colisional das funções de distribuição. As funções de distribuição representadas em azul são pertencentes à malha grosseira ou oriundas da malha grosseira, isso é, aparecem na malha refinada devido à explosão. Enquanto as funções de distribuição representadas em laranja são pertencentes ou originárias da malha refinada, aparecendo na malha grosseira através da etapa de coalescência. As funções de distribuição representadas em cinza são valores que não são tratados naquele passo.

Descreve-se o passo-a-passo representado na Figura 12 a seguir:

- Passo 1: Realiza-se a colisão em ambas as malhas. As células da malha refinada que pertencem à interface não são colididas, uma vez que, através da etapa de explosão, receberão os valores da malha grosseira;

- Passo 2: Executa-se a etapa de explosão, isto é, a transferência das funções de distribuição das células da malha grosseira para a malha refinada. Neste passo, todas as direções são consideradas;
- Passo 3: Realiza-se a etapa de propagação em ambas as malhas;
- Passo 4: Colide-se apenas a malha refinada. As células da interface não são consideradas;
- Passo 5: Propaga-se apenas a malha refinada;
- Passo 6: Executa-se a coalescência, ou seja, a redistribuição das funções de distribuição nas direções de interesse da malha refinada para a malha grosseira.

Figura 12 – Representação esquemática da técnica de refino de malha proposta por Rohde et al. (2005).



Fonte: Autoria própria (2024).

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

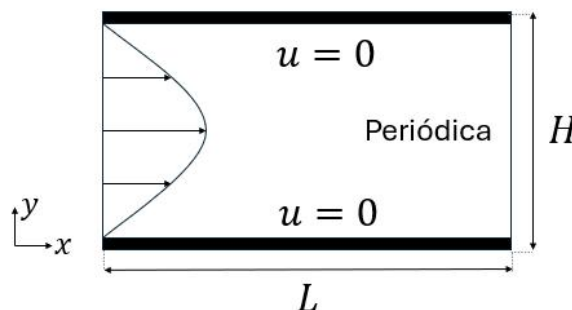
Neste capítulo, almeja-se validar a implementação do método de refino de malha proposto por Rohde et al. (2005) no método de lattice-Boltzmann por meio da realização de simulações numéricas de casos de referência. Esses casos são o escoamento entre duas placas planas, isto é, o escoamento de Poiseuille, o escoamento em uma cavidade quadrada, o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado, o escoamento externo ao redor de um cilindro e o escoamento externo ao redor de uma esfera.

As simulações foram realizadas no cluster hal, do Laboratório de Computação Científica da Universidade Federal de Santa Catarina, Campus de Joinville. Este cluster possui 26 nós, sendo um deles o nó mestre, responsável pela gestão dos recursos, acesso externo à internet e armazenamento de dados dos usuários. Os outros 25 nós são utilizados como nós computacionais, sendo divididos em dois grupos: um grupo com CPUs e outro com GPUs. As simulações foram rodadas nas CPUs de modelo Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2640 v4 @ 2.40GHz.

### 4.1 ESCOAMENTO PLANO DE POISEUILLE

O escoamento plano de Poiseuille consiste no escoamento laminar, bidimensional, em regime permanente, entre duas placas planas paralelas separadas por uma distância  $H$ . O escoamento é induzido por um gradiente de pressão ao longo da direção  $x$  e é caracterizado por um perfil parabólico de velocidades  $u_x(y)$ . O comprimento do domínio computacional é  $L$ .

Figura 13 – Geometria utilizada para o escoamento de Poiseuille.



Fonte: Autoria própria (2024).

Para este escoamento, aplicando-se as hipóteses de que o escoamento é incompressível, laminar, que acontece em regime permanente e é plenamente desenvolvido, a equação de Navier-Stokes resume-se a

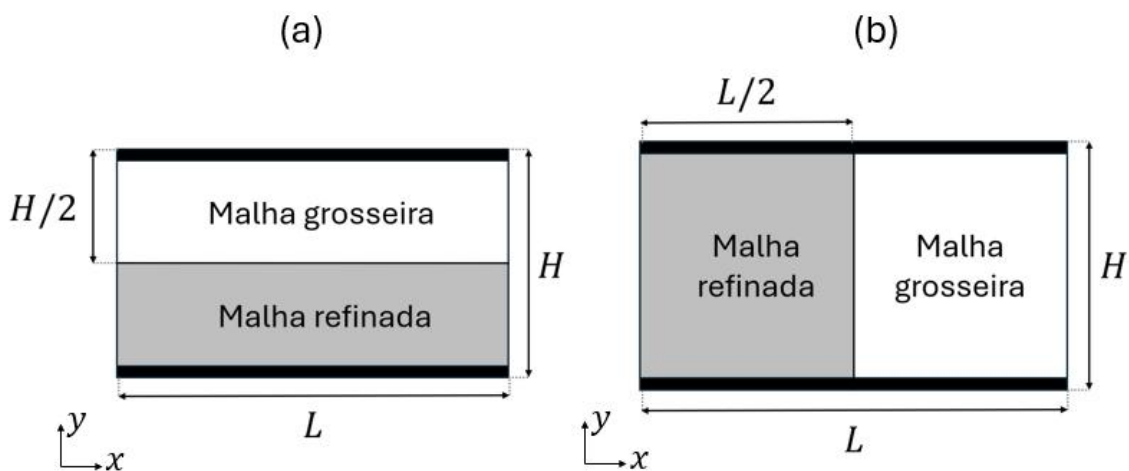
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}. \quad (53)$$

Considera-se um gradiente de pressão ao longo de  $x$  como sendo constante, isto é  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{L}$ , onde  $\Delta p$  é a diferença entre a pressão da entrada do canal e a pressão na saída do canal, e que as velocidades na parede são iguais a zero, ou seja,  $u_x(y = 0) = u_y(y = 0) = 0$  e  $u_x(y = H) = u_y(y = H) = 0$ . Encontra-se, portanto, a solução analítica para o perfil de velocidades ao longo da coordenada  $y$

$$u_x(y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} (Hy - y^2). \quad (54)$$

A solução dada por essa equação será tomada como base para a verificação das simulações realizadas. Reproduzindo-se o estudo de Rohde et al. (2005), dois casos para o escoamento foram realizados, variando a orientação da transição da malha. No primeiro caso, representado na Figura 14(a), considera-se a transição da malha grosseira para refinada paralela à direção da força de corpo, isto é, a metade inferior do canal é refinada, enquanto a parte superior é mantida grosseira. No segundo caso, representado na Figura 14(b), a transição entre as malhas é perpendicular á direção da força de corpo, ou seja, a metade esquerda da malha é refinada, enquanto a metade direita é mantida grosseira.

Figura 14 – Geometria do escoamento de Poiseuille (a) com força de corpo paralela à transição entre as malhas e (b) com força de corpo paralela à transição entre as malhas.



Fonte: Autoria própria (2024).

#### 4.1.1 Força de corpo paralela à interface de transição das malhas

Os valores considerados para a densidade  $\rho$ , altura do canal  $H$ , viscosidade  $\nu$ , força de corpo  $g_x$ , velocidade máxima no ponto médio do canal  $U_m$  e a localização da

transição entre as malhas  $y_t$  são apresentados no Quadro 1, e a geometria empregada para a resolução desse caso é mostrada na Figura 14(a). Utiliza-se o esquema de velocidades D2Q9, com o operador colisional BGK. A condição de velocidade nula nas paredes é dada pela condição de contorno de half-way bounce-back e uma condição periódica é aplicada na entrada e na saída do canal.

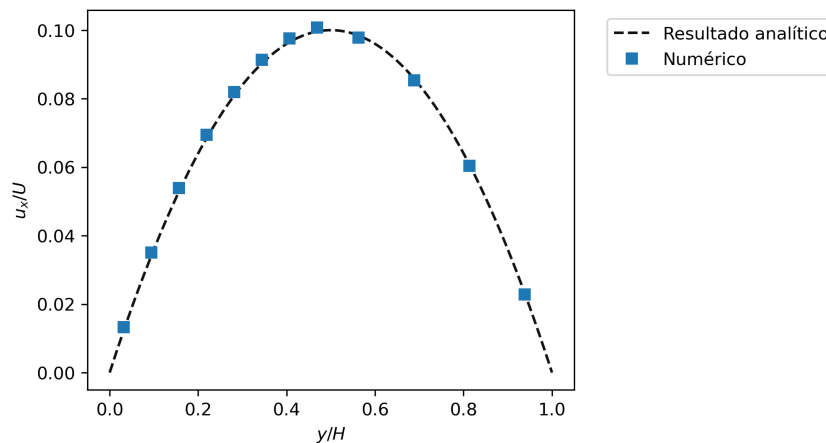
Quadro 1 – Parâmetros empregados para a simulação do escoamento de Poiseuille com força de corpo perpendicular à transição entre as malhas.

Parâmetro	Malha grosseira	Malha refinada
$\rho$	1	1
$H$	8	16
$\nu$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$g_x$	$\frac{1}{480}$	$\frac{1}{960}$
$U_m$	0.1	0.1
$y_t$	4	8

Fonte: Rohde et al. (2005, p. 445)

A Figura 15 apresenta o perfil de velocidades resultantes da simulação com o esquema de refino de malha de Rohde et al. (2005) plotado contra a solução analítica para o perfil de velocidades.

Figura 15 – Perfil de velocidades ao longo da direção  $y$  para o escoamento de Poiseuille com força de corpo paralela à transição entre as malhas.



Fonte: Autoria própria (2024).

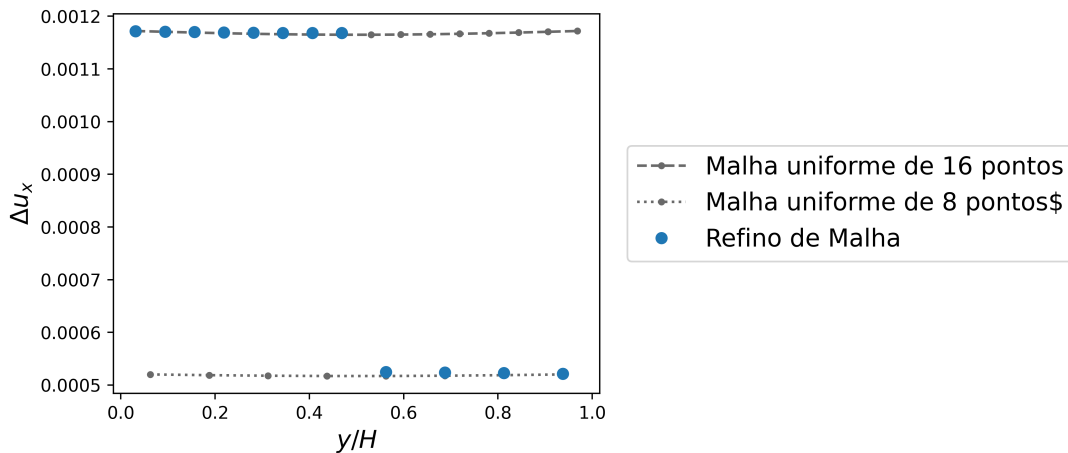
Realizaram-se também duas simulações com malhas uniformes de 16 e de 8 pontos, com o objetivo de comparar os desvios entre as simulações. A Figura 16, mostra a diferença entre os valores de velocidade, definida como:

$$\Delta u = |u_{analítico} - u_{numérico}|, \quad (55)$$



para malhas uniformes de 16 e 8 pontos, e para o esquema de refino de malha. Observa-se que  $\Delta u_x$  na região da malha refinada concorda com o valor obtido para a malha uniforme de 16 pontos, enquanto na região da malha grosseira,  $\Delta u_x$  concorda com o valor obtido para a malha uniforme de 8 pontos.

Figura 16 – Diferença entre a solução analítica e numérica para a velocidade ao longo da direção  $y$  para o escoamento de Poiseuille com força de corpo paralela à transição entre as malhas.



Fonte: Autoria própria (2024).

Os valores de  $\Delta u_x$  apresentados na Figura 16 estão de acordo com os resultados obtidos por Rohde et al. (2005). Ao comparar os resultados do esquema de lattice-Boltzmann com malhas uniformes com os resultados das simulações utilizando o esquema de refino de malha, percebe-se que o erro presente na simulação é decorrente da aplicação da condição de contorno de halfway bounce-back nas paredes. Conclui-se, portanto, que a técnica de refino de malha não introduz erros significativos para esse caso. O erro associado ao refino de malha é da ordem da precisão de máquina (ROHDE et al., 2005).

#### 4.1.2 Força de corpo perpendicular à interface de transição das malhas

Os valores empregados neste caso encontram-se dispostos no Quadro 2 e o esquema de refino de malha empregado para a simulação está representado na Figura 14(b). A condição de velocidade nula nas paredes é dada pela condição de contorno de halfway bounce-back e uma condição periódica é aplicada na entrada e na saída do canal.

