



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENG. DE CONTROLE, AUTOMAÇÃO E COMPUTAÇÃO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

Gabriel Alves Ferraz

Estimação de atitude utilizando filtro de Kalman

Blumenau
2023

Gabriel Alves Ferraz

Estimação de atitude utilizando filtro de Kalman

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação do Centro Tecnológico, de Ciências Exatas e Educação da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Orientador, Dr. Marcos Vinicius Matsuo

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Alves Ferraz, Gabriel
Estimação de atitude utilizando filtro de Kalman /
Gabriel Alves Ferraz ; orientador, Marcos Vinicius Matsuo,
2023.
66 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau,
Graduação em Engenharia de Controle e Automação, Blumenau,
2023.

Inclui referências.

1. Engenharia de Controle e Automação. 2. IMU. 3. Filtro
de Kalman. 4. Fusão de dados. I. Matsuo, Marcos Vinicius.
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em
Engenharia de Controle e Automação. III. Título.

Gabriel Alves Ferraz

Estimação de atitude utilizando filtro de Kalman

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Engenheiro de Controle e Automação” e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação.

Blumenau, 06 de julho de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Marcos Vinicius Matsuo, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Janaina Gonçalves Guimarães, Dra.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Ciro André Pitz, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus amados pais, que sempre estiveram ao meu lado, incentivando-me e apoiando-me incansavelmente ao longo desta jornada acadêmica. Também dedico este trabalho ao meu professor orientador Matsuo, cujo apoio e orientação foram cruciais para a realização deste projeto. Sou grato por ter tido a oportunidade de aprender com você, pelas suas sugestões valiosas e pelo compromisso demonstrado.

RESUMO

As IMUs (Unidades de Medição Inercial) são dispositivos que integram múltiplos sensores (como, por exemplo, giroscópio, acelerômetro e magnetômetro), cujos dados podem ser utilizados para estimar a posição e orientação de um objeto no espaço. A estimação de orientação possui diversas aplicações, como dispositivos robóticos, veículos e sistemas autônomos e equipamentos industriais. O objetivo deste trabalho é, primeiro, apresentar uma revisão teórica dos conceitos relacionados com a estimação da orientação de objetos através de IMUs, pontuando conceitos a respeito dos sensores envolvidos, dos métodos de aquisição de dados e das limitações da tecnologia. Além disso, um segundo objetivo é implementar um algoritmo chamado filtro de Kalman para a realizar a estimação da orientação de um corpo, por meio do processamento e fusão de dados medidos por um giroscópio, acelerômetro e magnetômetro. O filtro de Kalman aproveita informações redundantes dos sensores, combinando-as para reduzir os efeitos de ruídos e incertezas. As etapas da execução do projeto são detalhadas neste documento, assim como os métodos utilizados para a aplicação prática dos conceitos apresentados. Por fim, o algoritmo é testado e comparado com métodos mais simples de estimação de orientação. Os resultados mostram que o filtro de Kalman é robusto e eficaz na estimação atitude de um corpo no espaço tridimensional, conseguindo atenuar a influência dos ruídos e imprecisões das medições dos sensores

Palavras-chave: IMU; Filtro de Kalman; Fusão de dados.

ABSTRACT

IMUs (Inertial Measurement Units) are devices that integrate multiple sensors (such as gyroscopes, accelerometers, and magnetometers) whose data can be used to estimate the position and orientation of an object in space. Orientation estimation has various applications, including robotic devices, vehicles, autonomous systems, and industrial equipment. The objective of this work is, first, to present a theoretical review of the concepts related to the estimation of object orientation using IMUs, highlighting concepts regarding the involved sensors, data acquisition methods, and technological limitations. Additionally, a second objective is to implement an algorithm called the Kalman filter to perform orientation estimation of a body through the processing and fusion of data measured by a gyroscope, accelerometer, and magnetometer. The Kalman filter leverages redundant sensor information by combining it to reduce the effects of noise and uncertainties. The project's execution steps are detailed in this document, as well as the methods used for the practical application of the presented concepts. Finally, the algorithm is tested and compared to simpler methods of orientation estimation. The results demonstrate that the Kalman filter is robust and effective in estimating the attitude of a body in three-dimensional space, successfully mitigating the influence of sensor noise and measurement inaccuracies.

Keywords: IMU; Kalman filter; Data fusion.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ângulos de Euler.	15
Figura 2 – Estrutura básica e princípio de funcionamento de um acelerômetro baseado em tecnologia MEMS	16
Figura 3 – Acelerômetro em repouso.	17
Figura 4 – Princípio de funcionamento do magnetômetro de efeito Hall.	18
Figura 5 – Princípio de funcionamento do magnetômetro magnetorresistivo.	18
Figura 6 – Estrutura básica e princípio de funcionamento de um giroscópio baseado em tecnologia MEMS	19
Figura 7 – Esfera observada nas medições do magnetômetro	21
Figura 8 – Interferência <i>hard-iron</i>	22
Figura 9 – Interferência <i>soft-iron</i>	23
Figura 10 – Calibração do acelerômetro.	26
Figura 11 – Classificação de (H. F., 1988) dos métodos de fusão de dados.	29
Figura 12 – Diagrama de fusão de sensores.	30
Figura 13 – Diagrama de exemplo de um estimador de estados.	31
Figura 14 – Estimador de estados como um laço de controle realimentado.	32
Figura 15 – Diagrama do filtro de Kalman.	35
Figura 16 – Placa HW-290.	36
Figura 17 – Circuito de ligação entre Arduino e HW-290.	37
Figura 18 – Montagem do sistema.	38
Figura 19 – Calibração do giroscópio.	39
Figura 20 – Esfera de medição.	40
Figura 21 – Calibração do magnetômetro.	40
Figura 22 – Calibração do acelerômetro (eixo y).	41
Figura 23 – Calibração do acelerômetro (eixo z).	41
Figura 24 – Ângulos <i>roll</i> , <i>pitch</i> e <i>yaw</i> (com rotações suaves) calculados através dos dados do acelerômetro e magnetômetro	45
Figura 25 – Ângulos <i>roll</i> , <i>pitch</i> e <i>yaw</i> (com vibrações aplicadas aos sensores) calculados através dos dados do acelerômetro e magnetômetro	46
Figura 26 – Ângulos <i>roll</i> , <i>pitch</i> e <i>yaw</i> calculados através dos dados do acelerômetro e magnetômetro, com efeito da descontinuidade de fase	47
Figura 27 – Efeito da função <i>unwrap</i> (\cdot) no tratamento de descontinuidades nos valores dos ângulos <i>roll</i> , <i>pitch</i> e <i>yaw</i> calculados através dos dados do acelerômetro e magnetômetro	48
Figura 28 – Comparação entre os métodos de estimação dos ângulos de Euler com os sensores em repouso	49

Figura 29 – Comparação entre os métodos de estimação dos ângulos de Euler com os sensores em repouso e condições iniciais	50
Figura 30 – Comparação entre os métodos de estimação dos ângulos de Euler, com os sensores em repouso, com condições iniciais e medidas calibradas. . .	51
Figura 31 – Teste do filtro de Kalman (Integração no tempo).	56
Figura 32 – Teste do filtro de Kalman (Vibrações).	57
Figura 33 – Teste do filtro de Kalman (Ruídos).	58
Figura 34 – Uso do esquadro para posicionamento de 45°do sistema.	59
Figura 35 – Ensaio estático do ângulo <i>roll</i>	59
Figura 36 – Ensaio estático do ângulo <i>pitch</i>	60
Figura 37 – Ensaio dinâmico do ângulo <i>yaw</i>	61
Figura 38 – Ensaio dinâmico do ângulo <i>yaw</i> de +90°.	61
Figura 39 – Ensaio dinâmico do ângulo <i>yaw</i> de -90°.	62
Figura 40 – Ensaio dinâmico do ângulo <i>yaw</i> de +45°.	62
Figura 41 – Ensaio dinâmico do ângulo <i>yaw</i> de -45°.	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Média e erro médio - ângulo <i>roll</i>	57
Tabela 2 – Média e erro médio - Ângulo <i>pitch</i>	58
Tabela 3 – Média e erro médio - ângulo <i>yaw</i>	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVOS	12
1.1.1	Objetivo Geral	12
1.1.2	Objetivos Específicos	13
1.1.3	Organização do documento	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	O QUE É UMA UNIDADE DE MEDIÇÃO INERCIAL?	14
2.1.1	Aplicações	14
2.1.2	Sistemas de coordenadas	14
2.1.3	Ângulos de Euler	15
2.1.4	Tipos de sensores	15
2.1.4.1	<i>Acelerômetro</i>	<i>16</i>
2.1.4.2	<i>Magnetômetro</i>	<i>17</i>
2.1.4.3	<i>Giroscópio</i>	<i>19</i>
2.1.5	Limitações da tecnologia	19
2.1.5.1	<i>Ruídos no sinal de medição</i>	<i>19</i>
2.1.5.2	<i>Sensibilidade à temperatura</i>	<i>20</i>
2.1.5.3	<i>Escala de medição limitada</i>	<i>20</i>
2.1.5.4	<i>Interferências magnéticas no magnetômetro</i>	<i>20</i>
2.1.5.5	<i>Imprecisões nas medidas do giroscópio</i>	<i>22</i>
2.1.5.6	<i>Imprecisões nas medidas do acelerômetro</i>	<i>23</i>
2.1.6	Calibração dos sensores	24
2.1.6.1	<i>Calibração do giroscópio</i>	<i>24</i>
2.1.6.2	<i>Calibração do magnetômetro</i>	<i>24</i>
2.1.6.3	<i>Calibração do acelerômetro</i>	<i>26</i>
2.1.7	Fusão de dados	28
2.2	O FILTRO DE KALMAN	30
2.2.1	Estimador de estados	30
2.2.2	O modelo no espaço de estados	32
2.2.3	Etapa de predição	33
2.2.4	Etapa de estimação	34
3	SISTEMA PROPOSTO	36
3.1	MONTAGEM FÍSICA	36
3.2	CALIBRAÇÃO DO GIROSCÓPIO	37
3.3	CALIBRAÇÃO DO MAGNETÔMETRO	38
3.4	CALIBRAÇÃO DO ACELERÔMETRO	39

3.5	ESTIMAÇÃO DOS ÂNGULOS DE EULER ATRAVÉS DOS DADOS DO ACELERÔMETRO E MAGNETÔMETRO	41
3.5.1	Obtenção dos ângulos roll e pitch	42
3.5.2	Obtenção do ângulo yaw do magnetômetro	43
3.6	ESTIMAÇÃO DOS ÂNGULOS DE EULER ATRAVÉS DOS DADOS DO GIROSCÓPIO	47
3.7	UTILIZAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN PARA ESTIMAÇÃO DOS ÂNGULOS DE EULER	50
3.7.1	Obtenção do modelo no espaço de estados	50
4	RESULTADOS	55
4.1	EXEMPLO 1	55
4.2	EXEMPLO 2	55
4.3	EXEMPLO 3	58
5	CONCLUSÃO	64
	REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

Medir a aceleração e velocidade angular de um objeto é fundamental caso se deseje estimar a sua orientação. O procedimento de medição e processamento de tais parâmetros para determinação da orientação do objeto é chamado de estimação de atitude. Esse processo é fundamental em diversas aplicações da engenharia e indústria como dispositivos robóticos, veículos, sistemas autônomos, *gimbals*, máquinas-ferramentas e até próteses robóticas (INERTIAL. . . , 2023). Outras aplicações interessantes incluem realidade virtual, para rastrear o movimento da cabeça do usuário e ajustar a imagem exibida na tela de acordo (HACHAJ, 2019) e jogos eletrônicos, onde pode ser interessante rastrear o movimento do jogador, permitindo interações mais imersivas com o jogo (TRACKIMU:. . . , 2023).

Os sensores utilizados para medição de aceleração, velocidade e orientação são geralmente suscetíveis a ruídos, vibrações e variações de temperatura, fazendo com que as medições se tornem imprecisas ou menos confiáveis (dependendo da tecnologia utilizada na construção dos sensores). Em aplicações críticas como sistemas de orientação naval ou tecnologias aeroespaciais, essas questões são ainda mais importantes e afetam significativamente o processo de desenvolvimento dos sistemas. Assim, é comum que se utilizem métodos de processamento de dados para obtenção de estimações de orientação e posição mais precisas.

Em particular, os sensores inerciais baseados em tecnologia MEMS (*Micro-Electro-Mechanical Systems*) são alternativas de baixo custo e voltadas para aplicações mais simples de estimação de atitude. Ainda assim é necessário se atentar as suas limitações ao utilizá-los em sistemas de uso geral, especialmente porque essas são as mais afetadas pelas limitações mencionadas já que são projetadas para aplicações simples.

Esse trabalho tem por objetivo implementar um algoritmo de estimação da orientação de um objeto no espaço, utilizando filtro de Kalman para processar os dados provenientes de uma IMU (Unidade de Medida Inercial), composta por um giroscópio, acelerômetro e magnetômetro de baixo custo. Especificamente, neste trabalho, a orientação (ou atitude) do objeto é representada por meio dos ângulos de Euler (isto é, ângulos de rotação) em torno dos eixos x , y e z .

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do presente trabalho é estimar a orientação de um objeto no espaço tridimensional por meio do algoritmo de estimação conhecido como filtro de Kalman, o qual é utilizado aqui para processar os dados medidos por um giroscópio, acelerômetro e magnetômetro.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Compreender e interpretar os dados medidos por um giroscópio, acelerômetro e magnetômetro.
- Realizar o procedimento de calibração dos sensores utilizados neste trabalho.
- Estimar a atitude de um objeto a partir apenas dos dados medidos por um acelerômetro e magnetômetro presentes na IMU através do método apresentado em (OZYAGCILAR, 2012).
- Calcular os ângulos de rotação de um objeto a partir dos dados fornecidos por um giroscópio.
- Estimar a atitude de um objeto no espaço por meio do filtro de Kalman utilizando dados provenientes de um giroscópio, acelerômetro e magnetômetro, tendo como base o trabalho de (BIEDA, 2015).
- Realizar ensaios estáticos e dinâmicos para avaliar a acurácia da estimação de atitude.

1.1.3 Organização do documento

Este trabalho está organizado como segue. Primeiramente, no Capítulo 2, é apresentada uma revisão teórica a respeito dos temas abordados no trabalho, como o conceito geral de IMU, o princípio de funcionamento dos sensores presentes em uma IMU, o processo de calibração dos sensores, as limitações da tecnologia e então uma revisão a respeito do filtro de Kalman. Em seguida, no Capítulo 3, é apresentada a montagem física do sistema utilizado e são discutidos os métodos mais simples para estimações dos ângulos de rotação que utilizam o processamento direto dos dados obtidos por sensores inerciais. Após isso, é discutida a utilização do filtro de Kalman para realizar uma estimação mais precisa da atitude de um corpo no espaço. Por fim, no Capítulo 4, são apresentados comparativos e testes de acurácia do algoritmo estimação da atitude implementado com base em referenciais conhecidos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem por objetivo apresentar os conceitos fundamentais relacionados com os sensores inerciais utilizados neste trabalho, bem como discutir a técnica de fusão de dados baseado em filtro de Kalman, utilizado para estimação da orientação de um corpo no espaço.

2.1 O QUE É UMA UNIDADE DE MEDIÇÃO INERCIAL?

Uma unidade de medição inercial (IMU *Inertial Measurement Unit*) é um dispositivo eletrônico composto por um conjunto de sensores que medem a velocidade angular, a aceleração e a orientação de um objeto (ENGERS, 2021). Geralmente, uma IMU é composta por um giroscópio (para medição da velocidade angular), um acelerômetro (que mede a aceleração) e um magnetômetro (que mede o campo magnético terrestre, o qual pode ser utilizado para a determinar a orientação de um corpo em relação ao norte magnético do planeta).

Especificamente, tais sensores podem ser implementados (com baixo custo) através da tecnologia conhecida como Sistemas Micro-Eletromecânicos (MEMS, *Micro-Electro-Mechanical Systems*), que integra pequenos sensores, componentes mecânicos e circuitos eletrônicos em um único circuito integrado (PORATH, 2014).

2.1.1 Aplicações

IMUs são muitas utilizadas em sistemas de orientação, desempenhando um papel fundamental em naves espaciais e aviões, podendo até mesmo ser encontradas em dispositivos como os telefones e consoles de jogos eletrônicos. Outras aplicações para as IMUs incluem realidade virtual e aumentada, robótica, veículos autônomos e análise de movimento humano (REDDY, 2023).

O custo, o tamanho decrescente, bem como a melhoria do desempenho dos sensores baseados em tecnologia MEMS, permite que IMUs sejam usadas para aplicações de navegação de baixo custo (MENG, 2006).

2.1.2 Sistemas de coordenadas

Um sistema de coordenadas é definido por um conjunto de eixos que são usados para determinar e representar as posições dos pontos no espaço tridimensional (HOWARD, 2012).

No contexto das IMUs, um sistema de coordenadas é geralmente utilizado para descrever a orientação de um corpo no espaço tridimensional. Tal informação é obtida a partir processamento dos dados dos sensores que compõem as IMUs (a saber, aceleração, velocidade angular e a intensidade do campo magnético em relação aos eixos de um dado

sistema de coordenadas). Em particular, existem diversos sistemas de coordenadas que são frequentemente usados em aplicações envolvendo IMUs, como o sistema de coordenadas NED (Norte-Leste-Baixo) e o sistema de coordenadas ENU (Leste-Norte-Cima), ambos baseados em coordenadas cartesianas com eixos x , y e z ortogonais entre si. Especificamente, o sistema utilizado neste trabalho considera os eixos indicados na própria placa de circuito da IMU, que apresenta os eixos x e y paralelos ao plano da placa e o eixo z perpendicular ao plano da placa.

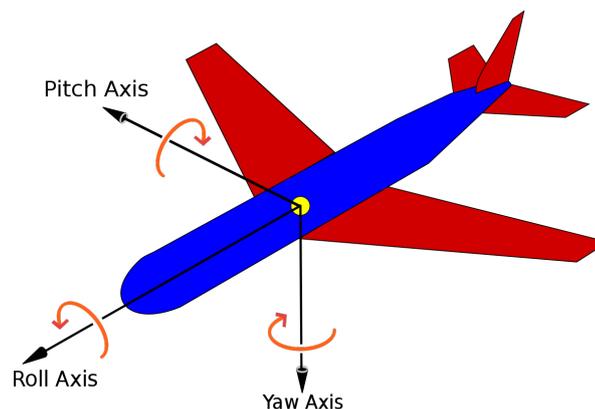
A escolha de um sistema de coordenadas é essencial, pois a partir dele os dados dos sensores podem ser interpretados corretamente em relação à orientação do dispositivo.

2.1.3 Ângulos de Euler

Ângulos de Euler são os ângulos de rotação em torno dos eixos de um sistema de coordenadas. Especificamente, em um sistema de coordenadas do espaço tridimensional são definidos três ângulos de rotação. Estes ângulos são usualmente chamados de *roll* (rolamento), representado pela letra grega ϕ , *pitch* (arfado) representado por θ e *yaw* (guinada), representado por ψ .

O ângulo ϕ representa a inclinação em relação ao plano horizontal, θ representa a inclinação em relação ao plano vertical e ψ representa a rotação em torno do eixo vertical. A Figura 1 mostra uma representação destes ângulos no contexto de uma aeronave.

Figura 1 – Ângulos de Euler.



Fonte: (EIXOS..., 2023)

2.1.4 Tipos de sensores

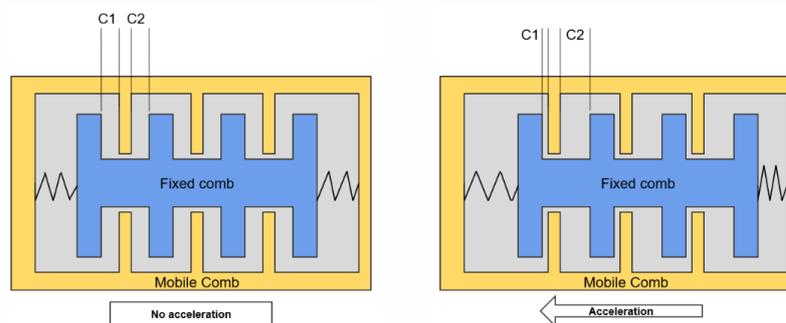
Como mencionado anteriormente, em uma IMU existem vários tipos de sensores, com cada sensor possuindo função e princípio de funcionamento diferente. A seguir é

apresentada uma breve descrição dos sensores de tecnologia MEMS usualmente presentes em IMUs.

