



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Mariana Ortolan Milanez

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS SUJEITAS AO  
COLAPSO PROGRESSIVO CONSIDERANDO SUA RESPOSTA  
ESTRUTURAL GLOBAL**

Florianópolis  
2022

Mariana Ortolan Milanez

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS SUJEITAS AO  
COLAPSO PROGRESSIVO CONSIDERANDO SUA RESPOSTA  
ESTRUTURAL GLOBAL**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Wellison José de Santana Gomes, Dr.

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Milanez, Mariana Ortolan

ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS SUJEITAS AO  
COLAPSO PROGRESSIVO CONSIDERANDO SUA RESPOSTA ESTRUTURAL  
GLOBAL / Mariana Ortolan Milanez ; orientador, Wellison  
José de Santana Gomes, 2022.

102 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Confiabilidade de sistemas. 3.  
Colapso progressivo. 4. Modos de falha dominantes. 5.  
Kriging. I. Gomes, Wellison José de Santana. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós  
Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

Mariana Ortolan Milanez

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS SUJEITAS AO  
COLAPSO PROGRESSIVO CONSIDERANDO SUA RESPOSTA  
ESTRUTURAL GLOBAL**

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca  
examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. André Teófilo Beck, PhD  
Universidade de São Paulo

Prof. André Jacomel Torii, Dr.  
Universidade Federal da Integração Latino-Americana

Prof. Rafael Holdorf Lopez, PhD  
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi  
julgado adequado para obtenção do título de doutor em Engenharia Civil.

---

Coordenação PPGEC/UFSC

---

Prof. Wellison José de Santana Gomes, Dr.  
Orientador

Florianópolis, 2022.

Este trabalho é dedicado a minha mãe, Rosana, por sempre me apoiar e me incentivar incondicionalmente.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, por me dar força e coragem para enfrentar todos os desafios presentes na vida e na elaboração desse trabalho. Agradeço ao meu pai, a minha mãe, e ao meu irmão por servirem de base e me apoiarem sempre, mostrando a importância do trabalho, da perseverança e da confiança. Obrigada, mãe, por simplesmente parar para me ouvir falando sobre os temas contidos no trabalho, mesmo sendo completamente leiga no assunto abordado neste trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Professor Wellison, por toda a sua atenção e contribuição, e por todos os ensinamentos compartilhados ao longo de tantas reuniões de segunda-feira. Agradeço aos membros da banca, por aceitarem o convite de fazer suas contribuições ao trabalho. Agradeço a todos os funcionários do PPGEC, em especial a Priscila da secretaria, por sempre resolver nossos problemas burocráticos. Agradeço a CAPES, pela bolsa de estudos concedida.

Agradeço aos amigos e colegas da salinha e do CORE, por toda a troca de conhecimento e momentos de alegria compartilhados. Agradeço aos amigos que a UFSC me deu, por tornarem esse caminho mais leve. Agradeço aos amigos de longa data, por serem sempre um ombro amigo. Enfim, minha gratidão a todos que de alguma forma foram importantes para que esse sonho se tornasse realidade!

*“If you get tired,  
learn to rest, not to quit”  
(BANKSY)*

## RESUMO

A análise da confiabilidade de sistemas estruturais redundantes pode ser uma tarefa desafiadora por duas razões principais. A primeira delas está associada ao esforço computacional envolvido nas diversas avaliações da função de estado limite, necessárias para estimar a probabilidade de falha. A segunda razão está relacionada à dificuldade na identificação e combinação de diversos modos de falha, que ocorrem nos sistemas estruturais. Além disso, os modos de falha existentes no sistema estrutural podem ser estatisticamente dependentes, o que torna a análise ainda mais complexa. Neste trabalho, é proposta uma abordagem para lidar com estas dificuldades encontradas ao estimar-se a probabilidade de falha de estruturas sujeitas ao colapso progressivo. Nela, utiliza-se a resposta estrutural global da estrutura em conjunto com o metamodelo Kriging, em uma abordagem de aprendizado ativo. A resposta global é obtida por meio de um modelo mecânico que adequadamente representa as sequências que acarretam a falha do sistema, e por conta disso as dependências entre os modos de falha são diretamente endereçadas. O modelo mecânico, que representa o comportamento não linear da estrutura, é construído com o auxílio do programa MASTAN, que emprega o método dos elementos finitos para obter a resposta estrutural. Com o intuito de reduzir o número de avaliações do modelo mecânico, a função de estado limite é substituída pelo metamodelo Kriging, e é empregado o método de Monte Carlo simples, considerando-se um processo de aprendizado ativo, para efetuar as análises de confiabilidade. Neste processo, novos pontos são iterativamente escolhidos, a função de estado limite original é avaliada para estes pontos, e as informações obtidas são utilizadas com o intuito de melhorar a precisão da predição obtida. No processo de escolha dos pontos, diferentes funções de aprendizado foram avaliadas para encontrar a que melhor se adequa aos problemas abordados neste trabalho. Com isso, além de estimar a probabilidade de falha dos sistemas sujeitos ao colapso progressivo, a abordagem proposta é capaz de identificar os modos de falha dominantes, com base nos pontos selecionados ao longo do processo de aprendizagem ativa. A metodologia proposta é aplicada em quatro exemplos, comumente encontrados na literatura, e foi possível obter resultados precisos em todas as análises, com diferenças nos índices de confiabilidade inferiores a 1,06%, em relação à mesma. A abordagem baseada na análise da resposta estrutural global da estrutura torna a resolução do problema mais simples do ponto de vista probabilístico, embora aumente a complexidade do modelo mecânico. Além disso, observou-se que o uso do metamodelo Kriging reduz drasticamente o esforço computacional necessário para obter os resultados. Considerando-se um dos problemas analisados, a resolução demandou, aproximadamente, 7 horas por meio da metodologia proposta e 45 horas utilizando-se o método de Monte Carlo simples, indicando uma redução de 85%. Por fim, a abordagem se mostrou ainda capaz de identificar os modos de falha que possuem maior influência na probabilidade de falha.

**Palavras-chave:** Confiabilidade de sistemas. Colapso progressivo. Modos de falha dominantes. Kriging.

## ABSTRACT

Structural reliability analysis of redundant systems can be a challenging task for two main reasons. The first one is related to the computational demands associated with the performance function evaluations, necessary to estimate the failure probabilities. The second reason is related to the difficulties in the identification and combination of the failure modes. Moreover, the failure modes can be statistically dependent, which increases the complexity of the problem. In this thesis, an approach to deal with the tasks involved in the failure probability estimation of redundant systems is proposed. The global structural response and the Kriging surrogate model considering an active learning process are used. The global structural response is obtained from a mechanical model that adequately represents the failure sequences, and the dependencies among failure modes are directly addressed. The mechanical model is built by using the software MASTAN, which employs the finite element method to obtain the structural response. To reduce the number of mechanical model evaluations, the limit state function is replaced by the Kriging meta-model whenever possible. Then, Monte Carlo simulation in an active learning way, where new samples are iteratively chosen, and evaluated using the original performance function, and this information is used to improve the prediction accuracy. Three different learning functions are tested and the performance of each one is evaluated. When applying the more suitable performance function, the approach is usually capable of identifying all the dominant failure modes. The approach was applied in the solution of four examples from the literature, leading to accurate results in terms of the estimated failure probabilities in all cases. Differences in the reliability indices in comparison with results from the literature were below 1,06%. The approach based on the analysis of the global structural response makes solving the problem simpler from a probabilistic point of view, although it increases the complexity of the mechanical model. Furthermore, the metamodel is capable of drastically decreasing the computational demand. For one of the problems, the computational time was reduced from 45 hours to 7 hours when combining simple Monte Carlo with the proposed approach which means a decrease of 85%. Furthermore, the approach was capable of identifying the failure modes which have more impact on the estimated failure probabilities, without the need for extra model evaluations.

**Keywords:** Structural system reliability analysis. Progressive collapse. Dominant failure modes. Kriging.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Equação de estado limite, $g(\mathbf{x})$ , e representação dos domínios de falha, $D_f$ , e de segurança, $D_s$ . . . . .	24
Figura 2 – Aproximação do domínio de falha utilizando pelo FORM. . . . .	27
Figura 3 – Distribuição dos pontos no espaço amostral. . . . .	31
Figura 4 – Seção transversal da viga de concreto armado. . . . .	32
Figura 5 – Valores médios obtidos para o do índice de confiabilidade considerando-se os métodos WASM e SMC com diferentes tamanhos de amostra. . . . .	33
Figura 6 – (a) Treliça isostática que representa um sistema em série (b) Ligação em série dos elos que representam sistema. . . . .	36
Figura 7 – (a) Representação de um sistema em paralelo considerando (a) redundância ativa; (b) redundância passiva. . . . .	37
Figura 8 – (a) Representação de um sistema híbrido. (b) Representação dos modos de falha. . . . .	39
Figura 9 – Representação da árvore de eventos da estrutura apresentada na Figura 8 (a). . . . .	40
Figura 10 – Barra de comprimento $LB$ inserida no interior de um tubo de comprimento $LT$ . . . . .	41
Figura 11 – Influência do parâmetro $p_k$ na função de correlação. . . . .	47
Figura 12 – Amostragem por hipercubo latino considerando 2 variáveis aleatórias e 5 realizações. . . . .	49
Figura 13 – Fluxograma do procedimento de aprendizado ativo utilizando Kriging e o Método de Monte Carlo simples. . . . .	52
Figura 14 – Exemplo 1: Pontos de controle adicionados (a) função- $U$ , (b) função- $EFF$ , e (c) função- $U_{WS}$ , respectivamente. . . . .	56
Figura 15 – Exemplo 1: Diagrama de caixa da probabilidade de falha considerando 10 repetições do algoritmo . . . . .	57
Figura 16 – Exemplo 1: Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo. . . . .	58
Figura 17 – Exemplo 2: Pontos de controle adicionados utilizando (a) função- $U$ , (b) função- $EFF$ , e (c) função- $U_{WS}$ , respectivamente. . . . .	59
Figura 18 – Exemplo 2: Diagrama de caixa da probabilidade de falha considerando 10 repetições do algoritmo. . . . .	60
Figura 19 – Exemplo 2: Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo. . . . .	60
Figura 20 – Exemplo 3: Diagrama de caixa da probabilidade de falha considerando 10 repetições do algoritmo . . . . .	61
Figura 21 – Exemplo 3: Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo. . . . .	62
Figura 22 – Representação do comportamento elastoplástico perfeito. . . . .	65
Figura 23 – Representação da análise incremental. . . . .	66

Figura 24 – Representação da resposta estrutural global, $\lambda_{P_{lim}}$ , para um sistema estrutural sujeito ao colapso progressivo com grau de redundância igual a 1. . . . .	69
Figura 25 – Representação do domínio de falha e do fator de carga limite $\lambda_{P_{lim}}$ . . . . .	70
Figura 26 – Treliça de 6 barras estaticamente indeterminada. . . . .	71
Figura 27 – (a) Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo para todos os valores de $\lambda_P$ . (b) Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo para valores de $\lambda_P \geq 1,1$ . . . . .	73
Figura 28 – (a) Critério de parada ao longo do processo iterativo para todos os valores de $\lambda_P$ . (b) Critério de parada ao longo do processo iterativo para valores de $\lambda_P \geq 1,1$ . . . . .	74
Figura 29 – Estrutura de treliça de ponte. . . . .	75
Figura 30 – (a) Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo para todos os valores de $\lambda_P$ . (b) Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo para valores de $\lambda_P \geq 1,1$ . . . . .	76
Figura 31 – (a) Critério de parada ao longo do processo iterativo para todos os valores de $\lambda_P$ . (b) Critério de parada ao longo do processo iterativo para valores de $\lambda_P \geq 1,1$ . . . . .	77
Figura 32 – Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo. . . . .	80
Figura 33 – Sequências de falha identificadas ao longo do processo iterativo. . . . .	81
Figura 34 – Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo. . . . .	82
Figura 35 – Sequências de falha identificadas ao longo do processo iterativo. . . . .	84
Figura 36 – Pórtico plano. . . . .	84
Figura 37 – Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo. . . . .	86
Figura 38 – Sequências de falha identificadas ao longo do processo iterativo. . . . .	87
Figura 39 – Treliça espacial de 25 barras. . . . .	88
Figura 40 – Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo. . . . .	89
Figura 41 – Sequências de falha identificadas ao longo do processo iterativo. . . . .	90

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Variáveis aleatórias da viga de concreto armado. . . . .	32
Tabela 2 – Detalhes de cada função de aprendizado adotada. . . . .	55
Tabela 3 – Resultados médios obtidos para o Exemplo 1. . . . .	57
Tabela 4 – Resultados médios obtidos para o Exemplo 2. . . . .	58
Tabela 5 – Resultados médios obtidos para o Exemplo 3. . . . .	61
Tabela 6 – Variáveis aleatórias da treliça de 6 barras. . . . .	71
Tabela 7 – Análise da probabilidade de falha após 254 avaliações da função de estado limite. . . . .	72
Tabela 8 – Seção transversal dos elementos da estrutura de treliça de ponte. . . .	75
Tabela 9 – Variáveis aleatórias da estrutura de treliça de ponte. . . . .	75
Tabela 10 – Análise da probabilidade de falha após 115 avaliações da função de estado limite. . . . .	75
Tabela 11 – Probabilidade de falha para a treliça de 6 barras considerando diferentes métodos. . . . .	80
Tabela 12 – Modos de falha identificados para a treliça de seis barras. . . . .	81
Tabela 13 – Probabilidade de falha para a estrutura de treliça de ponte considerando diferentes métodos. . . . .	82
Tabela 14 – Modos de falha identificados para a estrutura de treliça de ponte. . . .	83
Tabela 15 – Variáveis aleatórias do pórtico plano. . . . .	84
Tabela 16 – Propriedades dos elementos. . . . .	85
Tabela 17 – Probabilidade de falha para o pórtico plano considerando diferentes métodos. . . . .	85
Tabela 18 – Sequência de falha identificados para o Pórtico Plano. . . . .	86
Tabela 19 – Grupo de elementos da treliça espacial de 25 barras. . . . .	87
Tabela 20 – Condições de carregamento para a treliça espacial de 25 barras. . . . .	88
Tabela 21 – Variáveis aleatórias para a treliça espacial de 25 barras. . . . .	88
Tabela 22 – Probabilidade de falha para a treliça de 25 barras. . . . .	89
Tabela 23 – Modos de falha identificados para a treliça de 25 barras. . . . .	90

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

<b>FORM</b>	First Order Reliability Method
<b>SMC</b>	Simulação de Monte Carlo
<b>WASM</b>	Weighted Average Simulation Method
<b>DoE</b>	Design of Experiment
<b>LHS</b>	Latin Hypercube Sampling
<b>SST</b>	Selective Search Technique
<b>MRS</b>	Multiple Responde Surfaces
<b>BN</b>	Bayesian Networks

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	15
1.2	ESTADO DA ARTE	15
1.3	JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO	17
1.4	OBJETIVOS	18
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	18
<b>2</b>	<b>CONFIABILIDADE ESTRUTURAL</b>	<b>20</b>
2.1	INCERTEZAS NA ENGENHARIA	20
<b>2.1.1</b>	<b>Variável aleatória</b>	<b>21</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Estados limites</b>	<b>23</b>
2.2	PROBLEMA FUNDAMENTAL DE CONFIABILIDADE	24
2.3	MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE CONFIABILIDADE	26
<b>2.3.1</b>	<b>Método de Confiabilidade de Primeira Ordem</b>	<b>26</b>
<b>2.3.2</b>	<b>Método da simulação de Monte Carlo</b>	<b>29</b>
<b>2.3.3</b>	<b>Método de simulação das médias ponderadas</b>	<b>30</b>
2.4	ANÁLISE DOS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO	32
<b>3</b>	<b>CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS REDUNDANTES</b>	<b>35</b>
3.1	CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS	36
<b>3.1.1</b>	<b>Sistemas em série</b>	<b>36</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Sistemas em paralelo</b>	<b>37</b>
<b>3.1.3</b>	<b>Sistemas mistos</b>	<b>38</b>
3.2	ÁRVORE DE FALHAS E EVENTOS	39
3.3	EXEMPLO: DEPENDÊNCIA ENTRE MODOS DE FALHA	41
<b>4</b>	<b>KRIGING ADAPTATIVO</b>	<b>45</b>
4.1	KRIGING	45
<b>4.1.1</b>	<b>Formulação</b>	<b>46</b>
<b>4.1.2</b>	<b>Definição dos pontos de controle iniciais</b>	<b>48</b>
4.2	PROCESSO DE APRENDIZADO ATIVO QUE INTEGRA KRIGING COM MÉTODOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	49
<b>4.2.1</b>	<b>Escolha da função de aprendizado</b>	<b>52</b>
4.2.1.1	Exemplo 1: Sistema em série com 4 modos de falha	55
4.2.1.2	Exemplo 2: Função Rastringin modificada	57
4.2.1.3	Exemplo 3: Resposta dinâmica de um oscilador não-linear	60
<b>5</b>	<b>MODELO MECÂNICO E FORMULAÇÃO DA FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE</b>	<b>64</b>
5.1	MODELO MECÂNICO	64
<b>5.1.1</b>	<b>Modelo constitutivo</b>	<b>64</b>

<b>5.1.2</b>	<b>Análise estrutural não linear</b>	<b>65</b>
5.1.2.1	Análise incremental-iterativa	65
5.2	RESPOSTA GLOBAL DO SISTEMA E FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE	68
<b>5.2.1</b>	<b>Influência do fator de carga aplicado</b>	<b>70</b>
5.2.1.1	Exemplo 1: Treliça de 6 barras estaticamente indeterminada	71
5.2.1.2	Exemplo 2: Estrutura de treliça de ponte	72
5.3	IDENTIFICAÇÃO DOS MODOS DE FALHA DOMINANTES	78
<b>6</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>79</b>
6.1	EXEMPLO 1: TRELIÇA DE SEIS BARRAS	79
<b>6.1.1</b>	<b>Análise da probabilidade de falha</b>	<b>79</b>
<b>6.1.2</b>	<b>Análise dos modos de falha dominantes</b>	<b>80</b>
6.2	EXEMPLO 2: ESTRUTURA DE TRELIÇA DE PONTE	81
<b>6.2.1</b>	<b>Análise da probabilidade de falha</b>	<b>82</b>
<b>6.2.2</b>	<b>Análise dos modos de falha dominantes</b>	<b>83</b>
6.3	EXEMPLO 3: PÓRTICO PLANO	83
<b>6.3.1</b>	<b>Análise da probabilidade de falha</b>	<b>85</b>
<b>6.3.2</b>	<b>Análise dos modos de falha dominantes</b>	<b>85</b>
6.4	EXEMPLO 4: TRELIÇA ESPACIAL DE 25 BARRAS	87
<b>6.4.1</b>	<b>Análise da probabilidade de falha</b>	<b>89</b>
<b>6.4.2</b>	<b>Análise dos modos de falha dominantes</b>	<b>90</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>92</b>
7.1	CONCLUSÕES GERAIS	92
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	93
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>95</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os sistemas estruturais de engenharia estão sujeitos a diferentes tipos de incertezas. Estas incertezas podem estar relacionadas à dispersão das propriedades dos materiais, da geometria dos elementos, do efeito dos carregamentos aplicados, às simplificações de cálculo, dentre outras. Uma prática comum na elaboração de projetos de engenharia com o intuito de endereçar o efeito das incertezas é assumir valores nominais para estes parâmetros, empregando-se fatores de segurança com o intuito de mitigar o risco. Neste caso, a análise fica restrita à adequada calibração de tais coeficientes e pode resultar em projetos conservadores (YANG *et al.*, 2015). Por outro lado, com o amplo desenvolvimento da teoria da confiabilidade estrutural, a consideração das incertezas de forma probabilística têm se tornado uma etapa indispensável do projeto de estruturas com o intuito de encontrar um balanço entre segurança e economia (XING; JIANG, T.; HAO, 2021).

Um sistema estrutural pode estar sujeito a diferentes modos de falha que podem ocorrer ao longo de sua vida útil, e até mesmo gerar o colapso do mesmo. Tratando-se de sistemas estruturais redundantes, que são aqueles nos quais o colapso tende a ocorrer de forma progressiva, a análise de confiabilidade envolve a identificação e a combinação de todos os diferentes modos de falha que podem ocorrer. Além disso, os modos de falha que ocorrem nos sistemas estruturais redundantes encontrados na engenharia são estatisticamente dependentes (MUROTSU *et al.*, 1980; XING; JIANG, T.; HAO, 2021). Estas dependências podem ser oriundas, por exemplo, da existência de variáveis aleatórias que influenciam simultaneamente na ocorrência de diferentes modos de falha (GALAMBOS, 1990; HENWADI; FRANGOPOL, 1994). Como é visto ao longo deste trabalho, a não consideração dessas dependências na estimativa da probabilidade de falha pode comprometer consideravelmente os resultados obtidos. Por outro lado, a análise da confiabilidade de sistemas estruturais demanda um alto custo computacional, visto que muitas avaliações do modelo mecânico são necessárias para que resultados precisos sejam obtidos. Esses empecilhos tornam a análise da confiabilidade de sistemas sujeitos ao colapso progressivo bastante desafiadora, e estão entre as razões para os estudos relativamente recentes que têm sido desenvolvidos nesta área. E podem ser uma das razões para os estudos encontrados nesta área serem relativamente recentes.

## 1.2 ESTADO DA ARTE

Nos últimos anos, o desenvolvimento de metodologias para identificar os modos de falha dominantes, com maior influência na probabilidade de falha, tem sido o escopo de muitos estudos. Estes estudos envolvem, por exemplo, técnicas de busca seletiva (KIM *et al.*, 2013), métodos de superfície de resposta (JIANG, Y. *et al.*, 2020), Redes probabi-

lísticas Bayesianas (YAZDANI; SHAHIDZADEH; TAKADA, 2020), *branch and bounds* (LEE, Y. J.; SONG, 2012), mudanças nas características do sistema (ZHOU *et al.*, 2014) e algoritmos de evolução diferencial (XING; JIANG, T.; HAO, 2021). O efeito das dependências entre os modos de falha também tem sido escopo de muitos estudos, por exemplo, usando Cópulas (HE; LU; LI, X., 2018; SUN *et al.*, 2019; FANGA; PAN, R.; HONG, 2020) e abordagens baseadas em matrizes (SONG; KANG, 2009).

Tratando-se de métodos com o intuito de reduzir o número de simulações necessárias para computar as probabilidades de falha, abordagens como *Subset simulation* (AU; BECK, J., 2001; PAPADOPOULOS *et al.*, 2012) e o método das Médias Ponderadas (RASHKI; MIRI; MOGHADDAM, 2012; OKASHA, 2016) tem sido propostos. Além disso, o custo computacional pode ser reduzido drasticamente ao considerar a substituição do modelo mecânico por um metamodelo, construído com um pequeno número de avaliações do modelo original, capaz de prever adequadamente a resposta do sistema. A abordagem baseada em metamodelos, também conhecidos como modelos substitutos, tem mostrado resultados promissores nas últimas décadas em áreas tais como otimização e confiabilidade estrutural (LEE, T. H.; JUNG, 2008; BASUDHAR; MISSOUM, 2009; DUBOURG; SUDRET; DEHEEGER, 2013; MENG *et al.*, 2019; TEIXEIRA; NOGAL; O'CONNOR, 2021; JIANG, C. *et al.*, 2021).

Dentre o diferentes tipos de metamodelos aplicados em análises de confiabilidade, podemos citar redes neurais artificiais (GIOVANIS *et al.*, 2017; XIAO, N. C.; ZUO; ZHOU, 2018; CHOJACZYK *et al.*, 2015; GOMES, 2019, 2020), superfícies de resposta (JIANG, Y. *et al.*, 2020; ROUSSOULY; PETITJEAN; SALAUN, 2013), máquinas de vetores de suporte (ROY; CHAKRABORTY, 2020; PAN, Q.; DIAS, 2017) e Kriging, ou Krigagem, (KAYMAZ, 2005; HUANG; CHEN; ZHU, 2016). Recentemente, a combinação de métodos de confiabilidade com o metamodelo Kriging tem sido o escopo de diversas pesquisas, principalmente devido a sua característica de estimar a predição do modelo e a variância da mesma. Uma vez que a precisão da predição é diretamente dependente dos pontos de controle utilizados na construção do metamodelo, estratégias de aprendizado ativo tem sido desenvolvidas (ECHARD; GAYTON; LEMAIRE, 2011; BICHON; MCFARLAND; MAHADEVAN, 2011; YANG *et al.*, 2015; YANG; MI; DENG, 2019; FENG *et al.*, 2020; XIAO, N. C.; YUAN; ZHOU, 2020; KROETZ *et al.*, 2020; LING; LU; ZHANG, 2020; YUAN *et al.*, 2020; YI *et al.*, 2021; ZHANG *et al.*, 2021). Essas estratégias utilizam a variância da predição, bem como outras informações, para escolher os novos pontos de controle a serem adicionados ao DoE (*Design of Experiment*, ou projeto de experimentos) com o intuito de melhorar a precisão da predição. Na confiabilidade estrutural, a melhoria na precisão pode ser obtida ao selecionar novos pontos de controle localizados no entorno do estado limite entre falha e segurança, uma vez que essa é a região com maior importância para a estimativa da confiabilidade.

### 1.3 JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO

A análise da confiabilidade de sistemas é feita, na maioria das vezes, por meio de metodologias que consideram árvores de falha, por onde todas as sequências de falha devem ser avaliadas. Porém, considerando-se estruturas sujeitas ao colapso progressivo, a complexidade da análise aumenta proporcionalmente ao aumento do número de elementos estruturais envolvidos em cada sequência de falha, tornando o problema de difícil solução. Entretanto, a análise da confiabilidade de sistemas estruturais complexos pode ser realizada considerando a resposta estrutural global do sistema, o que elimina a necessidade de identificar diretamente e combinar os diferentes modos de falha. Neste caso, modelos mecânicos que representam adequadamente o comportamento redundante do sistema estrutural são criados, e sua resposta é utilizada para prever a probabilidade de falha do sistema. Como exemplo, podemos considerar um modelo mecânico de uma estrutura treliçada, que é capaz de representar o seu comportamento quanto à flambagem ou à tensão de escoamento das barras. Esse modelo mecânico pode ser combinado com métodos de confiabilidade estrutural como o método de Monte Carlo, por exemplo, tornando possível endereçar diretamente as dependências estatísticas entre os modos de falha e identificar os modos dominantes.

Contudo, a análise mecânica de sistemas estruturais redundantes, com o intuito de obter a resposta global do sistema, pode também se tornar complexa em parte devido aos vários graus de liberdade presentes em sistemas com um número elevado de componentes. Esta complexidade pode estar relacionada ainda à dificuldade de representar adequadamente o comportamento não linear da estrutura e ao elevado custo computacional da análise. Combinar este tipo de modelo mecânico com o método de Monte Carlo simples, por exemplo, pode inviabilizar a análise em termos de esforço computacional, uma vez que muitas simulações são necessárias para computar as baixas probabilidades de falha dos sistemas estruturais redundantes encontrados em problemas de engenharia.

Por fim, constata-se a existência de uma lacuna quanto ao aperfeiçoamento da formulação de análises de confiabilidade estrutural no que diz respeito a estruturas sujeitas à falha progressiva dos elementos. Pode-se destacar como pontos importantes que levam à dificuldade da resolução dessa classe de problemas: (i) a complexidade relacionada à formulação das árvores de falha (ii) a identificação e combinação de todos os modos de falha e (iii) a consideração da dependência estatística entre eles. Por outro lado, pode-se citar ainda o elevado custo computacional relacionado tanto à análise mecânica, considerando-se as não linearidades envolvidas, quanto às várias simulações necessárias para estimar a probabilidade de falha.

## 1.4 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho consiste em analisar a confiabilidade de estruturas sujeitas ao colapso progressivo utilizando a resposta global da estrutura, obtida por meio de um modelo mecânico que representa adequadamente o comportamento estrutural do sistema. Como objetivos específicos, tem-se:

- a) Propor uma abordagem computacionalmente viável para a análise de sistemas estruturais utilizando metamodelos disponíveis na literatura;
- b) Investigar a equivalência entre a probabilidade de falha do sistema estimada considerando um modelo estrutural que adequadamente represente seu comportamento e aquela estimada empregando árvores de falha;
- c) Investigar a consideração das dependências entre modos de falha quando analisada a confiabilidade de sistemas sujeitos ao colapso progressivo;
- d) Identificar as sequências de falha dominantes a partir de uma estratégia adaptativa do metamodelo considerando-se a resposta estrutural global;

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho está estruturado em sete capítulos. No Capítulo 2, apresentam-se conceitos relacionados à teoria da confiabilidade estrutural. Nele são abordados e discutidos, por meio de um exemplo numérico e de referências da literatura, alguns detalhes referentes aos métodos de confiabilidade comumente utilizados para o cálculo de probabilidades de falha.

O Capítulo 3 expõe detalhes acerca da confiabilidade de sistemas, seguida da abordagem relacionada a sistemas redundantes. Neste capítulo é apresentado um exemplo de cunho acadêmico, com o intuito de avaliar a influência das dependências entre os modos de falha na resposta final. Por fim, são discutidas algumas abordagens apresentadas na literatura para lidar com essa classe de problema.

No Capítulo 4 são apresentados os detalhes relacionados à formulação e à obtenção dos parâmetros do metamodelo Kriging. Apresenta-se a metodologia de aprendizado ativo, utilizada na análise de confiabilidade estrutural. Ao final do capítulo, apresentam-se alguns exemplos numéricos que serviram de base para a escolha da função de aprendizado adotada nesta pesquisa.

No Capítulo 5 são apresentados os detalhes relacionados à análise mecânica. Expõem-se alguns conceitos relacionados à análise não linear, necessária para avaliar o colapso progressivo, e à função de estado limite que considera a resposta estrutural global. Ao final do capítulo, são apresentados alguns exemplos numéricos utilizados para validar os parâmetros da análise mecânica e a abordagem utilizada para identificar os modos de falha dominantes.

No Capítulo 6 quatro problemas relacionados ao colapso progressivo são avaliados por meio do procedimento proposto, com o intuito de avaliar a sua eficiência e precisão. Estes resultados são ainda comparados com os obtidos na literatura por meio de outros métodos.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões observadas com a aplicação das formulações e procedimentos envolvidos neste trabalho. Por fim, são apresentadas algumas sugestões de trabalhos futuros, que possam ser realizados com o intuito de aperfeiçoar as técnicas desenvolvidas até então.

## 2 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Os sistemas estruturais devem ser projetados para cumprir determinados requisitos ao longo de sua vida útil. De forma geral, estes requisitos englobam aspectos relacionados à segurança e funcionalidade da estrutura, que podem ser equacionados em forma de estados limites. O objetivo deste capítulo é apresentar os principais conceitos relacionados ao equacionamento dos estados limites que influenciam na segurança da estrutura, bem como os aspectos associados à confiabilidade estrutural. Com esse intuito, realiza-se primeiramente uma breve contextualização acerca da definição de incertezas e variáveis aleatórias e de como elas podem ser empregadas na análise de confiabilidade, seguida pela apresentação dos estados limites e do problema fundamental de confiabilidade. Na última seção, apresentam-se os métodos originalmente utilizados para a obtenção da probabilidade de falha de elementos estruturais e suas modificações. Na sequência, um exemplo numérico é apresentado com o intuito de comparar dois métodos de simulação encontrados na literatura. Este exemplo ilustra que tais métodos podem ainda não ser suficientes para lidar com os obstáculos relacionados às análises de confiabilidade. Por fim, metodologias recentemente desenvolvidas visando um melhor desempenho computacional são apresentadas.

### 2.1 INCERTEZAS NA ENGENHARIA

A elaboração de um projeto de engenharia estrutural envolve, dentre outros aspectos, a caracterização da estrutura que está sendo projetada. Esta caracterização pode englobar desde a geometria dos elementos, os carregamentos aplicados, as resistências e respostas estruturais dos materiais até os métodos de cálculo utilizados na obtenção da resposta da estrutura. Entretanto, as características da estrutura e os erros de modelo não são perfeitamente conhecidos, e não se pode assegurar que as prescrições de projeto serão perfeitamente executadas, o que gera incertezas. As incertezas estão inerentes em qualquer sistema de engenharia e para que um problema seja adequadamente analisado, os seus efeitos precisam ser considerados (BULLEIT, 2008).

A origem das incertezas, e a maneira de lidar com elas, é um tema bastante discutido por estatísticos, cientistas, engenheiros e outros especialistas. Tratando-se da engenharia estrutural, as incertezas comumente encontradas podem ser classificadas como intrínsecas, epistêmicas e de erro humano. As incertezas do tipo intrínseca são aquelas que fazem parte da aleatoriedade natural dos processos envolvidos e, por consequência, não podem ser eliminadas. Exemplos deste tipo de incerteza são carregamentos gerados pela ação do vento e por tempestades, cargas induzidas por terremotos, a resistência dos materiais adotados, dentre outros. Como incerteza epistêmica, entende-se aquelas que podem ser reduzidas ou eliminadas por meio da coleta de uma maior quantidade de dados, pois está relacionada ao domínio e ao conhecimento do problema. Como exemplo deste

tipo de incerteza pode-se citar as decisões tomadas durante a elaboração do projeto e na construção do modelo que representa o comportamento da estrutura. Além disso, pode-se citar o conhecimento incompleto dos fenômenos envolvidos na vida útil de uma estrutura. O erro humano, por fim, é caracterizado pelas incertezas geradas pela ação direta do homem, seja por imprudência ou negligência, e pode afetar a segurança e a vida útil dos sistemas estruturais (DER KIUREGHIAN; DITLEVSEN, 2009; BECK, A. T., 2019).