Como o único gradiente presente no escoamento de Poiseuille,  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ , é orientado numa direção perpendicular à interface de transição entre as malhas, e o domínio de simulação não é uniforme ao longo da direção  $x$ , um gradiente artificial pode ser introduzido na simulação, especialmente na região próxima à interface. Dessa forma,

Quadro 2 – Parâmetros empregados para a simulação do escoamento de Poiseuille com força de corpo perpendicular à transição entre as malhas.

Parâmetro	Malha grosseira	Malha refinada
$\rho$	1	1
$H$	8	16
$\nu$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$L$	100	200
$g_x$	$\frac{1}{480}$	$\frac{1}{960}$
$U_m$	0.1	0.1
$x_t$	50	100

Fonte: Rohde et al. (2005, p. 447)

escolhe-se um comprimento do domínio  $L$  longo o suficiente para que esse gradiente artificial se torne desprezível.

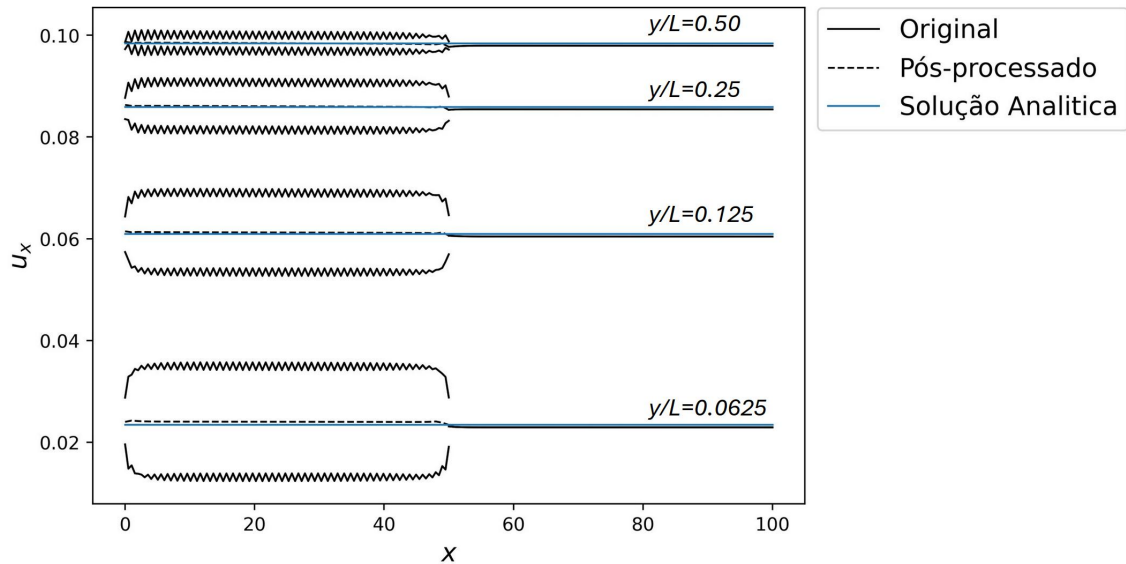
Uma avaliação do perfil de velocidades ao longo do domínio revela que a solução para esse caso apresenta resultados oscilantes na região da malha refinada, como pode ser observado na Figura 17. Ao contrário do caso anterior, é notável que há um gradiente artificial inserido pelo método de refino de malha. Rohde et al. (2005) argumentam que a presença de oscilações advindas de gradientes numéricos são comuns no LBM e que é possível se livrar do comportamento oscilatório ao realizar uma etapa de pós-processamento que consiste em realizar uma interpolação espacial dos resultados das células da malha refinada para transformá-los em resultados das células da malha grosseira, ou seja,

$$[\mathbf{u}(x_g, t)]_{\text{pós-processada}} = \sum_{j=1}^{2^D} \cdot [(\mathbf{u}(x_{rj}, t))]_{\text{refinada}}, \quad (56)$$

onde  $x_{rj}$  representa as células da malha refinada que correspondem a uma célula da malha base  $x_c$ , com o subíndice  $j = 1, 2, \dots, 2^D$ , onde  $D$  é o número de dimensões da malha. Essa etapa é análoga à etapa de coalescência, mas aqui é realizada para todas as células da malha refinada. Na Figura 17 estão mostrados também os valores obtidos para a velocidade após a etapa de pós-processamento. Percebe-se uma boa concordância com a solução analítica.

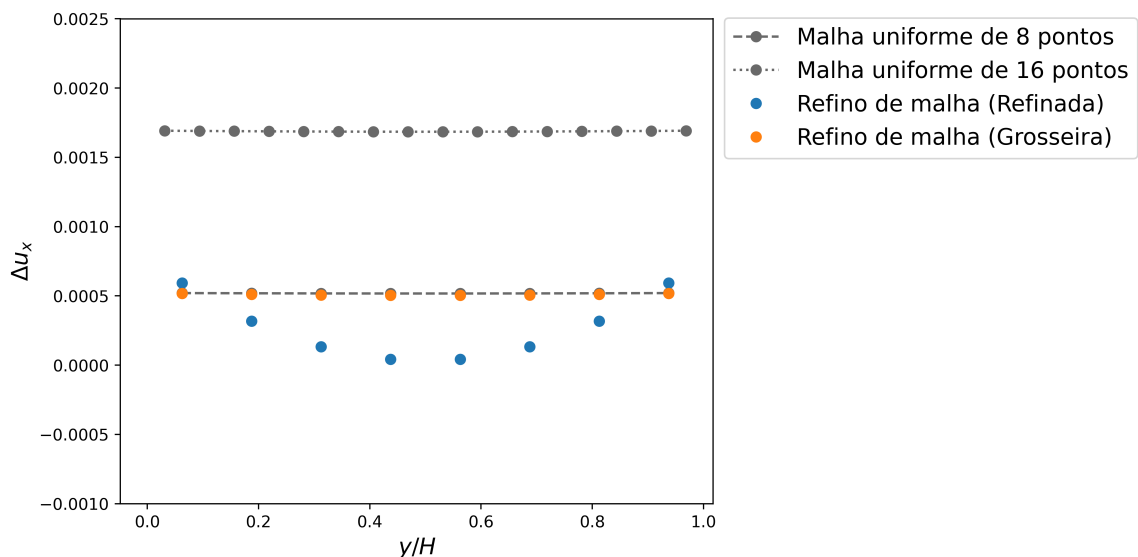
A Figura 18 mostra os valores de  $\Delta u_x$  após a etapa de pós-processamento tomados ao longo de  $x = 25$  para a porção refinada da malha e em  $x = 75$  para a porção grosseira da malha. Esses resultados são comparados com a solução das malhas uniformes de 8 e 16 pontos. Os resultados revelam uma ótima concordância com a solução analítica.

Figura 17 – Perfil de velocidade oscilante ao longo de  $x$  em diferentes posições  $y/L$  para o escoamento de Poiseuille com força de corpo perpendicular à transição entre as malhas.



Fonte: Autoria própria (2024).

Figura 18 – Diferença entre a solução analítica e numérica para a velocidade ao longo da direção  $y$  para o caso do escoamento de Poiseuille com força de corpo perpendicular à transição entre as malhas.

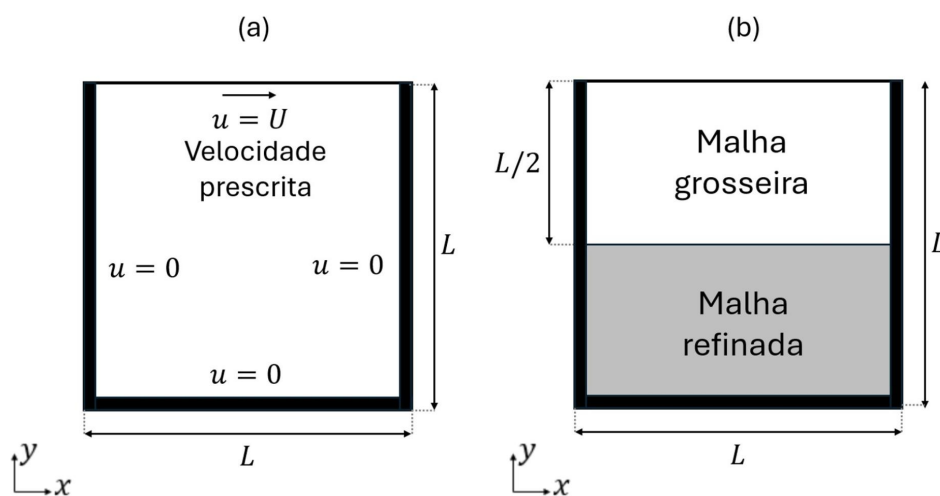


## 4.2 ESCOAMENTO EM UMA CAVIDADE QUADRADA

O escoamento em uma cavidade quadrada no movimento de um fluido dentro de um espaço fechado com formato quadrado, onde uma das paredes se move, enquanto as demais permanecem fixas. O movimento desta parede gera uma circulação do fluido dentro da cavidade, criando padrões de vórtices e zonas de recirculação.

Este caso foi implementado com o objetivo de comparar os resultados obtidos com os de Rohde et al. (2005) e validar a implementação do algoritmo de malha proposto por esses autores. A literatura apresenta numerosos estudos sobre este caso por meio de simulações numéricas. Hou et al. (1994) investigaram o problema utilizando o LBM em malhas uniformes para  $Re = 100$  até  $Re = 10^4$ , obtendo resultados excelentes em comparação com outras abordagens numéricas, como FVM e FEM. Adicionalmente, os resultados de Ghia et al. (1982) e Lin e Lai (2000) foram empregados para validar a posição dos vórtices, reforçando a robustez das simulações.

Figura 19 – Geometria (a) e esquema de refino de malha (b) para o escoamento em uma cavidade quadrada.



Fonte: Autoria própria (2024).

A simulação foi realizada para  $Re = 1000$ , visando a presença de vórtices que permitam verificar a capacidade da malha de modelar escoamentos mais detalhados. Utilizou-se o mesmo tamanho de malha e as mesmas condições de contorno empregados nos trabalhos de Rohde et al. (2005) e Hou et al. (1994). Uma malha refinada foi aplicada na metade inferior do domínio, assim como no trabalho de Rohde et al. (2005). As condições de contorno de paredes fixas foram impostas pelo método halfway bounce-back, enquanto uma condição de velocidade constante  $U$  foi aplicada no topo da cavidade. Os parâmetros empregados para este caso estão dispostos no Quadro 3, uma representação gráfica da geometria é feita na Figura 19(a) e o esquema de refinamento empregado é disposto na Figura 19(b).

Os padrões de linhas de corrente estão mostrados na Figura 12, e a etapa de pós-processamento foi realizada para eliminar a oscilação na malha refinada.

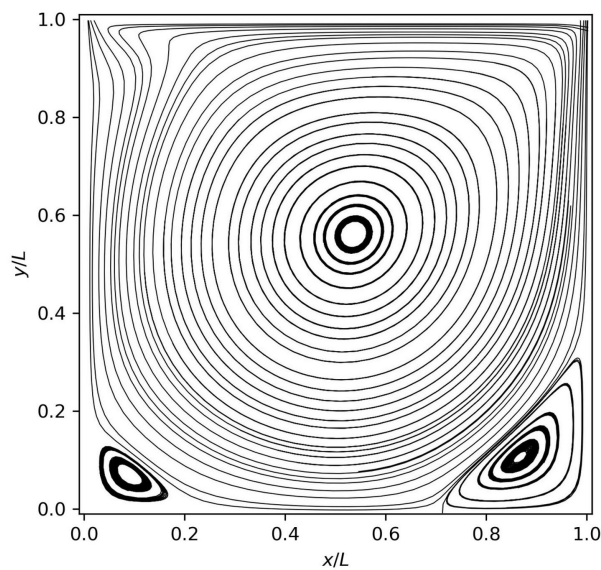
Os perfis de velocidade ao longo da linha de centro da cavidade são traçados na Figura 21. Os resultados para a simulação com o refinamento de malha concordam de maneira ótima com os resultados apresentados por Rohde et al. (2005). Assim

Quadro 3 – Parâmetros empregados para a simulação do escoamento em uma cavidade quadrada.

Parâmetro	Malha grosseira	Malha refinada
$\rho$	1	1
$L$	128	256
$\nu$	0.0128	0.0256
$L$	128	256
$U$	0.1	0.1

Fonte: Autoria própria (2024).

Figura 20 – Padrões de linha de corrente para o escoamento em uma cavidade quadrada com  $Re = 1000$ .



