



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS TRINDADE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Leonardo Gonçalves Barbosa

Mecânica Quântica Relativística e Flutuações do Vácuo em
Espaços Curvos

Florianópolis

2023

Leonardo Gonçalves Barbosa

Mecânica Quântica Relativística e Flutuações do Vácuo em Espaços Curvos

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Celso De Camargo Barros Junior

Florianópolis
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Barbosa, Leonardo
Mecânica Quântica Relativística e Flutuações do Vácuo em
Espaços Curvos / Leonardo Barbosa ; orientador, Celso
Barros Junior, 2023.
87 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Física. 2. Relatividade Geral. 3. Partículas. 4.
Campos Quânticos. I. Barros Junior, Celso. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

Leonardo Gonçalves Barbosa

Mecânica Quântica Relativística e Flutuações do Vácuo em Espaços Curvos

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Celso De Camargo Barros Junior, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Luis Rafael Benito Castro, Dr.
Universidade Federal do Maranhão

Prof. André da Silva Schneider, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Física

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof. Celso De Camargo Barros Junior, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2023.

Dedico este trabalho à todas as vidas
injustamente perdidas na pandemia de Covid-19.

Agradecimentos

Agradeço à minha família, em especial aos meus pais e meu irmão, por todo o suporte e amor. Agradeço ao Prof. Celso C.C. Jr pela orientação e por toda a liberdade concedida na elaboração desse trabalho. Agradeço aos membros da banca pela leitura e pelas correções. Agradeço aos membros do grupo Beyond Flatland pelas frutíferas reuniões, em especial agradeço a João V. Z. dos Santos pela amizade e discussões. Agradeço a Rafael P. Cardoso e a Renata Krupczak pela amizade e companheirismo, principalmente no início da pós-graduação. Agradeço ao meu amigo Victor H. M. Ramos pela fé, mesmo nos momentos em que nem eu mesmo tinha. Agradeço a todos que, de algum modo, foram suporte para que esse trabalho fosse realizado. Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"We are like sailors who on the open sea must reconstruct their ship but are never able to start afresh from the bottom."

(Otto Neurath)

"il faut imaginer Sisyphe heureux."

(Albert Camus)

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo das equações de Klein-Gordon e de Dirac no espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica. Obtivemos o espectro de energia em cada caso, levando em conta condições de contorno nas soluções. Além disso, investigamos o efeito Casimir no espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica para um campo escalar quântico e calculamos a energia de Casimir regularizada. Também generalizamos a solução da corda negra com quintessência, adicionando carga à solução, e determinamos a temperatura Hawking para os casos estático e em rotação, considerando o método de tunelamento de partículas.

Palavras-Chave: 1. Relatividade Geral. 2. Partículas. 3. Campos Quânticos.

Abstract

In this work, we conducted a study of the Klein-Gordon and Dirac equations in the Bonnor-Melvin spacetime with a cosmological constant. We obtained the energy spectrum in each case, taking into account boundary conditions in the solutions. Additionally, we investigated the Casimir effect in the Bonnor-Melvin spacetime with a cosmological constant for a quantum scalar field and calculated the regularized Casimir energy. We also generalized the solution of the black string with quintessence, adding charge to the solution, and determined the Hawking temperature for the static and rotating cases, considering the particle tunneling method.

Keywords: 1.General Relativity. 2. Particles. 3. Quantum Fields.

Lista de figuras

Figura 1	– Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de -3 até 3 e l variando de 1 até 6 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $\rho_\omega^{-1} \sim 0.134$ GeV.	41
Figura 2	– Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de -20 até 20 e l variando de 0 até 20 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $\rho_\omega^{-1} \sim 0.134$ GeV.	42
Figura 3	– Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de -3 até 3 e l variando de 1 até 6 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0134$ GeV.	43
Figura 4	– Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de -20 até 20 e l variando de 0 até 20 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0134$ GeV.	44
Figura 5	– Gráfico do potencial efetivo V_{eff} com respeito a ρ , para $l = 0, 1, 2$ e $\eta = -0.3$. Em unidades naturais, $m = 0.135$ e $H_0 = 0.195$ GeV ²	45
Figura 6	– Gráfico do potencial efetivo V_{eff} com respeito a ρ e η , para $l = 1$. Em unidades naturais, $m = 0.135$ e $H_0 = 0.195$ GeV ²	46
Figura 7	– Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 1 até 6 e l variando de 1 até 6 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV, $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$	47
Figura 8	– Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 1 até 6 e l variando de 1 até 6 . Em unidades naturais, $p_z \sim 0.134$ GeV, $m \sim 1.34$ GeV, $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$	48
Figura 9	– Gráfico do espectro de energia em GeV. Em unidades naturais $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $H_0 \sim 0.195$ GeV ²	49
Figura 10	– Gráfico do espectro de energia em GeV. Em unidades naturais $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $\eta = \frac{0.303}{4\pi}$	50
Figura 11	– Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 1 até 6 e l variando de 1 até 6 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim \Omega \sim 0.134$ GeV, $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$	53
Figura 12	– Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 0 até 20 e l variando de 0 até 20 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim \Omega \sim 0.134$ GeV, $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$	54
Figura 13	– Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 1 até 6 e l variando de 1 até 6 . Em unidades naturais, $p_z \sim 0.134$ GeV, $m \sim 1.34$ GeV, $\Omega \sim 0.134$ GeV e $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$	55

Figura 14 – Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 0 até 20 e l variando de 0 até 20. Em unidades naturais, $p_z \sim 0.134$ GeV, $m \sim 1.34$ GeV, $\Omega \sim 0.134$ GeV e $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$	56
Figura 15 – Gráfico do espectro de energia ϵ_- em GeV, para n variando de -3 até 3 e l variando de 1 até 6. Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.0005$ GeV, $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0005$ GeV e $\Lambda \sim 0$	60
Figura 16 – Gráfico do espectro de energia ϵ_- em GeV, para n variando de -20 até 20 e l variando de 0 até 20. Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.0005$ GeV, $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0005$ GeV e $\Lambda \sim 0$	61
Figura 17 – Gráfico do espectro de energia ϵ_+ em GeV, para n variando de -3 até 3 e l variando de 1 até 6. Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.0005$ GeV, $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0005$ GeV e $\Lambda \sim 0$	62
Figura 18 – Gráfico do espectro de energia ϵ_+ em GeV, para n variando de -20 até 20 e l variando de 0 até 20. Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.0005$ GeV, $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0005$ GeV e $\Lambda \sim 0$	63
Figura 19 – Gráficos de g^{rr} por w_q com $l = 100$, $N_q = -0.1$, $m = 1$ e $Q = 0.1, 0.01, 0.001$	72
Figura 20 – Gráficos de g^{rr} por r com $l = 10$, $N_q = 0.1$, $m = 1$ e $Q = 0.1, 0.01, 0.001$	73

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	RELATIVIDADE GERAL	16
2.1	Equações de Campo da Relatividade Geral	16
2.2	Formulação Tétrada	18
2.3	Universo de Bonnor-Melvin- Λ	19
2.4	Buraco Negro Cilíndrico: Corda Negra	21
3	CAMPOS EM ESPAÇOS CURVOS	23
3.1	Equação de Klein-Gordon	23
3.2	Equação de Klein-Gordon em Espaços Curvos	24
3.3	Equação de Dirac	24
3.4	Equação de Dirac em Espaços Curvos	26
4	QUANTIZAÇÃO DOS CAMPOS EM ESPAÇOS CURVOS	28
4.1	Quantização Canônica	28
4.2	Transformação de Bogoliubov	30
4.3	Radiação Hawking	32
4.4	Tunelamento de Partículas	34
4.5	Efeito Casimir	35
5	EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM BONNOR-MELVIN- Λ	37
5.1	Equação de Klein-Gordon: Solução Exata	37
5.2	Níveis de Landau	39
5.3	Potencial Escalar Tipo-Coulomb	44
5.4	Oscilador de Klein-Gordon com Potencial Escalar	50
6	EQUAÇÃO DE DIRAC EM BONNOR-MELVIN- Λ	57
6.1	Equação de Dirac	57
6.2	Equação de Dirac: $\Lambda \ll 1$	59
7	EFEITO CASIMIR NO ESPAÇO-TEMPO DE BONNOR-MELVIN- Λ	64
7.1	Espaço-Tempo de Bonnor-Melvin- Λ	64
7.2	Modos Escalares	64
7.3	Energia de Casimir	66
7.4	Regularização	67

8	CORDA NEGRA DE KISSELEV CARREGADA EM ROTAÇÃO E RADIAÇÃO HAWKING VIA TUNELAMENTO . . .	69
8.1	Equação de Campo e Soluções	69
8.2	Partículas Escalares na Corda Negra e Efeito Hawking	74
8.3	Partículas Escalares na Corda Negra em Rotação e Efeito Hawking	76
9	CONCLUSÕES	78
	REFERÊNCIAS	79
	APÊNDICE A – FUNÇÕES ESPECIAIS	85
A.1	Função Zeta de Riemann	85
A.2	Função de Bessel	85
A.3	Função de Kummer	86
A.4	Função de Legendre Associada	86
A.5	Função Biconfluente de Heun	87

1 Introdução

No quesito de descrições e entendimento das teorias fundamentais, a gravitação não pode ser deixada de lado, pois é considerada uma condição de existência, afinal, tudo o que existe gravita [1, 2]. A pesquisa em espaços curvos representa uma área da física que oferece um vasto campo para a exploração e avanço científico. Além de ser altamente relevante em regimes cosmológicos e astrofísicos, ela possui numerosas interconexões com outras áreas da física, como por exemplo com a física da matéria condensada, por meio de modelos análogos [3, 4], e teorias fortemente interagentes, por meio da correspondência Gauge/Gravity [5, 6, 7].

O estudo das equações de Einstein da relatividade geral e suas generalizações continua sendo um campo de pesquisa muito ativo [8, 9]. Dentro das soluções possíveis, destacam-se aquelas que apresentam regimes de gravidade forte e/ou singularidades, que podem levar a considerações sobre efeitos quânticos em gravitação. Nesse contexto, três classes de espaços-tempo são especialmente importantes: os buracos negros, estrelas de nêutrons e os modelos de universo primordial. Além disso, as soluções exatas têm desempenhado um papel crucial na compreensão do funcionamento mais profundo da física do espaço-tempo, permitindo-nos construir nossa intuição sobre situações mais realistas da natureza.

Dentro do campo de soluções exatas, a simetria cilíndrica tem desempenhado um papel importante na discussão da consistência interna da própria Relatividade Geral [10, 11]. No contexto de buraco negro vale mencionar a solução de Kerr–Newman que é a solução mais geral das equações de Einstein–Maxwell assintoticamente plana, descrevendo um buraco negro estacionário com carga, massa e momento angular [11]. As soluções para buracos negros são de grande relevância, pois podem refletir a maneira como o espaço-tempo se estabelece após a ocorrência do colapso gravitacional por exemplo, o colapso de estrelas ou aglomerados de estrelas. Nesse sentido, investigações com respeito à solução de um buraco negro cilíndrico, também conhecido de corda negra [10, 12] se mostram bastante interessantes.

Em um contexto astrofísico, um exemplo interessante de aplicação da simetria cilíndrica se dá no estudo das cordas cósmicas [13] que, por sua vez, oferece uma compreensão do papel que as singularidades cônicas e os defeitos topológicos do espaço-tempo desempenham no campo gravitacional. Ainda nesse contexto, devemos levar em conta que os campos magnéticos desempenham um papel importante na descrição de muitos objetos, como estrelas, discos de acreção até núcleos galácticos. Então soluções das equações de campo da relatividade geral que envolvam campos magnéticos se mostram bastante interessantes. Uma das soluções exatas da relatividade geral contendo campo magnético que chama nossa atenção é a solução de Bonnor–Melvin com constante cosmológica [14] que

é uma generalização da conhecida solução cilindricamente simétrica de Bonnor-Melvin, envolvendo um campo magnético alinhado com o eixo de simetria. Essa é uma solução auto-consistente das equações de Einstein-Maxwell que descreve campos magnéticos em equilíbrio com seu próprio campo gravitacional.

Os efeitos quânticos em espaços curvos podem ser abordados de diversas maneiras, como a mecânica quântica relativística em espaços curvos, que descreve bósons e férmions em métricas de interesse [15, 16, 17, 18], teoria quântica de campos em espaços curvos, que introduz a quantização dos campos em fundos fixos [19, 20, 21, 22], e até a gravitação quântica¹, que busca quantizar o campo gravitacional ou o próprio espaço-tempo [24, 23, 25].

Um resultado de grande importância proveniente da interseção entre a física quântica e a gravitacional é a radiação Hawking, originalmente obtida diante da não unicidade do vácuo em teorias quânticas de campos no espaço-tempo curvo. Esse resultado também é obtido na mecânica quântica relativística por meio do processo de tunelamento através do horizonte de eventos [26, 27, 28], e em teorias de gravitação quântica ao se considerar limites semiclássicos [29, 25].

Nesta dissertação temos então o interesse em estudar efeitos quânticos na gravitação, tanto no quesito de mecânica quântica relativística em espaços curvos quanto no sentido de teoria quântica de campos em espaços curvos. Para isso, devemos fazer uso das equações de campo, explicitamente a equação de Klein-Gordon para bósons de spin 0 e a equação de Dirac para férmions de spin $\frac{1}{2}$ no espaço-tempo curvo. Quando implementadas em espaços arbitrários, ambas as equações apresentam resultados bastante interessantes. Por exemplo, descobriu-se que, além dos efeitos da geometria, a topologia do espaço-tempo desempenha um papel importante no espectro de energia de um átomo [30, 31].

No que diz respeito aos campos quânticos, a incessante criação e aniquilação de pares virtuais de partículas introduz o fenômeno de flutuação do vácuo [32, 20, 21]. Sob essa perspectiva, o efeito Casimir se apresenta como um fenômeno bastante interessante, explicitamente podemos mostrar que a flutuação do vácuo eletromagnético entre placas metálicas paralelas difere da flutuação nas regiões externas e isso resulta em uma força atrativa entre as placas metálicas, independentemente do material que as compõe. Vale mencionar que as flutuações do vácuo, em específico a energia de Casimir pode ser afetada pela topologia e curvatura do espaço-tempo [33, 34, 35, 36, 37, 38], o que nos motiva a estudar o fenômeno nas métricas de interesse mencionadas.

Temos então o objetivo de estudar partículas quânticas e campos quânticos no espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica [14], buscando soluções para as equações de Klein-Gordon e Dirac, uma caracterização do espectro de energia e investigar os

¹ Embora ainda não exista uma teoria de gravitação quântica consistente, preditiva e amplamente aceita pela comunidade científica, podemos encontrar varias abordagem e tentativas de quantização do campo gravitacional [23].

efeitos do campo magnético e da constante cosmológica com respeito a flutuações do vácuo e a energia de Casimir. Generalizar a solução de corda negra imersa em um fluido de quintessência [39], introduzindo um tensor de energia-momento munido de carga e obter a temperatura Hawking via método de tunelamento de partículas para a solução obtida.

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos uma breve revisão da relatividade geral, da formulação tétrada e das soluções das equações de campo da relatividade geral de interesse. No capítulo 3 introduzimos as equações de campos que descrevem bósons e fermions e em seguida efetuamos as devidas generalizações para o formalismo covariante necessário para o desenvolvimento desta dissertação, explicitamente introduzimos a derivada covariante e a conexão de spin. No capítulo 4 apresentamos de forma resumida o processo de quantização canônica em espaços curvos, as transformações de Bogoliubov e ilustramos todo o esquema com o efeito Hawking em duas abordagens distintas e o efeito Casimir em (1+1) dimensões. No capítulo² 5 resolvemos a equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo no espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica para o caso livre, com potencial e com o termo de oscilador de Klein-Gordon, em todos os casos obtemos o espectro de energia. No capítulo 6 resolvemos a equação de Dirac no espaço-tempo de Bonnor-Melvin- Λ e obtemos o espectro de energia. No capítulo 7 estudamos o efeito Casimir no espaço-tempo de Bonnor-Melvin- Λ e obtemos a energia de Casimir via regularização dimensional. No capítulo 8 generalizamos a solução de corda negra com quintessência, introduzindo um tensor de energia-momento associado à carga elétrica e calculamos a temperatura Hawking via tunelamento de partículas para o caso estático e para com caso dotado de rotação. Finalmente no capítulo 9 apresentamos as conclusões e perspectivas futuras.

² Vale mencionar que os resultados inéditos obtidos durante esse projeto se encontram a partir do capítulo 5, no caso do leitor estar interessado apenas nos resultados dos capítulos anteriores que servem de revisão podem ser pulados.

2 Relatividade Geral

Neste capítulo, realizamos uma revisão concisa das equações de campo da relatividade geral. Nosso objetivo é tornar explícitos os principais objetos geométricos e estabelecer as convenções apropriadas. Além disso, desenvolvemos a formulação tétrada da relatividade geral, que será posteriormente aplicada na descrição da equação de Dirac em espaços curvos. Também deduzimos o espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica, e o espaço-tempo da corda negra, que serão utilizados nas próximas etapas do trabalho. As principais referências utilizadas na construção do presente capítulo são: [32, 40, 41, 10, 14, 42, 43].

2.1 Equações de Campo da Relatividade Geral

O objetivo principal da Relatividade Geral é generalizar o princípio fundamental da relatividade restrita, que afirma que as leis físicas são invariantes sob transformações de coordenadas entre dois referenciais inerciais. Para deduzir as equações de movimento do campo gravitacional, baseadas em princípios físicos, estabelecemos os seguintes axiomas:

1. O espaço-tempo é dotado de uma métrica simétrica.
2. As trajetórias de objetos em queda livre seguem geodésicas nessa métrica.
3. Em referenciais locais em queda livre, as leis da física seguem a Relatividade Especial.

Para expressar matematicamente as consequências físicas dos axiomas enunciados, utilizamos o cálculo de tensores. Isso nos permite realizar a transformação de um referencial x^μ para outro x'^μ por meio de uma reparametrização do sistema de coordenadas

$$x'^\mu = x'^\mu(x). \quad (2.1)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, sob reparametrizações o campo escalar e os vetores contravariantes e covariantes se transformam da seguinte maneira

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad \partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu. \quad (2.2)$$

Em espaços curvos as operações envolvendo derivadas de vetores exigem a introdução do conceito de transporte paralelo, que nos permite mover um vetor ao longo de uma curva λ de modo que o vetor se mantenha constante. Tomando então a definição da derivada de um vetor ao longo de uma curva λ

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} = \lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} \frac{V^\mu(Q) - V^\mu(P)}{\delta\lambda}, \quad (2.3)$$

em que Q e P são pontos do espaço-tempo em $\lambda + \delta\lambda$ e λ respectivamente. O vetor $V^\mu(P)$ pode ser transportado paralelamente até o ponto Q com o auxílio da conexão afim Γ da seguinte forma

$$V^\mu(P \rightarrow Q) = V^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(P) V^\nu(P) dx^\sigma, \quad (2.4)$$

que nos permite estabelecer a derivada covariante

$$\nabla_\sigma V^\mu = \frac{V^\mu(Q) - V^\mu(P \rightarrow Q)}{\delta x^\sigma} = \partial_\sigma V^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\nu, \quad (2.5)$$

com o qual podemos definir a condição de transporte paralelo

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial \lambda} \nabla_\sigma V^\mu = 0. \quad (2.6)$$

No contexto da relatividade geral, podemos obter uma conexão única compatível com a métrica $g_{\mu\nu}$ assumindo que a conexão é livre de torção $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ e assumindo que a métrica respeita a condição de transporte paralelo $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$, essas duas condições possibilitam escrever a conexão da seguinte forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (2.7)$$

que é a dita conexão métrica, chamada de símbolo de Christoffel. Uma vez dada a conexão afim em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ podemos caracterizar completamente as quantidades geométricas do espaço-tempo. Em particular, o tensor de Riemann, que surge da não comutatividade das derivadas covariantes no espaço-tempo curvo

$$\nabla_\alpha \nabla_\nu V_\mu - \nabla_\nu \nabla_\alpha V_\mu = A_\beta R_{\mu\alpha\nu}^\beta, \quad (2.8)$$

que é dado explicitamente em termos da conexão por

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu - \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma - \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma, \quad (2.9)$$

a partir do qual podemos construir o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$ e o escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

Enunciados os objetos geométricos de interesse para a descrição da relatividade geral, temos o objetivo de obter a equação de Einstein, que descreve o comportamento do campo gravitacional, para tal partimos da ação de Einstein-Hilbert na presença de matéria¹

$$S = S_g + S_m = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^3x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \phi(x), \nabla_\mu \phi). \quad (2.10)$$

A equação de Einstein para o campo gravitacional pode ser obtida a partir da minimização do funcional ação com respeito à métrica $\delta S = 0$. Definindo então o tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}) \quad (2.11)$$

¹ Em que S_g e S_m são respectivamente a ação gravitacional e a ação de matéria.

podemos escrever a variação da ação da seguinte forma²

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \delta (\sqrt{-g}R) - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

e levando em conta a variação das seguintes componentes³

$$\delta R = g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho) - \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) = \nabla_\rho [\nabla_\mu (\delta g^{\rho\mu}) - g^{\rho\mu} g_{\nu\alpha} \nabla_\mu (\delta g^{\nu\alpha})] \quad (2.14)$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

A variação da ação gravitacional adicionada de um termo de matéria fica então

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Utilizando o princípio de extremização $\delta S = 0$ para variações arbitrária de $\delta g^{\mu\nu}$, obtemos a equação de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

Buscando originalmente soluções estáticas e homogêneas para as equações de campo da Relatividade Geral, Einstein introduziu na equação a constante cosmológica Λ . Nesse âmbito, o sinal da constante cosmológica pode ser positivo ou negativo, apresentando interessantes aplicações em ambos os casos [44]. A ação de Einstein-Hilbert na presença de matéria e constante cosmológica fica

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \phi(x), \nabla_\mu \phi), \quad (2.18)$$

seguindo o procedimento de minimização do funcional ação feito anteriormente de forma inteiramente análoga, podemos escrever a equação de campo de Einstein com constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

que estabelece uma conexão entre a geometria do espaço-tempo e a matéria. Em outras palavras, elas descrevem como a curvatura do espaço-tempo é influenciada pela presença de energia e momento.

2.2 Formulação Tétrada

A descrição do campo gravitacional na formulação métrica não permite a descrição de espiniores em geral [45]. Para contornar esse problema, consideramos a formulação tétrada,

² $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$.

³ Pelo teorema de Stokes $\int d^4x g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} = 0$

que consiste em definir em cada ponto X do espaço-tempo um sistema de coordenadas locais $\xi_X^{(a)}$ de modo que nesse sistema de coordenadas o intervalo assume a forma do espaço plano de Minkowski

$$ds^2 = \eta_{(a)(b)} d\xi_X^{(a)} d\xi_X^{(b)}, \quad (2.20)$$

com $\eta_{(a)(b)}$ sendo a métrica de Minkowski⁴ e $(a), (b) = 0, 1, 2, 3$ os índices que se referem ao espaço plano. Em um referencial não inercial arbitrário a métrica fica

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^{(a)}(x) e_{\nu}^{(b)}(x) \eta_{(a)(b)}, \quad (2.21)$$

em que $e_{\mu}^{(a)}$ é um conjunto de quatro tensores covariantes indexados por (a) , esse conjunto é comumente chamado de vierbein ou tétrada, e é dado explicitamente por

$$e_{\mu}^{(a)}(x) = \left(\frac{\partial \xi_X^{(a)}}{\partial x^{\mu}} \right)_{x=X}, \quad e_{\mu}^{\prime(a)} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\mu}} e_{\nu}^{(a)}. \quad (2.22)$$

Para um tensor contravariante $V^{\mu}(x)$ podemos usar a tétrada para fornecer as componentes do tensor no sistema de coordenadas localmente inerciais $\xi_X^{(a)}$

$$V^{(a)} = e_{\mu}^{(a)} A^{\mu}, \quad V_{(a)} = e_{(a)}^{\mu} A_{\mu} \quad (2.23)$$

em que as seguintes propriedades são válidas

$$e_{(a)}^{\mu} = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e_{\nu}^b, \quad e_{(a)}^{\mu} e_{\nu}^{(a)} = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad e_{(a)}^{\mu} e_{\mu}^{(b)} = \delta_a^b. \quad (2.24)$$

Podemos determinar as componentes tétradas do tensor de Riemann (2.9) para $V_{\mu} = e_{(a)\mu}$. Utilizando a notação de ponto virgula para a derivada covariante $\nabla_{\mu} V_{\nu} = V_{\nu;\mu}$, obtemos

$$e_{(a)\mu;\nu;\alpha} - e_{(a)\mu;\alpha;\nu} = e_{(a)}^{\beta} R_{\beta\mu\alpha\nu} = R_{(a)\mu\alpha\nu}, \quad (2.25)$$

de modo que as componentes no referencial inercial local do tensor de Riemann são dadas por

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = (e_{(a)\mu;\nu;\alpha} - e_{(a)\mu;\alpha;\nu}) e_{(b)}^{\mu} e_{(c)}^{\alpha} e_{(d)}^{\nu}. \quad (2.26)$$

Nos capítulos posteriores usaremos os resultados desta seção na construção da conexão de spin e na descrição da equação de Dirac em espaços curvos.

