UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Nayara Caroline Luiz

Frações egípcias e uma sequência didática para o Ensino Fundamental

Blumenau
2023

Nayara Caroline Luiz

Frações egípcias e uma sequência didática para o Ensino Fundamental

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Felipe Vieira, Dr.

Blumenau
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Luiz, Nayara Caroline
Frações egípcias e uma sequência didática para o Ensino Fundamental / Nayara Caroline Luiz ; orientador, Felipe Vieira, 2023.
54 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Blumenau, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Frações Egípcias. 3. Frações Unitárias. I. Vieira, Felipe. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

Nayara Caroline Luiz

Frações egípcias e uma sequência didática para o Ensino Fundamental

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Felipe Vieira, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Renan Gambale Romano, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof.ª Alessandra Piske, Dr.ª

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Delfini Caetano Fidalgo
Data: 07/11/2023 16:50:07-0300
CPF: ***.425.308-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Vieira
Data: 07/11/2023 10:24:35-0300
CPF: ***.601.639-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Felipe Vieira, Dr.
Orientador

Blumenau, 2023.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, que me permitiu ter saúde para que eu pudesse concluir esta etapa. Aos meus familiares que sempre me apoiaram nas minhas decisões, me ajudaram como possível no período do curso, incentivando-me a dar o meu melhor.

Agradeço também aos professores que passaram pelo meu caminho neste tempo, que nos incentivam a não desistir, nos afirmam que somos capazes e nos motivam, em especial ao meu orientador, professor Felipe Vieira e aos membros da banca, professor Renan Gambale Romano e professora Alessandra Piske. O exemplo deles é fundamental nas nossas vidas.

Um agradecimento especial ao meu esposo, que acreditou em mim, me apoio durante todo o processo e me incentivou a perseverar. Sem ele, eu não teria alcançado o meu objetivo e não poderia estar aqui neste momento.

Além disso, quero agradecer a todas as outras pessoas que fizeram parte deste processo de alguma forma, cada um de alguma forma foi essencial nesta jornada.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos e exploramos as “frações egípcias”, que é um belo nome que representa o somatório de distintas frações unitárias. Veremos algumas de suas curiosas propriedades, além de métodos que nos permitem escrever alguns tipos de frações como uma fração egípcia, basicamente os métodos de Fibonacci, de Golomb, o método dos Números Práticos e o Geométrico. Além disso, ao final deste trabalho, é apresentada uma sequência que pode ser utilizada por professores da educação básica que queiram apresentar este conceito para os seus estudantes, mostrando que o conteúdo de fração vai além do que normalmente é visto em sala de aula.

ABSTRACT

In this work we present the "egyptian fractions", a nice name representing the sum of distinct unitary fractions. We will see some curious propierties and four methods to present a fraction as an egyptian fraction, the Fibonacci's method, the Golomb's, the Practical Numbers' and the Geometric method. In the final part of this work, we will see some suggestions to teachers who want to present this theory to their students in basic education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Antes da invenção dos números, o homem pré-histórico já podia ter a noção de quantidade sem conhecer a contagem. O processo de quantificação acontecia através da comparação entre dois conjuntos, por exemplo, ao associar uma certa quantidade de objetos da natureza com a uma quantidade de animais em um determinado local. O modelo mais conhecido, quando se trata da história dos números, faz uma associação de pedras com ovelhas, e ele é de fato uma maneira de exemplificar a maneira de quantificar objetos antes da invenção do sistema de numeração.

Segundo Jacob (JACOB, 2002), foi graças a este princípio que o homem, durante milênios, pode realizar a aritmética sem ter o conhecimento concreto do significado do número, utilizando montes ou fileiras de objetos da natureza, como ossos, dentes de animais, bolinhas de argila, conchas e outros.

A criação de um sistema de numeração foi gradual e seu desenvolvimento deu-se conforme as necessidades que surgiam, há mais de cinco mil anos. O uso de pedras com tamanhos diferentes para cada classe numérica foi utilizado inicialmente, depois passou-se a usar objetos de formas diferentes, modelados com argila. Estima-se que este período correspondia a época de 9000 a.C. a 2000 a.C.

O sistema de numeração utilizado atualmente, o sistema de numeração indo-arábico, tem seus primeiros registros na Índia, por volta de 250 a.C. A criação de um sistema decimal é atrelada a este povo, segundo Jacob (JACOB, 2002), os árabes compõem o nome do sistema por difundirem o sistema pela Europa Ocidental, posteriormente. A imagem mostra a evolução dos dez símbolos que compõem o sistema, até chegar nos algarismos que conhecemos atualmente.

Fonte: Disponível em: (VASCONCELOS, 2019)

Figura 1 – A evolução dos algarismos indo-arábicos

Os egípcios possuíam também um sistema de numeração próprio, representando a unidade e outras potências de dez através de hieróglifos, criados há cerca de 3000 anos. A este povo foi atribuído também o desenvolvimento das frações. A história nos diz que a necessidade deste conceito surgiu após uma inundação do rio Nilo em terras que haviam sido divididas igualmente entre o povo. Após este episódio, o rei mandou "seus medidores descobrirem o quanto cada terreno ficou menor para que pudessem calcular, proporcionalmente ao tamanho deste, a taxa anual estabelecida" (PERLIN P.; LOPES, 2013)

Os medidores utilizavam uma unidade conhecida como cúbito, que correspondia a distância entre a ponto do dedo médio e o cotovelo do faraó, que equivale a cerca de 45 centímetros. Neste episódio, eles perceberem que o cúbito nem sempre cabia uma quantidade de vezes inteira na distância que desejava-se medir, surgindo assim a ideia de considerar um número que correspondia a parte de um inteiro: a fração.

Os egípcios utilizavam as frações com o numerador 1, relacionando a parte como um todo. Para esta representação, utilizavam um símbolo de "boca" juntamente com o hieróglifo que representava o algarismo do denominador.

Fonte: (PERLIN P.; LOPES, 2013)

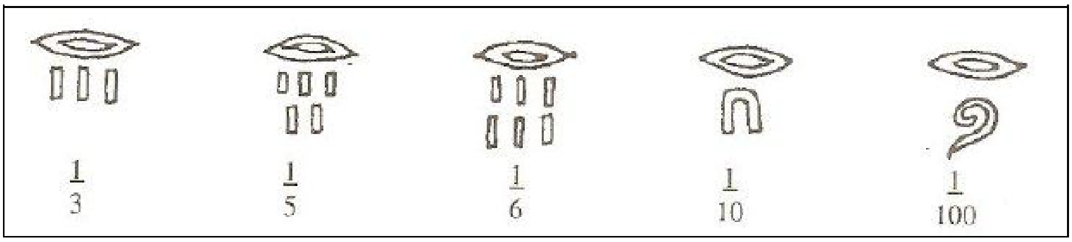

Figura 2 – A representação das frações pelos egípcios.

As frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ eram as únicas utilizadas pelos egípcios com numerador diferente de um e, juntamente com $\frac{1}{2}$, possuíam símbolos especiais possivelmente por serem utilizadas mais frequentemente.

Neste momento da história, aparece um dos principais conceitos utilizados neste trabalho: as frações unitárias. As frações unitárias são aquelas cujo numerador é o número 1 e, como vê-se anteriormente, os egípcios tiveram uma significativa contribuição neste conceito. Todas as demais frações eram escritas pelos egípcios como a soma de frações unitárias.

Chega-se agora ao principal conceito que será abordado aqui: as frações egípcias. Uma fração egípcia é um somatório de frações unitárias distintas e, o objetivo deste trabalho, é apresentá-las junto com suas propriedades, os métodos que permitem escrever uma fração própria e irredutível como uma fração egípcia e exemplos mostrando como encontrar tal representação.

O princípio subjacente a esta redução especial a frações unitárias não é claro.

> Este cálculo com frações deu à matemática egípcia um caráter complicado e pesado, mas, apesar destas desvantagens, a maneira de operar com frações unitárias foi praticada durante milhares de anos, não só no período grego, mas também na idade média. (STRUIK, 1992)

Primeiramente, após apresentar seu conceito, o objetivo é compreender como escrever uma fração como uma fração egípcia. Para isto, serão apresentados alguns métodos, com diversos exemplos. Posteriormente, serão apresentadas algumas de suas propriedades, com técnicas e suas respectivas demonstrações. Finalmente, uma proposta para abordagem e aplicação em sala de aula será apresentada.

Um estudo de caso realizado por dois estudantes da UFRJ, (MENEZES F.; MORAES, 2018), da disciplina de Tendências no Ensino de Matemática, com alunos do sétimo, oitavo e nono anos, concluiu que alguns conceitos relacionados a frações ainda não estão bem definidos para os estudantes. Por exemplo, ao serem questionados da posição do número $\frac{2}{3}$ na reta numérica, alguns afirmaram que ele se encontra entre os inteiros 2 e 3. Em outra situação apresentada no artigo, os alunos conseguiam verbalizar seu raciocínio de maneira correta, mas não responder corretamente.

A partir desta situação, agora nos referindo ao âmbito nacional dos nossos estudantes, podemos perceber que a dificuldade muitas vezes já se encontra em compreender o conceito de fração, e em conseguir relacioná-lo com um quociente ou com uma razão entre partes. Os estudantes aprendem durante o Ensino Fundamental vários critérios relacionados a frações, mas por vezes acabam confundindo seus conceitos e representações (SABEL, 2018).

Diante dessa dificuldade que nossos alunos do Ensino Fundamental possuem para completamente compreender as frações, envolvê-los com um assunto curioso pode ser uma forma de trazer o interesse dos alunos para o seu estudo e, posteriormente, facilitar a sua compreensão, e as frações egípcias podem ser uma forma de fazer isto.

A seguir, nosso texto segue com a seguinte organização: o segundo capítulo traz o novamente o conceito de fração egípcia e quatro métodos utilizados para escrever uma fração própria irredutível desta forma. Além disso, apresenta também algumas propriedades gerais deste conceito, que independem dos métodos apresentados anteriormente. O último capítulo apresenta uma sugestão de sequência didática para a apresentação deste conceito em seis aulas em uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental, assim como sugestões de atividades e questionamentos e repostas que podem surgir dos alunos.

2 AS FRAÇÕES EGÍPCIAS

Como apresentado na introdução, uma fração egípcia nada mais é do que a soma de frações unitárias distintas. Como os egípcios utilizavam frações da forma

$$\frac{1}{n}$$

com $n \in \mathbb{N}^*$, abordaremos apenas as frações egípcias positivas.

Além disso, o foco deste trabalho será escrever as frações próprias irredutíveis como frações egípcias, embora haja métodos que permitem escrever outros tipos de fração como uma fração egípcia.

