Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval - Parte 2

Organização:
Méricles T. Moretti
Eduardo Sabel

MÉRICLES THADEU MORETTI

EDUARDO SABEL (ORGS.)

FLORILÉGIO DE PESQUISAS QUE ENVOLVEM A TEORIA SEMIOCOGNITIVA DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA DE RAYMOND DUVAL

(parte 2)

Edição GPEEM/UFSC

Florianópolis

2023

Agradecemos aos membros deste conselho editorial pelas contribuições que acrescentaram cientificidade e qualidade para esta obra.

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da
Universidade Federal de Santa Catarina

F636 Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval [recurso eletrônico] : (parte 2) / Méricles Thadeu Moretti, Eduardo Sabel (Orgs.). – Florianópolis : GPEEM/UFSC, 2023.

372 p. : il., gráf., tab.

E-book (PDF).
Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino da Matemática / UFSC
ISBN: 978-65-0079-987-3

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Semiótica. 3. Duval, Raymond, 1937-. I. Moretti, Méricles Thadeu (Org.). II. Sabel, Eduardo (Org.).

CDU 51:37

Elaborada pela bibliotecária Dirce Maris Nunes da Silva – CRB-14/333

APRESENTAÇÃO

O grupo de pesquisa GPEEM (Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino da Matemática), vinculado ao Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT/UFSC), tem a grata satisfação de apresentar o "Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval – parte 2" que dá continuidade a obra anterior, lançada em 2020.

Neste *e-book* você encontrará 14 capítulos resultantes de pesquisas que utilizaram a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida por Raymond Duval, para discutir o ensino e aprendizagem da matemática. Alguns capítulos são resultados de dissertações e tese orientadas pelo Professor Dr. Méricles Thadeu Moretti e outros, de autores convidados que também tem se debruçado na teoria de Duval.

O principal objetivo deste florilégio é contribuir no campo da pesquisa em Educação Matemática, difundindo a teoria de Raymond Duval como aporte teórico versátil para a análise, reflexão e problematização do ensino e aprendizagem da matemática

Link do "**Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval – parte 1**" lançado em 2020:https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/209074/florilegio.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Desejamos uma ótima leitura!

“A matemática se escreve mesmo quando nós a descrevemos, isto é, mesmo quando a explicamos oralmente. Na aula, é preciso, portanto, um quadro negro. No restaurante, rabiscamos um esquema ou um cálculo sobre um canto na folha de papel.

A poesia se murmura e se escuta mesmo quando a lemos. Ela tem um ritmo que é preciso entender e que fixa as palavras na memória como uma canção.

A observação física dos movimentos exige que utilizemos os instrumentos para medir o tempo, ângulos e distância. Ela exige também que anotemos as medidas e que refaçamos as observações. A reflexão é sempre silenciosa [...]”

(Raymond Duval, 2011)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Célia Finck Brandt

Roseli Búrigo

O presente ebook avança na divulgação de pesquisas que contaram com subsídios teóricos da teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval, tanto para a interpretação e análises de seus de resultados como para inferências possibilitadas por eles. São pesquisas realizadas por professores, mestrandos e doutorandos do programa de pós-graduação de Pós Graduação em Educação da UEPG, do programa de Pós Graduação Científica e Tecnológica da UFSC e de outros programas de pós-graduação de outras IES brasileiras, já concluídas ou em andamento. O ebook apresentará também um ensaio de Raymond Duval traduzido pelo Professor Dr Méricles Thadeu Moretti.

Apresentaremos na sequência uma breve resenha de cada capítulo, objetivando compartilhar com o leitor o que estará sendo contemplado nos diferentes capítulos e, ao mesmo tempo, seduzi-lo a adentrar em cada um, para usufruir da riqueza do detalhamento das pesquisas, por meio de sua disseminação, ou das discussões teóricas e suas contribuições para o campo da educação matemática.

O capítulo I conta com o ensaio de Raymond Duval intitulado "**O Prazer de Ver, Entender, Expressar e Inventar...em Matemática, é Claro![1]** contempla e volta-se para uma análise comparativa de um corpus de

[1]Tradução do original em francês "Le plaisir de voir, de comprendre, de direet d'inventer…enmathématiques, bien sûr !" publicado na Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT, Florianópolis, 2023. Disponível pelo link: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/96113

representações semióticas: fotos, desenhos, esboços, tabelas para e “figuras geométricas”. No ensaio o autor discute como analisar a transição entre os registros fotográficos e a realidade fotografada refletindo sobre as semelhanças e as diferenças entre os registros e os objetos materiais representados por esses registros Também como reconhecer as propriedades e objetos matemáticos cuja representação são figuras geométricas construídas por meio de instrumentos e de que maneira os critérios para distinguir entre unidades figurais 1D, 2D e 3D destacam as propriedades semiocognitivas das unidades figurais. No ensaio o autor nos mostra que as grades quadriculares parecem ser um auxílio para os alunos, pois elas caracterizam uma justaposição de unidades 2D homogêneas de área igual, que podem ser contadas imediatamente, e conclui se as grades quadriculadas constituem obstáculo ou não para ver ou aprender a ver. No ensaio o autor discute sobre a forma da terceira dimensão se impor visualmente em figuras produzidas na superfície 2D e sobre a ruptura e a criatividade das representações semióticas em relação às representações não semióticas. Uma análise sobre a hierarquização de unidades figurais na visualização geométrica é contemplada no ensaio. Em relação ao registro das línguas faladas o autor apresenta um mapeamento das unidades de sentido de um enunciado e em relação aos registros figurais o autor analisa as unidades figurais de uma configuração geométrica as características dos registros de escritos simbólicos. No que tange às representações icônicas o autor dirige seu olhar para a diferenciação entre imagem ou semelhança, para o equívoco existente entre noções de ícone e índice e sobre o critério de semelhança e a determinação dos graus de iconicidade. No ensaio o autor ainda se volta sobre a necessidade e a importância de conscientizar cada aluno sobre como trabalhar em matemática. Ao apontar a distinção dos registros que produzem representações semióticas o autor evidencia a descrição de todas as variáveis semiocognitivas que precisam ser levadas em conta para analisar o funcionamento cognitivo subjacente a todas as atividades matemáticas. O autor destaca que a regra de ouro dessa análise é que um registro só pode ser analisado com base nas variações que fazemos em outro registro, para ver o que muda ou permanece invariável no outro registro.

O capítulo II denominado "**Apresentando as Funções Discursivas na aprendizagem matemática segundo Raymond Duval**" de autoria de Eduardo Sabel, Célia Finck Brandt e Méricles Thadeu Moretti é um ensaio que se volta para o papel da linguagem matemática que é específica dessa área de conhecimento. Essa linguagem é inerente aos registros discursivos apresentados de diferentes formas: língua materna, linguagem algébrica com utilização de letras, linguagem formal. A linguagem por sua vez admite diferentes funções e operações que são primordiais para a aprendizagem dos objetos matemáticos. O ensaio se volta para as diferentes funções e seu papel na cognição, visto que são operações cognitivas: a função referencial de designação dos objetos, a função apofântica para construção de enunciados completos , a função de expansão discursiva para permitir a ampliação do discurso e a função de reflexividade para marcar o valor, o modo ou o estatuto acordado a uma expressão. As funções discursivas são importantes e fundamentais, pois é no conjunto das funções discursivas que se repousam as operações inerentes para a apropriação dos objetos matemáticos (DUVAL, 2011).

O ensaio apresenta alguns exemplos de situações do contexto de ensino-aprendizagem da matemática em que as funções discursivas estão presentes e caracterizam, por essa razão, contribuições significativas para serem contempladas no ensino de modo a consolidar a conceituação dos objetos matemáticos algébricos, geométricos e numéricos. Cabe evidenciar, no entanto, que “[...] as funções não são espontâneas, por isso, é preciso que o professor as compreenda e tenha consciência de que permeiam a aprendizagem matemática” (SABEL e MORETTI, 2022, p. 19) para que possa incorporá-las em suas práticas educativas.

O artigo apresentado no capítulo III denominado “**O Acesso a Tridimensionalidade na Cegueira: Elos Entre os Objetos Ostensivos e os Registros De Representação Semiótica**”, elaborado a partir de uma tese de doutorado[2],de autoria de Daiana Zanelato dos Anjos e Méricles Thadeu Moretti apresenta uma valiosa contribuição para a organização do ensino para estudantes cegos. O ensaio busca elencar as especificidades do acesso aos objetos de conhecimento em matemática na tridimensionalidade buscando uma efetividade para a aprendizagem destes estudantes, desde o material em braille elaborado até as atitudes de seus professores ao ensinar em sala de aula. O ensaio mostra que para a estudante cega a percepção da forma, em especial, a forma tridimensional, apresenta algumas especificidades. A pesquisa desenvolvida e relatada no artigo inclui o objeto tridimensional cubo transcrito na folha de papel em braile e representado de forma concreta por meio de uma vela. Esses dois materiais foram comparados em relação ao acesso do objeto de conhecimento por se tratar de uma estudante cega que precisaria utilizar o tato para perceber a forma do objeto. As análises foram

[2]A tese citada intitula-se “O que se revela quando o olhar não alcança? em busca do acesso semiocognitivo aos objetos do saber matemático por uma estudante cega”, disponível em://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/214335/PECT0408-T.pdf?sequence=-1&isAllowed=y

subsidiadas teoricamente pela teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2002,2011) visto que o acesso ao objeto matemático precisa de representações semióticas, apoiadas pela teoria de Percepção da Forma da Gestalt do Objeto (GOMES FILHO, 2008). Também pelos estudos de Bosh e Chevalard (1999) em se tratando dos objetos ostensivos e não ostensivos visto que não podem ser vistos, ditos, entendidos, percebidos ou mostrados por si mesmos e só podem ser acessados por meio de uma palavra, uma frase, um grafismo, uma escrita ou mesmo todo um discurso, no ensino da matemática. O artigo apresenta os resultados da pesquisa buscando responder às seguintes questões: como o estudante cego acessa a tridimensionalidade na aprendizagem em matemática, uma vez que o objeto de conhecimento é representado por meio de significantes em braille? E ainda, como se comporta a forma transcrita da tinta ao braille no que se refere aos artifícios que dão a ideia de volume nas formas comumente utilizadas em materiais impressos em tinta? A proposta do artigo teve como foco o objeto de conhecimento tridimensionalidade e no centro da discussão sobre o acesso a esse objeto está a questão da aprendizagem em matemática na e para a cegueira. Os autores apontam que a questão da tridimensionalidade é uma problemática para a aprendizagem daqueles que enxergam e, apesar de lançar olhares para a cegueira, é preciso refletir sobre a aprendizagem para todos.

No capítulo IV encontra-se artigo intitulado “**Representações Auxiliares na Aprendizagem Matemática**” de autoria de Lucilene Dal Medico Baerle, Daiana Zanelato dos Anjos e Méricles Thadeu Moretti que se volta para o papel que as representações auxiliares e intermediárias desempenham na organização do ensino voltado para a aprendizagem da matemática, para sua compreensão e para a resolução de problemas.

As diversas formas de organizar o ensino, segundo os autores, podem utilizar a argumentação direta e exemplos, uso da contrapositiva, da ilustração, dos esquemas, da descrição, entre outros, que podem, por sua vez, serem combinadas com alguma representação intermediária (DUVAL, 2004). A utilização necessária e imprescindível de mais de um registro de representação para a conceitualização dos objetos matemáticos, coloca em cena a operação cognitiva de conversão que pode enfrentar o fenômeno da não congruência semântica, aumentando o custo cognitivo para que a aprendizagem se efetive. Por essa razão o tema de artigo em questão aponta para as contribuições da utilização de representações intermediárias para minimizar esse custo cognitivo, ao verificar a necessidade de um olhar apurado sobre a intenção de uma investigação em relação às representações auxiliares, quando necessita de uma unidade cognitiva de transformação seja interna ou externa. No artigo encontramos tipos de representações intermediárias dentre os quais: o exemplo e o não exemplo, o contraexemplo, a contrapositiva, a ilustração e o esquema e a descrição. O artigo mostra que a utilização das representações intermediárias não só complementa as representações utilizadas como também auxiliam nos processos cognitivos envolvidos nas abordagens matemáticas para a compreensão. Além disso, podem até serem indispensáveis na aprendizagem matemática, pois permitem um enfretamento alternativo em situações em que a não congruência semântica se faz presente de forma incisiva.

No capítulo V artigo intitulado "**Relação Semiótica dos Registros Geométricos Tridimensionais com a Modulação dos Processos**

Atencionais: Um Recurso Didático para o Estudante com TDAH” de autoria de Adriano Moser discute a questão da democratização do processo

escolar que envolve a questão de garantir o acesso aos saberes envolvidos no processo da aprendizagem, que não se resumem somente a ofertar condições estruturais e pedagógicas, e sim que ponderem também o ato individual de querer mobilizar-se. Em relação aos processos individuais encontra-se a atenção o que implica em reconhecer que existem alunos com déficit de atenção que pode comprometer sua aprendizagem. A superação desse déficit exige processos cognitivos específicos que deverão ser contemplados na organização do ensino de objetos de conhecimento, dentre os quais os objetos matemáticos. Não só o déficit de atenção como também a hiperatividade. No artigo o autor se volta para as crianças com a particularidade comportamental do TDAH (Déficit de atenção/hiperatividade), dando uma maior ênfase ao Processo Atencional, de modo a contribuir para uma melhor compreensão de: como um aluno com TDAH interage em seu processo de aprendizagem da matemática, especificamente em geometria espacial. No artigo o autor aponta os benefícios do uso das representações de objetos geométricos tridimensionais para favorecer no aprendizado geométrico dos estudantes com TDAH. Isso é de fundamental importância, pois o desempenho escolar do estudante com TDAH, em decorrência das particularidades de seu sistema atencional, é provável que, apresente níveis de comprometimento, que sem uma intervenção dos envolvidos no processo de aprendizagem, sua passagem pela escola será marcada por fracassos, reprovações e a personificação da ideia de que não é capaz de aprender, anulando qualquer desejo de uma carreira acadêmica (PASTURA, 2005; DSM-5, 2014). No artigo o autor aponta que a compreensão geométrica exige que os registros figurais sejam vistos a partir de suas propriedades e das condições expostas no enunciado, um cenário exigente não só do ponto de vista didático, mas também do ponto de vista atencional, uma vez que, o educando precisará estabilizar o foco nos registros semióticos discriminados e inibir os estímulos distratores (DUVAL, 2012; LIMA, 2005). O estudante com TDAH, em decorrência da singularidade dos seus processos atencionais, como por exemplo, a baixa eficiência do sistema de modulação dos estímulos distratores e uma atenção executiva sustentada curta para estímulos com baixa atratividade, tende a nortear sua compreensão e resolução somente por meio da apreensão perceptiva imediata1, uma vez que, é mais facilmente alcançada (MORETTI, 2013). Um dos resultados encontrados por meio do estudo desenvolvido mostrou que a TRRS no que tange os conceitos geométricos, mostrou-se suficiente para reconhecer todos os elementos necessários para a compreensão geométrica por parte do estudante. Os estímulos visuais e táteis atuariam em conjunto a partir das representações tridimensionais dos objetos que estariam sendo relacionados no problema, criando assim um contexto em que as apreensões atuariam de forma mais sinérgicas.

O artigo intitulado "**Desconstrução Geométrica: Gesto Intelectual Chave ao Ensino e à Aprendizagem da Geometria**" , apresentado na capítulo VI, de autoria de Adalberto Cans e Méricles T. Moretti, teve por intenção apontar resultados parciais do estudo desenvolvido e contribuir, especialmente, com a aprendizagem da geometria, tendo em conta que para Duval (2022, p. 3, grifo nosso) "entre todos os domínios de conhecimentos que o aluno deve adentrar, **a geometria** é o que exige atividade cognitiva mais completa, porque ela solicita o gesto, a linguagem e o olhar. Nela é preciso construir, raciocinar e ver, indissociavelmente". O estudo encerra dois objetivos: o primeiro é externar, a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, a necessidade de se considerar a **desconstrução geométrica** como requisito básico fundamental à aprendizagem da geometria, dado que ela propicia formas diferenciadas e privilegiadas heuristicamente de ver as figuras geométricas. O segundo é aproximar a teoria semiocognitiva de Duval do Professor que se encontra na sala de aula, ator que se apropriando desse gesto intelectual, efetivamente poderá colocar em prática essa nova teoria de aprendizagem matemática. Na teoria em comento o que designamos por desconstrução geométrica aparece fracionada em três tipos de desconstrução das formas: **a desconstrução instrumental** para construir uma figura; **a reconfiguração visual** que favorece a descoberta de soluções para um problema; e **a desconstrução dimensional** considerada pelo autor o "ver" geométrico (Duval, 2022). No capítulo são apresentadas as características que diferem essas três operações cognitivas. De acordo com os autores a desconstrução é fundamental, porque para construir uma figura geométrica (2D/2D ou 3D/2D), o sujeito precisa, necessariamente, de um modelo, de uma representação, material ou mesmo mental, e essa construção se "materializa" na sua desconstrução em traços 1D/2D e pontos 0D/2D. "Dizendo de outra forma, a atividade de construção de figuras, quase sempre a configuração de formas 2D/2D ou 3D/2D, repousa na sua desconstrução em traços 1D/2D e 0D/2D" (DUVAL, 2022, p. 14). No capítulo fica evidenciado por que ensinar a desconstrução instrumental favorece a aprendizagem da geometria, visto que ela fornece uma maneira eficaz de transformar objetos geométricos ideais em representações semióticas típicas — as figuras geométricas, constituindo-se em ferramenta didática importante para a sua compreensão. Os autores apontam que a desconstrução geométrica na perspectiva da TRRS tem se mostrado uma metodologia didática espetacular na heurística de problemas de geometria. Para eles é como uma peça de encaixe perfeito no complexo quebra-cabeça aprendizagem da geometria. Entretanto, os autores sublinham que esses resultados promissores são ainda parciais.

O termo registro foi discutido e analisado no artigo apresentado no capítulo VII intitulado "**O Termo Registro em Pesquisas e as Práticas de Estudantes no Ensino Superior"**, de autoria de Afonso Henriques e Saddo Ag Almouloud, visto existir uma dualidade na interpretação do termo ora associado à um sistema de signos que possuem signos utilizados para a representação de objetos, ora associado a verbos como registrar, inscrever, anotar, expor etc., e até mesmo na ideia daquilo que se pode ver. Essa dualidade não é objeto de estudo não obstante é utilizado com uma dessas interpretações. Essa dualidade é identificada em práticas de estudantes que realizam tarefas de cálculo diferencial e integral imersas no modelo praxeológico de gestão de tarefas em diferentes registros de representação semióticos. Esse modelo praxeológico foi alimentado pela teoria antropológica do didático em sua vertente praxiológica. As tarefas analisadas são propostas tendo por subsídios a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), e o presente estudo se voltou para analisar sobre uma comunicação linguístico/matemática consensual que agrega os registros de representação semiótica na produção de conhecimentos de estudantes. A pesquisa que utilizou a metassíntese qualitativa como metodologia foi movida pelo seguinte questionamento: Como pesquisas que se utilizam da Teoria dos Registros de Representação Semióticas (TRRS) no Brasil lidam com a leitura e com a comunicação de dados com base nesta teoria em prol da difusão de conhecimento? A pesquisa teve por objetivo analisar pesquisas que se utilizam da TRRS no Brasil, com um olhar na leitura e na comunicação de dados colocados em ação com base nesta teoria. Como resultados os autores encontraram que a Metassíntese apontou que existe uma quantidade significativa de pesquisas que se interessam pela TRRS no Brasil. Os resultados revelaram que a dualidade do termo "*registro*" é quase ausente na leitura de pesquisas no âmbito teórico, mas é recorrente nas análises nelas apresentadas e também nas práticas de estudantes, ao realizarem tarefas que envolvem essa teoria.

A significação do termo vetor por acadêmicos do curso de engenharia da UNIJUÍ é objeto de análise da pesquisa desenvolvida no Programa Pós-Graduação em Educação nas Ciências da UNIJUÍ cujos resultados parciais são apresentados no artigo intitulado "**A Significação do Conceito Vetor: Entendimentos Apresentados por Acadêmico de Engenharia**" de autoria de Viviane Roncaglio, Luana Henrichsen, Isabel Koltermann Battisti e Cátia Maria Nehring apresentado no capítulo VIII. Essa análise foi realizada em episódios compreendendo atividades desenvolvidas por um acadêmico de engenharia, que está cursava a disciplina de Geometria Analítica e Vetores e que já estudou o conceito Vetor. Essas atividades se voltam para a identificação e localização de vetores a partir da representação geométrica. O estudo foi desenvolvido visto a dificuldade dos estudante3s de conceitualizar esse objeto de conhecimento e as atividades foram subsidiadas pela teoria de representações semióticas de Raymond Duval e pela metodológica de Modelagem Matemática. As relações de equipolência e de equivalência, e a noção de segmentos orientados, são conceitos que tanto estruturam o conceito Vetor como sustentam as operações envolvendo o mesmo e, por essa razão são contempladas nas atividades propostas para o ensino. Os autores colocam em evidência a importância da noção de vetor visto que a Engenharia se utiliza dessa linguagem para representar situações e/ou fenômenos envolvendo força, deslocamento, dimensionamento de vigas, entre outras, grandezas que para serem definidas necessitam de um módulo, de um sentido e de uma direção. A gravação da realização das atividades com foco, nas transcrições e explicitando os gestos, silêncios e interrogações dos estudantes caracterizaram os dados empíricos que foram submetidos às análises com foco no conceito Vetor, considerando direção, sentido e módulo e nas compreensões apresentadas por um estudante. Essas compreensões foram buscadas por meio de problematizações das questões das atividades dentre as quais: têm o mesmo sentido? Tem a mesma direção? Sentido e direção significam a mesma coisa? Quais as características de um vetor? O que significa módulo de um vetor? O estudo apontou que os sentidos acerca do conceito vetor atribuídos pelo estudante ainda estão distantes do significado conceitual do referido conceito. Também, que apesar do conceito vetor ser fundamental para acadêmicos de engenharia, considerando sua atividade profissional é um conceito que os estudantes não conseguem significar com facilidade, o que consequentemente, influencia na não apropriação das operações e na mobilização dos registros de representação deste conceito em diferentes contextos.

No capítulo IX os materiais didáticos manipulativos apresentados em livros didáticos são objeto de análises e discussões do artigo intitulado "**Representações de Materiais Manipuláveis em Livros Didáticos: Uma Análise Articulando os Registros de Representação e o Enfoque**

Ontossemiótico” de autoria de Eliandra Moraes Pires, Eduardo Sabel e Everaldo Silveira. O livro didático analisado é uma obra do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) adotado pela Secretaria Municipal de Educação de Florianópolis para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (2019-2022). Para fins de recorte da apresentação das ideias os autores resolveram analisar e refletir sobre o caso dos Blocos Base Dez (BBD), amplamente usados para o ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND). As análises foram subsidiadas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (TRRS) e no Enfoque Ontossemiótico (EOS) de Juan Godino e colaboradores. De acordo com os autores a TRRS contribui na compreensão das atividades cognitivas de tratamento e conversão, necessárias para a aprendizagem matemática, inclusive para o caso das *representações auxiliares* como os manipuláveis. Já o EOS apresenta a ideia dos *significados pessoais* e *institucionais* que os objetos matemáticos possuem, bem como os possíveis conflitos semióticos que podem surgir a partir desses materiais. No artigo foi destacada a relevância dos materiais manipulativos no ensino de matemática cuja análise foi realizada sobre lentes semióticas como são representados e indicados em livros didáticos de matemática dos Anos Iniciais. Essa análise foi subsidiada pela TRRS, com seus conceitos voltados às atividades cognitivas que as representações cumprem na aprendizagem matemática e alguns aspectos do EOS, em particular, a identificação de possíveis conflitos semióticos. O artigo aponta uma importante consideração sobre o papel de representação auxiliar que os manipuláveis podem ser empregados no ensino, pois apesar de não cumprirem as atividades cognitivas de um registro em determinada etapa da escolaridade tem potencial de contribuir na formulação de pensamentos matemáticos aritméticos (um exemplo utilizado refere-se ao Sistema de Numeração Decimal (SND). Os autores contribuem para o debate afirmando que analisar livros com subsídios da TRRS e do EOS, caracterizam lentes semióticas que se mostram eficazes para este tipo de análise pode ampliar os debates da pesquisa em educação matemática.

O capitulo X intitulado, "**Articulação dos Registros Algébricos e Gráficos no Geogebra para a Interpretação Global da Função Seno"** cuja autoria é de Jorge Cássio Costa Nóbriga, nos relata que a interpretação das representações gráficas é uma dificuldade comum no ensino de Matemática. Duval (2011) diz que uma razão dessa dificuldade está na "falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica" (p.97). Ele alerta que, em geral, o ensino se atém à passagem da equação para sua representação gráfica por meio da construção ponto a ponto, ou seja, associação entre pares ordenados de números e pontos do plano. Tal abordagem pode ser benéfica quando se pretende traçar os gráficos correspondentes de uma equação do primeiro ou segundo grau, favorecendo ainda quando se quer ler as coordenadas de algum ponto notável do gráfico (pontos de intersecção com os eixos, pontos de máximo ou mínimo, etc.). Todavia, não é adequada quando se pretende fazer a conversão inversa, ou seja, dado um registro gráfico, determinar a expressão algébrica equivalente. Como tentativa de superar tal dificuldade, uma primeira pergunta que pode ser feita em relação a essa abordagem é: como perceber e descrever as variáveis visuais? Duval (2009, p. 101) diz que é importante "[...] possibilitar a exploração de todas as variações possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes da representação em outro registro".

Uma segunda pergunta que podemos fazer é: Como possibilitar uma exploração que permita prever ou observar as variações concomitantes (simultâneas) de uma representação em outro registro? Quais recursos poderiam ser usados para possibilitar isso? Em Nóbriga (2019) e Nóbriga e Siple (2020) são apresentados alguns exemplos de atividades em que o GeoGebra é utilizado para permitir as variações concomitantes em situações de ensino de Geometria. Neste capítulo o autor pretende propor uma Abordagem de Interpretação Global integrada com a Abordagem Ponto a Ponto para o estudo da função Seno. Para isso, mostram exemplos de atividades criadas na plataforma GeoGebra que buscam permitir a intepretação de gráficos de funções trigonométricas, em particular a Função Seno, a partir das recomendações da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).

Luis Fernando Ferreira de Araújo, no capítulo XI, aborda a **"Função Quadrática para Estudantes Cegos por Meio da Interpretação Global De Propriedades Figurais"**, e discute o processo de inclusão dos estudantes cegos no ensino regular de ensino que requer o uso de recursos didáticos, que possibilitem a estes estudantes o acesso aos conteúdos escolares por meio dos sentidos remanescentes, como o tato e a audição. A ausência destes recursos, segundo o autor, torna o ensino de matemática desafiador, pois sem eles estudantes com cegueira não conseguem ter acesso aos objetos matemáticos nos seus diferentes registros de representação (ARAUJO, 2018). A função quadrática é um objeto matemático e assim como os demais objetos só pode ser acessada por meio de suas representações semióticas, sejam elas algébricas, gráficas, tabulares ou língua natural (DUVAL, 2012). Em hipótese, de acordo com o autor, o estudante cego poderia acessar as representações da função quadrática no registro algébrico por meio do Sistema de escrita e leitura Braile, e as representações no registro gráfico desde que estas estivessem em alto-relevo (ARAUJO, 2018). Com vistas ao acesso a este objeto matemático foi elaborado um caderno de atividades em alto-relevo e por meio do qual procurou-se investigar: a) se a partir de atividades propostas os estudantes cegos poderiam reconhecer estas representações e associá-las ao objeto função quadrática; b) se representações em alto-relevo e braille contribuíram no processo de conversão e coordenação entre os diferentes registros de representação. Neste artigo que é recorte de uma dissertação de mestrado, traz-se em síntese do resultado da investigação proposta com foco no item b) que diz respeito ao processo de conversão e coordenação entre os diferentes registros de representação. Para tanto buscou-se aporte em Cerqueira e Ferreira (2000) e Raymond Duval (2009; 2011; 2012). O autor defende que procedimento de interpretação global das propriedades figurais se mostrou um instrumento eficaz para apreensão do objeto matemático função, pois ofereceu ao estudante cego possibilidade integral de análise das representações gráficas e algébricas por meio dos sentidos remanescentes (tato e a audição).

No capítulo XII denominado **"Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva: Uma Possibilidade Metodológica de Formação em Geometria para Professores Pedagogos"** os autores Selma Felisbino Hillesheim e Méricles Thadeu Moretti abordam como a formação matemática dos professores pedagogos, especialmente no que tange a geometria. Frente a esse contexto conturbado, os autores buscam na teoria semiocognitiva de Duval, para a aprendizagem da geometria, subsídios teóricos que pudessem contribuir para a formação continuada de professores pedagogos. Nessa teoria, a aprendizagem da geometria passa pelo aperfeiçoamento do olhar, propiciando condições para que o aluno seja capaz de enxergar os elementos pertinentes numa figura em sinergia com o discurso na língua natural. Hillesheim (2021), visando desenvolver um programa de formação continuada para professores pedagogos que atendesse a perspectiva semiocognitiva para a aprendizagem da geometria, inspirou-se nas perspectivas metodológicas da Engenharia Didática de 1ª geração (ARTIGUE, 1996), da pesquisa Colaborativa (DESGAGNÉ, 2007), da Engenharia Didática Colaborativa (DEROUET, 2016) em sinergia com os indicativos de Duval (2003, 2004a, 2004b, 2005, 2011, 2014) para a aprendizagem da geometria, e viu despontar uma metodologia de pesquisa intitulada Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva (EDCSC). Nesse ambiente metodológico emergiu a seguinte problemática: qual a compreensão de aprendizagem da geometria que os professores pedagogos constroem, a partir de um programa de formação continuada, desenvolvido num ambiente de Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva? Buscando respostas para esse questionamento, Hillesheim (2021) desenvolveu um programa de formação com professores pedagogos que estavam atuando na rede municipal e estadual de ensino no município de São José – SC, no ano de 2021. Em se tratando de uma estrutura multifacetada, como é formação em matemática dos professores pedagogos, estamos cientes de que precisamos avançar ainda mais em uma proposta de formação na perspectiva semiocognitiva.

O capítulo XIII, relata sobre o “**Mapeamento das Pesquisas em Teoria dos Registros De Representação Semiótica em Programas de Pós-graduação Do Brasil De 1996 A 2019**” com autoria de Crislaine Costa

Daiana Zanelato dos Anjos, Méricles T. Moretti. Os autores descrevem que nos últimos anos, a Educação Matemática tem se tornado uma área de grande interesse para pesquisadores e educadores, possuindo diferentes teorias que têm sido usadas. Entre essas teorias, destaca-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, que é uma teoria semiocognitiva de aprendizagem, desenvolvida na década de 80 que tem se mostrado uma importante ferramenta para a prática pedagógica nas aulas de matemática. Nesse contexto, o objetivo deste artigo foi apontar o uso da TRRS nos Programas de Pós-Graduação do Brasil. Para isso, os autores optaram por realizar um mapeamento do tipo Estado do Conhecimento, utilizando como fonte de dados as dissertações de mestrado e teses de doutorado no recorte temporal de 1996 a 2019. Foram levantadas um o total de 266 trabalhos, sendo 225 dissertações e 41 teses. Observou-se aspectos da Teoria que foram pouco explorados, com destaque para as funções discursivas e à aprendizagem da álgebra, indicando a necessidade de mais investigações neste campo. Embora a aprendizagem da álgebra seja um tema comum em muitas pesquisas sobre objetos algébricos, notamos que apenas um estudo abordou esse aspecto de forma parcial. Os resultados indicam que essa Teoria tem sido amplamente adotada como fundamentação teórica em pesquisas brasileiras para compreender a aprendizagem de uma variedade de objetos de conhecimento em matemática.

O último artigo, no capítulo VIX, intitulado "**A Noção de Registro em Raymond Duval**" de Méricles T. Moretti, analisa um caminho possível de influências de como esse autor chegou a essa noção que é fundamental em sua teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática. Rediscute-se a ideia de registro com objetivo de apontar caminhos didáticos possíveis com a formatação de novos registros inspirada em autores, tais como, Benveniste e Frege. O que se pode perceber, neste texto bastante resumido da trajetória de Duval na construção de uma ideia de aprendizagem intelectual, é que ele imprimiu um lado cognitivista, que não havia, nos estudos de diferentes semiólogos, entre eles, Saussure, Peirce, Benveniste e Frege. Portanto, ler e compreender Duval, será preciso ter em mente sempre esses dois aspectos, o semiótico e o cognitivo.

Todos os artigos apresentados na presente coletânea caracterizam importantíssimas contribuições para a campo da Educação Matemática. Nesses artigos são relatados resultados de pesquisas ou apresentam reflexões teóricas a respeito da importância da TRRS para a conceitualização dos objetos matemáticos no que tange aos registros de representação. Cabe pontuar que esses resultados ou reflexões podem impactar diretamente a prática do professor em sala de aula em virtude de explicar o porquê das dificuldades dos alunos para a aprendizagem da matemática e de apontar caminhos para a condução do ensino da matemática nas escolas em diferentes gruas de ensino: fundamental, médio ou superior.

CAPÍTULO I

O PRAZER DE VER, ENTENDER, EXPRESSAR E INVENTAR... EM MATEMÁTICA, É CLARO![1]

Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d'inventer…en mathématiques, bien sûr !

Raymond Duval

Trad. Méricles T. Moretti

Eu não vi os 600 guarda-chuvas que cobriam a Praça François Villon em Aix-en-Provence, mas a foto que Méricles T. Moretti tirou deles. Essa foto chamou a minha atenção e a manteve lá. Ela lança uma luz surpreendente sobre os registros produtores de representações semióticas!
O meu objetivo não é explicar por que essa foto me chamou atenção ou como ela lança luz sobre os registros de representações semióticas, mas introduzir uma abordagem analítica e para responder as duas perguntas seguintes:
- O que fotos, imagens e figuras geométricas, todas produzidas sobre uma superfície 2D de um meio físico 3D, transmitem?
- Como podemos reconhecer o que cada uma dessas representações revela?
Para responder a essas duas perguntas, primeiro precisamos criar um *corpus* de representações visuais tão grande quanto possível.

[1] Tradução do original em francês "**Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d'inventer…en mathématiques, bien sûr** !" publicado na íntegra na Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT, Florianópolis, 2023. Disponível pelo link a seguir: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2023.e96113

PLANO DO TEXTO

I. Análise comparativa de um corpus de representações semióticas: fotos, desenhos, esboços, tabelas e “figuras geométricas”.

I.1 Fotografias e realidade fotografada: como podemos analisar a transição de uma para a outra?

I.2 Figuras geométricas construídas instrumentalmente: como podemos reconhecer rapidamente as propriedades e os objetos matemáticos visualizados?

I.3 As grades quadriculadas são um auxílio ou um obstáculo para ver ou aprender a ver?

I.4 Como a terceira dimensão se impõe visualmente em figuras produzidas na superfície 2D de um meio físico?

I.5 Ruptura e a criatividade das representações semióticas em relação às representações não semióticas.

I.6 A hierarquização de unidades figurais na visualização geométrica.

II Registros que produzem representações semióticas.

II.1 O registro das línguas faladas.

II.2 Mapeamento das unidades de sentido de um enunciado e das unidades figurais de uma configuração geométrica.

II.3 O registro de escritos simbólicos.

III Representações icônicas: imagem ou semelhança?

III.1 O equívoco das noções de ícone e índice.

III.2 O critério de semelhança e a determinação dos graus de iconicidade.

IV. Conscientizar cada aluno sobre como trabalhar em matemática.

I. ANÁLISE COMPARATIVA DE UM CORPUS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: FOTOS, DESENHOS, ESBOÇOS, TABELAS E “FIGURAS GEOMÉTRICAS”

I.1 A foto é a realidade fotografada: como podemos analisar a passagem de uma à outra?

Figura 1: Foto dos guarda-chuvas na Place François Villon em Aix-en Provence.

Vamos começar comparando a semelhança e, acima de tudo, a diferença entre a foto, que é uma representação, e os objetos materiais no espaço percebidos ao redor. O diagrama a seguir mostra a oposição entre o movimento para frente e para trás do olhar entre a foto, que é uma imagem 2D produzida em um suporte plano 2D, e os objetos materiais 3D enquadrados no campo de visão da câmera.

A foto que é **uma representação** → Enquadramento pelo sistema óptico → **Os 600** guarda-chuvas que foram fotografados

2D imagem / 2D Suporte físico plano ← Produção automática pelo aparelho ← **3D Guarda – chuvas abertos** / **3D Uma praça ensolarada**

Figura 2: Análise das transições entre a fotografia e a realidade fotografada

I.1.1 Critérios de análise. Agora nos concentremos no conteúdo da imagem 2D em vermelho. Essa imagem é uma CONFIGURAÇÃO do que chamaremos de unidades figurais 1D, 2D ou 3D. Unidades figurais são unidades que se destacam perceptualmente do fundo formado pela imagem 2D e que são imediatamente identificáveis por critérios puramente visuais. Assim:

- **As unidades figurais 1D** são linhas desenhadas em um fundo homogêneo, branco, preto ou verde ou da mesma cor. Mas os casos mais ricos são aqueles em que as linhas são desenhadas sobre um fundo heterogêneo, como aqui na imagem 2D, e especialmente com representações gráficas cartesianas em que o fundo é a grade quadriculada do plano por dois eixos graduados e orientados. **Na foto, as unidades figurais 1D são as linhas pretas** que reconhecemos como os cabos de cada guarda-chuva;

- As unidades figurais 2D são ângulos do plano ou superfícies delimitadas por um contorno fechado. Elas são imediatamente identificáveis pelas bordas de uma superfície colorida ou pelas unidades figurais 1D que traçam o contorno fechado. Na foto, os guarda-chuvas são identificados pelas cores das suas coberturas. Pode-se dizer que eles estão abertos pelos contornos fechados que contrastam a parte superior do guarda-chuva e a parte inferior sob a qual a gente se abriga. Também é possível perceber que os guarda-chuvas abertos têm uma borda octogonal. Por fim, reconhece-se as cores homogêneas e separadas das sombras dos guarda-chuvas que oferecem proteção contra o sol, e elas confirmam que as bordas dos guarda-chuvas abertos são octogonais. Essas unidades figurais 2D são, portanto, representações icônicas de objetos 3D/3D reais;

- As unidades figurais 3D são aquelas determinadas pela profundidade de campo. As unidades 2D aparecem em perspectiva mais ou menos próximas ou distantes e, portanto, mais ou menos nítidas, dependendo da profundidade de campo escolhida. Na foto, o tamanho das unidades figurais 2D, ou seja, os guarda-chuvas que estão sendo identificados, diminui rapidamente **em relação ao plano focal do sistema óptico** da câmera utilizada.

Os critérios para distinguir entre unidades figurais 1D, 2D e 3D destacam as propriedades semiocognitivas das unidades figurais. As unidades figurais podem ser justapostas ou separadas, e podem ser parcialmente sobrepostas. É essa propriedade semiocognitiva que torna as unidades figurais tão poderosas para a visualização.

I.1.2 Observações iniciais. Ao analisar a foto com base em todas as unidades figurais que podem ser reconhecidas perceptualmente em seu conteúdo, permite que façamos três observações seguintes:

Obs. 1 Há muito mais unidades em miniatura 1D e 2D do que unidades em miniatura 3D, cada uma correspondendo a um guarda-chuva aberto. Por exemplo, o guarda-chuva verde que aparece quase inteiramente na parte superior da foto tem (se não me engano):

- 4 bordas salientes e 4 bordas reentrantes entre as 8 pontas das nervuras;

- **16 linhas pretas que se juntam, às 8 linhas pretas** das nervuras adicionando às 8 hastes de suporte.

Tudo o que se precisa fazer é contar quantas unidades figurais 2D essas 8 bordas e essas 16 linhas pretas representam para identificar os guarda-chuvas na foto!

Obs. 2 Há muito menos unidades figurais 3D na foto do que cabos de guarda-chuva para contar. E todas as unidades figurais 2D acabam se fundindo no que parece ser o fim da praça ou sua continuação em um beco. De qualquer forma, é impossível dizer quantas centenas de guarda-chuvas existem.

Obs. 3 Não é possível ladrilhar por completo o plano com octógonos, como mostram as sombras que os guarda-chuvas projetam no chão. Eles estão separados, com lacunas de tamanho variável, dependendo da orientação de cada guarda-chuva. Esta foto fornece uma confirmação artística de um resultado matemático.

I.2 Figuras geométricas construídas instrumentalmente: como podemos reconhecer rapidamente as propriedades e os objetos matemáticos visualizados?

Todos os instrumentos usados para construir uma figura geométrica devem atender as duas exigências seguintes:

- Produzir um traçado 1D ou 2D correspondente a uma propriedade geométrica, ou seja, uma propriedade definida por uma declaração que é condensada semanticamente por um termo (linha reta, curva etc.);

- Levar em conta quantidades ou proporções de quantidades e, portanto, valores numéricos.

Essas duas exigências implicam que todas as unidades figurais podem ser livremente associadas a termos de propriedade ou a valores numéricos.

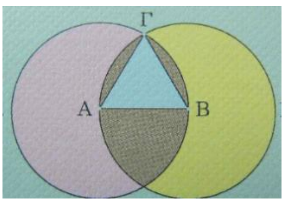
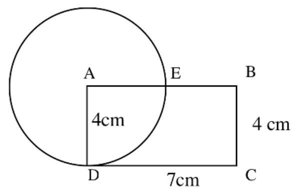
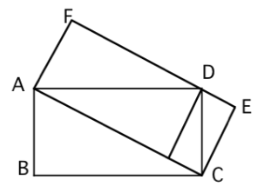
		
C1. Configuração codificada pela associação de 3 dos 4 pontos de interseção para designar unidades figurais 1D ou 2D	**C2.** Configuração duplamente codificada (letras e valores numéricos), e associada a uma declaração de problema	**C3.** Configuração codificada associada a um enunciado do problema

Figura 3: comparação de três configurações visuais 2D/2D

Analisemos as três configurações mostradas na Figura 3. Elas podem ser construídas com instrumentos que produzem, respectivamente, unidades figurais 1D (uma régua graduada ou não graduada) e unidades figurais 2D com o compasso ou gabaritos diferentes[3].

A CONFIGURAÇÃO C1 (Figura 3) compreende um total de 14 unidades figurais 1D ou 2D[4]:

- 4 unidades figurais 2D, 3 das quais estão **parcialmente** sobrepostas, uma sobre a outra, sendo a quarta marcada pelas três letras sobrepostas às outras três;

[3] Duval et Godin, 2005, pp. 6-12.
[4] Duval, 2015, pp 152-153.

- 5 unidades figurais 2D **perceptualmente ocultas** e não imediatamente reconhecíveis porque resultam da sobreposição das unidades 2D anteriores;

- 5 unidades 1D correspondentes **aos traçados dos dois círculos** e aos **três segmentos de reta** AB, AΓ e BΓ.

Essa configuração puramente visual parece ser de pouco interesse matemático, pois não está associada a nenhuma declaração de problema. Mas, do ponto de vista semiocognitivo, ela é crucial, pois nos permite criar **testes de reconhecimento rápido de unidades 2D ou 1D**, reconhecidas em menos **de 5 segundos** (ou seja, à primeira vista) e depois em **menos de 1 minuto**. Depois desse tempo, o olhar dos alunos não se altera mais.

A CONFIGURAÇÃO C2 (Figura 3) é mais simples, compreende um total de 9 unidades figurais 2D ou 1D:

- 2 unidades 2D parcialmente sobrepostas;

- 3 unidades 2D perceptualmente ocultadas;

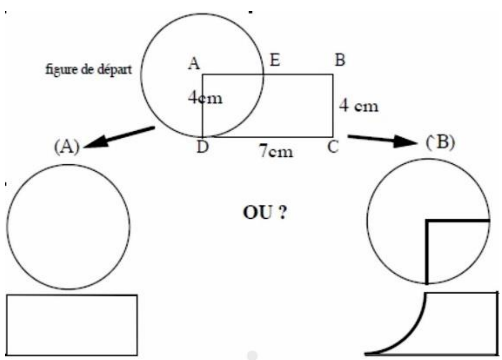
- 4 unidades 1D correspondentes aos traços necessários para a sua construção.

Seu interesse está no fato de que os valores numéricos estão associados aos traçados AD, BC e DC, que possibilita a apresentação do seguinte problema, que fez parte da avaliação nacional CE2 (~8 anos) - sixième (~11 anos) em setembro de 1997[5].

Para resolver o problema, é preciso escrever duas equações numéricas e associá-las. Mas, para escrevê-las, você precisa ser capaz de reconhecer rapidamente a unidade figural 2D (EBCD), **que está oculta pela sobreposição do círculo e do retângulo**, e as duas unidades figurais 1D, que são os dois raios AE e AD. O que os alunos viram e reconheceram?

[5] Ministère de l'Education Nationale. Évaluation CE2-6ème Repères nationaux- Septembre 1997, *Les Dossiers* n°100: Juin, 1998.

Este desenho à mão livre (os tamanhos reais estão em cm) mostra **um retângulo ABCD e um círculo com centro A que passa por D**. Encontre **o comprimento do segmento [EB].**



AE visto como um raio de 4 cm	9%
- Respostas medindo a linha (cerca de 2 cm na linha mostrada)	16%
- Respostas por estimativa perceptual (E quase no meio de AB: cerca de 3,5 cm)	26%
- Outras respostas	30%
- Sem resposta	16%

2 unidades 2D **parcialmente sobrepostas** ou 3 unidades 2D **perceptualmente ocultas**?

Resultados de uma amostra representativa de 2604 alunos de uma população de aproximadamente 800.000 alunos (11 anos de idade)

Figura 4: Questionários de avaliação para a Configuração C2

Os responsáveis pela avaliação (ver nota de rodapé 3) comentaram os resultados da seguinte forma:

> Esse exercício, que rompe com a geometria das escolas primárias, destaca **a dificuldade de passar da percepção visual para a análise de figuras**. Muito difícil no início do 6º ano, ele deve ser mais bem-sucedido no final do ano, pois essa habilidade é claramente visada no programa do 6º ano... (p. 186)

Os responsáveis pela avaliação não especificaram que a análise da figura deveria se basear nos termos usados para designar dois objetos geométricos, "retângulo" e "círculo", e que a figura deveria ser vista pelo prisma das propriedades desses dois objetos. Mas esses olhares não corrigem a "percepção visual", que continua impor a sua evidência. Isso ocorre porque o olhar deve ser capaz de reconhecer rapidamente duas unidades figurais que são diferentes daquelas do círculo e do retângulo, e duas unidades figurais 1D que pertencem ao círculo e não apenas ao retângulo.

No ano seguinte, o mesmo problema foi proposto com uma pequena modificação na configuração, de modo que o ponto de interseção E não estivesse mais quase no meio do lado AB. E catrapus! A porcentagem de alunos que viram AE apenas como um raio aumentou de 9% para 22%, a porcentagem de que fez medições na configuração aumentou de 16% para 39%, a porcentagem daqueles que deram outras respostas diminuiu e o número de não respostas aumentou[6].

A CONFIGURAÇÃO C3 (Figura 3) é mais complexa do que a Configuração C2 devido à justaposição e sobreposição de contornos fechados heterogêneos[7]. Ela compreende 17 unidades figurais no total:

- 8 unidades figurais 2D com contornos retangulares e triangulares sendo 3 unidades de forma retangular parcialmente sobrepostas, 5 unidades de forma triangular justapostas. A complexidade vem do fato de que duas dessas unidades de forma triangular (AD?) e (DC?) **estão justapostas,** ao mesmo tempo, a uma das três unidades de forma retangular e totalmente sobrepostas à mesma unidade de forma retangular (ADCB);

- 9 unidades em figurais 1D.

O enunciado do problema ao qual ele foi associado é uma comparação puramente qualitativa da área de dois retângulos, independentemente de qualquer valor numérico (Figura 5 a seguir).

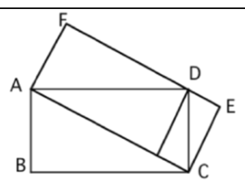
	ABCD é um retângulo. A área do retângulo ACEF é maior, menor ou igual à área do retângulo ABCD?

Figura 5: Comparação qualitativa das áreas

Para resolver esse problema, tudo o que é preciso saber é que a diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos congruentes. Você não precisa entender o conceito de área nem usar a fórmula para calcular as duas áreas. Esse problema foi proposto em 1981 para duas turmas de três níveis. Os alunos trabalharam individualmente[8].

---

[6] Ministère de l'Education Nationale. Évaluation CE2-6ème Repères nationaux- Septembre 1998, *Les Dossiers* n°111: Août, 1999.
[7] Duval, 2015, pp.152-153.
[8] Jamm, F. (1981).

	6ème 11-12 anos	5ème 12-13 anos	4ème 13-14 anos
Uma diagonal divide um retângulo em dois triângulos congruentes	**5%**	**0**	**6%**
Medida dos lados e depois bloqueio	**10%**	**30%**	**45%**
Invariância por meio de compensação (Piaget)	***10%***	***10%***	***2%***
Medida dos lados e depois o cálculo (2 ,5) × (5cm); (2,3) × (5,5cm)	**10%**	**14%**	**10%**

Figura 6: Resultados para o mesmo problema em três níveis escolares

Resultados quase idênticos foram registrados cerca de quarenta anos depois no Rally Transalpino de Matemática, que é único por ser realizado entre classes de níveis diferentes e não simplesmente entre alunos[9]. Essa recorrência levanta uma questão crucial para o ensino de geometria elementar, mesmo quando os objetivos são a utilização prática de algum conhecimento geométrico. Onde está o obstáculo recorrente que a grande maioria dos alunos não consegue superar?

Para resolver o problema associado à Configuração C3, tudo o que precisamos fazer **é observar a associação dupla das três unidades 1D**: AD, DC e AC. AD é um dos lados do retângulo ADCB e uma das diagonais do retângulo FD?A. Da mesma forma DC é tanto a diagonal do retângulo DEC? quanto um dos lados do retângulo ADCB.

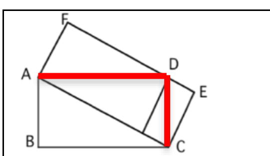
	A dificuldade está em reconhecer AD e DC como diagonais e não apenas como lados de dois pequenos retângulos oblíquos.

Figura 7: A condição semiocognitiva pré-requisitada

[9] Jaquet, F. (2018). Aires de polygones sur quadrillage/Aree di poligoni su una quadrettatura, La Gazette de Transalpie, n. 9, pp. 101-124.

Essas duas diagonais desconstroem a configuração inicial em duas unidades figurais retangulares 2D separadas (I na figura 8 abaixo). O retângulo oblíquo pode então ser dividido em três unidades triangulares 2D justapostas, e o retângulo horizontal entre duas unidades triangulares 2D (II). Podemos então ver a equivalência das áreas das unidades figurais. A equivalência das áreas das duas unidades figurais sobrepostas se torna visível.

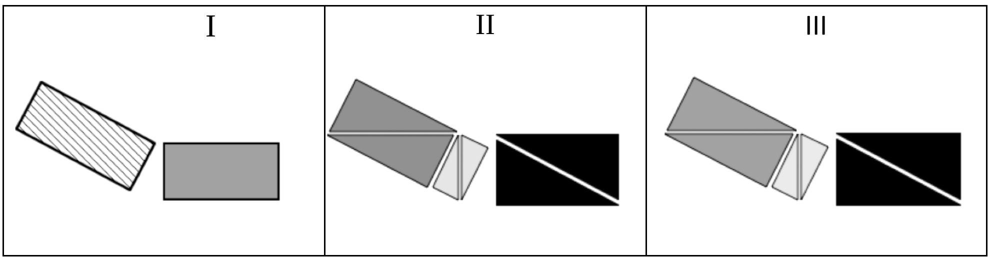


Figura 8: Decomposição e reconfiguração de duas unidades figurais 2D

Mas, para vê-lo, será preciso ser capaz de reconhecer rapidamente (em menos de algumas dezenas de segundos) todas as unidades figurais 2D e 1D nessa configuração 2D. Uma vez que, para vê-lo, não basta que alguém lhe explique ou mostre, o que implica a linearidade de várias centrações sucessivas do olhar; é preciso captá-lo sinopticamente em um único olhar, em outras palavras, em uma intuição. Descartes já havia explicado isso claramente em 1627 em *les Règles pour la direction de l'esprit* (as Regras para a Direção da Mente)[10]. A decomposição de uma unidade figural 1D que traçamos, das configurações figurais $\frac{\text{2D ou 3D}}{\text{2D}}$ em duas outras unidades figurais 2D justapostas e sua reconfiguração por justaposição ou por superposição em outra configuração 2D é o cerne de todos os tratamentos puramente figurais[11]. Os tratamentos puramente figurais são as abordagens heurísticas específicas da geometria elementar. E em todos os problemas que envolvem a comparação qualitativa de áreas de superfície, há muito tempo eles são considerados provas[12].

---

[10] As regras XI, XII, XIV-XVIII.
[11] Duval, 2014, p.16.
[12] Duval, 2015, p.162.

I. 3 As grades quadriculares são uma ajuda ou um obstáculo para ver ou aprender a ver?

O obstáculo recorrente que a grande maioria dos alunos não consegue superar parece ser a operação figural de sobrepor parcialmente duas unidades figurais 2D. Isso ocorre porque é muito difícil identificar e contar todas as unidades figurais 2D em uma configuração 2D, como pode ser visto neste exemplo e em muitos outros. Da mesma forma ocorre, se uma figura for dividida pelo traçado de uma unidade figural 1D que a separa em duas outras unidades figurais 2D.

As grades quadriculares, ao contrário, parecem ser um auxílio para os alunos. Elas são uma justaposição de unidades 2D homogêneas de área igual, que podem ser contadas imediatamente. E, do ponto de vista matemático, eles têm uma dupla vantagem: em primeiro lugar, podem ser usadas para pavimentar o plano e; em segundo lugar, podem ser usadas como uma ferramenta para dividir qualquer unidade figural 2D e resolver problemas qualitativos, como a comparação de áreas de duas superfícies diferentes.

Tomemos, por exemplo, as três configurações A, B e C que foram um dos problemas de pesquisa propostos no Transalpine Mathematical Rally (a coluna da esquerda na Figura 9).
Os resultados mostraram que isso não ajudou a superar o obstáculo. Por que não? O recurso à grade quadriculada força o olhar a se mover para frente e para trás entre duas configurações 2D:

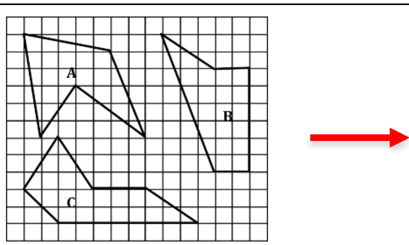
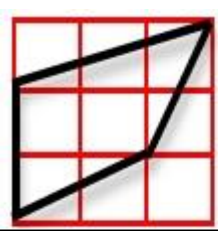
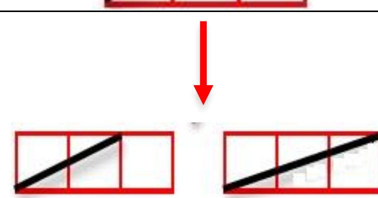
	
Patrícia e Brigitte olham para esses três polígonos e se perguntam se todos eles têm a mesma área. **Diga se as áreas desses três polígonos são iguais ou *diferentes*?** Mostre como você chegou às suas respostas?	

Figura 9: O que você precisa reconhecer em um relance

- A configuração da grade que forma a figura-fundo 2D;

- As três configurações A, B e C, que são apresentadas como as “Figuras geométricas” fornecidas para o problema a ser resolvido.

Um zoom em qualquer parte das três figuras geométricas dadas revela a mesma configuração sobre figura-fundo 2D. E essa configuração se divide em duas configurações retangulares de três casas e duas casas (coluna da direita na Figura 9).

Portanto, você precisa reconhecer rapidamente:

- Os cinco quadrados da grade, que são divididos em unidades retangulares de três quadrados e dois quadrados (as duas setas vermelhas);

- A unidade 1D que os divide em duas unidades.

É somente a partir dessa decomposição heurística, que é uma decomposição mereológica:

- Utilizar a propriedade geométrica da diagonal para contar o número de quadrados de cada retângulo e dividir por 2, sem contar duas vezes os quadrados onde as unidades retangulares se sobrepõem.

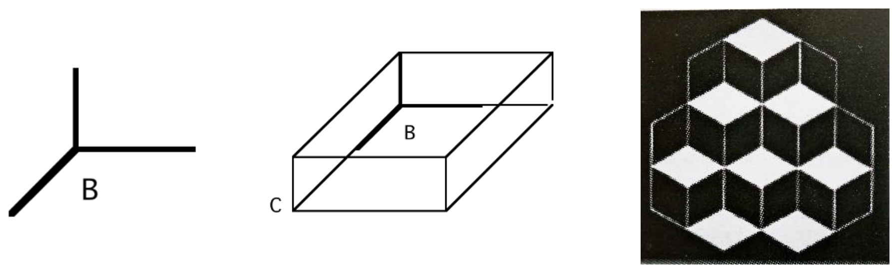
- Aplicar a fórmula para calcular a área dos retângulos.

De outra forma, a grade se torna um empecilho.

I.4 Como a terceira dimensão se impõe visualmente nas figuras produzidas na superfície 2D de uma mídia física?

Para responder a essa pergunta, precisamos levar em conta dois tipos de fenômenos que concerne à relação do olhar e as representações instrumentalmente produzidas sobre uma superfície 2D. A primeira é uma mudança repentina no olhar das unidades figurais 1D, que são imediatamente reconhecidas como as bordas de unidades figurais 2D ou como as bordas das unidades figurais 3D. E nenhuma hipótese dada sobre o que a figura representa nos permite fazer, como podemos ver nas três configurações da Figura 10.

O ponto B pode ser visto como o ponto de interseção de 3 unidades figurais no plano ou como o vértice de um sólido 3D. E o preenchimento em preto ou branco das unidades figurais na terceira configuração significa que você precisa ver os cubos, que aparecem recuados ou em relevo. Mas em um caso haverá seis cubos, e no outro, sete! De modo mais geral, quando um contraste de cores delimita zonas 2D, uma configuração de unidades 2D é percebida como uma justaposição de unidades figurais 3D, algumas parecendo salientes e outras recuadas.

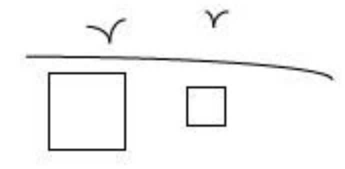


Figuras transparentes: alternam o número de dimensões. A parte superior da caixa e o lado CB que estão totalmente visíveis ou a face interior e o lado CB?

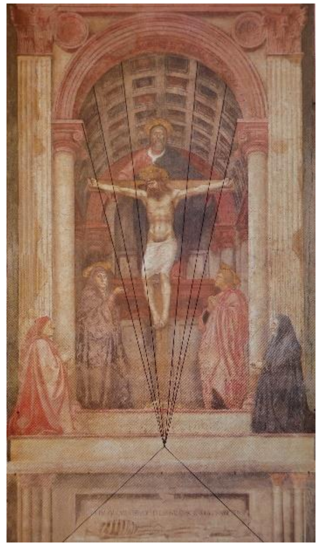
Figuras em preto e branco ou em cores: nenhuma alteração no número de dimensões. (D'Amore 2015, p. 441)

Figura 10: A ambiguidade dos desenhos e a mudança do olhar

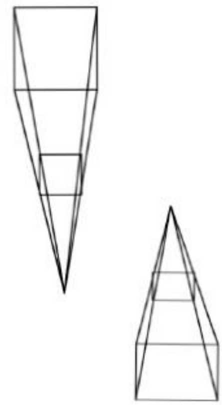
O segundo tipo de fenômeno afeta diretamente nossa **percepção da terceira dimensão**. Para analisar isso, precisamos comparar a maneira como a terceira dimensão se impõe à nossa percepção do espaço 3D no qual nos movemos, com a construção da perspectiva em um desenho e com as configurações 2D construídas para visualizar relações homotéticas por meio da interseção de linhas retas em um ponto além das unidades figurais 2D que elas unem, como pode ser visto nas três configurações da Figura 11.



1. Percepção da terceira dimensão do espaço



2. A Trindade, afresco na igreja de Santa Maria Novella em Florença. Masaccio, 1425-1426



3. Razões homotéticas de linhas retas concorrentes.[13]

Figura 11: a terceira dimensão: percepção, representação em perspectiva e homoteticidade de linhas que se cruzam[14]

Duas noções são importantes para entender a diferença entre a percepção do espaço 3D e as duas construções possíveis da representação da terceira dimensão: a primeira é o **horizonte**, popularizado por Husserl em sua análise da modalidade cognitiva da percepção; a segunda é a linha, não como uma unidade figural 1D que o olhar distinguiria como tal, mas como uma **linha de fuga**, ou seja, como a distância cada vez maior das unidades figurais 2D do olhar que as mira.

Podemos, então, entender por que a percepção da terceira dimensão do espaço se opõe às duas possíveis representações da terceira dimensão e como essas duas possíveis representações são radicalmente diferentes uma da outra:

[13] Duval, 1995, p. 153, Fig.7. Classification of the homothecic plane representation. Lemonidis, 1990, pp.58-59.
[14] Duval, 2018, p. 236.

- A linha do horizonte é **a linha de fuga da superfície 2D da Terra**, que separa todos **os corpos que estão acima dessa linha daqueles que estão abaixo dela**, mas na superfície da Terra;

- O que é comum a ambas as representações é a organização da configuração 2D a partir **de um ponto de fuga**. No famoso afresco de Masaccio (ver Figura 11), o ponto de fuga está no horizonte, na altura dos olhos[15];

- Na terceira configuração, não há linha do horizonte. As quatro linhas retas concorrentes começam dos vértices da maior unidade figural 2D e vão em direção a **um ponto de fuga fora** de todas as outras unidades figurais, que diminuem segundo proporções homotéticas.

Recapitulando: Uma comparação dos vários tipos possíveis de visualização que podem ser intencionalmente produzidos em um suporte 2D, e dos quais acabamos de apresentar um *corpus* nas Figuras 3, 6, 7, 8, 9 e 10, nos permite identificar os vários fatores semiocognitivos que influenciam o que o olhar pode ou não ver.

Olhar implica necessariamente que **reconhecemos tudo ou parte do que vemos**. Por que o ensino de geometria elementar no ensino básico é organizado sem uma educação sobre o olhar? Ora, a educação do olhar consiste em **conscientizar os alunos sobre as rupturas** e, portanto, sobre os saltos semiocognitivos a serem feitos ao passar de um tipo a outro de representação visual.

I.5 Ruptura e criatividade das representações semióticas em relação às representações não semióticas.

A foto de 600 guarda-chuvas abertos para cobrir uma praça é uma representação icônica e não semiótica. De modo mais geral, uma foto, se não for posteriormente retrabalhada, é o tipo de representação icônica por excelência, uma vez reproduz objetivamente a realidade percebida que captura. Além disso, as fotos são usadas como prova de que uma coisa realmente era o que se dizia ser. Ao contrário, as representações semióticas, produzidas à mão livre, como esboços ou desenhos, e aquelas construídas instrumentalmente, como “figuras geométricas”, são visualizações que simplificam e organizam o que o olho vê de acordo com tudo o que ele já viu e memorizou. Em outras palavras, elas se distanciam da realidade concreta

[15] Thuillier, 1984.

cuja percepção imediata impõe evidências, excluindo todo o resto, e objetivam o que reconhecemos ou entendemos no que vemos.
Uma comparação entre a fotografia dos guarda-chuvas em Aix-en-Provence, a percepção dos objetos materiais no espaço ao redor e a visualização específica das representações semióticas mostram onde e como suas respectivas produções se opõem, como pode ser visto nos diagramas da Figura 12 a seguir.

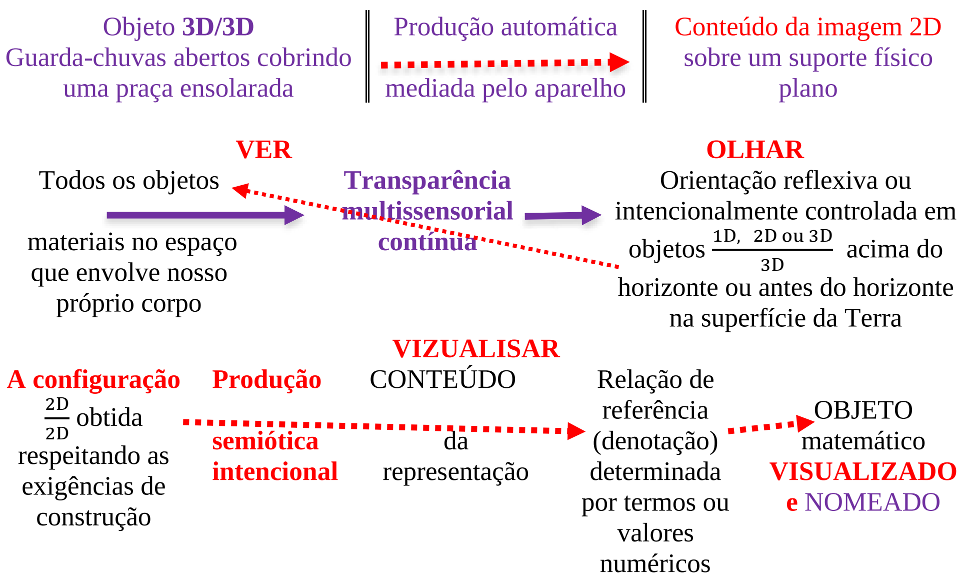


Figura 12: Os três processos cognitivos para reconhecer o que vemos ou olhamos

A relação de causalidade entre os objetos percebidos ou representados é invertida com as representações semióticas. Essa inversão explica a ruptura que elas operam com as fotografias e com a percepção dos objetos no espaço. E o modo de produção das representações semióticas é intencional e imediata e retroativamente controlável no processo passo a passo de sua produção. A natureza intencional de sua produção explica a criatividade dos registros que produzem representações semióticas e as possibilidades ilimitadas de exploração que elas oferecem. Para verificar isso, basta observar como a terceira dimensão do espaço é imposta visualmente (ver item I e configurações 1 e 3 na Figura 11).

I.6 Hierarquização de unidades figurais na visualização geométrica.

A hierarquização das unidades figurais 1D, 2D e 3D na visualização geométrica é o resultado mais importante de todas as análises anteriores. Em relação à primeira pergunta, "O que as figuras geométricas nos permitem ver?", que comanda essas análises, essa hierarquização significa duas coisas:

- As unidades figurais **menores se fundem com a unidade figural maior cujo reconhecimento é necessário**. Dessa forma, as unidades figurais 1D tornam-se **as bordas** de um contorno fechado 2D, como os lados de um polígono ou as diagonais que o dividem em duas unidades figurais 3D. Por exemplo, na Figura 4, a unidade de figura AD se funde com a unidade ABCD, que é uma unidade de figural 2D. Da mesma forma, as unidades figurais 2D tornam-se **as faces** de uma unidade de figura 3D e as unidades de figura 1D tornam-se **as bordas**. Por exemplo, na Figura 10, as unidades figurais 1D que irradiam do ponto B tornam-se as bordas da unidade figural 3D;

- Cada unidade figural de dimensão inferior pode pertencer a **duas unidades dimensionais superiores,** se essas duas unidades estiverem **parcialmente sobrepostas**. Por exemplo, na Figura 7, as duas unidades figurais AD e DC, que são unidades figurais 1D, pertencem a duas unidades figurais 2D diferentes.

A desconstrução de unidades figurais 1D em configurações de unidades figurais 0D é frequentemente negligenciada na construção instrumental de configurações 2D. Se a régua e o compasso forem usados, recorre-se a uma borracha para apagar os suportes retos que tendem a interromper perceptualmente o reconhecimento de contornos fechados. E se você usar um software de construção, o contorno fechado aparecerá imediatamente.

As setas azuis, descendentes e depois ascendentes, na Figura 13 a seguir mostram a complexidade visual da "desconstrução dimensional de formas", que não deve ser confundida com a decomposição de unidades figurativas 2D e sua reconfiguração em outras configurações 2D (supra, Figura 8)[16].

---

[16] Duval, 2005, p. 47.

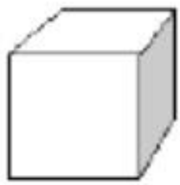
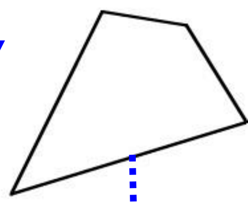
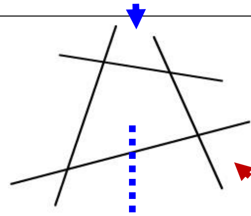
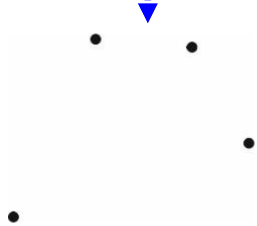
Número de dimensões	**Visualização**	USO MATEMÁTICO DA LINGUAGEM E DO VOCABULÁRIO GEOMÉTRICO
3D		**Um poliedro**
2D		Um polígono: - a **face de um poliedro**; - ou a figura obtida **por um plano de interseção** com um poliedro.
1D		**Retas** que são: - perpendiculares, paralelas ou que se cruzam; - ou **suporte de segmentos**.
0D		**Pontos de interseção** que são: - as extremidades de um segmento; - o ponto médio de um segmento; - os vértices de um polígono.

Figura 13: Desconstrução dimensional das formas percebidas.

II REGISTROS QUE PRODUZEM REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

As configurações geométricas $\frac{\text{1D, 2D ou 3D}}{\text{2D}}$ podem ser transformadas em outras configurações visuais para resolver problemas ou provar qualitativamente as propriedades de objetos geométricos 1D, 2D ou 3D (ver Figuras 7 e 8). É um registro que produz representações semióticas, pois permite que você produza quantas configurações geométricas quiser e, acima de tudo, substitua uma pela outra para destacar visualmente as invariâncias (**III** da Figura 14 a seguir)[17].

Mas esses tratamentos puramente figurais necessariamente mobilizam pelo menos um dos dois registros discursivos: da linguagem natural ou da escrita numérica ou algébrica (**I** e **III** da Figura 14). A linguagem natural é necessária para apresentar um problema em relação a uma propriedade geométrica ou a um cálculo que envolva números e/ou quantidades. E isso exige que mapeemos unidades de sentido produzidas por uma das operações específicas da linguagem em outras unidades de sentido produzidas por uma das operações específicas do registro de escritas simbólicas (**III** da Figura 14) ou do registro de configurações geométricas (**II** da Figura 14). Nesse sentido, a convicção de que ele teria provas sem usar a linguagem natural é falaciosa[18]. É possível provar sem palavras, mas não sem escrever equações ao lado de configurações geométricas, em outras palavras, sem mobilizar o registro discursivo da escrita simbólica (**III** da Figura 14).

As questões levantadas pela análise da atividade matemática e da resolução de problemas matemáticos, portanto, dizem respeito às conversões de representações semióticas em representações de um outro registro. Essas conversões são substituições *salva denotatione* e não *salva veritate*[19]. Em outras palavras, as conversões que alteram completamente o conteúdo de uma determinada representação são feitas sem alterar o objeto ao qual a representação se refere e sem necessidade de justificativa ou prova.

---

[17] Duval, 2015, pp.160-163. Duval, 2017, pp. 61-62.
[18] Nelsen, Roger. B., (1993). *Proofs without Words. Exercises in visual Thinking*. MAA.
[19] Ver o apêndice "Expressões completas e expressões incompletas".

	Registros **DISCURSIVOS.** Linearidade **das expressões que são unidades de significado**	Registros **NÃO DISCURSIVOS**: Compreensão de uma organização bidimensional de unidades figurais 1D, 2D ou 3D
Registros **multifuncionais**: o tratamento é **NÃO ALGORÍTMIZÁVEL**	**I. LÍNGUAS FALADAS: três operações hierarquicamente incluídas** (nomeação de objetos, enunciação e raciocínio) Dois modos de produção: ***a fala e a escrita***	**II. Configuração geométrica**: **três operações independentes** (construção instrumental, divisão e reconfiguração mereológica, desconstrução dimensional) **ICÔNICO**: desenho, esboço
Registros **monofuncional**: o processamento é **ALGORITMIZÁVEL**	**III. ESCRITA SIMBÓLICA** (sistemas de numeração, escrita algébrica, linguagens formais). **Operações de substituição ilimitadas.** Modo de produção: **escrita**	**IV. GRÁFICOS ESQUEMAS:** Junções entre pontos, marcadas por **setas** **GRÁFICOS CARTESIANOS:** Três operações (zoom, interpolação e mudança de eixo)

Figura 14: Os quatro tipos de registros que produzem representações semióticas[20]

Essas conversões são baseadas na CORRESPONDÊNCIA ENTRE UNIDADES DE SENTIDO que são produzidas por uma das operações específicas do registro de origem com outras unidades de sentido produzidas por uma das operações específicas do registro de destino.

II.1 O registro das línguas faladas

As línguas naturais faladas são o primeiro registro a produzir representações semióticas.

A PALAVRA mobiliza um idioma comum compartilhado com outros falantes (francês, inglês, mandarim). Os elementos básicos de um idioma comum são as palavras. Mas o que um falante diz e o que o ouvinte ouve são unidades de sentido expressas intencionalmente. Ora, nem todas as palavras desempenham a mesma função no que um interlocutor diz:

- Que podem ser **associadas a coisas ou a imagens** e formam o léxico da linguagem;
- Que podem ser associadas a relações ou ações (verbos, negação) e podem ser usados para formar **expressões completas** que são gramaticalmente chamadas de “frases” ou, logicamente de “proposições”;

[20] Duval, 2017, p. 85, Fig.4.6.

- Que são, enfim, operadores associados às palavras que formam o léxico da língua (determinantes, modalizadores, negação) e formam **expressões incompletas**.