2.3 Universo de Bonnor-Melvin- Λ

Temos interesse em uma solução gerada por um campo magnético na direção z . Partindo então da ação de Einstein-Maxwell com constante cosmológica em unidade geométricas⁵

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.27)$$

⁴ O uso de parenteses é bastante conveniente afim de evitar confusão entre as quantidades do espaço plano e espaço curvo

⁵ $c = 1 = G$

em que $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de Faraday [46] e A_μ o potencial eletromagnético. Efetuando a variação da ação $\delta S = 0$, obtemos⁶

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_\mu^\rho F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right), \quad (2.29)$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.30)$$

Assumindo simetria cilíndrica para campo gravitacional, tomamos o seguinte elemento de linha em coordenadas cilíndricas [41, 14]

$$ds^2 = -e^{A(\rho)}dt^2 + d\rho^2 + e^{B(\rho)}dz^2 + e^{C(\rho)}d\varphi^2 \quad (2.31)$$

em que $t, z \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$. Expressamos as funções em termos de exponenciais para que a assinatura da métrica seja preservada [40]. Tomando um campo puramente magnético com linhas de campo paralelas ao eixo de simetria z

$$F_{\rho\varphi} = H(\rho), \quad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2H^2e^{-C} \equiv 2f^2 \quad (2.32)$$

em que f é um valor escalar que caracteriza o campo e independentemente do sistema de coordenadas, por esse motivo, exigimos que $f = \text{constante}$ [41, 14]. Podemos agora escrever o tensor de energia-momento correspondente

$$T_{tt} = \frac{1}{8\pi}e^{A-C}H^2, \quad T_{\rho\rho} = \frac{1}{8\pi}e^{-C}H^2, \quad T_{zz} = -\frac{1}{8\pi}e^{B-C}H^2, \quad T_{\varphi\varphi} = \frac{1}{8\pi}H^2. \quad (2.33)$$

Substituindo (2.33) em (2.28) e (2.29) e levando em conta as definições dadas em (2.32), podemos escrever as equações de campo da relatividade geral para o caso em questão

$$\begin{aligned} 2(B'' + C'') + (B')^2 + (C')^2 + B'C' + 4\Lambda + 4f^2 &= 0, \\ 2(A'' + C'') + (A')^2 + (C')^2 + A'C' + 4\Lambda + 4f^2 &= 0, \\ 2(A'' + B'') + (A')^2 + (B')^2 + A'B' + 4\Lambda - 4f^2 &= 0, \\ A'B' + A'C' + B'C' + 4\Lambda - 4f^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

em que $X' = \frac{\partial X}{\partial \rho}$. Buscando uma simplificação para esse sistema de equações diferenciais de segunda ordem acopladas, implementamos a equação de Maxwell (2.30)

$$\nabla_\alpha F^{\varphi\alpha} = \partial_\rho \left(\sqrt{-g} F^{\varphi\rho} \right) = \partial_\rho \left(e^{\frac{A+B-C}{2}} F_{\varphi\rho} \right) = -\partial_\rho \left(e^{\frac{A+B}{2}} f \right) = 0, \quad (2.35)$$

que implica $e^{\frac{A+B}{2}} f = \text{cte}$, e portanto devemos considerar $A + B = \text{constante}$. Essas condições simplificam substancialmente as equações (2.34)

$$C'' + \frac{1}{2}C'^2 + 4\Lambda = 0, \quad (2.36)$$

$$f^2 = \Lambda. \quad (2.37)$$

Resolvendo⁷ a equação para a componente $C(\rho)$ e substituindo no elemento de linha

⁶ A equação (2.30) em conjunto com a identidade de Bianchi $\nabla_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} = 0$ caracterizam as equações de Maxwell no espaço-tempo curvo.

⁷ Nesse processo redefinimos a componente angular do elemento de linha: $(2\Lambda)^{-\frac{1}{2}} \varphi \rightarrow \varphi$.

obtemos a solução de Bonnor-Melvin com constante cosmológica obtida em [14]

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + dz^2 + \sigma^2 \sin^2(\sqrt{2\Lambda}\rho) d\varphi^2, \quad (2.38)$$

em que σ é uma constante de integração. A partir da (2.32) determinamos o campo magnético

$$H(\rho) = \sqrt{\Lambda}\sigma \sin(\sqrt{2\Lambda}\rho). \quad (2.39)$$

Nos capítulos posteriores iremos investigar o comportamento de partículas e campos no espaço-tempo obtido nessa seção.

2.4 Buraco Negro Cilíndrico: Corda Negra

Buscamos uma solução das equações de campo da relatividade geral com constante cosmológica que represente um buraco negro estático com simetria cilíndrica⁸ [10]. Partindo então da equação de Einstein com constante cosmológica em unidade geométricas, na ausência de matéria $T_{\mu\nu} = 0$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.40)$$

assumindo agora uma constante cosmológica negativa $\Lambda = -\frac{3}{l^2}$, em que l é definido como sendo o raio de curvatura em AdS⁹. Respeitando a simetria escolhida, tomamos o seguinte elemento de linha com $f(r)$ a determinar

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\phi^2 + \frac{r^2}{l^2} dz^2, \quad (2.41)$$

em que $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$ e $-\infty < z < \infty$. Substituindo os coeficientes da métrica (2.41) em (2.40), podemos escrever as equações de campo de Einstein da seguinte forma

$$\frac{1}{r}f'(r) + \frac{1}{r^2}f(r) - \frac{3}{l^2} = 0, \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{2}f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{3}{l^2} = 0, \quad (2.43)$$

derivando (2.42) e substituindo em (2.43), obtemos

$$f'(r) + \frac{1}{r}f(r) - \frac{3}{l^2}r = 0 \quad (2.44)$$

cuja solução é dada por

$$f(r) = \frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} \quad (2.45)$$

⁸ Que é substancialmente diferente do Buraco negro de Schwarzschild que por sua vez possui simetria esférica.

⁹ anti-de Sitter ($\Lambda < 0$)

em que m é uma constante de integração. Portanto o elemento de linha (2.41) é dado por

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 + \frac{r^2}{l^2} dz^2. \quad (2.46)$$

Para adicionar momento angular ao espaço-tempo, realizamos a seguinte transformação de coordenadas [10]

$$t \rightarrow \lambda t - a\phi, \quad \phi \rightarrow \lambda\phi - \frac{a}{l^2} t \quad (2.47)$$

que resulta em

$$ds^2 = - \left[\left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} \right) \lambda^2 - \frac{a^2}{l^4} r^2 \right] dt^2 + \left[\lambda^2 r^2 - \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} \right) a^2 \right] d\phi^2 \\ + \left[\left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} \right) \lambda a - \frac{\lambda a}{l^2} r^2 \right] 2d\phi dt + \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} dz^2. \quad (2.48)$$

Neste capítulo, apresentamos de forma concisa os principais objetos geométricos de interesse. A equação de Einstein é introduzida e estabelece uma relação entre o comportamento do campo gravitacional e sua matéria subjacente. Em seguida, abordamos a formulação de tétradas, que nos permitirá trabalhar com espinores em espaços curvos nos próximos capítulos. Por fim, derivamos as duas soluções de campo da Relatividade Geral, as quais serão analisadas quanto aos efeitos quânticos.

3 Campos em Espaços Curvos

Neste capítulo derivamos as equações de onda da mecânica quântica relativística em um espaçotempo arbitrário. Escrevemos a equação de Klein-Gordon e a equação Dirac no espaço plano e em seguida efetuamos as devidas generalizações para um espaço-tempo arbitrário diante a introdução da derivada covariante para a equação de Klein-Gordon e da conexão de spin para a equação de Dirac. As principais referências utilizadas na construção do presente capítulo são: [32, 47, 48, 20, 49]

3.1 Equação de Klein-Gordon

Afim de efetuarmos uma descrição de partículas quânticas relativísticas, devemos considerar o quadrimomento $p^\mu \equiv (p^0, \vec{p})$, que satisfaz a seguinte equação

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2. \quad (3.1)$$

Para efetuarmos a quantização para uma partícula relativística tomamos a generalização do quadrivetor de momento para um operador diferencial

$$p^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (3.2)$$

que resulta na equação de Klein-Gordon

$$-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (3.3)$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski e Ψ o campo escalar, em unidades naturais¹

$$-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Psi + m^2 \Psi = 0. \quad (3.4)$$

A equação (3.4) pode ser derivada diretamente através do princípio variacional $\delta S = 0$ a partir da seguinte ação

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi + m^2 \Psi \right) \quad (3.5)$$

Vale mencionar que a equação de Klein-Gordon apresenta a possibilidade de energia negativa e também soluções com densidade de probabilidades negativas, que podem ser atribuídas à existência de antipartículas². Dessa forma, a equação de Klein-Gordon pode ser considerada uma equação de onda relativística de segunda ordem no espaço-tempo, e suas soluções representam partículas, os chamados bósons de spin zero³.

¹ $c = 1 = \hbar$.

² Para mais detalhes veja [47].

³ Exemplos interessantes são o bóson de Higgs e o Píon.

3.2 Equação de Klein-Gordon em Espaços Curvos

Dado que temos o objetivo de descrever partículas quânticas relativísticas de spin zero em espaços curvos, seguimos a prescrição para escrever a equação (3.3) na forma covariante. Generalizando a métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ para uma métrica arbitrária $g_{\mu\nu}$, as derivadas ordinárias ∂_μ para derivadas covariantes ∇_μ e o elemento de volume no espaço de Minkowski d^4x para o elemento de volume covariante $d^4x\sqrt{-g}$ a equação (3.4) se torna

$$-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Psi + m^2\Psi = 0, \quad (3.6)$$

levando em conta que a derivada covariante atuando em um escalar Ψ é dada por $\nabla_\nu\Psi = \partial_\nu\Psi$ e utilizando a identidade $\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}V^\mu)$ para $V^\mu = \partial^\mu\Psi$, obtemos

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\Psi) + m^2\Psi = 0. \quad (3.7)$$

Comparando (3.7) com (3.4) devemos notar que a presença da métrica $g^{\mu\nu}$ e do seu determinante $\sqrt{-g}$ tornam a partícula descrita pela equação de Klein-Gordon sensível aos efeitos do campo gravitacional. Podemos ainda introduzir mais um tipo de acoplamento na equação (3.7) proporcional ao escalar de curvatura

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\Psi) + (m^2 + \xi R)\Psi = 0 \quad (3.8)$$

em que ξ é uma constante de acoplamento, nesse caso a ação associada a (3.8) é dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} (g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi + m^2\Psi^2 + \xi R\Psi^2). \quad (3.9)$$

Uma vez dada a equação de Klein-Gordon em sua forma covariante, nos próximos capítulos iremos introduzir a quantização do campo escalar e aplicaremos esses formalismos no espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica e na corda negra.

3.3 Equação de Dirac

Com o intuito de tentar solucionar os problemas mencionadas anteriormente associados a equação de Klein-Gordon, Dirac efetuou uma fatoração da equação de Klein-Gordon obtendo uma equação diferencial para um novo objeto matemático Ψ que foi chamado de espinor. Partindo então da equação (3.1) e propondo

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = (\beta^\mu p_\mu + mc)(\gamma^\nu p_\nu - mc) \quad (3.10)$$

em que β^μ e γ^ν são tomados como matrizes 4×4 a serem determinadas, expandindo então o lado direito da equação obtemos

$$(\beta^\mu p_\mu + mc)(\gamma^\nu p_\nu - mc) = \beta^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu - (\beta^\mu - \gamma^\mu) p_\mu mc - m^2 c^2. \quad (3.11)$$

Para que a igualdade (3.10) seja satisfeita, devemos impor $\beta^\mu = \gamma^\mu$ e $p^\mu p_\mu = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu$. Levando em conta a propriedade de simetria do quadrimomento $p_\mu p_\nu = p_\nu p_\mu$,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = \underbrace{\frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{=0} p_\mu p_\nu + \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu \quad (3.12)$$

que implica na seguinte álgebra para as matrizes⁴ γ^μ

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2I\eta^{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

Vale mencionar que as matrizes gama γ^μ podem ser escritas em termos das matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

da seguinte forma

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Uma representação alternativa comum na literatura consiste em

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

nessa representação vale $\gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0$. Retornando a (3.10), generalizando o quadrivetor de momento para um operador diferencial $p_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu$ obtemos a equação de Dirac

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \Psi = 0, \quad (3.17)$$

cuja função de onda Ψ é o dito espinor de Dirac

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Assim a equação de Dirac pode ser vista com uma equação de onda para o espinor de Dirac envolvendo quatro equações acopladas cujas soluções descrevem um férmion de spin meio.

⁴ As ditas matrizes gama.

3.4 Equação de Dirac em Espaços Curvos

Nosso objetivo é descrever partículas quânticas relativísticas de spin meio em espaços curvos. Para alcançar isso, aplicaremos o formalismo da base tétrada discutido anteriormente para realizar o transporte paralelo em um sistema de coordenadas locais. Partimos então do transporte paralelo em um sistema de coordenadas arbitrário (3.19)

$$V^\mu(x+dx) = V^\mu(x) - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x) V^\nu(x) dx^\sigma, \quad (3.19)$$

e tomamos sua generalização para o sistema de coordenadas locais

$$V^{(a)}(x+dx) = V^{(a)}(x) - \omega_{(b)\nu}^{(a)}(x) V^{(b)} dx^\nu, \quad (3.20)$$

em que $\omega_{(b)\nu}^{(a)}$ é a conexão de spin cuja função é codificar os efeitos do espaço plano no espaço curvo e vice-versa. Para determinar a conexão de spin, tomamos a projeção do sistema local através da base tétrada $V^\mu(x) = e_{(a)}^\mu V^{(a)}(x)$ e transportamos $V^\mu(x)$ do ponto x para $x+dx$

$$V^\mu(x \rightarrow x+dx) = e_{(a)}^\mu(x+dx) V^{(a)}(x \rightarrow x+dx). \quad (3.21)$$

Tomando a expansão em até primeira ordem em dx na base tétrada

$$e_{(a)}^\mu(x+dx) = e_{(a)}^\mu(x) + \partial_\nu(e_{(a)}^\mu(x)) dx^\nu, \quad (3.22)$$

substituindo (3.20) em (3.21) e efetuando algumas manipulações, podemos escrever

$$V^\mu(x \rightarrow x+dx) = V^\mu(x) - \left(e_{(a)}^\mu(x) \omega_{\nu(b)}^{(a)}(x) - \partial_\nu e_{(a)}^\mu(x) \right) e_{(b)}^\sigma V^{(b)}(x) dx^\nu. \quad (3.23)$$

Comparando com (3.19), obtemos a conexão de spin em termos da base tétrada e do símbolo de Christoffel

$$\omega_{\nu(b)}^{(a)}(x) = e_{(a)}^\mu(x) e_{(b)}^\sigma(x) \Gamma_{\nu\sigma}^\mu + e_{(a)}^\mu(x) \partial_\nu e_{(a)}^\mu(x). \quad (3.24)$$

abaixando o índices com a métrica do espaço plano, podemos mostrar a seguinte propriedade da conexão de spin $\omega_{(a)(b)\nu} = -\omega_{(b)(a)\nu}$. Usando a conexão de spin, podemos obter a derivada covariante para os espinores

$$\nabla_\mu \Psi(x) = (\partial_\mu + \Omega_\mu(x)) \Psi(x) \quad (3.25)$$

em que Ω_μ é o coeficiente da conexão que é definida de modo analogo ao caso tensorial através do transporte paralelo para espinores

$$\Psi(x \rightarrow x+dx) = \Psi(x) - \Omega_\mu(x) \Psi(x) dx^\mu. \quad (3.26)$$

Para determinar Ω_μ podemos usar o fato de que $S(x) = \bar{\Psi}(x) \Psi(x)$ e $V^{(a)}(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^{(a)} \Psi(x)$ devem se transformar como um escalar e como um vetor respectivamente, em que $\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x) \gamma^{(0)}$. Efetuando o transporte paralelo para o termo escalar

$$S(x \rightarrow x+dx) = S(x) - \bar{\Psi}(x) \left(\Omega_\mu(x) + \gamma^{(0)} \Omega_\mu^\dagger(x) \gamma^{(0)} \right) \Psi(x) dx^\mu, \quad (3.27)$$

buscando uma transformação adequada para uma quantidade escalar, devemos impor seguinte condição para o coeficiente de conexão de spin

$$\gamma^{(0)}\Omega_{\mu}^{\dagger}(x)\gamma^{(0)} = -\Omega_{\mu}(x). \quad (3.28)$$

Por sua vez, efetuando o transporte paralelo para o termo vetorial

$$V^{(a)}(x \rightarrow x + dx) = V^{(a)}(x) - \bar{\Psi}(x) [\gamma^{(a)}, \Omega_{\mu}(x)] \Psi(x) dx^{\mu}, \quad (3.29)$$

para uma transformação vetorial adequada, devemos impor seguinte condição para o coeficiente de conexão de spin

$$[\gamma^{(a)}, \Omega_{\mu}(x)] = \omega_{\mu(b)}^{(a)} \gamma^{(b)} \quad (3.30)$$

analisando a igualdade (3.30) podemos considerar que $\Omega_{\mu}(x)$ deve ser dado como alguma combinação linear do produto de matrizes gama. Notando agora que

$$[\gamma^a, \sigma^{bc}] = 2i(\gamma^a \eta^{ba} - \gamma^b \eta^{ca}), \quad \sigma^{bc} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^b, \gamma^c], \quad (3.31)$$

podemos tomar a seguinte proposta

$$\Omega_{\mu} = c\omega_{\mu(b)(c)} \sigma^{(b)(c)} \quad (3.32)$$

e substituindo em (3.30) obtemos $c = \frac{1}{4i}$, portanto

$$\Omega_{\mu} = -\frac{i}{4}\omega_{\mu(a)(b)} \sigma^{(a)(b)} = \frac{1}{8}\omega_{\mu(a)(b)} [\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}]. \quad (3.33)$$

Reescrevendo as matrizes gama em um sistema de coordenadas arbitrário $\gamma^{\mu} = e_{(a)}^{\mu} \gamma^{(a)}$, podemos então escrever a equação de Dirac em espaços curvos

$$(i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu} - m)\Psi = 0, \quad (3.34)$$

e comparando com (3.17) podemos notar a influencia da espaço-tempo diante a presença do coeficiente da conexão de spin presente na equação. A ação associada à equação de Dirac no espaço-tempo curvo é dada por

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \bar{\Psi} [i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu} + m] \Psi. \quad (3.35)$$

Apresentamos de forma sucinta as equações de campo que descrevem bósons de spin zero e férmions de spin meio no espaço-tempo plano e em seguida efetuamos a respectivas generalizações para o espaço-tempo curvo, nos próximos capítulos iremos estudar ambas as equações nos espaços de interesse, especificamente o espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica e a corda negra.

4 Quantização dos Campos em Espaços Curvos

Neste capítulo formulamos de forma geral o procedimento de quantização de campos escalares em espaços curvos arbitrários e a criação de partículas como consequência da não unicidade do vácuo. Ilustramos em seguida essa discussão com o efeito Hawking para um buraco negro de Schwarzschild em (1+1) dimensões, utilizando dois métodos distintos, o primeiro sendo a quantização do campo e o segundo via tunelamento de partículas. Por fim tratamos do efeito Casimir no espaço-tempo de Minkowski em (1+1) dimensões e calculamos a energia de Casimir regularizada. Vale mencionar que não temos a ambição de fazer um tratado sobre os temas aqui expostos. Além de ser um assunto extenso e complexo, isso fugiria do objetivo da dissertação. Portanto, o tratamento aqui será feito de forma bastante sintética e breve, apresentando os principais métodos e objetos que serão utilizados posteriormente no trabalho. As principais referências utilizadas na construção do presente capítulo são:[32, 20, 50, 21, 51, 52, 53]

4.1 Quantização Canônica

A construção de uma teoria quântica de campos envolve uma lagrangiana¹, um procedimento de quantização, a caracterização dos estados quânticos e a interpretação física dos estados e observáveis. Vamos começar definindo a ação para um campo escalar na forma covariante. Em seguida, escreveremos a expressão associada ao tensor de energia-momento desse campo e procederemos com a quantização canônica. Por fim, exploraremos as transformações de Bogoliubov e suas consequências.

Em um espaço-tempo plano a invariância de Lorentz é crucial na construção de uma teoria quântica de campos, permitindo a identificação de um único estado de vácuo. No espaço-tempo curvo, sob as devidas adaptações a simetria de Lorentz não está presente, sendo substituída pela simetria por transformações gerais de coordenadas. Como veremos a não unicidade do vácuo contesta a interpretação física usual do conceito de partícula. Dado que estamos interessados na quantização do campo escalar real no capítulo 7 no qual estudamos o efeito Casimir, vamos considerá-lo como um modelo para esta discussão. De forma geral, tomamos a ação de um campo escalar no espaço-tempo curvo

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} \left(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi + m^2 \Psi^2 + \xi R \Psi^2 \right), \quad (4.1)$$

¹ Em contraste com descrições axiomáticas [54, 55]

cuja equação covariante associada é representada por

$$\left(-\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2 + \xi R\right) \Psi = 0, \quad (4.2)$$

em que R é o escalar de Ricci para o espaço-tempo de fundo e ξ é o parâmetro de acoplamento da curvatura. O tensor de energia-momento (2.11) para (4.1) tem a forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S}{\partial g^{\mu\nu}} = \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\rho \Psi \nabla^\rho \Psi - \frac{1}{2} m^2 g_{\mu\nu} \Psi^2 \\ & + \xi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \Psi^2 + \xi (g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho - \nabla_\mu \nabla_\nu) \Psi^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

que para o caso em que estamos interessados é dado pelo chamado acoplamento mínimo $\xi = 0$, que resulta em

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\rho \Psi \nabla^\rho \Psi - \frac{1}{2} m^2 g_{\mu\nu} \Psi^2. \quad (4.4)$$

O produto escalar entre duas soluções da equação de campo é generalizado como sendo [20]

$$(\Psi_1, \Psi_2) = i \int_\Sigma d\Sigma^\mu \sqrt{|g_\Sigma|} (\Psi_1(x) \partial_\mu \Psi_2^*(x) - (\partial_\mu \Psi_1(x)) \Psi_2^*(x)) \quad (4.5)$$

em que Σ é uma hipersuperfície espacial, $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$ com n^μ sendo o vetor unitário orientado para o futuro normal a Σ . Pode-se mostrar que o produto escalar é independente de Σ [32]. Para o caso em que² $g_{0k} = 0$, tomando a hiper-superfície com $t = \text{constante}$ tem-se $n^\mu = (n^0, 0, 0, 0)$, $g_{00}n^0 = 1$. Nesse caso especial, o produto escalar assume a forma

$$(\Psi_1, \Psi_2) = i \int_\Sigma d^4x \sqrt{|g|} g^{00} (\Psi_1 \partial_0 \Psi_2^* - \Psi_2^* \partial_0 \Psi_1). \quad (4.6)$$

No esquema de quantização canônica, de forma análoga ao espaço-tempo plano o primeiro passo consiste em construir um conjunto completo de modos $\{\Psi_i(x), \Psi_i^*(x)\}$, que são as soluções para a equação de campo (4.2) obedecendo às condições de ortonormalização:

$$(\Psi_i, \Psi_j) = \delta_{ij}, \quad (\Psi_i^*, \Psi_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (\Psi_i, \Psi_j^*) = 0, \quad (4.7)$$

em que índice i representa o conjunto de números quânticos que rotulam os modos e o símbolo δ_{ij} deve ser entendido como o delta de Kronecker para números quânticos discretos e como a função delta de Dirac para números quânticos contínuos.

