



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Marcelo Invitti

**Modelagem Numérica Magneto-Elástica de Uma Eletrobomba com Motor Síncrono
Monofásico de Ímã Permanente**

Florianópolis

2023

Marcelo Invitti

**Modelagem Numérica Magneto-Elástica de Uma Eletrobomba com Motor Síncrono
Monofásico de Ímã Permanente**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de
Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em
Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Mauricio V. Ferreira da Luz, Dr.

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra

Invitti, Marcelo

Modelagem Numérica Magneto-Elástica de Uma Eletrobomba com Motor Síncrono Monofásico de Ímã Permanente / Marcelo Invitti ; orientador, Mauricio Valencia Ferreira da Luz, 2023.
102 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Eletrobomba. 3. Motor síncrono de ímãs permanentes. 4. Simulação multifísica. 5. Acoplamento magneto-elástico. I. Ferreira da Luz, Mauricio Valencia . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Marcelo Invitti

**Modelagem Numérica Magneto-Elástica de Uma Eletrobomba com Motor Síncrono
Monofásico de Ímã Permanente**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca
examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Arcanjo Lenzi, Dr.

Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Jean Viane Leite, Dr.

Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi
julgado adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica.

Prof. Telles Brunelli Lazzarin, Dr.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof. Mauricio Valencia Ferreira da Luz, Dr.

Orientador

Florianópolis, 2023

Este trabalho é dedicado aos meus pais e a toda minha família, amigos e a todas as pessoas que me apoiaram para realizar os meus sonhos e objetivos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por me conceder saúde, força e sabedoria durante toda a jornada da minha dissertação de mestrado. Sua presença constante em minha vida tem sido a fonte da minha inspiração e confiança. Aos meus amados pais, expresso minha profunda gratidão. Vocês sempre me apoiaram incondicionalmente, encorajando-me a perseguir meus sonhos e a nunca desistir. Sem o amor, a orientação e os valores que vocês me transmitiram, não teria sido possível chegar até aqui. Sou eternamente grato pela confiança que depositaram em mim e por todo o sacrifício que fizeram para me proporcionar essa oportunidade. Gostaria de agradecer também ao meu orientador, professor Mauricio Valencia Ferreira da Luz. Sua experiência, conhecimento e dedicação foram fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação. Agradeço por suas orientações precisas e por acreditar em meu potencial. Sua mentoria foi essencial para o meu crescimento tanto acadêmico quanto pessoal. Agradeço sinceramente ao Jacson Gil Vargas por ser uma peça fundamental nas medições utilizadas nessa dissertação, além do companheirismo durante meu período no LVA/UFSC. Agradeço ao CNPQ pelo auxílio financeiro durante o primeiro ano de mestrado. À Whirlpool Corporation, ao Fernando Antonio Ribas Junior e ao professor Arcanjo Lenzi, meu profundo agradecimento por me permitirem realizar este trabalho provendo a estrutura necessária para tal. A todos os professores, colegas, amigos e familiares que de alguma forma contribuíram para esta conquista, meu profundo agradecimento.

Muito obrigado a todos!

"Esforçai-vos, e ele fortalecerá o vosso coração, vós todos que esperais no Senhor." - Salmos 31:24.

RESUMO

A pesquisa deste trabalho teve como principal objetivo a criação de uma metodologia para análise e simulação da vibração de uma eletrobomba que conta com um motor síncrono monofásico de ímã permanente, utilizando o método de elementos finitos. O trabalho teve como intuito validar os resultados numéricos obtidos por meio de simulação com os resultados experimentais. Para alcançar esses objetivos, foi realizada uma análise das forças presentes no estator por meio de simulações magnéticas, a fim de determinar sua contribuição para a vibração da estrutura, permitindo assim, uma análise elástica precisa das vibrações. Além disso, uma bancada para a realização das medições de vibração foi construída. A metodologia de análise foi desenvolvida a partir do equacionamento físico do problema e da utilização do método de elementos finitos por meio de programas livres, sendo eles, o Gmsh e o Elmer. Ao longo do estudo foram obtidos resultados que apontaram a excentricidade dinâmica do motor como responsável pela introdução de frequências de vibração notavelmente relacionadas a 60 Hz. Essas informações são de extrema importância para a compreensão aprofundada dos fenômenos vibratórios presentes na eletrobomba em análise. O desenvolvimento dessa abordagem representa um avanço no campo, uma vez que a combinação das simulações magnéticas e análises de vibração elástica possibilitam um estudo mais abrangente e detalhado do comportamento vibratório em dispositivos eletromecânicos genéricos, em especial a eletrobomba. Com base nos resultados obtidos, é possível inferir que a metodologia proposta pode ser aplicada em estudos futuros, contribuindo para o aprimoramento de projetos de eletrobombas e para a otimização de seu desempenho vibratório. Além disso, os achados dessa pesquisa também fornecem conceitos para a indústria, permitindo o desenvolvimento de estratégias de mitigação de vibrações indesejáveis e potencialmente prejudiciais ao funcionamento eficiente e durabilidade desses equipamentos. Em suma, a presente pesquisa estabeleceu uma base de conhecimento ao introduzir uma abordagem que integra simulações magnéticas e análises de vibração elástica em três dimensões, ampliando o entendimento dos fenômenos vibratórios em eletrobombas com motores síncronos monofásicos de ímã permanente e fornecendo subsídios para o avanço da área.

Palavras-chave: Eletrobomba. Motor síncrono. Ímãs permanentes. Método de elementos finitos. Simulação multifísica. Acoplamento magneto-elástico.

ABSTRACT

The main objective of this research was to develop a methodology for analyzing and simulating the vibration of an electromechanical pump equipped with a single-phase permanent magnet synchronous motor using the finite element method. The aim of the study was to validate the numerical results obtained from the simulation with experimental results. To achieve these objectives, an analysis of the forces acting on the stator was conducted through magnetic simulations to determine their contribution to the structural vibration, enabling a precise elastic analysis of the vibrations. Additionally, a test bench for vibration measurements was constructed. The analysis methodology was developed based on the physical equations of the problem and the use of the finite element method through open-source software, namely Gmsh and Elmer. Throughout the study, results were obtained indicating that the dynamic eccentricity of the motor was responsible for introducing vibration frequencies noticeably related to 60 Hz. These findings are of utmost importance for a comprehensive understanding of the vibratory phenomena present in the analyzed electromechanical pump. The development of this approach represents an advancement in the field, as the combination of electromagnetic simulations and elastic vibration analyses allows for a more comprehensive and detailed study of vibratory behavior in generic electromechanical devices, particularly in electromechanical pumps. Based on the results obtained, it can be inferred that the proposed methodology can be applied in future studies, contributing to the improvement of electromechanical pump designs and the optimization of their vibratory performance. Furthermore, the findings of this research provide insights for the industry, enabling the development of strategies to mitigate undesirable vibrations that may potentially affect the efficient operation and durability of such equipment. In summary, this research has established a knowledge base by introducing an approach that integrates electromagnetic simulations and three-dimensional elastic vibration analyses, thereby enhancing the understanding of vibratory phenomena in electromechanical pumps with single-phase permanent magnet synchronous motors and providing a foundation for further advancements in the field.

Keywords: Electromechanical pump. Synchronous motor. Permanent magnets. Finite element method. Multiphysics simulation. Magneto-elastic coupling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Domínios magnéticos em materiais ferromagnéticos.....	20
Figura 2 - Típico loop de histerese para aços elétricos.	21
Figura 3 - Curva B-H para diferentes materiais de ímãs permanentes.....	22
Figura 4 - Curva de desmagnetização em função da temperatura para ímãs permanentes.....	23
Figura 5 - Corte 2D do motor elétrico.	24
Figura 6 - Ilustração do ângulo de repouso.	25
Figura 7 - Domínio para dedução das condições de contorno.	32
Figura 8 - Curva Tensão-Deformação genérica (não está em escala real).....	39
Figura 9 - Deformação genérica entre dois pontos próximos.	40
Figura 10 - Deformação por força axial.	41
Figura 11 - Deformação por cisalhamento.	42
Figura 12 - Condições de contorno para elasticidade.....	44
Figura 13 - Exemplo de malha para análise de elementos finitos.....	46
Figura 14 - Ilustração das formas de Whitney.	52
Figura 15 - Formatos padrão de elementos em três dimensões.....	55
Figura 16 - Foto e representação CAD da eletrobomba.....	64
Figura 17 - CAD 3D motor síncrono de ímã de ferrite.	66
Figura 18 - Curva BH do aço do estator.....	68
Figura 19 - Descrição das estruturas da eletrobomba.....	70
Figura 20 - Condição de contorno de fixação.	72
Figura 21 - Modos de vibração da eletrobomba.....	73
Figura 22 - Corte 2D das geometrias para estudo de truncamento de domínio.	75
Figura 23 - Resultado da comparação de malhas para o torque de partida.	78
Figura 24 - Fluxograma para simulação multifísica.....	80
Figura 25 - Força contraeletromotriz do motor.	81
Figura 26 - Distribuição da indução magnética para o motor operando sem carga. ..	82
Figura 27 - Malha utilizada para o cálculo eletromagnético do motor.	83
Figura 28 - <i>Cogging torque</i> do motor da eletrobomba.....	83
Figura 29 - Superfícies para cálculo de força no estator.	84
Figura 30 - Espectro da média da força na face 2.	84

Figura 31 - Comparação do espectro da média da força na face 2 na direção X com e sem excentricidade.	85
Figura 32 - Malha de elementos finitos para simulação elástica.....	86
Figura 33 - Posição dos pontos de medição e análise na simulação.	86
Figura 34 - Diagrama do sistema hidráulico para testes.	88
Figura 35 - Montagem da eletrobomba para medição.....	88
Figura 36 - Comparação de velocidade para a direção X entre o resultado medido e simulado.	90
Figura 37 - Comparação de velocidade para a direção Y entre o resultado medido e simulado.	91
Figura 38 - Comparação de velocidade para a direção Z entre o resultado medido e simulado.	92
Figura 39 - Erro percentual da simulação comparada com a medição.....	93

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resumo das formas de Whitney.....	52
Tabela 2 - Propriedades elásticas dos materiais.	70
Tabela 3 - Frequências naturais da estrutura da eletrobomba.	73
Tabela 4 - Comparação entre deslocamento no estator para análise de malha.	79

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Alfanuméricos:

\vec{B}	Indução magnética
\vec{H}	Campo magnético
\vec{B}_r	Indução remanente
\vec{D}	Indução elétrica
\vec{E}	Campo elétrico
\vec{f}	Força por elemento de volume
\vec{A}	Potencial vetor magnético
\vec{A}_g	Potencial vetor magnético associado com o gradiente de uma função genérica
V	Potencial escalar elétrico
\vec{J}	Densidade de corrente elétrica total
\vec{J}_s	Densidade de corrente elétrica para fontes de corrente
\vec{J}_e	Densidade de corrente elétrica induzida
\vec{J}_{sup}	Densidade de corrente elétrica na superfície de transição entre dois meios.
\rightarrow	Representação de vetor
$\ \quad \ $	Tensor de ordem 2
c	Contorno fechado genérico
V_s	Volume de integração genérico
\vec{G}	Vetor genérico
\vec{G}_n	Componente normal de um vetor genérico
\vec{G}_t	Componente tangencial de um vetor genérico
Δh	Altura infinitesimal
\vec{n}	Vetor normal à superfície
\vec{l}	Vetor paralelo às linhas de integração
w	Função de teste genérica
R	Resíduo numérico
E_d	Conjunto dos elementos que formam o domínio discreto

G_d	Número de graus de liberdade no domínio discreto
w_{ge}	Função de interpolação genérica
f	Função conhecida qualquer
\vec{u}	Vetor de deslocamento
E	Módulo de Young
G	Módulo de proporcionalidade
$\ T\ $	Tensor de tensões
$\ C\ _4$	Matriz de rigidez
m	Massa
\vec{v}	Vetor velocidade
\vec{F}_i	Forças em um sistema equilibrado
\vec{a}	Aceleração
\vec{g}	Aceleração da gravidade
$\ I\ $	Tensor identidade de ordem 2
X	Função escalar genérica
Y	Função escalar genérica
\vec{X}	Função vetorial genérica
\vec{Y}	Função vetorial genérica
H^1	Espaço funcional do operador gradiente
\vec{H}^1	Espaço funcional do operador rotacional
$L^2(\Omega)$	Espaço funcional escalar de quadrado integrável
$\vec{L}^2(\Omega)$	Espaço funcional vetorial de quadrado integrável
E^p, p	Espaços funcional associado aos operadores diferenciais com funções de quadrado integráveis
w_n	Função de teste para Whitney 0-forma
\vec{w}_e	Função de teste para Whitney 1-forma
\vec{w}_f	Função de teste para Whitney 2-forma
w_v	Função de teste para Whitney 3-forma
\mathcal{N}	Conjunto de nós do domínio discreto
$U_I(u_n)$	Função escalar interpolada resultante para um conjunto de resultados u_n
$\vec{U}_I(\vec{u}_e)$	Função vetorial interpolada resultante para um conjunto de resultados \vec{u}_e
$[K]$	Matriz de rigidez do sistema linear

$\{u\}$	Graus de liberdade a serem resolvidos
$\{F\}$	Vetor de “fontes” do sistema linear
s	Deslocamento virtual
\mathbb{R}^3	Espaço euclidiano
F_s	Força magnética associada ao deslocamento virtual
J_a	Matriz jacobiana para um elemento do domínio discreto

Símbolos Gregos:

ρ_v	Densidade volumétrica de carga elétrica
ρ_m	Densidade de massa
η	Função escalar genérica
$\ \varepsilon\ $	Tensor de permissividade elétrica
$\ \mu(\vec{H})\ $	Tensor de permeabilidade magnética não linear
$\ \sigma\ $	Tensor de condutividade elétrica
$\mu(\vec{H})$	Permeabilidade magnética não linear
μ_r	Permeabilidade magnética relativa
μ_0	Permeabilidade magnética do ar
$\lambda_m(t)$	Fluxo magnético concatenado
θ_{re}	Ângulo de repouso do rotor
Ω	Domínio volumétrico
Ω_C	Domínio que contém materiais condutores de eletricidade
Ω_s	Domínio com fonte de corrente elétrica
Ω_m	Domínio que contém ímãs permanentes
Γ_h	Fronteira do domínio magnético
$\Gamma(\Omega)$	Superfície fechada do domínio volumétrico Ω
$\partial\Gamma$	Contorno fechado da superfície Γ
Γ_j	Superfície para integração do fluxo de corrente elétrica
Γ_D	Superfície para integração do fluxo elétrico
Γ_c	Superfície de fronteira genérica
ϕ	Variável dependente genérica
ϕ_e	Variável para solução exata

ϕ_a	Variável para solução aproximada
ω	Frequência angular
$\phi_{a_{ge}}$	Grau de liberdade a ser resolvido
ν	Coefficiente de Poisson
γ	Deformação por cisalhamento
$\ \eta\ $	Tensor de deformação
Γ_t	Superfície de tração
Γ_u	Superfície de deslocamento
λ	Parâmetro de Lamè
ζ_m	Função de interpolação baricêntrica associadas ao nó m

Abreviações:

$back_{EMF}$ Força contra eletromotriz induzida

Operadores:

$\vec{\nabla}$	Operador diferencial nabla vetorial
\times	Produto vetorial
\cdot	Produto escalar
$:$	Operador de duplo produto interno ou contração e segunda ordem
$\vec{\nabla} \cdot$	Divergente
$\vec{\nabla} \times$	Rotacional
$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada temporal de primeira ordem
$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	Derivada temporal de segunda ordem
\oint	Integral de contorno fechado
\oiint	Integral de superfície fechada
\iiint	Integral de volume fechado
\mathcal{L}	Operador diferencial parcial no espaço euclidiano
$tr()$	Operador traço de matriz

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVOS DO TRABALHO	15
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1	MOTOR SÍNCRONO MONOFÁSICO DE ÍMÃS PERMANENTES	17
2.1.1	Conceitos gerais	17
2.1.2	Ímãs permanentes e materiais magnéticos	18
2.1.3	Princípios básicos de funcionamento.	23
2.2	SIMULAÇÃO NUMÉRICA MULTIFÍSICA	25
3	FORMULAÇÃO MAGNÉTICA	29
3.1	EQUAÇÕES DE MAXWELL	29
3.1.1	Condições de contorno	31
3.1.2	Equações de Maxwell e Funções Potenciais	33
4	FORMULAÇÃO ELÁSTICA	38
4.1	MÓDULO DE YOUNG E COEFICIENTE DE POISSON.....	40
4.2	EQUACIONAMENTO ELÁSTICO GENÉRICO.....	42
5	EQUAÇÕES NA FORMA FRACA E MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	46
5.1	MÉTODO DE RESÍDUOS PONDERADOS	47
5.2	ELEMENTOS NODAIS E DE ARESTA	50
5.3	EQUAÇÃO NA FORMA FRACA PARA O PROBLEMA MAGNETODINÂMICO.....	55
5.4	EQUAÇÃO NA FORMA FRACA PARA PROBLEMAS ELÁSTICOS.	57
5.5	MÉTODOS DE SOLUÇÃO.....	59
6	ANÁLISE MULTIFÍSICA DE UMA BOMBA D'ÁGUA COM MOTOR PMSM	63
6.1	MODELAGEM MAGNÉTICA DO MOTOR DA ELETROBOMBA	65

6.2	MODELAGEM ESTRUTURAL DA ELETROBOMBA	68
6.3	ANÁLISE DO ERRO DE TRUNCAMENTO.....	73
6.4	ESTUDO DE INDEPENDÊNCIA DE MALHA.....	75
6.5	SIMULAÇÃO MAGNETO-ESTRUTURAL DA ELETROBOMBA	79
6.5.1	Simulação magnética do motor	80
6.5.2	Simulação estrutural da eletrobomba e validação experimental	85
7	CONCLUSÃO.....	94
	REFERÊNCIAS.....	96

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de tecnologias voltadas para o aprimoramento de equipamentos eletrodomésticos tem desempenhado um papel fundamental no cotidiano das pessoas. Entre esses equipamentos, as lavadoras de roupas e louças têm se destacado como itens indispensáveis na rotina doméstica, oferecendo praticidade e agilidade no processo de limpeza. Nesse contexto, a busca por soluções que otimizem o desempenho desses aparelhos e reduzam potenciais incômodos aos consumidores tem se tornado um objetivo central para fabricantes e pesquisadores.

Dentre os componentes essenciais das lavadoras de roupas e louças, as eletrobombas desempenham um papel crucial no funcionamento dos equipamentos, pois elas permitem que os ciclos de lavagem ocorram. No entanto, a operação eficiente desses dispositivos enfrenta desafios relacionados à vibração causada especialmente por forças magnéticas geradas no estator do motor, podendo resultar em ruídos, desgaste prematuro e até mesmo em danos aos demais componentes do equipamento. Nesse contexto, a utilização de simulações magnéticas e de vibração se mostra uma abordagem promissora para analisar o comportamento dessas eletrobombas, compreender as forças magnéticas presentes no estator e avaliar seus efeitos na vibração global do sistema. Essas simulações permitem o estudo detalhado dos fenômenos envolvidos, oferecendo uma compreensão aprofundada das interações físicas e permitindo a realização de melhorias e otimizações na concepção e operação dos equipamentos.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

Objetivos principais:

- Explorar o potencial das simulações magnéticas e de vibração aplicadas a eletrobombas usadas em lavadoras de roupas e louças.
- Desenvolver e documentar uma metodologia para simulações multifísicas com enfoque na análise das vibrações geradas por forças magnéticas.

Objetivo secundário:

- Contribuir para simulações magneto-elásticas em um contexto geral, permitindo a replicação, adaptação ou expansão da metodologia utilizada em outras aplicações.

Para alcançar esses objetivos, o trabalho inclui a realização de simulações do motor, levando em consideração seus aspectos magnéticos, e a subsequente análise dos resultados para determinar como as forças magnéticas influenciam as vibrações do sistema. Além disso, foram conduzidas comparações entre os dados obtidos por meio das simulações e os dados experimentais de medição, com o propósito de validar a eficácia e a precisão das simulações realizadas.

Neste trabalho, utiliza-se o auxílio de programas de simulação de código livre, pois eles permitem melhor compreensão sobre as formulações matemáticas resolvidas, oferecem alto potencial de manipulação das variáveis relacionadas com a simulação e são gratuitos para qualquer instituição ou indivíduo que busca realizar pesquisas acadêmicas. O pré-processamento é realizado por meio do programa Gmsh que permite manipular os tamanhos dos elementos da malha de forma livre. O programa ElmerFem é utilizado como solucionador do problema multifísico magneto-elástico e para pós processamento utiliza-se o Paraview.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este capítulo apresenta uma breve introdução ao tema. O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica. Os capítulos 3, 4 e 5 apresentam os fundamentos teóricos e a metodologia adotada para as simulações. O capítulo 6 apresenta os resultados obtidos com as simulações e as comparações com resultados experimentais e, por fim, o capítulo 7 apresenta as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros. Por meio dessa análise abrangente, espera-se gerar conhecimento para a indústria e a comunidade acadêmica, estimulando o contínuo aprimoramento dos sistemas magneto-mecânicos aplicados em lavadoras de roupas e louças.

Os resultados obtidos neste estudo representam uma contribuição para o avanço no projeto e desenvolvimento de eletrobombas para lavadoras de roupas e louças. Compreender as características e os efeitos das forças magnéticas na vibração do sistema permite a implementação de estratégias mais eficientes para reduzir o ruído, melhorar o desempenho e prolongar a vida útil desses equipamentos essenciais em nosso cotidiano. Além disso, é possível a replicação desse estudo com motores elétricos de outras topologias e em aplicações distintas, porém com problemas físicos semelhantes.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 MOTOR SÍNCRONO MONOFÁSICO DE ÍMÃS PERMANENTES

2.1.1 Conceitos gerais

O princípio de funcionamento de motores elétricos está relacionado com a interação entre campos magnéticos gerados no rotor (parte que se move) e no estator (parte estática) para produzir uma força magnética. No caso de motores rotativos, a força magnética predominante deve ser tangencial ao rotor para que o torque gerado propicie a rotação. A forma com que os campos magnéticos são gerados é um importante fator para determinar as características do motor como: rendimento, potência, densidade de torque, refrigeração, custo e outros. Há uma imensa variedade de motores elétricos com diferentes características de funcionamento, porém é possível incluir grande parte dentro de três categorias, motores de indução, motores CC e motores síncronos CA. Dentro dessas categorias, diversas variantes são encontradas devido ao número de fases empregadas, à utilização ou não de escovas, por excitação de campo por ímãs permanentes ou por corrente elétrica e assim por diante.

A utilização de ímãs permanentes para gerar o campo do rotor traz alguns benefícios estruturais e funcionais como [1]:

- Não existe a necessidade de alimentar um circuito elétrico para o rotor gerar o campo magnético, portanto as perdas são reduzidas e a eficiência do motor aumenta significativamente.
- Com a utilização de ímãs permanentes de terras raras como NeFeBr (ímãs mais “fortes”) é possível obter um aumento da densidade volumétrica de potência/torque. Ou seja, para um mesmo volume total de motor, o uso de ímãs de terras raras permite o aumento de torque/potência, comparado a motores com excitação elétrica no rotor e estator.
- A dinâmica do motor apresenta torque mais estável devido à alta indução magnética no entreferro da máquina. Esse fator é muito importante para aplicações onde se exige baixa oscilação de torque.
- Permite a remoção das escovas de comutação aumentando a durabilidade do motor.

Naturalmente, existem algumas desvantagens em utilizar ímãs permanentes em motores. Dentre elas, pode-se citar [2]:

- Essa classe de motores é mais sensível a altas temperaturas e a correntes de *insrush*, porque ímãs permanentes podem apresentar desmagnetização permanente. Dessa forma, a intensidade de campo magnético criada pelos ímãs é reduzida, gerando prejuízos no torque e no desempenho do motor, conseqüentemente.
- O controle dessa classe de motores, em geral, é mais sofisticado do que o controle de motores de indução, por exemplo. Esse fator pode gerar um acréscimo no custo do *drive* que para boa parte das aplicações é fundamental.

Por conta das vantagens apresentadas anteriormente, motores elétricos com ímãs permanentes são utilizados em diversas aplicações, por motivos diversos. O crescimento da indústria de veículos elétricos promove a busca por motores compactos e eficientes devido às limitações de espaço e de energia armazenada nas baterias. A busca por eficiência ocorre em outros equipamentos por outros motivos. Na indústria de eletrodomésticos a utilização de motores de ímãs permanentes permite a redução do consumo de energia do consumidor, assim, atinge-se a demanda crescente na sociedade por economia e respeita-se as resoluções de órgãos governamentais relacionadas a medidas para redução de consumo de energia e sustentabilidade. O setor industrial que necessita de servo motores para automação, opta por essa classe de motores devido ao controle preciso que é possível ser realizado. Um exemplo disso é a indústria automotiva, onde diversos robôs montam o chassi do veículo de maneira conjunta e simultânea, o que necessita de uma alta precisão e baixa vibração dos “braços” dos robôs para que a qualidade do processo seja garantida [2].

2.1.2 Ímãs permanentes e materiais magnéticos

O estudo da interação entre campos magnéticos e a estrutura molecular de materiais é uma parte fundamental para o entendimento das formas de utilização desses materiais na engenharia. Quando se fala em classificação de materiais em termos magnéticos têm-se quatro categorias principais: materiais diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos e ímãs permanentes. Uma nomenclatura comum é considerar ímãs permanentes como materiais magnéticos “duros” e as outras classificações na classe de materiais magnéticos “moles”.

Para compreender a relação desses materiais com campos magnéticos, algumas definições são necessárias. Ao considerar materiais isotrópicos, pode-se escrever a relação entre indução magnética \vec{B} [T] e campo magnético \vec{H} [A/m] como (2.1), onde \vec{B}_r [T] é a indução remanente e $\mu(\vec{H})$ [H/m] é a permeabilidade magnética dependente do campo

magnético. No estudo de materiais, define-se a permeabilidade relativa μ_r em (2.2), onde μ_0 [H/m] é a permeabilidade magnética do vácuo.

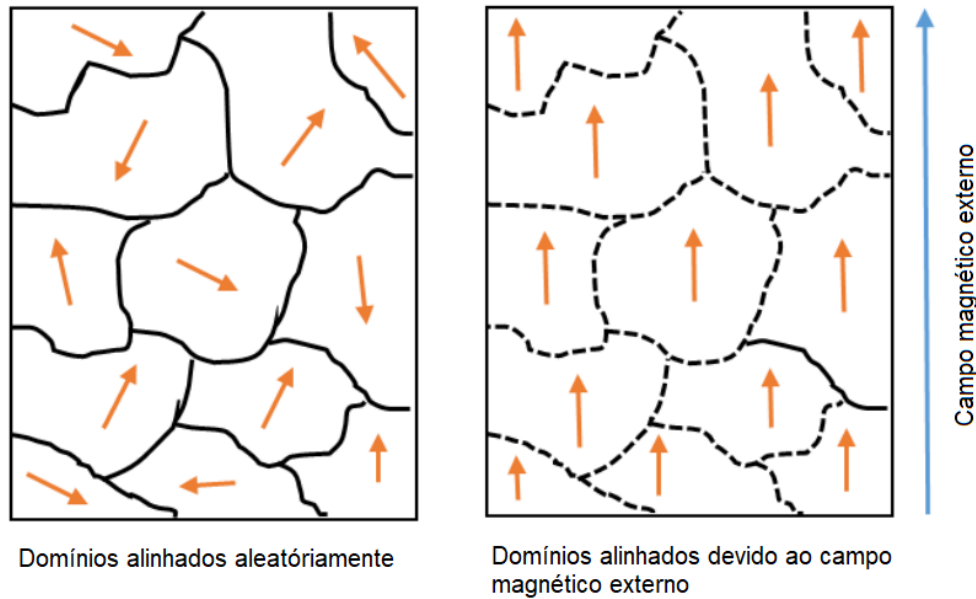
$$\vec{B} = \mu(\vec{H}) \vec{H} + \vec{B}_r \quad (2.1)$$

$$\mu_r = \frac{\mu(\vec{H})}{\mu_0} \quad (2.2)$$

Materiais diamagnéticos tem a permeabilidade relativa um pouco menor do que 1. Isso significa que o fluxo magnético tem uma leve preferência de atravessar o vácuo (ou ar) do que esses materiais. Alguns exemplos de materiais diamagnéticos são, ouro, prata e cobre. Na prática, a permeabilidade relativa é na ordem de 0,999991, portanto se usa a permeabilidade do vácuo em análises de engenharia com esses materiais. Materiais paramagnéticos, por sua vez, tem a permeabilidade relativa um pouco maior do que o vácuo, ou seja, tem a tendência de atrair levemente o fluxo magnético. Um exemplo é o Alumínio com $\mu_r = 1,00000036$. Assim, o efeito do paramagnetismo também não é considerado em aplicações de engenharia, em geral; usa-se permeabilidade relativa igual a 1 [3].

