



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E  
SISTEMAS

Fortunato Rosalen Netto

**Desenvolvimento de uma estratégia de controle robusto para estabilização de  
oscilações termoacústicas em um tubo de Rijke**

Florianópolis  
2023

Fortunato Rosalen Netto

**Desenvolvimento de uma estratégia de controle robusto para estabilização de oscilações termoacústicas em um tubo de Rijke**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Automação e Sistemas. Orientador Prof. Gustavo Artur de Andrade, Dr.

Florianópolis  
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Rosalen Netto, Fortunato

Desenvolvimento de uma estratégia de controle robusto para estabilização de oscilações termoacústicas em um tubo de Rijke / Fortunato Rosalen Netto ; orientador, Gustavo Artur de Andrade, 2023.

82 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Oscilações termoacústicas. 3. Tubo de Rijke. 4. Modelagem. 5. Controle robusto. I. Andrade, Gustavo Artur de. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. III. Título.

Fortunato Rosalen Netto

**Desenvolvimento de uma estratégia de controle robusto para estabilização de oscilações termoacústicas em um tubo de Rijke**

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Gustavo Artur de Andrade, Dr.  
DAS/UFSC

Prof. Marcelo De Lellis Costa de Oliveira, Dr.  
DAS/UFSC

Prof. Arcanjo Lenzi, Dr.  
EMC/UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Automação e Sistemas.

---

Coordenação do Programa de  
Pós-Graduação

---

Prof. Gustavo Artur de Andrade, Dr.  
Orientador

Florianópolis, 2023.

Este trabalho é dedicado à minha esposa Daniele e aos  
meus queridos pais.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus, pelo dom da vida, por todas as bênçãos e proteção, e por me tolerar errar, aprender e crescer. Obrigado, por me ouvir, por estar ao meu lado nos momentos mais difíceis e me conceder força suficiente para que eu nunca desista.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Gustavo Artur de Andrade, por toda sua dedicação, que por muitas vezes, deixou de lado suas atividades e seus momentos de descanso para me ajudar e me orientar. Agradeço por todos os ensinamentos compartilhados de forma admirável, e por me guiar durante esse projeto. Tenho certeza que não chegaria neste ponto sem o seu apoio. Você foi e está sendo muito mais que orientador, para mim será sempre um grande mestre e amigo.

Agradeço minha esposa Daniele, pessoa com quem amo partilhar a vida. Obrigado pelo carinho, pela paciência, pelo incentivo, por toda sua compreensão e pela capacidade de me trazer conforto e acomodação durante as adversidades.

Agradeço a minha família pelo apoio absoluto nesta caminhada, minhas irmãs, Rosane, Roseli e Judite e em especial a meus pais João (in memoriam), e Cecília que com muito carinho e perseverança não mediram esforços para que eu pudesse superar cada obstáculo. Obrigado pelo amor, carinho e por almejam sempre o melhor para mim.

Agradeço aos professores membros da banca, Dr. Arcanjo Lenzi e Dr. Marcelo De Lellis Costa de Oliveira, pela gentileza de terem se disponibilizado a avaliar este trabalho e por todas as contribuições oferecidas de forma sublime.

Agradeço a todos os professores do corpo de docentes do PPGEAS, que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação. Obrigado pela sua disponibilidade, competência, dedicação e pelos ensinamentos compartilhados de forma admirável.

Agradeço aos funcionários da UFSC, especialmente da coordenação do PPGEAS e da biblioteca universitária. Obrigado pela disposição e cordialidade e por estarem sempre disponíveis para atender as minhas demandas.

Agradeço a Empresa REUNIDAS S.A., especialmente à pessoa do Sr. Nilton Caramori, por me proporcionar condições acessíveis quando eu precisava me deslocar duas vezes por semana pelo período de dois anos de Joaçaba à Florianópolis enquanto frequentei as disciplinas do curso.

E por fim, agradeço à todos os meus colegas e amigos de todas as partes do mundo, alguns de perto, outros de longe e outros de muito longe, más que de certa forma estão tão próximos de mim, fazendo essa vida valer cada vez mais a pena.

*"Se antes a terra, e depois o capital eram os fatores decisivos de produção,  
hoje o fator decisivo é cada vez mais o homem em si,  
ou seja,  
o seu conhecimento"  
(São João Paulo II)*

## RESUMO

Instabilidades termoacústicas indesejadas são prejudiciais aos sistemas de combustão que sofrem com elas, como combustores de turbinas a gás operando sob condições de pré-mistura pobre. Assim, sistemas avançados de monitoramento e controle são necessários para estimar e prever o fenômeno para auxiliar na tomada de decisões e estabilização automática. Neste trabalho, propõe-se o uso de uma descrição fenomenológica distribuída da acústica em interface com um modelo de liberação de calor para projetar um sistema de controle robusto. A pesquisa tomou como base um protótipo do tubo de Rijke, o qual é um sistema amplamente utilizado para o desenvolvimento de metodologias que mitiguem oscilações termoacústicas longitudinais. As características do sistema foram analisadas no domínio da frequência e o comportamento instável foi definido a partir da matriz de funções de transferência irracionais, seus polos e zeros, e atraso de transporte. A metodologia de controle proposta é baseada na síntese  $\mu$ , a qual naturalmente incorpora as restrições de robustez no projeto do controlador. Resultados de simulação são apresentados para comprovar a efetividade da metodologia sob diferentes condições de operação do sistema. Além disso, uma comparação com o controlador  $H_\infty$  é realizada para quantificar as melhorias de desempenho da metodologia proposta.

**Palavras-chave:** Combustão; Controle Robusto; Equações Diferenciais Parciais; Estabilização; Funções de Transferência Irracionais; Instabilidade Termoacústica.

## ABSTRACT

Unwanted thermoacoustic instabilities are detrimental to combustion systems that suffer from them, such as gas turbine combustors operating under lean premix conditions. Thus, advanced monitoring systems and control strategies are needed to estimate and predict the phenomenon to assist in decision making and automatic stabilization. In this work, it is proposed the use of a distributed phenomenological description of acoustics interfaced with a heat release model to design a robust control system. The research was based on a Rijke tube prototype, which is a widely used system for the development of methods that mitigate longitudinal thermoacoustic oscillations. The characteristics of the system were analyzed in the frequency domain and the unstable behavior was defined from the matrix of irrational transfer functions, its poles and zeros, and transport delay. The proposed control methodology is based on the  $\mu$  synthesis, which naturally incorporates robustness constraints into the controller design. Simulation results are presented to prove the effectiveness of the method under different operating conditions. Furthermore, a comparative study with a classic controller from the literature is carried out to quantify the performance improvements of the proposed methodology.

**Keywords:** Combustion; Robust Control; Partial Differential Equations; Stabilization; Irrational Transfer Functions; Thermoacoustic instability.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – <i>Motor de foguete espacial destruído pela instabilidade durante os primeiros anos do programa de foguetes dos EUA. Imagem extraída de Poinsot et al. (1987).</i> . . . . .	19
Figura 2 – <i>Comportamento típico da pressão instável em um sistema termoacústico. Adaptado de Epperlein et al. (2015).</i> . . . . .	20
Figura 3 – <i>Diagrama esquemático de um tubo de Rijke com resistência elétrica como fonte de calor. Imagem extraída de Gustavo A. de Andrade et al. (2017).</i> . . . . .	21
Figura 4 – <i>Diagrama conceitual do fenômeno termoacústico no tubo de Rijke. As setas verdes indicam o sentido do fluxo de ar no interior do tubo a medida que a pressão e velocidade variam. Adaptado de Epperlein et al. (2015).</i> . . . . .	26
Figura 5 – <i>Esquemático das interconexões do sistema termoacústico. Adaptado de Wilhelmsen (2021).</i> . . . . .	27
Figura 6 – <i>Potência térmica, <math>Q</math>, liberado pelo aquecedor elétrico em um escoamento laminar de velocidade <math>v</math>. Adaptado de Epperlein et al. (2015).</i>	30
Figura 7 – <i>Diagrama esquemático do sistema descrito nas variáveis características.</i> . . . . .	32
Figura 8 – <i>Diagrama esquemático do sistema após as transformações de variáveis.</i> . . . . .	34
Figura 9 – <i>Representação esquemática da função de transferência do sistema.</i>	35
Figura 10 – <i>Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com funções de ponderação no sinal de erro e de saída, respectivamente.</i> . . . . .	39
Figura 11 – <i>Diagrama de blocos da representação de um sistema na metodologia de controle <math>H_\infty</math>.</i> . . . . .	41
Figura 12 – <i>Representação de incertezas multiplicativas.</i> . . . . .	42
Figura 13 – <i>Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com incertezas multiplicativas e funções de ponderação no sinal de erro e de saída, respectivamente.</i> . . . . .	43
Figura 14 – <i>Comportamento das funções de ponderação peso e das funções de sensibilidade e sensibilidade complementar, respectivamente.</i> . . . . .	45
Figura 15 – <i>Diagrama de blocos geral de um sistema.</i> . . . . .	45
Figura 16 – <i>Diagrama de interconexões de um sistema.</i> . . . . .	46
Figura 17 – <i>Estrutura <math>M\Delta</math>.</i> . . . . .	47
Figura 18 – <i>Comportamento dinâmico dos estados do sistema não linear em malha aberta.</i> . . . . .	52
Figura 19 – <i>Comportamento dinâmico ampliado da velocidade e pressão acústica.</i>	53

Figura 20 – Resposta em frequência do sistema. . . . .	53
Figura 21 – Comparação entre o modelo fenomenológico e o modelo identificado. . . . .	54
Figura 22 – Diagrama de polos e zeros do modelo identificado. As cruces representam os polos e os círculos os zeros. . . . .	55
Figura 23 – Gráficos de magnitude das funções de sensibilidade e de ponderações para o controlador $H_{\infty}$ . Neste cenário não foram consideradas incertezas matemáticas. . . . .	56
Figura 24 – Gráficos de fase do sistema em malha aberta e em malha fechada com o controlador $H_{\infty}$ . Neste cenário não foram incluídas incertezas matemáticas no modelo. . . . .	57
Figura 25 – Sinais de saída e controle da planta operando com o controlador $H_{\infty}$ . . . . .	57
Figura 26 – Resposta em frequência da família de plantas. . . . .	59
Figura 27 – Magnitude de $W_m$ envolvendo toda a variação relativa do comportamento da planta. . . . .	60
Figura 28 – Gráficos de magnitude das funções de sensibilidade e de ponderações para o controlador baseado na síntese $\mu$ . Neste cenário foram consideradas incertezas matemáticas. . . . .	62
Figura 29 – Gráficos de Bode do controlador reduzido e do controlador original. . . . .	63
Figura 30 – Resposta em frequência do sistema em malha aberta e malha fechada. . . . .	63
Figura 31 – Sinais de saída e controle da planta operando com o controlador robusto baseado na síntese $\mu$ . . . . .	64
Figura 32 – Condição para estabilidade robusta. . . . .	65
Figura 33 – Condição de desempenho robusto. . . . .	65
Figura 34 – Diagrama de Nyquist do sistema de controle baseado na síntese $\mu$ . As margens de ganho e fase são 7.4 dB e 44°, respectivamente. . . . .	66
Figura 35 – Turbina a gás SGT 750 da Siemens com detalhe da câmara de combustão anular. Extraído de (RASHWAN S. S. MOHANY, 2020). . . . .	74
Figura 36 – Protótipo do tubo de Rijke. . . . .	75
Figura 37 – Pressão acústica medida no tudo de Rijke em função do tempo. A partir do gráfico superior podemos notar que há um crescimento linear das oscilações, e então, a pressão satura formando um ciclo limite estável. O gráfico inferior mostra o comportamento periódico e assimétrico do comportamento da pressão ampliada. . . . .	77
Figura 38 – Evolução da pressão acústica e sinal de controle em função do tempo durante um experimento em malha fechada. . . . .	78
Figura 39 – Gráfico de Nyquist do sistema com o controlador baseado no atraso de fase da pressão acústica. . . . .	79
Figura 40 – Diagrama esquemático do experimento de identificação em malha fechada. . . . .	79

Figura 41 – <i>Pressão acústica do sistema em malha fechada com um sinal de referência do tipo chirp variando entre 140 a 900 Hz.</i> . . . . .	80
Figura 42 – <i>Gráfico de Bode do sistema operando em malha fechada. Para recuperar a função de transferência de malha aberta, <math>G</math>, podemos manipular a expressão da função de transferência de malha fechada do sistema (veja a Figura 40):</i> . . . . .	80
Figura 43 – <i>Gráfico de Bode do sistema em malha aberta. As curvas de magnitude e fase foram recuperadas da resposta em frequência de malha fechada.</i> . . . . .	81

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – <i>Parâmetros físicos do modelo do sistema usado nas simulações.</i> . . .	51
Tabela 2 – <i>Polos e zeros da função de transferência identificada. Utilizou-se dois dígitos de aproximação.</i> . . . . .	55
Tabela 3 – <i>Iterações do algoritmo DK para o projeto do controlador baseado na síntese <math>\mu</math>.</i> . . . . .	61
Tabela 4 – <i>Polos e zeros do sistema identificado. Utilizou-se dois dígitos de aproximação.</i> . . . . .	82

## LISTA DE SIGLAS

EDO	Equação diferencial ordinária.
EDP	Equação diferencial parcial.
LIT	Linear e invariante no tempo.
LMI	Linear matrix inequality (desigualdade matricial linear).
LQG	Linear quadratic gaussian (linear quadrático gassiano).
MIMO	Multiple input multiple output (múltiplas entradas e múltiplas saídas).
NOx	Óxido de nitrogênio.
SISO	Single input single output (entrada única e saída única).

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\gamma$	Constante adiabática.
$P$	Pressão.
$\rho$	Densidade.
$v$	Velocidade.
$\tau_{hr}$	Constante de tempo.
$T$	Temperatura.
$\kappa$	Condutividade térmica.
$\kappa_v$	Constante empírica da lei de King.
$t$	Tempo.
$R$	Constante universal dos gases.
$c_v$	Calor específico.
$q$	Potência térmica por unidade de volume.
$Q$	Potência térmica liberada pela resistência.
$\sigma$	Valor singular.
$\mu$	Valor singular estruturado.
$c$	Velocidade do som.
$L$	Comprimento do tubo.
$x_m$	Ponto de instalação do microfone.
$x_0$	Ponto de instalação da fonte de calor.
$\lambda$	Comprimento de onda do som.
$f$	Frequência.
$t$	Tempo.
$Z$	Impedância acústica.
$A$	Área de seção transversal do tubo.
$\delta$	Função delta de Dirac.
$l_w$	Comprimento do filamento da resistência elétrica.
$d_w$	Diâmetro do filamento da resistência elétrica.
$T_w$	Temperatura do filamento da resistência elétrica.
$T_g$	Temperatura do gás.
$\Delta$	Matriz de incertezas.
$\xi$	Representa pressão e velocidade na mudança de variáveis.
$R_n,$	Representa os termos da realimentação da EDO.
$\alpha, \beta, z$	Representam a transformação das variáveis de $R_n$ .
$f_0, f_l$	Funções que representam as impedâncias acústicas.
$S(jw)$	Função de sensibilidade.

$T(jw)$	Função de sensibilidade complementar.
$K(s)$	Controlador.
$w(s)$	Entradas exógenas (perturbações e sinal de referência)
$d(s)$	Saídas exógenas (erros dos sinais a serem minimizados)
$u(s)$	Variável de controle
$ym(s)$	Variáveis medidas
$F_l$	Transformação fracionária linear
$\varepsilon_{min}$	Valor mínimo de $F_l$
$\forall$	Para todos
$\Pi$	Produto
$\in$	Pertence
$\approx$	Aproximadamente igual
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$H_\infty$	Metodologia de controle baseada na norma infinita
$\  \cdot \ _\infty$	Norma infinita
$  \cdot  $	Módulo (valor absoluto)

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
1.1	INSTABILIDADES TERMOACÚSTICAS	18
1.2	O TUBO DE RIJKE	20
1.3	REVISÃO DO ESTADO DA ARTE	21
1.4	OBJETIVOS	23
<b>1.4.1</b>	<b>Objetivo Geral</b>	<b>23</b>
<b>1.4.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>24</b>
1.5	ESTRUTURA DO DOCUMENTO	24
<b>2</b>	<b>DESCRIÇÃO DO SISTEMA E MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	<b>25</b>
2.1	DESCRIÇÃO DO SISTEMA	25
2.2	PRINCÍPIOS DE MODELAGEM	26
2.3	DINÂMICA ACÚSTICA	27
<b>2.3.1</b>	<b>Condições de contorno</b>	<b>28</b>
<b>2.3.2</b>	<b>Linearização da dinâmica acústica</b>	<b>29</b>
2.4	POTÊNCIA TÉRMICA	30
<b>2.4.1</b>	<b>Linearização da dinâmica térmica</b>	<b>31</b>
2.5	REPRESENTAÇÃO DO MODELO EM TERMO DAS COORDENADAS CARACTERÍSTICAS	32
<b>2.5.1</b>	<b>Transformada de Laplace e função de transferência</b>	<b>34</b>
2.6	ESQUEMA NUMÉRICO PARA SIMULAÇÃO DO SISTEMA DISTRIBUÍDO NÃO LINEAR	36
2.7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
<b>3</b>	<b>CONTROLE ROBUSTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA SISTEMAS LINEARES CONTÍNUOS E INVARIANTES NO TEMPO</b>	<b>39</b>
3.1	PROJETO DE CONTROLADORES PARA MODELOS NOMINAIS	39
<b>3.1.1</b>	<b>Funções de ponderação</b>	<b>39</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Metodologia de controle <math>H_\infty</math></b>	<b>40</b>
3.2	PROJETO DE CONTROLADORES PARA MODELOS INCERTOS	42
<b>3.2.1</b>	<b>Representação de Incertezas Matemáticas</b>	<b>42</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Condições de estabilidade e desempenho robusto</b>	<b>43</b>
3.2.2.1	Estabilidade robusta	43
3.2.2.2	Desempenho robusto	44
<b>3.2.3</b>	<b>Representação geral do sistema</b>	<b>44</b>
<b>3.2.4</b>	<b>Conceito de Valor Singular Estruturado</b>	<b>46</b>
<b>3.2.5</b>	<b>Projeto de controladores robustos através da síntese <math>\mu</math></b>	<b>47</b>
3.3	ITERAÇÃO DK	48
3.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	49

<b>4</b>	<b>RESULTADOS DE SIMULAÇÃO</b>	<b>51</b>
4.1	RESULTADOS DE SIMULAÇÃO DO SISTEMA EM MALHA ABERTA	51
<b>4.1.1</b>	<b>Resposta do modelo não linear no domínio do tempo</b>	<b>51</b>
<b>4.1.2</b>	<b>Resposta do modelo linearizado no domínio da frequência</b>	<b>53</b>
4.2	PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS	54
<b>4.2.1</b>	<b>Identificação de um modelo simplificado de dimensão finita</b>	<b>54</b>
<b>4.2.2</b>	<b>Funções de ponderação</b>	<b>55</b>
4.3	CONTROLADOR $H_{\infty}$	56
4.4	CONTROLADOR ROBUSTO BASEADO NA SÍNTESE $\mu$	58
<b>4.4.1</b>	<b>Modelagem de incertezas</b>	<b>58</b>
4.4.1.1	Obtenção do modelo para o pior caso de incertezas	58
<b>4.4.2</b>	<b>Funções de ponderação</b>	<b>60</b>
<b>4.4.3</b>	<b>Projeto do controlador</b>	<b>60</b>
<b>4.4.4</b>	<b>Controlador de ordem reduzida</b>	<b>61</b>
<b>4.4.5</b>	<b>Filtro do sinal de controle</b>	<b>62</b>
<b>4.4.6</b>	<b>Simulações com o controlador baseado na síntese <math>\mu</math></b>	<b>63</b>
4.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>67</b>
5.1	CONTRIBUIÇÕES	68
5.2	TRABALHOS FUTUROS	69
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>70</b>
	<b>APÊNDICE A – INSTABILIDADES TERMOACÚSTICAS EM UM TUBO DE RIJKE: EXPERIMENTOS DE CONTROLE ATIVO E IDENTIFICAÇÃO</b>	<b>74</b>
A.1	CONSTRUÇÃO DO PROTÓTIPO DO TUBO DE <i>RIJKE</i>	75
A.2	INSTABILIDADES TERMOACÚSTICAS NO TUBO DE <i>RIJKE</i>	76
A.3	ESTABILIZAÇÃO DE OSCILAÇÕES TERMOACÚSTICA: ABORDAGEM AD-HOC	77
A.4	IDENTIFICAÇÃO DO MODELO DO SISTEMA EM MALHA FECHADA	78
A.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	81

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 INSTABILIDADES TERMOACÚSTICAS

Instabilidades termoacústicas são fenômenos que ocorrem em uma ampla variedade de sistemas de combustão, principalmente aqueles com fluxo contínuo, tais como caldeiras industriais e domésticas, turbinas a gás e a vapor, além dos motores a reação (EPPERLEIN *et al.*, 2015).

As instabilidades termoacústicas referem-se à presença de oscilações de pressão juntamente com uma liberação de calor instável. Em particular, o acoplamento entre a taxa de liberação de calor instável e a dinâmica do fluido na câmara de combustão é o principal responsável pela formação das oscilações de pressão e velocidade acústica. Lord Rayleigh deu uma descrição física clara desse fenômeno, como sendo *o ganho de energia de ondas acústicas quando o fluxo de calor instável está em fase com as variações de pressão* (RAYLEIGH, 1878).

Em algumas aplicações, as instabilidades termoacústicas são importantes para garantir o funcionamento adequado do sistema, como nos combustores de pulso do tipo *Rijke* que usam esse efeito para aumentar a taxa de queima de óleos pesados, e os motores termoacústicos que utilizam ondas sonoras de elevada amplitude para produzir calor (SIRIGNANO, 2015). Entretanto, na maioria das aplicações essas oscilações são fenômenos indesejáveis e produzem efeitos nocivos ao sistema.

Nestes casos, a instabilidade resulta no aumento das vibrações que induzem a falhas mecânicas, geração de altos níveis de ruído acústico, aumento das taxas de combustão que podem resultar na fusão de componentes, além do aumento da emissão de gases poluentes como o óxido de nitrogênio (NO<sub>x</sub>) (RAUN; BECKSTEAD, 1995). Um exemplo frequentemente citado dessas instabilidades é o motor F-1, que foi projetado na década de 1950 para alimentar o foguete *Saturn V* (LIEUWEN; YANG, 2005). As oscilações de pressão encontradas neste motor tinham amplitudes de mais de 2000 psi e os desafios de modelagem apresentados por esse fenômeno durante o estágio de projeto resultaram em campanhas de testes longas e caras. Na Figura 1 é apresentado o motor de um foguete espacial da NASA parcialmente destruído devido às instabilidades termoacústicas.

Uma vez que vários países, como Estados Unidos, Brasil e países da União Europeia, impuseram diretrizes rígidas sobre o controle de emissões de poluentes para sistemas de combustão, é provável que os problemas de projeto mais importantes destes sistemas sejam as restrições às emissões de gases (carbono, monóxido, óxidos de nitrogênio e hidrocarbonetos não queimados) e partículas de fumaça ou fuligem. Em turbinas a gás utilizadas na geração de energia, estudos indicam que a combustão utilizando mistura pobre (mais ar do que combustível), pode levar o sistema a melhorar essas condições de emissão de poluentes, dado que as temperaturas mais baixas do

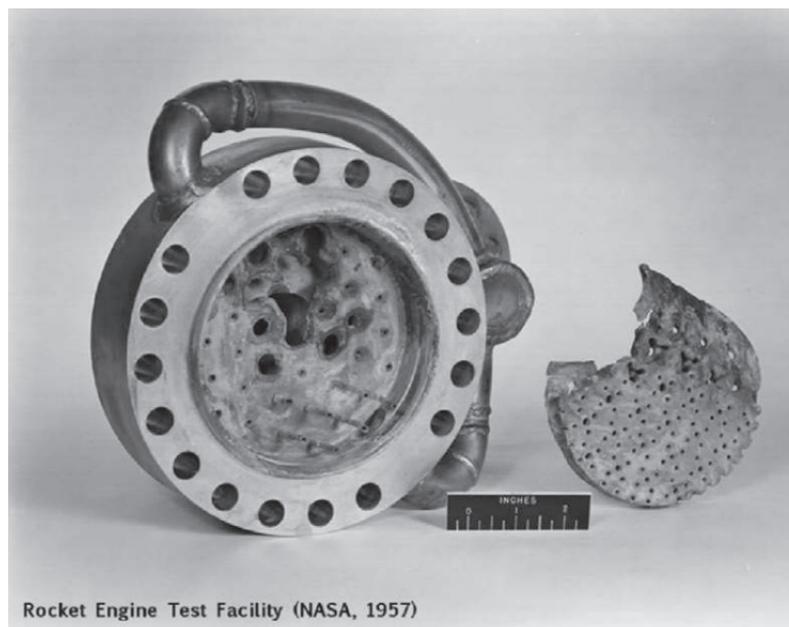


Figura 1 – *Motor de foguete espacial destruído pela instabilidade durante os primeiros anos do programa de foguetes dos EUA. Imagem extraída de Poinsot et al. (1987).*

produto associadas à queima pobre resultam na supressão da formação de óxido de nitrogênio (ZHAO *et al.*, 2018). No entanto, o desenvolvimento de tais sistemas terá que lidar com as consequências da combustão da mistura pobre, ou seja, a instabilidade termoacústica.