Expressões incompletas são unidades de sentido que não são nem verdadeiras nem falsas. Seu único objetivo é permitir que se identifique claramente e, portanto, reconheça sobre o que o locutor fala. O sentido das expressões completas está, ao contrário, no valor que elas têm desde o início. E aqui podemos distinguir três dimensões do sentido, dependendo se o valor é um valor de verdade (verdadeiro, falso, indecidível), um valor epistêmico (evidente, plausível, possível, absurdo) ou um valor pragmático (apelo, pedido, ordem, promessa). Na dimensão pragmática, a fala é um ato que envolve o locutor ou o seu interlocutor. Para formar as unidades de sentido específicas de cada um desses quatro níveis de organização do discurso, há várias OPERAÇÕES DISCURSIVAS possíveis, e não apenas uma. Um idioma permite vincular palavras com diferentes funções para formar **unidades de sentido** em quatro níveis de organização do discurso:

- Designar objetos usando três operações discursivas diferentes ou unidades de sentido em um registro diferente;

- Enunciar uma expressão completa e diferenciar os estatutos, os valores verdade ou os valores epistêmicos das proposições enunciadas e o grau em que elas são assumidas por aquele que a apresenta. Essa diferenciação pode ou não ser marcada linguisticamente. Mas é fundamental para entender como funciona o raciocínio e a ruptura entre a argumentação e todas as deduções válidas, e a ironia!

- Para ligar em uma declaração coerente de **expressões completas** para formar uma narrativa, uma descrição, uma explicação ou desenvolvimento de um raciocínio. Uma expressão completa pode conter duas proposições (em enunciados de teoremas, por exemplo).

O que divide radicalmente os idiomas falados, ou que já foram falados, é a invenção da **ESCRITA**, uma vez que a produção oral impõe restrições de economia às expressões completas ou incompletas que um locutor pode dizer e que seu interlocutor pode ouvir. Pelo contrário, a produção escrita nos libera de todas as restrições associadas à linearidade do discurso e às capacidades de memória de curto e longo prazo. Ela nos permite desenvolver o poder da língua para ampliar o escopo de expressões incompletas e, acima de tudo, para desencadear o questionamento, o distanciamento e o controle dos processos de pensamento que são a dinâmica imanente de todo conhecimento científico. Aqui, a escrita não cumpre mais uma função comunicativa, mas o que chamamos de **auto interação do eu consigo mesmo**, e que constitui o próprio ato de pensar[21].

Com base em diferentes operações discursivas:

- Desenvolver grades para analisar as produções orais e escritas de cada aluno, bem como as diferentes formulações usadas nos livros didáticos;

- Diagnosticar a origem das dificuldades que estão bloqueando um aluno, que geralmente não são as mesmas de um aluno para outro.

II. 2 Mapeamento das unidades de sentido em um enunciado para as unidades figurais de uma configuração geométrica

Para que esse mapeamento seja possível, é preciso codificar os pontos que são pontos de interseção, ou seja, unidades figurais 0D (vértice, centro, ponto médio, extremidade), por letras. É essa codificação que permite as passagens unicamente nas operações discursivas de designação as unidades figurais de menor dimensão. As unidades de sentido no enunciado a serem colocadas em correspondência com as unidades figurais 1D ou 2D são as expressões incompletas as quais as operações discursivas de designação permitem separar do enunciado. No problema apresentado na Figura 4, essas unidades de significado são:

Operações discursivas de designação	Unidade de sentido do enunciado	Unidades de configuração 2D
Determinação: quantificador	Um retângulo ABCD	Unidade figural **2D**
Descrição definida	Um círculo DE centro A QUE PASSA POR D.	Unidade figural **2D**
Construção genitiva	O comprimento do segmento EB.	Unidade figural 1D

Figura 15: correspondências relevantes a serem reconhecidas

Por fim, deve-se observar que esse problema mistura vocabulário geométrico (retângulo, círculo, segmento) com dados quantitativos que são codificados na configuração 2D fornecida para apresentar os dados do problema. Esse não

[21] Duval, 2000, pp. 146, 162,164.

é o caso do problema da Figura 5, no qual **não há dados numéricos** que permitam operações de medição e cálculo. Observemos que não há menção no enunciado das unidades figurais 1D, que pertencem, ao mesmo tempo, a uma das três unidades 2D retangulares como a diagonal de uma e como o lado ou a borda da outra.

Operações discursivas de designação e predicação	**Unidades de sentido no enunciado**	**Unidades de configuração 2D**
Construção genitiva Predicação	A área do retângulo ACEF a área do retângulo ABCD maior que ou menor que ou igual a ...	2 unidades **2D** retangular e parcialmente sobrepostas; 3 unidades **2D** triangulares justapostas e 2 outras com o mesmo formato

Figura 16: correspondências relevantes a serem reconhecidas

A comparação desses dois problemas suscita duas questões para a introdução da geometria elementar nas escolas de ensino fundamental.

Q.1 Devemos começar com atividades e problemas puramente qualitativos antes de introduzir atividades que envolvam dados numéricos e unidades de medida? Sim ou não?

É o funcionamento semiocognitivo da visualização geométrica que impõe essa questão. Esse processo se baseia na desconstrução dimensional das formas. E na Figura 13, no parágrafo I.6, isso é representado pelas setas azuis descendentes verticais e pelas setas vermelhas oblíquas duplas, enquanto **o discurso e o raciocínio matemático vão contra a desconstrução dimensional das formas** (as setas azuis ascendentes verticais). E isso nos leva à segunda pergunta:

Q.2 A maneira como o vocabulário geométrico básico é introduzido não é uma causa de incompreensão insuperável a médio e longo prazo? Cada um dos termos mais importantes **não deveria estar associado** a tarefas ou atividades de problemas puramente qualitativos que permitam aos alunos **coordená-los com as unidades figurais correspondentes**?

VISUALIZAÇÃO	OBJETOS FIGURAIS	PROPRIEDADES **relação entre DUAS unidades figurais 1D**	
		pertencentes a uma unidade figural 2D	**independente de pertencer a uma unidade 2D**
Unidades figurais 2D instantaneamente reconhecíveis (figuras típicas)	Quadrado, triângulo, paralelogramo, círculo, ângulo	Regular, convexo, côncavo, n lados, isósceles, equilátero, retângulo, agudo, obtuso, reto	Simetria axial Simetria central
Unidades figurais 1D mescladas perceptualmente em unidades 2D	Reta, segmento, lado, diagonal, raio, corda, curva, arco		Secante, paralela, Perpendicular, tangente
Unidades figurais 0D identificável, ou somente codificável em uma unidade 1D	Pontos **notáveis**: interseção, vértice, centro. Pontos **implícitos** que não podem ser vistos		Simetria

Figura 17: classificação do vocabulário geométrico básico[22]

O PENSAMENTO é inseparável do registro das línguas faladas e escritas. Não pode haver pensamento sem linguagem. O que achamos que é puramente "mental" é uma linguagem internalizada ou a internalização de gestos de rastreamento 1D ou 2D. Os "conceitos" são identificados com palavras cujo sentido é definido em sentenças formuladas em um idioma comum (grego antigo, inglês, alemão etc.) e **que são condensadas semanticamente em palavras**. E fazemos de conta que as definições são tão imediatamente acessíveis aos alunos o quanto são para os matemáticos.

[22] Duval, 2015, p. 164.

II.3 O registro de escritos simbólicos.

Com o advento da escrita, entre 4000 e 3000 antes da nossa era, surgiu um terceiro registro de representações simbólicas que se impôs, o **registro da escrita simbólica**[23]. Esse registro é um **registro discursivo**, como o das línguas faladas. Eles podem ser usados para produzir dois tipos de unidades de sentido: A característica especial desse tipo de registro em comparação com todos os outros tipos de registro é a possibilidade ilimitada de substituir expressões incompletas e expressões completas umas pelas outras.[24] No entanto, esse registro é radicalmente oposto ao registro das línguas em dois pontos cruciais. Ele é **monofuncional**, não multifuncional, e cumpre apenas a função de tratamento, e não a de comunicação ou objetivação. E é **totalmente algoritmizável**, permitindo a realização de todas as operações de cálculo numérico e literal. Esse terceiro registro surgiu como a "linguagem matemática" por excelência a partir dos séculos XVI e XVII, com o desenvolvimento da álgebra e da análise. A propriedade específica desse tipo de registro em comparação com todos os outros tipos de registro é a possibilidade ilimitada de **substituir expressões incompletas e as expressões completas** umas pelas outras[25].

Ninguém confundirá os dígitos com os números aos quais eles se referem, pois rapidamente se torna impossível se referir aos números pelas palavras que se diz ao contar. Um sistema de numeração é um sistema semiótico com pelo menos dois dígitos formando sua base e, na sequência de dígitos que podem ser formados, um valor posicional para cada dígito na base. **Mas isso não é suficiente para que um sistema de numeração seja um registro** que produz representações semióticas. Dois tipos de símbolos **devem ser adicionados a ele**: símbolos de operação para formar expressões incompletas e um símbolo de relação ("=", "≥") para formar uma expressão completa, uma vez que essa adição permite que **se produza quantas designações diferentes quiser para um mesmo número**.

---

[23] Duval, 2020, pp. 430-432.
[24] Duval et Pluvinage, 2016, pp. 123-125 et 144-147.
[25] Duval, 2018, pp. 8-11, § 1.2. The semiotic revolution: towards a new knowledge anlysis scheme.

1. Sistema de escrita **decimal** ou binário	4 (Dígito que denota um número) ou (1 ou 0) 44 (Dois dígitos que designam outro número) ou (10), (101), (1001)
2. **Expressão incompleta:** ASSOCIAÇÃO de pelo menos um número e de **UM SÍMBOLO DE OPERAÇÃO**	**(2 + 2), (5 – 1), (2 × 2) , (8 : 2) , 8/2** **40 + 4, 12 × 2** (Sintagmas operatórios)

Figura 18: Sistema semiótico para escrever números e registro de escritas simbólicas

O poder de processamento do registro de escrita simbólica vem da propriedade de que as igualdades e equações numéricas podem ser substituídas umas pelas outras por equivalência semântica, em vez de aplicar regras sintáticas. Assim, essa equivalência semântica permite entender a regra de sinais (para operações e para assinalar números negativos) quando transferimos a expressão incompleta "+ 2" ou "- (- 2)" de um membro ao outro do símbolo de relação "="[26]:

$$\mathbf{3 + 2} = \mathbf{3 - (-2)} \text{ e } \mathbf{(-3) - (-2)} = \mathbf{(-3) + 2}$$

O mapeamento das unidades de sentido em uma formulação do problema com dois níveis de unidades de sentido da escrita simbólica oferece duas questões:

- a primeira (Q.3) diz respeito à oposição irredutível entre as expressões completas produzidas em cada um dos dois registros de discurso I e III (Figura 14). No registro da escrita numérica, **as igualdades numéricas ou literais que são equações permanecem verdadeiras quando invertemos** os dois membros em torno do símbolo de relação "=". Obviamente, esse não é o caso das sentenças e proposições que ouvimos ou lemos. A **recíproca pode parecer** implausível ou absurda e, ao mesmo tempo, fazer sentido.

O gato da minha vizinha **come** o rato O rato **come** o gato da minha vizinha	3 + 2 = 5 1 + 1 + 1 = 3 5 = 3 + 2 2 + 1 = 3

Figura 19: A recíproca de uma proposição e a equivalência semântica dos dois membros de uma equação.

---

[26] *Ibid.*, p. 40, § 2.2.2.2, Fig. 2.12. The variations in writing to represent the addition operations with relative integers.

Q.3 A prática primordial e predominante de uma língua, que cria um sentido para a compreensão das frases, **não impõe uma compreensão errônea das igualdades numéricas**, tornando o segundo membro da igualdade **um resultado** e impossibilitando antecipadamente a compreensão do cálculo com negativos e a resolução de equações algébricas?

- a segunda questão (Q.4) diz respeito à transição do cálculo numérico para o cálculo literal. A introdução de letras permite uma operação de designação funcional que não existe no registro multifuncional e não algorítmico das línguas. Além disso, as letras podem assumir diferentes estatutos em fórmulas e equações: incógnita, constante, variável etc.

Q.4 Como as letras devem ser introduzidas e a partir do que? Primeiro como uma incógnita ou como uma variável? Primeiramente, **a partir de fórmulas que podem ser usadas na realidade** ou **a partir da resolução de equações**?

Essas quatro perguntas Q.1, Q.2, Q.3 e Q.4, são tão cruciais que o ensino de matemática deve responder. Não podemos tratar delas aqui, mesmo se nos limitarmos às perguntas Q.3 e Q.4. Paradoxalmente, elas só foram abordadas recentemente, embora as pesquisas didáticas voltadas para o ensino da álgebra elementar remontem, pelo menos, à década de 1980[27].

Por fim, de um ponto de vista estritamente cognitivo, é essencial não confundir a visualização geométrica, ou seja, o registro **III** (Figura 14) com a visualização analítica, ou seja, o registro **IV** (Figura 14). Visualização analítica envolvendo eixos graduados e orientados, que constroem a **figura-fundo** de uma malha quadriculada na qual se destacam as unidades figurais 1D ou 2D. E essa figura-fundo torna possível vincular o registro de escritas simbólicas aos registros de formas geométricas 1D, 2D e 3D para visualizar polinômios. A visualização analítica se desenvolveu a partir da Geometria de Descartes (1637).

[27] Ver as cinco referências agrupadas sob o título “O registro de escritas simbólicos”.

III REPRESENTAÇÕES “ICÔNICAS”: IMAGEM OU SEMELHANÇA?

A partir da década de 1980, as pesquisas em educação matemática começaram a importar as noções de “signo”, “representação icônica” e “índice” desenvolvidas por Peirce. Para entendê-las, precisamos lembrar que Peirce procurou descrever o papel das representações e dos signos em **todas as formas de atividade cognitiva**, desde a adaptação ao ambiente imediato até o conhecimento científico. A complexidade de sua definição de signo reflete a amplitude do campo que ele queria descrever:

> **Um signo, ou *representamen***, é algo que se dirige a alguém e representa algo diferente de si mesmo (**referência**). Mas o signo não representa o objeto como ele é em si mesmo. Ele o representa em termos de outro signo que cria na mente da pessoa a quem é dirigido (interpretação) e as três maneiras possíveis pelas quais o que um signo representa (**Objeto**) determina a natureza dos signos (**ícone, símbolo, índice**)[28].

O termo “ícone” é uma transcrição da palavra grega (*eikon*) que Platão usou para definir **qualquer imagem como um reflexo** e para significar **a semelhança que resulta da imitação de um modelo** para criar um objeto[29].

Observemos que não há conexão entre as duas relações usadas por Peirce para distinguir os três tipos de signos. Na primeira relação, os signos e as representações são caracterizados como *representamen* com base apenas em seu conteúdo. Na segunda relação, os signos e as representações são considerados o resultado ou o efeito do fenômeno ou do objeto que evocam. Pode ser um **efeito direto**, como fumaça, pegadas ou vestígios. Mas também pode ser um **efeito indireto mediado por um sistema físico** (uma câmera) ou um sistema neurofisiológico (memória visual). Para estabelecer sua distinção, Peirce se limita a justapor a relação de semelhança e a relação de efeito → causa[30]:

---

[28] Peirce, C. S. , 1931. *Collected papers, II. Elements of Logic*. Cambridge: Harvard University Press. p. 228.
[29] Platon, *République*, 476c, 509e, 510e.
[30] Duval, 2006, pp. 95-96.

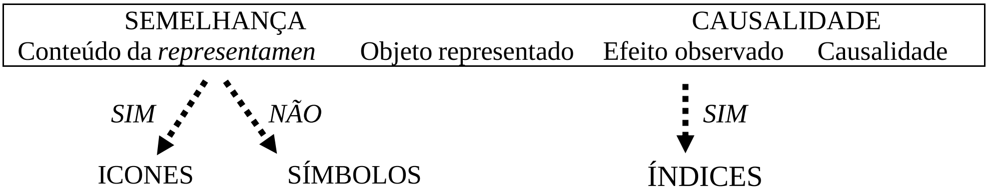


Figura 20: As duas relações que determinam a relação de um signo com o objeto representado

A relação de causalidade pode ser vista em dois sentidos contrários. E isso nos leva a não mais distinguir **os signos dos sinais**. De fato, ela pode ser vista como:

- No sentido de efeito → causa, como acima. Os "índices", que são um dos três tipos de signo que Peirce distingue, são caracterizados pela relação "efeito → causa". Eles abrangem todos os fenômenos naturais que levam à busca de sua causa ou origem: reflexos, traços, vestígios, sintomas etc. Peirce cita a percepção da fumaça. Os índices são os pais dos sinais que se caracterizam pela relação "**causa → efeito**";

- No sentido de causa → efeito, caso em que a causa deve desencadear uma ação. Por exemplo, semáforos em cruzamentos são sinais que devem desencadear uma **ação** reflexiva por parte dos motoristas. De modo mais geral, qualquer transmissão de informações em um sistema físico ou orgânico depende de **códigos** e **sinais**[31]. Os sinais cumprem uma função de controle, como pode ser visto na operação de todos os sistemas automatizados ou conscientes ou nas malhas de tráfego.

Nesses casos, as duas noções equivocadas e heterogêneas do conteúdo de uma representação e da causalidade são **REPRESENTAÇÕES NÃO-SEMIÓTICAS**. Tudo o que tem a ver com as linguagens faladas e o continuum semântico das escritas simbólicas estão **globalmente envoltos no termo "símbolo"**. Esse termo, que parece dizer tudo, é de fato vago e geral. De modo mais geral, nas teorias sobre os processos de desenvolvimento do conhecimento comuns a todas as disciplinas ensinadas, a noção de sinal é misturada com a de signo, ou até mesmo a substitui.

---

[31] Duval, 2018, § 3.1.1, Fig. 3.1, Comparison of registers and codes, pp. 47-48.

III. 2 O critério de semelhança e a determinação dos graus de iconicidade

Agora podemos analisar a iconicidade no registro das representações semióticas. “Semelhança” é um termo tão vago e geral quanto “símbolo”. E muitas vezes é difícil reconhecer quando um desenho, esboço ou retrato se assemelha ao objeto real retratado. Isso ocorre porque as representações 2D/2D ou 3D/2D de objetos reais (3D/3D) podem variar completamente, dependendo do ponto de vista do objeto representado: de perto, de longe, de baixo, de cima, de frente, de lado, de trás etc. Portanto, para o mesmo objeto, há uma infinidade de formas possíveis. Daí a ilusão de que as figuras são formas típicas. Como podemos reconhecer que uma imagem ou desenho se assemelha ao objeto que representa? Bresson propôs uma definição de reconhecimento cognitivo e não apenas visual de uma configuração 2D/2D. Ela se baseia no princípio de que não é suficiente nos limitarmos à congruência entre o contorno fechado global da configuração e o contorno do objeto representado. Também precisamos levar em conta as relações topológicas entre os elementos traçados dentro do contorno fechado[32].

> *Uma imagem, desenho ou esboço se assemelha ao objeto que representa quando as relações de vizinhança entre os elementos da configuração preservam as relações de vizinhança entre os elementos ou partes do objeto representado.*

O interesse dessa definição é triplo. Em primeiro lugar, ela nos permite distinguir três graus de iconicidade, como pode ser visto nas três representações visuais de um rosto da Figura 21 (Duval 2006).

A *representação figural* (A) conserva:

- A similaridade do contorno geral fechado;

- As relações de vizinhança entre as partes características de um rosto;

- e, acima de tudo, a semelhança de cada parte do rosto é, por si só, uma representação figural (olhos, nariz, boca etc.).

[32] Duval, 2006, p. 73.

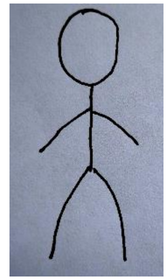
		
A. Representação figural: Retrato de Ginevra de Benci (1474?)	B. Representação esquemática: Rosto de perfil e rosto de frente (1936 em preto, 1946 em cores)	C. Representação simbólica

Figura 21: Graus de iconicidade no reconhecimento visual de faces

A *representação esquemática* (B) conserva:

- A similaridade do contorno geral fechado;

- As relações de vizinhança entre as partes características de um rosto.

As partes do rosto, reduzidas a traços, perderam qualquer semelhança figural própria.

A *representação simbólica* (C) conserva:

- Apenas a similaridade do contorno fechado.

Esse contorno representa uma cabeça ou um rosto na medida em que as relações de vizinhança entre os elementos da configuração preservam aquelas entre as partes do corpo. Obtém-se, assim, *símbolos icônicos* que permitem a comunicação imediata e econômica, por exemplo, em placas de trânsito ou para codificar informações em uma figura geométrica.

Deste modo, nos permite **dissociar a iconicidade** de uma representação semiótica, qualquer que seja seu grau de iconicidade **com a verossimilhança, implausibilidade ou impossibilidade** do que um desenho, um quadro ou afresco mostram[33].

[33] Duval, 2018, p. 224, Fig. 5, Représentation figurative onirique et schématisation idéalisant).

Por fim, permite paradoxos cognitivos ao integrar uma palavra ou frase ao desenho ou um quadro, assim como, sem recorrer a palavras, torna visíveis objetos fisicamente impossíveis[34].

IV. CONSCIENTIZAR CADA ALUNO DO MODO DE TRABALHAR EM MATEMÁTICA.

A noção de "Registros que produzem representações semióticas" deu origem e continua dando origem a muitos mal-entendidos. E quando falamos de "registros", estamos nos referindo apenas à observação trivial do que **qualquer pessoa pode ver de fora, sem entender nada**, olhando livros didáticos, o que está escrito em tabelas, o que pode aparecer no monitor de um computador usando Excel, GeoGebra ou Cabri, ou mesmo folheando publicações de matemática. Vários tipos de representação semiótica são justapostos, começando com um continuum de escritos simbólicos, construções geométricas e gráficos. Além disso, há centenas de palavras técnicas usadas para designar "algo" na escrita simbólica, nos gráficos ou nas figuras geométricas. E "algo" nunca é a mesma coisa de um problema para o outro!

Diante disso, a grande maioria dos alunos se depara com a distância cognitiva que separa todas essas representações semióticas. Eles não veem como passar de um para o outro e como isso pode ajudar a resolver problemas práticos. Essa distância cognitiva constitui o obstáculo que os alunos enfrentam em matemática. E para enfrentar o desafio de garantir que todos os alunos até a idade de 15 ou 16 anos adquiram um conhecimento básico de matemática, a pesquisa didática e os professores estão se voltando para "teorias" que se concentram nos processos de aprendizagem ou desenvolvimento de conhecimento **que seriam comuns a todas as disciplinas ensinadas**. Que assim seja! Mas isso significa **que estamos apenas apresentando, explicando e ensinando conhecimentos matemáticos prontos.** E a maneira muito particular **pela qual pensamos e trabalhamos em matemática, ou seja, a maneira pela qual vemos, dizemos e substituímos** uma representação semiótica por outra, **permanece impenetrável** para todos aqueles que não são matemáticos profissionais ou professores de matemática.

---

[34] D'Amore, 2023, pp. 50-53 e pp. 48-49.

É enganoso falar sobre problemas a serem resolvidos para ajudar as pessoas a entender ou adquirir conhecimentos de aritmética, geometria e álgebra. Isso ocorre porque todas as pesquisas sobre resolução de problemas pressupõem que os alunos não sejam bloqueados pela **distância cognitiva** entre dois registros, aquele em que as restrições e os dados do problema são apresentados e aquele em que o tratamento levará à solução do problema. A distância cognitiva entre dois registros de representação semiótica não deve ser confundida com a "carga cognitiva", que se refere à quantidade variável, mas limitada, de informações que podem ser levadas em conta e retidas na memória de curto prazo. Não faz sentido falar sobre "carga cognitiva" em matemática ou no aprendizado de matemática, pois as únicas coisas que contam são as unidades de sentido, unidades figurais ou expressões simbólicas cujo **RECONHECIMENTO IMEDIATO** depende das operações discursivas ou do tratamento que o aluno é capaz de fazer por ele mesmo, seja qual for a atividade proposta.

A distinção dos registros que produzem representações semióticas não é uma "teoria", mas uma descrição de todas as variáveis semiocognitivas que precisam ser levadas em conta para analisar o funcionamento cognitivo subjacente a todas as atividades matemáticas ou atividades que usam o conhecimento matemático. Agora, a regra de ouro dessa análise é que um **registro só pode ser analisado com base nas variações que fazemos em outro registro**, para ver o que muda ou permanece invariável no outro registro. Para realizar essa análise, precisamos pegar cada vez o par de registros que será usado para introduzir objetos matemáticos e processos matemáticos vinculados a esses objetos. E, a cada vez, temos que mudar o registro que usamos como ponto de partida para observar as diferenças entre as conversões diretas e as conversões inversas das representações semióticas, e fazer com que os alunos as observem (ver Figura 14):

(Registro **III** ⟶ Registro **I)** et (Registro **I** ⟶ Registro **III**)

(Registro **III** ⟶ Registro **IV)** et (Registro **IV** ⟶ Registro **III**)

(Registro **II** ⟶ Registro **I**) et (Registro **I** ⟶ Registro **II**)

E aqui precisamos criar tarefas ou atividades em que cada aluno tome a iniciativa e tenha controle sobre a exploração a ser feita, com o objetivo de desenvolver a conscientização em vez de conhecimento, habilidades ou um saber-fazer.

REFERÊNCIAS

Análise comparativa de um *corpus* de representações semióticas: fotos, esboços, tabelas e "figuras geométricas".

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,10*, 5-53.

DUVAL, R. (2014). The first crucial Point in Geometry Learning: Visualization. Mediterranean Journal for Researche in Mathematics Education, *12* (1-2), 23-37.

DUVAL, R. (2015). Figures et visualisation géométrique : «voir» en géométrie. Dans Lima, J. (Eds) *Du mot au concept. Figure*, 147-182. Grenoble: Presses Universitaires.

DUVAL, R. (2018). Pour l'éducation du regard en géométrie élémentaire et en peinture (Traduction Bruno d'Amore). *La matematica e la sua didattica trad Bruno d'Amore*, *26* (2), 211-245. https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2018/10/Duval-Per-leducazione-allo-sguardo-in-geometria-elementare-e-in-pittura-MD-2018-26-2-3.pdf

DUVAL, R. (2020). Le premier seuil dans l'apprentissage de la géométrie : Dans « voir » les « figures» . *La Gazette de Transalpie*, 10, 7-17. https://www.icsedegliano.it/sezioni/rmt/materiali/Gazzetta/Gazzetta10.pdf

JAMM, F. (1981). A propos de la notion d'aire. *Rapports pour le D.E.A. de Didactique des Mathématiques*, IREM (pp. 18-80). Université Louis Pasteur, Strasbourg.

THUILLIER, P., 1984, Espace et perspective au Quattrocento. Dans *La Recherche, 160*, 13984-1398.

LEMONIDIS, E. C. (1990). Conception, réalization et résultats d´une expérience d´enseignement de l´homothétie. Thèse ULP, Strasbourg.

O registro das línguas faladas

DUVAL, R., (1995). *Sémiosis et Pensée humaine,* Chap. II, Fig. 1 Fonctions et opérations discursives d'une langue**,** Fig.1, pp. 90-91. La fonction apophantique d'expression d'énoncés complets, pp.110-112.

DUVAL, R (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/2, pp. 135-170.

DUVAL, R (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking — The registers of Semiotic Representation*. Springer Nature AG, 3.1. 3. pp. 54-56.

O registro das escritas simbólicas

DUVAL, R. *et al.* (2015). Ver e ensinar a Matemática de outra forma. Volume II. Introduzir a álgebra no ensino : Qual é o objetivo e como fazer isso ? São Paulo : Proem Editora.

DUVAL, R.; PLUVINAGE, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 21, pp. 119-152.

DUVAL, R (2020). Les écritures symboliques et les opérations hétérogènes de substitution d'expressions. Les conditions de compréhension en algèbre élémentaire. In Méricles T. Moretti & Celia Finck Brandt (Ed.) *Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval*. (E-book, Revemat/UFSC, 2020-07-22), pp. 422-455. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203

RAUSCHER, J.-C. (2020). Le cas Jonathan. Le complexe de l'algèbre. Dans Méricles T. Moretti & Celia Finck Brandt (Orgs.) Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval (Revemat/UFSC, 2020-07-22). Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203

RAUSCHER, J-C. et BAUERLE, Sophie. (2022). *Enseigner l'algèbre élémentaire. De quel point de vue et avec quelles activités ?* Communication présentée à ETM7, Juin.

As representações icônicas: imagem ou semelhança?

DUVAL, R., (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime* Vol. Especial, 2006, pp. 67-103.

D'AMORE, B. et Duval, R. (2023). Similitudes y diferencias entre la educación de la mirada en geometría elemental y en arte figurativo. Educatión Matematica, 35(1), pp. 35-58.

APÊNDICE

Expressões completas ou incompletas
e substituições *salva veritate* ou *salva denotatione*

EXPRESSÕES COMPLETAS são sentenças simples no registro de um idioma falado e equações nos registros da escrita simbólica. O que elas têm em comum é o fato de serem expressões que podem ser substituídas umas pelas outras *salva veritate*.

Nas línguas faladas, uma proposição simples é articulada com um único verbo conjugado. Assim, para a proposição "a área do retângulo ADCB é igual à área do retângulo FECA", **posso substituir** *salva veritate* pela proposição "a área dos dois triângulos retângulos ABC e ADC é igual à área dos quatro triângulos retângulos (AFD, AD?, DEC, DC?)" (Fig. 7).
No registro de escritos semióticos, expressões completas são construídas em torno do símbolo de relação "=". Essas são igualdades e equações numéricas ou literais. Por exemplo:

- Para a igualdade 3 + 2 = 5, **posso substituir** *salva veritate* por 3 = 5 – 2;

- Para (a + b) /2 = a/2 + b/2, posso substituir a + b = 2× (a/2) + 2× (b/2), mesmo que o símbolo da operação × seja omitido.

Essa substituição é feita por meio da transferência de um membro ao outro da igualdade de uma expressão incompleta mínima[35].

EXPRESSÕES INCOMPLETAS em um idioma falado e os membros de uma equação nos registros de escritas simbólicas são expressões que podem ser substituídas umas pelas outras *salva denotatione*.

Em uma frase simples, as expressões incompletas são a combinação de um objeto ou termo de propriedade e um determinante que o quantifica. Elas formam a frase nominal, que preenche o espaço vazio na frase verbal. Mas elas também podem vincular dois termos de objeto ou propriedade usando as preposições “de”, “em” ou “sobre”.

[35] Duval, 2020, pp. 28-29 et 41-42.

Assim, para o sintagma nominal “a área dos dois triângulos retângulos ABC e ADC”, posso substituir *salva denotatione* o sintagma nominal “a área dos quatro triângulos retângulos (AFD, AD?, DEC, DC?)” (Fig. 7). Também podemos formar sintagmas nominais com três ou quatro termos de objetos ou propriedades. Mas isso é feito com um custo cognitivo tão alto que as expressões incompletas se tornam incompreensíveis.

No registro da escrita simbólica, as expressões incompletas são a associação de um número ou uma letra com um símbolo operatório, por exemplo, um número inteiro relativo com um símbolo operatório para formar o que chamei de “sintagmas operatórios”.

Nas equações acima, “+2”, “-2”, “/2” e “2×” são expressões incompletas mínimas. Portanto, para a expressão incompleta "2 × 2", posso substituir *salva denotatione*, “1+1+1+1”, “2+2”, “8 / 2”, “$\sqrt{16}$”. E isto é apenas o começo de uma lista interminável. Mas, diferentemente dos sintagmas nominais em idiomas falados, podemos incluir umas nas outras quantas expressões mínimas incompletas quisermos.

Obviamente, essas duas operações de substituição referentes a expressões completas e expressões incompletas não devem ser confundidas com o raciocínio que usa definições, axiomas ou teoremas. Esse tipo de raciocínio diz respeito a uma proposição formada pela combinação de duas proposições simples, a primeira das quais tem o status de uma condição a ser cumprida, e a segunda de uma proposição a ser destacada se a condição for cumprida (*modus ponens*).

CAPÍTULO II

AS FUNÇÕES DISCURSIVAS NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA SEGUNDO RAYMOND DUVAL

Eduardo Sabel

Célia Finck Brandt

Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

A linguagem tem o papel de permitir com que haja a comunicação dos conhecimentos e a socialização entre os povos, mas, na matemática, além disso, ela também atua como uma forma de representação dos objetos. Tendo em vista que a matemática possui uma linguagem interna, não é de se estranhar o interesse de pesquisadores em compreender mais acerca de seu papel no ensino dessa ciência. Essa linguagem se refere às formas discursivas que a matemática admite, como as letras na linguagem algébrica, os números, os códigos, etc. Já outros registros não discursivos como as figuras ou gráficos, também são importantes para complementar as práticas discursivas da matemática, uma vez que precisamos recorrer a diferentes registros de representação para expressão uma ideia.

Autores como Vergani (2002), por exemplo, defendem que é preciso estudar a linguagem da matemática, que foi sendo construída e ampliada, ao mesmo tempo que evolui. Granger (1974) fala que, no caso da matemática, a linguagem é uma parte fundamental para compreendê-la e que seu desenvolvimento demandou a criação de novos recursos discursivos específicos. Powell e Bairral (2006) argumentam que escrever ajuda na cognição matemática, uma vez que irá estimular um processo metacognitivo no estudante. Já Nacarato (2013) que aborda o registro escrito nas aulas de matemática e suas potencialidades.

Neste sentido, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, oferece um arcabouço teórico relacionado às funções discursivas da linguagem que possibilita compreender papel do discurso (escrito e oral) na aprendizagem matemática. Na perspectiva de Duval (2004), o discurso admite diferentes funções e operações primordiais para a aprendizagem dos objetos matemáticos, mobilizando diferentes atividades cognitivas.

Duval (2004, p. 87) define um discurso como "o emprego de uma língua para dizer alguma coisa, para falar dos objetos físicos, ideais ou imaginários [...]a prática de um discurso é inseparável de um certo funcionamento cognitivo". Tais funções discursivas são chamadas de: função referencial (para designação de objetos); Função Apofântica (para construção de enunciados completos, Expansão Discursiva (conectar e ampliar o discurso de forma coerente e coesa) e Função de Reflexividade (marcar o valor, o modo ou o estatuto acordado a uma expressão). No caso da matemática, os objetos a serem trabalhados e evocados por meio da escrita necessitam do uso de tais funções, que são fundamentais para a própria compreensão do objeto.

Diferentes pesquisas já se apoiaram nas funções discursivas de Duval como referencial para suas investigações em educação matemática, contudo, Costa (2021) em seu estado da arte que analisou todas as produções em nível de mestrado e doutorado de 1995-2019, verificou que existe uma carência de pesquisas que utilizam as funções discursivas. Neste sentido, esta obra vem ao encontro de oferecer novas reflexões para o campo, por meio das contribuições de Duval sobre o discurso matemático.

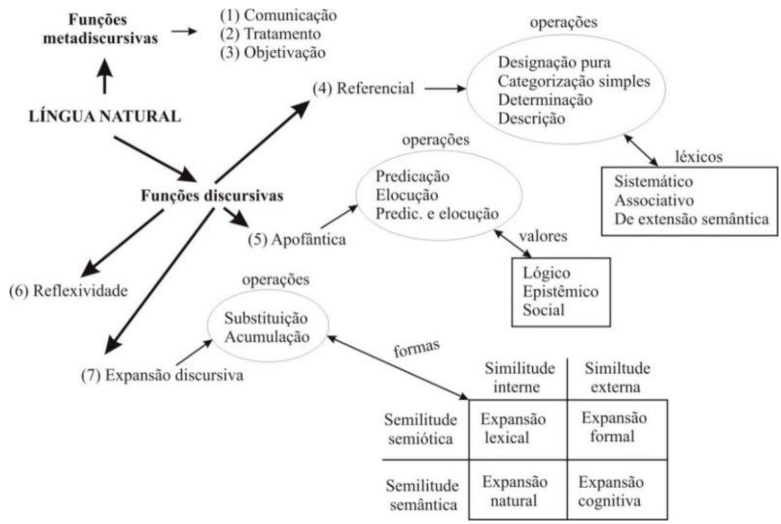
Em uma primeira parte deste capítulo introdutório, apresentamos a teoria das funções discursivas e suas operações, buscando trazer clareza sobre tais conceitos. Em seguida, uma breve apresentação dos capítulos subsequentes que compõem a obra e foram desenvolvidas por pesquisadores do GPEEM e do GEPAM.

AS FUNÇÕES DISCURSIVAS E METADISCURSIVAS DA LINGUAGEM

Duval (2004) defende que um sistema semiótico ganha status de língua, quando permite cumprir certas funções em seu discurso. Como já explicado por Brandt e Moretti (2014), existem dois grupos de funções que diferentes que uma língua utiliza: As Funções Metadiscursivas e as Discursivas.

Esses dois grupos são diferentes, pois enquanto o primeiro (metadiscursivas) são comuns a todo sistema de representação, o segundo (discursivas) não são cumpridas em qualquer sistema. No caso da matemática, ambos tipos de funções são importantes para a aprendizagem, mas é o conjunto das funções discursivas que se repousa as operações inerentes para a apropriação dos objetos matemáticos (DUVAL, 2011).

Figura 1: Esquema das funções discursivas e metadiscursivas



Fonte: Dionizio, Brandt e Moretti (2014, p. 517), a partir de Duval (2004)

Na figura 1, temos um esquema que mostra o conjunto de todas as funções determinadas por Duval (2004), bem como suas operações e formas. Cada uma delas pode ser empregada para uma determinada função, sendo que geralmente atuam de forma diferenciadas nos registros de representação. Nas próximas subseções iremos apresentar mais detalhes sobre cada uma delas.

As funções Metadiscursivas

As funções metadiscursivas são caracterizadas como “as funções cognitivas comuns a todos os registros de representação (linguísticos, simbólicos, figurativos...)” (DUVAL, 2004, p. 87). Estão relacionadas a qualquer registro de representação e não apenas aos escritos. São três as funções metadiscursivas: Comunicação, Tratamento e Objetivação.

Comunicação: essa função é a elementar que qualquer sistema de representação precisar cumprir, afinal, o conhecimento precisa ser comunicado. Ela age com fins socialização, possibilitando que diferentes sujeitos comuniquem as informações. Ela está presente em uma conversa, de uma fala, um questionamento, por exemplo.

Tratamento: A partir de uma informação inicial, é preciso sermos capazes de fazer algumas alterações sobre ela para inferir novos conteúdos. O tratamento cumpre esse papel sem alterar o sistema de representação semiótico que a informação tinha inicialmente. Um exemplo de tratamento seria partir da expressão algébrica $x(x + 2x) = 7$ e chegar em $x^2 + 2x - 7 = 0$. A expressão pertence ao sistema semiótico de representação, a linguagem algébrica e após a operação de tratamento realizada a expressão final permaneceu dentro desse mesmo sistema,

Objetivação: Para Duval, a objetivação é uma função importante que o indivíduo necessita ter em suas experiências e atividades. “É a externalização ou conscientização que não se tinha antes” (2004, p. 88). Na objetivação, ocorre a tomada de consciência do sujeito, onde se dá conta que aprendeu. Geralmente, essa atividade se manifesta por meio uma fala, uma escrita, expressão, figura e até um gesto do estudante.

As Funções Discursivas

As funções discursivas são os elementos indispensáveis para haver a produção de um discurso em um sistema semiótico (Duval, 2004). Assim como nas metadiscursivas, essas funções também admitem algumas classificações conforme sua funcionalidade em um discurso, são elas: função referencial (designação de objetos), apofântica (falar sobre os objetos por meio de enunciados), expansão discursiva (interligar preposições de forma coerente) e reflexividade discursiva (indicar o estatuto, modo ou valor da expressão).

Função Referencial: o objetivo principal da função referencial em um discurso é designar objetos, ou seja, utilizar signos (palavras, letras, símbolo, números...) para nomear e indicar os objetos matemáticos. Duval (2004, p. 88) estabelece as quatro operações discursivas que acontecem por meio desta função: designação pura, categorização simples, determinação e descrição.

A <u>Designação Pura</u>, ocorre na indicação de um signo ou marca, para identificar um objeto específico. Por exemplo, o uso das letras *X* e *CD* na seguinte frase: *Seja X o ponto médio do segmento CD*. Nesta situação, as letras foram designadas para representar os objetos (ponto e reta).

A <u>Categorização Simples</u> apresenta as qualidades dos objetos designados. Ela é importante, pois possibilita classificarmos o objeto em relação as características que possuem, como por exemplo: *Considere M uma matriz diagonal.* Veja que a letra *M* foi designada para representar uma matriz, enquanto a palavra *diagonal* revela uma qualidade específica desta matriz. Com essa informação, inferimos que a matriz M possui todos elementos acima e abaixo da diagonal principal, não nulos.

A <u>Determinação</u> consiste em utilizar artigos definidos ou indefinidos nas preposições para indicar a existência e unicidade de objetos, como por exemplos quando usamos os artigos *o, os, a, as, um, uma, uns, umas.* Essa operação atua em conjunto com as demais, completando e atribuindo maior precisão nas informações. Por exemplo "*Seja X **<u>o</u>** ponto médio do segmento CD"* ou *"Considere M **<u>uma</u>** matriz diagonal."*

A Descrição tem como objetivo combinar as demais operações com relações diretas para indicar os objetos. Exemplo: "*Seja X o ponto médio* ***do*** *segmento CD"* ou *"Considere M* ***uma*** *matriz diagonal (****do*** *tipo diagonal)."*Duval diz que "Nenhuma língua, mesmo a natural, pode ter um nome para cada objeto ou classe de objetos. Portanto, é por meio da operação de descrição que se pode nomear qualquer objeto, apesar da limitação lexical" (2004, p. 95). Muitas vezes precisamos dar nomes para objetos que ainda não tem um nome específico, ou explicar determinada situação criando termos específicos para elas, nesse caso, a descrição permite que criemos e atribuamos novas nomenclaturas para representar esses objetos.

Função Apofântica: Para Duval "somente designar objetos não cria uma língua, é preciso poder dizer qualquer coisa sobre os objetos sob a forma de uma proposição, ou seja, cumprir a Função Apofântica" (2004, p. 104). A função apofântica serve para criarmos expressões, falas e escritas sobre os objetos de modo coerente e coeso. Além da criação das frases, ela também permite atribuir valor lógico (verdadeiro ou falso), valor epistêmico (se a frase segue as regras internas da matemática) e valor social (a razão que motivou a construção da frase). Ela ocorre por meio de duas operações: a predicação e o ato ilocutório.

A predicação tem o objetivo de falar sobre os objetos por meio de preposições escritas, que tenha sentido e valor lógico. Um exemplo pode ser a preposição: *o ponto m no triângulo ABC representa seu baricentro.* Esta operação será muito necessária para que o aluno escreva algo que o ajude a explicar um passo de sua resolução, por exemplo.

O ato ilocutório acontece no momento de promover pensamentos, raciocínios ou argumentos por meio da oralidade. É o diálogo entre os sujeitos que ocorre da necessidade de expressar uma ideia, explicação ou comentário sobre um objeto ou situação. Como por exemplo, em uma conversa entre estudante e professor, para sanar dúvidas sobre determinado conceito.

A **Função de Expansão Discursiva:** corresponde à possibilidade de "articular diversos enunciados completos na unidade coerente de uma narração, de uma descrição, de uma explicação ou de um raciocínio" (Duval, 2004, p. 94). Ela permite articular frases e relacionar enunciados de forma coerente, permitindo que o sujeito faça inferências e desenvolva novas informações, aumentando o discurso e possibilitando falar sobre um assunto de diferentes formas (DIONIZIO; BRANDT; MORETTI, 2014). A expansão discursiva pode ocorrer de dois modos: por substituição ou por acumulação.

Na substituição, a continuidade de um discurso acontece por substituir as informações por outras, alterando a primeira obtendo um resultado. Neste tipo de operação, "as inferências possibilitadas a partir da progressão das proposições podem ser realizadas pela substituição do resultado das novas inferências sobre as que foram feitas nas proposições anteriores" (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014, p. 483). Para realizar as substituições é preciso respeitar as regras e os funcionamentos internos do sistema semiótico que está inserido.

Na expansão discursiva por acumulação, o discurso se expande por frases que são unidas por conectores, enriquecendo as informações e agregando novos elementos ao texto. Ela acontece por uma narração, explicação ou descrição (DUVAL, 2004, p. 117).

Além disso, Duval (2004, p. 118) explica que existem algumas formas que a expansão pode ocorrer, são elas: expansão natural, expansão formal, expansão cognitiva e expansão lexical. A seguir apresentamos um quadro que organiza as formas da expansão discursiva com seus mecanismos e características:

Quadro 1: As quatro formas de expansão discursiva de uma expressão

Mecanismos de expansão	**Similaridade interna** (continuidade sem um terceiro enunciado)	**Similaridade externa** (continuidade com um terceiro enunciado)
Similaridade semiótica (são recuperados alguns significantes)	Expansão LEXICAL (recuperação do sentido de uma mesma unidade do vocabulário sob um modo fonético-auditivo ou gráfico-visual) Associações verbais, ocorrências Linguagem do inconsciente	Expansão FORMAL (recurso exclusivo aos símbolos: notações, escrita algébrica,...) Raciocínio dedutivo (proposições de estrutura funcional) Cálculo proposicional, cálculos de predicados
Similaridade semântica Lei de Frege: Significantes diferentes e mesmo objeto. (Invariância referencial estrita ou global)	Expansão NATURAL (somente o conhecimento da linguagem corrente é suficiente) Descrição, Narração Argumentação retórica Silogismo aristotélico (proposição de estrutura temática predicativa) Raciocínio pelo absurdo	Expansão COGNITIVA (exige o conhecimento de definições, regras e leis para um domínio de objetos) Explicação Raciocínio dedutivo (proposição de estrutura temática condicional) Raciocínio pelo absurdo

Fonte: Duval (2004, p. 119), tradução elaborada por Dionizio; Brandt e Moretti (2014, p. 8)

As formas de expansão conforme o quadro anterior acontece embasadas em similaridades interna e externa, na natureza semântica ou semiótica. Mesmo que vistas isoladamente é preciso ter em mente que todas podem operar juntas com as demais funções discursivas, pois é na complementação de uma com outra que podemos construir um discurso coeso.

A similaridade semântica acontece quando as unidades apofânticas têm como referência o mesmo objeto, porém não abrangem significantes comuns, promovendo assim continuidade entre os enunciados. Exemplo: *um número elevado ao quadrado é maior ou igual a 4* e $x^2 \geq 4$. No caso da similaridade semiótica, ela é caracterizada pela repetição dos mesmos signos, mas fazendo referência a elementos distintos, como no exemplo a palavra *máximo* em: *você é o máximo!* ou *calcule o máximo dessa função quadrática.*

Dentro da função de expansão discursiva, é possível identificarmos quatro formas que ela ocorre: a expansão lexical e formal (similaridades semióticas), expansão natural e cognitiva (similaridades semânticas). Cada uma delas pode agir separadamente ou em conjunto em um discurso, sendo que outras operações discursivas também podem aparecer nesse meio.

Na expansão lexical, um significante é recuperado e utilizado para referenciar outro objeto, dando continuidade e coesão às preposições. Por exemplo: *O banco da praça...* e *Fui ao banco tirar um extrato...* Já na expansão formal, utilizamos a substituição dos elementos seguindo as regras internas da matemática, expandindo o que tínhamos e extraindo novas informações.

Um exemplo da expansão formal seria tomarmos como partida a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ e por meio dos mecanismos de expansão pertinentes às regras da linguagem algébrica, podemos substituir os termos até chegarmos em $(x - 3).(x-2) = 0$. Note que essa expansão formal possibilitou nesse exemplo a identificação das raízes dessa equação, apenas olhando para sua forma canônica, elemento que na primeira equação não estava evidenciado.

A expansão natural objetiva empregar elementos da linguagem materna. Para Brandt, Moretti e Bassoi (2014, p. 7), é a “mobilização simultânea da rede semântica de uma língua natural e dos conhecimentos práticos do próprio meio sociocultural dos alunos que produziram esses discursos". É a linguagem natural utilizada de forma prática.

Por fim, temos a expansão cognitiva que utiliza a língua natural com um caráter especializado, onde as palavras são usadas de forma exclusiva a um certo conteúdo. Exemplo: "Um número ímpar excede um número par em uma unidade. Logo, a soma de dois ímpares resulta em um número par" (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014, p. 7). Notamos que houve uma continuidade da primeira para segunda frase e isso ocorreu somente pela língua natural mesmo tratando-se de um contexto matemático. Todas estas formas são possibilidades de expandir os discursos, e mesmo que as apresentamos separadamente, elas atuam em conjunto nos discursos.

ALGUNS EXEMPLOS DA UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DISCURSIVAS

Neste tópico apresentamos mais alguns exemplos de situações do contexto de ensino-aprendizagem da matemática em que as funções discursivas estão presentes. Tais exemplos são inspirados nos apresentados por Sabel e Moretti (2022a; 2022b), cujos estudos elucidaram o conhecimento de práticas em que as funções discursivas são utilizadas na educação matemática. Ao refletirmos sobre os processos de ensino dos diferentes campos da matemática, as funções discursivas não se restringem a um único campo, uma vez que a linguagem é essencial em toda prática de ensino (Duval, 2004).

Ao falar sobre linguagem, Duval(2011, p. 76) esclarece que "as línguas naturais ou maternas, cumprem ao mesmo tempo as funções de comunicação e as demais funções cognitivas" (DUVAL, 2011, p. 76). Ou seja, devemos considerar como linguagem não somente a língua materna que possuímos, mas todos os demais registros de representação discursivos que a matemática admite (número, álgebra, gráficos, figuras, etc.).

Na geometria, por exemplo, a função referencial permite que seja possível identificarmos elementos nas figuras geométricas para a compreensão do objeto, uma vez que a imagem em si não revela todas as características e propriedades, que só serão expostas nos discursos que carregam. Sobre isso, Duval explica que "a introdução de uma figura geométrica necessariamente é discursiva" (DUVAL, 2004, p. 168). Cabe aos discursos e enunciados relacionados a essa figura o papel de dizer aquilo que está oculto, e nesse processo recorremos à operação de designação de objetos.

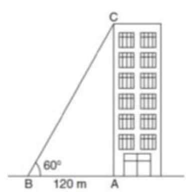
A teoria de Duval (2004, p. 155-183) sugere certas formas de apreensão que são necessárias para o entendimento da geometria e para resolver problemas, a saber: a perceptiva, a operatória, a discursiva e a sequencial. Todas estas operações estão ligadas umas às outras, subordinadas entre si, cuja aplicação irá depender de cada tipo de problema.

Duval (2012, p. 135) diz que a figura geométrica é fruto da associação entre as apreensões perceptiva e discursiva: devemos ver a figura a partir das hipóteses discursivas e não das características que são espontâneas pelo olhar. Ou seja, o discurso atrelado à figura contém elementos sobre o objeto que ela não mostra, fazendo da apreensão discursiva uma atividade importante para a compreensão da totalidade do objeto geométrico. Desta forma, pensando nos atos explicativos da matemática, sempre que formos nos referir às figuras geométricas para fins de explicação ou resolução de um problema, precisaremos utilizar a designação de objetos, que irá compor nossa figura a fim de dizermos todas as propriedades que ela contém. Para compreender o uso das funções discursivas em um problema geométrico, vejamos o exemplo a seguir:

Para compreender o uso das funções discursivas em um problema geométrico, vejamos o exemplo a seguir em que temos um problema de geometria e em seguida a resolução produzida por um estudante na pesquisa de Sabel (2021)[1]:

Figura 2: Problema de geometria retirado de Sabel (2021)

A figura a seguir mostra um prédio, onde temos 3 pontos destacados. Bruno encontra-se no ponto B da figura, enquanto Carla está no ponto C, e o térreo do prédio é o ponto A. Observando a figura, responda:



a) Que tipo de triângulo é formado pelos pontos ABC?

b) Qual a distância entre Bruno e Carla?

c) Qual a altura do prédio?

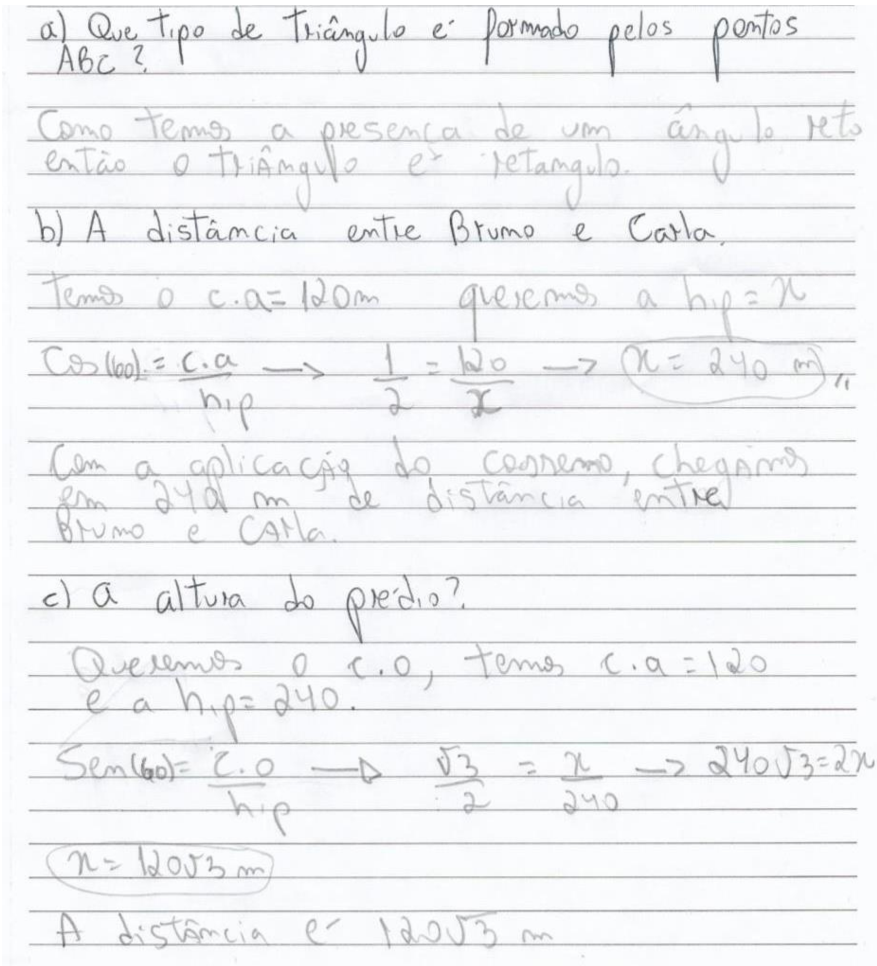
Fonte: Sabel (2021, p.39)

Na Figura 2, o problema de geometria envolve conceitos de trigonometria no triângulo retângulo. A intenção de Sabel (2021) era investigar como os estudantes resolveram este problema e quais funções e

[1] A pesquisa de Sabel (2021) analisou as funções discursivas na resolução de problemas. O texto completo apresenta mais discussões aspectos teóricos das funções discursivas e outros problemas e exemplos de análise.

operações discursivas eram mobilizadas para isso. Na figura seguinte, temos a resolução de um participante da pesquisa:

Figura 3: Resolução de um estudante sobre o problema



a) Que tipo de Triângulo é formado pelos pontos ABC?

Como temos a presença de um ângulo reto então o triângulo é retângulo.

b) A distância entre Bruno e Carla.

Temos o c.a = 120m queremos a hip = x

$\text{Cos}(60) = \frac{c.a}{hip} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{120}{x} \longrightarrow x = 240\ m$

Com a aplicação do cosseno, chegamos em 240 m de distância entre Bruno e Carla.

c) a altura do prédio?

Queremos o c.o, temos c.a = 120 e a hip = 240.

$\text{Sen}(60) = \frac{c.o}{hip} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{240} \longrightarrow 240\sqrt{3} = 2x$

$x = 120\sqrt{3}\ m$

A distância é $120\sqrt{3}$ m

Fonte: Sabel (2021, p. 54)

O Estudante A23 resolveu o item (a) de forma correta, utilizando a operação de predicação da função apofântica para criar frases completas e coerentes que falassem do objeto matemático em questão e ainda, a operação de categorização e descrição da função referencial. Veja que o objetivo da frase era descrever algo sobre o triângulo, designando termos sobre ele que justificasse ser do tipo retângulo. Aqui mostrou entender que o que classifica um triângulo em retângulo é a presença de um ângulo de 90°, que mesmo não estando presente na figura, pode ser inferido com base na perpendicularidade do chão com o prédio. Essa atividade exigiu implicitamente uma expansão discursiva do tipo natural, uma vez que o estudante precisou de conhecimentos sociais (um prédio faz um ângulo reto com o chão) para então dar continuidade ao seu discurso.

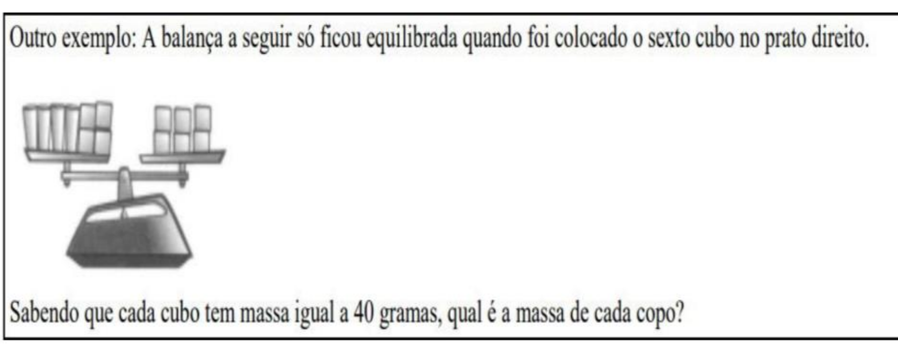
Nos itens (b) e (c) ele seguiu designando as relações trigonométricas com os léxicos necessários. Para isso, houve uma expansão figural cognitiva, ou seja, o estudante fez uma inferência sobre a figura, para além do que estava explícito no enunciado no problema. Este tipo de expansão é importante na resolução de problemas em geometria, conforme explica Moretti (2023, no prelo). Vemos que em ambas alternativas, além de usar a expansão formal com as substituições para desenvolver a parte algébrica, ele também recorreu a língua materna para expandir o discurso com explicações e justificativas de sua estratégia de resolução, com a operação de acumulação. Seus argumentos escritos e simbólicos possuem valor lógico de verdade, o valor epistêmico também é respeitado, pois suas explicações possuem coerência matemática e o valor social é atribuído na intenção de responder o problema ao professor.

Devemos perceber que no item (c) ele não seguiu o mesmo raciocínio do estudante anterior e resolveu usar o seno, ao invés da tangente. A estratégia escolhida mostra que o Estudante A23 também compreendeu em quais momentos pode empregar as diferentes relações trigonométricas e indica uma expansão discursiva cognitiva, no momento que ele designou o seno como a razão do cateto oposto com a hipotenusa.

Veja que pela análise acima realizada pela lente teórica das funções discursivas, notamos que elas foram primordiais para que o estudante construísse caminho argumentativo para expressar seu pensamento matemático. Pelo olhar docente, percebemos que a análise também oferece ao professor um instrumento para fazer inferências das aprendizagens dos estudantes.

Seguindo o intuito de exemplificação, voltamos agora nosso olhar para o campo algébrico, Duval (2011), comenta que a maior dificuldade em um exercício algébrico não é a utilização das letras em si, mas as operações de designação, que ocorrem sejam em língua natural ou formal. Tais designações são classificadas em alguns tipos: designação direta, indireta, funcional, descritiva, redesignação e dupla designação. Vejamos o problema a seguir apresentado na pesquisa de Brandt e Moretti (2018):

Figura 4: Exemplo de problema algébrico



Fonte: Brandt e Moretti (2018, p. 18)

No quadro a seguir, podemos ver as operações que são promovidas a partir desse enunciado para resolver o problema, dentre elas, algumas variações da operação discursiva de designação de objetos:

Quadro 2: Designações algébricas a partir do problema

	Designação verbal	Dados numéricos	Redesignação verbal com a utilização de letras
	Massa dos cubos do prato do lado esquerdo e direito da balança	40	4a e 6a, sendo “a” uma redesignação da massa dos cubos
Designação indireta: descritiva ou funcional	A massa dos copos e cubos do lado esquerdo é igual à massa dos cubos do prato do lado direito	4× 40 + 4..... = 6×40 designação numérica relativa à igualdade representativa do equilíbrio da balança	160 + 4⍰ = 240
Dupla designação de um mesmo objeto	A massa dos copos	240 – 160 = 80	6a – 4a = 4b

Fonte: Brandt e Moretti (2018, p. 18)

A designação direta (pura) consiste em utilizar um número, letra ou palavra (designação verbal), para referenciar o objeto de uma forma abreviada, por exemplo, quando uma letra é atribuída para representar uma variável. No caso da indireta, requer construir uma expressão composta com outros termos de ligação e pequenas descrições, que geralmente ocorrem de forma descritiva ou funcional.

Na designação funcional, existe uma relação numérica envolvida, como no exemplo do Quadro 2, em que temos a forma descritiva que estabelece uma relação de igualdade entre os lados da balança, seja por meio escrito ou numérico. Duval (2015, p. 59) fala das dificuldades em relação à designação funcional, quando diz que “a dificuldade não é utilizar uma letra para redesignar a incógnita, já designada no enunciado, mas usar uma segunda vez essa letra para designar outro dado”, visto que a mesma letra usada para designar um objeto será reutilizada para representar outro.

A designação direta consiste em utilizar um número, letra ou palavra (designação verbal), para referenciar o objeto de uma forma abreviada, por exemplo, quando uma letra é atribuída para representar uma variável. No caso da indireta, requer construir uma expressão composta com outros termos de ligação e pequenas descrições, que geralmente ocorrem de forma descritiva ou funcional.

Na designação funcional, existe uma relação numérica envolvida, como no exemplo do Quadro 2, em que temos a forma descritiva que estabelece uma relação de igualdade entre os lados da balança, seja por meio escrito ou numérico. Duval (2015, p. 59) fala das dificuldades em relação à designação funcional, quando diz que “a dificuldade não é utilizar uma letra para redesignar a incógnita, já designada no enunciado, mas usar uma segunda vez essa letra para designar outro dado”, visto que a mesma letra usada para designar um objeto será reutilizada para representar outro.

Pelo exemplo anterior, vemos mais elementos de aplicação para entender como as funções discursivas agem no ensino-aprendizagem da matemática e não as levar em consideração, pode significar desconsidera toda complexidade da linguagem matemática.

Outros exemplos ainda poderiam ser aprofundados aqui, como todo o processo de comunicação em sala de aula, onde a função apofântica acontece quando estudante elabora frases com fins explicativas ou indagativas ao professor. Ou ainda, o importante papel das expansões discursivas, por exemplo nas demonstrações de teoremas, em que afirmações se juntam e expandem com coerência matemática para formar uma nova afirmação até alcançar a aprovação da tese.

Nos limitados nestes capítulos aos exemplos anteriores, para que novas possibilidades de entendimento das funções discursivas sejam melhor trabalhadas nos demais capítulos desta obra. Finalizamos este tópico reafirmando que "[...] as funções não são espontâneas, por isso, é preciso que o professor as compreenda e tenha consciência de que permeiam a aprendizagem matemática" (SABEL e MORETTI, 2022, p. 19). Logo, os professores precisam ter consciência do papel destas funções dos discursos para que possam incorporar essa análise em suas práticas.

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Bolsas Universitárias de Santa Catarina (UNIEDU/FUMDES) pela bolsa de pesquisa de doutorado do primeiro autor.

REFERÊNCIAS

BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu; BASSOI, Tânia Stella. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 2, p. 479-503, 2014.

BRANDT, Celia F.; MORETTI, Méricles T. Aprendizagem da álgebra segundo Raymund Duval. **Revista Brasileira de Educação em Ciencias e Educação Matemática,** Cascavel, v. 2, n. 1, p. 1-26, 2018. DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2018.v.2.n.1.19419

COSTA, Crislaine. **Teoria dos registros de representação semiótica: estado do conhecimento em dissertações e teses (1996-2019).** (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2021.

DIONIZIO, Fátima A. Queiroz; BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. Emprego das Funções Discursivas da Linguagem na Compreensão de Erros de Alunos em uma Atividade que Envolve Noções de Trigonometria**. Perspectivas da Educação Matemática,** Campo Grande, v. 7, p. 513-553, 2014.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educacion y Pedagogia, Grupo de Educacion Matematica, 2004.

__________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R.; CAMPOS, T. M. M.; BARROS, L. G. X.; DIAS, M. A. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** introduzir a álgebra no ensino: qual o objetivo e como fazer isso. São Paulo: PROEM, 2015.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Filosofia do Estilo.** Tradução de Escarlett Zebbertto Marton. São Paulo: Perspectiva/Edusp, 1974.

NACARATO, A. M. **A escrita nas aulas de matemática:** diversidade de registros e suas potencialidades. Leitura: Teoria & Prática, Campinas, v. 31, n. 61, p. 63-79, nov. 2013.

POWELL, A; BAIRRAL, M. **A escrita e o pensamento matemático:** Interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.

SABEL, Eduardo. **O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas.** Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, Florianópolis, 2021.

SABEL, E.; MORETTI, M. T. Para além da comunicação em sala de aula: o papel das funções discursivas na aprendizagem matemática. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 10, n. 2, p. 1-19, 2022.

SABEL, E.; MORETTI, M. T. A Contribuição Das Funções Discursivas Na Análise Da Produção Dos Estudantes Na Resolução De Problemas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 11, n. 26, p. 338–360, 2022. DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.26.338-360

OLIVEIRA, Roberto Alves**. Leitura e escrita nas aulas de Matemática do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em ensino de Ciências e Matemática) - UNICSUL, São Paulo, 2007.

VERGANI, T**. Matemática & linguagem(s):** olhares interactivos e transculturais. Lisboa: Pandora Edições, 2002.

CAPÍTULO III

O ACESSO A TRIDIMENSIONALIDADE NA CEGUEIRA: ELOS ENTRE OS OBJETOS OSTENSIVOS E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Daiana Zanelato dos Anjos

Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

A geometria espacial é comumente ensinada no componente curricular matemática apoiada por materiais didáticos em que, como aponta Gomes Filho (2008), há a necessidade de procurar artifícios para mostrar a tridimensionalidade representada no plano do papel. Isso significa que os objetos de conhecimento tridimensionais são representados no plano fazendo uso de sombras, luz, brilho, texturas, entre outros (GOMES FILHO, 2008), assim como indica a teoria da Gestalt do Objeto e da percepção da forma. Esse é o modo como se mostra a geometria tridimensional para quem enxerga.

Neste trabalho, que mostra discussões advindas de uma tese de doutorado[1], a percepção da forma foi estudada levando em consideração algumas especificidades percebidas na cegueira. Isso, não no sentido de

[1] A tese citada intitula-se "O que se revela quando o olhar não alcança? em busca do acesso semio-cognitivo aos objetos do saber matemático por uma estudante cega", disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/214335/PECT0408-T.pdf?sequence=-1&isAllowed=y

inferiorizar a percepção da forma na cegueira, mas, de elencar as especificidades no acesso aos objetos de conhecimento em matemática na tridimensionalidade buscando uma efetividade para a aprendizagem destes estudantes, desde o material em braille elaborado até as atitudes de seus professores ao ensinar em sala de aula.

Intentamos mostrar nesta discussão, como se dá o acesso ao objeto de conhecimento da tridimensionalidade por meio de uma experiência realizada no ano de 2017, ano em que se deram os encontros de acompanhamento com a estudante cega para elaboração da tese de doutoramento citada. Fomos percebendo durante os vários encontros de acompanhamento com a estudante cega que a percepção da forma, em especial, a forma tridimensional, apresentava algumas especificidades. Diante disso, resolvemos fazer uma experiência a qual relatamos e discutimos no presente artigo.

A experiência aqui mostrada se deu por meio de dois materiais específicos pensados pela pesquisadora: o cubo transcrito no plano do papel em braille e o cubo representado de forma concreta por meio de uma vela. A comparação entre esses dois materiais propôs discutir o acesso ao objeto de conhecimento da tridimensionalidade à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2004, 2011) apoiada na teoria da Percepção da Forma da Gestalt do Objeto (GOMES FILHO, 2008) e nos estudos de Bosch e Chevallard (1999) no que se refere aos objetos ostensivos e não ostensivos no ensino de matemática. Afinal, como o estudante cego acessa a tridimensionalidade na aprendizagem em matemática, uma vez que o objeto de conhecimento é representado por meio de significantes em braille ? E ainda, como se comporta a forma transcrita da tinta ao braille no que se refere aos artifícios que dão a ideia de volume nas formas comumente utilizadas em materiais impressos em tinta?

HIPÓTESES INICIAIS

A experiência proposta aconteceu no dia 06/09/17 e, como mencionamos, compôs o *corpus* de análise de uma tese de doutoramento defendida no ano de 2019. Trouxemos para discussão neste artigo a problemática específica percebida após uma intervenção que objetivou a investigação da percepção da transcrição de objetos de conhecimento em Geometria, em especial, o cubo, da tinta ao Braille . A ideia partiu de uma percepção da pesquisadora que identificou divergências relacionadas ao acesso ao objeto de conhecimento chamado paralelepípedo retângulo, em um momento anterior ao relatado neste presente artigo. As divergências se dão, principalmente, às percepções de dimensão, à identificação da forma do objeto de saber e à noção de perspectiva na transcrição de figuras em 3 dimensões da tinta ao braille . Inferiu-se, após essa primeira percepção, com o suporte teórico da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2004, 2011) - TRRS e da Gestalt do Objeto (GOMES FILHO, 2008), que a transcrição de objetos em três dimensões poderia ser substituída, em alguns casos, pela apresentação de uma representação concreta do objeto em 3 dimensões.

Nisso, novos questionamentos foram sendo feitos, paralelamente à TRRS no que cerca os estudos de Bosch e Chevallard (1999): O acesso ao objeto de conhecimento, em especial, a tridimensionalidade, para a cegueira poderia se dar por meio do objeto ostensivo, assim como se faz comumente em tinta?

OBJETOS OSTENSIVOS E NÃO OSTENSIVOS

Para Duval (2004, p. 14) “não há apreensão conceitual de um objeto sem a produção de uma representação semiótica” e, neste caso em especial, a produção semiótica passa por representações apresentadas em braille ao estudante cego e nisso, percebem-se algumas particularidades a serem levadas em consideração para a aprendizagem em matemática.

No intuito de investigar a aprendizagem, buscamos, além dos estudos de Duval (2004, 2011, 2022) sobre o acesso ao objeto de conhecimento, o que nos traz Bosch e Chevallard no que se refere a aprendizagem em matemática. Para estes autores (1999), os objetos de conhecimento em matemática são de dois tipos: objetos ostensivos e não ostensivos. Dessa forma, os autores mostram a relação que estabelecem entre os *objetos ostensivos e não ostensivos*:

> Os objetos *não ostensivos* são, deste modo, todos esses “objetos” que, como as ideias, as intuições ou os conceitos, existem institucionalmente – no sentido onde a ele é atribuído uma existência – sem, no entanto serem vistos, ditos, entendidos, percebidos ou mostrados por eles mesmos: eles só podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos associados (uma palavra, uma frase, um grafismo, uma escrita, um gesto ou todo um longo discurso) (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 88)

Esta relação entre esses objetos aprofunda-se ainda mais na afirmação seguinte desses mesmos autores:

> [...] não existe ostensivos sem os não ostensivos, tanto é que os objetos ostensivos que nossa relação a eles (em particular nossa capacidade de identificar, antes mesmo de manipular) são o produto de uma construção institucional – e, deste modo, o fruto de uma aprendizagem (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 92)

De forma mais clara, os objetos não ostensivos seriam as ideias, algo que precisamos representar para ter acesso e, esse acesso se dá por meio da manipulação de objetos ostensivos. Ficamos nos questionando como essas ideias poderiam ser entendidas levando em conta que o objeto de conhecimento em matemática para a cegueira é representado de forma diferente, possui significantes em braille , por exemplo. Seria necessário, para o caso da cegueira, pensarmos em um objeto semi-ostensivo? Com essa questão em mente, partimos para conhecer a experiência realizada e análises fazendo uso da TRRS e da Gestalt da Forma.

OBJETO DE CONHECIMENTO TRIDIMENSIONALIDADE NA CEGUEIRA: PERCEPÇÃO DA FORMA NOS REGISTROS EM BRAILLE

Pensar a tridimensionalidade na cegueira é inicialmente questionar como ela se dá para quem enxerga. Pensando apenas numa situação de sala de aula e na tridimensionalidade em tinta, fazemos uso dos estudos da Gestalt da Forma (GOMES FILHO, 2008). A ideia de três dimensões a ser acessada se dá na criação de artifícios para o olhar que passa a enxergar, por exemplo, sombras na intenção de acesso ao objeto de conhecimento da tridimensionalidade, como mencionado no início deste artigo.

No que tange a percepção de três dimensões por aqueles que não enxergam nos baseamos também nos estudos de Thompson e Cronicle (2006, p. 77), que apontam a dificuldade percebida em pessoas cegas em compreender imagens transcritas em perspectiva, assim como, a facilidade apresentada quando objetos transcritos passam a ser apresentados concretamente (THOMPSON; CRONICLE, 2006, p. 78). Além disso, impulsionados por Nunes e Lomônaco (2008, p. 129), resolvemos proporcionar oportunidades para a aprendizagem que envolvam experiências diretas, usando a comparação por meio de um objeto da sua realidade.

Dessa forma, a experiência proposta à estudante cega deu-se em duas partes: na primeira, apresentamos uma figura geométrica cubo transcrita em braille para a estudante cega. A figura transcrita foi colada no centro de uma folha de papel do tamanho A4 totalmente em branco e assim, apresentada à estudante. Após a análise da figura transcrita pela estudante, propusemos algumas questões relacionadas à identificação de elementos desta figura que se referia ao objeto de conhecimento cubo, como: faces, arestas, vértices e ângulos de faces[2]. A figura transcrita mostrada a estudante é apresentada na Figura 1 da sequência:

Figura 1: Cubo transcrito

Fonte: Anjos (2019, p. 199)

[2] As questões propostas à estudante cega encontram-se no corpo da pesquisa (ANJOS, 2019, p. 388).