De forma equivalente ao caso do espaço-tempo plano, a quantização é feita diante a expansão do campo quântico em modos diante os operadores de criação a_i e aniquilação a_i^\dagger

$$\Psi = \sum_i \left[a_i \Psi_i(x) + a_i^\dagger \Psi_i^*(x) \right]. \quad (4.8)$$

O índice i representa o conjunto de números quânticos que rotulam os modos, isto é, o símbolo δ_{ij} deve ser entendido como uma delta de Kronecker para números quânticos

² $k = 1, 2, 3$.

discretos e como a função delta de Dirac para os contínuos³. As seguintes relações de comutação são validas

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0, \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0. \quad (4.9)$$

A construção posterior do espaço de estados de quânticos é a mesma descrita para o espaço de Minkowski, no entanto no espaço-tempo curvo, em geral, a escolha dos modos Ψ_i não é única. Como consequência, não existe uma noção única do estado de vácuo e a noção de “partícula” torna-se ambígua, essa não unicidade é uma característica essencial da teoria quântica de campos espaços curvos com consequências físicas, por exemplo, o fenômeno da criação de partículas oriundo de campos gravitacionais.

4.2 Transformação de Bogoliubov

Nessa seção iremos utilizar as transformações de Bogoliubov buscando entender as implicações da não unicidade do vácuo em espaços curvos, para tal, iremos calcular o valor esperado do número de partículas para os estados de vácuo [32]. Além dos modos usuais

$$\{\Psi_i(x), \Psi_i^*(x)\}, \quad (4.10)$$

consideramos um segundo conjunto ortonormal completo de modos

$$\{\bar{\Psi}_j(x), \bar{\Psi}_j^*(x)\}, \quad (4.11)$$

que nos permite efetuar a seguinte expansão

$$\Psi = \sum_j [\bar{a}_j \bar{\Psi}_j(x) + \bar{a}_j^\dagger \bar{\Psi}_j^*(x)], \quad (4.12)$$

tal que um novo estado de vácuo é definido por $\bar{a}_j |\bar{0}\rangle = 0$ e um novo espaço de estados quânticos pode ser construído pela atuação do operador de criação \bar{a}_j^\dagger no estado de vácuo.

Podemos relacionar as bases (4.10) e (4.11) com respeito a uma expansão em termos dos coeficientes $\alpha_{ji} = (\bar{\Psi}_j, \Psi_i)$ e $\beta_{ji} = -(\bar{\Psi}_j, \Psi_i^*)$

$$\bar{\Psi}_j = \sum_i (\alpha_{ji} \Psi_i + \beta_{ji} \Psi_i^*). \quad (4.13)$$

De maneira similar podemos relacionar as bases (4.11) e (4.10) com respeito a uma expansão em termos dos coeficientes $\bar{\alpha}_{ij} = (\Psi_i, \bar{\Psi}_j)$ e $\bar{\beta}_{ij} = -(\Psi_i, \bar{\Psi}_j^*)$

$$\Psi_i = \sum_j (\bar{\alpha}_{ij} \bar{\Psi}_j + \bar{\beta}_{ij} \bar{\Psi}_j^*), \quad (4.14)$$

³ Naturalmente para números quânticos contínuos a soma sobre os modos deve ser encarada como uma integral adequada.

notando que

$$\left(\Psi_i, \bar{\Psi}_j\right) = -\left(\bar{\Psi}_j^*, \Psi_i^*\right) = \left(\bar{\Psi}_j, \Psi_i\right)^*, \quad \left(\Psi_i, \bar{\Psi}_j^*\right) = -\left(\bar{\Psi}_j, \Psi_i^*\right), \quad (4.15)$$

obtemos as relações entre os coeficientes em modos distintos

$$\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ji}^*, \quad \bar{\beta}_{ij} = -\beta_{ji}, \quad (4.16)$$

de modo que podemos reescrever (4.14) da seguinte forma

$$\Psi_i = \sum_j \left(\alpha_{ji}^* \bar{\Psi}_j - \beta_{ji} \bar{\Psi}_j^* \right). \quad (4.17)$$

Inserindo (4.13) nas relações de ortonormalização $\left(\bar{\Psi}_j, \bar{\Psi}_l\right) = \delta_{jl}$ e $\left(\bar{\Psi}_j, \bar{\Psi}_l^*\right) = 0$, obtemos respectivamente

$$\sum_i \left(\alpha_{ji} \alpha_{li}^* - \beta_{ji} \beta_{li}^* \right) = \delta_{jl}, \quad \sum_i \left(\alpha_{ji} \beta_{li} - \beta_{ji} \alpha_{li} \right) = 0. \quad (4.18)$$

De forma análoga, agora podemos considerar as relações entre os operadores de aniquilação e criação nas duas bases (4.10) e (4.11). Expandido os dois conjuntos de operadores de criação e aniquilação em relação um ao outro

$$a_l = \left(\Psi, \Psi_l\right) = \sum_j \left(\left[\bar{a}_j \bar{\Psi}_j + \bar{a}_j^\dagger \bar{\Psi}_j^* \right], \Psi_j \right) = \sum_j \left(\alpha_{jl} \bar{a}_j + \beta_{jl}^* \bar{a}_j^\dagger \right), \quad (4.19)$$

$$\bar{a}_l = \left(\Psi, \bar{\Psi}_l\right) = \sum_j \left(\left[a_j \Psi_j + a_j^\dagger \Psi_j^* \right], \bar{\Psi}_j \right) = \sum_j \left(\alpha_{lj}^* a_j - \beta_{lj}^* a_j^\dagger \right), \quad (4.20)$$

temos as transformações de Bogoliubov, representadas pelas relações (4.19) e (4.20), que descrevem as relações entre dois conjuntos de operadores de criação e aniquilação. Nesse contexto, os coeficientes α_{ji} e β_{ji} são denominados coeficientes de Bogoliubov.

A partir de dois conjuntos de modos, temos dois estados de vácuo diferentes: $|0\rangle$ e $|\bar{0}\rangle$, que definem conjuntos de espaços de estados quântico distintos. Para entender a relação entre esses conjuntos, analisamos a ação do operador de aniquilação no novo estado de vácuo $|\bar{0}\rangle$.

$$a_i |\bar{0}\rangle = \sum_j \left(\alpha_{ji} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger \right) |\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* |\bar{1}_j\rangle \neq 0 \quad (4.21)$$

isso implica que se $\beta_{ji} \neq 0$ então o estado $|\bar{0}\rangle$ não é um estado de vácuo para os modos (4.10). Para o valor esperado do número de partículas obtemos

$$\langle \bar{0} | N_i | \bar{0} \rangle = \langle \bar{0} | a_i^\dagger a_i | \bar{0} \rangle = \sum_{j,l} \beta_{li} \beta_{ji}^* \langle \bar{1}_l | \bar{1}_j \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2 \quad (4.22)$$

que evidencia que o vácuo dos modos $\bar{\Psi}_j$ contém $\sum_j |\beta_{ji}|^2$ partículas no modo Ψ_i .

4.3 Radiação Hawking

Estamos interessados em ilustrar as consequências da implementação dos campos quânticos no espaço-tempo curvo, como discutido na seção anterior 4.1. Para isso, consideramos um exemplo canônico: a temperatura de Hawking. Em outras palavras, diante da implementação dos efeitos quânticos na gravitação, podemos demonstrar que os buracos negros emitem radiação cujo espectro possui uma temperatura bem definida, a qual é inversamente proporcional à massa do buraco negro [20]. Por simplicidade tomamos então a solução de Schwarzschild em (1+1) dimensões⁴ [50]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (4.23)$$

em que $2M = r_g$, com M sendo a massa do buraco negro⁵. Introduzindo as coordenadas de tartaruga $r^* = r - r_g + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)$ e $dr^* = \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}$, e em seguida as coordenadas de tartaruga no cone de luz $\tilde{u} = t - r^*$ e $\tilde{v} = t + r^*$, podemos reescrever a métrica (4.23) da seguinte forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(\tilde{u}, \tilde{v})}\right) d\tilde{u}d\tilde{v}, \quad (4.24)$$

que é definida apenas na região fora do horizonte do buraco negro. Por outro lado, podemos considerar as coordenadas do cone de luz de Kruskal-Szekeres,

$$u = -2r_g \exp\left(-\frac{\tilde{u}}{2r_g}\right), \quad v = 2r_g \exp\left(\frac{\tilde{v}}{2r_g}\right) \quad (4.25)$$

de modo que a métrica (4.23) assume a seguinte forma

$$ds^2 = \frac{r_g}{r(u, v)} \exp\left(1 - \frac{r(u, v)}{r_g}\right) dudv, \quad (4.26)$$

que por sua vez é definida no espaço todo. Afim de efetuarmos a quantização, tomando a ação de um campo escalar minimamente acoplado $\xi = 0$ não massivo $m = 0$ em (1+1) dimensões para a ação (4.1)

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Psi \partial_\beta \Psi, \quad (4.27)$$

e levando em conta ambas as descrições (4.24) e (4.25), para a ação (4.27), obtemos as equações de movimento $\partial_u \partial_v \Psi = 0$ e $\partial_{\tilde{u}} \partial_{\tilde{v}} \Psi = 0$. Para os nossos objetivos é suficiente tomar as soluções na forma $\Psi \propto e^{-i\omega u}$ e $\Psi \propto e^{-i\Omega \tilde{u}}$ em que ω e Ω são os modos de frequência positiva. Efetuando então a quantização via expansão em modos

$$\Psi = \int_0^\infty \frac{d\omega}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[e^{-i\omega u} \hat{a}_\omega^- + e^{i\omega u} \hat{a}_\omega^+ \right] = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \left[e^{-i\Omega \tilde{u}} \hat{b}_\Omega^- + e^{i\Omega \tilde{u}} \hat{b}_\Omega^+ \right], \quad (4.28)$$

⁴ (1 dimensão temporal + 1 dimensão espacial).

⁵ $G = \hbar = c = k = 1$.

em que os operadores de criação e aniquilação satisfazem as regras de comutação

$$[a_\omega, a_\omega^\dagger] = \delta(\omega - \omega'), \quad [b_\Omega, b_\Omega^\dagger] = \delta(\Omega - \Omega'), \quad (4.29)$$

e definimos respectivamente o vácuo de Kruskal $|0_K\rangle$ e o vácuo de Boulware $|0_B\rangle$, como sendo

$$a_\omega |0_K\rangle = 0, \quad b_\Omega |0_B\rangle = 0. \quad (4.30)$$

Relacionando os operadores $\{a_\omega, a_\omega^\dagger\}$ e $\{b_\Omega, b_\Omega^\dagger\}$, diante a transformação de Bogoliubov (4.19)

$$b_\Omega = \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega} a_\omega - \beta_{\Omega\omega} a_\omega^\dagger), \quad b_\Omega^\dagger = \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega}^* a_\omega^\dagger - \beta_{\Omega\omega}^* a_\omega), \quad (4.31)$$

e substituindo a transformação Bogoliubov na regra de comutação (4.29), obtemos a condição de normalização para os coeficientes

$$\delta(\Omega - \Omega') = \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega} \alpha_{\Omega'\omega}^* - \beta_{\Omega\omega} \beta_{\Omega'\omega}^*). \quad (4.32)$$

Substituindo (4.31) na expansão que define o campo em ambos os referenciais (4.28), e utilizando (4.32), após alguma álgebra encontramos que

$$|\alpha_{\Omega\omega}|^2 = e^{\frac{2\pi\Omega}{\kappa}} |\beta_{\Omega\omega}|^2. \quad (4.33)$$

Associando a nomenclatura de a-partículas e b-partículas ao conjunto de operadores a_ω e b_Ω , podemos agora calcular o número de b-partículas em a-vácuo tomamos o valor esperado do operador número de b-partículas $N_\Omega = b_\Omega^\dagger b_\Omega$

$$\langle N_\Omega \rangle = \langle 0_K | b_\Omega^\dagger b_\Omega | 0_K \rangle = \langle 0_K | \int_0^\infty d\omega |\beta_{\Omega\omega'}|^2 a_\omega a_\omega^\dagger | 0_K \rangle = \int_0^\infty d\omega |\beta_{\Omega\omega}|^2. \quad (4.34)$$

Utilizando a regra de normalização (4.32) para $\Omega = \Omega'$, e a relação entre os coeficientes da transformação de Bogolyubov (4.33), podemos escrever⁶

$$\int_0^\infty d\omega |\beta_{\Omega\omega}|^2 = [e^{\frac{2\pi\Omega}{\kappa}} - 1]^{-1} \delta(0) \quad (4.35)$$

portanto, o número de ocupação pode ser escrito da seguinte forma

$$\langle \hat{N}_\Omega \rangle = [e^{\frac{2\pi\Omega}{\kappa}} - 1]^{-1} \delta(0), \quad (4.36)$$

que pode ser identificando como uma distribuição de Bose-Einstein, e assim podemos atribuir um banho térmico ao observador de Boulware, que é da dita temperatura Hawking [50]

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (4.37)$$

Portanto o observador de Boulware é acoplado às flutuações quânticas do vácuo e essas flutuações o excitam como se o observador estivesse em um banho térmico com temperatura inversamente proporcional a massa do buraco negro.

⁶ $\kappa = \frac{1}{4M}$.

4.4 Tunelamento de Partículas

Embora a quantização dos campos quânticos em espaços curvos tenha sido o método inicialmente considerado na obtenção da temperatura Hawking [56, 57], diversos métodos foram desenvolvidos para calcular as propriedades termodinâmicas de buracos negros. Dentre eles podemos considerar o método de tunelamento quântico [52]. O método consiste em obter soluções das equações que descrevem as partículas quânticas, como por exemplo, as equações de Klein-Gordon e a equação Dirac, utilizando a aproximação WKB, e calcular a probabilidade de tunelamento dessas partículas através do horizonte de eventos do buraco negro em questão. Esse método apresenta inúmeras vantagens em comparação ao método anterior, como por exemplo a simplicidade nos cálculos.

Dado que iremos utilizar o método de tunelamento de partículas para calcular a temperatura Hawking da corda negra no capítulo 8, temos o objetivo de efetuar sua ilustração, com esse propósito estabelecemos também um paralelo com a seção anterior 4.3 e tomamos um campo escalar Ψ descrito no espaço-tempo de um buraco negro de Schwarzschild em (1+1) dimensões [58]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}. \quad (4.38)$$

Utilizando a equação de Klein-Gordon na forma covariante (3.6)

$$-\partial_t^2 \Psi + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \partial_r^2 \Psi + \partial_r \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \partial_r \Psi - \frac{m^2}{\hbar^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \Psi = 0 \quad (4.39)$$

e assumindo a seguinte proposta de solução⁷

$$\Psi(t, r) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} I(t, r)\right), \quad I(t, r) = -Et + W(r), \quad (4.40)$$

em que E é a energia da partícula escalar. Substituindo a proposta (4.40) em (4.39), e isolando $W(r)$

$$W_{\pm}(r) = \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) m^2}, \quad (4.41)$$

resolvendo a integral via teorema de resíduos para o polo simples $r = r_g$ temos [59]

$$W_{\pm}(r) = \pm 2\pi i E r_g. \quad (4.42)$$

A probabilidade de tunelamento de uma partícula de dentro para fora do horizonte com energia E é dada por $\Gamma = \exp[-4\text{Im}W_+]$ [60], que resulta em

$$\Gamma = \exp(-4\pi r_g E), \quad (4.43)$$

⁷ Que é aproximação utilizada no método WKB [52].

e comparando com $\Gamma = \exp[-\beta E]$, em que $\beta = (T_H^{-1})$ identificamos a temperatura Hawking

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (4.44)$$

Podemos observar que a temperatura de um buraco negro depende exclusivamente dos parâmetros da métrica. Embora essa temperatura coincida com a obtida anteriormente, é importante ressaltar que os conceitos e técnicas envolvidos são substancialmente diferentes. No primeiro tratamento, a temperatura de Hawking é uma consequência da não unidade do vácuo em espaços curvos, enquanto no segundo tratamento, a temperatura pode ser obtida através do fenômeno de tunelamento de partículas quânticas através do horizonte de eventos dos buracos negros.

4.5 Efeito Casimir

O efeito Casimir é uma previsão da teoria quântica de campos que foi experimentalmente verificada. Pode ser compreendido como um fenômeno de sensibilidade do vácuo quântico em relação às condições de contorno. Fisicamente, as flutuações do vácuo entre duas placas metálicas paralelas e infinitas descarregadas resultam em uma força atrativa entre elas, que é independente do material que as constitui [61].

Uma descrição realista do efeito Casimir requer a quantização do campo eletromagnético com condições de contorno que simulem as placas condutoras, porém o estudo de campos escalares se mostra uma ferramenta bastante interessante para entender esse tipo de fenômeno, pois requer um tratamento mais simples ainda assim mantém as principais características do efeito.

Dado que estudamos esse efeito com respeito a métrica (7.1), isto é, estudamos o efeitos das condições de contorno e do espaço-tempo de fundo na flutuação do vácuo, temos o interesse de ilustrar o efeito Casimir no espaço-tempo plano. Tomamos então um campo escalar Ψ sem massa em (1+1) dimensões entre duas placas em $x = 0$ e $x = L$ que satisfaz as seguinte condições de contorno

$$\Psi(t, x)|_{x=0} = \Psi(t, x)|_{x=L} = 0, \quad (4.45)$$

considerando a equação $\partial_t^2 \Psi - \partial_x^2 \Psi = 0$, e impondo as condições de contorno (4.45), obtemos

$$\Psi_n(t, x) = \left(A_n e^{-i\omega_n t} + B_n e^{i\omega_n t} \right) \sin(\omega_n x), \quad \omega_n \equiv \frac{|n| \pi}{L} \quad (4.46)$$

efetuando a quantização (4.8)

$$\Psi(t, x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_n x)}{\sqrt{\omega_n}} \left[a_n e^{-i\omega_n t} + a_n^\dagger e^{i\omega_n t} \right] \quad (4.47)$$

tal que

$$\left[a_n, a_{n'}^\dagger \right] = \delta_{nn'}. \quad (4.48)$$

Afim de determinar o valor esperado da energia com respeito ao estado fundamental, devemos considerar o hamiltoniano do sistema que é dado por

$$T_{00} = H = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.49)$$

em que T_{00} é a contrapartida quântica de (4.4) e Ψ é o campo quântico (4.47). Calculando o valor esperado [50], podemos escrever

$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{L} \langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \frac{\pi}{2L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (4.50)$$

Devemos notar que a princípio a densidade de energia de Casimir é divergente, pois se trata de uma soma infinita em n , a forma usual de contornar esse problema se dá diante um procedimento de regularização. Especificamente identificamos da função zeta (A.1)

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \quad (4.51)$$

e efetuando a continuação analítica⁸, que nos permite obter um valor finito para $x = -1$ [50]

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \quad (4.52)$$

e portanto um valor finito para a densidade e energia de Casimir

$$\epsilon_0 = -\frac{\pi}{24L^2}. \quad (4.53)$$

Desenvolvemos, de forma geral, o procedimento de quantização canônica para um campo escalar em um espaço curvo arbitrário. Demonstramos o fenômeno de produção de partículas devido à não unicidade do vácuo e abordamos a temperatura de Hawking como exemplo em duas abordagens distintas. Calculamos também a densidade de energia de Casimir. Pretendemos utilizar a discussão realizada aqui no estudo do efeito Casimir no Espaço de Bonnor-Melvin com constante cosmológica, bem como na obtenção da temperatura de Hawking via tunelamento de partículas para a corda negra.

⁸ Chamamos esse procedimento de regularização via função zeta de Riemann.

5 Equação de Klein-Gordon em Bonnor-Melvin- Λ

Neste capítulo, analisamos a influência do campo gravitacional produzido pela solução de Bonnor-Melvin com constante cosmológica sobre campos escalares massivos, ou seja, o efeito do campo magnético e da constante cosmológica. Obtemos uma solução exata da equação de Klein-Gordon e, em seguida, tratamos do caso assintótico da solução supondo a constante cosmológica suficientemente pequena. Por outro lado encontramos uma solução para o caso em que a constante cosmológica seja suficientemente pequena e, sob a condição de contorno da parede dura, obtemos o espectro de energia da partícula escalar. Além disso, com relação ao caso da constante cosmológica ser suficientemente pequena, introduzimos um potencial escalar do tipo Coulomb e obtemos a solução adequada e o espectro de energia para a partícula escalar. Em seguida tratamos do oscilador de Klein-Gordon sujeito a um potencial escalar do tipo Coulomb. Resolvemos a equação relativística no regime em que a constante cosmológica é suficientemente pequena e obtivemos o espectro de energia.

5.1 Equação de Klein-Gordon: Solução Exata

Sistemas físicos com campos magnéticos intensos tem despertado bastante interesse da comunidade científica nos últimos anos, por esse motivo vamos nos dedicar ao estudo de bósons no espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica [14], que é uma solução exata das equações de Einstein-Maxwell com simetria cilíndrica dada por

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \frac{H^2(\rho)}{\Lambda}d\varphi^2 + dz^2, \quad (5.1)$$

em que $H(\rho) = \sqrt{\Lambda}\sigma \sin(\sqrt{2\Lambda}\rho)$ é campo magnético, Λ é a constante cosmológica positiva e σ uma constante de integração. O tensor métrico pode ser escrito da seguinte forma

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \sin^2(\sqrt{2\Lambda}\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma^2 \sin^2(\sqrt{2\Lambda}\rho)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

e o nosso objetivo é investigar o comportamento dos campos escalares nesta métrica. Para alcançar esse objetivo, é necessário resolver a equação de Klein-Gordon na sua forma covariante, que pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left[g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \Psi \right] - m^2 \Psi = 0. \quad (5.3)$$

Substituindo os coeficientes da métrica, o determinante $g \equiv \det(g_{\mu\nu}) = -\sigma^2 \sin^2(\sqrt{2\Lambda}\rho)$ e em seguida efetuando algumas manipulações, a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica assume a seguinte forma:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{2\Lambda}}{\tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma^2 \sin^2(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - m^2 \right) \Psi = 0. \quad (5.4)$$

Tomando uma proposta de solução que poderia ser obtida a através da separação variáveis da equação de Klein-Gordon

$$\Psi(t, \rho, \varphi, z) = e^{i\epsilon t} e^{il\varphi} e^{ip_z z} R(\rho), \quad (5.5)$$

em que os números quânticos ϵ , l e p_z estão associados, respectivamente, à energia, momento angular em torno de φ e momento na direção z . É importante observar que o número quântico l está associado a um setor periódico da solução e, portanto, assume os seguintes valores: $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Definindo $\zeta^2 \equiv \epsilon^2 - m^2 - p_z^2$, obtemos a equação radial

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\sqrt{2\Lambda}}{\tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \frac{d}{d\rho} - \frac{l^2}{\sigma^2 \sin^2(\sqrt{2\Lambda}\rho)} + \zeta^2 \right) R(\rho) = 0. \quad (5.6)$$

Para resolver a equação radial, fazemos a seguinte mudança de variável, $u = \cos(\sqrt{2\Lambda}\rho)$, que resulta em

$$(1 - u^2) \frac{d^2 R(u)}{du^2} - 2u \frac{dR(u)}{du} + \left(\frac{\zeta^2}{2\Lambda} - \frac{1}{(1 - u^2)} \frac{l^2}{2\Lambda\sigma^2} \right) R(u) = 0. \quad (5.7)$$

Identificando $\mu \equiv \frac{l}{\sqrt{2\Lambda}\sigma}$ e $\nu \equiv \left(\frac{\zeta^2}{2\Lambda} + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$, a equação toma a forma da equação associada de Legendre para μ e ν

$$(1 - u^2) \frac{d^2 R(u)}{du^2} - 2u \frac{dR(u)}{du} + \left(\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - u^2} \right) R(u) = 0, \quad (5.8)$$

cujas soluções para $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ e $u \in (-1, 1)$ são as ditas funções de Ferrer de primeiro e segundo tipo, que são respectivamente denotadas por: $P_\nu^\mu(u)$, $Q_\nu^\mu(u)$. No caso em que os parâmetros são reais, ambas as soluções são dadas em termos da função hipergeométrica

$$\mathbf{F}(a, b; c; z) = \frac{\mathbf{F}(a, b; c; z)}{\Gamma(c)}, \quad (5.9)$$

para mais detalhes veja o apêndice A. Dado que $P_\nu^\mu(u)$ é bem definida para quaisquer μ, ν , a solução fica

$$R(u) = P_\nu^\mu(u) = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\mu}{2}} \mathbf{F}\left(\nu + 1, -\nu + 1; 1 - \mu; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u \right), \quad (5.10)$$

recuperando os parâmetros, podemos escrever a solução para a componente radial

$$R(u) = P_{\frac{l}{\sqrt{2\Lambda}\sigma}}^{\frac{l}{\sqrt{2\Lambda}\sigma}} \left(u \right) = \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{l}{2\sqrt{2\Lambda}\sigma}} \mathbf{F}\left(a, b; c; \frac{1}{2}(1-u) \right); \quad (5.11)$$

$$a \equiv \left(\frac{\zeta^2}{2\Lambda} + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}; \quad b \equiv - \left(\frac{\zeta^2}{2\Lambda} + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}; \quad c \equiv 1 - \frac{|l|}{\sqrt{2\Lambda}\sigma}. \quad (5.12)$$

Podemos ainda investigar o comportamento assintótico da solução radial, levando em conta que Λ seja suficientemente pequena, que implica em ν suficientemente grande tal que nesse regime vale $\nu = \frac{\zeta}{\sqrt{2\Lambda}} - \frac{1}{2}$. Tomando então a expressão assintótica (A.17) para a solução radial, nesse caso podemos escrever

$$P^{\frac{|l|}{\sqrt{2\Lambda}\sigma} - \frac{1}{2}} \left(\cos(\sqrt{2\Lambda}\rho) \right) \sim \left(\frac{\sqrt{2\Lambda}\rho}{\sin(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{|l|}{\sqrt{2\Lambda}\sigma}}(\zeta\rho) \sim J_{\frac{|l|}{\sqrt{2\Lambda}\sigma}}(\zeta\rho). \quad (5.13)$$

Portanto, obtemos uma solução exata na equação de Klein-Gordon. Além disso, conseguimos identificar o caso assintótico para uma constante cosmológica pequena. Demonstramos que a solução radial, nesse limite, é expressa por uma função de Bessel do primeiro tipo.