Em turbinas a gás, por exemplo, descobriu-se que componentes como os revestimentos da câmara de combustão, peças de transição e bicos de combustível precisam de inspeções de rotina para detecção de rachaduras ou desgastes excessivos devido ao atrito induzido por vibrações provocadas por oscilações. No mínimo, isso requer tempo de parada para inspeções e reparo das peças, reduzindo a disponibilidade da máquina. No pior dos casos, pedaços de componentes que se desintegram podem ser liberados no caminho do gás quente, causando danos severos e exigindo a substituição de componentes caros da turbina. Além disso, descobriu-se que em algumas regiões geográficas os motores precisam ser regulados sazonalmente para eliminar as oscilações, devido às mudanças na temperatura ambiente. Estudos realizados pela comunidade científica indicam que o custo de reparo e substituição de componentes, muitos dos quais diretamente atribuídos ao problema de instabilidade, ultrapassam um bilhão de dólares e constitui até 70% dos custos de reparo de turbinas a gás (ZHAO *et al.*, 2018). A análise estatística mostra que as principais empresas de geração de energia sofreram centenas de milhões de dólares em prejuízos financeiros devido a interrupções forçadas, resultando em uma série de problemas jurídicos.

Um projeto de câmara de combustão inteligente seria, portanto, aquele que abordasse todos os problemas acima listados simultaneamente sob uma ampla gama de

condições de operação (MONGIA *et al.*, 2003). Isso precisa ser alcançado com baixo custo agregado e complexidade estrutural, e sem degradação de outros parâmetros críticos de desempenho. Além disso, estes sistemas devem ser projetado para serem robustos e confiáveis para que um desempenho satisfatório seja satisfeito mesmo quando se afasta das condições de operação nominal.

Neste contexto, esforços significativos têm sido realizados nas últimas décadas pelas comunidades industrial e acadêmica para entender os problemas associados às instabilidades termoacústicas em câmaras de combustão e desenvolver metodologias para evitá-las (KELSALL; TROGER, 2004). Tradicionalmente, abordagens passivas têm sido usadas para supressão destas oscilações, incluindo a mudança do ponto da queima do combustível e a instalação de amortecedores acústicos no sistema.

Recentemente, o interesse em operar esses sistemas em uma ampla gama de condições sem o risco de autodestruição e em manter seus níveis de emissões poluentes dentro de limites convenientes tem levado à exploração de metodologias de controle ativo utilizando sensores e atuadores para que o sistema opere de maneira segura dentro da região instável. Uma revisão do estado da arte das principais metodologias de controle ativo para estabilização de oscilações termoacústicas será apresentada nas próximas seções.

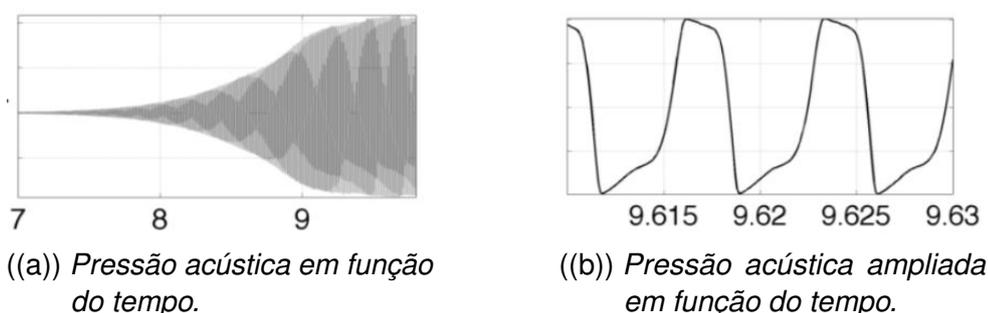


Figura 2 – *Comportamento típico da pressão instável em um sistema termoacústico. Adaptado de Epperlein et al. (2015).*

A Figura 2, mostra o comportamento típico da pressão instável em um sistema termoacústico, caracterizando as oscilações termoacústicas que serão tratadas nesse trabalho. A partir do gráfico 2(a), é possível notar que há um crescimento linear da pressão no tempo, e então, ela satura formando o comportamento oscilatório periódico não simétrico, detalhado no gráfico 2(b).

## 1.2 O TUBO DE RIJKE

Uma configuração experimental comum para estudar instabilidades termoacústicas, sendo um dos arranjos mais simples capazes de exibir o fenômeno, é o tubo de Rijke aquecido com um elemento elétrico (veja a Figura 3). Uma de suas principais vantagens é a simplicidade da modelagem devido à ausência de complicadas

dinâmicas de combustão. O primeiro protótipo do tubo de Rijke foi introduzido por P. L. Rijke há aproximadamente 160 anos (RIJKE, 1859), e desde então tem sido objeto de vários estudos para compreender e desenvolver métodos para mitigar instabilidades termoacústicas.

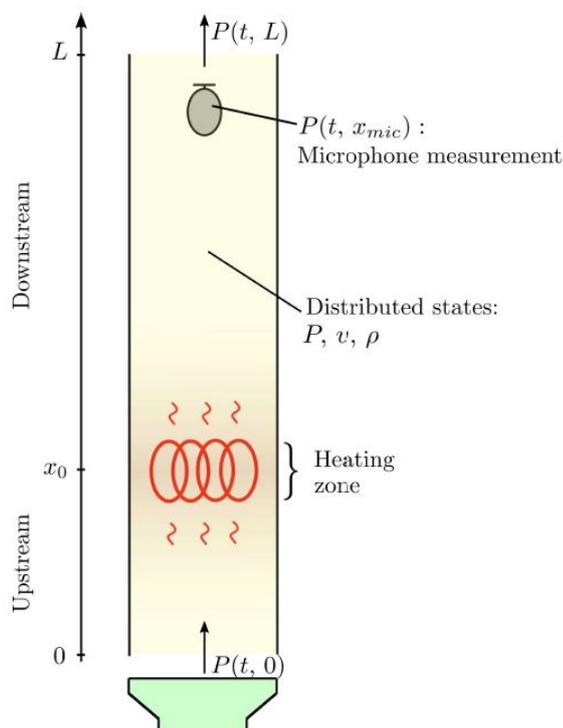


Figura 3 – Diagrama esquemático de um tubo de Rijke com resistência elétrica como fonte de calor. Imagem extraída de Gustavo A. de Andrade et al. (2017).

Basicamente, este sistema consiste em um tubo vertical aberto em ambas as extremidades, normalmente feito de vidro, e uma fonte de calor (geralmente um aquecedor de nicromo resistivo) colocada próxima da extremidade inferior. O ar que atravessa a zona de aquecimento se expande, causando um aumento repentino da pressão local. A pressão se propaga acusticamente ao longo do tubo e retorna, influenciando a si mesma na área de aquecimento. Sob as condições certas, o acoplamento entre a dinâmica acústica e térmica torna-se instável. Esta instabilidade se manifesta como um ciclo limite estável, resultando em oscilações de pressão audíveis (EPPERLEIN et al., 2015). Um alto-falante colocado a uma pequena distância do tubo é usado como um atuador para suprimir as oscilações, enquanto que um microfone no topo do tubo é normalmente usado como sensor.

### 1.3 REVISÃO DO ESTADO DA ARTE

Nas últimas décadas, têm sido dedicado consideráveis esforços aos estudos de instabilidades termoacústicas, tendo em vista que esse problema é de grande rele-

vância em diversas aplicações técnicas. Nesse contexto, um estudo abrangente sobre as instabilidades termoacústicas examinadas em um tubo de Rijke foi apresentado por Raun *et al.* (1993). Este trabalho traz uma abordagem comentada dos fenômenos físicos que ocorrem no interior do tubo, bem como a sua validação por meio de simulações computacionais.

Abordando a natureza ressonante das instabilidades termoacústicas e buscando compreender a sua capacidade de mitigá-las, Annaswamy e Ghoniem (1995) publicaram um estudo acerca da dinâmica dessas instabilidades, revisando o estado da arte do controle ativo em processos de combustão, além de apresentar um modelo de realimentação que fornece diretrizes para uma metodologia sistemática de controle ativo.

Um avanço significativo veio com o trabalho de Matveev (2003), que desenvolveu um modelo matemático incorporando transferência de calor, acústica e interações termoacústicas utilizando tubo de Rijke com fonte de calor elétrica. Seu trabalho permitiu uma compreensão mais profunda do comportamento da transferência de calor ao longo do tubo, que afetam fortemente as formas dos modos acústicos, e consequentemente, as propriedades de estabilidade do sistema. Ao resolver a equação da onda linearizada, considerando perdas e termos da fonte de calor, é possível identificar a transição para a instabilidade. Este modelo tem aplicabilidade no projeto de dispositivos de controle termoacústicos e combustores de diferentes fontes de calor.

Posteriormente, durante a *Turbo Expo 2010*, em Glasgow na Inglaterra, Moeck *et al.* (2010) introduziram um novo enfoque ao utilizarem um tubo de Rijke com configuração anelar, sendo que o formato anelar é mais representativo para as câmaras de combustão, enquanto os estudos numéricos tradicionalmente se concentravam em sistemas com acústica puramente longitudinal. Este trabalho expandiu a análise e explorou o impacto de diferentes circunferências da câmara de combustão nos modos de instabilidade, utilizando um modelo de ordem reduzida para representação do sistema. Notavelmente, conseguiram suprimir completamente as instabilidades por meio da implementação de um controlador clássico realimentado.

No âmbito de pesquisa referente à modelagem e identificação no tubo de Rijke, Epperlein *et al.* (2015) contribuíram com um trabalho que explora a dinâmica termoacústica do sistema e o seu controle. O trabalho apresenta uma investigação experimental da dinâmica do tubo de Rijke utilizando um modelo de identificação e validação do sistema em malha fechada, bem como a derivação de um modelo de sistema de controle orientado a partir da dinâmica do gás. No contexto da modelagem, utilizaram ferramentas de sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT), incluindo análises do lugar das raízes e o critério de Nyquist, que fornecem as informações sobre a instabilidade de malha aberta e os efeitos do controle da malha fechada.

Durante a *European Combustion Meeting*, em Dubrovnik na Croácia, Hosseini

*et al.* (2017) apresentaram um estudo que investigou as instabilidades termoacústicas em um tubo de *Rijke* com fontes de aquecimento e resfriamento. A pesquisa avaliou o papel da transferência de calor como elemento acústico ativo em sistemas de combustível. Essa abordagem permitiu examinar os efeitos combinados do aquecimento e resfriamento na termoacústica do sistema, revelando o comportamento do sistema em diferentes condições operacionais.

No contexto da estabilização das oscilações termoacústicas no tubo de *Rijke*, Gustavo A. de Andrade *et al.* (2017) propuseram um artigo que trata da estabilização por meio de um controle na condição de contorno. O trabalho propõe um modelo matemático que toma a forma de dois compartimentos interligados: um abaixo da fonte de calor (zona fria) e outro acima (zona quente). Esse modelo levou à obtenção de uma função de transferência irracional que foi utilizada para projetar um controlador de frequência, aplicado na condição de contorno esquerdo da zona fria visando a estabilização das oscilações.

Em outro trabalho abordando a complexidade das instabilidades termoacústicas, G. A. de Andrade *et al.* (2018) conduziram um estudo que investiga o problema voltado ao projeto de um observador de estados para os fenômenos do tubo de *Rijke*. Nessa pesquisa, o projeto do observador adotou a metodologia retrógrada, focada na estimativa das oscilações termoacústicas. Para modelar esse fenômeno, eles utilizaram equações diferenciais parciais (EDPs) em conjunto com uma equação diferencial ordinária (EDO). Notavelmente, o sistema EDP tem uma conexão de realimentação não trivial com o subsistema EDO, o que inviabiliza a aplicação de abordagens de controle convencionais. Sendo assim, os autores propuseram uma solução de controle retrógrado para estabilizar o sistema, abordando o problema do observador e suas implicações nas instabilidades termoacústicas no tubo de *Rijke*.

Por fim, Wilhelmsen (2021) desenvolveu uma tese de doutorado com algoritmos que visam estimar estados imensuráveis e parâmetros desconhecidos de instabilidade termoacústicas com dinâmica distribuída e não linear. Para essa finalidade, utilizou um tubo de *Rijke* com aquecimento elétrico como modelo para reproduzir as instabilidades termoacústicas. Sua abordagem foi projetar um observador baseado em medições da condição de contorno, permitindo gerar estimativas globalmente convergentes de pressão, velocidade e taxa de liberação de calor, utilizando um modelo que abrange acústica distribuída e liberação de calor não linear.

## 1.4 OBJETIVOS

### 1.4.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa de dissertação é desenvolver metodologias de controle robusto para estabilização de oscilações termoacústicas em um tubo de *Rijke*

considerando um modelo fenomenológico distribuído. Os resultados são apresentados, sempre que possível, de forma genérica, a fim de gerar resultados para uma parcela significativa da comunidade científica.

### 1.4.2 Objetivos Específicos

De modo a cumprir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos são listados:

- Estudar os fenômenos de oscilações termoacústicas no tubo de *Rijke*.
- Estudar e desenvolver um modelo matemático distribuído do sistema a partir da teoria de EDPs.
- Desenvolver estratégias de controle robusto com convergência comprovada.
- Validar as estratégias de controle em ambiente de simulação e realizar um estudo comparativo com resultados estabelecidos na literatura.

## 1.5 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

Esta dissertação está organizada na seguinte forma: No Capítulo 2 é apresentado uma modelagem matemática do tubo de Rijke, representando os principais fenômenos das instabilidades termoacústicas para fins de controle, na qual é obtida uma função de transferência de malha aberta e a sua resposta em frequência que servirá de base para o estudo e desenvolvimento da lei de controle apresentada no Capítulo 4.

No Capítulo 3 apresenta-se uma breve revisão sobre os principais aspectos da teoria de controle robusto, em particular o método  $H_\infty$ , que permite a inclusão de incertezas no modelo. Apresenta-se também um resumo sobre a modelagem de incertezas e a sua introdução no projeto de controle, bem como da análise de robustez e estabilidade por meio do diagrama de Nyquist a fim de garantir as condições necessárias para assegurar a estabilidade e desempenho robusto para o sistema.

No Capítulo 4 é desenvolvida uma lei de controle (no domínio da frequência), utilizando a metodologia  $H_\infty$  para controle realimentado baseado na síntese- $\mu$  para suprimir de forma robusta as oscilações termoacústicas. Apresenta-se também a definição das funções de ponderação para modelar as funções de sensibilidade,  $S(jw)$ , e sensibilidade complementar,  $T(jw)$ , para garantir o alcance dos objetivos desejados, bem como a análise de robustez e estabilidade utilizando os critérios apresentados na teoria.

Por fim, no Capítulo 5 apresentam-se as conclusões e as principais contribuições que este estudo gerou e fornece sugestões para novas pesquisas.

## 2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA E MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, o modelo matemático do tubo de *Rijke*, que formará a base para o resto da dissertação, será desenvolvido. O objetivo é desenvolver um modelo fenomenológico que representa os principais fenômenos da instabilidade termoacústica para ser utilizado para desenvolver estratégias de controle.

### 2.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA

O experimento do tubo de *Rijke* consiste basicamente em um tubo aberto em ambas as extremidades com uma fonte de calor na sua metade inferior. O ar que atravessa a zona de aquecimento se expande, causando um aumento súbito da pressão local. A pressão se propaga ao longo do tubo e reflete nas extremidades, em última análise, influenciando-se na área de aquecimento. Essa propriedade leva a um acoplamento termoacústico, fazendo com que as ondas de pressão acústica amplifiquem-se até saturarem em um ciclo limite.

A referência Epperlein *et al.* (2015) fornece um diagrama conceitual (reproduzido na Figura 4), do fenômeno termoacústico no tubo de *Rijke* aberto em ambas as extremidades, para se obter uma compreensão básica do sistema. A figura descreve a formação de um modo acústico fundamental e o comportamento da pressão e velocidade na formação do mesmo. Nesta figura, a pressão é apresentada na parte superior da figura e a velocidade é ilustrada na parte inferior. Na fase (a), a pressão no centro do tubo aumenta devido à entrada de ar. Em (b), esta pressão atinge um valor máximo e a velocidade do ar decresce devido ao gradiente de pressão. Em (c), o gradiente de pressão inverte a velocidade, e assim, o ar começa a sair do tubo com velocidade crescente (conforme apresentado em (d)). Quando a pressão atinge o valor mínimo no centro do tubo, conforme apresentado em (e), o gradiente de pressão inverte novamente a velocidade do ar fazendo com que ele entre no tubo novamente (veja (f)) e o ciclo se repete. A frequência de oscilação da pressão é

$$f_0 \approx \frac{c}{2L}, \quad (1)$$

onde  $c$  é a velocidade do som e  $L$  é o comprimento do tubo. O comprimento de onda do som é  $\lambda = c/f_0 = 2L$ .

Os três componentes principais do fenômeno termoacústico, que estão intrinsecamente interligados, são a formação da instabilidade acústica, a liberação de calor instável, e a variação do fluxo de ar. Estes efeitos coexistem em uma relação onde a instabilidade acústica na forma de onda estacionária auto-amplificada no tubo só pode existir na presença do fluxo de ar e liberação de calor instável, sendo que este último é induzido pela própria instabilidade acústica e influenciado pelo fluxo de ar. Apesar do

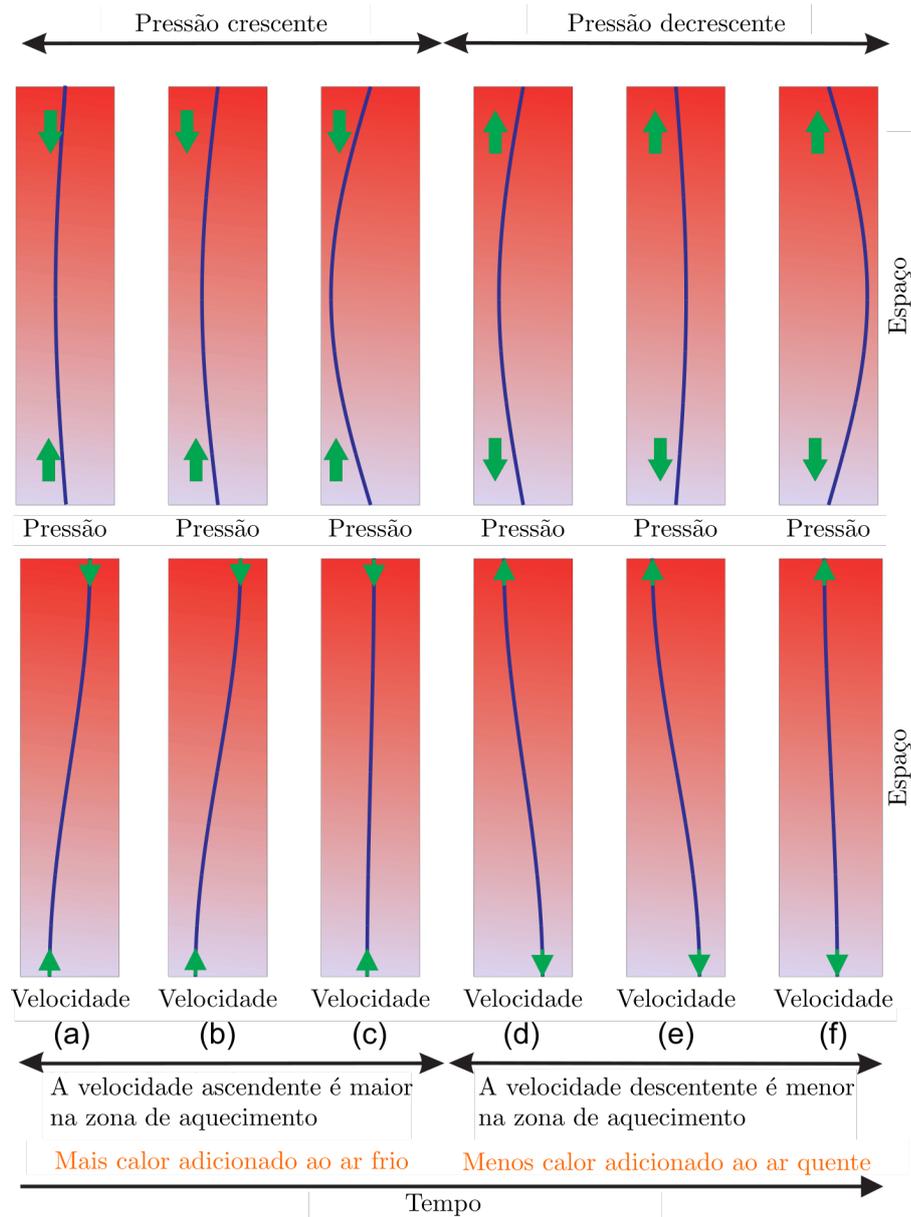


Figura 4 – Diagrama conceitual do fenômeno termoacústico no tubo de Rijke. As setas verdes indicam o sentido do fluxo de ar no interior do tubo a medida que a pressão e velocidade variam. Adaptado de Epperlein et al. (2015).

forte acoplamento, as principais características dos fenômenos podem ser descritas separadamente conforme será apresentado nas próximas seções.

## 2.2 PRINCÍPIOS DE MODELAGEM

Esta pesquisa focou no estudo de oscilações termoacústicas longitudinais usando modelos com parâmetros distribuídos em uma dimensão espacial. Embora esta consideração seja muito simplista para descrever casos extremamente complexos, tais como modos azimutais acoplados com modos longitudinais (veja, por exemplo, câmaras de combustão anular (LIENWEN; YANG, 2005)), estudar os casos simples são

essenciais para entender casos complexos.

A modelagem de fenômenos termoacústicos deve relacionar a mecânica e termodinâmica de um *continuum* na forma do fluido dentro e também ao redor do tubo. Tendo estes princípios em mente e levando em considerações algumas suposições iniciais, uma descrição geral dos estados da planta pode ser desenvolvida. Em particular, neste trabalho consideramos que

1. O fluxo de ar tem baixa velocidade e número de Mach pequeno.
2. A propagação da onda acústica, bem como o fluxo, são fenômenos unidimensionais e ocorrem na direção axial do tubo.
3. O fluxo em estado estacionário, (densidade  $\bar{\rho}$ , pressão  $\bar{P}$  e velocidade  $\bar{v}$ ) é constante no tempo.
4. A região de aquecimento é pequena na direção axial em comparação com o comprimento do tubo.
5. Não há outros meios de dissipação de energia além das perdas pelas reflexões das ondas acústicas.

Com as suposições e os acoplamentos entre a fonte de calor e a acústica definidos, o sistema completo pode ser escrito como uma interconexão de modelos, conforme apresentado na Figura 5.



Figura 5 – Esquemático das interconexões do sistema termoacústico. Adaptado de *Wilhelmsen (2021)*.

### 2.3 DINÂMICA ACÚSTICA

O fenômeno acústico no tubo de *Rijke* pode ser descrito pelas equações de Euler (EPPERLEIN *et al.*, 2015):

$$\partial_t \rho(t, x) + \partial_x(\rho v)(t, x) = 0, \quad (2)$$

$$\partial_t(\rho v)(t, x) + \partial_x(\rho v^2 + P)(t, x) = 0, \quad (3)$$

$$\partial_t \left( \frac{c_v}{R} P + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \partial_x \left( v \left( \frac{c_v}{R} P + \frac{\rho v^2}{2} \right) + P v \right) = q, \quad (4)$$

na qual  $t \in [0, \infty)$  é o tempo,  $x \in [0, L]$  é o espaço, e  $\rho$ ,  $v$  e  $P$  são a densidade, velocidade e pressão do gás, respectivamente. A constante universal dos gases é dada por  $R$ , o calor específico é  $c_v$  e  $q$  é a potência térmica por unidade de volume.

As EDPs (2)–(4) descrevem a conservação de massa, momento e energia, respectivamente, ao longo da dimensão axial do tubo.<sup>1</sup> Este modelo de uma dimensão espacial é uma aproximação razoável do fenômeno tridimensional que ocorre no sistema, já que o tubo de *Rijke* possui alta razão entre o eixo vertical e horizontal, e portanto, as principais flutuações de  $\rho$ ,  $v$  e  $P$  ocorrem na direção axial.

Utilizando a regra da derivada do produto e reorganizando (2)–(4), é possível obter a seguinte representação (os argumentos das variáveis foram omitidos por questão de clareza):

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ 0 & v & 1/\rho \\ 0 & \gamma P & v \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\gamma}q \end{pmatrix}, \quad (5)$$

com  $\gamma = 1 + R/c_v$  e  $\bar{\gamma} = \gamma - 1$ .

Assumimos que a condição inicial de (5) é dada por

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \quad (6)$$

$$v(0, x) = v_0(x), \quad (7)$$

$$P(0, x) = P_0(x), \quad (8)$$

na qual  $\rho_0$ ,  $v_0$  e  $P_0$  são funções conhecidas e definidas em  $\mathcal{L}_2([0, L])$ .

### 2.3.1 Condições de contorno

Para que o sistema (5)–(8) seja bem posto, condições de contorno devem ser especificadas. O tubo de *Rijke* possui ambas as extremidades abertas, as quais são geralmente modeladas fixando o valor da pressão em ambas as extremidades igual à pressão atmosférica. Entretanto, na prática nem toda a energia das ondas acústicas é refletida, e portanto, dissipações devem ser consideradas em ambas extremidades. Além disso, a extremidade inferior está próxima do auto falante (atuador) causando flutuações de pressão (veja a Figura 3). Assim, as condições de contorno consideradas neste trabalho são

$$P(t, 0) = f_0(v(t, 0)) + U(t), \quad (9)$$

$$P(t, L) = f_L(v(t, L)), \quad (10)$$

na qual  $f_0$  e  $f_L$  são funções que representam as impedâncias acústicas, e  $U$  é o sinal de controle. A expressão explícita de  $f_0$  e  $f_L$  serão dadas nas próximas seções quando a representação do sistema no domínio da frequência for introduzida.