Por exemplo, se tomarmos a fração imprópria $\frac{7}{6}$, bastará separar sua parte inteira:

$$\frac{7}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{6}$$

e ela já estará escrita como uma fração egípcia.

No caso da fração ser redutível bastará simplificá-la antes de aplicar os métodos apresentados neste trabalho. Além disso, ressalta-se que alguns de tais métodos possuem premissas que são válidas apenas para frações irredutíveis.

À uma fração que pode ser escrita como a soma de duas frações unitárias distintas, daremos o nome de 2-fração egípcia, e assim sucessivamente. Ou seja, uma fração que pode ser decomposta como a soma de n frações unitárias distintas, $n \in \mathbb{N}^*$, será dita uma n-fração egípcia.

Serão apresentados quatro métodos que nos permitem escrever um número racional positivo como uma fração egípcia, são eles: Método de Fibonacci, Método de Golomb, Método dos Números Práticos e Método Geométrico. Estes métodos são apresentados em diversos trabalhos, como o trabalho Egyptian Fractions (CASAGRANDE, 2018). Cada método apresenta suas facilidades e dificuldades, cabe ao leitor, a depender da situação, escolher o método mais adequado a ser utilizado.

2.1 MÉTODO DE FIBONACCI

O primeiro método apresentado será o método de Fibonacci. Ele consiste em encontrar a maior fração unitária $\frac{1}{k_1}$, com $k_1 \in \mathbb{N}^*$, de forma que

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{k_1}$$

seja positiva ou nula.

Assim, o método é uma forma de encontrar tal k_1, que fazemos a seguir.

Proposição 2.1. *Considere uma fração própria irredutível $\frac{a}{b}$. Se tomarmos k_1 como o menor inteiro maior ou igual do que $\frac{b}{a}$, então a subtração*

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{k_1}$$

é a menor possível, positiva ou nula.

Demonstração. Primeiramente perceba que como queremos que tal subtração seja positiva, precisamos que:

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{k_1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} \geqslant \frac{1}{k_1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} \leqslant k_1.$$

Assim, k_1 deve ser maior ou igual do que $\frac{b}{a}$.
Agora, veja que se tomarmos o próximo natural $k_1 + 1$, como

$$k_1 + 1 > k_1,$$

teríamos

$$\frac{1}{k_1} > \frac{1}{k_1+1} \Rightarrow -\frac{1}{k_1} < -\frac{1}{k_1+1},$$

o que nos levaria a concluir que

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{k_1} < \frac{a}{b} - \frac{1}{k_1+1}.$$

Isso nos confirma que, para que $\frac{a}{b} - \frac{1}{k_1}$ seja o menor possível, positivo ou nulo, precisamos que $k_1 \in \mathbb{N}^*$ seja, exatamente, o menor natural maior ou igual do que $\frac{b}{a}$. □

A pergunta, agora, é como obter tal k_1. E a resposta é simples, conforme apresentamos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.1. *Considere a fração $\frac{3}{5}$. Veja que*

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

Ou seja, o quociente da divisão de 5 *por* 3 *é* 1 *com resto positivo. Isso nos diz que o menor inteiro maior ou igual do que tal divisão é* $k_1 = 2$ *(de fato, essa divisão resulta na dízima periódica* $1{,}6\cdots$*, cujo inteiro maior ou igual mais próximo é, de fato,* 2*).*

O próximo passo é calcular a diferença

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{k_1}$$

que pelas hipóteses será maior ou igual a zero, encontrando uma nova fração que denominaremos

$$\frac{a_1}{b_1}.$$

Desta forma, temos

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{k_1} + \frac{a_1}{b_1}.$$

Assim, se essa nova fração $\frac{a_1}{b_1}$ for unitária, finalizamos o processo.

Exemplo 2.2. *Vamos escrever a fração $\frac{3}{5}$ como uma fração egípcia.*
Pelo exemplo anterior, já sabemos que o menor inteiro maior ou igual à $\frac{5}{3}$ é 2. Assim, denotando $k_1 = 2$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} = \frac{1}{k_1} + \frac{a_1}{b_1} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{a_1}{b_1} \\ \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Ou seja, podemos escrever a fração $\frac{3}{5}$ como

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10},$$

que já é uma fração egípcia.

□

Agora, caso a fração $\frac{a_1}{b_1}$ não seja unitária, repetimos o procedimento. Se esta fração não for irredutível, bastaria simplificá-la pelo maior fator em comum do numerador e do numerador, e em seguida aplicar o método.

A seguir, vamos mostrar que a fração $\frac{a_1}{b_1}$ também é própria.

Proposição 2.2. *Partindo da fração própria $\frac{a}{b}$ e obtendo a fração $\frac{a_1}{b_1}$ através do método de Fibonacci, temos que $\frac{a_1}{b_1}$ também é própria.*

Demonstração.

$$0 < \frac{1}{k_1} \leqslant \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{a}{b} - \frac{1}{k_1} \leqslant 1.$$

Logo, como

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} - \frac{1}{k_1},$$

temos

$$0 \leqslant \frac{a_1}{b_1} \leqslant 1.$$

Perceba que o caso em que a fração $\frac{a_1}{b_1}$ é igual a zero é irrelevante, pois isso significaria que a fração inicial $\frac{a}{b}$ já é unitária. Assim, $\frac{a_1}{b_1}$ é própria. □

Dessa forma, ao aplicarmos o método de Fibonacci em uma fração própria irredutível $\frac{a}{b}$, a nova fração obtida $\frac{a_1}{b_1}$ também será própria e, mediante uma simplificação se necessário, obteremos uma também irredutível, e o processo pode ser repetido.

Outro resultado interessante é que $a_1 < a$. De fato, perceba que no método de Fibonacci,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} = \frac{1}{k_1} + \frac{a_1}{b_1} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} &= \frac{a}{b} - \frac{1}{k_1} \\ \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} &= \frac{ak_1 - b}{bk_1}.\end{aligned}$$

Portanto, existe algum $t \in \mathbb{N}^*$ com

$$\begin{aligned}ta_1 &= ak_1 - b, \\ tb_1 &= bk_1.\end{aligned}$$

Assim, como k_1 é o menor inteiro maior ou igual do que $\frac{b}{a}$, temos que $k_1 \geqslant \frac{b}{a}$. Pelo mesmo motivo, se subtrairmos uma unidade de k_1, temos que $k_1 - 1 < \frac{b}{a}$. Logo,

$$k_1 - 1 < \frac{b}{a} \leq k_1.$$

Utilizando a primeira desigualdade:

$$\begin{aligned}k_1 - 1 < \frac{b}{a} &\Rightarrow ak_1 - a < b \\ &\Rightarrow ak_1 - b < a.\end{aligned}$$

Como o lado esquerdo dessa desigualdade é igual a ta_1, temos

$$ta_1 < a,$$

que implica $a_1 < a$ pois t é, no mínimo, igual a 1.

Com isso, podemos concluir que toda fração unitária pode ser escrita de forma tal que o número de fatores da decomposição da soma seja menor ou igual ao numerador a. De fato, note que ao encontrarmos uma fração $\frac{a_1}{b_1}$ cujo denominador é diferente de 1, refaz-se o processo obtendo frações $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$, e assim sucessivamente, até obter-se $a_n = 1$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. E perceba que

$$1 = a_n < a_{n-1} < \cdots < a_3 < a_2 < a_1 < a.$$

Neste processo, o numerador da fração que encontramos diminui em a cada iteração e, portanto, são necessárias no máximo $a - 1$ iterações para encontrar a fração unitária, obtendo-se neste caso no máximo a fatores da soma.

Ou seja, o método de Fibonacci é finito, independentemente da fração própria irredutível que estejamos analisando.

Exemplo 2.3. *Vamos escrever a fração $\frac{37}{60}$ como uma fração egípcia. Realizamos a divisão entre o denominador e o numerador, obtendo*

$$\begin{array}{r|l} 60 & 37 \\ \cline{2-2} 23 & 1 \end{array}$$

Desta forma, temos $k_1 = 2$.

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{b_1} &= \frac{37}{60} - \frac{1}{k_1}\\ &= \frac{37}{60} - \frac{1}{2}\\ &= \frac{7}{60}.\end{aligned}$$

Note que não obtemos uma fração unitária, desta forma, repetiremos o processo com a fração $\frac{7}{60}$.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 7 \\ \cline{2-2} 4 & 8 \end{array}$$

Neste caso, $k_2 = 9$ e, portanto:

$$\begin{aligned}\frac{a_2}{b_2} &= \frac{7}{60} - \frac{1}{9}\\ &= \frac{1}{180}.\end{aligned}$$

Desta forma, unindo tais informações, temos:

$$\begin{aligned}\frac{37}{60} &= \frac{1}{2} + \frac{7}{60}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.4. *Utilizando o método de Fibonacci, vamos escrever a fração $\frac{145}{264}$ como uma fração egípcia. Ao realizar a divisão entre o denominador e o numerador, temos*

$$\begin{array}{r|l} 264 & 145 \\ \cline{2-2} 119 & 1 \end{array}$$

Então, $k_1 = 2$ e

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{b_1} &= \frac{145}{264} - \frac{1}{k_1}\\ &= \frac{145}{264} - \frac{1}{2}\\ &= \frac{13}{264}.\end{aligned}$$

Como a fração encontrada não é unitária, repetimos o processo, realizando a divisão

$$\begin{array}{r|l} 264 & 13 \\ \cline{2-2} 4 & 20 \end{array}$$

Temos assim, $k_2 = 21$ *e então*

$$\begin{aligned}\frac{a_2}{b_2} &= \frac{13}{264} - \frac{1}{k_2} \\ &= \frac{13}{264} - \frac{1}{21} \\ &= \frac{1}{616}.\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\frac{145}{264} &= \frac{1}{2} + \frac{13}{264} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{21} + \frac{1}{616}.\end{aligned}$$

2.2 MÉTODO DE GOLOMB

O próximo método que será apresentado também consiste em encontrar dois números naturais não nulos, a_1 e b_1, que nos ajudarão a escrever uma dada fração própria irredutível $\frac{a}{b}$ como uma fração egípcia. Neste método, utilizaremos a resolução de equações diofantinas e, para relembrá-la, deixo como sugestão o livro Tópicos de Teoria dos Números (MOREIRA, 2021). Neste mesmo livro, encontramos a Identidade de Bézout, que será essencial para este método.

A Identidade de Bézout garante que, dados $a, b \in \mathbb{Z}$ e $d = mdc(a,b)$, a equação diofantina

$$ax + by = d$$

possui solução. O método de Golomb consiste em resolver uma certa equação diofantina associada à uma fração própria irredutível $\frac{a}{b}$ e denotar tal solução por $x = b_1$ e $y = a_1$.