5.2 Níveis de Landau

Podemos assumir que a constante cosmológica é muito pequena [62, 63], de fato em unidades naturais¹, temos que $\Lambda = \rho_{\text{vac}} \left(\frac{8\pi}{m_p^2} \right) = 5.06 \times 10^{-84} \text{GeV}^2$, em que $\rho_{\text{vac}} \approx 3 \times 10^{-47} \text{GeV}^4$ é a densidade de energia do vácuo e $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ é a massa de Planck. Sob esse dado, podemos considerar em $\frac{H^2(\rho)}{\Lambda}$ uma expansão em que somente o primeiro termo é significativo. Nessa aproximação a métrica (5.1) assume uma forma cônica²:

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + 2\Lambda\sigma^2\rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (5.14)$$

Procedendo de forma inteiramente análoga ao feito para a obtenção da equação (5.6), obtemos a equação radial nessa aproximação

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(\zeta^2 - \frac{l^2}{2\Lambda\sigma^2\rho^2} \right) R(\rho) = 0. \quad (5.15)$$

Tomando a seguinte mudança de variável $\bar{\rho} = \zeta\rho$, a equação radial (5.15) assume a forma da equação de Bessel (A.3)

$$\frac{d^2 R}{d\bar{\rho}^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{dR}{d\bar{\rho}} + \left(1 - \frac{l^2}{2\Lambda\sigma^2\bar{\rho}^2} \right) R = 0, \quad (5.16)$$

cuja solução geral é expressa em termos das funções de Bessel de primeiro tipo J_λ e segundo tipo Y_λ , em que $\lambda = \frac{|l|}{\sigma\sqrt{2\Lambda}}$, de modo que a componente radial pode ser escrita como:

$$R(\rho) = c_1 J_{\frac{|l|}{\sigma\sqrt{2\Lambda}}}(\zeta\rho) + c_2 Y_{\frac{|l|}{\sigma\sqrt{2\Lambda}}}(\zeta\rho), \quad (5.17)$$

¹ $c = 1 = \hbar$

² Um importante exemplo de métrica cônica é a métrica da corda cósmica, que pode ser obtida através de considerações sobre a quebra espontânea do potencial de Higgs e possui implicações bastante interessantes em cenários cosmológicos e astrofísicos, para detalhes veja [64, 65, 66, 67].

a função Y_λ diverge na origem e portanto, tomamos $c_2 = 0$, o que mostra consistência entre a aproximação feita e o tratamento assintótico da solução exata.

Afim de determinar o espectro de energia, podemos impor a condição de contorno de parede dura³ que consiste em assumir que a função de onda se anula em algum $\rho = \rho_\omega$ que é um raio arbitrário e distante da origem [68]. Utilizando então expansão assintótica (A.6), ficamos com

$$J_{\frac{|l|}{\sqrt{2\Lambda\sigma}}}(\zeta\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta\rho}} \cos\left(\zeta\rho - \frac{l}{\sqrt{2\Lambda\sigma}}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.18)$$

Impondo a condição de parede dura na expansão assintótica

$$\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta\rho_\omega}} \cos\left(\zeta\rho_\omega - \frac{l}{\sqrt{2\Lambda\sigma}}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad (5.19)$$

e observando que a função cosseno é periódica obtemos a seguinte expressão

$$\zeta\rho_\omega - \frac{|l|}{\sqrt{2\Lambda\sigma}}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad (5.20)$$

em que n é um numero inteiro. Lembrando da definição $\zeta^2 = \epsilon^2 - m^2 - p_z^2$, obtemos o espectro de energia

$$\epsilon_\pm = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{3}{4} + n\right)^2 + \left(\frac{3}{4} + n\right) \frac{|l|}{\sqrt{2\Lambda\sigma}} + \frac{l^2}{8\Lambda\sigma^2}\right] \frac{\pi^2}{\rho_\omega^2} + m^2 + p_z^2}. \quad (5.21)$$

Buscando uma aplicação, consideramos como um exemplo o espectro de energia associado a massa de um pión [63]. Em relação à amplitude do campo magnético, levamos em conta valores comparáveis aos valores estimados de campos magnéticos resultantes da colisão de íons pesados altas energias $H_0 = \sqrt{\Lambda}\sigma \sim 10^{19}\text{G}$ [69, 70].

³ “hard-wall condition”

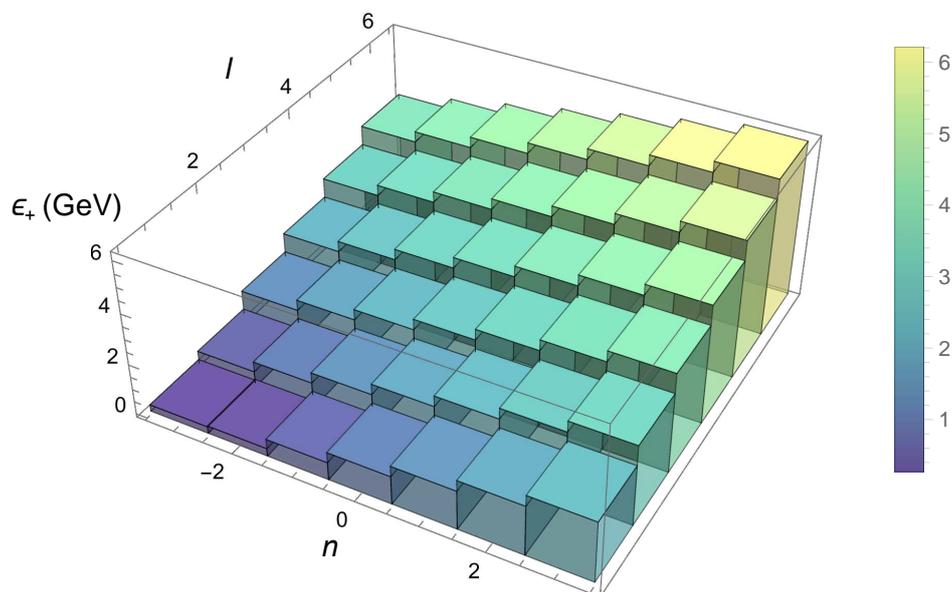


Figura 1 – Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de -3 até 3 e l variando de 1 até 6 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $\rho_\omega^{-1} \sim 0.134$ GeV.

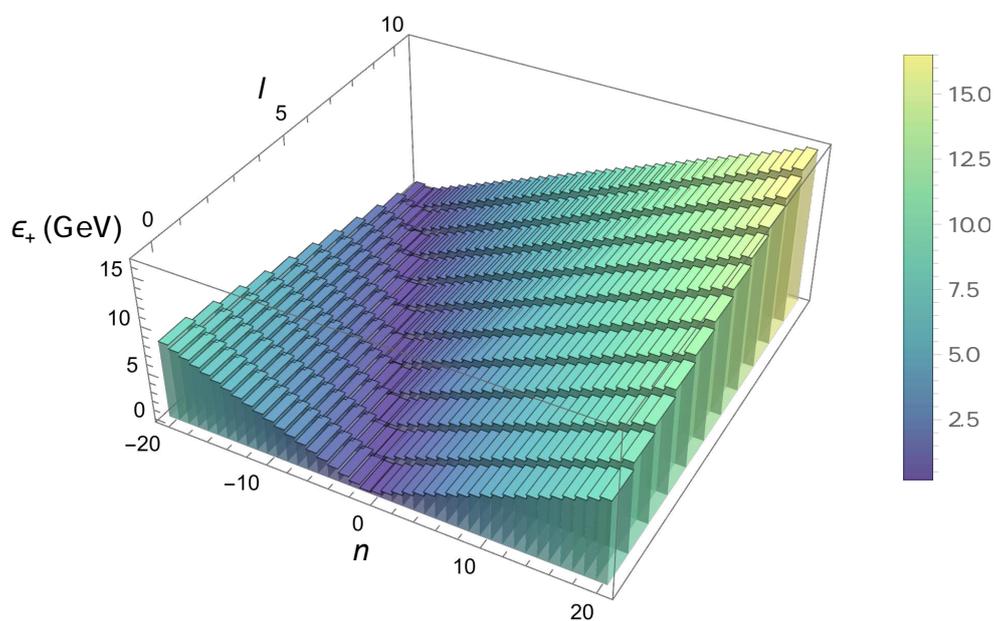


Figura 2 – Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de -20 até 20 e l variando de 0 até 20 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $\rho_\omega^{-1} \sim 0.134$ GeV.

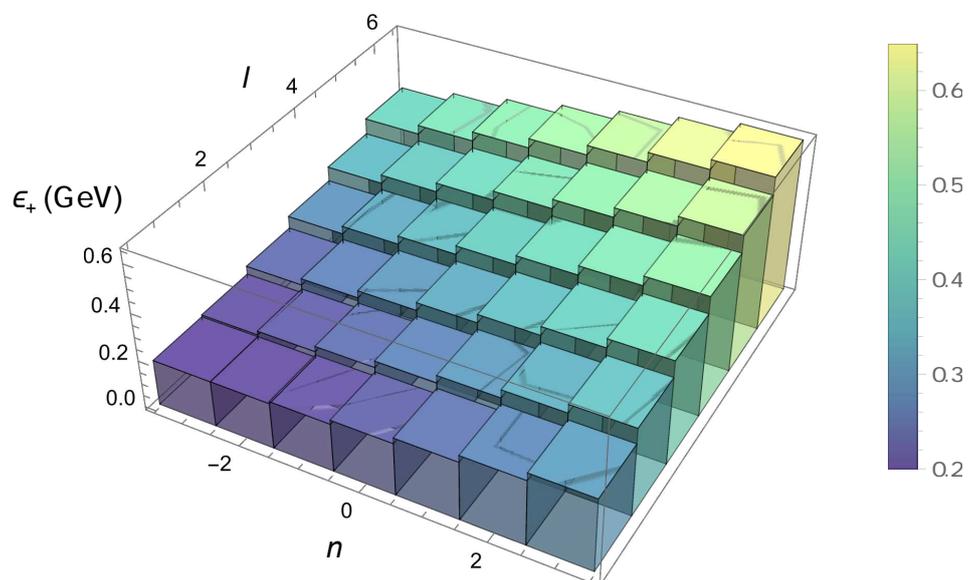


Figura 3 – Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de -3 até 3 e l variando de 1 até 6 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0134$ GeV.

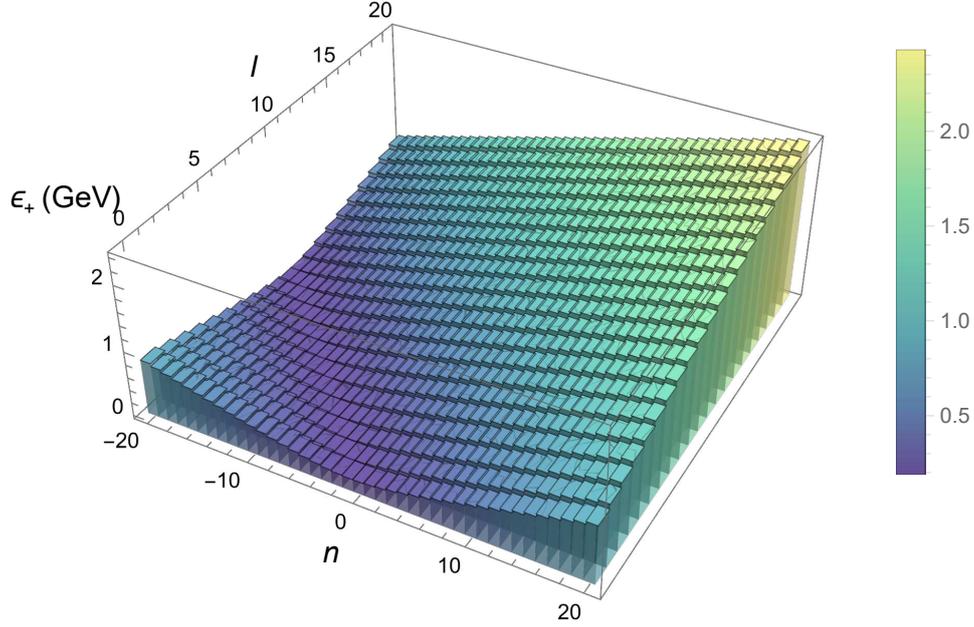


Figura 4 – Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de -20 até 20 e l variando de 0 até 20 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0134$ GeV.

Nas figuras acima plotamos o espectro de energia variando os números quânticos n e l e fixando o momento na direção z , a massa, a intensidade do campo e a componente radial. Esses resultados indicam que campos magnéticos dessa ordem possuem efeitos apreciáveis no espectro de energia de partículas.

5.3 Potencial Escalar Tipo-Coulomb

Nessa seção temos o objetivo de introduzir um potencial escalar, especificamente um potencial do tipo-Coulomb na equação de Klein-Gordon. Tomando a prescrição de incorporar um potencial escalar na equação de Klein-Gordon através da modificação do termo de massa⁴, isto é $m \rightarrow m + V(\rho)$, de forma geral, podemos escrever:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \Psi \right] - (m + V(\rho))^2 \Psi = 0. \quad (5.22)$$

⁴ Essa prescrição é compatível com introduzir o acoplamento com potenciais eletromagnéticos via acoplamento mínimo [47].

Consideramos o caso de um potencial do tipo-Coulomb $V(\rho) \equiv \frac{\eta}{\rho}$, com η sendo uma constante de acoplamento real, que implica na seguinte modificação⁵ da equação radial para a métrica de Bonnor-Melvin com constante cosmológica (5.1)

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\sqrt{2\Lambda}}{\tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \left[\xi^2 + \frac{l^2}{\sigma^2 \sin^2(\sqrt{2\Lambda}\rho)} + \frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{2m\eta}{\rho} \right] R(\rho) = 0. \quad (5.23)$$

Levando em conta a aproximação para constante cosmológica suficientemente pequena (5.14) ficamos com

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \left(\xi^2 + \frac{2m\eta}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{l^2}{2\Lambda\sigma^2} + \eta^2 \right) \right) R(\rho) = 0, \quad (5.24)$$

e devemos notar ainda que para $\eta = 0$, recuperamos (5.15). Assumindo $R(\rho) = \rho^{-\frac{1}{2}} \Phi(\rho)$, a equação radial pode ser escrita como uma equação de Schrödinger efetiva

$$\frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} - [V_{\text{eff}} + \xi^2] \Phi = 0, \quad (5.25)$$

em que o potencial efetivo é dado por

$$V_{\text{eff}} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{l^2}{\sigma^2 2\Lambda} + \eta^2 \right) \frac{1}{\rho^2} + \frac{2m\eta}{\rho}, \quad (5.26)$$

que determina a existência de estados ligados para η negativo, como podemos bem ver nos gráficos abaixo.

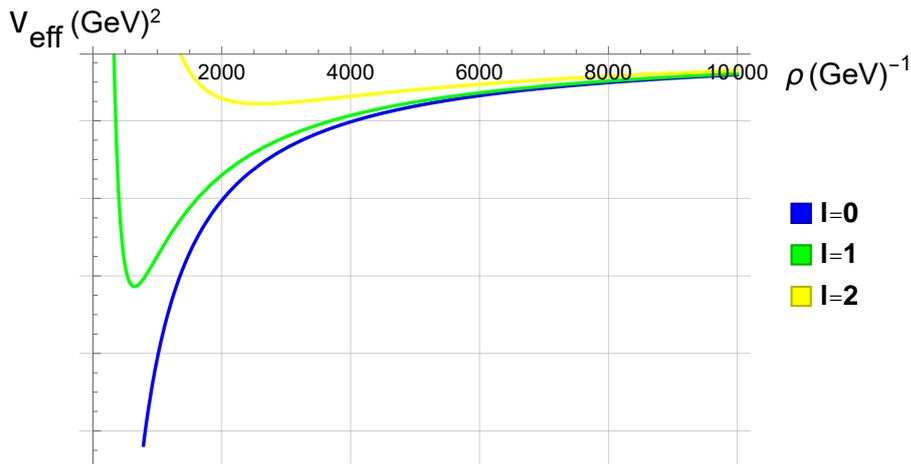


Figura 5 – Gráfico do potencial efetivo V_{eff} com respeito a ρ , para $l = 0, 1, 2$ e $\eta = -0.3$. Em unidades naturais, $m = 0.135$ e $H_0 = 0.195 \text{ GeV}^2$.

⁵ $\xi^2 = -\epsilon^2 + m^2 + p_z^2$.

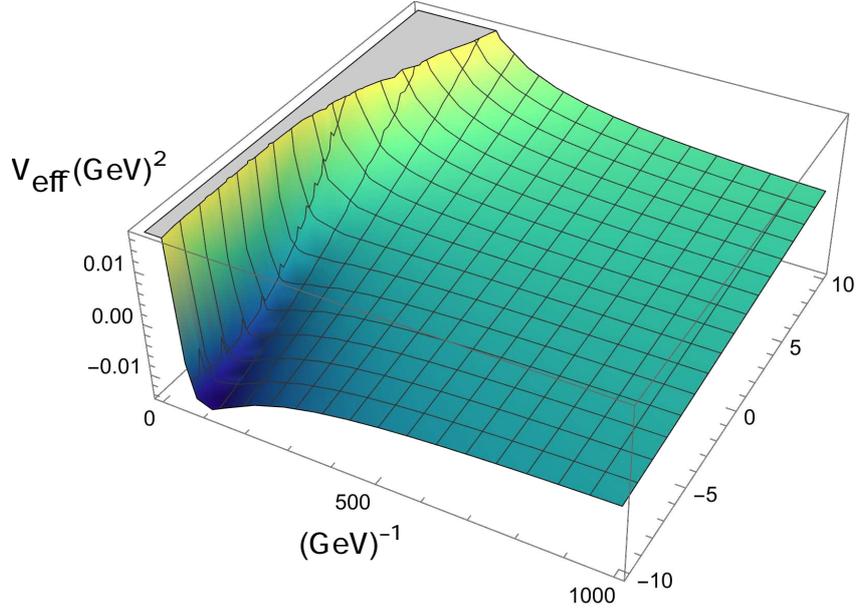


Figura 6 – Gráfico do potencial efetivo V_{eff} com respeito a ρ e η , para $l = 1$. Em unidades naturais, $m = 0.135$ e $H_0 = 0.195 \text{ GeV}^2$.

Analisando o comportamento da equação efetiva de Schrödinger em relação à variável radial na origem e no infinito [47, 71], tomamos

$$\Phi(\rho) = \rho \sqrt{\left(\frac{l^2}{\sigma^2 2\Lambda} + \eta^2\right)} e^{-2\xi\rho} F(\rho), \quad (5.27)$$

substituindo (5.27) em (5.24) e tomando a mudança de variável: $\bar{\rho} = 2i\zeta\rho$ na equação radial obtemos

$$\bar{\rho} \frac{d^2 F}{d\bar{\rho}^2} + \left[\left(1 + \sqrt{4\eta^2 + \frac{2l^2}{\Lambda\sigma^2}} \right) - \bar{\rho} \right] \frac{dF}{d\bar{\rho}} - \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{4\eta^2 + \frac{2l^2}{\Lambda\sigma^2}} \right) + \frac{m\eta}{\xi} \right] F = 0. \quad (5.28)$$

Definindo os parâmetros

$$a \equiv \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{4\eta^2 + \frac{2l^2}{\Lambda\sigma^2}} \right) + \frac{m\eta}{\xi} \right], \quad b \equiv \left(1 + \sqrt{4\eta^2 + \frac{2l^2}{\Lambda\sigma^2}} \right), \quad (5.29)$$

temos a equação de Kummer (A.8)

$$\bar{\rho} \frac{d^2 F}{d\bar{\rho}^2} + (b - \bar{\rho}) \frac{dF}{d\bar{\rho}} - aF = 0, \quad (5.30)$$

de modo que a solução geral é dada por (veja o apêndice A.3)

$$F(\rho) = c_1 M(a, b, 2\xi\rho) + c_2 U(a, b, 2\xi\rho), \quad (5.31)$$

e dado que $U(a, b, 2\xi\rho)$ diverge na origem, tomamos $c_2 = 0$. Com o objetivo de obter uma solução bem definida para (5.27) e também obter o espectro de energia de um bóson sujeito a um potencial escalar do tipo-Coulomb na métrica em questão, podemos impor em (5.31) o caso de soluções polinomiais [31], $a = -n$ em que $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Substituindo o parâmetro (5.29) na condição, podemos escrever o espectro de energia

$$\epsilon_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{m^2\eta^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\eta^2 + \frac{l^2}{2\Lambda\sigma^2}}\right)^2} + m^2 + p_z^2}. \quad (5.32)$$

Como feito anteriormente, a modo de exemplo, plotamos o espectro de energia para a massa de um pión [63], com intensidades de campos magnéticos comparáveis aos campos magnéticos resultantes das colisões de íons pesados $H_0 = \sqrt{\Lambda}\sigma \sim 10^{19}\text{G}$ [69, 70].

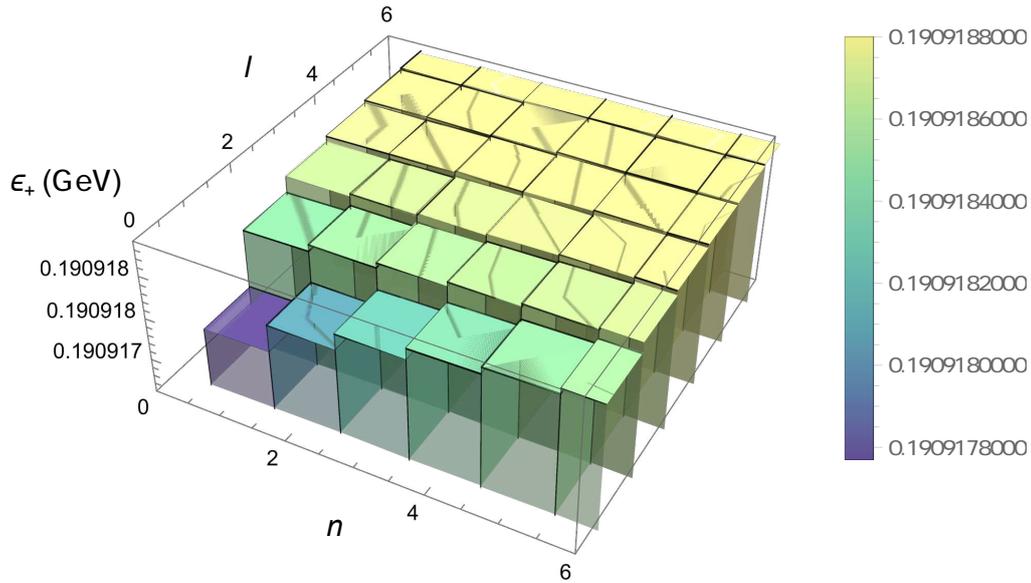


Figura 7 – Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 1 até 6 e l variando de 1 até 6. Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV, $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$.