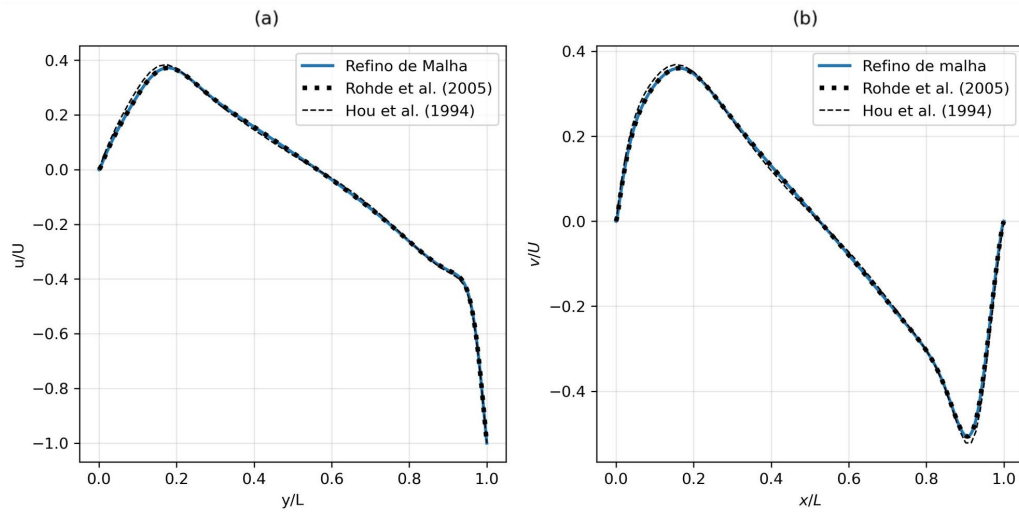
Fonte: Autoria própria (2024).

como no trabalho de Rohde et al. (2005), os resultados mostraram uma leve discrepância em relação ao trabalho de Hou et al. (1994). Rohde et al. (2005) argumentam que isso se deve ao fato de Hou et al. (1994) utilizarem o esquema de fullway bounce-back, enquanto neste trabalho emprega-se o esquema de halfway bounce-back, que possui maior acurácia.

Em seguida, analisa-se os resultados para as posições dos três vórtices presentes no escoamento: um vórtice central, um vórtice inferior e um vórtice superior. Essa comparação é feita por meio de uma análise do padrão das linhas de corrente e é apresentada nas Tabelas 3, 4 e 5. Compara-se os resultados com os de Rohde et al. (2005), Lin e Lai (2000), Hou et al. (1994) e Ghia et al. (1982). Observa-se que os resultados obtidos concordam fortemente com os encontrados na literatura.

Adicionalmente, realizou-se simulações para uma malha inteiramente uniforme com  $L = 128$  e  $L = 256$ , no intuito de comparar o tempo de execução com o refino de malha. Dobrar o tamanho da geometria significa que um escoamento que leva um

Figura 21 – Perfis de velocidade ao longo da linha de centro em  $x$  (a) e em  $y$  (b) para o escoamento em uma cavidade quadrada.



Fonte: Autoria própria (2024).

Tabela 3 – Posição do vórtice central para o escoamento em uma cavidade quadrada.

	$x/L$	$y/L$
Ghia et al. (1982)	0.5313	0.5625
Hou et al. (1994)	0.5333	0.5647
Lin e Lai (2000)	0.5315	0.5669
Rohde et al. (2005)	0.5323	0.5663
Presente estudo	0.5313	0.5625

Fonte: Autoria própria (2024).

determinado tempo físico para atravessar a geometria, agora leva o dobro do tempo, dessa forma, o número de passos de tempo deve também ser dobrado de uma simulação para outra. Para a malha uniforme de  $L = 128$ , a simulação demorou 198.2102 segundos, enquanto para  $L = 256$ , a simulação demorou 1246.5628 segundos. Em contraste, a simulação utilizando o refino de malha, cujos parâmetros são apresentados no Quadro 3, foi concluída em 344.3575 segundos. Uma comparação entre as simulações uniforme e com refino de malha revela que a diferença entre os resultados para a velocidade para a parte refinada e a simulação uniforme de  $L = 256$  é da ordem de  $10^{-4}$ , enquanto para a região grosseira e a malha uniforme de  $L = 128$  essa diferença fica na ordem de  $10^{-3}$ . Isso evidencia que o algoritmo de refino de malha não apenas não introduz erros significativos para esse caso, mas também reduz significativamente o tempo total de simulação.

Tabela 4 – Posição do vórtice inferior esquerdo para o escoamento em uma cavidade quadrada.

	$x/L$	$y/L$
Ghia et al. (1982)	0.0859	0.0781
Hou et al. (1994)	0.0902	0.0784
Lin e Lai (2000)	0.0827	0.0787
Rohde et al. (2005)	0.0827	0.0787
Presente estudo	0.0859	0.0781

Fonte: Autorial própria (2024).

Tabela 5 – Posição do vórtice inferior direito para o escoamento em uma cavidade quadrada.

	$x/L$	$y/L$
Ghia et al. (1982)	0.8594	0.1094
Hou et al. (1994)	0.8667	0.1137
Lin e Lai (2000)	0.8583	0.1142
Rohde et al. (2005)	0.8654	0.1128
Presente estudo	0.8594	0.1094

Fonte: Autorial própria (2024).

#### 4.3 ESCOAMENTO INTERNO AO REDOR DE UM CILINDRO QUADRADO

O escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado refere-se ao movimento de um fluido dentro de um canal que contém um obstáculo com formato quadrado. Utiliza-se para essa simulação um domínio bidimensional, como mostrado na Figura 22. Considera-se  $D = 30$  na região refinada da malha. A malha base tem 750x120 pontos, enquanto a malha refinada tem 1050x120 pontos. A região em que o refino foi empregado está disposta na Figura 23.

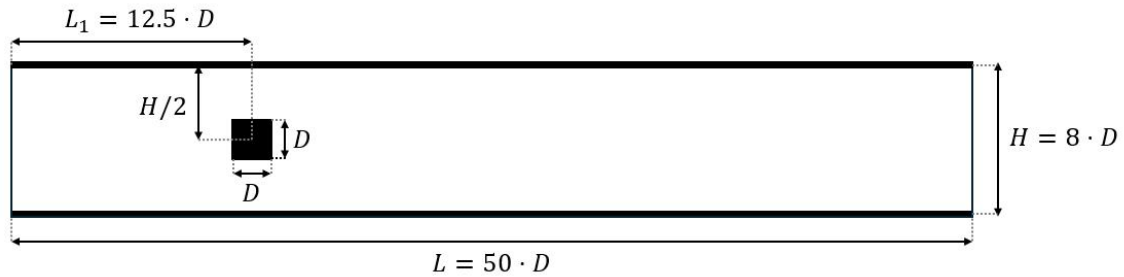
Assim como implementado por Wang et al. (2015) e Breuer et al. (2000), aplica-se a condição de não deslizamento nas paredes do canal através da condição de contorno de halfway bounce-back, um perfil de velocidades parabólico na entrada, com velocidade máxima na linha de centro igual a  $U_{máx}$  e uma condição de contorno convectiva na saída

$$\partial_t f_i + U_{máx} \partial_x f_i = 0, \quad (57)$$

essa condição é proposta em Lou et al. (2013). Wang et al. (2015) argumentam que essa condição de contorno garante que os vórtices possam se aproximar e passar pela fronteira de saída sem distúrbios ou reflexões significativas para o domínio interno.

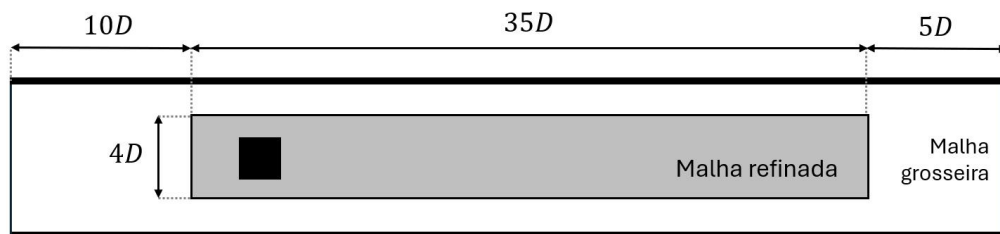
Para valores de  $Re$  até aproximadamente 60 o escoamento é estacionário. A

Figura 22 – Geometria para o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado.



Fonte: Autoria própria (2024).

Figura 23 – Esquema de refino para a simulação o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado.



Fonte: Autoria própria (2024).

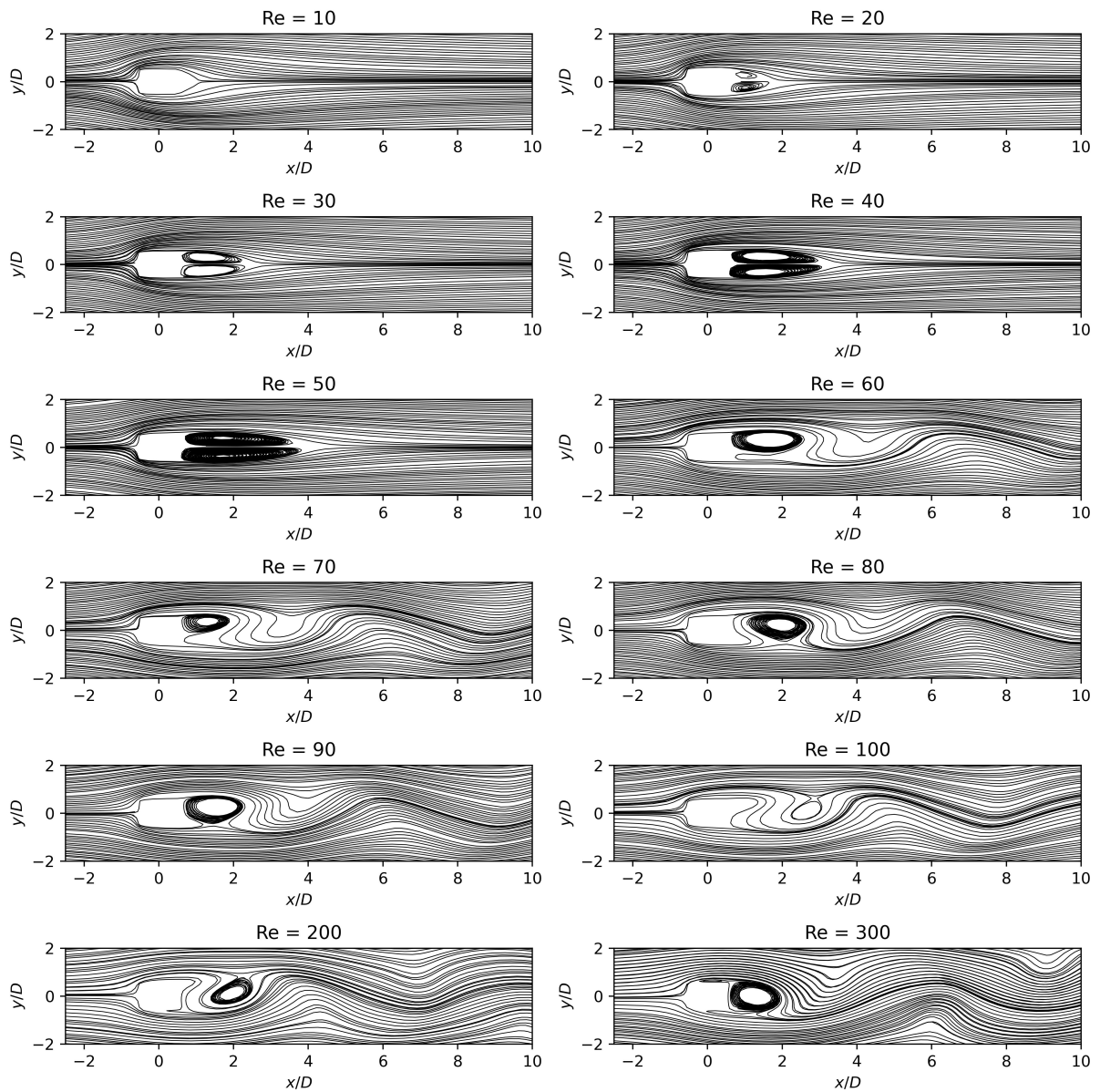
partir desse limite, o escoamento passa a ser transiente, com o desprendimento de vórtices. Realizou-se simulações para números de Reynolds na faixa de  $10 \leq Re \leq 300$ . O campo de velocidades e o valor do coeficiente de arrasto foram avaliados e comparados com os resultados obtidos por Wang et al. (2015) e Breuer et al. (2000). A Figura 24 mostra os padrões de linha de corrente para o caso em estudo, a partir das simulações realizadas com o esquema de refino de malha. Percebe-se que, a partir de  $Re \approx 60$ , ocorre a formação de esteiras de vórtices.

O número de Mach foi fixado em 0.1 para evitar efeitos de compressibilidade durante as simulações. Para os escoamentos sem a formação de vórtices, estabeleceu-se como critério de convergência que a velocidade e as forças não teriam uma variação relativa maior do que  $1 \cdot 10^{-6}$  entre um passo de tempo e outro. No caso dos escoamentos com o desprendimento de vórtices, a simulação foi continuada até alcançar um regime oscilatório estacionário. Neste estado, embora haja flutuações presentes, as propriedades médias do escoamento, como a velocidade e o coeficiente de arrasto, podem ser estimadas através da média temporal.

