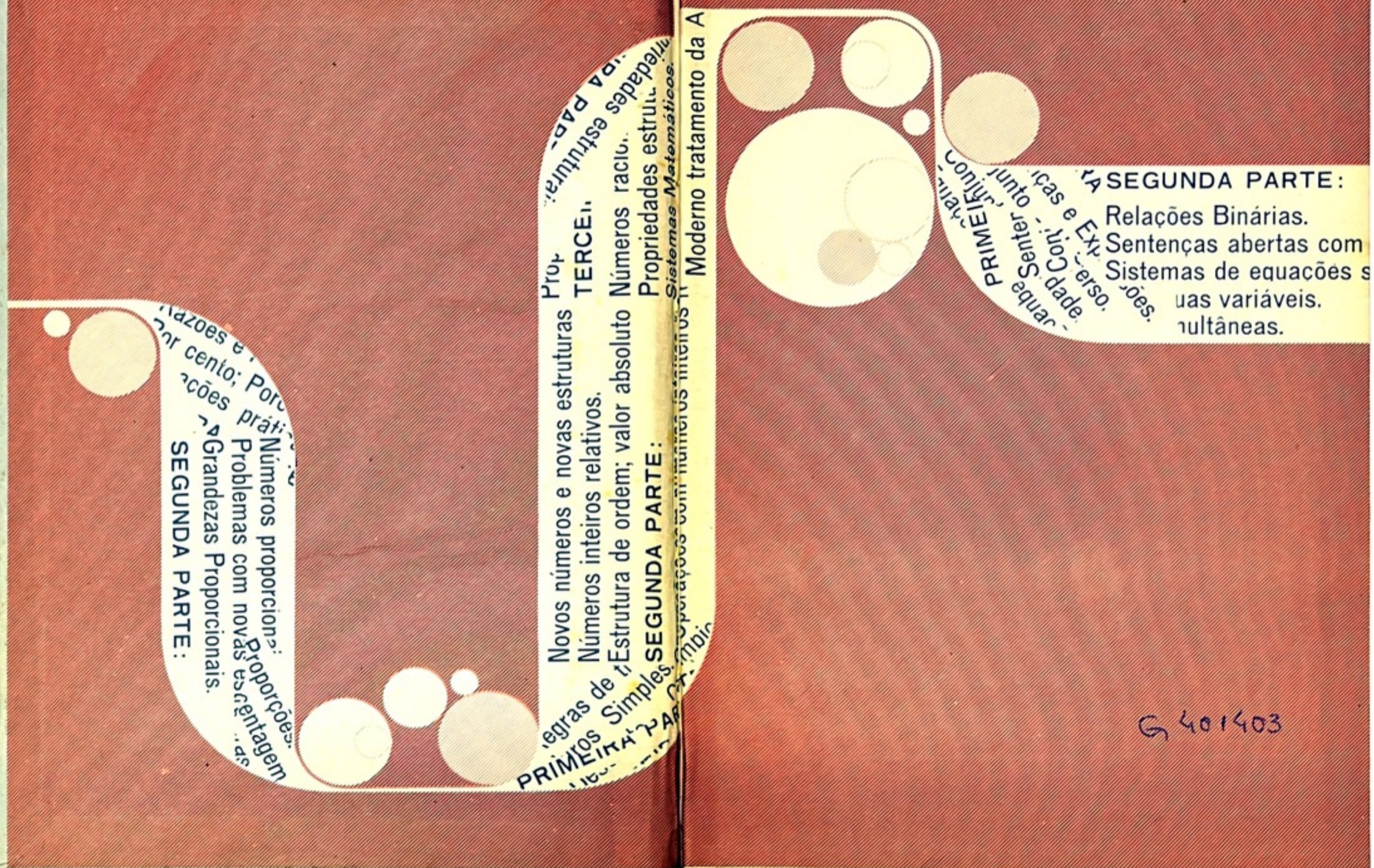

SEGUNDA PARTE:
Relações Binárias.
Sentenças abertas com
Sistemas de equações
Moderno tratamento da A
Novos números e novas estruturas
Números inteiros relativos.
Estrutura de ordem; valor absoluto
SEGUNDA PARTE:
Propriedades estru
Sistemas Matemáticos
Grandezas Proporcionais.
SEGUNDA PARTE:

OSVALDO SANGIORGI

VOLUME 2 edição revista

para os ginásios

matemática curso moderno

Homenagem ao

SEMINÁRIO INTERNACIONAL
DE MATEMÁTICA DE EUPEN

Eupen (Bélgica), 30/6 a 12/7 de 1969.

MATEMÁTICA
CURSO MODERNO
2

Osvaldo
SANGIORGI
Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, da Universidade de São Paulo

MATEMÁTICA

curso moderno

para os ginásios

2.º volume

Companhia Editora Nacional

Capa e ilustrações:
NESTOR BATTAGLIERO

10.ª edição,
revista e ampliada

1 9 7 0

Impresso no Brasil

PROGRAMA(*)
para um
CURSO MODERNO
de
MATEMÁTICA

Para a 2.ª *Série* dos Cursos Ginasiais(**):

1. *razões* — número racional absoluto — razões especiais (velocidade, densidades, . . .);
2. *proporções* — propriedades — por cento — porcentagem — números proporcionais — regras de três — juros — câmbio;
3. *números racionais relativos* — conjunto dos números inteiros relativos (Z) — operações (operações inversas) — propriedades estruturais — conjunto dos números racionais relativos (**Q**) — operações (operações inversas) — propriedades estruturais;
4. *equações e inequações do primeiro grau* — resolução de equações e inequações do primeiro grau com uma variável, através da linguagem de sentenças matemáticas no conjunto dos números racionais relativos (**Q**);
5. *sistemas de inequações simultâneas com duas variáveis* — variável sujeita as duas condições — resolução de sistemas de equações simultâneas do primeiro grau com uma variável, através da linguagem de sentenças matemáticas;
6. *sistemas de duas equações simultâneas com duas variáveis* — relações binárias — resolução de sistemas de duas equações simultâneas do primeiro grau, através da linguagem de sentenças matemáticas.

(*) De acôrdo com os *Assuntos Mínimos* para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios, aprovado pela Diretoria do Ensino Secundário, do Ministério de Educação e Cultura, no Curso de Treinamento Básico para Professôres Secundários, realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963 e das resoluções (Matemática) do I Encontro dos Coordenadores dos SERAPs, da Secretaria de Educação de São Paulo, realizado de 8 a 12 de abril de 1969 no Centro Regional de Pesquisas Educacionais — Cidade Universitária, São Paulo.

(**) Designação genérica do 1.º ciclo dos cursos médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais, os Ginásios Comerciais e os Ginásios Pluricurriculares.

índice

CAPÍTULO um

CAPÍTULO dois

CAPÍTULO três

CAPÍTULO quatro

Do autor:

Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática* — 2).

Matemática, 1 — Curso Moderno.

Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática* — *1*).

Matemática, 3 — Curso Moderno.

Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática* — *3*).

Matemática, 4 — Curso Moderno.

Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática* — *4*).

Matemática e Estatística, para os Institutos de Educação e Escolas Normais.

Programa de Admissão (parte da Matemática Moderna) para os ginásios (em colaboração)

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639

São Paulo 2, SP

Uma palavra para você que já iniciou o ginásio . . .

Meu caro estudante:

Um nôvo mundo está à sua espera. Você, que já teve contato com a *Matemática Moderna* da 1.ª Série, irá saborear mais intensamente, agora, os seus frutos, mediante as belas *estruturas* que serão estudadas.

Os novos *conjuntos de números* e as importantes *relações* a serem apresentadas neste curso moderno de Matemática enriquecerão a sua capacidade de raciocinar, dentro do Universo dirigido pela ciência em que vive. Sabe você que, estudando a resolução de *equações* por meio da linguagem de sentenças matemáticas, virá a dominar com facilidade uma série enorme de problemas que antes lhe pareciam "inconquistáveis"?

Com a ajuda indispensável de seu professor, temos a certeza de que até o fim do ano você terá adquirido uma bagagem de informações matemáticas utilíssimas para bem conduzi-lo na vida real.

Felicidades nos estudos e até breve!

Osvaldo Sangiorgi

MATEMÁTICA
CURSO MODERNO

PRIMEI

Números Rac

Operação com

Propriedades Est

Reta Numerada.

SEGUNDA PAR

Razões e Propor

Por cento; Porc

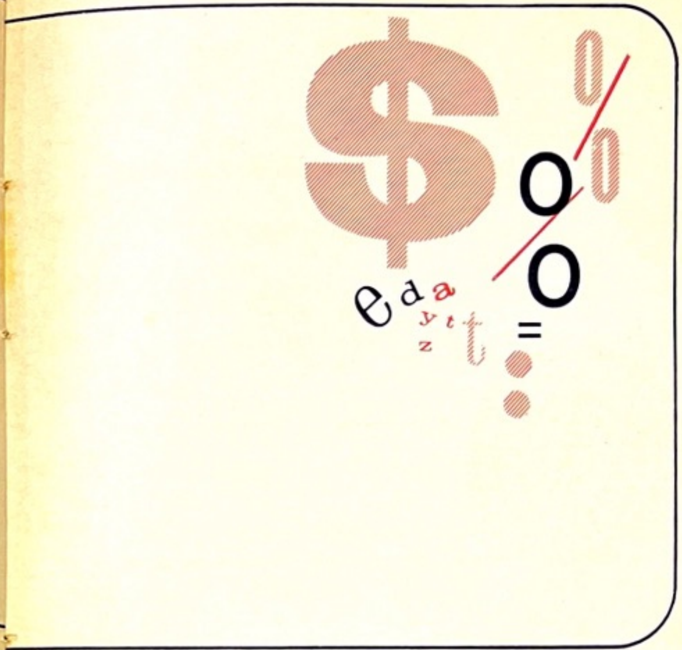
Aplicações pr

ais absol

capítulo um

PRIMEIRA PARTE:

Números racionais absolutos.
Nôvo conjunto numérico.
Propriedades estruturais.
Reta numerada.



SEGUNDA PARTE:

Razões e proporções.
Por cento; Porcentagem.
Aplicações práticas.

PRIMEIRA PARTE

Números racionais absolutos.
Nôvo conjunto numérico.
Propriedades estruturais.
Reta numerada.

Números racionais absolutos

1. *Conceito de número racional absoluto*

Até agora, para resolver muitos problemas, alguns dos quais relacionados com a sua vida diária, você tem usado as *duas espécies* de números:

naturais: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$

e

fracionários: $\ldots \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{3}{4} \ldots$

Como todo número natural também pode ser representado por uma *fração de denominador 1* (exemplo: $5 = \frac{5}{1}$) e levando-se em conta que *frações equivalentes* representam o *mesmo número fracionário* (exemplos: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$ e $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \ldots$), pode-se usar um *único nome* para denominar essas duas espécies de números e representá-las com o numeral *fração*.

Êsse *único nome* é: número RACIONAL absoluto.

Se a fração possui o numerador *múltiplo* do denominador, então êsse número racional é *natural;* caso contrário, o número racional apresentado é *fracionário*. Exemplos:

$\boxed{\frac{10}{2}}$ representa o *número racional natural* $\boxed{5}$

$\boxed{\frac{1}{2}}$ representa um *número racional fracionário* (e tôdas as frações equivalentes a $\frac{1}{2}$)

Logo:

> Número RACIONAL absoluto é todo aquêle que pode ser representado por uma fração(*):
>
> $$\frac{a}{b}$$
>
> onde a e b são números naturais, sendo $b \neq 0$.
>
> Se a é múltiplo de b, então o número racional $\frac{a}{b}$ é *natural.*
>
> Se a *não é múltiplo* de b, então o número racional $\frac{a}{b}$ é *fracionário.*

2. *Nôvo conjunto numérico:* Q_a

O conjunto dos *números racionais absolutos* (números naturais e números fracionários) é indicado pela letra Q_a (inicial da palavra *quociente*):

$$Q_a = \left\{ 0, \ldots, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, 1, \ldots, \frac{3}{2}, \ldots, 2, \ldots, \frac{5}{2}, \ldots, \ldots, 3, \ldots, \frac{7}{2}, \ldots, 4, \ldots \right\}$$

(difícil escrever "todos" os elementos de Q_a, não?)

(*) Por simplicidade de linguagem, diz-se "o *número racional* $\frac{a}{b}$" ao invés de "número racional absoluto representado pela fração $\frac{a}{b}$".

É bom você guardar que:

1) o conjunto Q_a é a *reunião* do conjunto dos números naturais (N) com o conjunto dos números fracionários;

2) o conjunto Q_a é *infinito*, sendo o zero o menor dos números racionais absolutos;

3) $N \subset Q_a$, isto é, N *está contido* em Q_a, porque N é um subconjunto de Q_a;

4) usando a linguagem dos conjuntos, pode-se representar o conjunto Q_a, cujos elementos são da forma $\frac{a}{b}$, com $a \in N$ e $b \in N$, sendo $b \neq 0$, isto é, $b \in N^*$, da seguinte maneira:

$$Q_a = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in N \text{ e } b \in N^* \right\}$$

que se lê: "*Q_a é o conjunto dos números da forma* $\frac{a}{b}$, *tal que* a *e* b *são naturais e* b *diferente de zero*".

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 1

Prática no conjunto Q_a:

1. Dizer que número *racional* está sendo representado pela fração $\frac{a}{b}$ em cada um dos seguintes casos:

1.º) $a = 9$ e $b = 3$. Temos: $\frac{9}{3}$ ou 3 (número *natural*)

2.º) $a = 2$ e $b = 5$. Temos: $\frac{2}{5}$ ou 0,4 (número *fracionário*)

3.º) $a = 0$ e $b = 7$. Temos: $\frac{0}{7}$ ou 0 (número *natural*)

4.º) $a = 1$ e $b = 3$. Temos: $\frac{1}{3}$ ou 0,333... (número *fracionário*)

5.º) $a = 48$ e $b = 1$. Temos: $\frac{48}{1}$ ou 48 (número *natural*)

NOTA: Quando o número racional está representado por um numeral decimal, isto é, expressão que se obtém quando se divide o numerador pelo denominador da fração que o indica, pode surgir ou uma *decimal exata* (como no exemplo: $\frac{2}{5} = 0{,}4$) ou uma *decimal periódica* (como no exemplo: $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$).

2. Escrever os seguintes números racionais sob a forma $\frac{a}{b}$, onde $a \in N$, $b \in N^*$, e classificá-los a seguir:

1.º) 8 Temos: $\frac{8}{1}$ (número racional natural)

2.º) 0,888. . . Temos: $\frac{8}{9}$ (número racional fracionário)

3.º) 2,35 Temos: $\frac{235}{100}$ (número racional fracionário)

4.º) 0 Temos: $\frac{0}{1}$ (número racional natural)

5.º) 6,253.33. . . Temos: $6\ \frac{253-25}{900} = 6\ \frac{228}{600} = 6\ \frac{19}{50}$ (número racional fracionário)

3. Escrever, ao lado de cada uma das seguintes sentenças, *V* ou *F*, dependendo de ela ser *verdadeira* ou *falsa*, respectivamente:

1.ª) $5 \in N$ (*V*)	5.ª) $\frac{1}{2} \notin Q_a$ (*F*)	9.ª) $0 \in Q_a$ (*V*)
2.ª) $5 \in Q_a$ (*V*)	6.ª) $\frac{1}{2} \in Q_a$ (*V*)	10.ª) $2\frac{1}{3} \notin Q_a$ (*F*)
3.ª) $5 \notin N$ (*F*)	7.ª) $\frac{1}{2} \notin N$ (*V*)	11.ª) $\frac{8}{4} \in Q_a$ (*V*)
4.ª) $\frac{5}{1} \in Q_a$ (*V*)	8.ª) $\frac{1}{2} \in N$ (*F*)	12.ª) $0,555\ldots \notin Q_a$ (*F*)

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

A representação do conjunto Q_a dos números racionais, colocando seus elementos entre chaves, é mais delicada do que as que você tem feito até agora. Isto porque *entre* dois números racionais *quaisquer* é sempre possível colocar um outro número racional.

Daí o fato de se abusar do uso das reticências na representação do conjunto Q_a:

$$Q_a = \left\{0, \ldots, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{2}{3}, \ldots, 1, \ldots, \frac{3}{2}, \ldots, 2, \ldots, \frac{5}{2}, \ldots, \ldots, 3, \ldots, \frac{7}{2}, \ldots, 4, \ldots, \frac{9}{2}, \ldots, 5, \ldots\right\}$$

Um conjunto nestas condições é denominado *denso* ("cheio de elementos"), pois, escritos ordenadamente dois números racionais quaisquer, por mais "próximos" que estejam, podemos *sempre* colocar um outro número racional "entre" êles. Exemplo: se você escolher os números racionais 0,523 e 0,524, existe entre êles o número racional 0,523.5!

Em contraposição o conjunto N, dos números naturais, *não é* denso, pois escolhidos dois números naturais *quaisquer*, por exemplo, 5 e 6, *não existe* nenhum número natural que possa ser colocado entre êles. Nesse caso o conjunto é denominado *discreto*. Logo:

O conjunto dos números racionais é *denso*.
O conjunto dos números naturais é *discreto*.

Muitas vêzes você vai precisar trabalhar com o conjunto dos números racionais sem o 0 (zero). Nesse caso costuma-se representar tal conjunto por Q_a^*. Portanto:

$$Q_a^* = Q_a - \{0\}$$

(lê-se: "conjunto Q_a estrêla")

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 2

1. Escrever o número racional e classificá-lo a seguir (natural ou fracionário), quando se substitui em $\frac{a}{b}$, respectivamente:

   1.º) *a* por 4 e *b* por 2
   2.º) *a* por 4 e *b* por 3
   3.º) *a* por 0 e *b* por 5
   4.º) *a* por 139 e *b* por 139
   5.º) *a* por 2 e *b* por 9
   6.º) *a* por 1970 e *b* por 1

2. A fração $\frac{a}{b}$, se $b = 1$ e qualquer que seja *a*, que tipo de número racional representa?

3. Dar três exemplos, respectivamente, de:
   1.º) número racional natural
   2.º) número racional fracionário
   3.º) número racional

4. Dizer quais dos seguintes numerais representam números racionais naturais e quais representam números racionais fracionários:

   1.º) $\frac{1}{5}$ 2.º) $\frac{12}{3}$ 3.º) 0,05 4.º) 6 5.º) 3,222. . .

   6.º) $3\frac{1}{4}$ 7.º) 200 8.º) 1,046.161. . . 9.º) 0 10.º) $\frac{1}{1}$

5. Assinale quais dos seguintes símbolos não representam números racionais:

   1.º) $4\frac{1}{2}$ 2.º) $\frac{8}{0}$ 3.º) $\frac{0}{8}$ 4.º) $\frac{0}{0}$ 5.º) 13

PRÁTICAS MODERNAS — Grupo 3

Escrever ao lado de cada uma das seguintes sentenças *V*, se fôr verdadeira, e *F*, se fôr falsa:

1.ª) $\frac{2}{3} \notin Q_a$ 2.ª) $8 \in Q_a$ 3.ª) $3,2 \in N$ 4.ª) $0 \in N^*$

5.ª) $0,333\ldots \in Q_a$ 6.ª) $1 \notin N$ 7.ª) $1 \in N^*$ 8.ª) $1 \notin N^*$

9.ª) Qualquer número natural, bem como qualquer número fracionário, é um número racional

10.ª) Uma dízima periódica composta não pertence ao conjunto Q_a

11.ª) O conjunto dos números racionais é finito

12.ª) $N \supset Q_a$ 13.ª) $N \subset Q_a$ 14.ª) $Q_a^* \supset Q_a$ 15.ª) $N^* \subset Q_a$

16.ª) $N \subset Q_a^*$ (cuidado!) 17.ª) $N^* \supset Q_a^*$ 18.ª) $N^* \subset N$

3. *Igualdade e desigualdade de números racionais. Estrutura de ordem*

IGUALDADE:

> **Dois números racionais são *iguais*, se e sòmente se as frações que os representam *são equivalentes*.**

Assim, por exemplo, o número racional $\frac{2}{3}$ é igual ao número racional $\frac{4}{6}$, porque as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ são *equivalentes*.

Indicação: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ (dizemos também que $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ são *numerais diferentes do mesmo número racional*)

Você já sabe, da primeira série ginasial, que o reconhecimento imediato de que duas frações são equivalentes é feito verificando se são *iguais* os produtos: *numerador da primeira* $\times$ *denominador da segunda* e *denominador da primeira* $\times$ *numerador da segunda*. No exemplo dado, temos:

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ porque: $2 \times 6 = 3 \times 4$ (ambos os produtos valem 12)

Logo, supondo $b \neq 0$, $d \neq 0$ (*)

> se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ representam o mesmo número racional, então: $a \times d = b \times c$

Propriedades da igualdade:

1. *reflexiva:* $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

(*) Deve-se sempre considerar *diferente de 0* o denominador da fração que representa um número racional.

2. *simétrica:* se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

3. *transitiva:* se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, então $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

DESIGUALDADE:

> **Dois números racionais são *desiguais*, se e sòmente se as frações que os representam *não são equivalentes*.**

Por exemplo: $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{4}$ são números racionais *desiguais* (ou diferentes), porque as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{4}$ *não são equivalentes* (observe que: $3 \times 4 \neq 5 \times 1$).

Indicação: $\frac{3}{5} \neq \frac{1}{4}$

Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, dizemos que:

1.º) $\frac{a}{b}$ é *maior* que $\frac{c}{d}$, se e sòmente se $a \times d > b \times c$

Indicação: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

2.º) $\frac{a}{b}$ é *menor* que $\frac{c}{d}$, se e sòmente se $a \times d < b \times c$

Indicação: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

Exemplos:

$\frac{3}{5} > \frac{1}{4}$ porque $3 \times 4 > 5 \times 1$

$\frac{2}{7} < \frac{4}{7}$ porque $2 \times 7 < 7 \times 4$

Para a desigualdade(*) ora introduzida vale a *propriedade transitiva:*

$$\text{se} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} > \frac{e}{f}, \quad \text{então} \quad \frac{a}{b} > \frac{e}{f}$$

$$\text{ou} \quad \text{se} \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} < \frac{e}{f}, \quad \text{então} \quad \frac{a}{b} < \frac{e}{f}$$

Da mesma maneira que para os números naturais, dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, *sòmente uma* das seguintes alternativas se verifica:

$$\text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Introduzidas, assim, a *igualdade* e a *desigualdade* entre os elementos do nôvo conjunto $\mathbf{Q_a}$, fica definida uma ESTRUTURA DE ORDEM nesse conjunto.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 4

1. Complete:

1.º) se $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, então $3 \times \ldots = 4 \times \ldots$

2.º) se $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, então $\ldots \times 2 = 10 \times \ldots$

3.º) se $\frac{2}{3} = \frac{a}{2}$, então $a = \ldots$

4.º) se $\frac{b}{2} = \frac{3}{6}$, então $b = \ldots$

2. Assinale *V* nas sentenças verdadeiras e *F* nas falsas:

1.ª) $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$ 2.ª) $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ 3.ª) $\frac{1}{2} = \frac{6}{8}$

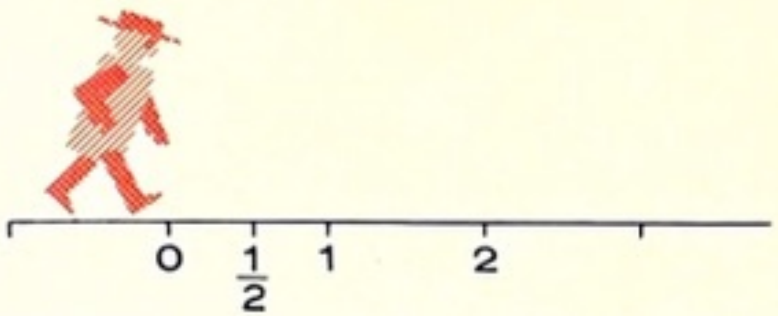
4.ª) $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$ 5.ª) $\frac{9}{3} < \frac{4}{2}$ 6.ª) $\frac{0}{5} = \frac{0}{6}$

(*) Trata-se da desigualdade de *ordem estrita.*

3. Coloque o sinal conveniente (=, > ou <), de modo a obter sentenças verdadeiras:

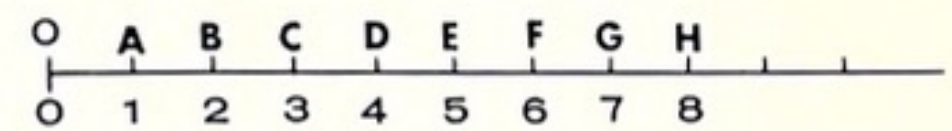
1.ª) $\frac{2}{3} \ldots \frac{3}{5}$ 2.ª) $\frac{8}{8} \ldots \frac{3}{7}$ 3.ª) $\frac{1}{2} \ldots \frac{4}{8}$

4.ª) $\frac{7}{9} \ldots \frac{0}{7}$ 5.ª) $\frac{2}{1} \ldots \frac{5}{1}$ 6.ª) $\frac{15}{3} \ldots \frac{45}{9}$



4. *Reta numerada; representação geométrica do conjunto* $\mathbf{Q_a}$

Você já conhece a representação geométrica do conjunto **N**, dos números naturais, por intermédio da reta numerada:



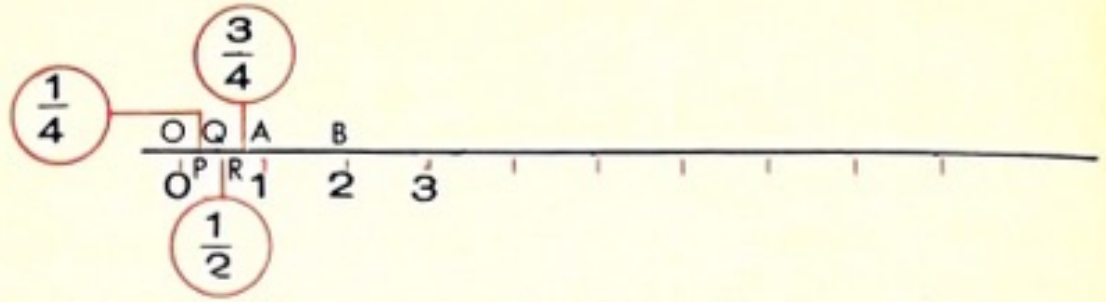
obtida quando se marca sôbre uma reta qualquer um ponto *O*, denominado *origem*, e a seguir, usando uma unidade de comprimento (o *cm*, por exemplo), marca-se à direita de *O* segmentos consecutivos de medidas iguais à unidade considerada.

Ficam assim determinados os pontos *O, A, B, C, D,* ... que são *correspondentes*, respectivamente, aos números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5 ...

E aos *números fracionários* correspondem também pontos da reta?

Sim. Você sabe que "entre" 0 e 1, marcados na *reta numerada*, existem pontos que *correspondem* a $\frac{1}{4}$ cm, $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{3}{4}$ cm, ... Segue-se daí que às extremidades dêsses segmentos *corresponderão*, respectivamente, os números fracionários: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, ...

O mesmo raciocínio pode ser feito "entre" 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, ... marcados na reta.



Estabelecemos, assim, uma *correspondência biunívoca* entre o conjunto Q_a dos *números racionais* (naturais e fracionários) e um conjunto de pontos da reta. O conjunto dos pontos assinalados sôbre a reta numerada constitui a *representação geométrica* do conjunto Q_a.

Cada um dos pontos *O, P, Q, R, A, B, ...* é denominado *imagem* de um número racional sôbre a reta.

Como aplicação do uso da reta numerada você pode "ver" a *estrutura de ordem* existente com os números racionais. Assim, por exemplo, você "vê" que o 3 está entre o 2 e o 4, podendo escrever a *dupla desigualdade:*

$2 < 3 < 4$ (lê-se: "dois é menor que três e três é menor que quatro")

Outros exemplos:

$$1 < 3 < 5$$
$$0 < 3 < 3{,}5$$
$$2{,}8 < 3 < 3{,}1$$

Quantos *números naturais* existem *entre* 1 e 6?

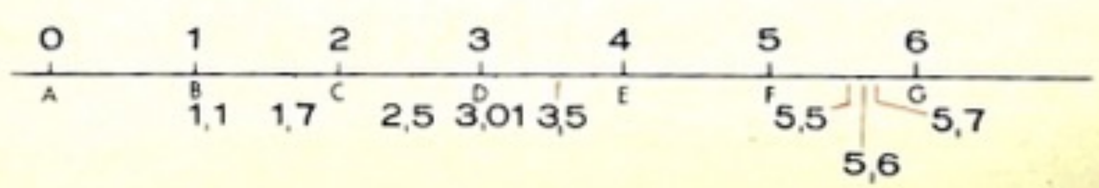
Você pode "contar" ou "ver" que existem apenas quatro: 2, 3, 4 e 5.

Quantos números naturais há entre 1 e 2?

Não há nenhum número natural entre 1 e 2.

Quantos *números racionais* existem *entre* 1 e 6?

Agora você *não pode* "contar" ou "ver" todos os números *racionais* existentes entre 1 e 6, porque êles constituem um conjunto *denso;* mas poderá "ver" o *segmento* que vai desde 1 até 6, contendo o conjunto de pontos correspondentes a *todos* os números racionais existentes entre 1 e 6, que são *infinitos:*



Observe, ainda, que na reta numerada as sentenças:

"5 está à direita de 3" e "5 é maior que 3" são *equivalentes*, isto é:

5 está à direita de 3 $\iff$ $5 > 3$

Da mesma forma, você concluirá:

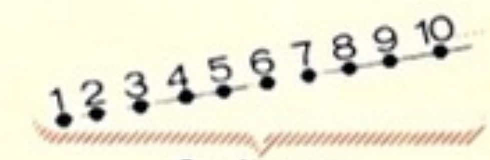
3 está à esquerda de 5 $\iff$ $3 < 5$

Que significa escrever: $0 < 6$? Significa que *o zero está à esquerda do seis.* E dizer que 3,2 *está à direita de 2,5*? Significa escrever: $3{,}2 > 2{,}5$.

Como conclusão geral você pode escrever as equivalências:

"está à direita de" $\iff$ "é maior que"

"está à esquerda de" $\iff$ "é menor que"



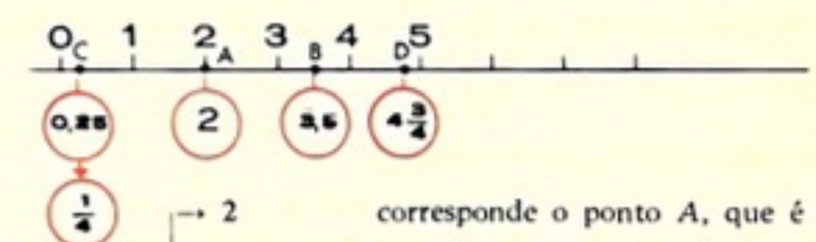
Reta Numerada

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 5

1. Representar sôbre a reta numerada a *imagem* de cada um dos seguintes números racionais:

$2 \qquad 3{,}5 \qquad 0{,}25 \qquad \frac{1}{4} \qquad 4\frac{3}{4}$

Temos:



isto é, ao número racional
- → 2 corresponde o ponto *A*, que é a sua *imagem*
- → 3,5 corresponde o ponto *B*, que é a sua *imagem*
- → 0,25 corresponde o ponto *C*, que é a sua *imagem*
- → $\frac{1}{4} = 0{,}25$ corresponde o ponto *C*, que é a sua *imagem*
- → $4\frac{3}{4}$ corresponde o ponto *D*, que é a sua *imagem*

2. Preencher os claros das seguintes sentenças:

   1.ª) Se o número 8 é maior que o número 1 então o ponto 8 está à **direita** do ponto 1;
   2.ª) Se o ponto 1,2 está à esquerda do ponto 1,201 então o número 1,2 é **menor** que o número 1,201.

3. Localizar, na reta numerada, os números a, b e c, sabendo-se que b está *entre* a e c, e que $c < b$.

   Temos:

4. Escrever, usando uma dupla desigualdade, que:

   1.º) 1 está entre $\frac{3}{4}$ e 1,5;
   2.º) m está entre 3 e 12;
   3.º) m está entre p e q, sendo p menor que q.

   Temos:

   1.º) $\frac{3}{4} < 1 < 1{,}5$
   2.º) $3 < m < 12$
   3.º) $p < m < q$

5. Quantos números naturais há entre 2 e 7? Há **quatro** (3, 4, 5 e 6).
   E entre 3 e 9? Há **cinco** (4, 5, 6, 7 e 8).

Observação: O número de números naturais existentes entre outros dois naturais é dado pela diferença entre êles, diminuída de uma unidade. Experimente essa "fórmula" nos exercícios resolvidos.

Agora você pode responder que entre 3 e 239 existem: $239 - 3 = 236$; $236 - 1 = 235$, isto é, **235** números naturais.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 6

1. Represente na reta numerada a *imagem* de cada um dos seguintes números racionais:

   $3 \quad 0 \quad 5\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad 0{,}75 \quad \frac{8}{4}$

2. Preencher os claros das seguintes sentenças:

   1.ª) Se 5 é maior que 3, então o ponto 5 está à ...... do ponto 3;
   2.ª) Se 75 é ...... que 80, então 75 está à esquerda de 80;
   3.ª) Se 0 é ...... que 0,5, então 0,5 está à ...... de 0.

3. Se a e b representam dois números naturais quaisquer, então:

   $a > b$ significa que o ponto que representa a está à ...... do ponto que representa b;

   $a < b$ significa que o ponto que representa a está à ...... do ponto que representa b.

4. Se o ponto que representa a está entre os pontos que representam p e q e $p < q$, são verdadeiras as sentenças $p < a$ e $a < q$?

5. Escrever, usando uma dupla desigualdade, que:

   1.º) 4 está entre 2 e 7;
   2.º) $\frac{1}{2}$ está entre 0 e $\frac{3}{4}$;
   3.º) 2,355.5 ...... está entre 2,2 e 2,36;
   4.º) m está entre a e b, sendo $b > a$.

6. Dizer quantos números naturais há *entre:*

   1.º) 3 e 8; 2.º) 5 e 8; 3.º) 6 e 8; 4.º) 7 e 8; 5.º) 8 e 8; 6.º) 9 e 8; 7.º) 10 e 8; 8.º) 30 e 60; 9.º) 60 e 62; 10.º) 11 e 1.965; 11.º) 11 e 1.970; 12.º) 11 e 1.980; 13.º) 11 e 1.990; 14.º) 11 e 1.995; 15.º) 2 e 2.000.

7. Se a e b são números naturais quaisquer, com $a > b$, qual é a expressão que dá o número de números naturais entre a e b:

   1.ª) $a - b$? ou 2.ª) $(a - b) - 1$?

8. Indicar, na reta numerada, uma localização dos números naturais a, b e c, sabendo-se que b está entre a e c, e que $a < b$.

9. Idem, no caso de $a > b$.

10. Dizer quantos *números racionais* (lembre-se de que agora devem ser considerados os números naturais e os números fracionários) existem *entre:*

    1.º) 5 e 7; 2.º) 0 e 0,01; 3.º) a e b (com $a > b$).

Propriedades Estruturais.

5. *Operações com números racionais. Propriedades estruturais*

No conjunto Q_a, com restrições para as operações subtração e radiciação, as demais são sempre possíveis.

Analisemos as *propriedades estruturais* da *adição* e da *multiplicação* de números racionais no conjunto Q_a:

1.ª) Fechamento:

A soma de dois números racionais quaisquer é um número rccional.

Exemplo: $\underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{n.º racional}} + \underbrace{2}_{\text{n.º racional}} = \frac{11}{4} \rightarrow$ n.º racional (Abreviatura: **p. f. a.**)

Em linguagem simbólica, supondo $b \neq 0,\ d \neq 0$:

$$\text{se } \frac{a}{b} \in Q_a \text{ e } \frac{c}{d} \in Q_a, \text{ então } \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \in Q_a$$

O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

Exemplo: $\underset{\text{n.° racional}}{\frac{3}{4}} \times 2 = \underset{\text{n.° racional}}{\frac{6}{4}} \rightarrow$ n.° racional (Abreviatura: **p. f. m.**)

Em linguagem simbólica:

$$\text{se } \frac{a}{b} \in Q_a \text{ e } \frac{c}{d} \in Q_a, \text{ então } \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \in Q_a$$

2.ª) Comutativa:

A ordem das parcelas não altera a soma. Abreviatura: **p.c.a.**

Exemplo: $\frac{3}{4} + 2 = 2 + \frac{3}{4}$

Em linguagem simbólica: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

A ordem dos fatôres não altera o produto. Abreviatura: **p.c.m.**

Exemplo: $\frac{3}{4} \times 2 = 2 \times \frac{3}{4}$

Em linguagem simbólica: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

3.ª) Elemento neutro:

0 para a adição.....: $\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$ ou $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
abreviatura: **e. n. a.**

1 para a multiplicação: $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$ ou $\frac{a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
abreviatura: **e. n. m.**

4.ª) Associativa:

$$\left(\frac{4}{1} + \frac{2}{5}\right) + \frac{12}{11} = \frac{4}{1} + \left(\frac{2}{5} + \frac{12}{11}\right)$$

$$\left(\frac{4}{1} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{12}{11} = \frac{4}{1} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{12}{11}\right)$$

Em linguagem simbólica:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

abreviatura: **p. a. a.**

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$$

abreviatura: **p. a. m.**

5.ª) Distributiva da multiplicação em relação à adição. Abreviatura: **p.d.m.(a.)**:

$$\frac{3}{4} \times \left(\frac{8}{2} + 5\right) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{2} + \frac{3}{4} \times 5$$

Em linguagem simbólica:

$$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$$

Considerando o conjunto Q_a^* (é o conjunto Q_a menos o 0), você vai encontrar uma "nova" propriedade, muito importante para os estudos que virão. Trata-se da propriedade denominada existência do elemento inverso:

Para qualquer número racional $\frac{a}{b}$ do conjunto Q_a^* existe um *único* número racional $\frac{b}{a}$, denominado *inverso multiplicativo*, tal que o produto dêles é igual ao *elemento neutro* da multiplicação, isto é:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

Assim, por exemplo, considerando o número racional $\frac{2}{3} \in Q_a^*$, existe o número racional $\frac{3}{2} \in Q_a^*$, tal que: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$.

Outro exemplo:

Para $2 \in Q_a^*$, existe o número racional $\frac{1}{2} \in Q_a^*$, tal que $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 7

1. Assinalar qual é a propriedade aplicada em cada uma das seguintes igualdades, *verdadeiras* no conjunto Q_a:

1.ª) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{2} = \frac{4}{2} \times \frac{3}{5}$

2.ª) $0 + \frac{5}{1} = \frac{5}{1}$

3.ª) $\frac{2}{3} \times \left(6 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \times 6 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$

4.ª) $0{,}3 \times 1 = 0{,}3$

5.ª) $\left(4 + \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{3} = 4 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$

6.ª) $\frac{2}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{2}{5}$

7.ª) $\left(3 \times \frac{1}{1}\right) \times \frac{4}{2} = 3 \times \left(\frac{1}{1} \times \frac{4}{2}\right)$

8.ª) $1{,}4 + 0 = 1{,}4$

9.ª) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

10.ª) $(0{,}1 + 2{,}3) + \frac{1}{2} = 0{,}1 + \left(2{,}3 + \frac{1}{2}\right)$

2. Idem, no conjunto Q_a^*:

1.ª) $\frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$

2.ª) $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$

3.ª) $\frac{3}{4} + 1 = 1 + \frac{3}{4}$

4.ª) $\left(\frac{2}{5} + 3\right) + \frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \left(3 + \frac{1}{2}\right)$

5.ª) $8 \times \frac{1}{8} = 1$

6.ª) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$

3. Dar o nome da operação, da propriedade dessa operação e o nome do respectivo conjunto onde tal propriedade é verdadeira.

1.ª) (Exemplo-modêlo): Se $a \in N$ e $b \in N$, então: $(a + b) \in N$
operação: adição; propriedade: fechamento; conjunto: números naturais.

2.ª) Se $x \in N$ e $y \in N$, então: $(x \times y) \in N$

3.ª) Se $x \in Q_a$ e $y \in Q_a$, então: $(x \times y) \in Q_a$

4.ª) Se $a \in Q_a^*$ e $b \in Q_a^*$, então: $a + b = b + a$

5.ª) Se $m \in N$ e $n \in N$, então: $m \times n = n \times m$

6.ª) Se $a \in N$ e $0 \in N$, então: $a + 0 = a$

7.ª) Se $x \in N$ e $1 \in N$, então: $x \times 1 = x$

8.ª) Se $a \in Q_a$, $b \in Q_a$ e $c \in Q_a$, então: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

9.ª) Se $x \in Q_a^*$, $y \in Q_a^*$, e $z \in Q_a^*$, então: $(x + y) + z = x + (y + z)$

10.ª) Se $\frac{a}{b} \in Q_a^*$ e $\frac{b}{a} \in Q_a^*$, então: $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

TESTE DE RECAPITULAÇÃO I

Além de *precisar* alguns conceitos, esta série de exercícios será para você um ótimo treino para enfrentar outros testes que virão.

1. Procure no dicionário o significado da palavra *precisar*. Neste caso qual é o seu sentido?

2. Você já viu que o conjunto dos números racionais Q_a pode ser representado assim:

$$Q_a = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in N \text{ e } b \in N^* \right\}$$

Inspirado na pág. 7, leia "alto" a representação acima e verifique quais dos seguintes exemplos pertencem a Q_a:

1.º) $\frac{2}{3}$ $\left(\text{neste exemplo: } \begin{array}{l} a = 2 \implies a \in N \\ b = 3 \implies b \in N^* \end{array}\right)$

2.º) 7 (... procure ler o item 1, pág. 5)

3.º) 2,1 (... leia a pág. 7 e fica fácil ...)

4.º) $\frac{0}{3}$ (... sem palpite ...)

5.º) $\frac{3}{0}$ (cuidado!)

3. Assinale as afirmações verdadeiras:

a) todo número racional é número natural
b) todo número natural é número racional
c) um número natural pode não ser racional
d) a metade de um número natural qualquer é sempre um número natural
e) tôdas as afirmações acima são verdadeiras.

4. Seja: $A = \{x \mid x \in N \text{ e } x < 7\}$

(lê-se: "conjunto dos números x, tal que x é *natural* e *menor* que 7")

Você sabe que o *maior elemento* dêsse conjunto é o 6.
Considere agora o seguinte conjunto:

$$B = \{x \mid x \in Q_a \text{ e } x < 7\}$$

(lê-se: "conjunto dos números x, tal que x é *número racional absoluto* e *menor* que 7")

Leia com atenção a pág. 14 e responda à seguinte questão:

O *maior elemento* do conjunto B é

1.º) 6,9
2.º) 6,99
3.º) 6,999
4.º) 6,999.9
5.º) não é possível determinar-se

5. Se $x, y, z \in Q_a$, com $x < z < y$, assinale qual das seguintes representações é correta:

a) —|—|—|— x y z

b) —|—|—|— y x z

c) —|—|—|— y z x

d —|—|—|— x z y

e) —|—|—|— z x y

6. Você sabe que se 5 e 9 são números naturais (isto é, $5, 9 \in N$), então $\frac{5+9}{2} = 7$ também é um número natural $\left(\text{isto é, } \frac{5+9}{2} \in N\right)$.

Isso nos permite escrever:

$$5 < 7 < 9$$

cuja representação na reta numerada é:

—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—— 0 5 7 9

Localize agora, na reta numerada, os números naturais: a, b e $\frac{a+b}{2}$, sabendo que $a < b$.

NOTA: O que importa são as *posições* entre êles.

7. Se $x, y, z \in Q_a$, com $x < z$ e $y = \frac{x+z}{2}$, localize na reta numerada as posições dêsses números racionais.

8. A afirmação: "se $\frac{a}{b} \in Q_a$, então $\frac{b}{a} \in Q_a$", é:

a) sempre verdadeira

b) falsa para qualquer $\frac{a}{b} \in Q_a$

c) é verdadeira se $a \neq 0$

d) é verdadeira se $b \neq 0$

e) é verdadeira se $a \neq 0$ e $b \neq 0$

9. Seu livro afirma que o inverso multiplicativo de um número racional ($\neq 0$) é único, mas veja, por exemplo:

$$\frac{2}{3} \times \boxed{\frac{3}{2}} = 1 \qquad \frac{2}{3} \times \boxed{\frac{6}{4}} = 1 \qquad \frac{2}{3} \times \boxed{\frac{12}{8}} = 1$$

Logo, "existem pelo menos *três* inversos para o $\frac{2}{3}$".

Assinale a resposta correta:

a) a conclusão é verdadeira, o livro enganou-se.

b) a conclusão é falsa, pois $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{4}$ e $\frac{12}{8}$ são numerais diferentes de um mesmo número natural.

10. Você vai procurar formar os pares adequados na terceira coluna, escolhendo a letra da segunda coluna que deve ser combinada com o número da primeira coluna:

1. $\frac{3}{4}$	*a)* pertence a N^*	(1, *d*)
2. 2,777 ...	*b)* é dízima periódica	(. . . , . . .)
3. 8	*c)* pertence a N	(. . . , . . .)
4. 0	*d)* é número racional fracionário	(. . . , . . .)

11. Formar os pares adequados, reunindo os dois numerais diferentes que representam o mesmo número:

1. 0,2	*a)* $\frac{32}{99}$	(. . . , . . .)
2. 2,8	*b)* $\frac{1}{5}$	(. . . , . . .)
3. $0,\overline{32}$	*c)* $\frac{139}{330}$	(3, *a*)
4. $0,4\overline{21}$	*d)* $\frac{14}{5}$	(. . . , . . .)

12. Formar os pares adequados, combinando letras e números que tenham o mesmo significado:

1. $x \in N$	*a)* x é número racional absoluto	(1, *d*)
2. $x \in Q_a$	*b)* x é número racional absoluto diferente de zero	(. . . , . . .)
3. $x \in Q_a^*$	*c)* x é número natural diferente de zero	(. . . , . . .)
4. $x \in N^*$	*d)* x é número natural	(. . . , . . .)

13. Formar os pares adequados:

1. $A = \{x \in Q_a \mid 2 < x < 7\}$	*a)* vazio	(. . . , . . .)
2. $B = \{x \in N \mid 3 < x < 5\}$	*b)* unitário	(. . . , . . .)
3. $C = \{x \in N^* \mid x < 1\}$	*c)* infinito e denso	(3, *a*)
4. $D = \{x \in N \mid x > 3\}$	*d)* infinito e discreto	(. . . , . . .)

14. Idem:

1. —|—|—|—|— 0 a b c	*a)* $a < c$ e $0 < b < a$	(. . . , . . .)
2. —|—|—|—|— 0 a c b	*b)* $a > b > c$	(. . . , . . .)
3. —|—|—|—|— 0 b a c	*c)* $b > a$ e $b < c$	(. . . , . . .)
4. —|—|—|—|— 0 c b a	*d)* $a < c < b$	(. . . , . . .)

15. Idem:

1. a está à direita de b	*x)* $a \leqslant b$	(. . . , . . .)
2. a está à esquerda de b	*y)* $a > b$	(. . . , . . .)
3. a pode coincidir ou estar à esquerda de b	*z)* $a = b$	(. . . , . . .)
4. a coincide com b	*t)* $a < b$	(4, *z*)

Razões e proporções.
Por cento; Porcentagem.
Aplicações práticas.

SEGUNDA PARTE

Razões e proporções

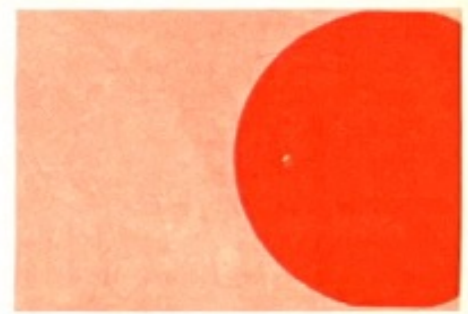
Razões expressas por números racionais

1. *Razão, como comparação entre dois números*

Você já ouviu *comparações* expressas por sentenças tais como:

1.ª) As preferências para o *futebol* em relação ao *bola-ao-cêsto* são de **5 para 1,** favoráveis ao futebol.

2.ª) O número de meninos de minha classe para o número de meninas é de **3 para 2.**



Que significam essas expressões?

A primeira quer dizer que *há cinco vêzes* mais torcedores favoráveis ao *futebol* do que torcedores para o *bola-ao-cêsto.* A segunda indica que:

para cada 3 meninos de minha classe existem 2 meninas

ou

para cada 6 meninos de minha classe existem 4 meninas

ou

para cada 9 meninos de minha classe existem 6 meninas . . .

Estas expressões **5 para 1, 3 para 2,** que permitem *comparações* entre números, são chamadas **razões** e indicadas, geralmente, por:

$$\mathbf{5:1} \text{ ou } \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{1}} \quad \text{(lê-se: “cinco para um”)}$$

$$\mathbf{3:2} \text{ ou } \frac{3}{\mathbf{2}} \quad \text{(lê-se: “três para dois”)}$$

Na prática, a *razão* entre dois números é o *quociente indicado* entre êles, portanto um *número racional*. Por isso a razão *3 para 2* pode ser expressa pela fração $\frac{3}{2}$, que não deve ser lida “três meios” como se fôra um número fracionário(*).

Se a e b representam dois números racionais (sendo $b \neq 0$), então a RAZÃO entre a e b é o QUOCIENTE de a por b e é indicado por:

$$a:b \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}$$

Os números a e b são chamados *têrmos* da razão, sendo a o *antecedente* e b o *conseqüente*.

Observe que *qualquer par ordenado* de múltiplos de dois números dados, diferentes de zero, segundo o mesmo fator, tem *razão igual* à razão dêsses números. Assim, por exemplo, *razões iguais* a $3:2$ são $6:4$, $9:6$, $12:8$, . . . , que se obtêm multiplicando os têrmos, respectivamente, por 2, 3, 4, . . .

A verificação de que duas razões são iguais pode ser feita por meio da *simplificação* das frações representativas. Assim, por exemplo, as razões $12:8$, $6:4$ e $3:2$ são *iguais*, pois as frações que as representam são *equivalentes* $\left(\frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\right)$. Portanto, a *forma mais simples* de se escrever a razão $12:8$ é $3:2$, bem mais vantajosa para muitos cálculos.

Também, no cálculo da *razão* entre os *dois números racionais* $\frac{1}{2}$ e 1, por exemplo, pelo fato de a razão:

$$\frac{1}{2}:1 \text{ ser } \textit{igual} \text{ à razão } 1:2 \text{ ou } 2:4$$

é preferível trabalhar com estas últimas razões, podendo-se usar qualquer dos quocientes indicados: $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$, para representá-las.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: São válidas para as *razões* — que são expressas por números racionais — tôdas as propriedades estudadas para os números racionais.

(*) A fração $\frac{3}{2}$ tem sido, até êste instante, o numeral que representou sòmente o *número fracionário* “três meios”. Agora, representa também a *razão* “3 para 2”.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 8

1. **Numa classe há 35 alunos dos quais 20 são meninas. Qual é a *razão* do número de meninas para o número de alunos da classe?**

   Temos: $20:35$ ou $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

   Logo, a *razão* do número de meninas para o número de alunos da classe é $4:7$ ou “4 para 7”.

   NOTA: Você poderia considerar uma outra *razão*: a do número de alunos da classe para o número de meninas. Nesse caso, tal razão: $35:20$ ou $7:4$ (forma mais simples) pode ser denominada *razão inversa* da anterior.

2. **Paulo levantou uma bola de ferro pesando 15kg e João outra, pesando 20kg. Qual a razão entre os pesos levantados por Paulo e por João?**

   Temos: $15:20$ ou $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, ou seja: “3 para 4”

3. **É a razão $3:8$ igual à razão $15:40$?**

   Temos: $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$ é uma sentença verdadeira. Logo, as razões são iguais.

4. **É a razão $\frac{3}{11}:3$ igual à razão “um para doze”?**

   Como

   $$\underbrace{\frac{\frac{3}{11}}{3} = \frac{3}{11}\times\frac{1}{3}}, = \frac{1}{11}$$ é uma sentença que não é igual à sentença proposta

   (um para doze), segue-se que $\frac{3}{11}:3$ não é igual a $1:12$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 9

1. Traduzir sob forma de **razão** as seguintes expressões:
   1.º) As apostas sôbre qual o time que venceria o Supercampeonato Mundial de Futebol interclubes, em 1969, eram de **três para dois** favoráveis ao Santos Futebol Clube.
   2.º) Para cada quatro mulheres funcionárias de um escritório existem três homens.
   3.º) A escolha dos sapatos do tipo “X” pelos colegiais de 1970 é de quatro para um.

2. Exprimir, como número racional, a **razão** (escrevendo-a sob a forma que seja mais simples) das seguintes expressões:
   1.º) 4cm para 12cm;
   2.º) 28kg para 6kg;
   3.º) 2dam para 10m (**não esquecer de reduzir ambos à mesma unidade**)

4.ª) 300 poltronas ocupadas para 900 poltronas disponíveis de um cinema;

5.ª) 120.000 pessoas ocupando o Estádio do Maracanã, para uma lotação de 200.000 lugares;

6.ª) a está para b ($b \neq 0$).

3. Determinar a *forma que seja mais simples* de cada uma das seguintes razões:

1.ª) 2 : 24; 2.ª) 24 : 2; 3.ª) 3 : 5; 4.ª) 8 : 8; 5.ª) 8 : 108; 6.ª) 60 : 5;

7.ª) $8 : \frac{1}{2}$; 8.ª) $\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$; 9.ª) 0,5 : 0,25; 10.ª) $\frac{2}{11} : 2$; 11.ª) 1.200 : 20; 12.ª) $10^3 : 10^5$.

4. Qual é a razão entre cada par de números correspondentes (que pertencem à mesma coluna) do quadro:

2	3	1	5
8	12	4	20

5. Se a razão de cada par de números correspondentes é *a mesma*, determinar os números que estão faltando no seguinte quadro:

4	2	6		18	
	3	9	12		9

6. Escrever V nas sentenças verdadeiras e F nas falsas:

1.ª) a razão 9 : 5 é igual à razão 18 : 10;

2.ª) a razão "5 para 9" é igual à razão "18 para 10";

3.ª) a razão $\frac{2}{3} : 6$ é igual à razão 2 : 18;

4.ª) a razão 1 : 4 não é igual à razão 1 : 8;

5.ª) a razão 1 : 4 não é igual à razão 2 : 8.

7. Um aeroplano voa 1.800km em 3 horas. Qual a razão que dá o número de quilômetros para o número de horas empregadas no vôo?

8. Dos 468 homens que trabalham numa fábrica, 312 são casados. Qual é a razão (expressa sob a forma mais simples) do número de casados para o número de homens que trabalham nessa fábrica?

9. Um mapa do Brasil é desenhado numa escala de 10cm para 300km. Exprimir essa escala como *razão*. (NOTA: Lembrar que 300km = 300.000m = 30.000.000cm.)

10. Carlos tem 1,71m de altura e o seu irmão menor, 1,14m. Qual é a razão da altura de Carlos para a de seu irmão?

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 10

1. Você já deve ter ouvido falar que uma molécula de água é composta de dois átomos de hidrogênio e de um átomo de oxigênio. Logo, na molécula de água a razão entre o número de átomos de hidrogênio e o número de átomos de oxigênio é 2 : 1.

Responda agora:

1.º) Em 1.000 moléculas de água quantos átomos de hidrogênio existem?

2.º) Qual a razão entre o número de átomos de hidrogênio e o número de átomos de oxigênio em 2.000 moléculas de água?

2. Verifique se tôdas as razões expressas por $N : (4 \times N)$, quando você substitui N por qualquer número natural, são iguais e determine a forma mais simples.

3. Suponha que a represente qualquer número racional diferente de zero. Será que as razões representadas por $(5 \times a) : (3 \times a)$ são *iguais?*

4. Você também pode exprimir razões entre números expressos em outros sistemas de numeração para o sistema decimal, como também números que exprimem medidas em sistemas não-decimais.

Exemplo-modêlo: Exprimir a razão $3_5 : 12_5$ no sistema decimal.

Temos: $3_5 = 3_{10}$

$12_5 = 1 \times 5^1 + 2 \times 5^0 = 1 \times 5 + 2 \times 1 = 5 + 2 = 7_{10}$

Logo: $3_5 : 12_5 \iff 3_{10} : 7_{10}$ ou $3 : 7$

Exprima você as razões:

$23_5 : 14_5$; $15_7 : 12_7$; $7_8 : 65_8$; $1_2 : 1_2$; $3_6 : 4_6$; $5_{12} : 5_{12}$

na base decimal.

5. Qual é a razão entre 10 dias e 1 ano?

Temos: 10 : 360 ou 1 : 36.

2. *Aplicações da noção de razão na Geometria Prática*

Dois *segmentos* $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, por exemplo, são chamados *comensuráveis* se existe um terceiro segmento $\overline{MN}$ do qual êles sejam *múltiplos.*

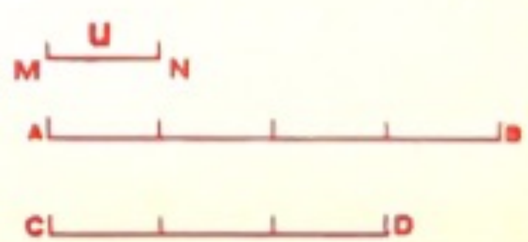
Indicando por $m(\overline{AB})$ e $m(\overline{MN})$, respectivamente, as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$, se, por exemplo:

$$m(\overline{AB}) = 4 \times m(\overline{MN})$$

então $\overline{AB}$ diz-se *múltiplo* de $\overline{MN}$

e se: $$m(\overline{CD}) = 3 \times m(\overline{MN})$$

então $\overline{CD}$ diz-se *múltiplo* de $\overline{MN}$



Como $m(\overline{MN})$ é uma *medida comum* aos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *comensuráveis* e temos as seguintes *razões:*

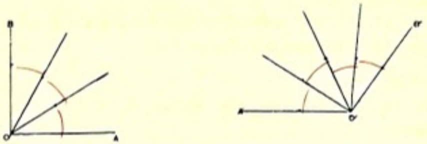
entre os *segmentos*. $\begin{cases} \overline{AB} \text{ e } \overline{CD} \text{ é } 4:3 & \text{ou} \quad \dfrac{m(\overline{AB})}{m(\overline{CD})} = \dfrac{4}{3} \\ \overline{CD} \text{ e } \overline{AB} \text{ é } 3:4 & \text{ou} \quad \dfrac{m(\overline{CD})}{m(\overline{AB})} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Usando a notação simplificada, isto é: $m(\overline{AB}) = AB$ e $m(\overline{CD}) = CD$, onde AB e CD indicam *números*, temos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad \frac{CD}{AB} = \frac{3}{4}$$

De modo análogo, para outras *grandezas geométricas de mesma espécie*, você tem:

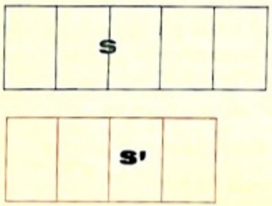
para *ângulos:*



a *razão* entre os ângulos $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$ é $3:4$

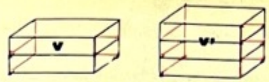
$$\text{ou também} \quad \frac{A\hat{O}B}{A'\hat{O}'B'} = \frac{3}{4}$$

para *superfícies:*



a *razão* entre S e S' é $5:4$ ou $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{5}{4}$

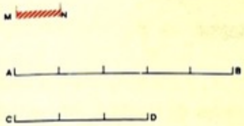
para *volumes:*



a *razão* entre V e V' é $2:3$ ou $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{2}{3}$

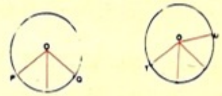
TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 11

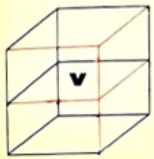
Determinar as seguintes *razões* entre:



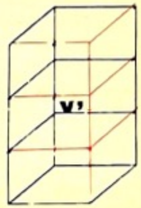
1.ª) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$
2.ª) $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$

1.ª) $\widehat{PQ}$ e $\widehat{TU}$
2.ª) $\widehat{TU}$ e $\widehat{PQ}$
3.ª) $P\hat{O}Q$ e $T\hat{O}'U$
4.ª) $T\hat{O}'U$ e $P\hat{O}Q$





1.ª) V e V'
2.ª) V' e V



3. *Razões especiais: velocidade, densidade demográfica, densidade específica*

Há razões que, por confrontarem medidas de uso corrente, recebem nomes especiais. Tais razões serão estudadas por intermédio de exemplos práticos.

1. Velocidade:

O automóvel de papai percorreu 420km em 6h. Quantos quilômetros foram percorridos, em média, por hora?

A comparação será feita com unidades de medidas diferentes: *comprimento* e *tempo*. Então, a *razão* será:

420km : 6h ou $\frac{420}{6} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. (lê-se: "*70 quilômetros por hora*")

A razão *quilômetro por hora* $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ é denominada **velocidade** (média) com que o automóvel fêz a viagem. Você poderia dizer também que o automóvel percorreu:

140km em 2h

ou 280km em 4h . . .

porque a razão (agora *velocidade*) é a mesma.

2. Densidade demográfica:

Suponha que um certo país tenha uma população de 39.200.000 habitantes ocupando uma superfície de 560.000km^2 e um outro país tenha uma população de 5.760.000 habitantes ocupando 80.000km^2 de superfície.

Para determinar qual o país *mais densamente povoado*, você vai usar uma *razão especial*, chamada **densidade de população,** que exprime o *número de habitantes de cada país por quilômetro quadrado.* Logo:

densidade de população do primeiro país:

$$39.200.000 \text{ hab.} : 560.000\text{km}^2 \text{ ou } \frac{39.200.000}{560.000} \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2} = 70 \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2}$$

densidade de população do segundo país:

$$5.760.000 \text{ hab.} : 80.000\text{km}^2 \text{ ou } \frac{5.760.000}{80.000} \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2} = 72 \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2}$$

portanto, o segundo país é mais densamente povoado.

Nota: Você pode encontrar como densidade de população de um país um número que não seja natural. Êste fato não deve trazer cuidados, pois o resultado, sendo um número racional, visa a confrontar *densidades de população* de diversos países. Assim, o Brasil, por exemplo, que ocupa uma superfície de $8.511.189\text{km}^2$ (é um dos maiores países do mundo!), apresentava pelo recenseamento de 1960 (você sabe que a "contagem" da nossa população é feita de dez em dez anos) uma população de 70.528.625 habitantes. A densidade de população brasileira, em 1960, era então de:

$$\frac{70.528.625}{8.511.189} \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2} \simeq 8,3 \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2}$$

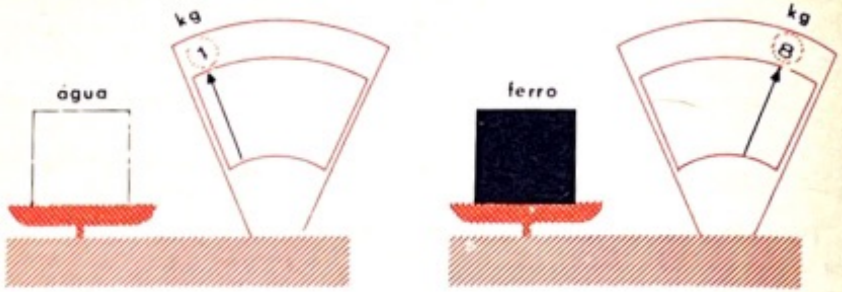
3. Densidade específica (ou massa específica):

Corpos de volumes iguais podem "pesar"(*) diferentemente. Assim, por exemplo, se você confrontar os volumes de 1dm^3 de água e de 1dm^3

(*) Convém relembrar os conceitos de pêso e de massa (Matemática — Curso Moderno — Volume 1).

de ferro, que têm o mesmo volume, você notará que $1dm^3$ de ferro pesa quase oito vêzes $1dm^3$ de água (cêrca de 7,9 vêzes mais).

Diz-se, então, que o ferro é *mais denso* que a água.



A água é geralmente usada nesse confronto porque $1dm^3$ de água pesa aproximadamente 1kg. Surge, assim, a **densidade** de um corpo qualquer como uma *razão especial de quilogramas por decímetro cúbico.*

Temos, portanto:

densidade da água: $1kg : 1dm^3$ ou $1 \frac{kg}{dm^3}$

densidade do ferro: $7{,}9kg : 1dm^3$ ou $7{,}9 \frac{kg}{dm^3}$

Com a redução de unidades que você já conhece, pode-se exprimir a densidade de um corpo também em $\frac{g}{cm^3}$ (grama por centímetro cúbico).

Você sabia que:

a densidade do ouro é $19{,}3 \frac{g}{cm^3}$? Isto é, cada cm^3 de ouro pesa 19,3g.

a densidade do álcool é $0{,}8 \frac{g}{cm^3}$? Portanto, o álcool é *menos denso* que a água.