Assim, vejamos como que este método funciona. Para começar, vamos reescrever a equação diofantina de nosso interesse como

$$ax - by = 1.$$

com $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Portanto, como a e b são primos entre si, temos $mdc(a,b) = 1$ e portanto existem $x = b_1$ e $y = a_1$ não nulos tais que

$$ab_1 - ba_1 = 1. \tag{1}$$

É sabido que, encontrada uma solução particular de uma equação diofantina, podemos encontrar outros pares de soluções através da solução geral, dada por

$$\begin{cases} x &= b_1 + (-b) \cdot t \\ y &= a_1 - a \cdot t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

Como queremos soluções positivas, precisamos que

$$\begin{aligned} b_1 + (-b) \cdot t > 0 &\Rightarrow b \cdot t < b_1 \\ &\Rightarrow t < \frac{b_1}{b} \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} a_1 - a \cdot t > 0 &\Rightarrow a \cdot t < a_1 \\ &\Rightarrow t < \frac{a_1}{a}. \end{aligned}$$

Desta forma, ao variar o valor de t no conjunto dos inteiros, sempre será possível encontrar uma solução positiva para a equação, basta utilizar um parâmetro de t que obedeça, simultaneamente, às condições

$$t < \frac{b_1}{b}$$

e

$$t < \frac{a_1}{a}.$$

Sendo assim, basta que t seja menor que o mínimo dentre os quocientes $\dfrac{b_1}{b}$ e $\dfrac{a_1}{a}$.

Assim, temos que a fração $\frac{a}{b}$ pode ser escrita como

$$\frac{a}{b} = \frac{ab_1}{bb_1} = \frac{ba_1 + 1}{bb_1} = \frac{ba_1}{bb_1} + \frac{1}{bb_1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{bb_1}.$$

Ou seja, escrevemos $\frac{a}{b}$ como a soma de uma fração unitária com outra fração, que pode ou não ser unitária. Vejamos um exemplo em que $a_1 = 1$.

Exemplo 2.5. *Vamos escrever a fração $\frac{2}{5}$ como uma fração egípcia utilizando o método de Golomb. Neste caso, temos $a = 2$ e $b = 5$ e queremos encontrar a_1 e b_1 tais que*

$$2b_1 - 5a_1 = 1.$$

Essa equação tem solução, pois $mdc(2,5) = 1$. Uma solução particular é dada por $b_1 = 3$ e $a_1 = 1$, pois $2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1$. Então,

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{bb_1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

No exemplo acima, decompomos $\frac{2}{5}$ como soma de frações unitárias em uma única iteração. No entanto nem sempre $\frac{a_1}{b_1}$ será unitária e, nesse caso, bastará repetir o procedimento para $\frac{a_1}{b_1}$. Para isso, precisamos primeiramente discutir se a fração $\dfrac{a_1}{b_1}$ é uma fração irredutível própria.

Como $ab_1 = ba_1 + 1$, temos que $ba_1 < ab_1$. Além disso, de $a < b$ concluímos, multiplicando ambos os lados por b_1, que $ab_1 < bb_1$.

Ou seja, temos $ba_1 < ab_1 < bb_1$ e, desta desigualdade, podemos concluir que a fração $\frac{a_1}{b_1}$ também é própria:

$$ba_1 < bb_1 \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} < \frac{b}{b} = 1.$$

Ademais, como escolhemos a_1 e b_1 positivos, temos que $\frac{a_1}{b_1}>0$.

Portanto, sempre teremos $0 < \frac{a_1}{b_1} < 1$ e desta forma, a fração $\frac{a_1}{b_1}$ será própria e podemos aplicar o método novamente, se necessário.

E assim como no método de Fibonacci, caso $\frac{a_1}{b_1}$ não seja irredutível, basta simplificá-la.

Exemplo 2.6. *Utilizando o método de Golomb, vamos escrever a fração $\frac{3}{10}$ como uma fração egípcia. Neste caso, temos $a = 3$ e $b = 10$ e queremos resolver*

$$3b_1 - 10a_1 = 1.$$

Note que $b_1 = 7$ e $a_1 = 2$ é uma solução particular, e temos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{bb_1} = \frac{2}{7} + \frac{1}{10 \cdot 7} = \frac{2}{7} + \frac{1}{70}.$$

Então

$$\frac{3}{10} = \frac{2}{7} + \frac{1}{70}. \tag{2}$$

Agora, fazemos o mesmo procedimento para a fração $\frac{2}{7}$. Queremos que

$$2 \cdot b_2 - 7 \cdot a_2 = 1.$$

Note que $b_2 = 4$ e $a_2 = 1$ é uma solução. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{2}{7} &= \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{b_1 b_2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{7 \cdot 4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{28}. \end{aligned} \tag{3}$$

Portanto, a partir das equações (2) e (3), podemos escrever a fração $\frac{3}{10}$ como

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} &= \frac{2}{7} + \frac{1}{70} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70}. \end{aligned}$$

2.3 MÉTODO DOS NÚMEROS PRÁTICOS

Para entender este método que nos mostrará outra forma de escrever uma fração própria irredutível como uma fração egípcia, precisamos primeiramente entender o conceito de número prático. Um número natural positivo n é dito ser um número prático se todos os números naturais positivos menores que n podem ser escritos como a soma de distintos divisores de n.

Por exemplo, o número 8 é um número prático pois os números naturais de 1 ao 7 podem ser escritos como a soma de distintos divisores de 8. De fato, os divisores de 8 são $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$ e podemos escrever

$$\begin{aligned} 1 &= 1 & 5 &= 1 + 4 \\ 2 &= 2 & 6 &= 2 + 4 \\ 3 &= 1 + 2 & 7 &= 1 + 2 + 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Agora, observemos a fração própria $\frac{13}{18}$. Temos que 18 é um número prático, pois os divisores de 18 são 1, 2, 3, 6, 9 e 18 e podemos escrever todos os números menores que 18 como a soma destes divisores:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 & 7 &= 1 + 6 & 13 &= 1 + 3 + 9 \\ 2 &= 2 & 8 &= 2 + 6 & 14 &= 2 + 3 + 9 \\ 3 &= 3 & 9 &= 9 & 15 &= 6 + 9 \\ 4 &= 1 + 3 & 10 &= 1 + 9 & 16 &= 1 + 6 + 9 \\ 5 &= 2 + 3 & 11 &= 2 + 9 & 17 &= 2 + 6 + 9 \\ 6 &= 6 & 12 &= 3 + 9 \end{aligned}$$

Desta forma, o método dos Números Práticos consiste em escrever o numerador como a soma dos divisores de 18, ou seja:

$$\frac{13}{18} = \frac{1}{18} + \frac{3}{18} + \frac{9}{18}.$$

Agora, note que em cada fração da soma acima o numerador é divisor do denominador, então poderemos simplificá-las e obter frações unitárias:

$$\frac{13}{18} = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}.$$

Assim, escrevemos a fração inicial como uma fração egípcia.

Exemplo 2.7. *Utilizando o método dos números práticos, vamos escrever a fração $\frac{16}{30}$ como uma fração egípcia.*
Note que 30 é um número prático, pois podemos escrever todos os números naturais positivos menores que ele como a soma de seus divisores 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30. De

fato:

$1 = 1$	$11 = 2 + 3 + 6$	$21 = 1 + 5 + 15$
$2 = 2$	$12 = 2 + 10$	$22 = 2 + 5 + 15$
$3 = 3$	$13 = 1 + 2 + 10$	$23 = 3 + 5 + 15$
$4 = 1 + 3$	$14 = 1 + 3 + 10$	$24 = 3 + 6 + 15$
$5 = 2 + 3$	$15 = 2 + 3 + 10$	$25 = 10 + 15$
$6 = 6$	$16 = 6 + 10$	$26 = 1 + 10 + 15$
$7 = 1 + 6$	$17 = 1 + 6 + 10$	$27 = 2 + 10 + 15$
$8 = 2 + 6$	$18 = 3 + 15$	$28 = 3 + 10 + 15$
$9 = 3 + 6$	$19 = 1 + 3 + 15$	$29 = 1 + 3 + 10 + 15$
$10 = 1 + 3 + 6$	$20 = 5 + 15$	

Então

$$\frac{16}{30} = \frac{2}{30} + \frac{3}{30} + \frac{5}{30} + \frac{6}{30}.$$

Ao simplificar as frações, obtemos

$$\frac{16}{30} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}.$$

No caso em que o denominador da fração $\frac{a}{b}$ não seja um número prático, é possível encontrar um número k de forma que $k \cdot b$ seja um número prático. Para isto, utilizaremos alguns resultados.

Proposição 2.3. *O produto dos n primeiros números primos é um número prático.*

Demonstração. Vamos realizar esta demonstração utilizando o método de indução sobre a quantidade de primos.
O produto dos dois primeiros primos é $2 \cdot 3 = 6$ e 6 é um número prático, visto que seus divisores são $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ e

$1 = 1$	$4 = 1 + 3$
$2 = 2$	$5 = 2 + 3$
$3 = 1 + 2$	

Agora, supondo que o produto $p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_t$ é um número prático, precisamos provar que o número $p' = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_t \cdot p_{t+1}$ é um número prático. Para isso, considere o natural positivo $n < p'$ e vamos provar que ele é, de fato, a soma de divisores de p'.

Caso 1: $n < p$. A hipótese de indução nos diz que p é um número prático, logo n é a soma de divisores distintos de p. Mas perceba que todos divisores de p são divisores de p' e, portanto, n é a soma de divisores distintos de p'.

Caso 2: $k_1 p \leqslant n < k_2 p$, com k_1 e k_2 consecutivos. Neste caso, $n = \lambda + k_1 p$, com $0 \leqslant \lambda < p$. Agora, note que pelo Teorema Fundamental da Aritmética, $k_1 p = p_{t+1} \cdot q + r$, onde $q < p$ (pois caso contrário concluiríamos que $n \geqslant k_1 p > p'$) e $r < p_{t+1} < p$. Assim

$$n = \lambda + k_1 p = (\lambda + r) + p_{t+1} \cdot q.$$

Como $q < p$ e p é prático, e como os divisores de p são divisores de p', temos que

$$q = \sum_{d_i \in D(p)} d_i \Rightarrow p_{t+1} \cdot q = \sum_{d_i \in D(p)} p_{t+1} \cdot d_i.$$

Mas se os d_i são divisores de p, então $p_{t+1} \cdot d_i$ são divisores de $p_{t+1} \cdot p = p'$. Logo $p_{t+1} \cdot q$ é a soma de distintos divisores de p', onde todos esses divisores possuem p_{t+1} em sua decomposição em fatores primos.

Agora:

Caso 2.1: Se $\lambda + r = 0$, ele não influencia em n.

Caso 2.2: Se $\lambda + r$ é maior do que zero mas menor do que p, ele é a soma de distintos divisores de p, e por consequência de p', que não possuem p_{t+1} em sua decomposição.