Para os escoamentos em que não ocorre o desprendimento de vórtices, o escoamento é caracterizado por um par de vórtices de recirculação estacionários localizados atrás do cilindro. O comprimento de esteira  $L_r$  refere-se à distância ao longo da qual os efeitos de um escoamento perturbado por um corpo se estendem atrás



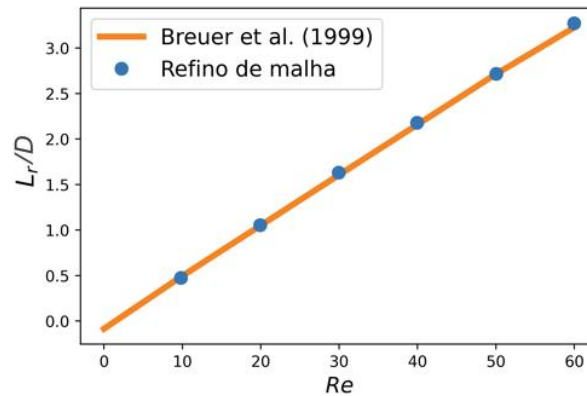
Figura 24 – Padrões de linha de corrente para diferentes números de Reynolds para o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado.



Fonte: Autoria própria (2024).

dele. Neste trabalho, estimou-se o comprimento de esteira calculando-se a distância, ao longo do comprimento do canal e na linha de altura média, desde o ponto imediatamente atrás do obstáculo até o ponto em que a velocidade na direção  $x$  atingia 95% da velocidade de escoamento livre. A Figura 25 mostra os comprimentos de esteira calculados em comparação com os resultados encontrados por Breuer et al. (2000).

Figura 25 – Comprimentos de esteira para o escoamento ao redor de um cilindro quadrado.



Fonte: Autoria própria (2024).

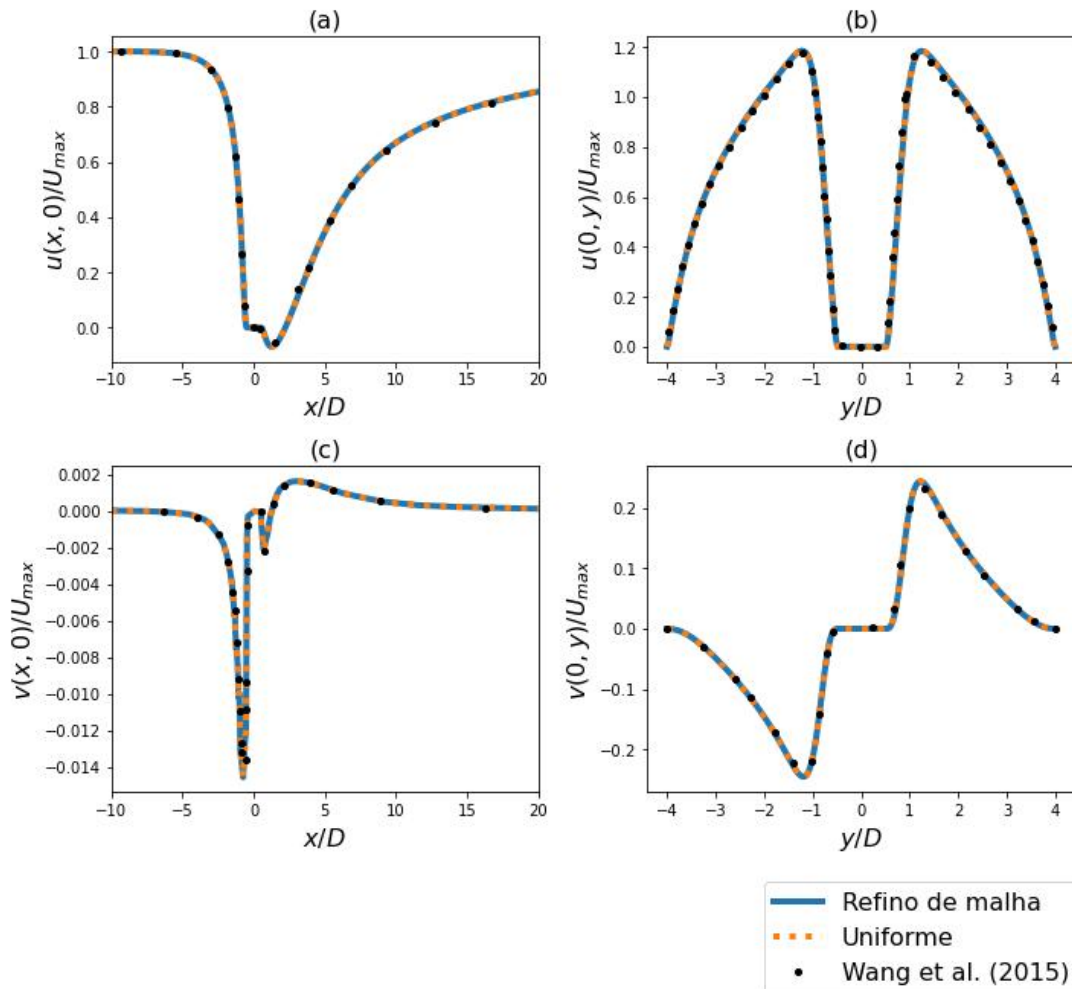
A Figura 26 plota o perfil de velocidades para  $Re = 30$  e  $M = 0.1$  para uma malha uniforme, com  $D = 30$  e  $240 \times 1500$  pontos, contra os resultados obtidos através da simulação com o esquema de refino de malha e os resultados encontrados por Wang et al. (2015). Para  $Re = 100$  e  $M = 0.1$ , a Figura 27 mostra o perfil de velocidades ao longo do domínio e compara os resultados obtidos pelo LBM com refino de malha com o LBM uniforme, e com os dados encontrados em Breuer et al. (2000). Percebe-se que há uma diferença entre os valores das velocidades encontrados por Breuer et al. (2000), o que pode ser atribuído à natureza oscilatória do escoamento, de modo que a escolha do momento em que se realiza a análise é de suma importância para os resultados. Realiza-se ainda uma análise do coeficiente de arrasto e do número de Strouhal. O coeficiente de arrasto é dado pela Equação 58, onde  $D$  é a força de arrasto exercida pelo fluido sobre o corpo,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $U$  é a velocidade do fluido em relação ao corpo e  $L$  é o comprimento característico, nesse caso, a medida do lado do quadrado.

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 L} \quad (58)$$

O número de Strouhal é dado pela Equação 59. Essa medida adimensional consiste em uma relação entre a frequência de oscilação dos vórtices desprendidos e as características do escoamento e do corpo. Na Equação 59,  $f$  é a frequência de desprendimento dos vórtices.

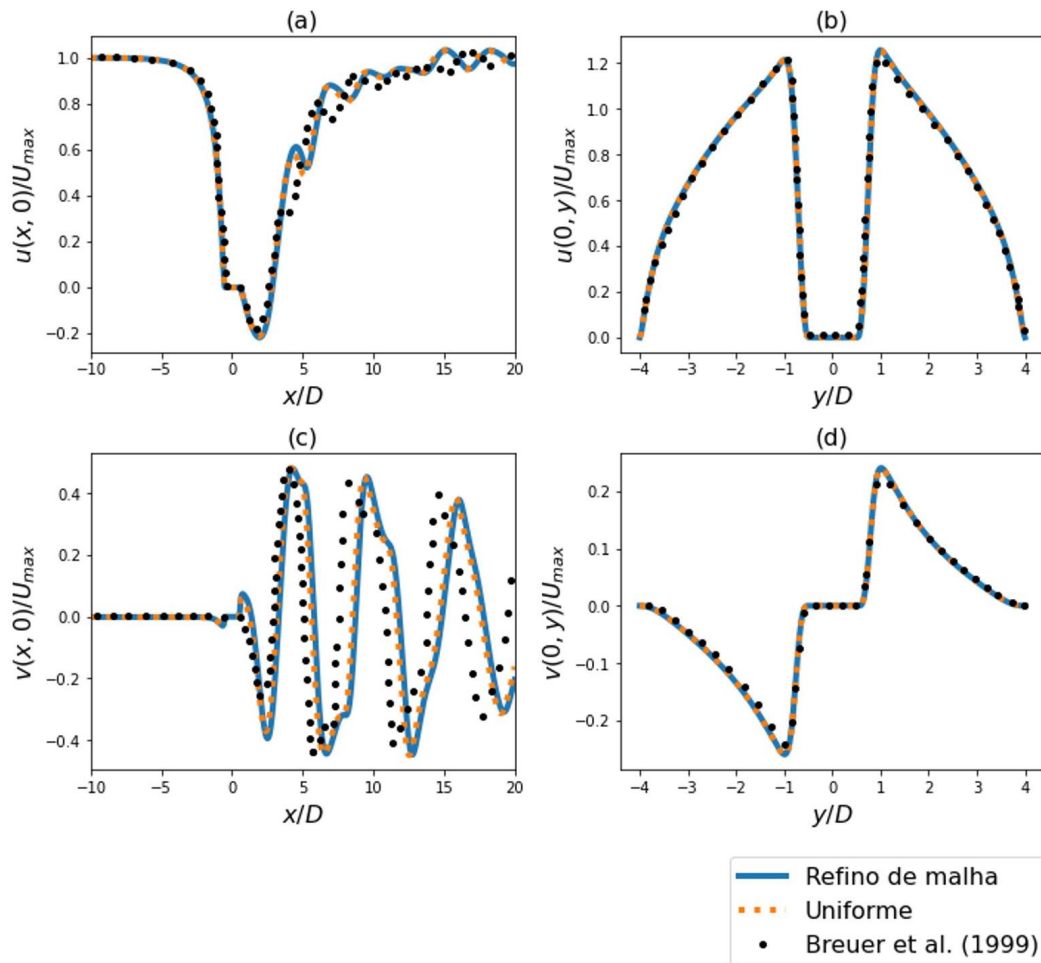
$$St = \frac{fL}{U} \quad (59)$$

Figura 26 – Perfis de velocidade ao longo da linha de centro do domínio para  $Re = 30$  para o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado.



Fonte: Autoria própria (2024).

Figura 27 – Perfis de velocidade ao longo da linha de centro do domínio para  $Re = 100$  para o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado.

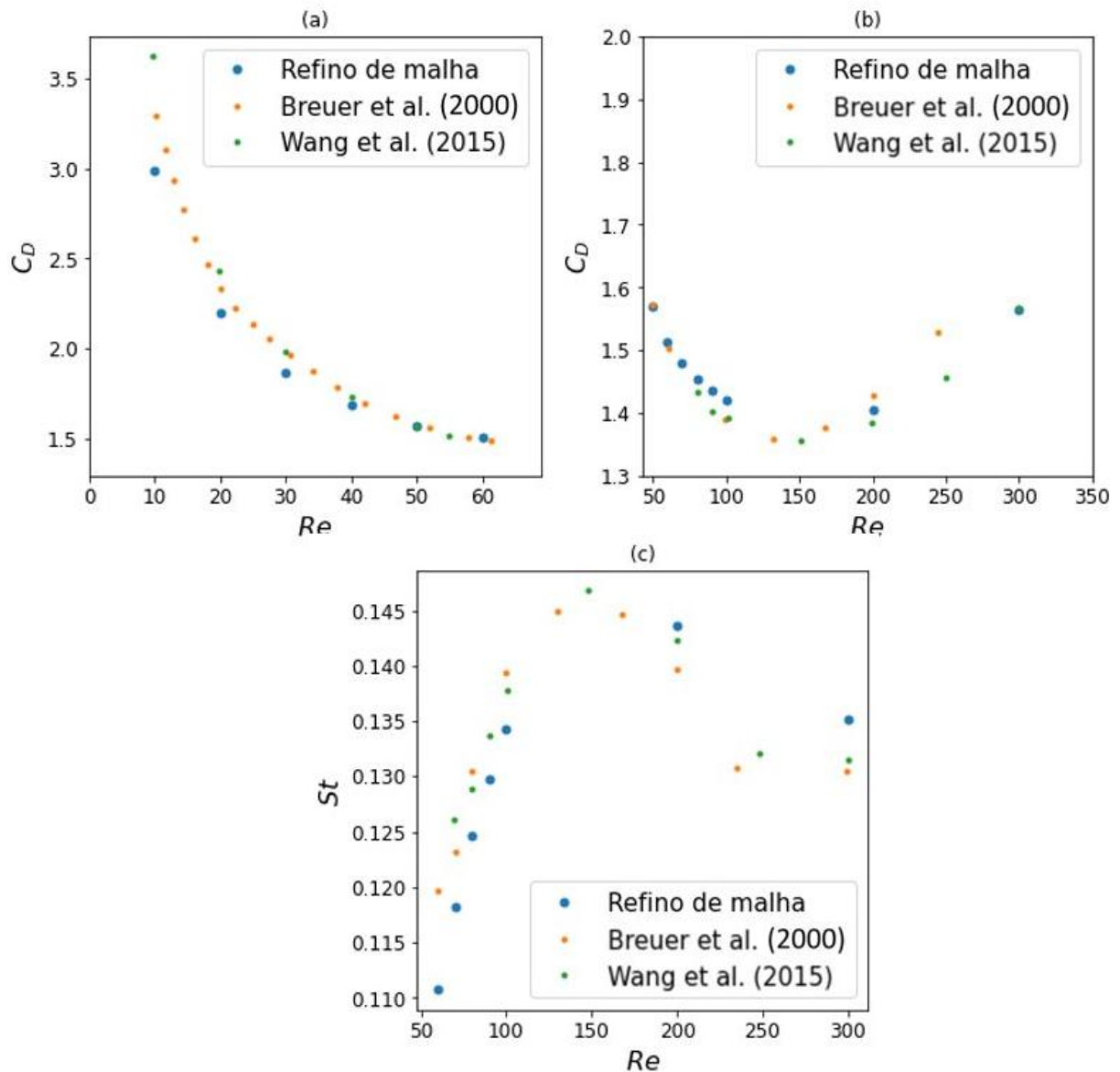


Fonte: Autoria própria (2024).