Os sistemas estruturais devem ser projetados para atingir um determinado nível de segurança ao longo da sua vida útil, além de serem economicamente viáveis. Uma das formas gerais e tradicionais de atingir esses objetivos na elaboração de projetos, abordando o efeito das incertezas de forma determinística, é utilizar-se coeficientes de segurança, que minoram as resistências e majoram os carregamentos. Entretanto, considerar o efeito das incertezas por meio do uso de coeficientes de segurança pode não garantir a funcionalidade e a segurança da estrutura, uma vez que grande parte das incertezas inerentes aos sistemas estruturais não possuem natureza determinística. As incertezas podem ser ainda endereçadas na análise estrutural de forma probabilística, onde os fatores que englobam a sua caracterização são considerados variáveis aleatórias. Neste caso, a segurança da estrutura pode ser avaliada conforme a probabilidade de ocorrência dos cenários de falha, definidos por meio dos estados limite (BULLEIT, 2008), e não fica dependente da calibração de procedimentos normativos que fornecem os coeficientes de segurança.

### 2.1.1 Variável aleatória

Como variável aleatória, entende-se uma variável que pode assumir um valor real,  $x$ , diferente para cada realização de um evento pertencente a um espaço amostral, que representa o domínio da variável aleatória. As variáveis aleatórias podem ser do tipo discreta ou contínua. As variáveis discretas são caracterizadas por pertencerem a um domínio formado por um número finito, ou infinito contável, de pontos, como o número de elementos que falham em uma determinada amostra, por exemplo. Já o domínio das variáveis aleatórias contínuas é formado por um número infinito de pontos como, por exemplo, as grandezas de comprimento, área, volume, dentre outros (MONTGOMERY; RUNGER, 2014).

Dada uma variável aleatória qualquer  $X$ , a probabilidade de ocorrência do evento  $\{X \leq x\}$  é entendida como a probabilidade da variável aleatória  $X$  assumir um valor menor ou igual a  $x$ , a qual atribui-se o nome de função de distribuição acumulada  $F_X(x)$ . A função de distribuição acumulada é definida para qualquer valor real  $x$ , onde  $-\infty \leq x \leq \infty$ , e pode ser representada da seguinte forma:

$$F_X(x) = P[\{X \leq x\}] \quad (1)$$

Para que o conteúdo de probabilidade em um determinado ponto possa ser endere-

gado, a função de distribuição acumulada de probabilidades é derivada com relação à  $x$ , obtendo-se assim a função de densidade de probabilidade  $f_X(x)$ , que é dada por:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2)$$

A descrição das variáveis aleatórias pode ser realizada utilizando-se o seu valor esperado, ou valor médio,  $\mu_X$  e sua variância  $Var(X)$ , que representa uma medida de dispersão dos dados. Estes valores podem ser obtidos por meio das Equações (3) e (4), respectivamente (MONTGOMERY; RUNGER, 2014).

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \quad (3)$$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) dx \quad (4)$$

onde  $Var(X)$  é a variância, caracterizada como uma medida da dispersão do valor da variável aleatória em torno de sua média e  $\sigma_X$  é representada o desvio padrão, caracterizado como a raiz quadrada da variância.

Outra forma de avaliar a dispersão de uma variável aleatória em relação à sua média, e que é usualmente empregada em problemas de engenharia, consiste no coeficiente de variação (*c.v.*), uma grandeza adimensional dada por:

$$c.v. = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (5)$$

As definições apresentadas acima correspondem à situação em que apenas uma variável aleatória,  $X$ , está presente no problema. Entretanto, isso não ocorre nos problemas de engenharia onde diversas variáveis aleatórias são encontradas. Considerando-se todas as variáveis aleatórias presentes em um dado problema, representadas pelo vetor de variáveis aleatórias  $\mathbf{X}$ , o valor de uma variável pode, ou não, ter influência sobre o valor de outra. À situação onde a ocorrência de determinados valores de uma variável,  $X_1$ , não altera as probabilidades associadas a outra variável,  $X_2$ , dá-se o nome de independência, que pode ser caracterizada da seguinte forma (BECK, A. T., 2019):

$$P[\{X_1 \leq x_1\}\{X_2 \leq x_2\}] = P[\{X_1 \leq x_1\}]P[\{X_2 \leq x_2\}] \quad (6)$$

No caso de se ter  $n_{var}$  variáveis aleatórias, as probabilidades associadas podem ser descritas pela função de distribuição de probabilidade conjunta,  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , representada por:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P[\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_{n_{var}} \leq x_{n_{var}}\}] \quad (7)$$

Por fim, a função de densidade de probabilidade conjunta é definida por:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_1, \partial x_2, \dots, \partial x_{n_{var}}} \quad (8)$$

Utilizando-se os conceitos da teoria de probabilidades, a análise de confiabilidade estrutural pode ser entendida como a caracterização da ocorrência de eventos que determinam os cenários de falha, ou não falha, da estrutura. Desta forma, a verificação da probabilidade de ocorrência de cada modo de falha da estrutura é traduzida pela verificação da probabilidade de ocorrência de cada evento  $\{X \leq x\}$ , que podem ser caracterizados por estados limites. Para que isto ocorra, o problema deve ser descrito e formulado considerando-se todas as variáveis aleatórias envolvidas, que representam as incertezas inerentes ao problema, bem como todos os estados limites que influenciam na segurança da estrutura. Neste contexto, na próxima seção são abordados os conceitos de estados limites que, quando ultrapassados, podem gerar o evento falha da estrutura.

### 2.1.2 Estados limites

Ao longo de sua vida útil, uma estrutura deve atender todos os requisitos aos quais foi designada. Estes requisitos podem englobar desde a segurança para suportar os carregamentos aos quais esteja sujeita até requisitos econômicos e de sustentabilidade, por exemplo. Cada requisito de um sistema estrutural pode ser associado a um modo de falha, e pode ser quantificado por meio das chamadas funções de estado limite.

Duas categorias de estado limite são comumente utilizadas na engenharia de estruturas, elas correspondem aos estados limite último e de serviço. Como estado limite último, entende-se os requisitos que envolvem a segurança da estrutura e que, uma vez atingidos, podem comprometer a sua integridade física e gerar o colapso da mesma. Os estados limites de serviço, por sua vez, correspondem a danos locais, que afetam a durabilidade da estrutura, como formação de trincas, danos causados por fadiga, vibrações excessivas, dentre outros (BECK, A. T., 2019).

Para cada estado limite da estrutura, uma função de estado limite,  $g(\mathbf{X})$ , é formulada em função do vetor de variáveis aleatórias do problema,  $\mathbf{X}$ . A definição destas funções usualmente é feita de maneira que valores positivos representem a não ocorrência do cenário de falha da estrutura, enquanto valores negativos representam a ocorrência do cenário de falha (HASOFER; LIND, 1974). Desta forma, a fronteira entre falha e segurança ocorre quando a função de estado limite assume valores nulos, ou seja:

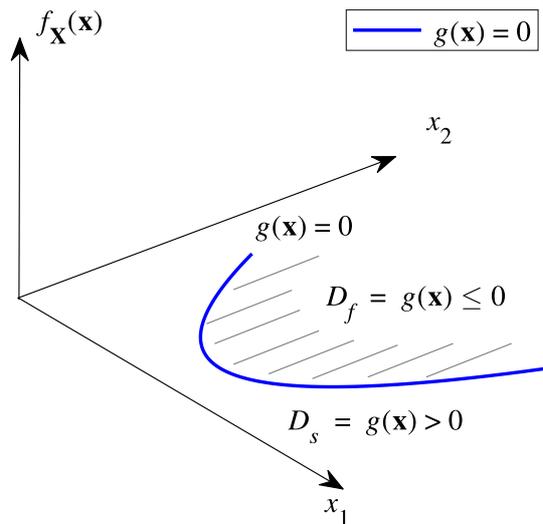
$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n_{var}}) = 0 \quad (9)$$

De acordo com o valor obtido para a função de estado limite  $g(\mathbf{X})$ , para cada modo de falha, o domínio do problema pode ser dividido em duas partes: falha,  $D_f$ , e

sobrevivência,  $D_s$ , que podem ser definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_f &= \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) \leq 0\} \\ D_s &= \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) > 0\} \end{aligned} \quad (10)$$

Figura 1 – Equação de estado limite,  $g(\mathbf{x})$ , e representação dos domínios de falha,  $D_f$ , e de segurança,  $D_s$ .



Como observado, as ocorrências de falha e segurança podem ser verificadas por meio da avaliação da função de estado limite no espaço amostral. O domínio de falha é composto por todos os pontos pertencentes ao vetor  $\mathbf{x}$  que levam a função de estado limite a valores menores ou iguais a zero, isto é  $g(\mathbf{x}) \leq 0$ , conforme ilustrado na Figura 1 (BECK, A. T., 2019).

Por meio dos conceitos apresentados nesta seção, a probabilidade de falha pode ser entendida como a medida da propensão de uma estrutura deixar de atender os requisitos de projeto, representados por meio dos modos de falha. A sua análise pode ser simplificada entendida utilizando-se os conceitos relacionados ao problema fundamental de confiabilidade, onde o problema pode ser resolvido a partir de uma variável denominada margem de segurança, conforme será descrito na próxima seção.

## 2.2 PROBLEMA FUNDAMENTAL DE CONFIABILIDADE

Tratando-se da confiabilidade de estruturas, o problema fundamental de confiabilidade pode ser representado por duas variáveis aleatórias, relacionadas à resistência do elemento,  $R$ , e à solicitação imposta,  $S$ . Neste caso, a equação de estado limite pode ser representada, na sua configuração mais simples, da seguinte forma (MELCHERS; BECK, A. T., 2018):

$$g(R,S) = R - S = 0 \quad (11)$$

A falha da estrutura será caracterizada quando a solicitação,  $S$ , exceder a resistência do elemento,  $R$ . Considerando-se  $\mathbf{X}$  o vetor de variáveis aleatórias e  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  a função de densidade de probabilidade conjunta, a probabilidade de falha, representada pela medida da tendência de violação dos estados limites, pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} P_f &= P[\{\mathbf{X} \in D_f\}] \\ &= P[\{R - S \leq 0\}] \\ &= \int_{D_f} f_{RS}(r,s) dr ds \end{aligned} \quad (12)$$

O problema fundamental de confiabilidade pode ser também descrito a partir de uma variável de margem de segurança,  $M$ , definida por meio da Equação (13). Neste caso, valores negativos de  $M$  representam a falha, valores positivos indicam a sobrevivência e valores nulos representam o limite entre falha e sobrevivência.

$$M = R - S \quad (13)$$

Uma vez que a resistência,  $R$ , e a solicitação,  $S$ , são variáveis aleatórias, a margem de segurança,  $M$ , também será uma variável aleatória. Logo, a probabilidade de falha pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_f &= P[\{M \leq 0\}] \\ &= \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm \end{aligned} \quad (14)$$

Na maioria dos problemas encontrados na engenharia, a determinação da probabilidade de falha associada à Equação (14) requer o uso de métodos de resolução. Entretanto, considerando-se o caso especial onde as variáveis aleatórias,  $R$  e  $S$ , possuem distribuição normal e são independentes, a probabilidade de falha pode ser obtida de forma analítica. Neste caso, é inicialmente necessário determinar os parâmetros de média,  $\mu_M$ , e desvio padrão,  $\sigma_M$ , dados por (MELCHERS; BECK, A. T., 2018):

$$\begin{aligned} \mu_M &= \mu_R - \mu_S \\ \sigma_M &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Por meio da transformação de Hasofer e Lind (HASOFER; LIND, 1974), conforme apresentado na Equação (16), a margem de segurança pode ser transformada em uma variável normal padrão,  $Y$ , com média nula e desvio padrão unitário.

$$Y = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (16)$$

Após realizar a transformação para o espaço normal padrão, as probabilidades associadas à variável aleatória  $M$  podem ser endereçadas por meio da função de distribuição cumulativa normal padrão  $\Phi$ , resultado em:

$$\begin{aligned} P_f &= P[M \leq 0] \\ &= P \left[ \left\{ Y \leq -\frac{\mu_M}{\sigma_M} \right\} \right] \\ &= \Phi \left( -\frac{\mu_M}{\sigma_M} \right) \\ &= \Phi(-\beta) \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $\beta$  é índice de confiabilidade de Cornell, que representa uma medida geométrica da probabilidade de falha, correspondente à distância entre a origem da distribuição de  $Y$  e o ponto onde  $m$  possui valor nulo, representando o limite entre falha e sobrevivência.

Considerando-se um problema com um número qualquer de variáveis aleatórias e com distribuição não normal, como é o caso dos problemas encontrados na engenharia de estruturas, a probabilidade de falha não pode ser obtida analiticamente conforme descrito anteriormente. Neste caso, sua solução fica restrita à integração da função conjunta de densidade de probabilidade  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , no domínio de falha  $D_f$  (DITLEVSEN; MADSEN, 1996). Assim, têm-se que:

$$P_f = \int_{D_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (18)$$

Na grande maioria das aplicações, a solução desta integral é muito complexa, tornando necessária a utilização de métodos que auxiliem sua resolução. Dentre estes métodos, incluem-se os de integração numérica, tal como a simulação de Monte Carlo, e os métodos de transformação, tais como método de confiabilidade de primeira ordem (*First Order Reliability Method* - FORM). O método FORM e o método de simulação de Monte Carlo são os mais tradicionalmente utilizados para a resolução dos problemas de confiabilidade estrutural, e serão sucintamente descritos nas próximas seções.

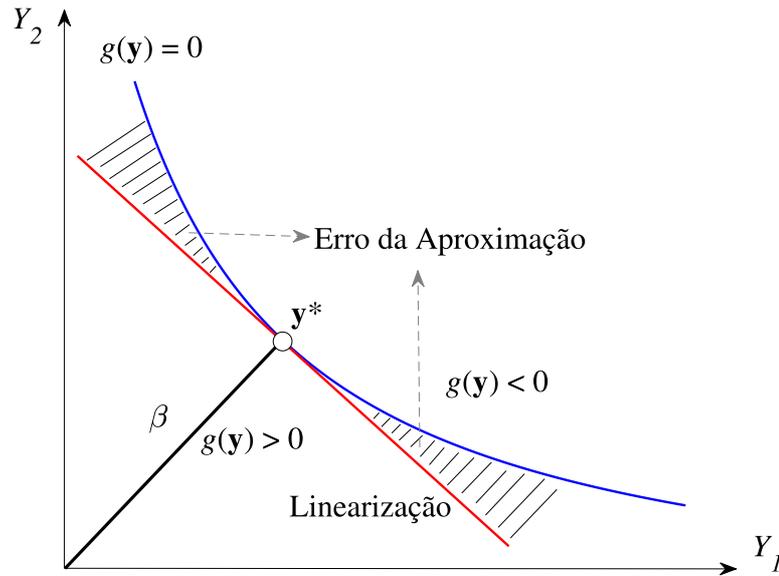
## 2.3 MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE CONFIABILIDADE

### 2.3.1 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem

O método de confiabilidade de primeira ordem consiste na realização de uma aproximação do domínio de falha do problema por meio da linearização da função de estado limite. Esta linearização é feita no chamado ponto de projeto, que equivale ao

ponto da função de estado limite mais próximo da origem do espaço normal padrão, conforme ilustrado na Figura 2 (DER KIUREGHIAN; DAKESSIAN, 1998). Desta forma, a obtenção deste ponto, que representa a menor distância entre a função de estado limite e a origem do espaço, pode ser feita utilizando-se uma formulação de otimização (MELCHERS; BECK, A. T., 2018). Esta formulação consiste em:

Figura 2 – Aproximação do domínio de falha utilizando pelo FORM.



$$\begin{aligned} \text{Encontrar: } & (y_1^*, y_2^*), \quad \text{que minimize: } d^2 = y_1^2 + y_2^2 \\ \text{Sujeito a: } & g(y_1, y_2) = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

onde  $y_1^*$  e  $y_2^*$  são as coordenadas do ponto de projeto, e  $d$  é a distância entre o ponto e a origem do espaço normal padrão.

Desta forma, inicialmente é feita a construção de uma função conjunta de distribuição de probabilidades, seguida de sua transformação para uma distribuição padrão multi-variada  $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ . A construção da função conjunta de distribuição de probabilidades  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  é feita por meio das distribuições de probabilidades marginais de cada variável aleatória  $X$ , e os coeficientes de correlação entre pares de variáveis aleatórias.

Para a situação em que as variáveis aleatórias pertencentes ao vetor  $\mathbf{X}$  possuem distribuição normal, a transformação das variáveis do espaço de projeto para o espaço normal padrão pode ser feita utilizando-se a transformação de Hasofer e Lind, apresentada na Equação (16). Considerando-se o problema fundamental de confiabilidade, apresentado na Seção 2.2, e transformando as variáveis aleatórias  $R$  e  $S$  em  $Y_1$  e  $Y_2$ , respectivamente, tem-se que:

$$g(y_1, y_2) = y_1 \cdot \sigma_R + \mu_R - y_2 \cdot \sigma_S - \mu_S \tag{20}$$

As coordenadas  $y_1^*$  e  $y_2^*$ , que fornecem a menor distância entre a função de estado limite e a origem do espaço normal padrão, podem ser obtidas isolando-se cada termo na Equação (20). Ao isolar  $y_2^*$ , derivar o quadrado da distância  $d$  com relação a  $y_1^*$  e igualar a zero para obter a condição de mínimo, tem-se que:

$$y_1^* = -y_2 \cdot \frac{\sigma_R}{\sigma_S} = -\frac{\sigma_R \cdot (\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (21)$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para obter-se a coordenada  $y_2^*$ , que resulta em:

$$y_2^* = -y_1 \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_R} = \frac{\sigma_S \cdot (\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (22)$$

Ao agrupar as equações obtidas para as coordenadas  $y_1^*$  e  $y_2^*$  e substituí-las na equação da mínima distância entre um ponto qualquer e a origem ( $d^2 = y_1^2 + y_2^2$ ), tem-se que:

$$d_{min} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (23)$$

Assim como no problema de fundamental de confiabilidade, a mínima distância entre a equação de estado limite e a origem do espaço normal padrão é chamada de índice de confiabilidade,  $\beta$ . A formulação apresentada até então para o FORM consiste em uma simplificação do problema para duas variáveis aleatórias. Para problemas de maior dimensão, torna-se necessário o uso de métodos que permitam a obtenção da mínima distância ( $\beta$ ). Para resolver o problema de otimização que busca o ponto de projeto em problemas de confiabilidade estrutural, formulado na Equação (19), utiliza-se na grande maioria dos casos o algoritmo criado, para este propósito, por Hasofer e Lind (1974). Este algoritmo consiste, basicamente, na determinação do índice de confiabilidade para um ponto inicial qualquer, no espaço normal padrão. Em seguida, é feita a linearização da função de estado limite neste ponto e, fazendo uso dos cossenos diretores, um novo ponto é determinado considerando um passo unitário. Uma melhora no método de Hasofer e Lind é realizada por meio de um ajuste de passo na busca do novo ponto utilizando-se a regra de Armijo, detalhada em Luenberger e Ye (2008). Por ser um processo iterativo, a resolução da análise de confiabilidade requer inúmeras avaliações da função de estado limite e de seu gradiente.

De acordo com o que foi abordado nesta seção, observa-se a existência de um erro associado à linearização da função de estado limite quando o método FORM é utilizado para obter a probabilidade de falha. Este erro tende a aumentar com o incremento da dimensão do problema e com a diminuição do valor do índice de confiabilidade. Assim,

para funções de estado limite altamente não-lineares, os resultados obtidos ao utilizar-se o método FORM podem não ser suficientemente precisos (NIE; ELLINGWOOD, 2000). Como alternativa, diferentes métodos foram desenvolvidos para aumentar a precisão dos resultados obtidos na análise de confiabilidade como, por exemplo, melhorias ao método da simulação de Monte Carlo, que é descrito na próxima seção.

### 2.3.2 Método da simulação de Monte Carlo

O método da simulação de Monte Carlo (SMC) é caracterizado por envolver um grande número de repetições de um experimento que pode representar, por exemplo, a resposta do comportamento de um modelo mecânico, caracterizada por um função de estado limite. O método consiste, basicamente, na geração de uma amostra aleatória com tamanho finito, obtida de acordo com a função de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias do problema. A partir da geração da amostra, analisa-se o valor da função de estado limite obtido para cada repetição do experimento (DITLEVSEN; MADSEN, 1996).

Para a determinação da probabilidade de falha, pode-se empregar uma função indicadora,  $I(\mathbf{x})$ . Para esta função, atribui-se o valor igual a um se  $\mathbf{x}_i$  pertencer ao domínio de falha e zero se  $\mathbf{x}_i$  pertencer ao domínio de segurança, onde  $i$  varia de um até o tamanho da amostra adotada. Desta forma, um valor estimado para a probabilidade de falha pode ser dado por (MELCHERS; BECK, A. T., 2018):

$$\hat{P}_f = \frac{1}{n_{MC}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{MC}} I[\mathbf{x}_i] = \frac{n_f}{n_{MC}} \quad (24)$$

onde  $n_{MC}$  é o tamanho da amostra considerada, equivalente ao número de avaliações da função de estado limite, e  $n_f$  é o número de vezes que o valor obtido para a função de estado limite pertence ao domínio de falha.

A solução obtida por meio da simulação de Monte Carlo não é exata, visto que é necessária uma amostra grande para que se obter resultados suficientemente precisos, principalmente para probabilidades com pequena ordem de grandeza. Uma estimativa do erro estatístico, presente na probabilidade de falha obtida por meio da Equação (24), é dada pela variância da probabilidade de falha estimada, que pode ser obtida da seguinte forma (BECK, A. T., 2019):

$$Var(\hat{P}_f) = \frac{1}{n_{MC}^2} \cdot \sum_{i=1}^{n_{MC}} (I(\mathbf{x}_i) - P_f)^2 \quad (25)$$

A variância dos resultados possui um valor bastante elevado para problemas com poucos pontos localizados na região de falha. Uma redução em seu valor pode ser obtida por duas formas: A primeira delas, como anteriormente citado, é aumentar significativamente o número de simulações, o que, em muitas situações, se torna inviável devido ao custo

computacional associado. A segunda alternativa é fazer uso de técnicas de redução da variância como, por exemplo, a amostragem por importância. Neste método, a redução no número requerido de simulações ocorre pois o método desloca os pontos da amostragem para regiões importantes do domínio. Mais informações sobre este e outros métodos de redução, e de confiabilidade, podem ser encontrados em Melchers e A. T. Beck (2018).

Um dos principais obstáculos relacionados à simulação de Monte Carlo se deve ao elevado número de simulações necessárias para a obtenção de resultados precisos. De acordo com A. T. Beck (2019), para obter uma probabilidade de falha com ordem de grandeza igual a  $10^{-p}$  e um coeficiente de variação de, aproximadamente,  $10^{-1}$ , são necessárias  $10^{p+2}$  amostras. Considerando-se os valores de probabilidade de falha tipicamente encontrados em problemas de engenharia estrutural, que se encontram na ordem de  $10^{-3}$  a  $10^{-6}$ , a análise pode tornar-se proibitiva. Neste contexto, diferentes métodos têm sido desenvolvidos com o intuito de reduzir o tamanho da amostra necessária para obter um resultado preciso, como é o caso da modificação do método de Monte Carlo simples, proposta por Rashki, Miri e Moghaddam (2012), que será apresentada na próxima seção.

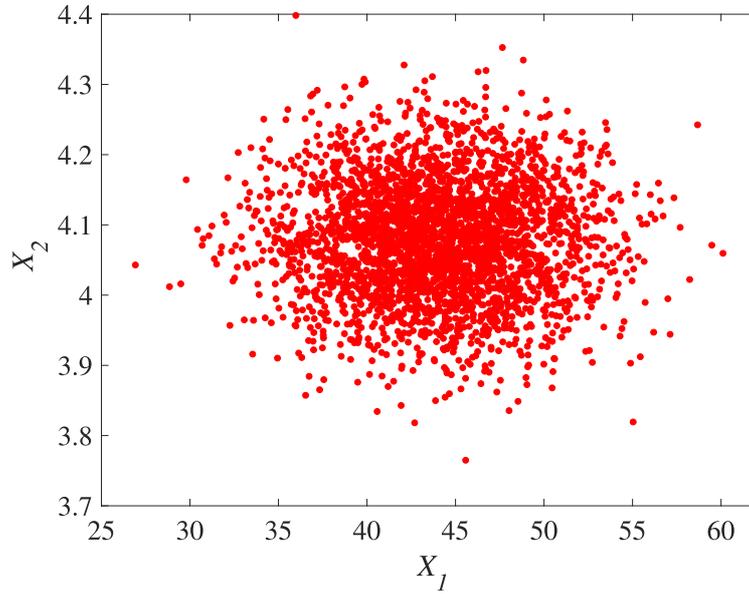
### 2.3.3 Método de simulação das médias ponderadas

O método de simulação das médias ponderadas (*Weighted Average Simulation Method* - WASM) consiste, basicamente, na determinação da probabilidade de falha por meio de uma função peso, atribuída a cada ponto amostral de acordo com a função de densidade de probabilidade de cada variável aleatória. De acordo com o proposto por Rashki, Miri e Moghaddam (2012), a abordagem consiste em determinar, inicialmente, um intervalo para cada variável aleatória. Nesta etapa, uma amostra é gerada para cada variável aleatória utilizando-se a simulação de Monte Carlo simples, e os valores máximos e mínimos obtidos são selecionados como limite superior e inferior de cada intervalo, respectivamente. Considerando-se os limites superior e inferior obtidos, uma nova amostra é gerada utilizando-se uma distribuição uniforme. Na Figura 3 é ilustrada a distribuição das amostras no espaço amostral obtidas por meio do método SMC e por meio do método WASM para duas variáveis aleatórias,  $X_1$  e  $X_2$ . Observa-se que quando utilizada a distribuição uniforme, as amostras são distribuídas de forma a cobrir todo o espaço amostral e, conseqüentemente, mais pontos amostrais estão localizadas no domínio de falha.

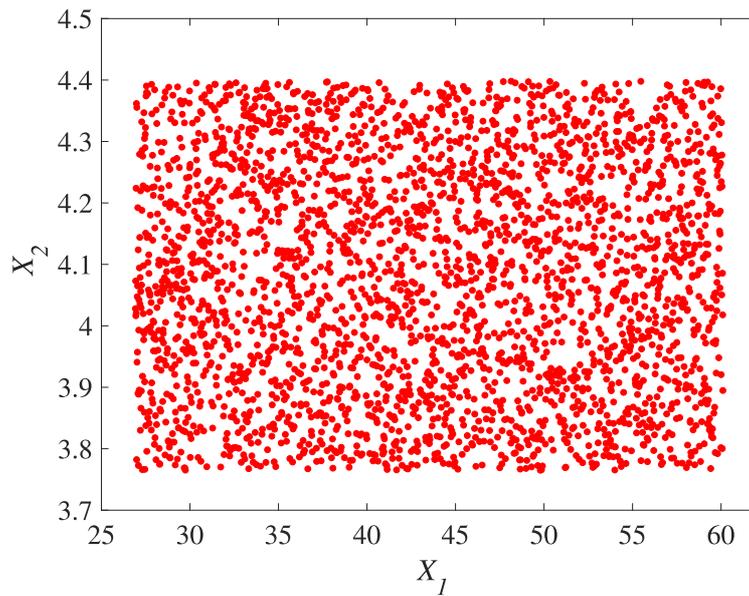
De acordo com a função de densidade de probabilidade de cada ponto amostral gerado, o próximo passo consiste na determinação da função peso,  $W_i$ , de cada ponto. Para variáveis aleatórias estatisticamente independentes, o peso é determinado por meio da seguinte equação:

$$W(\mathbf{x}_i) = \prod_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}_i) \quad (26)$$

Figura 3 – Distribuição dos pontos no espaço amostral.



(a) Pontos amostrais gerados pela simulação de Monte Carlo.



(b) Pontos amostrais gerados pelo WASM.

onde  $W_i$  é a função peso de cada ponto amostral  $i$ ,  $n$  é o tamanho da amostra gerada e  $f_j$  é função de densidade de probabilidade da variável aleatória  $j$ .

Por fim, a probabilidade de falha pode ser calculada da seguinte forma:

$$\hat{P}_f = \frac{\sum_{i=1}^n I(\mathbf{x}_i) \cdot W(\mathbf{x}_i)}{\sum_{i=1}^n W(\mathbf{x}_i)} \quad (27)$$

onde  $I(\mathbf{x}_i)$ , assim como no método de Monte Carlo simples, é igual a um para pontos localizadas no domínio de falha e zero para os demais.

Em comparação com o método de Monte Carlo simples, o método WASM necessita de um tamanho de amostra significativamente menor para atingir a convergência. Além disso, consegue computar probabilidades de falha com pequena ordem de grandeza (RASHKI; MIRI; MOGHADDAM, 2012). Entretanto, em alguns problemas encontrados na engenharia o esforço computacional necessário para obterem-se resultados precisos pode ainda ser proibitivo, como será discutido na próxima seção.

## 2.4 ANÁLISE DOS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Na seção anterior foram apresentados os métodos comumente utilizados na resolução de problemas de confiabilidade estrutural. Porém, em situações que envolvem o cálculo da confiabilidade de estruturas envolvendo muitos graus de liberdade, análises não lineares e falha progressiva, por exemplo, o custo computacional de cada avaliação da função de estado limite pode ser significativamente alto. Logo, a redução do número de avaliações do modelo mecânico é necessária, e muitas vezes os métodos de simulação por si só não são suficientes para reduzir o esforço computacional e obter resultados precisos. Como exemplo, considera-se a viga de concreto armado apresentada na Figura 4, também investigada por Nowak e Collins (2000), Rashki, Miri e Moghaddam (2012) e Okasha (2016). A seção transversal da viga possui 12 cm de largura e altura de 19 cm. A área de aço,  $A_s$ , a tensão de escoamento,  $f_y$ , a resistência do concreto à compressão,  $f_c$ , e o momento fletor atuante  $M$ , são consideradas variáveis aleatórias de acordo com os parâmetros apresentados na Tabela 1.

Figura 4 – Seção transversal da viga de concreto armado.

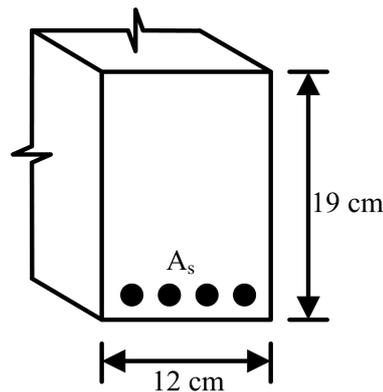


Tabela 1 – Variáveis aleatórias da viga de concreto armado.

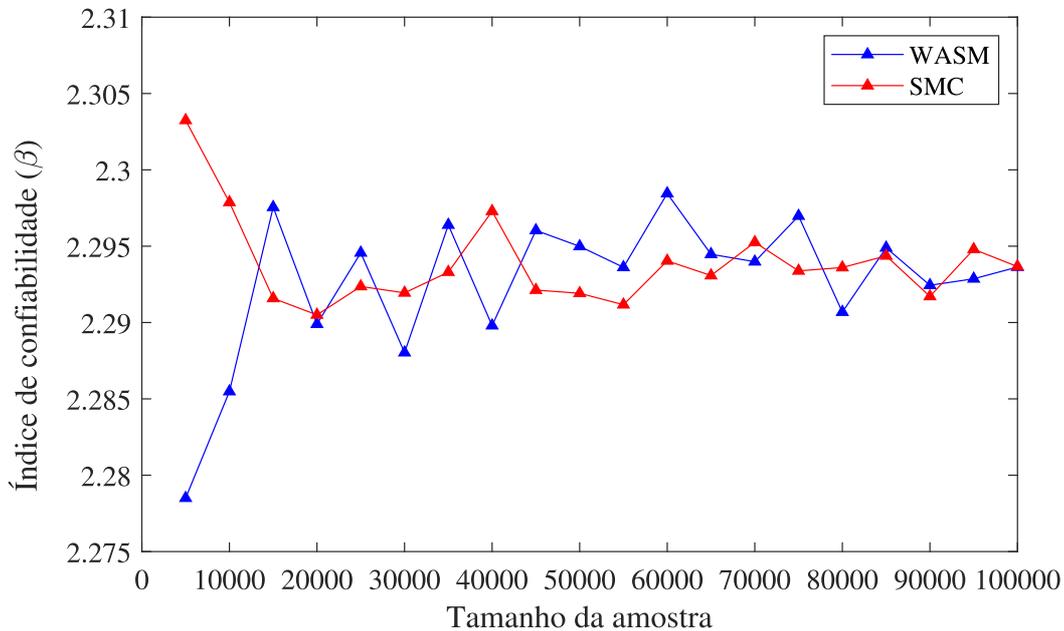
Variável	Distribuição	Média	Coefficiente de variação
$f_y$	Normal	44	0,105
$A_s$	Normal	4.08	0,02
$f_c$	Normal	3.12	0,14
$M$	Normal	2052	0,12

A falha da seção transversal é formulada em função do momento fletor,  $M$ , atuante. Logo, a função de estado limite relacionada à flexão do elemento é dada por:

$$g = A_s \cdot f_y \cdot d - 0,59 \cdot \frac{A_s \cdot f_y}{2f_c \cdot b - M} \quad (28)$$

Na Figura 5 apresentam-se os valores médios obtidos para o índice de confiabilidade após 100 execuções do método WASM e SMC, ao considerar-se diferentes tamanhos de amostra.

Figura 5 – Valores médios obtidos para o do índice de confiabilidade considerando-se os métodos WASM e SMC com diferentes tamanhos de amostra.



Observa-se que, nas duas situações analisadas, para amostras com tamanho inferior a, aproximadamente, 15000, os resultados apresentam maior oscilação, indicando que o resultado obtido pode não ser adequadamente preciso. Esta simples análise, com variáveis aleatórias de distribuição normal e uma única função de estado limite, corrobora com a conclusão de que, em muitos casos, os métodos de simulação podem não ser suficientes para tornar a resolução do problema precisa e computacionalmente viável. As análises tendem a ser ainda mais desafiadoras ao considerar-se problemas com um grande número de variáveis aleatórias e diferentes modos de falha, como no caso daquelas sujeitas ao colapso progressivo, por exemplo.