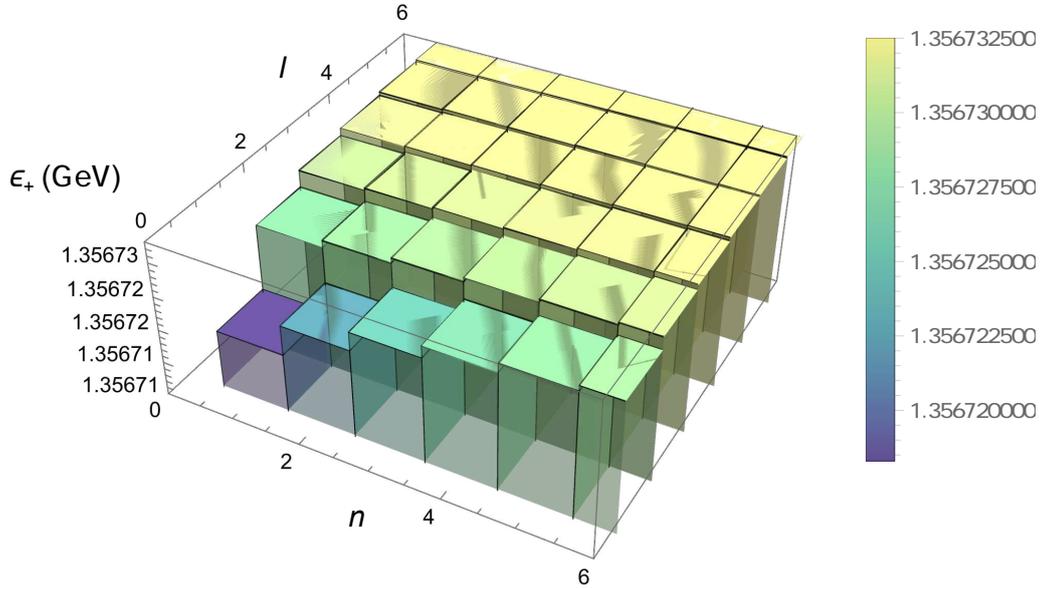


Figura 8 – Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 1 até 6 e l variando de 1 até 6. Em unidades naturais, $p_z \sim 0.134$ GeV, $m \sim 1.34$ GeV, $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$.

Plotamos o espectro de energia nas figuras acima de modo que efetuamos a variação dos números quânticos n e l e fixamos o momento na direção z , a massa, a intensidade do campo, o acoplamento com o potencial e a componente radial. Esses resultados indicam que campos magnéticos dessa ordem possuem efeitos pouco apreciáveis no espectro de energia de partículas.

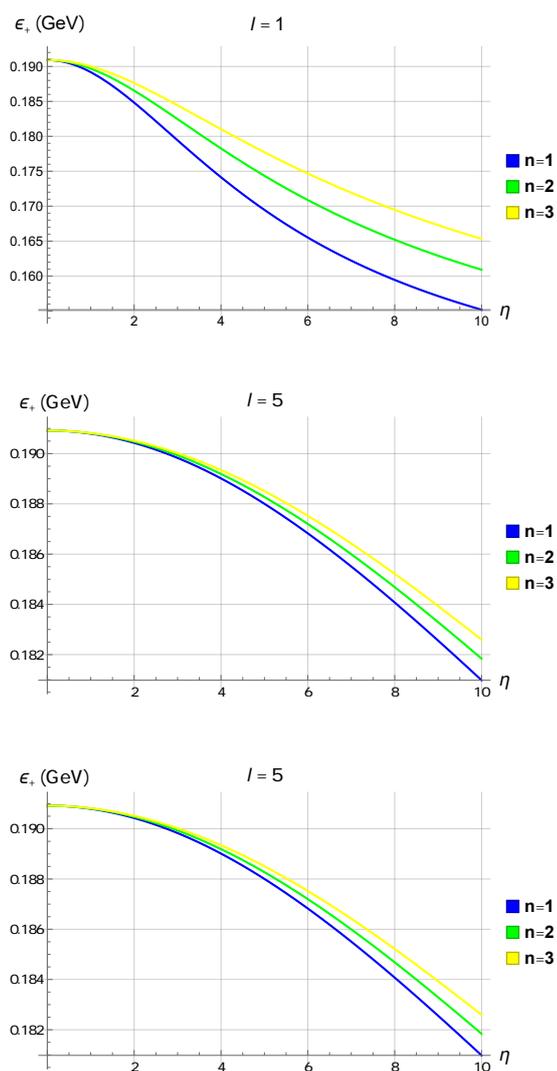


Figura 9 – Gráfico do espectro de energia em GeV. Em unidades naturais $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $H_0 \sim 0.195\text{GeV}^2$.

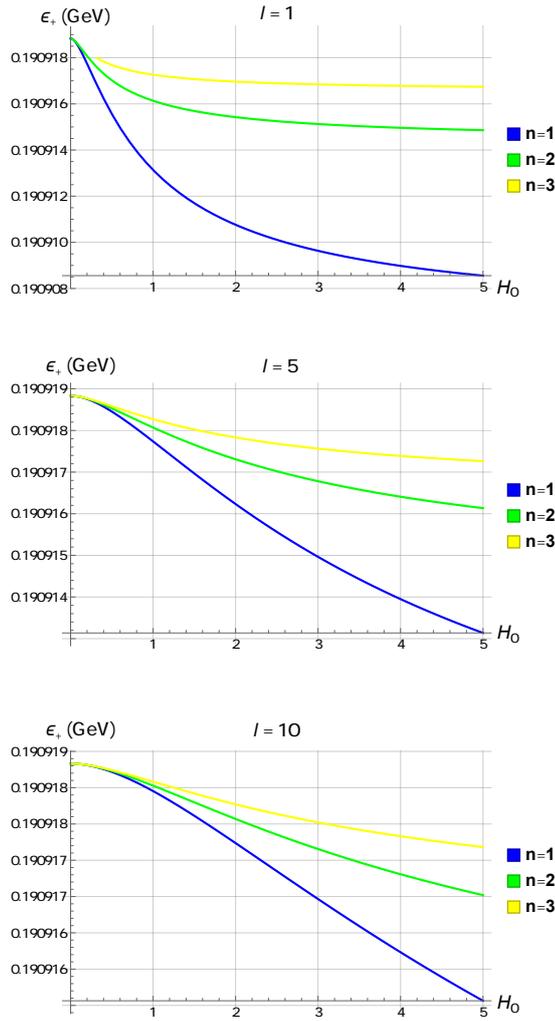


Figura 10 – Gráfico do espectro de energia em GeV. Em unidades naturais $p_z \sim m \sim 0.134$ GeV e $\eta = \frac{0.303}{4\pi}$.

Além disso, plotamos o espectro de energia em termos do parâmetro de acoplamento η e em termo da intensidade de campo magnético H_0 , fixando a massa, o momento na direção z e $l = 1, 5, 10$ para $n = 1, 2, 3$. Ambos os plots indicam a existência de estados ligados.

5.4 Oscilador de Klein-Gordon com Potencial Escalar

Consideremos a métrica (5.14), temos agora o objetivo de estudar o comportamento de campos escalares, em específico o dito oscilador de Klein-Gordon com potencial escalar do tipo-Coulomb [72]. Para alcançar esse objetivo, partimos da equação de Klein-Gordon em espaços curvos introduzindo o acoplamento mínimo [73, 74, 75]

$$p_\mu \rightarrow (p_\mu + im\Omega X_\mu), \quad (5.33)$$

em que Ω é a frequência de oscilação e $X_\mu = (0, \rho, 0, 0)$. Introduzindo o potencial escalar [76, 30, 77] $m \rightarrow m + V$, ficamos com

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + m\Omega X_\mu) (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\partial_\mu - m\Omega X_\nu) \Psi) - (m + V)^2 \Psi = 0, \quad (5.34)$$

e substituindo os coeficientes da métrica em questão

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(\frac{\sqrt{2\Lambda}}{\tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} + m\Omega\rho \right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma^2 \sin^2(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left(m\Omega + (m + V)^2 + m^2\Omega^2\rho^2 + \frac{\sqrt{2\Lambda}m\Omega\rho}{\tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \right) \right] \Psi = 0. \quad (5.35)$$

Levando em conta a simetria axial do sistema, podemos considerar a seguinte proposta de solução

$$\Psi(t, \rho, \varphi, z) = e^{i\epsilon t} e^{il\varphi} e^{ip_z z} R(\rho), \quad (5.36)$$

que resulta na equação radial associada ao oscilador de Klein-Gordon com potencial escalar no espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \left(\frac{\sqrt{2\Lambda}}{\tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} + m\Omega\rho \right) \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(\epsilon^2 - p_z^2 - (m + V)^2 - m\Omega - \frac{l^2}{\sigma^2 \sin^2(\sqrt{2\Lambda}\rho)} - m^2\Omega^2\rho^2 - \frac{\sqrt{2\Lambda}m\Omega\rho}{\tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \right) R(\rho) = 0. \quad (5.37)$$

Tomando um potencial escalar do tipo-Coulomb $V = \frac{\eta}{\rho}$ e definindo $\zeta^2 \equiv \epsilon^2 - p_z^2 - m^2$, a equação radial fica

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \left(\frac{\sqrt{2\Lambda}}{\tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} + m\Omega\rho \right) \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(\zeta^2 - m\Omega - \frac{l^2}{\sigma^2 \sin^2(\sqrt{2\Lambda}\rho)} - \frac{2m\eta}{\rho} - \frac{\eta^2}{\rho^2} - m^2\Omega^2\rho^2 - \frac{\sqrt{2\Lambda}m\Omega\rho}{\tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \right) R(\rho) = 0. \quad (5.38)$$

Analisando a equação podemos notar que uma mudança de variável do tipo $u = \cos(\sqrt{2\Lambda}\rho)$ não é capaz de simplificar a equação. Buscando então uma solução para a equação radial, vamos tomar a aproximação para Λ pequena na próxima seção. Tomando a aproximação em que a constante cosmológica é suficientemente pequena, a equação radial pode ser escrita como

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} + m\Omega\rho \right) \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left((\zeta^2 - 2m\Omega) - m^2\Omega^2\rho^2 - \left[\frac{l^2}{2\Lambda\sigma^2} + \eta^2 \right] \frac{1}{\rho^2} - \frac{2m\eta}{\rho} \right) R(\rho) = 0, \quad (5.39)$$

e para obter a solução de (5.39), primeiro tomamos uma transformação na coordenada radial $s = \rho^2$, que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R(s)}{ds^2} + \left(\frac{1}{s} + \frac{m\Omega}{2} \right) \frac{dR(s)}{ds} \\ + \left(\frac{(\zeta^2 - 2m\Omega)}{4s} - \frac{m^2\Omega^2}{4} + \frac{m\eta}{2s^{\frac{3}{2}}} - \left(\frac{l^2}{2\Lambda\sigma^2} + \eta^2 \right) \frac{1}{4s^2} \right) R(s) = 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

As autofunções normalizáveis podem ser obtidas diante a seguinte proposta de solução

$$R(s) = s^{\frac{1}{2}} \sqrt{\eta^2 + \frac{l^2}{2\Lambda\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}m\Omega s} G(s) \quad (5.41)$$

que resulta em

$$\frac{d^2 G(s)}{ds^2} + \left(-a + \frac{b}{s} \right) \frac{dG(s)}{ds} + \left(\frac{c}{s} + \frac{d}{s^{\frac{3}{2}}} \right) G(s) = 0 \quad (5.42)$$

em que definimos

$$a \equiv \frac{\Omega m}{2}, \quad b \equiv \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2\Lambda\eta^2\sigma^2 + l^2}{\Lambda\sigma^2}} + 1, \quad (5.43)$$

$$c \equiv \left[-\frac{\Omega m}{4} \sqrt{\eta^2 + \frac{l^2}{2\Lambda\sigma^2}} + \frac{\zeta^2}{4} \right], \quad d \equiv \frac{\eta m}{2}. \quad (5.44)$$

Retornando à mudança de variável $s = \rho^2$ e em seguida tomando uma nova transformação para a variável radial $\bar{\rho} = -\sqrt{a}\rho$ obtemos a equação de Heun Biconfluente (A.18)

$$\frac{d^2 G}{d\bar{\rho}^2} + \left(\frac{1 + \alpha}{\bar{\rho}} - \beta - 2\bar{\rho} \right) \frac{dG}{d\bar{\rho}} + \left\{ (\gamma - \alpha - 2) - \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha)\beta] \frac{1}{\bar{\rho}} \right\} G = 0, \quad (5.45)$$

cujos parâmetros são dados por,

$$\alpha = 2b - 2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{2ab + 4c}{a}, \quad \delta = \frac{8d}{\sqrt{a}}. \quad (5.46)$$

Escrevemos então explicitamente a equação

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{\rho}^2} + \left(\frac{2b - 1}{\bar{\rho}} - 2\bar{\rho} \right) \frac{\partial G}{\partial \bar{\rho}} + \left(\frac{4c}{a} - \frac{8d}{\sqrt{a}2\bar{\rho}} \right) G = 0, \quad (5.47)$$

que por sua vez, possui a seguinte solução geral

$$G(\rho) = c_1 \text{HeunB}(\alpha, 0, \gamma, \delta, -\sqrt{a}\rho) + c_2 \rho^{-2b+2} \text{HeunB}(-\alpha, 0, \gamma, \delta, -\sqrt{a}\rho), \quad (5.48)$$

em que c_1 e c_2 são constante arbitrarías. Diante a divergência apresentada na origem do segundo termo, tomamos $c_2 = 0$. Buscando uma solução bem definida e também com objetivo de determinamos o espectro de energia, tomamos a condição de solução

polinomial a função de Heun bicofluente (A.20), dada por $\gamma - \alpha - 2 = 2n$, com n sendo um inteiro positivo, que nos permite obter o espectro de energia

$$\epsilon_{\pm} = \pm \sqrt{\Omega m \left(n + \sqrt{\eta^2 + \frac{l^2}{2\Lambda\sigma^2}} \right) + m^2 + p_z^2}. \quad (5.49)$$

Tomamos o exemplo para a massa de um pión [63] e levamos em conta campos magnéticos da ordem da colisão de íons $H_0 = \sqrt{\Lambda}\sigma \sim 10^{19}\text{G}$ [69, 70], para obter resultados numéricos.

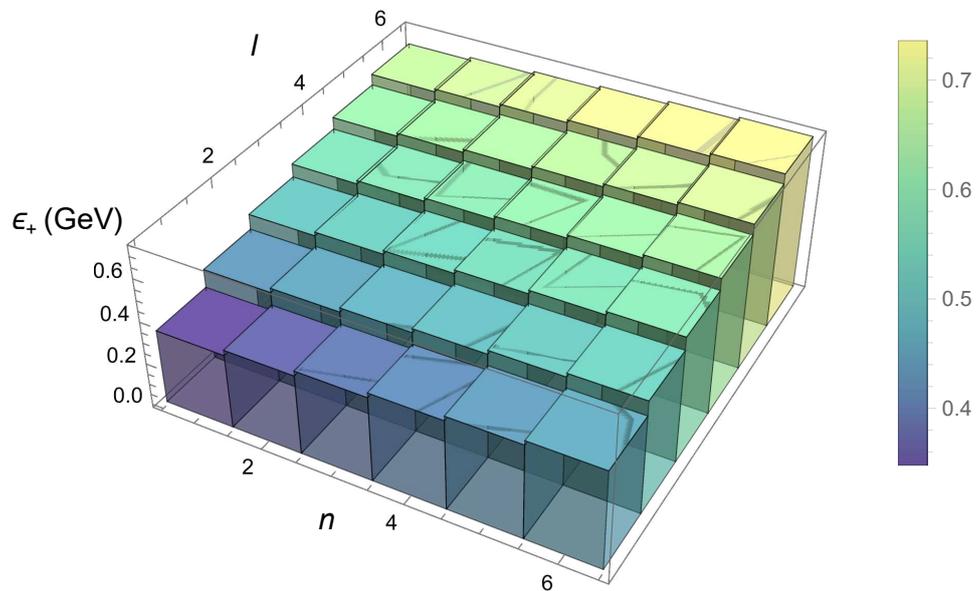


Figura 11 – Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 1 até 6 e l variando de 1 até 6. Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim \Omega \sim 0.134 \text{ GeV}$, $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$.

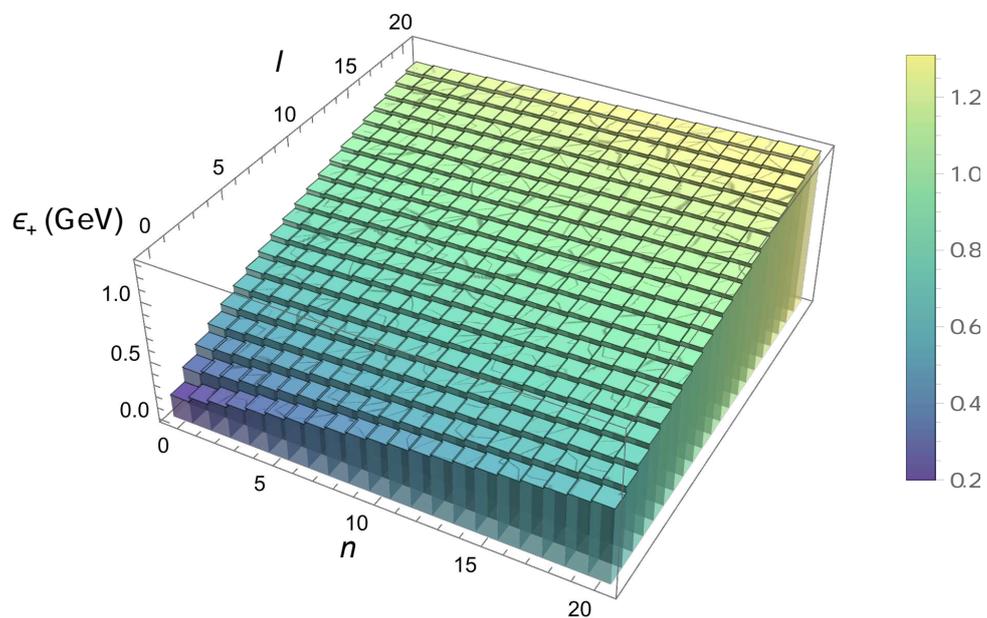


Figura 12 – Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 0 até 20 e l variando de 0 até 20. Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim \Omega \sim 0.134$ GeV, $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$.

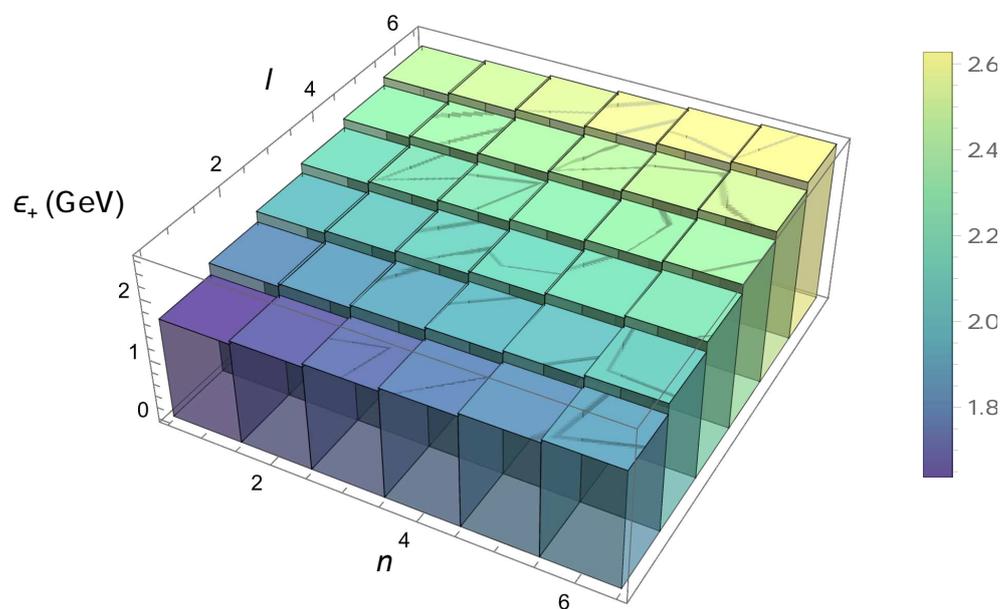


Figura 13 – Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 1 até 6 e l variando de 1 até 6. Em unidades naturais, $p_z \sim 0.134$ GeV, $m \sim 1.34$ GeV, $\Omega \sim 0.134$ GeV e $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$.

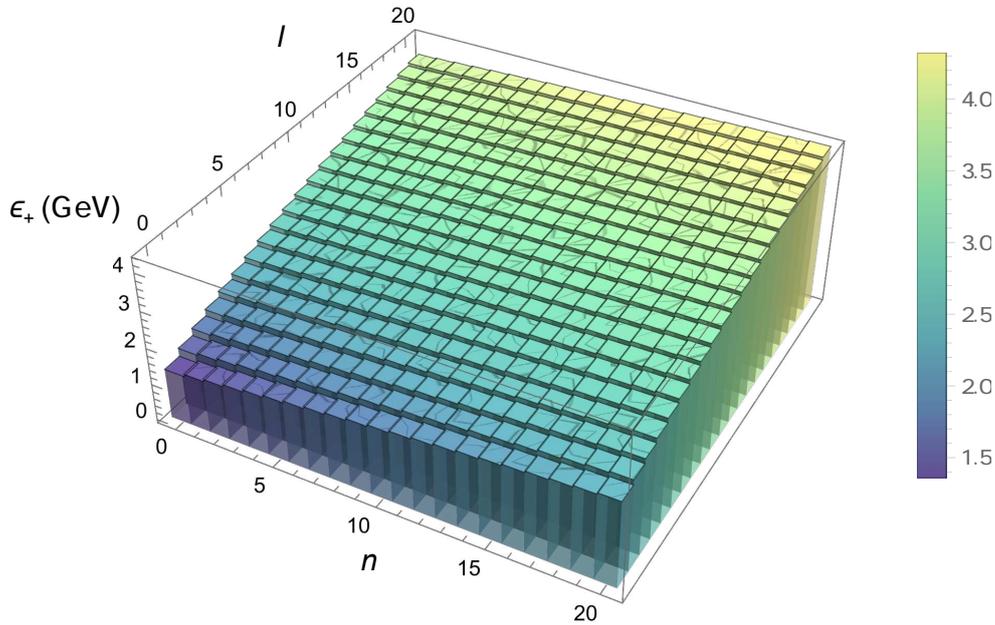


Figura 14 – Gráfico do espectro de energia em GeV, para n variando de 0 até 20 e l variando de 0 até 20. Em unidades naturais, $p_z \sim 0.134$ GeV, $m \sim 1.34$ GeV, $\Omega \sim 0.134$ GeV e $\eta = (4\pi)^{-1}0.303$.

Obtemos nas figuras acima os espectros de energia para a variação dos números quânticos n e l e fixamos o momento na direção z , a massa, a intensidade do campo, o acoplamento com o potencial, o parâmetro de amortecimento Ω e a componente radial. Esses resultados indicam que campos magnéticos dessa ordem possuem efeitos apreciáveis no espectro de energia de partículas.

Nesse capítulo estudamos a equação de Klein-Gordon na métrica (5.1) em diversos cenários, obtemos solução exata, estudamos o caso assintótico para constante cosmológica pequena, introduzimos o potencial escalar e o termo de oscilador. Obtemos o espectro de energia e analisamos o exemplo para pión em todos os casos mencionados. No próximo capítulo temos interesse de efetuar a análise da equação de Dirac em (5.1).

6 Equação de Dirac em Bonnor-Melvin- Λ

No presente capítulo, analisamos a influência do campo gravitacional produzido pela solução de Bonnor-Melvin com constante cosmológica sobre campos fermiônicos massivos. Em especial, escolhendo uma base tétrada apropriada, resolvemos a equação de Dirac no regime em que a constante cosmológica seja suficiente pequena e, sob a condição de contorno da parede dura, obtemos o espectro de energia da partícula espinorial.

