Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Júlio Cândido Veloso Barczyszyn

Dualidade de Stone: uma odisseia lógico-matemática

Florianópolis
2023

Júlio Cândido Veloso Barczyszyn

Dualidade de Stone: uma odisseia lógico-matemática

Trabalho Conclusão do Curso (TCC) de Graduação em Matemática do Depto. de Matemática, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito final para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Luiz Gustavo Cordeiro, Dr.
Coorientador: Prof. Jonas Rafael Becker Arenhart, Dr.

Florianópolis
2023

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Barczyszyn, Júlio Cândido Veloso
Dualidade de Stone : uma odisseia lógico-matemática / Júlio Cândido Veloso Barczyszyn ; orientador, Luiz Gustavo Cordeiro, coorientador, Jonas Rafael Becker Arenhart, 2023.
100 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática - Bacharelado, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática - Bacharelado. 2. Lógica. 3. Topologia. 4. Stone. 5. Boole. I. Cordeiro, Luiz Gustavo. II. Arenhart, Jonas Rafael Becker. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática - Bacharelado. IV. Título.

Júlio Cândido Veloso Barczyszyn

Dualidade de Stone: uma odisseia lógico-matemática

Este Trabalho Conclusão de Curso (TCC) foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Florianópolis, 06 de dezembro de 2023.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Lopes Castro
Data: 15/05/2024 16:40:40-0300
CPF: ***.060.710-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Felipe Lopes Castro, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

GOV.BR
Documento assinado digitalmente
LUIZ GUSTAVO CORDEIRO
Data: 16/05/2024 19:23:17-0300
CPF: ***.965.079-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Luiz Gustavo Cordeiro, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Jonas Rafael Becker Arenhart
Data: 05/05/2024 22:22:56-0300
CPF: ***.791.189-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Jonas Rafael Becker Arenhart, Dr.
Coorientador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Gilles Goncalves de Castro
Data: 06/05/2024 10:01:14-0300
CPF: ***.977.489-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Gilles Gonçalves de Castro, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

GOV.BR
Documento assinado digitalmente
JOAO MARCOS DE ALMEIDA
Data: 05/05/2024 20:09:51-0300
CPF: ***.976.956-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. João Marcos de Almeida, Dr.
Avaliador
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

À minha querida mãe, Rita; minha heroína.
Sem sua amizade, a vida seria sem graça.
Sem sua fé, eu não teria aprendido a acreditar.
Sem seu apoio, eu teria caído.
Sem ela, não haveria eu.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é a consumação de uma longa trajetória. Muitas pessoas passaram pela minha vida e tenho consciência de que qualquer escolha arbitrária de nomes não fará jus a todo o apoio que recebi. Entretanto, a importância de citar certas pessoas é maior do que o medo de incorrer no erro do esquecimento de outrem.

Dentre essas pessoas, minha mãe, Rita, se destaca. Eu não estaria escrevendo esse texto se não fosse por ela. E isso significa muito mais do que ela ser minha progenitora. Superando fome, pobreza e tiroteios, ela me criou como mãe solteira na favela. Me permitiu ter dignidade e uma educação de qualidade com muita dedicação e perseverança. Nenhuma conquista na vida será maior do que ter sido seu filho. Minha mãe, além de me dar a vida, me ensinou que era possível viver uma.

Eu também não teria chegado até aqui sem todos os professores que tive em minha vida. Agradeço muito a educação gratuita e oportunidades que temos no nosso país. Em particular, gostaria de agradecer aos que foram meus orientadores durante a graduação. Agradeço aos professores Luiz Cordeiro e Jonas Becker Arenhart pela orientação deste trabalho, pela imensa paciência dos dois ao me ensinarem Lógica, por me iniciarem na pesquisa acadêmica e por sempre me incentivarem a aprender mais. Fui muito feliz em ter ambos como orientadores por tanto tempo. Também gostaria de agradecer ao Prof. Paulo Carvalho Neto por ter me ensinado Análise e ao Prof. Jorge Massayuki Kondo por ter me apresentado a Mecânica Quântica.

Alguns outros professores foram fundamentais na minha jornada pela graduação e os agradeço também: Prof. Décio Krause, Prof. Cezar Mortari, Profa. Marianna Ravara Vago, Prof. Eduardo Tengan, Profa. Alda Mortari, Prof. Fernando Mortari, Profa. Melissa Mendonça, Prof. Thiago Silva, Prof. Renan Mezabarba, Prof. Eliezer Batista, Prof. Francisco Caramello Jr., Prof. Nazareno de Almeida, Profa. Roberta Pires de Oliveira, Prof. Leonardo Koller Sacht, Prof. Mario Roldán Daquilema, Prof. Eduardo Duzzioni, Prof. Tiago Nunes, Prof. Pawel Klimas e Prof. Paulo Liebgott.

Minha formação foi extremamente interdisciplinar e, na medida do possível, tranquila. Agradeço, portanto, pela supervisão e incentivo, às pessoas por trás da coordenadoria do curso: Giana Schauffler, Profa. Silvia de Holanda, Profa. Sonia Palomino, Prof. Felipe Castro e, novamente, Profa. Marianna Ravara Vago.

Fiz muitos amigos nesse período e agradeço a todos pelos momentos juntos. Em especial, agradeço aos meus amigos Laura e Pedro pelo apoio constante.

Em tempo, agradeço aos professores Gilles de Castro e João Marcos de Almeida que contribuíram com valiosos comentários para melhoria deste texto e ao Marcos Mercandeli Rodrigues por pacientemente me ensinar Álgebra Universal.

Termino expressando minha sincera gratidão à UFSC e ao CNPq por todo o apoio e oportunidades proporcionadas até aqui. Darei meu melhor para retribuir.

“Mathematics is the art of giving the same name to different things.”

— Henri Poincaré

RESUMO

Nesta monografia, provamos o Teorema de Representação de Stone e a Dualidade de Stone, uma dualidade entre a categoria das álgebras de Boole e a categoria dos espaços topológicos conhecidos como espaços de Stone. Para alcançar este objetivo, introduzimos os pré-requisitos de Álgebra e Topologia, incluindo elementos de Teoria de Categorias e Álgebra Universal. No caminho, quase em tom de jornada épica, encontramos elementos de Lógica Clássica, teorias proposicionais e traduções entre teorias, e demonstramos que a categoria das teorias proposicionais é equivalente à categoria das álgebras de Boole. Ao final, como corolário dessa equivalência e da Dualidade de Stone, desvendamos uma ponte entre sintaxe e semântica.

Palavras-chave: Lógica, Topologia, Stone, Boole, Dualidade.

ABSTRACT

In this monograph, we prove the Stone's Representation Theorem and Stone Duality, which is a duality between the category of Boolean algebras and a category of topological spaces known as Stone spaces. To attain this objective, we systematically present the prerequisites of Algebra and Topology, including elements of Category Theory and Universal Algebra. Along the way, akin to an epic journey, we encounter some elements of Classical Logic, propositional theories, and translations between theories, and we prove that the category of propositional theories is equivalent to the category of Boolean algebras. As a corollary of this equivalence and Stone Duality, we unveil a bridge between syntax and semantics.

Keywords: Logic, Topology, Stone, Boole, Duality.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> “A cardinal principle of modern mathematical research may be stated as a maxim: ‘One must always topologize’.”
>
> — **Marshall Stone**

A conexão entre Álgebra e Geometria é antiga e remonta, por exemplo, aos primórdios da Geometria Analítica. Essa relação entre as duas áreas impregna, senão toda, boa parte da atividade matemática. É uma *dualidade* que nos acompanha, seja enquanto raciocinamos usando desenhos, seja enquanto fazemos cálculos usando coordenadas.

A proximidade conceitual entre estruturas algébricas e estruturas geométricas permitiu o desenvolvimento de diversas áreas que atualmente compõem a pesquisa em Matemática: Álgebras de Operadores, Geometria Algébrica, Topologia Algébrica, etc. Porém, não foi da noite para o dia que essa relação foi entendida ou domada. A própria Geometria Analítica não é tão antiga na história humana. Em verdade, algumas descobertas relativamente recentes foram fundamentais para o surgimento de áreas álgebro-geométricas. Um passo importante nessa direção foi dado com Marshall Stone [15, 18] através dos seus trabalhos, em Análise Funcional e no estudo de representações de álgebras de Boole. Outro passo foi dado por Saunders Mac Lane e Samuel Eilenberg [6] com o advento da Teoria de Categorias. A partir daí, várias relações que permeavam a investigação matemática começaram a ser melhor entendidas.

O resultado principal que estudaremos, e que dá nome a esta monografia, surge do encontro dos trabalhos de Stone com a Teoria de Categorias, no início do século XX, e é conhecido como *Dualidade de Stone.* Este teorema é basicamente a afirmação de que parte do reino da Álgebra está conectado de modo muito forte com parte do reino da Topologia. Mais formalmente, a nível dos objetos envolvidos, a Dualidade de Stone é uma equivalência entre *espaços de Stone*, uma classe especial de espaços topológicos, e *álgebras de Boole.*

O objetivo deste texto é provar o Teorema de Representação de Stone e a Dualidade de Stone. Para alcançar este objetivo, introduzimos os pré-requisitos de Álgebra e Topologia, incluindo elementos de Teoria de Categorias. No caminho, quase em tom de jornada épica, uma *odisseia lógico-matemática*, provaremos o Teorema de Lindenbaum–Tarski, uma equivalência entre a categoria das teorias proposicionais e das álgebras de Boole, que, em conjunto com a Dualidade de Stone, nos permitirá revelar uma ponte entre sintaxe e semântica.

O Teorema de Representação de Stone

Perguntas muito pertinentes a nos fazermos, tanto do ponto de vista sociológico quanto do ponto de vista pragmático, são: como axiomas são formulados? Como uma teoria matemática surge? Uma checagem rápida na história da matemática nos mostra que, em geral, os objetos de interesse dos matemáticos surgem de forma *concreta*, a partir de exemplos. Quando se percebe que os objetos de um certo tipo tem algumas propriedades em comum que os caracterizam, estas propriedades são abstraídas, dando origem aos axiomas da teoria que fala sobre aqueles objetos.

Um detalhe metodológico importante, então, é verificar que essas propriedades que parecem permear todos os objetos de interesse, num dado momento, não são gerais demais. Ou seja, os axiomas escolhidos não devem ser satisfeitos por um número muito maior e desconhecido de estruturas do que pensado inicialmente. Por exemplo, todas as estruturas matemáticas satisfazem, por vacuidade, o conjunto vazio de axiomas. Isso pode ser bastante interessante para alguns propósitos. Entretanto, para fins práticos (e teóricos), gostaríamos de um pouco mais.

Deste modo, é importante ter um teorema que garanta a *concretude* dos axiomas escolhidos, isto é, um resultado que diga que os axiomas escolhidos caracterizam precisamente as estruturas que tínhamos em mente quando escolhemos os axiomas. Este tipo de teorema é chamado de *teorema de representação*. A Dualidade de Stone, que estudaremos mais a frente, é, em certo sentido, um teorema de representação elevado ao contexto de Teoria de Categorias. O teorema de representação em questão é conhecido como *Teorema de Representação de Stone para álgebras de Boole*.


Marshall Stone

Marshall Harvey Stone (1903-1989) foi um lógico e matemático americano que fez contribuições cruciais para o desenvolvimento da Matemática no século XX. Em 1932, publicou uma monografia sobre transformações lineares em espaços de Hilbert que influenciou a pesquisa em Análise Funcional desde então [16]. Em particular, Stone estudou a noção de operador autoadjunto. Com John von Neumann, matemático húngaro e naturalizado americano, que também sofreu influência dos trabalhos de Stone, provou diversos resultados fundamentais sobre o formalismo da Mecânica Quântica [14, 17], teoria física em amadurecimento na época. Tudo isso foi feito basicamente na década de 30, quando Stone vive seu "período de ouro". Os trabalhos relativos a anéis boolianos e representação de álgebras de Boole acontecem precisamente neste período, entre 1934 e 1937[1].

---

[1] Informações e foto via `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stone/`

Para entendermos um pouco melhor sobre teoremas de representação e, em particular, sobre o Teorema de Representação de Stone, mencionaremos outros dois resultados: um já bastante conhecido dos cursos iniciais de Álgebra, o *Teorema de Representação de Cayley para grupos*, e outro mais próximo da pesquisa em matemática em Álgebras de Operadores, o *Teorema de Representação de Gelfand para C^*-álgebras comutativas.*

Um *grupo* G é um conjunto munido de uma operação associativa, que tem elemento neutro e admite inverso de cada elemento de G. Um subgrupo é simplesmente um subconjunto de um grupo mas que é também um grupo. Se $S(X)$ é o conjunto de permutações (ou seja, bijeções) de um conjunto X nele mesmo, então $S(X)$ é um grupo com respeito a composição de funções e é chamado de *grupo de simetrias de* X. Este é o exemplo concreto de grupo. Sendo assim, o teorema de representação abaixo afirma que todo grupo, não importa quão diferente seja, é isomorfo a algum subgrupo de um grupo concreto.

Teorema (Teorema de Representação de Cayley). *Todo grupo G é isomorfo a um subgrupo de $S(X)$ para algum conjunto X.*

Agora, vamos para o segundo exemplo, um pouco mais avançado. De modo resumido, uma *álgebra* (*complexa*) é um espaço vetorial (complexo) munido, adicionalmente, de um produto que lhe dá uma estrutura de anel compatível com a estrutura linear. Uma álgebra é comutativa e/ou unital se o for como anel. Uma *álgebra normada* A é uma álgebra complexa munida de uma norma satisfazendo, adicionalmente, para todos $a, b \in A$, $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. Uma *álgebra de Banach* é uma álgebra normada que é completa em relação à métrica advinda da norma (isto é, em que toda sequência de Cauchy é convergente). Uma *C^*-álgebra* A é uma álgebra de Banach equipada com uma *involução* $a \mapsto a^*$ tal que, para todos $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(ab)^* = b^*a^*, \quad (a+b)^* = a^* + b^*, \quad (\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^* \quad \text{e} \quad \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Seja $C(X)$ o conjunto de todas as funções complexas contínuas sobre um espaço topológico compacto X, munido da norma dada por $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Assim, $C(X)$ é uma C^*-álgebra comutativa e é o exemplo concreto de tal tipo de estrutura. Desse modo, o teorema abaixo afirma algo parecido com o Teorema de Representação de Cayley, visto anteriormente. Toda C^*-álgebra comutativa e unital é isomorfa a uma C^*-álgebra concreta, um $C(X)$ para algum espaço topológico X.

Teorema (Teorema de Representação de Gelfand). *Toda C^*-álgebra comutativa e unital A é isomorfa a uma álgebra $C(X)$ para algum espaço compacto Hausdorff X.*

Este resultado é central em Álgebras de Operadores. É possível utilizar ele, aliado a outros mais gerais, para relacionar o formalismo de Mecânica Clássica com o da Mecânica Quântica. Os espaços de interesse no estudo da Mecânica Clássica são precisamente $C(X)$. Por outro lado, os espaços que estão atrelados a sistemas quânticos são associados a C^*-álgebras não-comutativas.

Finalmente, depois de motivar a discussão sobre teoremas de representação, esperamos que o Teorema de Representação de Stone pareça bastante familiar, nos moldes dos outros dois resultados. Uma álgebra de Boole pode ser pensada simplesmente como a abstração da estrutura algébrica dada pelas operações conjuntistas em um conjunto das partes $P(X)$ de algum conjunto X. Este é o exemplo concreto e mais importante de álgebra de Boole. Mais precisamente, os axiomas de álgebra de Boole, escritos usando $P(X)$ como exemplo[2], são

$$Y \cup \varnothing = Y, \qquad Y \cap X = Y, \qquad Y \cup Y = Y, \qquad Y \cap Y = Y,$$

$$\begin{aligned}
(Y \cup Z)^{\mathsf{c}} &= Y^{\mathsf{c}} \cap Z^{\mathsf{c}}, & (Y \cap Z)^{\mathsf{c}} &= Y^{\mathsf{c}} \cup Z^{\mathsf{c}},\\
Y \cup Z &= Z \cup Y, & Y \cap Z &= Z \cap Y,\\
(Y \cup Z) \cup W &= Y \cup (Z \cup W), & (Y \cap Z) \cap W &= Y \cap (Z \cap W),\\
Y \cup (Z \cap W) &= (Y \cup Z) \cap (Y \cup W), & Y \cap (Z \cup W) &= (Y \cap Z) \cup (Y \cap W),\\
Y \cup Y^{\mathsf{c}} &= X, & Y \cap Y^{\mathsf{c}} &= \varnothing,
\end{aligned}$$

com Y, Z e W subconjuntos de X. Assim, O teorema devido a Stone abaixo afirma que toda álgebra de Boole é uma subálgebra de uma álgebra de Boole concreta:

Teorema (Teorema de Representação de Stone)**.** *Toda álgebra de Boole B é isomorfa a uma subálgebra de $P(X)$ para algum conjunto X.*

Portanto, cada um destes três exemplos de teorema de representação indica que os axiomas escolhidos para abstrair cada tipo de estrutura capturam a concretude dos exemplos que motivaram a abstração.

Teoria de Categorias e dualidades

Uma *categoria* é constituída de duas coleções, uma de objetos e outra de setas, e uma composição de setas, satisfazendo algumas exigências sobre como elas devem se organizar. Cada teoria da matemática tem uma categoria correspondente. Por exemplo, há a categoria dos conjuntos e das funções entre eles; dos espaços vetoriais e transformações lineares; dos grupos e homomorfismos entre eles.

O Teorema de Representação de Stone, visto na subseção anterior, pode ser elevado ao contexto de Teoria de Categorias. Isso dará origem a já mencionada Dualidade de Stone. Na verdade, essa e outras observações sobre o trabalho de Stone motivaram o desenvolvimento da própria Teoria de Categorias.

---

[2] Compare com a definição na seção sobre álgebras de Boole.

A categoria das álgebras de Boole e dos homomorfismos entre elas é denotada por **Boole** e a categoria dos espaços de Stone (que constitui uma classe de espaços topológicos específicos *vide* Capítulo 4) e das funções contínuas entre esses espaços é denotada por **Stone**. A Dualidade de Stone, então, afirma que estas duas categorias estão conectadas por uma dualidade, o que denotamos por $\mathbf{Boole} \cong \mathbf{Stone}^{\mathrm{op}}$, que definiremos mais adiante. Em certo sentido, uma teoria é o espelho da outra.

De acordo com Mac Lane, o trabalho de Stone não só motivou a noção de equivalência (e dualidade) em Teoria de Categorias, como também abriu caminho para a importante noção de adjunção:

> “O trabalho de Stone enfatizou certos casos em que uma tal passagem fornece uma equivalência entre noções topológicas e algébricas — uma relação que agora formulamos como uma equivalência de categorias. [...] O trabalho de Marshall Stone não apenas preparou o terreno para a definição geral de funtores adjuntos, em claro paralelo com a definição de operador adjunto; seus estudos também deram alguns exemplos decisivos da construção de funtores adjuntos explícitos. [...] Essa ideia, central no uso atual de categorias, estava em embrião nos artigos de Stone de 1936 e 1937.” [11, pág. 229, 232 e 234, nossa tradução]

Organização do texto

O presente trabalho está dividido em cinco capítulos. Os capítulos 2-4 compõem o conteúdo propriamente dito do texto. A estrutura do texto, no que diz respeito a esses capítulos principais, é motivada pelos três atos da estrutura mítica da *Jornada do Herói* (partida, iniciação e retorno) de Joseph Campbell [4, 19]. No capítulo 2, apresentamos preliminares algébricas: linguagem de categorias e notação, Álgebra Universal e álgebras de Boole. No capítulo 3, conectamos as álgebras de Boole com Lógica. No capítulo 4, introduzimos os espaços de Stone e, finalmente, provamos a Dualidade de Stone. Como corolário, uma dualidade entre sintaxe e semântica é obtida. A referência principal foi [8]. Ao final de cada capítulo mencionamos a literatura utilizada para o desenvolvimento daquele capítulo.

Para quem e para quê?

Este texto reflete, com um toque literário, a própria jornada do autor durante sua formação na graduação. Esperamos que esse texto preencha uma lacuna existente, na literatura de língua portuguesa, sobre Dualidade de Stone e, principalmente, dialogue diretamente com aqueles alunos que buscam uma abordagem unificada de alguns tópicos matemáticos relacionados a Lógica.

Os pré-requisitos para uma leitura proveitosa do texto são uma base firme sobre conjuntos e funções e alguma familiaridade com Álgebra e Topologia.

2 PARTIDA: PRELIMINARES ALGÉBRICAS

Neste capítulo de partida, começamos nossa jornada épica e somos apresentados ao mundo novo que nos espera. São introduzidas ferramentas algébricas necessárias para os próximos capítulos: a linguagem da Teoria de Categorias e resultados basilares de Álgebra Universal. Por último, estudamos as álgebras de Boole.

2.1 CATEGORIAS E ÁLGEBRAS

O objetivo principal do texto é provar uma dualidade categórica entre certos objetos algébricos e certos objetos topológicos. Para alcançá-lo, precisamos entender como expressar certas ideias por meio da Teoria de Categorias e conhecer estes objetos envolvidos na dualidade. Nesta seção, introduzimos alguns jargões de Teorias de Categorias com isso em mente e estudamos *álgebras* de modo bastante geral. Essa abordagem conhecida como Álgebra Universal.

2.1.1 Linguagem categórica e notação

Uma **categoria**, denotada aqui por $\mathbf{C}$, é constituída de três itens: uma coleção $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ de objetos, uma coleção $\mathrm{Hom}(\mathbf{C})$ de setas — ou *morfismos* — entre objetos e uma composição de setas satisfazendo certas condições que enunciaremos logo em seguida. Morfismos são denotados[1] com a notação usual de função. Por exemplo, um morfismo f do objeto X para o objeto Y é denotado por $f\colon X \to Y$. O conjunto dos morfismos de X para Y é denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ ou simplesmente $\mathrm{Hom}(X, Y)$.

Dados morfismos $f\colon X \to Y$ e $g\colon Z \to W$, a composição $g \circ f$ está definida somente quando $Y = Z$ e, neste caso, $g \circ f\colon X \to W$ é um morfismo. Além disso, a composição de morfismos satisfaz:

- Para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, existe o *morfismo identidade* $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ tal que dados morfismos $f\colon X \to Y$ e $g\colon Z \to X$,

$$f \circ \mathrm{id}_X = f \qquad \text{e} \qquad \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

- A composição de morfismos é associativa, ou seja, dados morfismos $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ e $h\colon Z \to W$, vale que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Isto pode ser enunciado, de modo equivalente, dizendo que o diagrama abaixo *comuta*:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & Z \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

---

[1] Os morfismos de uma categoria podem receber uma notação especial a depender do contexto. Por exemplo, os morfismos da categoria das teorias proposicionais serão denotados por $f\colon T \rightsquigarrow T'$.

Vamos estudar uma categoria especial como primeiro exemplo: a categoria dos conjuntos e funções entre eles. Para cada conjunto X, existe a função identidade $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ que leva cada elemento de X em si mesmo. Além disso, existe a noção de composição de funções. Se $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ são funções entre conjuntos X, Y e Z, então a função composta é definida por

$$g \circ f \colon X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)),$$

e, como sabemos, a composição de funções é associativa.

Definição 2.1.1. A categoria cujos objetos são conjuntos e os morfismos são funções entre conjuntos é denotada por **Set**.

Exemplo 2.1.2. Para exemplificar, vamos exibir as categorias que encontraremos ao longo do texto. Os leitores que não reconhecerem os objetos ou as setas envolvidas em algum item podem ignorá-lo, no momento. São exemplos de categorias:

- **Alg**(Ω): Ω-álgebras e homomorfismos de Ω-álgebras.
- **Boole**: álgebras de Boole e homomorfismos de álgebras de Boole.
- **Th**: teorias proposicionais e traduções.
- **Top**: espaços topológicos e funções contínuas.
- **Stone**: espaços de Stone e funções contínuas.

Definição 2.1.3. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e X e Y dois objetos de $\mathbf{C}$. Dizemos que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ é um **isomorfismo** entre X e Y quando existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X)$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Nestas condições, dizemos que X e Y são objetos **isomorfos** e denotamos isto por $X \cong_{\mathbf{C}} Y$ ou, simplesmente, $X \cong Y$.

Mais a frente, no texto, ao trabalharmos com outras categorias, definimos noções de isomorfismo, específicas daquele contexto, de maneira aparentemente diferente da definição dada acima. Todavia, todas as definições de isomorfismo dadas ao longo do texto são equivalentes à definição categórica de isomorfismo. Por exemplo, poderíamos definir que dados dois conjuntos X e Y, uma função $f \colon X \to Y$ é um *isomorfismo* entre X e Y, na categoria **Set**, quando é uma bijeção. Ora, toda bijeção admite inversa. Portanto, existe $f^{-1} \colon Y \to X$ tal que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_X$ e $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_Y$. De maneira similar, se f for um isomorfismo em **Set** segundo a Definição 2.1.3, então f é uma bijeção. Ou seja, as duas definições são equivalentes: os isomorfismos em **Set** são, precisamente, as bijeções. A prova da unicidade do morfismo inverso, em Teoria de Categorias, é completamente análoga a prova do fato análogo para funções.

Uma coleção $\mathscr{X}$ é dita uma *coleção indexada* de conjuntos se existe um *conjunto indexador* Λ e uma função sobrejetiva $f\colon \Lambda \to \mathscr{X}$ dita *função indexadora*. A imagem da função coincide com a coleção e denotamos $f(\lambda)$ por X_λ. Isto motiva denotar coleções indexadas $\mathscr{X}$ por $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ou $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Com esta notação à disposição, podemos denotar a união e interseção da coleção indexada, respectivamente, por

$$\bigcup \mathscr{X} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \qquad e \qquad \bigcap \mathscr{X} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda.$$

Dada uma coleção “não-indexada” de conjuntos $\mathscr{X}$, sempre é possível indexar esta coleção usando os próprios elementos de $\mathscr{X}$. Tomamos como função indexadora a identidade de $\mathscr{X}$ e, portanto, podemos denotar $\mathscr{X}$ por $\{X \mid X \in \mathscr{X}\}$. Isto faz com que possamos denotar a união e interseção da coleção, respectivamente, por

$$\bigcup \mathscr{X} = \bigcup_{X\in\mathscr{X}} X \qquad e \qquad \bigcap \mathscr{X} = \bigcap_{X\in\mathscr{X}} X.$$

Definição 2.1.4. Seja $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma coleção indexada de conjuntos. Definimos o **produto cartesiano** (generalizado) de $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ como

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\Lambda := \left\{x\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \mid x(\lambda) \in X_\lambda \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\right\}$$

e denotamos $x(\lambda)$ por x_λ e a função $x\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ simplesmente por $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

A primeira questão que surge é se essa definição, em algum sentido, coincide com a noção de produto cartesiano “usual” no caso finito. Responderemos isto utilizando a noção de isomorfismo na categoria dos conjuntos. O produto cartesiano de X e Y é comumente introduzido através da definição

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

e, para uma quantidade finita qualquer de *produtandos*, a definição é similar. Para mostrarmos que $X \times Y$ é *recuperado* pelo produto cartesiano generalizado, vamos primeiro comentar sobre *segmentos iniciais nos números naturais.*

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais (a partir do zero). Para cada $n \in \mathbb{N}$ não-nulo, o segmento inicial determinado por n é o conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$ o qual denotamos pelo próprio símbolo n, i.e.,

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

e, convencionamos[2], $0 = \varnothing$. Agora, sejam $X_0, \dots, X_n$ conjuntos indexados. Notemos que, na ordem usual dos naturais, $n \geq i$ é o mesmo que $i \in n+1$. Portanto, podemos denotar a coleção dos X_i por $\{X_i\}_{n\geq i}$, uma coleção indexada com $n+1$ como conjunto indexador. Daí, temos a seguinte proposição:

---

[2] Isto não gera nenhum problema. Na verdade, é possível construir $\mathbb{N}$, numa abordagem conjuntista, de maneira que os números naturais sejam *por definição* os segmentos iniciais de $\mathbb{N}$. Leitores interessados em mais detalhes podem consultar [9].

Proposição 2.1.5. *Seja* $\{X_i\}_{n\geq i}$ *uma coleção de conjuntos não-vazios. Então,*

$$\prod_{n\geq i} X_i \cong_{\mathbf{Set}} X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_n$$

a partir da bijeção

$$\Phi\colon \prod_{n\geq i} X_i \to X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_n, \quad f \mapsto (f(0), f(1), \ldots, f(n)).$$

Demonstração. Vamos mostrar que a função Φ do enunciado é uma bijeção. A candidata à inversa é a função

$$\Psi\colon X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_n \to \prod_{n\geq i} X_i$$

que mapeia cada $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_n$ em uma função $g \in \prod_{n\geq i} X_i$ definida por $g(i) = x_i$ para $i \leq n$. Agora, vamos mostrar que Ψ é inversa de Φ. Tomemos $f \in \prod_{n\geq i} X_i$. Daí,

$$(\Psi \circ \Phi)(f) = \Psi(\Phi(f)) = \Psi(f(0), f(1), \ldots, f(n)) = g$$

em que $g(i) = f(i)$ para $i \leq n$, ou seja, $g = f$. Isto prova que Ψ é inversa a esquerda de Ψ. Por outro lado, seja $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_n$. Então,

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \Psi)(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= \Phi(\Psi(x_0, x_1, \ldots, x_n))\\ &= \Phi(g)\\ &= (g(0), g(1), \ldots, g(n))\\ &= (x_0, x_1, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

A partir de agora, quando estivermos lidando com o produto cartesiano de uma quantidade finita de produtandos, indexaremos seus elementos a partir do número natural um. Daí, dado um conjunto X, a proposição anterior nos diz que um elemento de X^2, por exemplo, pode ser visto como um par (x_1, x_2) ou como uma função $x\colon \{0, 1\} \to X$ tal que $x(i) = x_{i+1}$. Firmados em tal proposição, passaremos a identificar tais objetos: $x \cong (x_1, x_2)$. Estes comentários valem, *mutatis mutandis*, para o produto cartesiano de uma quantidade finita qualquer de conjuntos.