2.1.4.1 Acelerômetro

Um acelerômetro tem como objetivo medir a componente de aceleração linear, gravitacional e centrífuga em cada eixo do sistema de coordenadas. Nos acelerômetros com tecnologia MEMS isso é realizado através de um sistema de massas e molas sensível a movimentações que tendem a gerar diferenças de capacitância entre suas partes, permitindo que a aceleração aplicada seja calculada em cada eixo (SARAIVA, 2013). Conforme ilustrado na Figura 2, um acelerômetro (baseado em tecnologia MEMS) normalmente é composto por uma peça mecânica acoplada a molas que se move livremente na parte central do circuito integrado e uma parte fixa, que no geral é a estrutura mais externa do dispositivo. Quando o objeto está parado, a distância entre as partes móveis e fixas tendem a ser semelhantes. A partir do momento que uma força é aplicada sobre a parte móvel, ela se move em relação à estrutura fixa, alterando a distância entre as massas e, conseqüentemente, a capacitância do sistema (SARAIVA, 2013).

Figura 2 – Estrutura básica e princípio de funcionamento de um acelerômetro baseado em tecnologia MEMS



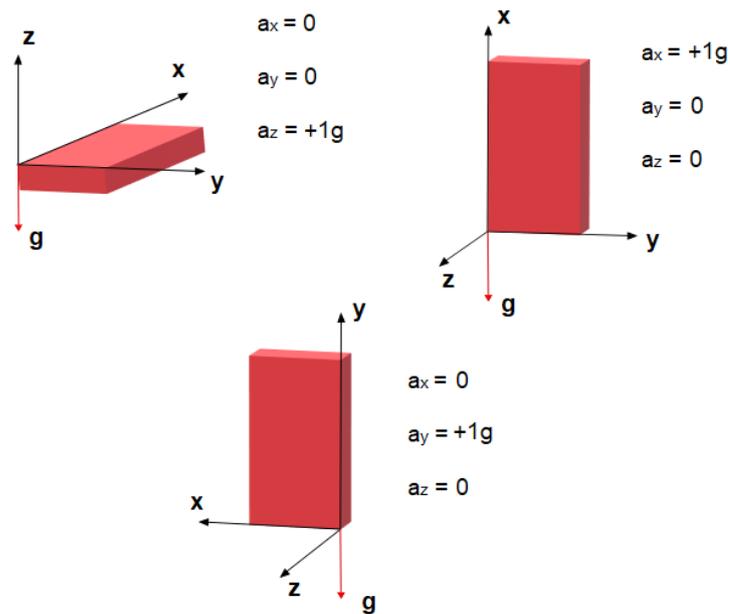
Fonte: (ACCELEROMETERS..., 2023)

A leitura do acelerômetro MEMS é realizada por um circuito eletrônico integrado, que converte a mudança na capacitância em um sinal elétrico, geralmente uma tensão. Esse sinal é então amplificado e processado para produzir uma saída digital.

Como neste trabalho deseja-se apenas estimar a posição angular do objeto, é pressuposto que o objeto (no momento da estimação dos ângulos de Euler) estará em repouso. Isso implica que o acelerômetro registrará somente as componentes da aceleração da gravidade em cada eixo. Quaisquer movimentos de translação resultariam em outras acelerações que o sensor também capturaria, o que comprometeria a precisão da medição dos ângulos de rotação. A Figura 3 ilustra um exemplo de um acelerômetro em três posições distintas, onde $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ denota a aceleração da gravidade e \mathbf{g} representa o

vetor de aceleração da gravidade. Nesta demonstração, quando o objeto está em repouso, as capacitâncias C1 e C2 são equivalentes. No entanto, quando uma aceleração é aplicada, a parte móvel se desloca, resultando em valores diferentes para C1 e C2. Essa discrepância entre as capacitâncias C1 e C2 pode ser utilizada para mensurar a aceleração do objeto.

Figura 3 – Acelerômetro em repouso.



Fonte: Autor

Além disso é importante destacar que através dos dados do acelerômetro pode-se medir apenas os ângulos *roll* (ϕ) e *pitch* (θ) e não o *yaw* (ψ). Isso acontece pois a aceleração da gravidade é paralela ao eixo de medição do ângulo *yaw* (eixo Z), ou seja, ao rotacionar o objeto em torno do eixo z, não haverá nenhuma diferença na medição do sensor, portanto não é possível determinar este o ângulo de rotação.

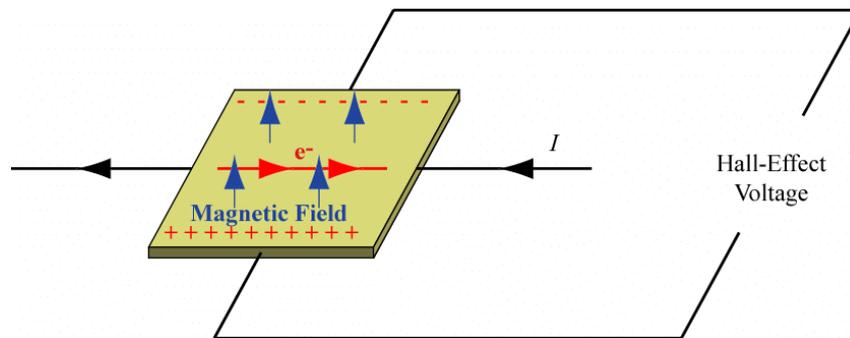
2.1.4.2 Magnetômetro

Um magnetômetro é um dispositivo utilizado para medir a intensidade e orientação do campo magnético em um determinado local. Uma vez que o campo magnético terrestre é orientado na direção do chamado norte magnético, através da medição da intensidade do campo magnético terrestre em diferentes direções é possível determinar o ângulos de rotação *yaw* de um magnetômetro em relação ao norte magnético. A bússola é um exemplo de um magnetômetro simples e já é utilizado para medição do ângulo *yaw* há muito tempo.

Os magnetômetros possuem vários princípios de funcionamento, porém o mais comum é o conhecido como efeito Hall, que acontece quando um campo magnético atravessa

um condutor e gera uma mudança na intensidade da corrente e, por consequência, na tensão (a qual pode ser medida por um sensor) (MATTHEW N. SADIKU, 2012). Este princípio é ilustrado na Figura 4.

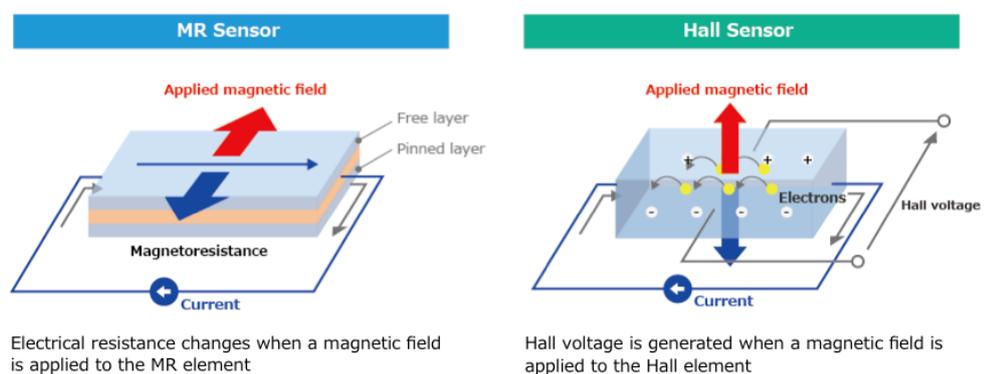
Figura 4 – Princípio de funcionamento do magnetômetro de efeito Hall.



Fonte: (ILLUSTRATION..., 2023)

Uma possível alternativa aos sensores de efeito hall são os baseados no efeito magnetorresistivo. Esses sensores utilizam materiais (na maior parte das vezes, metais) que alteram sua resistência elétrica ao serem expostos a campos magnéticos (PIPPARD, 1989). Enquanto os sensores de efeito hall medem o campo magnético perpendicular a superfície do sensor, os sensores magnetorresistivos medem o campo magnético paralelo a superfície do sensor, como mostra a Figura 5

Figura 5 – Princípio de funcionamento do magnetômetro magnetorresistivo.



Fonte: (MAGNETIC..., 2023)

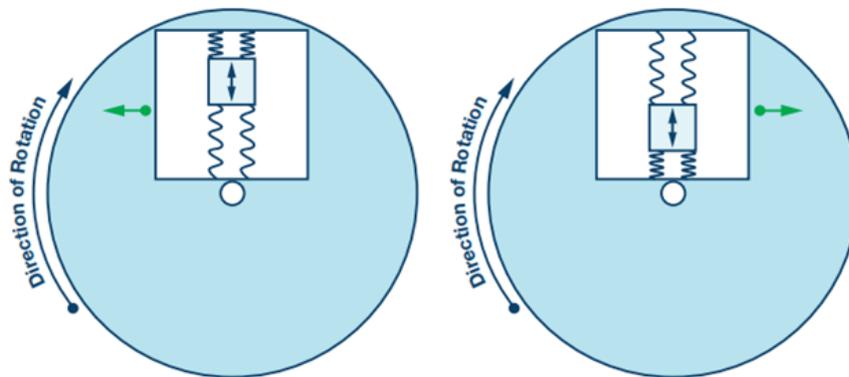
É importante observar que para medir o ângulo de rotação *yaw* somente através dos dados obtidos de um magnetômetro, o instrumento não pode estar rotacionado em relação aos eixos *x* e *y*, ou seja, os ângulos *roll* e *pitch* devem ser iguais a zero. Para a situação em que há alguma inclinação do magnetômetro (em relação ao eixos *x* e *y*) é

necessário o conhecimento dos ângulos *roll* e *pitch* para realização de uma compensação nos dados obtidos do magnetômetro, visando obter uma estimação precisa do ângulo *yaw* (mais detalhes são apresentação na Seção 3.5).

2.1.4.3 Giroscópio

Um giroscópio é um instrumento utilizado para medir a velocidade angular de um objeto em torno dos três eixos de rotação do sistema de coordenadas. Este dispositivo também pode ser baseado na tecnologia MEMS, utilizando nesse caso um sistema de pequenas massas e molas para aferir suas medidas. A Figura 6 apresenta a estrutura geralmente utilizada neste tipo de sensor. Um giroscópio tradicional (baseado em tecnologia MEMS) costuma possuir três estruturas similares a da Figura 6, uma para cada eixo de rotação. A rotações do objeto geram uma força centrífuga na massa, o que provoca uma variação na deformação das molas que o seguram. A partir do grau de deformação das molas é possível obter a velocidade angular a qual o objeto está submetido naquele instante de tempo.

Figura 6 – Estrutura básica e princípio de funcionamento de um giroscópio baseado em tecnologia MEMS



Fonte: (MEMS. . . , 2023)

2.1.5 Limitações da tecnologia

Como toda tecnologia existente, os sensores baseados em tecnologia MEMS normalmente usados em IMUs de baixo custo possuem algumas vantagens e desvantagens. Nas próximas seções são discutidas algumas limitações encontradas nesses tipos de sensores.

2.1.5.1 Ruídos no sinal de medição

Todo o sinal eletrônico está sujeito a ruídos sobrepostos ao sinal real. Estes ruídos se caracterizam como perturbações aleatórias no sinal de medição. Os tipos mais comuns

de ruído são os ruídos brancos de média zero, estes se caracterizam por afetarem todo o espectro eletromagnético de forma homogênea. Os acelerômetros em especial, são bastante afetados por ruídos, especialmente os ruídos causados por pequenas vibrações que afetam o instrumento durante a medição.

2.1.5.2 Sensibilidade à temperatura

De acordo com (OLIVEIRA SANTOS, 2016), em termos gerais, todos os sensores MEMS são sensíveis à temperatura e, se comparados aos sensores mecânicos convencionais, são mais suscetíveis a ruídos, pois têm por fundamento a medição de deslocamentos muito pequenos (muitas vezes da ordem de 10^{-8} m). De fato, a temperatura tem um impacto significativo na leitura dos sensores MEMS, pois afeta fisicamente os sistemas mecânicos sensíveis desses sensores. A maior partes dos fabricantes consideram uma faixa de temperatura aceitável para medições, ou criam fatores de escala que devem ser considerados ao tratar os dados do sensor. Alguns fabricantes, inclusive trazem sensores de temperatura embutidos nestes sistemas, como é o caso dos sensores utilizados neste trabalho.

2.1.5.3 Escala de medição limitada

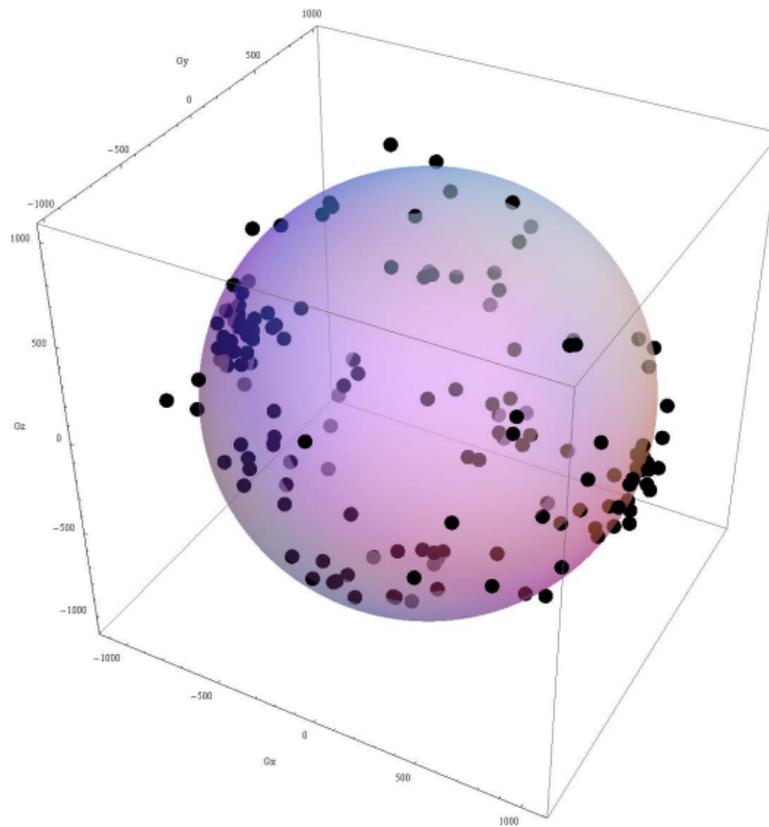
Os sensores baseados na tecnologia MEMS, por se tratarem de sistemas que utilizam o movimento de massas e molas, apresentam uma grande sensibilidade a vibrações. Em particular, vibrações ou movimentações muito bruscas podem fazer com que os sensores apresentem medições saturadas (e, conseqüentemente, incorretas) já que os valores a serem medidos serão maiores que a escala de medição. De forma similar, movimentos muito suaves também podem ser medidos de forma incorreta, ou simplesmente ignorados, uma vez que o movimento causado nas massas internas serão muito pequenos e difíceis de serem medidos.

2.1.5.4 Interferências magnéticas no magnetômetro

Usualmente, em aplicações de estimação de orientação, o magnetômetro é utilizado com o objetivo de medir a intensidade do campo magnético terrestre, a fim de obter uma estimativa do ângulo de rotação *yaw*.

Idealmente, um magnetômetro (de três graus de liberdade) quando rotacionado em torno dos seus três eixos deve gerar medições da intensidade do campo magnético localizadas em uma esfera centrada na origem de um sistema de coordenadas, conforme ilustrado na Figura 7. Porém, é comum que outras fontes emissoras de campos magnéticos gerem interferências nas medições do sensor. De fato, dificilmente apenas a influência do campo magnético terrestre estará presente no local de medição o que faz com que seja muito importante considerar possíveis distúrbios de medição causados por tais fontes.

Figura 7 – Esfera observada nas medições do magnetômetro



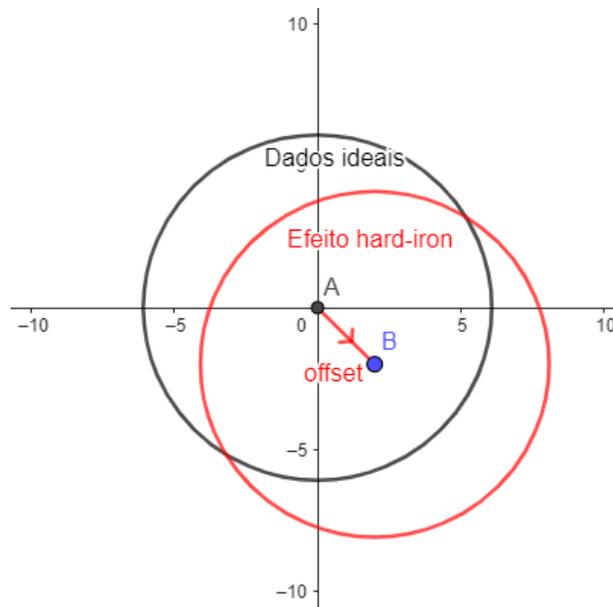
Fonte: (OZYAGCILAR, 2012)

As principais fontes de interferência magnéticas são: campos magnéticos externos (gerados por correntes elétricas e componentes eletrônicos), materiais ferromagnéticos próximos, correntes elétricas e componentes eletrônicos que distorcem o campo magnético em uma dada região. Especificamente, as interferências magnéticas que podem alterar as medidas de uma magnetômetro são classificadas como do tipo *hard iron* e *soft iron*.

Interferências magnéticas chamadas *hard iron* são constantes e previsíveis, sendo geralmente causados por componentes ferromagnéticos permanentemente magnetizados na placa de circuito. Esses componentes magnetizados geram campos magnéticos constantes que se somam ao campo medido no referencial do magnetômetro, uma vez que estão em posições fixas em relação ao sensor. Componentes magnetizados podem também induzir campos magnéticos permanentes em materiais ferromagnéticos (normalmente desmagnetizados) que estão próximos, e isso também é considerado interferência *hard-iron* (OZYAGCILAR, 2015). Esse campo magnético aditivo causa um desvio, ou *offset*, em cada eixo de medição. Isso é, cada medida do magnetômetro que está sujeito a interferências *hard-iron* possui um componente de desvio V para cada eixo, que podem ser denotados como V_x , V_y e V_z .

Ao coletar as medições de um magnetômetro, sem qualquer interferência eletromagnética, e ao rotacionar o objeto aleatoriamente em todas as direções, é possível plotar os dados em três dimensões. A figura resultante seria uma esfera com centro na origem, cujo raio corresponderia à intensidade do campo magnético no local de medição. Na presença de interferências do tipo *hard iron*, cada eixo de medição apresentaria um desvio, desta forma, a esfera seria deslocada da origem, como mostra a Figura 8. E as coordenadas do centro da esfera deslocado seriam (V_x, V_y, V_z) .

Figura 8 – Interferência *hard-iron*.



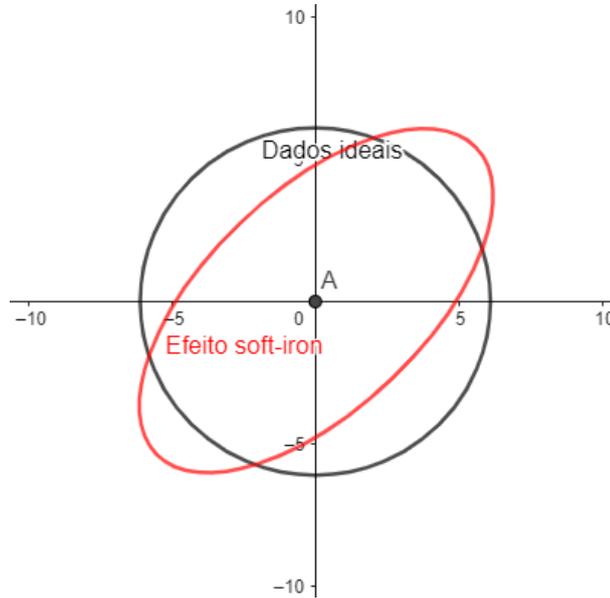
Fonte: Autor.

