

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE
CURSO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA

ARTHUR SCHMIETKE CZECH

ESTUDO DO SISTEMA PÊNDULO INVERTIDO E IMPLEMENTAÇÃO DE UM
CONTROLADOR PID PARA UM ROBÔ DE DUAS RODAS

Joinville
2024

ARTHUR SCHMIETKE CZECH

ESTUDO DO SISTEMA PÊNULO INVERTIDO E IMPLEMENTAÇÃO DE UM
CONTROLADOR PID PARA UM ROBÔ DE DUAS RODAS

Trabalho apresentado como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Mecatrônica, no Curso de Engenharia Mecatrônica, do Centro Tecnológico de Joinville, da Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Prof. Dr. Dalton Luiz Rech Vidor

Joinville
2024

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, pela dádiva da vida e por despertar uma curiosidade incalculável das coisas ao meu redor, que finalmente levou-me ao curso de Engenharia Mecatrônica.

Também à minha família, pois sem eles não teria chegado onde cheguei. Especialmente agradeço meus pais, Jorge e Tânia, por serem meu pilar e por sempre terem me apoiado ao longo de meus vinte e cinco anos de vida. Foi por conta de seus ensinamentos e valores que tornei-me o homem que sou hoje. Agradeço também ao meu irmão Victor, por ser meu melhor amigo e por sempre me motivar a continuar buscando a excelência ao longo da graduação.

Meus mais sinceros agradecimentos ao professor Dalton Luiz Rech Vidor, por aceitar o convite de orientação para este trabalho de conclusão de curso, pelos ensinamentos, disponibilidade, empenho, determinação, profissionalismo e segurança passados a mim durante a orientação. Obrigado pela confiança depositada a minha pessoa e pela amizade construída.

Agradeço a todos os colaboradores do Departamento de Engenharias da Mobilidade que contribuíram de maneira direta ou indireta no meu desenvolvimento acadêmico, culminando na conclusão deste trabalho.

Finalmente, agradeço a Universidade Federal de Santa Catarina, pela estrutura e pelos anos de ensino.

RESUMO

O sistema do pêndulo invertido é um tópico amplamente estudado na teoria de controle e possui inúmeras aplicações na engenharia. O problema consiste em manter uma haste equilibrada na posição vertical, uma vez que sob o efeito da gravidade a haste tende a cair. Diversas estratégias de controle foram elaboradas ao longo dos anos para galgar este problema. O objetivo deste trabalho é implementar um controlador PID para um sistema pêndulo invertido aplicado em um robô de duas rodas. O trabalho é dividido em quatro etapas. A primeira consiste na obtenção do modelo matemático do sistema, a segunda trata do projeto e construção do modelo físico do sistema, a terceira etapa abrange o projeto do controlador e finalmente a quarta etapa discute a implementação do controlador no modelo físico do sistema. Os resultados discutem as diferenças entre as simulações do controlador projetado e os dados obtidos durante os testes da implementação no modelo físico do robô, apresentando dados de cada etapa de execução.

Palavras-chave: Pêndulo invertido. Controlador PID. Robô de duas rodas.

ABSTRACT

The inverted pendulum system is a widely studied topic in control theory and has numerous applications in engineering. The problem is keeping a rod balanced in a vertical position, since under the effect of gravity the rod tends to fall. Several control strategies have been developed over the years to overcome this problem. The objective of this work is to implement a PID controller for an inverted pendulum system applied to a two-wheeled robot. The work is divided into four stages. The first consists of obtaining the mathematical model of the system, the second deals with the design and construction of the physical model of the system, the third stage covers the design of the controller and finally the fourth stage discusses the implementation of the controller in the physical model of the system. The results discuss the differences between the simulations of the designed controller and the data obtained during implementation tests on the physical model of the robot, presenting data from each step of the execution.

Keywords: Inverted pendulum. PID controller. Two-wheeled robot.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação clássica do sistema pêndulo invertido.	10
Figura 2 – Pêndulo Invertido sobre duas rodas.	11
Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema em malha aberta.	14
Figura 4 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.	15
Figura 5 – Resposta ao degrau unitário de um sistema de segunda ordem. . .	16
Figura 6 – Controlador PID aplicado a um sistema em malha fechada.	18
Figura 7 – Sistema de controle digital.	21
Figura 8 – Pêndulo invertido sobre um carro.	23
Figura 9 – Diagrama de Corpo Livre de um pêndulo invertido sobre um carro. .	24
Figura 10 – Diagrama de corpo livre do pêndulo invertido sobre duas rodas. . .	25
Figura 11 – Modelo mecânico do chassi.	27
Figura 12 – Conjunto motriz.	28
Figura 13 – Esquema de ligação eletrônica do sistema.	29
Figura 14 – Diagrama de blocos do sistema pêndulo invertido.	30
Figura 15 – Diagrama de blocos do sistema completo.	31
Figura 16 – Resposta ao degrau unitário do sistema em malha aberta.	32
Figura 17 – Localização dos polos do sistema em malha aberta.	33
Figura 18 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.	34
Figura 19 – Resposta ao degrau unitário da planta controlada com os ganhos pelo Método Analítico.	36
Figura 20 – Resposta ao degrau unitário da planta controlada com os ganhos utilizando a ferramenta matemática computacional.	37
Figura 21 – Resposta ao degrau unitário da planta discreta.	38
Figura 22 – Vista frontal do robô.	39
Figura 23 – Vista posterior do robô.	39
Figura 24 – Massa adicionada à parte inferior do robô.	40
Figura 25 – Sistema com a adição da barra roscada.	41
Figura 26 – Dados de posição angular utilizando o filtro complementar.	42
Figura 27 – Dados obtidos utilizando o Filtro de Kalman.	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Componentes eletrônicos	29
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Objetivo	12
1.1.1	Objetivo Geral	12
1.1.2	Objetivos Específicos	12
1.1.3	Organização do trabalho	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1	REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS DE SISTEMAS FÍSICOS	13
2.2	REQUISITOS DE DESEMPENHO	14
2.3	MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES	16
2.3.1	Procedimento do Lugar das Raízes	17
2.4	CONTROLE CLÁSSICO	17
2.4.1	Controlador PID	18
2.4.2	Controlador PI	19
2.4.3	Controlador PD	19
2.4.4	Método Analítico para obtenção dos ganhos	19
2.5	CONTROLE DIGITAL	20
2.5.1	Transformada z	21
3	METODOLOGIA	23
3.1	Modelagem Matemática do pêndulo Invertido	23
3.2	ASPECTOS FÍSICOS E CONSTRUÇÃO DO ROBÔ DE DUAS RODAS	27
3.2.1	Sistema Mecânico	27
3.2.2	Sistema eletrônico	28
3.2.3	Dimensões do robô	30
3.3	Função de transferência do sistema	30
4	ANÁLISE DE DADOS	32
4.1	Projeto do controlador contínuo	32
4.1.1	Resposta ao degrau unitário e localização dos polos do sistema em malha aberta	32
4.1.2	Requisitos de desempenho	33
4.1.3	Cálculo dos ganhos do controlador PID pelo Método Analítico	33
4.1.4	Sintonização dos ganhos via software	36
4.1.5	Obtenção do controlador digital	37
4.2	Implementação do controlador no sistema físico	38
4.3	Comparação entre o modelo simulado e o modelo físico	43

5	CONCLUSÕES	45
5.1	Considerações finais	45
5.2	Trabalhos futuros	45
	REFERÊNCIAS	46
	APÊNDICE A	47

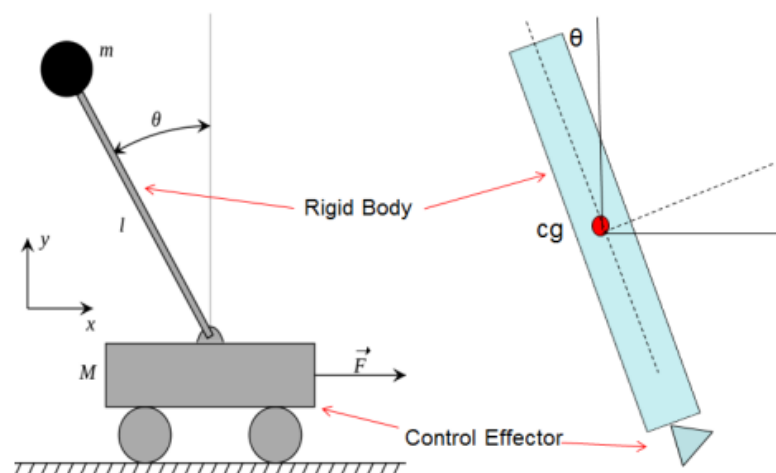
1 INTRODUÇÃO

Um sistema de controle é um agrupamento de dispositivos e algoritmos projetados para manipular a atuação e o desempenho de um sistema físico ou processo, de modo a alcançar um objetivo específico. Na engenharia, os sistemas de controle são amplamente utilizados para controlar variáveis como velocidade, posição, temperatura e outras grandezas de sistemas dinâmicos. Eles realizam um papel fundamental no avanço da tecnologia, permitindo a automação de processos industriais, o controle de veículos autônomos, a estabilização de aeronaves e robôs, entre outros exemplos. Ao otimizar o desempenho, a eficiência e a segurança destas aplicações, os sistemas de controle contribuem para o progresso tecnológico e o aprimoramento da qualidade de vida.

O sistema do pêndulo invertido consiste em uma haste que deve ser equilibrada verticalmente, por meio de uma força externa aplicada à base da haste. Esta característica torna este sistema naturalmente instável, tornando-o um importante objeto de estudo para a engenharia. É possível utilizar o exemplo da brincadeira onde deve-se equilibrar um cabo de vassoura na palma da mão, em que é necessário mover a mão constantemente a fim de manter o cabo de vassoura equilibrado (RIBEIRO, 2007).

Um exemplo clássico utilizado na engenharia de controle de sistemas, o pêndulo invertido pode ser aplicado em sistemas de equilíbrio de robôs, veículos motorizados como o *Segway* e no lançamento de foguetes. De acordo com PEI e ROTHHAAR (2018), o objetivo do sistema clássico é equilibrar o pêndulo invertido por meio do movimento para frente e para trás de um carro, mostrado pela Figura 1.

Figura 1 – Representação clássica do sistema pêndulo invertido.



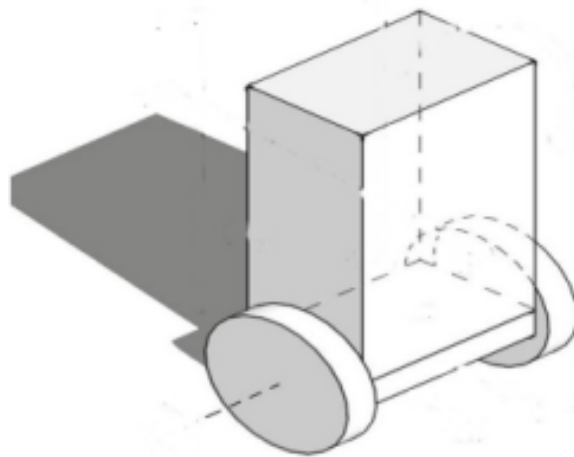
Fonte: (PEI; ROTHHAAR, 2018).

Para que seja possível controlar e compreender sistemas complexos, é necessário obter modelos matemáticos destes sistemas. Com este intuito, é preciso analisar as relações entre as variáveis do sistema em questão e obter o seu modelo matemático. Uma vez que os sistemas analisados são dinâmicos, as equações que os descrevem são equações diferenciais (DORF; BISHOP, 2001). É possível implementar um modelo matemático simplificado do sistema, com o fim de obter um modelo linearizado. Isto acontece quando os efeitos não-lineares do sistema, que têm um efeito suficientemente pequeno na resposta são ignorados, obtendo uma boa aproximação entre o modelo matemático e os resultados experimentais do sistema físico (OGATA, 2010).

Por tratar-se de um sistema amplamente estudado, o pêndulo invertido possui diversas configurações e modelos. A configuração escolhida para este trabalho é de um pêndulo invertido sobre duas rodas controlado por um controlador PID, englobando os conhecimentos obtidos ao longo do curso de Engenharia Mecatrônica, incorporando conhecimentos de eletrônica, controle, mecânica e programação, as principais áreas de estudo deste campo da engenharia.

A Figura 2 mostra um modelo básico da configuração do sistema adotada neste trabalho.

Figura 2 – Pêndulo Invertido sobre duas rodas.



Fonte: (PIRES, 2023).

Neste trabalho é discutida a implementação de um controlador PID aplicado a um pêndulo invertido sobre duas rodas. A metodologia do trabalho divide-se basicamente em duas etapas, sendo estas a modelagem matemática da planta e a implementação do controlador. Na primeira etapa, o modelo matemático apresentado por OGATA (2010) é utilizado como base para formulação, sofrendo algumas mudanças devido às diferenças entre este modelo e o modelo proposto para o trabalho. A segunda etapa utiliza a teoria de controle apresentada por OGATA (2010), DORF e BISHOP

(2001) e PHILLIPS e HARBOR (1997) para obtenção do controlador PID.

1.1 OBJETIVO

Para resolver a problemática central deste trabalho, propõe-se os seguintes objetivos.

1.1.1 Objetivo Geral

Implementar um controlador PID para um sistema pêndulo invertido aplicado em um robô de duas rodas.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Estudar o sistema pêndulo invertido;
- Obter o modelo matemático da planta do pêndulo invertido aplicada em um robô de duas rodas;
- Obter os ganhos do controlador PID;
- Construir um modelo físico do robô;
- Introduzir o controlador obtido no modelo físico do robô;
- Analisar as diferenças entre o modelo proposto e o modelo físico do robô.

1.1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em 5 capítulos, com estrutura descrita da seguinte forma. No Capítulo 1 é apresentada a introdução do trabalho, abordando a justificativa e a motivação que levaram à escolha deste tema, bem como os objetivos propostos para realização do trabalho. O Capítulo 2 aborda a revisão bibliográfica acerca dos conceitos matemáticos utilizados na modelagem do sistema, assim como os conceitos de controle utilizados para projetar o controlador. O Capítulo 3 abrange a modelagem matemática aplicada ao sistema do pêndulo invertido, a obtenção da função de transferência do sistema, além do projeto mecânico e o sistema eletrônico, responsáveis pela implementação física do sistema. O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos neste trabalho por meio do projeto do controlador e de sua implementação no modelo físico, empregando a metodologia proposta. Por fim, o Capítulo 5 expõe as conclusões obtidas neste estudo, e deixa sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, são apresentados os conceitos aplicados no desenvolvimento deste trabalho. Primeiramente, serão abordadas as expressões matemáticas utilizadas para representar modelos de sistemas físicos, empregadas em análises matemáticas. Também são destacados métodos de projetos de controladores e diferentes variantes do controlador PID.