Materiais ferromagnéticos são essenciais em motores, pois apresentam a característica de atrair e concatenar o fluxo magnético. Isso ocorre devido às estruturas internas dos materiais (domínios magnéticos) que tendem a se orientar na direção de magnetização. Dessa forma, a permeabilidade relativa desses materiais é muito maior do que 1, por exemplo, aços com permeabilidade relativa que variam de 100 a 10000 na região de operação. Na Figura 1, é possível observar a ilustração dos domínios magnéticos responsáveis por esse efeito.

Figura 1- Domínios magnéticos em materiais ferromagnéticos.



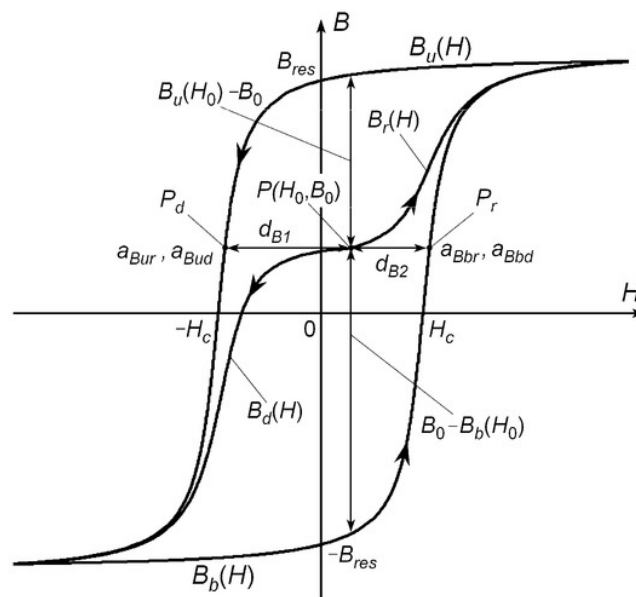
Fonte: Adaptado de: [4]

O valor da permeabilidade de materiais ferromagnéticos é proporcional ao campo magnético aplicado, pois quanto maior o campo maior será o alinhamento dos domínios magnéticos. Ao final do processo de alinhamento, o efeito de alta permeabilidade é perdido, ou seja, há saturação no material. A implicação prática desse fenômeno se dá no projeto do motor onde se visa otimizar o valor da indução magnética no aço para aproveitar o material com alta permeabilidade magnética. Outros fatores importantes no projeto são o volume, a eficiência e o custo do material que tem uma forte ligação com a permeabilidade magnética. Caso o projeto não seja adequado, pode-se aumentar o custo e o volume do motor sem necessidade, assim, aumentam-se as perdas magnéticas no aço ou até mesmo pode ocorrer mau funcionamento do produto. O mau funcionamento pode ocorrer devido à saturação que reduz a permeabilidade do aço para valores próximos ao do ar, assim o material ferromagnético perde a característica de concatenar o fluxo magnético e o torque é reduzido drasticamente [3].

Foi observado experimentalmente que após atingir a saturação e reduzir o campo magnético aplicado no material ao valor de 0 A/m, existe um valor de indução magnética remanente, chamado de indução remanente. Em materiais ferromagnéticos “moles”, como aço elétrico, esse valor é considerado baixo. Para materiais magnéticos “duros” esse valor é bastante importante e está relacionado à “força” dos ímãs permanentes. A curva de saturação do aço, bem como a curva de histerese podem ser observadas na Figura 2.

Outro ponto relevante relacionado à permeabilidade magnética em materiais ferromagnéticos é a temperatura de Curie. Cada material tem uma temperatura de Curie que é a temperatura na qual o material ferromagnético perde as suas propriedades magnéticas se tornando um material paramagnético. Em geral, o sistema de refrigeração de motores protege o material dessa temperatura alta, 770°C para o ferro, por exemplo [3].

Figura 2 - Típico loop de histerese para aços elétricos.
 B_{res} : indução magnética residual, H_c : campo magnético coercitivo.

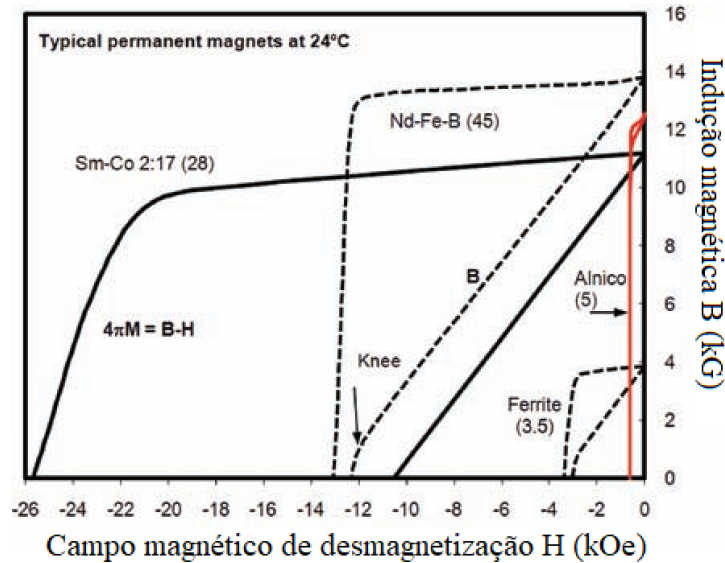


Fonte: [5]

Materiais considerados magneticamente “duros” retêm uma indução remanente alta após o processo de magnetização, tornando-se ímãs permanentes. Eles são usados para produzir campos magnéticos sem a necessidade de aplicar corrente elétrica a uma bobina, portanto sem ligações elétricas e sem metais como cobre ou alumínio. Existem diversas composições de elementos químicos que possibilitam a criação de materiais magnéticos “duros”. Cada material tem características específicas com aplicações em diversas áreas. Na Figura 3, é possível analisar a curva B-H de dos principais ímãs permanentes presentes em equipamentos. Segundo a *Grand View Research* ímãs de ferrite dominaram o mercado em 2021 com um 80,6% do volume total. A maior utilização desses ímãs é em motores para eletrodomésticos, refrigeração, automotiva e industrial. A sua grande utilização se dá pelo fato de ter um custo bem inferior às outras alternativas, embora não seja o material com maior potencial de densidade energética. Outro material muito utilizado é o Neodímio-Ferro-Boro

(NeFeB), um material de “terras raras”. Sua principal característica é ter uma maior densidade de energia comparado ao ferrite, porém com um custo mais elevado e com mais escassez no mercado. Assim, para aplicações como motores elétricos em automóveis e geradores de energia é uma opção viável (produtos com maior valor agregado).

Figura 3 - Curva B-H para diferentes materiais de ímãs permanentes.

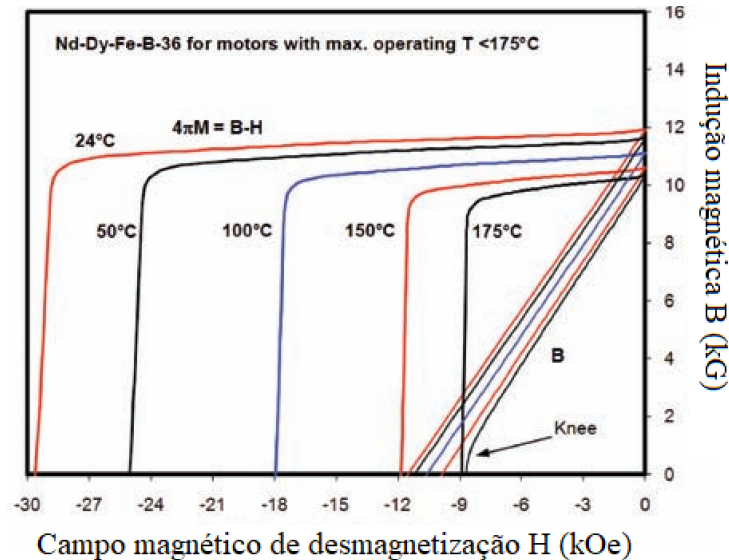


Fonte: Adaptado de [6]

As características dos ímãs tornam os equipamentos mais leves e mais eficientes, no entanto, existem dois fatores de risco na utilização de ímãs permanentes. O primeiro está associado à temperatura de Curie. Da mesma forma que foi citada para materiais ferromagnéticos “moles”, ímãs tem um valor de temperatura onde ocorre a desmagnetização permanente do material. Esse fenômeno em um equipamento significa perda de função completa. Além dessa temperatura crítica, ímãs permanentes sofrem um processo de desmagnetização por temperatura reversível (valores abaixo da temperatura de Curie). Embora esse processo não danifique o ímã, existe uma perda na “força” do campo magnético gerado por ele de forma momentânea, assim para que exista uma manutenção do torque do motor é necessária uma maior corrente de armadura para compensar a energia perdida. O resultado desse efeito é o aumento de perdas Joule nos enrolamentos da armadura, possível aumento na temperatura do motor e redução da eficiência geral do sistema (motor e conversor de potência). Outro risco para a desmagnetização total do ímã é a aplicação de um campo desmagnetizante forte o suficiente a indução remanente zerar. Esse valor de campo é chamado de campo magnético coercitivo H_c [A/m]. Na Figura 4, pode-se observar o efeito da

temperatura na desmagnetização e o efeito do campo magnético de desmagnetização [6], sendo $4\pi M$ a magnetização dos ímãs, conhecida também como indução remanente, e as curvas de B a indução magnética.

Figura 4 - Curva de desmagnetização em função da temperatura para ímãs permanentes.



Fonte: Adaptado de [6]

2.1.3 Princípios básicos de funcionamento.

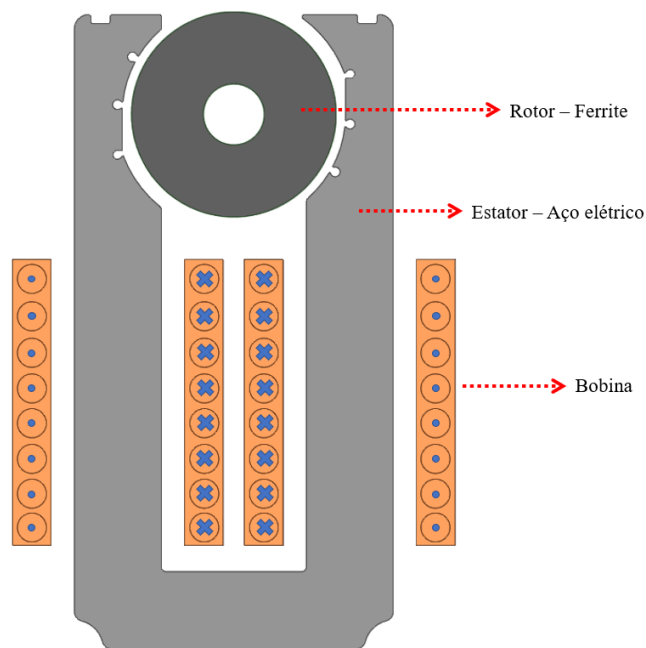
Como já mencionado anteriormente, existe uma grande variedade de motores elétricos com ímãs permanentes. Neste trabalho, analisa-se um motor síncrono, monofásico, com rotor de ferrite magnetizado paralelamente e com partida por torque de relutância. Um motor síncrono tem a velocidade angular de rotação igual à velocidade angular da tensão aplicada nele. Além disso, eles não possuem a característica de partir de forma independente, pois não há torque de partida. Para solucionar este problema, em motores com alto custo agregado, usa-se conversores de potência com controle de frequência e tensão. No caso de motores de baixíssimo custo, o valor de conversores torna a utilização dessa classe de motores inviável. Para isso, pode-se utilizar variações no tamanho do entreferro para gerar um torque de relutância, partir o motor e permitir a sincronia de fase e velocidade [7].

A Figura 5 apresenta um corte em duas dimensões do motor em questão. O acionamento de um motor de ímãs está diretamente relacionado com a forma de onda da força contra eletromotriz gerada (*back-EMF*). A *back-EMF* é a tensão induzida nos enrolamentos do motor devido à variação do fluxo magnético gerado pelos ímãs do rotor em movimento.

Essa tensão é dada pela equação (2.3) proveniente da Lei de Faraday, onde $\lambda_m(t)$ é o fluxo magnético concatenado nas bobinas do estator gerado pelo ímã. O sinal negativo na equação (2.3) é devido à lei de Lenz que afirma que “a tensão fará com que uma corrente flua em um circuito fechado em uma direção tal que seu efeito magnético irá se opor à mudança que a produz” [8].

$$back_{EMF} = - \frac{d(\lambda_m(t))}{dt} \quad (2.3)$$

Figura 5 - Corte 2D do motor elétrico.



Fonte: Autor

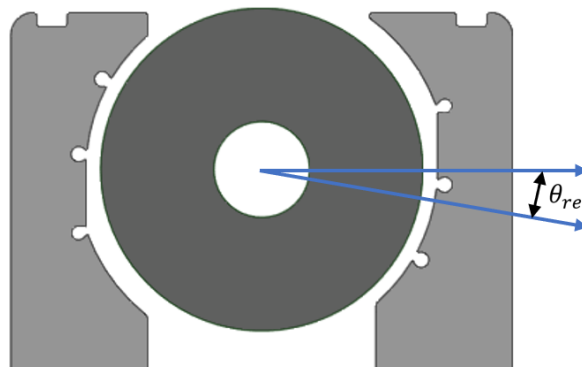
Este motor tem a forma de onda da *back-EMF* senoidal, ou seja, a distribuição de fluxo magnético no entreferro é senoidal e a corrente/tensão elétrica aplicada no circuito do estator também é senoidal. Assim, a alimentação se dá por um inversor de potência ou pela rede elétrica direta com ou sem controle por triac. Neste trabalho, considera-se a alimentação sem inversor de potência devido a aplicação exigir custos baixíssimos. A tensão do motor usado neste trabalho é de 220 V e a corrente nominal RMS é de 1 A.

Um fator importante para a análise deste motor é o *cogging* torque. O *cogging* torque descreve a interação dos ímãs do rotor atuando nos dentes ou polos do estator independente de qualquer corrente [8]. Este torque é criado quando os ímãs do rotor tentam se alinhar com o caminho de menor relutância, ou seja, o melhor caminho para o fluxo magnético fluir. Dessa

forma, pode-se concluir que quanto maior a variação de relutância no entreferro, maior é o efeito do *cogging* torque, fator que, para motores sem escovas com ímãs permanentes, pode causar prejuízos no funcionamento do motor. Os prejuízos mais comuns estão relacionados a geração de harmônicos no torque que podem gerar oscilações indesejadas, além de forças no estator que são importantes fontes de vibração no sistema em que o motor está inserido.

Como este motor tem um entreferro variável para gerar torque na partida, o cálculo ou simulação do *cogging* torque permite analisar o ângulo de desalinhamento entre o rotor e o estator. Na Figura 6, pode-se perceber que com a variação de relutância o ângulo de repouso [θ_{re}] não está alinhado com o centro da parede do estator. Essas características conferem a esse motor uma partida pouco suave, já que há dependência do ângulo da senoide de tensão aplicada na bobina do estator e o ângulo de repouso. Portanto, na prática, é observado um efeito de *bouncing* na partida até o regime permanente, onde o sincronismo é atingido.

Figura 6 - Ilustração do ângulo de repouso.



Fonte: Autor

2.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA MULTIFÍSICA

Simulação numéricas multifísicas são modelos computacionais que envolvem acoplamento entre dois ou mais problemas físicos. Essas simulações são utilizadas para a compreensão do comportamento de sistemas que intrinsicamente envolvem múltiplos campos da física, como: mecânica estrutural ou elasticidade, dinâmica dos fluidos, transferência de calor, eletromagnetismo, acústica, entre outros. O projeto e análise de equipamentos em engenharia geralmente são multifísicos por natureza, um exemplo clássico é de equipamentos elétricos que produzem calor por meio de perdas Joule por conta das correntes elétricas que

fluem por materiais condutores imperfeitos. Dessa forma, o projeto de um equipamento elétrico demanda uma análise e projeto da parte térmica, mesmo que ele não tenha nenhuma função diretamente relacionada com a temperatura. Um caso comum relacionado a esse problema é o projeto de hardwares, onde a função das placas desenvolvidas está relacionada com a entrega de funções elétricas, como tensão, corrente e sinal, porém para que o funcionamento ocorra de forma adequada, é fundamental a análise da dissipação térmica nos componentes eletrônicos e nas trilhas da placa. Neste caso, o acoplamento necessário é elétrico, para cálculo de perdas nos componentes e nas trilhas, e fluido-térmico, por influência da convecção natural ou forçada na transferência de calor para que a temperatura nos componentes não ultrapasse os valores de qualidade e segurança.

Diversas indústrias utilizam as simulações multifísicas por conta dos seus benefícios, entre elas estão:

- Indústria aeroespacial: nesta indústria o valor agregado dos equipamentos produzidos é bastante elevado. Dessa forma, a construção de diversos protótipos e múltiplos testes não é factível pela perda de recursos financeiros, humanos e de tempo. Simulações multifísicas são utilizadas para prever o comportamento de fluidos gases e materiais sob diversas condições. Além disso, como aeronaves estão sujeitas a descargas elétricas, simulações para compreender os efeitos térmicos e estruturais de descargas são utilizadas. Este teste, por muitas vezes, seria destrutivo. Ou seja, a aplicação da simulação se torna essencial.
- Indústria automotiva: o projeto de automóveis envolve diversas questões relacionadas a qualidade e segurança que podem ser analisadas por simulações. Problemas multifísicos se tornaram mais presentes nesta indústria com o avanço dos motores elétricos e a inserção de baterias nos automóveis. Isso traz a necessidade de simular o comportamento magnético dos motores elétricos associado a parte térmica deles e a vibração. Algo semelhante ocorre com as baterias que apresentam diversos fatores de qualidade relacionados à temperatura.
- Indústria biomédica: esta indústria é extremamente ampla e envolve equipamentos com alta complexidade e custo. Dessa forma, simulações são novamente fundamentais para aumentar a eficiência e segurança dos projetos. Um caso exemplar relacionado à esta indústria é o de implantes de titânio utilizado em pacientes com alguma fratura nos ossos ou para tratamentos cardiovasculares. Quando pessoas com implantes de titânio são submetidas a exames de ressonância magnética, as ondas eletromagnéticas geradas pelo equipamento de teste produzem correntes induzidas no

material condutor implantado no paciente, conseqüentemente, calor é gerado. Dessa forma, simulações eletromagnéticas-térmicas são fundamentais para assegurar que não haja nenhum prejuízo a qualidade de vida dos pacientes nesta situação.

- Indústrias de equipamento em geral: além destes três casos de indústrias específicas, qualquer indústria de equipamentos pode se beneficiar de simulações multifísicas, como é o caso de fabricantes de motores, transformadores, equipamentos de alta tensão, empresas que projetam hardware, fabricantes de equipamentos de som (simulação magnética-elástica-acústica), indústria de petróleo, entre outros.

Para que a utilização de simulações multifísicas seja feita, é necessário entender quais são as vantagens, desvantagens e os desafios que as cercam. Pode-se considerar algumas vantagens como: essa forma de modelagem permite uma representação de um sistema de maneira mais fidedigna, pois leva-se em consideração processos interconectados fisicamente; obtêm-se um aumento na precisão e confiabilidade das simulações; permite redução do número de amostras, tempo e custo do projeto por meio da virtualização de sistemas complexos; pela criação de modelos virtuais, possibilita-se a otimização dos equipamentos por meio da melhor compreensão sobre as interações físicas que ocorrem nele [9] [10]. É necessário ponderar as desvantagens das simulações para que não haja prejuízo ao invés de benefícios, pode-se citar: a complexidade de implementação é alta devido a necessidade de especialização entre mais de uma área da física, o que requer profissionais capacitados; a complexidade de resolução do sistema é um desafio, pois interações físicas ocorrem, muitas vezes em transitórios com a dimensão temporal muito diferente (acoplamento elétrico-térmico); a validação das simulações se torna mais difícil, pois os fatores físicos estão acoplados (pode-se utilizar simulações simplificadas para fazer validações indiretas); o tempo e o custo computacional de simulações multifísicas, em geral, é consideravelmente superior à simulações com física única (necessária análise para otimização de tempo e recursos) [9] [10].

Neste trabalho, é explorado o acoplamento multifísico entre o eletromagnetismo e a formulação elástica com o objetivo de calcular a deformação do estator de um motor proveniente das forças magnéticas geradas no seu funcionamento em plena carga. Esse tipo de acoplamento é utilizado em diversas áreas da engenharia, alguns exemplos são:

- Máquinas elétricas: o problema de vibração e deformação em motores elétricas é tão antigo quanto o seu próprio desenvolvimento. Por conta do fluxo magnético que

atravessa o estator e o rotor, forças magnéticas são geradas e, devido à teoria da elasticidade, produzem deformações no aço. No caso de máquinas estáticas como transformadores, tem-se vibração do aço por conta de efeitos da magnetostricção. Outra causa comum de deformação são as forças de Laplace nas bobinas de transformadores e reatores [11] [12].

- Sensores, chaves e transdutores: um sensor bastante comum é o sensor piezoelétrico que é um dispositivo que usa o efeito piezoelétrico para medir mudanças na pressão, aceleração, temperatura, tensão ou força, convertendo-os em uma tensão elétrica [13]. Uma chave bastante utilizada em portas e compartimentos é a chave magnética, que tem como princípio de funcionamento a indução de fluxo magnético em dois contatos separados por uma pequena abertura. O fluxo magnético gera forças nos contatos que os deformam, assim eles se encostam e permitem a corrente elétrica fluir através da chave. No projeto desses tipos de dispositivos, simulações multifísicas são utilizadas para otimização.

O principal objetivo dessas simulações é compreender o comportamento de vibração das estruturas do motor que são excitadas pelas forças magnéticas. A simulação permite correlacionar a parte magnética com a mecânica de modo que é possível encontrar problemas a partir da causa raiz.

3 FORMULAÇÃO MAGNÉTICA

3.1 EQUAÇÕES DE MAXWELL

O contexto moderno do estudo de fenômenos eletromagnéticos se dá a partir das chamadas Equações de Maxwell. James Clerk Maxwell uniu a teoria eletromagnética em 20 equações além de propor um termo que correlaciona a geração de campo magnético pela variação temporal do campo elétrico. No entanto, as equações da forma como se usa na atualidade foram desenvolvidas por Oliver Heaviside, por meio das suas importantes contribuições no campo do cálculo vetorial juntamente com as contribuições de Heinrich Hertz [14], [15]. As Equações de Maxwell também são chamadas de: Lei de Gauss (3.1), Lei de conservação para o fluxo magnético (3.2), Lei de Faraday (3.3), Lei de Ampère generalizada por Maxwell (3.4).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.4)$$

O símbolo $\vec{\nabla}$ é usado para representar campos vetoriais e $\vec{\nabla}$ é o operador Laplaciano vetorial. \vec{D} [C/m²] representa a indução elétrica, ρ_v [C/m³] a densidade volumétrica de carga elétrica e \vec{E} [V/m] o campo elétrico; \vec{B} [T] representa a indução magnética e \vec{H} [A/m] o campo magnético; o símbolo \vec{J} [A/m²] contempla o somatório das densidades de corrente elétrica provenientes de fontes de corrente \vec{J}_s e de correntes induzidas \vec{J}_e .

A correlação entre as Equações de Maxwell é feita pelo entendimento do comportamento das grandezas eletromagnéticas nos materiais. A representação matemática é descrita nas equações (3.5) - (3.7).

$$\vec{D} = \|\varepsilon\| \vec{E} \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \|\mu(\vec{H})\| \vec{H} + \vec{B}_r \quad (3.6)$$

$$\vec{J}_e = \|\sigma\| \vec{E} \quad (3.7)$$

Denomina-se $\|\varepsilon\|$ [F/m] o tensor de permissividade elétrica, $\|\mu(\vec{H})\|$ [H/m] o tensor de permeabilidade magnética não linear e $\|\sigma\|$ [S/m] o tensor de condutividade elétrica. Em materiais com comportamento isotrópico, ou seja, as propriedades não variam no espaço de três dimensões, o símbolo $\|\ \ \ \|$ que tem significado de tensor de ordem 2, não é utilizado. Em materiais com permeabilidade magnética constante $\mu(\vec{H})$ é reduzido a μ . Quando o domínio físico contém materiais “duros” (ímãs permanentes), utiliza-se \vec{B}_r simbolizando a indução remanente do ímã.

O cálculo de força proveniente de campos eletromagnéticos em uma carga é descrito pela equação de Lorentz (3.8), também chamada de equação do movimento de cargas. No formato apresentado têm-se, \vec{f} [N/m³] a densidade volumétrica de força, $\rho_v \vec{E}$ o termo proveniente do campo elétrico (Força de Coulomb) e $\vec{J} \times \vec{B}$ o termo da força magnética (Força de Laplace) [17].

$$\vec{f} = \rho_v \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.8)$$

A equação de continuidade de cargas (3.9) é derivada a partir da aplicação do divergente na equação (3.4) e a substituição da equação (3.1) .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (3.9)$$

Com o objetivo de derivar as condições de contorno, a forma integral das equações de Maxwell é apresentada nas equações (3.10)-(3.13). As equações (3.10) e (3.11) provém da integração no volume Ω das equações (3.1) e (3.2), respectivamente. As integrais de superfície fechadas $\Gamma(\Omega)$ são obtidas pelo Teorema da Divergência. As equações (3.12) e (3.13) são obtidas por meio da integração das equações (3.3) e (3.4) em superfícies do

domínio Ω , respectivamente. As integrais de linha no somatório das bordas fechadas das superfícies $\partial\Gamma$, provém da utilização do Teorema de Stokes, onde Γ_j representa uma superfície com fluxo de corrente elétrica e Γ_D uma superfície com fluxo elétrico. As notações \vec{n} e \vec{l} representam o vetor normal às superfícies de integração e o vetor paralelo às linhas de integração, respectivamente. A equação (3.14) é a forma integral da equação de continuidade de cargas (3.9) após a integração volumétrica e a aplicação do Teorema da Divergência [18].

$$\oiint_{\Gamma(\Omega)} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \rho_V dV \quad (3.10)$$

$$\oiint_{\Gamma(\Omega)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (3.11)$$

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Gamma(\Omega)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad (3.12)$$

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Gamma_j} \vec{j} \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Gamma_D} \vec{D} \cdot \vec{n} dS \quad (3.13)$$

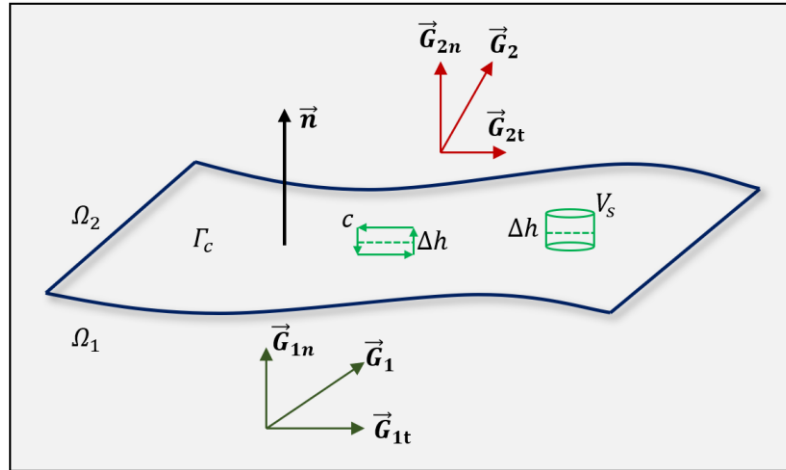
$$\oiint_{\Gamma(\Omega)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho_V dV \quad (3.14)$$

3.1.1 Condições de contorno

Condições de contorno são fundamentais em equações diferenciais parciais para conferir um caráter único às soluções. Condições de contorno de transmissão de campo são obtidas por meio da resolução das equações integrais em domínios fechados como, volumes superfícies e curvas. A Figura 7 mostra um domínio para a dedução das condições de contorno. Os meios 1 e 2 são representados por Ω_1 e Ω_2 , respectivamente, com propriedades magnéticas e elétricas próprias. A superfície que corta os dois meios é chamada de Γ_c , onde c é um contorno fechado, V_c é um volume para integração de superfície e \vec{G} representa um vetor

genérico (campo magnético, elétrico...) com suas componentes normal (\vec{G}_n) e tangencial (\vec{G}_t). Um comprimento ou altura infinitesimal é representado por Δh .

Figura 7 - Domínio para dedução das condições de contorno.



Fonte: Autor

As equações (3.10), (3.11) e (3.14) aplicadas em V_s , além das equações (3.12) e (3.13) em c resultam nas conclusões apresentadas em (3.15) - (3.19). A densidade superficial de carga e a corrente elétrica superficial são representadas por ρ_s e \vec{j}_{sup} , respectivamente, embora, pode-se considerar que essas grandezas são nulas para assegurar continuidade da componente normal de \vec{D} e a componente tangencial de \vec{H} .