Por outro lado, a interferência do tipo *soft-iron* é criada pela indução de um campo magnético temporário em componentes ferromagnéticos normalmente não magnetizados na placa de circuito pelo campo geomagnético. Os efeitos *soft-iron* são mais complexos de serem modelados do que os *hard-iron*, uma vez que o campo magnético induzido depende da orientação relativa do objeto em relação ao campo geomagnético da terra (OZYAGCILAR, 2015). Esse tipo de interferência possui o efeito de transformar a esfera do exemplo anterior em um elipsóide como na Figura 9.

2.1.5.5 Imprecisões nas medidas do giroscópio

Devido a imperfeições no sensor, os valores de velocidade angular medidos pelo giroscópio podem apresentar diferenças em relação aos valores reais de velocidade angular. De uma forma simplificada, pode-se expressar a velocidade angular medida por um giroscópio de acordo com

$$\omega_{m,i} = \omega_i + \beta_i + r_i \quad (1)$$

Figura 9 – Interferência *soft-iron*.

Fonte: Autor.

onde $i = \{x, y, z\}$, $\omega_{m,i}$ denota a velocidade angular medida em torno do eixo i , ω_i é a velocidade angular real em torno do eixo i , β_i é uma constante de polarização e r_i é um ruído de média zero.

É possível notar que a medida da velocidade angular é corrompida por um erro sistemático β_i e por um ruído r_i . A fim de obter uma medida mais precisa, é essencial realizar um procedimento de calibração do giroscópio, visando estimar a constante de polarização β_i para cada eixo. Após a estimação da constante β_i , o valor da velocidade angular pode ser melhor estimado como

$$\tilde{\omega}_i = \omega_{m,i} - \beta_i. \quad (2)$$

2.1.5.6 Imprecisões nas medidas do acelerômetro

Devido a imperfeições no sensor, os valores de aceleração medidos pelo acelerômetro podem apresentar diferenças em relação aos valores reais de aceleração. Os dados obtidos pelo acelerômetro podem ser descritos por meio da equação (3).

$$a_{m,i} = \alpha_i a_i + \beta_i + r_i \quad (3)$$

com $i = \{x, y, z\}$, $\alpha_{m,i}$ denota o valor medido de aceleração no eixo i , a_i é a aceleração real, α_i é o fator de escala relacionada com a sensibilidade do sensor, β_i é o erro de polarização e r_i é um ruído aleatório. É possível estimar os valores α_i e β_i para cada eixo i , através de um procedimento de calibração. Com o conhecimento dos parâmetros α_i e β_i , a aceleração no eixo i pode ser melhor estimada como

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{a_{m,i} - \beta_i}{\alpha_i}. \quad (4)$$

2.1.6 Calibração dos sensores

Conforme discutido nas seções anteriores, os sensores presentes em IMUs geralmente apresentam erros, limitações e imprecisões. Para minimizar tais efeitos, é necessário realizar o procedimento de calibração. Este procedimento visa identificar um ou mais parâmetros que afetam a medição real, ou seja, estimar uma parcela da medição que corresponde aos efeitos negativos intrinsecamente relacionados ao sensor e subtraí-los a fim de obter uma medida mais confiável. As seções a seguir discorrem sobre o processo de calibração para cada sensor da IMU.

2.1.6.1 Calibração do giroscópio

O objetivo do procedimento de calibração do giroscópio é determinar o valor da constante de polarização β_i para cada eixo i . Dado que o giroscópio é responsável por medir velocidades angulares, durante a calibração ele é mantido em repouso e são realizadas N medições $\omega_{m,i}(n)$ para cada eixo i . Em seguida, calcula-se a média das amostras $\omega_{m,i}(n)$, resultando na constante de polarização β_i . Ou seja:

$$\beta_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \omega_{m,i}(n). \quad (5)$$

Após encontrar a constante β_i , é possível utilizar a equação (2) para obter uma medição mais precisa das velocidades angulares.

2.1.6.2 Calibração do magnetômetro

Neste trabalho é realizado apenas a calibração do magnetômetro para estimar o desvio causado pelos efeitos *hard-iron*, pois essa é a interferência mais relevante observada nos dados adquiridos do magnetômetro utilizado. Especificamente, quando não há interferências, todas as medições do magnetômetro se encontram na superfície de uma esfera centrada na origem e de raio B (correspondente a magnitude do campo magnético). Os efeitos da interferência *hard-iron* apenas deslocam a origem desta esfera para uma outra posição. Assim, na presença de interferências do tipo *hard-iron*, as medidas de intensidade do campo magnético nos eixos x , y e z (obtidas por um magnetômetro) devem estar sobre a superfície de uma esfera de raio B com centro fora da origem, ou seja,

$$(\mathbf{B}_m - \mathbf{V})^T (\mathbf{B}_m - \mathbf{V}) = B^2 \quad (6)$$

onde $\mathbf{B}_m = [B_x \ B_y \ B_z]^T$ denota um vetor contendo as medidas de intensidade do campo magnético nos eixos x , y e z , e com $\mathbf{V} = [V_x \ V_y \ V_z]^T$ representando o vetor com as constantes de deslocamento, causadas pela interferência *hard-iron*.

Em particular, é necessário realizar um procedimento de calibração do magnetômetro para estimar os valores de deslocamento $\mathbf{V} = [V_x \ V_y \ V_z]^T$, de modo que os valores medidos $\mathbf{B}_m = [B_x \ B_y \ B_z]^T$ sejam corrigidos (antes da sua utilização) através da seguinte equação:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_m - \mathbf{V} \quad (7)$$

onde $\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{B}_x, \tilde{B}_y, \tilde{B}_z]$ é o vetor contendo os valores calibrados da intensidade do campo magnético.

Para tal, são realizadas N medidas do campo magnético movimentando o sensor em diversas direções, visando adquirir amostras distribuídas sobre a superfície da esfera. Especificamente, para cada medida $\mathbf{B}_m(i)$, tem-se

$$[\mathbf{B}_m(n) - \mathbf{V}]^T [\mathbf{B}_m(n) - \mathbf{V}] = B^2 \quad (8)$$

ou ainda,

$$[B_x(n) - V_x, B_y(n) - V_y, B_z(n) - V_z] \begin{bmatrix} B_x(n) - V_x \\ B_y(n) - V_y \\ B_z(n) - V_z \end{bmatrix} = B^2 \quad (9)$$

$$(B_x(n) - V_x)^2 + (B_y(n) - V_y)^2 + (B_z(n) - V_z)^2 = B^2. \quad (10)$$

Realizando algumas operações algébricas, obtém-se

$$B_x(n)\beta_0 + B_y(n)\beta_1 + B_z(n)\beta_2 + \beta_3 = B_x^2(n) + B_y^2(n) + B_z^2(n) \quad (11)$$

onde $\beta_0 = 2V_x$, $\beta_1 = 2V_y$, $\beta_2 = 2V_z$ e $\beta_3 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 - B$. Agora, considerando as medidas de $n = 1$ até N , pode-se construir o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} B_x(1) & B_y(1) & B_z(1) & 1 \\ B_x(2) & B_y(2) & B_z(2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_x(N) & B_y(N) & B_z(N) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x^2(1) + B_y^2(1) + B_z^2(1) \\ B_x^2(2) + B_y^2(2) + B_z^2(2) \\ \vdots \\ B_x^2(N) + B_y^2(N) + B_z^2(N) \end{bmatrix} \quad (12)$$

ou

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (13)$$

Desta forma, obtém-se um sistema de equações lineares sobredeterminado com N equações e quatro incógnitas. O qual pode ser resolvido como

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (14)$$

Observe que após o cálculo de $\mathbf{x} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T$, os valores dos deslocamentos B_x , B_y e B_z e a intensidade do campo magnético B podem ser determinadas como

$$V_x = \frac{\beta_0}{2} \quad (15)$$

$$V_y = \frac{\beta_1}{2} \quad (16)$$

$$V_z = \frac{\beta_2}{2} \quad (17)$$

e

$$B = \beta_3 - V_x^2 - V_y^2 - V_z^2. \quad (18)$$

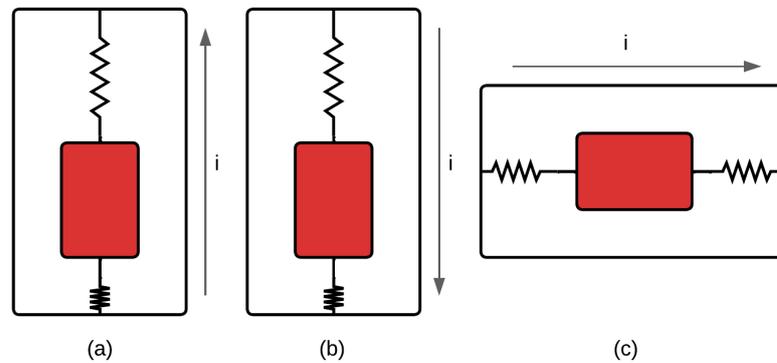
As quais podem ser utilizados para calibrar as medidas obtidas pelo magnetômetro conforme (7).

2.1.6.3 Calibração do acelerômetro

O procedimento de calibração do acelerômetro é realizado de forma individual para cada eixo i . Especificamente, para cada eixo i são realizadas medições com o acelerômetro em repouso em três posições distintas. A Figura 10 apresenta as três posições utilizadas para a calibração de um eixo i específico.

Em cada uma das três posições, são realizadas N medições com o acelerômetro, totalizando $3N$ medições para a calibração de cada eixo.

Figura 10 – Calibração do acelerômetro.



Fonte: Autor.

Por exemplo, no procedimento de calibração do eixo i , o acelerômetro é colocado em repouso com o eixo i apontado para cima. Em seguida, N medições são realizadas, representadas por $a_{m,i}$. É importante notar que essas medições, denotadas como $a_{m,i}(n)$, são afetadas por fatores de escala α_i , deslocamento β_i e ruído r_i . No entanto, sabe-se que o valor real da aceleração nessas medições é de $a_i = +1$ g. Portanto, tem-se um conjunto de N equações:

$$a_{m,i}(1) = \alpha_i + \beta_i \quad (19)$$

$$a_{m,i}(2) = \alpha_i + \beta_i \quad (20)$$

$$\vdots$$

$$a_{m,i}(N) = \alpha_i + \beta_i. \quad (21)$$

Ou ainda, na forma vetorial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m,i}(1) \\ a_{m,i}(2) \\ \vdots \\ a_{m,i}(N) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

É importante destacar que, como o objetivo da calibração é obter os valores dos parâmetros a_i e β_i , o ruído aleatório e de média zero $r_i(n)$ é desconsiderado.

Após essa etapa, o eixo i do sensor é apontado para baixo, colocado em repouso, e são realizadas mais N medidas $a_{m,i}(n)$, onde n varia de $n = N + 1$ até $2N$. Nesse caso, é estabelecido que $a_i = -1$ g. Portanto, a relação entre as medidas $a_{m,i}(n)$ e a_i pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m,i}(N + 1) \\ a_{m,i}(N + 2) \\ \vdots \\ a_{m,i}(2N) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Por fim, o acelerômetro é posicionado com o eixo i paralelo ao chão e deixado em repouso, realizando mais N medições $a_{m,i}(n)$ para $n = 2N + 1$ até $3N$. Nesse caso, é estabelecido que $a_i = 0$ g. Assim, a relação entre as medidas $a_{m,i}(n)$ e a_i é expressa da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m,i}(2N + 1) \\ a_{m,i}(2N + 2) \\ \vdots \\ a_{m,i}(3N) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Dessa forma, para a estimação dos parâmetros α_i e β_i , pode-se considerar ao seguinte sistemas sobredeterminado de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m,i}(1) \\ a_{m,i}(2) \\ \vdots \\ a_{m,i}(N) \\ a_{m,i}(N+1) \\ a_{m,i}(N+2) \\ \vdots \\ a_{m,i}(2N) \\ a_{m,i}(2N+1) \\ a_{m,i}(2N+2) \\ \vdots \\ a_{m,i}(3N) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

A equação pode ser simplificada como:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{b} \quad (26)$$

E então, o sistema pode ser resolvido da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_i = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (27)$$

Com os valores de α_i e β_i determinados para cada eixo i , a aceleração calibrada pode ser calculada conforme equação (4).

2.1.7 Fusão de dados

Pode-se definir fusão de dados como a combinação de várias fontes de dados para obtenção de uma informação melhorada. Esse conceito é geralmente utilizado em sistemas que utilizam múltiplos sensores, ao agregar os dados obtidos de diversas fontes para se obter uma menor probabilidade de erros e maior confiança na medição. No entanto, esse tema pode ser estendido para outras aplicações como processamento de texto (CASTANEDO, 2013).

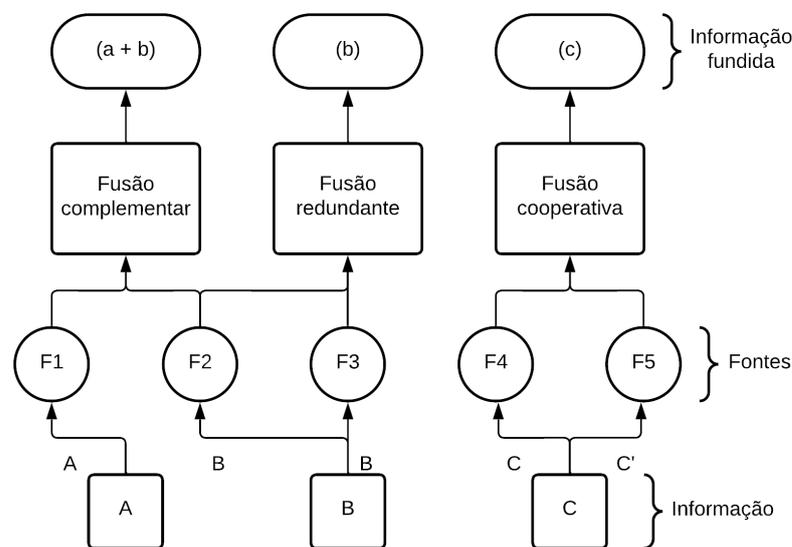
As técnicas de fusão de dados podem ser classificadas de diversas formas, uma delas diz respeito a relação entre as fontes. De acordo com (H. F., 1988), os métodos de fusão de dados podem ser classificados em três categorias:

- Complementar: quando as informações provenientes de várias fontes representam partes diferentes de um mesmo objeto de medição. Pode-se entender que nessa classificação, as fontes apresentam diferentes perspectivas do objeto medido. É possível utilizar o exemplo de várias câmeras filmando o mesmo cenário em diferentes pontos de vista.

- Redundante: quando múltiplas fontes fornecem informações a respeito do exato mesmo alvo de medição. Com essas informações redundantes, é possível realizar a fusão de dados para aumentar a confiança na medição aferida.
- Cooperativo: quando a informação proveniente das fontes é combinada em uma nova informação que é normalmente mais complexa que a informação original.

A Figura 11 ilustra a classificação empregada por Durrant, de acordo com a relação entre as fontes.

Figura 11 – Classificação de (H. F., 1988) dos métodos de fusão de dados.



Fonte: Autor.

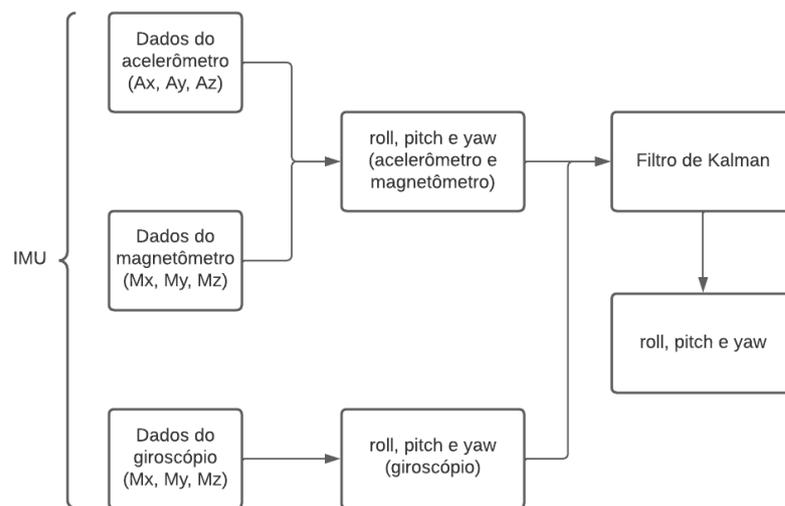
Neste trabalho, os dados provenientes do giroscópio, acelerômetro e magnetômetro (que integram a IMU) são utilizados para aferir medidas sobre o mesmo alvo de medição: os ângulos de Euler. Especificamente, pode-se utilizar o acelerômetro para medir os ângulos *roll* e *pitch* e o magnetômetro para medir o ângulo *yaw* (conforme apresentado na Seção 2.1.4.1). Ou seja, com apenas dois dos três sensores é possível medir todos os ângulos de Euler. Além disso, o giroscópio pode ser utilizado de forma independente também para medir os ângulos *roll*, *pitch* e *yaw*. Essa redundância é necessária para buscar uma medida mais precisa destes ângulos, utilizando-se do conceito de fusão redundante de dados. Como já mencionado, cada sensor possui as suas vantagens e desvantagens. O objetivo da fusão de dados nesse contexto é aproveitar a tendência de medição em comum da combinação dos dados dos vários sensores, fazendo com que se obtenha uma medida mais precisa e com a atenuação de efeitos negativos como ruídos, e sensibilidades à temperatura e vibrações. Pode-se observar que, os acelerômetros no geral são bastante afetados por ruídos e vibrações, enquanto os giroscópios sofrem com o problema de ruído e do valor de

offset nas medidas obtidas. Com a fusão dos dados é possível obter uma medição que seja minimamente afetada por todos estes problemas.

2.2 O FILTRO DE KALMAN

Dentre as diversas técnicas e algoritmos utilizados para a fusão de dados, a técnica utilizada neste trabalho é o chamado filtro de Kalman. O filtro de Kalman é um algoritmo de estimação ótima, criado por Rudolf Kalman em 1960. Ele é usado para estimar a medida de variáveis que só podem ser medidas indiretamente, ou para combinar medições de diferentes sensores e obter uma medida mais precisa na presença de ruídos. Especificamente neste trabalho, o filtro de Kalman utiliza o modelo matemático no espaço de estado do sistema e medições da saída (obtidas por meio de sensores) para estimar os estados do sistema de forma mais precisa. A Figura 12 mostra como os dados dos sensores são tratados e aplicados ao filtro de Kalman neste trabalho. Especificamente, os dados do acelerômetro e magnetômetro são utilizados para realizar um primeiro cálculo dos ângulos de Euler. Na sequência, os dados do giroscópio são fundidos com (por meio do Filtro de Kalman) com os ângulos previamente calculados para gerar uma estimativa mais precisa dos ângulos *roll*, *pitch* e *yaw*.

Figura 12 – Diagrama de fusão de sensores.



Fonte: Autor.