Na segunda parte da experiência, a estudante recebeu um objeto concreto no formato de cubo e respondeu às mesmas questões relacionadas aos elementos da figura realizadas anteriormente. O objeto concreto entregue à estudante tratava-se de uma vela no formato de um cubo com as dimensões 4,5 cm de altura, 4,5 cm de largura e 4,5 cm de comprimento, mostrada na Figura 2 que segue:

Figura 2: Objeto vela: representação concreta de um cubo

Fonte: Anjos (2019, p. 199)

Após a apresentação da transcrição do cubo em braille e do objeto concreto, questionamos a estudante em relação à diferença entre as duas opções de apresentação do objeto do conhecimento. Na sequência, apontamos as observações mais relevantes no que cerca a apreensão perceptiva tátil e o acesso à figura geométrica cubo pela estudante cega.

Em experiências anteriores com a estudante cega[2], percebemos que o uso simultâneo de objetos transcrito em braille e em material concreto tinha mostrado certa. No caso da estudante cega, que pelo menos, o acesso ao

[2] Essas experiências encontram-se em forma do que chamamos de Encontros no decorrer do texto da tese anteriormente mencionada (ANJOS, 2019).

objeto de conhecimento em questão é possibilitado quando a figura geométrica transcrita em braille conta com o registro discursivo, assim como é indicado nos estudos de Duval (2022). Em relação à aprendizagem propriamente dita, para este caso, isso não pode ser confirmado. Nesta experiência, resolvemos não optar pela representação em dois registros (figural e discursivo), justamente para verificar esta necessidade.

A dificuldade em acessar o objeto de conhecimento por pessoas cegas, tende a relacionar-se à percepção háptica sequencial de captação de informações (NUNES; LÔMONACO, 2010, p. 57), em que as características do objeto transcrito são percebidas pela soma das partes que são tateadas, uma vez que a totalidade dos objetos só é percebida quando esta cabe na palma da mão (DUARTE, 2004, p. 10). Mas, o que nos aponta a Gestalt do Objeto é que o todo não é percebido pela soma das partes e sim, de forma global (GOMES FILHO, 2008, p.19). Mora aí uma particularidade da cegueira que precisamos considerar para a aprendizagem em matemática.

No que observamos por meio da experiência realizada com a estudante cega e vale insistir, que tanto o material em braille deve contar com ambas as representações (figural e discursiva) para permitir o acesso ao objeto do conhecimento, como deve ser apresentado de maneira diversa àquela do material em tinta, uma vez que as particularidades da percepção da forma na cegueira são diferentes das pessoas que enxergam. Relacionado à aprendizagem, acreditamos que a aliança entre estas duas ações, pode funcionar para o caso da estudante cega.

Referente à questão da visualização em perspectiva ou em três dimensões, mencionamos que a estudante não identificou as faces laterais e superiores da figura transcrita como sendo quadrados, em que **P** representa as falas[3] da pesquisadora e **A** a fala da estudante cega, conforme mostramos no diálogo a seguir:

> **P** – E na lateral, qual é a figura da lateral?
>
> **A** – Não sei nomear. Desconheço.
>
> **P** – E na face superior?
>
> **A** – É praticamente o mesmo dessa aqui, né? Só que é maior. Só que é mais larga.

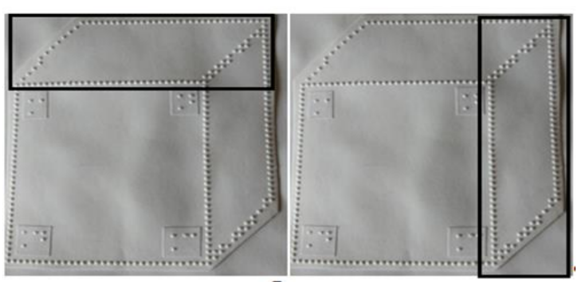
Entendemos que o questionamento feito pela estudante cega à pesquisadora, demonstra insegurança em relação à designação do objeto do conhecimento, já que ela informa algumas possíveis características do objeto, mas com um tom interrogativo em sua colocação. Ela, além desta insegurança, menciona que uma face é maior ou mais larga que a outra, fazendo assim com que descartemos, por completo, a possibilidade de que esta resposta seja reconhecida como a figura do quadrado para ambas as faces questionadas. As faces indicadas no diálogo, foram transcritas em perspectiva, assim como é apresentada em tinta, mas isso pode ser um obstáculo à leitura háptica e sequencial da estudante cega, visto que nem todas as imagens transcritas são compreensíveis para pessoas cegas no que cerca a perspectiva (THOMPSON; CRONICLE, 2006, p. 77). Ainda relacionada à questão da perspectiva em figuras transcritas, apontamos outro indicativo de dificuldades quando a estudante menciona que os ângulos das faces laterais e superiores do cubo transcrito em braille são diferentes da medida de 90º, como aparece no seguinte questionamento:

[3] Essas falas encontram-se no texto da tese (ANJOS, 2019).

> **P** – Qual a medida dos ângulos dessa face lateral da figura?
>
> **A** – Acho que são sessenta e trinta.
>
> **P** – Certo. E em relação a face superior dessa figura, que é essa mesma que você está tateando, qual a medida desses ângulos da face superior dessa figura?
>
> **A** – Quinze, talvez. Não sei.
>
> **P** – Esse você falou que é quinze, e esse outro? (Ela está tateando a parte superior da transcrição da figura)[4]
>
> **A** – Trinta e esse também.

Percebemos, na fala da estudante cega, que, novamente, não houve compreensão sobre a figura transcrita em braille . Ela explicitou no diálogo que todos os ângulos mencionados tinham medidas diferentes entre eles, o que nos permite inferir que ela não identificou o objeto como sendo um cubo. De maneira ilustrativa, mostramos na Figura 3 da sequência, as faces em destaque (contornadas com a marcação preta), pelas quais foram propostos os questionamentos anteriores. Na parte da Figura 3 localizada à esquerda, o destaque na face superior, já à direita, o destaque foi dado à face lateral direita:

Figura 3: Faces questionadas à estudante



Fonte: Anjos (2019, p. 202)

[4] Anotação encontrada na tese (ANJOS, 2019, p. 202).

Como vimos na fala anterior da estudante, em ambos os casos, houve o entendimento de que as faces não possuíam os mesmos ângulos e não estavam relacionadas à figura geométrica cubo. Isto vai ao encontro dos estudos de Thompson e Cronicle (2006) em relação à dificuldade de percepção das pessoas cegas com relação à objetos em perspectiva transcritos para o Braille . Neste ponto, vale nos questionarmos, uma vez que a transcrição para o Braille mostra uma manipulação do objeto ostensivo tratado por Bosch e Chevalllard (1999) sem êxito para a aprendizagem da estudante cega, que objeto seria necessário manipular?

Percebemos também que, diferentemente do estudante que enxerga, em que prevalecem as dimensões 2D em relação às 1D e 0D na apreensão de representações figurais (DUVAL, 2004, 158), na leitura tátil a estudante cega mostrou que há predomínio das dimensões inferiores em relação às superiores, como percebemos no diálogo a seguir:

> **P** – Identifique uma face dessa figura.
>
> **A** – Essa aqui.
>
> **P** – Essa é uma face?
>
> **A** – Sim.
>
> **P** – De onde até onde?
>
> **A** – Daqui até aqui. (a estudante mostra com a mão a face quadrada e só utiliza uma dimensão (segmento de reta que representa o comprimento)[5].
>
> **P** – Certo. A aluna visualizou como face um segmento.
>
> **P** – Identifique uma aresta dessa figura.
>
> **A** – Aqui.
>
> **P** – Onde?
>
> **A** – Esse ponto aqui.
>
> **P** – A aluna identificou como uma aresta um ponto da figura.

---

[5] Anotação encontrada na tese (ANJOS, 2019, p. 203).

No diálogo mostrado acima, a estudante relacionou um quadrado (2D) a um segmento de reta que o compõe (1D) e a aresta (1D) foi relacionada à um ponto (0D). A resposta nos permite inferir que a apreensão perceptiva tátil realizada pela estudante, diverge daquela feita pelos estudantes que enxergam, pelo fato da predominância das dimensões inferiores (0D ou 1D) em relação às superiores (2D ou 3D). Novamente, inferimos que esta predominância aparece como resultado de uma leitura háptica sequencial pela estudante cega. Neste exemplo, a predominância das dimensões inferiores em relação às superiores não levou a uma boa interpretação figural pela estudante, fazendo-a, entre outros aspectos, não designar o objeto de conhecimento cubo. Duval (2004, p. 157) nos indica que "toda figura aparece como a combinação de valores para cada uma das variações visuais", tanto dimensionais quanto qualitativas. Neste exemplo, tanto as variáveis dimensionais foram dificultadas através da leitura tátil, como as qualitativas, relacionadas à perspectiva e tamanho das faces laterais e superiores.

É apontado por Duval (2004, p. 157) ainda que as variáveis que são visuais têm total ligação com elementos constitutivos de uma figura pela percepção visual (dimensões, cor, tamanho, contorno). Por sua vez, estamos lidando com um caso de apreensão perceptiva tátil, em que a percepção de figuras transcritas passa por variações não visuais e sim, hápticas. Mesmo indicando variáveis visuais como forma de identificar elementos constitutivos de uma figura, Duval (2004, p. 46) relaciona as dificuldades de compreensão de figuras geométricas à questão perceptiva, alertando que:

> O que acontece com as figuras geométricas é que elas não são dadas perceptivamente, elas requerem operações específicas, que vão contra o funcionamento intuitivo do reconhecimento perceptivo das formas (DUVAL, 2004, p. 46)

Neste sentido e, para o caso específico das pessoas cegas, Thompson e Cronicle (2006, p. 80) apontam para o uso de texturas para representar informações tridimensionais em imagens transcritas no plano, como as mostradas anteriormente. Somado a esta ideia, Ochaita e Rosa (1995, p. 185) nos orientam mencionando que "a textura parece ter, para o tato, uma saliência perceptiva semelhante à da cor, para a visão". Apoiados nestas ideias, inferimos que o uso de texturas neste tipo de transcrição, transpareceria um cuidado em diferenciar a transcrição da figura em Braille do que é apresentado em tinta, uma vez que as percepções da tinta ao Braille são distintas.

Novamente, salientamos a necessidade de uma análise diferenciada em transcrições de figuras geométricas e de quaisquer outros objetos de conhecimento em matemática, visto a apreensão perceptiva tátil e não visual dos estudantes cegos. Tanto é necessária uma análise cuidadosa e diferenciada, que Thompson e Cronicle (2006, p. 81) chegam a alertar para o fato de que certas imagens táteis requerem um conhecimento e uma mediação visual para serem percebidas, enfatizando que, dependendo da figura transcrita, há importantes problemas de reconhecimento pelas pessoas cegas.

Passamos a segunda parte da experiência. Na segunda parte, em que mostramos o objeto vela (representação concreta da figura geométrica cubo), todos os questionamentos relacionados aos elementos do objeto de conhecimento cubo foram respondidos de maneira correta. A fala dela nos mostra a segurança para as respostas apresentadas:

> **A** – É que a figura para identificar só tocando e o objeto é simples porque é do dia a dia, você segura e você já sabe o que que é só de tocar, transcrita, realmente é o desenho, então é mais difícil

Esta resposta nos permite inferir a preferência, pela estudante cega, à forma de representação concreta (vela) em detrimento à representação transcrita da figura geométrica cubo.

Podemos inferir que, para o caso das figuras geométricas tridimensionais, a transcrição figural para o Braille mostra dificuldades relevantes de acesso ao objeto desconhecimento. Por sua vez, constatamos que estas dificuldades foram amenizadas para não dizer, extinguidas, com a apresentação de representações “concretas”, visto a impossibilidade de compreensão de aspectos relacionados à variáveis visuais dimensionais e qualitativas, ou seja, questões de ordem semiótica.

O uso de objetos concretos para representar os objetos do saber em matemática se restringe em muito às figuras tridimensionais (e quem sabe, só a elas) visto à natureza ideal destes objetos (DUVAL, 2004, 2011, 2022). A necessidade de fazer uso de representações vem da ideia indicada enfaticamente por Duval (2004, p. 16) de que “não existe *noésis* sem *semiosis ”,* ou seja, necessitamos das representações semióticas para acessar o conceito. E aqui, podemos retomar a questão posta anteriormente, fazendo uma relação da necessidade de representar apresentada por Duval (2004, 2011, 2022) e a manipulação de objetos ostensivos colocada por Bosch e Chevallard (1999), inferimos que, para a cegueira, talvez devêssemos pensar no objeto semi-ostensivo (usamos como exemplo, o material concreto) para a aprendizagem, aquele que é o intermediário entre o objeto ostensivo (representação) e o objeto não ostensivo (ideia).

À GUISA DE CONCLUSÕES

A discussão proposta neste artigo teve como foco o objeto de conhecimento tridimensionalidade e no centro da discussão sobre o acesso a esse objeto está a questão da aprendizagem em matemática na e para a cegueira. A proposta de discussão partiu de uma tese de doutoramento defendida em 2019 e, além disso, de um trabalho de pesquisa que acontece desde 2008 quando a autora era estudante da graduação em matemática. A temática da cegueira na aprendizagem em matemática tem um forte estigma a ser superado, uma vez que o componente curricular, assim como toda a sociedade do contemporâneo, tem forte apelo visual.

Com este paradigma em mente, buscamos responder a nossa questão central de pesquisa (como o estudante cego acessa a tridimensionalidade na aprendizagem em matemática, uma vez que o objeto de conhecimento é representado por meio de significantes em braille ?) no sentido de apontar as particularidades da cegueira na aprendizagem matemática e, jamais, na direção de encontrar dificuldades e fragilidades daqueles que não enxergam. Em um modelo que enfatiza as barreiras impostas pela sociedade às pessoas com deficiência, nos importa verificar as condições de acesso aos objetos de conhecimento e não em focar na "falta" como estigmatizam alguns entendimentos sobre a deficiência ainda vigentes em nossa sociedade.

Diante disso, com os achados da experiência realizada, podemos indicar que as representações semióticas propostas aos estudantes que enxergam e transcritas em Braille apresentam fragilidades e devem ser analisadas cuidadosa e particularmente e mesmo, que elas não permitem acesso ao objeto do conhecimento em matemática no que cerca figuras tridimensionais.

A tridimensionalidade como objeto não ostensivo na aprendizagem precisa ser manipulada em Braille para o acesso ao objeto ostensivo (cubo transcrito em Braille). Mas percebemos que, pelas leis da Gestalt do Objeto, há um rompimento no quesito de apresentar artifícios para o entendimento sobre volume. O cubo transcrito em Braille no plano parece modificar propriedades básicas da figura geométrica tridimensional e leva a estudante a conclusões equivocadas sobre faces e ângulos, ou seja, partes centrais da figura.

No entanto, a possibilidade de um objeto concreto em que o artifício do volume se faz pela suposta materialidade do objeto de conhecimento se fez eficaz para o caso da tridimensionalidade e mostrou possibilidades ao acesso.

Sabemos que, diante dos muitos objetos de conhecimento propostos na aprendizagem em matemática, há muito ainda para investigar. Assim, como sabemos que a questão da tridimensionalidade é uma problemática para a aprendizagem daqueles que enxergam. Tal proposta de estudo pretendeu lançar olhares para a cegueira, mas que isso possa nos fazer refletir sobre a aprendizagem para todos. Estamos cientes que a matemática é a mesma, mas o acesso aos objetos que a compõem é diverso e precisa ser alvo de nossa intensa investigação. Quais seriam os outros objetos em que o acesso pelas representações transcritas em Braille não acontece?

REFERÊNCIAS

ANJOS, Daiana Zanelato. **O que se revela quando o olhar não alcança?** Em busca do acesso semio-cognitivo aos objetos do saber matemático por uma estudante cega. 389fl. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2019.

BOSCH, Mariana; CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 19/1, p.77-124. 1999.

DUARTE, Maria Lúcia Batezat. O desenho como elemento de cognição e comunicação ensinando crianças cegas. In: 27° Reunião Anual da Anped, 2004. **Anais…**Reunião Anual da Anped, Minas Gerais. p. 1-17. 2004.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Suisse: Peter Lang, 2004.

DUVAL, Raymond. **Ver e Ensinar Matemática de outra Forma.** Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. Trad. de C. R. M. Arinos; J. L. M. de Freitas; M. T. Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 17, p. 01-52, 2022.

GOMES FILHO, João. **Gestalt do objeto:** sistema de leitura visual da forma. 8ª ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2008.

NUNES, Sylvia; LOMÔNACO, José Fernandes Bitencourt. Desenvolvimento de conceitos em cegos congênitos: caminhos de aquisição do conhecimento. **Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional**, v. 12, n. 1, p. 119-138, 2008.

NUNES, Sylvia; LOMÔNACO, José Fernandes Bitencourt. O aluno cego: preconceitos e potencialidades. **Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional**, v. 14, n. 1, p. 55-64, 2010.

OCHAITA, Esperanza; ROSA, Alberto. Percepção, ação e conhecimento nas crianças cegas. In: COLL, César; PALACIOS, Jesús; MARCHESI, Álvaro. **Desenvolvimento psicológico e educação: necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artmed, p. 183-197, 1995.

THOMPSON, Leanne; CRONICLE, Edward. Beyond visual conventions: Rethinkingthe design of tactilediagrams. **The British Journal of Visual Impairment**, v. 24, n. 2, p. 76-82, 2006.

CAPÍTULO IV

REPRESENTAÇÕES AUXILIARES NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Lucilene Dal Medico Baerle
Daiana Zanelato dos Anjos
Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

Na matemática, existe uma diversidade de situações de aprendizagem que pode contribuir para sua compreensão e na resolução de problemas, sendo que as representações auxiliares e intermediárias desfrutam de um papel importante na aprendizagem matemática, são utilizadas pelo professor no diálogo em sala de aula como parte de uma estratégia que visa promover a aprendizagem.

A utilização de representação auxiliar ou intermediária pode se dar por diversas formas, por meio de argumentação direta e exemplos. Acrescentamos ainda, a esses modos, o uso da contrapositiva, da ilustração, dos esquemas, da descrição, entre outros, combinado com alguma representação intermediária (DUVAL, 2004).

Sendo assim, em matemática a necessidade de representar torna-se necessária, uma vez que, os objetos de conhecimento que a constituem são ideais e abstratos, não perceptíveis aos sentidos humanos. O acesso a esses objetos de conhecimento não se dá com o uso de instrumentos e sim, apenas pela representação por meio dos registros de representação semiótica (RRS). A teoria dos RRS foi desenvolvida por Raymond Duval na década de 1980 e tem sido amplamente estudada e utilizada como fundamentação teórica em muitas pesquisas brasileiras (COSTA, 2021).

Um dos fundamentos postos por Duval (2004, 2011) diz respeito a dois termos de especial relevância para a compreensão de tal teoria: *noésis* e *semióses*. Para Duval (2004. p.16) “não há *noésis* sem *semióses*”, ou seja, não há apreensão conceitual sem a produção e coordenação de registros de representação semiótica. A coordenação entre os registros se dá cada vez que dois ou mais registros são mobilizados e suas unidades significantes são postas em coordenação.

Nesse trânsito entre registros de representação semiótica há um fenômeno que o professor deveria tomar consciência, a não congruência semântica. Duval (2004) alerta que esse fenômeno atravanca o aprendizado dos estudantes, pois impede o acesso aos objetos de conhecimento em matemática. Isso acontece quando as unidades significantes de cada registro ao serem colocadas em correspondência com as unidades significantes de outro registro, não obedecem aos critérios de congruência colocados pela teoria.

Lançando olhares para esse fenômeno, Duval (1999) apresenta um aspecto que nos chamou atenção: as representações auxiliares. Tais representações podem ser utilizadas quando o fenômeno da não-congruência se instala. Isso porque quando esse fenômeno se instala o custo cognitivo da operação de conversão aumenta e dificulta o acesso ao objeto de conhecimento (DUVAL, 2004, 2011).

A matemática, por ser um componente curricular bastante teórico, tem relevância fundamental nos processos de compreensão de definições e validação. A sua aprendizagem passa, necessariamente, por esses processos.

Aprender matemática é também compreender definições, afirmações, teoremas e demonstrações. Parece pouco, no entanto, é este o foco de métodos de ensino e aprendizagem de matemática e desses processos.

Em grande parte, o uso da intermediação diz respeito à discriminação dos objetos de conhecimento em matemática:

> O conteúdo da representação principal corresponde a uma categorização de formas, propriedades ou de traços podendo ser reencontrados em diversos contextos múltiplos, a representação auxiliar apresenta a ocorrência em um desses contextos (DUVAL, 1999, p. 58 – tradução nossa)

Dessa forma, destacamos alguns elementos de intermediação que aparecem com frequência no ensino de matemática. Verificando a necessidade de um olhar apurado sobre a intenção de uma investigação em relação às representações auxiliares, quando necessita de uma unidade cognitiva de transformação seja interna ou externa a um registro. Isso, pois nos questionamos acerca das representações auxiliares: qual o uso dessas representações auxiliares nos livros didáticos voltados aos Ensino Médio? Este é o tema central de uma tese de doutorado em desenvolvimento no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Neste capítulo, faremos uma caracterização dos diferentes tipos de representação auxiliar.

1. CONVERSÃO E FENÔMENO DA NÃO CONGRUÊNCIA

Ensinar matemática não é algo simples ou trivial e muito menos, se assemelha ao ensino de outras disciplinas. Isso porque, epistemologicamente falando, todo o objeto de conhecimento que se busca acessar em matemática apresenta um caráter abstrato e ideal, diferente das outras áreas do conhecimento.

Dessa forma, Duval (2005) reconhece que a matemática gera dificuldades na aprendizagem dos estudantes e que é mais complexa em comparação a outras áreas do conhecimento, principalmente, para aquelas que apresentam os objetos de conhecimento reais, como a biologia, por exemplo.

Na teoria de Duval (2004, 2011), a necessidade de representar os objetos de conhecimento é premente, uma vez que não são acessíveis por vias perceptivas. Nisso, esse autor (2012a, p. 268) define o paradoxo cognitivo do pensamento matemático: “a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro lado, é somente por meio das representações semióticas que a atividade sobre os objetos matemáticos se torna possível”.

Sabendo da necessidade da variedade de registro de representação, Duval (2012a) também enfatiza a importância de se trabalhar a operação cognitiva de conversão. Na conversão, o trânsito de registros possibilita que se apreenda conteúdos diversos do mesmo objeto de conhecimento em vários registros diferentes. Ou ainda:

> A conversão de uma representação é a transformação desta função em outro registro conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter). (...) A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística (DUVAL, 2012a, p. 272)

Em contrapartida, a atividade de conversão não é espontânea para o estudante e, muitas vezes, causa custo cognitivo. Sendo assim, se mostra um conceito que pode tornar-se foco de estudos e pesquisas em Educação Matemática.

No ensino de matemática, Duval (2004) aponta que se trabalha, pelo menos, com dois registros de representação. Quanto maior for a variedade de representações, maior será a capacidade de aprendizagem para o aluno, visto que fará a coordenação entre os registros e percebendo vários conteúdos relacionados ao mesmo objeto de conhecimento.

Nesse trânsito proporcionado pelas conversões, percebemos que nem sempre os critérios de congruência são percebidos e, então, instala-se um fenômeno que nos faz refletir sobre a aprendizagem. Trata-se do fenômeno da não congruência semântica e quanto a isso, Duval (2012b) afirma o seguinte:

> O problema da congruência ou da não congruência semântica de duas representações de um mesmo objeto é, portanto, o da distância cognitiva entre essas duas representações sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro. Quanto maior a distância cognitiva, mais o custo de passagem de uma representação a outra corre o risco de ser elevado e não ser efetuado ou entendido (DUVAL, 2012b, p. 105)

Dessa forma, para Duval (2012b), duas representações são congruentes quando existe correspondência entre uma representação de partida e outra representação de chegada. Porém, quando não há congruência a transformação pode se tornar custosa para os alunos em termos semiocognitivos. Para que uma representação seja congruente é necessário atender três critérios: possibilidade de uma correspondência semântica dos elementos significantes; univocidade semântica terminal e organização das unidades significantes (DUVAL, 2009).

Nas situações em que os critérios de congruência não são satisfeitos é preciso recorrer a uma representação chamada de intermediária entre o registro de partida e o registro de chegada que podem ajudar no trânsito entre um registro e outro (MONTENEGRO; BORBA; BITTAR, 2020).

Outro trabalho especificamente sobre o estudo das representações auxiliares na aprendizagem matemática, com enfoque nos materiais manipulativos no ensino do sistema de numeração decimal, foi de Sabel e Silveira (2023), na qual fizeram uma análise especificamente de representação auxiliar, do tipo material, utilizando os Blocos de Base Dez (BBD) e o Ábaco para a compreensão de números.

2. TIPOS DE REPRESENTAÇÃO AUXILIAR E INTERMEDIÁRIA

Neste trabalho, o foco são as representações auxiliares, no entanto, algumas se caracterizam como intermediárias. A seguir, faremos a caracterização de representações auxiliares e intermediárias, como: exemplo e não exemplo, contraexemplo, contrapositiva, ilustração, esquema e, por fim, a descrição.

2.1 EXEMPLO E NÃO EXEMPLO,

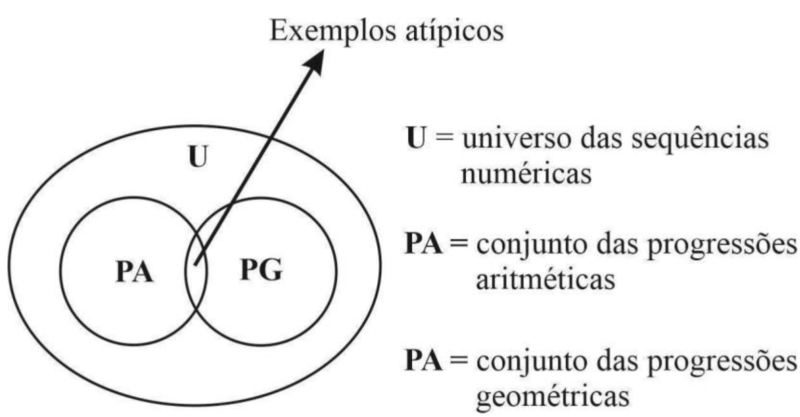
O exemplo é caracterizado por Duval (1999, p. 58-62) como sendo uma representação auxiliar, uma vez que também é tratado:

> O conteúdo da representação principal corresponde a uma categorização de formas, propriedades ou de traços podendo ser reencontrados em diversos contextos múltiplos, a representação auxiliar apresenta a ocorrência em um desses contextos (DUVAL, 1999, p. 58 – tradução nossa)

Como se pode verificar, o exemplo é o destaque de um caso de uma categoria de casos. Vejamos a definição de uma sequência numérica por meio de um exemplo: Uma progressão aritmética é uma sequência de números em que cada termo da sequência é igual ao seu termo anterior acrescido de uma quantidade fixa. A sequência *{0, 2, 4, 6, ...}* é um exemplo.

Seja U o universo das sequências numéricas, PA o conjunto das progressões aritméticas e PG o conjunto das progressões geométricas. A Figura 1 ilustra a relação de pertinência entre PA e PG.

Figura 1: Relação de pertinência entre as progressões aritmética e geométrica



Fonte: os autores.

Há, ainda, o caso atípico que não pertence à interseção de PA e PG, é a progressão aritmética *{0, 0, 0, ...}* cuja razão é zero.

Observemos que para a progressão aritmética (ou geométrica), incluímos o universo das sequências numéricas que, para o caso do exemplo como representação auxiliar, não seria necessário explicitar. Mas, para a categoria do não exemplo, o universo precisa ser mencionado, uma vez que um não exemplo deve pertencer a esse universo que tem o papel do objeto da representação semiótica. Para um quadrado, um cubo não serve como não exemplo uma vez que não faz parte do universo dos polígonos planos convexos a que o quadrado pertence. No entanto, um triângulo pode ser citado como um não exemplo de quadrado, uma vez que, além de pertencer ao universo dos polígonos planos convexos, possui o número de lados diferente do número de lados de um quadrado. Outros não exemplos para o quadrado podem ser dados, que exploram outras características da figura como os lados de mesma medida e ângulos internos congruentes.

Os não exemplos que exploraram as diversas características de um objeto matemático, consideramos também como sendo representações auxiliares, apesar de não estarem incluídos na lista das sete[1] funções apresentadas por Duval (2004). Pensamos que um não exemplo isoladamente não cobre as propriedades e traços encontrados em contextos múltiplos da representação principal, como preconiza Duval (2004), mas um conjunto de não exemplos podem ter essa função pela negação. Afinal, um objeto

[1] Para Duval (1999, p. 57-59) existem sete funções que uma representação auxiliar pode ser usada. São elas: aporte de informações complementares, interpretação heurística, interpretação explicativa, seleção de elementos relevantes, exemplo, ilustração e material.

matemático pode ser caracterizado pelo que ele não é dentro de um certo contexto.

2.2 CONTRAEXEMPLO

Consideremos o argumento “uma sequência de enunciados, um dos quais é a conclusão e os outros são as premissas, que provam ou fornecem alguma evidência para a conclusão” (NOLT e ROHATYN, 1991, p. 571). Um teorema é uma forma de argumento em que as premissas são as hipóteses e a conclusão é a tese: $p \rightarrow q, p \therefore q$, sendo $p \rightarrow q$ e p premissas, q a conclusão.

Analisemos a atividade seguinte que pode ser criada usando o conhecido trinômio de Euler com o seguinte argumento: para n inteiro, a expressão $n^2 + n + 41$ produz números primos. Podemos constatar que essa afirmação vale para $n = -39, -38, ...-1, 0, 1, 2, 3, ...39$ e para muitos outros valores de n, mas para $n = 40$, por exemplo, a afirmação não se mantém. Portanto, para n = 40, a expressão $n^2 + n + 41$ derruba a afirmação, pois produz um número composto ($40^2 + 40 + 41 = 41 \times 41$), o que caracteriza um contraexemplo. Então, dado um argumento que contenha o quantificador universal, basta encontrar um elemento que satisfaça as premissas, mas não a conclusão. O quantificador universal no caso do argumento do trinômio de Euler, está subentendido quando na hipótese menciona-se “para n inteiro”. Fica ainda mais claro se for explicitamente escrito, como no caso: qualquer que seja n inteiro, $n^2 + n + 41$ é um número primo.

O contraexemplo e o não exemplo tem semelhanças que podem induzir a uma confusão de uso. Para o não exemplo, o elemento exibido precisa pertencer ao universo do objeto matemático que está sendo apresentado em um conceito ou definição. No caso do contraexemplo, esse “elemento rebelde”, como se refere Duval (1995, p. 298), deve satisfazer a premissa (ou as premissas), mas não a conclusão. O contraexemplo é utilizado para derrubar um argumento que tem a presença do quantificador universal.

2.3 CONTRAPOSITIVA

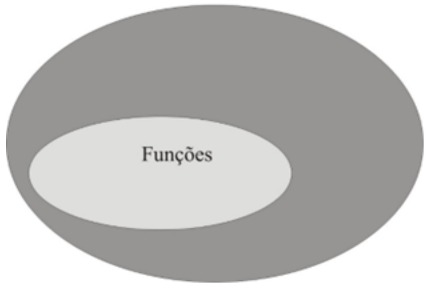
Comumente se utiliza do recurso de introduzir um determinado conceito procurando exibir propriedades que não lhe pertencem exatamente no intuito de tornar mais aparentes essas características. Isto ocorre pela simples razão de que, muitas vezes, parece ser mais simples caracterizar o que não pertence ao conceito para compreender o que faz parte. A definição de função se encontra em um desses casos.

A contrapositiva de uma afirmação, do ponto de vista lógico-matemático, é uma outra afirmação equivalente: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$. Assim, $\sim q \rightarrow \sim p$ é a afirmação contrapositiva da afirmação $p \rightarrow q$ e vice-versa. Essas duas afirmações em linguagem formal são equivalentes do ponto de vista lógico/matemático e podem trazer enormes diferenças semânticas e custo cognitivo quando postas em correspondência com os registros na linguagem natural.

A definição de algum objeto matemático é um argumento que vale a formulação direta e a recíproca, é do tipo: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$. Nesse caso, observamos que há duas contra positivas, uma para a proposição direta ($p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim$p) e outra para a proposição recíproca ($\sim p \rightarrow \sim q$). Este é o caso da definição de função real.

Uma função é uma relação entre dois conjuntos não vazios. Portanto, a função é uma relação especial que possui características que as diferenciam das demais relações, como mostrada na Figura 2 da sequência:

Figura 2: Esquema que apresenta a função como parte do conjunto das relações



Fonte: Os autores

Há basicamente dois caminhos no discurso do professor: caracterizar o que é uma função ou o que não o é. A definição de função estabelece que uma determinada relação *f* é função entre dois conjuntos não vazios A e B se, e somente se, para todo elemento do conjunto de partida *A* corresponde um, e só um, elemento no conjunto de chegada *B*. Esse discurso pode ser refeito assim: para que uma relação possa ser função é necessário que ocorram, de forma simultânea, as duas afirmações *p* e *q* seguintes:

p: um elemento qualquer do conjunto de partida *A* relaciona-se com algum elemento do conjunto de chegada *B*;

q: qualquer elemento do conjunto de partida *A* está relacionado com um só elemento do conjunto de chegada *B*.

Simbolicamente temos,

$$f \text{ é função} \leftrightarrow p \; e \; q \text{ são verdadeiras.}$$

No lugar dessa forma direta, podemos escrever, de forma equivalente, uma contrapositiva dessa expressão:

$$\sim(p \text{ e } q) \Leftrightarrow \sim p \text{ ou } \sim q \rightarrow f \text{ não é função,}$$

que pode ser lida da seguinte maneira, se não ocorrer *p* ou *q*, então f não é uma função, ou seja, se ao menos um elemento do conjunto de partida não está relacionado com algum elemento de chegada. Ou ainda, se um elemento do conjunto de partida está relacionado com mais de um elemento do conjunto de chegada, então a relação f não é função. No entanto, as frases que caracterizam a versão direta e a contrapositiva da função f são bastante distintas uma da outra. Nessas situações, percebe-se que são referencialmente equivalentes ao mesmo objeto (função), mas o sentido ou forma de uso, é diferente (FREGE, 1978, p. 61-86). Essas situações que caracterizam uma relação que não é função são muitas vezes ilustradas por meio de diagramas como no exemplo da Figura 3 a seguir.

Figura 3: Diagramas de Venn para caracterizar uma relação não função

Fonte: Os Autores

A função f tem o elemento “3” que não se relaciona com nenhum elemento em B e a função g tem o elemento “1” que se relaciona com dois elementos em B. O uso da contrapositiva, neste caso, é bastante promissor, uma vez que, basta encontrar apenas uma das ocorrências em uma das duas situações caracterizadas pela Figura 3. Apenas uma dessas duas características permite, por exemplo, decidir que a relação y: $[0, \propto] \rightarrow \Re$, dada por $y^2 = x$ não é função, pois para um mesmo valor de x, obtêm-se dois valores para y, como mostrado na Figura 3 pela situação típica da função g para não caracterizar uma função.

A passagem de um argumento ao argumento contrapositivo não caracteriza uma operação de tratamento em linguagem natural, uma vez que “No plano da língua só se pode definir regras de conformidade e não regras de tratamento que permitem uma expansão discursiva” (DUVAL, 1995, p. 337 – 338). Essa passagem é comandada pelas formas de expansão formal e cognitiva da função de expansão discursiva, já que exigem o recurso a símbolos e regras para um domínio de conhecimento (DUVAL, 1995).

Ainda no âmbito das funções, vamos apresentar outro argumento: Uma função afim *h* é uma função do tipo $h(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, *b* reais: se *h* é uma função afim, então a imagem de *h* é $\Re$. O argumento contrapositivo pode ser apresentado da seguinte maneira: se a imagem de h não é $\Re$, então h não é uma função afim. A construção do argumento contrapositivo, exige que se conheça para os enunciados *p* e *q*, a relação, $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$.

É importante observar que, se comparamos a frase contrapositiva para o teorema da função afim com as frases contrapositivas do exemplo da definição de função, podemos constatar que a frase contrapositiva para a função afim é pouco discriminante, visto que, há uma infinidade de funções que não tem $\Re$ como imagem. Diferente da definição de funções que em dois casos típicos (Figura 3) temos instrumentos para fazer uma distinção entre função de não função em diversas situações de aprendizagem matemática.

2.4 ILUSTRAÇÃO E ESQUEMA

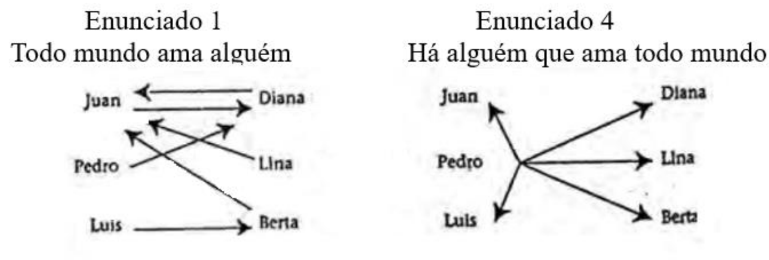
Os esquemas são registros utilizados para representar os predicados com dois lugares que correspondem às relações. Nesse sentido, “estas representações não discursivas podem servir de ponte para a passagem da língua natural para a língua formal" (DUVAL, 2004, p. 141 - tradução nossa). Assim, na construção de um esquema, é interessante observar que sua construção permite controlar ou corrigir a compreensão que todos podem ter das afirmações que são colocadas, e ainda, ao realizar os esquemas, podem descrever o registro em língua formal.

Logo, um esquema pode ser construído para representar uma situação descrita por um enunciado em língua natural e o mesmo esquema ser escrito fazendo uso de expressões da língua formal. Conforme Duval (2004):

> A passagem de um registro a outro por meio de uma representação intermediária equivale, então, do ponto de vista das tarefas a serem realizadas, ao encadeamento de duas descrições independentes uma da outra em seus dados de referência e em seus meios semióticos (DUVAL, 2004, p. 142 - tradução nossa)

Desse modo, também é possível realizar esquemas que ilustram uma situação descrita em língua natural, como por exemplo, fixando o conjunto de indivíduos de um discurso produzido por seis pessoas, que veremos no exemplo a seguir (Figura 4).

Figura 4: Enunciados 1 e 4



$\forall\, x\, \exists y\; (Axy)$ $\qquad$ $\exists x \forall y\; (Axy)$

Fonte: Adaptado de Duval (2004)

Nesse exemplo, estão descritas situações nos enunciados 1 e 4, sendo importante observar que a construção do esquema permite mostrar a compreensão que cada pessoa pode ter dessas afirmações. Já que, uma vez elaborados os esquemas, eles podem ser descritos no registro formal da linguagem e os dados dos esquemas apresentados nessa descrição, são os pontos de partida e os pontos de chegada das flechas.

Nesse caso, um ponto relevante que envolve a representação intermediária desse tipo, exclui toda análise do enunciado, como por exemplo, em língua natural, com base nos critérios semânticos ou sintáticos, inclusive a língua formal (DUVAL, 2004, p. 142). Além disso, a produção da proposição formal que aparece no exemplo, corresponde a uma tarefa de descrição de uma situação que foi representada no esquema e não é descrita discursivamente.

O esquema desse exemplo, pode ser considerado, segundo Duval (2004):

> como uma verdadeira representação intermediária, já que também cumpre a função de ponte para a passagem inversa (da língua formal para a língua natural). Neste caso, o esquema sagital ilustra a situação expressa pela posição representada segundo as notações de cálculo dos predicados e pode ser descrita como um enunciado em língua natural (DUVAL, 2004, p. 143 – tradução nossa)

Então, um esquema deve ser introduzido com a ilustração de um enunciado em língua natural ou de uma proposição lógica. Dessa forma, essa função de ilustração em relação aos enunciados e proposições, pode ser trabalhada de tal modo que sejam criadas uma infinidade de possibilidades para fazer os esquemas, dependendo do número de elementos e a maneira de colocar as setas, como foi visto na Figura 4, no exemplo anterior (DUVAL, 2004).

2.5 DESCRIÇÃO

Segundo Duval (2004), a operação de descrição:

> Consiste em identificar um objeto cruzando os resultados de várias operações de categorização. Esta operação se efetua nas línguas naturais e através do emprego de construções ou de proposições relativas: “seja um ponto de interseção da altura de um triângulo” (DUVAL, 2004, p. 95 - tradução nossa)

A operação de descrição é semelhante à operação de categorização simples (função discursiva), na qual consiste em identificar um objeto com base em uma de suas qualidades, ou seja, designar indicando a classe “típica” em que pertence. No entanto, elas são irredutíveis em dois aspectos, o primeiro é que nesta operação se cumpre uma situação de "dificuldade nominal", isto é, a ausência de palavras correspondentes disponíveis. Desse modo, nenhuma língua, incluindo a língua natural, pode ter um nome para cada objeto ou para cada classe de objetos, e ser capaz de nomear não importando o objeto apesar da limitação do léxico de uma língua de que se dispõe (DUVAL, 2004, p. 95).

O segundo aspecto, conforme Duval[2] (2004), essa operação inicia:

> uma possibilidade paradoxal: não somente podemos designar que não existe, mas também os objetos impossíveis, que como tais, são impossíveis de identificar. O centro de todos os debates sobre as relações entre sentido e referência tem sido essa possibilidade paradoxal de designar os objetos que não existem, possibilidade que introduz a operação de descrição (DUVAL, 2004, p. 96)

Essa operação de descrição, precisa ser combinada com a operação de determinação, salvo em certos casos, como nos registros das línguas naturais, sendo necessário combinar ao menos duas operações para poder designar um objeto (DUVAL, 2004).

Segundo Duval (2003), a relevância das tarefas de descrição na aprendizagem, não está relacionada

> apenas ao fato de serem intrínsecas à observação dos fenômenos, base de todo o conhecimento, mas também de consistirem em uma atividade de representação que envolve a mobilização de um ou mais registros semióticos e que depende do domínio dos alunos sobre eles (DUVAL, 2003. p. 14 – tradução nossa).

---

[2] Citado por RUSSELL (1970, p. 202-204). Introduction á la philosophie mathématique. Paris: Payot.

Esse tipo de representação auxiliar do tipo descrição pode ser trabalhado com outras abordagens matemáticas, como nos contraexemplos. Dessa forma, o fato de que qualquer descrição é um processo de representação, levanta vários questionamentos e que são decisivos para pesquisas sobre a aprendizagem da matemática.

Também, para Duval (1999), existem sete funções que uma representação auxiliar pode ser usada, são elas: Aporte de informações complementares, Interpretação heurística, Interpretação explicativa, Seleção de elementos relevantes, Exemplo, Ilustração e Material.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As dificuldades de aprendizagem de matemática encontradas pelos estudantes mostram a necessidade de questionar não apenas o *corpus* de conteúdos e a forma de ensinar, mas também os processos cognitivos envolvidos nas abordagens matemáticas para a compreensão. Para tanto, as pesquisas em Educação Matemática que mesmo centradas no ensino devem privilegiar o ponto de vista e as preocupações dos professores com as questões que envolvem a aprendizagem (DUVAL, 2005).

Neste estudo, discutimos as representações auxiliares enfatizando o papel que podem ter nas diferentes situações de ensino como ferramenta auxiliar e muitas vezes podem até serem indispensáveis na aprendizagem matemática, já que permite um enfrentamento alternativo em situações em que a não congruência semântica se faz presente de forma incisiva.

Para além desse estudo, uma tese em andamento, focalizará às representações auxiliares na sua utilização em livros didáticos e na concepção de professores que ensinam matemática.

REFERÊNCIAS

COSTA, C. **Teoria dos registros de representação semiótica: estado do conhecimento** (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2021.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

_________________. **Conversion et articulation des représentations analogiques.** Seminaires de Recherche, IUFM Nord Pas de Calais, 1999.

Décrire, Visualiser ou Raisonner: Quels "Apprentissages Premiers" de L'Activité Mathématique? Annales de didactique et sciences cognitive. IREM de Strasbourg. v. 8, p. 13-62, 2003.

_________________. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educacion y Pedagogia, Grupo de Educacion Matematica, 2004.

_________________. Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. In: **ACTES du XXXII e Colloque COPIRELEM.** Strasbourg, 2005.

_________________. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira – São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_________________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. Org.: Tânia M. M. Campos; tradução: Marlene Alves Dias. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

_________________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012a.

__________________. Diferença semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. **Revemat.** Florianópolis, v. 07, n. 1, p. 97-117, 2012b.

FREGE, G. Sobre o sentido e a referência. In: Alcorado, Paulo. (org. e trad). **Lógica e filosofia da linguagem**. São Paulo: Cultrix/EDUSP, 1978.

MONTENEGRO, Juliana Azevedo; BORBA, Rute. E. E. Rosa; BITTAR, Marilena. Representações auxiliares de transição e a aprendizagem de situações combinatórias por alunos de 7º ano do Ensino Fundamental. **Educação Matemática em Revista.** n. 68, p. 23-40, jun/set, 2020.

NOLT, J.; ROHATYN, D. **Lógica.** Tradução (L. Z. PUGA e M. YAMASHITA). São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

RUSSEL, Bertrand. **Introduction á la philosophie mathématique.** Paris: Payot. 1970.

SABEL, Eduardo; SILVEIRA, Everaldo. Representações auxiliares na aprendizagem da matemática: o caso dos materiais manipulativos no ensino do sistema de numeração decimal. **Revemat.** Florianópolis, v. 18, p. 01-20, jan./dez., 2023. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2023.e93906

CAPÍTULO V

RELAÇÃO SEMIÓTICA DOS REGISTROS GEOMÉTRICOS TRIDIMENSIONAIS COM A MODULAÇÃO DOS PROCESSOS ATENCIONAIS: UM RECURSO DIDÁTICO PARA O ESTUDANTE COM TDAH

Adriano Moser

INTRODUÇÃO

Quando analisamos o processo que definiu o que na contemporaneidade identificamos por “ser humano”, emerge um conjunto de fatores considerados determinantes, aos quais destacamos dentre esses, indubitavelmente, aquele que mais nos caracteriza como espécie *homo sapiens*: o desenvolvimento intelectual (MOSÉ, 2019).

Todavia, epistemologicamente, o processo educacional, um dos vieses principais para nosso aprimoramento cognitivo, sempre mostrou preferência por uns e depreciação por outros, seja por razões econômicas, físicas ou culturais. Com efeito, entre as pessoas sempre haverá diferenças, assim como também haverá igualdades, entretanto, como afirma Mantoan, “é necessário que tenhamos o direito de ser diferente quando a igualdade é que nos descaracteriza e o direito de ser iguais quando a diferença nos inferioriza” (MANTOAN, 2003, p. 21).

Assim sendo, é necessário que a estrutura educacional visualize nas diferenças, a oportunidade organizacional de não só acolher a todos fisicamente, mas sim, de fazer fluir uma ação formadora de modo a estabelecer novos marcos de compreensão entre as pessoas e o meio social em que convivem.

Iniciativas globais[1] em favor da democratização do processo escolar estão em curso e fomentam discussões nacionais a respeito de garantir que todos tenham acesso ao processo educacional, entretanto, não basta apenas criar políticas públicas de inclusão escolar, pois existe uma complexa relação com os saberes envolvidos no processo da aprendizagem, que não se resumem somente a ofertar condições estruturais e pedagógicas, e sim que ponderem também o ato individual de querer mobilizar-se intelectualmente para adquirir um saber científico (CHARLOT, 2021).

Se avançarmos o olhar sobre o arcabouço tecnológico que o nosso estudante está inserido, seja de modo direto ou não, vamos contemplar um cenário saturado de informações, que se atualiza numa velocidade muito superior quando comparada com a nossa capacidade de compreensão. Desse modo, seria possível estabelecer uma educação inclusiva significativa, sem

---

[1] Em 1990, A Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO) organizaram em Jomtien, na Tailândia, a Conferência Mundial sobre Educação para Todos, da qual se originou a Declaração Mundial de Educação para Todos e, em 1994, foi organizada em Salamanca, na Espanha, a Conferência Mundial sobre Educação Especial, que resultou na Declaração de Salamanca sobre Princípios, Política e Práticas na Área das Necessidades Educativas Especiais. Em 1988, a promulgação em outubro da Constituição da República Federativa do Brasil, reconheceu o direito das pessoas com deficiência à educação e, em 6 de julho 2015 foi sancionada a Lei nº 13.146, que visa assegurar e a promover o exercício dos direitos por pessoas com deficiência. Recentemente, em 30 de novembro de 2021, entrou em vigor a Lei de nº 14.254, definindo o direito ao acompanhamento integral para educandos com dislexia ou TDAH ou outros transtornos de aprendizagem.

estabelecer uma proposta inclusiva da escola dentro dessa nova era tecnológica?

Nos parece lógico inferir que nesse contexto de mundo tecnológico e informatizado, o processo educacional não só precisa está incluso, mas principalmente, deve ser fonte dos processos de inovação (CHARLOT, 2021).

Porém, havendo ou não a presença tecnológica no ambiente de sala de aula, o ato institucional de aprender perpassa por um esforço intelectual individualizado, além de que é necessário ativar processos cognitivos específicos, entre eles o que comumente chamamos de “atenção”.

Contudo, para as crianças e adolescentes que apresentam o Transtorno do Déficit de Atenção/Hiperatividade (TDAH), um transtorno de origem neurocomportamental que se caracteriza principalmente pela combinação de sintomas de déficit de atenção, hiperatividade e impulsividade; se apropriar de modo eficiente dos objetos de estudo apresentados durante o processo de aprendizagem não é uma realidade com que nós educadores presenciamos no cotidiano do meio escolar (VITAL; HAZIN, 1998).

Deste modo, neste artigo, vamos inicialmente abordar, a título de conhecimento, algumas particularidades clínica e comportamental do TDAH, dando uma maior ênfase ao Processo Atencional, sintoma nuclear dessa patologia, de modo a contribuir para uma melhor compreensão de: como um aluno com TDAH interage em seu processo de aprendizagem da matemática, especificamente em geometria espacial?

Sendo o TDAH, um transtorno mental, tomaremos como aporte teórico o Manual Diagnóstico e Estatístico de Transtornos Mentais (DSM-5), além de Abreu (2007), Carreiro (2018), Fernandez (2014), Hynd (1991), Pastura (2005), Polanczyk (2007), Vital (2008), entre outros.

Quanto ao Processo Atencional, em virtude de sua complexidade e dinamismo, diversas teorias buscam definir o que denominamos por atenção em termos científicos. Para esse trabalho vamos fazer uso da Teoria da atenção seletiva de Posner e seus colaboradores.

Por fim, consideraremos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval (1995, 2005, 2012, 2015. 2020) para identificar os fatores que permeiam a compreensão dos objetos matemáticos, sublinhando-se os objetos geométricos tridimensionais (3D).

1 TRANSTORNO DE DÉFICIT DE ATENÇÃO/HIPERATIVIDADE E O PROCESSO ATENCIONAL

A presença persistente de sintomas como a desatenção, hiperatividade e impulsividade, principalmente em crianças e adolescentes, visto que essas manifestações se iniciam na infância, são fortes evidências comportamentais de se tratar do Transtorno de Déficit de Atenção/Hiperatividade - TDAH, contudo, é necessária uma criteriosa investigação clínica para a confirmação do diagnóstico (SANTOS, 2013).

Se associarmos ao fato de que os sintomas podem ou não ocorrer de forma simultânea, esse transtorno apresenta três classificações, sendo predominantemente desatento, hiperativo ou combinado, ao qual este último representa a presença significativa dos três sintomas (desatenção, hiperatividade e impulsividade). Todavia a dificuldade de estabelecer e sustentar o foco, a desorganização, a mudança constante de tarefas sem concluí-la é nuclear no TDAH. Consequentemente, uma pessoa com diagnóstico positivo para essa patologia, pode não apresentar hiperatividade/impulsividade, mas sua conduta sempre tenderá a uma instabilidade do processo atencional (SILVA, 2009).

Durante os primeiros anos de vida de uma criança, a velocidade com que se desenvolve, dificulta muito a distinguir os sintomas do TDAH e de um comportamento normal, já a partir do final da primeira infância, por volta dos cinco anos de idade, com o seu ingresso no processo escolar, os sintomas deixam o seu anonimato e assumem um papel que, sem uma intervenção podem prejudicar o desenvolvimento social e cognitivo, visto que pode se estender até a vida adulta (DSM-5, 2014; MARTINS, 2011).

Quanto a sua prevalência na população mundial, estima-se que o TDAH em crianças permeie a faixa de 5%, já entre os adultos o percentual é de 2,5% (DSM-5, 2014). Se associarmos essa estimativa com a realidade do número de estudantes por sala de aula no Brasil, temos um indicativo de que a maioria dos ambientes tem pelo menos uma criança com esse transtorno.

Se o sintoma clínico da desatenção é global nesses estudantes, qual o grau de comprometimento que essa instabilidade atencional ocasiona quanto à compreensão dos saberes matemáticos? A apreensão dos objetos de conhecimento matemático exige uma série de habilidades, entre elas, a capacidade de filtrar estímulos distratores, a fim de estabelecer um foco atencional no que se deseja compreender, além disso, a própria estrutura do conhecimento matemático preconiza uma série de habilidades que dificilmente um estudante com TDAH apresentará com regularidade (RODRIGUES, 2010).

Todavia, mesmo havendo consenso entre as pesquisas de que o TDAH exige que, o processo educacional seja permeado por ações transformadoras, no sentido de atender as particularidades sintomáticas desse transtorno em relação à assimilação dos conteúdos, não podemos nos limitar somente a essa necessidade, pois o ato de aprender é modulado por uma pluralidade de fatores heterogêneos (CHARLOT, 1996).

Crianças que atendem a esses sintomas, principalmente o subtipo predominantemente desatento, sofrem as rupturas dentro do processo de aprendizagem, que geram precocemente sensações que, se não trabalhadas, serão fontes de insegurança, baixa autoestima e ansiedade, e, mesmo que, esses prejuízos possam variar, de acordo com os sintomas, fatores de risco, nível de proteção e idade, o processo educacional precisa fazer o que compete a ele, democratizar um ensino de qualidade (NOBRE, 2017).

Na deficiência atencional ao se mostrar como sendo o centro motivador do prejuízo acadêmico de um estudante com TDAH, é relevante que dissociemos o conceito intuitivo que temos da atenção do complexo mecanismo atencional que de um modo geral, não só administra um grande volume de informações, mas é responsável por várias funções essenciais (SISTO, 2011). Mas então, como podemos definir a atenção?

Didaticamente, o modelo atencional definido por Posner (1990) e seus colaboradores, é o que mais favorece a compreensão dos fatores que contribuem para a desatenção, sintoma nuclear do TDAH e que no contexto escolar, contribui para uma baixa aprendizagem.

Para esse modelo, a atenção seria um sistema modular associado a três redes atencionais: de alerta, de orientação e executiva. De forma elementar, a rede de alerta é responsável por definir um estado geral de vigília e modulála frente a um estímulo externo. Já a rede de orientação está relacionada pelo redirecionamento da atenção espacial e por fim, a rede executiva tem como ação principal, a responsabilidade em gerenciar o comportamento definido a partir de objetivos específicos, assim como também gerenciar os processos inibitórios (COSTA, 2008).

Em síntese, o modelo atencional de Posner nos permite inferir que o processo da atenção tem início a partir da ativação do sistema de alerta, uma vez que essa rede é responsável por gerar e manter um estado preparatório de modo que ocorra uma detecção rápida do estímulo esperado. Oportunizando assim, ao sistema de orientação, sendo este, responsável pelo controle do processamento espacial do local de origem dos estímulos potencialmente notórios, deverá desatrelar a atenção de um dado estímulo já focalizado, movimentando-a até a nova posição em que se encontra o alvo e atrelar a atenção a ele. Por fim, a rede executiva teria a responsabilidade de exercer um controle voluntário desencadeando uma ação, ou seja, é ela quem julga a relevância ou não de se manter o foco no estímulo apresentado (SISTO, 2011; COSTA, 2018; SANTANA, 2020; LIMA, 2005).

Assim, em termos conceituais, o processo atencional como um todo, é complexo e sinergicamente integrado, entre os gestos atencionais voluntários e involuntários, como toda função mental, o desenvolvimento do que mais se aproxima do que consideramos como um estado de concentração, está associada a atenção executiva seletiva e sustentada, que de acordo com Lima (2005, p. 117):

> A atenção seletiva é definida como a capacidade do indivíduo privilegiar determinados estímulos em detrimentos de outros, ou seja, está ligada ao mecanismo básico que subsidia o mecanismo

> atencional. A atenção sustentada descreve a capacidade de o indivíduo manter o foco atencional em determinado estímulo ou sequência de estímulos durante um período de tempo para o desempenho da tarefa.

Portanto, num ambiente de sala de aula, para que os estudantes se concentrem em certo momento, se faz necessário uma série de processos físico-químicos para que o desejo do professor seja realizado, ou seja, seus alunos e alunas "prestem atenção em sua explicação", por exemplo. Todavia, para que esse gesto atencional aconteça, precisará que processos desatencionais sejam acessados, ou seja, processos para inibir estímulos não desejados precisariam ocorrer (RUEDA; MONTEIRO, 2013).

De um modo em geral, os estudantes com TDAH, em função da particularidade de seu processo atencional, principalmente por parte das disfunções em sua rede executiva, apresentam lapsos em seus processos de aprendizagem que comprometem sua capacidade de processamento das informações, e dessa forma, com o passar do tempo, a capacidade de compreensão é reduzida, diminuindo consideravelmente a capacidade atencional nesses objetos do conhecimento (MARTINS, 2011).

2 OS BENEFICIOS QUE O USO DAS REPRESENTAÇÕES DE OBJETOS GEOMÉTRICOS TRIDIMENSIONAIS PODE TRAZER NO APRENDIZADO GEOMÉTRICO DOS ESTUDANTES COM TDAH

O desempenho escolar do estudante com TDAH, em decorrência das particularidades do sistema atencional, é provável que, apresente níveis de comprometimento, que sem uma intervenção dos envolvidos no processo de aprendizagem, sua passagem pela escola será marcada por fracassos, reprovações e a personificação da ideia de que não é capaz de aprender, anulando qualquer desejo de uma carreira acadêmica (PASTURA, 2005; DSM-5, 2014).

Estudos mostram que, a aprendizagem matemática no decorrer dos anos escolares é afetada, entretanto o campo da aritmética é destaque quando se busca relacionar o desempenho acadêmico e o portador do TDAH. Porém, como afirma Sisto (2011, p.33), "*esses erros não seriam provocados apenas por dificuldade de aprendizagem ou na compreensão do raciocínio matemático, mas também por erros cometidos por desatenção"*.

A carência de pesquisas que abordem a aprendizagem da geometria por estudantes diagnosticados com TDAH, não caracteriza uma estrutura meritocrática entre os conhecimentos matemáticos, valorizando uns em depreciação de outros, até porque, para a teoria, de Raymond Duval (1995, 2005, 2009, 2011, 2012, 2013, 2018), o acesso aos objetos matemáticos subordina-se a um único caminho, uma vez que sendo imateriais, sua apreensão ocorre somente através das suas diversas representações semióticas (DUVAL, 2009).

Essa singularidade do conhecimento matemático, de ter seu acesso restrito as representações semióticas, Duval (2009, p. 17), afirma que *"não há noésis sem semióses, é a semióses que determina as condições de possibilidade e de exercício da noésis"*.

Por se tratar de duas operações cognitivas correlacionadas a compreensão dos saberes matemáticos, e portanto, onipresentes a todo processo de aprendizagem, quando Duval assegura que a noésis é dependente da *semióses*, parte do princípio de que a *noésis*, sendo o domínio global de um saber matemático, e este sendo um objeto de conhecimento ideal, a *semióses*, ao corresponder a produção e compreensão das representações semióticas desse saber, assume não só o status de ser o único acesso ao objeto de estudo, como também, através das operações internas: formação, tratamento e conversão, conduz a aprendizagem conceitual, algorítmica, estratégica e comunicativa inerente ao objeto matemático.

Ademais, todo sistema de representação semiótica que contempla simultaneamente as funções de formação, tratamento e conversão, para a TRRS, é considerado um registro de representação (DUVAL, 2012).

Entretanto, para Duval, a inserção do estudante no processo da compreensão matemática, exige que ele reconheça o objeto matemático em diferentes registros semióticos, e, seja capaz de operar de forma coordenada e autônoma, não só as operações próprias de um sistema semiótico, mas principalmente ser capaz de realizar mudanças entre registros distintos (DUVAL, 2013; SILVIA 2013). Todavia, considerando as especificidades atencionais de um estudante com TDAH, que contexto de ensino será necessário oferecer, a fim de que ele possa desenvolver a habilidade de estabelecer essa diferenciação?

De um modo geral, é preciso que durante o processo de ensino, o estudante acesse o mesmo objeto matemático através de pelo menos dois sistemas semióticos diferentes, pois cada tipo de representação evidenciará determinadas características e ocultar outras, contribuindo para que a representação semiótica que ele esteja contemplando não seja vista como sendo o próprio objeto de estudo (DUVAL, 2018).

Dessa forma, sistematicamente, toda representação semiótica apresenta uma estrutura formativa própria do sistema a qual faz parte, e a partir de regras internas possibilita a sua transformação em outras representações, porém, se mantendo ainda no mesmo tipo de registro e operação cognitiva denominada por Duval de tratamento. Por fim, a operação de maior custo cognitivo, é a mudança entre sistemas semióticos diferentes ou, em outras palavras, a conversão, pois não é possível identificar semelhança entre os conteúdos das representações que se deseja transitar (DUVAL, 2018).

Para Duval é a coordenação da operação de conversão sobre essa pluralidade de diferentes registros semióticos que irá promover a aprendizagem da matemática, uma vez que cada representação privilegia uma faceta do conteúdo estudado, e, portanto, só o trabalho com os diferentes registros de representação cria um ambiente enriquecido e propício à aquisição de novos conhecimentos.

Se considerarmos os fatores semicognitivos que estariam alicerçando uma aprendizagem significativa da matemática, a atuação desordenada do processo atencional, é sim, uma variável que dificultaria as operações associadas a *semióses* e dessa forma a noésis ficaria comprometida. Uma vez que, de acordo com Rabelo:

> A atenção dirigida de maneira adequada é uma função prévia necessária para a realização de atividades de concentração e de rastreamento mental. Um simples distúrbio de atenção ou a incapacidade de manter o foco de forma proposital pode resultar em problemas de concentração ou interrupção do rastreamento conceitual, impedindo o indivíduo de resolver problemas por meio de uma sequência lógica de ideias, por exemplo (RABELO, 2020, p. 30)

Em termos gerais, as intervenções em sala de aula sugeridas com o objetivo de ampliar o nível de sucesso da aprendizagem geral de um estudante que clinicamente foi diagnosticado com o TDAH, permeia simplesmente por adaptações, seja no tempo de uma atividade, ou na redução do número de questões, no discurso simplificado e objetivo, enfim, é notório que, dentro do contexto atencional, se busca simplesmente adaptar o processo de aprendizagem a disfunção atencional (MARTINS, 2011).

Para a aprendizagem dos objetos matemáticos, de acordo com a TRRS, sendo diferente de todas as outras áreas do conhecimento, é preciso garantir que essas adaptações não restrinjam as condições cognitivas necessárias para a compreensão matemática. O uso restrito de um único registro semiótico pode ser entendido como uma forma de simplificação da atividade, porém, essa didática irá favorecer a ideia de que o registro é o próprio objeto matemático, "*limitando consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos (...)*" (DUVAL, 2013, p. 21).

Entre todas as competências cognitivas da matemática, a geometria se destaca não só por exigir gestos intelectuais específicos em seu processo de compreensão, como também, a necessidade de desenvolver mecanismos que otimizem a interação entre ver, raciocinar e construir os objetos geométricos. Duval (2005, 2012), no decorrer de seus estudos, desenvolveu construtos teóricos de modo a favorecer a compreensão do processo de aprendizagem da geometria, sendo eles, as apreensões categorizadas em perceptiva, discursiva, operatória e sequencial, e, os olhares icônicos e não icônicos, sendo que:

i. A apreensão perceptiva se refere a interpretação dos elementos que determinam uma figura geométrica no próprio registro figural;

ii. A apreensão discursiva atua na interpretação dos elementos figurais articulando-os com o enunciado e rede semântica de propriedade do próprio objeto geométrico em questão;

iii. A apreensão operatória é o gesto interpretativo centrado nas modificações que um registro figural pode oportunizar e também nas reorganizações possíveis das modificações efetuadas;

iv. A apreensão sequencial é solicitada em atividades que exijam construções de objetos geométricos a partir instrumentos manuais ou digitais, ou em tarefas que tenham como objetivo reproduzir uma figura a partir de suas descrições;

v. O olhar icônico é dividido em: botanista e agrimensor, o primeiro está associado ao reconhecimento das propriedades vinculadas ao objeto geométrico cuja intenção seja associar um registro figural através do contorno da forma a uma determinada classe geométrica, a título de exemplo, diferenciando um quadrilátero de uma circunferência, já quanto ao segundo, interage as propriedades da figura que são relacionadas com o propósito de estabelecer medidas, sejam elas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais (olhar agrimensor);

vi. O olhar não icônico é dividido em: construtor e inventor, em função da especificidade das figuras geométricas, o olhar do construtor atua no reconhecimento e coordenação dos traços realizados com o auxílio de um instrumento, podendo ser por exemplo: réguas e compasso, e até mesmo através de softwares de geometria dinâmica. Já o olhar do inventor, se caracteriza pela disponibilidade de exercer de forma coordenada não só ao enunciado, como também a rede semântica de

> significados das unidades geométricas elencadas no registro figural de partida, o gesto de adicionar traços suplementares, de modo a encontrar a partir da figura uma solução para o problema.

Neste sentido, é importante salientar que a ação resolutiva dos problemas de natureza geométrica depende da coordenação simultânea entre dois registros semióticos distintos, que são eles: o registro discursivo e o figural. Cognitivamente, é necessário que a apreensão perceptiva, sendo o primeiro gesto intelectual e autônomo sobre a figura, ao estabelecer o reconhecimento e a discriminação das formas, também leve em consideração a rede semântica de propriedade dos objetos geométricos identificados através da apreensão discursiva (DUVAL, 2012). Dessa forma, seja por meio semiótico ou mental, as figuras desempenhariam o seu papel heurístico, atuando de forma positiva na resolução de problemas (FLORES, 2004).

Esse olhar imediato sobre os registros figurais com mínimo custo cognitivo e, portanto, muito usual pelo estudante com TDAH, num contexto geométrico não favorece um raciocínio estruturado conceitualmente, uma vez que, não advém de uma articulação com a linguagem. Vale lembrar que, para uma figura geométrica é possível estabelecer diferentes enunciados, da mesma forma que para um enunciado é possível compor diversos registros figurais (DUVAL, 2018).

Dessa forma, a compreensão geométrica exige que os registros figurais sejam vistos a partir de suas propriedades e das condições expostas no enunciado, um cenário exigente não só do ponto de vista didático, mas também do ponto de vista atencional, uma vez que, o educando precisará estabilizar o foco nos registros semióticos discriminados e inibir os estímulos distratores (DUVAL, 2012; LIMA, 2005).

Logo, os estudantes com TDAH, em decorrência da singularidade dos seus processos atencionais, como por exemplo, a baixa eficiência do sistema de modulação dos estímulos distratores e uma atenção executiva sustentada curta para estímulos com baixa atratividade, tendem a nortear sua compreensão e resolução somente através da apreensão perceptiva imediata[1], uma vez que, é mais facilmente alcançada (MORETTI, 2013).

Esta lacuna epistemológica entre o que é necessário para acessar a proficiência geométrica de acordo com TRRS e os entraves que o TDAH implica nesse acesso, é necessariamente uma condição estática? Nesse caso, a compreensão dos objetos geométricos estaria à mercê de eventos aleatórios e pontuais; ou poderia ser superada através do reconhecimento da importância dos estímulos sensoriais, de modo particular o visual e o tátil, dada a sua dinamicidade e dupla participação nos processos da atenção e da compreensão geométrica?

Duval, reconhecendo que um registro figural, seja ele, bidimensional (2D/2D), ou tridimensional (3D/2D) quando representado no plano ou tela eletrônica, ou não, nesse caso estaríamos associando um objeto de representação (3D/3D), dependendo da exigência do problema, operações específicas coordenarão a ação resolutiva, e consequentemente o gesto intencional da percepção precisará se harmonizar as articulações entre as demais apreensões (MORETTI, 2013).

Quando a proposta da atividade se concentra no reconhecimento externo ou na mensuração de grandezas, sejam lineares, quadráticas ou cúbicas, os olhares icônicos divididos em botanista e agrimensor predominam durante a sua execução, por outro lado, havendo exigência de traçar linhas de

[1] Aquela que se efetiva especificamente na figura de forma autônoma e imediata.

forma coordenada ou não, será exigido os olhares não icônicos, classificados em construtor e inventor (DUVAL, 2005).

A unicidade com que cada olhar interage com os registros figurais e discursivos, não permite inferir que exista uma hierarquia conceitual que configure um delinear didático dos conceitos geométricos de modo que, o domínio específico de uma maneira de ver, preconiza um acesso significativo a outro olhar (DUVAL, 2005).

Entretanto, expor de forma explicita e sistemática, valorizando as características qualitativas dos registros semióticos e suas propriedades estruturais: formação, tratamento e conversão a partir de atitudes didáticas integradas, corroboraria para o reconhecimento por parte dos estudantes de que, o que processamos como imagem, não necessariamente é o que vemos, ou seja, nossa percepção é inicialmente global, contrapondo a maneira que devemos ver os objetos geométrico, dessa forma, o gesto de desconstruir e construir uma figura geométrica seriam atos mais significativos (DUVAL, 2011; FILHO, 2008).

Aliais, em função da nossa relação com as imagens ao nosso redor, nos tendenciamos a transferir a iconicidade das imagens fora do contexto geométrico para o ambiente de aprendizagem da geometria, aumentando o custo cognitivo para reconhecer as unidades elementares dimensionais a partir da decomposição da forma a ser compreendida.

Na prática, todo aumento do custo cognitivo, acarreta uma necessidade maior de se estabelecer um processo atencional mais eficiência quanto a modulação dos distratores, pois, será preciso que o foco seja sustentado por um período maior de tempo.

O ambiente de sala de aula, de um modo geral, apresenta inúmeros fatores que desfavorecem a concentração por parte dos estudantes, não só a dinâmica da estrutura física, a coletividade do espaço, como também, a relação que cada indivíduo estabelece com o mundo a sua volta, ou seja, se não houver uma significação pessoal, social e histórica de estar naquele ambiente, a própria mente do estudante será a sua maior fonte de distração (CHARLOT, 2021).

Quanto a iniciativa de aprender, sendo uma atividade intelectual, é necessário que exista por parte do estudante, uma mobilização, um movimento em direção ao objeto de conhecimento almejado, sendo esta dinâmica mais bem realizada se houver um sentido para o estudante, uma vez que será preciso entrar num processo voluntário de concentração (CHARLOT, 2013).

Entretanto, para um estudante com TDAH, mobilizar-se numa atividade intelectual de aprendizagem em matemática é mais complexo, pois, além das rupturas conceituais provenientes da desatenção, é preciso superar sua baixa autoestima com relação a sua capacidade de aprender.

Portanto, numa sala de aula, frente a inúmeros estímulos potencialmente atrativos que poderiam desencadear uma mudança atencional, as representações semióticas ao sensibilizar nossa percepção precisam sobre-exceder a todos os demais estímulos. Todavia, se *"a atenção é desencadeada por todos os cinco receptores sensoriais primários (visão, audição, olfato, paladar e tato)"* (RABELO, 2020, p. 30), a associação da via sensorial visual e tátil, poderia contribuir para a manutenção da atenção, uma vez que, ampliaria a rede de informações proveniente do estímulo desejado.

Dessa forma, os objetos geométricos tridimensionais, se acessados também através de suas representações (3D/3D) contemplaria além do estímulo visual, também o tátil, ampliando não só a possibilidade de haver uma melhor qualidade do processo atencional executivo, mas também enriqueceria a atuação da apreensão perceptiva em conjunto com a apreensão discursiva em decorrência da ampliação do estado de concentração.

Assumindo que as representações tridimensionais dos sólidos geométricos (3D/3D) são potencialmente atrativas, se comparadas as suas representações no plano (3D/2D), o que para um estudante com TDAH já representaria um fator positivo, assim como todo registro figural geométrico é didaticamente capaz de ser reorganizado em outras figuras de mesma dimensão, sendo este tratamento sobre o registro figural denominado por desconstrução mereológica (DUVAL, 2011, 2018).

Entretanto, se buscamos ampliar a compreensão geométrica, principalmente dos estudantes com TDAH, é necessário que evoquemos todo o potencial heurístico do registro figural, uma vez que, o delineamento da solução de um problema, ou até mesmo a compreensão de alguma proposição geométrica, quando proveniente da interação entre discurso e imagem, formalizam uma experiência cognitiva de sucesso, favorecendo assim, não só, a sua autoestima, como também melhorando sua capacidade atencional (DUVAL, 2018).

Contudo, mesmo tendo ciência de que a interação entre as apreensões perceptiva e discursiva não é um gesto natural, é preciso promover em cada problema de natureza geométrica a busca por caminhos heurísticos, ou seja, precisamos instigar os nossos educandos, sejam eles portadores ou não do

TDAH, a desenvolver o olhar não icônico, a fim de reconhecer num registro figural, unidades geométricas dimensionalmente inferiores (DUVAL, 2011).