Seja $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma coleção indexada. Quando $X_\lambda = X$, para todo $\lambda \in \Lambda$, o produto cartesiano dessa coleção pode ser pensado como produtando X com X com X, etc., Λ-vezes e, portanto, denotamos tal produto por X^Λ. Uma *sequência* em X é uma função $x\colon \mathbb{N} \to X$, ou seja, é um elemento de $X^{\mathbb{N}}$. A partir de agora, denotamos sequências como x por $(x_n)_{n\geq 0}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, é conveniente chamar os elementos de X^n de n-uplas ou *sequências finitas*. Ainda, vale enfatizar que o mapa $X \ni x \mapsto (x) \in X^1$ é uma bijeção. Portanto, todo conjunto é isomorfo ao conjunto de 1-uplas de seus elementos[3].

Finalmente, observamos que o conjunto X^0 é o conjunto unitário que só contém a função vazia com contradomínio X. É possível mostrar que só existe um conjunto unitário, a menos de isomorfismo, em **Set**. Assim, identificamos $X^0 \cong \{\varnothing\}$. Mais a frente, precisaremos lidar com funções que partem de X^0 como, por exemplo, $c\colon X^0 \to X$. Neste caso, tratamos c como uma "constante" e identificamos o símbolo da função com a imagem do único elemento do domínio: $c \cong c(\varnothing)$.

2.1.2 Álgebras e subálgebras

Definição 2.1.6. Sejam Ω um conjunto não-vazio e $\mathrm{ar}\colon \Omega \to \mathbb{N}$ uma função. Dizemos que o par (Ω, ar) é um **tipo de álgebra**. Os elementos de Ω são chamados de **símbolos** e $\mathrm{ar}(\omega)$ é dita a **aridade** do símbolo ω. Dizemos que uma Ω-**álgebra** é um par (A, I_A) em que A é um conjunto não-vazio e I_A é uma função, dita **interpretação** de Ω em A, que mapeia cada $\omega \in \Omega$ em uma operação $\omega_A\colon A^{\mathrm{ar}(\omega)} \to A$. Os elementos de $\{\omega_A \mid \omega \in \Omega, \mathrm{ar}(\omega) = 0\}$ são chamados de **constantes**. Quando não gerar confusão, denotamos a Ω-álgebra (A, I_A) pelo seu *conjunto subjacente* A.

Usualmente, apresentamos uma estrutura algébrica como uma tupla constituída de um conjunto, operações e constantes. No caso de grupos, dizemos que $(G, \circ)$, ou $(G, \circ, ^{-1}, 1)$ explicitando a função de tomar inversos e a identidade, é um grupo quando satisfaz os axiomas da Teoria de Grupos. Por analogia, uma Ω-álgebra, quando Ω é finito, é apresentada de maneira similar. Por exemplo, se (G, I_G) é uma $\{*, i, e\}$-álgebra em que $I_G(*) = \circ$ é uma operação binária, $I_G(i) =^{-1}$ é uma operação unária e $I_G(e) = 1$, apresentamos tal álgebra exatamente como em Teoria de Grupos, $(G, \circ, ^{-1}, 1)$, e dizemos que é do *tipo de grupos*. Se uma álgebra do tipo de grupos satisfizer os axiomas da Teoria de Grupos, então será, de fato, um grupo.

Definição 2.1.7. Sejam A e B duas Ω-álgebras. Dizemos que A é uma **subálgebra** de B quando $A \subseteq B$ e, para todo $\omega \in \Omega$, a operação $\omega_A\colon A^{\mathrm{ar}(\omega)} \to A$ coincide com a operação $\omega_B\colon B^{\mathrm{ar}(\omega)} \to B$ restrita a $A^{\mathrm{ar}(\omega)}$ e correstrita a A.

É muito comum precisar escrever, como na definição acima, que certa função é a restrição e a correstrição de outra. Quando não causar confusão, e for claro quais são a restrição e a correstrição que precisam ser tomadas, respectivamente, falaremos, por simplicidade, apenas em "(co)restringir", o que significa tanto restringir o domínio quanto correstringir o contradomínio para os conjuntos respectivos apropriados.

---

[3] É importante notar que a prova do Teorema 2.1.5 pressupõe tal fato se quisermos que as funções definidas sirvam para o caso $n = 0$. Uma alternativa é fazer uma prova separada para este caso definindo a função que leva cada $f \in \prod_{0 \geq i} X_i$ em $f(0) \in X_0$ e exibir sua inversa.

Definição 2.1.8. Seja B uma Ω-álgebra e $A \subseteq B$. Dizemos que A é **fechado pelas operações** de B quando A contém as constantes de B e, dado qualquer símbolo $\omega \in \Omega$, temos $\omega_B(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \in A$ para todos $a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)} \in A$.

Note que, por definição, toda subálgebra é fechada pelas operações da *maior*. A partir de agora, sempre que quisermos provar que um conjunto admite estrutura de subálgebra de uma certa álgebra que o contém, provaremos que tal conjunto é fechado pelas operações da álgebra. Mais precisamente, o conjunto A, após demonstrado que é fechado pelas operações da Ω-álgebra (B, I_B) que o contém, passará a ser visto como conjunto subjacente de uma Ω-álgebra (A, I_A) em que, para cada $\omega \in \Omega$, $I_A(\omega) = \omega_A$ é a (co)restrição de $I_B(\omega) = \omega_B \colon B^{\mathrm{ar}(\omega)} \to B$.

Lema 2.1.9. *Sejam B uma Ω-álgebra e $\mathscr{A}$ é uma coleção não-vazia de subálgebras de B. Então, $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$ é fechada pelas operações de B.*

Demonstração. Sejam $\omega \in \Omega$ e $a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)} \in \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$. Tomemos $A \in \mathscr{A}$. Então, $a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)} \in A$. Como A é subálgebra de B, então é fechada pelas operações de B. Logo, $\omega_B(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \in A$. Daí, $\omega_B(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \in \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$. □

O lema acima garante que a interseção de subálgebras de uma certa álgebra, já que é fechada pelas operações desta, pode ser dotada de uma estrutura de subálgebra. Mais precisamente, dada uma coleção não-vazia de subálgebras de uma Ω-álgebra (B, I_B), a *subálgebra interseção*, portanto, tem como conjunto subjacente a interseção dos conjuntos subjacentes das subálgebras e a cada $\omega \in \Omega$ associa $I(\omega)$ que é a (co)restrição de $I_B(\omega) = \omega_B \colon B^{\mathrm{ar}(\omega)} \to B$.

Lema 2.1.10. *Seja $\mathscr{A}$ a coleção de subálgebras de uma Ω-álgebra B que contêm um conjunto Σ. Então, $\bigcap \mathscr{A}$ é a menor subálgebra de B que contém Σ.*

Demonstração. Já sabemos que $\bigcap \mathscr{A}$ é uma álgebra. Como cada $A \in \mathscr{A}$ contém Σ, então $\bigcap \mathscr{A}$ contém Σ. Seja A' uma subálgebra de B que contém Σ. Logo, $A' \in \mathscr{A}$. Portanto, $\bigcap \mathscr{A} \subseteq A'$. □

Agora, seja A uma Ω-álgebra e $\Sigma \subseteq A$. Definimos, *recursivamente*, a sequência de conjuntos $(\langle \Sigma \rangle_n)_{n \geq 1}$ por

$$\begin{aligned} \langle \Sigma \rangle_0 &:= \Sigma \cup \{\omega_A \in A \mid \omega \in \Omega, \mathrm{ar}(\omega) = 0\}, \\ \langle \Sigma \rangle_{n+1} &:= \langle \Sigma \rangle_n \cup \{\omega_A(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \in A \mid \omega \in \Omega, \mathrm{ar}(\omega) > 0, a_i \in \langle \Sigma \rangle_i\}; \end{aligned}$$

e façamos

$$\langle \Sigma \rangle := \bigcup_{n \geq 0} \langle \Sigma \rangle_n.$$

Lema 2.1.11. *O conjunto $\langle \Sigma \rangle$ é fechado pelas operações de A.*

Demonstração. Por definição, todo $\omega_A \in A$, com $\omega \in \Omega$ e $\mathrm{ar}(\omega) = 0$, já pertence a $\langle\Sigma\rangle$. Agora, sejam $\omega \in \Omega$ e $a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)} \in \langle\Sigma\rangle$ com $\mathrm{ar}(\omega) > 0$. Daí, para cada $i \in \{1, \ldots, \mathrm{ar}(\omega)\}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i \in \langle\Sigma\rangle_{n_i}$. Seja m o maior dos n_i. Logo, $a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)} \in \langle\Sigma\rangle_m$. Assim, por definição, $\omega_A(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \in \langle\Sigma\rangle_{m+1}$. Portanto, $\omega_A(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \in \langle\Sigma\rangle$. □

Então, como $\langle\Sigma\rangle$ é fechado pelas operações de A, este conjunto admite estrutura de Ω-álgebra e é uma subálgebra de A. O próximo teorema mostra que já encontramos esse objeto antes de outra forma.

Teorema 2.1.12. *Seja A uma Ω-álgebra e $\Sigma \subseteq A$. Então, a subálgebra $\langle\Sigma\rangle$ é igual à interseção de todas as subálgebras de A que contêm Σ. Em particular, é a menor subálgebra de A que contém Σ.*

Demonstração. Seja $\mathscr{A}$ a coleção de todas as subálgebras de A que contêm Σ. Como $\langle\Sigma\rangle$ é uma subálgebra de A que, por construção, contém Σ, então $\bigcap \mathscr{A} \subseteq \langle\Sigma\rangle$. Por outro lado, seja A' uma subálgebra de A que contém Σ. Como A' é subálgebra, então A' em particular contém ω_A para todo $\omega \in \Omega$ com $\mathrm{ar}(\omega) = 0$. Assim, $\langle\Sigma\rangle_0 \subseteq A'$. Por indução, como A' é fechado pelas operações, se vê que $\langle\Sigma\rangle_n \subseteq A'$ para todo $n \geq 0$. Portanto, $\langle\Sigma\rangle \subseteq \bigcap \mathscr{A}$. □

Definição 2.1.13. Sejam A uma Ω-álgebra, $\Sigma \subseteq A$ e suponhamos que $\Sigma \neq \varnothing$ ou A tem pelo menos uma constante. Então, $\langle\Sigma\rangle$ é a menor subálgebra de A que contém Σ chamada de **subálgebra gerada** por Σ. Além disso, a função **inclusão** $i_\Sigma \colon \Sigma \to \langle\Sigma\rangle$ é definida como a restrição da identidade de $\langle\Sigma\rangle$ a Σ.

Observação 2.1.14. A partir de agora, quando considerarmos um subconjunto Σ de uma Ω-álgebra A e tomarmos a subálgebra $\langle\Sigma\rangle$, estaremos supondo que $\Sigma \neq \varnothing$ ou que A tem pelo menos uma constante.

2.1.3 Homomorfismos de álgebras; a categoria $\mathbf{Alg}(\Omega)$

Definição 2.1.15. Sejam A e B duas Ω-álgebras. Dizemos que $f \colon A \to B$ é um **homomorfismo de Ω-álgebras** quando, para todo $\omega \in \Omega$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A^{\mathrm{ar}(\omega)} \arrow[r, "\omega_A"] \arrow[d, "f^{\mathrm{ar}(\omega)}"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B^{\mathrm{ar}(\omega)} \arrow[r, "\omega_B"] & B
\end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $\omega_B \circ f^{\mathrm{ar}(\omega)} = f \circ \omega_A$, em que $f^{\mathrm{ar}(\omega)} \colon A^{\mathrm{ar}(\omega)} \to B^{\mathrm{ar}(\omega)}$ é definida por

$$f^{\mathrm{ar}(\omega)}(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) = (f(a_1), \ldots, f(a_{\mathrm{ar}(\omega)})),$$

para todos $a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)} \in A$. Quando não causar confusão, falaremos simplesmente que f é *homomorfismo* no lugar de homomorfismo de Ω-álgebras.

Lema 2.1.16. *Suponhamos que A, B e C sejam Ω-álgebras. Daí, valem:*

(a) *Funções identidade são homomorfismos.*

(b) *Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são homomorfismos, então a função composta*

$$g \circ f\colon A \to C, \quad a \mapsto g(f(a)),$$

é um homomorfismo.

Demonstração. Suponhamos que A, B e C sejam Ω-álgebras.

(a) Consideremos, por exemplo, a função identidade $\mathrm{id}_A\colon A \to A$. Então, neste caso, teremos $\mathrm{id}_A^{\mathrm{ar}(\omega)} = \mathrm{id}_{A^{\mathrm{ar}(\omega)}}$. Portanto, é imediato que $\omega_A \circ \mathrm{id}_{A^{\mathrm{ar}(\omega)}} = \mathrm{id}_A \circ \omega_A$.

(b) Sejam f e g como no enunciado, $\omega \in \Omega$ e $a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)} \in A$. Vejamos que

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^{\mathrm{ar}(\omega)}(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) &= ((g \circ f)(a_1), \ldots, (g \circ f)(a_{\mathrm{ar}(\omega)})) \\
&= (g(f(a_1)), \ldots, g(f(a_{\mathrm{ar}(\omega)}))) \\
&= g^{\mathrm{ar}(\omega)}(f(a_1), \ldots, f(a_{\mathrm{ar}(\omega)})) \\
&= g^{\mathrm{ar}(\omega)}(f^{\mathrm{ar}(\omega)}(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}))) \\
&= (g^{\mathrm{ar}(\omega)} \circ f^{\mathrm{ar}(\omega)})(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}),
\end{aligned}$$

ou seja, como os a_i são arbitrários, provamos que $(g \circ f)^{\mathrm{ar}(\omega)} = g^{\mathrm{ar}(\omega)} \circ f^{\mathrm{ar}(\omega)}$. Daí, como f e g são homomorfismos, $\omega_B \circ f^{\mathrm{ar}(\omega)} = f \circ \omega_A$ e $\omega_C \circ g^{\mathrm{ar}(\omega)} = g \circ \omega_B$. Logo,

$$\begin{aligned}
\omega_C \circ (g \circ f)^{\mathrm{ar}(\omega)} &= \omega_C \circ (g^{\mathrm{ar}(\omega)} \circ f^{\mathrm{ar}(\omega)}) \\
&= (\omega_C \circ g^{\mathrm{ar}(\omega)}) \circ f^{\mathrm{ar}(\omega)} \\
&= (g \circ \omega_B) \circ f^{\mathrm{ar}(\omega)} \\
&= g \circ (\omega_B \circ f^{\mathrm{ar}(\omega)}) \\
&= g \circ (f \circ \omega_A) \\
&= (g \circ f) \circ \omega_A,
\end{aligned}$$

ou seja, $\omega_C \circ (g \circ f)^{\mathrm{ar}(\omega)} = (g \circ f) \circ \omega_A$. Portanto, $g \circ f$ é homomorfismo. □

Observação 2.1.17. Na demonstração do lema acima, dada uma função identidade $\mathrm{id}_A\colon A \to A$, vimos que $\mathrm{id}_A^{\mathrm{ar}(\omega)} = \mathrm{id}_{A^{\mathrm{ar}(\omega)}}$. Além disso, dadas funções $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, vale que $(g \circ f)^{\mathrm{ar}(\omega)} = g^{\mathrm{ar}(\omega)} \circ f^{\mathrm{ar}(\omega)}$. Veremos, mais a frente, que *funtores* satisfazem precisamente estas propriedades que "elevar a $\mathrm{ar}(\omega)$" satisfaz, isto é, mapeiam identidades em identidades e composições em composições.

Resumindo, agora sabemos que funções identidade são homomorfismos, que a composição de homomorfismo é homomorfismo e, além disso, que a composição de homomorfismos é associativa (segue de composição de funções ser associativa). Assim, as Ω-álgebras e os homomorfismos entre elas formam uma categoria.

Definição 2.1.18. A categoria cujos objetos são Ω-álgebras e os morfismos são homomorfismos de Ω-álgebra é denotada por $\mathbf{Alg}(\Omega)$.

Definição 2.1.19. Sejam A e B duas Ω-álgebras. Dizemos que $f\colon A \to B$ é um **isomorfismo** de Ω-álgebras se é um homomorfismo bijetor. Caso exista pelo menos um isomorfismo entre A e B, dizemos que A e B são **isomorfas** e denotamos isto por $A \cong_{\mathbf{Alg}(\Omega)} B$ ou, simplesmente, por $A \cong B$.

O próximo resultado mostra, como já era esperado, que a noção de isomorfismo entre Ω-álgebras coincide com a noção de isomorfismo na categoria das Ω-álgebras.

Proposição 2.1.20. *Sejam A e B duas Ω-álgebras e suponhamos que a função $f\colon A \to B$ seja um isomorfismo. Então, $f^{-1}\colon B \to A$ é homomorfismo.*

Demonstração. Como $f\colon A \to B$ é um isomorfismo, então, por definição, é um homomorfismo bijetor. Logo, existe a função inversa $f^{-1}\colon B \to A$. Como f^{-1} é inversa de f, em particular $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$. Seja $\omega \in \Omega$. Da Observação 2.1.17, temos

$$(f^{-1})^{\mathrm{ar}(\omega)} \circ f^{\mathrm{ar}(\omega)} = (f^{-1} \circ f)^{\mathrm{ar}(\omega)} = \mathrm{id}_A^{\mathrm{ar}(\omega)} = \mathrm{id}_{A^{\mathrm{ar}(\omega)}},$$

e, de modo análogo, $f^{\mathrm{ar}(\omega)} \circ (f^{-1})^{\mathrm{ar}(\omega)} = \mathrm{id}_{B^{\mathrm{ar}(\omega)}}$. Logo, $(f^{\mathrm{ar}(\omega)})^{-1} = (f^{-1})^{\mathrm{ar}(\omega)}$. Agora, como f é um homomorfismo, $\omega_B \circ f^{\mathrm{ar}(\omega)} = f \circ \omega_A$. Aplicando a inversa de $f^{\mathrm{ar}(\omega)}$ à direita e a inversa de f à esquerda nesta equação,, obtemos $\omega_A \circ (f^{-1})^{\mathrm{ar}(\omega)} = f^{-1} \circ \omega_B$ que prova o desejado. ☐

2.1.4 Álgebras livres e gramática formal

Definição 2.1.21. Sejam A uma Ω-álgebra e $\Sigma \subseteq A$. Dizemos que a álgebra $\langle \Sigma \rangle$ é **livremente gerada** por Σ em A quando satisfaz as seguintes condições:

L1. Para todo $\omega \in \Omega$, com $\mathrm{ar}(\omega) > 0$, a restrição de ω_A a $\langle \Sigma \rangle^{\mathrm{ar}(\omega)}$ é injetiva.

L2. Para todos $\omega, \omega' \in \Omega$, se $\omega \neq \omega'$, então $\omega_A(\langle \Sigma \rangle^{\mathrm{ar}(\omega)}) \cap \omega'_A(\langle \Sigma \rangle^{\mathrm{ar}(\omega')}) = \varnothing$.

L3. Para todo $\omega \in \Omega$, temos $\omega_A(\langle \Sigma \rangle^{\mathrm{ar}(\omega)}) \cap \Sigma = \varnothing$.

Lema 2.1.22. *Sejam A uma Ω-álgebra e $\Sigma \subseteq A$. Se $\langle \Sigma \rangle$ é livremente gerada por Σ em A e convencionando $\langle \Sigma \rangle_{-1} = \varnothing$, então, para cada $n \geq 0$, temos*

$$\langle \Sigma \rangle_{n-1} \neq \langle \Sigma \rangle_n \qquad e \qquad \omega_A(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \notin \langle \Sigma \rangle_n$$

para todos $\omega \in \Omega$ com $\mathrm{ar}(\omega) > 0$ e $(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \in \langle \Sigma \rangle_n^{\mathrm{ar}(\omega)} \setminus \langle \Sigma \rangle_{n-1}^{\mathrm{ar}(\omega)}$.

Demonstração. Provaremos o lema por indução em $n \geq 0$.

(caso base) Para $n = 0$, temos $\langle\Sigma\rangle_{-1} = \varnothing$ e $\langle\Sigma\rangle_0 = \Sigma \cup \{\omega_A \mid \omega \in \Omega, \operatorname{ar}(\omega) = 0\}$. Estamos supondo, como já mencionado na Observação 2.1.14, que $\Sigma \neq \varnothing$ ou que A tem pelo menos uma constante. Logo, $\langle\Sigma\rangle_0 \neq \varnothing$, ou seja, $\langle\Sigma\rangle_{-1} \neq \langle\Sigma\rangle_0$. Agora, se $\omega \in \Omega$ com $\operatorname{ar}(\omega) > 0$ e $(a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \in \langle\Sigma\rangle_0^{\operatorname{ar}(\omega)}$, então $a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)} \in \langle\Sigma\rangle_0 \subseteq \langle\Sigma\rangle$. Como $\langle\Sigma\rangle$ é livremente gerado, vale L3. Portanto, $\omega_A(a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \notin \langle\Sigma\rangle_0$.

(passo indutivo) Seja $n > 0$. Vamos provar por indução em $i \leq n$ que, para todo $\omega \in \Omega$ com $\operatorname{ar}(\omega) > 0$, se $(a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \in \langle\Sigma\rangle_n^{\operatorname{ar}(\omega)} \setminus \langle\Sigma\rangle_{n-1}^{\operatorname{ar}(\omega)}$, então $\omega_A(a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \notin \langle\Sigma\rangle_i$. Para $i = 0$, é similar ao que já fizemos no caso base usando L3. Agora, suponhamos que, se $(a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \in \langle\Sigma\rangle_n^{\operatorname{ar}(\omega)} \setminus \langle\Sigma\rangle_{n-1}^{\operatorname{ar}(\omega)}$, então $\omega_A(a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \notin \langle\Sigma\rangle_i$, para algum $i \leq n-1$. Daí, caso $\omega_A(a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \in \langle\Sigma\rangle_{i+1}$, teríamos $\omega_A(a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \in \langle\Sigma\rangle_{i+1} \setminus \langle\Sigma\rangle_i$. Por L2 e da definição de $\langle\Sigma\rangle_{i+1}$, existem $b_1, \dots, b_{\operatorname{ar}(\omega)} \in \langle\Sigma\rangle_i$ tais que $\omega_A(a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) = \omega_A(b_1, \dots, b_{\operatorname{ar}(\omega)})$. Por L1, ω_A é injetiva em $\langle\Sigma\rangle^{\operatorname{ar}(\omega)}$. Então, $a_k = b_k$ para $1 \leq k \leq \operatorname{ar}(\omega)$. Logo, $a_k \in \langle\Sigma\rangle_i$ para cada $i < n$, contradizendo a hipótese de que $(a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \in \langle\Sigma\rangle_n^{\operatorname{ar}(\omega)} \setminus \langle\Sigma\rangle_{n-1}^{\operatorname{ar}(\omega)}$. Portanto, $\omega_A(a_1, \dots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \notin \langle\Sigma\rangle_{n+1}$, concluindo a indução em i. Em particular, mostramos que $\langle\Sigma\rangle_n \neq \langle\Sigma\rangle_{n+1}$, o que conclui a indução em n. □

Ao longo do texto, principalmente na parte de Lógica, definiremos funções que saem de um certo conjunto e chegam em outro conjunto dotado de uma certa estrutura algébrica. Nesses contextos, precisaremos de um resultado que garanta que a função se estende de modo único preservando certas características importantes.

Teorema 2.1.23. *Sejam A e B duas Ω-álgebras e $\Sigma \subseteq A$. Suponhamos que $\langle\Sigma\rangle$ é livremente gerada por Σ em A. Então, para toda função $f\colon \Sigma \to B$, existe um único homomorfismo $\overline{f}\colon \langle\Sigma\rangle \to B$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "i_\Sigma"] \arrow[dr, "f"'] & \langle\Sigma\rangle \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $\overline{f} \circ i_\Sigma = f$.

Demonstração. Definimos recursivamente uma sequência de funções $f_n\colon \langle\Sigma\rangle_n \to B$ definindo $f_0\colon \langle\Sigma\rangle_0 \to B$ por

$$f_0(a) = a, \text{ para } a \in \Sigma, \qquad \text{e} \qquad f_0(\omega_A) = \omega_B, \text{ para } \omega \in \Omega \text{ com } \operatorname{ar}(\omega) = 0,$$

e, supondo $f_n\colon \langle\Sigma\rangle_n \to B$ *bem-definida* satisfazendo

(1) f_n estende f; e

(2) $\omega_B \circ f_n^{\operatorname{ar}}(a) = f_n \circ \omega_A(a)$ para $\omega \in \Omega$ e $a \in \langle\Sigma\rangle_n^{\operatorname{ar}(\omega)}$ se $\omega_A(a) \in \langle\Sigma\rangle_n$,

definimos o gráfico de $f_{n+1}\colon \langle\Sigma\rangle_{n+1} \to B$ por

$$\operatorname{graph}(f_{n+1}) := \operatorname{graph}(f_n) \cup G_n$$

em que

$$G_n := \left\{ (\omega_A(a), (\omega_B \circ f_n^{\operatorname{ar}(\omega)})(a)) \mid \omega \in \Omega, \operatorname{ar}(\omega) > 0, a \in \langle\Sigma\rangle_n^{\operatorname{ar}(\omega)} \setminus \langle\Sigma\rangle_{n-1}^{\operatorname{ar}(\omega)} \right\}.$$

Vamos provar por indução em n que estas funções estão bem-definidas. Notemos que o caso base é imediato pela observação após a Definição 2.1.21, já que f é função

(passo indutivo) Seja $n > 0$. Vamos checar, supondo f_n bem-definida, que f_{n+1} está bem-definida. Sejam $(x, y), (x, z) \in \operatorname{graph}(f_{n+1})$. Primeiro, observamos que não pode ocorrer que um par esteja em $\operatorname{graph}(f_n)$ e o outro em G_n. Por exemplo, se $(x, y) \in G_n$, existem $\omega \in \Omega$ com $\operatorname{ar}(\omega) > 0$ e $a \in \langle\Sigma\rangle_n^{\operatorname{ar}(\omega)} \setminus \langle\Sigma\rangle_{n-1}^{\operatorname{ar}(\omega)}$ tais que $x = \omega_A(a)$. Como $\langle\Sigma\rangle$ é livremente gerada e pelo Lema 2.1.22, temos $\omega_A(a) \in \langle\Sigma\rangle_{n+1} \setminus \langle\Sigma\rangle_n$. Assim, como $\operatorname{dom}(f_n) = \langle\Sigma\rangle_n$, $x \notin \operatorname{dom}(f_n)$. Portanto, $(x, z) \notin \operatorname{graph}(f_n)$. Além disso, o caso em que ambos os pares estão em $\operatorname{graph}(f_n)$ é imediato dado que f_n está bem-definida. Deste modo, podemos supor que $(x, z) \in G_n$. Daí, existem $\omega' \in \Omega$ com $\operatorname{ar}(\omega') > 0$ e $b \in \langle\Sigma\rangle_n^{\operatorname{ar}(\omega')} \setminus \langle\Sigma\rangle_{n-1}^{\operatorname{ar}(\omega')}$ tais que $x = \omega'_A(b)$. Logo, $\omega(a) = \omega'(b)$. Por L2, de $\langle\Sigma\rangle$ ser livremente gerada, $\omega = \omega'$. Além disso, por L1, $a = b$. Agora, percebamos que $y = \omega_B \circ f_n^{\operatorname{ar}(\omega)}(a) = \omega'_B \circ f_n^{\operatorname{ar}(\omega')}(b) = z$, o que conclui a indução.

Observamos que $\langle\Sigma\rangle = \bigcup_{n\geq 0} \operatorname{dom}(f_n)$. Ainda, para cada $x \in \langle\Sigma\rangle$, existe um menor $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \langle\Sigma\rangle_{n(x)}$. Daí, definimos

$$\overline{f}\colon \langle\Sigma\rangle \to B, \quad x \mapsto f_{n(x)}(x),$$

que, por construção, satisfaz $\overline{f} \circ i_\Sigma = f$. Vamos provar que $\overline{f}$ é um homomorfismo. Sejam $\omega \in \Omega$ e $a_1, \ldots, a_{\operatorname{ar}(\omega)} \in \langle\Sigma\rangle$. Daí, para cada $i \in \{1, \ldots, \operatorname{ar}(\omega)\}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i \in \langle\Sigma\rangle_{n_i}$. Seja m o maior dos n_i. Logo, $a_1, \ldots, a_{\operatorname{ar}(\omega)} \in \langle\Sigma\rangle_m$. Da definição de $\langle\Sigma\rangle_{m+1}$, temos $\omega_A(a_1, \ldots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \in \langle\Sigma\rangle_{m+1}$. Por (2),

$$\omega_B \circ f_{m+1}^{\operatorname{ar}}(a_1, \ldots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) = f_{m+1} \circ \omega_A(a_1, \ldots, a_{\operatorname{ar}(\omega)})$$

e como $\overline{f}$ estende f_{m+1} e $a_1, \ldots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}$ são arbitrários, $\omega_B \circ \overline{f}^{\operatorname{ar}} = \overline{f} \circ \omega_A$.

