Getulio Pinto da Rosa

Os Teoremas da Incompletude: da construção de sistemas formais à sentença de Gödel

Florianópolis

2023

Getulio Pinto da Rosa

Os Teoremas da Incompletude: da construção de sistemas formais à sentença de Gödel

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de licenciado em matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Francisco Caramello Junior

Florianópolis
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Rosa, Getulio Pinto da
Os Teoremas da Incompletude : da construção de sistemas formais à sentença de Gödel / Getulio Pinto da Rosa ; orientador, Francisco Caramello Junior, 2023.
62 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática - Licenciatura, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática - Licenciatura. 2. Sistema formal. 3. Teoremas da Incompletude. 4. Kurt Gödel. 5. Lógica matemática. I. Caramello Junior, Francisco. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática - Licenciatura. III. Título.

Getulio Pinto da Rosa

Os Teoremas da Incompletude: da construção de sistemas formais à sentença de Gödel

O presente trabalho foi defendido em 27/06 na Universidade Federal de Santa Catarina, tendo sido considerado aprovado. Florianópolis, 2023.

Prof.. Dr. Felipe Lopes Castro (UFSC)
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

GOV.BR
Documento assinado digitalmente
FRANCISCO CARLOS CARAMELLO JUNIOR
Data: 12/07/2023 18:00:17-0300
CPF: ***.801.148-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Francisco Caramello Junior
(UFSC) (Orientador)

Prof. Dr. Licio Hernanes Bezerra (UFSC)

Prof. Dr. Paulinho Demeneghi (UFSC)

Dedico este trabalho, assim como minha formação, às duas pessoas mais importantes da minha vida: minha mãe, Sandra Regina da Silva Pinto, que um dia quis ser professora de matemática e que sempre me apoiou em minhas escolhas; e ao meu avô, o Sr. Getulio Martins Pinto, que foi o pai que eu não tive, nunca deixou faltar nada na minha vida, e hoje não está aqui para viver este momento comigo.

Agradecimentos

Aqui, deixo os meus mais sinceros agradecimentos àqueles que fizeram parte da minha formação. Primeiramente, à minha família: minha mãe, meu avô, tios e primos, que apoiaram e incentivaram a minha vinda para Florianópolis. Sem eles, essa formação não teria sido possível.

Agradeço também aos amigos que fiz na universidade e fora dela, pessoas que compartilharam bons (e não tão bons) momentos desta etapa da minha vida, que corroboraram para o meu desenvolvimento e minha formação, não apenas como graduando, mas como pessoa, aluno e professor que hoje sou.

Agradeço aos meus professores que, de uma forma ou outra, se fizeram presentes em minha formação, inclusive àqueles que não estiveram tão presentes ou os que não proporcionaram uma experiência tão boa, afinal, a evolução não vem apenas de bons momentos. Agradeço, especialmente, ao meu orientador de PIBIC, Luiz Gustavo Cordeiro, por instigar a minha curiosidade sobre Lógica Matemática e, claro, ao professor que me orientou neste trabalho, Francisco Caramello Junior, que abraçou a minha ideia de falar sobre Lógica Matemática e ainda me apresentou um dos resultados mais importantes da área — que é o tema deste TCC. Obrigado, Francisco, pelos “puxões de orelha” e por todo o rigor matemático e acadêmico que pude aprender com você.

Meus próximos agradecimentos vão para o MEC e CNPq, que disponibilizaram bolsas de estudo, ainda que muito defasadas, mas que proporcionaram minha estadia dentro da universidade, não sendo necessária a procura de emprego fora dela. Agradeço, também, aos colegas que compartilharam momentos dentro de projetos vinculados a essas bolsas de estudo, como é o caso do PIBID e PET Matemática.

E, por fim, quero agradecer à UFSC e à PRAE, pelo sistema de bolsas de assistência estudantil, sem as quais, esta formação não teria sido possível.

"O teorema desse homem (Gödel) é a terceira perna, junto com o princípio de incerteza de Heisenberg e a relatividade de Einstein, do tripé de cataclismos teóricos cujas perturbações se fizeram sentir no cerne dos fundamentos das 'ciências exatas'."

(Rebecca Goldstein)

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é apresentar os Teoremas da Incompletude de maneira acessível, tornando possível o entendimento por trás de todo este arcabouço formal que ocorre no desenrolar destes resultados. O trabalho nasce com o intuito de entender melhor o formalismo da Lógica Matemática utilizada no curso de Matemática, dado que, já na primeira fase do curso, estamos trabalhando com demonstrações, que envolvem sistemas formais e axiomatizações, sem saber ao certo do que se trata. A construção do trabalho se dá com uma forte base atrelada ao entendimento de todo esse formalismo para, na sequência, explorar dois dos maiores resultados da Lógica Matemática, os Teoremas da Incompletude de Gödel. Esta estruturação foi feita juntamente com uma obra específica, o livro "Gödel, Escher, Bach: um entrelaçamento de gênios brilhantes", do autor Douglas Hofstadter, que traz uma analogia singular para o entendimento da construção dos resultados de Gödel. A metodologia se dá através da revisão bibliográfica do livro citado acima, assim como de outras literaturas que tratam sobre o assunto, e de outros estudos que foram sendo realizados durante reuniões semanais com o orientador. Como resultado, alcançamos um amplo entendimento no que tange os conceitos que constituem o formalismo da Lógica Matemática, assim como sua aplicação em um dos mais expressivos resultados da área. Dado isso, conseguimos tornar acessíveis os conceitos que concernem o formalismo matemático, assim como deixar mais simples o entendimento a respeito dos Teoremas da Incompletude.

Palavras-chave: sistema formal; Teoremas da Incompletude; Kurt Gödel; lógica matemática; axiomatização.

Abstract

The main objective of this work is to present the Incompleteness Theorems in an accessible manner, making it possible to understand the underlying formal framework that unfolds within these results. The work aims to better understand the formalism of Mathematical Logic used in the Mathematics course, as we are already working with proofs in the first phase of the course without fully understanding what it is about. The construction of the work is based on a strong foundation tied to the understanding of this formalism, and subsequently explores one of the greatest results of Mathematical Logic, Gödel's Incompleteness Theorems. This structuring is done in conjunction with a specific work, the book "Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid" by Douglas Hofstadter, which provides a unique analogy for understanding Gödel's results. The methodology involves a bibliographic review of the aforementioned book, as well as other literature on the subject, and other studies conducted during weekly meetings with the advisor. As a result, we have achieved a comprehensive understanding of the concepts that constitute the formalism of Mathematical Logic, as well as its application in one of the most significant results in the field. Given that, we were able to make the concepts related to mathematical formalism accessible and simplify the understanding of the Incompleteness Theorems.

Keywords: Incompleteness Theorems; formal system; Kurt Gödel; mathematical logic; axiomatization .

Sumário

1 Introdução

Quando falamos em matemática, vem a ideia de que ela é "exata" e, com isso, uma ideia de formalismo — de que existe um jeito certo de fazer as coisas em matemática. Muito disso é verdade, principalmente quando falamos de lógica matemática. Porém, o que normalmente não fica claro é como funciona essa parte da lógica.

Logo no início de um curso de matemática é comum nos depararmos com um novo conceito da matemática, que não faz parte do ensino básico, que são as *demonstrações*. Com elas, vem um mundo de formalidades, estratégias e novos conceitos que, na sua maioria, têm sua base na lógica ou na lógica matemática. É a partir da vontade de entender melhor como funcionam os conceitos da lógica matemática que surge este trabalho. Serão apresentados portanto tais conceitos, de maneira detalhada, tendo em vista dois dos maiores resultados dessa área, os Teoremas da Incompletude de Gödel.

No que segue, daremos uma breve introdução histórico-conceitual a respeito de alguns temas e, a partir do segundo capítulo, começaremos uma construção sequencial de toda a base que precisamos para entender a formalização da aritmética — a Teoria dos Números — que acontece no capítulo 4. Nos capítulos que seguem, será refeita a construção dos resultados de Gödel, porém, tomados de um viés mais simplista, de modo que venha ao encontro do principal objetivo deste trabalho, que é tornar acessível todo este arcabouço formal matemático.

1.1 O método axiomático

Como já sabemos, além de ser uma ferramenta poderosa para diversas áreas da ciência, a matemática tem muitos resultados próprios. Afinal, quem nunca ouviu falar do *Teorema de Pitágoras*? Acredito que todas as pessoas que chegaram até este texto o conhecem. Ficam, no entanto, as seguintes dúvidas: será que todas essas pessoas sabem o que é um teorema? Qual sua origem e como é feita sua construção?

De fato, um teorema é um certo resultado de alguma área da matemática; a grosso modo, uma verdade matemática. Porém, assim como em conversas do cotidiano, quando queremos convencer alguém de alguma coisa — alguma verdade —, precisamos nos utilizar de argumentos para que aquela verdade seja aceita, na matemática, precisamos utilizar artifícios parecidos, que são conhecidos como *demonstrações*. Falaremos sobre elas mais tarde.

Voltando a falar do cotidiano, pode ser que a pessoa que estamos tentando convencer sobre um determinado fato não tenha conhecimento do argumento que está sendo utilizado, sendo assim, precisamos utilizar um outro argumento que, através do raciocínio, nos leve ao primeiro argumento. Caso ainda não ocorra o entendimento, precisamos voltar mais um pouco no pensamento, até que cheguemos em um argumento que seja conhecido por ambos, para, assim, refazer a construção do raciocínio e chegar àquele primeiro argumento, que mostra a veracidade daquele fato.

Esta construção, por meio de argumentos, nos leva a um conceito que é crucial para estabelecer as verdades matemáticas: o método axiomático. Ao utilizar o método axiomático, é possível validar a veracidade dos resultados descobertos e estruturá-los de forma lógica. Essa construção lógica é o que vamos chamar de uma demonstração.

A ideia é que, no lugar de argumentos, vamos utilizar resultados matemáticos já comprovados ou, caso ainda não saibamos sobre a veracidade de certo resultado, utilizaremos um resultado anterior e assim por diante. Note que, no entanto, não podemos fazer este caminho inverso indefinidamente — ou infinitamente. Assim como com os argumentos, que retrocedemos até encontrar um argumento conhecido por ambas pessoas, no método axiomático poderemos retroceder até chegarmos em verdades tidas como verdades fundamentais, que são chamadas de *axiomas*. No capítulo 2, veremos que este retrocesso pode ser feito por meio de aplicação inversa das *regras de inferência* — um dos componentes de um sistema formal. Sendo assim, dado um resultado matemático, podemos ir retrocedendo em resultados anteriores até que cheguemos em um axioma. Com efeito, partindo de um axioma, ou de um resultado já comprovado, aplicando argumentos válidos chegaremos a um resultado que é verdadeiro.

O método axiomático aparece pela primeira vez, na história da matemática, em uma das obras de Euclides (por volta de 300 a.C.), uma coleção de livros chamada *Os Elementos*. Era uma coleção de treze livros que tratava sobre variados assuntos da matemática. Segundo Àvila (ÁVILA, 2001), a melhor versão, hoje (em 2001), da obra, é a versão inglesa *The thirteen books of Euclid's Elements* (HEATH et al., 1956), que foi traduzida do árabe para o inglês. Porém, em 2009 surge a obra *Os Elementos* (BICUDO, 2009), com base no texto original (grego) e traduzida diretamente para o português por Irineu Bicudo. Dentre os assuntos abordados na obra, a geometria trabalhada por Euclides dá base para toda a geometria plana que estudamos hoje, que conhecemos, também, como *Geometria Euclidiana*. Com uma ideia parecida à dos axiomas, Euclides postulou algumas afirmações que ele chamou de "noções comuns" — que foram os cinco postulados de Euclides — e, com mais algumas definições e proposições ele apresenta o que é mais incrível na sua obra, com este pequeno número de informações iniciais e uma sequência lógico-dedutiva admirável, Euclides foi capaz de fazer a demostração de todos os teoremas que apresentou. É bom ressaltar que isso aconteceu há mais de dois mil anos.

Com o passar dos séculos, o quinto postulado de Euclides — o postulado das paralelas — não parecia tão claro como os outros, e tomá-lo como axioma gerou o desconforto de alguns estudiosos — incluindo talvez o próprio Euclides, que postergou seu uso o quanto pode, em sua obra. Com o estudo deste quinto postulado veio o advento das Geometrias não-Euclidianas. Além disso, conforme os estudos evoluíram, foi notado que os postulados de Euclides eram insuficientes para provar todos seus resultados e que existiam algumas falhas na sua axiomática, assim, era preciso reorganizar a Geometria Euclidiana e incluir os axiomas que faltavam para a obtenção dos resultados. No século XIX, depois da contribuição de alguns matemáticos neste tema, David Hilbert publica o livro *Fundamentos da Geometria* (HILBERT, 1950), apresentando uma rigorosa axiomática adequada ao desenvolvimento lógico-dedutivo da geometria euclidiana. Como veremos a seguir, este formalismo rigoroso era bem característico nos estudos e trabalhos de Hilbert.

1.2 O Programa de Hilbert

O chamado Programa de Hilbert foi um esforço de axiomatização da matemática, proposto por Hilbert e promovido por sua escola formalista em meados de 1900. Neste programa Hilbert defendia que, partindo da formalização de teorias matemáticas, qualquer problema, formulado com rigor, poderia ser respondido. Para tanto, vários requisitos foram impostos por Hilbert, sendo um deles de que, para resolver tais problemas, não poderiam ser utilizados métodos não-finitários.

Na época, uma das grandes perguntas era a da consistência lógica das teorias matemáticas formalizadas, ou seja, se em uma determinada teoria não seria possível demonstrar, simultaneamente, uma proposição e a sua negação. Este é um tipo de problema que, para Hilbert, deveria ter solução através de métodos finitários.

O Programa de Hilbert era baseado em três objetivos principais:

1. formalizar a matemática: estabelecer uma base sólida e rigorosa para a matemática, utilizando sistemas formais e regras lógicas bem definidas;

2. provar a consistência da matemática: a partir desse conjunto de axiomas e regras formais, não seriam derivadas contradições, ou seja, estes sistemas formais utilizados na formalização da matemática seriam consistentes;

3. resolver os problemas fundamentais da matemática: uma lista de 23 problemas que Hilbert considerava os mais importantes para a matemática do seu tempo.

Porém, mais a frente, com os resultados de Gödel, veremos que o cumprimento destes objetivos não seria algo possível.

1.3 Quem foi Kurt Gödel

Kurt Friedrich Gödel, ou Kurt Gödel, como ficara grandiosamente conhecido, nasceu no ano de 1906, na cidade de Brünn, Áustria-Hungria, onde hoje fica a cidade de Brno, na República Tcheca, e naturalizou-se americano em 1948. Ao lado de Aristóteles, Frege e Tarski, Gödel é considerado um dos grandes nomes da lógica de todos os tempos.

Gödel era de uma família de ascendência alemã, filho de Rudolf Gödel e Marianne Gödel. Na cidade em que nasceu, a população falava majoritariamente o alemão, assim como seus pais. Ele era conhecido na sua família como "Der Herr Warum" (Sr. Por quê?), pelo fato do grande número de perguntas que fazia. De acordo com relatos da família, mesmo sendo tímido e se aborrecendo facilmente, Gödel teve uma infância feliz e tranquila.