<sup>1</sup> As EDPS (2)–(4), se aplicam apenas no caso em que o tubo está na vertical (eixo longitudinal alinhado com o vetor gravidade) pois, estando na horizontal, o fenômeno termoacústico para esse modelo do tubo de *Rijke* não acontece.

### 2.3.2 Linearização da dinâmica acústica

Para linearizarmos o modelo (5), é necessário o conhecimento das condições do sistema em estado estacionário. O cálculo preciso do estado estacionário requer a incorporação dos efeitos das flutuações dos estados ao longo do tubo (por exemplo, o gás na seção superior é mais quente que na seção inferior). Entretanto, como o parâmetro mais importante em sistemas acústicos é a velocidade do som, uma alternativa simplificada pode ser usada já que as variações de densidade e pressão ao longo do tubo possuem efeito menor (EPPERLEIN *et al.*, 2015). Nesta simplificação, considera-se que o perfil em regime permanente da velocidade, densidade e pressão do gás são constantes ao longo do espaço. Outra observação importante sobre o sistema é que o escoamento satisfaz a condição subsônica, isto é,  $\bar{v} \ll c$ , na qual  $c = \sqrt{\gamma \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}}$  é a velocidade do som.

Para linearizar (5), defina a variação de  $\rho$ ,  $v$ ,  $P$ ,  $Q$  e  $U$  com relação ao ponto de equilíbrio  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$  e  $\bar{U}$  como

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(t, x) &= \rho(t, x) - \bar{\rho}, & \tilde{P}(t, x) &= P(t, x) - \bar{P}, \\ \tilde{v}(t, x) &= v(t, x) - \bar{v}, & \tilde{q}(t, x) &= q(t, x) - \bar{Q}, \\ \tilde{U}(t, x) &= U(t, x) - \bar{U}.\end{aligned}$$

Logo, a linearização de (5) é dada por

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{v} \\ \tilde{P} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{v} & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{v} & 1/\bar{\rho} \\ 0 & \gamma\bar{P} & \bar{v} \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{v} \\ \tilde{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma\tilde{q} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Note que as equações dinâmicas da velocidade e da pressão não dependem da variação da densidade, logo podemos desconsiderá-la do modelo linearizado. Além disso, a seguinte hipótese simplificadora é válida em (11): dado que a velocidade do escoamento  $\bar{v}$  é muito menor que a velocidade do som, sua contribuição na dinâmica acústica é desprezível. Portanto, é razoável considerarmos  $\bar{v} \approx 0$ . Assim, segue que a expressão final da EDP linearizada é

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{P} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1/\bar{\rho} \\ \gamma\bar{P} & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{P} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma\tilde{q} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

As expressões lineares das condições de contorno (9)-(10) são

$$\tilde{P}(t, 0) = Z_0(t)\tilde{v}(t, 0) + \tilde{U}(t), \quad (13)$$

$$\tilde{P}(t, L) = Z_L(t)\tilde{v}(t, L), \quad (14)$$

na qual  $Z_0$  e  $Z_L$  representam as impedâncias acústicas linearizadas.

## 2.4 POTÊNCIA TÉRMICA

Nesta dissertação, a modelagem da potência térmica no tubo de *Rijke* é baseada nos trabalhos de Lighthill (1954), King (1914) e Epperlein *et al.* (2015), segundo os quais a fonte de calor é considerada como uma fonte térmica pontual  $x_0 \in (0, L)$ . Logo, a extensão espacial do aquecedor é pequena com relação ao comprimento de onda, e portanto, podemos usar o delta de Dirac,  $\delta$ , para representar esta variável:

$$q(t, x) = \frac{1}{A} \delta(x - x_0) Q(t), \quad (15)$$

na qual  $q(t, x)$  é um termo de fonte, que representa a entrada de calor da Equação 5 e, é usado para modelar a taxa de calor liberado para o gás,  $Q$  é a potência térmica liberada pela fonte de calor, e  $A$  é a área de seção transversal do tubo.

O próximo passo fundamental é quantificar a dependência entre a potência térmica e o escoamento devido ao processo de convecção e condução de calor nas vizinhanças de  $x_0$ . Para isso, considere uma fonte de calor elétrica feita com um fio de comprimento  $l_w$  e diâmetro  $d_w$ , em um campo de escoamento laminar com velocidade  $v$ . As principais variáveis afetando este processo são a velocidade local do escoamento e a diferença entre a temperatura do fio,  $T_w$ , e do gás,  $T_g$ .

A lei de King, desenvolvida em King (1914), apresenta uma relação algébrica entre a potência térmica<sup>2</sup>  $Q_K$  e as variáveis mencionadas acima:

$$Q_K = l_w \left( \kappa + \kappa_v \sqrt{|v|} \right) (T_w - T_g), \quad (16)$$

na qual  $\kappa$  representa a condutividade térmica do fluido e  $\kappa_v$  é uma constante de proporcionalidade empiricamente determinada.

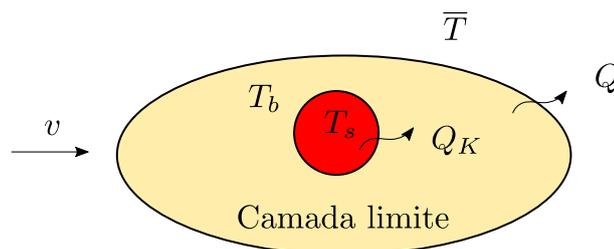


Figura 6 – Potência térmica,  $Q$ , liberado pelo aquecedor elétrico em um escoamento laminar de velocidade  $v$ . Adaptado de Epperlein *et al.* (2015).

A relação (16) é amplamente utilizada quando o escoamento em torno da fonte de calor é constante. Entretanto, em sistemas termoacústicos, tais como o tubo de *Rijke*, a velocidade muda rapidamente, e portanto, efeitos adicionais devem ser levados em consideração. Quando o escoamento em torno da fonte de calor é flutuante, uma camada limite é formada em torno do fio, conforme ilustrado na Figura 6. Logo, a

<sup>2</sup> O subscrito  $K$  é usado aqui para representar a potência térmica predita pela lei de King.

potência predita por (16) não é liberada diretamente para o campo de escoamento. Ela ocorre somente após passar pela camada limite. Os estudos desenvolvidos em Lighthill (1954) concluíram que este fenômeno pode ser aproximado por uma dinâmica de primeira ordem que relaciona  $Q_K$  com  $Q$ , conforme é apresentado na seguinte equação:

$$\tau_{hr}\dot{Q}(t) = -Q(t) + Q_K, \quad (17)$$

na qual a constante de tempo  $\tau_{hr}$  é estimada através da seguinte relação:

$$\tau_{hr} = \frac{d_w}{5\bar{v}}.$$

Este modelo pode ser utilizado como o subsistema de liberação de calor na interconexão de modelos da Figura 5 considerando a velocidade média local,  $v$ , como uma variável de entrada e a potência térmica,  $Q$ , como saída.

#### 2.4.1 Linearização da dinâmica térmica

Considerando  $T = \frac{P}{\rho R}$ , temos que a expressão linearizada de (16) é dada por

$$\tilde{Q}_K = f(\bar{v})\frac{\bar{T}}{\bar{\rho}}\tilde{\rho} + f'(\bar{v})(T_w - \bar{T})\tilde{v} - f(\bar{v})\frac{\bar{T}}{\bar{P}}\tilde{P}, \quad (18)$$

com  $f(\bar{v}) = l_w(\kappa + \kappa_v\sqrt{|\bar{v}|})$  e  $\bar{T} = \bar{P}/(\bar{\rho}R)$ .

A equação acima mostra a influência de cada variável de estado no processo de transferência de calor. Conforme apresentado em Epperlein *et al.* (2015), a dinâmica de  $\tilde{Q}$  em condições de escoamento subsônico são influenciadas principalmente pelas flutuações da velocidade<sup>3</sup>. Portanto, é razoável desprezarmos a influência da densidade e pressão em 18:

$$\tilde{Q}_K = f'(\bar{v})(T_w - \bar{T})\tilde{v}. \quad (19)$$

Por fim, a expressão linearizada de (17) é

$$\tau_{hr}\dot{\tilde{Q}}(t) = -\tilde{Q}(t) + \tilde{Q}_K, \quad (20)$$

Devemos enfatizar que a importância da velocidade  $\bar{v}$  na dinâmica acústica é diferente da fonte de calor. No primeiro,  $\bar{v}$  contribui somente na forma de ponto de equilíbrio e pode ser desprezado. Entretanto, em (18) se o ponto de equilíbrio da velocidade é desprezado, a linearização seria inválida já que a derivada de  $\sqrt{|\cdot|}$  é descontínua em 0. A importância de considerar  $\bar{v} \neq 0$  na dinâmica de  $Q$  está em mover o ponto de equilíbrio para a parte diferenciável da função raiz quadrada.

<sup>3</sup> Isto é analisado através de uma mudança de variáveis em  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{\rho}$  e  $\tilde{P}$  para tornar estas grandezas adimensionais, e depois, comparar os ganhos da equação linearizada.

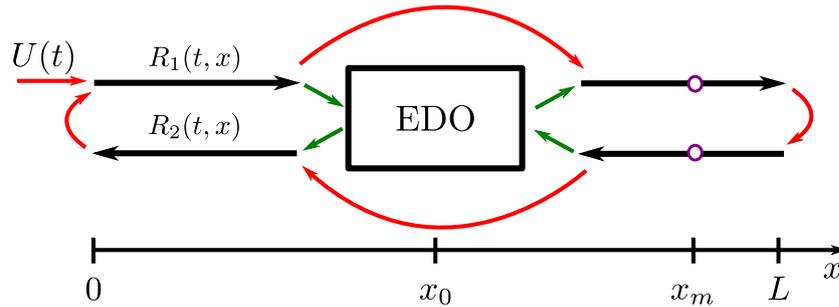


Figura 7 – Diagrama esquemático do sistema descrito nas variáveis características.

## 2.5 REPRESENTAÇÃO DO MODELO EM TERMO DAS COORDENADAS CARACTERÍSTICAS

Nesta seção, o sistema linearizado dado por (12)-(14) e (20) será reformulado utilizando as coordenadas características. A representação do modelo em termos de coordenadas características é uma transformação de coordenadas com a finalidade de representar o sistema de uma forma mais simples para análise e projeto de controladores, porém, nessa representação se perde o sentido físico das equações. Essa transformação é conveniente pois quando a transformação é realizada, a matriz que multiplica a derivada dos estados se transforma em uma matriz diagonal facilitando a análise. Este passo é muito comum em metodologias de controle para sistemas hiperbólicos (veja por exemplo Coron e Bastin (2016)), pois as coordenadas características fornecem informações importantes sobre a fonte de instabilidade do modelo, já que ela permite calcular a solução explícita e analisar o sistema como equações do transporte.

Sejam  $\xi = (\tilde{v}, \tilde{P})$  e  $R_n = (R_1, R_2)$ , e considere a seguinte transformação:

$$R_n(t, x) = T\xi(t, x), \quad (21)$$

com

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma\bar{P}\bar{\rho}} & 1 \\ -\sqrt{\gamma\bar{P}\bar{\rho}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que  $T$  é a matriz de autovetores esquerdos de  $A$ . Sendo a matriz  $A$  definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/\bar{\rho} \\ \gamma\bar{P} & 0 \end{pmatrix}$$

Logo,  $TA = \Lambda T$ , na qual  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ , com  $\lambda_1 = c$  e  $\lambda_2 = -c$ . Além disso, como  $T$  é uma matriz invertível, então  $\xi(t, x) = T^{-1}R(t, x)$ .

Agora, iremos introduzir mais uma transformação para remover a descontinuidade em (21). Sejam  $x_0$  e  $x_m$  os pontos para dobrar o domínio. Nós então considera-

mos a seguinte transformação de  $R_1$  e  $R_2$ :

$$R_1(t, x) = \begin{cases} \alpha_1(t, x), & x \in [0, x_0], \\ \beta_2(t, x), & x \in [x_0, x_m], \\ \alpha_3(t, x), & x \in [x_m, L], \end{cases} \quad (22)$$

$$R_2(t, x) = \begin{cases} \beta_1(t, x), & x \in [0, x_0], \\ \alpha_2(t, x), & x \in [x_0, x_m], \\ \beta_3(t, x), & x \in [x_m, L], \end{cases} \quad (23)$$

e definimos a seguinte transformação espacial em  $z$  para que todas as variáveis evoluam no mesmo intervalo:

$$z = \begin{cases} \frac{x}{x_0}, & x \in [0, x_0], \\ \frac{L-x}{L-x_0}, & x \in [x_0, x_m], \\ \frac{x-x_m}{L-x_m}, & x \in [x_m, L]. \end{cases} \quad (24)$$

Este conjunto de transformações nos permite reescrever o sistema na seguinte forma:

$$\partial_t \alpha(t, z) + \Lambda \partial_z \alpha(t, z) = 0, \quad (25)$$

$$\partial_t \beta(t, z) - \Lambda \partial_z \beta(t, z) = 0, \quad (26)$$

$$\tau_{hr} \dot{Q}(t) + Q(t) = q(\alpha_1(t, 1) - \alpha_2(t, 1)), \quad (27)$$

onde

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

com  $\lambda_1 = c/x_0$ ,  $\lambda_2 = c/(x_m - x_0)$ , e  $\lambda_3 = c/(L - x_m)$ .

Aplicando (22)-(24) em (25)-(27), obtemos as seguintes condições de contorno:

$$\alpha(t, 0) = N_i \beta(t, 0) + N_u U(t), \quad (28)$$

$$\beta(t, 1) = N_f \alpha(t, 1) + N_q Q(t), \quad (29)$$

na qual

$$N_i = \begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$N_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_L \end{pmatrix}, \quad N_q = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um diagrama esquemático do sistema é apresentado na Figura 8. Note que nesta estrutura o acoplamento entre os estados é observado apenas nos contornos. Além disso, a EDO (27) constitui uma realimentação interna entre a dinâmica acústica e térmica, que instabiliza o sistema.

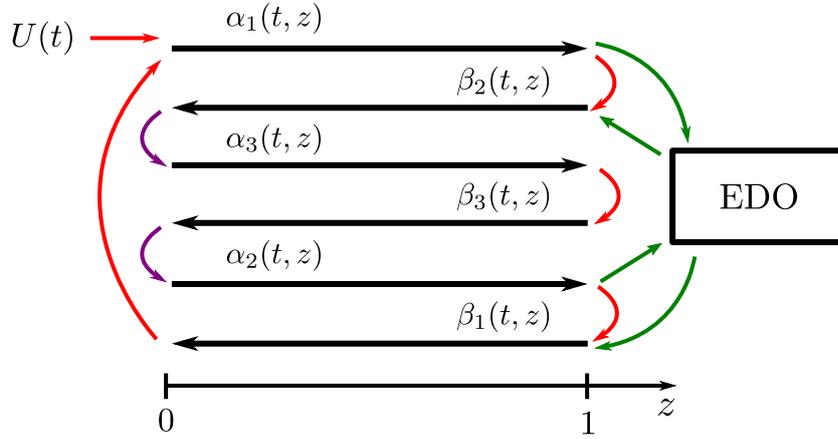


Figura 8 – Diagrama esquemático do sistema após as transformações de variáveis.

### 2.5.1 Transformada de Laplace e função de transferência

Usando o método das características e a estrutura de (25)-(26), temos que  $\alpha_i(t, 1) = \alpha_i(t - \lambda_i^{-1}, 0)$  e  $\beta_i(t, 0) = \beta_i(t - \lambda_i^{-1}, 1)$ , para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Usando as condições de contorno (28)-(29), temos

$$\begin{aligned} 2y(t) &= \beta_3(t, 0) + \beta_2(t, 0) \\ &= \beta_3(t, 0) + k_L \alpha_3 \left( t - \frac{1}{\lambda_3}, 1 \right) \\ &= \beta_2(t, 0) + k_L \beta_2 \left( t - \frac{2}{\lambda_3}, 0 \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \beta_2(t, 0) &= k_0 k_L \beta_2(t - \tau, 0) + c_1 \left( Q \left( t - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. k_0 Q \left( t - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{2}{\lambda_1} \right) \right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(t, 1) &= k_0 k_L \alpha_1(t - \tau, 1) + k_0 c_1 \left( Q \left( t - \frac{2}{\lambda_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. k_L Q(t - \tau) \right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(t, 1) &= k_0 k_L \alpha_2(t - \tau, 1) + k_L c_1 \left( k_0 Q(t - \tau) + \right. \\ &\quad \left. + Q \left( t - \frac{2}{\lambda_2} - \frac{2}{\lambda_3} \right) \right) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\tau_{hr} \dot{Q}(t) + Q(t) = c_2 (\alpha_1(t, 1) - \alpha_2(t, 1)). \quad (34)$$

Aplicando a transformada de Laplace nas expressões acima, segue que

$$\beta_2(s, 0) = G_{11}(s)Q(s) + G_{12}(s)U(s), \quad (35)$$

$$\alpha_1(s, 1) = G_{21}(s)Q(s) + G_{22}(s)U(s), \quad (36)$$

$$\alpha_2(s, 1) = G_{31}(s)Q(s) + G_{32}(s)U(s), \quad (37)$$

$$Q(s) = \frac{c_2}{\tau_{hr}s + 1}(\alpha_1(t, 1) - \alpha_2(t, 1)), \quad (38)$$

onde

$$G_{11}(s) = \frac{(1 + k_0 e^{-\frac{2}{\lambda_1}s})c_1 e^{-\frac{1}{\lambda_2}s}}{1 - k_0 k_L e^{-\tau s}}, \quad G_{12}(s) = \frac{2e^{-\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)s}}{1 - k_0 k_L e^{-\tau s}},$$

$$G_{21}(s) = \frac{(1 + k_L e^{-\left(\frac{2}{\lambda_2} + \frac{2}{\lambda_3}\right)s})k_0 c_1 e^{-\frac{2}{\lambda_1}s}}{1 - k_0 k_L e^{-\tau s}}, \quad G_{22}(s) = \frac{2e^{-\frac{1}{\lambda_1}s}}{1 - k_0 k_L e^{-\tau s}},$$

$$G_{31}(s) = \frac{(1 + k_0 e^{-\frac{2}{\lambda_1}s})k_L c_1 e^{-\left(\frac{2}{\lambda_2} + \frac{2}{\lambda_3}\right)s}}{1 - k_0 k_L e^{-\tau s}}, \quad G_{32}(s) = \frac{2k_L e^{-\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_2} + \frac{2}{\lambda_3}\right)s}}{1 - k_0 k_L e^{-\tau s}},$$

Um diagrama esquemático da representação da função de transferência do sistema é apresentado na Figura 9, onde  $U(s)$  representa o sinal de entrada de controle do sistema e  $y(s)$  representa a saída, que é a pressão acústica medida no ponto  $X_m$  (ponto de instalação do sensor "microfone"). Note que os polos das funções de transferência  $G_{ij}$ , com  $i \in \{1, 2, 3\}$  e  $j \in \{1, 2\}$ , estão localizados no semiplano esquerdo do plano complexo, logo, todas as funções de transferências  $G_{ij}$  são estáveis. Portanto, a única fonte de instabilidade do sistema é dada pela realimentação entre os sinais  $Q(s)$  e  $\alpha_1(s, 1)$  e  $\alpha_2(s, 1)$ .

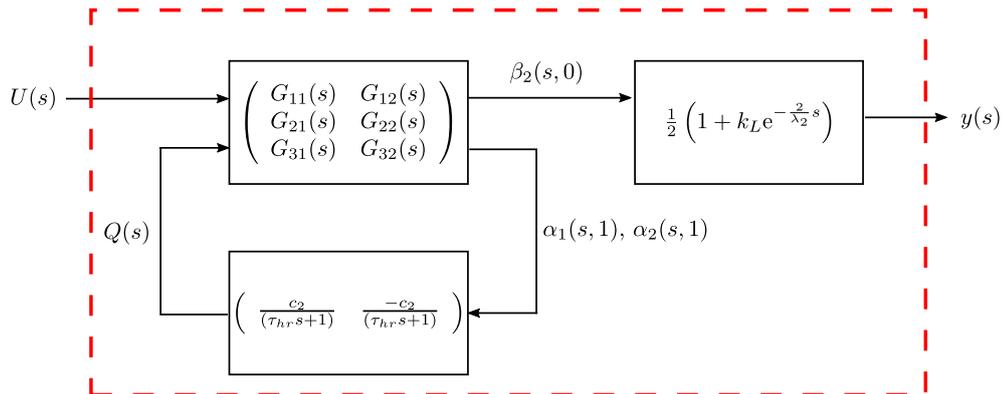


Figura 9 – Representação esquemática da função de transferência do sistema.

A fonte de instabilidade talvez não fique explícita quando olhamos somente para as equações (35)-(38) desacopladas, pois ela surge da realimentação entre os sinais  $Q(s)$  e  $\alpha_1(s, 1)$  e  $\alpha_2(s, 1)$ . Quando se faz a realimentação que é dada por (38), com a substituição de (36) e (37) é que temos a formação da instabilidade, dado que a instabilidade surge do acoplamento entre a taxa de liberação de calor da fonte e a dinâmica do fluido.

A função de transferência entre o sinal de controle,  $U(s)$ , e a saída,  $y(s)$ , é dada por:

$$G_n(s) = \frac{1}{2} \left( 1 + k_L e^{-\frac{2}{\lambda_3} s} \right) \left( \frac{Q(s)G_{11}(s)(G_{22}(s) - G_{32}(s))}{1 - Q(s)(G_{21}(s) - G_{31}(s))} + G_{12}(s) \right). \quad (39)$$

## 2.6 ESQUEMA NUMÉRICO PARA SIMULAÇÃO DO SISTEMA DISTRIBUÍDO NÃO LINEAR

Um esquema de diferenças finitas foi aplicado nos operadores diferenciais. Logo, as derivadas espaciais em um dado instante de tempo são aproximadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i}{\partial z}(t, z) &\approx \frac{\alpha_i(t, n) - \alpha_i(t, n-1)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial z}(t, z) &\approx \frac{\alpha_i(t, n) - \alpha_i(t, n-1)}{\Delta z}, \end{aligned}$$

com  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\Delta z = 1/S$  é o comprimento da discretização espacial,  $S$  é o número de pontos, e  $n \in \{1, \dots, S\}$  é o  $n$ -ésimo volume espacial.

Com relação às derivadas no tempo, são considerados  $M$  valores constantes ao longo do horizonte de tempo, tal que  $\tau_k \in [0, t_f]$ ,  $k = \{1, \dots, M\}$ , são os pontos da malha de discretização no tempo, com

$$0 = \tau_1 < \dots < \tau_{M-1} < \tau_M = t_f.$$

Esta discretização é assumida equidistante por simplicidade. Logo,

$$\Delta t = \frac{t_f}{M-1}, \quad \tau_k = (k-1)\Delta t, \quad k \in \{1, \dots, M\}.$$

e as aproximações correspondentes à derivada no tempo são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}(t, z) &\approx \frac{\alpha_i(k+1, z) - \alpha_i(k, z)}{\Delta t}, & \frac{\partial \beta_i}{\partial t}(t, z) &\approx \frac{\beta_i(k+1, z) - \beta_i(k, z)}{\Delta t}, \\ \frac{dQ}{dt}(t) &\approx \frac{Q(k+1) - Q(k)}{\Delta t}, \end{aligned}$$

com  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Utilizando as aproximações das derivadas no tempo e espaço apresentadas acima, as Equações (25)-(29) são transformadas nas seguintes expressões algébricas discretas:

$$\begin{aligned} \alpha(k+1, n) &= \alpha(k, n) - \Delta t \Lambda \frac{\alpha(k, n) - \alpha(k, n-1)}{\Delta z}, \\ \beta(k+1, n) &= \beta(k, n) + \Delta t \Lambda \frac{\beta(k, n) - \beta(k, n-1)}{\Delta z}, \\ Q(k+1) &= \left( \tau - \frac{\Delta t}{\tau} \right) Q(k) + \frac{\Delta t}{\tau} \left( \kappa + \kappa_v \sqrt{\bar{v} + \frac{1}{2\sqrt{\gamma P \bar{\rho}}} (\alpha_1(k, S) - \alpha_2(k, S))} \right) (T_w - T_g). \end{aligned}$$

Note que as condições de contorno definidas em (28) devem ser utilizadas em  $\alpha_1(k, 0)$ ,  $\alpha_2(k, 0)$  e  $\alpha_3(k, 0)$ , respectivamente. De maneira similar, (29) deve ser utilizado em  $\beta_1(k, S)$ ,  $\beta_2(k, S)$  e  $\beta_3(k, S)$ . Por fim, as relações (21), e (22)-(24) podem ser utilizadas para obter os estados físicos do sistema a partir das coordenadas característica. Assim, a solução numérica do tubo de *Rijke* é obtida empregando o seguinte pseudocódigo apresentado em Algoritmo 1.