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \therefore D_{n2} - D_{n1} = \rho_s \text{ Se } \rho_s = 0, \text{ então: } D_{n2} = D_{n1} \quad (3.15)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \therefore B_{n2} - B_{n1} = 0 \rightarrow B_{n2} = B_{n1} \quad (3.16)$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \therefore E_{t2} - E_{t1} = 0 \rightarrow E_{t2} = E_{t1} \quad (3.17)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_{sup} \therefore H_{t2} - H_{t1} = j_{sup} \text{ Se } j_{sup} = 0 \text{ então: } H_{t2} = H_{t1} \quad (3.18)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0 \therefore J_{n2} - J_{n1} = 0 \rightarrow J_{n2} = J_{n1} \quad (3.19)$$

Além das relações das variáveis na troca entre meios, condições de contorno homogêneas são mostradas em (3.20) - (3.24), onde (3.20), (3.21) e (3.24) são condições

associadas às variáveis no infinito, à simetria ou isolamento do campo vetorial; por exemplo: a corrente elétrica não tem fluxo pelas laterais de um fio condutor. Enquanto que (3.22) e (3.23) são condições de contorno associadas aos materiais com condutividade e permeabilidade infinitas, respectivamente [18].

$$\vec{D} \cdot \vec{n} = 0 \therefore D_n = 0 \quad (3.20)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \therefore B_n = 0 \quad (3.21)$$

$$\vec{E} \times \vec{n} = \vec{0} \therefore E_t = 0 \quad (3.22)$$

$$\vec{H} \times \vec{n} = \vec{0} \therefore H_t = 0 \quad (3.23)$$

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = 0 \therefore J_n = 0 \quad (3.24)$$

3.1.2 Equações de Maxwell e Funções Potenciais

A utilização de potenciais como variáveis auxiliares para a resolução de problemas eletromagnéticos é tão antiga quanto o próprio desenvolvimento da teoria eletromagnética. Um grande benefício da utilização dessa abordagem para modelagem é a possibilidade de integração das equações e condições de contorno, no entanto, em alguns casos, perde-se o sentido físico da variável a ser resolvida [19].

Existem diversas possibilidades de definir potenciais escalares e vetoriais por meio das Equações de Maxwell aplicadas em problemas específicos como: eletrostática, magnetostática, magnetodinâmica e outros. Um exemplo é o problema magnetodinâmico que considera a influência de três grandezas magnéticas, o campo elétrico induzido, a indução magnética e o campo magnético, portanto diversas abordagens podem ser utilizadas para resolver problemas dessa natureza. Em [20] e [21], P. Dular e A. Bossavit descrevem duas das formas clássicas de tratamento de problemas magnetodinâmicos, conforme o campo magnético e conforme a densidade de fluxo magnético.

Em resumo, a formulação conforme \vec{H} leva em consideração campos fontes, para representar o efeito de correntes elétricas em condutores, um campo de reação para

representar os efeitos de correntes induzidas e um potencial escalar magnético nas regiões não condutoras. Essa abordagem tem a vantagem de utilizar elementos nodais para a resolução do problema discreto devido ao caráter escalar do potencial, no entanto, tem a desvantagem de necessitar do cálculo prévio do campo fonte. Dular descreve uma forma de considerar o campo fonte por meio de uma fonte de corrente unitária, ampliando o escopo de utilização desse método, porém exige que no domínio total existam apenas subdomínios simplesmente conexos. Caso em uma parte da geometria não consiga ser reduzida de tamanho até se tornar um ponto, e ainda assim permanecer no domínio, trata-se de um domínio múltiplo conexo. O exemplo clássico de domínio múltiplo conexo é o formato toroidal. Para reduzi-lo a simplesmente conexo, utiliza-se o conceito de cortes [20].

O potencial escalar magnético é o resultado da consideração do campo magnético irrotacional, ou seja, só é válido na região do domínio em que não haja correntes elétricas que geram campo magnético. Outras formulações podem ser encontradas na literatura como a formulação T-Ômega que utiliza um potencial vetor elétrico e um potencial escalar magnético [22] [23]. Além da utilização das diferentes formulações de forma separada é possível a implementação de formulações mistas, como mostrado em [24] que exemplifica uma grande vantagem do método de elementos finitos na resolução de equações diferenciais para problemas físicos. A possibilidade de utilizar diferentes tipos de formulações permite reduzir o número de graus de liberdade em regiões do domínio onde não existe influência de certas variáveis. Dessa forma, não há perda significativa de precisão no cálculo e a resolução se torna computacionalmente mais simples possibilitando análises em tempos menores.

Outro exemplo é a utilização do potencial vetor elétrico para resolução de problemas eletrostáticos. Embora, em geral, utiliza-se potencial escalar elétrico para problemas do tipo, devido ao menor número de graus de liberdade, o potencial vetor permite a utilização de elementos de aresta na resolução por elementos finitos. Como em eletrostática o problema de “pontas” no domínio geométrico (CAD) pode gerar erros em forma de altíssimos valores de campo elétrico, elementos de aresta podem ser utilizados, pois a variável de cálculo é a circulação do vetor na aresta e não o valor nodal do potencial. Dessa forma, reduz-se a possibilidade de erros devido à problemas na geometria, mesmo que, a melhor solução para situações como essa seja o investimento de tempo do usuário na preparação do CAD para a simulação de elementos finitos [25]. Graves conclusões podem ser obtidas devido a esse problema como o entendimento de que há valores de campo elétrico maiores do que a rigidez dielétrica do material. Em engenharia, isso pode significar perda de tempo na procura de

problemas inexistentes ou aumento do custo de produção, caso tentativas de aumentar a robustez do equipamento sejam realizadas.

O objeto de estudo deste trabalho contém apenas materiais isotrópicos, portanto a permissividade elétrica, a permeabilidade magnética e a condutividade elétrica são tratadas como escalares. Devido à presença de aço no estator, a permeabilidade magnética é dependente do campo magnético, portanto não linear. O material do rotor, ferrite magnetizado, implica na utilização da indução remanente nos cálculos. A formulação utilizada neste trabalho descreve um problema magnetodinâmico sem efeitos significativos de corrente de deslocamento, devido à baixa frequência. Essa aproximação é comumente aceitável quando o comprimento de onda da maior frequência presente no equipamento é pelo menos 10 vezes maior do que a dimensão do produto. Neste caso, se considerarmos 1000 harmônicos em relação à frequência fundamental da tensão de entrada, tem-se 60 kHz como frequência máxima. O comprimento de onda para essa frequência no vácuo é de 5 quilômetros, portanto, o termo que representa a corrente de deslocamento $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ na equação (3.4) é desprezado. Além desse termo, a densidade volumétrica de cargas ρ_v não é considerada, pois não existe efeito significativo de cargas livres em motores elétricos para o cálculo de campo elétrico.

Neste trabalho, mostra-se o desenvolvimento da equação magnetodinâmica por meio da utilização do potencial vetor magnético \vec{A} e do potencial escalar elétrico V . Pode-se iniciar o desenvolvimento do equacionamento a partir do caso magnetostático, onde o potencial elétrico não está presente. O potencial vetor magnético é proveniente da interpretação da equação (3.2), a qual demonstra a inexistência de monopolos magnéticos. Do cálculo vetorial, tem-se que: o operador divergente aplicado ao vetor resultante do rotacional de um outro vetor é nulo. A equação (3.25) retrata matematicamente esse conceito para um vetor genérico \vec{G} . Dessa forma, define-se que o vetor de indução magnética é o resultado do rotacional do potencial vetor magnético, como mostrado em (3.26). Com a substituição da equação (3.26) na equação (3.6), a equação (3.4) torna-se a chamada equação do problema magnetostático na forma forte, apresentado em (3.27).

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}) = 0 \quad (3.25)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.26)$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{J} + \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{B}_r \quad (3.27)$$

Para o caso magnetodinâmico, a equação (3.3) precisa ser incluída, pois como já mencionado, o vetor de densidade de corrente elétrica \vec{J} contém a componente \vec{J}_e para correntes induzidas além da componente \vec{J}_s para fontes externas. A equação (3.7) trata da relação entre a densidade de corrente e o campo elétrico, assim há necessidade de utilizar o potencial escalar elétrico. Para definir V , utiliza-se outra identidade proveniente do cálculo vetorial: a operação rotacional em um vetor proveniente do gradiente de uma função escalar genérica G , resulta no vetor nulo, (3.28). Com a substituição do potencial vetor magnético em (3.3) e algumas manipulações matemáticas, tem-se (3.29). Dessa forma, define-se o potencial tal que o campo elétrico mais a derivada temporal do potencial vetor magnético é o resultado do gradiente do potencial escalar elétrico, (3.30) [20]. Historicamente, o sinal negativo é utilizado nessa definição, pois a convecção física é que as linhas de campo elétrico fluem do potencial maior para o potencial menor.

$$\vec{\nabla} \times \nabla G = \vec{0} \quad (3.28)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad (3.29)$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (3.30)$$

A forma forte da equação magnetodinâmica com potencial escalar elétrico e potencial vetor magnético é dada, portanto, pela equação (3.31). O lado direito da equação contém os termos fonte \vec{J}_s e \vec{B}_r provenientes de correntes elétricas impostas no domínio e materiais magnéticos “duros”. O lado esquerdo da equação contém as variáveis a serem resolvidas, \vec{A} e V . Claramente, não há equações suficientes para resolver o problema proposto tornando-o assim, um sistema um problema sem solução única [26]. Esse problema será

solucionado no processo de resolução das equações pelo método de elementos finitos. As condições de contorno, para as equações conforme os potenciais, são dadas por (3.32)-(3.34).

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V = \vec{J}_s + \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{B}_r \quad (3.31)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} = \vec{0} \therefore A_t = 0 \quad (3.32)$$

$$\nabla V \times \vec{n} = \vec{0} \therefore V_n = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{B}_r) \times \vec{n} = \vec{0} \quad (3.34)$$

A definição de um potencial vetor magnético possibilita a integração das equações de Maxwell para formar o problema magnetostático e magnetodinâmico, no entanto, cria-se um problema de unicidade em relação ao potencial. Embora o rotacional de \vec{A} seja único, o seu valor próprio não é. Por conta da falta de informação sobre o resultado do divergente do potencial, pode-se considerar que existe uma função escalar qualquer η a qual tem seu gradiente somado ao vetor \vec{A} sem alterar o resultado de \vec{B} , ou seja, $\vec{A}_g = \vec{A} + \vec{\nabla}\eta$. Isso ocorre, pois o rotacional do gradiente de qualquer função resulta no vetor nulo [27]. A forma clássica de solucionar esse problema é utilizar uma condição de calibre onde o divergente de \vec{A} é imposto, chamada de condição de calibre de Coulomb, (3.35).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.35)$$

Essa imposição torna \vec{A}_g diferente de \vec{A} , pois $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\eta$ não é idêntico para qualquer função genérica η .

4 FORMULAÇÃO ELÁSTICA

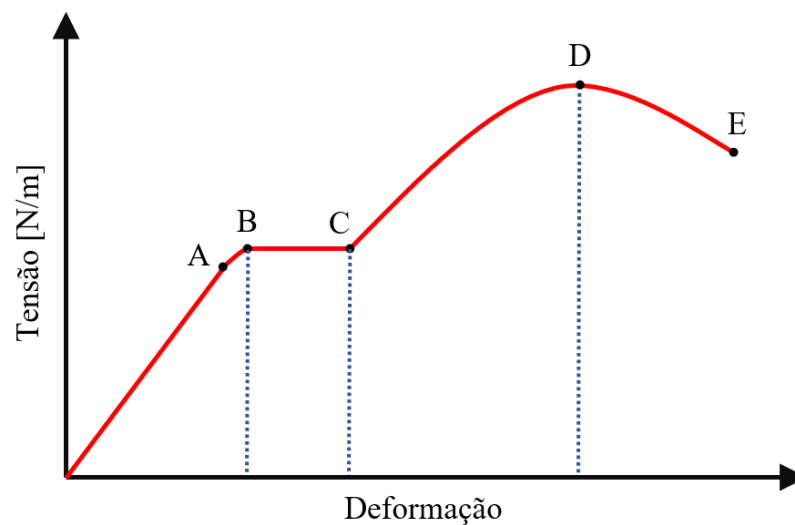
Embora toda a matéria conhecida no universo seja composta por elementos discretos, como explicado pela mecânica quântica, aplicações de engenharia tendem a apresentar influência dos materiais nos problemas físicos apenas quando existem imensas quantidades de partículas. Dessa forma, partículas individuais não são detectadas e não têm influência em experimentos macroscópicos, por isso, utiliza-se a teoria da mecânica de meios contínuos [28]. Quando a estrutura do equipamento ou objeto de estudo é muito superior em tamanho às partículas, pode-se utilizar do conceito de matéria contínua, o que é a maior parte dos casos envolvendo sólidos, líquidos e gases na engenharia.

O estudo da elasticidade dos materiais se baseia na quantificação da deformação de objetos devido a forças externas aplicadas nele [29]. Isso está diretamente relacionado com as propriedades dos materiais, pois o entendimento da forma com que cada classe de material se deforma é fundamental para uma análise correta. Além disso, a forma com que a carga é aplicada na estrutura altera o padrão de deformação. Define-se a tensão/pressão (*stress*) como a relação entre a força e a área onde a força é aplicada, portanto sua unidade é N/m^2 ou Pa. Em geral, a palavra tensão é utilizada no contexto de expansão, enquanto a pressão no contexto de contração. O conceito de deformação está relacionado com a variação do deslocamento ocasionado pela força em relação ao tamanho original da peça, assim é uma grandeza adimensional, pois é o resultado da divisão de metro por metro. As definições matemáticas para esses conceitos serão definidas posteriormente [30].

A curva de tensão mecânica por deformação é utilizada para o entendimento das propriedades relacionadas à resistência dos materiais. Na Figura 8, mostra-se uma curva para um material dúctil genérico. Materiais dúcteis possuem a característica de suportar altos valores de tensão enquanto se deformam sem fratura. A região da origem da curva até o ponto B é chamada de região elástica, pois ao retirar a tensão aplicada no material, o objeto ainda é capaz de voltar ao seu tamanho original. A curva entre a origem e o ponto A tem comportamento linear, onde A é chamado de ponto de limite de proporcionalidade. Ligeiramente superior ao A, está o ponto B chamado de ponto de limite de elasticidade, onde o efeito elástico ainda é presente, porém a relação tensão-deformação não tem comportamento linear. Um pequeno aumento na tensão leva o material para a região de escoamento, onde o limite de escoamento pode ser confundido com o limite de elasticidade por serem valores muito próximos e difíceis de discretizar (em geral, não existe prejuízo nessa consideração). A região entre os pontos B e C é chamada de região plástica, onde o objeto sofre altas

deformações sem aumento da tensão. Segundo [31], na região plástica as deformações podem ser de 10 a 40 vezes maiores do que as produzidas até o limite da elasticidade (observe que a Figura 8 não está em escala real). A partir do ponto B, o material se deforma de maneira que não se reverte o tamanho original após a retirada da tensão sobre ele. Após o escoamento, tem-se a região de endurecimento por deformação até o ponto D, chamado de limite de resistência; após o endurecimento tem-se a região de estrição até o ponto de fratura E [30] [32] [31] [33].

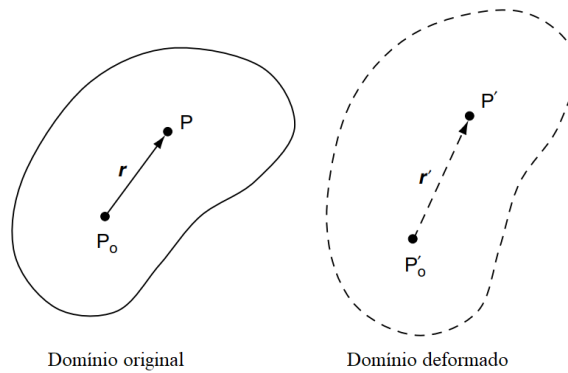
Figura 8 - Curva Tensão-Deformação genérica (não está em escala real).



Fonte: Autor - Adaptado de [31]

O contexto deste trabalho é a avaliação da deformação no estator de um motor causada pelas forças magnéticas. Dessa forma, assume-se que o problema tem natureza linear e elástica, portanto pode-se utilizar a teoria linear elástica para pequenas deformações. Para o entendimento do equacionamento elástico é necessário introduzir alguns conceitos. Na literatura, é comum o uso de σ para representar a tensão e ε para representar a deformação. Como essas variáveis já foram utilizadas para o eletromagnetismo, neste trabalho, utiliza-se τ para tensão e η para deformação. O vetor de deslocamento está associado à distância do ponto de origem até o ponto de medição. Quando existe deformação em um objeto, o vetor de deslocamento é alterado, como mostrado na Figura 9. Para futuras definições, o tensor de segunda ordem resultante do gradiente do vetor deslocamento é apresentado em (4.1), onde \vec{u} [m] é o deslocamento.

Figura 9 - Deformação genérica entre dois pontos próximos.



Fonte: Adaptado de [29]

$$\vec{\nabla} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

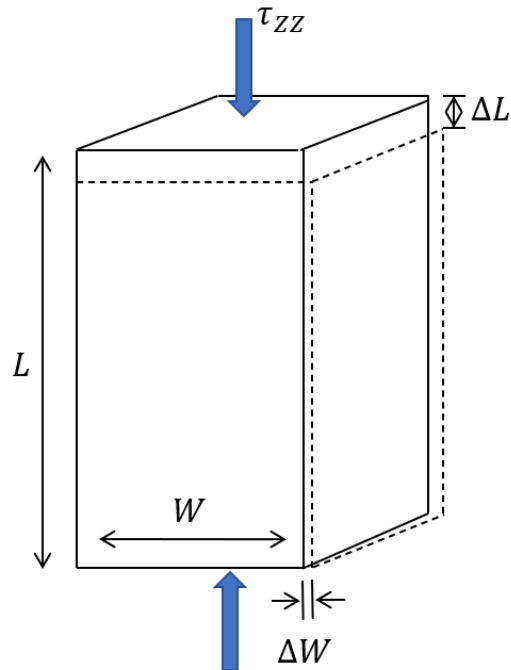
sendo

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

4.1 MÓDULO DE YOUNG E COEFICIENTE DE POISSON

Como mencionado anteriormente, a consideração feita é que a simulação elástica tem características de “pequenas deformações”. Isso pode ser feito, no caso onde a norma do tensor de deformação é muito menor do que 1 [34]. Quando uma força/tensão axial é aplicada em um objeto, a reação é de expansão ou contração na direção axial. Essa reação pode ser chamada de deformação axial e ela é descrita a partir do módulo de Young (E). Do mesmo modo, há uma reação oposta nas direções tangenciais à direção axial. Ou seja, quando uma tensão de contração é aplicada em um objeto a deformação nas direções tangenciais são de expansão. A relação entre a deformação na direção da força e nas direções tangenciais é dada pelo coeficiente de Poisson ν . A Figura 10 exemplifica esse efeito para a direção (z).

Figura 10 - Deformação por força axial.



Fonte: Autor - Adaptado de [35]

A partir da Figura 10, define-se genericamente, para uma tensão aplicada a um objeto na direção z , as relações:

$$\eta_{zz} = \frac{\Delta L}{L} \quad (4.3)$$

$$E = \frac{\tau_{zz}}{\eta_{zz}} \quad (4.4)$$

$$\eta_{yy} = \frac{\Delta W}{W} \quad (4.5)$$

$$\nu = -\frac{\eta_{zz}}{\eta_{yy}} \quad (4.6)$$

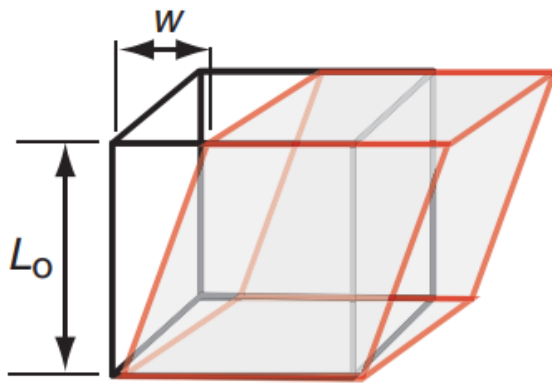
Quando uma força é aplicada tangencialmente a superfície de um objeto, ocorre um padrão de deformação angular, chamado de deformação por cisalhamento (*shear strain*), como mostrado na Figura 11. A deformação por cisalhamento γ é dada por (4.7), onde

$\tan(\gamma) \approx \gamma$ para pequenas deformações. Analogamente ao módulo de Young E , pode-se definir um módulo de proporcionalidade G entre a tensão e a deformação de cisalhamento. Para materiais isotrópicos, ou seja, materiais nos quais os módulos elásticos não dependem da direção da força aplicada, pode-se escrever G em função de E e de ν [30], como mostrado em (4.8). Neste trabalho, apenas materiais isotrópicos são considerados.

$$\gamma = \frac{w}{L_0} \quad (4.7)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.8)$$

Figura 11 - Deformação por cisalhamento.



Fonte: [30]

4.2 EQUACIONAMENTO ELÁSTICO GENÉRICO

Para obter a generalização da equação elástica, o tensor de deformação $\|\eta\|$ é definido em (4.9). As componentes diagonais do tensor são as deformações axiais ou normais às superfícies, ou seja, mudanças no comprimento de x , y e z . Enquanto que as componentes fora da diagonal refletem o efeito de cisalhamento ou mudança nos ângulos do vetor de deslocamento nos planos xy , xz e yz [36]. O operador gradiente aplicado ao vetor deslocamento \vec{u} resulta em um tensor de segunda ordem, pois a gradiente é aplicado a cada linha do vetor e assim, gera-se uma matriz quadrada simétrica de ordem 3.

$$\|\eta\| = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial y_1}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial z_1}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial y_1}{\partial x}\right) & \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial z} + \frac{\partial z_1}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial z_1}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial z} + \frac{\partial z_1}{\partial y}\right) & \frac{\partial z_1}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Associado aos tensores de deformação e deslocamento, tem-se o tensor de tensões $\|T\|$ definido em (4.10) que relaciona as forças aplicadas em um objeto ao seu volume. A interpretação física das componentes diagonais e fora da diagonal do tensor de tensões é equivalente a feita para o tensor de deformações.

$$\|T\| = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Deslocamento e deformação são grandezas associadas à velocidade e movimento, portanto se utiliza a mecânica clássica newtoniana para derivar o equacionamento elástico. Neste caso, a lei que rege os fenômenos elásticos é a segunda lei de Newton, ela afirma que “a taxa de variação do momento de um corpo é igual, em magnitude e direção, à força imposta a ele” [37]. Como o momento é definido como a massa m que multiplica a velocidade \vec{v} , a segunda lei de Newton pode ser escrita em (4.11), para sistemas com conservação de massa.

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} \quad (4.11)$$

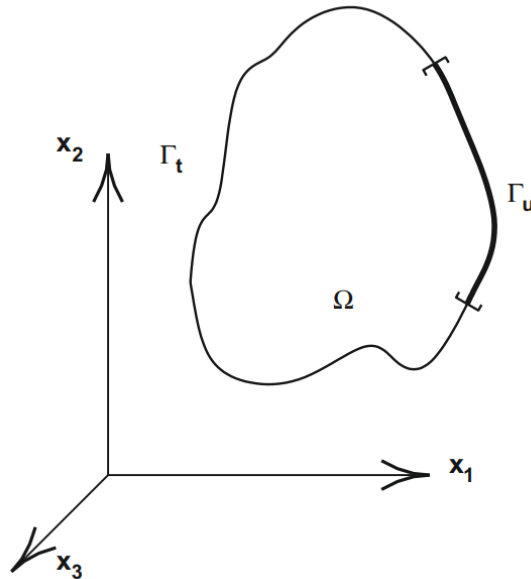
Com os conceitos de tensor de tensões, conservação do momento linear e angular, pode-se derivar a equação genérica do movimento elástico, (4.12), onde ρ_m é a densidade de massa e \vec{g} a aceleração da gravidade. A Figura 12 mostra a separação das superfícies para aplicação das condições de contorno de: tração em Γ_t , dada pela equação (4.13), e deslocamento em Γ_u , dada pela equação (4.14). Nota-se que a conservação dos momentos propicia ao sistema simetria do tensor de tensões da forma $\|T_{ij}\| = \|T_{ji}\|$ [34].

$$\vec{\nabla} \cdot \|T\| + \rho_m \vec{g} = \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (4.12)$$

$$\|T\| \cdot \vec{n} = \vec{t}' \quad (4.13)$$

$$\vec{u} = \vec{u}'_{cte} \quad (4.14)$$

Figura 12 - Condições de contorno para elasticidade.



Fonte: [34]

A formulação elástica só é completa se o efeito das deformações estiver associado às propriedades dos materiais presentes no domínio de cálculo, assim, é necessária a equação constitutiva dos materiais. Neste trabalho, apenas materiais elásticos lineares são considerados, portanto a equação constitutiva respeita a lei de Hooke, onde o tensor de tensões de ordem 2 é o equivalente ao tensor de deformações de ordem 2 multiplicado por um tensor de ordem 4. Esse tensor de ordem 4 contém as propriedades dos materiais baseadas no coeficiente de Poisson e no módulo de Young, e é comumente chamado de matriz de rigidez. De forma geral, a equação constitutiva é descrita em (4.15), tanto na forma tensorial matricial quanto na notação de Einstein [29].

$$\|T\| = \|C\|_4 : \|\eta\| \rightarrow T_{ij} = C_{ijkl} \eta_{kl} \quad (4.15)$$

Um tensor de ordem 4 genérico contém 81 componentes, no entanto, quando se considera todas as simetrias existentes da física do problema e as conservações dos momentos

é possível descrever o problema por completo com apenas 21 componentes. A forma matricial da equação constitutiva elástica pela lei de Hooke para materiais isotrópicos é apresentada na equação (4.16) (o efeito da dilatação térmica é desprezado neste trabalho) [31].

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_z \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \\ \eta_{yz} \\ \eta_{zx} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Outra forma de descrever essa relação entre tensão e deformação é apresentada em (4.17), onde $tr()$ é o traço da matriz e $\|I\|$ é o tensor identidade de ordem 2. Na equação (4.18), define-se o parâmetro de Lamè. A partir das equações (4.9), (4.12) e (4.17), deriva-se a equação (4.19) chamada de equação de Navier-Lamè, equação de Navier-Cauchy ou equação de Navier para elasticidade [38].

$$\|T\| = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\|\eta\| + \frac{\nu}{1-2\nu} tr(\|\eta\|) \|I\| \right) \quad (4.17)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.18)$$

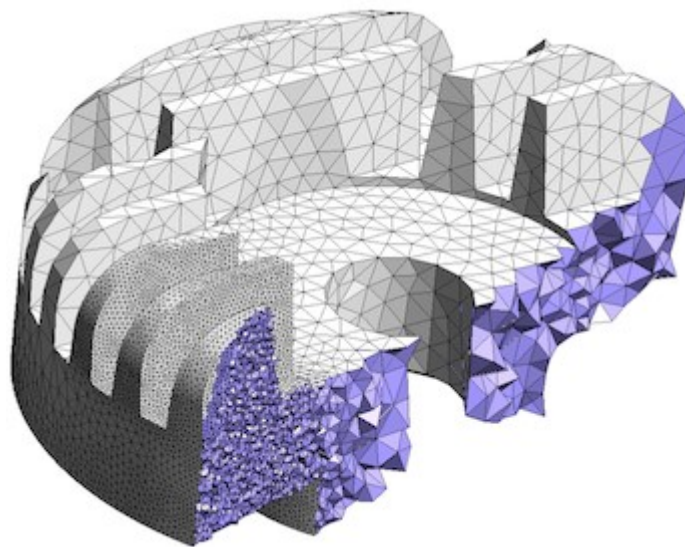
$$(\lambda + G)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + G\vec{\nabla}^2\vec{u} + \vec{f} = \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (4.19)$$

As relações entre os tensores de tensão, de deformação, o vetor de deslocamento, as condições de contorno e a lei de Hooke formam a forma forte da equação linear elástica.

5 EQUAÇÕES NA FORMA FRACA E MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos é uma técnica numérica utilizada para gerar soluções aproximadas de equações diferenciais, especialmente equações diferenciais parciais aplicadas a problemas físicos. Para que o domínio geométrico seja descrito matematicamente, utiliza-se o conceito de “malha” que pode ser entendida como a junção de pequenos pedaços de formatos geométricos simples que formam uma representação aproximada dos objetos de estudo. Neste método, o tamanho e o formato dos elementos não precisam ser iguais, necessariamente. Essa característica tem grande relevância na utilização desse método em problemas de engenharia, pois é possível refinar a malha em regiões onde as grandezas físicas tem uma maior taxa de variação em relação à geometria. Dessa forma, constrói-se a malha sem que todo o domínio precise de refino, o que traria uma densidade de elementos consideravelmente superior, conseqüentemente, mais tempo e capacidade de processamento computacional seriam necessários [39] [40]. Um exemplo de malha utilizada para resolução de problemas com o método de elementos finitos é mostrado na Figura 13. Uma importante vantagem do método de elementos finitos é a sua generalidade física, ou seja, diversos problemas físicos podem ser descritos de maneira a se aplicar este método, assim possibilita-se o acoplamento multifísico de diversas formas. Alguns exemplos de acoplamentos são: magnético-elástico, elástico-acústico, fluido-elástico, magnético-térmico, entre outros.