O cálculo das forças que o fluido exerce sobre o corpo é feito através do método de troca de quantidade de movimento e a estimativa da frequência de desprendimento dos vórtices é tomada a partir de uma análise temporal da força de sustentação, feita através de uma transformada rápida de Fourier, assim como feito no trabalho de Breuer et al. (2000).

A Figura 28(a) mostra os resultados do coeficiente de arrasto estimado para o escoamento ao redor do cilindro quadrado na faixa de Reynolds em que o campo de velocidades atinge um estado estacionário. A Figura 28(b) apresenta os resultados do coeficiente de arrasto médio, calculado como média temporal, para o caso em que ocorre a formação de vórtices. A Figura 28(c) apresenta o número de Strouhal obtido para as simulações rodadas. Percebe-se que há uma leve discrepância nos resultados, que podem ser advindas do método de estimativa da força, uma vez que Breuer et al. (2000) não menciona o método empregado em seu trabalho.

Figura 28 – Coeficiente de arrasto (a), coeficiente de arrasto médio (b) e número de Strouhal (c) em função do número de Reynolds para o escoamento interno ao redor de um cilindro quadrado.



Fonte: Autoria própria (2024).

Uma análise do trabalho de outros autores, disposta na Tabela 6, permite observar que os valores para o coeficiente de arrasto e o número de Strouhal encontrados estão dentro da faixa esperada.

Por fim, realizou-se uma comparação entre os tempos de simulação para uma malha uniforme com  $D = 30$  e  $1500 \times 240$  pontos e para as simulações realizadas com o esquema de refino de malha (Tabela 7). A aplicação do refino de malha resultou em uma redução média de aproximadamente 68% no tempo de simulação, enquanto uma análise da diferença média entre as velocidades da simulação com a malha uniforme

Tabela 6 – Comparação entre coeficiente de arrasto e número de Strouhal para o escoamento interno ao redor do cilindro quadrado com resultados encontrados na literatura.

$Re$	Fonte	$C_D$	$St$
40	Sen et al. (2011)	1.67	–
	Xu et al. (2023)	1.67	–
	Dhiman R. P. Chhabra e Eswaran (2006)	1.76	–
	Wang et al. (2015)	1.73	–
	Breuer et al. (2000)	1.69	–
	Presente estudo	1.69	–
100	Sohankar et al. (1998)	1.48	0.146
	Sharma e Eswaran (2004)	1.49	0.149
	Sen et al. (2011)	1.53	0.145
	Wang et al. (2015)	1.39	0.136
	Breuer et al. (2000)	1.39	0.135
	Presente estudo	1.42	0.134
200	Okajima (1982)	1.50	0.141
	Xu et al. (2023)	1.49	0.141
	Sohankar et al. (1998)	1.46	0.145
	Wang et al. (2015)	1.38	0.144
	Breuer et al. (2000)	1.42	0.143
	Presente estudo	1.40	0.143

Fonte: Autoria própria (2024).

em relação à simulação da técnica de refino é da ordem de  $10^{-4}$ . Isso evidencia a eficiência do esquema de refino de malha, permitindo uma modelagem precisa com uma redução significativa no tempo computacional.

#### 4.4 ESCOAMENTO EXTERNO AO REDOR DE UM CILINDRO CIRCULAR

O escoamento externo ao redor de um obstáculo cilíndrico é um problema clássico da aerodinâmica e foi extensivamente estudado na literatura. Tritton (1959) estudou experimentalmente esse caso para baixos números de Reynolds, e Roshko (1961) para elevados números de Reynolds. Diversos outros autores propuseram-se a estudar esse escoamento de maneira numérica, como Dennis e Chang (1970), que obtém as equações de movimento para o escoamento incompressível ao redor do cilindro através do método das diferenças finitas, Calhoun (2002), que busca resolver as equações de Navier-Stokes para uma malha irregular, e Saiki e Biringen (1996) que se utiliza de um método de nós virtuais para melhor modelar a camada limite em um esquema de diferenças finitas de alta ordem.

Para o LBM, He e Doolen (1997) propõem um esquema de interpolação baseado em coordenadas curvilíneas, para modelar corpos de superfície arredondada

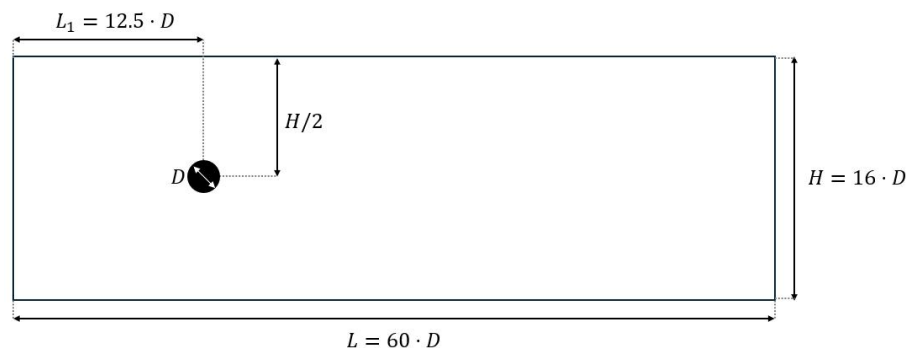
Tabela 7 – Comparação dos tempos de simulação em segundos entre a malha uniforme e o esquema de refino de malha para o escoamento ao redor do cilindro quadrado.

$Re$	Malha uniforme	Malha com refino	Redução percentual
10	1576	490	68.9%
20	2881	902	68.7%
30	4194	972	76.8%
40	4680	1456	68.9%
50	5541	1555	71.9%
60	6682	2185	67.3%
70	7216	2132	70.5%
80	5781	2342	59.5%
90	7047	2425	65.6%
100	6692	2116	68.4%
200	6100	2159	64.6%
300	6446	2301	64.3%

de maneira contínua. Dupuis et al. (2008) implementam uma técnica de nós virtuais para o LBM, de modo a melhor capturar os gradientes na camada limite.

Para a simulação do escoamento externo ao redor de um cilindro, utiliza-se um domínio bidimensional, como mostrado na Figura 29. Faz-se  $D = 30$  na região refinada, e a razão de proporcionalidade entre as malhas é igual a 2. Dessa forma, a malha base tem dimensões 240x900 pontos, e a malha refinada que sobrepõe a região mostrada na Figura 30 tem 240x900 pontos. Posiciona-se o cilindro de maneira suficientemente distante das fronteiras, de maneira a minimizar o efeito de gradientes de velocidade e pressão causados pela presença do obstáculo no fluido nos contornos, e poder simular o escoamento externo de maneira fidedigna.

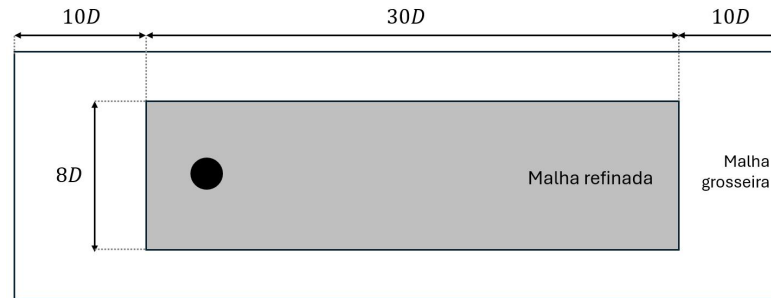
Figura 29 – Geometria para o escoamento ao redor de um cilindro.



Fonte: Autoria própria (2024).

Realiza-se simulações para números de Reynolds de 10 até 300, para capturar a evolução do desprendimento dos vórtices. Para as simulações, fixa-se o número de Mach em 0.1, visando evitar a inserção de erros numéricos relacionados à com-

Figura 30 – Esquema de refino para o escoamento ao redor de um cilindro.



Fonte: Autoria própria (2024).

pressibilidade. A velocidade na entrada é imposta por uma condição de contorno de velocidade prescrita e a saída é modelada através da condição de contorno convectiva, assim como é feito por Premnath et al. (2013) para o LBM e por Choi et al. (2007) para o FVM. Nas fronteiras superior e inferior, aplica-se uma condição de contorno de deslizamento livre, isto é, a velocidade normal ao plano é nula, enquanto a velocidade tangencial é configurada como sendo igual à velocidade de escoamento livre. Ao redor do cilindro, a condição de não-deslizamento é aplicada através do esquema de halfway bounce-back.

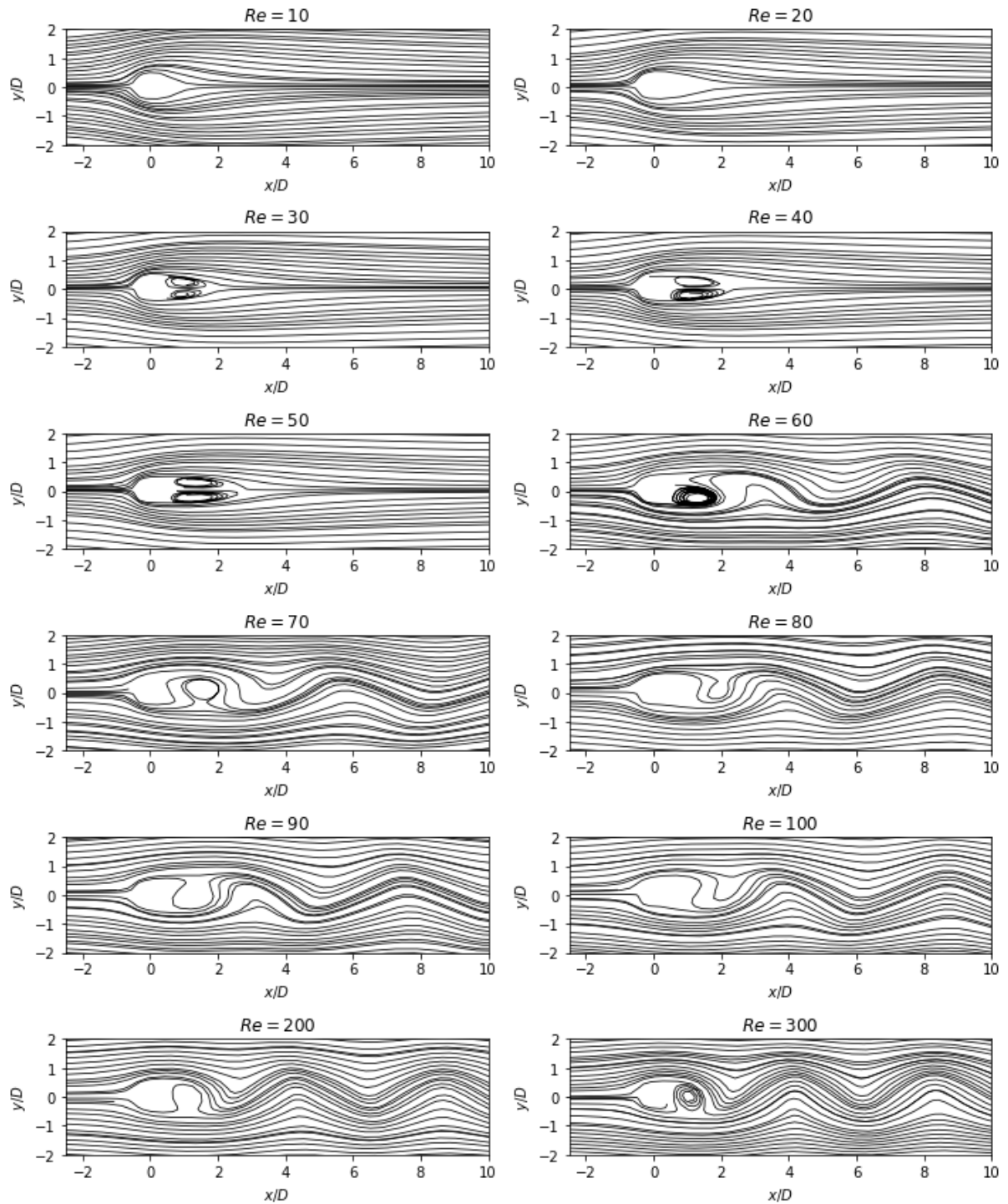
A Figura 31 mostra a evolução do regime de escoamento com o aumento do número de Reynolds através da representação das linhas de corrente ao redor do obstáculo. Percebe-se que a partir de  $Re > 50$  o escoamento adquire um caráter assimétrico e com o aumento do número de Reynolds percebe-se a formação das esteiras de vórtice e o comportamento oscilatório do campo de velocidade. Silva et al. (2003) afirmam que o escoamento deixa de ser estacionário para  $Re \approx 47$ , o que está de acordo com o encontrado pelo presente trabalho.