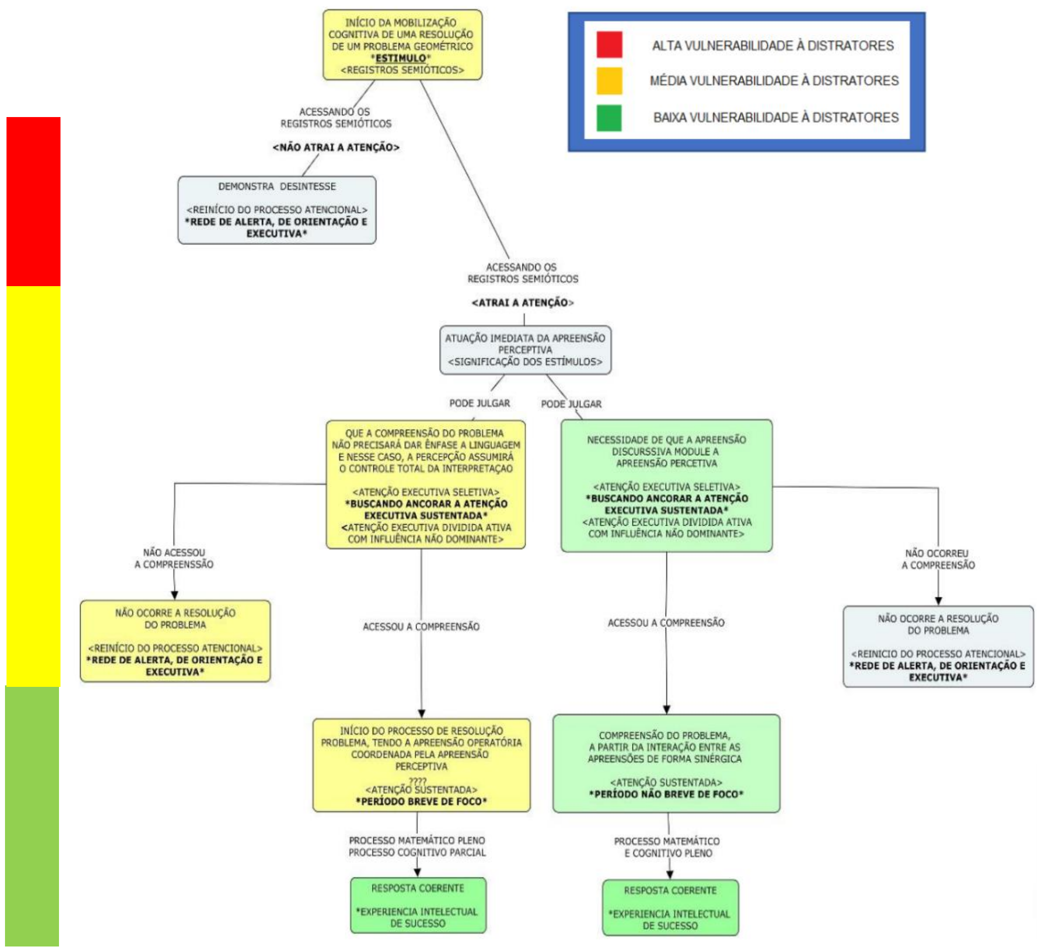
Numa dinâmica de sala de aula, todas as redes atencionais atuam simultaneamente, a partir do instante que um determinado estímulo se define como importante, inicia-se a estruturação da atenção executiva sustentada. Nesse momento, todos os demais estímulos do ambiente passam a ser considerados distratores externos, e é preciso considerar também as construções de ideias que não estejam relacionadas com o estímulo selecionado, ou até mesmo as rupturas conceituais podem instigar o desengajamento do foco atencional durante o início da apresentação do estímulo (FONSECA, 2021).

Se delimitarmos para uma ação didática envolvendo como proposta de estudo um problema de natureza geométrica, os registros semióticos sendo a única forma do estudante interagir com o objeto de estudo, devem ser apresentados de maneira que se sobreponha aos demais estímulos, a fim de que, o sistema atencional executivo possa não só iniciar o processo de ancoragem, mas principalmente a sua manutenção.

Nesse caso, não só a qualidade do estímulo, como também a sua amplitude é importante, o que justifica agregar ao processo de aprendizagem o estímulo tátil. A manipulação física da representação semiótica dos sólidos geométricos, não só ampliaria a visualização espacial das propriedades, por exemplo, o paralelismo entre as faces de um hexaedro regular, como também auxiliaria na manutenção do estado de atenção (DUVAL, 2011; RABELO, 2020).

A Figura 1 busca dimensionar o grau de influência dos estímulos distratores num processo de resolução de um problema de natureza geométrica, tendo como base o modelo atencional de Posner e TRRS de Duval.

Figura 1: Relação entre o processo de resolução de um problema geométrico e nível de modulação dos distratores



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Pelas peculiaridades atencionais que o TDAH desencadeia em ambientes que exijam tarefas que demandam de um maior controle mental, o modelo acima (Figura1) caracteriza esse contexto, visto que a partir do momento que o professor apresenta o problema de natureza geométrica fazendo o uso dos registros semióticos, a tendência é que a apreensão perceptiva atue de forma isolada coordenando o processo de resolução, em função do baixo custo cognitivo.

Essa supervalorização imediata da apreensão perceptiva, deixando assim de contemplar a figura a partir de suas propriedades enunciadas, favorece o delineamento de processos resolutivos incoerentes com a proposta do problema e até mesmo a sua incompreensão, o que para o estudante com TDAH, reforçaria a sua concepção de que não consegue compreender a matemática, em particular os conceitos geométricos.

Dessa forma, o professor precisa desenvolver em sua didática, a dinâmica de praticar a interpretação discursiva dos objetos geométricos contemplados no problema, a respeito da importância desse gesto, Duval (2012) afirma que:

> De fato, as propriedades pertinentes e as únicas aceitáveis dependem cada vez do que é dito no enunciado como hipótese. Isto implica subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva e, como consequência, uma restrição da apreensão perceptiva: uma figura geométrica não mostra a primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito. Esta subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva pode ser considerada como uma teorização da representação figural: a figura geométrica torna-se, de certa maneira, um fragmento do discurso teórico (DUVAL, 2012, p. 131)

Pois, a partir do momento que ocorre a compreensão da situação problema, o engajamento do processo atencional se torna mais consistente, não significando que não ocorrerão mudanças atencionais durante a resolução, porém, sendo uma das características do TDAH reabilitar o gesto atencional no que ele estava fazendo antes de se distrair, reafirma a relevância de estar manipulando uma representação semiótica tridimensional do objeto geométrico, já que sensorialmente existirão mais pontos para ancorar novamente a atenção sustentada.

Além do mais, estando presente no registro figural tridimensional (3D/3D) elementos geométricos dimensionalmente inferiores (2D, 1D e 0D), e havendo a necessidade de desenvolver os olhares não só os icônicos, mas principalmente os de natureza não icônica, é oportuno que o professor utilize este momento para sua prática didática, pois a habilidade cognitiva em desconstruir dimensionalmente uma figura geométrica amplia a capacidade heurística da imagem (DUVAL, 2011).

Enfim, assim como, para o diagnóstico do TDAH é necessário agregar informações multidisciplinares, as intervenções também permeiam por diversos aspectos, e é claro, que a escola, um dos principais ambiente de expressão sintomatológica do portador do TDAH, precisa desenvolver práticas pedagógicas de modo a pelo menos reduzir os impactos negativos do transtorno, de modo particular, a debilidade do processo atencional.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática quando contemplada dentro do ambiente escolar, muitas vezes, é perceptível sua corroboração nos processos de exclusão, mesmo não havendo uma intenção direta, os resultados nas avaliações demonstram uma significativa dificuldade dos estudantes em estabelecer uma compreensão significativa. Dessa forma, a relação com o saber matemático, se for alicerçada em fracassos, desencadeará não só uma aversão a disciplina, como também a toda atividade intelectual associada a escola.

Entre todos os fatores que poderiam estar associados as dificuldades que os estudantes apresentam para compreenderem os objetos matemáticos, no presente artigo, nos limitamos a patologia do TDAH e ao não reconhecimento do objeto matemático em suas diferentes representações, de modo particular, as figuras geométricas tridimensionais.

Assim como todo processo intelectual de aprendizagem, exige como pré-requisito, um sistema atencional eficiente, o uso do modelo de Posner contribui para que se estabeleça não só, um melhor entendimento dos gestos atencionais empreendidos pelo educando no ambiente de sala de aula, como também favorece o reconhecimento do papel auxiliar na manutenção da rede atencional executiva que o sensoriamento tátil pode oferecer no decorrer do ação pedagógica, habilitando uma ação interpretativa mais abrangente e eficaz.

Partindo do ponto de vista cognitivo da aprendizagem matemática, a TRRS no que tange os conceitos geométricos, mostrou-se suficiente para reconhecer todos os elementos necessários para a compreensão geométrica por parte do estudante. Os estímulos visuais e táteis atuariam em conjunto a partir das representações tridimensionais dos objetos que estariam sendo relacionados no problema, criando assim um contexto em que as apreensões atuariam de forma mais sinérgicas.

Como todo início de pesquisa, há muitos construtos teóricos que precisam ser analisados, dada a complexidade com que os sintomas do TDAH interagem com o processo de aprendizagem da matemática, em particular os conceitos geométricos. Além do mais, o TDAH se tratando de uma patologia neurobiológica e com alto índice de ocorrência e prejuízo para o portador, tendo na alteração dos processos atencionais sua principal vertente de danos, acentua a importância dos estudos que reúnem: inclusão escolar dos portadores do TDAH, teoria da atenção seletiva visual de Posner e a Teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

REFERÊNCIAS

ABREU, José Neander Silva. **Memória e transtorno do déficit de atenção e hiperatividade**. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia. Área de Concentração: Neurociências e Comportamento. Instituto de Psicologia da Universidade de São Paulo, 2007.

American Psychiatric Association (APA**). Manual diagnóstico e estatístico de transtornos mentais: DSM-5**. 5. ed. – Porto Alegre: Artmed, 2014.

CHARLOT, Bernard. **Os fundamentos Antropológicos de uma teoria da Relação com o Saber.** Revista Inte**rn**acional Educon. Volume 2, n. 1, jan./mar. 2021. Disponível em: https://doi.org/10.47764/e21021001. Acesso em: 15 abril 2022.

______. **Relação com o saber e com a escola entre estudantes de periferia**. Cadernos de Pesquisa, São Paulo, n. 97, p. 47–63, 2013. Disponível em: https://publicacoes.fcc.org.br/cp/article/view/803. Acesso em: 12 junho 2022.

COSTA, A. S. F. B. DA. **Desenvolvimento da atenção preparatória**. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade do Porto. Área de Concentração: Psicologia da Linguagem e Neuropsicologia, 2008.

DUVAL, R. **Sémiosis et noésis**. 1993. (Préprint do livro publicado com o título "Sémiosis et pensée humaine". Bern: Peter Lang, 1995).

______. **Les conditions conitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leurs fonctionnements**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n. 10, p. 5-53, 2005.

_____. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**/organização – Tânia M. M. Campos; [tradução Marlene Alves Dias] – 1. Ed. – São Paulo: PROEM, 2011.

______. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM; PPGECT, 2012. (Disponível em http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat)

______. **Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.). 8ª ed. - Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 125-148, 2013.

______. Como analisar a questão crucial da compreensão em matemática? **Revista REVEMAT**, vol. 13, n. 2, p. 1 – 27. Florianópolis – SC, 2018.

LIMA, Ricardo Franco DE. Compreendendo os Mecanismos Atencionais. **Ciências & Cognição**, v. 6, 11. Disponível em: < http://www.cienciasecognicao.org/revista/index.php/cec/article/view/537 > Acesso em 30 de maio de 2023.

FERNANDEZ, A. C.; ROJAS, M. E. G.. Atencion selectiva, ansiedade, sintomatologia depressiva y rendimento acadêmico em adolescentes. **Eletronic Journal of Research in Educational Psychological**, 17 – Vol. 17, p. 49 – 76, 2009.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T.. O papel heurístico de uma figura geométrica: o caso da operação de reconfiguração**. Anais do VIII ENEM -** Comunicação Científica GT 2 - Educação Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental, 2004. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/1CC88890589949.pdf. Acesso em 09 de dezembro de 2022.

GOMES FILHO, João. **Gestalt do objeto: sistema de leitura visual da forma**. -8 edição revisada e ampliada. São Paulo: Escrituras Editora, 2008.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér. **Inclusão escolar: o que é? por quê? como fazer?.** São Paulo: Moderna, 2003.

MARTINS, Rosana Santana. **Ensinando matemática para alunos diagnosticados como portadores de Transtorno de Déficit de Atenção/Hiperatividade (TDAH):** uma proposta baseada no desenvolvimento da autorregulação. Dissertação. Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Minas Gerais, p. 218, 2011.

MORETTI, Méricles Thadeu. Estudo das apreensões e dos olhares em geometria. **In: Anais do** VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática – ULBRA, Canoas – Rio Grande do Sul, Brasil. 2013.

MOSÉ, Viviane. **A espécie que sabe: do Homo sapiens à crise da razão**. Petrópolis, Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2019.

NOBRE, J. P. S.,Hora, A. F. L. T., Fonseca, A. R., Silva, S. S.C., & Pontes, F. A. R. . Characterization of Epidemiological ADHD Studies: A Systematic Review. **Psychology**, Vol. 8, N. 3, 412-423, 2017. Disponível em: https:// 10.4236/psych.2017.83025.

PARTURA, G. M. C.; MATTOS, P.; ARAÚJO, A. P. Q. C.. Desempenho escolar e transtorno do déficit de atenção e hiperatividade. **Revista de Psiquiatria Clínica.** 32 (6); 324 – 329, 2005. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0101-60832005000600003

POLANCZYK, G. V.. **Estudo da prevalência do transtorno de déficit de atenção/hiperatividade na infância, adolescência e idade adulta**. Tese (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Ciências Médicas: Psiquiatria. Faculdade de Medicina. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

POSNER, M.. Attention: The mechanisms of consciusness**. Proceedings of the National Academy of Sciences,** v. 91, n. 16, p. 7398-7403, 1994. Disponível em: <https://www.pnas.org/doi/epdf/10.1073/pnas.91.16.7398>. Acesso em: 20 março de 2022.

RABELO, I. S. A.; CRUZ, R. M.; CASTRO, N. R. DE. **Baterias Rotas de Atenção: rota de atenção concentrada – rota de atenção dividida – rota de atenção alternada**. 1. Ed. – São Paulo: Nilapress Livraria e Editora, 2020.

RODRIGUES, C. I.; SOUZA, M. DO C.; CARMO, J. DOS S.. **Transtorno de conduta/TDAH e aprendizagem da Matemática: um estudo de caso**. Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional, SP. v. 14, n. 2, p. 193 – 201, julho/dezembro, 2010.

RUEDA, J. M. R.; REBECCA, DE M. M.. **Bateria Psicológica para avaliação da atenção (BPA): desempenho de diferentes faixas**. Psic. USF, Bragança Paulista, Volume 18, Número 1, p. 99-108. Jan/abril, 2013. Disponível em: < https://doi.org/10.1590/S1413-82712013000100011>. Acesso em 30/05/2023.

SANTOS, J. T.; ALMEIDA, I. C. DE L. O transtorno de déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH) no processo de desenvolvimento da aprendizagem de crianças. In: **Anais** do Congresso Nacional de Educação – EDUCERE, 11º., 2013. Curitiba – PR. Artigo. Pontífice Universidade Católica do Paraná (Editora), 2013.

SANTANA, A. N. DE; ROAZZI, A.; MELO, M. R. A. Os três componentes executivos básicos e o desenvolvimento matemático escolar. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos** – RBEP, 2020. Acesso em: https://doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.101i259.4137. Acesso: 04 de junho de 2023.

SIVIA, K. A. P. DA. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem matemática e Semiótica: implicações para a atribuição de significado**. Tese (Doutorado) Programa de Pós-Graduação do Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, 2013.

SISTO, F. F.; CASTRO, N. R. DE. **Escala de Atenção Seletiva Visual:** (ESAV). 1. Ed. – São Paulo: Casa do Psicólogo, 2011.

VITAL, M.; HANZIN, I. Avaliação do desempenho escolar em matemática de crianças com transtorno de déficit de atenção e hiperatividade (TDAH): um estudo piloto. **Ciências e Cognição,** Vol. 13, 19 – 36, 2008.

CAPÍTULO VI

DESCONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA: GESTO INTELECTUAL ESSENCIAL AO ENSINO E À APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

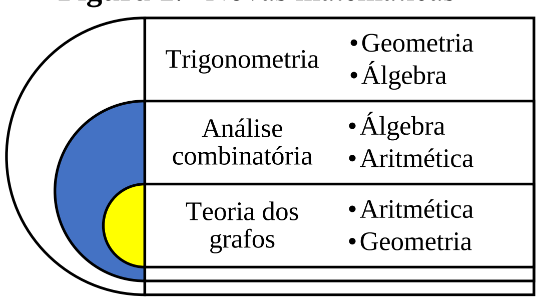
Adalberto Cans

Méricles T. Moretti

INTRODUÇÃO

A Matemática clássica ancora-se no **tripé** aritmética, álgebra e geometria, ainda que na atualidade existam diversos campos de estudo, “novas matemáticas”, estas, em sua maioria, são combinações desses três, como exemplificado no esquema da Figura 1.

Figura 1: “Novas matemáticas”



Fonte: construção dos autores

Nossa intensão com esse trabalho é contribuir, especialmente, com a aprendizagem desse terceiro pé, tendo em conta que para Duval (2022, p. 3, grifo nosso), “entre todos os domínios de conhecimentos que o aluno deve adentrar, **a geometria** é o que exige atividade cognitiva mais completa, porque ela solicita o gesto, a linguagem e o olhar. Nela, é necessário construir, raciocinar e ver, indissociavelmente".

Mesmo sendo este capítulo um aceno parcial na direção de nossa tese de doutoramento, que se desenvolve no Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGECT/UFSC), ele encerra dois objetivos: o primeiro é externar, a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval[1], a necessidade de se considerar a **desconstrução geométrica** como requisito básico fundamental à aprendizagem da geometria, dado que ela propicia formas diferenciadas e privilegiadas de ver heuristicamente as figuras geométricas.

O segundo, mas não menos importante, é a partir do ponto de vista dos pesquisadores, aproximar essa teoria semiocognitiva do professor que se encontra na sala de aula, ator que apropriando-se desse gesto intelectual, efetivamente poderá colocar em prática essa nova teoria de aprendizagem matemática. Portanto, a tentativa de trazer uma linguagem clara e objetiva, sem abdicar da linguagem formal que caracteriza a academia, persegue essa intenção. Fica assim acordado por justo notas explicativas, quando necessário, dos termos singulares à teoria.

Na perspectiva da TRRS de Duval o domínio conceitual de um objeto de estudo da matemática, se traduz pelo conhecimento e coordenação[2] espontânea, de diferentes registros de representação semiótica — simbólicos (numérico, algébrico), gráficos cartesianos, figural (figuras geométricas),

[1] Filósofo, psicólogo, Professor emérito da *Université du Littoral Cotê d'Opale*/França.
[2] Coordenação ou articulação tem o sentido de um trânsito fácil e de mão-dupla entre dois registros de representação semiótica diferentes para um mesmo objeto de estudo.

língua natural entre outros —, em relação a um mesmo objeto (PASA e MORETTI, 2020).

De acordo com Duval (1993, 1995, 1996) um registro de representação semiótica é um sistema simbólico criativo, que permite três atividades cognitivas, a saber: **a formação** de representações para um objeto; **o tratamento**, ou seja, a transformação operacional dessa representação em outra dentro do mesmo sistema semiótico; e **a conversão**, que é a transformação dessa representação inicialmente em um sistema A em uma representação de um sistema B.

Com efeito, o ensino e aprendizagem da geometria estão subordinados, majoritariamente, a dois registros distintos de representação semiótica, um registro discursivo: a língua natural, para enunciar as proposições matemáticas — definições, hipóteses, teoremas etc., e um não discursivo: o registro figural, para designar as figuras e suas propriedades. Porém, outros registros como o algébrico e o numérico também podem ser mobilizados, principalmente na resolução de problemas (DUVAL, 2011, p. 100).

Na teoria em comento o que denotamos por desconstrução geométrica aparece fracionada em três tipos de desconstrução das formas: **a desconstrução instrumental** para construir uma figura; **a reconfiguração visual** que favorece a descoberta de soluções para um problema; e **a desconstrução dimensional** considerada pelo autor o "ver" geométrico (DUVAL, 2022).

Como visto as canônicas construções geométricas ou construção euclidiana são tratadas como desconstrução instrumental e assim, por fidelidade a teoria, será mantida neste texto. Mas, vamos abrandar esse *insight* que perceptivamente parece destoar do raciocínio comum.

É razoável conjecturar-se que para construir uma figura geométrica (2D/2D ou 3D/2D)[3], o sujeito precisa, necessariamente, de um modelo, de uma representação, material ou mesmo mental, e essa construção se "materializa" na sua desconstrução em traços 1D/2D e pontos 0D/2D. "Dizendo de outra forma, a atividade de construção de figuras, quase sempre a configuração de formas 2D/2D ou 3D/2D, repousa na sua desconstrução em traços 1D/2D e 0D/2D" (DUVAL, 2022, p. 14).

Mas, quais são as características que diferem essas três operações cognitivas? As definições a seguir governam todo este trabalho.

(1) A desconstrução instrumental (construção geométrica) é o processo que explora as propriedades dos objetos da geometria euclidiana, para construí-los, segundo uma sequência lógica de passos a executar com instrumentos de desenho, analógicos ou digitais: régua, compasso, transferidor, esquadro ou um *software*. Desse ato, se produz um tipo especial de representação semiótica para a Matemática — as figuras geométricas.

Ressalte-se que, só se concebe uma imagem como uma figura geométrica, se esta for construída com o uso de instrumentos. De fato, "pois com um desenho à mão livre não poderíamos nem distinguir uma reta de uma curva, nem verdadeiramente considerar as relações entre grandezas!" (DUVAL, 2011, p. 84).

(2) A reconfiguração visual é a decomposição e reorganização das formas geométricas em unidades figurais de mesma dimensão da figura de partida, por rearranjos como: justaposição, superposição, adição de traços ou subdivisão etc. "Elas apresentam a particularidade de poder ser realizadas por

[3] Significando figuras bidimensionais (2D) ou tridimensionais (3D) construídas em espaços bidimensionais (2D), isto é, folha de papel ou tela eletrônica.

manipulações sobre objetos materiais" (DUVAL, 2011, p. 88).

(3) Em contrapartida, a desconstrução dimensional, tema relativamente novo na Educação Matemática, pode ou não ser realizada com o uso de instrumentos e assemelha-se a um processo de "desmanche" intencional das formas, neste caso, a figura de partida na dimensão nD (n = 3, 2 ou 1), é cognitivamente decomposta em unidades dimensionais inferiores 2D, 1D ou 0D.

Para Duval (2022, p. 24) "Esta desconstrução dimensional das formas é o pré-requisito para uma compreensão efetiva de toda enunciação de propriedades geométricas e, portanto, para sua mobilização efetiva pelos alunos na resolução de problemas".

Para estruturarmos esta comunicação, procuramos subsídios na literatura científica em prol da desconstrução instrumental (Seção 1), para apoio à reconfiguração visual e a desconstrução dimensional trazemos à baila os estudos de Duval inserindo alguns exemplos, visando sempre diminuir o peso da teorização (Seções 2 e 3), e finalmente delineamos uma conclusão.

1 POR QUE ENSINAR A DESCONSTRUÇÃO INSTRUMENTAL FAVORECE A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA?

A desconstrução instrumental ou construção geométrica têm o poder de diminuir a abstração no estudo da geometria, ela fornece uma maneira eficaz de transformar objetos geométricos mentais em representações semióticas típicas — as figuras geométricas, constituindo-se em ferramenta didática importante para a sua compreensão. Podemos pensar, por exemplo, na representação de uma reta, ou de paralelas, ou de perpendiculares, lastro para a representação semiótica de todos os polígonos.

O próprio Duval (2011, p. 84) afirma ser as figuras geométricas, as representações produzidas para que possamos "ver" que parecem mais naturais na Matemática. O que lhes acresce um poder de raciocínio ímpar.

Em particular, essas "construções geométricas" são importantes também se vistas pelo prisma do estudante. Ao construí-las e validá-las na geometria, o aluno conecta ideias abstratas e dispares, por exemplo, traçar circunferências para obter retas paralelas ou perpendiculares, e ainda compreende os passos que transformam imagens ideais em imagens figurais — representações semióticas dos objetos geométricos. Esse processo cognitivo, lógico, dedutivo é bastante enriquecedor, e pode ser útil em qualquer área de conhecimento.

Ademais, o estudo histórico epistemológico das "construções geométricas" nos permite inferir o quão elas têm sido importantes no desenvolvimento da Matemática. Como afirmado em Wagner (2009, p. i),

> As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas.

Esta defesa enfática de Wagner também é endossada por outros autores como Oliveira (2005, p. 1),

> O Desenho Geométrico[4] irá proporcionar essa capacidade e promover o entendimento de outros conhecimentos, em todos os campos de atividade humana. Essa disciplina também ajudará a desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento divergente, a organização e a criatividade.

Concordamos com Oliveira, apesar de não enxergamos o Desenho Geométrico (DG) como uma disciplina fora da geometria.

De acordo com Villa e Santos (2012, p. 16) "A disciplina de Desenho Geométrico precisa voltar a fazer parte do currículo escolar como matéria obrigatória, porque a prática das construções geométricas ilustra, explica e motiva o estudante na aprendizagem dos abstrusos conceitos matemáticos".

Ainda para esses autores: o ensino e a aprendizagem do DG no ciclo fundamental, é base indispensável para que os alunos adquiram o entendimento e a compreensão dos conteúdos matemáticos do Ensino Médio, isto é, geometria espacial e geometria analítica plana (Villa; Santos, 2012).

Conforme Zuin (2001, p. 173-174) "A resolução de problemas, como uma tendência muito presente atualmente, no ensino da Matemática, seria muito beneficiada com os conhecimentos básicos da geometria euclidiana e das construções geométricas".

A partir desse extrato, percebe-se ser recorrente na literatura científica que o ensino das construções geométricas, aqui denominado desconstrução instrumental, muito favorece a aprendizagem da geometria. Na próxima Seção discorreremos sobre os tipos de apreensões em geometria, peças essenciais à melhoria do delicado quebra-cabeça que é a aprendizagem da geometria.

---

[4] Zuin (2001, p.14) esclarece, o DG enquanto disciplina independente no Brasil, se confundia com o ensino das construções com régua e compasso da geometria euclidiana.

2 APORTE TEÓRICO A TRRS DE RAYMOND DUVAL

Os estudos do psicólogo francês Raymond Duval chegaram ao Brasil nos anos 90 do século passado. Desde então cresce a sua aceitação. Embora essas pesquisas ainda estejam à nível da academia, uma teoria assim como qualquer ciência, não é definitiva, ela se completa e se renova no tempo. O próprio autor revela que, “a teoria dos Registros não é uma teoria fechada, ela é, primeiramente, um instrumento para analisar as atividades e os problemas elaborados pelo professor assim como as produções dos alunos” (DUVAL, 2018, p. 26).

Dessa forma, os educadores matemáticos têm oportunidade coadjuvante nos substantivos: compreensão, adaptação, consolidação e difusão, obviamente cientes da complexidade e dos nossos limites. Isto parece alinhar-se ao afirmado pelo Professor de Educação Matemática Luís Radford:

> Pelo menos, em princípio, “comparar” e “contrastar” teorias são sempre possíveis: dados duas teorias da educação matemática t e t’, é possível buscar suas semelhanças e/ou diferenças. Em contraste, para “coordenar”, “integrar localmente” ou “sintetizar” teorias parece ser uma tarefa mais delicada (RADFORD, 2008, p. 319, tradução nossa)

Diante disso, vamos a *priori* abordar alguns princípios-chave dessa teoria.

A TRRS de Duval, fornece subsídios para análise dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Segundo Nóbriga, Costa e Gonçalves (2022, p. 72) essa “Teoria se apoia na mobilização de diferentes registros de representação para a compreensão dos conceitos da matemática”.

De fato, “Diferentes sistemas semióticos podem estar envolvidos em problemas matemáticos que apresentam figuras geométricas, mas necessariamente, dois deles são intrínsecos, a linguagem natural e a figural” (SOUZA, 2018, p. 57).

Todavia, Duval (1995) aponta que para aprendizagem da Matemática não se pode fugir do trânsito entre registros. Esse trânsito de mão dupla corresponde a coordenar a operação de conversão definida anteriormente, que se constitui, entre as três operações cognitivas sobre as representações, a que exige maior esforço cognitivo, posto que nem sempre há regras estabelecidas. Mesmo assim essa é a atividade menos privilegiada no ensino. Por exemplo:

Se dissemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo de vértices A, B e C é igual a um ângulo raso, e escrevermos: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$.

- Estamos fazendo uma conversão do registro língua natural para o registro algébrico, considerando, $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ como incógnitas dessa equação.

Se designarmos por ($180^{\circ} - \hat{A}$) o ângulo externo ao vértice A desse triângulo, temos $(180^{\circ} - \hat{A}) = \hat{B} + \hat{C}$, e podemos escrever que: o ângulo externo ao vértice A é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes ao ângulo interno A.

- Estamos fazendo uma conversão inversa do registro algébrico para o registro língua natural.

Essas mobilizações precisam ser oportunizadas pelo Professor e praticadas pelo aluno que nesse processo, aprende. Em outros temos, o trabalho com essa pluralidade de registros está na essência da aprendizagem, pois as características de um objeto mostradas em uma representação não são as mesmas numa outra, isto proporciona ao aluno situações ricas para tomada de consciência dos objetos estudados e a consequente apreensão de conceitual dos mesmos (DUVAL, 2009).

Por outro lado, na busca de solução à problemas de geometria que subordinam, em complemento ao enunciado, uma figura geométrica, é necessário: compreender o enunciado textual; construir e/ou interpretar as figuras geométricas; e intuir possibilidades de tratamento para as hipóteses propostas na atividade. Estas necessidades básicas não são simples, pois são atividades semiocognitivas de aprendizagem da geometria. Segundo Moretti (2015, p. 599) “Um caminho frutífero para compreendermos o modo como acontece a aprendizagem da geometria é a partir da ideia das *apreensões*”, concebidas por Duval (1995, p. 173–207; 2012, p. 118–138).

Para Duval (2017, p. 205, tradução nossa) “não pode haver ensino de geometria que não leve em consideração as diferentes apreensões as quais uma figura dá lugar”, descritas no Quadro 1.

Quadro 1: Apreensões figurais para aprendizagem da geometria

Apreensões	Descrição: aquela que ...
Discursiva	Permite interpretar o enunciado que acompanha uma figura e carrega a hipótese que mobiliza uma rede de definições, propriedades e teoremas
Perceptiva	Permite identificar num primeiro “golpe de vista” uma forma ou um objeto, em geral, 2D ou 3D, e subsidiar as outras apreensões
Sequencial	Permite a construção de figuras subordinadas as suas propriedades, a mercê das restrições dos instrumentos utilizados
Operatória	Permite as modificações, reorganização e decomposições de uma figura de partida em figuras perceptivamente diferentes da inicial

Fonte: construção dos autores, a partir de Duval (1994)

Conforme Moretti (2013, p. 291) pode-se depreender do trabalho concebido por Duval que “não há uma hierarquia entre estas apreensões, mas uma subordinação de uma a outra, dependendo do tipo de problema. Em geral, nas atividades propostas para o ensino fundamental, é a apreensão perceptiva que subordina as demais".

De acordo com Duval (2012, p. 136),

> A figura desenhada num problema de matemática, é objeto de três apreensões, a perceptiva das formas, que é a mais imediata, a discursiva dos elementos figurais e do texto envolvido no problema que indicam instruções, e a operatória, que envolve os aspectos heurísticos do pensamento para resolver o problema em si.

É relevante destacar que na resolução de problemas que contemplam texto e figura geométrica, o aluno que se subordina apenas as apreensões discursiva e perceptiva poderá ter dificuldades, especialmente, se o problema exigir um mínimo de inventividade, onde será preciso "ver" elementos não explícitos na representação figural. Isto ocorre porque "a forma perceptiva, se destaca em relação a discursiva, pois existe uma tendência de olhar para o aspecto visual do problema proposto" (MORETTI e BRANDT, 2015, p. 605).

Ou ainda, a apreensão discursiva subordinada à apreensão perceptiva pode abrir ou fechar a porta de entrada à resolução de um problema, não sendo suficiente à descoberta da solução. Isso é um indício de que a apreensão perceptiva deve ser monitorada. Essa demanda heurística é então atribuída a apreensão operatória.

Um mirar sobre as características da apreensão operatória — transformar uma figura de partida em figuras perceptivamente diferentes da inicial — nos revela que dela emerge "dois tipos de operações figurais próprios das figuras em geometria" (DUVAL, 2011, p. 88).

Na afirmativa anterior o mentor da teoria se reporta à reconfiguração visual e a desconstrução dimensional que serão discutidas na próxima Seção deste trabalho, como outro aspecto crucial dessa teoria de aprendizagem, considerada por Duval (2022) um pré-requisito na compreensão efetiva da geometria, especialmente, na solução de problemas que além do enunciado discursivo conjugam figuras geométricas.

3 VALIDANDO A DESCONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

Dos três tipos de desconstrução geométrica em discussão, a desconstrução instrumental ou construção geométrica, é o único que não tem relação direta com a heurística na maioria dos problemas de geometria. No entanto, ela tem fundamental importância por ampliar a possibilidade de apreensão do conceito de seus objetos, e na transformação das representações mentais desses objetos em representações semióticas (DUVAL, 2009). Constituindo-se na primeira forma de ver as figuras em geometria.

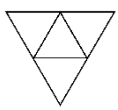
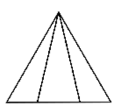
Entretanto, apenas essa forma de ver não é suficiente. O ver solicitado em geometria é um "ver raciocinado", cognitivo, que precisa enxergar além do que a figura propõe perceptivamente. Este fato, torna a reconfiguração visual e a desconstrução dimensional o cerne da questão, haja vista que, a partir da decomposição das figuras dadas a "ver", afloram outras formas de "ver" que propiciarão a descoberta de soluções para os problemas propostos (DUVAL, 1995).

Isto posto, a TRRS sugere para essa etapa pragmática da aprendizagem da geometria, resolução de problemas, as seguintes operações figurais:

- **Reconfiguração visual**, que corresponde a decomposição e/ou reorganização de uma figura de partida, na dimensão nD (n = 3, 2 ou 1), em subfiguras, unidades figurais na mesma dimensão nD.

O exemplo do Quadro 2, responde a pergunta: Quantos triângulos você vê na figura?

Quadro 2: Tratamentos figurais para a reconfiguração visual

Reconfiguração visual de formas - possibilidades		
Figuras 2D	**Justaposição 2D**	**Superposição 2D**
	(4 triângulos) 4 Δ equiláteros	(5 triângulos) 4 Δ equiláteros menores, 1 Δ equilátero maior base
	(3 triângulos) 2 Δ escalenos, 1 Δ isósceles ao centro	(6 triângulos) 2 Δ escalenos, 1 Δ isósceles central, 2 Δ escalenos'[5], 1 Δ equilátero maior base

Fonte: construção dos autores

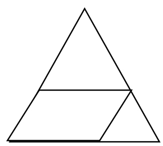
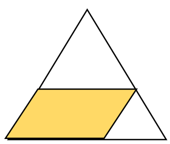
No Quadro 2 estamos trabalhando os tratamentos figurais da teoria de Duval, além de fazer uma articulação descritiva entre o "ver" e o "dizer" (DUVAL, 2022, p. 27).

O objetivo é obter o número máximo de formas reconhecidas, deve-se dar especial atenção a superposição, em vista da dificuldade de visibilidade por recobrimento parcial nos casos de figuras vazadas (ausência de cor) e figuras na mesma cor. Se houver destaque de cores, esses devem ser assim considerados.

Segue o exemplo no Quadro 3.

[5] Se refere a composição (Δ a esquerda mais Δ ao centro) e (Δ a direita mais Δ ao centro).

Quadro 3: Uma reconfiguração visual (continua)

Reconfiguração visual de formas		
Figuras 2D	**Justaposição 2D**	**Superposição 2D**
	(3 polígonos) 2 Δ equiláteros, 1 paralelogramo	(4 polígonos) 2 Δ equiláteros, 1 paralelogramo, 1 Δ equilátero maior base
	(3 polígonos) 2 Δ equiláteros, 1 paralelogramo	(2 polígonos) 1 paralelogramo, 1 Δ equilátero maior base

Fonte: construção dos autores

- **Desconstrução dimensional**, é uma operação heurística que decompõe cognitivamente qualquer figura de partida, na dimensão nD (n = 3, 2 ou 1) em unidades dimensionais inferiores (n-1)D, (n-2)D, ou (n-3)D.

Nessas operações, permitidas pela apreensão operatória, a primeira depende diretamente da percepção, e pode ser realizada sobre objetos concretos: dobraduras, cortes, *tangram*, adição de traços etc. (DUVAL, 2011, p. 88). Já a segunda depende da apreensão discursiva e “nenhuma manipulação material pode simulá-las” (*ibidem*). Portanto, a desconstrução dimensional é uma operação estritamente cognitiva. No entanto, ambas são essencialmente engenhosas e focadas no enriquecimento heurístico das figuras geométricas, que as credenciam como verdadeiras “incubadoras” dos tratamentos figurais que auxiliarão o sujeito cognoscente a resolução do problema.

Na prática, a apreensão operatória trata das modificações e transformações geométricas (tratamentos) possíveis em uma figura (DUVAL, 2012).

O Quadro 4, mostra um rol de operações heurísticas aplicáveis as figuras geométricas.

Quadro 4: Algumas possibilidades de tratamento figurais de formas

PARA – Reconfiguração visual de formas		
Tipo de modificação figural	**Operação heurística Reconfiguração**	**Dificuldade provável de visibilidade**
Modificação Mereológica	*reorganização *imersão, adição de traço	← formas convexas e não-convexas
Modificação Óptica	*superposição *homotetia, amplia/reduz *justaposição	← recobrimento parcial ← centro de homotetia razão > 1 ou razão < 1
Modificação de Posição (Isometrias)	*rotação *translação *reflexão	dependência do referencial
PARA – Desconstrução dimensional de formas		
Unidades figurais	**Tipos de figuras**	**Operação heurística**
Tridimensionais (3D) Figuras espaciais	*Em geral, os poliedros e os sólidos redondos: prisma, pirâmide, cone, cilindro etc.	3D → 2D, ou 3D →1D, ou 3D → 0D
Bidimensionais (2D) Figuras planas	*São as superfícies poligonais e as curvas: quadrado, círculo etc.	2D → 1D, ou 2D → 0D
Unidimensionais (1D) Figuras lineares	*Linhas poligonais, retas e curvas: lados, arestas, arcos etc.	1D → 0D
Adimensionais (0D)	*pontos: vértices e interseções	

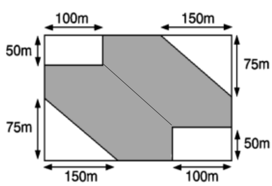
Fonte: adaptado de Duval (2012, p. 127)

A aplicação consciente dessas operações figurais (operações heurísticas) permite entrar na maneira “cognitiva de ver” em geometria.

Consoante Duval (2011, p. 88) “Em matemática uma representação só é interessante à medida que ela pode se transformar em outra representação”. Mais ainda, “São essas operações figurais que permitem transformar qualquer figura em outra, com a finalidade de fazer aparecer uma solução ou de produzir um contraexemplo ou ainda de modelar uma situação” (DUVAL, 2011, p. 85).

A seguir apresentamos, como exemplo, um problema adaptado do exame vestibular da (FAAP-SP, 2018)[6]. O enunciado requer o cálculo da área da região sombreada, uma praça, inscrita em um terreno retangular de lados 300 m e 500 m, acompanhado do *croquis* inserido no Quadro 5.

Quadro 5: Pelo menos três maneiras de ver uma figura geométrica

Exemplo	**Desconstruções geométricas de formas**		
Figura de partida	Reconfiguração Visual		D. Dimensional
Croquis - 2D	Justaposição 2D	Superposição 2D	1D ou 0D
	(6 polígonos) 2 Δ retângulos, 2 retângulos, 2 hexágonos	(3 polígonos) 2 hexágonos, 1 retângulo base	11 retas suportes ou 19 segmentos Ou 14 pontos de interseção

Fonte: construção dos autores, a partir de Duval (2011, p. 87)

Este problema conjuga muitos dos aspectos da TRRS discutidos ao logo deste capítulo. Vejamos uma solução.

De fato, após uma apreensão discursiva do proposto, a heurística da solução exige de início a apreensão perceptiva para “ver” e a apreensão operatória para realizar uma reconfiguração visual (use o Quadro 5 como referência visual).

Primeiro por justaposição, transforma-se os 2 triângulos retângulos da figura em um retângulo de (150 x 75) m², designado por [A].

---

[6] FAAP – Fundação Armando Alvares Penteado. Universidade privada de São Paulo – Brasil, desde 1947.

Em seguida os 2 retângulos em um quadrado[7] de (100 x 100) m², designado por [B].

Agora uma reconfiguração por superposição, vai ajudar a concluir pela necessidade de subtrair-se da área total do terreno (retângulo maior) designado por [C], as áreas das reorganizações que acabamos de obter [A] e [B].

Precisamos novamente recorrer à apreensão discursiva, pois, só no enunciado do problema se descobre as medidas dos lados do terreno (300 x 500) m².

Por fim, precisamos operar cognitivamente uma desconstrução dimensional de 2D para 1D, em todos os retângulos [A], [B] e [C], identificando-se os lados, base e altura de cada um, para o cálculo final da área da praça.

Logo, Área (praça) = Área[C] – Área[A] – Área[B], que por tratamentos aritméticos adequados, tem-se, Área(praça) = (500x300) – (150x75) – (100x100). Logo, a Área da praça mede 128.750 m².

Provavelmente, esse é o ver cognitivo ao qual Duval (2011, p. 87) se refere, “Ver geometricamente uma figura é operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel”.

Vale enfatizar que desconstruir em Geometria tem um sentido cognitivo, assemelha-se a quebra dos “obstáculos epistemológicos”, princípio implícito a obra epistemológica de Bachelard. Segundo o qual, para apreender o “real” “é preciso ter a coragem de colocá-lo no seu ponto de oscilação, no

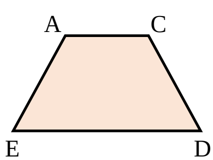
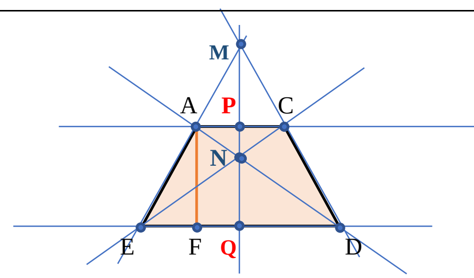
[7] Um quadrado é um caso particular de um retângulo que tem lados opostos congruentes.

qual se mesclam o espírito de refinamento e o espírito geométrico" (BACHELARD, 2004, p. 14). Dito de outro modo, só pela constante desconstrução e reconstrução do "real" a ciência progride, somente esse ato dá origem à novas ideias.

Deduzimos ser a desconstrução dimensional uma operação cognitiva emblemática na TRRS. Com efeito, "É nessa maneira, violenta e irrealista, de ver que se fundamenta o **enunciado das propriedades nas definições e nos teoremas**" (DUVAL, 2011, p. 88, grifo nosso).

Para ilustrar essa assertiva de Duval e mostrar o alcance da desconstrução dimensional às definições, propriedades e teoremas, assim como sua influência na aprendizagem da geometria, considere, como exemplo pertinente, calcular a área da região trapezoidal ACDE, da Figura 2.

Figura 2: Desconstruindo para acessar definição, propriedades e teoremas

 Lados: AC, CD, DE, EA Ângulos internos: $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ Vértices: A, C, D, E AC paralela a DE	
Forma global	Desconstrução dimensional AF = altura, $\hat{F}$ = 90º

Fonte: construção dos autores

Nas definições

O trapézio[7] é a figura plana convexa (2D), quadrilátera (quatro lados,

[7] Pode-se constatar que pelas leis de fechamento ou de continuidade da Gestalt Duval considera triângulo, quadrado, trapézio etc., como regiões (2D), posto que estes contornos fechados são classificados como superfícies de dimensão 2. Vide, Duval (2004, p. 169).

1D), que possui dois desses lados paralelos entre si (1D), denominados bases.

Note que, a definição se refere a elementos 1D, logo é preciso cognitivamente desconstruir o trapézio e descer de 2D para a 1D, tanto para visualizar quatro lados quanto para identificar os lados paralelos (bases).

Nas Propriedades

i) O trapézio possui duas diagonais. (segmentos AD e CE, 1D).

ii) Em um trapézio isósceles, as diagonais são congruentes, (1D).

iii) No trapézio isósceles, a reta MN (1D), que passa pelos pontos médios P e Q (0D), das bases (lados, 1D), é um eixo de simetria para o trapézio (eixo PQ, 1D).

Observamos aqui também os enunciados acessando o trapézio cognitivamente desconstruído, em unidades figurais 1D ou 0D.

Importante perceber a apreensão sequencial[8] subordinando as apreensões perceptivas e operatórias que trabalham juntas em 1D, para formar a rede de traços, traçando as retas suportes dos lados, às diagonais AD e CE, e depois em unidades figurais 0D, visualizando os pontos de interseção M, N, P e Q, que dão origem a novos traços.

Nos teoremas - teorema para área de um trapézio

A área de uma região trapezoidal (2D) é igual ao produto entre a média aritméticas das bases (lados, 1D) e altura do trapézio (segmento, 1D).

Vê-se mais uma vez que o teorema só se refere a elementos do trapézio unidimensionais, ou seja, cognitivamente des construído.

— Uma demonstração (cálculo da área ACDE)

---

[8] Coordena a sequência de execução da desconstrução dimensional (2D → 1D → 0D): retas suportes, diagonais (se houver), identifica-se pontos de interseção que originam novos traços, e adiciona-se propriedades disponíveis nos enunciados. Cria-se assim a rede heurística de traços ou conjunto de pontos criativos, de onde pode-se intuir outras figuras.

Vamos usar como lema que a área do triângulo é igual a metade do produto entre sua base e sua altura.

Designando-se no trapézio ACDE (Figura 2, desconstruída): a base maior por B = DE, a base menor b = AC, e AF = h a altura, tem-se:

Ao traçar a diagonal AD estamos fazendo uma reconfiguração visual por operação mereológica (adição de traço), dividindo o trapézio ACDE em dois triângulos: ΔADE e ΔACD.

Isto vislumbra por justaposição, outro tipo de reconfiguração visual, que leva a heurística da demonstração.

De fato, a área do trapézio, área(ACDE), é a adição (justaposição) das áreas dos triângulos ΔADE e ΔACD. Assim, passamos ao cálculo destas áreas.

De imediato a desconstrução dimensional é requerida, pois todo cálculo se dá sobre unidades figurais 1D, ou seja, os lados base e altura de cada triângulo.

Ora, olhando para a figura cognitivamente desconstruída o ΔADE tem base DE = B e altura AF = h (segmento interno perpendicular à base DE), já o ΔACD tem base AC = b e altura também AF = h (segmento externo perpendicular à base AC). Portanto, fazendo a conversão para o registro algébrico:

$$\text{Área(ACDE)} = \text{área}(\Delta ADE) + \text{área}(\Delta ACD)$$

$$\boxed{\textbf{Área(ACDE)} = \frac{B\,.\,h}{2} + \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{B+b}{2}\,.\,\mathbf{h}}$$

Ou seja, após tratamentos adequados no registro algébrico, área do trapézio igual a média aritmética das bases vezes a altura (como era de se esperar).

Em suma, o exemplo aproxima-se do afirmado em Duval (2011, p. 90), “A desconstrução dimensional é onipresente em toda definição, em todo raciocínio como em toda explicação em relação às figuras em geometria”.

Ressaltamos ao Professor não ser necessário todo esse preciosismo de detalhes, nossa intenção era explorar a teoria de Duval. No entanto, o aluno precisar saber o que está fazendo, tratamentos, conversões de diferentes registros semióticos e, principalmente, coordenando essa ida e vinda entre registros, a luz das quatro apreensões solicitadas em geometria.

Nesse exemplo, partimos do registro **língua natural** (enunciado de um teorema), para o **registro figural** (imagem do trapézio cognitivamente desconstruído), voltamos a língua materna, acessamos o **registro algébrico** e finalizamos no registro língua natural.

ENSAIO CONCLUSIVO

A Seção 1, “Por que ensinar desconstrução instrumental favorece a aprendizagem da geometria?” Reforça a necessidade de se ensinar as “construções geométricas” em aporte a geometria, como também revela que a geometria se beneficia dessa operação cognitiva ao “materializar” seus objetos de estudo.

Conforme discorremos a “construção geométrica” constitui a primeira forma de ver em geometria, não sendo, contudo, suficiente a esta atividade cognitiva. A aprendizagem da geometria requer outras formas de “ver”, com um apelo muito mais heurístico para que se revelem formas que não estão explícitas nas figuras de partida.

Na Seção 2, “Aporte teórico a TRRS de Raymond Duval”, apresentamos, de modo sucinto, alguns fundamentos da TRRS de Duval buscando contextualizar o leitor e possibilitar maior compreensão da discussão. Na continuidade consideramos a Seção 3, “Validando a desconstrução geométrica”, de extrema importância por discutir e exemplificar a reconfiguração visual e a desconstrução dimensional como metodologia de aprendizagem da geometria. Sendo esta última, segundo a teoria em epígrafe, a forma que mais contribui para o mecanismo cognitivo da visualização em Matemática, gesto intelectual principal para a aprendizagem da geometria.

Por outro lado, neste capítulo nos propusemos mostrar e analisar pistas que estão emergindo de nossa pesquisa de doutorado, que apontam a necessidade e a relevância de se considerar a desconstrução geométrica, sob a égide da TRRS de Duval, gesto intelectual chave à melhoria do ensino e à aprendizagem da geometria euclidiana. Sendo a geometria um tema de grande interesse para a Matemática e para a Educação Matemática.

De outro giro, a desconstrução geométrica na perspectiva da TRRS tem se mostrado uma metodologia didática espetacular na heurística de problemas de geometria. É como uma peça de encaixe perfeito no complexo quebra-cabeça aprendizagem da geometria. Entretanto, sublinhamos que esses resultados promissores são ainda parciais.

Finalmente, na condição do que trouxe o referencial teórico pesquisado e as argumentações complementares, consideramos que toda essa epifania não poderia estar em espaço e tempo melhor para trazermos essa reflexão. É a academia o *lócus* competente a confirmar, complementar ou refutar tal hipótese.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, Gaston. **Ensaio sobre o conhecimento aproximado**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2004.

SOUZA, Roberta N. Sodré. **Desconstrução Dimensional da Formas: gesto intelectual necessário à aprendizagem de geometria.** Tese (doutorado) – Universidade Federal de Santa Cataria, Centro de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2018.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences cognitives. **IREM de Strasbourg**, n. 5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, Raymond. Les differents fonctionnements d'une figure dans une démarche geometrique. **Répères**. Pont-à-Mousson, Topiques éditions, n. 17, p. 121-138, 1994.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berné: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? **RDM**, v. 16, n. 3, 1996.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y Pensamiento Humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de: Myriam V. Restrepo, Cali/Colômbia: Editora Universidad del Valle, 1 ed., 2004.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano:** registros semióticos e aprendizagem intelectual. Tradução de: Lênio F. Levy e Marisa R. A. da Silveira, São Paulo: Editora da Física, 1 ed., 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar:** os registos de representações semióticas. Org. de: Tânia M. M. Campos; Tradução de: Marlene A. Dias. 1 ed., São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução de: Méricles T. Moretti. **Revemat**, v. 7, n. 1, p. 118-138, UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis. 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/1856

DUVAL, Raymond. **Semiosis y Pensamiento Humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de: Myriam V. Restrepo, Cali/Colômbia: Editora Universidad del Valle, 2 ed., 2017.

DUVAL, Raymond. Como Analisar a Questão Crucial da Compreensão em Matemática? Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 1-27, 2018.

DUVAL, Raymond. As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. Tradução de: Cleide R. M. Arinos; José L. M. de Freitas; e Méricles T. Moretti; **Revemat**, v. 17, p. 01-52, jan./dez, UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis, 2022. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/3332

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 15, n. 2, p. 289-303, 2013. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/568

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597-616, 2015.

NÓBRIGA, Jorge C. C.; COSTA, David A.; GONÇALVES, Rita de C. P. Processos de Leitura e Escrita na formação inicial do professor que ensina Matemática. **Boletim Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM)**, Rio de Janeiro, n. 81, p. 70-89, 2022. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/475

OLIVEIRA, Clézio L. de. Importância do Desenho Geométrico. **Trabalho de Conclusão de Curso**. Universidade Católica de Brasília. Brasília, 2005. Disponível em: http://www.matematica.ucb.br/sites/000/68/00000002.pdf

PASA, Bárbara C.; MORETTI, Méricles T. O Esboço de Curvas no Ensino Médio na Perspectiva da Interpretação Global de Unidades Figurais: possibilidades a partir da noção de infinitésimos. Org. MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. In. **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval**, Florianópolis: Revemat/UFSC, cap. 3, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

RADFORD, Luís. Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. **ZDM Mathematics Education**, v. 40, n. 2, p. 317-327, 2008. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-008-0090-3#citeas

VILLA, Airton D; SANTOS, Solange M. G. dos. A Resolução de Problemas Matemáticos, Utilizando como Ferramenta o Ensino do Desenho Geométrico: a importância da desenho geométrico no 8º e 9º anos da Educação básica. **O Professor PDE e os Desafios da Escola Pública Paranaense**, v. 1, 2012.

WAGNER, Eduardo. Uma Introdução às Construções geométricas. ***In* Apostila n. 08/OBMEP,** 2009.

ZUIN, Elenice. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil.** Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2001.

CAPÍTULO VII

O TERMO REGISTRO EM PESQUISAS E AS PRÁTICAS DE ESTUDANTES NO ENSINO SUPERIOR

Afonso Henriques

Saddo Ag Almouloud

INTRODUÇÃO

Existe uma dualidade permanente do termo "*registro*" diante de pesquisas fundamentadas na teoria de Raymon Duval, e pelo entendimento usual deste termo pela sociedade em geral. Por um lado, munido do conceito de *representação*, constitui um sistema semiótico dotado de signos que favorecem a representação de objetos de conhecimentos no sistema, por outro lado, predomina uma variedade do emprego deste termo associado aos verbos registrar, inscrever, anotar, expor etc., e até mesmo na ideia daquilo que se pode ver. Essa dualidade intervém, consequentemente, nas práticas que agregam a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) na aprendizagem matemática. Este capítulo se propõe, no entanto, em trazer reflexões sobre este, entre outros termos ou conceitos da referida teoria, envolvendo Metassíntese qualitativa e uma análise de práticas de estudantes que realizam tarefas de cálculo diferencial e integral imersas no modelo praxeológico de gestão de tarefas em diferentes registros de representação semiótica. Os resultados revelam que a dualidade supracitada é quase ausente na leitura de pesquisas no âmbito teórico, mas é recorrente nas análises apresentadas nestas pesquisas e nas práticas de estudantes, ao realizarem tarefas que envolvem essa teoria. Cabe, portanto, refletir-se sobre uma comunicação linguístico/matemática consensual que agrega os registros de representação semióticas na produção de conhecimentos de estudantes, desde o ambiente teórico à prática/aplicação da pesquisa e a sua comunicação. A nossa pesquisa, ora, fonte deste capítulo foi movida pelo seguinte questionamento: Como pesquisas que se utilizam da Teoria dos Registros de Representação Semióticas (TRRS) no Brasil lidam com a leitura e com a comunicação de dados com base nesta teoria em prol da difusão de conhecimento? Movidos por este questionamento, temos o seguinte objetivo: analisar pesquisas que se utilizam da TRRS no Brasil, com um olhar na leitura e a comunicação de dados colocados em ação com base nesta teoria. Para isso, organizamos este capítulo em quatro partes: a primeira consiste, exatamente, nesta breve introdução. A segunda denominada *"Metassíntese"* permite-nos mapear algumas pesquisas referentes ao tema, no território brasileiro, constituindo assim, Metassíntese qualitativa considerando certos procedimentos de busca em fontes que apresentamos mais adiante, revelando, por conseguinte, os critérios de seleção dos trabalhos encontrados e de análise. A terceira parte denominada *"Arcabouço teórico "*, traz alguns conceitos da TRRS de uma forma concisa. Além disso, apresentam-se certos conceitos básicos da teoria antropológica do didático na sua vertente praxeológica, alimentando assim, o modelo praxeológico de gestão de tarefas, mencionado mais acima. A quarta parte denominada "*Prática dos Estudantes de uma Instituição do Ensino Superior*" exprime o trabalho realizado pelos estudantes de um Programa de Pós-Graduação de uma instituição pública do

Ensino Superior. A quinta, sendo a última parte, traz as considerações finais e as referências bibliográficas utilizadas na realização deste trabalho.

Colocando a nossa organização em prática, apresentamos a seguir a *Metassíntese* a partir do mapeamento que realizamos munido das análises de algumas pesquisas referentes à temática em pauta.

METASSÍNTESE QUALITATIVA

Para contribuir no fortalecimento da difusão de saberes intrínsecas, iniciamos esta seção trazendo um entendimento sobre o que seja *Metassíntese qualitativa* em pesquisas científicas. Segundo Elencar e Almouloud (2017), a "Metassíntese qualitativa é um método de mapeamento realizado por meio de poucos estudos, no qual a seleção das pesquisas segue critério pessoal do pesquisador e utiliza interpretações das investigações". Trata-se, portanto, de um método não empírico/experimental, mas que tem sido utilizado por vários pesquisador(es)(as), tanto na realização de pesquisas próprio(a)s, quanto nas orientações iniciais, como estratégia de inserir o(a) estudante em processo de construção de um trabalho de conclusão do curso, dissertação ou mesmo tese, em pesquisas relacionadas ao seu tema.

Assim, considerando essa definição e o seu valor científico, nos interessamos, nesta seção em mapear algumas pesquisas que se utilizam da TRRS no Brasil, inicialmente, sem restrição temporal na busca, em seguida observar aqueles realizados no ano mais recente (2022), e como lidam com a leitura e comunicação de dados com base nesta teoria, em prol da difusão de conhecimentos. Sabendo que essa temática é relativamente extensa, demos atenção particular ao termo "registro" pela razão da dualidade discutida na introdução e com base na definição apresentada pelo autor da TRRS.

A nossa *Metassíntese* considera a rede mundial de comunicação ou biblioteca virtual, como fonte de busca dos trabalhos publicados sobre a temática, tais como: a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)[1], o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (CTDC)[2], os Periódicos da CAPES[3], SciELO[4], o Google Acadêmico[5], a Science.gov[6], entre outras. Para isso, tratando-se de um capítulo uma quantidade de página bem limitada, restringimos, particularmente, a busca nas duas primeiras, entrando no campo de pesquisa de cada plataforma, as palavras chaves apresentadas no Quadro 1:

Quadro 1: Palavras chaves utilizadas na busca de trabalhos em cada plataforma.

Combinação das possibilidades de entrada da palavra no campo de busca nas plataformas
❖ Registros de representações (no plural sem aspas) ❖ "Registros de representações", (no plural com aspas) ❖ Registro de representação (no singular sem aspas) ❖ "Registro de representação" (no singular com aspas) ❖ Registros de representação (1º termo no plural, sem aspas) ❖ "Registros de representação" (1º termo no plural, com aspas)

Fonte: elaborado pelos autores

O emprego de aspas "..." atua como estratégia de refinamento da pesquisa para restrição dos resultados da busca a temática em jogo. Além disso, sabendo que existe a possibilidade de encontrarmos vários trabalhos sobre a temática, decidimos ainda dar atenção ao seguinte componente como parte de critérios de recorte, para favorecer as nossas escolhas. Trata-se, portanto, de considerar:

---

[1] https://bdtd.ibict.br/vufind/Content/whatIs acessado em 25/03/2023.
[2] https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/ acessado em 07/04/2023
[3] https://www-periodicos-capes-gov-br.ezl.periodicos.capes.gov.br/ acessado em 14/03/2023.
[4] https://www.scielo.br/ acessado em 18/02/2023.
[5] https://scholar.google.com.br/?hl=pt acessado em 14/03/2023.
[6] https://www.science.gov/index.html acessado em 14/03/2023.

- ❖ um trabalho em cada uma das duas fontes de busca que trate, não apenas da TRRS no seu contexto de arcabouço, mas também que contenha uma aplicação/experimentação com o(a)s estudantes/alunos de uma dada instituição de ensino;

Com base nesses critérios encontramos na primeira plataforma, em termos quantitativos, os resultados apresentados no Quadro 2. O link indicado em cada quadro, é um caminho para o acesso de todas as produções encontradas.

Quadro 2: Resultado da busca na plataforma BDTD sem o emprego de aspas.

Entrando com *Registros de representações*, no plural e sem as aspas, no campo de pesquisa da plataforma BDTD		
Dissertações	954	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP, com 125 produções. Confere o resultado no link, acessado em 25/03/2023: Resultados da busca - Registros de representações (ibict.br)
Teses	443	
Total	**1397**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

Comparando este, com o resultado subsequente apresentado no Quadro 3, pode-se conjecturar que a ausência de aspas na busca retorna três possibilidades de publicações envolvendo as palavras registros, representações ou registros de representações. Os trabalhos acessíveis nos links abaixo ilustram essas possibilidades:

1. Os antropomorfos no registro rupestre do semiárido paraibano: caracterização das representações na Microrregião do Cariri Ocidental
2. As representações zoomórficas na subtradição seridó
3. Materiais didáticos manipuláveis e registros de representações: a compreensão matemática de estudantes

Dentre estes, apenas o último trabalho é relacionado com a nossa temática. Daí a importância do refinamento da busca mediante a utilização da palavra-chave entre aspas, obtendo-se o resultado mostrado no Quadro 3.

Quadro 3: Resultado da busca na plataforma BDTD com o emprego de aspas.

Entrando com "*Registros de representações*", no plural e entre aspas, no campo de pesquisa da plataforma BDTD		
Dissertações	68	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da PUC-SP, com 17 produções. Confere o resultado no link, acessado em 25/03/2023: Resultados da busca - "Registros de representações" (ibict.br)
Teses	14	
Total	**82**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

A diferença é numericamente significativa quando se emprega o singular ao termo de busca, para isso, iniciamos com a omissão de aspas. Com esta iniciativa, obtém-se os resultados no Quadro 4.

Quadro 4: Resultado da busca na plataforma BDTD sem o emprego de aspas.

Entrando com *Registro de representação* no singular e sem as aspas, no campo de pesquisa da plataforma BDTD		
Dissertações	1280	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da PUC-SP, com 171 produções. Confere o resultado no link, acessado em 25/03/2023: Resultados da busca - Registro de representação (ibict.br)
Teses	551	
Total	**1831**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

De forma análoga a comparação exercida entre as duas primeiras buscas, aqui também ilustram três possibilidades de trabalhos acessíveis pelos links abaixo:

1. Modelo para registro de dados de experiência de aprendizagem em laboratórios remotos
2. Representação social da consulta de enfermagem e registros da assistência pré-natal por enfermeiros da atenção primária à saúde
3. Registro de representação semiótica no estudo de porcentagem

No contexto da dualidade discutida anteriormente, os primeiros trabalhos acima, inscrevem-se no âmbito social do emprego do termos 'registro' e 'representação'. Entrando com as aspas, encontramos o resultado apresentado no Quadro 5.

Quadro 5: Resultado da busca na plataforma BDTD com o emprego de aspas.

Entrando com "*Registro de representação*" no singular e entre aspas, no campo de pesquisa da plataforma BDTD		
Dissertações	280	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da PUC-SP, com 118 produções. Confere o resultado no link, acessado em 25/03/2023: Resultados da busca - "Registro de representação" (ibict.br)
Teses	68	
Total	**340**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

Conforme se pode ver nos dados apresentados no Quadro 6, a nossa busca que utiliza o primeiro termo da palavra chave no plural, sem o emprego das aspas, revela o mesmo resultado encontrado mais acima, e apresentado no Quadro 4.

Quadro 6: Resultado da busca na plataforma BDTD sem o emprego de aspas.

Entrando com *Registros de representação*, sendo a primeira palavra no plural e sem as aspas, no campo de pesquisa da plataforma BDTD		
Dissertações	1280	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da PUC-SP, com 171 produções. Confere o resultado no link, acessado em 25/03/2023: Resultados da busca - Registros de representação (ibict.br)
Teses	551	
Total	**1831**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

Considerando as escolhas apresentadas no Quadro 1, as buscas de pesquisas terminam com o emprego da palavra chave *Registros de representação* entre as aspas. Assim sendo, nós encontramos o resultado apresentado no sétimo Quadro.

Quadro 7: Resultado da busca na plataforma BDTD com o emprego de aspas.

Entrando com "*Registros de representação*", sendo a primeira palavra no plural e toda a frase com as aspas, no campo de pesquisa da plataforma BDTD		
Dissertações	280	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da PUC-SP, com 118 produções. Confere o resultado no link, acessado em 25/03/2023: Resultados da busca - "Registros de representação" (ibict.br)
Teses	68	
Total	**348**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

Comparando este resultado com o feedback apresentado no quinto quadro, percebe-se que a utilização da palavra chave na forma "*Registro de representação*" ou "*Registros de representação*" é indiferente, pois encontram-se as mesmas produções, e todas são desenvolvidas no âmbito da temática que tratamos neste capítulo, ou sejam, utilizam a TRRS.

Passemos, a seguir, a considerar a segunda plataforma que escolhemos. Assim, os resultados apresentados no Quadro 8 são obtidos com base na aplicação da mesma estratégia de busca, considerando-se, porém, a segunda plataforma que escolhemos.

Quadro 8: Resultado da busca na plataforma CTDC sem o emprego de aspas.

Entrando com *Registros de representações*, no plural e sem as aspas, no campo de pesquisa da plataforma Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (CTDC)		
Dissertações	975817	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando as Teses e Dissertações da USP, com 119572 produções. Link acessado em 07/04/2023: Catálogo de Teses & Dissertações - CAPES
Teses	353909	
Outras	135.316	
Total	**1465042**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

Utilizando a palavra chave no plural e com as aspas, o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES retorna o resultado revelado no Quadro 9:

Quadro 9: Resultado da busca na plataforma CTDC com o emprego de aspas.

Entrando com “*Registros de representações*”, no plural e com as aspas, no campo de pesquisa da plataforma Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES		
Dissertações	975817	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando as Teses e Dissertações da UASP, com 119572 produções. Link acessado em 07/04/2023: Catálogo de Teses & Dissertações - CAPES
Teses	353909	
Outros	135.316	
Total	**1465042**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

Como se pode observar, os resultados são indiferentes nos Quadros 08 e 09. Ou seja, diferentemente da busca realizada na plataforma BDTD, a aplicação ou não de aspas na frase de busca nos CTDC, retorna o mesmo resultado, que se difere utilizando o termo Registro de representação no singular e sem as aspas, conforme mostrado no Quadro 10.

Quadro 10: Resultado da busca na plataforma CTDC com o emprego de aspas.

Entrando com *Registro de representação*, no singular e sem as aspas, no campo de pesquisa da plataforma Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES		
Dissertações	975807	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando as Teses e Dissertações da USP, com 119572 produções. Link acessado em 07/04/2023: Catálogo de Teses & Dissertações - CAPES
Teses	353892	
Outras	135316	
Total	**1465015**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

Foi observada nas primeiras pesquisas que utilizam a plataforma Biblioteca Digital de Teses e Dissertações que existe uma diferença muito grande entre os resultados obtidos com aplicação do termo da busca escrita no plural ou no singular. No entanto, tal diferença é inexiste, nesta plataforma da CAPES, como se pode ver pelo Quadro 11.

Quadro 11: Resultado da busca na plataforma CTDC com o emprego de aspas.

Entrando com "*Registro de representação"*, no singular com as aspas, no campo de pesquisa da plataforma Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES		
Mestrado	975807	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando as Teses e Dissertações da USP, com 119341 produções. Link acessado em 07/04/2023: Catálogo de Teses & Dissertações - CAPES
Profissional	353892	
Outras	135316	
Total	**1465015**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

Além disso, apesar da palavra chave ser apresentada entre aspas, as pesquisas retornadas pela plataforma CTDC, não se referem, apenas, a TRRS. É o caso, por exemplo, da obra intitulada: **"**Hino à Feira de Santana: imagens e representações de uma cidade"**,** defendida em 06/11/2018. Utilizando a palavra-chave apenas com a primeira palavra no plural, encontramos o resultado apresentado no Quadro 12.

Quadro 12: Resultado da busca na plataforma CTDC sem o emprego de aspas.

Entrando com *Registros de representação*, sendo a primeira palavra no plural e sem as aspas, no campo de pesquisa da plataforma Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES		
Dissertações	975806	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando as Teses e Dissertações da USP, com 119572 produções. Link, acessado em 07/04/2023: Catálogo de Teses & Dissertações - CAPES
Teses	353893	
Outras	135.315	
Total	**1465014**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

Este resultado é então comparado com a produção da palavra-chave escrita com a primeira palavra no plural e entre as aspas. Utilizando essa possibilidade de busca, obtemos o resultado apresentado no Quadro 13.

Quadro 13: Resultado da busca na plataforma CTDC sem o emprego de aspas.

Entrando com "*Registros de representação",* sendo a primeira palavra no plural e com as aspas, no campo de pesquisa da plataforma Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES		
Dissertações	975806	Produzidas nas diferentes instituições brasileiras, predominando as Teses e Dissertações da PUC-SP, com 119572 produções. Link, acessado em 07/04/2023: Catálogo de Teses & Dissertações - CAPES
Teses	353893	
Outras	135.315	
Total	**1465014**	**Produções**

Fonte: elaborado pelos autores

Vemos aqui também que os resultados apresentados nos quadros 12 e 13 são indiferentes.

Vale sublinharmos que as duas plataformas visitadas se preocupam, especialmente, com a difusão de saberes mediante a publicação de teses e dissertações. Dentre estas publicações, vemos também que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) encontra um espaço significativo nas pesquisas educacionais desenvolvidas no território brasileiro, favorecendo amplas possibilidades de reflexão sobre a temática.

No tocante a nossa problemática e conforme assinalamos anteriormente decidimos analisar uma obra em cada uma destas plataformas defendida no ano de 2022.

Cada trabalho escolhido será apresentado em uma tabela contendo duas linhas e quatro colunas, sendo que a primeira linha indicará: o título da obra, o(a)s autor(es)(as) da obra, o ano da publicação e a Plataforma/fonte da obra. A segunda linha, conterá informações correspondentes a cada identificação. Além disso, sabendo-se que o acesso de cada obra ocorreu por meio de um link do site da sua publicação, este link será apresentado como nota de rodapé a partir da coluna que lhe identifica na tabela. Durante as análises, daremos atenção aos cinco itens apresentados no Quadro 14, que acreditamos que sejam considerados pelos pesquisadores como objetos de interesses na difusão de saberes.

Quadro 14: Elementos analisados em cada trabalho escolhido, tendo a mesma porcentagem em relação a sua importância na obra.

20%	Problemática e, ou questão(es) de pesquisa do trabalho;
20%	Objetivo geral da pesquisa;
20%	Fundamentação teórica ou Quadro teórico da obra;
20%	Metodologia utilizada
20%	Aplicação/Resultados obtidos / considerações finais.

Fonte: Nossa organização

Como visto, utilizando os critérios estabelecidos, encontramos, nas duas plataformas, diversas obras das quais os autores se interessam com a TRRS. Dentre as 348 obras encontradas na primeira fonte (Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD)), mediante o emprego da palavra "Registros de representação" escolhemos a obra indicada no Quadro 15.

Quadro 15: Obra escolhida na plataforma BDTD

Título obra	Autor(es)	Ano	Fonte de busca
A compreensão do teorema de Pitágoras pelos alunos com deficiência visual: um estudo sobre as representações semióticas em geometria	Érica Francielle Moreira Damaceno	2022	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD)[7]

Fonte: Nossa organização

A Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) é um portal que organiza e publica textos completos de Dissertações e Teses desenvolvidas no Brasil. Assim, o portal favorece a difusão de saberes, servindo como recurso útil para pesquisadores iniciantes e experientes encontrarem diversos trabalhos correlatos, reflexões, e consequentemente, a aquisição de novos

[7] Dissertação - Érica Francielle Moreira Damaceno - 2022.pdf (ufg.br)

conhecimentos. Nesta perspectiva, apresentamos a seguir a análise da obra que selecionamos na plataforma em questão em conformidade com o nosso questionamento e objetivo apresentados anteriormente.

Análise da obra escolhida na plataforma BDTD

Trata-se de uma Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino na Educação Básica, organizada com um total de 240 páginas, desenvolvida junto ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu do Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação (CEPAE) da Universidade Federal de Goiás (UFG), defendida aos 31 de agosto de 2022.

A problemática / questões de pesquisa

Partindo da sua experiência profissional enquanto Professora na Educação Básica, a autora traz uma problemática centrada, inicialmente, em dificuldade de ensinar alunos portadores de alguma Deficiência Visual (DV). A autora relata que no princípio não sabia o que deveria ensinar e como ensinar este público. Mas, contanto com a sua dedicação, e ajuda de colegas mais experientes no ensino da Matemática, ela aprendeu a adaptar atividades que fossem operacionais, na tentativa de suprir os anseios e as dificuldades vivenciadas pelos alunos com DV com destaque em Geometria. A dificuldade de aprender Geometria, sublinha a autora não era apenas para alunos com DV. Contudo, a sua preocupação era mais voltada para esses alunos. Com efeito, para lidar na pesquisa com esse público no tocante aos objetos de estudos, ela faz uma escolha traçando para isso o seguinte objetivo geral.

Objetivo Geral da Obra

Compreender como alunos com deficiência visual interagem com os diversos registros de representação e como os articulam nas atividades matemáticas sobre o Teorema de Pitágoras. De modo mais específico, a autora sublinha que pretendia conhecer as representações utilizadas por um aluno com DV na aprendizagem do Teorema de Pitágoras; identificar como o aluno com DV faz o tratamento e a conversão entre representações distintas do Teorema de Pitágoras. Para isso, ela mergulha a sua pesquisa no seguinte Quadro teórico.

