

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE
CURSO DE ENGENHARIA AEROESPACIAL

LARISSA DE SOUZA COUTINHO

ANÁLISE DE AEROELASTICIDADE ESTÁTICA UTILIZANDO OS MÉTODOS DE
GLAUERT E ELEMENTOS FINITOS

Joinville
2023

LARISSA DE SOUZA COUTINHO

ANÁLISE DE AEROELASTICIDADE ESTÁTICA UTILIZANDO OS MÉTODOS DE
GLAUERT E ELEMENTOS FINITOS

Trabalho apresentado como requisito
para obtenção do título de bacharel
em Engenharia Aeroespacial do
Centro Tecnológico de Joinville da
Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Dr. Rafael Gigena Cuenca

Joinville
2023

LARISSA DE SOUZA COUTINHO

ANÁLISE DE AEROELASTICIDADE ESTÁTICA UTILIZANDO OS MÉTODOS DE
GLAUERT E ELEMENTOS FINITOS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de bacharel em Engenharia Aeroespacial, na Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville.

Joinville (SC), 12 de junho de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rafael Gigena Cuenca
Orientador(a)
Presidente

Prof. Dr. Marcos Alves Rabelo
Membro(a)
Universidade Federal de Santa Catarina

Profa. Dra. Talita Sauter Possamai
Membro(a)
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

À minha família, que, incondicionalmente, suportou e incentivou meus estudos e, com o maior amor do mundo, me concedeu o privilégio de realizar o meu sonho a mais de 800 km de casa.

Aos meus amigos, com quem dividi lado a lado a vida durante 5 anos e a montanha-russa de alegrias e tristezas que é cursar engenharia em uma universidade pública, de excelência e tão longe de casa. Foram minha segunda família.

Ao meu orientador do trabalho de conclusão de curso, Professor Dr. Rafael Gigena Cuenca, quem me guiou com paciência e sabedoria durante todo o processo, estando disponível inclusive durante fins de semana, férias e feriados. Foi quem tornou essa jornada menos complexa.

Aos professores, técnicos e servidores da UFSC/CTJ, por todo conhecimento compartilhado e pela luta contínua por uma educação pública, gratuita e de qualidade.

Aos colegas de Rotaract UFSC, Encontro Acadêmico Aeroespacial (EA²) e Nisus Aerodesign, que me mostraram que ninguém constrói nada sozinho e, provavelmente, não têm ideia do quanto contribuíram em minha evolução pessoal, técnica e profissional.

Por fim e não menos importante, à BMW Group Brasil, Embraer e todos os seus colaboradores, pela oportunidade de realizar estágios de excelência e modelarem a profissional que sou hoje.

“As coisas são mais belas quando vistas de cima.”

(Alberto Santos Dumont, s.d.)

RESUMO

O presente trabalho propõe uma ferramenta de baixo custo computacional para análise de aeroelasticidade estática de asa finita, aplicável ao projeto conceitual de aeronaves, por meio da consideração do efeito da flexibilidade da asa em seu projeto aerodinâmico e estrutural e que permita avaliar a condição de divergência da asa e a influência de sua flexibilidade em seu desempenho aerodinâmico. O modelo consiste em utilizar o método de Glauert para modelar as cargas aerodinâmicas e um elemento finito de viga para modelar a rigidez da asa e os deslocamentos dos graus de liberdade da torção e flexão. A interação fluido-estrutura é acoplada pelo modelo da seção típica aeroelástica em cada seção da asa, iterando a aerodinâmica e a análise estrutural e atualizando a torção geométrica após cada iteração. A convergência da aerodinâmica e interação estrutural é avaliada pela diferença máxima entre a torção da asa em duas iterações consecutivas. Após atingir a convergência, a teoria da linha de sustentação é utilizada para avaliar a eficiência aerodinâmica da asa e o fenômeno de divergência de asa do modelo aeroelástico é comparado frente ao modelo teórico proposto por Wright e Cooper (2007). O desempenho aerodinâmico da asa rígida à torção é comparado com o da asa flexível considerando a geometria da asa do Piper PA28-161 Warrior II. A partir do manual de operação da aeronave, foram escolhidas 4 condições de voo, variando o peso do avião e a pressão dinâmica, e as asas flexíveis e rígidas foram testadas nessas mesmas condições. O estudo de divergência de asa feito com o modelo computacional proposto permitiu a obtenção da pressão dinâmica de divergência, resultando em um valor aproximadamente 26% maior em relação à pressão limite do modelo teórico. A análise de desempenho mostrou que, para a geometria adotada, o arrasto induzido da asa flexível foi reduzido em 1,94% para o melhor caso quando comparado à asa rígida à torção. A análise de flexão mostrou que, para a asa flexível à torção, a distribuição de sustentação da asa resultou em uma redução máxima de 5,3% no momento fletor resultante em comparação com a rígida, o que permite a redução do peso da asa e otimização do projeto estrutural. O custo computacional do método foi considerado baixo, tornando-o adequado como uma ferramenta de projeto conceitual para aeronaves.

Palavras-chave: Aeroelasticidade Estática. Método de Glauert. Método dos elementos finitos. Divergência.

ABSTRACT

The present study proposes a low computational cost tool for static aeroelasticity analysis of finite wings applicable to the conceptual design of aircraft through the consideration of the effect of wing flexibility on its aerodynamic and structural design and that allows evaluating the condition of wing divergence and the influence of its flexibility on its aerodynamic performance. The model consists of using the Glauert method to model the aerodynamic loads and a beam finite element to model the wing stiffness and the displacements of the torsion and flexion degrees of freedom. The fluid-structure interaction is coupled by modeling the typical aeroelastic section in each wing section, iterating the aerodynamics and structural analysis and updating the geometric torsion after each iteration. The convergence of aerodynamics and structural interaction is evaluated by the maximum difference between the wing twist in two consecutive iterations. After reaching convergence, the lifting-line theory is used to evaluate the aerodynamic efficiency of the wing and the wing divergence phenomenon of the aeroelastic model is compared with the theoretical model proposed by Wright e Cooper (2007). The aerodynamic performance of the torsionally rigid wing is compared with the flexible wing considering the wing geometry of Piper PA28-161 Warrior II airplane. From the aircraft's operations manual, 4 flight conditions were chosen, varying the weight of the plane and the dynamic pressure, and the flexible and rigid wings were tested under these same conditions. The wing divergence study carried out with the proposed computational model allowed obtaining the dynamic divergence pressure, resulting in a value approximately 26% higher than the limit pressure of the theoretical model. The performance analysis showed that, for the adopted geometry, the induced drag of the flexible wing was reduced by 1.94% for the best case when compared to the torsionally rigid wing. Bending analysis showed that, for the torsionally flexible wing, the lift distribution of the wing resulted in a maximum reduction of 5.3% in the resulting bending moment compared to the rigid one, which allows wing weight reduction and optimization of structural design. The computational cost of the method was considered low, making it suitable as a conceptual design tool for aircrafts.

Keywords: Static Aeroelasticity. Glauert method. Finite element method. Divergence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evolução do impacto e custo de uma modificação de projeto	15
Figura 2 – Sub-áreas de conhecimento da aeroelasticidade	18
Figura 3 – Seção aeroelástica típica	18
Figura 4 – Localização do eixo elástico	19
Figura 5 – Colapso de uma asa devido à divergência	20
Figura 6 – Asa retangular flexível com raiz fixa à fuselagem	21
Figura 7 – Geometria de um aerofólio	22
Figura 8 – Forma plana da asa e suas características	23
Figura 9 – Escoamento sobre asa finita	24
Figura 10 – Ângulo de ataque efetivo na seção da asa	25
Figura 11 – Folha de vórtices composta por infinitos vórtices ao longo da linha de sustentação	25
Figura 12 – Curva de $C_{m_{c/A}}$ x α indicando a constância do coeficiente na faixa linear de C_l	29
Figura 13 – Representação de um elemento de viga submetido à carga transversal e seus graus de liberdade	30
Figura 14 – Representação de um elemento de viga sujeito à momento torçor e seus graus de liberdade	31
Figura 15 – Representação de um elemento de viga composto por 2 elementos e seus nós globais	33
Figura 16 – Representação de ambos os elementos com nós locais 1 e 2	33
Figura 17 – Matrizes de rigidez locais de ambos os elementos e seus GDL locais	33
Figura 18 – Linhas e colunas da matriz global ordenadas pelos GDLs globais associados aos nós globais	34
Figura 19 – Matriz de rigidez global e seus GDL globais	35
Figura 20 – Condições de contorno para o modelo de viga engastada	35
Figura 21 – Modelo de viga em balanço com força transversal aplicada	37
Figura 22 – Etapas do trabalho	39
Figura 23 – Fluxograma representativo do processo iterativo que modela o problema aeroelástico do trabalho	42
Figura 24 – Comparação entre os coeficientes aerodinâmicos A_n obtidos via método de Glauert e solução exata da asa elíptica	45
Figura 25 – Comparação entre o deslocamento vertical resultante ao longo da viga obtidos via FEM implementado e solução analítica da Equação 39	46

Figura 26 – Comparação entre o ângulo de torção resultante ao longo da viga obtido via FEM implementado e solução analítica da Equação 40 .	46
Figura 27 – θ na ponta da asa em função da pressão dinâmica para os casos teórico e computacional	48
Figura 28 – Distribuição de θ ao longo da semi envergadura para os casos teórico e computacional quando $Q = 1000Pa$	49
Figura 29 – Aeronave PIPER PA28-161 WARRIOR II	50
Figura 30 – Distribuição de sustentação ao longo da semi-envergadura da asa para as 4 condições testadas	52
Figura 31 – Condição 3 - Distribuição de momento torçor total em relação ao centro elástico ao longo da semi envergadura	53
Figura 32 – Distribuição do momento fletor ao longo da semi-envergadura da asa para a condição 3	54
Figura 33 – Distribuição do deslocamento vertical ao longo da semi-envergadura da asa para as 4 condições testadas	55
Figura 34 – Distribuição do ângulo de torção geométrico ao longo da semi-envergadura da asa para as 4 condições testadas	56
Figura 35 – Análise de divergência da asa do Warrior - θ na ponta da asa em função da pressão dinâmica para as 4 condições	58

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Definição dos GDLs globais	34
Tabela 2 – Associação dos nós globais aos locais	34
Tabela 3 – Propriedades dos modelos teórico e computacional	48
Tabela 4 – Propriedades geométricas e condições de operação em voo da aeronave de referência	50
Tabela 5 – Condições de voo avaliadas	51
Tabela 6 – Ângulos de ataque que igualam as sustentações totais entre os casos rígido e flexível para as 4 condições selecionadas	51
Tabela 7 – N ^o de iterações necessárias para convergência em cada uma das condições	51
Tabela 8 – Arrasto induzido total gerado pela asa para cada uma das 4 condições testadas	56

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GDL	Grau de liberdade
LLT	Linha de sustentação de Prandtl
FEM	Método dos elementos finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

α_{eff}	Ângulo de ataque efetivo
α	Ângulo de ataque geométrico
α_i	Ângulo de ataque induzido
$\alpha_{L=0}$	Ângulo de ataque de sustentação zero
θ	Ângulo de torção
θ_0	Ângulo de torção inicial
S	Área de asa
Γ	Circulação
$C_{m_{c/4}}$	Coefficiente de momento de arfagem
$C_l(y)$	Coefficiente local de sustentação
C_L	Coefficiente total de sustentação
C_{Di}	Coefficiente total de arrasto induzido
a_w	Coefficiente angular da curva de sustentação
l	Comprimento do elemento
c_r	Corda na raiz da asa
c_t	Corda na ponta da asa
v	Deslocamento transversal do nó
e	Distância entre os centros elástico e aerodinâmico
w	Downwash
b	Envergadura de asa
$l(y)$	Força local de sustentação
L	Força total de sustentação
D_i	Força total de arrasto induzido

$[k_f]$	Matriz de rigidez flexional
$[k_\theta]$	Matriz de rigidez torcional
E	Módulo de elasticidade do material
G	Módulo de torção do material
$M_{c/4}$	Momento de arfagem em relação ao centro aerodinâmico
$M_{L_{ce}}$	Momento torçor gerado pela força de sustentação em relação ao centro elástico
M_{ce}	Momento torçor total em relação ao centro elástico
I	Momento de inércia de área
J	Momento polar de inércia
Θ	Posição equivalente na envergadura após troca de variável
y	Posição na envergadura
Q	Pressão dinâmica
Q_w	Pressão dinâmica de divergência
AR	Razão de aspecto
k_θ	Rigidez torsional
r	Rotação do nó
T	Torque
V_∞	Velocidade de corrente livre

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Objetivo	16
1.1.1	Objetivo Geral	16
1.1.2	Objetivos Específicos	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	Aeroelasticidade	17
2.1.1	Aeroelasticidade Estática	18
2.1.2	Fenômeno de divergência aeroelástica	20
2.2	Modelo Aerodinâmico	21
2.2.1	Geometria da asa	22
2.2.2	Método de Glauert	23
2.2.3	Momento de Arfagem	28
2.3	Modelo Estrutural	29
2.3.1	Matriz de Rigidez local de um elemento de viga	29
2.3.2	Matriz de rigidez global	32
2.3.3	Imposição das condições de contorno	35
2.3.4	Soluções Analíticas	37
3	MÉTODO	38
3.1	Modelagem Aerodinâmica	39
3.2	Modelagem Estrutural	40
3.3	Modelagem Aeroelástica Estacionária	41
4	RESULTADOS	44
4.1	Validação	44
4.1.1	Modelo aerodinâmico: método de Glauert x asa elíptica	44
4.1.2	Modelo estrutural: FEM x Analítico	45
4.2	Estudos de caso	47
4.2.1	Divergência de asa: teórica x computacional	47
4.2.2	Aeronave Piper PA28-161 Warrior II	49
4.2.2.1	Desempenho aerodinâmico da aeronave	49
4.2.2.2	Análise de divergência de asa	57
5	CONCLUSÕES	59
5.1	Trabalhos futuros	60

REFERÊNCIAS	61
APÊNDICE A	63

1 INTRODUÇÃO

A aeronave é uma estrutura que apresenta flexibilidade e, dessa forma, pode sofrer deformação. Como consequência, seu comportamento aerodinâmico é alterado e o corpo sofrerá nova deformação, realimentando o mecanismo de influência mútua entre o escoamento de fluido e a estrutura. À ciência que estuda essa relação dá-se o nome de aeroelasticidade (BISPLINGHOFF; ASHLEY, 1975). Segundo Wright e Cooper (2007), a aeroelasticidade é definida como o campo da ciência que se preocupa em estudar e descrever a interação entre forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas em corpos flexíveis. Considerando apenas o acoplamento das forças aerodinâmicas e elásticas e eliminando a dependência do tempo, tem-se a chamada aeroelasticidade estática.

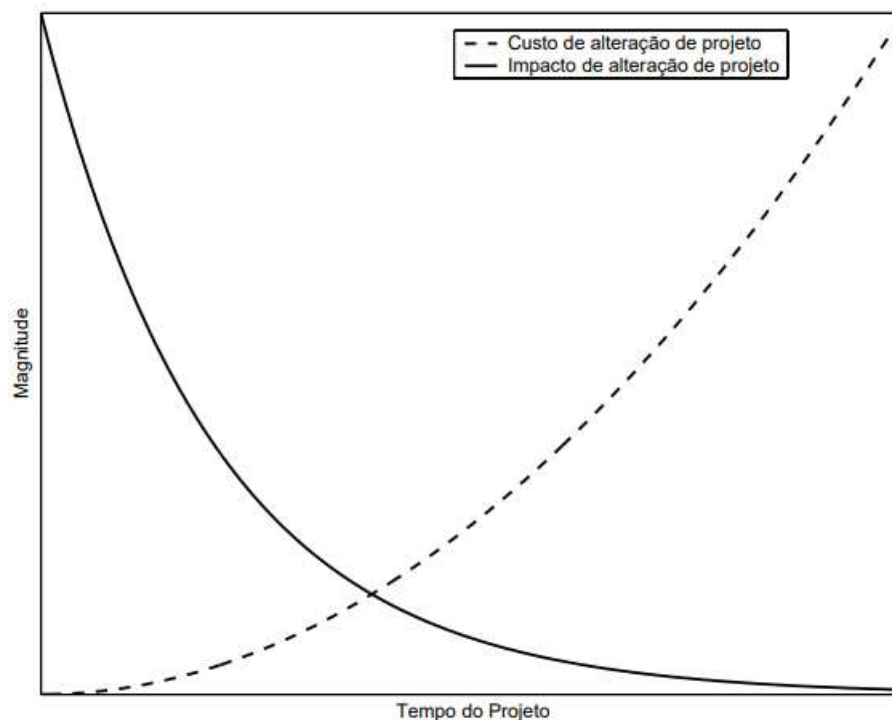
As deformações aeroelásticas estáticas são importantes porque governam as cargas na condição de voo estável, como a distribuição de sustentação, as forças de arrasto, a eficácia das superfícies de controle, o comportamento do compensador da aeronave e também a estabilidade estática. A forma aeroelástica da asa na condição de cruzeiro é de particular importância, pois tem um efeito crucial no arrasto e, portanto, no alcance da aeronave. Além disso, tem potencial para definir seu envelope de voo, pois a instabilidade estática das superfícies geradoras de sustentação pode resultar em falha catastrófica, fenômeno conhecido como divergência (WRIGHT; COOPER, 2007). A velocidade de divergência é uma variável importante a ser considerada durante o projeto do avião, pois está no escopo do processo de certificação (FAA, 2017) e é um dos critérios que define a velocidade máxima da aeronave.

De acordo com Collar (1978), historicamente acredita-se que a tentativa do aviador pioneiro Samuel Langley de voar alguns meses antes dos voos bem-sucedidos dos irmãos Wright em 1903 falharam devido ao início do fenômeno de divergência. Poucos anos depois, após a aeronave de Langley ser reconstruída pelo também aviador Glenn Hammond Curtis com uma estrutura de asa muito mais rígida, a aeronave teve um voo bem sucedido. Em 1916, problemas relacionados à aeroelasticidade foram registrados durante um voo na Primeira Guerra Mundial, onde as empenagens do bombardeiro biplano Handley Page O/400 experimentaram vibração descontrolada e de amplitude crescente, evento que possibilitou a primeira observação e documentação da ocorrência do fenômeno posteriormente denominado de Flutter em uma aeronave (LANCHESTER, 1916).

Nos dias atuais, o problema do excesso de flexibilidade das asas mostrou-se novamente evidente com o surgimento de novos conceitos de projeto de aeronaves, geralmente não tripuladas, que demandam grande redução de peso estrutural, como

os VANTs do tipo HALE, aeronaves extremamente flexíveis, estudados por Junior (2006) e Xie et al. (2013). Dessa maneira, o projeto estrutural envolveu uma redução na quantidade de material ao limite dos critérios de falha e, conseqüentemente, a flexibilidade passou a influenciar significativamente a performance aerodinâmica. Além disso, o projeto de uma aeronave tem característica multidisciplinar e alto grau de complexidade, exigindo anos de desenvolvimento e custos elevados. Dessa forma, de acordo com Junior (2006), quanto antes as alterações de projeto forem propostas, isto é, na fase conceitual do projeto aeronáutico, menor é o custo gerado pela modificação. Nesse sentido, quanto mais informação útil é provida nas etapas iniciais do desenvolvimento do avião, melhores decisões são tomadas e menor é o risco de modificações posteriores, que têm maior impacto e custo, serem necessárias. Portanto, é evidente a necessidade do desenvolvimento de ferramentas de análise que sejam aplicáveis às etapas iniciais do projeto de aeronaves, como é proposto em Xie et al. (2013) e em Biancolini et al. (2016), considerando critérios de aeroelasticidade estática na otimização do projeto.

Figura 1 – Evolução do impacto e custo de uma modificação de projeto



Fonte: Junior (2015)

Dessa forma, através da modelagem das cargas aerodinâmicas por meio do método de Glauert e das deformações estruturais utilizando o método dos elementos finitos, este trabalho propõe o desenvolvimento de uma ferramenta computacional, aplicável ao projeto conceitual aeronáutico, para análise de aeroelasticidade estática tridimensional.