Considerando os casos onde o escoamento atinge o regime estacionário, compara-se os resultados para o comprimento de esteira, o ângulo de separação e o coeficiente de arrasto obtidos no presente trabalho com os resultados encontrados na literatura na Tabela 8. O comprimento de esteira é obtido através da medida da distância ao longo do comprimento e na linha de altura média do domínio, desde o ponto imediatamente atrás do obstáculo até o ponto em que a velocidade na direção  $x$  atinge 95% da velocidade de escoamento livre. O ângulo de separação é medido do bordo de ataque do cilindro, ou seja, de seu ponto de estagnação, até onde ocorre a mudança do sinal do gradiente de velocidades  $\frac{\partial u}{\partial y}$ . Para a estimativa das força de arrasto exercida sobre o fluido sobre a esfera empregou-se o método de troca de quantidade de movimento. Percebe-se que os resultados obtidos concordam com outros valores encontrados na literatura.

A Figura 32(a) mostra o coeficiente de arrasto em comparação com os resultados de Le et al. (2008) e Silva et al. (2003), que utilizam o método da fronteira



Figura 31 – Padrões de linha de corrente para diferentes números de Reynolds para o escoamento interno ao redor de um cilindro.



Fonte: Autoria própria (2024).

imersa (*immersed boundary method*) para resolver numericamente o escoamento, e os resultados de He e Doolen (1997), que propõem uma formulação do LBM em coordenadas curvilíneas. A 32(b) mostra o número de Strouhal em função do número

Tabela 8 – Comparação entre comprimento de esteira, ângulo de separação e coeficiente de arrasto encontrados na literatura para o escoamento ao redor de um cilindro.

$Re$	Fonte	$L_r/D$	$\theta_S$	$C_D$
10	Dennis e Chang (1970)	0.27	29.6	2.85
	He e Doolen (1997)	0.24	26.7	3.17
	Presente estudo	0.24	30.0	3.114
20	Dennis e Chang (1970)	0.94	43.7	2.05
	Fornberg (1980)	0.91	–	2.00
	Choi et al. (2007)	0.90	40.8	2.02
	Calhoun (2002)	0.91	45.5	2.19
	Russell e Wang (2003)	0.94	43.3	2.13
	He e Doolen (1997)	0.92	43.0	2.15
	Presente estudo	0.91	45.72	2.19
40	Dennis e Chang (1970)	2.35	53.8	1.52
	Fornberg (1980)	2.24	–	1.50
	Choi et al. (2007)	2.25	51.0	1.52
	Calhoun (2002)	2.18	54.2	1.62
	Russell e Wang (2003)	2.29	53.6	1.49
	He e Doolen (1997)	2.24	52.8	1.50
	Presente estudo	2.32	51.5	1.60

Fonte: Autoria própria (2024).

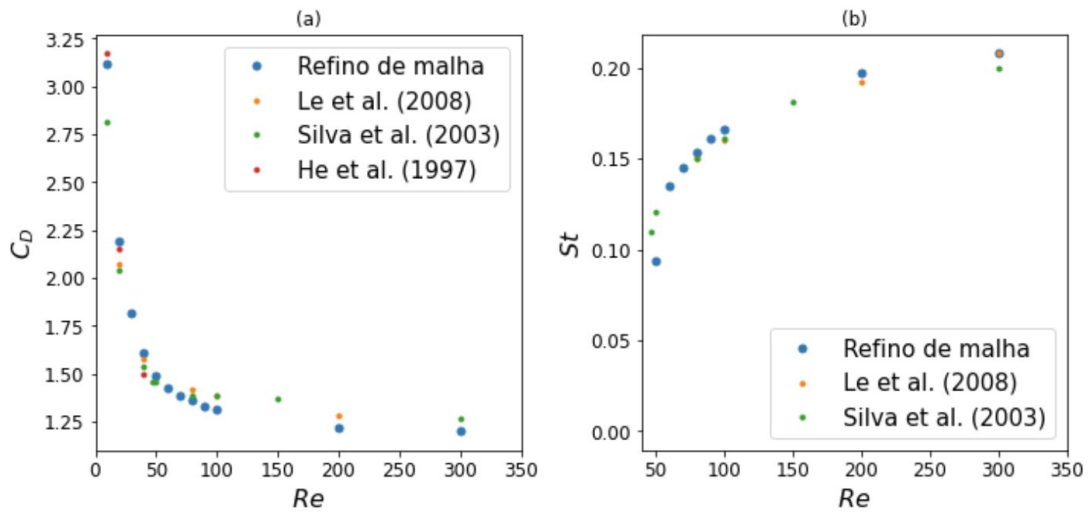
de Reynolds e os compara com os resultados de Le et al. (2008) e Silva et al. (2003). Considerando o regime transiente, para os casos de  $Re = 100$  e  $Re = 200$ , onde ocorre o desprendimento de vórtices, compara-se os valores de coeficiente de arrasto médio e do número de Strouhal com a literatura na Tabela 9.

Tabela 9 – Comparação entre coeficiente de arrasto médio e número de Strouhal encontrados na literatura para o caso do escoamento ao redor de um cilindro.

$Re$	Fonte	$C_D$	$St$
100	Choi et al. (2007)	1.34	0.164
	Kim et al. (2001)	1.33	0.165
	Calhoun (2002)	1.33	0.175
	Russell e Wang (2003)	1.38	0.169
	Presente estudo	1.31	0.166
200	Choi et al. (2007)	1.36	0.191
	Calhoun (2002)	1.17	0.202
	Russell e Wang (2003)	1.29	0.195
	Presente estudo	1.22	0.197

Fonte: Autoria própria (2024).

Figura 32 – Coeficiente de arrasto médio (a) e número de Strouhal (b) em função do número de Reynolds para o escoamento ao redor de um cilindro.



Fonte: Autoria própria (2024).

Tabela 10 – Comparação dos tempos de simulação em segundos entre a malha uniforme e o esquema de refino de malha para o caso do escoamento ao redor de um cilindro.

$Re$	Malha uniforme	Malha com refino	Redução percentual
10	1358	875	35.5%
20	1874	1267	32.4%
30	2131	1412	33.8%
40	2565	1515	41.0%
50	2989	2095	29.9%
60	3152	2173	31.0%
70	3139	2056	34.5%
80	3277	2238	31.7%
90	3028	1911	36.9%
100	3227	1975	38.8%
200	3493	2037	41.7%
300	3405	2159	36.6%

A utilização da técnica de refino de malha teve um impacto significativo nos tempos de simulação neste estudo. Uma análise dos tempos de simulação em segundos para  $Re$  variando de 10 a 300 (Tabela 10), mostra uma diminuição de cerca de 35% no tempo de simulação ao empregar o domínio refinado mostrado na Figura 30.

#### 4.5 ESCOAMENTO EXTERNO AO REDOR DE UMA ESFERA

A simulação do escoamento ao redor de uma esfera almeja validar a aplicação do método de refino de malha implementado neste trabalho para escoamentos

em um domínio tridimensional, com uma geometria mais complexa, onde o refino de malha ao redor do contorno é de fundamental importância. Johnson e Patel (1999) destacam que, assim como no escoamento bidimensional ao redor de um cilindro, instabilidades podem gerar campos de escoamento não estacionários. No entanto, ao contrário dos escoamentos bidimensionais, o escoamento tridimensional permite interações cinemáticas e vorticiais mais complexas, o que torna sua modelagem numérica mais complexa.

O regime de escoamento ao redor da esfera pode ser classificado quanto ao aparecimento de estruturas de vórtice. Para números de Reynolds até aproximadamente 200, o regime do escoamento ao redor da esfera é classificado como laminar e axissimétrico. Para a faixa de  $210 \leq Re \leq 270$  encontra-se um regime laminar não-axissimétrico. Para números de Reynolds acima de 270, encontra-se um regime não estacionário (JOHNSON; PATEL, 1999).

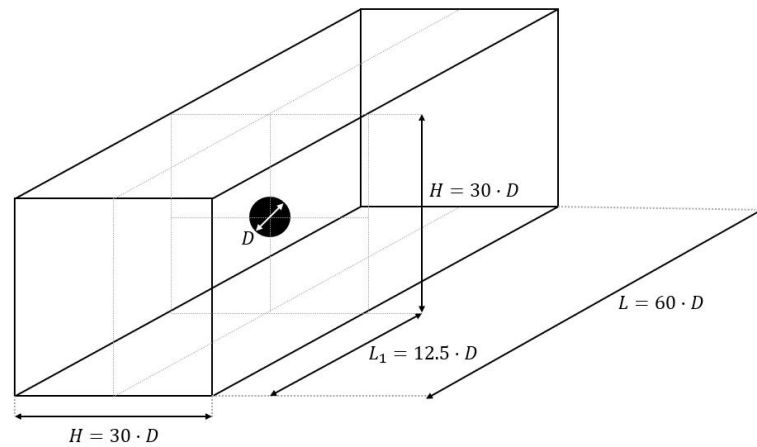
O escoamento ao redor de uma esfera é extensamente estudado na literatura. Ross e Willmarth (1971) realizaram um estudo experimental para avaliar o arrasto ao redor de uma esfera variando para uma faixa de número de Reynolds igual a  $5 \leq Re \leq 1 \cdot 10^5$ . Achenbach (1972) dedicou-se a estudar esse mesmo caso experimentalmente para  $5 \cdot 10^4 \leq Re \leq 6 \cdot 10^6$ . Diversos outros autores dedicaram-se ao estudo numérico do escoamento ao redor da esfera, como Fornberg (1988), que utilizou o método de Newton para resolver as equações discretizadas de conservação, Johnson e Patel (1999) e Kim e Choi (2002), que utilizaram o método de Runge-Kutta para integrar as equações de quantidade de movimento, e Constantinescu e Squires (2000) que utilizaram Large Eddy Simulation (LES) e Detached Eddy Simulation (DES) para a modelagem do problema.

No que diz respeito ao LBM, Mei et al. (2002) aplicaram esquemas de interpolação para melhor modelar a região ao redor da esfera, Stiebler et al. (2011) implementaram uma estratégia de refino de malha localizada e Kajzer e Pozorski (2017) realizaram simulações em uma malha uniforme, para validar a solução do contorno em uma geometria em degraus.

No presente estudo, utilizou-se para a simulação a geometria representada na Figura 33 e refinou-se a região ao redor da esfera conforme mostrado na Figura 34. Fez-se o diâmetro da esfera como  $D = 20$  na região refinada, de modo que a malha base tem  $300 \times 300 \times 600$  pontos, enquanto a porção refinada mostrada em destaque na Figura 34 tem  $200 \times 200 \times 800$  pontos. Para a modelagem satisfatória do escoamento externo, posicionou-se a esfera a uma distância significativa das fronteiras, de maneira a reduzir os gradientes de pressão e velocidade próximos das fronteiras do domínio computacional e assim garantir melhor acurácia para a simulação.

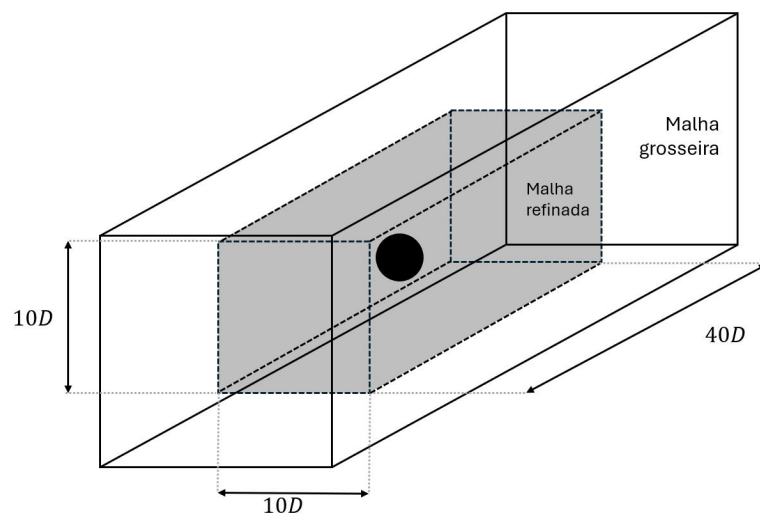
A condição de não-deslizamento ao redor da esfera foi imposta através do esquema de halfway bounce-back, a velocidade na entrada do domínio foi imposta

Figura 33 – Geometria para o escoamento externo ao redor de uma esfera.



Fonte: Autoria própria (2024).

Figura 34 – Esquema de refino para o escoamento externo ao redor de uma esfera.