2.1 REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS DE SISTEMAS FÍSICOS

A grande maioria dos sistemas físicos são lineares dentro de uma faixa de operação, e podem ser representados por equações diferenciais como por exemplo

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) &= \\ = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

onde $u(t)$ é a entrada e $y(t)$ é a saída do sistema físico, e a_n e b_m são os coeficientes da equação diferencial.

Apesar de as equações lineares representarem um sistema físico de maneira muito satisfatória, a sua resolução empreende um alto grau de dificuldade. Para contornar esta característica, é possível aplicar a Transformada de *Laplace*, que leva as equações do domínio do tempo para o domínio da frequência, tornando-as mais fáceis de serem solucionadas.

Dessa maneira, é possível aplicar a Transformada de *Laplace* na equação 1:

$$\begin{aligned} (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) &= \\ = (s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) U(s) \end{aligned} \quad (2)$$

Rearranjando a equação 2 pode-se obter a função de transferência $G(s)$ do sistema linear, que é a relação entre a saída $Y(s)$ e a entrada $U(s)$ do sistema, onde s representa a variável complexa $\sigma + j\omega$, tendo como parte real σ e parte imaginária ω . A função de transferência $G(s)$ é escrita como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m)}{(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)} \quad (3)$$

Uma função de transferência em *Laplace* possui polos, que são as raízes do polinômio denominador da função, e zeros, que são as raízes do polinômio numerador da função. Desta forma, a função de transferência $G(s)$ pode ser reescrita como uma razão de dois polinômios:

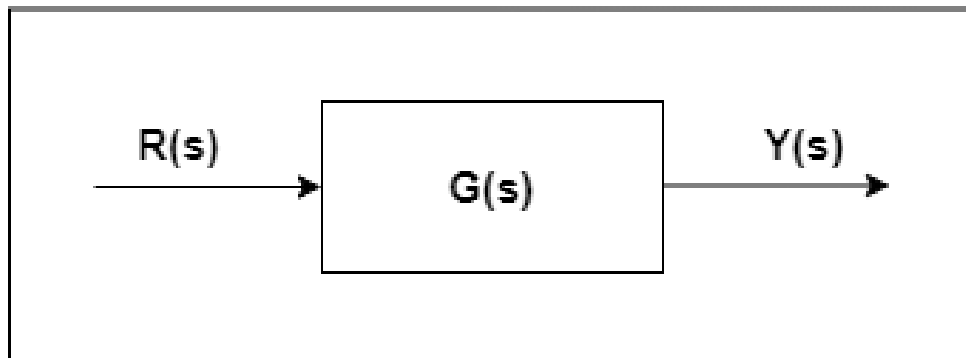
$$G(s) = \frac{(s + z_1) + (s + z_2) + \dots + (s + z_{m-1}) + (s + z_m)}{(s + p_1) + (s + p_2) + \dots + (s + p_{n-1}) + (s + p_n)} \quad (4)$$

2.2 REQUISITOS DE DESEMPENHO

Ao projetar um controlador com o intuito de gerir o comportamento de um sistema é indispensável prever o seu comportamento dinâmico a partir das características de seus componentes (OGATA, 2010).

Com a intenção de controlar as ações e reações do sistema, deve-se escolher em qual categoria de controle o sistema em questão será posicionado. Existem basicamente duas categorias que são sistemas de malha aberta e sistemas de malha fechada. Um sistema de malha aberta é aquele em que a saída $Y(s)$ não é medida e não exerce nenhuma ação de controle no sistema. Neste tipo de sistema espera-se que a saída atinja o valor desejado de acordo com a entrada $R(s)$ enviada a planta $G(s)$ do sistema. A Figura 3 representa o diagrama de blocos de um sistema em malha aberta.

Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema em malha aberta.

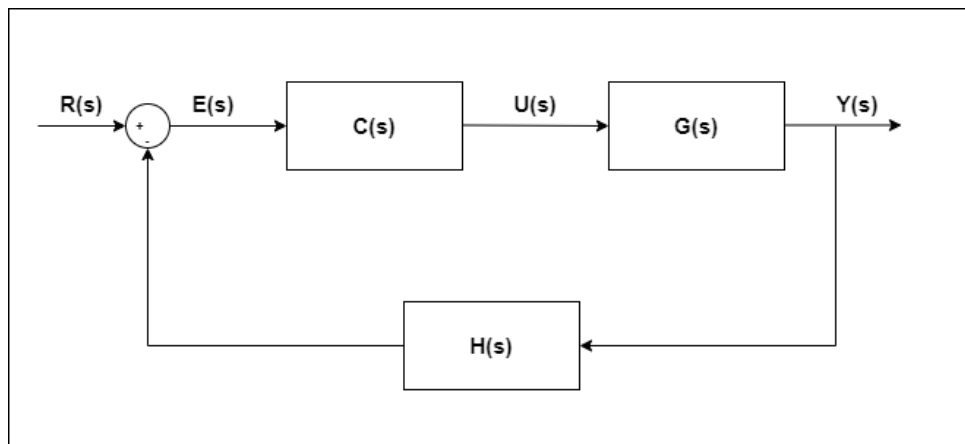


Fonte: Próprio autor.

Em contrapartida, num sistema de malha fechada a saída $Y(s)$ é medida por um sensor, neste caso representado pela função de transferência $H(s)$ e comparada com a entrada $R(s)$, gerando um erro $E(s)$ a fim de atingir o valor estipulado. A grande vantagem deste tipo de sistema é que, ao comparar a saída com a entrada, o comportamento da planta se torna moderadamente indiferente a ruídos e distúrbios externos, bem como a variações internas inerentes ao sistema (OGATA, 2010). A Figura 4 apresenta um diagrama de blocos para sistemas de malha fechada.

Sistemas de controle são inerentemente dinâmicos e seu desempenho é usualmente especificado em termos de resposta transitória e de regime estacionário. A resposta transitória é a parte que ocorre do estado inicial até o valor final e o regime estacionário é a parte da resposta que ocorre quando o tempo tende ao infinito (DORF; BISHOP, 2001).

Figura 4 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.



Fonte: Próprio autor.

Para que os critérios de estabilidade possam ser estabelecidos é necessário ter entradas conhecidas, visto que muitas vezes o sinal de entrada de um sistema em operação é desconhecido. Para isso é possível utilizar uma gama de sinais de teste. O emprego de sinais de teste pode ser justificado por conta da correlação existente entre as características de um sistema a um sinal de entrada de teste e a capacidade que o sistema tem em responder aos sinais de entrada reais (OGATA, 2010).

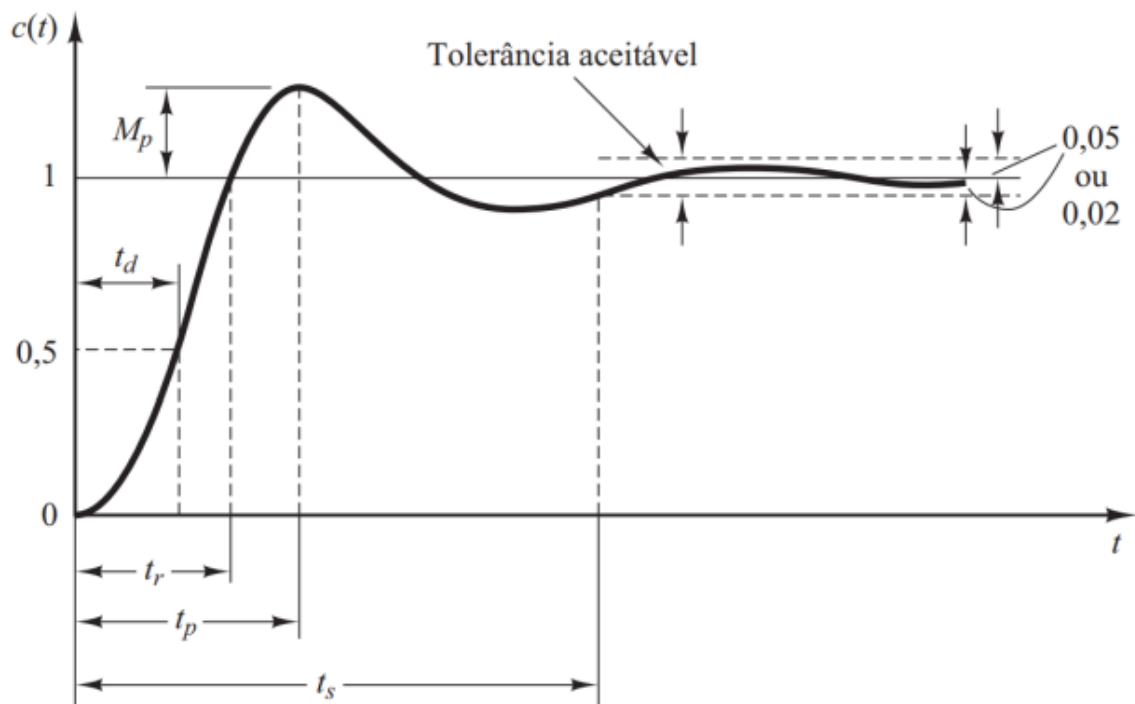
Um sinal amplamente utilizado para definição dos requisitos de estabilidade em sistemas de segunda ordem é o degrau unitário. As especificações possíveis de serem obtidas com a resposta do sistema ao degrau unitário são:

- t_d - Tempo de atraso: Tempo necessário para a resposta atingir metade do seu valor final pela primeira vez;
- t_r - Tempo de subida: Tempo necessário para que a resposta atinja 100% do seu valor final;
- t_p - Tempo de pico: Tempo necessário para a resposta atingir o primeiro pico de sobressinal;
- M_p - Máximo sobressinal: Diferença entre o valor de pico e o valor final da resposta;
- t_s - Tempo de acomodação: Tempo necessário para que a resposta alcance uma faixa de valor estabelecida para o sistema;
- e_{ess} - Erro em estado estacionário: Erro da resposta com relação final desejado.

A Figura 5 mostra um exemplo da resposta de um sistema de segunda ordem ao degrau unitário, destacando os itens apresentados anteriormente.

Para além dos requisitos apresentados, outro ponto que deve ser levado em consideração é a estabilidade do sistema. Um sistema é considerado estável se todos os polos em malha fechada estiverem situados no semiplano esquerdo do plano s

Figura 5 – Resposta ao degrau unitário de um sistema de segunda ordem.



Fonte: Extraído de (OGATA, 2010).

(OGATA, 2010).

2.3 MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

A estabilidade e o desempenho de um sistema estão diretamente relacionados com a posição dos polos da função de transferência do sistema em malha fechada no plano s . Dessa forma, é de grande valia analisar como os polos da função de transferência se deslocam pelo plano s à medida que um parâmetro é modificado (DORF; BISHOP, 2001).

O Método do Lugar das Raízes auxilia na previsão dos efeitos da variação do ganho ou da adição de polos e zeros de malha aberta sobre a localização dos polos de malha fechada, afetando diretamente a estabilidade do sistema, quando controlado em malha fechada.

O exemplo apresentado na Figura 4, considerando $C(s) = K$ e $H(s) = 1$ tem sua função de transferência escrita da seguinte maneira:

$$G_{mf} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} \quad (5)$$

Portanto, a equação característica do sistema é $1 + KG(s) = 0$, onde K é um parâmetro variável. Por ser uma equação com a variável complexa s , a equação característica pode ser reescrita em sua forma polar:

$$|KG(s)| \angle KG(s) = -1 + j0 \quad (6)$$

A equação 6 implica duas novas equações, denominadas Condição de Módulo e condição Angular, descritas respectivamente como:

$$|KG(s)| = 1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \angle KG(s) &= \pm\pi(2k + 1) \\ (k &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (8)$$

É extremamente importante obter um procedimento sistematizado para localização do lugar das raízes à medida que um parâmetro varia. Na sequência, este procedimento é discutido em maiores detalhes.

2.3.1 Procedimento do Lugar das Raízes

1. Escrever a equação característica de forma com que o o fator multiplicativo K permaneça em evidência.

$$1 + KG(s) = 0 \quad (9)$$

2. Fatorar G(s) em função dos polos e zeros.

$$1 + K \frac{\prod_{m=1}^M (s + z_m)}{\prod_{n=1}^N (s + p_n)} \quad (10)$$

3. Posicionar os polos e zeros no plano s.
4. Localizar os segmentos do eixo real que são lugar das raízes. Um segmento é lugar das raízes quando este se encontrar à esquerda de um número ímpar de polos e zeros.
5. Determinar o número de lugares separados. Os lugares de raízes iniciam-se nos polos e terminam nos zeros.
6. Determinar as assíntotas dos lugares das raízes.
7. Determinar os pontos de partida e os pontos de chegada ao eixo real.
8. Determinar o ângulo de partida de um polo complexo do lugar das raízes.
9. Encontrar os pontos onde o lugar das raízes pode cruzar o eixo imaginário.
10. Obter uma série de pontos de teste na região da origem do plano s e esboçar o lugar das raízes.
11. Determinar os polos de malha fechada.

2.4 CONTROLE CLÁSSICO

Neste campo de estudos, uma das técnicas mais amplamente utilizadas é o controle PID, combinando aspectos proporcionais (**P**), integrais (**I**) e derivativos (**D**),

com o objetivo de alcançar as métricas de estabilidade e desempenho estabelecidas para o sistema de controle. Controladores PID são populares devido parcialmente à sua simplicidade funcional e parcialmente ao seu bom desempenho em uma grande faixa de condições de operação (DORF; BISHOP, 2001).

2.4.1 Controlador PID

No controlador PID, o ganho proporcional apresenta um componente em função do estado presente do sistema. O termo integrador tem sua saída dependente de sua entrada para todos os instantes anteriores, ou seja, seu valor é determinado pelo estado passado do sistema. O ganho diferenciador é uma função da inclinação do sinal de entrada e pode ser considerado como um preditor do estado futuro do sistema (PHILLIPS; HARBOR, 1997).