Com o intuito de tornar computacionalmente viável a resolução dos problemas de confiabilidade estrutural, uma técnica que tem sido utilizada em conjunto com os métodos de simulação são os chamados metamodelos. No metamodelo, um modelo aproximado, que representa o modelo original, é construído com o intuito de obter uma resposta aproximada

do mesmo. Dentre as técnicas de metamodelagem que tem sido utilizadas na engenharia de estruturas, destacam-se (1) as redes neurais artificiais, que consistem em modelos de processamento de informação inspirados em redes neurais biológicas, configurados para uma aplicação específica por meio de um processo de treinamento, (GIOVANIS *et al.*, 2017; XIAO, N. C.; ZUO; ZHOU, 2018; CHOJACZYK *et al.*, 2015; GOMES, 2019, 2020); (2) os métodos de superfície de resposta que são, basicamente, procedimentos sequenciais que buscam encontrar uma solução aproximada por meio de polinômios (JIANG, Y. *et al.*, 2020; ROUSSOULY; PETITJEAN; SALAUN, 2013); (3) As máquinas de vetores de suporte, onde hiperplanos são construídos em um espaço  $n$ -dimensional para classificar ou regredir dados (ROY; CHAKRABORTY, 2020; PAN, Q.; DIAS, 2017); e, por fim, (4) o método Kriging, que um método de interpolação utilizado para aproximar a função de estado limite (KAYMAZ, 2005; HUANG; CHEN; ZHU, 2016; ECHARD; GAYTON; LEMAIRE, 2011; BICHON; MCFARLAND; MAHADEVAN, 2011; YANG *et al.*, 2015; YANG; MI; DENG, 2019; FENG *et al.*, 2020; XIAO, N. C.; YUAN; ZHOU, 2020; KROETZ *et al.*, 2020; LING; LU; ZHANG, 2020; YUAN *et al.*, 2020; YI *et al.*, 2021; ZHANG *et al.*, 2021). Nesta pesquisa o método Kriging será empregado em conjunto com os métodos de simulação em um contexto de aprendizagem ativa, com o objetivo de construir um modelo aproximado para a função de estado limite original sem que a mesma precise ser avaliada para toda a amostra, como será descrito em detalhes no Capítulo 4.

### 3 CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS REDUNDANTES

No capítulo anterior, além dos diferentes métodos de resolução do problema de confiabilidade, foram abordados os aspectos relacionados à confiabilidade estrutural e aos estados limites considerando-se uma única equação de estado limite. Essa abordagem corresponde à consideração de um único modo de falha. No entanto, mesmo ao considerar-se uma estrutura composta por um único elemento, diferentes estados limites podem existir. Os estados limites podem estar relacionados, por exemplo, à tensão de escoamento da barra de uma estrutura treliçada, ao deslocamento excessivo, dentre outros. Além disso, as estruturas reais comumente encontradas na engenharia formam um sistema estrutural, definido por Elsayed (1996) como um conjunto de elementos arranjados para realizar determinadas funções com desempenho e confiabilidade aceitáveis. Neste caso, a confiabilidade não está relacionada apenas aos diferentes modos de falha em que cada elemento está sujeito, mas também à forma como os elementos se comportam em conjunto.

Como será visto ao longo deste capítulo, os sistemas estruturais podem ser classificados em série, paralelo ou de forma híbrida, quando há uma combinação de sistemas em série e paralelo. Considerando-se os sistemas em série, a falha de um único componente acarretará na falha do sistema, como nas estruturas isostáticas, por exemplo. Nos sistemas em paralelo, é necessário que um número específico de componentes atinja o seu estado limite para que a falha do sistema ocorra. Porém, os sistemas comumente encontrados em problemas de engenharia são do tipo híbrido como as estruturas hiperestáticas, por exemplo, que falham em decorrência do colapso progressivo de um número específico de elementos, relacionado ao grau de redundância da estrutura (MELCHERS; BECK, A. T., 2018).

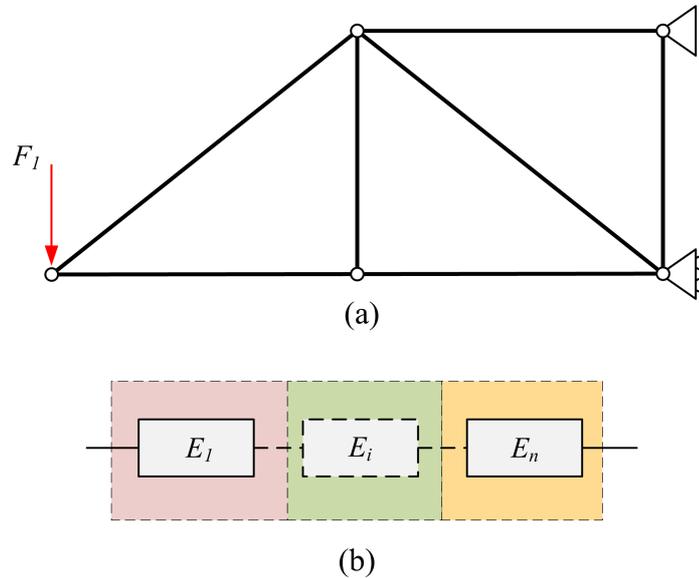
A avaliação da confiabilidade de um sistema é dependente de diversos fatores que podem estar relacionados (a) à influência da falha de cada componente na falha total do sistema, (b) à redundância do sistema que reflete na falha progressiva dos elementos, (c) o comportamento pós-falha de cada componente (d) à correlação estatística entre os eventos de falha (ESPOSITO, 2016). De acordo com Kim *et al.* (2013), o principal desafio encontrado na análise da confiabilidade de sistemas está relacionado ao fato de existirem múltiplas sequências de falha possíveis, visto que a maior parte das estruturas se comporta de forma redundante. Desta forma, o objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos referentes à confiabilidade de sistemas, à definição da árvore de falha e eventos, bem como aspectos referentes à dependência estatística entre os diferentes modos de falha. Ao final do capítulo uma discussão, tendo como base um exemplo numérico, é realizada acerca da dependência estatística entre aos modos de falha em um sistema estrutural. Por fim, alguns trabalhos encontrados na literatura são citados pela sua forma de lidar com tais dependências.

### 3.1 CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS

#### 3.1.1 Sistemas em série

Em um sistema associado em série, assume-se que todos os componentes devem estar, de forma simultânea, em perfeito funcionamento. Logo, a violação de qualquer estado limite da estrutura caracteriza a falha do sistema. Considerando-se uma estrutura com  $n$  elementos, a falha do sistema associado em série pode ser caracterizada como a falha do elo mais fraco. Um exemplo de sistemas em série comumente encontrado em problemas de engenharia são as estruturas isostáticas, conforme ilustrado na Figura 6, onde a falha de um elemento acarreta na falha do sistema.

Figura 6 – (a) Treliça isostática que representa um sistema em série (b) Ligação em série dos elos que representam sistema.



A confiabilidade de um sistema associado em série será sempre menor ou igual à confiabilidade de seu componente mais fraco. Dado que o evento  $E_i$  corresponde à falha do  $i$ -ésimo componente, o evento  $F$ , relacionado à falha do sistema, pode ser matematicamente descrito por (XIAO, Q.; MAHADEVAN, 1994; MELCHERS; BECK, A. T., 2018; BECK, A. T., 2019):

$$\begin{aligned} F &= E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \\ &= \cup_{i=1}^n E_i \end{aligned} \quad (29)$$

A probabilidade de falha do sistema associado em série é então definida por:

$$P_f = P[\cup_{i=1}^n E_i] \quad (30)$$

Na confiabilidade de sistemas, deve-se considerar ainda a dependência entre os eventos  $E_i$ . Neste caso, a probabilidade de falha será limitada por (BECK, A. T., 2019):

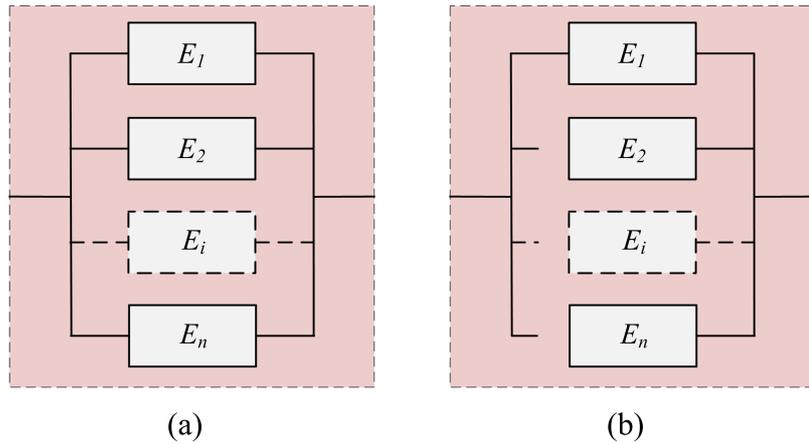
$$\max_i P[E_i] \leq P_f \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P[E_i]) \approx \sum_{i=1}^n P[E_i] \quad (31)$$

onde a parcela da esquerda, referente ao limite inferior, corresponde ao evento de maior probabilidade de ocorrência, relacionado à probabilidade de falha do componente mais fraco, e a parcela da direita corresponde ao limite superior, que está relacionado à independência entre os eventos.

### 3.1.2 Sistemas em paralelo

Um sistema é formado por componentes associados em paralelo quando os elementos estão arrançados de forma que a falha de um único elemento não necessariamente corresponde à falha do sistema, conforme ilustrado na Figura 7.

Figura 7 – (a) Representação de um sistema em paralelo considerando (a) redundância ativa; (b) redundância passiva.



Considerando-se que o evento  $E_i$  corresponde à falha do  $i$ -ésimo componente, o evento  $F$ , relacionado à falha do sistema, é matematicamente descrito pela seguinte intersecção:

$$\begin{aligned} F &= E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n \\ &= \bigcap_{i=1}^n E_i \end{aligned} \quad (32)$$

A probabilidade de falha de um sistema associado em paralelo é definida por:

$$P_f = P[\bigcap_{i=1}^n E_i] \quad (33)$$

Entretanto, a avaliação da probabilidade de falha apresentada na Equação (33) é dependente do tipo de redundância do sistema, que pode ser ativa ou passiva. A redundância ativa ocorre quando todos os componentes do sistema possuem influência no comportamento estrutural, enquanto a redundância do tipo passiva ocorre quando parte

dos componentes é colocada em operação apenas quando parte dos componentes atingem o seu estado limite.

Em estruturas associadas em paralelo e sujeitas à redundância ativa, os limites superior e inferior da probabilidade de falha são definidos da seguinte forma:

$$\prod_{i=1}^n P[E_i] \leq P_f \leq \min_i P[E_i] \quad (34)$$

onde a parcela da esquerda, referente ao limite inferior, corresponde à independência entre os eventos e parcela da direita, correspondente ao limite superior, está relacionada à dependência perfeita entre os eventos.

No caso da redundância passiva, o cálculo probabilidade de falha requer a análise das probabilidades condicionais, visto que alguns componentes entram em operação somente quando um número específico de componentes falha. Considerando-se como exemplo um sistema associado em paralelo com 3 elementos, a probabilidade de falha do sistema está relacionada à probabilidade de ocorrência da sequência de falha  $S_{ijk}$ , que pode ser descrita por (BECK, A. T., 2019):

$$P[S_{ijk}] = P[E_i]P[E_j|E_i]P[E_k|E_{i,j}] \quad (35)$$

A probabilidade de falha do sistema para componentes associados em paralelo e sujeitos à redundância passiva é matematicamente definida por:

$$P_f = \sum_{i=1, \dots, 3} \sum_{j=1, \dots, 3} P[S_{ij}] \quad (36)$$

É importante ressaltar que a expressão apresentada na Equação (36) é válida apenas quando as sequências de falha são mutuamente exclusivas, ou seja, não podem ocorrer simultaneamente.

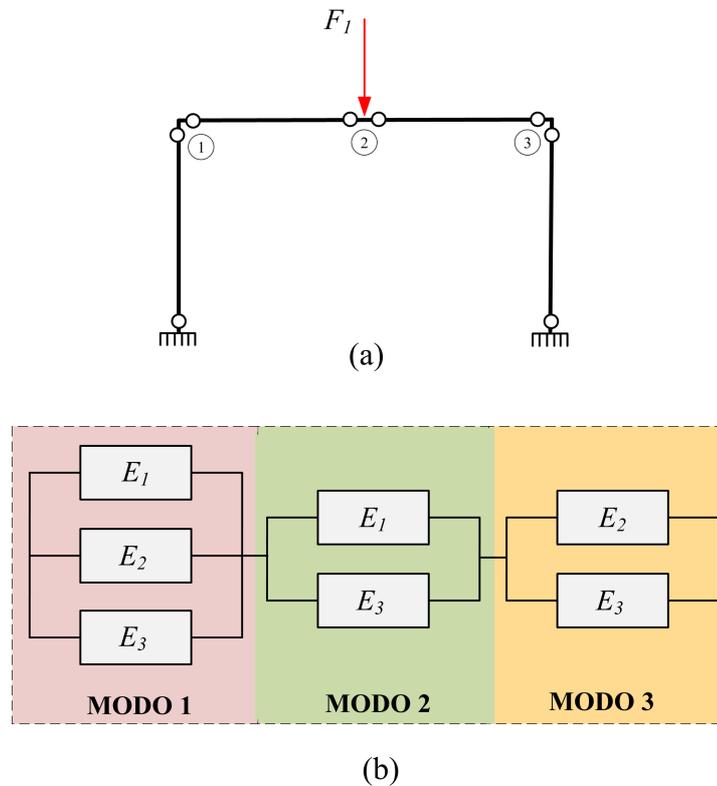
### 3.1.3 Sistemas mistos

Um sistema híbrido pode ser caracterizado como um conjunto de diferentes componentes, associados em série ou em paralelo, que possuem diferentes modos de falha, conforme apresentado na Figura 8. Neste exemplo de sistema híbrido, a falha pode ocorrer por três modos distintos. O modo 1 possui três componentes associados em paralelo, enquanto os modos 2 e 3 possuem dois componentes. A falha é caracterizada pela ocorrência de qualquer modo, representando uma associação em série dos três modos anteriores.

Considerando-se que a ocorrência de qualquer modo de falha,  $F$ , acarretará na falha do sistema, supõem-se que cada modo está associado em série e a probabilidade de falha pode ser matematicamente escrita da seguinte forma (BECK, A. T., 2019):

$$P_f = P(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m) \quad (37)$$

Figura 8 – (a) Representação de um sistema híbrido. (b) Representação dos modos de falha.



onde  $m$  são todos os possíveis modos de falha do sistema.

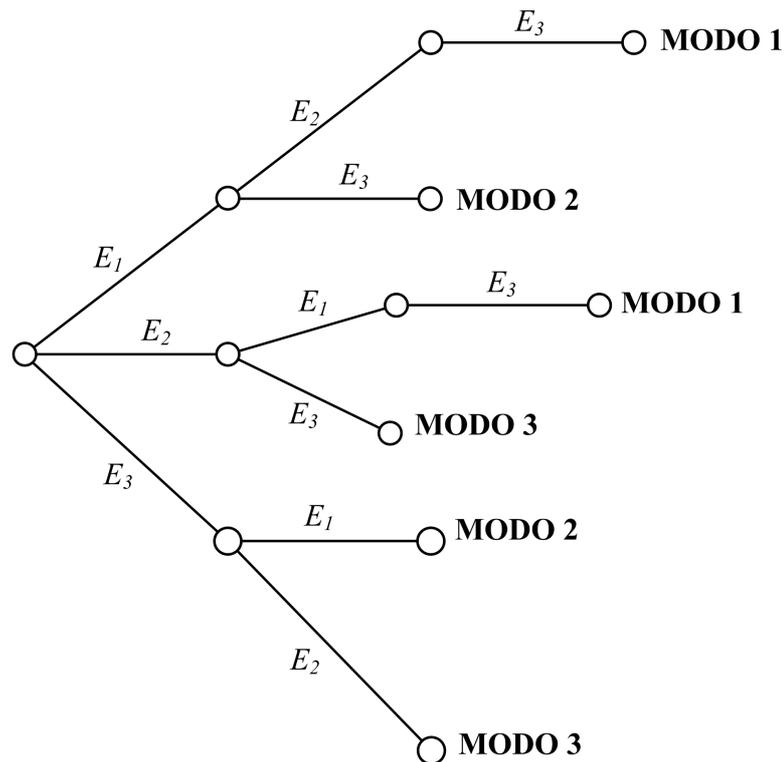
O estudo da probabilidade de falha de sistemas que possuem elementos associados de forma híbrida requer a decomposição e a análise de todos os possíveis caminhos de falha. Como exemplo, considera-se o evento  $E_1$ , conforme ilustrado na Figura 8 (b). Após a sua ocorrência, dois caminhos de falha tornam-se possíveis: o evento  $E_2$  seguido do evento  $E_3$ , ou a direta ocorrência do evento  $E_3$ . Durante a determinação da probabilidade de falha do sistema, o cálculo a probabilidade associada à ocorrência de ambos os caminhos de falha precisa ser considerada. Logo, a decomposição de todos os caminhos de falha é fundamental para o cálculo da confiabilidade utilizando-se métodos convencionais, e pode ser realizada por meio da construção das árvores de falha e eventos, conforme será apresentado na próxima seção.

### 3.2 ÁRVORE DE FALHAS E EVENTOS

A análise da confiabilidade de estruturas complexas, como as hiperestáticas sujeitas ao colapso progressivo, requer a identificação e a decomposição de todos os modos de falha da estrutura. Esta decomposição pode ser realizada por meio da construção de uma árvore de falha que representa todos os modos, ou eventos, possíveis que acarretam na falha estrutural. Para a construção da árvore de falha, após a identificação dos diferentes modos de falha do sistema estrutural, os eventos que contribuem para a ocorrência de cada modo

são enumerados sistematicamente com o intuito de identificá-los. Na Figura 9 é ilustrada a árvore de falha relacionada ao pórtico plano apresentado na Figura 8 (MELCHERS; BECK, A. T., 2018). Observa-se que a ocorrência inicial de um evento qualquer,  $E_1$ ,  $E_2$  ou  $E_3$ , pode gerar diferentes seqüências de falha, que precisam ser levadas em consideração. O intuito desta decomposição é desmembrar os eventos básicos, cuja probabilidade de ocorrência possa ser posteriormente calculada e combinada (BECK, A. T., 2019).

Figura 9 – Representação da árvore de eventos da estrutura apresentada na Figura 8 (a).



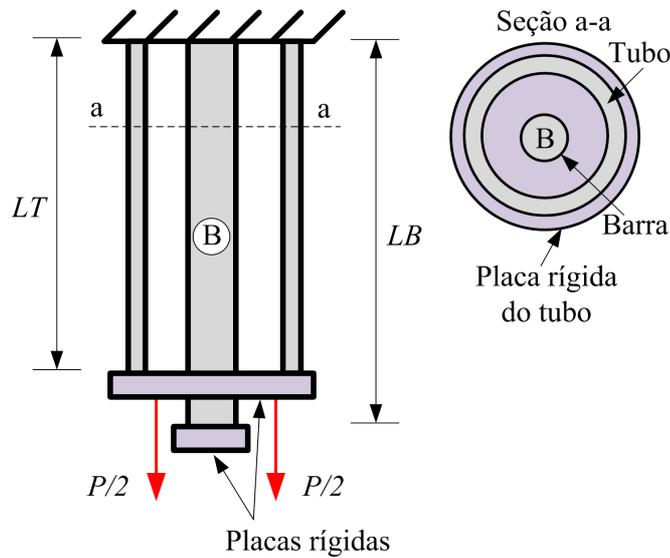
Por meio da árvore de falha torna-se possível a realização de análises qualitativas e quantitativas, uma vez que a sua construção permite identificar as seqüências críticas, que possuem maior probabilidade de ocorrência. Além disso, torna-se possível quantificar e analisar a probabilidade de ocorrência de cada evento relacionado a cada modo de falha. Por meio dessas informações, análises qualitativas e quantitativas podem ser realizadas a fim de orientar a tomada de decisões durante a elaboração de um projeto.

Um ponto a considerar é o fato de que as análises quantitativas de sistemas complexos, realizadas por meio da metodologia de árvores de falha, são comumente baseadas na hipótese de que os eventos associados em paralelo são independentes (BECK, A. T., 2019). Entretanto, basear-se na hipótese de independência entre os eventos pode gerar resultados incoerentes para a probabilidade de falha, como será descrito na próxima seção.

### 3.3 EXEMPLO: DEPENDÊNCIA ENTRE MODOS DE FALHA

Conforme já mencionado ao longo deste trabalho, um problema de confiabilidade estrutural onde a falha dos elementos ocorre de forma progressiva é, essencialmente, um problema de confiabilidade de sistemas onde os modos de falha são significativamente dependentes. O fato de um determinado modo de falha originar-se apenas se todos os modos de falha anteriores ocorrerem dá origem a essas dependências, que devem ser levadas em consideração no cálculo da probabilidade de falha. Com o intuito de exemplificar esta situação, considera-se a barra de comprimento  $LB$ , inserida no interior de um tubo com comprimento  $LT$ , conforme ilustrado na Figura 10. A barra e o tubo são compostos por um material de comportamento frágil, e são fixados na extremidade superior por meio de um suporte rígido e nas extremidades inferiores por meio de placas rígidas. Uma força concentrada com intensidade  $P$  é aplicada na placa rígida localizada na extremidade do tubo, e considera-se que a força axial aplicada à barra permanece nula até que ocorra a ruptura do tubo.

Figura 10 – Barra de comprimento  $LB$  inserida no interior de um tubo de comprimento  $LT$ .



O contato entre as placas rígidas, que ocorre após a ruptura do tubo, faz com que a força seja aplicada à barra. Dado que a força axial que causa a ruptura do tubo e da barra é uma variável aleatória com intensidade  $P$ , a função de estado limite relacionada ao tubo e à barra,  $g_T$  e  $g_B$ , respectivamente, são dadas por:

$$\begin{aligned} g_T(P) &= R_T - P \\ g_B(P) &= R_B - P \end{aligned} \quad (38)$$

onde  $R_T$  e  $R_B$  são as forças determinísticas relacionadas à ruptura do tubo e da barra, respectivamente, e  $R_B > R_T$ .

Neste cenário, a segunda função de estado limite torna-se ativa somente após a ocorrência da ruptura do tubo. Logo, a falha do sistema ocorre de forma progressiva e a probabilidade de falha,  $P_f$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$P_f = P[E_T]P[E_B|E_T] \quad (39)$$

onde  $E_T$  e  $E_B$  são os eventos de falha relacionados ao tubo e à barra, respectivamente.

Segundo o teorema de Bayes, a probabilidade condicional da ocorrência do evento  $E_B$ , dada a ocorrência do evento  $E_T$ , é definida por (MELCHERS; BECK, A. T., 2018):

$$P[E_B|E_T] = \frac{P[E_B \cap E_T]}{P[E_T]} \quad (40)$$

onde a  $P[E_B|E_T]$  é igual a  $P[E_B]$  se, e somente se, os eventos  $E_B$  e  $E_T$  forem estatisticamente independentes. No entanto, isso não ocorre ao longo das sequências de falha que são observadas no colapso progressivo, uma vez que a ocorrência de um dado evento é condicional à ocorrência de outros.

Por meio deste contexto pode-se concluir que, contanto que os eventos envolvidos sejam independentes ou quase independentes, as probabilidades condicionais envolvidas no processo não são iguais às probabilidades do evento. Logo substituindo-se a Equação (40) na Equação (39), observa-se que a probabilidade de falha do sistema é dependente da intercessão dos eventos da seguinte forma:

$$P_f = P[E_T] \frac{P[E_B \cap E_T]}{P[E_T]} = P[E_B \cap E_T] \quad (41)$$

Devido às dificuldades encontradas ao lidar-se com a interseção de eventos quando métodos de aproximação são utilizados, é comum que muitos estudos assumam a independência estatística dos eventos ao longo de modos de falha (BECK, A. T.; GOMES, 2012; TRIVEDI, 2016). Entretanto, essa suposição pode ter um impacto significativo na probabilidade de falha estimada, conforme descrito a seguir.

No exemplo ilustrado na Figura 10, os eventos  $E_T$  e  $E_B$  são estatisticamente dependentes entre si devido à variável aleatória comum,  $P$ . Considerando-se que  $P$  possui distribuição normal,  $P \sim N(5; 0,5)$ , e dado que  $R_T = 6,5$  e  $R_B = 7,0$ , as probabilidades associadas a cada evento são  $P[E_T] = 1,3498 \times 10^{-3}$  e  $P[E_B] = 3,1671 \times 10^{-5}$ . Se os eventos forem considerados independentes, a probabilidade de falha do sistema, obtida por meio da Equação (39), resulta igual a  $P_f = 4.2753 \times 10^{-8}$ .

Por outro lado, o resultado exato da probabilidade de falha obtido ao considerar-se a função de distribuição acumulada de  $P$  é igual a  $P_f = 3,1671 \times 10^{-5}$ . Este resultado é equivalente ao limite superior da probabilidade de falha para sistemas paralelos quando

considerada a dependência estatística perfeita entre os eventos, conforme apresentado na Equação (34), que é dado por:  $P_f = \min(P[E_T], P[E_B])$ . Neste caso, a probabilidade de falha do sistema obtida utilizando-se o método de Monte Carlo simples com  $10^7$  simulações é igual a  $P_f = 3,124 \times 10^{-5}$ .

Este exemplo, embora simplificado, mostra que os valores obtidos para a probabilidade de falha podem ser significativamente diferentes quando as dependências estatísticas entre os modos de falha são negligenciadas. Além disso, embora as abordagens baseadas no limite superior da probabilidade de falha possam ser aplicadas em diferentes situações, devido ao grande número de sequências de falha que estão presentes nos sistemas de engenharia, os resultados obtidos para a probabilidade de falha do sistema podem sofrer consideráveis variações. Para lidar com os obstáculos relacionados à análise da confiabilidade de sistemas estruturais, mais precisamente a estruturas sujeitas ao colapso progressivo, muitas abordagens tem sido propostas.

As abordagens que têm sido recentemente propostas para identificar os modos de falha dominantes podem ser divididas em duas categorias: determinísticas e probabilísticas (KIM *et al.*, 2013; XING; JIANG, T.; HAO, 2021). Nos métodos probabilísticos, que incluem, por exemplo, métodos baseados em técnicas de amostragem, obtêm-se resultados precisos e com embasamento matemático, mas o esforço computacional pode ser tornar proibitivo. Os métodos determinísticos, que incluem métodos de carregamento incremental e o  $\beta$ -*unzipping*, por exemplo, podem ser computacionalmente eficientes, mas muitos modos de falha são ignorados na formulação (XING; JIANG, T.; HAO, 2021).

Com o intuito de identificar as sequências que possuem maior impacto na confiabilidade de um sistema estrutural e computar a probabilidade de falha considerando a dependência entre os eventos, Kim *et al.* (2013) desenvolveram uma abordagem de busca seletiva. Nesta abordagem, os modos de falha dominantes são identificados por meio de uma busca utilizando-se os algoritmos genéticos. A probabilidade de falha é calculada por meio de uma matriz multi-escala, onde uma matriz de escala inferior é utilizada para obter a probabilidade de ocorrência dos modos de falha dominantes, ao passo que uma matriz de escala superior é utilizada a avaliar a probabilidade de falha do sistema.

Y. Jiang *et al.* (2020) propõem uma metodologia que combina o método de múltiplas superfícies de resposta com estratégias iterativas. A abordagem consiste em aproximar a função de falha do sistema em partes, buscando múltiplos pontos de projeto. Após essa etapa, uma análise estrutural determinística é realizada com o intuito de identificar a sequência de falha das amostras pertencentes ao domínio principal, que possuem maior contribuição na probabilidade de falha.

Yazdani, Shahidzadeh e Takada (2020) apresentam uma abordagem que utiliza redes Bayesianas e avalia a confiabilidade de sistemas estruturais com base na representação de grupos de corte (*cut-sets*). Nela, é proposta uma rede Bayesiana que contém cinco camadas: as variáveis aleatórias, os eventos relacionados a cada componente, os caminhos

de falha e os modos de falha. Esta abordagem beneficia-se da capacidade inerente das redes Bayesianas de modelar as distribuições de probabilidade conjunta por meio de fatores de probabilidade condicionais independentes.

Xing, T. Jiang e Hao (2021) propõem um método que identifica os modos de falha dominantes por meio de um algoritmo de evolução diferencial, onde pontos amostrais são gerados na superfície da função de estado limite. Para a avaliação da probabilidade de falha do sistema, a abordagem propõe um método composto sequencial, que considera o coeficiente de correlação entre os eventos.

Nesta pesquisa, para lidar com as dependências entre os eventos e identificar as sequências de falha dominantes, uma abordagem baseada na resposta global do sistema é desenvolvida e aplicada em conjunto com o metamodelo Kriging, como será descrito em detalhes no Capítulo 5. Na abordagem proposta, tanto a identificação das sequências de falha dominantes quanto a consideração das dependências entre os eventos são inerentes à formulação do problema, não sendo necessário nenhum esforço computacional adicional para obter as informações de interesse.

No próximo capítulo são apresentados os conceitos relacionados ao metamodelo Kriging no contexto de um processo de aprendizado ativo, onde pontos de controle localizados nas proximidades da região de falha são selecionados. Como será relatado no decorrer dos próximos capítulos, essa seleção permite obter resultados precisos para a probabilidade de falha, além de permitir a identificação dos modos de falha dominantes.

## 4 KRIGING ADAPTATIVO

O método Kriging consiste, basicamente, em uma função analítica que, a partir de um conjunto de dados de entrada, pode fornecer a resposta de um modelo complexo de forma suficientemente precisa. Considerando-se a área de engenharia de estruturas, o modelo complexo pode envolver um modelo numérico em elementos finitos ou uma função de estado limite, por exemplo. Desta forma, sua aplicação é útil na resolução de problemas que demandam um elevado número de simulações, como no caso de problemas que envolvem análises de confiabilidade estrutural. Considerando-se o método de Monte Carlo simples em conjunto com o Kriging, por exemplo, o problema pode ser formulado por meio da avaliação da função de estado limite apenas para uma parcela da amostra,  $n_{MC}$ , reduzindo significativamente o esforço computacional necessário para a resolução do problema.

O principal objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos relacionados à formulação do metamodelo Kriging, a forma de escolha dos pontos de controle iniciais utilizados na sua construção e a formulação para aplicação em problemas de confiabilidade estrutural. Esta formulação, como será visto na Seção 4.2, baseia-se nos conceitos de aprendizado ativo, onde uma função de aprendizado é utilizada para selecionar novos pontos de controle com o intuito de aumentar a precisão dos resultados. Ao final do capítulo, por fim, são apresentados alguns exemplos numéricos que serviram de base para a escolha da função de aprendizado adotada nesta pesquisa.

### 4.1 KRIGING

O método Kriging teve sua origem em 1951, quando Krige (1951), um engenheiro sul Africano que desenvolveu o método com aplicações no campo de geostatística. Sua primeira aplicação no campo da aproximação de experimentos computacionais ocorreu em 1989, por Sacks *et al.* (1989). Uma das primeiras aplicações do Kriging na área de confiabilidade estrutural se deu em 2011, quando Echard, Gayton e Lemaire (2011) empregaram-o em conjunto com uma metodologia de aprendizado ativo, que permite a seleção iterativa dos novos pontos de controle utilizados na criação do metamodelo. Uma das principais vantagens do Kriging, quando comparado aos demais metamodelos presentes na literatura, é a sua dependência direta aos pontos de controle selecionados para a sua construção. Além disso, a resposta final fornecida para cada amostra analisada consiste no valor da predição e a sua respectiva variância. Logo, a escolha dos novos pontos de controle pode embasar-se em selecionar as amostras com maior variância e maior influência na probabilidade de falha. É por conta disso que, recentemente, o desenvolvimento de abordagens que empregam este método se tornaram tão populares, como veremos como longo deste capítulo.

### 4.1.1 Formulação

A ideia básica do Kriging, visto como um método de interpolação, consiste em obter a resposta de um modelo complexo para alguns pontos, chamados pontos de controle, e utilizá-la para construir o modelo de predição que irá fornecer a resposta do modelo complexo em qualquer outro ponto amostral (MATHERON, 1973). Desta forma, quando a avaliação da função aproximada é realizada em um ponto de controle, utilizado na construção do metamodelo, a resposta obtida na aproximação é o igual ao valor exato do modelo original complexo. Considerando-se um problema de confiabilidade estrutural, o modelo complexo pode ser entendido como a resposta da função de estado limite,  $g(\mathbf{x})$ , que pode ser vista como a realização de um processo Gaussiano expresso por:

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} + z(\mathbf{x}) \quad (42)$$

onde a parcela determinística  $\mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}$ , definida por um modelo de regressão linear, representa um valor médio da aproximação de  $g(\mathbf{x})$  (SACKS *et al.*, 1989; CHEN *et al.*, 2003; MATHERON, 1973). O termo  $z(\mathbf{x})$  representa um processo estocástico gaussiano estacionário, que corrige  $\mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}$  por meio da interpolação do erro nos pontos amostrais. O processo gaussiano possui média igual a zero e covariância entre dois pontos de controle quaisquer,  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$ , definida por (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008):

$$COV(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sigma^2 R(\theta, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad (43)$$

onde  $\sigma^2$  representa a variância do processo estocástico e  $R$  é uma função de correlação.

