UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
DEPARTAMENTO MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Rafael Roza

Uma proposta de metodologia de ensino do Problema de Monty Hall e Teorema de Bayes para os professores da educação básica

Blumenau/SC
2023

Rafael Roza

Uma proposta de metodologia de ensino do Problema de Monty Hall e Teorema de Bayes para os professores da educação básica

Dissertação submetida ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – do Centro ou Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Loesch

Blumenau/SC

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Roza, Rafael
Uma proposta de metodologia de ensino do Problema de Monty Hall e Teorema de Bayes para os professores da educação básica / Rafael Roza ; orientador, Claudio Loesch, 2023.
94 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Blumenau, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Educação Básica. 3. Metodologia. 4. Probabilidade condicional. 5. Teorema de Bayes. I. Loesch, Claudio. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

Rafael Roza

Uma proposta de metodologia de ensino do Problema de Monty Hall e Teorema de Bayes para os professores da educação básica

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso PROFMAT.

Blumenau(SC), 31 de julho de 2023.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Delfini Caetano Fidalgo
Data: 18/08/2023 16:58:07-0300
CPF: ***.425.308-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Felipe Delfini Caetano Fidalgo

Coordenador

Banca examinadora

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Claudio Loesch
Data: 18/08/2023 16:44:40-0300
CPF: ***.732.389-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Claudio Loesch

Orientador

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Hugo Jose Lara Urdaneta
Data: 18/08/2023 14:44:12-0300
CPF: ***.656.117-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Hugo José Lara Urdaneta

Universidade Federal de Santa Catarina/BNU

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Everton Fabian Jasinski
Data: 19/08/2023 12:25:33-0300
CPF: ***.712.059-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Éverton Fabian Jasinski

Universidade Federal de Santa Catarina

Blumenau, 2023.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram com a construção desse projeto.

AGRADECIMENTOS

A realização da presente dissertação só foi possível devido a uma combinação de fatores e pessoas, que, direta ou indiretamente contribuíram para que esse fato se concretizasse, principalmente ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Santa Catarina, campus Blumenau, do qual destaco os professores Dr. Rafael Aleixo de Carvalho, Dr. Renan Gambale Romano, Dr. Márcio de Jesus Soares, Dr. Felipe Vieira, Dra. Louise Reips, Dr. Eleomar Cardoso Júnior, Dr. Claudio Loesch, Dr. Maicon José Benvenutti, Dr. Francis Cordova Puma, Dr. Hugo José Lara Urdaneta, Dr. Felipe Delfini Caetano Fidalgo, Dr. André Vanderlinde da Silva e Dr. Luiz Rafael dos Santos pela prestatividade e atenção durante todo o programa, realizando seu trabalho com excelência, contribuindo para o melhoramento de minha formação no que tange ao labor pedagógico como também proporcionando um novo olhar sobre o ensinamento da matemática e suas aplicações.

De uma forma especial, gostaria de enaltecer o professor e orientador deste trabalho, Dr. Claudio Loesch, que mesmo diante de um contexto pós pandemia e ainda incerto em determinados fatores econômicos e sociais, não mediu esforços na orientação da presente dissertação~~.~~ Minha admiração se tornou ainda maior pelo fato de o mesmo estar sempre associando a matemática com situações das mais diversas áreas.

Às Diretoras dos três educandários onde foram aplicadas as metodologias propostas pela presente dissertação, por disponibilizarem não só sua estrutura, mas todo o apoio necessário para que tais metodologias fossem aplicadas junto aos professores e alunos, bem como meus agradecimentos aos professores, professoras e estudantes que responderam aos questionários propostos e que participaram das aplicações das atividades.

À Meriele Coelho pela revisão integral, sobre erros de sintaxe, de ortografia, de pontuação e de gramática.

Ao meu aluno do Colégio São Paulo de Ascurra – SC, César Aleixo Pessotti, pelo auxilio na formatação da presente dissertação.

Ao acadêmico de Engenharia Mecânica da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), e meu ex-aluno, Guilherme Voltolini, pelo auxílio na pesquisa junto aos seus colegas universitários, sobre o conhecimento dos mesmos acerca do Problema de Monty Hall.

Aos membros da banca, que se dedicaram a ler este trabalho e a trazer contribuições valiosas não só para o devido momento, mas que me acompanharão em trabalhos futuros.

Finalmente, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), por oportunizar aos professores da rede pública acesso à esta especialização em nível de mestrado profissional, contribuindo para o aperfeiçoamento dos docentes e consequentemente o melhoramento da educação básica brasileira.

Conte-me e eu esqueço. Mostre-me e eu apenas me lembro. Envolva-me e eu compreendo.

(Confúcio, séc. VI a.C.)

RESUMO

É notável que um dos principais motivos que causam desinteresse à aprendizagem da matemática, reside no fato da falta de observação da real aplicação dos conteúdos em situações vivenciadas pelos estudantes em seu cotidiano. No tocante ao tema Teoria das Probabilidades o mesmo acontece, onde que em determinadas vezes o conteúdo acaba sendo trabalhado apenas de forma superficial e abstrata pelos docentes. Objetivando melhorar tal quadro educacional, busca-se através da presente dissertação promover a maximização desse interesse e a visualização das aplicações reais nas mais diversas áreas acerca do tema. O autor descreve uma proposta destinada aos docentes de matemática da educação básica para o ensino da probabilidade condicional, inicialmente através do Problema de Monty Hall, aplicação de tal problema na educação básica e indicação de software onde possa ser verificado também seu resultado probabilístico para grandes amostras e posteriormente de forma mais concreta utilizando conceitos probabilísticos, o desenvolvimento do poder de análise e crítica de situações problema que envolvem probabilidade condicional de forma generalizada, demonstrando o Teorema de Bayes e suas aplicações em diversas áreas, através de exercícios resolvidos e comentados sobre possíveis indagações que poderão surgir por parte dos estudantes. Ao final são propostas algumas aplicações em algumas áreas para que os professores possam, se assim entenderem, aplicar em suas aulas regulares durante o ensino de probabilidade condicional no ensino médio, objetivando com que o aluno realmente perceba a importância desse conteúdo.

Palavras-chave: Problema de Monty Hall; Probabilidade Condicional; Teorema de Bayes.

ABSTRACT

It is notable that one of the main reasons that cause lack of interest in learning mathematics lies in the lack of observation of the actual application of the contents in situations experienced by students in their daily lives. With regard to the subject of Probability Theory, the same happens, where at certain times the content ends up being worked on only in a superficial and abstract way by the professors. Aiming to improve this educational framework, this dissertation seeks to promote the maximization of this interest and the visualization of real applications in the most diverse areas on the subject. The author describes a proposal aimed at basic education mathematics teachers for teaching conditional probability, initially through the Monty Hall Problem, application of this problem in basic education and indication of software where its probabilistic result can also be verified for large samples and later in a more concrete way using probabilistic concepts, the development of the power of analysis and criticism of problem situations that involve conditional probability in a generalized way, demonstrating the Bayes Theorem and its applications in several areas, through exercises solved and commented on possible questions that may arise from students. At the end, some applications are proposed in some areas so that teachers understand it, apply it in their regular classes during the teaching of conditional probability in high school, aiming for the student to really realize the importance of this content.

Keywords: Monty Hall Problem; Conditional Probability; Bayes Theorem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Jean Piget 27
Figura 2– Monty Hall 32
Figura 3 – Jogo de Monty Hall 33
Figura 4 - Cartões do jogo 35
Figura 5 – Resultados acerca da indagação pela troca da escolha inicial - Docentes 36
Figura 6 – Formação de alguns professores que responderam ao problema de Monty Hall 37
Figura 7 – Resultados acerca da indagação pela troca da escolha inicial - Ensino Fundamental (anos iniciais) 38
Figura 8 – Resultados acerca da indagação pela troca da escolha inicial - Ensino Fundamental (anos finais) 39
Figura 9 – Resultados acerca da indagação pela troca da escolha inicial - Ensino Médio 40
Figura 10 – Disponibilidade (%) de recursos relacionados à infraestrutura nas escolas de ensino médio 41
Figura 11 – Resultados da pesquisa sobre o problema de Monty Hall em Instituição de Ensino Superior 42
Figura 12 - Intersecção entre dois conjuntos 50
Figura 13 – Faixa etária por sexo dos alunos da Escola de Educação Básica XYZ . 51
Figura 14 - Thomas Bayes 54
Figura 15 - Harold Jeffreys 54
Figura 16 - Divisão do evento de interesse Y 56
Figura 17 – Produção de autopeças por máquinas de diferentes procedências 62
Figura 18 - Capa do livro Probabilité Des Jugements 74

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
ENCE	Escola Nacional de Ciências Estatísticas
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IMPA	Instituto de Matematica Pura e Aplicada
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LGN	Lei dos Grandes Números
NBR	Norma Brasileira
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina

LISTA DE SÍMBOLOS

$\cap$	Intrersecção
$\neq$	Diferente
$\varnothing$	Conjunto Vazio
$\cup$	União
$>$	Maior que
A^C	Complementar de A
$\simeq$	Aproximadamente
$!$	Fatorial

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 16

1.1 PRIMEIROS REGISTROS ACERCA DOS ESTUDOS PROBABILÍSTICOS 16

1.2 O ENSINO ATUAL SOBRE PROBABILIDADES NA EDUCAÇÃO BÁSICA PRECONIZADO PELA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR 18

1.3 OBJETIVOS 23

1.3.1 Objetivo geral 23

1.3.2 Objetivos específicos 24

2 DESENVOLVIMENTO 25

2.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 25

2.1.1 Vantagens da aplicação 26

2.1.2 Teorias pedagógicas acerca do desenvolvimento cognitivo 26

2.2 IMPORTÂNCIA E BENEFÍCIOS DA ANÁLISE E CRÍTICA DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS ENVOLVENDO PROBABILIDADE 29

2.3 O PROBLEMA DAS TRÊS PORTAS OU PROBLEMA DE MONTY HALL 31

2.3.1 Metodologia e Resultados Obtidos 34

2.3.1.1 Metodologia 34

2.3.1.2 Resultados Obtidos 36

2.4 PROBABILIDADE CONDICIONAL 43

2.5 O TEOREMA DE BAYES 53

2.6.1 Demonstração do resultado do problema de Monty Hall através do Teorema de Bayes 58

2.6.2 Aplicações do Teorema de Bayes que podem ser trabalhadas no ensino Médio 60

2.6.2.1 Aplicação do Teorema de Bayes na Indústria 61

2.6.2.2 Aplicação do Teorema de Bayes em jogos 68

2.6.2.3 Aplicação do Teorema de Bayes em testes de doenças infecciosas 71

3 CONCLUSÃO 79

REFERÊNCIAS 81

APÊNDICE A – PROBLEMAS PROPOSTOS SOBRE O TEOREMA DE BAYES PARA APLICAÇÃO **83**
APÊNDICE B – GABARITO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS **85**

1 INTRODUÇÃO

1.1 PRIMEIROS REGISTROS ACERCA DOS ESTUDOS PROBABILÍSTICOS

A probabilidade tem início bem antes do que geralmente abordam os livros de ensino regular de matemática, conforme versam os livros de matemática da educação básica e muitas vezes até mesmo os utilizados no ensino superior.

A tradição mítica grega associa a criação do dado (o hexaedro como conhecemos hoje) a Palamedes, onde o mesmo teve a ideia de utilizar esse artefato como meio de diversão entre os soldados gregos que combateram na épica batalha de Tróia. Atribui-se também a Palamedes outras invenções.

Flávio Filóstrato, filósofo grego atribui a Palamedes a criação de alguns utensílios de extremo valor e utilidade até os dias atuais, descreve inclusive que foi ele quem inventou a balança, um instrumento de medida utilizado pela humanidade desde então.

A chance de alguém vencer em uma disputa equiprovável, sempre fascinou o ser humano, um exemplo disso são os jogos, ditos jogos de azar, onde os mesmos despontaram no continente europeu, tratado ainda como velho mundo, aproximadamente, durante o século XV. Cabe uma observação quanto à origem da palavra azar, do árabe do *azhar* (figura em formato de flor que pintavam em seus dados para jogos), a palavra acabou sendo associada ao aleatório, embora no Brasil, esse termo tenha assumido várias interpretações, em destaque principalmente a ideia de má sorte.

Percebe-se uma diferença de aproximadamente 2 000 anos entre o período entre a Grécia Antiga e a Idade Média, entendendo-se com isso, que seja algo nato com a espécie humana. Um tratamento bem mais adequado aos jogos de azar foi dada por um Bispo Belga chamado Wibold de Cambrai, onde o mesmo relacionava as possibilidades de resultados com as virtudes, atribuindo com isso, de certa forma, religiosidade com a probabilidade, fato esse que segundo registros ocorreu por volta do século X.

Porém, os estudos probabilísticos de uma forma acentuada, ocorreram durante o século XV de forma acentuada na Europa, durante o período histórico denominado como idade média. Nesse período, os dados que eram admitidos muitos anos antes, conforme citado anteriormente a Palamedes para efeito apenas distrativos, uma vez que os gregos não associavam os resultados de eventos a matemática e sim à vontade dos Deuses, esse fato colabora para o fato dessa cultura não ter desenvolvido nenhum teorema à respeito do tema.

Os dados passaram a ser jogados em qualquer lugar com superfície lisa, por exemplo ruas, praças, tabernas ou palácios e tinha como escopo o ganho financeiro.

Nessa época, destaca-se o polímata[1] italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576) que em matemática foi o primeiro a introduzir as ideias gerais da teoria das equações algébricas, desenvolvendo estudos também em medicina, física, filosofia, religião e música. Ao estudar os jogos de azar, analisou as probabilidades de um apostador lograr êxito ou não nos mesmos, havendo registros de que ele tenha ganho alguma quantia de dinheiro com essas apostas. Cardano em seu livro "*Liber de Ludo aleae*" (Livro dos Jogos de Azar), que foi publicado após sua morte, identificou pela primeira vez as leis matemáticas do acaso.

Posteriormente também na Europa, o matemático suíço Jakob Bernoulli(1655 – 1705), prega a distribuição binomial e também desenvolveu o Teorema Áureo, conhecido como Lei dos Grandes Números (LGN), onde provou a que a LGN é válida para variáveis aleatórias binárias, onde cerca de um século antes, Cardano já suspeitava que a precisão aumentava à medida que o número repetições do evento se torna muito grande, porém sem demonstrar um teorema que comprovasse sua suspeita.

Os contemporâneos franceses e ambos também polímatas, Blaise Pascal (1623– 1662) e Pierre Fermat (1607-1665) desenvolveram as bases da teoria do cálculo probabilístico e, a partir de então, a teoria das probabilidades ganha conotação de ciência.

Já o matemático, astrônomo e físico alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777- 1855), conhecido como Príncipe da Matemática, estudou as distribuições de probabilidades para as variáveis estatísticas quantitativas contínuas, conhecida por distribuição normal ou distribuição Gaussiana de probabilidades. Na física, atribui-se também a ele a comprovação da inseparabilidade de polos de um ímã, ou seja, que as linhas de campo magnético formam um circuito fechado, resumindo quebrando um

---

[1] Um polímata é uma pessoa cujo conhecimento não está restrito a uma única área. Em termos menos formais, um polímata pode referir-se simplesmente a alguém que detém um grande conhecimento em diversos assuntos.

imã temos dois imãs e assim sucessivamente, esta descoberta é tratada na física como Lei de Gauss do magnetismo.

Outras importantes contribuições de Gauss que atualmente são preconizados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a educação básica residem nos temas Progressões e Números Complexos, relembrando a estratégia da soma dos números naturais de 1 a 100 realizado por Gauss ainda menino, segundo a história aos 9 anos de idade e que deu origem ao o que é conhecida hoje nos livros de ensino médio como a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética.

1.2 O ENSINO ATUAL SOBRE PROBABILIDADES NA EDUCAÇÃO BÁSICA PRECONIZADO PELA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no Brasil estabelece que conteúdos sobre probabilidade devem ser aplicados de uma forma mais efetiva e aplicada desde as séries iniciais do ensino fundamental até o ensino médio, visando tomada de decisões de uma forma assertiva.

Da mesma forma Lopes (2008) entende que:

> Não é possível esperarmos que nosso aluno chegue ao ensino médio para iniciarmos conteúdos essenciais para o desenvolvimento de sua visão de mundo. É preciso que a escola proporcione a ele instrumentos de conhecimento que lhe possibilitem uma reflexão sobre as constantes mudanças sociais e o prepare para o exercício pleno da cidadania. (LOPES, 2008, p.61).

O conhecimento e análise de situações que envolvam cálculo de probabilidades é algo que tem significativa importância, indiferentemente da futura trajetória acadêmica dos alunos da educação básica, nos níveis fundamental e médio brasileiro de acordo com as habilidades e competências da BNCC. É necessário para a compreensão em função das citações da presente dissertação, compreender de forma efetiva a nomenclatura das habilidades e competências da BNCC.

Tais habilidades obedecem uma nomenclatura composta inicialmente por duas letras que representam o nível, sendo EF para ensino fundamental e EM para ensino médio, seguido por um primeiro par de algarismos que representa em quais anos do respectivo nível as habilidades descritivas podem ser desenvolvidas, posteriormente temos uma sequência de duas ou três letras que representam a área (três letras) ou o segmento de conhecimento (duas letras) e terminando com dois algarismos (para o ensino fundamental) ou três algarismos (para o ensino médio), que representam a competência específica à qual se relaciona a habilidade, ressaltando que o número formado pelos algarismos não define uma ordem hierárquica no ensino dos conteúdos, cabendo a cada escola e seus respectivos docentes, alinhar de acordo com sua realidade a ordem da progressão de conteúdos que será utilizada.

O tema probabilidade tem significativa importância uma vez que de acordo do com a BNCC, está diretamente associada a estatística, tema esse constante na grade curricular brasileira conforme descreve a habilidade preconizada pela mesma:

> (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

O ensino de teoria das probabilidades deve obedecer determinada ordem, uma vez que a matemática, bem como as demais disciplinas, obedece a um processo contínuo de desenvolvimento. Batanero (2006) destaca a importância do ensino de probabilidade para educar o raciocínio probabilístico necessário ao enfrentar o acaso na vida cotidiana e melhorar as intuições dos estudantes. Segundo ele a probabilidade é de fundamental importância para os estudantes uma vez que os mesmos durante o seu cotidiano irão se deparar constantemente com fenômenos aleatórios, cabendo a eles tomar uma decisão de forma coerente com seus conhecimentos. Algumas habilidades preconizadas pela Base Nacional Comum Curricular em relação ao ensino de probabilidade no ensino médio são as seguintes:

> (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
>
> (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
>
> (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

Os conhecimentos sobre probabilidade também são muito importantes para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) realizado anualmente pelos alunos concluintes do referido nível de estudo, cujo resultado pode determinar aprovação para vários cursos de graduação em instituições de ensino superior públicas ou privadas. Historicamente o tema probabilidade aparece com frequência nesse exame, portanto, mais uma informação que enquanto professores, devemos salientar aos nossos estudantes, reforçando com isso a importância do tema estudado e comprometimento dos mesmos.

Para que um conhecimento realmente sólido a respeito desse tema seja atingido é necessário que o mesmo seja trabalhado desde os anos inicias do ensino fundamental, conforme prega a BNCC que antecipa esse conteúdo desde o primeiro ano das séries iniciais, devida à relevância do conteúdo e tamanha sua importância para a sociedade. Uma das habilidades que a BNCC preconiza para as séries iniciais do ensino fundamental em seu primeiro ano e, portanto, na faixa etária dos 7 anos, é a seguinte:

> (EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.