No domínio do tempo, o controlador PID pode ser definido como:

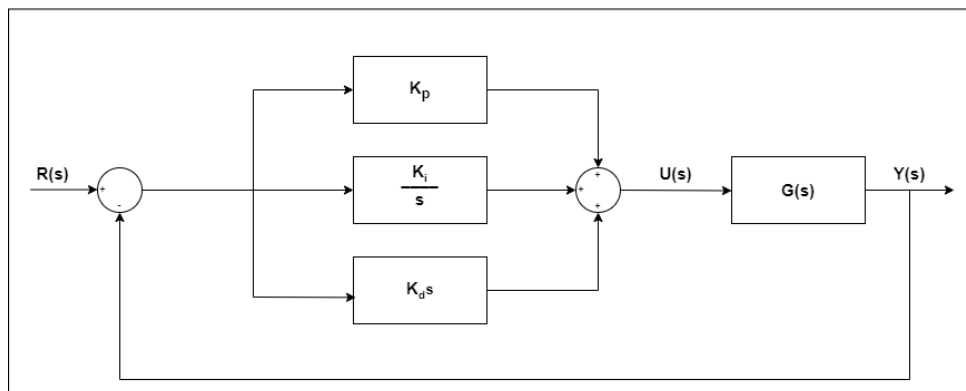
$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (11)$$

Na equação 11, $u(t)$ é a saída do controlador, $e(t)$ é o erro, K_p é o ganho proporcional, K_i é o ganho integral e K_d é o ganho derivativo. Considerando condições iniciais nulas, é possível aplicar a Transformada de Laplace, obtendo a função de transferência do controlador PID:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (12)$$

Observando a equação 12 é possível constatar as ações de cada parte do controlador, uma vez que a parte proporcional insere uma constante no sistema, a ação integral insere um polo na origem do plano s , e a ação derivativa insere um zero na origem do plano s . A Figura 6 apresenta o diagrama de blocos de um sistema controlado por meio de um controlador PID.

Figura 6 – Controlador PID aplicado a um sistema em malha fechada.



Fonte: Próprio autor.

Os ganhos apresentados na Figura 6 são os parâmetros utilizados para harmonizar o controlador a fim de que o sistema atinja as especificações de desempenho. Diversas técnicas podem ser empregadas para encontrar os parâmetros K_p , K_i e K_d do controlador e entre eles destacam-se o Método do Lugar das Raízes, abordado anteriormente neste trabalho, o Método Analítico apresentado por PHILLIPS e HARBOR (1997) e o Método de *Ziegler-Nichols* que não será discutido neste trabalho, visto que sua aplicação é reservada para sistemas onde a complexidade matemática torna a obtenção do modelo do sistema demasiadamente difícil (OGATA, 2010).

Devido a sua grande versatilidade, o controlador PID possui inúmeras variantes de implementação, como por exemplo o controlador PI, sem a ação derivativa, e o controlador PD, sem a ação integral.

2.4.2 Controlador PI

Este tipo de controlador emprega as ações proporcional e integral, atuando na correção do erro em regime permanente. Neste controlador um polo é adicionado na origem do plano s . A função de transferência típica é a seguinte:

$$C_{PI} = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (13)$$

2.4.3 Controlador PD

Ao passo que o controlador PI emprega as ações proporcional e integral, o controlador PD adota as partes proporcional e derivativa, e apresenta vantagem no sentido que antecipa a ação corretiva ao erro, atuando diretamente na sua tendência, por considerar a taxa de variação do erro. Neste controlador um zero é adicionado na origem do plano s , como pode ser observado na sua função de transferência:

$$C_{PD} = K_p + K_d s \quad (14)$$

2.4.4 Método Analítico para obtenção dos ganhos

Ao longo de décadas de estudo de sistemas de controle, diversos métodos para o cálculo de controladores PID foram desenvolvidos, incluindo maneiras analíticas de cálculo. PHILLIPS e HARBOR (1997) definem um método analítico para obtenção dos ganhos K_p , K_i e K_d . O método é descrito abaixo:

- As especificações de desempenho devem ser escolhidas
- O polo de malha fechada s_1 é calculado utilizando as seguintes equações:

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (15)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2(M_p)}{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} \quad (16)$$

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} \quad (17)$$

- Uma vez encontrado o polo de malha fechada, é preciso substituí-lo na função de transferência de malha fechada do sistema, obtendo $G_{mf}(s_1)$, que é um número complexo;
- Utilizar as equações definidas por PHILLIPS e HARBOR (1997) para determinar os ganhos, demonstradas a seguir:

$$K_p = \frac{-\sin(\angle s_1 + \angle G_{mf}(s_1))}{|G_{mf}(s_1)| \sin(\angle s_1)} - \frac{2K_i \cos(\angle s_1)}{|s_1|} \quad (18)$$

$$K_d = \frac{\sin(\angle G_{mf}(s_1))}{|s_1| |G_{mf}(s_1)| \sin(\angle s_1)} + \frac{K_i}{|s_1|^2} \quad (19)$$

Como existem apenas duas equações, e três incógnitas para serem calculadas, um dos valores deve ser escolhido arbitrariamente, ou pode-se utilizar as equações para calcular um controlador PI e um controlador PD, zerando as respectivas incógnitas.

2.5 CONTROLE DIGITAL

O controle de sistemas físicos utilizando computadores e microcontroladores são mais e mais comuns. A abordagem digital em sistemas de controle apresenta diversas vantagens, como a flexibilidade de programas de controle e a capacidade lógica de sistemas digitais. Além disso, um único projeto de hardware pode ser utilizado com diversos softwares diferentes, simplificando e diminuindo o tempo de projeto (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998).

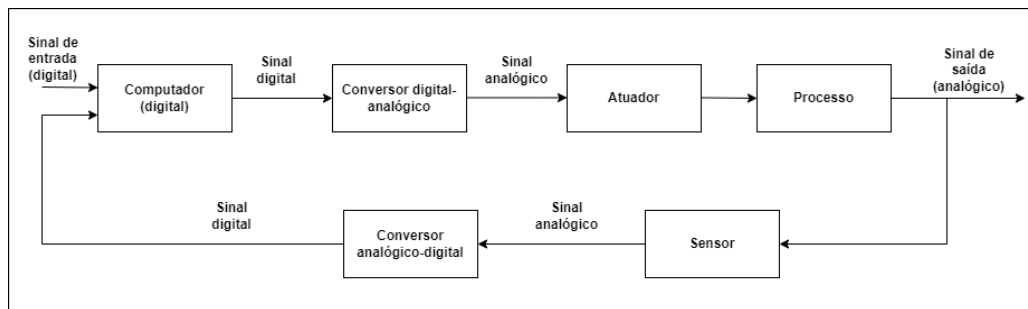
Uma das características fundamentais de controle digital é a representação de sistemas utilizando equações de diferenças e funções de transferências discretas. Este fato possibilita a implementação de técnicas de processamento digital de sinais e algoritmos de controle avançados, expandindo as capacidades de controle para além das possíveis com sistemas analógicos. É amplamente utilizado em sistemas, como sistemas robóticos industriais, sistemas embarcados e processamento digital de sinais.

A Figura 7 mostra um exemplo de sistema de controle digital, onde o atuador e o processo a ser controlado são analógicos, e o controlador é digital.

Para que seja possível controlar um processo analógico utilizando um controlador digital, é necessário utilizar conversores, que transformam o sinal digital do controlador em um sinal analógico, e o sinal analógico de saída em um sinal digital compreensível ao controlador.

O conversor digital-analógico pode ser representado por um amostrador de ordem zero, ou circuito extrapolador de ordem zero, do inglês *zero order holder*. DORF

Figura 7 – Sistema de controle digital.



Fonte: Adaptado de (DORF; BISHOP, 2001).

e BISHOP (2001) define que o amostrador de ordem zero recebe o valor $r(kT)$ da função contínua para um dado instante de tempo T , e o mantém constante para $kT \leq t < (k+1)T$. Dessa forma o valor que a função possui em $T = t$, ou o valor $r(kT)$ será utilizado durante o período de amostragem.

2.5.1 Transformada z

A transformada z é uma ferramenta muito importante na análise de sistemas de tempo discreto, ou digitais. Similar à transformada de *Laplace*, a transformada z leva sequências de tempo discreto em funções complexas dependentes de uma variável complexa, denotada como "z". Essa transformada permite a análise de sistemas dinâmicos em termos de frequências complexas, possibilitando uma compreensão mais fácil de propriedades como estabilidade e comportamento transitório. DORF e BISHOP (2001) define a transformada z utilizando como exemplo a função degrau unitário amostrada pelo amostrador de ordem zero. A definição da transformada z apresentada em DORF e BISHOP (2001) é exposta na sequência.

Uma vez que a saída do amostrador ideal $r^*(t)$, é uma série de impulsos com valores iguais a $r(kT)$, pode-se definir $r^*(t)$, para um sinal $t > 0$ como:

$$r^*(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT) \quad (20)$$

Aplicando a transformada de *Laplace* em 20:

$$\mathcal{L}\{r^*(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)e^{-ksT} \quad (21)$$

É possível observar que a transformada de *Laplace* da sequência de valores discretos do amostrador $r^*(kT)$ também é uma sequência de pontos discretos, porém no domínio s. É possível definir $e^{sT} = z$, e dessa forma, a transformada z pode ser definida como:

$$\mathcal{Z}\{r(t)\} = \mathcal{Z}\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)z^{-k} \quad (22)$$

Ao aplicar a transformada z no conjunto de valores amostrados de uma função degrau unitário, obtém-se:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \quad (23)$$

Como a função degrau $u(t) = 1$ para $k \geq 0$, é possível escrever a série como:

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (24)$$

A partir da demonstração exposta, é possível definir a transformada z para uma dada função $f(t)$ como sendo:

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \quad (25)$$

Em projetos de controle digital, existem basicamente dois caminhos a serem seguidos no que diz respeito ao método de projeto. O primeiro parte de realizar todo o projeto de controle no domínio da frequência, e após obter os modelos matemáticos necessários para o sistema, discretizá-lo utilizando a transformada z . O segundo método parte diretamente do domínio digital, e utiliza técnicas de controle diferentes das abordadas neste trabalho, uma vez que os critérios de estabilidade e desempenho são diferentes dos aplicados a projetos discretos.

Estas técnicas não serão abordadas neste trabalho, uma vez que o método de projeto escolhido foi o primeiro, onde todas as considerações e análises foram realizadas para o sistema contínuo, e posteriormente, utilizando um tempo de amostragem adequado, devidamente transladados para o mundo discreto.

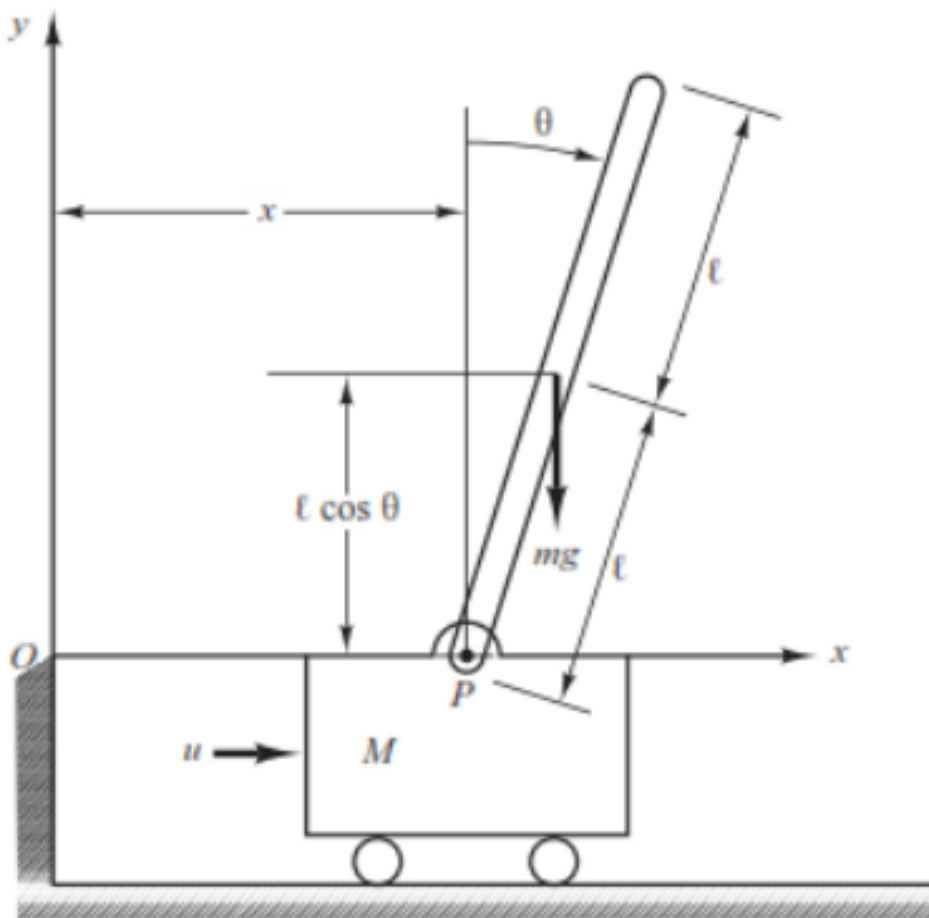
3 METODOLOGIA

Nesta seção, serão abordados as técnicas e métodos empregados para elaboração deste trabalho. Em primeiro lugar, a modelagem matemática do sistema será demonstrada, utilizando o modelo descrito por OGATA (2010), adaptado ao modelo físico empregado no trabalho. Na sequência, os aspectos físicos do robô serão abordados, como a modelagem mecânica do chassi e a configuração eletrônica utilizada em sua construção. Finalmente, a função de transferência do sistema será apresentada, empregando os dados do sistema físico.

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DO PÊNDULO INVERTIDO

A modelagem matemática do sistema abordado neste trabalho parte do sistema do pêndulo invertido sobre um carro, apresentado por OGATA (2010), exposto na Figura 8.

Figura 8 – Pêndulo invertido sobre um carro.