Caso 2.3: Se $\lambda + r$ é maior ou igual a p, temos que $\lambda + r$ será da forma $p + \beta$ com $0 \leqslant \beta < p$. Neste caso, β é zero ou a soma de divisores próprios distintos de p, logo de p', que não possuem p_{t+1} em sua decomposição, pois são menores do que p. Assim, $\lambda + r$ será a soma de p, que é um divisor de p', com tais divisores distintos.

Logo, n é a soma de divisores distintos de p'.

Concluímos então que todos os números menores que p' podem ser escritos como a soma de divisores distintos de p', o que o faz ser um número prático. □

Exemplo 2.8. *Vamos escrever a fração* $\frac{3}{14}$ *como uma fração egípcia.*

Note que 14 não é um número prático, pois o número 13, por exemplo, que é um número menor que 14, não pode ser escrito como a soma de distintos divisores de 14. Portanto, vamos fatorar o 14 como produto de números primos, obtendo $14 = 2 \cdot 7$.

Assim, para escrever 14 como o produto de uma quantidade consecutiva dos primeiros números primos, na decomposição do 14 faltam os números primos 3 e 5. Portanto, vamos multiplicar a fração inicial pela fração $\frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{15}{15}$*:*

$$\begin{aligned} \frac{3}{14} &= \frac{3}{14} \cdot \frac{15}{15} \\ &= \frac{75}{210}. \end{aligned}$$

Note que 210 é o produto dos primos 2, 3, 5 *e* 7, *então o teorema anterior nos garante que ele é um número prático. Assim, podemos escrever* $75 = 70 + 5$, *e ambos são divisores de* 210. *Daí:*

$$\begin{aligned} \frac{3}{14} &= \frac{75}{210} \\ &= \frac{5}{210} + \frac{70}{210} \\ &= \frac{1}{42} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Outro importante resultado cuja demonstração foge do escopo deste trabalho, é o seguinte.

Proposição 2.4. *O produto de um número prático por um de seus divisores próprios é um número prático.*

□

Exemplo 2.9. *Utilizando o método dos Números Práticos, vamos escrever* $\frac{7}{25}$ *como uma fração egípcia.*
Neste exemplo, o denominador 25 também não é um número prático, pois seus divisores são 1, 5 *e* 25, *e o número* 7, *por exemplo, não pode ser escrito como a soma de divisores distintos de* 25.
Ao decompor o 25, *temos* $25 = 5 \cdot 5$ *e os números primos menores que* 5 *são* 2 *e* 3. *Então, vamos multiplicar a fração inicial pela fração* $\frac{6}{6}$, *pois temos que* $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ *é o produto dos três primeiros números primos (portanto é um número prático) por um de seus divisores (e tal resultado também será prático):*

$$\begin{aligned} \frac{7}{25} &= \frac{7}{25} \cdot \frac{6}{6} \\ &= \frac{42}{150}. \end{aligned}$$

Como 150 é um número prático, podemos escrever 42 como a soma de distintos divisores de 150, por exemplo, $42 = 30 + 10 + 2$. *Assim, temos*

$$\begin{aligned} \frac{7}{25} &= \frac{42}{150} \\ &= \frac{30}{150} + \frac{10}{150} + \frac{2}{150} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{75}. \end{aligned}$$

Um último resultado que é uma consequência das duas proposições anteriores, segue.

Coralário 2.5. *O produto de potências dos primeiros* n *números primos é um número prático.*

Demonstração. Este corolário é uma consequência direta das últimas duas proposições, pois basta tomar o produto de n primeiros primos e multiplicar por seus divisores convenientes. □

2.4 MÉTODO GEOMÉTRICO

Este método consiste em escrever uma fração própria irredutível como uma 2-fração egípcia. Basicamente, note que

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}.$$

Assim, o que queremos é encontrar x e y inteiros positivos que satisfaçam $x + y = a$ e $xy = b$. Vamos começar considerando um caso simples para exemplificá-lo. Ao considerarmos a fração $\frac{8}{15}$, note que podemos escrever $8 = 3 + 5$ e $15 = 3 \cdot 5$. Portanto:

$$\begin{aligned}\frac{8}{15} &= \frac{5+3}{5 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

A questão é que nem toda fração pode ser escrita de forma tão direta como uma 2-fração egípcia, o que nos leva ao nosso próximo caso.

Suponha que queiramos escrever $\frac{a}{b}$ como uma fração egípcia, mas já saibamos que não é possível seguir tais passos. Assim, o que fazemos é procurar uma fração equivalente a $\frac{a}{b}$ cujo método funcione.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{5}{18} &= \frac{8 \cdot 5}{8 \cdot 18} \\ &= \frac{40}{144},\end{aligned}$$

e note que $40 = 4 + 36$ e $144 = 4 \cdot 36$. Assim:

$$\begin{aligned}\frac{5}{18} &= \frac{40}{144} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

Assim, o método consiste em encontrar a, b e k inteiros positivos tais que

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \\ &= \frac{x+y}{xy} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

Mesmo assim, tendo ou não sido necessário multiplicar a fração por um k conveniente, pode não ser trivial encontrar x e y diretamente que obedeçam às igualdades desejadas. Felizmente, há uma maneira de organizar e limitar a nossa busca por eles.

Veja que queremos resolver

$$\begin{cases} x + y &= k \cdot a \\ xy &= k \cdot b \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} y &= -x + k \cdot a \\ y &= \dfrac{k \cdot b}{x} \end{cases}$$

Agora invocamos a geometria, conforme o nome do método. Perceba que a primeira equação é a equação de uma reta decrescente, e a segunda é a equação de uma hipérbole. A solução (x,y) ou (y,x) deste sistema é dada pela intersecção das duas curvas e são os denominadores que buscamos para a expansão da fração inicial em uma fração egípcia.

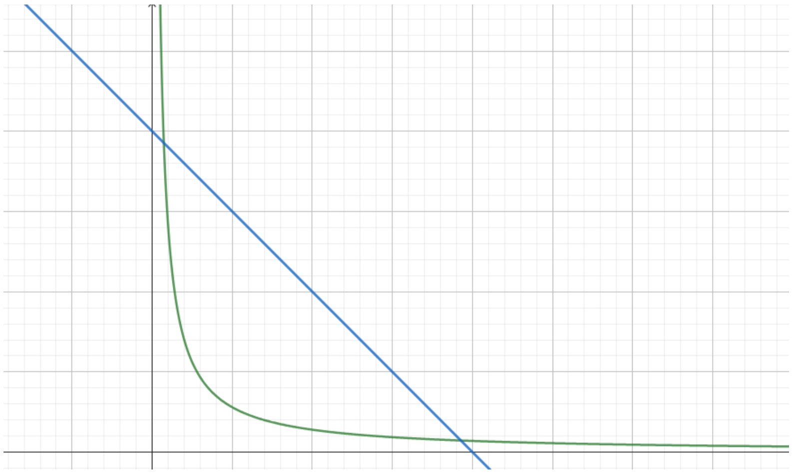

Figura 3 – Representação geométrica do sistema de equações do Método Geométrico.

Por exemplo, revisitando o exemplo da fração $\frac{5}{18}$, temos $a = 5$, $b = 18$ e $k = 8$, cujo sistema fica

$$\begin{cases} y &= -x + 40 \\ y &= \dfrac{144}{x} \end{cases}$$

e sua representação geométrica é:

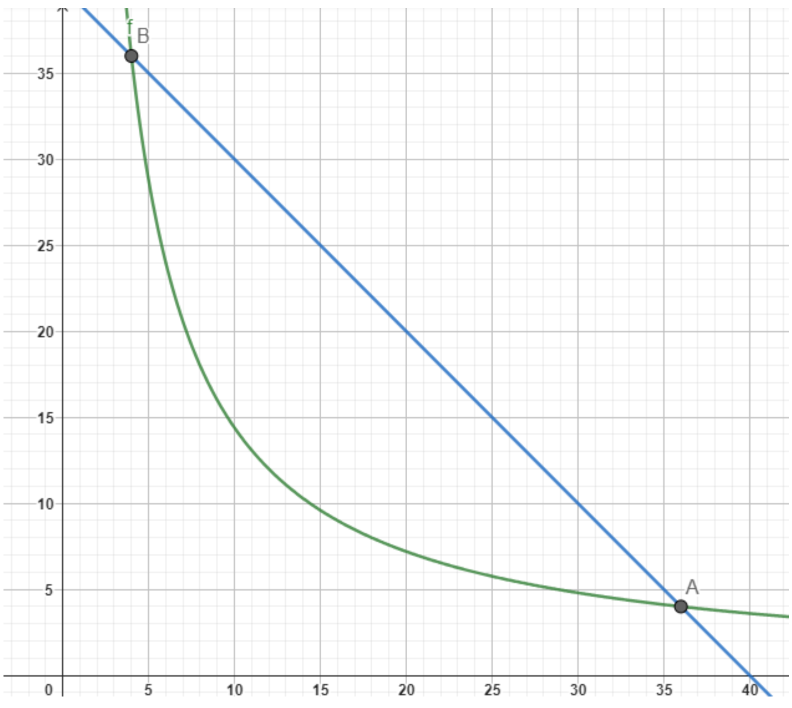

Figura 4 – Representação geométrica do sistema gerado pela fração $\frac{5}{18}$.

Note que os pontos A e B representam as intersecções das duas curvas, e são os pontos (4,36) e (36,4). De fato, estes são os denominadores procurados pois, como vimos,

$$\frac{5}{18} = \frac{1}{4} + \frac{1}{36}.$$

Voltando ao caso geral

$$\begin{cases} y &= -x + k \cdot a \\ y &= \dfrac{k \cdot b}{x} \end{cases}$$

após isolar a variável k temos

$$\begin{cases} k &= \dfrac{x+y}{a} \\ k &= \dfrac{xy}{b} \end{cases}$$

Igualando as duas equações, temos

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{a} = \frac{xy}{b} &\Rightarrow bx + by = axy \\ &\Rightarrow bx = axy - by \\ &\Rightarrow bx = y(ax - b) \\ &\Rightarrow y = \frac{bx}{ax - b}. \end{aligned}$$

Veja que essa igualdade nos diz que $x > \frac{b}{a}$ pois, caso contrário, concluiríamos que y é negativo, o que não queremos, ou que y não existe (divisão por zero).