Nos anos finais das séries iniciais do ensino fundamental o cálculo de probabilidades já é utilizado em situações-problemas, uma vez que, os mesmos já estão familiarizados com operações com frações, análise de gráficos e outros. O tema consta no material didático dos respectivos anos de estudo, conforme preconiza a BNCC sobre duas habilidades para os quintos anos do ensino fundamental:

> (EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.
>
> (EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

Ainda no ensino fundamental, agora em seus anos finais, temos que as aplicações de probabilidades assumem um nível mais significativo, envolvendo cálculos um pouco mais complexos tais como cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável, cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (já induzindo a ideia da Lei dos Grandes Números), conforme as habilidades a serem desenvolvidas de acordo com a BNCC:

> (EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
>
> (EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

Começa a ser trabalhada também a análise combinatória, através do princípio fundamental da contagem (PFC), objetivando que o estudante efetue o cálculo de todas as possibilidades que determinado evento aleatório possa acontecer e, por conseguinte, o número de elementos do espaço amostral.

> (EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Ao término do ensino fundamental os estudantes devem saber analisar de forma bem assertiva a probabilidade de eventos aleatórios evidenciando possíveis erros, diferenciar eventos dependentes e eventos independentes, saber planejar e executar uma pesquisa amostral, efetuar cálculos probabilísticos e apresentá-los por meio de tabelas ou gráficos, calcular medidas de tendência central (média aritmética, mediana e moda), bem como medidas de dispersão (variância e desvio padrão). A respeito desses a BNCC apresenta as seguintes habilidades:

> (EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.
>
> (EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Compreende-se ao analisar as habilidades preconizadas pela BNCC que os conteúdos sobre teoria das probabilidades é significativo e consta nos materiais didáticos, porém os principais problemas enfrentados durante a prática pedagógica ocorre que em muitas vezes, esses conteúdos não são trabalhados de forma coerente, seja por falta de tempo, seja por desconhecimento da significativa importância e relevância social do tema pelo professor, realizando apenas operações básicas e não adentrando no conteúdo de forma mais desafiadora aos alunos.

Segundo Shulman (1986) os professores precisam de três tipos de conhecimentos associados ao conteúdo: conhecimento específico do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular do conteúdo.

O conhecimento curricular do conteúdo reside no do que o professor esteja ciente das sequências didáticas de determinado tema ao longo dos diversos anos da educação básica. No caso da educação brasileira, os professores, portanto, não podem de forma alguma estarem ainda trabalhando nas séries finais do ensino fundamental conteúdos sobre probabilidade que devem ser ensinados nas séries iniciais, pois isso rompe o elo da corrente e, consequentemente, não ocorrerá evolução do estudante em relação ao tema.

Os professores devem ser instruídos quanto aos conteúdos programáticos necessários para que nos anos subsequentes seja dada continuidade de forma crescente na aplicação desse conhecimento. Porém, isso nem sempre ocorre seja por falta de formação adequada do professor, por conforto ou até mesmo por temor de ao ser indagado não saber responder. Maldaner (1997), ao realizar pesquisa com professores dos mais diversos níveis de ensino, constatou medo dos mesmos de não saberem responder a questionamentos dos alunos em situações nas quais os mesmos podiam indagar acerca do tema.

Já a nível de ensino médio, o ensino de probabilidade assume uma forma mais robusta, pois agora os conhecimentos em análise combinatória ganham força, já que os estudantes têm contato com a definição de fatorial, já que a nível de ensino fundamental os mesmos apenas tem contato com o princípio fundamental da contagem, sendo desconhecido até mesmo o símbolo **!** de fatorial, sendo conhecido até então, somente como um sinal de pontuação.

Após a definição de fatorial, os estudantes são instruídos para cálculos de permutações (simples e com repetição), arranjos e combinações simples, sendo que a probabilidade é trabalhada em situações mais complexas tais como determinar quantos são todos os resultados possíveis de um jogo tal como, a mega sena e consequentemente, qual a probabilidade que algum apostador tem de ganhar a sena, a quina ou a quadra com determinada quantidade de apostas que efetuou.

A Base Nacional Comum Curricular também preconiza outra habilidade importante que os docentes devem desenvolver junto aos estudantes, objetivando a aplicação concreta dos novos conhecimentos em análise combinatória:

> (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro, etc.).

Cordani (2001) enfatiza que caso o ensino fosse além da mecanização e aplicação de fórmulas, mostrando exemplos do cotidiano e relacionando com outras disciplinas, aproximaria os alunos, fazendo com que os mesmos passassem a enxergar sua importância. A probabilidade é conteúdo importante na interface entre disciplinas e conhecimentos sólidos são necessários para projetos interdisciplinares envolvendo componentes curriculares tais como:

a) o paradoxo do gato de Schrödinger, e o Princípio da Incerteza de Heisenberg na Física;

b) cálculo probabilístico da Lei de Mendel (ou Princípio da Segregação dos Caracteres), na Biologia.

Stein e Loesch (2008) da mesma forma, no livro Estatística Descritiva e Teoria das Probabilidades defendem a importância global do conhecimento probabilístico dada a gama de aplicações nas mais diversas áreas de acordo com o que segue na página 84 da referida obra:

> Atualmente a teoria das probabilidades tem muita importância e várias aplicações em estatística, economia, engenharia, física, química, sociologia, biologia e vários outros campos do conhecimento.

Reconhecendo essa importância, na mesma página da obra supracitada, os autores reforçam a importância da teoria das probabilidades na estatística de acordo com o que segue:

> Pode-se afirmar que seu estudo se justifica pelo fato de a maioria dos fenômenos de que trata a estatística ser de natureza probabilística, sendo, portanto, essencial para o estudo da inferência estatística.

A inferência estatística relatada pelos autores supracitados em sua obra é algo notório quanto à sua importância e, portanto, enquanto professores, não podemos de forma alguma deixar de ressaltar tal importância. A indução à ideia de inferência estatística é abordada na seguinte habilidade proposta no sexto ano do ensino fundamental:

> (EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

A presente dissertação tem como objetivo geral o desenvolvimento da análise e crítica por parte de alunos e professores da educação básica, sobre situações-problemas que envolvam probabilidade condicional, através da aplicação de atividades de forma lúdica e posterior análise dos resultados e comparação dos resultados obtidos nos três níveis de ensino da educação básica (ensino fundamental séries iniciais, séries finais e ensino médio). Essa análise dos resultados tem como objetivo observar se existe um “padrão” por parte dos discentes e docentes sobre a forma de analisar tais situações e posteriormente demonstrar que esses padrões nem sempre correspondem à análise correta da situação.

1.3.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral são delineados os seguintes objetivos específicos:

(a) analisar o comportamento dos estudantes quanto à situação-problema do jogo;

(b) desenvolver um maior poder de análise e crítica sobre resolução de questões que envolvam probabilidade condicional por parte dos estudantes e professores;

(c) desenvolver uma metodologia para o ensino e principalmente a compreensão da probabilidade condicional através de sua generalização, ou seja, o Teorema de Bayes;

(d) desenvolver maior interesse e participação dos estudantes, uma vez que, atividades que envolvam aplicações práticas em situações do cotidiano, é algo que pode despertar o interesse do aluno.

Para o cumprimento desses objetivos foram realizadas as seguintes atividades:

(a) aplicação o jogo de Monty Hall a todos os três níveis de ensino da educação básica, bem como aos respectivos professores de forma lúdica, objetivando analisar o comportamento dos estudantes quanto a essa situação-problema;

(b) realização de aulas expositivas, durante as aulas regulares, para aplicar a metodologia de ensino proposta para o entendimento do Teorema de Bayes, demonstrando sua aplicação em algumas áreas do cotidiano através de situações pelas quais os estudantes possam se defrontar ou até mesmo que por eles já foram vivenciadas, objetivando a melhor decisão acerca da decisão a ser tomada. Essa atividade é destinada apenas aos alunos do ensino médio.

2 DESENVOLVIMENTO

O problema das três portas, também conhecido por problema de Monty Hall, nome artístico de Monte Halperin (1921-2017) apresentador de palco canadense, que desenvolveu sua vida artística nos Estados Unidos da América é um exemplo da situação supracitada, sendo que esse mesmo pensamento, sobre a aparente inconsistência no resultado probabilístico também ocorre em situações que envolvem o Teorema de Bayes.

O problema das três portas consiste em um jogo no qual atrás de uma das portas existe um valioso prêmio e atrás das outras duas, existem prêmios de menor valia, no caso do programa de Monty Hall, havia na verdade, bodes. O participante era indagado sobre escolher uma das portas e posteriormente o apresentador abria uma das portas das quais não apresentava o prêmio de maior valia. Após a ocorrência desse evento, Monty Hall perguntava ao participante se era de seu interesse mudar a escolha inicial antes de abrir a segunda porta e finalizar o jogo.

2.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Rubem Alves (1991) pregava a ideia da aprendizagem residual, ou seja, o que resta de entendimento de tal conteúdo de forma concreta e sua utilização. O mesmo defendia a ideia de que o ensino deve ocorrer de forma integrada entre as disciplinas buscando com isso a maximização dessa aprendizagem residual supracitada, não bastando possuir tal conhecimento, mas aplicá-lo a situações reais em benefício próprio e da coletividade, reforçando a premissa de que os estudantes terão mais interesse nas aulas ao visualizar tais aplicações e interação entre os saberes. De acordo com o mesmo caso isso não ocorra, nós mesmos enquanto professores, apresentamos de certa forma determinado grau de analfabetismo funcional mesmo sendo catedráticos em nossa área, conforme segue:

> Cientistas são como pianistas que resolveram especializar-se numa técnica só. Imagine as várias divisões da ciência – física, química, biologia, psicologia, sociologia – como técnicas especializadas. No início pensava-se que tais especializações produziriam, miraculosamente, uma sinfonia. Isto não ocorreu. O que ocorre, frequentemente, é que cada músico é surdo para o que os outros estão tocando. Físicos não entendem os sociólogos, que não sabem traduzir as afirmações dos biólogos, que por sua vez não compreendem a linguagem da economia. (ALVES, 1991, p. 8)

Nesse mesmo tocante, o pensador e filósofo chinês Confúcio no século VI a.C, entendia que além da sinceridade e a moralidade nas relações sociais, o desenvolvimento do conhecimento devia ocorrer de forma significativa, onde preconizava que a compreensão dos estudantes quanto a determinado tema ocorria da seguinte forma, segundo uma de suas célebres frases: “ Fale e eu esqueço, mostre-me e eu apenas me lembro, envolva-me e eu compreendo”

Essa compreensão desenvolve no estudante, a confiança e de forma agregada a autonomia para que o mesmo possa de forma sólida enfrentar e analisar situações, propor soluções e consequentemente resolvê-las.

2.1.1 Vantagens da aplicação

A presente dissertação tem como escopo, demonstrar a importância e principalmente a aplicação da probabilidade condicional em situações do cotidiano, bem como demonstrar que em algumas situações aparentemente simples, nas quais julgamos estar corretos quando na verdade não estamos, pois não analisamos a situação de forma correta e por essa falta de análise, muitas vezes, relutamos em aceitar tal erro.

O presente trabalho, não tem como objetivo a fixação de regras para resolução de problemas, mas sim a real compreensão dos problemas, desenvolvendo a análise e crítica referente aos mesmos, pois esse sim é o fator determinante para o desenvolvimento intelectual dos estudantes.

2.1.2 Teorias pedagógicas acerca do desenvolvimento cognitivo

Segundo Jean William Fritz Piaget (1896 -1980) considerado um dos mais importantes pensadores sobre educação do século XX, a autonomia permite ao estudante o desenvolvimento de seus potenciais.

Figura 1 – Jean Piget

Fonte: 1968 Michiganensian, p. 91.

De acordo com Parrat-Dayan e Thyphon:

> No que concerne às relações professor-aluno, é o *self-government* que permitirá um intercâmbio real. Enquanto os métodos [ensino] continuarem embasados na coerção, eles apenas provocarão o respeito unilateral, pois a coerção é exterior ao aluno. Ao contrário, o método do *self-government*, enquanto fonte de autonomia, permite ao aluno internalizar as normas e desenvolver sua personalidade. Piaget não cessa de evocar a importância desse método no plano educacional. Sua utilidade é evidente para qualquer interação, seja entre adultos e crianças, irmãos mais velhos e mais novos ou até mesmo, em termos políticos, entre dirigentes e dirigidos. (PARRAT-DAYAN; TRYPHON, 1998, p. 14).

De acordo com Carneiro (2000, p.100),

> No caso da escola, esta tarefa parece merecer nova avaliação, os conteúdos dos programas de ensino devem estar voltados para habilidades e aptidões e não, como tradicionalmente tem sido, para a aquisição de informações ou mesmo de conhecimentos descolados de contextos dinâmicos da vida.

Segundo Micotti, (1999, p. 163)

> É em Matemática que os alunos entram em contato com sistemas de conceitos que permitem resolver problemas e fazer novas deduções; em que a coerência e a precisão do raciocínio conferem legitimidade às ideias e as conclusões obtidas, segundo a necessidade lógica, de premissas definidas (por outros).

No tocante a compreensão dos estudiosos supracitados, o tema probabilidade deverá proporcionar ao aluno decisões de forma correta em sua vida pessoal e consequentemente profissional, bem como o desenvolvimento da análise de situações apresentadas em periódicos científicos, sobre diversos assuntos tais como por exemplo: “Estudos confirmam que mães usuárias de drogas durante a gestação apresentam maior risco de que seus filhos tenham problemas de crescimento e desenvolvimento".

Ao termos acesso à uma informação desse tipo automaticamente fazemos uma associação entre mães usuárias de drogas durante a gestação e filhos com probabilidade maior de nascerem com problemas em seu crescimento e desenvolvimento, de um forma mais grave, o que trata de um caso explícito de probabilidade condicional, uma vez que a ocorrência de um primeiro evento (mãe ser usuária de drogas durante a gestação) tem importância significativa para o segundo evento (filhos nascerem com problemas de crescimento e desenvolvimento).

A probabilidade condicional está presente em nosso cotidiano, por isso tamanha a importância de seu conhecimento, análise e compreensão.

Outra vantagem reside em aplicar em vários níveis de estudo (séries inicias e finais do ensino fundamental e ensino médio) o problema das três portas e posteriormente comprovar que, ao ser repetido, a atividade com um número significativo de alunos, que a probabilidade se confirma, obedecendo a Lei dos Grandes Números (LGN) ou Teorema Áureo das Probabilidades, uma vez que, quanto mais tentativas são realizadas, maior a probabilidade da média aritmética dos resultados observados se aproximar da probabilidade real.

O professor de economia, de nacionalidade portuguesa, Pedro Nogueira Ramos, tem uma obra que faz referência ao Teorema Áureo das Probabilidades intitulada " Torturem os Números que Eles Confessam: Sobre o mau uso e abuso das Estatísticas em Portugal e não só", sendo que tal obra se refere à análise incorreta e consequente aplicação errônea de dados estatísticos na economia e o que fazer para evitá-los.

Reforçando a LGN, o estatístico e professor americano William Edwards Deming (1900 – 1993) preconizava que: "Sem dados você é apenas uma pessoa qualquer com uma opinião."

A definição da palavra probabilidade tem origem no latim *probare*, que significa provar ou testar. Matematicamente, expressa a chance de determinado evento aleatório acontecer.

Entende-se como evento aleatório, todo experimento mesmo que realizado nas mesmas condições e ainda que saibamos todos os resultados possíveis, ou seja, o conjunto denominado espaço amostral, não podemos determinar com certeza qual dos resultados vai ocorrer.

A probabilidade pode ser expressa em forma de uma razão, taxa percentual ou taxa unitária, como por exemplo, a probabilidade no nascimento de uma criança da mesma ser do sexo feminino é $\frac{1}{2}$ ou 50% ou ainda 0,5.

A grande maioria dos livros didáticos de ensino de matemática da educação básica adota o uso da forma de razão para a probabilidade, enquanto que periódicos e noticiários preferem utilizar a forma percentual, entende-se o fato pelo melhor entendimento por parte dos leitores, pela maior familiaridade das pessoas com taxa percentual. Nesta dissertação são utilizadas as três formas para expressar o resultado probabilístico

A probabilidade p de um evento ocorrer é definida no pelo intervalo $0 \leq p \leq 1$, sendo que quanto mais próximo p estiver de zero menos provável será a ocorrência daquele resultado para o evento aleatório e quanto mais próximo de 1, mais provável a ocorrência. Muitos livros didáticos utilizam os termos “evento impossível” para a probabilidade igual a zero, “dificilmente”, “pouco provável”, “muito provável”, “quase certo que” para probabilidades intermediárias entre 0 e 1 e expressões como “com certeza” ou “evento certo” quando a probabilidade é igual a 1.

Dante (2000) em seu livro Matemática: Contexto & Aplicações, na página 383, faz uso dos termos “evento impossível” e “evento certo” que foram supracitados, na introdução ao ensino de probabilidades para o ensino médio.

2.2 IMPORTÂNCIA E BENEFÍCIOS DA ANÁLISE E CRÍTICA DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS ENVOLVENDO PROBABILIDADE

Os benefícios da sequência dos estudos sobre probabilidades desde as séries iniciais em níveis crescentes de dificuldade residem no fato de um maior poder de análise e crítica em situações de seu cotidiano, que por muitas vezes passam não são compreendidos de forma integral, tal como, por exemplo, alguns exames nos quais os resultados não representam por exemplo o índice de certeza do mesmo estar correto e que é apresentado.

A importância do desenvolvimento da análise de situações problema que envolvam cálculo probabilístico é fundamental para que decisões de forma coerente, maximizando resultados nas mais diversas áreas. Para atingir tal intuito existem alguns princípios cuja utilidade ajuda de forma significativa na análise correta e consequentemente um resultado correto para tal situação, sendo que alguns desses princípios e ações serão relatados a seguir.

É importante para acontecer o desenvolvimento concreto do poder de análise de um problema probabilístico, o discernimento claro das diferenças entre eventos dependentes e eventos independentes, os prefixos “ou” e “e” que aparecem com frequência em problemas e relacioná-los de forma correta com a união e intersecção de probabilidades respectivamente.

O livro Lima et al. (2010) enumera três princípios básicos que servem como estratégias para resolver problemas nos quais é necessário o cálculo combinatório que está associado frequentemente ao cálculo probabilístico. Esses princípios também são conhecidos como método de Morgado[2].

1. Postura: Devemos nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.
2. Divisão: Devemos sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.
3. Não adiar dificuldades: Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades.

Esses princípios, métodos ou técnicas visam maior capacidade de resolução de problemas e consequentemente maior compressão de processos combinatórios, proporcionando em estudos futuros maior êxito em disciplinas nas quais o raciocínio matemático seja necessário de forma mais efetiva, minimizando com isso reprovações, por falta de base matemática suficiente para cursar alguma graduação na qual existam disciplinas da área de ciências exatas.

Os resultados de uma análise crítica otimizada se manifestam em várias situações, pois a mesma, proporciona perceber detalhes que por muitas vezes não enxergamos, todavia, esses detalhes são determinantes para o correto resultado final.

Da mesma forma, Batanero (2001) relaciona o conhecimento probabilístico e as decisões tomadas com base nesses conhecimentos de forma assertiva com os benefícios não só para si, mas para a coletividade de uma forma geral, conforme destaque:

[2] Augusto César de Oliveira Morgado foi professor da Escola Nacional de Ciências Estatísticas (ENCE), onde foi chefe do Departamento de Estatística.

> A relação entre o desenvolvimento de um país e o grau em que seu sistema estatístico produz estatísticas completas e confiáveis é clara, porque esta informação é necessária para a tomada de decisões acertadas do tipo econômico, social e político. A educação estatística, não só dos técnicos que produzem essas estatísticas, mas dos profissionais e cidadãos que devem interpretá-las e tomar por sua vez decisões baseadas nessas informações, assim como dos que devem colaborar na obtenção dos dados requeridos, é, portanto, um motor de desenvolvimento. (BATANEIRO, 2001, p. 64)

2.3 O PROBLEMA DAS TRÊS PORTAS OU PROBLEMA DE MONTY HALL

Um dos objetivos específicos supracitados da presente dissertação é aplicar uma metodologia para o ensino e principalmente a compreensão da probabilidade condicional através de sua generalização, ou seja, o Teorema de Bayes, pois espera-se que uma sólida compreensão da resolução de situações-problemas, situações estas nas quais, os resultados corretos muitas vezes não são aceitos pelas pessoas, gerando discussão acerca dos mesmos, sendo que tais questionamentos estão relacionados à falta de análise de forma correta da referida situação, como por exemplo os exames conhecidos como falsos-positivos, onde, a pessoa é diagnosticada com tal doença porém, na verdade, não apresenta tal patologia.