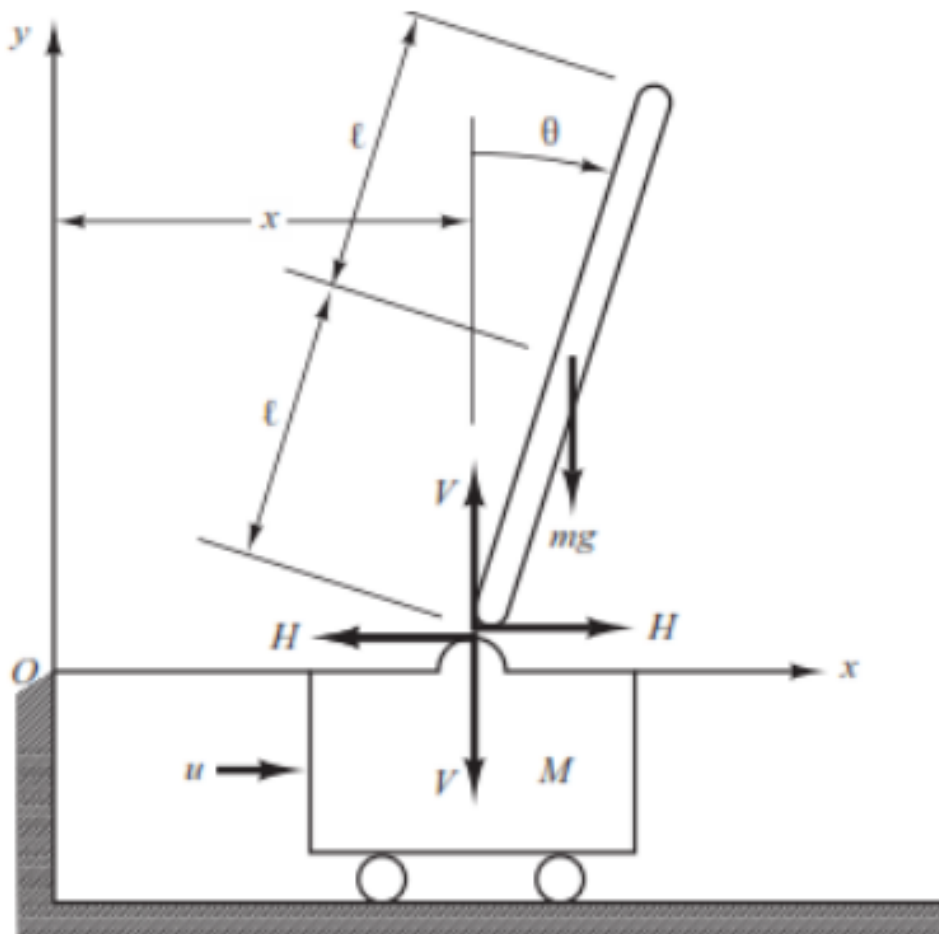


Fonte: Extraído de OGATA (2010).

O pêndulo invertido mostrado na Figura 8 consiste em um carro com massa M , com uma haste de massa m e comprimento $2l$, que se equilibra sobre o ponto P . A haste possui um ângulo θ com relação à linha de centro vertical que passa pelo ponto de apoio.

A partir deste modelo, é possível obter o diagrama de corpo livre do sistema, apresentado pela Figura 9.

Figura 9 – Diagrama de Corpo Livre de um pêndulo invertido sobre um carro.



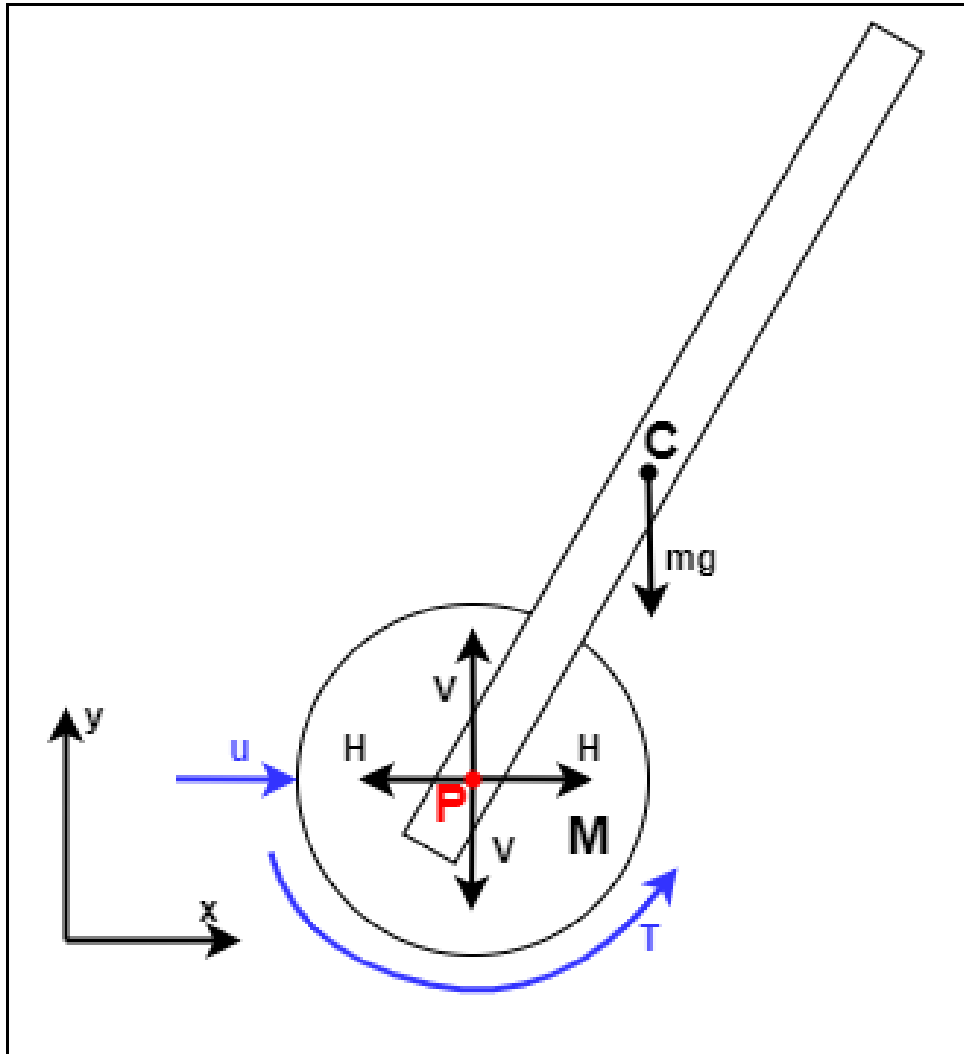
Fonte: Extraído de OGATA (2010).

O sistema do pêndulo invertido é naturalmente instável, uma vez que quando em repouso, o pêndulo pode cair para um lado ou para o outro. Desta forma, é preciso que uma força externa seja exercida no sistema, com a intenção de manter o pêndulo em equilíbrio na posição vertical, mantendo a posição angular $\theta = 0$.

Analisando o diagrama de corpo livre apresentado pela Figura 9, pode-se observar que a força gravitacional mg exercida sobre o centro de gravidade do pêndulo, promove duas reações no ponto P, representadas por V e H. A força externa u atua no sistema, resultado do torque gerado pelos motores elétricos acoplados às rodas do carro.

O modelo de pêndulo invertido utilizado neste trabalho segue a configuração mostrada pela Figura 2, e o diagrama de corpo livre apresentado por OGATA (2010) pode ser aplicado a este modelo, exposto na Figura 10.

Figura 10 – Diagrama de corpo livre do pêndulo invertido sobre duas rodas.



Fonte: Próprio autor.

Considerando o diagrama de corpo livre apresentado na Figura 10 é evidente que as forças atuantes no pêndulo invertido sobre duas rodas são as mesmas atuantes no pêndulo invertido sobre um carro apresentado na Figura 9. Desta forma é possível obter as coordenadas do centro de massa do pêndulo, localizado no ponto C:

$$\begin{aligned} x_C &= x + l \sin \theta \\ y_C &= l \cos \theta \end{aligned} \quad (26)$$

O deslocamento horizontal do ponto P pode ser descrito como:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H \quad (27)$$

O deslocamento horizontal do ponto C é dado por:

$$m \frac{d^2(x + l \operatorname{sen}\theta)}{dt^2} = H \quad (28)$$

O deslocamento vertical do centro de massa do pêndulo, localizado no ponto C é expresso por:

$$m \frac{d^2(-l \operatorname{cos}\theta)}{dt^2} = mg - V \quad (29)$$

Por último, é possível determinar o deslocamento angular do centro de gravidade do pêndulo, tendo seu momento de inércia representado por I , como:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = Vl \operatorname{sen}\theta - Hl \operatorname{cos}\theta \quad (30)$$

Presumindo que a variação de θ seja pequena o suficiente, é possível linearizar as equações demonstradas anteriormente, assumindo $\operatorname{sen}\theta = \theta$, $\operatorname{cos}\theta = 1$ e $\theta = 0$. Assim, a linearização das equações 28, 29 e 30 é apresentada respectivamente da seguinte forma:

$$m \frac{d^2(x + l\theta)}{dt^2} = H \quad (31)$$

$$V = mg \quad (32)$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = Vl\theta - Hl \quad (33)$$

Substituindo 31 e 32 em 33:

$$(I + ml^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + ml \frac{d^2x}{dt^2} - mgl\theta = 0 \quad (34)$$

Com o auxílio das equações 31 e 27, obtém-se:

$$(M + m) \frac{d^2x}{dt^2} + ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = u \quad (35)$$

Com as equações 34 e 35 linearizadas e considerando condições iniciais nulas, pode-se aplicar a transformada de *Laplace*:

$$X(S) = \frac{(I + ml^2)s^2 - mgl}{mls^2} \Theta(s) \quad (36)$$

$$(M + m)s^2 X(s) + mls^2 \Theta(s) = U(s) \quad (37)$$

A partir das equações 36 e 37, é possível obter a função de transferência do sistema, descrita como:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{ml}{(m^2l^2 - (M + m)(I + ml^2))s^2 + (M + m)mgl} \quad (38)$$

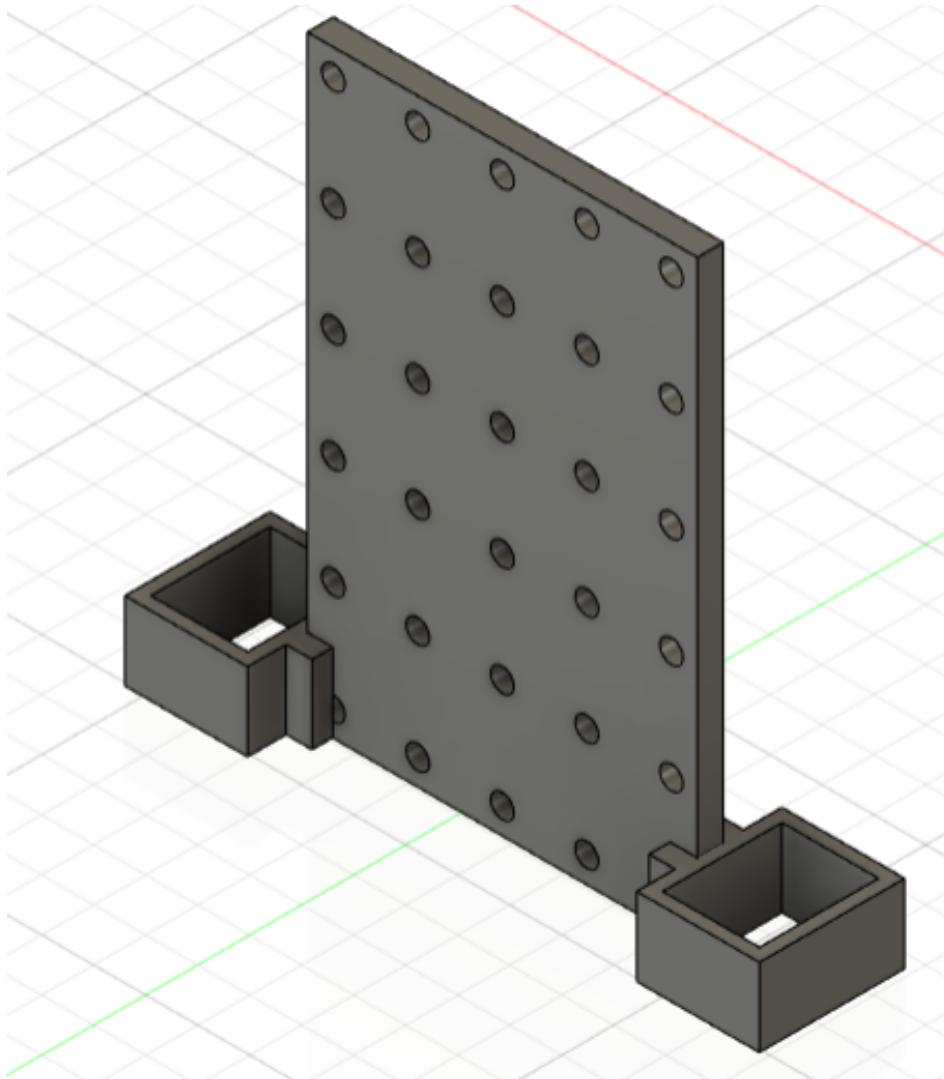
3.2 ASPECTOS FÍSICOS E CONSTRUÇÃO DO ROBÔ DE DUAS RODAS

O sistema do pêndulo invertido pode ser aplicado a um robô de duas rodas, onde a haste do pêndulo é o chassi do robô e a base é o conjunto motriz, composto pelos motores e rodas.

3.2.1 Sistema Mecânico

O formato escolhido para o sistema mecânico do robô foi um chassi vertical, com um conjunto de motor e rodas em cada lateral do robô. A Figura 11 mostra o chassi vertical onde os componentes eletrônicos foram fixados, com dois suportes para fixação dos conjuntos motrizes nas laterais. As dimensões do chassi vertical são de 115mm de altura, 75mm de comprimento e 5mm de espessura.

Figura 11 – Modelo mecânico do chassi.



Fonte: Próprio autor.

O modelo de chassi vertical foi escolhido com o intuito de manter o sistema

compacto.

O conjunto motriz escolhido para este trabalho foi um motor de corrente contínua de 5V com uma caixa de redução com relação de 48:1, e uma roda de plástico de 68mm de diâmetro com pneu. A Figura 12 apresenta este conjunto.

Figura 12 – Conjunto motriz.



Fonte: (ROBOTICA COMÉRCIO DE INFORMÁTICA E BRINQUEDOS LTDA, 2024).