## 2.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo apresentado busca descrever uma dinâmica extremamente complexa, através de uma forma simplificada. Com isso, partiu-se das equações de conservação da massa, da quantidade de movimento, e da conservação de energia do gás. A dinâmica da fonte de calor induzida pelo elemento elétrico foi descrita pela lei de King modificada, na qual uma dinâmica de primeira ordem é considerada para representar o efeito da camada limite. O desafio inicial consistiu na escolha das variáveis de estado cujas derivadas temporais e espaciais pudessem melhor representar os comportamentos característicos das oscilações termoacústicas. As variáveis escolhidas foram: a pressão e a velocidade acústica, a densidade do gás e a potência térmica da fonte de calor. Uma vez escolhidas as variáveis, o desafio seguinte foi escrever um modelo linearizado em um ponto de operação. Com algumas simplificações razoáveis na escolha do ponto de equilíbrio, a dinâmica do fenômeno termoacústico foi reduzida para duas EDPs lineares acopladas com uma EDO linear. Por fim, uma transformação de variáveis foi aplicada nessas equações lineares e a representação em funções de transferência do sistema foi obtida para fins de controle.

**Algoritmo 1:** Algoritmo no domínio do tempo do modelo não linear.

---

**Entrada:**  $\{\alpha[1]_1^n\}_{n=1}^S, \{\alpha[2]_1^n\}_{n=1}^S, \{\alpha[3]_1^n\}_{n=1}^S$   
 $\{\beta[1]_1^n\}_{n=1}^S, \{\beta[2]_1^n\}_{n=1}^S, \{\beta[3]_1^n\}_{n=1}^S, Q_1, U_1$

**for**  $k = 2$  **to**  $M$  **do**

% Condição de contorno a esquerda

$\alpha[1]_k^1 \leftarrow \alpha[1]_{k-1}^1 + k_0 \Delta t \left( -\alpha[1]_{k-1}^1 + d_1 \beta[1]_{k-1}^1 \right) + 2U_{k-1}$

$\alpha[2]_k^1 \leftarrow \beta[3]_{k-1}^1$

$\alpha[3]_k^1 \leftarrow \beta[2]_{k-1}^1$

**for**  $n = 1$  **to**  $(S - 1)$  **do**

$\alpha[1]_k^{n+1} \leftarrow \alpha[1]_{k-1}^{n+1} - \frac{\lambda_1 \Delta t}{\Delta x} \left( \alpha[1]_{k-1}^{n+1} - \alpha[1]_{k-1}^n \right)$

$\alpha[2]_k^{n+1} \leftarrow \alpha[2]_{k-1}^{n+1} - \frac{\lambda_2 \Delta t}{\Delta x} \left( \alpha[2]_{k-1}^{n+1} - \alpha[2]_{k-1}^n \right)$

$\alpha[3]_k^{n+1} \leftarrow \alpha[3]_{k-1}^{n+1} - \frac{\lambda_3 \Delta t}{\Delta x} \left( \alpha[3]_{k-1}^{n+1} - \alpha[3]_{k-1}^n \right)$

$\beta[1]_k^n \leftarrow \beta[1]_{k-1}^n + \frac{\lambda_1 \Delta t}{\Delta x} \left( \beta[1]_{k-1}^{n+1} - \beta[1]_{k-1}^n \right)$

$\beta[2]_k^n \leftarrow \beta[2]_{k-1}^n + \frac{\lambda_2 \Delta t}{\Delta x} \left( \beta[2]_{k-1}^{n+1} - \beta[2]_{k-1}^n \right)$

$\beta[3]_k^n \leftarrow \beta[3]_{k-1}^n + \frac{\lambda_3 \Delta t}{\Delta x} \left( \beta[3]_{k-1}^{n+1} - \beta[3]_{k-1}^n \right)$

**end**

% Condição de contorno a direita

$\beta[1]_k^S \leftarrow \alpha[2]_{k-1}^S + c_1 (Q_{k-1} - \bar{Q})$

$\beta[2]_k^S \leftarrow \alpha[1]_{k-1}^S + c_1 (Q_{k-1} - \bar{Q})$

$\beta[3]_k^S \leftarrow \beta[3]_{k-1}^S + k_L \Delta t \left( -\beta[3]_{k-1}^S + d_1 \alpha[3]_{k-1}^S \right)$

% EDO

$Q_k \leftarrow \left( \tau - \frac{\Delta t}{\tau} \right) Q_{k-1} +$   
 $\frac{\Delta t}{\tau} \left( \kappa + \kappa v \sqrt{\bar{v} + \frac{1}{2\sqrt{\gamma P \rho}} (\alpha[1]_k^S - \alpha[2]_k^S)} \right) (T_w - T_g)$

**end**

**Saída:**  $\{\alpha[1]_k^n\}_{n=1, k=1}^{S, M}, \{\alpha[2]_k^n\}_{n=1, k=1}^{S, M}, \{\alpha[3]_k^n\}_{n=1, k=1}^{S, M}$   
 $\{\beta[1]_k^n\}_{n=1, k=1}^{S, M}, \{\beta[2]_k^n\}_{n=1, k=1}^{S, M}, \{\beta[3]_k^n\}_{n=1, k=1}^{S, M}, \{Q_k\}_{k=1}^M, \{U_k\}_{k=1}^M$

---

### 3 CONTROLE ROBUSTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA SISTEMAS LINEARES CONTÍNUOS E INVARIANTES NO TEMPO

Controle robusto é uma área da teoria de controle de sistemas dinâmicos que atua com incertezas e perturbações desconhecidas no modelo matemático do sistema. As primeiras pesquisas iniciaram no final da década de 70 e têm influência da teoria de sistemas, análise funcional, álgebra linear, métodos numéricos e aplicações da engenharia. Atualmente, os esforços de pesquisa produziram um extenso conjunto de abordagens através de diversas técnicas matemáticas, e suas aplicações têm sido testadas em diversas áreas como controle de fluidos, redes elétricas, robótica e biologia.

Neste capítulo é apresentada uma abordagem de controle robusto no domínio da frequência. Em particular, a estratégia utilizada é baseada no conceito de valor singular estruturado, na qual estende-se a metodologia  $H_\infty$ . Assim, apresenta-se primeiramente alguns conceitos sobre a metodologia clássica  $H_\infty$  e critérios de desempenho no domínio da frequência utilizando funções de ponderações, e na sequência essa estratégia é estendida para sistemas incertos através do conceito de valor singular estruturado.

#### 3.1 PROJETO DE CONTROLADORES PARA MODELOS NOMINAIS

##### 3.1.1 Funções de ponderação

A escolha de funções de ponderação é fundamental em projeto de controladores no domínio da frequência, pois é através da característica dessas funções que é possível garantir o desempenho robusto. Em geral, estas funções de ponderação são escolhidas de modo que a magnitude da função de sensibilidade da malha de controle, definida como  $S(jw)$ , seja pequena dentro da largura de banda desejada, e que a magnitude da função de sensibilidade complementar, definida como  $T(jw)$ , tenha decaimento adequado fora da largura de banda. Um diagrama de blocos de uma malha de controle com funções de ponderação  $W_S$  e  $W_T$  no sinal do erro e de saída do sistema de controle é apresentado na Figura 10.

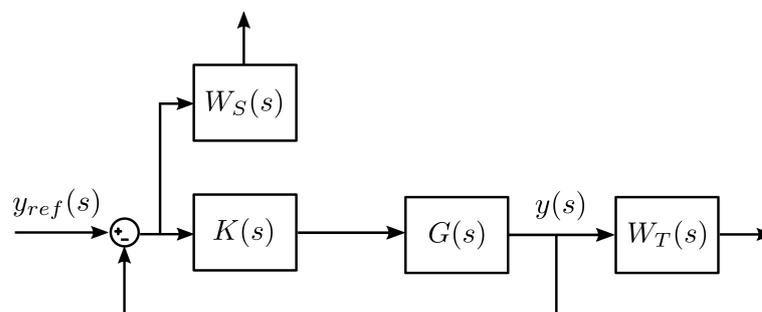


Figura 10 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com funções de ponderação no sinal de erro e de saída, respectivamente.

A escolha destas funções de ponderação não é trivial, pois elas não são únicas e cada caso deve ser estudado individualmente dadas as incertezas e especificações de desempenho do sistema de controle. Em Skogestad e Postlethwaite (2006) e Zhou e Doyle (1998) é possível encontrar as seguintes sugestões que servem como ponto de partida para obtenção das funções adequadas do problema de controle:

$$W_S(s) = \left( \frac{\frac{s}{M_S} + \omega_b}{s + A_P \omega_b} \right)^k, \quad (40)$$

$$W_T(s) = \left( \frac{s + \frac{\omega_{bc}}{M_T}}{A_P s + \omega_{bc}} \right)^k. \quad (41)$$

A função  $W_S$  definida em (40) se relaciona com a função de sensibilidade  $S(j\omega)$  e caracteriza o desempenho do sistema, sendo que o parâmetro  $A_P$  está relacionado com o erro de estado estacionário,  $\omega_b$  é a banda desejada em malha fechada, e  $M_S$  está relacionado com o pico de  $S(j\omega)$ . O parâmetro  $k \geq 1$  age na inclinação do decaimento da curva de magnitude. Quanto mais acentuada se deseja a transição entre baixa e alta frequência, maior deve ser o valor de  $k$ .

De maneira similar, a função  $W_T$  se relaciona com a função sensibilidade complementar  $T(j\omega)$  para caracterizar a estabilidade do sistema controlado. Assim em (41),  $\omega_{bc}$  define a largura de banda para a função sensibilidade complementar, e  $M_T$  seu pico.

### 3.1.2 Metodologia de controle $H_\infty$

A estratégia de controle  $H_\infty$  surgiu na década de 80 como uma alternativa para o controlador linear quadrático gaussiano (LQG) devido às suas baixas propriedades de robustez. A grande prerrogativa do desenvolvimento da metodologia de controle  $H_\infty$  é a possibilidade da inserção das incertezas da planta para suprimir as imperfeições da modelagem, e também, levar em consideração as variações devido aos erros de medição e condições de operação da planta para operá-la de forma segura (ZHOU; DOYLE, 1998). Além disso, desenvolvimentos recentes da teoria permitem o uso de desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *linear matrix inequality*) na síntese do controlador para otimizar as propriedades de desempenho e robustez.

Os projetos de controladores baseados na metodologia  $H_\infty$  podem ser realizados tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo. Entretanto, este trabalho será focado na abordagem no domínio da frequência desenvolvida por Zhou e Doyle (1998) e Skogestad e Postlethwaite (2006), que utiliza uma representação geral do sistema de controle de maneira que qualquer caso particular seja possível de ser tratado nesta formulação. Tal representação geral do sistema é apresentada na Figura 11.

Na Figura 11,  $P(s)$  é o modelo da planta generalizada, que pode incluir o modelo da planta nominal, as interconexões estruturais entre a planta e o controlador e também as funções de ponderação. Nesse modelo,  $K(s)$  representa o controlador;  $r(s)$  são as entradas exógenas (perturbações e ruídos);  $d(s)$  são as saídas exógenas (erros dos sinais a serem minimizados);  $y_m(s)$  são as variáveis medidas (medidas da saída da planta);  $u(s)$  é o sinal de controle.

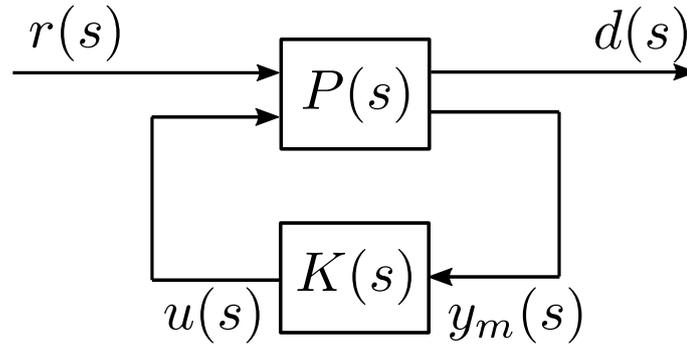


Figura 11 – Diagrama de blocos da representação de um sistema na metodologia de controle  $H_\infty$ .

O sistema na Figura 11 possui a seguinte descrição:

$$\begin{pmatrix} d(s) \\ y_m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(s) \\ u(s) \end{pmatrix},$$

$$u(s) = K(s)y_m(s)$$

Além disso, a função de transferência de malha fechada de  $r$  para  $y_m$  é dada pela transformação fracionária linear inferior

$$d(s) = \mathcal{F}_l(\mathbf{P}(s), K(s))w(s), \quad (42)$$

na qual

$$\mathcal{F}_l(\mathbf{P}(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}K(s))^{-1}P_{21}(s). \quad (43)$$

As metodologias de controle ótimo  $H_\infty$  buscam encontrar o controlador estabilizante  $K$  que minimiza

$$\|F_l(\mathbf{P}(s), K(s))\|_\infty = \max_\omega \sigma[F_l(\mathbf{P}, K)(j\omega)]. \quad (44)$$

na qual  $\sigma$  representa o valor singular. A norma  $H_\infty$  tem diversas interpretações em termos de desempenho. Uma delas é que esta norma minimiza o pico do valor singular máximo de  $F_l$ .

Na prática, é computacionalmente mais simples projetar um controlador sub-ótimo para o problema  $H_\infty$ . Assim, seja  $\varepsilon_{min}$  o menor valor de  $\|F_l(\mathbf{P}, K)\|_\infty$  dentre todos os controladores estabilizantes  $K$ . Então o problema de controle  $H_\infty$  sub-ótimo é: dado  $\varepsilon > \varepsilon_{min}$ , encontre todos os controladores estabilizantes  $K$  tal que

$\|F_l(\mathbf{P}, K)\|_\infty < \varepsilon$ . Este problema pode ser resolvido eficientemente usando métodos computacionais, como aquele criado em Zhou e Doyle (1998), e reduzindo  $\varepsilon$  iterativamente, uma solução próxima do ótimo é alcançada.

## 3.2 PROJETO DE CONTROLADORES PARA MODELOS INCERTOS

### 3.2.1 Representação de Incertezas Matemáticas

No contexto de sistemas de controle, é possível considerar como incertezas, parâmetros desconhecidos, variáveis e características negligenciadas na modelagem da planta. Tais incertezas possuem diversas origens, como por exemplo, falta de conhecimento sobre determinados parâmetros, não linearidades, dinâmicas não modeladas, imprecisão das medidas, desconhecimento do comportamento do sistema em altas frequências (ZHOU; DOYLE, 1998).

Segundo Skogestad e Postlethwaite (2006), as várias fontes de incerteza do modelo podem ser agrupadas em duas principais categorias.

1. Incerteza paramétrica (real): nessa categoria, a estrutura do modelo (incluindo a ordem) é conhecida, mas alguns dos parâmetros são incertos.
2. Incerteza dinâmica (dependente da frequência): nessa categoria, o modelo apresenta erros por causa de falta de dinâmica, geralmente em altas frequências, seja por negligência deliberada ou por uma falta de compreensão do processo físico.

Para analisar as incertezas de um sistema, assume-se que o comportamento dinâmico da planta é descrito por um conjunto  $\Pi$  de modelos lineares invariantes no tempo. Assim, cada modelo  $G_i$  pertencente à  $\Pi$  pode ser escrito no domínio da frequência como (veja a Figura 12)

$$G(s) = G_n(s)(1 + W_m(s)\Delta(s)), \quad (45)$$

na qual  $G_n$  é a função de transferência nominal,  $W_m$  é uma função de transferência racional e  $\Delta$  é uma função de transferência estável que representa as incertezas tal que  $|\Delta(j\omega)| \leq 1 \forall \omega$ . Assim, para cada combinação possível de valores de incertezas existe um modelo que pertence ao conjunto  $\Pi$ .

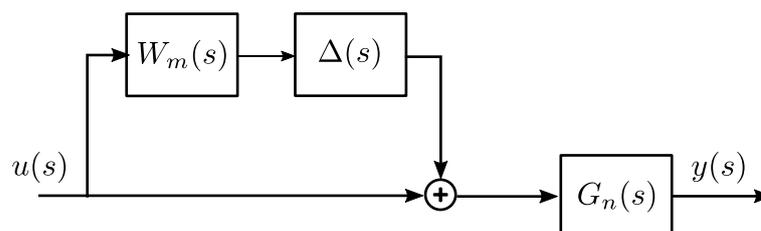


Figura 12 – Representação de incertezas multiplicativas.

Uma representação de  $W_m$  pode ser obtida encontrando uma cota superior que contém todas as possíveis plantas pertencentes à  $\Pi$ . Para isto, note que a partir de (45) obtém-se

$$|W_m(j\omega)| \geq \max_{G_i \in \Pi} \left| \frac{G_n(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right|,$$

e portanto,  $W_m(j\omega)$  pode ser definida de tal forma que a seguinte desigualdade seja satisfeita:

$$|W_m(j\omega)| \geq \left| \frac{G_n(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega.$$

Note que para cada frequência  $\omega$ , a magnitude de  $W_m$  pode ser interpretada como o percentual da incerteza do modelo para aquela frequência.

### 3.2.2 Condições de estabilidade e desempenho robusto

Nesta seção serão derivadas condições suficientes para garantir a estabilidade do sistema de controle para o conjunto de perturbações e incertezas definidas na modelagem matemática do sistema apresentado na Figura 13.

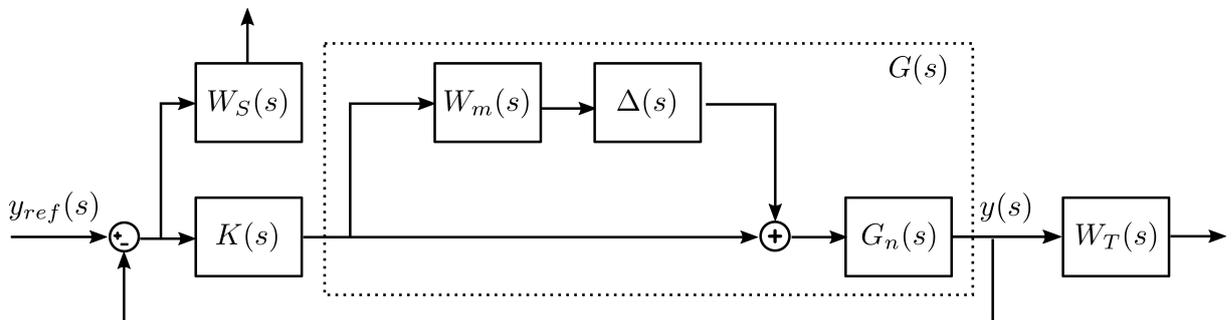


Figura 13 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com incertezas multiplicativas e funções de ponderação no sinal de erro e de saída, respectivamente.

#### 3.2.2.1 Estabilidade robusta

Definindo  $L$  como a função de transferência da malha direta do sistema representado na Figura 10, temos que

$$L(s) = G_n(s)K(s)(1 + W_m(s)\Delta(s)) = L_n(s) + W_m(s)L_n(s)\Delta(s), \quad |\Delta(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega,$$

na qual  $L_n(s) = G_n(s)K(s)$ .

Considerando estabilidade nominal do sistema de malha fechada, a condição de estabilidade robusta pode ser derivada a partir do critério de estabilidade de *Nyquist*

(um caso especial do teorema do pequeno ganho para sistemas lineares (MORARI; ZAFIRIOU, 1989)):

$$\left\| \frac{W_m(j\omega)L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right\|_{\infty} \leq 1, \forall \omega \Leftrightarrow \|W_m(j\omega)T(j\omega)\|_{\infty} \leq 1, \forall \omega \quad (46)$$

onde  $T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$  é a função de sensibilidade complementar do sistema. Assim, a condição suficiente para obter estabilidade robusta com incertezas multiplicativas é dada por uma cota superior para a função de sensibilidade complementar:

$$|T(j\omega)| < 1/|W_m(j\omega)|, \forall \omega. \quad (47)$$

### 3.2.2.2 Desempenho robusto

Da teoria de sistemas dinâmicos lineares, sabe-se que a condição de desempenho nominal é

$$|W_S(j\omega)S(j\omega)| < 1, \forall \omega, \quad (48)$$

na qual  $S(j\omega) = \frac{1}{1+L(j\omega)}$  é a função de sensibilidade complementar.

Então, para obter desempenho robusto é suficiente que (48) seja satisfeita para todas as funções de transferência do conjunto incerto  $\Pi$  (veja a Seção 3.2.1). Levando isso em consideração e utilizando o critério de estabilidade de *Nyquist*, temos a seguinte condição suficiente de desempenho robusto (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2006):

$$|W_S(j\omega)(1+L(j\omega))^{-1}| + |W_m(j\omega)L(j\omega)(1+L(j\omega))^{-1}| < 1, \forall \omega, \quad (49)$$

De maneira mais restritiva, a condição acima pode ser satisfeita se as seguintes desigualdades forem válidas para todo  $\omega$ :

$$|S(j\omega)| < \frac{1}{|W_S(j\omega)|}, \quad (50)$$

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_m(j\omega)|}. \quad (51)$$

A Figura 14 apresenta o comportamento da amplitude das funções  $S(j\omega)$  e  $T(j\omega)$  com  $W_s$  e  $W_T$  de maneira a se obter um desempenho ótimo do controlador a ser calculado.

### 3.2.3 Representação geral do sistema

As metodologias de controle robusto consideram a representação do sistema de acordo com o diagrama apresentado na Figura 15. Nesta estrutura,  $K$  é a função de transferência do controlador,  $\mathbf{P}$  é a planta generalizada e  $\Delta$  as incertezas. Note que

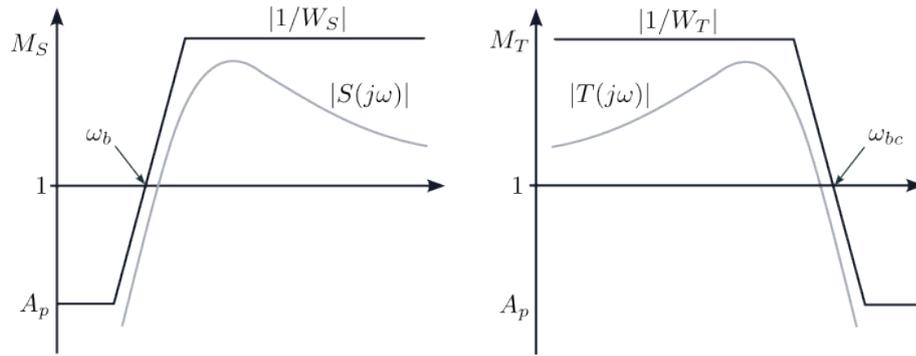


Figura 14 – Comportamento das funções de ponderação peso e das funções de sensibilidade e sensibilidade complementar, respectivamente.

o sistema  $\mathbf{P}$  consiste de três conjuntos de variáveis de entradas e saídas. O primeiro par  $(u, y_m)$  consiste dos sinais de controle e medição. Os sinais externos e de erros  $(r, d)$  constituem as variáveis de desempenho<sup>1</sup>. Por fim, os sinais de perturbação  $(w, a)$  conectam o sistema com a perturbação  $\Delta$ . É importante enfatizar que  $\mathbf{P}$  consiste do modelo nominal do sistema e das funções de ponderação.

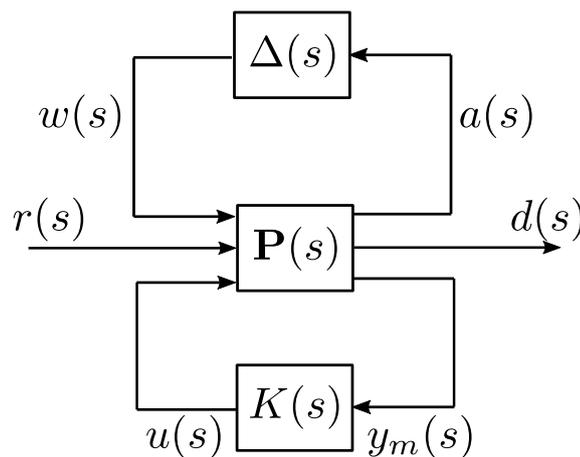


Figura 15 – Diagrama de blocos geral de um sistema.

A representação completa do sistema de controle nesta estrutura é descrita pelas seguintes expressões:

$$\begin{pmatrix} a(s) \\ d(s) \\ y_m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & P_{13}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & P_{23}(s) \\ P_{31}(s) & P_{32}(s) & P_{33}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(s) \\ r(s) \\ u(s) \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$w(s) = \Delta a(s), \quad (53)$$

$$u(s) = K(s)y_m(s). \quad (54)$$

<sup>1</sup> Os requisitos de projeto, como margem de ganho e margem de fase, no uso de técnicas de controle no domínio de frequência são indicadores de níveis de robustez em que o projetista se ampara para projetar o controlador.

Note que o diagrama de blocos apresentado na Figura 10 pode ser reescrito para a estrutura na Figura 15 fazendo uma inspeção dos sinais exógenos e de saída do problema conforme apresentado na Figura 16.