A determinação do parâmetro  $\boldsymbol{\beta}$  e da variância do processo estocástico  $\sigma_{\hat{g}}$  é feita da seguinte forma (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008):

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{p} (\mathbf{G} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{G} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\beta}}) \end{aligned} \quad (44)$$

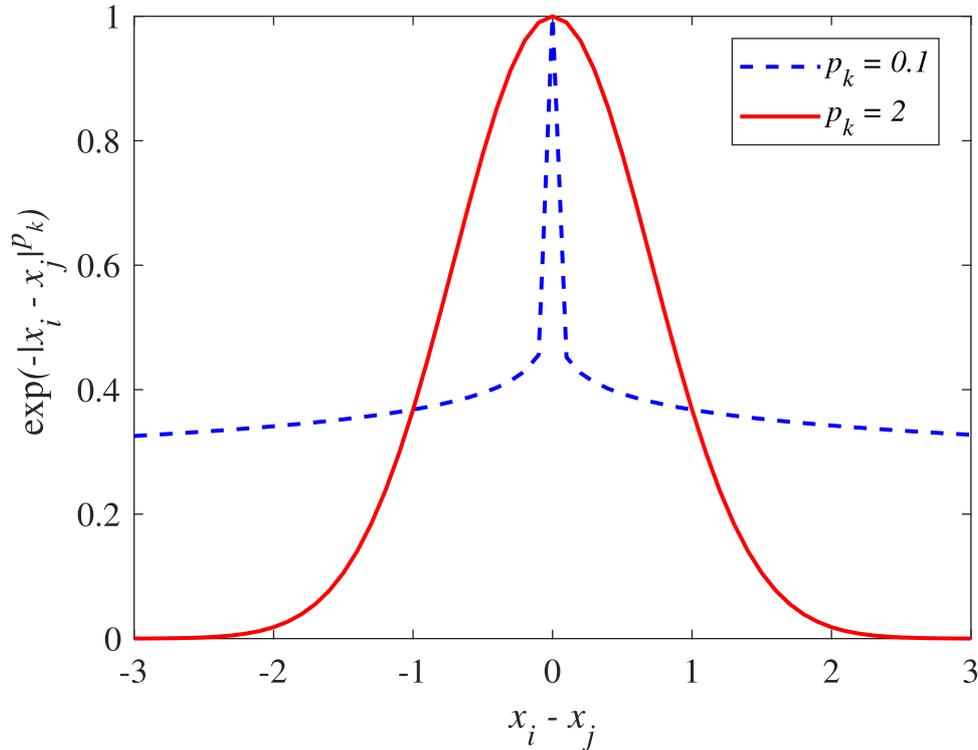
onde  $\mathbf{F}$  é uma matriz de regressão,  $\mathbf{R}$  é a matriz de correlação,  $p$  é o número de pontos de controle utilizados para a construção do metamodelo e  $\mathbf{G}$  é o vetor que contém o valor real da função de estado limite nos pontos de controle.

No método Kriging, a correlação entre dois pontos depende apenas da distância entre eles e, portanto, a função de correlação tem grande influencia na suavidade do meta-modelo resultante. Existem na literatura diferentes tipos de função de correlação e, dentre elas, neste trabalho optou-se por utilizar uma função de correção Gaussiana, que é comumente utilizada em problemas de confiabilidade estrutural (ROMERO; SWILER; GIUNTA, 2005; KAYMAZ, 2005; ECHARD; GAYTON; LEMAIRE, 2011) e dada por:

$$R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp \left[ - \sum_{k=1}^n \theta_k |x_k^i - x_k^j|^{p_k} \right] \quad (45)$$

onde  $n$  é o número de variáveis envolvidas no processo que, no caso de problemas de confiabilidade estrutural, corresponde ao número de variáveis aleatórias e  $\theta$  é um parâmetro de correlação. Neste trabalho, o valor considerado para  $p_k$  é igual a 2, como usualmente encontrado nos problemas de confiabilidade estrutural (ECHARD; GAYTON; LEMAIRE, 2011; XIAO, N. C.; YUAN; ZHOU, 2020). Neste caso, obtém-se uma correlação suave com um gradiente contínuo através dos pontos amostrais, conforme ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – Influência do parâmetro  $p_k$  na função de correlação.



Para que todas as equações apresentadas até o momento se tornem aplicáveis, necessita-se determinar o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$ . Sua determinação pode ser realizada por meio do método da máxima verossimilhança, onde a partir de um conjunto de dados amostrais podemos estimar valores para os diferentes parâmetros do modelo. Considerando-se o método de Kriging considerado neste trabalho, a máxima verossimilhança pode ser analisada da seguinte forma (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min \left\{ \frac{p \ln(\sigma^2) + \ln(\det \mathbf{R})}{2} \right\} \quad (46)$$

Por fim, conhecendo os parâmetros do modelo, para um ponto arbitrário  $\mathbf{x}$ , a predição  $\hat{g}(\mathbf{x})$  é uma variável com distribuição normal que apresenta uma média  $\mu_{\hat{g}}(\mathbf{x})$  e uma variância  $\sigma_{\hat{g}}^2(\mathbf{x})$  dadas por (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008):

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ \sigma_{\hat{g}}^2(\mathbf{x}) &= \hat{\sigma}^2 \left( 1 + \mathbf{u}^T(\mathbf{x})(\mathbf{F}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{x}) \right)\end{aligned}\quad (47)$$

onde  $\mathbf{r}^T(\mathbf{x})$  representa a correlação entre  $\mathbf{x}$  e cada um dos  $p$  pontos de controle,  $\mathbf{g}$  é o valor real da função de estado limite em cada ponto de controle e  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x})$ .

Conforme já mencionado, o Kriging é um método de interpolação exata, o que significa que para todos os pontos de controle  $\mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i) = g(\mathbf{x}_i)$  (XIAO, N. C.; YUAN; ZHOU, 2020). Logo, a precisão dos resultados obtidos por meio da predição estão diretamente relacionados aos pontos de controle utilizados na construção do metamodelo, como será descrito a seguir.

#### 4.1.2 Definição dos pontos de controle iniciais

A ideia geral do metamodelo Kriging consiste na criação de uma aproximação para a função de estado limite com base em um modelo criado utilizando-se a resposta da função em alguns pontos, denominados pontos de controle. Para que a aproximação seja suficientemente precisa, os pontos de controle precisam ser escolhidos adequadamente, cobrindo todo o espaço amostral. Assim, a escolha de uma técnica de amostragem apropriada é extremamente importante para o seu bom desempenho (KALAGNANAM; DIWEKAR, 1997).

No Kriging, o metamodelo é inicialmente construído considerando-se uma amostra inicial de pontos de controle. Uma das técnicas de amostragem mais utilizadas para gerar os pontos de controle iniciais é o Hipercubo Latino (LHS), proposta por McKay, Conover e Beckman (1979). Na amostragem por hipercubo latino, o domínio de cada variável aleatória é dividido em faixas, sendo cada faixa amostrada uma única vez (SHEIKHOLESLAMI; RAZAVU, 2017). Essa técnica resulta em uma distribuição dispersa dos pontos amostrais, garantindo que todo o domínio das variáveis aleatórias seja coberto. Supondo um problema com um número de variáveis aleatórias  $n_{va}$ , onde precisa-se gerar uma amostra de tamanho  $n$ . Uma matriz  $\mathbf{P}$  ( $n \times n_{va}$ ), onde cada coluna representa uma permutação aleatória de  $1, \dots, n$ , é gerada juntamente com uma segunda matriz com distribuição uniforme  $\mathbf{R}$  ( $n \times n_{va}$ ). As matrizes geradas,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{R}$ , formam o plano amostral, representado por uma matriz  $\mathbf{S}$  da seguinte forma (OLSSON; SANDBERG; DAHLBLOM, 2003):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n}(\mathbf{P} - \mathbf{R}) \quad (48)$$

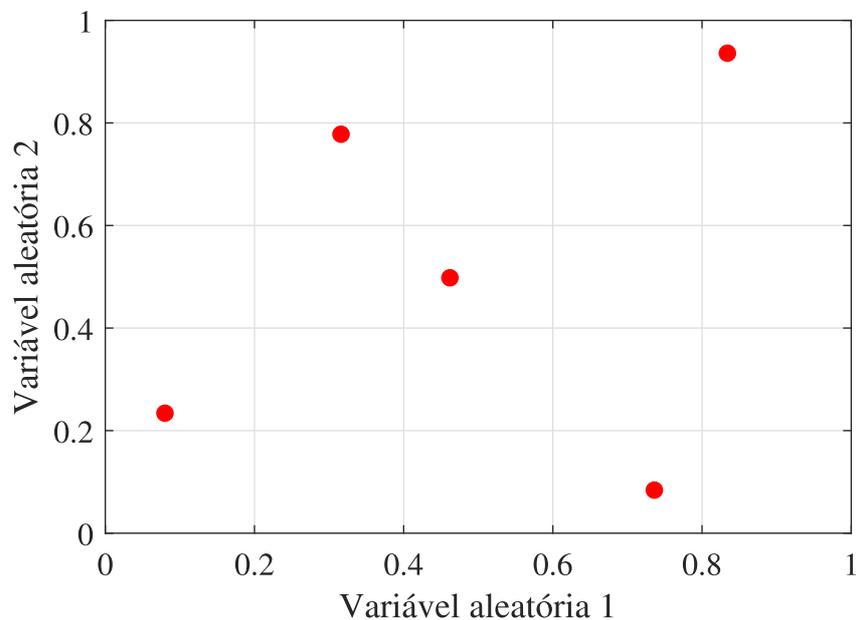
Cada elemento de  $\mathbf{S}$ ,  $s_{ij}$ , é então mapeado de acordo com sua distribuição marginal:

$$x_{ij} = F_{x_j}^{-1}(s_{ij}) \quad (49)$$

onde  $F_{x_j}^{-1}$  representa o inverso da função de distribuição acumulada da variável  $j$ .

Na Figura 12 ilustra-se um exemplo da geração de 5 pontos amostrais por meio do método de hipercubo latino para um problema contendo 2 variáveis aleatórias. Observa-se que a amostra gerada tende a cobrir todo o espaço amostral, evitando que os pontos amostrais fiquem “aglomerados” em determinadas regiões.

Figura 12 – Amostragem por hipercubo latino considerando 2 variáveis aleatórias e 5 realizações.



## 4.2 PROCESSO DE APRENDIZADO ATIVO QUE INTEGRA KRIGING COM MÉTODOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Conforme mencionado anteriormente, a precisão da predição obtida por meio do metamodelo Kriging está diretamente relacionado aos pontos de controle que são utilizados na sua construção. Por outro lado, quando um grande número de pontos de controle é necessário para atingir resultados precisos, a construção do metamodelo pode apresentar instabilidades em termos do esforço computacional necessário para resolver o equacionamento apresentado na Seção 4.1.1. Estas duas variáveis, de precisão e esforço computacional, tornam imprescindível que a escolha adequada dos pontos de controle seja uma etapa necessária para o bom desempenho do método (TEIXEIRA; NOGAL; O’CONNOR, 2021).

Diante deste contexto, Echard, Gayton e Lemaire (2011) desenvolveram uma metodologia de aprendizado ativo voltada à análise de problemas de confiabilidade estrutural combinando o metamodelo Kriging com o método de Monte Carlo simples. Nesta abordagem, a função de estado limite é substituída por um metamodelo e a classificação das amostras em cada domínio (falha ou sobrevivência) é realizada de acordo com a sua predição. O metamodelo é inicialmente construído considerando-se pontos de controle gerados por métodos de amostragem como, por exemplo, o LHS, descrito anteriormente. Após esta etapa, um procedimento de aprendizado ativo é iniciado com o intuito de selecionar, dentro da amostra gerada pelo método de Monte Carlo simples, novos pontos de controle. Por fim, após a construção do metamodelo com os pontos de controle adequadamente selecionados, a ideia básica da abordagem proposta por Echard, Gayton e Lemaire (2011) consiste em classificar a amostra de tamanho  $N_{MC}$  nos domínios de falha e sobrevivência por meio da aproximação da função de estado limite, construída por meio do metamodelo, e então calcular a probabilidade de falha.

O método pode ser resumido considerando-se os passos ilustrados na Figura 13, que podem ser detalhadamente descritos da seguinte forma (ECHARD; GAYTON; LEMAIRE, 2011):

1. Gerar o DoE inicial,  $[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(p)}]$  contendo um número  $p$  de pontos de controle.

O DoE inicial é gerado utilizando-se técnicas de amostragem existentes. Neste trabalho, adotou-se o método LHS, como usualmente realizado em problemas de confiabilidade estrutural. O tamanho da amostra inicial de pontos de controle,  $p$ , gerada pelo método LHS é dependente do número de variáveis aleatórias envolvidas no problema. De acordo com N. C. Xiao, Yuan e Zhou (2020), se o número de variáveis aleatórias,  $n$ , é inferior a 10, um total de  $p = 12$  é recomendado afim de cobrir todo o espaço de projeto. Se o número de variáveis aleatórias for superior a 10, recomenda-se um valor de  $p = n + 5$ ;

2. Gerar uma população contendo  $N_{MC}$  pontos, que contem todos os pontos candidatos a serem escolhidos como novo ponto de controle.

Essa população é gerada de acordo com o método de Monte Carlo simples, com base na função de densidade de probabilidade de cada variável aleatória;

3. Avaliar a função de estado limite para todos os ponto de controle  $[g(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, g(\mathbf{x}^{(p)})]$ .

Nesta etapa, a função de estado limite é avaliada para todos os pontos de controle gerados pelo método LHS.

4. Construir o metamodelo.

Com base no valor da função de estado limite avaliada nos pontos de controle, o metamodelo é construído.

5. Calcular a predição  $[\hat{g}(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, \hat{g}(\mathbf{x}^{(N_{MC})})]$ .

Nesta etapa, com base no metamodelo gerado, a predição da função de estado limite é calculada para o número  $N_{MC}$  de amostras geradas pelo método de Monte Carlo simples.

6. Estimar a probabilidade de falha  $\hat{P}_f$ ;

A probabilidade de falha é estimada utilizando-se a Equação (24).

7. Encontrar o próximo ponto de controle  $\mathbf{x}^*$  que será incluído ao DoE.

Utilizando-se uma função de aprendizado adequada, um novo ponto de controle é selecionado dentro da amostra  $N_{MC}$ .

8. Avaliar o critério de parada da função de aprendizado.

Nesta etapa o critério de parada da função de aprendizado é avaliado. Se o mesmo for satisfeito, o algoritmo procede para a etapa 10. Do contrário, o algoritmo procede para a etapa 9.

9. Avaliar a função de estado limite para o novo ponto de controle  $\mathbf{x}^*$  e retorna para Etapa 4.

A função de estado limite,  $g(\mathbf{x}^*)$ , é avaliada para este ponto e o metamodelo é atualizado.

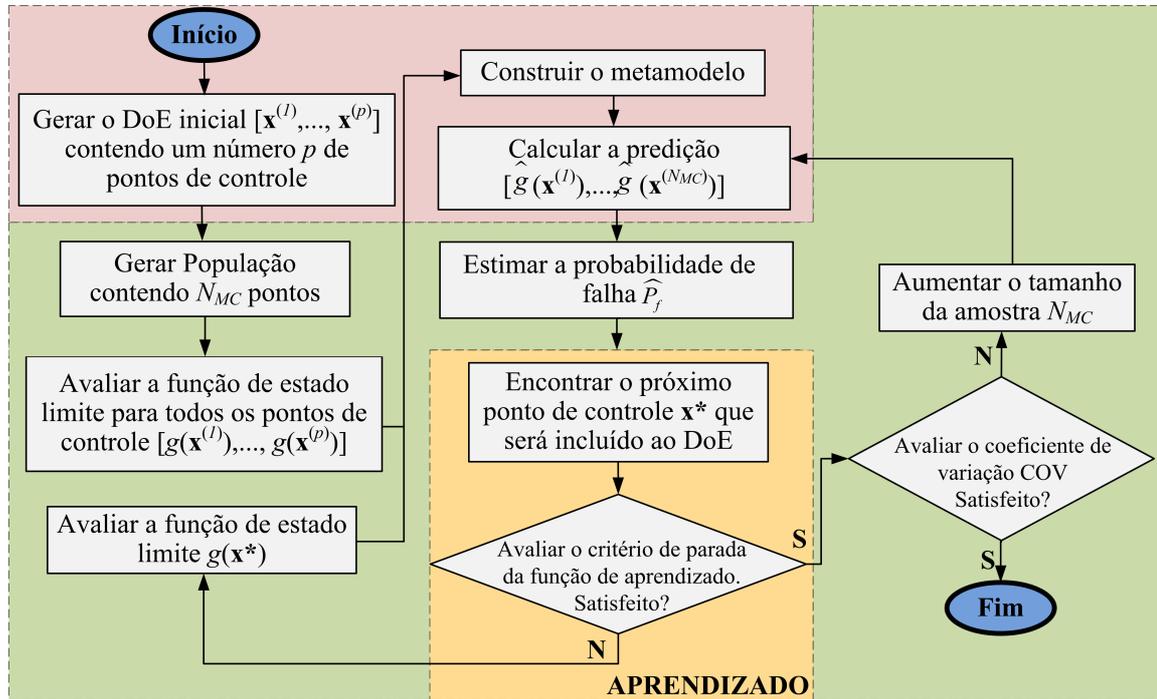
10. Avaliar o coeficiente de variação,  $\text{COV}_{\hat{P}_f}$ , de acordo com a Equação (50).

$$\text{COV}_{\hat{P}_f} = \sqrt{\frac{1 - \hat{P}_f}{\hat{P}_f N_{MC}}} \quad (50)$$

Um coeficiente de variação inferior a 5% é geralmente recomendado para problemas de confiabilidade estrutural (ECHARD; GAYTON; LEMAIRE, 2011). Se o critério não for satisfeito, deve-se aumentar o tamanho da amostra  $N_{MC}$ , com o intuito de reduzir o coeficiente de variação, e retornar à etapa 4. Do contrário, o algoritmo é finalizado e a probabilidade de falha é estimada juntamente com o número de avaliações da função de estado limite, que corresponde ao número de pontos de controle necessários para construir o metamodelo final.

Considerando-se problemas que envolvem a análise de confiabilidade estrutural, para que a precisão dos resultados obtidos seja satisfatória, os pontos de controle selecionados no procedimento de aprendizado ativo devem estar localizados próximos à região limite entre falha e sobrevivência (HUANG; CHEN; ZHU, 2016). Isso ocorre pois as incertezas quanto à predição da função de estado limite neste pontos pode levar à equivocada classificação das amostras, entre falha e sobrevivência, acarretando em divergências no valor estimado da probabilidade de falha. Logo, deve-se considerar todas as características da função de aprendizado e do critério de parada utilizado no procedimento.

Figura 13 – Fluxograma do procedimento de aprendizado ativo utilizando Kriging e o Método de Monte Carlo simples.



Recentemente, diversas pesquisas tem sido realizadas visando desenvolver novas funções de aprendizado e critérios de parada. Neste trabalho, a escolha da função de aprendizado utilizada foi feita por meio de uma análise considerando três diferentes funções, comumente utilizadas na literatura. Como critérios de escolha, verificando-se a eficiência de cada uma delas em termos de precisão e do número de avaliações da função de estado limite, como será descrito na próxima seção.

#### 4.2.1 Escolha da função de aprendizado

Nesta etapa da pesquisa, em conjunto com o Kriging, optou-se por utilizar o método de confiabilidade WASM, que requer um número menor de pontos amostrais, com o intuito de analisar a sua eficiência em conjunto com a metodologia de aprendizado ativo proposta por Echard, Gayton e Lemaire (2011). A diferença deste procedimento, quando comparado ao descrito na Figura 13, é a geração da amostra inicial e a equação utilizada no cálculo da probabilidade de falha, que são realizados conforme descrito na Seção 2.3.3.

A diferença relativa apresentada nas comparações é calculada da seguinte forma:

$$\epsilon = \left[ \frac{|P_f - P_f^{ref}|}{P_f^{ref}} \right] \cdot 100\% \quad (51)$$

onde  $P_f$  é a probabilidade de falha calculada por meio do metamodelo criado com os pontos de controle obtidos para cada uma das funções de aprendizado e  $P_f^{ref}$  é a probabilidade de falha calculada utilizando-se o método WASM.

A primeira função de aprendizado analisada foi proposta por Echard, Gayton e Lemaire (2011), utilizando o método de Monte Carlo simples, e é geralmente utilizada em problemas de confiabilidade estrutural. A função consiste em identificar os pontos de controle próximos à função de estado limite que possuem predição com maior variância, e é dada por:

$$U(\mathbf{x}_i) = \left| \frac{\mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)} \right| \quad (52)$$

onde  $\mu_{\hat{g}}(\mathbf{x})$  e  $\sigma_{\hat{g}}$  são, respectivamente, a média e o desvio padrão da predição.

O ponto que minimiza a função- $U$  é escolhido como novo ponto de controle a ser adicionado ao DoE. O processo de aprendizado ativo é realizado até que o critério de parada, definido por:  $\min(U(\mathbf{x}_i)) \geq 2$ , seja alcançado. Este critério corresponde ao caso no qual os pontos de controle são classificados na região de falha, ou não falha, com uma probabilidade de, no mínimo, 0,977.

A segunda função de aprendizado analisada nesta etapa corresponde à *Expected Feasibility Function - EFF*, desenvolvida por Bichon *et al.* (2008) no contexto de amostragem por importância. Esta função representa um balanço entre uma busca local, nas proximidades da função de estado limite, e uma busca global, verificando o quão precisamente o valor da função de estado limite em um determinado ponto satisfaz a restrição  $g(\mathbf{x}) = z$  na região  $z \pm \epsilon$ . A função *EFF* é expressa por:

$$\begin{aligned} & EFF(\mathbf{x}_i) = \\ & (\hat{g}(\mathbf{x}_i) - z) \left[ 2\Phi \left( \frac{z - \mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)} \right) - \Phi \left( \frac{(z - \epsilon) - \mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)} \right) - \Phi \left( \frac{(z + \epsilon) - \mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)} \right) \right] \\ & - \sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i) \left[ 2\phi \left( \frac{z - \mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)} \right) - \phi \left( \frac{(z - \epsilon) - \mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)} \right) - \phi \left( \frac{(z + \epsilon) - \mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)} \right) \right] \\ & + \epsilon \left[ \Phi \left( \frac{(z + \epsilon) - \mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)} \right) - \Phi \left( \frac{(z - \epsilon) - \mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)} \right) \right] \end{aligned} \quad (53)$$

onde  $\Phi$  e  $\phi$  são, respectivamente, o função de distribuição cumulativa normal padrão e a função de densidade normal padrão. O valor atribuído ao parâmetro  $z$  é igual a zero para problemas de confiabilidade estrutural e  $\epsilon = 2\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)$ . Dentre os pontos amostrais, o novo ponto de controle escolhido para compor o DoE é aquele que possui o maior valor de  $EFF(\mathbf{x}_i)$ . O processo iterativo é finalizado quando o critério de parada, definido por:  $\max(EFF(\mathbf{x}_i)) \leq 10^{-3}$ , é atingido.

A última função de aprendizado investigada nesta etapa da pesquisa é proposta N. C. Xiao, Yuan e Zhou (2020), considerando sistemas com múltiplos modos de falha. A função de aprendizado é diretamente relacionada à probabilidade de falha do sistema, e dada por:

$$U_{WS}(\mathbf{x}_i) = W_i^2 c_i (1 - c_i) \quad (54)$$

onde  $W_i$  é o peso de cada ponto amostral, definido na Seção 2.3.3,  $m$  é o número de modos de falha e  $c_i$  é o valor esperado de  $I(i)$ , definido de acordo com o tipo de falha do sistema, em série ou em paralelo:

$$\begin{aligned} c_i &= 1 - \prod_{j=1}^m \left[ 1 - \Phi \left( \frac{-\mu_{\hat{g}_j}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}_j}(\mathbf{x}_i)} \right) \right] && \text{para sistemas em série.} \\ c_i &= \prod_{j=1}^m \left[ \Phi \left( \frac{-\mu_{\hat{g}_j}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}_j}(\mathbf{x}_i)} \right) \right] && \text{para sistemas em paralelo.} \end{aligned} \quad (55)$$

A principal vantagem desta função de aprendizado é a sua tendência de reduzir a variância do valor obtido para a probabilidade de falha em cada iteração, com o objetivo de alcançar pequenos valores para a mesma ao final do processo de aprendizagem ativa. Dentre os pontos do espaço amostral, aquele que possuir o maior valor de  $U_{WS}(\mathbf{x}_i)$  é escolhido como novo ponto de controle,  $\mathbf{x}^*$ , a ser adicionado ao DoE. Considerando-se os diferentes modos de falha, é possível definir, ainda, qual será o modo de falha atualizado com o novo ponto de controle. Esta definição é feita considerando-se:  $\max(1/2^{m-1} U_{WS}(\mathbf{x}^*))$ , onde  $U_{WS}(\mathbf{x}^*)$  é o valor de cada função de estado limite considerando o novo ponto de controle,  $\mathbf{x}^*$ . O critério de parada é definido por meio da probabilidade de falha  $\hat{P}_f$ , e sua variância,  $\text{VAR}(\hat{P}_f)$ . Uma vez que a predição,  $\mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)$ , é uma variável aleatória com distribuição normal, a probabilidade de falha estimada,  $\hat{P}_f$ , é também considerada uma variável aleatória com valor esperado,  $E(\hat{P}_f)$ , e sua respectiva variância. O critério de parada é definido por:

$$\frac{\sqrt{\text{VAR}(\hat{P}_f)}}{E(\hat{P}_f)} < \left| \frac{\epsilon_s}{\Phi^{-1}(\alpha/2)} \right| \quad (56)$$

onde  $E(\hat{P}_f)$  é a probabilidade de falha estimada obtida por meio da Equação (27), o parâmetro  $\epsilon_s \in [5 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{-2}]$ ,  $\alpha \in [1 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-2}]$ ,  $N$  é o tamanho da amostra e a variância da probabilidade de falha estimada,  $\text{VAR}(\hat{P}_f)$ , é definida por:

$$\text{VAR}(\hat{P}_f) = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^N W_i \right)^2} \sum_{i=1}^N U_{WS_i} \quad (57)$$

Nesta etapa da pesquisa, o tamanho da amostra  $N$  e os valores dos parâmetros  $\epsilon$  e  $\alpha$  são definidos de acordo com as características de cada exemplo abordado. Em todos os exemplos apresentados considera-se 12 pontos de controle iniciais, selecionados pelo

método de amostragem hipercubo latino (LHS). As funções de aprendizado apresentadas são testadas em quatro exemplos obtidos na literatura, com o intuito de verificar a eficiência de cada uma delas em termos de precisão e do número de avaliações da função de estado limite. Na Tabela 2 é apresentada a representação que será utilizada para cada função de aprendizado ao longo da discussão dos resultados.

Tabela 2 – Detalhes de cada função de aprendizado adotada.

Sigla	Função de aprendizado	Referência
WASM- $U$	$U(\mathbf{x}_i)$	Echard, Gayton e Lemaire (2011)
WASM- $EFF$	$EFF(\mathbf{x}_i)$	Bichon <i>et al.</i> (2008)
WASM- $U_{WS}$	$U_{WS}(\mathbf{x}_i)$	N. C. Xiao, Yuan e Zhou (2020)

#### 4.2.1.1 Exemplo 1: Sistema em série com 4 modos de falha

O primeiro exemplo abordado nessa etapa consiste em um sistema em série, com quatro modos de falha e duas variáveis aleatórias. Este exemplo foi também estudado no contexto de confiabilidade estrutural por Echard, Gayton e Lemaire (2011), Huang, Chen e Zhu (2016) e Liu, H. S. Li e Nan (2019). A função de estado limite é dada por:

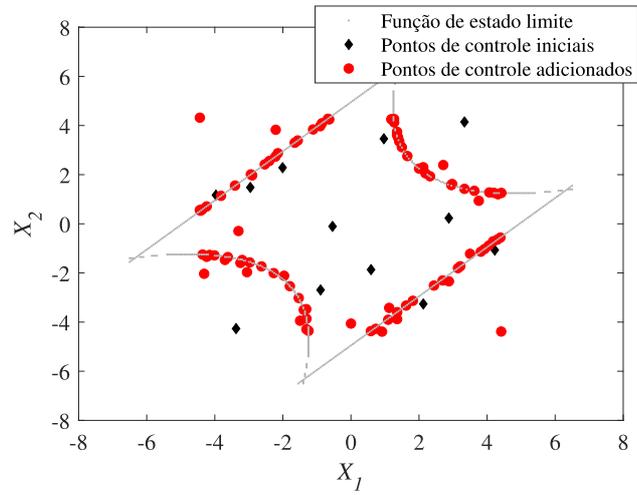
$$g(X_1, X_2) = \min \begin{cases} 3 + 0,1(X_1 - X_2)^2 - \frac{(X_1 - X_2)}{\sqrt{2}} \\ 3 + 0,1(X_1 - X_2)^2 + \frac{(X_1 - X_2)}{\sqrt{2}} \\ (X_1 - X_2) + \frac{7}{\sqrt{2}} \\ (X_2 - X_1) + \frac{7}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (58)$$

onde as variáveis aleatórias  $X_1$  e  $X_2$  possuem distribuição normal padrão.

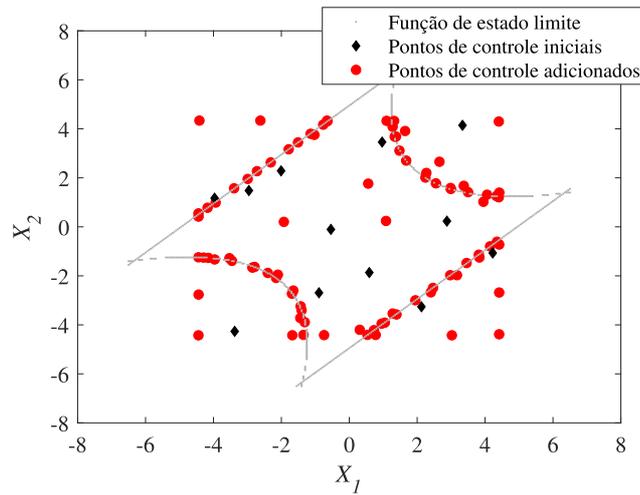
O tamanho da amostra considerado no método WASM é igual a  $10^5$  e os parâmetros da função- $U_{WS}$  são:  $\epsilon_s = 1,0 \times 10^{-3}$  e  $\alpha = 1,0 \times 10^{-2}$ . A Figura 14 ilustra os pontos de controle adicionados ao longo do processo iterativo, considerando-se o mesmo DoE inicial, para as três funções de aprendizado analisadas.

Observa-se que todas as funções de aprendizado selecionam novos pontos de controle na região próxima à fronteira entre falha e sobrevivência, principalmente quando considerada a função  $U_{WS}$ . Na Tabela 3 apresentam-se a média da probabilidade de falha ( $P_f$ ), obtida após 10 execuções do algoritmo, a diferença percentual, ( $\epsilon$ ), entre a probabilidade de falha obtida por meio do método de referência e quando utilizado o metamodelo com cada uma das funções de aprendizado, e o número de avaliações da função de estado limite,  $N_{aval}$ . Na Figura 15 é apresentado um diagrama de caixa, com intervalo de confiança de 95%, que representa a probabilidade de falha obtida em todas as 10 execuções do algoritmo, enquanto na Figura 16 apresenta-se a convergência da probabilidade de falha ao escolher-se uma das execuções. Observa-se que a combinação do método WASM e do metamodelo Kriging apresenta bons resultados em termos de

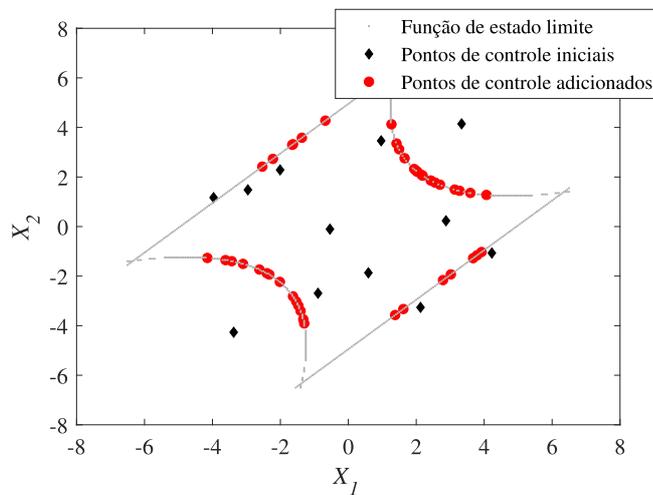
Figura 14 – Exemplo 1: Pontos de controle adicionados (a) função- $U$ , (b) função- $EFF$ , e (c) função- $U_{WS}$ , respectivamente.



(a)



(b)



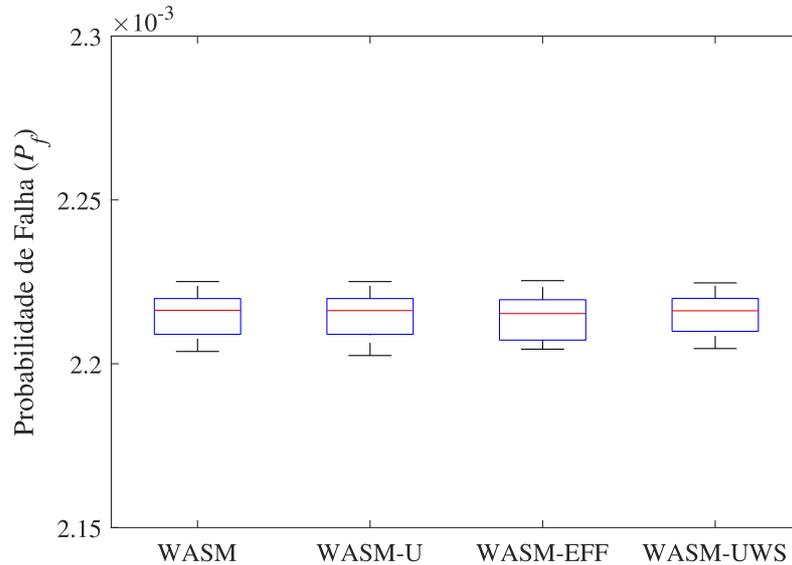
(c)

eficiência e precisão, principalmente quando a função- $U_{WS}$  é utilizada. Nesta situação, os resultados tornam-se precisos mesmo quando um pequeno número de amostras é adotado. No entanto, na medida em que novas amostras são adicionadas ao DoE, todas as funções convergem para o método WASM.