Estes modelos de motor e roda foram escolhidos por serem facilmente encontrados em lojas de produtos eletrônicos.

3.2.2 Sistema eletrônico

O sistema eletrônico empregado neste trabalho consistiu na utilização de um microcontrolador, um módulo sensor acelerômetro/giroscópio, um regulador de tensão, um módulo driver para acionamento dos motores e dois conjuntos de baterias, um para a alimentação do conjunto motriz e outro para alimentação do microcontrolador e do sensor. A Tabela 1 apresenta o modelo de cada um dos componentes.

A Figura 13 mostra o esquema de ligação entre os componentes eletrônicos aplicados ao robô.

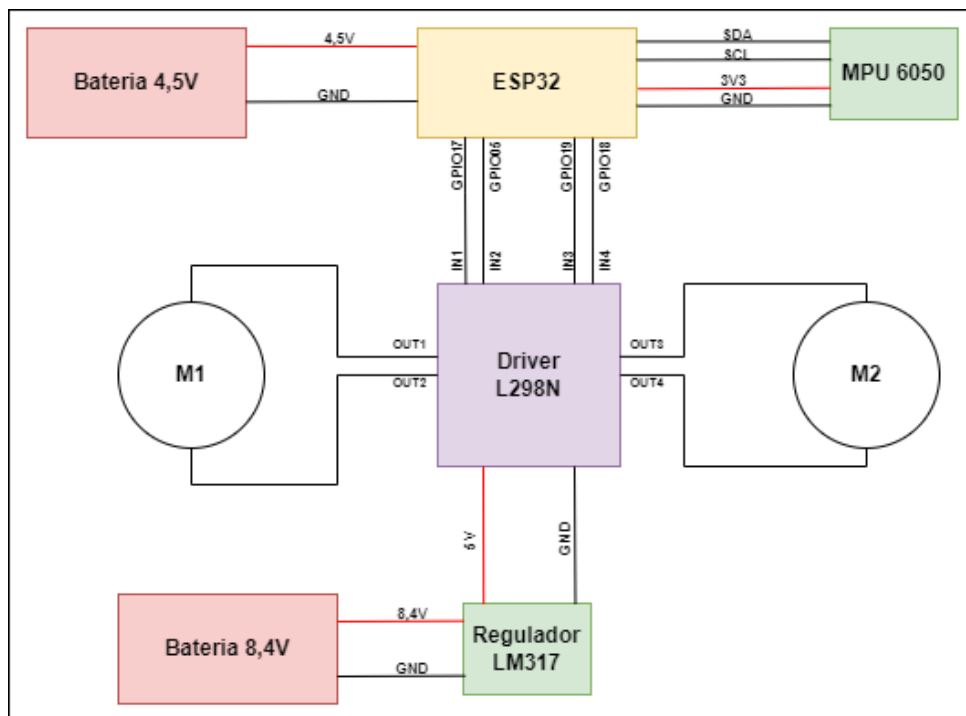
O sensor MPU6050 emprega o uso da comunicação digital por meio do protocolo I2C para enviar as informações de aceleração e deslocamento angular ao microcontrolador ESP32. A interface entre o ESP32 e o driver L298N foi realizada

Tabela 1 – Componentes eletrônicos

Componente	Modelo	Quantidade
Microcontrolador	ESP32	1
Sensor	MPU6050	1
Regulador de tensão	LM317	1
Driver de motor	L298N	1
Baterias microcontrolador/sensor	Pilha alcalina tipo AA 1,5V	3
Baterias conjunto motriz	Li-ion 18650 3,7V	2

Fonte: Próprio autor.

Figura 13 – Esquema de ligação eletrônica do sistema.



Fonte: Próprio autor.

por meio de pinos digitais do microcontrolador ligados aos pinos de controle do driver responsáveis por acionar cada uma das suas quatro saídas, em que a mudança do nível lógico em **IN1** corresponde ao acionamento de **OUT1** e assim sucessivamente para os outros pinos e saídas do driver.

Para que o motor **M1** possa ser acionado é necessário que **IN1** esteja em nível lógico alto e **IN2** esteja em nível lógico baixo ou vice-versa, fazendo o eixo do motor rotacionar em um sentido ou em outro, e este mesmo princípio de funcionamento é aplicado ao motor **M2**.

A configuração dos componentes responsáveis pela alimentação do sistema foi escolhida desta maneira com o fim de diminuir possíveis interferências causadas pelo compartilhamento da mesma fonte de alimentação entre os sistemas de aquisição de sinal e acionamento de motores.

3.2.3 Dimensões do robô

Para que seja possível obter uma função de transferência com valores numéricos, foi necessário mensurar algumas informações do sistema. Tais dados são a massa da haste do pêndulo, a massa do carro e o comprimento da haste.

Como mencionado anteriormente, neste sistema do pêndulo invertido a haste do pêndulo é o chassi no qual os componentes eletrônicos e os motores foram fixados. Desta forma a massa da haste é a somatória da massa destes itens, igual a 330g ou 0,33kg.

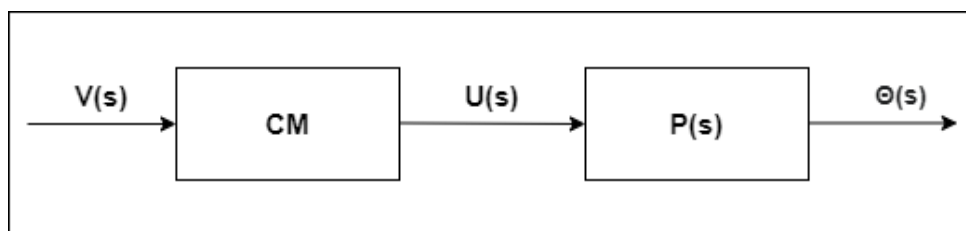
Para encontrar a massa do carro, antes foi preciso definir o que seria considerado como o carro do sistema pêndulo invertido clássico. Levando em conta as Figuras 9 e 10 e analisando a localização do ponto de apoio P, para este sistema o carro pode ser definido como sendo as duas rodas, visto que o ponto P está localizado no eixo da caixa de engrenagens acoplada ao motor. Com esta definição, a massa do carro é igual a 60g ou 0,06kg.

O comprimento da haste foi definido como sendo a distância entre o ponto P e o topo do chassi vertical, que é igual a 145mm.

3.3 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO SISTEMA

Para elaborar a função de transferência do pêndulo invertido, fez-se necessário avaliar o diagrama de blocos do sistema contendo o bloco do motor e o bloco do pêndulo invertido, apresentado na Figura 14.

Figura 14 – Diagrama de blocos do sistema pêndulo invertido.



Fonte: Próprio autor.

Ao analisar a Figura 14 é possível observar o bloco **P(s)** representando a função de transferência do pêndulo invertido, e o bloco **CM** representando o conjunto motriz do robô. É notável que o conjunto motriz não está em função de **s** pois a modelagem matemática aplicada neste trabalho considerou o conjunto motriz como um ganho estático de valor igual a relação da caixa de redução.

Esta aproximação foi considerada devido ao fato do tipo de motores escolhidos para o desenvolvimento do robô, que são motores empregados majoritariamente em brinquedos e não possuem documentação sobre seus aspectos físicos necessários para a modelagem matemática de sua função de transferência, como momento de

inércia do rotor, indutância das bobinas e coeficiente de atrito dos mancais.

Desta forma, é possível utilizar a equação 38 representando $\mathbf{P}(s)$ e o ganho \mathbf{CM} como a relação da caixa de redução dos motores, obtendo a função de transferência do sistema apresentado no diagrama de blocos da Figura 14 como:

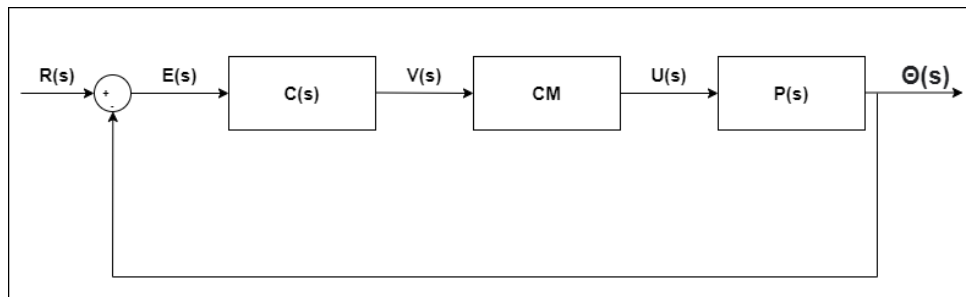
$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = CM \frac{ml}{(m^2l^2 - (M + m)(I + ml^2))s^2 + (M + m)mgl} \quad (39)$$

Utilizando a equação 39 e os valores dimensionais do sistema físico obtém-se a função de transferência do sistema, descrita como:

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{1,1484}{-2,172 \cdot 10^{-4}s^2 + 0,091} \quad (40)$$

A função de transferência representada pela equação 40 demonstra o sistema pêndulo invertido em malha aberta. Para que o sistema possa ser controlado é necessário adicionar um bloco controlador e realimentar o sistema com o sinal $\Theta(s)$ de saída na entrada do controlador, como mostrado pela Figura 15.

Figura 15 – Diagrama de blocos do sistema completo.



Fonte: Próprio autor.

4 ANÁLISE DE DADOS

Esta seção abordará o desenvolvimento do controlador PID contínuo para o sistema pêndulo invertido aplicado em um robô de duas rodas, utilizando os métodos apresentados no Capítulo 2 com o auxílio de um software de desenvolvimento de sistemas matemáticos e de engenharia, bem como os aspectos considerados para sua conversão em um sistema discreto e a posterior implementação do controlador no sistema físico. Por fim, os resultados das simulações serão comparados com o desempenho do sistema físico do robô.

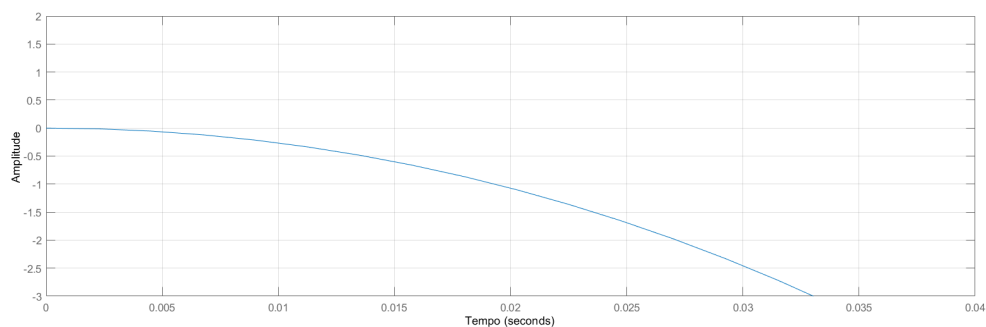
4.1 PROJETO DO CONTROLADOR CONTÍNUO

4.1.1 Resposta ao degrau unitário e localização dos polos do sistema em malha aberta

Para analisar um sistema OGATA (2010) define diferentes sinais que podem ser utilizados como teste, sendo um deles o degrau unitário. O sistema avaliado neste trabalho é de segunda ordem, evidente pela ordem do polinômio denominador apresentado na equação 40.

Em um sistema de segunda ordem estável, isto é, que converge naturalmente para o valor aplicado na entrada, a resposta esperada deve ser similar ao apresentado pela Figura 5. Levando este fato em consideração é possível analisar a resposta ao degrau unitário do sistema em malha aberta, aplicando este sinal à função de transferência definida pela equação 40. A resposta ao degrau unitário é mostrada pela Figura 16.

Figura 16 – Resposta ao degrau unitário do sistema em malha aberta.



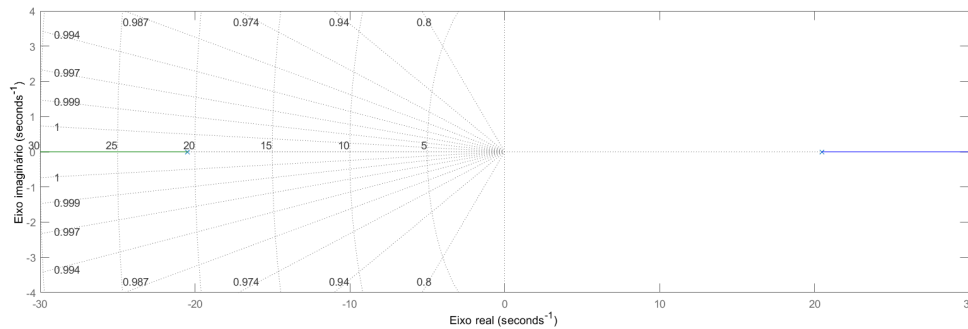
Fonte: Próprio autor.

Analisando a Figura 16 pode-se concluir que o sistema pêndulo invertido é instável visto que sua resposta ao degrau unitário não converge para o valor aplicado

na entrada, divergindo ao longo do tempo.

Uma outra análise que pode ser realizada para corroborar com a resposta ao degrau unitário é a localização dos polos da função de transferência. A Figura 17 expõe a localização destes polos.

Figura 17 – Localização dos polos do sistema em malha aberta.



Fonte: Próprio autor.

Verificando a localização dos polos do sistema em malha aberta exposta na Figura 17 é possível afirmar que o sistema pêndulo invertido analisado neste trabalho é instável, pois um dos polos está localizado no semi-plano direito do plano s .

4.1.2 Requisitos de desempenho

O projeto de um controlador requer o estabelecimento de requisitos de desempenho de funcionamento, que são calculados a partir da função de transferência da planta do sistema. Tais requisitos serão utilizados para calcular o lugar das raízes do controlador.

As especificações foram consideradas levando em conta valores condizentes com a planta, e baseados em dados encontrados na literatura.

- O máximo sobressinal deve ser de 3%;
- O tempo de acomodação deve ser igual a 0,2 segundos;
- O erro em estado estacionário deve ser nulo.