Porém, para uma compreensão efetiva do referido teorema pelos estudantes é necessário anteriormente introduzir a ideia de probabilidade condicional que será efetuada através de uma situação que aparentemente é simples, quando na verdade não é, conhecida como problema das três portas ou problema de Monty Hall.

O problema das três portas também conhecido por problema de Monty Hall é um problema matemático que surgiu na década de 70 nos Estados Unidos em um programa de televisão intitulado *Let’s Make a Deal*? (Vamos fazer um acordo?) apresentado por Monte Halperin, (1921-2017), mais conhecido pelo nome artístico de Monty Hall, apresentador de palco canadense já supracitado nesse trabalho, por isso o nome do problema. Uma curiosidade sobre os registros acadêmicos desse apresentador é que o mesmo estudou química e zoologia na Universidade de Manitoba[3] e apresentava conhecimento matemático aguçado segundo registros.

---

[3] A Universidade de Manitoba é a maior universidade da província de Manitoba, no Canadá. Está localizada na cidade de Winnipeg e foi fundada em 1877.

Figura 2– Monty Hall

Fonte: Imagem promocional de Monty Hall, Wikipédia.

O problema consiste em um jogo no qual existem três portas, onde atrás de uma das portas existia um generoso prêmio e nas outras duas portas não existia prêmio algum (no programa existia em verdade um bode).

Monty Hall então solicitava ao candidato ao prêmio escolher uma das portas. Após a escolha, o apresentador abre uma das portas que não foram escolhidas e para “surpresa” do concorrente o prêmio não está atrás daquela porta. O primeiro pensamento que nos vem à mente qual é? Temos duas portas fechadas, sendo que aquela que eu escolhi é uma delas. Todavia esse problema é muito mais difícil do que parece.

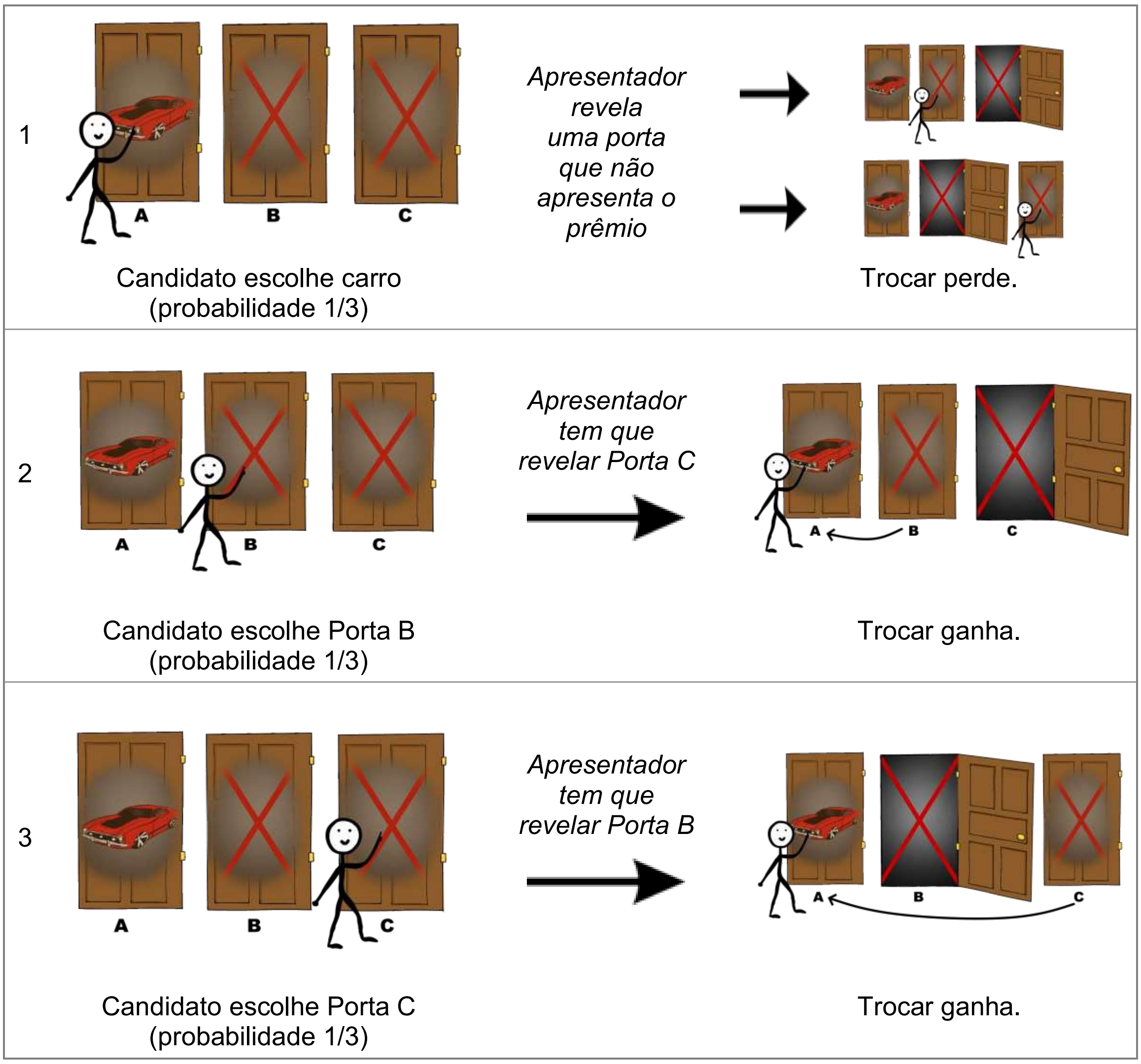
Se analisarmos a questão de uma forma superficial, nossos conhecimentos probabilísticos de “forma cristalina” nos informarão que a probabilidade do participante lograr êxito quanto ao prêmio passou de $\frac{1}{3}$ para $\frac{1}{2}$.

Restando apenas duas portas fechadas, a escolhida pelo concorrente e a outra porta, Monty Hall indagava ao mesmo se ele desejava mudar sua escolha. Por crença, intuição ou qualquer outro sentimento pessoal, grande parte dos participantes de tal programa preferiam continuar com a porta que escolheram, já que em suas concepções, tinham agora 50% de chance de ganhar o tão valioso prêmio. Porém, os mesmos não levaram em conta em seu raciocínio probabilístico o fato de que o apresentador tinha conhecimento de qual porta estava o prêmio, ou seja, o apresentador não abriu a primeira porta de forma aleatória, com isso ele não está gerando um novo jogo, mas está dando informações valiosas ao concorrente sobre a localização do prêmio definida no jogo inicial. É por isso que a resposta é tão contra intuitiva.

Essa visão sobre o problema, inclusive, é comentada no início do filme “Quebrando a banca” (2008)[4], onde um professor universitário de matemática seleciona seus acadêmicos mais brilhantes para ganhar dinheiro em cassinos, com base em seus conhecimentos probabilísticos e propõem essa situação aos seus estudantes para selecioná-los.

A três situações possíveis para esse jogo podem ser representados através da Figura 3, supondo que o automóvel esteja atrás da porta A:

Figura 3 – Jogo de Monty Hall



O jogador tem uma chance igual de inicialmente selecionar o carro, Porta B, ou Porta C. A troca resulta em uma vitória 2/3 das vezes.

Fonte: O Autor.

[4] Quebrando a Banca (*Bringing Down the House*, 21, EUA, 2008, 123 min, direção de Robert Luketic).

Ou seja, o concorrente caso não efetue a troca de porta solicitada pelo apresentador, continuará com probabilidade igual a $\frac{1}{3}$ de ganhar o prêmio e consequentemente $\frac{2}{3}$ de probabilidade de lograr êxito se trocar a porta escolhida inicialmente.

O Teorema de Bayes demonstra que esses valores probabilísticos são de fato os resultados corretos, conforme será demonstrado posteriormente.

2.3.1 Metodologia e Resultados Obtidos

Em busca dos resultados acerca dos conhecimentos dos estudantes sobre os temas que são o escopo da presente dissertação foi adotada a metodologia apresentada a seguir.

2.3.1.1 Metodologia

Objetivando obter resultados do comportamento dos alunos e professores da educação básica sobre o problema, para posteriormente adentrar em probabilidade condicional e finalmente a aplicação do Teorema de Bayes a nível de ensino médio de forma precoce, já que esse tema somente é trabalhado de forma efetiva nos cursos de graduação, aplicou-se a situação-problema aos alunos da educação básica, nos níveis ensino fundamental e ensino médio para inicialmente verificar o comportamento dos estudantes sobre a questão trocar ou não trocar de cartão escolhido e posteriormente calcular as respectivas probabilidades de ganhar o prêmio em ambas situações.

A aplicação ocorreu em escolas de educação básica localizadas no Vale do Itajaí no Estado de Santa Catarina, junto aos anos iniciais do ensino fundamental (primeiro ao quinto ano), anos finais (sexto ao nono ano), ensino médio e também aos professores dos educandários. Escolheu-se a divisão do ensino fundamental em anos iniciais e anos finais pela diferença significativa de idade entre o início e o final do respectivo nível de ensino, que é de 9 anos e que corresponde ao maior período da educação básica brasileira.

As escolas escolhidas para a aplicação do problema foram as seguintes:

- Escola Municipal Padre Martinho Stein no município de Timbó/SC para aplicação aos alunos do ensino fundamental (séries iniciais e finais)

- Escola de Educação Básica Osvaldo Cruz do município de Rodeio/SC

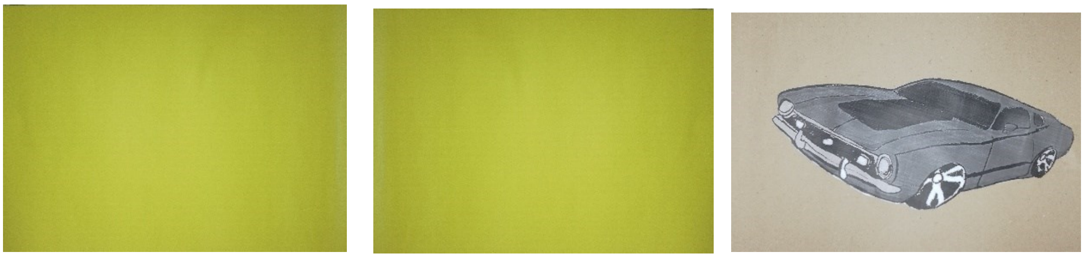
- Colégio São Paulo no município de Ascurra/SC

A segunda e terceira escolas supracitadas são escolas estadual e particular respectivamente e nas mesmas, foi aplicado o problema aos alunos do ensino médio e a primeira municipal, portanto, somente atende ao ensino fundamental.

Inicialmente, foi explicado o problema em todos os seus detalhes e o porquê do mesmo ser conhecido por problema de Monty Hall. Também foi demonstrado um pequeno vídeo[5] sobre a vida de Monty Hall.

As portas do programa de palco, foram substituídas por cartões opacos de mesma cor, sendo que o cartão premiado possuía o prêmio desejado em seu verso e todos os estudantes participaram de forma individual e particular, ou seja, sem a influência ou opinião dos colegas de classe.

Figura 4 - Cartões do jogo



Fonte: O Autor.

A atividade foi dividida em duas partes:

Primeira etapa: tinha por objetivo verificar o número de estudantes que não trocariam ou trocariam de cartão, após o primeiro cartão revelado não conter o prêmio.

Segunda etapa: calcular a probabilidade obtida de receber o prêmio pelos estudantes que não trocaram o cartão escolhido incialmente e a probabilidade de êxito dos que escolheram efetuar a troca, sendo que esses cálculos foram realizados pelos

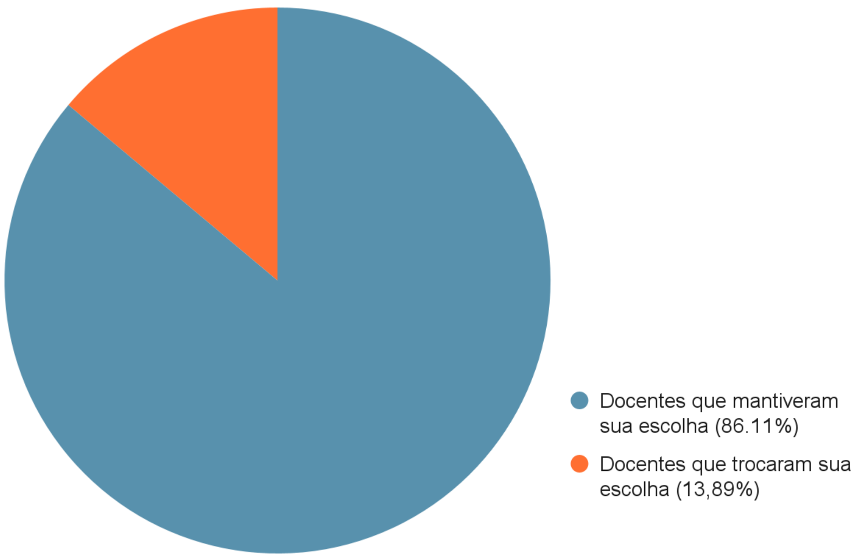
[5] O referido vídeo pode ser acessado no link https://youtu.be/z2RdmK6WSMA.

próprios alunos com o objetivo de constatar que um espaço amostral de vários elementos, a probabilidade de acordo com a Lei dos Grandes Números (LGN) se confirma.

2.3.1.2 Resultados Obtidos

Ao aplicar o problema de Monty Hall aos professores, constatou-se que em uma amostra de 36 docentes de diversas disciplinas e etapas da educação básica (ensino fundamental e médio), incluindo oito professores de matemática dos quais inclusive dois deles com Mestrado em Matemática e Ciências Naturais. O que causou estranheza foi o fato dos professores de matemática quase em sua totalidade desconhecerem tal problema e associaram o "padrão popular" no qual a probabilidade aumentava de $\frac{1}{3}$ para $\frac{1}{2}$, sendo apenas que um deles conhecia o problema em questão. Esse padrão não é intuição do presente autor, mas sim comentários tecidos pelos próprios professores durante a aplicação do problema, evidenciando suspeitas de que o tema probabilidade condicional não é trabalhado de forma efetiva à nível de ensino médio e até mesmo nos cursos de licenciatura. No tocante às respostas, 31 professores mantiveram a escolha inicial e cinco educadores escolheram trocar de porta, perfazendo aproximadamente 86% de permanência da escolha inicial.

Figura 5 – Resultados acerca da indagação pela troca da escolha inicial - Docentes



Fonte: O Autor.

A Figura *6* apresenta a formação de alguns professores que responderam ao problema:

Figura 6 – Formação de alguns professores que responderam ao problema de Monty Hall

Professor A	Licenciatura em Pedagogia
Professor B	Especialização em Alfabetização
Professor C	Licenciatura em Geografia
Professor D	Doutorado em História
Professor E	Licenciatura em Matemática
Professor F	Graduando em Física (8^0 semestre)
Professor G	Mestrado em Matemática e Ciência Naturais
Professor H	Especialização em Fisiologia do Esporte

Fonte: O Autor

Os professores que responderam ao problema apresentam uma formação no mínimo razoável, comprovando que a análise crítica de situações probabilística por parte das pessoas, obedece a um padrão “evidente” para as respostas, demonstrando com isso evidências que existência uma forma geral de pensamentos nas diversas faixas etárias e graus de instrução. Essa falsa evidência será desmistificada pelo Teorema de Bayes como será demonstrado posteriormente.

Os resultados obtidos na primeira etapa da situação-problema sobre trocar ou não trocar de cartão escolhido foram os seguintes: nas séries iniciais do ensino fundamental séries iniciais foi aplicado o problema a uma amostra de 25 alunos, enquanto que nas séries finais essa amostra foi igual a 40. Sobre a decisão em trocar ou não o cartão escolhido o resultado para as séries inicias do ensino fundamental, apenas seis alunos decidiram trocar de cartão escolhido inicialmente enquanto que 19 desejaram permanecer com a escolha inicial. Nas séries finais, nove alunos resolveram trocar a escolha e 31 mantiveram-se fiéis à primeira escolha, obtendo-se os seguintes percentuais quanto à decisão de permanecer com a escolha inicial (76% para as séries iniciais e 77,5% para as séries finais).

Em relação ao ensino médio, o interesse quanto ao comportamento dos alunos se acentua, uma vez que já são estudantes com maior convivência social, onde na amostra pesquisada alguns inclusive, já apresentavam alguma atividade funcional em seu cotidiano. Por esse motivo optou-se por uma amostra significativa de 150 alunos, sendo igualmente dividida entre as escolas estadual e particular citadas anteriormente.

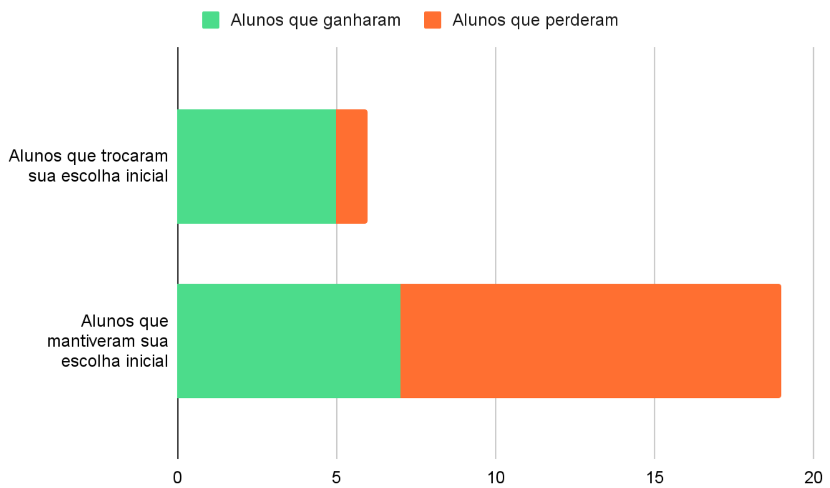
Da amostra acima, 62 alunos já possuem alguma atividade laboral remunerada, principalmente os alunos da escola estadual de ensino. Quanto a troca ou não de cartão escolhido, 118 decidiram manter a escolha e 32 modificá-la, determinado um percentual de aproximadamente 79 % de fidelidade à escolha inicial.

Em relação a segunda etapa, os cálculos probabilísticos foram realizados pelos próprios estudantes, com o objetivo da percepção dos mesmos que a melhor escolha seria trocar de cartão escolhido, uma vez que, a lei dos grandes números se confirma. Os alunos do ensino fundamental cursando as séries iniciais foram auxiliados pelas respectivas professoras que acompanharam a aplicação. Os resultados probabilísticos de êxito ou fracasso de acordo com a escolha sobre a troca ou não do cartão escolhido na primeira etapa estão expressos a seguir.

Ensino Fundamental (anos iniciais)

Dos 19 alunos que escolheram manter a escolha inicial, sete lograram êxito, um percentual próximo de 37%, enquanto que os seis alunos que optaram pela troca, cinco tiveram sucesso, algo em torno de 87%. Os resultados evidenciam uma maior probabilidade de ganho ao se escolher pela troca. Porém nesse caso, enquanto professores devemos tecer uma crítica quanto aos resultados pelo fato da amostragem ser muito pequena.