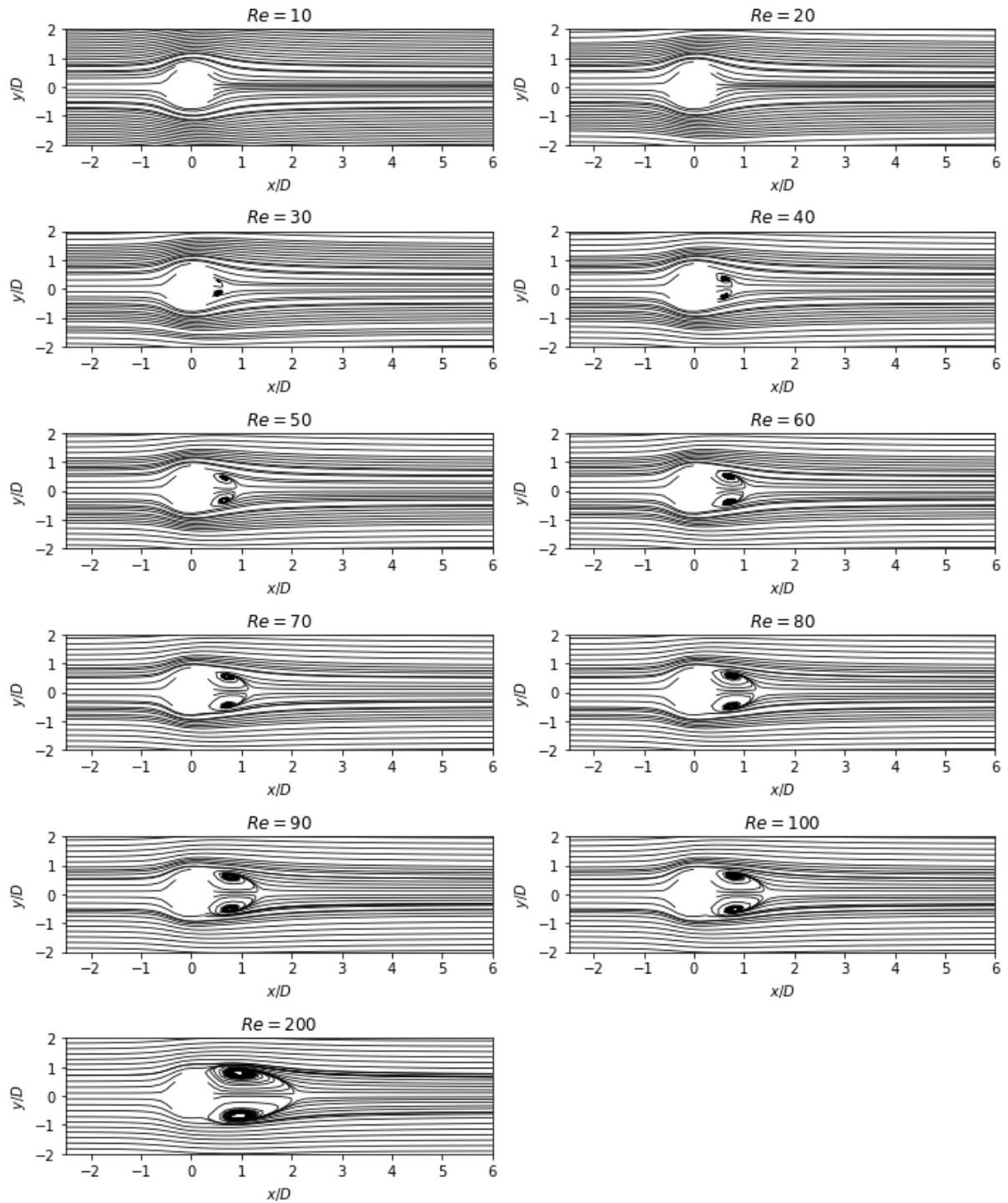
Fonte: Autoria própria (2024).

através de uma condição de contorno de velocidade prescrita e a saída do domínio foi modelada através da condição de contorno de gradiente nulo para a velocidade, assim como feito por Kajzer e Pozorski (2017). Nas paredes laterais, empregou-se uma condição de contorno periódica.

O número de Reynolds foi variado entre 10 e 200 e o número de Mach fixado em 0.06, de modo a evitar efeitos negativos de compressibilidade no escoamento. A Figura 35 mostra os padrões de linhas de corrente numa região ao redor da esfera para as simulações rodadas.

Os valores estimados para o coeficiente de arrasto no regime de escoamento laminar são mostrados na Figura 36. Realizou-se também simulações com uma malha uniforme de  $1200 \times 600 \times 600$  pontos, que corresponderia à uma malha completamente

Figura 35 – Padrões de linha de corrente para diferentes números de Reynolds para o escoamento ao redor de uma esfera.

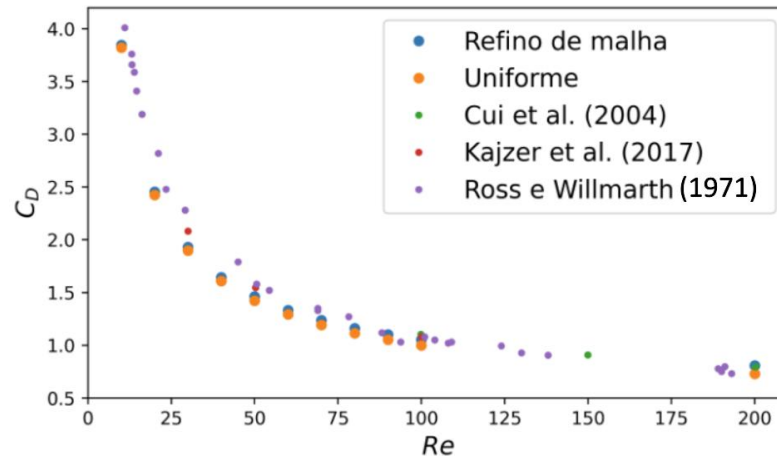


Fonte: Autoria própria (2024).

refinada. Percebe-se que há uma ótima concordância entre os resultados resultados obtidos com o algoritmo de refino de malha e com os da malha uniforme. Além disso, as soluções estão de acordo com os resultados experimentais de Ross e Willmarth

(1971), e com os resultados obtidos através do LBM por Cui et al. (2004) e por Kajzer e Pozorski (2017).

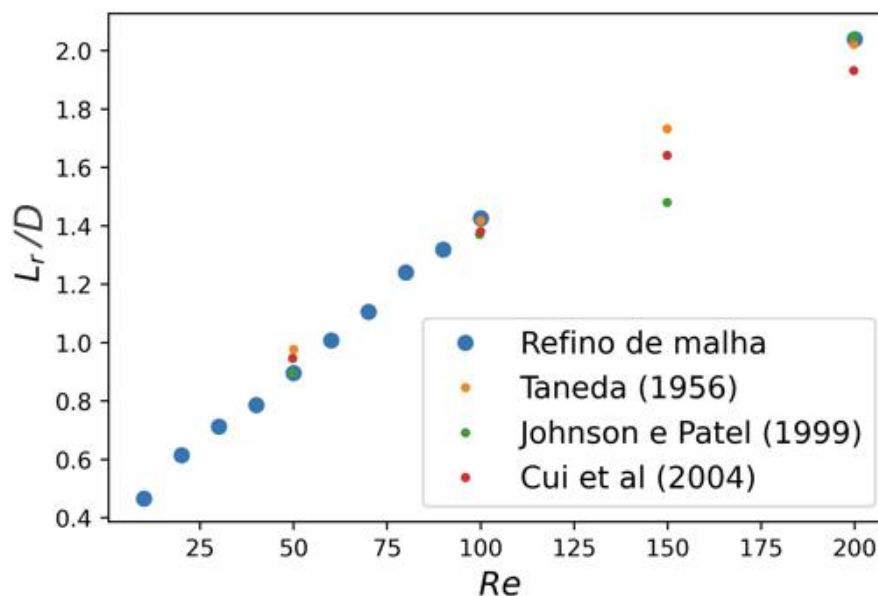
Figura 36 – Coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds para o escoamento ao redor de uma esfera.



Fonte: Autoria própria (2024).

O comprimentos de esteira para o regime de escoamento laminar são mostrados na Figura 37, em comparação com os resultados experimentais de Taneda (1956), os resultados numéricos obtidos através de CFD por Johnson e Patel (1999) e os resultados obtidos através do LBM por Cui et al. (2004). Percebe-se uma boa concordância para os resultados.

Figura 37 – Comprimentos de esteira estimados para o escoamento ao redor de uma esfera.



Fonte: Autoria própria (2024).

Almejou-se também rodar simulações para  $Re = 250$  e  $Re = 300$ , de modo a capturar todos os regimes de escoamento. Entretanto, apesar da região refinada ao redor da esfera, o domínio de simulação não foi capaz de representar com qualidade a camada limite ao redor do obstáculo e as simulações divergiram, isto é, apresentaram erros de compressibilidade logo no início da simulação.

Um motivo para a aparição das estruturas de instabilidade pode ser a representação do contorno da esfera em degraus, mesmo com o refino de malha essa representação descontinuada da fronteira será responsável por inserir erros na simulação. Para contornar esse problema, Mei et al. (2002) implementam esquemas de interpolação na região ao redor da esfera, de maneira a tornar essa região mais suave melhorar a modelagem da camada limite. De maneira a reduzir o erro adicionado pela descontinuidade da modelagem da esfera com uma malha uniforme, Manelil et al. (2021) utilizam uma malha extremamente refinada, com 25859562 nós, necessitando de 235 horas de simulação para o caso de  $Re = 350$ .

Além disso, utilizou-se para as simulações o operador colisional BGK, conhecido por sua simplicidade e versatilidade, mas que pode não ser o mais adequado para a modelagem do problema. Para números de Reynolds acima de 200, mantendo-se o número de Mach em 0.06, o parâmetro de relaxação  $\tau$  aproxima-se cada vez mais de 0.5, o que aproxima a simulação de regiões de instabilidade, e afeta a acurácia da simulação. Para melhorar as características de estabilidade de suas simulações para números de Reynolds elevados, Stiebler et al. (2011) empregaram o operador MRT.

Tabela 11 – Comparação dos tempos de simulação em segundos entre a malha uniforme e o esquema de refino de malha para o escoamento ao redor de uma esfera.

$Re$	Malha uniforme	Malha com refino	Redução percentual
10	43128	27138	37.1%
20	57056	29650	48.1%
30	64632	32144	50.3%
40	67198	31641	52.9%
50	68714	35968	47.7%
60	71003	35715	49.7%
70	70851	41528	41.4%
80	71819	45584	36.5%
90	73801	45399	38.5%
100	72758	51579	29.1%
200	74789	57052	23.7%

Fonte: Autoria própria (2024).

Apesar da limitação em modelar os números de Reynolds altos para o conjunto escolhido de dimensões, parâmetros e operador colisional, a técnica de refino



de malha mostrou-se vantajosa ao reduzir o tempo de simulação. Os tempos de simulação são mostrados na Tabela 11. Percebe-se uma redução de cerca de 40% no tempo de simulação ao se empregar a técnica de refino de malha.

## 5 CONCLUSÃO

O presente estudo propôs uma revisão teórica das técnicas de refino de malha aplicadas ao método de lattice-Boltzmann, conhecido por sua eficácia em escoamentos incompressíveis e crescente interesse na indústria aeroespacial devido à sua implementação simples e alta capacidade de paralelização. A partir dessa revisão, optou-se por implementar o método proposto por Rohde et al. (2005), destacando-se sua simplicidade, conservação natural da massa e versatilidade pela independência do operador colisional.

A implementação foi integrada ao código desenvolvido pelo grupo de pesquisa PORO da Universidade Federal de Santa Catarina, visando melhorar a qualidade das soluções numéricas sem comprometer os recursos computacionais. A validação incluiu a resolução de escoamentos clássicos estudados por anos na literatura, como o escoamento de Poiseuille, escoamento em cavidade quadrada, ao redor de um obstáculo quadrado, cilíndrico e esférico. Observou-se excelente concordância entre os resultados obtidos e aqueles previamente reportados na literatura, indicando que a técnica de refino de Rohde et al. (2005) não introduz erros numéricos significativos nas simulações.

Adicionalmente, a utilização da técnica de refino demonstrou uma significativa redução no tempo de simulação para os casos estudados, permitindo modelar com maior resolução as regiões próximas aos obstáculos, enquanto áreas mais distantes e com menor variação de escoamento foram discretizadas de forma mais grosseira.

Percebe-se, no entanto, que para sua aplicação na área aeroespacial, o LBM ainda necessita de aprimoramentos adicionais, como a utilização de operadores colisionais mais sofisticados, modelos de turbulência, técnicas que permitam lidar com escoamentos transônicos e supersônicos e condições de contorno que considerem a curvatura para melhor descrição da geometria. Recomenda-se que futuros estudos se concentrem no desenvolvimento de técnicas com múltiplos níveis de refino, visando ainda mais a redução do tempo de simulação, mantendo a qualidade dos resultados.