4.1.3 Cálculo dos ganhos do controlador PID pelo Método Analítico

A técnica utilizada para calcular o controlador foi o Método Analítico demonstrado por PHILLIPS e HARBOR (1997) abordada no Capítulo 2. O primeiro passo deste método é determinar o polo s_1 de malha fechada utilizando as equações 16 e 17 aplicando os valores dos requisitos de desempenho definidos acima. Substituindo M_p por 3% e t_s por 0,2 segundos nas equações 16 e 17 respectivamente:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2(0.03)}{\pi^2 + \ln^2(0.03)}} = 0,7478 \quad (41)$$

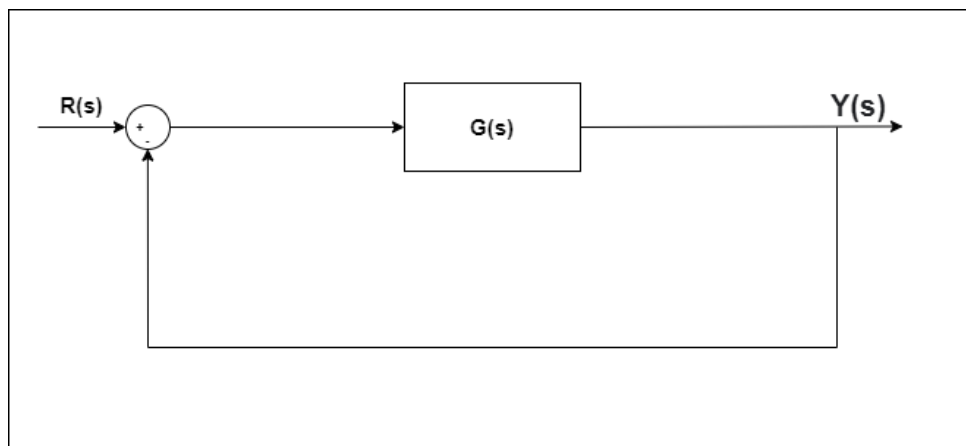
$$\omega_n = \frac{4}{0,7448 \cdot 0,2} = 26,853 \quad (42)$$

Aplicando os valores de ζ e ω_n na equação 15:

$$s_1 = -20 + j17,919 = 26,853 \angle 138,141^\circ \quad (43)$$

O segundo passo do método empregado é encontrar a função de transferência de malha fechada do sistema analisado. A Figura 18 mostra o diagrama de blocos de um sistema genérico em malha fechada.

Figura 18 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.



Fonte: Próprio autor.

Por meio do diagrama de blocos exposto na Figura 18 é possível determinar que a função de transferência de um sistema genérico em malha fechada é dado pela seguinte equação:

$$G_{mf}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (44)$$

Substituindo a função de transferência $\frac{\Theta(s)}{V(s)}$ do sistema estudado neste trabalho definida pela equação 40 na função de transferência $G(s)$, e subsequentemente aplicando-a na equação 44 obtém-se a função de transferência do sistema pêndulo invertido, definida como:

$$G_{mf}(s) = \frac{-2,494 \cdot 10^{-4} s^2 + 0,1045}{4,718 \cdot 10^{-8} s^4 - 2,89 \cdot 10^{-4} s^2 + 0,1128} \quad (45)$$

Com a função de transferência de malha fechada do sistema em mãos deve-se calcular o valor de $G_{mf}(s_1)$, dado por:

$$G_{mf}(s_1) = \frac{-2,494 \cdot 10^{-4}(26,853 \angle 138,141^\circ)^2 + 0,1045}{4,718 \cdot 10^{-8}(26,853 \angle 138,141^\circ)^4 - 2,89 \cdot 10^{-4}(26,853 \angle 138,141^\circ)^2 + 0,1128} \quad (46)$$

$$G_{mf}(s_1) = 0,931815 \angle 7,26087^\circ \quad (47)$$

Com os valores de s_1 e $G_{mf}(s_1)$ determinados, é possível calcular os ganhos do controlador PID. O Método Analítico descreve duas equações para o cálculo dos ganhos, portanto é necessário escolher um dos ganhos arbitrariamente para que seja possível empregar esta técnica.

De acordo com a definição do Método Analítico o ganho escolhido deve ser K_i , que foi definido como -0,1. Desta forma é possível determinar os ganhos K_p e K_d , definidos pelas equações 18 e 19 respectivamente. Os ganhos são calculados conforme segue:

$$K_p = \frac{-\sin(138,141^\circ + 7,26087^\circ)}{0,931815 \sin(138,141^\circ)} - \frac{2 \cdot (-0,1)(138,141^\circ)}{26,853} = -4,98 \quad (48)$$

$$K_d = \frac{\sin(7,26087^\circ)}{26,853 \cdot 0,931815 \sin(138,141^\circ)} - \frac{0,1}{(26,853)^2} = -0,11 \quad (49)$$

Por meio dos ganhos K_p , K_i e K_d calculados através do Método Analítico, a função de transferência do controlador PID é dada por:

$$C(s) = -4,98 - \frac{0,1}{s} - 0,11s \quad (50)$$

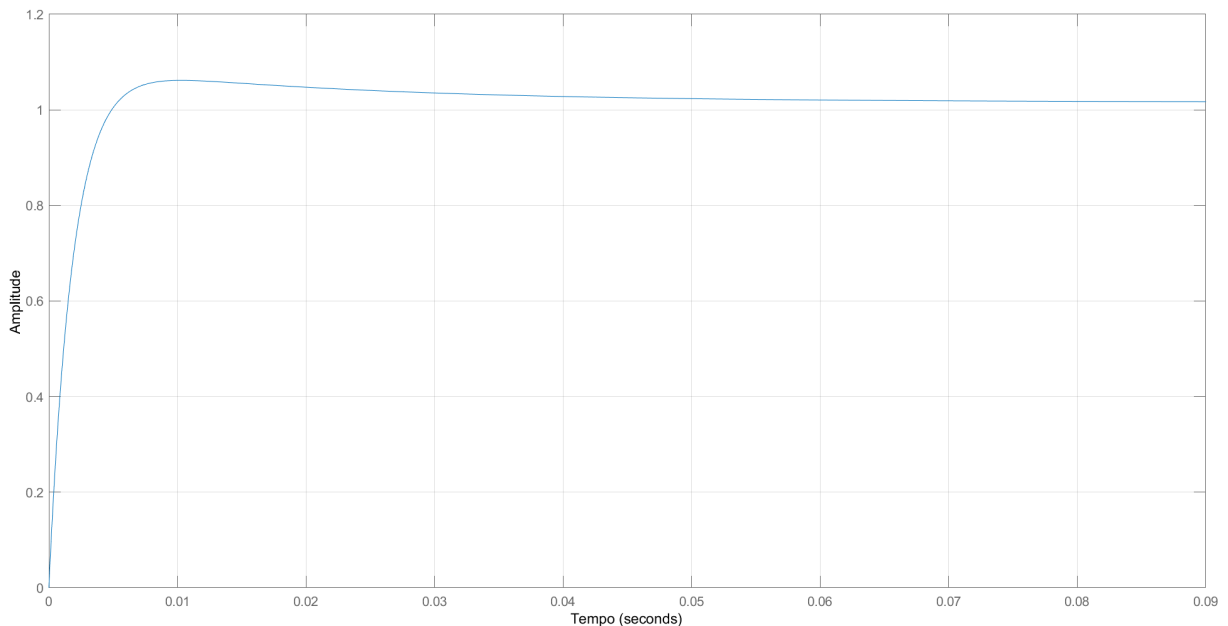
Substituindo a função de transferência 40 do pêndulo invertido, o ganho CM e a função de transferência 50 nos respectivos blocos do diagrama exposto na Figura 15 obtém-se a função de transferência do sistema controlado, descrita a seguir:

$$F(s) = \frac{2,744 \cdot 10^{-5}s^5 + 1,242 \cdot 10^{-3}s^4 - 11,47 \cdot 10^{-3}s^3 - 0,5204s^2 - 0,01045s}{4,718 \cdot 10^{-8}s^6 + 2,744 \cdot 10^{-5}s^5 + 1,203 \cdot 10^{-3}s^4 - 11,47 \cdot 10^{-3}s^3 - 0,5122s^2 - 0,01045s} \quad (51)$$

Para verificar a validade dos ganhos calculados para o controlador a função de transferência 51 foi submetida ao degrau unitário, e a Figura 19 apresenta a resposta apresentada pelo sistema.

Analisando o gráfico da resposta ao degrau unitário da função de transferência $F(s)$ é possível observar que os requisitos de desempenho não foram completamente alcançados, pois o máximo sobressinal atingiu o valor de 1,06 em aproximadamente 0,01 segundos e o erro em estado estacionário não é nulo, uma vez que o valor da

Figura 19 – Resposta ao degrau unitário da planta controlada com os ganhos pelo Método Analítico.



Fonte: Próprio autor.

resposta se estabiliza em aproximadamente 1,02, ou seja, o erro em estado estacionário é de aproximadamente 2%.

Em contrapartida o requisito do tempo de acomodação de 0,2 segundos foi alcançado, visto que apesar do valor não convergir para 1 em estado estacionário, a planta estabilizou sua resposta em aproximadamente 0,05 segundos. Por conta disso, decidiu-se utilizar um software de desenvolvimento de sistemas matemáticos e de engenharia para sintonizar os ganhos do controlador de maneira a atingir os requisitos de desempenho determinados para o sistema.

4.1.4 Sintonização dos ganhos via software

Com o fim de atingir os requisitos de desempenho estabelecidos para o sistema, uma ferramenta matemática computacional foi empregada. A função de transferência de malha aberta 40 foi carregada no software, assim como os requisitos de desempenho. Os ganhos do controlador sintonizados pela ferramenta foram os seguintes:

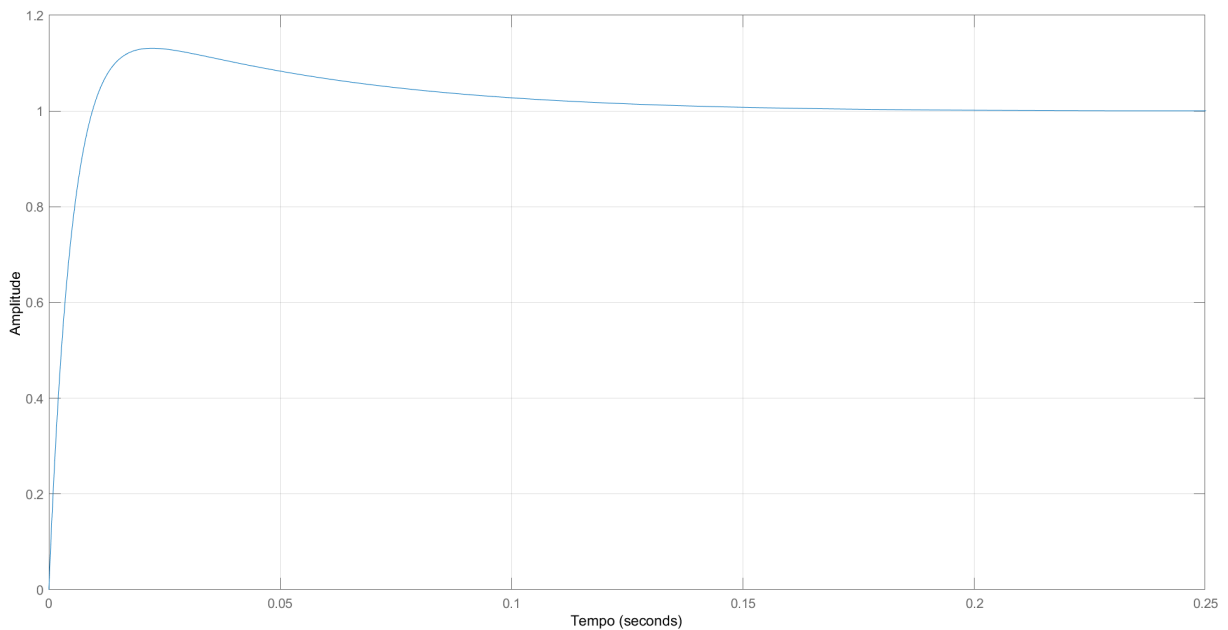
- $K_p = -1,6874$
- $K_i = -17,2403$
- $K_d = -0,0455$

Da mesma maneira que para os ganhos calculados pelo Método Analítico, o controlador estabelecido pela ferramenta foi empregado no diagrama de blocos apresentado na Figura 15, obtendo a função de transferência de malha fechada do sistema apresentada a seguir:

$$F_f(s) = \frac{1,135 \cdot 10^{-5} s^5 + 4,209 \cdot 10^{-4} s^4 - 4,547 \cdot 10^{-4} s^3 - 0,1763 s^2 - 1,802 s}{4,718 \cdot 10^{-8} s^6 + 1,135 \cdot 10^{-5} s^5 + 3,814 \cdot 10^{-4} s^4 - 4,547 \cdot 10^{-4} s^3 - 0,1681 s^2 - 1,802 s} \quad (52)$$

Novamente a resposta ao degrau unitário do sistema foi analisada, a fim de determinar se os requisitos de desempenho foram atendidos. A Figura 20 apresenta a resposta do sistema o degrau unitário.

Figura 20 – Resposta ao degrau unitário da planta controlada com os ganhos utilizando a ferramenta matemática computacional.



Fonte: Próprio autor.

Examinando a curva apresentada na Figura 20 é possível notar que houve uma melhora no cumprimento dos requisitos de desempenho, pois o erro em estado estacionário foi igual a nulo e o tempo de acomodação também foi atingido em aproximadamente 0,18 segundos. O requisito que não atingido foi o de sobressinal, estipulado para um máximo de 3%, porém este obteve um valor máximo de 13% em aproximadamente 0,025 segundos.

Comparando as respostas ao degrau unitário das duas plantas controladas obtidas por diferentes métodos, é possível notar que a resposta do segundo sistema analisado é mais suave, pois o seu tempo de acomodação é uma ordem de grandeza maior do que o do primeiro sistema examinado. Por conta deste fato, decidiu-se continuar com os ganhos obtidos por meio da ferramenta computacional.