Por fim, vamos provar a unicidade da $\overline{f}$. Seja $g\colon \langle\Sigma\rangle \to B$ um homomorfismo tal que $g \circ i_\Sigma = f$. Tomemos $\omega \in \Omega$ e $a_1, \ldots, a_{\operatorname{ar}(\omega)} \in \{a \in \langle\Sigma\rangle \mid \overline{f}(a) = g(a)\}$. Como $\langle\Sigma\rangle$ é subálgebra de A, em particular, é fechado pelas operações de A e, portanto, $\omega_A(a_1, \ldots, a_{\operatorname{ar}(\omega)}) \in \langle\Sigma\rangle$. Daí, como $\overline{f}$ e g são homomorfismos, temos

$\omega_B \circ \overline{f}^{\mathrm{ar}(\omega)} = \overline{f} \circ \omega_A$ e $\omega_B \circ g^{\mathrm{ar}(\omega)} = g \circ \omega_A$. Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{f}(\omega_A(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)})) &= (\overline{f} \circ \omega_A)(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \\
&= (\omega_B \circ \overline{f}^{\mathrm{ar}(\omega)})(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \\
&= \omega_B(\overline{f}^{\mathrm{ar}(\omega)}(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)})) \\
&= \omega_B((\overline{f}(a_1), \ldots, \overline{f}(a_{\mathrm{ar}(\omega)})) \\
&= \omega_B(g(a_1), \ldots, g(a_{\mathrm{ar}(\omega)})) \\
&= \omega_B(g^{\mathrm{ar}(\omega)}(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)})) \\
&= (\omega_B \circ g^{\mathrm{ar}(\omega)})(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \\
&= (g \circ \omega_A)(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}) \\
&= g(\omega_A(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)})),
\end{aligned}$$

o que mostra que $\{a \in \langle\Sigma\rangle \mid \overline{f}(a) = g(a)\}$ é fechado pelas operações de A e, sendo assim, é uma subálgebra de A (que, claramente, contém Σ). Como $\langle\Sigma\rangle$ é a menor subálgebra de A que contém Σ, obtemos

$$\langle\Sigma\rangle \subseteq \{a \in \langle\Sigma\rangle \mid \overline{f}(a) = g(a)\}$$

e disso segue que $\overline{f} = g$, como queríamos demonstrar. □

Definição 2.1.24. Nas condições e notação do teorema anterior, dizemos que o homomorfismo $\overline{f}$ é a **única extensão homomórfica** da função f.

Veremos agora como obter uma estrutura algébrica especial a partir de certos conjuntos pré-fixados: as *álgebras de termos*. A partir dessas álgebras, vamos obter, por exemplo, a *gramática* subjacente à lógica proposicional clássica. A definição a seguir é de importância, principalmente, notacional para tornar o estudo das álgebras de termos mais legível.

Definição 2.1.25. Seja A um conjunto não-vazio. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto das **palavras**[4] de **comprimento** n sobre A é definido como o conjunto A^n de todas as n-uplas com entradas em A e, neste contexto, A é chamado de **alfabeto**. O conjunto de todas as palavras finitas sobre A é definido como o conjunto $A^* := \bigcup_{n \geq 0} A^n$ e denotamos cada palavra $(a_1, \ldots, a_n)$ por $a_1 \ldots a_n$, ou seja, *justapondo suas entradas*. O único elemento de A^0 é chamado de **palavra vazia** e denotado por $()$.

Definição 2.1.26. Sejam (Ω, ar) um tipo de álgebra e Σ um conjunto disjunto de Ω, ambos disjuntos do conjunto $\{(,)\}$ que contém os símbolos de parênteses. O conjunto de todas as palavras de comprimento positivo com alfabeto dado pela união de Ω, Σ e $\{(,)\}$ é denotado por $W_\Omega(\Sigma)$. Definimos a **Ω-álgebra de palavras** sobre Σ

---

[4] Também é comum encontrar, na literatura, *string* ou *lista de símbolos*.

como a Ω-álgebra $(W_\Omega(\Sigma), I_{W_\Omega(\Sigma)})$ em que $I_{W_\Omega(\Sigma)}$ mapeia cada $\omega \in \Omega$ na operação $\omega_{W_\Omega(\Sigma)} \colon W_\Omega(\Sigma)^{\mathrm{ar}(\omega)} \to W_\Omega(\Sigma)$ definida pondo, para todos $u_1, \ldots, u_{\mathrm{ar}(\omega)} \in W_\Omega(\Sigma)$,

$$\omega_{W_\Omega(\Sigma)}(u_1, \ldots, u_{\mathrm{ar}(\omega)}) = \omega(u_1 \ldots u_{\mathrm{ar}(\omega)}),$$

ou seja, justapondo, em ordem, o símbolo ω, o símbolo de parênteses esquerdo, as palavras $u_1, \ldots, u_{\mathrm{ar}(\omega)}$ e, por último, o símbolo de parênteses direito. Neste contexto, os elementos de Σ são chamados de **símbolos atômicos**. Quando não há risco de confusão, escrevemos $W(\Sigma)$ no lugar de $W_\Omega(\Sigma)$ e a chamamos simplesmente de *álgebra de palavras*.

Observação 2.1.27. Nas próximas definições e ao longo do texto (se estivermos considerando álgebras de palavras), sempre iremos supor que o conjunto de símbolos atômicos Σ, o conjunto Ω e o conjunto $\{(,)\}$ são dois a dois disjuntos. Além disso, o conjunto $\{(,)\}$ ficará implícito nas definições a seguir.

O conjunto $W(\Sigma)$, como na definição acima, contém todas as palavras formadas com elementos de Σ, de Ω e, possivelmente, de $\{(,)\}$. Em particular, $W(\Sigma)$ contém o conjunto Σ^1 de todas as palavras de comprimento unitário construídas com elementos de Σ. Daí, como $\Sigma \cong_{\mathbf{Set}} \Sigma^1$, podemos considerar que $\Sigma \subseteq W(\Sigma)$. Sendo assim, fixado um tipo de álgebra e dado qualquer conjunto, sempre podemos formar a álgebra de palavras sobre esse conjunto e tomar, dentro da álgebra de palavras, a menor subálgebra que o contém: a *álgebra de termos*.

Definição 2.1.28. Sejam (Ω, ar) um tipo de álgebra e Σ um conjunto. A **Ω-álgebra de termos** sobre Σ, denotada por $\mathrm{Term}_\Omega(\Sigma)$, é definida como a subálgebra $\langle\Sigma\rangle$ de $W(\Sigma)$. Quando não há risco de confusão, escrevemos $\mathrm{Term}(\Sigma)$ no lugar de $\mathrm{Term}_\Omega(\Sigma)$ e a chamamos simplesmente de *álgebra de termos*.

Teorema 2.1.29. $\mathrm{Term}(\Sigma)$ *é livremente gerada por* Σ *em* $W(\Sigma)$.

Demonstração. Sejam $\omega, \omega' \in \Omega$ arbitrários.

(L1) Suponhamos que $\mathrm{ar}(\omega) > 0$. Agora, tomemos $u, v \in \mathrm{Term}(\Sigma)^{\mathrm{ar}(\omega)}$ tais que $\omega_{W(\Sigma)}(u) = \omega_{W(\Sigma)}(v)$. Daí, $\omega(u) = \omega(v)$ e, por igualdade de n-uplas, $u = v$.

(L2) Suponhamos que $\omega \neq \omega'$. Sejam $u, v \in \mathrm{Term}(\Sigma)^{\mathrm{ar}(\omega)}$. Daí, $\omega_{W(\Sigma)}(u) = \omega(u)$ e $\omega'_{W(\Sigma)}(v) = \omega'(v)$. Como $\omega \neq \omega'$, as palavras $\omega(u)$ e $\omega'(v)$ já não podem ser iguais. Como u e v são arbitrários, as imagens de $\omega_{W(\Sigma)}$ e $\omega'_{W(\Sigma)}$ são disjuntas.

(L3) No caso em que $\mathrm{ar}(\omega) = 0$, segue de Σ ser disjunto de Ω. Se $\mathrm{ar}(\omega) > 0$, então a interpretação de ω é uma palavra de comprimento maior do que 1. Como os elementos de Σ são palavras de comprimento unitário, segue o resultado. □

Desse modo, dado um conjunto Σ, sempre é possível formar uma álgebra livremente gerada sobre Σ dentro de uma álgebra de palavras adequada. Assim, nos livramos da necessidade de ter uma álgebra pré-fixada que o contenha. Mais ainda, é possível provar que é a cardinalidade que está caracterizando as álgebras livremente geradas [5, pág. 117], isto é, se $\Sigma \cong_{\mathbf{Set}} \Sigma'$, então $\mathrm{Term}(\Sigma) \cong_{\mathbf{Alg}(\Omega)} \mathrm{Term}(\Sigma')$.

Definição 2.1.30. Sejam (Ω, ar) um tipo de álgebra e Σ um conjunto. Definimos a **Ω-álgebra livre** sobre Σ simplesmente como a Ω-álgebra de termos sobre Σ.

Finalmente, obtemos como corolário o resultado que comentamos no começo dessa subseção. Definida uma função de um conjunto em uma álgebra, há uma única forma de estender essa função para a álgebra livre sobre o conjunto.

Corolário 2.1.31. *Sejam Σ um conjunto, B uma Ω-álgebra e $f\colon \Sigma \to B$ uma função. Então, f admite única extensão homomórfica $\overline{f}\colon \mathrm{Term}_\Omega(\Sigma) \to B$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.29, $\mathrm{Term}_\Omega(\Sigma)$ é livremente gerada por Σ em $W_\Omega(\Sigma)$. Portanto, pelo Teorema 2.1.23, a função $f\colon \Sigma \to B$ se estende unicamente para um homomorfismo $\overline{f}\colon \mathrm{Term}_\Omega(\Sigma) \to B$. □

Para fornecer um exemplo importante de álgebra de termos, adiantaremos a discussão a respeito da linguagem da lógica proposicional clássica, a qual será continuada no próximo capítulo.

A necessidade de estudar estruturas algébricas obtidas a partir de um conjunto dado foi, a todo momento, guiada pelos nossos objetivos nos capítulos posteriores. Por exemplo, precisaremos garantir que certas funções definidas sobre um conjunto dado admitam extensão homomórfica única para o conjunto que contém as *sentenças* da lógica proposicional. Parte do trabalho, então, foi fundamentar qual a natureza desses conjuntos de sentenças. Essa fundamentação desembocou, como poderia ser esperado, num estudo *formal* de *gramática*: as álgebras de termos e de palavras.

Ao estudarmos *linguagens formais*, não estamos interessados em justaposições quaisquer de símbolos. Formulamos tais linguagens justamente para ter controle ao formar sentenças. Permitimos somente aquelas que chamaremos de *bem-formadas*. A intuição por trás das álgebras de termos é que essas álgebras são precisamente a seleção, dentro de álgebras de palavras, de *strings* que, segundo certos critérios, são bem-formadas. Na nossa abordagem de Álgebra Universal, estes critérios são dados precisamente pelas operações com aridade positiva.

No contexto da Lógica, as álgebras de termos serão chamadas de *álgebras sentenciais*. As *teorias proposicionais*, *vide* Definição 3.2.11, são definidas em função de tais álgebras; são, basicamente, subconjuntos de álgebras sentenciais tais que há uma maneira de obter novas sentenças a partir de seus elementos e da lógica proposicional subjacente.

Neste trabalho, entenderemos teorias proposicionais como objetos *sintáticos*. A sintaxe, sob um viés formal, é o estudo das regras de boa-formação de sentenças e das relações entre sentenças sem qualquer compromisso, a princípio, com *significado* [12, pág. 61]. Dito de outro modo, é o estudo das regras lícitas de formação de sentenças dadas certas exigências previamente estabelecidas e, além disso, também é o estudo de como obter novas sentenças a partir de outras: sistemas de provas[5]. A área da Lógica que estuda sistemas de provas é conhecida como Teoria da Prova.

Um cálculo formal é um tipo de sistema que permite fazer demonstrações formais. Iremos introduzir a lógica proposicional através de um cálculo: o cálculo proposicional clássico. Uma demonstração, portanto, será simplesmente um tipo de relação entre sentenças das álgebras sentenciais.

Resumindo, álgebras sentenciais tem natureza sintática na medida em que são álgebras de termos. Portanto, teorias proposicionais tem natureza sintática na medida em que são objetos constituídos de álgebras sentenciais com uma lógica subjacente que introduz a noção de prova, relacionando sentenças. Isto justificará, por exemplo, dizer que a categoria das teorias proposicionais representará a sintaxe na dualidade entre sintaxe e semântica ao final de nossa odisseia lógico-matemática.

Exemplo 2.1.32. Sejam Σ um conjunto no máximo enumerável e (Ω, ar) um tipo de álgebra em que $\Omega = \{\vee, \wedge, \neg, \bot, \top\}$, os símbolos $\vee$ e $\wedge$ têm aridade 2, o símbolo $\neg$ tem aridade 1 e, por fim, $\bot$ e $\top$ são duas constantes. Aqui, denotamos os elementos de Σ com as letras p, q e r (indexando pelos inteiros positivos se necessário):

$$p, p_1, p_2, \ldots, q, q_1, q_2 \ldots, r, r_1, r_2, \ldots$$

Assim, dentro da álgebra de palavras $W_\Omega(\Sigma)$, obtemos a álgebra de termos que, neste contexto, é chamada de *álgebra sentencial* sobre Σ. O conjunto subjacente desta álgebra é denotado por $\mathrm{Sent}(\Sigma)$, seus elementos são chamados de Σ-*sentenças* e os elementos do conjunto Σ de *sentenças atômicas*. Daí, convencionando que

$$(\alpha \vee \beta) := \vee(\alpha\beta), \qquad (\alpha \wedge \beta) := \wedge(\alpha\beta) \qquad \text{e} \qquad (\neg\alpha) := \neg(\alpha),$$

para quaisquer Σ-sentenças α e β, obtemos a sintaxe da lógica proposicional clássica que usaremos mais a frente, no Capítulo 3.

Como $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ é livremente gerada por Σ, qualquer função definida de Σ em uma álgebra se estende de forma única para $\mathrm{Sent}(\Sigma)$. Portanto, podemos reescrever o Corolário 2.1.31 de forma mais conveniente para os capítulos subsequentes:

Corolário 2.1.33. *Sejam Σ no máximo enumerável, B uma Ω-álgebra e $f\colon \Sigma \to B$ uma função. Então, f admite única extensão homomórfica $\overline{f}\colon \mathrm{Sent}(\Sigma) \to B$.*

---

[5] Estamos tomando *prova* como sinônimo de demonstração neste texto.

2.1.5 Congruências

Mais à frente, no texto, precisaremos da noção de *quociente* tanto no contexto das álgebras de Boole quanto no contexto das teorias proposicionais. Nesta subseção, estudaremos quocientes em álgebras que generalizam ambos os casos.

Definição 2.1.34. Seja A e B duas Ω-álgebra. Definimos a **álgebra produto** de A e B como a Ω-álgebra $(A \times B, I_{A\times B})$ em que $A \times B$ é o produto cartesiano de A e B e $I_{A\times B}$ mapeia cada $\omega \in \Omega$ na operação $\omega_{A\times B} \colon (A \times B)^{\mathrm{ar}(\omega)} \to A \times B$ definida *entrada a entrada*, i.e.,

$$\omega_{A\times B}((a_1, b_1), \ldots, (a_{\mathrm{ar}(\omega)}, b_{\mathrm{ar}(\omega)})) = (\omega_A(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}), \omega_B(b_1, \ldots, b_{\mathrm{ar}(\omega)})),$$

para todo $(a_i, b_i) \in A \times B$ com $1 \leq i \leq \mathrm{ar}(\omega)$.

Definição 2.1.35. Seja A uma Ω-álgebra. Dizemos que uma **congruência** em A é uma subálgebra da álgebra produto $A \times A$ tal que o conjunto subjacente $C \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência sobre A.

Como C é uma relação de equivalência sobre A, podemos formar, para cada $a \in A$, a classe de equivalência de a na relação C,

$$[a]_C := \{x \in A \mid (a, x) \in C\},$$

e o *conjunto quociente* A/C de todas as classes de equivalência[6]. Quando não há risco de confusão, denotamos $[a]_C$ simplesmente por $[a]$. Além disso, há uma função, chamada de *mapa quociente*, definida por

$$q_C \colon A \to A/C, \quad a \mapsto [a]_C,$$

que, novamente, quando causar confusão, denotamos simplesmente por q. Notemos que o mapa quociente é, por definição, sobrejetivo.

Lema 2.1.36. *Sejam A uma Ω-álgebra e C uma congruência em A. Para todos $\omega \in \Omega$ e $a, b \in A^{\mathrm{ar}(\omega)}$, se $q_C^{\mathrm{ar}(\omega)}(a) = q_C^{\mathrm{ar}(\omega)}(b)$, então $(q_C \circ \omega_A)(a) = (q_C \circ \omega_A)(b)$. Mais explicitamente, se $[a_i] = [b_i]$, então*

$$[\omega_A(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)})] = [\omega_A(b_1, \ldots, b_{\mathrm{ar}(\omega)})],$$

para todos $a_i, b_i \in A$ com $1 \leq i \leq \mathrm{ar}(\omega)$.

---

[6] O conjunto quociente, mais a frente, receberá algumas notações alternativas. No caso de álgebras de Boole, o denotaremos por B/F em que B é a álgebra de Boole quocientada e F é o filtro que induz a congruência. No contexto da Lógica, a álgebra de Lindenbaum–Tarski é um quociente de uma álgebra sentencial e a denotamos por $L(T)$ em que T é a teoria proposicional que induz a congruência. Além disso, também utilizaremos aCx para denotar $(a, x) \in C$.

Demonstração. Sejam $a_i, b_i \in A$ com $1 \leq i \leq \mathrm{ar}(\omega)$. Suponhamos que $[a_i] = [b_i]$. Logo, $(a_i, b_i) \in C$ para cada $1 \leq i \leq \mathrm{ar}(\omega)$. Como C é uma congruência em A, então, em particular, é uma subálgebra de $A \times A$. Portanto, é fechada para as operações de $A \times A$. Daí,

$$\omega_{A\times A}((a_1, b_1), \ldots, (a_{\mathrm{ar}(\omega)}, b_{\mathrm{ar}(\omega)})) = (\omega_A(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)}), \omega_A(b_1, \ldots, b_{\mathrm{ar}(\omega)})) \in C,$$

donde segue o resultado. □

Este lema garante que o conjunto quociente A/C admite uma estrutura de Ω-álgebra induzida pela estrutura de Ω-álgebra de A.

Definição 2.1.37. Sejam A uma Ω-álgebra e C uma congruência em A. Definimos a **álgebra quociente** de A por C é definida como a Ω-álgebra $(A/C, I_{A/C})$ em que A/C é o conjunto quociente de A por C e $I_{A/C}$ mapeia cada $\omega \in \Omega$ na operação $\omega_{A/C} \colon (A/C)^{\mathrm{ar}(\omega)} \to A/C$ definida por

$$\omega_{A/C}([a_1], \ldots, [a_{\mathrm{ar}(\omega)}]) = [\omega_A(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(\omega)})],$$

para todo a_i com $1 \leq i \leq \mathrm{ar}(\omega)$.

Observação 2.1.38. Pela forma como definimos mapa quociente e álgebra quociente, temos imediatamente que o mapa quociente é um homomorfismo sobrejetivo.

2.2 ÁLGEBRAS DE BOOLE

Nesta seção, estudamos um exemplo de álgebra conhecido como álgebra de Boole. O exemplo *concreto* para desenvolver intuição são as álgebras de Boole da forma $P(X)$ para algum conjunto X, as *álgebras de Boole potência.*

Recordemos que o conjunto potência $P(X)$ de um conjunto X admite uma estrutura algébrica natural com as operações de união, interseção e complementação, tendo $\varnothing$ como elemento neutro com respeito à união e X como elemento neutro com respeito à interseção. De fato, se Y, Z e W são subconjuntos de X, então valem:

$$Y \cup \varnothing = Y, \qquad Y \cap X = Y, \qquad Y \cup Y = Y, \qquad Y \cap Y = Y,$$

$$\begin{aligned} (Y \cup Z)^{\mathsf{c}} &= Y^{\mathsf{c}} \cap Z^{\mathsf{c}}, & (Y \cap Z)^{\mathsf{c}} &= Y^{\mathsf{c}} \cup Z^{\mathsf{c}}, \\ Y \cup Z &= Z \cup Y, & Y \cap Z &= Z \cap Y, \\ (Y \cup Z) \cup W &= Y \cup (Z \cup W), & (Y \cap Z) \cap W &= Y \cap (Z \cap W), \\ Y \cup (Z \cap W) &= (Y \cup Z) \cap (Y \cup W), & Y \cap (Z \cup W) &= (Y \cap Z) \cup (Y \cap W), \\ Y \cup Y^{\mathsf{c}} &= X, & Y \cap Y^{\mathsf{c}} &= \varnothing. \end{aligned}$$

Os leitores atentos devem ter percebido que a lista acima contempla aqueles exercícios iniciais encontrados num primeiro contato com Teoria de Conjuntos. Em verdade, estas propriedades *são* os axiomas da teoria das álgebras de Boole!

Definição 2.2.1. Sejam B um conjunto, $\vee, \wedge \colon B \times B \to B$ duas operações binárias, $\neg \colon B \to B$ uma operação unária e $0, 1 \in B$ duas constantes distintas. Dizemos que $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ é uma **álgebra de Boole** se, para todos $a, b, c \in B$, satisfaz:

B1. $a \vee 0 = a$, (elementos neutros de $\vee$ e $\wedge$)

$a \wedge 1 = a$

B2. $a \vee a = a$, (idempotência de $\vee$ e $\wedge$)

$a \wedge a = a$

B3. $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$, (Leis de De Morgan)

$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

B4. $a \vee b = b \vee a$, (comutatividade de $\vee$ e $\wedge$)

$a \wedge b = b \wedge a$

B5. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, (associatividade de $\vee$ e $\wedge$)

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

B6. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, (distributividade)

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

B7. $a \vee \neg a = 1$, (Terceiro Excluído)

$a \wedge \neg a = 0$

Chamamos[7] $a \wedge b$ de **ínfimo** de a e b e $a \vee b$ de **supremo** de a e b. Mais adiante, a escolha dessa nomenclatura será justificada com Teoria de Ordem. Além disso, enfatizamos que 0 é o elemento neutro em relação a operação $\vee$ e 1 é o elemento neutro em relação a operação $\wedge$. Por fim, não é demais observar que cada um dos "axiomas" B1-B7 na verdade contêm dois axiomas.

---

[7] É mais comum encontrar, na literatura, os nomes *meet* e *join* no lugar de ínfimo e supremo, respectivamente. Preferimos ínfimo e supremo por serem, *salvo engano*, nomenclaturas *em português* muito mais presentes nos estudos dos alunos de graduação.

Observação 2.2.2. Toda álgebra de Boole é uma Ω-álgebra em que Ω é um conjunto constituído de dois símbolos de aridade 2 que são interpretados como as operações $\vee$ e $\wedge$, um símbolo de aridade 1 que é interpretado como $\neg$ e duas constantes interpretadas como 0 e 1. Sendo assim, diversos resultados provados no contexto de Álgebra Universal valem, imediatamente, para álgebras de Boole, o que mostra a eficiência da abordagem que decidimos seguir.

Exemplo 2.2.3. O exemplo que será mais importante ao longo do texto é a álgebra de Boole com conjunto subjacente $2 = \{0, 1\}$ e operações dadas por

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\neg$	
1	0
0	1

chamada de **álgebra de Boole de dois elementos**.

Lema 2.2.4. *Sejam B uma álgebra de Boole e $a, b \in B$. Então, valem:*

(a) $a \wedge 0 = 0$.

(b) $a \vee 1 = 1$.

(c) $a \wedge (a \vee b) = a$.

(d) $a \vee (a \wedge b) = a$.

Demonstração. Vamos provar (a) e (c) já que as outras são análogas. Sejam $a, b \in B$.

(a) Neste caso, fazemos

$$\begin{aligned} a \wedge 0 &= a \wedge (a \wedge \neg a) \\ &= (a \wedge a) \wedge \neg a \\ &= a \wedge \neg a = 0. \end{aligned}$$

(c) Para provarmos, basta observar que

$$\begin{aligned} a \wedge (a \vee b) &= (a \vee 0) \wedge (a \vee b) \\ &= a \vee (0 \wedge b) \\ &= a \vee 0 = a. \end{aligned}$$

□

2.2.1 Conjuntos ordenados

A Teoria de Ordem é a área da Matemática na qual se estudam *estruturas de ordem*, estruturas essas que são constituídas de um conjunto e um tipo específico de relação binária: as relações de ordem.

Esta área está presente em basicamente toda a Matemática, apesar de algumas vezes funcionar como coadjuvante e não como protagonista. Por exemplo, a relação de continência entre subconjuntos de um dado conjunto induz uma noção de ordem no conjunto das partes; a topologia usual de $\mathbb{R}$ é induzida por intervalos que por sua vez são definidos a partir da ordem usual da reta; a divisibilidade nos números naturais induz uma noção de ordem; o *Lema de Zorn*, enunciado que aborda elementos de Teoria de Ordem, é imprescindível na prova de diversos resultados fundamentais como, por exemplo, o *Lema do Ultrafiltro*.

Em tempo, o estudo de estruturas ordenadas nos apresenta surpresas algébricas e topológicas. Existe uma relação profunda entre Lógica, Teoria de Ordem e Álgebra, a qual começaremos a reconhecer a partir de agora.

Definição 2.2.5. Uma relação binária $\leq$ sobre um conjunto P é dita uma **ordem parcial** sobre P se, para quaisquer $x, y, z \in P$, valem

P1. $x \leq x$. (reflexividade)

P2. $x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$. (antissimetria)

P3. $x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$. (transitividade)

O par $(P, \leq)$ é chamado de **conjunto parcialmente ordenado** ou **poset**. Quando não houver risco de confusão, denotamos o poset apenas por P. Se, além de P1-P3, o poset satisfizer $x \leq y$ ou $y \leq x$, para quaisquer $x, y \in P$, o chamamos de **conjunto totalmente ordenado**, **toset** ou **cadeia**. Por fim, $x \leq y$ é lido "x é menor do que ou igual a y". Quando $x \leq y$ mas $x \neq y$, escrevemos $x < y$ que é lido "x é estritamente menor do que y".

Exemplo 2.2.6. Os conjunto numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, com suas *ordens usuais*, são conjuntos totalmente ordenados.

Exemplo 2.2.7. Um exemplo de conjunto parcialmente que aparece em cursos introdutórios de Aritmética é $(\mathbb{N}, |)$ em que $|$ é a relação de divisibilidade sobre $\mathbb{N}$.

Exemplo 2.2.8. Seja X um conjunto qualquer. Então, $(P(X), \subseteq)$ é um poset, o qual chamaremos de **poset potência**. Todavia, em geral um poset potência não é um toset. Por exemplo, tomemos $2 = \{0, 1\}$. Então, $\{0\}$ e $\{1\}$ são subconjuntos de 2 e nenhum contém o outro.

Observação 2.2.9. Sejam $(P, \leq)$ um poset e $Q \subseteq P$. Ocasionalmente, acontece de precisarmos considerar Q como um poset olhando para Q dentro da estrutura dada pelo poset P. Fazemos isso com um certo abuso de notação, denotando o poset com conjunto subjacente Q por $(Q, \leq)$. Nesse caso, $\leq$ deve ser entendida como a ordem em P restrita aos pares com elementos em Q. A checagem de que $(Q, \leq)$ satisfaz os axiomas P1-P3 é imediata. Se, neste caso, $(Q, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado, dizemos que *Q é uma cadeia em P*.

Definição 2.2.10. Sejam P um poset e $x, y \in P$. Dizemos que y é **sucessor** de x, e denotamos isto por $x \prec y$, se $x < y$ e, para todo $z \in P$, se $x \leq z$ e $z \leq y$, então $x = z$ ou $y = z$.

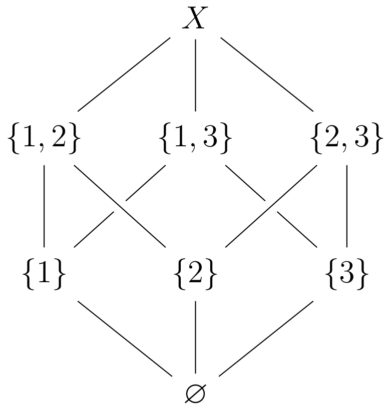
A relação de *sucessão* definida acima nos fornece uma maneira de representar posets finitos através de diagramas conhecidos como *diagramas de Hasse*. Estes diagramas nos permitem ter uma intuição geométrica da estrutura ordenada e observar padrões interessantes e elementos notáveis. Por exemplo, um conjunto ordenado pode ter um elemento que, em seu diagrama, é sucedido por todos os outros.

Dado um poset finito $(P, \leq)$, o seu diagrama de Hasse é um grafo, cujos vértices são os elementos de P, que devem ser dispostos de modo que cada elemento fique abaixo de seus sucessores. Além disso, cada elemento de P é conectado por uma aresta a cada um de seus sucessores.

Exemplo 2.2.11. Seja $X = \{1, 2, 3\}$. Então, o conjunto das partes de X,

$$P(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\},$$

como já comentamos, é um poset com respeito a $\subseteq$. Seu diagrama de Hasse é



Neste poset, $\varnothing$ menor ou igual do que todos os elementos de $P(X)$ enquanto que X é maior ou igual. Elementos com essas propriedades são bastante importantes no estudo de conjuntos ordenados.

Como vimos, posets, pelo menos no caso finito, têm um tipo de "estrutura cristalina" induzida pela ordem. Isso faz com que a estrutura de ordem desses objetos tenha elementos que desempenham papéis importantes. Alguns destes tipos de elementos provavelmente já foram encontrados pelos leitores durante a trajetória matemática: elemento mínimo, supremo, entre outros. O interessante é que estes *elementos notáveis* das estruturas de ordem podem aparecer mesmo em posets infinitos. De fato, dado qualquer conjunto infinito X, o conjunto vazio ainda é um subconjunto seu e, portanto, menor do que qualquer conjunto não-vazio.

Definição 2.2.12. Sejam P um poset, $Q \subseteq P$ e $c \in P$. Dizemos que c é **cota inferior** de Q quando $c \leq x$ para todo $x \in Q$. Similarmente, se $x \leq c$ para todo $x \in Q$, dizemos que c é **cota superior** de Q.