Figura 7 – Resultados acerca da indagação pela troca da escolha inicial - Ensino Fundamental (anos iniciais)

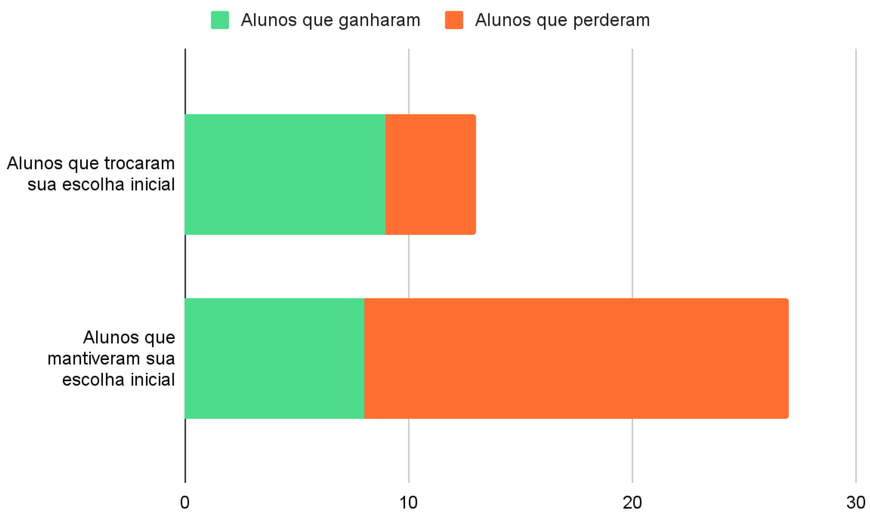


Fonte: O Autor.

Ensino Fundamental (anos finais)

Quanto às séries finais, os cálculos foram realizados pelos mesmos após apresentação dos dados pelo presente autor e conhecidos pelos mesmos, uma vez que, participaram da atividade. Do total de 27 que mantiveram a escolha inicial somente oito foram agraciados com o prêmio, aproximadamente 30%, enquanto que dos 13 que escolheram pela troca nove ficaram muito satisfeitos com o resultado, algo em torno de 69%, evidenciando novamente que a troca do cartão escolhido seria a melhor escolha.

Figura 8 – Resultados acerca da indagação pela troca da escolha inicial - Ensino Fundamental (anos finais)



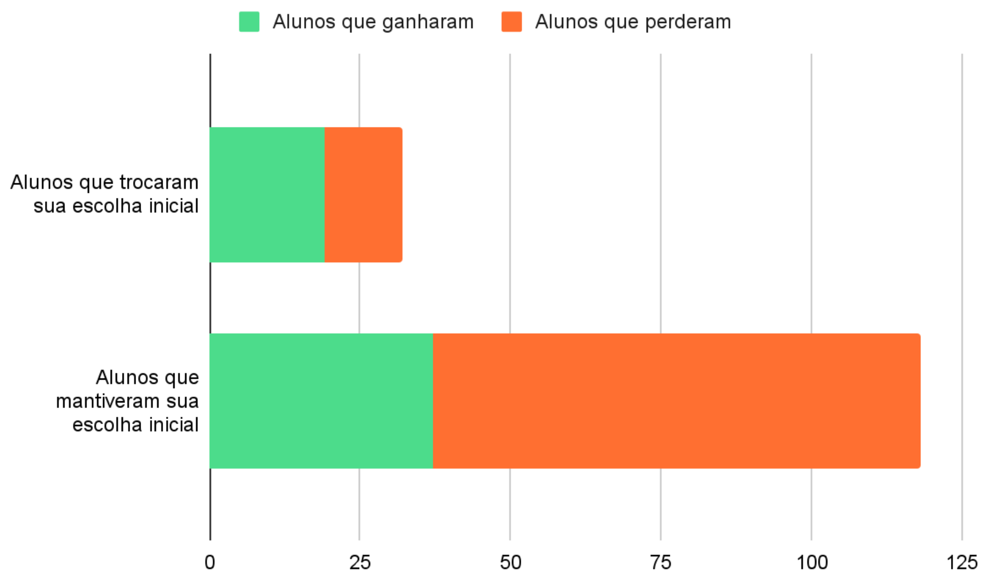
Fonte: O Autor.

Ensino Médio

Agora possuímos uma amostra mais significativa em comparação ao ensino fundamental. Do total de 118 alunos que não trocaram a escolha inicial, 37 ganharam o prêmio, pouco mais de 31% de sucesso. No caso dos 32 que optam pela troca, 19 receberiam o prêmio, algo bem próximo de 60%.

Uma amostra mais significativa manteve a probabilidade maior de obter o prêmio caso a portal escolhida inicialmente fosse trocada.

Figura 9 – Resultados acerca da indagação pela troca da escolha inicial - Ensino Médio



Fonte: O Autor.

Nos três casos as probabilidades de ganhar o prêmio optando pelas duas hipóteses (troca ou não do cartão escolhido inicialmente), se aproximou de $\frac{1}{3}$ para a permanência da escolha inicial e $\frac{2}{3}$ para a troca, ressaltando que no caso do ensino médio a amostra é bem mais significativa.

Se desejarmos uma amostra maior para a situação, podemos utilizar simuladores para evidenciar que realmente a LGN se manifesta. Essa simulação pode ser feita através do uso da planilha Excel ou através de simuladores existentes para a situação. Um interessante simulador existente encontra-se no website *Math Warehouse*[6] (traduzindo literalmente: Armazém da Matemática), acessando games e escolhendo *Monty Hall Simulation* Online, ou diretamente no link https://www.mathwarehouse.com/monty-hall-simulation-online/. Esse site inclusive dispõe de várias atividades interativas sobre conteúdos matemáticos voltados a educação básica desde suas séries iniciais, sendo, portanto, uma boa opção para aulas dinâmicas com nossos estudantes.

Utilizando-se do mesmo, duas simulações foram realizada pelo autor, uma na data de 01 de fevereiro de 2023, onde foram solicitadas 1000 repetições do referido

[6] Site dedicado a aulas de matemática, demonstrações, atividades interativas e questionários on-line.

problema, obtendo 317 resultados favoráveis (31,7%) caso mantida a escolha e 683 sucessos (68,3%) caso a escolha inicial fosse trocada e outra em 27 de fevereiro do mesmo ano aumentando-se para 5000 o número de repetições sendo verificados 1669 resultados favoráveis (33,38%) mantida a escolha e 3331 resultados favoráveis (66,62%) para a troca da escolha inicial, aproximando-se ainda mais do valor esperado. Vale ressaltar que esse website proporciona não só a simulação, mas também o jogo de forma efetiva, proporcionando com isso a participação integrada dos estudantes.

Simuladores bem como a planilha Excel são exemplos de tecnologias ao alcance da maioria das escolas de educação básica do país, pois de acordo com dados do censo escolar de 2018 das 181 939 escolas de educação básica no Brasil, 95% têm acesso à internet e praticamente 80 % possuem laboratório de informática, sendo que esse índice se mantém inclusive para as escolas públicas, conforme demonstra o quadro abaixo extraído desse censo. Portanto, tais tecnologias são passíveis de aplicação nas aulas, restando aos professores preparo e conhecimento de tais programas educacionais para posterior aplicação.

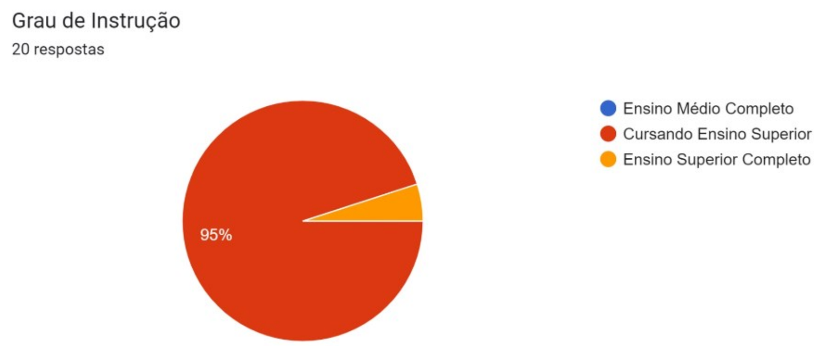
Figura 10 – Disponibilidade (%) de recursos relacionados à infraestrutura nas escolas de ensino médio

Recurso	DEPENDÊNCIA ADMINISTRATIVA					
	Total	Pública	Federal	Estadual	Municipal	Privada
Bib./sala de leitura	87,5%	85,7%	98,1%	85,4%	82,7%	91,9%
Banheiro (dentro/fora)	97,1%	96,4%	99,8%	96,3%	99,5%	98,8%
Banheiro PNE	62,5%	60,0%	93,8%	59,1%	57,6%	68,7%
Dependências PNE	46,8%	44,3%	79,5%	43,4%	37,7%	52,7%
Lab. de ciências	44,1%	38,8%	83,4%	37,5%	28,8%	57,2%
Lab. de informática	78,1%	82,1%	98,8%	81,8%	64,4%	68,4%
Internet	95,1%	93,6%	99,3%	93,5%	85,9%	98,7%
Banda larga	84,9%	81,1%	95,1%	80,8%	70,2%	94,1%
Pátio (cob./desc.)	79,2%	74,8%	89,9%	74,2%	88,0%	90,1%
Quad. esp. (cob./desc.)	75,9%	72,8%	70,0%	72,8%	73,3%	83,6%

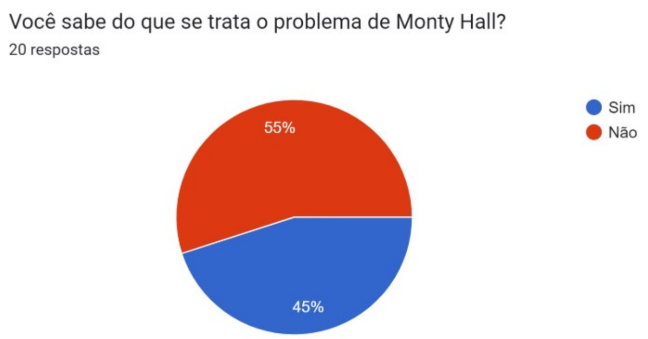
Fonte: Inep/Censo Escolar 2018.

Também foi realizado uma enquete com acadêmicos de engenharia de uma Instituição de Ensino Superior de natureza pública do Estado de Santa Catarina pelo autor por meio do *Google Forms* sobre o conhecimento do referido problema cujos resultados estão expressos na figura 11.

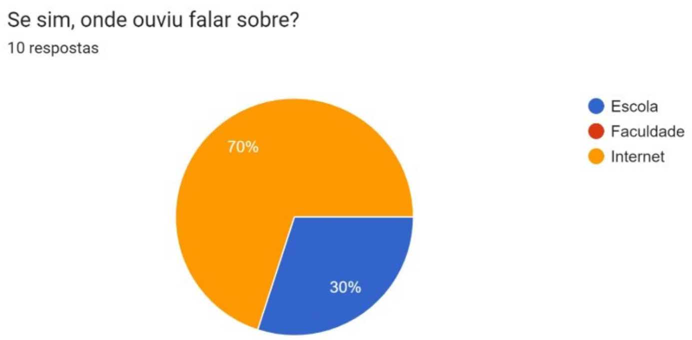
Figura 11 – Resultados da pesquisa sobre o problema de Monty Hall em Instituição de Ensino Superior.



Cursando Ensino Superior: 19 pessoas;
Ensino Superior Completo: 1 pessoa.



Não: 11 pessoas;
Sim: 9 pessoas.



Das que ouviram falar:
Escola: 3 pessoas;
Internet: 7 pessoas.

Fonte: O Autor.

Pelos resultados apresentados, pode-se presumir o desconhecimento por grande parte dos estudantes acerca do problema de Monty Hall.

Porém a probabilidade condicional será um conteúdo com o qual os mesmos irão se defrontar dentro de sua trajetória acadêmica e, consequentemente, desenvolver um entendimento probabilístico em situações que aparentemente são simples, quando na verdade essa facilidade decorre de uma análise errônea da situação.

2.4 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Para que os estudantes compreendam o motivo desse aparente “paradoxo” do problema de Monty Hall é importante que os mesmos compreendam a ideia de probabilidade condicionada, tema esse que exige maior capacidade de análise pelos mesmos e enquanto professores podemos desenvolver esse potencial utilizando recursos conforme segue.

Considerando um evento aleatório A, o espaço amostral de A corresponde ao conjunto formado por todos os resultados possíveis para o respectivo evento, como por exemplo, no lançamento de um dado (hexaedro) numerado, temos que a face voltada para cima nos define o seguinte espaço amostral para tal face: Espaço Amostral {1,2,3,4,5,6}, ou seja o número de elementos do espaço amostral é igual a 6.

O número de elementos do espaço amostral é muito importante no cálculo probabilístico, visto que se definirmos a probabilidade de ocorrência de um evento A por P(A) e cujo valor é expresso por:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis à ocorrência do evento}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Perceba que o número de elementos do espaço amostral corresponde ao denominador da razão que define a probabilidade de ocorrência de um evento, por isso a importância de ao nos depararmos com uma situação-problema de cálculo probabilístico determinarmos de forma correta o espaço amostral de tal evento.

A probabilidade condicional associa a probabilidade da ocorrência de um evento, após outro evento relacionado a situação referida ter ocorrido. Ou seja, retrata-se a situações nas quais a probabilidade do evento posterior está relacionada a um evento anterior que ocorreu. Essa situação a nível de educação básica precisa de um maior grau de análise, sendo recomendadas novamente o uso das técnicas de Morgado que já foram supracitadas na presente dissertação.

Para uma melhor compreensão vamos dividir as situações em casos do tipo com reposição e sem reposição.

Considere a seguinte situação hipotética: Uma caixa contendo maçãs contém um total de 300 frutas das quais seis por algum motivo de falta de armazenamento adequado vieram a apresentar alguma patologia. Qual a probabilidade de ao ser retirarmos duas dessas frutas e ambas apresentarem alguma patologia, nas seguintes situações:

i) com reposição da primeira maçã retirada
ii) sem reposição da primeira maçã retirada

Ao final da leitura do problema e antes da resolução da mesma, devemos nos indagar se há diferença entre as situações i e ii, visando desenvolver nossa análise acerca do problema.

Posteriormente resolvendo o problema em partes temos que tanto na situação i como na situação ii existe uma particularidade em comum, que reside no fato de ambas apresentarem patologias. Aqui devemos associar aos nossos estudantes o conectivo **e**, que está relacionado a multiplicação de probabilidades, uma vez que se refere a intersecção de dois eventos sucessivos, pois queremos que ambos aconteçam e não um ou outro de forma isolada, logo na situação i temos:

Probabilidade da primeira maçã retirada apresentar patologia será denotada por P_1. Pela definição de probabilidade temos:

$$P_1 = \frac{6}{300} = \frac{1}{50}$$

Com é feita a reposição da maçã retirada para a caixa de origem temos que a probabilidade da segunda maçã retirada apresentar patologia P_2 será igual a P_1, porém a probabilidade da patologia ocorrer em ambas as maçãs é dada por $P_1 \cdot P_2$, portanto, $\frac{1}{50} \cdot \frac{1}{50} = \frac{1}{2500}$.

Quando chegamos a resultados probabilísticos devemos analisar, se realmente o resultado apresentado apresenta significatividade, ou seja, se realmente ele pode estar correto ou a resposta obtida não faz sentido algum. Nesse caso em específico podemos destacar que a pessoa que retirou as maçãs da caixa realmente não apresentava sorte em escolher maçãs sadias, uma vez que, as mesmas apresentavam-se em número bem superior às doentes, fazendo jus a baixa probabilidade de ambas as maçãs retiradas serem doentes.

Na situação ii, ou seja, sem a reposição da primeira maçã retirada, temos que $P_1 = \frac{1}{50}$, porém a probabilidade de retirada da segunda maçã apresentar patologia é dada por $P_2 = \frac{5}{299}$, já que consideramos que a primeira condição foi satisfeita, ou seja, a maçã retirada e não reposta apresentava patologia. A probabilidade então é dada por $\frac{1}{50} \cdot \frac{5}{299} = \frac{1}{2990}$, uma probabilidade menor que na situação i.

Problemas simples como esses podem, desde que resolvidos e posteriormente analisados e discutidos com os estudantes maximizar sua capacidade de resolução de problemas mais complicados.

Uma proposta de exemplo que bem exemplifica as situações acima, por aplicação de um único exemplo se encontra em Loesch(2015), na página 99:

Em uma roleta russa, uma única bala é colocada no tambor (com capacidade para seis balas) de um revólver, o tambor é girado, e cada participante, na sua vez, deve acionar o gatilho com a arma apontada para a própria cabeça. O jogo termina na ocorrência da primeira morte. Qual é a probabilidade de ocorrer a morte do segundo participante:

(a) se o tambor sempre é girado novamente, a cada nova vez;

(b) caso o tambor não seja mais girado quando for a vez de outro participante.

Inicialmente devemos analisar as condições impostas pela situação, já que um possível pensamento é que a probabilidade seja a mesma, uma vez que em ambos os casos será deflagrado o projétil na segunda tentativa, todavia devemos nos atentar ao fato de relações de dependência e independência de eventos.

Na situação (a) temos a seguinte condição: O primeiro participante escapa ileso e o segundo morre, porém após o primeiro não ser alvejado, o tambor é novamente girado, portanto temos uma relação de independência, já que a probabilidade do segundo evento ocorrer não está relacionado ao primeiro.

Evento A: Primeiro participante não morre.

Denotando por P(A) como a probabilidade de ocorrência do evento A, temos P(A) = $\frac{5}{6}$.

Evento B: Segundo participante morre, após o primeiro participante sair ileso e o tambor ser girado novamente, denotando por P(B) essa probabilidade temos P(B) = $\frac{1}{6}$.

A probabilidade de ocorrer a condição imposta é dado pela ocorrência dos dois eventos, ou seja, devemos calcular a probabilidade de intersecção dos mesmos, logo temos:

$$P(A \cap B) \;=\; P(A) \;\cdot\; P(B) \;= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

Em (b) temos que o tambor não é mais girado quando for a vez do participante, portanto temos P(A) =$\frac{5}{6}$ assim como em (a). Porém a probabilidade do segundo participante morrer é dada por P(B) = $\frac{1}{5}$, uma vez que, resta a única bala para 5 compartimentos, ou seja, o fato de não girar o tambor estabelece uma relação de dependência com o resultado do primeiro evento. Considerando a intersecção dos eventos temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$$

Analisando as situações (a) e (b) temos que probabilidade do segundo participante morrer, sendo que o primeiro sobreviveu é maior em (b).

A elaboração desse problema, objetiva o poder de análise de como o simples fato de girar ou não o tambor após o primeiro indivíduo não morrer, altera o cálculo probabilístico para o óbito do segundo.

Outro exemplo de particularidade interessante, e que também pode ser trabalhada a nível de ensino médio, é apresentada por Morgado e Carvalho (2015) no livro Matemática Discreta - Coleção PROFMAT da Sociedade Brasileira de Matemática, em sua página 139, apresenta o seguinte problema:

Em um grupo de r pessoas, qual a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia?

A condição informada é que existem pelo menos duas pessoas que façam aniversário na mesma data. A semelhança ocorre, uma vez que à medida que queremos que todas as pessoas façam aniversário em datas diferentes, é como se essa data fosse retirada das possibilidades para a pessoa subsequente (uma espécie de sem repetição) já que se considera que a pessoa anterior aniversaria nesse dia. Consequentemente essa probabilidade vai diminuindo e aumentando a probabilidade de haver duas ou mais pessoas que façam aniversário na mesma data. A resolução é interessante:

Como o espaço amostral correspondente ao conjunto de todos os resultados possíveis e considerando o ano com 365 dias, temos que a primeira pessoa tem 365 possibilidades de data de aniversário, a segunda pessoa também e assim sucessivamente até a r-ésima pessoa. Atente que estamos calculando o número de elementos do espaço amostral, logo pelo princípio fundamental da contagem (PFC) que já é de preconizado seu ensino desde as séries finais do ensino fundamental, temos 365^r resultados possíveis.