4.1.5 Obtenção do controlador digital

O próximo passo para a implementação do controlador no sistema físico do robô foi a obtenção da função de transferência discreta do sistema. Com este objetivo em

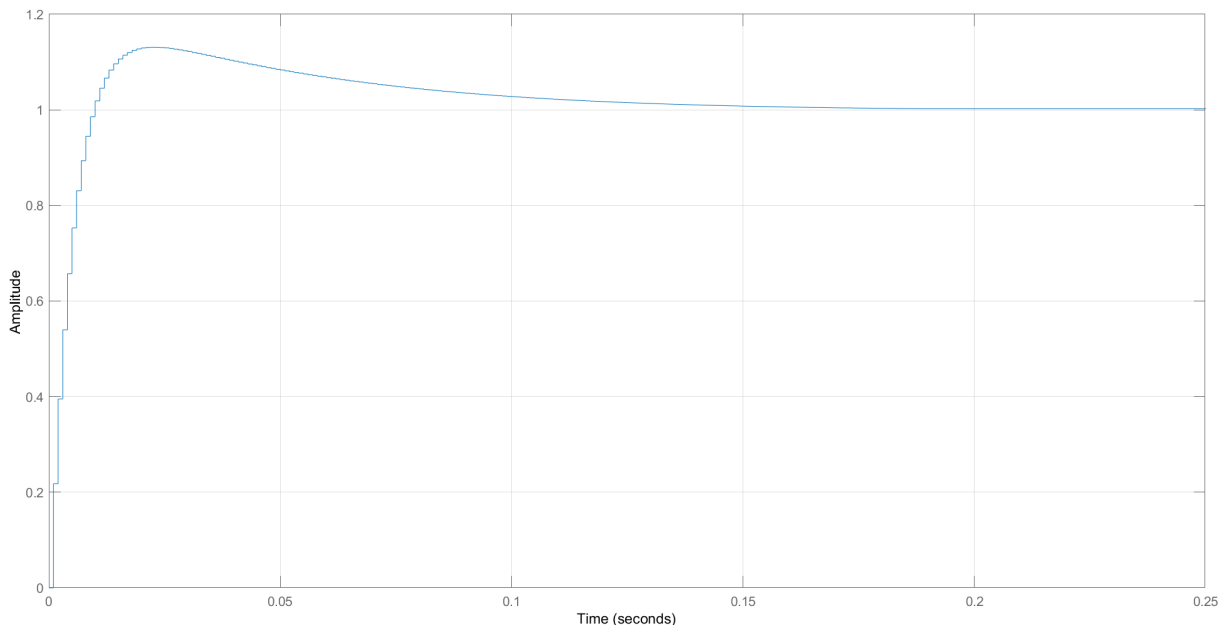
mente foi necessário escolher um período de amostragem adequado para a aquisição da planta contínua e sua mudança para um sistema discreto.

Visto que a resposta da função de transferência 52 atinge o máximo sobressinal em aproximadamente 0,025 segundos o período de amostragem escolhido foi de 0,001 segundos, ou uma ordem de grandeza menor que o tempo de acomodação do sistema contínuo. Isso garantiu que a planta fosse amostrada de maneira suficiente, obtendo a função de transferência do sistema discreto apresentada a seguir:

$$F_{fz}(s) = \frac{0,2217z^4 - 0,8627z^3 + 1,282z^2 - 0,8468z + 0,2097}{z^5 - 4,779z^4 + 9,123z^3 - 8,696z^2 + 4,138z - 0,7862} \quad (53)$$

A resposta ao degrau unitário da função de transferência discreta é mostrada pela Figura 21.

Figura 21 – Resposta ao degrau unitário da planta discreta.



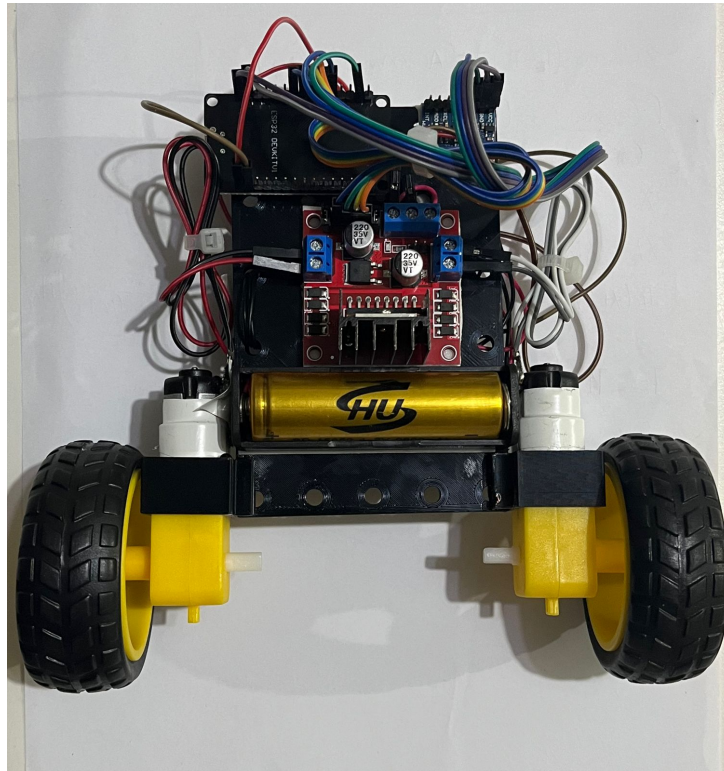
Fonte: Próprio autor.

É notável que o sistema contínuo foi amostrado corretamente, visto que as características da resposta ao degrau unitário da função de transferência 53 apresentados pela Figura 21 foram mantidas, quando comparada com a resposta da função de transferência 52.

4.2 IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLADOR NO SISTEMA FÍSICO

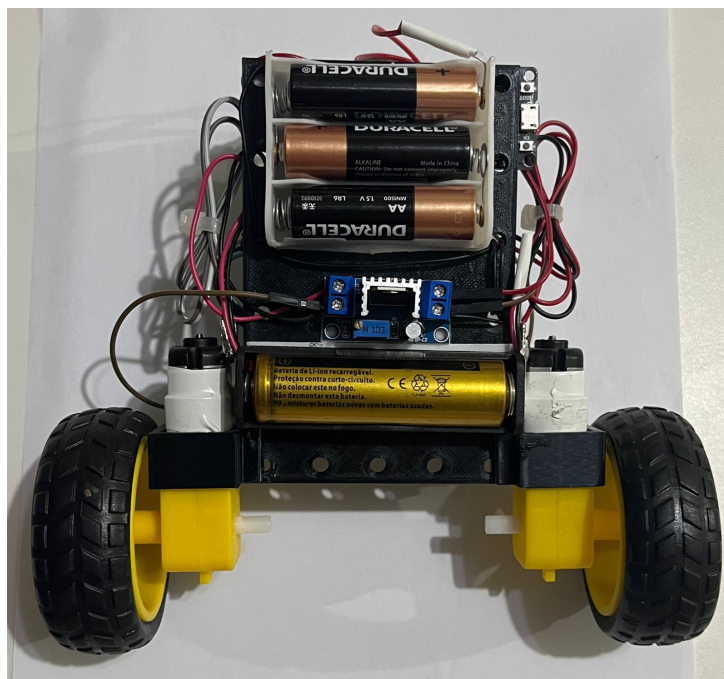
O próximo passo do trabalho foi a implementação do controlador digital no sistema físico do robô. Para concretizar esta etapa, foi necessário montar os componentes eletrônicos no chassi vertical do robô. As Figuras 22 e 23 apresentam a forma como os componentes foram dispostos no chassi vertical.

Figura 22 – Vista frontal do robô.



Fonte: Próprio autor.

Figura 23 – Vista posterior do robô.



Fonte: Próprio autor.

Os componentes eletrônicos foram dispostos da maneira mostrada nas Figuras 22 e 23 com o propósito de manter o centro de massa próximo da metade do

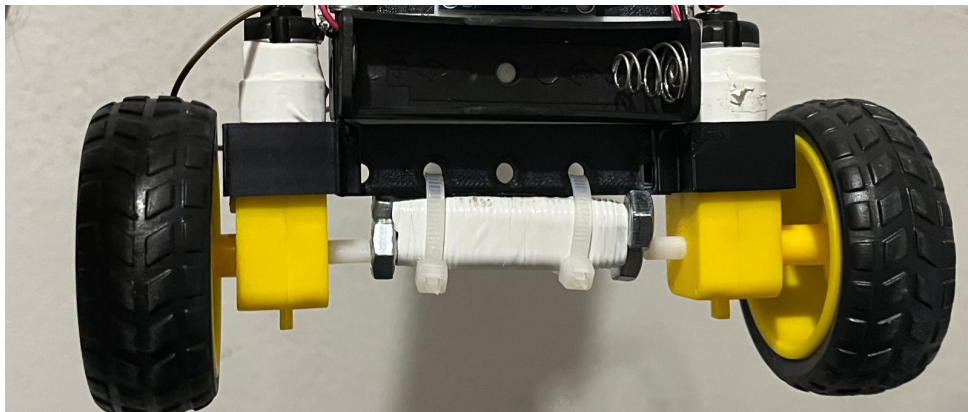
comprimento do pêndulo, de acordo com a modelagem matemática descrita no Capítulo 3.

Com os componentes montados e o sistema eletrônico devidamente conectado, o controlador foi implementado em um *firmware* e carregado no microcontrolador. Desta forma foi dado início aos testes de funcionamento e possíveis ajustes de ganhos do controlador.

Nos primeiros testes foi possível determinar que seria necessário ajustar os ganhos do controlador, visto que o sistema levava muito tempo para responder às perturbações e o robô não se equilibrava, caindo para um lado ou para o outro. Após ajustar os ganhos e repetir os testes por diversas vezes, percebeu-se que mesmo com um controlador mais rápido, o robô ainda não conseguia se equilibrar.

A primeira hipótese levantada foi de que o centro de massa do robô estava localizado acima da metade do comprimento do pêndulo, tornando mais difícil para o robô manter o equilíbrio. Assim, foi adicionado uma massa de aproximadamente 40g próximo ao ponto P de rotação do pêndulo, com o intuito de mover o centro de massa para baixo. A Figura 24 apresenta a massa anexada ao robô.

Figura 24 – Massa adicionada à parte inferior do robô.



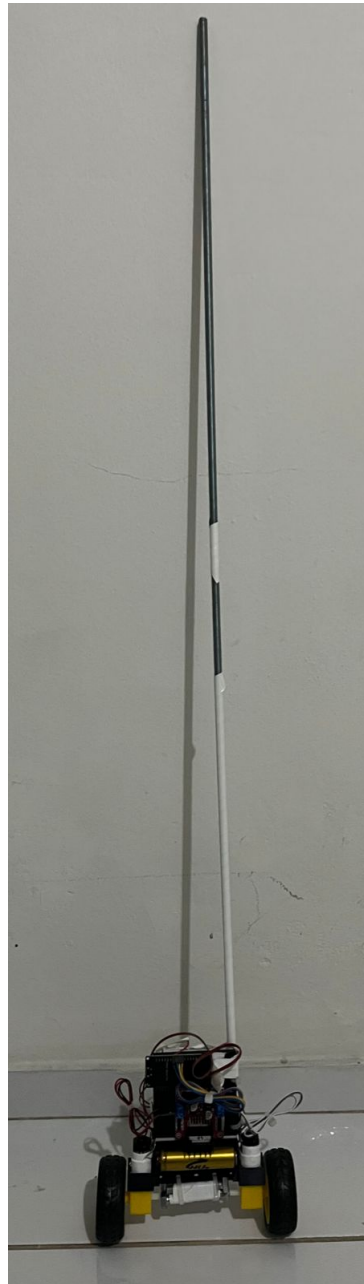
Fonte: Próprio autor.

Após mais testes, desta vez com a massa adicionada a parte inferior do robô, constatou-se que houve uma pequena melhora, pois o robô equilibrou-se por alguns instantes em diferentes momentos do funcionamento antes de cair para um lado ou para o outro.

Para confirmar que o deslocamento do centro de massa para a parte mais inferior do robô realmente trazia mudanças no sistema, foi decidido anexar uma barra roscada ao sistema, aumentando o tamanho do pêndulo e levando o centro de massa para a parte superior do sistema. A Figura 25 apresenta o sistema com a barra roscada.

A hipótese de que o centro de massa deslocado para a parte inferior do sistema traria melhorias na performance do robô não foi confirmada, pois a adição da barra

Figura 25 – Sistema com a adição da barra roscada.



Fonte: Próprio autor.

roscada fez com que o sistema ficasse melhor do que antes, ainda que o equilíbrio em regime permanente não tenha sido atingido.

O sensor foi posicionado de maneira a considerar a posição angular com relação ao eixo Y, definido no sensor. Caso o sensor fosse fixado em outra configuração, outro eixo deveria ser usado como referência.

Desta forma, a posição vertical alinhada ao eixo Y e ortogonal ao plano XZ do sensor foi definida como sendo a entrada do controlador, ou seja, quando o robô estiver equilibrado, a leitura obtida pelo sensor será de 90° . Para obter os dados da posição angular do robô, foi necessário combinar os dados do acelerômetro e do giroscópio,

que estão sujeitos a diferentes distúrbios inerentes do sistema e que afetam a leitura obtida pelo sensor.

Inicialmente o método escolhido para suprimir estes efeitos, foi a utilização de um filtro complementar, que une os valores lidos pelo acelerômetro e giroscópio por meio das equações a seguir:

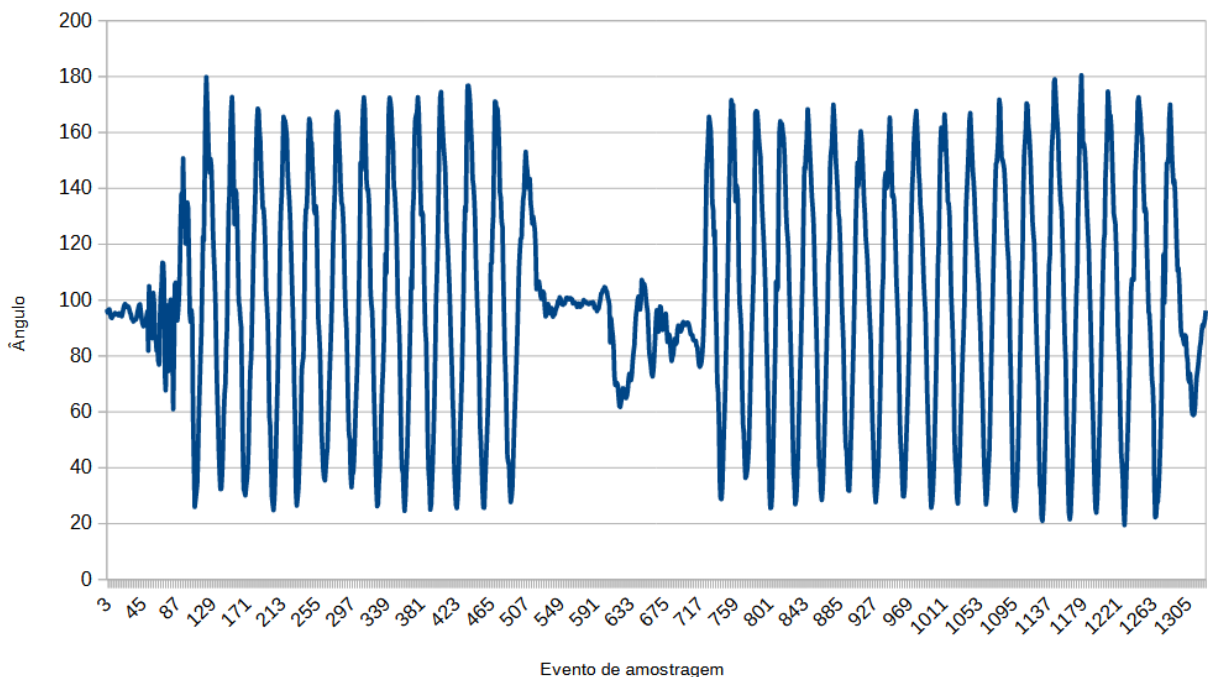
$$\theta_{curr} = \alpha(\theta_{prev} + \theta_{gy}) + (1 - \alpha)(\theta_{ac}) \quad (54)$$

$$\alpha = \frac{\tau}{\tau + dt} \quad (55)$$

O filtro complementar utiliza uma constante α , que depende de um fator de tempo τ . Quanto menor o valor de τ , maior será a influência do acelerômetro na leitura, e isto é aplicável para a leitura do giroscópio de maneira inversa.