1.1 OBJETIVO

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma ferramenta de baixo custo computacional para análise de aeroelasticidade estática tridimensional, aplicável ao projeto conceitual aeronáutico, por meio da da consideração do efeito da flexibilidade da asa em seu projeto aerodinâmico e estrutural e que permita avaliar a condição de divergência da asa e a influência de sua flexibilidade em seu desempenho aerodinâmico.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Caracterizar o modelo aeroelástico estático 3D da asa;
- Implementar o método de Glauert conforme a teoria da linha de sustentação de Prandtl para modelar o carregamento aerodinâmico;
- Implementar o FEM de um elemento de viga engastada na raiz com 3 graus de liberdade por nó a fim de obter a rigidez linear e torcional da asa e modelar as cargas estruturais;
- Implementar algoritmo iterativo, a partir do modelo aeroelástico estacionário, objetivando integrar os esforços estruturais e aerodinâmicos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados os conceitos e ferramentas teóricas utilizados no desenvolvimento do projeto. Na seção 2.1 é apresentado o modelo aeroelástico e introduzido o fenômeno de divergência, na seção 2.2 é descrito o método de Glauert para o cálculo das cargas aerodinâmicas e, por fim, na seção 2.3 o método dos elementos finitos é descrito na aplicação ao problema para obtenção das deformações estruturais.

2.1 AEROELASTICIDADE

O termo aeroelasticidade é utilizado para descrever a ciência que está encarregada de estudar a interação entre a deformação de uma estrutura flexível exposta ao fluxo de corrente de ar e a correspondente alteração na força aerodinâmica que atua sobre o corpo (BISPLINGHOFF; ASHLEY, 1975).

Na Figura 2 apresenta-se o chamado Triângulo de Collar, cujas áreas de estudo oriundas das intersecções entre aerodinâmica, elasticidade e dinâmica mostram que a aeroelasticidade está dividida em duas grandes áreas de estudo: (1) aeroelasticidade estática, proveniente da interação entre forças aerodinâmicas e elásticas, e (2) aeroelasticidade dinâmica, que inclui as forças inerciais (WRIGHT; COOPER, 2007). Como mostra a Figura 2, o mecanismo de interação estudado por esse trabalho surge justamente na interseção entre os efeitos aerodinâmicos e elásticos, em uma condição onde a estrutura flexível deforma na presença de forças aerodinâmicas, alterando, portanto, o próprio carregamento aerodinâmico. (WRIGHT; COOPER, 2007).

Figura 2 – Sub-áreas de conhecimento da aeroelasticidade

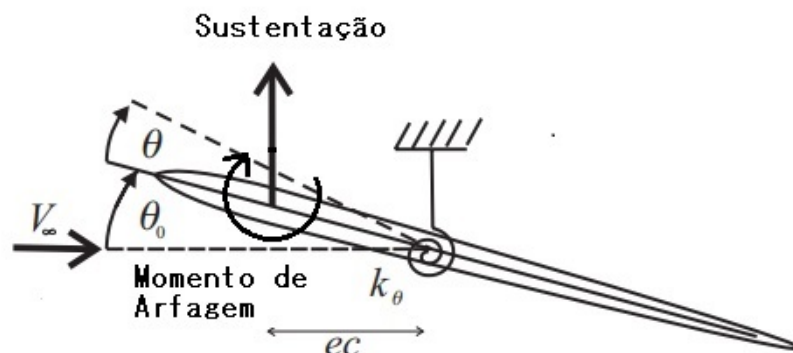


Fonte: Adaptado de Hodges e Pierce (2011)

2.1.1 Aeroelasticidade Estática

A aeroelasticidade estática estuda os fenômenos associados à deformação de estruturas flexíveis das aeronaves, resultante da interação com o carregamento aerodinâmico devido à um fluxo uniforme, isto é, as cargas estruturais que fazem com que a asa deforme, mudando a incidência geométrica, são dependentes da própria deformação estrutural. Nessa área de estudos, a estrutura é considerada em equilíbrio estático, mesmo que as cargas externas sejam dependentes da torção da estrutura (HODGES; PIERCE, 2011).

Figura 3 – Seção aeroelástica típica



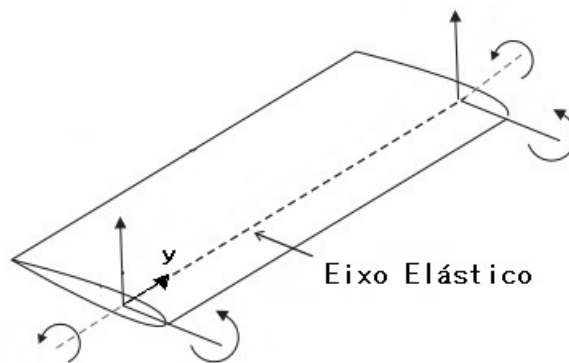
Fonte: Adaptado de Wright e Cooper (2007)

O comportamento aeroelástico estático de uma asa é modelado a partir da seção aeroelástica típica, mostrada na Figura 3, representada por um aerofólio rígido atrelado a uma mola torcional representando a rigidez da estrutura e localizada no

centro elástico, distante ec do centro aerodinâmico, onde está localizado, cerca de $1/4$ da corda a partir do bordo de ataque para a maioria dos aerofólios, o momento de arfagem e a força de sustentação (WRIGHT; COOPER, 2007).

A observação do modelo tridimensional, Figura 4, mostra que o centro elástico pode ser estendido por todo o comprimento da asa, o que é conhecido como eixo elástico. De acordo com Wright e Cooper (2007), esse é o eixo sobre o qual o deslocamento de flexão e a torção são definidos.

Figura 4 – Localização do eixo elástico



Fonte: Adaptado de Wright e Cooper (2007)

A força de sustentação que age sobre uma seção da asa, com velocidade de escoamento V_∞ e com ângulo de torção inicial θ_0 causa o momento torçor, em relação ao centro elástico, descrito na Equação 1.

$$M_{L_{ce}}(y) = Lec = Qc(y)C_l(y)ec \quad (1)$$

sendo que $M_{L_{ce}}(y)$ é o momento torçor devido a sustentação, $C_l(y)$ é o coeficiente de sustentação da seção, $c(y)$ é a corda da seção, Q é a pressão dinâmica, e e é o braço da força de sustentação. Assim, o momento torçor total em relação ao centro elástico é dado pela Equação 3, que ainda contabiliza a contribuição do momento de arfagem, descrito na Equação 2.

$$M_{c/4}(y) = C_{m_{c/4}}(y)Qc^2 \quad (2)$$

$$M_{ce}(y) = M_{L_{ce}}(y) + C_{m_{c/4}}(y)c(y)^2Q \quad (3)$$

sendo $M_{ce}(y)$ o momento torçor total na seção e $C_{m_{c/4}}(y)$ o coeficiente de momento de arfagem da seção.

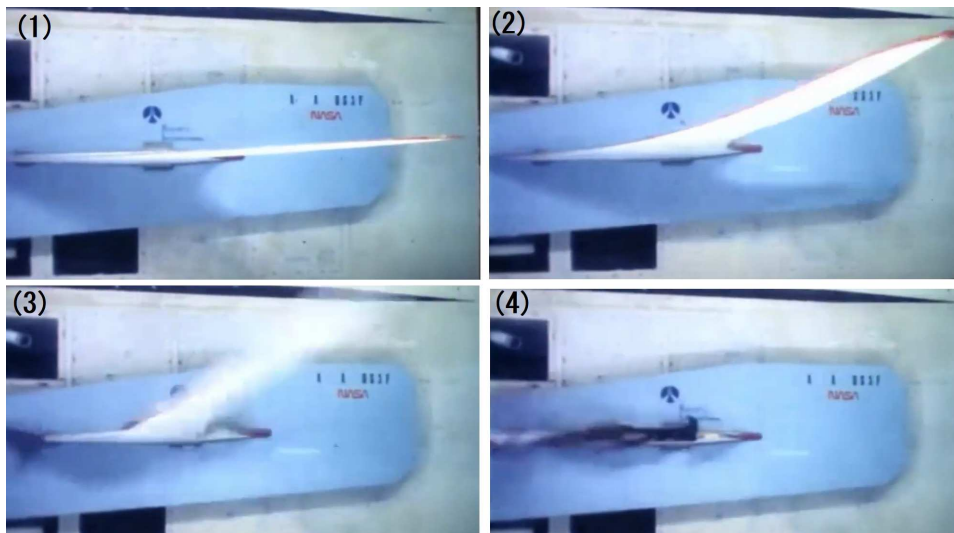
O cálculo dos deslocamentos de flexão e torção depende da magnitude da sustentação e momento torçor total em relação ao centro elástico. Por consequência, após calculada a nova torção da asa, tem-se uma atualização da força de sustentação

e momento. Dessa maneira, esse mecanismo de interação mútua geralmente ocorre até que uma condição de equilíbrio seja alcançada (HODGES; PIERCE, 2011).

2.1.2 Fenômeno de divergência aeroelástica

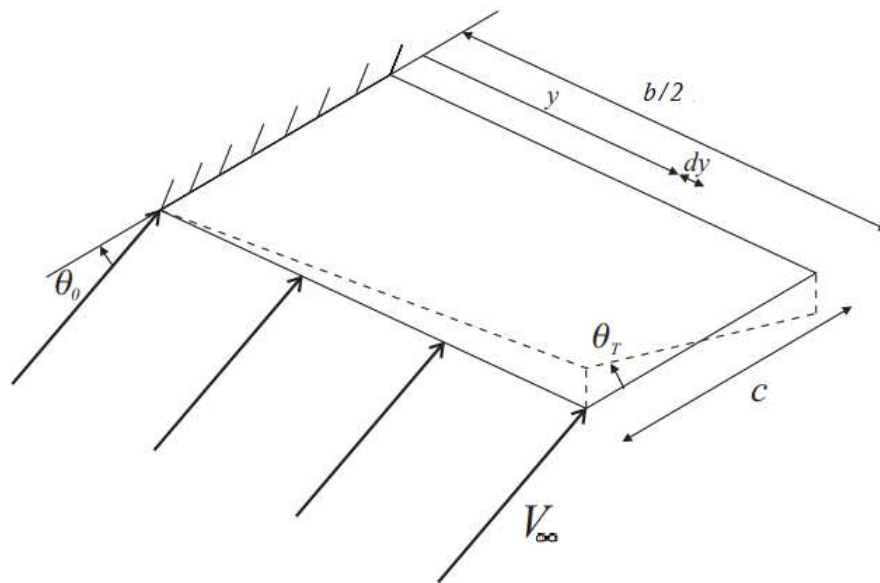
Dentre os diferentes fenômenos aeroelásticos observados em uma aeronave, divergência é o nome dado ao fenômeno aeroelástico estático que ocorre quando o momento gerado pela força aerodinâmica é maior do que o momento restaurador devido à rigidez estrutural, o que resulta na falha da estrutura. O tipo mais comum de divergência é o relacionado à torção da asa, onde o momento aerodinâmico de arfagem supera o momento restaurador da estrutura e a asa se deforma até atingir seu limite estrutural, como mostrado na Figura 5, que apresenta um teste de divergência aeroelástica da aeronave experimental Grumman X-29, construído pela NASA e Força Aérea dos Estados Unidos. Na Figura 5(1) se observa a asa em sua posição original, ao passo que em 5(2) já é possível observar a estrutura altamente deformada e, por fim, em 5(3) é atingido o limite estrutural e a asa é arrancada da fuselagem, o que é mostrado em 5(4). A velocidade em que esse fenômeno ocorre é chamada de velocidade de divergência (WRIGHT; COOPER, 2007).

Figura 5 – Colapso de uma asa devido à divergência



Fonte: Adaptado de Gibbs (2005)

Figura 6 – Asa retangular flexível com raiz fixa à fuselagem



Fonte: Adaptado de Wright e Cooper (2007)

Wright e Cooper (2007) apresentam um modelo de divergência para uma asa retangular tipo cantilever como a da Figura 6. Por hipótese, a torção estrutural tem um comportamento linear como apresentado na Equação 4:

$$\theta = \frac{y}{s} \theta_{ponta} \quad (4)$$

sendo θ a torção da asa devido à elasticidade, θ_{ponta} a torção estrutural na ponta da asa, s a semi-envergadura e y a posição na envergadura. Considerando que a estrutura possui rigidez torcional constante ao longo da envergadura e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, a torção na ponta da asa é dada por:

$$\theta_{ponta} = \frac{3Qec^2s^2a_w}{6GJ - 2Qec^2s^2a_w} \theta_0 \quad (5)$$

a_w é a derivada do C_l da seção em relação ao ângulo de ataque, GJ é a rigidez torcional da estrutura e θ_0 é o ângulo geométrico na raiz da asa. É fácil notar que se o denominador da Equação 5 for nulo, θ_{ponta} tende ao infinito. Logo, define-se a pressão dinâmica de divergência como:

$$Q_w = \frac{3GJ}{ec^2s^2a_w} \quad (6)$$

2.2 MODELO AERODINÂMICO

Aerodinâmica é a ciência que estuda os efeitos das cargas atuantes entre objetos em movimento e o fluido em que esses estão submersos, nesse caso particular, o ar (SOUSA, 2008). Segundo Prandtl, Oswatitsch e Wieghardt (2013), o termo em

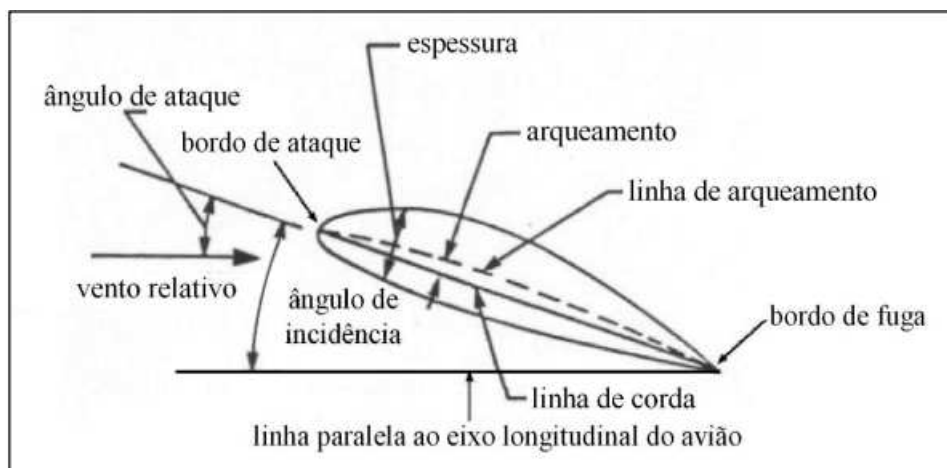
questão é usualmente utilizado para problemas decorrentes do voo e outros tópicos envolvendo o fluxo de ar.

As cargas aerodinâmicas são geradas a partir da diferença de pressão que existe ao redor do corpo imerso no escoamento, aliada à ação dos efeitos viscosos em sua superfície (SOUSA, 2008). As principais forças aerodinâmicas são chamadas de sustentação e arrasto, que, por consequência, também causam momentos atuantes sobre o corpo.

2.2.1 Geometria da asa

Segundo Houghton et al. (2017), se uma asa horizontal é cortada por um plano vertical paralelo à linha de centro, o formato da seção resultante é o denominado perfil aerodinâmico ou aerofólio. A Figura 7 apresenta a geometria do aerofólio e suas principais características.

Figura 7 – Geometria de um aerofólio



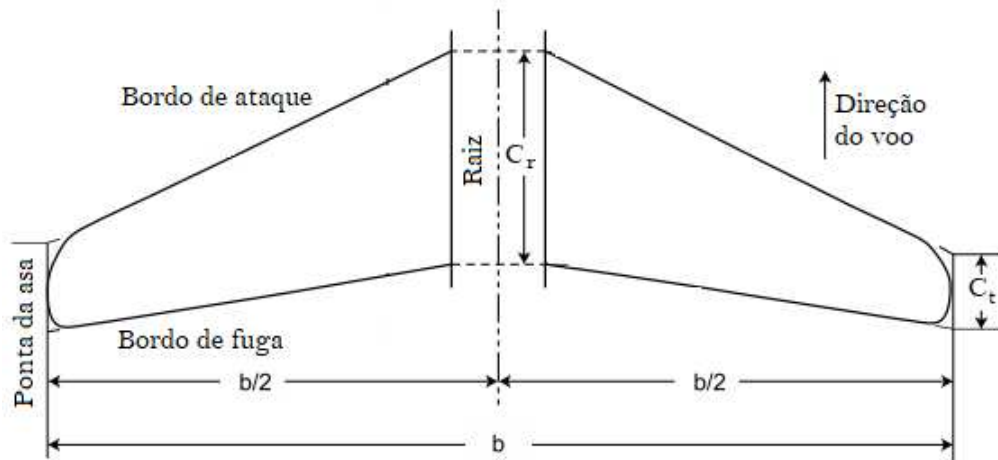
Fonte: Adaptado de Rodrigues (2013)

Voltando a atenção ao termos de maior importância para este trabalho, como mostra a Figura 7, a corda de um aerofólio ou asa é uma linha reta imaginária que passa através do perfil desde o bordo de ataque até o bordo de fuga. Além disso, também é possível identificar o ângulo de ataque, que é definido como o ângulo entre a linha de corda da asa e a direção do vento relativo e tem alta influência na força de sustentação gerada.

De acordo com Houghton et al. (2017), a Figura 8 representa a vista plana de uma asa finita, ou planiforme, e define os símbolos para diversos parâmetros importantes para seu estudo, como a envergadura, que é a dimensão b e define a distância entre as duas pontas das asas. Medindo a distância $b/2$, de cada ponta até a linha central, temos a semi-envergadura da asa. Outros termos relevantes para esse estudo são as cordas na raiz e ponta, respectivamente, c_r e c_t e a corda média \bar{c} que é

definida pela divisão entre a área da asa e a envergadura.

Figura 8 – Forma plana da asa e suas características

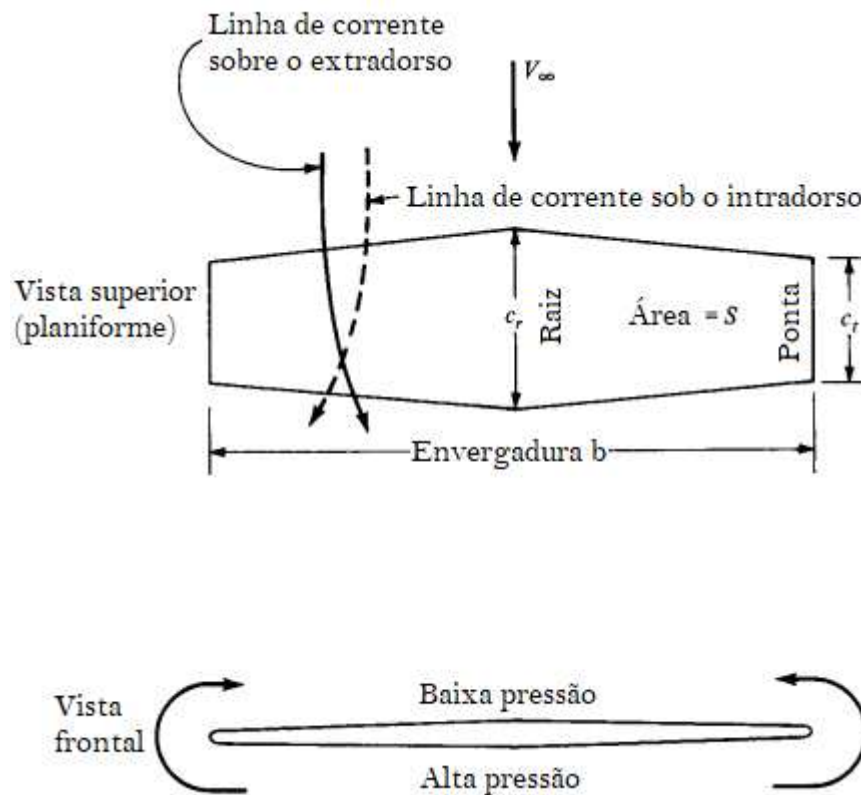


Fonte: Adaptado de Houghton et al. (2017)

2.2.2 Método de Glauert

De acordo com Anderson (2001), a teoria aerodinâmica de uma asa finita leva em consideração o fato desse corpo ser tridimensional e, portanto, o escoamento sobre ele também ocorrer em 3 dimensões. A observação desse escoamento (Figura 9) mostra a existência de uma componente do escoamento que atua na direção da envergadura da asa e que é gerada pela diferença de pressão existente entre a superfície inferior (alta pressão) e superior (baixa pressão) ao longo da asa.