Tabela 3 – Resultados médios obtidos para o Exemplo 1.

Método	$P_f(\sigma)$	$\epsilon(\%)$	$N_{aval}$
WASM	$2,215 \times 10^{-3}$ ( $6,7047 \times 10^{-6}$ )	*	$10^5$
WASM- $U$	$2,215 \times 10^{-3}$ ( $6,9437 \times 10^{-6}$ )	$6,0 \times 10^{-3}$	12+112,7
WASM- $EFF$	$2,215 \times 10^{-3}$ ( $6,7851 \times 10^{-6}$ )	$1,3 \times 10^{-2}$	12+121
WASM- $U_{WS}$	$2,215 \times 10^{-3}$ ( $6,4225 \times 10^{-6}$ )	$7,0 \times 10^{-3}$	12+30,1

Figura 15 – Exemplo 1: Diagrama de caixa da probabilidade de falha considerando 10 repetições do algoritmo

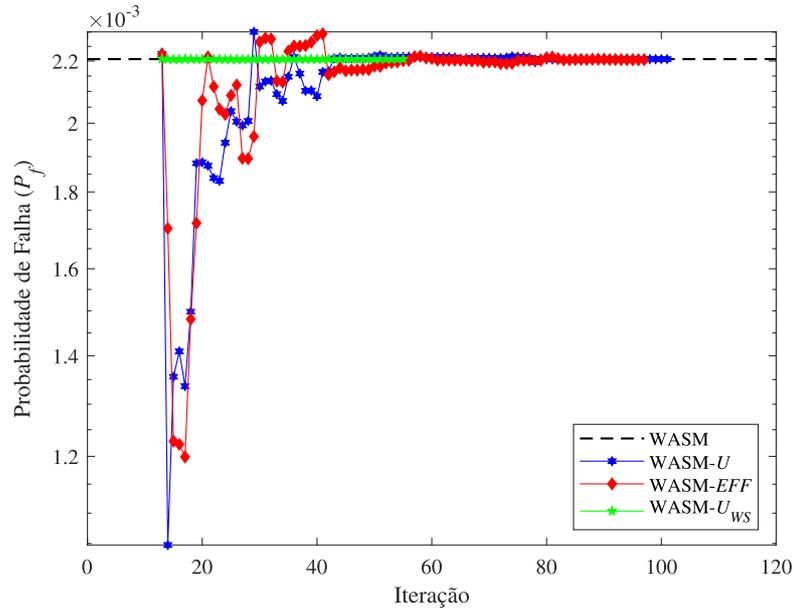


#### 4.2.1.2 Exemplo 2: Função Rastrigin modificada

O segundo exemplo abordado nesta seção é representado pela função Rastrigin modificada, que é frequentemente utilizada na literatura no contexto da combinação entre métodos de confiabilidade e o metamodelo Kriging, como pode ser visto em Echard, Gayton e Lemaire (2011), Huang, Chen e Zhu (2016), Lelièvre *et al.* (2018) e Liu, H. S. Li e Nan (2019). A função de estado limite é expressa por:

$$g(X_1, X_2) = 10 - \sum_{i=1}^2 (X_i^2 - 5 \cos(2\pi X_i)) \quad (59)$$

Figura 16 – Exemplo 1: Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo.



onde as variáveis aleatórias  $X_i$  possuem distribuição normal padrão.

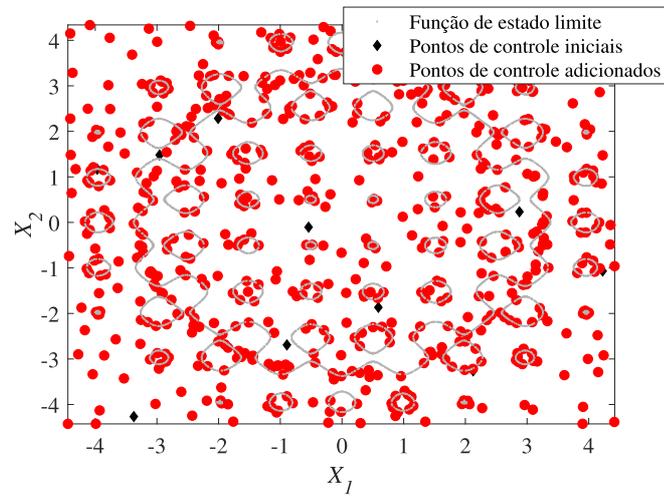
Para o método WASM, considerou-se uma amostra de tamanho igual a  $10^5$ , e os parâmetros da função- $U_{WS}$  são:  $\epsilon_s = 1.0 \times 10^{-3}$  e  $\alpha = 1.0 \times 10^{-2}$ . A Figura 17 ilustra os pontos de controle escolhidos ao longo do processo iterativo para cada função de aprendizado. Observa-se que os melhores resultados são obtidos para a função- $U_{WS}$ , uma vez que a adequada escolha dos pontos controle, próximos à função de estado limite, leva à convergência com um menor número de pontos.

Na Tabela 4 comparam-se os resultados médios obtidos por meio de cada método abordado. Embora a função- $U_{WS}$  atinja a convergência com um número menor de avaliações da função de estado limite, uma maior diferença é observada no valor obtido para a probabilidade de falha. Entretanto, mudanças nos parâmetros utilizados no critério de convergência da função podem produzir resultados mais precisos. Na Figura 18 apresenta-se o diagrama de caixa que representa a probabilidade de falha obtida em cada execução do algoritmo. Na Figura 19 ilustra-se a convergência da mesma ao considerar-se uma das repetições executadas. Como pode-se observar, apesar de não ocorrer no início do processo iterativo, a convergência é alcançada para as três funções de aprendizado analisadas.

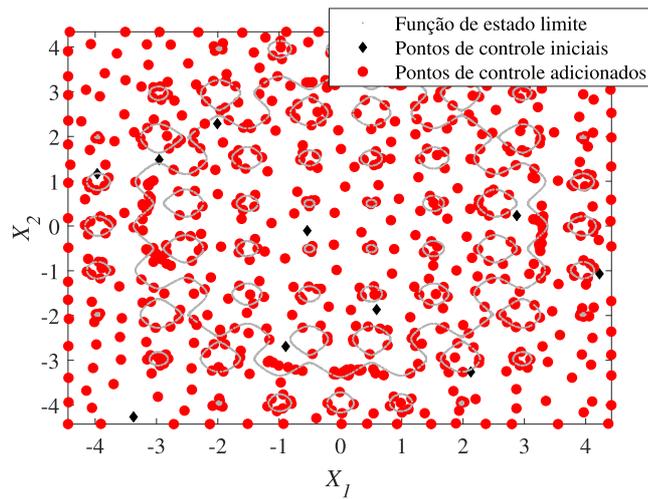
Tabela 4 – Resultados médios obtidos para o Exemplo 2.

Método	$P_f(\sigma)$	$\epsilon(\%)$	$N_{aval}$
WASM	$7.296 \times 10^{-2}$ ( $3.6218 \times 10^{-4}$ )	*	$10^5$
WASM- $U$	$7.296 \times 10^{-2}$ ( $3.6217 \times 10^{-4}$ )	$1.3 \times 10^{-5}$	12+638.1
WASM- $EFF$	$7.296 \times 10^{-2}$ ( $3.6217 \times 10^{-4}$ )	$6.8 \times 10^{-6}$	12+694.4
WASM- $U_{WS}$	$7.307 \times 10^{-2}$ ( $5.9549 \times 10^{-4}$ )	$1.5 \times 10^{-1}$	12+423.7

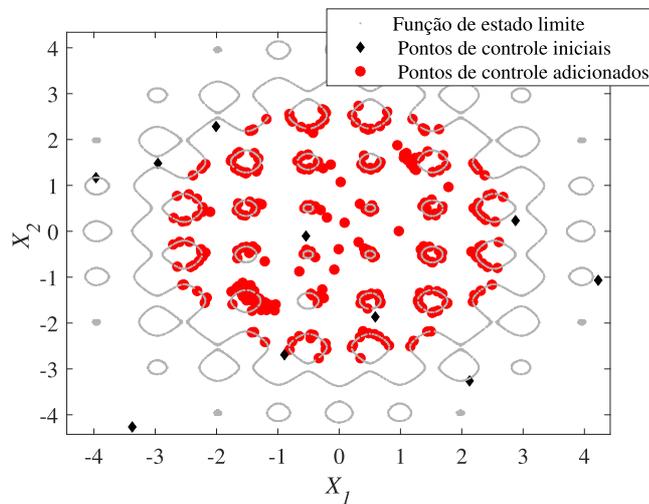
Figura 17 – Exemplo 2: Pontos de controle adicionados utilizando (a) função- $U$ , (b) função- $EFF$ , e (c) função- $U_{WS}$ , respectivamente.



(a)



(b)



(c)

Figura 18 – Exemplo 2: Diagrama de caixa da probabilidade de falha considerando 10 repetições do algoritmo.

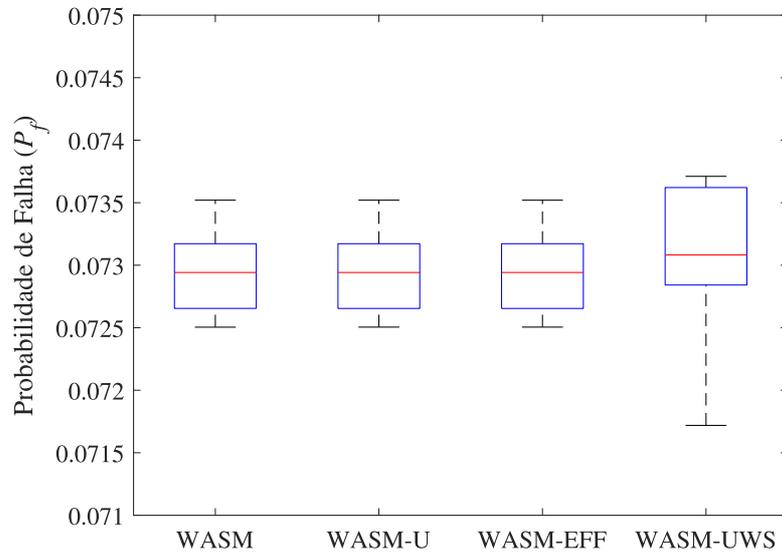
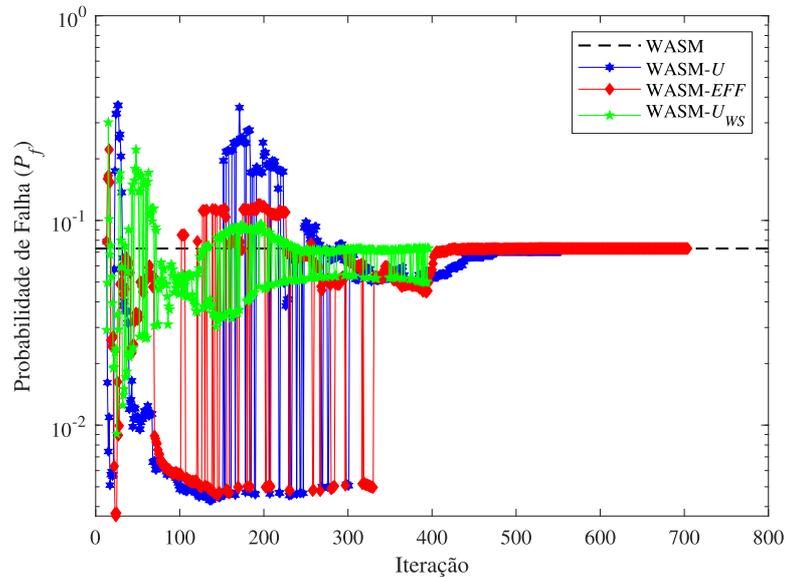


Figura 19 – Exemplo 2: Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo.



#### 4.2.1.3 Exemplo 3: Resposta dinâmica de um oscilador não-linear

O último exemplo analisado na etapa de escolha da função de aprendizado consiste em um sistema não linear de um grau de liberdade, também estudado por Echard, Gayton e Lemaire (2011), Huang, Chen e Zhu (2016), Peijuan *et al.* (2017), Lelièvre *et al.* (2018) e Liu, H. S. Li e Nan (2019). A função de estado limite é representada da seguinte forma:

$$g(c_1, c_2, m, r, t_1, F_1) = 3r - \left| \frac{2F_1}{m\omega^2} \sin \frac{\omega t_1}{2} \right| \quad (60)$$

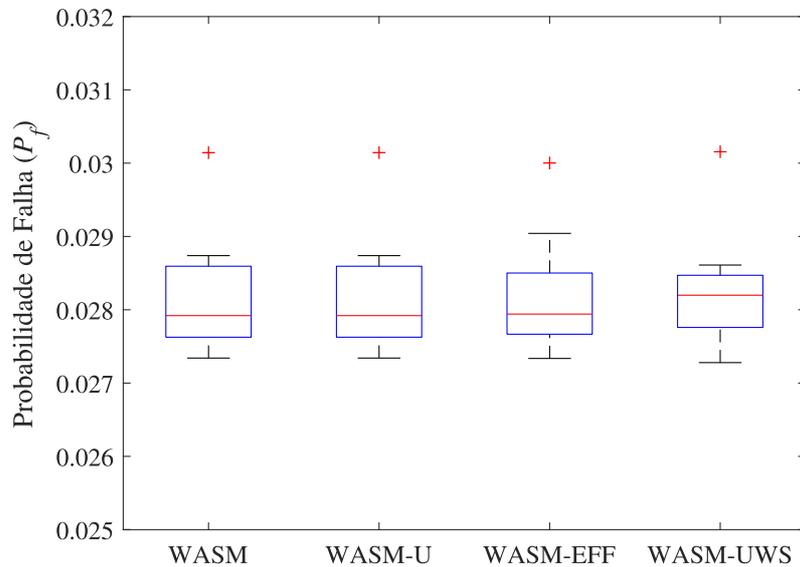
onde  $w = \sqrt{(C_1 + C_2)/m}$ , as variáveis aleatórias possuem distribuição normal com parâmetros:  $m \sim N(1,0.05)$ ,  $c_1 \sim N(1,0.1)$ ,  $c_2 \sim N(0.1,0.01)$ ,  $r \sim N(0.5,0.05)$ ,  $F_1 \sim N(1,0.2)$  e  $t_1 \sim N(1,0.2)$ . O tamanho da amostra considerada no método WASM é igual a  $10^5$  e os parâmetros do critério de convergência adotados na função- $U_{WS}$  são definidos por:  $\epsilon_s = 5.0 \times 10^{-3}$  e  $\alpha = 1.0 \times 10^{-2}$ .

Os resultados médios obtidos para a probabilidade de falha são apresentados na Tabela 5. Na Figura 20 apresenta-se o diagrama de caixa contendo os resultados obtidos em 10 execuções do algoritmo, e na Figura 21 a convergência da probabilidade de falha obtida ao longo do processo iterativo. Como pode-se observar, embora todas as funções de aprendizado forneçam resultados precisos, a função- $U_{WS}$  é que atinge a convergência com um número consideravelmente menor de avaliações da função de estado limite.

Tabela 5 – Resultados médios obtidos para o Exemplo 3.

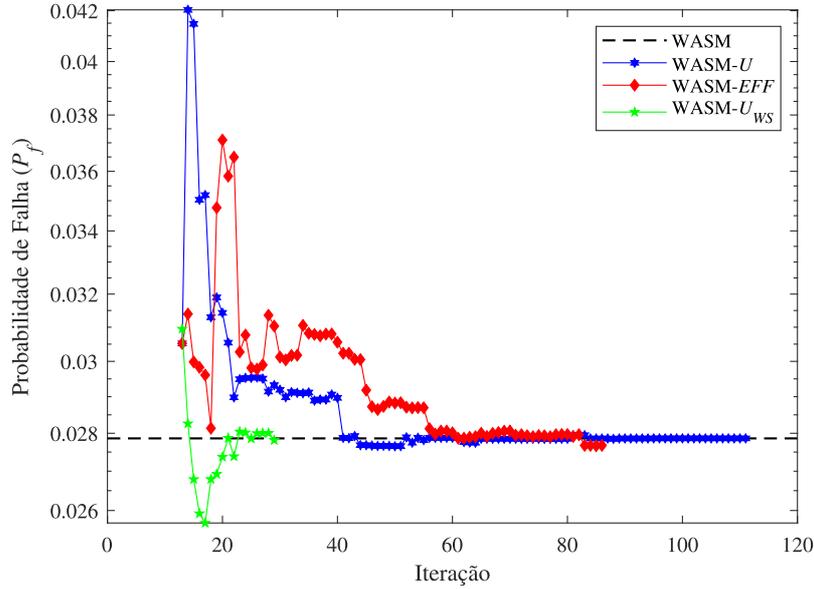
Método	$P_f(\sigma)$	$\epsilon(\%)$	$N_{aval}$
WASM	$2.820 \times 10^{-2}$ ( $8.1143 \times 10^{-4}$ )	*	$10^5$
WASM- $U$	$2.820 \times 10^{-2}$ ( $8.1141 \times 10^{-4}$ )	$1.0 \times 10^{-4}$	12+104.2
WASM- $EFF$	$2.820 \times 10^{-2}$ ( $8.0026 \times 10^{-4}$ )	$9.0 \times 10^{-3}$	12+69.8
WASM- $U_{WS}$	$2.820 \times 10^{-2}$ ( $8.2280 \times 10^{-4}$ )	$1.0 \times 10^{-2}$	12+16.4

Figura 20 – Exemplo 3: Diagrama de caixa da probabilidade de falha considerando 10 repetições do algoritmo



Ao final da etapa de escolha da função de aprendizado, pode-se concluir que a metodologia que combina o método de confiabilidade WASM com o metamodelo Kriging apresentou resultados precisos e com um número de avaliações da função de estado limite consideravelmente menor para todos os casos analisados. Dentre as funções de aprendizado analisadas, evidencia-se que a função- $U_{WS}$  apresenta boa precisão e uma maior eficiência

Figura 21 – Exemplo 3: Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo.



em termos do número de avaliações da função de estado limite. Além disso, os pontos de controle escolhidos pela função são os que melhor se aproximam do limite entre falha e sobrevivência, o que pode ser útil na determinação dos modos de falha dominantes. Por conta disso, a função- $U_{WS}$  foi escolhida para ser adotada no desenvolvimento deste trabalho.

Entretanto, de acordo com N. C. Xiao, Yuan e Zhou (2020), se o número de variáveis aleatórias do problema analisado for superior a 5, como será o caso dos exemplos abordados ao longo desta pesquisa, o uso do método de Monte Carlo Simples é recomendado em conjunto com o metamodelo Kriging. Isto ocorre em virtude do peso das amostras,  $W_i$ , tender a zero na medida em que o número de variáveis aleatórias do problema aumenta. Logo, a função- $U_{WS}$ , relacionada ao método WASM, deve ser substituída pela função- $U_{DS}$ , relacionada ao método de Monte Carlo Simples, sofrendo as seguintes alterações:

$$U_{DS}(\mathbf{x}_i) = \Phi\left(\frac{-\mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{-\mu_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{x}_i)}\right)\right] \text{ para } i = 1, \dots, N_{MC} \quad (61)$$

onde  $\mu_{\hat{g}}$  é a média da predição e  $\sigma_{\hat{g}}$  o seu respectivo desvio padrão.

Dentre a população de Monte Carlo, a amostra que possuir o maior valor de  $U_{DS}$  é escolhida como o próximo ponto de controle,  $\mathbf{x}^*$ , para compor o DoE.

O critério de parada da função de aprendizado continua relacionado com o valor esperado da probabilidade de falha e sua variância, neste caso dadas por:

$$\begin{aligned}
E(\hat{P}_f) &= \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \hat{I}_s(\mathbf{x}_i); \\
\text{VAR}(\hat{P}_f) &= \frac{1}{N_{MC}^2} \sum_{i=1}^{N_{MC}} U_{DS}
\end{aligned} \tag{62}$$

Logo, o critério de parada é definido da seguinte forma:

$$\frac{\sqrt{\text{VAR}(\hat{P}_f)}}{E(\hat{P}_f)} < \left| \frac{\epsilon_s}{\Phi^{-1}(\alpha/2)} \right| \tag{63}$$

Neste capítulo detalhou-se o metamodelo escolhido para tornar computacionalmente viável a análise dos sistemas estruturais propostos nesta pesquisa. Além disso, apresentou-se a metodologia de aprendizado ativo que permite fazer uma escolha inteligente dos pontos controle utilizados na construção do metamodelo. Por fim, visto que diferentes funções de aprendizado são apresentadas na literatura, apresentou-se uma análise da eficácia de três funções com o intuito de escolher a função a ser empregada nesta pesquisa. Após a escolha do metamodelo e da função de aprendizado, no próximo capítulo serão apresentados os detalhes referentes à formulação da função de estado limite, que considera a resposta estrutural do sistema, bem como os detalhes relacionados à análise mecânica para as estruturas sujeitas ao colapso progressivo que serão avaliadas.

## 5 MODELO MECÂNICO E FORMULAÇÃO DA FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE

No presente capítulo apresentam-se detalhes acerca do modelo mecânico e da análise estrutural, que irá fornecer a resposta global do sistema, e da equação de estado limite utilizada na construção do metamodelo. Ao final do capítulo são apresentados os resultados obtidos na etapa de validação e definição dos parâmetros utilizados ao longo da análise mecânica. Na última seção, apresenta-se a abordagem utilizada nesta pesquisa para identificar os modos de falha dominantes.

### 5.1 MODELO MECÂNICO

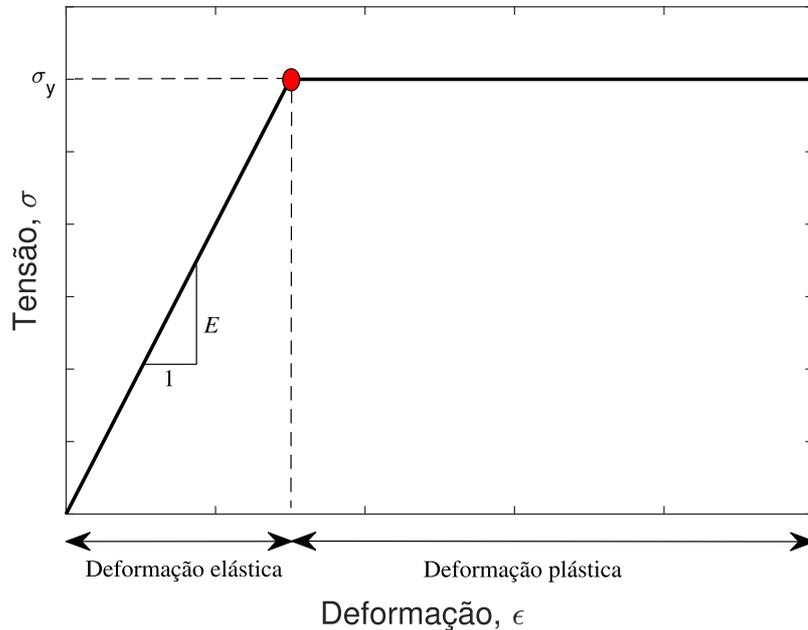
Uma vez que o modelo estrutural representa adequadamente o comportamento da estrutura sujeita ao colapso progressivo, a falha do sistema pode ser caracterizada considerando a sua resposta global, conforme descrito por Gomes e A. T. Beck (2013). Nesta situação, a avaliação da confiabilidade global da estrutura está diretamente relacionada ao comportamento do sistema e do colapso progressivo, embora não seja possível conhecer as probabilidades associadas à cada caminho de falha. Neste trabalho, a construção do modelo mecânico em elementos finitos é realizada por meio do *software* MASTAN2 (MC-GUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2014). As rotinas disponíveis no programa permitem a realização de análises estruturais de primeira ou segunda ordem, elástica ou inelástica, para pórticos e treliças de duas ou três dimensões. A principal vantagem do *software* MASTAN2, quando comparado a outros programas de elementos finitos, é o baixo custo computacional envolvido na realização das análises. Este baixo custo está relacionado ao fato do programa ser implementado em ambiente MATLAB e, por conta disso, não ser necessária a realização de acoplamentos entre *softwares* que aumentam a demanda computacional.

#### 5.1.1 Modelo constitutivo

O comportamento estrutural do material considerado na modelagem mecânica tem significativo impacto nos modos de falha que podem ocorrer em sistemas estruturais redundantes (SRIVIDYA; RANGANATHAN, 1992; XIAO, Q.; MAHADEVAN, 1994; HENWADI; FRANGOPOL, 1994). Existem, na literatura, diferentes modelos constitutivos que permitem representar o comportamento e, conseqüentemente, a resposta estrutural dos materiais. Neste trabalho, com o intuito de permitir a possibilidade de falha progressiva dos elementos, o material é assumido como sendo elastoplástico perfeito. O comportamento elastoplástico, conforme ilustrado na Figura 22, é representado pelo módulo de elasticidade do material,  $E$ , e por sua respectiva tensão de escoamento,  $\sigma_y$ . A deformação total,  $\epsilon$ , é então expressa em termos da deformação elástica, que ocorre até a tensão de escoamento ser atingida, e a deformação plástica, que tem início após o limite de escoamento ser

alcançado.

Figura 22 – Representação do comportamento elastoplástico perfeito.



### 5.1.2 Análise estrutural não linear

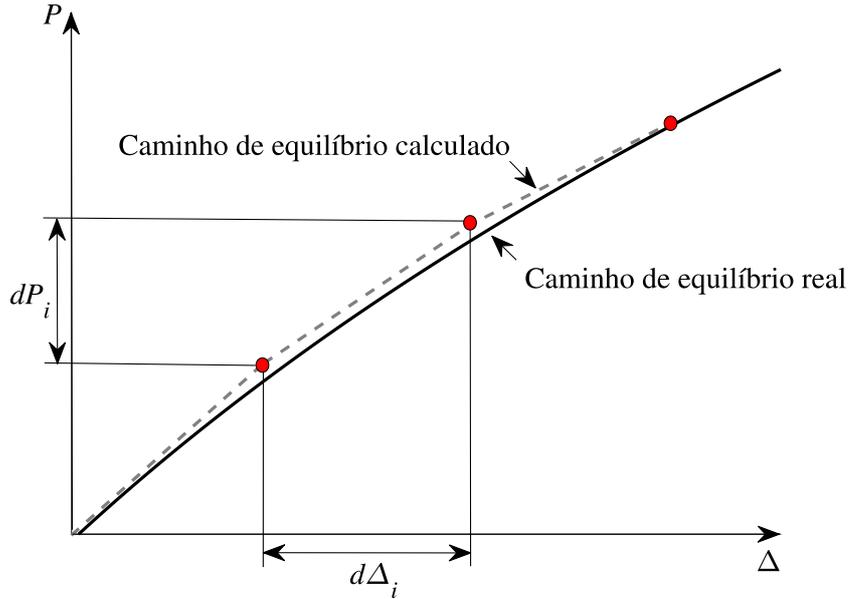
A análise estrutural representa a fase onde é realizada a idealização do comportamento da estrutura. Esta análise pode ser classificada, basicamente, de quatro formas: elástica de primeira ordem, inelástica de primeira ordem, elástica de segunda ordem e inelástica de segunda ordem. Na análise elástica de primeira ordem, assume-se que o material possui comportamento elástico-linear, e o equilíbrio da estrutura é formulado na sua configuração inicial. Quando considerada a análise elástica de segunda ordem, assume-se que o material possui comportamento elástico-linear, e apenas os efeitos de não linearidades geométricas, relacionadas às deformações que podem ocorrer nos elementos, são considerados. A análise inelástica de primeira ordem é caracterizada pelo comportamento não linear do material, e o equilíbrio da estrutura é formulado na sua configuração inicial. Por fim, na análise inelástica de segunda ordem o comportamento não linear do material é assumido e o equacionamento é formulado considerando a estrutura em sua posição deformada.

#### 5.1.2.1 Análise incremental-iterativa

Considerando-se a análise não linear, a formulação do equilíbrio de uma estrutura em sua configuração deformada resultará em um sistema não linear de equações de rigidez. A solução destas equações pode ser realizada por meio de métodos incrementais, onde

o carregamento é aplicado incrementalmente ao longo da análise estrutural, conforme ilustrado na Figura 23 (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2014). Neste caso, o carregamento total da estrutura,  $\mathbf{P}$ , que corresponde ao produto de uma taxa de carga  $\lambda$  e uma carga de referência,  $\mathbf{P}_{\text{ref}}$ , é aplicada por meio de uma série de incrementos de carga,  $d\mathbf{P}_i$ , podendo ser matematicamente escrita da seguinte forma:

Figura 23 – Representação da análise incremental.



$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \lambda \mathbf{P}_{\text{ref}} \\ &= \sum_{i=1}^n d\mathbf{P}_i \end{aligned} \quad (64)$$

onde  $n$  é o número total de incrementos de carga aplicados.

O correspondente deslocamento da estrutura,  $\Delta$ , é dado por:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n d\Delta_i \quad (65)$$

onde  $d\Delta_i$  é o vetor de deslocamentos resultante da aplicação do  $i$ -ésimo incremento de carga  $d\mathbf{P}_i$ .

O grau de aproximação da resposta é uma função da precisão com que a relação não linear entre  $d\mathbf{P}_i$  e  $d\Delta_i$  é representada durante cada incremento de carga. A análise de um problema não linear pode ser realizada por meio de métodos incrementais-iterativos, onde os incrementos são subdivididos em um número específico de passos. Neste caso, cada incremento é um ciclo de um processo iterativo que tem como objetivo satisfazer

as equações de equilíbrio. O deslocamento  $\Delta$  em um incremento  $i$  é representado por (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2014):

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + \sum_{j=1}^{m_i} d\Delta_i^j \quad (66)$$

onde  $\Delta_{i-1}$  e  $\Delta_i$  são os deslocamentos totais obtidos ao final dos incrementos de carga anterior e atual, respectivamente, e  $m_i$  é o número de passos iterativos necessários no  $i$ -ésimo incremento de carga. Em cada passo  $j$ , o deslocamento  $d\Delta_i^j$  é obtido por meio da solução do sistema linear de equações:

$$\mathbf{K}_i^{j-1} d\Delta_i^j = d\mathbf{P}_i^j + \mathbf{R}_i^{j-1} \quad (67)$$

onde  $\mathbf{K}_i^{j-1}$  é a rigidez avaliada utilizando-se a geometria deformada e  $\mathbf{R}_i^{j-1}$  representa o desequilíbrio entre as forças internas e externas, que pode ser calculado da seguinte forma:

$$\mathbf{R}_i^{j-1} = \mathbf{P}_i^{j-1} - \mathbf{F}_i^{j-1} \quad (68)$$

onde  $\mathbf{P}_i^{j-1}$  são as forças externas totais aplicadas e  $\mathbf{F}_i^{j-1}$  é o vetor de forças internas obtidas pelo somatório das forças do elemento em cada grau de liberdade global. O carregamento aplicado em cada iteração é então dado por:

$$d\mathbf{P}_i^j = d\lambda_i^j \mathbf{P}_{\text{ref}} \quad (69)$$

onde  $d\lambda_i^j$  é o fator de carga da respectiva iteração.

A aplicação das equações descritas nesta seção pode ser esquematizadamente descrita da seguinte forma: O  $i$ -ésimo incremento inicia assumindo-se que a força  $\mathbf{R}_i^0 = 0$  e calculando-se o deslocamento da primeira iteração  $d\Delta_i^1$ , que corresponde à carga aplicada  $d\lambda_i^1 \mathbf{P}_{\text{ref}}$  e a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_i^0$ . Após atualizar a geometria deformada e as forças dos elementos, a segunda iteração inicia-se por meio da determinação da carga  $\mathbf{R}_i^1$ , que é aplicada à estrutura. Utilizando-se a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_i^1$  obtêm-se os respectivos deslocamentos  $d\Delta_i^2$ . O fator de carga  $d\lambda_i^2$ , referente à segunda iteração, pode ser computado por meio de diferentes métodos, como o de controle de carga e o de controle dos deslocamentos. No método do controle de carga, também conhecido como método de Newton-Raphson, todo o carregamento é aplicado no passo  $j = 1$  e as iterações adicionais,  $j \geq 2$ , são realizadas apenas para satisfazer as condições de equilíbrio. Considerando-se o método de controle dos deslocamentos, proposto por Batoz e Dhatt (1979), o fator de carga no primeiro passo de um incremento é definido para um componente de deslocamento prescrito, e o fator de carga nas demais iterações é restrito a esse deslocamento.

O processo é repetido iterativamente até que a força total considerada seja aplicada à estrutura ou que a falha da mesma ocorra e, conseqüentemente, o processo não atinja a convergência. No programa MASTAN2, utilizou-se a configuração de tamanho de passo igual a 0,01 e a opção *predictor-corrector* para a correção do mesmo.