A Tchecoslováquia se estabeleceu como nação no ano de 1918, o que acarretou em um isolamento da minoria que falava alemão na cidade, na época. Passados alguns anos, em 1929, Kurt Gödel renunciaria à cidadania tcheca, tornando-se, oficialmente, austríaco. Antes disso, em 1923, ele concluiu o curso fundamental na escola alemã de Brünn, onde se aprofundou um pouco em história e matemática. O gosto pela matemática veio a aumentar quando, em 1920, ele fez uma viagem para Viena, junto do seu irmão mais velho, que fora cursar a Escola de Medicina da Universidade de Viena.

Inicialmente, quando tinha dezoito anos, a ideia de Gödel era estudar Física, porém, ele acabou frequentando os cursos de Matemática e Filosofia, obtendo, em seguida, seu mestrado em Matemática, época em que participou, também, do Círculo de Viena, juntamente com Moritz Schlick, Hans Hahn, e Rudolf Carnap (GOLDSTEIN, 2008). Seu interesse pela Lógica Matemática vem depois da participação em um seminário ministrado por Bertrand Russell, quando Gödel estudava sobre a Teoria dos Números. É aqui, nessa época, que Gödel conhece sua futura esposa, Adele Nimbursky.

Dado seu novo interesse por Lógica Matemática, Gödel começa a fazer algumas publicações e, em 1929, ano que se tornou cidadão austríaco, ele completa, com a supervisão de Hans Hann, a sua dissertação de doutorado sobre a completude do cálculo de predicados de primeira ordem, ou, como ficou conhecido, o Teorema da completude de Gödel. Em 1930, ele tem seus trabalhos publicados pela Academia de Ciências de Viena e, em 1931, ele publica seus mais famosos resultados: Os Teoremas da Incompletude.

Em 1932, Gödel é diplomado pela Universidade de Viena e, no ano seguinte, tornou-se *Privatdozent* (docente não remunerado). Ainda em 1933, Gödel faz sua primeira viagem aos Estados Unidos, onde conhece Albert Einstein e participa da conferência anual da American Mathematical Society. No ano de 1934, o lógico ministra uma série de aulas no Instituto de Estudos Avançados de Princeton e, nos que seguem, faz algumas viagens de ida e volta aos Estados Unidos, voltando a lecionar em 1937, ano que trabalhou intensamente na prova da consistência da hipótese do continuum.

No ano seguinte, Gödel apresenta mais alguns de seus importantes trabalhos, como a demonstração da consistência relativa do Axioma da Escolha, a Hipótese Generalizada do Continuum e outros. Ainda em 1938, com a anexação da Áustria pela Alemanha, Gödel perde seu título de *Privatdozent* e, assim, teria que se submeter a um concurso para uma nova vaga como professor universitário, porém, seus vínculos no Círculo de Viena, majoritariamente com judeus, complicariam para a obtenção do cargo.

Além do problema com seu cargo de docente, Gödel, considerado apto para o serviço militar, corre o risco de ser convocado para o exército alemão e, assim, decide emigrar para os Estados Unidos. Em uma viagem de dois meses, entre Janeiro e Março de 1940, Gödel e sua esposa se mudam para a América do Norte e se estabelecem em Princeton, onde ele recebe grande apoio e passa a integrar o IAS (Instituto de Estudos Avançados de Princeton), mesma época que passa a ser grande amigo de Einstein. É possível encontrar muitas curiosidades a respeito desta amizade no livro *Incompletude* (GOLDSTEIN, 2008), onde a autora relata inúmeras caminhadas, conversas e resultados destes dois grandes gênios. Kurt Gödel continuou a trabalhar em Lógica e Filosofia da Matemática até sua morte em 1978, tendo contribuído para áreas como a Teoria dos Conjuntos, a Teoria da Computação e a Física Teórica.

Os últimos anos de vida de Kurt Gödel foram muito complicados. Gödel tornou-se muito esquivo ao contato com outras pessoas, o que foi relacionado a um quadro paranoico que desenvolveu, no qual acreditava que havia uma conspiração para matá-lo por envenenamento. Nesta época, se alimentava apenas de comidas feitas por sua esposa. Em dado momento, Adele adoeceu e teve que ser internada em um hospital e, com isso, Gödel parou de se alimentar, acabando por falecer devido a complicações decorrentes da inanição. Ele foi sepultado em Princeton e há relatos de que Gödel pesava 29kg na época de sua morte.

Um fato não mencionado até aqui, é que Gödel se tornou um cidadão americano. Dentro deste fato, uma curiosidade que Goldstein (GOLDSTEIN, 2008) traz em seu livro, é que o lógico, enquanto fazia seus estudos a respeito da Constituição Americana, encontrou um certo problema com o texto. Gödel notara que seria possível, de forma constitucional, implementar uma ditadura nos Estados Unidos, porém, em conversas com Einstein, o físico aconselhou que Gödel deixasse este problema de lado. Em 1948, Gödel tem sua candidatura aprovada e passa a ser cidadão americano. De fato, Kurt Gödel era bom em encontrar problemas, afinal, assim como o da constituição, anos antes, ele havia encontrado um problema nos fundamentos da matemática, que deu origem a um de seus trabalhos mais conhecidos e emblemáticos: Os Teoremas da Incompletude.

1.4 Os teoremas de Gödel

Os Teoremas da Incompletude de Gödel foram resultados muito expressivos, obtidos no início do século XX, que bateram de frente com alguns objetivos do Programa de Hilbert. Segundo Gödel, no seu segundo teorema da incompletude, ele diz que não é possível provar a consistência de um sistema formal usando esse próprio sistema. No primeiro teorema, Gödel mostrou que, em um sistema formal com um mínimo de aritmética — que disponha das operações básicas e recursividade — existem afirmações verdadeiras que não podem ser demonstradas, o que traz a ideia de *incompletude* e dá nome aos seus teoremas.

Gödel utilizou-se de artifícios lógicos e de uma construção detalhadamente genial para a obtenção de seus resultados. O seu artigo, datado de 1931, tem algo entre sessenta e setenta páginas, tem como título "*Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*" ("Sobre as Proposições Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos") (GÖDEL, 1931) e, para a escrita dos resultados, ele precisou, como preliminares, mais de cinquenta definições e teoremas, o que mostra ser um resultado nada simples de ser descrito.

Existem algumas literaturas que tratam a respeito de Gödel e os Teoremas da Incompletude, porém, em língua portuguesa, elas não são muitas. Além de algumas obras já citadas até aqui, o livro *"A Prova de Gödel"* (NAGEL; NEWMAN, 2007) traz algumas partes da história e apresenta a construção dos teoremas — porém, de uma forma mais técnica e aprofundada — e, junto dos outros livros, foi utilizado para embasamento teórico e histórico deste trabalho.

A motivação e a base principal para deste texto vêm de um livro em especial, do autor Douglas Hofstadter, o livro *Gödel, Escher, Bach: Um Entrelaçamento de Gênios Brilhantes* (HOFSTADTER, 2001), que traz nas suas oitocentas e noventa e cinco páginas uma leitura leve, muito dinâmica e repleta de analogias, o que facilita, e muito, o entendimento do leitor. A partir deste ponto, utilizarei a sigla *G.E.B.* quando falarmos deste livro.

O modo de leitura fácil abordada neste livro vem ao encontro do principal objetivo deste trabalho, que é discutir, de forma acessível, a respeito dos teoremas de Gödel e de como foi feita a construção por trás deste brilhante resultado. À medida que avança na leitura do texto, o leitor adquire conhecimento sobre os conceitos-chave empregados na elaboração dos resultados. Ao ler este trabalho, espero que você compartilhe da mesma animação que eu em relação à escolha deste tema.

2 Sistemas formais

Para esta seção, pretende-se tratar sobre definições e ideias que serão necessárias para a compreensão dos resultados deste trabalho, assim como para todas as analogias que aparecem nele, sendo elas, as analogias, uma parte crucial desta seção. Serão tratados tópicos como a definição de sistemas formais, assim como todos os assuntos que compõem essa definição. Para este capítulo e o próximo, foram feitos estudos em dois livros que tratam sobre introdução à lógica, sendo eles *Lógica: um curso introdutório* (NEWTON-SMITH, 1998) e *Introdução à lógica* (MORTARI, 2001).

Neste trabalho, será falado sobre algumas axiomatizações e exemplos, como é o caso dos Axiomas de Peano, e, como um dos pontos altos deste texto, trabalharemos, no capítulo 4, na axiomatização da *Teoria dos Números Tipográfica*, que é uma maneira de formalizar a Teoria dos Números, com base na principal literatura deste trabalho, que é o livro *G.E.B.* (HOFSTADTER, 2001).

Era, e ainda é, comum desenvolver a matemática com uma linguagem que mistura a língua cotidiana, o português, por exemplo, com alguns símbolos, para a formulação de axiomas e proposições. O mesmo não acontece em sistemas formais, uma vez que, neles, são trabalhadas apensas *expressões bem-formadas* de alguma linguagem artificial específica. Um exemplo é dado pela linguagem do sistema MIU, um sistema formal extremamente simples, que utilizaremos para elucidar a construção de um sistema formal. Uma expressão bem-formada de um sistema formal é aquela que segue as regras de formação do sistema em questão, como veremos em seguida, quando falamos sobre como é construído um sistema formal.

Um sistema formal, sobre uma certa linguagem, é construído a partir de quatro componentes:

- um *alfabeto*, que contém os símbolos da linguagem em questão;
- um conjunto de *regras de formação*, que irão indicar como são construídas expressões bem-formadas naquela linguagem;
- um conjunto de *axiomas*, que são as expressões aceitas sem demonstração;
- um conjunto de *regras de inferência*, que nos darão o caminho para formar novas expressões, partindo dos axiomas e de outras expressões já derivadas.

Quando falamos na linguagem específica de um sistema formal, estamos nos referindo à uma *linguagem artificial* (ou *linguagem-objeto*), que é constituída pelo alfabeto e as regras de formação do sistema em questão. As linguagens artificiais são construídas de forma com que não haja ambiguidade em suas expressões.

Ainda se tratando sobre as componentes de um sistema formal, podemos, de forma a deixar mais simples de se entender, falar que: os símbolos do alfabeto de uma certa linguagem podem ser entendidos como as letras do alfabeto da língua portuguesa, que serão utilizadas para formar palavras, onde, estas, as palavras, estarão bem-formadas caso sigam as regras de sintaxe, que, aqui, seriam as regras de formação. Em um nível acima, podemos também pensar que os símbolos de uma linguagem formal são como palavras da língua portuguesa, e se juntam para formar frases. Estas frases seriam ditas "bem formadas" se seguirem as regras gramaticais do português. É de fato nesse nível mais alto que a analogia funciona melhor, ou seja, como pensamos quando estamos formalizando a Matemática. Um outro exemplo que pode ser dado é a respeito da aritmética, onde podemos pensar em um alfabeto com símbolos tais como $'+', '=', 1, 3$ etc. e que, seguindo as regras de formação, podemos construir uma fórmula da aritmética, por exemplo

$$3 + 1 = 4. \tag{2.0.1}$$

Mais adiante, veremos que (2.0.1) é uma fórmula atômica, porém, agora, vamos definir mais detalhadamente cada um dos componentes que integram um sistema formal. Para auxiliar nas definições, vamos utilizar um exemplo de sistema formal tirado do livro *G.E.B.* (HOFSTADTER, 2001), que é o sistema MIU. Com este exemplo, vamos relacionar cada componente de um sistema formal ao seu análogo no Sistema MIU e, após feitas as definições, vamos trabalhar em um exemplo que acontece dentro deste sistema MIU.

2.1 Alfabeto

Por um alfabeto, estamos nos referindo a um conjunto (não vazio) de símbolos, que podem ser letras, algarismos, símbolos de conectivos, operadores etc. São exemplos de alfabetos os conjuntos $A_1 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$ (os algarismos de 0 até 9), $A_2 = \{a, b, c, ..., z\}$ (o alfabeto das letras minúsculas) e $A_3 = \{\circ, a, d, x, f,), (\}$ (um alfabeto composto por operadores, constantes e variáveis).

Exemplo 2.1.1. No sistema MIU, o alfabeto é composto pela letras maiúsculas M, I e U, ou seja,

$$A_{\text{MIU}} = \{M, I, U\}.$$

2.2 Regras de formação

Podemos dizer que uma sequência finita de símbolos de um alfabeto é uma "expressão" daquela linguagem, porém, assim como na língua portuguesa é preciso seguir a sintaxe, para que aquela sequência de letras seja, de fato, uma palavra, em linguagens artificiais precisamos seguir as regras de formação, que vão informar de que modo os símbolos do alfabeto podem ser combinados, com o intuito de construir uma expressão bem-formada. Mais a frente, veremos que estas expressões são conhecidas como *termos, fórmulas* e *sentenças*, quando tratarmos da linguagem da lógica de primeira ordem.

Exemplo 2.2.1. No sistema MIU, as regras de formação são as seguintes: as expressões devem iniciar com a letra M e serem finitas, ou seja, ter uma sequência finita de letras do alfabeto.

Um outro modo de entender o funcionamento de uma regra de formação, é analisando a expressão abaixo:

$$+3+ = 4. \tag{2.2.1}$$

Conhecendo um pouco sobre a aritmética, e lembrando como é feita a operação de adição nesse sistema — que é uma operação binária — é fácil notar que 2.2.1 não se trata de uma expressão bem-formada da aritmética, pois ela não segue a forma de como uma adição é construída nesse sistema.

2.3 Axiomas

Os axiomas são as verdades mais elementares de um sistema formal, são aquelas expressões, sentenças ou proposições que são aceitas sem demonstração. Podemos dizer que eles são o ponto de partida para a formulação de novas expressões do sistema formal em questão, que se darão a partir da aplicação das *regras de inferência.*

Exemplo 2.3.1. No sistema MIU temos apenas um axioma, que é a expressão *MI.* Sendo assim, é a partir da expressão *MI* que serão inferidas novas expressões do sistema MIU.

2.4 Regras de inferência

São as regras que utilizamos/aplicamos a fim de produzir (inferir) novas expressões. A ideia é que, a partir de um certo axioma, ou de alguma outra expressão já válida, podemos construir, com a aplicação das regras de inferência, novos resultados. Sendo assim, veja que, dado um axioma, uma nova expressão é obtida, fazendo a aplicação de uma regra de inferência no mesmo e, além disso, uma regra de inferência pode ser aplicada à esta nova expressão, gerando, assim, um novo resultado. Esse processo de aplicação das regras de inferência nos dá luz ao que chamamos de *demostração*.

Exemplo 2.4.1. Seguindo com a ideia do Sistema MIU, iremos listar todas as suas regras de inferência:

1. Caso sua sequência de símbolos termine com I, você pode acrescentar um símbolo U ao final desta sequência.

2. A sequência de símbolos, excluindo o primeiro símbolo M (que está bem à esquerda), pode ser duplicada a qualquer momento, porém, deve ser duplicada por completo (e.g. a partir de MIU você pode obter a sequência $MIUIU$; note que foi duplicada a sequência IU).

3. Caso ocorra de aparecer III em uma de suas sequências, você pode criar uma nova sequência, substituindo III por U (e.g. caso você tenha a sequência $MIIII$, pode criar uma nova sendo MIU ou MUI).

4. Se acontecer de sua sequência ter os símbolos UU consecutivos, você pode excluí-los da sequência (e.g. $MIUU$ implicará em MI).