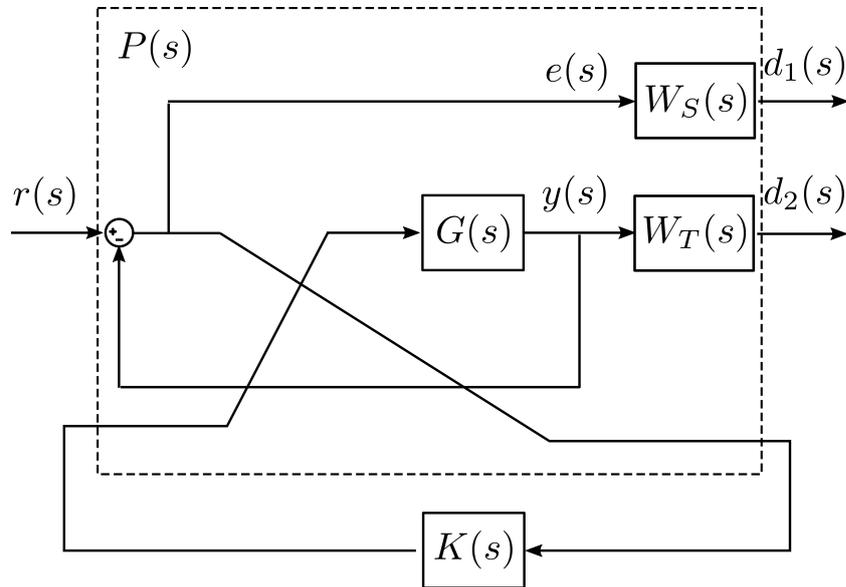


Figura 16 – Diagrama de interconexões de um sistema.

### 3.2.4 Conceito de Valor Singular Estruturado

Esta seção é dedicada a definir o valor singular estruturado, uma função matricial denotada por  $\mu$ . Na definição de  $\mu$ , assume-se que existe uma matriz estruturada  $\Delta$ . Em geral, esta matriz é diferente para cada problema, pois ela dependerá das incertezas e objetivos de controle. Entretanto, definir a estrutura envolve especificamente três pontos: o tipo de cada bloco, o número total de blocos, e suas dimensões.

Com relação aos tipos de blocos, pode-se dividi-los em dois tipos: escalares repetidos e blocos cheios. Considere que os números inteiros não negativos  $n_1$  e  $n_2$  representam os blocos escalares repetidos e os blocos cheios respectivamente. Além disso, defina as matrizes  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $\Delta_* \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ , sendo  $\Delta_*$  uma matriz estruturalmente restrita (em particular, considera-se a matriz diagonal do bloco  $\Delta$ ), e considere os números inteiros positivos  $r_1, \dots, r_{n_1}$ , e  $m_1, \dots, m_{n_2}$ :

$$\Delta_* = \{ \text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_{n_1} I_{r_{n_1}}, \Delta_1, \dots, \Delta_{n_2}] : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j} \}.$$

O conjunto  $B_\Delta$  é um subconjunto de  $\Delta$  definido como

$$B_\Delta := \{ \Delta \in \Delta_* : \sigma(\Delta) \leq 1 \}.$$

Então, define-se o valor singular estruturado como

$$\mu_\Delta(M) = \frac{1}{\min_{\Delta \in \Delta_*} \{ \sigma(\Delta) : \det(I - M\Delta) = 0 \}}. \quad (55)$$

Em outras palavras, em (55) buscamos encontrar a matriz  $\Delta$  que possua o menor valor singular e que ao mesmo tempo satisfaça  $\det(I - M\Delta) = 0$ . Do ponto de vista de controle, uma interpretação de  $\mu_{\Delta}(M)$  pode ser dada através da Figura 17, na qual  $M$  é um sistema linear conhecido e  $\Delta$  é uma perturbação estruturada.

Note que as equações que representam a malha na Figura 17 são

$$u = Mv, \quad (56)$$

$$v = \Delta u. \quad (57)$$

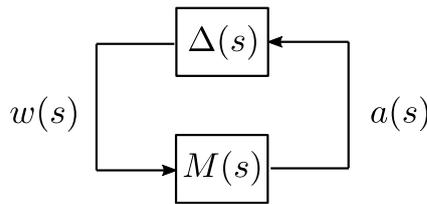


Figura 17 – Estrutura  $M\Delta$ .

Assim,  $u = v = 0$  será a única solução para  $u$  e  $v$  quando  $(I - M\Delta)$  é não singular. Note que quando  $I - M\Delta$  é singular, haverá infinitas soluções para (56)-(57), e as normas  $\|u\|_{\infty}$  e  $\|v\|_{\infty}$  podem ser arbitrariamente grandes resultando em um sistema instável. De maneira similar, o termo estável descreve a situação em que a única solução é identicamente zero. Neste contexto,  $\mu_{\Delta}(M)$  é uma medida do menor valor estruturado de  $\Delta$  que causará instabilidade no sistema realimentado mostrado na Figura 17.

### 3.2.5 Projeto de controladores robustos através da síntese $\mu$

Na metodologia de controle baseada na síntese  $\mu$ , o controlador  $K$  pode ser combinado com  $\mathbf{P}$  através de uma transformação linear fracionária inferior (LFT, do inglês *lower linear fractional transformation*), resultando na seguinte matriz de funções de transferência:

$$\mathbf{M}(s) = \mathcal{F}_L(\mathbf{P}(s), K(s)) = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} + P_{13}(s)K(s) \times (I - P_{33}(s)K(s))^{-1} \begin{pmatrix} P_{31} & P_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad (58)$$

qual é obtida substituindo (54) em (52).

O paradigma LFT, apresentado na Figura 15, pode ser usado para descrever e analisar o tubo de Rijke incerto, na qual  $\mathbf{M}$  é a parte invariante do sistema de controle e pode ser particionada como

$$\begin{pmatrix} a(s) \\ d(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(s) \\ r(s) \end{pmatrix} \quad (59)$$

Além disso, a transformação linear fracionária superior (UFT, do inglês *upper linear fractional transformation*) conectando  $r$  e  $d$ , que é obtida substituindo (53) em (59), é dada por

$$d(s) = \mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \Delta)r(s) = \left( M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12} \right) r(s). \quad (60)$$

Conforme apresentado em Morari e Zafiriou (1989) e Skogestad e Postlethwaite (2006), o desempenho robusto do sistema em malha fechada é equivalente a garantir que  $\|\mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \Delta)\|_\infty < 1$ . Além disso, note que

1. O sistema de malha fechada possui desempenho nominal satisfeito se o objetivo de desempenho é atingido para a planta nominal. Este problema é equivalente a garantir que a seguinte desigualdade seja válida:  $\|M_{22}\|_\infty < 1$ .
2. O sistema de malha fechada possui estabilidade robusta se o sistema de malha fechada é internamente estável para todos os modelos possíveis da planta. Este problema é equivalente a garantir que  $\|M_{11}\|_\infty < 1$ .
3. O sistema de malha fechada possui desempenho robusto se ele é internamente estável para todas as funções de transferência possíveis e, além disso, as especificações de desempenho são satisfeitas com

$$\sup_{\omega} \mu(\mathbf{M}(j\omega)) < 1 \Leftrightarrow \|\mu(\mathbf{M}(j\omega))\|_\infty < 1.$$

A função de transferência de malha fechada de  $w$  para  $d$  é dada pela seguinte transformação linear fracionária:

$$d(s) = F_l(\mathbf{P}, K)w(s), \quad (61)$$

na qual

$$F_l(\mathbf{P}, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}.$$

Considerando esta estrutura, o problema de controle  $H_\infty$  é encontrar todos os controladores estabilizantes  $K$  que minimizam

$$\|F_l(\mathbf{P}, K)\|_\infty = \max_{\omega} \sigma[F_l(\mathbf{P}, K)(j\omega)] \quad (62)$$

### 3.3 ITERAÇÃO DK

A iteração DK é uma técnica clássica para projetar controladores ótimos no sentido  $\mu$ . Sua ideia é combinar a técnica de controle  $H_\infty$  e análise  $\mu$  para projetar controladores robustos. Dada a cota superior de  $\mu$  apresentada em (55), a ideia desta estratégia é minimizar seu valor dentro de um intervalo de frequências, à saber,

$$\min_C \left( \min_{D \in \mathcal{D}} \|D\mathbf{M}(K)D^{-1}\|_\infty \right),$$

alternando entre minimizar  $\|D\mathbf{M}(K)D^{-1}\|_\infty$  com respeito a  $K$  ou  $D$  (enquanto um deles é mantido fixo). Para inicializar as iterações, o projetista deve selecionar uma matriz de funções de transferência  $D$  estável com uma estrutura apropriada. Em geral, a matriz identidade é recomendada na literatura. Nos passos seguintes, o seguinte procedimento é usado:

1. **Passo K:** Projete um controlador  $H_\infty$  para o problema  $\min_K \|D\mathbf{M}(K)D^{-1}\|_\infty$  com  $D$  fixo.
2. **Passo D:** Encontre  $D$  para minimizar  $D\mathbf{M}(K)D^{-1}$  com  $\mathbf{M}$  fixo.
3. Aproxime o gráfico de magnitude de  $D$  por uma função de transferência estável e de fase mínima e retorne para o passo 1.

O processo acima continua até que o desempenho satisfatório seja alcançado ou até que a norma  $H_\infty$  não decresça mais. Conforme mencionado em Skogestad e Postlethwaite (2006), os passos 1 e 2 do procedimento acima são convexos, entretanto a convexidade não é garantida quando o problema é analisado como um todo, e assim, as iterações podem convergir para um ótimo local. Entretanto, testes práticos demonstram que o método é adequado para a maioria dos casos.

Com relação à ordem do controlador obtido em cada iteração, tem-se que ela será igual ao número de estados da planta mais o número de estados nas ponderações mais duas vezes o número de estados em  $D$ . Em alguns casos, o controlador pode não ser racional, dado que  $D$  é de dimensão infinita.

É importante enfatizar que a convergência da iteração DK não depende somente das soluções dos Passos 1 e 2, mas também da aproximação realizada no Passo 3, preferencialmente por uma função de transferência de baixa ordem. A razão para utilizar expressões de baixa ordem é que isto reduz a ordem do problema  $H_\infty$ , e conseqüentemente, melhora as propriedades numéricas da otimização. Se as iterações convergirem lentamente, o projetista deve verificar se existem problemas numéricos ou parâmetros escolhidos de forma errônea (a cota superior de  $\mu$  no Passo 2 ser maior que a norma  $H_\infty$  obtida no Passo 1), ou ainda, baixa precisão da aproximação de  $D$ . No pior dos casos, deve-se reconsiderar a formulação do problema.

### 3.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo foram apresentados alguns conceitos de projeto de controladores no domínio da frequência. Um ponto fundamental das estruturas apresentadas é a definição de funções de ponderação, pois são elas as responsáveis por garantir o desempenho e a estabilidade do sistema. Para o caso nominal, a metodologia de controle  $H_\infty$  foi descrita, enquanto que para o caso de modelos incertos apresentamos a estratégia baseada na síntese  $\mu$ . Em ambos os casos, a lei de controle é encontrada de maneira numérica minimizando a norma  $H_\infty$  da planta. É importante lembrar que no

caso da segunda estratégia de controle, as incertezas devem ser estimadas e descritas através da representação multiplicativa.

## 4 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados de simulação em malha aberta e malha fechada do modelo do fenômeno termoacústico desenvolvido no Capítulo 2. Primeiramente, são apresentadas simulações numéricas do modelo em malha aberta no domínio do tempo e da frequência, e discutidas suas principais características. Na sequência, os controladores  $H_\infty$  e baseado na síntese  $\mu$  são projetados e aplicados no tubo de *Rijke*.

### 4.1 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO DO SISTEMA EM MALHA ABERTA

O modelo apresentado no Capítulo 2 foi implementado no *MATLAB* com o objetivo de analisar qualitativamente o comportamento das principais grandezas relacionadas com o fenômeno termoacústico. Esta seção apresenta os resultados obtidos com a implementação numérica da planta utilizando o Algoritmo 1 e a resposta em frequência da função de transferência (39). Os parâmetros físicos utilizados são apresentados na Tabela 1.

#### 4.1.1 Resposta do modelo não linear no domínio do tempo

Considerando o esquema numérico do Algoritmo 1 com  $\Delta z = 0.02$  m,  $\Delta t = 10^{-5}$  s, e a seguinte condição inicial:

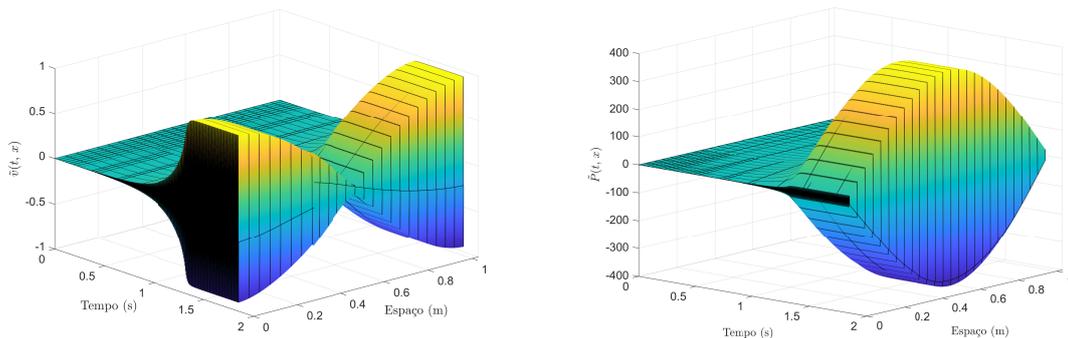
$$\tilde{P}(x) = 0, \quad \tilde{v}(x) = 0, \quad \tilde{Q}_0 = 0,$$

obtemos a evolução dos estados em função do tempo e espaço conforme apresentado na Figura 18. Inicialmente o sistema está em repouso, mas rapidamente as oscilações

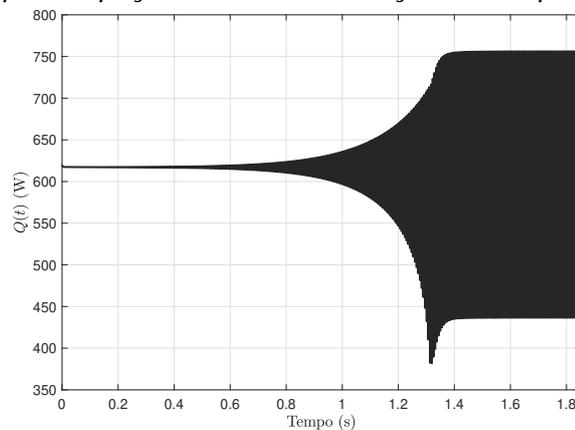
Tabela 1 – *Parâmetros físicos do modelo do sistema usado nas simulações.*

Parâmetro	Símbolo	Valor
Constante adiabática	$\gamma$	1,4
Pressão média	$\bar{P}$	$10^5$ Pa
Densidade média	$\bar{\rho}$	1,2 kg/m <sup>3</sup>
Velocidade de partícula	$\bar{v}$	0,45 m/s
Comprimento do tubo	$L$	1,03 m
Área de seção transversal	$A$	0,0023 m <sup>2</sup>
Impedância acústica superior	$Z_L$	10 Pa s/m
Impedância acústica inferior	$Z_0$	10 Pa s/m
Constante de tempo	$\tau_{hr}$	0,002 s
Temperatura da resistência elétrica	$T_w$	933 K
Temperatura do gás	$T_g$	285 K
Constante empírica da lei de King	$\kappa_v$	0,026 W/(m K)
Comprimento do fio	$l_w$	1,067 m
Posição da resistência elétrica	$x_0$	0,35 m

termoacústicas se tornam evidentes. Em particular, note que as oscilações possuem um período inicial de crescimento exponencial e depois saturam em um ciclo limite estável, típico em sistemas termoacústicos. Além disso, a pressão apresenta nós acústicos nos contornos do tubo, enquanto que a velocidade acústica possui anti-nós em ambos os contornos. Um gráfico ampliado da velocidade e pressão acústica para  $x = \frac{L}{3}$  é apresentado na Figura 19. A frequência de oscilação, definida por  $f_0$ , é de aproximadamente 156 Hz, que também corresponde aos valores teóricos obtidos pela expressão  $f_0 = \frac{c}{2L}$ .

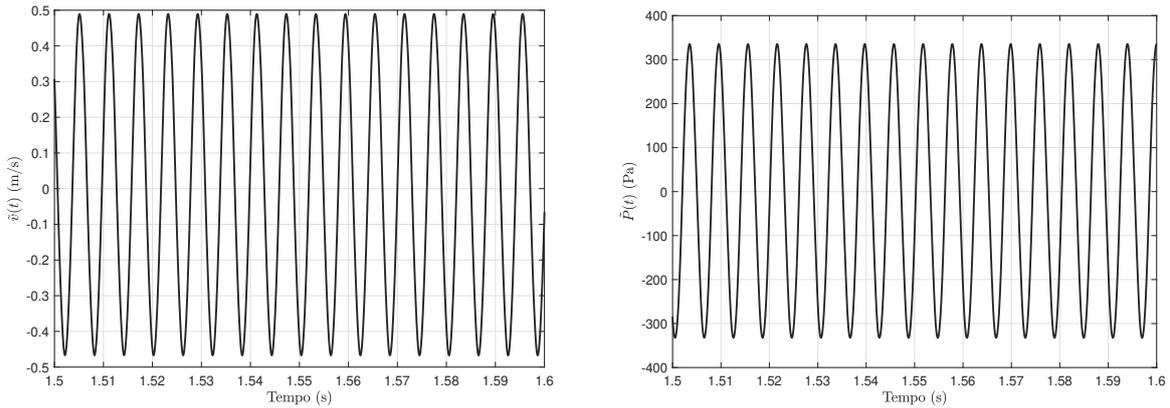


((a)) *Velocidade acústica no tubo de Rijke em função do tempo e espaço.* ((b)) *Pressão acústica no tubo de Rijke em função do tempo e espaço.*



((c)) *Taxa de liberação de calor no tubo de Rijke em função do tempo.*

Figura 18 – *Comportamento dinâmico dos estados do sistema não linear em malha aberta.*



((a)) Velocidade acústica ampliada.

((b)) Pressão acústica ampliada.

Figura 19 – Comportamento dinâmico ampliado da velocidade e pressão acústica.

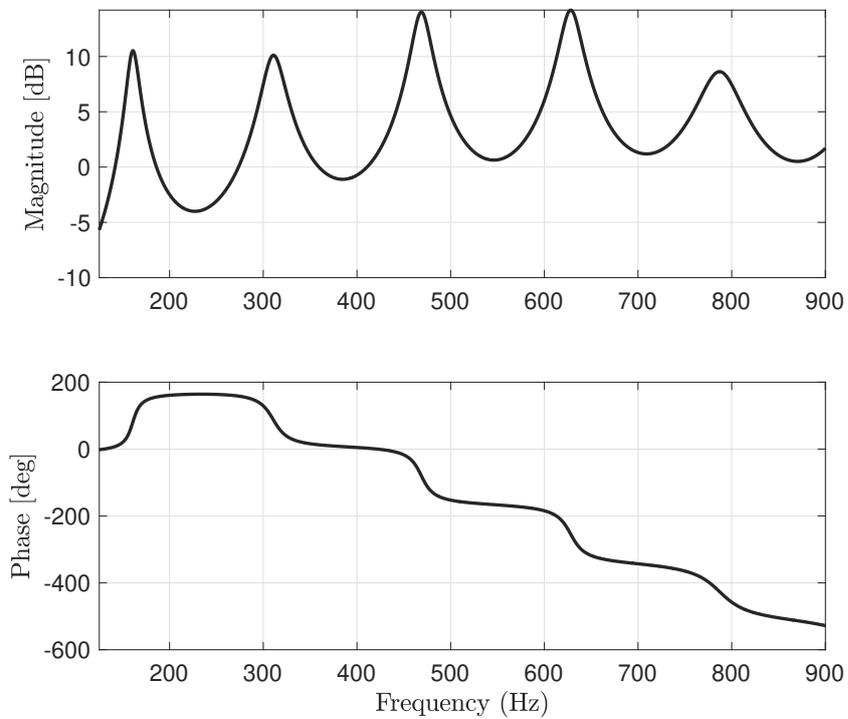


Figura 20 – Resposta em frequência do sistema.

#### 4.1.2 Resposta do modelo linearizado no domínio da frequência

A Figura 20 apresenta a resposta em frequência do modelo (39). Note no gráfico superior que o primeiro modo característico do sistema é instável devido ao aumento de  $180^\circ$  de fase em sua frequência de ressonância, em  $\omega = 156$  Hz. Os demais modos são estáveis dado que há um decréscimo de  $180^\circ$  de fase em suas frequências de ressonância. A combinação dos atrasos de transporte em (39) também faz com que a fase decresça linearmente, conforme pode ser visto no gráfico inferior da Figura 20.

## 4.2 PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS

Nesta seção apresenta-se a aplicação da metodologia de controle robusto baseado na síntese  $\mu$  para estabilizar as oscilações termoacústicas no tubo de Rijke. A estratégia foi implementada na ferramenta Matlab com o auxílio da biblioteca *Matlab Robust Control Toolbox*, que resolve o problema de otimização do controlador robusto através da iteração DK. Assim, dadas as funções de ponderação  $W_S$  e  $W_T$ , as incertezas, e a planta  $G_n$ , a biblioteca calcula a planta generalizada  $P$  descrita no capítulo anterior e o controlador sub ótimo  $K$ .

### 4.2.1 Identificação de um modelo simplificado de dimensão finita

A biblioteca *Matlab Robust Control Toolbox* não permite o uso de funções de transferências irracionais, como aquela apresentada em (39), para o projeto do controlador robusto. Assim, um modelo simplificado de dimensão finita foi identificado a partir da resposta em frequência com o objetivo de ser considerado como  $G_n$  no projeto do nosso controlador.

A identificação de tal modelo é apresentado na Figura 21, e foi obtida com auxílio da ferramenta *Matlab System Identification Toolbox*, onde 12 polos e 4 zeros foram utilizados para reproduzir a dinâmica do sistema distribuído. Note que o modelo identificado representa de maneira aproximada a função de transferência fenomenológica original na faixa de frequência entre 0 e 900 Hz, de modo a incluir os modos característicos estáveis e instáveis.

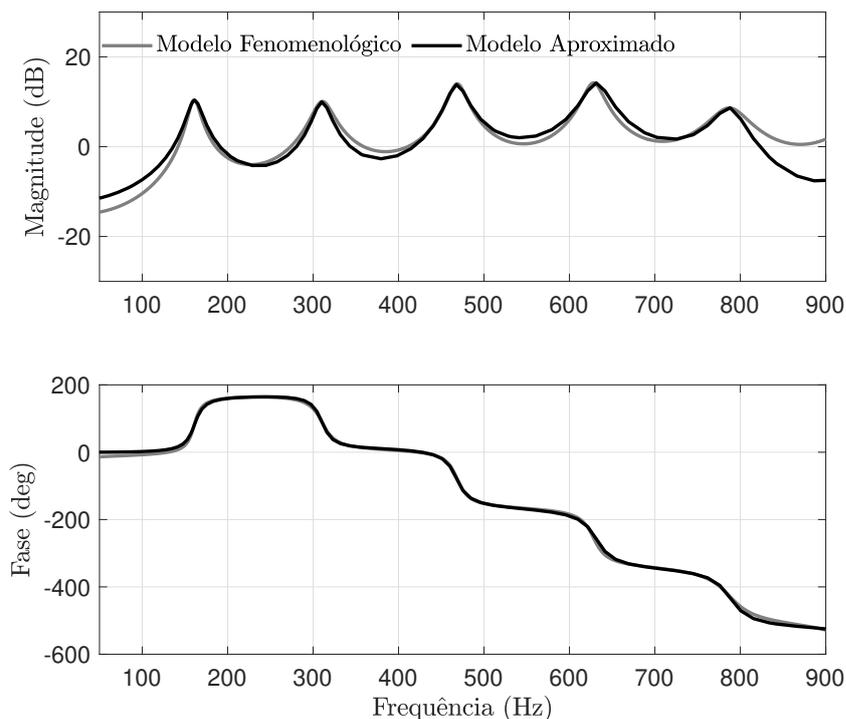


Figura 21 – Comparação entre o modelo fenomenológico e o modelo identificado.

No diagrama de polos e zeros apresentado na Figura 22, é possível observar o posicionamento dos polos e zeros para o sistema identificado. Note que o padrão dos polos é similar à equação da onda amortecida, na qual a parte imaginária dos polos é um múltiplo inteiro da frequência fundamental e a parte real possui amortecimento sucessivo conforme o aumento da frequência do modo. O valor numérico dos polos e zeros do modelo identificado, considerando duas casas decimais de precisão, são apresentados na Tabela 4.

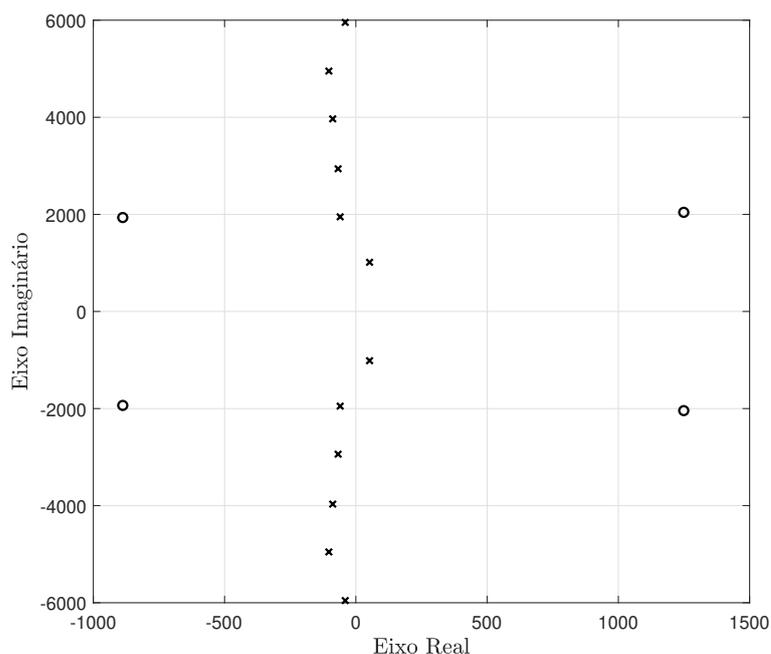


Figura 22 – Diagrama de polos e zeros do modelo identificado. As cruzes representam os polos e os círculos os zeros.