Como exercício prático você pode calcular fàcilmente o pêso, em toneladas, de um bloco de $500dm^3$ de aço, conhecendo a densidade do aço, que é de $7{,}6 \frac{kg}{dm^3}$. Assim:

se $1dm^3 \Longleftrightarrow 7{,}6kg$, então $500dm^3 \Longleftrightarrow 500 \times 7{,}6kg = 3.800kg = 3{,}8t$

ATENÇÃO

Embora se diga 70km por hora $\left(70 \frac{km}{h}\right)$, 72 hab. por km^2 $\left(72 \frac{hab.}{km^2}\right)$ ou 7,9kg por dm^3 $\left(7{,}9 \frac{kg}{dm^3}\right)$, estas expressões referem-se efetivamente a *razões*, pois a primeira significa 70km : 1h, a segunda, 72 hab. : $1km^2$ e a terceira, $7{,}9kg : 1dm^3$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 12

1. Um trem percorre 220km em duas horas e meia. Qual é a sua *velocidade* média em $\frac{km}{h}$?
2. A *velocidade* média com que um automóvel vai de São Paulo à Guanabara é de $71 \frac{km}{h}$. Sabendo-se que levou 6 horas para efetuar a viagem, qual foi a distância percorrida?
3. Qual é a *velocidade*, em km/h, de um transatlântico que desenvolve 33 *nós horários?* (Nota: Cada nó horário equivale a 1.852m por hora).
4. Determinar qual dos seguintes países era mais densamente povoado em 1960, sabendo-se que:

	ÁREA	POPULAÇÃO
Itália	$287.000km^2$	49.100.000 hab.
Japão	$450.000km^2$	93.500.000 hab.
México	$1.987.000km^2$	34.300.000 hab.

5. Um número fracionário pode representar a *densidade demográfica* de um país? Por quê?
6. Determinar a *densidade específica* de um corpo, do qual 7,2kg ocupam um volume de $36dm^3$.
7. Conhecida a densidade do álcool, que é de $0{,}8g/cm^3$, qual o melhor negócio: vender o álcool a NCr$ 0,65 o litro ou a NCr$ 0,70 o quilograma?
8. Determinar a densidade do mercúrio (por sinal é o mais denso dos líquidos), sabendo-se que uma porção de $2{,}500dm^3$ pesa 34,750kg.
9. Preencha os claros, a fim de tornar verdadeira a seguinte tabela referente ao aço:

kg	15,2	...	76	..	...
dm^3	2	5	...	2,5	1

10. Você sabe que a densidade específica da água é $1g/cm^3$ (por isso é usada como unidade legal de densidade). Um corpo qualquer só flutuará na água se a sua densidade específica fôr *menor* que a da água. Na tabela abaixo você tem dados relativos a três corpos:

corpo A: $2dm^3$ pesam 1,5kg
corpo B: $5cm^3$ pesam 12g
corpo C: $1m^3$ pesa 2t

Qual dêsses corpos flutuará na água? Tal corpo poderia ser o gêlo? A cortiça? Por quê?

Proporções

4. *Proporção*

Considere duas *razões iguais*, por exemplo:

$$3:4 \quad \text{e} \quad 6:8$$

então a sentença matemática: $3:4 = 6:8$ é *verdadeira* e lemos: "3 está para 4 assim como 6 para 8". Tal sentença é denominada proporção. Logo:

> *Proporção* é a sentença matemática que indica a igualdade de duas razões.

Os têrmos que figuram numa proporção recebem nomes especiais:

$$\underbrace{3 : \underbrace{4 = 6}_{\text{meios}} : 8}_{\text{extremos}}$$

Quando a proporção está escrita sob a forma:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

os *extremos* são o primeiro e o quarto têrmos, na ordem da leitura, e os *meios*, o segundo e o terceiro têrmos.

Se $a:b$ e $c:d$ representarem duas *razões iguais*, então temos a proporção:

$$a:b = c:d \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

onde a e d são os *extremos* e b e c, os *meios*.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 13

1. Verificar quais das seguintes sentenças matemáticas são proporções. Colocar V no caso de ser verdadeira e F no caso de ser falsa:

1.ª) $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$ (V) 2.ª) $3:4 = 6:9$ (F)

3.ª) $1:2 = 5:10$ (V) 4.ª) $\frac{4}{2} = \frac{6}{4}$ (F)

2. Nomear os *extremos* e os *meios* das seguintes proporções:

1.ª) $4:2 = 6:3$ extremos: 4 e 3; meios: 2 e 6
2.ª) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ extremos: 3 e 12; meios: 4 e 9
3.ª) $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$ extremos: x e t; meios: y e z
4.ª) $\square : \triangle = \nabla : \bullet$ extremos: $\square$ e $\bullet$; meios: $\triangle$ e ∇

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — Grupo 14

1. Conclua você mesmo um processo prático para reconhecer se duas razões são iguais. Nas seguintes proporções, calcule o *produto dos extremos* e, a seguir, o *produto dos meios* e observe bem os resultados obtidos:

PROPORÇÃO	PRODUTO DOS EXTREMOS	PRODUTO DOS MEIOS
$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$	$2 \times 6 = \ldots$	$3 \times 4 = \ldots$
$8:4 = 6:3$	$8 \times 3 = \ldots$	$4 \times 6 = \ldots$
$2\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 14:1$	$\frac{7}{3} \times 1 = \ldots$	$\frac{1}{6} \times 14 = \ldots$
$\frac{20}{5} = \frac{12}{3}$	$20 \times 3 = \ldots$	$5 \times 12 = \ldots$

2. Agora preencha os claros abaixo, de acôrdo com os resultados que você obteve no Exercício 1:

PROPORÇÃO	PRODUTO DOS EXTREMOS	PRODUTO DOS MEIOS
$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$	$3 \times \ldots = \ldots$	$\ldots \times 6 = \ldots$
$20 : 10 = 4 : 2$	$\ldots \times \ldots = 40$	$10 \times \ldots = 40$
$\frac{7}{\ldots} = \frac{2}{4}$	$7 \times \ldots = \ldots$	$\ldots \times 2 = \ldots$
$\ldots : 5 = 2 : 1$	$\ldots \times 1 = \ldots$	$\ldots \times \ldots = 10$
$\frac{6}{3} = \frac{b}{a}$	$6 \times \ldots = \ldots \times \ldots$	$\ldots \times \ldots = \ldots \times b$
$\frac{1}{2} : \ldots = 8 : 16$	$\ldots \times \ldots = \ldots$	$\ldots \times \ldots = \ldots$

3. Escreva a conclusão que você tirou, depois de feitos os exercícios 1 e 2.
4. Dê exemplo de duas *razões iguais*. A seguir, forme com elas uma proporção. Verifique se vale a conclusão que você escreveu acima.
5. No lugar de x coloque um número que torne, cada uma das seguintes igualdades, uma *proporção:*

1.ª) $\frac{3}{x} = \frac{6}{4}$ 2.ª) $\frac{x}{5} = \frac{3}{15}$ 3.ª) $\frac{x}{4} = \frac{6}{8}$

4.ª) $\frac{7}{3} = \frac{14}{x}$ 5.ª) $\frac{x}{39} = \frac{2}{13}$ 6.ª) $\frac{1}{4} = \frac{x}{4}$

6. Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade: $\frac{x}{7} = \frac{3}{21}$? Indique o cálculo que você fêz.
7. Na proporção: $\frac{31}{7} = \frac{124}{x}$, qual o valor de x? Indique o cálculo.
8. Dada a proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ qual é a relação que dá o valor de a? E de b? E de c? E de d? Indique as operações que você deverá efetuar.

5. *Propriedade fundamental das proporções; propriedade recíproca*

Você já deve ter concluído, depois de fazer os Exercícios Exploratórios (Grupo 14), que:

"*em tôda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios*"

Isto é: se $3 : 4 = 6 : 8$, então $3 \times 8 = 4 \times 6$

Pode-se, agora, *justificar* porque em tôda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Consideremos, por exemplo, a proporção:

$$3 : 4 = 6 : 8$$

Pelo fato de serem *iguais* as razões $3 : 4$ e $6 : 8$, segue-se que são *equivalentes* as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ que as representam. E, se essas frações são equivalentes, então são iguais os produtos do numerador de uma pelo denominador da outra, ou seja:

$$3 \times 8 = 4 \times 6$$

que, na proporção dada são os extremos (3 e 8) e os meios (4 e 6).

Logo:

de $3 : 4 = 6 : 8$ segue-se que $3 \times 8 = 4 \times 6$

$$3 : 4 = 6 : 8 \implies 3 \times 8 = 4 \times 6$$

De um modo geral, isto é, usando uma proporção *qualquer*, cujos têrmos são representados por letras:

$$a : b = c : d \quad (a, b, c, d \neq 0)$$

e invocando a propriedade das frações equivalentes $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, temos:

$$a : b = c : d \implies a \times d = b \times c$$

Esta *implicação* permite enunciar a *propriedade fundamental* das proporções:

Em tôda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Recìprocamente, consideremos quatro números, por exemplo: 3, 4, 6 e 8, para os quais sabemos que: o produto do primeiro dêles (3) pelo quarto (8) é igual ao produto do segundo (4) pelo terceiro (6), isto é:

$$3 \times 8 = 4 \times 6 \quad \text{(ambos valem 24)}$$

Isto significa dizer que as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ são *equivalentes*, ou ainda que as *razões* do primeiro número para o segundo e a do terceiro para o quarto número são *iguais*.

Temos, assim, a *proporção:*

$$3 : 4 = 6 : 8$$

De um modo geral, e usando as considerações feitas para o exemplo, dados quatro números diferentes de zero: a, b, c e d, tais que:

$$a \times d = b \times c$$

então tem-se a proporção:

$$a : b = c : d$$

Logo:

$$a \times d = b \times c \implies a : b = c : d$$

Esta *implicação* permite, por sua vez, enunciar a ***propriedade recíproca:***

> **Se quatro números escritos numa certa ordem, todos diferentes de zero, são tais que o produto do primeiro pelo quarto é igual ao produto do segundo pelo terceiro, então os quatro números, nessa ordem, formam uma proporção.**

As duas *implicações* estudadas, a da propriedade fundamental e a da sua recíproca, podem ser escritas numa só relação — a de *equivalência*, que permite passar de uma para outra e vice-versa:

$$a : b = c : d \iff a \times d = b \times c$$

6. *Como "testar" uma proporção. Aplicações*

De agora em diante, para você "testar" se uma dada sentença é uma *proporção*, basta aplicar as propriedades estudadas.

Assim:

$3 : 5 = 12 : 20$ é uma *proporção*, pois: $3 \times 20 = 5 \times 12$

5×12

3×20

$3 : 6 = 1 : 4$ não é uma *proporção*, pois: $3 \times 4 \neq 6 \times 1$, indica que a sentença é falsa.

Também:

$\dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10}$ é uma *proporção* $(4 \times 10 = 5 \times 8)$

$\dfrac{12}{6} = \dfrac{5}{2}$ é uma *sentença falsa* $(12 \times 2 \neq 6 \times 5)$

Então:

$$3 : 5 = 12 : 20 \iff 3 \times 20 = 5 \times 12$$

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} \iff 4 \times 10 = 5 \times 8$$

Como aplicação da propriedade fundamental, você pode determinar o valor de qualquer têrmo de uma proporção, conhecendo os valôres dos outros três. Nesse caso, diz-se que se está "resolvendo" a proporção. Seja, por exemplo, a proporção:

$$3 : 4 = 12 : \square$$

onde $\square$ representa o número que se procura e que tornará a sentença verdadeira. Então:

$$\begin{aligned} 3 : 4 = 12 : \square \iff 3 \times \square &= 4 \times 12 \\ \text{ou} \quad 3 \times \square &= 48 \\ \square &= 48 : 3 \text{ ("desfazendo" a multiplicação)} \\ \text{ou} \quad \square &= 16 \end{aligned}$$

Logo: $3 : 4 = 12 : 16$ é a proporção procurada.

É natural que $\square$ (ou qualquer outro símbolo) pode ser qualquer dos quatro têrmos de uma proporção. No caso de $\square$ figurar como último, isto é, o quarto na ordem, como no exemplo acima, êle é chamado de *quarta proporcional* dos três primeiros têrmos. Exemplos:

Resolver as seguintes proporções:

1.ª) $\square : 3 = 4 : 8$

Temos: $\square \times 8 = 3 \times 4$ ou $\square \times 8 = 12 \implies \square = 12 : 8$

ou $\square = \dfrac{12}{8} = 1{,}5$

2.ª) $\frac{16}{x} = \frac{4}{3}$

$16 \times 3 = x \times 4$ ou $48 = x \times 4 \implies x = 48 : 4$ ou $x = 12$

3.ª) $42 : 6 = n : 6$

Temos: $42 \times 6 = 6 \times n$ ou $252 = 6 \times n \implies n = 252 : 6$ ou $n = 42$

Guarde a seguinte *técnica operatória* para resolver uma proporção:

"Para se determinar o têrmo desconhecido de uma proporção, conhecidos os outros três, basta:

dividir o produto dos meios pelo extremo conhecido, quando se procura um extremo;

dividir o produto dos extremos pelo meio conhecido, quando se procura um meio."

Exemplos:

$$\frac{4}{9} = \frac{8}{x} \implies x = \frac{9 \times 8}{4} = 18$$

$$a : x = c : d \implies x = \frac{a \times d}{c}$$

$$0{,}3 : 2 = n : 4 \implies n = \frac{0{,}3 \times 4}{2} = 0{,}6$$

$$\frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{5} \implies y = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{5} = \frac{\frac{3}{8}}{5} = \frac{3}{40}$$

Pode-se *resolver* uma proporção apresentada sob forma de problema. Assim:

Dados os três números a, b e c, determinar, se existir, um número x tal que a, b, c e x formem, nesta ordem, uma proporção. Devemos ter:

$$a : b = c : x \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

e se b e x não forem nulos, teremos a igualdade: $a \times x = b \times c$ ou $x = \frac{b \times c}{a}$ (se $a \neq 0$).

7. *Proporções especiais. Médias usuais*

Proporção contínua: quando os meios da proporção são iguais entre si. Exemplo:

$2 : 4 = 4 : 8$ (há uma "continuidade" do meio 4)

Numa proporção contínua o meio comum é denominado *média proporcional* ou *média geométrica* dos extremos. Portanto, 4 é a *média proporcional* de 2 e 8.

O quarto têrmo de uma proporção contínua é chamado de *terceira proporcional*. Assim, por exemplo, diz-se que 8 é a *terceira proporcional depois* de 2 e 4.

O cálculo da média proporcional de dois números reduz-se ao cálculo do valor do meio comum de uma proporção contínua. Exemplo:

Calcular a média proporcional dos números 2 e 8. Temos:

$2 : x = x : 8 \iff 2 \times 8 = x \times x$

ou $16 = x^2 \iff x = \sqrt{16} = 4$ ("desfazendo a potenciação")

Técnica operatória: A média proporcional (ou média geométrica) de dois números, que será indicada por m_p, é a raiz quadrada do produto dêles. Assim:

m_p de 2 e 8 $\iff m_p = \sqrt{2 \times 8}$ ou $\sqrt{16} = 4$

m_p de a e $b \iff m_p = \sqrt{a \times b}$

Outras médias usuais: *média aritmética simples* e *média aritmética ponderada*.

Você ouve freqüentemente expressões do tipo:

1. Qual foi a *média* de "gols" marcados por Pelé no último Campeonato Paulista de Futebol?

2. A *média* final com que Sílvia passou para a 2.ª Série Ginasial foi maior que a minha, porém o "pêso" das notas no Colégio onde ela estuda é diferente do empregado no meu.

A expressão *média*, do Exemplo 1, refere-se à *média aritmética simples*, definida como *o quociente da soma dos valôres dados pelo número dêles.* Indicação: m_a. Exemplos:

Calcular a média aritmética de:

1.º) 7, 12 e 23 Temos: $m_a = \dfrac{7 + 12 + 23}{3} = \dfrac{42}{3} = 14$

2.º) 3,4 e 6,8 $m_a = \dfrac{3{,}4 + 6{,}8}{2} = \dfrac{10{,}2}{2} = 5{,}1$

3.º) a, b, c e d $m_a = \dfrac{a + b + c + d}{4}$

Chama-se *média aritmética ponderada* de vários números, aos quais se atribuem determinados "pesos" (que indicam o número de vêzes que tais números figuram), ao:

quociente da soma dos produtos, — que se obtêm multiplicando cada número pelo "pêso" correspondente, — pela soma dos pesos.

Indicação: $m_{a.p}$. Exemplos:

1.º) Sabendo-se que os pesos relativos às notas obtidas em qualquer disciplina, num certo Colégio, são: 1 para o 1.º bimestre, 2 para o 2.º bimestre, 2 para o 3.º bimestre e 2 para o 4.º bimestre, pede-se:

1. a média aritmética ponderada obtida em Português por um aluno que conseguiu as seguintes notas: 4, 5, 4 e 7, respectivamente nos 1.º, 2.º, 3.º e 4.º bimestres;
2. se êsse aluno passou em Português, sem fazer o exame final, sendo 5 a nota mínima para ficar livre de tal exame;

Temos: 1. $m_{a.p} = \dfrac{4 \times 1 + 5 \times 2 + 4 \times 2 + 7 \times 2}{1 + 2 + 2 + 2} =$

$$= \frac{4 + 10 + 8 + 14}{7} = \frac{36}{7} \simeq 5{,}1 \text{ (aproximação 0,1).}$$

2. passou ("raspando" . . .)

2.º) Supondo que na laranjada feita na Cantina foram empregadoe 3 litros de suco de laranja a NCr\$ 2,42 o litro e 2 litros ds suco de laranja a NCr\$ 2,67 o litro, qual o preço do litro da *mistura* obtida?

Temos: $m_{a.p} = \dfrac{3 \times 2{,}42 + 2 \times 2{,}67}{3 + 2} = \dfrac{12{,}60}{5} = 2{,}52$

Logo: o litro da mistura custará NCr\$ 2,52.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 15

1. "Testar", usando a propriedade fundamental das proporções, quais das seguintes sentenças são *verdadeiras:*

1.ª) $1 : 2 = 5 : 10$
2.ª) $7 : 5 = 5 : 3$
3.ª) $\dfrac{3}{8} = \dfrac{6}{16}$
4.ª) $\dfrac{4}{4} = \dfrac{15}{15}$
5.ª) $0{,}5 : 6 = \dfrac{1}{3} : 4$
6.ª) $\square : 5 = \square : 5$
7.ª) $2 : \triangle = 4 : 2 \times \triangle$ (para $\triangle \neq 0$)
8.ª) $\dfrac{a}{2} = \dfrac{3 \times a}{6}$
9.ª) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x}$ (para $x \neq y$)
10.ª) $\bullet : 10 = 10 : \bullet$ (para $\bullet \neq 0$)

2. Completar as seguintes *igualdades*, supondo verdadeiras as sentenças que se apresentam sob a forma de proporção:

1.ª) $\dfrac{\perp}{\top} = \dfrac{\triangle}{\nabla} \iff \perp \times \nabla = \ldots \times \ldots$
2.ª) $\square : / = \circ : \backslash \iff \ldots \times \backslash = \ldots \times \circ$
3.ª) $\dfrac{\cup}{\cap} = \dfrac{\subset}{\supset} \iff \cup \times \ldots = \cap \times \ldots$
4.ª) $\square : /\!\!/ = /\!\!/ : \square \iff \ldots \times \ldots = \ldots \times \ldots$

3. *Resolver* as seguintes proporções, determinando o valor do têrmo desconhecido:

1.ª) $\square : 15 = 12 : 6$
2.ª) $\dfrac{1}{2} : x = 3 : 4$
3.ª) $\dfrac{0{,}01}{4} = \dfrac{\triangle}{1{,}2}$
4.ª) $0{,}4 : 2 = 18 : y$
5.ª) $\dfrac{2{,}3}{n} = \dfrac{3}{9}$
6.ª) $\left(3 + \dfrac{1}{2}\right) : \dfrac{11}{3} = \left(3 - \dfrac{1}{2}\right) : x$
7.ª) $\dfrac{\left(1 + \frac{2}{5}\right) \times 3}{x} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}}$
8.ª) $2 \times x : 5 = 10 : 1$
9.ª) $\dfrac{\square}{3} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2}$
10.ª) $\dfrac{3 \times \triangle}{4} = 5$

4. Determinar o valor de x nas seguintes proporções:

1.ª) $x : a = b : d$ $(a \neq 0 \text{ e } d \neq 0)$
2.ª) $n : x = m : p$ $(p \neq 0)$
3.ª) $a : x = b : d$ $(d \neq 0)$
4.ª) $m : p = n : x$ $(p \neq 0)$

5. Dizer quando é que uma proporção é *contínua.*

6. Tornar *contínuas* as proporções provindas das seguintes sentenças:

1.º) $4 : 8 = \ldots : 16$ 3.º) $a : x = \ldots : b \quad (b \neq 0)$

2.º) $9 : 6 = \ldots : \ldots$ 4.º) $x : a = \ldots : b \quad (a \neq 0 \text{ e } b \neq 0)$

7. Determinar a *média proporcional* (ou média geométrica) dos seguintes pares de números (aproveite para recordar a extração de raiz quadrada ...):

1.º) 4 e 9 2.º) 24 e 6 3.º) 6,3 e 0,7 4.º) m e n

8. Calcular a *média aritmética* (subentende-se *simples*) dos seguintes conjuntos de números ou expressões:

1.º) 3, 8, 2, 15 4.º) $2 \times \square$, $4 \times \square$

2.º) $\frac{2}{3}$, 5, $\frac{4}{3}$, 5 5.º) x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$

3.º) 3,6; $2\frac{1}{3}$; 0,9 6.º) $\square$, $\triangle$

9. As minhas notas bimestrais em Matemática, no ano passado, foram:

1.º bimestre (pêso 2): 6; 2.º bimestre (pêso 2): 5; 3.º bimestre (pêso 3): 8; 4.º bimestre (pêso 3): 7. Que média consegui em Matemática?

10. Misturam-se 3 copos de groselha a NCr$ 0,30 o copo e 12 copos de água mineral a NCr$ 0,10 o copo. Qual o preço do copo de *mistura*?

Emprêgo das proporções para resolver problemas

As proporções podem ser empregadas, com êxito, na resolução de problemas que envolvem razões. Observe os seguintes exemplos:

1.º) A fotografia que tirei de nossa classe tem 9cm de comprimento por 6cm de altura ("9 por 6"). Quero ampliá-la de forma que tenha 27cm de comprimento. Qual será a altura da ampliação?

Ora, a *razão* entre os comprimentos das duas fotografias é $9 : 27$ e esta razão deve ser conservada para as alturas. Representando, então, por x a altura procurada, a razão existente entre as alturas será: $6 : x$ e o problema é resolver a proporção:

$$9 : 27 = 6 : x$$

Logo: $x = \frac{27 \times 6}{9} = 18$ e a altura da ampliação será: 18cm.

2.º) A *escala* da planta de uma casa é de 1cm para 100cm (isto é, cada cm da planta corresponde a 100cm ou 1m de medida real). Quais são as dimensões de um quarto que na planta figura como 3cm por 4cm?

É fácil ver que a razão que compara as dimensões dos segmentos da planta e dos compartimentos da casa é: $1 : 100$. Se x representa uma das dimensões do quarto, a proporção que determinará o seu valor será:

$$1 : 100 = 3 : x \Longrightarrow x = \frac{100 \times 3}{1} = 300$$

Se y representa a outra dimensão, o seu valor será dado pela proporção:

$$1 : 100 = 4 : y \Longrightarrow y = \frac{100 \times 4}{1} = 400$$

Logo, as dimensões do quarto são: 3m por 4m.

3.º) Uma máquina produz pregos à razão de 10.000 em cada 12 horas de trabalho. Pergunta-se: *a*) nessa mesma razão, quantos pregos produzirá em 15 horas?; *b*) quantas horas necessitará para produzir 25.000?

Temos: *a*) $10.000 : 12 = x : 15 \Longrightarrow x = \frac{10.000 \times 15}{12} = 12.500$

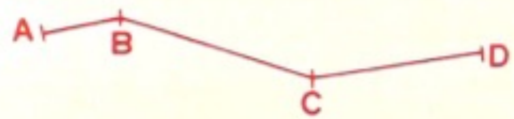
b) $10.000 : 12 = 25.000 : y \Longrightarrow y = \frac{12 \times 25.000}{10.000} = 30$

Logo: Em 15 horas produzirá *12.500 pregos* e necessitará *30 horas* para produzir 25.000.

PROBLEMAS DE FIXAÇÃO — GRUPO 16

1. Usando uma proporção, determinar o comprimento que deve possuir um cartão postal de altura igual a 12cm, sabendo-se que as dimensões dêsse cartão estão na razão 3 para 2.

2. O desenho representa uma estrada ligando as cidades *A*, *B*, *C* e *D*:



Se a escala do desenho é $1 : 100.000$, determinar em quilômetros as distâncias entre *A* e *B*, *B* e *C*, e *C* e *D*, sabendo-se que: $m(\overline{AB}) = 3\text{cm}$, $m(\overline{BC}) = 8\text{cm}$ e $m(\overline{CD}) = 5\text{cm}$.

3. Um trem percorre 140km em $1\frac{3}{4}$ horas. Quanto tempo levará para percorrer 560km na mesma *razão* (velocidade)? (Sugestão: reduzir horas a minutos)

4. Use uma proporção para resolver os seguintes problemas (verifique o acêrto de seu trabalho, resolvendo-os por outros métodos que você já conhece):

   1.º) Qual o preço de 3 chocolates se cada um custa NCr$ 0,35?

   2.º) Se 4 lápis custam NCr$ 0,12, qual o preço de meia dúzia de lápis iguais?

5. Com a seguinte receita: 1 xícara de manteiga; $\frac{3}{4}$ de kg de açúcar; 8 ovos; 600g de farinha de trigo; $\frac{1}{2}$ kg de côco ralado e uma colher das de sopa de fermento, pode-se fazer 20 "forminhas" de doce. Pergunta-se:

   a) Qual seria uma receita na razão 4 : 1?

   b) Quantas "forminhas" seriam feitas pela nova receita?

   c) Se você quisesse 30 "forminhas", quanto necessitaria de cada um daqueles ingredientes?

Transformações de uma proporção

Você sabe que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c$

Utilizando a propriedade comutativa da multiplicação **(p.c.m.)**, pode-se escrever:

$a \times d = b \times c$ das seguintes maneiras: $\begin{cases} d \times a = b \times c \\ a \times d = c \times b \\ d \times a = c \times b \end{cases}$

Qualquer uma das novas igualdades conduzirá, pela propriedade fundamental, a uma *nova proporção* denominada **transformada** da proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Então, de:

(1) $d \times a = b \times c \iff \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ obtemos uma *transformada* de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, de *extremos permutados;*

(2) $a \times d = c \times b \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ a *transformada* de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é, agora, de *meios permutados;*

(3) $d \times a = c \times b \iff \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ obtemos uma *transformada* de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ de *razões inversas.*

Portanto, dada uma proporção, você pode *transformá-la* numa outra se:

1.º) *permutar* os seus *extremos;* 2.º) *permutar* seus *meios;* 3.º) substituir cada uma das razões pela respectiva *inversa;* 4.º) aplicar a *simetria* da igualdade nas anteriores.

Simbòlicamente, sendo *a*, *b*, *c* e *d* diferentes de zero, podem existir simultâneamente as igualdades:

$$a \times d = b \times c \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \iff \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

$$a \times d = b \times c \iff \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \iff \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \iff \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \iff \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Exemplo de aplicação:

Transformar a proporção: 3 : 4 = 6 : 8, em novas proporções, permutando seus *extremos*, seus *meios* e *invertendo* suas razões.

			Teste
Temos:	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$	(proporção dada)	$\iff 3 \times 8 = 4 \times 6$
Permutando os extremos:	$\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$	(transformada)	$\iff 8 \times 3 = 4 \times 6$
Permutando os meios:	$\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$	(transformada)	$\iff 3 \times 8 = 6 \times 4$
Invertendo as razões:	$\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$	(transformada)	$\iff 4 \times 6 = 3 \times 8$

e, aplicando a *simetria* da igualdade nas quatro proporções anteriores:

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4} \iff 6 \times 4 = 8 \times 3$$

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} \iff 6 \times 4 = 3 \times 8$$

$$\frac{4}{8} = \frac{3}{6} \iff 4 \times 6 = 8 \times 3$$

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3} \iff 8 \times 3 = 6 \times 4$$

Você ainda pode estudar *transformações* que envolvem *operações*. Seja, por exemplo, a proporção:

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$$

Somando 1 aos dois membros da igualdade, vem:

$$\frac{4}{3} + 1 = \frac{8}{6} + 1 \quad \text{ou} \quad \frac{4+3}{3} = \frac{8+6}{6}$$

Logo: $$\boxed{\frac{4}{3} = \frac{8}{6}} \iff \boxed{\frac{4+3}{3} = \frac{8+6}{6}}$$

E, *subtraindo* 1 dos dois membros:

$$\boxed{\frac{4}{3} = \frac{8}{6}} \iff \boxed{\frac{4-3}{3} = \frac{8-6}{6}}$$

Como exercício, transforme você, a seguir, as seguintes proporções preenchendo corretamente os claros:

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{15} \iff \frac{4+\ldots}{5} = \frac{12+\ldots}{15}$$

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} \iff \frac{9-\ldots}{3} = \frac{12-\ldots}{4}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} \iff \frac{5+\ldots}{\ldots} = \frac{10+\ldots}{\ldots}$$

Partindo da proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (com $b \neq 0$ e $d \neq 0$) e somando 1 aos dois membros (ou subtraindo 1, no caso de $a > b$ e $c > d$), encontraremos os resultados:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \begin{cases} \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d} \\ \\ \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d} \end{cases} \quad \text{que permitem dizer:}$$

"Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então a soma (ou diferença) dos dois primeiros têrmos está para o segundo têrmo assim como a soma (ou a diferença) dos dois últimos está para o quarto têrmo."

Observação: As transformações que conduzem uma proporção a novas proporções, quando se somam (ou se subtraem) os dois primeiros e os dois últimos têrmos de uma proporção, auxiliam o *cálculo*, porém são inúteis de serem "decoradas" como resultados, pois o IMPORTANTE é você compreender como tais transformadas são obtidas.

Quer conhecer outra *transformação* de uma proporção? Seja a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Permutando os meios, vem: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ e, transformando de acôrdo com o resultado enunciado acima, temos: $\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$ e $\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$; permutando os meios, outra vez, vem: $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ e $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$ e, como: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, você pode escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \begin{cases} \dfrac{a \pm c}{b \pm d} = \dfrac{a}{b} \\ \\ \dfrac{a \pm c}{b \pm d} = \dfrac{c}{d} \end{cases} \quad \text{que permitem dizer:}$$

"Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então a soma (ou a diferença) dos antecedentes está para a soma (ou a diferença) dos conseqüentes, assim como qualquer antecedente está para o seu conseqüente."

Confrontando os resultados obtidos ou permutando, convenientemente, os meios ou os extremos, você poderá chegar a outras transformadas, como por exemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Através das operações *multiplicação* e *divisão*, *potenciação* e *radiciação* também se pode transformar uma proporção em *novas proporções*. São bons exercícios para você fazer. Tente alguns dêles.

À guisa de apresentação será feito um *resumo* das transformações mais usuais, obtidas da proporção: $a : b = c : d$. É bom guardá-lo, pois será útil quando forem introduzidas "estruturas" análogas mais tarde (sistemas de duas variáveis).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \begin{cases} \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b} \text{ e } \dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{a}{b} \quad (a>c \text{ e } b>d) \\[2mm] \dfrac{a \times c}{b \times d} = \dfrac{a^2}{b^2} \text{ e } \dfrac{a:c}{b:d} = \dfrac{1}{1} \\[2mm] \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{c^2}{d^2} \text{ e } \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} \end{cases}$$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — GRUPO 17

1.º) Os volumes de dois cubos estão entre si assim como 3 está para 4. Calcular o volume de cada cubo sabendo-se que a soma dêsses volumes é $21dm^3$.

Se os volumes procurados forem representados, respectivamente, por a e b, então o problema se traduzirá nas seguintes *sentenças matemáticas:*

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{4} \\ a + b = 21 \end{cases}$$

A *transformação* a ser aplicada na proporção: $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, é a que diz respeito à "... *soma* dos dois primeiros...". Logo:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \iff \frac{a+b}{b} = \frac{3+4}{4} \iff \frac{21}{b} = \frac{7}{4} \implies b = \frac{21 \times 4}{7} = 12$$

Como a *soma* é 21, vem: $a = 21 - b$ ou $a = 21 - 12 = 9$

Os volumes dos cubos são, portanto, respectivamente: $9dm^3$ e $12dm^3$

$$\text{Prova: } \begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{9}{12} = \boxed{\dfrac{3}{4}} \\[2mm] a + b = 9 + 12 = \boxed{21} \end{cases}$$

2.º) Calcular dois números sabendo-se que a diferença entre êles é 20 e a razão $7:3$.

As *sentenças matemáticas* correspondentes são: $\begin{cases} a - b = 20 \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{7}{3} \end{cases}$

Agora, a *transformação* é a "... *diferença* dos dois primeiros..." e o cálculo:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{7-3}{3} \iff \frac{20}{b} = \frac{4}{3} \implies b = \frac{20 \times 3}{4} = 15$$

$a = 20 + 15 = 35$. Logo: os números são $\boxed{35}$ e $\boxed{15}$. Faça a *verificação.*

3.º) Determinar x e y na proporção: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$, sabendo-se que $x + y = 28$.

Temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} \\ x + y = 28 \end{cases} \quad \text{e a } \textit{transformada} \text{ a ser empregada é:}$$

$$\frac{x+y}{3+4} = \frac{x}{3} \iff \frac{28}{7} = \frac{x}{3} \implies x = \frac{28 \times 3}{7} = 12. \text{ Portanto: } y = 28 - x = 28 - 12 = 16$$

Logo: $x = \boxed{12}$ e $y = \boxed{16}$. Verifique você mesmo êsses resultados.

4.º) Quais os dois números que estão na razão $4:5$ e cujo produto é 180?

Temos:

$$\textit{sentenças matemáticas} \begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{5} \\ a \times b = 180 \end{cases}$$

Permutando os *meios* da proporção: $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ vem $\frac{a}{4} = \frac{b}{5}$ e *transformando-a*, pelo emprêgo da operação *multiplicação* (veja o *resumo*), obtemos:

$$\frac{a \times b}{4 \times 5} = \frac{a^2}{4^2} \iff \frac{180}{20} = \frac{a^2}{16} \implies a^2 = \frac{180 \times 16}{20} = 144$$

$a^2 = 144 \implies a = \sqrt{144} = 12$ ("desfazendo" a potenciação) e $b = 180 : 12 = 15$

Logo: os números procurados são: $\boxed{12}$ e $\boxed{15}$. Prova: $\begin{cases} \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5} \\ 12 \times 15 = 180 \end{cases}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 18

1. *Transformar* as seguintes proporções:

1.º) $5 : 3 = 10 : 6$ — *permutando os extremos*

2.º) $\frac{16}{12} = \frac{8}{6}$ — *permutando os meios*

3.º) $x : y = z : t$ — *invertendo as razões* $(x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0,\ t \neq 0)$

4.º) $0{,}5 : 4 = 1 : 8$ — *permutando os extremos*

5.º) $\frac{49}{7} = \frac{7}{1}$ — *permutando os meios*

6.º) $4 : 1 = 2 \ \frac{1}{2}$ — *invertendo as razões*

2. Supostas verdadeiras as seguintes sentenças, transformar as proporções que elas indicam:

1.ª) $\frac{\perp}{\top} = \frac{\triangle}{\nabla}$ *invertendo as razões*

2.ª) $\square : / = \bigcirc : \backslash$ *permutando os meios*

3.ª) $\frac{\cup}{\cap} = \frac{\subset}{\supset}$ *permutando os extremos*

4.ª) $\square : /\!\!/ = /\!\!/ : \square$ *invertendo as razões*

3. Calcular os valôres de a e b, nas seguintes proporções:

1.ª) $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$ onde $a + b = 33$

2.ª) $a : b = 5 : 2$ " $a - b = 6$

3.ª) $a : 12 = b : 32$ " $a + b = 11$

4.ª) $\frac{9}{a} = \frac{3}{b}$ " $a - b = 24$

5.ª) $\frac{7}{4} : a = 0{,}5 : b$ " $a - b = 1{,}25$

6.ª) $\frac{a}{b} = 0{,}9$ " $a + b = 3{,}8$

7.ª) $\frac{a}{4} = \frac{b}{5}$ " $a \times b = 180$

8.ª) $a : 5 = b : 8$ " $a \times b = 1.000$

4. Calcular x e y, que participam das seguintes sentenças matemáticas:

1.ª) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{5} \\ x + y = 49 \end{cases}$ 2.ª) $\begin{cases} x - y = 6 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{cases}$ 3.ª) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \\ x \times y = 135 \end{cases}$ 4.ª) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \\ x \times y = 12 \end{cases}$

5. As áreas de dois retângulos estão entre si como 3 está para 4. Calcular a área de cada retângulo, sabendo-se que a soma delas é $42m^2$.

6. A razão entre as capacidades de dois recipientes é de 2 : 3 e o menor dêles tem $12l$. Determinar, em litros, a capacidade do maior.

7. Decompor 42 em duas parcelas tais que estejam na razão $\frac{3}{4}$ (Sugestão: chamar as parcelas de a e b e aplicar uma *transformação*, ... a da soma...).

8. Qual a fração equivalente à fração $\frac{7}{3}$ cuja diferença dos têrmos é igual a 16?

9. Um salão de festas, de forma retangular, tem a área de $1.000m^2$. Calcular as dimensões dêsse salão que estão na razão 5 : 8 (Sugestão: ... a transformação agora é a do *produto* ...).

10. A razão entre a base e a altura de um triângulo é de 7 para 4. A área dêsse triângulo é de $56m^2$. Calcular as medidas da base e da altura.

11. Os volumes de dois tambores de gasolina estão entre si como 2 está para 5. Calcular o volume de cada um, sabendo-se que a soma dêsses volumes é igual a $56dm^3$.

12. As dimensões de um retângulo de área igual a $48m^2$ estão na razão $1 : \frac{1}{3}$. Determinar as medidas dessas dimensões.

13. O produto de dois números é igual a 1.200 e um dêles vale três vêzes o outro (é o mesmo que dizer: a razão entre êles é de 3 : 1). Quais são êsses números?

14. Conhece-se o produto: 60, e o quociente: $\frac{3}{5}$ de dois números. Determinar êsses números.

15. O preço de um vaso é o quádruplo do preço de um outro vaso (é o mesmo que dizer: a *razão* entre êles é de 4 : 1). Se a diferença entre êsses preços é de NCr$ 1,20, qual o preço de cada vaso?

Segmentos proporcionais

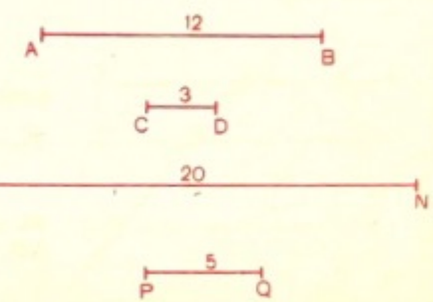
8. *Proporção de segmentos*

Os segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ dizem-se *proporcionais* nessa ordem, quando a *razão* dos dois primeiros *é igual* à *razão* dos dois últimos. Indicação:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$$

Diz-se também que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *proporcionais* aos segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ ou que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ estão em *proporção*.

Será que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ (da figura ao lado) estão em *proporção?* Sim, pois:



$\frac{AB}{CD} = \frac{12}{3} = 4$ e $\frac{MN}{PQ} = \frac{20}{5} = 4$

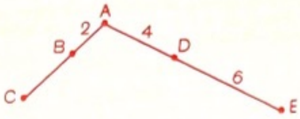
Logo: $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$

E os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{CD}$ e $\overline{PQ}$ seriam *proporcionais?* Responda.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 19

1. Quais os segmentos da figura que estão em *proporção?*

2. Na figura:



1.º) Se $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ são *proporcionais* a $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$, então $BC = \ldots$.

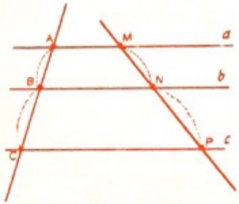
2.º) Se $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$ estão em *proporção*, será que $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ também estão em proporção? Por quê?

3. Para dizer que: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são proporcionais a $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$, escreve-se:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{PQ} = \frac{EF}{RS}$$

Complete, agora: se $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são proporcionais a $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$, respectivamente, e a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ é $2:3$, então a razão entre $\overline{CD}$ e $\overline{PQ}$ é . . . e a razão entre $\overline{RS}$ e $\overline{EF}$ é . . .

4. Guarde bem:



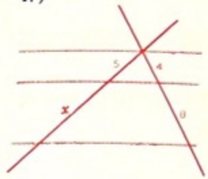
Se $a /\!/ b /\!/ c$ (isto é, as retas a, b e c são *paralelas*), então: $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$; é o famoso *Teorema de Tales.*

Vamos praticá-lo no caso de: $AB = 4$, $BC = 6$, $MN = 5$ e determinar o valor de NP.

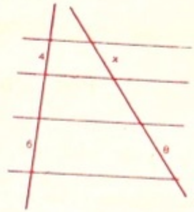
Temos: $\frac{4}{6} = \frac{5}{NP}$ (Tales) $\Longrightarrow NP = \frac{6 \times 5}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5$

5. Determinar, usando o Teorema de Tales, o valor de x em cada uma das seguintes figuras:

1.ª)

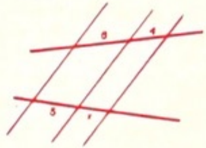


2.ª)



3.ª)

4.ª)



Por cento; porcentagem

9. *Por cento: razão de conseqüente 100*

É freqüente o uso da palavra "por cento" na maioria de nossas atividades. Assim, por exemplo, quando o professor de Matemática diz que: "Cinqüenta por cento dos alunos obtiveram *Bom* no último teste", você logo conclui que a *metade* da classe foi bem.

Isto, porque 50 é a *metade* de 100 e a razão empregada nessa afirmação é 50 : 100 ou $\frac{50}{100}$. Logo:

Uma razão na qual o conseqüente é 100 é denominada "por cento"

É usado o símbolo % (lê-se: "por cento") para indicar a razão cujo segundo têrmo (conseqüente) é 100. Então:

$$50 : 100 = 50\%$$

$$\frac{18}{100} = 18\%$$

$$11\frac{1}{2} : 100 = 11\frac{1}{2}\%$$

LEMBRETE AMIGO

$$50 : 100, \qquad \frac{50}{100}, \qquad 50\%$$

são *numerais* diferentes que exprimem a mesma razão (por cento)

Suponhamos que numa "bateria" de 100 perguntas fôssem registrados os seguintes resultados: *a*) 70 respostas *certas; b*) 18 respostas *erradas; c*) 12 *sem respostas.* Você poderá exprimir êsses resultados em têrmos de "por cento":

a) $\frac{70}{100} = 70\%$ *b*) $\frac{18}{100} = 18\%$ *c*) $\frac{12}{100} = 12\%$

e conhecer *tôdas* as possíveis respostas:

$$\frac{70}{100} + \frac{18}{100} + \frac{12}{100} = \frac{100}{100}$$

ou

$$70\% + 18\% + 12\% = 100\%$$

Observação interessante: Como $1 = \frac{100}{100} = 100\%$, você pode dizer que 100% é um outro *numeral* para o número *um!*

E para o número *dois?* Um outro numeral é 200%.

Seja agora uma classe experimental de 25 alunos constituída por 13 meninos e 12 meninas. Qual é a razão entre o número de meninos e o número de alunos dessa classe? Você já sabe que é $\frac{13}{25}$ ou *qualquer* fração equivalente, isto é:

$$\frac{13}{25} = \frac{26}{50} = \frac{39}{75} = \frac{52}{100} = \frac{65}{125} = \ldots$$

Portanto, se você quiser saber quanto "por cento" representam os meninos dessa classe, é fácil concluir que é 52%. E as meninas? Basta considerar a *razão* $\frac{12}{25}$ e procurar a razão igual de *conseqüente* 100.

Como 100 : 25 = 4, vem: $\frac{12}{25} = \frac{12 \times 4}{25 \times 4} = \frac{48}{100}$

o que dá 48% de meninas. É lógico que o total de alunos da classe é dado por:

$$\frac{13}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25}$$

ou

$$\frac{52}{100} + \frac{48}{100} = \frac{100}{100}$$

isto é:

$$52\% + 48\% = 100\%$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 20

1. Exprimir as seguintes razões em "por cento", usando o símbolo %. Se fôr necessário, exprimir antes uma razão igual de conseqüente 100:

1.ª) 28 : 100 Temos: 28%

2.ª) $\frac{40}{100}$ Temos: 40%

3.ª) $33\frac{1}{4} : 100$ Temos: $33\frac{1}{4}\%$

4.ª) $\frac{214}{100}$ Temos: 214%

5.ª) $\frac{4}{5}$ Temos: $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 20}{5 \times 20} = \frac{80}{100} = 80\%$

6.ª) 3 : 2 Temos: $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 50}{2 \times 50} = \frac{150}{100} = 150\%$

7.ª) 1 : 1 Temos: $\frac{1}{1} = \frac{1 \times 100}{1 \times 100} = \frac{100}{100} = 100\%$

8.ª) 315 : 1.000 Temos: $\frac{315}{1.000} = \frac{315 : 10}{1.000 : 10} = \frac{31,5}{100} = 31,5\%$

2. Exprimir os seguintes "por cento" como razões, sob a forma mais simples:

1.ª) 25% Temos: $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ portanto: 25% = 1 : 4

2.ª) 120% Temos: $\frac{120}{100} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ portanto: 120% = 6 : 5

3.ª) 0,8% Temos: $\frac{0,8}{100} = \frac{8}{1.000} = \frac{1}{125}$ portanto: 0,8% = 1 : 125

4.ª) 44,5% Temos: $\frac{44,5}{100} = \frac{445}{1.000} = \frac{89}{200}$ portanto: 44,5% = 89 : 200

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 21

1. Nas 100 figurinhas que possuo, 30 são repetidas. Quanto "por cento" de figurinhas repetidas tenho?

2. Dos 400 operários daquela fábrica, 80 são mulheres. Quanto "por cento" representam as mulheres?

3. Uma classe de 50 alunos possui: 16 alunos com doze anos, 18 alunos com treze anos, 12 alunos com quinze anos e 4 com dezesseis anos. Dizer quantos "por cento" representam, respectivamente, os alunos com doze, treze, quinze e dezesseis anos.

4) Em nosso time de voleibol (seis efetivos e quatro suplentes) vale a seguinte classificação *por altura*: João é considerado "alto"; Rui, "médio"; Pedro, "médio"; Francisco, "baixo"; Paulo, "alto"; Paulo II, "baixo"; Nélson, "médio"; Antônio, "médio"; Osvaldo, "alto" e Luís, "médio".
Quantos "por cento" representam os "altos", os "médios" e os "baixos"?

5. Dos NCr$ 15,00 recebidos nesta semana, Pérsio gastou: NCr$ 3,60 em cadernos, NCr$ 0,90 em lápis, NCr$ 2,40 em cinema e NCr$ 0,60 em revistinhas. Exprimir em razões "por cento" da importância recebida, os gastos que Pérsio fêz.
Que razão "por cento" lhe resta ainda?

6. Usar as razões "por cento" para saber qual o time mais regular, sabendo-se que o time "*A*" jogou 25 partidas e ganhou 18 e o time "*B*" jogou 20 partidas e ganhou 15.

7. Exprimir as seguintes razões "por cento" usando o símbolo %. Se fôr necessário, exprimir antes uma razão igual de conseqüente 100:

1.ª) 32 : 100	5.ª) 226 : 1.000	9.ª) $\frac{3}{100}$
2.ª) $\frac{50}{100}$	6.ª) 3 : 3	10.ª) 3 : 4
3.ª) 5 : 2	7.ª) 36 : 2.000	11.ª) 0,6 : 10
4.ª) $\frac{8}{10}$	8.ª) 15 : 15	12.ª) 2,3 : 2,3

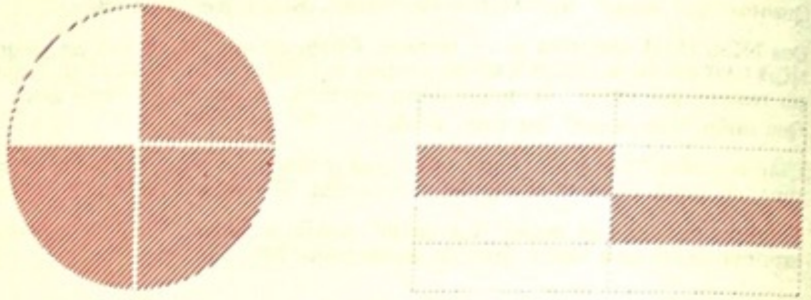
8. Exprimir os seguintes "por cento" como razões, sob a forma mais simples:

1.ª) 30%	3.ª) $5\frac{1}{2}\%$	5.ª) 78,5%	7.ª) 100%
2.ª) 135%	4.ª) 400%	6.ª) 205%	8.ª) $12\frac{3}{4}\%$

9. Completar a tabela, atendendo às colunas: fração decimal, número decimal e "por cento":

FRAÇÃO DECIMAL	NÚMERO DECIMAL	"POR CENTO"
$\frac{32}{100}$	0,32	32%
$\frac{8}{100}$	...	...
...	...	25%
...	0,80	...

10. Nas figuras seguintes determinar que parte fracionária está colorida e, a seguir, exprimir cada fração em "por cento":



10. *Porcentagem: aplicação da razão "por cento"*

Se 50% dos alunos de uma certa classe obtiveram *Bom* no teste de Matemática, você ficou sabendo que a razão: 50 : 100 representa a *metade* da classe, porém não sabe ainda *quantos alunos essa metade representa.* Êsse número vai depender do *total* de alunos, que passa a ser assim o elemento *principal* do problema.

Se a classe tiver 40 alunos, então 50% representam 20 alunos. É importante, agora, você guardar os nomes dos "personagens" que figuram neste problema:

a *razão*	50 : 100 = 50%	é o "*por cento*", sendo o antecedente 50 denominado **taxa**
o *total*	40 alunos	é denominado **principal**
o *resultado*	20 alunos	é denominado **porcentagem**

E 30% de 40 alunos, quantos alunos representam?

Basta determinar a *porcentagem* para saber quantos alunos representam. Para isso você se vai valer do estudo das *proporções*, pois se procura, neste problema, uma razão igual a $\frac{30}{100}$ cujo conseqüente seja 40, isto é, *resolver* a proporção:

$$\frac{30}{100} = \frac{\square}{40}$$

onde: $\square = \frac{40 \times 30}{100} = 12$, representa a *porcentagem* procurada.

Logo: 30% de 40 alunos representam 12 alunos.

11. *Técnica operatória para determinar a porcentagem, o principal e a taxa, em problemas práticos*

Como, de $\frac{\square}{40} = \frac{30}{100}$ vem $\square = \frac{40 \times 30}{100}$

segue-se que:

$$\textbf{porcentagem} = \frac{\textbf{principal} \times \textbf{taxa}}{100}$$

e, pelas propriedades conhecidas das operações:

$$\textbf{taxa} = (100 \times \textbf{porcentagem}) : \textbf{principal}$$
$$\textbf{principal} = (100 \times \textbf{porcentagem}) : \textbf{taxa}$$

Na prática, para uso em Bancos, Casas Comerciais e mesmo nos problemas da vida diária, empregam-se como *técnica* algumas *fórmulas* — que são *sentenças matemáticas padrões* — para o cálculo rápido da *porcentagem*, do *principal* e da *taxa*.

Indicando: *porcentagem* por p
principal por P
taxa por i $\left(\text{antecedente da razão } \frac{i}{100}\right)$

vem: $\frac{p}{P} = \frac{i}{100}$ e, portanto:

$$\boxed{p = \frac{P \times i}{100}}$$

sentença matemática padrão ou "fórmula" que permite calcular a *porcentagem*.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 22

1.º) Calcular 25% de NCr$ 80,00.

A maneira de resolver êste problema, fixando o conceito de razão "por cento", é já conhecida:

$$\frac{25}{100} = \frac{x}{80} \Longrightarrow x = \frac{25 \times 80}{100} = 20, \text{ ou seja, } 25\% \text{ de NCr\$ } 80{,}00 \text{ é NCr\$ } 20{,}00$$

Pode-se resolvê-lo, também, aplicando diretamente a "fórmula": $p = \dfrac{P \times i}{100}$

Logo: $p = \dfrac{80{,}00 \times 25}{100} = 20{,}00$ (Lembre-se: *NCr$ 20,00 é a porcentagem*)

2.º) Quantos "por cento" é NCr$ 20,00 de NCr$ 80,00?

Trata-se do problema inverso, pois se procura a *taxa*. Agora o x é o antecedente da razão, cujo conseqüente é 100, valendo a proporção:

$$\frac{x}{100} = \frac{20{,}00}{80{,}00}$$

ou

$$x = \frac{100 \times 20{,}00}{80{,}00} = 25, \text{ isto é, a taxa é de } 25\%.$$

Pode-se, também, empregar a "fórmula":

taxa = (100 × porcentagem) : principal

ou

$$\frac{i}{100} = \frac{p}{P} \Longleftrightarrow i = \frac{100 \times p}{P}$$

Logo: $i = \dfrac{100 \times 20{,}00}{80{,}00} = 25$ (Lembre-se: a *taxa* de porcentagem é *25*)

3.º) Se 25% de uma certa importância são NCr$ 20,00, qual é o valor dessa importância? Agora é preciso determinar o "principal" do problema. Deduza, você mesmo, que a proporção agora é:

$$\frac{25}{100} = \frac{20{,}00}{x} \Longrightarrow x = \frac{100 \times 20{,}00}{25} = 80{,}00 \text{ e o principal é NCr\$ } 80{,}00$$

Aplicando-se a "fórmula":

principal = (100 × porcentagem) : taxa

ou

$$P = \frac{p \times 100}{i} \text{ ou ainda: } P = \frac{100 \times p}{i}$$

Logo: $P = \dfrac{100 \times 20{,}00}{25} = 80{,}00$ (Lembre-se: *NCr$ 80,00 é o principal*)

OBSERVAÇÃO: Nos três exercícios resolvidos sempre foram conhecidos *dois* dos dados do problema e o 100 que caracteriza a *porcentagem*. Quer-se determinar um *terceiro* elemento.

4.º) Em cada uma das seguintes sentenças, destacar: o principal, a taxa e a porcentagem:

1. 25% de NCr$ 80,00 é NCr$ 20,00 ●
   - principal : NCr$ 80,00
   - porcentagem : NCr$ 20,00
   - taxa : 25

2. 54 é 300% de 18 ●
   - principal : 18
   - porcentagem : 54
   - taxa : 300

3. 16 é 20% de 80 ●
   - principal : 80
   - porcentagem : 16
   - taxa : 20

4. $3\frac{1}{2}$% de NCr$ 2.000,00 é NCr$ 70,00 ●
   - principal : NCr$ 2.000,00
   - porcentagem : NCr$ 70,00
   - taxa : $3\frac{1}{2}$

5. 216kg é 100% de 216kg ●
   - principal : 216kg
   - porcentagem : 216kg
   - taxa : 100

6. 120% de NCr$ 1.000,00 é NCr$ 1.200,00 ●
   - principal : NCr$ 1.000,00
   - porcentagem : NCr$ 1.200,00
   - taxa : 120

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Quando a taxa é *menor* que 100 a porcentagem é *menor* que o principal
Quando a taxa é *igual* a 100 a porcentagem é *igual* ao principal
Quando a taxa é *maior* que 100 a porcentagem é *maior* que o principal

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 23

1. Calcular:

   1.º) 30% de NCr$ 600,00 — 4.º) 0,8% de 90 gramas

   2.º) 120% de 50 — 5.º) $1\frac{3}{4}\%$ de 3.000.000 de habitantes

   3.º) $6\frac{1}{2}\%$ de NCr$ 4.000,00 — 6.º) $216\frac{1}{2}\%$ de NCr$ 10.000,00

2. Determinar quanto "por cento" é:

   1.º) NCr$ 0,50 de NCr$ 2,50 — 4.º) 120,6 de 50,25

   2.º) 12 gramas de 96 gramas — 5.º) 122,5 toneladas de 100 toneladas

   3.º) 1.200m² de 60km² — 6.º) $244\frac{4}{5}$ de 216

3. Dizer:

   1.º) NCr$ 100,00 é 8% de que importância?

   2.º) 72 é 400% de que número?

   3.º) 5.600.000 habitantes é 100% de que população?

   4.º) NCr$ 220,00 é 110% de que quantia?

   5.º) 0,73g é 0,5% de quantos gramas?

   6.º) 100 é 100% de que número?

4. Nas seguintes sentenças dizer qual é o *principal*, a *taxa* e a *porcentagem:*

   1.ª) 12kg representa 50% de 24kg

   2.ª) Ganhando 20% sôbre o preço anunciado de NCr$ 16,00 para uma camisa, paguei sòmente NCr$ 12,80

   3.ª) △ é □% de ▽

5. Escrever *V* nas sentenças verdadeiras e *F* nas falsas:

   1.º) Quando a taxa é menor que 100 a porcentagem é igual ao principal

   2.º) Quando a taxa é maior que 100 a porcentagem é menor que o principal

   3.º) Quando a taxa é igual a 100 a porcentagem é igual ao principal

PROBLEMAS VARIADOS SÔBRE USO DE PORCENTAGEM — GRUPO 24

1. A classe de Virgínia possui 40 alunas, 15% das quais são Bandeirantes. Quantas são as Bandeirantes da classe?

2. Existem 300 estudantes no período da tarde do Ginásio Estadual. Vinte e cinco por cento dêsses estudantes solicitaram passes escolares. Quantos são êsses estudantes?

3. As calças "rancheiras" compradas durante o mês de março têm 20% de desconto sôbre o preço marcado. Mamãe comprou duas delas, cujo preço marcado era NCr$ 26,40 cada. Quanto pagou?

4. No baile de formatura do ano passado participaram 80% dos formandos. A 4.ª Série "*A*" tinha 40 estudantes e a 4.ª "*B*", 35. Quantos formandos deixaram de participar do baile?

5. Feito um inquérito sôbre o que cada aluno gostaria de estudar, depois de completado o Ginásio, foram registrados os seguintes dados, numa classe de 40 alunos: 45% desejam cursar o científico; 25% desejam cursar o clássico. Quantos alunos desejam cursar o científico? E o clássico? Quantos "por cento" e quantos alunos se dedicarão a outras atividades?

6. Na minha classe faltaram na última sabatina de História: 5% por doença e 10% por motivos de ordem religiosa. Quantos fizeram a sabatina, se a classe possui 40 alunos?

7. Num colégio os 12% de alunos de origem estrangeira somam 72. Quantos alunos tem o colégio?

8. Papai comprou à vista um terreno e obteve um desconto de 10%, equivalente a NCr$ 2.000,00. Quanto pagou?

9. Renato, Elza e Roberto possuem coleções de selos. Renato possui 200 selos; Elza 150 e Roberto, 100. Quantos "por cento" é a coleção de Renato em relação à de Elza? E a de Roberto em relação à coleção de Renato?

10. Num certo Congresso participaram 648 homens, sabendo-se que 46% dos congressistas são mulheres. Quantos "por cento" de homens participaram e qual o total de congressistas?

11. Uma casa foi comprada por NCr$ 33.450,00 e vendida por NCr$ 38.550,00. Qual é a taxa de lucro dessa transação?

12. O raio da Terra é aproximadamente de 6.400km e o raio da Lua, 1.728km. Quantos "por cento" do raio da Terra é o raio da Lua?

13. O maior planêta é Júpiter, que possui um raio aproximadamente igual a 68.800km. Quantos "por cento" é êsse raio em relação ao da Terra?

14. Lavínia media 160cm de altura quando estava no curso de Admissão. Atualmente mede 168cm. De quantos "por cento" foi o aumento?

15. O penúltimo recorde para a corrida das duas milhas americanas foi de 8 minutos e 30 segundo. O último foi de 8 minutos e 20 segundos. De quantos "por cento" foi reduzido o tempo?

LEMBRETE AMIGO

Acêrca do uso correto do "por cento" e da "porcentagem", convém lembrar que não se pode dizer, por exemplo: *"a minha camisa esporte é 100% mais bonita que a sua"*, pois a *beleza* de uma camisa depende do gôsto de cada um e *não pode ser* expressa em números!

Outras vêzes o "por cento" é usado para comparar grandezas, sem porém discriminar o principal. Assim, por exemplo, *não se pode* dizer que o óleo "tal" rende 30% a mais se não se completar em relação a quê.

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 25

Escreva *V* ou *F* onde achar que deva, levando em conta a "forma" da pergunta:

1. A minha lancheira custou 10% mais barato que a sua.
2. Se um número é aumentado de seus 30% e em seguida do resultado fôr diminuído 30%, obtém-se o mesmo resultado inicial.
3. As pilhas "*x*" trabalham 20% a mais.
4. 20% de 50 é igual a 50% de 20.
5. Eu gosto de Matemática 200% mais do que o João!
6. 15% de minha classe tirou "*A*" em Geografia.
7. Se o *principal* é duplicado e a *taxa* dividida por dois, a *porcentagem* conservar-se-á a mesma.
8. Tostão marcou 30% *dos* gols.
9. Tostão marcou 30% *de* gols.
10. Calculei 125% de 100; a seguir, 80% do resultado e obtive 100 novamente.

. . . e mais esta:

O foguete "Guarani" tem 20% mais potência do que o foguete "Tupi".

Utilização das propriedades estruturais das operações na resolução de problemas

Você já sabe que a multiplicação de números racionais é *comutativa*, *associativa* e *distributiva* em relação à adição. Estas propriedades podem tornar mais simples a resolução de problemas que envolvem "por cento" e "porcentagem" se você tiver que usar a multiplicação. Exemplos:

1.º) Devendo calcular 10% de 80 e 10% de 120, quanto valerá a soma dos resultados?

Basta calcular 10% de (80 + 120) ou 10% de 200, pois:

$10\% \times (80 + 120) = 10\% \times 80 + 10\% \times 120$, como é fácil verificar:

$\frac{10}{100} \times (80 + 120) = \frac{10}{100} \times 80 + \frac{10}{100} \times 120$ é uma sentença *verdadeira*.

2.º) 12% de 30 é igual a 30% de 12?

Sim, pois:

$$\left(12 \times \frac{1}{100}\right) \times 30 = \left(30 \times \frac{1}{100}\right) \times 12$$

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 26

Escreva *V* ou *F* onde achar que deva:

1. É a mesma coisa 20% de 100% ou 100% de 20%.
2. Somando 50% de 80 com 50% de 20 é o mesmo que calcular 50% de 100.
3. 0,5% de 50 com mais 0,5% de 50 é o mesmo que 1% de 100.
4. 42% de 20 mais 8% de 20 é igual a 10.
5. $\frac{1}{2}\%$ de 100 é igual a 50% de 1.

TESTE DE RECAPITULAÇÃO II

1. Uma razão igual a $\frac{4}{12}$ é:

   a) $\frac{12}{4}$ *b*) $\frac{1}{3}$ *c*) $\frac{2}{10}$ *d*) $\frac{1}{4}$

   e) nenhuma das respostas anteriores (n. d. a.)

2. $\frac{2}{8}$ é a razão *inversa* de:

   a) $\frac{3}{8}$ *b*) $\frac{8}{3}$ *c*) $\frac{2}{3}$ *d*) $\frac{3}{2}$ *e*) n. d. a.

3. Se $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, podemos concluir que:

   a) $x < y$ *b*) $x > y$ *c*) $x = y$ *d*) $\frac{x}{y} < 1$ *e*) n. d. a.

4. Se $\frac{1}{5} = \frac{x}{3}$, então x é um número:

   a) maior que 2

   b) entre 1 e 2

   c) menor que $\frac{1}{2}$

   d) entre $\frac{1}{2}$ e 1

   e) n. d. a.

5. Formar os pares adequados:

1. $\frac{x}{4} = \frac{3}{12}$	*a*) 9	(. . . , . . .)
2. $\frac{2}{5} = \frac{1}{x}$	*b*) 1	(. . . , . . .)
3. $\frac{3}{x} = \frac{1}{3}$	*c*) 2,5	(. . . , . . .)
4. $\frac{4}{2} = \frac{x}{4}$	*d*) 8	(. . . , . . .)

6. A razão entre os comprimentos de uma linha de pescar e da sua vara é 2 : 1. Sabendo-se que a vara mede 4m, então a linha mede:

   a) 4m   *b*) $\frac{1}{2}$m   *c*) 2m   *d*) 8m   *e*) n. d. a.

7. Se um país tem 8 habitantes por km² e outro 6 habitantes por km², podemos coucnlir que:

   a) o primeiro país tem mais habitantes que o segundo

   b) o segundo país tem mais habitantes que o primeiro

   c) o primeiro país tem área maior que o segundo

   d) o primeiro país tem área menor que o segundo

   e) n. d. a.

8. João andou 200m em 30 segundos e Pedro 150m em 15 segundos. Portanto, a velocidade média:

   a) de João foi maior que a de Pedro

   b) de Pedro foi menor que a de João

   c) de João foi $\frac{20}{3}$ segundos por metro

   d) de Pedro foi $\frac{1}{10}$ metros por segundo

   e) n. d. a.