Para que as r pessoas aniversariem todas em datas diferentes temos que o número de possibilidades disso ocorrer pode ser calculada pelo princípio fundamental da contagem (PFC). Aplicando tal princípio e a condição imposta pelo problema, temos que a probabilidade de todas as r aniversariem em datas diferentes que será denotado por P(d) é:

$$P(d) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (366 - r)}{365^r}$$

Observe que o último fator do numerador é igual a 366 – r, uma vez, que a partir da primeira pessoa (r = 1), devemos ter 365 possibilidades de aniversário para a mesma, justificado esse fator, que pode causar estranheza à primeira vista aos estudantes.

Como o solicitado é a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia temos que a mesma pode ser calculada como a probabilidade complementar de P(d), que denotarei por P(i), logo por teorema temos que:

$$P(i) = 1 - P(d)$$

$$P(i) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (366 - r)}{365^r}$$

Sabemos que, enquanto professores, por muitas vezes, os cálculos se tornam extensos para serem realizados à mão, então o auxílio de tecnologias é interessante e devem ser utilizadas, conforme preconiza também a BNCC desde as séries iniciais, em suas habilidades, das quais em particular destaco uma do terceiro ano das séries iniciais do ensino fundamental:

> (EF03MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas em um universo de até 50 elementos, organizar os dados coletados utilizando listas, tabelas simples ou de dupla entrada e representá-los em gráficos de colunas simples, com e sem uso de tecnologias digitais.

Portanto, com auxílio de uma calculadora científica ou o uso de algum programa computacional, podemos determinar a probabilidade de haver duas ou mais pessoas que fazem aniversários em datas substituindo o valor de r que corresponde o número de pessoas existentes e obtendo a probabilidade disso ocorrer. Se utilizarmos o programa *Wolfram Alpha*[7] o comando para efetuar esse cálculo probabilístico, pode ser expresso por 1-((prod (366-r) *from* r = 1 *to* r = r)/365^r) em que após o comando *from,* r deve ser substituído pelo valor de pessoas existentes no grupo.

Para r igual a 23, temos que a probabilidade de haver duas pessoas ou mais pessoas que aniversariam na mesma data é superior a 50%, ou seja, é maior do que a probabilidade de todas as 23 pessoas aniversariem em datas diferentes, o que parece novamente uma contradição para grande parte das pessoas.

Inclusive essa indagação acerca da situação acima foi realizada pelo autor em uma turma do terceiro ano de ensino médio da escola estadual que fez parte da aplicação do presente projeto, que apresentava na data de 16 de fevereiro de 2023, um total de 32 alunos presentes, onde a resposta modal (quase em sua totalidade) foi que a maior probabilidade seria que todos os 32 estudantes aniversariassem em datas diferentes, o que inclusive na referida turma não ocorreu, pois após consulta sobre os aniversariantes mês a mês ocorreu que dois pares de alunos que não eram irmãos gêmeos, aniversariavam no mesmo dia. Para r igual a 50 temos probabilidade superior

[7] Mecanismo de conhecimento computacional desenvolvido pela Wolfram Research. É um serviço on-line que responde às perguntas diretamente, mediante o processamento da resposta extraída de base de dados estruturados.

a 97%, sendo essa situação pode ser assim, como na situação acima verificada em sala de aula na qual tenhamos esse número de alunos.

Nesse caso, o termo utilizado pela Base Nacional Comum Curricular para o ensino fundamental em uma de suas habilidades, que para quando a probabilidade é visivelmente grande, é “quase certo” que tenhamos dois ou mais alunos que aniversariem na mesma data.

Objetiva-se que essa discussão seja interessante para ser trabalhada em sala de aula com nossos estudantes da educação básica e até mesmo em cursos de graduação, uma vez que, demonstra a importância do raciocínio envolvido no processo, desde o princípio fundamental da contagem até o uso de softwares adequados para cálculo das probabilidades.

Ainda dentro da probabilidade condicional temos as situações em que ocorreu determinado evento aleatório A e cujo resultado interfere na ocorrência de um evento posterior B, a probabilidade de ocorrer B, sabendo que ocorreu A pode ser deduzida imaginado que o espaço amostral é o conjunto A e uma das formas de termos elementos de B no conjunto A é pela intersecção dos dois conjuntos. Para tanto devemos relacionar o número de elementos pertencentes ao conjunto A ∩ B e o número de elementos de A já que agora ele passa a ser o espaço amostral. Denotando P(B/A) como a probabilidade de ocorrer B, após ter ocorrido A, temos pela definição de probabilidade que:

$$P\ (B/A)\ = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

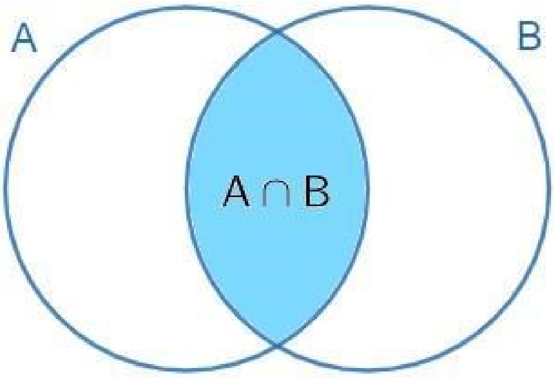
Dentro de um espaço amostral qualquer E, podemos definir essa probabilidade relacionando a probabilidade de ocorrência da intersecção de ocorrer A e B, com a probabilidade de ocorrer A.

$$P\ (B/A)\ = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Demonstração:

Sabemos que a intersecção é definida pela ocorrência de ambos os eventos. Utilizando os conhecidos diagramas de Venn[8]:

Figura 12 - Intersecção entre dois conjuntos



Fonte: O Autor.

Pela definição de probabilidade, temos que a probabilidade de intersecção é dada por:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(E)}$$

Por sua vez, a probabilidade de ocorrer o evento A é definida por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

A probabilidade de ocorrer B, tendo anteriormente ocorrido A é definida por:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\frac{n(A)}{n(E)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Podemos, portanto, determinar a probabilidade relacionando a probabilidade de ambos os eventos ocorrer com a probabilidade do primeiro evento ter ocorrido. Essa situação pode ser visualizada por meio do exemplo que segue.

---

[8] John Venn (1834 – 1923) matemático inglês, foi professor de ciência moral na Universidade de Cambridge, estudou e ensinou lógica e teoria das probabilidades.

<u>Exemplo de probabilidade condicional</u>

Em um grupo de 120 estudantes do ensino médio da Escola de Educação Básica XYZ, temos a seguinte composição quanto ao sexo e a faixa etária:

Figura 13 – Faixa etária por sexo dos alunos da Escola de Educação Básica XYZ

Idade	Sexo		Total
	Masculino	Feminino	
Até 15 anos completos	45	36	81
Mais de 15 anos completos	15	24	39
Total	60	60	120

Fonte: O Autor.

Qual a probabilidade de ao escolher aleatoriamente, entre os estudantes, um menino, sabendo que o estudante tem mais de 15 anos completos?

Para a resolução, a análise é fundamental, lembrando novamente a primeira recomendação de Morgado, que relata que devemos nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.

No caso, em particular, ao analisar o enunciado da situação, observamos que uma condição já é informada, que reside no fato da informação: “sabendo que o estudante tem mais de 15 anos completos”, ou seja, já temos uma condição inicial.

Por essa informação do problema, devemos considerar o espaço amostral, como sendo os estudantes que apresentam mais de 15 anos completos, cujo número é igual a 39.

Como desejamos que o estudante, seja do sexo masculino, temos que o número de meninos com mais de 15 anos completos, de acordo com a tabela é igual a 15, logo:

A = corresponde ao evento “estudante ter mais de 15 anos completos”

B = corresponde ao evento “ser do sexo masculino”

$$P\ (B/A)\ =\ \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

$$P\,(B/A) \;=\; \frac{15}{39} = \frac{5}{13}$$

Se relacionarmos as probabilidades de ambos os eventos em relação ao espaço amostral, temos que:

$$P(A \cap B) \;= \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

$$P(A) \;=\; \frac{39}{120} = \frac{13}{40}$$

Como foi demonstrado temos que $P\,(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$:

$$P\,(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{13}{40}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{40}{13} = \frac{5}{13}$$

Comprovando que as duas formas podem ser utilizadas na resolução do problema.

Questões relativas à probabilidade condicional aparecem com frequência no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), pois esse tema tem importância nos cursos de graduação almejados pelos estudantes que realizam o exame.

Uma pequena amostra de questões que compuseram exames anteriores envolvendo o tema probabilidade condicional, estão representadas a seguir:

(ENEM 2013) Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso. Em setembro, a máquina I produziu 54/100 do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, 25/1000 eram defeituosos. Por sua vez, 38/1000 dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P < 2/100$ Excelente

$2/100 \leq P < 4/100$ Bom

$4/100 \leq P < 6/100$ Regular

$6/100 \leq P < 8/100$ Ruim

$8/100 \leq P \leq 1$ Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como

A) excelente
B) bom
C) regular
D) ruim
E) péssimo

(ENEM 2022) A World Series é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam a essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado campeão. Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre 1/2.Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da World Series?

A) 35/64
B) 40/64
C) 42/64
D) 44/64
E) 52/64

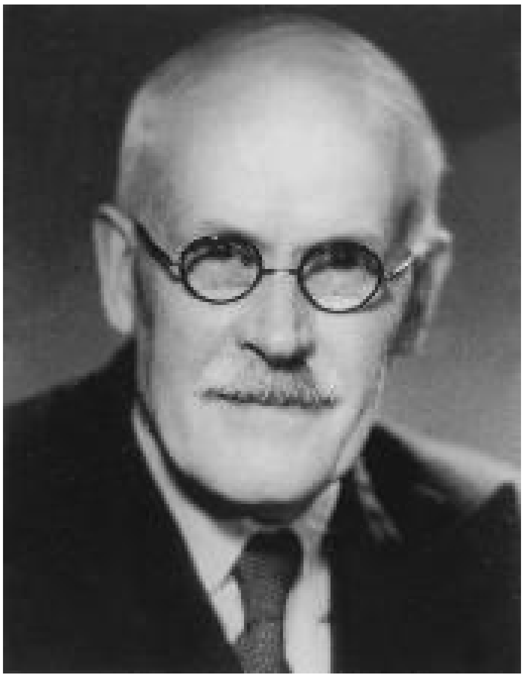
2.5 O TEOREMA DE BAYES

O Teorema de Bayes ou Lei de Bayes, tem esse nome devido ao pastor e matemático inglês Thomas Bayes (1701- 1761). O grau de relevância e aplicação desse teorema é considerado por alguns matemáticos como por exemplo o matemático, estatístico e astrônomo britânico Harold Jeffreys (1891-1989) que escreveu sobre a importância do referido teorema, afirmando que o Teorema de Bayes é para a estatística, o que o Teorema de Pitágoras é para a geometria.

Figura 14 - Thomas Bayes

Fonte: SciHi Blog (2018).

Figura 15 - Harold Jeffreys



Fonte: International Seismological Centre.

O legado de Bayes para a teoria das probabilidades reside principalmente no fato de ter sido o primeiro a estabelecer uma base matemática para a inferência de probabilidade: um método para calcular a frequência com que um evento ocorreu anteriormente e a probabilidade de ocorrência em testes futuros. Para Bayes, a decisão de quem manuseia os números faz diferença nos cálculos probabilísticos. Essa conjectura baseia-se nas informações que você tem sobre as condições de ocorrer o evento e que as mesmas vão influenciar a previsão.

A atividade aplicada nas escolas de educação básica sobre o problema de Monty Hall e seus respectivos resultados obtidos demonstram que a melhor opção seria que o concorrente ao prêmio escolhesse pela troca de porta ao ser indagado posteriormente a primeira porta ter sido aberta e não demonstrar o prêmio. O fato do apresentador saber onde está o prêmio, conforme Bayes, faz diferença nos cálculos probabilísticos, o que não vai de acordo com o empírico, portanto, tratado à primeira vista como um paradoxo.

Posteriormente será demonstrada a resolução do problema de Monty Hall utilizando tal teorema. Para tanto é necessário a demonstração do referido teorema, fato que será realizado abaixo.

Demonstração do Teorema de Bayes

A probabilidade condicional nos permite a determinação da probabilidade de ocorrer um evento, posteriormente a outro evento ter ocorrido. Porém a situação contrária, ou seja, a probabilidade de ocorrência de um evento anterior ter acontecido, sabendo que um evento posterior ocorreu?

Vejamos:

Considere um espaço amostral E, subdividido em vários eventos que serão denotados por X_1, X_2, X_3, ..., X_n, onde esses eventos satisfazem as seguintes propriedades:

i) $X_i \cap X_j = \varnothing$, para $i \neq j$, ou seja, todos os eventos são mutuamente exclusivos.

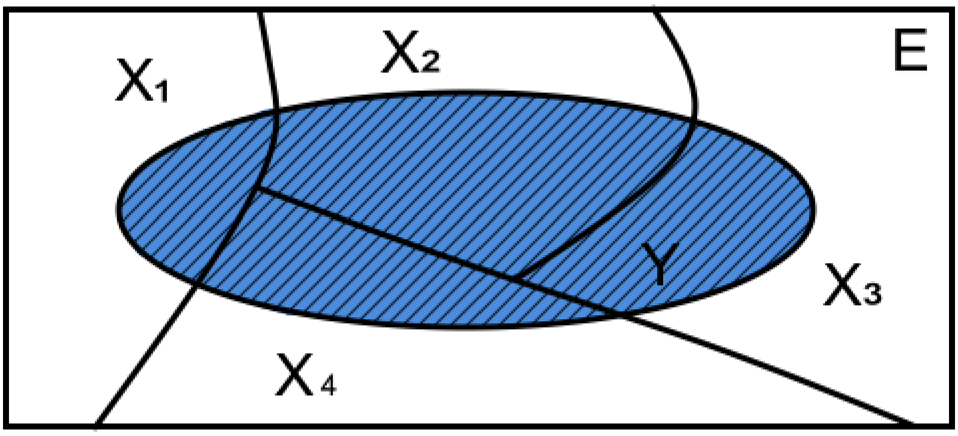
ii) $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = E$, ou seja, a união de todos os eventos X_i é igual ao espaço amostral.

iii) $P(X_i) > 0$, para todo i em que a probabilidade de qualquer um dos eventos X_i ocorrer é maior que zero.

iv) Y é um evento de interesse nos quais podem ocorrer resultados em partição dos eventos X_i.

Como os eventos X_i são mutuamente exclusivos e considerando que tenhamos por exemplo, 4 eventos, temos a seguinte representação:

Figura 16 - Divisão do evento de interesse Y



Fonte: O Autor.

A região hachurada corresponde a probabilidade de ocorrência do evento Y (característica de interesse), que pode ser definida como a união entre as intersecções de cada evento X_i e o evento Y, portanto:

$$P(Y) = P(Y \cap X_1) + P(Y \cap X_2) + P(Y \cap X_3) + P(Y \cap X_4) \qquad (1)$$

Atente que essa igualdade é válida pelo fato de todos os eventos X_i serem mutuamente exclusivos dois a dois.

Da probabilidade condicional temos por exemplo, que a probabilidade de ocorrer o evento Y sendo que ocorreu X_i é dada por $P\ (Y/Xi) = \frac{P(Y \cap X_i)}{P(X_i)}$, ou que a probabilidade de ocorrer Y e X_i pode ser expressa por: (Perceba o conectivo **e** ressaltando a intersecção)

$$P(Y \cap X_i) = P(X_i) \cdot P(Y/X_i) \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), para cada evento X_i, temos:

$$P(Y) = P(X_1) \cdot P(Y/X_1) + P(X_2) \cdot P(Y/X_2) + P(X_3) \cdot P(Y/X_3) + P(X_4) \cdot P(Y/X_4) \quad (3)$$

Como temos a probabilidade da ocorrência do evento Y escrito em função das probabilidades dos eventos X_i, podemos determinar a probabilidade de ter ocorrido qualquer evento X_i, sabendo que ocorreu Y (evento posterior).

Generalizando para n $\in N$ e n ≥ 1, temos que a probabilidade de ter ocorrido X_i, sabendo que posteriormente ocorreu Y é dada por:

$$P(Xi/Y) = \frac{P(X_i \cap Y)}{P(Y)}$$

$$P(Xi/Y) = \frac{P(X_i)\cdot P(Y/X_i)}{P(X_1)\cdot P(Y/X_1)+P(X_2)\cdot P(Y/X_2)+P(X_3)\cdot P(Y/X_3)+..+P(X_n)\cdot P(Y/X_n)} \quad (4)$$

A relação acima representada é o Teorema de Bayes em sua forma generalizada.

O que deve ser ressaltado aos estudantes é que o denominador representa a probabilidade total de ocorrer o evento Y conforme demonstrado para n = 4 em (1).

É hipótese do presente trabalho que a compreensão do respectivo teorema pelos alunos de ensino médio, uma vez que, os mesmos, já possuem conhecimentos sobre operações de conjuntos (união, intersecção) bem como a ideia de conjuntos disjuntos, embora esse teorema não seja abordado a nível de ensino médio de forma efetiva. Ir além em determinado conteúdo vem de acordo com uma das frases do famoso físico Albert Einstein (1879-1955): “A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original".

Uma das hipóteses da presente pesquisa é que seguindo metodicamente as conclusões sobre cada etapa resolutiva do presente tema, mesmo não fazendo parte efetiva dos conteúdos de ensino médio de uma forma mais refinada como as situações aqui propostas, pode ser incluído no ensino de probabilidades, desenvolvendo com isso uma base sólida visando não só sucesso nas disciplinas pertinentes aos cursos de graduação, mas também em sua vida profissional, garantindo decisões coerentes e o desenvolvimento da habilidade de “estar atento” que nem tudo que parece simples, o é, e para tal é necessário análise das situações de forma coerente.

2.6.1 Demonstração do resultado do problema de Monty Hall através do Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes permite a determinação da probabilidade de ocorrer um evento *a priori*, sabendo que outro evento *a posteriori* ocorreu. Esse teorema expressa a probabilidade de uma forma mais bem mais minuciosa, podemos dizer, em relação ao entendimento empírico de probabilidades, demonstrando muitas situações que causam estranheza ao senso comum.

O referido teorema também explica o problema de Monty Hall, que fora trabalhado na presente dissertação em todos os níveis da educação básica e inclusive com professores, para obtenção de informações acerca da compreensão dos discentes e docentes sobre o tema.

Vamos demonstrar agora, utilizando o teorema, que realmente a opção de trocar a porta escolhida após a primeira porta ter sido aberta e não demonstrar o prêmio, seria a melhor escolha do concorrente.

Demonstração

Inicialmente devemos lembrar que o apresentador inicialmente já sabe atrás de qual das três portas se encontra o prêmio e lembrando que segundo Bayes quem manuseia os números faz diferença nos cálculos probabilísticos.

As três portas serão denotadas por portas X_1, X_2, X_3.

Será denotado por A o evento *a priori* e por B o evento a *posteriori*. O evento A (*a priori*) é escolher uma das portas e ela ser a porta atrás da qual esteja o prêmio, sendo que o evento B (*a posteriori*) é o apresentador ter aberto uma porta na qual não está o prêmio, ou seja, sabemos que o prêmio não está na porta aberta pelo apresentador, qual a probabilidade de o concorrente ter escolhido a porta com o prêmio?

Considerando que a porta escolhida inicialmente pelo concorrente ao prêmio seja a porta X_1(o mesmo é válido para as outras duas portas, pois são eventos equiprováveis). Como temos três portas a probabilidade de que a porta escolhida conter o prêmio é dada por:

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

Como demonstrado anteriormente temos:

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}$$

A chave da questão, se assim pode ser expressa, é determinar a probabilidade da ocorrência do evento B, ou seja, do apresentador escolher uma porta que esteja vazia, tendo você escolhido a porta correta ou não. Para tanto devemos considerar a probabilidade complementar do evento A, ou seja, a probabilidade da porta escolhida não ser a correta. Tal evento será denotado por A^C.

Sabendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ temos que $P(A^C) = \frac{2}{3}$.