Definição 2.2.13. Sejam P um poset e $Q \subseteq P$. Chamamos $m \in Q$ de elemento:

- **mínimo** de Q quando m é cota inferior de Q.
- **minimal** de Q quando $x \leq m$ implica $x = m$ para todo $x \in Q$.
- **máximo** de Q quando m é cota superior de Q.
- **maximal** de Q quando $m \leq x$ implica $x = m$ para todo $x \in Q$.

Vamos provar, em seguida, que elementos mínimos e máximos, quando existem, são únicos. Portanto, quando existem, recebem uma notação especial. O elemento mínimo de Q é denotado por $\min Q$ e o elemento máximo de Q por $\max Q$. Se, mais a frente, houver mais alguma ordem envolvida, indicaremos sob qual ordem estamos tomando certo conceito denotando $\leq$-maximal ou $\min_{\leq} Q$, por exemplo.

Proposição 2.2.14. *Sejam P um poset e $Q \subseteq P$. Então, valem:*

(a) *Q tem no máximo um elemento mínimo.*

(b) *O elemento mínimo de Q, se existir, é o único minimal.*

(c) *Q tem no máximo um elemento máximo.*

(d) *O elemento máximo de Q, se existir, é o único maximal.*

Demonstração. Vamos provar (a) e (b) pois (c) e (d) são análogos.

(a) Seja m um elemento mínimo de Q. Suponhamos que m' é outro elemento mínimo de Q. Como m é mínimo de Q, então $m \leq m'$. De mesmo modo, como m' é mínimo de Q, então $m' \leq m$. Por antissimetria de $\leq$, obtemos que $m = m'$.

(b) Seja m um elemento mínimo de Q e $x \in Q$ arbitrário. Suponhamos que $x \leq m$. Como m é elemento mínimo de Q, $m \leq x$. Por antissimetria, $x = m$. Seja m' outro elemento minimal de Q. Como m é mínimo de Q, então $m \leq m'$. Como m' é minimal, então $m = m'$. Logo, m é o único elemento minimal de Q. □

Definição 2.2.15. Sejam P um poset, $Q \subseteq P$ e $m \in P$. Dizemos que m é **ínfimo** de Q quando é o máximo do conjunto das cotas inferiores de Q. Similarmente, se m é o mínimo do conjunto das cotas superiores de Q, dizemos que m é **supremo** de Q.

Como ínfimo e supremo foram definidos, respectivamente, como máximo e mínimo de certos conjuntos, se existirem, serão únicos. Deste modo, quando existem, recebem uma notação especial. O ínfimo do conjunto Q é denotado por $\bigwedge Q$ ou $\bigwedge_{x \in Q} x$ e o supremo de Q por $\bigvee Q$ ou $\bigvee_{x \in Q} x$.

Observação 2.2.16. Segue imediatamente das definições que se Q tem elemento máximo, então $\max Q = \bigvee Q$. Similarmente, se Q tem elemento mínimo, então $\min Q = \bigwedge Q$.

Exemplo 2.2.17. Supremos e ínfimos podem existir mesmo quando um subconjunto não possui máximo. Por exemplo, tomemos o poset $P(\{1, 2\})$ com a ordem dada pela continência. Se $Q = \{\{1\}, \{2\}\}$, então Q não possui máximo e $\bigvee Q = \{1, 2\} \notin Q$.

Exemplo 2.2.18. Seja P um poset. Então, P tem supremo se, e somente se, P tem máximo. Além disso, o subconjunto $\varnothing$ de P possui ínfimo se, e somente se, P possui máximo; neste caso, $\bigwedge \varnothing = \max P$. Similarmente, $\varnothing$ de P possui supremo se, e somente se, P possui mínimo; neste caso, $\bigvee \varnothing = \min P$.

Exemplo 2.2.19. Consideremos o poset $(\mathbb{N}, |)$. Dados $a, b \in \mathbb{N}$, se $\mathrm{mdc}(a, b)$ denota o máximo divisor comum de a e b, então $\bigwedge\{a, b\} = \mathrm{mdc}(a, b)$. Por outro lado, se $\mathrm{mmc}(a, b)$ denota o mínimo múltiplo comum de a e b, então $\bigvee\{a, b\} = \mathrm{mmc}(a, b)$.

Exemplo 2.2.20. Dado um conjunto X qualquer, o conjunto das partes $P(X)$ dotado da estrutura algébrica apresentada no início da seção é uma álgebra de Boole, na qual $\wedge$ é interpretada como a interseção, $\vee$ é interpretada como a união, $\neg$ é a complementação, 0 é o vazio e X é o conjunto todo. Chamamos este tipo de álgebra de Boole de uma **álgebra de Boole potência**. Por fim, lembremos que $P(X)$ também pode ser visto como um poset potência com ordem dada pela continência. Ademais, da Teoria de Conjuntos, dados Y e Z dois subconjuntos de X, temos $Y \subseteq Z$ se, e somente se, $Y \cap Z = Y$. Isto motiva a definição a seguir.

Definição 2.2.21. Sejam B uma álgebra de Boole e $a, b \in B$. Escreveremos $a \leq b$ para denotar $a \wedge b = a$, definindo assim uma relação binária $\leq$ sobre B.

Proposição 2.2.22. *A relação $\leq$, definida acima, é uma ordem parcial sobre B. Ainda, nesta ordem, o elemento mínimo é 0 e o elemento máximo é 1.*

Demonstração. Vamos provar primeiro que $\leq$ é uma ordem. Sejam $a, b, c \in B$.

(P1) De B2, temos $a \wedge a = a$, ou seja, $a \leq a$.

(P2) Suponhamos que $a \leq b$ e $b \leq a$. Então, como $a \leq b$, temos $a \wedge b = a$. Similarmente, como $b \leq a$, então $b \wedge a = b$. Assim, de $B4$ obtemos

$$a = a \wedge b = b \wedge a = b.$$

(P3) Suponhamos que $a \leq b$ e $b \leq c$. De $a \leq b$, obtemos $a \wedge b = a$ e de $b \leq c = b$ vem $b \wedge c = b$. Portando, usando B5, temos

$$\begin{aligned} a \wedge c &= (a \wedge b) \wedge c \\ &= a \wedge (b \wedge c) \\ &= a \wedge b = a, \end{aligned}$$

ou seja, $a \leq c$.

Finalmente, de B1 e B4, obtemos $1 \wedge a = a$, ou seja, $a \leq 1$. Agora, da letra (a) do Lema 2.2.4 e B4, sabemos que $0 \wedge a = 0$, ou seja $0 \leq a$. Como a é arbitrário, segue que $0 = \min B$ e $1 = \max B$. □

Lema 2.2.23. *Seja B uma álgebra de Boole e $a, b, c \in B$. Então, valem:*

(a) *$c \leq a \wedge b$ se, e somente se, $c \leq a$ e $c \leq b$.*

(b) *$a \vee b \leq c$ se, e somente se, $a \leq c$ e $b \leq c$.*

(c) *Se $a \leq b$, então $a \wedge c \leq b \wedge c$.*

(d) *Se $a \leq b$, então $a \vee c \leq b \vee c$.*

(e) *Se $a \wedge b = a$ e $a \vee b = a$, então $a = b$.*

(f) *Se $a \wedge b = 0$ e $a \vee b = 1$, então $b = \neg a$.*

(g) *Se $a \leq b$, então $\neg b \leq \neg a$.*

(h) *$\neg\neg a = a$.*

Demonstração. Vamos provar (a), (c), (e), (f) e (h). Sejam $a, b, c \in B$.

(a) Para a ida, suponhamos que $c \leq a \wedge b$. Como

$$a \wedge (a \wedge b) = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge b,$$

segue que $a \wedge b \leq a$. Similarmente, $a \wedge b \leq b$. Como $c \leq a \wedge b$, por transitividade, $c \leq a$ e $c \leq b$. Reciprocamente, suponhamos que $c \leq a$ e $c \leq b$. Ou seja, $c \wedge a = c$ e $c \wedge b = c$. Então,

$$c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge (c \wedge b) = c \wedge c = c,$$

ou seja, $c \leq a \wedge b$.

(c) Suponhamos que $a \leq b$. Daí,

$$(a \wedge c) \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c,$$

ou seja, $a \wedge c \leq b \wedge c$.

(e) Como $a \wedge b = a$, temos $a \leq b$. De $a \vee b = a$, segue que $a \vee b \leq a$. Pela letra (b), $b \leq a$. Por antissimetria da ordem, $a = b$.

(f) Como $b \vee a = a \vee b = 1$, temos

$$\begin{aligned} b &= b \vee 0 \\ &= b \vee (a \wedge \neg a) \\ &= (b \vee a) \wedge (b \vee \neg a) \\ &= 1 \wedge (b \vee \neg a) \\ &= b \vee \neg a. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $b \wedge a = a \wedge b = 0$, temos

$$\begin{aligned} b &= b \wedge 1 \\ &= b \wedge (a \vee \neg a) \\ &= (b \wedge a) \vee (b \wedge \neg a) \\ &= 0 \vee (b \wedge \neg a) \\ &= b \wedge \neg a. \end{aligned}$$

Portanto, $b \vee \neg a = b \wedge \neg a = b$ e, pela letra (e), obtemos $b = \neg a$.

(h) Sabemos que $\neg a \vee \neg\neg a = 1$ e $\neg a \wedge \neg\neg a = 0$. Pela letra (f), $\neg\neg a = a$. □

Corolário 2.2.24. *Em toda álgebra de Boole B, valem $\neg 0 = 1$ e $\neg 1 = 0$.*

Demonstração. Como $1 \wedge 0 = 0$ e $1 \vee 0 = 1$, pela letra (f) do lema anterior, obtemos que $0 = \neg 1$. Além disso, usando a letra (h), $\neg 0 = \neg\neg 1 = 1$. □

Relembramos que escolhemos chamar $a \vee b$ de supremo de a e b e $a \wedge b$ de ínfimo de a e b. Essa escolha, naquele momento, pode ter parecido um tanto arbitrária. Entretanto, o resultado a seguir justifica tal nomenclatura.

Proposição 2.2.25. *Seja B uma álgebra de Boole B. Então, para todos $a, b \in B$,*

$$\bigvee\{a, b\} = a \vee b \qquad e \qquad \bigwedge\{a, b\} = a \wedge b.$$

Demonstração. Vamos mostrar somente que $\bigvee\{a, b\} = a \vee b$; o outro é similar.

Tomemos $a, b \in B$. Primeiro, veja que $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$. Portanto, $a \vee b$ é uma cota superior para $\{a, b\}$. Seja $c \in B$ uma cota inferior para $\{a, b\}$, ou seja, $a \leq c$ e $b \leq c$. Pela letra (b) do lema anterior, $a \vee b \leq c$. Assim, provamos que $a \vee b$ é a menor das cotas superiores de $\{a, b\}$, o que demonstra o desejado. □

Lema 2.2.26. *Sejam B uma álgebra de Boole e $a, b \in B$. Então, são equivalentes:*

(i) $a \vee b = b$.

(ii) $a \leq b$.

(iii) $a \wedge \neg b = 0$.

Demonstração. Vamos provar (i) $\Leftrightarrow$ (ii) e (i) $\Leftrightarrow$ (iii). Sejam $a, b \in B$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii). Suponhamos que $a \vee b = b$. Então, $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$, ou seja, $a \leq b$. Reciprocamente, suponhamos que $a \leq b$. Daí, $a \wedge b = a$. Então, $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Suponhamos que $a \vee b = b$. Então,

$$\begin{aligned} a \wedge \neg b &= (a \wedge \neg b) \vee 0 \\ &= (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg b) \\ &= (a \vee b) \wedge \neg b \\ &= b \wedge \neg b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que $a \wedge \neg b = 0$. Então,

$$\begin{aligned} a \vee b &= (a \vee b) \wedge 1 \\ &= (a \vee b) \wedge (\neg b \vee b) \\ &= (a \wedge \neg b) \vee b \\ &= 0 \vee b \\ &= b, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Antes de irmos para a próxima subseção, enfatizamos que diversos resultados de Álgebra Universal, inclusive definições, valem no caso de álgebras de Boole. Em particular, a definição de *subálgebra*, a qual relembramos agora, é a "mesma": um subconjunto não-vazio de uma álgebra de Boole B é uma subálgebra de B se contiver as constantes 0 e 1 de B e for fechado pelas $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ de B.

2.2.2 Filtros e ultrafiltros em álgebras de Boole

Definição 2.2.27. Seja B uma álgebra de Boole. Dizemos que um subconjunto F de B não-vazio é um **filtro** quando satisfaz:

F1. Se $a, b \in F$, então $a \wedge b \in F$.

F2. Se $a \in F$ e $a \leq b$, então $b \in F$.

Ainda, se $F \neq B$, dizemos que F é um **filtro próprio**. Além disso, F é dito um **ultrafiltro** quando F é maximal entre os filtros próprios de B segundo a continência.

Lema 2.2.28. *Seja F um filtro em uma álgebra de Boole B. Então, F é um filtro próprio se, e somente se, não contém o elemento mínimo de B,* 0.

Demonstração. Seja F um filtro em uma álgebra de Boole B. Suponhamos que $0 \in F$. Daí, dado $a \in B$ arbitrário, então $0 \leq a$ pois $0 = \min B$. Logo, $a \in F$. Desse modo, $F = B$, ou seja, F não é filtro próprio. Reciprocamente, se F não é próprio, segue direto da definição que $F = B$. Portanto, $0 \in F$. □

Definição 2.2.29. Sejam F um filtro em uma álgebra de Boole B e $a \in B$. Dizemos que a é **compatível** com F quando $a \wedge x \neq 0$ para todo $x \in F$.

Lema 2.2.30. *Sejam F um filtro próprio em uma álgebra de Boole B e $a \in B$. Então, a é compatível com F ou $\neg a$ é compatível com F.*

Demonstração. Suponha por absurdo que, para um certo $a \in B$, não seja o caso que a é compatível com F nem que $\neg a$ é compatível com F. Desse modo, existem $x, y \in F$ tais que $a \wedge x = 0$ e $\neg a \wedge y = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (x \wedge y) \wedge 1 \\ &= (x \wedge y) \wedge (a \vee \neg a) \\ &= (x \wedge y \wedge a) \vee (x \wedge y \wedge \neg a) \\ &= (a \wedge x \wedge y) \vee (x \wedge \neg a \wedge y) \\ &= (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) \\ &= 0 \vee 0 = 0. \end{aligned}$$

Como F é um filtro e $x, y \in F$, obtemos $0 = x \wedge y \in F$. Mas isso contradiz o fato de F ser filtro próprio, o que prova o desejado. ☐

Lema 2.2.31. *Sejam B uma álgebra de Boole e $a \in B$. Então, $\{x \in B \mid a \leq x\}$ é um filtro. Ainda, se $a \neq 0$, então $\{x \in B \mid a \leq x\}$ é filtro próprio.*

Demonstração. Vamos provar que $F = \{x \in B \mid a \leq x\}$ é um filtro.

(F1) Sejam $x, y \in F$. Daí, $a \leq x$ e $a \leq y$. Logo, pela letra (a) do Lema 2.2.23, $a \leq x \wedge y$. Daí, por definição de F, temos $x \wedge y \in F$.

(F2) Tomemos $x \in F$ e $b \in B$ com $x \leq b$. Como $x \in F$, temos $a \leq x$. Por transitividade, como $a \leq x$ e $x \leq b$, obtemos $a \leq b$. Portanto, $b \in F$.

Verificamos que F é filtro. Vamos provar a última afirmação. Observamos que se F não fosse próprio, teríamos $0 \in F$, ou seja, $a \leq 0$. Porém, sempre é o caso que $0 \leq a$. Logo, $a = 0$, o que prova, por contraposição, o desejado. ☐

Definição 2.2.32. Sejam B uma álgebra de Boole $a \in B$. Dizemos que o conjunto

$$a^{\uparrow} := \{x \in B \mid a \leq x\}$$

é o **filtro principal** gerado por a. Se $F \subseteq B$, definimos o **$\uparrow$-fecho** de F por

$$F^{\uparrow} := \bigcup_{x \in F} x^{\uparrow}$$

e, por último, o **$\wedge$-transladado** de F por a como o conjunto

$$a \wedge F := \{a \wedge x \mid x \in F\}.$$

Observação 2.2.33. Todas as definições, como filtro principal, transladado, etc., podem ser feitas para $\vee$ com as adaptações apropriadas. A noção dual que substituirá a de filtro, neste caso, é a de *ideal*, um conjunto não-vazio $\vee$-*fechado* e $\downarrow$-*fechado.*

Lema 2.2.34. *Na notação da definição acima, se F é um filtro, valem:*

(a) *O conjunto*

$$(a \wedge F)^{\uparrow} = \bigcup_{x \in F} (a \wedge x)^{\uparrow}$$

é um filtro.

(b) *Se a é compatível com F, então $(a \wedge F)^{\uparrow}$ é filtro próprio.*

(c) *$(a \wedge F)^{\uparrow}$ é o menor filtro que contém a e F.*

Demonstração. Suponhamos que F seja um filtro e tomemos $a \in B$.

(a) Vamos mostrar que o conjunto $(a \wedge F)^{\uparrow}$ é um filtro.

(F1) Sejam $y, y' \in (a \wedge F)^{\uparrow}$. Então existem $x, x' \in F$ tais que $y \in (a \wedge x)^{\uparrow}$ e $y' \in (a \wedge x')^{\uparrow}$, ou seja, $a \wedge x \leq y$ e $a \wedge x' \leq y'$. Daí, $y \wedge y' \in (a \wedge (x \wedge x'))^{\uparrow}$. Com efeito, notemos que

$$\begin{aligned} a \wedge (x \wedge x') &= a \wedge a \wedge x \wedge x' \\ &= (a \wedge x) \wedge (a \wedge x') \\ &\leq y \wedge y', \end{aligned}$$

de onde segue a afirmação. Como F é filtro e $x, x' \in F$, temos $x \wedge x' \in F$. Desse modo, encontramos um elemento de $a \wedge F$ — a saber $a \wedge (x \wedge x')$ — tal que seu $\uparrow$-fecho contém $y \wedge y'$. Logo, $y \wedge y' \in (a \wedge F)^{\uparrow}$.

(F2) Sejam $y \in (a \wedge F)^{\uparrow}$ e $z \in B$ com $y \leq z$. Então existe $x \in a \wedge F$ tal que $y \in (a \wedge x)^{\uparrow}$. Como $(a \wedge x)^{\uparrow}$ é o filtro principal gerado por $a \wedge x$, contém y e $y \leq z$, então $z \in (a \wedge x)^{\uparrow}$; e prova o desejado.

(b) Suponhamos que $(a \wedge F)^{\uparrow}$ não seja próprio. Desse modo, $0 \in (a \wedge F)^{\uparrow}$. Logo, existe $x \in F$ tal que $0 \in (a \wedge x)^{\uparrow}$. Daí, $a \wedge x \leq 0$ e como $0 \leq a \wedge x$, $a \wedge x = 0$. Resumindo, provamos que existe $x \in F$ tal que $a \wedge x = 0$. Portanto, a não é compatível com F.

(c) Primeiro, vamos provar que $(a \wedge F)^{\uparrow}$ contém a e F. É fácil verificar que todo filtro contém 1. Daí, como $a \wedge 1 = a$, obtemos que

$$a \in a^{\uparrow} = (a \wedge 1)^{\uparrow} \subseteq (a \wedge F)^{\uparrow},$$

ou seja, $(a \wedge F)^{\uparrow}$ contém a. Agora, tomemos $x \in F$. Como $a \wedge x \leq x$, então $x \in (a \wedge x)^{\uparrow}$, logo, $x \in (a \wedge F)^{\uparrow}$, o que prova que $(a \wedge F)^{\uparrow}$ contém F.

Finalmente, seja G um outro filtro que contém a e F. Vamos mostrar que $(a \wedge F)^{\uparrow} \subseteq G$. Tomemos $y \in (a \wedge F)^{\uparrow}$. Daí, existe $x \in F$ tal que $y \in (a \wedge x)^{\uparrow}$. Como

$F \subseteq G$ e $x \in F$, então $x \in G$. Como G é filtro e $a, x \in G$, então $a \wedge x \in G$. E, novamente por G ser filtro, como $a \wedge x \leq y$, temos $y \in G$, o que prova o desejado. □

Proposição 2.2.35. *Seja F um filtro próprio de uma álgebra de Boole B. Então, são equivalentes:*

(i) *F é um ultrafiltro.*

(ii) *F é* ***completo para a negação****, i.e., para todo $a \in B$, $a \in F$ ou $\neg a \in F$.*

(iii) *F é um* ***filtro primo****, i.e., para todos $a, b \in F$,*

$$a \vee b \in F \quad \textit{implica} \quad a \in F \quad \textit{ou} \quad b \in F.$$

Demonstração. (i) ⇒ (ii). Suponhamos que F é um ultrafiltro e tomemos $a \in B$. Em particular, F é um filtro próprio e pelo Lema 2.2.30, ocorre que a é compatível com F ou $\neg a$ é compatível com F. Considere, sem perda de generalidade, que a é compatível com F. Pelo lema anterior, o conjunto $(a \wedge F)^{\uparrow}$ é um filtro próprio que contém a e F. Como F é um ultrafiltro, então $F = (a \wedge F)^{\uparrow}$. Portanto, $a \in F$.

(ii) ⇒ (iii). Suponhamos que $a \vee b \in F$. Se $a \in F$, não há nada a provar. Caso $a \notin F$, da hipótese, como $a \in F$ ou $\neg a \in F$, então deve ser o caso que $\neg a \in F$. Como F é um filtro e $a \vee b \in F$, obtemos que $\neg a \wedge (a \vee b) \in F$. Além disso,

$$\begin{aligned} \neg a \wedge (a \vee b) &= (\neg a \wedge a) \vee (\neg a \wedge b) \\ &= 0 \vee (\neg a \wedge b) \\ &= \neg a \wedge b \leq b, \end{aligned}$$

ou seja, $\neg a \wedge (a \vee b) \leq b$. Portanto, de F ser um filtro, $b \in F$.

(iii) ⇒ (i). Sejam F um filtro próprio que satisfaz (iii) e um filtro próprio G arbitrário tal que $F \subseteq G$. Suponhamos que $F \neq G$. Então, existe $a \in G \setminus F$. Como $a \vee \neg a = 1 \in F$, da hipótese, temos $a \in F$ ou $\neg a \in F$. Como $a \notin F$, segue que $\neg a \in F$. Mas $a \in G$, $F \subseteq G$ e $\neg a \in F$. Logo, $a, \neg a \in G$ e como G é um filtro, $0 = a \wedge \neg a \in G$. Mas isso contradiz G ser próprio. Portanto, F é um ultrafiltro. □

2.2.3 Homomorfismos de álgebras de Boole; a categoria **Boole**

Definição 2.2.36. Sejam A e B álgebras de Boole. Dizemos que $f\colon A \to B$ é um **homomorfismo** de álgebras de Boole se é uma função que preserva as constantes[8] e as operações booleanas, i.e., se $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e, para todos $a, b \in A$,

$$f(\neg a) = \neg f(a), \quad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \quad \text{e} \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

---

[8] A rigor, as constantes deveriam estar subindexadas pelas suas respectivas álgebras. Por exemplo, deveríamos denotar o zero de A por 0_A e o de B por 0_B, porém supomos aqui que leitores tenham familiaridade com como se procede em livros-texto de Matemática e o usual neste caso é cometer essa ambiguidade para não pesar a notação.

No decorrer do texto, quando for conveniente, falaremos apenas *homomorfismo* ao invés de *homomorfismo de álgebras de Boole.*

Lema 2.2.37. *Sejam A, B e C álgebras de Boole. Daí, valem:*

(a) *Funções identidade são homomorfismos de álgebras de Boole.*

(b) *Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são homomorfismos, então a função composta*

$$g \circ f\colon A \to C, \quad a \mapsto g(f(a))$$

é um homomorfismo de álgebras de Boole.

Demonstração. É uma consequência do Lema 2.1.16 para álgebras. □

Nesse ponto, conhecemos as álgebras de Boole e certos tipos de funções que respeito a estrutura relevante no contexto de álgebras de Boole. Vamos ver agora, usando esse caso como exemplo, que isso indica que estamos diante de uma *categoria*.

Agora, como funções identidades são homomorfismos de álgebras de Boole e a composição de funções (e portanto de homomorfismos) é associativa, obtemos a categoria das álgebras de Boole e homomorfismos entre elas.

Definição 2.2.38. A categoria cujos objetos são álgebras de Boole e os morfismos são homomorfismos de álgebra de Boole é denotada por **Boole**.

Definição 2.2.39. Dizemos que $f\colon A \to B$ é um **isomorfismo** de álgebras de Boole se é um homomorfismo bijetor. Caso exista pelo menos um isomorfismo entre A e B, dizemos que A e B são álgebras de Boole **isomorfas** e denotamos isto por $A \cong_{\mathbf{Boole}} B$ ou, simplesmente, por $A \cong B$.

Proposição 2.2.40. *Sejam A e B álgebras de Boole e suponhamos que a função $f\colon A \to B$ seja um isomorfismo. Então $f^{-1}\colon A \to B$ é um homomorfismo.*

Demonstração. È uma consequência da Proposição 2.1.20 para álgebras. □

Proposição 2.2.41. *Sejam A e B álgebras de Boole e $f\colon A \to B$ um homomorfismo. Então, $a \leq b$ implica $f(a) \leq f(b)$, para todos $a, b \in A$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in A$ tais que $a \leq b$. Logo, por definição, $a \wedge b = a$. Então, como f é um homomorfismo,

$$f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b),$$

ou seja, $f(a) \leq f(b)$, como queríamos demonstrar. □

Exemplo 2.2.42. Não é suficiente que uma função entre álgebras de Boole preserve a ordem para ser um homomorfismo. Com efeito, $f\colon P(\{1,2\}) \to P(\{1,2\})$ dada por

$$f(X) = \begin{cases} X, & \text{se } X \neq \{1,2\} \\ \{1,2\}, & \text{se } X = \{1,2\} \end{cases}$$

preserva a ordem, $\wedge$, 0 e 1 de $P(\{1,2\})$, mas não preserva $\vee$ nem $\neg$.

2.2.4 Quocientes de álgebras de Boole

Definição 2.2.43. Sejam B uma álgebra de Boole e $a, b \in B$. Definimos

$$a \to b := \neg a \vee b \qquad \text{e} \qquad a \leftrightarrow b := (a \to b) \wedge (b \to a).$$

Proposição 2.2.44 (*Modus ponens* para álgebras de Boole)**.** *Sejam F um filtro em uma álgebra de Boole B e $a, b \in B$. Então, $a \to b \in F$ e $a \in F$ implica $b \in F$.*

Demonstração. Tomemos $a, b \in B$ tais que $a \to b \in F$ e $a \in F$. Daí, $\neg a \vee b \in F$ e

$$\begin{aligned} b &= 0 \vee b \\ &= (a \wedge \neg a) \vee b \\ &= (a \vee b) \wedge (\neg a \vee b). \end{aligned}$$

Além disso, como F é um filtro, $a \in F$ e $a \leq a \vee b$, então $a \vee b \in F$. Portanto, novamente de F ser filtro, $b = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) \in F$. ☐

Lema 2.2.45. *Seja B uma álgebra de Boole e $a \in B$. Então,*

(a) $a \leftrightarrow 0 = \neg a$.

(b) $a \leftrightarrow 1 = a$.

(c) $a = b$ *se, e somente se,* $a \leftrightarrow b = 1$.

(d) *Homomorfismos de álgebras de Boole preservam* $\leftrightarrow$.

Demonstração. Seja B uma álgebra de Boole e $a, b \in B$.

(a) Neste caso, temos

$$\begin{aligned} a \leftrightarrow 0 &= (a \to 0) \wedge (0 \to a) \\ &= (\neg a \vee 0) \wedge (\neg 0 \vee a) \\ &= \neg a \wedge (1 \vee a) \\ &= \neg a \wedge 1 = \neg a. \end{aligned}$$

(b) Similar a letra (a).

(c) Suponhamos que $a = b$. Daí, $a \leftrightarrow b = a \leftrightarrow a$ e, além disso,

$$\begin{aligned} a \leftrightarrow a &= (a \to a) \wedge (a \to a) \\ &= a \to a \\ &= \neg a \vee a = 1. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que $a \leftrightarrow b = 1$. Como $a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a)$, então, necessariamente, $a \to b = 1$ e $b \to a = 1$, ou seja, $\neg a \vee b = 1$ e $\neg b \vee a = 1$. Complementando ambos os lados das duas igualdades, e usando De Morgan, obtemos $a \wedge \neg b = 0$ e $b \wedge \neg a = 0$. Pelo Lema 2.2.26, $a \leq b$ e $b \leq a$. Por antissimetria da ordem, $a = b$, como queríamos demonstrar.

(d) Segue de $\leftrightarrow$ ser definido como abreviação das operações que homomorfismos já preservam. □

Definição 2.2.46. Seja F um filtro em uma álgebra de Boole B. Definimos a relação $\sim_F$, dita **relação induzida** pelo filtro F em B, por

$$a \sim_F b \quad \text{se, e somente se,} \quad a \leftrightarrow b \in F,$$

para todos $a, b \in B$.

Definimos o que é uma *congruência* em qualquer estrutura algébrica no primeiro capítulo, porém relembraremos aqui com uma notação mais familiar para o contexto de álgebras de Boole. Uma congruência $\sim$ em uma álgebra de Boole B é uma relação de equivalência em B tal que, se $a \sim a'$ e $b \sim b'$, então

$$a \vee b \sim a' \vee b', \quad a \wedge b \sim a' \wedge b' \quad \text{e} \quad \neg a \sim \neg a'.$$

Lema 2.2.47. *Seja F um filtro sobre uma álgebra de Boole B. Então, a relação $\sim_F$ induzida por F em B é uma congruência.*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que $\sim_F$ é uma relação de equivalência, i.e., que é reflexiva, simétrica e transitiva. Sejam $a, b, c \in B$.