9. Esta é da I OMESP. Assinale a resposta correta: Se $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ e a e b são números naturais, então:

   ☐ necessàriamente $a = 7$ e $b = 3$

   ☐ podemos ter $a = 14$ e $b \neq 6$

   ☐ algumas vêzes $a < b$

   ☐ necessàriamente $a > b$

   ☐ n. d. a.

10. Os *meios* de uma proporção são:

    a) os antecedentes das razões

    b) o antecedente da primeira razão e o conseqüente da segunda

    c) o conseqüente da primeira razão e o antecedente da primeira

    d) os conseqüentes das razões

    e) n. d. a.

11. Em *tôda* proporção:

    a) o produto dos meios é o *dôbro* do produto dos extremos

    b) o produto dos antecedentes é *igual* ao produto dos conseqüentes

    c) o produto dos meios é *menor* que o produto dos extremos

    d) o produto dos meios *pode ser* igual ao produto dos extremos

    e) n. d. a.

12. Numa proporção, "um dos meios é igual ao produto dos extremos dividido pelo outro meio":

a) é sempre falsa

b) pode ser verdadeira

c) pode ser falsa

d) é sempre verdadeira

e) n. d. a.

13. A média aritmética ponderada com todos os pesos iguais a 1 é:

a) média proporcional

b) média aritmética simples

c) média geométrica

d) média harmônica

e) n. d. a.

14. Se quatro números formam uma proporção, então:

a) seus quadrados podem formar uma proporção

b) seus quadrados formam sempre uma proporção

c) os quadrados nunca formam uma proporção

d) nada podemos afirmar sôbre a proporção formada pelos quadrados dos números dados

e) n. d. a.

15. Dizer que do capital empregado obtivemos um lucro de 150% equivale a dizer que nosso capital atual é:

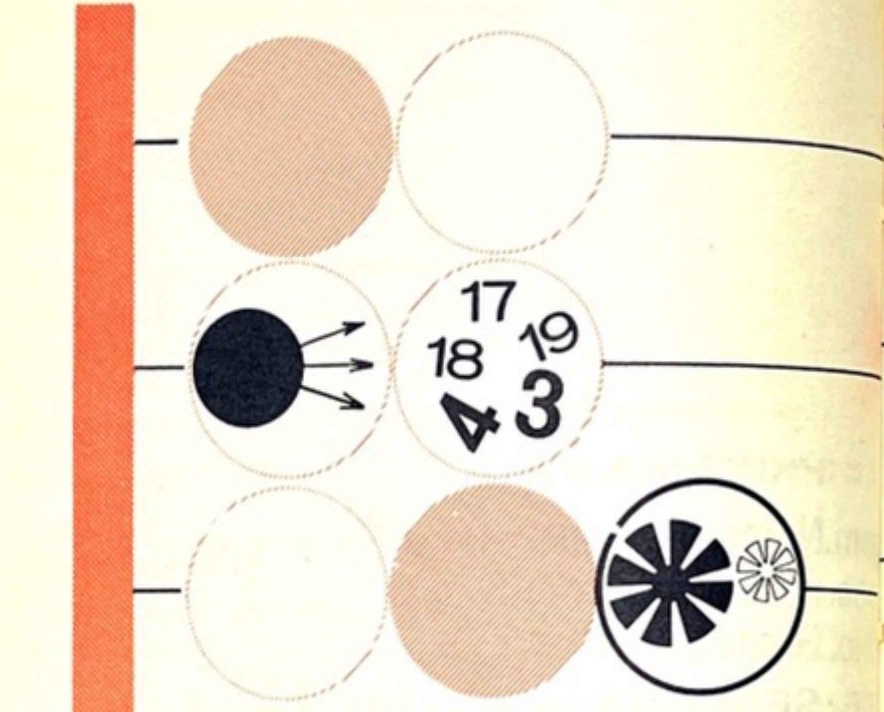
a) o mesmo que o anterior

b) o dôbro do anterior

c) uma vez e meio o anterior

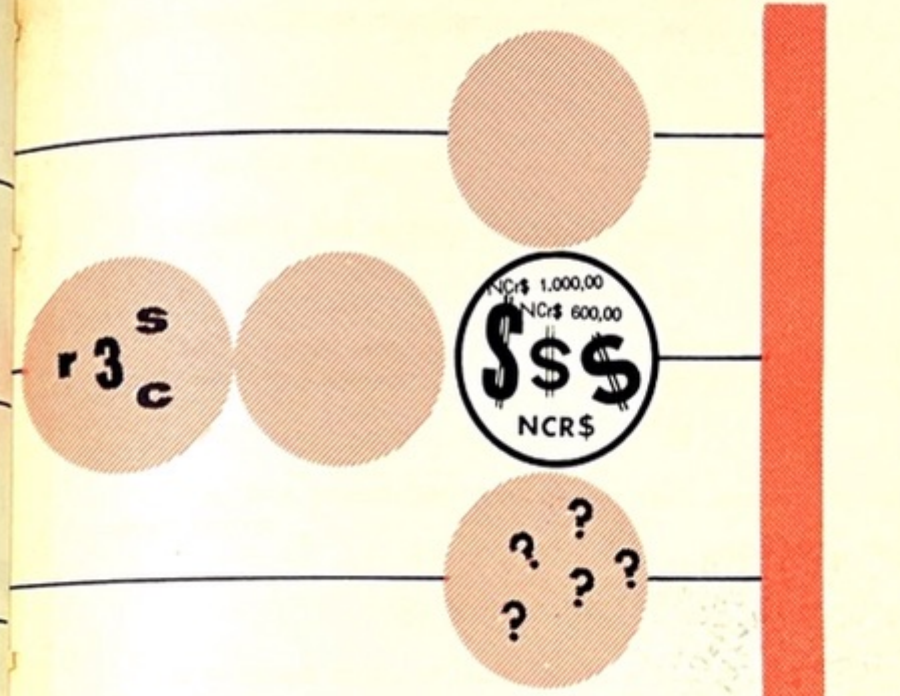
d) duas vêzes e meio o anterior

e) n. d. a.



PRIMEIRA PARTE:

Números proporcionais.
Problemas com novas estruturas.
Grandezas proporcionais.



SEGUNDA PARTE:

Regras de três.
Juros simples.
Desconto – Câmbio.

PRIMEIRA PARTE

Números proporcionais.
Problemas com novas estruturas.
Grandezas proporcionais.

Números proporcionais

42

x:1
y:2
z:3

1. *Números diretamente proporcionais*

Considere uma sucessão de números quaisquer, diferentes de zero:

5 8 10 13

Multiplicando cada um dêles por um *mesmo número*, por exemplo 2, você obterá a sucessão:

10 16 20 26

Com êsse procedimento você formou duas sucessões de *números proporcionais:*

5	8	10	13
↕	↕	↕	↕
10	16	20	26

E se fossem dadas, ao contrário, duas sucessões de números, como por exemplo:

1	2	5
↕	↕	↕
3	6	15

como você reconheceria se êsses números são *proporcionais?*

"Explorando" o exercício anterior, você notará que a *razão* entre dois números correspondentes é *sempre a mesma*, isto é:

$$\frac{5}{10} = \frac{8}{16} = \frac{10}{20} = \frac{13}{26}$$

Agora você pode concluir que:

$$1 \quad 2 \quad 5$$

são *números proporcionais* a

$$3 \quad 6 \quad 15$$

pois: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15}$. Essa é a *técnica* para você "testar" se duas sucessões de números são *proporcionais* ou, como também se diz, *diretamente proporcionais*.

Portanto, os números da sucessão:

$$a, \; b, \; c, \; d, \; \ldots$$

são *proporcionais* aos correspondentes números da sucessão:

$$a', \; b', \; c', \; d', \; \ldots$$

quando: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \ldots$ é **V** (verdadeira)

2. *Propriedade que relaciona números proporcionais*

Chamando de n o valor *comum* às razões, como por exemplo:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = n \qquad (a' \neq 0; \; b' \neq 0; \; c' \neq 0)$$

temos: $\left(\text{de } \frac{a}{a'} = n\right)$

$$a = n \times a'$$
$$b = n \times b'$$
$$c = n \times c'$$

ou, somando membro a membro, as igualdades acima:

$$a + b + c = n \times a' + n \times b' + n \times c'$$

ou

$$a + b + c = n \times (a' + b' + c') \text{ pela } \textbf{p.d.m.(a.)}$$

ou

$$n = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'}$$

Logo: se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ então $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'}$

3. *Números inversamente proporcionais*

Sejam, por exemplo, as duas sucessões:

3	5	6	10
20	12	10	6

Que êsses números *não são* proporcionais está claro, pois:

$$\frac{3}{20} = \frac{5}{12} = \frac{6}{10} = \frac{10}{6} \quad \textbf{é falsa!}$$

"Explorando" melhor as duas sucessões, você observará que os números que as compõem satisfazem à seguinte condição: *multiplicando* dois números correspondentes, obtém-se o *mesmo resultado*, ou seja:

$$3 \times 20 = 60; \; 5 \times 12 = 60; \; 6 \times 10 = 60 \text{ e } 10 \times 6 = 60$$

Quando isto acontece dizemos que os números da sucessão

$$3 \quad 5 \quad 6 \quad 10$$

são *inversamente proporcionais* aos correspondentes números da sucessão:

$$20 \quad 12 \quad 10 \quad 6$$

Para "testar" se duas sucessões de números são *inversamente proporcionais*, basta você lembrar que é sempre o *mesmo* o produto de dois números correspondentes:

$$3 \times 20 = 5 \times 12 = 6 \times 10 = 10 \times 6 = \mathbf{60}$$

Êste fato permite dizer também que os números da primeira sucessão são diretamente proporcionais aos INVERSOS dos correspondentes números da segunda sucessão, isto é:

$$\frac{3}{\frac{1}{20}} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = \frac{6}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{\frac{1}{6}}$$

pois:

$$\frac{3}{\frac{1}{20}} = 3 \times \frac{20}{1} = 60$$

De um modo geral, os números da sucessão

$$a, \; b, \; c, \; d, \; \ldots$$

são *inversamente proporcionais* aos correspondentes números da sucessão

$$a', b', c', d', \ldots$$

quando forem *diretamente proporcionais* aos INVERSOS dos correspondentes números da segunda sucessão, isto é:

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}} = \ldots$$

ou

$$a \times a' = b \times b' = c \times c' = \ldots \quad \text{é V (verdadeira)}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 27

1. Verificar se são diretamente ou inversamente proporcionais os números dos seguintes pares de sucessões:

$$1.^a)\begin{cases} 6 \; 2 \; 5 \; 1 \\ 18 \; 6 \; 15 \; 3 \end{cases} \qquad 3.^a)\begin{cases} 4 \; 2 \; 1 \; 3 \\ 3 \; 6 \; 12 \; 4 \end{cases}$$

$$2.^a)\begin{cases} 2 \; 3 \; 1 \; 4 \\ 5 \; 4 \; 3 \; 8 \end{cases} \qquad 4.^a)\begin{cases} 5 \quad \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} \quad 9 \end{cases}$$

Testando as sucessões com as técnicas conhecidas, temos:

$$1.^a)\begin{cases} \frac{6}{18} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad (V) \\ 6\times18 = 2\times6 = 5\times15 = 1\times3 \quad (F) \end{cases}$$ logo: os n.os são *diretamente proporcionais*

$$2.^a)\begin{cases} \frac{2}{5} = \frac{3}{4} = \frac{1}{3} = \frac{4}{8} \quad (F) \\ 2\times5 = 3\times4 = 1\times3 = 4\times8 \quad (F) \end{cases}$$ logo: os n.os *não são* nem diretamente nem inversamente proporcionais

$$3.^a)\begin{cases} \frac{4}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \quad (F) \\ 4\times3 = 2\times6 = 1\times12 = 3\times4 \quad (V) \end{cases}$$ logo: os n.os são *inversamente proporcionais*

Teste você a 4.ª.

2. Determinar os valôres de m e n, nos seguintes conjuntos de números *diretamente proporcionais:*

$$\begin{matrix} 5 & 6 & 7 \\ 75 & m & n \end{matrix}$$

Se são *diretamente proporcionais*, devemos ter:

$$\frac{5}{75} = \frac{6}{m} = \frac{7}{n} \quad (V)$$

Trabalhando com as duas primeiras razões, temos a proporção:

$$\frac{5}{75} = \frac{6}{m} \iff m = \frac{6 \times 75}{5} = 90$$

e, com a primeira e a última:

$$\frac{5}{75} = \frac{7}{n} \iff n = \frac{7 \times 75}{5} = 105$$

Logo: $m = 90$ e $n = 105$. Verifique.

3. Determinar os valôres de x e y nos seguintes conjuntos de números *inversamente proporcionais:*

$$\begin{matrix} 6 & 4 & 12 \\ x & 3 & y \end{matrix}$$

Se são inversamente proporcionais, devemos ter:

$$6 \times x = 4 \times 3 = 12 \times y \quad (V)$$

De: $6 \times x = 4 \times 3 \iff x = \frac{4 \times 3}{6} = 2$

e

de: $4 \times 3 = 12 \times y \iff y = \frac{4 \times 3}{12} = 1$

Portanto: $x = 2$ e $y = 1$. Verifique.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 28

1. Verificar se são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais os números dos seguintes pares de sucessões:

$$1.^a)\begin{cases} 6 \;\; 8 \;\; 10 \;\; 12 \\ 15 \;\; 20 \;\; 25 \;\; 30 \end{cases} \qquad 4.^a)\begin{cases} 2 \;\; 5 \;\; 1 \\ 8 \;\; 12 \;\; 3 \end{cases}$$

$$2.^a)\begin{cases} 6 \;\; 10 \;\; 12 \\ 20 \;\; 12 \;\; 10 \end{cases} \qquad 5.^a)\begin{cases} 1 \;\; 2 \;\; 8 \;\; 1 \\ 4 \;\; 8 \;\; 2 \;\; 2 \end{cases}$$

$$3.^a)\begin{cases} \frac{2}{5} \quad 4 \\ 5 \quad \frac{1}{2} \end{cases} \qquad 6.^a)\begin{cases} 2\frac{1}{3} \quad 14\frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} \quad 2\frac{3}{35} \end{cases}$$

2. Determinar m e n, nas seguintes sucessões de números diretamente proporcionais:

1.ª) $\begin{cases} 3 & 2 & 5 \\ 12 & m & n \end{cases}$ 3.ª) $\begin{cases} m & 5 & n \\ 121 & 55 & 33 \end{cases}$

2.ª) $\begin{cases} m & 2 & 1 \\ 15 & 10 & n \end{cases}$ 4.ª) $\begin{cases} m & n & 13 & 4 \\ 40 & 24 & 104 & 32 \end{cases}$

3. Determinar os valôres de p, q e r, nas seguintes sucessões de números inversamente proporcionais:

1.ª) $\begin{cases} 6 & 10 & q \\ 5 & p & 15 \end{cases}$ 3.ª) $\begin{cases} p & q & 3 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 4 & r \end{cases}$

2.ª) $\begin{cases} p & 1 & q \\ 9 & 18 & 3 \end{cases}$ 4.ª) $\begin{cases} 12 & 2 & p & q & 30 \\ 5 & 30 & 12 & \frac{2}{5} & r \end{cases}$

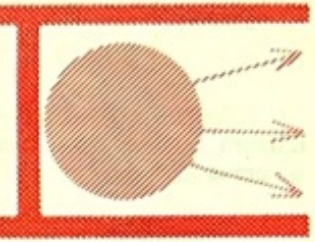
4. Dadas as sucessões de números:

(a)	6	8	2	12
(b)	4	3	12	2
(c)	3	4	1	6

como são (a) e (b), (a) e (c), (b) e (c)?

5. Quando é que os números: x, y, z e t são, nessa ordem, diretamente proporcionais aos números: p, q, r e s? Quando é que são inversamente proporcionais?

Problemas com novas estruturas



4. *Aplicações: novas estruturas de problemas*

1.ª Estrutura: *Repartição de um número em partes diretamente proporcionais a números dados.*

Repartir um número, por exemplo 32, em partes *diretamente proporcionais* aos números 3, 5 e 8, é determinar três números: x, y e z, que sejam proporcionais aos números 3, 5 e 8 e tenham 32 por *soma*.

Obedece, pois, à seguinte *estrutura:*

$$32 \begin{cases} \longrightarrow x : 3 \\ \longrightarrow y : 5 \\ \longrightarrow z : 8 \end{cases}$$

cujas *sentenças matemáticas* são:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{8} \\ x + y + z = 32 \end{cases}$$

Pela propriedade que relaciona números proporcionais (n.º 2, pág. 78) é fácil calcular os valôres de x, y e z, pois:

$$\frac{x+y+z}{3+5+8} = \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{8}$$

ou

$$\frac{32}{16} = \frac{x}{3} \iff x = \frac{32 \times 3}{16} = \boxed{6}$$

$$\frac{32}{16} = \frac{y}{5} \iff y = \frac{32 \times 5}{16} = \boxed{10}$$

$$\frac{32}{16} = \frac{z}{8} \iff z = \frac{32 \times 8}{16} = \boxed{16}$$

Logo, os números que satisfazem ao problema são: 6, 10 e 16.

$$\text{Prova: } \begin{cases} \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{16}{8} \\ 6 + 10 + 16 = 32 \end{cases}$$

Técnica operatória: De um modo geral, simbolizando por N o número que se quer repartir em partes *diretamente proporcionais* aos números a, b e c, temos, seguindo o mesmo raciocínio:

sentenças matemáticas:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ x + y + z = N \end{cases}$$

$$\text{Como: } \frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

ou

$$\frac{N}{a + b + c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

e daí "tiram-se" as seguintes "fórmulas", que fornecem os valôres de x, y e z:

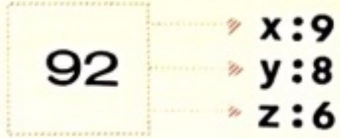
$$\boxed{x = \frac{N \times a}{a + b + c}} \text{ — } \boxed{y = \frac{N \times b}{a + b + c}} \text{ — } \boxed{z = \frac{N \times c}{a + b + c}}$$

Nota: Se a repartição fôr diretamente proporcional a *números fracionários*, pode-se converter ao caso da repartição em partes diretamente proporcionais a números naturais (caso já estudado). Basta converter as frações ao mesmo denominador, desprezando-se, a seguir, o denominador comum.

Exemplo:

Repartir 92 em partes diretamente proporcionais aos números: $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

Convertendo-se as frações ao menor denominador comum, vem: $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{12}$. E, agora, repartindo-se 92 em partes diretamente proporcionais aos números: 9, 8 e 6, isto é:



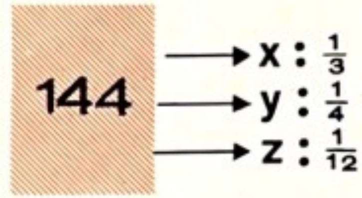
sentenças matemáticas:

$$\begin{cases} \frac{x}{9} = \frac{y}{8} = \frac{z}{6} \\ x + y + z = 92 \end{cases}$$

E os números procurados serão: 36, 32 e 24. Determine-os você.

2.ª Estrutura: *Repartição de um número em partes inversamente proporcionais a números dados.*

Repartir um número, por exemplo 144, em partes *inversamente proporcionais* aos números 3, 4 e 12, é determinar três números: x, y e z, que sejam inversamente proporcionais aos números 3, 4 e 12 e tenham 144 por *soma*. Agora você tem a *estrutura:*



sentenças matemáticas:

$$\begin{cases} \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{12}} \\ x + y + z = 144 \end{cases}$$

Convertendo as frações: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{12}$ ao menor denominador comum, vem:

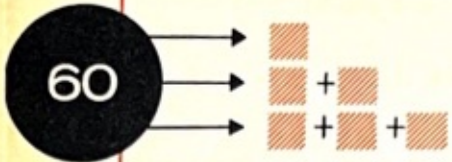
$$\frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12}$$

que permitem simplificar as sentenças matemáticas do problema para:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} \\ x + y + z = 144 \end{cases} \text{ que fornecem os valôres: } \begin{cases} x = 72 \\ y = 54 \\ z = 18 \end{cases}$$

LEMBRETE AMIGO

A *unidade da Matemática* faz-se sentir neste instante. Quando você estudou na 1.ª Série problemas cujas *estruturas* se apresentavam, como por exemplo:



sentença matemática:

$$\square + (\square + \square) + (\square + \square + \square) = 60$$

que corresponde ao problema de "distribuir 60 objetos quaisquer para três pessoas, de modo que a segunda receba o *dôbro* e a terceira o *triplo* do que deve receber a primeira", estava você na verdade conhecendo um caso particular de uma *estrutura mais ampla* que pertence aos problemas agora estudados, pois corresponde à *estrutura* da *repartição de 60 em partes proporcionais aos números 1, 2* e *3:*

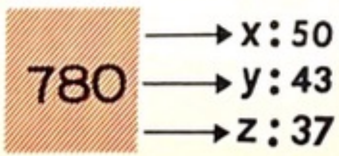
sentenças matemáticas:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3} \\ x + y + z = 60 \end{cases}$$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — Grupo 29

1.º) A importância de NCr$ 780,00 deve ser repartida aos três primeiros colocados num certo concurso em partes *proporcionais* aos pontos conseguidos pelos concorrentes. Sabe-se que o concorrente "*A*" conseguiu 50 pontos, "*B*" conseguiu 43 e "*C*", 37. Qual a importância que caberá a cada um?

Trata-se de problema que pertence à *estrutura* de repartição de um número em partes *diretamente* proporcionais a números dados. Logo:



sentenças matemáticas:

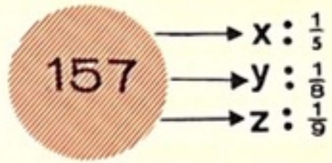
$$\begin{cases} \dfrac{x}{50} = \dfrac{y}{43} = \dfrac{z}{37} \\ x + y + z = 780 \end{cases}$$

Resolvendo pelas técnicas conhecidas, temos:

o candidato "*A*" receberá NCr$ 300,00 (x); o candidato "*B*" receberá NCr$ 258,00 (y) e o candidato "*C*" receberá NCr$ 222,00 (z).

2.º) Um pacote de 157 balas deve ser repartido entre Aninha, de 5 anos, Glória, de 8 anos e Luluzinha, de 9 anos, em partes *inversamente proporcionais* às suas idades (isto é, quem tem *menos* idade recebe *mais* balas!). Qual a porção que receberá cada uma?

Agora, a *estrutura* é da repartição de um número em partes *inversamente* proporcionais a números dados. Logo:



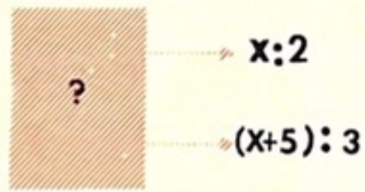
sentenças matemáticas:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\frac{1}{5}} = \dfrac{y}{\frac{1}{8}} = \dfrac{z}{\frac{1}{9}} \\ x + y + z = 157 \end{cases}$$

Aplicando as técnicas conhecidas, temos:

Aninha receberá 72 balas, Glória, 45 balas e Luluzinha, 40.

3.º) Redigir um problema que possua a seguinte *estrutura:*



sentença matemática:

$$\frac{x}{2} = \frac{x+5}{3}$$

Trata-se de descobrir uma certa *quantidade* de unidades que será repartida em duas partes, respectivamente proporcionais a 2 e a 3, sendo que a segunda deve possuir 5 unidades *a mais* que a primeira. Aplicando na *sentença matemática*

$$\frac{x+5}{3} = \frac{x}{2}$$

a *transformação* conveniente (". . . a diferença dos antecedentes está para a diferença dos conseqüentes, assim como . . ."), vem:

$$\frac{x+5}{3} = \frac{x}{2} \iff \frac{(x+5)-x}{3-2} = \frac{x}{2} \iff \frac{5+x-x}{1} = \frac{x}{2} \iff \frac{5}{1} = \frac{x}{2} \iff x = \frac{2 \times 5}{1} = 10$$

Então a primeira parte receberá: $x = 10$ (unidades) e a segunda: $x + 5 = 10 + 5 = 15$ (unidades)

e o número de unidades distribuídas é: $10 + 15 = 25$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 30

1. Repartir:

   1.º) 40 em partes diretamente proporcionais aos números: 2, 3 e 5;

   2.º) 21 em partes inversamente proporcionais aos números: 9 e 12;

   3.º) 625 em partes diretamente proporcionais aos números: 5, 7 e 13;

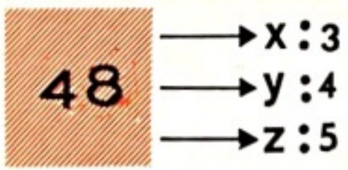
   4.º) 96 em partes diretamente proporcionais aos números: 1,2; $\frac{2}{5}$ e 8;

   5.º) 444 em partes inversamente proporcionais aos números: 4, 5 e 6;

   6.º) 1.090 em partes inversamente proporcionais aos números: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{8}$.

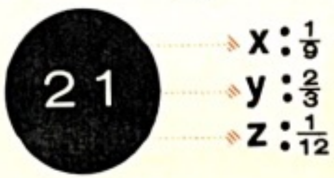
2. Determinar os valôres de x, y e z, nas seguintes *estruturas:*

1.ª)

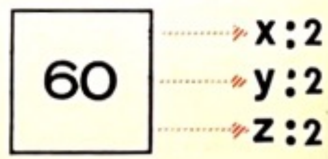


2.ª)

3.ª)

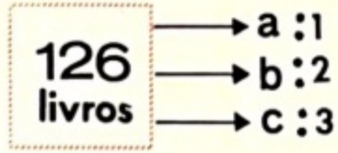


4.ª)

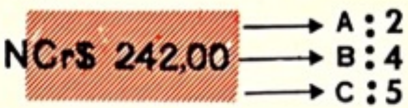


3. Formular pelo menos um problema que tenha a seguinte *estrutura:*

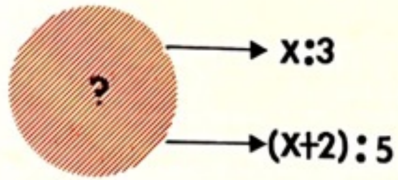
1.ª)



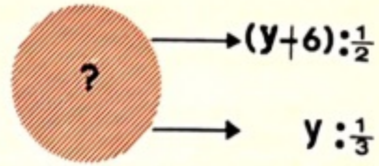
2.ª)



3.ª)



4.ª)



4. Titio repartiu os 94 peixinhos de seu aquário para seus três sobrinhos: Huguinho, de 6 anos; Luizinho, de 8 anos e Zèzinho, de 10 anos, com a condição que a distribuição fôsse em partes inversamente proporcionais à idade de cada um. Qual a parte que coube a cada um dos sobrinhos?

5. Um prêmio de Agricultura no valor de NCr$ 4.000.00 deve ser repartido em partes diretamente proporcionais às áreas cultivadas pelos três melhores agricultores da região. Qual a quantia que coube a cada um, sabendo-se que as áreas cultivadas são, respectivamente: 55a, 70a e 75a?

6. Na campanha "Dei ouro para o bem do Brasil", meu irmão de 12 anos e eu, com 13, demos um total de 5 gramas de ouro. Quanto deu cada um de nós, sabendo-se que as partes foram proporcionais às nossas idades?

7. Determinar a medida de cada um dos ângulos de um triângulo, sabendo-se que a soma é 180º e que essas medidas são inversamente proporcionais aos números 1, 6 e 3.

8. Os ângulos de um quadrilátero convexo, que têm por soma 360º, estão entre si assim como os números 2, 3, 5 e 8. Determinar os valôres dêsses ângulos.

9. Papai e o titio Radamés constituíram uma sociedade comercial. Papai entrou com NCr$ 24.000,00 e titio com NCr$ 16.000,00. No fim de um ano de atividades comerciais, houve um lucro de NCr$ 10.000,00. Qual a parte de lucro que caberá a cada um? (Sugestão: o lucro deve ser repartido em partes diretamente proporcionais às partes com que cada um participou na sociedade.)

10. Os 130 livros de nosso Grêmio vão ser encapados por Dóris, Ceres e Jamile. Para êsse trabalho cada uma receberá um número de livros inversamente proporcional aos números de livros que leram e que são respectivamente: Dóris e Ceres: 25 livros; Jamile: 20 livros. Quantos livros receberá cada uma delas? (É natural que quem lê mais, encape menos...)

Grandezas proporcionais

5. *Grandezas diretamente proporcionais.* *Propriedade característica*

Duas grandezas *variáveis*(*) dizem-se *diretamente proporcionais* ou simplesmente *proporcionais* se ao *dôbro*, ao *triplo*, ao *quádruplo*, . . . de uma delas **corresponde** o *dôbro*, o *triplo*, o *quádruplo*, . . . da outra. Exemplo:

Sejam as grandezas variáveis:

	comprimento da fazenda		*quantia de dinheiro* (NCr$)
Se	3m ↓	custam	36,00 ↓
então	6m ↓	custarão	72,00 ↓
e	9m	custarão	108,00
.	.	.	.

Logo, quando o comprimento da fazenda torna-se *duplo*, *triplo*, etc., o *mesmo acontece* com o respectivo custo. Portanto, as duas grandezas: *comprimento da fazenda* e *quantia de dinheiro* são *diretamente proporcionais*. A propriedade que caracteriza a *existência* de grandezas diretamente proporcionais é:

(*) São as grandezas que podem assumir infinitos valôres.

> Em duas grandezas diretamente proporcionais, a razão de dois valôres de uma delas é equivalente à razão dos dois valôres correspondentes da outra.

No exemplo citado, temos:

$$\frac{3}{6} = \frac{36,00}{72,00}$$

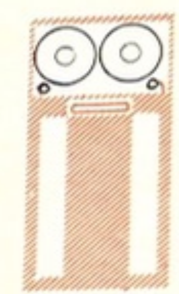
$$\text{e} \qquad \frac{6}{9} = \frac{72,00}{108,00}$$

indicando as flechas, de *mesmo sentido*, que as razões resultaram de *grandezas diretamente proporcionais*.

6. *Grandezas inversamente proporcionais.* *Propriedade característica*

Duas grandezas variáveis dizem-se *inversamente proporcionais* se ao *dôbro*, ao *triplo*, ao *quádruplo*, . . . de uma delas **corresponde** a *metade*, a *têrça parte*, a *quarta parte*, . . . da outra. Exemplo:

Sejam as grandezas variáveis:



	número de máquinas(*)	e	*duração do tempo*
Se	5 máquinas realizaram certo trabalho em . . . . ↓		12 dias ↑
então	10 máquinas(*) realizarão o mesmo trabalho em . . . . . . ↓		6 dias ↑
e	15 máquinas		4 dias

(*) Subentenda-se: máquinas de *mesma* capacidade de produção.

Agora, quando o *número de máquinas* duplica, triplica, etc., a *duração do tempo*, empregado para realizar o mesmo trabalho, reduz-se à *metade*, a *um têrço*, etc., e as duas grandezas são *inversamente proporcionais*. A propriedade que caracteriza a *existência* de grandezas inversamente proporcionais é:

> Em duas grandezas inversamente proporcionais, a razão de dois valôres de uma delas é igual ao *inverso* da razão dos dois valôres correspondentes da outra.

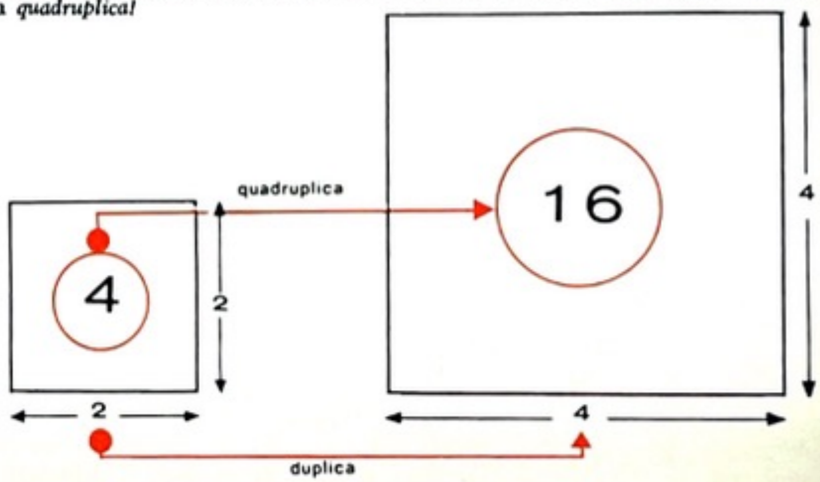
No exemplo considerado, temos:

$$\frac{5}{10} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{10}{15} = \frac{4}{6}$$

e as flechas correspondentes às grandezas variáveis são, agora, de *sentido contrário*.

Observação importante: Para a caracterização da proporcionalidade de duas grandezas *não basta* verificar se o aumento de uma delas *acarreta* o aumento da outra. É necessário que, *duplicando* o valor de uma delas, por exemplo, o valor correspondente da outra também *duplique*. Assim, por exemplo, o *comprimento do lado* de um quadrado e a sua *área não são* grandezas proporcionais, pois, quando o lado *duplica* de *valor*, a área *quadruplica!*



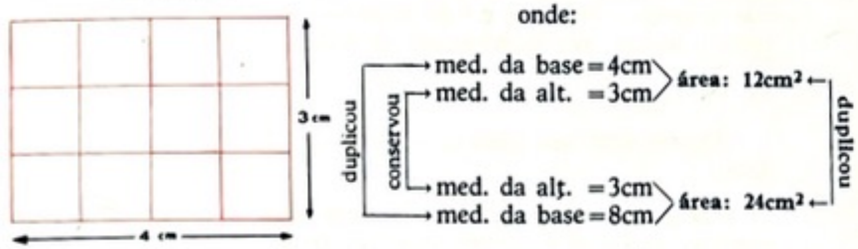
Também o *comprimento da aresta* de um cubo e o seu *volume não são* grandezas proporcionais, pois, se o valor da aresta *duplica*, o volume do cubo torna-se *oito vêzes maior!* Faça os cálculos você mesmo.

7. *Proporcionalidade composta. Propriedade característica*

Para você saber se uma grandeza variável é proporcional, diretamente ou inversamente, a várias outras, basta saber se tal grandeza é diretamente ou inversamente proporcional a cada uma delas, quando *as demais não variam*. Exemplos:

1. A *área* de um retângulo é diretamente proporcional tanto à medida de sua *base* como à medida de sua *altura*. De fato, seja o retângulo:

onde:



Portanto, duplicando a base e conservando a altura fixa a área também duplicará, o que mostra ser *a área diretamente proporcional à base;* o mesmo você concluirá, duplicando a altura e conservando a base: a área é *diretamente proporcional à altura*.

Se, agora, você *duplicar a base* e *duplicar a altura*, a área resultará *quadruplicada*, isto é:

med. da base (duplicada): 8cm
med. da altura (duplicada): 6cm
área: 48cm² (quadruplicada!)

Logo:

> Se uma grandeza é diretamente proporcional a várias outras, então os valôres que exprimem sua medida são diretamente proporcionais aos *produtos* dos valôres correspondentes das outras.

2. O *tempo* (contado em dias de trabalho(*)) gasto para se efetuar a escavação de uma rocha, por meio de máquinas, é diretamente proporcional ao *volume* de rocha extraída e inversamente proporcional ao *número de máquinas* empregadas.

(*) Dia de trabalho: aquêle que corresponde ao número de horas permitido pela Legislação Trabalhista em vigor.

De fato:

se 2 máquinas, em 4 dias de trabalho, escavam $100m^3$ de rocha, então 4 máquinas, em 2 dias de trabalho, escavarão $100m^3$ de rocha,

ou seja, *não variando* a grandeza volume ($100m^3$), as grandezas *n.º de máquinas* e *tempo gasto* são inversamente proporcionais, pois o *produto* de dois valôres correspondentes é o mesmo ($2 \times 4 =$ $= 4 \times 2$) . . .

. . . e 4 máquinas em 4 dias de trabalho escavam $200m^3$, isto é, *não variando* a grandeza *n.º de máquinas* (4), as grandezas *tempo gasto* e *volume* são diretamente proporcionais, pois são iguais as razões: $\frac{2}{4} = \frac{100}{200}$.

Mostre você que para êsse exemplo vale a mesma propriedade:

"se uma grandeza é proporcional a várias outras, direta ou inversamente, então será proporcional ao *produto* de tôdas ou de algumas, quando as demais não variam".

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 31

Escrever V ou F, conforme achar conveniente:

1. A *velocidade* de uma locomotiva e o *tempo* que ela gasta para percorrer o percurso entre duas cidades são grandezas *inversamente proporcionais*, porque quanto *mais veloz* fôr a locomotiva *menor é o tempo gasto* para ir de uma cidade a outra.
2. O *valor de uma fração* é diretamente proporcional ao *valor de seu denominador*, porque *quanto maior* é o valor do denominador *tanto maior* é o valor da fração.
3. O *comprimento da aresta* de um cubo e o *volume* dêsse cubo são grandezas proporcionais, porque, multiplicando por 3 a medida da aresta, o volume do cubo resulta multiplicado também por 3.
4. O *produto* de dois números é diretamente proporcional a cada um dos fatôres, pois, dividido um dos números por 2, o produto resulta dividido por 2.
5. O *trajeto* percorrido por um automóvel é uma grandeza inversamente proporcional aos *litros de gasolina gastos*, pois quanto maior fôr o percurso menor é o consumo de gasolina.
6. A *área* de um retângulo é diretamente proporcional à *medida de sua base* e à *medida de sua altura*.
7. A *área* de um retângulo é diretamente proporcional à *medida de sua base* e inversamente proporcional à *medida de sua altura*.
8. O *tempo gasto* por Ivo na confecção do mapa do Brasil é diretamente proporcional ao *tamanho* do mapa e inversamente proporcional ao *número de minutos diários* empregados para executar tal tarefa.
9. A *soma* de dois números é diretamente proporcional a *cada uma* das parcelas.
10. A *diferença* entre dois números não é inversamente proporcional ao *subtraendo*.

SEGUNDA PARTE

Regras de três.

Juros simples.

Desconto — Câmbio.

Regras de três

8. *Regra de três: nova técnica para resolver problemas*

A grande maioria dos problemas que você tem resolvido envolvem, pelo menos, duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. São conhecidos, geralmente, um *par de valôres* correspondentes a duas grandezas e a resolução do problema consiste em procurar um *segundo valor* de uma delas, que corresponde a um segundo valor assinalado para a outra. Exemplo:

Comprei 6 bolinhas de pingue-pongue por NCr$ 4,20. Quanto pagarei por 10 dessas bolinhas?

As grandezas variáveis que participam do problema são:

n.º de bolinhas e *quantia de dinheiro*

que são *diretamente proporcionais* ("mais" bolinhas custam, proporcionalmente, "mais" dinheiro). Na 1.ª Série, você partia de um "plural" (preço de 6 bolinhas) e passava para o "singular" (preço de 1 bolinha) mediante a operação *divisão:*

6 bolinhas........... 4,20
1 bolinha........... $4{,}20 : 6 = 0{,}70$

e a seguir passava para o "plural" procurado (preço de 10 bolinhas) por uma *multiplicação:*

10 bolinhas .... $10 \times 0{,}70 = 7{,}00$

Essa técnica de cálculo também é denominada de *redução à unidade.*

Com o estudo das *proporções* você poderá resolver êsse mesmo problema com uma outra técnica, denominada **Regra de três,** em virtude de serem dados **três** valôres, dois de uma das grandezas e o terceiro correspondente a um dos valôres da primeira. A seguir é determinado o valor da segunda grandeza, que corresponde ao segundo valor da primeira.

Se o problema envolve sòmente duas grandezas proporcionais (diretamente ou inversamente) a técnica é chamada *Regra de três Simples.* Indicação: **R3S.**

Se no problema intervêm *mais de duas* grandezas, então a Regra de três é *Composta.* Indicação: **R3C.** Exemplos:

Resolver, usando a técnica **R3S,** os seguintes problemas:

1. Comprei 6 bolinhas de pingue-pongue por NCr$ 4,20. Quanto pagarei por 10 dessas bolinhas?

Disposição prática: $\downarrow \begin{array}{c} 6 \text{ bol.} \\ 10 \text{ bol.} \end{array} \quad \downarrow \begin{array}{c} 4{,}20 \\ x \end{array}$ $\quad$ **R3S**$_d$ (Regra de três simples, direta)

onde x representa o *valor* procurado.

A colocação das flechas no *mesmo sentido,* por se tratar de grandezas diretamente proporcionais, dá a classificação: **R3S**$_d$. A proporção resultante será a *sentença matemática:*

$$\frac{6}{10} = \frac{4{,}20}{x} \iff x = \frac{10 \times 4{,}20}{6} = 7{,}00$$

Logo, as 10 bolinhas custarão: NCr$ 7,00.

2. Se 8 máquinas iguais gastam 6 dias de trabalho para fazerem um atêrro, quanto tempo gastariam 12 máquinas iguais às primeiras para realizarem o mesmo atêrro?

Você continua com duas grandezas variáveis: *n.º de máquinas* e *tempo gasto,* só que agora elas são *inversamente proporcionais,* pois, dispondo de "mais" máquinas, o mesmo atêrro será feito, proporcionalmente, em "menos" tempo. As flechas aparecerão, então, em sentidos contrários:

Disposição prática: $\downarrow \begin{matrix} 8 \text{ máq.} \\ 12 \text{ máq.} \end{matrix}$ $\uparrow \begin{matrix} 6 \text{ dias} \\ x \end{matrix}$ **R3S**$_i$ (Regra de três simples, inversa)

Agora, na obtenção da sentença matemática — que é uma proporção — você deve **inverter** uma das razões (a segunda, por exemplo):

$$\frac{8}{12} = \frac{x}{6} \iff x = \frac{8 \times 6}{12} = 4$$

Portanto, 12 máquinas realizarão o atêrro em 4 dias de trabalho.

3. Em 6 dias de trabalho aprontaram-se 720 uniformes escolares fazendo funcionar 16 máquinas de costura. Em quantos dias se poderiam aprontar 2.160 uniformes (iguais aos primeiros) se, em virtude do racionamento de luz, funcionaram sòmente 12 daquelas máquinas?

O problema envolve mais de duas grandezas variáveis: *n.º de dias de trabalho, n.º de uniformes* e *n.º de máquinas de costura.* Vamos resolvê-lo usando a técnica **R3C**, estabelecendo a seguinte *disposição prática:*

$$\downarrow \begin{matrix} 6 \text{ dias} \\ x \end{matrix} \qquad \downarrow \begin{matrix} 720 \text{ unif.} \\ 2.160 \text{ unif.} \end{matrix} \qquad \uparrow \begin{matrix} 16 \text{ máq.} \\ 12 \text{ máq.} \end{matrix} \quad \textbf{R3C}$$

Vamos agora estabelecer a natureza da proporcionalidade entre essas grandezas. *Fixando* a terceira grandeza: "n.º de máquinas" (para facilitar, coloque a mão sôbre a última coluna, tapando-a), é fácil concluir que a primeira grandeza: "n.º de dias", e a segunda: "n.º de uniformes" são *diretamente proporcionais* (aumentando uma delas, a outra aumenta, proporcionalmente). Portanto, as flechas têm o *mesmo sentido.*

Fixada, agora, a segunda grandeza ("cubra" a segunda coluna e raciocine como se o n.º de uniformes fôsse o mesmo), você notará que a primeira grandeza e a terceira grandeza são *inversamente proporcionais* (pois, "se um certo n.º de uniformes é feito por 16 máq. em 6 dias, *reduzindo* o n.º de máq. a 12, êsses mesmos uniformes serão feitos em *mais* tempo"). Logo: as flechas da primeira e terceira colunas terão sentido contrário.

A seguir procura-se colocar as flechas *tôdas* no mesmo sentido. Para isso, *invertem-se* os correspondentes valôres da terceira grandeza:

$$\begin{matrix} 6 & 720 & 12 \\ x & 2.160 & 16 \end{matrix}$$

Lembrando a propriedade que caracteriza a existência de uma grandeza diretamente proporcional a várias outras: *os valôres que exprimem suas medidas são diretamente proporcionais aos* ***produtos*** *dos valôres correspondentes das outras,* vem:

$$\begin{matrix} 6 & 720 \times 12 \\ x & 2.160 \times 16 \end{matrix}$$

Sentença matemática: $\dfrac{6}{x} = \dfrac{720 \times 12}{2.160 \times 16} \iff x = \dfrac{6 \times 2.160 \times 16}{720 \times 12} = 24$

Portanto, serão necessários *24* dias para se aprontarem 2.160 uniformes, fazendo funcionar sòmente 12 máquinas.

Nota: Você pode usar *razões iguais* às razões empregadas no problema, a fim de simplificar os cálculos. Assim, as razões do problema resolvido podem ser simplificadas por:

$$\begin{matrix} 6 & 1 & 3 \\ x & 3 & 4 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} 6 & 1 \times 3 \\ x & 3 \times 4 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad x = \frac{6 \times 3 \times 4}{1 \times 3} = 24$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 32

Aplicando as técnicas da **R3S** e **R3C**, resolver os seguintes problemas:

1. Por 3 maçãs Joãozinho pagou NCr$ 0,91. Quantas compraria com NCr$ 1,82?
2. Com a velocidade média de 50km/h, titio Rodolfo foi de São Paulo à Guanabara em 8 horas. Se a velocidade média fôsse de 80km/h, em quanto tempo teria feito essa viagem?
3. A nossa "perua" percorreu 240km em 3 horas. Quanto tempo levará para percorrer 400km, empregando a mesma velocidade?
4. Certa máquina produz 30.000 pregos em 12 horas. Quantos pregos iguais tal máquina produziria em 15 horas? Quantas horas necessitaria para produzir 50.000 dêsses pregos?
5. Se 6 pedreiros levam 45 dias para construírem uma casa-operária, quanto tempo levariam 5 pedreiros — supostos de mesma capacidade de trabalho dos primeiros — para fazerem casa igual?
6. Um avião comercial, com a velocidade de 400km/h, efetua a viagem entre Salvador e Brasília em 3h de vôo. Em quanto tempo um avião a jato, de velocidade igual a 1.200km/h, faria essa mesma viagem?
7. Uma bomba eleva 240 litros de água em 8 minutos. Quantos decalitros elevará em 2h 30min?
8. Calcular a altura de um edifício que projeta uma sombra de 19,60m no mesmo instante em que um bambu de 3,8m, plantado verticalmente, projeta sombra de 4,9m.

Se de cada 30kg de café cru obtemos 26kg de café torrado, quantos quilos de café cru serão necessários para se obterem 208kg de café torrado?

Os 25 escoteiros das 2.as Séries de nosso Ginásio programaram uma excursão de 8 dias durante julho, recolhendo, para tanto, alimento para os 25 participantes. No dia do embarque, 5 dos escoteiros não puderam ir. Resolveu-se, então, prolongar a excursão até se esgotarem os alimentos disponíveis, que seriam sempre consumidos, proporcionalmente, cada dia. De quantos dias a excursão pôde ser prolongada?

11. Num Internato, 45 alunos menores gastam NCr$ 1.850,00 pelas refeições de 20 dias. Se o Internato admitir mais 15 alunos menores, qual será a despesa das refeições em 60 dias?

12. Um grande circo é armado por 15 homens em 3 dias de trabalho, de 10 horas por dia. Em quantos dias seria armado êsse circo dispondo-se de 25 homens de mesma capacidade de trabalho que os primeiros, mas trabalhando 9 horas por dia?

13. Certa máquina, funcionando 4h por dia, rotulou durante 6 dias 2.000 garrafas. Quantas horas por dias deveria funcionar essa máquina para rotular 20.000 garrafas num mês (30d)?

14. Um trecho de estrada de 300m de comprimento por 10m de largura foi asfaltado em 4 dias, por 4 máquinas que trabalharam 6h por dia. Quantas horas por dia deveriam trabalhar 6 máquinas, iguais às primeiras, para asfaltarem, em 2 dias, um trecho de 150m dessa mesma estrada (de mesma largura)?

15. Foram empregados 24kg de fio para tecer 120m de tecido, de 0,82m de largura. Quantos metros de tecido de 1,23m de largura serão tecidos com 30kg do mesmo fio?

16. Duas rodas dentadas, engrenadas uma na outra, têm, respectivamente, 12 e 54 dentes. Quantas voltas dará a menor enquanto a maior dá 8?

17. De bicicleta, Paulo percorreu 7km em 35 minutos. Empregando a mesma velocidade, quanto tempo gastará para percorrer 12km?

18. No problema anterior, se Paulo aumentasse a velocidade de $\frac{1}{5}$, em quanto tempo percorreria os mesmos 12km? (*Sugestão*: a nova velocidade pode ser representada por $\frac{6}{5} = \left(\frac{5}{5} + \frac{1}{5}\right)$.

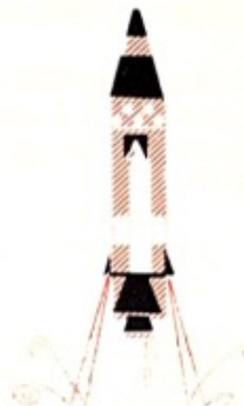
19. Num livro de 315 páginas há 40 linhas em cada página. Se em cada página houvesse 30 linhas, com quantas páginas ficaria êsse livro?

20. Um livro tem 250 páginas e cada página 40 linhas; cada linha possui 66 letras. Reimprimindo-se êsse livro com os mesmos caracteres, porém em páginas de 30 linhas cada uma e com 50 letras em cada linha, pergunta-se: quantas páginas deverá ter o nôvo livro?

Lembrando o sucesso da Apolo 11 . . .

. . . resolva mais êste:

21. Uma viagem da Terra à Lua, num foguete tripulado por três astronautas, será realizada em 72 horas. Sabendo-se que cada tripulante consome em cada 24 horas meia dúzia de cápsulas de alimento concentrado, qual a quantidade mínima de cápsulas que a espaçonave deverá transportar?



Juros simples

9. *Emprêgo dos juros*

Você, que vive em sociedade, está sempre ouvindo ou lendo expressões como:

"Os *juros* pagos pelo Banco do Brasil são de 12% ao ano";

"A quanto está o *dólar* hoje?" "E o *escudo?*";

"O Sr. João teve um *desconto* de NCr$ 7,20 por ter pago a prestação antes do vencimento";

"No fim de três anos papai *acumulou* NCr$ 4.500,00 de rendimentos".

Tôda vez que se empresta oficialmente uma quantia, por um determinado tempo, recebe-se uma *compensação* em dinheiro. Essa compensação recebe o nome de **juro**(*).

Também nas compras a prazo — tão comum nos negócios atuais — pagam-se os chamados *juros legais*. Com relação ao *dólar*, você sabe que se trata da *moeda* oficial dos Estados Unidos da América, assim como o *escudo* é a de Portugal, a *libra* a da Inglaterra, a *lira* a da Itália, o *rublo* a da União Soviética, o *pêso* a da Argentina, o *yen* a do Japão, o *franco* a da França, etc. A "cotação" do dólar no mercado nacional, por exemplo, é fixada pelo Banco do Brasil e depende de uma série de fatos que mais tarde você entenderá.

Desconto é o abatimento feito sôbre uma determinada quantia que irá ser paga *antes do prazo do vencimento* e o seu cálculo reduz-se a um simples cálculo de *juros*. Chama-se *capital acumulado* ou *montante* à soma de um certo capital com os próprios juros que êsse capital rendeu.

Com o conhecimento recebido acêrca das *grandezas proporcionais*, você vai obter, agora, algumas informações úteis sôbre êsses assuntos.

(*) Trata-se do *juro simples*.

É fácil perceber que o *juro* (j) é uma grandeza variável, *diretamente proporcional:*

à *quantia emprestada*, geralmente denominada *Capital* (pois, quanto "maior" é a quantia emprestada, "maior" será o juro produzido proporcionalmente);

ao *tempo* (t) de duração do empréstimo (pois, quanto "mais" tempo fica emprestado, "maior" será o juro recebido);

à *taxa* (i), que é o *valor* tomado *em cada 100 unidades*, referida ao ano, ou ao mês, ou a dias (pois, quanto "maior" a taxa cobrada, tanto "maior" será o juro recebido).

Assim, por exemplo, dizer que:

"a importância de NCr$ 100,00 foi emprestada à taxa de 12% ao ano, significa que no fim de um ano de empréstimo o juro produzido por essa importância foi de NCr$ 12,00".

Nestas condições, você pode *calcular os juros*, usando a técnica da **R3C**. Exemplo:

Quais os juros produzidos pelo capital de NCr$ 500,00, emprestado a 10% ao ano, durante 3 anos?

Pode-se raciocinar assim:

se	o capital	100 produz	10 em 1 ano
então	o capital	500 produzirá	5×10 em 1 ano
e, portanto,	o capital	500 produzirá	$3 \times 5 \times 10$ em 3 anos

Logo: os juros produzidos pelo capital de NCr$ 500,00 durante 3 anos, à taxa de 10% ao ano, foi de NCr$ 150,00.

$$(3 \times 5 \times 10 = 150)$$

Na prática, a repetição dêsse raciocínio é condensada em "fórmulas", que são *sentenças padrões* de inúmeros problemas. É o que ocorre com as Casas Bancárias, Caixas Econômicas, Fundos de Investimentos, etc., que dispõem inclusive de máquinas (muitas delas contando com modernos computadores eletrônicos) para aplicação de "fórmulas" que simplificam seu trabalho.

Para o nosso caso, vamos "deduzir" uma *boa* "fórmula", assim:

se	o capital	100	produz i	em 1 ano
então	o capital	C	produzirá j	em t anos

ou $\quad \downarrow \begin{matrix} 100 \\ C \end{matrix} \qquad \downarrow \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \qquad \downarrow \begin{matrix} 1 \\ t \end{matrix}$

ou $$\frac{i}{j} = \frac{100 \times 1}{C \times t} \iff \boxed{j = \frac{C \times i \times t}{100}}$$

Aplicando essa "fórmula" no exemplo estudado, onde:

$$\begin{cases} C = \text{NCr\$ } 500{,}00 \\ i\% = 10\% \text{ (ao ano)} \\ t = 3 \text{ (anos)} \\ j = ? \end{cases} \qquad \text{vem: } j = \frac{500{,}00 \times 10 \times 3}{100} = \mathit{150{,}00}$$

Nota: *Se,* por exemplo, a taxa fôsse de 2% ao mês, *então* um *capital* de NCr\$ 2.000,00 produziria, por mês, um juro de:

$$j = \frac{C \times i \times t}{100} = \frac{2.000{,}00 \times 2 \times 1}{100} = 40{,}00$$

Os problemas "inversos", isto é, aquêles nos quais se pede o *capital* (ou a *taxa*, ou o *tempo*), conhecidos os *juros* e a *taxa* (ou o *tempo*), são resolvidos aplicando-se a técnica da **R3C** que, agora, como é natural, tratará com grandezas inversamente proporcionais. Exemplos:

1.º) Um certo *capital* à taxa de 11% ao ano rendeu NCr\$ 220,00 de juros, durante 5 anos. Determinar o valor dêsse capital.

$$\text{Tem-se: } \begin{cases} i\% = 11\% \\ j = \text{NCr\$ } 220{,}00 \\ t = 5 \text{ (anos)} \\ C = ? \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\text{Esquema da } \mathbf{R3C}:} \\ \downarrow \begin{matrix} 100 \\ x \end{matrix} & \downarrow \begin{matrix} 11 \\ 220 \end{matrix} & \uparrow \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \end{array}$$

Determinação do *sentido* das flechas:

fixando o tempo: se 11 foi produzido por 100, para produzir 220 ("maior") será necessário "mais" que 100; logo: diretamente proporcionais;

fixando o juro: se 100 produz um "certo" juro em 1 ano, para produzir o "mesmo" juro em 5 anos ("mais" tempo) será preciso capital "menor"; logo: inversamente proporcionais.

$$\text{Cálculo: } \begin{matrix} 100 & 11 & 5 \\ x & 220 & 1 \end{matrix}$$

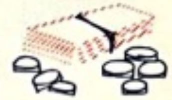
$$\frac{100}{x} = \frac{11 \times 5}{220 \times 1} \iff x = \frac{220 \times 100}{11 \times 5} = 400$$

Portanto: o *capital* é de NCr\$ 400,00.

Êsse exemplo sugere a seguinte "dedução" da *fórmula*, para o caso em que se deseja o *capital*, conhecidos a *taxa* e o *tempo:*

$$\downarrow \begin{matrix} 100 \\ C \end{matrix} \downarrow \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \uparrow \begin{matrix} 1 \\ t \end{matrix} \qquad \iff \qquad \begin{matrix} 100 & i & t \\ C & j & 1 \end{matrix}$$

ou $$\frac{100}{C} = \frac{i \times t}{j \times 1} \iff \boxed{C = \frac{100 \times j}{i \times t}}$$



Aplicação no exemplo estudado: $C = \frac{100 \times 220{,}00}{11 \times 5} = 400{,}00$

2.º) A que *taxa* anual foi empregado um capital de NCr\$ 900,00 que em 5 meses rendeu juros de NCr\$ 45,00?

$$\text{Temos: } \begin{cases} C = 900{,}00 \\ t = 5 \text{ meses} = \frac{5}{12} \text{ do ano} \\ j = 45{,}00 \\ i\% = ? \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\text{Esquema da } \mathbf{R3C}:} \\ \downarrow \begin{matrix} 100 \\ 900 \end{matrix} & \downarrow \begin{matrix} x \\ 45 \end{matrix} & \downarrow \begin{matrix} 1 \\ \frac{5}{12} \end{matrix} \end{array}$$

Mostre você que as flechas nesse caso têm tôdas o mesmo sentido (as grandezas são tôdas diretamente proporcionais). Então:

$$\frac{x}{45} = \frac{100 \times 1}{900 \times \frac{5}{12}} \iff x = \frac{45 \times 100}{900 \times \frac{5}{12}} = 12$$

Portanto: $i\% = 12\%$

Bom exercício: mostre que a "fórmula" que dá a *taxa* é: $\boxed{i = \frac{100 \times j}{C \times t}}$

Nota: Se, por exemplo, o tempo fôsse 2a 3me e a taxa dada por ano, reduzir-se-ia a *meses:* 27me e, a seguir, à fração de ano: $\frac{27}{12}$.

Se o tempo fôsse: 1a 5me 12d, deduzir-se-ia tudo a dias: $360+150+12=522$, isto é: 522d, e a seguir à fração de ano: $\frac{522}{360}$.

3.º) Durante quanto *tempo* foi empregado o capital de NCr$ 180,00 que, a $9\frac{1}{2}\%$ ao ano, produziu juros de NCr$ 38,00?

Temos: $\begin{cases} C = 180{,}00 \\ i\% = 9\frac{1}{2}\% = \frac{19}{2}\% \\ j = 38{,}00 \\ t = ? \end{cases}$

Esquema da **R3C:**

$$\begin{matrix} \uparrow & 100 & \downarrow & \frac{19}{2} & \downarrow & 1 \\ & 180 & & 38 & & x \end{matrix}$$

Justifique você o sentido das flechas. Então:

$$\begin{matrix} 180 & \frac{19}{2} & 1 \\ 100 & 38 & x \end{matrix}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{180 \times \frac{19}{2}}{100 \times 38} \Longleftrightarrow x = \frac{100 \times 38}{180 \times \frac{19}{2}} = 2\frac{2}{9}$$

ou, tempo $= 2\frac{2}{9}$ anos $\Longleftrightarrow$ 2a 2me e 20d (reduzindo)

Fàcilmente se chega à "fórmula" que dá o *tempo:*

$$\begin{matrix} \uparrow & 100 & \downarrow & i & \downarrow & 1 \\ & C & & j & & t \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} C & i & 1 \\ 100 & j & t \end{matrix}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{C \times i}{100 \times j} \Longleftrightarrow \boxed{t = \frac{100 \times j}{C \times i}}$$

Desconto — Câmbio

10. *Algumas informações sôbre câmbio*

Câmbio significa *troca* de moedas entre dois países. Por intermédio dos exemplos seguintes, você ficará um pouco informado sôbre êsse assunto.

1.º) Se você quiser comprar, por exemplo, livros nos Estados Unidos da América num total de 18 dólares e não dispuser dêles, então necessitará fazer uma troca (cambiar), dando em moeda nacional (cruzeiros) uma quantia equivalente. É evidente que tal troca vai depender do *câmbio do dia*, fornecido pelo Banco do Brasil.

Assim, se você comprar o dólar (nas casas especializadas) a NCr$ 4,15(*), deverá desembolsar: $18 \times 4{,}15 =$ NCr$ 74,70, mais as pequenas despesas relativas à remessa.

2.º) Vamos supor o *problema inverso*, usando outra moeda: papai quer remeter para Lisboa a importância de NCr$ 1.680,00. Se, no *câmbio do dia*, cada *escudo* custar NCr$ 0,14, papai deverá remeter:

$$1.680 : 0{,}14 = 12.000$$

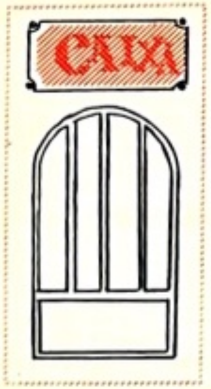
isto é, 12.000 escudos, sem contar a despesa de remessa.

3.º) Qual será o valor, em Brasília, de 36 libras, 9 shillings e 3 pence, ao câmbio de NCr$ 9,89 por libra (esterlina)?

Êste cálculo é sempre mais trabalhoso porque o sistema monetário inglês ainda não é decimal.

Como: £ 36 — 9 — 3 = 8.751d (redução conhecida desde a 1.ª Série) e cada libra ou 240d vale NCr$ 9,89, temos que 8.751d valerão, aproximadamente: NCr$ 360,61.

(*) Mercado de câmbio livre (*O Estado de S. Paulo*, edição de 29/8/69).



MERCADO NACIONAL

Taxas fixadas pelo Banco do Brasil (29/8/69)

Moedas	*Venda*
Dólar (E.U.A.)	NCr$ 4,15
Libra Esterlina (Inglaterra)	NCr$ 9,89
Marco (Alemanha)	NCr$ 1,04
Pêso (Argentina).........	NCr$ 0,01
Franco (França)..........	NCr$ 0,75
Escudo (Portugal)........	NCr$ 0,14
Coroa (Suécia)...........	NCr$ 0,80
Xelim (Áustria)..........	NCr$ 0,16
Franco (Suíça)...........	NCr$ 0,96
Pêso (Uruguai)...........	NCr$ 0,01
Franco (Bélgica)	NCr$ 0,08

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 33

1. Calcular os *juros* produzidos por:

   1.º) NCr$ 720,00, à taxa de 12% ao ano, em 2 anos;

   2.º) NCr$ 200,00, à taxa de $11\frac{1}{2}\%$ ao ano, em 3a 3me;

   3.º) NCr$ 2.000,00, *se* a taxa *fôsse* de 4% ao mês, durante 6 meses;

   4.º) NCr$ 20,00, à taxa de 1% ao mês, durante 40 dias;

   5.º) NCr$ 252,00, *se* a taxa *fôsse* de $2\frac{3}{4}\%$ ao mês, durante 2a 4me 10d.

2. Determinar o *capital* que produziu os juros de:

   1.º) NCr$ 80,00, *se* a taxa *fôsse* de 4% ao mês, durante 2 meses

   2.º) NCr$ 54,00, *se* a taxa *fôsse* de 18% ao ano, durante 3 anos;

   3.º) NCr$ 1,00, *se* a taxa *fôsse* de 0,05% por dia, durante 20 dias;

   4.º) NCr$ 420,00, *se* a taxa *fôsse* de 26% ao ano, durante 2a 3me 10d;

   5.º) NCr$ 0,15, à taxa de 12% ao ano, durante 1 ano.

3. Qual a *taxa:*

   1.º) por mês, que faria um capital de NCr$ 1.000,00 render NCr$ 50,00 de juros em 5 meses?

   2.º) por ano, que faz um capital de NCr$ 500,00 render NCr$ 60,00 de juros em 1 ano?

   3.º) por ano, que faria um capital de NCr$ 9.000,00 render NCr$ 342,00 de juros em 3 meses e 10 dias?

   4.º) por mês, que faz um capital de NCr$ 10,00 render NCr$ 1,80 de juros em 15 dias?

   5.º) por ano, que faria um capital de NCr$ 13.000,00 render NCr$ 3.250,00 de juros em 2 anos?

4. Calcular o *tempo* empregado pelo *capital* de:

   1.º) NCr$ 1.800,00 que, à taxa de $11\frac{1}{2}\%$ ao ano, rendeu NCr$ 460,00 de juros;

   2.º) NCr$ 600,00 que, *se* a taxa *fôsse* de 3% ao mês, renderia NCr$ 90,00 de juros;

   3.º) NCr$ 18,00 que, à taxa de 6% ao ano, rendeu NCr$ 3,24 de juros;

   4.º) NCr$ 3.650,00 que, à taxa de 8% ao ano, rendeu NCr$ 430,00 de juros;

   5.º) NCr$ 1,00 que, à taxa de $\frac{1}{12}\%$ ao mês, rendeu NCr$ 0,01.

PROBLEMAS COMERCIAIS PRÁTICOS — GRUPO 34

1. Você gostaria de comprar NCr$ 100,00 por NCr$ 65,00? Esta é a oferta feita pelo fundo de Investimentos "X" nos jornais de hoje. Qual é a *taxa* do lucro na transação?