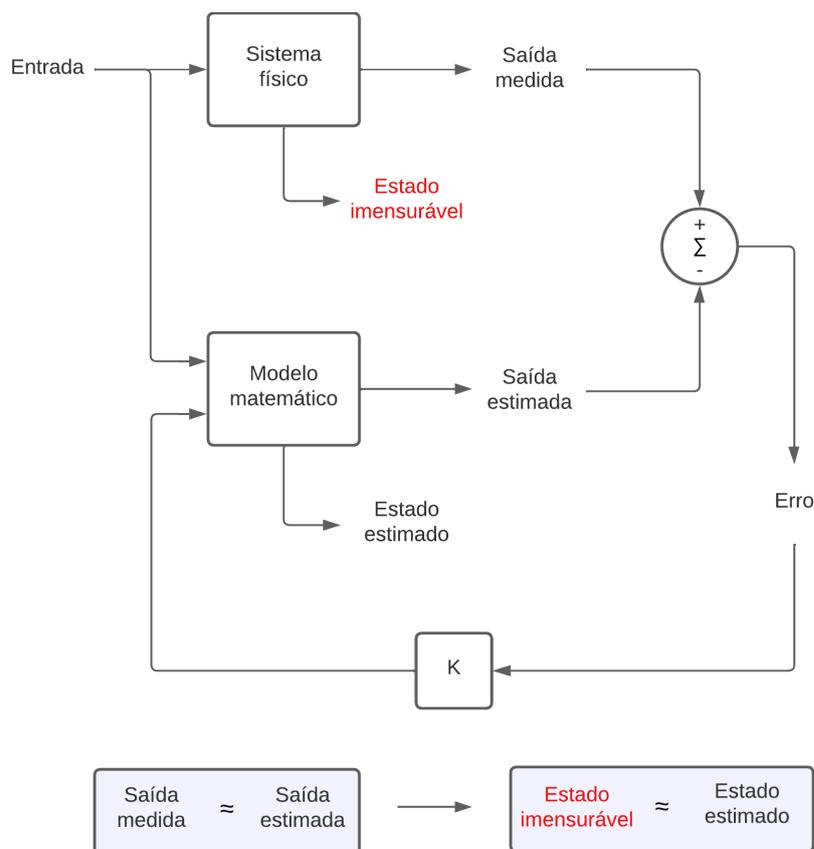
2.2.1 Estimador de estados

Quando um sistema físico recebe uma entrada, ocorrem alterações em seus estados correspondentes. Em certas situações, apenas um dos estados pode ser diretamente medido,

mas há o interesse de conhecer um estado interno do sistema que não é diretamente mensurável.

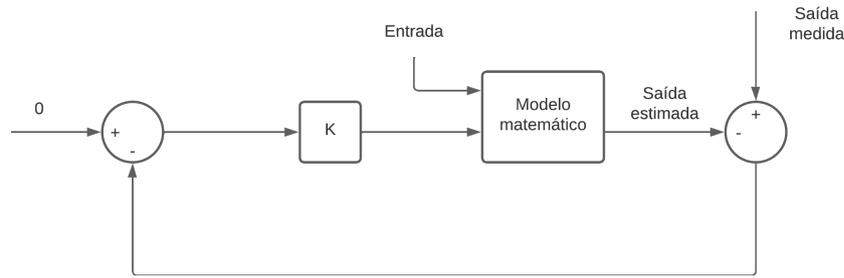
A estratégia de um estimador de estados consiste em estimar esse estado não mensurável através da utilização de um modelo matemático do sistema. Esse modelo é capaz de receber a mesma entrada do sistema físico real e gerar uma saída estimada, que pode ser comparada com a saída medida do sistema físico real. O objetivo do filtro é minimizar a discrepância entre a saída estimada e a saída medida. Isso ocorre porque, ao reduzir essa diferença que é também chamada de erro, o estado interno do modelo matemático tende a se aproximar do estado interno imensurável do sistema físico, ou seja, o estado interno do modelo matemático será então a estimativa que se deseja obter. Para fazer isso, é utilizado um ganho \mathbf{K} que é aplicado ao erro e então somado a entrada do modelo matemático. Essa abordagem visa obter uma medição mais precisa e confiável do estado interno desejado. A Figura 13 mostra um diagrama do que foi descrito, a partir dele pode-se comparar a estratégia do filtro a um sistema de controle como visto na Figura 14.

Figura 13 – Diagrama de exemplo de um estimador de estados.



Fonte: Autor.

Figura 14 – Estimador de estados como um laço de controle realimentado.



Fonte: Autor.

2.2.2 O modelo no espaço de estados

O filtro de Kalman se trata de um estimador de estados, portando exige um modelo matemático no espaço de estados do sistema. Neste trabalho é utilizado um modelo no espaço de estados discreto e linear, onde o comportamento do sistema é descrito por um conjunto de equações algébricas relacionando as variáveis de estados do sistema com suas entradas e saídas. Especificamente, o estado atual do sistema é representado como uma combinação dos estados anteriores e das entradas, descrevendo como os estados do sistema evoluem no tempo. As variáveis de estado são as grandezas que descrevem completamente o estado atual do sistema, ou seja, todas as variáveis que o caracterizam em um determinado instante. Estas variáveis podem ser agrupadas em um vetor, chamado de vetor de estado. Além disso, as saídas do sistema são também representadas como uma combinação dos estados e das entradas do sistema.

Supondo que para cada instante de tempo k seja possível apenas observar as saídas do sistema, o filtro de Kalman estima as variáveis de estado utilizando os dados da saída (medidas por meio de sensores) e o modelo do sistema. Considere um sistema linear com modelo no espaço de estados dado por

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \quad (28)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) \quad (29)$$

onde $\mathbf{x}(k)$ é o vetor de estados no instante k , $\mathbf{z}(k)$ denota o vetor de saída do sistema (dados do sensor), $\mathbf{u}(k)$ representa o vetor de entradas e \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} são, respectivamente, as matrizes de estado, de entrada e saída do modelo espaço de estados do sistema.

Porém, é importante considerar que modelos matemáticos não são, em geral, representações perfeitas de sistemas, desta forma pode-se modelar essas imperfeições através de vetores de ruído $\mathbf{s}(k)$ e $\mathbf{w}(k)$. Assim, as equações (30) e (31) do modelo deste sistema podem ser atualizadas como:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \mathbf{s}(k) \quad (30)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k). \quad (31)$$

É importante também observar que, estes vetores são internos ao sistema e não são conhecidos. Porém, é possível também caracterizar estes ruídos através de informações estatísticas. Geralmente, estes ruídos são definidos como uma distribuição Gaussiana, com média nula e uma matriz de covariância, isto é,

$$\mathbf{s}(k) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{S}) \quad (32)$$

$$\mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{W}) \quad (33)$$

onde, \mathbf{W} e \mathbf{S} são as matrizes de covariância de $\mathbf{s}(k)$ e $\mathbf{w}(k)$, respectivamente.

Especificamente, o objetivo do filtro de Kalman é obter uma estimativa do vetor de estados $\mathbf{x}(k)$ representada por $\hat{\mathbf{x}}(k)$ a partir do conhecimento:

- i) das matrizes \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} do modelo em espaço de estados do sistema;
- ii) das estimativas $\hat{\mathbf{W}}$ e $\hat{\mathbf{S}}$ das matrizes de covariância dos vetores de ruído $\mathbf{s}(k)$ e $\mathbf{w}(k)$;
- iii) das entradas $\mathbf{u}(k)$ e das saídas $\mathbf{z}(k)$.

O filtro de Kalman realiza essa estimativa em duas etapas: a etapa de predição e a etapa de estimação. Estas etapas são repetidas para cada instante de tempo k .

2.2.3 Etapa de predição

A etapa de predição tem o objetivo de obter, a cada instante k , uma predição do vetor de estados, denotada aqui como $\tilde{\mathbf{x}}(k)$, a partir do modelo em espaço de estados do sistema. Para tal, são utilizadas as matrizes do modelo do sistema (isto é, \mathbf{F} e \mathbf{G}), as entradas do instante atual $\mathbf{u}(k)$ e a estimação do vetor de estados no instante anterior $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$, conforme

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \quad (34)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}(k)$ representa o vetor de estados estimado no instante anterior $k-1$.

Além disso, nesta etapa é calculada a matriz de covariância do estado predito $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ que representa um medida das incertezas na predição do vetor de estado. Este cálculo é realizado a partir de

$$\tilde{\mathbf{P}}(k) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{P}}(k-1)\mathbf{F}^T + \hat{\mathbf{S}} \quad (35)$$

onde $\hat{\mathbf{P}}(k-1)$ é a matriz de covariância do estado estimado.

Desta forma, a etapa de predição pode ser vista como um primeiro cálculo do vetor de estado. Porém é necessário um maior refinamento nesta previsão, o que é realizado na etapa posterior de estimação.

2.2.4 Etapa de estimação

Na etapa de estimação, o vetor de estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ é obtido ao se corrigir o vetor de estado predito $\tilde{\mathbf{x}}(k)$, utilizando as medidas das saídas $\mathbf{z}(k)$.

Para tal, inicialmente, calcula-se o vetor de erro $\mathbf{e}(k)$ que representa o quão distante a saída predita (obtida a partir do vetor de estado predito) está da saída medida $\mathbf{z}(k)$ do sistema, conforme

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{z}(k) - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}(k). \quad (36)$$

A partir do vetor de erro $\mathbf{e}(k)$ é possível saber o quão bom ou ruim está o vetor de estado predito.

Em seguida, é calculado a matriz de ganho $\mathbf{K}(k)$, que deve ser multiplicado pelo vetor de erro $\mathbf{e}(k)$ para gerar o fator de correção para o vetor de estado predito. A matriz de ganho é calculada conforme

$$\mathbf{K}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k)\mathbf{H}^T[\mathbf{H}\tilde{\mathbf{P}}(k)\mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{W}}]^{-1}. \quad (37)$$

Desta forma, o vetor de estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ é calculado no instante k a partir da aplicação do fator de correção ao vetor de estado predito, como

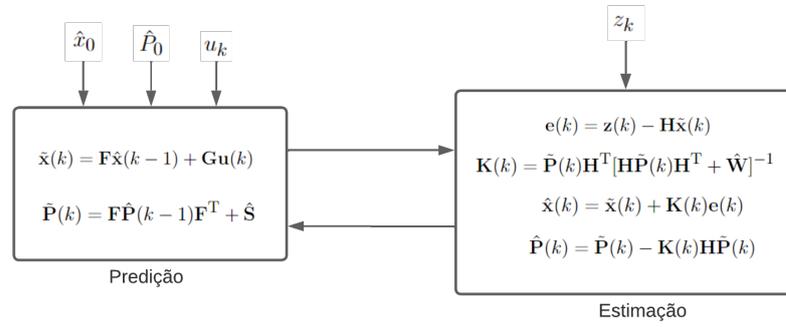
$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{e}(k). \quad (38)$$

Ainda na etapa de estimação, deve-se calcular a matriz de covariância do vetor de estado predito, que será utilizada na etapa de predição do próximo instante k , isso é feito com base na seguinte equação:

$$\hat{\mathbf{P}}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}\tilde{\mathbf{P}}(k). \quad (39)$$

Especificamente, o procedimento de predição e estimação descrito acima é repetido a cada iteração a fim de obter estimativas atualizadas do vetor de estados do sistema. A Figura 15 apresenta um diagrama de como o filtro de Kalman é operado para cada instante de tempo. É importante observar que é necessário alimentar o filtro com as condições iniciais $\hat{\mathbf{x}}(0)$ e $\hat{\mathbf{P}}(0)$ no primeiro instante de tempo.

Figura 15 – Diagrama do filtro de Kalman.



Fonte: Autor.

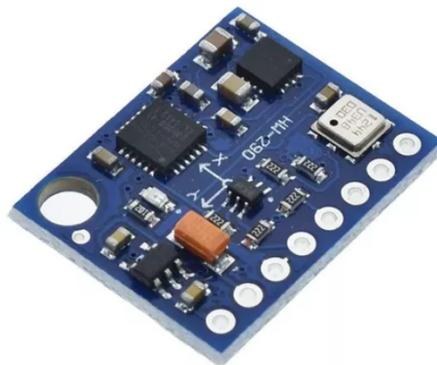
3 SISTEMA PROPOSTO

Neste capítulo é apresentado o sistema desenvolvido para estimação dos ângulos de Euler através dos dados fornecidos por uma IMU. Especificamente, primeiramente é apresentada a montagem física do sistema. Na sequência são mostrados os dados de calibração dos sensores utilizados e, por fim, é discutida a metodologia utilizada para estimação dos ângulos de Euler.

3.1 MONTAGEM FÍSICA

A montagem física do sistema é composta por um Arduino UNO conectado a uma placa HW-290. A placa HW-290 mostrada na Figura 16 possui um sensor MPU6050 (composta por um giroscópio e um acelerômetro), um magnetômetro QMC5883L e um sensor de pressão do ar BMP-180. O Arduino adquire os dados dos sensores presentes na placa HW-290 e os envia (através de uma conexão serial) para o MATLAB, onde os dados são processados. Para facilitar a conexão do Arduino UNO com a placa HW-290 foi utilizada uma placa de circuito impresso (produzida em uma fresadora), projetada no software Kicad.

Figura 16 – Placa HW-290.



Fonte: Autor.

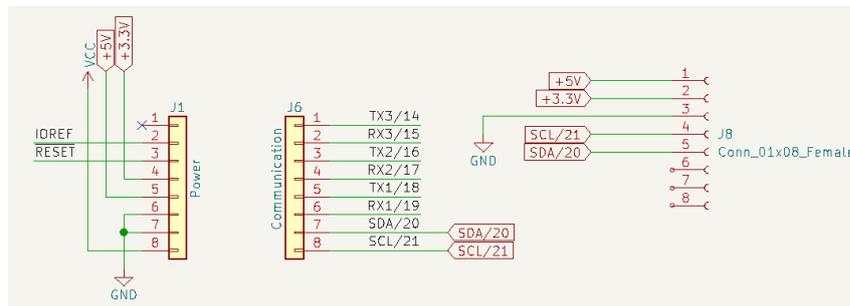
A placa HW-290 se comunica com o Arduino utilizando o protocolo I2C. Especificamente, o I2C é um protocolo de comunicação serial que possibilita a troca de dados entre dispositivos distintos por meio de um barramento compartilhado. Esse protocolo opera com uma estrutura mestre/escravo, onde ao menos um dispositivo age como mestre e os demais atuam como escravos, estabelecendo uma hierarquia para a interação entre os dispositivos (COMUNICAÇÃO... , 2023)

O MPU6050 é um sensor de movimento que combina um giroscópio de três eixos e um acelerômetro de três eixos, ambos baseados na tecnologia MEMS. O giroscópio possui

sensibilidade ajustável de $\pm 250^\circ/s$ a $\pm 2000^\circ/s$ com tolerância de $\pm 3\%$ em relação aos valores limite (A uma temperatura de $25^\circ C$). Já o acelerômetro possui sensibilidade também ajustável de $\pm 2g$ a $\pm 16g$ com tolerância de $\pm 3\%$. O QMC5883L é um magnetômetro baseado na tecnologia magneto-resistiva, e possui um alcance de medição de ± 8 gauss.

A ligação da placa HW-290 com o Arduino foi prototipada no software Kicad como é mostrado na Figura 17, os conectores J1 e J6 representam os pinos do Arduino, enquanto o conector J8 representa as conexões da placa HW-290.

Figura 17 – Circuito de ligação entre Arduino e HW-290.



Fonte: Autor.

A placa HW-290 precisa de uma alimentação de $5V$ e uma de $3.3V$, assim como uma ligação dos pinos SCL e SDA e ligação de aterramento. SDA e SCL são dois sinais que fazem parte do protocolo de comunicação I2C. SDA é a linha de dados seriais que é usada para enviar e receber dados entre o mestre e o escravo. Já SCL é a linha de *clock* serial que carrega o sinal de sincronismo necessário para transmissão de dados via protocolo I2C.

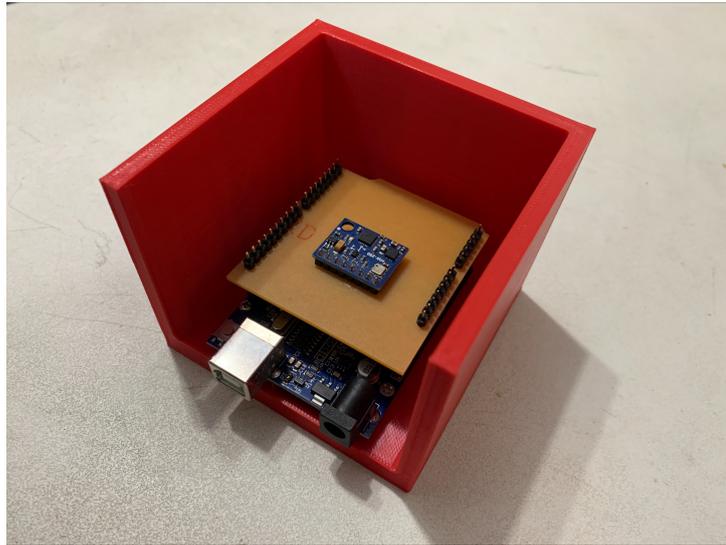
A montagem final do sistema é mostrado na Figura 18. Um suporte de plástico impresso em 3D foi utilizado para proteger e fixar a placa, além de facilitar os testes de aferição das medidas.

3.2 CALIBRAÇÃO DO GIROSCÓPIO

Para uma melhor estimativa dos ângulos de Euler, é necessário primeiramente realizar a calibração dos sensores utilizados. Conforme discutido na Seção 2.1.6.1, o procedimento de calibração do giroscópio consiste em deixar o sensor em repouso (para utilizar como referência o valor zero de velocidade angular para todos os eixos de medição) e coletar N amostras. Dessa forma, qualquer valor medido diferente de zero, pode ser considerado um distúrbio. A média dessas medidas é considerada como o valor de polarização β_i para cada eixo i .

A Figura 19 mostra os resultados do procedimento de calibração do giroscópio realizado no software Matlab. Especificamente, nos gráficos da Figura 19, a linha vermelha

Figura 18 – Montagem do sistema.



Fonte: Autor.

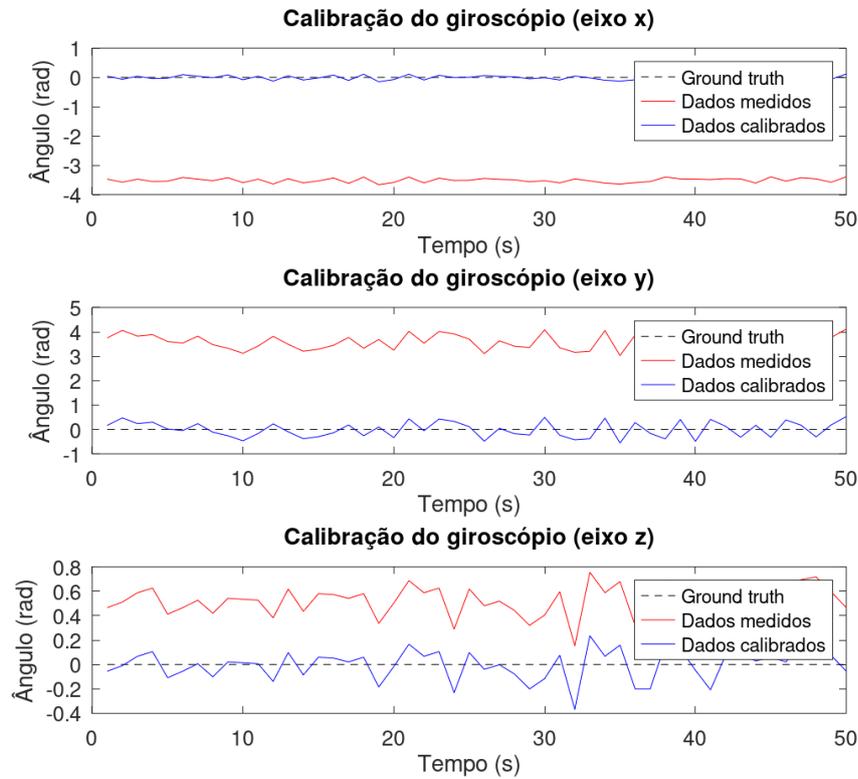
representa os dados medidos, a linha pontilhada caracteriza a medida esperada (*ground-thruth*) que idealmente deveria ser zero já que o sensor está em repouso, e a linha azul mostra os dados com o valor de polarização β_i subtraído, ou seja os valores calibrados. Os valores de polarização obtidos foram $\beta_x = -3,433$, $\beta_y = 2,919$ e $\beta_z = 0,633$.