Ao utilizar este método, percebeu-se que o robô nunca estabilizava na posição vertical, portanto uma análise dos dados lidos pelo sensor foi necessária. A Figura 26 apresenta os dados obtidos durante um teste de funcionamento do robô.

Figura 26 – Dados de posição angular utilizando o filtro complementar.



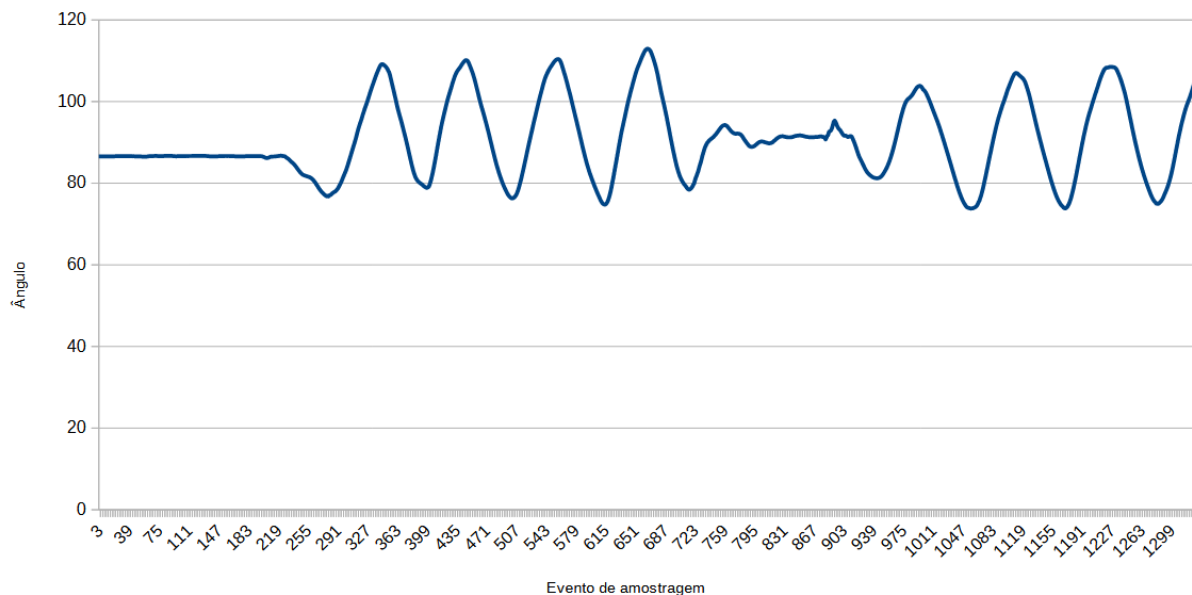
Fonte: Próprio autor.

O gráfico apresenta a posição angular com relação ao plano XZ do sensor e é possível notar que os dados variaram muito, com leituras chegando a aproximadamente 30° e outras a quase 180°. A partir destes dados foi estabelecido que algo estava afetando a leitura correta do sensor, visto que durante o experimento o robô não obteve uma variação de posição angular maior do que 15°.

Em um primeiro momento, pensou-se que o fato do sensor estar posicionado muito próximo aos motores fazia com que o efeito da aceleração dos motores gerasse os valores mostrados no gráfico da Figura 26. Então, propôs-se a mudança da localização do sensor para mais longe dos motores sendo anexado à barra roscada, como mostrado na Figura 25. Esta mudança não mostrou-se satisfatória, pois os dados obtidos pelo sensor ainda apresentavam a mesma grande diferença do que era observado na posição do robô.

Foi necessário buscar outro método para filtrar os dados vindos do sensor. A maneira escolhida foi utilizar um filtro denominado de Filtro de Kalman, e novamente os dados foram lidos e são apresentados na Figura 27.

Figura 27 – Dados obtidos utilizando o Filtro de Kalman.



Fonte: Próprio autor.

A utilização do Filtro de Kalman apresentou uma redução significativa nos valores discrepantes lidos pelo sensor, como é possível observar no gráfico da Figura 27. Entretanto, durante os testes notou-se que a utilização deste método deixava a rotina do microcontrolador demasiadamente lenta, tornando a resposta do controlador muito demorada, ao passo que os motores não tinham potência suficiente para compensar a queda do robô para um lado ou para o outro.

4.3 COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO SIMULADO E O MODELO FÍSICO

Comparando os resultados obtidos nas simulações do controlador, com os resultados obtidos no sistema físico, é notável que a implementação do controlador no robô construído para este trabalho não foi bem sucedida, visto que foi necessário alterar a planta para qual o controlador foi projetado, para que houvesse alguns momentos de equilíbrio.

Em regime permanente o robô não conseguiu equilibrar-se na posição vertical e isto deve-se em grande parte ao formato escolhido para o robô, que foi o de chassi vertical. Outros trabalhos e sistemas construídos por hobistas utilizam um formato de plataformas empilhadas.

Outro ponto que contribuiu para o não funcionamento do robô como o esperado foi a dificuldade em tratar os dados obtidos pelo sensor e deixá-los polidos para o controlador. Como discutido anteriormente, houve um grande desafio com a leitura dos dados, e mesmo utilizando um método que deixou-os num intervalo condizente com o observado no robô, houve uma perda significativa no tempo de resposta do controlador, tornando o método de tratamento inviável para ser utilizado neste sistema.

5 CONCLUSÕES

5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho abordou o estudo do sistema pêndulo invertido, o projeto de um controlador para este sistema quando analisado em um robô de duas rodas, a construção de um modelo físico deste robô e a implementação do controlador projetado no robô.

O trabalho foi dividido em quatro etapas. A primeira etapa tratou da obtenção do modelo matemático do sistema pêndulo invertido quando aplicado em um robô de duas rodas. A segunda etapa consistiu no projeto e construção do modelo físico do robô para obter as grandezas utilizadas na modelagem matemática do sistema. Na terceira etapa, o controlador foi projetado e simulado, obtendo os valores dos ganhos que suprissem os critérios de estabilidade para o sistema. Por fim, a quarta etapa foi a introdução do controlador projetado no modelo físico do robô.

Como apresentado no Capítulo 4 foi possível obter um controlador que atingisse a maior parte dos requisitos de estabilidade levantados para o sistema, e isto fica evidente nas Figuras 19 e 20.

Porém, também é evidente que quando o controlador que obteve sucesso na simulação foi implementado no modelo físico, outros desafios que não haviam sido mapeados no início do trabalho surgiram, como o tratamento dos dados obtidos pelo sensor de posição angular ou a diferença do modelo físico com o modelo matemático, principalmente na localização do centro de massa do pêndulo. É possível que, com um maior tempo disponível para a realização do trabalho os ajustes necessários seriam realizados e o robô atingiria o equilíbrio na posição vertical.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Alguns tópicos podem ser destacados como pontos de melhoria para trabalhos futuros. Estes são apresentados a seguir:

- Escolher motores que possuam parâmetros físicos no datasheet, a fim de aproximar o modelo matemático do modelo físico;
- Escolher o modelo físico que utiliza uma série de placas empilhadas para formar o chassi, ao invés de um chassi vertical;
- Buscar por métodos alternativos de tratamento dos dados obtidos pelo sensor de posição angular;

REFERÊNCIAS

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 8th. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2001.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. **Digital Control of Dynamic Systems**. 3rd. ed. Menlo Park: Addison Wesley Longman, Inc, 1998.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5th. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

PEI, J.; ROTHHAAR, P. Demonstration of the space launch system augmenting adaptive control algorithm on pole-cart platform. In: **2018 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference**. Kissimmee, Florida: SciTech Forum, 2018. Disponível em: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20190000429/downloads/20190000429.pdf>. Acesso em: 09 abr. 2024.

PHILLIPS, C. L.; HARBOR, R. D. **Sistemas de Controle e Realimentação**. 2nd. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1997.

PIRES, L. S. **Técnicas de Controle para Robôs Tipo Pêndulo Invertido**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Ouro Preto, 2023.

RIBEIRO, R. **Implementação de um sistema de controle de um pêndulo invertido**. Dissertação de Mestrado (Pós-Graduação em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Itajubá, 2007.

ROBOTICA COMÉRCIO DE INFORMÁTICA E BRINQUEDOS LTDA. **MOTOR DC 3-6V COM CAIXA DE REDUÇÃO E EIXO DUPLO + RODA 68MM**. Santo Amaro - SP, 2024. Disponível em: <https://www.roboticatoys.com.br>. Acesso em: 15 mai. 2024.

APÊNDICE A - FIRMWARE DO CONTROLADOR

```
#include <Wire.h>
#include <Adafruit_MPU6050.h>
#include <Adafruit_Sensor.h>
#include <Preferences.h>
#include <driver/timer.h>

Adafruit_MPU6050 mpu;

// Pinos do motor
const int motor1Pin1 = 17;
const int motor1Pin2 = 5;
const int PWMmotor1 = 16;
const int motor2Pin1 = 18;
const int motor2Pin2 = 19;
const int PWMmotor2 = 4;

// Configura o do PWM para o ESP32
const int freq = 5000;
const int pwmChannel1 = 0;
const int pwmChannel2 = 1;
const int resolution = 8; // 8 bits

// Variáveis do PID
float Kp = 4.98;//1.68; 4.98
float Ki = 0.1;//17.24; 0.1
float Kd = 0.11;//0.05; 0.11

float setPoint = 93.0;
float input, output, error;
float previousError = 0;
float integral = 0;
float derivative;
unsigned long previousTime = 0;
const float timeStep = 10; // 10 m
int motor1_speed = 0;
```



```

int motor2_speed = 0;
float average;
int count;

// Variáveis Filtro Complementar
float tal = 0.75; // constante de tempo do filtro complementar
float alpha = tal/(tal + timeStep);
float prevAngle;

void setup() {
  Serial.begin(115200);
  Wire.begin();

  count = 0;

  pinMode(motor1Pin1, OUTPUT);
  pinMode(motor1Pin2, OUTPUT);
  pinMode(motor2Pin1, OUTPUT);
  pinMode(motor2Pin2, OUTPUT);
  pinMode(PWMmotor1, OUTPUT);
  pinMode(PWMmotor2, OUTPUT);

  // Configuração do PWM
  ledcSetup(pwmChannel1, freq, resolution);
  ledcSetup(pwmChannel2, freq, resolution);

  // Associação dos pinos ao canal PWM
  ledcAttachPin(PWMmotor1, pwmChannel1);
  ledcAttachPin(PWMmotor2, pwmChannel2);

  if (!mpu.begin()) {
    Serial.println("MPU6050 connection failed");
    while (1);
  }
  Serial.println("MPU6050 connection successful");
}

void loop() {

```

```

unsigned long currentTime = millis();
if (currentTime - previousTime >= timeStep) {
    previousTime = currentTime;
    // Leitura do MPU6050
    sensors_event_t a, g, temp;
    mpu.getEvent(&a, &g, &temp);
    // Calcular a inclinação (simplificação)
    float angle_ac = atan2(-a.acceleration.x, a.acceleration.z);
    angle_ac = angle_ac*(180/PI);
    float angle_g = 93.0 + g.gyro.y*(180/PI)*timeStep;
    // Filtro complementar
    float currAngle = alpha*(prevAngle + angle_g)
+ (1 - alpha)*(angle_ac);
    prevAngle = currAngle;

    // Controle PID
    input = currAngle;
    error = setPoint - input;
    integral += error*timeStep;
    if (integral > 255)
        integral = 255;
    if (integral < -255)
        integral = -255;
    derivative = (error - previousError)/timeStep;
    if (derivative > 255)
        derivative = 255;
    if (derivative < -255)
        derivative = -255;
    output = Kp*error + Ki*integral + Kd*derivative;
    if (output > 0)
        output+=200;
    else
        output-=200;
    previousError = error;

    // Controle dos motores
    //ControlMotors(output);
    int motorSpeed = constrain(abs(output), 200, 240);

```

```
String virg = ",";
if (output < 0) {
  // Movendo para frente
  digitalWrite(motor1Pin2, LOW);
  digitalWrite(motor1Pin1, HIGH);
  ledcWrite(pwmChannel1, motorSpeed);
  digitalWrite(motor2Pin2, LOW);
  digitalWrite(motor2Pin1, HIGH);
  ledcWrite(pwmChannel2, motorSpeed);
  Serial.println(input + virg + error);
} else if (output > 0){
  // Movendo para tr s
  digitalWrite(motor1Pin1, LOW);
  digitalWrite(motor1Pin2, HIGH);
  //ledcWrite(pwmChannel12, motorSpeed);
  digitalWrite(motor2Pin1, LOW);
  digitalWrite(motor2Pin2, HIGH);
  ledcWrite(pwmChannel2, motorSpeed);
  Serial.println(input + virg + error);
}
}
}
```