2. Papai comprou NCr$ 1.000,00 de títulos de uma C.ia de Investimentos, pagando no ato NCr$ 880,00. Qual a taxa do ganho nessa compra?

3. Mamãe pagou sua prestação de NCr$ 15,00 um mês antes do vencimento, ganhando com isso um *desconto* de NCr$ 1,20. Qual foi a taxa dêsse desconto?

4. Ao concluir a 1.ª Série Ginasial ganhei NCr$ 20,00 de meu padrinho. Esse dinheiro foi depositado num Banco que paga 10% de juros ao ano. Quanto *acumularei* no Banco, depois de um semestre?

5. Titio fêz um empréstimo de NCr$ 1.200,00 por 6 meses. *Supondo* que a taxa *foi* de 18% ao ano, no fim dêsse tempo titio pagou os juros combinados, restituindo sòmente metade do capital emprestado. O restante foi renovado em nôvo empréstimo por mais 3 meses, à taxa de 24% ao ano. Determinar o total de juros pagos.

6. Para terminar a construção de sua casa, o Sr. Luís contraiu um empréstimo de NCr$ 3.000,00, a ser pago em três prestações. *Supondo* que a taxa de juros simples cobrada *foi* de 2% ao mês e sabendo-se que a primeira prestação de NCr$ 1.000,00 deverá ser paga depois de 6 meses, a segunda, de NCr$ 750,00, depois de 1 ano e a terceira, de NCr$ 1.250,00, depois de 18 meses, quanto o Sr. Luís pagará no final contando capital emprestado e juros pagos?

7. Se um comerciante receber emprestado, à taxa de $1\frac{1}{2}\%$ ao mês, as seguintes importâncias: NCr$ 2.480,00 por 90 dias, NCr$ 1.280,00 por 30 dias e NCr$ 3.800,00 por 5 meses, qual o total de juros que deverá pagar por êsses empréstimos?

8. Em quanto tempo um capital duplica com juros (simples), *se* a taxa *fôr* de 25% ao ano? (*Nota:* lembrar que nesse caso $j = C$)

9. A que taxa anual deverá ser empregado um certo capital para duplicar depois de 5 anos?

10. Se um capital empregado durante 5 anos, a juros simples, aumentasse de uma vez e meia, qual seria a taxa anual empregada?

11. É descontada em um Banco, 4 meses antes do vencimento, uma *letra*(*) cujo valor nominal é de NCr$ 480,00. Qual foi a importância recebida do Banco, sabendo-se que a taxa de desconto é de 10% ao ano?
12. Qual é o abatimento sofrido por uma *duplicata*(*) de NCr$ 625,00 que, paga à vista, ganha um desconto de 8%?

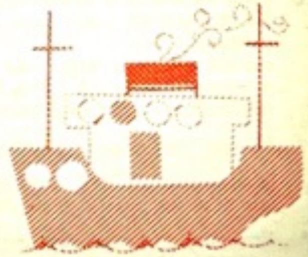
ATENÇÃO

De acôrdo com o decreto-lei n.º 1, de 13/11/65, que entrou em vigor a partir de 13/2/67, a moeda brasileira tornou-se o *cruzeiro nôvo* (símbolo NCr$) — equivalente a 1.000 cruzeiros antigos — subdividido em 100 centavos, escritos sob forma de fração decimal. Na conversão suprimem-se as importâncias inferiores a 10 cruzeiros antigos: Cr$ 109 ou Cr$ 103, por ex., convertem-se em NCr$ 0,10.

Todos os documentos (contratos, recibos, letras, cheques, etc.) devem ser emitidos em cruzeiros novos, escrevendo-se, por exemplo: NCr$ 45,25 e, por extenso: *quarenta e cinco cruzeiros novos e vinte e cinco centavos.*

APLICAÇÃO DE MOEDA ESTRANGEIRA — Grupo 35

1. Estando o dólar a NCr$ 4,15, quanto pagarei em cruzeiros novos por um livro de 8 dólares? Ao mesmo câmbio, quanto vale em cruzeiros novos uma moeda de um quarto de dólar? E uma moeda de 10 *cents?*
2. Preciso remeter para Lisboa a importância equivalente a 20.000 escudos, ao câmbio de NCr$ 0,14. Quanto devo pagar em moeda nacional?
3. Um livreiro de Brasília quer remeter a favor de outro, em Leipzig, a importância de 1.600 marcos. Que quantia deverá pagar em moeda brasileira, valendo o marco NCr$ 1,04 no câmbio do dia?
4. Os jogadores inglêses que disputaram a Taça das Nações no Maracanã, em 30/5/1964, mesmo perdendo do time brasileiro, ganharam uma gratificação de 60 libras esterlinas. Quanto receberiam, em cruzeiros novos, ao câmbio de NCr$ 9,89?
5. Recebi dois prêmios de Londres: o primeiro de £ 150-12-4 e o segundo de £ 60-15-8. Quanto receberei em São Paulo, ao câmbio de NCr$ 9,89?
6. Há uma excursão programada a Bariloche (Argentina), que custará 30.000 pesos. Quanto custará, em cruzeiros novos, se o câmbio do dia está a NCr$ 0,01?
7. É preciso enviar à prima Laurinha, que estuda na Inglaterra, NCr$ 989,00. Convertida essa importância ao câmbio do dia, isto é, a libra a NCr$ 9,89, quanto receberá ela em moeda inglêsa?
8. Papai recebeu de Paris um livro que lhe custou 50 francos. Ao câmbio do dia foram pagos NCr$ 37,50. Qual o preço pago por um franco?
9. Paulinho, Antônio Carlos e Márcia irão participar de uma visita a lugares históricos do Uruguai. Cada um entrará com NCr$ 300,00. Quantos pesos uruguaios poderão comprar se, ao câmbio do dia, o pêso uruguaio custa NCr$ 0,01?



10. O livro *Mathématique Moderne* — Volume I — de autoria do Prof. Papy, chegou da Bélgica ao preço de NCr$ 30,96. Quantos francos belgas foram pagos se, no câmbio do dia, o franco belga estava a NCr$ 0,08?

(*) São nomes atribuídos a documentos usados nas transações comerciais.

TESTE DE RECAPITULAÇÃO III

1. Multiplique todos os têrmos da sucessão

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

por 2. Os produtos que você obtém formam uma nova sucessão.

Agora responda, assinalando a sentença certa:

a) a sucessão que você obteve é igual à sucessão dada

b) os têrmos da sucessão que você obteve são diretamente proporcionais aos têrmos da sucessão dada

c) os têrmos da sucessão que você obteve são inversamente proporcionais aos têrmos da sucessão dada

d) não se pode dizer se os têrmos da sucessão que você obteve são diretamente ou inversamente proporcionais aos têrmos da sucessão dada

e) n. d. a.

2. "A sucessão 3, 5, 6 é inversamente proporcional à sucessão 20, 12, 10."

Esta sentença é equivalente a:

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ é diretamente proporcional a $\frac{1}{20}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$

b) 6, 5, 3 é diretamente proporcional a 20, 12, 10

c) 6, 5, 3 é diretamente proporcional a 10, 12, 20

d) 3, 5, 6 é diretamente proporcional a $\frac{1}{20}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$

e) n. d. a.

3. A sucessão 1, 2, 5 é diretamente proporcional à sucessão 3, 6, 15, e 3, 6, 15 é diretamente proporcional a 9, 18, 45. Então:

a) 1, 2, 5 é inversamente proporcional a 9, 18, 45

b) 1, 2, 5 é diretamente proporcional a 9, 18, 45

c) não se pode dizer se 1, 2, 5 é diretamente ou inversamente proporcional a 9, 18, 45

d) 1, 2, 5 tem o mesmo valor que 9, 18, 45

e) n. d. a.

4. Um certo trabalho foi realizado em 12 dias por ☐ máquinas. Nas mesmas condições das primeiras, (3 × ☐) máquinas realizarão um trabalho três vêzes maior em:

a) 36 dias *b)* 12 dias *c)* 4 dias *d)* 8 dias *e)* n. d. a.

5. Na questão anterior, o número de máquinas e o número de dias são grandezas:

a) diretamente proporcionais

b) inversamente proporcionais

c) nada se pode dizer sôbre elas

d) são diretamente e inversamente proporcionais (ao mesmo tempo)

e) n. d. a.

6. Você sabe que:

1.º) o valor de uma fração fica multiplicado por um certo número se multiplicarmos o seu numerador por êsse número;

2.º) o valor de uma fração fica dividido por um certo número ($\neq 0$) se multiplicarmos o seu denominador por êsse número.

Então, o valor de uma fração é:

a) diretamente proporcional tanto ao numerador como ao denominador

b) inversamente proporcional tanto ao numerador como ao denominador

c) diretamente proporcional ao numerador e inversamente proporcional ao denominador

d) inversamente proporcional ao numerador e diretamente proporcional ao denominador

e) n. d. a.

7. As sucessões 2, 5, 7 e 35, x y são inversamente proporcionais. Então:

a) $x = 5$ e $y = 7$

b) $x = 14$ e $y = 10$

c) $x = 10$ e $y = 14$

d) $x = 7$ e $y = 5$

e) n. d. a.

8. Num problema de juro simples o tempo é igual a 1 ano.

Então, êste problema:

a) não tem solução

b) tem muitas soluções

c) tem juro igual a zero

d) reduz-se a um cálculo de porcentagem

e) n. d. a

Complete as sentenças de modo a torná-las verdadeiras:

9. A condição para que as sucessões a, b, c, e m, n, p sejam *diretamente proporcionais* é que.....................................

10. As sucessões de números m, p, r e n, q, s são .... proporcionais se $m \times n = p \times q = r \times s$

11. Para triplicar um capital em 5 anos devemos empregá-lo a uma taxa de ...... ao ano

12. Uma taxa de 12% ao ano é equivalente a ...... % ao mês

Coloque *V* nas implicações verdadeiras e *F* nas falsas:

13. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Longrightarrow a, b, c,$ e a', b', c' são inversamente proporcionais

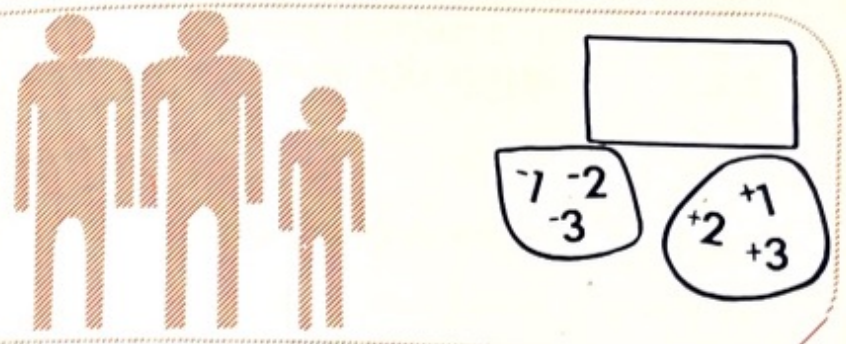
14. $j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \Longleftrightarrow t = \frac{C \cdot i \cdot j}{100}$

15. $j = C \Longrightarrow$ capital duplicou

capítulo três

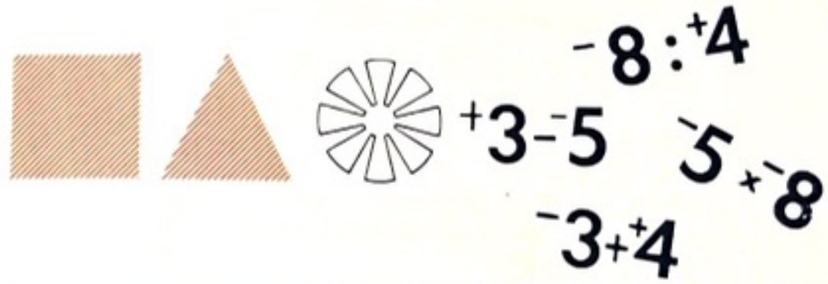
PRIMEIRA PARTE:

Novos números e novas estruturas.
Números inteiros relativos.
Estrutura de ordem; valor absoluto.



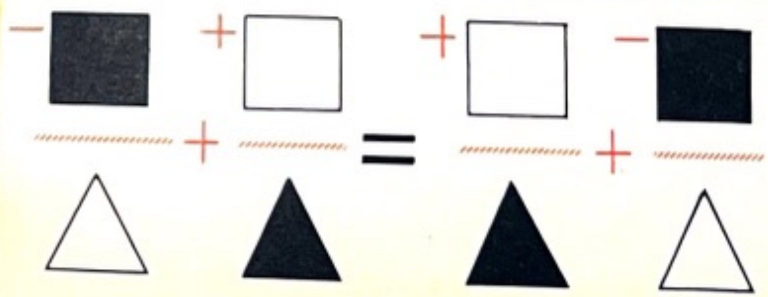
SEGUNDA PARTE:

Operações com números inteiros relativos.
Propriedades estruturais.



TERCEIRA PARTE:

Números racionais relativos.
Propriedades estruturais.



PRIMEIRA PARTE

Novos números e novas estruturas.
Números inteiros relativos.
Estrutura de ordem; valor absoluto.

Novos números e novas estruturas

Números inteiros relativos. Conjunto Z

1. *Necessidade dos números inteiros relativos*

No estudo das *operações* com os números naturais, a *subtração* não gozava da propriedade do *fechamento*, isto é, o conjunto **N**, onde se operava, *nem sempre* continha o **resultado** da subtração de dois números naturais *quaisquer*. Assim, por exemplo, no:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

$$7 - 2 = 5 \quad (\text{Sim})$$

$$3 - 5 = \,? \quad (\text{Não!})$$

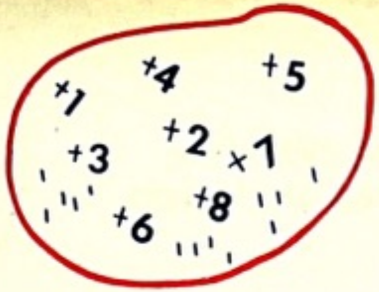
A fim de tornar a subtração uma operação *sempre possível*, bem como dotá-la da propriedade do *fechamento*, foi necessário criar **novos números**.

Que *números novos* são êsses?

São:

a) os **números inteiros negativos**, representados pelos *numerais:*

	$^-1$	$^-2$	$^-3$	$^-4$	$^-5$	$^-6$	$^-7$ ...
lê-se:	um negativo,	dois negativo,	três negativo,	quatro negativo,	cinco negativo,	seis negativo,	sete negativo



b) os **números inteiros positivos,** representados pelos *numerais:*

	$^+1$	$^+2$	$^+3$	$^+4$	$^+5$	$^+6$	$^+7$ ...
lê-se:	um positivo,	dois positivo,	três positivo,	quatro positivo,	cinco positivo,	seis positivo,	sete positivo

que, juntamente com o 0 (zero), constituem o conjunto dos NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS ou simplesmente NÚMEROS INTEIROS ou ainda NÚMEROS RELATIVOS. Indicação: **Z**

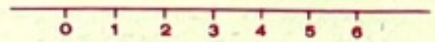
$$\mathbf{Z} = \{\ldots {}^-4,\ {}^-3,\ {}^-2,\ {}^-1,\ 0,\ {}^+1,\ {}^+2,\ {}^+3,\ {}^+4,\ \ldots\}$$

NOTA: $\mathbf{Z}^* = \{\ldots {}^-4, {}^-3, {}^-2, {}^-1, {}^+1, {}^+2, {}^+3, {}^+4, \ldots\}$, isto é: $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$.

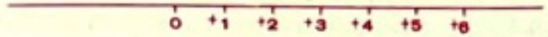
A *representação geométrica* dos *números inteiros relativos* pode ser feita *sôbre* uma *reta,* como o foi no Cap. 1, 1.ª Parte (§ 4), com os números naturais. A reta, agora, será pensada "sem fim", tanto à *direita* como à *esquerda* de um ponto *O* marcado sôbre ela:

Escolhida uma unidade de medida (continua sendo o *cm*), são marcados sôbre a reta, à direita e à esquerda de 0, segmentos consecutivos iguais à unidade escolhida, cujas extremidades indicarão os *números inteiros relativos:*

Você deve estar observando que o *comportamento* dos números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... na *reta numerada:*



é o *mesmo* que o do 0 e dos números inteiros positivos: $^+1$, $^+2$, $^+3$, $^+4$, $^+5$, $^+6$, ...



pois foram determinados da *mesma maneira.*

Êste *comportamento* permite, no *cálculo,* suprimir futuramente o sinal $^+$ da representação dos números inteiros positivos. Assim, por exemplo, pode-se escrever:

1 ao invés de $^+1$
2 ao invés de $^+2$
3 ao invés de $^+3$
. . . . .
. . . . .

e substituir um pelo outro sempre que fôr conveniente.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Os sinais $^+$ e $^-$, chamados, respectivamente, "mais qualificativo" e "menos qualificativo", que figuram no numeral de um número positivo (ex.: $^+2$) ou de um número negativo (ex.: $^-3$) *não têm* relação alguma com as operações de adição (+) e de subtração (−), razão por que são escritos um pouco acima à esquerda. Assim, por exemplo:

$^+2 + {}^-4$ é uma expressão matemática que indica a *adição* do número *dois positivo* com o número *quatro negativo;*

$^-3 - {}^+5$ .... indica a *subtração* entre os números relativos *três negativo* e *cinco positivo.*

Nestas condições existe um MESMO COMPORTAMENTO entre os números inteiros positivos:

$$^+1,\ {}^+2,\ {}^+3,\ {}^+4,\ {}^+5,\ \ldots$$

e os números naturais:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Diz-se, assim, que números inteiros positivos é uma outra denominação para números naturais, diferentes de zero.

Com êsse *mesmo comportamento* o conjunto dos números naturais:

$$\mathbf{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$$

é um *subconjunto* do conjunto dos números inteiros relativos:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots {}^-4,\ {}^-3,\ {}^-2,\ {}^-1,\ 0,\ {}^+1,\ {}^+2,\ {}^+3,\ {}^+4,\ \ldots\}$$

isto é: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$

NOTA HISTÓRICA

O nome de *número relativo* (às vêzes *número algébrico*) decorre do fato geométrico de êsses números traduzirem *posições relativas* sôbre a reta numerada. Os números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . , conhecidos desde a Escola Primária, recebem também o nome de *absolutos* (às vêzes *números aritméticos*) para serem distinguidos dos números inteiros relativos.

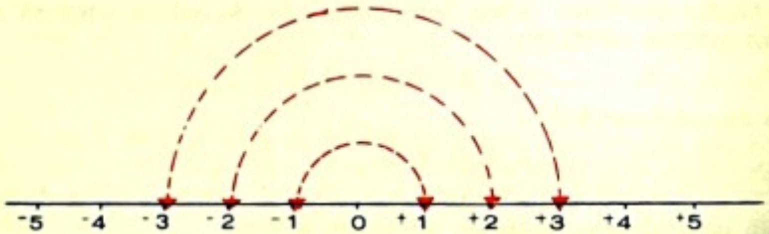
Històricamente, a noção de *número negativo* só foi admitida depois de muita relutância por parte dos matemáticos do séc. XVII. O defeito estava em se querer interpretá-los como representantes de quantidades ou de grandezas "negativas", pois nunca ninguém vira sôbre uma mesa, por exemplo: *⁻3 livros!* Porém, pensados os números relativos como *entes* que satisfazem a determinadas *propriedades estruturais*, foram reveladas as mais ricas *estruturas* da Matemática.

2. *Números relativos opostos*

Dois números inteiros relativos, cujos numerais diferem pelo *sinal qualificativo*, tais como:

$$\begin{array}{ccc} ^{-}1 & \text{e} & ^{+}1 \\ ^{-}2 & \text{e} & ^{+}2 \\ ^{-}3 & \text{e} & ^{+}3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

são denominados OPOSTOS (ou simétricos). Na reta numerada, os números relativos *opostos* indicam *pontos* situados a *igual distância* da origem 0, e em semi-retas opostas:



Logo, o oposto de $^{-}4$ é $^{+}4$; o oposto de $^{+}28$ é $^{-}28$.

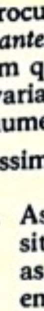
NOTA: O 0 é o *oposto* de 0, razão por que não se escreve: $^{-}0$ e $^{+}0$.

Qual é o *oposto* do *oposto* de $^{-}2$?

É o $^{-}2$ mesmo, pois o oposto de $^{-}2$ é $^{+}2$ e, o oposto dêste, é o $^{-}2$.

3. *Exemplos de "mesma estrutura" que a dos números relativos*

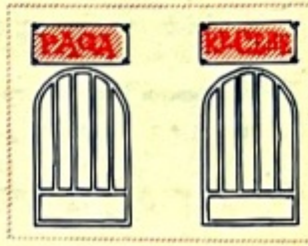
Procurando destacar, para outros entes, *comportamentos semelhantes* aos dos números relativos, basta lembrar as situações em que aparecem idéias de *variações em sentidos opostos*. Tais variações *comportam-se como os números relativos* sôbre a reta numerada.



Assim, por exemplo:

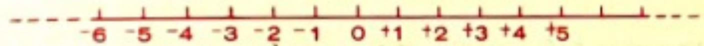
1. As *temperaturas* registradas por um termômetro são situações que se apresentam ou *acima de zero* (seriam as "positivas") ou *abaixo de zero* (. . . as "negativas") em relação à temperatura de 0 grau (é o 0 da reta numerada);

2. As *importâncias em dinheiro*, com as quais se efetuam operações comerciais, contam-se em *créditos* (seriam as "positivas") e em *débitos* (seriam as "negativas").



LEMBRETE AMIGO

Você acabou de conhecer os seguintes novos conjuntos (infinitos) de números, todos êles "suportados" pela *reta numerada:*



a) dos *números inteiros relativos:*

$$Z = \{\ldots {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3, {}^{+}4, \ldots\}$$

b) dos *números inteiros positivos:*

$$Z_{+}^{*} = \{{}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3, {}^{+}4, {}^{+}5, \ldots\}$$

c) dos *números inteiros negativos:*

$$Z_{-}^{*} = \{\ldots {}^{-}5, {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1\}$$

d) dos números inteiros *não-positivos*, isto é, o 0 e os números inteiros negativos:

$$Z_{-} = \{\ldots {}^{-}5, {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0\}$$

e) dos números inteiros *não-negativos*, isto é, o 0 e os números inteiros positivos:

$$Z_{+} = \{0, {}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3, {}^{+}4, {}^{+}5, \ldots\}$$

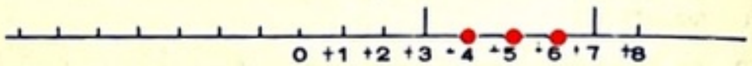
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 36

1. Os seguintes numerais representam números inteiros relativos. Escrever na frente de cada um dêles a leitura respectiva:

   $^{-}3$: três negativo;
   $^{+}49$: quarenta e nove positivo
   0: zero
   $^{-}1$: um negativo

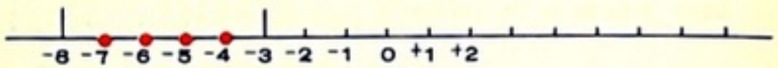
2. Escrever, representando entre chaves, os seguintes conjuntos (finitos):

   a) dos números inteiros positivos "entre" $^{+}3$ e $^{+}7$ (exclusive o $^{+}3$ e o $^{+}7$): basta observar na reta numerada que êsse conjunto é: $\{^{+}4, ^{+}5, ^{+}6\}$



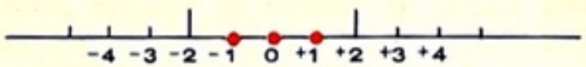
   b) dos números inteiros *negativos* "entre" $^{-}8$ e $^{-}3$:

   temos: $\{^{-}7, ^{-}6, ^{-}5, ^{-}4\}$



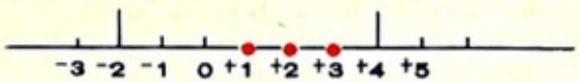
   c) dos números inteiros *relativos* "entre" $^{-}2$ e $^{+}2$:

   temos: $\{^{-}1, 0, ^{+}1\}$



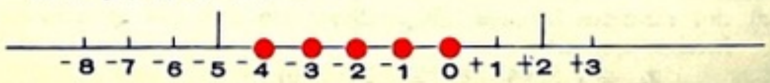
   d) dos números inteiros *positivos* "entre" $^{-}2$ e $^{+}4$:

   temos: $\{^{+}1, ^{+}2, ^{+}3\}$



   e) dos números inteiros *não-positivos* "entre" $^{-}5$ e $^{+}2$:

   temos $\{^{-}4, ^{-}3, ^{-}2, ^{-}1, 0\}$



   f) dos números inteiros *relativos* "entre" $^{-}1.971$ e $^{+}1.971$

   temos: $\{^{-}1.970, ^{-}1.969, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots, ^{+}1.969, ^{+}1.970\}$

   ... agora é difícil "desenhar" todo êsse conjunto de pontos na reta numerada!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 37

1. Escrever a leitura dos seguintes *números inteiros relativos:*

   1.º) $^{-}2$; 2.º) $^{+}1$; 3.º) 0; 4.º) $^{+}1.972$; 5.º) $^{-}5$; 6.º) $^{-}26$.

2. Escrever (representando entre chaves) os seguintes conjuntos:

   1.º) dos números inteiros *negativos;* (... lembre-se que é *infinito!*)
   2.º) dos números inteiros *relativos;* (... idem)
   3.º) dos números inteiros *positivos;* (... idem)
   4.º) dos números inteiros *não-positivos;* (... idem)
   5.º) dos números inteiros *não-negativos;* (... idem)
   6.º) dos números inteiros *positivos "entre"* $^{+}5$ e $^{+}10$; (... agora *é finito!*)
   7.º) dos números inteiros *negativos "entre"* $^{-}120$ e $^{-}117$; (... idem)
   8.º) dos números inteiros *positivos "entre"* $^{-}3$ e $^{+}5$; (... idem)
   9.º) dos números inteiros *não-negativos "entre"* $^{-}1$ e $^{+}3$; (... idem)
   10.º) dos números inteiros *não-positivos "entre"* $^{-}4$ e $^{+}4$; (... idem)
   11.º) dos números inteiros *positivos "entre"* $^{-}6$ e $^{-}2$; (... idem e ... cuidado!)
   12.º) dos números inteiros *relativos "entre"* $^{-}6$ e $^{+}3$; (... finito)
   13.º) dos números inteiros *positivos "entre"* $^{+}5.000$ e $^{+}9.000$; (... finito)
   14.º) dos números inteiros *relativos "entre"* $^{-}3.000$ e $^{+}1.970$; (... finito)
   15.º) dos números inteiros *não-positivos* e *não-negativos;* (... finito)

3. Tornar *verdadeiras* as seguintes sentenças:

   1.ª) o *oposto* de $^{+}5$ é ...
   2.ª) o *oposto* de $^{-}5$ é ...
   3.ª) o *oposto* de $^{-}2.000$ é ...
   4.ª) o *oposto* de 0 é ... (cuidado!)
   5.ª) o *oposto* do *oposto* de $^{-}3$ é ...
   6.ª) o *oposto* do *oposto* do *oposto* de $^{+}8$ é ...

4. Descrever alguns exemplos de *situações* nas quais as idéias de variações em sentidos opostos "comportam-se" como os números relativos.

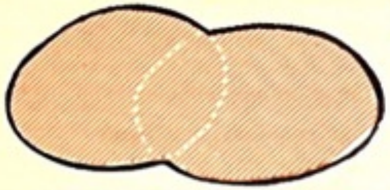
   (*Sugestões* de algumas *situações: altitudes* (acima do nível do mar seriam as "positivas" e, abaixo, as "negativas"); *acontecimentos históricos* (antes de Cristo, "negativos"; depois de Cristo, "positivos").

5. Ler as seguintes expressões, destacando o sinal que participa dos numerais dos números relativos do sinal das operações adição e subtração:

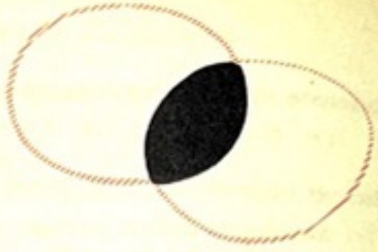
   1.ª) $^{-}25 + ^{+}25$ 3.ª) $^{+}4 - ^{-}2$
   2.ª) $^{-}1 - 0$ 4.ª) $(^{-}3 + ^{+}5) - ^{-}8$

6. Determinar, para cada ponto assinalado na reta numerada (fig. pág. 137), o número inteiro relativo respectivo, supondo a unidade de medida $m(\overline{OA}) = 1\text{cm}$.

   1.º) C 3.º) E 5.º) D'
   2.º) E' 4.º) O 6.º) A



conjunto - reunião



conjunto intersecção

Operações com os conjuntos estudados

Vamos praticar as operações *reunião* e *intersecção* e as relações de *inclusão* com os novos conjuntos estudados:

1. Determinar o *conjunto-reunião* dos seguintes conjuntos:

1.º) $\{^-3, ^-2, ^-1, 0\}$ e $\{^+1, ^+2\}$

Temos: $\{^-3, ^-2, ^-1, 0\} \cup \{^+1, ^+2\} = \{^-3, ^-2, ^-1, 0, ^+1, ^+2\}$

2.º) $\{^+2, ^+3, ^+4\}$ e $\{^+3, ^+4, ^+5, ^+6\}$

Temos: $\{^+2, ^+3, ^+4\} \cup \{^+3, ^+4, ^+5, ^+6\} = \{^+2, ^+3, ^+4, ^+5, ^+6\}$

3.º) $\{^-6, ^-2, ^+1\}$ e $\{^+3, ^+5, ^+8\}$

Temos: $\{^-6, ^-2, ^+1\} \cup \{^+3, ^+5, ^+8\} = \{^-6, ^-2, ^+1, ^+3, ^+5, ^+8\}$

4.º) $\{^-615, ^-1, ^+26\}$ e $\{^-1, ^+39, ^+5.000\}$

Temos: $\{^-615, ^-1, ^+26\} \cup \{^-1, ^+39, ^+5.000\} =$
$= \{^-615, ^-1, ^+26, ^+39, ^+5.000\}$

5.º) $\{\ldots ^-4, ^-3, ^-2, ^-1, 0\}$ e $\{0, ^+1, ^+2, ^+3, ^+4, \ldots\}$

Temos dois conjuntos infinitos: o dos números inteiros *não-positivos* ($\mathbf{Z}_-$) e o dos números inteiros *não-negativos* ($\mathbf{Z}_+$). O conjunto-reunião:

$$\{\ldots ^-4, ^-3, ^-2, ^-1, 0\} \cup \{0, ^+1, ^+2, ^+3, ^+4, \ldots\} = \{\ldots ^-4, ^-3, ^-2, ^-1, 0, ^+1, ^+2, ^+3, ^+4, \ldots\}$$

ou seja, é o conjunto dos *números inteiros relativos* ($\mathbf{Z}$). Logo:

$$\mathbf{Z}_- \cup \mathbf{Z}_+ = \mathbf{Z}$$

2. Determinar o *conjunto-intersecção* dos seguintes conjuntos:

1.º) $\{^-4, ^-3, ^-2, ^-1, 0\}$ e $\{^-2, ^-1, 0, ^+1, ^+2\}$

Temos: $\{^-4, ^-3, ^-2, ^-1, 0\} \cap \{^-2, ^-1, 0, ^+1, ^+2\} = \{^-2, ^-1, 0\}$

2.º) $\{^-3, ^-1, 0\}$ e $\{0, ^+2\}$

Temos: $\{^-3, ^-1, 0\} \cap \{0, ^+2\} = \{0\}$

3.º) $\{^-2, ^+1, ^+2\}$ e $\{^+4, ^+5, ^+7\}$

Temos: $\{^-2, ^+1, ^+2\} \cap \{^+4, ^+5, ^+7\} = \varnothing$ (conjunto-vazio)

4.º) $\{\ldots ^-4, ^-3, ^-2, ^-1, 0\}$ e $\{0, ^+1, ^+2, ^+3, ^+4, \ldots\}$

Temos: $\{\ldots ^-4, ^-3, ^-2, ^-1, 0\} \cap \{0, ^+1, ^+2, ^+3, ^+4, \ldots\} = \{0\}$

Portanto: o *conjunto-intersecção* do conjunto dos números inteiros *não-positivos* ($\mathbf{Z}_-$) com o conjunto dos números inteiros *não-negativos* ($\mathbf{Z}_+$) é o conjunto unitário constituído por 0, isto é, $\{0\}$.

Logo.

$$\mathbf{Z}_- \cap \mathbf{Z}_+ = \{0\}$$

Relações de inclusão com os conjuntos estudados

Quais as *relações de inclusão* entre os conjuntos estudados?

É fácil você concluir que: o conjunto dos números *inteiros negativos* está **contido** no conjunto dos números *inteiros relativos*, pois qualquer elemento do primeiro conjunto *pertence* ao segundo conjunto. Portanto:

$$\{\ldots ^-4, ^-3, ^-2, ^-1\} \subset \{\ldots ^-4, ^-3, ^-2, ^-1, 0, ^+1, ^+2, ^+3, ^+4, \ldots\}$$

ou

$$\mathbf{Z}_-^* \subset \mathbf{Z}$$

Também o conjunto dos números *inteiros positivos* está *contido* no conjunto dos números *inteiros relativos*, isto é:

$$\mathbf{Z}_+^* \subset \mathbf{Z}$$

E o conjunto dos números *inteiros não-negativos contém* o conjunto dos números *inteiros positivos?*

Dê você a resposta e represente o resultado com os símbolos conhecidos.

Consideremos, agora, exemplos de conjuntos finitos. Quais as relações de inclusão existentes entre os conjuntos:

1.º) $\{{}^{-}5, {}^{-}2, {}^{-}1\}$ e $\{{}^{-}5, {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1\}$?

Temos: $\{{}^{-}5, {}^{-}2, {}^{-}1\} \subset \{{}^{-}5, {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1\}$

2.º) $\{{}^{+}1, 0, {}^{+}8\}$ e $\{0\}$?

Temos: $\{{}^{+}1, 0, {}^{+}8\} \supset \{0\}$

Atenção: Observe com cuidado as seguintes sentenças:

$$\{{}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0\} \subset \{{}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0\}$$
$$\{{}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0\} \supset \{{}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0\}$$

Ambas são *verdadeiras!* Sabe por quê?

Porque, com relação à primeira sentença, *qualquer* elemento do primeiro conjunto pertence ao segundo; e, com relação à segunda sentença, qualquer elemento do segundo conjunto pertence ao primeiro.

Êste fato permite dizer que os dois conjuntos são IGUAIS e escrever:

$$\{{}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0\} = \{{}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0\}$$

Nota: A *ordem* com que os elementos figuram no conjunto, como você deve estar lembrado, pode ser *qualquer*. Assim, representando um conjunto qualquer por A e outro por B:

se $A \subset B$ e $B \subset A$ *então* $A = B$

caso contrário: $A \neq B$

Exemplos: $\{{}^{-}2, {}^{-}1, {}^{+}5\} = \{{}^{-}1, {}^{+}5, {}^{-}2\}$
$\{{}^{-}2, {}^{-}1\} \neq \{{}^{-}1, {}^{+}5, {}^{-}2\}$

PRÁTICAS MODERNAS — Grupo 38

1. Dados os conjuntos: $A = \{{}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0\}$ e $B = \{{}^{-}1, 0, {}^{+}1, {}^{+}2\}$

   determinar: $A \cup B$ e $A \cap B$

2. Dados os conjuntos: $A = \{{}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1\}$; $B = \{{}^{+}2, {}^{+}3\}$ e $C = \{0\}$

   determinar: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup C$; $A \cap C$; $B \cup C$; $B \cap C$; $(A \cap C) \cup B$

3. Dados os conjuntos: $X = \{{}^{-}32, 0, {}^{+}32\}$; $Y = \{0, {}^{+}1.968\}$; $Z = \{0\}$ e
   $T = \{{}^{+}1.967, {}^{+}1.968, {}^{+}1.969, {}^{+}1.970\}$

   determinar: $X \cup Y$; $X \cap Y$; $Y \cup T$; $Y \cap T$; $Z \cap T$; $(Y \cup Z) \cap T$; $(X \cap Y) \cap Z$

4. Dados os conjuntos infinitos:

   $Z_+^* = \{{}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3, {}^{+}4, {}^{+}5, \ldots\}$ $Z_-^* = \{\ldots {}^{-}5, {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1\}$
   $Z_- = \{\ldots {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0\}$ $Z_+ = \{0, {}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3, \ldots\}$

   determinar:
   1.º) $Z_+^* \cup Z_-^*$ 6.º) $Z_+^* \cap Z_+$
   2.º) $Z_- \cup Z_+$ 7.º) $Z_-^* \cup Z_-$
   3.º) $Z_+^* \cup Z_+$ 8.º) $Z_-^* \cap Z_-$
   4.º) $Z_+^* \cap Z_-^*$ 9.º) $(Z_+^* \cup Z_+) \cap Z$
   5.º) $Z_-^* \cap Z_+$ 10.º) $(Z_+^* \cup Z_-^*) \cup \{0\}$

5. *Preste muita atenção:* nas seguintes sentenças, escrever V se fôr verdadeira e F se fôr falsa:

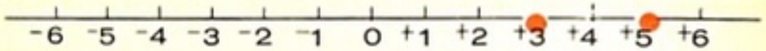
   1.ª) $\{{}^{-}5, {}^{+}3, {}^{-}1\} \subset \{{}^{+}2, {}^{-}5, {}^{-}1, {}^{+}7, {}^{+}3\}$ 6.ª) $\{0, {}^{-}3, {}^{+}18\} \supset \{{}^{+}18, {}^{-}3, 0\}$
   2.ª) $\{{}^{-}5, {}^{+}3, {}^{-}1\} \supset \{{}^{+}2, {}^{-}5, {}^{-}1, {}^{+}7, {}^{+}3\}$ 7.ª) $\{0, {}^{-}3, {}^{+}18\} \subset \{0, {}^{+}18, {}^{-}3\}$
   3.ª) $\{0, {}^{-}3, {}^{+}18\} \neq \{{}^{-}3, 0, {}^{+}18\}$ 8.ª) $\{\ \} \subset \{{}^{-}2, {}^{+}1, {}^{-}13\}$
   4.ª) $\{0, {}^{-}3, {}^{+}18\} = \{{}^{+}18, {}^{-}3, 0\}$ 9.ª) $\{{}^{-}1, {}^{+}3\} = \{{}^{-}4, {}^{+}3, {}^{+}2, 0\}$
   5.ª) $\{0, {}^{-}3, {}^{+}18\} = \{0, {}^{-}3, {}^{+}18\}$ 10.ª) $\{{}^{-}1, {}^{+}3\} \neq \{{}^{-}4, {}^{+}3, {}^{+}2, 0\}$

Estrutura de ordem; valor absoluto

Estrutura de ordem nos números inteiros relativos
Analogia das sentenças em Português e Matemática

4. *Relações: "é maior que" (">") e "é menor que" ("<")*

Considere na *reta numerada:*



os números *inteiros positivos:* $^{+}3$ e $^{+}5$. Repare que o $^{+}5$ está *à direita* de $^{+}3$. Êste fato permite dizer que: $^{+}5$ *é maior que* $^{+}3$, indicando-se, simbòlicamente, esta sentença por: $^{+}5 > {}^{+}3$. São, pois, *equivalentes* tais sentenças, isto é:

$^{+}5$ está à direita de $^{+}3$ $\iff$ $^{+}5 > {}^{+}3$

Então:

$^{+}2 > {}^{-}1$	(pois o	$^{+}2$	está	*à*	*direita*	de	$^{-}1$)
$^{-}1 > {}^{-}4$	("	" $^{-}1$	"	"	"	"	$^{-}4$)
$0 > {}^{-}3$	("	" 0	"	"	"	"	$^{-}3$)
$^{+}5 > 0$	("	" $^{+}5$	"	"	"	"	0)

Anàlogamente, conclui-se fàcilmente que:

$^{+}3$ está à esquerda de $^{+}5$ $\iff$ $^{+}3 < {}^{+}5$

Portanto:

$^{+}3 < {}^{+}4$	(pois o	$^{+}3$	está	*à*	*esquerda*	de	$^{+}4$)
$^{+}3 < {}^{+}8$	("	" $^{+}3$	"	"	"	"	$^{+}8$)
$^{-}5 < {}^{-}2$	("	" $^{-}5$	"	"	"	"	$^{-}2$)
$^{-}1 < {}^{+}4$	("	" $^{-}1$	"	"	"	"	$^{+}4$)
$0 < {}^{+}3$	("	" 0	"	"	"	"	$^{+}3$)
$^{-}2 < 0$	("	" $^{-}2$	"	"	"	"	0)

Você, agora, já pode "*deduzir*" que:

1. O zero é *maior* que qualquer número inteiro negativo e *menor* que qualquer número inteiro positivo. Exemplos:

   $0 > {}^{-}5$ $\quad$ $0 < {}^{+}1$
   $0 > {}^{-}2.319$ $\quad$ $0 < {}^{+}18$

2. Qualquer número inteiro positivo *é maior que* qualquer número inteiro negativo. Exemplos:

   $^{+}3 > {}^{-}15$ $\quad$ $^{+}1 > {}^{-}2$ $\quad$ $^{+}8 > {}^{-}5$ $\quad$ $^{+}2 > {}^{-}1.966$

3. Qualquer número inteiro negativo *é menor que* qualquer número inteiro positivo. Exemplos:

   $^{-}8 < {}^{+}1$ $\quad$ $^{-}26 < {}^{+}25$ $\quad$ $^{-}3 < {}^{+}9$ $\quad$ $^{-}8.000 < {}^{+}2$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 39

1. Duas, das seguintes sentenças, são *falsas*. Quais são?

1.ª)	$^{+}5 > {}^{-}3$	6.ª)	$^{-}1 > {}^{-}8$
2.ª)	$^{-}3 < {}^{-}2$	7.ª)	$0 > {}^{-}3$
3.ª)	$0 < {}^{-}8$	8.ª)	$^{+}1 > {}^{-}1$
4.ª)	$0 < {}^{+}8$	9.ª)	$^{-}6 > {}^{+}6$
5.ª)	$^{+}1.000 > {}^{+}1.000$	10.ª)	$^{-}1.000 < {}^{+}1.000$

2. Uma, das seguintes sentenças, é *falsa*. Qual é?

1.ª)	$^{+}5 \neq {}^{-}3$	4.ª)	$^{-}3 \neq {}^{+}3$
2.ª)	$^{+}5 = {}^{+}5$	5.ª)	$^{-}8 \neq 0$
3.ª)	$^{-}3 = {}^{+}3$	6.ª)	$^{-}2 = {}^{-}2$

3. Substitua, nas seguintes sentenças, $\triangle$, $\square$, $\triangledown$ por números inteiros relativos, de modo a formar: primeiro, uma sentença verdadeira (*V*) e, a seguir, uma sentença falsa (*F*):

1.ª) $\triangle > {}^{-}3$ $\quad$ (Ex. modêlo): $\bullet$ $\nearrow$ $^{+}2 > {}^{-}3$ (*V*) ; $\searrow$ $^{-}4 > {}^{-}3$ (*F*) $\quad$ 4.ª) $^{-}2 < \square$

2.ª) $\square < {}^{+}5$ $\quad$ 5.ª) $^{+}126 = \triangle$

3.ª) $\triangledown \neq {}^{+}1$ $\quad$ 6.ª) $^{-}1 > \triangledown$

5. *Relações: "é maior ou igual que" ("$\geqslant$") e "é menor ou igual que" ("$\leqslant$"); uso do conectivo "ou" em Português e Matemática*

Você sabe da importância que tem em Português o uso do conectivo *ou* quando liga duas sentenças simples para formar *sentença composta.*

O mesmo ocorre em Matemática quando você liga duas sentenças matemáticas simples para formar uma *sentença matemática composta.* Suponha, por exemplo, que seu professor tenha feito o seguinte pedido à classe:

"Paulo ou Joaquim devem trazer amanhã o livro de Matemática Moderna"

Esta sentença é composta de duas sentenças simples ligadas pelo *conectivo* **ou**, isto é: *Paulo deve trazer amanhã o livro de Matemática Moderna* **ou** *Joaquim deve trazer amanhã o livro de Matemática Moderna.*

Em quantos, dos seguintes casos, o professor será *atendido* no seu pedido?

1. sòmente Paulo trouxe o livro de M. M.;
2. sòmente Joaquim trouxe o livro de M. M.;
3. ambos trouxeram o livro de M. M.;
4. nenhum dos dois trouxe o livro de M. M.

Pela atuação do conectivo **ou** você conclui que o professor será atendido nos casos: 1, 2 e 3, e não será atendido no caso 4. Isto significa que, para uma sentença composta (duas sentenças simples ligadas pelo conectivo *ou*) ser *verdadeira*, basta que uma das sentenças simples seja *verdadeira*. Só será *falsa* se as duas sentenças simples que a compõem forem falsas.

Se você, agora, combinar sentenças matemáticas com as *relações* dadas pelos símbolos:

$$>, \ =, \ <$$

resultarão *sentenças matemáticas compostas*, de **mesma estrutura** que as obtidas em Português com o conectivo **ou.** Assim, por exemplo, a sentença composta:

$^{+}5$ *é maior que* $^{+}3$ **ou** $^{+}5$ *é igual a* $^{+}3$, isto é: $^{+}5 > {}^{+}3$ **ou** $^{+}5 = {}^{+}3$

simbòlicamente, pode ser escrita:

$^{+}5 \geqslant {}^{+}3$ (lê-se: "cinco positivo é maior que três positivo **ou** cinco positivo é igual a três positivo")

Essa sentença matemática composta é *verdadeira?* Sim, pois basta que *uma das sentenças simples* seja verdadeira, e, como a primeira delas: $^{+}5 > {}^{+}3$ é verdadeira ... não interessa que a segunda: $^{+}5 = {}^{+}3$, seja falsa. Logo:

$^{+}5 \geqslant {}^{+}3$ é uma *sentença verdadeira.*

Já a sentença matemática composta:

$^{+}5 \geqslant {}^{+}10$ (lê-se: "$^{+}5$ é maior que 10 **ou** $^{+}5$ é igual a $^{+}10$")

é *falsa*, pois as duas sentenças que a compõem são falsas:

$$^{+}5 > {}^{+}10 \quad (F) \qquad e \qquad ^{+}5 = {}^{+}10 \quad (F)$$

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 40

1. Suponha que você diga a sentença (composta): *"Julinho está de camisa branca ou Pedro está de camisa amarela"*. Responda às seguintes perguntas:
   1.ª) Se, efetivamente, Julinho está de camisa branca, mas Pedro está de camisa azul, a sentença que você disse é *verdadeira?* Por quê?
   2.ª) Se Julinho está de camisa cinza e Pedro de camisa amarela, continuaria verdadeira a sentença que você enunciou? Por quê?
   3.ª) E se Julinho está de camisa amarela e Pedro de camisa branca?
   4.ª) E se Julinho está sem camisa e Pedro de camisa branca?

2. Coloque, sob forma de sentenças matemáticas compostas, as seguintes sentenças ligadas pelo conectivo **ou:**
   1.ª) "$^{+}3$ é maior que $^{-}5$ ou $^{+}3$ é igual a $^{-}5$"   Ex. modêlo: $^{+}3 \geqslant {}^{-}5$
   2.ª) "$^{+}7$ é menor que $^{+}2$ ou $^{+}7$ é igual a $^{+}2$"
   3.ª) "$^{-}1.970$ é menor que $^{-}1971$ ou $^{-}1970$ é igual a $^{-}1971$"
   4.ª) "0 é maior que $^{-}3$ ou 0 é igual a $^{-}3$"

3. Quais, das sentenças compostas do Exercício 2, são *verdadeiras?*

4. Substituir $\triangle$ e $\square$ por números inteiros relativos nas seguintes sentenças compostas, a fim de torná-las *verdadeiras:*
   1.ª) $\triangle \geqslant {}^{+}4$ Ex. modêlo: $\triangle = {}^{+}5$, pois: $^{+}5 \geqslant {}^{+}4$ (*V*)
   2.ª) $\square \leqslant {}^{-}1$
   3.ª) $^{-}3 \leqslant \square$
   4.ª) $\triangle \geqslant \square$

5. Assinale com *V* as sentenças verdadeiras e com *F* as falsas:

1.ª) $^+7 \geqslant {}^+2$ (*V*) Ex. modêlo: é *V* porque $^+7 > {}^+2$
2.ª) $^-9 \leqslant {}^-10$
3.ª) $^-4 \leqslant 0$
4.ª) $^-3 \geqslant {}^+5$

6. *Valor absoluto de um número relativo*

Denomina-se *valor absoluto* de um número relativo o ***próprio número***, se êle fôr *positivo* ou *nulo;* ou o *seu oposto,* se êle fôr *negativo.*

Assim, por exemplo, o valor absoluto do número relativo $^+3$ é o próprio $^+3$ que, devido ao *mesmo comportamento* de $^+3$ e 3, permite escrever 3 para o valor absoluto de $^+3$.

O valor absoluto de $^-3$ é o *seu oposto,* isto é, $^+3$ e, portanto, 3.

Costuma-se indicar o *valor absoluto* de um número relativo por meio de duas barras (| |). Exemplos:

$\lvert {}^+3 \rvert = 3$	lê-se: "*valor absoluto* de três positivo é *três*"
$\lvert {}^-3 \rvert = 3$	lê-se: "*valor absoluto* de três negativo é *três*"
$\lvert {}^+26 \rvert = 26$	lê-se: "*valor absoluto* de vinte e seis positivo é *vinte e seis*"
$\lvert {}^-1.000 \rvert = 1.000$	lê-se: "*valor absoluto* de mil negativo é *mil*".

O *valor absoluto* de 0 é 0; ou também: $\lvert 0 \rvert = 0$

O importante sôbre êsse assunto é você guardar que está *pela primeira vez relacionando* os "novos" números criados: *números inteiros relativos,* com os "velhos" números conhecidos, isto é, os *números naturais.*

Observe o comportamento de ambos nas importantes relações de *igualdade* e de *desigualdade.* Como:

$$\lvert {}^-3 \rvert = 3 \quad \text{e} \quad \lvert {}^+3 \rvert = 3$$

então:

$$\lvert {}^-3 \rvert = \lvert {}^+3 \rvert = 3$$

LEMBRETE AMIGO

$$\lvert {}^+3 \rvert = 3 \quad \text{e} \quad \lvert {}^-3 \rvert = 3$$

$$\lvert {}^+3 \rvert = \lvert {}^-3 \rvert \quad \text{e} \quad {}^+3 \neq {}^-3$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 41

1. Calcular o *valor absoluto* dos seguintes números inteiros relativos, usando as duas barras para sua indicação:

1.º) $^-7$	(Ex. modêlo: $\lvert {}^-7 \rvert = 7$)	6.º) $^-1$
2.º) $^+186$		7.º) $^-12$
3.º) 0		8.º) $^+120$
4.º) $^-39$		9.º) $^+12$
5.º) $^+1$		10.º) $^-3$

2. Tornar *verdadeira* cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $\lvert {}^-5 \rvert = \ldots$	(Ex. modêlo: $\lvert {}^-5 \rvert = 5$)	6.ª) $\lvert {}^+200 \rvert = \ldots$
2.ª) $\lvert {}^+1 \rvert = \ldots$		7.ª) $\lvert {}^-2 \rvert = \ldots$
3.ª) $\lvert {}^+5 \rvert = \ldots$		8.ª) $\lvert {}^+3 \rvert = \ldots$
4.ª) $0 = \ldots$		9.ª) $\lvert {}^+1.932 \rvert = \ldots$
5.ª) $\lvert {}^-13 \rvert = \ldots$		10.ª) $\lvert {}^-1 \rvert = \ldots$

3. Dois números inteiros relativos diferentes possuem, cada um dêles, o módulo 2. Quais são êles?

4. Escrever *V* ou *F*, dependendo de a sentença ser verdadeira ou falsa:

1.ª) $^-1 \neq {}^+1$	4.ª) $^+3 = {}^-3$	7.ª) $\lvert {}^+13 \rvert \geqslant \lvert {}^+13 \rvert$	10.ª) $\lvert {}^-9 \rvert < 5$
2.ª) $\lvert {}^-1 \rvert = \lvert {}^+1 \rvert$	5.ª) $\lvert {}^+3 \rvert = \lvert {}^-3 \rvert$	8.ª) $\lvert {}^+13 \rvert = \lvert {}^+13 \rvert$	11.ª) $\lvert {}^-2 \rvert \neq \lvert {}^+2 \rvert$
3.ª) $\lvert {}^-5 \rvert < 5$	6.ª) $0 \neq \lvert 0 \rvert$	9.ª) $0 < \lvert {}^-216 \rvert$	12.ª) $\lvert {}^+3 \rvert > 12$

5. Substituir, nas seguintes sentenças, $\square$ e $\triangle$ por números *inteiros relativos*, a fim de torná-las *verdadeiras:*

1.ª) $\lvert \triangle \rvert = 3$	5.ª) $\lvert \triangle \rvert < 4$
2.ª) $\square > \lvert {}^-5 \rvert$	6.ª) $\lvert {}^+13 \rvert \geqslant \square$
3.ª) $\triangle \neq \lvert {}^+2 \rvert$	7.ª) $\lvert \triangle \rvert = \lvert \square \rvert$
4.ª) $\square \geqslant \lvert {}^-1 \rvert$	8.ª) $\lvert \triangle \rvert \neq \square$

SEGUNDA PARTE

Operações com números inteiros relativos.
Propriedades estruturais.

Operações com números inteiros relativos

1. *Importância de uma operação*

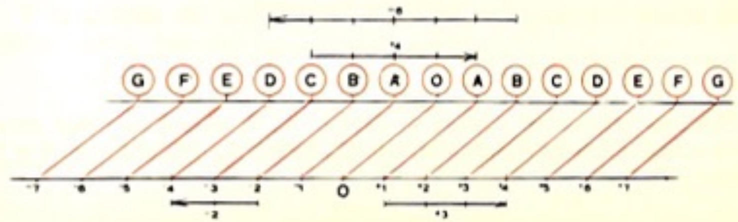
Conhecidos *novos* números, a fase seguinte é *operar* com os mesmos. A seguir são pesquisadas as *propriedades estruturais* das operações estudadas, que "dirão" da importância dos números "criados".

ADIÇÃO

2. *Conceito*

A operação de *adição*, que será indicada também pelo sinal $+$, de dois números inteiros relativos quaisquer, pode ser definida através da *reta numerada*. Como o resultado dessa operação — **soma** — é um número inteiro relativo, pois também se encontra na reta numerada, você logo "descobrirá" *técnicas operatórias* que permitirão efetuar a *adição* $(+)$ de dois números inteiros relativos, sem usar a reta numerada.

Imagine-se, agora, percorrendo uma estrada, marcada de *quilômetro* a *quilômetro* por letras:



Tal estrada teria, nessas condições, o mesmo "comportamento" de uma *reta numerada*, marcada como de costume. Todo *movimento* que você fizer para *a direita* é descrito por *números inteiros positivos*, e todo *movimento* que fizer para *a esquerda* será descrito por *números inteiros negativos*. Assim, por exemplo:

1. o movimento que o deslocaria de *A para D* é descrito por: $^{+}3$ (pois você "andou" *três unidades* para *a direita*)
2. o movimento que o deslocaria de *B' para D'* é descrito por: $^{-}2$ (pois você "andou" *duas unidades* para *a esquerda*)
3. o movimento de *C' para A* é descrito por: $^{+}4$
4. o movimento de *B para D'* é descrito por: $^{-}6$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 42

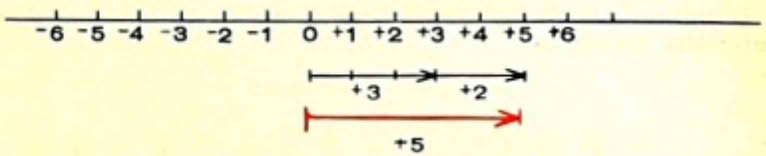
Dizer qual o *número inteiro relativo* que descreve os seguintes *movimentos:*

1.º) de *C'* para *O* : ...	6.º) de *O* para *O* : ...
2.º) de *C'* para *C* : ...	7.º) de *D'* para *D* : ...
3.º) de *O* para *E* : ...	8.º) de *C* para *C* : ...
4.º) de *A* para *A'* : ...	9.º) de *B'* para *E* : ...
5.º) de *O* para *D'* : ...	10.º) de *E* para *B'* : ...

Como se efetuaria a **adição** de dois *números inteiros positivos*, como, por ex.:

$$^{+}3 + {}^{+}2 = ?$$

Voltemos à *reta numerada*, que funcionará como uma verdadeira **tábua de adição** de números relativos:

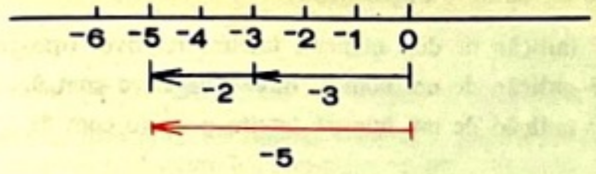


Partindo sempre de 0 para a direita, a "composição" dos movimentos consecutivos que traduzem, respectivamente, os números $^{+}3$ e $^{+}2$, dá como resultado: $^{+}5$, isto é:

$$\boxed{^{+}3 + {}^{+}2 = {}^{+}5}$$

E a **adição** de dois *números inteiros negativos*, como, por ex.:

$$^{-}3 + {}^{-}2 = ?$$

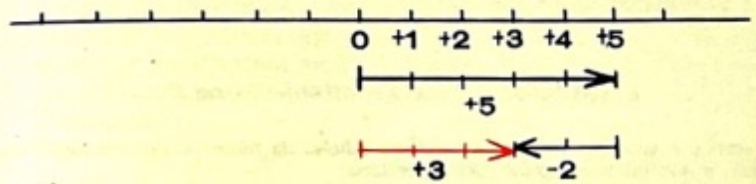


Partindo, agora, de 0 para a esquerda, na *reta numerada*, você concluirá fàcilmente que:

$$\boxed{^{-}3 + {}^{-}2 = {}^{-}5}$$

Como se efetuaria a **adição** de um *número inteiro positivo* com um *número inteiro negativo*, como, por ex.:

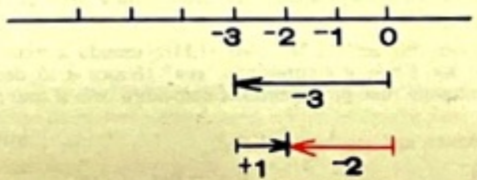
$$^{+}5 + {}^{-}2 = ?$$



SOLUÇÃO: $\boxed{^{+}5 + {}^{-}2 = {}^{+}3}$ **Por quê?**

E a **adição** de um *número inteiro negativo* com um *número inteiro positivo*, como, por ex.:

$$^{-}3 + {}^{+}1 = ?$$



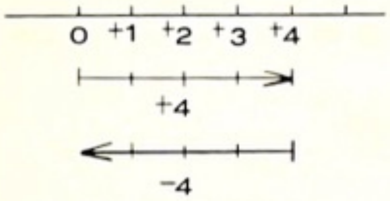
SOLUÇÃO: $\boxed{^{-}3 + {}^{+}1 = {}^{-}2}$ **Por quê?**

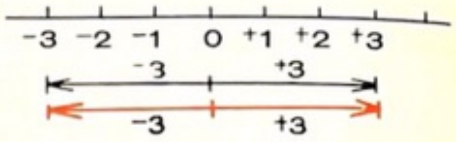
Como se efetuaria a adição de:

${}^{+}4 + {}^{-}4 = ?$ (**adição** de dois números inteiros relativos **opostos**)

${}^{-}3 + 0 = ?$ (**adição** de um número intèiro negativo com **0**)

${}^{+}3 + 0 = ?$ (**adição** de um número inteiro positivo com **0**)





A *tábua* **operatória**, estabelecida sôbre a reta numerada, mostra que:

$\boxed{{}^{+}4 + {}^{-}4 = 0}$ $\boxed{{}^{-}3 + 0 = {}^{-}3}$ $\boxed{{}^{+}3 + 0 = {}^{+}3}$

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — Grupo 43

1. Determine a *soma* resultante das seguintes *adições* de números inteiros relativos, usando a reta numerada como *tábua operatória:*

1.ª) ${}^{+}1 + {}^{+}4 = \dots$	7.ª) ${}^{-}2 + {}^{-}5 = \dots$
2.ª) ${}^{+}2 + {}^{+}3 = \dots$	8.ª) ${}^{+}5 + {}^{-}2 = \dots$
3.ª) ${}^{+}4 + 0 = \dots$	9.ª) ${}^{-}8 + {}^{+}3 = \dots$
4.ª) $0 + {}^{+}4 = \dots$	10.ª) ${}^{-}2 + 0 = \dots$
5.ª) $0 + {}^{-}3 = \dots$	11.ª) ${}^{-}4 + {}^{-}3 = \dots$
6.ª) ${}^{-}1 + {}^{-}4 = \dots$	12.ª) ${}^{-}6 + {}^{+}2 = \dots$

2. Observe, com atenção, as respostas obtidas nas questões do Exercício 1. A seguir tente "descobrir" uma *técnica operatória* capaz de determinar a *soma* de dois números inteiros relativos *quaisquer* (evitando assim de usar sempre a reta numerada).

Você já pensou em "somar" ${}^{+}2.315$ com ${}^{+}1.216$, usando a reta numerada? Seria difícil, não? Por isso é bom ir empregando "sua" técnica e só depois recorrer à *técnica* que irá ser ensinada (que provàvelmente coincidirá com a sua. . .)

3. Experimente "sua" técnica nas seguintes adições:

1.ª) ${}^{+}30 + {}^{+}12$	5.ª) ${}^{+}1.965 + {}^{-}10$
2.ª) ${}^{+}30 + {}^{-}12$	6.ª) ${}^{-}1.965 + {}^{+}10$
3.ª) ${}^{-}65 + {}^{-}15$	7.ª) ${}^{-}315 + 0$
4.ª) ${}^{-}139 + {}^{-}1$	8.ª) $0 + {}^{+}68$

3. *Técnica de cálculo para a adição de dois números inteiros relativos*

Será revelada por intermédio das seguintes *regras-padrões:*

1.ª) A *soma* de dois números *inteiros positivos* é um número *inteiro positivo*, cujo valor absoluto é a **soma** dos valôres absolutos dos números dados. Exemplos:

${}^{+}3 + {}^{+}2 = {}^{+}5$ ($3 + 2 = 5 \Longleftrightarrow$ soma dos valôres absol.)

${}^{+}515 + {}^{+}1.300 = {}^{+}1.815$ ($515 + 1.300 = 1.815 \Longleftrightarrow$ soma dos val. absol.)

2.ª) A *soma* de dois números *inteiros negativos* é um número *inteiro negativo*, cujo valor absoluto é a **soma** dos valôres absolutos dos números dados. Exemplos:

${}^{-}3 + {}^{-}2 = {}^{-}5$ ($3 + 2 = 5 \Longleftrightarrow$ soma dos val. absol.)

${}^{-}515 + {}^{-}1.300 = {}^{-}1.815$ ($515 + 1.300 = 1.815 \Longleftrightarrow$ soma dos val. absol.)

3.ª) A *soma* de dois números inteiros relativos, um dêles *positivo* e outro *negativo* (porém, *não-opostos*), é um número *inteiro relativo*, cujo valor absoluto é a **diferença** entre os valôres absolutos dos números dados; essa *diferença* será um número inteiro positivo ou negativo, de acôrdo com o número relativo que tiver *maior valor absoluto*. Exemplos:

${}^{+}8 + {}^{-}5 = {}^{+}3$ ($8 - 5 = 3 \Longleftrightarrow$ diferença dos val. absol.)

${}^{+}2 + {}^{-}7 = {}^{-}5$ ($7 - 2 = 5 \Longleftrightarrow$ diferença dos val. absol.)

${}^{-}312 + {}^{+}839 = {}^{+}527$ ($839 - 312 = 527 \Longleftrightarrow$ diferença dos val. absol.)

4.ª) A *soma* de um número *inteiro relativo* ***qualquer*** (positivo ou negativo) com 0 é o próprio número inteiro relativo. Exemplos:

$${}^{+}8 + 0 = {}^{+}8$$
$${}^{-}3 + 0 = {}^{-}3$$

5.ª) A *soma* de dois *inteiros relativos* ***opostos*** é 0. Exemplos:

${}^{+}3 + {}^{-}3 = 0$ ($3 - 3 = 0 \Longleftrightarrow$ diferença dos val. absol.)

${}^{-}850 + {}^{+}850 = 0$ ($850 - 850 = 0 \Longleftrightarrow$ diferença dos val. absol.)