3.3 CALIBRAÇÃO DO MAGNETÔMETRO

A fim de descobrir os efeitos de interferência a qual as medições do magnetômetro estão sujeitas, inicialmente o sensor foi rotacionado randomicamente em todas as direções e uma quantidade N de dados (isto é, $[B_x(n), B_y(n), B_z(n)]$ para $n = 1, \dots, N$) foi coletada. Cada medição foi então plotada no software Matlab, resultando na Figura 20. É possível perceber que as medições estão localizadas aproximadamente na superfície de uma esfera, e não de uma elipsoide. Dessa forma, pode-se afirmar que existe pouca ou nenhuma interferência do tipo *soft-iron*, conforme discutido na Seção 2.1.5.4. De fato, esse tipo de interferência não será considerada neste trabalho. No entanto, também é possível notar que a esfera se encontra deslocada da origem, assim existe uma considerável presença de interferências do tipo *hard-iron*.

Para ajustar as medidas de um magnetômetro afetado por interferências do tipo *hard-iron*, basta descobrir quais são os desvios aplicados em cada eixo e subtraí-los de cada medida aferida. O procedimento de calibração utilizado foi mostrado Seção 2.1.6.2. Os valores de *offset* calculados foram $V_x = -384,47$, $V_y = -77,61$ e $V_z = -19,48$. E o módulo da intensidade do campo magnético medido (que corresponde ao raio da esfera) foi $B = 643,187$. Na Figura 21 são apresentados os dados calibrados (marcadores em

Figura 19 – Calibração do giroscópio.



Fonte: Autor

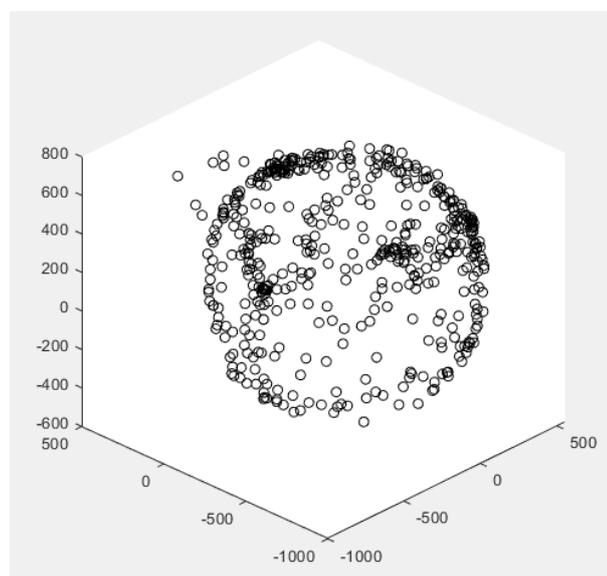
vermelho) e os dados originais (marcadores em preto).

3.4 CALIBRAÇÃO DO ACELERÔMETRO

Como explicado na Seção 2.1.6.3, o procedimento de calibração do acelerômetro consiste em encontrar os valores de escala α_i e deslocamento β_i de cada eixo de medição i . Inicialmente, para o eixo x deve-se colocar o objeto em repouso com o eixo x orientado para cima, e então coletar N dados do acelerômetro. O valor esperado de medição nesse momento é de $+1$ g. Após isso, o objeto deve ser posicionado com o eixo x para baixo, e mais N dados são coletados. Nesse caso, o *ground-truth* é -1 g. Por fim, o objeto deve ser posicionado com o eixo x paralelo ao chão, e mais N dados são coletados. Nesse caso, o *ground-truth* é 0 g, uma vez que a gravidade não afeta esse eixo de medição nessa posição. No caso da placa HW-290 os eixos podem ser identificados visualmente, pois são indicados na própria placa. Após a coleta dos dados os parâmetros de calibração α_i e β_i são determinados a partir da resolução do sistema de equações lineares (25) conforme (27). Os valores de calibração encontrados para o eixo x foram: $\alpha_x = 0.998$ e $\beta_x = 0.125$.

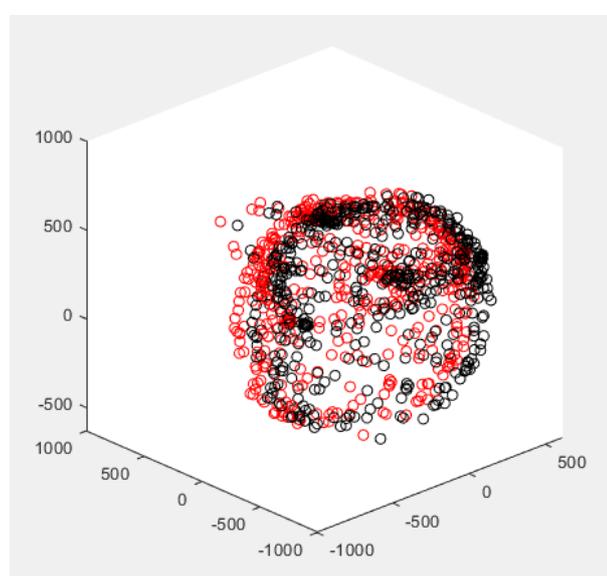
As Figuras 22 e 23 mostram os dados originais e calibrados para os eixos y e z ,

Figura 20 – Esfera de medição.



Fonte: Autor

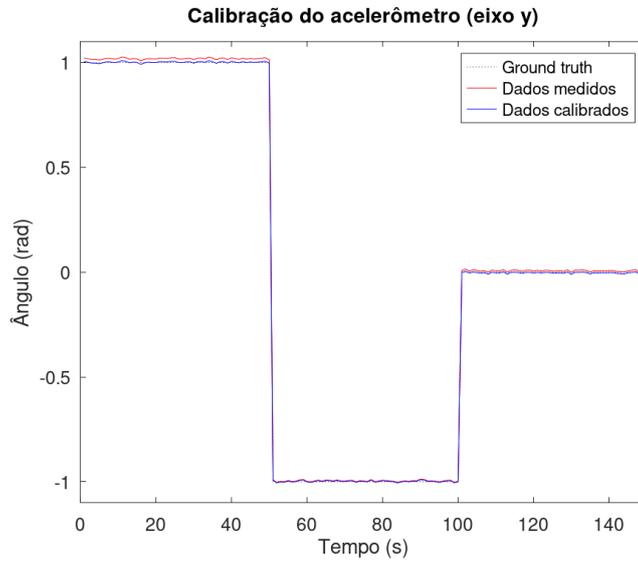
Figura 21 – Calibração do magnetômetro.



Fonte: Autor

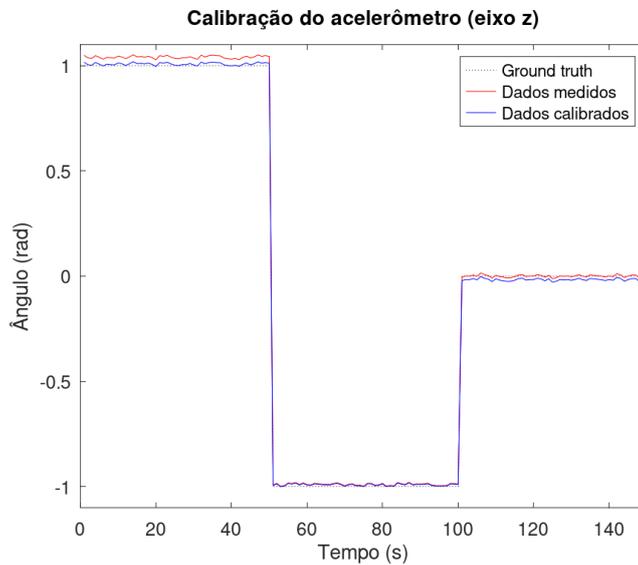
respectivamente. A linha tracejada indica o *ground-truth*, ou o valor esperado, a linha vermelha indica os valores medidos e a linha azul indica os valores calibrados, isso é, com a compensação dos valores α_i e β_i . Para o eixo y os parâmetros de calibração foram $\alpha_y = 1.007$ e $\beta_y = 0.015$ e para o eixo z , $\alpha_z = 1.014$ e $\beta_z = 0.025$.

Figura 22 – Calibração do acelerômetro (eixo y).



Fonte: Autor

Figura 23 – Calibração do acelerômetro (eixo z).



Fonte: Autor

3.5 ESTIMAÇÃO DOS ÂNGULOS DE EULER ATRAVÉS DOS DADOS DO ACELERÔMETRO E MAGNETÔMETRO

A primeira etapa de processamento do sistema implementado neste trabalho é obter os ângulos ϕ , θ e ψ a partir dos dados do acelerômetro e magnetômetro. Com as medições do acelerômetro é possível obter ϕ e θ mas não ψ , como discutido

anteriormente. O ângulo de rotação ψ pode ser obtido através do magnetômetro, porém deve-se considerar a inclinação dos ângulos ϕ e θ , uma vez que isso altera as medições aferidas no magnetômetro. Desta forma é necessário um algoritmo de compensação da inclinação para uma medição correta do ângulo ψ .

3.5.1 Obtenção dos ângulos roll e pitch

Em particular, o acelerômetro utilizado neste trabalho fornece as acelerações nos três eixos, as quais podem ser agrupadas em um vetor de acelerações $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T$. Quando o objeto está em repouso, os eixos x e y estão paralelos ao chão e o eixo z aponta para cima. Nesse caso, o vetor de acelerações \mathbf{a} é dado por

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \mathbf{g} \quad (40)$$

onde g é a aceleração da gravidade. Ao realizar uma rotação θ em torno do eixo y e em seguida uma rotação ϕ em relação ao eixo x , o vetor \mathbf{a} passa a ser dado por

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_x(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{g} \quad (41)$$

onde $\mathbf{R}_y(\theta)$ e $\mathbf{R}_x(\phi)$ são as matrizes de rotação em torno dos eixos y e x , respectivamente definidas como

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (42)$$

e

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Agora, visando derivar expressões para o cálculo de ϕ e θ , primeiramente multiplica-se à esquerda a equação (41) pelo inverso das matrizes de rotação $\mathbf{R}_x(\phi)$ e $\mathbf{R}_y(\theta)$. Assim,

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (44)$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) & \text{sen}(\theta)\cos(\phi) \\ 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ -\text{sen}(\phi) & \cos(\theta)\text{sen}(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Considerando na equação anterior a componente no eixo y , pode-se isolar o ângulo ϕ como:

$$a_y \cos(\phi) - a_z \sin(\phi) = 0 \quad (46)$$

e,

$$\phi = \text{atan} \left(\frac{a_y}{a_z} \right). \quad (47)$$

É possível notar que o cálculo deste ângulo depende apenas dos valores obtidos pelo sensor acelerômetro.

De forma similar, considerando em (45) a componente no eixo x , o ângulo ϕ pode ser determinado, conforme

$$\theta = \text{atan} \left(\frac{-a_x}{a_y \sin(\phi) + a_z \cos(\phi)} \right). \quad (48)$$

Observe que θ pode ser calculado através dos dados obtidos do acelerômetro e do ângulo ϕ calculado anteriormente.

3.5.2 Obtenção do ângulo yaw do magnetômetro

Como descrito anteriormente, apenas com o acelerômetro não é possível obter o ângulo ψ . Neste caso deve-se utilizar um magnetômetro, que medirá a intensidade do campo magnético nos três eixos de rotação, isto é, B_x , B_y e B_z . Porém, considerando o magnetômetro com o sentido positivo do eixo x apontado para o norte magnético, o vetor com as medições das intensidades do campo magnético pode ser descrito como

$$\mathbf{B}_r = B \begin{bmatrix} \cos(\delta) \\ 0 \\ (\sin)(\delta) \end{bmatrix} \quad (49)$$

onde B denota a magnitude do campo magnético terrestre e δ é a angulação entre a orientação do campo magnético medido e o plano do chão. Este é um parâmetro que varia de acordo com a posição geográfica onde a medição é feita.

Agora, assumindo que o magnetômetro é rotacionado de ângulos ψ , θ e ϕ em relação, respectivamente, aos eixos z , y e x , o vetor com as medições do campo magnético pode ser representado como mostrado na equação a seguir:

$$\mathbf{B}_p = \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{B}_r. \quad (50)$$

Porém, deve-se também considerar as componentes de deslocamento geradas pela interferência *hard-iron* calculadas anteriormente, e então a equação (50) é expandida para

$$\mathbf{B}_p = \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{B}_r + \mathbf{V} \quad (51)$$

onde,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad (52)$$

é o vetor contendo os valores de deslocamento gerados pela interferência *hard-iron*.

Tendo em vista que os valores de ϕ e θ já foram obtidos, para obter o ângulo de rotação ψ , pode-se subtrair o vetor de deslocamento \mathbf{V} de ambos os lados da equação anterior e multiplicar pela inversa das matrizes de rotação $\mathbf{R}_x(\phi)$ e $\mathbf{R}_y(\theta)$. Assim,

$$\mathbf{R}_y(-\theta)\mathbf{R}_x(-\phi)(\mathbf{B}_p - \mathbf{V}) = \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{B}_r \quad (53)$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x - V_x \\ B_y - V_y \\ B_z - V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B\cos(\delta) \\ 0 \\ B\sin(\delta) \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} (B_{px} - V_x)\cos(\theta) + (B_{py} - V_y)\sin(\theta)\sin(\phi) + (B_{pz} - V_z)\sin(\theta)\cos(\phi) \\ (B_{py} - V_y)\cos(\phi) - (B_{pz} - V_z)\sin(\phi) \\ -(B_{px} - V_x)\sin(\theta) + (B_{py} - V_y)\cos(\theta)\sin(\phi) + (B_{pz} - V_z)\cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{fx} \\ B_{fy} \\ B_{fz} \end{bmatrix} \quad (55)$$

onde $B_{fx} = B\cos(\psi)\cos(\delta)$, $B_{fy} = -B\sin(\psi)\cos(\delta)$ e $B_{fz} = B\sin(\delta)$ representam as componentes do magnetômetro após a correção dos efeitos *hard-iron* e a compensação de rotação para o plano onde $\theta = \phi = 0$.

Considerando apenas as componentes x e y da equação (55) tem-se que:

$$\begin{aligned} B_{fx} &= \cos(\psi)B\cos(\delta) \\ &= (B_{px} - V_x)\cos(\theta) + (B_{py} - V_y)\sin(\theta)\sin(\phi) \\ &\quad + (B_{pz} - V_z)\sin(\theta)\cos(\phi) \end{aligned} \quad (56)$$

e

$$\begin{aligned} B_{fy} &= -\sin(\psi)B\cos(\delta) \\ &= (B_{py} - V_y)\cos(\phi) - (B_{pz} - V_z)\sin(\phi). \end{aligned} \quad (57)$$

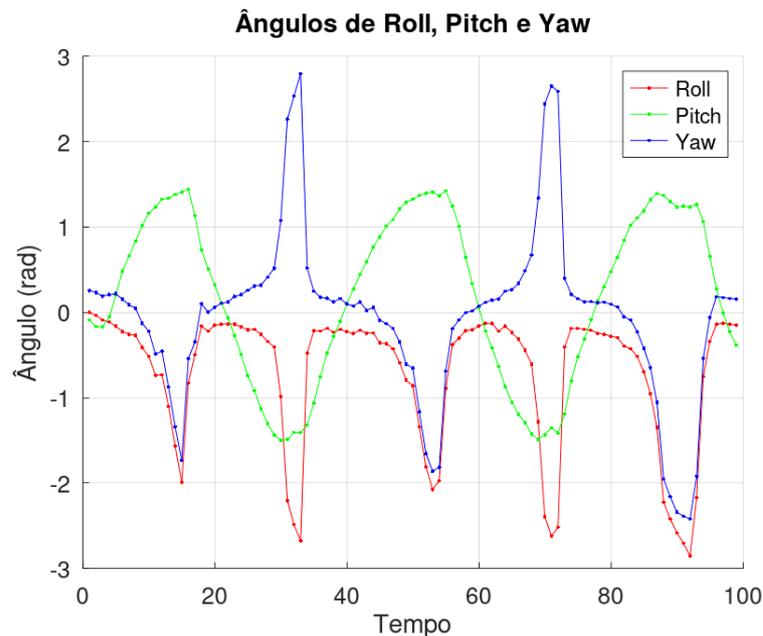
Realizando algumas manipulações algébricas nas equações anteriores, tem-se que o ângulo ψ pode ser calculado como

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname{atan} \left(\frac{-B_{fy}}{B_{fx}} \right) \\ &= \frac{(B_{pz} - V_z)\sin(\phi) - (B_{py} - V_y)\cos(\theta)}{(B_{px} - V_x)\cos(\theta) + (B_{py} - V_y)\sin(\theta)\sin(\phi) + (B_{pz} - V_z)\sin(\theta)\cos(\phi)}. \end{aligned} \quad (58)$$

É importante notar que o cálculo do ângulo ψ através de (58) independe do ângulo de inclinação do campo magnético δ .

Um exemplo de resultado do cálculo dos ângulos ϕ (*roll*), θ (*pitch*) e ψ (*yaw*) através dos dados de um acelerômetro e um magnetômetro é apresentado na Figura 24. No exemplo, são realizadas rotações suaves dos ângulos *roll*, *pitch* e *yaw*, obtendo um resultado satisfatório nessas condições.

Figura 24 – Ângulos *roll*, *pitch* e *yaw* (com rotações suaves) calculados através dos dados do acelerômetro e magnetômetro

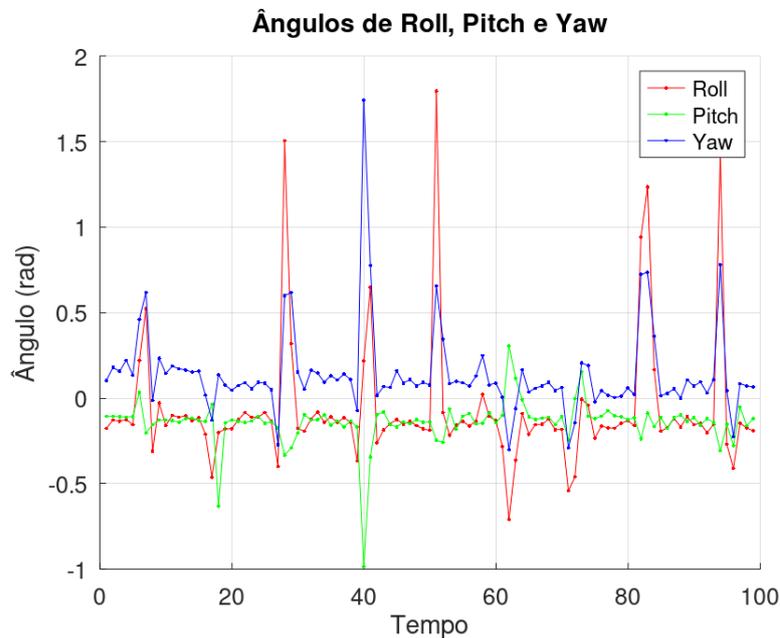


Fonte: Autor

No entanto, esse procedimento de cálculo dos ângulos de Euler através somente de dados de acelerômetro e magnetômetro possui algumas limitações. O acelerômetro é sensível a vibrações, portanto, na presença delas, a medição dos ângulos pode ser consideravelmente afetada. Na Figura 25, pode-se observar uma situação em que os sensores estão em um plano sem inclinação (isto é, com $\phi = 0$ rad e $\theta = 0$ rad) e sofrem vibrações durante o processo de medição. Conforme pode ser observado, as vibrações acarretam em estimativas bastante imprecisas nos valores dos ângulos de Euler, evidenciando uma deficiência da abordagem discutida nesta seção.

Outra limitação é, conforme descrito por (OZYAGCILAR, 2012), as equações (47), (48) e (58) possuem infinitas soluções para múltiplos de 2π , dessa forma é importante limitar os ângulos *roll*, *pitch* e *yaw* de π a $-\pi$ e ainda limitar adicionalmente o ângulo *pitch* de $\pi/2$ a $-\pi/2$. Isso garante que todas as equações tenham apenas uma única solução para qualquer orientação do objeto. Essas limitações podem ser efetuadas computacionalmente ao utilizar as funções do Matlab $atan(\cdot)$ para limitar de π a $-\pi$ e $atan2(\cdot)$ para a limitação

Figura 25 – Ângulos *roll*, *pitch* e *yaw* (com vibrações aplicadas aos sensores) calculados através dos dados do acelerômetro e magnetômetro



Fonte: Autor

do ângulo *pitch* de $\pi/2$ a $-\pi/2$.