Figura 9 – Escoamento sobre asa finita

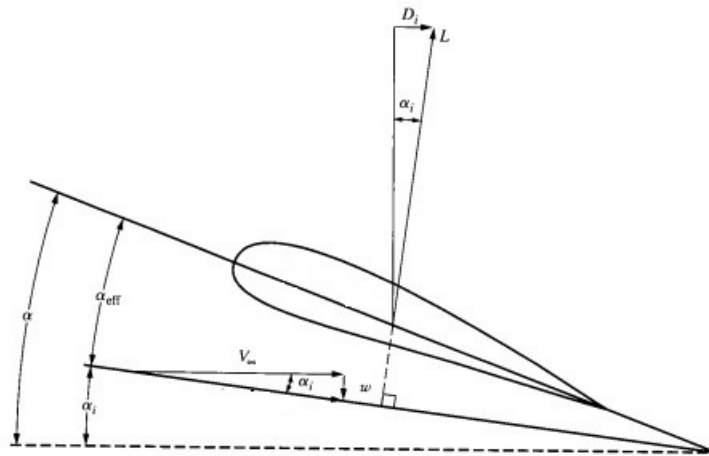


Fonte: Adaptado de Anderson (2001)

Na extremidade livre, porém, o escoamento tende a se curvar e originar o chamado vórtice de ponta de asa, que é responsável pela componente de velocidade induzida direcionada em oposição à sustentação, chamada *downwash*, que altera o ângulo de ataque real entre o escoamento e a asa, originando um ângulo de ataque induzido e permitindo escrever a Equação 7, que define o ângulo de ataque efetivo da seção (HOUGHTON et al., 2017).

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i \quad (7)$$

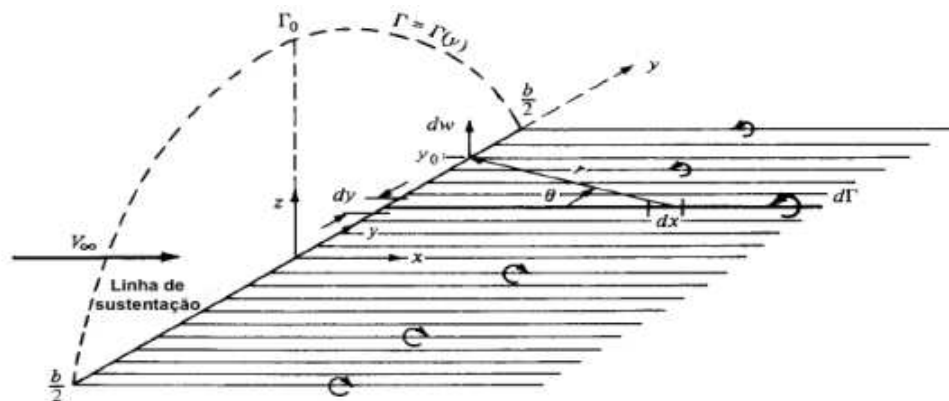
Figura 10 – Ângulo de ataque efetivo na seção da asa



Fonte: Adaptado de Anderson (2001)

Para calcular a distribuição de downwash ao longo da envergadura, o cientista Ludwig Prandtl (1875-1953) propôs a sobreposição linear de infinitos vórtices ferradura com magnitude infinitesimal $d\Gamma$ ao longo da linha de sustentação, induzindo, cada um, uma componente infinitesimal de downwash. Mostrada na Figura 11, essa configuração, denominada folha de vórtices, permite alterar a distribuição de Γ ao longo da envergadura de acordo com a geometria da asa. Dessa maneira, a distribuição de downwash total ao longo da linha de sustentação pode ser calculada pela Equação 8 (ANDERSON, 2001).

Figura 11 – Folha de vórtices composta por infinitos vórtices ao longo da linha de sustentação



Fonte: Adaptado de Anderson (2001)

$$w(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy_0}{y - y_0} = \alpha_i(y)V_\infty \quad (8)$$

Ainda como é apresentado em Anderson (2001), para definir a teoria da linha de sustentação (LLT), Prandtl modelou a sustentação em uma seção y utilizando a circulação e o aerofólio, como apresentado na Equação 9.

$$L = \rho V_\infty \Gamma(y) = \frac{\rho V_\infty^2}{2} c(y) 2\pi(\alpha_{eff} - \alpha_{L=0}) \quad (9)$$

Dessa equação, substitui-se o α_{eff} na Equação 7 e o α_i da Equação 8, resultando na equação 10, que é chamada de equação fundamental da LLT.

$$\alpha(y) = \frac{\Gamma(y)}{\pi V_\infty c(y)} + \alpha_{L=0}(y) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy) dy_0}{y - y_0} \quad (10)$$

Assim, a distribuição de circulação ao longo da envergadura de uma asa finita pode ser obtida mediante a solução da Equação 10. A resolução utiliza a transformação de variável apresentada na Equação 11 e assume ter a forma da Equação 12. Assim, o cálculo das integrais resulta na Equação 13.

$$y = \frac{b}{2} \cos(\Theta) \quad (11)$$

$$\Gamma(\Theta) = 2bV_\infty \sum_1^N A_n \sin(n\Theta) \quad (12)$$

$$\alpha(\Theta) = \frac{2b}{\pi c(\Theta)} \sum_1^N A_n \sin(n\Theta) + \alpha_{L=0}(\Theta) + \sum_1^N n A_n \frac{\sin(n\Theta)}{\sin(\Theta)} \quad (13)$$

A Equação 13 pode ser resolvida com a utilização do denominado Método de Glauert que, segundo Katz e Plotkin (2001), consiste em discretizá-la ao longo da envergadura, variando Θ no intervalo $[0, \pi/2]$ para o caso de asas simétricas e obtendo um sistema linear que será resolvido para a incógnita dos coeficientes A_n que definem a distribuição de circulação ao longo da envergadura. Organizando a Equação 13 com os termos dependentes de A_n no lado esquerdo e os termos independentes no lado direito, chega-se na Equação 14:

$$\sum_1^N A_n \left(\frac{-4b \sin(n\Theta)}{2\pi c(\Theta)} - n \frac{\sin(n\Theta)}{\sin(\Theta)} \right) = \alpha_{L=0}(\Theta) - \alpha(\Theta) \quad (14)$$

sendo o lado esquerdo composto pela multiplicação entre a matriz de influência aerodinâmica e o vetor de coeficientes A_n , ao passo que em seu lado direito têm-se o vetor de ângulos de ataque.

Avaliando essa equação em N posições da envergadura e truncando a série da Equação 12 em N termos, a Equação 13 se torna o sistema linear apresentado na Equação 16.

$$\alpha_{0i} = \alpha_{L=0}(\Theta_i) - \alpha(\Theta_i) \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-4bsin(1\Theta_1)}{2\pi c(\Theta_1)} - 1 \frac{sin(1\Theta_1)}{sin(\Theta_1)} & \dots & \frac{-4bsin(N\Theta_N)}{2\pi c(\Theta_1)} - N \frac{sin(N\Theta_1)}{sin(\Theta_1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-4bsin(1\Theta_N)}{2\pi c(\Theta_N)} - 1 \frac{sin(1\Theta_N)}{sin(\Theta_N)} & \dots & \frac{-4bsin(N\Theta_N)}{2\pi c(\Theta_N)} - N \frac{sin(N\Theta_N)}{sin(\Theta_N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{01} \\ \vdots \\ \alpha_{0N} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

A inclusão do deslocamento estrutural dentro do modelo aerodinâmico acontece por meio da adição da distribuição do ângulo de torção, calculado através do método dos elementos finitos, ao ângulo de ataque geométrico da asa na Equação 15. Assim, a flexibilidade estrutural do modelo é considerada para o cálculo dos parâmetros aerodinâmicos.

Após a obtenção dos coeficientes A_n , é possível escrever as Equações 17 a 21, que apresentam as variáveis aerodinâmicas para o modelo de asa simétrica.

$$C_L = \pi A R A_1 \quad (17)$$

$$C_{Di} = \pi A R \sum_n n A_n^2 \quad (18)$$

$$C_l(\Theta) = \frac{4b}{c(\Theta)} \sum_n A_n sin(n\Theta) \quad (19)$$

$$L = C_L Q c \frac{b}{2} \quad (20)$$

$$l(\Theta) = C_l(\Theta) Q c \quad (21)$$

onde AR representa a razão de aspecto, C_L o coeficiente total de sustentação, C_{Di} o coeficiente total de arrasto induzido, $C_l(\Theta)$ o coeficiente local de sustentação, L a força de sustentação total gerada e $l(\Theta)$ a força local de sustentação.

A validação do método de Glauert pode ser feita por meio de solução analítica e exata como o caso da asa elíptica sem torção, com função de corda dada pela Equação 22, onde a variação da circulação ao longo da envergadura também segue uma forma elíptica e que, de acordo com Anderson (2001), é descrita pela Equação 23, onde Γ_0 representa o valor da circulação na origem, como mostrado na Figura 11. Assim, apenas o coeficiente A_1 não é nulo e é descrito pela Equação 24.

$$c(y) = c_r \sqrt{1 - \frac{y^2}{(b/2)^2}} \quad (22)$$

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad (23)$$

$$A_n^{(ST)} = A_1^{(ST)} = \frac{2}{AR + 2}(\alpha - \alpha_{L0}) \quad (24)$$

Além disso, também é possível considerar uma asa elíptica com variação de torção linear de forma $a_0 \left| \frac{y}{b/2} \right| = a_0 \cos(\Theta)$, resultando nos coeficientes A_n separados em uma parcela para asa com e sem torção, como apresentado na Equação 25. Dado que a asa elíptica é simétrica em torno do eixo horizontal, apenas os coeficientes para n ímpar não são nulos, o que resulta na circulação de Equação 26.

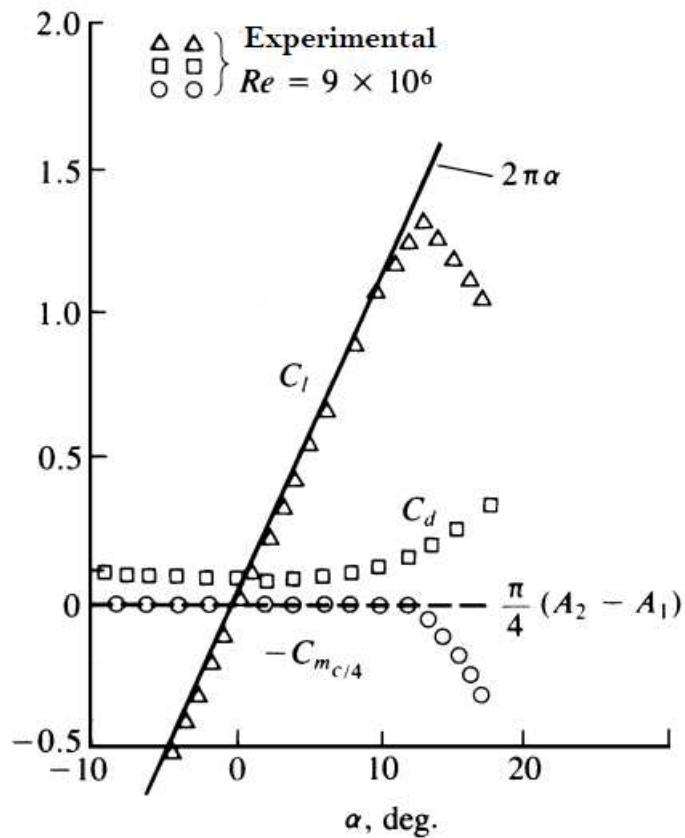
$$A_n = A_n^{(T)} + A_n^{(ST)} = \begin{cases} \frac{a_0}{\pi(AR/2+n)} \left[\frac{\sin(\pi/2(n-2))}{n-2} - \frac{\sin(\pi/2(n+2))}{n+2} \right] + A_1^{(ST)}, & n = 1 \\ \frac{a_0}{\pi(AR/2+n)} \left[\frac{\sin(\pi/2(n-2))}{n-2} - \frac{\sin(\pi/2(n+2))}{n+2} \right], & n > 1 \end{cases} \quad (25)$$

$$\Gamma^{(T)}(\Theta) = \frac{2bQ_0a_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5..} A_n \sin(n\Theta) \quad (26)$$

2.2.3 Momento de Arfagem

Em aerodinâmica, o momento de arfagem representa o torque produzido pela força aerodinâmica se sua aplicação for considerada, não no centro de pressão, mas no centro aerodinâmico do aerofólio. Para a maioria dos aerofólios, o centro aerodinâmico está localizado em 25% da corda a partir do bordo de ataque. A Equação 2, anteriormente apresentada, formula a distribuição do momento de arfagem ao longo da asa, que é principalmente dependente do aerofólio. Como mostra a Figura 12, tal valor, dependente do coeficiente de momento de arfagem $C_{m_{c/4}}$ do aerofólio, pode ser considerado constante, visto que, para a maioria dos aerofólios, para ângulos de ataque na faixa linear de Cl , o coeficiente de momento de arfagem calculado em relação ao centro aerodinâmico não varia significativamente (KATZ; PLOTKIN, 2001).

Figura 12 – Curva de $C_{m_{c/4}}$ x α indicando a constância do coeficiente na faixa linear de C_l



Fonte: Adaptado de Katz e Plotkin (2001)

2.3 MODELO ESTRUTURAL

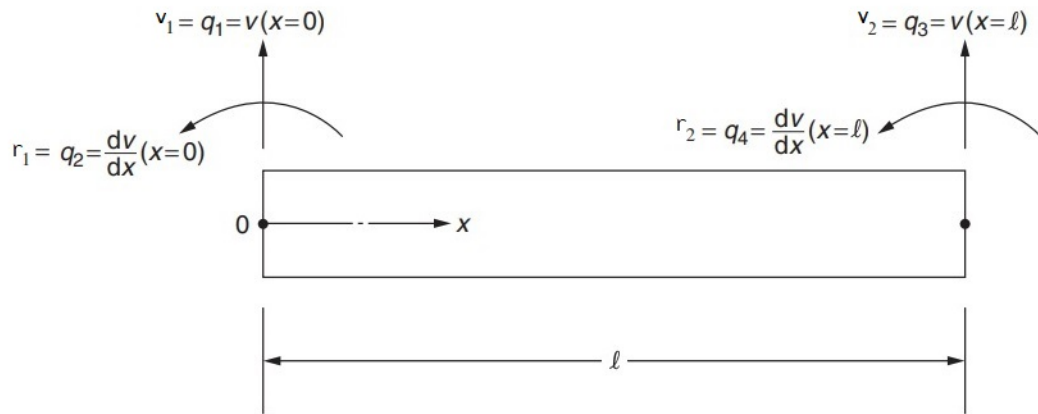
Neste trabalho, o modelo de estrutura considerado será o de uma asa reta cujo comportamento estrutural será aproximado pela dinâmica de sua longarina principal retilínea, que será modelada como uma viga engastada e resolvida através do método dos elementos finitos (FEM), que é uma técnica de solução de equações diferenciais parciais. O FEM discretiza uma geometria contínua em elementos menores, dividindo-a em um número finito de elementos, conectados por nós, e obtém uma solução aproximada, mas representativa da estrutura como um todo (SMITH; GRIFFITHS; MARGETTS, 2013).

2.3.1 Matriz de Rigidez local de um elemento de viga

Segundo Rao (2011), uma viga é um elemento de barra reto que é submetido, principalmente, a cargas transversais. Assumindo sua simetria em torno dos eixos y e z , a deformação de uma viga é descrita por seu deslocamento transversal e rotação. Portanto, o deslocamento transversal e a rotação em cada extremidade do elemento

de viga, submetido à carga transversal, definem seus graus de liberdade. Na Figura 13 são indicados os 4 graus de liberdade, no sistema de coordenadas local (xy), para um elemento de viga de comprimento l e seu deslocamento nodal, $d_n(x)$, apresentado na Equação 27¹.

Figura 13 – Representação de um elemento de viga submetido à carga transversal e seus graus de liberdade



Fonte: Adaptado de Rao (2011)

$$d_n(x) = [N] \vec{q} = [N_1(x) N_2(x) N_3(x) N_4(x)] \begin{Bmatrix} v_1 \\ r_1 \\ v_2 \\ r_2 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

O elemento mostrado na Figura 13 tem rigidez à flexão EI e, ao sofrer a aplicação nodal de uma carga transversal u (unidade de força/comprimento), a Equação 28 definirá a equação de equilíbrio para este sistema (SMITH; GRIFFITHS; MARGETTS, 2013).

$$u = EI \frac{d^4 d_n}{dx^4} \quad (28)$$

Utilizando as Equações 27 e 28 é possível mostrar que a matriz de rigidez de um elemento de viga submetido a um carregamento transversal aplicado apenas nos nós, assim como demonstrada por Smith, Griffiths e Margetts (2013), tem o formato da Equação 29. Além disso, a Equação 30 representa a relação de rigidez flexional desse elemento.

¹ O capítulo 4 de Rao (2011) apresenta uma discussão completa acerca das funções de interpolação nodal $N_i(x)$.

$$[k_f] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

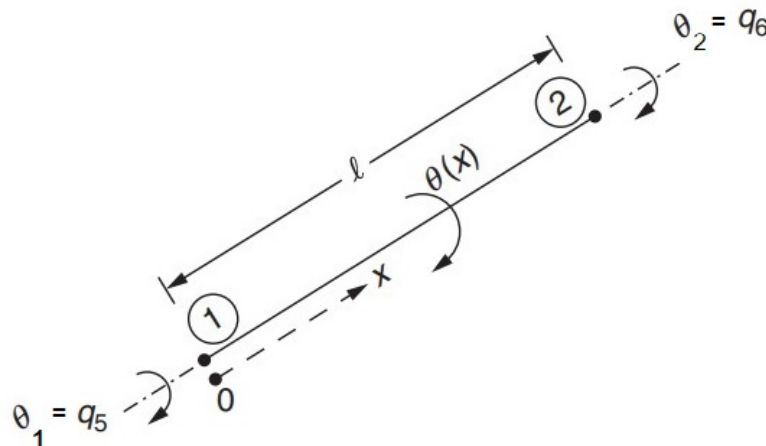
$$[k_f] \begin{Bmatrix} v_1 \\ r_1 \\ v_2 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Para uma força externa transversal u linearmente distribuída no comprimento do elemento finito delimitado pelos nós 1 e 2, de acordo com Savassi (1996), o vetor de carregamentos apresentado na Equação 30 tem o formato da Equação 31. Neste trabalho, a força transversal mencionada é representada pela força de sustentação, ou seja, o carregamento aerodinâmico é considerado no cálculo dos deslocamentos estruturais.

$$f_{ef} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (0, 35u_1 + 0, 15u_2)l \\ (1, 5u_1 + u_2)l^2/30 \\ (0, 15u_1 + 0, 35u_2)l \\ -(u_1 + 1, 5u_2)l^2/30 \end{Bmatrix}. \quad (31)$$

Além disso, considerando-se um elemento de viga sujeito à aplicação de momento torçor t em seus nós, Figura 14, tem-se a matriz de rigidez torcional mostrada na Equação 32. Por fim, a Equação 33 apresenta a relação de rigidez torcional desse elemento (RAO, 2011).