Nota: Guarde bem o seguinte resultado pela aplicação que terá nos *cálculos:*
Se a soma de dois números inteiros relativos é igual a zero, então um dêles é o oposto do outro.
Em símbolos: para quaisquer $a, b \in Z$

$$\boxed{a + b = 0 \Longleftrightarrow a \text{ é o oposto de } b}$$

Indicação: $a = -b$ ou $a = (-b)$

4. *Adição de vários números inteiros relativos*

Procede-se da mesma forma que no caso da adição de mais de dois números naturais. Assim, por exemplo, para operar com três números inteiros relativos, determina-se a *soma* dos dois primeiros e a seguir adiciona-se o terceiro ao resultado obtido. Exemplo:

$$ {}^{-}3 + {}^{+}5 + {}^{-}2 = \underbrace{({}^{-}3 + {}^{+}5)}_{{}^{+}2} + {}^{-}2 = {}^{+}2 + {}^{-}2 = 0 $$

5. *Propriedades estruturais*

A adição de números inteiros relativos goza das seguintes *propriedades:*

1.ª) Fechamento: *A soma de dois números inteiros relativos quaisquer é sempre um número inteiro relativo.* Exemplo:

$$ \underset{\in \mathbf{Z}}{{}^{-}3} + \underset{\in \mathbf{Z}}{{}^{+}2} = \underset{\in \mathbf{Z}}{{}^{-}1} $$

De um modo geral: $(a + b) \in \mathbf{Z}$, para *quaisquer* $a \in \mathbf{Z}$ e $b \in \mathbf{Z}$

2.ª) Comutativa: *Trocando-se a ordem de dois têrmos quaisquer, a soma* **(p.c.a.)** *obtida é a mesma.* Exemplo:

$$ {}^{-}3 + {}^{+}2 = {}^{+}2 + {}^{-}3 $$

De um modo geral: $a + b = b + a$ para *quaisquer* $a \in \mathbf{Z}$ e $b \in \mathbf{Z}$

3.ª) Associativa: Exemplo:
(p.a.a.)

$$ ({}^{-}3 + {}^{+}2) + {}^{-}7 = {}^{-}3 + ({}^{+}2 + {}^{-}7) $$

De um modo geral: $(a + b) + c = a + (b + c)$ para *quaisquer* $a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{Z}$ e $c \in \mathbf{Z}$

4.ª) Elemento neutro: **0.** Exemplos:
(e.n.a.)

$$ {}^{+}5 + 0 = 0 + {}^{+}5 = {}^{+}5 $$
$$ {}^{-}3 + 0 = 0 + {}^{-}3 = {}^{-}3 $$

De um modo geral: *Existe* um número inteiro relativo 0, tal que para *qualquer* $a \in \mathbf{Z}$, tem-se:

$$ a + 0 = 0 + a = a $$

5.ª) Elemento inverso aditivo: *Para qualquer número inteiro relativo* **(e.i.a.)** *existe sempre um número inteiro relativo* — que é o seu **oposto**, agora denominado ***inverso aditivo*** — *tal que a soma de ambos é o elemento neutro, isto é, 0.* Exemplos:

Dado o ${}^{-}3$, *existe* o ${}^{+}3$ tal que: ${}^{-}3 + {}^{+}3 = 0$
Dado o ${}^{+}8$, *existe* o ${}^{-}8$ tal que: ${}^{+}8 + {}^{-}8 = 0$

De um modo geral: para *qualquer* $a \in \mathbf{Z}$ existe um número $a' \in \mathbf{Z}$, tal que: $a + a' = a' + a = 0$.

Nota: *$a' = -a$, o inverso aditivo de a é o oposto de a.*

LEMBRETE AMIGO

Guarde bem essas propriedades! Elas serão de muita importância quando você fôr determinar a estrutura de um Sistema Matemático (que é um *conjunto* de elementos quaisquer munido de uma *operação*).

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 44

Escreva a propriedade que está sendo aplicada nas seguintes sentenças:

1.ª) ${}^{-}5 + 0 = {}^{-}5$
2.ª) ${}^{+}1 + {}^{-}1 = 0$
3.ª) $({}^{-}4 + {}^{+}1) \in \mathbf{Z}$
4.ª) $0 + {}^{+}8 = {}^{+}8$
5.ª) $({}^{-}2 + {}^{+}3) + {}^{-}5 = {}^{-}2 + ({}^{+}3 + {}^{-}5)$
6.ª) ${}^{+}3 + {}^{-}4 = {}^{-}4 + {}^{+}3$
7.ª) ${}^{-}7 + {}^{+}7 = 0$
8.ª) $({}^{-}5 + {}^{+}2) \in \mathbf{Z}$
9.ª) ${}^{-}1 + {}^{-}1 = {}^{-}1 + {}^{-}1$
10.ª) ${}^{+}1 + (0 + {}^{-}2) = ({}^{+}1 + 0) + {}^{-}2$

SUBTRAÇÃO

6. *Conceito*

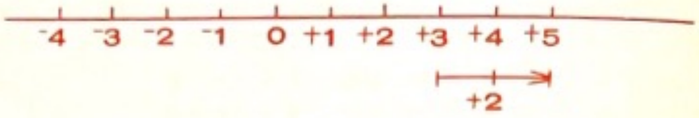
A relação existente entre a subtração e a adição de números inteiros relativos é a *mesma* que você conhece para a adição e a subtração de números naturais, isto é, são *operações inversas:*

$$ \square - \triangle = \star \iff \star + \triangle = \square $$

($\square$, $\triangle$ e $\star$ são numerais de números inteiros relativos)

Que seria preciso para efetuar: ${}^{+}5 - {}^{+}3 = ?$

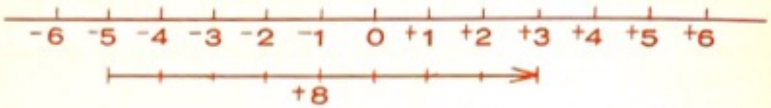
Seria preciso procurar o número inteiro relativo (denominado **diferença**) que, adicionado a ${}^{+}3$, dá como resultado ${}^{+}5$. Na reta numerada encontra-se, fàcilmente, tal número relativo:



Basta "sair" do ${}^{+}3$ e "contar" as unidades necessárias para alcançar o ${}^{+}5$, ou seja, *duas* unidades *à direita* de ${}^{+}3$, o que equivale a: ${}^{+}$**2**! Logo:

$$\boxed{{}^{+}5 - {}^{+}3 = {}^{+}2}$$

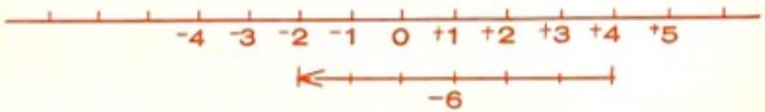
E para efetuar: ${}^{+}3 - {}^{-}5 = ?$



"Sair" do ${}^{-}5$, na reta numerada, e contar as unidades necessárias para alcançar o ${}^{+}3$, ou seja, *oito* unidades *à direita* de ${}^{-}5$. Logo:

$$\boxed{{}^{+}3 - {}^{-}5 = {}^{+}8}$$

E para efetuar: ${}^{-}2 - {}^{+}4 = ?$



Basta "sair" do ${}^{+}4$ e contar as unidades necessárias (seis) para alcançar ${}^{-}2$. Sendo o movimento para a *esquerda*, segue-se que:

$$\boxed{{}^{-}2 - {}^{+}4 = {}^{-}6}$$

E, finalmente, para efetuar: ${}^{-}1 - {}^{-}4 = ?$

Usando a reta numerada e a *técnica* dos outros casos, verifique você mesmo que:

$$\boxed{{}^{-}1 - {}^{-}4 = {}^{+}3}$$

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 45

1. Determine a *diferença* resultante das seguintes *subtrações* de números inteiros relativos, usando a reta numerada como *tábua operatória:*

1.º) ${}^{+}8 - {}^{+}5 = \ldots$	7.º) ${}^{-}1 - {}^{+}2 = \ldots$
2.º) ${}^{-}3 - {}^{+}1 = \ldots$	8.º) $0 - {}^{-}5 = \ldots$
3.º) ${}^{-}8 - {}^{-}5 = \ldots$	9.º) ${}^{+}1 - {}^{-}1 = \ldots$
4.º) ${}^{+}6 - 0 = \ldots$	10.º) $0 - 0 = \ldots$
5.º) $0 - {}^{+}6 = \ldots$	11.º) ${}^{+}7 - {}^{-}3 = \ldots$
6.º) ${}^{+}4 - {}^{+}4 = \ldots$	12.º) ${}^{-}5 - {}^{-}5 = \ldots$

2. Observe, com atenção, as respostas obtidas nas questões do Exercício 1. A seguir tente "descobrir" uma *técnica operatória* capaz de determinar a *diferença* de dois números inteiros relativos quaisquer, sem usar a reta numerada.

3. Experimente a "sua" técnica nas seguintes subtrações:

1.º) ${}^{-}59 - {}^{+}3$	5.º) ${}^{+}2.518 - {}^{+}1$
2.º) ${}^{-}59 - {}^{-}3$	6.º) ${}^{-}3.619 - 0$
3.º) ${}^{-}100 - {}^{+}100$	7.º) $0 - {}^{-}3.619$
4.º) ${}^{+}315 - {}^{+}315$	8.º) $0 - {}^{+}3.619$

. . . e sòmente depois recorra à *técnica* ensinada abaixo.

7. *Técnica de cálculo para a subtração de dois números inteiros relativos*

A subtração de dois números relativos quaisquer, dados numa certa ordem, transforma-se numa adição do primeiro número relativo com o ***oposto*** *do segundo.* Exemplos:

$$
\begin{aligned}
{}^{+}5 - {}^{+}3 &= {}^{+}5 + {}^{-}3 = {}^{+}2\\
{}^{+}3 - {}^{-}5 &= {}^{+}3 + {}^{+}5 = {}^{+}8\\
{}^{-}2 - {}^{+}4 &= {}^{-}2 + {}^{-}4 = {}^{-}6\\
{}^{-}1 - {}^{-}4 &= {}^{-}1 + {}^{+}4 = {}^{+}3\\
{}^{+}6 - 0 &= {}^{+}6 + 0 = {}^{+}6\\
0 - {}^{+}6 &= 0 + {}^{-}6 = {}^{-}6\\
{}^{+}315 - {}^{+}315 &= {}^{+}315 + {}^{-}315 = 0\\
{}^{-}2.819 - {}^{+}619 &= {}^{-}2.819 + {}^{-}619 = {}^{-}3.438
\end{aligned}
$$

Se $\square$ e $\triangle$ são numerais de números naturais, então:

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\square - {}^{+}\triangle &= {}^{+}\square + {}^{-}\triangle\\
{}^{+}\square - {}^{-}\triangle &= {}^{+}\square + {}^{+}\triangle\\
{}^{-}\square - {}^{+}\triangle &= {}^{-}\square + {}^{-}\triangle\\
{}^{-}\square - {}^{-}\triangle &= {}^{-}\square + {}^{+}\triangle
\end{aligned}
$$

Logo:

> ***Subtrair** é o mesmo que **somar** o **oposto***

CONSEQÜÊNCIA IMPORTANTE: **Agora a subtração é sempre possível...**

No conjunto dos números inteiros relativos **Z** a operação **subtração** é sempre *possível*, pois, dados dois números inteiros relativos *quaisquer*, numa certa ordem, *existe* um número inteiro relativo (negativo, nulo ou positivo) tal que, somado ao segundo, dá como resultado o primeiro.

Logo: no conjunto **Z** a *subtração* goza da propriedade do *fechamento*.

Exemplos:

$$\left.\begin{aligned} {}^{+}5 - {}^{+}3 &= {}^{+}2\\ {}^{+}3 - {}^{+}5 &= {}^{-}2 \end{aligned}\right\rangle \in \mathbf{Z}$$

Para facilitar o cálculo com os números inteiros relativos, pode-se *dispensar o uso do sinal qualificativo* $^{+}$ *do numeral que representa o número positivo*. Exemplos:

$$
\begin{aligned}
{}^{+}5 - {}^{+}3 &= 2 \text{ pode ser escrito: } 5 - 3 = 2\\
{}^{+}3 - {}^{+}5 &= {}^{-}2 \text{ pode ser escrito: } 3 - 5 = {}^{-}2
\end{aligned}
$$

Agora você já sabe que é sempre *possível* subtrair um número de outro... Outros exemplos:

$$
\begin{aligned}
1 - 8 &= {}^{-}7\\
0 - {}^{-}5 &= 5\\
9 - 9 &= 0\\
8 - 1 &= 7
\end{aligned}
$$

NOTA: Guarde mais êste resultado importante para o *cálculo:*

O oposto da soma é igual à soma dos opostos

Ex.: $\underbrace{{}^{-}(3 + 5)}_{\text{oposto da soma: } (3+5)} = {}^{-}8 = \underbrace{{}^{-}3}_{\text{oposto de } 3} + \underbrace{{}^{-}5}_{\text{oposto de } 5}$

Em símbolos: para quaisquer $a, b \in \mathbf{Z}$

$$\boxed{-(a + b) = (-a) + (-b)}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 46

Pode-se, com os números inteiros relativos, considerar *associações* de adições e subtrações, a exemplo do que foi feito com os números naturais. Também o cálculo de expressões numéricas com números inteiros relativos é feito de modo análogo. Exemplos:

1.º) Calcular o valor da seguinte expressão numérica (é o mesmo que mandar calcular o *numeral* mais simples que a representa):

$$7 - (2 - {}^{-}5)$$

Temos: $7 - (2 - {}^{-}5) = 7 - (2 + 5) = 7 - 7 = 0$

2.º) Idem: $1 + [{}^{-}3 - ({}^{-}2 + {}^{-}1)]$

Temos: $1 + [{}^{-}3 - ({}^{-}2 + {}^{-}1)] = 1 + [{}^{-}3 - {}^{-}3] = 1 + [{}^{-}3 + 3] = 1 + 0 = 1$

3.º) Idem, decompondo convenientemente os números relativos de modo que apareça um número inteiro relativo e seu oposto, bem como se possa fazer uso da propriedade associativa da adição (p.a.a.). Ex.:

$$\overbrace{{}^{-}8}^{}{}_{{}^{-}3 + {}^{-}5} + 5 = ({}^{-}3 + {}^{-}5) + 5 \underset{\text{p.a.a.}}{=} {}^{-}3 + ({}^{-}5 + 5) = {}^{-}3 + 0 = {}^{-}3$$

4.º) Verificar se é *V* ou *F* cada uma das seguintes sentenças:

a) $3 + |{}^{-}5| = 8$ — É *V*, pois: $|{}^{-}5| = 5$, e portanto: $3 + 5 = 8$ (*V*)

b) $|3 + {}^{-}4| = |3| + |{}^{-}4|$ — É *F*, pois: $|{}^{-}1| = |3| + |{}^{-}4|$
$\quad\quad 1 = 3 + 4$ (*F*)

5.º) Resolver, usando números inteiros relativos, os seguintes problemas:

a) No primeiro turno de um campeonato de futebol um time perdeu 3 jogos e ganhou 8. Qual o saldo favorável?

Temos: ${}^{-}3 + 8 = 5$. Logo, saldo favorável: 5 jogos.

b) Se um foguete, disparado de um submarino situado a 30m abaixo do nível do mar, atinge uma altura (na vertical) de 700m acima do nível do mar, qual a distância, em valor absoluto, percorrida pelo foguete?

Temos: $|{}^{-}30| + |{}^{+}700| = 30 + 700 = 730$. Logo, o foguete percorreu 730m.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 47

1. Efetuar as seguintes *subtrações:*

1.º) $7 - {}^{-}5 = \ldots$ 2.º) $1 - 8 = \ldots$ 3.º) $4 - 4 = \ldots$

4.º) $0 - 3 = \ldots$ 5.º) ${}^{-}2 - {}^{-}5 = \ldots$ 6.º) ${}^{-}8 - 9 = \ldots$

7.º) ${}^{-}12 - 0 = \ldots$ 8.º) $12 - 15 = \ldots$ 9.º) $0 - {}^{-}1.970 = \ldots$

2. Calcular o valor das seguintes expressões numéricas:

1.ª) $^-1 + (4 + ^-4)$
2.ª) $9 - (^-2 - 5)$
3.ª) $[0 - (^-3 + ^-1 + 2)] - [1 - (2 - ^-1)]$
4.ª) $8 - [^-4 + (^-3 + 5) - (8 - 18)]$
5.ª) $^-12 + [8 - [0 - (^-1 + ^-3)]]$

3. Idem, decompondo convenientemente os números inteiros relativos, de modo que apareça um número inteiro relativo e o seu oposto, bem como possa fazer uso da propriedade associativa da adição:

1.ª) $^-10 + 3$
2.ª) $5 + ^-15$
3.ª) $^-1 + 101$
4.ª) $214 + ^-14$

4. Verificar se é *V* ou *F* cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $6 + |^-5| = 11$
2.ª) $6 + |^+5| = 11$
3.ª) $3 + |^-2| \neq 1$
4.ª) $3 + |^+2| = 1$

5. Resolver, usando números inteiros relativos, os seguintes problemas:

1.º) Dos NCr$ 10,00 que eu tinha paguei NCr$ 5,00 que devia a Carlinhos e gastei NCr$ 3,00 no teatro. Com quanto fiquei?

2.º) Se um doente passar de 39° para 37°, então a sua temperatura sofreu um decréscimo de 2° ou um acréscimo de . . .

3.º) A *diferença* entre as temperaturas de 39 graus à sombra e 9 graus abaixo de zero é, em valor absoluto, . . .

4.º) Se Euclides, famoso geômetra grego, nasceu 320 anos antes de Cristo, que idade teria Euclides em 1970 (número de anos em valor absoluto)?

5.º) Recebi como pagamento um cheque de NCr$ 20,00 e outro de NCr$ 25,00 mas tenho uma conta de NCr$ 50,00 para pagar. Qual o resultado dessa "operação"?

6.º) Entrei em certa mina e desci 10m abaixo do nível do mar; depois, desci mais 15m. A que profundidade cheguei?

6. "O oposto da soma é igual à soma dos opostos." Aplique êsse resultado para completar as seguintes sentenças:

1.ª) $^-(6 + 9) = \ldots + \ldots$
2.ª) $^-(^-5 + 1) = \ldots + \ldots$
3.ª) $^-(^-2 + ^-8) = \ldots + \ldots$
4.ª) $^-(3 + ^-2) = \ldots + \ldots$

MULTIPLICAÇÃO

8. *Conceito*

Que são:

$^+2 \times ^+4$?
$^+3 \times 0$?
$^-5 \times 0$?
$^+3 \times ^-2$?
$^-2 \times ^+3$?
$^-3 \times ^-4$?

São expressões onde o sinal $\times$ está indicando uma *"nova operação"*, chamada *multiplicação de dois números inteiros relativos*, que será definida obedecendo aos seguintes *requisitos:*

1.º) o **produto** de dois números inteiros relativos é um número inteiro relativo;

2.º) *existe* um *mesmo comportamento* entre os números naturais (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .) e os números inteiros não-negativos ($0, ^+1, ^+2, ^+3, ^+4, ^+5, ^+6, \ldots$);

3.º) continuam *valendo* as *propriedades estruturais* conhecidas na adição e multiplicação dos números naturais, tais como:

comutativa: $\triangle \times \square = \square \times \triangle$
anulamento: $\triangle \times 0 = 0$
distributiva: $\triangle \times (\square + \triangledown) = \triangle \times \square + \triangle \times \triangledown$

Pelo 2.º você pode estabelecer uma *correspondência biunívoca* entre aquêles dois conjuntos de números:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \ldots\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 0 & ^+1 & ^+2 & ^+3 & ^+4 & ^+5 & ^+6 & ^+7 & ^+8 & ^+9 \ldots\ldots \end{array}$$

que permite calcular, por exemplo: $^+2 \times ^+4$. De fato, usando a *correspondência* (que agora funcionaria como uma *tábua de multiplicação* de números inteiros positivos), temos:

$$\begin{array}{ccccc} ^+2 & \times & ^+4 & = & ^+8 \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ 2 & \times & 4 & = & 8 \end{array} \qquad \text{portanto: } \boxed{^+2 \times ^+4 = ^+8}$$

Verifique você mesmo que:

$^+3 \times ^+2 = ^+6$
$^+5 \times ^+5 = ^+25$
$^+1 \times ^+3 = ^+3$
$0 \times ^+3 = 0$
$^+3 \times 0 = 0$
$0 \times 0 = 0$

Êstes resultados sugerem uma primeira *definição:*

> O *produto* de dois *números positivos* é um *número positivo*

> O *produto* de um *número positivo* por *zero* é *zero*

1. Determine o *produto* resultante das seguintes *multiplicações* de números inteiros positivos, usando a correspondência estudada como tábua operatória:

1.º) ${}^{+}2 \times {}^{+}3 = \ldots$	4.º) ${}^{+}1 \times {}^{+}5 = \ldots$
2.º) ${}^{+}4 \times {}^{+}4 = \ldots$	5.º) ${}^{+}3 \times {}^{+}3 = \ldots$
3.º) ${}^{+}7 \times {}^{+}1 = \ldots$	6.º) $0 \times {}^{+}6 = \ldots$

2. Com a *técnica operatória* que, provàvelmente, você já "descobriu" para multiplicar dois números inteiros positivos (antes de conhecer a regra-padrão que será ensinada), calcule:

1.º) ${}^{+}252 \times {}^{+}3$ 2.º) ${}^{+}8 \times {}^{+}532$ 3.º) ${}^{+}1.325 \times {}^{+}100$

Como você efetuaria: ${}^{-}3 \times 0 = ?$ e $0 \times {}^{-}3 = ?$

Pela propriedade do *anulamento* (lembre-se de que o 0 é o "terrível" que *anula* tudo. . .), temos:

$\boxed{{}^{-}3 \times 0 = 0}$ e pela *comutativa:* $\boxed{0 \times {}^{-}3 = 0}$

Então: **O produto de um número negativo por zero é zero**

Que é, agora: ${}^{+}3 \times {}^{-}2 = ?$ (multiplicação de um n.º positivo por um n.º negativo)

Muita *atenção:* o resultado dessa multiplicação será determinado mediante resultados já conhecidos. Assim:

	${}^{+}3 \times 0 = 0$	(propriedade do anulamento)
ou	${}^{+}3 \times (\overbrace{{}^{+}2 + {}^{-}2}) = 0$	(foi escrito $0 = {}^{+}2 + {}^{-}2$, para introduzir o n.º negativo ${}^{-}2$, *oposto* de ${}^{+}2$)
ou	${}^{+}3 \times {}^{+}2 + {}^{+}3 \times {}^{-}2 = 0$	(aplicou-se a propriedade distributiva)
ou	${}^{+}6 + \underbrace{{}^{+}3 \times {}^{-}2} = 0$	(${}^{+}3 \times {}^{+}2 = {}^{+}6$, já conhecido)
	${}^{+}6 + ? = 0$	

Ora, pela existência do *elemento inverso aditivo* no conjunto Z, o *único* número inteiro relativo que, somado com ${}^{+}6$ dá como resultado 0, é o ${}^{-}6$. Logo:

$$\boxed{{}^{+}3 \times {}^{-}2 = {}^{-}6}$$

Segue-se o cálculo de ${}^{-}2 \times {}^{+}3$, pela *propriedade comutativa*, isto é:

$${}^{-}2 \times {}^{+}3 = {}^{+}3 \times {}^{-}2 = {}^{-}6$$

Então:

O produto de um número *positivo* por um número *negativo* é um número *negativo*

Finalmente, como você efetuaria a multiplicação de um número *negativo* por um número *negativo*, como por exemplo: ${}^{-}3 \times {}^{-}4$?

"Partindo" de:	${}^{-}3 \times 0 = 0$	(Por quê?)
ou	${}^{-}3 \times (\overbrace{{}^{+}4 + {}^{-}4}) = 0$	(Por quê?)
ou	$\underbrace{{}^{-}3 \times {}^{+}4}_{{}^{-}12} + \underbrace{{}^{-}3 \times {}^{-}4}_{?} = 0$	(Por quê?)
	${}^{-}12 + ? = 0$	

Da mesma forma: o único número inteiro relativo do conjunto Z que, somado com ${}^{-}12$ dá como resultado 0, é o ${}^{+}12$. Logo:

$${}^{-}3 \times {}^{-}4 = {}^{+}12$$

Então:

O produto de um número *negativo* por um número *negativo* é um número *positivo*

Outros exemplos:

${}^{-}4 \times {}^{-}3 = {}^{+}12$	${}^{-}2 \times {}^{-}2 = {}^{+}4$
${}^{-}6 \times {}^{-}1 = {}^{+}6$	${}^{-}5 \times {}^{-}12 = {}^{+}60$
${}^{-}1 \times {}^{-}1 = {}^{+}1$	${}^{-}100 \times {}^{-}1 = {}^{+}100$

9. *Técnica de cálculo para a multiplicação de dois números inteiros relativos*

Obedece à seguinte *regra-padrão:*

O *produto* de dois números inteiros relativos é um *número inteiro relativo*, cujo valor absoluto é o produto dos valôres absolutos dos números dados.

Será *positivo* se ambos os números dados forem positivos ou ambos negativos.

Será *negativo* se um dos números dados fôr positivo e o outro negativo.

Se um dos fatôres fôr 0, o produto será igual a 0.

Resumindo:

n.º positivo	×	n.º positivo	=	n.º positivo
n.º positivo	×	n.º negativo	=	n.º negativo
n.º negativo	×	n.º positivo	=	n.º negativo
n.º negativo	×	n.º negativo	=	n.º positivo

CURIOSIDADE

Se você tomar o número positivo como "*amigo*" e o número negativo como "*inimigo*" fica "valendo" a seguinte *regra:*

O "amigo" (⁺) de meu "amigo" (⁺) é meu "amigo" (⁺) **(deve ser *V!*)**

O "amigo" (⁺) de meu "inimigo" (⁻) é meu "inimigo" (⁻) **(idem . . .)**

O "inimigo" (⁻) de meu "amigo" (⁺) é meu "inimigo" (⁻) **(idem . . .)**

O "inimigo" (⁻) de meu "inimigo" (⁻) é meu "amigo" (⁺) **(idem . . .)**

NOTA: Outro resultado, importante para o cálculo, para você guardar:

O oposto de um produto é igual ao produto de um dos fatôres pelo oposto do outro

Exemplo: $-(8 \times 3) = (^-8) \times 3 = 8 \times (^-3)$

Em símbolos, para quaisquer $a, b \in Z$:

$$-(a \cdot b) = (^-a) \cdot b = a \cdot (^-b)$$

10. *Multiplicação de vários números inteiros relativos*

Procede-se da mesma forma que no caso da multiplicação de vários números naturais. Os exemplos esclarecerão:

1.º) $^-3 \times {}^+5 \times {}^-2 = \underbrace{(^-3 \times {}^+5)}_{-15} \times {}^-2 = {}^-15 \times {}^-2 = {}^+30$

2.º) $^+1 \times {}^-3 \times {}^-4 \times {}^-6 = [\underbrace{(^+1 \times {}^-3)}_{-3} \times {}^-4] \times {}^-6 = \underbrace{[^-3 \times {}^-4]}_{+12} \times {}^-6 = {}^+12 \times {}^-6 = {}^-72$

3.º) $^-2 \times {}^+1.356 \times 0 = 0$

Guarde a seguinte *técnica de cálculo* para a multiplicação de vários números relativos: se numa multiplicação de números relativos, diferentes de zero, figurar um número *par* de números negativos, então o produto é um número *positivo* (1.º ex.); se figurar um número *ímpar* de números negativos como fatôres, então o produto é um número *negativo* (2.º ex.); se houver um fator nulo, o produto é 0 (3.º ex.).

11. *Propriedades estruturais*

Resumindo as propriedades estudadas, temos:

1.ª) FECHAMENTO: $^+3 \times {}^-2 = {}^-6$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\in Z \quad \in Z \quad \in Z$

2.ª) COMUTATIVA: $^+3 \times {}^-2 = {}^-2 \times {}^+3$
(p.c.m.)

De um modo geral: $a \times b = b \times a$ para *quaisquer* $a \in Z$ e $b \in Z$

3.ª) ASSOCIATIVA: $(^+3 \times {}^-2) \times {}^-5 = {}^+3 \times (^-2 \times {}^-5)$
(p.a.m.)

De um modo geral: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ para *quaisquer* $a \in Z$, $b \in Z$ e $c \in Z$

4.ª) ELEMENTO NEUTRO: 1 $\quad {}^-5 \times 1 = 1 \times {}^-5 = {}^-5$
(e.n.m.)

De um modo geral: $a \times 1 = 1 \times a = a$ para *qualquer* $a \in Z$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 49

1. Efetuar as seguintes multiplicações:

1.ª) $^+3 \times {}^+5$	7.ª) $^-3 \times {}^-4 \times {}^+5$
2.ª) $^-8 \times {}^-1$	8.ª) $(^-1 \times {}^+2) \times (^-5 \times {}^-3)$
3.ª) $^+200 \times {}^-2$	9.ª) $(^-12 \times {}^+1 \times {}^-1) \times (^-3 \times {}^-4)$
4.ª) $^-1 \times {}^+45$	10.ª) $^-1 \times {}^-1 \times {}^-1 \times {}^-1 \times {}^-1 \times {}^-1$
5.ª) $0 \times {}^-5$	11.ª) $(^-2 \times {}^-2) \times (^-1 \times {}^-1 \times {}^-1)$
6.ª) $^+1.254 \times 0$	12.ª) $^-3 \times {}^-2 \times {}^-1 \times 0 \times {}^+1 \times {}^+2 \times {}^+3$

2. Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas (ou seja, o numeral mais simples que a representa):

NOTA: Para facilitar o *cálculo* foi suprimido o sinal $^+$ do numeral que representa o número inteiro positivo, a exemplo do que já foi feito no cálculo da adição e subtração dos números relativos.

1.ª) ${}^{-}3 \times (5 + {}^{-}2)$
2.ª) ${}^{-}1 \times 2 - ({}^{-}3 + {}^{-}5)$
3.ª) $[4 \times ({}^{-}5 + 0)] \times {}^{-}1$
4.ª) $({}^{-}2 + 1 - 3) \times {}^{-}2 + [{}^{-}1 + ({}^{-}952 - 1)] \times 0$
5.ª) ${}^{-}100 + [{}^{-}100 + (100 - {}^{-}100 \times 1)]$

3. Efetuar, usando a propriedade do *anulamento* e a propriedade *distributiva* em relação à adição:

1.ª) ${}^{+}4 \times {}^{-}3$ 3.ª) ${}^{+}4 \times {}^{-}6$ 5.ª) ${}^{-}5 \times {}^{-}3$
2.ª) ${}^{-}5 \times {}^{+}5$ 4.ª) ${}^{-}6 \times {}^{+}1$ 6.ª) ${}^{-}1 \times {}^{-}1$

4. Preencher os claros nas seguintes igualdades simbólicas:

1.ª) n.º positivo × ...... = n.º negativo
2.ª) ...... × n.º negativo = n.º positivo
3.ª) n.º negativo × ...... = n.º positivo
4.ª) ...... × n.º positivo = ...
5.ª) ...... × n.º negativo = ...
6.ª) n.º positivo × ...... = n.º negativo
7.ª) ...... × ...... = ...

5. Verificar se é *V* ou *F* cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $|{}^{-}3 \times {}^{-}4| = |{}^{-}3| \times |{}^{-}4|$ Modêlo:
$$\underbrace{|{}^{-}3 \times {}^{-}4|}_{} = |{}^{-}3| \times |{}^{-}4|$$
$$|{}^{+}12| = 3 \times 4$$
$$12 = \underbrace{\quad\quad}_{12\ (V)}$$

2.ª) $|{}^{-}3 \times {}^{-}4| < |{}^{-}3| \times |{}^{-}4|$ Modêlo: ... $12 < 12$ (*F*)
3.ª) $|{}^{-}5 \times {}^{+}3| = |{}^{-}5| \times |{}^{+}3|$
4.ª) $|{}^{-}5 \times {}^{+}3| < |{}^{-}5| \times |{}^{+}3|$
5.ª) $|{}^{-}5 \times {}^{+}3| > |{}^{-}5| \times |{}^{+}3|$
6.ª) O elemento neutro da multiplicação de números relativos é o ${}^{-}1$.
7.ª) O elemento neutro da multiplicação de números relativos é o ${}^{+}1$.
8.ª) ${}^{-}5 \times {}^{+}3 = {}^{+}3 \times {}^{-}5$ pela p.c.m.
9.ª) ${}^{-}3 \times {}^{+}5 = {}^{+}5 \times {}^{-}3$ pela p.a.m.

6. "O oposto de um produto é igual ao produto de um dos fatôres pelo oposto do outro." Aplique êsse resultado para completar as seguintes sentenças:

1.ª) $-(9 \times 3) = \ldots \times \ldots$ 3.ª) $-({}^{-}1 \times {}^{-}5) = \ldots \times \ldots$
2.ª) $-({}^{-}2 \times 7) = \ldots \times \ldots$ 4.ª) $-(m \;.\; n) = \ldots \;.\; \ldots$

DIVISÃO

12. *Conceito*

A relação existente entre a divisão e a multiplicação de números inteiros relativos é a *mesma* que você conhece para a multiplicação e a divisão de números naturais, isto é, são *operações inversas:*

$$\square : \triangle = \star \iff \star \times \triangle = \square$$

$\square$, $\triangle\ (\neq 0)$ e $\star$ são numerais de números inteiros relativos

Que significa efetuar: ${}^{-}8 : {}^{+}4 = ?$

Significa: procurar o número inteiro relativo (denominado *quociente*) que, multiplicado por ${}^{+}4$, dá como resultado ${}^{-}8$. Nesse exemplo o *quociente*, se existir, deverá ser *negativo* (lembre-se que n.º negativo × n.º positivo = n.º negativo) e o seu *valor absoluto*, 2, pois: ${}^{-}2 \times {}^{+}4 = {}^{-}8$. Logo:

$$\boxed{{}^{-}8 : {}^{+}4 = {}^{-}2}$$

podendo-se escrever a equivalência:

$$\boxed{{}^{-}8 : {}^{+}4 = {}^{-}2} \iff \boxed{{}^{-}2 \times {}^{+}4 = {}^{-}8}$$

Outros exemplos:

${}^{+}8 : {}^{+}4 = {}^{+}2$ por quê?
${}^{+}8 : {}^{-}4 = {}^{-}2$ por quê?
${}^{-}8 : {}^{-}4 = {}^{+}2$ por quê?

permitirão *concluir* que:

n.º positivo	:	n.º positivo	=	n.º positivo
n.º positivo	:	n.º negativo	=	n.º negativo
n.º negativo	:	n.º positivo	=	n.º negativo
n.º negativo	:	n.º negativo	=	n.º positivo

e que *o valor absoluto do quociente de dois números inteiros relativos, dados numa certa ordem, e com o segundo diferente de zero, é igual ao quociente dos números dados.*

NECESSIDADE DA CRIAÇÃO DE NOVOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

No **Z** pode *não existir* o quociente de dois números inteiros relativos, como por exemplo:

$$^{-}3 : {}^{+}4 = \ ?$$

Então, seguindo a mesma "marcha" que você já aprendeu, deverão ser "criados" os números *fracionários relativos* $\left(\frac{^{-}3}{^{+}4}\right)$ que, juntamente com os números inteiros relativos, constituirão o *conjunto dos números racionais relativos* $\mathbb{Q}_r$ ou $\mathbb{Q}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 50

1. Efetuar as seguintes divisões:

1.ª) $^{-}6 : {}^{+}3$	7.ª) $^{+}1 : {}^{-}1$
2.ª) $^{-}8 : {}^{-}1$	8.ª) $(^{-}7 : {}^{+}7) : {}^{-}1$
3.ª) $^{+}200 : {}^{-}2$	9.ª) $(^{+}8 : {}^{-}8) : (^{-}4 : {}^{+}4)$
4.ª) $0 : {}^{+}3$	10.ª) $^{-}120 : [^{-}8 : (^{+}4 : {}^{-}2)]$
5.ª) $^{+}12 : {}^{-}12$	11.ª) $0 : [^{-}5 : (^{+}4 : {}^{-}4)]$
6.ª) $^{-}12 : {}^{+}12$	12.ª) $[(^{-}1 : {}^{+}1) : (^{+}1 : {}^{-}1)] : {}^{-}1$

2. Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas (ou seja, o numeral mais simples que a representa):

Nota: Para êsse *cálculo*, foi suprimido o sinal $^{+}$ do numeral que representa o número inteiro positivo.

1.ª) $(^{-}48 + 36) : {}^{-}3$	3.ª) $[5 - (3 - 4)] : {}^{-}2$
2.ª) $(4 \times {}^{-}3 - 8) : (1 + 3 \times {}^{-}2)$	4.ª) $[(8 - {}^{-}1) : {}^{-}1] : 9$

3. Idem, com as expressões:

1.ª) $(^{-}7 + 9 + {}^{-}15 + {}^{-}3 + 43) : (^{-}9)$
2.ª) $^{-}264 : (^{-}8 + {}^{-}3 + {}^{-}1 + 23)$
3.ª) $[5 \times {}^{-}12 - {}^{-}15 \times 7] : {}^{-}3$
4.ª) $[3 \times 14 + 6 \times {}^{-}21] : {}^{+}7$
5.ª) $\{4 \times [^{-}3 \times 15 + {}^{-}10 \times {}^{-}7 + {}^{-}5 \times {}^{-}13]\} : 5$

3. Preencher os claros nas seguintes igualdades simbólicas:

1.ª)	n.º negativo	:	= n.º positivo
2.ª)	.....	: n.º positivo	= n.º negativo
3.ª)	.....	:	= .....
4.ª)	n.º positivo	: n.º negativo	= .....
5.ª)	.....	:	= n.º positivo
6.ª)	.....	:	= n.º negativo

4. Verificar se é *V* ou *F* cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $|^{-}6 : {}^{+}3| = |^{-}6| : |^{+}3|$ Modêlo:
$$\begin{aligned} |^{-}6 : {}^{+}3| &= |^{-}6| : |^{+}3| \\ |^{-}2| &= 6 : 3 \\ 2 &= 2 \quad (V) \end{aligned}$$

2.ª) $|^{-}6 : {}^{+}3| > |^{-}6| : |^{+}3|$ Modêlo: $\ldots 2 > 2$ (*F*)
3.ª) $|^{-}8 : {}^{-}2| = |^{-}8| : |^{-}2|$
4.ª) $|^{-}8 : {}^{-}2| < |^{-}8| : |^{-}2|$

5. É possível efetuar-se no Z:

1.ª) $^{+}6 : {}^{-}3$? **Por quê?**
2.ª) $^{-}5 : {}^{+}2$? **Por quê?**
3.ª) $^{+}4 : {}^{-}1$? **Por quê?**
4.ª) $^{-}7 : {}^{+}4$? **Por quê?**

POTENCIAÇÃO

13. *Conceito*

A multiplicação de dois ou mais números inteiros relativos, *todos iguais*, conduz à operação **potenciação,** de expoente natural, cujo resultado é a *potência*. Valem as denominações conhecidas quando você estudou a operação potenciação no conjunto **N**. Assim, por exemplo:

$$(^{-}2) \times (^{-}2) \times (^{-}2) = \underbrace{(^{-}2)}_{\text{base}}{}^{\overset{\text{expoente}}{3}} = \underbrace{^{-}8}_{\text{potência}}$$

Nota: O uso dos parênteses, na potência indicada, facilita o *cálculo*.

Outros exemplos:

$(^{+}5)^2 = (^{+}5) \times (^{+}5) = {}^{+}25$
$(^{-}1)^4 = (^{-}1) \times (^{-}1) \times (^{-}1) \times (^{-}1) = {}^{+}1$
$(^{-}1)^5 = (^{-}1) \times (^{-}1) \times (^{-}1) \times (^{-}1) \times (^{-}1) = {}^{-}1$
$(^{+}3)^6 = (^{+}3) \times (^{+}3) \times (^{+}3) \times (^{+}3) \times (^{+}3) \times (^{+}3) = {}^{+}729$
$0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$

Você já deve ter percebido uma "*técnica*", para calcular ràpidamente a potência de um número inteiro relativo, que se traduz em:

NECESSIDADE DA CRIAÇÃO DE NOVOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

No **Z** pode *não existir* o quociente de dois números inteiros relativos, como por exemplo:

$${}^{-}3 : {}^{+}4 = \,?$$

Então, seguindo a mesma "marcha" que você já aprendeu, deverão ser "criados" os números *fracionários relativos* $\left(\frac{{}^{-}3}{{}^{+}4}\right)$ que, juntamente com os números inteiros relativos, constituirão o *conjunto dos números racionais relativos* $\mathbb{Q}_r$ ou $\mathbb{Q}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 50

1. Efetuar as seguintes divisões:

1.ª) ${}^{-}6 : {}^{+}3$
2.ª) ${}^{-}8 : {}^{-}1$
3.ª) ${}^{+}200 : {}^{-}2$
4.ª) $0 : {}^{+}3$
5.ª) ${}^{+}12 : {}^{-}12$
6.ª) ${}^{-}12 : {}^{+}12$
7.ª) ${}^{+}1 : {}^{-}1$
8.ª) $({}^{-}7 : {}^{+}7) : {}^{-}1$
9.ª) $({}^{+}8 : {}^{-}8) : ({}^{-}4 : {}^{+}4)$
10.ª) ${}^{-}120 : [{}^{-}8 : ({}^{+}4 : {}^{-}2)]$
11.ª) $0 : [{}^{-}5 : ({}^{+}4 : {}^{-}4)]$
12.ª) $[({}^{-}1 : {}^{+}1) : ({}^{+}1 : {}^{-}1)] : {}^{-}1$

2. Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas (ou seja, o numeral mais simples que a representa):

Nota: Para êsse *cálculo*, foi suprimido o sinal + do numeral que representa o número inteiro positivo.

1.ª) $({}^{-}48 + 36) : {}^{-}3$
2.ª) $(4 \times {}^{-}3 - 8) : (1 + 3 \times {}^{-}2)$
3.ª) $[5 - (3 - 4)] : {}^{-}2$
4.ª) $[(8 - {}^{-}1) : {}^{-}1] : 9$

3. Idem, com as expressões:

1.ª) $({}^{-}7 + 9 + {}^{-}15 + {}^{-}3 + 43) : ({}^{-}9)$
2.ª) ${}^{-}264 : ({}^{-}8 + {}^{-}3 + {}^{-}1 + 23)$
3.ª) $[5 \times {}^{-}12 - {}^{-}15 \times 7] : {}^{-}3$
4.ª) $[3 \times 14 + 6 \times {}^{-}21] : {}^{+}7$
5.ª) $\{4 \times [{}^{-}3 \times 15 + {}^{-}10 \times {}^{-}7 + {}^{-}5 \times {}^{-}13]\} : 5$

3. Preencher os claros nas seguintes igualdades simbólicas:

1.ª) n.º negativo : ..... = n.º positivo
2.ª) ..... : n.º positivo = n.º negativo
3.ª) ..... : ..... = ...
4.ª) n.º positivo : n.º negativo = ...
5.ª) ..... : ..... = n.º positivo
6.ª) ..... : ..... = n.º negativo

4. Verificar se é *V* ou *F* cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $|{}^{-}6 : {}^{+}3| = |{}^{-}6| : |{}^{+}3|$ Modêlo:

$$\begin{aligned} \underbrace{|{}^{-}6 : {}^{+}3|} &= |{}^{-}6| : |{}^{+}3| \\ |{}^{-}2| &= \underbrace{6 : 3} \\ 2 &= 2 \quad (V) \end{aligned}$$

2.ª) $|{}^{-}6 : {}^{+}3| > |{}^{-}6| : |{}^{+}3|$ Modêlo: $\ldots 2 > 2$ (*F*)
3.ª) $|{}^{-}8 : {}^{-}2| = |{}^{-}8| : |{}^{-}2|$
4.ª) $|{}^{-}8 : {}^{-}2| < |{}^{-}8| : |{}^{-}2|$

5. É possível efetuar-se no **Z**:

1.ª) ${}^{+}6 : {}^{-}3$? Por quê?
2.ª) ${}^{-}5 : {}^{+}2$? Por quê?
3.ª) ${}^{+}4 : {}^{-}1$? Por quê?
4.ª) ${}^{-}7 : {}^{+}4$? Por quê?

POTENCIAÇÃO

13. *Conceito*

A multiplicação de dois ou mais números inteiros relativos, *todos iguais*, conduz à operação **potenciação**, de expoente natural, cujo resultado é a *potência*. Valem as denominações conhecidas quando você estudou a operação potenciação no conjunto **N**. Assim, por exemplo:

$$({}^{-}2) \times ({}^{-}2) \times ({}^{-}2) = \underset{\text{base}}{({}^{-}2)}^{\overset{\text{expoente}}{3}} = \underset{\text{potência}}{{}^{-}8}$$

Nota: O uso dos parênteses, na potência indicada, facilita o *cálculo*.

Outros exemplos:

$$\begin{aligned} ({}^{+}5)^2 &= ({}^{+}5) \times ({}^{+}5) = {}^{+}25 \\ ({}^{-}1)^4 &= ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) = {}^{+}1 \\ ({}^{-}1)^5 &= ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) = {}^{-}1 \\ ({}^{+}3)^6 &= ({}^{+}3) \times ({}^{+}3) \times ({}^{+}3) \times ({}^{+}3) \times ({}^{+}3) \times ({}^{+}3) = {}^{+}729 \\ 0^3 &= 0 \times 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Você já deve ter percebido uma "*técnica*", para calcular ràpidamente a potência de um número inteiro relativo, que se traduz em:

NECESSIDADE DA CRIAÇÃO DE NOVOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

No **Z** pode *não existir* o quociente de dois números inteiros relativos, como por exemplo:

$$ {}^{-}3 : {}^{+}4 = \ ? $$

Então, seguindo a mesma "marcha" que você já aprendeu, deverão ser "criados" os números *fracionários relativos* $\left(\frac{{}^{-}3}{{}^{+}4}\right)$ que, juntamente com os números inteiros relativos, constituirão o *conjunto dos números racionais relativos* $\mathbb{Q}_r$ ou $\mathbb{Q}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 50

1. Efetuar as seguintes divisões:

1.ª) ${}^{-}6 : {}^{+}3$
2.ª) ${}^{-}8 : {}^{-}1$
3.ª) ${}^{+}200 : {}^{-}2$
4.ª) $0 : {}^{+}3$
5.ª) ${}^{+}12 : {}^{-}12$
6.ª) ${}^{-}12 : {}^{+}12$
7.ª) ${}^{+}1 : {}^{-}1$
8.ª) $({}^{-}7 : {}^{+}7) : {}^{-}1$
9.ª) $({}^{+}8 : {}^{-}8) : ({}^{-}4 : {}^{+}4)$
10.ª) ${}^{-}120 : [{}^{-}8 : ({}^{+}4 : {}^{-}2)]$
11.ª) $0 : [{}^{-}5 : ({}^{+}4 : {}^{-}4)]$
12.ª) $[({}^{-}1 : {}^{+}1) : ({}^{+}1 : {}^{-}1)] : {}^{-}1$

2. Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas (ou seja, o numeral mais simples que a representa):

NOTA: Para êsse *cálculo*, foi suprimido o sinal $^{+}$ do numeral que representa o número inteiro positivo.

1.ª) $({}^{-}48 + 36) : {}^{-}3$
2.ª) $(4 \times {}^{-}3 - 8) : (1 + 3 \times {}^{-}2)$
3.ª) $[5 - (3 - 4)] : {}^{-}2$
4.ª) $[(8 - {}^{-}1) : {}^{-}1] : 9$

3. Idem, com as expressões:

1.ª) $({}^{-}7 + 9 + {}^{-}15 + {}^{-}3 + 43) : ({}^{-}9)$
2.ª) ${}^{-}264 : ({}^{-}8 + {}^{-}3 + {}^{-}1 + 23)$
3.ª) $[5 \times {}^{-}12 - {}^{-}15 \times 7] : {}^{-}3$
4.ª) $[3 \times 14 + 6 \times {}^{-}21] : {}^{+}7$
5.ª) $\{4 \times [{}^{-}3 \times 15 + {}^{-}10 \times {}^{-}7 + {}^{-}5 \times {}^{-}13]\} : 5$

3. Preencher os claros nas seguintes igualdades simbólicas:

1.ª)	n.º negativo	:	.....	=	n.º positivo
2.ª)	.....	:	n.º positivo	=	n.º negativo
3.ª)	.....	:	.....	=	.....
4.ª)	n.º positivo	:	n.º negativo	=	.....
5.ª)	.....	:	.....	=	n.º positivo
6.ª)	.....	:	.....	=	n.º negativo

4. Verificar se é *V* ou *F* cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $|{}^{-}6 : {}^{+}3| = |{}^{-}6| : |{}^{+}3|$ Modêlo: $\underbrace{|{}^{-}6 : {}^{+}3|}_{|{}^{-}2| \,\to\, 2} = |{}^{-}6| : |{}^{+}3| \to \underbrace{6 : 3}_{2}$; $2 = 2$ (*V*)

2.ª) $|{}^{-}6 : {}^{+}3| > |{}^{-}6| : |{}^{+}3|$ Modêlo: $\ldots 2 > 2$ (*F*)
3.ª) $|{}^{-}8 : {}^{-}2| = |{}^{-}8| : |{}^{-}2|$
4.ª) $|{}^{-}8 : {}^{-}2| < |{}^{-}8| : |{}^{-}2|$

5. É possível efetuar-se no Z:

1.ª) ${}^{+}6 : {}^{-}3$? Por quê?
2.ª) ${}^{-}5 : {}^{+}2$? Por quê?
3.ª) ${}^{+}4 : {}^{-}1$? Por quê?
4.ª) ${}^{-}7 : {}^{+}4$? Por quê?

POTENCIAÇÃO

13. *Conceito*

A multiplicação de dois ou mais números inteiros relativos, *todos iguais*, conduz à operação **potenciação**, de expoente natural, cujo resultado é a *potência*. Valem as denominações conhecidas quando você estudou a operação potenciação no conjunto N. Assim, por exemplo:

$$ ({}^{-}2) \times ({}^{-}2) \times ({}^{-}2) = \underbrace{({}^{-}2)}_{\text{base}}{}^{\overbrace{3}^{\text{expoente}}} = \underbrace{{}^{-}8}_{\text{potência}} $$

NOTA: O uso dos parênteses, na potência indicada, facilita o *cálculo*.

Outros exemplos:

$$ ({}^{+}5)^2 = ({}^{+}5) \times ({}^{+}5) = {}^{+}25 $$
$$ ({}^{-}1)^4 = ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) = {}^{+}1 $$
$$ ({}^{-}1)^5 = ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) \times ({}^{-}1) = {}^{-}1 $$
$$ ({}^{+}3)^6 = ({}^{+}3) \times ({}^{+}3) \times ({}^{+}3) \times ({}^{+}3) \times ({}^{+}3) \times ({}^{+}3) = {}^{+}729 $$
$$ 0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0 $$

Você já deve ter percebido uma "*técnica*", para calcular ràpidamente a potência de um número inteiro relativo, que se traduz em:

1. a potência de expoente *par*, de um número inteiro relativo (positivo ou negativo), é sempre um número *positivo;* assim:

$(^+2)^4 = {}^+16$ (efetue o cálculo e conclua . . .)
$(^-1)^{10} = {}^+1$ (idem . . .)

2. a potência de expoente *ímpar*, de um número inteiro relativo (positivo ou negativo), é um número *positivo* se a base fôr um número positivo, e *negativo* se a base fôr um número negativo; assim:

$$(^+2)^3 = {}^+8$$
$$(^-2)^5 = {}^-32$$

3. qualquer potência de base 0, com expoente diferente de 0, é igual a 0. Exemplo:

$0^4 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$ (verifique . . .)

OBSERVAÇÕES: Coerente com essa técnica, são ainda válidas as *convenções:*

1.ª) a potência indicada de expoente 1, de qualquer número inteiro relativo, é igual a êsse *mesmo número;* exs.:
$(^-5)^1 = {}^-5; \quad (^+10)^1 = {}^+10$

2.ª) a potência indicada de expoente 0, de qualquer número inteiro relativo, diferente de 0, é igual a $^+1$ ou 1; exs.:
$(^+2)^0 = {}^+1; \quad (^-132)^0 = {}^+1$

3.ª) à expressão 0^0 não se atribui nenhum significado.

Em qualquer caso, o *valor absoluto* da potência indicada de um número inteiro relativo é *igual* à potência, de mesmo expoente, do valor absoluto de sua base. Assim, por exemplo:

$$|(^-2)^3| = (|^-2|)^3$$

pois,

$$|^-8| = (2)^3$$
$$8 = 8 \quad (V)$$

Em relação às operações com potências indicadas de *mesma base*, valem, *formalmente*, as mesmas *propriedades estruturais* já estudadas no conjunto N. Assim, por exemplo:

1.º) $(^-3)^2 \times (^-3)^4 = (^-3)^{2+4} = (^-3)^6$ (para *multiplicar* potências indicadas de *mesma base*, **somam-se** os expoentes . . .)

2.º) $(^+4)^5 : (^+4)^3 = (^+4)^{5-3} = (^+4)^2$ (para *dividir* potências indicadas de *mesma base*, numa dada ordem, **subtraem-se** os expoentes . . .)

NOVIDADE: Potência indicada do expoente NEGATIVO!

Pode acontecer que, na divisão de potências indicadas de mesma base, o expoente da primeira potência seja *menor* que o da segunda. Então surgirá como expoente um número inteiro *negativo*. Assim, por exemplo:

$$(^+4)^3 : (^+4)^5 = (^+4)^{3-5} = (^+4)^{-2}$$

NOVIDADE!

$$(^-3)^1 : (^-3)^4 = (^-3)^{1-4} = (^-3)^{-3}$$

Essas potências — tão "importantes" quanto as outras — terão, logo mais, um significado relacionado com a estrutura à qual pertencem.

3.º) $[(^-3)^2]^4 = (^-3)^{2\times 4} = (^-3)^8$ (para *elevar* uma potência indicada a uma potência, *multiplicam-se* os expoentes . . .)

4.º) $\left\{\begin{array}{l}[(^-2)\times(^+3)]^2 = (^-2)^2 \times (^+3)^2 \\ [(^+8) : (^-2)]^3 = (^+8)^3 : (^-2)^3\end{array}\right\}$ (. . . propriedade *distributiva* . . .)

Um *bom* exercício sôbre as propriedades da potenciação: *justificar que $a^0 = 1$ ($a \neq 0$).* Temos:

$a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$, então: $a^0 \times a^n = a^n$, que é uma *igualdade* que subsiste se, e sòmente se: $a^0 = 1!$

De um modo geral, temos para quaisquer $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$ e $n \in \mathbf{Z}$:

P1: $a^m \times a^n = a^{m+n}$
P2: $a^m : a^n = a^{m-n}$
P3: $(a \times b)^m = a^m . b^m$
P4: $(a^m)^n = a^{mn}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 51

1. Escrever, sob forma de potência indicada:

1.º) $(^-3) \times (^-3) = \ldots$
2.º) $(^+5) \times (^+5) \times (^+5) = \ldots$
3.º) $(^-1)\times(^-1)\times(^-1)\times(^-1)\times(^-1) = \ldots$
4.º) $0 \times 0 \times 0 = \ldots$
5.º) $(^+10) \times (^+10) \times (^+10) \times (^+10) = \ldots$
6.º) $^-5$

2. Calcular os valôres das seguintes potências indicadas:

1.ª) $(^-2)^3$ 2.ª) $(^+4)^2$ 3.ª) $(^-1)^{10}$ 4.ª) $(^-1)^{99}$ 5.ª) $(^+1)^{100}$
6.ª) $(^+3)^0$ 7.ª) $(^-78)^1$ 8.ª) $(^-5)^3$ 9.ª) $(^+2)^5$ 10.ª) $(^-13)^2$

3. Verificar se é *V* ou *F* cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $|(^-3)^2| = (|^-3|)^2$ 3.ª) $|(^-1)^3| \geqslant (|^-1|)^3$
2.ª) $|(^-3)^2| < (|^-3|)^2$ 4.ª) $|0^4| = (|0|)^4$

4. Efetuar:

1.ª) $(^-1)^3 \times (^-1)^5$ 7.ª) $(^+12)^4 : (^+12)^2$
2.ª) $(^+8)^1 \times (^+8)^2 \times (^+8)^5$ 8.ª) $(^-6)^3 : (^-6)^2$
3.ª) $(^-3)^2 \times (^-3) \times (^-3)^3 \times (^-3)^0 \times (^-3)^4$ 9.ª) $(^-6)^3 : (^-6)^3$
4.ª) $(^-2)^4 \times (^-2)^3$ 10.ª) $(^-6)^2 : (^-6)^3$
5.ª) $(^+5)^0 \times (^+5)^3 \times (^+5) \times (^+5)$ 11.ª) $(^+9)^1 : (^+9)^9$
6.ª) $a^n \times a^m \quad (a \neq 0)$ 12.ª) $a^n : a^m \quad (a \neq 0)$

Modêlo: 1.ª) $(^-1)^3 \times (^-1)^5 = (^-1)^{3+5} = (^-1)^8 = {}^+1$

5. Efetuar:

1.º) $[(^-2)^3]^4$ 2.º) $[(^+1)^8]^{10}$ 3.º) $[(^-2)^1]^5$ 4.º) $[(^-15)^0]^8$

6. Efetuar:

1.º) $[(^-3) \times (^+2)]^4$ 3.º) $[(^-8) : (^+4)]^2$
2.º) $[(^+8)^2 \times (^-1)^3]^2$ 4.º) $[(^-1)^2 : (^+1)^8]^{125}$

7. Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas:

1.ª) $(^-2)^5 - (^+3)^2 \times (^-1)^8$
2.ª) $\{(^+7)^2 - [(^+3)^3 + (^-1)^8] \times (^-2)^2\} \times (^-3)^0$
3.ª) $\{[(^-1)^{12} : (^+1)^9] : [(^-1)^{21} : (^+1)^{14}]\}$
4.ª) $0^8 \times \{[(^-8)^5 : (^+2)^3] \times (^-123)^1\}$

RADICIAÇÃO

14. *Conceito*

Por se tratar de uma operação "delicada", a *radiciação* de números inteiros relativos será estudada com mais pormenores adiante. Todavia, qual é o resultado de:

1) $\sqrt{^+9} = ?$ 2) $\sqrt{^-9} = ?$ 3) $\sqrt[3]{^-1} = ?$ 4) $\sqrt[3]{^+1} = ?$

1) Se você usar a *equivalência*, que relaciona a *potenciação* com sua operação inversa, a *radiciação*, poderá escrever, para o primeiro exemplo:

$$\sqrt{^+9} = \square \iff \square^2 = {}^+9$$

e, como:

$$(^+3)^2 = {}^+9 \text{ e } (^-3)^2 = {}^+9$$

segue-se que existem **dois valôres** que tornam a sentença $\sqrt{^+9} = \square$ verdadeira, isto é:

$$\square = {}^+3 \text{ ou } \square = {}^-3$$

> **NOVIDADE:** Você encontrou ***dois resultados*** para o cálculo de $\sqrt{^+9}$: $^+3$ ou $^-3$!

Logo, existem *dois números* cujo *quadrado é 9:*

$$^+3 \text{ e } ^-3$$

Vamos convencionar que $\sqrt{9}$ é o número não-negativo, cujo quadrado é 9. De acôrdo com essa *convenção,* temos:

$$\sqrt{9} = 3 \text{ e } \sqrt{9} \neq {}^-3$$

Caso contrário, ou seja, escrevendo:

$$\sqrt{9} = 3 \text{ e } \sqrt{9} = {}^-3$$

concluiríamos que: $3 = {}^-3$ (?), pelo princípio: "duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si".

2) Com $\sqrt{^-9}$, deveríamos ter:

$$\sqrt{^-9} = \square \iff \square^2 = {}^-9$$

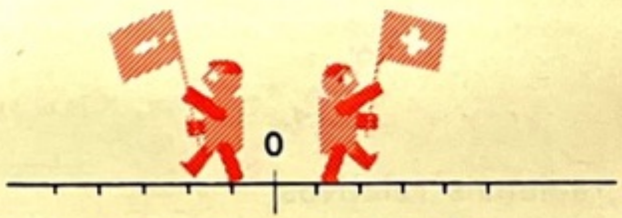
Porém, você sabe que: se o expoente da potência indicada de um número inteiro relativo (positivo ou negativo) fôr *par* (como é o caso de $\square^2$), então o resultado é *sempre* um número relativo *positivo*. Logo, a sentença:

$\square^2 = {}^-9$ continua *aberta* no conjunto **Z**. Portanto, a sua *equivalente* $\sqrt{^-9} = \square$ também está *aberta* em **Z**.

Logo: $\sqrt{^-9} \notin$ **Z**. Mais tarde, quando você conhecer *novos conjuntos de números,* então essa sentença poderá ser *verdadeira* em nôvo conjun[to] tomado como *universo de trabalho*(*).

3) e 4). Pesquise, como exercício, os resultados de:

$$\sqrt[3]{^-1} \text{ e } \sqrt[3]{^+1}$$



(*) Trata-se do conjunto **C** dos números complexos.

3. Verificar se é V ou F cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $|(^{-}3)^2| = (|^{-}3|)^2$
2.ª) $|(^{-}3)^2| < (|^{-}3|)^2$
3.ª) $|(^{-}1)^3| \geqslant (|^{-}1|)^3$
4.ª) $|0^4| = (|0|)^4$

4. Efetuar:

1.ª) $(^{-}1)^3 \times (^{-}1)^5$
2.ª) $(^{+}8)^1 \times (^{+}8)^2 \times (^{+}8)^5$
3.ª) $(^{-}3)^2 \times (^{-}3) \times (^{-}3)^3 \times (^{-}3)^0 \times (^{-}3)^4$
4.ª) $(^{-}2)^4 \times (^{-}2)^3$
5.ª) $(^{+}5)^0 \times (^{+}5)^3 \times (^{+}5) \times (^{+}5)$
6.ª) $a^n \times a^m \quad (a \neq 0)$
7.ª) $(^{+}12)^4 : (^{+}12)^2$
8.ª) $(^{-}6)^3 : (^{-}6)^2$
9.ª) $(^{-}6)^3 : (^{-}6)^3$
10.ª) $(^{-}6)^2 : (^{-}6)^3$
11.ª) $(^{+}9)^1 : (^{+}9)^9$
12.ª) $a^n : a^m \quad (a \neq 0)$

Modêlo: 1.ª) $(^{-}1)^3 \times (^{-}1)^5 = (^{-}1)^{3+5} = (^{-}1)^8 = {}^{+}1$

5. Efetuar:

1.º) $[(^{-}2)^3]^4$ 2.º) $[(^{+}1)^8]^{10}$ 3.º) $[(^{-}2)^1]^5$ 4.º) $[(^{-}15)^0]^8$

6. Efetuar:

1.º) $[(^{-}3) \times (^{+}2)]^4$
2.º) $[(^{+}8)^2 \times (^{-}1)^3]^2$
3.º) $[(^{-}8) : (^{+}4)]^2$
4.º) $[(^{-}1)^2 : (^{+}1)^8]^{125}$

7. Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas:

1.ª) $(^{-}2)^5 - (^{+}3)^2 \times (^{-}1)^8$
2.ª) $\{(^{+}7)^2 - [(^{+}3)^3 + (^{-}1)^8] \times (^{-}2)^2\} \times (^{-}3)^0$
3.ª) $\{[(^{-}1)^{12} : (^{+}1)^9] : [(^{-}1)^{21} : (^{+}1)^{14}]\}$
4.ª) $0^8 \times \{[(^{-}8)^5 : (^{+}2)^3] \times (^{-}123)^1\}$

RADICIAÇÃO

14. *Conceito*

Por se tratar de uma operação "delicada", a *radiciação* de números inteiros relativos será estudada com mais pormenores adiante. Todavia, qual é o resultado de:

$$1)\ \sqrt{^{+}9} = ? \quad 2)\ \sqrt{^{-}9} = ? \quad 3)\ \sqrt[3]{^{-}1} = ? \quad 4)\ \sqrt[3]{^{+}1} = ?$$

1) Se você usar a *equivalência*, que relaciona a *potenciação* com sua operação inversa, a *radiciação*, poderá escrever, para o primeiro exemplo:

$$\sqrt{^{+}9} = \square \iff \square^2 = {}^{+}9$$

e, como:

$$(^{+}3)^2 = {}^{+}9 \text{ e } (^{-}3)^2 = {}^{+}9$$

segue-se que existem **dois valôres** que tornam a sentença $\sqrt{^{+}9} = \square$ verdadeira, isto é:

$$\square = {}^{+}3 \text{ ou } \square = {}^{-}3$$

NOVIDADE: Você encontrou *dois resultados* para o cálculo de $\sqrt{^{+}9}$: $^{+}3$ ou $^{-}3$!

Logo, existem *dois números* cujo *quadrado é 9:*

$$^{+}3 \text{ e } {}^{-}3$$

Vamos convencionar que $\sqrt{9}$ é o número não-negativo, cujo quadrado é 9. De acôrdo com essa *convenção*, temos:

$$\sqrt{9} = 3 \text{ e } \sqrt{9} \neq {}^{-}3$$

Caso contrário, ou seja, escrevendo:

$$\sqrt{9} = 3 \text{ e } \sqrt{9} = {}^{-}3$$

concluiríamos que: $3 = {}^{-}3$ (?), pelo princípio: "duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si".