2.5 Teoremas e demonstrações

Para seguir a construção deste texto, e complementar todo o raciocínio criado até aqui, dois conceitos de extrema importância devem ser definidos. São eles: *teorema* e *demonstração*. Esses dois conceitos se definem convoluta e recursivamente como segue:

Definição 2.5.1. Um teorema é uma fórmula Φ, da linguagem, que admite uma demonstração, isto é, uma sequência finita de fórmulas consistindo de axiomas ou teoremas, com a propriedade de que cada fórmula é obtida das anteriores por meio da aplicação de alguma regra de inferência, e a última fórmula da sequência é Φ.

Agora que as quatro componentes utilizadas para construir um sistema formal estão bem definidas, e sabemos o que são teoremas e demonstrações, vamos trabalhar em um exemplo que trata sobre o Sistema MIU, para que todos estes novos conceitos fiquem mais claros ao leitor.

Exemplo 2.5.1. No livro *G.E.B.* (HOFSTADTER, 2001) é apresentado um problema, em formato de jogo, chamado "O quebra-cabeça MU". Nele, o leitor é convidado a trabalhar com o MIU, onde o grande objetivo é a questão "Você pode demonstrar MU?".

A ideia, portanto, é trabalhar com expressões formadas pelos três símbolos do alfabeto de MIU, partindo do axioma dado, que é a expressão MI, e, por meio de aplicação das *regras de inferência*, você deve chegar à sequência MU.

Segue uma ideia de como se espera que o leitor proceda ao jogar *"O quebra-cabeça MU"*:

a) MI (axioma)

b) MII (a partir de (a), pela regra 2)

c) $MIIII$ (a partir de (b), pela regra 2)

d) $MIIIIU$ (a partir de (c), pela regra 1)

e) $MUIU$ (a partir de (d), pela regra 3)

f) $MUIUUIU$ (a partir de (e), pela regra 2)

g) $MUIIU$ (a partir de (f), pela regra 4)

Note que o jogo segue a ideia que construímos, de como trabalhar em sistemas formais. Sendo a expressão (sequência) MI o começo de tudo, ou seja, o nosso axioma, a cada aplicação das regras de inferência, formamos uma nova expressão, que é um teorema. Sendo assim, falando de maneira mais formal, a partir do axioma MI, derivamos diversos teoremas por meio das regras de inferência. Esse processo ocorre a cada linha, de *(a)* até *(g)*, sendo cada expressão, a partir de *(b)*, um novo teorema, até chegar à última expressão, que é o teorema *MUIIU*. Assim, dizemos que este processo, partindo do axioma *MI*, aplicando as regras de inferência e derivando o teorema *MUIIU* ao final, é uma demonstração para o teorema *MUIIU*.

Veja que, até aqui, não derivamos o teorema MU, como pede o jogo, porém, indicamos ao leitor seguir com tentativas de derivá-lo, para entender melhor como funcionam as regras de inferência. Mais a frente voltaremos a falar deste quebra-cabeças.

2.6 Semântica: dando sentido às ideias

O leitor deve notar que, com todo o trabalho que construímos até aqui, já conseguimos construir expressões de um sistema formal, através de seu alfabeto e regras de formação, e, também, construir novas expressões a partir de expressões já existentes, utilizando as regras de inferência do sistema formal em questão. Porém, ainda não podemos estabelecer se uma expressão é *verdadeira* ou *falsa*, dado que, até aqui, ainda não sabemos o significado dos símbolos de tais expressões.

Pensando na língua portuguesa, a semântica trata sobre o significado de palavras, frases, sinais e símbolos. Na lógica, isso vai funcionar de maneira bem parecida, de modo que daremos uma interpretação para cada símbolo do sistema formal em questão, fazendo com que cada um deles tenha o seu próprio significado. Agora, expressões bem-formadas poderão ser interpretadas, assim como frases da língua portuguesa, e, dado isso, poderemos atribuir valores de *verdade* às nossas expressões. No decorrer da seção vamos apresentar alguns exemplos, com o intuito de deixar mais evidente como funciona a semântica em sistemas formais e o que são esses valores de verdade.

Exemplo 2.6.1. Para auxiliar nesta seção, vamos utilizar mais um exemplo tirado do livro de Hofstadter (HOFSTADTER, 2001), que é o sistema formal MG. Este sistema é composto da seguinte forma:

Alfabeto: O sistema MG tem o seguinte alfabeto:

$$A_{\mathrm{MG}} = \{-, m, g\}$$

que são, nesta ordem, o *hífen* e as letras minúsculas m e g.

Regras de formação: O sistema MG tem uma regra de formação, que é a seguinte: Uma cadeia bem formada será qualquer cadeia que inicie com um grupo de hifens seguido de m, depois um segundo grupo de hifens, depois um g e, por final, mais um grupo de hifens. Assim a cadeia $--m----g--$ é uma cadeia bem formada.

Axiomas: O sistema MG tem um conjunto infinito de axiomas. Aqui, é utilizado algo que chamamos de *esquema axiomático*, onde vamos definir quando uma certa expressão é, ou não, um axioma do sistema, da seguinte forma: a expressão $\mathrm{x}m-g\mathrm{x}-$ será um axioma, sempre que a letra x for substituída por uma quantidade fixa de *hifens* — o leitor deve notar que o x tem que ser substituído pela mesma quantidade de hifens em ambas as ocorrências — logo, a expressão $---m-g----$ é um axioma.

Regras de inferência: O sistema MG conta com apenas uma regra de inferência, que é a seguinte: dadas sequências x, y e z de hifens, que podem ser distintas, se a cadeia $\mathrm{x}m\mathrm{y}g\mathrm{z}$ é um teorema, então a cadeia $\mathrm{x}m\mathrm{y}-g\mathrm{z}-$ também será um teorema. Assim, considerando que x é "$--$" , y é "$---$" e z é "$-$" , temos que, se a cadeia $--m---g-$ é um teorema, então a cadeia $--m----g--$ é um teorema.

Agora, podemos avançar mais um passo e chegar ao cerne desta seção, a *interpretação*. Uma interpretação é uma correspondência símbolo-palavra, que irá atribuir um significado para cada símbolo do sistema. Vejamos uma possível interpretação para o sistema MG:

- a quantidade de hifens será interpretada como um número. Por exemplo, uma sequência de três hifens será interpretada como o número 3;

- a letra m será interpretada como "adicionado a", com a mesma ideia da adição na aritmética;
- a letra g será interpretada como "é igual a", do mesmo modo que o símbolo de igualdade (=) que conhecemos.

Assim, olhando para a cadeia $--m---g-----$, podemos, agora, interpretá-la como "2 adicionado a 3 é igual a 5", o que é uma afirmação *verdadeira* — afinal, é um teorema. Porém, note que a cadeia $--m----g--$ é interpretada como "2 adicionado a 4 é igual a 2", o que, com esta interpretação, se torna um afirmação *falsa*. Portanto, tendo em mãos uma interpretação para os símbolos do sistema, notamos que as cadeias bem formadas passam a se tratar de afirmações que, por sua vez, podem ser afirmações verdadeiras, ou afirmações falsas.

Um conceito a ser agregado aqui, é o de *isomorfismo*, onde, informalmente, Hofstadter diz que um isomorfismo é uma transformação que preserva as informações, assim, podemos dizer que existe um isomorfismo entre o sistema MG e a adição, afinal, um teorema do sistema MG é equivalente a adição entre dois números.

Para sabermos quando uma determinada cadeia é um teorema do sistema mg, vamos utilizar o seguinte procedimento decisório: será um teorema toda a cadeia que, quando somados os dois primeiros grupos de hifens, equivalham, em comprimento, ao terceiro grupo de hifens. Assim, a cadeia $--m---g-----$ é um teorema, uma vez que 2 mais 3 é igual a 5. Além disso, aplicando a regra de inferência à cadeia $--m---g-----$, temos que a cadeia $--m----g------$ também é um teorema.

Voltando a falar de interpretações, o leitor deve ter notado, alguns parágrafos acima, que aquela seria *uma* interpretação para o sistema MG. Pois bem, será que existe uma outra interpretação para este sistema? A resposta é sim. Podemos usar o sistema MG da mesma forma que ele foi construído anteriormente, porém, agora daremos uma nova interpretação para os símbolos:

- a quantidade de hifens segue a mesma interpretação, ou seja, uma sequência de três hifens será interpretada como o número 3;
- a letra m será interpretada como "é igual a";
- a letra g será interpretada como "tirado de".

Portanto, a cadeia $--m---g-----$ passa a ter um novo significado, que é a afirmação "2 é igual a 3 tirado de 5". Veja que a afirmação é verdadeira, assim como serão todos os teoremas do sistema com esta nova interpretação, afinal, pensando no isomorfismo que comentamos anteriormente, sabemos que a adição e a subtração tem uma ligação em comum. O que precisamos ressaltar é que, independente do isomorfismo, cada realidade vale por si só, ou seja, dois mais dois é igual a quatro mesmo que fosse desconhecido o teorema $--m--g----$, assim como $--m--g----$ é um teorema mesmo sendo relacionado a uma adição ou não.

2.7 Saindo do sistema para entender o sistema

A ideia da necessidade de "sair do sistema" é um dos conceitos chave dos resultados de Gödel. O intuito desta seção é explicar melhor como este conceito funciona.

Voltando a falar do "Quebra-cabeça MU", que foi apresentado no exemplo 2.5.1, o leitor deve ter notado, depois de uma certa quantidade de tentativas, alguma dificuldade em produzir o teorema MU. Pois bem, caro leitor, derivar o teorema MU não é apenas difícil, mas, sim, impossível.

Vamos fazer uma breve explanação de ideias a respeito desta impossibilidade, porém, veja que, apenas fazendo manipulações dentro do Sistema MIU — pelas regras de inferência — não teríamos como chegar a esta conclusão, da impossibilidade. É preciso sair do sistema, olhar para as regras de inferência dele e, daí sim, analisando-as, chegar à conclusão da impossibilidade. Façamos isso.

Veja que, quando executamos as regras de inferência, o que acontece, é que a quantidade de símbolos (Is e Us) aumenta ou diminui, dependendo da regra utilizada. Agora, note que, para chegar ao teorema MU, que é o objetivo do quebra-cabeça, precisamos que o número de Is seja igual a zero. Será que é possível? A resposta é: não! Se olharmos para as regras (1) e (4) podemos notar que ambas não influenciam na quantidade de Is dos teoremas que vão sendo gerados através delas, portanto, nos preocupemos, apenas, quantos as regras (2) e (3). Sabemos que a regra (3) diminui em 3 unidades a quantidade de Is de uma fórmula, quando aplicada, sendo assim, ela seria crucial para o desfecho. Porém, precisaríamos ter uma quantidade de Is múltipla de 3 antes de aplicarmos a regra, senão, ela, por si só, não gera uma fórmula como queremos.

Precisamos olhar para a formação da fórmula anterior à aplicação da regra (3). Como já vimos, apenas as regras (2) e (3) nos interessam, mas, veja que, a partir da regra (2), é impossível gerar uma fórmula que tenha uma quantidade de Is múltipla de 3, dado que nosso axioma (MI) tem apenas um I e, nesta regra, a quantidade de Is será duplicada em cada aplicação. Veja que, para gerar um múltiplo de 3 — que é o que queremos, para então aplicarmos a regra (3) — precisamos que 3 divida $2n$, sendo n a quantidade de Is existente na fórmula. Porém, note que, se 3 divide $2n$, então, obrigatoriamente, 3 divide n — pois 3 não divide 2 — e precisaríamos ter uma quantidade de Is múltipla de 3, antes de aplicarmos a regra (2), assim como com a regra (3).

Como a quantidade inicial de Is é igual a 1, nunca chegaremos a uma quantidade de Is múltipla de 3 e, sendo assim, concluímos que MU não pode ser gerado, a partir do axioma MI, através das regras de inferência do sistema, ou seja, MU não é um teorema do sistema MIU.

No capítulo 5 voltaremos a falar sobre o sistema MIU e desta questão de MU não ser um teorema do sistema, porém, com um viés na Teoria dos Números.

3 O cálculo proposicional

Neste capítulo iremos apresentar um novo sistema formal, o *Cálculo proposicional*. Com este sistema, daremos mais um passo em direção a formalização necessária para a obtenção e entendimento dos resultados que queremos chegar com este trabalho. No segmento do capítulo, utilizaremos a sigla CPC (Cálculo Proposicional Clássico) para fazermos referência ao sistema formal.

Como o próprio nome já diz, o CPC trata sobre proposições, sejam elas quais forem — isso vai depender da teoria na qual ele estará inserido —, porém, precisamos deixar claro que uma proposição será, a priori, uma cadeia bem formada do sistema.

Neste parágrafo, quero trazer dois conceitos importantes no estudo a respeito da lógica, que são: *metalinguagem* e *linguagem artificial*. Como já mencionado, o CPC é um sistema formal que, por sua vez, tem a sua própria linguagem — que é a *linguagem artificial*, como vimos no capítulo 2 — utilizada para estabelecer definições, derivações e construções de teoremas. Porém, existe uma outra linguagem em jogo, a linguagem natural, que utilizamos para falar sobre estas construções e sobre o sistema em si. Esta linguagem natural é chamada de *metalinguagem* (MORTARI, 2001).

A seguir, veremos como é composto e como trabalhamos dentro do CPC. Já, de antemão, deixo para o leitor a informação de que este sistema não possui axiomas, assim, seus teoremas são produzidos tão somente pelas regras de inferência, como veremos.

3.1 Alfabeto

O alfabeto do CPC é constituído dos seguintes símbolos:

$$A_{CPC} = \{<, >, P, Q, R, ', \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, [,]\}.$$

Os símbolos $<, >$ serão utilizados para delimitar certas proposições, como veremos nas regras de formação. As letras (símbolos P, Q e R) irão representar variáveis proposicionais, que serão as fórmulas atômicas do sistema, e as chamaremos de *átomos*. O apóstrofo ($'$) será um símbolo auxiliar para formarmos novos átomos. Na sequência temos os símbolos lógicos e, por fim, os colchetes ($[,]$), que serão utilizados como auxiliares na *regra da fantasia*, como veremos em seguida.

3.2 O significado dos símbolos

No capítulo anterior a semântica veio logo após a definição de toda a sintaxe do sistema formal, porém, aqui, apresentamos os significados dos símbolos logo após a definição do alfabeto, para que o leitor acompanhe a construção do sistema de modo que possa fazer a interpretação de definições e exemplos no decorrer do capítulo.

- átomos (P, Q, R): variáveis que representam AFIRMAÇÕES (e.g. "o céu é azul", "meu nome é Getulio" etc)

- conjunção ($\wedge$): a interpretação deste símbolo está ligada a palavra "e"; este operador é utilizado quando queremos dizer que 'uma sentença é verdadeira' **e** 'outra sentença é verdadeira', ou seja, estamos fazendo uma ligação entre as sentença e afirmando ambas. Um exemplo do cotidiano poderia ser a frase "chove e está molhado".

- disjunção ($\vee$): tal operador corresponde a palavra "ou" em linguagem natural. Utilizando este conectivo, queremos dizer que **ou** 'uma sentença' é verdadeira **ou** 'outra sentença' é verdadeira —ou ambas, isto é, pelo menos uma das sentenças é verdadeira. Analisando a sentença 'faz sol ou chove', podemos notar que ambos podem acontecer (chover e fazer sol), mas, se ambas acontecem, é claro que pelo menos uma acontece e, sendo assim, a sentença continua válida.