Tabela 2 – Polos e zeros da função de transferência identificada. Utilizou-se dois dígitos de aproximação.

Polos	Zeros
$-40.36 \pm 5954.80j$	$-887.94 \pm 1935.27j$
$-102.86 \pm 4952.84j$	$+1249.08 \pm 2042.27j$
$-88.11 \pm 3968.02j$	
$-67.54 \pm 2939.48j$	
$-59.72 \pm 1949.44j$	
$+52.36 \pm 1013.25j$	

#### 4.2.2 Funções de ponderação

Conforme descrito no Capítulo 3, os requisitos de desempenho de um sistema realimentado podem ser especificados impondo restrições nas funções de sensibilidade. As funções de ponderação selecionadas são baseadas nas equações (40)-(41), respectivamente, sendo  $k = 1$  para  $W_S$  e  $k = 2$  para  $W_T$ . A frequência de corte de

$S(j\omega)$  é definida como  $\omega_b = 6\text{Hz}$ , enquanto que  $\omega_{bc} = 180\text{ Hz}$  é estabelecido como a frequência de corte para  $T(j\omega)$ . O parâmetro  $A_p = 10^{-3}$  garante que o erro em estado estacionário seja pequeno, enquanto que  $M_S = 1.5$  restringe o pico de magnitude de  $S(j\omega)$ , e  $M_T = 40$  garante as condições de decaimento de  $T(j\omega)$ . Estes valores foram definidos após diversos estudos de simulação do sistema com os parâmetros definidos na Tabela 1.

### 4.3 CONTROLADOR $H_\infty$

Primeiramente, uma estratégia de controle  $H_\infty$  foi implementada para encontrar um controlador  $K$  tal que a função de transferência de malha fechada seja estável e satisfaça as especificações de desempenho. O comando *mixsyn* do Matlab foi utilizado para obter  $K$  a partir das funções de ponderações definidas nas seções anteriores e do modelo matemático simplificado de dimensão finita. O controlador obtido é de quarta ordem. Os gráficos da Figura 23, apresentam as curvas de magnitude das funções de sensibilidade e das funções ponderação. Note que ambas as condições  $|S(j\omega)| < 1/|W_S(j\omega)|$  e  $|T(j\omega)| < 1/|W_T(j\omega)|$  são satisfeitas para todo  $\omega$ , garantindo a existência de um controlador com desempenho robusto.

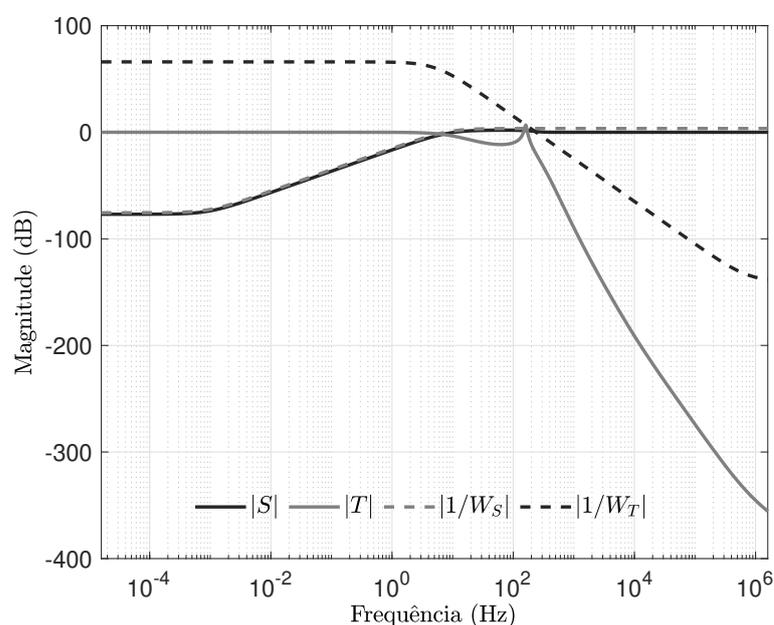


Figura 23 – Gráficos de magnitude das funções de sensibilidade e de ponderações para o controlador  $H_\infty$ . Neste cenário não foram consideradas incertezas matemáticas.

Os gráficos de fase do sistema em malha aberta e em malha fechada são apresentados na Figura 24. Note que em malha fechada, a fase decresce  $180^\circ$  em torno de todos os modos, indicando a estabilidade da planta controlada. Por fim, o comportamento no domínio do tempo do sistema de controle é apresentado na Figura 25. Conforme esperado, a planta estabiliza-se na origem após o transiente inicial. O

tempo de acomodação é de aproximadamente 0.08 s. Note que para esse sistema, a saída  $\tilde{y}(t)$ , que representa a pressão acústica não possui sinal de referência, pois, o que se busca nesse projeto é apenas a estabilização da pressão acústica e não o seguimento de alguma referência para a onda de pressão.

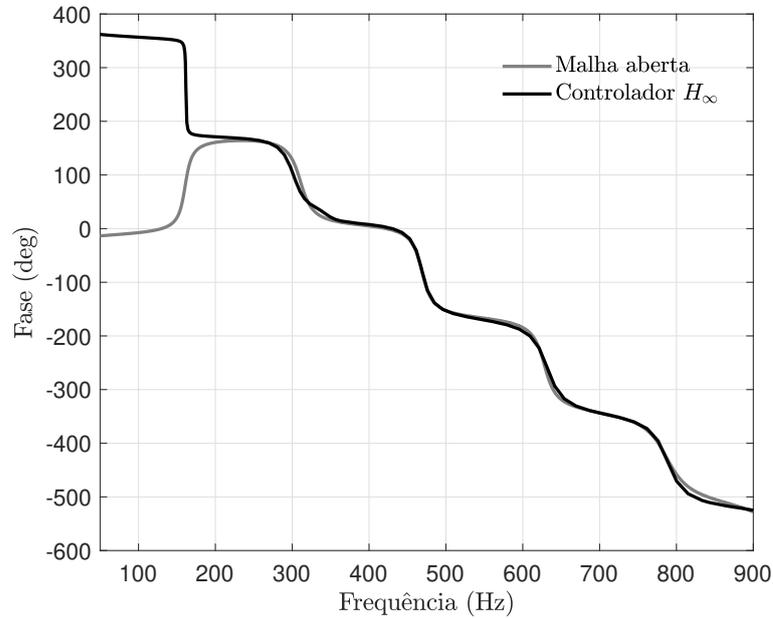


Figura 24 – Gráficos de fase do sistema em malha aberta e em malha fechada com o controlador  $H_\infty$ . Neste cenário não foram incluídas incertezas matemáticas no modelo.

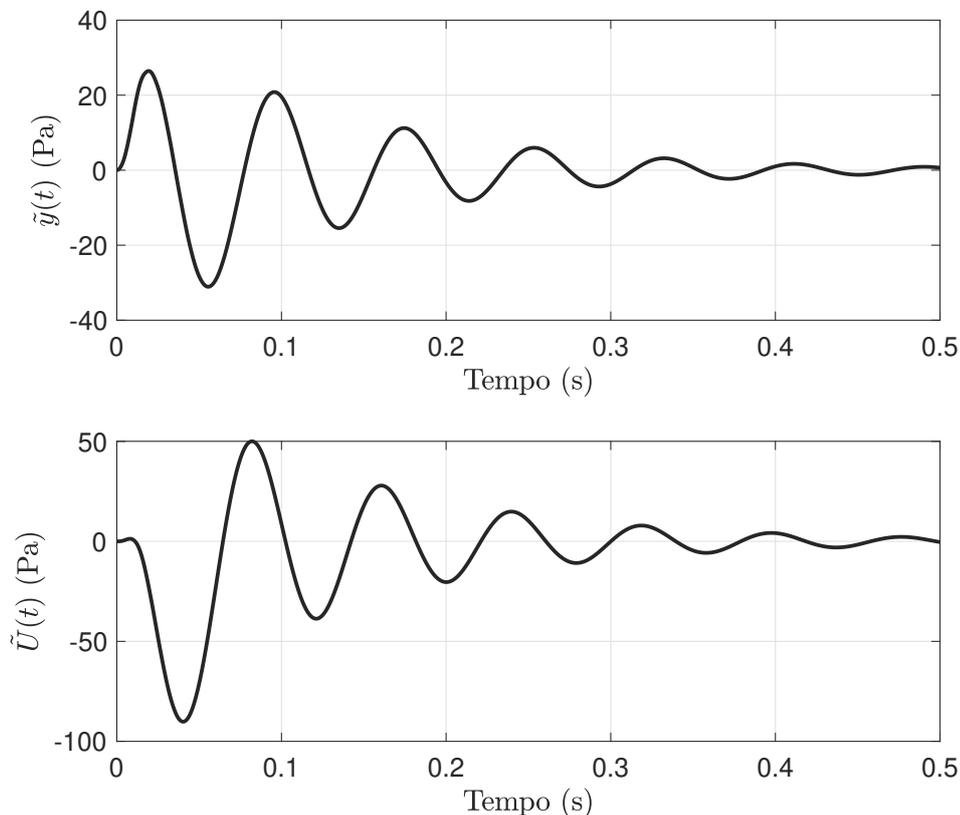


Figura 25 – Sinais de saída e controle da planta operando com o controlador  $H_\infty$ .

## 4.4 CONTROLADOR ROBUSTO BASEADO NA SÍNTESE $\mu$

Da mesma forma que no projeto da seção anterior, utiliza-se uma estratégia de controle  $H_\infty$  baseada na teoria de ponderação de sensibilidade para estabilizar o modelo do tubo de *Rijke* descrito no Capítulo 2, porém, dessa vez levando em consideração as incertezas da planta.

### 4.4.1 Modelagem de incertezas

Conforme descrito no Capítulo 2, o modelo estudado é baseado nos princípios físicos e leva em consideração os principais fenômenos dinâmicos das oscilações termoacústicas. O acoplamento térmico e acústico incluem um certo número de parâmetros característicos que devem ser estimados. Do ponto de vista prático, o modelo permite estimá-los comparando a sua resposta com dados experimentais. Para este fim, um processo de minimização não linear pode ser usado para ajustar a curva de dados do modelo com os dados experimentais, onde uma métrica de erro, tais como a integral do erro absoluto ou a integral do erro quadrático podem ser usadas como função custo. Neste caso, os parâmetros do modelo são as variáveis de decisão do problema de otimização, os quais devem ser restringidos para preservar os sentidos físicos. Embora este procedimento seja descrito nesta dissertação, está fora do escopo deste trabalho realizar tal calibração. Entretanto, a estimação de parâmetros pode ser uma fonte relevante de incertezas para leis de controles baseadas em modelos. Neste contexto, será projetado um controlador robusto e seu comportamento quantificado.

As principais incertezas no tubo de *Rijke* são: o valor estado estacionário das variáveis de estado, a constante empírica  $\kappa_0$ , a constante de tempo da taxa de liberação de calor  $\tau_{hr}$ , e as perdas de reflexão acústica  $Z_0$  e  $Z_L$ . Neste trabalho, consideraremos incertezas de  $\pm 10\%$  no parâmetro  $c_2$  dado que várias das incertezas comentadas entram continuamente nesse termo.

O gráfico de Bode da resposta em frequência correspondente ao modo instável do sistema de (39) deste experimento é apresentado na Figura 26. A linha central em preto representa a resposta em frequência da planta nominal ( $P_{nom}$ ), enquanto que as linhas tracejadas em cinza representam a resposta em frequência das possíveis variações que a planta nominal possa assumir em função dos parâmetros incertos.

#### 4.4.1.1 Obtenção do modelo para o pior caso de incertezas

Para fins de projeto do controlador, baseado na estrutura de controle descrita faz se necessário a substituição da família de plantas, por uma planta única, cuja gama de comportamentos inclui o comportamento de todas as plantas da família, ou seja, a planta  $W_m$ , que representa o pior caso para as incertezas.

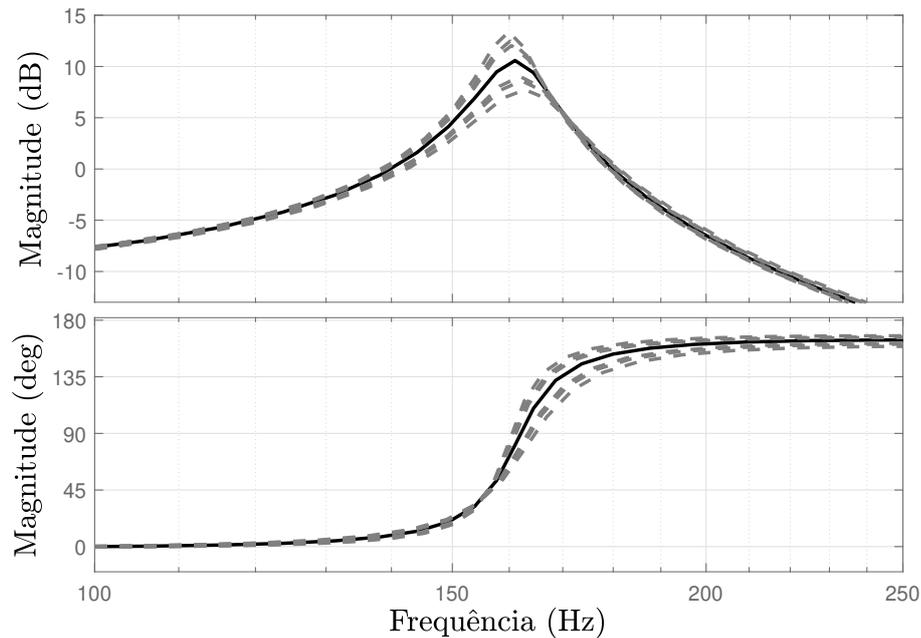


Figura 26 – Resposta em frequência da família de plantas.

Utilizando o comando *ucover* do *MATLAB* é possível obter uma função de transferência  $W_m$ , que abranja todo o comportamento dessa família de plantas. Este comando utiliza uma matriz de modelos LIT, contendo toda a família de incertezas e o modelo nominal da planta, modelando a diferença entre a matriz de modelos e a planta nominal como incerteza multiplicativa na dinâmica do sistema, retornando um modelo de incertezas que representa toda a gama de comportamentos da matriz de modelos no formato:

$$G = G_{nom}(1 + W_m\Delta) \quad (63)$$

Onde toda a incerteza está concentrada na dinâmica não modelada  $\Delta$ . Como o ganho de  $\Delta$  é uniformemente limitado por 1, em todas as frequências, o filtro de modelagem  $W_m$  é usado para registrar como a quantidade relativa de incerteza varia com a frequência. Esse filtro também é conhecido como função de ponderação de incerteza, pois ajusta a quantidade de incerteza em cada frequência.

O gráfico de magnitude da resposta em frequência de  $W_m$  é apresentado na Figura 27. Observe que a linha em preto que representa a magnitude de  $W_m$  abrange todas as variações relativas das incertezas, podendo ser considerado portanto, o pior caso. Quanto mais conservador se deseja ser no projeto, mais ascendente deve ser mantida a curva de  $W_m$ .

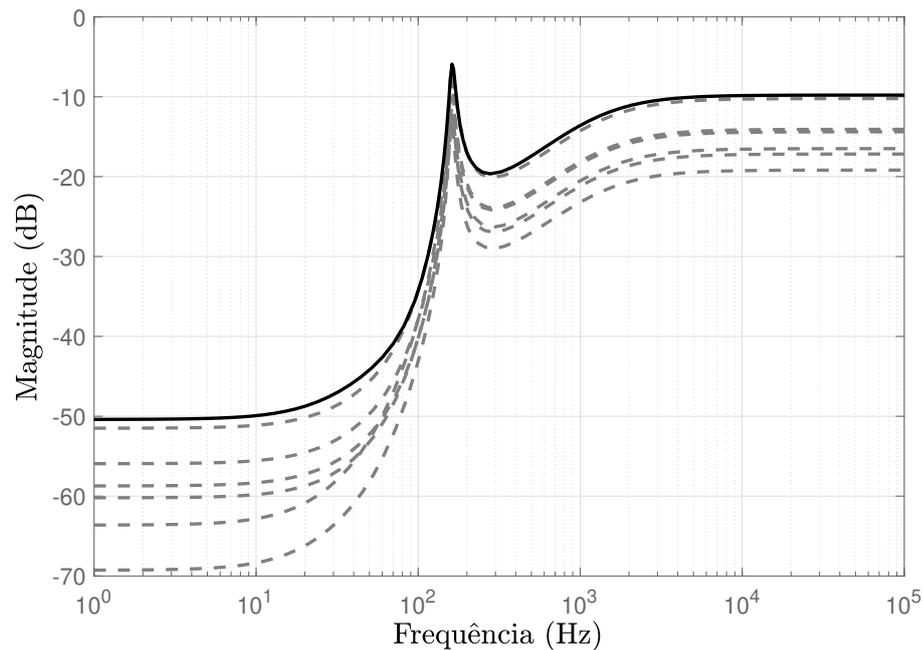


Figura 27 – Magnitude de  $W_m$  envolvendo toda a variação relativa do comportamento da planta.

#### 4.4.2 Funções de ponderação

De maneira similar ao controlador  $H_\infty$ , as funções de ponderação selecionadas são baseadas nas equações (40)-(41), respectivamente, sendo  $k = 3$  para  $W_S$  e  $k = 6$  para  $W_T$ . A frequência de corte  $\omega_b = 5$  Hz é definida para  $S(jw)$ , e  $\omega_{bc} = 190$  Hz é a frequência de corte de  $T(jw)$ . O erro em estado estacionário é definido como  $A_p = 10^{-3}$ , enquanto que o pico de  $S(jw)$  é  $M_s = 1,7$ , e  $M_T = 20$  para atender as condições de decrescimento de  $T(jw)$ .

#### 4.4.3 Projeto do controlador

A função *musyn* da biblioteca *Matlab robust control toolbox* do Matlab, foi utilizada para projetar o controlador robusto baseado na síntese  $\mu$ . O algoritmo implementado nessa função utiliza a iteração DK, que combina a metodologia  $H_\infty$  (etapa K) com a análise do valor singular estruturado (etapa D) para otimizar o desempenho robusto em malha fechada.

Os resultados das iterações do algoritmo DK são resumidos na Tabela 3 sendo que a coluna **Passo K** indica o valor da norma  $H_\infty$  do sistema em malha fechada. Na primeira iteração, este valor é calculado para o sistema nominal. Para as iterações restantes, as incertezas são consideradas no seu cálculo. A coluna **Valor máximo de  $\mu$**  apresenta o valor máximo de  $\mu$ , que é o índice de desempenho robusto. O valor da norma  $H_\infty$  da estimação de D é apresentado na coluna **Ajuste de D**. Por fim, a ordem

da estimação de D é dada na coluna **Ordem do ajuste**.

Tabela 3 – *Iterações do algoritmo DK para o projeto do controlador baseado na síntese  $\mu$ .*

Iteração	Passo K	Valor máximo de $\mu$	Ajuste de D	Ordem do ajuste
1	969,1	939,2	948,6	0
2	909,8	827,7	836	0
3	562	316,9	319,9	6
4	63,91	4,154	4,196	6
5	1,033	1,032	1,037	10
6	1,002	1,002	1,004	10
7	0,9997	0,9997	1,019	10
8	1,004	1,004	1,017	10

Quando o indicador de desempenho robusto (valor singular) está próximo de 1.0, indica que o controlador atingiu a largura de banda de malha fechada desejada e o decaimento adequado para  $T(j\omega)$ . Como regra geral, se o valor singular for menor que 0,85, então o desempenho pode ser melhorado, e se o valor singular for maior que 1.2, então a largura de banda de malha fechada desejada não é alcançável para a incerteza da planta especificada.

Quando existem diferenças grandes entre o valor máximo de  $\mu$  e a norma  $H_\infty$  em uma determinada iteração o algoritmo baseado na iteração DK não encontra um bom ajuste para as escalas D, e portanto, uma nova iteração deve ser realizada. Note que no resumo das interações apresentado na Tabela 3, ambas as condições são satisfeitas nas iterações finais.

Com relação às funções de desempenho, podemos observar através dos gráficos da Figura 28 que as condições  $|S(j\omega)| < 1/|W_S(j\omega)|$  e  $|T(j\omega)| < 1/|W_T(j\omega)|$  são satisfeitas para todo  $\omega$ . O controlador por realimentação de saída obtido nesse projeto é de 24° ordem. Entretanto, a sua ordem pode ser reduzida como apresentado na sequência.

#### 4.4.4 Controlador de ordem reduzida

Em projetos de controladores robustos, além de garantir as especificações do sistema de controle, também existe uma preocupação do custo computacional do controlador resultante, o que muitas vezes dificulta a viabilidade de determinados controladores. Assim, uma forma de contornar esse problema é buscando um controlador de ordem reduzida que mantenha os critérios de robustez exigidos pelo sistema.

Quando usamos a função *musyn* para sintetizar um controlador, a expressão resultante geralmente é de ordem mais alta do que o necessário para alcançar o desempenho robusto desejado. Uma forma de mitigar esse problema é realizar a redução da função de transferência de  $K$  usando os comandos *reduce* e *musynperf*

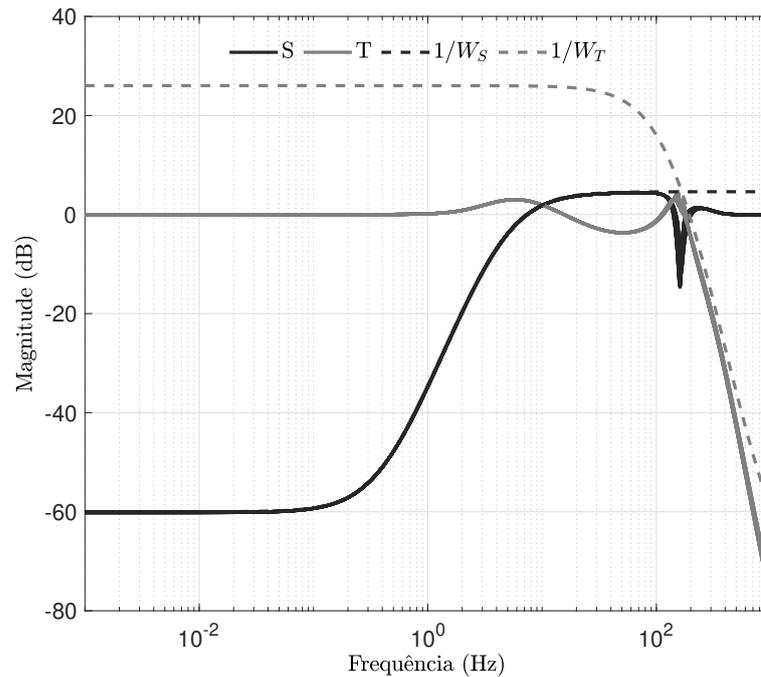


Figura 28 – Gráficos de magnitude das funções de sensibilidade e de ponderações para o controlador baseado na síntese  $\mu$ . Neste cenário foram consideradas incertezas matemáticas.

do *MATLAB*, que retornam um modelo de ordem reduzida de  $K$  com desempenho não inferior a 5% em comparação com o controlador original.

A Figura 29 apresenta o gráfico de Bode do controlador original  $K$  (de  $24^\circ$  ordem) e do de ordem reduzida  $K_r$  (de  $10^\circ$  ordem). Como podemos observar nessa figura,  $K_r$  possui um comportamento muito semelhante à  $K$ , principalmente na região de frequência de interesse, portanto, para as simulações que serão apresentadas será considerado o controlador  $K_r$ .

#### 4.4.5 Filtro do sinal de controle

Quando sintetizamos uma lógica de controle usando apenas um modo acústico significa que estamos conscientemente negligenciando os modos de ordem superior. Ao fazer isso, é uma boa ideia inserir um filtro de *roll-off* na lógica de controle, com frequência além da largura de banda de controle.

Isso reduz a possibilidade de desestabilização da dinâmica das frequências mais altas, evitando o efeito conhecido como *spill-over*, em que os modos de mais altas frequências, que são naturalmente estáveis, se tornem instáveis em função da excitação provocada pelo sinal de controle (BRYSON, 1994).

A inserção de um filtro passa baixa, no sinal de controle, com formato  $F(s) = \omega_F / (s + \omega_F)$ , com frequência além da largura de banda de controle, garante que os modos de mais altas frequências, que são naturalmente estáveis, não sejam excitados e corram o risco de se tornar instáveis.