Figura 13 - Exemplo de malha para análise de elementos finitos.



Fonte: [40]

5.1 MÉTODO DE RESÍDUOS PONDERADOS

A resolução de equações diferenciais por elementos finitos pode ser feita por meio do método variacional ou do método de resíduos ponderados. O primeiro refere-se à minimização de um funcional que, em geral, está relacionado com a energia do sistema. Em casos simples é possível definir este funcional, porém em aplicações que envolvem formulações complexas este método é pouco utilizado.

Em contrapartida, o método de resíduos ponderados parte da forma fraca da equação física obtida por meio de manipulações matemáticas da forma forte. Ele define uma solução aproximada para uma equação diferencial como uma combinação linear de um conjunto finito de funções “teste” e encontra os coeficientes dessas funções por meio da minimização do erro entre a solução exata e a solução aproximada. Este conceito está relacionado ao fato de que soluções numéricas de equações diferenciais são aproximadas, portanto existe um resíduo proveniente da comparação da solução numérica com a solução exata. A função residual é multiplicada por um conjunto de funções de ponderação (também chamadas de funções de peso), que são escolhidas para satisfazer certos critérios, como minimizar o erro ou garantir que a solução satisfaça certas condições de contorno [41] [42].

Existem alguns métodos para escolher as funções peso, dentre elas estão: o método de Galerkin, o método de colocação e o método dos mínimos quadrados. Cada um desses métodos tem suas próprias vantagens e desvantagens, dependendo do problema específico a ser resolvido. Neste trabalho, utiliza-se o método de Galerkin por ser equivalente a minimização de energia do sistema físico por meio de um funcional e por ter um bom desempenho computacional [3]. Dessa forma, o método de elementos finitos é aplicado à forma fraca das equações físicas apresentadas anteriormente. Como serão necessárias integrações sobre superfícies e volumes, é necessário definir um espaço funcional que contém as funções utilizadas no processo de integração [18]. Neste trabalho a notação utilizada para integração em um volume e em uma superfície são (5.1) e (5.2), respectivamente.

$$\int_{\Omega} XY \, d\Omega \quad e \quad \int_{\Omega} \vec{X} \cdot \vec{Y} \, d\Omega \quad (5.1)$$

$$\int_{\Gamma} XY \, d\Gamma \quad e \quad \int_{\Gamma} \vec{X} \cdot \vec{Y} \, d\Gamma \quad (5.2)$$

As funções escalares X e Y , além das funções vetoriais \vec{X} e \vec{Y} , são definidas genericamente em espaços de Sobolev para escalares (5.3) e vetores (5.4). A notação L^2 e \vec{L}^2 referem-se à espaços funcionais com propriedades de integração (5.5) e (5.6), respectivamente [18] [43]. Essas propriedades permitem a definição de qualquer domínio de cálculo, para funções nesses espaços de Sobolev, sem possibilidade de obter resultados indeterminados no infinito por conta de suas derivadas.

$$H^1(\Omega) = \left\{ U \in L^2(\Omega); \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (5.3)$$

$$\vec{H}^1(\Omega) = \left\{ \vec{U} \in \vec{L}^2(\Omega); \frac{\partial \vec{U}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} \in \vec{L}^2(\Omega) \right\} \quad (5.4)$$

$$L^2(\Omega) = \left\{ U: \int_{\Omega} U^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (5.5)$$

$$\vec{L}^2(\Omega) = \left\{ \vec{U}: \int_{\Omega} \|\vec{U}\|_1^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (5.6)$$

Como os problemas magnéticos contém os operadores gradiente, rotacional e divergente, é possível associar os espaços funcionais H^1 e \vec{H}^1 com outros espaços funcionais euclidianos que necessitam satisfazer certas condições de contorno. Os espaços utilizados neste trabalho são denotados por $E^p, p = 0,1,2$, onde os índices estão associados aos operadores gradiente, rotacional e divergente, respectivamente [18]. As condições de contorno que precisam ser satisfeitas são aplicadas na fronteira genérica Γ_U , conforme as equações (5.7), (5.8) e (5.9).

$$E_U^0(\Omega) = \{ U \in L^2(\Omega); \vec{\nabla} U \in \vec{L}^2(\Omega), U|_{\Gamma_U} = Cte \} \quad (5.7)$$

$$E_U^1(\Omega) = \{ \vec{U} \in \vec{L}^2(\Omega); \vec{\nabla} \times \vec{U} \in \vec{L}^2(\Omega), \vec{U} \times \vec{n}|_{\Gamma_U} = \vec{0} \} \quad (5.8)$$

$$E_U^2(\Omega) = \{ \vec{U} \in \vec{L}^2(\Omega); \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \in L^2(\Omega), \vec{U} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_U} = 0 \} \quad (5.9)$$

É chamada forma “fraca” de uma equação a formulação que é obtida por meio da redução de ordem da forma “forte”. No caso das equações estudadas neste trabalho, tem-se derivadas de segunda ordem provenientes do operador rotacional aplicado de forma duplicada em um mesmo vetor, para a formulação magnética. Para a formulação elástica, tem-se um divergente aplicado a um tensor proveniente de um gradiente simétrico. Assim, busca-se obter uma equação com derivadas de primeira ordem, apenas. Para isso, pode-se utilizar as fórmulas de Green para integração por partes em problemas vetoriais. As duas formas são apresentadas em (5.10) e (5.11).

$$\int_{\Omega} \vec{X} \cdot \vec{\nabla} Y \, d\Omega + \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{X}) Y \, d\Omega = \int_{\Gamma} Y (\vec{X} \cdot \vec{n}) \, d\Gamma, \quad \vec{X} \in \vec{H}^1(\Omega), Y \in H^1(\Omega) \quad (5.10)$$

$$\int_{\Omega} \vec{X} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Y}) \, d\Omega - \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{X}) \cdot \vec{Y} \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\vec{X} \times \vec{n}) \cdot \vec{Y} \, d\Gamma, \quad \vec{X}, \vec{Y} \in \vec{H}^1(\Omega) \quad (5.11)$$

Dada uma equação diferencial parcial genérica na forma,

$$\mathfrak{L}(\phi) - f = 0 \quad (5.12)$$

sendo \mathfrak{L} um operador diferencial parcial, ϕ a variável dependente e f uma função conhecida, chamada de “fonte” do sistema diferencial. As funções ϕ e f são dependentes de um vetor de variáveis independentes também genérico, \vec{x} . Para simplificar a notação, essa informação é mantida implícita nas equações. Assume-se que a equação (5.12) tem solução, portanto há um ϕ_e que confere a solução exata, mas no contexto da solução numérica, há um ϕ_a que confere uma solução aproximada. Portanto, pode-se definir um resíduo R como resultado da resolução numérica da equação (5.12) como mostrado em (5.13) [44].

$$\mathfrak{L}(\phi_a) - f = R \quad (5.13)$$

O objetivo do método de resíduos ponderados é multiplicar a equação (5.13) por uma função “peso” ou função de “teste” w , integrar ambos os lados e forçar a integral do lado direito ser nula, como mostrado em (5.14). A função de teste pode ser genérica, no entanto o

método de Galerkin especifica que ela será idêntica a função de interpolação definida de acordo com o tipo de elemento utilizado na malha. A apresentação da função de interpolação será feita posteriormente. A equação (5.14) é transformada em uma nova equação na forma fraca para depois ser efetuada a discretização. Caso ela já seja uma equação de primeira ordem, a discretização pode ser feita de forma direta.

$$\int_{\Omega} w [\mathcal{L}(\phi_a) - f] d\Omega = \int_{\Omega} w R d\Omega \Rightarrow \int_{\Omega} w R d\Omega = 0 \quad (5.14)$$

O processo de discretização ocorre tanto a nível de elemento quanto a nível de volume. A nível de elemento, a discretização está relacionada com os graus de liberdade definidos a partir do elemento escolhido e da física do problema. Neste caso, a função de interpolação é fundamental para que se construa um sistema matricial com solução possível. A nível de domínio, soma-se as contribuições de todos os elementos para construir o resultado final, sendo que, a sua unicidade deve ser garantida por meio das condições de contorno aplicadas e, no caso da formulação com potencial vetor magnético, pode-se acrescentar a condição de calibre.

A equação (5.14) é discretizada de maneira genérica em (5.15), sendo E_d o conjunto dos elementos que formam o domínio, G_d é o número de graus de liberdade em cada domínio, w_{ge} é uma função de interpolação genérica e $\phi_{a_{ge}}$ é o grau de liberdade a ser resolvido. Neste subcapítulo, não se especifica se as funções são vetoriais ou escalares. Dessa forma, pode-se considerar que a maneira que o método de resíduos ponderados foi apresentado, tem aplicação genérica em equações físicas na forma fraca de diferentes problemas.

$$\sum_1^{E_d} \sum_1^{G_d} w_{ge} \mathcal{L}(w_{ge}) \phi_{a_{ge}} = \sum_1^{E_d} \sum_1^{G_d} w_{ge} f_{ge} \quad (5.15)$$

5.2 ELEMENTOS NODAIS E DE ARESTA

Em simulações de elementos finitos, existem três possíveis estruturas para discretizar o domínio de cálculo, elementos em uma, duas e três dimensões. Elementos unidimensionais são utilizados no estudo de deformação e vibração em estruturas como vigas e grandes formatos metálicos, por exemplo, pontes e edifícios. Formatos geométricos em duas

dimensões são utilizados em problemas de vibração onde a espessura é desprezível como chapas, placas e carcaças [34]. Além disso, simulações 2D são amplamente usadas em análise de motores elétricos que tem fluxo magnético predominantemente radial. Elementos 3D são os mais genéricos e podem ser aplicados na maioria dos casos práticos em engenharia. No entanto, a exigência computacional para resolver problemas em três dimensões nem sempre torna viável essa análise. A grande vantagem de reduzir a ordem de simulações por elementos finitos é a drástica redução do número de graus de liberdade em comparação ao 3D. Isso proporciona rápidas análises, porém se deve ter atenção às considerações e simplificações feitas. Em alguns casos, a redução de ordem torna a simulação pouco representativa fisicamente. Assim, a escolha do tipo de elemento depende dos requisitos específicos da simulação e da natureza do sistema que está sendo modelado [39].

A malha de elementos finitos é composta por elementos discretos por meio de nós, arestas, faces e volumes. Os nós são os vértices que conectam as arestas, que por sua vez formam superfícies que quando fechadas formam um volume. Tendo em vista essas características, pode-se derivar variáveis associadas a cada parte dos elementos, o que confere diferentes características para o modelo numérico. A partir dos vértices, pode-se associar variáveis nos “nós”, dessa forma, os elementos da malha são chamados de elementos nodais. Com o mesmo princípio, define-se elementos de aresta, de face e de volume. Cada um com suas características próprias que permitem a adaptação do método de elementos finitos para diferentes problemas físicos. Os resultados numéricos para regiões da geometria além dos pontos onde as variáveis são calculadas, são obtidos por meio de um método de interpolação, que pode ser linear, de segunda ordem ou de ordem mais elevadas. Quando a interpolação é linear, os elementos são chamados de elementos de primeira ordem e assim por diante. Além disso, outro fator importante no sistema discreto é o formato do elemento utilizado, por exemplo: em três dimensões pode-se utilizar tetraedros, pirâmides com base retangular, prismas, hexaedros, entre outros.

Nesta introdução, foram apresentados alguns fatores fundamentais para a construção do modelo numérico, são eles: a região dos elementos que será associada às variáveis do problema (nós, arestas...), a ordem das funções de interpolação (1^a , 2^a ...) e o formato geométrico dos elementos (tetraedros, primas...).

As chamadas “formas de Whitney” são maneiras de associar propriedades dos elementos às funções de interpolação de forma conjunta com espaços de Hilbert, operadores diferenciais, condições de contorno e características de continuidade. Em elementos finitos,

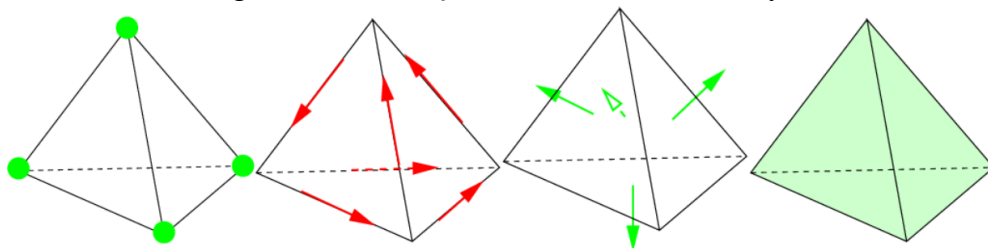
utiliza-se quatro formas de Whitney denotadas pelos números de 0 a 3. Na Tabela 1, resume-se as principais características de cada forma e a Figura 22 ilustra as formas para um elemento 3D de formato tetraédrico. Neste trabalho, utiliza-se elementos associados à forma 0 para a formulação elástica e forma 1 para formulação magnética. Dessa forma, assegura-se que há continuidade total para o descolamento e no caso do campo magnético, apenas a componente tangencial é necessariamente contínua, a componente normal pode ser descontínua de forma que o sentido físico da condição (3.18) seja mantido [45] [46]. Como mencionado anteriormente, as formas de Whitney estão associadas a espaços funcionais os quais podem ser representados com o mesmo índice, ou seja, 0-forma está associado ao espaço funcional $E_V^0(\Omega)$ e assim por diante.

Tabela 1 - Resumo das formas de Whitney.

Whitney p-forma	Região da geometria	Notação	Tipo de função	Grau de liberdade	Continuidade
0-forma	vértice	w_n	Escalar: elemento nodal	Valor da função nos vértices	Tangencial e normal
1-forma	aresta	\vec{w}_e	Vetorial: elemento de aresta	Circulação do campo ao longo da aresta	Tangencial
2-forma	face	\vec{w}_f	Vetorial: elemento de face	Fluxo do campo através da face	Normal
3-forma	volume	w_v	Escalar: elemento constante	Soma da função no volume	Sem continuidade

Fonte: Adaptado de [48]

Figura 14 - Ilustração das formas de Whitney.



Fonte: [48]

As funções de interpolação notadas na Tabela 1, são baseadas em funções de interpolação baricêntrica. Neste trabalho, as funções da forma 0 e 1 são discutidas. O conjunto de funções w_n são funções de interpolação baricênticas associadas a cada vértice/nó n . Portanto, em um conjunto de nós \mathcal{N} de tamanho n , existem n funções de interpolação. Uma função respectiva a um nó, por definição, tem um valor unitário nele e um valor nulo em

todos os outros nós do domínio. A variação entre o nó de referência e os demais pode ser linear ou ter ordens superiores, onde é essa característica que define elementos de primeira, segunda ou mais alta ordens [49]. Para ordens superiores a um, são necessários nós intermediários de forma que a construção de funções de ordem superiores seja possível. A função de interpolação em um domínio de cálculo completo para elementos nodais é apresentada genericamente em (5.16), onde $U_I(u_n)$ é a função interpolada resultante, u_n são os valores nodais obtidos na resolução do sistema matemático, sendo que todas as funções são dependentes de um vetor com as coordenadas espaciais e temporal [45].

$$U_I(u_n) = \sum_{n \in \mathcal{N}} u_n w_n \quad (5.16)$$

Os elementos Whitney de ordem 1 são comumente chamados de elementos de aresta, pois as grandezas físicas estão associadas a circulação do vetor nas arestas do elemento da malha. Nesse caso, o número de funções de interpolação está relacionado com o número de arestas do elemento e para descrevê-las são necessárias as informações de dois nós que se conectam por meio da aresta. A definição do valor da função de interpolação na aresta é análoga ao elemento nodal, ou seja, a circulação do vetor é igual a um para a função de interpolação associada a esta aresta e zero para todas as outras. O elemento nodal utiliza as funções baricêntricas como funções de interpolação, no caso de elementos de aresta a definição está relacionada ao gradiente dessas funções, como mostrado na equação (5.17), onde: m e n representam dois nós conectados pela aresta e e ζ_m é a função de interpolação baricêntrica associadas ao nó m . A definição matemática da forma de ordem 1 é apresentada em (5.18) e (5.19), onde e representa a aresta e \mathcal{E} o conjunto total de arestas do domínio [45]. Os elementos de ordem 2 e 3 não são apresentados, pois não são necessários para resolução dos problemas envolvidos neste trabalho.

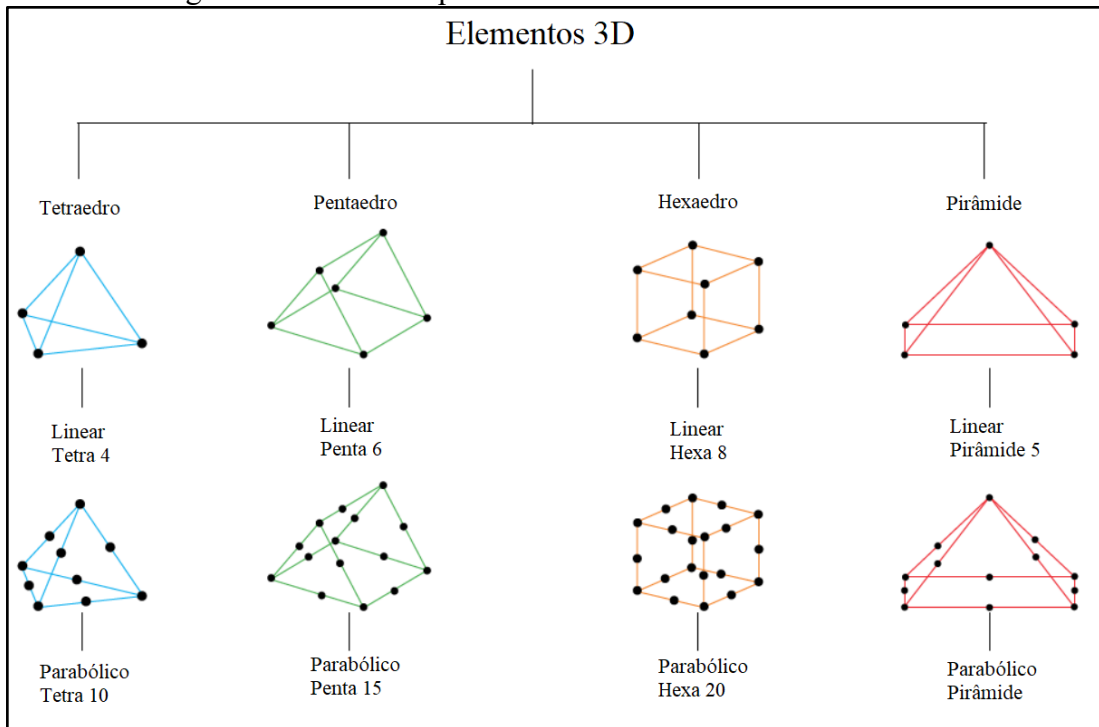
$$\vec{w}_e = \zeta_m \vec{\nabla} \zeta_n - \zeta_n \vec{\nabla} \zeta_m \quad (5.17)$$

$$\vec{U}_I(u_e) = \sum_{e \in \mathcal{E}} u_e \vec{w}_e \quad (5.18)$$

$$u_e = \int_e \vec{U} \cdot d\vec{l}, \forall e \in \mathcal{E} \quad (5.19)$$

As formas de Whitney definidas de forma genérica podem ser utilizadas em elementos de diferentes formatos. Na Figura 15, os principais formatos de elementos de malha, utilizados para resolução de problemas com o método de elementos finitos, são mostrados. O elemento mais simples, porém, o mais utilizado e versátil, é o tetraedro linear. Essa forma geométrica é chamada de simplex de três dimensões, pois é o formato natural mais simples possível. A sua generalização é feita a partir de um ponto (0D), reta (1D), triângulo (2D) e tetraedro (3D) [50]. Dessa forma, qualquer geometria pode ser discretizada por esse elemento. O pentaedro é uma geometria geralmente utilizada quando é possível fazer a extrusão de uma malha triangular de duas dimensões em forma de camadas. Esse elemento apresenta a vantagem de conter mais nós e arestas do que o tetraedro, assim, acrescenta-se graus de liberdade para o sistema, além disso, a função de interpolação contém informação de mais variáveis. Essas características conferem maior precisão sem um necessário aumento de tempo computacional. O hexaedro, por sua vez, é o elemento que apresenta a maior precisão, no entanto, criar malhas com esses elementos não é uma tarefa trivial, em geral, necessita de trabalho extra para o usuário do programa de elementos finitos para que o malhador gere uma malha hexaédrica. O elemento piramidal geralmente é utilizado em camadas de transição quando se tem mistura de elementos pentaédricos ou hexaédricos com tetraedros. Na mesma imagem, mostra-se os elementos de segunda ordem ou parabólicos. É possível perceber que o acréscimo do número de nós e arestas é bastante significativo, portanto, a utilização desses elementos deve ser feita com cautela para que o tempo de simulação não se torne inviável.

Figura 15 - Formatos padrão de elementos em três dimensões.



Fonte: Adaptado de “*Detailed course: Teaching Practical Aspects of Finite Element Analysis*”

5.3 EQUAÇÃO NA FORMA FRACA PARA O PROBLEMA MAGNETODINÂMICO.

Com o desenvolvimento da forma forte da formulação magnetodinâmica, a partir do potencial vetor magnético e do potencial escalar elétrico, obteve-se a equação (3.31). Para melhor visualização, esta equação é reescrita em (5.20). Nela, observa-se que derivadas de segunda ordem estão presentes, portanto, a redução de ordem permite que a forma fraca da equação tenha apenas derivadas de primeira ordem. A forma fraca dessa equação é obtida com a multiplicação da equação (5.20) por uma função de teste \vec{w}_e e com a integração por partes no domínio Ω . A integração por partes é feita utilizando a segunda forma de Green apresentada em (5.11).

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\nabla} V = \vec{J}_s + \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{B}_r \quad (5.20)$$

Assim, a forma fraca da equação magnetodinâmica A-V é dada em (5.21), onde Ω é o domínio completo, Ω_C representa a parte do domínio que contém materiais condutores de eletricidade, Ω_s é o domínio com fonte de corrente, Ω_m o domínio que contém ímãs permanentes e Γ_h a fronteira do domínio magnético. O termo \vec{H} que representa o vetor campo magnético é proveniente de $\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A}$. A partir da equação (3.23), deduz-se que o último termo da equação (5.21) que representa a condição de contorno natural do sistema com valor nulo no domínio de cálculo. Segundo [51], pode-se usá-la para associação de variáveis globais do tipo circulação, como a força magnetomotriz.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{w}_e) \cdot \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} d\Omega + \int_{\Omega_C} \vec{w}_e \cdot \left[\sigma \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + \vec{\nabla} V \right) \right] d\Omega_C \\ = \int_{\Omega_s} \vec{w}_e \cdot \vec{J}_s d\Omega_s + \int_{\Omega_m} \vec{w}_e \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{B}_r \right) d\Omega_m + \int_{\Gamma_h} (\vec{n} \times \vec{H}) \cdot \vec{w}_e d\Gamma_h \end{aligned} \quad (5.21)$$

Na forma fraca do problema magnetodinâmico apresentado, têm-se dois graus de liberdade. O primeiro é o potencial vetor magnético que está associado ao elemento de Whitney de ordem 1, portanto elementos de aresta. Assim, as variáveis a serem resolvidas são as circulações do vetor nas arestas dos elementos da malha de elementos finitos. Além disso, foi definido o potencial escalar elétrico, presente no domínio de materiais condutores. Por se tratar de uma função escalar, pode-se associá-lo aos valores nodais e elementos de Whitney de ordem 0 com funções de interpolação w_n . Pode-se considerar a seguinte relação entre as funções de interpolação vetoriais e escalares,

$$\vec{w}_e = \vec{\nabla} w_n. \quad (5.22)$$

Isso implica que a equação (3.9), no caso de não haver cargas livres, tenha a sua forma fraca como apresentado na equação (5.23), onde Γ_j é a fronteira de Ω_C [20].

$$\int_{\Omega_C} \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} w_n d\Omega_C + \int_{\Omega_C} \sigma \vec{\nabla} V \cdot \vec{\nabla} w_n d\Omega_C = \int_{\Gamma_j} \vec{n} \cdot \vec{J} w_n d\Gamma_j \quad (5.23)$$

5.4 EQUAÇÃO NA FORMA FRACA PARA PROBLEMAS ELÁSTICOS.

No capítulo 4, o desenvolvimento da formulação elástica foi apresentado de forma que se pode enxergar a elasticidade pela equação de Navier-Cauchy ou pela equação de equilíbrio no contexto dos tensores de tensão e deformação. Neste trabalho, o desenvolvimento da forma fraca da equação elástica é feito por meio da equação de equilíbrio e as relações apresentadas na equação (5.24), as quais foram desenvolvidas previamente. Para isso, é necessário multiplicar a equação de equilíbrio por uma função “teste”. Como esta equação tem um caráter vetorial, a função de teste precisa ser um vetor no espaço euclidiano de três dimensões. As características físicas da elasticidade têm boa adequação com os elementos de Whitney de ordem 0, ou seja, funções de interpolação escalares com a utilização de elementos nodais. Os principais motivos para que esse elemento seja adequado para elasticidade são, a garantia de continuidade normal e tangencial e a condição de contorno de Dirichlet como um valor constante na fronteira. A condição de Dirichlet neste caso é a superfície onde o deslocamento é forçadamente nulo. Como a variável em questão é o vetor deslocamento, a composição da função teste vetorial \vec{v} é dada a partir de três funções de interpolação escalares da forma w_n , como mostrado na equação (5.27).

$$\vec{v} \cdot \|T\| + \vec{f} = \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (5.24)$$

sendo

$$\|T\| = 2G\vec{\nabla}_s \vec{u} + \lambda\vec{\nabla} \vec{u} \|I\|, \quad (5.25)$$

e o gradiente simétrico é definido como:

$$\vec{\nabla}_s \vec{u} \equiv \frac{(\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T)}{2} \quad (5.26)$$

$$\vec{v} = [w_{n_x} \ w_{n_y} \ w_{n_z}] \quad (5.27)$$

A equação de equilíbrio é multiplicada pela função \vec{v} e integrada no domínio de cálculo elástico Ω_E . Após a utilização do teorema da divergência e a primeira identidade de Green em tensores, a resultante é:

$$\int_{\Omega_E} \|T\| : \vec{\nabla} \vec{v} \, d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \cdot \vec{v} \, d\Omega_E = \int_{\Omega_f} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega_f + \int_{\Gamma_t} \vec{v} \cdot (\|T\| \cdot \vec{n}) \, d\Gamma_t \quad (5.28)$$

Sendo Ω_f o domínio onde se aplica a força volumétrica, Γ_t a fronteira do domínio e “:” representa o operador de duplo produto interno ou contração de segunda ordem. O último termo do lado direito da equação (5.28) representa uma condição de contorno natural do sistema, que tem um valor nulo caso nenhuma tração seja forçada em alguma região do domínio. Com a substituição da definição do tensor de tensões na equação (5.28), obtém-se a forma fraca da equação de elasticidade a partir da equação de equilíbrio (5.29).

$$\int_{\Omega_E} 2G \vec{\nabla}_s \vec{u} : \vec{\nabla} \vec{v} \, d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \lambda \vec{\nabla} \vec{u} \|I\| : \vec{\nabla} \vec{v} \, d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \cdot \vec{v} \, d\Omega_E = \int_{\Omega_f} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega_f \quad (5.29)$$

No desenvolvimento apresentado, considera-se o sistema elástico no regime temporal ou estático. Além desses casos, define-se a equação na forma fraca para o regime harmônico, onde a derivada temporal de segunda ordem é transformada em uma multiplicação pela frequência a ser resolvida. Para isso, utiliza-se a transformada de Fourier, dessa forma, a fonte de forças volumétricas \vec{f} se torna um fasor, ou seja, uma excitação puramente senoidal com frequência fixa. Na prática, é muito comum que as cargas (forças de excitação) apresentem variações harmônicas, especialmente em máquinas rotativas. Quando a estrutura em questão possui comportamento linear, a resposta a tais cargas também é harmônica assim que quaisquer transientes de inicialização tenham cessado. Para resolver esses problemas de forma eficiente, pode-se utilizar o domínio da frequência. A equação da elasticidade na forma fraca para o regime harmônico é apresentada em (5.30), onde ω é a frequência angular.

$$\int_{\Omega_E} 2G \vec{\nabla}_s \vec{u} : \vec{\nabla} \vec{v} \, d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \lambda \vec{\nabla} \vec{u} \|I\| : \vec{\nabla} \vec{v} \, d\Omega_E - \int_{\Omega_E} \rho_m \omega^2 \vec{u} \cdot \vec{v} \, d\Omega_E = \int_{\Omega_f} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega_f \quad (5.30)$$

Quando a frequência de uma carga harmônica está próxima de uma frequência natural da estrutura, pode ocorrer um fenômeno chamado ressonância. A ressonância leva a uma amplificação significativa da resposta em comparação com uma solução estacionária. Quando a frequência de carregamento corresponde exatamente a uma frequência natural, a amplitude da vibração pode se tornar muito grande. Os deslocamentos são limitados apenas pelo amortecimento presente na estrutura, que geralmente é baixo. Para estudar o carregamento harmônico, é comum analisar a resposta em frequência. Isso envolve examinar a resposta para várias frequências de carregamento, e os resultados são apresentados como uma função da frequência. Ao estudar a resposta em frequência, os engenheiros podem obter conhecimento sobre o comportamento do sistema e determinar o potencial de amplificação ressonante em frequências específicas.