Além disso, perceba que como nossas equações têm uma simetria em relação a equação $y = x$, podemos procurar x satisfazendo $x < y$, ou seja apenas à esquerda da reta $y = x$. Como o ponto de interseção de $y = x$ com $y = \frac{bx}{ax-b}$ satisfaz $y = \frac{2b}{a}$, isso significa que nossa busca estará restrita a pontos (x,y) tais que

$$\frac{b}{a} < x < \frac{2b}{a},$$

ou seja, que na figura a seguir, estejam situados entre as retas paralelas laranja e azul:

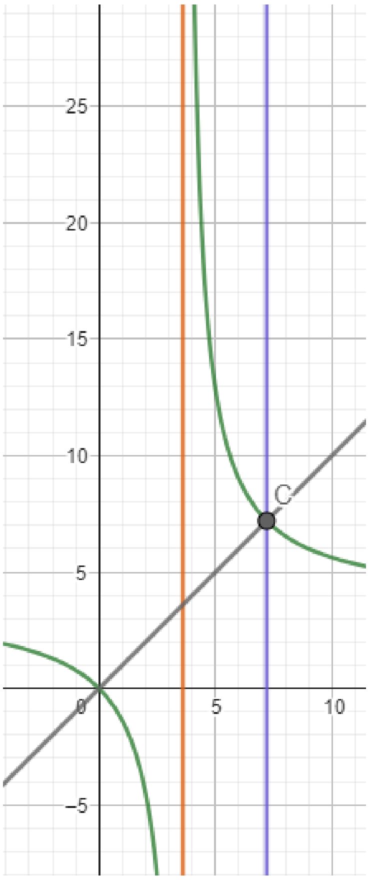

Figura 5 – Representação geométrica do intervalo entre o limitante $x = \frac{b}{a}$ e o ponto cuja abcissa é dada por $x = \frac{2b}{a}$.

Observe na figura a representação desta situação. A reta em laranja é o limitante $x = \frac{b}{a}$, a reta em cinza representa a função $y = x$ e a curva em verde representa a hipérbole $y = \frac{bx}{ax-b}$. A intersecção delas é o ponto C, cuja abcissa (e a ordenada) é dada por $x = \frac{2b}{a}$.

Desta forma, precisamos encontrar x e y que satisfaçam

$$\frac{b}{a} < x < \frac{2b}{a}$$

e

$$y = \frac{bx}{ax-b}.$$

Exemplo 2.10. *Usando o método geométrico, vamos escrever a fração $\frac{3}{16}$ como uma fração egípcia.*
Temos que encontrar inteiros positivos x e y tais que

$$\frac{b}{a} < x < \frac{2b}{a}$$

ou seja, que satisfaçam

$$\frac{16}{3} < x < \frac{32}{3}.$$

Assim, os valores possíveis para x são 6, 7, 8 e 9. Vamos realizar o teste para cada um deles e verificar se o valor de y será um inteiro:

$$x = 6 \Rightarrow y = \frac{16 \cdot 6}{3 \cdot 6 - 16} = 48$$
$$x = 7 \Rightarrow y = \frac{16 \cdot 7}{3 \cdot 7 - 16} = 22{,}4 \notin \mathbb{Z}$$
$$x = 8 \Rightarrow y = \frac{16 \cdot 8}{3 \cdot 8 - 16} = 16$$
$$x = 9 \Rightarrow y = \frac{16 \cdot 9}{3 \cdot 9 - 16} \cong 13{,}09 \notin \mathbb{Z}$$

Desta forma, os valores possíveis para $(x{,}y)$ são $(6{,}48)$ e $(8{,}16)$. Então, podemos escrever a fração $\frac{3}{16}$ como

$$\frac{3}{16} = \frac{1}{6} + \frac{1}{48}$$

ou ainda

$$\frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

Note que temos, no primeiro caso, $k = 18$ e, no segundo, $k = 8$.

Perceba então, que a variável k é necessária ao longo das considerações, mas se torna irrelevante ao final do exemplo.

Mesmo assim, é importante frisar que nem todo k nos fornecerá o caminho para escrever uma fração na forma egípcia. Por exemplo, se tentássemos estudar novamente o exemplo $\frac{5}{18}$, mas com $k = 2$, teríamos

$$\begin{aligned} \frac{5}{18} &= \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 18} \\ &= \frac{10}{36}. \end{aligned}$$

Vamos encontrar os valores de x e y, montando o sistema

$$\begin{cases} y &= -x + k \cdot a \\ y &= \dfrac{k \cdot b}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y &= -x + 2 \cdot 5 \\ y &= \dfrac{2 \cdot 18}{x} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y &= -x + 10 \\ y &= \dfrac{36}{x} \end{cases}$$

Mas note que este sistema resultará na equação $-x^2 + 10x - 36 = 0$, cujo discriminante é -44. Ou seja, ela não terá raízes reais. De fato, ao analisarmos o gráfico, podemos perceber que as duas curvas não se interceptam.

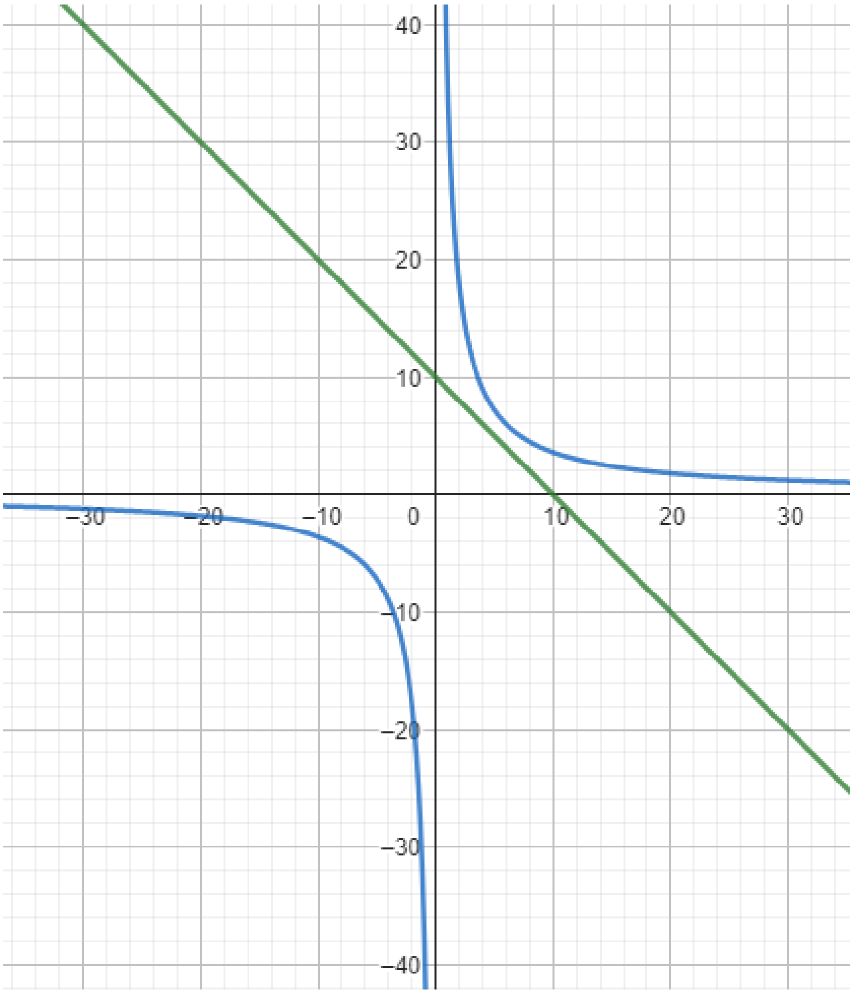

Figura 6 – Representação geométrica do sistema gerado pela fração $\frac{5}{18}$, com $k = 2$.

Além disso, não consideraremos o caso em que k é menor que zero. O motivo é que, observando o caso geral teríamos:

$$\begin{cases} y &= -x + k \cdot a \\ y &= \dfrac{k \cdot b}{x} \end{cases}$$

Mas se $k < 0$, então note que a segunda equação nos infere que x e y terão sinais diferentes, o que não nos é interessante pois queremos ambos x e y inteiros positivos.

Exemplo 2.11. *Vamos escrever a fração $\frac{4}{15}$ como uma fração egípcia, utilizando o método Geométrico.*
Precisamos encontrar inteiros positivos x e y tais que

$$\frac{b}{a} < x < \frac{2b}{a},$$

ou seja, que satisfaçam

$$\frac{15}{4} < x < \frac{30}{4}.$$

Desta forma, os valores de x são 4, 5, 6 e 7. Agora, precisamos verificar quais valores de y são inteiros:

$$x = 4 \Rightarrow y = \frac{15 \cdot 4}{4 \cdot 4 - 15} = 60.$$

$$x = 5 \Rightarrow y = \frac{15 \cdot 5}{4 \cdot 5 - 15} = 15.$$

$$x = 6 \Rightarrow y = \frac{15 \cdot 6}{4 \cdot 6 - 15} = 10.$$

$$x = 7 \Rightarrow y = \frac{15 \cdot 7}{4 \cdot 7 - 15} \cong 8{,}07 \notin \mathbb{Z}.$$

Então, a fração $\frac{4}{15}$ pode ser escrita de três formas:

$$\frac{4}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{60},$$

$$\frac{4}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15},$$

$$\frac{4}{15} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10},$$

e os k respectivos são 16, 5 *e* 4.

2.5 PROPRIEDADES EM GERAL

Para finalizar este capítulo, vamos abordar a quantidade de frações unitárias que utilizamos para escrever uma fração egípcia.

A primeira propriedade, a seguir, apresenta como escrever uma fração unitária como a soma de outras duas também unitárias.

Propriedade 2.1. *Para todo $x \in \mathbb{N}^*$, tem-se*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

Demonstração. Considere a diferença entre duas frações unitárias $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, com x e y naturais diferentes de zero. Temos que

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}.$$

Para garantir que essa fração será unitária, devemos ter $y - x = 1$, ou seja, $y = x + 1$. Assim, temos

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{y-x}{xy}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

□

Vamos agora voltar ao Exemplo 2.2, onde utilizamos o método de Fibonacci para escrever a fração $\frac{3}{5}$ da forma:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}.$$

De posse da última propriedade, podemos escrever cada uma das parcelas como uma soma de frações unitárias. Vejamos separadamente para cada parcela. Para a fração $\frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2(2+1)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Para a fração $\frac{1}{10}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} &= \frac{1}{10+1} + \frac{1}{10(10+1)} \\ &= \frac{1}{11} + \frac{1}{111}. \end{aligned}$$

Note que escrevemos cada parcela da decomposição da fração $\frac{3}{5}$, como a soma de duas frações unitárias, ou seja, temos agora

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{111}.$$

Poderíamos fazer este mesmo processo repetidas vezes, encontrando cada vez um número maior de frações unitárias na decomposição da fração inicial $\frac{3}{5}$. Isso nos garante que existem infinitas maneiras de escrever uma fração imprópria como uma fração egípcia.