A probabilidade de ocorrer o evento B, representada pelo denominador, pode ser determinada em função de ocorrer de ter ocorrido A ou não ter ocorrido A, logo:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(A^c) \cdot P(B/A^c)$$

Esse fato deve ser ressaltado com ênfase aos estudantes no tocante a probabilidade da ocorrência do evento B também em função da probabilidade da porta escolhida não ser a correta.

Uma importante observação que deve ser feita aos estudantes é que o apresentador sabe onde está o prêmio, lembrando que quem manuseia os números faz diferença nos cálculos probabilísticos. Como ele sabe onde está o prêmio temos que a probabilidade do apresentador abrir uma porta vazia com o prêmio estando ou não na porta escolhida, no caso a porta X_1, é igual a 1, ou seja, $P(B|A) = P(B|A^C) = 1$.

Novamente devemos lembrar que o apresentador sabe onde está o prêmio e por isso essas probabilidades são iguais a 1. Esse fato deve ficar claro aos nossos estudantes, como o apresentador manuseou os números, pois tinha um conhecimento anterior.

Portanto:

$$\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(A)\cdot P(B/A)+P(A^c)\cdot P(B/A^c)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Comprovando que a probabilidade do participante ao escolher qualquer uma das portas anteriormente e não trocar sua escolha, após a abertura da primeira porta e a mesma não apresentar o prêmio, continua a ser igual a $\frac{1}{3}$ e não aumenta para $\frac{1}{2}$ conforme a crença popular.

O fator crença aqui se manifesta, pode ser ocasionado pelo raciocínio “lógico” ou padrões criados pelas pessoas, de que a probabilidade de ganhar seria a mesma, pois restaram apenas duas portas, como o concorrente já tinha escolhido uma porta inicialmente e a mesma já lhe proporcionou “sucesso”, uma vez que, a primeira porta aberta não apresentou o prêmio, ele prefere continuar com a escolha, ao ser solicitado sobre a troca.

Vale ressaltar que a troca não garante que o concorrente irá de fato ganhar o prêmio, porém a probabilidade aumenta para $\frac{2}{3}$ e, portanto, a melhor escolha seria a troca da escolha inicial da porta.

Esse caso é melhor compreendido por algum meio ilustrativo ou tabela, conforme foi demonstrado anteriormente na presente dissertação, porém essa demonstração é importante para abordarmos outros problemas, os quais podem ser resolvidos pelo referido teorema, objetivando a crítica por parte dos estudantes.

2.6.2 Aplicações do Teorema de Bayes que podem ser trabalhadas no ensino Médio

Após a demonstração do teorema de forma detalhada e a resolução do problema de Monty Hall, demonstrando a validade do mesmo, podemos aplicá-lo em situações problema do cotidiano, um dos escopos da dissertação.

Algumas das principais aplicações do teorema de Bayes estão na área industrial (produção de máquinas e análise do desempenho de qualidade das mesmas) e na análise de exames laboratoriais, sendo os últimos de tamanha importância nos dias atuais devido a pandemia do coronavírus (COVID-19), que é uma doença infecciosa causada pelo vírus SARS-CoV-2[9] que, como é do conhecimento público, causa problemas respiratórios que podem inclusive apresentar severas gravidades e causar a morte.

Uma atenção maior será designada aos problemas de controle de qualidade, jogos de azar e de resultados de exames laboratoriais por serem situações que aparecem com certa frequência no cotidiano. As situações problema serão resolvidas e comentadas sobre possíveis dúvidas dos estudantes pertinentes à falta de compreensão de alguma parte da resolução, objetivando o entendimento pleno do porquê de tal cálculo, que aparentemente foge ao senso comum como já foi supracitado.

Os problemas propostos e resolvidos abaixo, podem ser resolvidos juntamente com os estudantes e posteriormente discutidos seus resultados. As descrições sobre possíveis dúvidas que podem surgir de acordo com o esperado, também são respondidas de forma dissertativa durante a resolução dos mesmos.

2.6.2.1 Aplicação do Teorema de Bayes na Indústria

Entre as várias aplicações, temos as de processos de controle de qualidade. Esse controle de qualidade é importante para que as empresas obtenham as certificações necessárias para vender seus produtos. Segue um primeiro exemplo:

<u>Exemplo 1 (controle de qualidade)</u>

Determinada empresa trabalha com a produção de autopeças, de três tipos X, Y e Z, sendo que as mesmas são produzidas por 4 máquinas de diferentes procedências. A probabilidade de uma máquina produzir uma peça defeituosa está

[9] SARS-CoV-2 (sigla do inglês que significa coronavírus 2 da síndrome respiratória aguda grave), cuja doença recebeu a denominação pela Organização Mundial da Saúde(OMS)de COVID-19.

relacionada com sua eficácia ser maior ou menor. A probabilidade de cada uma das 4 máquinas produzir peças defeituosas está representada na tabela a seguir:

Figura 17 – Produção de autopeças por máquinas de diferentes procedências

Máquina	Probabilidade de produção de peça defeituosa (por tipo)		
	X	Y	Z
Argentina	0,10	0,19	0,15
Brasileira	0,12	0,18	0,12
Chinesa	0,20	0,25	0,18
Dinamarquesa	0,05	0,10	0,05

Fonte: O Autor.

Considerando que todas as máquinas apresentam a mesma produção, foi escolhida uma autopeça e verificado que a peça é tipo Z, qual a probabilidade da peça ter sido produzida pela máquina chinesa?

Antes de resolver a situação-problema é necessária indagar os alunos sobre essa probabilidade, podendo os mesmos apresentarem como resposta 0,18 ou 18%, evidenciando uma simples observação da tabela em questão, ou seja, uma análise muito superficial acerca do problema, uma vez que, essa probabilidade deve ser relacionada com a probabilidade das outras máquinas e não simplesmente extrair o valor da tabela, conforme será demonstrado.

Temos o evento “a posteriori”, que é o fato de saber que a peça que foi escolhida é defeituosa e do tipo Z que será denotada por Z para ficar melhor a observação no teorema. O problema pede a probabilidade do evento “ a priori”, que é a peça defeituosa ter sido produzida pela máquina chinesa que denotarei por C.

Para início de resolução devemos como professores deixar claro aos nossos estudantes que a peça defeituosa pode ter sido produzida por qualquer uma das 4 máquinas e também já eliminando a ideia da probabilidade da peça defeituosa ter sido produzida pela máquina chinesa ser igual a 25% pelo fato dos estudantes associarem que a produção de cada máquina foi a mesma conforme informado pelo problema, já que as probabilidades de defeito das peças produzidas pelas máquinas são diferentes, caindo por terra essa ideia que pode surgir de forma espontânea por parte dos estudantes.

Como os valores informados na tabela estão na forma unitária será utilizada essa forma na resolução da questão. Denotando as máquinas argentina por A, brasileira por B, chinesa por C e dinamarquesa por D, temos que a probabilidade de escolha de cada máquina é:

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

O solicitado é a probabilidade da peça defeituosa Z, ter sido produzida pela máquina chinesa, ou seja, $P(C/Z)$.

Aplicando o Teorema de Bayes temos:

$$P(C/Z) = \frac{P(C) \cdot P(Z/C)}{P(A) \cdot P(Z/A) + P(B) \cdot P(Z/B) + P(C) \cdot P(Z/C) + P(D) \cdot P(Z/D)}$$

É conveniente ressaltar aos alunos que o denominador corresponde a probabilidade total de escolher ao acaso uma peça defeituosa do tipo Z.

Substituindo os valores:

$$P(C/Z) = \frac{P(C) \cdot P(Z/C)}{P(A) \cdot P(Z/A) + P(B) \cdot P(Z/B) + P(C) \cdot P(Z/C) + P(D) \cdot P(Z/D)}$$

$$P(C/Z) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}18}{0{,}25 \cdot 0{,}15 + 0{,}25 \cdot 0{,}12 + 0{,}25 \cdot 0{,}18 + 0{,}25 \cdot 0{,}05}$$

$$P(C/Z) = \frac{0{,}045}{0{,}0375 + 0{,}03 + 0{,}045 + 0{,}0125}$$

$$P(C/Z) = \frac{0{,}045}{0{,}125} = 0{,}36 = 36\%$$

Portanto, a probabilidade da peça defeituosa do tipo Z ter sido produzida pela máquina chinesa é igual a 0,36.

Se, por ventura, quisermos determinar a probabilidade da peça defeituosa ter sido produzida pelas outras máquinas, atentar conforme citado acima, que o denominador representa a probabilidade total de sair peça defeituosa do tipo Z, logo o mesmo é comum, ficando prático os demais cálculos como segue abaixo:

$$P(A/Z) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}15}{0{,}125} = 0{,}3 = 30\%$$

$$P(B/Z) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}12}{0{,}125} = 0{,}24 = 24\%$$

$$P(D/Z) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}125} = 0{,}10 = 10\%$$

Ressaltar aos estudantes que a soma das probabilidades das quatro máquinas em produzir a peça defeituosa Z é igual a 1, uma vez que, sabíamos do acontecimento desse evento. Nesse mesmo tocante de análises posteriores a resolução do problema, devemos também destacar que a produção de todas as máquinas foi a mesma, conforme enunciado do problema, pois caso, não fosse não poderíamos ter considerado a probabilidade de escolha de cada máquina como sendo a mesma.

Uma das hipóteses da presente pesquisa é que seguindo metodicamente as conclusões sobre cada etapa resolutiva do presente tema, mesmo não fazendo parte efetiva dos conteúdos de ensino médio de uma forma mais refinada como as situações aqui propostas, pode ser incluído no ensino de probabilidades, desenvolvendo com isso uma base sólida visando não só sucesso nas disciplinas pertinentes aos cursos de graduação, mas também em sua vida profissional, garantindo decisões coerentes e o desenvolvimento da habilidade de “estar atento” que nem tudo que parece simples, o é, e para tal é necessário análise das situações de forma coerente.

Veremos a seguir um problema no qual a produção de cada uma das partes envolvidas na produção é diferente.

Exemplo 2 (controle de qualidade)

Uma empresa produz icosaedros para posterior venda aos professores de matemática das escolas públicas brasileiras, para o ensino de geometria e probabilidade. O proprietário de tal empresa estima que a probabilidade de um funcionário antigo e consequentemente mais experiente produzir icosaedros perfeitos é de 95%, enquanto que para um funcionário recém contratado essa probabilidade de perfeição cai para 80%. O mesmo informa também que a produção ocorre de modo que 60% dos icosaedros são produzidos pelos funcionários experientes. O setor de qualidade industrial ao analisar um icosaedro percebeu que o mesmo, somente apresenta 19 faces, ou seja, completamente defeituoso. Qual a probabilidade desse icosaedro ter sido produzido por um funcionário experiente? E por um funcionário não experiente?

A situação nos informa a probabilidade de determinados funcionários experientes ou não produzirem icosaedros perfeitos e o problema informa que o icosaedro é defeituoso, logo devemos considerar a probabilidade desses funcionários produzirem icosaedros defeituosos.

Denotando por P(E) a probabilidade de um funcionário experiente produzir uma peça e P(N) a probabilidade de um funcionário não experiente produzir a mesma, temos:

P(E) = 60% = 0,6

P(N) = 40% = 0,4 (pelo fato dos funcionários serem divididos apenas em dois grupos)

Agora devemos considerar as probabilidades dos mesmos produzirem peças defeituosas. Essa probabilidade é o complemento da probabilidade de produzirem peças perfeitas que foi a informação do referido problema. Denotando por P(D/E) a probabilidade de um funcionário experiente produzir o icosaedro defeituoso e P(D/N) a probabilidade do icosaedro defeituoso ser produzido por um funcionário inexperiente temos:

P(D/E) = 100% - 95% = 5 % = 0,05 (Destacar ao estudante o fato do problema ter informado a probabilidade de perfeição da peça produzida, por esse motivo o cálculo efetuado).

Do mesmo modo temos que P(D/N) = 100% - 80% = 20% = 0,20.

Como sabemos que a peça é defeituosa e queremos saber a probabilidade dessa peça ter sido produzida por cada um dos grupos de funcionários, experientes ou não, temos um evento “a posteriori” e queremos determinar a probabilidade do evento anterior ter acontecido, ou seja, um caso clássico da aplicação do teorema.

A probabilidade da peça ter sido produzido pelo funcionário experiente P(E/D) é dada por:

$$P(E/D) = \frac{P(E)\cdot P(D/E)}{P(E)\cdot P(D/E)+P(N)\cdot P(D/N)}$$

$$P(E/D) = \frac{0{,}6\cdot 0{,}05}{0{,}6\cdot 0{,}05+0{,}4\cdot 0{,}2}$$

$$P(E/D) = \frac{0{,}6\cdot 0{,}05}{0{,}6\cdot 0{,}05+0{,}4\cdot 0{,}2}$$

$$P(E/D) = \frac{0{,}6\cdot 0{,}05}{0{,}6\cdot 0{,}05+0{,}4\cdot 0{,}2}$$

$$P(E/D) = \frac{0{,}03}{0{,}03+0{,}08}$$

$$P(E/D) = \frac{0{,}03}{0{,}11} = \frac{3}{11}$$

$$P(E/D) \simeq 0{,}2727 \simeq 27{,}27\%$$

No resultado percentual, foi realizado o arredondamento por centésimo, utilizando a norma brasileira NBR 5891 da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT)[10].

Após determinação do resultado é importante a análise e crítica do mesmo, discutindo com os estudantes se esse resultado é coerente ou está em desacordo com o problema. Um questionamento que os alunos podem realizar é o fato de como essa probabilidade é tal grande, se os funcionários experientes têm uma ineficácia de apenas 5%?

[10] Órgão responsável pela normalização técnica no Brasil, fornecendo insumos ao desenvolvimento tecnológico brasileiro. Trata-se de uma entidade privada, sem fins lucrativos e de utilidade pública, fundada em 1940.

Como professores devemos destacar que tal probabilidade ocorre devido a dois fatores:

i) A produção dos funcionários experientes ser maior que a dos inexperientes.

ii) A relação de ineficácia deve ser relacionada com a ineficácia total dos dois grupos, ou seja, para os funcionários experientes, 5 % em relação a 25%, o que representa $\frac{1}{5}$ ou 20% do total de icosaedros defeituosos. O fato da probabilidade de um funcionário experiente ter produzido o icosaedro ser maior que 20% reside no fato expresso pelo fator i.

A probabilidade do icosaedro ser produzido por um funcionário inexperiente P(N/D) é a probabilidade complementar, uma vez que, são apenas dois grupos de funcionários, logo:

$$P(N/D) \simeq 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11} \simeq 0{,}7273 \simeq 72{,}73\%$$

Todavia a mesma também poderia ser calculada pelo teorema, porém nesse caso como só existem dois grupos de funcionários é conveniente calcular a probabilidade complementar. Pelo teorema teríamos:

$$P(N/D) = \frac{P(N)\cdot P(D/N)}{P(E)\cdot P(D/E)+P(N)\cdot P(D/N)}$$

$$P(N/D) = \frac{0{,}4\cdot 0{,}2}{0{,}11} = \frac{8}{11}$$

$$P(N/D) = \frac{8}{11} \simeq 0{,}7273 \simeq 72{,}73\%$$

O resultado confirma a probabilidade complementar supracitada.

2.6.2.2 *Aplicação do Teorema de Bayes em jogos*

Uma situação, que enquanto professores, podemos trabalhar com nossos alunos é a aplicação do Teorema de Bayes em situações que envolvam jogos, uma vez que os estudos probabilísticos se desenvolveram inicialmente em grande parte em função dos mesmos. Segue um exemplo que pode ser trabalhado e posteriormente discutido os resultados de forma crítica com os estudantes.

<u>Exemplo</u>

Considere a seguinte situação:

Temos duas urnas onde cada uma delas tem bolas de duas cores: preto e vermelho. A primeira urna contém 5 bolas pretas e 7 bolas vermelhas e a segunda contém 8 bolas pretas e 4 bolas vermelhas. Um estudante foi escolhido para participar de uma interação com o professor, na qual o mesmo deve escolher aleatoriamente uma das urnas e posteriormente retirar uma bola da urna por ele escolhida. Prontamente atendendo ao professor ele realiza tais ações e ao final verifica que a bola retirada é da cor vermelha. Qual a probabilidade da bola ter sido retirada da segunda urna?

Realizando a análise das informações da situação-problema, podemos destacar que como são apenas duas urnas e como sabemos o evento "a posteriori" que é ter sido retirada uma bola vermelha, podemos tecer algumas conclusões:

i) A urna foi escolhida de forma aleatória, logo a probabilidade de escolha de cada urna é a mesma.

ii) É necessário determinarmos a probabilidade de sair bola vermelha em cada uma das urnas.

Denotando a primeira urna por U_1 e analogamente a segunda urna por U_2, temos que a probabilidade de escolha dessas urnas é equiprovável e igual a $\frac{1}{2}$, portanto:

$$P(U_1 = P(U_2) = \frac{1}{2}.$$

Como sabemos que a bola retirada pelo estudante que auxiliou o professor foi da cor vermelha, temos que determinar a probabilidade dessa bola ter sido escolhida em cada uma das urnas, uma vez que, não foi informada a probabilidade, mas sim o total de bolas de cada cor existente dentro de cada urna. Na primeira urna temos 5 bolas pretas e 7 vermelhas, ou seja, um total de 12 bolas, logo pela definição clássica de probabilidade e denotando essa probabilidade por $P(V/U_1)$, temos que a mesma é igual à razão entre o número de bolas vermelhas e o total de bolas existentes dentro da urna, portanto $P(V/U_1)= \frac{7}{12}$, o mesmo raciocínio para a segunda urna, obtemos $P(V/U_2)= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Desejamos saber a probabilidade da bola vermelha ter sido retirado da segunda urna $P(U_2/V)$:

$$P(U_2/V) = \frac{P(U_2)\cdot P(V/U_2)}{P(U_1)\cdot P(V/U_1)+P(U_2)\cdot P(V/U_2)}$$

$$P(U_2/V) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$P(U_2/V) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{24}+\frac{1}{6}}$$

$$P(U_2/V) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{24}} = \frac{24}{66} = \frac{4}{11} \simeq 36{,}37\%$$

O estudante pode concluir que era “lógico” a probabilidade ser menor que 50%, uma vez que, o número de bolas vermelhas existentes na primeira urna era maior que o número de bolas de mesma cor na segunda urna, porém essa premissa não é válida. Na verdade para o cálculo probabilístico o que faz diferença é a probabilidade de após escolhida uma urna, ser retirada a bola de determinada cor e não a quantidade de bolas dessa cor dentro da urna.

Para demonstrar tal afirmação, considere a situação anterior, mas a segunda urna contendo apenas 3 bolas, sendo duas bolas da cor vermelha e uma da cor preta. Qual seria a probabilidade da bola vermelha retirada ter vindo dessa urna?

Perceba que agora possuímos 7 bolas vermelhas na primeira urna, enquanto apenas 2 bolas vermelhas na segunda.

Mas, ao resolvermos, temos uma “surpresa”:

$P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$ (a probabilidade da escolha de cada urna é a mesma como anteriormente).

$P(V/U_1)$= $\frac{7}{12}$ (a probabilidade de escolher a urna 1 e retirar bola vermelha)

Agora temos apenas 3 bolas na urna 2, sendo duas delas vermelhas, logo $P(V/U_2)$= $\frac{2}{3}$.

Calculando a probabilidade da bolha vermelha ter vindo da segunda urna temos:

$$P(U_2/V) = \frac{P(U_2) \cdot P(V/U_2)}{P(U_1) \cdot P(V/U_1) + P(U_2) \cdot P(V/U_2)}$$

$$P(U_2/V) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}$$

$$P(U_2/V) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{24} + \frac{1}{3}}$$

$$P(U_2/V) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{15}{24}} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15} \simeq 53{,}3\%$$

O resultado provavelmente causará estranheza ao estudante, já que havia apenas 2 bolas vermelhas na segunda urna enquanto havia 7 bolas vermelhas na primeira, o que devemos explicar é que, o que determina a probabilidade da bola vermelha ter vindo de determinada urna está relacionada com uma probabilidade significativa de retirar tal bola da mesma. Nesse caso temos que caso seja escolhida a urna 1, a probabilidade é igual a $\frac{7}{12}$, enquanto se escolhida a urna 2 essa probabilidade é igual a $\frac{2}{3}$ e comparando temos $\frac{2}{3} > \frac{7}{12}$.