- implicação ($\Rightarrow$): também dizemos que este operador é um *condicional*. Ele está ligado a frases do tipo 'se... então...', ou seja, 'se algo acontece', então 'outra coisa acontece'. Como exemplo, vamos indicar a sentença 'neva' como P e a sentença 'faz muito frio' como Q, logo, a frase 'se neva, então faz muito frio' pode ser escrita, de modo formal, como $< P \Rightarrow Q >$. Chamamos de *antecedente* a sentença que está acompanhada do 'se' (que vem à esquerda do símbolo $\Rightarrow$) e de *consequente* a sentença vinculada ao 'então' (que vem à direita do símbolo $\Rightarrow$). Analisando o exemplo utilizado, temos que 'neva' é o antecedente e 'faz muito frio' é o consequente.

- operador de negação ($\neg$): na nossa língua cotidiana, o operador de negação vem relacionado à palavra 'não', ou à expressão 'não é verdade que'. O operador de negação é chamado de operador *unário*, pelo fato de ser aplicado a apenas uma sentença; utilizamos para negar a validade de algum argumento ou propriedade. Por exemplo, para dizer que o número 2 **não** é ímpar. Vamos definir uma propriedade para dizer que x é um número ímpar como P_x, assim P_1 é verdade, afinal, 1 é um número ímpar. Por outro lado, sabemos que 2 é um número par e, sendo assim, escrevemos $\neg P_2$, ou seja, não é verdade que 2 é um número ímpar.
  Veja que P_x e $\neg\neg P_x$ têm o mesmo valor de verdade, porém, de forma alguma são sentenças iguais.

3.3 Regras de formação

Todos os átomos (P, Q e R) já são bem formados e, fazendo a aplicação do apóstrofo ($'$) à direita de um átomo, temos um novo átomo — que é bem formado. por exemplo: P', Q'', R''. Assim, podemos ter infinitos átomos.

A seguir, temos mais quatro regras de formação.

Regras de formação recorrentes: se x e y são bem formados, então as quatro cadeias a seguir também são bem formadas:

1. $\neg x$
2. $< x \wedge y >$
3. $< x \vee y >$
4. $< x \Rightarrow y >$

Exemplo 3.3.1. As cadeias a seguir são bem formadas:

P	átomo
$\neg P$	(1)
$\neg\neg P$	(1)
Q'	átomo
$\neg Q'$	(1)
$< P \wedge \neg Q' >$	(2)
$\neg < P \wedge \neg Q' >$	(1)
$< \neg\neg P \Rightarrow Q' >$	(4)
$< \neg < P \wedge \neg Q' > \vee < \neg\neg P \Rightarrow Q' >>$	(3)

Observe que, a partir dos átomos e por meio de aplicação das regras, vamos criando novas cadeias subsequentes. Ou seja, cada nova cadeia que surge é obtida pela aplicação de uma das regras em um átomo ou em uma cadeia anterior. Note que o caminho inverso também pode ser feito, até que você chegue em um átomo. Este caminho inverso serve como um *procedimento decisório* para verificar a boa formação de uma cadeia. Em seu livro, Hofstadter deixa um exercício para o leitor verificar quais das cadeias a seguir são bem formadas:

1. $< P >$
2. $< \neg P >$
3. $< P \wedge Q \wedge R >$

4. $< P \wedge Q >$

5. $<< P \wedge Q > \wedge < Q \neg \wedge P >>$

6. $< P \wedge \neg P >$

7. $<< P \vee < Q \Rightarrow R >> \wedge < \neg P \vee \neg R' >>$

8. $< P \wedge Q > \wedge < Q \wedge P >$

(*Resposta:* Aquelas cujos números são números de Fibonacci não são bem formadas.)

3.4 Regras de inferência

Agora vamos ver como são produzidos teoremas dentro deste sistema formal. Em todas as regras a seguir, os símbolos x e y se tratam de cadeias bem formadas. Seguem as regras:

Regra da união: se x e y são teoremas, então a cadeia $< x \wedge y >$ é um teorema.

Regra da dissociação: se $< x \wedge y >$ é um teorema, então, tanto x quanto y, são teoremas.

Regra da dupla negação: a cadeia "$\neg\neg$" pode ser eliminada de qualquer teorema, assim como pode ser adicionada a qualquer um, desde que não interfira na boa formação do mesmo. Um exemplo seria a fórmula $\neg\neg Q$ se tornar apenas Q depois da aplicação desta regra.

Regra da fantasia: se, quando supomos que x é um teorema, y pode ser derivado, então a cadeia $< x \Rightarrow y >$ é um teorema. Nesta regra, o que fazemos é tomar uma cadeia bem formada como premissa e, então, "entrar" na fantasia — usa-se o colchete esquerdo ([) para mencionar que "desceu" para a fantasia — ou seja, agora você está trabalhando em um nível "abaixo" da realidade, em que x é verdade. Aqui, com esta premissa escolhida, pode-se aplicar as demais regras, dando sequência em uma derivação que terá uma cadeia como última linha, digamos que esta cadeia seja y. Assim, tudo que vai de x até y é a *fantasia*, onde x é a premissa e y é o resultado. Feito isso, o próximo passo é "sair da fantasia" — usa-se o colchete direito (]) para isso — e ver o seguinte: se x fosse um teorema, então y seria um teorema. Disso vem o teorema *real* que é a cadeia $< x \Rightarrow y >$. A seguir, temos um exemplo desta regra, em conjunto de algumas derivações feitas a partir de outras regras.

Exemplo 3.4.1. .

[	descida para a fantasia
$< P \wedge Q >$	premissa
P	regra da dissociação
Q	regra da dissociação
$< Q \wedge P >$	regra da união
]	subida da fantasia, volta ao mundo real
$<< P \wedge Q > \Rightarrow < Q \wedge P >>$	regra da fantasia

Veja que pegamos a cadeia $< P \wedge Q >$ como premissa, fizemos algumas derivações e chegamos ao resultado, que é a cadeia $< Q \wedge P >$. Assim, aplicando a regra da fantasia, chegamos ao teorema que é a cadeia $<< P \wedge Q > \Rightarrow < Q \wedge P >>$. Note que, apenas esta última cadeia, que está no "mundo real", é, de fato, um teorema.

Na regra da fantasia você pode se utilizar da recorrência de "descidas" e "subidas" várias vezes, criando, assim, vários "níveis de realidade". A regra da fantasia também é conhecida como "Teorema da dedução". Quando estamos fazendo matemática usamos essa regra várias vezes, muitas delas até sem perceber. Podemos dizer que esse teorema lógico (que para nós é uma regra) estabelece que obter uma demonstração para $< x \Rightarrow y >$ (portanto, cuja última linha é esta fórmula) é equivalente a obter uma demonstração de y possivelmente usando x como uma das linhas da demonstração (ou seja, no "mundo da fantasia", onde x é um teorema).

Regra de transporte: dentro de uma fantasia, qualquer teorema proveniente da "realiade" um nível acima pode ser trazido e utilizado. Um exemplo para a regra do transporte, seria o seguinte:

Exemplo 3.4.2. .

[	descida
P	premissa da fantasia exterior
[	nova descida
Q	premissa da fantasia interior
P	**transporte** de P para a fantasia interior
$< P \wedge Q >$	regra da união
]	subida da fantasia interior, volta à fantasia exterior
$< Q \Rightarrow < P \wedge Q >>$	regra da fantasia
]	subida da fantasia exterior, volta ao mundo real
$< P \Rightarrow < Q \Rightarrow < P \wedge Q >>>$	regra da fantasia

Note que foram utilizados dois "níveis de realidade" no exemplo acima, deste modo, precisamos aplicar a regra da fantasia duas vezes para chegar ao nível onde, de fato, temos um teorema.

Regra da separação: se x é um teorema e $< x \Rightarrow y >$ é um teorema, então y é um teorema. Esta regra também é conhecida como *"modus ponens"*.

Regra contrapositiva: $< x \Rightarrow y >$ e $< \neg y \Rightarrow \neg x >$ são intercambiáveis.

Regra de De Morgan: $< \neg x \wedge \neg y >$ e $\neg < x \vee y >$ são intercambiáveis.

Regra do Troca-Troca: $< x \vee y >$ e $< \neg x \Rightarrow y >$ são intercambiáveis.

3.5 A fantasia de $< P \wedge \neg P >$

Um fato muito conhecido dentre aqueles com algum contato com a lógica, é o de que partindo de uma *contradição*, podemos inferir qualquer coisa. Uma fórmula é dita uma contradição se ela for uma afirmação falsa, para qualquer atribuição de valores às suas variáveis proposicionais (MORTARI, 2001). Esta pequena seção pretende esclarecer este fato com um exemplo bem simples.

Pegaremos a sequência $< P \wedge \neg P >$ como premissa de uma fantasia e faremos uma derivação. Logo após, vamos analisar as consequências.

Exemplo 3.5.1. Seja $< P \wedge \neg P >$ a premissa. Sendo assim, temos o seguinte:

(1)	[	descida
(2)	$\quad < P \wedge \neg P >$	premissa
(3)	$\quad P$	separação
(4)	$\quad \neg P$	separação
(5)	$\quad [$	descida
(6)	$\qquad \neg Q$	premissa
(7)	$\qquad P$	transporte da linha 3
(8)	$\qquad \neg\neg P$	dupla negação
(9)	$\quad]$	subida
(10)	$\quad < \neg Q \Rightarrow \neg\neg P >$	fantasia
(11)	$\quad < \neg P \Rightarrow Q >$	contrapositiva
(12)	$\quad Q$	destacamento (linhas 4,11)
(13)	]	subida
(14)	$<< P \wedge \neg P >\Rightarrow Q >$	fantasia

Veja que, utilizando a fórmula $< P \wedge \neg P >$ como premissa, implicamos a fórmula Q, porém, Q pode ser interpretada por qualquer afirmação, inclusive uma afirmação falsa, ou seja, partindo de uma contradição, podemos inferir qualquer coisa. Este fato também é conhecido como *princípio da explosão*. Logo, por este motivos não podemos ter contradições no Cálculo Proposicional.

3.6 O CPC se despede

O conjunto de regras que o CPC nos dá pode ser utilizado a fim de produzir afirmações que seriam verdadeiras em qualquer sistema formal. Os teoremas produzidos neste sistema podem ser vistos como triviais e conhecidos como *tautologias*, que têm a ideia de uma verdade evidente. Uma fórmula é chamada de tautologia se ela é uma afirmação verdadeira para qualquer atribuição de valores às suas variáveis proposicionais (MORTARI, 2001). No próximo capítulo, o CPC será incorporado a um sistema formal maior e mais profundo, onde poderemos efetuar um raciocínio numérico-teórico mais sofisticado.

4 Apresentando a *TNT*

Chegamos agora ao principal sistema formal desse trabalho, a Teoria dos Números Tipográfica (TNT). A TNT tem esse nome pois será uma formalização da Teoria dos Números (ou Aritmética): um sistema formal no qual possamos demonstrar teoremas sobre números naturais. É importante fazermos essa distinção, portanto, entre a TNT enquanto sistema formal e a Teoria dos Números enquanto área da matemática que — talvez com um olhar mais platônico — estuda o conjunto $\mathbb{N}$. É nesse sistema que está o âmago dos Teoremas de Gödel, pois ele mostrou que a TNT é complexa o suficiente para abarcar fenômenos de autorreferência, que é um fenômeno em língua natural ou linguagem formal que consiste de uma oração ou fórmula que refere-se a si mesma diretamente ou através de alguma oração ou fórmula intermediária, ou por meio de alguma codificação. O próprio Hofsradter fala: *"a construção de Gödel depende da descrição da forma, assim como da do conteúdo de cadeias do sistema formal que definiremos – a TNT."*

Exemplo 4.0.1. Vejamos algumas afirmações provenientes da Teoria dos Números:

1. 7 é um número primo.
2. 2 não é um quadrado.
3. 6 é par.

As noções utilizadas acima — primo, quadrado e par — podem ser reescritas através de noções mais elementares, como segue, respectivamente:

1. Não existem números a e b, que sejam, ambos, maiores que 1, tais que $a \times b = 7$.
2. Não existe um número c tal que $c \times c = 2$.
3. Existe um número d tal que $2 \times d = 6$.

Com este exemplo, podemos notar que muitas afirmações podem ser reescritas com um conjunto bem pequeno de noções básicas. Veja que, nos casos acima, foram utilizadas apenas noções de: quantificadores, desigualdade e a operação de multiplicação. Como já vimos, estas noções já tem seus símbolos próprios — a menos da desigualdade, que deverá ser reescrita ainda de outra forma. Para falarmos que um número a é maior que um número b (a desigualdade), utilizaremos a seguinte estratégia:

existe um número c, diferente de 0, tal que $b + c = a$.

Devemos salientar que, quando falamos de *números*, aqui, estamos falando dos números naturais (incluindo o zero). Na TNT, os números serão representados de forma diferente. Ao invés de termos o numeral 2 ou o numeral 5, iremos escrever $SS0$ ou $SSSSS0$, respectivamente. Este símbolo S é interpretado como "o sucessor de" — também conhecido como *função sucessor* — portanto, no exemplo anterior, a forma correta de leitura do símbolo $SS0$ é "o sucessor do sucessor de 0". A seguir, vamos introduzir alguns conceitos e definições que serão utilizados na construção deste sistema formal.

4.1 O alfabeto da TNT

Pudemos ver na introdução deste capítulo que novos símbolos apareceram, e, como falado no capítulo anterior, o CPC será incorporado a este novo sistema formal. Assim, o alfabeto da TNT será composto por todos os símbolos apresentados no alfabeto do CPC, a menos dos símbolos *P, Q* e R que darão lugar a afirmações da TNT (e.g. $0 = 0$) — afinal, agora estamos tratando sobre números. Além disso, da mesma forma que no CPC, os símbolos lógicos farão parte do alfabeto, e se juntarão a eles os símbolos de quantificação. Portanto, com o acréscimo destes novos símbolos, o alfabeto da TNT fica composto da seguinte forma:

$$A_{TNT} = \{0, a, b, c, d, e, S, +, \times, =,), (, >, <, ', [,], \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \exists, \forall\}$$

A aplicação de cada símbolo ficará mais evidente com o decorrer do capítulo, porém, falemos brevemente a respeito de cada um deles.

- O 0 é uma constante do alfabeto e representa o número "zero" que já conhecemos da aritmética. É a partir dele que faremos a construção de todos os outros numerais.
- As letras minúsculas de a até e representam as variáveis do sistema.
- O símbolo S representa uma função unária (ou 1-ária) conhecida, neste caso, como "função sucessor". É esta função, aplicada sucessivamente à constante 0, que produzirá todos os outros numerais.
- Os símbolos $+$ e $\times$ representam funções binárias (ou 2-árias) e estão relacionados à soma e multiplicação, respectivamente, da mesma forma que já conhecemos.
- O símbolo $=$ representa a relação de igualdade e é uma relação binária.
- Os símbolos $), (, >, <, ', [,]$ são símbolos auxiliares e funcionarão da mesma maneira que no CPC. Aqui, o apóstrofo ($'$) será aplicado às variáveis, de modo que possamos

construir infinitas delas. Os parênteses serão utilizados para isolar termos (ex: $(S0 + S0)$), enquanto que os símbolos $>, <$ são utilizados para isolar fórmulas.

- Os símbolos lógicos têm a mesma função e interpretação que no CPC.
- Os símbolos $\exists$ e $\forall$ são quantificadores. O seu uso estará ligado às variáveis, como veremos.

A ideia de unário e binário está ligada ao número de termos que precisamos utilizar ao aplicar aquela função ou relação. Por exemplo, a função sucessor (de símbolo S) pode ser aplicada a apenas um termo por vez; no caso da soma, ela deve ser aplicada a dois termos. Como dito, tudo isso ficará mais evidente no decorrer do capítulo.