(reflexividade) Segue da letra (c) do Lema 2.2.45, já que $1 \in F$ (pois F é filtro).

(simetria) Suponhamos que $a \sim_F b$. Logo, $a \leftrightarrow b \in F$. Como $\wedge$ é comutativo,

$$\begin{aligned} a \leftrightarrow b &= (a \to b) \wedge (b \to a) \\ &= (b \to a) \wedge (a \to b) = b \leftrightarrow a. \end{aligned}$$

Daí, $b \leftrightarrow a \in F$, ou seja, $b \sim_F a$.

(transitividade) Suponhamos que $a \sim_F b$ e $b \sim_F c$. Apesar de algumas contas, não é muito difícil mostrar que $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$ para quaisquer

$x, y, z \in B$. A transitividade de $\sim_F$ segue diretamente desse fato. Com efeito,

$$\begin{aligned}(a \leftrightarrow b) \wedge (b \leftrightarrow c) &= (a \to b) \wedge (b \to a) \wedge (b \to c) \wedge (c \to b)\\ &= (a \to b) \wedge (b \to c) \wedge (c \to b) \wedge (b \to a)\\ &\leq (a \to c) \wedge (c \to a) = a \leftrightarrow c.\end{aligned}$$

Como F é filtro e $a \leftrightarrow b, b \leftrightarrow c \in F$, temos $a \leftrightarrow c \in F$. Portanto, $a \sim_F c$.

Verificamos que é uma relação de equivalência. Vamos mostrar que é uma congruência. Suponhamos que $a \sim_F a'$ e $b \sim_F b'$ com $a', b' \in B$. Daí,

$$\begin{aligned}\neg a \leftrightarrow \neg a' &= (\neg a \to \neg' a) \wedge (\neg a' \to \neg a)\\ &= (\neg\neg a \vee \neg a') \wedge (\neg\neg a' \vee \neg a)\\ &= (a \vee \neg a') \wedge (a' \vee \neg a)\\ &= (\neg a \vee a') \wedge (\neg a' \vee a)\\ &= (a \to a') \wedge (a' \to a)\\ &= a \leftrightarrow a'\end{aligned}$$

e como $a \leftrightarrow a' \in F$, já que $a \sim_F a'$, segue que $\neg a \sim_F \neg a'$. Em seguida, notemos que

$$\begin{aligned}(a \vee b) \leftrightarrow (a' \vee b') &= [(a \wedge b) \to ('a \wedge b')] \wedge [(a' \wedge b') \to (a \wedge b)]\\ &= [\neg(a \wedge b) \vee (a' \wedge b')] \wedge [\neg(a' \wedge b') \vee (a \wedge b)]\\ &= [(\neg a \vee \neg b) \vee (a' \wedge b')] \wedge [(\neg a' \vee \neg b') \vee (a \wedge b)].\end{aligned}$$

Por outro lado, como F é filtro, $a \leftrightarrow a' \in F$ e $a \leftrightarrow a' \leq a \to a'$, então $a \to a' \in F$. Similarmente, $b \to b' \in F$. Logo, $(a \to a') \wedge (b \to b') \in F$. Assim, como

$$\begin{aligned}(a \to a') \wedge (b \to b') &= (\neg a \vee a') \wedge (\neg b \vee b')\\ &\leq (\neg a \vee \neg b \vee a') \wedge (\neg a \vee \neg b \vee b')\\ &= (\neg a \vee \neg b) \vee (a' \wedge b')\end{aligned}$$

e de F ser filtro, $(\neg a \vee \neg b) \vee (a' \wedge b') \in F$. Analogamente, $(\neg a' \vee \neg b') \vee (a \wedge b) \in F$. Isso garante que $(a \vee b) \leftrightarrow (a' \vee b') \in F$, i.e., que $(a \vee b) \sim_F (a' \vee b')$. A prova de que $\sim_F$ respeita a operação $\wedge$ é análoga. Portanto, $\sim_F$ é uma congruência. □

Dado um filtro F em uma álgebra de Boole B e um elemento $a \in B$, denotamos a classe de equivalência de a, na relação $\sim_F$ induzida por F em B, por

$$[a]_F := \{x \in B \mid x \sim_F a\}$$

e o conjunto de todas as classes de equivalência, chamado usualmente de conjunto quociente, é denotado por B/F. Agora, notemos que a estrutura de álgebra de Boole de B induz em B/F uma estrutura de álgebra de Boole se F for próprio.

Proposição 2.2.48. *Seja F um filtro próprio em uma álgebra de Boole B. Então, o conjunto quociente B/F, com as operações definidas por*

$$[a]_F \vee [b]_F := [a \vee b]_F, \quad [a]_F \wedge [b]_F := [a \wedge b]_F \quad e \quad \neg[a]_F := [\neg a]_F,$$

e constantes por $0_{B/F} := [0]_F$ e $1_{B/F} := [1]_F$, é uma álgebra de Boole.

Demonstração. A menos de verificarmos que $0_{B/F} \neq 1_{B/F}$, é uma consequência direta da construção de álgebra quociente. Como F é filtro próprio, então $0 \notin F$. Daí, como $1 \leftrightarrow 0 = 0$, então $1 \leftrightarrow 0 \notin F$, ou seja, $[0]_F \neq [1]_F$. □

Lema 2.2.49. *Na notação da proposição anterior, $1_{B/F} = F$.*

Demonstração. Basta calcularmos $[1]_F$. Em tempo,

$$\begin{aligned} [1]_F &= \{x \in B \mid x \sim_F 1\} \\ &= \{x \in B \mid x \leftrightarrow 1 \in F\} \\ &= \{x \in B \mid x \in F\} = F. \end{aligned}$$ □

Definição 2.2.50. Chamamos B/F, visto com a estrutura de álgebra de Boole da proposição acima, de **álgebra de Boole quociente**.

A álgebra de Boole quociente é precisamente a álgebra quociente para o tipo das álgebras de Boole. Sendo assim, relembramos a definição do mapa quociente

$$q_F \colon B \to B/F, \quad b \mapsto [b]_F,$$

o qual, da Observação 2.1.38, é um homomorfismo sobrejetivo.

Proposição 2.2.51. *Seja F um filtro próprio em uma álgebra de Boole B. Então, $B/F \cong 2$ se, e somente se, F é um ultrafiltro.*

Demonstração. Suponhamos que $B/F \cong 2$. Vamos provar que F é um ultrafiltro provando que é completo para a negação. Seja $a \in B$. Como $B/F \cong 2$, então $[a]_F = [0]_F$ ou $[a]_F = [1]_F$. Caso $[a] = [0]_F$, então, $\neg a = a \leftrightarrow 0 \in F$. Caso contrário, se $[a] = [1]_F$, então $a = a \leftrightarrow 1 \in F$. Portanto, F é um ultrafiltro.

Reciprocamente, suponhamos que F é um ultrafiltro. Seja $[a]_F \in B/F$. Como F é um ultrafiltro, então $a \in F$ ou $\neg a \in F$. Se $a \in F$, então, como $a \leftrightarrow 1 = a$, obtemos $[a]_F = [1]_F$. Caso contrário, obtemos $[a]_F = [0]_F$. Portanto, $B/F \cong 2$. □

2.2.5 Lema de Zorn, Lema do Ultrafiltro e estados

Nesta seção, lançamos mão de um axioma basilar da Matemática conhecido como *Lema de Zorn* e equivalente ao *Axioma da Escolha* [9, pág. 142]. Este axioma nos permitirá provar o Lema do Ultrafiltro, um dos resultados mais importantes sobre ultrafiltros. Em seguida, iremos introduzir estados de uma álgebra de Boole e provar que ultrafiltros estão em correspondência biunívoca com estados. Isto será de extrema importância para a “interpretação semântica” dos espaços de Stone.

Lema de Zorn. *Se P é um conjunto não-vazio parcialmente ordenado tal que toda cadeia em P tem cota superior em P, então P tem elemento maximal.*

Teorema 2.2.52 (Lema do Ultrafiltro, [2, pág. 15])**.** *Seja B uma álgebra de Boole e F um filtro próprio em B. Então, existe um ultrafiltro em B contendo F.*

Demonstração. Seja F um filtro próprio em uma álgebra de Boole B. Denotemos por $\mathscr{F}$ a coleção de todos os filtros próprios em B que contêm F e consideremos o poset $(\mathscr{F}, \subseteq)$ em que $\subseteq$ é a ordem do poset potência $(P(B), \subseteq)$ induzida em $\mathscr{F}$. Vamos mostrar que o poset $(\mathscr{F}, \subseteq)$ satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn.

Como F é um filtro próprio em B e $F \subseteq F$, então $\mathscr{F} \neq \varnothing$. Agora, seja $\mathscr{C}$ uma $\subseteq$-cadeia em $\mathscr{F}$ e tomemos $C = \bigcup \mathscr{C}$. Afirmamos que C é filtro em B. Com efeito:

(F1) Sejam $a, b \in C$. Então existem filtros próprios $C_a, C_b \in \mathscr{C}$ tais que $a \in C_a$ e $b \in C_b$. Como $\mathscr{C}$ é uma $\subseteq$-cadeia, existe $x \in \{a, b\}$ tal que $C_a \subseteq C_x$ e $C_b \subseteq C_x$. Logo, $a, b \in C_x$. Como C_x é filtro, $a \wedge b \in C_x$. Daí, $a \wedge b \in C$.

(F2) Sejam $a \in C$ e $b \in B$ tais que $a \leq b$. Como $a \in C$, existe um filtro próprio $C_a \in \mathscr{C}$ em B tal que $a \in C_a$. Como $a \leq b$, então $b \in C_a$. Portanto, $b \in C$.

Sendo assim, C é um filtro em B. Mais ainda, C é um filtro próprio em B. De fato, como todo elemento de $\mathscr{F}$ é filtro próprio, todos eles não contêm o 0. Logo, C não contém o 0, ou seja, C é filtro próprio. Além disso, como todo elemento de $\mathscr{C}$ contêm F, então C contém F. Logo, $C \in \mathscr{F}$. Por fim, como C é a união de todos os elementos de $\mathscr{C}$, então é uma $\subseteq$-cota superior de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{F}$. Pelo Lema de Zorn, existe um elemento $\subseteq$-maximal U de $\mathscr{F}$.

Basta checarmos que U é um ultrafiltro. Seja G um filtro próprio tal que $U \subseteq G$. Daí, como $U \in \mathscr{F}$, obtemos que $F \subseteq U$. assim, $F \subseteq G$. Como G é um filtro próprio que contém F, temos $G \in \mathscr{F}$. Porém, U é elemento $\subseteq$-maximal de $\mathscr{F}$. Logo, $G = U$. Portanto, U é um ultrafiltro em B que contém F, como queríamos. $\square$

Definição 2.2.53. Dada uma álgebra de Boole B, dizemos que um homomorfismo de álgebras de Boole $\phi \colon B \to 2$ é um **estado** de B.

Definição 2.2.54. Sejam B um conjunto e $U \subseteq B$. Dizemos que o mapa $\chi_U \colon B \to 2$ definido, para cada $b \in B$, por

$$\chi_U(b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \in U \\ 0, & \text{se } b \notin U \end{cases},$$

é a **função característica** de U.

Lema 2.2.55. *Seja B uma álgebra de Boole. Se U é um ultrafiltro em B, então a função característica $\chi_U \colon B \to 2$ é um homomorfismo.*

Demonstração. Primeiro, recordemos que todo filtro contém 1 e que todo ultrafiltro é um filtro próprio e portanto não contém 0. Desse modo, $\chi_U(0) = 0$ e $\chi_U(1) = 1$. Sejam $a, b \in B$. Notemos que

$$\begin{aligned} \chi_U(\neg b) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \neg b \in U \\ &\Leftrightarrow \quad b \notin U \\ &\Leftrightarrow \quad \chi_U(b) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\chi_U(\neg b) = \neg \chi_U(b)$. Ainda,

$$\begin{aligned} \chi_U(a \vee b) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad a \vee b \in U \\ &\Leftrightarrow \quad a \in U \quad \text{ou} \quad b \in U \\ &\Leftrightarrow \quad \chi_U(a) = 1 \quad \text{ou} \quad \chi_U(b) = 1, \end{aligned}$$

ou seja, $\chi_U(a \vee b) = \chi_U(a) \vee \chi_U(b)$. Para mostrar que χ_U preserva a operação $\wedge$ é análogo. Assim, χ_U é um homomorfismo, como queríamos demonstrar. □

Lema 2.2.56. *Seja B uma álgebra de Boole. Então, $\phi^{-1}(\{1\})$ é um ultrafiltro em B para todo estado ϕ de B.*

Demonstração. Seja ϕ um estado de B e façamos $U = \phi^{-1}(\{1\})$. Precisamos mostrar que U é um ultrafiltro em B, ou seja, que é um filtro próprio maximal em B.

(F1) Sejam $a, b \in U$. Daí, $\phi(a) = 1$ e $\phi(b) = 1$. Como ϕ é um homomorfismo,

$$\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b) = 1 \wedge 1 = 1,$$

ou seja, $a \wedge b \in U$.

(F2) Sejam $a \in U$ e $b \in B$ com $a \leq b$. Como ϕ é um homomorfismo, segue que $1 = \phi(a) \leq \phi(b)$. Mas, $\phi(b) \leq 1$. Por antissimetria, $\phi(b) = 1$, ou seja, $b \in U$.

Provamos que U é um filtro. Falta provar que é próprio e maximal. Como ϕ é um homomorfismo, $\phi(0) = 0$. Assim, $0 \notin U$, o que significa que U é filtro próprio. Agora, vamos provar que U é um ultrafiltro provando que é completo para a negação. Dado $a \in B$, se $a \in U$, não há nada a provar. Suponhamos que $a \notin U$. Então $\phi(a) = 0$ e, usando que ϕ é um homomorfismo,

$$\phi(\neg a) = \neg \phi(a) = \neg 0 = 1,$$

ou seja, $\neg a \in U$. Portanto, U é um ultrafiltro. □

Definição 2.2.57. Seja B uma álgebra de Boole. Definimos o conjunto $\mathrm{Ult}(B)$ de todos os ultrafiltros na álgebra de Boole B.

Teorema 2.2.58. *Seja B uma álgebra de Boole. Então,*

$$\mathrm{Ult}(B) \cong_{\mathbf{Set}} \mathrm{Hom}(B, 2)$$

a partir da bijeção

$$\Phi\colon \mathrm{Ult}(B) \to \mathrm{Hom}(B, 2), \quad U \mapsto \chi_U.$$

Demonstração. Primeiramente, a função Φ está bem-definida graças ao Lema 2.2.55. Vamos provar que Φ é uma bijeção. A candidata a inversa é a função

$$\Psi\colon \mathrm{Hom}(B, 2) \to \mathrm{Ult}(B), \quad \phi \mapsto \phi^{-1}(\{1\}),$$

que está bem-definida pelo Lema 2.2.56. Vamos checar que, de fato, $\Psi^{-1} = \Phi$.

Seja ϕ um estado de B. Então,

$$(\Phi \circ \Psi)(\phi) = \Phi(\Psi(\phi)) = \Phi(\phi^{-1}(\{1\})) = \chi_{\phi^{-1}(\{1\})} = \phi,$$

ou seja, Φ é inversa a esquerda de Ψ. Agora, seja U é um ultrafiltro em B. Então,

$$(\Psi \circ \Phi)(U) = \Psi(\Phi(U)) = \Psi(\chi_U) = \chi_U^{-1}(\{1\}) = U,$$

o que garante que Ψ é a inversa de Φ e prova o teorema. $\square$

Para finalizar este capítulo, veremos algumas equivalências “via estados” do Lema do Ultrafiltro. A mais importante delas, para este trabalho, afirma que toda álgebra de Boole admite pelo menos um estado. No restante do trabalho, quando mencionarmos “Lema do Ultrafiltro”, pode ser quaisquer um dos itens abaixo.

Teorema 2.2.59. *São equivalentes:*

(i) *Lema do Ultrafiltro.*

(ii) *Para toda álgebra de Boole B, existe um estado $\phi\colon B \to 2$.*

(iii) *Para toda álgebra de Boole B e todo filtro próprio F em B, existe um estado $\phi\colon B \to 2$ tal que $\phi(a) = 1$ sempre que $a \in F$.*

(iv) *Para toda álgebra de Boole B, se $a, b \in B$ com $a \neq b$, então existe um estado que separa a e b, i.e., existe um homomorfismo $\phi\colon B \to 2$ tal que $\phi(a) \neq \phi(b)$.*

(v) *Para toda álgebra de Boole B, se $\phi(a) = 1$ para todo $\phi\colon B \to 2$, então $a = 1$.*

(vi) *Para quaisquer álgebras de Boole A e B, e homomorfismos $f\colon A \to B$ e $g\colon A \to B$, se $\phi \circ f = \phi \circ g$ para todo homomorfismo $\phi\colon B \to 2$, então $f = g$.*

Demonstração. Vamos provar que

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(v)} \Rightarrow \text{(vi)} \Rightarrow \text{(iv)} \Rightarrow \text{(ii)}$$

e, entre estas demonstrações, mostraremos que (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Seja B uma álgebra de Boole. Daí, o filtro $\{1\}$ é próprio. Logo, pelo Lema do Ultrafiltro, existe um ultrafiltro U contendo $\{1\}$. Pelo Teorema 2.2.58, existe um estado $\phi\colon B \to 2$ que corresponde a U.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Suponhamos que F é um filtro próprio em B. Então o mapa quociente $q_F\colon B \to B/F$ é um homomorfismo tal que $q(a) = 1_{B/F}$ para todo $a \in F$. Por (ii), existe um estado $\psi\colon B/F \to 2$. Façamos $\phi = \psi \circ q_F$. Assim, $\phi\colon B \to 2$ é um homomorfismo tal que $\phi(a) = 1$ sempre que $a \in F$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja F um ultrafiltro próprio em uma álgebra de Boole B. Daí, por (iii), existe um estado $\phi\colon B \to 2$ tal que $\phi(a) = 1$ para todo $a \in F$. Pelo Lema 2.2.56, $U = \phi^{-1}(\{1\})$ é um ultrafiltro. Além disso, $F \subseteq U$.

(iii) $\Rightarrow$ (v). Seja $a \in B$ tal que $\phi(a) = 1$ para todo $\phi\colon B \to 2$. Suponhamos por absurdo que $a \neq 1$. Então o filtro $(\neg a)^{\uparrow}$ é próprio. Por (iii), existe $\psi\colon B \to 2$ tal que $\psi(\neg a) = 1$. Mas, daí teríamos que $\psi(a) = 0$, contradizendo a hipótese inicial.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Sejam $f, g\colon A \to B$ homomorfismos tais que, para todo estado $\phi\colon B \to 2$, vale $\phi \circ f = \phi \circ g$. A demonstração segue das letras (c) e (d) do Lema 2.2.45. Sejam $a \in A$ e um estado $\phi\colon B \to 2$. Daí, $\phi(f(a)) = \phi(g(a))$. Logo,

$$\phi(f(a) \leftrightarrow g(a)) = \phi(f(a)) \leftrightarrow \phi(g(a)) = 1.$$

De ϕ ser arbitrário, segue de (v) que $f(a) \leftrightarrow g(a) = 1$. Logo, $f(a) = g(a)$. Como $a \in A$ é arbitrário, então $f = g$.

(vi) $\Rightarrow$ (iv). Sejam $a, b \in B$ tais que $\phi(a) = \phi(b)$ para todo homomorfismo $\phi\colon B \to 2$. Seja $A = \{0, 1, p, \neg p\}$ a álgebra de Boole gerada por $\{p\}$ no sentido da Álgebra Universal. Definimos $\hat{a}, \hat{b}\colon A \to B$ por $\hat{a}(p) = a$ e $\hat{b}(p) = b$, completando com o necessário para serem homomorfismos. Assim, da hipótese inicial, e como homomorfismos preservam complementação, 0 e 1, obtemos que $\phi \circ \hat{a} = \phi \circ \hat{b}$. Usando (vi), $\hat{a} = \hat{b}$. Portanto, $a = b$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Segue de (iv) e $0 \neq 1$. $\square$

Referências utilizadas e recomendadas

- Revisão de Teoria de Conjuntos, produtos e Lema de Zorn: [9].
- Elementos de Teoria de Categorias: [3, 5, 8].
- Abordagem de Álgebra Universal com foco em Lógica: [1, 5, 7].
- Teoria de Ordem e álgebras de Boole: [2, 8].

3 INICIAÇÃO: TEOREMA DE LINDENBAUM–TARSKI

Neste capítulo, estudamos a relação entre Lógica e álgebras de Boole. Para isso, introduzimos o cálculo proposicional clássico e a categoria das teorias proposicionais e traduções entre teorias proposicionais. Ao final, provamos o conhecido Teorema de Lindenbaum–Tarski, o qual afirma que a categoria das álgebras de Boole é equivalente à categoria das teorias proposicionais, embarcando numa odisseia lógico-matemática rumo a desvendar uma dualidade entre sintaxe e semântica.

3.1 O QUE É LÓGICA?

Lógica é uma área muito difícil de caracterizar, pois intersecta diversas outras áreas: Matemática, Ciência da Computação, Filosofia, Linguística, etc. Por isso, qualquer definição desagradará algum grupo de pessoas. Às vezes, se fala que Lógica é a análise dos métodos de raciocínio [12, pág. xv] ou que é a ciência que estuda princípios e métodos de inferência [13, pág. 2].

Não precisamos responder a questão “o que é Lógica?” aqui, entretanto dar uma sugestão do que *pode ser* e como estudar Lógica esclarecerá o que faremos neste capítulo. Sendo assim, deve-se insistir um pouco mais nesta discussão.

Primeiro, é bastante relevante comentar que, apesar de Lógica ser uma área tão interdisciplinar, os desenvolvimentos mais de ponta da área são extremamente matemáticos. Pelo menos, enquanto Lógica Matemática, adjetivada desse jeito, é uma área tão sofisticada quanto qualquer outra área da Matemática. Portanto, quem trabalha com Lógica Matemática normalmente faz uso de Álgebra, Topologia, etc., e resultados como o Teorema de Representação de Stone são exemplos disso.

Em segundo lugar, nós não estudaremos Lógica pura e simplesmente. Neste capítulo, nosso objetivo é entender como o cálculo proposicional se relaciona com Álgebra. Ou seja, queremos estudar propriedades *sobre* lógica clássica. Portanto, o mais correto seria dizer que vamos estudar *Metalógica.* Na impossibilidade de dar uma resposta satisfatória sobre o que é Lógica em geral, pois isso fugiria do nosso escopo, vamos discutir um pouco as diferenças entre Metalógica e Lógica na esperança de esclarecer minimamente alguns aspectos relevantes para o que segue.

Comecemos com estas convenções: *uma lógica* é uma estrutura matemática, um sistema, no qual existe uma gramática formal e uma maneira de derivar certas sentenças a partir de outras (a sintaxe) e, possivelmente, uma maneira de interpretar sentenças (a semântica). Lógica com ‘L’ maiúsculo, convencionamos, é a área onde se estudam certas lógicas particulares e propriedades gerais sobre lógicas.

A Metalógica é a subárea da Lógica que se preocupa com as propriedades gerais de sistemas lógicos. Existem várias abordagens e tradições diferentes quando se pretende dizer que tipo de estrutura matemática uma lógica é, ou qual a forma certa, pertinente, adequada, ou frutífera, de estudar essas propriedades gerais sobre lógicas.

Mais explicitamente, na próxima seção, após introduzirmos qual o alfabeto básico do cálculo proposicional, teremos uma maneira de formular sentenças, ou seja, uma gramática. Após escolhermos certos axiomas para o cálculo proposicional e uma regra de inferência, outras duas noções importantes serão introduzidas: *uma noção de consequência sintática*, $\vdash$, que permitirá formalizar a noção de *prova*, e *uma noção de consequência semântica*, $\models$, que permitirá formalizar a noção de *verdade*. A partir disso, apresentaremos a noção de teoria proposicional e estudar como elas se relacionam com álgebras de Boole. Teorias proposicionais, e portanto o cálculo proposicional, assim como álgebras de Boole, constituirão os objetos de estudo.

3.2 LÓGICA PROPOSICIONAL

Continuamos, nesta seção, a apresentação da lógica proposicional clássica que começamos no final da subseção sobre álgebras livres e gramática formal. Todas as convenções feitas na seção sobre Álgebra Universal serão retomadas e, portanto, recomendamos que os leitores recorram àquela seção conforme for necessário para o entendimento do que segue.

Definição 3.2.1. Seja (Ω, ar) um tipo de álgebra em que $\Omega = \{\vee, \wedge, \neg, \bot, \top\}$, os símbolos $\vee$ e $\wedge$ têm aridade 2, o símbolo $\neg$ tem aridade 1 e, por fim, $\bot$ e $\top$ são duas constantes. Qualquer Ω-álgebra é dita ser uma **álgebra sentencial**.

Definição 3.2.2. Sejam Σ um conjunto no máximo enumerável e (Ω, ar) o tipo de álgebras sentenciais. Definimos a **álgebra sentencial** sobre Σ como a Ω-álgebra livre sobre Σ e a denotamos por $\mathrm{Sent}(\Sigma)$. Neste contexto, os elementos de Σ são chamados de **sentenças atômicas** e os denotamos com as letras p, q e r (indexando pelos inteiros positivos se necessário):

$$p, p_1, p_2, \ldots, q, q_1, q_2 \ldots, r, r_1, r_2, \ldots$$

Os elementos de $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ são chamados de **Σ-sentenças** e utilizamos letras gregas minúsculas (α, β, γ, etc.) para os denotar.

Lembramos que, na construção das álgebras livres, acrescentamos o conjunto $\{(,)\}$ dos símbolos de parênteses. Além disso, da forma que definimos as álgebras sentenciais, seus elementos são escritos com os símbolos de aridade positiva sempre na esquerda e o que vem em seguida é envolto em parênteses. Para tornarmos a leitura mais fluida, convencionamos, dadas $\alpha, \beta \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$, que

$$(\alpha \vee \beta) := \vee(\alpha\beta), \qquad (\alpha \wedge \beta) := \wedge(\alpha\beta) \qquad \text{e} \qquad (\neg\alpha) := \neg(\alpha).$$

Uma uma maneira equivalente de apresentar as álgebras sentenciais através de uma definição *indutiva* é: o conjunto $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ de Σ-sentenças é o menor conjunto de *strings* sobre o alfabeto definido como a união disjunta do conjunto $\{\vee, \wedge, \neg, \perp, \top\}$, do conjunto Σ e do conjunto $\{(,)\}$ satisfazendo:

S1. $\perp, \top \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$ e $\Sigma \subseteq \mathrm{Sent}(\Sigma)$.

S2. Se $\alpha \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$, então $(\neg\alpha) \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$.

S3. Se $\alpha, \beta \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$, então $(\alpha \vee \beta) \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$.

S4. Se $\alpha, \beta \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$, então $(\alpha \wedge \beta) \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$.

S5. Nada mais é uma Σ-sentença.

Os símbolos $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ são chamados de *conectivos lógicos*. Além destes, podemos introduzir novos a partir de abreviações bastante convenientes. Dadas duas sentenças α e β de uma álgebra sentencial qualquer, definimos:

$$(\alpha \to \beta) := (\neg\alpha) \vee \beta \qquad \text{e} \qquad (\alpha \leftrightarrow \beta) := ((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)).$$

Doravante, sempre que não houver ambiguidade, eliminaremos os parênteses. Por exemplo, escreveremos $\neg\alpha$ e $\neg\alpha \vee \beta$ no lugar, respectivamente, de $(\neg\alpha)$ e $(\neg\alpha) \vee \beta$. Quando alguns parenteses estiverem ocultados, convencionamos que a ordem de precedência na leitura é: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ e, por último, $\leftrightarrow$. Desse modo, podemos escrever, sem gerar confusão, $\neg\alpha \to \beta \vee \gamma$ no lugar de $(\neg\alpha) \to (\beta \vee \gamma)$.

No contexto lógico, os conectivos são lidos de forma *usual*. Por completeza do texto, mencionamos: $\neg\alpha$ é lido "não-α", $\alpha \wedge \beta$ é lido "α e β", $\alpha \vee \beta$ é lido "α ou β", $\alpha \to \beta$ é lido "α implica β" (ou "se α, então β") e, finalmente, $\alpha \leftrightarrow \beta$ é lido "α é equivalente a β" (ou "α se, e somente se, β").

3.2.1 Aspectos metalógicos do cálculo proposicional

Nesta subseção, fixamos um conjunto Σ e uma álgebra sentencial sobre ele. O **cálculo proposicional clássico** é constituído de uma álgebra sentencial $\mathrm{Sent}(\Sigma)$, uma *regra de inferência* e alguns *axiomas* [12, pág. 27]. Os axiomas do cálculo proposicional são, dadas sentenças α, β e γ, os seguintes:

A1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.

A2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.

A3. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$.

Além disso, queremos que a constante proposicional $\top$ represente qualquer *teorema* da lógica proposicional. Com este fim em mente, impomos que $\top$ seja equivalente ao *princípio de identidade*, isto é, $\top \leftrightarrow (\alpha \to \alpha)$, para toda sentença α. Adicionalmente, impomos $\bot \leftrightarrow \neg\top$. Finalmente, a única regra de inferência do cálculo proposicional é o *modus ponens*: se α e β são duas sentenças, então de α e $\alpha \to \beta$ podemos *concluir* β. Após definirmos a noção de *consequência sintática*, poderemos enunciar *modus ponens* de outro modo.