Essa situação também representa uma situação onde a “lógica” por se tratar aparentemente de um problema simples pode fazer com que as pessoas tomem decisões equivocadas.

2.6.2.3 Aplicação do Teorema de Bayes em testes de doenças infecciosas

O Teorema de Bayes também serve para realizarmos análise correta de alguns testes de doenças infecciosas, tais como HIV[11] e nos dias atuais o COVID-19. Nem sempre os resultados desses testes correspondem à eficácia que os mesmos relatam em estar certos. São os exames conhecidos como falsos-positivos, quando o resultado para tal patologia é positivo, porém a pessoa não a apresenta e os falsos-negativos que também pode ocorrer, no caso do resultado ser negativo, mas a pessoa estar doente.

Esse tema é algo que deve ser explanado para os estudantes de forma geral, uma vez que não é de conhecimento coletivo. Um exemplo semelhante à situação relatada é apresentado por Morgado e Carvalho (2015) no livro Matemática Discreta da Coleção PROFMAT da Sociedade Brasileira de Matemática, livro utilizado durante o presente programa de mestrado e que em sua página 153, apresenta o seguinte problema:

Um exame de laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma doença quando ela de fato existe. Entretanto o teste aponta um resultado falso-positivo para 1% de pessoas sadias testadas. Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença, dado que seu exame foi positivo?

Trata-se de um excelente exemplo para trabalharmos com nossos estudantes. Inicialmente devemos analisar a situação em questão, acerca dos 95% de eficiência, onde muitos associam essa como sendo a probabilidade da pessoa estar doente caso o resultado seja positivo.

O que devemos ressaltar aos mesmos é o fato da grande maioria da população ser sadia, ou seja, um percentual muito grande de pessoas não apresentar a doença, o que faz com que o falso-positivo de 1% “ganhe significância”.

[11] HIV é a sigla em inglês do vírus da imunodeficiência humana. Causador da aids, ataca o sistema imunológico, responsável por defender o organismo de doenças

Sabemos que o resultado do exame foi positivo e queremos saber qual a probabilidade da pessoa realmente estar doente.

O evento "a posteriori" nesse caso é o resultado do exame no caso positivo. Queremos determinar a probabilidade da pessoa realmente estar doente, portanto utilizarei as denotações abaixo para as probabilidades:

$P(D)$ = probabilidade da pessoa estar doente = 0,5%
$P(S)$ = probabilidade da pessoa ser sadia = 99,5% (100% - 0,5%)
$P(P/D)$ = probabilidade do resultado ser positivo estando a pessoa doente = 95%
$P(P/S)$ = probabilidade do resultado ser positivo sendo que a pessoa é sadia = 1%
$P(D/P)$ = probabilidade da pessoa estar doente sendo que o resultado é positivo

$$P(D/P) = \frac{P(D)\cdot P(P/D)}{P(D)\cdot P(P/D)+P(S)\cdot P(P/S)}$$

$$P(D/P) = \frac{0{,}005\cdot 0{,}95}{0{,}005\cdot 0{,}95+0{,}995\cdot 0{,}01}$$

$$P(D/P) = \frac{0{,}00475}{0{,}00475+0{,}00995}$$

$$P(D/P) = \frac{0{,}00475}{0{,}0147} \simeq 0{,}3231 \simeq 32{,}31\%$$

O resultado é incrível menos que $\frac{1}{3}$ de chance de estar doente, mesmo o resultado do exame sendo positivo.

Uma das aplicações mais efetivas do Teorema de Bayes realmente se refere à análise de resultados de exames laboratoriais, conforme o exemplo presente em Loesch (2015), em sua obra Probabilidade e Estatística na página 34:

Com relação a uma determinada doença, 3% da população a possui e 97% é saudável. Um teste aplicado especificamente para detectar a doença fornece um resultado positivo em 85% dos doentes, mas também em 2% de pessoas saudáveis (falha positiva). Deseja-se saber qual é a probabilidade de que, dado que o resultado do teste aplicado em um paciente resultou positivo, ele seja portador da doença.

Queremos determinar a probabilidade da pessoa realmente estar doente, portanto utilizarei novamente as denotações abaixo para as probabilidades:

$P(D)$ = probabilidade da pessoa estar doente = 3%
$P(S)$ = probabilidade da pessoa ser sadia = 97%
$P(P/D)$ = probabilidade do resultado ser positivo estando a pessoa doente = 85%
$P(P/S)$ = probabilidade do resultado ser positivo sendo que a pessoa é sadia = 2%
$P(D/P)$ = probabilidade da pessoa estar doente sendo que o resultado é positivo

$$P(D/P) = \frac{P(D)\cdot P(P/D)}{P(D)\cdot P(P/D)+P(S)\cdot P(P/S)}$$

$$P(D/P) = \frac{0,03\cdot 0,85}{0,03\cdot 0,85+0,97\cdot 0,02}$$

$$P(D/P) = \frac{0,0255}{0,0255+0,0194}$$

$$\mathrm{P(D/P)} = \frac{0,0255}{0,0449} \simeq 0,5679 \simeq 56,79\%$$

Analisando o resultado obtido, temos que a probabilidade da pessoa ter realmente a doença é bem menor que 85%. Como professores, devemos destacar a significativa importância da grande parte da população como foi mencionado no exemplo anterior da coleção PROFMAT, ser saudável e, portanto, mesmo a probabilidade do falso positivo sendo pequena como o percentual de pessoas saudáveis é muito grande, acabam ocorrendo resultados como essa característica.

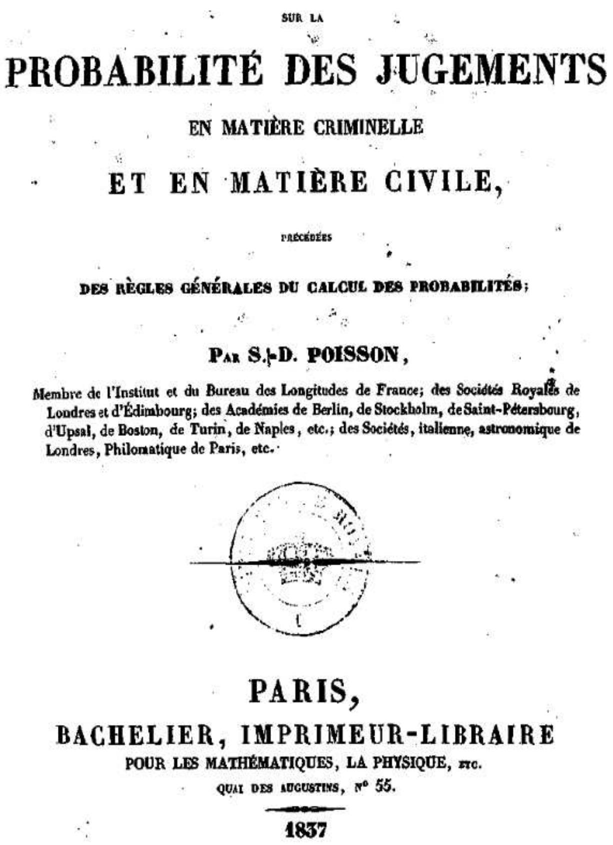
No tocante aos resultados laboratoriais, o escritor Leonard Mlodinow em seu livro “O andar do bêbado – como o acaso determina nossas vidas” escreve sobre uma situação que ocorreu com ele próprio ao realizar um exame de HIV cujo resultado foi positivo. Após o resultado ele foi advertido por seu médico que a probabilidade dele viver por mais uma década seria muito pequena, mas como o mesmo sabia da ocorrência de casos positivos mesmo o sangue não estando infectado e conhecendo seus hábitos saudáveis de vida, com base no Teorema de Bayes estava ciente de que a probabilidade dele estar doente era muito pequena, onde que ao realizar novamente o exame, o mesmo apresentou resultado negativo.

A obra de Mlodinow inclusive apresenta como conclusão que nossa mente cria padrões em relação às situações, porém muitas vezes somos enganados por esses padrões que surgem em sequências aleatórias, chegando a conclusões completamente erradas acerca de alguma situação, ou seja, é como se as pessoas criassem termos para explicar cálculos probabilísticos, fatos estes que foram supracitados na presente dissertação.

Esses padrões, de acordo com Mlodinow, ocorrem algumas vezes em tribunais, onde cálculos probabilísticos realizados de forma incorreta são demonstrados aos jurados para impressioná-los quanto a probabilidade do réu ser culpado ou inocente.

Sobre essa questão referente aos tribunais de justiça, o matemático francês Siméon Denis Poisson (1781–1840) escreveu uma obra cerca de 200 anos atrás no o ano de 1837, intitulada *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, traduzindo: Pesquisas sobre a probabilidade em julgamentos sobre matérias criminais e civis.

Figura 18 - Capa do livro Probabilité Des Jugements


SUR LA

PROBABILITÉ DES JUGEMENTS

EN MATIÈRE CRIMINELLE

ET EN MATIÈRE CIVILE,

PRÉCÉDÉES

DES RÈGLES GÉNÉRALES DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR S.-D. POISSON,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés Royales de Londres et d'Édimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, d'Upsal, de Boston, de Turin, de Naples, etc.; des Sociétés, italienne, astronomique de Londres, Philomatique de Paris, etc.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, ETC.

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1837

Fonte: Probabilité Des Jugements (1837).

A tomada de decisões ao aceitar ou rejeitar uma ação é algo muito comum nos dias atuais, onde *lawtechs*[12] e *legaltechs*[13] desenvolvem mecanismos que ajudam nessas decisões, uma vez que a grande maioria dos cursos de direito em nosso país atualmente, não apresentam uma disciplina voltada aos cálculos probabilísticos, disciplina essa que poderia ser pensada de forma carinhosa, para ser incluída na grade curricular dos referidos cursos, objetivando calcular com maior assertividade a probabilidade de resultados dos julgamentos em diversas áreas. Os serviços prestados nos dias atuais, para determinar se é conveniente aceitar ou rejeitar ações com base em dados probabilísticos, comprova que Poisson era realmente um homem muito à frente de seu tempo.

Voltando aos exames laboratoriais, a COVID-19 por se tratar de uma doença que surgiu a pouco, devemos levar em conta os sintomas e o tempo de continuidade dos mesmos, porém, seus testes também podem apresentar resultados desconexos, da mesma forma que outras patologias, conforme visto anteriormente. No caso de falsos negativos, o paciente provavelmente apresenta uma carga viral baixa, o que pode causar a não detecção do vírus.

Já em casos de falsos positivos, o que pode acontecer é a identificação da presença de anticorpos que são parecidos com o SARS-CoV-2, ou seja, o exame dá positivo porque detectou com alguma especificidade do vírus, mas na verdade ele não está no organismo.

Na busca pela eficácia de testagens, pesquisadores da Universidade de Roterdã, na Holanda, realizaram uma pesquisa onde estudaram cinco diferentes marcas de testes rápidos, com amostras de pessoas infectadas pelo Sars-CoV-2. Os testes apresentaram grande variação de sensibilidade (entre 75,5% e 97,3%).

Com os dados informados por tais pesquisadores, podemos utilizar o teste mais impreciso (75,5%) e o mais preciso (97,3%) e elaborar uma situação envolvendo tais testes e posteriormente aplicar em sala de aula a nível de ensino médio, como o exemplo que segue abaixo.

[12] Startups jurídicas que atuam com soluções voltadas para um público mais amplo, que inclui pessoas técnicas e não técnicas auxiliando quem precisa de consultoria jurídica.

[13] Empresa que oferece serviços gerenciados por uma inovação tecnológica para escritórios de advocacia e setores jurídicos.

Em determinada cidade estima-se que cerca de 1% da população está infectada pelo vírus SARS-CoV-2. Considerando que foram comprados testes de eficácia 75,5% e 97,3% e que ambos apresentam um resultado falso-positivo para 1% das pessoas que não estão infectadas, calcule a probabilidade de uma pessoa ter a doença, sabendo que seu resultado foi positivo e considerando que o resultado foi informado pelo:

a) teste menos preciso
b) teste mais preciso

Primeiramente professores, sugiro uma análise e posterior comentário com os alunos acerca da diferença de eficácia entre os dois testes, bem como sobre os resultados esperados para os cálculos solicitados.

Resolução

a) Teste menos preciso

Primeiramente devemos denotar as probabilidades que serão utilizadas:

$P(D)$ = probabilidade da pessoa estar doente = 1%

$P(S)$ = probabilidade da pessoa ser sadia = 99% (100% - 1%)

$P(P/D)$ = probabilidade do resultado ser positivo estando a pessoa doente = 75,5%

$P(P/S)$ = probabilidade do resultado ser positivo sendo que a pessoa é sadia = 1%

$P(D/P)$ = probabilidade da pessoa estar doente sendo que o resultado é positivo

$$P(D/P) = \frac{P(D)\cdot P(P/D)}{P(D)\cdot P(P/D)+P(S)\cdot P(P/S)}$$

$$P(D/P) = \frac{0{,}01\cdot 0{,}755}{0{,}01\cdot 0{,}755+0{,}99\cdot 0{,}01}$$

$$P(D/P) = \frac{0{,}00755}{0{,}00755+0{,}0099}$$

$$P(D/P) = \frac{0{,}00755}{0{,}01745} \simeq 0{,}4327 \simeq 43{,}27\%$$

b) Teste mais preciso

Novamente denotando as probabilidades que serão utilizadas:

$P(D)$ = probabilidade da pessoa estar doente = 1%

$P(S)$ = probabilidade da pessoa ser sadia = 99% (100% - 1%)

$P(P/D)$ = probabilidade do resultado ser positivo estando a pessoa doente = 97,3%

$P(P/S)$ = probabilidade do resultado ser positivo sendo que a pessoa é sadia = 1%

$P(D/P)$ = probabilidade da pessoa estar doente sendo que o resultado é positivo

$$P(D/P) = \frac{P(D) \cdot P(P/D)}{P(D) \cdot P(P/D) + P(S) \cdot P(P/S)}$$

$$P(D/P) = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}973}{0{,}01 \cdot 0{,}973 + 0{,}99 \cdot 0{,}01}$$

$$P(D/P) = \frac{0{,}00973}{0{,}00973 + 0{,}0099}$$

$$P(D/P) = \frac{0{,}00973}{0{,}01963} \simeq 0{,}4957 \simeq 49{,}57\%$$

Podemos agora, após resolução, discutir com nossos alunos que o teste mais preciso, indiferente de ambos apresentarem um falso-positivo de 1%, continua sendo o teste mais recomendado a ser realizado havendo essa possibilidade de escolha. Outra crítica que podemos fazer reside no fato de se tratar de uma doença “nova”, ou seja, com pouco tempo de estudos sobre a mesma, logo não há a mesma gama de informações sobre ela se comparado ao HIV, por exemplo, por isso a diferença significativa nos testes.

Os exemplos resolvidos e principalmente discutidos acima servem como base para refinar o entendimento do tema probabilidade condicional. Enquanto professores, devemos buscar sempre a maximização de nossos resultados, uma vez que, somos formadores de seres críticos e autônomos em suas decisões, sendo os exemplos acima, estratégias de ensino que favorecem esse pensamento crítico e posterior tomadas de decisões de forma coerente.

É recomendável aos professores que elaborem exercícios relativos à situações próximas ao cotidiano e à cultura da localidade em que residem, respeitando a realidade social de seus alunos e desenvolvendo com o isso o princípio da Etnomatemática, muito defendida pelo matemático Ubiratan D'Ambrósio, falecido em 2021, durante o período de realização do presente mestrado, que visa desenvolver de forma significativa a compreensão, a criatividade e a percepção da relação existente entre tal conteúdo e a realidade do aprendente.

De acordo com D'Ambrósio:

> Nessa linha de pensamento, percebemos que a Etnomatemática não se trata de um método de ensino nem de uma nova ciência, mas de uma proposta educacional que estimula o desenvolvimento da criatividade, conduzindo a novas formas de relações interculturais. Isso se confirma neste argumento: "é um programa que visa explicar os processos de geração, organização e transmissão de conhecimentos em diversos sistemas culturais e as forças interativas que agem nos e entre os três processos. (D`AMBRÓSIO, 2001, p. 26)

Portanto, fica a critério do docente de como estabelecer relações entre o cotidiano e o tema probabilístico em questão, recordando que os exercícios resolvidos e discutidos acima fazem parte de uma proposta que se aproxima muito do cotidiano de grande parte da população, por esse motivo, foram sugeridos pelo autor.

3 CONCLUSÃO

Analisando os resultados obtidos na aplicação do problema de Monty Hall nas três escolas de educação básica listadas nessa dissertação, bem como aos professores dos educandários, foi verificado um padrão em todas as escolas, sendo a decisão de permanecer com a escolha inicial após o primeiro cartão não apresentar o prêmio onde após serem indagados pelo autor afirmaram que a probabilidade seria a mesma e, por intuição, a grande maioria dos participantes decidiu manter a escolha inicial. Outro fato presenciado foi a falta de julgamento pelos participantes acerca do apresentador saber ou não onde estava o cartão premiado, sendo que em suas concepções o mesmo não sabia onde estava o prêmio e acreditaram cegamente que o primeiro cartão foi escolhido de forma aleatória, associando a partir dessa ótica o aumento da probabilidade de ganhar o prêmio.

Quanto à metodologia aplicada para a compreensão do Teorema de Bayes, os resultados foram satisfatórios onde houve compreensão por uma parte dos alunos do ensino médio que realmente associaram que a probabilidade do evento anterior ter ocorrido está relacionada com a probabilidade total do evento posterior que ocorreu. Nesse mesmo, tocante houve entendimento por parte dos estudantes que resolveram os exemplos propostos pelo autor de forma correta e após a resolução teceram conclusões muito pertinentes do porquê de tal resultado probabilístico, comprovando o desenvolvimento da análise e posterior crítica dos resultados obtidos para as situações propostas. Todavia houve alunos que apresentaram resistência quanto a algumas situações, tais como os resultados dos testes de doenças infecciosas, onde associaram o percentual de falso positivo como sendo uma espécie de margem de erro da eficácia do teste e que tal percentual deveria ser subtraído da taxa de eficácia dos testes, julgando que o resultado obtido pelo teorema seria exatamente esse valor e optaram por resolver os problemas dessa forma que segundo eles seria uma maneira mais rápida de obter o resultado probabilístico para a situação, evidenciando uma não compreensão da situação problema.

Um resultado considerado positivo reside no fato de ter ocorrido durante a resolução dos problemas propostos discussões e troca ideias sobre as situações propostas evidenciando para o autor que houve aumento na “dúvida” sobre o óbvio e que nem sempre nossa concepção está correta acerca de situações que envolvem probabilidades. Esse mesmo melhoramento também foi verificado junto aos professores, que inicialmente desconheciam tais “paradoxos”, conforme ficou evidenciado inicialmente na aplicação do problema de Monty Hall.

Existe a possibilidade de aplicação da metodologia, uma vez que, os resultados obtidos a nível de ensino médio foram satisfatórios na ótica do presente autor, desenvolvendo a análise e crítica nos alunos em relação à tomada de decisões e cujos benefícios serão verificados não só em seus estudos posteriores, mas principalmente em sua vida pessoal e social, visto que, a amostragem com alunos de cursos de graduação comprovou que muitos dos acadêmicos adentram nos cursos de graduação sem o conhecimento de diversas situações envolvendo cálculos probabilísticos como foi verificado também no problema de Monty Hall.