4.2 As regras de formação da TNT

- Numerais
  - 0 é um numeral.
  - Um numeral precedido de S também é um numeral.
  - Exemplos: $0, S0, SS0, SSS0, SSSS0$.
- Termos
  - Todos os numerais e variáveis são termos.
  - Um termo precedido de S também será um termo.
  - Se s e t são termos, então $(s + t)$ e $(s \times t)$ também são termos.

    Exemplo 4.2.1. São termos: $0, a, SSa, (S0 + a), SSa \times (SS0 + Sb)$.

Definição 4.2.1. Os termos podem ser divididos em duas categorias:

- **termos definidos**, que são os termos isentos de variáveis, ou seja, não existem variáveis na sua construção. Ex: $0, (S(0) + S(0))$;
- **termos indefinidos**, que contém variáveis. Ex: $b, S(a), (S(0) + S(b))$.

Estas definições nos dão uma boa ideia de como começar a fazer a construção de uma fórmula bem-formada. Com elas, podemos criar as *partes* de uma fórmula. Agora, vejamos como juntar estes conhecimentos, de modo a conseguirmos formar fórmulas bem-formadas *completas*.

- Fórmula atômica: se s e t são termos, então $s = t$ é uma fórmula atômica.

Exemplo 4.2.2. $S0 = 0, (SS0 + S0) = SSS0, S(a + b) = c$.

Se uma fórmula atômica contém uma variável u, então u está *livre*[1] nesta fórmula.

- Negação: se x é uma fórmula bem-formada, então $\neg x$ é bem-formada. Uma fórmula do tipo $\neg x$ será dita uma *negação*.

  Exemplo 4.2.3. $\neg(S0 = 0), \neg b = SS0$.

- Composição de fórmulas: Sejam x e y fórmulas bem-formadas, e dado que as variáveis que aparecem em ambas tenham suas respectivas *quantificações*, então as seguintes fórmulas são bem-formadas: $x \vee y, x \wedge y, x \implies y$.

- Quantificadores: a ideia é quantificar uma variável que esteja livre em uma determinada fórmula, assim, seja u uma variável e x uma fórmula bem-formada onde u está livre, então, temos que as seguintes cadeias são fórmulas bem-formadas: $\forall u : x, \exists u : x$. Os símbolos $\forall$ e $\exists$ são interpretados como *para todo* e *existe*, respectivamente. A interpretação de $\forall u : x$ é a de que, para qualquer valor específico que a variável u possa assumir, x será uma fórmula válida. Analogamente, $\exists u : x$ significará que existe algum valor que pode ser atribuído à variável u de modo que x seja válida.

  Exemplo 4.2.4. $\forall a :< a = a \vee \neg\exists b : (b = c) >, \neg\exists b : Sb = c$.

  - Fórmulas abertas: são as fórmulas que contém pelo menos uma variável livre.
  - Fórmulas fechadas: são as fórmulas onde todas as variáveis estão quantificadas. Estas fórmulas também são chamadas de *afirmações* e elas retornam um valor de verdade, ou seja, a fórmula pode ser verdadeira ou falsa.

Tendo em mãos todo esse conjunto de regras de formação, temos o material necessário para criar fórmulas bem-formadas na TNT.

4.3 Axiomas da TNT

Dando seguimento a construção deste sistema formal, vamos apresentar mais um de seus componentes, que é o seu conjunto de axiomas:

- Axioma 1: $\forall a : \neg Sa = 0$
- Axioma 2: $\forall a : (a + 0) = a$

[1] Chamamos de **livre** uma variável que não está sendo quantificada.

- Axioma 3: $\forall a : \forall b : (a + Sb) = S(a + b)$
- Axioma 4: $\forall a : (a \times 0) = 0$
- Axioma 5: $\forall a : \forall b : (a \times Sb) = ((a \times b) + a)$

Estes cinco axiomas lembram, em muito, os postulados de um matemático chamado Giuseppe Peano que, assim como Euclides, que escreveu seus postulados a respeito da geometria, Peano o fez, escrevendo postulados sobre os números naturais. No livro que citamos, Hofstadter modifica alguns conceitos para que não haja referência aos números naturais como vistos hoje, porém, como a ideia deste trabalho é ser mais simples e inteligível, apresentaremos os cinco postulados de Peano em linguagem natural (nossa língua cotidiana):

1. O zero é um número natural.
2. Todo número natural tem um sucessor, que, por sua vez, é um número natural.
3. O zero não é sucessor de nenhum número natural.
4. Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.
5. Se o zero tem uma determinada propriedade, e, para cada número natural, essa propriedade se transporta para o seu sucessor, então todos os números naturais tem esta tal propriedade.

   A indução matemática tem seu princípio neste quinto postulado de Peano.

Note que os dois sistemas são compostos de cinco axiomas, porém, é importante salientar que, os axiomas de um dos sistemas, não são, de maneira nenhuma, algum tipo de tradução do outro, nem mesmo são análogos, afinal, é fácil ver que o quinto axioma de Peano não aparece na TNT. Outro fato importante é que, para a consagração deste trabalho, precisaremos, apenas, dos axiomas da TNT, vistos acima.

4.4 As regras de inferência

Apresentemos agora mais algumas regras da TNT. A ideia é podermos manipular símbolos e trabalhar, inclusive, com fórmulas atômicas, no sentido de que, por exemplo, pudéssemos extrair a cadeia $\neg S0 = 0$ partindo do primeiro axioma ($\forall a : \neg Sa = 0$). O leitor deve notar que, para isso, precisaríamos eliminar o quantificador e modificar a estrutura interna da cadeia, ao mesmo tempo. Eis a regra:

- Regra de Especificação: Seja x uma cadeia e suponhamos que u seja uma variável que ocorre em x. Se a cadeia $\forall u : x$ é um teorema (para todo u, x é verdade), então x também será um teorema. Isso se estende a todas as cadeias formadas a partir de x pela substituição de u, onde quer que ocorra (sempre pelo mesmo termo).

Para a Regra de Especificação existe uma restrição que diz o seguinte: quando um termo for substituir a variável u, este não deve conter uma variável que esteja quantificada em x. Estando entendida a Regra de Especificação, podemos retornar à cadeia vista dois parágrafos acima e ver que ela pode ser facilmente derivada do axioma I:

$$\begin{array}{ll} \text{(Axioma I)} & \forall a : \neg Sa = 0 \\ \text{(Especificação)} & \neg S0 = 0 \end{array}$$

Veja que, com esta regra, é possível que algumas fórmulas abertas (com variáveis livres) se tornem teoremas. Veja a seguir dois exemplos de cadeias que podem ser derivadas do axioma I por especificação:

$$\neg Sa = 0 \tag{4.4.1}$$

$$\neg S(c + SS0) = 0. \tag{4.4.2}$$

Agora, vejamos uma outra regra, que é, basicamente, o inverso da Regra de Especificação. Esta regra é a *Regra da Generalização*, que é definida da seguinte forma:

- Regra da Generalização: Seja u uma variável que ocorre livre em uma cadeia x. Se x é um teorema, então $\forall u : x$ é um teorema.
(Restrição: Nenhuma generalização é permitida em uma fantasia referente a qualquer variável que tenha aparecido livre na premissa da fantasia.)

Veja que esta regra permite restaurar, em teoremas com variáveis que se tornaram livres, o quantificador universal, anulando, assim, a ação da especificação. Um exemplo pode ser visto, aplicando a Regra da Generalização em 4.4.2. Note que c é uma variável livre em 4.4.2, assim, aplicando a regra, temos:

$$\begin{array}{ll} \text{(4.4.2)} & \neg S(c + SS0) = 0 \\ \text{(Generalização)} & \forall c : \neg S(c + SS0) = 0. \end{array}$$

Através destas duas regras (especificação e generalização) o leitor pôde ver quando, e como, podemos anular ou restaurar um quantificador universal. Agora, apresentemos duas regras que irão especificar como pode ser trabalhado o quantificador existencial. Estas são a *Regra de Intercâmbio* e a *Regra de Existência*.

- Regra de Intercâmbio: vamos supor que v seja uma variável que ocorre em uma fórmula x. Então, as cadeias $\forall v : \neg x$ e $\neg \exists v : x$ serão intercambiáveis em qualquer lugar no interior de qualquer teorema.

Aplicando esta regra ao axioma I, temos o seguinte:

$$\begin{array}{ll} \text{(axioma I)} & \forall a : \neg Sa = 0 \\ \text{(Intercâmbio)} & \neg \exists a : Sa = 0. \end{array}$$

A ideia desta regra é que possamos fazer esta troca a qualquer momento, sem que perdemos — ou troquemos — o valor de verdade da cadeia em questão. Note que, interpretando em linguagem natural, o axioma I nos diz que 'para qualquer a que seja escolhido, não é verdade que o sucessor imediato de a é o zero'. Agora, aplicando a Regra do Intercâmbio, ficamos com uma sentença que afirma o seguinte: 'não é verdade que exista um a, tal que o sucessor imediato de a seja o zero'. Portanto, veja que, o que ambas as sentenças estão afirmando é: 'o zero não é sucessor de nenhum numero natural'.

- Regra da Existência: Suponhamos que um termo (que pode conter variáveis, contanto que sejam livres) apareça uma vez ou múltiplas vezes em um teorema. Então, em qualquer uma das situações em que o termo aparece, ele poderá ser substituído por uma variável que de outro modo não ocorre no teorema, e o quantificador existencial correspondente deverá ser colocado em frente.

Aplicando a regra ao axioma I, temos o seguinte:

$$\begin{array}{ll} \text{(axioma I)} & \forall a : \neg Sa = 0 \\ \text{(Existência)} & \exists c : \forall a : \neg Sa = c. \end{array}$$

Podemos notar que a Regra da Existência é bem simples, para não dizer óbvia. A ideia é que fizemos a troca de um termo — a constante 0, neste caso — por uma variável c e colocamos um quantificador existencial correspondente a ela no início da cadeia. Um outro exemplo possível de ser pensado, agora em linguagem natural, é a troca da frase '3 é um número primo' por 'existe um número primo'.

Continuando com a lista de regras de inferência, apresentamos mais duas que, junto das regras anteriores, nos permitirão derivar variados teoremas a partir dos axiomas da TNT. Depois de apresentadas, vamos trabalhar em dois exemplos bem básicos.

- Regra da igualdade:
  - Simetria: Se $r = s$ é um teorema, então $s = r$ também o será.

- Transitividade: Se $r = s$ e $s = t$ são teoremas, então $r = t$ também o será.

- Regra de sucessão:
  - Acréscimo de S: Se $r = t$ é um teorema, então $Sr = St$ é um teorema.
  - Eliminação de S: Se $Sr = St$ é um teorema, então $r = t$ é um teorema.

Agora, vamos aos exemplos onde serão aplicadas algumas das regras de inferência vistas até aqui:

Exemplo 4.4.1. Demonstração formal na TNT do teorema $1 + 1 = 2$.

Passos	Implicações	Axiomas e regras
(1)	$\forall a : \forall b : (a + Sb) = S(a + b)$	Axioma 3
(2)	$\forall b : (S0 + Sb) = S(S0 + b)$	Especificação ($S0$ por a)
(3)	$(S0 + S0) = S(S0 + 0)$	Especificação (0 por b)
(4)	$\forall a : (a + 0) = a$	Axioma 2
(5)	$(S0 + 0) = S0$	Especificação ($S0$ por a)
(6)	$S(S0 + 0) = SS0$	Acréscimo de S
(7)	$(S0 + S0) = SS0$	Transitividade (linhas 3,6)

Exemplo 4.4.2. Demonstração formal na TNT do teorema $1 \times 1 = 1$

Passos	Implicações	Axiomas e regras
(1)	$\forall a : \forall b : (a \times Sb) = ((a \times b) + a)$	Axioma 5
(2)	$\forall b : (S0 \times Sb) = ((S0 \times b) + S0)$	Especificação ($S0$ por a)
(3)	$(S0 \times S0) = ((S0 \times 0) + S0)$	Especificação (0 por b)
(4)	$\forall a : \forall b : (a + Sb) = S(a + b)$	Axioma 3
(5)	$\forall b : ((S0 \times 0) + Sb) = S((S0 \times 0) + b)$	Especificação ($(S0 \times 0)$ por a)
(6)	$((S0 \times 0) + S0) = S((S0 \times 0) + 0)$	Especificação (0 por b)
(7)	$\forall a : (a + 0) = a$	Axioma 2
(8)	$((S0 \times 0) + 0) = (S0 \times 0)$	Especificação ($(S0 \times 0)$ por a)
(9)	$\forall a : (a \times 0) = 0$	Axioma 4
(10)	$(S0 \times 0) = 0$	Especificação ($(S0)$ por a)
(11)	$((S0 \times 0) + 0) = 0$	Transitividade (linhas 8,10)
(12)	$S((S0 \times 0) + 0) = S0$	Acréscimo de S
(13)	$((S0 \times 0) + S0) = S0$	Transitividade (linhas 6,12)
(14)	$(S0 \times S0) = S0$	Transitividade (linhas 3,13)

4.5 Atenção às regras

Um cuidado que devemos tomar, quando estamos fazendo as inferências, é quanto às restrições relacionadas às regras de Especificação e Generalização, pois pode ser inferido algo absurdo. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 4.5.1. $\exists b : b = Sb$.

Passos	Implicações	Axiomas e regras
(1)	$\forall a : a = a$	Teorema
(2)	$Sa = Sa$	Especificação (Sa por a)
(3)	$\exists b : b = Sa$	Existência
(4)	$\forall a : \exists b : b = Sa$	Generalização
(5)	$\exists b : b = Sb$	Especificação (b por a)

É fácil notar que chegamos em um resultado errado, afinal, qual seria o número natural que é igual ao seu sucessor imediato? Esse tipo de erro pode acontecer quando restrições são desobedecidas — neste caso, especificamos uma variável que estava quantificada no passo anterior.

5 Enumeração de Gödel

Nesta seção iremos entender qual foi a estratégia que Gödel utilizou como base do seu trabalho, ou seja, como ele fez para relacionar — e, de certa forma, reduzir — símbolos, fórmulas e demonstrações a números, e assim criar uma autorreferência na TNT. Porém, para começarmos, é útil relembrar alguns conceitos importantes:

- **Símbolos** serão os caracteres que formarão termos e fórmulas.
- **Fórmulas** são sequências de símbolos.
- **Prova** (ou demonstração) é uma sequência lógica de fórmulas, que se dá através de regras de inferência. Uma demonstração sempre termina em um teorema —em particular, é finita.

Para começar, Gödel mostrou que podemos atribuir um número único para cada símbolo, cada fórmula e para cada demonstração. Este número (único) será denominado "número de Gödel", que servirá como uma espécie de rótulo para cada um destes conceitos. Podemos dizer que a enumeração de Gödel se dá em três etapas, iniciando pela codificação dos símbolos mais elementares e variáveis, passando pela codificação de fórmulas e, por fim, a codificação de demonstrações, fazendo com que o sistema formal que estamos trabalhando, a TNT, seja representado através de números, que, por sua vez, vão "falar" sobre números. Sim, algo que parece muito estranho a priori, mas que é o centro dos trabalhos de Gödel — dos trabalhos sobre os Teoremas da Incompletude, pelo menos.

Cada passo dessas codificações envolve números e operações matemáticas, como veremos a seguir.