Figura 14 – Representação de um elemento de viga sujeito à momento torçor e seus graus de liberdade



Fonte: Adaptado de Rao (2011).

$$[k_t] = \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$[k_t] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Ao se considerar uma distribuição de torção constante ao longo do elemento finito delimitado pelos nós 1 e 2, o vetor de carregamentos externos torcionais apresentado na Equação 33 pode ser escrito como o carregamento médio entre os dois extremos, como elucida a Equação 34. Neste trabalho, a torção externa mencionada é representada pelo momento torçor total calculado em relação ao eixo elástico da asa.

$$f_{et} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (0,5t)l \\ (0,5t)l \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Dessa maneira, o elemento de viga pode ser utilizado para modelar a longarina de uma aeronave com a condição de contorno de engaste na raiz, sujeita aos carregamentos da força de sustentação e momento de arfagem. No caso de uma longarina retilínea em uma asa reta, o eixo de coordenadas local está alinhado com o eixo global da asa e, portanto, não é necessária a inclusão de uma matriz de transformação entre os eixos nas Equações 29 e 32 que representam, respectivamente, as matrizes de rigidez flexional e torcional do elemento finito. Além disso, segundo Rao (2011), a partir desse alinhamento, é assumida a hipótese de que os esforços cortantes e deformações não geram torções e vice-versa, isto é, as soluções para os problemas de flexão e torção podem ser desacopladas e resolvidas de forma independente.

2.3.2 Matriz de rigidez global

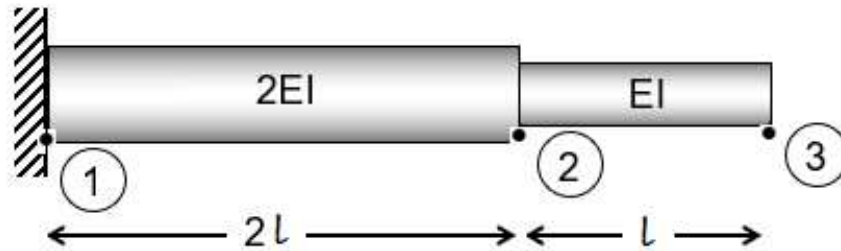
A construção da matriz de rigidez global do modelo ocorre por meio das matrizes locais e da chamada relação de conectividade dos nós locais e globais dos elementos da malha, de forma a garantir a continuidade da deflexão, rotação e torção na transição de um elemento ao outro (SCREMIN, 2017). Em Kim, Sankar e Kumar (2018) é proposto um método sistemático para a garantia da conectividade entre os elementos e a correta montagem da matriz global que consiste em

1. Definir GDLs globais
2. Associar nós locais aos globais
3. Associar GDLs locais aos globais
4. Montar matriz de rigidez global a partir das locais

A título de exemplo, seja a viga em balanço, composta por dois elementos, mostrada na Figura 15 e que está submetida à aplicação de forças externas transversais, como apresentado na Seção 2.3.1. Para esse modelo estão associados

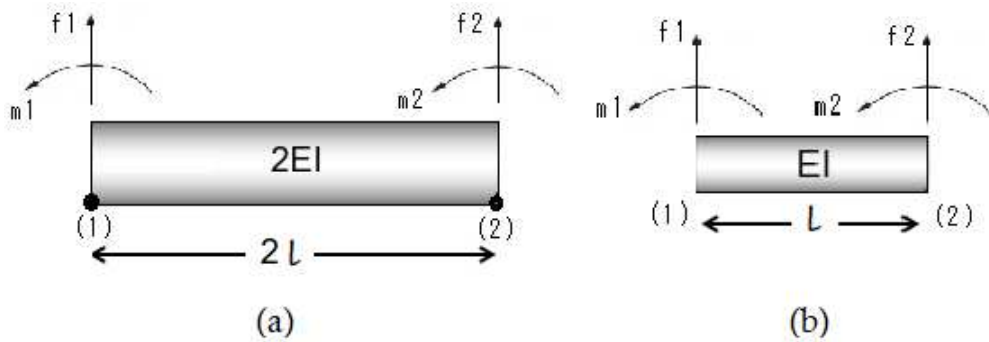
os nós globais 1,2 e 3. Por outro lado, cada um dos elementos em separado, como mostra a Figura 16(a) e 16(b), é composto pelos nós 1 e 2 e possui, respectivamente, a matriz de rigidez local apresentada na Figura 17(a) e 17(b).

Figura 15 – Representação de um elemento de viga composto por 2 elementos e seus nós globais



Fonte: Adaptado de Kim, Sankar e Kumar (2018)

Figura 16 – Representação de ambos os elementos com nós locais 1 e 2



Fonte: Adaptado de Kim, Sankar e Kumar (2018)

Figura 17 – Matrizes de rigidez locais de ambos os elementos e seus GDL locais

$$[k^{(1)}] = \frac{EI}{l^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} f1 & m1 & f2 & m2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f1 \\ m1 \\ f2 \\ m2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 3l & -3 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & 2l^2 \\ -3 & -3l & 3 & -3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (a)$$

$$[k^{(2)}] = \frac{EI}{l^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} f1 & m1 & f2 & m2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f1 \\ m1 \\ f2 \\ m2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (b)$$

Fonte: Adaptado de Kim, Sankar e Kumar (2018)

Em primeiro lugar, os GDLs globais serão ordenados por número de nós e sequenciados igualmente para todos os nós, como mostra a Tabela 1. Dessa forma, de acordo com a Figura 18, a matriz de rigidez global é montada de forma a respeitar a ordem e sequência dos GDLs globais.

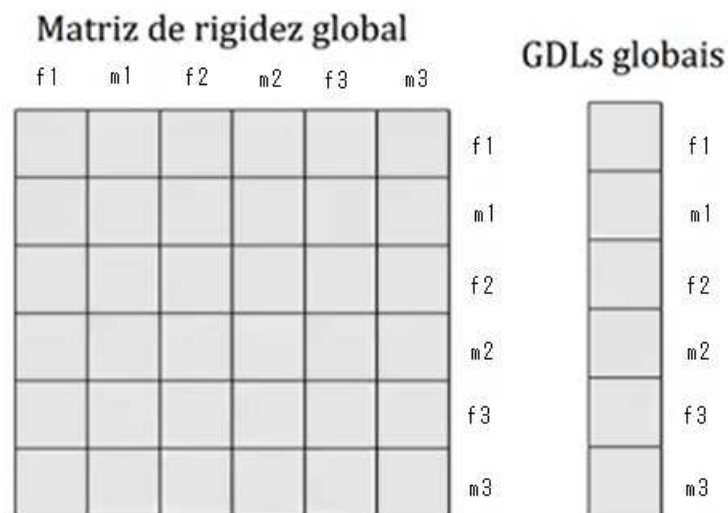
Tabela 1 – Definição dos GDLs globais

Nó global	GDL	Índice
1	f	1
	m	1
2	f	2
	m	2
3	f	3
	m	3

Tabela 2 – Associação dos nós globais aos locais

Elemento	Nó local	
	1	2
1	1	2
2	2	3

Figura 18 – Linhas e colunas da matriz global ordenadas pelos GDLs globais associados aos nós globais



Fonte: Adaptado de Kim, Sankar e Kumar (2018)

Na sequência, os nós globais são associados aos nós locais de elementos específicos, como apresentado na Tabela 2. Associados os nós locais e globais, a matriz de rigidez local de cada elemento é disposta na matriz global, de forma que os nós compartilhados pelos elementos locais tenham suas componentes somadas, como elucidada a Figura 19. Além disso, quando um elemento não tem relação com um nó e seus GDLs, é inserido o valor zero para a referida célula da matriz de rigidez global.

Figura 19 – Matriz de rigidez global e seus GDL globais

$$[K_s] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & 3l & -3 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & 4l^2 & -3l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -3 & -3l & 15 & 3l & -12 & 6l \\ 3l & 2l^2 & 3l & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} f1 \\ m1 \\ f2 \\ m2 \\ f3 \\ m3 \end{matrix}$$

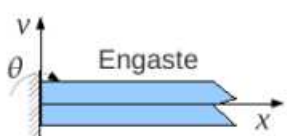
Fonte: Adaptado de Kim, Sankar e Kumar (2018)

Portanto, o mesmo raciocínio pode ser aplicado para uma asa modelada como uma viga em balanço com N nós e dividida em (N-1) elementos finitos. Ademais, dadas as soluções dos problemas da flexão e torção desacopladas, tem-se duas matrizes globais: uma relativa à flexão e outra à torção.

2.3.3 Imposição das condições de contorno

Para o modelo de viga engastada, representativo da asa de uma aeronave, tem-se as condições de contorno elucidadas na Figura 20, sendo todas relativas à extremidade fixa do modelo. Isto é, discretizado o modelo em elementos finitos, as condições de contorno indicam que o nó 1 do primeiro elemento não possui os graus de liberdade considerados neste modelo.

Figura 20 – Condições de contorno para o modelo de viga engastada

Tipo de suporte	Condição de apoio	
	Graus de liberdade	Esforços
	$f(x=0)=0$ $m(x=0)=0$ $\theta(x=0)=0$	nenhum

Fonte: Adaptado Scremin (2017)

Assim, uma vez conhecida a matriz de rigidez global e o vetor de esforços externos, os vetores de deslocamentos nodais podem ser obtidos mediante solução dos sistemas lineares relativos, respectivamente, aos problemas de flexão e torção. À título de exemplo, para um elemento de viga discretizado em 4 elementos, ou seja, composto por um total de 5 nós, tem-se a Equação 35 como solução dos deslocamentos relativos

à flexão e a Equação 36 como resposta à torção (RAO, 2011).

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ r_1 \\ v_2 \\ r_2 \\ v_3 \\ r_3 \\ v_4 \\ r_4 \\ v_5 \\ r_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} & k_{1,7} & k_{1,8} & k_{1,9} & k_{1,10} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} & k_{2,7} & k_{2,8} & k_{2,9} & k_{2,10} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} & k_{3,7} & k_{3,8} & k_{3,9} & k_{3,10} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} & k_{4,7} & k_{4,8} & k_{4,9} & k_{4,10} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} & k_{5,7} & k_{5,8} & k_{5,9} & k_{5,10} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} & k_{6,7} & k_{6,8} & k_{6,9} & k_{6,10} \\ k_{7,1} & k_{7,2} & k_{7,3} & k_{7,4} & k_{7,5} & k_{7,6} & k_{7,7} & k_{7,8} & k_{7,9} & k_{7,10} \\ k_{8,1} & k_{8,2} & k_{8,3} & k_{8,4} & k_{8,5} & k_{8,6} & k_{8,7} & k_{8,8} & k_{8,9} & k_{8,10} \\ k_{9,1} & k_{9,2} & k_{9,3} & k_{9,4} & k_{9,5} & k_{9,6} & k_{9,7} & k_{9,8} & k_{9,9} & k_{9,10} \\ k_{10,1} & k_{10,2} & k_{10,3} & k_{10,4} & k_{10,5} & k_{10,6} & k_{10,7} & k_{10,8} & k_{10,9} & k_{10,10} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \\ f_4 \\ m_4 \\ f_5 \\ m_5 \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix} \quad (36)$$

De acordo com Scremin (2017), quando um nó apresenta restrição em um determinado GDL, como é o caso do primeiro nó da viga engastada, sua equação já está solucionada e pode ser retirada do sistema linear a ser resolvido. Como o deslocamento é nulo, sua coluna será inteiramente zerada e, por consequência, elimina-se também a linha relativa à esse GDL na matriz. Portanto, para a asa modelada como elemento de viga engastada do exemplo anterior, a aplicação das condições de contorno retorna a Equação 37 para a flexão e a Equação 38 para a torção, que elucidam as reduções dos sistemas lineares considerando as restrições nos GDLs do primeiro nó.

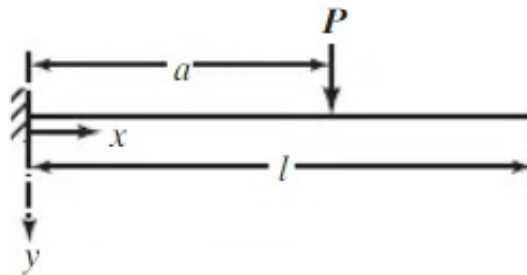
$$\begin{pmatrix} v_2 \\ r_2 \\ v_3 \\ r_3 \\ v_4 \\ r_4 \\ v_5 \\ r_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} & k_{3,7} & k_{3,8} & k_{3,9} & k_{3,10} \\ k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} & k_{4,7} & k_{4,8} & k_{4,9} & k_{4,10} \\ k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} & k_{5,7} & k_{5,8} & k_{5,9} & k_{5,10} \\ k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} & k_{6,7} & k_{6,8} & k_{6,9} & k_{6,10} \\ 7,3 & k_{7,4} & k_{7,5} & k_{7,6} & k_{7,7} & k_{7,8} & k_{7,9} & k_{7,10} \\ k_{8,3} & k_{8,4} & k_{8,5} & k_{8,6} & k_{8,7} & k_{8,8} & k_{8,9} & k_{8,10} \\ k_{9,3} & k_{9,4} & k_{9,5} & k_{9,6} & k_{9,7} & k_{9,8} & k_{9,9} & k_{9,10} \\ k_{10,3} & k_{10,4} & k_{10,5} & k_{10,6} & k_{10,7} & k_{10,8} & k_{10,9} & k_{10,10} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \\ f_4 \\ m_4 \\ f_5 \\ m_5 \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} \\ k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} \\ k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} \\ k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

2.3.4 Soluções Analíticas

Modelos simples como o de uma viga engastada submetida à flexão e torção apresentam soluções exatas e que auxiliam na validação de um modelo estruturado a partir do FEM. De acordo com Rao (2011), o deslocamento transversal de uma viga em balanço submetida à força transversal P , como mostra a Figura 21, tem a forma da Equação 39. Além disso, conforme elucidado em Hibbeler (2010), a aplicação de um torque T resultará no ângulo de torção com a solução exata da Equação 40.

Figura 21 – Modelo de viga em balanço com força transversal aplicada



Fonte: Rao (2011)

$$y(x) = \begin{cases} \frac{Px^2}{6EI}(3a - x), & 0 \leq x \leq a \\ \frac{Pa^2}{6EI}(3x - a), & a \leq x \leq l \end{cases} \quad (39)$$

$$\theta = \frac{Tl}{GJ} \quad (40)$$

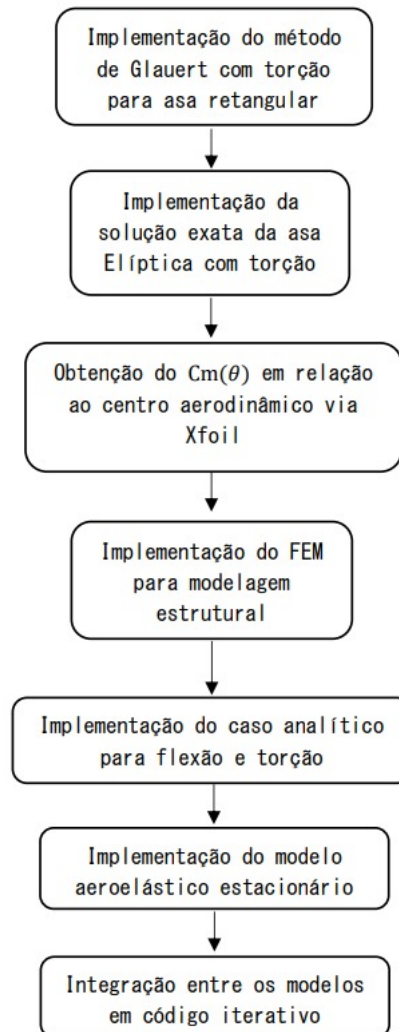
No capítulo seguinte será apresentada a metodologia de acoplamento dos modelos aerodinâmico e estrutural aqui apresentados, resultando no surgimento dos fenômenos aeroelásticos. Dessa forma, o método de Glauert será utilizado para modelar as cargas aerodinâmicas que serão inseridas dentro do modelo estrutural da asa, cujo comportamento será aproximado pelo de sua longarina principal, modelada pelo FEM de uma viga engastada na raiz. Por meio do FEM têm-se a resposta da distribuição de torção ao longo da envergadura, que modificará, portanto, o ângulo de ataque da aeronave e toda sua resposta aerodinâmica, que precisará ser novamente calculada, dando início ao mecanismo de interação mútua que descreve o modelo aeroelástico e permite quantificar seu efeito.

3 MÉTODO

Como o objetivo de estudo deste trabalho envolve o acoplamento de dois modelos relacionados ao projeto da asa, estrutural e aerodinâmico, torna-se necessário definir uma estratégia para a solução das equações dos dois modelos de forma acoplada. No caso do presente trabalho, é proposto um acoplamento que ocorrerá de forma iterativa, também conhecido como acoplamento fraco. Na Seção 3.1 será descrito o método de solução do modelo aerodinâmico; a Seção 3.2 apresenta a metodologia de solução do modelo estrutural e, por fim, na Seção 3.3 é elucidado o método iterativo para o acoplamento das soluções.

As etapas deste trabalho foram desenvolvidas conforme a Figura 22 e consistem na modelagem aerodinâmica de asa reta a partir da implementação computacional do método de Glauert, obtenção do momento de arfagem em relação ao centro aerodinâmico utilizando a geometria do aerofólio via programa Xfoil, modelagem estrutural via método dos elementos finitos para obtenção do deslocamento transversal (flecha) e ângulo de torção de um elemento de viga com 3 graus de liberdade, modelagem aeroelástica estacionária e implementação de um código de método iterativo para correlação entre os esforços estruturais e forças aerodinâmicas, permitindo a análise de divergência de asa e comparação das mudanças no comportamento aerodinâmico de uma asa flexível frente a uma asa rígida.

Figura 22 – Etapas do trabalho



Fonte: Autora (2023)

A linguagem de programação adotada na implementação de todos os códigos, apresentados no Apêndice A, foi a Matlab em razão da disponibilidade de licença oferecida pela Universidade Federal de Santa Catarina, disponibilidade de funções para solução de sistemas lineares previamente implementadas e facilidade proporcionada ao se trabalhar com matrizes e geração de gráficos.

3.1 MODELAGEM AERODINÂMICA

A partir da teoria descrita na Seção 2.2.2, o método de Glauert foi implementado computacionalmente e validado a partir da solução exata da asa elíptica com torção. Em primeiro lugar, utiliza-se a geometria da asa para calcular a matriz de influência aerodinâmica componente do sistema linear da Equação 16. Além disso, conhecendo a torção geométrica devido aos deslocamentos dos graus de liberdade da longarina, calcula-se o vetor de α pela Equação 15. A solução do sistema linear resulta nos

valores dos coeficientes A_n , que são utilizados para calcular os coeficientes e forças aerodinâmicas das Equações 17 a 21, que inclui a distribuição de sustentação ao longo da envergadura e que será utilizada pelo modelo estrutural. Vale salientar que o sistema linear foi resolvido utilizando-se a função *inv* do Matlab, que usa o método de decomposição LU, para calcular a inversa da matriz de influência aerodinâmica.

Ademais, o coeficiente de momento de arfagem foi obtido com o programa XFOIL, que é um programa interativo para o projeto e análise de aerofólios. Conforme apresentado na Seção 2.2.3, para a maioria dos aerofólios, considerando-se ângulos de ataque na faixa linear de C_l , o C_m não tem variação significativa. Na sequência, o momento torçor em relação ao centro aerodinâmico foi calculado por meio da Equação 2 .

3.2 MODELAGEM ESTRUTURAL

O comportamento estrutural da asa reta foi aproximado ao de sua longarina principal e modelado como o de uma viga retilínea em balanço. Além disso, foram admitidos os GDLs de flexão, giro e torção. Dessa forma, em concordância com a Seção 2.3, que apresenta a teoria do Método dos Elementos Finitos para um elemento de viga, foi implementado um código computacional. O código em questão, a partir das propriedades geométricas e estruturais como E, I, G e J da longarina, calcula as matrizes locais de rigidez flexional e torcional conforme, respectivamente, as Equações 29 e 32.