2) Com $\sqrt{^{-}9}$, deveríamos ter:

$$\sqrt{^{-}9} = \square \iff \square^2 = {}^{-}9$$

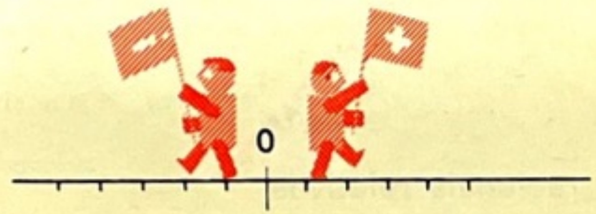
Porém, você sabe que: se o expoente da potência indicada de um número inteiro relativo (positivo ou negativo) fôr *par* (como é o caso de $\square^2$), então o resultado é *sempre* um número relativo *positivo*. Logo, a sentença:

$\square^2 = {}^{-}9$ continua *aberta* no conjunto **Z**. Portanto, a sua *equivalente* $\sqrt{^{-}9} = \square$ também está *aberta* em **Z**.

Logo: $\sqrt{^{-}9} \notin$ **Z**. Mais tarde, quando você conhecer *novos conjuntos de números*, então essa sentença poderá ser *verdadeira* em nôvo conjunto tomado como *universo de trabalho*(*).

3) e 4). Pesquise, como exercício, os resultados de:

$$\sqrt[3]{^{-}1} \text{ e } \sqrt[3]{^{+}1}$$

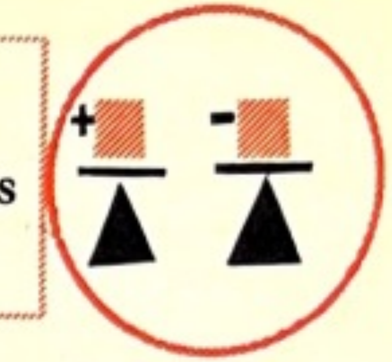


(*) Trata-se do conjunto **C** dos números complexos.

TERCEIRA PARTE

Números racionais relativos. Propriedades estruturais.

Números racionais relativos



1. *Conceito de número racional relativo. Nôvo conjunto numérico:* $\mathbb{Q}$

Você já estudou os seguintes conjuntos:

1. dos números *naturais:*

$$N = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots\}$$

2. dos números *racionais absolutos* (constituído pelos números naturais *e* pelos números fracionários):

$$Q_a = \left\{0, \ldots, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{2}{3}, \ldots, 1, \ldots, \frac{3}{2}, \ldots, 2, \ldots, \frac{5}{2}, \ldots, 3, \ldots, \frac{7}{2}, \ldots, 4, \ldots, \ldots, 5, \ldots\right\}$$

ou

$$Q_a = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in N \text{ e } b \in N^* \right\}$$

3. dos números *inteiros relativos:*

$$Z = \{\ldots, {}^-5, {}^-4, {}^-3, {}^-2, {}^-1, 0, {}^+1, {}^+2, {}^+3, {}^+4, {}^+5, \ldots\}$$

Observando êsses conjuntos você nota que a qualquer número natural a pode-se fazer corresponder dois números inteiros relativos, um positivo ${}^+a$ e outro negativo ${}^-a$, *opostos* entre si. Então:

para $a \in N$ temos $\bullet \begin{cases} {}^+a \in Z \\ {}^-a \in Z \end{cases}$

Exemplos:

$5 \in N \bullet \begin{cases} {}^+5 \in Z \\ {}^-5 \in Z \end{cases}$ $\qquad$ $70 \in N \bullet \begin{cases} {}^+70 \in Z \\ {}^-70 \in Z \end{cases}$

Procedendo da mesma forma, você pode fazer corresponder a cada número racional fracionário $\frac{a}{b}$ dois "novos" números: $\frac{^+a}{b}$ e $\frac{^-a}{b}$, cujos numerais compõem-se do mesmo numeral $\frac{a}{b}$ acrescido de um dos sinais qualificativos: $+$ ou $-$.

Os números escritos sob a forma $\frac{^+a}{b}$ são chamados *números racionais positivos* e os escritos sob a forma $\frac{^-a}{b}$, *números racionais negativos*.

Os números $\frac{^+a}{b}$ e $\frac{^-a}{b}$ dizem-se *opostos*.

O conjunto constituído pelos *números racionais positivos*, pelo *zero* e pelos *números racionais negativos* chama-se CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS RELATIVOS ou, simplesmente, CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS e será representado pela letra **Q** (mais simples do que Q_r, usada às vêzes para distinguir de Q_a):

$$\mathbf{Q} = \left\{\ldots\ldots {^-3}, \ldots, \frac{^-5}{2}, \ldots, {^-2}, \ldots, \frac{^-3}{2}, \ldots, {^-1}, \ldots, \frac{^-1}{2}, \ldots, \frac{^-1}{4}, \ldots, \right.$$

$$\left. 0, \ldots, \frac{^+1}{4}, \ldots, \frac{^+1}{2}, \ldots, {^+1}, \ldots, \frac{^+3}{2}, \ldots, \ldots, {^+2}, \ldots, \frac{^+5}{2}, \ldots, {^+3}, \ldots \right\}$$

ou

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{Z}^* \right\}$$

Logo, com a criação do nôvo conjunto **Q**:

$$\text{para } \frac{a}{b} \in Q_a \text{ temos } \bullet \begin{array}{l} \nearrow \frac{^+a}{b} \in \mathbf{Q} \\ \searrow \frac{^-a}{b} \in \mathbf{Q} \end{array}$$

Exemplos:

$$\frac{1}{2} \in Q_a \bullet \begin{array}{l} \nearrow \frac{^+1}{2} \in \mathbf{Q} \\ \searrow \frac{^-1}{2} \in \mathbf{Q} \end{array} \qquad \frac{12}{4} \in Q_a \bullet \begin{array}{l} \nearrow \frac{^+12}{4} \in \mathbf{Q} \\ \searrow \frac{^-12}{4} \in \mathbf{Q} \end{array}$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) O nôvo conjunto **Q** *é infinito* e *denso*.

2.ª) Nos exemplos estudados, tem-se também: $\frac{^-1}{2} = {^-0{,}5} \in \mathbf{Q}$, $\frac{^+12}{4} = {^+3} \in \mathbf{Q}$.

2. *Relações de inclusão*

Assim como os números *inteiros positivos* foram identificados com os números *naturais*, também agora os números *racionais positivos* serão identificados com os números *racionais absolutos*. Êsse *mesmo comportamento* permite-nos escrever:

$$\frac{^+1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{^+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{^+2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

e substituir um pelo outro sempre que fôr conveniente.

Levando em conta as identificações estudadas, pode-se estabelecer as seguintes *relações de inclusão* com os conjuntos numéricos já estudados:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \text{ pois } \begin{array}{rllllllll} \mathbf{Z} = \{\ldots & {^-3}, & {^-2}, & {^-1}, & 0, & {^+1}, & {^+2}, & {^+3}, & \ldots\ldots\} \\ & & & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ & & & \mathbf{N} = \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots\} \end{array}$$

$Q_a \subset \mathbf{Q}$ pois

$$\begin{array}{rlllllllll} \mathbf{Q} = \{ & \ldots, {^-2}, \ldots, \frac{^-3}{2}, \ldots, {^-1}, \ldots, & 0, \ldots, & {^+1}, \ldots, & \frac{^+3}{2}, \ldots, & {^+2}, \ldots, & \frac{^+5}{2}, \ldots\} \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ & Q_a = \{ & 0, \ldots, & 1, \ldots, & \frac{3}{2}, \ldots, & 2, \ldots, & \frac{5}{2}, \ldots\} \end{array}$$

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$ pois

$$\begin{array}{rllllll} \mathbf{Q} = \{ & \ldots, {^-2}, \ldots, \frac{^-3}{2}, \ldots, {^-1}, \ldots, & 0, \ldots, & {^+1}, \ldots, \frac{^+3}{2}, \ldots, & {^+2}, \ldots, \frac{^+5}{2}, \ldots\} \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ & \mathbf{N} = \{ & 0, & 1, & 2, \ldots\} \end{array}$$

$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ pois

$$\begin{array}{rllllll} \mathbf{Q} = \{ & \ldots, {^-2}, \ldots, \frac{^-3}{2}, \ldots, & {^-1}, \ldots, & 0, \ldots, & {^+1}, \ldots, \frac{^+3}{2}, \ldots, & {^+2}, \ldots, \frac{^+5}{2}, \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathbf{Z} = \{ & \ldots, {^-2}, & {^-1}, & 0, & {^+1}, & {^+2}, \ldots\} \end{array}$$

Verifique você mesmo que: $N^* \subset Z$ e, portanto, que:

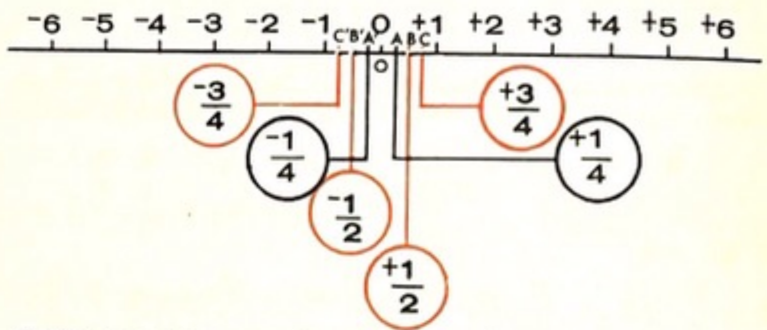
$$N^* \subset N \subset Z \subset \mathbb{Q}$$

GUARDE: Assim como $N^* = N - \{0\}$, assim também: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$.

3. *Representação geométrica*

Os números racionais absolutos já foram representados sôbre a reta numerada. A cada número racional absoluto corresponde um ponto, que é a sua *imagem* sôbre a reta numerada.

Da mesma forma, com relação aos números racionais relativos, sôbre a reta numerada, à direita de um ponto origem O situam-se as imagens correspondentes aos números racionais absolutos e à esquerda, as imagens dos números racionais negativos:



Obtém-se, assim, uma *representação geométrica* do conjunto $\mathbb{Q}$ sôbre a reta numerada. É bom lembrar que as imagens de dois números racionais relativos *opostos* são denominadas *simétricas*, em relação à origem. Assim, por exemplo, B e B', imagens de ${}^{+}\frac{1}{2}$ e ${}^{-}\frac{1}{2}$ são *simétricas* em relação à origem O.

4. *Valor absoluto de um número racional relativo*

Valor absoluto de um número racional relativo é *o próprio número*, se êle fôr *positivo ou nulo;* ou o seu *oposto*, se êle fôr negativo. Portanto, é o mesmo conceito já estudado com os números inteiros relativos. Exemplos:

$$\left|\frac{+1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{-10}{5}\right| = 2, \quad \left|0\right| = 0$$

OBSERVAÇÃO: Que representam expressões, tais como:

$$\frac{+3}{+4}, \quad \frac{+3}{-4}, \quad \frac{-3}{+4}, \quad \frac{-3}{-4} \ ?$$

Levando-se em conta o "sinal qualificativo" do numeral que deve representar o *quociente indicado* dos números relativos que figuram no "numerador" e "denominador" e a regra de sinais já estudada (divisão de números inteiros relativos), temos:

$$\frac{+3}{+4} = \frac{-3}{-4} = \frac{+3}{4} \quad \text{e} \quad \frac{+3}{-4} = \frac{-3}{+4} = \frac{-3}{4}$$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 52

Substituir em ${}^{+}\left(\frac{a}{b}\right)$ e ${}^{-}\left(\frac{a}{b}\right)$, a e b pelos valôres indicados e escrever os números racionais relativos obtidos:

Ex. modêlo: ${}^{+}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{+4}{2} = {}^{+}2$; ${}^{-}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-4}{2} = {}^{-}2$

1.º) $\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} a = 13 \\ b = 1 \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} a = 5 \\ b = 100 \end{cases}$

4.º) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

5.º) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 5 \end{cases}$

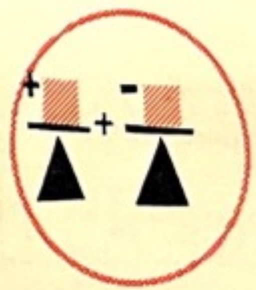
6.º) $\begin{cases} a = 6 \\ b = 6 \end{cases}$

7.º) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 10 \end{cases}$

8.º) $\begin{cases} a = n \\ b = m \quad (m \neq 0) \end{cases}$

9.º) $\begin{cases} a = p \\ b = q \quad (q \neq 0) \end{cases}$

10.º) $\begin{cases} a = 0 \\ b = d \quad (b \neq 0) \end{cases}$



Operações com números racionais relativos
Propriedades estruturais

No conjunto dos números racionais relativos (**Q**) são sempre *possíveis* as operações: *adição, subtração, multiplicação, divisão* (com o divisor diferente de zero) de dois números racionais relativos quaisquer.

Isto quer dizer que essas operações em **Q** gozam da propriedade do *fechamento* ou, em outras palavras, que o conjunto **Q** é *fechado* em relação a tais operações, cujas *técnicas de cálculo* você acompanhará fàcilmente por intermédio dos exemplos que serão estudados.

E com relação às operações: *potenciação* e *radiciação?*

No **Q** nem sempre é possível realizá-las, como você irá ver. Então, continuando a mesma "marcha" — a que você já está acostumado, estudando Matemática — serão criados "novos" números para dotar essas operações da propriedade do *fechamento.*

Adição e subtração

Exemplos-modêlo:

1.º) $\frac{^-3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{^-3+2}{4} = \boxed{\frac{^-1}{4}}$

2.º) $8 - \frac{^-2}{5} = \frac{40 - {^-2}}{5} = \frac{40 + {^+2}}{5} = \frac{42}{5} = \boxed{8\,\frac{2}{5}}$

3.º) $2\,\frac{1}{2} + {^-1}\,\frac{1}{3} = \frac{5}{2} + \frac{^-4}{3} = \frac{15 + {^-8}}{6} = \frac{7}{6} = \boxed{1\,\frac{1}{6}}$

4.º) $^-3{,}5 - (1{,}2 + {^-0{,}01}) = {^-3{,}5} - (1{,}2 - 0{,}01) = {^-3{,}5} - {^+1{,}19} =$
$= {^-3{,}5} + {^-1{,}19} = \boxed{^-4{,}69}$

Multiplicação e divisão

Exemplos-modêlo:

1.º) $^-3 \times \frac{^-1}{15} = \frac{^+\cancel{3}}{\cancel{15}} = \boxed{\frac{^+1}{5}}$

2.º) $\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{^-\cancel{2}}{3} = \boxed{\frac{^-1}{3}}$

3.º) $^-4 : \frac{2}{3} = {^-4} \times \frac{3}{2} = \frac{^-12}{2} = \boxed{^-6}$

4.º) $^-3\,\frac{1}{2} : 0{,}5 = \frac{^-7}{2} : \frac{5}{10} = \frac{^-7}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{10}}{\cancel{5}} = \boxed{^-7}$

Potenciação — Interpretação de "nova" potência

Exemplos-modêlo:

1.º) $\left(\frac{^-1}{2}\right)^3 = \frac{^-1}{8}$

3.º) $\left(^-2\,\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{^-5}{2}\right)^4 = \frac{^+625}{16}$ ou $\frac{625}{16}$

2.º) $(^+0{,}5)^2 = {^+0{,}25}$ ou $0{,}25$

4.º) $(^-0{,}333\ldots)^3 = \left(\frac{^-3}{9}\right)^3 = \left(\frac{^-1}{3}\right)^3 = \frac{^-1}{27}$

Vamos, agora, interpretar no **Q** as *potências indicadas de expoente inteiro negativo.* Basta lembrar as **propriedades conhecidas** que constarão dos seguintes exemplos:

1.º) $(^+4)^{-2} = (^+4)^{0-2} = (^+4)^0 : (^+4)^2 = 1 : (^+4)^2 = \frac{^+1}{4^2}$ ou $\frac{1}{4^2}$

2.º) $\left(\frac{^-1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{^-1}{2}\right)^{0-3} = \left(\frac{^-1}{2}\right)^0 : \left(\frac{^-1}{2}\right)^3 = 1 : \left(\frac{^-1}{2}\right)^3 = \frac{1}{\left(\frac{^-1}{2}\right)^3}$

De um modo geral: $a^{-n} = a^{0-n} = a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n}$

Logo: se a representa um número racional relativo e n um número natural, então:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 53

Calcular o valor das seguintes expressões:

1.ª) $\frac{{}^{-}3}{4} + \frac{2}{5} \times {}^{-}10$

Temos: $\frac{{}^{-}3}{4} + \frac{2}{\cancel{5}} \times {}^{-}\overset{-2}{\cancel{10}} = \frac{{}^{-}3}{4} + {}^{-}4 = \frac{{}^{-}3 + {}^{-}16}{4} = \frac{{}^{-}19}{4} = \boxed{{}^{-}4\,\frac{3}{4}}$

2.ª) $({}^{-}0{,}222\ldots)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

Temos: $({}^{-}0{,}222\ldots)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{{}^{-}2}{9}\right)^2 \times \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{{}^{+}4}{81} \times \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{81}} \times \frac{\cancel{81}}{\cancel{16}} = \boxed{\frac{1}{4}}$

3.ª) $\left[\underbrace{\left({}^{-}2 + \frac{1}{3}\right)}_{\bullet} \times \frac{{}^{-}3}{4} + \underbrace{\left(\frac{{}^{-}1}{2}\right)^2 : 3}_{\bullet\bullet}\right] \times 2^{-3}$

Temos, efetuando em partes:

$\bullet\ {}^{-}2 + \frac{1}{3} = \frac{{}^{-}6 + 1}{3} = \frac{{}^{-}5}{3}$ $\qquad \bullet\bullet\ \left(\frac{{}^{-}1}{2}\right)^2 : 3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Portanto: $\left[\left({}^{-}2 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{{}^{-}3}{4} + \left(\frac{{}^{-}1}{2}\right)^2 : 3\right] \times 2^{-3} = \left[\frac{{}^{-}5}{\cancel{3}} \times \frac{{}^{-}\cancel{3}}{4} + \frac{1}{12}\right] \times$

$\times \frac{1}{2^3} = \left[\frac{5}{4} + \frac{1}{12}\right] \times \frac{1}{8} = \frac{\cancel{16}}{12} \times \frac{1}{\cancel{8}} = \boxed{\frac{1}{6}}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 54

1. Efetuar as seguintes expressões:

1.ª) ${}^{-}7 + \frac{{}^{-}1}{2}$

2.ª) $\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 8$

3.ª) $1 - \frac{{}^{-}3}{5}$

4.ª) $1{,}8 + {}^{-}3{,}222\ldots$

5.ª) ${}^{-}0{,}333\ldots \times {}^{-}3$

6.ª) $3\,\frac{1}{4} \times {}^{-}0{,}2$

7.ª) ${}^{-}2\,\frac{1}{5} - 0{,}01$

8.ª) $\frac{{}^{-}3}{6} \times \frac{1}{2} \times {}^{-}12$

9.ª) $\frac{4}{3} : {}^{-}4$

10.ª) $5 : \left({}^{-}3 + \frac{{}^{-}1}{4}\right)$

11.ª) $\left(\frac{1}{2} : {}^{-}0{,}2\right) : {}^{-}2$

12.ª) $(1 - {}^{-}1) : {}^{-}1$

2. Calcular as seguintes *potências* indicadas:

1.ª) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

2.ª) $({}^{-}0{,}111\ldots)^2$

3.ª) $({}^{-}2)^{-1}$

4.ª) 3^{-2}

5.ª) 4^{-4}

6.ª) $({}^{-}1)^{-10}$

7.ª) $\left(\frac{{}^{-}1}{3}\right)^{-2}$

8.ª) 8^{-3}

9.ª) $\left({}^{-}3\,\frac{1}{2}\right)^{-1}$

10.ª) $(50)^0$

3. Usando as propriedades da potenciação, calcular:

1.º) $3^{-4} \times 3^{-2}$

2.º) $({}^{-}5)^{-3} : ({}^{-}5)^4$

3.º) $[({}^{-}4)^2]^{-3}$

4.º) $(3^{-2} \times 3)^{-2}$

4. Idem: 1.º) $[\square^{-n}]^m$ 2.º) $\left[\frac{\square^n}{\square^m}\right]^{-p}$

5. Calcular o valor das seguintes expressões:

1.ª) $\left(\frac{{}^{-}3}{4}\right)^2 - \left[2{,}5 - \left({}^{-}1 + \frac{1}{2}\right) \times 3^{-2}\right]$

2.ª) $\frac{{}^{-}1 - \frac{2}{3}}{4 \times \frac{{}^{-}2}{5}} : \left(\frac{{}^{-}1}{3}\right)^{-1}$

3.ª) $\left\{({}^{-}2)^2 \times \left[\frac{1}{2} - \left({}^{-}1 + \frac{{}^{-}4}{5}\right)\right]\right\} \times \left(\frac{{}^{-}56}{10}\right)^{-1}$

4.ª) $[(2{,}5 + {}^{-}3) + ({}^{-}3{,}2)^{-2} \times {}^{-}1] : ({}^{-}1{,}555\ldots)^0$

5.ª) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}\right] : 2^{12}$

6.ª) $[({}^{-}3 + 5)^2 \times 2^1] : 2^{-1}$

7.ª) $[({}^{-}3 \times 5)^2 \times 2^{-1}] : \frac{1}{2}$

8.ª) $[({}^{-}3 + {}^{-}5)^2 : 2] \times 2^{-2}$

9.ª) $\frac{\left({}^{-}2\,\frac{1}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{{}^{-}3}{7}\right)^{-2}}{\left(1 - \frac{2}{5} \times 3\right) \times \frac{35}{3}}$

10.ª) $\frac{(0{,}1 \times 10)^{10} : ({}^{-}1)^{20}}{5 : \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}$

Propriedades estruturais da adição e da multiplicação no conjunto $\mathbb{Q}$

Com relação às operações *adição* e *multiplicação* de números racionais relativos, valem as seguintes *propriedades estruturais* no $\mathbb{Q}$:

1.ª) FECHAMENTO:

Exs.: $\underbrace{\frac{^-3}{4}}_{\text{n.º racional relativo}} + \underbrace{5}_{\text{n.º racional relativo}} = \overbrace{\frac{17}{4}}^{\text{n.º racional relativo}}$ $\quad \underbrace{\frac{^-3}{4}}_{\text{n.º racional relativo}} \times \underbrace{5}_{\text{n.º racional relativo}} = \overbrace{\frac{^-15}{4}}^{\text{n.º racional relativo}}$

Em linguagem simbólica:

$$\text{se } m, n \in \mathbb{Q} \text{ então } \begin{cases} (m+n) \in \mathbb{Q} & \text{(p.f.a.)} \\ (m \times n) \in \mathbb{Q} & \text{(p.f.m.)} \end{cases}$$

2.ª) COMUTATIVA:

Exs.: $\frac{^-3}{4} + 5 = 5 + \frac{^-3}{4} \qquad \frac{^-3}{4} \times 5 = 5 \times \frac{^-3}{4}$

Em linguagem simbólica:

$$\boxed{m + n = n + m} \qquad \boxed{m \times n = n \times m}$$

(p.c.a.) **(p.c.m.)**

para *quaisquer* $m, n \in \mathbb{Q}$

3.ª) ELEMENTO NEUTRO:

0 para a *adição*. Ex.: $\frac{-3}{4} + 0 = \frac{-3}{4}$; $\frac{^-a}{b} + 0 = 0 + \frac{^-a}{b} = \frac{^-a}{b}$

De um modo geral: $m + 0 = 0 + m = m$, para qualquer $m \in \mathbb{Q}$ **(e.n.a.)**

1 para a *multiplicação*. Ex.: $\frac{-3}{4} \times 1 = \frac{-3}{4}$; $\frac{^-a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{^-a}{b} = \frac{^-a}{b}$

De um modo geral: $m \times 1 = 1 \times m = m$, para qualquer $m \in \mathbb{Q}$ **(e.n.m.)**

4.ª) ELEMENTO INVERSO:

na *adição:* **(e.i.a.)** para *qualquer* n.º racional relativo m *existe um único* n.º racional relativo: m' (denominado **inverso aditivo**) tal que: $m + m' = m' + m = 0$ (elemento neutro). Ex.:

para o n.º racional relativo: $\frac{^-3}{4}$ *existe* o n.º racional relativo $\frac{^+3}{4}$ tal que: $\frac{^-3}{4} + \frac{^+3}{4} = 0$

na *multiplicação:* para *qualquer* n.º racional relativo m *existe um único* n.º racional relativo: m' (denominado **inverso multiplicativo**) tal que:

$m \times m' = m' \times m = 1$ (elemento neutro). Ex.:

para o n.º racional relativo: $\frac{^-3}{4}$ *existe* o n.º racional relativo $\frac{^-4}{3}$ tal que: $\frac{^-3}{4} \times \frac{^-4}{3} = 1$

NOTA: No caso de o conjunto ser o $\mathbb{Q}^*$, isto é, o conjunto dos números racionais relativos sem o 0, então não é necessário fazer exceção alguma para o elemento $m' \in \mathbb{Q}^*$.

5.ª) ASSOCIATIVA:

Exs.: $\left(\frac{^-3}{4} + 5\right) + \frac{^-1}{2} = \frac{^-3}{4} + \left(5 + \frac{^-1}{2}\right)$

$\left(\frac{^-3}{4} \times 5\right) \times \frac{^-1}{2} = \frac{^-3}{4} \times \left(5 \times \frac{^-1}{2}\right)$

Em linguagem simbólica:

$$(m + n) + s = m + (n + s) \quad \text{(p.a.a.)}$$
$$(m \times n) \times s = m \times (n \times s) \quad \text{(p.a.m.)}$$

para *quaisquer* $m, n, s \in \mathbb{Q}$

6.ª) DISTRIBUTIVA DA MULTIPLICAÇÃO EM RELAÇÃO À ADIÇÃO:

Ex.: $\frac{^-2}{3} \times (5 + {^-0{,}4}) = \frac{^-2}{3} \times 5 + \frac{^-2}{3} \times {^-0{,}4}$

Em linguagem simbólica:

$$m \times (n + s) = m \times n + m \times s$$

para *quaisquer* $m, n, s \in \mathbb{Q}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 55

1. Assinalar qual é a propriedade aplicada em cada uma das seguintes igualdades, *verdadeiras* no conjunto **Q**:

1.ª) $^{+}5 + {}^{-}5 = 0$

2.ª) $^{-}3{,}5 + 0 = 3{,}5$

3.ª) $\frac{24}{3} + {}^{-}1 = {}^{-}1 + \frac{24}{3}$

4.ª) $\frac{2}{7} + \frac{^{-}2}{7} = 0$

5.ª) $2\frac{1}{5}\times\left({}^{-}3+\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{5}\times{}^{-}3 + 2\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$

6.ª) $\frac{^{-}6}{5} \times 1 = \frac{^{-}6}{5}$

7.ª) $\left(1{,}8 \times \frac{^{-}1}{2}\right)\times 3 = 1{,}8 \times \left(\frac{^{-}1}{2}\times 3\right)$

8.ª) $\frac{^{-}3}{2}\times\frac{^{-}2}{3} = 1$

9.ª) $8{,}5 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\times 8{,}5$

10.ª) $({}^{-}0{,}01+1)+\frac{^{-}1}{3} = {}^{-}0{,}01 + \left(1+\frac{^{-}1}{3}\right)$

2. Dar o nome da operação, da propriedade dessa operação e o nome do respectivo conjunto, onde tal propriedade é verdadeira:

1.ª) (Exemplo-modêlo): Se $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ e $\frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$, então $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \in \mathbf{Q}$

$(b \neq 0)$ $(d \neq 0)$

operação: multiplicação; *propriedade:* fechamento; *conjunto:* n.os racionais relativos

2.ª) Se $m \in \mathbf{Q}$ e $n \in \mathbf{Q}$ então $(m + n) \in \mathbf{Q}$

3.ª) Se $x \in \mathbf{Q}^*$ então existe $\frac{1}{x} \in \mathbf{Q}^*$ tal que: $x \times \frac{1}{x} = 1$

4.ª) Se $\frac{^{-}m}{2} \in \mathbf{Q}$ então existe $\frac{^{+}m}{2} \in \mathbf{Q}$ tal que: $\frac{^{-}m}{2} + \frac{^{+}m}{2} = 0$

5.ª) Se $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ e $\frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$ então: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

$(b \neq 0)$ $(d \neq 0)$

6.ª) Se $x \in \mathbf{Q}$, $y \in \mathbf{Q}$ e $z \in \mathbf{Q}$ então: $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$

7.ª) Se $a, b, c \in \mathbf{Q}$ então: $(a + b) + c = a + (b + c)$

8.ª) Se $^{-}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbf{Q}$ então existe $0 \in \mathbf{Q}$ tal que: $^{-}\left(\frac{a}{b}\right) + 0 = {}^{-}\left(\frac{a}{b}\right)$ $(b \neq 0)$

TESTE DE RECAPITULAÇÃO IV

1. Formar os pares adequados:

1. $^{+}3 - {}^{-}5$	*a*) 0	(..., ...)
2. $^{-}4 + {}^{-}3$	*b*) $^{-}10$	(..., ...)
3. $^{-}6 : {}^{+}2$	*c*) $^{-}6$	(..., ...)
4. $^{+}5 \times {}^{-}3$	*d*) $^{+}18$	(..., ...)
5. $0 \times {}^{+}10$	*e*) $^{+}1$	(..., ...)
6. $^{-}5 \times {}^{-}1$	*f*) $^{-}3$	(..., ...)
7. $^{-}8 : {}^{-}8$	*g*) $^{+}8$	(..., ...)
8. $^{-}5 + {}^{-}5$	*h*) $^{+}5$	(..., ...)
9. $^{-}6 : {}^{+}1$	*i*) $^{-}15$	(..., ...)
10. $^{+}9 + {}^{+}9$	*j*) $^{-}7$	(..., ...)

2. Se x e y são números naturais, então a diferença $(x - y)$ é certamente:

a) um número natural
b) um número racional absoluto
c) um número natural diferente de zero
d) um número inteiro relativo
e) n. d. a.

3. O *oposto* de um número sempre existe:

a) no conjunto **N**
b) no conjunto **N***
c) no conjunto **Z**
d) no conjunto **Q**
e) n. d. a.

4. O oposto do oposto de $^{-}13$:

a) é $^{+}13$
b) é $^{-}13$
c) é igual ao oposto de $^{-}13$
d) não existe "oposto do oposto de um número"
e) n. d. a.

5. O valor absoluto de $^{-}3$:

a) é igual a $^{-}3$
b) é maior que 3
c) é menor que 3
d) é igual a 3
e) n. d. a.

6. O valor absoluto de $^{+}3$:

a) é igual a $^{-}3$
b) é maior que 3
c) é menor que 3
d) não existe
e) n. d. a.

7. Se $|x| = |y|$ e $x \neq y$, então:

a) x é o oposto de y
b) x e y são elementos neutros da adição
c) $x = \dfrac{1}{y}$
d) $x + y = 2x$
e) n. d. a.

8. Assinale a sentença verdadeira:

a) $^{+}3 - {}^{-}7 = {}^{+}3 + {}^{-}7$
b) $^{+}3 - {}^{-}7 = {}^{+}3 - {}^{+}7$
c) $^{+}3 - {}^{-}7 = {}^{+}3 +$ (oposto de 7)
d) $^{+}3 - {}^{-}7 = {}^{+}3 + {}^{+}7$
e) n. d. a.

9. Idem:

a) $|3 + 5| > |3| + |5|$
b) $|3 + 5| = |3| + |5|$
c) $|3 + 5| < |3| + |5|$
d) $|3 + 5| \neq |3| + |5|$
e) n. d. a.

10. Idem:

a) $|3 + {}^{-}5| = |3| + |{}^{-}5|$
b) $|3 + {}^{-}5| > |3| + |{}^{-}5|$
c) $|3 + {}^{-}5| < |3| + |{}^{-}5|$
d) $|3 + {}^{-}5|$ não existe
e) n. d. a.

11. O conjunto $A = \{x$ tal que $|x| < 4\}$, no $U = Z$, é igual a:

a) $\{{}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3, {}^{+}4\}$
b) $\{{}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3\}$
c) $\{\ldots {}^{-}5, {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3\}$
d) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
e) n. d. a.

12. Complete as sentenças tornando-as verdadeiras:

a) a soma de dois números inteiros relativos é sempre um número ....
b) a diferença entre dois números naturais nem sempre é um número ....
c) $a \cdot b > 0$ e $a > 0 \Longrightarrow b \ldots 0$
d) $a \cdot b \cdot c = 0$ e $|a| = |b| = 3 \Longrightarrow |c| = \ldots$
e) $a - b = c \Longleftrightarrow c + \ldots = \ldots$

13. Coloque *V* nas sentenças verdadeiras e *F* nas falsas:

a) $(|{}^{-}5|)^2 = |({}^{-}5)^2|$
b) $(|{}^{-}5|)^2 > |({}^{-}5)^2|$
c) $(|{}^{-}5|)^2 < |({}^{-}5)^2|$

14. Complete:

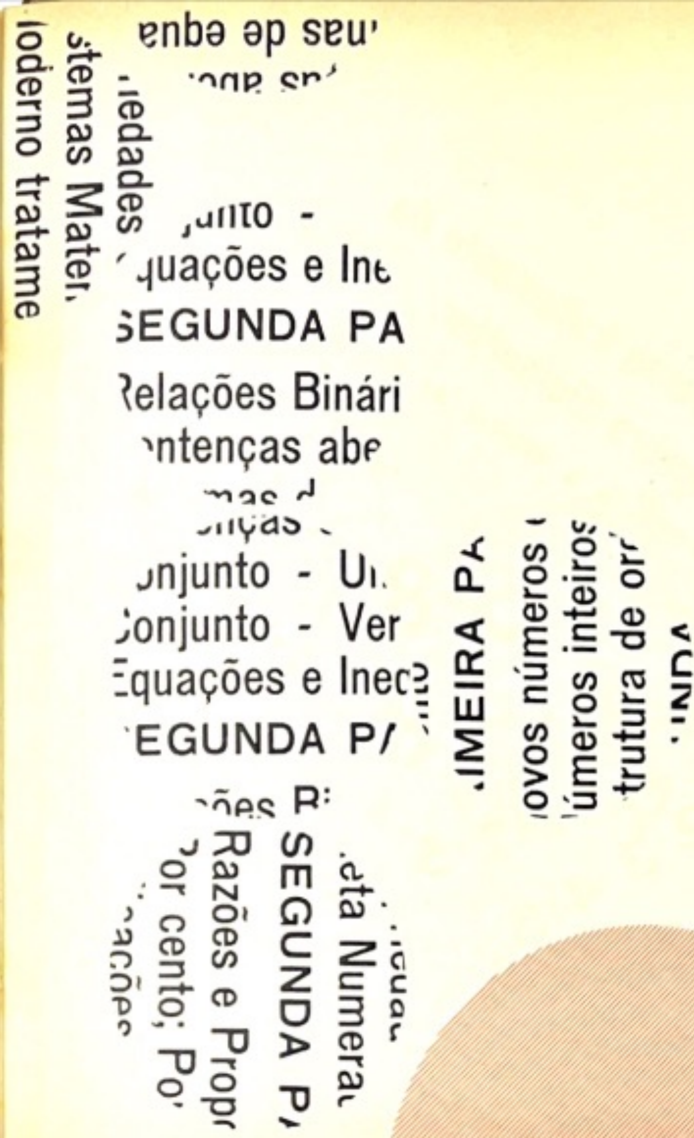
a) O elemento neutro da adição no conjunto **Z** é o ...
b) o elemento ... da multiplicação no conjunto **Z** é o 1
c) o .... de $\dfrac{{}^{-}2}{3}$, no conjunto **Q**, em relação à multiplicação, é o $\dfrac{{}^{-}3}{2}$
d) o oposto de 5, no conjunto **Q**, em relação à adição, é o ...

15. Aponte as sentenças verdadeiras:

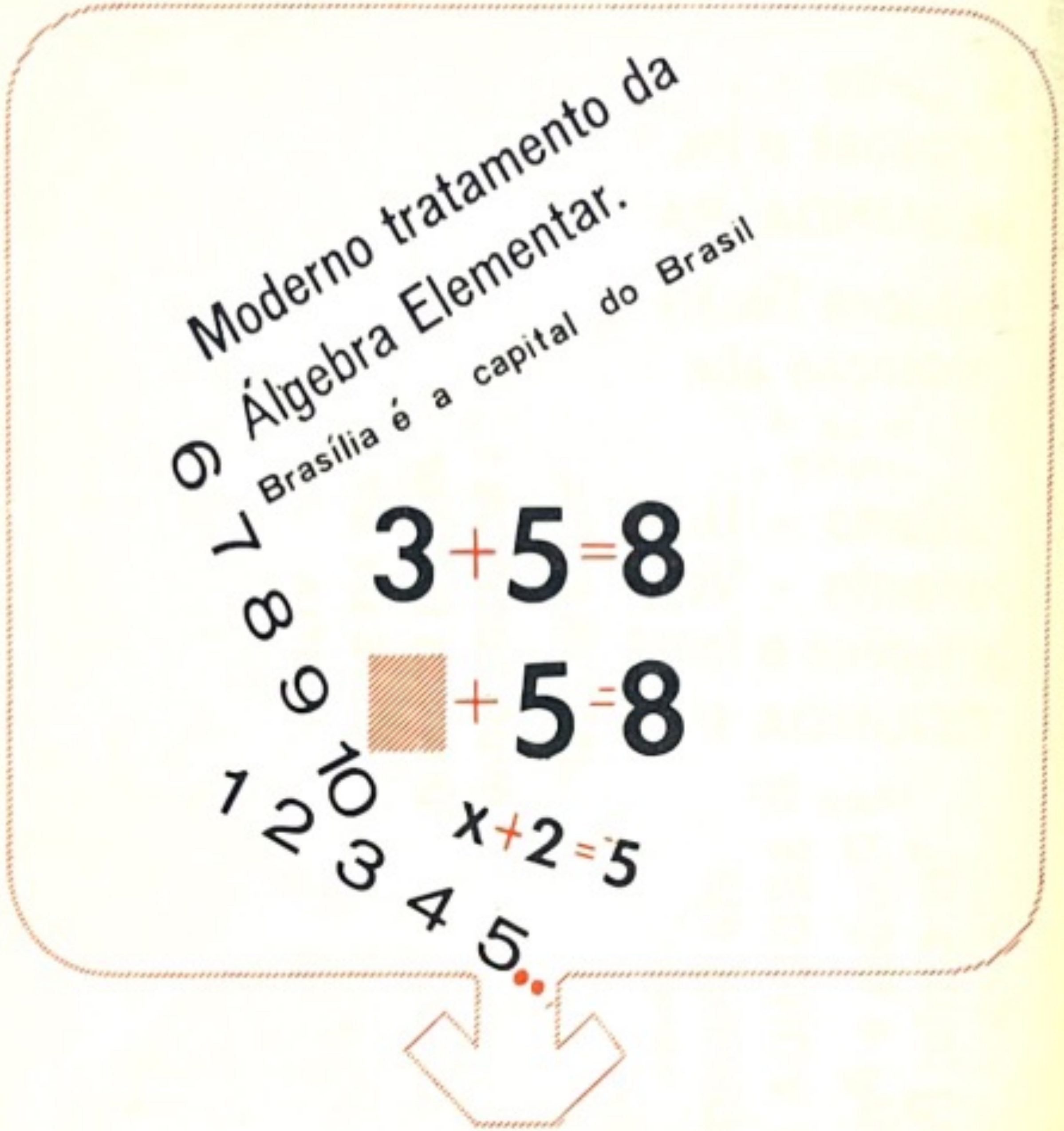
a) zero é o menor número inteiro relativo
b) zero é maior que qualquer número inteiro negativo
c) zero é menor que qualquer número inteiro positivo

16. Coloque *V* nas sentenças verdadeiras e *F* nas falsas:

a) $\mathbf{N}^* \subset \mathbf{N}$
b) $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}^*$
c) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$
d) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}_a$
e) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$



capítulo quatro



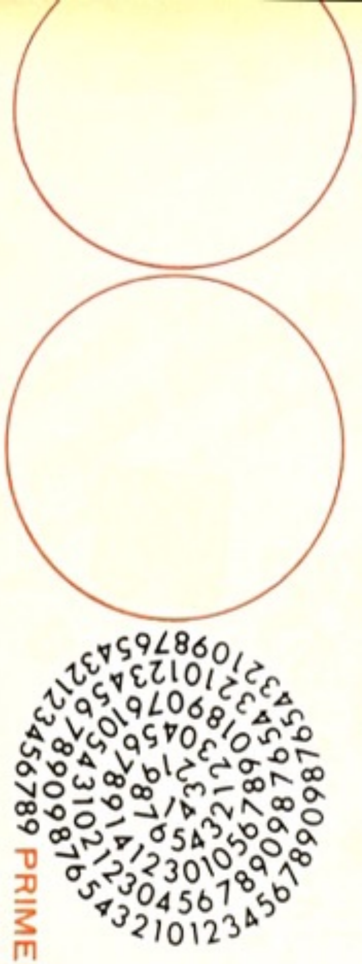
PRIMEIRA PARTE:

Sentenças e expressões.
Conjunto-Universo.
Conjunto-Verdade.
Equações e inequações.

SEGUNDA PARTE:

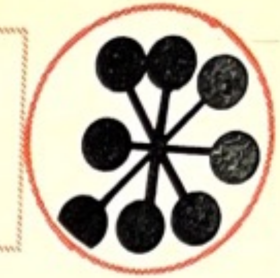
Relações binárias.
Sentenças abertas com duas variáveis.
Sistemas de equações simultâneas.

APÊNDICE



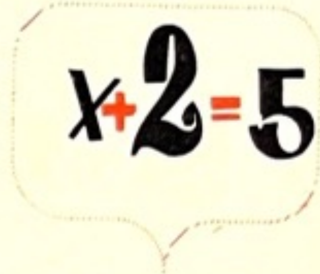
PRIMEIRA PARTE

Sentenças e expressões.
Conjunto-Universo.
Conjunto-Verdade.
Equações e inequações.



Moderno tratamento da Álgebra moderna

Sentenças — Variável
Conjunto-Universo
Conjunto-Verdade
ou Conjunto-Solução



1. *Sentenças e expressões*

Até agora você tem tido uma boa experiência com *sentenças matemáticas*. Da mesma forma que em Português, as sentenças matemáticas exprimem um *pensamento completo*. Assim, por exemplo:

"Brasília é a capital do Brasil"

e

"3 + 5 = 8"

são sentenças(*), porque ambas exprimem um *pensamento completo* por possuírem *sujeito* e *predicado*. Observe:

$\underbrace{\textit{Brasília}}_{\text{sujeito}}\ \underbrace{\textit{é a capital do Brasil}}_{\text{predicado}}$ ou $\underbrace{3+5}_{\text{sujeito}}\ \underbrace{=8}_{\text{predicado}}$

Porém, se você disser (ou escrever) sòmente:

Brasília ou $\underline{3+5}$

não estará exprimindo um pensamento completo: disse nesse caso uma **expressão**, quer em Português, quer em Matemática.

(*) Comumente denominadas *proposições*.

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 56

Assinale com S as *sentenças* e com E as *expressões:*

1.ª) ônibus
2.ª) O ônibus 216 passa pelo Ginásio
3.ª) 2
4.ª) $^{-}2 < 0$
5.ª) $(5 \times {}^{-}3) : 9$
6.ª) Zezé
7.ª) 4 é um número primo
8.ª) $8 + \frac{1}{2}$
9.ª) Zezé é minha amiga
10.ª) $3 + 4 > 5$
11.ª) Pelé
12.ª) A diferença entre 4 e 5
13.ª) O triângulo *ABC* é isósceles
14.ª) Pelé é o apelido de Edson Arantes do Nascimento

2. *Sentenças numéricas e expressões numéricas*

As sentenças e as expressões que dizem respeito a números são chamadas *numéricas*. Levando em conta os símbolos que você já conhece, as sentenças e as expressões numéricas podem ser escritas de uma maneira *simplificada* na chamada *linguagem simbólica* da Matemática. Exs.:

linguagem corrente	*linguagem simbólica*
"um têrço"	$\frac{1}{3}$
"o quadrado de 9 é diferente de 80"	$9^2 \neq 80$
"o produto de sete negativo por 5"	$^{-}7 \times 5$
"dois é um número natural"	$2 \in \mathbf{N}$
"um meio negativo não é número racional relativo"	$^{-}\frac{1}{2} \notin \mathbf{Q}$

Você também pode fazer a "operação inversa", traduzindo as sentenças e as expressões numéricas da linguagem *simbólica* para a linguagem *corrente:*

linguagem simbólica	*linguagem corrente*
$^{-}4$	"quatro negativo"
$3 \leqslant 5$	"três é menor ou igual a cinco"
$8 - 3 > 5^2$	"a diferença entre oito e três é maior que o quadrado de cinco"
$^{+}2{,}5 \in \mathbf{Q}$	"dois e meio positivo é um número racional relativo (ou pertence ao conjunto dos números racionais relativos)"
$4 \in \varnothing$	"quatro pertence ao conjunto vazio"

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 57

1. Traduzir para a linguagem *simbólica* as seguintes expressões e sentenças matemáticas:

1.ª) "O cubo de cinco negativo é vinte e cinco"
2.ª) "um quarto positivo"
3.ª) "cinco é um número natural"
4.ª) "zero não é número natural"
5.ª) "produto de três pelo oposto de cinco positivo"
6.ª) "o quadrado da soma de seis e três"
7.ª) "o quadrado da soma de seis e três não é um número racional relativo"
8.ª) "mil novecentos e setenta é maior que um número negativo"
9.ª) "o quociente de vinte e quatro por três é igual à diferença entre o quadrado de três e o cubo de um"
10.ª) "a diferença entre oito e seu oposto não é um número racional".

2. Traduzir para a linguagem *corrente* as seguintes sentenças e expressões numéricas:

1.ª) $0 > {}^{-}30$
2.ª) $0{,}9 \notin \mathbf{Q}$
3.ª) $(5 - 8) > (4 : 2)$
4.ª) $(3 \times 5)^3$
5.ª) $\left(\frac{1}{2} + 2^4\right) \notin \mathbf{Z}$
6.ª) $3 \in \mathbf{N}$
7.ª) $0 \in \mathbf{Z}$
8.ª) $(8 - 5)^2 - \frac{1}{10}$
9.ª) $126 \times 0 \neq 126$
10.ª) $\left(\frac{1}{2} + 5\right) \in \mathbf{Z}$

3. *Sentenças verdadeiras e sentenças falsas*

A informação que *tôda sentença* traz pode ser: *verdadeira* (*V*) ou *falsa* (*F*). Os valôres *V* ou *F* são os *únicos* que as *sentenças*(*) podem assumir. Assim, por exemplo:

Brasília é a capital do Brasil	tem valor *V*
$3 + 5 = 8$	tem valor *V*
$2 + 4 > 7$	tem valor *F* $(2 + 4 = 6!)$
O Brasil é tricampeão mundial de futebol	tem valor *F* (que pena!)
$6 \in \mathbf{N}$	tem valor *V*
$\frac{1}{2} \notin \mathbf{Q}$	tem valor *F* $\left(\frac{1}{2}\right.$ é um n.º racional relativo!$\left.\right)$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 58

Diga qual o valor de cada uma das seguintes sentenças, se *V* ou *F*:

1.ª) Todo brasileiro é casado
2.ª) $^-8 + 5 < 0$
3.ª) $\left(9 + \frac{1}{2}\right) \in \mathbf{Q}$
4.ª) Os astronautas da Apolo 11 desceram na Lua
5.ª) O Marechal Floriano proclamou a Independência do Brasil
6.ª) $5 \times {}^-3 = {}^-3 \times 5$
7.ª) Todo animal tem quatro pés
8.ª) $^-6 + 0 = {}^+0$
9.ª) $0{,}5 \in \mathbf{Q}$
10.ª) zero é um número natural
11.ª) $5 \times (2 + 4) \neq 5 \times 2 + 5 \times 4$
12.ª) $3 \in \varnothing$
13.ª) A Lua é um satélite de Vênus
14.ª) $(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$
15.ª) O Estádio Beira-Rio, de Pôrto Alegre, foi inaugurado em 1968

(*) As sentenças que estamos estudando recebem, também, o nome de *proposições* ou *afirmações*, por assumirem definitivamente um valor *V* ou *F*.

4. *Sentenças abertas; variáveis*

Considere as seguintes "sentenças":

(1) *Êle* é aluno da 2.ª Série "A" de nosso Ginásio

(2) $\square + 5 = 8$

(3) $x < 3$

Serão *V* ou *F*?

Você, agora, não poderá responder tão prontamente, a menos que seja informado de quem é *Êle*, ou $\square$, ou x. Tais sentenças dizem-se **abertas**.

Uma *sentença aberta* torna-se uma sentença no sentido que você conhece (ou seja, "fechada"), quando os símbolos: *Êle*, $\square$, x, . . . , forem substituídos por nomes de *coisas definitivas*, também chamadas *constantes*. Assim, se:

na sentença (1) "*Êle*" fôr substituído por Joãozinho e você souber que Joãozinho é aluno da 2.ª Série "*A*" do Ginásio, então a sentença obtida tem valor *V*;

na sentença (2) "$\square$" fôr substituído por 2, a sentença obtida é *F* (experimente!); se "$\square$" fôr substituído por 3, o valor é *V* (idem); se fôr substituído por 4, o valor é *F*, e assim por diante;

na sentença (3) "x" fôr substituído por $^-3$, o seu valor é *V*; por 3 é *F*; por 4 é *F*; . . . (Experimente . . .)

Os símbolos: *Êle*, $\square$, x, . . . , usados nas *sentenças abertas*, são chamados de **variáveis**.

Nas sentenças em Português, as *variáveis* são geralmente representadas pelos *pronomes* ("êle", "ela", . . .), por outras *palavras*, como "tal", "alguém", "fulano", . . . ou por letras "$\mathcal{X}$", "Y", . . . e, em Matemática, freqüentemente, pelas letras do alfabeto latino (a, b, . . . , x, y, z) ou também pelos *pronumerais* (*): $\square$, $\triangle$, . . . , todos "desconhecidos" ou "incógnitos".

(*) Por analogia com o nome *pronome* (palavra que vai no lugar do *nome*), pode-se, agora, chamar *pronumeral* o *símbolo* que ocupa o lugar do *numeral* (sugestão de Max Beberman, do Grupo de Illinois — U.I.C.M. — E.U.A.).

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 59

Assinale as variáveis das seguintes *sentenças abertas:*

1.ª) Ela é minha prima

2.ª) $a + {}^{-}2 = 0$

3.ª) Fulano forma-se no Ginásio êste ano.

4.ª) $x - 1 \geqslant 5$

5.ª) $3 \times \square - 2 = 10$

6.ª) O herói da novela foi o Sr. "X".

7.ª) $3 < n$

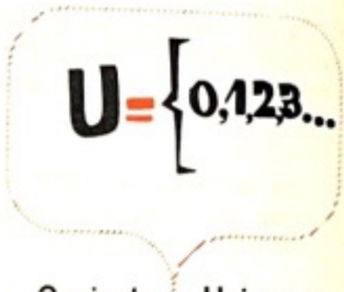
8.ª) $\square^2 = 1$

9.ª) Êle é meu professor de Matemática

10.ª) $y = 9$

11.ª) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = z$

12.ª) O ano tal é bissexto.



Conjunto — Universo.

5. *Conjunto-Universo (U) — Conjunto-Verdade (V)*

Considere, por exemplo, a seguinte *sentença aberta:*

O dia "X" é o dia da semana cujo nome começa por "s"

Os possíveis valôres da variável "X" são:

domingo, segunda, têrça, quarta, quinta, sexta e *sábado*

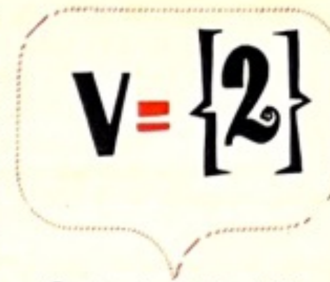
que constituem, em Português, tôdas as *possibilidades lógicas* de "X", isto é, são todos os *nomes possíveis* para os dias que compõem a semana. O conjunto dêsses valôres recebe o nome de *Conjunto-Universo* da variável "X". Indicação: U

Logo:

U = {domingo, segunda, têrça, quarta, quinta, sexta, sábado}

Para que elementos de U a sentença proposta é **verdadeira?**

Você conclui, fàcilmente, que a sentença é V para os dias: segunda, sexta e sábado, cujos nomes começam por *s*, e F para os demais. O conjunto dos valôres de U para os quais a sentença é V, denomina-se **Conjunto-Verdade** ou **Conjunto-Solução** dessa sentença. Indicação: V. Logo:



Conjunto — Verdade.

V = {segunda, sexta, sábado}

Resumindo:

Sentença aberta proposta: "O dia "X" é o dia da semana cujo nome começa por *s*"

Conjunto-Universo: U = {domingo, segunda, têrça, quarta, quinta, sexta, sábado}

Conjunto-Verdade: V = {segunda, sexta, sábado}

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: O Conjunto-Verdade de uma sentença aberta é sempre um *subconjunto* (está contido!) do Conjunto-Universo, isto é: $V \subset U$.

Supondo que não houvesse, em Português, dia da semana cujo nome começasse por *s*, então o Conjunto-Verdade seria *vazio* ($\varnothing$) e, mesmo assim: $\varnothing \subset U$, pois o *conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto!*

No caso de uma *sentença numérica aberta* o "comportamento" da variável é *o mesmo:* você tem o *Conjunto-Universo*, e dêle "extrairá" o *Conjunto-Verdade* da sentença. Exemplos:

1.º) $\square + 5 = 8$

O Conjunto-Universo da variável $\square$ seria, naturalmente, o conjunto dos números racionais relativos ($\mathbf{Q}$) que — por conter todos os conjuntos numéricos estudados até agora — apresenta o maior número de possibilidades lógicas de escolha.

Todavia, atendendo-se a certas exigências, pode-se tomar como Conjunto-Universo *qualquer conjunto*. Assim, se fôr escolhido para Conjunto-Universo, da sentença numérica proposta, o conjunto dos números naturais, isto é:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

o Conjunto-Verdade ou o Conjunto-Solução de: $\square + 5 = 8$ é o conjunto unitário constituído pelo elemento 3, pois êste é o único valor da variável $\square$ que torna a sentença *V*. Logo:

$$V = \{3\}$$

(NOTA: Você pode determinar o valor de 3 para $\square$, por intermédio da *operação inversa*, subtração: $8 - 5 = 3$).

LEMBRETE AMIGO

> O *Conjunto-Verdade* ou *Conjunto-Solução* de uma sentença numérica aberta **depende** do *Conjunto-Universo* escolhido. Daí o fato de se escrever ao lado da sentença numérica aberta o Conjunto-Universo onde se irá trabalhar:
>
> $$\square + 5 = 8, \quad U = \mathbf{N}$$
> $$V = \{3\}$$

2.º) $x + 5 = 3$, $U = \mathbf{N}$

Agora, você observa que não existe no conjunto **N** valor para x que, somado com 5, dê como resultado 3. Então o Conjunto-Solução é *vazio*, isto é:

$$V = \varnothing$$

Porém, se:

3.º) $x + 5 = 3$, $U = \mathbf{Z}$

então *existe* o elemento $^-2$ (experimente determinar pela *operação inversa!*). Logo:

$$V = \{^-2\}$$

4.º) $y + \frac{1}{2} = 5$, $U = \mathbf{Q}_a$

O Conjunto-Solução será formado pelo número $4\frac{1}{2}$, isto é:

$$V = \left\{4\frac{1}{2}\right\}$$

NOTA: Se fôr escolhido para "universo" um *conjunto finito qualquer*, então se atribuirá a tal conjunto o nome de **Conjunto-Substituição**. Indicação: S

Exemplos:

1. $x + 5 = 3$, $S = \{0, 1, 2, 3\}$

$V = \varnothing$ (pois *não há* elemento em S que torne $x + 5 = 3$ *verdadeira*)

2. $x + 5 = 3$, $S = \{0, ^-1, ^-2, ^-3\}$

$V = \{^-2\}$ (agora o elemento $^-2$, que torna a sentença verdadeira, é elemento de S)

5.º) $\triangle \times 2 = 8$, $U = \mathbf{N}$

$V = \{4\}$ (o valor de $\triangle$ é determinado pela *operação inversa*, divisão: $8 : 2 = 4$)

6.º) $\triangle \times 2 = 8$, $U = \mathbf{Q}_a$

$V = \{4\}$ (o Conjunto-Solução ainda é constituído pelo número 4, que também é um número racional!)

7.º) $\square \times 3 = {}^-5$, $U = \mathbf{N}$

$V = \varnothing$ (*não há* em **N** elemento que torne a sentença verdadeira; experimente...)

8.º) $\square \times 3 = {}^-5$, $U = \mathbf{Q}$

$V = \left\{\frac{^-5}{3}\right\}$ (o número $\frac{^-5}{3}$, que é um número racional relativo, surge ràpidamente pelo emprêgo da operação inversa: $^-5 : 3 = \frac{^-5}{3}$)

9.º) $\boxed{y : 2 = {}^{-}4}$, $U = \mathbf{N}$

$V = \varnothing$ (. . . não há elemento em **N** que, dividido por 2, dê $^{-}4$ . . .)

10.º) $\boxed{y : 2 = {}^{-}4}$, $U = \mathbf{Z}$

$V = \{{}^{-}8\}$ (. . . agora existe em **Z** o elemento $^{-}8$)

11.º) $\boxed{\square^2 = 9}$, $U = \mathbf{N}$

$V = \{3\}$ (. . . 3 é o elemento de **N** que, *elevado ao quadrado*, resulta 9, não é? . . . Experimente)

12.º) $\boxed{\square^2 = 9}$, $U = \mathbf{Z}$

$V = \{{}^{-}3, {}^{+}3\}$ (agora há, no conjunto **Z**, *dois* elementos que tornam a sentença verdadeira: $({}^{+}3)^2 = 9$ e $({}^{-}3)^2 = 9$)

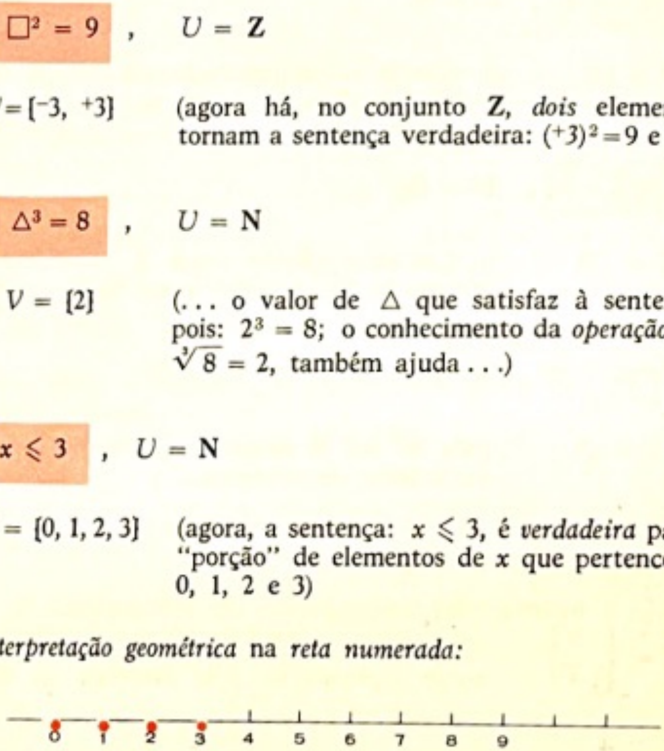
13.º) $\boxed{\Delta^3 = 8}$, $U = \mathbf{N}$

$V = \{2\}$ (. . . o valor de Δ que satisfaz à sentença é 2, pois: $2^3 = 8$; o conhecimento da *operação inversa:* $\sqrt[3]{8} = 2$, também ajuda . . .)

14.º) $\boxed{x \leqslant 3}$, $U = \mathbf{N}$

$V = \{0, 1, 2, 3\}$ (agora, a sentença: $x \leqslant 3$, é *verdadeira* para uma "porção" de elementos de x que pertencem a **N**: 0, 1, 2 e 3)

Interpretação geométrica na *reta numerada:*



15.º) $\boxed{x \leqslant 3}$, $U = \mathbf{Z}$

$V = \{\ldots {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3\}$ (. . . *infinitos* elementos de **Z** tornam a sentença verdadeira, como você está "vendo" na *reta numerada* . . .)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 60

1. Nos seguintes exercícios são dados: uma *sentença aberta* com uma *variável* e o *Conjunto-Universo* da tal variável. Determinar o *Conjunto-Verdade* (ou Conjunto-Solução) dessa sentença:

1.º) "*Êle*" é o *centro-avante* da seleção brasileira para a Copa do Mundo de Futebol de 1970.

Conjunto-Universo: {Félix, Carlos Alberto, Djalma Dias, Joel, Rildo, Piazza, Gérson, Jairzinho, Tostão, Pelé, Edu}

2.º) O planêta "*Y*" é o maior planêta do Sistema Solar.

Conjunto-Universo: {Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urânio, Netuno, Plutão}

3.º) O Estado "*X*" é o maior, em superfície, do Brasil.

Conjunto-Universo: {Amazonas, Pará, Maranhão, . . . , Rio Grande do Sul}

4.º) O mês "*tal*" é de férias escolares no Brasil.

Conjunto-Universo: {janeiro, fevereiro, março, . . . , novembro, dezembro}

5.º) "*Êste*" é um dia da semana.

Conjunto-Universo: {domingo, segunda, têrça, quarta, quinta, sexta, sábado} (Atenção!)

6.º) "*Ela*" tem cabelos prêtos.

Conjunto-Universo: {todos os colegas de sua classe}

2. Determinar o *Conjunto-Solução* (V), para cada uma das seguintes sentenças numéricas abertas, ao lado das quais figura o *Conjunto-Universo* (U), ou *Conjunto-Substituição* (S), onde deve achar-se a variável:

1.ª) $\square + 5 = 9, \quad U = N$
2.ª) $\square + 5 = 9, \quad U = Q_a$
3.ª) $\square + 5 = 9, \quad S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
4.ª) $\square + 5 = 9, \quad S = \{0, 1, 2, 3\}$
5.ª) $x - 2 = 8, \quad U = N$
6.ª) $x + 7 = 3, \quad U = N$
7.ª) $x + 7 = 3, \quad U = Z$
8.ª) $x + 7 = 3, \quad S = \{^-5, ^-4, ^-3, ^-2\}$
9.ª) $x + 7 = 3, \quad S = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
10.ª) $\triangle - 5 = 1, \quad U = N$
11.ª) $\square \times 3 = 12, \quad U = N$
12.ª) $\square \times 2 = 5, \quad U = N$
13.ª) $\square \times 2 = 5, \quad U = Q_a$
14.ª) $\square \times 2 = 5,$
$$S = \left\{1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3\right\}$$
15.ª) $\square \times 2 = 5,$
$$S = \left\{0, \frac{1}{2}, ^-1, \frac{^-5}{2}\right\}$$
16.ª) $x \times {^-3} = 8, \quad U = Z$
17.ª) $x \times {^-3} = 8, \quad U = Q$
18.ª) $x \times {^-3} = 8, \quad S = \left\{\frac{^-3}{8}, \frac{^-8}{3}\right\}$
19.ª) $5 \times \triangle = {^-1}, \quad U = Q$
20.ª) $y + {^-3} = {^-6}, \quad U = Z$
21.ª) $x - {^-2} = 5, \quad U = Z$
22.ª) $x : 3 = 6, \quad U = N$
23.ª) $x : {^-3} = 6, \quad U = Z$
24.ª) $\square + 2{,}5 = 6{,}2 \quad U = Q_a$
25.ª) $\square + 2{,}5 = 6{,}2, \quad S = \{2{,}3; 0{,}5; 4\}$
26.ª) $\square + 2{,}5 = 6{,}2, \quad S = \{3{,}2; 3{,}5; 3{,}7\}$
27.ª) $x + \frac{^-1}{2} = {^-8} \quad U = Z$
28.ª) $x + \frac{^-1}{2} = {^-8}, \quad U = Q$
29.ª) $\square^2 = 16, \quad U = N$
30.ª) $\square^2 = 16, \quad U = Z$
31.ª) $\triangle^3 = \frac{^-1}{8}, \quad U = Z$
32.ª) $\triangle^3 = \frac{^-1}{8}, \quad U = Q$
33.ª) $x \leqslant 2, \quad S = \{0, 1, 2\}$
34.ª) $x \leqslant 2, \quad U = N^*$ (atenção!)
35.ª) $x \leqslant 2, \quad U = Z$
36.ª) $z > 4, \quad U = Z$
37.ª) $z \geqslant 4, \quad U = Q$
38.ª) $z \geqslant 4, \quad S = \{0, 1, 3, 5, 6, 7\}$
39.ª) $z \geqslant 4, \quad S = \{^-2, 0, ^+2\}$
40.ª) $x = x, \quad U = N$ (atenção!)

$\square + 5 = 8$

$x + 2 = 5$

Equações e Inequações.