Com intuito de analisar as frequências e modos de ressonância, a análise modal pode ser utilizada. A análise modal de vibração envolve o cálculo dos autovalores e autovetores associados a um sistema vibratório. Essa análise é realizada para compreender as características dinâmicas da estrutura e determinar as frequências naturais de vibração e os modos de vibração correspondentes. Os autovalores são as frequências naturais de vibração do sistema. Eles representam os valores próprios das equações de equilíbrio e movimento da estrutura, indicando as frequências nas quais a estrutura vibrará quando excitada. Cada autovalor está associado a um modo de vibração específico. Os autovetores são os modos de vibração correspondentes aos autovalores. Eles descrevem a forma e a distribuição dos deslocamentos em todo o sistema durante a vibração em uma determinada frequência natural. Cada autovetor está associado a um único autovalor e representa uma forma característica de oscilação da estrutura. Como a análise modal é baseada na vibração natural do sistema, a equação de elasticidade tem a sua parte direita nula.

5.5 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Por meio da discretização da forma fraca das equações físicas, da utilização dos elementos de Whitney e do método de Galerkin, gera-se um sistema de equações que são agrupadas de forma matricial. Essa forma depende do problema específico a ser resolvido, porém é possível descrevê-la genericamente na equação (5.31), onde $[K]$ é chamada de matriz de rigidez, $\{u\}$ representa os graus de liberdade a serem resolvidos e $\{F\}$ é o vetor de “fontes” no sistema. A interpretação física do sistema matricial pode ser compreendida como: $[K]$

contém as informações provenientes das propriedades dos materiais envolvidos no problema físico. Por exemplo, têm-se as informações de permeabilidade magnética em formulações magnéticas e os coeficientes de elasticidade no problema mecânico-estrutural. São essas informações que permitem descrever as relações entre as grandezas físicas do problema. É também nessa matriz que se adiciona as condições de contorno do sistema. Os graus de liberdade em $\{u\}$ são os valores relativos aos nós, em caso de elementos nodais, e os valores relativos à circulação do vetor nas arestas dos elementos, no caso de elementos de aresta. A partir desses valores é possível derivar o resultado final no domínio completo. Finalmente, $\{F\}$ contém as informações que geram as excitações no sistema físico. No caso deste trabalho, têm-se a densidade de corrente elétrica para o problema magnético e as forças elétricas para o problema elástico.

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (5.31)$$

Uma das características das funções de interpolação apresentadas neste trabalho é a definição de um valor unitário no nó ou aresta de um elemento e em todos dos outros nós ou arestas do domínio o valor da função é nulo. Dessa forma, gera-se matrizes de rigidez com grande quantidade de valores nulos, onde esse tipo de matriz é chamado de matriz esparsa. Como a matriz de rigidez é esparsa, ela pode ser armazenada em um formato compactado que aproveita a dispersão para reduzir os requisitos de armazenamento e melhorar a eficiência computacional. Os formatos compactados comuns incluem o formato de linha esparsa compactada (CSR), o formato de coluna esparsa compactada (CSC) e o formato de coordenadas (COO) [52] [53]. Os métodos de armazenamento são fundamentais otimização do consumo de memória computacional utilizada na resolução dos problemas de elementos finitos. Além dos métodos de armazenamento, é fundamental a utilização de métodos de resolução do sistema matricial para matrizes esparsas, onde a utilização desses métodos permite a redução do tempo de solução.

Existem duas classes de métodos para resolução de sistemas matriciais, os métodos diretos e os indiretos. Os métodos diretos são compostos por técnicas de fatoração de matriz, como as decomposições LU, QR, Cholesky, entre outros. O processo de fatoração se dá pela decomposição das matrizes originais do sistema de equações em matrizes mais simples, onde técnicas de álgebra linear podem ser utilizadas diretamente. A aplicação desses métodos para elementos finitos exige a utilização de algumas modificações para matrizes esparsas, caso contrário, a complexidade computacional exigida tornaria a simulação inviável.

O método de fatoração LU consiste na decomposição da matriz em duas matrizes triangulares, uma superior (U) e uma inferior (L). Dessa forma, pode-se computar determinantes e inverter as matrizes de forma mais eficiente. De forma semelhante, o método QR decompõe a matriz em duas, uma ortogonal (Q) e outra triangular superior (R). No caso de matrizes simétricas positivas, o método de Cholesky pode ser usado, onde a decomposição é feita pelo produto de duas matrizes triangulares. Esses três métodos têm alterações para matrizes esparsas, onde ocorre a eliminação dos elementos diferentes de zero para que sejam armazenados e comprimidos em outra matriz com o objetivo de redução da memória requerida para resolução [53].

Os métodos diretos tem como característica a alta precisão e confiabilidade de resultados, especialmente em casos físicos onde os graus de liberdade podem assumir valores pequenos, por exemplo valores menores que 10 micro. Como não é necessário processos iterativos para convergência não há risco de que a solução divirja e gere resultados errôneos. Em contrapartida, esses métodos podem ser computacionalmente exigentes, especialmente em relação à memória RAM. A formulação elástica apresentada neste trabalho contém características que tornam o uso de métodos diretos apropriado. Especialmente devido aos baixos valores esperados de deformação nos materiais do domínio. A escolha método de solução para o problema elástica apresentado é o MUMP (“Solucionador Massivamente Paralelo Multifrontal”). Ele é um método direto para sistemas de equações lineares esparsa e de grande escala. É baseado em uma abordagem de fatoração multifrontral, onde ele particiona a matriz em submatrizes menores, chamadas de “*fronts*”. Esses “*fronts*” são então fatorados e unidos para obter a matriz fatoradas completa [54] [55].

Métodos iterativos são comumente utilizados no contexto de elementos finitos especialmente pela sua característica de consumir uma menor quantidade de memória quando comparado a métodos diretos. Esses métodos envolvem a procura da solução do problema matricial por meio de passos iterativos para atingir a convergência. Existe uma grande quantidade de métodos iterativos, como o método do Gradiente Conjugado (CG), método de Resíduo Mínimo Generalizado (GMRES), método Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado (BiCGSTAB), entre outros. No capítulo 3, para formulações magnetostáticas e magnetodinâmicas, foi apresentado o problema da condição de calibre, que se refere ao fato de que o potencial vetor magnético não tem unicidade devido à falta de informação sobre seu divergente. Com a aplicação da condição de calibre por uma árvore de arestas [56] ou pelo calibre de Coulomb, o sistema de equações se torna bem definido e único, no entanto, há uma

piora na velocidade de convergência dos métodos iterativos [57]. Uma alternativa para esse problema é a utilização de métodos iterativos baseados em subespaços de Krylov sem aplicação de condição de calibre. Para que haja sentido físico no resultado, deve-se assegurar que a densidade de corrente tenha seu divergente nulo; isso é garantido de forma fraca na equação (5.23). Pode-se observar que há infinitas soluções para o potencial vetor magnético, no entanto, todas as soluções resultam no mesmo campo magnético e nas suas variáveis derivadas [58]. Neste trabalho, utiliza-se o método iterativo baseado em subespaços de Krylov, Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado (BiCGSTAB) sem aplicação de condição de calibre.

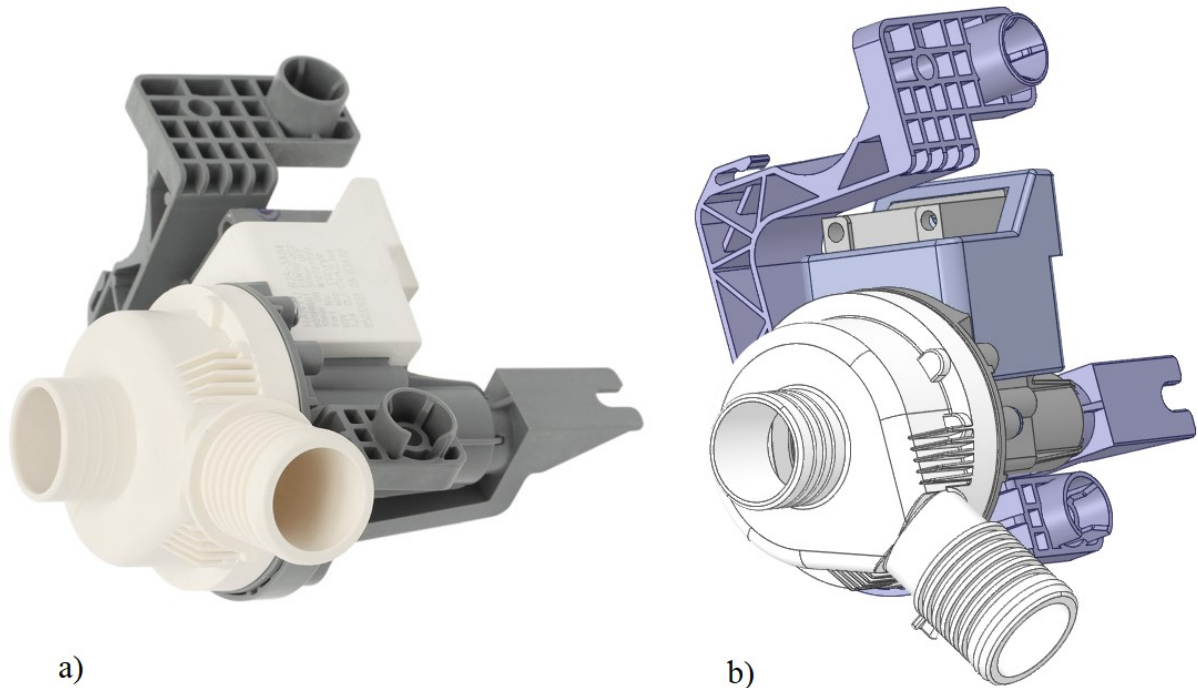
6 ANÁLISE MULTIFÍSICA DE UMA BOMBA D'ÁGUA COM MOTOR PMSM

Motores elétricos monofásicos com ímãs permanentes de ferrite são amplamente utilizados na indústria de eletrodomésticos, incluindo bombas d'água para máquinas de lavar roupas e lava-louças. As principais razões de uso são: eficiência energética, durabilidade, tamanho compacto e baixo custo. Essa classe de motores é altamente eficiente e pode converter uma quantidade significativa de energia elétrica em energia mecânica, o que reduz o consumo de energia e os custos operacionais a longo prazo. Além disso, os ímãs permanentes de ferrite são duráveis e resistentes à corrosão, tornando-os ideais para uso em ambientes úmidos e corrosivos. Em relação ao tamanho e ao custo, eles são geralmente menores e mais leves do que os motores tradicionais (motores de indução), o que significa que ocupam menos espaço nas máquinas e são mais fáceis de instalar e transportar. Por fim, a utilização de ímãs sem materiais de terras raras, permite um custo competitivo e uma ótima opção para equipamentos de produção em massa.

O objetivo desse trabalho é desenvolver uma metodologia para análise magneto-elástica de uma eletrobomba d'água utilizada tanto em lavadoras de roupas quanto lava louças, com o intuito de averiguar os principais componentes de vibração e propor possíveis soluções para redução da energia no espectro de frequências predominantes. A modelagem numérica por meio de simulações magnéticas em 3D por elementos finitos tem se mostrado uma ferramenta eficaz para o desenvolvimento e aprimoramento desses motores, permitindo a análise das forças magnéticas no estator e as deformações nos materiais. Neste trabalho, apresenta-se o desenvolvimento da simulação magnética para o motor bem como a análise de vibração, onde a fonte do problema está relacionada com as forças magnéticas geradas no estator e transmitida para a bomba d'água. Considera-se que as perdas magnéticas por correntes induzidas e por histerese no estator não influenciam significativamente as forças magnéticas, além da própria curva de histerese que foi simplificada como uma curva de saturação. A análise dos efeitos dessas simplificações nos resultados do cálculo de forças pode ser um tópico para trabalhos futuros.

A Figura 16 apresenta a foto do objeto de modelagem deste trabalho e a imagem da representação 3D, em CAD, que é utilizada para a simulação computacional. Pode-se perceber que há uma estrutura para fixação da bomba d'água no equipamento, uma voluta onde a água bombeada flui, e o invólucro que protege e fixa o motor.

Figura 16 - Foto e representação CAD da eletrobomba.
a) Foto; b) CAD 3D



Fonte: Autor

O processo de simulação magnética e elástica de uma eletrobomba por elementos finitos segue os seguintes passos:

1) Construção da geometria e da malha: o primeiro passo na simulação é criar um modelo da geometria do equipamento em três dimensões usando um software de modelagem. Em seguida, é necessário criar uma malha tridimensional que divide a geometria em elementos finitos. Essa malha é criada para garantir que as equações que governam o comportamento físico do sistema possam ser resolvidas numericamente. É importante mencionar que o modelo CAD utilizado em simulações numéricas geralmente não é o mesmo utilizado para validar conceitos, descrições visuais e ilustração de produtos ou equipamentos. Isso se dá pelo fato de que a malha de elementos finitos pode ter elementos de baixa qualidade quando a geometria apresenta pequenas faces ou arestas, faces duplicadas, pequenos espaços provenientes de baixa resolução do CAD, entre outros problemas. Dessa forma, a construção de uma geometria adequada para a simulação numérica é fundamental para simulações confiáveis e eficientes. É comum que a preparação da geometria para simulação exija algumas simplificações, portanto a experiência do usuário se faz fundamental nesta etapa para que as considerações feitas não afetem os resultados de forma a aumentar o erro da simulação.

2) Definição das propriedades dos materiais: o próximo passo é definir as propriedades dos materiais utilizados na construção do objeto de estudo. Neste trabalho, isso inclui as propriedades magnéticas e mecânicas dos materiais, como a permeabilidade magnética, condutividade elétrica, módulo de Young, coeficiente de Poisson e densidade de massa. Essas propriedades afetam as forças geradas do estator, bem como a vibração na estrutura proveniente delas.

3) Aplicação das condições de contorno no domínio de cálculo: em seguida, são definidas as condições de contorno para a simulação. Isso inclui as condições de fronteira para o campo magnético externo, a corrente elétrica que flui nos enrolamentos do motor, a região onde as forças magnéticas são aplicadas e a região de fixação do deslocamento. A aplicação das condições de contorno confere um caráter único à solução, além de prover as informações necessárias para resolver o sistema de equações.

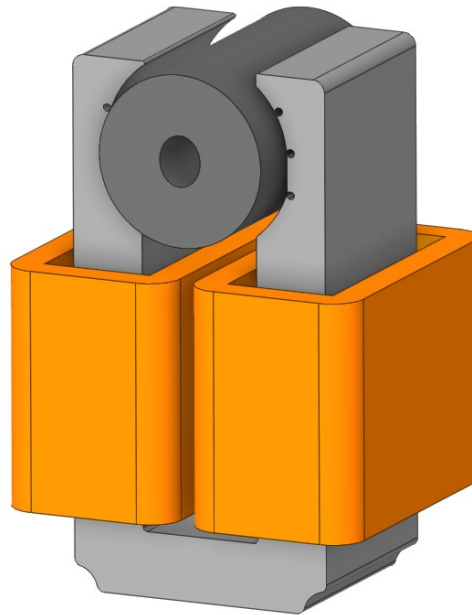
4) Resolução e análise de resultados: por fim, resolve-se o sistema de equações gerado e avalia-se os resultados da simulação para entender o comportamento físico da estrutura. Isso pode incluir a avaliação da indução magnética do motor, a força contra eletromotriz, o *cogging* torque, as forças magnéticas nas faces do estator e a vibração da estrutura mecânica. Neste trabalho, utiliza-se como ferramentas de análise e simulação os softwares: Gmsh 4.11.1 para o pré-processamento, Elmer-CSC 9.0 como o solucionador (*solver*) e o ParaView 5.10.1 para pós-processamento.

6.1 MODELAGEM MAGNÉTICA DO MOTOR DA ELETROBOMBA

Na Figura 17, o motor síncrono de ímã de ferrite é representado em três dimensões por meio da geometria por CAD. Percebe-se que a sua estrutura é simples e pode ser modelado magneticamente com apenas quatro materiais e quatro volumes, aço elétrico para o estator, ferrite magnetizada para o rotor e alumínio para o enrolamento, além da caixa de ar necessária para fechamento de domínio. O tamanho da caixa de ar é um tópico de estudo a parte, pois é nas suas superfícies externas que a condição de contorno de Dirichlet é aplicada, ou seja, há erro de truncamento de domínio. A profundidade do pacote de lâminas do estator é menor do que a profundidade do rotor, isso é feito para aumentar o fluxo magnético concatenado sem aumento do volume de aço do estator ou a utilização de ímãs com melhores propriedades magnéticas. Esta característica confere ao problema um caráter 3D, pois a simplificação em duas dimensões não considera diferenças entre a profundidade de nenhuma

parte do domínio magnético modelado no plano. Nas faces do estator, pode-se observar pequenas ranhuras cuja função é apenas de fixação mecânica. No processo de injeção de plástico, para fixação do motor na bomba, elas facilitam a robustez da estrutura. Do ponto de vista magnético, ranhuras tão pequenas podem ser regiões de saturação da indução magnética, portanto não são interessantes neste aspecto.

Figura 17 - CAD 3D motor síncrono de ímã de ferrite.



Fonte: Autor

A modelagem da rotação de motores em três dimensões necessita de métodos que levam em consideração o movimento de parte do domínio magnético. Em [27], diversos métodos são apresentados, entre eles o método de recolagem de malhas e o método de banda de movimento. O movimento do rotor gera aumento na complexidade da modelagem e possível acréscimo de erros numéricos por conta da exigência de malhas regulares com elementos de alta qualidade no entreferro. No entanto, neste trabalho, utiliza-se uma alternativa que apenas é possível devido à baixa complexidade da geometria do rotor. Como o rotor pode ser modelado como um cilindro maciço de ferrite, é possível atrelar o momento do rotor à sua direção de magnetização. Dessa forma, o mesmo efeito da rotação é obtido sem a necessidade de utilizar métodos que considerem o movimento. A definição da magnetização do rotor é feita em função do tempo como na equação (6.1), onde as coordenadas “x” e “y” formam o plano de corte 2D do motor, B_r é a indução remanente de 0,405 T e f é a frequência da tensão da rede elétrica, nesse caso, 60 Hz.

$$\vec{B}_r = \begin{cases} B_{rx} = B_r \cos(2\pi f \text{ time}) \\ B_{ry} = B_r \sin(2\pi f \text{ time}) \end{cases} \quad (6.1)$$

Foi observado no motor da eletrobomba uma excentricidade dinâmica do rotor. A excentricidade neste motor é a medida da distância entre o centro de massa do rotor e o centro de massa das paredes do estator. Nesse caso, como o estator não tem um formato circular o eixo de massa de referência deve ser considerado apenas em relação as faces do estator. A excentricidade pode ser classificada em duas categorias principais: excentricidade dinâmica e excentricidade estática. A excentricidade estática está associada com o motor em repouso, ou seja, independente do movimento de rotação a excentricidade se mantém a mesma em todas as direções. Isso pode ocorrer devido a falhas no processo de fabricação ou na instalação do motor, como por exemplo, uma montagem inadequada do estator. Já a excentricidade dinâmica está relacionada ao motor em operação. Isso pode ocorrer devido ao desbalanceamento do rotor, o que gera uma oscilação no centro de massa do rotor, fazendo com que o centro de massa do rotor se desloque em relação ao estator.

Considerar a excentricidade dinâmica é relevante, pois pode haver uma contribuição na geração de forças magnéticas em frequências que teriam baixa energia caso houvesse um alinhamento sem excentricidade. A estratégia utilizada para essa modelagem foi aumentar o raio do rotor para que o seu volume contemple todo o domínio de rotação da excentricidade dinâmica. Dessa forma, a definição do valor da magnetização do ímã é feita de forma dependente da posição do rotor que varia com o tempo. O valor medido de excentricidade no motor foi de 0,2 mm. A lógica implementada é apresentada na equação (6.2), onde Exc é o valor da excentricidade e R_r é o raio do rotor.

$$\text{Se: } \sqrt{(x - Exc \cos(2\pi f \text{ time}))^2 + y^2} \leq R_r$$

Então:

$$B_{rx} = B_r \cos(2\pi f \text{ time})$$

$$\text{Se: } \sqrt{(x - Exc \sin(2\pi f \text{ time}))^2 + y^2} \leq R_r$$

(6.2)

Então:

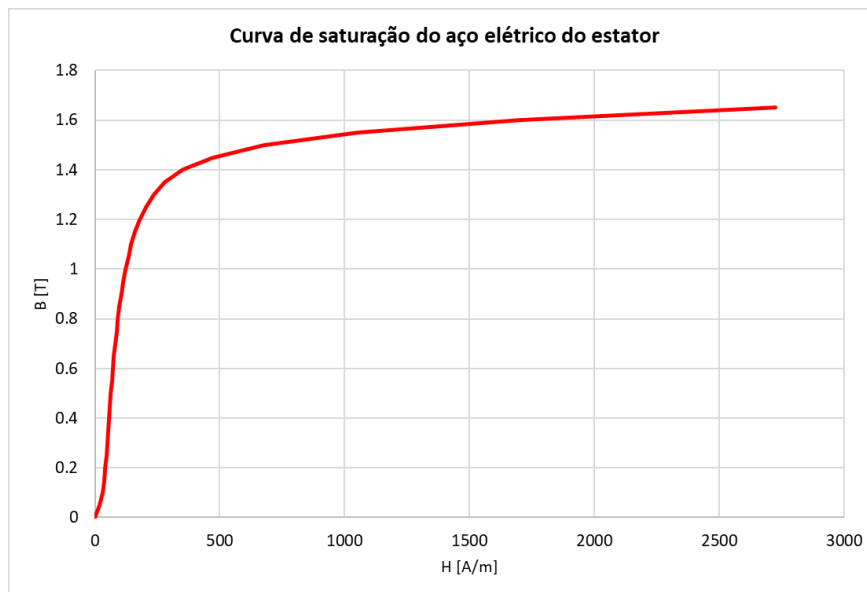
$$B_{ry} = B_r \sin(2\pi f \text{ time})$$

Senão:

$$B_{rx} = B_{ry} = 0$$

A condição de funcionamento escolhida para testar e simular a bomba d'água foi em plena carga, portanto a corrente elétrica que flui pela bobina é de 1,25 Arms. Esse valor de corrente aplicado à 500 espiras por bobina gera uma densidade corrente elétrica de 4 A/mm^2 . O valor da indução remanente do ímã é de 0,405 T, a permeabilidade magnética relativa do ímã é de 1,1 e a curva de saturação do aço elétrico do motor é mostrada na Figura 18.

Figura 18 - Curva BH do aço do estator.



Fonte: Autor

A partir das informações apresentadas nesse módulo, pode-se iniciar as análises magnéticas do motor da eletrobomba.

6.2 MODELAGEM ESTRUTURAL DA ELETROBOMBA

A modelagem estrutural de eletrobombas é essencial para o cálculo de vibrações relacionadas às forças magnéticas no estator. As forças magnéticas no estator são causadas pela interação entre o campo magnético produzido pelo estator e o campo magnético produzido pelo rotor da eletrobomba. Essas forças podem levar a vibrações excessivas, o que pode afetar o desempenho da eletrobomba e reduzir sua vida útil. A modelagem estrutural é um processo que envolve a análise de tensões, deformações e vibrações em uma estrutura para determinar sua resposta a cargas externas ou internas. Para a modelagem estrutural de eletrobombas, é importante levar em consideração as propriedades materiais das peças

relevantes da estrutura, as fontes de força, a geometria da eletrobomba e as condições de contorno.

No caso das eletrobombas, a modelagem estrutural pode ser usada para determinar a resposta da estrutura a forças magnéticas no estator. Isso pode incluir a análise da deformação da estrutura, a distribuição de tensões e a vibração causada pelas forças magnéticas. Com base na análise de modelagem estrutural, é possível realizar ajustes no projeto com o intuito de minimizar as vibrações relacionadas às forças magnéticas. Isso pode incluir o uso de materiais com maior rigidez, alterações na geometria do motor com o objetivo de reduzir as forças geradas pelos fenômenos magnéticos ou a utilização de métodos de controle por conversores estáticos.

Como primeira análise de engenharia, a solução do problema estrutural com uma análise modal pode gerar informações relevantes para o projeto e para o entendimento do equipamento. A análise modal é uma técnica importante dentro do sistema de análise estrutural e envolve a determinação das frequências naturais e dos modos de vibração de uma estrutura, permitindo que sejam identificados potenciais problemas de ressonância, vibração excessiva e outras condições que possam afetar o desempenho e a confiabilidade do produto. É possível elencar algumas principais razões pelas quais essa afirmação é verdadeira e a análise modal deve ser feita, dentre elas:

- Identificação de frequências críticas: permite identificar as frequências naturais da estrutura, que são aquelas em que a energia vibratória é armazenada e amplificada. Identificar essas frequências críticas é importante para evitar que a bomba opere em condições de ressonância, que podem levar a danos estruturais e falhas prematuras, além de possivelmente gerar altos ruídos.
- Identificação de modos de vibração: permite identificar os modos de vibração da estrutura, que são as formas como a estrutura se deforma em resposta a uma excitação externa. Isso é importante para entender como a estrutura responde às forças dinâmicas geradas pela operação da bomba e para projetar soluções que minimizem as vibrações.
- Projeto de soluções: com base na análise modal, é possível projetar soluções para reduzir as vibrações, como a alteração da geometria ou do material da estrutura, ou a adição de amortecedores ou absorvedores de vibração.
- Melhoria da confiabilidade: identificar e resolver problemas de vibração é fundamental para garantir a confiabilidade e a vida útil da bomba. A análise modal

permite detectar e resolver esses problemas antes que eles causem danos à estrutura ou a outras partes da bomba.

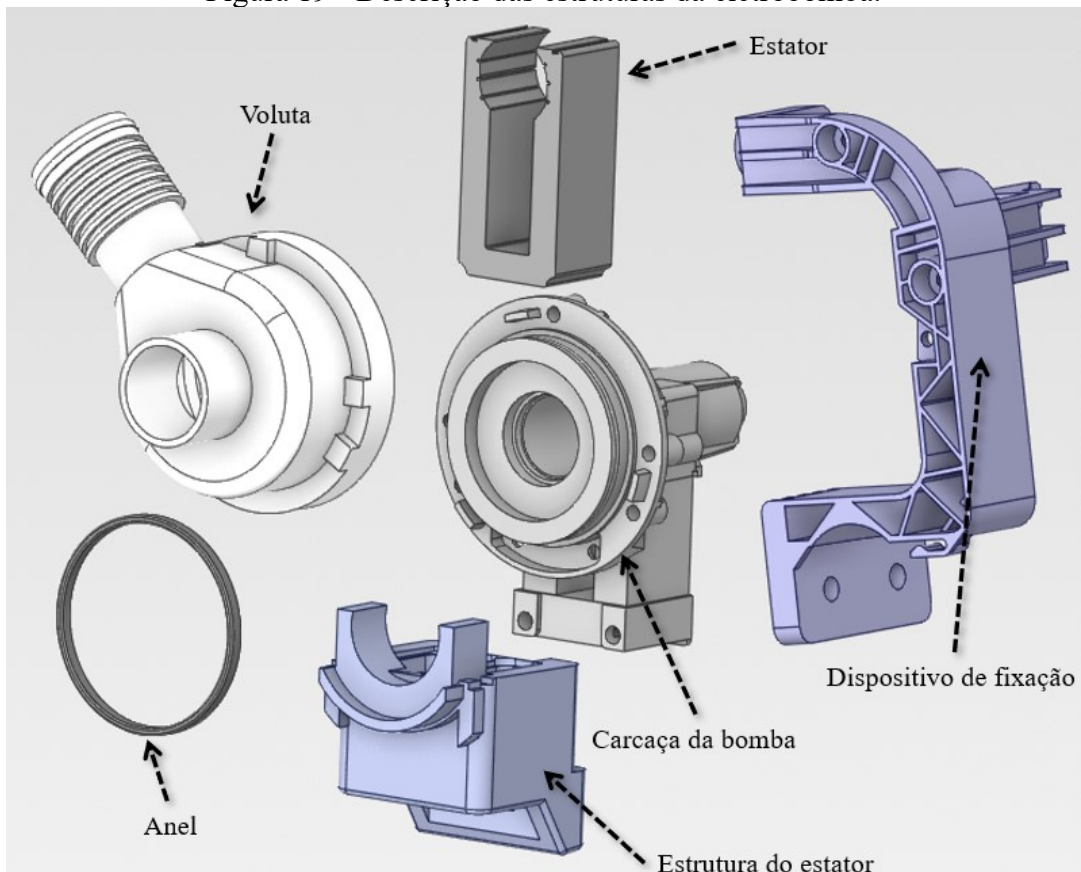
Os materiais utilizados para a análise estrutural da eletrobomba são: aço elétrico para o núcleo do estator; polipropileno para a carcaça da bomba, para a voluta e para o dispositivo de fixação; BMC (*Bulk Molding Compound*) para a estrutura do estator; e borracha para o anel. As propriedades elásticas dos materiais são apresentadas na Tabela 2 e na Figura 19 as estruturas são identificadas.