Em seguida, são estruturadas as matrizes globais por meio do método sistemático que garante a relação de conectividade apresentada na Seção 2.3.2. Além disso, a partir da distribuição de sustentação do longo da semi-envergadura e do momento torçor total em relação ao eixo elástico da Equação 3, são arquitetados os vetores de forças e momentos externos conforme as Equações 31 e 34.

Na sequência, em conformidade com a Seção 2.3.3, o código aplica as condições de contorno diretamente na solução dos problemas de flexão e torção, a partir da retirada das linhas e colunas relativas ao primeiro nó do modelo discretizado. Por fim, os sistemas lineares são resolvidos utilizando a função *mldivide* do Matlab, que gera a solução fazendo uso do método de eliminação de Gauss. Dessa forma, é obtida a distribuição do ângulo de torção ao longo da longarina, que modifica o ângulo de ataque geométrico da aeronave e, conseqüentemente, a força de sustentação.

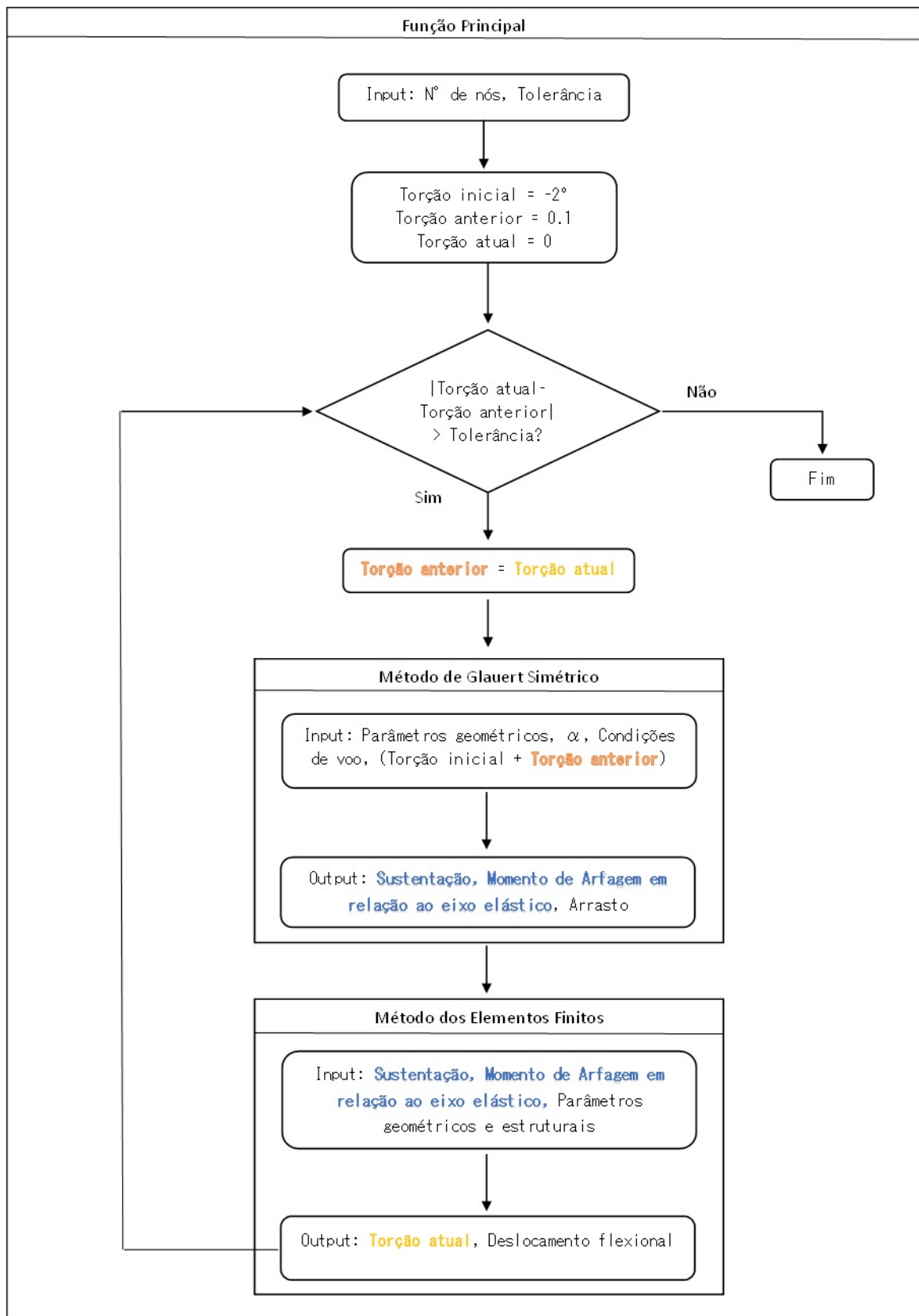
O código computacional desenvolvido para o modelo estrutural, que utiliza o método dos elementos finitos, foi validado a partir das soluções exatas para uma viga retilínea considerando os problemas de flexão e torção, como apresentado na Seção 2.3.4.

3.3 MODELAGEM AEROELÁSTICA ESTACIONÁRIA

De acordo com Wright e Cooper (2007) o passo entre a aplicação da carga aerodinâmica na asa, alterando sua torção e, em seguida, a determinação da nova carga aerodinâmica, ilustra a interação fundamental entre uma estrutura flexível e forças aerodinâmicas, que dá origem aos fenômenos aeroelásticos. Dessa maneira, o acoplamento entre aerodinâmica e estrutura pode ser feito em passo único, denominado de acoplamento forte, ou através de processo iterativo, conhecido como acoplamento fraco.

A metodologia mais comum e tradicional para cálculos aeroelásticos estáticos é uma abordagem de etapa única, entretanto, o passo único só é viável se houver uma relação matemática direta entre as forças aerodinâmicas e as deflexões. Cálculos aeroelásticos estáticos considerando a asa tridimensional, envolvendo o acoplamento de métodos aerodinâmicos complexos com métodos de elementos finitos, requerem o uso de uma abordagem fracamente acoplada. Portanto, o processo iterativo descrito no fluxograma da Figura 23 é utilizado para modelar o problema aeroelástico estacionário investigado por este trabalho.

Figura 23 – Fluxograma representativo do processo iterativo que modela o problema aeroelástico do trabalho



Fonte: Autora (2023)

O fluxograma mostra que o acoplamento se dá pelas Equações 31 e 34, que relacionam, respectivamente, a força aerodinâmica de sustentação e o momento torçor total calculado em relação ao eixo elástico da asa com cálculo dos esforços estruturais e pela Equação 16 que define o modelo aerodinâmico como dependente do resultado da torção estrutural. Além disso, busca-se a condição de equilíbrio da estrutura que, no método proposto, é obtida quando a torção estrutural utilizada para calcular as cargas aerodinâmicas é igual à torção calculada pelo modelo estrutural utilizando-se tal resultado aerodinâmico. Em outras palavras, o erro utilizado dentro do processo de iteração é dado pela máxima diferença absoluta entre o vetor de torção calculado no passo atual e o valor do vetor de torção obtido no passo anterior, como mostra a Equação 41. Por fim, o critério de convergência é atingido quando o erro calculado é menor que a tolerância especificada de 1.10^{-6} . Cabe ainda enunciar que não foi adotado nenhum tipo de relaxação na atualização da nova torção.

$$Erro = \max |[\theta_{atual}] - [\theta_{anterior}]| \quad (41)$$

4 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com o código computacional desenvolvido neste trabalho a partir da metodologia apresentada na Seção 3. Na Seção 4.1 é apresentada a validação dos modelos aerodinâmico e estrutural implementados e, por fim, a Seção 4.2 mostra os estudos de caso em que a ferramenta foi aplicada: análise de divergência de asa para comparar o modelo computacional desenvolvido a um modelo teórico proposto em Wright e Cooper (2007), influência da flexibilidade estrutural no desempenho aerodinâmico e divergência de asa da aeronave Piper PA28-161 Warrior II, respectivamente elucidados nas Seções 4.2.1, 4.2.2.1 e 4.2.2.2.

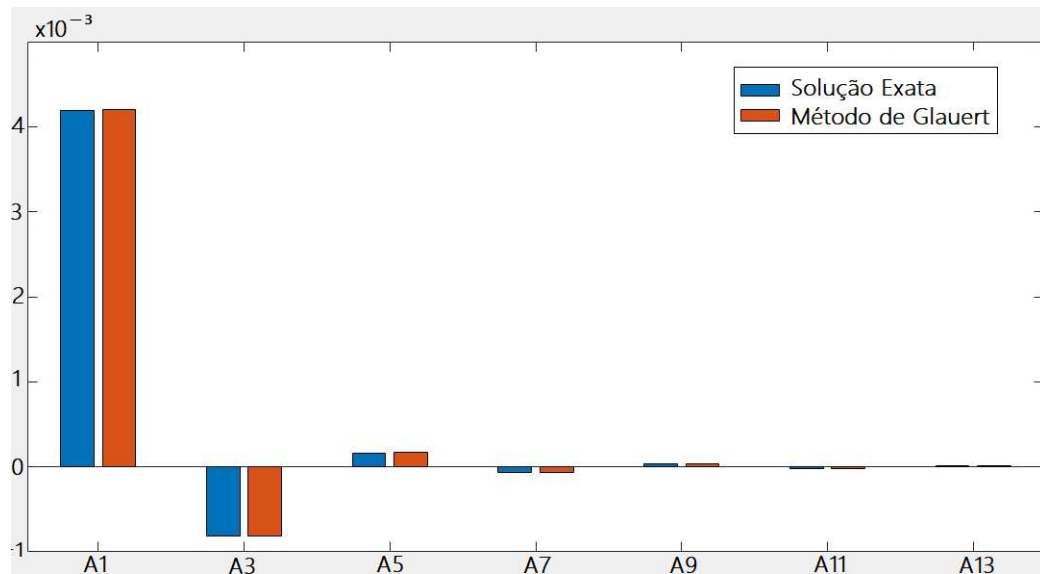
4.1 VALIDAÇÃO

A fim de validar o código computacional desenvolvido para modelar o comportamento aerodinâmico e estrutural da asa, através do Matlab foram implementadas rotinas de comparação dos modelos propostos frente a casos de menor complexidade e que apresentam resposta analítica.

4.1.1 Modelo aerodinâmico: método de Glauert x asa elíptica

O modelo aerodinâmico implementado, que é construído a partir da teoria da linha de sustentação de Prandtl e do método de Glauert, foi comparado com a solução exata da asa elíptica com torção considerando um ângulo de ataque geométrico inicial de -2° e 30 pontos discretizados ao longo da envergadura. Como mostra a Figura 24, os coeficientes A_n obtidos com ambos os métodos têm o comportamento similar e em concordância com a teoria, uma vez que a maior parcela está no coeficiente A_1 e, a partir dele, os demais coeficientes decrescem significativamente, além de só serem diferentes de zero os de índice ímpar. Além disso, os erros absolutos estão na ordem de 10^{-6} . Dado que os coeficientes A_n são as principais variáveis para o cálculo dos esforços aerodinâmicos, os resultados previstos com a implementação computacional do método de Glauert são considerados suficientemente próximos do resultado teórico.

Figura 24 – Comparação entre os coeficientes aerodinâmicos A_n obtidos via método de Glauert e solução exata da asa elíptica

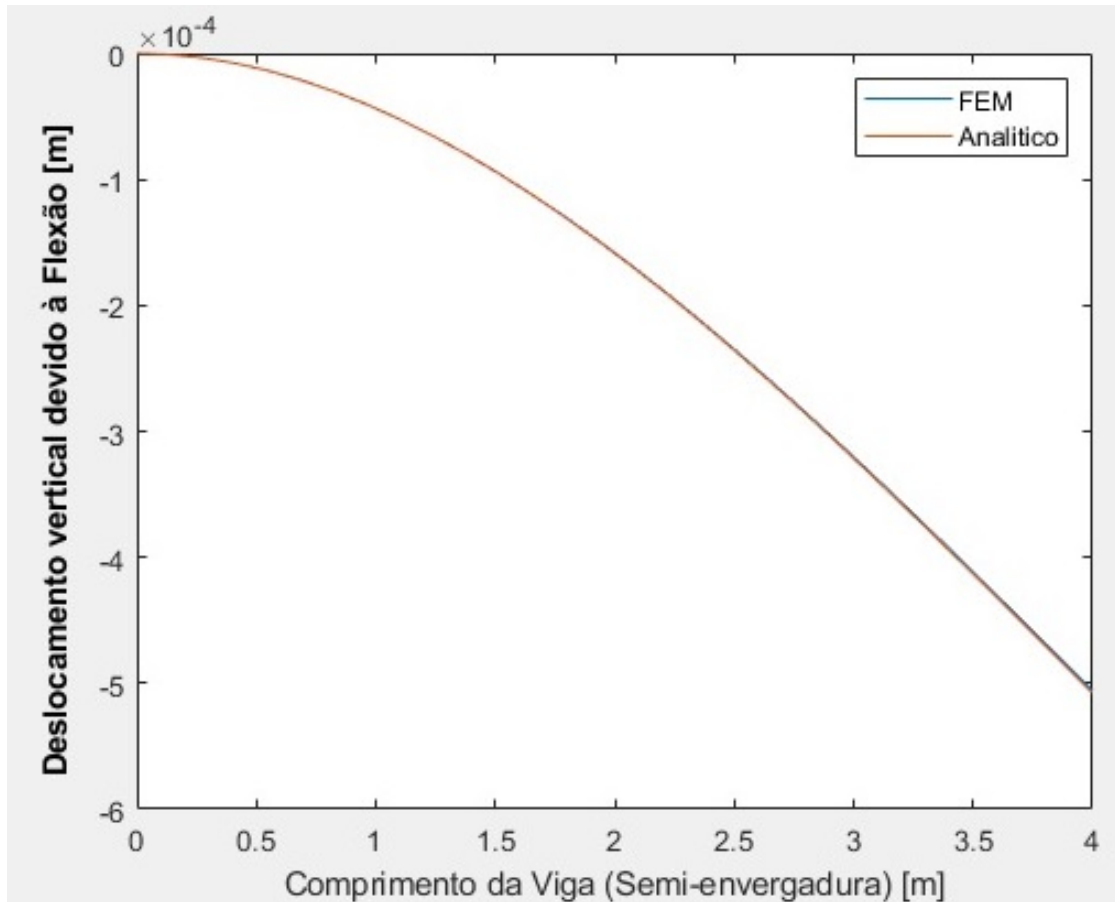


Fonte: Autora (2023)

4.1.2 Modelo estrutural: FEM x Analítico

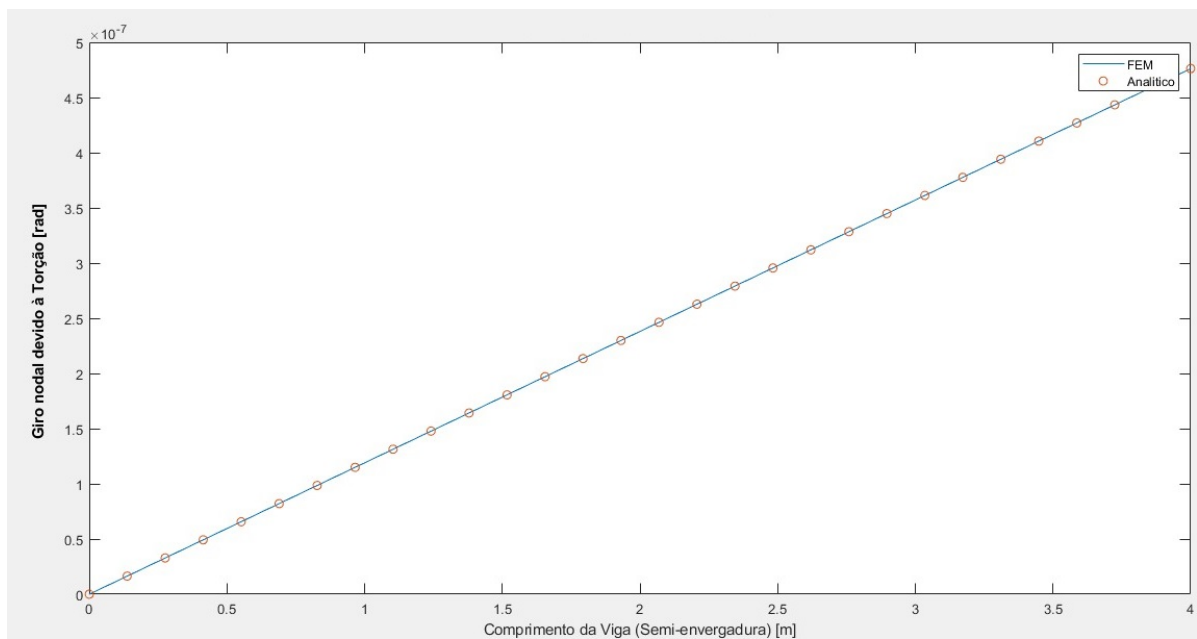
O modelo estrutural da asa implementado, cujo comportamento é aproximado pelo de sua longarina principal e construído a partir do método dos elementos finitos para uma viga em balanço, foi comparado com as soluções analíticas para flexão e torção, respectivamente representadas pelas Equações 39 e 40. Para a validação do FEM da viga em flexão, a força de sustentação foi modelada como uma carga concentrada na ponta da estrutura e o deslocamento vertical resultante é mostrado na Figura 25. Já para a validação do FEM da viga em torção, considerou-se uma distribuição de momento torçor linear ao longo de seu comprimento e a distribuição do ângulo de torção resultante pode ser visto na Figura 26. O erro absoluto máximo para a análise de torção foi da ordem de 10^{-5} e, para flexão, 10^{-4} . Além disso, analisando-se as referidas figuras, dado que o ângulo de torção é a principal resposta gerada pelo modelo estrutural e, além disso, o deslocamento transversal é variável importante para a análise dos esforços que atuam sobre a estrutura, os resultados oriundos da implementação do FEM estão muito próximos dos resultados teóricos correspondentes.

Figura 25 – Comparação entre o deslocamento vertical resultante ao longo da viga obtidos via FEM implementado e solução analítica da Equação 39



Fonte: Autora (2023)

Figura 26 – Comparação entre o ângulo de torção resultante ao longo da viga obtido via FEM implementado e solução analítica da Equação 40



Fonte: Autora (2023)

4.2 ESTUDOS DE CASO

Com o intuito de demonstrar a aplicabilidade da ferramenta computacional desenvolvida e a importância da análise aeroelástica estática no projeto de aeronaves, foram realizados estudos de caso acerca de 2 temáticas: análise de divergência de asa e investigação da influência da flexibilidade estrutural no desempenho aerodinâmico de uma aeronave.