Quadro teórico utilizado da obra

Na condução da discussão da problemática e da sua pesquisa em geral, a autora se utiliza da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) a partir das contribuições de Almouloud (2003, 2004, 2016, 2017) e de Duval (2012, 2017), observando que "a maneira matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas, e toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações" (MACHADO, 2017, parágrafo 6).

A leitura realizada pela autora, no tocante ao Quadro teórico, e apresentada no capítulo correspondente, exprime os conceitos teóricos almejado em concordância com as referências adotas, favorecendo um entendimento próprio da TRRS. Na referida leitura e na Dissertação, de um modo geral, vimos que o termo "*registro*" aparece 200 vezes, ao passo que o mesmo termo no plural é utilizado 140 vezes. Além disso, detectamos a utilização deste termo no contexto de dualidade discutida anteriormente. Esse fato será retomado nas análise apresentadas mais adiante. No momento explicitemos a metodologia percorrida pela autora na realização da obra.

Metodologia utilizada

Para realizar a investigação, a autora percorre uma abordagem qualitativa de pesquisa, realizando entrevistas com Professores, alunos e ex-alunos do Centro de Apoio Pedagógico (CAP) para Atendimento às Pessoas com Deficiência Visual. As entrevistas realizadas foram iniciadas após obter uma prévia aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa e o consentimento esclarecido com os entrevistados. As entrevistas realizadas são do tipo semiestruturadas utilizando um roteiro elaborado de acordo com os objetivos da investigação.

> A entrevista semiestruturada, segundo Triviños (1987), é aquela que parte de algum questionamento, apoiado em teorias e hipóteses que interessam à pesquisa, e que pode oferecer um campo amplo de interrogativas, podendo surgir outras hipóteses à medida que se recebe as respostas do entrevistado, sendo possível acrescentar questões não previstas, de forma que valorizem a presença do investigador e ofereçam todas as perspectivas possíveis para que o entrevistado se sinta livre. Autora em análise (2022, p. 101)

Foram envolvidos nas entrevistas três Professores que ministravam aulas de Matemática CAP/GO, e quatro alunos com DV que já tinham estudado o conteúdo matemático de investigação. As entrevistas foram realizadas de forma remota e individual, por meio da plataforma Google Meet com duração de 45 minutos para os Professores e 30 minutos para os alunos. Segundo a própria Autora:

> o foco da entrevista foi a investigação de como esses alunos aprenderam o Teorema de Pitágoras; se foram utilizados materiais pedagógicos adequados; em caso positivo, como ele interagiu com as representações algébricas; questionamos sobre as figuras em alto-relevo e os materiais pedagógicos utilizados; e quais são as dificuldades encontradas e as suas soluções. Autora em análise (2022, p. 102)

Com base nesta breve apresentação da metodologia trazemos a seguir os resultados obtidos durante o desenvolvimento da pesquisa.

Aplicação/Resultados obtidos / considerações finais.

As aplicações e os resultados obtidos pela autora foram construídos com base nas entrevistas realizadas com os Professores, a partir da criação de critérios próprios de análise, e dos alunos com DV, dando ênfase ao termo "representação". Para isso, a autora é movida pela fundamentação, quando escreve:

> para construir conhecimentos em geometria e estudar o Teorema de Pitágoras, o aluno com deficiência visual, assim como qualquer outro aluno, precisa trabalhar com as três representações associadas a esse conteúdo (língua materna, figuras geométricas e expressões algébricas).

Com esta ideia em mente, os resultados apresentados dão valor ao termo "representação", evitando-se, com isso, a mobilização do termo "registro" que levaria a caracterizar os registros da Língua Materna, gráfico e algébrico, hora explorados com propriedade no Quadro teórico. Em geral o termo "registro" é utilizado 200 vezes em toda a obra, das quais nos deparamos com apenas quatro passagens que antecedem ou sucedem a apresentação dos resultados com sentenças que revelam a dualidade problematizada anteriormente, saindo, portanto, do contexto da TRRS. Essas passagens são:

- "Solicitação de <u>registro</u> de patente"
- "...todas as atividades e escritos <u>registrados</u> no quadro ou outro material devem ser descritas de forma clara..."(p. 53);
- "...sabe ler e escrever em braille , mas atualmente utiliza o computador para o <u>registro</u> e desenvolvimento das atividades em matemática"(p. 105);
- "Produto Educacional <u>Registrado</u> na Plataforma EduCAPES"(p. 165).

Trata-se, portanto, de uma obra escrita com muita atenção no tocante a comunicação dos saberes, conduzida com base na TRRS, valorizando o termo representações contido no título da obra e com um total 231 vezes na obra como um todo, bem como 207 vezes no singular (representação).

Passemos a análise da obra escolhida na segunda plataforma (Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (CTDC)).

Diferentemente do caso anterior, dentre as 1.465.014 obras cadastradas nesta fonte até a data da busca (cf. Quadro 13), encontradas mediante a utilização da palavra-chave "Registros de representação", escolhemos a obra indicada no Quadro 16 contendo o termo "registro" no título. Assim, apresentamos a seguir a análise desta obra considerando o nosso questionamento e objetivo destacados anteriormente.

Quadro 16: Obra escolhida na plataforma **BTDC**

Título obra	Autor(es)	Ano	Fonte de busca
Registros de representação semiótica da função afim em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental	Saulo Augusto Coimbra Santos da Silva	2022	BTDC[8]

Fonte: Nossa organização

Análise da obra escolhida na plataforma CTDC

Trata-se de uma Dissertação de Mestrado Acadêmico organizada com um total de 99 páginas, desenvolvida junto ao Programa de Pós-Graduação e Educação Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), aprovada aos 10 de maio de 2022.

---

[8] https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=11743383 (10/05/2022: Saulo Augusto Coimbra Santos Da Silva)

A problemática / questões de pesquisa

De forma análoga as motivações apresentadas por Damaceno (2022), Silva (2023) também parte da sua experiência profissional como Professor de Matemática no Ensino Fundamental, e de algumas reflexões fomentadas pela sua formação inicial. A sua problemática é centrada nas dificuldades apresentadas por alunos na aprendizagem de funções afim. Ela relata que

> em minha prática docente percebi diversas dificuldades apresentadas pelos estudantes na aprendizagem do conteúdo de função, em turmas do 9°ano do ensino fundamental. Tais dificuldades estavam relacionadas à necessidade de transitar entre as diversas representações das funções, quais sejam, gráfica, algébrica, tabular (SILVA, 2022, p. 14)

Incentivado pelas discussões realizadas em sala de aula durante a sua formação inicial, no tocante ao papel das representações semióticas nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, e pelos documentos oficiais do Estado de Pernambuco voltados à Educação, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), o autor se interessa pela análise de Livros Didáticos (LD) do 9º ano do Ensino Fundamental, visando o seguinte objetivo geral.

Objetivo Geral da Obra

Analisar à luz da Teoria de Registros de Representação Semióticas a abordagem da função afim em livros didáticos do 9° ano do ensino fundamental. Diante deste objetivo o autor delineia os seguintes objetivos específicos: (1) Identificar a ocorrência dos diversos registros de representação semióticas da função afim em livros didáticos de matemática para o 9º ano; (2) Analisar atividades de tratamento e conversão, investigando as abordagens adotadas na conversão entre os registros algébrico e gráfico, em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental e (3) Verificar fenômeno da não congruência semântica das conversões entre registros de representação semióticas em atividades envolvendo função afim propostas nos livros didáticos de matemática para o 9º ano. Para isso, Silva mergulha a sua pesquisa no seguinte Quadro teórico.

Quadro teórico utilizado na investigação

Para fundamentar a sua pesquisa, o autor se utiliza da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval. Assim, de antemão, citando Duval (2003), o autor escreve: "o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio de diferentes registros de representação semiótica, devido à abstração típica dos objetos matemáticos que inviabilizam o acesso de maneira direta" (SILVA, 2022, p.20).

Analogamente à obra analisada na primeira plataforma, a leitura realizada pelo autor, no tocante ao Quadro teórico, e apresentada no capítulo correspondente, evidencia os conceitos teóricos almejado em concordância com a referência adotada. Na referida leitura e na Dissertação, de um modo geral, vimos que o termo "*registro*" aparece 626 vezes, ao passo que o mesmo termo no plural é utilizado 153 vezes. Além disso, detectamos também a utilização deste termo no contexto de dualidade discutida no início deste capítulo. Esse fato será retomado nas análise apresentadas mais adiante. No momento apresentamos a metodologia utilizada pelo autor na realização da obra.

Metodologia utilizada

Para conduzir a pesquisa o autor propõe utilizar uma análise qualitativa e aspectos quantitativos da introdução das atividades referentes ao conteúdo da função afim em LD de Matemática propostas no 9º ano do Ensino Fundamental, com um olhar específico ao capítulo de cada livro referente ao estudo de funções, focando na função afim. Cinco LD aprovados no PNLD de 2019 foram contemplados na análise realizada pelo autor. Para análise dos dados obtidos, o autor recorre ao método da Análise de Conteúdo proposto por Bardin (1977), organizado em três etapas: (1) Pré-análise. (2) Exploração do material e (3) Tratamento dos resultados, inferência e interpretação.

Aplicação/Resultados obtidos/Considerações finais

Trata-se de um estudo de dimensão bibliográfica, mediante a realização de uma análise de LD, e não envolve estudantes/alunos. A análise dos resultados está dividida nos seguintes tópicos: caracterização do livro didático; diversidade dos registros de representação semiótica; as transformações das representações semióticas (tratamentos e conversões), em particular, as abordagens da conversão de representações de objetos no registro algébrico em representações correspondentes no registro gráfico; e análise do fenômeno de congruência e não congruência semântica nas conversões de representações de objetos em diferentes registros. Constata-se, contudo, na comunicação do autor que a "representação", o "tratamento" e a "conversão" omitem o objeto representado, em tratamento ou em processo de conversão, respectivamente, caracterizando assim o fenômeno "vazio didático" definido em Henriques e Almouloud (2016, p.467) como:

> a existência de saberes em torno de um objeto de conhecimentos que não são mobilizados pelo sujeito e compromete o ensino correspondente, bem como a realização efetiva de situações-problemas ou tarefas concernentes.

Esse fato pode ser lido quando o autor escreve:

> Os autores adotam o termo "função polinomial do 1° grau" e não há nenhuma referência ao termo "função afim". Iniciam o capitulo apresentando "situações" no registro língua natural, em

> que é realizada a <u>conversão</u> para o registro algébrico, passando pelo registro tabular (Silva, 2022, p. 51).
>
> Enquanto que o termo "explique" sugere a <u>conversão</u> do registro algébrico para o registro língua natural, pois o estudante devera argumentar em língua natural o resultado encontrado. (Silva, 2022, p. 58).
>
> A maior frequência de <u>tratamentos</u> em língua natural foi observada no LD-4, entretanto, proporcionalmente o maior quantitativo é do LD-5. (Silva, 2022, p. 58)
>
> Ainda que a análise seja, neste momento, sobre os <u>tratamentos</u> destacamos que o procedimento adotado na <u>conversão</u> sugere uma dupla conversão.

Em todas as comunicações do autor identifica-se o vazio didático, na medida em que o objeto passivo à <u>conversão</u> ou ao <u>tratamento</u> não é mobilizado em momento algum. Além disso, como já fora assinalado por Henriques e Almouloud (2016) “... não se converte o registro, mas a representação do objeto em questão de um registro para outro (p. 471)”, “... os registros têm a função de acomodar as representações de objetos em jogo (p. 469)”. Não nos atemos com esta problemática por não ser o objetivo deste capítulo. Refletido isso, apresentamos a seguir as conclusões reveladas na obra.

CONSIDERAÇÕES SOBRE A METASSÍNTESE QUALITATIVO

Conforme sublinhado anteriormente, em outras palavras, a Metassíntese qualitativa é um método de mapeamento de obras científicas que dá uma atenção especial a poucas pesquisas desenvolvidas em torno de um tema específico, segue critérios próprios estabelecidos pelo pesquisador, e promove interpretações das investigações encontradas com base nos referidos critérios. Aplicado a nossa pesquisa, encontramos uma quantidade suficientemente grande de pesquisas que se utilizam da TRRS no Brasil, dando atenção especial ao termo "*registro*", restringimos a análise à duas obras oriundas de duas fontes distintas de difusão de conhecimentos. Os resultados mostram que o termo "*registro*", apesar de aparecer 200 vezes na primeira *obra,* ele tem pouco impacto nessa pesquisa a qual valoriza o termo "*representação,*" e revela poucas inconsistências ascendentes a dualidade, ora apresentada mais acima. Na segunda pesquisa, por sua vez, são utilizados os termos "*representação*", "*tratamento*" e a "*conversão*", constatando-se, por conseguinte, a omissão de objetos passivos a "*representação*", "*tratamento*" e a "*conversão*", revelando-se, assim, vazios didáticos.

PRÁTICA DE ESTUDANTES DE UMA INSTITUIÇÃO DO ENSINO SUPERIOR

Como visto no mapeamento realizado, a TRRS vem sendo utilizada na Educação, não apenas em pesquisas, mas principalmente no ensino e na aprendizagem matemática, desde as instituições da Educação Básica ao Ensino Superior. Considerando a nossa própria sala de aula, no Ensino Superior, como campo de produção de saberes e de investigação, buscamos levar o(a)s estudantes, independentemente, do seu curso de formação inicial nas Áreas de Ciências Exatas e Tecnológicas, ao acesso / compreensão / aprendizagem dos objetos matemáticos estudados nos diferentes registros de representação semiótica, investindo sobretudo na coordenação "manifesta pela capacidade do sujeito em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos" (HENRIQUES e ALMOULOUD, 2016, p. 267)".

As práticas que apresentamos nesta seção são resultados produzidos pelos estudantes em curso de formação inicial em uma Universidade Pública do Estado da Bahia, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral (CDI), ao resolverem tarefas imersas no Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas (MPGT) (HENRIQUES, 2019). Assim, apresenta-se na Figura 1 um recorte de uma das avaliações proposta pelo Professor desta disciplina aos estudantes no primeiro semestre de 2023, contendo as referidas tarefas.

Figura 1: Reprodução de um gerador de 3 tarefas utilizado em uma avaliação de CDI

Gerador de tarefas GT1	**Considerar as curvas C1, C2 e C3 de equações dadas por, $\boldsymbol{y = -x^3 + 3x}$, $\boldsymbol{-5x - y = 0}$ e $\boldsymbol{-3x + y + 8 = 0}$, respectivamente, para realizar as seguintes tarefas, explicando cada etapa passo-a-passo:**	
	t1	Descrever, na língua materna, cada equação considerada no GT1.
	t2	Representar, no registro gráfico, a região *R1* finita do plano, delimitada por Crivos-Geométricos de C1, C2 e C3 restritos a *R1* para $x \leq \frac{5}{2}$.
	t3	Decidir sobre o tipo de região *R1*, e forneça uma representação analítica de *R1* que permita o cálculo da área desta região por uma Integral Dupla, e estabeleça essa integral sem desenvolver os cálculos.

Fonte: Avaliação proposta por um Professor em um curso de CDI sobre Integrais Duplas

Trata-se de um Gerador de três tarefas proposto aos referidos estudantes em uma avaliação de CDI III sobre Integrais Duplas, e tem os seguintes objetivos: *estimular* a descrição, na língua materna, de objetos matemáticos ensinados, em particular as curvas cujos crivos[9] delimitam uma região finita no plano cartesiano. Este tipo de regiões, no contexto do tema da avalição, é considerado como domínio de integração; *converter* as representações dos objetos descritos na língua materna para o registro gráfico; *decidir* sobre tipos de regiões planas visando o estabelecimento / representação de uma integral

[9] Ver o conceito de Crivo-Geométrico em Henriques, Nagamine e Serôdio (2020, p. 257).

dupla; *representar* uma região assim decidida, analiticamente, no registro algébrico; *estabelecer* uma integral.

Percebe-se na proposta do Professor, a partir deste gerador que o seu objeto, com GT1 não é calcular a integral, e sim, conduzir os estudantes à mobilização dos conceitos preliminar que estão nos bastidores dos processos do cálculo efetivo da integral. Pois, não é dada, diretamente, a integral para o estudante, simplesmente, conduzir o trabalho dos cálculos. Entendemos que fornecer uma integral previamente estabelecida para o estudante realizar apenas os cálculos, é retirar as possibilidades dele mesmo buscar as condições necessárias para o referido estabelecimento.

> Por exemplo: *na tarefa calcular a integral dupla dada por* $\int_1^2 \int_1^2 (x+y)dydx$, é eliminada da prática efetiva do estudante a subtarefa de estabelecer essa integral. Com efeito, uma interpretação geométrica da tarefa permite mobilizar competências de cálculo de volume do sólido compreendido entre o plano de equação $z = x + y$ (correspondente a função a integrar *f*(*x*,*y*)=*x*+*y*) e a sub-região (domínio de integração) do plano_*xy*, dada analiticamente por $R = \{(x, y); 1 \leq x \leq 2, 1 \leq x \leq 2\}$. Com a eliminação dessas subtarefas, sobra, para o estudante, apenas a tarefa de realizar os cálculos. (HENRIQUES, NAGAMINE, A, NAGAMINE, C., 2012, p.1276)

Assim, com base no Gerador de tarefas em questão, apresenta-se um diagnóstico (com referências na fase de aplicação, análise a posteriori e validação de uma Sequência Didática – SD, (HENRIQUES, 2019)), sobre as práticas efetivas de estudantes dessa turma, trazendo alguns recortes de seus manuscritos.

As práticas efetivas de estudantes

A avaliação do Professor que utiliza o GT1 foi aplicada em uma turma de 25 estudantes de cursos de Ciências Exatas e Tecnológicas matriculados na disciplina CDI III, dos quais trazemos recortes de manuscritos de dois deles denominados Estudante E1 e Estudante E2. Seguindo os objetivos almejados para o gerador de tarefas em questão, podemos observar, a partir da Figura 2, que de um modo geral esses estudantes mobilizam convenientemente a ideia de *descrição* de objetos matemáticos na *língua materna.*

Figura 2: Recortes de manuscritos de práticas de estudantes mobilizando a língua materna

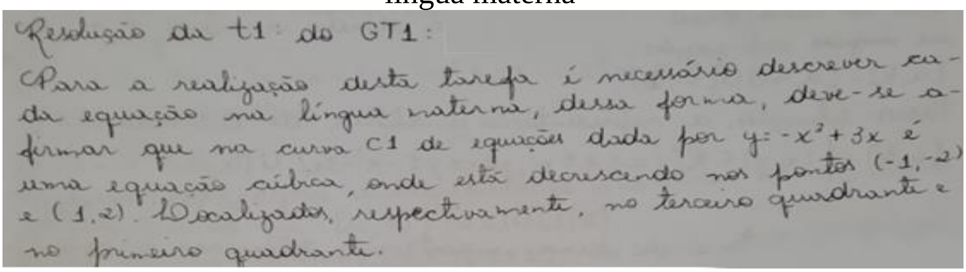

Resolução da t1 do GT1:
Para a realização desta tarefa é necessário descrever cada equação na língua materna, dessa forma, deve-se afirmar que na curva C1 de equações dada por $y = -x^2 + 3x$ é uma equação cúbica, onde está decrescendo nos pontos (-1, -2) e (1, 2). Localizados, respectivamente, no terceiro quadrante e no primeiro quadrante.

Figura 2: Estudante E1

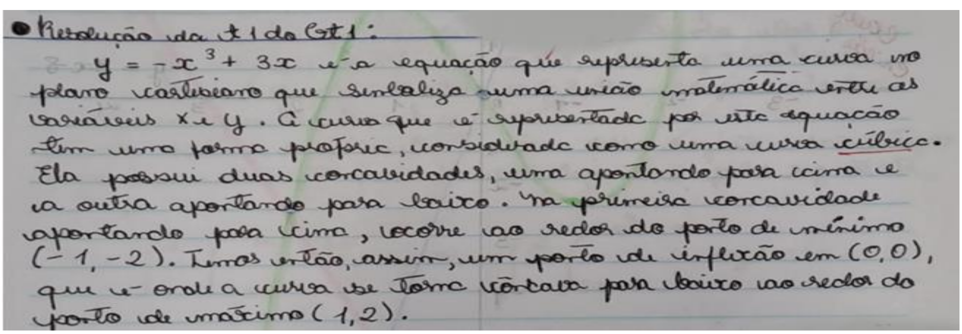

Resolução da t1 do Gt1:
$y = -x^3 + 3x$ é a equação que representa uma curva no plano cartesiano que simboliza uma união matemática entre as variáveis x e y. A curva que é representada por esta equação tem uma forma própria, considerada como uma curva cúbica. Ela possui duas concavidades, uma apontando para cima e a outra apontando para baixo. Na primeira concavidade apontando para cima, ocorre ao redor do ponto de mínimo (−1, −2). Temos então, assim, um ponto de inflexão em (0,0), que é onde a curva se torna côncava para baixo ao redor do ponto de máximo (1,2).

Figura 2: Estudante E2

Expressar os objetos matemáticos na língua materna dá a liberdade ao estudante a externar por intermédio de suas próprias palavras aquilo que ele aprendeu sobre o referido objeto. Mas, para que isso ocorra, é necessária que a ação de *descrever* seja estimulada mediante a gestão de tarefas. Em outras palavras, é necessário que os conceitos ou objetos de estudos trabalhados na organização praxeológica correspondente sejam transformados em tarefas, e o Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas é uma alternativa nessa transformação. É de notar, a partir dos manuscritos de estudantes, que apesar das suas respostas revelarem a palavra chave que exprime exatamente o nome de cada curva, elas não são uniformes. Cada um externa o que aprendeu utilizando o próprio discurso, contrariamente, quando é requerida a representação do objeto em questão no registro gráfico, no qual eles revelam os objetos sem explicação, como se pode observar nos resultados referentes à realização da *t2* do GT1 apresentado na Figura 3.

Figura 3: Recortes de manuscritos de práticas de estudantes mobilizando o registro gráfico

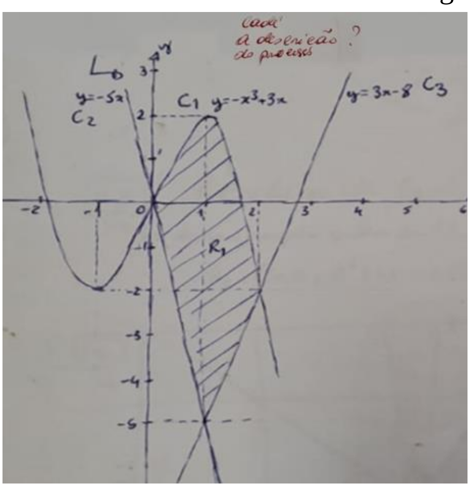


Figura 3: Estudante E1

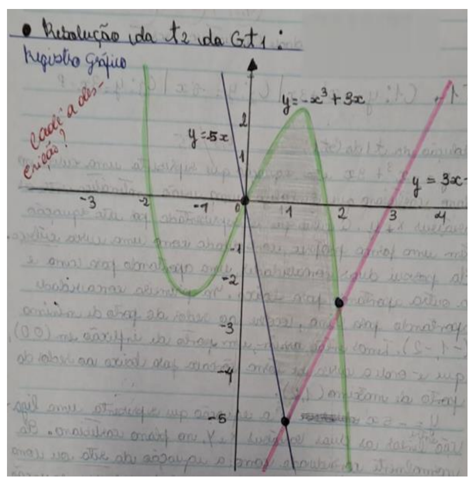
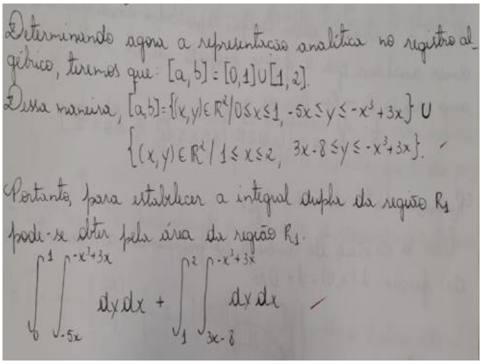


Figura 3: Estudante E2

Fonte: Dados da pesquisa

O termo *registro* aparece nas práticas, e é empregado corretamente por alguns estudantes e incorretamente, por outros, como se pode ver na Figura 4.

Figura 4: Recortes de manuscritos de práticas de estudantes referentes a realização da *t3*



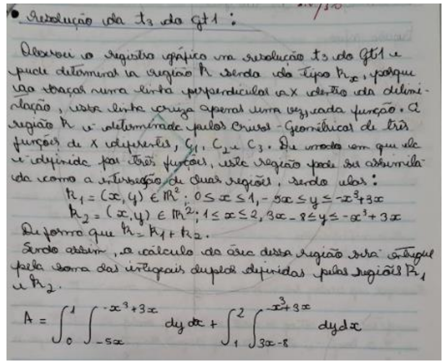
Determinando agora a representação analítica no registro algébrico, teremos que: $[a, b] = [0,1] \cup [1, 2]$.

Dessa maneira, $[a,b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, -5x \leq y \leq -x^3 + 3x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2, 3x - 8 \leq y \leq -x^3 + 3x\}$.

Portanto, para estabelecer a integral dupla da região R_1 pode-se obter pela área da região R_1.

$$\int_0^1 \int_{-5x}^{-x^3+3x} dy\,dx + \int_1^2 \int_{3x-8}^{-x^3+3x} dy\,dx$$

Figura 4: Estudante E1



• Resolução da t_3 do Gt1:

Observei o registro gráfico na resolução t_3 do Gt1 e pude determinar a região R sendo do tipo R_x, porque ao traçar uma linha perpendicular a x dentro da delimitação, esta linha cruza apenas uma vez cada função. A região R é determinada pelas Curvas-Geométricas de três funções de x diferentes, C_1, C_2 e C_3. De modo em que ela é definida por três funções, esta região pode ser assimilada como a intersecção de duas regiões, sendo elas:

$R_1 = (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1, -5x \leq y \leq -x^3 + 3x$

$R_2 = (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 \leq x \leq 2, 3x - 8 \leq y \leq -x^3 + 3x$

De forma que $R = R_1 + R_2$.

Sendo assim, o cálculo da área dessa região será integral pela soma das integrais duplas definidas pelas regiões R_1 e R_2.

$$A = \int_0^1 \int_{-5x}^{-x^3+3x} dy\,dx + \int_1^2 \int_{3x-8}^{-x^3+3x} dy\,dx$$

Figura 4: Estudante E2

Fonte: Dados da pesquisa

Guiados pelos resultados obtidos na realização das tarefas anteriores os estudantes conseguem decompor a região de integração em duas sub-regiões e representar a medida da área desta região como soma de duas integrais, estabelecendo assim a integral dupla da função $f(x,y)=1$ sobre a região R.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nossa pesquisa, ora fonte deste capítulo, foi movida pelo seguinte questionamento: Como pesquisas que se utilizam da Teoria dos Registros de Representação Semióticas (TRRS) no Brasil lidam com a leitura e com a comunicação de dados com base nesta teoria em prol da difusão de conhecimento? Instigados por este questionamento, estabelecemos o seguinte objetivo: analisar pesquisas que se utilizam da TRRS no Brasil, com um olhar na leitura e a comunicação de dados colocados em ação com base nesta teoria. A Metassíntese que utilizamos permitiu responder ao nosso questionamento revelando uma quantidade significativa de pesquisas que se interessam pela

TRRS no Brasil. Dentre estas pesquisas escolhemos duas oriundas de duas plataformas distintas, e permitiram atender ao nosso objetivo. Com efeito, os resultados revelam que a dualidade do termo "*registro*" é quase ausente na leitura de pesquisas no âmbito teórico, mas é recorrente nas análises apresentadas nestas pesquisas e nas práticas de estudantes, ao realizarem tarefas que envolvem essa teoria. De fato, quando o Estudante E2 (Figura 4) escreve, por exemplo: "*Observei o registro gráfico na resolução da t3 do GT1 e pude determinar a região R do tipo* R_x", ele está nos revelando que concebe o *registro* como sendo os traços ou curvas das equações que ele produziu no registro gráfico, inscrevendo-se assim na dualidade problematizada na introdução deste capítulo.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, E. S. de, & ALMOULOUD, S. A. (2017). **A Metodologia de Pesquisa: Metassíntese Qualitativa**. Reflexão e Ação, 25(3), 204-220. https://doi.org/10.17058/rea.v25i3.9731

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Registros De Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos**. Machado. In: MACHADO, S. D. A. M. (Org). Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2017.

BARDIN, Laurence., **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

DUVAL, Raymond. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org). Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2017.

HENRIQUES, A. & ALMOULOUD, S. A., **Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior**: Uma Análise de Superfícies e Funções de duas Variáveis com Intervenção do Software Maple, **Revista Ciência & Educação**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

HENRIQUES, A. **Saberes Universitários e as suas relações na Educação Básica** - Uma análise institucional em torno do Cálculo Diferencial e Integral e das Geometrias. Via Litterarum. Ibicaraí, Bahia. Editora. 2019.

HENRIQUES, A., NAGAMINE, A., SERÔDIO, R. **Mobilização de crivos de curvas e de superfícies na resolução de problemas matemáticos: uma aplicação no ensino superior.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.22, n. 1, 253-275, 2020.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. M. L. Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1261-1288, dez. 2012.

SILVA, S. A. C. S., **Registros de representação semiótica da função afim em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife. 2022.

CAPÍTULO VIII

A SIGNIFICAÇÃO DO CONCEITO DE VETOR: ENTENDIMENTOS APRESENTADOS POR UM ACADÊMICO DE ENGENHARIA

Viviane Roncaglio

Luana Henrichsen

Isabel Koltermann Battisti

Cátia Maria Nehring

INTRODUÇÃO

A presente produção é um recorte de uma pesquisa desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências da UNIJUÍ, que tem nos levado a compreender e problematizar sobre o entendimento do conceito de Vetor por um acadêmico do curso de Engenharia. Nesta produção é realizado um movimento de entender, a partir da análise de episódios, como um acadêmico de engenharia, que está cursando a disciplina de Geometria Analítica e Vetores – nome dado a disciplina que introduz o conceito de Vetor nos cursos da área de Ciências Exatas e Tecnológicas, da instituição, na qual, as autoras e o sujeito da pesquisa, fazem parte – e que já estudou o conceito de Vetor, compreende este conceito em atividades de identificação e localização de Vetor a partir da representação geométrica. A discussão tem como fundamentação a Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval. Estudos desenvolvidos (RONCAGLIO, 2015; BATTISTI, 2016; RONCAGLIO; BATTISTI; NEHRING, 2021; RONCAGLIO; BATTISTI; NEHRING, 2023) apontam que, apesar do conceito de Vetor ser de extrema importância para o processo de formação dos acadêmicos de Engenharia, considerando a sua atividade profissional, é um conceito que o estudante não consegue significar com facilidade, isso nos leva a afirmar que precisamos modificar o ensino desenvolvido, para podermos qualificar a aprendizagem. Logo, levantamos a possibilidade de utilizar a modelagem matemática como uma estratégia de ensino, aprendizagem e significação do conceito de Vetor, o que está sendo realizado em novas pesquisas do Grupo de Pesquisa, focando nas funções discursivas.

1 CONCEITO VETOR NOS CURSOS DE ENGENHARIA

Vetor é um conceito matemático explorado em diversas áreas do conhecimento e de acordo com o estudo já desenvolvido (RONCAGLIO; BATTISTI; NEHRING, 2023), é discutido inicialmente na disciplina de Geometria Analítica e Vetores ou então na disciplina de Álgebra Linear, sendo estas as disciplinas responsáveis por introduzirem este conceito na educação superior, especialmente nos cursos das áreas das Ciências Exatas e Tecnológicas, como é o caso da Matemática e das Engenharias.

A Engenharia explora tal conceito para representar situações que envolvem grandezas como força, torque e velocidade, além de situações relacionadas ao dimensionamento de vigas e treliças, elevadores, guindastes, carregamento, reações de apoio, dentre outras. É também considerado para representar grandezas vetoriais as quais não podem ser definidas apenas por um valor numérico, mas que exigem outros elementos, como, intensidade/módulo, sentido e direção. Desse modo, de acordo com Roncaglio (2015), o entendimento do conceito de Vetor é de fundamental importância para os estudantes de Engenharia, pois este é um conceito que integra o sistema de relações conceituais dos conteúdos inerentes ao seu processo de formação.

Matematicamente, Vetor é definido por Santos, como:

> **Definição 1** – Diremos que o segmento orientado AB é equipolente ao segmento orientado A'B' se uma das três afirmações a seguir for verificada:
>
> 1. A = B e $A' = B'$.
>
> 2. AB e $A'B'$ estão situados sobre uma mesma reta e é possível deslizar $A'B'$ sobre essa reta de maneira que A' coincida com A e B' coincida com B.
>
> 3. A figura obtida ligando-se os pontos A a B, B a B', B' a A' e A' a A é um paralelogramo.
>
> Observe que dois pontos (quando considerados como segmentos orientados) são sempre equipolentes. O leitor pode mostrar facilmente que a relação de equipolência satisfaz às seguintes propriedades:
>
> I – Reflexividade: todo segmento orientado do espaço é equipolente a si mesmo.
>
> II – Simetria: se o segmento orientado AB é equipolente ao segmento orientado $A'B'$, então $A'B'$ é equipolente a AB.
>
> III – Transitividade: se o segmento orientado AB é equipolente ao segmento orientado $A'B'$ e se $A'B'$ é equipolente ao segmento orientado $A''B''$, então AB é equipolente a $A''B''$.
>
> Em virtude das três propriedades mencionadas, é usual dizer-se que a equipolência é uma relação de equivalência.
>
> **Definição 2** – O vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados do espaço que são equipolentes ao segmento orientado AB.
>
> O vetor determinado por AB será indicado por AB; o segmento orientado AB é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$. É conveniente representar tanto o segmento orientado AB como o vetor AB por uma seta com origem em A e extremidade em B. O leitor deve, entretanto, não se esquecer de que isso é um abuso de notação: o segmento orientado AB e o vetor AB são objetos matemáticos distintos, pois AB é um segmento orientado (isto é, um conjunto de pontos), enquanto AB é um conjunto de segmentos orientados.
>
> Observe que os segmentos orientados AB e CD representam o mesmo vetor se, e somente se, esses segmentos são equipolentes. Portanto, um mesmo vetor pode ser representado por uma infinidade de segmentos orientados distintos. Na verdade, se AB é um segmento orientado e P, um ponto qualquer do espaço, o

> leitor pode ver facilmente que existe um, e somente um, segmento orientado PQ, com origem em P, tal que PQ é equipolente a AB. Segue-se, assim, que o vetor AB tem exatamente um representante em cada ponto do espaço. (2007, p. 2-3)

Relação de equipolência, relação de equivalência, segmentos orientados, são conceitos que estruturam o conceito de Vetor e sustentam as operações envolvendo o mesmo. Por exemplo, quando realizamos a adição de dois vetores em sua representação geométrica, podemos fazer considerando duas regras, a lei do polígono – utilizado quando a origem de um vetor é a extremidade do outro, o vetor soma nesse caso é o que fecha o triângulo. A lei do paralelogramo, é utilizada quando os vetores a serem adicionados possuem a mesma origem, na qual a imagem geométrica de cada um dos vetores é posicionada nas extremidades dos vetores, formando assim, um paralelogramo, o vetor soma é dado pela diagonal do paralelogramo.

Adicionar vetores na Matemática pela lei do polígono ou pela regra do paralelogramo independe do contexto matemático, ambas as leis são convenientes e representam o mesmo vetor resultante. Já na Física e na Engenharia a utilização das leis está condicionada ao contexto que será mobilizado. Por exemplo, se o contexto envolve deslocamento, faz mais sentido utilizar a lei do polígono, já se o contexto envolve a soma de forças, faz mais sentido utilizar a lei do paralelogramo. Não existe uma definição científica quanto a utilização destas leis, que corroboram com essa ideia, é uma construção “artificial” utilizada por estudiosos que vêm sendo utilizada por gerações.

Porém, para que os procedimentos de ambas as regras sejam realizados mediante processos de compreensão é necessário que as relações de equipolência e equivalência estejam internalizadas por parte dos estudantes, uma vez que a imagem geométrica a que nos referimos anteriormente na regra do paralelogramo considera a relação de equivalência do Vetor que está sendo deslocado para formar o paralelogramo. Isso acontece em várias situações de operação com vetores quando este se apresenta em sua forma geométrica ou, então, quando é necessária a representação geométrica do Vetor para que a operação seja desenvolvida de forma correta.

São as relações estabelecidas com os conceitos que fazem parte do sistema conceitual Vetor, como indica Battisti (2016), que possibilitam a mobilização deste conceito em diferentes situações e em outras áreas do conhecimento. A Matemática possui uma linguagem que possibilita a articulação de diversos registros de representação semiótica e a Engenharia utiliza-se desta linguagem para representar situações e/ou fenômenos envolvendo força, deslocamento, dimensionamento de vigas, entre outras, grandezas que para serem definidas necessitam de um módulo, de um sentido e de uma direção.

2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICOS E O CONCEITO DE VETOR

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida na França por Raymond Duval, tem sido muito utilizada, principalmente em pesquisas que visam à aquisição de conhecimento e a organização de situações de aprendizagem em matemática. Duval, propõe uma abordagem que pode auxiliar os professores na organização de atividades de ensino e também explicita os registros de representação mobilizados pelos estudantes explicitando as compreensões dos conceitos matemáticos. Defende-se a ideia de que para o estudante aprender Matemática, é preciso que ele tenha acesso e que saiba coordenar as diferentes representações provenientes de diferentes registros.

As Representações Semióticas "são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento (DUVAL, 1993, apud DAMM, 2012, p.176)". Para o autor um mesmo objeto matemático pode ser representado de várias formas, ou através de vários sistemas. Por exemplo, uma função linear, pode ser representada por uma expressão algébrica, ou ainda, por um gráfico.

Toda comunicação em Matemática ocorre por meio de representações semióticas, deste modo, é imprescindível que ao aprender Matemática, os alunos não confundam os objetos com as suas respectivas representações semióticas, pois, uma coisa é o objeto matemático, outra é a sua representação. Em Matemática as representações semióticas são utilizadas como suporte tanto para fins de comunicação como também para o desenvolvimento da própria atividade matemática. Deste modo, apenas com as representações semióticas é possível a construção do conhecimento pelos sujeitos, é por meio delas que se torna possível desenvolver funções cognitivas essenciais do pensamento humano.

A Teoria dos Registros de Representação Semióticas permite a mobilização de uma grande variedade de representações: sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e língua natural. A compreensão da grande variedade de registros de representação utilizado em Matemática é que determina o ensino e a aprendizagem de qualquer conhecimento matemático. De acordo com Duval (2009), a aprendizagem da matemática constitui um campo de estudo privilegiado para análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos. Estas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens: sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébricas e lógicas que adquirem o status de linguagem, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Para analisar a atividade matemática numa perspectiva de ensino e de aprendizagem, Duval afirma ser necessário realizar uma abordagem cognitiva sobre os dois tipos de transformações de representações que são fundamentais para essa análise, os tratamentos e as conversões de representações semióticas. É por meio dos tratamentos e conversões que é possível analisar a atividade matemática desenvolvida pelo estudante em uma situação de ensino. Duval os define como sendo

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria. [...] As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados; por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação a sua representação gráfica (DUVAL, 2003, p.16)

No ensino de Matemática, o problema com o processo de aprendizagem se estabelece, justamente, porque só se leva em consideração as atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos necessários em cada representação. No entanto, o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas sim a coordenação entre esses vários registros de representação (DAMM, 2012, p.182).

Damm (2012) contribui ao destacar que a conversão exige do sujeito o estabelecimento da diferença entre o significado e o significante, reforça que "[...] o ensino/aprendizagem de qualquer conhecimento está estreitamente vinculado à compreensão de diferentes registros de representação". Ela continua destacando que: "[...] sem as representações semióticas torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que apreende" (DAMM, p. 177). Desse modo, dada a natureza não real dos objetos matemáticos, os registros de representação semiótica possibilitam o acesso a esses objetos. Duval (2003) aponta para três tipos de registros de representação semiótica: o registro figural, o simbólico e o da língua natural, cujas representações apresentam dois aspectos: a forma (representante) e o conteúdo (representado).

De acordo com Castro (2001, p. 13),

> Um vetor $\vec{v}$ pode ser representado pelos três tipos de registros, indicados por Duval. No simbólico através de n-uplas, ou como combinações lineares de vetores em relação a uma base fixada. No figural, por uma flecha, registro de um representante da classe de equipolência de $\vec{v}$. E na linguagem natural, "vetor".

Com base em Castro (2001) e Duval (2003), apresentam-se os registros de representação utilizados nesta pesquisa. A representação do vetor pode ser realizada de diferentes maneiras, isto é, no plano e no espaço, mas sempre por meio dos registros de representação semiótica.

Gráfico 1: Tipos de registros de representação do vetor

Fonte: RONCAGLIO (2015, p.64)

Portanto, a compreensão em matemática implica na capacidade dos sujeitos em atuar de modo a realizar conversões de representações de objetos entre diferentes registros. A dificuldade se deve então ao fato de que o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível. Ou seja, "o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado (DUVAL, 2003, p.22)", pois passar de um registro a outro não é somente mudar o modo de tratamento, é preciso também explicar as propriedades e utilizar as regras de transformação adaptadas para realizar a conversão.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos utilizados nesta produção se efetivam a partir das atividades de monitoria, programa instituído na Universidade, campo da pesquisa, a qual é solicitada pelo professor responsável pela disciplina. Na monitoria a primeira autora, se insere em atividades de acompanhar o professor no desenvolvimento da disciplina, planejamento e atendendo acadêmicos em suas dúvidas e atividades. Além disso, é disponibilizado outro momento no decorrer da semana para atendimento aos acadêmicos, considerando as suas dúvidas e o aprofundamento de discussões trazidas a partir da aula.

Estes momentos de monitoria, em contra turno, é que serviu como lócus da pesquisa, em duas situações, a partir da correção de exercícios e na discussão de questões de uma prova realizada. Para isso estes dois procedimentos foram gravados e transcritos. Esta transcrição literal dos acontecimentos, com destaques para gestos, silêncios, interrogações dos estudantes, foram lidas e relidas pelas pesquisadoras constituindo o banco de dados da pesquisa. A partir dessa análise se efetivou, buscando identificar a partir da Teoria dos Registros de Representação de Duval e do conceito Vetor episódios significativos considerando entendimentos e dúvidas dos estudantes. Nesta pesquisa, episódios são entendidos como [...] “classes de fatos e/ou situações que explicam empiricamente o fenômeno.” (BATTISTI, 2016, p.86).

A seleção dos episódios considerou o problema de pesquisa, os referenciais teóricos utilizados e permitiu delimitar o seguinte foco de análise: o conceito de Vetor, considerando direção, sentido e módulo e as compreensões apresentadas por um estudante, em relação ao referido conceito. A identificação dos episódios se efetivou a partir da explicação do acadêmico considerando os seus procedimentos realizados (registro de representação para um determinado exercício) e o questionamento da monitora/pesquisadora. O estudante é apresentado como E1 e a monitora/pesquisadora é apresentada como Pesq..

4 ENTENDIMENTOS ELABORADOS EM RELAÇÃO AO CONCEITO DE VETOR

A questão abaixo foi proposta em uma das avaliações aos estudantes.

A figura abaixo representa um paralelepípedo retângulo. Determine:

a) Um vetor paralelo ao vetor com origem em B e extremidade em E.

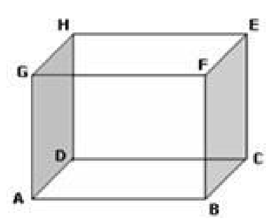


Figura 1: Representação Geométrica de um Paralelepípedo Retângulo

Nesta questão, como pode ser observado, o estudante deve apresentar, considerando a representação geométrica de um paralelepípedo, um vetor paralelo ao vetor com origem no ponto B e extremidade E. Para que a resolução seja desenvolvida com sucesso, o estudante precisa ter mente o conceito de Vetor e as relações de equivalência e equipolência. Além disso, nesta questão o estudante deve trabalhar com o registro geométrico de vetor considerando o mesmo tratamento, ou seja, não exige conversão da representação de registro para encontrar uma solução correta. No desenvolvimento desta questão, o E1, apresentou como resposta o vetor com origem em F e extremidade em G, conforme se pode ler no Episódio 1, transcrito a seguir.

> **Episódio 1 – Desenvolvimento da questão**
> **Pesq**: Explica como você resolveu a letra a.
> **E1**: Vetor paralelo.
> **Pesq**: Tá, vetor paralelo a $\overrightarrow{BE}$.
> **E1**: $\overrightarrow{BE}$. Eu peguei um vetor que fosse paralelo a ele, que no caso o $\overrightarrow{FG}$.
> **Pesq**: $\overrightarrow{FG}$ é paralelo a $\overrightarrow{BE}$? *(pesquisadora aponta com lápis sobre o segmento)*
> **E1**: Não.
> **Pesq**: Então qual é paralelo a $\overrightarrow{BE}$?*(com a ponta do lápis faz um traço do ponto B ao E)*
> **E1**: $\overrightarrow{AH}$ seria?
> **Pesq**: Como? Aponta o vetor $\overrightarrow{AH}$.
> **E1**: $\overrightarrow{AH}$. Acho que não*!(aluno começa a se dar conta do equívoco)*
> **Pesq**: $\overrightarrow{AH}$ seria paralelo.
> **E1**: Não sei porque eu fiz isso.

Ao discutir os procedimentos realizados, o estudante apresenta como possibilidade um vetor que não tem relação de paralelismo com o vetor $\overrightarrow{BE}$. Quando questionado e principalmente no momento que a pesquisadora aponta, fazendo o traçado do vetor em questão, o estudante começa a apresentar indícios de que o seu procedimento está incorreto. Ou seja, a representação geométrica do paralelepípedo retangular fixado no registro figural, não é suficiente para compreensão e resolução pelo estudante, mas no momento que a pesquisadora, traça o vetor ele apresenta indicativos de perceber a origem e a extremidade e que a sua resposta não está efetivamente correta. Continuando a discussão, a qual é apresentada no Episódio 2, há um movimento de problematização dos entendimentos apresentados pelo estudante

> **Episódio 2 – Problematizando o procedimento**
> **Pesq**: Qual foi a lógica que você usou para resolver esta questão?
> **E1**: Era para ser essa, mas não sei porque que eu botei isso. Paralelo tem que ter o mesmo sentido, é isso ne?
> **Pesq**: Mesmo sentido? O que é mesmo sentido?
> **E1**: Só que eles têm que ter a mesma direção?
> **Pesq**: Isso aí, a mesma direção. Sentido e direção é a mesma coisa?

Neste episódio, o estudante não consegue explicar seu procedimento. Com o questionamento da pesquisadora, problematizando as suas respostas e explicitando um pouco mais o registro de representação utilizado na questão, o estudante vai percebendo o conceito de Vetor paralelo e as suas condições. Além disso, o procedimento é fundamental para a elaboração do conceito, necessitando de fato uma apropriação do registro de representação e a compreensão do seu tratamento, ou seja, como o estudante está representando efetivamente a origem do vetor dado na questão para definir o sentido do mesmo. Destacamos ainda que, nessa tarefa foram mobilizados outros dois registros, o algébrico e o da língua materna.

Vale lembrar que, "Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesma direção são ditos paralelos. [...] as suas imagens geométricas podem ser representadas sobre uma mesma reta" (VENTURI, 1949, p.67). Ou seja, para que dois vetores sejam ditos paralelos é necessário que tenham a mesma direção, o que marca a necessidade do entendimento por parte dos estudantes em relação aos elementos de formação do conceito de Vetor. Destacamos ainda, que no contexto dos vetores, paralelos e colineares significam a mesma coisa.

O episódio 3, destaca essas dúvidas.

> **Episódio 3 – Sentido e direção do vetor**
> **Pesq**: O que é sentido?
> **E1**: (*Estudante pensando e olhando muito para a representação figural)*
> **Pesq**: Existe alguma diferença entre sentido e direção?
> **E1**: Sim.
> **Pesq**: Qual é?
> **E1**: Sentido, hum, a direção pode ta assim né? (*Desenha um segmento de reta, e aponta para as suas extremidades*).
> **Pesq**: Representa uma situação, que indique o que entende por sentido e direção.
> **E1**: Sentido. (*Estudante escrevendo*). Daí a direção pode ser assim. (*Desenha outro segmento de reta, porém com inclinação*).

Neste episódio podemos observar que o estudante não consegue identificar em um vetor as suas características de formação, pois um vetor é um segmento de reta orientado, com módulo, sentido e direção. Para este estudante, o sentido do vetor, ainda está em processo de significação. Ele para trazer a ideia de sentido, recorre a inclinação e não a origem do vetor. A pesquisadora continua questionando e para isso recorre ao tratamento utilizado na representação figural. O Episódio 4 a seguir, apresenta uma discussão que envolve as características de um Vetor.

> **Episódio 4 – Características de um Vetor**
> **Pesq**: (*Desenha um vetor*). Qual é a característica de um Vetor? Quais são as características de um Vetor?
> **E1**: Módulo.
> **Pesq**: Sim. O que é o módulo?
> **E1**: (*Estudante pensando e olhando muito para a representação do registro figural*).
> **Pesq**: O que é o módulo de um vetor?
> **E1**: É um ponto, não né. (*Estudante pensando*).
> **Pesq**: O que representa o módulo de um vetor?

E1: Não é o comprimento do vetor?
Pesq: Isso mesmo. O módulo é o comprimento. Isso, então o vetor possui módulo, que é a medida do comprimento dele. E o sentido e a direção que falou antes. O que seriam?
E1: (*Estudante pensa e olha novamente para a representação do registro figural*).
Pesq: Então sentido e direção, o que são?
E1: É sentido e direção.
Pesq: O que significa o sentido de um vetor? Vamos pensar a partir da representação aqui na nossa representação, considerando o vetor $\overrightarrow{BE}$.
E1: Sentido é a distância dos pontos?
Pesq: Vamos olhar para o vetor que está sendo representado aqui. *(o vetor representado pela pesquisadora no papel)* Aqui eu tenho um vetor com origem em A e extremidade em B. Então neste caso, o sentido deste vetor poderia ser o que? (*Apontando novamente para representação*).
E1: (*Estudante olha para representação e para pesquisadora com ar interrogativo*).
Pesq: Qual é o ponto de início desse vetor? Ele tem um início?
E1: Hum, da origem para a extremidade.
Pesq: Posso dizer então de A (*apontando para o início do vetor*) para B (*apontando para o fim do vetor*). Então o sentido é do ponto A para o ponto B, representado por $\overrightarrow{AB}$.
E1: É isso. *(Ainda sem muita convicção)*
Pesq: Ok, e a direção. O que significa a direção em um vetor?
E1: É o ângulo né.
Pesq: Mas que ângulo?
E1: (*Estudante pensa na sua resposta e olha novamente para a representação do paralelepípedo no registro figural*).
Pesq: Onde está o ângulo? Que é o que temos aqui? *(aponta para a representação do vetor $\overrightarrow{AB}$)*
E1: A origem.
Pesq: Explica melhor.
E1: Aqui, é ne? (*Apontando para o espaço formado por uma base horizontal e o vetor, ou seja, apontando para o ângulo de inclinação*).

O Episódio 4, traz a discussão em torno dos fundamentos do conceito vetor. Ou seja, considera ideias básicas para todo trabalho na disciplina e principalmente no entendimento do que seja um vetor. Os procedimentos do estudante indicam que os sentidos acerca do conceito vetor atribuídos por ele ainda estão distantes do significado conceitual do referido conceito.

Lembrando que no momento em que os dados da pesquisa foram produzidos, na disciplina de Geometria Analítica e Vetores, já estavam trabalhando com operações entre vetores.

Questionamo-nos, como pode um estudante operar vetores se efetivamente ele não consegue entender o que é um vetor? Continuamos ensinando algoritmos de forma a não possibilitar a atribuição de sentidos pelos estudantes e, assim, a significação dos conceitos? Como um estudante de engenharia, vai se apropriar deste significado fundamental para a sua profissão, sem de fato conceituar vetor, não conseguindo se movimentar na atividade de tratamento necessária a compreensão dos conceitos? No episódio 5 é apresentado o momento em que o estudante efetivamente resolve a questão apresentada. Chamamos atenção que este episódio se efetivou após várias discussões e novas problematizações apresentadas pela pesquisadora, com novos exemplos e principalmente fazendo o estudante argumentar e mobilizar registros de representação, explicitando tratamentos e testando possibilidades de conversões.

Episódio 5 – Vetor paralelo a $\overrightarrow{BE}$

Pesq: [...]. Agora vamos voltar para a nossa questão, um Vetor paralelo a outro, precisa ter?
E1: Mesmo sentido.
Pesq: Mesmo sentido, é isso mesmo*? (pesq, recorre para o registro figural representando dois segmentos com a mesma direção e sentido oposto)*
E1: Não, a mesma direção. (*estudante ainda permanece com dúvida*)
Pesq: Isso, então para que dois vetores sejam paralelos eles precisam ter a mesma direção. Então qual seria o vetor paralelo ao vetor $\overrightarrow{BE}$?
E1: $\overrightarrow{AH}$.
Pesq: Isso é o vetor $\overrightarrow{AH}$.

Os registros de representação mobilizados pelo estudante no desenvolvimento da questão foram: registro figural, algébrico e a língua materna. O que indicaria uma certa facilidade no desenvolvimento da mesma, porém não foi o que os episódios apresentaram. O estudante deixa clara a sua dificuldade em relação à apropriação do conceito de Vetor, apresentando equívocos ao definir os elementos de formação do conceito, especialmente nos elementos sentido e direção. Outro aspecto importante a ser destacado, considerando as dificuldades do estudante, é a não apropriação das relações de equipolência e equivalência, que formam a base para a compreensão do conceito e para a mobilização correta dos registros do conceito de Vetor em todas as suas representações.

A partir destas evidências, percebe-se que mesmo trabalhando operações com vetores, o estudante não conseguiu atribuir sentido e significado, o que nos leva a considerar a seguinte questão: O que poderia potencializar a significação do conceito de Vetor não só por este estudante, mas também para os demais estudantes de engenharias?

Esta indagação nos leva a pensar em estratégias de ensino e de aprendizagem da Área de Matemática. Dentre elas, destacamos a modelagem matemática, estratégia esta que vem ganhando grande visibilidade a partir de pesquisas socializadas em diferentes repositórios e em periódicos da Área de Educação Matemática.

A modelagem vista sob a perspectiva de estratégia de ensino e aprendizagem pode ser uma excelente possibilidade para explorar o conceito para representar situações que envolvem grandezas como força, torque e velocidade, além de situações relacionadas ao dimensionamento de vigas e treliças, elevadores, guindastes, carregamento, reações de apoio, dentre outras.

Uma possibilidade para usar a modelagem, na perspectiva de significação do conceito de Vetor, seria na decomposição de forças, em que o estudante precisa utilizar as relações de equivalência e equipolência para fazer as projeções dos vetores (representação geométrica de vetor) e utilizar a regra do polígono para fazer a representação geométrica da soma de vetores e visualizar o triângulo para aplicar a lei dos senos e chegar no valor da tração na corda.

Além disso, vem de encontro às reflexões que se fizeram nesta pesquisa, como uma forma de potencializar a significação do conceito de Vetor e nos impulsiona às novas pesquisas a fim de explorar o conceito de Vetor através da modelagem matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das análises desenvolvidas, podemos concluir que, apesar do conceito de Vetor ser fundamental para acadêmicos de engenharias, considerando a sua atividade profissional é um conceito que os estudantes não conseguem significar com facilidade, o que consequentemente, influencia na falta da apropriação das operações e na mobilização dos registros de representação deste conceito nos diferentes contextos.

Sendo assim, consideramos, de fundamental importância, que o trabalho com este conceito leve em conta um ensino mais questionador, argumentativo e com a exploração dos mais diversos registros de representação semiótica – figural, algébrico ou simbólico e da língua natural – enfatizando as atividades de tratamento e conversão, o que poderá desencadear de fato a aprendizagem matemática, ou seja, são elementos que devem ser considerados na significação do conceito de Vetor e as suas operações, contribuindo na apropriação deste conceito pelos estudantes.

Com base nestes resultados e identificando os principais problemas na significação do conceito de Vetor pelo estudante, consideramos que a modelagem matemática pode ser uma aliada nos processos de ensino, aprendizagem, tendo em vista que diversas pesquisas a têm indicado como uma estratégia de ensino e aprendizagem.

Em trabalhos que estão sendo desenvolvidos pelo grupo de pesquisa, estamos utilizando a modelagem como possibilidade de exploração, a partir de contextos e da organização do modelo matemático. Para identificar potencialidades nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de Vetor e outros conceitos matemáticos, no campo da álgebra, temos considerado nas discussões estabelecidas, os registros de representação semiótica, a atribuição de sentidos e apropriação de significados pelos estudantes, focando principalmente no entendimento das funções discursivas, as quais exigem entendimentos, no contexto da sala de aula.

REFERÊNCIAS

BATTISTI, I. K. **Mediações na significação do conceito vetor com tratamento da geometria analítica em aulas de matemática**. 2016. 249f. Tese (Doutorado em Educação nas Ciências) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. 2016.

CASTRO, Samira Choukri de. **Os Vetores do Plano e do Espaço e os Registros de Representação.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – 2001.

DAMM, Regina Flemming. **Registros de Representação.** In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática: Uma (nova) Introdução.** 3 ed. – São Paulo: EDUC, 2012.

DUVAL, Raymond. **Ver e Ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo Matemático de pensar – os registros de representação semióticas**. Tradução: Marlene Alves Dias – São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registro Semiótico e Aprendizagens Intelectuais.** Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.** In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica.** Campinas – São Paulo: Papirus, 2003.

RONCAGLIO, V. **Registros de representação semiótica**: atividades de conversão e tratamento em vetores e suas operações a partir da argumentação de estudantes de Engenharia. 2015. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2015.

RONCAGLIO, V.; NEHRING , C. M.; BATTISTI, I. K. Conceito força: Uma grandeza vetorial mobilizada pela mecânica e base dos cursos de engenharia. In: **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 18, n. 00, p. e023010, 2023. DOI: 10.21723/riaee.v18i00.16208

RONCAGLIO, V,; BATISTI, I. K.; NEHRING, C. M. . Formação do engenheiro: O conceito de vetor no programa curricular de um curso de engenharia civil. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, p. 263-296, 2021.

SANTOS, N. M. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. rev. ampl. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

VENTURI, Jacir. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 1949. 9º ed. Curitiba. Disponível em: https://sites.icmc.usp.br/regilene/SMA300/VenturaGA.pdf. Acessado em 25/05/2023. 1949.

CAPÍTULO IX

REPRESENTAÇÕES DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS EM LIVROS DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE ARTICULANDO OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO E O ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO

Eliandra Moraes Pires
Eduardo Sabel
Everaldo Silveira

1 INTRODUÇÃO

Entre os anos de 1928 e 1929, Renné Magritte (famoso pintor francês) produziu uma série de pinturas que ele chamou de “A traição das Imagens” (*La trahison des images*). A mais famosa delas é “isto não é um cachimbo” (*Ceci n’est pas une Pipe*), vide Figura 1:

Figura 1: A Traição das Imagens, de René Magritte

Fonte: Los Angeles County Museum of Art. Disponível em: https://www.lacma.org/art/exhibition/magritte-and-contemporary-art-treachery-images

Com essa pintura, Magritte cria um conflito entre representação e realidade mostrando que a imagem de um objeto não deve ser confundida com algo tangível e real. A presença dessa obra neste texto busca evocar um debate sobre a importante diferença que existe entre um objeto e sua representação. É, também, um convite para o desafio de refletir sobre a maneira de ver e de pensar, geralmente aceita sem que haja indagações, sobre o que diz respeito a imagem, a linguagem, a representação e a realidade.

Tal reflexão, nos leva também a esfera do ensino-aprendizagem da matemática, uma vez que, conforme Nara e Moretti (2015, p. 6), “os objetos ideais, como os matemáticos, são estruturas abstratas, por isso, as semioses são importantes, não só na comunicação com os outros, como também na interação entre elas.” Ao falar de *semiosis*, faz-se referência aos estudos da semiótica, que Santaella (2004, p.10) define como sendo “a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno, como fenômeno de produção de significação e de sentido". Em outras palavras, a semiótica se preocupa com a forma com que conhecemos a nossa mente.

Inspirados por estas discussões, propomos por objetivo refletir como os Livros Didáticos utilizam representações de materiais manipulativos, discutindo, de forma crítica, situações que merecem nossa atenção. Entendemos que os Livros Didáticos (LD) constituem um objeto de estudo relevante por se tratar de ferramentas amplamente utilizadas nas salas de aulas, em especial, de matemática (FAN; ZHU; MIAO, 2013). Para Silveira e Powell (2019) os LD são as principais fontes de conhecimento matemático tanto para professores como para estudantes e com isso, cria-se uma demanda de investigação a educadores matemáticos a fim de compreender se os conceitos, na forma como estão apresentados nos LD, possibilitam uma aprendizagem sólida aos estudantes. Entre outros aspectos, os LD em educação matemática destacam-se pela utilidade essencial dos modelos visuais que representam objetos abstratos e suas operações, conforme encontra-se em Fan, Zhu e Miao (2013).

Como fonte de dados, selecionamos uma obra do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) adotado pela Secretaria Municipal de Educação de Florianópolis para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (2019-2022). Não é nossa intenção fazer uma análise de todas representações visuais que estão presentes nos livros e nem para todos os conteúdos. Para fins de recorte neste texto, vamos analisar e refletir sobre o caso dos Blocos Base Dez (BBD), amplamente usados para o ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND).

Como referencial teórico para guiar esta escrita, estamos amparados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (TRRS) e no Enfoque Ontossemiótico (EOS) de Juan Godino e colaboradores. A TRRS contribui na compreensão das atividades cognitivas de tratamento e conversão, necessárias para a aprendizagem matemática, inclusive para o caso das *representações auxiliares* como os manipuláveis. Já o EOS, apresenta a ideia dos *significados pessoais* e *institucionais* que os objetos matemáticos possuem, bem como os possíveis conflitos semióticos que podem surgir a partir desses materiais. A união destes conceitos, formam nossa lenta teórica para identificar e analisar os exemplos de representações de manipulativos indicados para o ensino do SND presentes nas obras selecionadas.

O presente artigo representa um recorte de pesquisas acadêmicas que estão sendo desenvolvidas pelos autores que, em comum, possuem o interesse por tudo o que tange ao uso dos materiais manipulativos no ensino de matemática, especialmente nos Anos Inicias do Ensino Fundamental.

2 MATERIAIS MANIPULATIVOS

Azevedo (1979) nos diz que "nada se deve dar a criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração." (p. 27). Nesse sentido, é comum a indicação de diferentes materiais didáticos como auxiliares desse processo de visualização, experimentação e construção de significados.

Dentre os diversos materiais didáticos que podem ser adotados pelo professor ao ensinar matemática, os manipuláveis[1] são uma alternativa que pode propiciar uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos conforme estudos como Carraher, Carraher e Schilemann (1988), Lorenzato (2006), Serrazina (1996), Nacarato (2005), Silveira (2016; 2018; 2021) tem apontado.

Para Matos e Serrazina (1996), os materiais manipulativos são objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar e podem ser usados para representar uma ideia. Lorenzato (2006) defende a ideia de material didático concreto e classifica os materiais didáticos concretos em: concretos palpáveis, manipuláveis e, também, imagens gráficas. Uttal (2003) defende que os manipulativos formam um sistema de

[1] Neste texto usaremos termos como manipulativos, manipuláveis e materiais manipulativos como sinônimos.

objetos físicos destinado a ajudar crianças pequenas a aprender conceitos matemáticos.

Em Fiorentini (1995) o uso de materiais manipuláveis nas aulas de matemática possibilita aos sujeitos uma abstração reflexionante, uma vez que o conhecimento ocorre a partir das reflexões do sujeito a respeito daquilo que está fazendo, sendo levado a uma tomada de consciência. Por sua vez, Lorenzato (2006) afirma que o uso desses materiais em sala de aula pode ser uma excelente ferramenta que auxilia o estudante a construir seu saber matemático, mas ressalta que tudo vai depender do ambiente social em que o material é inserido.

No mesmo sentido, Nacarato (2005) observa que se por um lado o material manipulável pode ser um facilitador para o estudante, por outro, um complicador para o professor. Para que os materiais manipulativos alcancem seus objetivos, Carraher, Carraher e Schliemann (1988) sugerem que é necessário que o professor faça uma profunda reflexão sobre o material, busque as finalidades de ensino e assim, possa fazer uma conexão com o mundo do estudante.

Além disso, diversos estudos, como os de Kamii (1989), Teixeira (1996), Fayol (1996), e Brandt (2005), já investigaram o ensino e a aprendizagem, revelando que os estudantes apresentam dificuldades de compreensão acerca de nosso sistema de numeração. Para contornar tais dificuldades, materiais manipulativos têm sido apontados como recurso potencialmente facilitadores para o ensino do SND. Inclusive, a própria BNCC (2018) na escrita de diferentes habilidades para os Anos Iniciais, incentiva e orienta o uso de manipuláveis no eixo de aritmética, como destacado no estudo de Sabel, Pires e Silveira (2022). Unindo esse ponto com a vasta presença de indicações destes materiais nos LD, surge a necessidade de um olhar mais atento para essas situações.

Silveira e Powell (2019) defendem os modelos impressos e manipulativos como construtivamente úteis, mas chamam atenção para o fato de existirem poucas análises de seu uso ou indicação de uso em LD. Esses pesquisadores alertam, também, sobre a pouca compreensão da consistência entre os modelos visuais e os pressupostos ontológicos e epistemológicos específicos de conceitos matemáticos e é com base nestes alertas, que as pesquisas dos presentes autores se conjecturam.

3 A IMPORTÂNCIA DAS REPRESENTAÇÕES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

3.1 Os registros de representação semiótica de Raymond Duval

A teoria dos Registros de Representação Semiótica foi criada por Raymond Duval, um filósofo e psicólogo francês, durante os anos 80, com o objetivo de explorar a aprendizagem matemática através da análise dos processos cognitivos que a promovem. Ao nos questionarmos sobre a natureza do conhecimento matemático, precisamos refletir sobre a seguinte questão: onde estão os conceitos[2] matemáticos? A resposta para esta pergunta inclina-se para o mundo das representações, dos conceitos, das ideias e da semiótica. Quando imaginamos um conteúdo da biologia, uma planta, por exemplo, o professor pode trazê-la fisicamente para sala de aula e o estudante

[2] Em sua obra, Duval (2004) utiliza a palavra objeto e objeto cognitivo. Neste texto, como a palavra objeto será amplamente usada para tratar do contexto de objetos concretos e manipulativos, estaremos utilizando aqui a palavra conceito para falar dos objetos matemáticos, evitando confusões com o uso do termo objeto.

pode entrar em contato direto com seu objeto de estudo. Porém, no caso da matemática, não conseguimos ter este acesso direto ao conceito de função afim, por exemplo, já que ela não é parte do mundo cotidiano e físico, mas sim, é um conceito estudado por meio de suas representações como as equações algébricas, os gráficos, os números e a língua natural (materna) (DUVAL, 2004).

Desta maneira, entendemos que todo processo de ensino e aprendizagem da matemática só ocorre por meio do trabalho com as representações semióticas de seus conceitos. Os conceitos matemáticos "não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata" (DUVAL, 2012, p. 268), sendo estes ideais e não reais. Duval (2011) explica que os conceitos matemáticos são abstratos e mentais e as representações semióticas surgem como forma de exteriorizar essas ideias para que se tornem perceptíveis para seu estudo. Também devemos perceber que "a representação externa só pode efetuar-se a partir de um sistema semiótico" (DUVAL, 2004, p. 34, tradução nossa), ou seja, a representação criada para permitir o acesso aos conhecimentos depende da escolha de um modelo visual que represente a matemática.

Para os sistemas semióticos específicos para o ensino de matemática, Duval (2004) os define como Registros de Representação Semióticos. Estes registros são sistemas semióticos que cumprem três atividades cognitivas: formação de uma representação identificável, tratamento e conversão.

A <u>formação de uma representação identificável</u> é a possibilidade de reconhecer o conceito dentro de um sistema semiótico[3], por meio de

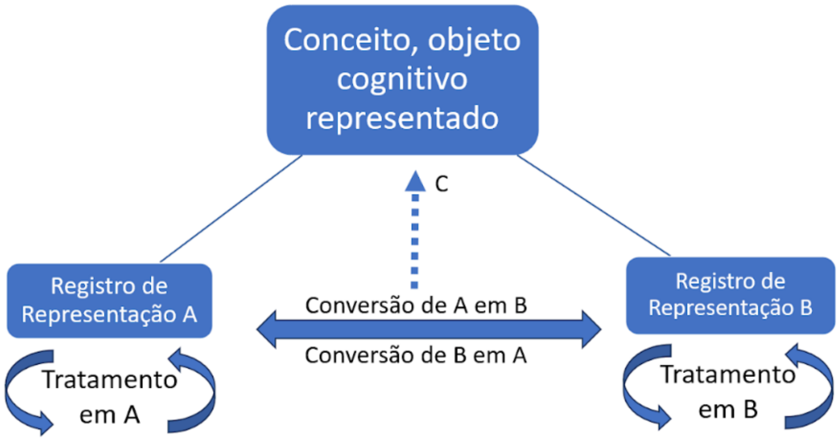
[3] Um sistema semiótico é, de acordo com Duval (2011), um conjunto de signos, organizados segundo regras próprias de formação e convenções, que apresentam relações internas que permitem identificar os objetos representados.

características e regras que são específicas daquela representação. Isso ocorre, por exemplo, quando um sujeito olha para uma função do tipo $f(x) = ax + b$ e identifica que é uma representação algébrica da função afim (desde que o mesmo esteja apropriado desta linguagem). Deste modo, a formação de representação identificável é composta pelo conjunto de elementos, unidades, princípios e regras que identificam o conceito.

Já o tratamento é uma atividade que consiste em mudar o conteúdo da representação, por meio de operações específicas do registro em que estamos trabalhando. Essas alterações ajudam a fornecer novos dados do objeto, porém, sem extrapolar o registro de representação de origem. Um exemplo é pensarmos na expressão $(x + 3)^2$, que pode ser tratada algebricamente para se tornar $x^2 + 6x + 9$. Neste caso, o registro inicial era o algébrico e com algumas operações podemos produzir uma nova expressão, que ainda está no sistema algébrico.

A atividade cognitiva de conversão consiste em trabalhar com um objeto dentro de um registro de representação inicial e depois, obter um outro registro de chegada. Pensamos, por exemplo, nas expressões: um terço e ⅓. Primeiro, temos a fração em sua representação escrita e depois é transformada na simbólica (numérica). Com esses dois registros diferentes, o trânsito entre eles é o que configura a atividade de conversão, que é a mais importante das três. Para entendermos por que Duval (2004) fala sobre tais atividades cognitivas, devemos entender sua hipótese de aprendizagem, conforme a figura a seguir:

Figura 2: Esquema da hipótese fundamental da aprendizagem de Duval



Fonte: Sabel e Silveira (2023, p. 8) a partir de Duval (2012, p. 282)

Na Figura 2 constam os processos cognitivos para a aprendizagem que fundamentam a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Dispondo de dois registros diferentes (A e B), é no processo de trânsito entre um e outro que nos aproximamos do conceito matemático (C). Por isso, quanto mais registros trabalharmos, quanto mais discussões sobre diferentes representações fizermos nos processos de ensino de matemática, mais perto estaremos da apreensão cognitiva do objeto.

Duval (2004) apresenta a relação *noésis* x *semiosis*, onde a *semiosis* é relacionada com a apreensão do registro de representação semiótica, e a *noesis* se volta para a apreensão conceitual do objeto. Na matemática não há *noésis* sem *semiósis* (DUVAL, 2012) por isso ao ensinar um conceito matemático, na perspectiva desta teoria, devemos utilizar vários registros de representação de um objeto, efetuando as três atividades cognitivas pertinentes, destacando o papel das conversões nesse processo.

Tendo em vista a importância da conversão para o aprendizado, ela pode dividir-se em dois tipos: conversão congruente e não congruente. A conversão é dita congruente, quando o registro de representação inicial é transparente ao de chegada (DUVAL, 2011), ou seja, é uma conversão direta e simples, não exigindo um alto nível de habilidade nos registros trabalhados. Por exemplo, a expressão “um dividido por 3” pode ser convertida para “1 ÷ 3”. Aqui a conversão foi congruente, pois a conversão da expressão no registro escrito foi de forma direta para o simbólico. Uma conversão é não congruente quando a mudança de registro exige maior gasto cognitivo, como por exemplo “0,25” para “¼”. Aqui não temos nenhuma relação direta entre a forma decimal e fracionária, não sendo uma conversão tão intuitiva quanto o exemplo anterior e por isso, demandando mais atenção e domínio do objeto estudado e suas representações. É a atividade de conversão que normalmente traz maiores dificuldades aos estudantes , no entanto, Duval (2004), defende que elas são necessárias para acontecer a apreensão conceitual em sua totalidade.

3.2 Os materiais manipulativos como representações auxiliares

No âmbito das discussões semióticas, os manipulativos também desempenham um papel importante para o aprendizado da matemática. Contudo, na perspectiva da teoria de Duval, eles são diferentes dos outros registros de representação, pois tem caráter transitório na aprendizagem matemática, bem como não permite a atividade cognitiva de tratamento igual aos demais registros. Para exemplificar, pensemos no Bloco base dez

(Material Dourado)[4] que é amplamente conhecido para ensinar a contagem e os agrupamentos do sistema de numeração decimal. Suas peças já vêm construídas de uma forma que as maneiras de tratar são restritas e limitadas, pois não podemos, por exemplo, quebrar uma peça que vale 100 e transformar em duas peças de 50. Ou ainda, dividir uma unidade ao meio para formar uma fração. Apesar de possibilitar diversas situações, as limitações físicas que o material limita as possibilidades de tratamento e ainda, não é uma representação que usamos ao longo da vida, ficando restrita a uma fase específica do desenvolvimento do pensamento matemático.