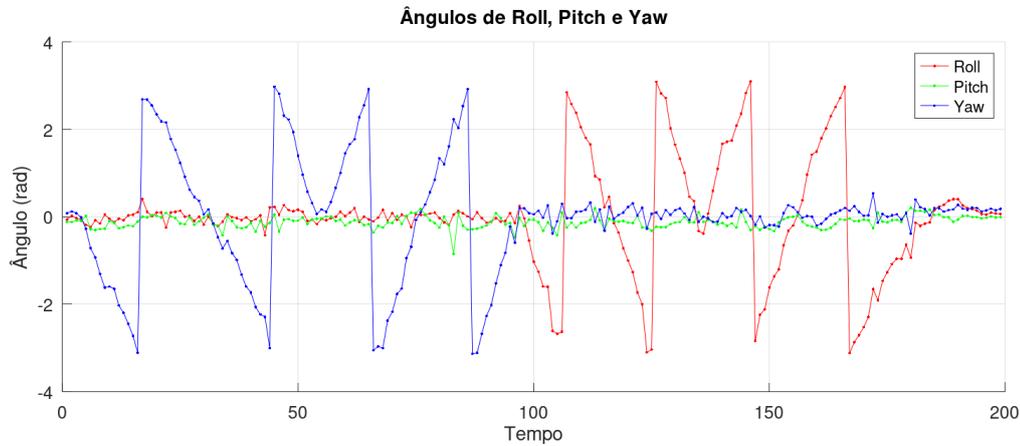
É necessário observar que a limitação do ângulo *pitch* é de meio círculo, ou seja, essa limitação também deve ser levada em consideração ao utilizar o método na prática. Se o objeto sofrer uma rotação em *pitch* maior que $\pi/2$ em módulo, o cálculo dos ângulos será incorreto, como pode ser visto na Figura 24. Nota-se que quando o ângulo *pitch* alcança o limite estabelecido, os ângulos *roll* e *yaw* são desviados. Essa limitação é muito importante e deve ser considerada na realização de testes e utilização prática do método.

Com essas limitações, também surge um problema chamado descontinuidade de fase que ocorre quando há um salto grande no valor do ângulo calculado. Por exemplo, se o objeto for rotacionado em uma volta completa, em algum momento o ângulo medido de *roll* irá saltar de π para $-\pi$ ou vice-versa. A Figura 26 mostra o efeito da descontinuidade de fase ao plotar os ângulos de Euler obtidos a partir do método anterior. Nesse exemplo, o objeto realiza duas voltas completas em ambas as direções nos ângulos *roll* e *yaw*. É possível notar que existem variações abruptas nos valores dos ângulos calculados a medida que o objeto é rotacionado.

Uma alternativa para corrigir isso é o uso da função `unwrap(.)` do Matlab que serve especificamente para lidar com esse problema. O funcionamento da função se dá da seguinte forma:

1. A função `unwrap(.)` recebe como entrada um vetor ou matriz contendo os valores da fase que podem apresentar descontinuidades.

Figura 26 – Ângulos *roll*, *pitch* e *yaw* calculados através dos dados do acelerômetro e magnetômetro, com efeito da descontinuidade de fase



Fonte: Autor

2. A função determina a diferença entre os valores adjacentes no sinal da fase.
3. Se a diferença ultrapassar um limite específico (por padrão 2π), a função adiciona ou subtrai múltiplos de 2π para corrigir a descontinuidade.
4. O processo de adicionar ou subtrair múltiplos de 2π é repetido para todas as descontinuidades encontradas no sinal de fase.
5. A saída da função é um novo vetor ou matriz com a fase ajustada de forma a garantir uma transição suave e contínua entre os valores.

A Figura 27 mostra uma comparação entre a estimativa original dos ângulos e após o uso da função $unwrap(\cdot)$. Como pode ser observado, todas as descontinuidades são eliminadas.

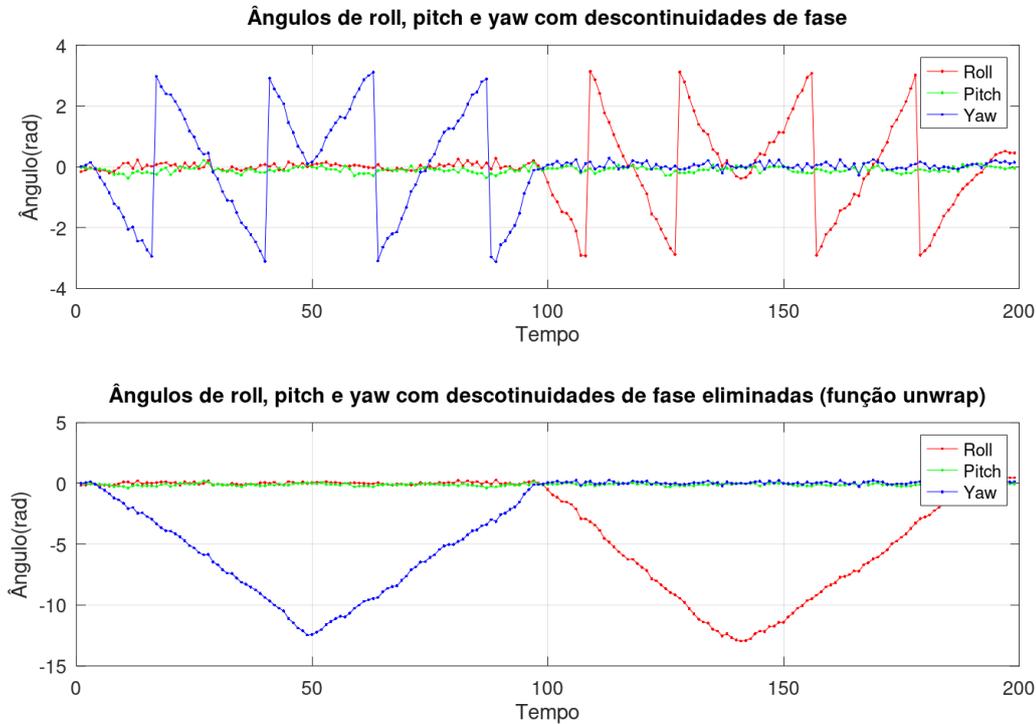
3.6 ESTIMAÇÃO DOS ÂNGULOS DE EULER ATRAVÉS DOS DADOS DO GIROSCÓPIO

Com a medida da velocidade angular $\omega_i(t)$ do objeto a partir do giroscópio, é possível determinar o ângulo de rotação σ_i no eixo i no instante de tempo T , ao integrar a velocidade angular no tempo como segue:

$$\sigma_i = \int_0^T \omega_i(t) dt. \quad (59)$$

Dessa forma, com um giroscópio tradicional é possível medir todos os ângulos de Euler de um objeto. Basta aplicar a equação (59), usando a velocidade angular ω_i para cada eixo i . No entanto deve-se lembrar que o giroscópio também é afetado por um termo de polarização β_i . Assim, pode-se reescrever a equação (59) da seguinte forma:

Figura 27 – Efeito da função $unwrap(\cdot)$ no tratamento de descontinuidades nos valores dos ângulos $roll$, $pitch$ e yaw calculados através dos dados do acelerômetro e magnetômetro



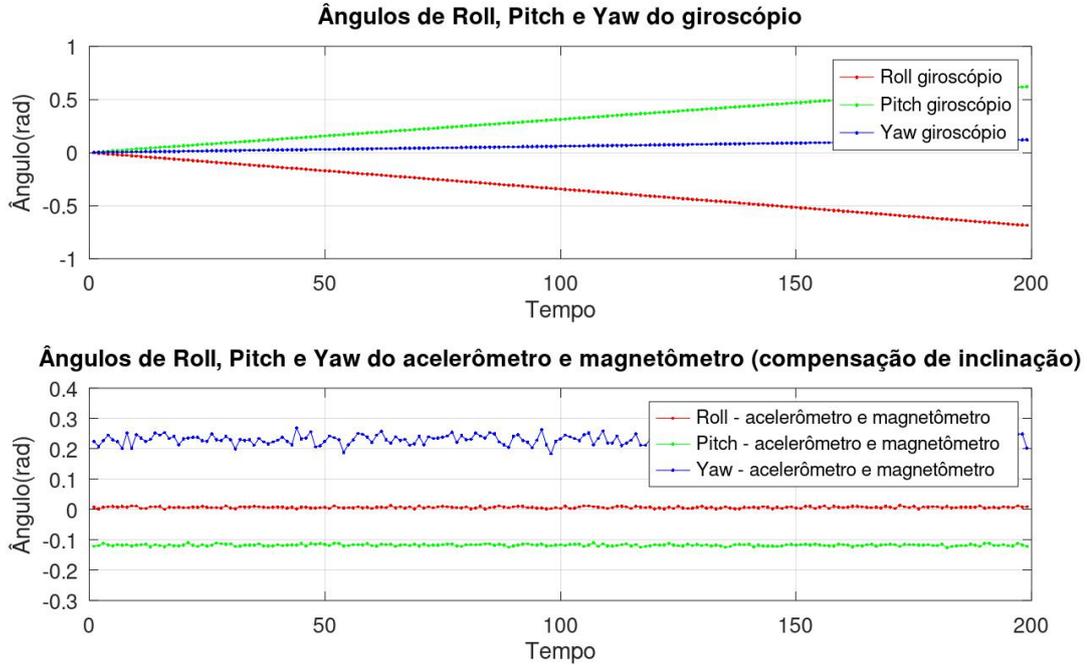
Fonte: Autor

$$\sigma_i = \int_0^T [\omega_i(t) + \beta_i] dt. \quad (60)$$

Como mencionado anteriormente, isso causa o problema da integração no tempo em giroscópios. O que acontece, é que esse termo de polarização se acumula a medida que é integrada no tempo, fazendo com que a estimação do ângulo de rotação através dos dados do giroscópio se torne cada vez menos confiável a medida que o tempo decorre. A Figura 28 mostra uma comparação entre os ângulos de Euler medidos através do acelerômetro e magnetômetro, e através do giroscópio quando o objeto se encontra em repouso. É possível notar que os ângulos estimados utilizando as medições do giroscópio se distancia das dos valores iniciais com o passar do tempo, enquanto o outro método (que utiliza os dados do acelerômetro e magnetômetro) mantém as medições estáticas corretamente.

Outro ponto a ser destacado é que o método de obtenção dos ângulos de Euler por meio do giroscópio não assegura as condições iniciais dos ângulos. Isso ocorre porque o método não utiliza nenhum referencial com orientação pré-definida fixa, como a gravidade ou o campo magnético terrestre. Para aprimorar esse método em particular, é possível utilizar a primeira a primeira estimação dos ângulos através dos dados do acelerômetro

Figura 28 – Comparação entre os métodos de estimação dos ângulos de Euler com os sensores em repouso



Fonte: Autor

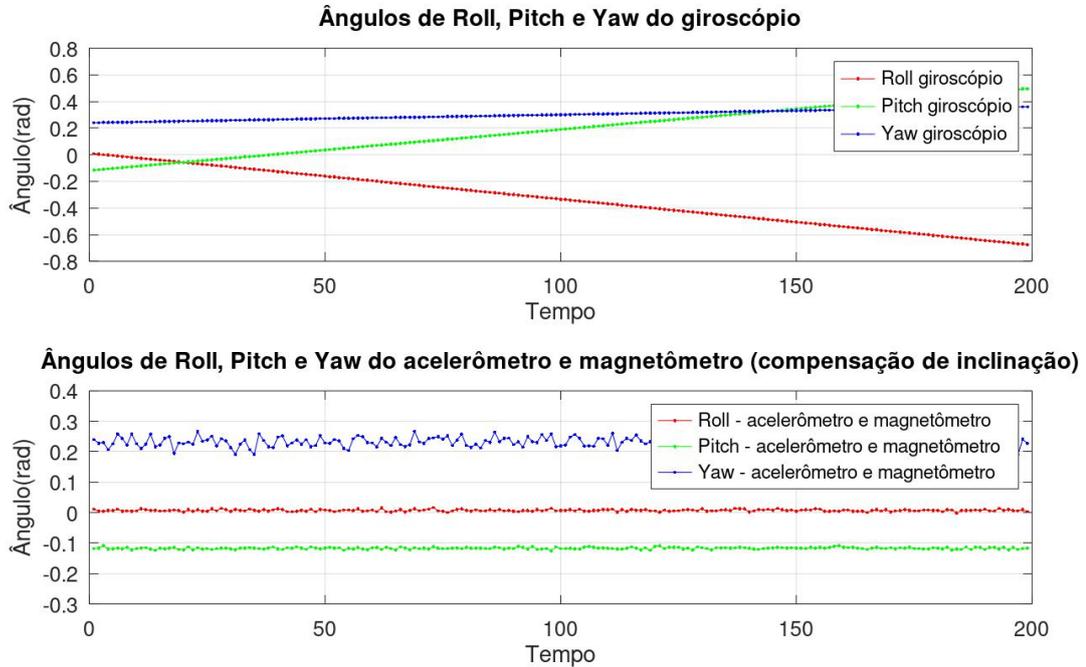
e magnetômetro como uma estimativa inicial, antes de prosseguir com a medição através do giroscópio. Assim, o cálculo para estimação do ângulo passa a ser dado por

$$\sigma_i = \sigma_{i,0} + \int_0^T [\omega_i(t) + \beta_i] dt \quad (61)$$

onde $\sigma_{0,i}$ é o valor inicial do ângulo. Essa abordagem pode ajudar a obter resultados mais precisos e confiáveis, conforme pode ser visualizado na Figura 29.

Para atenuar os efeitos da integração no tempo, pode-se subtrair os valores calculados do termo de polarização no procedimento de calibração. O resultado da estimação dos ângulos utilizando dados calibrados do giroscópio pode ser visualizado na Figura 30. Ao analisar a Figura 30, fica evidente que ao se utilizar as medidas calibradas do giroscópio foi obtido um resultado satisfatório. No entanto, é importante ressaltar que esse processo pode apresentar falhas e os erros de polarização ainda podem ter um impacto significativo nas medições, especialmente quando a medição é realizada por longos períodos de tempo. Além disso, o erro de polarização também pode variar com o tempo (dependendo do giroscópio utilizado), o que pode tornar a calibração ineficaz.

Figura 29 – Comparação entre os métodos de estimação dos ângulos de Euler com os sensores em repouso e condições iniciais



Fonte: Autor

3.7 UTILIZAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN PARA ESTIMAÇÃO DOS ÂNGULOS DE EULER

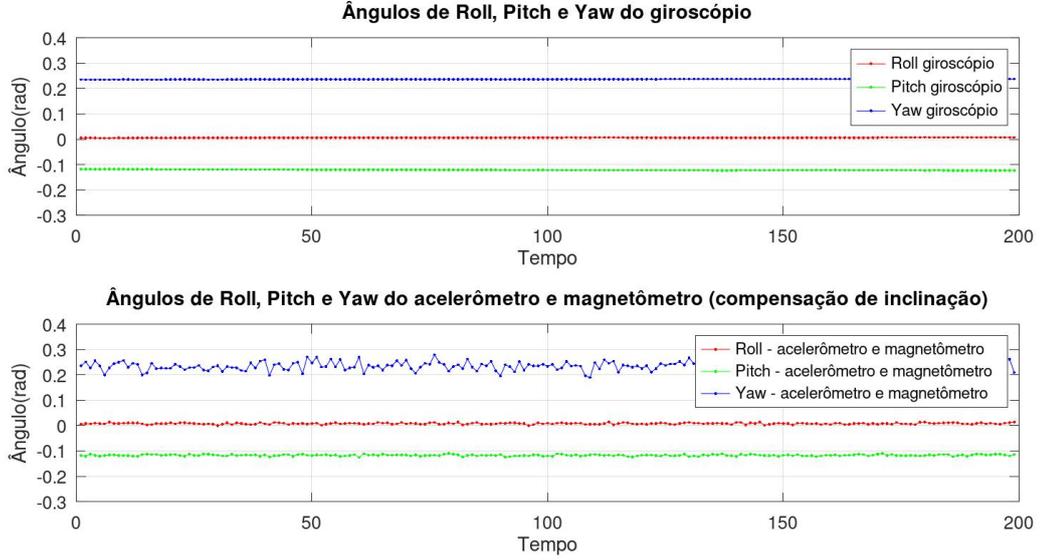
3.7.1 Obtenção do modelo no espaço de estados

Nas seções anteriores foram apresentadas formas de determinar os ângulos *roll*, *pitch* e *yaw*, através de duas fontes: primeiro utilizando os dados do acelerômetro e do magnetômetro e, segundo, através dos dados do giroscópio. Conforme discutido nas seções anteriores ambas as abordagens possuem vantagens e desvantagens. Uma forma alternativa de estimar os ângulos de Euler com mais precisão é utilizar-se do conceito de fusão de dados por meio do filtro de Kalman.

Especificamente, neste trabalho é utilizado um filtro de Kalman para cada ângulo de Euler (totalizando três filtros), seguindo o procedimento apresentado em (BIEDA, 2015). Especificamente, a aplicação do filtro de Kalman exige um modelo no espaço de estados do sistema em questão. Para tal é utilizado neste trabalho o modelo considerado também em (BIEDA, 2015).

Especificamente, aqui assume-se que a velocidade angular $\omega_\alpha^G(k)$, onde $\alpha = \{\phi, \theta, \psi\}$ fornecida pelo giroscópio está sujeita a um erro de polarização $\beta_\alpha(k)$ e a um ruído estocástico $\eta_\alpha(k)$, ou seja,

Figura 30 – Comparação entre os métodos de estimação dos ângulos de Euler, com os sensores em repouso, com condições iniciais e medidas calibradas.



Fonte: Autor

$$\omega_{\alpha}^G(k) = \tilde{\omega}_{\alpha}(k) + \beta_{\alpha}(k) - \eta_{\alpha}(k) \quad (62)$$

onde $\tilde{\omega}_{\alpha}(k)$ denota a velocidade angular real. Em particular, o erro de polarização $\beta_{\alpha}(k)$ é comumente modelado na literatura como um processo de Markov de primeira ordem, que é um tipo de equação recursiva que descreve uma sequência de eventos em que a probabilidade de um evento depende apenas do evento imediatamente anterior. O modelo pode ser definido como:

$$\beta_{\alpha}(k+1) = \beta_{\alpha}(k) + \epsilon_{\alpha}(k) \quad (63)$$

onde $\epsilon_{\alpha}(k)$ denota um ruído branco gaussiano de média zero e variância σ^2 . Para determinar o ângulo $\alpha(k+1)$ a partir da velocidade angular $\omega_{\alpha}(k)$, pode-se utilizar a relação:

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) + \tilde{\omega}_{\alpha}(k)\Delta t. \quad (64)$$

Substituindo a equação (62) em (64), tem-se

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) + [\omega_{\alpha}^G(k) - \beta_{\alpha}(k) + \eta_{\alpha}(k)]\Delta t \quad (65)$$

ou ainda,

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) + \omega_{\alpha}^G(k)\Delta t - \beta_{\alpha}(k)\Delta t + \eta_{\alpha}(k)\Delta t. \quad (66)$$

Com essas equações, é possível construir um modelo no espaço de estados definindo como variáveis de estado o ângulo $\alpha(k)$ e o erro de polarização da velocidade angular

medida $\beta_\alpha(k)$. A entrada do sistema é a velocidade angular medida e a saída é o ângulo medido a partir de acelerômetro e magnetômetro $\alpha^{AM}(k)$. As equações de estados do sistema são então definidas como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha(k+1) \\ \beta_\alpha(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(k) \\ \beta_\alpha(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t \\ 0 \end{bmatrix} \omega_\alpha^G(k) \\ &+ \begin{bmatrix} \Delta t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_\alpha(k) \\ \epsilon_\alpha(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

com a equação de saída sendo dada por,

$$\alpha^{AM}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(k) \\ \beta_\alpha(k) \end{bmatrix} + r_\alpha^{AM}(k) \quad (68)$$

onde $r_\alpha^{AM}(k)$ é o ruído do ângulo obtido através dos dados do acelerômetro e magnetômetro. Para fins de simplificação, pode-se reescrever as equações (67) e (68) com as seguintes notações:

$$\mathbf{x}_\alpha(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}_\alpha(k) + \mathbf{G}u_\alpha(k) + \mathbf{Q}\mathbf{s}_\alpha(k) \quad (69)$$

e

$$y_\alpha(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}_\alpha(k) + w_\alpha(k) \quad (70)$$

onde $\mathbf{x}_\alpha(k) = [\alpha(k) \ \beta_\alpha(k)]^T$, $u_\alpha(k) = \omega_\alpha^G(k)$, $\mathbf{s}_\alpha(k) = [\eta_\alpha(k) \ \epsilon_\alpha(k)]^T$, $y_\alpha(k) = \alpha^{AM}(k)$, $w_\alpha(k) = r_\alpha^{AM}(k)$,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \Delta t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

e

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Delta t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Observe que as equações (69) e (76) são similares ao modelo genérico apresentado na Seção 2.2.2 que tratou sobre filtro de Kalman.