Definição 3.2.3. Sejam Γ um conjunto de sentenças e α uma sentença qualquer. Uma **prova** de α a partir de Γ é uma lista finita de sentenças $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tal que $\alpha_n = \alpha$ e cada α_k: é um axioma, pertence a Γ ou foi obtido de α_i e α_j, com $i, j < k$, a partir de *modus ponens*. Dizemos que α é **consequência sintática** de Γ, e denotamos isto por $\Gamma \vdash \alpha$, se existe uma prova de α a partir de Γ. Ainda, α é um **teorema** se há uma prova de α a partir do conjunto vazio e denotamos isto por $\vdash \alpha$.

Na notação $\Gamma \vdash \alpha$, cada elemento $\gamma \in \Gamma$ é usualmente chamado de *premissa* e α de *conclusão*. Ainda, se $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, denotamos uma prova $\Gamma \vdash \alpha$ simplesmente por $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$. Em concordância com esta notação, $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ significa, por exemplo, $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. Por fim, agora *modus ponens* pode ser formulado usando a noção de consequência sintática: $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$ para quaisquer duas sentenças α e β.

Exemplo 3.2.4. Para cada sentença α, $\vdash \alpha \to \alpha$. A prova é:

1. $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$ (instância de A2)
2. $\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ (instância de A1)
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ (*modus ponens* em 1 e 2)
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$ (instância de A1)
5. $\alpha \to \alpha$ (*modus ponens* em 3 e 4)

Existe um *metateorema* chamado *Teorema da Dedução* que diz o seguinte: dado um conjunto de sentenças Γ (possivelmente vazio) e sentenças α e β quaisquer,

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \quad \text{se, e somente se,} \quad \Gamma \vdash \alpha \to \beta.$$

Usando o Teorema da Dedução, podemos obter justificativa para a afirmação do exemplo anterior. Perceba que da definição de prova, toda lista com uma só sentença como premissa já é uma prova da sentença a partir dela, ou seja, $\alpha \vdash \alpha$. Daí, pelo Teorema da Dedução, obtemos $\vdash \alpha \to \alpha$. Claro que não precisaríamos de tal metateorema neste caso “trivial”, porém ele é muito útil em muitos outros cenários. Mais sobre o Teorema da Dedução em [12, pág. 28-40].

É comum, na literatura, chamar '$\Gamma \vdash \alpha$' de *sequente*. No exemplo anterior, a prova formal que realizamos gerou o sequente '$\vdash \alpha \to \alpha$', uma consequência sintática que agora pode ser utilizada em outras provas. Mais geralmente, todo sequente obtido pode ser usado como "regra de inferência derivada".

Vamos introduzir uma relação entre sequentes, em forma de barra horizontal, que permite enunciar *metaregras* de inferência derivadas de modo organizado. Acima da barra ficam os "sequentes-premissa" e abaixo fica o "sequente-conclusão". Caso a o sequente que esteja embaixo também implique o de cima, a barra horizontal é duplicada, indicando este fato. O Teorema da Dedução fica, então, assim:

TD:
$$\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\overline{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}}$$

Com um certo esforço, é possível obter muitos outros sequentes e muitas outras metaregras bastante úteis. Por exemplo, estas são algumas:

$\wedge$-eliminação:
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \beta}$$

$\wedge$-introdução:
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Delta \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \wedge \beta}$$

$\vee$-eliminação:
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \qquad \Delta, \alpha \vdash \gamma \qquad \Theta, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, \Delta, \Theta \vdash \gamma}$$

$\vee$-introdução:
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$$

MPG:
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \qquad \Delta \vdash \alpha}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}$$

RAG:
$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta}{\Gamma \vdash \neg\alpha}$$

DN:
$$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\alpha}{\overline{\Gamma \vdash \alpha}}$$

Acima, MPG abrevia "*modus ponens* generalizado", RAG abrevia "*reductio ad absurdum* generalizado" e, por fim, DN abrevia "dupla negação".

Exemplo 3.2.5. O conjunto $2 = \{0, 1\}$ admite estrutura de álgebra sentencial. Basta interpretarmos a constante $\bot$ como 0, a constante $\top$ como 1 e interpretarmos os símbolos de aridade positiva em funções, denotadas pelos próprios símbolos, respeitando as tabelas de operações da álgebra de Boole de dois elementos.

Definição 3.2.6. Uma função $\nu\colon \mathrm{Sent}(\Sigma) \to 2$ é chamada de **Σ-valoração** se for um homomorfismo *sentencial*, ou seja, um homomorfismo entre álgebras sentenciais.

Definição 3.2.7. Sejam ν uma Σ-valoração e α uma sentença. Dizemos que ν é **modelo** da sentença α, ou que α é **verdadeira** em ν, e denotamos isto por $\nu \models \alpha$, quando é o caso que $\nu(\alpha) = 1$. Também dizemos que α é **falsa** em ν se $\nu(\alpha) = 0$.

Definição 3.2.8. Sejam ν uma Σ-valoração e Γ um conjunto de sentenças. Dizemos que ν é **modelo** de Γ, e denotamos $\nu \models \Gamma$, quando, para todo $\gamma \in \Gamma$, é o caso que $\nu \models \gamma$. Ainda, dizemos que Γ é **satisfatível** se tem pelo menos um modelo.

Definição 3.2.9. Sejam Γ um conjunto de sentenças e α uma sentença qualquer. Dizemos que α é uma **consequência semântica** de Γ, e denotamos isto por $\Gamma \models \alpha$, quando todo modelo de Γ é também modelo de α. Ainda, α é uma **tautologia** se é consequência semântica do conjunto vazio e denotamos isto por $\models \alpha$.

Uma questão importante que resta respondermos é: como que a consequência sintática e a consequência semântica se relacionam? Em verdade, toda tautologia é um teorema e todo teorema é uma tautologia. Mais geralmente,

Teorema 3.2.10 (Adequação)**.** *$\Gamma \vdash \alpha$ se, e somente se, $\Gamma \models \alpha$.*

Este resultado é constituído de dois teoremas de *adequação*: a consequência sintática implica em consequência semântica, *correção* do cálculo proposicional, e consequência semântica implica em consequência sintática, *completude* do cálculo proposicional.

Resumidamente, a correção garante que o cálculo proposicional, com a noção de prova escolhida, satisfaz o mínimo: aquilo que é demonstrado também é verdadeiro. A prova pode ser vista e adaptada a partir de [2, pág. 39]. Já a completude afirma que o sistema atinge todas as verdades a partir do sistema de prova escolhido. Há uma prova disto em [8, pág. 79] usando o Teorema de Lindenbaum–Tarski.

3.2.2 Teorias proposicionais e traduções; a categoria **Th**

Nesta seção, apresentaremos as teorias proposicionais e os morfismos entre elas, isto é, a categoria das teorias. Agora, será importante prestar atenção nos conjuntos de sentenças atômicas, pois haverá mais de uma álgebra sentencial neste contexto. Entretanto, como discutiremos sobre álgebras sentenciais, ficará implícito que os conjuntos de sentenças atômicas são no máximo enumerável.

Definição 3.2.11. Seja Σ um conjunto. Uma **Σ-teoria proposicional** é um par (T, Σ) em que $T \subseteq \mathrm{Sent}(\Sigma)$. Doravante, diremos simplesmente que T é uma Σ-teoria.

Com o objetivo de falarmos de traduções entre teorias proposicionais, que serão os morfismos na categoria das teorias, precisamos falar de reconstruções. A partir deste ponto, os resultados a respeito de extensão homomórfica única sobre álgebras livres passa a ser fundamental.

Definição 3.2.12. Uma função $f\colon \mathrm{Sent}(\Sigma) \to \mathrm{Sent}(\Sigma')$ é dita uma **reconstrução** de Σ para Σ' se for um homomorfismo sentencial.

Como $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ é livremente gerada por Σ, qualquer função definida de Σ em uma álgebra sentencial se estende de forma única para $\mathrm{Sent}(\Sigma)$. Portanto, é mais cômodo definir reconstruções das sentenças atômicas Σ nas sentenças atômicas Σ', vendo como uma função de Σ em $\mathrm{Sent}(\Sigma)$. Daí, existe uma única reconstrução que estende essa função.

Lema 3.2.13. *Seja* $f\colon \mathrm{Sent}(\Sigma) \to \mathrm{Sent}(\Sigma')$ *uma reconstrução. Então,*

$$f(\alpha \to \beta) = f(\alpha) \to f(\beta)$$

para quaisquer sentenças α *e* β*.*

A demonstração do lema segue da definição de reconstrução desabreviando o conectivo $\to$. Com o lema em mãos, podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 3.2.14. *Seja* $f\colon \mathrm{Sent}(\Sigma) \to \mathrm{Sent}(\Sigma')$ *uma reconstrução. Então, valem:*

(a) *Para toda sentença* β*, se* $\vdash \beta$*, então* $\vdash f(\beta)$*.*

(b) *Para quaisquer sentenças* α *e* β*, se* $\alpha \vdash \beta$*, então* $f(\alpha) \vdash f(\beta)$*.*

Demonstração. Vamos provar (a). A letra (b) segue de (a) usando TD.

(a) Suponhamos que $\vdash \beta$, ou seja, existe uma prova β a partir do conjunto vazio. Em outras palavras, existe uma lista finita de sentenças $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tal que $\beta_n = \beta$ e cada β_k é um axioma ou foi obtido de β_i e β_j, com $i, j < k$, a partir de *modus ponens*. Vamos provar, por indução finita, que $\vdash f(\beta_i)$ para todo $i \leq n$.

(caso base) Para $i = 1$, a única possibilidade é que β_1 seja um axioma. Por exemplo, se β_1 for uma instanciação de A1, então existem sentenças α e γ tais que $\beta_1 = (\alpha \to (\gamma \to \alpha))$. Daí,

$$f(\beta_1) = f(\alpha \to (\gamma \to \alpha)) = f(\alpha) \to (f(\gamma) \to f(\alpha)),$$

que também é uma instância de A1. Analogamente, para os outros axiomas, $f(\beta_1)$ é sempre uma instanciação do mesmo axioma. Em todo caso, $\vdash f(\beta_1)$.

(passo indutivo) Agora, suponhamos que $\vdash f(\beta_i)$ para todo $i < k$. Se β_k for uma instância de um axioma, então argumentando da mesma forma que acima, obtemos que $\vdash f(\beta_k)$. A outra possibilidade é que β_k seja obtido de β_i e β_j, com $i, j < k$, a partir de *modus ponens*. Sem perda de generalidade, supomos que β_j é da forma $\beta_i \to \beta_k$. Logo, $\vdash f(\beta_i)$ e $\vdash f(\beta_j) = f(\beta_i) \to f(\beta_k)$. Por *modus ponens*, $\vdash f(\beta_k)$. Portanto, $\vdash f(\beta_n) = f(\beta)$. ☐

Definição 3.2.15. Sejam T uma Σ-teoria e T' uma Σ'-teoria. Dizemos que uma reconstrução $f\colon \mathrm{Sent}(\Sigma) \to \mathrm{Sent}(\Sigma')$ é uma **tradução** de T em T', e denotamos isto por $f\colon T \rightsquigarrow T'$, quando $T \vdash \alpha$ implica $T' \vdash f(\alpha)$, para toda sentença α. Seja $g\colon T \rightsquigarrow T'$ outra tradução. Dizemos que f e g são traduções **sinônimas**, e denotamos isto por $f \simeq g$, quando $T' \vdash f(p) \leftrightarrow g(p)$, para todo $p \in \Sigma$.

Observamos que se f e g são sinônimas, mostra-se que $T' \vdash f(\alpha) \leftrightarrow g(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$. Além disso, dada T uma Σ-teoria, a tradução identidade de T, denotada por $\mathrm{id}_T\colon T \rightsquigarrow T$, é definida como a reconstrução identidade em Σ. Para definirmos a composição de traduções, precisamos de um lema.

Lema 3.2.16. *Sejam f e f' traduções de T em T' e g e g' traduções de T' em T''. Assim, se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, então $g \circ f \simeq g' \circ f'$.*

Demonstração. Seja $p \in \Sigma$. Como $f \simeq f'$, temos $T' \vdash f(p) \leftrightarrow f'(p)$. Como g é tradução, então $T'' \vdash g(f(p) \leftrightarrow f'(p))$. Ainda, como g é reconstrução, então

$$g(f(p) \leftrightarrow f'(p)) = g(f(p)) \leftrightarrow g(f'(p)),$$

ou seja, $T'' \vdash g(f(p)) \leftrightarrow g(f'(p))$. Como $g \simeq g'$, temos $T'' \vdash g(f'(p)) \leftrightarrow g'(f'(p))$. Usando que $T'' \vdash g(f'(p)) \leftrightarrow g(f'(p))$, segue que $T'' \vdash g(f(p)) \leftrightarrow g'(f'(p))$, o que mostra que $g \circ f \simeq g' \circ f'$, como queríamos. □

Segue das propriedades do conectivo $\leftrightarrow$ que a relação $\simeq$ é de equivalência. O lema garante que a composição das classes está bem-definida e, portanto, podemos compor a nível de representantes sem nos preocuparmos. Já sabemos que funções identidades são traduções. Falta verificar que composição de tradução é tradução.

Lema 3.2.17. *Se $f\colon T \rightsquigarrow T'$ e $g\colon T' \rightsquigarrow T''$ são traduções, então a função composta $g \circ f\colon \mathrm{Sent}(\Sigma) \to \mathrm{Sent}(\Sigma'')$ é tradução, em que Σ é o conjunto de sentenças atômicas de T e Σ'' é o conjunto de sentenças atômicas de T''.*

Demonstração. Primeiro, observamos que composição de reconstrução é reconstrução por ser composição de homomorfismo. Agora, seja α uma sentença e suponhamos que $T \vdash \alpha$. Como f é tradução, temos $T' \vdash f(\alpha)$. Como g é tradução, temos $T'' \vdash g(f(\alpha))$, como queríamos. □

Definição 3.2.18. Sejam $f\colon T \rightsquigarrow T'$ e $g\colon T' \rightsquigarrow T''$. Definimos a tradução composta $g \circ f\colon T \rightsquigarrow T''$ como sendo a reconstrução $g \circ f\colon \mathrm{Sent}(\Sigma) \to \mathrm{Sent}(\Sigma'')$, em que Σ é o conjunto de sentenças atômicas de T e Σ'' é o conjunto de sentenças atômicas de T''.

Assim, segue dessa discussão que as teorias proposicionais e as traduções entre teorias proposicionais formam uma categoria.

Definição 3.2.19. A categoria cujos objetos são as teorias proposicionais e os morfismos são traduções entre teorias proposicionais é denotada por $\mathbf{Th}$. Nesta categoria, a *identidade* de setas é dada pela relação de sinonímia previamente definida.

Definição 3.2.20. Sejam T uma Σ-teoria e T' uma Σ'-teoria. Dizemos que T é **homotopicamente equivalente**, ou simplesmente **equivalente**, a T' quando existem traduções $f\colon T \rightsquigarrow T'$ e $g\colon T' \rightsquigarrow T$ tais que

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_T \qquad \text{e} \qquad f \circ g \simeq \mathrm{id}_{T'},$$

e denotamos este fato por $T \cong_{\mathbf{Th}} T'$ ou, simplesmente, $T \cong T'$.

3.3 LÓGICA ≅ ÁLGEBRA

Chegamos finalmente ao objetivo principal deste capítulo: provar que teorias proposicionais estão em correspondência biunívoca com as álgebras de Boole e que essa correspondência é categórica em um sentido que formalizaremos mais adiante.

Primeiro, observamos algo sobre a construção de álgebra sentencial. A maneira como vimos o conjunto $2 = \{0, 1\}$ como álgebra sentencial foi basicamente munindo-o com estrutura de álgebra de Boole[1]. Mais ainda, de acordo com nossa construção de tudo até aqui, álgebras de Boole e álgebras sentenciais tem mesmo tipo de álgebra. Isto significa que todo o formalismo de Álgebra Universal desenvolvido no que diz respeito à extensão de funções para homomorfismos vale ao relacionarmos álgebras de Boole e a linguagem da lógica proposicional.

Relembramos, convenientemente na notação do nosso contexto, que se Σ é um conjunto e B uma álgebra de Boole, então qualquer função $f\colon \Sigma \to B$ admite extensão homomórfica única $\overline{f}\colon \mathrm{Sent}(\Sigma) \to B$, ou seja,

- Se $p \in \Sigma$, então $\overline{f}(p) = f(p)$.
- $f(\bot) = 0$ e $f(\top) = 1$.
- Se $\alpha \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$, então $\overline{f}(\neg\alpha) = \neg\overline{f}(\alpha)$.
- Se $\alpha, \beta \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$, então

$$\overline{f}(\alpha \vee \beta) = \overline{f}(\alpha) \vee \overline{f}(\beta) \quad \text{e} \quad \overline{f}(\alpha \wedge \beta) = \overline{f}(\alpha) \wedge \overline{f}(\beta).$$

Notemos que há algo interessante acontecendo nestes itens acima. No lado esquerdo da igualdade, os símbolos $\neg, \vee$ e $\wedge$ denotam os conectivos lógicos, enquanto que, no lado direito, os mesmos símbolos denotam as operações da álgebra de Boole.

---

[1] Convidamos os leitores para voltarem nas seções respectivas e compararem os tipos de álgebra, os conjuntos Ω e as aridades, tanto das álgebras de Boole quanto das álgebras sentenciais.

Isto é uma feliz ambiguidade graças ao nosso esforço em aproximar os dois *reinos* e não causará, em princípio, nenhuma confusão.

Como podemos ver uma função (que comuta com a interpretação dos símbolos dos tipos de álgebras) entre álgebras sentenciais e álgebras de Boole tanto como homomorfismo de álgebra de Boole quanto como homomorfismo sentencial, falaremos apenas *homomorfismo*.

Definição 3.3.1. Sejam T uma Σ-teoria, B uma álgebra de Boole e $f\colon \mathrm{Sent}(\Sigma) \to B$ um homomorfismo. Dizemos que f é uma **interpretação** de T em B, e denotamos isto por $f\colon T \to B$, se para toda Σ-sentença α, $T \vdash \alpha$ implica $f(\alpha) = 1$. Caso valha também, para toda Σ-sentença α, que $f(\alpha) = 1$ implica $T \vdash \alpha$, dizemos que f é uma interpretação **conservativa**.

Lema 3.3.2. *Sejam T uma Σ-teoria e ν uma Σ-valoração. Se ν é modelo de T, então ν é uma interpretação de T em 2.*

Demonstração. Por definição, ν é um homomorfismo de álgebras, e portanto basta provar que, sempre que $T \vdash \alpha$ tem-se que $\nu(\alpha) = 1$. De fato, é fácil verificar que $\nu(\beta) = 1$ para qualquer axioma β, e que ν é preservada por *modus ponens*, no sentido de que se $\nu(\beta_1 \to \beta_2) = 1$ e $\nu(\beta_1) = 1$ então $\nu(\beta_2) = 1$ (isso segue do fato de que $\beta_1 \wedge (\beta_1 \to \beta_2) = \beta_1 \wedge \beta_2 \leq \beta_2$).

Portanto, se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ é uma prova de α a partir de T, então indutivamente obtemos $\nu(\alpha_i) = 1$ para todo $i \leq n$; em particular, $\nu(\alpha) = 1$. □

Lema 3.3.3. *Sejam T uma Σ-teoria, B uma álgebra de Boole e $f\colon T \to B$ uma interpretação de T em B. Então, são equivalentes:*

(i) *f é uma interpretação conservativa.*

(ii) *Para todas $\alpha, \beta \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$, se $f(\alpha) = f(\beta)$, então $T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Suponhamos que f é conservativa. Sejam $\alpha, \beta \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$ tais que $f(\alpha) = f(\beta)$. Similarmente ao contexto de álgebras de Boole, $f(\alpha) = f(\beta)$ equivale a $f(\alpha) \leftrightarrow f(\beta) = 1$. Daí, como $f(\alpha) \leftrightarrow f(\beta) = f(\alpha \leftrightarrow \beta)$ e f é conservativa, obtemos $T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Seja α uma sentença tal que $f(\alpha) = 1$. Como $T \vdash \alpha \vee \neg\alpha$, então, de f ser uma interpretação, $f(\alpha \vee \neg\alpha) = 1$. Logo, $f(\alpha) = f(\alpha \vee \neg\alpha)$. De (ii), obtemos que $T \vdash (\alpha \vee \neg\alpha) \leftrightarrow \alpha$. Logo, $T \vdash (\alpha \vee \neg\alpha) \to \alpha$ e, usando que $T \vdash \alpha \vee \neg\alpha$ e *modus ponens*, temos $T \vdash \alpha$. Portanto, f é conservativa. □

Lema 3.3.4. *Sejam T uma teoria e A e B duas álgebras de Boole. Se $f\colon T \to B$ é uma interpretação de T em B e $g\colon B \to A$ é um homomorfismo, então a composta $g \circ f\colon T \to A$ é uma interpretação de T em A.*

Demonstração. Seja α uma sentença. Suponhamos que $T \vdash \alpha$. Como f é uma interpretação, $f(\alpha) = 1$. Daí, já que g é um homomorfismo, $g(f(\alpha)) = g(1) = 1$. □

Lema 3.3.5. *Sejam T uma Σ-teoria, T' uma Σ'-teoria e B uma álgebra de Boole. Se $f\colon T \to B$ é uma interpretação de T em B e $g\colon T' \rightsquigarrow T$ é uma tradução de T' em T, então a composta $f \circ g\colon T' \to B$ é uma interpretação de T' em B.*

Demonstração. Seja α uma Σ'-sentença. Suponhamos que $T' \vdash \alpha$. De g ser uma tradução e de $T' \vdash \alpha$, temos $T \vdash g(\alpha)$. Como f é uma interpretação, $f(g(\alpha)) = 1$. □

Lema 3.3.6. *Sejam T uma Σ-teoria, T' uma Σ'-teoria e B uma álgebra de Boole. Para toda interpretação conservativa $m\colon T \to B$, se $f\colon T' \rightsquigarrow T$ e $g\colon T' \rightsquigarrow T$ são traduções tais que $m \circ f = m \circ g$, então $f \simeq g$.*

Demonstração. Seja α uma Σ'-sentença. Daí, $m(f(\alpha)) = m(g(\alpha))$. Como m é uma interpretação conservativa, $T \vdash f(\alpha) \leftrightarrow g(\alpha)$. Como α é arbitrária, $f \simeq g$. □

3.3.1 O funtor L: da Lógica para a Álgebra

Na sequência, faremos uma construção usando quocientes muito semelhante ao que fizemos para álgebras de Boole. Esta semelhança, apesar de sutilezas próprias do contexto, reside no fato de que os aspectos importantes por trás da construção do quociente estão, em ambos os casos, das álgebras de Boole e das álgebras sentenciais, baseadas na Álgebra Universal.

Definição 3.3.7. Seja T uma Σ-teoria e $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ a álgebra sentencial sobre Σ. Definimos a relação $\equiv_T$, dita **relação induzida** por T em $\mathrm{Sent}(\Sigma)$, por

$$\alpha \equiv_T \beta \quad \text{se, e somente se,} \quad T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta,$$

para todas as sentenças $\alpha, \beta \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$.

Lema 3.3.8. *A relação $\equiv_T$ sobre sentenças de Σ é uma congruência, i.e., é uma relação de equivalência e, se $\alpha \equiv_T \alpha'$ e $\beta \equiv_T \beta'$, então*

$$\alpha \vee \beta \equiv_T \alpha' \vee \beta', \qquad \alpha \wedge \beta \equiv_T \alpha' \wedge \beta' \qquad e \qquad \neg\alpha \equiv_T \neg\alpha'.$$

Demonstração. Primeiro, provaremos que é uma relação de equivalência.

(reflexividade) Como $T \vdash \alpha \to \alpha$, de $\wedge$-introdução, obtemos $T \vdash \alpha \leftrightarrow \alpha$.

(simetria) Segue das leis de $\wedge$-eliminação e $\wedge$-introdução.

(transitividade) Suponhamos que $T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ e $T \vdash \beta \leftrightarrow \gamma$. Pela $\wedge$-eliminação, $T \vdash \alpha \to \beta$ e $T \vdash \beta \to \gamma$. Pelo Teorema da Dedução, temos $T, \alpha \vdash \beta$. Fortificando o antecedente de um sequente não muda a conclusão. Logo, $T, \alpha \vdash \beta \to \gamma$. De MPG, $T, \alpha \vdash \gamma$. Pelo Teorema da Dedução, $T \vdash \alpha \to \gamma$. Similarmente, $T \vdash \gamma \to \alpha$.

Vamos mostrar que a relação preserva $\wedge$. Para $\vee$ e $\neg$ é similar. Suponhamos que $T \vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'$ e $T \vdash \beta \leftrightarrow \beta'$. Pela $\wedge$-eliminação, $T, \alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ e $T \vdash \alpha \to \alpha'$. Por MPG, $T, \alpha \wedge \beta \vdash \alpha'$. Similarmente, $T, \alpha \wedge \beta \vdash \beta'$. Pela $\wedge$-introdução, $T, \alpha \wedge\vdash \alpha' \wedge \alpha'$. Pelo Teorema da Dedução, $T \vdash (\alpha \wedge \beta) \to (\alpha' \wedge \beta')$. Repetindo da mesma forma, obtemos $T \vdash (\alpha' \wedge \beta') \to (\alpha \wedge \beta)$. Pela $\wedge$-introdução, $T \vdash (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\alpha' \wedge \beta')$. □

Dada T uma Σ-teoria e uma Σ-sentença α, denotamos a classe de equivalência de α, na relação $\equiv_T$ entre Σ-sentenças, por

$$[\alpha]_T := \{\gamma \in \mathrm{Sent}(\Sigma) \mid \gamma \equiv_T \alpha\}$$

e o conjunto quociente, de todas as classes de equivalência, é denotado por $L(T)$. Assim como no contexto de álgebras de Boole, o cálculo proposicional da teoria T induz no conjunto quociente $L(T)$ uma estrutura de álgebra de Boole. No que segue, escrevemos $[\alpha]$ no lugar de $[\alpha]_T$. Em concordância, escrevemos $\equiv$ no lugar de $\equiv_T$.

Proposição 3.3.9. *O conjunto quociente $L(T)$ com as operações definidas por*

$$[\alpha] \vee [\beta] := [\alpha \vee \beta], \quad [\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta] \quad e \quad \neg[\alpha] := [\neg\alpha],$$

e constantes por

$$0_{L(T)} := [\bot] \quad e \quad 1_{L(T)} := [\top],$$

é uma álgebra de Boole.

Demonstração. As operações estão bem-definidas já que $\equiv$ é uma congruência. Como no quocientes de álgebras de Boole, os axiomas de álgebras de Boole são satisfeitos pela maneira como as operações foram definidas em $L(T)$ e segue de propriedades básicas do cálculo proposicional. Por exemplo, dadas duas Σ-sentenças α e β,

$$\begin{aligned}
[\alpha] \vee [\beta] &= [\alpha \vee \beta] \\
&= \{\gamma \mid \gamma \equiv (\alpha \vee \beta)\} \\
&= \{\gamma \mid T \vdash \gamma \leftrightarrow (\alpha \vee \beta)\} \\
&= \{\gamma \mid T \vdash \gamma \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)\} \\
&= \{\gamma \mid \gamma \equiv (\beta \vee \alpha)\} \\
&= [\beta \vee \alpha] = [\beta] \vee [\alpha],
\end{aligned}$$

ou seja, a operação $\vee$ em $L(T)$ é comutativa. Observamos que, pela maneira como as constantes $\bot$ e $\top$ foram introduzidas, temos $0_{L(T)} \neq 1_{L(T)}$. □

Definição 3.3.10. Chamamos $L(T)$, visto como a álgebra de Boole da proposição acima, de **álgebra de Lindenbaum–Tarski**. Neste caso, o *mapa quociente*

$$q_T \colon T \to L(T), \quad \alpha \mapsto [\alpha],$$

é a única extensão homomórfica para a álgebra Sent(Σ) da função $q_T \colon \Sigma \to L(T)$ definida, para todo $p \in \Sigma$, por $q_T(p) = [p]$.

Lema 3.3.11. *O mapa $q_T \colon T \to L(T)$ é uma interpretação conservativa e sobrejetiva.*

Demonstração. A sobrejetividade sai diretamente de como q_T é definida e estendida. Vamos provar que é uma interpretação conservativa. Seja α uma sentença. Daí,

$$\begin{aligned} T \vdash \alpha \quad &\Leftrightarrow \quad T \vdash \top \leftrightarrow \alpha \\ &\Leftrightarrow \quad q_T(\alpha) = [\alpha] = [\top] = 1_{L(T)}. \end{aligned}$$ □

Proposição 3.3.12. *Seja T uma Σ-teoria. Então, para toda álgebra de Boole B e interpretação $f \colon T \to B$, existe um único homomorfismo $\overline{f} \colon L(T) \to B$ que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "q_T"] \arrow[dr, "f"'] & L(T) \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

comutar, ou seja, $\overline{f} \circ q_T = f$.

Demonstração. Sejam T uma Σ-teoria, B uma álgebra de Boole e $f \colon T \to B$ uma interpretação. Então, a álgebra de Lindenbaum–Tarski $L(T)$ e o mapa q_T recém considerados garantem parte do resultado. Em seguida, vejamos que a regra

$$\overline{f} \colon L(T) \to B, \quad [\alpha] \mapsto f(\alpha),$$

dá origem a uma função bem-definida. Com efeito, se $[\alpha] = [\beta]$, então $\alpha \equiv \beta$, ou ainda, $T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$. Como f é uma interpretação, $f(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$. Logo, $f(\alpha) = f(\beta)$.

A checagem de que $\overline{f}$ é um homomorfismo é rotineira. Finalmente, dada uma Σ-sentença α arbitrária, $f(\alpha) = \overline{f}([\alpha]) = (\overline{f} \circ q_T)(\alpha)$, o que prova que o diagrama comuta. Seja $g \colon L(T) \to B$ uma função tal que $g \circ q_T = f$. Logo, dado $[\alpha] \in L(T)$, $g([\alpha]) = f(\alpha) = \overline{f}([\alpha])$. Daí, da sobrejetividade de q_T, temos $g = \overline{f}$. □

Nossa jornada está prestes a entrar num momento de *clímax*. Há vários indícios de que existe uma relação bastante profunda entre álgebras de Boole e teorias. Uma das formas matemáticas, modernamente, de enunciar esse fato se relevando aos nossos olhos é que há uma relação *funtorial* entre as categorias envolvidas.