Tabela 2 - Propriedades elásticas dos materiais.

Material	Densidade [kg/m ³]	Coefficiente de Poisson	Módulo de Young [GPa]
Aço elétrico	7710,5	0,3	200
Polipropileno	1096	0,45	2
BMC	1850	0,3	10
Borracha	1000	0,45	5

Fonte: Autor

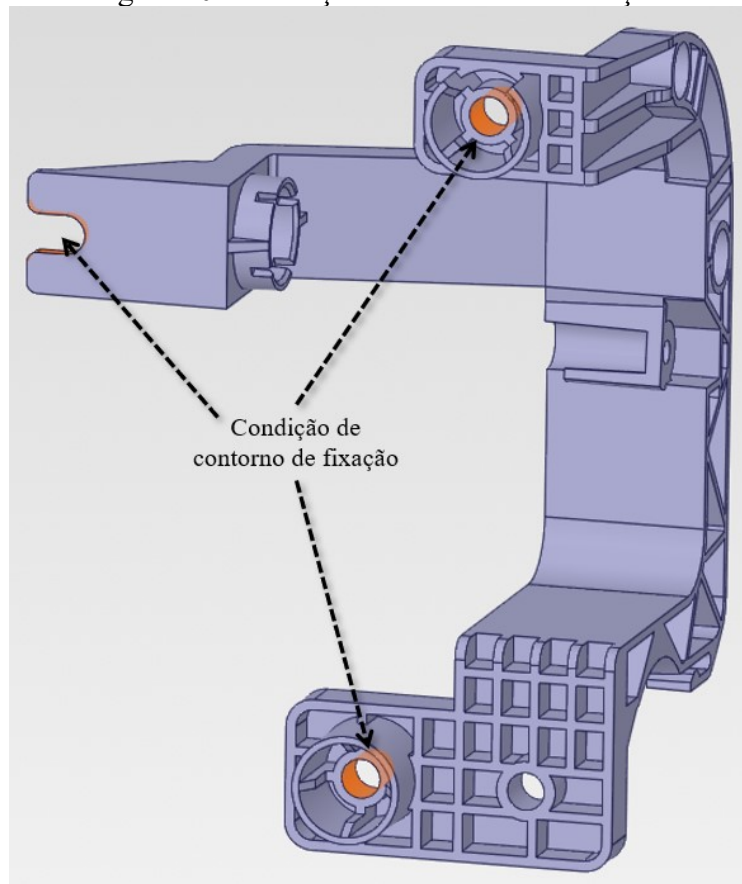
Figura 19 - Descrição das estruturas da eletrobomba.



Fonte: Autor

A estrutura da eletrobomba é fixada no produto de maneira que se define uma condição de contorno onde o deslocamento em todas as direções é nulo. As superfícies, onde a condição de contorno é aplicada, são mostradas na Figura 20. Além disso, é fundamental definir qual é a relação a ser utilizada para resolver os problemas de contato. Em simulações de elasticidade com múltiplos corpos, como é o caso desse trabalho, os materiais podem se deformar de forma distinta dependendo de como os contatos nas interfaces são feitos. Existem diversas condições de contorno para lidar com problemas de contato, dentre elas: método de contato penalizado, contato por *Mortar elements* e contato *bonded*. Na primeira abordagem, é introduzido um termo de penalidade na formulação do problema de elementos finitos para impor a condição de contato. Esse termo penaliza a penetração entre as superfícies em contato e força a separação quando a penetração é negativa [59]. No segundo caso, permite-se a modelagem do contato ao introduzir interfaces virtuais que são discretizadas com elementos finitos especiais, chamados *Mortar elements*, que conectam as superfícies em contato. Dessa forma, pode-se considerar que a malha não é tratada como um problema conforme. As condições de compatibilidade e continuidade nos pontos de contato são impostas por meio de funções de penalização ou métodos de multiplicador de Lagrange [60]. Finalmente, modelar contatos de forma *bonded* significa considerar que os diferentes materiais e corpos quando se encontram estão colados. Durante a análise da estrutura da eletrobomba, foi observado que as peças estavam praticamente coladas, portanto a modelagem numérica desse trabalho considera esse efeito.

Figura 20 - Condição de contorno de fixação.



Fonte: Autor

Assim, pode-se gerar a malha e efetuar a análise modal. Para a análise de vibração com excitação por forças magnéticas, é necessário definir as superfícies onde as forças são aplicadas. Como mencionado anteriormente, a malha de elementos finitos tem fundamental importância para a precisão da simulação, portanto ela é o objeto de estudo subsequente.

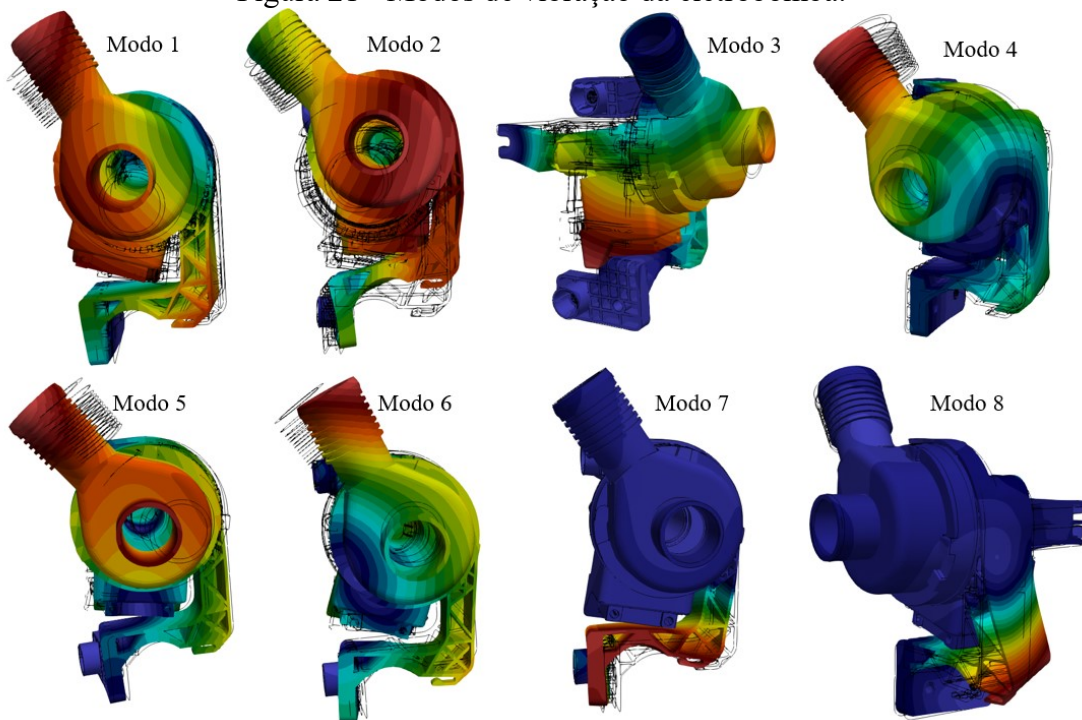
As respostas da análise modal realizada são apresentadas na Tabela 3, onde os valores representam frequências de vibração natural, ou frequências de ressonância. Na Figura 21 é possível observar alguns dos principais modos de vibração. Pode-se concluir que não há frequências naturais múltiplas de 60 Hz, ou seja, não existe ressonância nos harmônicos de torque ou da rede elétrica. No entanto, os resultados mostram que baixas frequências podem gerar ressonância e seus valores são próximos às frequências teóricas das forças geradas no estator. Isso não significa, necessariamente, que haverá ressonância, pois para que ela aconteça os modos de vibração também são relevantes. No entanto, é um alerta e caso as forças magnéticas excitem o sistema elástico de forma que contribua com o modo de vibração pode haver problemas de ressonância.

Tabela 3 - Frequências naturais da estrutura da eletrobomba.

Modo	Frequência [Hz]	Modo	Frequência [Hz]
1	128,35	9	1077,22
2	165,77	10	1205,60
3	196,19	11	1376,73
4	332,89	12	1554,62
5	366,18	13	1644,87
6	607,61	14	1811,82
7	788,61	15	1929,54
8	963,59	16	2102,76

Fonte: Autor

Figura 21 - Modos de vibração da eletrobomba.



Fonte: Autor

6.3 ANÁLISE DO ERRO DE TRUNCAMENTO

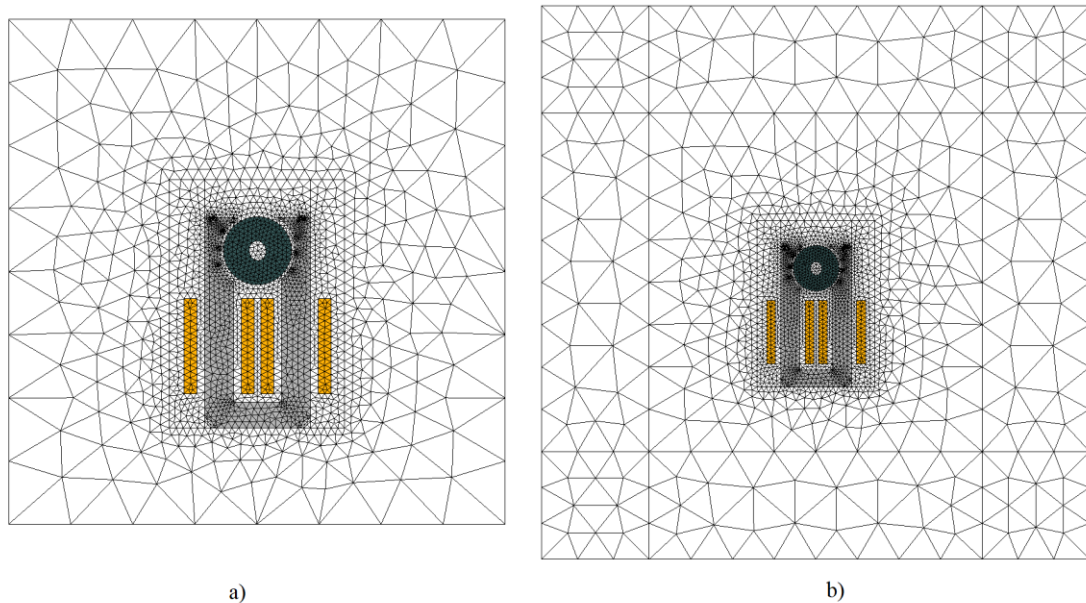
Em simulações numéricas a resolução das equações físicas é feita em um domínio geométrico definido a priori. A construção desse domínio envolve algumas considerações que são necessárias para que a capacidade computacional exigida na simulação seja factível com a

complexidade do problema. A virtualização de problemas de engenharia por meio de simulações se dá pelo seu potencial de acelerar o processo de desenvolvimento de produtos quando se compara o tempo e orçamento exigido para a criação de múltiplos protótipos e medições com a simulação. Assim, busca-se um balanço entre precisão e tempo necessário para realizar a análise numérica virtual. É importante efetuar essa análise previamente à análise de malha, pois o erro de truncamento pode anular as comparações entre resultados de diferentes malhas.

No contexto de simulação magnetoestáticas ou magnetodinâmicas, um componente fundamental para atingir confiabilidade e eficiência da simulação é o controle do erro de truncamento. A equação de Maxwell (3.2) condensa o conceito de que o fluxo magnético sempre percorre caminhos fechados, portanto ímãs permanentes geram fluxo magnético com linhas de campo que retornam do infinito para o próprio ímã, teoricamente. Na prática, é evidente que esse conceito de infinito não pode ser utilizado em simulações numéricas de elementos finitos, pois um domínio fechado precisa ser definido. Quando se define um domínio magnético fechado, considera-se que nas extremidades desse domínio o campo magnético é fraco o suficiente para que ao forçá-lo retornar para sua origem, o comportamento das linhas de fluxo magnético não seja alterado significativamente. Isso é chamado de truncamento de domínio, e como é uma consideração imposta ao sistema, gera-se um erro, chamado de erro de truncamento. A construção desse domínio é feita, em geral, pela experiência do engenheiro de simulação, no entanto, é fundamental que exista uma análise para a certificação de que esse erro inerente à simulação não tenha efeito significativo no cálculo das grandezas físicas desejadas.

Neste trabalho, a forma utilizada para assegurar baixo erro de truncamento foi criar um domínio magnético composto pelo material “ar”, que envolve todo o motor, por intermédio da experiência prévia. Uma simulação magnetostática é utilizada para analisar o resultado de energia magnética total e torque gerado no rotor. A comparação é feita com um segundo modelo onde a “caixa de ar” é ampliada substancialmente para que o truncamento de domínio seja feito a uma distância muito maior em relação às fontes de fluxo magnético. Na Figura 22, um corte 2D da geometria e da malha de elementos finitos para ambos os tamanhos da caixa de ar é mostrado. A tolerância aceitável é de 0,5 %.

Figura 22 - Corte 2D das geometrias para estudo de truncamento de domínio.



Fonte: Autor. a) Geometria com “caixa de ar” inicial. b) Geometria com “caixa de ar” aumentada.

O resultado da simulação de ambos os casos foi uma diferença relativa percentual de 0,05 % para a energia magnética do sistema e 0,28 % para o torque de partida do motor. A tolerância foi maior do que os resultados obtidos, portanto, a conclusão é que não há um erro substancial de truncamento na geometria com a menor caixa de ar. A geometria original é, portanto, a melhor escolha para o prosseguimento das simulações para redução do número de graus de liberdade sem prejuízo de precisão numérica.

6.4 ESTUDO DE INDEPENDÊNCIA DE MALHA

Um fator primordial para que os resultados de simulações numéricas tenham boa precisão é a malha. A malha de elementos finitos está relacionada com a discretização do sistema, ou seja, é por meio da malha que se representa a geometria para o cálculo numérico. Geometrias com curvaturas e pequenos raios geram desafios para malhar o sistema e requerem tratamento especial. Alguns softwares de elementos finitos comerciais têm malhadores com algoritmos de otimização de malha baseado no equacionamento físico como o COMSOL®, algoritmos baseados em malhas adaptativas em relação ao erro de energia do sistema como o Ansys® Maxwell, entre outros. Softwares livres, em geral, tem ferramentas

básicas de tratamento de curvaturas como o Gmsh 4.11.1, operações em superfícies e volume como o SALOME Mesh, otimizações baseadas em qualidade de malha como o Netgen, mas em todos os casos a experiência e análise do engenheiro de simulação é fundamental.

A simulação escolhida para a análise de malha é um acoplamento magneto-elástico no regime estático. Assim, é possível analisar parâmetros magnéticos e mecânicos e seus resultados baseados na malha sem a necessidade de tempo elevado para resolução computacional. Embora o objetivo final seja avaliar a deformação da estrutura completa da eletrobomba, nessa primeira análise apenas o estator é considerado para avaliar a qualidade de malha. Os parâmetros estudados nesse caso serão utilizados para o problema completo. Nesta primeira análise, o acoplamento mecânico é feito por intermédio das forças nodais calculadas com a formulação magnética e utilizadas como fonte na simulação elástica.

A computação da força magnética pode ser realizada por diferentes métodos como o tensor de Maxwell, princípio dos trabalhos virtuais, correntes ou cargas equivalentes e outros. Matematicamente todos são equivalentes, porém apresentam distribuições de densidade de força diferentes. O método baseado no princípio de trabalhos virtuais é bastante geral e apresenta boa adaptação aos problemas de elementos finitos [61]. Neste método, a força em cada nó é calculada pela diferenciação direta da energia magnética armazenada ou coenergia nos elementos finitos que cercam o nó, em relação ao deslocamento virtual, enquanto o potencial magnético é mantido constante. Considere $s \in \mathbb{R}^3$ como o descolamento virtual, então a força magnética no domínio Ω é dada por:

$$F_s = \frac{\partial}{\partial s} \int_{\Omega} \int_0^H \vec{B} \cdot d\vec{H} d\Omega \quad (6.3)$$

A aplicação da equação (6.3) em um elemento de malha e gera a equação (6.4), onde J_a é a matriz Jacobiana do elemento e . A força no nó, portanto, é o somatório da contribuição de todos os elementos que compartilham esse vértice i .

$$F_s^i = \sum_{\forall e | i \in e} \int_e -\vec{B}^T \cdot J_a^{-1} \cdot \frac{\partial J_a}{\partial s} \cdot \vec{H} + \frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 |J_a^{-1}| \frac{\partial J_a^{-1}}{\partial s} d\Omega \quad (6.4)$$

Os casos de malha considerados no estudo são:

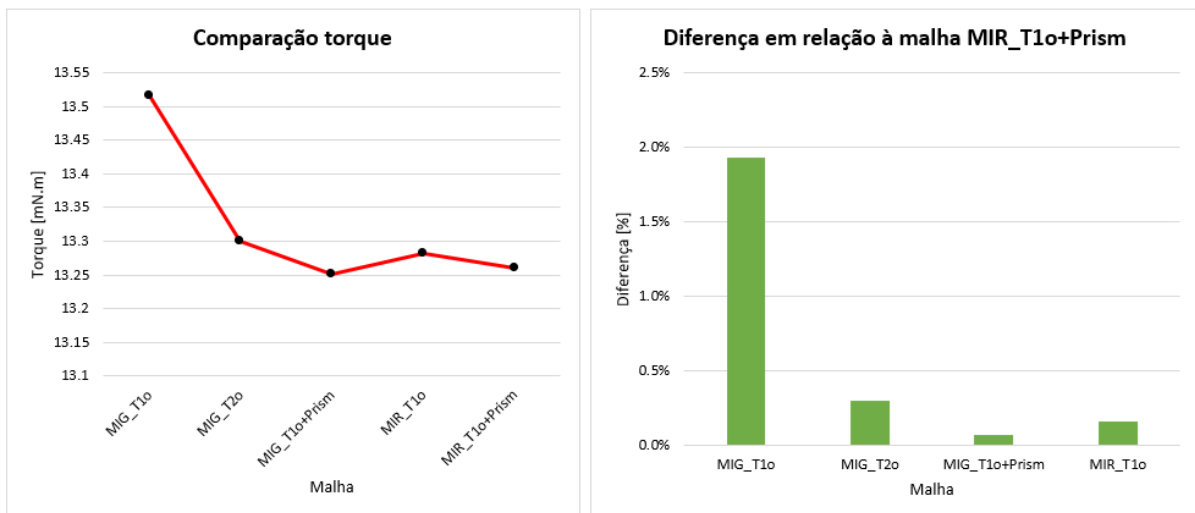
- I. Malha inicial pouco densa com elementos tetraédricos de primeira ordem para análise magnética e estrutural (MIG_T1o).
- II. Malha inicial pouco densa com elementos tetraédricos de segunda ordem para análise magnética e estrutural (MIG_T2o).
- III. Malha inicial pouco densa com elementos pentaédricos (prismas) de primeira ordem em regiões de maior interesse para análise magnética e análise estrutural. Malha tetraédrica de primeira ordem para o restante do domínio de cálculo (MIG_T1o+Prism).
- IV. Malha refinada e densa com elementos tetraédricos de primeira ordem para análise magnética e estrutural (MIR_T1o).
- V. Malha refinada e densa com elementos pentaédricos (prismas) de primeira ordem em regiões de maior interesse para análise magnética e análise estrutural. Malha tetraédrica de primeira ordem para o restante do domínio de cálculo (MIR_T1o+Prism).

Para estimar a malha mais adequada para a resolução completa do problema físico utiliza-se as métricas quantitativas de comparação entre as grandezas de torque de partida e o deslocamento em 3 pontos do estator. Além disso, baseia-se em uma análise qualitativa física dos mapas de campos. O intuito desse estudo é obter uma malha na qual não há perda significativa de precisão em relação às malhas mais refinadas. Conclui-se com sucesso quando se obtém duas condições de malha com resultados muito semelhantes entre si, neste trabalho a diferença aceitável é de 5 %.

Tem-se como objetivo encontrar uma malha de elementos finitos que permita um balanço ótimo entre precisão numérica e o tempo de resolução. É trivial a análise de que malhas pouco densas com poucos elementos e graus de liberdade propiciam um baixo nível de precisão e alta performance de tempo de resolução. Por outro lado, malhas com grande número de elementos, ordem alta e de altíssima qualidade propiciam um ambiente de simulação com alta precisão, porém o poder computacional para solucionar o sistema de equações pode tornar a simulação inviável, dependendo da complexidade do problema de estudo. Assim, em problemas de engenharia, malhas com boa precisão e tamanho adequado para solução são os objetos de interesse.

A Figura 23 apresenta o resultado de torque de partida para todas as variações de malhas estudadas. Pode-se perceber que não é grande a variação, porém a malha *MIG_T1o*, que tem característica menos densa e elementos de primeira ordem, apresenta um resultado mais discrepante em relação às outras. Isso é um indício que a densidade de malha não é suficiente para se obter invariância. Para a análise do deslocamento em pontos do estator, a malha *MIR_T1o+Prism* foi escolhida como referência, pois apresenta alta densidade de elementos em regiões importantes do domínio e elementos pentaédricos no estator, rotor e entreferro. O resultado da comparação percentual é apresentado na Tabela 4 onde a cor verde indica diferença menor de 5%, a cor amarela indica diferença entre 5 a 10 % e a vermelha maior do que 10%. Conclui-se que a utilização da malha *MIG_T2o* apresenta resultado com pouca variação em relação à malha *MIR_T1o+Prism*. Embora a malha *MIG_T2o* tenha uma densidade menor de elementos, por ser composta de elementos de segunda ordem ela apresenta uma boa precisão. Isso está relacionado ao alto número de graus de liberdade e à interpolação quadrática. Dessa forma, a malha mais refinada de primeira ordem com caráter híbrido entre elementos tetraédricos e pentaédricos se mostrou a melhor opção para o caso magnético. Para a análise mecânica, não é possível obter elementos pentaédricos devido à alta complexidade da geometria, portanto se utiliza elementos de segunda ordem para que a precisão seja mantida conforme esta análise.

Figura 23 - Resultado da comparação de malhas para o torque de partida.



Fonte: Autor.

Tabela 4 - Comparação entre deslocamento no estator para análise de malha.

	Direção	MIG_T1o	MIG_T2o	MIG_T1o+Prism	MIR_T1o
Ponto 1	x	13,74%	3,51%	6,98%	3,92%
	y	17,24%	4,46%	6,98%	3,11%
	z	25,46%	2,98%	12,25%	8,66%
Ponto 2	x	14,03%	3,09%	7,12%	3,74%
	y	18,76%	1,83%	7,23%	3,03%
	z	25,10%	3,14%	12,12%	8,41%
Ponto 3	x	15,37%	3,52%	7,10%	3,94%
	y	13,13%	3,05%	6,52%	3,26%
	z	27,42%	3,53%	11,83%	7,61%

Fonte: Autor.

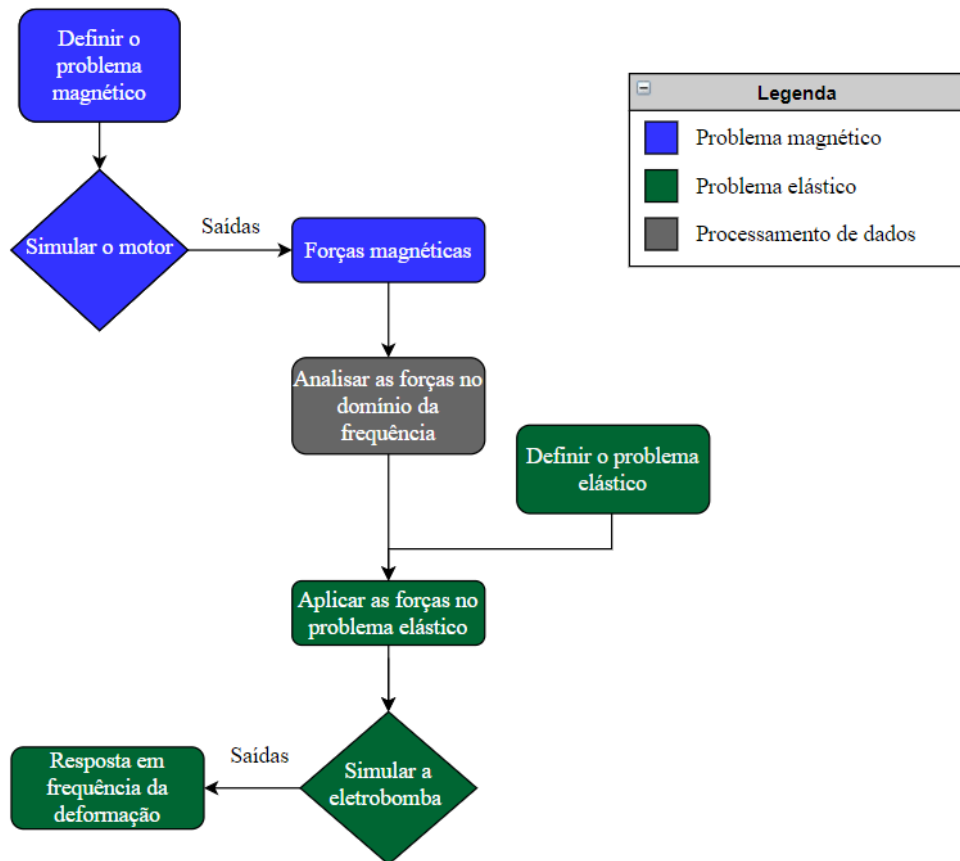
6.5 SIMULAÇÃO MAGNETO-ESTRUTURAL DA ELETROBOMBA

A resposta em frequência da vibração de uma estrutura fornece a informação de quanto essa estrutura está vibrando e quais são as principais frequências envolvidas nesse processo. Do ponto de vista de simulação por elementos finitos, pode-se caracterizar algumas formas de simular esse problema. A forma mais completa, precisa e fisicamente fiel é utilizar a mesma malha para o problema magnético e mecânico de maneira que as forças magnéticas sejam calculadas nos nós da malha e sirvam como excitação para a simulação elástica. Além disso, pode-se configurar a simulação multifísica com acoplamento fraco ou forte. O acoplamento forte, neste caso, faria com que para cada passo de cálculo a deformação na estrutura do motor seja considerada na simulação magnética. Assim, a deformação causaria alterações nos campos magnéticos do motor e possivelmente alteraria as forças geradas no estator. O acoplamento fraco não considera essa variação geométrica no motor, mas permanece a interação magneto-mecânica para cada passo de tempo. A característica temporal dessa configuração acrescenta alta complexidade para resolver o problema. O primeiro agravante é a diferença na dinâmica das físicas, onde a simulação magnética do motor tem um transiente muito mais rápido comparado ao transiente da deformação mecânica. Se o acoplamento for no tempo com atualização por passo de cálculo, é necessário simular um grande período de tempo para que o regime permanente elástico seja atingido. Dessa forma,

neste trabalho, essa solução se mostrou inviável devido ao tempo necessário para simular esse sistema.

Conclui-se que para geometrias com média ou alta complexidade (malha com milhões de graus de liberdade) a análise no regime harmônico apresenta maior potencial de gerar benefícios para problemas de engenharia. O fluxograma de ações para as simulações apresentadas neste trabalho é mostrado na Figura 24. A definição do problema magnético engloba a análise do funcionamento do motor sem carga, para avaliar parâmetros iniciais do motor, além da análise na condição de operação.

Figura 24 - Fluxograma para simulação multifísica.