6.1 Equação de Dirac

Nesta seção consideramos a métrica de Bonnor-Melvin com constante cosmológica [14]. Temos o objetivo de estudar o comportamento de campos fermiônicos nesse espaço-tempo, como discutido anteriormente, devemos definir uma base tétrada $e_{\mu}^{(a)}$ que conecte o espaço plano e o espaço curvo

$$g_{\mu\nu}(x) = e_{\mu}^{(a)}(x) e_{\nu}^{(b)}(x) \eta_{(a)(b)} \quad (6.1)$$

em que $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço curvo e $\eta_{(a)(b)}$ é a métrica do espaço plano. Tomamos a seguinte escolha de base tétrada

$$e_{\mu}^{(a)}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma \sin(\sqrt{2\Lambda}\rho)}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_{(a)}^{\mu}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{\sigma \sin(\sqrt{2\Lambda}\rho)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Dado que estamos interessados na equação de Dirac em espaços curvos

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + i\gamma^{\mu}\Omega_{\mu} - m)\Psi = 0 \quad (6.3)$$

devemos determinar os coeficientes da conexão de spin Ω_{μ} . Esses coeficientes, por sua vez, nos permitem determinar o seguinte termo $\gamma^{\mu}\Omega_{\mu}$ presente na equação. Que a partir de (3.33) fornece a relação

$$\gamma^{\mu}\Omega_{\mu} = \frac{\sqrt{2\Lambda}}{4 \tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \gamma^{(\rho)}. \quad (6.4)$$

Substituindo então os coeficientes da base tétrada e da conexão de spin na equação de Dirac em espaços curvos obtemos a equação

$$\left(\gamma^{(t)} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^{(\rho)} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\sqrt{2\Lambda}}{4 \tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \right) + \gamma^{(z)} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\rho}{\sigma \sin(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \gamma^{(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} - imI \right) \Psi = 0. \quad (6.5)$$

Explicitando as matrizes gamma em coordenadas cilíndricas

$$\gamma^{(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(\rho)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

$$\gamma^{(z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(\varphi)} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

e tomando a seguinte proposta de solução para o espinor $\Psi(t, \rho, \varphi, z)$ de Dirac

$$\Psi(t, \rho, \varphi, z) = e^{-iet} e^{il\varphi} e^{ip_z z} \begin{pmatrix} R_1(\rho) \\ R_2(\rho) \\ R_3(\rho) \\ R_4(\rho) \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas de primeira ordem para $R_1(\rho), R_2(\rho), R_3(\rho)$ e $R_4(\rho)$

$$\begin{aligned} \frac{dR_4(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{\sqrt{2\Lambda}}{4 \tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} + \frac{l}{\sigma \sin(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \right) R_4(\rho) + ip_z R_3(\rho) - i(\epsilon + m) R_1(\rho) &= 0, \\ \frac{dR_3(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{\sqrt{2\Lambda}}{4 \tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} - \frac{l}{\sigma \sin(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \right) R_3(\rho) - ip_z R_4(\rho) - i(\epsilon + m) R_2(\rho) &= 0, \\ \frac{dR_2(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{\sqrt{2\Lambda}}{4 \tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} + \frac{l}{\sigma \sin(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \right) R_2(\rho) + ip_z R_1(\rho) - i(\epsilon - m) R_3(\rho) &= 0, \\ \frac{dR_1(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{\sqrt{2\Lambda}}{4 \tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} - \frac{l}{\sigma \sin(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \right) R_1(\rho) - ip_z R_2(\rho) - i(\epsilon - m) R_4(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Isolando as componentes $R_1(\rho)$ e $R_2(\rho)$ respectivamente da primeira e da segunda equação de (6.9)

$$\begin{aligned} R_1(\rho) &= \frac{1}{i(\epsilon + m)} \left[\frac{dR_4(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{\sqrt{2\Lambda}}{4 \tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} + \frac{l}{\sigma \sin(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \right) R_4(\rho) + ip_z R_3(\rho) \right], \\ R_2(\rho) &= \frac{1}{i(\epsilon + m)} \left[\frac{dR_3(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{\sqrt{2\Lambda}}{4 \tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} - \frac{l}{\sigma \sin(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \right) R_3(\rho) - ip_z R_4(\rho) \right], \end{aligned} \quad (6.10)$$

e substituindo devidamente $R_1(\rho)$ e $R_2(\rho)$ na terceira e quarta equação de (6.9), renomeando $R_3 \equiv R_+$, $R_4 \equiv R_-$ e definindo $\zeta^2 \equiv \epsilon^2 - m^2 - p_z^2$, obtemos uma equação diferencial

radial de segunda ordem que codifica a solução para equação Dirac

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_{\pm}(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\sqrt{2\Lambda}}{2 \tan(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \frac{dR_{\pm}(\rho)}{d\rho} \\ + \left[\frac{1}{\sin^2(\sqrt{2\Lambda}\rho)} \left(-\frac{3}{8}\Lambda - \frac{l^2}{\sigma^2} \pm \frac{l\sqrt{2\Lambda}}{\sigma} \cos(\sqrt{2\Lambda}\rho) \right) + \zeta^2 - \frac{\Lambda}{8} \right] R_{\pm}(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Uma mudança de variável do tipo $u = \cos(\sqrt{2\Lambda}\rho)$ não é capaz de simplificar a equação radial, então, afim de resolver a equação buscamos o caso em que a constante cosmológica é pequena.

6.2 Equação de Dirac: $\Lambda \ll 1$

Supondo que a constante cosmológica é suficientemente pequena, a equação (6.11) se torna

$$\frac{d^2 R_{\pm}(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{2\rho} \frac{dR_{\pm}(\rho)}{d\rho} + \left[\left(\zeta^2 - \frac{\Lambda}{8} \right) - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{3}{16} + \frac{l^2}{16\Lambda\sigma^2} \mp \frac{l}{\sqrt{2\Lambda}\sigma} \right) \right] R_{\pm}(\rho) = 0. \quad (6.12)$$

Afim de resolver a equação (6.12) efetuamos a transformação $R_{\pm} = \rho^{\frac{1}{4}} F_{\pm}(\rho)$ e definimos os seguintes parâmetros

$$a^2 \equiv \left(\zeta^2 - \frac{\Lambda}{8} \right), \quad \nu_{\pm}^2 \equiv \left(\frac{1}{4} + \frac{l^2}{16\Lambda\sigma^2} \mp \frac{l}{\sqrt{2\Lambda}\sigma} \right) \quad (6.13)$$

de modo que obtemos a equação de Bessel (A.3)

$$\rho^2 \frac{d^2 F_{\pm}(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dF_{\pm}(\rho)}{d\rho} + (a^2 \rho^2 - \nu_{\pm}^2) F_{\pm}(\rho) = 0, \quad (6.14)$$

cuja solução geral é dada em termos da função de Bessel de primeiro tipo J_{ν} de da função de Bessel de segundo tipo Y_{ν}

$$F_{\pm}(\rho) = c_1 J_{\nu_{\pm}}(a\rho) + c_2 Y_{\nu_{\pm}}(a\rho), \quad (6.15)$$

em que c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias. Dado que o segundo termo apresenta divergencia na origem, tomamos $c_2 = 0$ e a solução então fica

$$F_{\pm}(\rho) = c_1 J_{\left(\frac{1}{4} + \frac{l^2}{16\Lambda\sigma^2} \mp \frac{l}{\sqrt{2\Lambda}\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\left(\zeta^2 - \frac{\Lambda}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \rho \right). \quad (6.16)$$

Afim de determinar o espectro de energia, podemos impor a condição de contorno de parede dura que consiste em assumir o espinor se anula em algum $\rho = \rho_{\omega}$ que é um raio arbitrário e distante da origem [68]. Utilizando então expansão assintótica para (A.6), ficamos com

$$J_{\nu_{\pm}}(a\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \left(\zeta^2 - \frac{\Lambda}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \rho}} \cos \left(\left(\zeta^2 - \frac{\Lambda}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \rho - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{l^2}{16\Lambda\sigma^2} \mp \frac{l}{\sqrt{2\Lambda}\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \pi - \frac{1}{4} \pi \right) \quad (6.17)$$

então, impondo a condição de parede dura na expansão assintótica temos

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \left(\zeta^2 - \frac{\Lambda}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \rho_\omega}} \cos \left(\left(\zeta^2 - \frac{\Lambda}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \rho_\omega - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{l^2}{16\Lambda\sigma^2} \mp \frac{l}{\sqrt{2\Lambda\sigma}}\right)^{\frac{1}{2}} \pi - \frac{1}{4}\pi \right) = 0 \quad (6.18)$$

dados que a função cosseno é periódica

$$\left(\zeta^2 - \frac{\Lambda}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \rho_\omega - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{l^2}{16\Lambda\sigma^2} \mp \frac{l}{\sqrt{2\Lambda\sigma}}\right)^{\frac{1}{2}} \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (6.19)$$

em que n é um número inteiro. Lembrando da definição $\zeta^2 = \epsilon^2 - m^2 - p_z^2$, obtemos o espectro de energia¹

$$\epsilon_\pm = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{3}{4} + n\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{l^2}{16\Lambda\sigma^2} \pm \frac{l}{\sqrt{2\Lambda\sigma}}} \right]^2 \frac{\pi^2}{\rho_\omega^2} + \frac{\Lambda}{8} + m^2 + p_z^2}. \quad (6.20)$$

Como era de se esperar, embora mais geral, o espectro de energia² obtido se assemelha ao espectro obtido no estudo da equação de Klein-Gordon. Como feito anteriormente, tomamos o exemplo da massa de um pión [63], levando em consideração campos magnéticos da ordem de $H_0 = \sqrt{\Lambda}\sigma \sim 10^{19}\text{G}$ [69, 70].

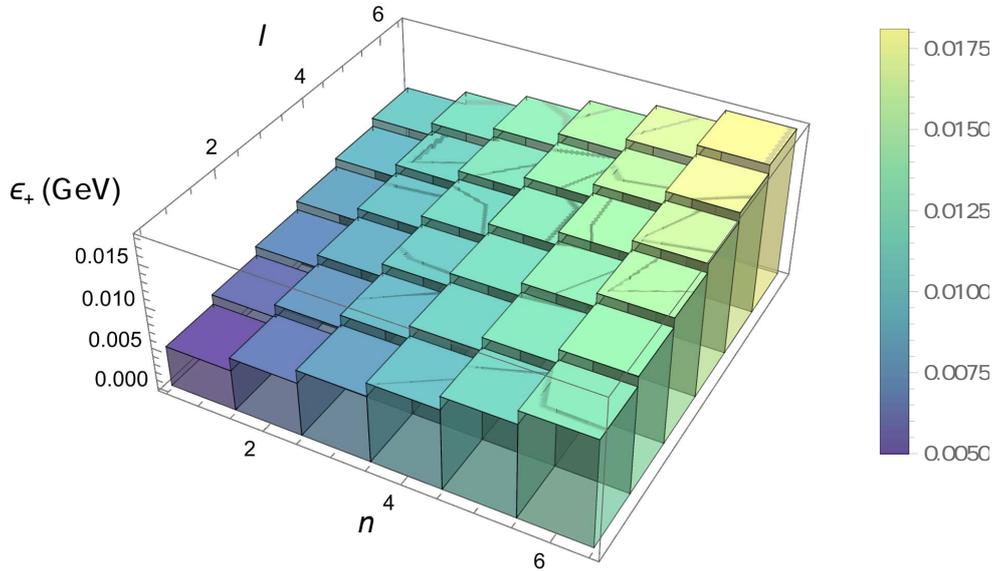


Figura 15 – Gráfico do espectro de energia ϵ_- em GeV, para n variando de -3 até 3 e l variando de 1 até 6 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.0005$ GeV, $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0005$ GeV e $\Lambda \sim 0$.

¹ Os elétrons em geral existem apenas em estados de energia positiva [47].

² Devemos notar que ϵ_+ só é bem definido para $8 - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3161}{2}} > l > \frac{1}{10}(80 + \sqrt{6322})$.

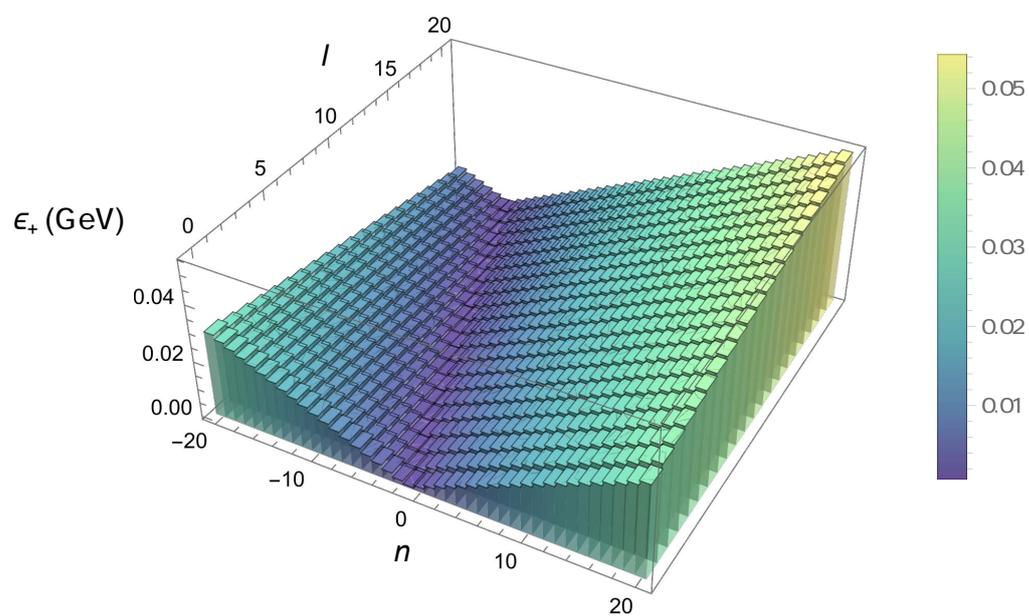


Figura 16 – Gráfico do espectro de energia ϵ_- em GeV, para n variando de -20 até 20 e l variando de 0 até 20 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.0005$ GeV, $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0005$ GeV e $\Lambda \sim 0$.

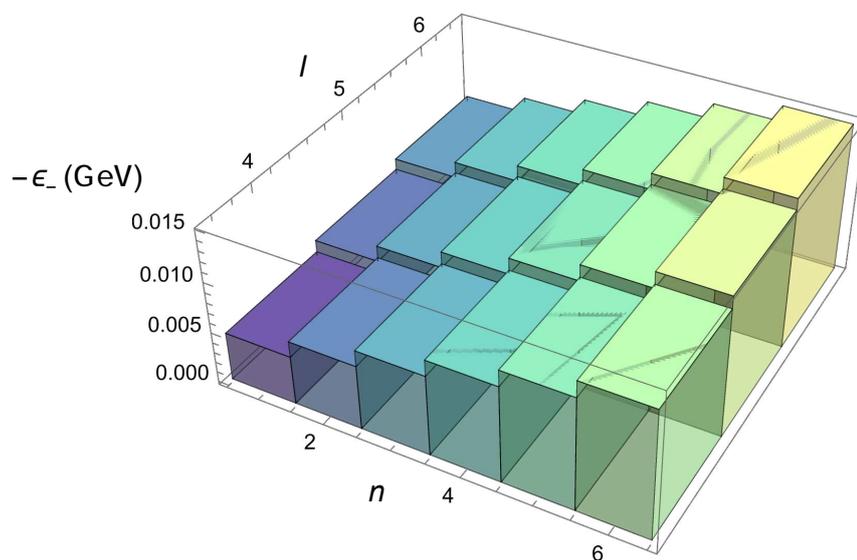


Figura 17 – Gráfico do espectro de energia ϵ_+ em GeV, para n variando de -3 até 3 e l variando de 1 até 6 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.0005$ GeV, $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0005$ GeV e $\Lambda \sim 0$.

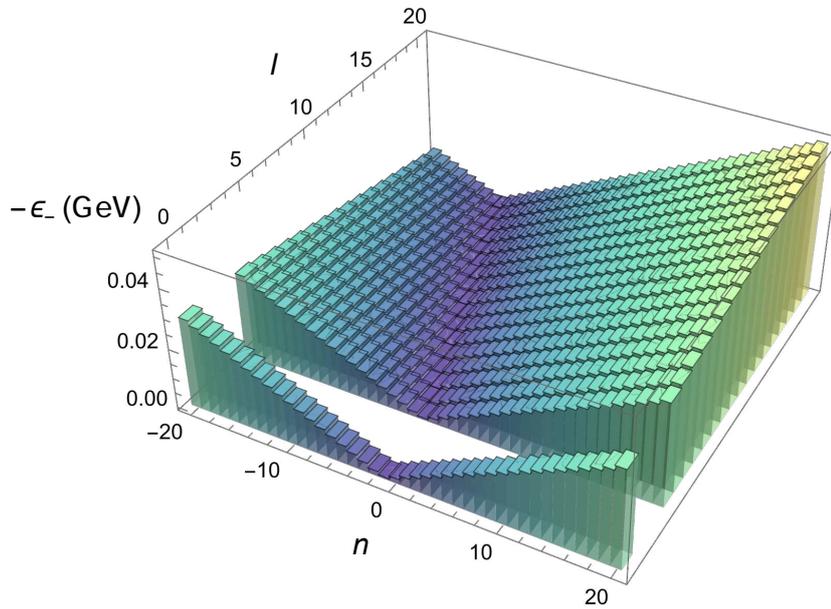


Figura 18 – Gráfico do espectro de energia ϵ_+ em GeV, para n variando de -20 até 20 e l variando de 0 até 20 . Em unidades naturais, $p_z \sim m \sim 0.0005$ GeV, $\rho_\omega^{-1} \sim 0.0005$ GeV e $\Lambda \sim 0$.

Plotamos nas figuras acima o espectro de energia ϵ_- e ϵ_+ respectivamente. Variado os números quânticos n e l e fixamos o momento na direção z , a massa, a intensidade do campo, o acoplamento com o potencial, o parâmetro de amortecimento Ω , a componente radial e constante cosmológica. Esses resultados indicam que campos magnéticos dessa ordem possuem efeitos apreciáveis no espectro de energia de partículas.

No presente capítulo estudamos a equação de Dirac na métrica (5.1) considerando a constante cosmológica pequena e obtemos o espectro de energia. Isto é, até o momento investigamos a influencia do campo gravitacional (5.1) com respeito ao comportamento de partículas, o próximo passo de interesse consiste em investigar o comportamento de do campo gravitacional (5.1) com respeito aos campos quânticos. No proximo capítulo trataremos então o efeito Casimir para campos escalares.

7 Efeito Casimir no Espaço-Tempo de Bonnor-Melvin- Λ

Nos capítulos anteriores estudamos a equação de Klein-Gordon e a equação de Dirac que descrevem partículas quânticas, um caminho natural consiste em estudar o campos quânticos no espaço-tempo de interesse. Portanto neste capítulo, analisamos a influência do campo gravitacional produzido pela solução de Bonnor-Melvin com constante cosmológica sobre o campo escalar quantizado no regime em que a constante cosmológica seja suficientemente pequena. Obtemos os modos escalares resolvendo a equação de Klein-Gordon, normalizamos a solução pelo produto interno de Klein-Gordon, efetuamos a quantização canônica, implementamos a condição de contorno que codifica as placas condutores e obtemos a energia de Casimir regularizada.

7.1 Espaço-Tempo de Bonnor-Melvin- Λ

Tomando a métrica (5.1), podemos considerar o caso em que constante cosmológica é suficientemente pequena, que resulta em

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + 2\Lambda\sigma^2\rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (7.1)$$

Afim de respeitar a configuração das placas, vamos considerar um referencial cartesiano local descrito pelo sistema de coordenadas cartesianas [78], tomando então a seguinte transformação $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ a métrica (7.1) assume a seguinte forma

$$ds^2 = -dt^2 + \left[\frac{x^2 + 2\Lambda\sigma^2 y^2}{(x^2 + y^2)}\right] dx^2 + \left[\frac{y^2 + 2\Lambda\sigma^2 x^2}{(x^2 + y^2)}\right] dy^2 + xy \left[\frac{1 - 2\Lambda\sigma^2}{(x^2 + y^2)}\right] 2dxdy + dz^2. \quad (7.2)$$

Devemos notar a métrica de Minkowski só é recuperada para o caso em que $H_0^2 = 2\Lambda\sigma^2 = 1$, que é uma condição bastante específica. Isso mostra que por mais simples que essa métrica seja, ela pode ser capaz e exibir efeitos não triviais diante a intensidade do campo magnético.

7.2 Modos Escalares

No processo de quantização canônica descrito anteriormente em 4.1, o primeiro passo consiste em obter os modos escalares que são soluções da equação de Klein-Gordon. Uma vez obtidos os modos, procedemos efetuando a sua normalização e finalmente efetuamos a quantização diante a expansão do campo quântico em termos dos modos escalares e dos

operadores de criação e aniquilação, para tanto tomamos então a equação de Klein-Gordon em sua forma covariante, ou seja em espaços curvos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi \right] - m^2\Psi = 0. \quad (7.3)$$

Por simplicidade, escolhemos o caso não massivo $m = 0$. Levando em conta que o espaçamento entre as placas seja pequeno, devemos considerar que as componentes da métrica sejam constantes [35], que resulta em

$$g^{tt}\partial_t^2\Psi + g^{xx}\partial_x^2\Psi + g^{yy}\partial_y^2\Psi + g^{zz}\partial_z^2\Psi + 2g^{xy}\partial_x\partial_y\Psi = 0. \quad (7.4)$$

Tomando a seguinte proposta de solução para os modos escalares

$$\Psi(t, x, y, z) = e^{-i\omega t}\chi(x)e^{ik_y y}e^{ik_z z} \quad (7.5)$$

que quando substituindo na equação de Klein-Gordon resulta na seguinte equação para a componente $\chi(x)$

$$g^{xx}\frac{d^2\chi(x)}{dx^2} + 2g^{xy}(ik_y)\frac{d\chi(x)}{dx} + \left[-g^{tt}\omega^2 - g^{yy}k_y^2 - g^{zz}k_z^2 \right]\chi(x) = 0. \quad (7.6)$$

Assumindo agora que $\chi(x) = \chi_0 e^{\alpha x}$, a equação diferencial se reduz a uma equação algébrica para α cuja solução é dada por

$$\alpha = -ik_y\frac{g^{xy}}{g^{xx}} \pm \frac{\sqrt{-(g^{xy})^2 k_y^2 + g^{xx}(g^{tt}\omega^2 + g^{yy}k_y^2 + g^{zz}k_z^2)}}{g^{xx}} \quad (7.7)$$

e substituindo g^{tt} e g^{zz} podemos escrever a solução para $\chi(x)$

$$\chi(x) = \chi_0 e^{-ik_y\frac{g^{xy}}{g^{xx}}x} \left[c_1 e^{i\sqrt{\left(\frac{g^{xy}}{g^{xx}}\right)^2 k_y^2 + \left(\frac{\omega^2 - g^{yy}k_y^2 - k_z^2}{g^{xx}}\right)x}} + c_2 e^{-i\sqrt{\left(\frac{g^{xy}}{g^{xx}}\right)^2 k_y^2 + \left(\frac{\omega^2 - g^{yy}k_y^2 - k_z^2}{g^{xx}}\right)x}} \right]. \quad (7.8)$$

Implementando as condições de contorno de Dirichlet em $\chi(x)$, dadas por

$$\chi(0) = \chi(L) = 0, \quad (7.9)$$

que fisicamente falando codificam as placas e significa o que as placas estão alinhadas no eixo x . Obtemos a seguinte condição para coeficientes da solução $c_1 = -c_2$ e para $\omega^2 \equiv \omega_n^2$ com n inteiro

$$\omega_n^2 = g^{xx} \left[\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \left(\frac{g^{xy}}{g^{xx}} \right)^2 k_y^2 \right] + g^{yy}k_y^2 + k_z^2 \quad (7.10)$$

que resulta em

$$\chi(x) = \chi_0 e^{-ik_y\frac{g^{xy}}{g^{xx}}x} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (7.11)$$

e por consequência, os modos podem ser escritos da seguinte forma

$$\Psi_k(t, x, y, z) = N_k e^{-i\omega_k t} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-ik_y \frac{g^{xy}}{g^{xx}} x} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \quad (7.12)$$

Os modos escalares devem ser normalizadas de acordo com o produto escalar de Klein-Gordon [20]

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = i \int_{\Sigma} \sqrt{|g_{\Sigma}|} \Psi_k \overleftrightarrow{\partial}_A \Psi_{k'}^* n^A d\Sigma \quad (7.13)$$

em que¹ $d\Sigma = dx dy dz$ é o elemento de volume, $g_{\Sigma} = 2\Lambda\sigma^2$ é o determinante induzido métrica na hipersuperfície espacial Σ e $n^A = (g^{tt}, 0, 0, 0)$. Impondo então a condição de ortogonalidade

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = \delta_{n,n'} \delta(k_y - k'_y) \delta(k_z - k'_z) \quad (7.14)$$

ficamos com

$$(\Psi_k, \Psi_{k'}) = N_k^2 (2\pi)^2 \left(\frac{L}{2}\right) 2\omega_k \sqrt{2\Lambda\sigma} \left[\delta_{nn'} \delta(k_y - k'_y) \delta(k_z - k'_z) \right], \quad (7.15)$$

que nos permite obter a constante de normalização para os modos

$$N_k^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 \omega_k L \sqrt{2\Lambda\sigma}} \quad (7.16)$$

e com isso a solução para os modos escalares fica

$$\Psi_k = \frac{e^{-i\omega_k t} e^{ik_y y} e^{ik_z z}}{2\pi \sqrt{\omega_k L \sqrt{2\Lambda\sigma}}} e^{-ik_y \frac{g^{xy}}{g^{xx}} x} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \quad (7.17)$$

Uma vez dados os modos normalizados, podemos efetuar a quantização via expansão do campo em termos dos modos e dos operadores de criação e aniquilação.