Em Teoria de Categorias, mostrar que uma correspondência é funtorial equivale a *começar* a mostrar que uma parte de um *reino* matemático está conectada com uma parte de um outro *reino* matemático; um passo para se encontrar uma *ponte*.

A adjetivação "funtorial" é derivada da noção de *funtor*. Um funtor $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ entre categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ é constituído por dois mapas, um a nível de objetos e um a nível de setas. Entretanto, ambos os mapas são denotados por F, o que geralmente não causa confusão. O mapeamento entre objetos não precisa satisfazer nada específico. Se X é um objeto em $\mathbf{C}$, denotamos o objeto mapeado em $\mathbf{D}$ por $F(X)$. A característica essencial de um funtor está na exigência *homomórfica* sobre o mapa entre setas. Mais precisamente, F ser **funtor covariante** significa que

- F preserva identidades, i.e., para todo objeto X em $\mathbf{C}$, $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.
- Se f e g são setas entre certos objetos em $\mathbf{C}$ tais que faz sentido compor $g \circ f$, então F preserva a composição, i.e., $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Quando o mapa "inverte a ordem da composição", ou seja, $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$, dizemos que F é um **funtor contravariante**. Voltemos agora ao nosso estudo de teorias proposicionais e a relação delas com álgebras de Boole.

Motivados, nosso objetivo agora é tentar encontrar um funtor de uma categoria para a outra. Notemos que a construção que gera a álgebra de Lindenbaum–Tarski começa com uma teoria proposicional dada e termina com uma álgebra de Boole. Portanto, vamos tentar obter um funtor L da categoria $\mathbf{Th}$ para a categoria $\mathbf{Boole}$.

O candidato a funtor, L, leva cada teoria T na álgebra de Boole $L(T)$. Já conseguimos um mapeamento entre objetos. Vamos tentar obter um mapeamento entre setas. O funtor tem que levar traduções $f\colon T \rightsquigarrow T'$ em homomorfismos $L(f)\colon L(T) \to L(T')$. Com este fim em mente, estudaremos o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, rightsquigarrow, "f"] \arrow[d, "q_T"'] & T' \arrow[d, "q_{T'}"] \\
L(T) \arrow[r, dashed, "L(f)"] & L(T')
\end{tikzcd}$$

Notemos que como $q_{T'} \circ f$ é uma interpretação de T em $L(T')$, a Proposição 3.3.12 nos permite afirmar que existe um único homomorfismo $L(f)\colon L(T) \to L(T')$ tal que $L(f) \circ q_T = q_{T'} \circ f$, ou seja, que para toda Σ-sentença α,

$$L(f)([\alpha]) = L(f)(q_T(\alpha)) = q_{T'}(f(\alpha)) = [f(\alpha)].$$

A identificação de setas em $\mathbf{Th}$ é feita a partir de uma noção ligeiramente diferente do critério conjuntista de identidade de funções usual. Por isso, falta checar se o mapeamento entre setas está bem-definido, ou seja, se dadas duas traduções f e g tais que $f \simeq g$ (sinônimas), temos $L(f) = L(g)$. Com efeito, seja α uma Σ-sentença arbitrária. Segue de $f \simeq g$ que $T' \vdash f(\alpha) \leftrightarrow g(\alpha)$. Como $q_{T'}$ é uma interpretação de T' em $L(T')$, temos que $q_{T'}(f(\alpha) \leftrightarrow g(\alpha)) = 1$. Equivalentemente, $q_{T'}(f(\alpha)) = q_{T'}(g(\alpha))$. Usando que o diagrama comuta e que α era arbitrária, $L(f) \circ q_T = L(g) \circ q_T$. Da sobrejetividade de q_T, concluímos que de fato $L(f) = L(g)$. Finalmente, a unicidade a respeito da comutação do diagrama garante que o mapa L entre setas em **Th** preserva identidades e composição.

Finalmente, *conquistamos* o funtor $L\colon \mathbf{Th} \to \mathbf{Boole}$ que leva uma teoria T em sua álgebra de Lindenbaum–Tarski associada e uma tradução $f\colon T \rightsquigarrow T'$ em um homomorfismo $L(f)$ definido, para toda Σ-sentença α, por $L(f)([\alpha]) = [f(\alpha)]$.

3.3.2 O funtor T: da Álgebra para a Lógica

Na subseção anterior, encontramos uma via de mão única do *mundo* das teorias proposicionais para o *mundo* das álgebras de Boole. Em seguida, faremos o caminho contrário, estudando alguns resultados basilares até chegarmos em um funtor T que vai da categoria das álgebras de Boole para a categoria das teorias.

Definição 3.3.13. Seja B uma álgebra de Boole. Tomamos o conjunto $\Sigma_B := B$ e a função $e_B\colon \mathrm{Sent}(\Sigma_B) \to B$ como a única extensão homomórfica da função identidade $\mathrm{id}_B\colon \Sigma_B \to B$ ao conjunto $\mathrm{Sent}(\Sigma_B)$. Assim, definimos a **Σ_B-teoria T_B induzida** por B como o par (T_B, Σ_B) em que $\Sigma_B = B$ e T_B é definido *indiretamente* por

$$T_B \vdash \alpha \quad \text{se, e somente se,} \quad e_B(\alpha) = 1$$

Pelas definições que fizemos, obtemos que a função $e_B\colon \mathrm{Sent}(\Sigma_B) \to B$ é uma interpretação conservativa diretamente.

Lema 3.3.14. *O mapa $e_B\colon T_B \to B$ é uma interpretação conservativa.*

Proposição 3.3.15. *Seja B uma álgebra de Boole. Então, para toda Σ-teoria T e interpretação $f\colon T \to B$, existe uma única tradução $\overline{f}\colon T \rightsquigarrow T_B$ que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
T_B \arrow[r, "e_B"] & B \\
T \arrow[u, dashed, "\overline{f}"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

comutar, ou seja, $e_B \circ \overline{f} = f$.

Demonstração. Sejam T uma Σ-teoria e $f\colon T \to B$ uma interpretação. Então f é uma função de $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ em Σ_B. Tomamos a inclusão $i_{\Sigma_B}\colon \Sigma_B \to \mathrm{Sent}(\Sigma_B)$ e definimos $\overline{f} = f \circ i_{\Sigma_B}\colon \mathrm{Sent}(\Sigma) \to \mathrm{Sent}(\Sigma_B)$. Vemos i_{Σ_B} como a identidade em B, correstringindo o domínio. Daí, podemos inverter a seta, a qual correstrita coincide em B com e_B. Assim, obtemos que o diagrama comuta, $e_B \circ \overline{f} = f$.

Como $\Sigma_B = B$, a função f pode ser vista como uma reconstrução de Σ em Σ_B. Enquanto vista como tal, a denotaremos por $\overline{f}\colon \Sigma \to \Sigma_B$. Como e_B é a identidade sobre $\Sigma_B = B$, trivialmente obtemos que o diagrama comuta, ou seja, $e_B \circ \overline{f} = f$.

De modo similar a proposição anterior, isto já garante a unicidade de $\overline{f}$ em relação a comutatividade do diagrama.

Vamos mostrar que $\overline{f}$ é uma tradução de T em T_B. Seja α uma Σ-sentença tal que $T \vdash \alpha$. Como f é uma interpretação, $f(\alpha) = 1$. Do diagrama, $e_B(\overline{f}(\alpha)) = 1$. Como e_B é conservativa, $T_B \vdash \overline{f}(\alpha)$. Portanto, $\overline{f}$ é uma tradução.

Falta mostrar a unicidade a menos de sinonímia. Seja $g \colon T \rightsquigarrow T_B$ outra tradução tal que $e_B \circ g = f$. Seja $p \in \Sigma_B = B$. Então, como e_B é interpretação, em particular é um homomorfismo. Daí,

$$e_B(g(p) \leftrightarrow \overline{f}(p)) = e_B(g(p)) \leftrightarrow e_B(\overline{f}(p)) = f(p) \leftrightarrow f(p) = 1,$$

e por definição $g(p) \leftrightarrow \overline{f}(p) \in T_B$. Daí, $T_B \vdash g(p) \leftrightarrow \overline{f}(p)$. Logo, $g \simeq \overline{f}$. □

Construímos um um mapeamento a nível de objetos entre as categorias que leva cada álgebra de Boole B em uma teoria T_B. Vamos procurar um mapeamento entre setas. Notemos que um homomorfismo $f \colon B \to A$ de álgebras de Boole induz uma tradução $T(f) \colon T_B \to T_A$. Para isso, consideremos o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
T_B \arrow[r, dashed, "T(f)"] \arrow[d, "e_B"'] & T_A \arrow[d, "e_A"] \\
B \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

Como $f \circ e_B$ é uma interpretação de T_B em A, a Proposição 3.3.15 nos permite afirmar que existe uma única tradução $T(f) \colon T_B \rightsquigarrow T_A$ tal que $e_A \circ T(f) = f \circ e_B$. A unicidade a respeito da comutação do diagrama garante que o mapa T preserva identidades e composição.

Desse modo, obtivemos um segundo funtor, T: **Boole** $\to$ **Th** que leva cada álgebra de Boole B em uma teoria T_B e cada homomorfismo $f \colon B \to A$ em uma tradução $T(f) \colon T_B \rightsquigarrow T_A$.

3.3.3 Teorema de Lindenbaum–Tarski

Agora que já entendemos o que são funtores e quais os funtores envolvidos nesse caso, voltemos a funtorialidade da relação entre **Th** e **Boole**. Vamos perseguir o seguinte resultado: queremos dizer que, em certo sentido, as categorias **Th** e **Boole** podem ser vistas como a mesma. Para isso, precisamos de um critério de identidade entre funtores, o que ficará mais claro no decorrer do texto. Este critério não pode ser nem forte demais, a ponto de não permitir dizer aquilo que gostaríamos de dizer, nem fraco demais a ponto de muitas categorias passarem a se identificar, contrariando nossa intuição de que isso não deveria acontecer em certos casos. O critério utilizado para tal na literatura se apoia na noção de *naturalidade*.

Dados dois funtores $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, uma **transformação natural** $\eta\colon F \Rightarrow G$ é uma família de mapas que satisfaz:

- Para cada objeto X em $\mathbf{C}$, há um morfismo $\eta_X\colon F(X) \to G(X)$ em $\mathbf{D}$.
- Para cada morfismo $f\colon X \to Y$ em $\mathbf{C}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f)$.

Se F e G forem contravariantes, a direção das setas horizontais são revertidas. Ainda, dizemos que uma transformação natural $\eta\colon F \Rightarrow G$ é um **isomorfismo natural** se para cada objeto X em $\mathbf{C}$, o morfismo associado η_X é um isomorfismo em $\mathbf{D}$. Se existe um isomorfismo natural entre F e G denotamos $F \cong G$.

Para enunciarmos a noção de *equivalência de categorias*, ainda precisamos de dois ingredientes. A *composição de funtores* F e G, denotada por $F \circ G$ ou FG, é simplesmente a composição *mapa-a-mapa*, ou seja, compomos o mapa a nível de objetos de F com o mapa a nível de objetos de G, respeitando a ordem dada pela notação, FG. Similarmente, fazemos a composição dos mapas a nível de morfismos. Por fim, o **funtor identidade** de uma categoria $\mathbf{C}$, usualmente denotado por $I_{\mathbf{C}}$, leva cada objeto em si mesmo e cada morfismo em si mesmo. Finalmente, dizemos que duas categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são **equivalentes**, e denotamos isto por $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$, quando existem funtores $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ tais que

$$GF \cong 1_{\mathbf{C}} \qquad \text{e} \qquad FG \cong 1_{\mathbf{D}}.$$

Dito tudo isso, agora temos ferramentas modernas suficientes para formalizar o que nossa intuição estava nos dizendo com os resultados que encontramos na jornada até aqui. Vamos exibir dois isomorfismos naturais $\eta\colon I_{\mathbf{Boole}} \Rightarrow LT$ e $\varepsilon\colon I_{\mathbf{Th}} \Rightarrow TL$, provando, enfim, que **Th** e **Boole** são categorias equivalentes.

Seja B uma álgebra de Boole. Consideremos as interpretações $e_B\colon T_B \to B$, da Proposição 3.3.15, e $q_{T_B}\colon T_B \to L(T_B)$, da Proposição 3.3.12. Então, pela Proposição 3.3.12, existe um único homomorfismo $\overline{f}_B\colon L(T_B) \to B$ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} T_B \arrow[r, "q_{T_B}"] \arrow[dr, "e_B"'] & L(T_B) \arrow[d, dashed, "\overline{f}_B"] \\ & B \end{tikzcd}$$

comutar, ou seja, $\overline{f}_B \circ q_{T_B} = e_B$. Como e_B é a identidade em $\Sigma_B = B$, então

$$b = e_B(b) = \overline{f}_B(q_{T_B}(b)) = \overline{f}_B([b]),$$

para todo $b \in B$. Desse modo, o mapa $\eta_B \colon B \to L(T_B)$ dado por $b \mapsto [b]$ é um candidato a inversa de $\overline{f}_B$. Basta, para isso, que seja um morfismo da mesma categoria. A verificação de que η_B é um homomorfismo de álgebras de Boole não é muito diferente do que já fizemos anteriormente. Logo, η_B é um isomorfismo que satisfaz $q_{T_B} = \eta_B \circ e_B$. Vamos checar a naturalidade.

Lema 3.3.16. *A família de mapas $\eta_B \colon B \to L(T_B)$ é um isomorfismo natural.*

Demonstração. Consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T_B \arrow[rr, squiggly, "T(f)"] \arrow[dr, "e_B"] \arrow[ddr, "q_{T_B}"'] & & T_A \arrow[dr, "e_A"] \arrow[ddr, "q_{T_A}"'] & \\
& B \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\eta_B"] & & A \arrow[d, "\eta_A"] \\
& L(T_B) \arrow[rr, "LT(f)"] & & L(T_A)
\end{tikzcd}$$

Notemos que o quadrado de cima comuta pela definição do funtor T. Similarmente, o quadrado por baixo comuta pela definição do funtor L. Os triângulos laterais comutam pela definição de η_B. Finalmente, para provarmos a naturalidade, vamos usar o morfismo $\overline{f}_B$ inverso de η_B. Notemos que

$$\begin{aligned}
f \circ \overline{f}_B \circ q_{T_B} &= f \circ e_B \\
&= e_A \circ T(f) \\
&= \overline{f}_A \circ q_{T_A} \circ T(f) \\
&= \overline{f}_A \circ LT(f) \circ q_{T_B}.
\end{aligned}$$

Da sobrejetividade de q_{T_B}, concluímos que $f \circ \overline{f}_B = \overline{f}_A \circ LT(f)$. Invertendo $\overline{f}_A$ e $\overline{f}_B$, obtemos que $LT(f) \circ \eta_B = \eta_A \circ f$, como queríamos. □

Agora, construiremos o isomorfismo natural $\varepsilon \colon I_{\mathbf{Th}} \Rightarrow TL$. Seja T uma Σ-teoria. Pela Proposição 3.3.15, existe uma única tradução $\varepsilon_T \colon T \rightsquigarrow T_{L(T)}$ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_{L(T)} \arrow[r, "e_{L(T)}"] & L(T) \\
T \arrow[u, dashed, "\varepsilon_T"] \arrow[ur, "q_T"'] &
\end{tikzcd}$$

comutar, ou seja, $e_{L(T)} \circ \varepsilon_T = q_T$. Vamos mostrar que ε_T é um isomorfismo mostrando que é conservativo e *essencialmente sobrejetivo*.

Seja α uma $\Sigma_{L(T)}$-sentença e suponhamos que $T_{L(T)} \vdash \varepsilon_T(\alpha)$. Como $e_{L(T)}$ é uma interpretação, $e_{L(T)}(\varepsilon_T(\alpha)) = 1$. Daí, $q_T(\alpha) = 1$. Como q_T é conservativa, $T \vdash \alpha$, o que mostra que ε_T é conservativa.

Falta mostrar que é essencialmente sobrejetivo. Seja $\beta \in \mathrm{Sent}(\Sigma_{L(T)})$. Como q_T é sobrejetivo, existe $\alpha \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$ tal que $q_T(\alpha) = e_{L(T)}(\beta)$. Daí, do diagrama, $e_{L(T)}(\varepsilon_T(\alpha)) = e_{L(T)}(\beta)$. Como $e_{L(T)}$ é conservativa, $T_{L(T)} \vdash \varepsilon_T(\alpha) \leftrightarrow \beta$, o que mostra que ε_T é essencialmente sobrejetivo.

Lema 3.3.17. *A família de mapas* $\varepsilon_T \colon T \rightsquigarrow T_{L(T)}$ *é um isomorfismo natural.*

Demonstração. Consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, squiggly, "f"] \arrow[d, squiggly, "\varepsilon_T"'] \arrow[rdd, "q_T"] & & T' \arrow[d, squiggly, "\varepsilon_{T'}"'] \arrow[rdd, "q_{T'}"] & \\
T_{L(T)} \arrow[rr, "TL(f)"] \arrow[rd, "e_{L(T)}"'] & & T_{L(T')} \arrow[rd, "e_{L(T)}"'] & \\
& L(T) \arrow[rr, "L(f)"'] & & L(T')
\end{tikzcd}$$

Neste caso, fazemos

$$\begin{aligned}
e_{L(T)} \circ \varepsilon_{T'} \circ f &= q_{T'} \circ f \\
&= L(f) \circ q_T \\
&= L(f) \circ e_{L(T)} \circ \varepsilon_T \\
&= e_{L(T')} \circ TL(f) \circ \varepsilon_T,
\end{aligned}$$

e como $e_{L(T')}$ é conservativo, segue que $\varepsilon_{T'} \circ f = TL(f) \circ \varepsilon_T$. □

Com isso, finalmente obtemos uma equivalência de categorias entre a categoria das teorias proposicionais e a categoria das álgebras de Boole:

Teorema 3.3.18 (Lindenbaum–Tarski)**.** **Th** e **Boole** são categorias equivalentes:

$$\mathbf{Th} \cong \mathbf{Boole}.$$

Referências utilizadas e recomendadas

- Elementos de Teoria de Categorias: [3, 5, 8].
- Abordagem de Álgebra Universal com foco em Lógica: [1, 5, 7].
- Teorias proposicionais e Teorema de Lindenbaum–Tarski: [1, 2, 8, 12].

4 RETORNO: DUALIDADE DE STONE

Neste capítulo, chegaremos ao final de nossa jornada: provaremos a Dualidade de Stone, conectando todos os capítulos anteriores. No decorrer, provaremos o clássico Teorema de Representação de Stone para álgebras de Boole. Como consequência da Dualidade de Stone, obtemos uma dualidade entre sintaxe e semântica, retornando às discussões dos capítulos iniciais.

4.1 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Dentre todas as áreas estudadas até agora, a Topologia, e a maneira como a apresentaremos, é o que mais se assemelha ao que matemáticos conhecem e estudam suficientemente bem em cursos de graduação. Sendo assim, as finalidades dessa seção são de referenciação e breve revisão.

Definição 4.1.1. Uma coleção τ de subconjuntos de um conjunto X é dita uma **topologia** em X se satisfaz as seguintes condições:

O1. $\varnothing, X \in \tau$.

O2. Se $\mathscr{U}$ é uma coleção qualquer de elementos de τ, então $\bigcup \mathscr{U} \in \tau$.

O3. Se $\mathscr{U}$ é uma coleção finita de elementos de τ, então $\bigcap \mathscr{U} \in \tau$.

O par (X, τ), ou simplesmente X, é dito **espaço topológico**. Cada conjunto em τ é chamado de **aberto** de X na topologia τ e um conjunto é dito **fechado** se, e somente se, seu complementar é aberto. Caso um aberto seja também fechado, o chamamos de **faberto**. Ainda, se x pertence a um aberto U, dizemos que U é uma **vizinhança** de x. Às vezes, escreveremos *espaço* no lugar de espaço topológico.

Podemos enunciar O2 e O3 de modo mais enxuto. O2 é equivalente a dizer que τ é fechada por uniões arbitrárias. Além disso, O3 é equivalente a dizer que τ é fechada por interseções finitas. É possível mostrar, usando indução, que ser fechado por interseções finitas é equivalente a ser fechado para a interseção de cada dois abertos. Por isso, quando queremos demonstrar que uma coleção de subconjuntos é uma topologia, por simplicidade, fazemos isto apenas para dois conjuntos.

Proposição 4.1.2. *Seja X um espaço topológico. Então,*

(a) *$\varnothing, X$ são fechados.*

(b) *Se $\mathscr{F}$ é uma coleção finita de fechados, então $\bigcup \mathscr{F}$ é fechado.*

(c) *Se $\mathscr{F}$ é uma coleção qualquer de fechados, então $\bigcap \mathscr{F}$ é fechado.*

Demonstração. Segue da definição de topologia a partir das Leis de De Morgan. □

Definição 4.1.3. Uma **base** para um espaço topológico é um conjunto $\mathscr{B}$ de abertos tais que, para todo aberto U e para todo $x \in U$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Teorema 4.1.4. *Seja $\mathscr{B}$ uma coleção de subconjuntos de X. São equivalentes:*

(i) *$\mathscr{B}$ é base para alguma topologia τ em X.*

(ii) *$X = \bigcup \mathscr{B}$ e dados $U, V \in \mathscr{B}$ e $x \in U \cap V$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U \cap V$.*

Além disso, τ é única, é a menor topologia que contém $\mathscr{B}$ e é caracterizada por $U \in \tau$ se, e somente se, U é uma união (possivelmente vazia) de elementos de $\mathscr{B}$.

Demonstração. Não é muito difícil provar que (i) implica (ii) recorrendo às definições de topologia e de base. Vamos provar a direção contrária. Para isso, iremos exibir tal topologia. Tome

$$\tau = \left\{ \bigcup \mathscr{C} \mid \mathscr{C} \subseteq \mathscr{B} \right\}$$

e note que, por construção, τ contém $\mathscr{B}$, é fechada por uniões arbitrárias e contém $\varnothing$ e X. Agora, se $U, V \in \tau$, usando a hipótese, obtemos que

$$U \cap V = \bigcup \{ B \in \mathscr{B} \mid B \subseteq U \cap V \} \in \tau,$$

ou seja, τ é uma topologia em X que contém $\mathscr{B}$.

Seja τ' uma outra topologia em X que contém $\mathscr{B}$ e tome $U \in \tau$. Da definição de τ, existe $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$ tal que $U = \bigcup \mathscr{C}$. Como τ' é topologia, é fechada por uniões arbitrárias. E como τ' contém $\mathscr{B}$, então também contém $\mathscr{C}$. Logo, $U = \bigcup \mathscr{C} \in \tau'$. Portanto, $\tau \subseteq \tau'$. Em outras palavras, demonstramos que

$$\tau = \bigcap \{ \tau' \mid \tau' \text{ é topologia em } X \text{ e } \mathscr{B} \subseteq \tau' \},$$

o que prova tanto a unicidade quanto a minimalidade. □

Definição 4.1.5. Chamamos τ no teorema anterior de **topologia gerada** por $\mathscr{B}$.

Definição 4.1.6. Seja $E \subseteq X$. Uma coleção $\mathscr{C}$ de subconjuntos de X é uma **cobertura** de E quando $E \subseteq \bigcup \mathscr{C}$. Se a cobertura for constituída de abertos, dizemos que é uma **cobertura aberta**. Dizemos que E é **compacto** quando, para toda cobertura aberta $\mathscr{C}$ de E, existe uma subcoleção finita $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ que também é cobertura de E.

Toda coleção de subconjuntos de X que é fechada por interseções satisfaz a segunda parte de (ii) do Teorema 4.1.4 trivialmente. Assim, obtemos:

Corolário 4.1.7. *Toda coleção $\mathscr{B}$ de subconjuntos de um conjunto X que cobre X e é fechada por interseções é base para uma única topologia em X.*

Definição 4.1.8. Dizemos que uma coleção $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X satisfaz a **propriedade da interseção finita** se, para toda subcoleção finita $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$, a interseção $\bigcap \mathscr{G}$ é não-vazia.

Teorema 4.1.9. *Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, para toda coleção $\mathscr{F}$ de subconjuntos fechados de X, se $\mathscr{F}$ satisfaz a propriedade da interseção finita, então $\bigcap \mathscr{F}$ é não-vazio.*

Demonstração. Suponhamos que X é compacto e seja $\mathscr{F}$ uma coleção de fechados em X. Assuma que $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$. Vamos mostrar que $\mathscr{F}$ não satisfaz a propriedade da interseção finita. Defina a coleção $\mathscr{C} = \{F^{\mathsf{c}} \mid F \in \mathscr{F}\}$. Como $\mathscr{F}$ é uma coleção de fechados, por definição $\mathscr{C}$ é uma coleção de abertos. Daí, pelas Leis de De Morgan,

$$\bigcup \mathscr{C} = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} F^{\mathsf{c}} = \left[\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F \right]^{\mathsf{c}} = \varnothing^{\mathsf{c}} = X.$$

Ou seja, $\mathscr{C}$ é uma cobertura aberta de X. De X ser um espaço compacto, existe uma subcobertura finita $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$. Então a coleção finita $\mathscr{G} = \{D^{\mathsf{c}} \mid D \in \mathscr{D}\}$, novamente pelas Leis de De Morgan, é tal que $\bigcap \mathscr{G} = \varnothing$, e portanto X não satisfaz a propriedade da interseção finita.

Reciprocamente, suponhamos que X não é compacto. Desse modo, existe uma cobertura aberta $\mathscr{U}$ que não admite subcobertura finita. Definimos

$$\mathscr{F} = \{U^{\mathsf{c}} \mid U \in \mathscr{U}\}.$$

Daí, por definição, qualquer coleção finita $U_1^{\mathsf{c}}, \ldots, U_n^{\mathsf{c}}$ de elementos de $\mathscr{F}$ é tal que $\bigcup_{i=1}^n U_i \neq X$. Por De Morgan, $\bigcap_{i=1}^n U_i^{\mathsf{c}} \neq \varnothing$. Ou seja, $\mathscr{F}$ tem a propriedade da interseção finita. Mas, como $\mathscr{U}$ cobre X, temos que $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$. □

Teorema 4.1.10 (Tychonoff, [3, pág. 64])**.** *Seja $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma coleção de espaços compactos. Então, o produto $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ é compacto.*

Definição 4.1.11. Dizemos que um espaço topológico X é **Hausdorff** se para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existem vizinhanças U de x e V de y disjuntas.

Lembramos que um espaço X é conexo se não pode ser expressado como união disjunta de dois abertos não-vazios. As *componentes conexas* de X são os subconjuntos conexos maximais desse espaço.

Definição 4.1.12. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X **totalmente desconexo** se as únicas componentes conexas de X são *singletons*. Ainda, X é **totalmente separado** se para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existe um faberto de X contendo x mas não y. Por fim, X é **0-dimensional** se o conjunto de todos os fabertos de X forma uma base da topologia de X.

Definição 4.1.13. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f\colon X \to Y$ é dita **contínua** se para cada aberto U em Y, $f^{-1}(U)$ é aberto em X. Além disso, mostra-se que para verificar que uma função é contínua basta checar que a pré-imagem de elementos da base do contradomínio tem pré-imagem aberta.

Lema 4.1.14. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Daí, valem:*

(a) *Funções identidade são funções contínuas.*

(b) *Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são funções contínuas, então a composição*

$$g \circ f\colon A \to C, \quad a \mapsto g(f(a)),$$

é uma função contínua.

A demonstração segue imediatamente de propriedades elementares de imagem inversa. Sendo assim, como para cada espaço topológico X a identidade $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ é contínua e composição de funções contínuas é contínua, obtemos a categoria dos espaços topológicos e funções contínuas.

Definição 4.1.15. A categoria cujos objetos são espaços topológicos e os morfismos são funções contínuas é denotada por **Top**.

Definição 4.1.16. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que $f\colon X \to Y$ é um **homeomorfismo** se é uma função contínua bijetiva com inversa contínua. Se existe um homeomorfismo entre X e Y, dizemos que tais espaços são **homeomorfos** e denotamos isto por $X \cong_{\mathbf{Top}} Y$ ou, simplesmente, $X \cong Y$.

Vimos, nos capítulos anteriores, que morfismos em categorias de estruturas algébricas parecem se comportar de modo interessante em relação ao morfismo inverso: se um morfismo é, como função, bijetiva, numa categoria "algébrica", a função inversa é também morfismo. Isso não é verdade para todo tipo de estrutura matemática. Em particular, em Topologia, isso é falso. O exemplo clássico é a função

$$f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta),$$

entretanto, o resultado a seguir mostra que espaços compacto Hausdorff ainda preservam esse *bom-comportamento* dos morfismos algébricos. A prova pode ser vista em [8, pág. 85].

Proposição 4.1.17. *Seja $f\colon X \to Y$ uma bijeção contínua entre dois espaços compactos Hausdorff X e Y. Então, f é um homeomorfismo.*

4.1.1 Espaços de Stone; a categoria **Stone**

Definição 4.1.18. Dizemos que um espaço topológico X é um **espaço de Stone** se for um espaço compacto e totalmente separado. A categoria cujos objetos são espaços de Stone e os morfismos são funções contínuas é denotada por **Stone**.

Exemplo 4.1.19. Algumas classes de exemplos de espaços de Stone:

(a) Todo espaço discreto finito é de Stone.

(b) Produto de espaço de Stone é de Stone.

(c) O espaço de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é de Stone (a compacidade segue de Tychonoff).