## 5.2 RESPOSTA GLOBAL DO SISTEMA E FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE

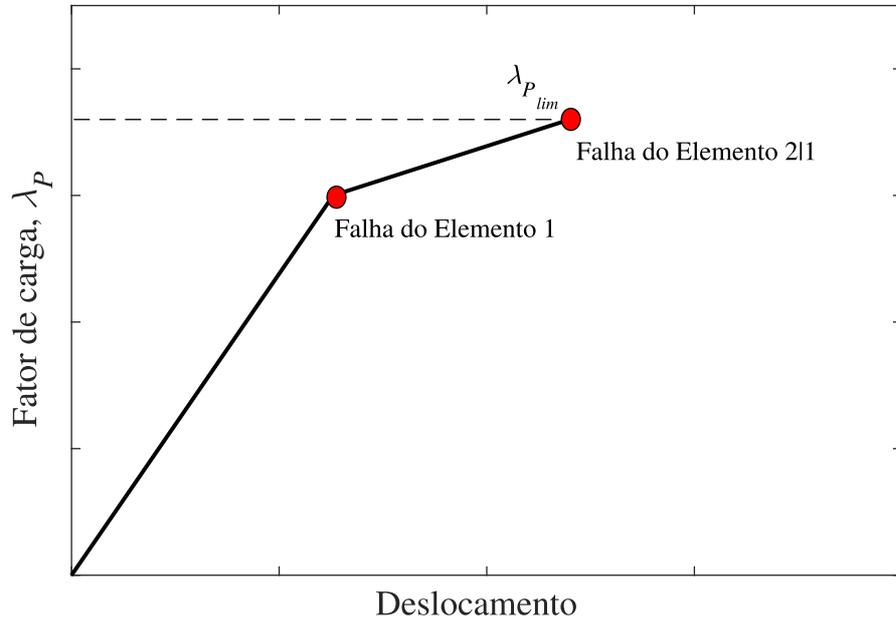
O metamodelo é construído considerando-se a resposta real da função de estado limite,  $g(\mathbf{X})$ , em todos os pontos de controle. Logo, a sua construção envolve a obtenção da resposta estrutural global do sistema para todos estes pontos. Na análise estrutural, considerando-se o processo incremental-iterativo descrito na última seção, para cada ponto de controle a carga total,  $P$ , associada a este ponto é dividida em incrementos e gradualmente aplicada ao sistema. Ao longo da análise, o carregamento aplicado ao sistema em um dado incremento é representado pelo fator de carga aplicada conforme descrito na seção anterior, nesta seção representado por  $\lambda_P$ . Dado que o fator de carga aplicada é definido como uma taxa entre o carregamento aplicado no incremento e a carga total  $P$ , quando o valor do fator de carga é igual a 1, a carga aplicada ao sistema no incremento é igual a  $P$ .

Considerando-se um sistema estrutural com elementos que possuem comportamento elastoplástico perfeito, a falha do sistema ocorre quando um número específico de elementos, referente ou número de graus de redundância do sistema, atinge a falha. Nesta situação, obtém-se a resposta estrutural global, que é dada pelo valor do fator de carga limite,  $\lambda_{P_{lim}}$ , que é aplicado ao sistema e acarreta na falha do mesmo. Na Figura 24 ilustra-se a determinação do fator de carga limite para um modelo estrutural com grau de redundância igual a 1, onde dois elementos precisam falhar para que ocorra a falha do sistema. Conforme ilustrado, a sequência de falha inicia-se com a falha do Elemento 1, seguida da falha do Elemento 2 dada a ocorrência da falha do Elemento 1.

Após a obtenção do fator de carga limite,  $\lambda_{P_{lim}}$ , pode-se caracterizar cada ponto de controle como sendo pertencente, ou não, do domínio de falha do sistema. O domínio de falha é composto por todos os pontos de controle que possuem valor de fator de carga limite inferior a 1. Ou seja, aqueles no qual a falha do sistema ocorre antes que a carga total,  $P$ , seja aplicada. Porém, é importante observar que em algumas situações a carga total pode ser completamente aplicada ao sistema sem que ocorra a falha do mesmo. Nesta situação, o fator de carga,  $\lambda_P$ , tem valor igual a 1 e o fator de carga limite não é obtido.

Considerando-se métodos convencionais de análise de confiabilidade estrutural, como o método de Monte Carlo simples, por exemplo, busca-se apenas a informação de falha, ou sobrevivência, do sistema. Neste caso, cada simulação é realizada até ocorrer a falha do sistema ou até o carregamento total,  $P$ , ser aplicado. Desta forma, na situação de não falha, uma vez aplicado o carregamento total, não é necessário dar sequência na simulação até que a falha do sistema ocorra. Entretanto, quando se utiliza metamode-

Figura 24 – Representação da resposta estrutural global,  $\lambda_{P_{lim}}$ , para um sistema estrutural sujeito ao colapso progressivo com grau de redundância igual a 1.



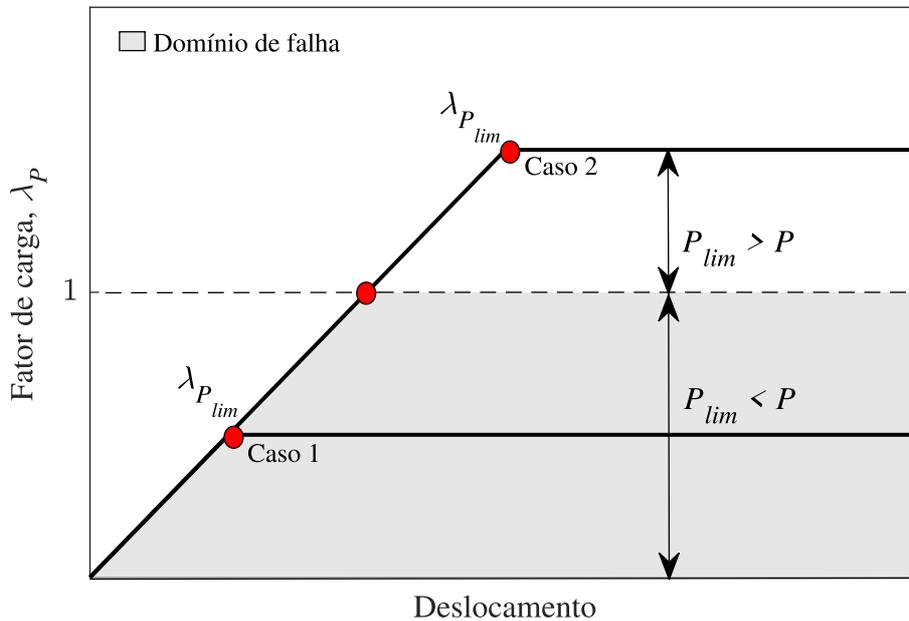
los, como será investigado na Seção 5.2.1, o valor real da função de estado limite em cada ponto de controle tem grande influência na precisão da predição. Por conta disso, necessita-se aumentar o fator de carga iterativamente até que a falha do sistema ocorra e, conseqüentemente, o valor do fator de carga limite,  $\lambda_{P_{lim}}$ , seja obtido. Na Figura 25 o domínio de falha é ilustrado e dois casos são apresentados. No Caso 1, a falha do sistema ocorre antes do carregamento total,  $P$ , ser aplicado (domínio de falha), e no Caso 2 a falha só ocorre após um carregamento superior ao carregamento total,  $P$ , ser aplicado (domínio de sobrevivência).

Diante deste contexto, a função de estado limite,  $g(\mathbf{X})$ , também abordada por Silva (2016) no contexto da análise de confiabilidade de estruturas com comportamento não linear, que permite analisar a estrutura com base na sua resposta global pode ser definida como:

$$g(\mathbf{X}) = \lambda_{P_{lim}}(\mathbf{X}) - 1 \quad (70)$$

onde  $\mathbf{X}$  é o vetor de variáveis aleatórias e  $\lambda_{P_{lim}}$  é o fator de carga limite obtido ao final da análise estrutural.

Utilizando-se a Equação (70), que utiliza a resposta global do sistema estrutural, a dependência entre os eventos é diretamente endereçada. Isto ocorre uma vez que ao realizar-se a análise estrutural, cada simulação é realizada até que ocorra a falha de todos os elementos necessários para caracterizar a falha do sistema, havendo apenas a redistribuição dos esforços. Esta suposição é coerente com o que acontece na prática das

Figura 25 – Representação do domínio de falha e do fator de carga limite  $\lambda_{P_{lim}}$ .

estruturas de engenharia.

É importante ressaltar que o aumento das simulações além do carregamento total,  $P$ , necessário em alguns pontos de controle para obter o fator de carga limite, pode aumentar a demanda computacional da análise do modelo mecânico. Por outro lado, o uso de metamodelos reduz significativamente o número de avaliações da função de estado limite e o aumento do esforço computacional, relacionado ao aumento do número de simulações da análise mecânica necessárias para obter o fator de carga limite, pode ser negligenciado, como será analisado na próxima seção.

### 5.2.1 Influência do fator de carga aplicado

Nesta etapa da pesquisa é realizada uma investigação acerca da influência de utilizar-se o valor real da função de estado limite na construção do metamodelo. Esta consideração implica em obter o valor de  $\lambda_{P_{lim}}$  para todos os pontos de controle adicionados ao DoE. Os resultados obtidos considerando-se o valor da função de estado limite para a estrutura carregada até a falha em todos os pontos de controle são comparados com os obtidos na situação em que o fator de carga é inferior ao seu limite para os pontos localizados no domínio de sobrevivência. Neste último caso, o fator de carga aplicado ao final da análise estrutural encontra-se no intervalo entre 1,0 e  $\lambda_{P_{lim}}$ . Esta análise é realizada considerando-se dois exemplos encontrados na literatura, ambos sujeitos ao colapso progressivo, e com um número de variáveis aleatórias superior a 5. Por conta disso, o método de Monte Carlo simples é utilizado em conjunto com o metamodelo Kriging e a função de aprendizado  $U_{DS}$ .

## 5.2.1.1 Exemplo 1: Treliça de 6 barras estaticamente indeterminada

O primeiro exemplo desta investigação envolve a análise da confiabilidade estrutural de uma treliça de 6 barras estaticamente indeterminada, com grau de redundância igual a um, conforme ilustrado na Figura 26. A seção transversal de cada elemento possui área igual a  $2,30 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . As 11 variáveis aleatórias presentes neste exemplo são estatisticamente independentes e consistem na tensão de escoamento das barras,  $\sigma_{yi}(i = 1, \dots, 6)$ , e nas cargas aplicadas,  $F_i(i = 1, \dots, 5)$ , que possuem os parâmetros apresentados na Tabela 6.

Figura 26 – Treliça de 6 barras estaticamente indeterminada.

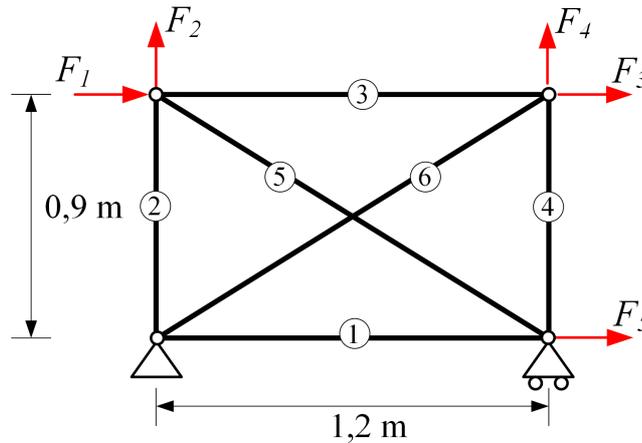


Tabela 6 – Variáveis aleatórias da treliça de 6 barras.

Variável	Distribuição	Média	Coefficiente de variação
$F_1$	Normal	50 kN	0,1
$F_2$	Normal	30 kN	0,1
$F_3$	Normal	20 kN	0,1
$F_4$	Normal	30 kN	0,1
$F_5$	Lognormal	20 kN	0,1
$\sigma_{yi}(i = 1, \dots, 6)$	Normal	276 MPa	0,05

Considerando-se o número de variáveis aleatórias presentes neste exemplo, o número inicial de pontos de controle,  $p$ , gerados pelo método LHS para construir o metamodelo inicial, é igual a 16. A população inicial utilizada no método de confiabilidade MCS é igual a  $4,0 \times 10^5$  e os parâmetros utilizados na função  $U_{DS}$  são iguais a  $2,0 \times 10^{-2}$ . O caso Referência, apresentado ao longo das análises, corresponde aquele em que a falha ocorre para todos os pontos de controle e, conseqüentemente, o fator de carga,  $\lambda_{P_{lim}}$ , seja obtido. O número de avaliações da função de estado limite é mantido fixo em todas as análises, escolhendo-se como padrão o número necessário para atingir-se a convergência no caso Referência.

Na Figura 27 apresenta-se os resultados obtidos para a probabilidade de falha ao longo do processo iterativo para todos os valores de  $\lambda_P$  considerados na análise, enquanto

na parte (b) apresentam-se apenas os resultados obtidos para valores de  $\lambda_P$  maiores ou iguais a 1,1. Seguindo a mesma lógica, na Figura 28 apresenta-se o critério de parada da função  $U_{DS}$ , apresentado na Equação (63), ao longo do processo iterativo. Na Tabela 7 são comparados os resultados obtidos após 254 avaliações da função de estado limite, quando o critério de parada é alcançado no caso Referência.

Tabela 7 – Análise da probabilidade de falha após 254 avaliações da função de estado limite.

Fator de carga	Probabilidade de falha ( $P_f$ )	Critério de parada
1,0	$5,13 \times 10^{-1}$	$5,78 \times 10^{-4}$
1,05	$6,20 \times 10^{-3}$	$1,72 \times 10^{-2}$
1,1	$1,59 \times 10^{-3}$	$1,25 \times 10^{-2}$
1,2	$1,49 \times 10^{-3}$	$1,03 \times 10^{-2}$
1,3	$1,50 \times 10^{-3}$	$9,56 \times 10^{-3}$
1,4	$1,48 \times 10^{-3}$	$8,33 \times 10^{-3}$
1,5	$1,51 \times 10^{-3}$	$7,81 \times 10^{-3}$
Referência ( $\lambda_{P_{lim}}$ )	$1,50 \times 10^{-3}$	$8,59 \times 10^{-3}$

Observa-se que quando o valor de  $\lambda_P$  máximo permitido na análise é igual, ou próximo, de 1, os valores obtidos para a probabilidade de falha não convergem, o que sugere o aumento do número de simulações permitidas. Conforme observado, a precisão da probabilidade de falha estimada é melhorada quando o valor real da função de estado limite é utilizado na construção do metamodelo. Ou seja, quando o carregamento é aumentado iterativamente até que a falha do sistema ocorra e o valor de fator de carga limite,  $\lambda_{P_{lim}}$ , seja alcançado para todos os pontos de controle.

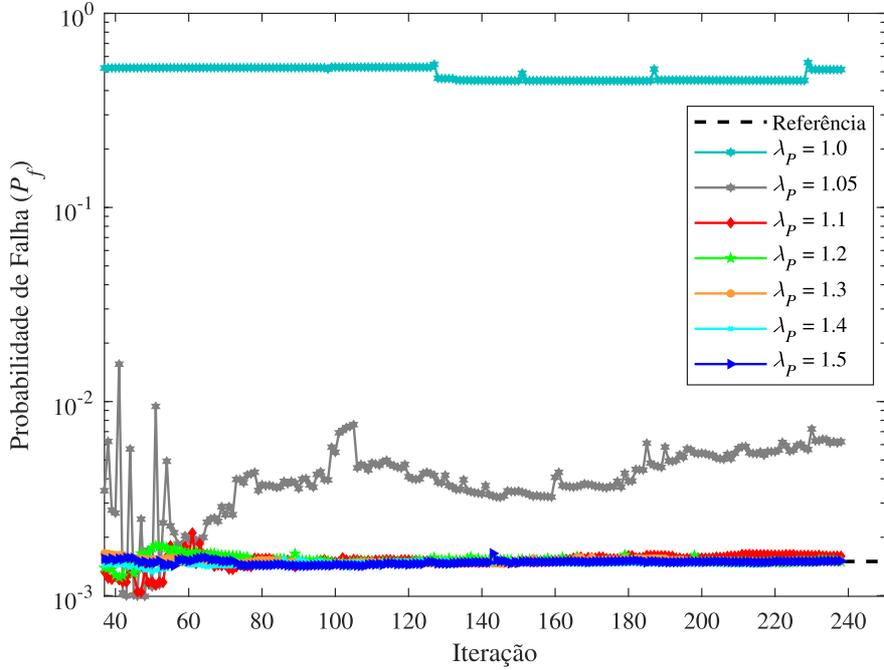
Considerando-se o número de avaliações da função de estado limite, necessário para obter a convergência quando o metamodelo é construído utilizando-se o fator de carga limite, pode-se observar que a precisão dos resultados aumenta de forma proporcional ao aumento do fator de carga adotado. Porém, o critério de parada da análise de confiabilidade só é alcançado para fatores de carga maiores que 1,4. Diante deste contexto, pode-se concluir que mais pontos de controle seriam necessários para que o critério de parada pudesse ser atingido quando o valor limite do fator de carga é inferior a 1,4.

### 5.2.1.2 Exemplo 2: Estrutura de treliça de ponte

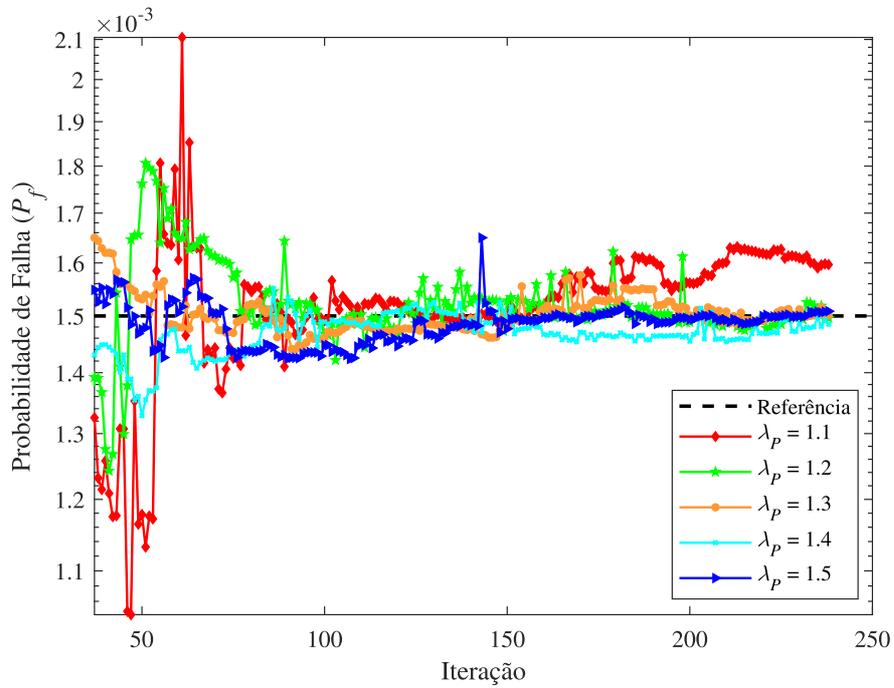
O segundo exemplo abordado nesta etapa consiste na treliça de ponte apresentada na Figura 29, que foi previamente investigada no contexto de confiabilidade estrutural por Kim et al. (KIM *et al.*, 2013) e Jiang et al. (JIANG, Y. *et al.*, 2020). A seção transversal de cada elemento é indicada na Tabela 8. A tensão de escoamento  $\sigma_{yi}$  ( $i = 1, \dots, 25$ ) e as forças aplicadas  $F_i$  ( $i = 1, \dots, 2$ ) são estatisticamente independentes e possuem os parâmetros apresentados na Tabela 9.

Neste exemplo, considerando-se o número de variáveis aleatórias, que é igual a 27, o número de pontos de controle iniciais,  $p$ , gerados pelo método LHS e utilizados para

Figura 27 – (a) Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo para todos os valores de  $\lambda_P$ . (b) Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo para valores de  $\lambda_P \geq 1,1$ .



(a)



(b)

construir o metamodelo inicial é igual a 32. O tamanho da amostra inicial considerado no método de Monte Carlo simples é igual a  $1,0 \times 10^5$  e os parâmetros da função de

Figura 28 – (a) Critério de parada ao longo do processo iterativo para todos os valores de  $\lambda_P$ . (b) Critério de parada ao longo do processo iterativo para valores de  $\lambda_P \geq 1,1$ .

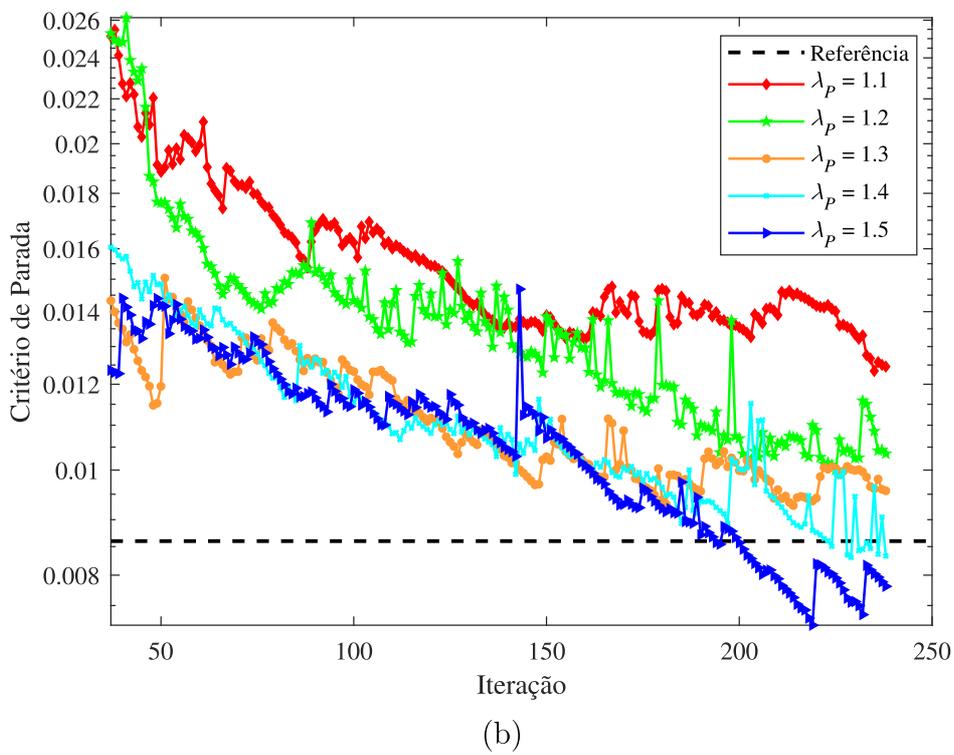
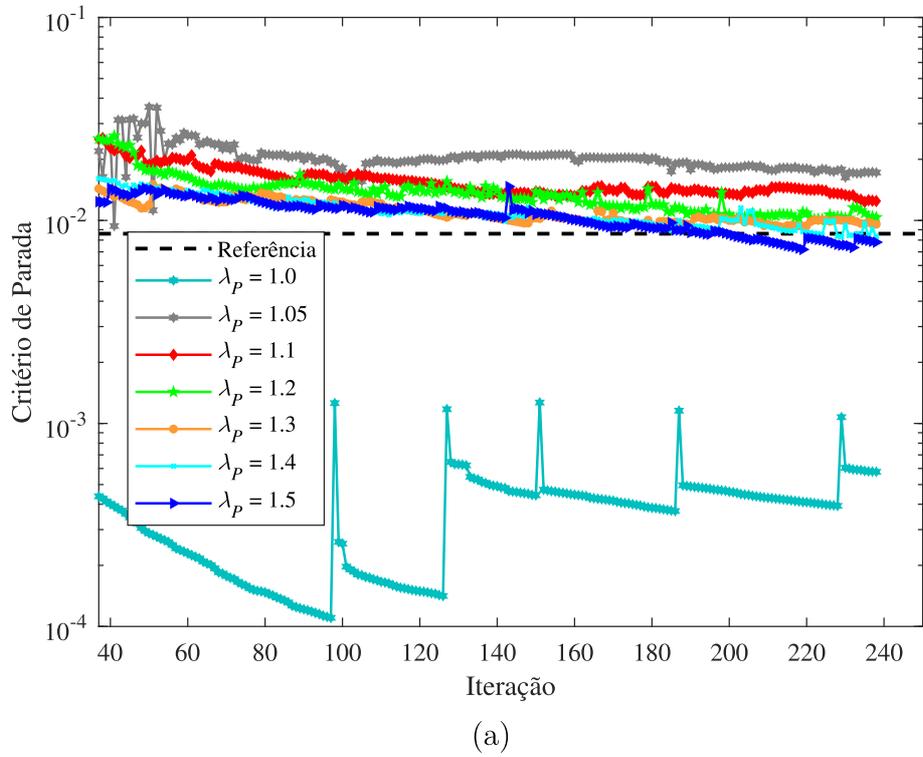


Figura 29 – Estrutura de treliça de ponte.

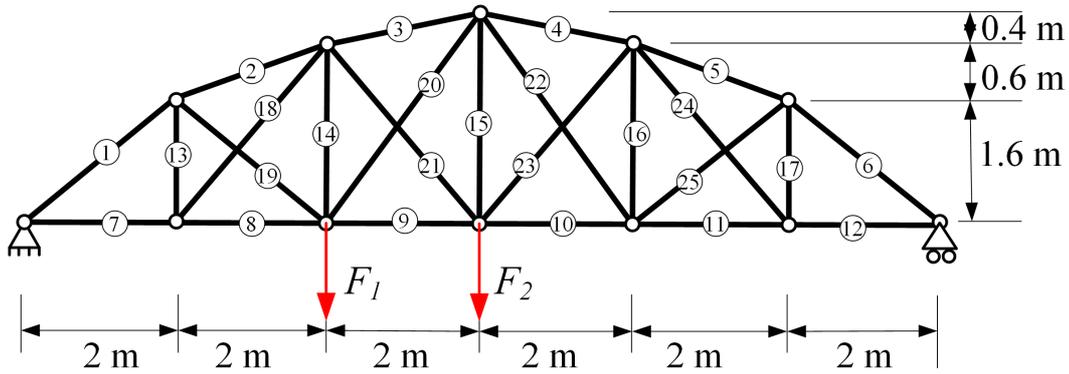


Tabela 8 – Seção transversal dos elementos da estrutura de treliça de ponte.

Elemento	Seção transversal (m <sup>2</sup> )
1 - 6	$1,5 \times 10^{-3}$
7 - 12	$1,4 \times 10^{-3}$
13 - 17	$1,2 \times 10^{-3}$
18 - 25	$1,3 \times 10^{-3}$

Tabela 9 – Variáveis aleatórias da estrutura de treliça de ponte.

Variável	Distribuição	Média	Coefficiente de variação
$F_1$	Lognormal	160 kN	0,1
$F_2$	Lognormal	160 kN	0,1
$\sigma_{yi} (i = 1, \dots, 25)$	Normal	276 MPa	0,05

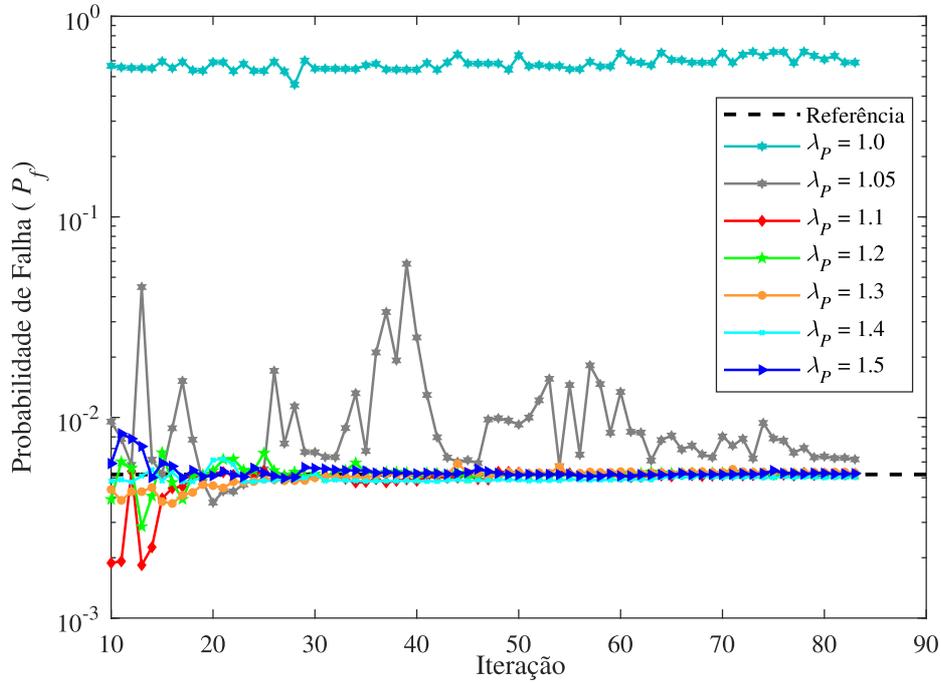
aprendizado  $U_{DS}$  são iguais a  $2,0 \times 10^{-2}$ . Na Tabela 7 são comparados os resultados obtidos em cada análise após 115 avaliações da função de estado limite. Os resultados obtidos para a probabilidade de falha e o critério de parada ao longo do processo iterativo são apresentados nas Figuras 30 e 31, respectivamente.

Tabela 10 – Análise da probabilidade de falha após 115 avaliações da função de estado limite.

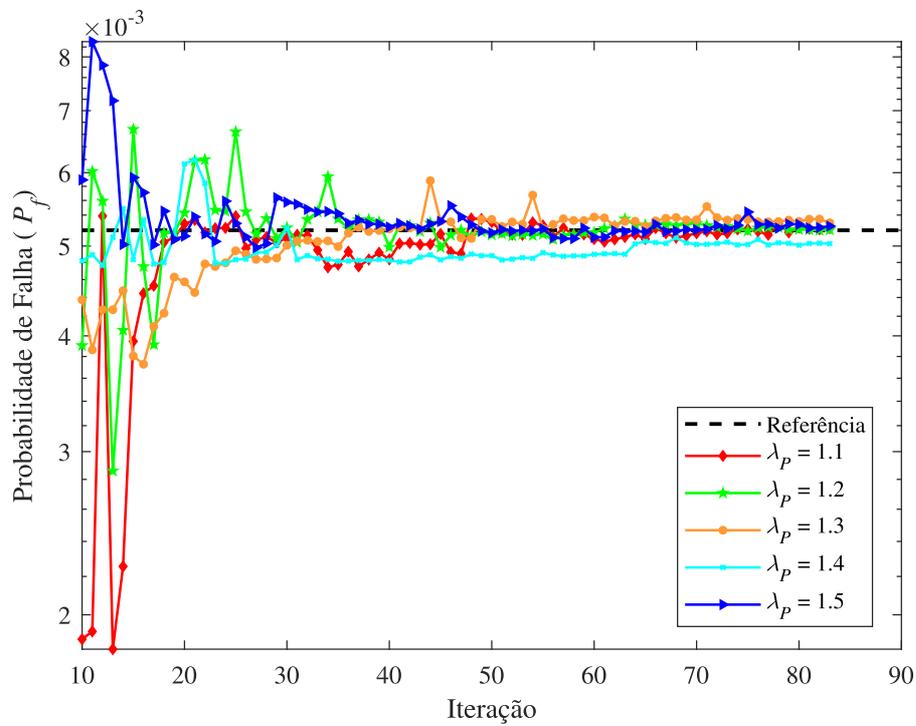
Fator de carga	Probabilidade de falha ( $P_f$ )	Critério de parada
1,0	$5,88 \times 10^{-1}$	$1,71 \times 10^{-3}$
1,05	$6,18 \times 10^{-3}$	$2,04 \times 10^{-2}$
1,1	$5,23 \times 10^{-3}$	$1,05 \times 10^{-2}$
1,2	$5,21 \times 10^{-3}$	$8,55 \times 10^{-3}$
1,3	$5,29 \times 10^{-3}$	$8,09 \times 10^{-3}$
1,4	$5,03 \times 10^{-3}$	$6,98 \times 10^{-3}$
1,5	$5,25 \times 10^{-3}$	$8,27 \times 10^{-3}$
Referência ( $\lambda_{P_{lim}}$ )	$5,23 \times 10^{-3}$	$8,59 \times 10^{-3}$

Observa-se que uma melhora na acurácia da probabilidade de falha é alcançada na medida que as simulações são realizadas até a falha do sistema para todos os pontos de

Figura 30 – (a) Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo para todos os valores de  $\lambda_P$ . (b) Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo para valores de  $\lambda_P \geq 1,1$ .