Propriedade 2.2. *Para todo $x \in \mathbb{N}^*$, tem-se*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

Demonstração. A propriedade anterior apresenta como escrever uma fração unitária como a soma de outras duas, a partir do seu denominador x. Como visto,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

Aplicando a Propriedade 2.1 na fração

$$\frac{1}{x+1}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} &= \frac{1}{x+1+1} + \frac{1}{(x+1)(x+1+1)} \\ &= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Desta forma, tem-se

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

□

Em particular, dado $x \in \mathbb{N}^*$, como tais três frações são distintas, concluímos que toda fração da forma $\frac{1}{x}$ pode ser escrita como uma 3-fração egípcia.

Exemplo 2.12. *Vamos escrever a fração $\frac{1}{4}$ como uma fração egípcia com três parcelas, utilizando a propriedade anterior:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= \frac{1}{4+2} + \frac{1}{(4+1)(4+2)} + \frac{1}{4(4+1)}\\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{20}\\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Para o caso em que desejamos escrever uma fração unitária como a soma de outras quatro frações unitárias, temos a seguinte propriedade.

Propriedade 2.3. *Para todo $x \in \mathbb{N}^*$, tem-se*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)}$$

Demonstração. Das Propriedades 2.1 e 2.2, sabemos que, respectivamente

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)}$$

e

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

Vamos aplicar a Propriedade 2.1 na fração $\frac{1}{x+2}$. Assim, tem-se

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}.$$

Portanto:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

□

Podemos agora generalizar as três propriedades anteriores para o caso onde o número de parcelas no lado direito é igual a n.

Sua demonstração utiliza um método chamado Princípio da Indução Matemática, composto por 3 passos. Para compreender melhor este método de demonstração matemática, deixo como indicação a Seção 2.3 do livro Elementos de Aritmética e Álgebra. (VIEIRA F.; DE CARVALHO, 2014)

Propriedade 2.4. *Para todo $x \in \mathbb{N}^*$, tem-se*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+(n-1)} + \frac{1}{(x+(n-2))(x+(n-1))} + \ldots + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)}. \quad (4)$$

Demonstração. Vamos realizar esta demonstração através do método de indução sobre n.
Primeiro passo: Mostrar que a equação (4) é válida para $n = 1$.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+(1-1)}.$$

Segundo passo: Supor que a equação é válida para n. Neste caso, sabemos que

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+(n-1)} + \frac{1}{(x+(n-2))(x+(n-1))} + \frac{1}{(x+(n-3))(x+(n-2))} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

Terceiro passo: provar que a equação (4) é válida também para $n+1$.
Para o caso de $n+1$, temos que mostrar que

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{x+n} + \frac{1}{(x+(n-1))(x+n)} + \frac{1}{(x+(n-2))(x+(n-1))} + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)}.\end{aligned} \quad (5)$$

Mas note que da equação (4), temos

$$\frac{1}{(x+(n-2))(x+(n-1))} + \ldots + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+(n-1)}. \quad (6)$$

Substituindo o lado direito da equação (6) na equação (5), obtém-se

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x+n} + \frac{1}{(x+(n-1))(x+n)} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+(n-1)} \\ &= \frac{(x+n)(x+(n-1)) + (x+n)}{(x+n)^2(x+(n-1))} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+(n-1)} \\ &= \frac{(x+n)(x+n-1+1)}{(x+n)^2(x+(n-1))} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+(n-1)} \\ &= \frac{(x+n)(x+n)}{(x+n)^2(x+(n-1))} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+(n-1)} \\ &= \frac{1}{(x+(n-1))} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+(n-1)} \\ &= \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.13. *Vamos escrever a fração* $\frac{1}{5}$ *como uma 6-fração egípcia, utilizando a propriedade anterior. Como* $n = 6$*, teremos:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} &= \frac{1}{5+5} + \frac{1}{(5+4)(5+5)} + \frac{1}{(5+3)(5+4)} \\ &+ \frac{1}{(5+2)(5+3)} + \frac{1}{(5+1)(5+2)} + \frac{1}{5(5+1)} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{90} + \frac{1}{72} + \frac{1}{56} + \frac{1}{42} + \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

Outra questão interessante que pode surgir, diz respeito a quantidade de formas diferentes que podemos escrever uma fração unitária como uma fração egípcia. Por exemplo, a fração $\frac{1}{16}$ pode ser escrita como

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{20} + \frac{1}{80}$$

ou

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{18} + \frac{1}{144},$$

dentre outras maneiras. Na próxima proposição, veremos como encontrar de quantas formas distintas podemos escrever uma fração unitária como uma fração egípcia com duas parcelas.

Proposição 2.6. *Seja* $n \in \mathbb{N}$ *maior do que* 1 *com fatoração em primos distintos*

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}.$$

O número de maneiras distintas que podemos escrever $\frac{1}{n}$ *como uma 2-fração egípcia é*

$$\frac{(2r_1+1) \cdot (2r_2+1) \cdot \ldots \cdot (2r_k+1) - 1}{2}$$

Demonstração: Suponha que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} = \frac{a+b}{ab} &\Rightarrow ab = na + nb \\ &\Rightarrow ab - na - nb = 0 \\ &\Rightarrow ab - na - nb + n^2 = n^2 \\ &\Rightarrow (a-n)(b-n) = n^2.\end{aligned}$$

Portanto:

$$(a-n)(b-n) = (p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k})^2$$

$$(a-n)(b-n) = p_1^{2r_1} \cdot p_2^{2r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2r_k}.$$

Assim, temos

$$a - n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$$

e analogamente,

$$b - n = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{t_k},$$

com $0 \leq s_i \leq 2r_i$ *e* $s_i + t_i = 2r_i$*. Assim, há* $2r_i + 1$ *maneiras de escolher cada* s_i*, o que nos fornece*

$$(2r_1 + 1) \cdot (2r_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (2r_k + 1)$$

maneiras de encontrar a *e, consequentemente,* b*, como procuramos. Mas como não podemos ter* $a = n$*, devemos descontar* 1 *caso, e como*

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

é a mesma representação que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

também devemos dividir a quantidade por 2*. Logo, a expressão procurada é dada por*

$$\frac{(2r_1 + 1) \cdot (2r_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (2r_k + 1) - 1}{2}.$$

Vejamos um exemplo que primeiro será resolvido manualmente, utilizando a ideia da demonstração anterior.

Exemplo 2.14. *Vamos verificar de quantas formas podemos escrever a fração* $\frac{1}{21}$ *como uma 2-fração egípcia.*
Queremos encontrar todas as formas de escrever

$$\frac{1}{21} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} ab &= 21a + 21b \\ (a-21)(b-21) &= 21^2 \\ (a-21)(b-21) &= 7^2 \cdot 3^2 = 441. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} 1 \cdot 441 &= 441 \\ 3 \cdot 147 &= 441 \\ 7 \cdot 63 &= 441 \\ 9 \cdot 49 &= 441 \\ 21 \cdot 21 &= 441, \end{aligned}$$

mas note que este último caso implicaria que $a = b$*, o que não queremos.*
Portanto, há 4 maneiras distintas de fazer esta decomposição. Basta resolver cada caso separadamente, para encontrar os valores de a *e* b*. Por exemplo:*

$$a - 21 = 1 \Rightarrow a = 22$$
$$b - 21 = 441 \Rightarrow b = 462.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{21} = \frac{1}{22} + \frac{1}{462}$$

é uma das 4 formas de escrever a fração $\frac{1}{21}$ *como uma 2-fração egípcia.*

E de fato, ao utilizarmos o resultado da Proposição 2.6, temos que o número de maneiras de escrever a fração $\frac{1}{21}$ *como uma 2-fração egípcia é*

$$\frac{(2r_1 + 1) \cdot (2r_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (2r_k + 1) - 1}{2}.$$

Neste caso, como $21 = 7^1 \cdot 3^1$*, temos apenas* $r_1 = 1$ *e* $r_2 = 1$*, o que nos fornece*

$$\begin{aligned} \frac{(2r_1 + 1) \cdot (2r_2 + 1) - 1}{2} &= \frac{(2 \cdot 1 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) - 1}{2} \\ &= \frac{8}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

maneiras de escrever $\frac{1}{21}$ *como uma 2-fração egípcia.*

3 PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO BÁSICO

Como apresentado em um estudo de caso (MENEZES F.; MORAES, 2018), alguns estudantes do Ensino Fundamental ainda apresentam dificuldades ao estudar o conteúdo de frações. Desta forma, a sugestão de aplicação deste material no ensino básico se dá para os anos finais do Ensino Fundamental II, como oitavo e nono anos.

Na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), documento que norteia a educação brasileira, encontramos as habilidades que envolvem o conteúdo de fração e que devem ser observadas durante o desenvolvimento destas aulas.

- (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
- (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
- (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
- (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
- (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
- (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
- (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.
- (EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
- (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $2/3$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

A seguir, será apresentada a sugestão do conteúdo deste trabalho a ser ministrado para os alunos. Este material será apresentado para uma turma de 8° ano, visto que no nono ano os alunos já aprendem conteúdos mais avançados.

3.1 PLANO DE AULA

Sugere-se introduzir um pouco da história das frações e o surgimentos das frações unitárias, apresentar o conceito de fração egípcia e retomar com os alunos a adição e subtração de frações pela definição.

Como objetivo seguinte, a ideia é mostrar os métodos de Fibonacci, de Golomb, dos Números Práticos e o método Geométrico, como ferramentas distintas que alcançarão o mesmo objetivo de escrever frações como frações egípcias.

Esta dinâmica pode ocorrer em aulas de 45 à 50 minutos, conforme divisão a seguir.

- Aula 01 - Introdução à história das frações e apresentação do conceito de fração egípcia.
- Aula 02 - Apresentação do método de Fibonacci.
- Aula 03 - Apresentação do método de Golomb.
- Aula 04 - Apresentação do método dos Números Práticos.
- Aula 05 - Apresentação do método Geométrico.
- Aula 06 - Realização de um questionário envolvendo os quatro métodos.

3.1.1 Aula 01

Ano escolar: 8° ano.
Duração: 45 à 50 minutos.
Conteúdo: História das frações e as frações egípcias.
Objetivos:

- Compreender a necessidade das frações pelos egípcios - cerca de 20 minutos;
- Entender o conceito de fração unitária - cerca de 10 minutos;
- Compreender o conceito de fração egípcia - cerca de 15 minutos.

Técnica e Recursos: Aula expositiva e dialogada, utilizando computador, projetor, vídeo e material com tópicos resumindo a história das frações, as frações unitárias e o conceito de fração egípcia.

O professor pode iniciar a aula apresentando o vídeo "Você conhece a história das frações?", cujo link é *youtube.com/watch?v=RNLyQp5hc20*. Este vídeo ajuda a introduzir a necessidade das frações no Egito. Depois disso, o professor pode apresentar o que é uma fração unitária e por fim o conceito de fração egípcia.