4.2.1 Divergência de asa: teórica x computacional

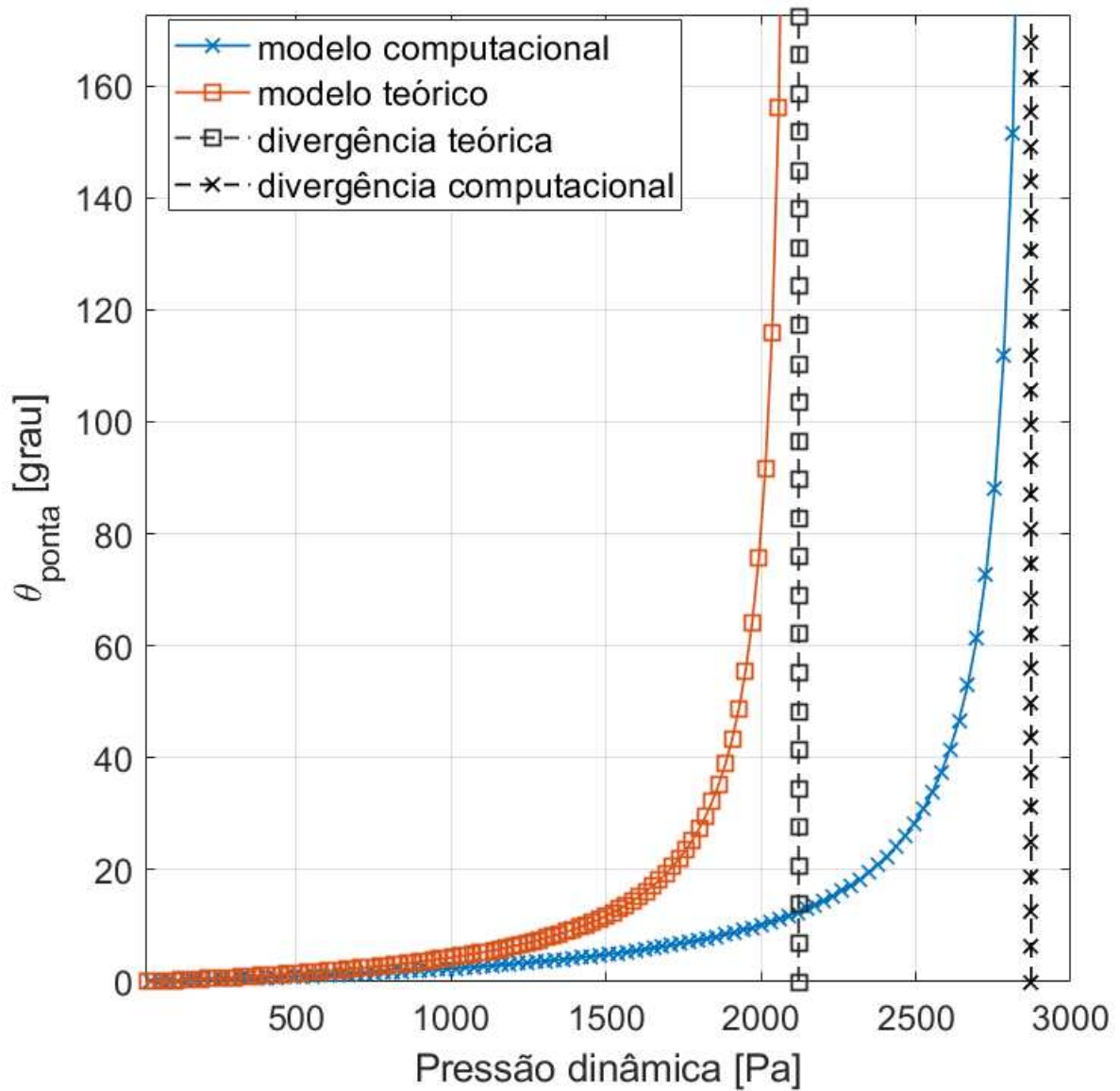
Em primeira instância, o código computacional desenvolvido neste trabalho foi utilizado para avaliar o fenômeno de divergência de asa e comparar seu resultado frente ao modelo teórico proposto por Wright e Cooper (2007) e apresentado na Seção 2.1.2. Buscando maior semelhança entre o modelo teórico e o computacional na análise da divergência, a asa estudada é retangular, tem longarina de seção I constante e, assim como o modelo teórico, segue as propriedades da Tabela 3. Além disso, o momento de arfagem não é considerado na análise.

Na Figura 27 é apresentada a comparação da torção na ponta da asa em função da pressão dinâmica para os casos teórico e computacional. Como se pode observar, ainda que o formato das curvas seja semelhante, a previsão da torção na ponta é superestimada pelo modelo teórico em comparação ao modelo computacional e a diferença aumenta com a pressão dinâmica. A 94% da pressão dinâmica de divergência prevista pela teoria, há uma diferença de cerca de 100% para a torção observada pelo modelo computacional. Além disso, sua pressão dinâmica de divergência é atingida em 2123 Pa, o que representa uma redução de aproximadamente 26% em relação à pressão limite do modelo computacional.

Tais resultados podem ser entendidos com o auxílio da Figura 28, que mostra a distribuição da torção θ ao longo da semi envergadura para ambos os modelos na pressão dinâmica de 1000 Pa. Analisando-a, vê-se que o modelo de torção proposto pela bibliografia, que considera uma distribuição linear, apresenta θ na ponta da asa cerca de duas vezes maior. Vale lembrar que o modelo de sustentação de Glauert reduz a sustentação próxima às pontas das asas, assim reduzindo também o torque dessa força e, por consequência, o esforço estrutural quando comparado ao modelo teórico, no qual a sustentação na ponta não é reduzida. Por isso, na curva em azul da Figura 28 a ponta da asa tem uma torção significativamente menor e mais constante, o que pode ser um dos fatores para que a condição de divergência seja alcançada em uma pressão dinâmica maior.

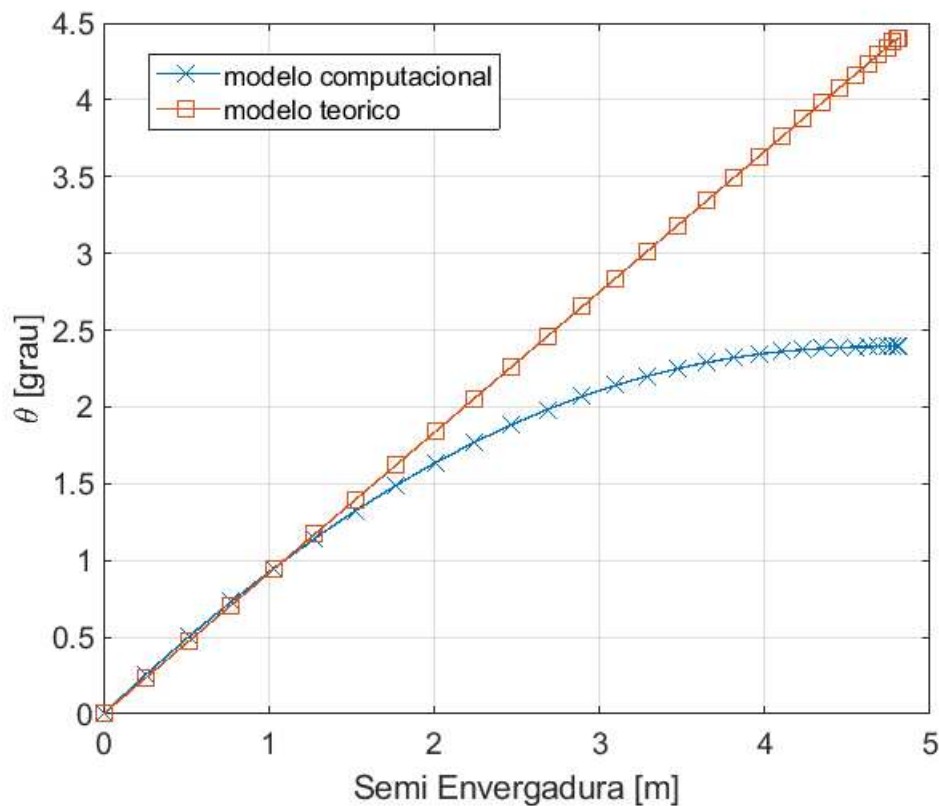
Tabela 3 – Propriedades dos modelos teórico e computacional

Propriedades	
Forma da asa	Retangular
b	9,62 m
Aerofólio	NACA 0012
c	1,60 m
a_w	2π
e	0,15
G	$2,6316e+10$ Pa
J	$5,0e-7$ m ⁴
θ_0	3,25 deg

Figura 27 – θ na ponta da asa em função da pressão dinâmica para os casos teórico e computacional

Fonte: Autora (2023)

Figura 28 – Distribuição de θ ao longo da semi envergadura para os casos teórico e computacional quando $Q = 1000Pa$



Fonte: Autora (2023)

4.2.2 Aeronave Piper PA28-161 Warrior II

4.2.2.1 Desempenho aerodinâmico da aeronave

Como o fenômeno aeroelástico estático modifica a geometria da asa, o desempenho aerodinâmico da aeronave será afetado. Para analisar tal influência, a aerodinâmica da asa rígida à torção é comparada com a da asa flexível à torção e a análise será aplicada na geometria da asa da aeronave Piper PA28-161 Warrior II, mostrada na Figura 29. Essa asa tem estrutura tipo cantilever, de asa baixa e trapezoidal, com longarina retilínea. Suas propriedades geométricas e condições de operação em voo, extraídas do manual de operação da aeronave, disponibilizado em Corporation (1982), são listadas na Tabela 4. É importante salientar que os casos chamados de “rígidos” representam uma análise de asa infinitamente rígida na torção, mas flexível na flexão. Em oposição, os casos denominados “flexíveis” significam uma análise de asa flexível tanto em torção quanto em flexão.

Tabela 4 – Propriedades geométricas e condições de operação em voo da aeronave de referência

PIPER PA28-161 WARRIOR II	
Forma da Asa	Trapezoidal
Área da Asa	15,8 m ²
Envergadura da Asa	9,62 m
Aerofólio	NACA 65-415
Corda na raiz	1,60 m
Corda na ponta	1,07 m
Velocidade máxima	296 km/h
Velocidade de cruzeiro	233 km/h
Peso máximo de decolagem	1055 kg
Peso vazio	631 kg
Teto de serviço	3962,4 m

Figura 29 – Aeronave PIPER PA28-161 WARRIOR II



Fonte: Corporation (1982)

Quanto às propriedades estruturais e geométricas da longarina da asa, bem como seu material, são tomados como referência os valores apresentados em Girenavar et al. (2017), que também considera a mesma aeronave PIPER PA28-161 WARRIOR II como modelo. Em suma, é considerada uma longarina em seção I de altura e largura variáveis, com espessuras de alma e flange constantes, além de também ser modelada como uma viga em balanço ao longo do procedimento de análise.

Para os testes das asas flexível e rígida foram selecionadas 4 condições de voo, Tabela 5, variando-se o peso da aeronave e a pressão dinâmica, de acordo com

Tabela 5 – Condições de voo avaliadas

	W [kg]	Q [Pa]	h [m]	T [°C]	U_{∞} [km/h]
Condição 1	771,10 kg	1582,2 Pa	0	15	207,424
Condição 2	1106,76 kg	1582,2 Pa	609,6	30	218,536
Condição 3	771,10 kg	2083,4 Pa	3048	0	214,832
Condição 4	1106,76 kg	2083,4 Pa	1219,2	15	225,944

Tabela 6 – Ângulos de ataque que igualam as sustentações totais entre os casos rígido e flexível para as 4 condições selecionadas

	α_{rig} [deg]	α_{flex} [deg]
Condição 1	1,176	1,437
Condição 2	3,103	3,134
Condição 3	0,111	0,629
Condição 4	1,574	1,859

Tabela 7 – N° de iterações necessárias para convergência em cada uma das condições

	N° de iterações
Condição 1	6
Condição 2	5
Condição 3	8
Condição 4	7

os limites operacionais definidos no manual de operação da aeronave, disponibilizado em Corporation (1982).

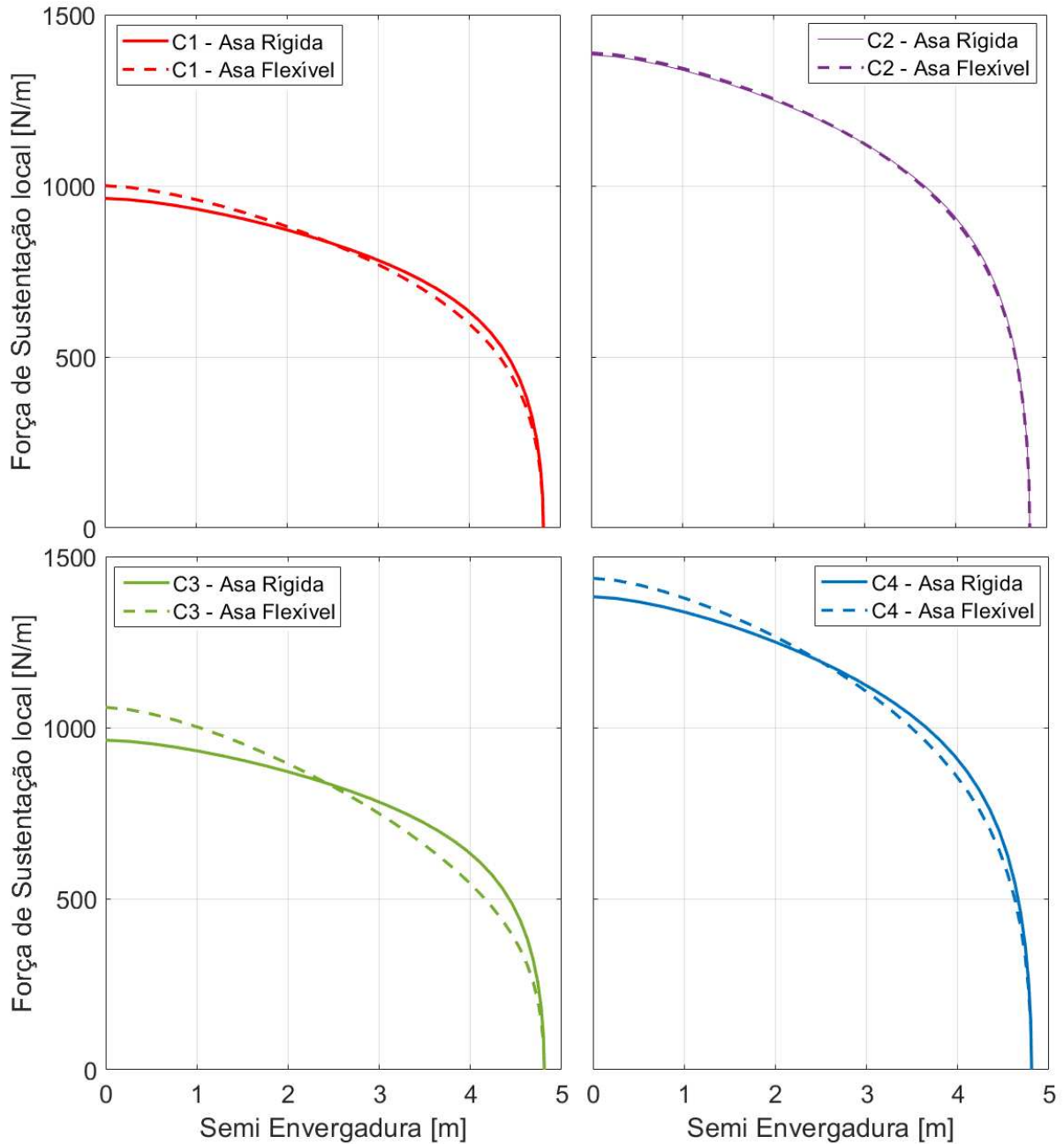
Para quantificar o efeito do modelo aeroelástico na análise do desempenho aerodinâmico da aeronave, o resultado dos casos flexível e rígido à torção serão feitos para uma mesma força de sustentação desenvolvida pelas asas. Para isso, nos dois casos, o ângulo de ataque é ajustado de forma que as asas tenham sustentação definida pelos casos da Tabela 5. Como a torção da estrutura modifica a distribuição de sustentação em comparação ao caso rígido, esses ângulos serão diferentes. Os ângulos de ataque encontrados estão mostrados na Tabela 6.

A Tabela 7 apresenta o número total de iterações necessárias para a convergência de cada uma das 4 condições analisadas. Observa-se que, em todos os casos, a convergência é rapidamente atingida, ainda que em números diferentes de iterações. Dessa maneira, o método se mostrou com baixo custo computacional, tornando-o adequado como ferramenta de projeto conceitual para aeronaves.

Na Figura 30 são apresentadas as curvas de distribuição de sustentação ao longo da semi-envergadura para os 4 casos testados, tanto da análise da estrutura rígida à torção quanto da flexível. Analisando este gráfico, nota-se que o caso flexível concentra maior sustentação na raiz e menor na ponta da asa, se comparado com o

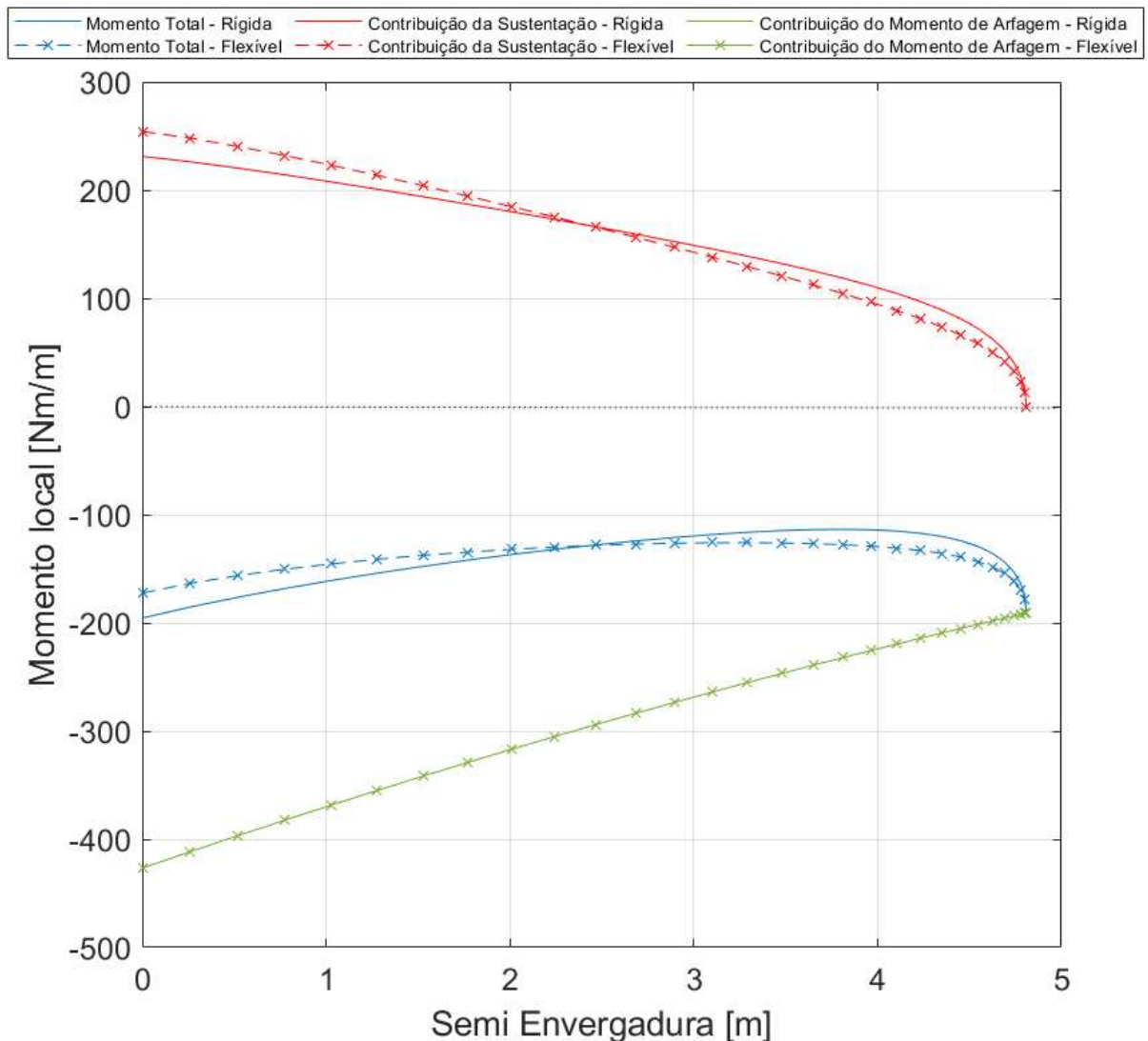
caso rígido na mesma condição de teste. Esse fato pode ser explicado observando-se a Figura 31, por exemplo, onde é evidente que o momento de arfagem do aerofólio, que tem sinal negativo, é mais intenso do que o torque gerado pela força de sustentação e, assim, a asa torce no sentido de reduzir o ângulo de ataque da ponta da asa. Por consequência, o caso flexível tem a sustentação mais concentrada na raiz.