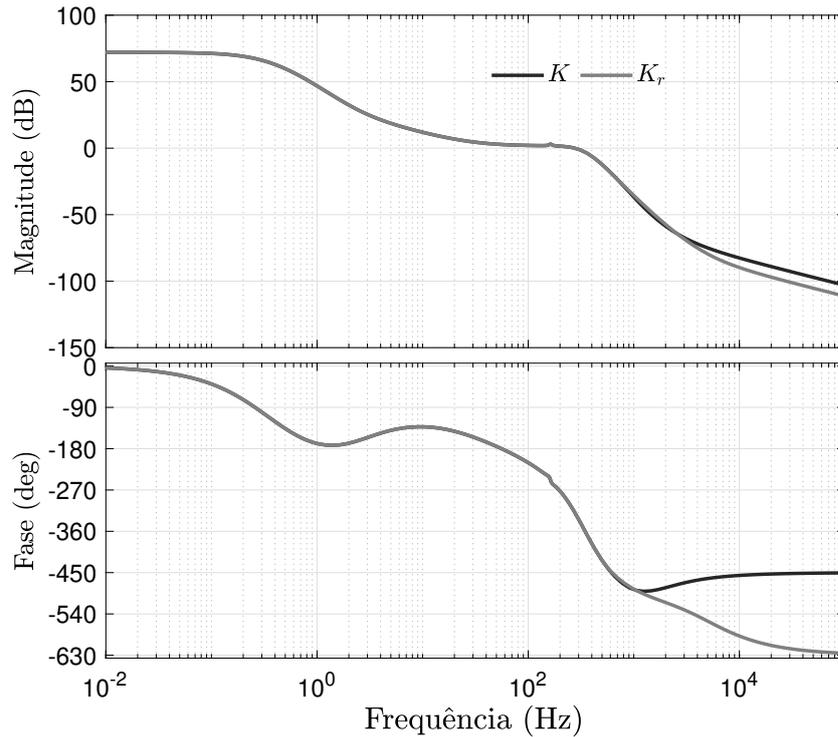


Figura 29 – Gráficos de Bode do controlador reduzido e do controlador original.

#### 4.4.6 Simulações com o controlador baseado na síntese $\mu$

As simulações apresentadas nessa seção avaliarão o desempenho do sistema de malha fechada com o controlador  $K_r$ , definido na seção anterior. As curvas de fase do sistema em malha aberta e malha fechada com o controlador  $K_r$  são apresentadas na Figura 30, na qual nos permite verificar a estabilidade do sistema.

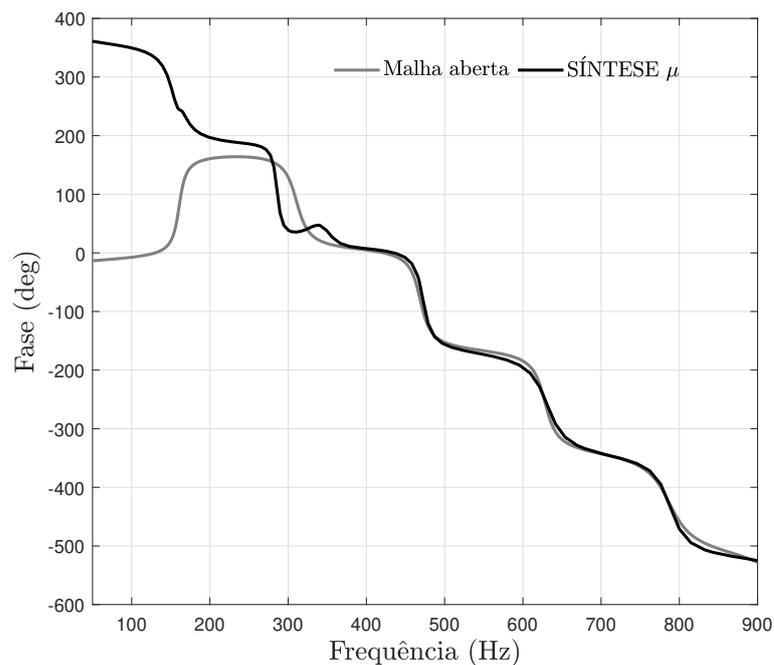


Figura 30 – Resposta em frequência do sistema em malha aberta e malha fechada.

Na Figura 31 temos os sinais de saída e de controle da planta em malha fechada. Observe que a saída tende a zero quando o sistema é submetido a uma perturbação em torno de seu ponto de equilíbrio instável.

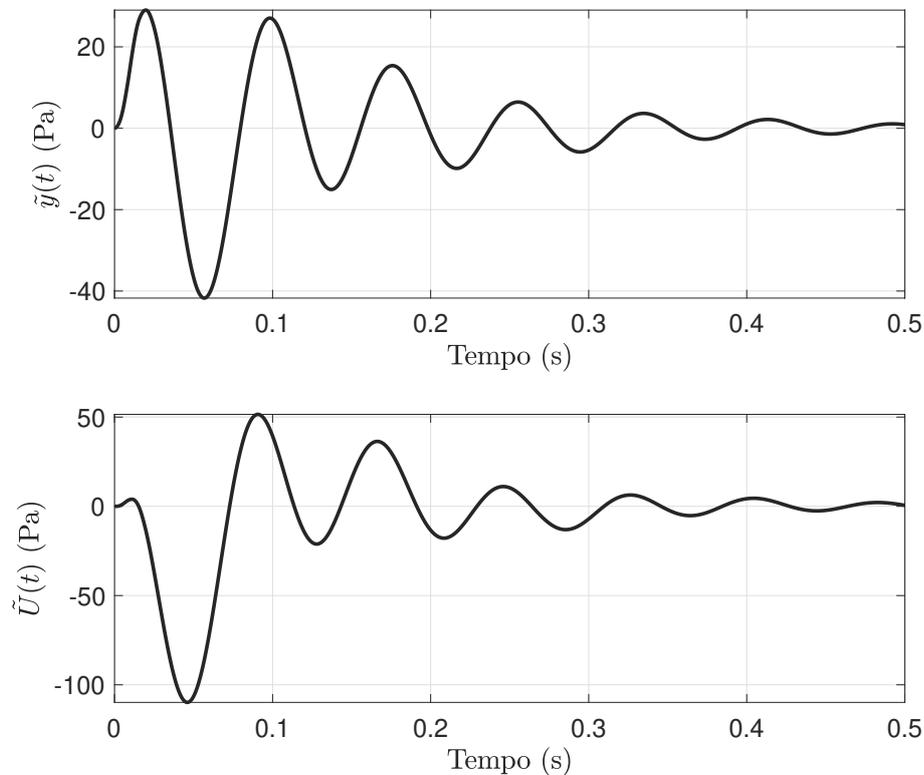


Figura 31 – Sinais de saída e controle da planta operando com o controlador robusto baseado na síntese  $\mu$ .

A condição de estabilidade robusta do sistema de controle em que  $|T(j\omega)| < 1/|W_m(j\omega)|$ , é apresentada na Figura 32. De maneira similar, na Figura 33 temos a condição de desempenho robusto, em que  $|W_s(j\omega)T(j\omega)| + |W_m(j\omega)T(j\omega)| < 1$ . Ambas as condições, estabilidade e desempenho robusto, são satisfeitas para o estudo numérico em questão.

A robustez do sistema de controle também pode ser analisada através das margens de ganho e fase do diagrama de *Nyquist*. Na literatura, é recomendado ter margem de ganho maior que 3dB, e margem de fase maior que  $30^\circ$  para que o sistema de controle opere de forma robusta para uma variação sinificativa das incertezas.

A Figura 34 apresenta a curva de *Nyquist* e a margem de ganho e de fase, as quais são 7,4 dB e  $44^\circ$ , respectivamente. Observe também que a curva de *Nyquist* circula o ponto -1 duas vezes no sentido anti-horário, pois o sistema possui um par de polos complexos conjugados no semiplano direito.

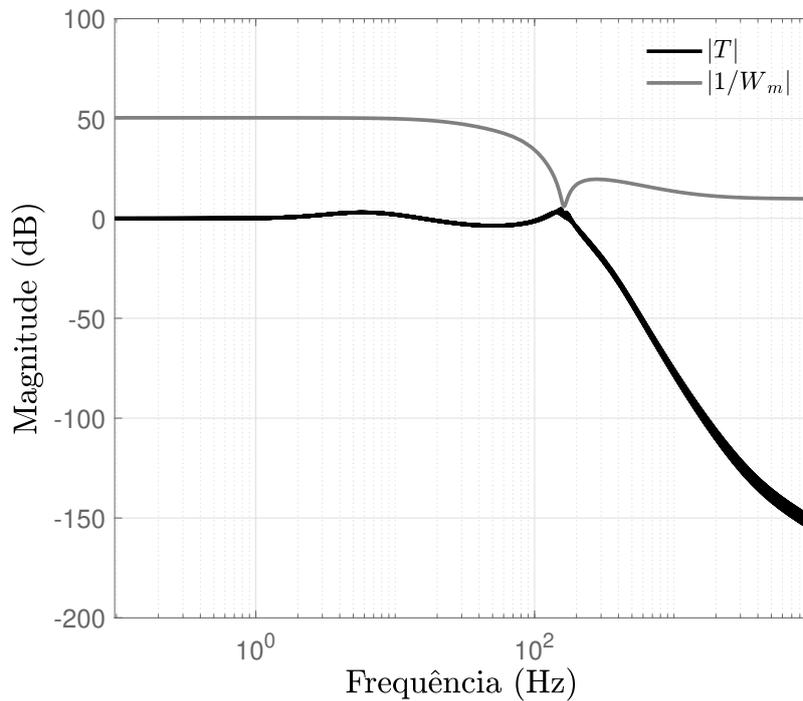


Figura 32 – Condição para estabilidade robusta.

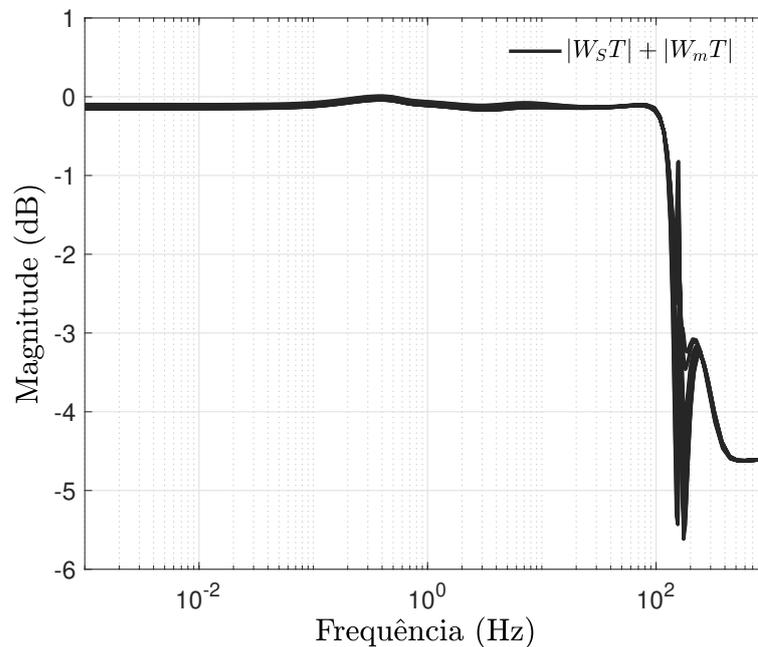


Figura 33 – Condição de desempenho robusto.

#### 4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo foram apresentadas as simulações numéricas do sistema operando em malha aberta e malha fechada. Primeiramente, as simulações de malha aberta foram apresentadas para validar qualitativamente o comportamento condizente

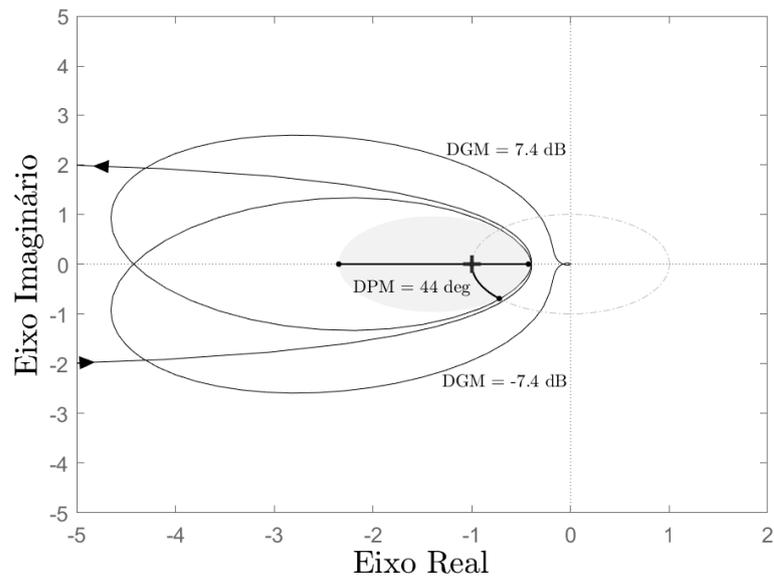


Figura 34 – Diagrama de Nyquist do sistema de controle baseado na síntese  $\mu$ . As margens de ganho e fase são 7.4 dB e  $44^\circ$ , respectivamente.

do modelo com a realidade, possibilitando diversas aplicações. Na sequência, uma estratégia de controle  $H_\infty$  é aplicada utilizando funções de ponderação para limitar a função de sensibilidade e de sensibilidade complementar para garantir a estabilidade e desempenho em malha fechada. O segundo controlador é baseado na síntese  $\mu$  e estende a estratégia  $H_\infty$  para incluir as incertezas paramétricas da planta. Considerando variações de  $\pm 10\%$  em um dos parâmetros do modelo obteve-se um controlador com 7.4 dB de margem de ganho e  $44^\circ$  de margem de fase. Dentre as dificuldades no projeto deste controlador, destaca-se a escolha das funções de ponderação para que o controlador não seja muito conservador, ou para que o algoritmo DK encontre uma solução.

## 5 CONCLUSÃO

As oscilações termoacústicas, embora possam ser consideradas como um mecanismo de conversão de energia, na maioria das aplicações se manifestam como fenômenos indesejados, demandando abordagens de mitigação devido à sua potencial nocividade tanto para os sistemas em questão quanto para o meio ambiente.

Neste contexto, o presente trabalho teve como objetivo fundamental explorar as oscilações termoacústicas presentes em sistemas de combustão, com o propósito de viabilizar o desenvolvimento de estratégias de controle ativo robusto para mitigar essas oscilações indesejadas.

Para investigar e compreender estas oscilações termoacústicas, o tubo de *Rijke* foi adotado como protótipo principal. Esse tubo foi escolhido como uma plataforma viável para reproduzir os fenômenos das oscilações termoacústicas, permitindo a construção de um modelo matemático para fins de controle. Dado o caráter intrincado de tal modelagem, as escolhas devem ser feitas levando em conta particularidades inerentes a cada aspecto do sistema. Nesse contexto, as decisões foram guiadas pela pesquisa apresentada em Epperlein *et al.* (2015).

Ao explorar a modelagem física do tubo de *Rijke*, buscou-se apresentar, de maneira matemática, a dinâmica acústica característica do tubo, notada por ser um sistema LTI, e a liberação de calor pela resistência, que induz uma dimensão de não linearidade. Sendo assim, a interconexão entre esses dois fenômenos físicos (dinâmica acústica e a liberação de calor instável) aplicados na realimentação do sistema, apresenta-se como um fator fundamental na manutenção da estabilidade termoacústica do sistema.

A técnica de controle robusto adotada, baseada na metodologia  $H_\infty$ , demonstrou-se eficiente ao permitir a inclusão de um modelo de incertezas no cenário nominal. Essa abordagem possibilitou o projeto de um controlador capaz de assegurar a estabilidade, mesmo diante da presença de variáveis ou características que podem ter sido subestimadas ou excluídas na modelagem original da planta. Esse enfoque robusto representa um avanço significativo na busca por soluções de controle que se mostrem eficazes em face das complexidades e incertezas inerentes aos sistemas termoacústicos em estudo.

As simulações com a implementação da lei de controle desenvolvida apresentaram um resultado capaz de controlar o sistema. Observou-se que o controlador, diante de variação de incertezas apresentadas ( $\pm 10\%$ ), se mostrou suficientemente robusto e, por consequência, foi capaz de controlar as variáveis dentro das influências das incertezas que afetam o sistema. No entanto, quando submetido a uma carga de incertezas maior que ( $\pm 10\%$ ), o controlador não se mostrou suficientemente robusto e alguns parâmetros de estabilidade robusta não são mais alcançados sob condições

de incerteza mais significativas.

Esse trabalho foi realizado com o intuito de entender os fenômenos termoacústicos de modo a formar uma base de pesquisa para trabalhos futuros. A solução apresentada é uma solução viável para fins acadêmicos, porém para estender essa solução para aplicações comerciais/industriais será preciso especificar melhor o modelo, adaptando-o para sistemas reais que são mais complexos do que o tubo de *Rijke*, além da necessidade de estudar o uso de um atuador que seja mais eficiente do que o auto falante, tendo em vista que os sistemas industriais são sistemas de elevada potência e a utilização de um auto falante como atuador seria difícil de implementar em razão da potência exigida.

Em caldeiras industriais, como forma de mitigar os efeitos das oscilações termoacústicas é comum utilizar uma técnica simples de controle passivo, que inclui a mudança no ponto de instalação da fonte de calor, porém, com o passar do tempo as técnicas de controle ativo ficarão mais conhecidas e aprimoradas e provavelmente passarão a ser mais utilizadas, tendo em vista a flexibilidade que se tem em operar um equipamento com sistema de controle ativo em relação a um equipamento operando com controle passivo.

## 5.1 CONTRIBUIÇÕES

Partes deste documento foi publicado na revista de divulgação do PósAutomação UFSC:

de ANDRADE, G. A., BIAZETTO, P. H. F. e ROSALEN F. Instabilidades termoacústicas em um tubo de Rijke: Experimentos de controle ativo e identificação. Revista PosAutomação. Florianópolis, Brasil, n. 6, p.12-19, Maio 2023,

e outro trabalho foi apresentado na 20th Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control:

ROSALEN, F. e de ANDRADE, G. A. Robust Control Design based on  $\mu$ -synthesis for Stabilization of Thermoacoustic Oscillations in a Rijke Tube. Submetido para a 20th Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control. Oberá, Argentina 2023.

Este documento também contribuiu para o aprofundamento dos trabalhos de pesquisas que vem sendo conduzidos pelo professor Gustavo Artur de Andrade, Dr., do Departamento de Automação e Sistemas da UFSC, no âmbito de modelagem e controle de oscilações termoacústicas, sendo que foi apresentado um projeto de controle com a inclusão de incertezas no modelo, investigação que até então não havia sido explorada:

de ANDRADE, G. A.; VAZQUEZ, R.; PAGANO, D. J. Boundary control of a Rijke Tube using irrational transfer functions with experimental validation. In: IFAC (International Federation of Automatic Control). P. 4528–4533, 2017,

de ANDRADE, G. A.; VAZQUEZ, R.; PAGANO, D. J. Backstepping stabilization of a linearized ODE–PDE Rijke tube model. *Automatica*, Elsevier, v. 96, p. 98–109, 2018. .

Este trabalho contribuiu também para a formação de base de pesquisa no desenvolvimento de estratégias de controle para oscilações termoacústicas em câmaras de combustão.

## 5.2 TRABALHOS FUTUROS

A partir dos estudos realizados nessa dissertação, bem como das bibliografias estudadas, sugere-se para trabalhos futuros os seguintes temas:

- Validar o controlador robusto proposto num protótipo do tubo de *Rijke*.
- Utilizar metodologias de controle robusto mais sofisticadas que consideram LMIs para verificar a possibilidade de resultados satisfatórios quando o sistema é submetido a incertezas maiores que  $\pm 10\%$ . Nesta linha de pesquisa, a abordagem de representação de incertezas por polítopos pode ser promissora.
- Estender os resultados apresentados para casos mais complexos. Embora os estudos realizados nesta dissertação utilizaram diversas hipóteses simplificadoras, eles podem formar a base para desenvolver estratégias de controle para sistemas de combustão com oscilações termoacústicas longitudinais, ou até mesmo, em combustores anulares.
- Avaliar a utilização de atuadores mais sofisticados, capazes de serem implementados em sistemas de elevada potência, como por exemplo, transdutores, em virtude das limitações impostas pelo auto falante.
- Avaliar a possibilidade de utilização dessa proposta em sistemas de tempo real.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, G. A. de; VAZQUEZ, R.; PAGANO, D. J. Backstepping stabilization of a linearized ODE–PDE Rijke tube model. **Automatica**, Elsevier, v. 96, p. 98–109, 2018.
- ANDRADE, Gustavo A. de; VAZQUEZ, Rafael; PAGANO, Daniel J. Boundary control of a Rijke Tube using irrational transfer functions with experimental validation. *In: IFAC (International Federation of Automatic Control)*. [S.l.: s.n.], 2017. P. 4528–4533.
- ANNASWAMY, Anuradha M; GHONIEM, Ahmed F. Active control in combustion systems. **IEEE Control Systems Magazine**, IEEE, v. 15, n. 6, p. 49–63, 1995.
- BRYSON, Arthur Earl. **Control of Spacecraft and Aircraft**. [S.l.]: Princeton University Press, 1994.
- CORON, J.M.; BASTIN, G. **Stability and boundary stabilization of 1-D hyperbolic systems**. New York: Birkhäuser Basel, 2016.
- EPERLEIN, J. P.; BAMIEH, B.; ASTROM, K. J. Thermoacoustics and the Rijke tube: Experiments, identification, and modeling. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 35, n. 2, p. 57–77, 2015.
- HOSSEINI, Naseh; TEERLING, O.J.; KORNILOV, V.; ARTEAGA, I. Lopez; GOEY, L.P.H. de. **Thermoacoustic Instabilities in a Rijke Tube with Heating and Cooling Elements**, 2017.
- KELSALL, G.; TROGER, C. Prediction and control of combustion instabilities in industrial gas turbines. **Applied Thermal Engineering**, v. 24, p. 1571–1582, 2004.
- KING, L V. On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluid: Determination of the convection constants of small platinum wires with applications to hot-wire anemometry. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, v. 214, p. 373–432, 1914.
- LIENWEN, T. C.; YANG, V. **Combustion instabilities in gas turbines engines: operational experience, fundamental mechanisms, and modeling**. [S.l.]: American Institute of Aeronautics e Astronautics, 2005.

- LIEUWEN, T. C.; YANG, V. **Combustion instabilities in gas turbine engines: Operational experience, fundamental mechanisms, and modeling.** [S.l.]: AIAA, 2005.
- LIGHTHILL, M. J. The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. 224, p. 1–23, 1954.
- MATVEEV, Konstantin. **Thermoacoustic Instabilities in the Rijke Tube: Experiments and Modeling.** 2003. Tese (Doutorado) – California Institute of Technology.
- MOECK, Jonas P.; PAUL, Markus; PASCHEREIT, Christian Oliver. Thermoacoustic instabilities in an annular Rijke tube. **Proceedings of ASME Turbo Expo 2010. Power for Land Sea and Air GT2010**, 2010.
- MONGIA, H.C.; HELD, T.J.; G.C. HSIAO, and R.P. Pandalai. Challenges and progress in controlling dynamics in gas turbine combustors. **Journal of Propulsion and Power**, v. 19, p. 822–829, 2003.
- MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. **Robust process control.** [S.l.]: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- POINSOT, T. J.; TROUVE, A. C.; VEYNANTE, D. P.; CANDEL, S. M.; ESPOSITO, E. J. Vortex-driven acoustically coupled combustion instabilities. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 177, p. 265–292, 1987.
- RASHWAN S. S. MOHANY, A. e Dincer. Investigation of self-induced thermoacoustic instabilities in gas turbine combustors. **Energy**, v. 190, p. 116–362, 2020.
- RAUN, R. L.; BECKSTEAD, M. W. Active Control in Combustion Systems. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 15, p. 49–63, 1995.
- RAUN, R. L.; BECKSTEAD, M. W.; FINLINSON, J. C.; BROOKS, K. P. A review of Rijke tubes, Rijke burners and related devices. **Progress in Energy and Combustion Science**, v. 19, n. 4, p. 313–364, 1993.
- RAYLEIGH, L. The explanation of certain acoustical phenomena. **Nature**, v. 18, p. 319–321, 1878.

RIJKE, P. L. Notice of a new method of causing a vibration of the air contained in a tube open at both ends. **Philosophical Magazine** 4, v. 17, n. 116, p. 419–422, 1859.

SIRIGNANO, W. A. Driving mechanisms for combustion instability. **Combustion Science and Technology**, v. 187, p. 162–205, 2015.

SKOGESTAD, Sigurd; POSTLETHWAITE, Ian. **Multivariable Feedback Control**. Edição: Wiley. Second Edition. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, 2006.

WILHELMSSEN, Nils Christian Aars. **Estimation Algorithms for Thermoacoustic Instabilities with Distributed and Nonlinear Dynamics**. 2021. PhD Thesis – Centre Automatique et Systèmes, Mines ParisTech.

ZHAO, D.; LU, Z.; ZHAO, H.; LI, X. Y.; WANG, B.; LIU, P. A review of active control approaches in stabilizing combustion systems in aerospace industry. **Progress in Aerospace Sciences**, p. 35–60, 2018.

ZHOU, Kemin; DOYLE, John C. **Essentials of robust control**. [S.l.]: . Upper Saddle River, NJ, 1998.

# **Apêndices**

## APÊNDICE A – INSTABILIDADES TERMOACÚSTICAS EM UM TUBO DE RIJKE: EXPERIMENTOS DE CONTROLE ATIVO E IDENTIFICAÇÃO

Instabilidades termoacústicas são fenômenos que ocorrem em uma grande variedade de sistemas de combustão, principalmente em sistemas com fluxo contínuo, tais como caldeiras industriais e domésticas, turbinas a gás e a vapor, além de motores a reação (veja Figura 35). Este fenômeno se refere à oscilações de pressão em alta frequência tipicamente dominados pelas propriedades acústicas da câmara de combustão. O principal mecanismo causador da instabilidade é o acoplamento em fase entre a acústica da câmara e o processo de liberação de calor que causa oscilações auto-sustentáveis que crescem exponencialmente até saturarem devidos aos efeitos não lineares.