Com as equações descritas até então, tem-se a maior parte dos termos necessário para execução do filtro de Kalman, restando apenas a definição das parcelas ruidosas das equações, que são as a estimativa das matrizes de covariância $\hat{\mathbf{R}}_\alpha$ e $\hat{\mathbf{S}}_\alpha$, as quais são definidas como

$$\hat{\mathbf{R}}_\alpha = E[w_\alpha^2(k)] = \sigma_{\alpha,AM}^2 \quad (75)$$

onde $\sigma_{\alpha,AM}^2$ é a potência do ruído do ângulo calculado através dos dados do acelerômetro e magnetômetro, o qual pode ser estimado experimentalmente. Adicionalmente,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}_{\alpha} &= E\{\mathbf{Q}\mathbf{s}_{\alpha}(k)[\mathbf{Q}\mathbf{s}_{\alpha}(k)]^{\mathbf{T}}\} \\ &= \mathbf{Q}E[\mathbf{s}_{\alpha}(k)\mathbf{s}_{\alpha}^{\mathbf{T}}(k)]\mathbf{Q}^{\mathbf{T}} \\ &= \mathbf{Q}\begin{bmatrix} E[\eta_{\alpha}^2(k)] & 0 \\ 0 & E[\epsilon_{\alpha}^2(k)] \end{bmatrix}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\end{aligned}\quad (76)$$

onde $E[\eta_{\alpha}^2(k)]$ e $E[\epsilon_{\alpha}^2(k)]$ representam, respectivamente, as potências do ruído de medição da velocidade angular e do ruído do termo de polarização. Em geral, esses termos são desconhecidos, sendo comumente ajustados pelo projetista. Na prática é comum utilizar

$$\hat{\mathbf{S}} = \sigma_s^2\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}} \quad (77)$$

com σ_s^2 sendo um parâmetro ajustado pelo projetista. É possível interpretar esse ajuste da seguinte forma: o valor σ_s^2 representa a parcela ruidosa das equações de estado, logo, quanto maior for esse valor numérico, significa uma menor confiança nas equações de estado, isso é, o filtro de Kalman nessa situação dará menos importância para as informações das equações em favor dos valores medidos da saída do sistema.

Dessa forma, o filtro de Kalman pode ser executado como segue. Primeiramente, deve-se definir as condições iniciais as quais serão a base para o cálculo da primeira iteração do filtro. Essas condições são definidas no instante $k = 0$ como

$$\hat{\mathbf{x}}_{\alpha}(0) = \mathbf{H}^{\mathbf{T}}y_{\alpha}(0) \quad (78)$$

e

$$\hat{\mathbf{P}}(0) = \mathbf{I} \quad (79)$$

onde $y_{\alpha}(0) = \alpha^{AM}(0)$ é o valor do ângulo calculado através dos dados do acelerômetro e magnetômetro no instante inicial $k = 0$. Uma vez que as etapas de predição e estimação ocorrem em sequência e de forma repetida, essas equações definem condições iniciais para o vetor de estado estimado e a matriz de covariância do estado predito (que normalmente viriam da etapa de estimação) para serem usados na primeira vez que a etapa de predição for realizada.

A etapa de predição então utiliza equações baseadas no que foi descrito na Seção 2.2.3. Essa equações são dadas por:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\alpha}(k+1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{\alpha}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}_{\alpha}(k) \quad (80)$$

e

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\alpha}(k+1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{P}}_{\alpha}(k)\mathbf{F}^{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{S}}_{\alpha}. \quad (81)$$

E as equações da etapa de estimação são:

$$e_{\alpha}(k) = y_{\alpha}(k) - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}_{\alpha}(k+1) \quad (82)$$

$$\mathbf{K}_\alpha(k) = \tilde{\mathbf{P}}_\alpha(k+1)\mathbf{H}^\top[\mathbf{H}\tilde{\mathbf{P}}_\alpha(k+1)\mathbf{H}^\top + \hat{\mathbf{R}}_\alpha]^{-1} \quad (83)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_\alpha(k+1) = \tilde{\mathbf{x}}_\alpha(k+1) + \mathbf{K}_\alpha(k)e_\alpha(k) \quad (84)$$

e

$$\hat{\mathbf{P}}_\alpha(k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_\alpha(k)\mathbf{H}]\tilde{\mathbf{P}}_\alpha(k+1). \quad (85)$$

Essas equações são calculadas computacionalmente em um laço de repetição para cada instante de tempo k , onde as medidas são aferidas. Especificamente, o ângulo estimado $\hat{\alpha}(k+1)$ é o primeiro elemento do vetor $\hat{\mathbf{x}}_\alpha(k+1)$, conforme definido anteriormente.

4 RESULTADOS

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos com a aplicação do filtro de Kalman para a estimação dos ângulos de Euler utilizando um magnetômetro, acelerômetro e giroscópio.

Para avaliar o desempenho do filtro de Kalman na estimação dos ângulos de Euler, foram realizados experimentos considerando o sistema físico com a IMU (apresentado no início do Capítulo 3) em cenários diversos.

4.1 EXEMPLO 1

Inicialmente, para avaliar a eficácia do filtro de Kalman na eliminação do problema da integração no tempo, o dispositivo foi mantido em repouso e os ângulos de Euler foram estimados considerando três métodos distintos, a saber: *i*) integração no tempo, utilizando somente os dados obtidos pelo giroscópio; *ii*) estimação dos ângulos utilizando somente os dados do acelerômetro e magnetômetro; e *iii*) fusão de dados através do filtro de Kalman.

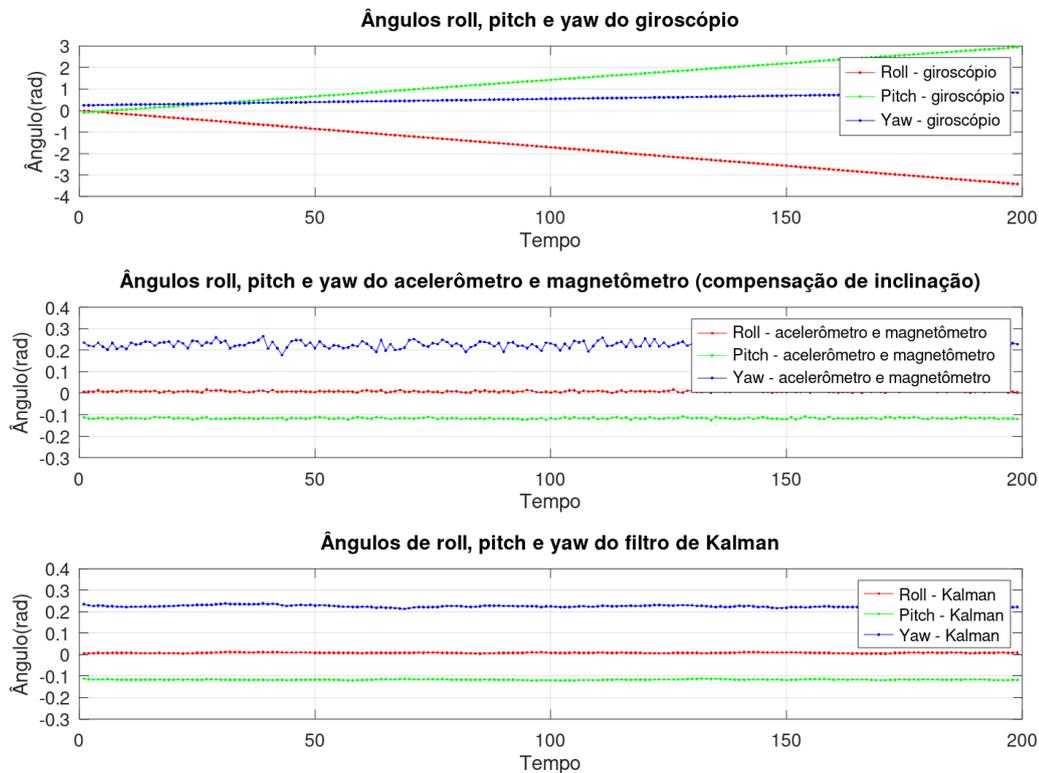
O resultado é apresentado na Figura 31. Para tornar o ambiente de teste um pouco mais desafiador, a calibração dos dados do giroscópio foi ignorada. É possível notar que apesar de não ser realizada a calibração dos dados do giroscópio, o filtro de Kalman foi capaz de apresentar resultados satisfatórios (ao contrário do observado para o primeiro método que utiliza apenas os dados do giroscópio). Isso ocorre, pois no modelo de espaço de estado considerado no filtro de Kalman os valores de *bias* dos dados do giroscópio são estimados a cada interação e compensados para determinação dos ângulos de Euler.

Agora, visando avaliar o impacto das vibrações nas medições do no acelerômetro para estimação dos ângulos de Euler foi realizado outro teste. Com o sistema físico mais uma vez em repouso, foram aplicadas algumas vibrações pulsantes com o auxílio de um *smartphone* que utiliza um componente chamado *vibracall* para gerar vibrações hápticas. A Figura 32 mostra o efeito das vibrações na estimação dos ângulos de Euler nos três métodos considerados (agora com os dados do giroscópio calibrados). É possível notar que o filtro Kalman e o método da integração no tempo (que utiliza somente dos dados do giroscópio) foram capazes de atenuar os efeitos da vibração mecânica na estimação dos ângulos de Euler. Por outro lado, é possível observar uma variação considerável nos valores dos ângulos estimados utilizando somente os dados do acelerômetro e magnetômetro, devido às vibrações aplicadas.

4.2 EXEMPLO 2

Este exemplo tem como objetivo avaliar exatidão da estimação dos ângulos *roll* e *pitch* em um cenário estático, isto é, com o sistema em repouso e posto em posições fixas com um certo valor de angulação nos eixos x e y .

Figura 31 – Teste do filtro de Kalman (Integração no tempo).



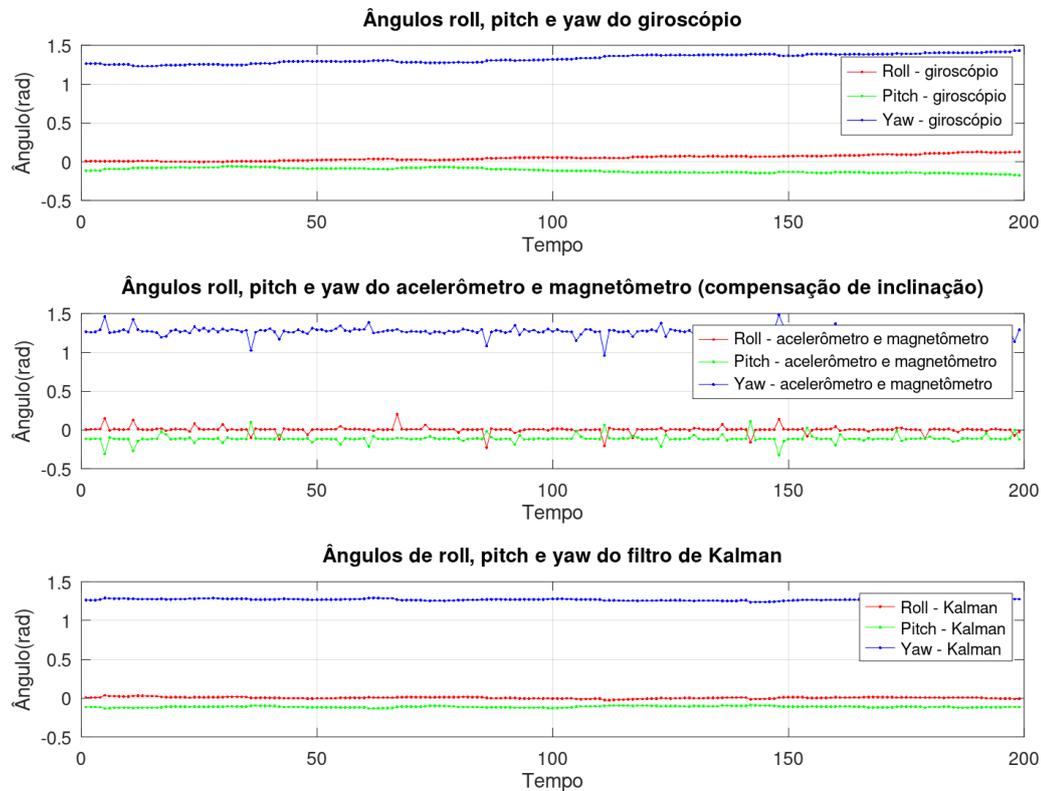
Fonte: Autor.

Para avaliar a exatidão na determinação dos ângulos de Euler, é preciso que se tenha um referencial confiável para que se possa fazer uma comparação dos valores de ângulo reais com os estimados através do filtro de Kalman. Tendo em vista que o sistema físico montado neste trabalho (Figura 18) foi projetado em formato de cubo é possível estabelecer o plano do chão como perpendicular a aceleração da gravidade e posicionar o cubo de forma a garantir que os ângulos *roll* e *pitch* possam estar nas posições de 0° , $+90^\circ$ e -90° . Além disso, com o auxílio de um esquadro é possível posicionar o sistema em ângulos fixos de $+45^\circ$ e -45° , como mostrado na Figura 34.

Com as referências então estabelecidas, o sistema foi colocado em repouso nas posições de $+90^\circ$, $+45^\circ$, 0° , -45° e -90° nos eixos x e y e uma média das medições obtidas pelo filtro de Kalman foi realizada. É possível observar na Figura 35 curvas representando o *ground-truth* (linhas tracejadas) e os valores estimados para o ângulo *roll* (linhas sólidas).

Nota-se que os valores estimados pelo filtro de Kalman são próximos dos valores reais, o que atesta a exatidão da estimação do ângulo *roll* nas condições testadas. O que pode também ser verificado através dos valores de erro médio, calculados subtraindo o valor médio do ângulo estimado pelo valor real (*ground-truth*), conforme mostrado na

Figura 32 – Teste do filtro de Kalman (Vibrações).



Fonte: Autor.

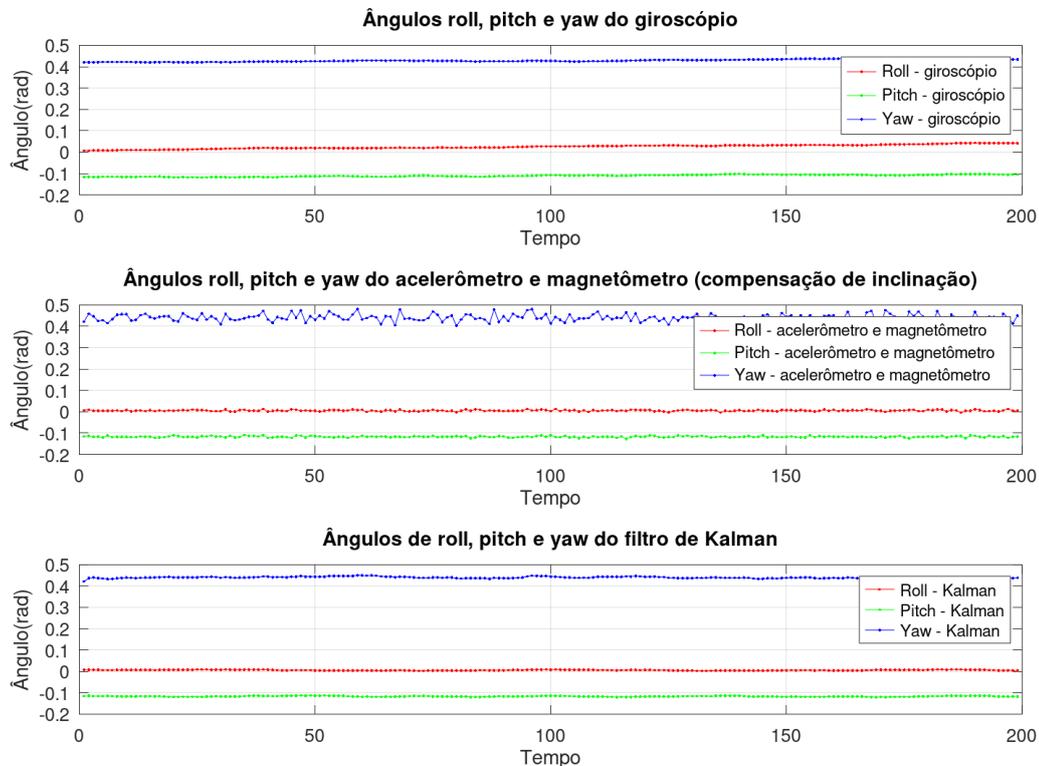
Tabela 1 – Média e erro médio - ângulo *roll*

Ângulo	Média	Erro médio
0°	0.54	-0.54
90°	87.96	2.04
-90°	-86.23	-3.77
45°	44.45	0.55
-45°	-44.79	-0.21

Tabela 1. Ainda, observa-se nos testes realizados maiores erros de estimação (acima de 2°) para ângulos próximos a +90° e -90°.

O sistema também foi posicionado nos ângulos de +90°, +45°, 0°, -45° e -90° em torno do eixo *y* e o ângulo *pitch* foi estimado. Os resultados são apresentados na Figura 36 e na Tabela 2. Assim como o ângulo *roll*, o ângulo *pitch* apresentou bons resultados de estimação, com um erro médio relativamente baixo erros médios um pouco maiores do que o observado para o ângulo *roll*.

Figura 33 – Teste do filtro de Kalman (Ruídos).



Fonte: Autor.