7.3 Energia de Casimir

Dado que estamos interessados na energia de Casimir, efetuamos a quantização via expansão em modos, que consiste em efetuar a soma sobre todos os modos associados ao problema, que resulta em

$$\Psi(t, x, y, z) = \sum_n \int dk_x \int dk_y \left(\Psi_{n, k_y, k_z} a_{n, k_x, k_y} + \Psi_{n, k_y, k_z}^* a_{n, k_x, k_y}^\dagger \right). \quad (7.18)$$

Levando em conta as regra de comutação para os operadores de criação e aniquilação (4.9), podemos escrever o valor esperado da densidade de energia da seguinte forma

$$\langle 0 | T_{tt} | 0 \rangle = \sum_k T_{tt} [\Psi_k, \Psi_k^*]. \quad (7.19)$$

¹ $\Psi_k \overleftrightarrow{\partial}_A \Psi_{k'}^* = \Psi_k (\partial_A \Psi_{k'}^*) - (\partial_A \Psi_k) \Psi_{k'}^*$

Isso significa que o valor esperado do operador tensor de energia-momento é dado diante a integração sob modos com respeito ao tensor de energia-momento clássico. Considerando o caso não massivo, de forma geral temos

$$T_{tt} = -\frac{1}{2}g_{tt}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\Psi_k\partial_\sigma\Psi_k^* + \partial_t\Psi\partial_t\Psi_k^*, \quad (7.20)$$

e substituindo os modos, os coeficientes da métrica e atuando as derivadas obtemos

$$T_{tt} = \frac{N_k^2}{2} \left[\mathcal{F}_k \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \mathcal{G}_k \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \quad (7.21)$$

em que definimos

$$\mathcal{F}_k \equiv \left(\omega_k^2 + g^{yy}k_y^2 - \frac{(g^{xy})^2}{g^{xx}}k_y^2 + k_z^2 \right), \quad \mathcal{G}_k \equiv g^{xx}\frac{n^2\pi^2}{L^2}. \quad (7.22)$$

A densidade de energia de Casimir é obtida através da expressão

$$\bar{\epsilon}_{\text{vac}} \equiv \frac{1}{V_p} \int \sqrt{|g_\Sigma|} w^\mu w^\nu \langle 0 | \hat{T}_{\mu\nu} | 0 \rangle d\Sigma \quad (7.23)$$

em que $w^\mu = \frac{\delta^{\mu t}}{\sqrt{g^{tt}}}$ e $V_p = \int_\Sigma \sqrt{|g_\Sigma|} d\Sigma$ é o dito volume próprio [37]. Após algumas manipulações obtemos

$$\bar{\epsilon}_{\text{vac}} = \frac{1}{2} \sum_n \int dk_y \int dk_z N_k^2 \omega_k^2 \quad (7.24)$$

substituindo a constante de normalização (7.16)

$$\bar{\epsilon}_{\text{vac}} = \left(2L (2\pi)^2 \sqrt{2\Lambda\sigma} \right)^{-1} \sum_n \int dk_y \int dk_z \omega_k, \quad (7.25)$$

Lembrando da expressão para ω_k em (7.10), devemos notar que a densidade de energia de Casimir (7.25) é uma quantidade divergente diante a soma em n . Buscando uma quantidade finita, devemos então introduzir um processo de regularização.

7.4 Regularização

A densidade de energia (7.25) é divergente com respeito a soma e integração, para calcular um valor finito para a energia do vácuo podemos tomar o processo de regularização dimensional que consiste em efetuar uma integração em s dimensões e em seguida efetuar a continuação analítica para soma em n , identificando a função zeta de Riemann. Definindo a parte divergente como

$$\mathcal{I}_n \equiv \int dk_y \int dk_z \omega_k = \int dk_y \int dk_z \left(g^{xx} \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \Delta k_y^2 + k_z^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.26)$$

em que $\Delta \equiv \left[g^{yy} - \frac{(g^{xy})^2}{g^{xx}} \right]$. Tomando $\tilde{k}_y^2 \equiv \Delta k_y^2$ e $\tilde{k}_z^2 \equiv k_z^2$ e em seguida definindo $\tilde{k}_T^2 \equiv \tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2$, podemos escrever

$$\mathcal{I}_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int d^2\tilde{k}_T \left(g^{xx} \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \tilde{k}_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.27)$$

utilizando o resultado [79]

$$\int_0^\infty d^D r f(r) = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int_0^\infty dr r^{D-1} f(r) \quad (7.28)$$

para o caso de $D = 2$, ficamos com

$$\mathcal{I}_n = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \int d\tilde{k}_T \tilde{k}_T \left(g^{xx} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \tilde{k}_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.29)$$

temos então o objetivo de calcular a seguinte integral [80]

$$\mathcal{I}_n = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \int_0^\infty d\tilde{k}_T \tilde{k}_T \left(g^{xx} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \tilde{k}_T^2 \right)^{-\frac{s}{2}}, \quad (7.30)$$

que recupera (7.29) para $s = -1$, Tomando $u = g^{xx} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \tilde{k}_T^2$, obtemos

$$\mathcal{I}_n = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \int_{u(0)}^\infty du u^{-\frac{s}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \frac{1}{(s-2)} \left[g^{xx} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right]^{1-\frac{s}{2}} \quad (7.31)$$

e substituindo (7.31) na densidade de energia de Casimir (7.25) temos

$$\bar{\epsilon}_{\text{vac}} = \left((2\pi) 2L\sqrt{2\Lambda\sigma}\sqrt{\Delta} (s-2) \right)^{-1} (g^{xx})^{1-\frac{s}{2}} \left(\frac{\pi}{L} \right)^{2-s} \sum_n n^{-(s-2)}. \quad (7.32)$$

Identificando a função zeta de Riemann (A.1)

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^\infty n^{-x} \quad (7.33)$$

ficamos com

$$\bar{\epsilon}_{\text{vac}} = \left((2\pi) 2L\sqrt{2\Lambda\sigma}\sqrt{\Delta} (s-2) \right)^{-1} (g^{xx})^{1-\frac{s}{2}} \left(\frac{\pi}{L} \right)^{2-s} \zeta(s-2). \quad (7.34)$$

Efetuando a continuação analítica da função zeta, de modo que para $s = -1$ vale a seguinte igualdade $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$, podemos escrever a energia de Casimir regularizada²

$$\bar{\epsilon}_{\text{vac}} = -\frac{\pi^2}{1440L_p^4} \frac{1}{\sqrt{2\Lambda\sigma}}. \quad (7.35)$$

Neste capítulo efetuamos a quantização canônica do campo escalar não massivo com condições de contorno que simulam placas metálicas no espaço-tempo (5.14). Obtivemos a energia de Casimir regularizada e analisando a expressão (7.35) podemos constatar que a densidade de energia é inversamente proporcional a intensidade do campo magnético.

² Definindo $L_p^4 = L^4 \sqrt{\frac{\Delta}{g^{xx}}}$.

8 Corda Negra de Kiselev Carregada em Rotação e Radiação Hawking via Tunelamento

No presente capítulo generalizamos a solução das equações de campo da relatividade geral obtida em [39], introduzindo um tensor de energia-momento com carga elétrica para a corda negra com quintessência de Kiselev. Vale mencionar que a corda negra é vista como um buraco negro cilíndrico e a quintessência de Kiselev como um fluido anisotrópico proposto como modelo para a descrição da energia escura. Efetuamos também a implementação do momento angular na solução obtida [10] e em seguida estudamos os efeitos quânticos nesse espaço-tempo. Analisamos o comportamento de partículas escalares descritas pela equação de Klein-Gordon, obtemos a probabilidade de tunelamento através do horizonte de eventos e a temperatura Hawking pelo método de tunelamento de partículas discutido anteriormente.

8.1 Equação de Campo e Soluções

Observações de supernovas sugerem que o universo se encontra atualmente em estágio de expansão acelerada [81]. Uma das formas de explicar esse fato, é efetuando a introdução de algum tipo de energia que provoque tal aceleração, energia essa que ficou conhecida como energia escura¹. Um modelo de energia escura bastante estudado em cenários cosmológicos é o de quintessência que é descrito por um campo escalar [82].

A possível existência de energia escura deve ser capaz de alterar a geometria do espaço-tempo e portanto deve ser capaz de afetar as propriedades de objetos compactos. A primeira descrição envolvendo quintessência e buracos negros conhecida na literatura foi feita por Kiselev [83, 84]. Recentemente a quintessência de Kiselev foi estudada no âmbito da corda negra [39], temos então o interesse em generalizar tal resultado adicionando carga elétrica na solução obtida, isto é, temos interesse em um solução do tipo corda negra carregada e cercada por um fluido de quintessência anisotrópico. Partimos então das equações de campo da relatividade geral na presença de constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (8.1)$$

assumindo a constante cosmológica negativa $\Lambda = -\frac{3}{l^2}$, em que l é raio de curvatura em AdS, e duas fontes de matéria que não interagentes entre si $T_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}^{(1)} + T_{\mu\nu}^{(2)}$, em que $T_{\mu\nu}^{(1)}$

¹ A natureza da energia escura se mantem como uma questão em aberto na comunidade física.

é dado como o tensor de energia-momento eletromagnético

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu}^{\rho} F_{\nu\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (8.2)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \quad (8.3)$$

$$A_{\mu} = -h(r) \delta_{\mu}^0, \quad (8.4)$$

e $T_{\mu\nu}^{(2)}$ é o tensor de energia-momento de quintessência, cujas componentes invariantes são dadas por [83, 39]

$$T_t^t = T_r^r = -\rho_q, \quad (8.5)$$

$$T_{\phi}^{\phi} = T_z^z = \frac{1}{2} \rho_q (3w_q + 1), \quad (8.6)$$

e a equação de estado é dada por²

$$p = \frac{1}{2} \rho_q (3w_q + 1), \quad -1 < w_q < -\frac{1}{3}. \quad (8.7)$$

Buscando então uma solução com simetria cilíndrica, tomamos a métrica da corda negra com $f(r)$ a determinar

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\phi^2 + \frac{r^2}{l^2} dz^2, \quad (8.8)$$

em que em que $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$ e $-\infty < z < \infty$. Substituindo os coeficientes da métrica (8.8) em (8.1) com (8.2), (8.5) e (8.6), podemos escrever as equações de campo de Einstein da seguinte forma

$$\frac{1}{r} f'(r) + \frac{1}{r^2} f(r) - \frac{3}{l^2} = - \left(h'(r) \right)^2 - 8\pi\rho_q \quad (8.9)$$

$$\frac{1}{2} f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{3}{l^2} = \left(h'(r) \right)^2 + 8\pi\rho_q \frac{1}{2} (3w_q + 1). \quad (8.10)$$

Afim de determinar $h(r)$, recorreremos às equações de Maxwell

$$\sqrt{-g} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \partial_{\nu} \left(\sqrt{-g} F^{\mu\nu} \right) = r h''(r) + 2h'(r) = 0, \quad (8.11)$$

que resulta em

$$h(r) = \frac{2lQ}{r} \quad (8.12)$$

de modo que as equações de campo da relatividade geral se tornam

$$\frac{1}{r} f'(r) + \frac{1}{r^2} f(r) - \frac{3}{l^2} + \frac{4l^2 Q^2}{r^4} = -\rho_q \quad (8.13)$$

$$\frac{1}{2} f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{3}{l^2} - \frac{4l^2 Q^2}{r^4} = \frac{1}{2} \rho_q (3w_q + 1). \quad (8.14)$$

² Note a existência de pressão negativa.

Substituindo (8.13) em (8.14), obtemos

$$r^2 f''(r) + 3r f'(r) (w_q + 1) + f(r) (3w_q + 1) + (3w_q - 1) \frac{4l^2 Q^2}{r^2} - 9l^{-2} r^2 (w_q + 1) = 0, \quad (8.15)$$

finalmente resolvendo a equação (8.15), obtemos

$$f(r) = \frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} + \frac{N_q}{r^{3w_q+1}} + \frac{l^2 Q^2}{r^2}. \quad (8.16)$$

Portanto determinamos uma generalização da solução dada em [39], diante o termo de carga Q . Devemos notar que a carga influencia significativamente o comportamento da solução, e pode evitar a existência do horizonte de eventos:

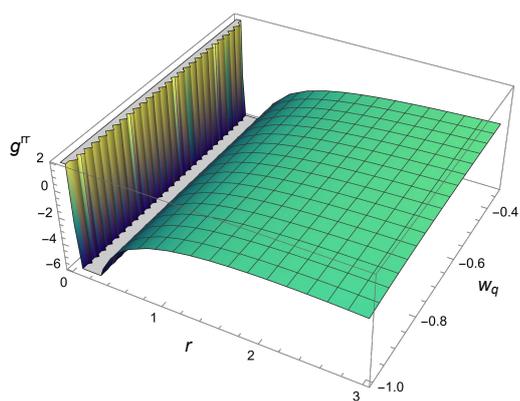
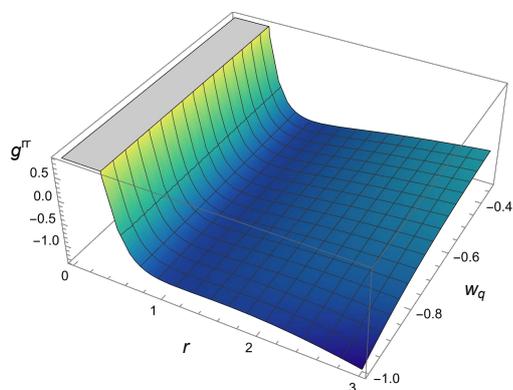
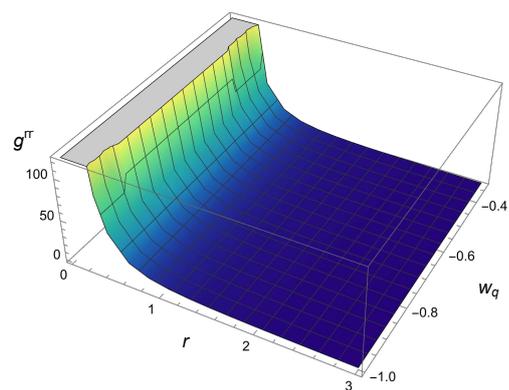


Figura 19 – Gráficos de g^{rr} por w_q com $l = 100$, $N_q = -0.1$, $m = 1$ e $Q = 0.1, 0.01, 0.001$.

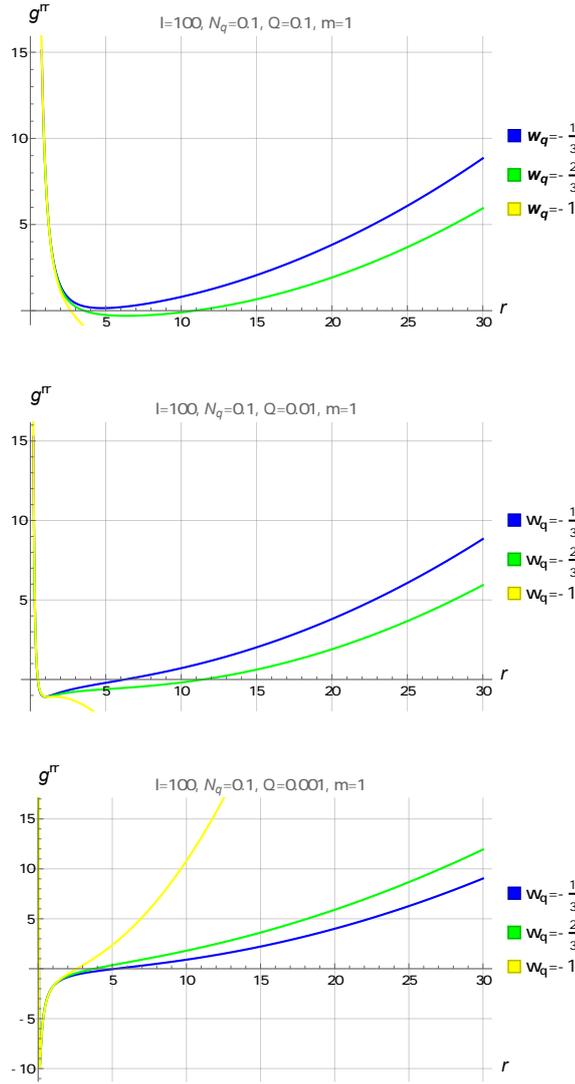


Figura 20 – Gráficos de g^{rr} por r com $l = 10$, $N_q = 0.1$, $m = 1$ e $Q = 0.1, 0.01, 0.001$.

Obtemos então a métrica de uma corda negra carregada imersa em um fluido de quintessência que é dada por

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} + \frac{N_q}{r^{3w_q+1}} + \frac{l^2 Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} + \frac{N_q}{r^{3w_q+1}} + \frac{l^2 Q^2}{r^2} \right)} + r^2 d\phi^2 + \frac{r^2}{l^2} dz^2, \quad (8.17)$$

em que m e N_q são constantes de integração. A contraparte rotativa da métrica da corda negra carregada com quintessência (8.17) pode ser obtida usando as transformações [10]

$$t \rightarrow \lambda t - a\phi, \quad \phi \rightarrow \lambda\phi - \frac{a}{l^2} t \quad (8.18)$$

em que $\lambda = \sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}}$ e a é o parâmetro de rotação, explicitamente podemos escrever

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} + \frac{N_q}{r^{3w_q+1}} + \frac{l^2 Q^2}{r^2} \right) (\lambda dt - a d\phi)^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} + \frac{N_q}{r^{3w_q+1}} + \frac{l^2 Q^2}{r^2} \right)} + \frac{r^2}{l^4} (adt - \lambda l^2 d\phi)^2 + \frac{r^2}{l^2} dz^2. \quad (8.19)$$

A transformação que implementa a rotação introduz uma rotação no potencial eletromagnético dada por

$$A_\mu = -\lambda h(r) \delta_\mu^t + l^2 a h(r) \delta_\mu^\phi. \quad (8.20)$$

O horizonte de eventos de ambas as soluções (8.17) e (8.19) se dá para o caso em que $g^{rr} = 0$, que leva a

$$r^{3w_q+3} - 2ml^2 r^{3w_q} + r^{3w_q-1} l^4 Q^2 + l^2 N_q = 0. \quad (8.21)$$

Diante as dificuldades de resolver a equação (8.21) analiticamente, tomamos o caso extremo em que $\omega_q = -1$, que resulta em uma equação algébrica de quarto grau

$$\left(\frac{1}{l^2} + N_q \right) r^4 + 2mr - l^2 Q^2 = 0, \quad (8.22)$$

cuja solução é dada por [85]

$$r = \frac{\sqrt{\delta}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\delta \mp \frac{2}{\sqrt{\delta}} \left(\frac{2ml^2}{1+l^2 N_q} \right)}, \quad (8.23)$$

$$\delta = \frac{\sqrt[3]{2m^2 l^2}}{1+l^2 N_q} \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{16 l^4 Q^6}{27 m^4} (1+l^2 N_q)}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{16 l^4 Q^6}{27 m^4} (1+l^2 N_q)}} \right), \quad (8.24)$$

o que mostra a existência de horizontes de eventos bem definidos para a corda negra que estamos considerando.

8.2 Partículas Escalares na Corda Negra e Efeito Hawking

Para calcular a probabilidade de tunelamento de partículas escalares através do do horizonte de eventos no espaço-tempo de uma corda negra carregada imersa em um fluido de quintessência, utilizaremos a forma covariante da equação de Klein-Gordon. Após obtermos uma solução usando a aproximação do método WKB, poderemos calcular a probabilidade de tunelamento através das probabilidades de emissão e absorção. Para isso, consideraremos a equação de Klein-Gordon para um campo escalar Ψ , que é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\partial_\alpha + \frac{ie}{\hbar} A_\alpha \right) \left[\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\beta - \frac{ie}{\hbar} A_\beta \right) \Psi \right] - \frac{m^2}{\hbar^2} \Psi = 0, \quad (8.25)$$

em que e é a carga da partícula escalar. Aplicando a aproximação WKB, e assumindo a seguinte proposta [86]

$$\Psi(t, r, \phi, z) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} I(t, r, \phi, z) \right], \quad (8.26)$$

a equação assume a seguinte forma³

$$g^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha I \partial_\beta I + e^2 A_\alpha A_\beta - 2e A_\alpha \partial_\beta I \right) + m^2 = 0. \quad (8.27)$$

Substituindo os coeficientes da métrica (8.17) e explicitando a soma

$$g^{tt} (\partial_t I - e A_t)^2 + g^{rr} [\partial_r I]^2 + g^{\phi\phi} [\partial_\phi I]^2 + g^{zz} [\partial_z I]^2 + m^2 = 0, \quad (8.28)$$

levando em conta a simetria cilíndrica do espaço-tempo de fundo (8.17), assumimos a seguinte forma da solução da equação (8.28)

$$I = -Et + W(r) + J_1 \phi + J_2 z \quad (8.29)$$

em que E , J_1 e J_2 são respectivamente os números quânticos associados a energia, ao momento angular e ao momento na direção z . Substituindo (8.29) e isolando $W(r)$

$$W_\pm(r) = \pm \int dr \frac{\sqrt{(E + e A_t)^2 + f(r) (g^{\phi\phi} J_1^2 + g^{zz} J_2^2 + m^2)}}{f(r)}, \quad (8.30)$$

utilizando o teorema de resíduos podemos efetuar a integração em torno do polo no horizonte de eventos r_+ [88]

$$W_\pm(r) = \pm \frac{\pi i}{f'(r_+)} \left(E - e \frac{2lQ}{r_+} \right). \quad (8.31)$$

Agora, as probabilidades de cruzar o horizonte de dentro para fora e de fora para dentro são dadas por

$$P_{\text{emissão}} \propto \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \text{Im} W_+ \right), \quad P_{\text{absorção}} \propto \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \text{Im} W_- \right), \quad (8.32)$$

assim, podemos obter a probabilidade de tunelamento de uma partícula de dentro para fora do horizonte da corda negra, que é dada por [52]

$$\Gamma \propto \frac{P_{\text{emissão}}}{P_{\text{absorção}}} = \exp \left(-\frac{4}{\hbar} \text{Im} I \right) = \exp(-4 \text{Im} W_+) \quad (8.33)$$

que resulta em

$$\Gamma = \exp \left[-\frac{4\pi}{\left(\frac{2r_+}{l^2} + \frac{2m}{r_+^2} - \frac{(3w_q+1)N_q}{r_+^{3w_q+2}} - \frac{2l^2 Q^2}{r_+^3} \right)} \left(E - e \frac{2lQ}{r_+} \right) \right]. \quad (8.34)$$

³ Também chamada de equação relativística de Hamilton–Jacobi [87].

Comparando a (8.34) com $\Gamma = \exp[-\beta E]$, em que⁴ $\beta = (T_H^{-1})$ identificamos a temperatura Hawking

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2r_+}{l^2} + \frac{2m}{r_+^2} - \frac{(3w_q + 1)N_q}{r_+^{3w_q+2}} - \frac{2l^2Q^2}{r_+^3} \right). \quad (8.35)$$

A temperatura (8.35) depende explicitamente do raio do horizonte de eventos, do parâmetro da constante cosmológica, da massa da corda negra, dos parâmetros da quintessencia e da carga.