Figura 30 – Distribuição de sustentação ao longo da semi-envergadura da asa para as 4 condições testadas



Fonte: Autora (2023)

Figura 31 – Condição 3 - Distribuição de momento torçor total em relação ao centro elástico ao longo da semi envergadura

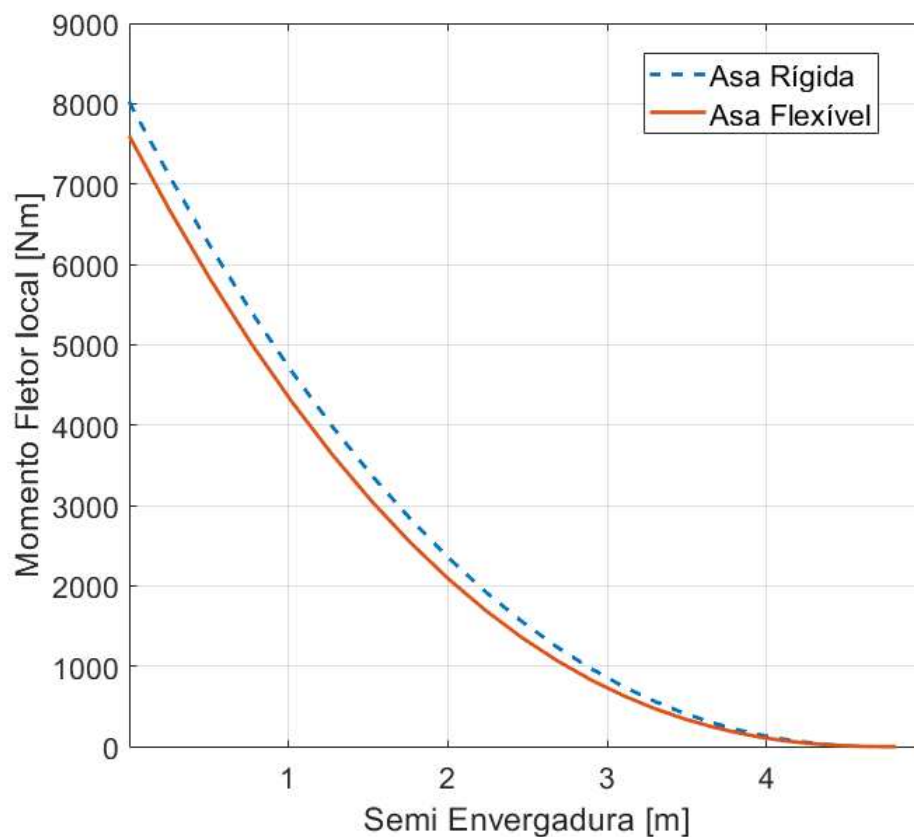


Na Figura 32 está apresentado o cálculo do momento fletor na asa para a condição 3, tanto para a asa rígida à torção quanto para a flexível. Nota-se que, no caso flexível, o momento fletor é levemente menor do que no caso rígido, apresentando uma redução máxima de 5,3% na raiz da asa. Esse resultado está em concordância com a diferença na distribuição da sustentação apresentada na Figura 30. Tal observação vale para todas as condições, porém, com menor intensidade.

Conseqüentemente, observando os resultados da análise da flecha da asa para todas as condições, Figura 33, nota-se que a torção estrutural acabou por reduzir a flecha total, sendo de 21,5% no caso com maior redução. Em contrapartida, a Condição 2 apresenta maior flecha para o modelo flexível e mais próxima ao modelo rígido, pois essa é a condição que apresenta menor torção da estrutura, como pode ser visto comparando-se a Figura 34, que representa o ângulo de torção final da longarina,

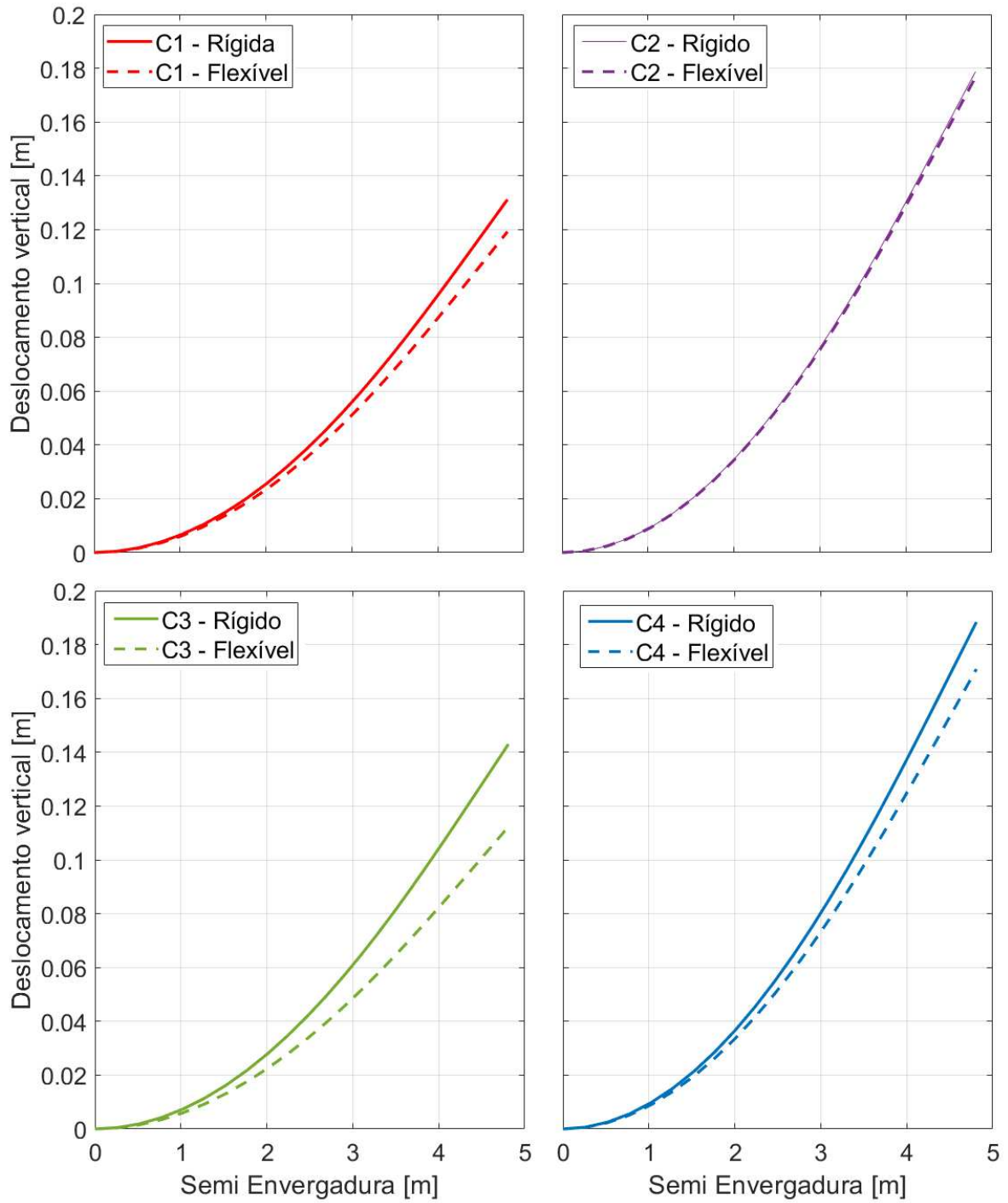
com a Figura 33. Essa verificação também permite atestar que, como esperado, quanto maior a torção sofrida pela asa, maior a diferença entre o deslocamento vertical resultante do caso flexível quando comparado ao rígido à torção. Isto é, se considerarmos a condição flexível da aeronave durante o projeto conceitual da aeronave, para essa geometria de asa, existe um potencial de redução de peso da asa, pois, para tal modelo, os esforços previstos com o modelo aeroelástico são menores do que o previsto com o modelo rígido.

Figura 32 – Distribuição do momento fletor ao longo da semi-envergadura da asa para a condição 3



Fonte: Autora (2023)

Figura 33 – Distribuição do deslocamento vertical ao longo da semi-envergadura da asa para as 4 condições testadas

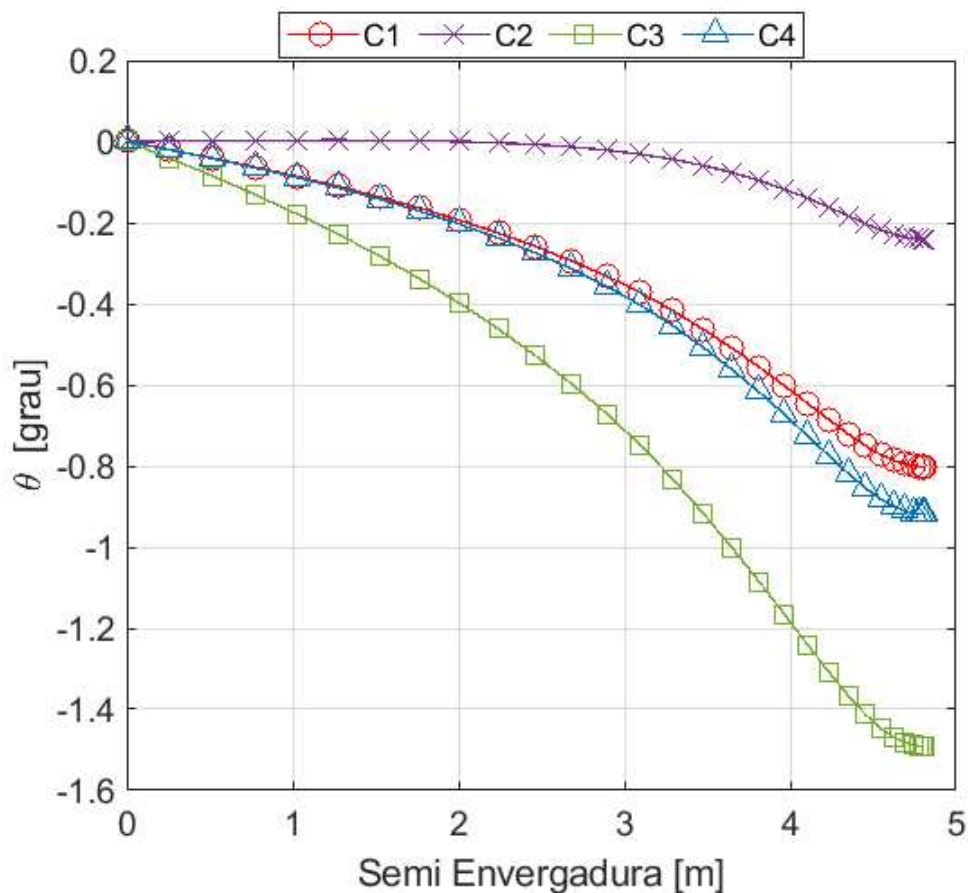


Fonte: Autora (2023)

Tabela 8 – Arrasto induzido total gerado pela asa para cada uma das 4 condições testadas

	Rígida [N]	Flexível [N]	Redução [%]
Condição 1	127,7763	125,9780	1,41
Condição 2	263,2303	262,2427	0,38
Condição 3	97,0332	95,1529	1,94
Condição 4	199,8968	196,9454	1,48

Figura 34 – Distribuição do ângulo de torção geométrica ao longo da semi-envergadura da asa para as 4 condições testadas



Fonte: Autora (2023)

O arrasto induzido total gerado pela asa, para cada uma das 4 configurações testadas, é apresentado na Tabela 8. A partir de sua análise, é possível observar que em todos os casos testados houve redução do arrasto induzido total previsto pelo modelo aeroelástico quando comparado à asa rígida. Logo, nota-se novamente que o uso do modelo aeroelástico, durante a fase de projeto conceitual, tem o potencial de gerar resultados de impacto no desempenho da aeronave que vão além do peso da estrutura.

Vale ainda explicitar que a redução do arrasto da aeronave tem relação direta com o consumo de combustível que, no caso estudado por este trabalho, reduz o custo

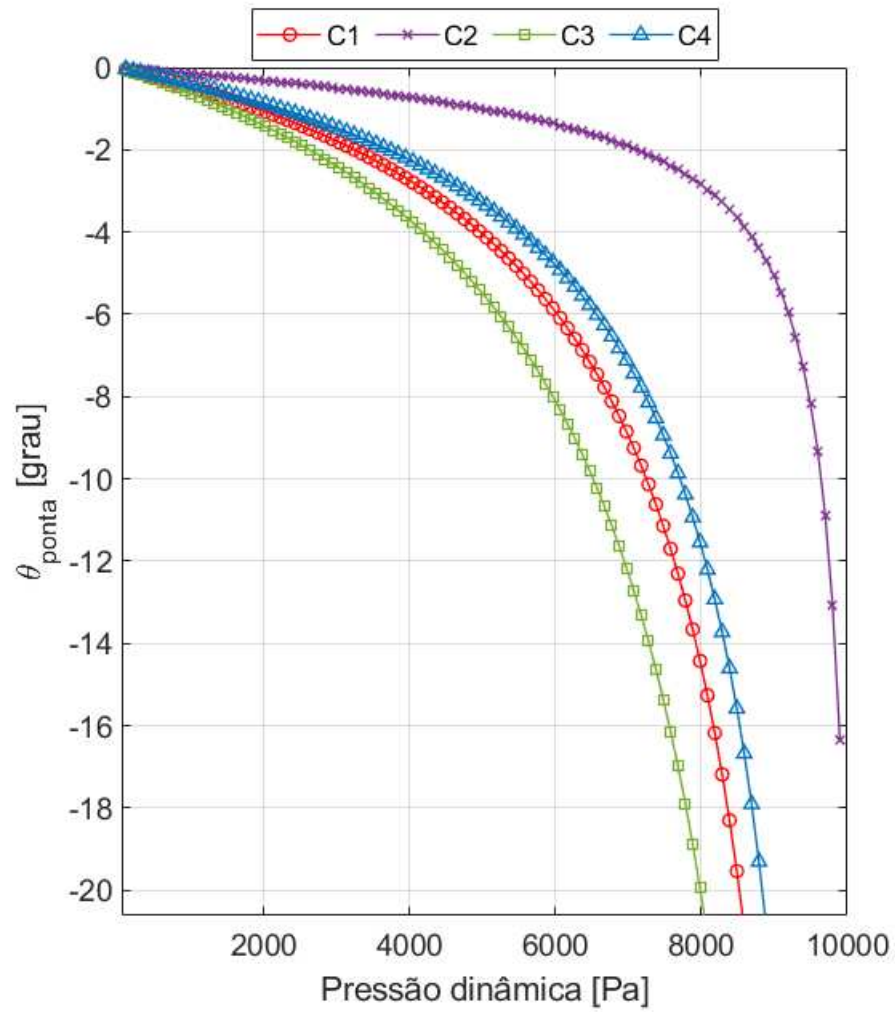
de operação. Já a possível redução do peso estrutural indicada através da previsão de um esforço estrutural menor afeta diretamente o faturamento quando a aeronave é utilizada comercialmente. Logo, a utilização do modelo aeroelástico tem efeito duplo na previsão da lucratibilidade da aeronave.

O resultado obtido da comparação do modelo rígido à torção contra o modelo flexível mostra que as cargas estruturais estimadas pelo modelo rígido são superestimadas, levando a maiores flechas e, por consequência, maior dimensionamento da estrutura. Já o modelo flexível mostrou que, para várias condições, as cargas estruturais são menores, visto que a flexibilidade na torção ajudou a reduzir as cargas de flexão. Como a flexão da asa resulta em tensões estruturais maiores do que a torção da mesma, o projeto estrutural considerando o modelo aeroelástico permite mais margem para buscar otimizar o projeto.

4.2.2.2 Análise de divergência de asa

Por fim, foi feita uma análise de divergência de asa do Warrior II para os 4 casos já citados. Como mostra a Figura 35, onde são mostradas as curvas de θ na ponta da asa em função da pressão dinâmica, a pressão dinâmica de divergência dos casos 1, 3 e 4 é atingida antes dos 9 kPa. Por outro lado, o caso 2, que é o que apresenta menor distribuição de torção ao longo da semi envergadura, segundo a Figura 34, necessitará de uma pressão dinâmica ainda maior para divergir. Cabe ainda observar que o ângulo de torção θ é negativo porque o momento de arfagem do aerofólio é negativo e tem maior magnitude em relação ao momento torçor positivo gerado pela sustentação.

Figura 35 – Análise de divergência da asa do Warrior - θ na ponta da asa em função da pressão dinâmica para as 4 condições



Fonte: Autora (2023)

5 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi proposto um modelo aeroelástico estático 3D para uma asa reta utilizando o método de Glauert e FEM com acoplamento fraco na torção e o posterior cálculo da flexão da asa sem acoplar os problemas de flexão e torção. O método foi implementado em Matlab e validado utilizando a solução da asa elíptica com torção para o modelo aerodinâmico e uma viga uniforme para a torção e flecha.

O resultado da validação do método de Glauert apresentou, para os 7 primeiros coeficientes, erros absolutos na ordem de 10^{-6} . Já a validação do método dos elementos finitos implementado resultou, para a análise de flexão, um erro absoluto máximo da ordem de 10^{-4} e, para torção, 10^{-5} . Nesse sentido, ambas as validações mostraram consistência e significativa proximidade com seus respectivos valores teóricos.

O estudo do problema aeroelástico estático foi feito comparando a previsão da divergência pelo modelo teórico proposto em Wright e Cooper (2007) com o modelo computacional desenvolvido. O resultado mostrou que os dois modelos tem uma diferença de aproximadamente 26% na previsão da pressão dinâmica de divergência. O resultado da torção na ponta da asa, no modelo computacional, é significativamente menor do que no modelo teórico, resultando em um esforço estrutural menor do que na previsão teórica, visto que, no método de Glauert, a sustentação tende a diminuir na ponta e, no modelo teórico, a torção estrutural é linear e o efeito da ponta da asa não é considerado.

Como parte do estudo, foi analisado como a deformação da estrutura modificou o desempenho aerodinâmico da aeronave Piper PA28-161 Warrior II para 4 condições de voo e peso, escolhidas utilizando-se o manual de voo da aeronave. Os resultados mostram que o modelo aeroelástico resultou em uma distribuição de sustentação que concentra a força na raiz da asa se comparado com asa sem deformação. O arrasto induzido dessa sustentação resultou em redução de 1,94% para o melhor caso e 0,38% para o caso com menor melhora. A flexão da asa apresentou redução da flecha total em 21,5% no caso com maior redução.

O número de iterações necessárias para o cálculo do modelo aeroelástico, nas 4 condições de voo, foram entre 5 a 7, representando um baixo custo computacional, considerando as condições analisadas. O tempo de CPU não foi contabilizado, porém o tempo de processamento não representou um custo significativo.