É importante deixar claro nesta aula que uma fração egípcia na verdade é a representação de uma soma de frações unitárias distintas. Para isso, o professor pode apresentar o seguinte exemplo:

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

3.1.2 Aula 02

Ano escolar: 8° ano.
Duração: 45 à 50 minutos.
Conteúdo: Método de Fibonacci.
Objetivos:

- Compreender o conceito de "menor inteiro maior que um quociente" - cerca de 10 minutos;
- Relembrar o conceito de fração imprópria e irredutível - cerca de 5 minutos;
- Realizar corretamente subtração e adição de frações - cerca de 10 minutos;
- Compreender o método de Fibonacci e analisar a quantidade de vezes que deve-se aplicá-lo - cerca de 20 minutos.

Técnica e Recursos: Aula expositiva e dialogada, utilizando giz e quadro.
O professor pode iniciar a aula diretamente com o exemplo $\frac{8}{15}$.

Para explorar o conceito de maior inteiro menor que um quociente, o professor pode resolver a divisão entre 15 e 8, obtendo 1,875. Assim, o valor procurado para aplicação do método será 2, que denotaremos por k_1.

Simultaneamente, com o mesmo exemplo, deve-se aproveitar para relembrar o conceito de fração imprópria e irredutível.

A seguir, é preciso realizar a subtração

$$\begin{aligned} \frac{8}{15} - \frac{1}{k_1} &= \frac{8}{15} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{30}. \end{aligned} \tag{7}$$

Por fim, deve-se concluir que

$$\frac{8}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{30}.$$

O professor também pode mostrar um exemplo em que a fração obtida na primeira subtração não é unitária, sendo necessário fazer o procedimento mais uma vez. Por exemplo, na fração $\frac{59}{70}$, para encontrar o valor de k fazemos a divisão

$$\begin{array}{r|l} 7\,0 & 5\,9 \\ \cline{2-2} 1\,1 & 1 \end{array}$$

Como k é o menor inteiro maior que o resultado da divisão, temos que $k = 2$. Porém, este passo não será suficiente para obter a representação de nossa fração em uma fração egípcia, visto que:

$$\begin{aligned} \frac{59}{70} - \frac{1}{2} &= \frac{48}{140} \\ &= \frac{12}{35}. \end{aligned} \tag{8}$$

Desta forma, devemos repetir o procedimento com a fração $\frac{12}{35}$, em que encontraremos $k = 3$. Assim,

$$\frac{12}{35} - \frac{1}{3} = \frac{1}{105} \tag{9}$$

Unindo as informações das equações (8) e (9), concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{59}{70} &= \frac{1}{2} + \frac{12}{35} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{105}. \end{aligned}$$

O professor também pode mostrar um exemplo de uma fração imprópria, como $\frac{23}{15}$, mostrando que neste caso primeiro podemos escrevê-la como

$$\frac{1}{1} + \frac{8}{15},$$

e depois utilizar o método estudado para escrever esta última fração como uma fração egípcia.

Além disso, o professor pode exemplificar a fração redutível $\frac{6}{8}$, esclarecendo que primeiro deve-se simplificá-la e, depois, basta utilizar o método.

Para finalizar a aula, o professor pode sugerir algumas atividades para os alunos, em que eles devem escrever as frações como frações egípcias, uma delas podendo ser uma fração imprópria e outra redutível. Como atividades, sugere-se as frações $\frac{35}{24}$, $\frac{12}{27}$ e $\frac{49}{120}$, sendo a primeira imprópria, a segunda redutível, e a terceira o resultado da soma de três frações unitárias.

Gabarito das atividades sugeridas:

$$\frac{35}{24} = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{12}{27} = \frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$\frac{49}{120} = \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{280}$$

3.1.3 Aula 03

Ano escolar: 8° ano.
Duração: 45 à 50 minutos.
Conteúdo: Método de Golomb.
Objetivos:

- Apresentar o conceito de equação diofantina - cerca de 15 minutos;
- Resolver, por meio de tentativas, as equações diofantinas - cerca de 15 minutos;
- Compreender o método de Golomb e analisar a quantidade de vezes que deve-se aplicá-lo - cerca de 15 minutos.

Técnica e Recursos: Aula expositiva e dialogada com o uso de giz e quadro.

Para mostrar esta técnica, o professor deve explicar para os alunos que queremos escrever $\frac{2}{3}$ como uma fração egípcia.

Com essa finalidade em mente, explicar para os alunos que essa busca está conectada com a resolução de uma equação diofantina.

Tal equação será

$$2x - 3y = 1.$$

É importante frisar com os alunos que a equação é dada dessa forma por conta da fração que estamos estudando.

Espera-se que algum estudante observe que uma solução é $x = 2$ e $y = 1$. Neste momento, comente com os alunos que existem métodos para encontrar os resultados de uma equação diofantina, mas que para isso é necessário dominar algumas técnicas que os alunos ainda não possuem.

Agora, mencione para os alunos que o método de Golomb nos diz que nossa fração inicial será escrita como uma fração egípcia dada por

$$\frac{2}{3} = \frac{y}{x} + \frac{1}{3 \cdot x},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}. \end{aligned} \tag{10}$$

É muito interessante pedir para os alunos mostrarem que, de fato, a soma das duas frações unitárias $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ resultam na fração $\frac{2}{3}$. Este procedimento se assemelha a uma prova real e faz com que os estudantes confirmem o funcionamento do método.

Da mesma forma, é necessário comentar com os alunos que caso o valor de y não seja igual a 1, basta repetir o processo. Por exemplo, considere a fração $\dfrac{7}{9}$. Neste caso, a equação que queremos resolver é

$$7x - 9y = 1.$$

Aqui, pode ser mais díficil resolver a equação por tentativas, assim o professor pode apresentar a solução $x = 4$ e $y = 3$ caso a turma encontre dificuldades.

Assim, temos

$$\frac{7}{9} = \frac{y}{x} + \frac{1}{9 \cdot x},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{7}{9} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{9 \cdot 4} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Como a primeira fração do lado direito da igualdade não é unitária, o procedimento deve ser repetido, ou seja, deve-se resolver a equação $3x - 4y = 1$. Aqui, alguns alunos podem perceber que a solução é $x = 3$ e $y = 2$. Assim, teremos

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4 \cdot 3} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Mais uma vez, repete-se o proceso para a fração $\frac{2}{3}$, em que precisamos resolver a equação $2x - 3y = 1$, obtendo $x = 2$ e $y = 1$ como solução. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente, temos:

$$\begin{aligned} \frac{7}{9} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Por fim, o professor pode sugerir algumas atividades utilizando este método, de preferência onde o valor de y seja 1, para facilitar o entendimento, pois o mais importante é que o estudante compreenda minimamente o método. Como sugestão, deixamos as frações $\frac{4}{11}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{2}{19}$.

Gabarito das atividades sugeridas:

$$\frac{4}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{33}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{10} + \frac{1}{190}$$

3.1.4 Aula 04

Ano escolar: 8° ano.
Duração: 45 à 50 minutos.
Conteúdo: Método dos Números Práticos.
Objetivos:

- Relembrar o conceito de divisor - cerca de 10 minutos;
- Compreender o conceito de número prático - cerca de 10 minutos;
- Compreender o método e analisar quando é mais conveniente aplicá-lo - cerca de 25 minutos.

Técnica e Recursos: Aula expositiva e dialogada, com o uso de projetor, computador, giz e quadro.

Para iniciar esta aula, sugere-se que o professor relembre o conceito de divisibilidade, dando exemplos simples de números divisíveis por outros. Neste momento, o professor pode trazer alguns critérios de divisibilidade, lembrando aos alunos que estes critérios facilitam na hora de identificar os divisores de um número, sem precisar fazer sucessivas divisões. Estes critérios podem ser apresentados em um slide, para agilizar a aula.

Depois deste momento, o professor pode apresentar o conceito de um número prático, como o número 8 afirmando que todos os números menores que 8 podem ser escritos como a soma de seus distintos divisores.

Para isso, o professor deve encontrar juntamente com os alunos os divisores de 8 e, depois, construir com eles a soma de cada número menor que 8 usando tais divisores, como abaixo:

$$\begin{array}{ll} 1 = 1 & 5 = 1 + 4 \\ 2 = 2 & 6 = 2 + 4 \\ 3 = 1 + 2 & 7 = 1 + 2 + 4 \\ 4 = 4 & \end{array}$$

Após esta etapa, o professor deve escolher um exemplo onde o denominador seja um número prático. Neste momento, é importante que os alunos percebem que como estamos trabalhando com frações próprias, ou seja, o numerador é menor que o denominador, e que o denominador é um número prático, temos que o numerador pode ser escrito como a soma de divisores do denominador.

Por exemplo, na fração $\frac{11}{16}$, o professor deve afirmar aos alunos que o número 16 é um número prático, e apresentar o número 11 como

$$11 = 8 + 2 + 1.$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{11}{16} = \frac{8}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16}.$$

A partir dessa igualdade, espera-se que os alunos percebam o porquê do numerador precisar ser um divisor do denominador, pois assim podemos realizar a simplificação para obtermos as frações unitárias

$$\frac{11}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

Alguns alunos podem questionar como resolver o caso em que o denominador não é um número prático. Neste caso, o professor pode relatar que existem métodos para transformar a fração inicial em uma fração equivalente com o denominador sendo um número prático. Porém, pode-se ressaltar que para isso são necessários resultados além do escopo dessa atividade.

Nesta aula, é importante que o professor deixe claro que este método é útil quando o denominador é um número prático, assim, basta escrever o numerador como a soma dos divisores do denominador. Por isso, é importante que os alunos tenham clareza na definição de divisor. Além disso, no momento de definir qual dos métodos usar, caso o denominador seja um número prático, este é o método provável que os estudantes devem escolher para escrever a fração como uma fração egípcia.

Nesta aula, o professor também pode sugerir algumas atividades para que os alunos treinem e verifiquem se entenderam o método. Como sugestão, deixamos as frações $\frac{7}{32}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{17}{30}$. Nelas, o denominador é sempre um número prático, mas o professor não precisa informar aos seus alunos, e pode pedir para que eles verifiquem antes de usar este método.

Gabarito das atividades sugeridas:

$\frac{7}{32} = \frac{1}{32} + \frac{1}{16}\frac{1}{8}$

$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$\frac{17}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15}$

3.1.5 Aula 05

Ano escolar: 8° ano.
Duração: 45 à 50 minutos.
Conteúdo: Método Geométrico.
Objetivos:

- Compreender a definição da soma de duas frações através da soma e produto - cerca de 15 minutos;
- Somar duas frações unitárias através da definição - cerca de 15 minutos;
- Compreender o método e analisar quando é mais conveniente aplicá-lo - cerca de 15 minutos.