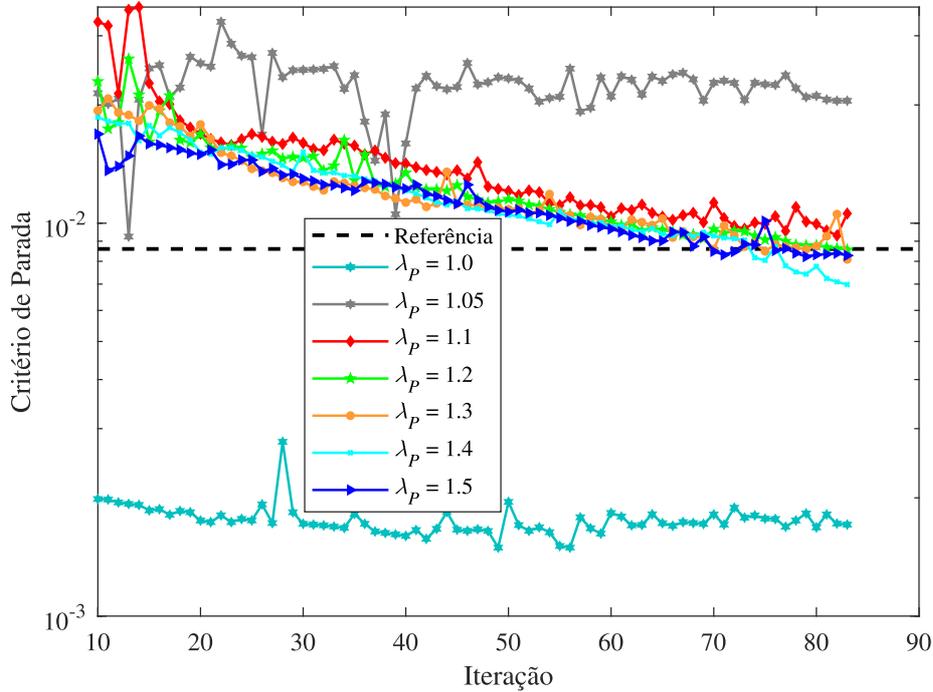


(a)

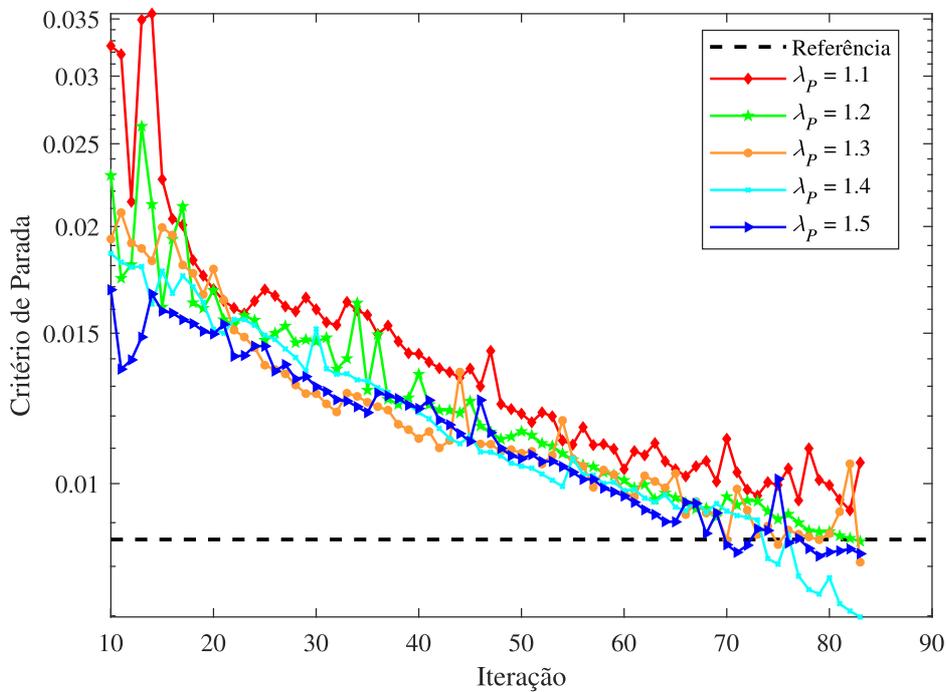


(b)

Figura 31 – (a) Critério de parada ao longo do processo iterativo para todos os valores de  $\lambda_P$ . (b) Critério de parada ao longo do processo iterativo para valores de  $\lambda_P \geq 1,1$ .



(a)



(b)

controle. O mesmo ocorre para o critério de parada, visto que neste exemplo o mesmo é atingido apenas quando fatores de carga maiores que 1,3 são considerados. Por fim, para

os exemplos apresentados nesta seção, constata-se que quando utilizados valores do fator de carga superiores a 1,1 a probabilidade de falha pode ser estimada com alguma precisão. Entretanto, nesta situação pode ser necessária a adição de um maior número de pontos de controle para que critério de parada seja alcançado. Visto que o aumento do número de pontos de controle aumenta, conseqüentemente, o número de simulações do modelo mecânico, considerou-se neste trabalho a falha do sistema para todos os pontos de controle. Assim, garante-se que o metamodelo é construído considerando-se a resposta exata da função de estado limite em cada ponto, e a convergência ocorre com um menor número de avaliações da função de estado limite.

### 5.3 IDENTIFICAÇÃO DOS MODOS DE FALHA DOMINANTES

Conforme mencionado ao longo deste trabalho, na análise da confiabilidade de sistemas o colapso da estrutura pode ocorrer por meio de diferentes sequências de falha. Cada sequência de falha possui uma probabilidade de ocorrência e, conseqüentemente, um impacto maior ou menor na probabilidade de falha do sistema. Por conta disso, é necessário identificar, dentre os inúmeros modos de falha possíveis, os caminhos de falha com maior probabilidade de ocorrência, que correspondem aos modos de falha dominantes.

Em um dos exemplos apresentados no estudo realizado por Kim *et al.* (2013), citado no Capítulo 3, foram identificados, por meio de 2.780.000 simulações, 3 modos de falha dominantes. O primeiro modo de falha se repetiu 2984 vezes, o segundo 858 vezes e o terceiro 844 vezes. Neste exemplo, outras sequências de falha foram também identificadas, porém, em um número consideravelmente menor de vezes. Logo, pode-se concluir que a sua ocorrência é pouco significativa no cálculo da probabilidade de falha estimada.

Considerando-se a abordagem proposta nessa pesquisa, os novos pontos de controle, escolhidos por meio da função de aprendizado,  $U_{DS}$ , para enriquecer o DoE e aumentar a precisão do metamodelo, são localizados próximos à região limite entre falha e sobrevivência. Logo, considerando-se a sequência de falha das amostras escolhidas pela função de aprendizado ao longo do processo iterativo, torna-se possível identificar os modos de falha dominantes. Este processo pode ser feito com um custo computacional adicional desprezível, apenas realizando a análise da sequência de falha de cada amostra escolhida pela função de aprendizado.

## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

No presente capítulo, a abordagem proposta neste trabalho é aplicada em três estruturas sujeitas ao colapso progressivo, e os resultados são comparados com aqueles obtidos na literatura. Ao final do capítulo, um quarto exemplo, que envolve um sistema estrutural de maior complexidade, é analisado e os resultados obtidos são comparados com aqueles obtidos por meio do método de Monte Carlo simples. O objetivo do presente capítulo é verificar a eficiência da abordagem na estimativa da probabilidade de falha e a correta identificação dos modos de falha dominantes.

### 6.1 EXEMPLO 1: TRELIÇA DE SEIS BARRAS

O primeiro exemplo abordado neste capítulo consiste na treliça indeterminada de seis barras, apresentada na Seção 5.2.1.1, que foi previamente estudada por Kim *et al.* (2013) e Y. Jiang *et al.* (2020). Conforme mencionado, este exemplo apresenta 11 variáveis aleatórias e, por conta disso, o número de pontos de controle,  $p$ , gerados pelo método LHS para a construção da predição inicial é adotado igual a 16. O tamanho da população de Monte Carlo é igual a  $4,0 \times 10^5$  e os parâmetros da função de aprendizado  $U_{DS}$ ,  $\epsilon_s$  e  $\alpha$ , são iguais a  $2,0 \times 10^{-2}$ , de acordo com o recomendado por N. C. Xiao, Yuan e Zhou (2020).

#### 6.1.1 Análise da probabilidade de falha

Considerando-se o comportamento do material, tido como elastoplástico perfeito, e o número de graus de redundância deste problema, a falha do sistema é caracterizada pela falha de dois elementos. A convergência da probabilidade de falha ao longo do processo iterativo é ilustrada na Figura 32. Observa-se que a partir de, aproximadamente, 70 iterações o valor da probabilidade de falha pouco oscila até que o critério de parada seja alcançado, na medida em que novos pontos de controle são adicionados. Na Tabela 11 apresentam-se os resultados obtidos para a probabilidade de falha por meio do método proposto. Os resultados são comparados com aqueles obtidos na literatura por Kim *et al.* (2013) utilizando o método de busca seletiva (*Selective Search Technique - SST*) e o método de Monte Carlo (SMC) e por Y. Jiang *et al.* (2020) utilizando o método de múltiplas superfícies de resposta (*Multiple Response Surfaces - MRS*).

Os resultados apresentados na Tabela 11 indicam que o valor obtido para a probabilidade de falha considerando-se a resposta global do sistema apresenta boa precisão, visto que a diferença relativa para o índice de confiabilidade,  $\beta$ , quando comparado ao método de Monte Carlo é de 0,61%. Ressalta-se ainda que o número de avaliações da função de estado limite foi inferior, quando comparado ao método SST, embora o tempo de processamento tenha sido maior. Nesta situação, o aumento do tempo de processamento

Figura 32 – Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo.

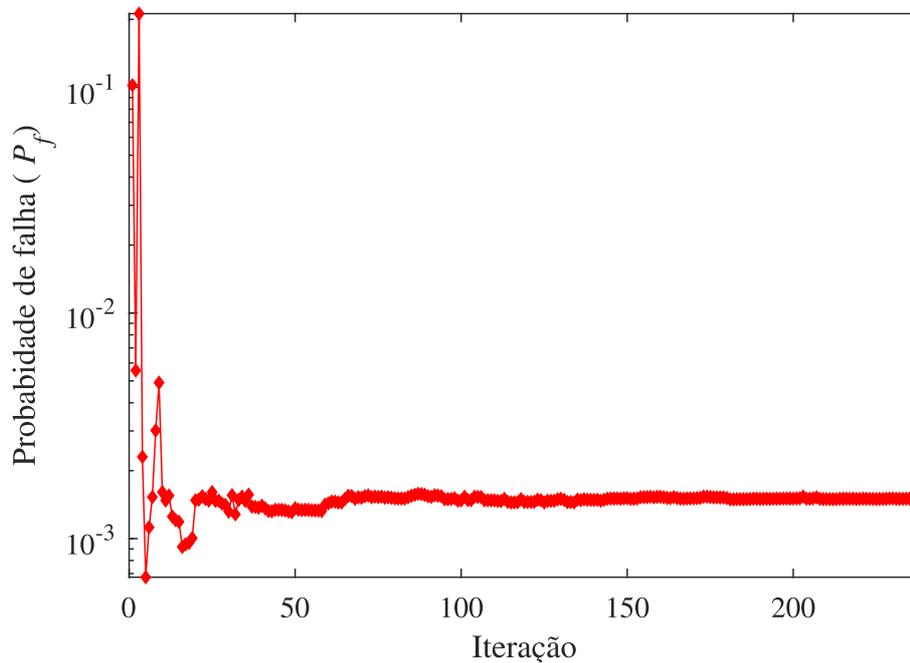


Tabela 11 – Probabilidade de falha para a treliça de 6 barras considerando diferentes métodos.

Método	$P_f$	$\beta$	$\epsilon_\beta(\%)$	$N_{aval}$	Tempo - CPU (h)
Proposto	$1,5012 \times 10^{-3}$	2,9675	0,61	254 (16+238)	2,90
SST (KIM <i>et al.</i> , 2013)	$1,4530 \times 10^{-3}$	2,9775	0,28	2840	0,02
MRS (JIANG, Y. <i>et al.</i> , 2020)	$1,2 \times 10^{-3}$	3,04	1,81	120	-
SMC (KIM <i>et al.</i> , 2013)	-	2,9859	-	-	-

mento está relacionado ao aumento da demanda computacional relacionada à construção do metamodelo na medida em que novos pontos de controle são adicionados ao DoE.

### 6.1.2 Análise dos modos de falha dominantes

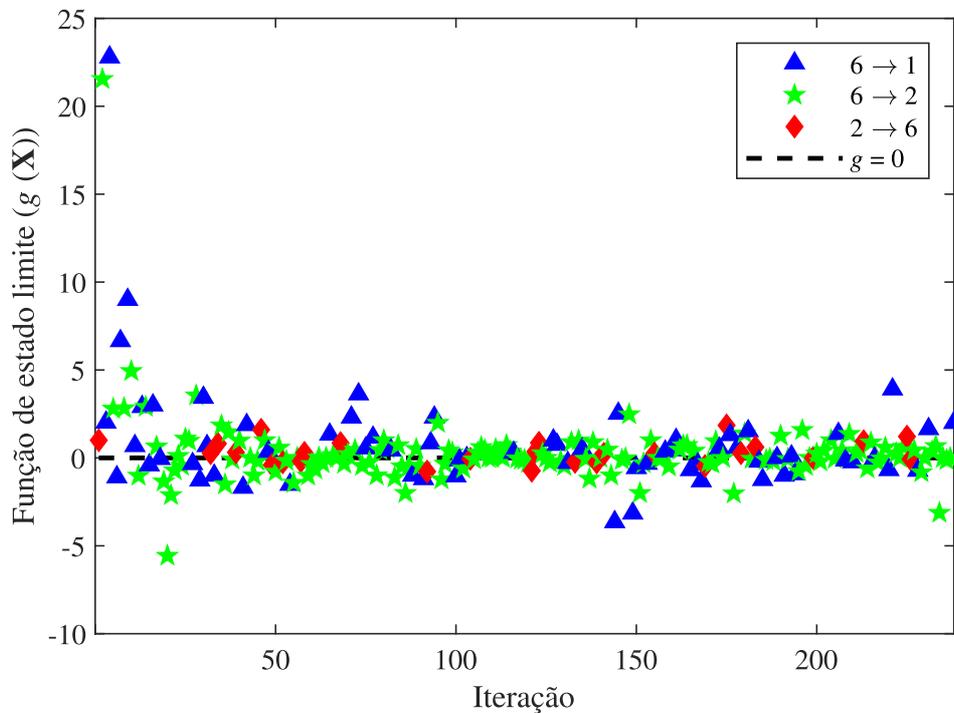
Em estruturas hiperestáticas, a falha de um único elemento não necessariamente acarreta na falha do sistema. Por outro lado, a depender do modelo constitutivo adotado, mesmo que após a falha de um elemento o mesmo possa ainda contribuir com o equilíbrio da estrutura por meio da sua tensão residual, outros elementos podem ser sobrecarregados até a falha, gerando uma sequência de falha progressiva. Quando a análise da confiabilidade estrutural é feita por meio de métodos que envolvem a construção de árvores de falha, por exemplo, todas as sequências de falha dominantes precisam ser identificadas e consideradas no cálculos das probabilidade. A abordagem proposta nesta pesquisa, por outro lado, é capaz de identificar as sequências de falha dominantes ao longo do processo iterativo, sem nenhuma análise adicional.

Na Tabela 12 são apresentadas as sequências de falha identificadas na presente abordagem e aquelas obtidas na literatura. Na Figura 33 é ilustrada a sequência de falha e o valor da função de estado limite,  $g(\mathbf{X})$ , de cada ponto selecionado pela função de aprendizado ao longo do processo iterativo.

Tabela 12 – Modos de falha identificados para a treliça de seis barras.

Modo de Falha	Proposto	SST	MRS
6 $\rightarrow$ 2	✓	✓	✓
2 $\rightarrow$ 6	✓	✓	✓
6 $\rightarrow$ 1	✓	✓	✓

Figura 33 – Sequências de falha identificadas ao longo do processo iterativo.



Constata-se que os três modos de falha dominantes identificados são os mesmos obtidos por Kim *et al.* (2013) e Y. Jiang *et al.* (2020) para os métodos SST e MRS, respectivamente. Por fim, observa-se ainda que ao longo do processo iterativo todos os modos de falha referentes aos novos pontos de controle selecionados pela função de aprendizado correspondem aos modos dominantes, com o valor da função de estado limite,  $g(\mathbf{X})$ , próximo à fronteira entre falha e sobrevivência.

## 6.2 EXEMPLO 2: ESTRUTURA DE TRELIÇA DE PONTE

O segundo exemplo abordado neste capítulo consiste na estrutura de treliça de ponte apresentada na Seção 5.2.1.2, previamente estudada por Kim *et al.* (2013) e Y.

Jiang *et al.* (2020). Este exemplo apresenta 27 variáveis aleatórias e o número de pontos de controle iniciais  $p$ , gerados para a construção do metamodelo inicial, é igual a 32. Os parâmetros da função de aprendizado  $U_{DS}$ ,  $\epsilon_s$  e  $\alpha$ , são iguais a  $2,0 \times 10^{-2}$ , e o tamanho da amostra de Monte Carlo é igual a  $1,0 \times 10^5$ .

### 6.2.1 Análise da probabilidade de falha

Na Figura 34 ilustra-se a curva de convergência da probabilidade de falha obtida ao longo do processo iterativo. Como podemos observar, o valor da probabilidade de falha passa a sofrer pouca variação após, aproximadamente, 50 iterações. Na Tabela 13 apresenta-se a resposta da estrutura de treliça de ponte segundo a probabilidade de falha e o esforço computacional.

Figura 34 – Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo.

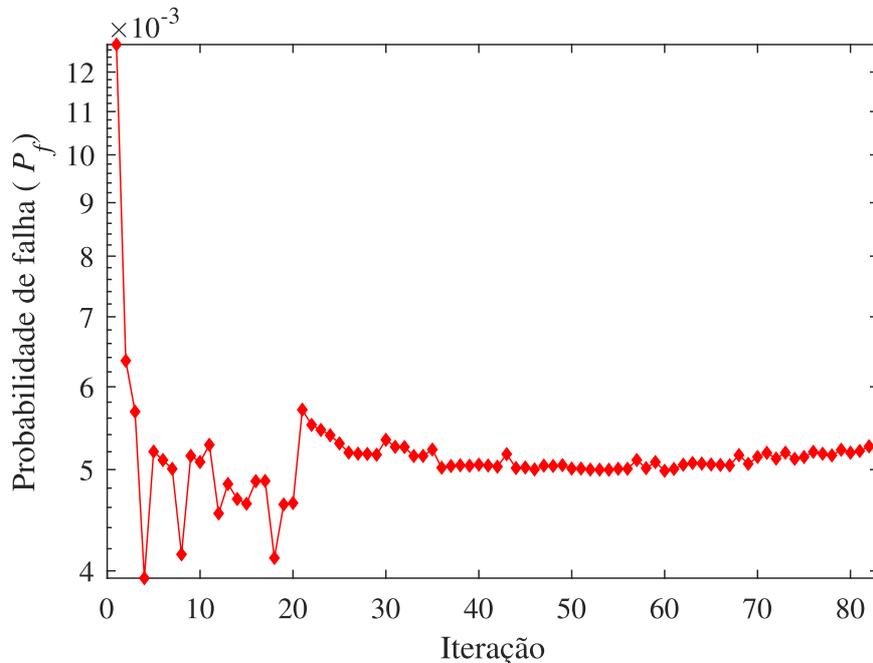


Tabela 13 – Probabilidade de falha para a estrutura de treliça de ponte considerando diferentes métodos.

Método	$P_f$	$\beta$	$\epsilon_\beta$ (%)	$N_{aval}$	Tempo - CPU (h)
Proposto	$5,2378 \times 10^{-3}$	2,5597	0,53	115 (32+83)	0,12
SST (KIM <i>et al.</i> , 2013)	$5,4202 \times 10^{-3}$	2,5478	0,99	51344	0,16
MRS (JIANG, Y. <i>et al.</i> , 2020)	$6,0 \times 10^{-3}$	2,51	2,46	183	-
SMC (KIM <i>et al.</i> , 2013)	-	2,5733	-	-	-

Constata-se que os resultados obtidos por meio da abordagem proposta nesta pesquisa apresentam boa precisão, com diferenças no índice de confiabilidade inferiores a 0,53% quando comparado ao método SMC conforme apresentado em Kim *et al.* (2013). Quando analisado o tempo computacional e o número de avaliações da função de estado

limite, observa-se ainda que, comparado ao primeiro exemplo, a abordagem proposta apresenta resultados satisfatórios para problemas com um número maior de variáveis aleatórias.

### 6.2.2 Análise dos modos de falha dominantes

Na Tabela 14 apresentam-se os modos de falha identificados para este problema, que são ilustrados na Figura 35 para cada amostra adicionada ao DoE ao longo do processo iterativo. Constata-se que o metamodelo é capaz de substituir com precisão a função de estado limite, e que as sequências de falha dos pontos de controle escolhidos por meio da função de aprendizado correspondem às sequências dominantes. Ressalta-se que as sequências de falha  $9 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 9$ ,  $3 \rightarrow 1$  e  $4 \rightarrow 3 \rightarrow 9$ , apresentadas na literatura, não foram identificadas pelo modelo proposto. Porém, visto que a diferença no valor da probabilidade obtida por meio do metamodelo é pequena quando comparada às abordagens da literatura, como pode ser visto na Tabela 14, constata-se que os modos de falha não identificados possuem pouca relevância no valor da probabilidade de falha. Isto ocorre uma vez que a abordagem busca por pontos de controle na região de interesse e que possuem maior influência na probabilidade de falha. A identificação de outros modos pode ser realizada por meio da adição de um número maior de pontos de controle. Porém, o aumento do número de pontos de controle acarreta no aumento do custo computacional em termos de avaliações da função de estado limite e também da construção do metamodelo.

Tabela 14 – Modos de falha identificados para a estrutura de treliça de ponte.

Modo de falha	Proposto	SST	MRS
$3 \rightarrow 9$	✓	✓	✓
$9 \rightarrow 3$	✓	✓	✓
$3 \rightarrow 2 \rightarrow 9$	✓	✓	✓
$2 \rightarrow 3 \rightarrow 9$	✓	✓	✓
$2 \rightarrow 9 \rightarrow 3$	✓	✓	
$9 \rightarrow 2 \rightarrow 3$		✓	✓
1	✓	✓	
$3 \rightarrow 4 \rightarrow 9$		✓	✓
$3 \rightarrow 1$		✓	✓
$4 \rightarrow 3 \rightarrow 9$		✓	✓

### 6.3 EXEMPLO 3: PÓRTICO PLANO

O terceiro exemplo abordado neste capítulo consiste no pórtico plano apresentado na Figura 36, que foi previamente estudado no contexto da confiabilidade estrutural por Kim *et al.* (2013) e Yazdani, Shahidzadeh e Takada (2020). As forças pontuais aplicadas  $F_i (i = 1, \dots, 2)$  e o momento resistente  $M_i (i = 1, \dots, 3)$  são as variáveis aleatórias deste problema, e possuem os parâmetros apresentados na Tabela 15. As propriedades da seção transversal e do material de cada elemento são apresentadas na Tabela 16.

Figura 35 – Sequências de falha identificadas ao longo do processo iterativo.

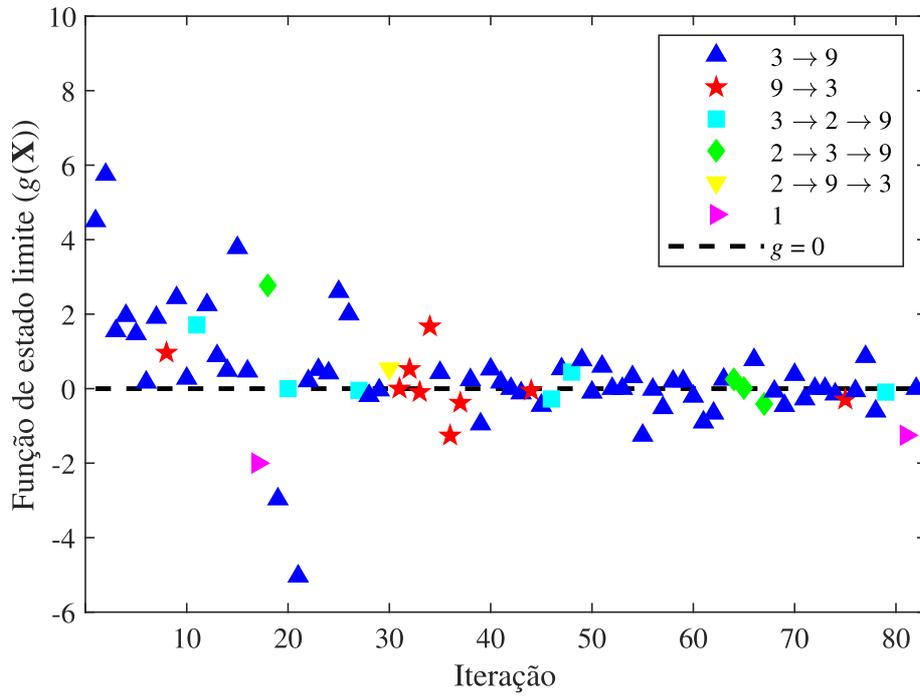


Figura 36 – Pórtico plano.

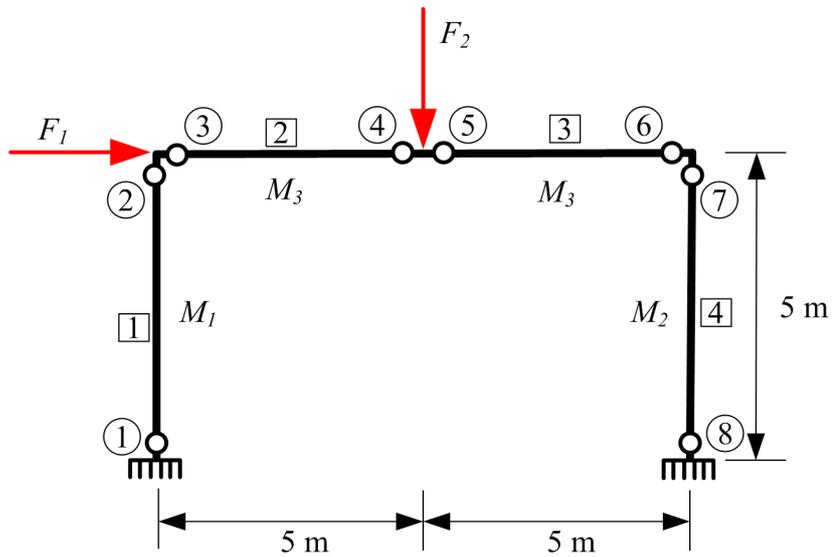


Tabela 15 – Variáveis aleatórias do pórtico plano.

Variável	Distribuição	Média	Coefficiente de variação
$F_1$	Normal	20 kN	0,3
$F_2$	Normal	40 kN	0,3
$M_1$	Normal	75 kNm	0,05
$M_2$	Normal	75 kNm	0,05
$M_3$	Normal	101 kNm	0,05

Tabela 16 – Propriedades dos elementos.

Elemento	Seção transversal	Momento de inércia	$E$
1, 4	$4,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	$3,58 \times 10^{-5} \text{ m}^4$	210 GPa
2, 3	$4,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	$4,77 \times 10^{-5} \text{ m}^4$	210 GPa

Considerando-se o número de variáveis aleatórias presentes neste problema, o número inicial de pontos de controle gerados pelo método LHS é igual a 12. Os parâmetros da função  $U_{DS}$ ,  $\epsilon_s$  e  $\alpha$ , são iguais a  $1,0 \times 10^{-2}$  e  $2,0 \times 10^{-4}$ , respectivamente, e o tamanho da amostra utilizada no método de Monte Carlo simples é igual a  $1,0 \times 10^5$ .

### 6.3.1 Análise da probabilidade de falha

Por meio da análise do valor da probabilidade de falha ao longo do processo iterativo, conforme pode ser observado na Figura 37, constata-se que os valores sofreram uma significativa variação até começar a convergir na iteração 90, aproximadamente. Esta dificuldade de convergência pode estar associada ao pequeno número de pontos de controle considerado na construção do metamodelo inicial. Os valores obtidos para a probabilidade de falha após o critério de parada ser alcançado são apresentados na Tabela 17. Observa-se que, quando comparado ao método SST (KIM *et al.*, 2013) e ao método de redes Bayesianas (*Bayesian Networks* - BN) (YAZDANI; SHAHIDZADEH; TAKADA, 2020), os resultados obtidos por meio da metodologia proposta apresentam boa precisão, com diferenças no índice de confiabilidade,  $\beta$ , inferiores a 1,06%. Referindo-se ao esforço computacional, observa-se que o número de avaliações da função de estado limite é consideravelmente menor quando utilizada a abordagem proposta nesta pesquisa. Embora neste caso, assim como no primeiro exemplo abordado neste capítulo, que possui um número menor de variáveis aleatórias, o tempo de processamento seja relativamente maior quando comparado ao método SST.

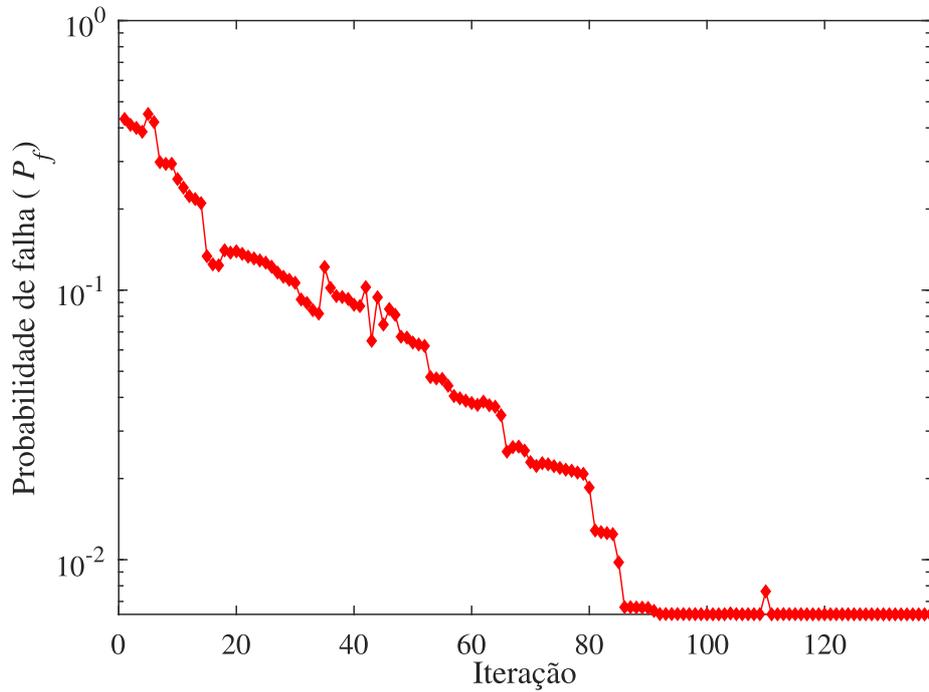
Tabela 17 – Probabilidade de falha para o pórtico plano considerando diferentes métodos.

Método	$P_f$	$\beta$	$\epsilon_\beta$ (%)	$N_{aval}$	Tempo - CPU (h)
Proposto	$6,2701 \times 10^{-3}$	2,4966	1,06	150 (12+138)	0,54
SST (KIM <i>et al.</i> , 2013)	$7,0934 \times 10^{-3}$	2,4525	0,70	1465	0,23
BN (YAZDANI, <i>et al.</i> , 2020)	$7,1250 \times 10^{-3}$	2,4509	1,86	0,76	-
SMC (KIM <i>et al.</i> , 2013)	-	2,4698	-	-	-

### 6.3.2 Análise dos modos de falha dominantes

Na Tabela 18 são apresentados os sete modos de falha identificados neste exemplo. Observa-se que o metamodelo não foi capaz de identificar as sequências de falha  $4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 2$ ,  $4 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 1$ ,  $4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 1$  e  $7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ , identificadas por Kim *et al.* (2013) e Yazdani, Shahidzadeh e Takada (2020). Entretanto, conforme

Figura 37 – Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo.

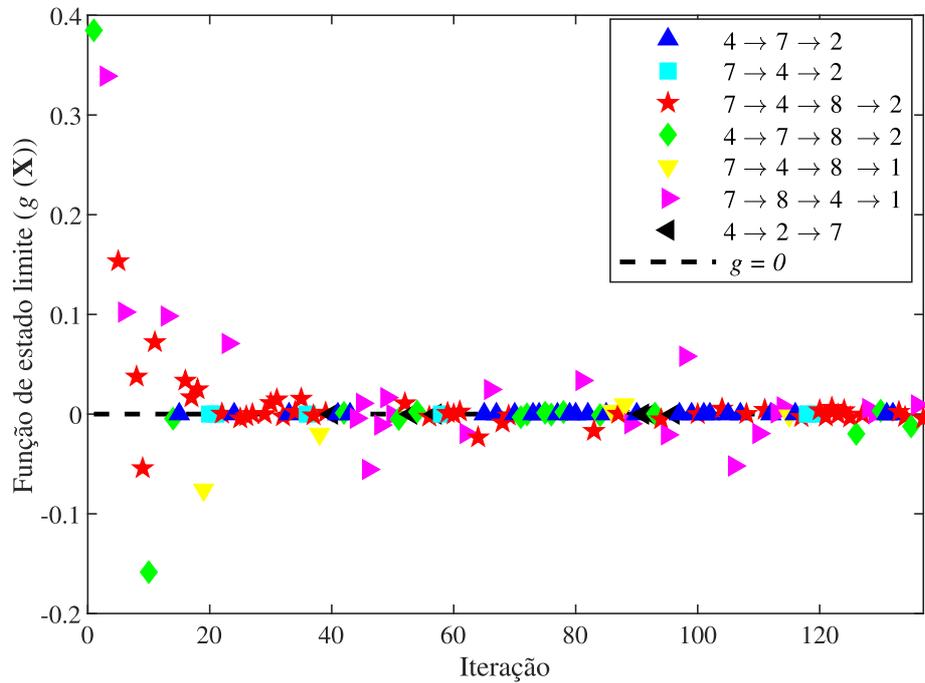


já mencionado, o valor final obtido para a probabilidade de falha indicou boa precisão e, portanto, pouca influência destes modos de falha não identificados como dominantes. Na Figura 38 apresenta-se a sequência de falha de cada ponto de controle adicionado ao longo do processo iterativo. Observa-se que os modos de falha dominantes se repetem para diferentes pontos de controle, o que indica que os modos de falha não identificados possuem menor relevância na construção do metamodelo e na consequente determinação da probabilidade de falha.

Tabela 18 – Sequência de falha identificados para o Pórtico Plano.

Sequência de falha	Proposto	SST	BN
4 → 7 → 2	✓	✓	✓
7 → 4 → 2	✓	✓	✓
7 → 4 → 8 → 2	✓	✓	✓
4 → 7 → 8 → 2	✓	✓	✓
4 → 8 → 7 → 2		✓	✓
7 → 4 → 8 → 1	✓	✓	✓
4 → 7 → 8 → 1		✓	✓
4 → 8 → 7 → 1		✓	✓
7 → 8 → 4 → 2		✓	✓
4 → 2 → 7	✓		
7 → 8 → 4 → 1	✓	✓	✓

Figura 38 – Sequências de falha identificadas ao longo do processo iterativo.