Desta forma, os materiais manipulativos usados de forma física ou representados em livros didáticos (forma pictórica), não são entendidos na semiótica de Duval (2004) como registros de representação. Eles são tratados como sistemas de representação auxiliar (DUVAL, 2001). Ou seja, são representações de transição usadas para apoiar, auxiliar e contribuir na passagem de um registro para outro.

Algumas pesquisas como Moretti e Baerle (2022) trazem reflexões sobre os diferentes usos das representações auxiliares e já incluem os manipuláveis nessa classificação, entendendo que sua função é substituir de forma ostensiva os objetos de estudo. Já o estudo Sabel e Silveira (2023), discute o papel dos materiais concretos usados para o ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND), citando os Blocos Base Dez (BBD) como representações auxiliares. Os autores defendem que “as representações auxiliares (do tipo material) podem contribuir na aprendizagem matemática,

[4]Por não encontrar na literatura internacional uma referência a expressão “Material Dourado”, utilizaremos “Bloco de Base Dez” para se referir a esse manipulativo.

uma vez que possibilitam os sujeitos a transitar entre registros mais abstratos de menor concretude” (SABEL e SILVEIRA, 2023, p. 18).

Sendo assim, compreendemos que eles e suas respectivas representações nos LD possuem esta função de auxiliar a representação do conceito. Tais materiais podem oferecer informações físicas e visuais sobre os objetos matemáticos, que outros sistemas não oferecem. Mesmo eles estando classificados como representações auxiliares, o termo não pretende diminuir sua relevância no ensino, mas evidenciar a importância de trabalhar com os manipulativos para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Compreendido este papel semiótico dos materiais manipulativos, apontamos preocupações que os estudos semióticos discutem sobre o uso das representações. Dentre elas, destacamos aqui o que Duval (2012, p. 9) nos alerta: “os objetos [cognitivos] matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz deles.” Este tipo de situação ocorre quando o professor trabalha sempre com a mesma representação, podendo levar o estudante ao entendimento de que aquela representação é de fato o próprio conceito.

Esta reflexão pode ser estendida aos manipulativos uma vez que, se não trabalhados adequadamente, podem induzir o estudante a pensar que o material físico é em si o próprio número. A placa da centena no Bloco base dez, por exemplo, só representa a ideia do número 100, mas ela, em si, não é um número e sim, um material de madeira construído pedagogicamente para fins de representação.

3. 3 O Enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática

O Enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática (EOS) surgiu na década de 1990, na Espanha, a partir dos estudos de Juan Godino e colaboradores. Entre algumas das finalidades desse enfoque, destacamos a função de servir de guia para analisar o conhecimento matemático. Ao articular e hibridizar teorias já existentes no campo da Educação Matemática, o EOS se caracteriza como um marco teórico inclusivo permitindo abordar de maneira articulada as questões epistemológicas, ontológicos, semiótico-cognitivos, educativo-instrucionais, ecológicos, de otimização da instrução e de formação de professores (GODINO, BATANERO e FONT, 2019).

Em diferentes trabalhos, esses autores desenvolveram um conjunto de noções teóricas que configuram o EOS, propondo por objetivo básico de análises, "os sistemas de práticas manifestadas por um sujeito (ou no seio de uma instituição) ante uma classe de situações-problemas" (GODINO, 2002, p. 242). Um ponto a destacar é o reconhecimento, dentro do Enfoque Ontossemiótico, da existência da interdependência entre a esfera pessoal e a institucional como eixos principais da antropologia cognitiva. Porém há um alerta de que não haja uma ênfase excessiva no institucional sob risco de levar a prescindir o mental (pessoal), o que denota a necessidade de diferenciação entre 'objeto institucional' (relativo ao conhecimento objetivo) do 'objeto pessoal' (relativo ao conhecimento subjetivo), conforme apontado em Gusmão (2006).

Por objeto institucional, compreende-se uma regra de comportamento compartilhada por uma instituição, sendo tal regra emergente de práticas sociais associadas a um campo de problemas. Mais especificamente, o objeto institucional emerge de uma prática institucional e pode ser definido como um signo de uma unidade cultural, como por exemplo os objetos matemáticos que um livro didático se propõe a apresentar. Por sua vez, o <u>objeto pessoal</u> é emergente de práticas pessoais significativas, também associadas a um campo de problemas, conforme encontramos em Godino e Batanero (1994). Os autores afirmam que o objeto institucional é relativo à instituição e o objeto pessoal é relativo ao sujeito e, ambos são dependentes estocasticamente do tempo, ou seja, podem evoluir com o tempo.

De acordo com a EOS, os autores de livros didáticos, assim como toda pessoa que realiza atividade didática, refletem nos livros suas próprias funções semióticas (GODINO, 2002). Essas funções estarão corretas se correspondem com a instituição, caso contrário, estaremos diante de um conflito semiótico. Mas é importante destacar duas situações: a primeira é quando o livro atribui um significado a um objeto matemático em desacordo com o significado institucional (conflito semiótico explícito); a segunda é quando o significado atribuído é impreciso ou incompleto, ainda que não seja incorreto (conflito semiótico implícito). Em ambos os casos, levando-se em consideração o importante papel do livro didático no ensino e aprendizagem de matemática, podem transmitir-se conceitos equivocados aos estudantes e, consequentemente, provocar dificuldades e limitações em suas aprendizagens.

Diante do exposto, o EOS assume o princípio de que o conhecimento de um objeto, por parte de um sujeito - podendo ser o indivíduo ou instituição - é o conjunto de funções semióticas que este sujeito pode estabelecer nas quais se põe em jogo o objeto como expressão e conteúdo. De acordo com Breda, Bolondi e Silva (2021), a correspondência entre um objeto e o sistema de práticas onde tal objeto intervém é interpretado como o “significado do referido objeto (institucional ou pessoal)” (BREDA, BOLONDI e SILVA., 2021, p. 3).

Na próxima seção, apresentaremos a metodologia, as obras selecionadas para esta análise, bem como os procedimentos utilizados na seleção dos extratos.

4 METODOLOGIA

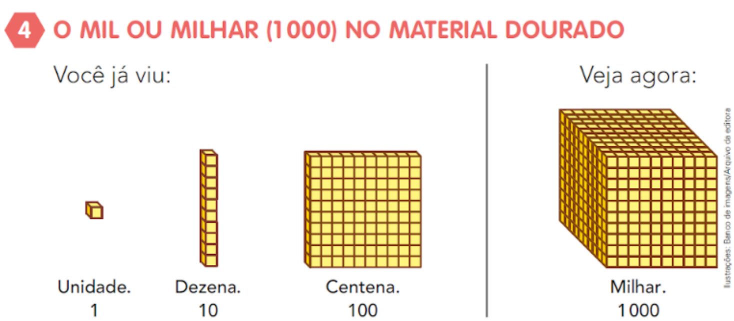
Com o objetivo de ilustrar as discussões que propomos neste estudo, apresentaremos alguns recortes extraídos de livros da Coleção Ápis Matemática Anos Iniciais, obras que fazem parte do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2019 a 2022, coleção utilizada na Rede Municipal de Florianópolis durante esse quadriênio e uma das mais vendidas no país. O caráter desta análise é qualitativo, que segundo André (2013), busca apresentar reflexões e discussões sobre uma temática, fundamentada por um quadro teórico definido e trazendo novos conhecimentos para o campo.

Na escolha dos extratos para análise, primeiramente recortamos os modelos visuais de manipulativos que eram destinados para o ensino do SND. Na sequência, identificamos os quatro tipos de materiais com maior recorrência na coleção: os Blocos base dez, o Ábaco, o Dinheirinho e as Fichas verdes. Destacamos que, destes materiais, o Bloco base dez é o único utilizado em todos os capítulos que envolve o ensino do SND e deste modo, este material será o foco dos exemplos que traremos para análise.

5 ANÁLISE DOS DADOS: Discutindo sobre algumas representações de manipulativos no livro didático

Para iniciar, apresentamos a Figura 3 onde é possível observar o momento em que o LD do 3º ano introduz a ideia de unidade de milhar e o faz por meio da apresentação do Bloco base dez (BBD). Na sequência (Figura 4) é proposto uma atividade para que o estudante exercite a composição de um número maior que mil.

Figura 3: Introdução da Unidade de Milhar na Atividade do LD do 3º ano com uso de material manipulativo



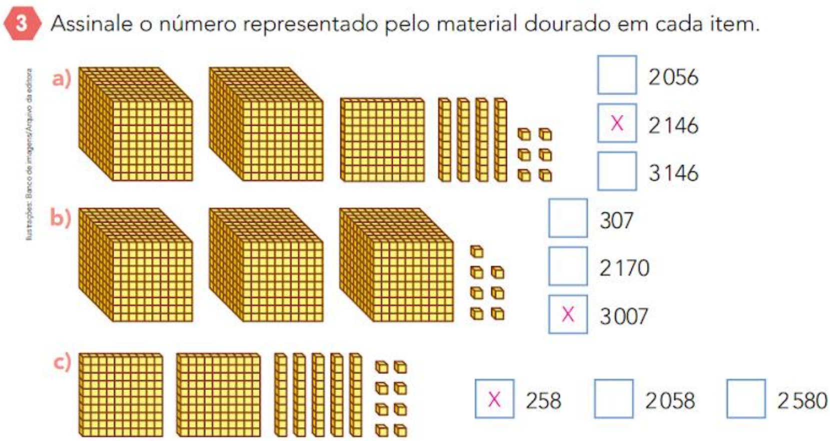
Fonte: Coleção Ápis Matemática PNLD 2019, 3º ano, p. 204

A Figura 3 começa com imagens das três peças do BBD que o estudante já viu (unidades, dezenas e centenas) e ao lado, surge a imagem da unidade de milhar. Qual a relação entre a peça do milhar com a peça da centena? Essa representação do cubo (mil) fará sentido para o estudante se ele manipular, ou se já tiver manipulado, as peças para compreender que este cubo é formado por dez placas de cem. Seria recomendável que o LD apresentasse explicação, de forma escrita ou visual, que a justaposição de dez centenas irá formar uma peça cúbica que representará a unidade de milhar.

No entanto, observamos que estas figuras que introduzem a unidade de milhar são acompanhadas de poucas explicações. Precisamos ter em mente que nem toda escola possui o BBD de forma física, ou ainda, nem todo professor irá discutir essa relação das imagens com seus estudantes. Mas por que isso é um problema? A questão se volta à esfera da semiótica. Perceba que ao olharmos para a representação da unidade de milhar, apresentada na Figura 4, conseguimos ver apenas 3 faces do cubo. Se o estudante não manipulou o sólido concretamente antes, será óbvio que ele tem 1000 unidades? Veja que se ele contar o que consegue ver, poderá obter um outro valor que não é a real quantidade que o objeto representa. Um estudante, por exemplo, que reconheça que cada face tem 100 unidades, poderá contar as 3 faces em evidência e formar 300 unidades.

Do ponto de vista do EOS um possível conflito semiótico ocorre quando há divergência entre o significado atribuído a um objeto matemático entre dois sujeitos. Em se tratando de livros didáticos, esse conflito – que representa um conflito semiótico implícito (GODINO, 2002) – emerge quando o que está posto no livro diverge do significado institucional. Embora a intenção dos autores do livro seja que os estudantes reconheçam que um cubo possui 6 faces e que cada face do cubo tem 100 unidades, a imagem apresentada e a ausência de explicações adequadas pode ter outro efeito, conforme mencionamos anteriormente. O estudo de Nurnberger-Haag (2018) também mostra tal preocupação sobre este tipo de erro que é produzido pela visualização do estudante. Segundo a autora "tendo em vista que apenas os 600 cubinhos em cada face do cubo de milhar são visíveis, os estudantes podem não entender que este cubo contém efetivamente 1000" (NÜRNBERGER-HAAG, 2018, p. 219, tradução nossa).

Figura 4: Exemplo de situação que utilizada os BBD em articulação com numerais



Fonte: Coleção Ápis Matemática PNLD 2019, 3º ano, p. 55

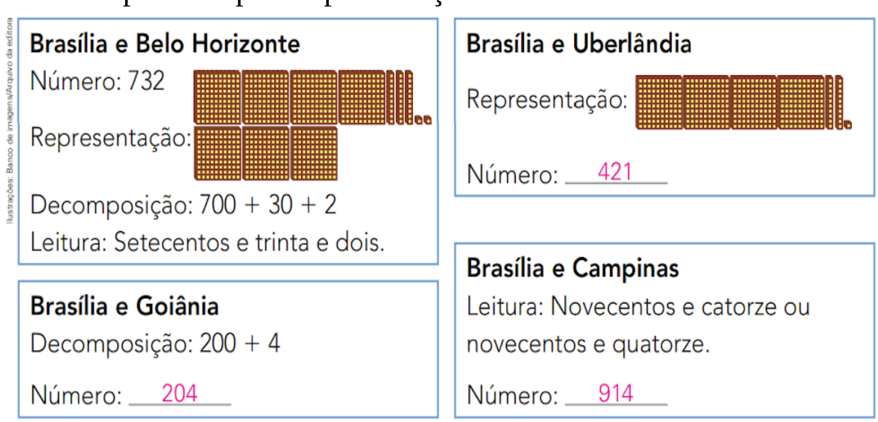
Do ponto de vista epistêmico (matemático), não temos nenhum erro na figura. Todavia, é preciso lembrar que as peças do BBD servem para compreender conceitos de agrupamento do nosso sistema de numeração. Logo, ele não precisa ser organizado sempre da peça maior para a menor, pois não é posicional igual a representação indo-arábica. Deste modo, pensando agora didaticamente, vale estimular também que os estudantes façam atividades em que as peças estejam fora de ordem, para favorecer também a atividade cognitiva de conversão não-congruente (DUVAL, 2004), ou seja, quando a passagem entre as representações não é dada de forma tão direta.

Para que não seja um problema, é necessário que haja a manipulação das peças, ou seja, do material físico. Para representar uma determinada quantia, os estudantes precisarão retirar as peças certas (que poderão estar sobre a mesa ou dentro de uma caixa) para organizar essa representação. Caso contrário, na ausência do material físico, cabe às representações o importante papel de contribuir para a atividade cognitiva de conversão não-congruente.

A questão de trabalhar conversão não congruente é defendida em diferentes trabalhos (ANDRADE FILHO e RAUEN, 2018; SILVA e TELES, 2020) uma vez que “a variação de congruência e não congruência semântica é uma das maiores causas da incompreensão ou erros de interpretação dos enunciados do problema para os alunos” (DUVAL, 2011, p. 121). Neste caso, ao usarmos as peças em ordem, exige que o estudante não se concentre só na quantidade de cada tipo de peças e converta diretamente, mas sim, analise o valor dos agrupamentos e realize os tratamentos para obter o valor final. Portanto, vemos a existência de um conflito semiótico implícito (GODINO, 2002) pois, embora a atividade proposta não esteja incorreta, a ausência de diferentes disposições das peças do BBD limita a compreensão dos estudantes ao resolverem problemas não-congruentes.

Outra situação que veremos a seguir, na Figura 5, é o modo como o autor buscou trabalhar com os números aplicados em contexto de distância, em uma atividade para o 3º ano:

Figura 5: Imagem da apresentação de atividade que utiliza material manipulativo para representação de números como distâncias



Fonte: Coleção Ápis Matemática PNLD 2019, 3º ano, p. 62

Veja que dentro do primeiro quadro o LD chama a representação simbólica 732 de “número” e os desenhos abaixo com manipulativos de “representação”. Na realidade, o termo correto para a representação simbólica, seria numeral. É importante salientar que número é um conceito complexo para noções de quantidades, medidas, ordenamento, contagens, enquanto o numeral é a representação com os algarismos. Maranhão e Carvalho (2009) consideram que os professores necessitam compreender as diferenças entre o número e o seu símbolo (numeral).

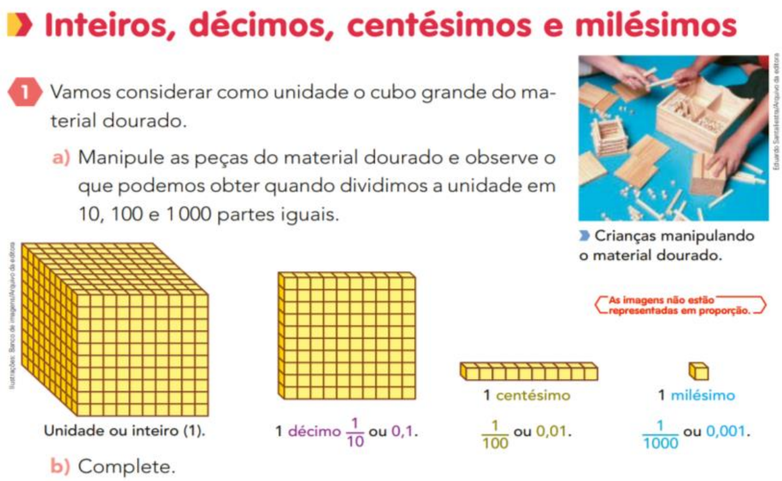
O estudo de Perovano e Magina (2013), ao entrevistar professoras dos Anos Iniciais sobre suas compreensões sobre o SND e a ideia de número e numeral, concluíram que:

> Podemos inferir que a maioria das professoras (nove) entende o número como sinônimo de numeral. Considerando que o numeral é a representação da quantidade, logo essa distinção entre o número e o símbolo que o representa, não está clara para estas professoras. [...] Porque, quando resumimos o trabalho com o conceito de número, atendo-se a um único perfil do seu conceito, estamos restringindo/limitando a experiência do aluno com conceito vislumbrando apenas uma nuance do mesmo.

Para Kamii (1989), essa situação pode resultar num trabalho pedagógico mais limitado sobre o sistema de numeração. De acordo com a TRSS, o não entendimento de tais ideias caracteriza uma confusão entre objeto e representação. E ainda, na perspectiva da EOS, configura-se em um conflito semiótico explícito, uma vez que a forma de apresentação, adotada pelo livro, diverge do significado institucional.

O último exemplo a ser apresentado, está presente na Figura 6, onde há uma atividade do LD do 5º ano na qual o Bloco base dez é utilizado para pensar os números decimais.

Figura 6: Bloco base dez usado para ensinar números decimais



Inteiros, décimos, centésimos e milésimos

1 Vamos considerar como unidade o cubo grande do material dourado.

a) Manipule as peças do material dourado e observe o que podemos obter quando dividimos a unidade em 10, 100 e 1 000 partes iguais.

Crianças manipulando o material dourado.

As imagens não estão representadas em proporção.

Unidade ou inteiro (1).

1 décimo $\frac{1}{10}$ ou 0,1.

1 centésimo $\frac{1}{100}$ ou 0,01.

1 milésimo $\frac{1}{1000}$ ou 0,001.

b) Complete.

Fonte: Coleção Ápis Matemática PNLD 2019, 5º ano, p. 172

Em consonância com Duval (2004), diferentes representações de um mesmo objeto favorecem a aprendizagem, contudo, abordar diferentes objetos com a mesma representação é algo mais delicado. Não pretendemos dizer que é impossível ou errado que uma representação seja usada em um momento para ensinar um conceito A e outro para conceito B e que isso resultará em fracasso. Todavia, com os estudos em semiótica sabemos o quanto os sujeitos criam conexões e hábitos de sempre olhar para a representação e associar a um conceito que aprendeu com ela.

É difícil pensar que um estudante ao olhar para a peça do milhar do BBD não pensará no número natural 1000. Por outro lado, os BBD não dão conta de representar toda a densidade do conjunto dos racionais, uma vez que possuem apenas quatro tipos de peças e os números que podem representar terão, no máximo, 4 dígitos. Não vemos uma finalidade didática adequada ao usar este material para ensinar decimais para estudantes do 5º ano. Dado ao fato de que crianças nesta idade já precisariam compreender o funcionamento do agrupamento no SND, os BBD nesta fase não deveriam ter papel significativo.

Portanto, há um possível conflito semiótico implícito (GODINO, 2002), ao observarmos a existência de uma divergência entre o significado institucional (o uso didaticamente pensado para o material) e uma variação proposta pelo autor (do livro) onde, embora não se configure em um erro, existem implicações que decorrem do mau uso desse material.

Mas afinal, faz-se realmente necessário representar números muito grandes como por exemplo 14.562 ou números muito pequenos como 1,4562 com o BBD? Na realidade, usando apenas os blocos de unidades, dezenas e centenas já deveriam ser o suficiente para que o estudante aprenda o SND. Apreendido o uso dessas peças, os estudantes já estariam aptos a não precisar mais do material manipulável para compreensão do sistema. Afinal é para isso que esse material existe, como sistema auxiliar de transição (SABEL e SILVEIRA, 2023).

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

No presente estudo, partimos da relevância dos materiais manipulativos no ensino de matemática e analisamos sobre lentes semióticas como são representados e indicados em livros didáticos de matemática dos Anos Iniciais. Nossa escrita se apoiou em dois referenciais: a TRRS, com seus conceitos voltados às atividades cognitivas que as representações cumprem na aprendizagem matemática e alguns aspectos do EOS, em particular, a identificação de possíveis conflitos semióticos. Essa articulação foi possível, pois ambas teorias possuem elementos que destacam a importância da semiose (representação) na matemática e em conjunto, oferecem meios para discutir nosso tema de interesse.

Uma importante consideração é o papel de representação auxiliar que os manipuláveis são empregados no ensino do sistema de numeração decimal, pois não cumpre as atividades cognitivas de um registro, mas nesta etapa da escolaridade tem potencial de contribuir na formulação de pensamentos matemáticos aritméticos. Todavia, como já apontado por Uttal et al. (2013), a conexão entre uma representação e seu referente é menos clara para as crianças, tornando o professor o mediador responsável em usá-lo corretamente.

Em relação às atividades de tratamento e conversão, estes materiais são apresentados em conjunto com outras representações, com intuito de promover uma articulação. Tal ponto é positivo segundo a TRRS, pois percebe-se nos livros a coordenação entre esses diferentes sistemas semióticos. Porém, identificamos que quando os BBD são usados juntamente com o registro simbólico, os mesmos estão organizados sempre de forma congruente, da esquerda para direita, seguindo o valor posicional. Sentimos falta também de situações em que as peças do BBD estejam misturadas para que o próprio estudante faça os tratamentos adequados, pois do contrário, as conversões tornam-se muito diretas e codificáveis. Notou-se ainda, a confusão do livro sobre a ideia de número e numeral, podendo levar a confundir objeto e representação, alerta que é amplamente debatido por Duval (2004).

Já o EOS, colaborou na identificação de conflitos semióticos relacionados aos livros didáticos, que emergem da divergência entre as funções semióticas dos autores dos livros e dos significados institucionais. Foi possível identificar conflitos semióticos implícitos, cujo reconhecimento contribui no desenvolvimento de um olhar crítico sobre os livros didáticos e as indicações de uso de manipulativos nos Anos Iniciais.

Por fim, acreditamos que analisar livros, por meio de lentes semióticas, pode ampliar os debates da pesquisa em educação matemática, e para isso, a TRRS e o EOS se mostraram eficazes para este tipo de análise. Entendemos que mais pesquisas devem ser realizadas por meio de tal articulação teórica, inclusive, construindo instrumentos metodológicos para pesquisa com livros didáticos de matemática.

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Bolsas Universitárias de Santa Catarina (UNIEDU/FUMDES) pela bolsa de pesquisa de doutorado do primeiro autor.

A Prefeitura Municipal de Florianópolis pela licença de pesquisa da segunda autora.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, Marli. O que é um estudo de caso qualitativo em educação. **Revista da FAAEBA: Educação e Contemporaneidade**, p. 95-103, 2013.

ANDRADE FILHO, Bazilicio Manoel de; RAUEN, Fábio José. Congruência em conversões de registros de representação semiótica: análise orientada pela noção de relevância. **Educação Matemática Pesquisa,** 20(1), pp. 518-538, 2018.

AZEVEDO, Edith DM. Apresentação do trabalho Montessoriano. **Ver. de Educação & Matemática**, n. 3, p. 26-27, 1979.

BRANDT, C. F. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração.** Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, David W. SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero.** São Paulo: Cortez, 1988.

DANTE, L. R. **Coleção Ápis matemática.** 3. ed. São Paulo, Ática, 2017.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Orgs.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003, p. 11- 33.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar**, **os registros de representações semióticas.** Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat,** Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 266- 297, 2012.

DUVAL, Raymond. **Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Santiago de Cali: Mérlin I.d., 2001. 121 p. Tradução de Myrian Vega Restrepo

DE SOUZA, R. N. S.; MORETTI, M. T. Objeto real versus ideal: consequências na constituição de sistemas semióticos para a aprendizagem intelectual. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática,** [S. l.], v. 6, n. 2, p. 70–85, 2015.

FAYOL, M. **A criança e o número: da contagem à resolução de problemas.** Tradução de Rosana Severino de Leoni. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996

FAN, L., ZHU, Y. & MIAO, Z. (2013). **Textbook research in mathematics education: development status and directions**. Xhanghai, ZDM mathematics education, 2013.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. In: **Zetetiké**, ano 3, nº. 4, p.1-37, 1995.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** 22(2/3), 237-284, (2002).

GUSMÃO, T. C. R. S. **Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontossemiótica**. 2006. Tese (Doutorado em Didáctica de las Matemáticas) – Faculdade de Ciências da Educação, Universidade de Santiago de Compostela, España, 2006.

LORENZATO, Sergio. (Org.). **O laboratório de ensino dmatemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006, v. 1.

KAMII, C. (1989) A criança e o número: implicações da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. 10º. ed. Campinas, SP: Papirus

MORETTI, M. T., BAERLE, D. M. O uso de representações auxiliares na aprendizagem matemática: um olhar semiocognitivo segundo Raymund Duval. **Revista Educação Matemática Pesquisa:** 24 (1), 1-29, 2022.DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p582-610.

MATOS, J. M. e SERRAZINA, M. L.. **Didáctica de Matemática.** Lisboa: Universidade Aberta, 1996. P. 159-188.

MARANHÃO, M. C. & CARVALHO, M. (2008) O que professores dos anos iniciais ensinam sobre números. **Perspectivas da Educação Matemática**. Revista do Programa de Mestrado em Educação Matemática da UFMS. V. 2, n. 3, p. 7 – 28.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9-10, p. 1-6, 2005.

NURNBERGER-HAAG, Julie. Tirar isso ou ir para o outro lado? Encontrar soluções positivas para a subtração inteira. **Explorando a paisagem de adição e subtração inteira: Perspectivas sobre o pensamento inteiro** , p. 109-141, 2018.

PEROVANO, Ana. Paula; MAGINA, Sandra Pinto. Como Professoras dos Anos Iniciais de Jequié ? BA Percebem o Conceito de Número?. In: **VII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática**, 2013, Montevidéu. VII CIBEM Actas, 2013.

SABEL, Eduardo; PIRES, Eliandra Moraes; SILVEIRA, Everaldo. Materiais Manipulativos: Uma Análise De Definição E Caracterização No Ensino De Matemática Dos Anos Iniciais Do Ensino Fundamental. In: **Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática**. Anais: Brasília(DF) 2022. DOI: https://doi.org/10.29327/1137060.14-8

SABEL, Eduardo; SILVEIRA, Everaldo. **Representações auxiliares na aprendizagem da matemática:** o caso dos materiais manipulativos no ensino do sistema de numeração decimal. REVEMAT, Florianópolis, 2023. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2023.e93906

SILVEIRA, E., POWELL, A. Representações E Indicações De Uso De Materiais Manipulativos Em Livros Didáticos De Primeiro Ao Quinto Ano: Serão Consistentes? **Anais do *XIII ENEM* (2019).** Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/rt/captureCite/474/741 Acesso em: 15 Mai, 2022.

SILVEIRA, E. Materiais manipuláveis e alguns riscos que envolvem sua utilização. In: Silveira, E.et al (Org.). **Alfabetização na perspectiva do letramento: letras e números nas práticas sociais**. 1ed. Florianópolis: NUP-CED-UFSC, 2016, v. 1, p. 221-240.

SILVEIRA, E. Afinal, está certo ou errado? Um estudo sobre indicações de uso de Blocos base dez em livros didáticos de matemática no Brasil. In: **SIPEM**, 7., 2014, Foz do Iguaçu. Anais... Foz do Iguaçu: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. p. 1-12.

SILVEIRA, E. A Study on the indications to the use of Base Ten Blocks and Green Chips in Mathematics textbooks in Brazil**, *The Mathematics Enthusiast*:** 18 (3), 469-501, 2021. DOI: https://doi.org/10.54870/1551-3440.1534.

UTTAL, D. H. On the relation between play and symbolic thought: the case of mathematics manipulatives. In: SARACHO, O. N.; SPODEK, B. (Org.). **Contemporary perspectives on play in early childhood education.** Charlotte/USA: Information Age Publishing, 2003.

UTTAL, D. H., MEADOW, N. G., TIPTON, E., HAND, L.L., ALDEN, A. R., WARREN, C. (2013). **A maleabilidade das habilidades espaciais: uma meta-análise de estudos de treinamento**. Psicol. Touro. 139, 352-402. doi: 10.1037/a0028446

CAPÍTULO X

ARTICULAÇÃO DOS REGISTROS ALGÉBRICOS E GRÁFICOS NO GEOGEBRA PARA A INTERPRETAÇÃO GLOBAL DA FUNÇÃO SENO

Jorge Cássio Costa Nóbriga

INTRODUÇÃO

A interpretação das representações gráficas é uma dificuldade comum no ensino de Matemática. Duval (2011) diz que uma razão dessa dificuldade está na “falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica” (p.97). Ele alerta que, em geral, o ensino se atém a passagem da equação para sua representação gráfica por meio da construção ponto a ponto, ou seja, associação entre pares ordenados de números e pontos do plano. Tal abordagem pode ser benéfica quando se pretende traçar os gráficos correspondentes de uma equação do primeiro ou segundo grau, favorecendo ainda quando se quer ler as coordenadas de algum ponto notável do gráfico (pontos de intersecção com os eixos, pontos de máximo ou mínimo, etc.). Todavia, não é adequada quando se pretende fazer a conversão inversa, ou seja, dado um registro gráfico, determinar a expressão algébrica equivalente.

Como tentativa de superar tal dificuldade, Duval (2011) propõe a “Abordagem de interpretação global de propriedades figurais” em que toda modificação no conjunto traçado/eixos que forma uma imagem representativa de um objeto descrito por uma expressão algébrica, provocando uma alteração na equação correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica. Duval (2011) explora essa abordagem para funções afins e Moretti (2008) para as funções quadráticas.

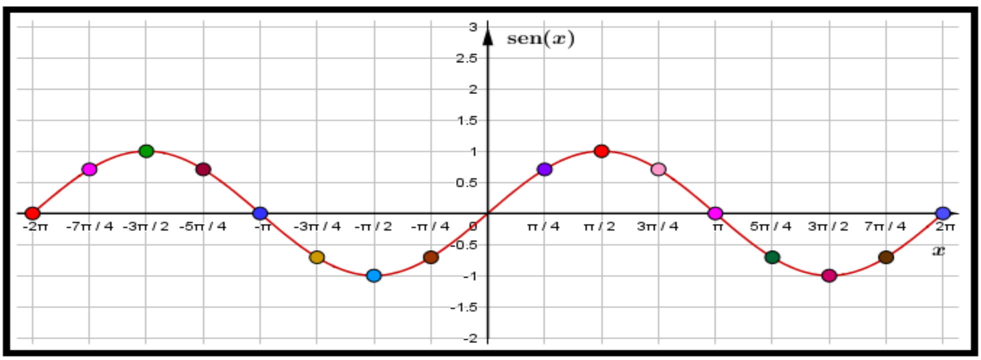
Uma primeira pergunta que pode ser feita em relação a essa abordagem é: como perceber e descrever as variáveis visuais? Duval (2009, p. 101) diz que é importante "[...] possibilitar a exploração de todas as variações possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes da representação em outro registro". Uma segunda pergunta que podemos fazer é: Como possibilitar uma exploração que permita prever ou observar as variações concomitantes (simultâneas) de uma representação em outro registro? Quais recursos poderiam ser usados para possibilitar isso?

Em Nóbriga (2019) e Nóbriga e Siple (2020) são apresentados alguns exemplos de atividades em que o GeoGebra é utilizado para permitir as variações concomitantes em situações de ensino de Geometria. Neste capítulo pretendemos propor uma Abordagem de Interpretação Global integrada com a Abordagem Ponto a Ponto para o estudo da função Seno. Para isso, mostraremos exemplos de atividades criadas na plataforma GeoGebra que buscam permitir a intepretação de gráficos de funções trigonométricas, em particular a Função Seno, a partir das recomendações da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).

1 ANÁLISE DA FUNÇÃO SENO A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL

Duval (2011, p.99) diz que "uma análise de congruência exige a discriminação das unidades significativas próprias a cada registro de representação assim como o exame das transformações implícitas eventuais exigidas para mudar de registro”. Nesse sentido, quais seriam as unidades significativas para funções trigonométricas? Tomemos como exemplo a função Seno e vamos determinar as variáveis visuais tendo como base a equação $y = a + bsen(cx + d)$. Para isso, consideremos inicialmente a função base cuja equação é $y = sen(x)$ e cujo gráfico está representado na figura 1.

Figura 1: Gráfico da função $y = sen(x)$



Fonte: autor

Duval (2011, p.99) diz que

> o conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação desta imagem que leva a uma modificação na expressão algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica.

De maneira geral, as curvas que representam as variações dos gráficos da função seno apresentam as variáveis visuais que estão descritas no quadro 1.

Quadro 1: Componentes e Indicadores Visuais[1] da senóide no plano cartesiano

Componentes Visuais	Indicadores visuais
Sentido inicial da curva	- A partir da origem, a curva começa subindo da esquerda para a direita; - A partir da origem, a curva começa descendo da esquerda para a direita;
Amplitude (Altura da onda)	- Altura mais achatada; -Altura mais alongada;
Comprimento da onda ou período	- Comprimento mais esticado - Comprimento mais comprimido
Movimento da curva em relação ao eixo vertical	- a curva passa pela origem (0, 0) - a curva se movimenta para cima da origem (0, 0); - a curva se movimenta para baixo da origem (0, 0);
Movimento da curva em relação ao eixo horizontal	- a curva é simétrica em relação ao eixo y - a curva é deslocada para a esquerda; - a curva é deslocada para a direita;

Fonte: autor

Como se pode ver no quadro 1, são 5 componentes visuais: a primeira, segunda e terceira com 2 indicadores cada e a quarta e quinta com 3 indicadores cada. A cada um dos doze indicadores visuais corresponde uma unidade significativa na expressão algébrica $y = a + bsen(cx + d)$, em que a, b, c e d são números reais, com b e c diferentes de 0. No quadro 2 vamos determinar possíveis unidades simbólicas correspondentes aos indicadores visuais:

[1] Duval (2011) chama a 1ª coluna de variáveis visuais e a segunda coluna de valores das variáveis visuais. Mudamos “variáveis visuais” para “componentes visuais” e “valores das variáveis visuais” para “indicadores visuais”.

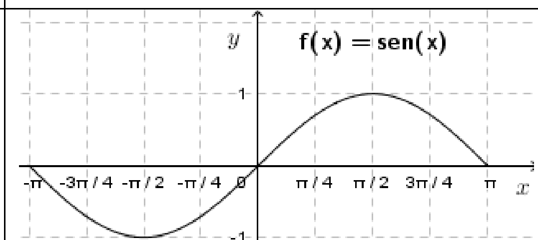
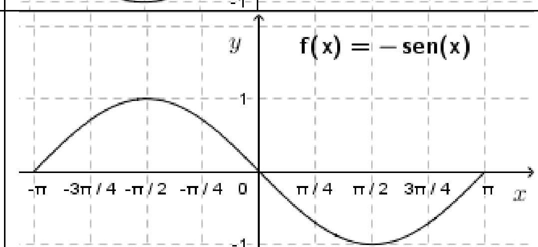
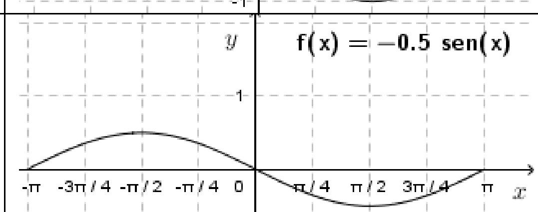
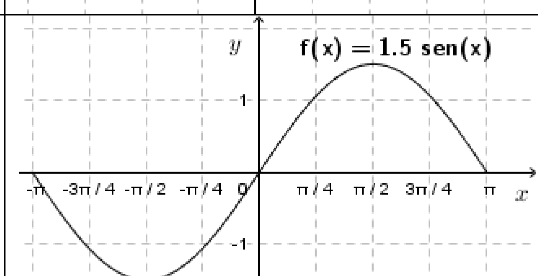
Quadro 2: Componentes visuais e unidades simbólicas para $y = a + bsen(cx + d)$

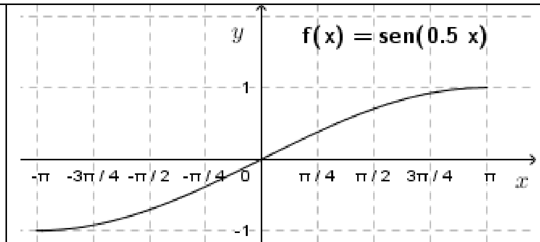
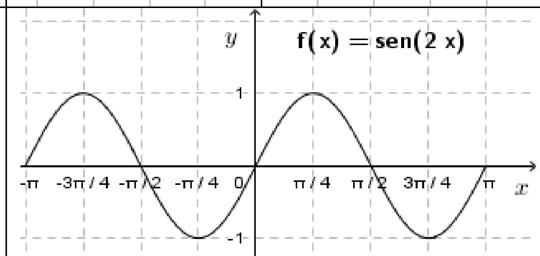
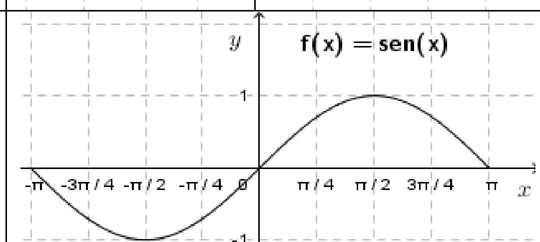
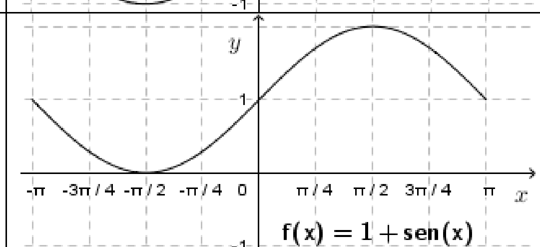
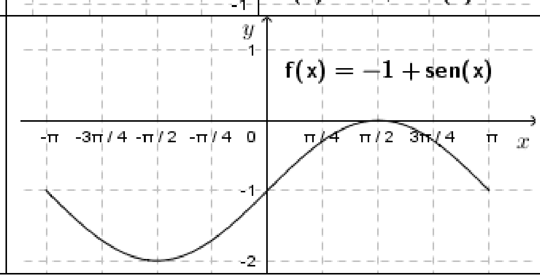
Componentes Visuais	Indicadores visuais	Unidades simbólicas correspondentes	
		Coeficiente principal	Demais coeficientes
Sentido inicial da curva	A partir da origem, a curva começa subindo da esquerda para a direita.	$b > 0$	$a = 0, \ d = 0$ e $c > 0$
	A partir da origem, a curva começa descendo da esquerda para a direita.	$b < 0$	$a = 0, \ d = 0$ e $c < 0$
Amplitude (Altura da onda)	Altura mais achatada.	$-1 < b < 1$ $b \neq 0$	a, c e d quaisquer, com $c \neq 0$
	Altura mais alongada.	$b < -1$ ou $b > 1$	a, c e d quaisquer, com $c \neq 0$
Comprimento da onda ou período	Comprimento mais esticado.	$-1 < c < 1$ $c \neq 0$	a, b e d quaisquer, com $b \neq 0$
	Comprimento mais comprimido.	$c < -1$ ou $c > 1$	a, b e d quaisquer, com $b \neq 0$
Movimento da curva em relação ao eixo vertical	A curva passa pela origem (0, 0).	$a = 0$	b e c quaisquer e $d = 0$ $(b, c \neq 0)$
	A curva se movimenta para cima da origem (0, 0).	$a > 0$	b e c quaisquer e $d = 0$ $(b, c \neq 0)$
	A curva se movimenta para baixo da origem (0, 0).	$a < 0$	b e c quaisquer e $d = 0$ $(b, c \neq 0)$
Movimento da curva em relação ao eixo horizontal	A curva é simétrica em relação ao eixo y.	$d = 0$	a, b e c quaisquer, com $(b, c \neq 0)$
	A curva é deslocada para a esquerda.	$d > 0$	a, b e c quaisquer, com $(b, c \neq 0)$
	A curva é deslocada para a direita.	$d < 0$	a, b e c quaisquer, com $(b, c \neq 0)$

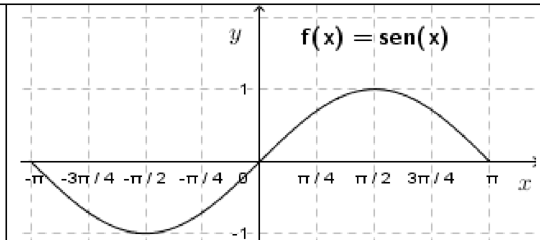
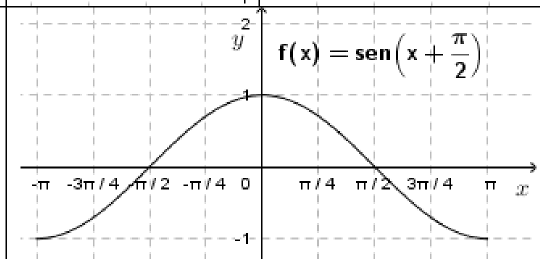
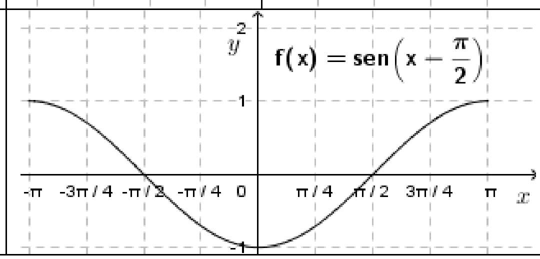
Fonte: o autor

No quadro 3 colocamos exemplos de representações gráficas das componentes visuais com diferentes valores do coeficiente principal e com os demais coeficientes com valores parecidos com os descritos no quadro 2.

Quadro 3: Exemplos de gráficos para $y = a + bsen(cx + d)$

Unidades simbólicas correspondentes (coeficiente principal)	Exemplo
$b > 0$	
$b < 0$	
$-1 < b < 1$	
$b > 1$	

$-1 < c < 1$	
$c > 1$	
$a = 0$	
$a > 0$	
$a < 0$	

<table>
<tr>
<td>$d = 0$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$d > 0$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$d < 0$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Fonte: o autor

Tendo como referência os quadros 2 e 3 pode-se supor algumas conclusões:

- O sentido inicial da curva e o conceito de amplitude, analisados a partir do coeficiente b da representação algébrica, recobrem duas unidades significativas diferentes: uma em relação ao sinal e outra em relação aos valores absolutos.
- O conceito de período ou comprimento da onda, analisado a partir do coeficiente c da representação algébrica, recobre uma unidade significativa que é determinada pelo seu valor absoluto.
- O movimento da curva em relação ao eixo vertical, analisado a partir do coeficiente a da representação algébrica, recobre uma unidade

significativa que é determinada pelo valor do seu sinal. Em outras palavras, podemos dizer que essa unidade significativa está relacionada com a translação da curva no sentido vertical.

- O movimento da curva em relação ao eixo horizontal, analisado a partir do coeficiente d da representação algébrica, recobre uma unidade significativa que é determinada pelo valor do seu sinal. Em outras palavras, podemos dizer que essa unidade significativa está relacionada com a translação da curva no sentido horizontal.

Analisando os quadros 2 e 3 o leitor pode ficar tentado a fazer generalizações do tipo "Se $b > 0$ a curva do gráfico sempre começará subindo da esquerda para a direita a partir da origem". Porém, isso não é verdade. A função $f(x) = sen(x - \pi)$ tem $b > 0$, mas a curva começa descendo da esquerda para a direita a partir da origem. Os quadros não pretendiam fazer generalizações desse tipo. O propósito era mostrar algumas variáveis visuais relacionadas com as unidades simbólicas significativas correspondentes. Sobretudo, a unidade simbólica correspondente ao coeficiente que chamamos de principal. Por isso, fixamos os valores dos outros coeficientes. De fato, fizemos o que recomenda Duval (2011, p.103) "variar uma unidade significativa na expressão, mantendo as outras constantes e ver o que se passa no outro registro". Com os quadros podem-se fazer as seguintes conclusões:

- Dada a representação algébrica $y = a + bsen(cx + d)$ da função seno: o coeficiente a influencia o deslocamento vertical da curva, o coeficiente b influencia a amplitude, o coeficiente c influencia o período e o d o deslocamento horizontal;

- Podem-se fazer outras combinações variando os coeficientes principais, mas fixando valores diferentes para os outros coeficientes;
- Uma análise parecida pode ser feita para a função Cosseno.

Acreditamos que essa pode ser uma forma de se fazer uma abordagem de interpretação global para funções trigonométricas. Todavia, é necessário propor atividades para que os estudantes possam perceber e descrever as variáveis visuais. Nesse sentido, no tópico seguinte apresentaremos exemplos de atividades com esse propósito.

2 ATIVIDADES PARA ANÁLISE DA FUNÇÃO SENO

2.1 Abordagem ponto a ponto para a função seno

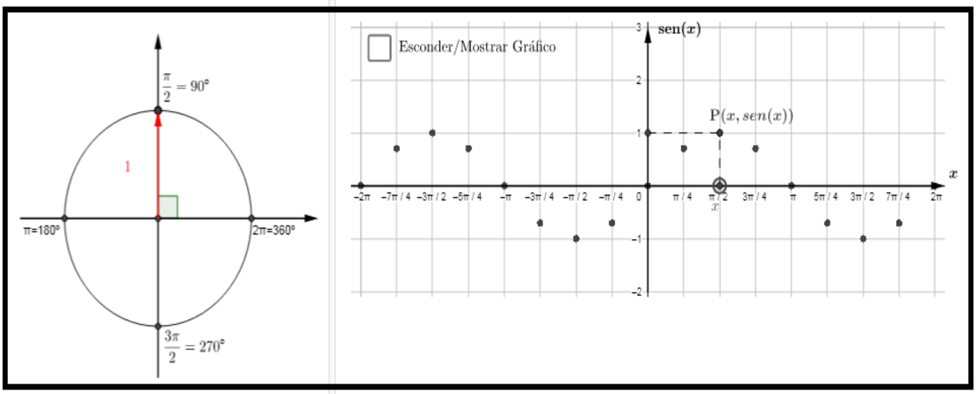
Acreditamos que a compreensão da Abordagem Ponto a Ponto para a construção de gráficos é uma condição necessária para a compreensão da Abordagem de Interpretação Global, porque é por meio dela que se pode construir o gráfico base para a análise global. Nesse sentido, criamos uma atividade[2] para explorar o gráfico da função $f(x) = sen(x)$ pela Abordagem Ponto a Ponto.

O *applet* representado na figura 2 é parte da atividade. Nele o estudante tem possibilidade de ver o gráfico da função base $f(x) = sen(x)$ sendo construído ponto a ponto. Nessa atividade são usadas as representações do gráfico e ciclo-trigonométrico. O estudante pode arrastar o ponto x sobre o eixo x. Simultaneamente, outro ponto se deslocará sobre o ciclo-

[2] A atividade pode ser acessada em https://www.geogebra.org/m/sMdQxhcn. Para a compreensão das ideias apresentadas neste texto é muito importante que o leitor abra e explore os links.

trigonométrico e aparecerá um rastro de pontos em que o estudante poderá ver a curva formada. Para aumentar o número de pontos e "fechar" a curva, o estudante pode clicar em "Esconder/Mostrar Gráfico".

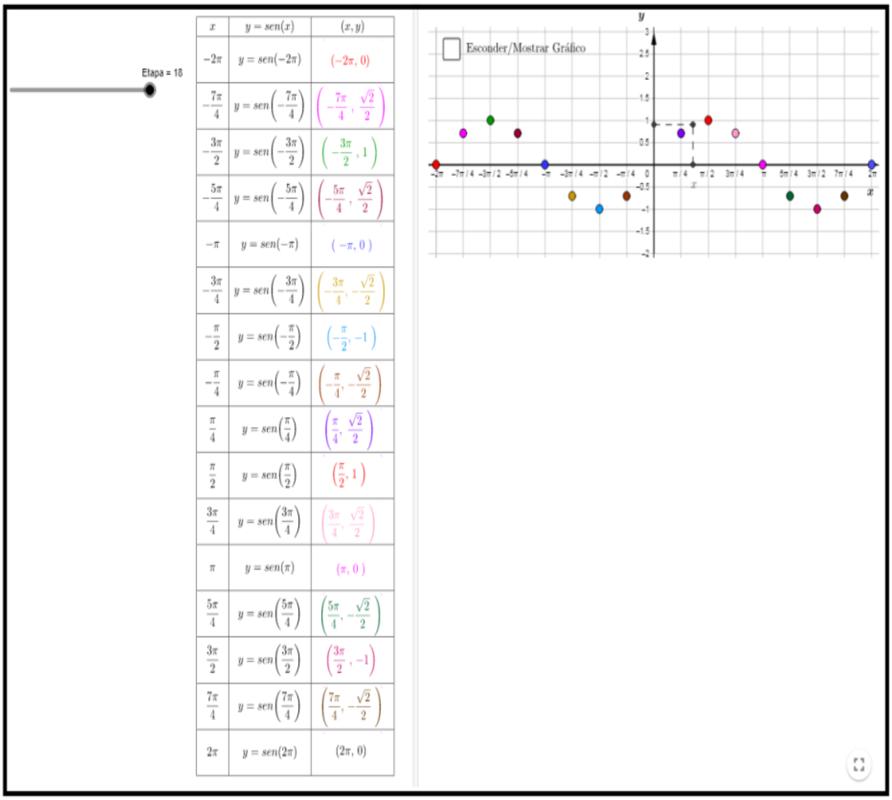
Figura 2: Gráfico da função $y = sen(x)$ com ciclo-trigonométrico



Fonte: Autor

Para que o estudante possa ter uma melhor compreensão do gráfico, fizemos outro *applet* representado na figura 3. Nele o estudante também tem possibilidade de ver o gráfico da função base $f(x) = sen(x)$ sendo construído ponto a ponto. Nessa atividade são integradas as representações através do gráfico e a tabela com alguns pares ordenados. Por meio do controle deslizante "Etapas", o estudante pode ver os pares ordenados com seus pontos associados no plano cartesiano aparecerem gradativamente. Para aumentar o número de pontos e "fechar" a curva, o estudante pode arrastar o x e ver o rastro formado.

Figura 3: Gráfico da função $y = sen(x)$ com tabela

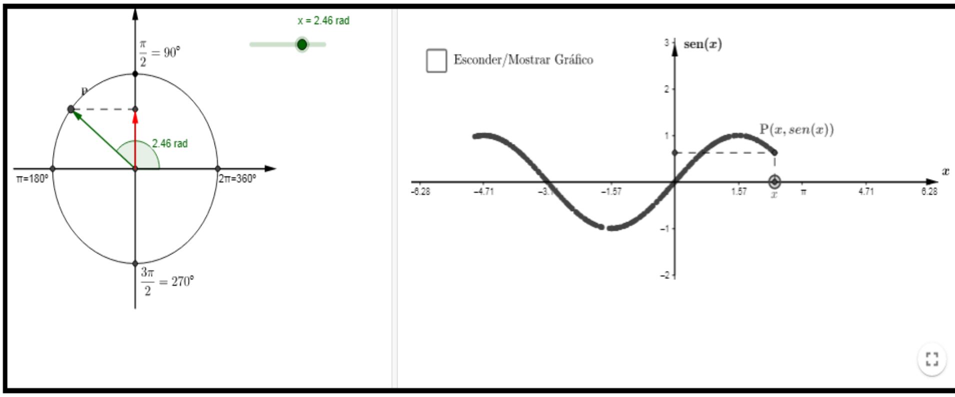


x	$y = sen(x)$	(x, y)
-2π	$y = sen(-2\pi)$	$(-2\pi, 0)$
$-\frac{7\pi}{4}$	$y = sen\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$-\frac{3\pi}{2}$	$y = sen\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$
$-\frac{5\pi}{4}$	$y = sen\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{5\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$-\pi$	$y = sen(-\pi)$	$(-\pi, 0)$
$-\frac{3\pi}{4}$	$y = sen\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$-\frac{\pi}{2}$	$y = sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$
$-\frac{\pi}{4}$	$y = sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$y = sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$y = sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$y = sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
π	$y = sen(\pi)$	$(\pi, 0)$
$\frac{5\pi}{4}$	$y = sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	$y = sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
$\frac{7\pi}{4}$	$y = sen\left(\frac{7\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2π	$y = sen(2\pi)$	$(2\pi, 0)$

Fonte: Autor

Essa atividade possui mais um *applet* (figura 4) em que o estudante pode modificar a medida do ângulo no ciclo-trigonométrico e ver a alteração no gráfico ou modificar o ângulo x representado no eixo das abcissas do gráfico e ver a alteração no ciclo-trigonométrico.

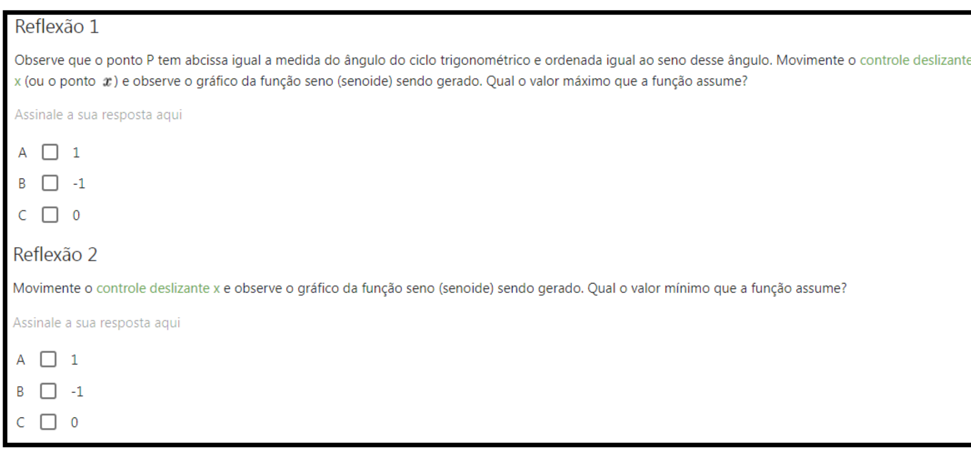
Figura 4: Gráfico da função $y = sen(x)$ com possibilidade manipular o ângulo em duas representações



Fonte: o autor

Em seguida, são colocadas algumas perguntas chamadas de “Reflexões”. Os estudantes precisam manipular o *applet* para respondê-las. A figura 5 mostra alguns exemplos.

Figura 5: Exemplos de momentos de Reflexão



Reflexão 1

Observe que o ponto P tem abcissa igual a medida do ângulo do ciclo trigonométrico e ordenada igual ao seno desse ângulo. Movimente o controle deslizante x (ou o ponto x) e observe o gráfico da função seno (senoide) sendo gerado. Qual o valor máximo que a função assume?

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ 1

B ☐ -1

C ☐ 0

Reflexão 2

Movimente o controle deslizante x e observe o gráfico da função seno (senoide) sendo gerado. Qual o valor mínimo que a função assume?

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ 1

B ☐ -1

C ☐ 0

Fonte: o autor

Nesta atividade, o objetivo principal é que o estudante perceba como é a curva formada pelo gráfico da função $f(x) = sen(x)$ que é a base para a compreensão da função mais genérica $f(x) = a + bsen(cx + d)$. Para que ele possa compreender como os pontos da tabela apresentada na figura 3 podem ser determinados são propostas atividades[3] envolvendo seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

2.2 Abordagem de intepretação global para a função seno

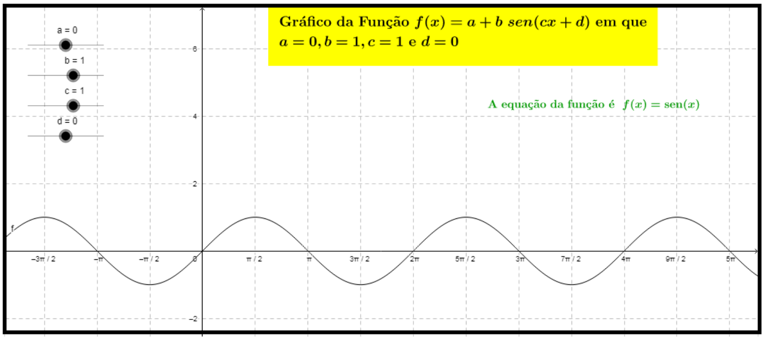
A abordagem da Interpretação Global da função $f(x) = a + bsen(cx + d)$ é explorada em duas atividades. Em ambas o objetivo principal é que o estudante consiga relacionar as representações gráfica e algébrica da função seno. Basicamente, pretende-se que ele compreenda a influência dos coeficientes a, b, c e d no comportamento do gráfico, assim como que ele perceba também a influência das alterações do gráfico nos coeficientes da função $f(x) = a + bsen(cx + d)$.

A primeira atividade[4] possui o *applet* representado na figura 6. Nele, os estudantes podem manipular os controles deslizantes a, b, c e d que representam os coeficientes da função $f(x) = a + bsen(cx + d)$. Nessa atividade também são colocadas perguntas (Figura 7) para orientar as manipulações feitas pelos estudantes. Tais manipulações se relacionam diretamente com o tratamento que é feito no registro algébrico (alterando os coeficientes), assim como a conversão imediata para o registro gráfico. Esse processo objetiva compreender a influência dos coeficientes no período, imagem e domínio da função.

---

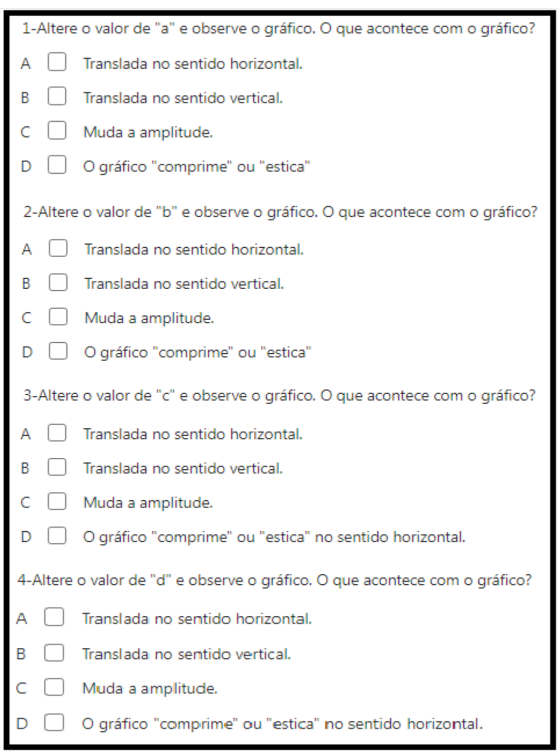
[3] Ver em https://www.geogebra.org/m/M3vta5Uv#chapter/122623
e https://www.geogebra.org/m/M3vta5Uv#chapter/122625
[4] Disponível em https://www.geogebra.org/m/wdetmPun

Figura 6: Influência dos coeficientes no gráfico da função $f(x) = a + bsen(cx + d)$



Fonte: Autor

Figura 7: Exemplos de perguntas apresentadas na atividade



1-Altere o valor de "a" e observe o gráfico. O que acontece com o gráfico?

A ☐ Translada no sentido horizontal.

B ☐ Translada no sentido vertical.

C ☐ Muda a amplitude.

D ☐ O gráfico "comprime" ou "estica"

2-Altere o valor de "b" e observe o gráfico. O que acontece com o gráfico?

A ☐ Translada no sentido horizontal.

B ☐ Translada no sentido vertical.

C ☐ Muda a amplitude.

D ☐ O gráfico "comprime" ou "estica"

3-Altere o valor de "c" e observe o gráfico. O que acontece com o gráfico?

A ☐ Translada no sentido horizontal.

B ☐ Translada no sentido vertical.

C ☐ Muda a amplitude.

D ☐ O gráfico "comprime" ou "estica" no sentido horizontal.

4-Altere o valor de "d" e observe o gráfico. O que acontece com o gráfico?

A ☐ Translada no sentido horizontal.

B ☐ Translada no sentido vertical.

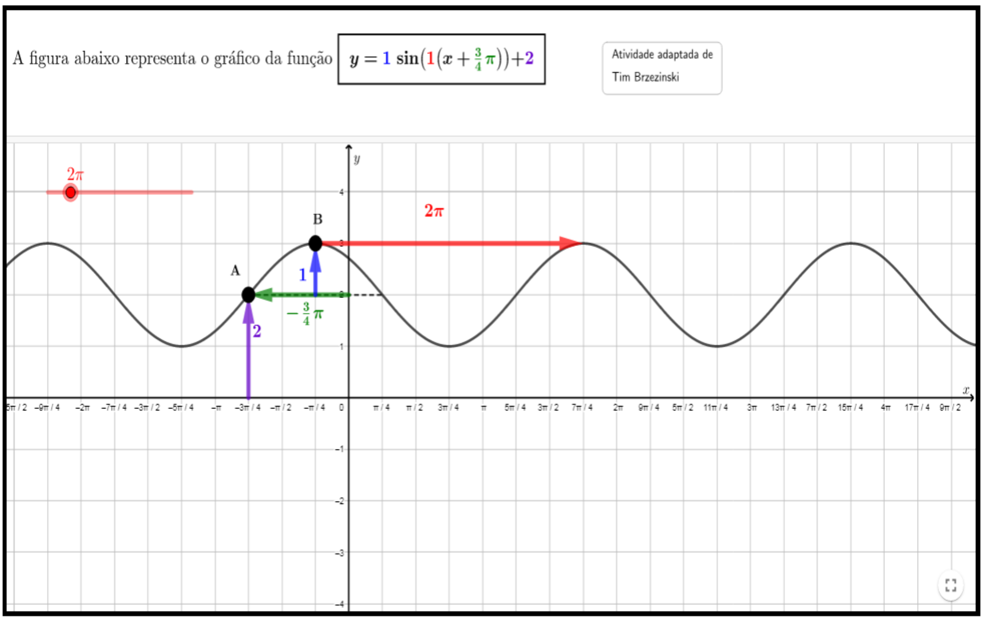
C ☐ Muda a amplitude.

D ☐ O gráfico "comprime" ou "estica" no sentido horizontal.

Fonte: Autor

A segunda atividade[5] possui o *applet* representado na figura 8. Nele, os estudantes podem manipular os pontos A, B e o controle deslizante 2π. Ao manipularem poderão perceber que a equação muda. O gráfico possui alguns vetores que estão da mesma cor dos coeficientes da equação.

Figura 8: Influência das alterações do gráfico no comportamento da função $y = a + bsen(cx + d)$



Fonte: Autor

Na atividade são colocadas algumas perguntas para orientar as manipulações feitas pelos estudantes e ajudá-los a expressar o que eles estão vendo. A figura 9 mostra alguns exemplos.

[5] Disponível em https://www.geogebra.org/m/bhj269rm. Acessado 16 de junho de 2023.

Figura 9: Exemplos de perguntas apresentadas na atividade

I- Influência na equação da função a partir dos movimentos do Gráfico .

1-Movimente o ponto **A** uma unidade para cima. O que acontece com a equação?

A ☐ Como o gráfico é transladado uma unidade para cima, então somou uma unidade, ficando $f(x) = sen(x) + 1$.

B ☐ Como o gráfico é transladado uma unidade para cima, então subtraiu-se uma unidade, ficando $f(x) = sen(x) - 1$.

C ☐ Como o gráfico é transladado uma unidade para cima, então somou uma unidade, ficando $f(x) = sen(x + 1)$.

2-Agora movimente o ponto **A** duas unidades para baixo, colocando-o em $(0, -1)$. O que acontece com a equação?

A ☐ Como o gráfico é transladado uma unidade para baixo a partir da origem, então subtraiu uma unidade, ficando $f(x) = sen(x) + 1$.

B ☐ Como o gráfico é transladado uma unidade para cima a partir da origem, então somou-se uma unidade, ficando $f(x) = sen(x) - 1$.

C ☐ Como o gráfico é transladado uma unidade para baixo a partir da origem, então subtraiu uma unidade, ficando $f(x) = sen(x - 1)$.

Fonte: Autor

Com essas atividades espera-se que, ao final, o estudante possa perceber, para a função Seno, as “regras de correspondência semiótica entre o registro de representação gráfico e o registro da expressão algébrica” (DUVAL, 2011, p.97) e com isso seja capaz de esboçar e analisar gráficos dessa função, assim como determinar suas equações a partir dos gráficos. Para que o professor possa verificar isso, no tópico seguinte mostraremos outras atividades.

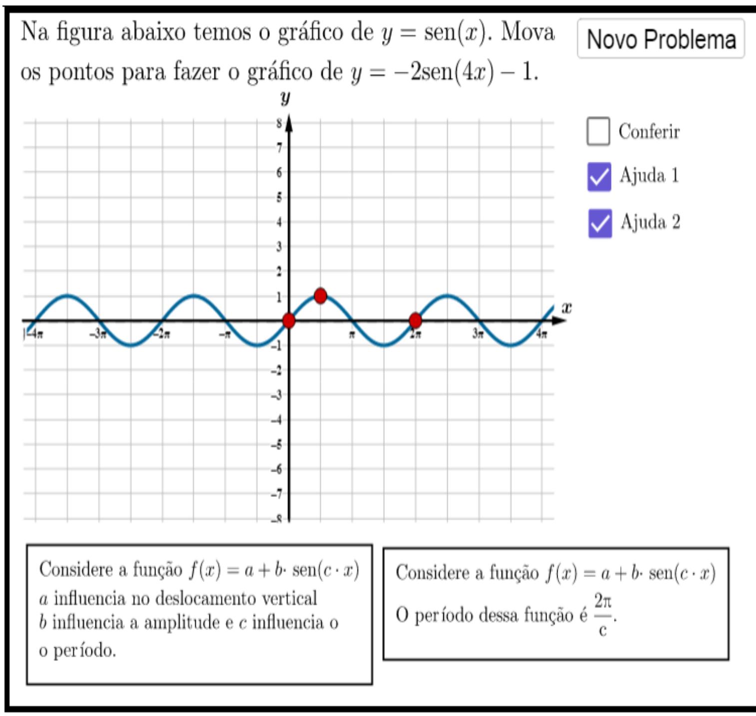
2.3 Outras atividades sobre a função seno

A atividade[6] contém *applets* com *feedbacks* automáticos para que o estudante possa exercitar. A figura 10 mostra o primeiro *applet*. Ele contém o gráfico da função base $f(x) = sen(x)$ e três pontos vermelhos que o estudante pode movimentar para alterar o gráfico. Um ponto translada na vertical, outro muda a amplitude e outro o período. O *applet* contém ainda

[6] Disponível em https://www.geogebra.org/m/ewb2fsvq. Acessado 16 de junho de 2023.

duas ajudas e uma caixa que o estudante pode selecionar para verificar se acertou ou errou. Caso tenha errado, aparecerá uma caixa em que ele poderá selecionar para ver a resposta correta.

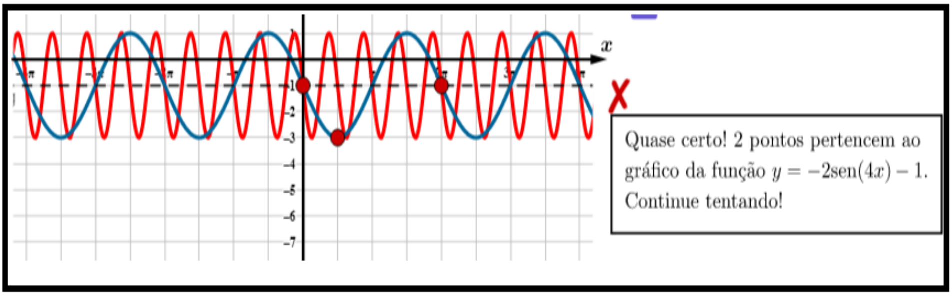
Figura 10: Exercício em que dada uma função o estudante deverá fazer o gráfico



Fonte: Autor

Se o estudante errou, mas acertou a posição de alguns pontos, aparece uma mensagem que representa um *feedback* de desempenho (NARCISS, 2013). Vejamos um exemplo na figura 11.

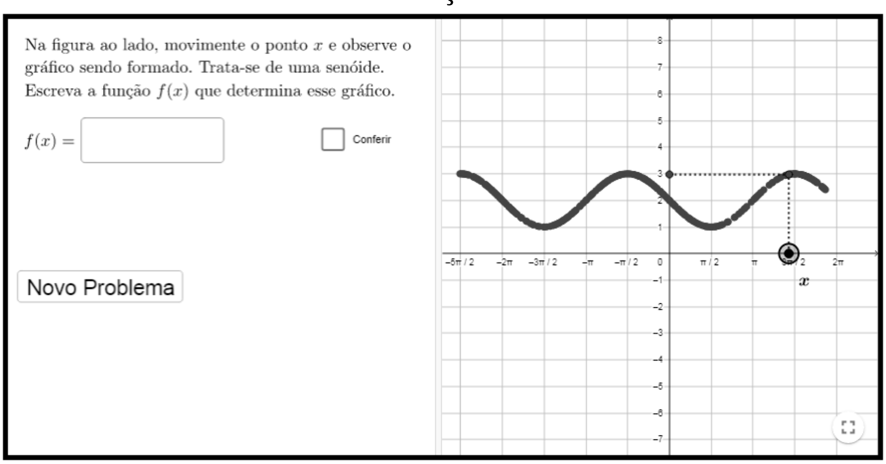
Figura 11: Mensagem automática



Fonte: Autor

O outro *applet* (figura 12) da atividade contém um ponto para o estudante movimentar e gerar uma senóide. Em seguida, ele deverá digitar a a equação da função que determina aquele gráfico. O *applet* também possui uma caixa que o estudante pode selecionar para verificar se acertou ou errou.

Figura 12: Exercício em que dada o gráfico o estudante deverá digitar a função



Fonte: Autor

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concordamos com Duval (2011) quando ele diz que a interpretação das representações gráficas depende de uma identificação precisa de todas variáveis visuais pertinentes e do reconhecimento qualitativo das unidades da expressão simbólica correspondente. As atividades apresentadas neste capítulo foram feitas com base nessa premissa e na orientação em que ele diz que é preciso variar uma unidade significativa na expressão, mantendo as outras constantes e ver o que se passa no outro registro (ou mudar uma variável visual mantendo as outras constantes e ver as modificações que acontecem na expressão). A utilização do GeoGebra para a produção das atividades nos parece muito apropriada, porque ele pode atuar diretamente na relação *noésis* e *semiose*[7] quando possibilita a criação e manipulação de diferentes representações dos objetos matemáticos.

Não fizemos ainda investigações formais para verificar as contribuições dessas atividades. Todavia, algumas utilizações com estudantes nos mostraram indícios de contribuições, sobretudo no que diz respeito à criação de condições para a observação das variações concomitantes (simultâneas) de uma representação em outro registro que pode contribuir para a identificação das unidades significantes. Após isso, espera-se que os estudantes sejam capazes de fazer, mentalmente, as coordenações entre os registros, sem a necessidade do *software*.

Algo que precisa ser salientado é o fato de que as atividades não foram desenvolvidas para que os estudantes façam sem a mediação do professor. Tal

[7] Para Duval (2012), na matemática, não há *noesis* sem *semiosis*. A *semiose* está relacionada com a apreensão do registro de representação semiótica, enquanto que a *noesis* volta-se à apreensão conceitual do objeto.

mediação é imprescindível. As orientações de manipulação e perguntas ajudam essa mediação. Todavia, o professor precisará estar atento para orientar os estudantes, sobretudo ajudando-os a definir uma ordem para manipulação das variáveis nos registros algébricos e gráficos que mais contribua para a percepção das relações.

Por fim, não nos parece possível fazer “generalizações” para a função Seno como as que Duval (2011) fez para função afim e Moretti (2008) para a função quadrática. Isso porque para a função Seno podemos ter diferentes expressões algébricas que determinam uma mesma representação gráfica. Por exemplo: $f(x) = -sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $g(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ têm o mesmo gráfico. Além disso, diferentes funções trigonométricas também podem ter o mesmo gráfico. Por exemplo: $f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $g(x) = cos(x)$. Acreditamos que é preciso levar isso em consideração quando se pretende explorar a Interpretação Global das Funções Trigonométricas.

REFERÊNCIAS

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Tradução L. F LEVY; M.R.A SILVEIRA. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Méricles Thadeu. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

DUVAL, R. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de matemática**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 266-297, 2012.

MORETTI, M.T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papirus, 2008, p. 149-160.

NARCISS, Susanne. Designing and Evaluating Tutoring Feedback Strategies for digital learning environments on the basis of the Interactive Tutoring Feedback Model. **Digital Education Review**, n. 23, p. 7- 26, 2013.

NÓBRIGA, J. C. C. Demonstrações matemáticas dinâmicas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 1-21, 2019.

NÓBRIGA, J. C. C; SIPLE, I. Z.. Livros Dinâmicos de Matemática Dynamic Mathematics Books. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 9, n. 2, p. 78-102, 2020.