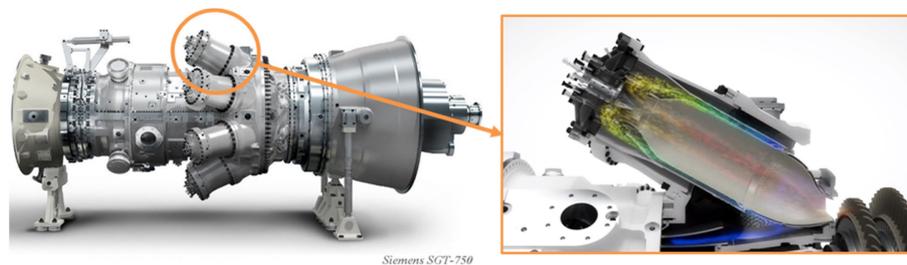


Figura 35 – Turbina a gás SGT 750 da Siemens com detalhe da câmara de combustão anular. Extraído de (RASHWAN S. S. MOHANY, 2020).

A maior dificuldade no desenvolvimento das estratégias de controle é o entendimento dos fenômenos termoacústicos em operações realísticas. Do ponto de vista de modelagem, o comportamento de sistemas de combustão é complexo de ser representado matematicamente devido às reações químicas que envolvem a queima de combustível e suas interações com a dinâmica acústica. Mais precisamente, um modelo fenomenológico de câmara de combustão deve levar em consideração a acústica, dinâmica do fluido, processo de transporte, cinética química, cinemática da chama, transferência de calor, dinâmica dos reagentes e o processo de vaporização. Estes fenômenos podem ser acoplados de diversas maneiras e o controle ativo seria outro componente que necessitaria ser incluído na interação. Um protótipo simplificado tipicamente utilizado para estudar estratégias de controle é o tubo de *Rijke*, que é capaz de gerar instabilidades termoacústicas sem um processo de combustão. Isto torna o problema modelagem e análise do sistema mais tratável, enquanto que diversas questões da supressão de instabilidades termoacústicas ainda estão presentes.

Neste estudo, apresenta-se o tubo de *Rijke* e a problemática do controle ativo envolvido na supressão de instabilidades termoacústica. Primeiramente, descreve-se o construção do protótipo experimental e sua dinâmica com o auxílio de diagramas de blocos que representam a física envolvida. Na segunda parte apresenta-se os resultados experimentais de malha fechada com uma estratégia de controle baseada

no sinal de pressão acústica atrasado em fase. A resposta em frequência em malha fechada é então estudada e a reconstrução da função de transferência de malha aberta a partir destes dados é obtida. Esta função de transferência de caixa-preta nos dá intuições sobre o fenômeno termoacústico e seu controle ativo através dos polos e zeros do sistema.

### A.1 CONSTRUÇÃO DO PROTÓTIPO DO TUBO DE *RIJKE*

A configuração do tubo de *Rijke* descrita nesta seção corresponde ao protótipo usado no Departamento de Automação e Sistemas da UFSC. As dimensões do aparato podem ser modificadas de acordo com as especificações de outros laboratórios. Os principais componentes do sistema são (veja a Figura 36):

- Tubo de vidro de comprimento de 1,05 m, com diâmetro interno de 0,054m.
- Resistência elétrica.
- Fonte de corrente contínua.
- Microfone com amplificador de sinal.
- Alto-falante.
- Amplificador de potência.
- Placa de aquisição de dados.

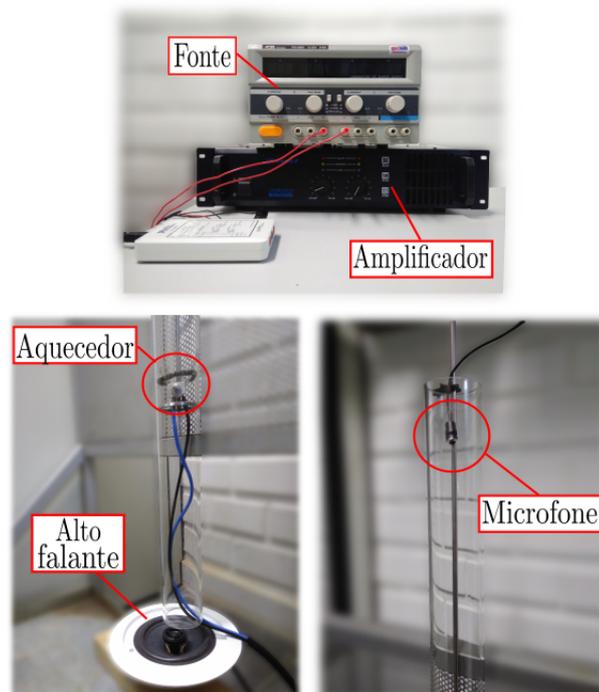


Figura 36 – *Protótipo do tubo de Rijke.*

O tubo de vidro é montado verticalmente em uma estrutura rígida com a resistência elétrica posicionada na metade inferior. A fonte de corrente contínua é usada

para aquecer a resistência elétrica. O microfone com amplificador de sinal é instalado na metade superior do tubo para medir a pressão acústica. O alto-falante é utilizado como atuador e está situado a uma pequena distância do tubo. O sinal do microfone é capturado pela placa de aquisição de dados e utilizado em algoritmos de identificação e/ou controle. O sinal de controle gerado no computador é enviado da placa de aquisição de dados para o amplificador de potência que está conectado ao alto-falante.

## A.2 INSTABILIDADES TERMOACÚSTICAS NO TUBO DE *RIJKE*

O protótipo do tubo de *Rijke* tem sido objeto de vários estudos para compreender e desenvolver métodos que mitigam instabilidades termoacústicas. A Figura 3 apresenta um diagrama básico do sistema com microfone e alto-falante para implementação de técnicas de controle ativo.

Induzir oscilações de pressão acústica no tubo de *Rijke* é relativamente simples. Quando a resistência elétrica está suficientemente quente, o ar que atravessa a zona de aquecimento se expande, causando um aumento repentino da pressão local. A pressão se propaga acusticamente ao longo do tubo e retorna, influenciando a si mesma na área de aquecimento. Nestas condições, o acoplamento entre a dinâmica acústica e térmica torna-se instável e gera um ciclo limite estável que resulta em oscilações de pressão audíveis.

Na Figura 37 é apresentado o comportamento da pressão acústica medida no protótipo desenvolvido. A partir do gráfico superior da Figura 37, podemos notar que há um crescimento linear da pressão, e então, ela satura formando o comportamento oscilatório periódico não simétrico, detalhado no gráfico inferior. Medindo a frequência do som gerada, na qual é aproximadamente 170 Hz para o aparato utilizado neste trabalho, e assumindo condições normais da velocidade do som é possível estimar que o comprimento de onda é igual a duas vezes o comprimento do tubo. Esta observação é consistente com o comprimento de meia-onda estacionária em um tubo aberto em ambas as extremidades.

Os três componentes principais do fenômeno termoacústico, que estão intrinsecamente interligados, são acústica, a liberação de calor instável, e a variação do fluxo de ar. Estes efeitos coexistem em uma relação onde a instabilidade, manifestada na forma de onda estacionária auto-amplificada, só pode existir na presença do fluxo de ar e calor instável. Este último é induzido pela própria acústica e influenciado pelo fluxo de ar. Apesar do forte acoplamento, as principais características dos fenômenos podem ser descritas separadamente, conforme apresentado no diagrama esquemático na Figura 5.

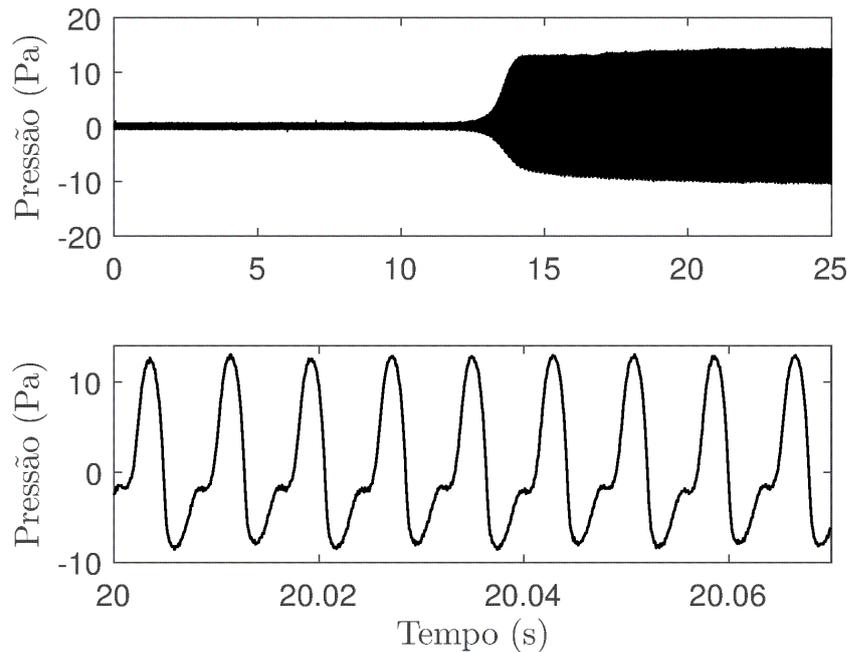


Figura 37 – Pressão acústica medida no tubo de Rijke em função do tempo. A partir do gráfico superior podemos notar que há um crescimento linear das oscilações, e então, a pressão satura formando um ciclo limite estável. O gráfico inferior mostra o comportamento periódico e assimétrico do comportamento da pressão ampliada.

### A.3 ESTABILIZAÇÃO DE OSCILAÇÕES TERMOACÚSTICA: ABORDAGEM AD-HOC

Uma abordagem amplamente usada para suprimir oscilações termoacústicas consiste em utilizar o sinal de pressão medido amplificado e atrasado em fase. Apesar de ser uma técnica simples, ela requer o conhecimento do modo instável da planta, dado que o atraso de fase do controlador é determinado a partir da frequência da oscilação que se deseja suprimir. No tubo de *Rijke*, esta metodologia é simples de ser implementada, pois a frequência do modo fundamental é facilmente medida através do microfone, entretanto, em câmaras de combustão reais nem sempre é possível medir este valor, e por isso, algumas metodologias foram criadas para estimar a frequência de oscilação em tempo real a partir da transformada rápida de *Fourier*.

A técnica de controle por atraso de fase foi considerada como ponto de partida para estudar e analisar a estabilização de oscilações termoacústicas. Os parâmetros do controlador foram escolhidos por tentativa e erro. A partir de diversos testes experimentais, foi constatado que existe uma faixa de valores de ganho e atraso de fase que são capazes de estabilizar o sistema. Entretanto, quando o ganho é aumentado para o valor crítico, ocorre o fenômeno de *spillover*, na qual os modos superiores do sistema são instabilizados.

Os resultados experimentais são apresentados na Figura 38. Como pode ser visto nessa figura, o sistema foi primeiramente induzido à região instável, e então, o

controlador foi ativado. A pressão acústica decresce rapidamente para zero, conforme visualizado no gráfico superior da Figura 38. Na sequência, o controlador foi desativado, e conforme esperado, as oscilações de pressão crescem novamente. É importante enfatizar que a estabilização de oscilações termoacústicas é diferente do cancelamento de ruído, presente em diversos fones de ouvido com cancelamento ativo de ruído. Neste último, o sinal de controle é diferente de zero para que o ruído persistente seja anulado, enquanto que na estabilização o sinal de controle decresce e se mantém próximo de zero.

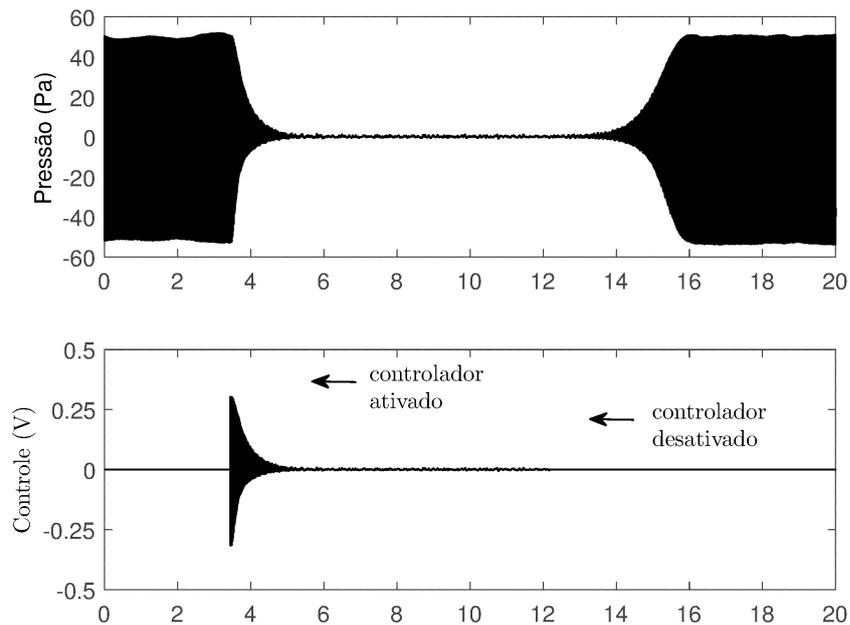


Figura 38 – *Evolução da pressão acústica e sinal de controle em função do tempo durante um experimento em malha fechada.*

A Figura 39 mostra a curva de *Nyquist* do sistema considerando o controlador por atraso de fase. Note que a curva circula o ponto -1 duas vezes no sentido anti-horário, dado que o sistema possui um modo instável em malha aberta. Além disso, o sistema de malha fechada é razoavelmente robusto para mudanças de parâmetros e incertezas da planta devido à sua margem de ganho e fase.

#### A.4 IDENTIFICAÇÃO DO MODELO DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

Para obter informações sobre a dinâmica do sistema, foi realizada uma identificação no domínio da frequência. Como o sistema é instável em malha aberta, a abordagem de identificação foi realizada com o sistema operando em malha fechada. Neste caso, a planta de malha fechada associada é identificada e a partir dela o modelo de malha aberta é reconstruído. Uma desvantagem deste método é que a estrutura do controlador deve ser conhecida. Além disso, essa técnica pode produzir resultados errôneos, pois os dados obtidos do experimento possuem um controlador por realimentação, e conseqüentemente, o comportamento em algumas regiões não são excitadas.

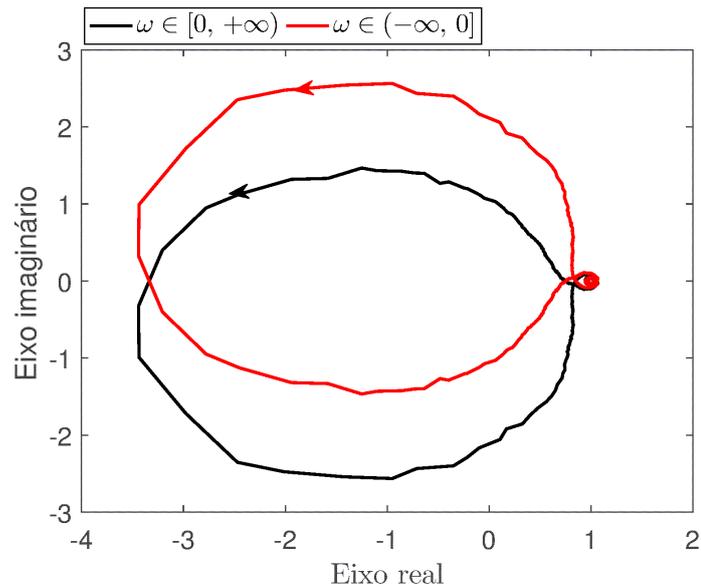


Figura 39 – Gráfico de Nyquist do sistema com o controlador baseado no atraso de fase da pressão acústica.

Apesar destas desvantagens, os resultados obtidos neste estudo estão de acordo com o comportamento descrito na literatura.

O diagrama de blocos na Figura 40 ilustra as interconexões conceituais que descrevem o experimento. A função de transferência da do alto falante para a saída é denotada por  $G$  e é o objeto da identificação. O sinal de referência  $r$  é usada para a identificação enquanto que o controlador  $C$  é utilizado para suprimir as oscilações termoacústicas. Neste experimento, o sinal  $r$  é do tipo *chirp* com frequência inicial 100 Hz e frequência final igual a 900 Hz. O intervalo de tempo definido para esta varredura é de 20 segundos. A evolução da pressão medida em função do tempo é apresentada na Figura 41. Note que os intervalos de tempo em que a amplitude da oscilação de pressão aumenta ocorrem quando o sinal de excitação possui frequência igual à frequência de ressonância do sistema.

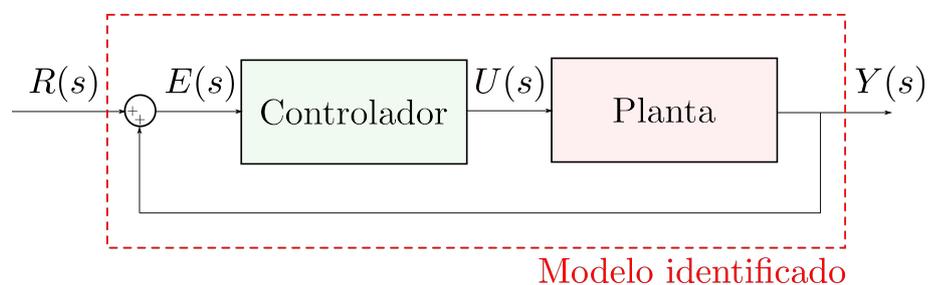


Figura 40 – Diagrama esquemático do experimento de identificação em malha fechada.

A resposta em frequência do sistema em malha fechada é apresentada na Figura 42. Estes gráficos foram obtidos a partir da transformada de *Fourier* da entrada e saída da planta. Note que as curvas de magnitude e fase exibem o comportamento típico da equação da onda, na qual as ressonâncias ocorrem em valores múltiplos da

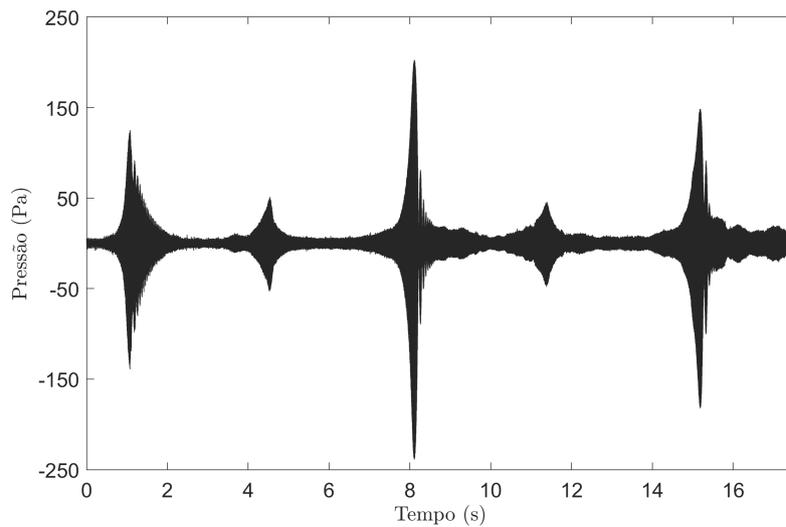


Figura 41 – Pressão acústica do sistema em malha fechada com um sinal de referência do tipo chirp variando entre 140 a 900 Hz.

frequência fundamental, neste caso 170 Hz. Além disso, há um decréscimo de  $180^\circ$  de fase nas frequências de ressonância indicando que os polos associados são estáveis.

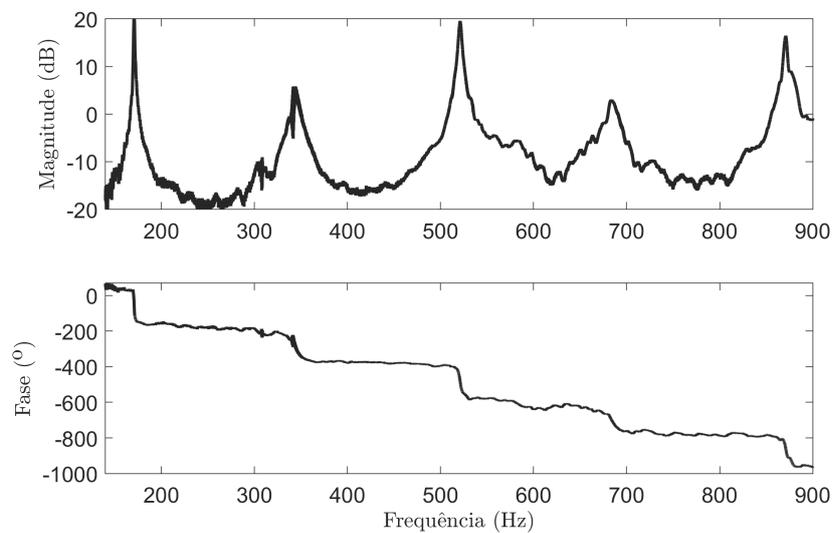


Figura 42 – Gráfico de Bode do sistema operando em malha fechada. Para recuperar a função de transferência de malha aberta,  $G$ , podemos manipular a expressão da função de transferência de malha fechada do sistema (veja a Figura 40):

Para recuperar a função de transferência de malha aberta,  $G$ , podemos manipular a expressão da função de transferência de malha fechada do sistema (veja a Figura 43):

$$G = \frac{T_c}{C(1 + T_c)}$$

na qual  $T_c$  e  $C$  são as funções de transferência de malha fechada e do controlador, respectivamente.

A resposta em frequência do sistema em malha aberta é apresentada na Figura 43. Podemos observar que a fase no primeiro pico de ressonância aumenta  $180^\circ$  (veja o gráfico inferior da Figura 43), indicando um par de polos complexo conjugados instáveis. Nos demais picos, a fase decresce  $180^\circ$ , dados que os modos acústicos de ordem superior são estáveis.

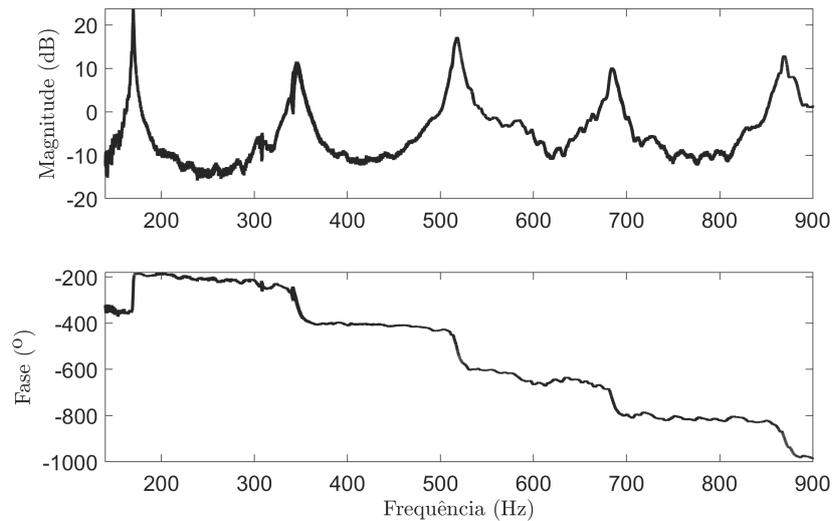


Figura 43 – Gráfico de Bode do sistema em malha aberta. As curvas de magnitude e fase foram recuperadas da resposta em frequência de malha fechada.

Para obter uma representação paramétrica de  $G$ , pode ser utilizado um algoritmo de mínimos quadrados que ajusta a curva de magnitude e fase da função de transferência de acordo com uma ordem pré-definida. Neste caso, os parâmetros do numerador e denominador de  $G$  são as variáveis de decisão. A Tabela 1 apresenta o valor dos polos e zeros do modelo identificado considerando 10 polos e 4 zeros. Note que há um par de polos complexo conjugados no semiplano direito do plano complexo, na qual representa o primeiro modo. A parte imaginária deste par de polos corresponde a frequência de oscilação da pressão. Os demais polos são estáveis com amortecimento sucessivo conforme o aumento da parte imaginária. O modelo também apresenta um conjunto de zeros no semi-plano direito. Utilizando um argumento pelo Lugar das Raízes podemos verificar que estes zeros de fase não mínima atraem os polos estáveis do sistema causando instabilidade para ganhos altos do controlador, conforme verificado empiricamente no experimento em malha fechada.

## A.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O controle ativo de instabilidades termoacústica apresenta diversos desafios teóricos e tecnológicos. Em particular, algoritmos de controle e estimação de estados

Tabela 4 – Polos e zeros do sistema identificado. Utilizou-se dois dígitos de aproximação.

Polos	Zeros
$-16,36 \pm 787,51j$	$198,61 \pm 324,72j$
$-14,01 \pm 630,92j$	$-141,18 \pm 307,71j$
$-10,73 \pm 467,38j$	
$-9,49 \pm 309,96j$	
$8,33 \pm 161,12j$	

utilizando modelos fenomenológicos são esparsos na literatura. Algumas recentes contribuições podem ser vistas em (ANDRADE, G. A. de *et al.*, 2018), entretanto, estas metodologias foram testadas apenas em ambiente de simulação, e apesar de possuírem resultados promissores, diversos problemas relacionadas à sua implementação em tempo real estão abertos. Técnicas de redução de modelos são uma alternativa para melhorar o custo computacional para que os algoritmos sejam simples o suficiente para funcionarem em tempo real, e complexos o suficiente para capturarem as características mais importantes da dinâmica do sistema.