Há maneiras equivalentes de definir espaços de Stone. Por exemplo, espaços de Stone podem ser definidos como espaços topológicos compacto Hausdorff e totalmente desconexos [10, pág. 69]. Enunciamos este resultado, sem provar:

Teorema 4.1.20. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

(i) *X é um espaço de Stone.*

(ii) *X é compacto, Hausdorff e totalmente desconexo.*

(iii) *X é compacto, 0-dimensional e Kolmogorov, i.e., pontos distintos podem ser separados por algum aberto.*

4.2 ÁLGEBRA ≅ TOPOLOGIA^{op}

Na seção seguinte, estudaremos a *Dualidade de Stone*, um teorema devido a Marshall Stone altamente surpreendente e, para a época que foi desenvolvido, espetacularmente inovador. Este resultado é uma ponte entre Álgebra e Topologia e, como veremos, serve como um resultado intermediário para conectar sintaxe e semântica no contexto da lógica clássica.

Hoje, na literatura de Teoria de Categorias, a Dualidade de Stone é muitas vezes estudada como um primeiro exemplo não-trivial para motivar a noção de *dualidade* e resultados centrais em algumas áreas da Matemática. Por exemplo, em Teoria de Ordem, há muitos resultados de representação como o de Stone que surgiram depois do seu trabalho e que dão origem, por conseguinte, a outras dualidades categóricas. Além disso, em Álgebras de Operadores, a Dualidade de Gelfand–Naimark é um resultado central motivado pelos trabalhos de Stone.

Para chegarmos ao nosso objetivo de conectar Álgebra e Topologia, precisamos preparar o terreno e nos armar com as ferramentas necessárias. Isto envolverá estudar dois novos funtores conhecidos como *funtor semântico* e *funtor sintático*.

4.2.1 O funtor S: da Álgebra para a Topologia

Nesta subseção, faremos forte uso da caracterização semântica dos ultrafiltros feita anteriormente. Muito do que faremos abaixo pode ser feito a partir de ultrafiltros, explicitamente, ou por estados, i.e., homomorfismos da álgebra de Boole de interesse em 2. Neste texto, escolhemos o caminho a partir de estados.

Definição 4.2.1. Seja B uma álgebra de Boole. Definimos, para cada $a \in B$, o conjunto dos estados de B *verdadeiros* em a por

$$\mathscr{U}_a := \{\phi \in \mathrm{Hom}(B, 2) \mid \phi(a) = 1\}.$$

Observação 4.2.2. É possível mostrar que o conjunto $\mathscr{U}_a$ está em correspondência biunívoca com os ultrafiltros U em B tais que $a \in U$. Para isto, basta usar a caracterização semântica dos ultrafiltros.

Lema 4.2.3. *Sejam B uma álgebra de Boole e $a, b \in B$. Então, valem:*

(a) $\mathscr{U}_{a\vee b} = \mathscr{U}_a \cup \mathscr{U}_b$.

(b) $\mathscr{U}_{a\wedge b} = \mathscr{U}_a \cap \mathscr{U}_b$.

(c) $\mathscr{U}_{\neg a} = \mathscr{U}_a^{\mathsf{c}}$

Demonstração. Provemos somente (b), pois os outros itens são similares.

(b) Para provar que $\mathscr{U}_{a\wedge b} = \mathscr{U}_a \cap \mathscr{U}_b$, fazemos

$$\begin{aligned}
\phi \in \mathscr{U}_{a\wedge b} \quad &\Leftrightarrow \quad \phi(a \wedge b) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \phi(a) \wedge \phi(b) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \phi(a) = 1 \quad \text{e} \quad \phi(b) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \phi \in \mathscr{U}_a \quad \text{e} \quad \phi \in \mathscr{U}_b \\
&\Leftrightarrow \quad \phi \in \mathscr{U}_a \cap \mathscr{U}_b.
\end{aligned}$$

□

Em particular, $\{\mathscr{U}_a \mid a \in B\}$ é fechada por interseções e $\mathscr{U}_1 = \mathrm{Hom}(B, 2)$. Pelo Corolário 4.1.7, essa coleção gera uma (única) topologia em $\mathrm{Hom}(B, 2)$. O espaço topológico assim obtido é chamado de *espectro* de B.

Definição 4.2.4. Seja B uma álgebra de Boole. Definimos o **espectro** de B, que denotamos por $S(B)$, o qual consiste do conjunto $\mathrm{Hom}(B, 2)$ de estados de B munido da topologia gerada pela família $\{\mathscr{U}_a \mid a \in B\}$.

Lema 4.2.5. *Seja B uma álgebra de Boole. Então, $S(B)$ é um espaço de Stone.*

Demonstração. Seja B uma álgebra de Boole e seu espectro $S(B)$. Verifiquemos que a topologia de $S(B)$ satisfaz às propriedades do item (iii) do Teorema 4.1.20.

Primeiramente, observamos que $\mathscr{B} = \{\mathscr{U}_a \mid a \in B\}$ é uma base de fabertos. Isto segue de $\mathscr{B}$ ser fechada por complementações e interseções. Portanto, $S(B)$ é 0-dimensional.

Além disso, $S(B)$ é Kolmogorov: De fato, se ϕ_1 e ϕ_2 são elementos distintos de $S(B)$, então existe $a \in B$ tal que $\phi_1(a) \neq \phi_2(a)$. Trocando a por $\neg a$ caso necessário, podemos assumir que $\phi_1(a) = 1$ e $\phi_2(a) = 0$. Deste modo, $\mathscr{U}_a$ é um aberto que contém ϕ_1 mas não ϕ_2.

Agora, vamos provar que $S(B)$ é compacto. Seja $\mathscr{F}$ uma subcoleção de $\mathscr{B}$ satisfazendo a propriedade da interseção finita. Tomemos o conjunto F dos elementos $b \in B$ tais que

$$\mathscr{V}_1 \cap \cdots \cap \mathscr{V}_n \subseteq \mathscr{U}_b$$

para alguns $\mathscr{V}_1, \ldots, \mathscr{V}_n \in \mathscr{F}$. Por construção, F é um filtro próprio em B. Sendo assim, o Lema do Ultrafiltro garante a existência de um estado $\phi\colon B \to 2$ tal que $\phi(a) = 1$ para todo $a \in F$.

Mostremos que $\phi \in \bigcap \mathscr{F}$. De fato, dado $\mathscr{V} \in \mathscr{F}$, como $S(B) \setminus \mathscr{V}$ é aberto em $S(B)$ e $\mathscr{B}$ é uma base para a sua topologia, então existe uma coleção $A \subseteq B$ tal que $S(B) \setminus \mathscr{V} = \bigcup_{a \in A} \mathscr{U}_a$. Assim, pelo Lema 4.2.3, temos que $\mathscr{V} = \bigcap_{a \in A} \mathscr{U}_{\neg a}$. Portanto, para todo $a \in A$ temos que $\neg a \in F$ e portanto $\phi(\neg a) = 1$, ou seja, $\phi \in \mathscr{U}_{\neg a}$. Como isso é válido para todo $a \in A$, concluímos que $\phi \in \bigcap_{a \in A} \mathscr{U}_{\neg a} = \mathscr{V}$, como queríamos. □

Mostramos agora que a toda álgebra de Boole B, há um espaço de Stone $S(B)$ associado. Veremos que essa correspondência é o mapa a nível de objetos de um funtor de $S\colon \mathbf{Boole} \to \mathbf{Stone}$. O mapa a nível de morfismos, para cada homomorfismo $f\colon A \to B$ entre álgebras de Boole A e B, é definimo como

$$S(f)\colon S(B) \to S(A), \quad \phi \mapsto \phi \circ f,$$

que é contínua. Com efeito, dado um aberto básico $\mathscr{U}_a$ de $S(A)$, temos que

$$\begin{aligned} S(f)^{-1}(\mathscr{U}_a) &= \{\phi \in S(B) \mid \phi \circ f \in \mathscr{U}_a\} \\ &= \{\phi \in S(B) \mid \phi(f(a)) = 1\} = \mathscr{U}_{f(a)}, \end{aligned}$$

ou seja, $S(f)^{-1}(\mathscr{U}_a)$ é um aberto em $S(B)$.

Vamos mostrar agora que $S\colon \mathbf{Boole} \to \mathbf{Stone}$ é um funtor contravariante que leva álgebras de Boole em espaços de Stone, $B \mapsto S(B)$, e homomorfismos entre álgebras de Boole em funções contínuas entre os espaços de Stone associados, $f \mapsto S(f)$, porém na *ordem* contrária.

Seja B uma álgebra de Boole e $\mathrm{id}_B\colon B \to B$ o homomorfismo identidade de B. Então, para todo $\phi \in S(B)$,

$$S(\mathrm{id}_B)(\phi) = \phi \circ \mathrm{id}_B = \phi = \mathrm{id}_{S(B)}(\phi),$$

ou seja, S preserva identidades. Agora, sejam dois homomorfismos $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$. Daí, para todo $\phi \in S(C)$, temos

$$\begin{aligned} S(g \circ f)(\phi) &= \phi \circ (g \circ f) \\ &= (\phi \circ g) \circ f \\ &= S(g)(\phi) \circ f \\ &= S(f)(S(g)(\phi)) = [S(f) \circ S(g)](\phi) \end{aligned}$$

o que mostra que $S(g \circ f) = S(f) \circ S(g)$ e, portanto, S é um funtor contravariante.

4.2.2 O funtor K: da Topologia para a Álgebra

Na subseção anterior, encontramos o funtor S: **Boole** $\to$ **Stone**. Podemos entender esse funtor como *topologizando* um objeto algébrico. Agora, vamos na direção contrária. A cada espaço de Stone associaremos uma álgebra de Boole e a cada função contínua associaremos um homomorfismo: um processo *algebrizante*.

Definição 4.2.6. Seja X um espaço topológico. Definimos a **álgebra característica** de X, denotada por $K(X)$, como o conjunto dos fabertos do espaço X.

Lema 4.2.7. *Seja X um espaço de Stone. Então, $K(X)$ é uma álgebra de Boole.*

Demonstração. Interseção finita, união finita e complementação de faberto é ainda um faberto. Como $K(X) \subseteq P(X)$, então $K(X)$ é uma subálgebra de Boole de $P(X)$, ou seja, é uma álgebra de Boole com as operações conjuntistas de $P(X)$. □

Assim, a cada espaço de Stone X associamos sua álgebra característica $K(X)$. Este é o mapeamento a nível de objetos de um funtor K: **Stone** $\to$ **Boole**. O mapa a nível de morfismos, para cada função contínua $f\colon X \to Y$ entre espaços de Stone X e Y, é definimo como

$$K(f)\colon K(Y) \to K(X), \quad U \mapsto f^{-1}(U),$$

o qual é um homomorfismo de álgebras de Boole. Isto segue das propriedades de *imagem inversa*. Por exemplo, dados $U, V \in K(Y)$, temos que

$$\begin{aligned} K(f)(U \cap V) &= f^{-1}(U \cap V) \\ &= f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \\ &= K(f)(U) \cap K(f)(V), \end{aligned}$$

ou seja, $K(f)(U \cap V) = K(f)(U) \cap K(f)(V)$. Para união e complementação é análogo.

Por fim, vamos mostrar que K: **Stone** $\to$ **Boole** é um funtor contravariante que leva espaços de Stone em álgebras de Boole, $X \mapsto K(X)$, e funções contínuas entre espaços de Stone em homomorfismos entre álgebras de Boole, $f \mapsto K(f)$, porém na *ordem* contrária.

Seja X um espaço topológico e $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ a identidade de X. Então, para todo $U \in K(X)$,

$$K(\mathrm{id}_X)(U) = \mathrm{id}_X^{-1}(U) = U = \mathrm{id}_{K(X)}(U),$$

ou seja, K preserva identidades. Agora, sejam duas funções contínuas $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$. Daí, para todo $U \in K(Z)$, temos

$$\begin{aligned} K(g \circ f)(U) &= (g \circ f)^{-1}(U) \\ &= f^{-1}(g^{-1}(U)) \\ &= K(f)(g^{-1}(U)) \\ &= K(f)(K(g)(U)) = [K(f) \circ K(g)](U), \end{aligned}$$

o que mostra que $K(g \circ f) = K(f) \circ K(g)$ e, portanto, K é um funtor contravariante.

4.2.3 Dualidade de Stone

Vamos finalmente provar o resultado conhecido como Dualidade de Stone. Para isso, precisamos introduzir a noção de dualidade. Dizemos que uma categoria $\mathbf{C}$ é **dual** a uma categoria $\mathbf{D}$ se $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}^{\mathrm{op}}$, onde $\mathbf{D}^{\mathrm{op}}$ é a **categoria oposta** de $\mathbf{D}$, com os mesmos objetos que $\mathbf{D}$ porém com as setas de $\mathbf{D}$ na ordem contrária. Neste caso, dizemos que existe uma **dualidade** entre $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$. Uma maneira de provar a Dualidade de Stone é exibir dois isomorfismos naturais $\eta \colon I_{\mathbf{Boole}} \Rightarrow KS$ e $\varepsilon \colon I_{\mathbf{Stone}} \Rightarrow SK$, com S e K sendo funtores contravariantes. Façamos isso.

Começamos exibindo a transformação $\eta \colon I_{\mathbf{Boole}} \Rightarrow KS$ e demonstraremos, em seguida, que é um isomorfismo natural. Dada uma álgebra de Boole B, definimos

$$\eta_B \colon B \to KS(B), \quad a \mapsto \mathscr{U}_a,$$

em que $\mathscr{U}_a = \{\phi \in S(B) \mid \phi(a) = 1\}$. Vamos mostrar que η_B é um isomorfismo e com isso obteremos o famoso *Teorema de Representação de Stone*. Segue diretamente do Lema 4.2.3 que $\eta_B \to KS(B)$ é um homomorfismo. Basta provarmos que é uma bijeção.

Sejam $a, b \in B$ tais que $a \neq b$. Então, pelo Lema do Ultrafiltro, existe um estado $\phi \colon B \to 2$ tal que $\phi(a) \neq \phi(b)$. Logo, $\eta_B(a) \neq \eta_B(b)$, i.e., η_B é injetivo.

Por fim, vamos mostrar que η_B é sobrejetivo. Seja U um faberto de $S(B)$. Em particular, U é um aberto e, sendo assim, existe um subconjunto A de B tal que $U = \bigcup_{a \in A} \mathscr{U}_a$. Além disso, como U é fechado no espaço compacto $S(B)$, segue que U é compacto. Portanto, existe um número finito de elementos de A, digamos $a_1, \ldots, a_n$, tais que $U = \bigcup_{i=1}^n \mathscr{U}_{a_i}$. Definindo $b = \bigvee_{i=1}^n a_i$, como η_B é um homomorfismo, $\eta_B(b) = U$, i.e., η_B é sobrejetivo.

Teorema 4.2.8 (Teorema de Representação de Stone)**.** *Toda álgebra de Boole B é isomorfa a uma subálgebra de alguma álgebra de Boole potência.*

Demonstração. Tomemos $X = S(B)$. Daí, $B \ni a \mapsto \mathscr{U}_a \in P(X)$ é um homomorfismo de álgebras de Boole cuja correstrição à $K(X)$ coincide com η_B. Sendo assim, $K(X)$ é uma subálgebra de $P(X)$ que é isomorfa a B, donde segue o resultado. ☐

Lema 4.2.9. *A família de mapas $\varepsilon_X\colon X \to KS(X)$ é um isomorfismo natural.*

Demonstração. Seja $f\colon A \to B$ um homomorfismo e considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & B \arrow[d, "\eta_B"] \\
KS(A) \arrow[r, "KS(f)"] & KS(B)
\end{tikzcd}$$

Seja $a \in A$. Por definição, temos que $\eta_B(f(a)) = \mathscr{U}_{f(a)}$ e que $\eta_A(a) = \mathscr{U}_a$. Daí,

$$\begin{aligned}
KS(f)(\eta_A(a)) &= KS(f)(\mathscr{U}_a) \\
&= S(f)^{-1}(\mathscr{U}_a) \\
&= \mathscr{U}_{f(a)} = \eta_B(f(a)),
\end{aligned}$$

e como a era arbitrário, $KS(f) \circ \eta_A = \eta_B \circ f$. ☐

Agora, vamos exibir a transformação $\varepsilon\colon I_{\mathbf{Stone}} \Rightarrow SK$ e demonstraremos, em seguida, que é um isomorfismo natural. Dado um espaço de Stone X, para cada $x \in X$, definimos

$$\phi_x\colon K(X) \to 2, \quad U \mapsto \chi_U(x),$$

em que χ_U é a função característica de U. Não é difícil verificar que, para cada $x \in X$, ϕ_x é um homomorfismo. Por exemplo, se $x \in X$ e U é um faberto de X, então

$$\begin{aligned}
\phi_x(U^{\mathsf{c}}) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \chi_{U^{\mathsf{c}}}(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in U^{\mathsf{c}} \\
&\Leftrightarrow \quad x \notin U \\
&\Leftrightarrow \quad \chi_U(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \phi_x(U) = 0,
\end{aligned}$$

o que prova que $\phi_x(U^{\mathsf{c}}) = \neg\phi_x(U)$. Para união e interseção é similar.

Assim, dado um espaço de Stone X, definimos o mapa

$$\varepsilon_X\colon X \to SK(X), \quad x \mapsto \phi_x,$$

o qual é um homeomorfismo. Com efeito, como X é um espaço de Stone, então é compacto e totalmente separado. Logo, é compacto Hausdorff. Daí, para mostrarmos que ε_X é um homeomorfismo, basta mostrarmos que é uma bijeção contínua.

Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Como X é um espaço de Stone, existe um faberto U de X tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Sendo assim, $\phi_x(U) = 1$, mas $\phi_y(U) = 0$. Logo, $\phi_x \neq \phi_y$, i.e., ε_X é injetiva.

Agora, seja ϕ um estado em $K(X)$ e façamos

$$\mathscr{F} = \{U \in K(X) \mid \phi(U) = 1\}.$$

Como $1_{K(X)} = X$ e ϕ é um homomorfismo, $\phi(X) = 1$. Logo, $X \in \mathscr{F}$. Segue também de ϕ ser um homomorfismo que $\mathscr{F}$ tem a propriedade da interseção finita. Como X é compacto, $\bigcap \mathscr{F}$ é não-vazio. Seja $x \in \bigcap \mathscr{F}$. Seja $U \in K(X)$ tal que $\phi(U) = 1$. Então $U \in \mathscr{F}$. Como $x \in \bigcap \mathscr{F}$, então $x \in U$, ou seja, $\phi_x(U) = 1$. Similarmente, caso $\phi(U) = 0$, então $\phi_x(U) = 0$. Portanto, $\varepsilon_X(x) = \phi_x = \phi$, i.e., ε_X é sobrejetiva.

Por fim, vamos ver que ε_X é uma função contínua. Façamos temporariamente $B = K(X)$. Então, cada aberto básico em $S(B)$ é da forma

$$\mathscr{U}_V = \{\phi \in \operatorname{Hom}(B, 2) \mid \phi(V) = 1\},$$

para algum $V \in B$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_X^{-1}(\mathscr{U}_V) &= \{x \in X \mid \varepsilon_X(x) \in \mathscr{U}_V\} \\ &= \{x \in X \mid \phi_x \in \mathscr{U}_V\} \\ &= \{x \in X \mid \phi_x(V) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid x \in V\} = V \end{aligned}$$

que é um faberto em X. Em particular, V é um aberto em X, i.e., ε_X é contínua.

Teorema 4.2.10. *Todo espaço de Stone é o espectro de alguma álgebra de Boole.*

Demonstração. Tomemos $B = K(X)$. Então, como B é uma álgebra de Boole, $S(B)$ é um espaço de Stone. Além disso, como X é um espaço de Stone e $\varepsilon\colon X \to SK(X)$ é um homeomorfismo, a menos de isomorfismo na categoria **Stone**, X é o espectro da álgebra de Boole B. □

Lema 4.2.11. *A família de mapas $\varepsilon_X\colon X \to SK(X)$ é um isomorfismo natural.*

Demonstração. Seja $f\colon X \to Y$ uma função contínua e considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] & Y \arrow[d, "\varepsilon_Y"] \\ SK(X) \arrow[r, "SK(f)"] & SK(Y) \end{tikzcd}$$

Seja $x \in X$. Por definição, temos que $\varepsilon_Y(f(x)) = \phi_{f(x)}$ e que $\varepsilon_X(x) = \phi_x$. Daí,

$$\begin{aligned} SK(f)(\varepsilon_X(x)) &= SK(f)(\phi_x) \\ &= \phi_{f(x)} = \varepsilon_Y(f(x)), \end{aligned}$$

e como x era arbitrário, $SK(f) \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ f$. □

Com isso, provamos o famigerado teorema que buscavamos durante o trabalho todo. A Dualidade de Stone, portanto, afirma que a categoria das álgebras de Boole é dual a categoria de espaços de Stone.

Teorema 4.2.12 (Dualidade de Stone)**.** **Boole** e **Stone** são categorias duais:

$$\mathbf{Boole} \cong \mathbf{Stone}^{\mathrm{op}}.$$

4.3 SINTAXE ≅ SEMÂNTICA$^{\text{op}}$

Retornamos, nesta seção, ao Teorema de Lindenbaum–Tarski, para discutirmos, sob a luz da Dualidade de Stone, o que estes teoremas têm a ver com *sintaxe* e *semântica*. Antes, provaremos um resultado para motivar. Dada uma Σ-teoria T, definimos a coleção dos modelos de T por $\mathrm{Mod}(T)$.

Teorema 4.3.1. *Seja T uma Σ-teoria. Então,*

$$\mathrm{Hom}(L(T), 2) \cong_{\mathbf{Set}} \mathrm{Mod}(T)$$

a partir da bijeção

$$\Phi\colon \mathrm{Hom}(L(T), 2) \to \mathrm{Mod}(T), \qquad \phi \mapsto \phi \circ q_T.$$

Demonstração. Não é difícil ver que Φ está bem definida. De fato, se $\phi \in \mathrm{Hom}(L(T), 2)$ então ϕ e q_T são homomorfismos de álgebras (do tipo dado pelos símbolos lógicos), e portanto $\phi \circ q_T$ é uma valoração. Além disso, se $T \vdash \alpha$ então $T \vdash 1 \leftrightarrow \alpha$, e portanto $q_T(1) = q_T(\alpha)$. Como $1_{L(T)} = q_T(1)$, então

$$\phi(q_T(\alpha)) = \phi(q_T(1)) = \phi(1_{L(T)}) = 1,$$

o que mostra que $\phi \circ q_T$ é modelo de T, como queríamos.

A sobrejetividade da função Φ segue da parte de existência da propriedade universal da álgebra de Lindenbaum, Proposição 3.3.12: Se f é um modelo de T, então em particular é uma interpretação (pelo Lema 3.3.2), e portanto existe um homomorfismo $\overline{f}\colon L(T) \to 2$ tal que $\overline{f} \circ q_T = f$, ou seja, $\Phi(\overline{f}) = f$.

Similarmente, a injetividade de Φ segue da parte de unicidade da mesma propriedade universal. □

O Teorema de Lindenbaum–Tarski afirma que **Th** ≅ **Boole** e a Dualidade de Stone que **Boole** ≅ **Stone**$^{\mathrm{op}}$. Usando a transitividade da relação de *equivalência de categorias*, ≅, obtemos o nosso último grande resultado:

Teorema 4.3.2 (Lindenbaum–Tarski–Stone)**.** **Th** e **Stone** são categorias duais:

$$\mathbf{Th} \cong \mathbf{Stone}^{\mathrm{op}}.$$

Esta dualidade pode ser vista como uma ponte entre sintaxe e semântica. Aqui, **Th** representa a *sintaxe*, enquanto que **Stone** representa a *semântica*, no contexto da lógica proposicional. Por esse motivo, há quem chame os funtores S e K de funtor semântico e funtor sintático, respectivamente [8, pág. 86]. Discutiremos mais sobre essa dualidade na próxima e última subseção deste texto.

4.3.1 Comentários gerais sobre sintaxe e semântica

Há vários motivos para essa dualidade ser pensada como uma conexão entre sintaxe e semântica e isso envolve, claro, boa parte dos comentários que fizemos ao longo do texto. Como mencionamos no capítulo de Álgebra Universal e no de Lógica, entendemos teorias proposicionais como objetos sintáticos. Já espaços de Stone parecem ter *natureza semântica.*

Dada uma álgebra de Boole B, vimos na subseção de álgebras de Boole que $\mathrm{Ult}(B) \cong \mathrm{Hom}(B, 2)$, isto é, os ultrafiltros em B estão em correspondência biunívoca com os estados de B. Este resultado por si só já permite pensarmos que espaços de Stone são, quando definidos via ultrafiltros, *tabelas-verdade* (possivelmente infinitas) interpretando elementos de uma álgebra de Boole. No nosso caso, que definimos espaços de Stone a partir de estados, parece que a correspondência não é tão apelativa.

Entretanto, o Teorema 4.3.1 afirma que $\mathrm{Hom}(L(T), 2) \cong_{\mathbf{Set}} \mathrm{Mod}(T)$, ou seja, a intuição de que pareciam tabelas-verdade, via este resultado, se concretiza. De fato, espaços de Stone, definidos via ultrafiltros ou estados, estão associados a modelos de uma teoria proposicional.

Sob este ponto de vista, o Teorema de Lindenbaum–Tarski–Stone afirma, via Teoria de Categorias, que a sintaxe da lógica proposicional é dual a semântica.

Referências utilizadas e recomendadas

- Revisão de Teoria de Conjuntos, Topologia e espaços de Stone: [3, 8, 9].
- Elementos de Teoria de Categorias: [3, 5, 8].
- Teorema de Representação de Stone e Dualidade de Stone: [2, 8].
- Dualidade entre sintaxe e semântica: [8].

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta monografia, estudamos a relação entre Lógica e outras áreas, como a Álgebra e a Topologia, numa épica jornada, culminando na prova da Dualidade de Stone. Além disso, vimos que as teorias proposicionais estão em correspondência com as álgebras de Boole, fornecendo uma equivalência de categorias. Estes dois fatos juntos nos permitiram revelar uma ponte formal entre sintaxe e semântica.

A pesquisa na interface entre Álgebra e Topologia, e entre Lógica e outras áreas, avançou bastante desde os trabalhos de Stone. Por exemplo, o livro [10] do matemático Peter Johnstone apresenta, numa proposta similar a nossa, porém mais próxima da pesquisa matemática atual, uma formulação moderna das ideias de Stone e suas consequências.

O que essa jornada nos mostrou é que aquilo que achamos conhecer pode ser somente uma faceta de algo muito mais complexo. Nos deparamos com vários conceitos, objetos e teorias na prática científica. Talvez os problemas em aberto da ciência, hoje, dependam de olharmos para eles por um outro ângulo, através de pontes vindas de outros reinos. Esperamos que esse trabalho inspire outras pessoas a olharem para o mundo de uma forma mais plural, inclusiva e curiosa.

Por fim, observamos que — sobre tudo aquilo que estudamos e os resultados que obtivemos — talvez o mais pertinente a se dizer já foi dito há muito tempo atrás e está na epígrafe da introdução: “we must always topologize”.

REFERÊNCIAS

[1] Donald Barnes e John Mack. *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN: 9781475744897.

[2] John Lane Bell e Alan Slomson. *Models and ultraproducts: an introduction.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1969, pp. ix+322.

[3] Tai-Danae Bradley, Tyler Bryson e John Terilla. *Topology: A Categorical Approach.* MIT Press, 2020.

[4] Joseph Campbell. *O Herói de Mil Faces.* Pensamento, 1989. ISBN: 9788531502941.

[5] Paul Cohn. *Universal Algebra.* Mathematics and Its Applications. Springer Netherlands, 2012. ISBN: 9789400983991.

[6] Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane. "General Theory of Natural Equivalences". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 58.2 (1945), pp. 231–294. ISSN: 00029947.

[7] Jean Gallier. *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving, Second Edition.* Dover Books on Computer Science. Dover Publications, 2015. ISBN: 9780486780825.

[8] Hans Halvorson. *The Logic in Philosophy of Science.* Cambridge University Press, 2019. ISBN: 9781107110991.

[9] Karel Hrbacek e Thomas Jech. *Introduction to set theory, revised and expanded.* Crc Press, 2017.

[10] Peter Tennant Johnstone. *Stone Spaces.* Vol. 3. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 1986, pp. xii+370. ISBN: 0-521-33779-8.

[11] Saunders Mac Lane. "The influence of M. H. Stone on the Origins of category theory". Em: *Functional Analysis and Related Fields.* Springer, 1970, pp. 228–241.

[12] Elliot Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Discrete Mathematics and Its Applications. CRC Press, 2009. ISBN: 9781584888772.

[13] Cezar Mortari. *Introdução à lógica*. Ed. UNESP, 2001. ISBN: 9788571393370.

[14] John von Neumann. "Uber Einen Satz Von Herrn M. H. Stone". Em: *Annals of Mathematics* 33.3 (1932), pp. 567–573. ISSN: 0003486X.

[15] Marshall Harvey Stone. "Applications of the theory of Boolean rings to general topology". Em: *Trans. Amer. Math. Soc.* 41.3 (1937), pp. 375–481. ISSN: 00029947. DOI: `10.2307/1989788`.

[16] Marshall Harvey Stone. *Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis*. American Mathematical Society: Colloquium publications. American Mathematical Society, 1932. ISBN: 9780821810156.

[17] Marshall Harvey Stone. "On One-Parameter Unitary Groups in Hilbert Space". Em: *Annals of Mathematics* 33.3 (1932), pp. 643–648. ISSN: 0003486X.

[18] Marshall Harvey Stone. "The theory of representations for Boolean algebras". Em: *Trans. Amer. Math. Soc.* 40.1 (1936), pp. 37–111. ISSN: 00029947. DOI: `10.2307/1989664`.

[19] Christopher Vogler. *A Jornada do Escritor: Estrutura mítica para escritores*. Editora Aleph, 2015. ISBN: 9788576572336.