CAPÍTULO XI

FUNÇÃO QUADRÁTICA PARA ESTUDANTES CEGOS POR MEIO DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS

Luis Fernando Ferreira de Araújo

1 INTRODUÇÃO

O processo de inclusão de estudantes cegos no ensino regular requer o uso de recursos didáticos, que possibilitem a eles o acesso aos conteúdos escolares por meio dos sentidos remanescentes, como o tato e a audição. Tal acesso não se dá de forma simples (NUNES; LÔMONACO, 2010).

A ausência destes recursos torna o ensino de matemática desafiador, pois sem eles, os estudantes cegos não conseguem ter acesso aos objetos de conhecimento nos seus diferentes registros de representação (ARAUJO, 2018).

A função quadrática é um objeto do conhecimento e assim como os demais objetos presentes na matemática, só pode ser acessado por meio de suas representações semióticas, sejam elas, algébricas, gráficas, tabulares ou língua natural (DUVAL, 2012).

Em hipótese, o estudante cego poderia acessar as representações da função quadrática nos registros, algébrico e em língua natural por meio do Sistema de escrita e leitura braille , e as representações no registro gráfico, desde que estas estivessem em alto-relevo (ARAUJO, 2018).

Com vistas ao acesso a este objeto de conhecimento, confeccionou-se um material concreto[1], composto por representações com as características supracitadas, e a partir deste material, procurou-se investigar tais representações contribuíram para atividade de conversão e coordenação entre os diferentes registros de representação.

O processo de investigação teve caráter qualitativo e o estudo de caso como abordagem metodológica de investigação. Os referenciais teóricos escolhidos como aporte, foram: a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2011) e os Critérios para produção de materiais táteis estabelecidos por Cerqueira e Ferreira (2000).

APORTE TEÓRICO

A cegueira total, denominada "Amaurose" é caracterizada pela ausência de acuidade visual, condição na qual não há sequer percepção luminosa, pode ser de origem congênita quando ocorre antes ou durante o nascimento ou adquirida, quando se dá em qualquer outro momento da vida (TALEB et al., 2012).

A pessoa cega, sobretudo aquela com cegueira congênita, tem no tato ativo[2] um importante via de acesso à informação, uma vez que por meio deste sentido, capta impressões, sensações e vibrações que são interpretadas pelo cérebro, permitindo com que a pessoa cega possa, identificar propriedades como: tamanho, textura, densidade e a partir disso criar representações mentais (SÁ; CAMPOS; SILVA, 2007).

---

[1] Disponível em: https://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000051/000051c7.pdf
[2] Diz respeito à obtenção intencional de informações por meio do tato.

"As **representações mentais** recobrem o conjunto de imagens e mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado", são portanto, ideias formuladas pelo indivíduo acerca de um objeto (DUVAL, 2012, p. 269).

As **representações semióticas** são produções elaboradas de forma consciente a partir de signos que compõem um sistema de representações com características próprias de significação e funcionamento. Um gráfico, uma fórmula algébrica, um enunciado em língua materna, são exemplos deste tipo de representação.

As representações semióticas denotam diferentes sistemas semióticos usados na representação de objetos matemáticos, além de exteriorizar as representações mentais, são essenciais para a atividade cognitiva do pensamento (DUVAL, 2009; 2011; 2012).

Os **Objetos de conhecimento**, como as funções, não são tangíveis, nem acessíveis à percepção imediata, isto quer dizer que precisam ser representados por meio de diferentes sistemas ou registros semióticos, sistemas estes sujeitos as atividades de formação, tratamento e conversão, intrínsecas à atividade cognitiva (DUVAL, 2009; 2011; 2012).

A atividade de formação de uma representação, consiste na aplicação de regras de conformidade predeterminadas com vistas a assegurar o reconhecimento da referida representação em um determinado registro, o reconhecimento de regras para composição de um texto, e a construção de uma figura geométrica, leitura de um gráfico são exemplos da atividade de formação (DUVAL, 2009; 2011; 2012).

A formação é imprescindível, pois contribui para o discernimento entre a representação e o objeto representado, sendo um ponto de partida na execução das operações de tratamento e conversão. O tratamento, por sua vez, consiste na transformação de uma representação sem que haja mudança de registro. Representar 0,1 + 0,2 por meio do número 0,3, é um exemplo de tratamento. A conversão, operação fundamental para apreensão do conhecimento matemático, implica na transformação de uma representação em outra, isto quer dizer que o objeto é representado em um registro diferente do inicial (DUVAL, 2009; 2011; 2012). A função $f(x) = x^2 + 5$, representada graficamente por uma parábola é um exemplo de conversão.

Neste contexto, em tese, estudantes cegos e videntes, estão na mesma situação, uma vez que ambos dependem das representações para ter acesso aos objetos do conhecimento, a diferença está nos meios de acesso (MELLO, 2015).

Enquanto o estudante cego lê as representações linearmente, o estudante não cego consegue visualiza-la em sua totalidade. Afim de minimizar essa diferença optou-se pela “Interpretação global das propriedades figurais”, como procedimento de aplicação e análise das atividades.

A INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS E COMO METODOLOGIA DE ENSINO PARA ESTUDANTES CEGOS

O estudo que deu origem a esse capitulo, concentrou-se em um grupo específico de estudantes, aqueles do Ensino Médio[3] com cegueira congênita.

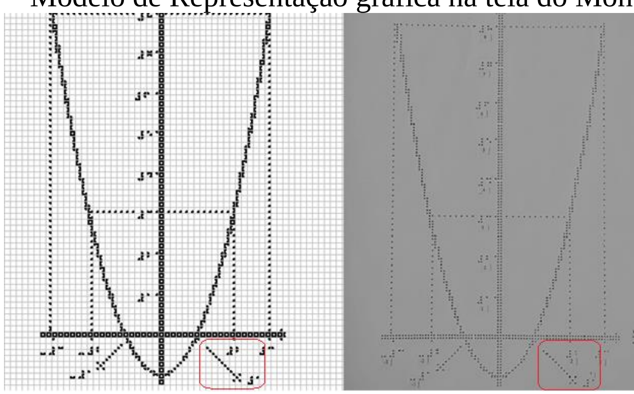
---

[3] A experimentação ocorreu em uma escola da rede estadual de Joinville, cidade escolhida por sediar o Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade do Estado de Santa Catarina.

Para o processo de investigação, desenvolveu-se e testou-se previamente na FCEE[4] “Modelos de Representação” (MR) escritos em “braille ” e “a tinta” de forma simultânea e sincronizada, confeccionados a partir dos softwares Monet 1.0 e braille Fácil 3.4, impressos em impressoras braille , conforme mostra a Figura 1.

A confecção destes MR, exigiu a busca de parâmetros (PR), a criação destes PRs, teve como base os critérios[5]: Tamanho, Significação tátil, Aceitação, Fidelidade, Resistência e Segurança (CERQUEIRA e FERREIRA, 2000).

Figura 01 – Modelo de Representação gráfica na tela do Monet (MR-04)



Fonte: Adaptado de Araújo (2018, p. 86)

A sequência da aplicação, se deu com o estudante (Pedro)[6], para isso, optou-se pela entrevista semiestruturada e o questionário como instrumentos

[4] Os MR foram testados por dois profissionais cegos revisores de braille da Fundação Catarinense de Educação Especial (FCEE).

[5] Os critérios e PR usados na confecção das representações que compuseram as atividades usadas no estudo que deu origem a esse capitulo, podem ser obtidos na dissertação “Ensino de matemática para pessoas cegas com uso do Software Monet: criando gráficos táteis para o ensino de função quadrática,” elaborada pelo autor.

[6] Para preservar a identidade do estudante optou-se pelo codinome “Pedro”.

de investigação e pela interpretação global de propriedades figurais, como procedimento metodológico de aplicação.

Neste procedimento “toda a modificação na imagem, (do gráfico) que leva a alguma modificação na representação algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica” (DUVAL, 2011, p. 99).

Quando o estudante identifica as mudanças simultâneas na imagem do gráfico e da expressão algébrica correspondente, se estabelece uma associação entre uma “variável visual de representação” e uma “unidade significativa da expressão algébrica” (DUVAL, 2011, p. 99).

Usando o (MR) 04 trabalhou-se a exploração tátil das representações da função quadrática $f(x) = x^2 - 1$, transcrita em braille , e a partir de uma leitura guiada destas representações, abordou-se de forma introdutória, os conceitos de função, função quadrática, de máximo e mínimo e quantidade de raízes.

As variáveis visuais (VV), as unidades significativas (US), bem como a sequência de exploração destes elementos, foram escolhidas com base em Maia (2007). As VV e US correspondentes estão apresentadas no Quadro 1.

Optou-se pelo termo variável tátil (VT) (em substituição ao termo variável visual) visto que o acesso as representações gráficas, tabulares e algébricas, se dá por meio do tato.

Quadro 1 – Variáveis táteis e unidades significativas correspondentes

N°	Variável tátil	Valor	Unidade significativa correspondente
1	Concavidade da parábola (com simetria vertical)	Voltada p. cima	Parâmetro $a > 0$ (ausência do símbolo -)
		Voltada p. baixo	Parâmetro $a <0$ (presença do símbolo -)
2	Abertura da parábola	Mais aberta	$0< \lvert a\rvert <1$
			$\lvert a\rvert =1$
		Mais fechada	$\lvert a\rvert > 1$
3	(Translação vertical) Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas	Na origem	$k = 0$
		Abaixo do eixo	$k<0$
4	(Translação horizontal) Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas	A esq. do eixo	$w>0$
		na origem	$w=0$
		A dir. do eixo	$w<0$

Fonte: adaptado de Maia (2007.p. 65).

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Após esse contato inicial apresentou-se para Pedro, algumas representações da função quadrática, nos registros gráfico e algébrico. Os gráficos foram impressos em alto-relevo e as representações algébricas foram e transcritas em braille .

Neste primeiro momento, teve-se por propósito que o estudante estabelecesse um contato inicial com os relevos, texturas e dimensões empregadas na confecção das representações. Permitiu-se que o estudante explorasse livremente as representações com intuito de que pudesse perceber por si só, as texturas e relevos presentes em cada uma delas.

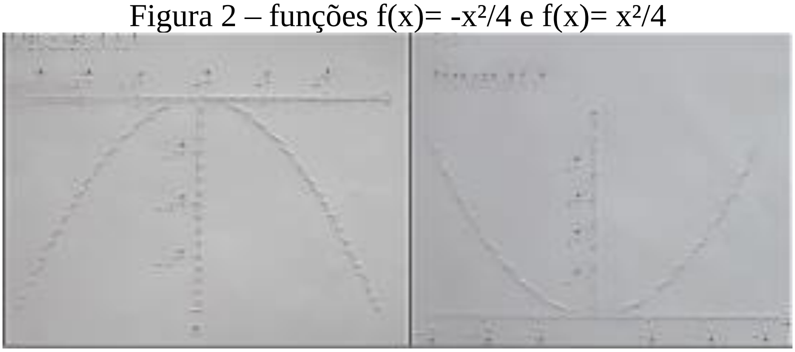
Num segundo momento, guiou-se as mãos do estudante, explicando a ele a finalidade/significado de textura, relevo ou pontilhado, que as linhas espessas PR1 representavam os eixos do gráfico, as linhas pontilhadas PR4, serviam como auxílio na formação dos pares ordenados e que a linha curva com pontos mais densos PR5, representavam a parábola.

A experimentação se deu inicialmente com a leitura guiada das representações: algébrica e gráfica da função quadrática em sua forma $f(x) = ax^2$. Durante a leitura tátil destas representações, o pesquisador explanou para Pedro, noções de: simetria vertical e de pontos de máximo e mínimo da parábola.

Após a leitura do gráfico correspondente a função $f(x) = x^2$, apresentou-se ao estudante outras representações gráficas e algébricas das funções do tipo $f(x) = ax^2$, para isso, construiu-se em planos cartesianos diferentes as representações das funções: b) $f(x) = x^2/4$, c) $f(x) = -x^2/4$ d) $f(x) = 5x^2$ e e) $f(x) = -5x^2$, Figura 2.

Procurou-se verificar se o estudante perceberia que a cada mudança efetuada na representação algébrica da função quadrática, acarretaria em alterações na representação gráfica correspondente.

Figura 2 – funções $f(x)= -x^2/4$ e $f(x)= x^2/4$



Fonte: Araújo (2018, p. 145).

A partir das representações de funções do tipo $f(x) = ax^2$, buscou-se com que o estudante explorasse por meio do tato, as **VTs 1: Concavidade da parábola (com simetria vertical)** e **2: Abertura da parábola**, relacionando-as com as unidades significativas correspondentes.

Figura 3 – funções $f(x) = 5x^2$ e $f(x) = -5x^2$

Fonte: Araújo (2018, p. 146).

O Quadro 2 traz um trecho do diálogo ocorrido entre o pesquisador e Pedro, durante a leitura guiada das representações nos registros, gráfico e algébrico.

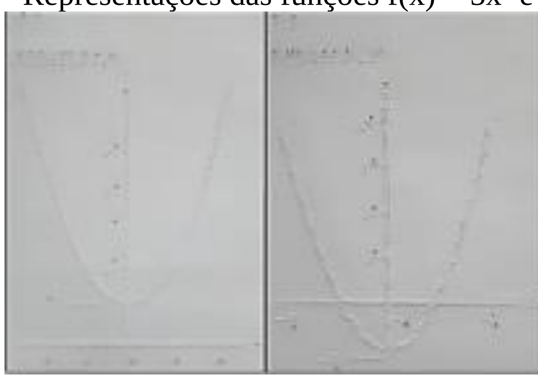
Quadro 2 – Trecho do diálogo entre Pedro e o pesquisador

Pesquisador: Com relação aos gráficos das funções $f(x) = x^2/4$, e $f(x) = 5x^2$, qual apresenta a concavidade da parábola com maior abertura? **Pedro:** **"***a parábola f(x) = x² /4 é mais aberta, o segundo gráfico f(x) =5x² tem a* parábola *mais fechada quando valor de "a" aumenta a abertura diminui".* **Pesquisador:** Então como seria a abertura da concavidade de uma parábola de um gráfico da função $f(x) = 10x^2$, por exemplo, se comparado aos gráficos que você já leu até agora? **Pedro:** **"***acho que a abertura iria ser mais fechada ainda"* **Pesquisador:** Antes de ler a representação gráfica a seguir responda: como seria o gráfico da função $f(x) = -5x^2$? **Pedro:** **"***como o sinal é negativo, a parábola tem concavidade pra baixo".* **Pesquisador:** Você pode dizer qual é o vértice da parábola destes gráficos? **Pedro:** *"todas são iguais, o vértice da parábola vai estar em zero".*

Fonte: Araújo (2018, p. 146).

Efetuada a leitura das representações do tipo f(x) = ax², deu-se início ao segundo momento, no qual procurou-se explorar a **VT 3: Translação vertical - posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas**. Para isso apresentou-se ao estudante as representações gráficas e algébricas de funções do tipo f(x) = x² + k. Inicialmente foram exploradas as funções: b) f(x) = x² + 1 e c) f(x) = x² - 1, Figura 4.

Figura 4 – Representações das funções f(x) = 5x² e f(x) = -5x



Fonte: Araújo (2018, p. 146).

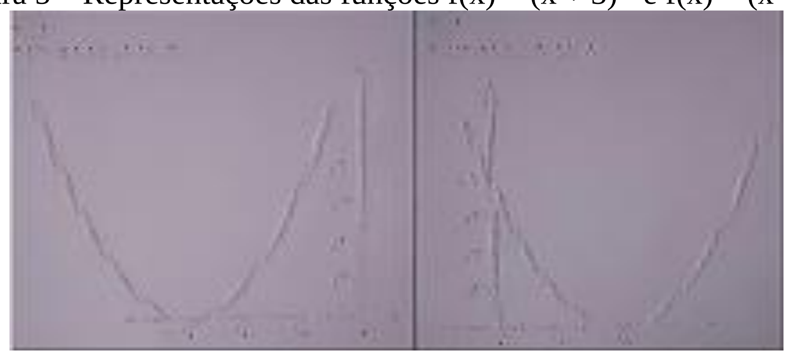
O Quadro 3, traz um trecho do diálogo desencadeado entre o pesquisador e Pedro, durante a leitura guiada das representações do tipo f(x) = x² + k.

Quadro 3 – Trecho do diálogo entre Pedro e o pesquisador
Fonte: Araújo (2018, p. 148).

Pesquisador: Você percebeu a diferença entre este gráfico da função f(x) = x² -1 e os gráficos anteriores?
Pedro: “*Sim, nestas f(x) = x² -1 e f(x) = x² -1, o vértice não está no zero*”.
Pesquisador: Qual a posição do vértice da parábola para a função f(x) = x²-1? **Pedro:** “*a parábola passa pelo -1 do eixo y, então o vértice é (1)*”.
Pesquisador: Caso tivéssemos a função f(x) =x² - 2, qual seria a posição do vértice da parábola? **Pedro:** “*estaria no 0 do x e -2 do eixo y*”.

No terceiro momento da experimentação, teve-se a intenção de explorar a VT **4 - Translação horizontal - posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas.** Foram construídas e apresentadas ao estudante as representações gráficas e algébricas de funções do tipo $f(x) = a(x - w)^2$ e assim foram exploradas as funções: b) $f(x) = (x + 3)^2$ e c) $f(x) = (x - 2)^2$ Figura 5. A medida com que Pedro explorava as representações, o pesquisador explanava os conceitos de translação horizontal.

Figura 5 – Representações das funções $f(x) = (x + 3)^2$ e $f(x) = (x - 2)^2$



Fonte: Araújo (2018, p. 148).

O Quadro 4 mostra um trecho do diálogo ocorrido entre o pesquisador e Pedro, durante a leitura guiada das representações.

Quadro 4 – Trecho do diálogo entre Pedro e o pesquisador

Pesquisador: Você percebeu a diferença entre este gráfico da função $(x + 3)^2$, e os gráficos anteriores? **Pedro:** **“***Sim, nesta o vértice está à esquerda do eixo y, a parábola “passa”, no -3 do eixo x”.* **Pesquisador:** Qual a posição do vértice da parábola para $(x + 3)^2$? **Pedro:** **“***a parábola “passa”, no -3 do eixo x”.* **Pesquisador:** Caso tivéssemos a função $(x + 5)^2$, qual seria a posição do vértice da parábola? **Pedro:** **“***a esquerda do eixo y, em -5”.*

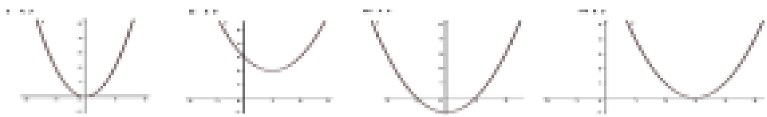
Fonte: Araújo (2018, p. 149)

No quarto momento, propôs-se a Pedro uma atividade, na qual se teve por meta, investigar se o estudante conseguiria efetuar a operação de conversão proposta por Duval (2011), nos sentidos: equação para o gráfico e gráfico para a equação.

Por meio do procedimento de interpretação global, procurou-se ainda evidenciar a translação simultânea do vértice da parábola através de funções na forma quadrática $f(x) = a (x - w)^2 + k$, Quadro 5.

Quadro 5 – Trecho da atividade proposta "a tinta"

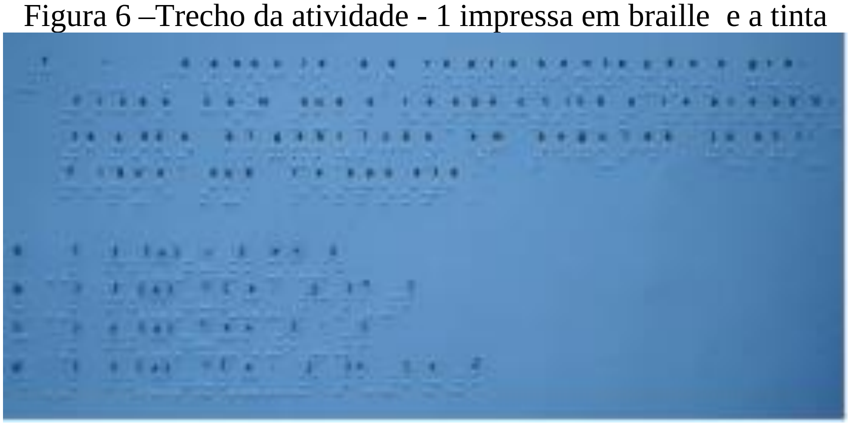
1 - Associe as representações gráficas com suas respectivas representações algébricas em seguida justifique sua resposta. a) $f(x) = 2x^2$ b) $f(x) = (x - 3)^2$ c) $f(x) = x^2 - 2$ d) $f(x) = (x - 1)^2 + 2$



Fonte: Araújo (2018, p. 149).

As representações nos registros, algébrico e em língua natural, que compõem esta atividade foram impressos em braille e a tinta, Figura 6.

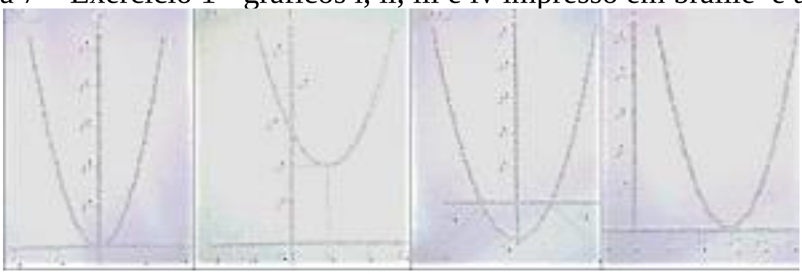
Figura 6 –Trecho da atividade - 1 impressa em braille e a tinta



Fonte: Araújo (2018, p. 150).

As representações gráficas i), ii), iii) e iv), foram impressas em alto relevo, Figura 7.

Figura 7 – Exercício 1 - gráficos i, ii, iii e iv impresso em braille e a tinta



Fonte: Araújo (2018, p. 150).

Em alguns momentos se fez necessária a leitura guiada, Nos Quadros 6, 7, 8 e 9, tem-se trechos de diálogos entre Pedro e o pesquisador.

Quadro 6 – Trecho do diálogo entre Pedro e o pesquisador – alternativa (a)

Pesquisador: Pedro, você pode ler a questão?
Pedro: *"Sim. Associe as representações gráficas com suas respectivas representações algébricas em seguida justifique sua resposta".*
Pedro: "*a) f(x) é igual dois x elevado a dois. A concavidade da parábola para cima, o vértice da parábola está em zero, então relaciona com o primeiro gráfico"* (Pedro se refere ao gráfico referente à alternativa i)

Fonte: Araújo (2018, p. 151).

Quadro 7 – Trecho do diálogo entre Pedro e o pesquisador - alternativa (b)

Pedro: *b) f(x) é igual, tem um sinal de abre parênteses, x menos três, sinal fecha parênteses elevado a dois. "A concavidade da parábola está voltada para cima"*
Pesquisador: Você percebe alguma mudança na parábola?
Pedro: "*sim, o vértice fica em 3 do eixo x, dá pra relacionar com o gráfico iv".*

Fonte: Araújo (2018, p. 151).

Quadro 8 – Trecho do diálogo entre Pedro e o pesquisador - alternativa (c)

Pedro: "*c) f(x) é igual x elevado a dois, menos dois".*
Pesquisador: como está a concavidade?
Pedro: "*para cima"*
Pesquisador: Sobre a translação?
Pedro: "*A parábola está no eixo x... não... no eixo y, o vértice vai estar em menos dois de y. Então relaciona com o gráfico III".*

Fonte: Araújo (2018, p. 151).

Quadro 9 – Trecho do diálogo entre Pedro e o pesquisador - alternativa (d)

Pesquisador: Qual dos gráficos ainda não tem correspondência, com a representação algébrica?
Pedro: *"O gráfico da alternativa ii".*
Pesquisador: O que você percebe neste gráfico?
Pedro: "*Que o vértice está para o lado em 1 e para cima em 2. Então o -1 da equação*

Fonte: Araújo (2018, p. 151).

Como explicitado anteriormente, o processo de exploração das VTs da função quadrática iniciou-se a partir de uma leitura guiada das representações gráfica e algébrica das funções $f(x) = ax^2$, $f(x) = x^2 /4$ e $f(x) =5x^2$. A partir da exploração tátil destas representações, extraiu-se para análise um trecho do diálogo entre o pesquisador e Pedro, no que diz respeito das VT1 e VT 2, Quadro 10.

Quadro 10 – Percepção do estudante – VTs 1 e 2.

P	Pesquisador	R	Pedro
1	Com relação aos gráficos das funções $f(x) = x^2/4$, e $f(x) =5x^2$, qual apresenta a concavidade da parábola com maior abertura?	1	*"a parábola $f(x) = x^2 /4$ é mais aberta, no segundo gráfico $f(x) =5x^2$, a parábola é mais fechada quando valor de "a" aumenta, a abertura diminui".*
2	Então como seria a abertura da concavidade de uma parábola de um gráfico da função $f(x) = 10x^2$, por exemplo, se comparado aos gráficos que você já leu até agora?	2	*"acho que a abertura iria ser mais fechada ainda"*
3	Antes de ler a representação gráfica a seguir, responda: como seria o gráfico da função $f(x) = -5x^2$?	3	*"como o sinal e negativo, a parábola tem concavidade pra baixo".*
4	Você pode dizer qual é o vértice da parábola destes gráficos?	4	*"todas são iguais, o vértice da parábola vai estar em zero".*

Fonte: Araújo (2018, p. 166).

Nas respostas R1 e R2, apresentadas por Pedro, verificou se que ao explorar as funções: $f(x) = x^2/4$ e $f(x) = 5x^2$, e compara-las a representação algébrica da função $f(x) = x^2$, o estudante percebeu que à medida que o coeficiente “a” positivo de x^2 fica maior (a >1) a abertura da parábola, VT2 fica menor.

Na resposta R3 percebeu-se que Pedro associou a presença do sinal negativo no coeficiente “a" de x^2 as alterações na concavidade da parábola VT1, compreendendo, que quando, a < 0, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Percebeu-se em R4, que embora, Pedro tenha compreendido que as funções do tipo f(x) =ax^2 tem o vértice na origem do plano cartesiano, ele não associou o vértice ao ponto (0,0), e sim ao valor “zero”, na escala dos eixos cartesianos. O Quadro 11, traz um trecho do diálogo entre o pesquisador e Pedro, sobre a VT3.

Quadro 11 – Percepção do estudante – VT3

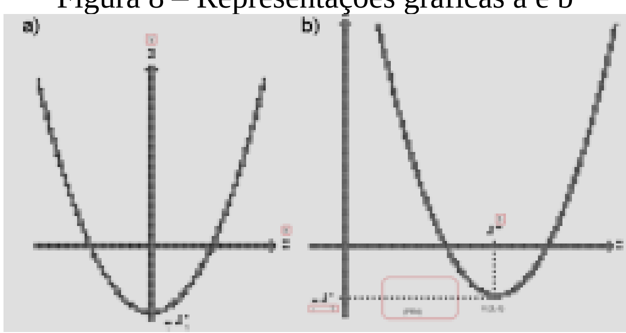
P	Pesquisador	R	Pedro
5	Você percebeu diferença entre este gráfico da função f(x) = x^2 -1 e os gráficos anteriores?	5	*“Sim, nestes f(x) = x^2 -1 e f(x) = x^2 -1, o vértice não está no zero”.*
6	Qual a posição do vértice da parábola para a função f(x) =x^2-1?	6	**“***a parábola passa pelo -1 do eixo y, então o vértice é (-1)”.*
7	Qual a posição do vértice da parábola para a função f(x) =x^2+1	7	*“A parábola passa pelo 1 do eixo y, então o vértice é (1)”.*
8	Caso tivéssemos a função f(x) = x^2 - 2? Qual seria a posição do vértice da parábola?	8	**“***estaria em 0 de x e -2 do eixo y”*

Fonte: Araújo (2018, p. 166).

Percebeu-se em R5, que ao explorar os gráficos correspondentes às funções f(x) = x^2 -1 e f(x) = x^2 +1, e compara-los ao gráfico da função f(x) = x^2, Pedro notou a mudança na posição do vértice da parábola em relação ao eixo das abscissas. As respostas R6 e R7 evidenciaram que o estudante percebeu em VT3, a unidade significativa “k”, da representação algébrica. Pedro percebeu que para $k > 1$, o vértice da parábola fica acima do eixo das abcissas.

Entretanto, até este momento da experimentação, Pedro parecia apresentar dificuldades ao associar o vértice da função $f(x) = x^2 + 1$, por exemplo, a coordenadas (0,1), para o estudante, o vértice estava na posição “1” da escala no eixo das ordenadas. Constatou-se que a dificuldade apresentada por Pedro, para identificar as coordenadas do vértice, se deu em razão de que representações gráficas, onde uma das coordenadas é igual a zero, exemplo na Figura 8a, não dispõem das linhas auxiliares para localização dos pares ordenados PR 04, conforme o exemplo apresentado na Figura 8b.

Figura 8 – Representações gráficas a e b



Fonte: Araújo (2018, p. 167).

Desta forma houve a necessidade de uma leitura guiada para explorar as funções $f(x) = x^2 - 1$ e $f(x) = x^2 + 1$. Notou-se na resposta R8, que a partir desta nova leitura, atrelada à explicação do pesquisador, Pedro sanou a dificuldade anterior, constatada nas respostas R6 e R7.

Com relação a VT4, Pedro leu inicialmente as representações algébricas e gráficas das funções: $f(x) = (x + 3)^2$ e c) $f(x) = (x - 2)^2$ Figura 5. A partir da exploração destas representações, extraiu-se um trecho do diálogo entre o pesquisador e o estudante apresentado no Quadro 14.

Quadro 12 – Percepção do estudante – VT4

P	Pesquisador	R	Pedro
9	Você percebeu diferença entre este gráfico da função $(x + 3)^2$, e os gráficos anteriores?	9	“*Sim, nesta o vértice está à esquerda do eixo y, a parábola “passa”, no -3 do eixo x”.*
10	Qual a posição do vértice da parábola para $(x + 3)^2$?	10	*“A parábola “passa”, no -3 do eixo x”.*
11	Caso tivéssemos a função $(x + 5)^2$, qual seria a posição do vértice da parábola?	11	“*à esquerda do eixo y, em -5”.*

Fonte: Araújo (2018, p. 168).

R9 e R10, apontaram que ao ler a representação gráfica da função $f(x) = (x + 3)^2$, e compara-la com as funções do tipo $f(x) = x^2$, o estudante percebeu que alterações na unidade significativa “w”, presente nas representações algébricas, provocam uma translação o vértice da parábola em relação ao eixo das ordenadas. Ressalta–se que ao apresentar ao estudante, diferentes representações (gráfica ou algébrica) de um objeto do conhecimento, simultaneamente ou sucessivamente, não garante aprendizagem.

A apreensão de um determinado objeto do conhecimento, está diretamente ligada aos processos de conversão e coordenação entre as representações de um objeto matemático, entretanto “a conversão das representações requer a identificação das unidades significantes nos registros de saída e de chegada” (DUVAL, 2009, p.100).

Neste sentido, constatou-se que o material com as representações da função quadrática em alto-relevo, braille e a tinta, atrelado a leitura guiada, se mostrou eficaz, visto que o estudante a partir da exploração tátil das representações, percebeu que a alterações nos valores das VT, presentes nas representações gráficas, provocam mudanças nas unidades significativas nas representações algébricas correspondentes e vice-versa.

Na **análise da atividade cognitiva de conversão,** propôs-se a exploração das quatro variáveis táteis e suas respectivas unidades significativas, a partir da atividade 1.

Durante o processo de exploração destas representações, alternou-se a leitura tátil entre as representações algébricas e gráficas, com intuito de relembrar as variáveis táteis e também as unidades significativas presentes em cada representação. Os trechos do diálogo entre o pesquisador e Pedro, escolhidos para análise, são apresentados nos Quadros 13, 14, 15 e 16.

Quadro 13 – Percepção do estudante – Primeira alternativa

P	Pesquisador	R	Pedro
12	Pedro, você pode ler a questão?	12	*"Sim. Associe as representações gráficas com suas respectivas representações algébricas em seguida justifique sua resposta".*
13	Veja quais informações você pode extrair das representações.	13	"*a) f(x) é igual dois x elevado a dois. [...] A concavidade da parábola para cima, o vértice da parábola está em zero. [...] então relaciona com o primeiro gráfico"* (Pedro se refere ao gráfico referente à alternativa i).

Fonte: Araújo (2018, p. 169).

R13 mostrou que Pedro associou corretamente a representação algébrica da função $f(x) = 2x^2$ ao gráfico correspondente (alternativa i). Ao explorar a representação gráfica, o estudante percebeu que a posição do vértice da parábola estava na origem dos eixos, portanto as unidades significativas "k" e "w", das VT 3 e 4 seriam nulas, fazendo com que f(x) =

$2x^2$, fosse à única representação algébrica compatível com o gráfico analisado.

Constatou-se que para chegar à resposta correta, Pedro verificou elementos presentes na representação gráfica, e em seguida os associou a representação algébrica, indício de que ocorreu a operação de conversão das representações no sentido da representação gráfica para a representação algébrica.

Quadro 14 – Percepção do estudante – Segunda alternativa

P	Pesquisador	R	Pedro
14	E sobre a alternativa b?	14	*"***Pedro:** *b) f(x) é igual, tem um sinal de abre parênteses, x menos três, sinal fecha parênteses elevado a dois. A concavidade da parábola está voltada para cima".*
15	Você percebe algum movimento na parábola?	15	**"***sim, o vértice fica em 3 do eixo x, [...] dá pra relacionar com o gráfico iv".*

Fonte: Araújo (2018, p. 170).

Pedro apresentou a resposta correta R15, ao associar a representação algébrica da função quadrática $f(x) = (x - 3)^2$, ao gráfico presente na alternativa iv.

Percebeu-se na resposta R14, que ao explorar as representações (gráfica e algébrica) da função, o estudante relacionou a unidade significativa "w" = 3, na representação algébrica a posição do vértice da parábola em relação ao eixo das ordenadas VT4. Desta forma foi possível constatar a operação de conversão se no sentido da representação algébrica para a representação gráfica.

Quadro 15 – Percepção do estudante – Terceira alternativa

P	Pesquisador	R	Pedro
16	E a alternativa c?	16	*““c) f(x) é igual x elevado a dois, menos dois”.*
17	Como está a concavidade?	17	*“Para cima”*
18	Sobre a translação?	18	*A parábola está no eixo x. Não... no eixo y, o vértice vai estar em menos dois de y. “Então relaciona com o gráfico III”.*

Fonte: Araújo (2018, p. 170).

Em R17, ao analisar a função presente na terceira alternativa, $f(x) = x^2 - 2$, Pedro associou a unidade significativa $a > 0$, com valor da concavidade da parábola VT1. Notou-se em R18, que ele se confundiu momentaneamente, mas logo conseguiu relacionar a unidade significativa “k” =-2, com VT2.

Pedro buscou elementos na representação algébrica para identificar o gráfico correspondente, o que indica que a operação de conversão se deu no sentido da representação algébrica para a representação gráfica.

Quadro 16 – Percepção do estudante – Quarta alternativa

P	Pesquisador	R	Pedro
19	Qual dos gráficos ainda não tem correspondência, com a representação algébrica?	19	*“O gráfico da alternativa iv”.*
20	O que você percebe neste gráfico?	20	*Que o vértice está para o lado em 1 e para cima em 2. Então -1 da equação diz a posição de no eixo x e o 2, diz a posição do eixo y*”.

Fonte: Araújo (2018, p. 171).

Com relação à alternativa d), $f(x) = (x - 1)^2 + 2$, constatou-se que Pedro procurou associar as variáveis táteis 3 e 4 (translação vertical e horizontal de parábola), as unidades significativas “w” = -1 e “k” = 2. Notou-se que a partir da análise das duas variáveis táteis, ele associou corretamente o gráfico a representação algébrica correspondente.

Constatou-se que Pedro procurou encontrar elementos no gráfico que pudessem ser relacionados à representação algébrica, evidenciando o sentido da conversão. Verificou-se que ao associar corretamente os valores das VTs presentes nas representações gráficas i, ii, iii e iv, com as unidades significativas correspondentes nas representações algébricas a, b, c, e d, o estudante conseguiu reconhecer uma mesma “função quadrática”, em duas representações distintas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No primeiro contato com as representações semióticas impressas em alto-relevo, a intervenção do professor por meio de leituras guiadas é essencial para que o estudante cego, atribua significado tátil aos PR empregados na construção dos componentes de cada representação, além de compreender, por exemplo, que uma linha vertical plotada em relevo, com espessura superior, representa naquele momento o eixo (y) do plano cartesiano.

Neste contexto sugere-se que a construção de materiais didáticos deve seguir padrões, que podem funcionar como regras de conformidade, que auxiliarão o estudante na construção de memórias táteis, utilizadas no reconhecimento de novas representações com os mesmos PR.

Pedro, conseguiu estabelecer uma relação de congruência entre as VTs presentes no gráfico, e as unidades significativas correspondentes na representação algébrica, por consequência efetuou coordenadamente a mudança de registro e a operação conversão em ambos os sentidos.

O procedimento de interpretação global das propriedades figurais estabelecido por Duval (2011), se mostrou um instrumento eficaz para apreensão do objeto de conhecimento função quadrática, uma vez que, ofereceu ao estudante, a possibilidade integral de análise das representações gráficas e algébricas por meio dos sentidos remanescentes.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Luis Fernando Ferreira de. Ensino de Matemática para pessoas cegas com uso do software Monet**: criando gráficos táteis para o ensino de função quadrática**. 2018. 212 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Joinville, 2018.

CERQUEIRA, Jonir, B.; FERREIRA, Elise, M. B. Os recursos didáticos na educação especial. **Rev. Benjamin Constant,** RJ, 1 ed. 15, jan./abr. 2000.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

___________. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 266-297, 2012.

___________. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução. Méricles T. Moretti. **Revemat**, Florianópolis (SC), v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

MAIA, Diana. **Função Quadrática**: um estudo didático de uma abordagem computacional. 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MELLO. Elisabete Marcon. **A visualização de objetos geométricos por alunos cegos:** um estudo sob a ótica de Duval. 2015. 170 f. Tese - (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

NUNES, Sylvia e LOMÔNACO, José Fernando Bitencourt. O aluno cego: preconceitos e potencialidades. **Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional**, v. 14, n. 1, p. 105-1120, 2010.

SÁ, Elizabet Dias de; CAMPOS, Izilda Maria de; SILVA, Myriam Beatriz Campolina. **Atendimento Educacional Especializado (AEE):** Formação Continuada a Distância de Professores para o Atendimento Educacional Especializado Deficiência Visual. Brasília: Seesp / Seed / Mec, 2007. 57 p.

TALEB, Alexandre et al. **As condições da saúde ocular no Brasil - 2012**. 1. ed. São Paulo: Conselho Brasileiro de Oftalmologia, 2012. 162 p.

CAPÍTULO XII

ENGENHARIA DIDÁTICA COLABORATIVA SEMIOCOGNITIVA: UMA POSSIBILIDADE METODOLÓGICA DE FORMAÇÃO EM GEOMETRIA PARA PROFESSORES PEDAGOGOS

Selma Felisbino Hillesheim

Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

A formação matemática dos professores pedagogos, especialmente no que tange a geometria, vem sendo percebida como uma questão importante pelas pesquisas no campo da Educação Matemática. Curi (2004) aponta o desconforto dos professores pedagogos frente aos conhecimentos de geometria, bem como na condução do seu processo de ensino e aprendizagem. Lorenzato (1995), procurando evidenciar as possíveis causas para o desnorteamento dos pedagogos na condução do processo de ensino da geometria, aponta que elas podem estar relacionadas à falta de conhecimentos geométricos para conduzir a prática pedagógica e a exagerada importância dada ao livro didático.

Frente a esse contexto conturbado, buscou-se na teoria semiocognitiva de Duval, para a aprendizagem da geometria, subsídios teóricos que pudessem contribuir para a formação continuada de professores pedagogos. Nessa teoria, a aprendizagem da geometria passa pelo aperfeiçoamento do olhar, propiciando condições para que o aluno seja capaz de enxergar os elementos pertinentes numa figura em sinergia com o discurso na língua natural. A percepção de uma figura geométrica passa pelas apreensões cognitivas (DUVAL, 1995). Cada uma dessas apreensões tem suas regras específicas de organização e tratamento. Sendo assim, a aprendizagem da geometria passa pelas apreensões, pela passagem do olhar icônico ao não icônico e, necessariamente, pela mudança dimensional das formas, constituindo-se numa operação cognitiva e semiótica.

Hillesheim (2021), visando desenvolver um programa de formação continuada para professores pedagogos que atendesse a perspectiva semiocognitiva para a aprendizagem da geometria, inspirou-se nas perspectivas metodológicas da Engenharia Didática de 1ª geração (ARTIGUE, 1996), da pesquisa Colaborativa (DESGAGNÉ, 2007), da Engenharia Didática Colaborativa (DEROUET, 2016) em sinergia com os indicativos de Duval (2003, 2004a, 2004b, 2005, 2011, 2014) para a aprendizagem da geometria, e viu despontar uma metodologia de pesquisa intitulada Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva (EDCSC). Essa possibilidade metodológica foi criada para assegurar o protagonismo dos professores na condução do processo de aprendizagem da geometria, por intermédio de um espaço colaborativo que levasse em conta o ponto de vista deles, bem como os seus embaraços nos contextos de ensino.

Nesse ambiente metodológico emergiu a seguinte problemática: qual a compreensão de aprendizagem da geometria que os professores pedagogos constroem, a partir de um programa de formação continuada, desenvolvido num ambiente de Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva? Buscando respostas para esse questionamento, Hillesheim (2021)desenvolveu um programa de formação com professores pedagogos que estavam atuando na rede municipal e estadual de ensino no município de São José – SC, no ano de 2021. Relataremos, a seguir, os principais achados dessa nossa tese.

1 A FORMAÇÃO EM GEOMETRIA DO PROFESSOR PEDAGOGO

Curi (2004) aponta o desconforto apresentado pelas professoras pedagogas frente ao ensino da geometria nos anos iniciais, bem como o desconhecimento dos professores a respeito do desenvolvimento cognitivo propiciado pela aprendizagem da geometria.

Diante da complexidade do saber docente, encontrou-se em Shulman (1986) estudos que abordam essa problemática. Esse autor distingue três categorias de conhecimentos presentes no desenvolvimento cognitivo do professor: conhecimento do conteúdo, conhecimento curricular e conhecimento pedagógico do conteúdo.

O conhecimento do conteúdo refere-se aos conteúdos específicos do componente curricular que o professor leciona. “Este conhecimento se apoia em duas bases: nos livros e nos estudos acumulados historicamente em cada uma das disciplinas; e, no saber acadêmico histórico e filosófico sobre a natureza do conhecimento nesses campos do estudo” (SHULMAN, 2005, p. 12). Dessa forma, o conhecimento diz respeito tanto às compreensões de fatos, conceitos, processos, procedimentos de uma área específica de conhecimento quanto àquelas relativas à construção dessa área.

Assim, pode-se depreender que o professor pedagogo precisa compreender que existem várias maneiras de organização do ensino da geometria, bem como os fundamentos pedagógicos para selecionar alguns em certas circunstâncias e outros em contextos diferentes. Ele também precisa compreender a sintaxe da geometria, pois “os professores têm uma responsabilidade especial no conhecimento dos conteúdos da disciplina, uma vez que eles são a principal fonte de compreensão da matéria para os alunos” (SHULMAN, 2005, p. 12).

O conhecimento curricular, segundo Shulman (1986), representa o arcabouço dos programas destinados para o ensino dos conteúdos em um determinado nível de ensino, pelos materiais didáticos disponíveis e pelo conjunto de características que servem tanto como indicações como contraindicações para a utilização de determinados conteúdos curriculares.

Dessa maneira, o conhecimento do currículo permite ao professor entender e dominar os materiais e programas que servem como “[...] ‘ferramentas para o ofício’ do professor” (SHULMAN, 2005, p. 11). Esse autor indica que o currículo e os materiais associados “[...] são a *matéria médica* da pedagogia, a farmacopeia da qual o professor retira os instrumentos de ensino que apresentam ou exemplificam conteúdosparticulares e corrigem ou avaliam a adequação das realizações dos alunos” (SHULMAN, 1986, p. 10, grifos do autor).

O conhecimento pedagógico do conteúdo vai além do conhecimento do conteúdo em si, e alcança a dimensão do conhecimento da matéria *para o ensino*, sendo considerado um tipo de conhecimento profissional específico dos professores, pois ele

> [...] incorpora os aspectos do conteúdo mais relevantes para serem estudados. Dentro da categoria de conhecimento pedagógico do conteúdo eu incluo, para a maioria dos tópicos regularmente ensinados de uma área específica de conhecimento, as representações mais úteis de tais ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações. [...] também inclui uma compreensão do que

> torna a aprendizagem de tópicos específicos, fácil ou difícil: as concepções e preconcepções que os estudantes de diferentes idades e origens trazem consigo para as situações de aprendizagem dos temas e lições, frequentemente, mais ensinados (SHULMAN, 1986, p. 9)

Se as concepções apresentadas pelos alunos estiverem incorretas, os professores precisam conhecer e mobilizar estratégias que sejam capazes de reorganizar a compreensão dos mesmos. “Como não existem formas de representação mais poderosas, o professor deve ter à mão um verdadeiro arsenal de formas alternativas de representação, algumas das quais derivam da investigação, enquanto outras têm origem na sabedoria da prática” (SHULMAN, 1986, p. 9).

Dessa maneira, a capacidade de transformação do conteúdo é que distingue um professor de um especialista da matéria, fazendo a intersecção entre o conteúdo e a pedagogia, Assim,

> [...] a chave para distinguir a base de conhecimento para o ensino está na intersecção da matéria e da didática, e na capacidade do professor transformar seus conhecimentos da matéria em formas que são didaticamente impactantes e ainda adaptáveis à variedade de habilidades e bagagens que apresentam seus alunos (SHULMAN, 2005, p. 21)

Os professores necessitam, para além da compreensão pessoal do conteúdo, possuir a compreensão dos objetivos, das estruturas do conteúdo, das ideias dentro e fora da disciplina. “Esperamos que ele compreenda o que está a ensinar e, quando possível, que o faça de diversas formas. Tem de compreender como uma determinada ideia se relaciona com outras ideias do mesmo assunto e também com ideias de outros assuntos” (SHULMAN, 2005, p. 19).

Dessarte, pode-se inferir que os professores pedagogos precisam mais do que uma compreensão pessoal da geometria. Eles necessitam uma compreensão especializada desse conhecimento, permitindo-lhes criar condições para que seus alunos aprendam. Para tanto, Hillesheim (2021) desenvolveu um programa de formação para professores pedagogos, considerando o conhecimento pedagógico do conteúdo de geometria. Que para além de contemplar o estudo dos elementos da geometria com as professoras, também preocupou-se com a didática desse conhecimento. Isso tornou necessário o estudo da teoria semiocognitiva de Duval para a aprendizagem da geometria pelo grupo de professores.

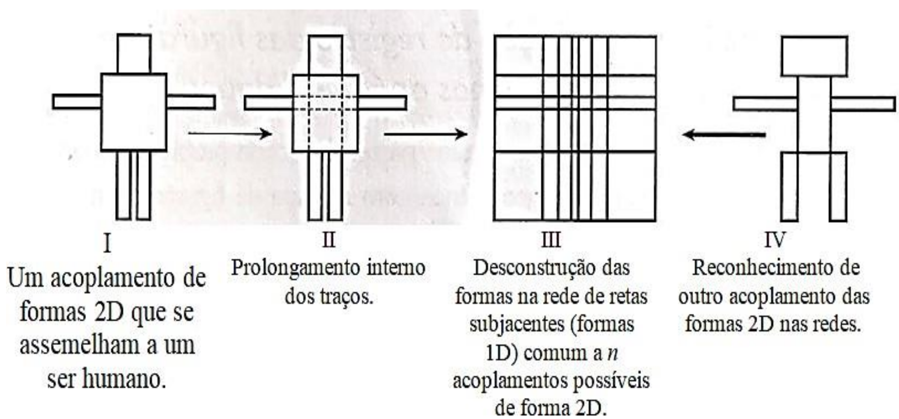
2 A TEORIA SEMIOCOGNITIVA DE DUVAL PARA A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

O aperfeiçoamento teórico foi um dos pontos de destaque do programa de formação promovido por Hillesheim (2021). Durante o seu desenvolvimento, as noções de geometria foram abordadas na perspectiva semiocognitiva, ou seja, visando favorecer a autonomia intelectual dos professores e consequentemente dos alunos. Para tanto, houve a necessidadede que esses passassem a ver uma figura geometricamente.

> Para compreender geometria, os alunos devem aprender a *desconstruir dimensionalmente* as figuras, e não a construí-las, mesmo que utilizem algum programa computacional. Eles precisam também aprender a desconfigurar uma figura para reconfigurá-la de uma outra maneira, quer dizer, independente da hipótese ou da propriedade dada (DUVAL, 2016, p. 26, grifos do autor)

A desconstrução dimensional das formas (nD/(n-1)D) promove a passagem de uma figura à outra, permitindo observar a transformação de uma forma em outra forma de mesma dimensão, mesmo que ela assuma outro formato.

Figura 1: Desconstrução dimensional de uma figura



Fonte: Duval (2011, p. 89)

Duval e Moretti (2018) propõem duas fases para descrever o processo cognitivo que subentende a maneira heurística de ver a desconstrução dimensional das formas 2D/2D. Na primeira fase é preciso prolongar as bordas de um contorno fechado para que apareça uma rede de retas implícitas nele, neutralizando assim, a percepção direta do contorno, como pode ser percebido na figura acima, quando da passagem de I para III. Essa modificação necessária de juntar um novo traçado a uma figura elementar para surgir novas formas 2D é uma atitude “[...] que os alunos não possuem diante de uma ‘figura’” (DUVAL; MORETTI, 2018, p. 86). Isso vai exigir um processo longo de aprendizagem, tendo em vista que tal atitude é adversa à visualização icônica.

> Essa tendência pesada da visualização icônica vai contra o desenvolvimento do que deve tornar o gesto reflexo para poder fazer da geometria: *decompor toda forma*, que se reconhece de emblema em um conjunto de traços ou em qualquer figura de ponto de partida, *em uma configuração de outras unidades figurais* do mesmo número de dimensões ou de um número inferior de dimensões (DUVAL, 2005, p. 16, grifos do autor).

Esse processo de decomposição de uma figura, em que se encontra uma rede subjacente de retas, percebendo as anamorfoses geométricas de uma configuração inicial em outras completamente diferentes (como pode- se observar na passagem de III para IV), constitui a segunda fase da maneira heurística de ver a desconstrução dimensional das formas. Por meio do prolongamento das bordas do contorno fechado, pode-se sair da forma 2D e passar para a forma 1D. Essa rede de configuração 1D permitiu a produção de novas configurações 2D. Pode-se reconhecer em III outras formas de "homens" diferentes da apresentada em IV. "A desconstrução é onipresente em toda definição, em todo raciocínio como em toda explicação em relação às figuras geométricas" (DUVAL, 2011, p. 90).

A desconstrução dimensional desempenha um papel fundamental no processo de visualização em geometria e ela não acontece isoladamente, outros elementos cognitivos fazem-se presentes. Percebe-se que as apreensões assumem um papel significativo nas operações da desconstrução dimensional.

As apreensões dizem respeito aos modos de entrar na maneira de ver em geometria. A apreensão perceptiva é a mais imediata, pois ela permite identificar ou reconhecer, num primeiro modo de olhar, uma forma ou um objeto, seja de uma forma em 2D ou 3D. Mas, apesar de ser importante para introduzir o olhar sobre a figura, e assim poder operar com essas formas, visando à desconstrução dimensional, o seu olhar preso ao contorno das formas pode causar certos empecilhos como, por exemplo, o de não reconhecer três figuras pelo corte diagonal de um retângulo.

A apreensão sequencial, apesar de ser a mais abordada em situações de ensino, também é motivo de dificuldade para muitos alunos. Eles dificilmente conseguem atender às solicitações indicadas nos enunciados de construção ou nas atividades de descrição da reprodução de uma figura. Tendo em vista que "esta ordem depende não só das propriedades matemáticas da figura a ser construída, mas também das restrições técnicas dos instrumentos utilizados [...]" (DUVAL, 1994, p. 126).

A percepção da organização e reorganização do conjunto de formas de uma figura conduz a realização de várias operações de reconfiguração por meio de manipulações, física ou mental, sobre o todo ou parte da figura. Trata-se, portanto da apreensão operatória, que "é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações" (Duval, 2012, p. 125).

No entanto, é imprescindível que a apreensão operatória estabeleça uma relação com a apreensão discursiva, que é de outra natureza. Ela "[...] equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável" (DUVAL, 2012, p. 135). Isso porque a figura por si só não pode representar todas as suas características, ela precisa de uma indicação verbal para se ancorar como representação do objeto matemático.

A visualização e o discurso constituem dois tipos de funcionamento cognitivo que geralmente são tomados em posições opostas no estudo da geometria, contudo, sua articulação é imprescindível para a aprendizagem (DUVAL, 2005). Essa conexão, entre visualização e discurso, implica na correspondência de conteúdos que podem ser estabelecidos entre as duas representações (figural e discursiva), atentando-se à forma que as unidades figurais e as unidades de sentidos podem ser discernidas e organizadas em cada uma das representações que são postas em sinergia cognitiva.

De maneira incontestável, a apreensão discursiva é inseparável da desconstrução dimensional da forma. A figura não apresenta as suas propriedades a partir do seu traçado, mas a partir do que é anunciado. Nessa concepção, a figura geométrica pode tornar-se um complemento do discurso.

Dependendo da maneira que se mobiliza uma figura, podem existir diversas maneiras de vê-la. Duval (2005) agrupa essas diferentes maneiras de ver em geometria, em: visualização icônica e visualização não icônica. Na primeira, a figura é um objeto independente das operações que se efetua sobre ela e pode ser encontrada no olhar botanista e agrimensor. No olhar botanista as propriedades que se destacam nas figuras são as características visuais de contorno. É a entrada mais imediata e evidente. Já no olhar agrimensor o destaque é dado à atividade de realizar medidas sobre um terreno/superfície, passando-as para o plano do papel. Assim, as propriedades geométricas são mobilizadas em torno de medidas.

A visualização não icônica é uma configuração contextualmente destacada de uma organização mais complexa e pode ser percebida pelo olhar construtor e inventor. No olhar construtor, as figuras são construídas com o uso de instrumentos, régua não graduada e o compasso. Desse modo, as propriedades geométricas são verificadas a partir da utilização de instrumentos nas operações dos traçados sobre as formas visuais.

O olhar inventor é aquele que, para resolver um problema, adiciona traços reorganizantes na figura dada, opera sobre a figura e a modifica para descobrir um procedimento de resolução. As propriedades geométricas são mobilizadas por meio de uma rede mais complexa do que a figura dada inicialmente. Esse tipo de olhar exige "[...] uma desconstrução visual das formas perceptivas elementares que se impõem à primeira vista, para poder obter a configuração ou a figura pedida" (DUVAL, 2005, p. 11).

O olhar icônico pode ser considerado como um estágio inicial na aprendizagem da geometria e na desconstrução dimensional das formas. Embora ele não seja suficiente para resolver a maioria dos problemas em geometria, de certa forma, é um primeiro olhar que se debruça sobre a figura. A partir da ampliação do olhar botanista e agrimensor, chegamos ao olhar não icônico (construtor e inventor), que requer muito mais do que o simples reconhecimento das formas. Ele necessita de uma interpretação mais apurada sobre a figura, que perceba suas propriedades por meio de prolongamentos de traços de construção, reorganização visual das formas visualmente conhecidas, para poder decompor toda a forma em unidades de dimensão inferior da figura de partida.

Considerando que, de todas as áreas do conhecimento matemático que o aluno precisa aprender, a geometria é a que requer a mais completa atividade cognitiva, uma vez que "É necessário construir, raciocinar e ver, inseparavelmente" (DUVAL, 2005, p. 6), é que Hillesheim (2021)desenvolveu um programa de formação para professores pedagogos, que visou o processo de aprendizagem da geometria nos anos iniciais, por meio de uma proposta teórico-metodológica inovadora, denominada de Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva.

3 ENGENHARIA DIDÁTICA COLABORATIVA SEMIOCOGNITIVA

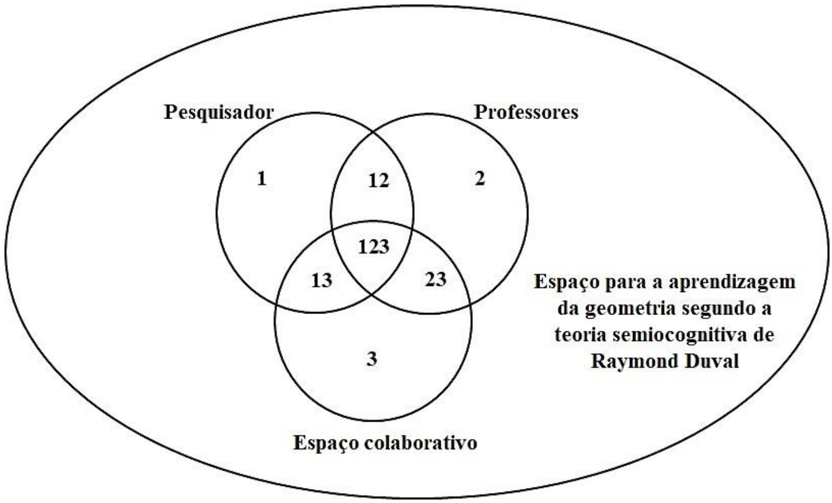
A Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva (EDCSC) é uma metodologia de pesquisa que emergiu da associação entre a Engenharia Didática de 1ª geração (ARTIGUE, 1996), da pesquisa Colaborativa (DESGAGNÉ, 2007), da Engenharia Didática Colaborativa (DEROUET, 2016) em sinergia com os indicativos de Duval (2003, 2004a, 2004b, 2005, 2011, 2014) na construção de um ambiente favorável para a aprendizagem da geometria, considerando a desconstrução dimensional das formas, os olhares, as apreensões em geometria e as funções discursivas da língua.

O despontar dessa possibilidade metodológica surgiu quando Hillesheim (2021) se deparou com a necessidade de oferecer um programa de formação para os professores pedagogos, que considerasse o protagonismo dos professores na condução do processo de aprendizagem da geometria, por intermédio de um espaço colaborativo que levasse em contao ponto de vista deles, bem como os seus embaraços nos contextos de ensino.

Contudo, precisou-se assegurar as respostas das perguntas didáticas, com o propósito de identificar, analisar e produzir fenômenos por intermédio da organização controlada de experimentos didáticos numa dimensão aplicada. Esses experimentos foram elaborados levando em conta a perspectiva semiocognitiva para a aprendizagem da geometria apontada por Duval.

A Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva (EDCSC) pode ser sintetizada pelo esquema da Figura 2.

Figura 2: Esquema metodológico da EDCSC



Fonte: Os autores

Nesse esboço, tem-se a intersecção de três circunferências, em que cada uma delas representa os elementos que compõem o espaço investigativo que, por sua vez, encontram-se mergulhados no espaço para a aprendizagem da geometria, segundo Duval. Os espaços dos círculos demarcados por 1, 2 e 3 dizem respeito, respectivamente, as análises preliminares na perspectiva do pesquisador (o que espera?), dos professores participantes (quais as suas expectativas?) e do espaço colaborativo (o que significa?).

Os espaços demarcados por dois dígitos 12, 13 e 23 compõem a fase da análise *a priori* entre pesquisador e professores participantes (o que o pesquisador espera dos professores participantes?), pesquisador e espaço colaborativo (como o pesquisador enxerga o espaço colaborativo?), e pelos professores participantes e espaço colaborativo (como o os professores participantes enxergam o espaço colaborativo?).

Na intersecção das três circunferências, representado por 123,encontra-se a fase da experimentação, análise *a posteriori* e validação. Nesse espaço, localiza-se todos os integrantes da pesquisa envoltos num ambiente de construção e produção comum.

Nas poucas páginas desse capítulo não conseguiremos detalhar todas as fases da Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva (EDCSC). Para um aprofundamento maior recomendamos a leitura de Hillesheim (2021, p. 145 – 179).

4 PRINCIPAIS ACHADOS DA PESQUISA

O desenvolvimento do programa de formação, com as professoras pedagogas, permitiu constatar que a formação em geometria que elas tiveram durante a sua trajetória estudantil foi tão insignificante que muitas delas nem lembravam mais. Os cursos de graduação em pedagogia, que essas professoras frequentaram, destinaram uma carga horária insuficiente para a formação em matemática e os conhecimentos geométricos nem chegaram a ser contemplados. Esses fatores, entre outros, acabaram contribuindo para que elas adotassem o livro didático como uma das principais fontes de conhecimentos em geometria para subsidiar a sua prática pedagógica.

Nesse contexto problemático, Hillesheim (2021) foi buscar na teoria semiocognitiva para a aprendizagem da geometria, proposta por Duval, elementos que pudessem ampliar a compreensão das professoras sobre esse processo de aprendizagem.

Nos encontros de formação foram realizados estudos teóricos ilustrados por atividades de geometria, que visaram caracterizar os principais conceitos abordados pelos textos. As professoras, na medida em que resolviam as atividades, experienciavam e vivenciavam as operações semiocognitivas requeridas na resolução do problema e assim puderam estabelecer as conexões possíveis entre a teoria e a prática.

É importante destacar que a utilização de instrumentos, na construção de figuras, não era considerada importante pelas professoras no início do programa de formação. Elas tomaram consciência da sua importância para a compreensão das propriedades geométricas, a partir do momento em que experimentaram a utilização dos instrumentos no desenvolvimento das atividades. Conforme o relato das mesmas, elas assumiram o papel de aprendizes, constatando as dificuldades que as crianças experimentam nos modos de entrar na maneira de ver geometricamente uma figura e como a utilização de instrumentos pode facilitar a compreensão das propriedades do objeto geométrico.

Essa experiência mostrou que é possível estabelecer uma via de mão dupla entre a academia e a prática docente dos pedagogos. Visto que, embora as leituras propostas na formação não fizessem parte do universo teórico das professoras participantes da pesquisa, elas foram capazes de se apropriarem de muitos conceitos abordados nesses textos.

O estudo teórico e as atividades de geometria que consideraram as operações semiocognitivas, desenvolvidas durante os encontros,subsidiaram as professoras na elaboração e na aplicação de uma sequência de atividades de geometria, bem como na análise das respostas obtidas de acordo com a perspectiva semiocognitiva. Ou seja, a fundamentação teórica foi primordial para que elas desempenhassem o papel de protagonistas na elaboração de atividades que visaram à aprendizagem da geometria.

É possível que o desenvolvimento deste trabalho tenha apontado para a necessidade de se criar novos formatos de programas de formação para professores pedagogos, não somente em geometria, mas também em outros campos do conhecimento. É provável que a Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva seja uma proposta viável para o desenvolvimento de outros programas de formação.

Pressupõe-se que, mais importante do que dizer aos professores pedagogos *o que fazer* para conduzir o processo de aprendizagem da geometria, é investir na capacitação teórica/conceitual desses profissionais, fazendo-os perceber que um mesmo objeto geométrico pode ser representado por diferentes registros de representação semiótica, onde devem ser consideradas as transformações semióticas de tratamento e conversão. Uma vez que, segundo Duval (2011), o primeiro estágio para a compreensão em matemática encontra-se na conversão, que no caso da geometria, situa-se na coordenação entre a linguagem e a visualização.

A Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva proporcionou as professoras, além de todas as outras aprendizagens, a aprendizagem dos objetos geométricos, abordados durante os encontros de formação, e a aprendizagem para ensinar geometria nos anos iniciais, considerando para além do conteúdo geométrico a importância das operações semiocognitivas envolvidas nos processos de aprendizagens desse campo do conhecimento matemático.

Nas primeiras atividades desenvolvidas com as professoras, elas não tinham consciência da importância da sinergia entre a visualização e o discurso para reconhecer as propriedades figurais. Por exemplo, elas não reconheciam que a figura geométrica permanecia com as suas propriedades ao ser rotacionada.

A dificuldade de operar as figuras, por vezes esteve relacionada à apreensão perceptiva e outras vezes pelo desconhecimento das propriedades elementares do objeto geométrico. Exemplificando, as professoras não diferenciavam as formas geométricas de dimensões diferentes. Então, um retângulo (2D) e um paralelepípedo (3D) eram considerados o mesmo objeto. Isso foi sendo superado gradativamente ao longo dos encontros de formação, mediante a intervenção com questionamentos que procuravam desestabilizar a compreensão que elas tinham. Conforme o relato das professoras, essa atitude serviu para que elas, num processo reflexivo, pudessem se *reconstruir*, como bem destacou a professora P10.

No conjunto de todas as resoluções apresentadas pelas professoras para as atividades de geometria propostas durante os encontros de formação, observou-se que as dificuldades iniciais foram sendo superadas no decorrer do processo. É importante ressaltar que as professoras, na medida em que as dificuldades apareciam durante a resolução das atividades, tomavam consciência das suas limitações e da necessidade de continuar estudando a temática, a fim de melhor conduzir o processo de aprendizagem da geometria. Foi perceptível o desenvolvimento do olhar delas sobre a geometria durante o programa de formação. Aquele primeiro olhar, preso ao contorno imediato das formas foi aos poucos sendo ampliado, alcançando o olhar inventor.

Essa ampliação do olhar das professoras ficou ainda mais evidente no momento da elaboração das atividades que visaram à aprendizagem da geometria pela desconstrução dimensional das formas. A frustração delas em não encontrar nos livros didáticos atividades que contemplassem a perspectiva semiocognitiva para a aprendizagem da geometria, foi um momento marcante. Elas foram desafiadas a deixar de lado o seu maior aliado na condução do processo de aprendizagem da geometria e alçar voos em busca de novos horizontes.

As professoras ao perceberam a ausência de atividades de geometria, que considerem a desconstrução dimensional, nos livros didáticos, ficaram desorientadas, perdidas. Isso porque, como elas mencionaram, não é fácil ensinar aquilo que não se sabe. Então, o que resta é seguir as instruções do livro didático para ensinar geometria. Como se fosse possível aprender geometria nos anos iniciais, limitando-se apenas ao uso do livro didático.

A partir das conversas em grupo, num trabalho colaborativo, as professoras ressignificaram os estudos teóricos e as atividades realizadas durante a formação, e conseguiram transpor esses conhecimentos e elaborar uma sequência de atividades de geometria que considerou a perspectiva semiocognitiva na aprendizagem desta, a qual foi desenvolvida com os seus alunos.

O processo de elaboração das atividades permitiu perceber que a compreensão das professoras sobre o processo de aprendizagem da geometria foi ampliada, pois elas desconsideraram, nesse processo de elaboração, a aplicação de fórmulas e conceitos predefinidos. Mas, pelo contrário, foi por meio da desconstrução dimensional das formas que elas procuraram fazer com que os alunos percebessem as propriedades conceituais da figura, impostas na resolução das atividades.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva foi uma metodologia de pesquisa que emergiu a partir da necessidade de se criar um ambiente que pudesse dar voz ativa aos professores e, ao mesmo tempo, que fosse possível acompanhar as noções de geometria, na perspectiva semiocognitiva, que seriam abordadas durante o desenvolvimento do programa de formação.

Os resultados da pesquisa mostraram que o programa de formação desenvolvido nesse ambiente metodológico proporcionou reflexões sobre o processo de aprendizagem da geometria. O estudo da teoria semiocognitiva contribui para que o grupo de professoras tivesse os seus conhecimentos ampliados no que diz respeito ao campo da geometria. Esse conhecimento possibilitou as professoras tornarem-se protagonistas do seu próprio desenvolvimento profissional, com vistas a uma melhor aprendizagem da geometria pelos estudantes.

A partir do ambiente metodológico da Engenharia Didática Colaborativa Semiocognitiva foi possível perceber que o grupo de professoras, para além delas terem compreendido a importância de conduzir o processo de aprendizagem da geometria pela desconstrução dimensional das formas, contribuindo para a passagem do olhar icônico ao não icônico, elas também perceberam que existe a necessidade de promover um longo trabalho com os alunos para que eles possam desenvolver a habilidade de análise visual das figuras, permitindo que eles possam entrar na maneira de ver geometricamente uma figura.

Em se tratando de uma estrutura multifacetada, como é formação em matemática dos professores pedagogos estamos cientes de que precisamos avançar ainda mais em uma proposta de formação na perspectiva semiocognitiva. Contudo, nossa reflexão abre espaço para outras possibilidades de pesquisa, bem como faz uma alerta para a necessidade de se investir num outro modelo de formação matemática para professores pedagogos.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996. p.193-217.

CURI, Edda. **Formação de professores polivalentes:** uma análise de conhecimentos para ensinar matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos. 2004. 278 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

DEROUET, Charlotte. **La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S.** Etude de la conception et de la mise en oeuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral. 2016. 661 f. Tese (Doutorado) - Didactique des disciplines – Mathématiques, Université Paris Diderot, Paris, 2016.

DESGAGNÉ, Serge. O conceito de pesquisa colaborativa: a ideia de uma aproximação entre pesquisadores universitários e professores práticos. **Revista Educação em Questão**, Natal, v. 29, n. 15, p. 7-35, 2007.

DUVAL, Raymond. Les differents fonctionnements d'une figure dans une démarche geometrique. Répères. **Pont-à-Mousson**, Topiques éditions, n. 17, p. 121-138, 1994.

___________. Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In: SUTHERLAND, R.; MASON, J. **Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995. p.142-157.

___________. Décrire, visualiser ou raisonner : quels “apprentissages premiers” de l'activité mathématique ? **Annales de didactique et sciences cognitives**, IREM de Strasbourg, v. 8, p. 13-62, , 2003.

_____. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução: RESTREPO, Myriam Vega. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía, 2004a.

___________. **Los problemas fundamentales em el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores em el desarrollo cognitivo**. Traducción: RESTREPO, Myriam Vega. Colombia: Merlín I. D. Cali, 2004b.

_____. Les conditions cognitives de l’ apprentissage de la geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, n.10, p. 5-53, 2005. Disponível em: https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/. Acesso em: 5 mar. 2018

___________. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma:** entrar nomodo matemático de pensar os registros de representações semióticas. (Org.) CAMPOS, Tânia M. M. Tradução: DIAS, Marlene Alves. São Paulo: PROEM, 2011.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. **Revemat,** Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 20/01/2020

___________. Rupturas e omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em geometria. In: BRANDT, C. F; MORETTI, M. T. (org.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática.** Ed. Ijuí: Unijuí, 2014. p. 15-38.

___________. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. **Revemat**, Florianópolis, v.11, n. 2, p. 1-78, 2016. Disponível em: periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 2 abr. 2020.

DUVAL, R.; MORETTI, M. T.. Temas do grupo de pesquisa em epistemologia e ensino de matemática do programa de pós-graduação em Educação Científica e tecnológica: significado do que é "fazer matemática". In: CUSTÓDIO, J.F.; COSTA, D.A.; FLORES, C. R.; GRANDO, R. C. (Orgs). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT)**: contribuições para pesquisa e ensino. São Paulo, SP. Livraria da Física, 2018. p. 78-106.

HILLESHEIM, Selma Felisbino (2021). **Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria:** possibilidades semiocognitivas na formação de professores pedagogos. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar geometria? **Educação matemática em revista** - SBEM, Campinas, SP; UNICAMP, n. 4, p. 3-13, 1995.

SHULMAN, Lee. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

______. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de La nuevareforma. Profesorado. **Revista del Currículum y formación del profesorado**, v.9, n.2, p. 1-30, 2005. Disponível em: http://www.ugr.es/~recfpro/Rev92.html. Acesso em: 15 fev. 2017.

CAPÍTULO XIII

MAPEAMENTO DAS PESQUISAS EM TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DO BRASIL DE 1996 A 2019

Crislaine Costa

Daiana Zanelato dos Anjos

Méricles T. Moretti

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a Educação Matemática tem se tornado uma área de grande interesse para pesquisadores e educadores. Diversas teorias e metodologias têm sido estudadas e desenvolvidas com o objetivo de aprimorar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Entre essas teorias, destaca-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, que é uma teoria semiocognitiva de aprendizagem, desenvolvida na década de 80.

Essa Teoria propõe que a aprendizagem em matemática se dá por meio da coordenação de diferentes registros de representação de um mesmo objeto de conhecimento, chamados de registros de representação semiótica. Esses registros são entendidos como diferentes formas de representação do mesmo objeto de conhecimento, como por exemplo, a representação algébrica e a gráfica de uma equação. A coordenação de registros em sala de aula é importante no desenvolvimento da compreensão matemática dos estudantes, pois eles podem ter diferentes conteúdos em diversas formas de representação de um mesmo objeto de conhecimento, levando a aprendizagem ou ao acesso do objeto de conhecimento que é ideal e não perceptível aos sentidos. Dessa forma, a TRRS tem se mostrado um importante recurso teórico-metodológico tanto para a prática pedagógica quanto para a pesquisa sobre a prática pedagógica e a aprendizagem.

A TRRS, embora tenha tido um começo discreto no Brasil a partir de 1996, tem se destacado cada vez mais nos últimos anos e tem sido amplamente estudada na área da Educação Matemática. Diversos estudos têm mapeado a presença dos pressupostos teóricos de Raymond Duval em produções acadêmicas relacionadas à TRRS. Colombo, Flores e Moretti (2008) analisaram teses e dissertações publicadas entre 1990 e 2005, encontrando 30 trabalhos. Brandt e Moretti (2014) examinaram dissertações, teses, artigos e comunicações científicas de 1996 a 2012, totalizando 25 dissertações, 4 teses, 7 artigos e 20 comunicações. Ferreira, Santos e Curi (2013) investigaram publicações de 2002 a 2012, encontrando 80 dissertações e 7 teses. Pontes, Finck e Nunes (2017) analisaram 44 dissertações, 7 teses e 14 artigos publicados entre 2010 e 2015. Esses mapeamentos proporcionaram uma compreensão parcial do uso da TRRS nas pesquisas.