5.1 Codificando o sistema MIU

Como já é característico deste trabalho, vamos iniciar a abordagem a respeito desta *codificação* com um sistema formal bem simples, que já foi apresentado no capítulo 2, o sistema MIU, para que fique de fácil compreensão.

Vamos relembrar como é formado o sistema MIU:

- Alfabeto: $A_{\text{MIU}} = \{M, I, U\}$
- Regra de formação: toda sequência começa com o símbolo M.
- Axioma: MI

- Regras de inferência:

  1. Se xI é um teorema, então xIU é um teorema.
  2. se Mx é um teorema, então Mxx é um teorema.
  3. A sequência III pode ser substituída por U em qualquer teorema.
  4. A sequência UU pode ser eliminada de qualquer teorema.

Comecemos a fazer a codificação do sistema MIU.

Alfabeto: Para cada símbolo do alfabeto, será atribuído um novo símbolo, que será um número. Este número é o que chamaremos de *número de Gödel* do símbolo original. Portanto, o alfabeto do sistema será codificado da seguinte maneira:

Segundo Hofstadter (HOFSTADTER, 2001), esta correspondência foi escolhida arbitrariamente e é uma transformação preservadora de informações, o que nos lembra a respeito dos isomorfismos que falamos anteriormente. Veja como ficam algumas sequências do sistema:

$$MU \longleftrightarrow 30$$
$$MIIU \longleftrightarrow 3110.$$

A seguir, faremos uma derivação dentro do sistema MIU, aplicando as suas regras de inferência e relacionando a cada teorema obtido o seu número de Gödel correspondente.

(1)	MI	— axioma —	31
(2)	MII	— regra 2 —	311
(3)	$MIIII$	— regra 2 —	31111
(4)	MUI	— regra 3 —	301
(5)	$MUIU$	— regra 1 —	3010
(6)	$MUIUUIU$	— regra 2 —	3010010
(7)	$MUIIU$	— regra 4 —	30110

Analisando a derivação, pode-se ver que, na coluna da esquerda, o axioma MI vai gerando novos teoremas a partir das regras de inferência aplicadas, que estão expostas na coluna central e, na coluna da direita, temos o número de Gödel correspondente para cada sequência da coluna bem à esquerda.

Agora, olhando apenas para a coluna da direita, onde estão os números, Hofstadter traz a ideia de que ela tem uma natureza dual, no sentido que a derivação daquela coluna poderia se dar de duas maneiras. A primeira, seria por meio de uma nova regra tipográfica, por exemplo: "sempre que a sequência terminar com o símbolo 1, poderá ser adicionado o símbolo 0 à sua direita", o que faria a derivação da linha (4) para a linha (5). A outra, seria pensar de forma aritmética, ou seja, a derivação entre as linhas teria se dado por meio de uma operação aritmética, que, no caso da linha (4) para a linha (5), seria uma multiplicação por 10. Assim, poderíamos ter a seguinte regra aritmética: "um número que termine em 1 pode ser multiplicado por 10", ou ainda "um número que tem resto 1 quando dividido por 10, pode ser multiplicado por 10".

Acabamos de ver que, dada uma derivação do sistema, podemos relacionar um número de Gödel para cada linha da derivação — através da codificação —, além disso, pode-se criar novas regras de inferência que tratam sobre esses números — mantendo as informações, afinal, é um isomorfismo — e, para além disso, vem o grande toque de genialidade de Gödel, que é fazer com que estas regras de inferência sejam relacionadas à operações aritméticas, levando todo o sistema formal para o mundo da Teoria dos Números.

Agora vejamos como ficam as regras aritméticas, com base no que o livro G.E.B (HOFSTADTER, 2001) traz. A ideia é que se tenha regras aritméticas cujas atuações sejam indistinguíveis da atuação de cada regra tipográfica do sistema MIU. Nas regras que seguirão abaixo, k, m e n são números naturais arbitrários, com n sendo um número natural menor que 10^m. Abaixo de cada regra temos um exemplo de onde ela se aplica na derivação anterior.

Regra 1: se temos $10m + 1$, então podemos obter $10 \times (10m + 1)$.
(linha (4) para linha (5); $m = 30$)

Regra2: se temos $3 \times 10^m + n$ então podemos obter $10^m \times (3 \times 10^m + n) + n$.
(linha (1) para linha (2); $m = n = 1$)

Regra 3: se temos $k \times 10^{m+3} + 111 \times 10^m + n$, então podemos obter $k \times 10^{m+1} + n$.
(linha (3) para linha (4); $m = n = 1$ e $k = 3$)

Regra 4: se temos $k \times 10^{m+2} + n$, então podemos obter $k \times 10^m + n$.
(linha (6) para linha (7); $m = 2$, $n = 10$ e $k = 301$)

O axioma deste novo sistema, agora aritmético, fica da seguinte forma:

Axioma: Podemos obter 31.

Agora, com alfabeto, regras e axiomas aritmetizados, vamos chamar este novo sistema aritmético de *sistema 310*.

Exemplo 5.1.1. Segue uma derivação do nosso novo sistema:

(1)	31	axioma
(2)	311	regra 2 ($m = 1$, $n = 1$)
(3)	31111	regra 2 ($m = 2$, $n = 11$)
(4)	301	regra 3 ($m = 1$, $n = 1$, $k = 3$)
(5)	3010	regra 1 ($m = 30$)
(6)	3010010	regra 2 ($m = 3$, $n = 10$)
(7)	30110	regra 4 ($m = 2$, $n = 10$, $k = 301$)

Olhando para o exemplo, podemos notar que, assim como no sistema MIU, onde tínhamos sequências que aumentavam e diminuíam, agora, no sistema 310, temos numerais que aumentam e diminuem. Além disso, fica claro que estas mudanças, durante a derivação, ocorrem basicamente por meio de operações aritméticas e isso tudo acontece a partir deste isomorfismo feito entre um sistema tipográfico e um sistema totalmente aritmético que, neste caso, está se utilizando de números decimais — atribuídos aos símbolos, que chamamos números de Gödel — e operações aritméticas básicas, que codificaram as regras de inferência do sistema MIU.

Visando um olhar mais genérico para o que está acontecendo, Hofstadter lança a seguinte proposição:

Proposição 5.1.1. *Proposição central: se houver uma regra tipográfica que diga como certos algarismos devem ser deslocados, modificados, eliminados ou inseridos em qualquer número representado decimalmente, então esta regra poder ser igualmente bem representada por uma contrapartida aritmética que envolve operações aritméticas com potências de 10, assim como adições, subtrações e assim por diante. (HOFSTADTER, 2001)*

Dado isso, podemos ver as regras tipográficas para *numerais* como regras aritméticas para operação com *números*, e é esta simples análise que está no coração do algoritmo que Gödel criou. Ele vai nos dizer que, se for o caso de termos uma enumeração de Gödel para qualquer sistema formal, então podemos construir um conjunto de regras aritméticas que completa o isomorfismo de Gödel. Em síntese, a transferência do estudo de qualquer sistema formal para a teoria dos números é possível.

Diante destas novas ferramentas e conhecimentos, chegamos a conclusão de que, agora, já sabemos um caminho para migrar de um sistema formal tipográfico para um sistema formal aritmetizado, por meio da enumeração de Gödel, que transforma símbolos em números e regras de inferência em operações aritméticas, fazendo, assim, com que possamos *produzir* certos números, da mesma forma que teoremas eram derivados. Agora, no lugar de tentarmos descobrir se uma certa sequência é um teorema de um sistema formal, a partir das regras, podemos nos perguntar se um certo número é *produtível* com as novas regras, que são as operações. Veja que, os números produtíveis, dentro da teoria dos números, assumem o mesmo papel que os teoremas em qualquer sistema formal.

No capítulo 4 foi apresentada a TNT e vimos que ela é a formalização da teoria dos números. Pois bem, aqui podemos fazer uma importante conexão, que vai do sistema MIU até a TNT. Um problema que foi encontrado no "Quebra-cabeças *MU*" era se a sequência *MU* poderia ser derivado em MIU, ou seja, se *MU* é um teorema de MIU. Com toda a enumeração de Gödel feita no sistema MIU, produzimos um sistema isomórfico, que foi o sistema 310 e, nesse sistema, a pergunta "será que *MU* é um teorema de MIU?" passa a ser "será que podemos produzir o número 30 no sistema 310?". Vamos relacionar essas duas ideias e fazer a seguinte definição: caso seja possível produzir o número 30 no sistema 310, vamos dizer que 30 é um número MIU. Veja que temos um problema aritmético, que, por sua vez, envolve a teoria dos números. Agora, lembremos que expressões do tipo "2 é um número par" podem ser codificadas em função dos símbolos da TNT — que nem sempre serão sequências simples de serem escritas —, da mesma forma, podemos codificar a afirmação "30 é um número MIU" para a notação da TNT. Note que, apenas o número 30, quando passado para a notação da TNT, teria 31 caracteres e, sendo assim, fica evidente o motivo de o autor não ter feito a codificação desta afirmação que ficaria MONstruosa — escrita do próprio Hofstadter — mas que poderia ser feita. Esta sequência vai ser denominada "*MUMON*" (HOFSTADTER, 2001).

Veja que o caminho feito foi o seguinte:

$$\text{MIU} \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \text{TNT}$$

Com efeito, pegamos a afirmação "*MU* é um teorema de MIU" do sistema MIU, aplicamos a enumeração de Gödel e transformamos em uma afirmação da Teoria dos Números que diz "30 é um número MIU". Esta última, por se tratar da Teoria dos Números, pôde ser formalizada dentro da TNT, por uma sequência de símbolos da TNT que não foi escrita explicitamente, mas que foi denominada *MUMON*, uma sequência complicada de ser escrita, mas que existe.

Assim, chegamos ao final desta seção com mais uma ideia importante deste trabalho, que são os dois níveis de significado. Note que *MUMON* é uma afirmação da TNT que trata sobre números, mas que, por sua vez, está falando a respeito de uma afirmação de um sistema formal bem mais simples, o MIU. Com isso, chegamos a conclusão de que podemos tratar sobre afirmações de sistemas formais dentro da TNT. Na próxima seção, falaremos mais especificamente sobre como é feita a enumeração de Gödel na TNT.

5.2 Codificação dos símbolos elementares

Estamos chamando de símbolos elementares aqueles caracteres que formarão toda e qualquer fórmula da TNT. Estes caracteres serão todos os símbolos do alfabeto da TNT, visto no capítulo 4, adicionados a alguns novos, como veremos na tabela abaixo, que foi trazida do livro *G.E.B* (HOFSTADTER, 2001).

Símbolo	*Códon*	*justificativa mnemônica*
0	666	número da besta para o zero misterioso
S	123	sucessão: $1, 2, 3, ...$
$=$	111	semelhança visual, posta lateralmente
$+$	112	$1 + 1 = 2$
$\times$	236	$2 \times 3 = 6$
(	362	termina em 2
)	323	termina em 3
$<$	212	termina em 2 - estes três pares
$>$	213	termina em 3 - compõem um padrão
[	312	termina em 2
]	313	termina em 3
a	262	oposto a $\forall$ (626)
$'$	163	163 é primo ("prime" significa apóstrofo, em inglês)
$\wedge$	161	"$\wedge$" é um "gráfico" da série $1 - 6 - 1$
$\vee$	616	"$\vee$" é um "gráfico" da série $6 - 1 - 6$
$\Longrightarrow$	633	6 "implica" 3 e 3 em certo sentido...
$\neg$	223	$2 + 2$ *não* são 3
$\exists$	333	"E" se parece com 3
$\forall$	626	oposto a **a**; também é um "gráfico" $6 - 2 - 6$
:	636	dois pontos, dois seis
pont.	611	número especial, código telefônico de Frankfurt

Note que, agora, temos um número de Gödel codificando cada símbolo utilizado na TNT, do mesmo modo que fizemos no sistema MIU. Tendo em mãos a codificação de todos os símbolos, podemos, então, aplicar esta codificação em uma derivação e observar o que ocorre. Vamos utilizar a derivação feita no exemplo 4.4.1:

Exemplo 5.2.1. $1 + 1 = 2$

$$626, 262, 636, 626, 262, 163, 636, 362, 262, 112, 123, 262, 163, 323, 111, 123, 362, 262, 112, 262, 163, 323$$
$$\forall a : \forall b : (a + Sb) = S(a + b) \text{ (axioma 3)}$$
$$626, 262, 163, 636, 362, 123, 666, 112, 123, 262, 163, 323, 111, 123, 362, 123, 666, 112, 262, 163, 323$$
$$\forall a' : (S0 + Sa') = S(S0 + a') \text{ (especificação)}$$
$$362, 123, 666, 112, 123, 666, 323, 111, 123, 362, 123, 666, 112, 666, 323$$
$$(S0 + S0) = S(S0 + 0) \text{ (especificação)}$$

$$626, 262, 636, 362, 262, 112, 666, 323, 111, 262$$
$$\forall a : (a + 0) = a \text{ (axioma 2)}$$
$$362, 123, 666, 112, 666, 323, 111, 123, 666$$
$$(S0 + 0) = S0 \text{ (especificação)}$$
$$123, 362, 123, 666, 112, 666, 323, 111, 123, 123, 666$$
$$S(S0 + 0) = SS0 \text{ (inserção de ``123'')}$$
$$362, 123, 666, 112, 123, 666, 323, 111, 123, 123, 666$$
$$(S0 + S0) = SS0 \text{ (transitividade linhas 3 e 6)}$$

O exemplo acima deve ser lido aos pares, de modo que, na primeira linha do par, temos a fórmula codificada pela enumeração de Gödel e, na segunda, é apresentada a fórmula original da TNT. Note que cada códon (de três dígitos e separados pela vírgula) representa um símbolo da fórmula que está logo abaixo, seguindo a sequência em que os símbolos aparecem. O número de Gödel de cada fórmula, é o número por extenso, composto de todos os *códons*.

A codificação de Gödel se estende à todas as regras da TNT, que, do mesmo modo em que foi feito no sistema MIU, correspondem a operações aritméticas. Estas operações não serão apresentadas explicitamente, assim como Hofstadter não o fez, pelo fato de serem demasiadamente complicadas, porém, existem e são possíveis de serem escritas (HOFSTADTER, 2001).

6 Construção da sentença de Gödel

Neste capítulo falaremos a respeito do que foi o cerne da demonstração de Gödel. A sentença, conhecida como “Sentença de Gödel”, é o que nos leva para os resultados finais deste trabalho e que dá origem aos Teoremas da Incompletude.

A construção desta sentença se dá por meio de alguns novos conceitos e técnicas, adaptados a partir do que vimos no capítulo anterior — a enumeração — e outros conceitos vistos no decorrer do trabalho. De modo geral, a construção se baseia em duas ideias que, nas palavras de Hofstadter, “cada uma delas é, por si só, um toque de mestre; e colocá-las juntas requereu um toque de gênio” (HOFSTADTER, 2001).

6.1 Pares de demonstração

No capítulo 5 vimos como é possível codificar cada símbolo da TNT, assim como de que modo podemos fazer a codificação de uma fórmula desse sistema. Além disso, no exemplo 5.2.1 é apresentada uma demonstração completa — na linguagem da TNT e pela codificação de Gödel — porém, essa demonstração é apresentada linha por linha, que é o modo usual de se escrever uma demonstração. Agora, veremos uma maneira de olhar para uma demonstração com os olhos da enumeração de Gödel. A ideia é que vamos pegar uma afirmação do tipo “$(S0+S0) = SS0$ é um teorema da TNT” e traduzir para uma afirmação de N — a Teoria dos Números. Aqui é onde entra a ideia de *par de demonstração.*

Definição 6.1.1. Par de demonstração: dois números naturais m e n, respectivamente, formam um par de demonstração da TNT se, e somente se, m é for o número de Gödel de uma derivação da TNT cuja última linha seja a cadeia com número de Gödel n (HOFSTADTER, 2001).