## REFERÊNCIAS

- ACHENBACH, E. Experiments on the flow past spheres at very high reynolds numbers. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 54, n. 3, p. 565–575, 1972.
- ASTOUL, T. **Towards improved lattice-Boltzmann aeroacoustic simulations with non-uniform grids: application to landing gears noise prediction**. 2021. 280 f. Tese (Doutorado em Engenharia) — Universidade de Aix-Marseille, Marseille, 2021.
- ASTOUL, T.; WISSOCQ, G.; BOUSSUGE, J.-F.; SENGISSEN, A.; SAGAUT, P. Lattice-boltzmann method for computational aeroacoustics on non-uniform meshes: A direct grid coupling approach. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 447, p. 110667, 2021.
- BHATNAGAR, P. L.; GROSS, E. P.; KROOK, M. A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 94, p. 511–525, May 1954. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.94.511>.
- BREUER, M.; BERNSDORF, J.; ZEISER, T.; DURST, F. Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-boltzmann and finite-volume. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, v. 21, n. 2, p. 186–196, 2000. ISSN 0142-727X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X99000818>.
- CALHOUN, D. A cartesian grid method for solving the two-dimensional streamfunction-vorticity equations in irregular regions. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 176, n. 2, p. 231–275, 2002.
- CENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications**. 4. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 2017.
- CHEN, H. Volumetric formulation of the lattice boltzmann method for fluid dynamics: Basic concept. **Physical Review E**, APS, v. 58, n. 3, p. 3955, 1998.
- CHOI, J.-I.; OBEROI, R. C.; EDWARDS, J. R.; ROSATI, J. A. An immersed boundary method for complex incompressible flows. **Journal of Computational Physics**, v. 224, n. 2, p. 757–784, 2007. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999106005481>.
- CHUNG, T. J. **Computational Fluid Mechanics**. 2. ed. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2002.
- CONSTANTINESCU, G.; SQUIRES, K. Les and des investigations of turbulent flow over a sphere. 02 2000.
- CUI, Z.; LIU, Y.; SO, R. Lattice boltzmann simulation of flow past a sphere up to reynolds number of 300. *In*: \_\_\_\_\_. [S.l.: s.n.], 2004. Vol. 2, p. 327–332.
- DENNIS, S.; CHANG, G.-Z. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at reynolds numbers up to 100. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 42, n. 3, p. 471–489, 1970.

- A. K. DHIMAN R. P. CHHABRA, A. S.; ESWARAN, V. Effects of reynolds and prandtl numbers on heat transfer across a square cylinder in the steady flow regime. **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**, Taylor & Francis, v. 49, n. 7, p. 717–731, 2006.
- DUPUIS, A.; CHATELAIN, P.; KOUMOUTSAKOS, P. An immersed boundary–lattice-boltzmann method for the simulation of the flow past an impulsively started cylinder. **Journal of Computational Physics**, v. 227, n. 9, p. 4486–4498, 2008. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999108000247>.
- DUPUIS, A.; CHOPARD, B. Theory and applications of an alternative lattice boltzmann grid refinement algorithm. **Physical Review E**, APS, v. 67, n. 6, p. 066707, 2003.
- FENG, Y.; MIRANDA-FUENTES, J.; GUO, S.; JACOB, J.; SAGAUT, P. Prolb: A lattice boltzmann solver of large-eddy simulation for atmospheric boundary layer flows. **Journal of Advances in Modeling Earth Systems**, Wiley Online Library, v. 13, n. 3, p. e2020MS002107, 2021.
- FILIPPOVA, O.; HÄNEL, D. Grid refinement for lattice-bgk models. **Journal of Computational physics**, Elsevier, v. 147, n. 1, p. 219–228, 1998.
- FILIPPOVA, O.; HÄNEL, D. Acceleration of lattice-bgk schemes with grid refinement. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 165, n. 2, p. 407–427, 2000.
- FORNBERG, B. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 98, n. 4, p. 819–855, 1980.
- FORNBERG, B. Steady viscous flow past a sphere at high reynolds numbers. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 190, p. 471–489, 1988.
- FOX, R.; MCDONALD, A.; PRITCHARD, P.; MICHTELL, J. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. LTC, 2018. ISBN 9788521634812. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=723-zwEACAAJ>.
- GHIA, U.; GHIA, K.; SHIN, C. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**, v. 48, n. 3, p. 387–411, 1982. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999182900584>.
- HE, X.; DOOLEN, G. Lattice boltzmann method on curvilinear coordinates system: flow around a circular cylinder. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 134, n. 2, p. 306–315, 1997.
- HE, X.; LUO, L.-S. Lattice boltzmann model for the incompressible navier–stokes equation. **Journal of statistical Physics**, Springer, v. 88, p. 927–944, 1997.
- HE, X.; ZOU, Q.; LUO, L.-S.; DEMBO, M. Analytic solutions of simple flows and analysis of nonslip boundary conditions for the lattice boltzmann bgk model. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 87, p. 115–136, 1997.

- HOLMAN, D. M.; BRIONNAUD, R. M.; ABIZA, Z. Solution to industry benchmark problems with the lattice-boltzmann code xflow. *In: Proceeding in the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–16.
- HOU, S.; ZOU, Q.; CHEN, S.; DOOLEN, G. D.; COGLEY, A. C. Simulation of cavity flow by the lattice boltzmann method. **Journal of Computational Physics**, v. 118, p. 329–347, 1994. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16996465>.
- JOHNSON, T. A.; PATEL, V. C. Flow past a sphere up to a reynolds number of 300. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 378, p. 19–70, 1999.
- KAJZER, A.; POZORSKI, J. Application of the lattice boltzmann method to the flow past a sphere. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, v. 55, n. 3, p. 1091–1099, 2017.
- KIM, D.; CHOI, H. Laminar flow past a sphere rotating in the streamwise direction. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 461, p. 365–386, 2002.
- KIM, J.; KIM, D.; CHOI, H. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. **Journal of Computational Physics**, v. 171, n. 1, p. 132–150, 2001. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999101967786>.
- KRÜGER, T. et al. **The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice**. [S.l.]: Springer, 2017.
- LAGRAVA, D.; MALASPINAS, O.; LATT, J.; CHOPARD, B. Advances in multi-domain lattice boltzmann grid refinement. **Journal of Computational Physics**, v. 231, n. 14, p. 4808–4822, 2012. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199911200157X>.
- LE, D.; KHOO, B.; LIM, K. An implicit-forcing immersed boundary method for simulating viscous flows in irregular domains. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 197, n. 25-28, p. 2119–2130, 2008.
- LIN, C.-L.; LAI, Y. G. Lattice boltzmann method on composite grids. **Physical Review E**, APS, v. 62, n. 2, p. 2219, 2000.
- LOCKARD, D. P.; LUO, L.-S.; SINGER, B. A.; BUSHNELL, D. M. **Evaluation of the lattice-Boltzmann equation solver PowerFLOW for aerodynamic applications**. [S.l.], 2000.
- LOU, Q.; GUO, Z.; SHI, B. Evaluation of outflow boundary conditions for two-phase lattice boltzmann equation. **Physical review E**, APS, v. 87, n. 6, p. 063301, 2013.
- MANELIL, N. P.; SIDDHARTH, K. S.; TIWARI, S. Comparison of lattice boltzmann and finite volume method for flow past sphere. *In: 2021 International Conference on Computational Intelligence and Knowledge Economy (ICCIKE)*. [S.l.: s.n.], 2021. p. 112–117.
- MEI, R.; SHYY, W. On the finite difference-based lattice boltzmann method in curvilinear coordinates. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 143, n. 2, p. 426–448, 1998.

MEI, R.; YU, D.; SHYY, W.; LUO, L.-S. Force evaluation in the lattice boltzmann method involving curved geometry. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 65, p. 041203, Apr 2002. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.65.041203>.

OKAJIMA, A. Strouhal numbers of rectangular cylinders. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 123, p. 379–398, 1982.

PENG, G.; XI, H.; DUNCAN, C.; CHOU, S.-H. Finite volume scheme for the lattice boltzmann method on unstructured meshes. **Physical Review E**, APS, v. 59, n. 4, p. 4675, 1999.

PENG, Y.; SHU, C.; CHEW, Y.; LU, X. Application of multi-block approach in the immersed boundary-lattice boltzmann method for viscous fluid flows. **Journal of Computational Physics**, v. 218, p. 460–478, 02 2006.

PREMNATH, K. N.; PATTISON, M. J.; BANERJEE, S. Computation of transitional flow past a circular cylinder using multiblock lattice boltzmann method with a dynamic subgrid scale model. **Fluid Dynamics Research**, IOP Publishing, v. 45, n. 5, p. 055510, sep 2013. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0169-5983/45/5/055510>.

ROGIER, F.; SCHNEIDER, J. A direct method for solving the boltzmann equation. **Transport Theory and Statistical Physics**, Taylor & Francis, v. 23, n. 1-3, p. 313–338, 1994.

ROHDE, M.; KANDHAI, D.; DERKSEN, J. J.; AKKER, H. E. A. van den. A generic, mass conservative local grid refinement technique for lattice-boltzmann schemes. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 51, n. 4, 2005.

ROSHKO, A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high reynolds number. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 10, n. 3, p. 345–356, 1961.

ROSS, F. W.; WILLMARTH, W. W. Some experimental results on sphere and disk drag. **AIAA Journal**, v. 9, n. 2, p. 285–291, 1971. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.6164>.

RUSSELL, D.; WANG, Z. J. A cartesian grid method for modeling multiple moving objects in 2d incompressible viscous flow. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 191, n. 1, p. 177–205, 2003.

SAIKI, E.; BIRINGEN, S. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: Application of a virtual boundary method. **Journal of Computational Physics**, v. 123, n. 2, p. 450–465, 1996. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999196900364>.

SEN, S.; MITTAL, S.; BISWAS, G. Flow past a square cylinder at low reynolds numbers. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 67, n. 9, p. 1160–1174, 2011.

SHAN, X.; YUAN, X.-F.; CHEN, H. Kinetic theory representation of hydrodynamics: a way beyond the navier–stokes equation. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 550, p. 413–441, 2006.

- SHARMA, A.; ESWARAN, V. Heat and fluid flow across a square cylinder in the two-dimensional laminar flow regime. **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**, Taylor & Francis, v. 45, n. 3, p. 247–269, 2004.
- SILVA, A.; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. **Journal of Computational Physics**, v. 189, n. 2, p. 351–370, 2003. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999103002146>.
- SOHANKAR, A.; NORBERG, C.; DAVIDSON, L. Low-reynolds-number flow around a square cylinder at incidence: study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 26, n. 1, p. 39–56, 1998.
- STAUBACH, D. **Static Block-Structured Grid Refinement for Parallel Lattice Boltzmann Simulations**. 2013. 57 f. Dissertação (Mestrado em Informática) — Universidade de Erlangen-Nuremberga, Erlangen, 2013.
- STIEBLER, M.; KRAFCZYK, M.; FREUDIGER, S.; GEIER, M. Lattice boltzmann large eddy simulation of subcritical flows around a sphere on non-uniform grids. **Computers Mathematics with Applications**, v. 61, n. 12, p. 3475–3484, 2011. ISSN 0898-1221. Mesoscopic Methods for Engineering and Science — Proceedings of ICMES-09. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122111002264>.
- SUCCI, S. **The Lattice Boltzmann Equation: For Fluid Dynamics and Beyond**. [S.l.]: Clarendon Press, 2001.
- TANEDA, S. Experimental investigation of the wake behind a sphere at low reynolds numbers. **Journal of the Physical Society of Japan**, v. 11, p. 1104–1108, 1956. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121774076>.
- TRITTON, D. J. Experiments on the flow past a circular cylinder at low reynolds numbers. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 6, n. 4, p. 547–567, 1959.
- WANG, P.; ZHU, L.; GUO, Z.; XU, K. A comparative study of lbe and dugks methods for nearly incompressible flows. **Communications in Computational Physics**, v. 17, n. 3, p. 657–681, 2015.
- WENDT, J. F. **Computational Fluid Dynamics: An Introduction**. [S.l.]: Springer, 2009.
- XU, K. **Direct modeling for computational fluid dynamics: construction and application of unified gas-kinetic schemes**. [S.l.]: World Scientific, 2014. v. 4.
- XU, K.; HUANG, J.-C. A unified gas-kinetic scheme for continuum and rarefied flows. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 229, n. 20, p. 7747–7764, 2010.
- XU, K.; PRENDERGAST, K. H. Numerical navier-stokes solutions from gas kinetic theory. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 114, n. 1, p. 9–17, 1994.
- XU, Z. et al. Analysis of flow characteristics around a square cylinder with boundary constraint. **Water**, v. 15, p. 1507, 04 2023.

YU, D.; MEI, R.; LUO, L.-S.; SHYY, W. Viscous flow computations with the method of lattice boltzmann equation. **Progress in aerospace sciences.**, v. 39, p. 329–367, 07 2003.

ZOU, Q.; HE, X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice boltzmann bgk model. **Physics of fluids**, AIP Publishing, v. 9, n. 6, p. 1591–1598, 1997.