6. *Conceito*

Em Matemática você trabalha, freqüentemente, com sentenças numéricas abertas do tipo:

$$\square + 3 = 5$$
$$2 \times \triangle = {^-8}$$
$$5 \times x = x + 4$$
$$3 \times \square^2 = 75$$

que exprimem a *igualdade* entre duas *expressões* numéricas. Tais *sentenças abertas* são denominadas **equações.**

No caso de as sentenças numéricas abertas exprimirem *desigualdade* entre duas expressões numéricas, como:

$$x \geqslant 3$$
$$y < {^-4}$$
$$3 \times \square \neq 6$$

recebem o nome de **inequações.**

As expressões numéricas que compõem as *equações* e as *inequações*, são denominadas, respectivamente: *primeiro membro* (ou membro à esquerda) e *segundo membro* (ou membro à direita). Exemplos:

$$\underbrace{5 \times x}_{\text{1.º membro}} = \underbrace{x + 4}_{\text{2.º membro}} \qquad \underbrace{y}_{\text{1.º membro}} < \underbrace{^-4}_{\text{2.º membro}}$$

Observação importante: Teria $x = 2$ o mesmo significado que $2 = x$?

e $x > 2$ o mesmo significado que $2 > x$?

No primeiro caso SIM, pois, substituindo-se x por 2 na primeira equação, obtém-se: $2 = 2$; fazendo-se o mesmo na segunda: $2 = 2$. Ambas são *verdadeiras*. No segundo caso NÃO, pois, substituindo-se na primeira x por 5, por exemplo, obtém-se: $5 > 2$ (*V*) e, na segunda: $2 > 5$ (*F*).

Logo:

na *relação de igualdade, não tem importância trocar* o membro da esquerda com o membro da direita;

na *relação de desigualdade, tem importância trocar* o membro da esquerda com o membro da direita;

você pode dizer, portanto, que a relação de igualdade é **simétrica** e a relação de desigualdade **não é simétrica.**

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 61

1. Assinale quais, das seguintes sentenças numéricas abertas, são *equações* ou *inequações*:

1.ª) $x - 8 = 2$	7.ª) $n^3 \leqslant 8$
2.ª) $7 \times \square - 1 = 0$	8.ª) $3 \times x - {}^-1 = 2$
3.ª) $3 \times y < 6$	9.ª) $2 \times \triangle + 1 = \triangle + 2$
4.ª) $x \neq {}^-1$	10.ª) $\square^2 : 8 \neq 1$
5.ª) $y + 5 > {}^-3$	11.ª) $\frac{1}{2} \times x < 3$
6.ª) $x^2 = 25$	12.ª) $y^2 - 5y + 6 > 0$

2. Têm o mesmo significado:

1.º) $\square = 5$ e $5 = \square$? Por quê?

2.º) $\triangle < 3$ e $3 < \triangle$? Por quê?

Equações do primeiro grau

7. *Resolução de equações do primeiro grau com uma variável*

Que é *resolver* uma equação?

Resolver uma equação, num certo *Conjunto-Universo*, é determinar o seu *Conjunto-Verdade* ou *Conjunto-Solução*. Os elementos do Conjunto-Solução, quando existem, são chamados: *raízes, soluções* ou *valôres-verdade* da equação. Assim, por exemplo:

a *solução* (ou raiz) da equação:

$$x + 4 = 6, \quad U = \mathbf{N}$$

é o 2, porque $V = \{2\}$.

No caso do Conjunto-Solução ser *vazio*, isto é: $V = \emptyset$, então *não existem soluções* no Conjunto-Universo onde se trabalha. Exemplo: a equação

$$x + 4 = 2, \quad U = \mathbf{N}$$

não tem solução em **N**, pois: $V = \emptyset$.

São chamadas do *primeiro grau com uma variável* as equações nas quais a variável figura com expoente 1 (um), como, por exemplo, a equação:

$$x + 4 = 6$$

onde a variável x figura com o expoente 1.

Você irá aprender a resolver, por enquanto, com bastante desembaraço, *qualquer* equação do *primeiro grau com uma variável*, no Conjunto-Universo dos números racionais relativos, isto é, no **Q**.

NOTA: Quando não fôr discriminado o Conjunto-Universo onde se está operando, subentender-se-á o **Q**.

Quais são, no Teste de Atenção — Grupo 61 —, as *equações do primeiro grau com uma variável?* Assinale-as.

8. *Equações equivalentes*

Que você observa em relação à *solução* de cada uma das equações:

$$x = 2 \quad \text{e} \quad x + 1 = 3, \quad \text{no } U = \mathbf{Q}?$$

Ambas admitem a *mesma solução:* 2.

O mesmo ocorre com as equações:

$$3 \times x = 15 \quad \text{e} \quad x = 5, \quad \text{no } U = \mathbf{Q}$$

pois têm a *mesma solução:* 5.

E com as equações: $x + 2 = 6$ e $5 - x = 1$, no $U = \mathbb{Q}$?

Também admitem a *mesma solução:* 4 (. . . experimente)

Pois bem, equações que têm, num determinado *Conjunto-Universo*, o *mesmo Conjunto-Verdade*, são denominadas *equações equivalentes*. Então, são **equivalentes** as equações:

$x = 2$ e $x + 1 = 3$ (*mesma solução:* 2)

$3 \times x = 15$ e $x = 5$ (*mesma solução:* 5)

$x + 2 = 6$ e $5 - x = 1$ (*mesma solução:* 4)

É de capital importância conhecer as *equações equivalentes;* elas permitem *simplificar* a resolução da maioria das equações. Observe:

$\boxed{x + 1 = 3} \iff x = 3 - 1$ (aplicando a operação inversa)

ou $\boxed{x = 2}$

equações equivalentes

Ambas têm o $V = \{2\}$ e, portanto, a *mesma solução:* 2.

Nota: Tôda equação que esteja sob a mesma forma que a da equação: $x = 2$ (a *mais simples possível!*), diz-se que está sob *forma elementar.*

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 62

1. Em cada uma das seguintes linhas você encontrará três equações, das quais duas são *equivalentes* (o Conjunto-Universo é o $\mathbb{Q}$). Assinale-as:

1.ª) $x + 5 = 6$	$x + 3 = 5$	$x = 1$
2.ª) $5 \times x = {}^-10$	$3 \times x = 8$	${}^-3 \times x = 6$
3.ª) $x + 3 = 8$	$x = 4$	$x = 5$
4.ª) ${}^-4 = y$	$y + 4 = 0$	$3 \times y = 12$

2. Escreva duas *equações equivalentes.*

3. Escreva duas equações que *não sejam* equivalentes.

9. *Resolução de equações do primeiro grau com uma variável no* $\mathbb{Q}$

O *processo geral* de resolução de uma equação do primeiro grau com uma variável consiste, geralmente, em *transformá-la*, mediante o emprêgo de certos *princípios fundamentais* em *equações equivalentes*, cada vez mais simples, até chegar a uma equação sob *forma elementar*, cuja solução está, pràticamente, determinada. Como a equação dada e a equação sob forma elementar em que foi transformada são *equivalentes*, o elemento do Conjunto-Solução desta última será a *solução* da equação proposta.

10. *Princípios Fundamentais:* P.A.I. e P.M.I. *Técnicas operatórias*

Os dois *princípios fundamentais* usados na resolução de equações são:

I) Princípio Aditivo da Igualdade (P.A.I.)

> Se $a = b$, então $a + c = b + c$
> qualquer que seja o número c

Exemplos:

1.º) $\boxed{8 = 5 + 3}$ é uma *igualdade*

Somando o mesmo número a ambos os membros dessa igualdade, a sentença obtida ainda é uma *igualdade*. De fato:

somando 2, por ex.: $8 + 2 = (5 + 3) + 2$ $(10 = 10)$

somando ${}^-2$, por ex.: $8 + {}^-2 = (5 + 3) + {}^-2$ $(6 = 6)$

somando $\frac{1}{3}$, por ex.: $8 + \frac{1}{3} = (5 + 3) + \frac{1}{3}$ $\left(\frac{25}{3} = \frac{25}{3}\right)$

2.º) O mesmo ocorre, partindo de uma igualdade que representa uma *sentença numérica aberta* (equação):

$\boxed{x + 5 = 9}$ cuja solução é 4

Somando o mesmo número a ambos os membros dessa equação, a sentença obtida continuará admitindo a *mesma solução*, ou seja, é uma equação *equivalente* à dada. Assim:

somando 3, por ex.: $(x+5) + 3 = 9 + 3$ *solução: 4* (Experimente!)

somando ${}^-1$, por ex.: $(x+5) + {}^-1 = 9 + {}^-1$ *solução: 4* (Experimente!)

3.º) O mesmo ocorrerá, ainda, quando você *somar* uma *mesma expressão* aos dois membros de uma dada equação, isto é, a equação resultante continuará admitindo a *mesma solução* e, portanto, será *equivalente* à equação dada.

Assim, seja a equação:

$\boxed{4x = 6 + 2x}$ cuja solução é 3

somando ${}^-2x$(*) aos dois membros, obtemos a equação *equivalente:*

$$4x + {}^-2x = (6 + 2x) + {}^-2x$$

pois a solução continua 3 (Experimente!).

Aplicações do P.A.I.

Os exemplos que virão a seguir são de *resoluções de equações* no Conjunto-Universo **Q**. Por isso, o Conjunto-Universo não constará ao lado das equações que serão estudadas.

1.º) $\boxed{x + 2 = 6}$

A determinação da *solução* (ou *raiz*) dessa equação é feita procurando-se o *valor oportuno* que deve ser somado a ambos os membros e que facilite (graças ao **P.A.I.**) a procura do valor de x.

(*) Lembre-se que a expressão ${}^-2x$, quando se substitui x por um valor numérico qualquer, *sempre representa um número.*

Ora, somando-se ${}^-2$ (que é o *oposto* de 2) a ambos os membros da equação proposta, resultará:

$$(x + 2) + {}^-2 = 6 + {}^-2$$

e pela propriedade *associativa* da adição:

$$x + \underbrace{(2 + {}^-2)}_{0} = 6 + {}^-2$$

ou, efetuando os cálculos:

$$x + 0 = 4$$

e, pela propriedade do *elemento neutro* da adição:

$$x = 4$$

Logo: $V = \{4\} \implies$ *solução: 4*

Verificação: $4 + 2 = 6$

$6 = 6$ (V)

OBSERVAÇÕES:

1.ª) A soma de ${}^-2$ (*oposto* de 2) a ambos os membros teve a vantagem de tornar o primeiro membro a soma de x com 0 (elemento *neutro* da adição) e daí resultar imediatamente o valor de x.

2.ª) A raiz da equação proposta: $x + 2 = 6$ é 4 e não $x = 4$, que continua sendo uma equação, por se tratar de uma sentença aberta.

Tôdas as "passagens" da resolução da equação:

$\boxed{x + 2 = 6}$

podem ser indicadas da seguinte maneira:

$$x + 2 = 6$$

$$\underset{\text{P.A.I.}}{\iff} (x + 2) + {}^-2 = 6 + {}^-2$$

$$\underset{\text{p.a.a.}}{\iff} x + \underbrace{(2 + {}^-2)}_{0} = \underbrace{6 + {}^-2}_{4}$$

$$x + 0 = 4$$

$$\underset{\text{p.e.n.a.}}{\iff} x = 4$$

Logo: $V = \{4\} \implies$ *solução: 4*

P.A.I.: Princípio Aditivo da Igualdade

p.a.a.: propriedade associativa da adição

p.e.n.a.: propriedade do elemento neutro da adição

2.º) $\boxed{x + {}^{-}3 = 5}$

$$\underset{\text{P.A.I.}}{\iff} (x + {}^{-}3) + 3 = 5 + 3$$

$$\underset{\text{p.a.a.}}{\iff} x + \underbrace{({}^{-}3 + 3)}_{0} = 5 + 3 \iff$$

$$x + 0 = 8 \underset{\text{p.e.n.a.}}{\iff} x = 8$$

Logo: $V = \{8\} \Longrightarrow$ *solução:* 8

Verificação: $8 + {}^{-}3 = 5$
$5 = 5$ (V)

NOTA: O valor que, agora, nos interessa somar para obter o elemento neutro no primeiro membro é o 3 (oposto de ⁻3), que será somado a ambos os membros da equação.

3.º) $\boxed{x = 8}$

Essa equação é tão simples que não é necessário aplicar o **P.A.I.** para determinar a sua solução, pois o único valor de x que, no conjunto **Q**, torna a sentença verdadeira é 8 (você obtém substituindo êsse valor no primeiro membro: $8 = 8$).

Logo: $V = \{8\} \Longrightarrow$ *solução:* 8

4.º) $\boxed{y - 5 = {}^{-}3}$

Lembre-se que: ***Subtrair é o mesmo que somar o oposto!***
Portanto:

$$y - 5 = {}^{-}3$$

$$\underset{\text{def. de subt.}}{\iff} \boxed{y + {}^{-}5 = {}^{-}3}$$

$$\underset{\text{P.A.I.}}{\iff} (y + {}^{-}5) + 5 = {}^{-}3 + 5$$

$$\underset{\text{p.a.a.}}{\iff} y + ({}^{-}5 + 5) = {}^{-}3 + 5 \underset{\text{p.e.n.a.}}{\iff} y + 0 = 2 \iff y = 2$$

Logo: $V = \{2\} \Longrightarrow$ *solução:* 2

5.º) $\boxed{z + \frac{-1}{2} = 0}$

$$\underset{\text{P.A.I.}}{\iff} \left(z + \frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}$$

$$\underset{\text{p.a.a.}}{\iff} z + \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2} \iff z + 0 = \frac{1}{2} \underset{\text{p.e.n.a.}}{\iff} z = \frac{1}{2}$$

Logo: $V = \left\{\frac{1}{2}\right\} \Longrightarrow$ *solução:* $\frac{1}{2}$

6.º) $\boxed{2 - x = 5}$

$$\underset{\text{def. de subt.}}{\iff} 2 + (-x) = 5$$

$$\underset{\text{P.A.I.}}{\iff} {}^{-}2 + (2 + (-x)) = {}^{-}2 + 5$$

$$\underset{\text{p.a.a.}}{\iff} ({}^{-}2 + 2) + (-x) = {}^{-}2 + 5$$

$$0 + (-x) = 3$$

$$\underset{\text{p.e.n.a.}}{\iff} -x = 3 \underset{\substack{\text{considerando} \\ \text{os opostos}}}{\iff} x = {}^{-}3$$

Logo: $V = \{{}^{-}3\} \Longrightarrow$ *solução:* ${}^{-}3$

TÉCNICAS OPERATÓRIAS

Na resolução de equações, depois de conhecido o *Princípio Aditivo da Igualdade* **(P.A.I.)**, pode-se simplificar algumas "passagens" mediante o emprêgo de *técnicas* que já usam os resultados dessa propriedade. Exemplos:

1.º) Na resolução da equação:

$$\boxed{x + 2 = 6}$$

a "passagem" para a equação equivalente:

$$\boxed{x = 6 + {}^{-}2}$$

traduz-se na seguinte *técnica: o 2 que figura no primeiro membro "passou" para o segundo membro como* $^{-}2$, isto é:

Pode-se passar (ou transpor) um ou vários têrmos de um membro para outro de uma equação, desde que se *troquem* os seus sinais qualificativos.

Pode-se, ainda, passar diretamente de:

$$\boxed{x + 2 = 6}$$

para a equação equivalente:

$$\boxed{x = 4}$$

pois equivale a aplicar a *técnica:* $6 - 2 = 4$.

2.º) Seja a equação: $\boxed{y - 5 = {}^{-}3}$

Temos: $y + {}^{-}5 = {}^{-}3$ (*subtrair* é *somar o oposto!*)

ou $y = {}^{-}3 + 5$ (transpondo o $^{-}5$ do primeiro para o segundo membro)

e, portanto: $y = 2$ (*solução:* 2)

Ou ainda, partindo de:

$$\boxed{y - 5 = {}^{-}3}$$

e aplicando, diretamente, a *técnica:*

$$\boxed{y = {}^{-}3 + 5}$$

ou $y = 2$ (*solução:* 2)

3.º) Seja a equação: $\boxed{2 - x = 5}$

Temos: $2 + (-x) = 5$ (*subtrair* é *somar o oposto!*)

ou $2 + {}^{-}5 = x$ (transpondo $(-x)$ para o segundo membro e 5 para o primeiro)

e, portanto: $^{-}3 = x \iff x = {}^{-}3$ (*solução:* $^{-}3$)

E, se quiser, partindo de:

$$\boxed{2 - x = 5}$$

aplicar diretamente a *técnica*, temos:

$$\boxed{2 - 5 = x}$$

e, portanto: $^{-}3 = x \iff x = {}^{-}3$ (*solução:* $^{-}3$)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 63

Resolver, no Conjunto-Universo **Q**, as seguintes equações:

1.ª) $x + 2 = 8$
2.ª) $y + {}^{-}5 = 1$
3.ª) $z + \frac{1}{8} = 0$
4.ª) $x = \frac{-3}{5}$
5.ª) $t + {}^{-}0{,}2 = 0{,}1$
6.ª) $u + 2 = 2$
7.ª) $5.000 = y$
8.ª) $7 + x = {}^{-}1$
9.ª) $^{-}3 + y = {}^{-}3$
10.ª) $v + 0 = 10$
11.ª) $x - 3 = 5$
12.ª) $y - 4 = {}^{-}2$
13.ª) $z - {}^{-}1 = 0$
14.ª) $y - 3 = \frac{2}{5}$
15.ª) $x - \frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$
16.ª) $5 - x = 6$
17.ª) $4 - y = {}^{-}3$
18.ª) $^{-}3 - u = 0{,}01$
19.ª) $\frac{2}{3} - t = \frac{1}{2}$
20.ª) $\frac{-1}{4} - x = 0$

II) Princípio Multiplicativo da Igualdade (P.M.I.)

Se $a = b$ então $a \cdot c = b \cdot c$
qualquer que seja o número c

Exemplos:

1.º) Seja a igualdade: $8 = 5 + 3$ (sentença numérica)

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade pelo mesmo número, a sentença obtida ainda é uma *igualdade*. De fato:

multiplicando por 2, por exemplo: $2 \times 8 = 2 \times (5 + 3)$ $(16 = 16)$

multiplicando por $\frac{^-1}{2}$, por exemplo: $\frac{^-1}{2} \times 8 = \frac{^-1}{2} \times (5 + 3)$ $(^-4 = {^-4})$

2.º) Seja a equação: $4 \cdot x = 12$ (sentença numérica aberta)

cuja solução é 3 (verifique).

Multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{4}$, por exemplo, temos:

$$\frac{1}{4}(4x) = \frac{1}{4} \cdot 12$$

que é uma equação equivalente à equação $4x = 12$, pois a solução ainda é 3 (experimente).

Aplicações do P.M.I.

1.º) $2 \cdot x = {^-8}$ (O Conjunto-Universo é o $\mathbb{Q}$, para todos os exemplos a seguir)

Temos:

$$2x = {^-8}$$

$$\underset{\text{P.M.I.}}{\iff} \frac{1}{2} \cdot (2x) = \frac{1}{2}(^-8) \qquad \left(\text{lembre-se: } \frac{1}{2} \text{ é o } \textit{inverso} \text{ de } 2\right)$$

$$\underset{\text{p.a.m.}}{\iff} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)}_{1} x = {^-4} \iff 1 \cdot x = {^-4} \underset{\text{p.e.n.m.}}{\iff} x = {^-4}$$

(**p.e.n.m.**: propriedade do elemento neutro da multiplicação)

Logo: $V = \{^-4\} \implies$ *solução*: $^-4$

Verificação: $2 \times {^-4} = {^-8}$

$^-8 = {^-8}$ (V)

Observação: A multiplicação de ambos os membros da equação $2 \cdot x = {^-8}$ por $\frac{1}{2}$ (*inverso* de 2) trouxe, para o cálculo da solução, a *vantagem* de tornar o primeiro membro o produto de x por 1 (elemento neutro da multiplicação).

2.º) $\frac{1}{2} y = 3$

$$\underset{\text{P.M.I.}}{\iff} 2 \cdot \left(\frac{1}{2} y\right) = 2 \cdot 3 \qquad \left(\ldots 2 \text{ é o } \textit{inverso} \text{ de } \frac{1}{2}\right)$$

$$\underset{\text{p.a.m.}}{\iff} \underbrace{\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)}_{1} \cdot y = 6 \iff 1 \cdot y = 6 \underset{\text{p.e.n.m.}}{\iff} y = 6$$

Logo: $V = \{6\} \implies$ *solução*: 6

Verificação: $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

$3 = 3$ (V)

3.º) $z \times \frac{2}{5} = 0$

$$\underset{\text{P.M.I.}}{\iff} \left(z \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{5}{2} = 0 \times \frac{5}{2} \qquad \left(\ldots \frac{5}{2} \text{ é o } \textit{inverso} \text{ de } \frac{2}{5}\right)$$

$$\underset{\text{p.a.m.}}{\iff} z \times \underbrace{\left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\right)}_{1} = 0 \iff z \cdot 1 = 0 \underset{\text{p.e.n.m.}}{\iff} z = 0$$

Logo: $V = \{0\} \implies$ *solução*: 0

II) Princípio Multiplicativo da Igualdade (P.M.I.)

> Se $a = b$ então $a \cdot c = b \cdot c$
> qualquer que seja o número c

Exemplos:

1.º) Seja a igualdade: $8 = 5 + 3$ (sentença numérica)

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade pelo mesmo número, a sentença obtida ainda é uma *igualdade*. De fato:

multiplicando por 2, por exemplo: $2 \times 8 = 2 \times (5 + 3)$ $(16 = 16)$

multiplicando por $\frac{^-1}{2}$, por exemplo: $\frac{^-1}{2} \times 8 = \frac{^-1}{2} \times (5 + 3)$ $(^-4 = {^-4})$

2.º) Seja a equação: $4 \cdot x = 12$ (sentença numérica aberta)

cuja solução é 3 (verifique).

Multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{4}$, por exemplo, temos:

$$\frac{1}{4}(4x) = \frac{1}{4} \cdot 12$$

que é uma equação equivalente à equação $4x = 12$, pois a solução ainda é 3 (experimente).

Aplicações do P.M.I.

1.º) $2 \cdot x = {^-8}$ (O Conjunto-Universo é o $\mathbb{Q}$, para todos os exemplos a seguir)

Temos:

$$2x = {^-8}$$

$$\underset{\text{P.M.I.}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2} \cdot (2x) = \frac{1}{2}({^-8}) \qquad \left(\text{lembre-se: } \frac{1}{2} \text{ é o } \textit{inverso} \text{ de } 2\right)$$

$$\underset{\text{p.a.m.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)}_{1} x = {^-4} \Longleftrightarrow 1 \cdot x = {^-4} \underset{\text{p.e.n.m.}}{\Longleftrightarrow} x = {^-4}$$

(p.e.n.m.: propriedade do elemento neutro da multiplicação)

Logo: $V = \{^-4\} \Longrightarrow$ *solução:* $^-4$

Verificação: $2 \times {^-4} = {^-8}$

$^-8 = {^-8}$ (V)

OBSERVAÇÃO: A multiplicação de ambos os membros da equação $2 \cdot x = {^-8}$ por $\frac{1}{2}$ (*inverso* de 2) trouxe, para o cálculo da solução, a *vantagem* de tornar o primeiro membro o produto de x por 1 (elemento neutro da multiplicação).

2.º) $\frac{1}{2} y = 3$

$$\underset{\text{P.M.I.}}{\Longleftrightarrow} 2 \cdot \left(\frac{1}{2} y\right) = 2 \cdot 3 \qquad \left(\ldots 2 \text{ é o } \textit{inverso} \text{ de } \frac{1}{2}\right)$$

$$\underset{\text{p.a.m.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)}_{1} \cdot y = 6 \Longleftrightarrow 1 \cdot y = 6 \underset{\text{p.e.n.m.}}{\Longleftrightarrow} y = 6$$

Logo: $V = \{6\} \Longrightarrow$ *solução:* 6

Verificação: $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

$3 = 3$ (V)

3.º) $z \times \frac{2}{5} = 0$

$$\underset{\text{P.M.I.}}{\Longleftrightarrow} \left(z \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{5}{2} = 0 \times \frac{5}{2} \qquad \left(\ldots \frac{5}{2} \text{ é o } \textit{inverso} \text{ de } \frac{2}{5}\right)$$

$$\underset{\text{p.a.m.}}{\Longleftrightarrow} z \times \underbrace{\left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\right)}_{1} = 0 \Longleftrightarrow z \cdot 1 = 0 \underset{\text{p.e.n.m.}}{\Longleftrightarrow} z = 0$$

Logo: $V = \{0\} \Longrightarrow$ *solução:* 0

Verificação: $0 \times \frac{2}{5} = 0$

$0 = 0\ (V)$

4.º) $t : \frac{^-1}{3} = {}^-5$

Lembre-se: ***Dividir** é o mesmo que **multiplicar** pelo **inverso**!*
Portanto:

$$t : \frac{^-1}{3} = {}^-5$$

$$\underset{\text{def. de divisão}}{\iff} t \times {}^-3 = {}^-5$$

$$\underset{\text{P.M.I.}}{\iff} (t \times {}^-3) \times \frac{^-1}{3} = {}^-5 \times \frac{^-1}{3} \qquad \left(\ldots \frac{^-1}{3} \text{ é o } \textit{inverso} \text{ de } {}^-3\right)$$

$$\underset{\text{p.a.m.}}{\iff} t \times \underbrace{\left({}^-3 \times \frac{^-1}{3}\right)}_{1} = \frac{5}{3} \iff t \times 1 = \frac{5}{3} \underset{\text{p.e.n.m.}}{\iff} t = \frac{5}{3}$$

Logo: $V = \left\{\frac{5}{3}\right\} \implies$ *solução:* $\frac{5}{3}$

Verificação: $\frac{5}{3} : \frac{^-1}{3} = {}^-5$

$\frac{5}{3} \times \frac{^-3}{1} = {}^-5$

${}^-5 = {}^-5\ (V)$

5.º) ${}^-u : 6 = 3{,}2$

***Dividir** é **multiplicar** pelo **inverso**,* logo:

$${}^-u \cdot \frac{1}{6} = 3{,}2 \qquad \left(\ldots \frac{1}{6} \text{ é o } \textit{inverso} \text{ de } 6\right)$$

$$\underset{\text{P.M.I.}}{\iff} \left({}^-u \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot 6 = 3{,}2 \times 6$$

$$\underset{\text{p.a.m.}}{\iff} {}^-u \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{6} \cdot 6\right)}_{1} = 19{,}2 \iff {}^-u \cdot 1 = 19{,}2 \underset{\text{p.e.n.m.}}{\iff} {}^-u = 19{,}2 \iff u = {}^-19{,}2$$

Logo: $V = \{{}^-19{,}2\} \implies$ *solução:* ${}^-19{,}2$

Verificação: $19{,}2 : 6 = 3{,}2$

$3{,}2 = 3{,}2\ (V)$

TÉCNICAS OPERATÓRIAS

Conhecido o *Princípio Multiplicativo da Igualdade* **(P.M.I.)**, pode-se agora simplificar a resolução de equações pelo emprêgo de *técnicas* baseadas nesse princípio. Exemplos:

1.º) Seja a equação: $2x = {}^-8$

Temos: $x = {}^-8 \times \frac{1}{2} \iff x = {}^-4$ (*solução:* ${}^-4$)

Ou ainda: $2x = {}^-8$

temos $x = {}^-4$

que é uma equação *equivalente* obtida diretamente quando se efetua a *divisão* (${}^-8 : 2 = {}^-4$).

2.º) Seja a equação: $t : \frac{^-1}{3} = {}^-5$

Temos: $t \times {}^-3 = {}^-5$ (*dividir* é *multiplicar* pelo *inverso!*)

ou $t = \frac{5}{3}$ (... aplicando diretamente a técnica)

isto é, *solução:* $\frac{5}{3}$

Resolver, no Conjunto-Universo **Q**, as seguintes equações:

1.º) $3.x = 12$

2.º) $4.y = {}^-21$

3.º) ${}^-8 = 8x$

4.º) $\frac{5}{2} \cdot z = 0$

5.º) ${}^-100\,x = \frac{1}{2}$

6.º) $x \times 3 = {}^-6$

7.º) $y \times \frac{{}^-1}{4} = 4$

8.º) $z \times {}^-2 = {}^-10$

9.º) $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times t$

10.º) $\frac{{}^-2}{3} \times x = \frac{{}^-2}{3}$

11.º) $x : 3 = {}^-6$

12.º) $y : \frac{{}^-1}{4} = 1$

13.º) $\frac{{}^-2}{3} = u : 2$

14.º) $t : 0{,}1 = \frac{1}{10}$

15.º) $y : 36 = 0$

16.º) $x : 1 = 9$

17.º) $y : {}^-3 = {}^-3$

18.º) ${}^-x : 5 = {}^-5$ (cuidado!)

19.º) $1 = {}^-y : {}^-2$

20.º) ${}^-u : \frac{1}{3} = 0$

11. *Resolução das equações da forma:* $ax + b = c$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$ e $a \neq 0$). *Uso dos princípios* **P.A.I.** *e* **P.M.I.** *e aplicações das técnicas*

As equações, dos exemplos que se seguem, serão resolvidas no Conjunto-Universo **Q**.

1.º) $\boxed{2x + 3 = {}^-9}$

Temos:

$$\underset{\text{P.A.I.}}{\Longleftrightarrow} (2x + 3) + {}^-3 = {}^-9 + {}^-3$$

$$\underset{\text{p.a.a.}}{\Longleftrightarrow} 2x + \underbrace{(3 + {}^-3)} = {}^-12$$

$$2x + 0 = {}^-12$$

$$\underset{\text{p.e.n.a.}}{\Longleftrightarrow} 2x = {}^-12$$

$$\underset{\text{P.M.I.}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}({}^-12)$$

$$\underset{\text{p.a.m.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)}x = {}^-6$$

$$1 \cdot x = {}^-6$$

$$\underset{\text{p.e.n.m.}}{\Longleftrightarrow} x = {}^-6$$

Logo: $V = \{{}^-6\} \Longrightarrow$ *solução:* ${}^-6$

Verificação: $2 \times {}^-6 + 3 = {}^-9$

$${}^-12 + 3 = {}^-9$$

$${}^-9 = {}^-9 \ (V)$$

Usando *técnicas* conhecidas, podemos resolver a equação acima da seguinte maneira:

$$\boxed{2x + 3 = {}^-9}$$

$\Longleftrightarrow 2x = {}^-9 + {}^-3$ (. . . transpondo o 3 do primeiro para o segundo membro)

$\Longleftrightarrow 2x = {}^-12$ (dividindo por 2, que é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{2}$)

$\Longleftrightarrow x = {}^-6$

Logo: $V = \{{}^-6\} \Longrightarrow$ *solução:* ${}^-6$

2.º) $\boxed{ax + b = c}$ com $a \neq 0$

Temos:

$$\underset{\text{P.A.I.}}{\Longleftrightarrow} (ax + b) + (-b) = c + (-b)$$

NOTA: *$-b$ é o oposto de b*

$$\underset{\text{p.a.a.}}{\Longleftrightarrow} ax + \underbrace{(b + (-b))} = c + (-b)$$

$$ax + 0 = c + (-b)$$

$$\underset{\text{p.e.n.a.}}{\Longleftrightarrow} \quad ax = c - b$$

$$\underset{\text{P.M.I.}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1}{a}(ax) = c - b$$

$$\underset{\text{p.a.m.}}{\Longleftrightarrow} \quad \underbrace{\left(\frac{1}{a} \cdot a\right)}x = \frac{1}{a}(c - b)$$

$$1 \cdot x = \frac{1}{a}(c - b)$$

$$\underset{\text{p.e.n.m.}}{\Longleftrightarrow} \quad x = \frac{c - b}{a}$$

Logo: $V = \left\{\frac{c - b}{a}\right\} \Longrightarrow$ *solução:* $\frac{c - b}{a}$

Verificação: $\cancel{a} \times \frac{(c - b)}{\cancel{a}} + b = c$

$$c - b + b = c$$

$$c + \underbrace{(^-b + b)} = c$$

$$c + 0 = c$$

$$c = c \ (V)$$

Usando a *técnica:*

$ax + b = c \quad (a \neq 0)$

$ax = c - b$ (... transpondo b para o segundo membro)

$x = \frac{c - b}{a}$ (dividindo por a, que é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{a}$)

Logo: $V = \left\{\frac{c - b}{a}\right\} \Longrightarrow$ *solução:* $\frac{c - b}{a}$

NOTA: Diz-se que a equação:

$$2x + 3 = {^-9} \qquad \text{(1.º Exemplo)}$$

é da *forma:*

$$ax + b = c$$

onde: $a = 2, \ b = 3 \text{ e } c = {^-9}$

Observe que a *solução* da equação $ax + b = c$ é dada pela *fórmula:* $\frac{c - b}{a}$ que, aplicada na equação $2x + 3 = {^-9}$, determina a sua *solução:* $\frac{^-9 - 3}{2} = \frac{^-12}{2} = {^-6}$.

Por isso, é sempre possível preparar *máquinas* que permitem determinar a solução de uma equação, conhecida a sua *forma*.

3.º) $(y : 3) - 5 = 2{,}3$

Você já sabe que: ***dividir é multiplicar pelo inverso e subtrair é somar o oposto***

Logo, a equação proposta se transforma em:

$$\left(y \times \frac{1}{3}\right) + {^-5} = 2{,}3$$

$$\underset{\text{p.c.m.}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1}{3}y + {^-5} = 2{,}3 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{forma: } ax + b = c,\\ \text{onde: } a = \frac{1}{3},\ b = {^-5} \text{ e } c = 2{,}3\end{array}\right)$$

Agora é fácil resolver:

$$\frac{1}{3}y = 2{,}3 + 5$$

$$\frac{1}{3}y = 7{,}3$$

$$\underset{\text{P.M.I.}}{\Longleftrightarrow} \quad 3 \cdot \left(\frac{1}{3}y\right) = 3 \times 7{,}3$$

$$y = 21{,}9$$

$V = \{21{,}9\} \Longrightarrow$ *solução: 21,9*

Faça você mesmo a *verificação*.

NOTA: Aplicando a *fórmula:* $\frac{c-b}{a}$, que dá a *solução* das equações: $ax + b = c$, temos para o nosso exemplo: $\frac{1}{3}\,y + {}^-5 = 2{,}3$, raiz: $\frac{2{,}3 + 5}{\frac{1}{3}} = \frac{7{,}3}{\frac{1}{3}} = 3 \times 7{,}3 = 21{,}9$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 65

Resolver, no Conjunto-Universo **Q**, as seguintes equações:

1.ª) $3x + 2 = 9$

2.ª) $4y + 5 = {}^-1$

3.ª) ${}^-2z + 3 = 7$

4.ª) $x + {}^-1 = \frac{2}{3}$

5.ª) $\frac{3}{4}\,t + \frac{{}^-1}{4} = 0$

6.ª) $m \cdot x + n = p \; (m \neq 0)$

7.ª) $x \times 3 + 4 = 10$

8.ª) $y \times {}^-1 + {}^-1 = {}^-8$

9.ª) $z \times \frac{1}{2} = \frac{{}^-1}{2}$

10.ª) $t \times 1 + \frac{{}^-1}{3} = \frac{{}^-1}{3}$

11.ª) $(y : 3) + 4 = {}^-2$

12.ª) $(x : 2) - 3 = \frac{1}{4}$

13.ª) $(z : {}^-1) + 5 = 0{,}3$

14.ª) $(u : 4) - {}^-3 = {}^-1$

15.ª) $\left(x : \frac{1}{2}\right) + 2 = 2$

16.ª) $(x : m) + n = p \; (m \neq 0)$

17.ª) $(t : 5) - \frac{{}^-1}{2} = 0$

18.ª) $(x : 2) = \frac{{}^-1}{2}$

19.ª) $(3x : 4) + 5 = {}^-2$

20.ª) $\left(\frac{1}{3}y : {}^-2\right) + {}^-1 = 0$

LEMBRETE AMIGO

Até agora você viu que uma equação "pronta" para ser resolvida, mediante o uso dos princípios **P.A.I.** e **P.M.I.**, só apresenta indicações de *adições* e *multiplicações*, pois as subtrações "desaparecem" (*subtrair* é o mesmo que **somar o oposto**), assim como as divisões (*dividir* é o mesmo que **multiplicar pelo inverso**).

Mais tarde os próprios princípios **P.A.I.** e **P.M.I.** sugerem novas *técnicas operatórias*, que simplificarão, na prática, a resolução de equações.

Novas técnicas operatórias para simplificar o cálculo

Você simplificou os numerais dos números positivos quando, ao invés de representar, por exemplo, *três positivo* por $^+3$, escreveu 3 (deixando de usar o sinal qualificativo $^+$). Visando, principalmente, a facilitar a *técnica de cálculo* para resolver equações, você pode, também, representar os números negativos de outro modo.

Assim, por exemplo, lembrando que o $^-3$ é igual ao *oposto de* $^+3$ (ou de 3), isto é:

o *oposto de 3* é igual a $^-3$

e como, em Matemática, a relação **oposto de** é indicada pelo sinal $-$, escrito à esquerda do numeral que representa o número, vem:

$$-3 = {}^-3$$

Logo, dizer "*três negativo*" ou "*oposto de três*" significa a *mesma coisa* e a representação de $^-3$ por -3 (isto é, "baixamos" o sinal qualificativo) trará benefícios na técnica operatória, como você irá ver. Da mesma forma, pode-se escrever:

$$\frac{{}^-1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad {}^-0{,}8 = -0{,}8, \quad {}^-2\,\frac{1}{5} = -2\,\frac{1}{5}$$

Que significa: $-(-4)$?

Significa *o oposto do oposto de 4*, isto é, *o próprio 4*.

Então, se $-(-4) = 4$, podemos escrever, na prática: $-(-4) = +4$ e dizer: "menos por menos dá mais" ou "se *menos* precede parênteses, a eliminação dêsses parênteses *troca* o sinal do "número".

E: $-[-(-4)]$?

É fácil ver que: $-[-(-4)] = -4$

Da mesma forma, a expressão $-x$ é lida "*oposto de x*", ao invés de "*x* negativo", porque não sabemos se $-x$ se refere a um número positivo ou número negativo. É bom lembrar também que:

para qualquer número x *do conjunto dos números racionais relativos* (**Q**), ***existe** um único número oposto* $-x$, *tal que:* $x + (-x) = 0$.

Assim, se:

$x = 3$, então: $3 + (-3) = 0$

$x = {}^-3 = -3$, então: $(-3) + [-(-3)] = (-3) + 3 = 0$

No *cálculo*, onde intervêm números negativos, pode-se usar a "linguagem" dos *opostos*. Lembrando, por exemplo, que a *subtração* de dois números relativos quaisquer, dados numa certa ordem, transforma-se numa *adição* do primeiro com o *oposto* do segundo, temos:

$$5 - 3 = 5 + {}^{-}3 = 5 + (-3) = 2 \text{ e, portanto:}$$

ao invés de escrever: $5 + {}^{-}3$
você pode escrever: $5 + (-3)$
ou, diretamente: $5 - 3$

Da mesma forma:

ao invés de escrever: $5 - {}^{-}3$
você pode escrever: $5 - (-3)$ — valendo a *técnica:* eliminando parênteses, "menos" por "menos", dá "mais"
ou, diretamente: $5 + 3$

Também:

ao invés de escrever: ${}^{-}3 + {}^{-}4$
você pode escrever: $(-3) \times (-4)$ — valendo a *técnica:* multiplicando "menos" por "menos", dá "mais"
ou, diretamente: $+12$

ao invés de escrever: ${}^{-}5 : \frac{1}{2}$
você pode escrever: $(-5) : \left(+\frac{1}{2}\right)$ — valendo a *técnica:* dividindo "menos" por "mais", dá "menos"
ou, diretamente: -10

Conclua você os exemplos seguintes:

1.º) ao invés de escrever: $6 \times {}^{-}3$
você pode escrever: $(+6) \times (-3)$ — *técnica:* multiplicando "mais" por "menos", dá ....
ou, diretamente: -18

2.º) .... : ${}^{-}6 \times 3$
.... : $(-6) \times (+3)$ *técnica:* ....
.... : -18

3.º) .... : 6×3
.... : $(+6) \times (+3)$ *técnica:* ....
.... : $+18$

4.º) .... : $5 : {}^{-}\frac{1}{2}$
.... : $(+5) : \left(-\frac{1}{2}\right)$ *técnica:* ....
.... : -10

5.º) .... : ${}^{-}5 : {}^{-}\frac{1}{2}$
.... : $(-5) : \left(-\frac{1}{2}\right)$ *técnica:* ....
.... : $+10$

6.º) .... : $5 : \frac{1}{2}$
.... : $(+5) : \left(+\frac{1}{2}\right)$ *técnica:* ....
.... : $+10$

Relembrando agora o resultado já conhecido:

o oposto da soma é igual à soma dos opostos

ou seja: $-(a + b) = (-a) + (-b)$

vamos fazer algumas *aplicações* úteis para o cálculo.

1.ª) $\underbrace{a - (b + c)}$
$= a + [-(b + c)]$ (... definição de subtração)
$= a + (-b) + (-c)$ (... "o oposto da soma é igual à soma dos opostos")
$\rightarrow = a - b - c$

2.ª) $\underbrace{a - (b - c)}$
$= a - [b + (-c)]$ (outra maneira de escrever)
$= a + \{-[b + (-c)]\}$ (... definição de subtração)
$= a + [(-b) + c]$ (... "o oposto da soma ...")
$= a + (-b) + c$ ou
$\rightarrow = a - b + c$

Vale, pois, para aplicações dêsse tipo, a seguinte *técnica:*

se o sinal – (menos) precede parênteses (ou colchêtes, chaves, . . .), a eliminação dêsses parênteses **troca** *o sinal dos numerais dos números contidos nêles.*

Outros exemplos:

1.º) $5 - (3 + 12) = 5 - 3 - 12$

2.º) $3 - \left(-\frac{1}{2} + 0{,}3 - 1\right) = 3 + \frac{1}{2} - 0{,}3 + 1$

3.º) $x - \left(2y + z - \frac{t}{3}\right) = x - 2y - z + \frac{t}{3}$

4.º) $5 - [-(-4 + 3)] = 5 - [+4 - 3] = 5 - 4 + 3$

5.º) $x - \{-[-(-1)]\} = x - \{-[+1]\} = x - \{-1\} = x + 1$

6.º) $y - \{-(x - y)\} = y - \{-x + y\} = y + x - y$

NOTA: Você já sabe que no caso de os parênteses virem precedidos do sinal + (mais) a eliminação dos parênteses se fará naturalmente, *sem trocar* o sinal dos numerais dos números contidos nêles. Exemplos:

$2 + (8 - 3) = 2 + 8 - 3$

$a + (-b + c - d) = a - b + c - d$

$2x + [x - (1 - x)] = 2x + [x - 1 + x] = 2x + x - 1 + x$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 66

Elimine os parênteses (colchêtes, chaves, . . .) das seguintes expressões:

1.ª) $5 - (3 - 2 + 8)$

2.ª) $x + (y - z + t + u)$

3.ª) $\frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{2} + (0{,}2 - 1)\right]$

4.ª) $-\left\{-\left[2{,}3 + \left(1 - 0{,}7 + \frac{1}{5}\right)\right]\right\}$

5.ª) $0 - [-(-1 + 0 + 1)]$

6.ª) $x - (2x + 3y - 1)$

7.ª) $\frac{3x}{2} + [(x - 2) - 8]$

8.ª) $x - \{1 + [-(x + 1)]\}$

9.ª) $y - \{-[-(-5 + z)]\}$

10.ª) $-\frac{4x}{5} - \left[\left(-x - 1\right) + \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right]$

APLICAÇÕES DAS NOVAS TÉCNICAS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

1.ª) A equação: $\boxed{2x + 3 = {}^{-}9}$ (resolvida na pág. 210) pode agora receber o seguinte "tratamento":

$$2x + 3 = -9 \qquad \text{(. . . "desceu" o sinal de } {}^{-}9\text{. . .)}$$

$$\iff 2x = -9 - 3$$

$$\iff 2x = -12$$

$$\iff x = -6$$

Logo, *solução:* -6

2.ª) $\boxed{x \times 3 - 5 = 2}$

Temos: $x \times 3 = 2 + 5$

$$\iff x \times 3 = 7$$

$$\iff x = \frac{7}{3}$$

Logo, *solução:* $\frac{7}{3}$

3.ª) $\boxed{{}^{-}5 \cdot x + 2 = \frac{-1}{2}}$

Temos: $-5 \cdot x = -\frac{1}{2} - 2$

$$\iff -5 : x = \frac{-1 - 4}{2}$$

$$\iff -5 \cdot x = -\frac{5}{2}$$

$$\iff x = \frac{-\frac{5}{2}}{-5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Logo, *solução:* $\frac{1}{2}$

4.ª) $\boxed{ax + b = c}$ $\quad (a \neq 0)$

Temos: $\quad ax = c - b$

$$\iff x = \frac{c - b}{a} \qquad \text{Logo, } \textit{solução: } \frac{c - b}{a}$$

5.ª) $\boxed{(y : 3) - 5 = 2{,}3}$

Temos: $\quad \frac{y}{3} - 5 = 2{,}3$

$$\iff \frac{y}{3} = 2{,}3 + 5$$

$$\iff \frac{y}{3} = 7{,}3$$

$$\iff y = 21{,}9 \qquad \text{Logo, } \textit{solução: } 21{,}9$$

6.ª) $\boxed{\frac{3}{4} - x = \frac{1}{2}}$

Temos: $\iff -x = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

$$\iff -x = -\frac{1}{4}$$

$$\iff x = \frac{1}{4} \qquad \text{Logo, } \textit{solução: } \frac{1}{4}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 67

Resolver, no Conjunto-Universo $\mathbf{Q}$, as seguintes equações:

1.ª) $3x - 2 = 6$

2.ª) $4x + 1 = -7$

3.ª) $\frac{1}{2}y - 3 = 0$

4.ª) $z + 1.200 = 1.200$

5.ª) $-\frac{2}{3}t + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

6.ª) $3 - 2x = 1$

7.ª) $\frac{y}{2} + 5 = -5$

8.ª) $\frac{2}{5} - x = \frac{2}{5}$

9.ª) $-5z = -25$

10.ª) $-3t + 1 = -1$

Uso de equações para resolver problemas

Todo problema envolve sentenças numéricas abertas e, portanto, *equações*.

Nestas condições você irá empregar a nova "técnica" aprendida para resolver os seguintes *problemas:*

1.º) Pensei em um número; multipliquei-o por 3, somei 4 ao produto e obtive 10 como resultado. Qual o número pensado?

Pode-se raciocinar assim:

pensei em um *número*	: x
multipliquei-o por 3	: $3 \times x$
somei 4 ao produto	: $3 \times x + 4$
... e obtive 10......	: $3 \times x + 4 = 10$

O valor de x (que representa o número pensado) é a *solução* da equação:

$$\boxed{3 \times x + 4 = 10}$$

isto é:

$3 \times x = 6$ (por quê?)

ou

$x = 2$ (por quê?)

Logo: o número pensado é 2.

Verificação (prova): pensei em um n.º : 2
multipliquei-o por 3 : $2 \times 3 = 6$
somei 4 ao produto : $6 + 4$
... e obtive 10 ... : 10 (*V*)

ATENÇÃO:

A sentença numérica aberta, ou seja, a *equação:*

$$3 \times x + 4 = 10$$

que "traduziu" algèbricamente o problema estudado, também "traduz" todos os problemas de *mesma estrutura* do problema proposto. Ainda mais: você poderá imaginar uma porção de estórias que se transformem em problemas, cuja resolução implica resolver a equação: $3 \times x + 4 = 10$. Exemplos:

I) Sílvia ganhou 10 pirulitos. Ficou com 4 e repartiu os demais em partes iguais para as suas três coleguinhas. Quanto recebeu cada uma?

Temos: x: representa a parte dada a cada coleguinha;

$3 \times x$: representa o total recebido pelas três;

$3 \times x + 4$: representa o total (10) dos pirulitos ganhos por Sílvia;

e, portanto: $3 \times x + 4 = 10$, representa a equação que "traduz" o problema. A solução, 2, indica o *número de pirulitos* dados a cada uma das coleguinhas da Sílvia.

II) Alvinho mora a um certo número de quilômetros da Escola. Se êsse número fôr triplicado e ao resultado forem somados 4 quilômetros, obtém-se uma distância de 10km. A quantos quilômetros mora Alvinho da Escola?

Você encontrará, como equação resultante dêsse problema:

$$3 \times x + 4 = 10 \quad \text{(Experimente. . .)}$$

2.º) Subtraí 10 do dôbro de um certo número e o resultado dividi por 4, obtendo $^-30$. Que número é êsse?

Temos: certo número...... : x

dôbro dêsse n.º.... : $2 \times x$

subtraí 10......... : $2 \times x - 10$

dividi por 4....... : $(2 \times x - 10) : 4$

... obtendo $^-30$ ... : $(2 \times x - 10) : 4 = {^-30}$

Logo, a equação é: $(2 \times x - 10) \times \frac{1}{4} = {^-30}$ (por quê?)

cuja *solução* é $^-55$ (Verifique!).

NOTA: Como o resultado representa *uma dívida*, a solução é o número 55 *negativo*.

Agora, você pode formular quantos "problemas" quiser, que impliquem a resolução da equação:

$$(2 \times x - 10) \times \frac{1}{4} = {^-30}$$

Um dêles, por exemplo: "Um grupo de quatro colegas devia uma certa importância (x). Tendo-se duplicado essa dívida ($2x$), perdoaram-se dez cruzeiros novos ($2x - 10$) e o restante foi repartido em partes iguais entre os colegas ($(2x - 10) : 4$). O resultado acusou que cada um deveria pagar trinta cruzeiros novos (-30). Quanto devia o grupo inicialmente?"

CURIOSIDADE

Com o que você já sabe acêrca da resolução de equações é possível surpreender seus amiguinhos com questões do seguinte tipo:

Diga para seu amigo:	*Escreva num papel:*
1. Pense em um número	1. x
2. Multiplique-o por 4	2. $4 \times x$
3. Some 10	3. $4 \times x + 10$
4. Diga-me o resultado e eu **direi o número que você pensou!**	4. Suponha que seu amigo tenha dito: 30. Então você escreverá a equação: $4 \times x + 10 = 30$
5. Você **pensou no 5!**	cuja solução é 5

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Suponha que um seu amiguinho é convidado a pensar em um *número natural*. Depois lhe é dito para multiplicá-lo por 3 e somar 8 ao produto. Se êle disser que o resultado é 15, por exemplo, terá cometido algum engano?

Sim; a equação resultante: $3 \times x + 8 = 15$, tem por *solução* o número $\frac{7}{3}$ que *não é natural!*

Daí a *necessidade* de se escrever, ao lado da equação resultante de um determinado problema, o *Conjunto-Universo* exigido pela própria *natureza do problema*. No caso em aprêço, você deveria escrever:

$$3 \times x + 8 = 15, \quad U = N$$

e procurar se há *valôres* de x que tornam essa sentença *verdadeira* em N. Como a solução $\frac{7}{3}$ *não é número natural*, segue-se que:

$V = \varnothing$ e, portanto, o problema *não tem solução!*

PROBLEMAS PARA SEREM RESOLVIDOS — GRUPO 68

Resolver os seguintes problemas mediante o uso de equações do primeiro grau com uma variável:

1.º) Pensei em um número; somei-o com 5, dividi o resultado por 10 e obtive 40. Qual foi o número pensado?

2.º) Redija dois problemas que tenham como equação resultante a equação correspondente ao problema do Exercício 1.º).

3.º) A quinta parte do que Luís possui diminuída de NCr\$ 2,00 é igual a NCr\$ 1,00. Quanto possui Luís?

4.º) Redija um problema, usando a equação resultante do problema anterior.

5.º) Pensei em um número; multipliquei-o por 6 e somei 4 ao resultado. Como obtive 25 no final, qual é o número em que pensei?

6.º) Redija dois problemas que possuam a mesma equação resultante que a do problema anterior.

7.º) Vera Maria tinha NCr$ 1,40. Comprou duas revistinhas de mesmo preço e sobraram-lhe NCr$ 0,40. Qual o preço pago por revista?

8.º) Imagine mais um problema que possua a mesma equação resultante que a do problema anterior.

9.º) Suponha que seu amigo é convidado a pensar em um número primo. Depois lhe é dito que o multiplique por 5 e subtraia 3 do resultado. Dizendo que obteve 17, teria êle cometido algum engano? Por quê? E se êle disser que obteve 12?

10.º) Peça a seu colega para pensar em um número *racional;* depois, dividi-lo por 2 e somar $\frac{1}{2}$ ao resultado. Se êle disser que o resultado obtido é 2, terá cometido algum engano? Por quê?

11.º) Quantos foguetes foram disparados de uma certa base militar, sabendo-se que a metade do número dêles, somado com 5 foguetes perdidos, totalizam 12 foguetes?

12.º) Diga a seu companheiro para pensar em um número *natural*. A seguir, convide-o a multiplicar tal número por 4 e ao resultado somar 2. Se disser que o resultado final é 15, terá cometido algum engano? Por quê? E se disser que é 14?

12. *Resolução das equações redutíveis à forma:*

$ax + b = c$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$ e $a \neq 0$)

I — Equações com a variável figurando em mais de um têrmo

Continuamos no Conjunto-Universo $\mathbb{Q}$. Como você resolveria em $\mathbb{Q}$ a equação:

$$\boxed{3x + 2x = 10}$$

que apresenta a variável x duas vêzes no primeiro membro?

Basta aplicar uma propriedade estrutural muito importante: *a propriedade distributiva da multiplicação* (**p.d.m.**) em relação à adição. Então:

$$\begin{aligned} & 3x + 2x = 10 \\ \underset{\text{p.d.m.}}{\iff} \; & (3+2)x = 10 \\ \iff \; & 5x = 10 \\ \iff \; & x = 2 \implies \textit{solução: } 2 \end{aligned}$$

Nota: Como *técnica* você pode, se quiser, passar *diretamente* de $3x + 2x$ para $5x$. Costuma-se dizer "pôr x em *evidência*" quando se aplica a p.d.m. no sentido em que foi feito: $3x + 2x = (3 + 2)x$.

$$\begin{aligned} \textit{Verificação: } \; 3 \times 2 + 2 \times 2 &= 10 \\ 6 + 4 &= 10 \\ 10 &= 10 \quad (V) \end{aligned}$$

Outros *exemplos:*

1.º) $\boxed{2x + 6x - 9x + 17 = 20}$

Temos:

$$\begin{aligned} \underset{\text{p.d.m.}}{\iff} \; & (2 + 6 - 9)x + 17 = 20 \\ \iff \; & -1x + 17 = 20 \\ \iff \; & -1x = 20 - 17 \\ \iff \; & -1x = 3 \\ \iff \; & x = -3 \implies \textit{solução: } -3 \end{aligned}$$

Verifique você mesmo que a solução da equação é -3.

2.º) $\boxed{(2 + 3x) + 7x = -21}$

Temos:

$$\begin{aligned} \underset{\text{p.a.a.}}{\iff} \; & 2 + (3x + 7x) = -21 \\ \iff \; & 2 + 10x = -21 \\ \iff \; & 10x = -21 - 2 \quad \text{(... transpondo 2 para o segundo membro)} \\ \iff \; & 10x = -23 \\ \iff \; & x = -\frac{23}{10} \implies \textit{solução: } -\frac{23}{10} = -2{,}3 \end{aligned}$$

Faça a *verificação.*

Nota: Os têrmos como $2x$, $6x$, $-4x$, $-1x$, ..., ax (com $a \in \mathbb{Q}$) são denominados *semelhantes*, em relação a x. Os números 2, 6, -4, -1, ..., a são, respectivamente, seus *coeficientes*. A aplicação da p.d.m., como no exemplo: $3x + 2x = (3 + 2)x = 5x$ é denominada *redução de têrmos semelhantes.*

3.º) $\boxed{2(x-3) - 4(x-2) = -2}$

Temos:

$\underset{\text{p.d.m.}}{\iff} \quad 2x - 6 - 4x + 8 = -2$ (. . . no cálculo de $-4(x-2) = -4x + 8$, já foi usada a *técnica* que se aplica quando o sinal $-$ precede o parêntese)

$\iff \quad 2x - 4x = -2 + 6 - 8$ (. . . transpondo -6 e 8 para o segundo membro)

$\iff \quad -2x = -4$ (. . . reduzindo têrmos semelhantes: $2x - 4x = (2-4)x = -2x$ e $-2 + 6 - 8 = -4$)

$\iff \quad 2x = 4$ (. . . a *técnica* agora é: multiplicando por -1 os dois membros da equação, esta não se altera: você sabe que é graças ao **P.M.I.**)

$\iff \quad x = 2$

$\implies$ *solução:* 2

Verifique.

4.º) $\boxed{8x - 5(2x + 3) = 2}$

Temos:

$\underset{\text{p.d.m.}}{\iff} \quad 8x - 10x - 15 = 2$

$\iff \quad 8x - 10x = 2 + 15$ (. . . transpondo)

$\iff \quad -2x = 17$ (. . . reduzindo têrmos semelhantes)

$\iff \quad 2x = -17$ (. . . multiplicando ambos os membros por -1)

$\iff \quad x = -\dfrac{17}{2}$

$\implies$ *solução:* $-\dfrac{17}{2}$

Verifique.

5.º) $\boxed{ax + bx = c}$ onde x é a *variável;* a, b e c números racionais relativos, tais que $(a + b) \neq 0$ (por quê?)

Temos:

$\underset{\text{p.d.m.}}{\iff} \quad (a + b)x = c$ (. . . pondo x em evidência)

$\iff \quad x = \dfrac{c}{a+b}$ (. . . para esta divisão ter sentido é necessário que $a + b \neq 0$)

$\implies$ *solução:* $\dfrac{c}{a+b}$

Verificação: $a\left(\dfrac{c}{a+b}\right) + b\left(\dfrac{c}{a+b}\right) = c$

$$\frac{ac}{a+b} + \frac{bc}{a+b} = c$$

$$\frac{(a+b)c}{(a+b)} = c$$

$$c = c \quad (V)$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 69

Resolver, no Conjunto-Universo **Q**, as seguintes equações:

1.ª) $3x + 5x = 32$

2.ª) $2{,}5y - 0{,}5y = -1$

3.ª) $-\dfrac{1}{2}x - 1x = 0$

4.ª) $3z + 4z - 5z - 12 = -16$

5.ª) $(-3 + 5x) + 2x = 6$

6.ª) $y + 3y = 0$

7.ª) $\dfrac{2}{5}x - 4 = x + 5$

8.ª) $0 = 2x - 3x$

9.ª) $-y + 9 + 2y = 9$

10.ª) $3t - 2t = 1.970$

11.ª) $3(x + 2) - 2(x - 1) = 6$

12.ª) $-2(3y + 1) + 5(y - 3) = 1$

13.ª) $\dfrac{2}{3}\left(t + \dfrac{1}{5}\right) = -0{,}5$

14.ª) $\dfrac{1}{2}(x - 2) + \dfrac{2}{5}(-1 + x) = 0$

15.ª) $-(z - 3) = \dfrac{1}{2}$

16.ª) $9y - 3(-4y + 1) = 5$

17.ª) $mx + nx = p \quad (m + n \neq 0)$

18.ª) $mx + 5 = 8 \quad (m \neq 0)$

19.ª) $-3 + ny = \dfrac{1}{2} \quad (n \neq 0)$

20.ª) $a(x + 1) - b(x - 1) = c \quad (a - b \neq 0)$

1.º) Um certo número somado com seu dôbro dá como resultado 36. Que número é êsse?

Temos: certo n.º . . . .: x
. . . somado com o seu "dôbro": $x + 2x$
e, portanto, a *equação:* $x + 2x = 36$

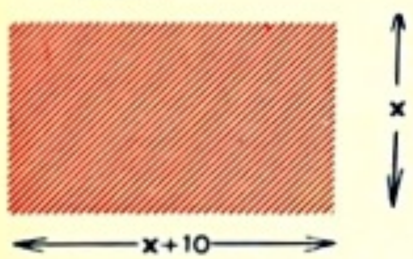
Resolvendo-a: $(1 + 2)x = 36$
ou $3x = 36 \iff x = 36 : 3$
ou $x = 12 \implies$ *solução: 12*

Resposta: O número procurado é 12.

Verificação: Somando 12 com o seu dôbro (24), obtém-se 36.

2.º) O perímetro de um retângulo é igual a 52m. Quanto mede a base dêsse retângulo, a qual é 10m maior que a altura?

Temos:



altura. . . . .: x
base . . . .: $x + 10$
perímetro . . . .: $x+(x+10)+x+(x+10)$

e a equação: $x + (x + 10) + x + (x + 10) = 52$

ou $(x + x + x + x) + (10 + 10) = 52$ **Por quê?**
ou $4x + 20 = 52 \iff 4x = 52 - 20$
ou $4x = 32 \iff x = 32 : 4$
ou $x = 8 \implies$ *solução: 8*

Logo: a *base* do retângulo mede: 8m + 10m = 18m

3.º) Metade do número de laranjas de uma cesta, mais a têrça parte do número dessas laranjas, é igual a 30. Quantas dúzias de laranjas há na cesta?

Temos: n.º de laranjas da cesta . . . .: x

Equação: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 30$

ou $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x = 30$

ou $\frac{5}{6}x = 30 \iff x = 30 : \frac{5}{6}$

ou $x = 30 \times \frac{6}{5} = 36$

Logo: na cesta há três dúzias (36) laranjas. "Tire" a prova.

4.º) Você perguntou a seu amiguinho: pense em um número, acrescente-lhe 6 e multiplique a soma obtida por 3. Se o seu amiguinho disser que o resultado é 48, qual foi o número em que êle pensou inicialmente?

Temos: n.º pensado pelo seu amiguinho.: x
. . . . . . somando 6 . . . .: $x + 6$
multiplicando a *soma obtida* por 3. . .: $3(x + 6)$

Equação: $3(x + 6) = 48$

Resolvendo-a, você encontrará a solução *10*, que é o número pensado inicialmente pelo seu amiguinho. "Tire" a prova.

5.º) A soma de três números naturais consecutivos é 57. Quais são êsses números?

Temos: n.º natural (qualquer) . . .: x
. . . seu consecutivo . . . .: $x + 1$ **Por quê?**
. . . e o consecutivo seguinte . .: $(x + 1) + 1$

Equação: $x + (x + 1) + (x + 1) + 1 = 57$ *solução: 18*

Logo: o primeiro número é 18, o seu consecutivo 19 (18 + 1) e o consecutivo seguinte 20 (19 + 1).

6.º) A soma de dois números pares consecutivos é igual a 54. Quais são êsses números?

Temos: n.º par . . . .: x
n.º par consecutivo . . .: $x + 2$ **Por quê?**

Equação: $x + (x + 2) = 54$ *solução: 26*

Logo: um número par é 26 e o seu consecutivo 28 (26 + 2).

7.º) Num joguinho de recreio Pedro diz a Paulo:

"Se multiplicasse por 2 a idade que eu tinha há 5 anos, obteria 16 anos".

Quantos anos Pedro tem atualmente?

Temos: idade atual de Pedro. . . . . .: x
idade que Pedro tinha há 5 anos: $x - 5$

Equação: $2 \times (x - 5) = 16$ *solução: 13*

Logo: Pedro tem atualmente 13 anos. Verifique.

8.º) Ester tem 8 anos mais que Cibele. A soma da idade de ambas é igual a 42 anos. Qual é a idade de cada uma?

Temos: idade de Cibele . . . .: x
idade de Ester. . . . .: $x + 8$

Equação: $x + (x + 8) = 42$ *solução: 17*

Logo: Cibele tem 17 anos e Ester 25 anos.

9.º) O perímetro de um triângulo é 60cm. Um dos lados é igual à base mais 8cm e o outro mede o dôbro da base. Quanto mede cada lado?

Temos: base. . . . .: x
um dos lados. . . . .: $x + 8$
outro lado. . . . .: $2x$

Equação: $x + (x + 8) + 2x = 60$ *solução: 13*

Logo: a base mede 13cm, um dos lados 21cm e o outro 26cm.

10.º) Tenho 50 figurinhas *a mais* que Rui e Antoninho 27 figurinhas *a menos* que Rui. O total de nossas figurinhas é 113. Quantas tem cada um?

Temos: figurinhas de Rui . . . . . .: x
n.º de minhas figurinhas . . . .: $x + 50$
n.º de figurinhas de Antoninho: $x - 27$

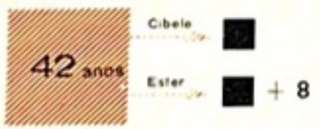
Equação: $x + (x + 50) + (x - 27) = 113$ *solução: 30*

Logo: Rui tem 30 figurinhas, eu tenho 80 e Antoninho, 3.

LEMBRETE AMIGO

Você está empregando uma outra "técnica" para resolver os últimos problemas, cuja *estrutura* (a da repartição) você esquematizou na 1.ª Série Ginasial. Lembra-se?

Por exemplo, o esquema que traduz a *estrutura* do problema n.º 8 é:



Sentença matemática: $\square + (\square + 8) = 42$

Faça, como exercício, esquemas dos problemas n.ºs 9 e 10.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 71

Determinar, de cada um dos seguintes problemas: 1.º) a equação correspondente; 2.º) a solução:

1. Cinco vêzes um certo número menos duas vêzes êsse mesmo número é igual a 120. Qual é êsse número?
2. Qual o número que, somado com sua têrça parte, dá como resultado 12?
3. O dôbro de um número, diminuído de 8, é igual a 20. Que número é êsse?