8.3 Partículas Escalares na Corda Negra em Rotação e Efeito Hawking

Temos agora o interesse em calcular a probabilidade de tunelamento através do horizonte de eventos para a métrica (8.19), que descreve uma corda negra munida de carga, rotação e imersa em um fluido de quintessencia. Então de forma inteiramente análoga a seção anterior, partimos da equação de Klein-Gordon na forma covariante para um campo escalar Ψ

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\partial_\alpha + \frac{ie}{\hbar} A_\alpha \right) \left[\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\beta - \frac{ie}{\hbar} A_\beta \right) \Psi \right] - \frac{m^2}{\hbar^2} \Psi = 0, \quad (8.36)$$

em que e é a carga da partícula escalar. Aplicando a aproximação WKB, substituindo os coeficientes da métrica e assumindo a seguinte proposta [86]

$$\Psi(t, r, \phi, z) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} I(t, r, \phi, z) \right], \quad (8.37)$$

podemos escrever a equação de Klein-Gordon da seguinte forma

$$\begin{aligned} m^2 + g^{tt} (\partial_t I - eA_t)^2 + g^{rr} [\partial_r I]^2 + g^{\phi\phi} (\partial_\phi I - eA_\phi)^2 + g^{zz} [\partial_z I]^2 \\ + 2g^{t\phi} (\partial_t I \partial_\phi I + e^2 A_t A_\phi - eA_t \partial_\phi I - eA_\phi \partial_t I) = 0 \end{aligned} \quad (8.38)$$

levando em conta a simetrias cilíndrica do espaço-tempo de fundo, tomamos

$$I = -Et + W(r) + J_1\phi + J_2z \quad (8.39)$$

em que E , J_1 e J_2 são respectivamente os números quânticos associados a energia, ao momento angular e ao momento na direção z . Substituindo (8.39) e isolando $W(r)$

$$\begin{aligned} W_\pm(r) = \pm \int dr \frac{\sqrt{l^4 \left(\lambda^2 - \frac{a^2}{r^2} f(r) \right)}}{f(r) (a^2 - \lambda^2 l^2)} \\ \times \sqrt{(E + eA_t)^2 + \frac{g^{\phi\phi}}{g^{tt}} (J_1 - eA_\phi)^2 + \frac{g^{zz}}{g^{tt}} J_2^2 + 2 \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}} (eA_\phi - J_1) (eA_t + E) + \frac{m^2}{g^{tt}}} \end{aligned} \quad (8.40)$$

⁴ Tomamos a constante de Boltzmann $k = 1$.

levando em conta o teorema de resíduos podemos efetuar a integração em torno do polo no horizonte de eventos r_+ [88]

$$W_{\pm}(r) = \pm \frac{i\pi \sqrt{(E + eA_t)^2 + \frac{\Omega^2}{l^4 \lambda^2} (J_1 - eA_\phi)^2 + \frac{2a}{l^2 \lambda} (eA_\phi - J_1) (eA_t + E)}}{f'(r_+) \left(\lambda - \frac{a^2}{l^2 \lambda} \right)}. \quad (8.41)$$

Assim, podemos obter mais uma vez a probabilidade de tunelamento de uma partícula de dentro para fora do horizonte da corda negra, que é dada por [52]

$$\Gamma = \exp[-4\text{Im}W_+] \quad (8.42)$$

que resulta em

$$\Gamma = \exp \left[- \frac{4\pi \sqrt{(E + eA_t)^2 + \frac{a^2}{l^4 \lambda^2} (J_1 - eA_\phi)^2 + \frac{2a}{l^2 \lambda} (eA_\phi - J_1) (eA_t + E)}}{\left(\frac{2r_+}{l^2} + \frac{2m}{r_+^2} - \frac{(3w_q + 1)N_q}{r_+^{3w_q + 2}} - \frac{2l^2 Q^2}{r_+^3} \right) \left(\lambda - \frac{a^2}{l^2 \lambda} \right)} \right]. \quad (8.43)$$

Comparando com $\Gamma = \exp[-\beta E]$, em que $\beta = (T_H^{-1})$ identificamos a temperatura Hawking para este caso

$$T_H = \frac{1}{4\pi \lambda} \left(\frac{2r_+}{l^2} + \frac{2m}{r_+^2} - \frac{(3w_q + 1)N_q}{r_+^{3w_q + 2}} - \frac{2l^2 Q^2}{r_+^3} \right). \quad (8.44)$$

Portanto, devemos notar que a temperatura (8.44) depende explicitamente do raio do horizonte de eventos, do parâmetro da constante cosmológica, da massa da corda negra, dos parâmetros da quintessencia, da carga e também do parâmetro de rotação introduzido no espaço-tempo.

9 Conclusões

Em conclusão, nessa dissertação abordamos a influência do campo gravitacional em partículas e campos, assim como as soluções de campo para as equações da relatividade geral. No capítulo 5, resolvemos a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica. Nesta análise, obtivemos uma solução exata inicialmente e, considerando a constante cosmológica suficientemente pequena, resolvemos as equações tanto para o caso livre quanto para o caso com um potencial escalar do tipo-Coulomb. Em seguida resolvemos a equação do oscilador de Klein-Gordon sujeito a um potencial do tipo-Coulomb no espaço-tempo em questão, e considerando a constante cosmológica suficientemente pequena, obtivemos o espectro de energia e verificamos que o mesmo depende dos parâmetros do problema.

No capítulo 6 resolvemos a equação de Dirac no espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica, considerando a constante cosmológica suficientemente pequena, calculamos o espectro de energia diante a implementação da condição de contorno de parede dura.

No capítulo 7 obtivemos os modos escalares para o espaço-tempo de Bonnor-Melvin com constante cosmológica, considerando a constante cosmológica suficientemente pequena e efetuamos a quantização do campo escalar via quantização canônica, e obtemos a energia de Casimir regularizada, mostrando que ela depende explicitamente da intensidade do campo.

No capítulo 8 generalizamos a solução de corda negra com quintessência já conhecida na literatura introduzindo um termo de carga na solução e calculamos a temperatura Hawking pelo método de tunelamento de partículas, mostramos então que a temperatura depende explicitamente dos parâmetros do problema, explicitamente o raio AdS, a carga da corda, os parâmetros de quintessência e por fim o parâmetro de rotação.

No quesito de perspectivas futuras, as técnicas obtidas no desenvolvimento do presente trabalho são bastante poderosas, e portanto todos os resultados obtidos são passíveis de generalização, a modo de exemplo, podemos investigar novas soluções das equações de campo da relatividade geral, podemos estudar outros tipo de potenciais nas equações de campo, investigar o efeito Casimir no espaço-tempo da corda negra e também considerar campos quânticos fermiônicos.

Referências

- 1 NOVELLO, M. *O que é Cosmologia?* [S.l.]: Zahar, 2006.
- 2 FERREIRA, P. G. *A teoria perfeita: Uma biografia da relatividade.* [S.l.]: Editora Companhia das Letras, 2017.
- 3 BARCELÓ, C.; LIBERATI, S.; VISSER, M. Analogue gravity. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 14, p. 1–159, 2011.
- 4 OLIVEIRA, C. C. de et al. Analogue models for schwarzschild and reissner-nordström spacetimes. *Physical Review D*, APS, v. 104, n. 2, p. 024036, 2021.
- 5 ERLICH, J. et al. QCD and a holographic model of hadrons. *Phys. Rev. Lett.*, v. 95, p. 261602, 2005.
- 6 GREFA, J. et al. Hot and dense quark-gluon plasma thermodynamics from holographic black holes. *Phys. Rev. D*, v. 104, n. 3, p. 034002, 2021.
- 7 SAKAI, T.; SUGIMOTO, S. Low energy hadron physics in holographic QCD. *Prog. Theor. Phys.*, v. 113, p. 843–882, 2005.
- 8 GRIFFITHS, J. B.; PODOLSKÝ, J. *Exact space-times in Einstein's general relativity.* [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- 9 KRAMER, D. et al. Exact solutions of einstein's field equations. *Berlin*, 1980.
- 10 LEMOS, J. P. S. Cylindrical black hole in general relativity. *Phys. Lett. B*, v. 353, p. 46–51, 1995.
- 11 BRONNIKOV, K. A.; SANTOS, N.; WANG, A. Cylindrical systems in general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 37, n. 11, p. 113002, 2020.
- 12 LEMOS, J. P. S.; ZANCHIN, V. T. Rotating charged black string and three-dimensional black holes. *Phys. Rev. D*, v. 54, p. 3840–3853, 1996.
- 13 HINDMARSH, M. . B.; KIBBLE, T. W. B. Cosmic strings. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 58, n. 5, p. 477, 1995.
- 14 ŽOFKA, M. Bonnor-melvin universe with a cosmological constant. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 4, p. 044058, 2019.
- 15 BARUT, A. O.; DURU, I. H. Exact Solutions of the Dirac Equation in Spatially Flat Robertson-walker Space-times. *Phys. Rev. D*, v. 36, p. 3705, 1987.
- 16 CHEN, C. H. et al. Gravitino fields in Schwarzschild black hole spacetimes. *Chin. J. Phys.*, v. 53, p. 110101, 2015.
- 17 DARIESCU, C.; DARIESCU, M.-A.; STELEA, C. Dirac Equation on the Kerr–Newman Spacetime and Heun Functions. *Adv. High Energy Phys.*, v. 2021, p. 5512735, 2021.

- 18 VIEIRA, H. S.; BEZERRA, V. B.; MUNIZ, C. R. Exact solutions of the Klein-Gordon equation in the Kerr-Newman background and Hawking radiation. *Annals Phys.*, v. 350, p. 14–28, 2014.
- 19 DEWITT, B. S. Quantum field theory in curved spacetime. *Physics Reports*, Elsevier, v. 19, n. 6, p. 295–357, 1975.
- 20 PARKER, L.; TOMS, D. *Quantum field theory in curved spacetime: quantized fields and gravity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.
- 21 BIRRELL, N. D.; BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. Quantum fields in curved space. Cambridge university press, 1984.
- 22 WALD, R. M. *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*. [S.l.]: University of Chicago press, 1994.
- 23 ROVELLI, C. Notes for a brief history of quantum gravity. *arXiv preprint gr-qc/0006061*, 2000.
- 24 CARLIP, S. Quantum gravity: a progress report. *Reports on progress in physics*, IOP Publishing, v. 64, n. 8, p. 885, 2001.
- 25 POLCHINSKI, J. *String theory*. [S.l.: s.n.], 2005.
- 26 PARIKH, M. K.; WILCZEK, F. Hawking radiation as tunneling. *Phys. Rev. Lett.*, v. 85, p. 5042–5045, 2000.
- 27 JIANG, Q.-Q.; WU, S.-Q.; CAI, X. Hawking radiation as tunneling from the Kerr and Kerr-Newman black holes. *Phys. Rev. D*, v. 73, p. 064003, 2006. [Erratum: *Phys.Rev.D* 73, 069902 (2006)].
- 28 CAI, R.-G.; CAO, L.-M.; HU, Y.-P. Hawking Radiation of Apparent Horizon in a FRW Universe. *Class. Quant. Grav.*, v. 26, p. 155018, 2009.
- 29 GAMBINI, R.; PULLIN, J. Loop quantization of the schwarzschild black hole. *Physical review letters*, APS, v. 110, n. 21, p. 211301, 2013.
- 30 SANTOS, L.; BARROS, C. j. Relativistic quantum motion of spin-0 particles under the influence of noninertial effects in the cosmic string spacetime. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, p. 1–8, 2018.
- 31 SANTOS, L.; BARROS, C. Scalar bosons under the influence of noninertial effects in the cosmic string spacetime. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 77, p. 1–7, 2017.
- 32 SAHARIAN, A. ” *Quantum Field Theory In Curved Spacetime*. 2020.
- 33 BEZERRA, V. B. et al. Thermal Casimir effect in Kerr spacetime with quintessence and massive gravitons. *Eur. Phys. J. C*, v. 77, n. 11, p. 787, 2017.
- 34 MUNIZ, C. R.; BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M. Casimir effect in space-times of rotating wormholes. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, n. 3, p. 209, 2021.
- 35 BEZERRA, V. B. et al. Casimir Effect in the Kerr Spacetime with Quintessence. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 32, n. 01, p. 1750005, 2016.

- 36 KARIM, M.; BOKHARI, A. H.; AHMEDOV, B. J. The Casimir force in the Schwarzschild metric. *Class. Quant. Grav.*, v. 17, p. 2459–2462, 2000.
- 37 SORGE, F. Casimir energy in Kerr space-time. *Phys. Rev. D*, v. 90, n. 8, p. 084050, 2014.
- 38 HARBACH, U.; HOSSENFELDER, S. The casimir effect in the presence of a minimal length. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 632, n. 2-3, p. 379–383, 2006.
- 39 ALI, M. S.; AHMED, F.; GHOSH, S. G. Black string surrounded by a static anisotropic quintessence fluid. *Annals Phys.*, v. 412, p. 168024, 2020.
- 40 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- 41 ŽOFKA, M. Selected exact solutions of einstein equations and their properties. 2021.
- 42 WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010.
- 43 COLLAS, P.; KLEIN, D. *The Dirac Equation in Curved Spacetime: A Guide for Calculations*. [S.l.]: Springer, 2019.
- 44 CARROLL, S. M. The cosmological constant. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 4, n. 1, p. 1–56, 2001.
- 45 ROVELLI, C.; VIDOTTO, F. *Covariant loop quantum gravity: an elementary introduction to quantum gravity and spinfoam theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.
- 46 BUNNEY, C. R.; GRADONI, G. Electromagnetism in curved space–time: Coupling doppler shifts and gravitational redshifts. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, IEEE, v. 64, n. 3, p. 40–51, 2021.
- 47 GREINER, W. et al. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Springer, 2000. v. 2.
- 48 GROSS, F. *Relativistic quantum mechanics and field theory*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999.
- 49 KOKE, C.; NOH, C.; ANGELAKIS, D. G. Dirac equation in 2-dimensional curved spacetime, particle creation, and coupled waveguide arrays. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 374, p. 162–178, 2016.
- 50 MUKHANOV, V.; WINITZKI, S. *Introduction to quantum effects in gravity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2007.
- 51 LIBERATI, S. Advanced general relativity and quantum field theory in curved spacetimes. 2020.
- 52 PARIKH, M. K.; WILCZEK, F. Hawking radiation as tunneling. *Physical review letters*, APS, v. 85, n. 24, p. 5042, 2000.
- 53 GOMES, D. A. Propriedades termodinâmicas de buracos negros com métricas que violam a simetria de lorentz. 2018.
- 54 KRONZ, F.; LUPHER, T. Quantum theory and mathematical rigor. 2004.

- 55 BRUNETTI, R. et al. *Advances in algebraic quantum field theory*. [S.l.]: Springer, 2015.
- 56 HAWKING, S. W. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, v. 43, p. 199–220, 1975. [Erratum: *Commun.Math.Phys.* 46, 206 (1976)].
- 57 HAWKING, S. W. Black hole explosions. *Nature*, v. 248, p. 30–31, 1974.
- 58 GOMES, D. A. *Propriedades termodinâmicas de buracos negros com métricas que violam a simetria de Lorentz*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceara, 2018.
- 59 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. [S.l.]: American Association of physics teachers, 1999.
- 60 SRINIVASAN, K.; PADMANABHAN, T. Particle production and complex path analysis. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 2, p. 024007, 1999.
- 61 MOHIDEEN, U.; ROY, A. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μ m. *Physical Review Letters*, APS, v. 81, n. 21, p. 4549, 1998.
- 62 MYERS, A. L. Natural system of units in general relativity.
- 63 GROUP, P. D. et al. Review of particle physics. *Progress of theoretical and experimental physics*, Oxford University Press, v. 2022, n. 8, p. 083C01, 2022.
- 64 HISCOCK, W. A. Exact gravitational field of a string. *Physical Review D*, APS, v. 31, n. 12, p. 3288, 1985.
- 65 VILENKIN, A. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Physical Review D*, APS, v. 23, n. 4, p. 852, 1981.
- 66 VILENKIN, A. Cosmic strings and domain walls. *Physics reports*, Elsevier, v. 121, n. 5, p. 263–315, 1985.
- 67 PETER, P.; GUIMARÃES, M.; ANDRADE, V. D. Dilatonic current-carrying cosmic strings. *Physical Review D*, APS, v. 67, n. 12, p. 123509, 2003.
- 68 CUNHA, M. et al. Relativistic landau levels in the rotating cosmic string spacetime. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 76, p. 1–7, 2016.
- 69 GÜRISOY, U.; KHARZEEV, D.; RAJAGOPAL, K. Magnetohydrodynamics, charged currents, and directed flow in heavy ion collisions. *Physical Review C*, APS, v. 89, n. 5, p. 054905, 2014.
- 70 VORONYUK, V. et al. Electromagnetic field evolution in relativistic heavy-ion collisions. *Physical Review C*, APS, v. 83, n. 5, p. 054911, 2011.
- 71 SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995.
- 72 BAKKE, K.; FURTADO, C. On the klein–gordon oscillator subject to a coulomb-type potential. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 355, p. 48–54, 2015.

- 73 BRUCE, S.; MINNING, P. The klein-gordon oscillator. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, Springer, v. 106, p. 711–713, 1993.
- 74 BRAGANÇA, E. et al. Relativistic quantum oscillators in the global monopole spacetime. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 80, p. 1–11, 2020.
- 75 CARVALHO, J. et al. Klein–gordon oscillator in kaluza–klein theory. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 76, p. 1–9, 2016.
- 76 AHMED, F. Klein-gordon oscillator in the presence of external fields in a cosmic space-time with a space-like dislocation and aharonov-bohm effect. *Advances in High Energy Physics*, Hindawi Limited, v. 2020, p. 1–10, 2020.
- 77 SANTOS, L.; MOTA, C.; BARROS, C. Klein–gordon oscillator in a topologically nontrivial space-time. *Advances in High Energy Physics*, Hindawi, v. 2019, 2019.
- 78 MOSTEPANENKO, V. M.; TRUNOV, N. N. *The Casimir effect and its applications*. Oxford, New York: Clarendon Press, 1997. ISBN 978-0-19-853998-8, 978-0-19-853998-8, 978-5-283-03922-0.
- 79 SANTOS, L.; JR, C. B. Rotational effects on the casimir energy in the space–time with one extra compactified dimension. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 33, n. 20, p. 1850122, 2018.
- 80 HOZ-CORONELL, V. D. L. et al. Repulsive casimir force in stationary axisymmetric spacetimes. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 82, n. 1, p. 50, 2022.
- 81 PERLMUTTER, S. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.
- 82 TSUJIKAWA, S. Quintessence: a review. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 30, n. 21, p. 214003, 2013.
- 83 KISELEV, V. V. Quintessence and black holes. *Class. Quant. Grav.*, v. 20, p. 1187–1198, 2003.
- 84 VISSER, M. The Kiselev black hole is neither perfect fluid, nor is it quintessence. *Class. Quant. Grav.*, v. 37, n. 4, p. 045001, 2020.
- 85 AUCKLY, D. Solving the quartic with a pencil. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 114, n. 1, p. 29–39, 2007.
- 86 GOHAR, H.; SAIFULLAH, K. Emission of scalar particles from cylindrical black holes. *Astrophysics and Space Science*, Springer, v. 343, p. 181–185, 2013.
- 87 RIZWAN, M.; SAIFULLAH, K. Hawking radiation from magnetized kerr–newman black hole. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 48, p. 1–16, 2016.
- 88 JUSUFI, K.; ÖVGÜN, A. Tunneling of massive vector particles from rotating charged black strings. *Astrophysics and Space Science*, Springer, v. 361, p. 1–7, 2016.
- 89 OLVER, F. W. et al. *NIST handbook of mathematical functions hardback and CD-ROM*. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.

-
- 90 ARSCOTT, F. M. *Heun's Differential Equations*. [S.l.]: Clarendon Press, 1995.
- 91 VIEIRA, H. S. *Alguns resultados acerca de campos escalares em buracos negros, cosmologia quântica e flutuações quânticas da geometria*. Tese (Doutorado) — Paraíba U., 2018.

APÊNDICE A – Funções Especiais

Este apêndice tem por objetivo apresentar as funções especiais utilizadas neste trabalho, juntamente com suas respectivas características. As definições completas dessas funções podem ser encontradas em [89, 59, 90, 91]

A.1 Função Zeta de Riemann

A função zeta de Riemann é definida por

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \quad (\text{A.1})$$

que converge para todo $x > 1$. Uma continuação analítica estende esta função para todo $x \in \mathbb{C}$, exceto $x = 1$ em que $\zeta(x)$ possui um polo. A função $\zeta(x)$ obtida via continuação analítica é, no entanto, finita em $x = -1$ cujo valor é dada por

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \quad (\text{A.2})$$

A.2 Função de Bessel

A equação de Bessel é dada por

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = 0 \quad (\text{A.3})$$

cujas soluções padrão são as funções de Bessel de primeiro tipo $J_\nu(z)$ e segundo tipo $Y_\nu(z)$, dadas respectivamente por

$$J_\nu = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \quad (\text{A.4})$$

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{A.5})$$

para ν fixo, e z suficientemente grande, temos as expressões assintóticas

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + e^{|\Im z|} o(1) \right), \quad (\text{A.6})$$

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + e^{|\Im z|} o(1) \right). \quad (\text{A.7})$$

A.3 Função de Kummer

A equação de Kummer é dada por

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (b - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0 \quad (\text{A.8})$$

cujas soluções padrão são a função de Kummer de primeiro tipo $M(a, b, z)$ e de segundo tipo $U(a, b, z)$

$$M(a, b, z) = {}_1F_1(a; b; z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{(b)_s s!} z^s \quad (\text{A.9})$$

$$U(a, b, z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} M(a, b, z) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} M(a-b+1, 2-b, z) \quad (\text{A.10})$$

em geral $U(a, b, z)$ diverge na origem e $M(a, b, z)$ se torna polinomial para $a = -n$ com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

A.4 Função de Legendre Associada

A equação de Legendre associada é dada por

$$(1-x^2) \frac{d^2 w}{dx^2} - 2x \frac{dw}{dx} + \left(\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2} \right) w = 0. \quad (\text{A.11})$$

Para o caso em que $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ e $x \in (-1, 1)$, temos com soluções as funções de Ferrer, respectivamente a função de Ferrer de primeiro tipo $P_\nu^\mu(x)$ e a função e Ferrer de segundo tipo $Q_\nu^\mu(x)$, dadas por:

$$P_\nu^\mu(x) = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\mu}{2}} \mathbf{F} \left(\nu+1, -\nu+1; 1-\mu; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right), \quad (\text{A.12})$$

$$Q_\nu^\mu(x) = \frac{\pi}{2 \sin(\mu\pi)} \left[\cos(\mu\pi) \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\mu}{2}} \mathbf{F} \left(\nu+1-\nu; 1-\mu; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right) - \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{\mu}{2}} \mathbf{F} \left(\nu+1-\nu; 1+\mu; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right) \right] \quad (\text{A.13})$$

em que

$$\mathbf{F}(a, b; c; z) = \frac{F(a, b; c; z)}{\Gamma(c)}, \quad (\text{A.14})$$

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)s!}. \quad (\text{A.15})$$

As funções de Ferrer também são conhecidas como as funções associadas de Legendre com corte. $P_\nu^\mu(x)$ existe para quaisquer valor de $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ e $Q_\nu^\mu(x)$ é indefinida para $\mu + \nu = -1, -2, -3, \dots$. Para ν suficientemente grande e μ fixo a expressão assintótica é

$$P_\nu^\mu(\cos(\theta)) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu-1)} \left[\frac{\sin(\nu\pi) - \sin(\mu\pi)}{\sin((\nu-\mu)\pi)} \right] \frac{1}{\nu^\mu} \left(\frac{\theta}{\sin(\theta)} \right)^{\frac{1}{2}} J_\mu \left(\left(\nu + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \quad (\text{A.16})$$

desprezando os fatores numéricos que podem ser absorvidos em constantes de normalização a seguinte relação de proporcionalidade é válida

$$P_{\nu}^{\mu}(\cos(\theta)) \sim \left(\frac{\theta}{\sin(\theta)}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\mu}\left(\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta\right). \quad (\text{A.17})$$

A.5 Função Biconfluente de Heun

A equação de Heun biconfluente é dada por

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \left(\frac{1+\alpha}{x} - \beta - 2x\right) \frac{dw}{dx} + \left\{(\gamma - \alpha - 2) - \frac{1}{2}[\delta + (1+\alpha)\beta] \frac{1}{x}\right\} w = 0 \quad (\text{A.18})$$

em que $w(x) = \text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ é a função biconfluente de Heun. Podemos assumir

$$w(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s \quad (\text{A.19})$$

de modo que para soluções polinomiais devemos tomar

$$\gamma - \alpha - 2 = 2n, \quad A_{n+1} = 0 \quad (\text{A.20})$$

em que $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, e

$$A_n = s!(1+\alpha)_s c_s = \frac{s!\Gamma(s+1+\alpha)c_s}{\Gamma(1+\alpha)}. \quad (\text{A.21})$$