Nesse contexto, o objetivo deste artigo é investigar o uso da TRRS nos Programas de Pós-Graduação do Brasil. Almejamos identificar as pesquisas realizadas sobre a TRRS e destacamos possíveis lacunas que demandem estudos futuros. Para direcionar nossa investigação, elaboramos a pergunta norteadora: quais conhecimentos foram produzidos e publicados sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval?

Para alcançar o objetivo proposto, optamos por realizar um mapeamento do tipo Estado do Conhecimento, utilizando como fonte de dados as dissertações de mestrado e teses de doutorado no recorte temporal de 1996 a 2019.

O texto apresenta-se com a seguinte estrutura: no primeiro tópico apresentamos os conceitos principais da TRRS. No segundo, a metodologia utilizada em nosso mapeamento, bem como as categorias de análise. No terceiro, as análises e discussões dos trabalhados e os resultados obtidos. Por fim, algumas considerações finais da pesquisa e o cenário para possibilidades futuras.

1 PRINCIPAIS ASPECTOS DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A TRRS é o referencial teórico que ancora diversas pesquisas no campo da Educação Matemática, pois fornece elementos para pensar o acesso aos objetos matemáticos, contribuindo para a reflexão sobre o processo de aprendizagem do componente curricular, que tradicionalmente tem sido rotulada como um componente curricular complexo e de difícil compreensão.

Neste sentido, a TRRS nos convida a refletir a aprendizagem da matemática, com foco no funcionamento cognitivo do pensamento matemático, almejando o acesso aos seus objetos de conhecimento. As pesquisas que fizeram uso da TRRS como referencial teórico contribuem para o delineamento de pontos da aprendizagem que necessitam ser repensados, com o intuito de levar ao acesso ao objeto de conhecimento. Dentre esses pontos, Duval (2011) destaca que na matemática, é preciso compreender a distinção entre o objeto e suas representações.

Para Duval (2012) os registros de representações semióticas são os meios que utilizamos para acessar os objetos representados, tais como, escrita numérica, algébrica, as figuras geométricas, gráficos cartesianos. Cada tipo de representação faz parte de um sistema semiótico com características particulares e regras de conformidade. Porém, nem todo sistema semiótico pode ser considerado um registro de representação. Segundo Duval (2009) é necessário atender três atividades fundamentais: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. A formação está ligada a características específicas do objeto, sendo uma maneira de reconhecê-lo. O tratamento se refere a mudança na representação que ocorre dentro do mesmo sistema semiótico, transformando o conteúdo da representação, mas permanecendo no mesmo registro. E a conversão ocorre quando saímos de um registro de partida para chegarmos em outro registro de representação diferente do inicial.

Contudo, a compreensão em matemática e o acesso aos seus objetos matemáticos estão diretamente ligados à mobilização de diferentes registros de representações semióticas e à conversão dessas representações, visto que apenas o tratamento em uma determinada representação não é sinônimo da aquisição do conceito. Nesse sentido, Duval afirma que

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. [...] Do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão (DUVAL, 2003, p. 14)

A aprendizagem da matemática é um processo complexo que envolve a compreensão de conceitos abstratos e a capacidade de representá-los de diferentes formas. Nesse sentido, a TRRS apresenta um importante referencial para refletirmos sobre o acesso aos objetos de conhecimento em matemática, tendo como principal atividade a coordenação entre os diferentes registros de representação. A prática de horizontalizar a aprendizagem requer a orientação de um professor que leve em consideração a coordenação entre os diferentes registros de representação, a qual é fundamental para que o estudante possa acessar efetivamente o objeto de conhecimento.

Uma característica que faz da TRRS um referencial polivalente para a pesquisa em Educação Matemática, é que possui um vasto campo de conceitos que permite analisar diferentes situações dos processos intelectuais da aprendizagem. Por isso, para fins de sistematização, apresentamos os principais aspectos teóricos da TRRS que resumem os diferentes eixos que escolhemos utilizar para a nossa análise, para além dos conceitos de tratamento e conversão. São eles: congruência semântica, funções discursivas, apreensões em geometria e aprendizagem da álgebra. A seguir, forneceremos uma breve explicação sobre cada um desses aspectos teóricos.

A **congruência semântica** segundo Duval (2012c, p. 100), ocorre quando duas expressões são consideradas sinônimas ou referencialmente equivalentes, mas não necessariamente semanticamente congruentes, o que pode resultar em um custo cognitivo significativo para a compreensão. A congruência semântica refere-se à habilidade de transitar de uma representação semiótica para outro sistema semântico de forma espontânea e com pouco esforço cognitivo. Para que haja congruência semântica, Duval (2012, c) estabelece três critérios que devem ser respeitados:

a) correspondência semântica entre os elementos significantes, ou seja, a unidade significante do primeiro registro deve estar relacionada a uma unidade significante do segundo registro;

b) univocidade semântica terminal, o que significa que cada unidade significante no registro de partida deve corresponder a uma unidade significante no registro de chegada;

c) as unidades devem ter a mesma ordem de organização dentro dos dois registros de representação.

Sendo assim, caso um dos critérios mencionados não seja atendido, se instala o fenômeno da não congruência semântica entre os registros de representação. De acordo com Duval (2009), acontecem bloqueios na aprendizagem nas situações em que o estudante enfrenta casos de não congruência na conversão. Segundo Duval (2011, p. 124), quanto menor for a congruência entre duas expressões, maior será a distância cognitiva entre suas representações e, consequentemente, mais difícil será para o estudante acessar o objeto de conhecimento. O autor reconhece que trabalhar com problemas que apresentam expressões sem congruência semântica é desafiador, mas ressalta a importância de estudar essas situações, já que é com essas situações que se pode perceber conteúdos distintos do mesmo objeto de conhecimento.

Outro aspecto da TRRS, são as **funções discursivas**, que se voltam para a linguagem. Elas são um conjunto de processos cognitivos utilizados na resolução de problemas matemáticos. Essas funções envolvem a compreensão e interpretação de textos e enunciados, a seleção e organização das informações, a formulação de hipóteses e estratégias de resolução, e a verificação e validação dos resultados obtidos.

As funções discursivas são os elementos indispensáveis para haver a produção de um discurso em um sistema semiótico (DUVAL, 2004). Essas funções também admitem algumas classificações conforme sua funcionalidade em um discurso, são elas: função referencial (designação de objetos), apofântica (falar sobre os objetos por meio de enunciados), expansão discursiva (interligar preposições de forma coerente) e reflexividade discursiva (indicar o estatuto, modo ou valor da expressão).

É importante destacar que "[...] as funções não são espontâneas, por isso, é preciso que o professor as compreenda e tenha consciência de que permeiam a aprendizagem matemática" (SABEL e MORETTI, 2022, p. 19). Desse modo, a partir da compreensão desses conceitos, o professor terá condições de analisar as produções escritas dos estudantes tanto do ponto de vista matemático, quanto cognitivo. Afinal, a língua natural na aprendizagem matemática age como um registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento cognitivo matemático (DUVAL, 2004).

Já os conceitos voltados as **apreensões em geometria** de acordo com Duval (2005, 2011, 2012a, 2012b), passam por três processos cognitivos: visualização, construção e raciocínio. O processo de visualização envolve a exploração heurística de uma situação complexa, enquanto a construção pode ser trabalhada através de um modelo, em que as ações realizadas e os resultados observados associam-se aos objetos matemáticos representados. O raciocínio, por sua vez, envolve o processo de discurso para a prova e a explicação.

Além disso, Duval (2011) destaca a importância dos tratamentos figurais, uma vez que a figura traz em si um complicador que é a interpretação imediata pela percepção. Para o caso da visualização de figuras geométricas, é necessário um trabalho articulado entre dois registros de representação, a figura e o discurso, para haver o que o autor chama de sinergia.

Para compreender os conceitos geométricos, é essencial trabalhar as quatro apreensões em geometria, que são, perceptiva, discursiva, operatória e sequencial, em sala de aula, com o auxílio de diferentes registros de representação. A apreensão perceptiva refere-se à habilidade de reconhecer e visualizar formas geométricas presentes em uma figura, enquanto a apreensão discursiva requer a capacidade de utilizar a linguagem para descrever e raciocinar sobre esses conceitos. A apreensão operatória envolve a capacidade de realizar operações geométricas como medição e desenho, enquanto a apreensão sequencial diz respeito à habilidade de entender a relação entre os conceitos geométricos em uma sequência lógica e progressiva (DUVAL, 2012a). Juntas, essas quatro apreensões fornecem uma base sólida para a compreensão da geometria.

Outro ponto importante que a Teoria destaca é a necessidade de desenvolver a habilidade de interpretar figuras geométricas de maneiras diversas. Ensinar a observar a geometria pode ajudar os alunos a interpretar as figuras de forma diferente e a acessar os conceitos geométricos. Conforme Moretti e Hilleshem (2018, p. 15), "apreender a olhar em geometria é aprender a fazer os olhares deste percurso", mas essa habilidade não é espontânea e requer um investimento didático e pedagógico por parte do professor.

Em sua Teoria, Duval (2011) discute também a complexidade da **aprendizagem da álgebra** e destaca a importância de compreender diferentes formas de representação, incluindo gráficos, tabelas e equações. Na álgebra, não é apenas a mobilização de letras que é importante, mas também as operações discursivas que designam objetos por meio da língua natural ou formal. A TRRS defende a necessidade de compreender como essas formas de representação se relacionam e como podem ser usadas para resolver problemas algébricos, além de ressaltar a importância de ensinar a linguagem matemática junto com a álgebra para facilitar o acesso aos objetos de conhecimento em álgebra. Duval (2011) argumenta que o ensino da álgebra deve priorizar a compreensão dos conceitos em vez da memorização de fórmulas e procedimentos, e isso representa uma mudança no pensamento sobre o ensino da álgebra que muitas vezes é reduzido à mobilização de letras.

Para promover a compreensão conceitual na aprendizagem da álgebra, é necessário adotar uma abordagem pedagógica que privilegie a exploração e a reflexão dos estudantes, conforme defendido por Duval (2011). É fundamental que os alunos tenham a oportunidade de investigar as diferentes formas de representação, incluindo gráficos, tabelas e equações, e compreender como essas formas se relacionam. A identificação da linguagem matemática presente em cada uma dessas representações é um aspecto essencial para a compreensão conceitual. Os alunos devem ser incentivados a investigar o significado de cada símbolo e a reconhecer a linguagem matemática presente nas equações e fórmulas.

No tópico seguinte, explicamos nossos procedimentos metodológicos para, em seguida, iniciarmos a análise dos dados.

2 O PERCURSO METODOLÓGICO

As pesquisas do tipo Estado do Conhecimento, conforme descritas por Gil (2010), desempenham um papel fundamental ao proporcionar uma visão abrangente do conhecimento já desenvolvido em um determinado tema. O presente estudo apoiou-se na pesquisa bibliográfica do tipo Estado do conhecimento, com o objetivo de investigar como a TRRS está sendo utilizada na produção de conhecimento nos diversos Programas de Pós-Graduação do país.

Dessa maneira, foram mapeadas e analisadas produções acadêmicas de Programas Nacionais de Pós-Graduação, no período compreendido de 1996 a 2019, em dissertações e teses que utilizaram a TRRS. O recorte temporal justifica-se por ser a partir do ano de 1996 que as primeiras pesquisas que se apoiavam na TRRS foram divulgadas no Brasil. Formamos assim o corpus da investigação com o total de 266 trabalhos, sendo 225 dissertações e 41 teses. Com todos esses documentos reunidos, a próxima etapa envolveu a análise dos títulos, resumos, introduções e conclusões de todas as dissertações e teses identificadas, a fim de determinar se esses estudos estavam alinhados com os propósitos de nossa pesquisa. Com base nessa leitura, procedemos à elaboração do fichamento dos dados relevantes.

Com base no fichamento criamos quatro categorias analíticas para analisar os dados. A primeira delas é referente ao objeto matemático investigado, que será útil para identificar as principais dificuldades no ensino e aprendizagem, além de destacar quais objetos não foram suficientemente estudados. A segunda categoria é o nível de abrangência, que indica em qual etapa ou modalidade da educação as pesquisas foram realizadas. A terceira categoria diz respeito à metodologia utilizada nas pesquisas, permitindo-nos identificar as estratégias e abordagens mais comuns na pesquisa. Por fim, a quarta categoria é a análise dos aspectos teóricos da TRRS abordados nas pesquisas. Essas categorias orientaram nossas análises no momento de tecer nossas considerações a respeito do mapeamento.

3 ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Apresentaremos nesta última seção um resumo dos resultados obtidos em nosso mapeamento, a respeito das considerações gerais sobre as 266 pesquisas selecionadas.

Identificou-se uma concentração significativa de trabalhos relacionados à investigação da TRRS na instituição de ensino superior Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), correspondendo aproximadamente a 37% dos estudos analisados. Esses resultados indicam que a PUC/SP detém a maior representatividade nas produções científicas que abordam a temática em questão. Em segundo lugar, encontra-se a Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), que contribuiu com aproximadamente 9% das publicações no mesmo período.

As primeiras pesquisas são da década de 1990, nas instituições citadas anteriormente, o que demonstra um início lento nas pesquisas acadêmicas com foco na TRRS, muito provavelmente pelo fato de a TRRS ter surgido na França na década de 1980, chegando ao Brasil no decênio seguinte. A partir do ano de 2006 é possível notar um número maior de trabalhos, e outras instituições produzindo conhecimento científico com base nos registros de representação semiótica, porém sem superar o quantitativo da PUC/SP e da UFSC.

O emprego da TRRS esteve presente nas mais variadas pesquisas, embora na maioria dos casos, a preocupação do pesquisador sempre esteve voltada para as dificuldades encontradas em sala de aula e aprendizagem. Para conseguir analisar os nossos achados, decidimos nos debruçar em quatro categorias de análise: objeto matemático, nível de abrangência, metodologia e aspectos da TRRS.

Em nossas análises, verificamos os conteúdos matemáticos mais investigados nas pesquisas, o que revela os que possuíram relevância para os pesquisadores. Por outro lado, também é um bom indicativo das lacunas que ficaram e que podem ser fruto de investigações futuras. Devido a ampla diversidade de conteúdos pesquisados, resolvemos agrupá-los em unidades temáticas para sistematizar essa categoria de análise, conforme definidas no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1: Classificação Por Unidade Temática

Unidades Temáticas	Dissertações	Teses	Total
Números e Operações	38	4	42
Álgebra e Álgebra Linear	36	7	43
Funções	47	6	53
Geometria/Grandezas e Medidas	57	9	66
Estatística e Probabilidade	19	2	21
Cálculo Diferencial e Integral	14	6	20
Outras Situações	14	7	21

Fonte: dos autores

Dentro de cada unidade temática foi possível observar um número expressivo e variado de conteúdos matemáticos abordados, o que nos leva a acreditar que a TRRS pode estar associada ao ensino e aprendizagem em todos os níveis de ensino e áreas da matemática. Podemos observar que, muitos pesquisadores optaram pela aplicação das pesquisas em sala de aula, sendo a sequência didática a metodologia de investigação mais utilizada.

Algumas pesquisas apontaram importantes contribuições sobre a relação entre o uso da TRRS e a modelagem matemática como alternativa para abordar determinados conteúdos matemáticos. Costa (2016), por exemplo, investigou como se dá a compreensão matemática por meio da modelagem, utilizando a Teoria para analisar os registros produzidos por estudantes do Ensino Médio. Segundo a pesquisa, a compreensão da matemática ocorre na medida em que o estudante entende o objeto matemático e é capaz de relacioná-lo adequadamente por meio de representações e transformações. Esses estudos demonstram que, independentemente de a TRRS ser uma teoria de aprendizagem, ela pode contribuir significativamente com a modelagem matemática, que é uma metodologia de ensino.

Outro destaque está nas pesquisas voltadas para a Educação Matemática Inclusiva. Embora o número de pesquisas que relacionam a TRRS com este subcampo da Educação Matemática ainda seja relativamente baixo, apenas 8 pesquisas do nosso mapeamento têm buscado este tipo de aproximação, a abordagem inclusiva vem ganhando notoriedade na área, fortalecendo e ampliando este campo. A utilização de diferentes formas de representação pode auxiliar os estudantes que são públicos da Educação Especial a acessar os objetos de conhecimento que são inacessíveis sem elas. Além disso, a TRRS pode permitir os professores identificar e lidar com as dificuldades que seus alunos enfrentam na aprendizagem da matemática

A partir da análise das pesquisas, constata-se que existe produção científica em todos os níveis da Educação Básica, do Ensino Superior e na formação continuada, embora haja uma maior concentração de pesquisas com enfoque no Ensino Médio, com 31%, seguido das pesquisas que investigaram os anos finais do Ensino Fundamental, que totalizaram 21%. Sendo assim, notamos uma carência nas pesquisas voltadas para os anos iniciais do Ensino Fundamental, que compreendem apenas 6% do quantitativo do nosso mapeamento. Acreditamos que um fator decisivo para este baixo número está na formação inicial do pesquisador, visto que, quase a totalidade possui formação em matemática e, portanto, tem habilitação apenas para os anos finais e Ensino Médio, exatamente onde encontramos uma quantidade superior de pesquisas. Desse modo, parece esperado que a maior parte dos pesquisadores escolheram níveis de ensino que já atuaram ou ainda atuam. Todavia, faz-se necessário também ampliar as pesquisas em Educação Matemática na infância que utilizem a TRRS.

Com relação ao Ensino Superior apenas 16,54% das investigações procuraram na TRRS o aporte teórico necessário para desenvolver a pesquisa. Sendo que, a maioria desenvolveu uma sequência didática, utilizando a Teoria para investigar ou introduzir algum conceito matemático. Ainda no ensino superior, seis trabalhos se destacam por investigarem os cursos de engenharias, ciências da computação, física e administração, quanto à compreensão dos estudantes em relação a conhecimentos matemáticos.

Os estudos voltados à análise de livros didáticos compreenderam 11,65% do nosso mapeamento e se concentraram em analisar como determinado conteúdo matemático foi abordado à luz da TRRS, mostrando as diferentes formas de representação presentes nos livros didáticos. Grande (2006) explica que o interesse em pesquisar livros didáticos se deve ao fato de que eles são amplamente utilizados pelos professores e contêm vários registros de representação que podem ser analisados para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem. É relevante observar que, em diversas situações, os professores contam apenas com os livros didáticos como fonte de material para o planejamento das aulas.

A maioria das pesquisas realizadas com professores, correspondendo a 11,28% do mapeamento, revelou uma preocupação com o processo de ensino e aprendizagem, buscando adotar diferentes estratégias para capacitar professores em formação inicial ou continuada. Para atingir seus objetivos, a maioria dos pesquisadores ofereceu cursos, oficinas, aplicou questionários/entrevistas ou realizou observações.

Com relação à metodologia das pesquisas, constata-se que, 29% das pesquisas mapeadas adotaram a Engenharia Didática, tornando-a a metodologia mais empregada. Essa preferência dos pesquisadores parece ser justificada pelo fato de a Engenharia Didática ser uma abordagem direcionada à Educação Matemática, com suas raízes nos estudos da Didática Francesa. Ao escolherem essa metodologia, os pesquisadores embasam-se na possibilidade de vivenciar o contexto da sala de aula durante suas investigações. Isso se deve aos diversos elementos fornecidos pela Engenharia Didática, que contribuem para a organização e validação dos dados coletados, como a análise a priori, experimentação e análise a posteriori.

Ao discutirmos os conceitos da Teoria nas pesquisas, demos mais atenção aos aspectos de formação, tratamento e conversão; congruência e não congruência semântica; apreensões em geometria; funções discursivas e aprendizagem da álgebra. É importante destacar que cada uma das pesquisas pode ter contemplado mais de um aspecto teórico, mencionado anteriormente.

Ao analisarmos os dados obtidos, constatamos que cerca de 96% das pesquisas utilizaram as operações de formação, tratamento e conversão dos diversos registros que representam o objeto matemático investigado. Estes conceitos são primordiais para que o objeto não se confunda com a representação. Dessa forma, os estudos têm se concentrado na aplicação dos conceitos mais familiares da TRRS, que são a base para compreender o trabalho com diferentes registros e fornecer uma perspectiva mais prática (DUVAL, 2012b).

No entanto, os outros aspectos da Teoria, que se aprofundam em discussões mais teóricas sobre as operações cognitivas da aprendizagem matemática, têm recebido menos atenção nas pesquisas mapeadas. A aprendizagem da álgebra, em particular, tem sido pouco abordada, provavelmente devido ao fato de que são estudos mais recentes de Duval.

Constatou-se que cerca de 39,47% das pesquisas investigadas utilizaram a congruência semântica e não congruência semântica da TRRS. Essa abordagem teórica aponta que os fatores de não congruência semântica podem impedir a coordenação dos diferentes registros de representação de um objeto matemático, o que pode dificultar a aprendizagem da matemática.

Sendo assim, as investigações que abordam a congruência semântica são cruciais para compreender como os alunos transitam em diferentes registros de representação semiótica e se conseguem estabelecer correspondência entre eles. Ademais, essas pesquisas podem ajudar a identificar as dificuldades que os estudantes enfrentam nesse processo de coordenação de múltiplos registros, bem como a sugerir estratégias didáticas que possam contribuir para a superação dessas dificuldades.

Algumas pesquisas concederam especial atenção nas investigações referentes às apreensões em geometria, totalizando 14,29% do nosso mapeamento. As pesquisas abrangeram todos os níveis de ensino, mas algumas se concentraram em apenas algumas apreensões em vez de explorar todas elas. Um exemplo que trata de apreensão em geometria é a pesquisa de Bolda (1997) que teve como objetivo desenvolver a competência heurística em geometria através da reconfiguração. Para isso, a pesquisadora investigou as apreensões em atividades de geometria elementar voltadas para o Ensino Fundamental. Os resultados do estudo revelaram que a abordagem das apreensões em geometria pode melhorar o processo de ensino e aprendizagem, visto que possibilita aos alunos desenvolver habilidades heurísticas e compreender de forma mais aprofundada os conceitos matemáticos.

Referente às funções e operações discursivas descritas por Duval (2004) que são uma fonte valiosa de discussões sobre o papel da linguagem e da escrita na aprendizagem matemática, no entanto, essas questões são frequentemente negligenciadas pelas pesquisas e representam apenas 6,02% das investigações incluídas neste estudo, possivelmente devido à sua complexidade teórica.

Podemos afirmar, portanto, que as funções discursivas têm sido pouco abordadas pelos estudos na área. Embora algumas pesquisas tenham utilizado as funções discursivas como referencial de análise de discurso em algum momento da pesquisa, não encontramos nenhum estudo que tenha se dedicado especificamente a explorá-las em si mesmas e a discutir seu papel e implicações para a aprendizagem da matemática. Portanto, são necessárias mais pesquisas que investiguem e tragam contribuições práticas para a compreensão da importância das funções e operações discursivas na Educação Matemática.

Destaca-se ainda a pesquisa realizada por Rocha (2009) que fez uso da Teoria sem, necessariamente, abordar os mesmos aspectos investigados neste artigo. O objetivo dessa pesquisa foi o desenvolvimento de um ambiente computacional para o ensino da geometria hiperbólica para a formação de professores. Embora tenha utilizado outras teorias, o pesquisador também se baseou em estudos de Duval (1993) sobre a compreensão das demonstrações matemáticas. Duval apresenta uma estrutura ternária que deve estar presente em uma demonstração: a premissa (hipótese), as regras (axiomas, definições, teoremas) e a afirmação (tese).

Na pesquisa o Rocha (2009) empregou estes conceitos para analisar e estruturar as atividades da sequência didática que incluíam demonstrações, o que resultou na conclusão de que as demonstrações devem ser ensinadas de forma orientada, uma vez que não é uma atividade naturalmente realizada pelos alunos. Achamos relevante mencionar este exemplo, pois, apesar de não ter utilizado diretamente a TRRS, Rocha (2009) se beneficiou das contribuições de Duval para sua pesquisa.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizar esse mapeamento abrangente, pudemos compreender melhor a produção acadêmica relacionada à TRRS nos Programas de Pós-Graduação do país. Nossos resultados indicam que essa Teoria tem sido amplamente adotada como fundamentação teórica em pesquisas brasileiras para compreender a aprendizagem de uma variedade de objetos de conhecimento em matemática. A TRRS oferece a flexibilidade necessária para aplicar suas ideias em diferentes contextos e perspectivas. Essa investigação resultou em achados que revelam o potencial da TRRS em pesquisas no campo da Educação Matemática.

As pesquisas analisadas evidenciaram predominância na engenharia didática, quanto a metodologia de pesquisa. Essa abordagem tem sido amplamente utilizada para investigar a aplicação prática da TRRS no contexto educacional. Através da engenharia didática, os pesquisadores têm buscado desenvolver e aprimorar estratégias e materiais de ensino que promovam a utilização eficaz dos registros de representação semiótica no processo de aprendizagem matemática.

Quanto ao nível de abrangência dos estudos, constatou-se que o Ensino Médio foi a etapa mais investigada em relação à aplicação da TRRS. Destaca-se que a maioria dos pesquisadores têm concentrado seus esforços em compreender de que forma a Teoria pode ser aplicada de maneira efetiva para promover uma aprendizagem significativa nessa etapa escolar. Em segundo lugar, encontram-se os anos finais do Ensino Fundamental, onde também foram realizadas pesquisas significativas com foco na utilização da TRRS. No entanto, verificou-se uma escassez de estudos voltados para os anos iniciais, o que evidencia a necessidade de maior investigação nesta área específica. Essa lacuna oferece uma oportunidade promissora para pesquisas futuras e um potencial de expansão dos benefícios da TRRS.

Em linhas gerais, a maioria das pesquisas se concentraram nos aspectos teóricos de formação, tratamento e conversão e na discussão sobre a variedade de registros de representação. De maneira semelhante, notamos que o fenômeno da congruência e não congruência semântica foi abordado por diversos pesquisadores, o que era esperado, uma vez que está diretamente relacionado ao conceito de conversão, elemento chave na Teoria. Esse aspecto parece estar solidificado e vem sendo cada vez mais utilizado como referência teórica em pesquisas sobre a TRRS.

Notamos que, embora em menor número, há ainda uma quantidade significativa de estudos dedicados às apreensões em geometria. Além disso, essa área da Teoria parece estar em expansão, pois percebemos que o número de trabalhos que a exploram vem crescendo nos últimos anos.

No entanto, observou-se aspectos da Teoria que foram pouco explorados, com destaque para as funções discursivas e à aprendizagem da álgebra, indicando a necessidade de mais investigações neste campo. Embora a aprendizagem da álgebra seja um tema comum em muitas pesquisas sobre objetos algébricos, notamos que apenas um estudo abordou esse aspecto de forma parcial. As discussões de Duval sobre a aprendizagem da álgebra ainda são recentes e estão em andamento, o que sugere que esse é o aspecto que mais necessita de expansão e exploração em pesquisas futuras.

Esse mapeamento constatou que a TRRS ainda possui várias áreas a serem exploradas. Considerando essas lacunas, acreditamos que este estudo pode fornecer caminhos para futuras pesquisas no campo da Educação Matemática, utilizando a TRRS como referencial teórico.

REFERÊNCIAS

AMARAL, Fábio Muniz do. **Validação de sequência didática para (re)construção de conhecimentos estatísticos por professores do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2010.

BOLDA, Cláudia Regina Flores. **Geometria e visualização:** desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. O cenário da pesquisa no campo da educação matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Perspectiva da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 7, n. 13, p. 22-37, 2014.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em educação matemática: pontuando tendências. **Zetetiké,** Campinas, v. 16, n. 29, p. 41- 72, 2008.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes:** uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos. Tese de Doutorado em Educação. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

COSTA, Leandro Meneses da. **A compreensão em atividades de modelagem matemática : uma análise à luz dos registros de representação semiótica**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. de Méricles T. Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012a.

______. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Trad. de Méricles T. Moretti. **Revemat**. Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012c.

________. Les conditions cognitives de l’apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In: **Annales de didactique et sciences cognitives**. V. 10. 2005, p. 5-53.

________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. de Méricles T. Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012b.

________. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** Entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Trad. de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

________. Registres de représentation sémiotique et fonctionnemente cognitif de la pensée. In: **Annales de Didactique et de Sciences cognitives**. IREM, Strasbourg, 1993.

________. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

________. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais (fascículo I). São Paulo: Livraria da Física, 2009.

________. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

DUVAL, R.; CAMPOS, T. M. M.; BARROS, L. G. X.; DIAS, M. A. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: introduzir a álgebra no ensino: qual o objetivo e como fazer isso. São Paulo: PROEM, 2015.

FERREIRA, F. A.; SANTOS, C. A. B.; CURI, E. Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**a, Recife, v. 4, n. 2, p. 1-14. 2013.

FRANCISCO, Mateus Bibiano. **Desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos com transtorno do espectro autista (TEA):** um estudo à luz da teoria dos registros de representação semiótica. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Itajubá, 2018.

GRANDE, André Lúcio. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006.

MELLO, Guiomar Namo de. Formação inicial de professores para a educação básica uma (re)visão radical. **Revista São Paulo em Perspectiva**, v. 14, n. 1, jan/mar. 2000.

Moretti, MT, & Hillesheim, SF (2018). Linguagem Natural e Formal na Semiosfera da Aprendizagem Matemática: o caso da Geometria para a formação do Pedagogo. Em Teia | **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**

PONTES, H. M. S; FINCK, C. B; NUNES, A. L. R. O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. **Educação Matemática**, São Paulo, v. 19, n. 1 (2017).

SABEL, E.; MORETTI, M. T. A Contribuição Das Funções Discursivas Na Análise Da Produção Dos Estudantes Na Resolução De Problemas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 11, n. 26, p. 338–360, 2022. Doi: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.26.338-360

SOARES, M. B.; MACIEL, F. **Alfabetização.** Brasília: MEC/Inep/Comped, 2000. Série Estado do Conhecimento, n. 1.

ROCHA, Marília Valério. **Uma proposta de ensino para o estudo da geometria hiperbólica em ambiente de geometria dinâmica.** Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2009.

CAPÍTULO XIV

A NOÇÃO DE REGISTRO EM RAYMOND DUVAL

Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

A ideia de registro é chave na proposta semiocognitiva de aprendizagem intelectual de Duval (1995) que compreende três polos constitutivos (ver Figura 1C): significante, significado, objeto (referência). Tal construção mostra a influência direta de três autores que abordaremos a seguir. Também traremos para discussão até que ponto um conjunto de elementos semióticos pode ser considerado como sendo um registro no sentido em que Duval (1995) define.

1 AS INFLUÊNCIAS

1.1 – Ferdinand de Saussure

Saussure, em seu curso de linguística, afirma que:

> Chamamos de *signo* a combinação do conceito e da imagem acústica: mas no uso corrente, esse termo designa geralmente a imagem acústica apenas, por exemplo uma palavra (*arbor* etc.). Esquece-se que se chamarmos a *arbor* signo, é somente porque exprime o conceito "árvore", de tal maneira que a ideia da parte sensorial implica a do total (SAUSSURE, 2008, p. 81)

A partir dessa ideia de signo, a influência de Saussure (2008) na elaboração por Duval (1995) do termo registro provém de outras afirmações tais como:

(1) o conteúdo da representação depende da forma, ou seja, muda a forma muda o conteúdo. Assim, 1, 3 – 2, 10^0 representam a mesma coisa, mas possuem conteúdos (sentidos) diferentes;

(2) uma representação só é importante no seio de um sistema de representação.

A forma e conteúdo da forma são inseparáveis como diz Saussure na citação seguinte em seu curso de linguística.

> A língua é também comparável a uma folha de papel: o pensamento é o anverso e o som é o verso; não se pode cortar um sem cortar, ao mesmo tempo, o outro; ... (SAUSSURE, 2008, p. 132)

Saussure (2008, p. 34) afirma que “A língua e escrita são dois sistemas diferentes de signo”, e ainda para mostrar a importância de um signo no seio de um sistema de signo afirma que

> ... é uma grande ilusão considerar um termo simplesmente com a união de certo som com um certo conceito. Defini-lo assim seria isolá-lo do sistema do qual faz parte; seria acreditar que é possível começar pelos termos e construir o sistema fazendo a soma deles, quando pelo contrário, cumpre partir da totalidade solidária para obter, por análise, os elementos que encerra (além SAUSSURE, 2008, p. 132)

Saussure sobre o significado de um signo, avança o conceito de valor do signo: os valores dos signos são constituídos: “1.º por uma coisa *dessemelhante*, suscetível de ser *trocada* por outra cujo valor resta determinar; 2.º por coisas *semelhantes* que se podem comparar com aquela cujo valor está em causa.” (SAUSSURE, 2008, p. 134).

O conceito de valor do signo reforça a ideia de sistema de representação, uma vez que o valor só é comparável aos valores de outros signos no interior do mesmo sistema, no caso em tela, da língua: “[a palavra] fazendo parte de um sistema, está revestida não só de uma significação, como também, e sobretudo, de um valor, e isso é coisa muito diferente.” (SAUSSURE, 2008, p. 134). Para Duval, em concordância com Saussure, afirma que:

> O significante e o significado são, cada um deles, valores no seio de uma rede de oposição, estas redes constituindo sistemas semióticos. Isto quer dizer que um significante é um significante não em razão das características perceptíveis, de sua forma material, mas em razão do valor que toma em oposição a entidades com as quais forma um conjunto (DUVAL, 1999, p. 21)

Esta citação de Duval frisa bem, tendo em vista a utilização do signo, a diferença entre o modo fenomenológico de produção (características perceptíveis) e o seu aspecto estrutural (valor que toma em oposição a entidades com as quais forma um conjunto).

“O ´famoso´ Curso [de Linguística geral] acabou por guardar a perspectiva de linguagem saussuriana, que ficou conhecida como estruturalismo (apesar de Saussure nunca ter usado tal termo, mas ter falado de um sistema de signos linguísticos)” (EL-JAIK (2016, p. 205).

1.2 - Charles Sanders Peirce

Para Peirce o signo é composto de três polos: o signo (ou *representamen*), o interpretante e o objeto:

> [228] Um *signo*, ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto* (PEIRCE, 2000, p. 46)

Este autor destaca, ainda, que o signo "Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que eu, por vezes, denominei *fundamento* do representâmen" (PEIRCE, 2000, p. 46).

Essa última observação de Peirce (2000) em sua definição de signo mostra o papel do objeto e ainda mais qualifica que o objeto representado pode não ser um objeto em toda a sua totalidade, forma essa como Duval utiliza em sua noção de registro:

> ... a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representa. Esta escolha é feita em função das possibilidades e dos inconvenientes semióticos do registro escolhido. Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama. Isto quer dizer que **toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa,** e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados (DUVAL, 2012, p. 280)

Para Peirce (2000) além do signo não representar um objeto em sua totalidade, “Um signo pode ter mais de um objeto.” (p. 47). Isso é bastante patente em matemática, um mesmo signo pode pertencer a objetos e noções distintas, como por exemplo, 6/4 é um número racional que pode pertencer tanto à noção de divisão quanto à noção de proporção.

Para Duval (1995, p. 64) a estrutura diádica do signo linguístico como Saussure (2008) descreve é ambíguo uma vez que apresenta duas limitações: (1) não considera a existência de diversos sistemas semióticos e nem a coordenação entre eles; (2) tal definição do signo linguístico não considera os tratamentos ou conversões que mostram a potência e interesses cognitivos.

> De forma breve, uma tal definição significa considerar as representações unicamente em relação a uma única função, a função de expressão, e a ignorar que as representações preenchem igualmente as funções de objetivação e de tratamento, que são essenciais à atividade cognitiva (DUVAL, 1995, p. 64)

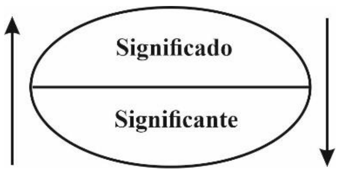
Os tratamentos de que fala Duval nessa citação, são as operações internas que podem ser efetuadas em um sistema semiótico (um registro) e a função de objetivação refere-se à tomada de consciência pelo sujeito de algo que descobre e não suspeitava, mesmo que já haviam explicado; algumas vezes são externalizadas por expressões do tipo “Ah! agora entendi”.

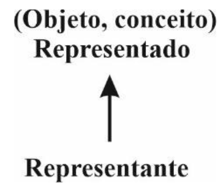
A Figura 1 a seguir apresenta o signo em duas estruturas, diádica e triádica.

Figura 1A, 1B e 1C: o signo em sua estrutura diádica ou triádica.

Representação diádica do signo

A **B**





Representação triádica do signo

C

Fonte: a partir de Saussure (2008, p. 79 – 84) e Duval (1995, p. 62 – 63).

A Figura 1A apresenta o signo linguístico de estrutura diádica em Saussure (2008, p. 81) que preferiu usar os termos “Significado” e “Significante” no lugar dos termos que usava até então: “conceito” e “imagem acústica”.

Na Figura 1B, também de estrutura diádica, o representado retrata um objeto, ocupa o seu lugar. Esse tipo de representação também ocorre em matemática, caracterizada pelos símbolos e notações, como por exemplo, a representação do vetor $\vec{u}$ que tem uma referência instituída. Em geral podem ser enquadrados como diádico elementos do ensino do tipo declarativo, como por exemplo, 8 x 7 é igual ao número de casas de uma grade quadrangular com 8 linhas e 7 colunas, ou simplesmente, 8 x 7 = 56.

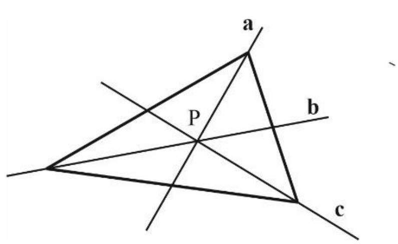
A Figura 1C é uma relação triádica, é como Duval (1995) retrata o registro semiótico que utiliza em sua teoria, e que afirma que na estrutura triádica a relação de referência é subordinada “ao sentido que é dado entre significante e significado.” (p. 63). Notemos que o significante e significado estão assinaladas sobre uma folha de papel, da forma como Saussure cita (ver a segunda citação de Saussure acima).

1.3 - Gottlob Frege

Esse elemento na estrutura chamado referência foi uma contribuição de Frege (1978, p. 61-86) e desempenha um papel fundamental na teoria semiocogntiva de Duval (1995).

Um exemplo tratado por Frege (1978) mostra bem a importância dessa noção: consideremos um triângulo em que linhas *a*, *b* e *c* ligam os vértices aos pontos médios dos lados opostos, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 2: o exemplo de Frege para a ideia de sentido.



Fonte: a partir de Frege (1978, p. 62)

Observando a figura, podemos dizer que:

> Temos, assim, diferentes designações para o mesmo ponto, e estes nomes ("o ponto de intersecção de *a* com *b"* e "o ponto de intersecção de *b* com *c*") indicam, simultaneamente, um modo de apresentação e, em consequência, a sentença contém um conhecimento real (FREGE, 1978, p. 62)

Concluiu, ainda, que a referência a essas diferentes designações para o mesmo ponto é a mesma, mas não os seus sentidos (p. 62).

Pensemos um outro exemplo! Com o número 6/4 podemos imaginar:
- um número racional como em um problema do tipo "dividir 6 laranjas para 4 indivíduos, o que dá, 1,5 laranja para cada um". A referência do assunto em matemática é NÚMERO RACIONAL;
- uma divisão euclidiana como em um problema do tipo "distribuir 6 laranjas para 4 indivíduos, o que dá, uma para cada pessoa uma laranja e ainda sobram duas". A referência do assunto em matemática é a DIVISÃO EUCLIDIANA;
- uma proporção como em um problema do tipo "a produção de maçã na região A, em relação à produção na região B, está na proporção de 6 para 4". A referência do assunto em matemática é RAZÃO E PROPORÇÃO.

Assim, dependendo do sentido que damos ao significante/significado, podemos apontar para referências diferentes, objetos diferentes em matemática, e que cada um deles pode ter o seu próprio sistema semiótico. Afirmação essa que, em alguns casos, são cercadas de controvérsias: em que condições um conjunto de elementos pode formar um sistema semiótico? Mais adiante discutiremos essa questão e descobriremos consequências didáticas importantes.

2 O REGISTRO EM DUVAL

O registro em Duval (1995) tem três polos (Figura 1C), o significante (forma), significado e objeto (referência). O significante/significado possui conteúdo que pode não retratar o objeto em sua totalidade. Esse fato, está na origem da recomendação didática de Duval (2023/2012, p. 13): "A que corresponde a existência de muitos registros de representação e qual é o interesse de sua coordenação para o funcionamento do pensamento humano?". Ao que responde:

> ... a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representa (DUVAL, 2023/2012, p. 13)

Ainda, sobre isso, Duval (2023/2012) comenta que "**toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa,** e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados." (p. 13).

2.1 - Objeto e conteúdo da representação

Das três tricotomias do signo em Peirce (2000, p. 51), uma refere-se à relação do signo com o seu objeto e que gerou três signos que ele denominou ícone, índice e símbolo:

> Um *Ícone* é um signo que se refere ao Objeto que denota apenas em virtude de seus caracteres próprios, caracteres que ele igualmente possui quer um tal Objeto exista ou não.
> Um *Índice* é um signo que se refere ao objeto que denota em virtude de ser realmente afetado por ele.

> Na medida em que o Índice é afetado pelo Objeto, tem ele necessariamente alguma qualidade em comum com o Objeto, e é com respeito a estas qualidades que ele se refere ao Objeto.
> Um *Símbolo* é um signo que se refere ao objeto que denota em virtude de uma lei, normalmente uma associação de ideias gerais que opera no sentido de fazer com que o Símbolo seja interpretado como sendo àquele Objeto (PEIRCE, 2000, p. 51)

No ícone há uma semelhança material com o objeto. Assim, quando levantamos pela manhã e vemos que a rua está molhada, logo pensamos que choveu à noite. Já o Índice sugere uma relação indicativa com o objeto tal qual, como por exemplo, certos sintomas apontam para uma doença. O símbolo é bem diferente desses dois signos, a relação que tem com o objeto é uma relação puramente convencional (BENVENISTE, 2014, p. 96).

Sobre essa classificação dos signos de Peirce, Benveniste comenta:

> Não se vê, de modo algum, o que une umas às outras, essas classes de signos, nem os princípios nos quais estaria fundamentada a classificação (BENVENISTE, 2014, p. 98)

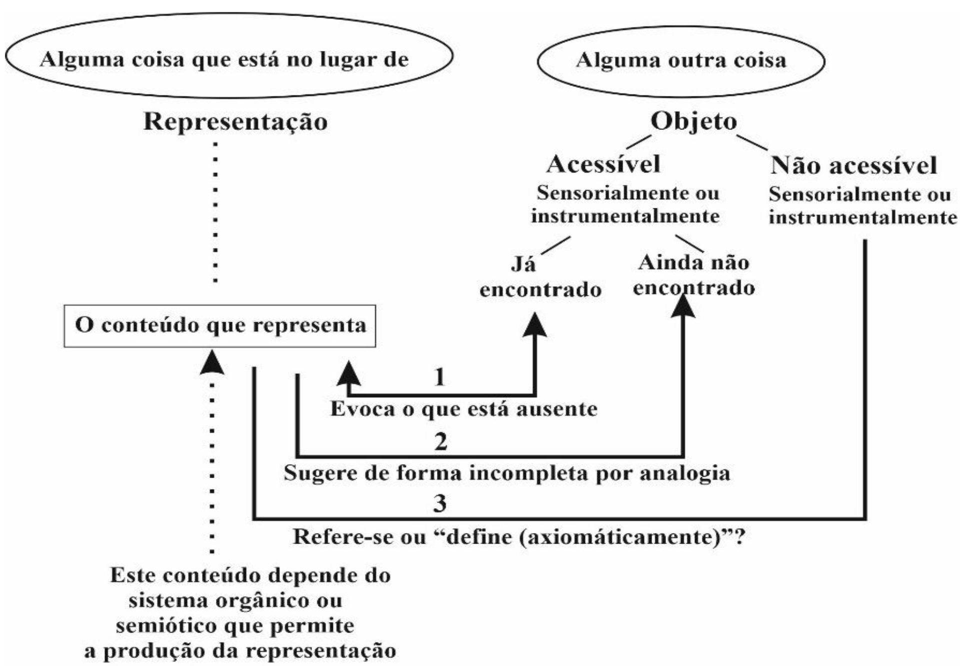
A classificação de Peirce baseia-se no fato de que a representação se assemelha ou não com o objeto representado. No entanto, as relações são muito mais complexas se se levar em conta o fato de que **há muitos objetos que só são acessíveis a partir de uma representação semiótica** (DUVAL, 2004, p. 36), conforme podemos constatar na Figura 3 a seguir.

- a relação 1, é uma relação de mão dupla, os objetos podem ser diretamente percebidos ou percebidos por meio de instrumentos, como por exemplo, o microscópio na biologia. Não há como confundir objeto e representação.

Duval (2004) comenta que é nessa relação que Piaget baseou os seus trabalhos “com objetos já vistos, familiares, mas momentaneamente ausentes, uma vez que se encontram distantes...” (p. 37);

- a relação 2, é uma relação com um único sentido que vai da representação ao objeto, “O conteúdo da representação, antes que tenha descoberto o objeto, é interpretado por meio de analogias com objetos já conhecidos pelo sujeito” (DUVAL, 2004, p. 37). Marca aqui os tipos de conhecimentos a partir de documentos como, por exemplo, em geografia e botânica. No momento que o sujeito tem acesso ao objeto, ele se encontra na relação 1;

Figura 3: Relações cognitivas possíveis entre um conteúdo de uma representação e o objeto.



Fonte: Duval (2004, p. 36).

- a relação 3 indica que o sujeito não tem acesso ao objeto em si mesmo, a não ser por meio das representações que a ele se referem. É a situação dos **objetos ideais** que encontramos em matemática. O ponto geométrico é um desses objetos, não tem dimensão. Então como ter acesso a um objeto desse tipo a não ser por meio de uma representação?

2.2 - Émile Benveniste

Émile Benveniste foi também um dos influenciadores da obra de Duval, em suas "Últimas aulas no *Collège* de France" afirma:

> 1) Que há, no mundo, na natureza, no comportamento humano, nas obras do homem, uma quantidade de signos de espécie muito diversas (vocais, gestuais, naturais), *coisas que significam, que têm sentido*;
> 2) por consequência, que há lugar para pensar que esses signos se assemelham de alguma maneira, que constituem conjuntos;
> 3) que é possível estabelecer relações entre esses conjuntos de signos;
> 4) que o estudo dos signos resulta em uma disciplina particular: *a semiologia* (BENVENISTE, 2014, p. 92)

A observação 2 reforça a ideia de sistema semiótico e a observação 3 alimenta a ideia de que se pode estabelecer uma operação que pode marcar a relação entre sistemas diferentes, que Duval (1995) estabeleceu para os registros e denominou de **conversão**. De forma mais extensiva, Benveniste aponta para essa possiblidade no Capítulo 4 de PROBLEMAS DE LINGUÍSTICA GERAL I (BENVENISTE, 2005, p. 53 – 67). Na observação 4, de fato criou-se uma disciplina que foi denominada "semiótica".

2.3 - Representação semiótica e registro

Um registro é um sistema estruturado, e como tal, possui elementos como em um conjunto matemático. Para Duval,

> ...os sistemas semióticos devem cumprir três atividades cognitivas fundamentais. Primeiro [**formação**], constituir um traço ou uma combinação de traços perceptíveis que sejam identificados como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida [**tratamento**], transformar as representações pelas regras próprias ao sistema de modo a obter outras representações podendo constituir um aporte de conhecimento em relação às representações iniciais. Finalmente [**conversão**], converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema de tal modo que estas últimas possam explicitar outras significações relativas ao que é representado (DUVAL, 1995, p. 20-21)

Como se pode observar nessa citação, são três as características para que um conjunto de elementos possa formar um registro. O tratamento e a conversão são duas operações semiocognitivas não só para formar um registro, mas como integrantes da hipótese fundamental de aprendizagem de Duval (ver Figura 5).

O tratamento é um tipo de operação específica de um registro realizada internamente a ele. Já a conversão é uma operação que envolve dois registros por vez, ela é muito mais complexa, uma vez que o trânsito se dá em conformidade com as características de cada registro envolvido. Essa complexidade possibilita o surgimento de um fenômeno denominado por

Duval (1995) de congruência semântica[1] que exibe, segundo alguns critérios, o grau de transparência entre duas representações de um mesmo objeto. Há muitas situações que caracterizam a operação de conversão, veremos mais adiante algumas delas. São exemplos, a tradução, a transcrição para o braille , o equacionamento de um problema em língua natural etc.

A variedade de registros é enorme, o quadro da Figura 4 a seguir é uma síntese dessa variedade para o caso da matemática. Mostra um quadro com quatro células de grandes tipos de registros. No interior de cada uma dessas células, outros sistemas podem se formar uma vez que conforme aponta Benveniste (2014) "Um sistema semiológico é sempre, em princípio, capaz de gerar um ou vários outros sistemas semiológicos." (p. 108).

Os sistemas da célula 1 estão presentes em toda a atividade matemática, seja no papel de função meta discursiva (comunicação, tratamento e objetivação) ou de função discursiva (referencial, apofântica, expansão discursiva e reflexividade)[2].

---

[1] Sobre esse assunto, consultar: DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v. 7, n. 1, p.118-138, 2012; MORETTI, Méricles T; BRANDT, C. F.; ALMOULOUD, S. A. Congruência semântica: um fenômeno semiótico e cognitivo a ser levado em conta na aprendizagem matemática. Quadrante v. 31.1, Lisboa: 2022. p. 92-112.

[2] Sobre esse assunto, consultar:
Capítulo II de DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Universidad del Valle, Instituto de Educacion y Pedagogia, Santiago de Cali, 2004. 328 p.;
DIONIZIO, Fátima Q.; BRANDT, Celia F. MORETTI, Méricles T. Emprego das funções discursivas da linguagem na compreensão de erros de alunos em uma atividade que envolve noções de trigonometria. Perspectiva da Educação Matemática. v. 7, 2014;
SABEL, E. O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas. (Dissertação de Mestrado). Florianópolis: UFSC/PPGECT, 2021.

Figura 4: classificação dos diferentes registros mobilizados em matemática.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS Os tratamentos não são algoritmizáveis	**(1) Língua natural** **Operações** *associais verbais (conceituais), descrição, definição, explicação;* *raciocínio:* *- argumentação a partir de observações, de crenças;* *- dedução válida a partir de definição ou de teoremas*	**(2) Figuras geométricas** planas ou em perspectiva (configuração de formas 0D, 1D, 2D, 3D) **Operações** *- apreensão operatória e não somente perceptiva;* *- Construção com instrumentos;* *- modelização de estruturas físicas (exemplos: cristas, moléculas)*
REGISTROS MONOFUNCIONAIS Os tratamentos são principalmente algoritmizáveis	**(3) Sistemas de escrita:** numéricas (binária, decimal, fracionária); algébricas; simbólicas; (Línguas formais) **Operações** *cálculo literal, formal, ...*	**(4) Gráficos cartesianos** (visualização de variações) **Operações** *- mudança de sistema de coordenadas;* *- interpolação, extrapolação*

Fonte: elaborado a partir de Duval (2004, p. 52).

A célula 4 mostra registros que estão muitas vezes relacionados aos registros da célula 3 como ocorre, por exemplo, no esboço de curvas[3]

---

[3] Sobre esse assunto, consultar:
DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles T. Moretti. Revemat, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011;
MORETTI, Méricles T. A translação como recurso no esboço de curvas através da interpretação global de propriedades figurais. In MACHADO, Silvia D. A. de (org.). Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, 160p;
MORETTI, Méricles T. SABEL, E. Gráficos e equações: abordagem global qualitativa segundo Raymond Duval. Florianópolis: GPEEM/UFSC, 2022, 202p. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

Comporta registros tão complexos que Duval (1995) os caracteriza como um de hiper registro. As células 3 e 4 apresentam registros em que as operações de tratamento podem ser efetuadas por meio de algum algoritmo. Por exemplo, é possível dada uma equação de primeiro grau, obter a solução por um processo automatizado. De forma diferente, isso não é possível com os registros da célula 1, veja por exemplo, a tentativa frustrada de traduções automatizadas.

Discutiremos, a seguir, um exemplo de criação de registros no interior da célula 3.

2.4 - Registros algébricos.

Apresentaremos dois exemplos de registros algébricas (Célula 3) que suscitam discussões acaloradas se de fato constituem registros distintos. Cada um decida por si!

Consideremos Q o conjunto dos números racionas. Do conjunto dos racionais, pensemos dois conjuntos com os mesmos elementos, mas com formas distintas:

- Qf o conjunto dos números racionais na forma fracionária. São exemplos desse conjunto os números 9/4, 0/5, 1/3;
- Qv o conjunto dos números racionais na forma decimal com vírgula. Esses exemplos apresentados de números que pertencem ao conjunto Qf, podem ser escritos também como números que pertencem a Qv, como, 2,25; 0,0; $0{,}33\overline{3}$.

Algumas questões devemos impor para que consideremos separadamente dois registros.

(1) as quatro operações elementares se dão do mesmo modo em Qf e em Qv? A resposta a esta questão é não, basta ver um exemplo da soma de dois elementos em cada conjunto:

- no sistema Qf, $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{19}{20}$;
- no sistema Qv, 0,75 + 0,2 = 0,95.

A soma de dois elementos em cada conjunto, mostra processos completamente diferentes;

(2) É possível transitar de Qf para Qv e vice-versa?

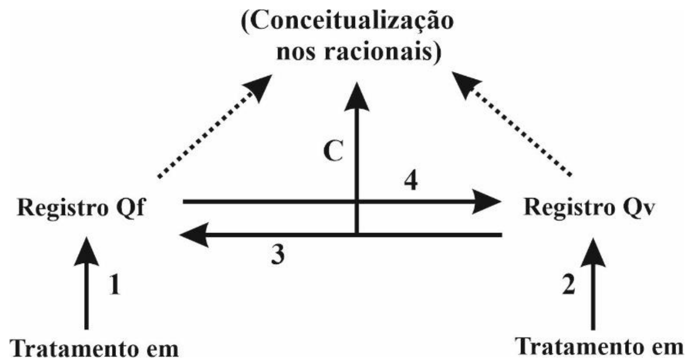
São os mesmos tipos de processos envolvidos? Novamente, a resposta é não. As transições entre eles são bem diferentes.

Cada um dos significantes em Qf e Qv de um mesmo número, possuem significados operatórios distintos, apesar de que representam o mesmo número o que poderia nos levar a considerar um único sistema semiótico Q (dos números racionais)?

> Mais especificamente, o problema é saber se a aprendizagem visando a aquisição das atividades de conversão tem a mesma natureza que uma aprendizagem que visa a aquisição das atividades de tratamento (DUVAL, 1995, p. 42)

Portanto, a resposta proposta por Duval é uma resposta didática, uma vez que é parte da formação dos alunos a aprendizagem dos tratamentos em cada um dos conjuntos Qf e Qv, tanto quanto a conversão entre eles. Fazer essa escolha, significa dar importância aos tratamentos que também fazem parte da hipótese de aprendizagem de Duval:

Figura 5: Hipótese fundamental de aprendizagem centrado na função de objetivação.



Fonte: a partir de Duval (1995, p. 67).

O que podemos observar nesse esquema de aprendizagem matemática proposto por Duval, tanto os tratamentos (setas 1 e 2), assim como as conversões (setas 3 e 4) estão na base da hipótese fundamental de aprendizagem de Duval. Para o caso de Qf e Qv, se quisermos reforçar também aos tratamentos (operações com números decimais na forma fracionária e com números decimais com vírgula), é importante, do ponto de vista didático, que se considere sistemas semióticos distintos. No entanto, precisamos nos atentar para o seguinte fato:

> Para não confundir um objeto e sua representação, quando a intuição direta do objeto em si mesma não é possível, é necessário dispor de diversas representações semióticas heterogêneas deste objeto e coordená-las (DUVAL, 1995, p. 69)

Representações heterogêneas nessa citação, leia-se, sistemas semióticos distintos.

A aprendizagem em Qf e Qv não esgota a aprendizagem em Q, outros conjuntos podem ser considerados (como por exemplo, o conjunto das dízimas periódicas? Os racionais em notação científica?). Essa análise passa pela ideia de Frege (1978) quando destacou a importância do sentido que é dado ao significante/significado no interior de um mesmo sistema semiótico, de onde surge a questão fundamental: esses diferentes sentidos são suficientes para que se considere, atendendo ao menos a um ponto de vista didático, sistemas semióticos distintos?

3 CONCLUSÕES

O que se pode perceber, neste texto bastante resumido da trajetória de Duval na construção de uma ideia de aprendizagem intelectual, é que ele imprimiu um lado cognitivista, que não havia, nos estudos de diferentes semiólogos, entre eles, Saussure, Peirce, Benveniste e Frege. Portanto, ler e compreender Duval, será preciso ter em mente sempre esses dois aspectos, o semiótico e o cognitivo. Foi principalmente o aspecto cognitivo que nos levou a considerar Qf e Qv sistemas semióticos distintos (dar importância também aos tratamentos em cada um desses sistemas) sustentados na noção de sentido e referência em Frege.

REFERÊNCIAS

BENVENISE, E. **Últimas aulas no Collège de France (1968 e 1969).** São Paulo: Editora da Unesp, 2014.

BENVENISTE, E. **Problemas de linguística geral I**. Trad. M. G. Novak e M. L. Neri. Campinas: Pontes editores, 2005.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne : Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Les problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Trad. de M. V. Restrepo. Cali: Universidade del Valle, 2004.

EL-JAIK, A. P. **Saussure: [ ] um estruturalista**. *In* A palavra de Saussure. Lucília Maria Abrahão e Sousa; Glaucia Nagem de Souza; Lauro Baldini (Organizadores). 369p. São Carlos: Pedro & João Editores, 2016.

FREGE, G. **Lógica e filosofia da linguagem**. Trad. Paulo Alcoforado. São Paulo: Editora Cultrix, 1978.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Trad. J. T. C. Netto. 338p. São Paulo: Editora Perspectiva, 2000.

SAUSSURE, F. **Curso de linguística Geral**. Trad. A. Chelini, J. P. Paes, I. Blikstein. São Paulo: Ed. Cultrix, 2008.

SOBRE OS AUTORES

RAYMOND DUVAL - Filósofo e psicólogo de formação, Raymond Duval defendeu a sua tese de doutorado com P. Greco sobre a epistemologia genética de Piaget (1972). Entrou no IREM de Estrasburgo em setembro de 1970 onde participou de enquetes e regularmente ia em salas de aula do ensino fundamental e dirigia grupos de pesquisa. A partir de 1979 coorientou com F. Pluvinage diversos DEA (Diplôme d´Études Approfondies) e teses em didática da matemática. Foi editor dos Annales de Didactique et des Sciences Cognitives entre 1988 a 1995. Publicou, em 1995, o livro Sémiosis et pensée humaine e neste mesmo ano foi nomeado professor na Universidade do Littoral Côte d´Opale (ULCO/Dunkerque). Trabalhou, no que era chamado de Instituto Universitário de Formação de Professores (IUFM - Institut Universitaire de Formation des Maîtres) du Nord Pas-de-Calais, na formação de professores do ensino fundamental. Continua a aprofundar estudos sobre a sua teoria semiocognitiva de aprendizagem intelectual.

ADALBERTO CANS - Doutorando em Educação Científica e Tecnológica na Universidade Federal de Santa Catarina PPGECT/UFSC (2020-2024). Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Rondônia PROFMAT/UNIR (2014). Especialista em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais PUC/MG (1997). Graduado em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Regional do Nordeste URNE-Campina Grande (1989). Atualmente, é membro pesquisador do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM/UFSC) e do Grupo de Estudos e Pesquisas Multidisciplinar em Educação e Infância (EDUCA/UNIR); Professor efetivo da Secretaria de Educação do Estado de Rondônia (SEDUC/RO) e Matemático do Tribunal de Justiça do Estado de Rondônia (TJ/RO); Professor Voluntário do Mestrado em Matemática (PROFMAT/UNIR) e Revisor de Periódicos. Tem experiência na área de Matemática Aplicada, Modelagem Matemática, Educação Matemática, Práticas Pedagógicas e Novas tecnologias.

ADRIANO MOSER - Professor efetivo da Rede Estadual do Ensino do Estado de Santa Catarina desde 2001 e da Rede Municipal de Balneário Piçarras/SC desde 2007. Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Vale do Itajaí - UNIVALI/1999. É mestre através do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede

Nacional – PROFMAT pela UDESC/2020. Membro do Grupos de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM/UFSC). Manifesta interesse de pesquisas que abrangem a aprendizagem matemática e os níveis de comprometimento que o transtorno do TDAH implica quanto ao reconhecimento do objeto matemático em diferentes representações, em particular no contexto geométrico tridimensional.

AFONSO HENRIQUES - Licenciado em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (1996), Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1999) e Doutor em Matemática e Informática pela Universidade Joseph Fourier Grenoble - França (2006), Professor Pleno na Universidade Estadual de Santa Cruz UESC/BA, Brasil. líder do Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional (GPEMAC) e do Laboratório de Visualização Matemática (L@VIM) da UESC. Professor do Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) e do Programa da Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da UESC. Membro do GT 14 da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Tem experiência na área de Matemática, Didática e Educação Matemática, atuando, principalmente, nos seguintes temas: Pesquisa e Desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral com um enfoque computacional, TIC, Produção de Modelos de Projetos de Construção de Objetos Concretos (PCOC) como materiais didáticos, Gestão de códigos de modelos para impressora 3D, Ensino e Aprendizagem, Registros de Representação Semiótica, Antropologia Didática, Abordagem Instrumental, Geometria Dinâmica, Análise Institucional e Sequências Didáticas.

CÁTIA MARIA NEHRING - Possui graduação em Ciências: Licenciatura Plena Habilitação Matemática e Licenciatura Plena Habilitação Química pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (1988), Mestrado em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina (1996) e Doutorado em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina (2001). Atualmente é professora Adjunto 3 da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Professora do Programa em Educação nas Ciências - Mestrado e Doutorado da UNIJUÍ. Foi Coordenadora de Curso, Membro do Núcleo Docente Estruturante do Curso de Licenciatura em Matemática, Vice-Reitora de Graduação da UNIJUÍ.

Atual Reitora da UNIJUÍ - Gestão 2017/2019 e Gestão 2019/2023.Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando principalmente com os seguintes temas: educação matemática, formação inicial e continuada, ensino e aprendizagem e educação superior. Foi avaliadora ad doc do SINAES/INEP/MEC de 2009 a 2017, de cursos de matemática e institucional. Líder do Grupo de Pesquisa - GEEM - Grupo Estudos em Educação Matemática - 1996.

CRISLAINE COSTA - Possui graduação em Matemática pelo Centro Universitário Leonardo da Vinci (2009). Especialização na área da educação matemática e é Mestra em Educação Científica e Tecnológica, pela UFSC. Participa do GPEEM - Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino da Matemática - UFSC. Tem experiência com educação básica, já tendo lecionado em escolas estaduais e também na rede SESI/SENAI para Educação de Jovens e Adultos. Atualmente é professora efetiva da rede estadual de ensino, onde tem atuado no ensino médio e fundamental e neste momento, como assessora de direção. Tem interesse em pesquisas que versam sobre Semiótica, Educação Matemática e Educação Ambiental.

DAIANA ZANELATO DOS ANJOS - Técnica da Secretaria de Estada da educação atuando na Gerência de Políticas Educacionais. Possui mestrado e doutorado em Educação Científica e Tecnológica, ambos pela Universidade Federal de Santa Catarina, respectivamente em 2015 e 2019. É licenciada em matemática (UFSC/2009) e em Pedagogia (UNINTER/2019). O seu interesse de pesquisa engloba as questões da aprendizagem em matemática pelo estudante cego com fundamentação teórica tanto na teoria dos Registros de Representação Semiótica como, nos Estudos da Deficiência e Desenho Universal para a Aprendizagem. Atua como vice-líder do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM/UFSC) e como pesquisadora no Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática e Educação Matemática Inclusiva - GEPeDEMI da Universidade Federal de Campina Grande.

EDUARDO SABEL - Doutorando em Educação Científica e Tecnológica (2021-2025) pelo PPGECT/UFSC, Mestre pelo mesmo programa e instituição e Graduado em Licenciatura em Matemática pela UFSC. Lecionou em escolas da Secretaria do Estado da Educação (SED/SC), entre 2015 e 2021. É membro do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e

Ensino de Matemática (GPEEM) e do Grupo de Estudos e Pesquisas em Processos Formativos em Educação Matemática (GEPPROFEM). Atualmente, trabalha como Especialista de Ensino III em Matemática no SENAI/SC. Pesquisa na área de ensino e aprendizagem da matemática, com foco em materiais manipulativos e análise de livros didáticos. Tem como base teórica os Registros de Representação Semiótica de Duval e o Enfoque Ontossemiótico de Godino e colaboradores.

ELIANDRA MORAES PIRES - É professora de matemática na Secretaria Municipal de Educação em Florianópolis, Possui Licenciatura em Matemática pela UFSC. Especialista em Educação para Diversidade com Ênfase na Educação de Jovens e Adultos pelo Instituto Federal de Santa Catarina. Mestre e doutoranda em Educação Científica e Tecnológica pela UFSC. Atua na Formação de Professores que Ensinam Matemática na Educação de Jovens e Adultos e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. É Membro do GEPPROFEM- Grupo de Estudos e Pesquisas em Processos Formativos em Educação Matemática e do ICEM - Grupo de estudos de Insubordinação Criativa em Educação Matemática. São temas de Interesse: Formação de Professores; Educação Matemática; Tendências Metodológicas e Metodologias diferenciadas no Ensino de Matemática; matemática nos anos Iniciais; Materiais Manipulativos e a Perspectiva Crítica.

EVERALDO SILVEIRA - Graduado em Licenciatura em Matemática pela UNIG (2000), Especialista em Educação Matemática pela UFOP (2002), Mestre em Educação, na linha Educação Matemática, pela UFPR (2007), Doutor em Educação Científica e Tecnológica, na linha Educação Matemática, pela UFSC (2014) e Pós-Doutor em Urban Education pela Rutgers University (2020). Atualmente, é Professor Adjunto DE do Departamento de Metodologia de Ensino CED/UFSC, atuando nos cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia. Na pós-graduação, atua junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica - PPGECT/UFSC, orientando alunos de mestrado e doutorado. Como pesquisador tem concentrado esforços no campo da Educação Matemática em duas frentes. Uma ligada à utilização de materiais manipulativos no ensino de matemática e outra ligada à Modelagem na Educação Matemática na formação de professores que ensinam Matemática nos mais variados níveis de ensino. É membro dos grupos de pesquisas GEPPROFEM (Grupo de

Estudos e Pesquisas em Processos Formativos em Educação Matemátic
ICEM (Insubordinações criativas em Educação Matemática).

JORGE CÁSSIO COSTA NÓBRIGA - É graduado em Matemática pela UnB, mestre em Ensino das Ciências pela UFRPE e doutor em Educação pela UnB. Colaborador do Instituto Internacional do GeoGebra. Professor adjunto da UFSC (Blumenau) e do Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM-FURB). Possui experiência na área de Educação Matemática, sobretudo nas linhas de pesquisa relacionadas com ensino e aprendizagem da matemática, formação de professores, tecnologias educacionais. As principais pesquisas, tem se voltado ao uso do Geogebra nas aulas de matemática e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

ISABEL KOLTERMANN BATTISTI - Possui graduação em Licenciatura Plena Habilitação em Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (1985), é Especialista em Educação Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (2004), mestre pelo Programa de Mestrado em Educação nas Ciências da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Doutora pelo Programa em Educação nas Ciências- UNIJUÍ, área de concentração matemática. Atua como professora em cursos da graduação e integra o Corpo Docente Permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Nesta instituição também atua no Núcleo de Inovação Pedagógica por meio do setor de Apoio Pedagógico. Tem vasta experiência na Educação Básica. Temáticas de pesquisa em Educação e Educação Matemática: atividade educativa; processos educativos; espaço escolar; processos de ensinar e de aprender; significação de conceitos; sistematicidade de conceitos; abordagem histórico-cultural; teoria da atividade; Atividade Orientadora de Ensino; formação de professor que ensina matemática; e mediação em aulas no contexto escolar. Integrante do Grupo de Pesquisa - GEEM - Grupo Estudos em Educação Matemática e sócia da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

LUIS FERNANDO FERREIRA DE ARAUJO - Doutorando em educação e mestre em ensino de ciências, matemática e tecnologias pela Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). Especialista em ensino de matemática e licenciado em matemática. Membro do Grupos de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM) e Pesquisa Educação Inclusiva e Necessidades Educacionais Especiais (PEINE). Professor titular na Fundação Catarinense de Educação Especial (FCEE). Tem experiência em Educação Especial na perspectiva da Educação Inclusiva, no ensino de matemática voltado às pessoas com deficiência visual, na formação continuada de professores que atuam na educação inclusiva, no desenvolvimento e produção de livros didáticos em braille , bem como boas práticas para produção de conteúdo digital acessível.

LUANA HENRICHSEN - Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências (PPGEC) pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ). Mestrado em Modelagem Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ, 2019). Especialização em Ensino, Linguagens e suas Tecnologias pelo Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS, 2019) e Graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS, 2017). Atuou como Docente Substituta de Matemática no Instituto Federal Farroupilha (IFFar, 2019-2020) e ministrou aulas para a Educação Superior. É integrante do GEEM (Grupo de Estudos em Educação Matemática do PPGEC - UNIJUÍ). Seus interesses como pesquisadora compreendem a área da Educação Matemática e Modelagem Matemática.

VIVIANE RONCAGLIO - Doutora em Educação nas Ciências. Mestre em Educação nas Ciências pela Unijuí. Especialista em Matemática - Mídias Digitais - Didática:Tripé para formação de professores de matemática, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Licenciada em Matemática pela UNIJUÍ. É integrante do Grupo de Pesquisa - GEEM - Grupo de Estudos em Educação Matemática. Especialização em andamento em Estatística Aplicada. Tem interesse principalmente nos seguintes temas: Educação; Formação de Professores; Ensino e Aprendizagem de Conceitos Matemáticos; Ensino de Matemática; Tecnologias para o Ensino e Aprendizagem; Ensino Superior, especialmente em processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos no ensino superior; Estatística Aplicada. Professora da Rede Municipal de Ensino em Três de Maio/RS.

LUCILENE DAL MEDICO BAERLE - Doutoranda em Educação Científica e Tecnológica (2020-2024) pelo DINTER - PPGECT/UFSC. Mestre em Ensino de Matemática pela UFN (Universidade Franciscana), Santa Maria – RS, Especialista em Educação Matemática (2004) e Licenciatura em Matemática (2000) pela UNIJUÍ – RS. É integrante do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM) e também do Grupo de pesquisa Inteligência Computacional Aplicada e Inovação Tecnológica (IFC). É professora do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal Catarinense (IFC) desde 2011, área de Matemática, Câmpus Videira - SC. Pesquisa na área de ensino e aprendizagem da matemática, com foco em documentos oficiais e livros didáticos. Tem como base teórica os Registros de Representação Semiótica de Duval, com enfoque nos Registros de Representações Auxiliares.

MÉRICLES THADEU MORETTI - professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da UFSC. Doutor em didática da Matemática sob a orientação do professor François Pluvinage e pós-doutor pelas Universidades de Estrasburgo e de Lisboa. Líder do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM) cujo foco de pesquisa é semiótica e aprendizagem matemática. Editor da Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT) e pesquisador do CNPq.

SADDO AG ALMOULOUD - concluiu o doutorado em mathematiques et applications - université de Rennes I em 1992 - França. Foi professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo de abril 1994 a março de 2020, e da Fundação Santo André de 2000 a 2020. Atualmente é professor colaborador da UFPA. e professor visitante da UFBA. Consultor ad hoc da fundação de amparo a pesquisa do estado de São Paulo, da capes, Foi bolsista pesquisador de CNPq, foi coordenador do programa de estudos pós-graduados em educação matemática da PUC-SP de 2007 a 2009 e de 01/08/2013 a 31/07/2017. Publicou mais de 50 artigos em periódicos especializados e mais de 83 trabalhos em anais de eventos. Possui mais de 10 capítulos de livros e 12 livros publicados. Possui 1 software e mais de 62 itens de produção técnica. Participou de vários eventos no exterior e mais de 112 no Brasil. Orientou mais 80 dissertações de mestrado e teses de doutorado na área de educação matemática entre 1996 e 2019. Participou de mais de 200 bancas de defesa de dissertações e doutorados. Consultor ad hoc da FAPESP, capes e CNPq, é bolsista de pesquisa e produtividade do CNPq, editor chefe da revista educação matemática pesquisa do PEPG em educação matemática da PUC-SP e parecerista de várias revistas cientificas na área de educação matemática. De abril de 1994 a março de 2020, foi professor do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Em seu currículo lattes os termos mais frequentes na contextualização da produção científica, tecnológica e artístico-cultural são: ensino, aprendizagem, geometria, educação matemática, matemática, demonstração, ensino básico, formação de professores, geometria dinâmica, TIC.

ROSELI BÚRIGO - Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Fundação Educacional de Criciúma- FUCRI/UNESC (1996), Pós Doutorado em Educação Científica e Tecnológica - pela Universidade Federal de Santa Catarina UFSC (2018). Doutorado em Engenharia e Gestão do Conhecimento pela Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC - (2009). Mestrado em Educação pela Universidade do Sul de Santa Catarina - UNISUL-(2000).

SELMA FELISBINO HILLESHEIM - Doutora em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (2021). Mestra em Educação Científica e Tecnológica pela UFSC (2013). Especialista em Gestão e Metodologia do Ensino-FACEMED (2004) . Licenciada em Ciências - UNISUL (2000). Participa do Grupo de Pesquisa - GPEEM. Seus estudos são voltados para o processo de ensino e aprendizagem da matemática pautados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Tem experiência na área da educação, atuando como professora de matemática na Educação Básica em escolas públicas e como formadora de professores que ensinam matemática na Educação Básica.

Finalizamos esta obra agradecendo aos autores dos capítulos por terem contribuído com este *e-book* e o dedicamos a toda comunidade de pesquisadores e professores que se esforça para melhorar o ensino e aprendizagem da matemática!

Muito obrigado!