Assim como na TNT, esta propriedade pode ser utilizada em outros sistemas formais e, como já é de costume, vamos iniciar neste novo conceito utilizando o sistema MIU, de modo que a compreensão fique mais clara e simples. Para começar, vamos retraduzir a propriedade para o sistema MIU, dizendo que que um par de demonstração de MIU é um par de números que se relacionam de maneira particular, onde, dois números naturais, m e n, respectivamente, formam um par de demonstração do sistema MIU se, e somente se, m for o número de Godel de uma derivação do sistema MIU cuja última linha seja a cadeia com o número de Gödel n (HOFSTADTER, 2001).

Exemplo 6.1.1. Vamos analisar uma derivação do sistema MIU, codificá-la e verificar como ficaria seu par de demonstração.

$$\begin{array}{lcl} MI & \longleftrightarrow & 31 \\ MII & \longleftrightarrow & 311 \\ MIIII & \longleftrightarrow & 31111 \\ MUI & \longleftrightarrow & 301 \end{array}$$

Note que a enumeração desta derivação é 3131131111301, deste modo, teremos que $m = 3131131111301$, e a última linha tem como código 301, portanto, $n = 301$. Sabendo que esta é uma derivação válida de MIU, temos que os números 3131131111301 e 301 formam um par de demonstração, ao passo que, qualquer derivação que tenha $n = 30$ não pode ser um par de demonstração, afinal, 30 é a enumeração da sequência MU e, como sabemos, MU não é um teorema do sistema MIU.

Lembrando de conceitos anteriores, podemos dizer que "301 é um número MIU", dado que ele é o número encontrado através das regras de inferência *aritmetizadas* do sistema MIU, ou seja, ele é encontrado por meio de operações aritméticas, o que está no âmago da enumeração de Gödel. A partir daqui, iremos representar a propriedade "par de demonstração" pela sigla PDD.

Voltando a falar da TNT, vamos analisar duas situações e verificar se os números m e n envolvidos em cada uma delas são, de fato, um PDD. Aliás, antes disso, o leitor deve notar o seguinte: a demonstração feita no exemplo 5.2.1 tem um total de sete linhas codificadas, sendo assim, a codificação desta demonstração seria concatenar estas sete linhas, separadas pelo *códon* 611 — que é utilizado como pontuação —, ou seja, seria uma sequência gigantesca de números separados por vírgulas, de três em três, com ocorrências do *códon* 611 para identificar onde termina cada linha da demonstração. Assim, é possível remontar a demonstração facilmente e verificar a sua validade. Verifiquemos as duas situações.

Exemplo 6.1.2. Na primeira situação temos o seguinte:
$m = 626, 262, 636, 223, 123, 262, 111, 666, 611, 223, 123, 666, 111, 666$
$n = 123, 666, 111, 666$
Fazendo a tradução de m, temos:
$\forall a : \neg Sa = 0$
$\neg S0 = 0$
agora, traduzindo n, temos:
$S0 = 0$.
Note que a fórmula codificada por n não coincide com a última fórmula codificada em m.

Exemplo 6.1.3. Na segunda situação temos o seguinte:
$m = 626, 262, 636, 223, 123, 262, 111, 666, 611, 223, 333, 262, 636, 123, 262, 111, 666$
$n = 223, 333, 262, 636, 123, 262, 111, 666$
Fazendo a tradução de m, temos:
$\forall a : \neg Sa = 0$
$\neg \exists a : Sa = 0$
agora, traduzindo n:
$\neg \exists a : Sa = 0.$
Neste exemplo, a fórmula codificada por n é exatamente a mesma que a última fórmula codificada por m.

Olhando para as duas situações, fica bem claro em qual delas n ocorre como última linha de m, e é isso que determina se m e n são um possível PDD. Dessa forma, sabendo que m e n são números de Gödel que codificam demonstrações e teoremas, fica claro que a abreviação PDD$\{m, n\}$ está nos dizendo que "m é uma demonstração para n".

Para além disso, devemos, primeiramente, verificar se m é, de fato, uma demonstração; caso seja, verificamos se a última linha da demonstração coincide com a sequência codificada por n. Com efeito, temos um certo algoritmo que se desdobra da seguinte maneira: analisamos cada linha da demonstração e verificamos quais são axiomas ou teoremas demonstrados anteriormente; para aquelas que não são axiomas, verificamos se decorrem de linhas anteriores por meio das regras de inferência; caso sim, temos, de fato, uma demonstração; caso não, não se trata de uma demonstração.

Esse algoritmo de verificação sempre irá funcionar, nas chamadas teorias recursivamente enumeráveis. Com efeito, o que precisamos deixar claro sobre este tipo de teoria é que ela será recursivamente enumerável quando for composta por um número finito de axiomas e regras de inferência, o que é o nosso caso com a TNT. A ideia é que, com este número finito de axiomas e regras de inferência, podemos montar uma "árvore", partindo de cada axioma e aplicando as regras de inferência uma a uma, desse modo teremos uma certa quantidade de teoremas. Feito isso, podemos, agora, aplicar os resultados obtidos em um dado axioma nos outros axiomas, assim como utilizar um axioma em um resultado obtido de outro e prosseguir com a aplicação das regras de inferência. Este trabalho árduo, mas possível, vai estruturar esta "árvore" que tem todos os resultados possíveis daquela teoria, e é nela que o algoritmo comentado anteriormente irá fazer as devidas verificações.

Outra propriedade que nos interessa é a noção de função recorrente primitiva. A ideia é que uma função lógica tem essa propriedade quando ela pode ser contruída a partir de funções mais simples. Não precisaremos ver em detalhes o que isso significa precisamente, mas a grosso modo, uma função é recorrente primitiva quando seu resultado pode ser computado por um algoritmo simples, que sempre termina. A propriedade que nos interessa é a de que toda função recorrente primitiva é representável na TNT, isto é, existe uma fórmula da TNT que a codifica. Gödel mostrou que a propriedade PDD, em particular, é recorrente primitiva, e portanto, podemos enunciar o seguinte:

Fato fundamental 1. A propriedade de formar um PDD é testável por meio do conjunto de instruções citado acima e, consequentemente, está *representada* na TNT por algum fórmula com duas variáveis livres.

Tendo em mãos estes novos conceitos, vamos começar a trabalhar com as noções aritméticas a respeito dos pares de demonstração. Vamos utilizar o sistema MIU e a cadeia MUMON para exemplificar o uso da propriedade de PDD. Aqui, empregaremos uma abreviação parecida com a original — do autor — para invocar a propriedade de par de demonstração, que tem duas variáveis livres, como visto no Fato fundamental 1.

Exemplo 6.1.4. Segue a notação geral:

$$\mathrm{PDD}\{a, a'\}$$

Esta notação geral, quando retraduzida para os símbolos do sistema — MIU, neste caso — está representando uma demonstração, onde a é a demonstração de a'. Lembrando, agora, que a cadeia MUMON se refere a afirmação "MU é um teorema de MIU", e que esta é isomórfica a afirmação "30 é um número-teorema de MIU", logo, pode ser traduzida para a TNT, de forma que, com esta nova abreviação, ficaria da seguinte maneira:

$$\exists a : \mathrm{PDD}\{a, SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS0/a'\}$$

Notemos que aparece uma nova notação, que é a barra (/) separando dois termos, na parte a direita da virgula; esta notação significa que está sendo feita a substituição da variável a' pelo numeral que aparece em notação da TNT — que seria o número 30.

O Fato fundamental 1 nos permitiu um modo de falar a respeito dos pares de demonstração e, para além disso, com a aplicação do quantificador existencial, podemos falar a respeito de números-teorema. Traduzindo a fórmula acima, temos o seguinte: "existe um número a que forma um PDD do sistema MIU tendo 30 como segundo elemento"

Agora que entendemos como esta propriedade — a PDD — funciona, com o sistema MIU, podemos andar mais alguns passos e verificar como se projeta a sua aplicação na TNT. A notação será a mesma:

$$\mathrm{PDD}\{a, a'\}$$

e a interpretação fica sendo "os números naturais a e a' formam um par de demonstração da TNT, ou seja, nos símbolos da TNT, a é uma demonstração para a'. Verifiquemos um exemplo na TNT.

Exemplo 6.1.5. Vamos expressar a afirmação "$0 = 0$ é um teorema da TNT". Primeiro, precisamos lembrar que a codificação da fórmula "$0 = 0$" é o número de Gödel "$666, 111, 666$". Dado isso, temos a (abreviação da) fórmula:

$$\exists a : \mathrm{PDD}\{a, SSSSSSSS\ldots SSSSSSS0/a'\}$$

Note que usamos reticências entre os Ss, pois precisaríamos escrever mais de 600 milhões deles (666111666 Ss para ser mais exato). Agora, temos uma fórmula da TNT que diz: "existe um número a que forma um par de demonstração tendo 666111666 como seu segundo elemento".

A fórmula acima é uma afirmação fechada da TNT, dado que não temos mais variáveis livres ocorrendo nela, ou seja, assim que fazemos a quantificação de uma das variáveis e a substituição da outra, passamos a ter uma fórmula que tem um valor-verdade. Neste sentido, podemos voltar a pensar sobre o conceito de número-teorema e, analisando mais uma vez a fórmula do exemplo 6.1.5, podemos relacioná-la a uma outra tradução, que diz: "666111666 é um número-teorema da TNT". Assim, o que temos agora, é que a propriedade PDD, por um lado, ou melhor, em um nível, *representa* uma fórmula da TNT e, em outro nível, *expressa* uma propriedade da meta-TNT — a propriedade de ser um número-teorema — ou seja, neste segundo nível, a propriedade está falando a respeito da TNT!

Assim, conseguimos atingir o objetivo desta primeira parte da construção da sentença de Gödel, que é a ideia de termos fórmulas da TNT que falam sobre outras fórmulas da própria TNT, ou seja, a TNT pode fazer a "introspecção" da noção da teoremidade na TNT. O próximo passo é construir uma fórmula que fale sobre si mesma.

6.2 A fórmula SUB

Para começar, vamos analisar o que acontece com o número de Gödel de uma fórmula, quando fazemos pequenas mudanças na estrutura da mesma. Consideremos a seguinte modificação:

a substituição de todas as variáveis livres por um numeral específico.

Vejamos dois exemplos:

Exemplo 6.2.1. Na coluna da esquerda temos uma fórmula onde ocorre a substituição descrita acima, enquanto que, na coluna da direita, temos em paralelo os respectivos números de Gödel de cada fórmula.

Fórmula	*Número de Gödel*
$a = a$	262,111,262
substituindo todas as variáveis livres pelo numeral de 2:	
$SS0 = SS0$	123,123,666,111,123,123,666

Exemplo 6.2.2. Segue a mesma estrutura e ideia de substituição do exemplo anterior.

Fórmula	*Número de Gödel*
$\neg\exists a : \exists a' : a'' = (SSa \times SSa')$	223,333,262,636,333,262,163,636, 262,163,163,111,362,123,123, 262,236,123,123,262,163,323
substituindo todas as variáveis livres pelo numeral de 4:	
$\neg\exists a : \exists a' : SSSS0 = (SSa \times SSa')$	223,333,262,636,333,262,163,636, 123,123,123,123,666,111,362,123, 123,262,236,123,123,262,163,323

Perceba que, enquanto na coluna da esquerda está sendo feito o processo de substituição, na coluna da direita está sendo feito um processo aritmético isomórfico — o mesmo que já foi comentado em capítulos anteriores, que envolve operações aritméticas e potências de 10 — que transforma um número de Gödel em outro número de Gödel ainda maior.

O cerne desta etapa é sabermos que a relação entre estes três números — (1) número de Gödel original, (2) número cujo numeral é inserido, (3) número de Gödel resultante — é uma relação recorrente primitiva, ou seja, ela é *representada* na TNT por uma fórmula com três variáveis livres. Esta fórmula receberá a seguinte abreviação:

$$\text{SUB}\{a, a', a''\}.$$

Dado isso, vamos utilizar os números de Gödel do exemplo 6.2.1 para entender como esta abreviação funciona.

Exemplo 6.2.3. Primeiramente, como iremos trabalhar com números de Gödel — que são números muito extensos —, daremos um "nome" a cada um deles. Lembrando que a relação de substituição se dá por meio de dois números de Gödel e o número cujo numeral é substituído na fórmula original. Assim, temos os seguintes números de Gödel:

$$m = 262,111,262 \text{ e } n = 123,123,666,111,123,123,666.$$

Agora, fazendo a substituição das variáveis livres pelo numeral dos números relacionados na fórmula SUB$\{a, a', a''\}$, temos uma nova fórmula que é a seguinte:

$$\text{SUB}\{SSSS\ldots SSSS0/\mathbf{a}, SS0/\mathbf{a'}, SSSSSS\ldots SSSSSS0/\mathbf{a''}\}$$

Note que o que está sendo feito é o seguinte: na primeira parte, **a** está sendo substituído pelo numeral de m, ou seja, temos m vezes a ocorrência de S (S se repete um pouco mais de duzentos milhões de vezes); na segunda parte, temos **a'** sendo substituído pelo numeral de 2 (número utilizado no exemplo original); na terceira parte, **a"** está sendo substituído pelo numeral de n e, sendo assim, temos o símbolo S se repetindo n vezes, ou seja, mais de 10^{20} vezes.

Um resultado que podemos tirar desta parte é o seguinte: como a fórmula SUB representa a relação de substituição, temos que a fórmula SUB do exemplo 6.2.3 é um teorema da TNT. E, com isso, findamos esta seção. Agora, vamos unir alguns conceitos e resultados para, então, chegar onde queríamos com este capítulo.

6.3 Aritmoquinagem

Nesta etapa, o que queremos fazer é, com o auxílio do mecanismo de PDD (pares de demonstração da TNT) e fórmulas SUB, criar uma afirmação específica da TNT — que virá a ser a tal Sentença de Gödel. O conceito de *aritmoquinagem* funciona da seguinte forma: precisamos de uma fórmula da TNT que tenha pelo menos uma variável livre; com esta fórmula em mãos, iremos codificá-la pelo seu número de Gödel e, depois disso, substituir esta variável livre pelo número de Gödel obtido. O nome é uma alusão ao importante filósofo analítico Willard Van Orman Quine, que criou uma construção parecida (que podemos chamar de Quinagem) no nível das linguagens naturais (portanto na TNT temos a Aritmoquinagem: Quinagem aritmética). Comecemos apresentando um exemplo de como funciona a aritmoquinagem:

Exemplo 6.3.1. Peguemos a seguinte fórmula da TNT:

$$(1) \quad a = S0$$

Agora, codificamos ela e obtemos o número de Gödel $262,111,123,666$. Por fim, substituímos a variável livre da fórmula original pelo numeral de $262,111,123,666$, ficando com

$$(2) \quad SSSS \ldots SSSS0 = S0,$$

(seriam necessários mais de duzentos bilhões de Ss na fórmula (2))

assim, temos que (2) é a aritmoquinagem de (1).