Tabela 2 – Média e erro médio - Ângulo *pitch*

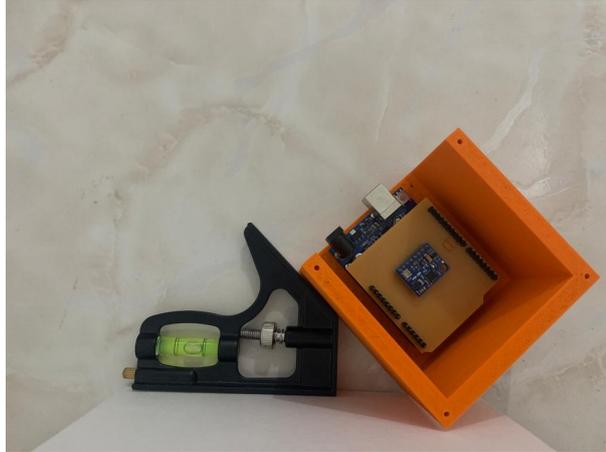
Ângulo	Média	Erro médio
0°	-5.09	5.09
90°	87.96	2.04
-90°	-85.41	-4.59
45°	39.11	5.89
-45°	-47.72	2.72

4.3 EXEMPLO 3

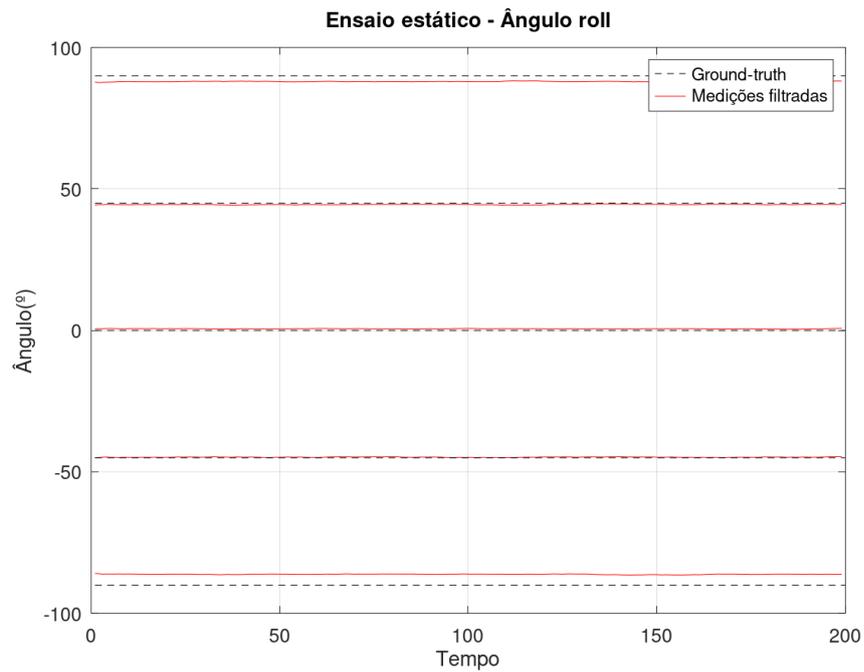
O objetivo deste exemplo é avaliar a precisão da estimação do ângulo *yaw* obtido a partir do filtro de Kalman. Especificamente, nesse trabalho não é utilizada uma referência para o ângulo *yaw*, que indica a direção de apontamento do sistema em relação ao norte magnético terrestre. Como o cálculo desse ângulo depende dos dados do magnetômetro, encontrar uma referência confiável que possa ser considerada um *ground-truth* é uma tarefa desafiadora. Até mesmo a utilização de um segundo instrumento como uma bússola, não seria uma boa solução já que esses instrumentos também sofrem com incertezas e ruídos.

A alternativa escolhida é um ensaio dinâmico, onde o sistema deve rotacionar de

Figura 34 – Uso do esquadro para posicionamento de 45° do sistema.

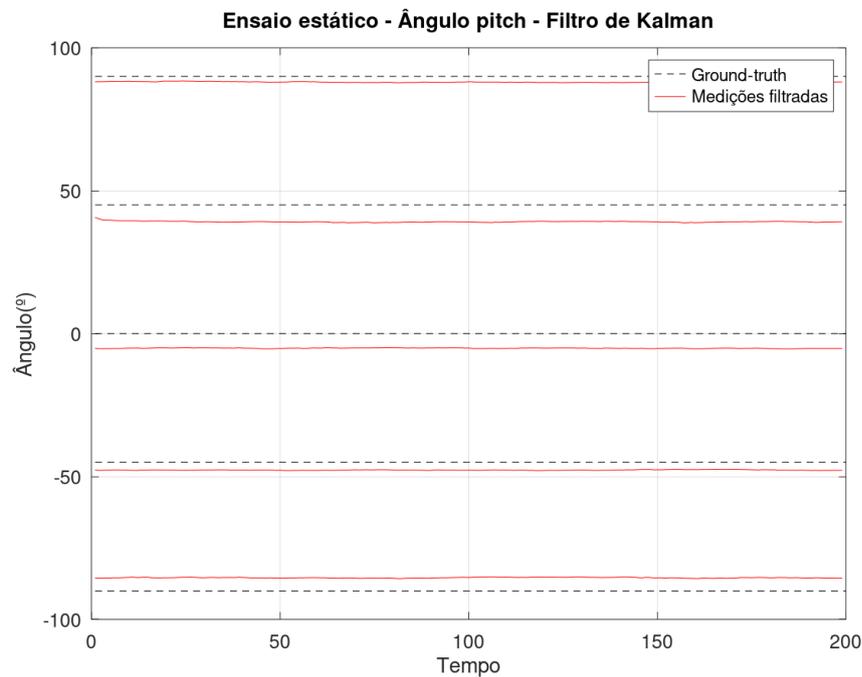


Fonte: Autor.

Figura 35 – Ensaio estático do ângulo *roll*.

Fonte: Autor.

forma previsível, para que seja possível analisar a diferença entre a posição inicial e final. O esquadro mencionado anteriormente pode ser utilizado para essa tarefa. O sistema começa posicionado rente a uma das faces do instrumento que juntas formam um ângulo de 90°. O sistema é então rotacionado até a outra face do instrumento, de forma que a rotação do objeto acompanhe o ângulo de 90°, sempre mantendo o esquadro fixo. O mesmo pode ser feito para o ângulo de 45°. O procedimento adotado nesse ensaio é ilustrado na Figura 37.

Figura 36 – Ensaio estático do ângulo *pitch*.

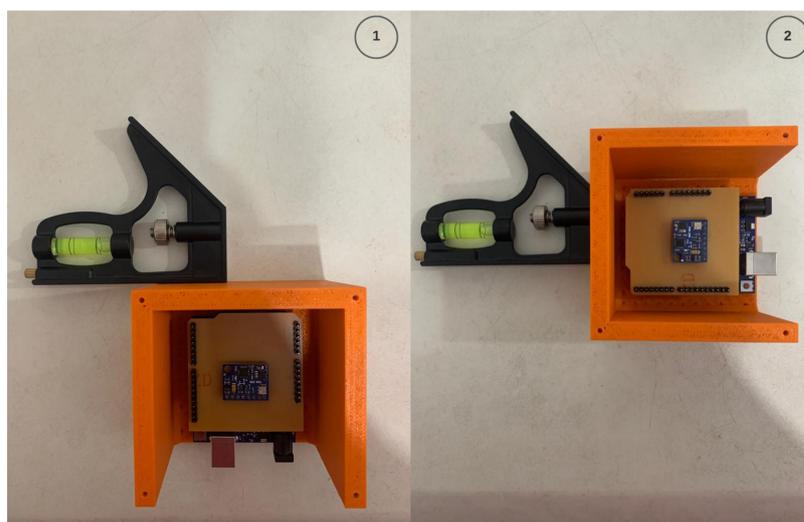
Fonte: Autor.

Tabela 3 – Média e erro médio - ângulo *yaw*

Ângulo	Média	Erro médio
90°	105.63	-15.63
-90°	-101.36	11.36
45°	49.71	-4.71
-45°	-49.34	4.34

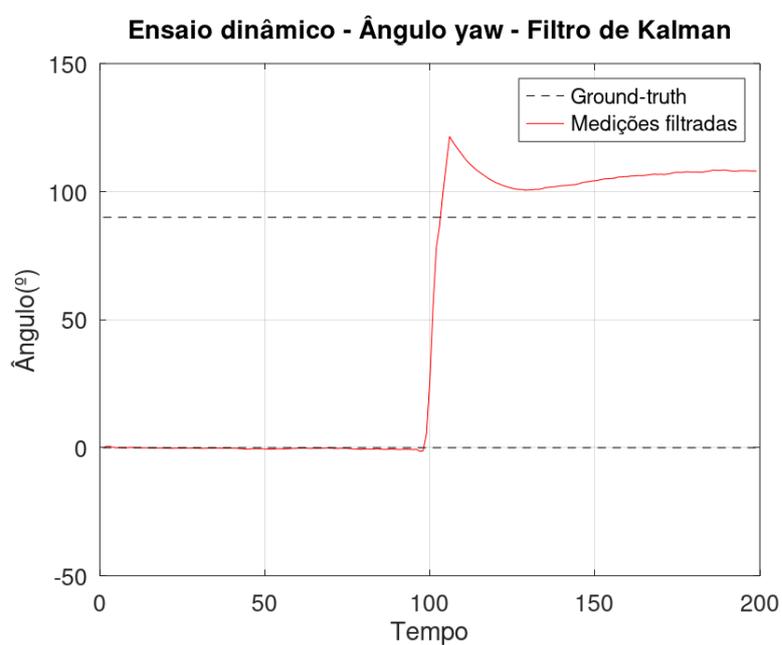
As Figuras 38, 39, 40 e 41 mostram os dados dos ensaios dinâmicos para as rotações de $+90^\circ$, -90° , $+45^\circ$ e -45° , respectivamente. A partir dos gráficos pode-se concluir que os resultados foram razoáveis, com erros menores do que 5° para ângulos de rotação de $+45^\circ$ e -45° . Para ângulos de rotação de $+90^\circ$ e -90° foram observados erros de estimação maiores. O erro médio nesse exemplo foi consideravelmente maior que no ensaio estático, como mostra a Tabela 3. Isso pode ter acontecido por vários motivos, por exemplo, deve-se levar em consideração que foi utilizada uma versão mais simples do filtro de Kalman que considera um modelo linear para o sistema, o filtro mais completo é conhecido com filtro de Kalman estendido que considera as não linearidades do sistema. Outro ponto a se destacar é que o sensor utilizado é de baixo custo o que pode acarretar em erros de medição e medidas menos confiáveis.

Figura 37 – Ensaio dinâmico do ângulo *yaw*.

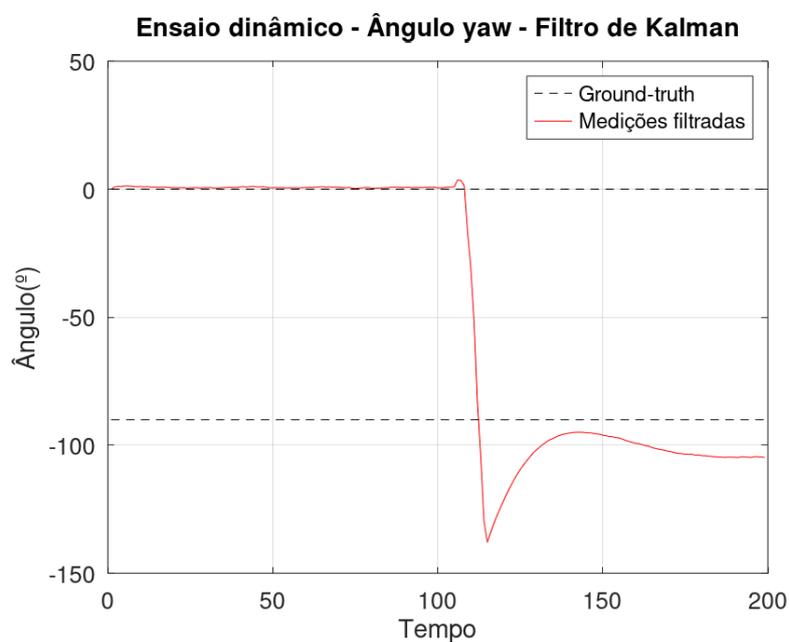


Fonte: Autor.

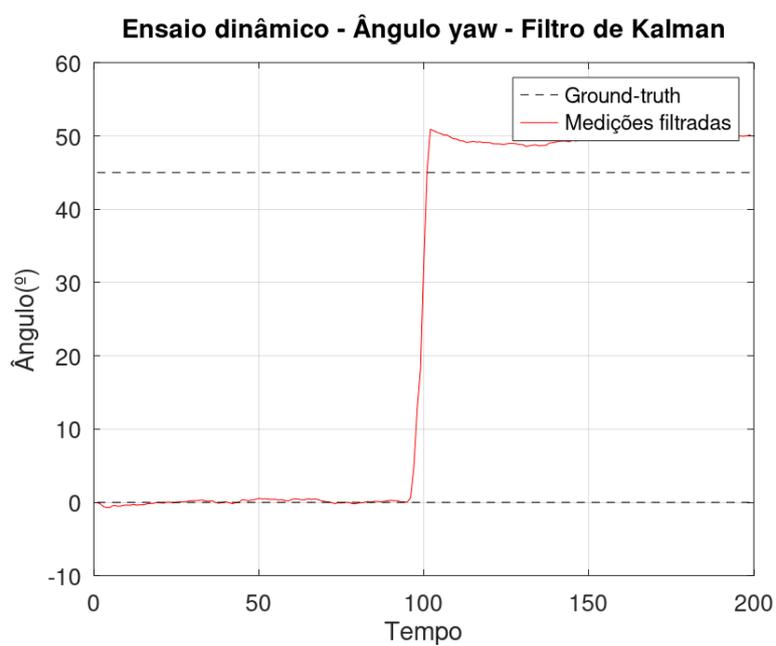
Figura 38 – Ensaio dinâmico do ângulo *yaw* de +90°.



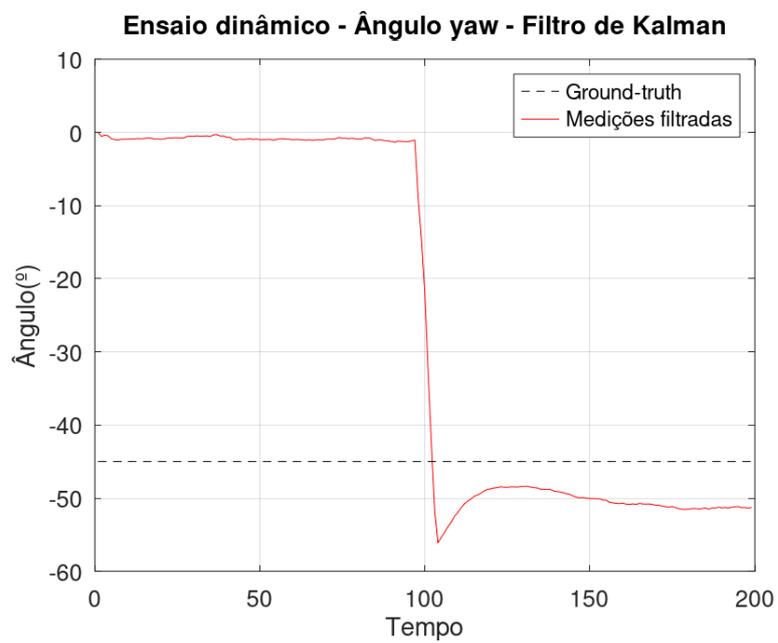
Fonte: Autor.

Figura 39 – Ensaio dinâmico do ângulo *yaw* de -90° .

Fonte: Autor.

Figura 40 – Ensaio dinâmico do ângulo *yaw* de $+45^\circ$.

Fonte: Autor.

Figura 41 – Ensaio dinâmico do ângulo *yaw* de -45° .

Fonte: Autor.

5 CONCLUSÃO

Em conclusão, este trabalho explorou a utilização do Filtro de Kalman para fusão de dados provenientes de um IMU, visando obter medições mais precisas e reduzir os efeitos negativos de ruídos e interferências de medição. Dessa forma, no Capítulo 1 foi apresentado uma introdução geral sobre o tema principal deste trabalho, assim como os objetivos geral e específicos. Já no Capítulo 2 foi apresentada uma revisão teórica dos principais conceitos utilizados na implementação do projeto. O Capítulo 3, apresentou a execução do trabalho e a utilização prática dos conceitos vistos no Capítulo 2. Por fim, os resultados de estimação dos ângulos de Euler mostrados no Capítulo 4 mostraram-se satisfatórios, evidenciando a robustez e eficiência do filtro de Kalman para estimação da posição e orientação de um objeto no espaço.

Para trabalhos futuros, é possível considerar a implementação do Filtro de Kalman Estendido. Esse filtro, que é uma extensão do Filtro de Kalman, pode lidar com modelos não lineares de sistemas e melhorar ainda mais a precisão das estimativas dos ângulos de Euler. Outra possibilidade é além da utilização do filtro de Kalman estendido é estimar a orientação através de representações como Matriz de Coseno Direta e Quaternions (ao invés de ângulos de Euler) que não sofrem do problema de *gimbal lock*(INTRO. . . , 2023).

Em suma, a utilização do Filtro de Kalman mostrou-se uma abordagem promissora para a fusão de dados provenientes de um IMU, resultando em medições mais precisas e com menor impacto de ruídos.

REFERÊNCIAS

- ACCELEROMETERS. 2023. Disponível em: <https://support.sbg-systems.com/sc/kb/latest/inertial-measurements-units/accelerometers>. Acesso em: 15 abr. 2023.
- BIEDA, Robert. Naive Kalman Filtering for Estimation of Spatial Object Orientation, 2015.
- CASTANEDO, Federico. A Review of Data Fusion Techniques, 2013.
- COMUNICAÇÃO I2C. 2023. Disponível em: <https://embarcados.com.br/comunicacao-i2c/>. Acesso em: 9 jun. 2023.
- EIXOS do avião. 2023. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Eixos_do_avião. Acesso em: 9 jul. 2023.
- ENGERS, Vitor. Modelagem de ruídos de giroscópios MEMS comerciais para aplicações em navegação inercial, 2021.
- H. F., Durrant-Whyte. Sensor models and multisensor integration, 1988.
- HACHAJ, Tomasz. Evaluation of Pattern Recognition Methods for Head Gesture-Based Interface of a Virtual Reality Helmet Equipped with a Single IMU Sensor, 2019.
- HOWARD, Anton. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10. ed. [S.l.]: Grupo a, 2012. P. 786.
- ILLUSTRATION of a hall effect magnetometer. 2023. Disponível em: https://www.researchgate.net/figure/5-Illustration-of-a-hall-effect-magnetometer_fig12_255663586. Acesso em: 16 abr. 2023.
- INERTIAL Measurement Unit (IMU) – An Introduction. 2023. Disponível em: <https://www.advancednavigation.com/tech-articles/inertial-measurement-unit-imu-an-introduction/>. Acesso em: 26 jun. 2023.
- INTRO to Inertial Measurement Unit(IMU) Part 1. 2023. Disponível em: <https://medium.com/@niru5/intro-to-inertial-measurement-unit-imu-part-1-47f19fc7d68d>. Acesso em: 9 jul. 2023.

MAGNETIC Sensors and Alps Alpine's Magnetic Switches. 2023. Disponível em: https://tech.alpsalpine.com/e/products/faq/sensor_magnetic/magnetic_switching.html.

Acesso em: 18 jun. 2023.

MATTHEW N. SADIKU. **Elementos de eletromagnetismo**. 5. ed. [S.l.]: Bookman, 2012. P. 716.

MEMS Gyroscope Provides Precision Inertial Sensing in Harsh, High Temperature Environments. 2023. Disponível em: <https://www.analog.com/en/technical-articles/mems-gyroscope-provides-precision-inertial-sensing.html>. Acesso em: 16 abr. 2023.

MENG, Rui. DESIGN AND IMPLEMENTATION OF SENSOR FUSION FOR THE TOWED SYNTHETIC APERTURE SONAR, 2006.

OLIVEIRA SANTOS, Pedro Paulo Gomes Domingues de. **MODELAGEM E DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS DE SENSORES INERCIAIS MEMS**. [S.l.], 2016. Disponível em: <http://mtc-m21b.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m21b/2016/07.25.14.26/doc/publicacao.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2023.

OZYAGCILAR, Talat. Implementing a Tilt-Compensated eCompass using Accelerometer and Magnetometer Sensors, 2012.

OZYAGCILAR, Talat. Layout Recommendations for PCBs Using a Magnetometer Sensor, 2015.

PIPPARD, A.B. **Magneto-resistance in Metals**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. (Cambridge Studies in Low Temperature Physics). ISBN 9780521326605.

PORATH, Mauricio. Avaliação metrológica de girômetros MEMS e sua aplicação em testes de inclinação de modelos de embarcações, 2014.

REDDY, Niranjan. **Intro to Inertial Measurement Unit(IMU)**. 2023. Disponível em: <https://medium.com/@niru5/intro-to-inertial-measurement-unit-imu-part-1-47f19fc7d68d>. Acesso em: 10 abr. 2023.

SARAIVA, Fábio. Propriedades de um acelerômetro eletrônico e possibilidades de uso no ensino de mecânica, 2013.

TRACKIMU: Head Tracking For Video Games Using IMU. 2023. Disponível em: <https://www.hackster.io/movsensllc/trackimu-head-tracking-for-video-games-using-imu-7b6daf>. Acesso em: 26 jun. 2023.