Conclui-se que o modelo aeroelástico apresenta um custo computacional considerado baixo, tornando-o interessante para o uso no contexto de projeto conceitual. O uso do modelo para previsão da divergência de asa concorda em partes com o modelo teórico e, portanto, um trabalho de validação desse resultado precisa

ser realizado com dados experimentais. Além disso, também é possível atestar que os efeitos aeroelásticos estáticos podem ser considerados no projeto da asa, pois observou-se variações dos resultados em comparação à abordagem sem o acoplamento aeroelástico e tais resultados apresentam margens para otimização do projeto.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

A experiência obtida neste trabalho motiva as melhorias sugeridas para trabalhos futuros que estão listadas abaixo:

- Implementação e análise aeroelástica estática de asas com enflechamento;
- Implementação de método mais robusto para obtenção das cargas aerodinâmicas, como Método dos Painéis (Hess e Smith, 1966) e o Método de Vortex-Lattice (Miranda, Elliott e Baker, 1977);
- Implementação do cálculo de arrasto parasita considerando α_{eff} e dados do arrasto de perfil do aerofólio;
- Quantificar tensões internas e deformações da estrutura para análise de critérios de falha;
- Utilizar dados experimentais para validação da previsão de divergência.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J. D. **Fundamentals of aerodynamics**. 3. ed. New York, NY: McGraw-Hill, 2001. (McGraw-Hill International Editions: Mechanical Engineering Series).
- BIANCOLINI, M. E. et al. Static aeroelastic analysis of an aircraft wind-tunnel model by means of modal rbf mesh updating. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 29, n. 6, p. 04016061, 2016.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H. **Principles of aeroelasticity**. New York: Dover Publications, 1975.
- COLLAR, A. The first fifty years of aeroelasticity. **Aerospace**, v. 5, n. 545, p. 20, jan. 1978.
- CORPORATION, P. A. **Piper PA-28-161 Pilot Operating Handbook**. [S.l.: s.n.], 1982.
- FAA. **ECFR: 14 CFR part 25 – airworthiness standards: Transport category airplanes (FAR part 25)**. 2017. Disponível em: <https://www.ecfr.gov/current/title-14/chapter-I/subchapter-C/part-25/subpart-D/subject-group-ECFRff93ea3edba9270/section-25.629>.
- GIBBS, Y. **NASA Armstrong Fact Sheet: X-29 Advanced Technology Demonstrator Aircraft**. 2005. Disponível em: <https://www.nasa.gov/centers/armstrong/news/FactSheets/FS-008-DFRC.html>.
- GIRENNAVAR, M. et al. Design, analysis and testing of wing spar for optimum weight. In: . [S.l.: s.n.], 2017.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. [S.l.: s.n.], 2010. ISBN 9788576053736.
- HODGES, D. H.; PIERCE, G. A. **Introduction to structural dynamics and aeroelasticity**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2011.
- HOUGHTON, E. L. et al. Wing theory. In: **Aerodynamics for Engineering Students**. [S.l.]: Elsevier, 2017. p. 449–523.
- CAIXETA JUNIOR, P. R. **Otimização multidisciplinar em projeto de asas flexíveis**. 2006.
- CAIXETA JUNIOR, P. R. **Otimização multidisciplinar em projeto de asas flexíveis utilizando metamodelos**. Tese (Doutorado) — Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA), 2015.
- KATZ, J.; PLOTKIN, A. **Cambridge aerospace series: Low-speed aerodynamics series number 13**. 2. ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2001.
- KIM, N. H.; SANKAR, B. V.; KUMAR, A. V. **Introduction to finite element analysis and design**. 2. ed. [S.l.]: Standards Information Network, 2018. ISBN 9781119078739.
- LANCHESTER, F. Torsional vibrations of the tail of an aeroplane. **Aeronaut. Research Com. R & M**, v. 276, n. 474, p. 20, jul. 1916.

PRANDTL, L.; OSWATITSCH, K.; WIEGHARDT, K. **Führer durch die Strömungslehre**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2013.

RAO, S. S. Analysis of trusses, beams, and frames. In: **The Finite Element Method in Engineering**. [S.l.]: Elsevier, 2011. p. 311–354.

RODRIGUES, L. E. M. **Fundamentos da engenharia aeronautica**. [S.l.: s.n.], 2013. ISBN 9788522112043.

SAVASSI, W. **Introdução ao método dos elementos finitos: em análise linear de estruturas**. [S.l.]: EESC, 1996.

SCREMIN, A. **Introdução ao MEF**. 2017. Disponível em: <http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM266/Apostila/>.

SMITH, I. M.; GRIFFITHS, D. V.; MARGETTS, L. **Programming the finite element method: Smith/programming the finite element method**. 5. ed. Nashville, TN: John Wiley Sons, 2013. ISBN 9781119973348.

SOUSA, B. S. de. **Projeto de perfis aerodinâmicos utilizando técnicas de otimização mono e multiobjetivos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Jul 2008.

WRIGHT, J. R.; COOPER, J. E. **Introduction to aircraft aeroelasticity and loads**. Chichester, England: John Wiley, 2007.

XIE, C. et al. Static aeroelastic analysis of very flexible wings based on non-planar vortex lattice method. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 26, n. 3, p. 514–521, 2013. ISSN 1000-9361.

APÊNDICE A - CÓDIGO MATLAB

1. aeroelastic.m

```

1
2 function [y,ALPHA0,Gamma_N, My_ca_N,My_ce_N,Ly_ca_N,L_N,CL_N,
   CDi_N,Di_N,qf_N,qt_real,My_L_N] = aeroelastic(nos,cond,
   method,alpha,rigido,varargin)
3
4 %% Necessita atualizacao de parametros para a aeronave
   analisada
5
6 tol = 0.000001 ; % tolerancia desejada para conversao do
   metodo iterativo
7
8 % Asa
9 b = 9.62; % envergadura da asa [m]
10 ct = 1.07; % valor da corda na ponta da asa
11 cr = 1.60; % valor da corda na raiz da asa
12 alpha0 = -3.25 * pi/180; %torcao inicial efetiva entre a raiz
   e ponta da asa
13
14 % Propriedades do Material e da Longarina
15 [A,E,I,G,J,local] = Carrega_Prop_Estruturais(nos,b,cr,ct);
16
17 % Condicoes de Voo
18 rhoamb = [0.8887 0.8887 1.05799 1.05799] ; %[ kg/m ]
19 Uo = [116 116 122 122]./ 1.944 ; %[knots para m/s]
20
21 %% Iteracao
22 iter = 0;
23 Gamma_N = [];
24 My_ca_N = [];
25 My_ce_N = [];
26 My_L_N = [];
27 Ly_ca_N = [];
28 L_N = [];
29 CL_N = [];

```

```

30 CDi_N = [];
31 Di_N = [];
32 qt_new = zeros(nos,1);
33 qt_old = zeros(nos,1);
34 qt_real = [];
35 qf_N = [];
36 itera = true;
37
38 if rigido
39 [ALPHA0,y,th,c,S] = param_iniciais(method,alpha0,nos,b,cr,ct)
    ;
40 [Gamma_N,My_ca_N,My_ce_N,Ly_ca_N,L,CL_N,CDi_N,Di_N,My_L_N] =
    GLAUERT_SIMETRICO_COM_TORCAO(y,c,alpha,ALPHA0+qt_old',
    rhoamb(cond),Uo(cond));
41 L_N = L;
42 return
43 end
44
45 nVarargs = length(varargin);
46 if nVarargs == 1
47     while itera
48         q = cell2mat(varargin);
49         iter = iter + 1;
50         qt_old = qt_new;
51
52         % AERODINAMICA
53         [ALPHA0,y,th,c,S] = param_iniciais(method,alpha0,nos,
            b,cr,ct);
54         [Gamma,My_ca,My_ce,Ly_ca,L,CL,CDi,Di,My_L] =
            GLAUERT_SIMETRICO_COM_TORCAO(y,c,alpha,ALPHA0+
            qt_old',rhoamb(cond),Uo(cond),q);
55
56         %% ESTRUTURA
57         [qt,qf] = VigaEngastada3GDL(Ly_ca,My_ce,y,local,A,E,I
            ,G,J);
58
59         %% Atualiza o
60         Gamma_N(: , iter) = Gamma;
61         My_ca_N(: , iter) = My_ca';

```

```

62     My_ce_N(: , iter) = My_ce';
63     Ly_ca_N(: , iter) = Ly_ca';
64     My_L_N(: , iter) = My_L';
65     L_N(iter) = L;
66     CL_N(iter) = CL;
67     CDi_N(iter) = CDi;
68     Di_N(iter) = Di;
69     qf_N(: , iter) = qf;
70     qt_real(: , iter) = [ 0 ; qt];
71     qt_new = qt_real(: , iter);
72
73     itera = max(abs(qt_new - qt_old)) > tol;
74     end
75 else
76     while itera
77
78         iter = iter + 1;
79         qt_old = qt_new;
80
81         % AERODINAMICA
82         [ALPHA0,y,th,c,S] = param_iniciais(method,alpha0,nos ,
            b,cr,ct);
83         [Gamma,My_ca,My_ce,Ly_ca,L,CL,CDi,Di,My_L] =
            GLAUERT_SIMETRICO_COM_TORCAO(y,c,alpha,ALPHA0+
            qt_old',rhoamb(cond),Uo(cond));
84
85         %% ESTRUTURA
86         [qt,qf] = VigaEngastada3GDL(Ly_ca,My_ce,y,local,A,E,I
            ,G,J);
87
88         %% Atualizacao
89         Gamma_N(: , iter) = Gamma;
90         My_ca_N(: , iter) = My_ca';
91         My_ce_N(: , iter) = My_ce';
92         Ly_ca_N(: , iter) = Ly_ca';
93         My_L_N(: , iter) = My_L';
94         L_N(iter) = L;
95         CL_N(iter) = CL;
96         CDi_N(iter) = CDi;

```

```

97         Di_N(iter) = Di;
98         qf_N(: , iter) = qf;
99         qt_real(: , iter) = [ 0 ; qt];
100        qt_new = qt_real(: , iter);
101
102        itera = max(abs(qt_new - qt_old)) > tol;
103    end
104 end
105
106 end

```

2. param_iniciais.m

```

108
109 %Input do angulo de torcao e variaveis geometricas
110
111 function [ALPHA0,y,th,c,S] = param_iniciais(method,alpha0,n,b
    ,cr,ct)
112
113     th = fliplr(linspace(0.01,pi/2,n));
114     y = (b/2) * cos(th);
115     c = cr + (ct-cr)*cos(th);
116     S = abs(2 * trapz(y,c));
117
118     switch method
119         case 'linear'
120             ALPHA0 = alpha0 .* cos(abs(th)) - alpha0;
121         case 'generalizado'
122             ALPHA0 = y * 0 - alpha0;
123     end
124
125 end

```

3. GLAUERT_SIMETRICO_COM_TORCAO.m

```

127
128 function [Gamma,My_ca,My_ce,Ly_ca,L,CL_G,CDi_G,Di,M_L] =
    GLAUERT_SIMETRICO_COM_TORCAO(y,c,alpha,ALPHA0,rhoamb,Uo,
    varargin)
129
130 k = length(y); %salvando o numero de pontos desejado

```

```

131 NN = linspace(1, (2*k-1), k);
132 b = 2 * max( abs(y) );
133 th = acos( 2 * y/b );
134 S = abs(2 * trapz(y,c)); % rea total da asa
135 AR = b^2 / S; %razao de aspecto
136
137 nn = length(y);
138 n = 1:2:2*nn;
139 N = repmat(n,nn,1);
140
141 theta = th; %posicoes em theta
142 TH = repmat(theta(:),1,nn);
143 C = repmat(c(:),1,nn); %posicoes da corda
144
145 angles_T = (alpha + ALPHA0)'; %lado direito da solucao geral
    da LTT
146 AIC = sin(N.*TH).*(2*b/pi./C + N./sin(TH)); %matriz dos
    coeficientes
147 index = find( TH == 0 ); %encontrando os pontos com
    singularidade
148 AIC(index) = N(index).^2 ;
149 index = find( TH == pi );
150 AIC(index) == N(index).^2 ;
151
152 An_T = inv(AIC) * angles_T; %coeficientes An
153 CL_G = pi * AR * An_T(1); %coeficiente de sustentacao
154 CDi_G = pi * AR * n * An_T.^2; %coeficiente de arrasto
155 Cly_G = ( (4 * b) ./ c(:) ) .* (sin( N .* TH ) * An_T(:)) ;
156 %Cdy_G = ( (4 * b) ./ c(:) ) .* sin( N .* TH ) * An_T(:) * (y
    (:)*An_T(:)*sin(y.*TH)/sin(TH));
    ?????????????????????????????????????????????????????????
157 Gamma = ( (2 * b)) .* sin( N .* TH ) * An_T(:);
158
159 nVarargs = length(varargin);
160 if nVarargs == 1
161     q = cell2mat(varargin);
162     [Gamma,My_ca,My_ce, Ly_ca,L,Di,M_L] = cargas_aerodinamicas
        (S,c,b,rhoamb,Uo,Gamma,Cly_G,CL_G,CDi_G,q);
163 else

```

```

164     [Gamma , My_ca , My_ce , Ly_ca , L , Di , M_L] = cargas_aerodinamicas
        (S , c , b , rhoamb , Uo , Gamma , Cly_G , CL_G , CDi_G);
165 end

```

4. cargas_aerodinamicas.m

```

167
168 function [Gamma , My_ca , My_ce , Ly_ca , L , Di , M_L] =
        cargas_aerodinamicas (S , c , b , rhoamb , Uo , Gamma , Cly_G , CL_G ,
        CDi_G , varargin)
169
170     % ca - centro aerodinamico / ce - centro elastico
171     ca = 0.25 * c ; % posicao do centro aerodinamico
172     e = 0.15 ; % tamanho da excentricidade (ce - ca) / define
        a posicao do eixo elastico)
173
174     nVarargs = length(varargin);
175     if nVarargs == 1
176         Q = cell2mat(varargin);
177     else
178         Q = rhoamb * (Uo^2)/2; % pressao dinamica
179     end
180
181     Cmy = -0.08; % valor medio do coeficiente de momento de
        arfagem com base na geometria do aerofolio
182     My_ca = Q * c.^2 * Cmy; % momento de arfagem em relacao
        ao centro aerodinamico
183     Gamma = Gamma * Uo; % distribuicao da circulacao na asa
184     Ly_ca = Q * c .* Cly_G' ; % sustentacao local em relacao
        aplicada no centro aerodinamico
185     M_L = Ly_ca * e .* c; % momento aplicado no eixo elastico
        aplicado pela sustentacao
186     My_ce = Ly_ca * e .* c + My_ca; % momento de arfagem em
        relacao ao centro elastico
187     L = CL_G * S * Q; % sustentacao total gerada na asa
188     Di = CDi_G * Q * S;
189
190 end

```

5. VigaEngastada3GDL.m

```

192
193 function [qt,qf] = VigaEngastada3GDL(f,t,y,local,A,E,I,G,J)
194 %% Parametros de Entrada
195 %   nos - numero de nos
196 %   f - vetor com a forca de Sustentacao em cada no
197 %   t - vetor com o momento de Arfagem em relacao ao eixo
        elastico em cada no
198 %   sb - semi-envergadura
199 %   A - area de secao transversal da asa
200 %   E - modulo de Elasticidade do material
201 %   I - momento de inercia de area
202 %   G - modulo de Rigidez torsional
203 %   J - momento polar de inercia de area
204 % local - localizacao dos pontos de prop. conhecidas,
        definidos pela artigo de referencia
205
206 %% Definicoes
207
208 nos = length(y);
209 elem = nos-1; % numero de elementos
210 l = diff(y); % tamanho de cada elemento
211 In = interp1(local,I,y','pchip'); %momento de inercia da
        secao nos nos selecionados
212 Jn = interp1(local,J,y','pchip'); %momento polar de inercia
        da secao nos nos selecionados
213 Ie = zeros(elem);
214 Je = zeros(elem);
215
216 for u = 1:elem
217
218 Ie(u) = (In(u) + In(u+1)) * 0.5;
219 Je(u) = (Jn(u) + Jn(u+1)) * 0.5;
220
221 end
222 %% Matriz de Rigidez
223
224 Kt = zeros(nos);
225 kt = [];

```

```

226 ft = zeros(nos,1);
227 Kf = zeros(2*nos);
228 kf = [];
229 ff = zeros(2*nos,1);
230
231 for i = 1:elem
232
233 % matriz de rigidez local: kf - para flexao e rotacao / kt -
      para torcao
234 %   podemos separar o problema em torcao e flexao pois eles
      estao desacoplados
235
236 % Torcao
237
238 kt = cat( 3, kt , G*Je(i)      * [ (1/l(i))      -(1/l(i));
239                                -(1/l(i))      (1/l(i)) ] );
240
241 aux = kt(:, :, i);
242
243 ind = i + [0 1];
244
245 % matriz de rigidez global - torcao
246 Kt(ind,ind) = Kt(ind,ind) + aux;
247
248 % Vetor de carregamento
249 ft(ind) = ft(ind) + t(i)*l(i)*0.5*[1;1];
250
251 %
      -----
252
253 % Flexao + Rotacao
254
255 kf = cat(3, kf , [ (12*E*Ie(i)/(l(i)^3))      (6*E*Ie(i)/(l(i)^2))
      (12*E*Ie(i)/(l(i)^3))      -(6*E*Ie(i)/(l(i)^2))
      /l(i)^2)      ;
256      (6*E*Ie(i)/(l(i)^2))      (4*E*Ie(i)/l(i)
      )      -(6*E*Ie(i)/(l(i)^2))
      (2*E*Ie(i)/l(i))      ;

```



```

257         -(12*E*Ie(i)/(l(i)^3))      -(6*E*Ie(i)/(l(i)
           i)^2))      (12*E*Ie(i)/(l(i)^3))
                -(6*E*Ie(i)/(l(i)^2))      ;
258         (6*E*Ie(i)/(l(i)^2))      (2*E*Ie(i)/l(i)
           ))      -(6*E*Ie(i)/(l(i)^2))
                (4*E*Ie(i)/l(i))      ]);
259
260 aux2 = kf(:, :, i);
261
262 ind2 = 2*i-1 + [0 1 2 3];
263
264 % matriz de rigidez global - flexao
265 Kf(ind2,ind2) = Kf(ind2,ind2) + aux2;
266
267 % Vetor de carregamento
268 inda = i + [ 0 1 ];
269
270 ff(ind2) = ff(ind2) + [(0.35*f(inda(1)) + 0.15*f(inda(2)))*l(
           i)      ;
271         (1.5 *f(inda(1)) +      f(inda(2)))*l(i)^2/30
           ;
272         (0.15*f(inda(1)) + 0.35*f(inda(2)))*l(i)
           ;
273         -(      f(inda(1)) + 1.5 *f(inda(2)))*l(i)^2/30
           ];
274
275 end
276
277 %% Condiçao de contorno
278 % Eliminados diretamente na hora de resolver o sistema
           linear
279
280 % Deslocamentos nodais
281
282 qt = Kt(2:end,2:end) \ ft(2:end);
283
284 qf = Kf(3:end,3:end) \ ff(3:end);
285
286 end

```

6. Carrega_Prop_Estruturais.m

```

288
289 %Funcao para carregar parametros geometricos da viga e prop.
      do material
290
291 function [A_air,E,I,G,J,local] = Carrega_Prop_Estruturais(n,b
      ,cr,ct)
292
293 th = flipplr(linspace(0.01,pi/2,n));
294 y = (b/2) * cos(th);
295 c = cr + (ct-cr)*cos(th);
296
297 % Propriedades do Material e da Longarina
298 tf = 0.003; % espessura da flange[m]
299 tw = 0.002; % espessura da alma [m]
300 B = [0.190
301      0.190
302      0.172
303      0.154
304      0.137
305      0.120
306      0.104
307      0.088
308      0.073
309      0.060
310      0.047
311      0.035
312      0.023
313      0.016
314      0.009
315      0.004
316      0.001
317      0.001]; % largura da viga [m]
318 D = [0.17547
319      0.17547
320      0.17182
321      0.16817
322      0.16452
323      0.16086

```

```

324     0.15721
325     0.15356
326     0.14991
327     0.14626
328     0.14261
329     0.13896
330     0.13531
331     0.13166
332     0.12801
333     0.12436
334     0.12071
335     0.12071]; % altura da viga [m]
336 b = B - tw;
337 d = D - 2*tf;
338 I = (B.*(D.^3))./12 - (b.*(d.^3))./12; % Momento de Inercia
      de Area [m^4]
339 local = [ 0.00
340           0.10
341           0.30
342           0.60
343           0.90
344           1.20
345           1.50
346           1.80
347           2.10
348           2.40
349           2.70
350           3.00
351           3.30
352           3.60
353           3.90
354           4.20
355           4.50
356           4.80]; % localizacao das Inercias a partir da raiz
      segundo o artigo
357 A_air = 9.6568689E-2; % rea da ST do aerofolio [m ]
358 E = 70 * 10^9; % modulo de Elasticidade do material [Pa]
359 v = 0.33; % Poisson Ratio;
360 G = E/(2*(1+v)); %? modulo de Cisalhamento ou de Torcao [Pa]

```

```
361 J = [0.0001741
362      0.0001741
363      0.0001357
364      0.0001042
365      0.0000796
366      0.0000595
367      0.0000442
368      0.000032
369      0.0000229
370      0.0000164
371      0.0000112
372      0.0000074
373      0.0000043
374      0.0000027
375      0.0000014
376      0.0000006
377      0.0000005
378      0.0000005]; % momento polar de inercia
379
380 end
```