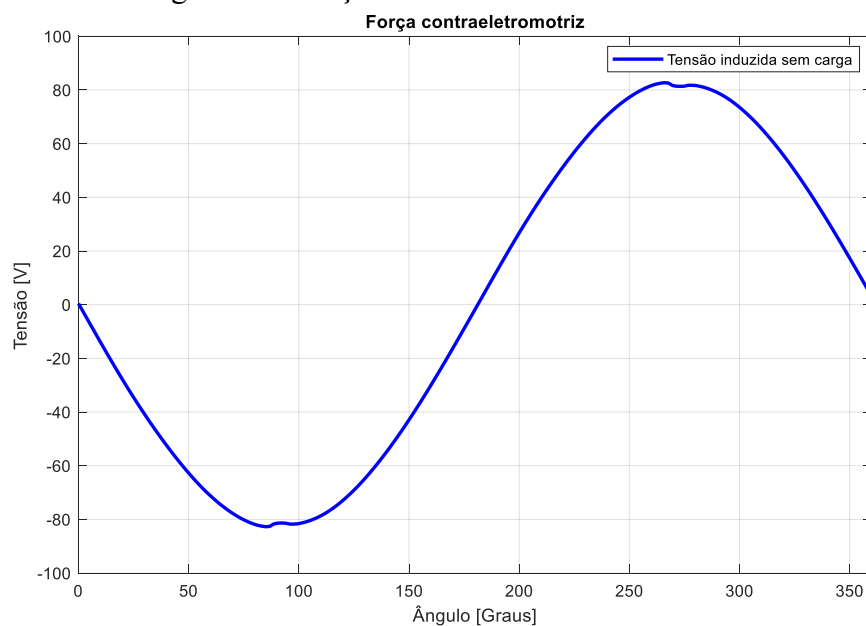
Fonte: Autor.

6.5.1 Simulação magnética do motor

Em motores síncronos de ímãs permanentes o estudo do comportamento do motor sem carga é fundamental para a compreensão de alguns parâmetros. Dentre eles, os principais são a *back-emf* e o *cogging torque*. Por ser uma simulação sem carga a exigência de

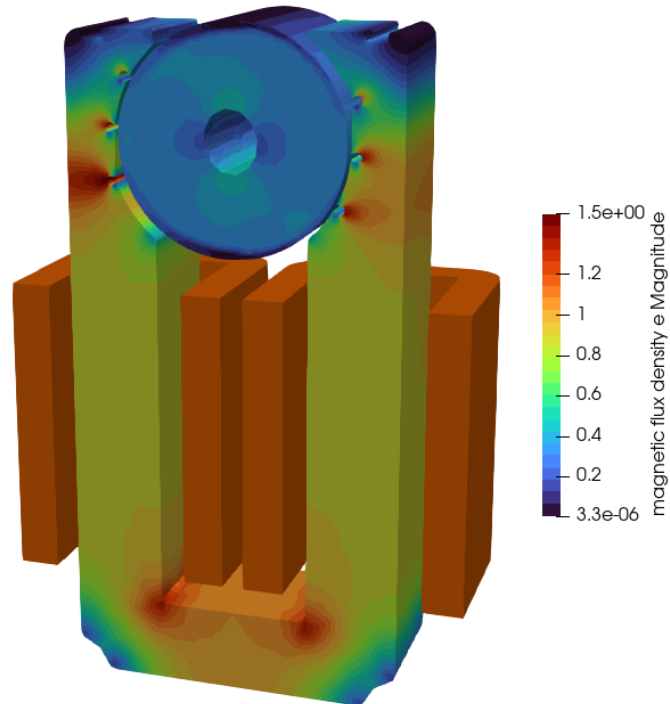
capacidade computacional não é tão elevada, portanto essa análise inicial permite a geração de conhecimento sem alta demanda de tempo. Baseado na topologia deste motor, espera-se que a *back-emf* tenha comportamento senoidal, caso o resultado seja contrário pode haver erro de projeto ou de simulação. A curva de tensão induzida é apresentada, na Figura 25, para uma rotação constante de 3600 rpm, onde o seu valor rms é de 56,57 V. Percebe-se que a forma de onda é senoidal com um pequeno achatamento nos picos positivo e negativo. Assim, o resultado se mostra coerente com a teoria dessa classe de motores. Uma característica proveniente da interpretação desse resultado é a qualidade da malha. O cálculo de tensão induzida é feito por meio da derivação temporal do fluxo magnético concatenado na bobina. Dessa forma, caso a malha gerasse erros numéricos consideráveis seria possível observar oscilações de alta frequência na curva, pois a operação de derivação amplifica o efeito de harmônicos de alta frequência comumente vistos em resultados de simulações numéricas. A Figura 26 mostra a distribuição de indução magnética para o caso onde o motor opera sem carga. Pode-se observar que não há saturação evidente no aço elétrico do estator.

Figura 25 - Força contraeletromotriz do motor.



Fonte: Autor.

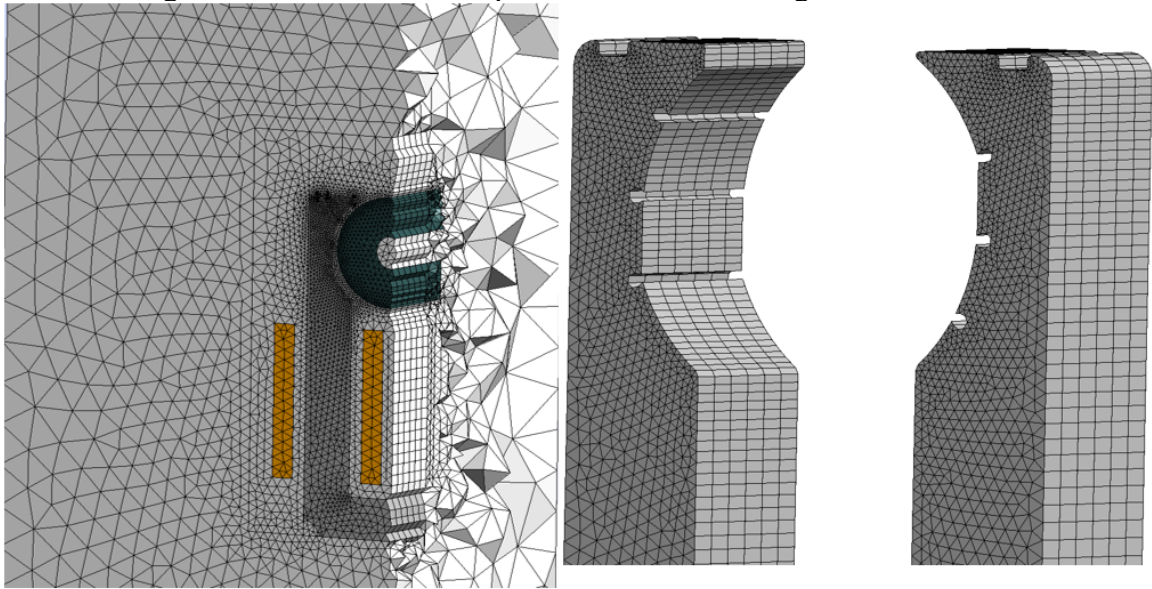
Figura 26 - Distribuição da indução magnética para o motor operando sem carga.



Fonte: Autor.

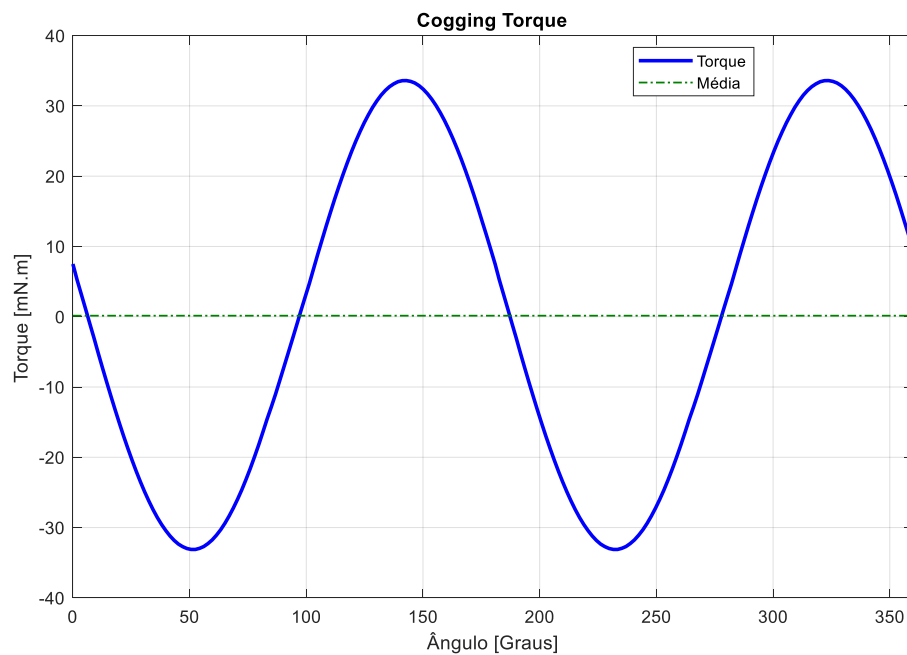
O *cogging torque* é mostrado na Figura 28. A partir desse gráfico, obtém-se o ângulo de repouso em relação ao eixo paralelo à magnetização do ímã, neste caso, o ângulo é de $6,33^\circ$. A curva de torque também apresenta mais evidências da qualidade da malha. Isso pode ser visto novamente por meio da suavidade da curva, além do valor médio do *cogging torque*. Simulações numéricas onde o resultado da média do *cogging torque* é diferente de 0 denota erro numérico significativo proveniente da baixa qualidade ou baixa densidade da malha. Um corte da malha utilizada nessas simulações é apresentado na Figura 27 com foco nas faces do estator onde as forças são calculadas. Observa-se que há uma hibridização entre elementos tetraédricos e pentaédricos, cujo objetivo é manter elementos retangulares nas faces do estator e nas superfícies do entreferro.

Figura 27 - Malha utilizada para o cálculo eletromagnético do motor.



Fonte: Autor.

Figura 28 - Cogging torque do motor da eletrobomba.

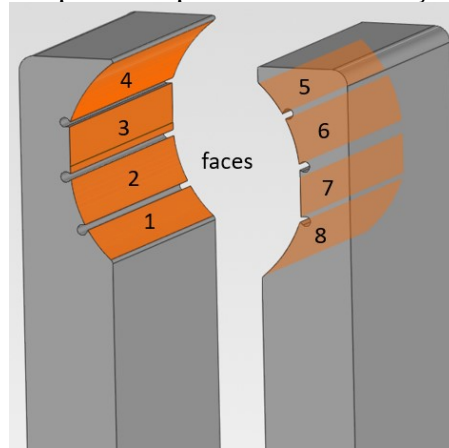


Fonte: Autor.

Como mencionado anteriormente, para o cálculo de deformação da estrutura da eletrobomba é necessário calcular as forças magnéticas nas faces do estator que serão a excitação da estrutura mecânica. A discretização das faces do estator foi feita de forma que o momento da força não seja relevante, ou seja, a média da força na face represente

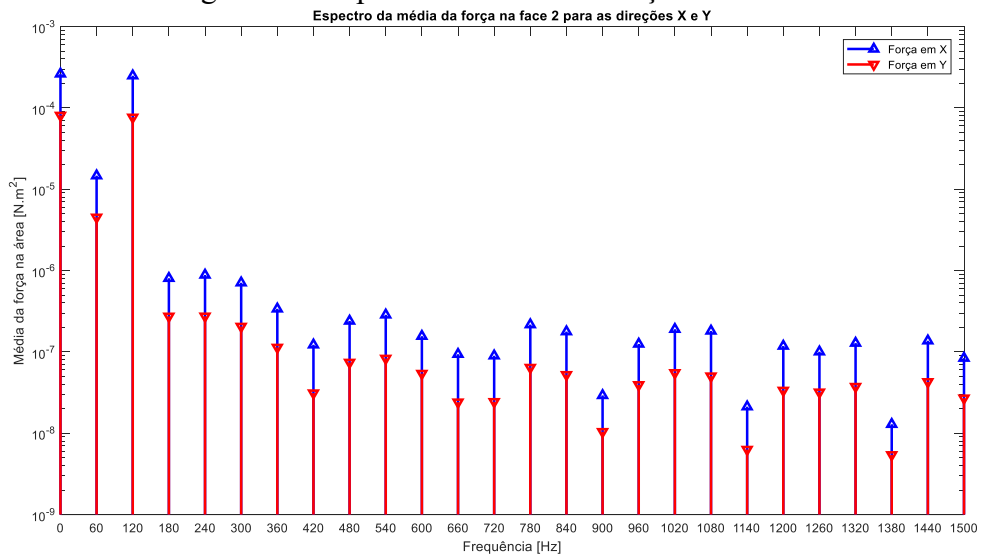
adequadamente a força em toda a superfície. Pode-se afirmar que quanto maior o número de faces nessa discretização melhor a fidelidade da simulação, no entanto, maior o tempo necessário para realizar a configuração do sistema. No pós-processamento da simulação eletromagnética, calcula-se a média da força em cada superfície durante todo o ciclo elétrico do motor. Com essa informação, estima-se o espectro da força por meio da transformada de Fourier. As informações de frequência e amplitude são fundamentais para a resposta em frequência da simulação de vibração. A definição das faces de cálculo de força no estator é mostrada na Figura 29, e o espectro da força na face de número 2 é mostrado na Figura 30 para as direções x e y do sistema de coordenadas, como exemplo. O perfil de força nas outras faces é semelhante.

Figura 29 - Superfícies para cálculo de força no estator.



Fonte: Autor.

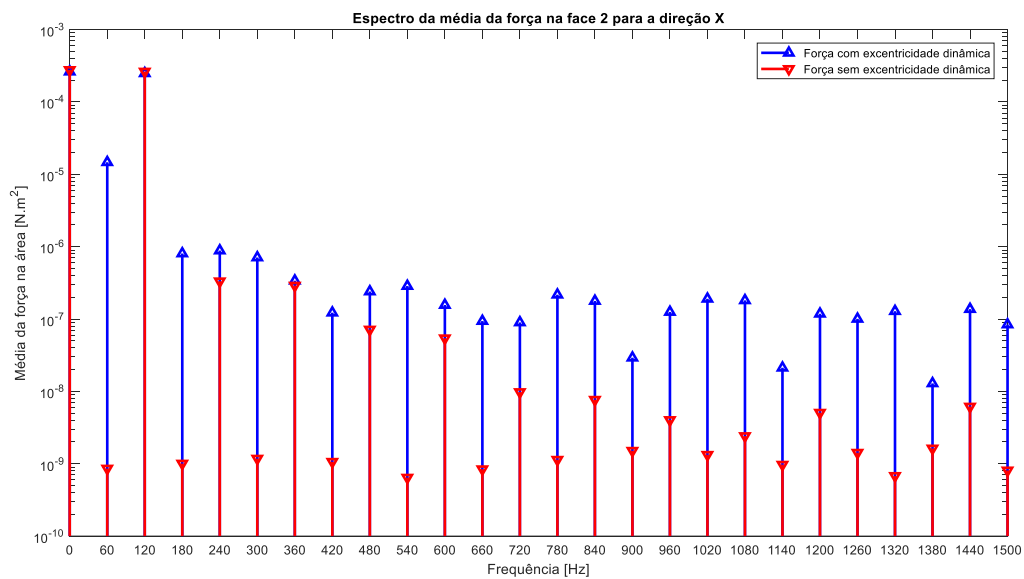
Figura 30 - Espectro da média da força na face 2.



Fonte: Autor.

Observa-se que há amplitudes relevantes na faixa de frequência de interesse e que as frequências de 60 Hz e 120 Hz apresentam os maiores valores. É importante salientar que pela teoria espera-se que as forças magnéticas sejam relevantes nos harmônicos do torque, ou seja, 120 Hz. O fato de haver amplitudes relevantes nos harmônicos relativos à frequência de 60 Hz, indica que possivelmente a excentricidade dinâmica do rotor influencie negativamente no espectro de forças. Como forma de investigar essa hipótese, uma simulação sem excentricidade é feita com o intuito de comparar as forças e observar o seu efeito. O resultado para a força na face 2 é mostrado na Figura 31, onde se observa uma grande diferença nos harmônicos de 60 Hz para o caso sem excentricidade. Dessa forma, conclui-se que a excentricidade dinâmica tem uma relação direta com o aumento dos harmônicos de força nas paredes do estator em relação à frequência fundamental de 60 Hz.

Figura 31 - Comparação do espectro da média da força na face 2 na direção X com e sem excentricidade.



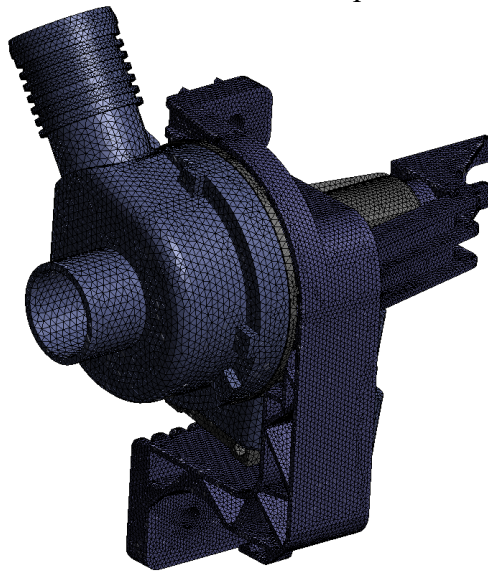
Fonte: Autor.

6.5.2 Simulação estrutural da eletrobomba e validação experimental.

A partir dos resultados da simulação eletromagnética de forças nas paredes do estator, pode-se configurar a simulação estrutural como objetivo de compreender o efeito dessas forças na vibração da estrutura da eletrobomba. Devido à alta complexidade da geometria para construir malhas regulares com prismas ou hexaedros, utiliza-se elementos de

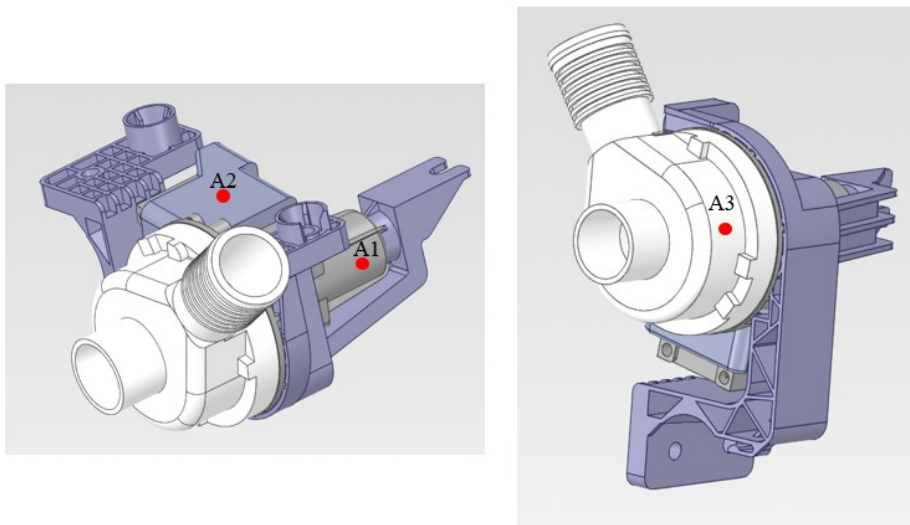
segunda ordem para aumentar a precisão da solução. A malha de elementos finitos utilizada para a simulação elástica é mostrada na Figura 32. O método utilizado para analisar o problema de vibração é simular no regime da frequência para estimar a resposta em frequência da estrutura medida em 3 pontos da eletrobomba. Os pontos escolhidos são mostrados na Figura 33, onde A1-A3 representam os locais onde o pós-processamento da simulação é feito e onde os acelerômetros são posicionados para efetuar a medição.

Figura 32 - Malha de elementos finitos para simulação elástica.



Fonte: Autor.

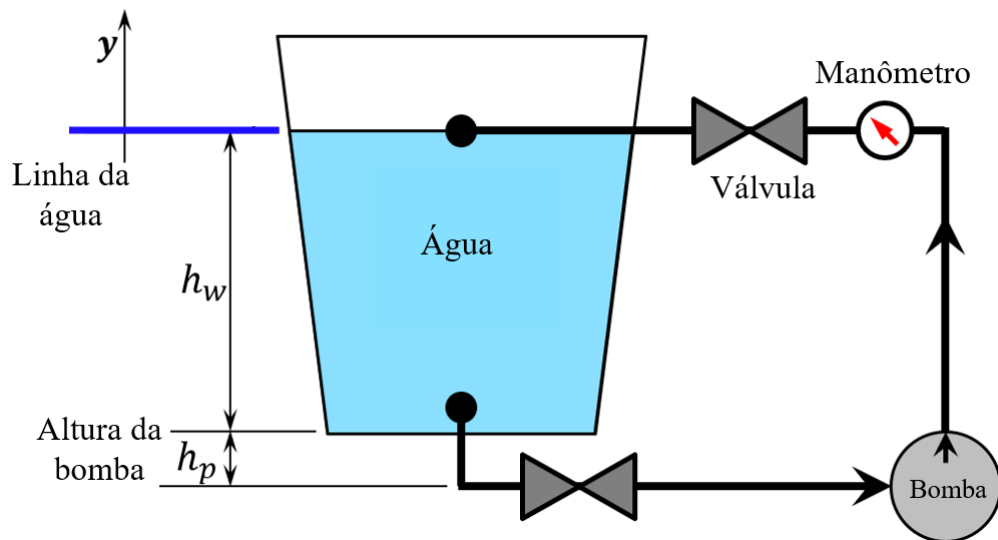
Figura 33 - Posição dos pontos de medição e análise na simulação.



Fonte: Autor.

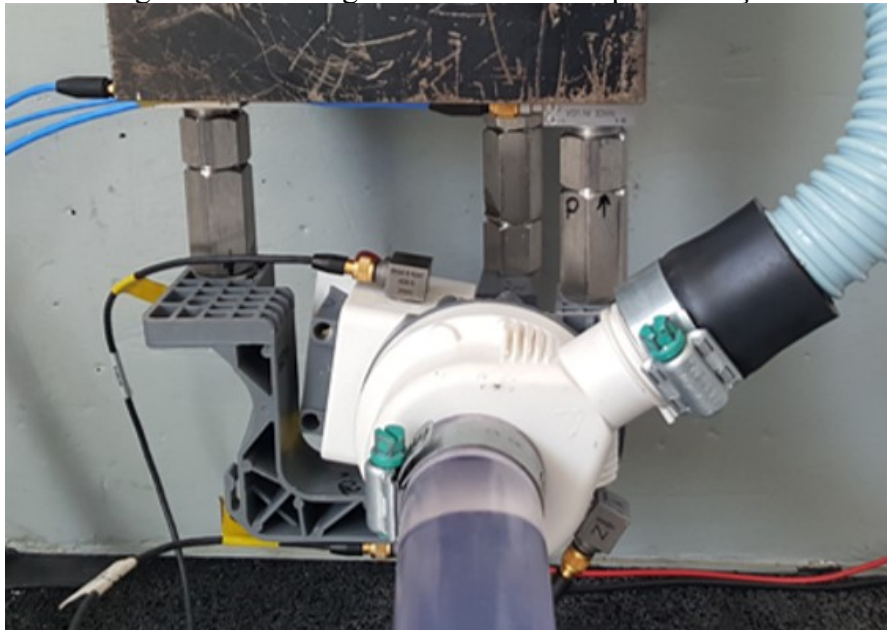
O resultado da simulação elástica é comparado com a medição nos pontos definidos. Para isso, foi construída uma bancada experimental para avaliar a resposta vibratória em condições normais de operação. A configuração da bancada experimental envolve um reservatório de água com capacidade de 80 litros, ao qual a eletrobomba é conectada na parte inferior. Isso permite a bomba recircular o fluido de volta ao reservatório em um ciclo contínuo. Durante esse processo, o nível de água é mantido constante, garantindo condições estáveis para a coleta dos dados relevantes. Os sinais de vibração foram medidos utilizando acelerômetros e a vazão e a pressão na saída da bomba, bem como os parâmetros elétricos do motor, foram monitorados em todos os testes, após cada montagem do equipamento experimental. Para controlar a carga, foi utilizada uma válvula posicionada entre a bomba e a conexão de retorno do reservatório, além disso, um manômetro de coluna de água foi instalado para medir as pressões hidrostáticas exercidas sobre a bomba. A Figura 34 apresenta um diagrama simplificado do circuito hidráulico da bancada de testes, sendo a válvula superior a controladora de carga do sistema. A medição foi realizada por intermédio de transdutores acelerômetros que contêm um elemento piezoelétrico, como o quartzo, que é capaz de gerar uma carga elétrica quando submetido a uma deformação mecânica. O elemento piezoelétrico é conectado a um material de suporte e, quando ocorre uma vibração, a massa sísmica interna do acelerômetro também se move, causando a deformação do elemento piezoelétrico. A deformação mecânica do elemento piezoelétrico gera uma carga elétrica proporcional à aceleração da vibração. Essa carga elétrica é medida por um circuito eletrônico interno ao acelerômetro e convertida em um sinal de saída, geralmente em forma de tensão, que representa a magnitude da vibração [62]. A Figura 35 mostra a montagem da eletrobomba utilizada para medição.

Figura 34 - Diagrama do sistema hidráulico para testes.



Fonte: Autor.

Figura 35 - Montagem da eletrobomba para medição.

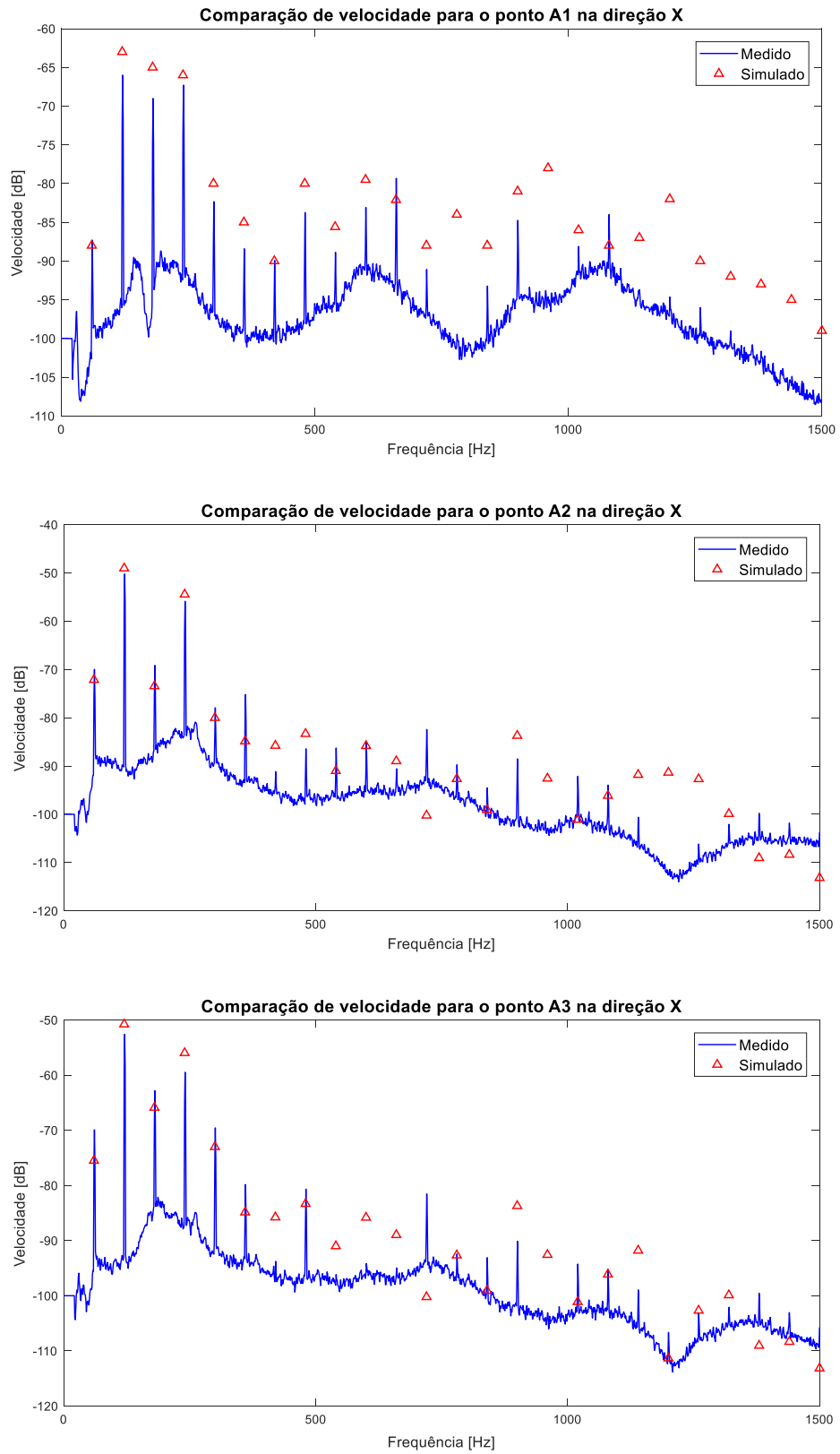


Fonte: Autor.