#### 6.4 EXEMPLO 4: TRELIÇA ESPACIAL DE 25 BARRAS

Com o intuito de verificar a eficiência da abordagem apresentada neste trabalho para um sistema estrutural com um maior número de grau de liberdades, a treliça espacial de 25 barras apresentada na Figura 39 é analisada. Este exemplo foi abordado na literatura no contexto de confiabilidade estrutural e otimização baseada em confiabilidade por Ho-Huu *et al.* (2016) e Cheng e Lu (2021), considerando uma análise linear. Os elementos da treliça são divididos em oito grupos, conforme apresentado na Tabela 19. Na Tabela 20 é apresentada a condição de carregamento aplicada aos nós 1, 2, 3, e 6. Na Tabela 21 são apresentadas as variáveis aleatórias do problema, onde  $F_1, \dots, F_4$  são as forças aplicadas,  $A_i, \dots, A_{viii}$  representa a área da seção transversal das barras de cada grupo e  $\sigma_{yj} (j = i, \dots, viii)$  representa a tensão de escoamento do material que compõe as barras de cada grupo.

Tabela 19 – Grupo de elementos da treliça espacial de 25 barras.

Grupo	i	ii	iii	iv	v	vi	vii	viii
Elemento	1	2 - 5	6 - 9	10 - 11	12 - 13	14 - 17	18 - 21	22 - 25

Considerando-se as 20 variáveis aleatórias presentes neste exemplo, o número inicial de pontos de controle gerados pelo método LHS é igual a 25. O tamanho da população adotada no método de Monte Carlo simples é igual a  $5,0 \times 10^5$  e os parâmetros da função de aprendizado,  $\epsilon_s$  e  $\alpha$ , são iguais a  $2,0 \times 10^{-2}$ . O método de Monte Carlo simples foi empregado neste exemplo como referência para os resultados obtidos, visto que não encontrou-se

Figura 39 – Treliça espacial de 25 barras.

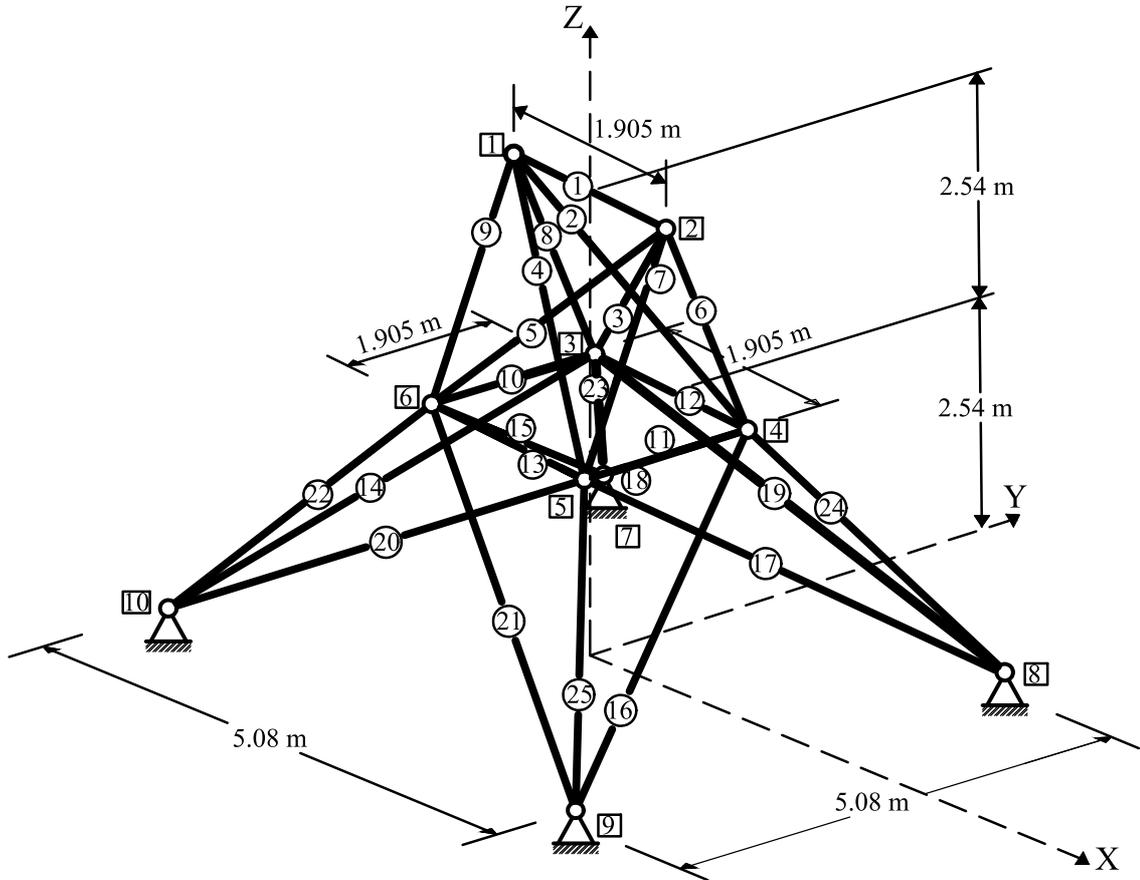


Tabela 20 – Condições de carregamento para a treliça espacial de 25 barras.

Nó	1	2	3	6
X	$F_2$	0	$F_3$	$F_4$
Y	$-F_1$	$-F_1$	0	0
Z	$-F_1$	$-F_1$	0	0

Tabela 21 – Variáveis aleatórias para a treliça espacial de 25 barras.

Variável	Distribuição	Média	Coefficiente de variação
$F_1$	Normal	314,5 kN	0,05
$F_2$	Normal	4,45 kN	0,05
$F_3$	Normal	2,22 kN	0,05
$F_4$	Normal	2,66 kN	0,05
$A_i$	Normal	$6,4510^{-5} \text{ m}^2$	0,05
$A_{ii}$	Normal	$2,20 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	0,05
$A_{iii}$	Normal	$6,45 \times 10^{-5} \text{ m}^2$	0,05
$A_{iv}$	Normal	$6,45 \times 10^{-5} \text{ m}^2$	0,05
$A_v$	Normal	$7,74 \times 10^{-4} \text{ m}^2$	0,05
$A_{vi}$	Normal	$1,20 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	0,05
$A_{vii}$	Normal	$2,20 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	0,05
$A_{viii}$	Normal	$1,30 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	0,05
$\sigma_{yj}$	Normal	276 MPa	0,05

na literatura a aplicação do mesmo, com as variáveis apresentadas, no contexto de falha progressiva.

#### 6.4.1 Análise da probabilidade de falha

Na Figura 40 é ilustrada a convergência da probabilidade de falha ao longo do processo iterativo e na Tabela 22 são ilustrados os resultados obtidos por meio da abordagem proposta nesta pesquisa e considerando-se o método de Monte Carlo simples com  $5,0 \times 10^5$  pontos amostrais.

Figura 40 – Probabilidade de falha ao longo do processo iterativo.

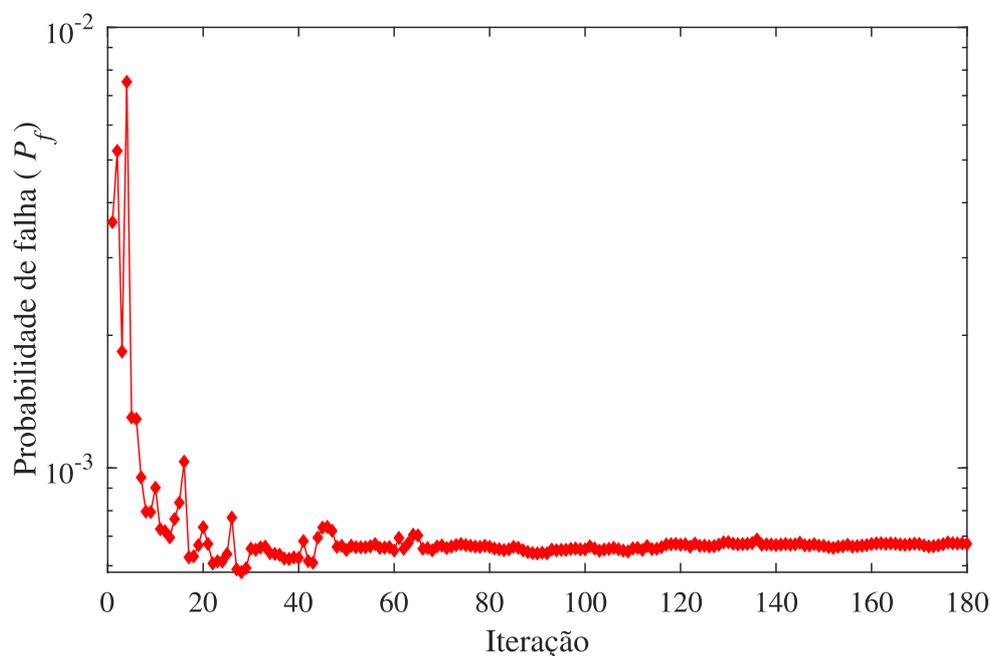


Tabela 22 – Probabilidade de falha para a treliça de 25 barras.

Método	$P_f$	$\beta$	$\epsilon_\beta$ (%)	$N_{aval}$	Tempo - CPU (h)
Proposto	$6,7268 \times 10^{-4}$	3,2061	0,009	205 (180+25)	6,79
MCS	$6,7200 \times 10^{-4}$	3,2064	-	$5,0 \times 10^5$	45,4

Observa-se que os resultados obtidos na análise da confiabilidade por meio da abordagem proposta estão em acordo com aqueles obtidos por meio do método de Monte Carlo simples, apresentado uma diferença relativa inferior a 0,01% para o índice de confiabilidade. Além disso, apesar do aumento do custo computacional necessário para a construção do metamodelo na medida em que o número de pontos de controle aumenta, evidencia-se que o modelo apresentado reduz drasticamente o tempo computacional necessário para resolver problemas com um número maior de graus de liberdade. Os resultados estão em concordância com o observado na literatura, onde o uso de metamodelos vem sendo

utilizado com o intuito de reduzir o número de avaliações da função de estado limite em problemas de confiabilidade estrutural.

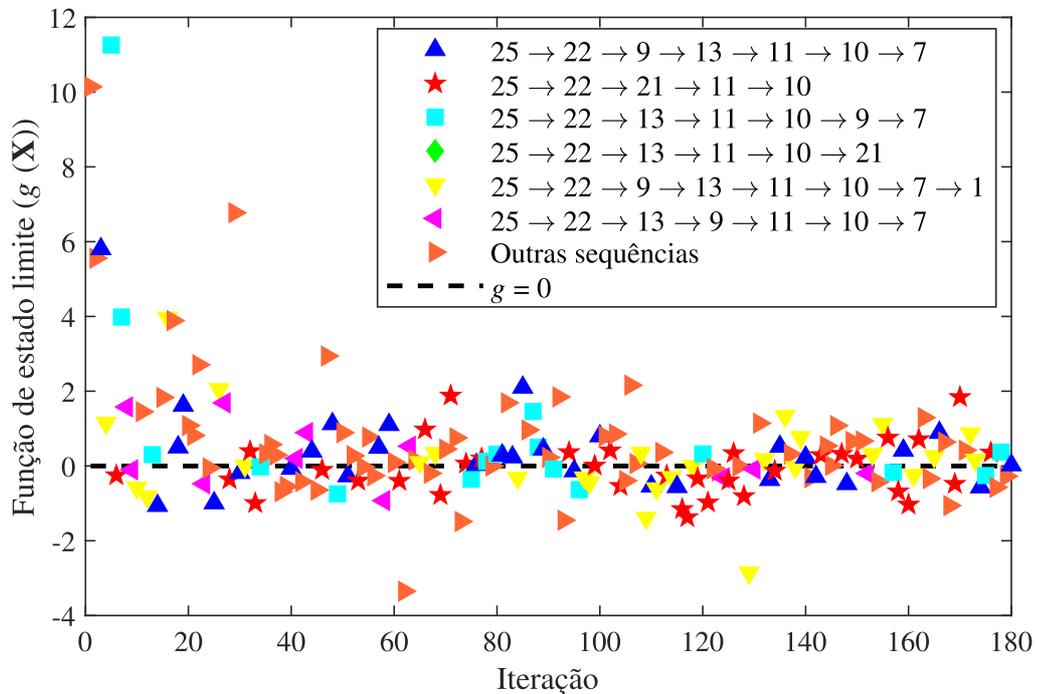
### 6.4.2 Análise dos modos de falha dominantes

Na tabela 23 são apresentados os seis modos de falha dominantes encontrados pelo método de MCS, de acordo com as  $5,0 \times 10^5$  amostras, e por meio da abordagem proposta. A sequência de falha correspondente a cada ponto de controle selecionado ao longo do processo iterativo é ilustrada na Figura 38.

Tabela 23 – Modos de falha identificados para a treliça de 25 barras.

Modos de falha dominantes identificados pelo MCS	Abordagem proposta
25 → 22 → 9 → 13 → 11 → 10 → 7	✓
25 → 22 → 21 → 11 → 10	✓
25 → 22 → 13 → 11 → 10 → 9 → 7	✓
25 → 22 → 13 → 11 → 10 → 21	✓
25 → 22 → 9 → 13 → 11 → 10 → 7 → 1	✓
25 → 22 → 13 → 9 → 11 → 10 → 7	✓

Figura 41 – Sequências de falha identificadas ao longo do processo iterativo.



Observa-se que todos os principais modos de falha encontrados pelo método de Monte Carlo Simples ao considerar-se  $5,0 \times 10^5$  amostras e que tem maior influência na probabilidade de falha foram identificados pela abordagem proposta. A principal limitação está relacionada ao custo computacional necessário para a construção do metamodelo na medida em que o tamanho do DoE aumenta, como relatado no primeiro exemplo deste

capítulo. Entretanto, considerando-se os problemas comumente encontrados na engenharia civil, que envolvem um grande número de graus de liberdade, o custo computacional necessário para a construção do metamodelo passa a ser menos significativo quando comparado à redução do número de avaliações de modelos mecânicos complexos, conforme analisado no último exemplo abordado neste capítulo.

## 7 CONCLUSÕES

Este trabalho teve por objetivo principal analisar a confiabilidade de estruturas sujeitas ao colapso progressivo, utilizando-se a resposta global da estrutura. Para isso, realizaram-se análises de probabilidade de falha com o auxílio do metamodelo Kriging e de um modelo mecânico que representa adequadamente o comportamento estrutural do sistema. Este capítulo apresenta as principais conclusões obtidas com esta pesquisa, e sugestões de trabalhos futuros relacionados ao tema.

### 7.1 CONCLUSÕES GERAIS

Neste trabalho, uma abordagem utilizando o método de Monte Carlo simples e metamodelo Kriging é utilizada para viabilizar a análise da confiabilidade de estruturas sujeitas ao colapso progressivo. Sabendo-se que os pontos de controle utilizados na construção do metamodelo possuem grande influência na precisão da predição obtida para a probabilidade de falha, um processo de aprendizado ativo é adotado. Os resultados obtidos na etapa de análise da função de aprendizado indicam que a adequada performance desse processo está diretamente relacionada à função de aprendizado adotada, principalmente no que diz respeito ao esforço computacional. Nesta etapa, as funções de aprendizado que possuem formulação diretamente relacionada à probabilidade de falha do sistema, como é o caso das funções  $U_{WS}$  e  $U_{DS}$ , são as que apresentam um melhor desempenho, visto que o número de avaliações da função de estado limite em todos os casos testados foi inferior ao das demais funções analisadas.

O procedimento foi utilizado para resolver quatro problemas envolvendo o colapso progressivo. Em todos os casos, os resultados obtidos por meio do metamodelo Kriging em conjunto com a função de aprendizado  $U_{DS}$  foram suficientemente precisos em termos da probabilidade de falha estimada. Uma das principais limitações observadas na abordagem proposta ocorre quando necessita-se de um número elevado de pontos para a construção do metamodelo. Nessa situação, o esforço computacional para construí-lo, diante das operações matemáticas envolvidas, pode se tornar significativo. Isto ocorre principalmente em problemas estruturais em que a análise do modelo mecânico não requer uma demanda computacional elevada. Entretanto, tratando-se de exemplos com um elevado número de graus de liberdade, como é o caso da maioria das estruturas sujeitas ao colapso progressivo encontradas na prática, o custo de cada análise do modelo mecânico é consideravelmente elevado. Logo, a abordagem proposta se torna útil visto a redução do número de avaliações da função de estado limite observada.

Conforme visto ao longo deste trabalho, a análise de confiabilidade de estruturas sujeitas ao colapso progressivo deve considerar todos os diferentes modos de falha possíveis, o que envolve a análise da dependência entre os mesmos. Para lidar com este obstáculo, considerou-se neste trabalho uma abordagem que considera a resposta estrutural global do

sistema para cada ponto de controle utilizado na construção do metamodelo. Os resultados obtidos mostram que, contanto que o modelo estrutural represente adequadamente o comportamento mecânico real da estrutura, a abordagem fornece resultados precisos para a probabilidade de falha do sistema. Por esta abordagem, a dependência entre os eventos é diretamente endereçada, uma vez que a análise estrutural é realizada em conjunto, e os modos de falha ocorrem progressivamente ao longo de cada simulação efetuada.

Os resultados obtidos apontam ainda que, quando utilizada a resposta estrutural global em conjunto com o metamodelo Kriging, o modelo mecânico deve ser carregado até a falha em todos os pontos de controle para garantir a precisão do metamodelo. O aumento do custo computacional relacionado ao aumento das iterações do processo incremental-iterativo, necessário para que todos os pontos de controle sejam carregados até a falha, pode ser negligenciado quando comparado à redução do número de avaliações da função de estado limite. Além disso, a boa precisão do metamodelo garante, além da obtenção do valor adequado para a probabilidade de falha, a identificação dos modos de falha dominantes. Em todos os casos analisados, o uso do metamodelo em conjunto com a função de aprendizado  $U_{DS}$ , e considerando a resposta estrutural global do sistema, foi capaz de escolher novos pontos de controle localizados próximo à fronteira entre falha e sobrevivência. Logo, por meio da análise da sequência de falha dos pontos de controle selecionados, tornou-se possível identificar as sequências dominantes, que possuem maior influência na probabilidade de falha. Por mais que nem todos os modos de falha dominantes tenham sido identificados pela estratégia proposta, baseada apenas nos pontos de controle adicionados, a abordagem busca por pontos de controle na região de interesse e que possuem maior influência na probabilidade de falha. Outros modos dominantes poderiam ser identificados de duas formas: inserindo-se novos pontos de controle ou filtrando-se, dentre a população de Monte Carlo simples, os pontos amostrais situados na região de falha e avaliando-se a sua respectiva sequência de falha. Entretanto, pode-se assegurar que, dentre os diversos modos de falha possíveis, a abordagem é capaz de identificar os principais. Essa conclusão é embasada no fato de as probabilidades de falha obtidas estarem próximas às indicadas na literatura. Estes resultados indicam que o metamodelo é preciso o suficiente e, por consequência, identifica adequadamente os modos de falha dominantes.

## 7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Na sequência, apresentam-se algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros, que visam aperfeiçoar e expandir esta pesquisa.

- A abordagem proposta nesta pesquisa demonstrou dificuldades ao lidar com problemas que exigem um número elevado de pontos de controle. Desta forma, sugere-se investigar novas funções de aprendizado para lidar com esses proble-

mas.

- Neste trabalho, o foco foi mantido na análise da confiabilidade de sistemas estruturais sujeitos ao colapso progressivo. Sugere-se ainda que essa investigação seja estendida para a otimização de risco destas estruturas.
- Propor uma análise baseada na resposta estrutural global que permita a obtenção das probabilidades associadas a cada caminho de falha. Esta informação é necessária para a aplicação metodologia em problemas de otimização de risco.
- Considerar usar uma formulação de colapso baseada em deslocamentos para obtenção da resposta estrutural global.
- Sugere-se avaliar a eficiência de outro metamodelo, como as redes neurais artificiais, por exemplo, em conjunto com a análise estrutural global do sistema.
- Sugere-se avaliar outras estruturas, de concreto ou madeira, que estarão sujeitas a outros modos e sequências de falha, avaliando a eficácia da resposta estrutural global nesta classe de problemas.
- Sugere-se propor uma abordagem que filtre, dentre a população de Monte Carlo simples, pontos amostrais inseridos no domínio de falha para avaliar-se a sua sequência de falha. Este filtro tem o intuito de identificar outros possíveis modos de falha dominantes.

## REFERÊNCIAS

- AU, S. K.; BECK, J. Estimation of small failure probability in high dimensions by subset simulation. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 16, p. 263–277, 2001.
- BASUDHAR, A.; MISSOUM, S. A sampling-based approach for probabilistic design with random fields. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 198, p. 3647–3655, 2009.
- BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for numerical Methods in Engineering**, n. 14, p. 1262–1267, 1979.
- BECK, A. T. **Confiabilidade e segurança das estruturas**. 1. ed. [*S.L.*]: Elsevier, 2019.
- BECK, A. T.; GOMES, W. J. S. A comparison of deterministic, reliability-based and risk-based structural optimization under uncertainty. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 28, p. 18–29, 2012.
- BICHON, B. J.; ELDRED, M. S.; SWILER, L. P.; MAHADEVAN, S.; MCFARLAND, J. M. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions. **AIAA Journal**, v. 46, p. 2459–2468, 2008.
- BICHON, B. J.; MCFARLAND, J. M.; MAHADEVAN, S. Efficient surrogate models for reliability analysis of systems with multiple failure modes. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 96, p. 1386–1395, 2011.
- BULLEIT, W. M. Uncertainty in Structural Engineering. **Practice Periodical on Structural Design and Construction**, p. 24–30, 2008.
- CHEN, V. C. P.; TSUI, K. L.; BARTON, R. R.; ALLEN, J. K. A review of design and modeling in computer experiments. **Statistics in industry**, n. 22, p. 231–261, 2003.
- CHENG, K.; LU, Z. Adaptive Bayesian support vector regression model for structural reliability analysis. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 206, p. 107286, 2021.

- CHOJACZYK, A. A.; TEIXEIRA, A. P.; NEVES, L. C.; CARDOSO, J. B.; SOARES, C. G. Review and application of Artificial Neural Networks models in reliability analysis of steel structures. **Structural Safety**, v. 52, p. 78–89, 2015.
- DER KIUREGHIAN, A.; DAKESSIAN, T. Multiple design points in first and second-order reliability. **Structural Safety**, p. 37–49, 1998.
- DER KIUREGHIAN, A.; DITLEVSEN, O. Aleatory or epistemic? Does it matter? **Structural Safety**, n. 31, p. 105–112, 2009.
- DITLEVSEN, O.; MADSEN, H. **Structural Reliability Methods**. [S.l.]: John Wiley e Sons, 1996.
- DUBOURG, V.; SUDRET, B.; DEHEEGER, F. Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 33, p. 47–57, 2013.
- ECHARD, B.; GAYTON, N.; LEMAIRE, M. AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation. **Structural Safety**, v. 33, p. 145–154, 2011.
- ELSAYED, E. A. **Reliability engineering**. [S.l.]: Addison Wesley Longman, 1996.
- ESPOSITO, A. **Otimização do risco de estruturas redundantes considerando os efeitos das não linearidades e múltiplos modos de falha**. [S.l.]: Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.
- FANGA, G.; PAN, R.; HONG, Y. Copula-based reliability analysis of degrading systems with dependent failures. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 193, p. 106618, 2020.
- FENG, K.; LU, Z.; LING, C.; YUN, W.; HE, L. An efficient computational method for estimating failure credibility by combining genetic algorithm and active learning Kriging. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 62, p. 771–785, 2020.
- FORRESTER, A. I. J.; SÓBESTER, A.; KEANE, A. J. **Engineering design via surrogate modelling: A practical guide**. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, 2008.

- GALAMBOS, T. V. Systems reliability and structural design. **Structural Safety**, v. 7, p. 101–108, 1990.
- GIOVANIS, D. G.; PAPAIOANNOU, I.; STRAUB, D.; PAPADOPOULOS, V. Bayesian updating with subset simulation using artificial neural networks. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 319, p. 124–145, 2017.
- GOMES, W. J. S. Shallow and deep artificial neural networks for structural reliability analysis. **ASME J. Risk Uncertainty Part B.**, v. 6, p. 041006, 2020.
- GOMES, W. J. S. Structural reliability analysis using adaptive artificial neural networks. **ASME J. Risk Uncertainty Part B.**, v. 5, p. 041004, 2019.
- GOMES, W. J. S.; BECK, A. T. Global structural optimization considering expected consequences of failure and using ANN surrogates. **Computers and Structures**, v. 126, p. 56–68, 2013.
- HASOFER, A. M.; LIND, N. C. An exact and Invariant First Order Reliability Method. **Journal of the engineering mechanics division**, p. 111–121, 1974.
- HE, L.; LU, Z.; LI, X. Failure-mode importance measures in structural system with multiple failure modes and its estimation using copula. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 174, p. 53–59, 2018.
- HENWADI, S.; FRANGOPOL, D. M. System reliability and redundancy in structural design and evaluation. **Structural Safety**, v. 16, p. 47–71, 1994.
- HUANG, X.; CHEN, J.; ZHU, H. Assessing small failure probabilities by AK–SS: An active learning method combining Kriging and Subset Simulation. **Structural Safety**, v. 59, p. 86–95, 2016.
- HO-HUU, V.; NGUYEN-THOI, T.; LE-ANH, L.; NGUYEN-TRANG, T. An effective reliability-based improved constrained differential evolution for reliability-based design optimization of truss structures. **Advances in Engineering Software**, v. 92, p. 48–56, 2016.
- JIANG, C.; YAN, Y.; WANG, D.; QIU, H.; GAO, L. Global and local Kriging limit state approximation for time-dependent reliability-based design optimization through

wrong-classification probability. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 208, p. 107431, 2021.

JIANG, Y.; ZHAO, L.; BEER, M.; WANG, L.; ZHANG, J. Dominant failure mode analysis using representative samples obtained by multiple response surfaces method. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 59, p. 103005, 2020.

KALAGNANAM, J. R.; DIWEKAR, U. M. An efficient sampling technique for off-line quality control. **Technometrics**, n. 39, p. 308–319, 1997.

KAYMAZ, I. Application of kriging method to structural reliability problems. **Structural Safety**, v. 27, p. 133–151, 2005.

KIM, D.; OK, S.; SONG, J.; KOH, H. System reliability analysis using dominant failure modes identified by selective searching technique. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 119, p. 316–331, 2013.

KRIGE, D. G. A Statistical Approach to Some Basic Mine Valuation Problems on the Witwatersrand. **Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa**, n. 6, p. 119–139, 1951.

KROETZ, H. M.; MOUSTAPHA, M.; BECK, A. T.; SUDRET, B. A Two-Level Kriging-Based Approach with Active Learning for Solving Time-Variant Risk Optimization Problems. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 203, p. 107033, 2020.

LEE, T. H.; JUNG, J. J. A sampling technique enhancing accuracy and efficiency of metamodel-based RBDO: Constraint boundary sampling. **Computers and Structures**, v. 86, p. 1463–1476, 2008.

LEE, Y. J.; SONG, J. Finite-element-based system reliability analysis of fatigue-induced sequential failures. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 108, p. 131–141, 2012.

LELIÈVRE, N.; BEAUREPAIRE, P.; MATTRAND, C.; GAYTON, N. AK-MC*S*i: A Kriging-based method to deal with small failure probabilities and time-consuming models. **Structural Safety**, v. 73, p. 1–11, 2018.

- LING, C.; LU, Z.; ZHANG, X. An efficient method based on AK-MCS for estimating failure probability function. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 201, p. 106975, 2020.
- LIU, M.; LI, H. S.; NAN, H. A comparative study of learning functions in adaptive Kriging for reliability analysis. *In: IEEE. PROCEEDINGS of the International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering*. Hunan, China: [s.n.], 2019. P. 603–610.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and nonlinear programming**. [S.l.]: Springer, 2008.
- MATHERON, G. The intrinsic random functions and their applications. **Advances in Applied Probability**, n. 5, p. 439–468, 1973.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R.H.; ZIEMIAN, R.D. **Matrix structural analysis**. .: [s.n.], 2014.
- MCKAY, M.D.; CONOVER, W. J.; BECKMAN, R. J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. **Technometrics**, n. 21, p. 239–245, 1979.
- MELCHERS, R.; BECK, A. T. **Structural reliability analysis and prediction**. 3. ed. [S.l.]: Wiley, 2018.
- MENG, Z.; ZHANG, Z.; ZHANG, D.; YANG, D. An active learning method combining Kriging and accelerated chaotic single loop approach (AK-ACSLA) for reliability-based design optimization. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 357, p. 112570, 2019.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Applied Statistics and Probability for Engineers**. 6. ed. [S.l.]: Wiley, 2014.
- MUROTSU, Y.; OKADA, H.; NIWA, K.; MIWA, S. Reliability Analysis of Truss Structures by Using Matrix Method. **Journal of Mechanical Design**, v. 102, p. 749–756, 1980.
- NIE, J.; ELLINGWOOD, B. R. Directional methods for structural reliability analysis. **Structural Safety**, n. 22, p. 233–249, 2000.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of structures**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2000.

OKASHA, N. M. An improved weighted average simulation method approach for solving reliability-based analysis and design optimization. **Structural Safety**, v. 60, p. 47–55, 2016.

OLSSON, A.; SANDBERG, G.; DAHLBLOM, O. On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis. **Structural Safety**, n. 25, p. 47–68, 2003.

PAN, Q.; DIAS, D. An efficient reliability method combining adaptive Support Vector Machine and Monte Carlo Simulation. **Structural Safety**, v. 67, p. 85–95, 2017.

PAPADOPOULOS, V.; GIOVANIS, D. G.; LAGAROS, N. D.; PAPADRAKAKIS, M. Accelerated subset simulation with neural networks for reliability analysis. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, 223–224, p. 70–80, 2012.

PEIJUAN, Z.; MING, W. C.; ZHOUHONG, Z.; LIQI, W. A new active learning function U of the AK-MCS reliability analysis method. **Engineering Structures**, v. 148, p. 185–194, 2017.

RASHKI, M.; MIRI, M.; MOGHADDAM, M. A. A new efficient simulation method to approximate the probability of failure and most probable point. **Structural Safety**, v. 39, p. 22–29, 2012.

ROMERO, V. J.; SWILER, L. P.; GIUNTA, A. A. Construction of response surfaces based on progressive-lattice-sampling experimental designs with application to uncertainty propagation. **Structural Safety**, n. 265, p. 201–219, 2005.

ROUSSOULY, N.; PETITJEAN, F.; SALAUN, M. A new adaptive response surface method for reliability analysis. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 32, p. 103–115, 2013.

ROY, A.; CHAKRABORTY, S. Support vector regression based metamodel by sequential adaptive sampling for reliability analysis of structures. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 200, p. 106948, 2020.

SACKS, J.; WELCH, W. J.; MITCHELL, T. J.; WYNN, H. P. Design and analysis of computer experiments. **Statist. Sci.**, n. 4, p. 409–423, 1989.

SHEIKHOLESLAMI, R.; RAZAVU, S. Progressive latin hypercube sampling: an efficient approach for robust sampling-based analysis of environmental models. **Environmental Modelling Software**, n. 93, p. 109–126, 2017.

SILVA, R. G. da. **Análise de confiabilidade aplicada a estruturas com comportamento não linear**. [S.l.]: Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, 2016.

SONG, J.; KANG, W. H. System reliability and sensitivity under statistical dependence by matrix-based system reliability method. **Structural Safety**, v. 31, p. 148–156, 2009.

SRIVIDYA, A.; RANGANATHAN, R. Automatic generation of stochastically dominant failure modes in frame structures for reliability studies. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 37, p. 15–23, 1992.

SUN, Y. T.; LUO, L. F.; ZHANG, Q.; QIN, X. R. Reliability analysis of stochastic structure with multi-failure modes based on mixed Copula. **Engineering Failure Analysis**, v. 105, p. 930–944, 2019.

TEIXEIRA, R.; NOGAL, M.; O'CONNOR, A. Adaptive approaches in metamodel-based reliability analysis: A review. **Structural Safety**, v. 89, p. 102019, 2021.

TRIVEDI, S. K. **Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications**. : John Wiley & Sons Ltd, 2016.

XIAO, N. C.; YUAN, K.; ZHOU, C. Adaptive kriging-based efficient reliability method for structural systems with multiple failure modes and mixed variables. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 359, p. 1–26, 2020.

XIAO, N. C.; ZUO, J. M.; ZHOU, C. A new adaptive sequential sampling method to construct surrogate models for efficient reliability analysis. **Reliability Engineering System Safety**, v. 169, p. 330–338, 2018.

XIAO, Q.; MAHADEVAN, S. Fast failure mode identification for ductile structural system reliability. **Structural Safety**, v. 13, p. 207–226, 1994.

XING, H.; JIANG, T.; HAO, P. An efficient dominant failure modes search strategy and an extended sequential compounding method of system reliability analysis and

optimization. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 375, p. 113637, 2021.

YANG, X.; LIU, Y.; GAO, Y.; ZHANG, Y.; GAO, Z. An active learning Kriging model for hybrid reliability analysis with both random and interval variables. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 51, p. 1003–1016, 2015.

YANG, X.; MI, C.; DENG, D. A system reliability analysis method combining active learning Kriging model with adaptive size of candidate points. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 60, p. 137–150, 2019.

YAZDANI, A.; SHAHIDZADEH, M.; TAKADA, T. Bayesian networks for disaggregation of structural reliability. **Structural Safety**, v. 82, p. 101892, 2020.

YI, J.; WU, F.; ZHOU, Q.; CHENG, Y.; LING, H.; LIU, J. An active-learning method based on multi-fidelity Kriging model for structural reliability analysis. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 63, p. 173–195, 2021.

YUAN, K.; XIAO, N. C.; WANG, Z.; SHANG, K. System reliability analysis by combining structure function and active learning kriging model. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 195, p. 106734, 2020.

ZHANG, X.; WU, Z.; MA, H.; PANDEY, M. D. An effective Kriging-based approximation for structural reliability analysis with random and interval variables. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 63, p. 2473–2491, 2021.

ZHOU, C.; LU, Z.; REN, B.; CHENG, B. Failure-Mode Importance Measures in System Reliability Analysis. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 140, p. 04014084, 2014.