Técnica e Recursos: Aula expositiva e dialogada, com o uso de giz e quadro.

Para este método, o professor pode se ater ao caso mais simples, em que conseguimos escrever o numerador da fração como a soma de dois números e o denominador como o produto destes mesmos números. O professor pode começar a aula mostrando que para somar duas frações podemos usar a definição, da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Para facilitar, o professor pode apresentar um exemplo de soma de duas frações unitárias, pois é o caso que nos interessa:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a + b}{ab}.$$

Para explicar o método, o professor pode trazer o exemplo $\frac{9}{14}$. Os alunos podem questionar como saber se é possível usar este método, então o professor deve explicar que a análise deve ser feita observando se o numerador da fração pode ser escrito como a soma de dois números e o denominador como o produto destes mesmos números. Os alunos podem ter um pouco de dificuldade, então o professor pode listar as possibilidades.

Por exemplo, o número 9 pode ser escrito como: $1 + 8$ ou $2 + 7$ ou $3 + 6$ ou $4 + 5$. Agora, devemos analisar se o denominador 14 pode ser escrito como o produto de algum destes pares. De fato, espera-se que os alunos percebem que $2 \cdot 7 = 14$.

Então, temos uma fração em que o numerador é a soma e o denominador é o produto dos mesmos dois números:

$$\begin{aligned} \frac{9}{14} &= \frac{2+7}{2 \cdot 7} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Como curiosidade, o professor também pode falar para os alunos que este método chama-se método geométrico por conta do plano cartesiano, que possui uma forte ligação com a geometria, e que possivelmente já foi apresentado aos alunos nos anos anteriores.

Vale a pena frisar que eles estudarão tal conceito de forma mais aprofundada no ensino médio, quando aprenderem a esboçar o gráfico de funções.

Algum estudante pode questionar os casos em que o numerador não é a soma e o denominador não é o produto dos dois mesmos números. Neste caso, o professor pode dizer que os estudantes devem usar um dos outros métodos estudados, observando se o denominador é um número prático, por exemplo.

O professor pode sugerir alguns exercícios para que os estudantes testem o método e verifiquem quando é possível aplicá-lo. Como sugestão, deixamos as frações $\frac{7}{12}$ e $\frac{11}{18}$. A intenção é que o aluno perceba que não é possível resolver a primeira desta forma, precisando escolher outro método.

Gabarito das atividades sugeridas:

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{11}{18} = \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$$

3.1.6 Aula 06

Ano escolar: 8° ano.
Duração: 45 à 50 minutos.
Conteúdo: Realização de um questionário envolvendo os quatro métodos.
Objetivos:

- Diferenciar os conceitos de fração unitária e fração egípcia - cerca de 15 minutos;
- Analisar em qual caso é conveniente utilizar cada um dos métodos - cerca de 15 minutos;
- Aplicar os métodos aprendidos de forma correta - cerca de 20 minutos.

Técnica e Recursos: Aula expositiva e dialogada, utilizando giz e quadro.

Esta aula objetiva ser uma avaliação das cinco aulas anteriores, onde o professor poderá verificar se os estudantes compreenderam os conceitos principais que envolvem o assunto e sabem determinar quando usar cada um dos métodos. Para tal, o professor deve levar aos estudantes um questionário com perguntas sobre o conteúdo e algumas questões práticos, onde o aluno deverá desenvolver a habilidade de avaliar e escolher o método a ser utilizado.

Sugere-se que esta atividade seja realizada em duplas ou trios, e o professor também pode circular entre os grupos, para sanar pequenas dúvidas que os alunos tenham para começar as questões. O professor também pode sugerir que alguns alunos resolvam as atividades no quadro no momento da correção.

Estas são formas de incentivar a realização das atividades, pois assim os estudantes percebem que são capazes de realizar algo que está além do conteúdo que veem regularmente, e isso pode inclusive incentivá-los a gostar mais da Matemática.

O questionário não deve ser muito extenso e sugerimos, a seguir, um modelo que pode ser utilizado pelo professor.

Questionário de avaliação - Frações Egípcias

Questão 1: Escreva com as suas palavras o que é uma fração unitária.

Questão 2: Escreva com as suas palavras o que é uma fração egípcia.

Questão 3: Analise cada uma das frações, escolha um dos quatro métodos apresentados e escreva cada uma delas como uma fração egípcia:

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{7}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{11}$

Gabarito da questão 3:

a) $\dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{2}{7} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{28}$

c) $\dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}$

,

d) $\dfrac{3}{11} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{44}$

A saber, a letra *a*) pode ser realizada com o método Geométrico, visto que $2+3 = 5$ e $2 \cdot 3 = 5$. Já a letra *b*) pode ser realizada utilizando o método de Fibonacci, pois ao realizar a divisão para encontrar o valor de k, obteremos $k = 4$ e a fazer $\frac{2}{7} - \frac{1}{4}$, já resulta em uma fração unitária.

Na letra *c*), os estudantes podem utilizar o método dos Números Práticos, visto que no exemplo da Aula 4, já foi apresentado à eles que 8 é um número prático.

Já na letra *d*, não é possível utilizar o método dos Números Práticos, pois 11 não é um número prático, então espera-se que os alunos utilizem o método de Golomb, visto que a equação diofantina resultante será de fácil resolução.

É importante ressaltar que os estudantes podem escolher outros métodos para resolver os itens, por exemplo, o número 6 também é um número prático, então este método também pode ser utilizado na letra *a*). No entanto, sugere-se que o professor peça para que os estudantes realizem um exemplo com cada método.

3.1.7 Possíveis questionamentos e sugestões de respostas

Além dos questionamentos abordados nos planos de aulas, podem surgir outros durante a aplicação das aulas. Primeiramente, os alunos podem argumentar que a maneira mais fácil de escrever uma fração como uma fração egípcia é repetindo a fração unitária, como em

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{29} + \frac{1}{29}.$$

Neste caso, o professor deve lembrar que a definição de fração egípcia é dada pela soma de *distintas* frações unitárias.

Os estudantes também podem questionar porque não podemos escrever frações impróprias como uma fração egípcia. Como dito no início deste trabalho, o foco é trabalhar com frações próprias. Porém, o professor deve mencionar que as frações que representam números entre 1 e 2, portanto impróprias, podem também serem escritas como uma fração egípcia utilizando a fração $\frac{1}{1}$. Por exemplo,

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4}.$$

Note que esta é uma fração imprópria entre 1 e 2, podendo ser decomposta como a soma de frações unitárias distintas.

Além disso, eles podem questionar porque utilizar frações irredutíveis. A resposta para isso está nos métodos que foram apresentadas, visto que essa condição é necessária para sua aplicação.

Ademais, deve-se mencionar que caso a fração seja redutível, basta simplificá-la antes de iniciar o procedimento, obter uma fração irredutível, e aplicar um dos métodos.

Também pode surgir a seguinte questão: porque ver mais de um método se o primeiro já pode ser utilizado em todas frações próprias? Neste momento, é necessário argumentar que algumas frações são processadas mais rapidamente com um método, outras com outro.

Por exemplo, no Método de Fibonacci, quando o valor encontrado após a subtração no numerador (por exemplo da equação (7)) não é igual a 1, sendo necessário repetir o método, talvez seja mais conveniente trocar o método.

4 CONCLUSÃO

A apresentação do conceito de fração egípcia faz com que percebamos a grandiosidade da Matemática, pois tal conceito apresenta de uma forma comumente não explorada, um tema simples como as frações. Além disso, também podemos perceber a importância da história na construção de um conceito, visto que é necessário voltar cerca de 3000 anos para compreender o aparecimento das frações unitárias, que levaram ao surgimento das frações egípcias.

Ao longo deste trabalho, podemos estudar e compreender um pouco das dificuldades que os alunos podem ter no estudo de frações, como apresentado na introdução. Este aspecto é de suma importância para nós educadores, que precisamos inovar nossas técnicas para criarmos mais expectativa e curiosidade nos alunos. É fato que não é tão simples despertar o interesse deles em uma disciplina muitas vezes já estereotipada, mas algumas ações podem ser desenvolvidas durante a aula mesmo assim.

Os conceitos e os métodos apresentados neste trabalho nos permitem compreender também que é possível ir além do conceito de fração em sala de aula e que o estudo dos métodos não é inviável, visto que nos planos de aula pode ser vista uma sequência didática plausível e curta, para ser realizada em seis aulas de uma turma do Ensino Fundamental II.

Por fim, além de perceber o quanto ainda há para ser descoberto pelos professores em uma busca pelo acervo disponível, sabemos também que os educadores são capazes de compreender a Matemática mais formalizada, através de proposições envolvendo letras e variáveis, mesmo que alguns estejam habituados com os conteúdos da educação básica. Afinal, nos apaixonamos pela Matemática na escola, mas na graduação aprendemos que ela vai além de números e que padronizar alguns resultados é um bom caminho para compreender tantos resultados que ela nos traz.

Esperamos que este trabalho contribua para que professores possam inovar suas práticas no ensino de frações, abordando o caso das frações egípcias. Além disso, que nossa sequência didática sirva de modelo para iniciar esse processo e inspirem novos possibilidades.

REFERÊNCIAS

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 17 ago. 2023.

CASAGRANDE, M. **Egyptian Fractions.** 2018. I. S. I. S. S, Treviso, Itália.

JACOB, J. **Uma abordagem histórica sobre a origem dos números.** 2002. Trabalho de Conclusão de Curso. – TCC/UFSC, Florianópolis, SC.

MENEZES F.; MORAES, L. Um estudo de caso sobre o ensino-eprendizagem dos diferentes significados de frações em uma escola de Educação Básica, p. 13, 2018.

MOREIRA, C. G. T. A.; et al. **Tópicos de Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: SBM, 2021.

PERLIN P.; LOPES, A. R. L. V. A necessidade histórica da criação das frações e a organização do ensino do professor dos anos iniciais. **VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática**, p. 11, 2013.

SABEL, E. **Sequência didática: uma organização do conteúdo na perspectiva das teorias de registro de representação semiótica e aprendizagem significativa para a compreensão das frações.** 2018. Monografia de Conclusão de Curso. – Monografia de Conclusão de Curso/UFSC, Florianópolis, SC.

STRUIK, D. K. **História concisa das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1992.

VASCONCELOS, A. **História e Origem dos Números que usamos hoje em dia**. São Paulo: Escola Educação, 2019. Disponível em: https://escolaeducacao.com.br/historia-dos-numeros/. Acesso em: 10 abr. 2023.

VIEIRA F.; DE CARVALHO, R. A. **Elementos de Aritmética e Álgebra**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.