Os acelerômetros utilizados permitem a medição da velocidade nas três direções, x , y e z . Na simulação, a velocidade é o resultado da derivação do deslocamento. Como o deslocamento provém de uma simulação harmônica, o módulo da velocidade é obtido com a multiplicação do deslocamento pela frequência angular. Com intuito de comparação, apresenta-se os gráficos de medição e simulação para as direções x , y e z dos pontos A1, A2 e A3 nas Figuras 36-38. Pode-se observar uma boa concordância entre o resultado medido e o

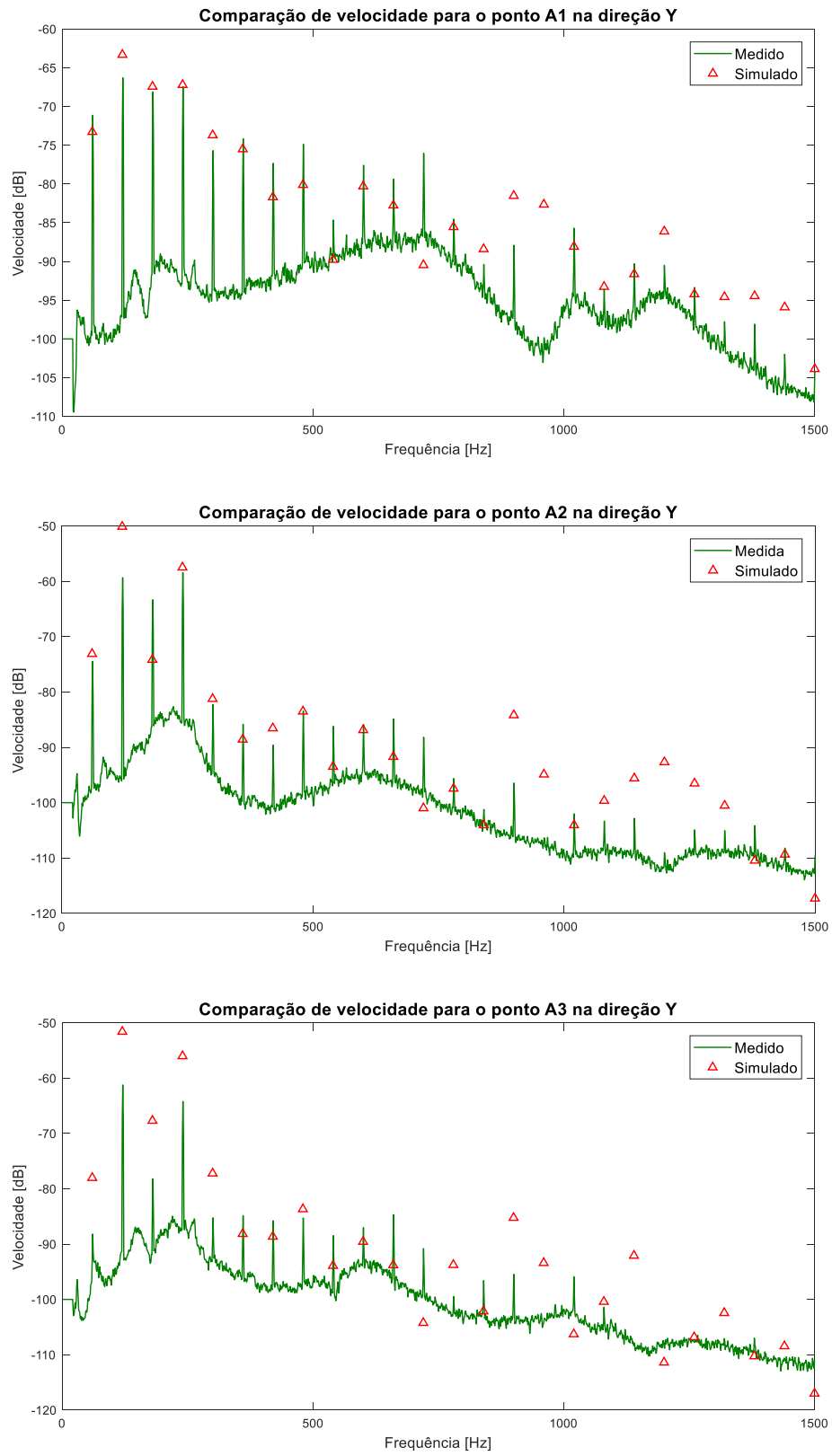
resultado simulado, com destaque para a faixa de frequência de 60 Hz a 300 Hz, região de maior interesse e de maior amplitude. É observado um erro de maior significância para as maiores frequências analisadas, provavelmente devido as variações das propriedades dos materiais e da medição. Conforme a frequência aumenta a derivada do erro se torna mais significativa especialmente quando a energia de excitação das forças magnética é baixa. Contudo, conclui-se que a metodologia de simulação desenvolvida neste trabalho apresenta boa conformidade com os dados de medição.

Figura 36 - Comparação de velocidade para a direção X entre o resultado medido e simulado.



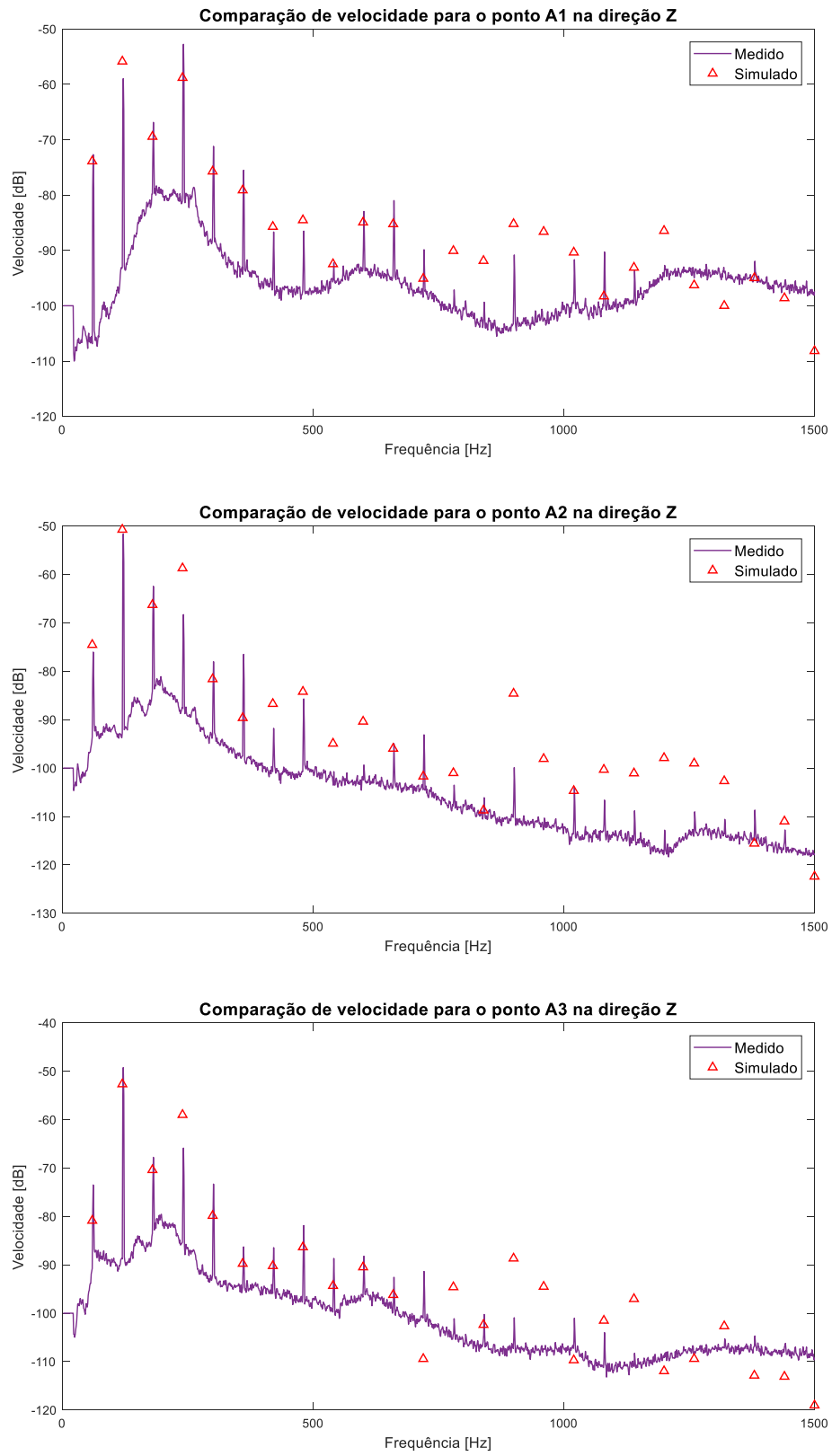
Fonte: Autor.

Figura 37 - Comparação de velocidade para a direção Y entre o resultado medido e simulado.



Fonte: Autor.

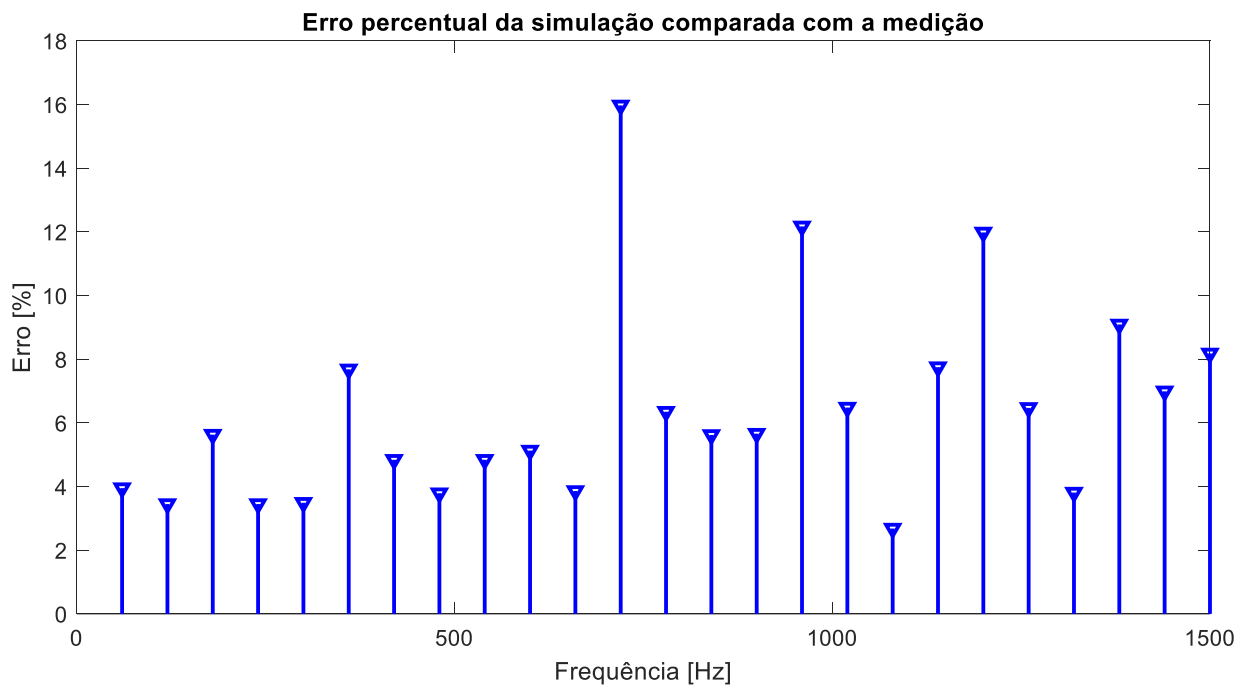
Figura 38 - Comparação de velocidade para a direção Z entre o resultado medido e simulado.



Fonte: Autor.

Como forma de compreender a precisão obtida na simulação em comparação com a medição, a Figura 39 mostra a média do erro percentual nas frequências simuladas. Pode-se perceber que há uma boa concordância nos harmônicos de maior energia, porém algumas frequências apresentam maior amortecimento na medição em comparação com a simulação. Algumas razões para essas diferenças podem estar relacionadas como método empregado nas condições de contato para a formulação elástica, variações nas propriedades dos materiais utilizados na simulação e variações inerentes ao processo de medição. O computador utilizado para as análises desse trabalho tem as configurações de hardware sendo: Processador AMD Ryzen 5 3600XT 6-Core Processor, 3793 MHz, 6 Núcleo(s), 12 Processador(es) Lógico(s) e 32 GB de memória RAM com SSD de alta velocidade. O tempo de simulação para a parte magnética foi de 3,6 horas e para a parte mecânica 1,3 horas.

Figura 39 - Erro percentual da simulação comparada com a medição.



Fonte: Autor.

7 CONCLUSÃO

Com base no desenvolvimento da metodologia e nas análises realizadas nesta dissertação, foi possível obter uma compreensão mais aprofundada dos padrões de vibração da eletrobomba equipada com um motor síncrono monofásico de ímã permanente. A simulação por elementos finitos permitiu a investigação das forças no estator, as quais se revelaram como a principal fonte de vibração na estrutura da eletrobomba. Ao examinar os resultados obtidos, identificou-se que a excentricidade dinâmica do motor está diretamente associada à ocorrência de frequências de vibração relacionadas a 60 Hz. Essas frequências harmônicas podem gerar efeitos indesejáveis, como ruído e desgaste prematuro de componentes, o que pode comprometer o desempenho e a vida útil do sistema. Além disso, o número de pás do rotor pode influenciar nos harmônicos de 180 Hz já que a rotação é de 60 Hz com 3 pás. Essa característica não foi considerada na simulação.

A partir dos resultados obtidos, propõe-se que seja efetuado um projeto de melhoramento da folga e do balanceamento do rotor de forma que metade dos harmônicos de força e vibração sejam fortemente atenuados, como mostrado na Figura 31. Observou-se que, embora existam frequências próximas às frequências de força magnética, o padrão de vibração não é semelhante ao ponto de gerar problemas de ressonância. A eletrobomba utilizada neste trabalho tem o seu funcionamento atrelado a uma lavadora de roupas ou de louça. Assim, pode-se inferir que a vibração da eletrobomba pode ser transmitida para o produto, caso a sua fixação não leve em consideração as frequências de maior energia apresentadas nesta análise. Portanto, a interação entre o produto e a eletrobomba pode ser tópico de análise para trabalhos futuros.

Na metodologia desenvolvida neste trabalho para análise multifísica, utilizou-se um caso onde as forças magnéticas são fontes de vibração e ela se mostrou adequada quando comparada aos resultados experimentais. Dessa forma, uma contribuição desse trabalho foi descrever a formulação utilizada, bem como a estratégia e o fluxo de trabalho para que a análise seja confiável. O estudo de malha apresentado pode ser aplicado de forma genérica para motores de qualquer topologia e para qualquer estrutura de vibração, além do fluxograma para análise multifísica. Além disso, mostrou-se a importância da simulação de alta fidelidade para o desenvolvimento de produtos, onde as conclusões sobre a vibração do sistema podem ser obtidas de forma anterior à fase de prototipagem e testes. Assim, é possível reduzir o tempo de projeto dos produtos, aumentar a confiabilidade na qualidade e reduzir custo de testes e protótipos.

Algumas proposições para novos trabalhos podem ser geradas a partir dessa dissertação. Pode-se realizar estudos comparativos entre motores síncronos monofásicos de ímã permanente e outros tipos de motores, como motores assíncronos, para avaliar as diferenças nas características de vibração. Isso pode ajudar a entender melhor os fatores específicos relacionados à configuração do motor que contribuem para a vibração. Além disso, investigar a viabilidade e eficácia de estratégias de controle ativo de vibração para reduzir as oscilações indesejadas. Isso pode envolver a implementação de sensores e atuadores para monitorar e compensar ativamente a vibração, proporcionando uma resposta em tempo real para minimizá-la. Investigar a possibilidade de efetuar um acoplamento magneto-elástico com a mesma malha de elementos finitos onde a força magnética seja calculada em cada nó da malha utilizada na simulação elástica. Por fim, além da análise de vibração, o efeito acústico pode ser analisado para a compreensão do ruído gerado pela eletrobomba.

REFERÊNCIAS

- [1] J. F. Gieras e M. Wing, *Permanent Magnet Motor Technology: Design and Applications*, Marcel Dekker, 2002.
- [2] G. Zhang, G. Wang e N. Zhao, *Permanent Magnet Synchronous Motor Drives for Gearless Traction Elevators*, Springer Nature Singapore, 2022.
- [3] J. P. A. Bastos e N. Sadowski, *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*, CRC Press, 2003, p. 510.
- [4] R. Nisticò, F. Cesano e F. Garello, “Magnetic Materials and Systems: Domain Structure Visualization and Other Characterization Techniques for the Application in the Materials Science and Biomedicine,” *Inorganics*, 2020.
- [5] W. Mazgaj, M. Sierzega e Z. Szular, “Approximation of Hysteresis Changes in Electrical Steel Sheets,” *energies*, 2021.
- [6] O. G. eisch *et al.*, “Magnetic materials and devices for the 21st century: Stronger, lighter, and more energy efficient,” *Advanced Materials*, 2011.
- [7] S.-H. Kim, *Electric Motor Control: DC, AC, and BLDC Motors*, Elsevier Science Publishing Co Inc, 2017.
- [8] D. C. Hanselman, *Brushless Permanent Magnet Motor Design*, Magna Physics, 2006 , p. 392 .
- [9] D. E. Keyes *et al.*, “Multiphysics Simulations: Challenges and Opportunities,” *International Journal of High Performance Computing Applications*, 2012.
- [10] W. L. Oberkampf, T. G. Trucano e C. Hirsch, “Verification, Validation, and Predictive Capability in Computational Engineering and Physics,” *Sandia National Laboratories*, 2003.
- [11] K. Alameh, G. Hoblos, G. Barakat e N. Cité, “Vibration-based Fault Diagnosis Approach for Permanent Magnet Synchronous Motors,” *Conference: 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes*, 2015.
- [12] Z. Yu, D. Li, L. Chen e H. Yan, “The research on transformer fault diagnosis method based on vibration and noise voiceprint imaging technology,” *Xi'an, China: 14th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*, 2019.
- [13] A.-C. Hladky-Hennion e B. Dubus, “Finite Element Analysis of Piezoelectric Transducers,” *Lille, France: Piezoelectric and Acoustic Materials for Transducer*

Applications, 2008.

- [14] N. Lucid, *Advanced Theoretical Physics (A Historical Perspective)*, 2015.
- [15] B. J. Hunt, *Oliver Heaviside: A first-rate oddity*, American Institute of Physics, 2012.
- [16] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, 1999.
- [17] P. G. Huray, *Maxwell's Equations*, John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- [18] G. Meunie, *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*, John Wiley & Sons, 2008.
- [19] P. Hammond, "The role of the potentials in electromagnetism," *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 1999.
- [20] P. Dular, "Dual magnetodynamic finite element formulations with natural definitions of global quantities for electric circuit coupling," *Scientific Computing in Electrical Engineering*, 2001.
- [21] A. Bossavit, "Two dual formulations of the 3-D Eddy-currents problem," *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 1985.
- [22] T. Henneron, S. Clenet e F. Piriou, "Comparison of 3D magnetodynamic formulations in terms of potentials with imposed electric global quantities," *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 2004.
- [23] P. Bettini *et al.*, "T- Ω Formulation for Eddy-Current Problems with Periodic Boundary Conditions," *IEEE Transactions on Magnetics*, 2017.
- [24] P. Dular *et al.*, "Magnetostatic and magnetodynamic mixed formulations compared with conventional formulations," *IEEE Transactions on Magnetics*, 1997.
- [25] R. Salazar, C. Bayona-Roa e G. Téllez, "Electric vector potential formulation in electrostatics: analytical treatment of the gaped surface electrode," *The European Physical Journal Plus*, p. 28, 2020.
- [26] T. Ueyama, K. Shinkura e R. Ueda, "Fundamental equations for eddy current analysis by using the A- ϕ method and 3-D analysis of a conducting liquid," *IEEE Transactions on Magnetics*, 1989.

- [27] M. V. F. da. Luz, “Desenvolvimento de um software para cálculo de campos eletromagnéticos 3d utilizando elementos de aresta, levando em conta o movimento e o circuito de alimentação,” *Tese de doutorado, UFSC*, 2003.
- [28] E. H. Dill, *Continuum Mechanics - Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity*, Taylor & Francis Group, 2007.
- [29] M. H. Sadd, *ELASTICITY - Theory, Applications, and Numerics*, Elsevier Butterworth–Heinemann, 2005.
- [30] M. F. Ashby, H. Shercliff e D. Cebon, *Materials: Engineering, Science, Processing and Design*, Butterworth-Heinemann, 2013.
- [31] R. C. Hibbeler, *Resistencia dos Materiais*, 2004.
- [32] A. F. Bower, *Applied Mechanics of Solids*, Taylor & Francis Group, 2010.
- [33] H. Lim e S. W. Hoag, “Plasticizer Effects on Physical–Mechanical Properties of Solvent Cast Soluplus® Films,” *AAPS PharmSciTech*, 213.
- [34] O. Zienkiewicz e R. L. Taylor, *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, 2013.
- [35] D. Hazel, “Comparing Strain Gage Measurements to Force Calculations in a Simple Cantilever Beam,” *Worcester Polytechnic Institute Major Qualifying Project*, 2016.
- [36] B. D. Storey, *Solid Mechanics - A brief introduction*, Olin College, 2019.
- [37] Britannica, The Editors of Encyclopaedia, “Newton’s laws of motion,” *Encyclopedia Britannica*, <https://www.britannica.com/science/Newtons-laws-of-motion>, 2022.
- [38] I. H. Shames e F. A. Cozzarelli, *Elastic and Inelastic Stress Analysis*, Taylor & Francis Group, 1997.
- [39] D. W. Pepper e . C. Heinrich, *The Finite Element Method: Basic Concepts and Applications*, Taylor & Francis, 2005.
- [40] C. Geuzaine e J.-F. Remacle, “A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities,” <https://gmsh.info/>.
- [41] J. N. Reddy, *An introduction to the finite element method*, New York: McGraw-Hill, 1993.
- [42] T. J. Hughes, *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*, New Jersey: Prentice Hall, 1987.
- [43] J. Davidsson, *Sobolev Spaces and the Finite Element Method*, Institutionen för

naturvetenskap och teknik, 2018.

- [44] A. Salih, *Weighted Residual Methods, Indian Institute of Space Science and Technology*, Thiruvananthapuram, 2016.
- [45] A. Bossavit, “Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism,” *IEE proceedings*, Vol. 135, 1988.
- [46] F. Rapetti e A. Bossavit, “Whitney Forms Of Higher Degree,” *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2007.
- [47] M.F. Wong, W. Picon e V. Fouadhanna, “The Impact Of Whitney Forms On Computational Electromagnetics,” *Proceedings of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium and URSI National Radio Science Meeting*, 1994.
- [48] R. Hiptmair e J. Xu, “Nodal Auxiliary Space Preconditioning in $H(\text{curl})$ and $H(\text{div})$ Spaces,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2015.
- [49] Y. Tong, M. Desbrun e P. Schröder, “Edge Subdivision Schemes and the Construction of Smooth Vector Fields,” *Transactions on Graphics*, 2006.
- [50] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.
- [51] P. W. L. a. A. N. Dular, “Coupling of local and global quantities in various finite element formulations and its application to electrostatics, magnetostatics and magnetodynamics,” *IEEE Transactions on Magnetics*, 1998.
- [52] Y. Saad, “Iterative Methods for Sparse Linear Systems,” *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2003.
- [53] T. A. Davis, “Direct Methods for Sparse Linear Systems,” *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2006.
- [54] “MUMPS website,” Mumps Technologies, [Online]. Available: <https://mumps-solver.org/index.php>.
- [55] P. R. Amestoy, I. S. Duff, J.-Y. L'Excellent e J. Koster, “A Fully Asynchronous Multifrontal Solver Using Distributed Dynamic Scheduling,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2001.
- [56] E. Creusé, D. Patrick e S. Nicaise, “About the gauge conditions arising in finite element magnetostatic problems,” *Computers & Mathematics with Applications*, 2019.
- [57] Z. Ren, “Influence of the RHS on the convergence behaviour of the curl-curl equation,”

IEEE Transactions on Magnetics, 1996 .

- [58] A. Tinzefté, Y. L. Menach e F. Piriou, “Iterative Solvers for Singular Symmetric Linear Systems in Low Frequency Electromagnetics,” *IEEE Transactions on Magnetics*, 2009.
- [59] E. Biotteau e P. Jean-Philippe, “Modeling frictional contact conditions with the penalty method in the extended finite element framework,” *HAL open science*, 2012.
- [60] J. Ruokolainen, M. Malinen, P. Råback, T. Zwinger, A. Pursula e M. Byckling, “ElmerSolver Manual,” CSC – IT Center for Science, p. 163, 2021.
- [61] A. Bossavit, “Virtual Power Principle and Maxwell's tensor: Which comes first?,” *COMPEL International Journal of Computations and Mathematics in Electrical*, 2014.
- [62] M. Varanis, A. Silva, A. Mereles e R. Pederiva, “MEMS accelerometers for mechanical vibrations analysis: a comprehensive review with applications,” *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2018.
- [63] A. Kameari, “Three-dimensional eddy current calculation using finite element method with AV in conductor and Omega in vacuum,” *IEEE Transactions on magnetics*, 1988.
- [64] P. Dular, “The benefits of nodal and edge elements coupling for discretizing global constraints in dual magnetodynamic formulations,” *Journal of computational and applied mathematics*, 2004.
- [65] M. Kuczmann, “Potential formulations in magnetics applying the finite element method,” *Lecture notes, Laboratory of Electromagnetic Fields, “Széchenyi István” University*, Gyor, Hungary, 2009.
- [66] A. Bossavit, “On the numerical analysis of eddy-current problems,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1981.
- [67] I. Bakhsh, “Finite Element Techniques for Three-Dimensional Skin Effect Problems,” *Institute for Fundamentals and Theory in Electrical Engineering Graz University of Technology*, Austria, 2012.
- [68] A. Bossavit, “Edge-element computation of the force field in deformable bodies,” *IEEE transactions on magnetics*, 1992.
- [69] A. Bossavit, “A rationale for 'edge-elements' in 3-D fields computations,” *IEEE Transactions on Magnetics*, 1988.
- [70] I. Y. Irodov, *Basic Laws Of Electromagnetism*, 1986.
- [71] N. A. Golias *et al.*, “3D eddy current computation with edge elements in terms of the

- electric intensity,” *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 1998.
- [72] P. Dular *et al.*, “A general environment for the treatment of discrete problems and its application to the finite element method,” *IEEE Transactions on Magnetics*, 1998.
- [73] P. Lombard e a. G. Meunier, “A general method for electric and magnetic coupled problem in 2D and magnetodynamic domain,” *IEEE Transactions on Magnetics*, 1992.
- [74] P. C. Jr, “Augmented formulations for solving Maxwell equations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005.
- [75] S. Mykola e G. Fedor., “A–V formulation for numerical modelling of superconductor magnetization in true 3D geometry,” *Superconductor Science and Technology*, 2019.
- [76] J. R. Hendershot e T. J. E. Miller, *Design of Brushless Permanent Magnet Motors*, Magna Physics Publications, 1994, p. 582.
- [77] P. Dular *et al.*, “Dual magnetodynamic formulations and their source fields associated with massive and stranded inductors,” *IEEE Transactions on Magnetics*, 2000.
- [78] O. Biro e K. Preis, “Finite element analysis of 3-D eddy currents,” *IEEE Transactions on Magnetics*, 1990.
- [79] P. M. I. Robert e T. Takahashi, “Numerical solution of three dimensional transient eddy current problems by the A-Phi method,” *IEEE transactions on magnetics*, 1992.
- [80] J.-F. Remacle *et al.*, “On the resolution of magnetostatic and magnetodynamic mixed formulations,” *IEEE Transactions on Magnetics*, 1997.
- [81] O. Biro e K. Preis, “On the use of the magnetic vector potential in the finite-element analysis of three-dimensional eddy currents,” *IEEE Transactions on magnetics*, 1989.
- [82] N. K. Georgieva, e H. W. Tam, “Potential formalisms in electromagnetic-field analysis,” *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, 2003.
- [83] P. I. P. Alotto, “Tree-cotree implicit condensation in magnetostatics,” *IEEE transactions on magnetics*, 2000.
- [84] U. Saravanan, *Advanced Solid Mechanics*, 2013.
- [85] S. S. Rao, *Vibration of continuous systems*, John Wiley & Sons Ltd, 2019.
- [86] V. D. Quoc, “Developing A-Phi Magnetodynamicformulations For Modelling Of Massive Inductors By A Finite Element Approach,” *Hanoi University of Science and*

Technology, 2020.

- [87] T. Wildi, *Electrical Machines, Drives and Power Systems*, Columbus, Ohio: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [88] R. Pile, E. Devillers e J. L. Besnerais, “Comparison of main magnetic force computation methods for noise and vibration assessment in electrical machines, ” *IEEE Transactions on Magnetics*, 2018.