Note que está fórmula traz consigo uma afirmação que é falsa, afinal, ela diz que

$$262, 111, 123, 666 = 1,$$

porém, é fácil ver que, se colocarmos uma negação na fórmula original, a aritmoquinagem dela resultaria em uma afirmação verdadeira. Vamos ver como ficaria:

Exemplo 6.3.2. Peguemos a negação da fórmula do exemplo anterior:

$$\neg a = S0.$$

Codificando a fórmula, temos $223, 262, 111, 123, 666$ como seu número de Gödel. Agora, fazendo a aritmoquinagem, temos a fórmula

$$\neg SSSSS \ldots SS0 = S0$$

que, traduzida, nos diz que "não é verdade que 223,262,111,123,666 é igual à um", o que, neste exemplo, passa a ser uma sentença verdadeira.

Ao trabalharmos com a aritmoquinagem, o que estamos fazendo, de modo mais geral, é trabalhar com a operação SUB que vimos na seção anterior. Neste sentido, estamos a utilizando com a seguinte estrutura:

$$\text{SUB}\{a'', a'', a'\}.$$

Veja que as duas primeiras variáveis livres são iguais e isso faz todo o sentido, visto que, na aritmoquinagem, estamos pegando o número de Gödel de uma fórmula e substituindo a variável livre desta fórmula pelo seu próprio número de Gödel, ou seja, o número a'' é, ao mesmo tempo, o número de Gödel original e o número de inserção. Agora, para a fórmula $\text{SUB}\{a'', a'', a'\}$, utilizaremos uma nova abreviatura que é $\text{AQ}\{a'', a'\}$. Fazendo uma tradução (meio) literal desta nova fórmula, teríamos o seguinte:

> a' é o número de Gödel da fórmula obtido ao aritmoquinar-se a fórmula com o número de Gödel a'',

ou, simplesmente

$$a' \text{ é a } \textit{aritmoquinificação} \text{ de } a''.$$

Exemplo 6.3.3. Para ficar mais claro, vamos ver como ficaria o passo a passo, utilizando a fórmula do exemplo 6.3.1:

$a = S0$	fórmula original
$262,111,123,666$	fórmula codificada
$SSSS \ldots SSSS0 = S0$ (262, 111, 123, 666 cópias de "Ss")	aritmoquinagem
$123,123,123,\ldots,123,123,123,666,111,123,666$ (262, 111, 123, 666 cópias de "123")	aritmoquinificação de $262,111,123,666$

Agora o que precisamos é, pensar em uma fórmula que fale a respeito da noção de aritmoquinagem, e este será o último passo necessário para lograrmos êxito na construção da sentença de Gödel. Abaixo, segue a tal fórmula que precisamos:

$$\neg\exists a : \exists a' :< \mathrm{PDD}\{a, a'\} \wedge \mathrm{AQ}\{a'', a'\} > . \tag{6.3.1}$$

Como a fórmula acima se trata de uma fórmula da TNT, podemos codificá-la por um número de Gödel; chamaremos tal número de u. Assim, podemos fazer a expansão decimal de u e ter uma ideia de que número seria esse:

$$u = 223,333,262,636,333,262,163,636,212,\ldots,161,\ldots,213. \tag{6.3.2}$$

Note que, os espaços que estão preenchidos pelos três pontos (...), são reservados aos números de Gödel das fórmulas que representam as abreviações "par de demonstração" e "aritmoquinificação", das quais, já comentamos que tais codificações podem ser feitas, mas que seria um trabalho dispendioso e irrelevante.

Para dar sequência, o que faremos é aritmoquinar a fórmula 6.3.1, que ficará da seguinte forma:

$$\neg\exists a : \exists a' :< \mathrm{PDD}\{a, a'\} \wedge \mathrm{AQ}\{SSSS \ldots SSSS0/a'', a'\} > . \tag{6.3.3}$$

Veja que, neste processo de aritmoquinagem, o que fizemos foi substituir a única variável livre (a") pelo numeral de u, visto em 6.3.2, ou seja, o símbolo S se repete u vezes naquela substituição. Feito isso, temos agora uma sentença da TNT que, nada mais é, do que a tão famigerada *sentença de Gödel*, que chamaremos de G. Vamos interpretar o que ela nos diz no Capítulo seguinte.

7 Os teoremas de incompletude

Com o intuito de enunciar os teoremas de Gödel de forma mais clara, vamos trazer alguns conceitos e resultados do capítulo anterior, de forma que criemos um certo "caminho", explicado passo a passo, que nos leve a obtenção de tais resultados. A ideia é entender a construção da sentença de Gödel de modo mais conciso, analisando cada passo feito.

7.1 Interpretando a sentença de Gödel

Comecemos trazendo a fórmula 6.3.1, que chamaremos, aqui, de F — pelo simples fato de ela, quase, ser a G:

$$\neg\exists a : \exists a' :< \mathrm{PDD}\{a, a'\} \wedge \mathrm{AQ}\{a'', a'\} > . \tag{F}$$

Dada a fórmula F, vamos codificá-la por seu número de Gödel:

$$NG_{\mathrm{F}} = 223, 333, 262, 636, 333, 262, 163, 636, 212, \ldots, 161, \ldots, 213. \tag{NG_{F}}$$

Veja que NG_{F} é o número de Gödel da fórmula F —as reticências $(\ldots)$ são explicadas em 6.3.2— e será chamado assim (NG_{F}) daqui para frente. O próximo passo é fazermos a aritmoquinificação de F, substituindo a variável livre (a'') pelo numeral que representa NG_{F} na TNT, que será uma cadeia onde o símbolo S se repete NG_{F} vezes:

$$\neg\exists a : \exists a' :< \mathrm{PDD}\{a, a'\} \wedge \mathrm{AQ}\{SSSS \ldots SSSS0, a'\} > . \tag{G}$$

Como visto no capítulo anterior, esta sentença, que estamos chamando de (G), é a sentença de Gödel, e, como sabemos, podemos codificá-la e obter seu número de Gödel. Sendo assim, vamos chamar de NG_{G} o número de Gödel da sentença G. Aqui, não iremos explicitar o número NG_{G}, pois é irrelevante e poderia causar confusão; o importante é sabermos que tal número existe — o que é verdade, dado que é apenas o código de uma sentença.

Bom, vejamos o que foi feito até aqui: pegamos a fórmula F, codificamos ela (NG_{F}) e fizemos a sua aritmoquinificação, obtendo a sentença G, que tem um número de Gödel, chamado NG_{G}. Dado este passo a passo, obtemos o seguinte resultado: NG_{G} é a aritmoquinificação de NG_{F}.

Agora, vamos analisar o que a G está dizendo. Traduzindo, temos o seguinte:

"não existem números a e a' tais que o seguinte ocorra: a e a' formem um par de demonstração da TNT **e** a' seja uma aritmoquinificação de NG_{F}."

Note que acabamos de obter um resultado dizendo que NG_{G} é a aritmoquinificação de NG_{F}, logo, existe um a' que é a aritmoquinificação de NG_{F} e, sendo assim, está tudo certo com a segunda parte da conjunção.

Diante desta informação, podemos notar, então, que deve haver um problema com a primeira parte da conjunção. Assim, fazendo a substituíção de a' por NG_{G}, o que a G está dizendo é:

"não existe um número a que forme um par de demonstração da TNT com NG_{G}",

ou seja, não existe uma demonstração para a fórmula que tem NG_{G} como número de Gödel. Retraduzindo, temos que:

"a fórmula com número de Gödel NG_{G} não é um teorema da TNT".

Mas qual seria está fórmula, que tem NG_{G} como número de Gödel? Veja! É a própria G — lembre que, NG_{G}, é o número de Gödel da sentença G. Portanto, fazendo uma tradução final da G, o que ela está dizendo é:

"G não é um teorema da TNT",

em outras palavras, G diz:

"eu não sou um teorema da TNT",

ou ainda, lembrando que todo teorema é demonstrável dentro do sistema formal, temos uma outra tradução para G que diz:

"eu não sou demonstrável na TNT".

7.2 Analisando a tradução da G

Veja que, metamatematicamente, G está falando sobre um fórmula que tem o seu próprio número de Gödel, ou seja, G está falando sobre si mesma. Lembrando como G foi definida, ela diz que a fórmula com número de Gödel NG_{G} não é demonstrável, sendo assim, o que ela diz, de fato, é que ela prórpia não é demonstrável. Vejamos as consequências lógicas disso:

- Afirmação: G não é demonstrável. Se esta afirmação é verdadeira, temos que G é verdadeira e não-demonstrável. Agora, se esta afirmação é falsa, temos que sua negação é verdadeira.
- Negação: G é demonstrável. Sendo assim, o que G demonstra? G demonstra que não é demonstrável, ou seja, uma contradição. Portanto, a negação da negação é verdadeira e caímos na afirmação anterior.

Assim, se o sistema formal em questão é consistente, ou seja, não se pode demonstrar uma sentença e a sua negação, então G não é demonstrável nele. Mas isso é exatamente o que G diz, que não é demonstrável. Portanto G é uma sentença verdadeira e não-demonstrável na TNT. O fato de, tanto G quanto $\neg$G, não serem demonstráveis, é o que traz a ideia de G ser indecidível.

7.3 Os teoremas de Gödel

Dadas as análises feitas na seção anterior, podemos, agora, enunciar os Teoremas da Incompletude:

Teorema 7.3.1 (1° Teorema da Incompletude)**.** *Qualquer sistema formal consistente, com o básico da aritmética, é incompleto.*

Teorema 7.3.2 (2° Teorema da Incompletude)**.** *Se o sistema formal em questão é consistente, a sua concistência não pode ser provada dentro do sistema — a partir dos seus axiomas.*

O primeiro teorema nos diz que, dado um sistema formal que é consistente, ou seja, um sistema onde é possível demonstrar apenas fórmulas verdadeiras, e capaz de expressar a aritmética básica, vão existir fórmulas que são verdadeiras, mas que não podem ser demonstradas. O segundo teorema vem como um corolário do primeiro e vai dizer que a teoria não consegue provar a sua própria consistência. De fato, vejamos como isso é feito. Fazendo algumas manipulações lógicas (e metalógicas) podemos chegar na seguinte ideia: se o sistema é consistente, então existe alguma fórmula que não é demonstrável nele, afinal, não se pode demonstrar a fórmula $< P \land \neg P >$, por exemplo. Assim definiremos X da seguinte forma:

$$\neg\forall b : \exists a :< \mathrm{PDD}\{a, b\} > . \qquad (X)$$

O que X está dizendo, é o seguinte:

“não é verdade que, para qualquer fórmula da TNT exista uma demonstração, o que faz sentido, pois, como sabemos, apenas teoremas podem ser demonstrados. Assim, vamos definir um significado *metamatemático* para X, que será "o sistema é consistente".

O primeiro Teorema da Incompletude diz que, se o sistema é consistente, então ele é incompleto, e, para essa ideia de ser incompleto, temos a fórmula G, que é verdadeira e não-demonstrável. Portanto, fazendo uma "tradução formal" do primeiro teorema, temos o seguinte:

$$X \implies \mathrm{G}.$$

Sabemos que esta fórmula pode ser provada, afinal é um teorema. Sendo assim, vamos aplicar a Regra da Separação (3.4) à ela e analisar o que ocorre. Aplicando-a, temos:

$$\begin{array}{c} X \\ X \implies G \\ \hline \therefore \mathrm{G} \end{array}$$

Note que, usando a hipótese de que X é um teorema, e sabendo que $X \implies \mathrm{G}$ é um teorema, inferimos que G é um teorema. Veja que isso implica em uma demonstração para G, porém, como sabemos, G não é demonstrável, logo, caímos em uma contradição. Essa contradição ocorre do fato de termos utilizado como hipótese que X é um teorema da TNT. Logo, X não pode ser um teorema. Lembremos, agora, que X é justamente a fórmula que representa a frase "o sistema é consistente". Porém, como X não é teorema, não é possível fazer uma demonstração para X. Portanto, concluímos que não é possível demonstrar a consistência do sistema formal em questão. Claro que, tudo isso, dentro do próprio sistema. E assim chegamos ao forte e doloroso golpe dado por Gödel em um dos problemas conjecturados no Programa de Hilbert.

7.4 Interseções a serem refletidas

Como vimos, os Teoremas da Incompletude de Gödel põem definitivamente abaixo os planos do Programa de Hilbert, estabelecendo que esse é um sonho impossível. Não bastasse isso, apreciemos novamente os enunciados: qualquer sistema formal minimamente expressivo para formalizar um pouco de aritmética conterá sentenças indecidíveis e, além disso, sua consistência não pode ser demonstrada dentro do sistema (sem que se recorra a algum sistema ainda mais forte). Esse "golpe" nos fundamentos da Matemática coloca essa área em um novo paradigma. Coincidentemente, ele ocorre contemporaneamente com as descobertas da Relatividade Geral e da Física Quântica, que também estabelecem novos paradigmas para a Física (e portanto as outras Ciências Exatas). Aqui retomamos a epígrafe desse trabalho: o conteúdo desses resultados é similar, no que diz respeito à *incerteza*, *relativização* e *limitação* à conceitos absolutos. Mais precisamente, por um lado temos Einstein afirmando que, em larga escala, a própria noção de Tempo e Espaço é relativa (cada observador tem a sua) — o que colocava em xeque ideias extremamente antigas e intuitivas como a própria noção de simultaneidade. Temos também, na escala subatômica, o Princípio da Incerteza de Heisenberg, afirmando que é impossível sabermos simultaneamente, com precisão, a posição e a velocidade de uma partícula — ruindo, em certo sentido, a ideia de Determinismo. Por fim, temos Gödel mostrando que na própria Matemática, aparentemente puramente Platônica e racional, há incertezas e incompletudes. Com isso, podemos dizer que os Teoremas de Gödel situam a Matemática nesse novo contexto pós-moderno de pensamento, em que tudo fica de certa forma relativizado.

Outra discussão interessante que decorre desses resultados é sua extrapolação para outros domínios. Por exemplo, vimos na construção da sentença de Gödel que ela traz, embutida em si, o fenômeno de autorreferência. Esse tipo de fenômeno é particular de algo muito comum a todos nós, a *consciência*. Há, então, aqueles que conjecturam que o estudo dessa propriedade tão humana se intersecta com o mundo formal dos sistemas axiomáticos. De fato, tratar dessa analogia é, no fim das contas, o objetivo central do livro G.E.B. (HOFSTADTER, 2001). Apenas a título de provocação, cabe citar que essa não é uma ideia assim tão ousada, afinal, fisicamente, cérebros — que hospedam mentes — são circuitos elétricos, entidades bastante próximas dos sistemas formais. Então, caro leitor, seria você uma sentença G?

Referências

ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. *Revista do professor de matemática*, v. 45, 2001.

BICUDO, I. *Os elementos*. São Paulo: Unesp, 2009.

GÖDEL, K. Über formal unentscheidbare sätze der principia mathematica und verwandter systeme i. *Monatshefte für mathematik und physik*, Springer, v. 38, p. 173–198, 1931.

GOLDSTEIN, R. *Incompletude: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel*. São Paulo: Editora Companhia das Letras, 2008.

HEATH, T. L. et al. *The thirteen books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications, 1956.

HILBERT, D. *The foundations of geometry*. Oxford: Benediction Classics, 1950.

HOFSTADTER, D. R. *Gödel, Escher, Bach: um entrelaçamento de gênios brilhantes*. Brasília: UnB, 2001.

MORTARI, C. A. *Introdução à lógica*. São Paulo: Unesp, 2001.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. *A prova de Gödel*. São Paulo: Perspectiva, 2007.

NEWTON-SMITH, W. H. *Lógica: um curso introdutório*. Lisboa: Gradiva, 1998.