Quanto aos professores, a presente metodologia não é algo desafiador, mas sim uma ferramenta que busca o refinamento a nível de educação básica, do tema teoria das probabilidades, onde fica a proposta aos docentes, de após a aplicação da metodologia e análise de seus resultados, promover melhorias e alterações, objetivando sempre a maximização de uma aprendizagem significativa acerca dos temas probabilísticos propostos, bem como, a continuidade dos estudos sobre outras situações que envolvam cálculos probabilísticos nos quais o senso comum não é o modo correto de interpretação das mesmas.

REFERÊNCIAS

ALVES, Rubem. **Filosofia da Ciência: Introdução ao jogo e suas regras**. 14ª ed. São Paulo: Brasiliense,1991.

BATANERO, C. **Didáctica de la Estadística**. Grupo de Investigación en Educación Estadística, ISBN 84-699-4295-6, Universidad de Granada, Espanha, 2001. Disponível em http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/didacticaestadistica.zip (acesso em 19/01/2023).

BATANERO, C. **Significados de la probabilidad en la educación secundaria**. Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, México, v. 8, n. 3, p.247-263, nov. 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**.
Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br Acesso em: 15 abr. 2023.

CARNEIRO, Eny Maia Moaci. **A Reforma do Ensino Médio em questão**. São Paulo: Biruta, 2000.

INEP. **Censo Escolar 2018**. Brasília, DF: INEP, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/censo-escolar/resultados. Acesso em: 15 abr. 2023.

CORDANI, L. K. **O ensino da Estatística na Universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência**. Tese de Doutorado. São Paulo. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. 2001

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade**. – Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto & Aplicações**. 2.ed. São Paulo: Ática, 2000. Vol. Único

FLÓRIDA: WIKIMEDIA FOUNDATION. **Monty Hall**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Monty_Hall&oldid=60195855. Acesso em: 8 jan. 2021.

INTERNATIONAL SEISMOLOGICAL CENTRE. **Early History of the ISC**. Disponível em: http://www.isc.ac.uk/about/history/. Acesso em: 11 mar. 2023.

LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010

LOESCH, Claudio. **Probabilidade e Estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

LOPES, Celi Espasandin. **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores**. Cad. Cedes, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, 2008.

MALDANER, O. A. **A formação inicial e continuada de professores de Química – professores/pesquisadores**. Tese (Doutorado). Unicamp: Faculdade de Educação, Campinas,1997. Disponível em: www2.fc.unesp.br/cienciaeeducacao/include.Acesso em 05 mar. 2023.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. **O Ensino e as Propostas Pedagógicas**. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2009.

MORGADO, A. C. de O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

PARRAT-DAYAN, Silvia; TRYPHON, Anastásia. (Org.). **Jean Piaget – Sobre a Pedagogia: textos inéditos**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998.

RAMOS, Pedro Nogueira. **Torturem os Números que eles Confessam: Sobre o mau uso e abuso das Estatísticas em Portugal, e não só.** Coimbra: Almedina, 2013.

SCIHI BLOG. **The Important Theorem of Thomas Bayes**. 2018. Disponível em: http://scihi.org/theorem-thomas-bayes/. Acesso em: 11 mar. 2023.

Shulman, L. S. (1986). **Those who understand: Knowledge growth in teaching**. Education Researcher, 15 (2), 4-14.

STEIN, Carlos Efrain; LOESCH Claudio. **Estatística Descritiva e Teoria das Probabilidades**. Blumenau: Edifurb, 2008.

University of Michigan. **Michiganensian**. 72. ed. Ann Arbor: University Of Michigan, 1968. 91 p. Disponível em: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015039287662. Acesso em: 13 jan. 2023.

APÊNDICE A – PROBLEMAS PROPOSTOS SOBRE O TEOREMA DE BAYES PARA APLICAÇÃO

Apresento abaixo um rol de exercícios propostos e posterior gabarito sobre o tema em situações do cotidiano que podem ser desenvolvidos junto aos nossos estudantes de ensino médio durante as aulas regulares quando trabalhado o assunto probabilidade condicional.

<u>Exercícios propostos</u>

1. Uma caixa em forma de urna contém cinco bolas azuis e três rosas. E uma segunda caixa contém três bolas azuis e duas rosas. Se uma bola branca é sorteada ao acaso, qual é a probabilidade de ela ter vindo da primeira caixa?

2. Três empresas de brinquedos, A, B e C, produziram, respectivamente, 40%, 50% e 10% do total de brinquedos de uma escola. A porcentagem de brinquedos defeituosos da fábrica A é 3%, da fábrica B é 5% e da fábrica C é 2%. Uma criança recebeu, ao acaso, um brinquedo defeituoso. Qual é a probabilidade de que essa peça tenha vindo da fábrica B? Qual das empresas tem mais chance de ter fabricado a peça defeituosa?

3. Considerando os dados da questão anterior, determine qual é a probabilidade de uma criança receber um brinquedo defeituoso.

4. Uma urna contém nove bolas: três pretas, uma branca e cinco vermelhas. Uma segunda urna contém nove bolas: quatro bolas pretas, três brancas e duas vermelhas. E uma terceira urna contém oito bolas: duas pretas, três brancas e três vermelhas. Escolheu-se uma urna, ao acaso, e dela se extraiu uma bola, ao acaso. Verificando-se que a bola sorteada é branca, qual é a probabilidade de a bola ter saído da terceira urna?

5. O proprietário de uma confecção estima que uma roupa feita por um funcionário experiente tem 90% de chance de não apresentar defeito e que uma roupa feita por um funcionário novato tem 50% de chance de não apresentar defeito. Se uma

roupa selecionada ao acaso apresentar defeito, determine a probabilidade de ela ter sido feita por um funcionário novato, sabendo-se que 2/3 das roupas são feitas por funcionários experientes.

6. Segundo um professor de probabilidade, a chance de um aluno se dar bem numa prova é de 80% se estudou e 50% se não estudou. Se um determinado aluno não estuda para 15% das provas que realiza, qual será a probabilidade de esse aluno se dar bem na prova?

7. Considerando os dados da questão anterior, qual é a probabilidade de o aluno ter estudado, dado que ele se deu bem na prova?

8. Em uma turma de Administração, 65% dos alunos são do sexo masculino. Sabe-se ainda que 30% dos alunos têm carro, enquanto esse percentual entre as alunas diminui para 18%. Foi escolhido de forma aleatória um dos estudantes dessa turma e constatou-se que o mesmo possui um carro. Qual é a probabilidade do aluno escolhido seja do sexo feminino?

9. Um certo vírus infecta uma em cada 200 pessoas. Um teste usado para detectar o vírus em uma pessoa dá positivo 80% das vezes quando a pessoa tem o vírus e 5% das vezes quando a pessoa não tem o vírus. (Este resultado de 5% é chamado de falso positivo.) Considere A como sendo o evento “a pessoa está infectada” e B o evento “o teste dá positivo”. Usando o teorema de Bayes, se o teste dá positivo, determine a probabilidade de a pessoa estar infectada.

10. Em uma localidade, 8% dos adultos sofrem de determinada doença. Um médico que conhece muito bem os moradores da localidade, diagnostica corretamente 95% das pessoas que têm a doença e diagnostica de forma errônea 2% das pessoas que não têm a doença (falso-positivo).Um adulto acaba de ser diagnosticado pelo médico como portador da doença. Qual é a probabilidade desse adulto atendido pelo médico, de fato ser realmente portador de tal patologia?

APÊNDICE B – GABARITO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Como auxílio segue abaixo o gabarito detalhado dos exercícios propostos para serem trabalhados durante as aulas regulares do ensino médio. Nos resultados foi realizado assim como nos exemplos resolvidos anteriormente, o arredondamento por centésimo, utilizando novamente a norma brasileira NBR 5891.

QUESTÃO 1

URNA 1: 5 bolas azuis e 3 bolas rosas
URNA 2: 3 bolas azuis e 2 bolas rosas

Seja o evento "A: sair bola azul".

Há duas urnas e a probabilidade de escolher uma das duas urnas é 1/2. Assim:
$P(U_1) = P(U_2) = 1/2$

A probabilidade de sair bola azul dado que escolheu a U_1 é 5/8.
$P(A/U_1) = 5/8$

A probabilidade de sair bola azul dado que escolheu a U_2 é 3/5.
$P(A/U_2) = 3/5$

Queremos saber a probabilidade de a bola ter vindo da U_1 dado que saiu uma bola azul, ou seja, $P(U_1/A)$.

Aplicando o Teorema de Bayes:

$$P(U_1/A) = \frac{P(U_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(U_1) \cdot P(A/U_1)}{P(U_1) \cdot P(A/U_1) + P(U_2) \cdot P(A/U_2)}$$

$$P(U_1/A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}$$

$$P(U_1/A) = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{16} + \frac{3}{10}}$$

$$P(U_1/A) = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{49}{80}} = \frac{5}{16} \cdot \frac{80}{49} = \frac{25}{49} \simeq 0,5102 \simeq 51,02\%$$

Um comentário que pode ser tecido em relação a essa questão quanto ao resultado praticamente uma equipartição de probabilidade entre as urnas 1 e 2 reside no fato de em ambas urnas, tínhamos mais bolas azuis que rosas. O fato da probabilidade da bola azul ter saído da urna 1 deve-se à razão $\frac{5}{8}$ ser levemente maior que à razão $\frac{3}{5}$, conforme já foi comentado nos exemplos resolvidos anteriormente.

Questão 2

Seja o evento “D: sair brinquedo defeituoso”

A probabilidade de um brinquedo vir de cada fábrica é:
P(A) = 0,40, P(B) = 0,50 e P(C) = 0,10.

A probabilidade de a fábrica A produzir um brinquedo defeituoso é: 0,03
P(D/A) = 0,03.

A probabilidade de a fábrica B produzir um brinquedo defeituoso é: 0,05
P(D/B) = 0,05.

A probabilidade de a fábrica C produzir um brinquedo defeituoso é: 0,02

P(D/C) = 0,02

Queremos saber a probabilidade de o brinquedo ter vindo da fábrica B dado que é um brinquedo defeituoso, ou seja, devemos determinar P(B/D).

Aplicando o Teorema de Bayes:

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)}$$

$$P(B/D) = \frac{0,50 \cdot 0,05}{0,40 \cdot 0,03 + 0,50 \cdot 0,05 + 0,10 \cdot 0,02}$$

$$P(B/D) = \frac{0,025}{0,012 + 0,025 + 0,002}$$

$$P(B/D) = \frac{0,025}{0,039} \simeq 0,6410 \simeq 64,10\%$$

Como a probabilidade da peça defeituosa ter vindo da empresa B é de 0,6410 = 64,10%, todas as outras juntas tem probabilidade de apenas 100% – 64,10% = 35,90%, logo a empresa B tem a maior chance de ter fabricado a peça defeituosa.

Questão 3

Essa probabilidade é representada pelo denominador do Teorema de Bayes e é 0,039 = 3,90%

Questão 4

Seja o evento “B: sair bola branca”.

Como temos três urnas, a probabilidade de escolher uma das urnas é 1/3.

$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = 1/3$.

A probabilidade de sair bola branca dado que se escolheu a U_1 é 1/9.
$P(B/U_1) = 1/9$.

A probabilidade de sair bola branca dado que se escolheu a U_2 é 3/9.
$P(B/U_2) = 3/9 = 1/3$.

A probabilidade de sair bola branca dado que se escolheu a U_3 é 3/8.
$P(B/U_3) = 3/8$.

Queremos saber a probabilidade de a bola ter vindo da U_3 dado que saiu uma bola branca, ou seja, $P(U_3/B)$.

Aplicando o Teorema de Bayes:

$$P(U_3/B) = \frac{P(U_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(U_3) \cdot P(B/U_3)}{P(U_1) \cdot P(B/U_1) + P(U_2) \cdot P(B/U_2) + P(U_3) \cdot P(B/U_3)}$$

$$P(U_3/B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}$$

$$P(U_3/B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8}}$$

$$P(U_3/B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{59}{216}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{216}{59} = \frac{216}{472} = \frac{27}{59} \simeq 0{,}4576 \simeq 45{,}76\%$$

Questão 5

Seja o evento “D: selecionar roupa defeituosa”.

A probabilidade de uma roupa ser feita por um funcionário experiente é 2/3.
$P(E) = 2/3$.

A probabilidade de uma roupa ser feita por um funcionário novato é 1/3.

P(N) = 1/3.

A probabilidade de um funcionário experiente fazer uma roupa defeituosa é 10%.
P(D/E) = 10% = 1/10

A probabilidade de um funcionário novato fazer uma roupa defeituosa é 50%.
P(D/N) = 50% = 1/2

Queremos saber a probabilidade de uma roupa ter sido feita por um funcionário novato dado que é uma roupa defeituosa, ou seja, P(N/D).

Aplicando o Teorema de Bayes:

$$P(N/D) = \frac{P(N \cap D)}{P(D)} = \frac{P(N) \cdot P(D/N)}{P(N) \cdot P(D/N) + P(E) \cdot P(D/E)}$$

$$P(N/D) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}}$$

$$P(N/D) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{15}}$$

$$P(N/D) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{30}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{30}{7} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7} \simeq 0{,}7143 \simeq 71{,}43\%$$

Questão 6

Seja o evento “B: se dar bem na prova”.

A probabilidade de esse aluno estudar é 85%.

P(E) = 0,85

A probabilidade de esse aluno não estudar é 15%.

P(N) = 0,15

A probabilidade de um aluno que estudou se dar bem é 80%.
P(B/E) = 0,80

A probabilidade de um aluno que não estudou se dar bem é 50%.
P(B/N) = 0,50

Percebam professores que essa situação está relacionada ao aluno se "dar bem na prova", ou seja, queremos saber a probabilidade total de que isso ocorra, logo temos as duas possibilidades:

i) Estudar e se dar bem na prova
ii) Não estudar e se dar bem na prova

Assim P(B) = probabilidade de estudar e se dar bem na prova + probabilidade de não estudar e se dar bem na prova. Matematicamente:

$$P(B) = P(E) \cdot P(B/E) + P(N) \cdot P(B/N) = 0,85 \cdot 0,80 + 0,15 \cdot 0,50 = 0,755 = 75,5\%$$

Questão 7

Queremos saber a probabilidade do aluno ter estudado sabendo que o mesmo "se deu bem na prova", ou seja, P(E/B). Atentem-se professores que o resultado da questão anterior nos fornece a probabilidade total do aluno ter logrado êxito. Essa é a probabilidade total já que queremos determinar a probabilidade de ele ter estudado, corresponde ao denominador do Teorema de Bayes para a referida situação, portanto:

$$P(E/B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{P(E) \cdot P(B/E)}{P(E) \cdot P(B/E) + P(N) \cdot P(B/N)}$$

$$P(N/D) = \frac{0,85 \cdot 0,80}{0,755} \simeq 0,9007 \simeq 90,07\%$$

Relembrando que o denominador corresponde a probabilidade total do aluno ter se saído bem na avaliação.

Outro fato que enquanto professores devemos evidenciar é a probabilidade grande do aluno que se saiu bem na prova ter estudado, baseia-se em dois fatores determinantes para isso:

i) Ele estuda para a maioria das provas.
ii) A probabilidade dele se sair bem quando estuda é grande.

Alguns alunos podem questionar o porquê da probabilidade, do aluno tirar uma boa nota é maior que 80% informado pelo problema. Devemos novamente evidenciar os dois fatores supracitados.

Questão 8

Seja o evento C: “o estudante possuir carro”.

Denotando aluno por M e aluna por F.

A probabilidade do estudante escolhido ser do sexo masculino é de 65%
$P(M) = 0,65$

A probabilidade do estudante escolhido ser do sexo feminino é 35%
$P(F) = 0,35$

A probabilidade do estudante ter carro sendo do sexo masculino é 30%.
$P(C/M) = 0,30$

A probabilidade do estudante ter carro sendo do sexo feminino é 18%.
$P(C/F) = 0,18$

Queremos saber a probabilidade do estudante escolhido ser do sexo feminino, sabendo que o mesmo possui carro, ou seja, $P(F/C)$.

Aplicando o Teorema de Bayes:

$$P(F/C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{P(F) \cdot P(C/F)}{P(M) \cdot P(C/M) + P(F) \cdot P(C/F)}$$

$$P(F/C) = \frac{0,35 \cdot 0,18}{0,65 \cdot 0,30 + 0,35 \cdot 0,18}$$

$$P(F/C) = \frac{0,063}{0,258} \simeq 0,2442 \simeq 24,42\%$$

Questão 9

Considerando como A o evento pessoa infectada e como B o evento resultado positivo do teste e que situação problema informa que a cada 200 pessoas apenas uma está infectada, temos:

$$P(A) = \frac{1}{200} = 0,5\% = 0,005$$

Considerando que 0,5% das pessoas estão doentes temos que 99,5% das pessoas são saudáveis que será denotado por S.
P(S) = 99,5% = 0,995

O teste tem eficácia de identificar corretamente o vírus em 80 % dos casos em que a pessoa realmente está infectada, será denotada essa probabilidade por P (A/B).
P(B/A) = 80% = 0,80

O teste também apresenta um falso positivo de 5% que correspondem aos casos nos quais o resultado é positivo, porém a pessoa é saudável, ou seja, sem o vírus. Essa probabilidade será denotada por P(B/S).
P(B/S) = 5% = 0,05

Como queremos saber a probabilidade da pessoa estar infectada, sendo o resultado do teste positivo P(A/B) temos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(A) \cdot P(B/A) + P(S) \cdot P(B/S)}$$

$$P(A/B)\ \frac{0{,}005 \cdot 0{,}80}{0{,}005 \cdot 0{,}80 + 0{,}995 \cdot 0{,}05}$$

$$P(A/B)\ \frac{0{,}004}{0{,}005 \cdot 0{,}80 + 0{,}995 \cdot 0{,}05}$$

$$P(A/B)\ \frac{0{,}004}{0{,}05375} \simeq 0{,}0744 \simeq 7{,}44\%$$

Esse resultado pode não parecer de acordo com a concepção dos estudantes, uma vez que, o valor é muito pequeno, se compararmos com a eficácia do teste que é de 80 % para pessoas que realmente apresentam o vírus. Novamente devemos deixar claro o que determina tal resultado são os fatores já mencionados: maior parte da população ser sadia e nesse caso um falso positivo da ordem de 5%, o que não pode ser considerado um exame nem um pouco confiável.

Questão 10

Seja o evento D "pessoa estar doente", e o evento V "a pessoa ser diagnosticada como doente pelo médico".

O problema nos informa que a probabilidade da pessoa estar doente é:
P(D) = 8% = 0,08

A probabilidade do diagnóstico informado pelo médico estar correto quando a pessoa realmente está doente será denotada por P(V/D).
P(V/D) = 95% = 0,95

Como 8% das pessoas da comunidade apresentam a doença, temos que 92% das pessoas dessa localidade são sadias. Será denotado por S o evento "pessoa estar sadia".
P(S) = 92% = 0,92

A probabilidade do diagnóstico informado pelo médico não ser correto, ou seja, falso positivo, será denotada por P(V/S)
P(V/S) = 2% = 0,02

Queremos saber a probabilidade do paciente atendido pelo médico e diagnosticado como doente, realmente apresentar tal patologia, ou seja, P(D/V).

Aplicando o Teorema de Bayes, temos:

$$P(D/V) = \frac{P(D \cap V)}{P(V)} = \frac{P(D) \cdot P(V/D)}{P(D) \cdot P(V/D) + P(S) \cdot P(V/S)}$$

$$P(D/V) = \frac{0{,}08 \cdot 0{,}95}{0{,}08 \cdot 0{,}95 + 0{,}92 \cdot 0{,}02}$$

$$P(D/V) = \frac{0{,}076}{0{,}0944} \simeq 0{,}8051 \simeq 80{,}51\%$$

Após a resolução de questões com essa, devemos juntamente com os estudantes realizar uma análise crítica do resultado, como por exemplo, julgar se o médico é um profissional indicado para diagnosticar essa patologia que assola a localidade. Fazendo isso estamos desenvolvendo a análise de situações baseadas em resultados estatísticos e buscando com isso decisões mais coerentes e sensatas para determinados problemas.