4. Um certo número de alunos está no pátio do Colégio, quando entra um número de alunos quatro vêzes maior, totalizando 180 alunos. Quantos alunos havia de início no pátio?
5. O triplo da idade de Gláucia mais duas vêzes a idade de seu irmão gêmeo é igual à idade de seu pai, isto é, 35 anos. Qual a idade de Gláucia?
6. Um quinto de um certo número mais a metade dêsse número é igual a 140. Que número é êsse?
7. Sabe-se que num retângulo a medida da base é três vêzes maior que a da altura, e que o perímetro é igual a 48 metros. Determinar as medidas da base e da altura dêsse retângulo.
8. Dois números naturais consecutivos têm por soma 27. Quais são êsses números?
9. Três números ímpares consecutivos têm por soma 45. Quais são êsses números? [Sugestão: n.º ímpar: x; seu consecutivo: $x + 2$; consecutivo seguinte: $(x + 2) + 2$].
10. A soma de quatro números pares consecutivos é 412. Quais são êles?
11. Pense em um número. Acrescente-lhe 5 e divida a soma obtida por 8. Se o resultado é 40, qual foi o número pensado?
12. Pense em um número. Diminua 3 do dôbro dêsse número e multiplique a diferença obtida por 9. Se o resultado é 54, qual foi o número pensado? E se o número a ser pensado tivesse de ser *natural*, o problema admitiria solução?
13. O triplo da idade que eu tinha há dois anos é igual à idade do primo Luís, que é de 27 anos. Qual a minha idade?
14. Raul tem 3 anos a mais que Rosinha. A soma das atuais idades de ambos é igual a 25 anos. Qual a idade de cada um? Esquematize a *estrutura* (repartição) dêste problema.
15. Repartir 72 balas entre Aninha, Luluzinha e Glória, de modo que Aninha ganhe o dôbro das balas que Glória receber e Luluzinha duas a mais do que Aninha.
16. O perímetro de um triângulo é igual a 120cm. Um dos lados mede o triplo da medida da base e o outro 12cm a mais que a base. Quanto mede cada lado?
17. Repartir NCr$ 386,00 entre três pessoas, de modo que a primeira receba NCr$ 38,40 mais do que recebe a segunda e esta receba NCr$ 26,00 menos do que a terceira.
18. Qual é o número cujos $\frac{2}{7}$ aumentados de 15, mais os $\frac{3}{4}$ menos 8, dá como resultado 239?

II — Equações com a variável figurando nos dois membros da equação

Até agora você aprendeu a resolver equações nas quais a variável aparecia *sòmente* em um dos membros da equação.

E se a variável aparecer nos dois *membros* da equação, como no caso de:

$$4x = 6 + 2x?$$

É só aplicar os princípios estudados (**P.A.I.** e **P.M.I.**) e, se quiser, usar as técnicas operatórias ("transpor" os têrmos de um membro para outro, "reduzir" têrmos semelhantes, . . .) que simplificam a determinação da *solução* da equação.

Assim:

$$\boxed{4x = 6 + 2x} \qquad U = \mathbb{Q}$$

$\iff \quad 4x - 2x = 6$ (. . . transpondo $2x$ para o primeiro membro)

$\iff \quad 2x = 6$

$\iff \quad x = 3 \Longrightarrow$ *solução:* 3

Verifique.

Outros exemplos, sempre no $U = \mathbb{Q}$.

1.º) $\boxed{2y = 7 + 5y}$

Temos: $2y - 5y = 7$ (. . . transpondo $5y$)

$\iff \quad -3y = 7$ (. . . reduzindo têrmos semelhantes)

$\iff \quad 3y = -7$ (. . . multiplicando ambos os membros por $^{-}1$)

$\iff \quad y = -\frac{7}{3} \Longrightarrow$ *solução:* $-\frac{7}{3}$

Verifique.

2.º) $\boxed{\frac{3x}{4} - \frac{1}{3} = \frac{x}{2} + 5}$

Podem-se *eliminar todos os denominadores* de uma equação, multiplicando-se os dois membros (graças ao **P.M.I.**) pelo produto dos denominadores de seus têrmos (de preferência pelo m.m.c. dos denominadores). Assim, para eliminar os denominadores da equação:

$$\frac{3x}{4} - \frac{1}{3} = \frac{x}{2} + 5$$

basta multiplicar todos os seus têrmos por 12, que é o m.m.c. dos denominadores. Dêsse modo, obteremos:

$$9x - 4 = 6x + 60$$

e daí, já sabemos resolver:

$$9x - 6x = 60 + 4$$
$$3x = 64$$
$$x = \frac{64}{3} \Longrightarrow \textit{solução: } \frac{64}{3}$$

Verificação: $\dfrac{\cancel{3}\left(\dfrac{64}{\cancel{3}}\right)}{4} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{\dfrac{64}{3}}{2} + 5$

$$\frac{64}{4} - \frac{1}{3} = \frac{64}{6} + 5$$
$$\frac{192 - 4}{12} = \frac{64 + 30}{6}$$
$$\frac{\cancel{188}^{94}}{\cancel{12}_{6}} = \frac{94}{6} \quad (V)$$

3.º) $\boxed{\frac{1}{2}(x - 3) - \frac{2(1 + 2x)}{3} = -1 + \frac{5x}{6}}$

Essa equação pode (graças à **p.d.m.**) ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{x - 3}{2} - \frac{2(1 + 2x)}{3} = -1 + \frac{5}{6}x$$

e como o m.m.c. dos denominadores é 6, temos (graças ao **P.M.I.**):

$$3(x - 3) - 4(1 + 2x) = -6 + 5x$$
$$3x - 9 - 4 - 8x = -6 + 5x$$
$$3x - 8x - 5x = -6 + 9 + 4$$
$$-10x = 7$$
$$10x = -7$$
$$x = -\frac{7}{10} \Longrightarrow \textit{solução: } -\frac{7}{10}$$

Faça a verificação.

4.º) $\boxed{\dfrac{y}{6} - \dfrac{1+2y}{6} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}y\right) = 0}$

Temos: $\dfrac{y}{6} - \dfrac{1+2y}{6} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}y = 0$ m.m.c.: 18

$$3y - 3(1+2y) - 2 + 2y = 0$$
$$3y - 3 - 6y - 2 + 2y = 0$$
$$3y - 6y + 2y = 3 + 2$$
$$-1y = 5$$
$$1y = -5$$
$$y = -5 \Longrightarrow \textit{solução: } -5$$

Verificação: $-\dfrac{5}{6} - \dfrac{1+2(-5)}{6} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}(-5)\right) = 0$

$$-\frac{5}{6} + \frac{9}{6} - \frac{1}{9} - \frac{5}{9} = 0$$

$$\frac{-15+27-2-10}{18} = 0$$

$$\frac{0}{18} = 0 \quad (V)$$

5.º) $\boxed{\dfrac{z}{6} - \dfrac{z - \frac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{15} - \dfrac{z}{9}}$

Temos: m.m.c.: 90

$$15z - 30\left(z - \frac{1}{2}\right) = 6 - 10z$$
$$15z - 30z + 15 = 6 - 10z$$
$$15z - 30z + 10z = 6 - 15$$
$$-5z = -9$$
$$z = \frac{9}{5} \Longrightarrow \textit{solução: } \frac{9}{5}$$

Verifique.

6.º) $\boxed{\dfrac{20+x}{8} - x = 3 - \left(\dfrac{1}{2} + 2x\right)}$

Temos:

$$(20+x) - 8x = 24 - 8\left(\frac{1}{2} + 2x\right)$$ (... eliminando o denominador 8)

$$20 + x - 8x = 24 - 4 - 16x$$
$$x - 8x + 16x = 24 - 4 - 20$$
$$9x = 0$$
$$x = 0 \Longrightarrow \textit{solução: } 0$$

Verificação: $\dfrac{20+0}{8} - 0 = 3 - \left(\dfrac{1}{2} + 0\right)$

$$\frac{20}{8} - 0 = 3 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{5}{4} \quad (V)$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 72

Resolver, no Conjunto-Universo **Q**, as seguintes equações:

1.ª) $3x = 12$

2.ª) $5y = -30$

3.ª) $\frac{1}{2}z = -5$

4.ª) $2t - 20 = 0$

5.ª) $5 - 3x = 10 + 2x$

6.ª) $3 + 5y = 1 - 2(1 + y)$

7.ª) $2n - \frac{1}{5} = 4(3 - n)$

8.ª) $\frac{m}{3} = 7 - 2m$

9.ª) $3x - 5(x + 2) = 12$

10.ª) $5 - 2(3y - 1) + 3(y + 2) = 10$

11.ª) $\frac{2x}{3} + 5 = x - \frac{x}{4} + 1$

12.ª) $\frac{20+t}{8} - t = 3 - \left(\frac{1}{2} + 2t\right)$

13.ª) $\frac{2(x-3)}{5} - (2x - 5) = \frac{1}{2}$

14.ª) $2y - \frac{y-1}{4} = 3 - \frac{1-4y}{5}$

15.ª) $\frac{19}{6}(x-4) + \frac{5x}{2} = \frac{5x-3}{7} - \frac{9-x}{3}$

16.ª) $\frac{x-1}{10} - \frac{x+1}{5} = \frac{1-2x}{15}$

17.ª) $\frac{1}{6}(8-x) + 3x - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(x+6)$

18.ª) $\frac{1}{3}\left[\frac{x-5}{2} + 2\left(\frac{3x}{4} - 1\right)\right] + 3(2x-1) = 0$

19.ª) $\dfrac{3x+1}{13} - \dfrac{4x-1}{5} = \dfrac{2-x}{2} - \dfrac{2x-5}{3}$

20.ª) $\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{2} + \dfrac{2x-1}{4} = x + \dfrac{\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}}{8}$

21.ª) $\dfrac{1}{2}\,(5y) = \dfrac{-y+\dfrac{2}{3}}{2}$

22.ª) $\dfrac{t-1}{10} - \dfrac{t+1}{5} = \dfrac{1-2t}{15}$

23.ª) $m + \dfrac{3m-9}{5} + \dfrac{5m-12}{3} - 4 = 0$

24.ª) $\dfrac{2}{5}\,(x+3) - (2x-5) = \dfrac{1}{2}$

25.ª) $\dfrac{5x}{3} - 6\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{4x}{9} - x\right) + 2x = 450.000$

26.ª) $\dfrac{x-2}{4} + \dfrac{1}{3} - \left(x - \dfrac{2x-1}{3}\right) = 0$

27.ª) $\dfrac{7+9z}{4} - 7z = 1 - \dfrac{2+z}{9}$

28.ª) $\dfrac{3x-10}{4} - 1 + \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{x-2}{4} + 6$

29.ª) $\dfrac{0{,}3x-1}{4} - 5\left(\dfrac{x-1}{3} + 1{,}3\right) = 0$

30.ª) $\dfrac{y-1}{4} - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{y-5}{4} - \dfrac{14-2y}{5}\right) = \dfrac{y-9}{2} - \dfrac{7}{8}$

31.ª) $\dfrac{z-2}{4} + \dfrac{1}{3} = x - \dfrac{2x-1}{3}$

32.ª) $\dfrac{1}{6}\,(8-x) + x - \left(1 + \dfrac{2x}{3}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\,(x+6) + \dfrac{x}{3}$

33.ª) $\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{x-5}{4} - \dfrac{14-2x}{5}\right) = \dfrac{x-9}{2} - \dfrac{7}{8}$

34.ª) $5 + \dfrac{5x-36}{4} + \dfrac{2-x}{2} = 6 + \dfrac{x-12}{2}$

35.ª) $\dfrac{z}{6} + \dfrac{z}{9} = \dfrac{1}{15} + \dfrac{z-\dfrac{1}{2}}{3}$

36.ª) $\dfrac{t}{6} - \dfrac{2t-1}{6} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{t}{3}\right)$

37.ª) $\dfrac{y-\dfrac{1}{2}}{4} = -3\,(y+2)$

38.ª) $\dfrac{x}{2} - 3\,(2x+1) = -\dfrac{\dfrac{1}{2}x+2}{3}$

39.ª) $\dfrac{3t}{1\dfrac{2}{5}} = 1 - 2t$

40.ª) $\dfrac{1}{9}\left[3x-6-5\left(\dfrac{7x}{2}-5\right)\right] = -\dfrac{1}{4} - 13(x-5)$

$x+2=5$

QUANTIFICADORES $\forall x, \exists x \mid$

Identidades — Quantificador universal: $\forall$

Ao resolver a equação:

$$\boxed{x = x}, \quad U = \mathbf{Q}$$

você poderá seguir dois caminhos:

1.º) interpretando a sentença numérica aberta: "o número racional relativo x é igual ao número racional relativo x", podemos concluir, ràpidamente, que **qualquer** número colocado no lugar de x, torna a sentença obtida *verdadeira* ($0 = 0$, $1 = 1$, $^-1 = {}^-1$, $2 = 2, \ldots$); então, o Conjunto-Verdade é o próprio Universo ($\mathbf{Q}$), ou seja:

$x = x, \quad U = \mathbf{Q}$

$V = \mathbf{Q} \Longrightarrow$ solução: **qualquer** valor de x

2.º) aplicando a técnica operatória conhecida:

$x = x$

ou

$1x = 1x$ e, portanto: $1x - 1x = 0$

ou $(1-1)x = 0$

ou $0x = 0 \Longrightarrow$ solução: **qualquer** valor de x

(lembre-se que *qualquer* número multiplicado por 0 tem como resultado 0)

Equações dêsse tipo — onde *qualquer* valor atribuído a x é solução — são denominadas *Identidades* ou *Generalizações*. Há um símbolo especial para indicar tôda essa "quantidade" de valôres de x que tornam uma sentença *verdadeira:* é o *quantificador universal* $\forall$ (lê-se: "*qualquer*")

Assim: $\forall x$ é lido: "*qualquer x*". Logo, resolvendo a equação:

$$x = x \quad \text{ou} \quad 0 . x = 0$$

você escreverá como solução: $\forall x,\ x = x$ ou $\forall x,\ 0 . x = 0$

Outros exemplos de *identidades:*

1. $\boxed{y + 0 = y}$

Solução: $\forall y,\ y + 0 = y$ (pois, *qualquer* que seja o y, somado com 0, dá como resultado y; portanto essa equação *identidade* reduz-se às equações: $y = y$ ou $0 . y = 0$).

2. $\boxed{x + x = 2x}$

Solução: $\forall x,\ x + x = 2x$ (... é o mesmo que: $2x = 2x$ ou $2x - 2x = 0$ ou $0x = 0$, ... tôdas *identidades*).

Equações com soluções determinadas. Quantificador existencial: $\exists$

A maioria das equações do primeiro grau com uma variável que você estudou, admite solução. Para indicar que **existe** tal solução, usamos um outro *quantificador*, denominado *existencial*, cujo símbolo é $\exists$ (lê-se: "*existe*"). Assim:

$\exists x$ é lido: "*existe x*" e $\exists x |$: "*existe x, tal que*"

Tudo isso é feito para *precisar a sua linguagem* matemática. Assim, por exemplo, uma pergunta *bem formulada* em Matemática, acêrca da resolução de uma equação, num determinado Conjunto-Universo, seria:

$$\exists x |\ 5x + 2 = 3x + 10\ ?$$

que se lê: "*existe x, tal que* $5x + 2 = 3x + 10$?"

Resolvendo essa equação, você encontrará a solução 4 (experimente!) e responderá:

$$\exists x |\ 5x + 2 = 3x + 10.$$

Equações sem solução. Indicação: $\nexists$

Assim como há equações que admitem infinitas soluções (são as *identidades*) há também equações que *não admitem* solução alguma (que correspondem às sentenças numéricas *sempre falsas!*). Assim, por exemplo:

$$3x + 5 = 3x + 7, \quad U = \mathbb{Q}$$

ou

$$3x - 3x = 7 - 5$$

ou

$$0x = 2$$

é uma equação *sem solução*, pois *não há* valor algum de x que torne essa sentença verdadeira (basta lembrar que qualquer valor de x multiplicado por 0 tem como resultado 0 e, portanto, nunca se obterá 2).

Nesse caso escreve-se: $\nexists x$ (lê-se: "*não existe x*") para indicar que **não existe** *solução*. Então, se fôsse feita a "pergunta":

$$\exists x |\ 3x + 5 = 3x + 7\ ?$$

a resposta seria:

$$\nexists x |\ 3x + 5 = 3x + 7$$

NOTA: A resposta: $\nexists x |\ 3x + 5 = 3x + 7$ *equivale* a esta outra: $\forall x,\ 3x + 5 \neq 3x + 7$

pois, *qualquer* que seja o valor atribuído a x na sentença proposta, o resultado obtido no 1.º membro será sempre *diferente* do obtido no 2.º.

LEMBRETE AMIGO

Se, depois de conduzir a resolução de uma equação do primeiro grau com uma variável, você encontrar, por exemplo, as seguintes sentenças:

$$0 . x = 0$$
$$3 . x = 5$$
$$0 . x = 6$$

procure estabelecer com precisão a "quantidade" de valôres de x, no Conjunto-Universo $\mathbb{Q}$, que tornem *verdadeira* cada uma delas, isto é, procure **quantificá-las.** Nessas sentenças, temos:

$\forall x,\ 0.x = 0$ (... pois *qualquer* valor de x é solução!)

$\exists x,\ 3.x = 5$ (... é a solução $\frac{5}{3}$)

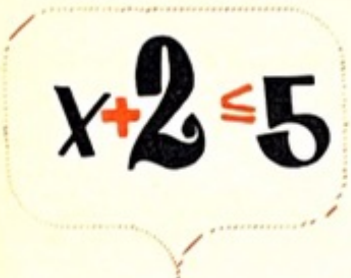
$\nexists x,\ 0.x = 6$ (... *não existe* valor algum de x)

1. Das seguintes equações, indicar quais são as *identidades*, sendo $U = \mathbb{Q}$:

1.ª) $3x + 2 = 5x - 1$	5.ª) $y \times 1 = 1$
2.ª) $5x = 5x$	6.ª) $0 + z = z$
3.ª) $3x + x = 4x$	7.ª) $\frac{y}{3} = \frac{y}{3}$
4.ª) $-2x = 2$	8.ª) $3y = \frac{1}{3} + y$

2. Preencher, com o respectivo *quantificador*, cada uma das seguintes sentenças numéricas abertas, sendo $U = \mathbb{Q}$:

1.ª) . . ., $0.x = 0$	6.ª) . . ., $3.t = 3$
2.ª) . . ., $2.y = {}^{-}2$	7.ª) . . ., $3x + 5 = 3x + 5$
3.ª) . . ., $0.y = 2$	8.ª) . . ., $5x + 4 = 4x + x - 2$
4.ª) . . ., $0.y = 0$	9.ª) . . ., $-12x = 0$
5.ª) . . ., $8.x = -\frac{1}{2}$	10.ª) . . ., $\frac{z}{2} = \frac{z}{2}$



Inequações do primeiro grau

10. *Resolução de inequações do primeiro grau com uma variável*

Você já sabe que as inequações são *sentenças numéricas abertas* que exprimem a *desigualdade* entre duas expressões numéricas. Os dois membros de uma inequação são agora "ligados" pelos sinais:

$$<, \ >, \ \leqslant, \ \geqslant, \ \neq$$

São denominadas inequações do *primeiro grau* aquelas cuja variável figura com expoente 1 (um), como, por exemplo:

$$x < 3; \quad 8y + {}^{-}3 \geqslant 5y + 9; \quad 5\,x \neq {}^{-}1$$

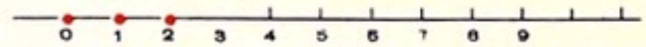
Resolver uma inequação, num certo Conjunto-Universo (ou num Conjunto-Substituição), é determinar o seu *Conjunto-Solução*, cujos elementos, quando existem, são chamados *valôres-verdade* ou soluções.

Dêsse modo, *resolvendo* a inequação:

$$\boxed{x < 3}, \quad U = \mathbf{N}$$

temos: $V = \{0, 1, 2\} \Longrightarrow$ *soluções:* 0, 1 e 2

gráfico (na reta numerada):



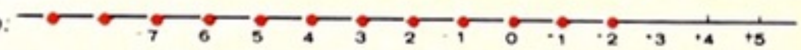
Se fôsse: $x < 3$, $S = \{4, 5, 6, 7\}$

teríamos: $V = \varnothing \Longrightarrow$ *não há solução*

Se fôsse: $\boxed{x < 3}$, $U = \mathbf{Z}$

teríamos: $V = \{\ldots {}^{-}2, {}^{-}1, 0, 1, 2\} \Longrightarrow$ *soluções:* $\ldots {}^{-}2, {}^{-}1, 0, 1, 2$

gráfico:



Se fôsse: $\boxed{x < 3}$, $U = \mathbb{Q}$

teríamos: $V = \{$n.^{os} racionais relativos menores que 3$\}$

$\Longrightarrow$ *soluções:* todos os n.^{os} racionais relativos menores que 3

11. *Inequações equivalentes. Princípios:* **P.A.D. e P.M.D.**

Inequações *equivalentes* são as que possuem o *mesmo Conjunto-Solução*. Exemplos:

$$x < 3 \quad \text{e} \quad 2x < 6, \quad U = \mathbf{N}$$

são *inequações equivalentes*, pois o Conjunto-Solução de ambas é:

$$V = \{0, 1, 2\} \qquad \text{(Experimente!)}$$

A resolução de uma inequação obedece à mesma orientação estudada na das equações: procura-se transformá-la em *inequações equivalentes*, cada vez mais simples. Para isso serão usados os seguintes *Princípios:*

Princípio aditivo da desigualdade (P. A. D.):

Se uma desigualdade é *verdadeira*, então, somando *um mesmo número* aos dois membros, a desigualdade continua verdadeira. Exemplo:

se $\boxed{5 > 2}$ é V, então somando 3, por exemplo, aos dois membros, vem: $5 + 3 > 2 + 3$, que também é V (pois: $8 > 5$); somando $^-3$, por ex., vem: $5 + {^-3} > 2 + {^-3}$, ainda V (pois: $2 > {^-1}$).

Coisa análoga ocorrerá com uma inequação quando se soma o mesmo número (ou uma expressão) aos seus dois membros: dará como resultado uma inequação *equivalente*. Exemplos:

1.°) se $x \leqslant 5$, $U = \mathbf{N}$, tem por $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, então somando 2, por ex., aos dois membros, vem:

$$x + 2 \leqslant 5 + 2, \quad U = \mathbf{N}, \quad \text{onde} \quad V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

são, portanto, inequações *equivalentes*.

2.°) se $2x > 5 + 1x$, $U = \mathbf{N}$, tem por $V = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$, então somando ^-1x, por ex., aos dois membros, vem:

$$2x + {^-1x} > 5 + 1x + {^-1x}, \quad U = \mathbf{N}, \quad \text{onde} \quad V = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

ou seja, inequações *equivalentes* (experimente!). Como:

$$2x + {^-1x} > 5 + \underbrace{1x + {^-1x}}_{0}$$

ou

$$2x + {^-1x} > 5$$

segue-se a *técnica:* a "passagem" de um têrmo (no exemplo, $1x$) de um membro para outro é feita *trocando-se* o seu sinal qualificativo.

Então: se $2x > 5 + 1x$

temos: $2x - 1x > 5$ (. . . transpondo $1x$ do segundo membro para o primeiro)

Princípios multiplicativos da desigualdade (P. M. D.)

Observe agora: se $\boxed{3 < 5}$ é V, então: $<$

1.°) *Multiplicando os dois membros* por um *mesmo número positivo*, 2, por ex., vem: $\times 2$

$2 \times 3 < 2 \times 5$, que também é V (pois: $6 < 10$) $<$

Como você verificará, se fizer outros exemplos semelhantes (isto é, multiplicar ambos os membros da desigualdade por um *mesmo número positivo*), que as coisas se passam como no exemplo acima, segue-se que:

Multiplicando ambos os membros de uma desigualdade verdadeira por um mesmo número ***positivo****, a sentença obtida é uma desigualdade verdadeira de* ***mesmo sentido*** *que a primeira.*

Êste é um *Princípio Multiplicativo da Desigualdade.* Indicação: **P.M.D.$_+$**

2.°) *Multiplicando os dois membros*, por um *mesmo número negativo*, $^-2$, por ex., vem:

$$^-2 \times 3 < {^-2} \times 5, \text{ que é } \textit{falsa } (F), \text{ pois: } {^-6} < {^-10} \text{ é } F$$

enquanto que:

$$^-2 \times 3 > {^-2} \times 5 \text{ é } \textit{verdadeira } (V), \text{ pois: } {^-6} > {^-10} \text{ é } V$$

Então, se:

$$\begin{array}{lllll} & 3 < 5 & \text{é } V & < & \\ \text{e} & {^-2} \times 3 > {^-2} \times 5 & \text{é } V & > & \times {^-2} \end{array}$$

Segue-se que:

Multiplicando ambos os membros de uma desigualdade verdadeira por um mesmo número ***negativo****, a sentença obtida só continuará verdadeira se "trocarmos" o sentido da desigualdade: de $<$ para $>$ ou de $>$ para $<$.*

Êste, também, é um *Princípio Multiplicativo da Desigualdade.* Indicação: **P.M.D.$_-$**

Mais um exemplo: seja a desigualdade

$$^-5 > {^-8} \quad (V)$$

multiplicando-a por 3: $^-15 > {^-24}$ (V) (o "sentido" de $>$ foi conservado)

multiplicando-a por $^-3$: $15 < 24$ (V) (o "sentido" de $>$ foi trocado para $<$)

1. Usando o **P.A.D.**, faça com que o primeiro membro, das seguintes inequações, tenha sòmente têrmos com x e o segundo membro só têrmos numéricos (constantes):

1.ª) $5x + 3 > 7$	6.ª) $\frac{2}{3} + 1 \leqslant x - \frac{1}{2}$
2.ª) $9x < 2x - 1$	7.ª) $\frac{3}{2}x - 4 + 2\frac{1}{5} \nless 12x$
3.ª) $x - 4x > 0$	8.ª) $2x - 1 > 2x - \frac{1}{9}$
4.ª) $3x + 8 \nless {}^-2 + 7x$	9.ª) $3x - 3x < 0$
5.ª) $\frac{2}{3} + 1 \geqslant x - \frac{1}{2}$	10.ª) $6x + x + 3x \leqslant 0$

2. Usando os **P.M.D.**, complete as desigualdades, depois de efetuar as operações indicadas nas seguintes desigualdades:

1.ª) $5 > 2$	2.ª) ${}^-3 < \frac{1}{2}$
$3 \times 5 \ldots 3 \times 2$	${}^-2 \times {}^-3 \ldots {}^-2 \times \frac{1}{2}$
${}^-2 \times 5 \ldots {}^-2 \times 2$	$\frac{^-1}{5} \times {}^-3 \ldots \frac{^-1}{5} \times \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3} \times 5 \ldots \frac{1}{3} \times 2$	$5 \times {}^-3 \ldots {}^+5 \times \frac{1}{2}$

(NOTA: Multiplicar 5 por $\frac{1}{3}$, como você já sabe, é o mesmo que dividir 5 por 3).

Valendo-se ainda dos **P.M.D.**, o mesmo se dá, por ex., com a inequação:

$$\boxed{x > 4}, \quad U = \mathbb{Q}$$

onde: V = {n.os racionais relativos maiores que 4}

Multiplicando os dois membros por 2, obtemos a inequação equivalente:

$$2x > 8, \quad U = \mathbb{Q}$$

onde: V = {n.os racionais relativos maiores que 4} (experimente!)

Multiplicando por ${}^-1$ porém, a inequação equivalente só será obtida "trocando-se" o sinal $>$ para $<$, isto é:

$$^-2x < {}^-8, \quad U = \mathbb{Q}$$

pois temos ainda: V = {n.os racionais relativos maiores que 4}

Como *aplicação* dos **P.M.D.**, observe a resolução das seguintes inequações:

1.ª) $5x > 10$, $U = \mathbb{Q}$

Multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{5}$ (que é o **elemento inverso** de 5), vem:

$$\underbrace{\frac{1}{5} \times 5}_{1} x > \frac{1}{5} \times 10$$

ou $x > 2$, onde: V = {n.os racionais relativos maiores que 2}

$\Longrightarrow$ *Soluções.* todos os n.os racionais relativos maiores que 2.

2.ª) $\frac{^-1}{3}x \leqq 7$, $U = \mathbb{Q}$

Multiplicando ambos os têrmos por ${}^-3$ (que é o **elemento inverso** de $\left(\frac{^-1}{3}\right)$:

$$\underbrace{{}^-3 \times \frac{^-1}{3}}_{1} x \geqslant {}^-3 \times 7$$ ("trocou" para $\geqslant$ em virtude do **P.M.D.**)

ou $x \geqslant {}^-21$, onde: V = {n.os racionais relativos maiores ou iguais a ${}^-21$}

$\Longrightarrow$ *Soluções:* todos os n.os racionais relativos maiores ou iguais a ${}^-21$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 75

Resolver as seguintes inequações, aplicando o **P.A.D.** e os **P.M.D.**:

1.ª) $8x - 3 > 5x + 9$, $U = \mathbb{Q}$.

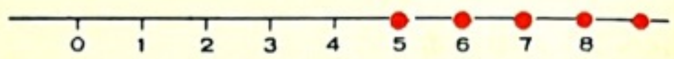
Temos: $8x - 5x > 9 + 3$ (... "passando" — pelo **P.A.D.** — os têrmos com x para o 1.º membro e as constantes para o 2.º, ...)

$3x > 12$ (... "reduzindo" ...)

$\frac{1}{3} \times 3x > \frac{1}{3} \times 12$ (... pelo **P.M.D.**, ...)

ou $x > 4$ onde: $V = \{5, 6, 7, 8, \ldots\} \Longrightarrow$ *Soluções:* 5, 6, 7, 8, ...

gráfico:



Verificação: Basta substituir x, na inequação proposta, por *qualquer* valor do Conjunto-Solução, por exemplo, 5:

$$8(5) - 3 > 5(5) + 9$$
$$40 - 3 > 25 + 9$$
$$37 > 34 \quad (V)$$

2.ª) $2x - 5(3x + 1) > 19 - 1x$, $U = \mathbf{Z}$

Temos: $2x - 15x - 5 > 19 - 1x$ (... "eliminando" os parênteses ...)

e daí: $2x - 15x + 1x > 19 + 5$

$(2 - 15 + 1)x > 24$

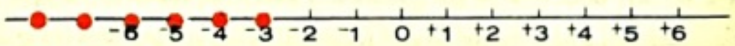
$^-12x > 24$

ou $12x < {}^-24$ (multiplicando os dois membros por $^-1$)

e $x < {}^-2$

onde: $V = \{\ldots {}^-5, {}^-4, {}^-3\} \Longrightarrow$ *Soluções:* ...... $^-5$, $^-4$, $^-3$.

gráfico:



Faça você mesmo a *verificação.*

3.ª) $\frac{3y}{2} - \frac{5(y - 2)}{4} \leqslant 8 + \frac{1 - 2y}{2}$, $U = \mathbf{Q}$

Convertendo as "frações" ao mesmo denominador comum, vem:

$$\frac{6y}{4} - \frac{5(y - 2)}{4} \leqslant \frac{32}{4} + \frac{2(1 - 2y)}{4}$$

Multiplicando ambos os membros por 4:

e daí: $6y - 5(y - 2) \leqslant 32 + 2(1 - 2y)$

$6y - 5y + 10 \leqslant 32 + 2 - 4y$ (... eliminando os parênteses)

$6y - 5y + 4y \leqslant 32 + 2 - 10$

$(6 - 5 + 4)y \leqslant 24$

$5y \leqslant 24$

$y \leqslant \frac{24}{5}$

onde: $V = \left\{\text{n.}^{\text{os}} \text{ racionais relativos menores ou iguais a } \frac{24}{5}\right\}$

$\Longrightarrow$ *Soluções:* todos os n.os racionais relativos menores ou iguais a $\frac{24}{5}$

NOTA: No caso de a inequação ter os seus membros ligados pelo sinal $\neq$ (diferente de), como, por exemplo:

$$3x \neq 2x - 5$$

vale o **P.M.D.**: multiplicando-se os dois membros por *qualquer* número (positivo ou negativo), obtém-se *sempre* uma desigualdade equivalente. Experimente ...

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 76

Resolver as seguintes inequações:

1.ª) $3x - 5 < x + 7$, $U = \mathbf{N}$

2.ª) $6y - 8 \geqslant 7y + 2$, $U = \mathbf{Z}$

3.ª) $6(x - 2) - 3x > 0$, $U = \mathbf{N}$

4.ª) $^-2(z + 1) + 5z \leqslant 4 - 3(2z + 1)$, $U = \mathbf{Q}$

5.ª) $\frac{3x}{2} - 5 \neq \frac{x - 1}{3}$, $U = \mathbf{N}$

6.ª) $\frac{4y - 3}{8} \leqslant 1 - \frac{(y + 3)}{2}$, $U = \mathbf{Q}$

7.ª) $\frac{2x-1}{5} - 3(4-1x) < 12 + \frac{1+5x}{3}$, $U = \mathbf{Q}$

8.ª) $3x + a > x + b$, $U = \mathbf{Q}$

9.ª) $ax - b \neq 0 \quad (a > 0)$, $U = \mathbf{Q}$

10.ª) $mx - n < {}^-px \quad (m + p > 0)$, $U = \mathbf{Q}$

11.ª) $\frac{x}{2} - 3 > 3(2x - 6)$, $U = \mathbf{Q}$

12.ª) $\frac{15y - 4}{2} \leqslant 1 + 6y$, $U = \mathbf{Q}$

13.ª) $2(z - 6) - (3x - 19) < 0$, $U = \mathbf{Q}$

14.ª) $\frac{t - 5}{3} - \frac{t - 8}{4} \geqslant 0$, $U = \mathbf{Q}$

15.ª) $\frac{-3x}{5} < -\frac{3}{5}$, $U = \mathbb{Q}$

16.ª) $ay + b \leqslant 0 \quad (a > 0)$, $U = \mathbb{Q}$

17.ª) $-y - \frac{y}{2} - \frac{y}{3} > y$, $U = \mathbb{Q}$

18.ª) $\frac{3x}{2} - \frac{5(x-2)}{4} \geqslant 8 + \frac{1-2x}{2}$, $U = \mathbb{Q}$

19.ª) $-(19-z) + 2z - 5(3z+1) > 0$, $U = \mathbb{Q}$

20.ª) $\frac{x-1}{7} + \frac{23-x}{5} < 7 - \frac{4+x}{4}$, $U = \mathbb{Q}$

Uso de quantificadores na resolução de inequações

Você pode, para precisar sua linguagem matemática, usar os *quantificadores* a fim de exprimir a "quantidade" de valôres de x que tornam uma desigualdade *verdadeira*. Exemplos:

Seja a inequação: $0.x < 5, \quad U = \mathbb{Q}$

Você sabe que *qualquer* número multiplicado por 0 tem como resultado 0 e é, portanto, *menor* que 5. Logo:

para $\quad 0.x < 5$, $\forall x$ é o quantificador que deve ser usado.

Se; $\qquad 0.x < {}^{-}5, \quad U = \mathbb{Q}$

e, como qualquer número multiplicado por 0 tem como resultado 0 e é, portanto, *maior* que $^{-}5$, segue-se que:

$$\nexists x \mid 0.x < {}^{-}5$$

Se fôsse: $\quad 3.x > 6, \quad U = \mathbb{N}$

teríamos: $\quad V = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$ e, portanto:

para $\quad 3.x > 6$, $\exists x$ é o quantificador indicado.

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 77

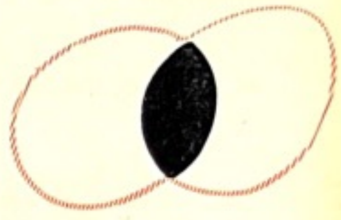
1. Preencha com o respectivo *quantificador* cada uma das seguintes sentenças numéricas abertas, sendo $U = \mathbb{Q}$:

1.ª) . . ., $0.x > 3$	6.ª) . . ., $3x + 5 > 3x + 7$
2.ª) . . ., $0.x \leqslant {}^{-}2$	7.ª) . . ., $8x + 3 < 8x + 3$
3.ª) . . ., $2x < 4$	8.ª) . . ., $5x + 4 \geqslant 3x + 2x + 2$
4.ª) . . ., $0.x > 0$	9.ª) . . ., $\frac{x}{3} \neq 2$
5.ª) . . ., $0.x \neq 0$	10.ª) . . ., $\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$

2. Verifique se é V ou F cada uma das seguintes sentenças numéricas abertas, sendo $U = \mathbb{Q}$:

1.ª) $\forall x,\ 3x = 6$	7.ª) $\exists x,\ 0.x < 8$
2.ª) $\nexists x,\ 3x = 6$	8.ª) $\forall x,\ 0.x < 8$
3.ª) $\exists x,\ 3x = 6$	9.ª) $\nexists x,\ 0.x < 8$
4.ª) $\forall x,\ 0.x = 0$	10.ª) $\forall x,\ 0.x > 0$
5.ª) $\exists x,\ 0.x = 9$	11.ª) $\exists x,\ {}^{-}3x < 0$
6.ª) $\nexists x,\ 0.x = {}^{-}8$	12.ª) $\nexists x,\ 2x \geqslant 6$

Variável sujeita a duas condições



$\cap$ Inequações simultâneas ou conjuntivas

$\Longrightarrow$ *Intersecção* de conjuntos-solução

Suponha que, na Feira de Ciências de seu Ginásio, possam concorrer sòmente alunos *maiores de 11 anos* e alunos *menores de 18 anos*. Êste é um problema no qual a variável x (que representa a *idade* dos alunos) está sujeita a *duas condições*, isto é:

$$x > 11 \quad \text{e} \quad x < 18$$

Quais são os alunos que podem participar dessa Feira?

São os que possuem *mais de onze anos* e *menos de dezoito anos*, ao mesmo tempo, isto é, *simultâneamente*. Logo, podem participar da Feira os que têm: 12, 13, 14, 15, 16 ou 17 anos de idade, ou seja, aquêles cujas idades satisfazem às *duas condições*.

Nota: Estamos considerando sòmente alunos com *idades completas*, a fim de facilitar o raciocínio que se está efetuando.

Você pode estudar problemas como êste, com *muito mais precisão*, usando o que conhece da *linguagem dos conjuntos*. Assim, por exemplo, seja a sentença:

$$\boxed{x > 3 \ \text{e} \ x < 8}$$

composta de duas sentenças simples ($x > 3$, $x < 8$), ligadas pelo conectivo e, e procuremos o *Conjunto-Solução* dessa sentença, tomando para "universo" o conjunto: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Temos:

$V_{x>3} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (*Conjunto-Solução* da sentença $x > 3$)
$V_{x<8} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (*Conjunto-Solução* da sentença $x < 8$)

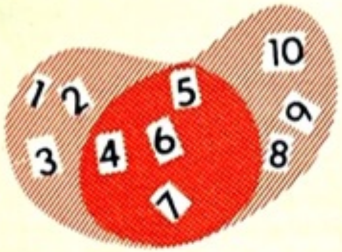
Ora, o *Conjunto-Solução* da sentença composta:

$$x > 3 \text{ e } x < 8$$

é formado pelos elementos que pertencem *simultâneamente* aos Conjuntos-Solução das sentenças simples que a compõem, ou seja, é o *conjunto-* **intersecção** de ambos. Logo:

$$V = V_{x>3} \cap V_{x<8}$$

ou $V = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{4, 5, 6, 7\}$



Usando o símbolo $\wedge$ (lê-se: "e") para o conectivo e que liga duas sentenças, ao invés de:

$$x > 3 \text{ e } x < 8 \quad \text{escreveremos:} \quad x > 3 \wedge x < 8$$

Então: *tôda vez que duas sentenças numéricas abertas estão ligadas pelo conectivo* $\wedge$, *o Conjunto-Solução da sentença composta é dado pela* ***intersecção*** *dos Conjuntos-Solução dessas sentenças.*

As *inequações* resultantes ($x > 3 \wedge x < 8$, no exemplo) são denominadas **simultâneas** ou **conjuntivas,** no "universo" considerado, porque se procuram valôres de x que satisfaçam *simultâneamente* a ambas as sentenças e sòmente a ambas.

Observação: As inequações *simultâneas* podem apresentar-se de outra maneira. Assim, por exemplo:

$x > 3 \wedge x < 8$ pode ser escrita: $3 < x < 8$, que pode ser "desdobrada" nas duas inequações: $x > 3$ e $x < 8$.

Outros exemplos de resolução de *inequações simultâneas:*

1.º) $y > {}^{-}3 \wedge y < 2$, $S = \{{}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1, {}^{+}2\}$

Basta determinar o Conjunto-Solução de cada inequação e, a seguir, a *intersecção* dêles, isto é:

$$V = \{{}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1, {}^{+}2\} \cap \{{}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1\} = \{{}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1\}$$

2.º) $x \leqslant 2 \wedge x > 2$, $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Temos:

$$V = \{0, 1, 2\} \cap \{3, 4\} = \varnothing \text{ (não há solução)}$$

3.º) $2 < \dfrac{3y-7}{4} \leqslant 5$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ou "desdobrando" por meio do conectivo e:

$$\frac{3y-7}{4} > 2 \quad \wedge \quad \frac{3y-7}{4} \leqslant 5$$

Para a primeira inequação: $\dfrac{3y-7}{4} > 2$, temos: $3y - 7 > 8 \iff$

$$\iff 3y > 15 \iff \boxed{y > 5}$$

e, para a segunda: $\dfrac{3y-7}{4} \leqslant 5$, temos: $3y - 7 \leqslant 20 \iff$

$$\iff 3y \leqslant 27 \iff \boxed{y \leqslant 9}$$

Logo: $V = \{6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{6, 7, 8, 9\}$

$\cup$ **Inequações disjuntivas**

$\Longrightarrow$ **Reunião de conjuntos-solução**

Suponha, agora, que você tem duas sentenças ligadas pelo conectivo **ou,** cujo emprêgo em Matemática já foi destacado neste livro. Seja por exemplo, a sentença:

$\boxed{x > 3 \text{ ou } x < 8}$, $\quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

composta de duas sentenças simples ($x>3$, $x<8$) ligadas pelo conectivo **ou.**

Qual o seu Conjunto-Solução?

O significado do conectivo **ou** diz: "o Conjunto-Solução da sentença composta é constituído pelos elementos que tornam verdadeira *uma*, ou *outra*, ou ainda, *ambas* as sentenças que a compõem". Portanto, é o *Conjunto-reunião* dos conjuntos-solução das sentenças propostas.

Indicando o conectivo **ou** pelo símbolo: $\vee$ (lê-se: "ou"), temos:

$$x > 3 \vee x < 8$$

cujo Conjunto-Solução é a **reunião** dos conjuntos-solução de $x > 3$ e $x < 8$, isto é:

$$V = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Nota: Neste exemplo, V é o próprio conjunto "universo" S.

Seja, agora, a sentença composta:

$\boxed{x < 3 \vee x > 8}$, $\quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

cujo Conjunto-Solução é:

$$V = \{1, 2\} \cup \{9, 10\} = \{1, 2, 9, 10\}$$

Então: *tôda vez que duas sentenças estão ligadas pelo conectivo* $\vee$, *o Conjunto-Solução da sentença composta é dado pela* ***reunião*** *dos Conjuntos-Solução dessas sentenças.*

Tais inequações são denominadas **disjuntivas** no "universo" considerado, porque se procuram valôres de x que podem *não satisfazer* a ambas simultâneamente.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 78

Determinar o Conjunto-Solução das seguintes sentenças compostas, onde a variável assume valôres no conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

1.º) x é um número par ou x é um número maior que 5

Temos: $V = \underbrace{\{0, 2, 4, 6, 8\}}_{\text{n.º par}} \cup \underbrace{\{6, 7, 8, 9\}}_{\text{n.º} > 5} = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

2.º) x é um número par e x é um número maior que 5

Temos: $V = \{0, 2, 4, 6, 8\} \cap \{6, 7, 8, 9\} = \{6, 8\}$

3.º) y é um número menor que 2 e y é um número maior que 4

Temos: $V = \{0, 1\} \cap \{5, 6, 7, 8, 9\} = \varnothing$

4.º) y é um número menor que 2 ou y é um número maior que 4

Temos: $V = \{0, 1\} \cup \{5, 6, 7, 8, 9\} = \{0, 1, 5, 6, 7, 8, 9\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 79

1. Resolver as seguintes inequações *simultâneas* (conjuntivas):

   1.ª) $x > 2 \wedge x < 9$, $\quad S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   2.ª) $x \geqslant 2 \wedge x > 2$, $\quad S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
   3.ª) $y > {}^{-}1 \wedge y < 3$, $\quad S = \{{}^{-}2, {}^{-}1, 0, 1, 2, 3\}$
   4.ª) $z > 5 \wedge z < 4$, $\quad S = \{{}^{-}1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   5.ª) $5 \leqslant x + 3 < 7$, $\quad S = \{1, 2, 3, 4\}$
   6.ª) ${}^{-}1 < \frac{2x + 1}{3} \leqslant 5$, $\quad S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

2. Resolver as seguintes inequações *disjuntivas:* seguem-se sentenças compostas das mesmas sentenças simples do exercício anterior, porém ligadas com o conectivo ou ($\vee$), isto é:

   1.º) $x > 2 \vee x < 9$, $\quad S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   etc. . .

3. Determinar o Conjunto-Solução das seguintes *sentenças compostas* no conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$:

   1.ª) x é um número ímpar e $x < 5$;
   2.ª) x é um número ímpar ou $x < 5$;

3.ª) y é um número divisível por 3 ou $y \leqslant 6$;

4.ª) y é um número divisível por 3 e $y \leqslant 6$;

5.ª) z é um número par e z é um número ímpar;

6.ª) z é um número par ou z é um número ímpar;

7.ª) $x = 5$ e $x = 8$;

8.ª) $x = 5$ ou $x = 8$;

9.ª) $y + 2 > 3$ e y é múltiplo de 4;

10.ª) $y + 2 > 3$ ou y é múltiplo de 4.

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — GRUPO 80

(Recapitulação)

1.º) De cinco vêzes um certo número, diminuímos 8; o resultado é o mesmo que o dôbro dêsse número aumentado de 16. Determinar êsse número.

Temos:

número procurado. . . . . .: x

Equação: $5x - 8 = 2x + 16$

Resolvendo-a, com a *nova técnica simplificada*, vem:

$$5x - 2x = 16 + 8$$

ou

$$3x = 24 \Longrightarrow x = 8$$

Logo: o número procurado é 8. *Verificação:*

$$\begin{aligned} 5 \times 8 - 8 &= 2 \times 8 + 16 \\ 40 - 8 &= 16 + 16 \\ 32 &= 32 \quad (V) \end{aligned}$$

2.º) Se de 126 você subtrair a quinta parte da soma indicada de um certo número com 4, encontrará 30. Qual é êsse número?

Temos:

número procurado. . . . . .: x

Equação: $126 - \dfrac{x + 4}{5} = 30$

Resolvendo-a:

$630 - (x + 4) = 150$ (lembre-se: o *m.m.c.* é 5, daí . . .)

$630 - x - 4 = 150$ (não esqueça de *trocar* o sinal . . .)

$^{-}x = 150 - 630 + 4$

$^{-}x = {}^{-}476$

ou $x = 476$

Logo: o número procurado é 476. *Verificação:*

$$\begin{aligned} 126 - \frac{476 + 4}{5} &= 30 \\ 126 - 96 &= 30 \\ 30 &= 30 \quad (V) \end{aligned}$$

3.º) A idade de um pai somada à idade de seu filho é igual a 42 anos. Sabendo-se que a idade do pai é cinco vêzes a idade do filho, dizer a idade de cada um.

Temos:

se a idade do pai fôr representada por . . . . . .: x

a idade do filho será representada por . . . . . .: $42 - x$

a segunda condição que o problema determina (a idade do pai é cinco vêzes a do filho) revela a *equação:*

$$x = 5(42 - x)$$

Resolvendo-a: $x = 210 - 5x$

ou $x + 5x = 210$

$$6x = 210 \Longrightarrow x = 35$$

Logo:

a idade do pai 35

a idade do filho . . . 7 anos $42 - 35 = 7$

4.º) Paulo viveu $\dfrac{1}{6}$ de sua vida em Campinas, $\dfrac{2}{3}$ no Recife; mudou-se em seguida para Curitiba, onde viveu os 9 últimos anos de sua vida. Quantos anos viveu?

NOTA: Embora de aparência "tétrica" êsse problema é análogo ao famoso problema que pretendeu determinar a idade de *Diofanto* (matemático grego que viveu no séc. II *a. C.*).

Se o n.º de anos que Paulo viveu fôr representado por x, a seguinte *equação* traduzirá o problema:

$$\frac{x}{6} + \frac{2x}{3} + 9 = x$$

ou, resolvendo-a, $x = 54$. Logo, Paulo viveu 54 anos. "Tire" a prova.

5.º) Joaquim, que tem uma banca no mercado, pretendia vender um certo número de ovos especiais a NCr\$ 0,15 cada um, a fim de lucrar uma certa importância. No transporte quebraram-se 20 ovos e Joaquim teve que vender os restantes a NCr\$ 0,18 cada, para obter o mesmo lucro. De quantos ovos dispunha Joaquim no início?

Se x representa o n.º de ovos que Joaquim possuía no início, temos que:

$$(x - 20) \times 0{,}18$$

representa o *total* apurado na venda, quando foram descontados os 20 ovos quebrados. Por outro lado êsse total representaria a *mesma importância* que seria recebida pela venda dos x ovos iniciais a NCr\$ 0,15 cada. Logo, a seguinte *equação* traduzirá o problema:

$$(x - 20) \times 0{,}18 = x \times 0{,}15$$

Resolvendo-a: $0{,}18x - 3{,}6 = 0{,}15x$

ou $0{,}03x = 3{,}6 \Longrightarrow x = 120$

Portanto: Joaquim possuía no início 120 ovos. "Tire" a prova.

6.º) Elsa não tem ainda 15 anos, porém o dôbro de sua idade menos 4 anos é *maior que* a sua idade aumentada de 9 anos. Que idade tem Elsa? (NOTA: Subentenda-se: número de anos).

Se x representa a idade de Elsa, seguindo à risca a leitura do problema (quando diz: . . . *porém o dôbro de sua idade* . . .), obtemos a seguinte *inequação:*

$$2x - 4 > x + 9$$

Resolvendo-a: $x > 13$

Observando que, no problema, Elsa *não tem ainda* 15 anos e que $x > 13$, segue-se que Elsa tem 14 anos.

ATENÇÃO: Pela natureza do problema, o Conjunto-Substituição da inequação: $2x - 4 > x + 9$ é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, pois os elementos de S representam as idades possíveis de Elsa.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 81

1. Três vêzes um certo número somado com 20 é o mesmo que a metade dêsse número aumentado de 50. Que número é êsse?

2. A idade do Sr. João somada com a de Roberto é igual a 78 anos. Sabendo-se que a idade do Sr. João é o quíntuplo da de Roberto, qual a idade de cada um?

3. Júlio é agora 15 anos mais môço que sua irmã Júlia. Em 6 anos a idade de Júlia se tornará o dôbro da de Júlio. Que idade têm êles agora?

4. A idade de um pai é o triplo da do filho. Qual é a idade do pai, sabendo-se que daqui a 15 anos será o dôbro da do filho?

5. Lília não tem ainda 12 anos, porém o triplo de sua idade menos 2 anos é *maior* que o dôbro de sua idade aumentado de 8 anos. Qual a idade de Lília?

6. Se você subtrair $\frac{3}{5}$ da têrça parte da diferença indicada entre um certo número e 10 encontrará 20. Que número é êsse?

7. Determinar o número x que satisfaz à seguinte equação: $2(x + 5) - 3(2x - 1) = 5$.

8. Determinar o *número* que satisfaz à seguinte condição: "o dôbro da soma indicada dêsse *número* com 5, menos o triplo da diferença indicada entre o dôbro dêsse *número* e 1 é igual a 5"

9. Suponha que você diga a um seu colega: "cinco vêzes o número de alunos de minha classe menos 12, dá como resultado 51 a mais que o triplo de alunos de minha classe" e pergunte quantos alunos tem sua classe. A resposta obtida, por intermédio da equação resultante, satisfará ao problema? Por quê? E se fôsse dito 50 ao invés de 51?

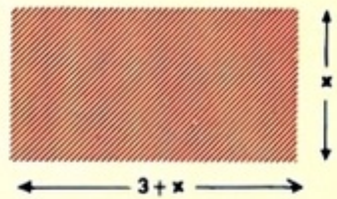
10. A capacidade de um tanque, medida em litros, tem mais de 20 e menos de 30. O número x de litros de gasolina contido nesse tanque satisfaz à seguinte inequação:

$$x - (4x + 1) > {}^{-}73$$

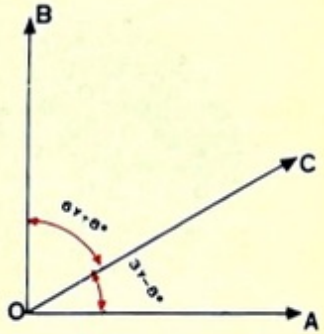
Sabendo-se ainda que o número de litros de gasolina é divisível por 3, qual a quantidade de gasolina contida nesse tanque?

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 82

1. No retângulo *ABCD*, a medida de dois de seus lados é expressa em têrmos da variável x. Se o perímetro dêsse retângulo é igual a 14m, qual a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$?

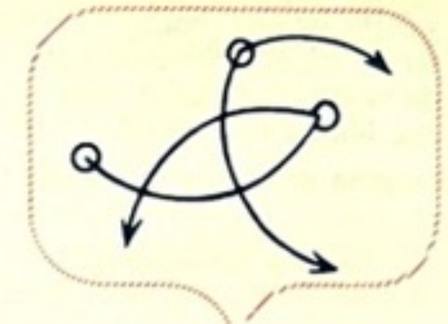


2. O ângulo $A\hat{O}B$ é reto e OC é uma semi-reta entre os lados dêsse ângulo que determina os ângulos: $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$, cujas medidas estão expressas em têrmos da variável y. Qual a medida, em graus, de $A\hat{O}C$? E de $C\hat{O}B$? (Lembre-se que um ângulo reto mede 90 graus. . .)



SEGUNDA PARTE

Relações binárias.
Senteças abertas com duas variáveis.
Sistemas de equações simultâneas.



Relações binárias

1. *Relações binárias; Sentenças abertas com duas variáveis*

Observe as seguintes *relações*, comumente usadas quando você se exprime em Português e em Matemática:

... *é irmão de* ...	... *é divisor de* ...
... *é primo de* ...	... *é igual a* ...
... *é aluno de* ...	... *é menor que* ...
... *é mais alto que* ...	... *é múltiplo de* ...

Coloque nos espaços pontilhados (...) das *relações* escritas à esquerda, *nomes* de pessoas conhecidas; nos das relações escritas à direita, *números* quaisquer. Você obterá sempre uma sentença que poderá ser *Verdadeira* (*V*) ou *Falsa* (*F*).

Assim, por exemplo:

Raul *é irmão de* **Pedro**

(é uma sentença *V* ou *F*, dependendo de Raul ser ou não irmão de Pedro)

2 *é divisor de* **8** (é *V*)

3 *é divisor de* **5** (é *F*)

As *relações* acima, denominadas *binárias* porque envolvem *dois* elementos, mostram a existência de sentenças abertas com *duas variáveis*, de larga aplicação nas suas relações diárias e em tôda a Matemática. No exemplo:

... *é divisor de* ...

as reticências podem ser substituídas, respectivamente, por **x** e **y**, isto é:

x *é divisor de* **y**

que é uma *sentença aberta* nas variáveis **x** e **y**.

x e y, recebendo valôres de um "universo" conhecido, determinam sentenças que podem ser V ou F. Observe, porém, que você precisará de um **par ordenado** de valôres (um valor para x e outro para y) a fim de concluir se a sentença obtida é V ou F.

Assim, a sentença aberta com *duas* variáveis:

x *é o dôbro de* **y**

torna-se uma sentença *verdadeira*, para os seguintes *pares* de números escolhidos no $\mathbb{Q}$:

2 *é o dôbro de* **1**, isto é : **(2, 1)**

4 *é o dôbro de* **2**, isto é : **(4, 2)**

6 *é o dôbro de* **3**, isto é : **(6, 3)**

. . . . , ... : . . . . .

1 *é o dôbro de* $\frac{1}{2}$, isto é : $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

. . . . , ... : . . . .

7 *é o dôbro de* $3\frac{1}{2}$, isto é : $\left(7, 3\frac{1}{2}\right)$

. . . . , ... : . . . .

Nesses *pares* (cujos valôres foram escritos entre parênteses):

$$(2, 1),\quad (4, 2),\quad (6, 3),\ \ldots \left(1, \frac{1}{2}\right), \ldots \left(7, 3\frac{1}{2}\right), \ \ldots\ldots$$

a *ordem* em que figuram os números é *muito importante*, pois:

enquanto o *par* **(2, 1)**, onde **2** é o *primeiro* elemento e **1** é o *segundo* elemento, torna a sentença *verdadeira* (2 *é o dôbro de* 1) . . .

o *par* **(1, 2)**, onde **1** é, agora, o *primeiro* elemento e **2** é o *segundo*, torna a sentença *falsa* (1 *não é o dôbro de* 2!)

Por isso são chamados de *ordenados* os pares que tornam verdadeira uma sentença com duas variáveis. No par **(x, y)**, **x** é o *primeiro* elemento e **y**, o *segundo*. Logo, o *Conjunto-Solução* da sentença aberta:

x *é o dôbro de* **y** , no "universo" $\mathbb{Q}$

é: $V = \left\{(2, 1),\ (4, 2),\ (6, 3),\ \left(1, \frac{1}{2}\right),\ \left(7, 3\frac{1}{2}\right), \ldots\ldots\right\}$

que é um conjunto com *infinitos* elementos.

Se fôr escolhido como "universo" o conjunto: $S = \{1, 2, 3, 4\}$ o *Conjunto-Solução* da sentença "**x** *é o dôbro de* **y**" agora será *finito*, isto é: $V = \{(2, 1), (4, 2)\}$, cujos elementos (2, 1) e (4, 2) são os únicos *pares ordenados* que se podem obter com os elementos de S.

NOTA: Simbòlicamente, a relação: "**x** *é o dôbro de* **y**" é traduzida por: $\boxed{x = 2y}$ que é uma *equação* do *primeiro grau* nas variáveis x e y.

LEMBRETE AMIGO

> Enquanto o Conjunto-Solução de uma sentença aberta com **uma variável** é constituído por um conjunto de *números*, o Conjunto-Solução de uma sentença aberta com **duas variáveis** é constituído por um conjunto de **pares de números.**

Uma *curiosidade* acêrca dos pares ordenados . . .

Você tem experiência da importância dos pares ordenados quando, por ex., referindo-se às combinações dos nomes José e Maria, sabe que o par:

(José, Maria) refere-se, certamente, ao nome de um colega (homem), e o par (Maria, José) refere-se, certamente, ao nome de uma colega . . .

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 83

1. Determinar o *Conjunto-Solução* das seguintes sentenças com *duas variáveis* (. . . que são relações binárias . . .) no conjunto: $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

1.ª) x *é igual a* y (simbòlicamente: $x = y$)

Temos:

$V = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), \ldots\}$ (conjunto infinito)

2.ª) x *é maior que* y (simbòlicamente: $x > y$)

Temos:

$V = \{(1, 0), (2, 0), \ldots (2, 1), (3, 1), \ldots (3, 2), (4, 2), \ldots\}$ (conjunto infinito)

NOTA: Lembre-se que o valor de x é o *primeiro* elemento do pai e o de y, o *segundo*.

3.ª) *x é primo com y*

Temos:

$V = \{(1, 2), (1, 3), \ldots (2, 3), (2, 5), (2, 7), \ldots (3, 4), (3, 5), \ldots (8, 9), (8, 15), \ldots\}$
(conjunto infinito)

2. Determinar o *Conjunto-Solução* das seguintes sentenças com *duas variáveis* no conjunto: $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1.ª) *x é igual a y*

Temos:

$V = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ (conjunto finito)

2.ª) *x é divisor de y*

Temos:

$V = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ (conjunto finito)

3.ª) *x é igual a duas unidades a mais que y* (simbòlicamente: $x = 2 + y$)

Temos:

$V = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$ (conjunto finito)

NOTA: A *técnica* para se obterem os *pares* que sejam elementos de *V*, pode ser a seguinte: substitui-se *y*, da equação $x = 2 + y$, pelos elementos de *S*, isto é: 1, 2, 3, 4 e 5, e procura-se o correspondente valor de *x* para cada um dêsses valôres. Assim:

para $y = 1$, temos: $x = 2 + 1 = 3$ e, portanto, o *par:* (3, 1) (*V*)
para $y = 2$, temos: $x = 2 + 2 = 4$ e, portanto, o *par:* (4, 2) (*V*)
para $y = 3$, temos: $x = 2 + 3 = 5$ e, portanto, o *par:* (5, 3) (*V*)
para $y = 4$, temos: $x = 2 + 4 = 6$ e, portanto, o *par:* (6, 4) (*F*)
para $y = 5$, temos: $x = 2 + 5 = 7$ e, portanto, o *par:* (7, 5) (*F*)

Como 6 e 7 não pertencem a *S*, segue-se que os pares (6, 4) e (7, 5) não farão parte do Conjunto-Solução procurado.

3. No "universo" formado pela família: {Pedro, Rosa, Gustavo, Cristina, Sílvio} sabe-se que Gustavo, Cristina e Sílvio são filhos do casal Pedro e Rosa. Determinar o Conjunto-Solução das seguintes sentenças:

1.ª) *x é filho de y*

Temos: $V = \{(G,P), (G,R), (C,P), (C,R), (S,P), (S,R)\}$
(estamos usando sòmente a inicial de cada nome)

2.ª) *x é irmão de y*

Temos: $V = \{(G,C), (C,G), (G,S), (S,G), (C,S), (S,C)\}$

4. As seguintes relações binárias (. . . que são conjuntos de pares ordenados . . .) foram selecionadas do conjunto: $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Descreva, em linguagem corrente, a relação que liga o primeiro elemento (*x*) com o segundo (*y*):

1.ª) (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)

Temos: *x é igual a y* (simbòlicamente: $x = y$)

2.ª) (1, 2), (2, 4)

Temos: *x é metade de y* $\left(\text{simbòlicamente: } x = \frac{1}{2} y\right)$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 84

1. Determinar o Conjunto-Solução das seguintes sentenças com *duas variáveis*, no Conjunto: $N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

1.ª) *x é a metade de y*
2.ª) *x é o dôbro de y*
3.ª) *x é o triplo de y*
4.ª) *x é um têrço de y*
5.ª) *x é múltiplo de y*
6.ª) *x é divisor de y*

2. Idem, das seguintes sentenças com duas variáveis, no Conjunto: $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1.ª) *x é menor que y*
2.ª) *x é raiz quadrada de y*
3.ª) *x é igual ou maior que y*
4.ª) *x é igual a três unidades a mais que y*
5.ª) *x é igual a duas unidades a menos que y*
6.ª) *x é primo com y*

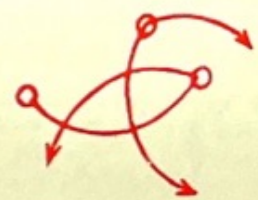
3. No "universo" formado pelas pessoas: {Mário, João, Raul, Lúcia, Dora}, sabe-se que Mário e Lúcia são casados; Raul e Dora são casados; Raul e João são irmãos; Dora é filha de Mário e Lúcia. Construir o Conjunto-Solução das seguintes sentenças com duas variáveis:

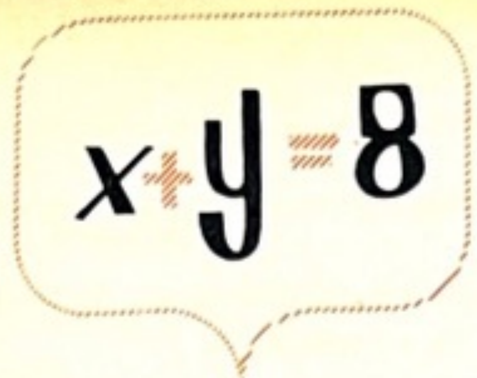
1.ª) *x é marido de y*
2.ª) *x é irmão de y*
3.ª) *x é cunhado de y*
4.ª) *x é pai de y*
5.ª) *x é filha de y*
6.ª) *x é mulher de y*

4. As seguintes relações binárias (apresentadas como pares ordenados) foram selecionadas do Conjunto: $S = \{1, 2, 3, 4\}$

1.ª) (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)
2.ª) (2, 1), (3, 2), (4, 3)
3.ª) (1, 2), (2, 4)
4.ª) (2, 1), (4, 2)
5.ª) (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)
6.ª) (2, 1), (3, 2), (4, 3)

Que relações são essas?





Sentenças abertas com duas variáveis

Sistemas de equações simultâneas

2. *Sistemas de equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis*

Muitos problemas da vida prática traduzem-se em sentenças abertas com duas variáveis e, portanto, em *equações com duas variáveis.* Vamos tratar das equações com duas variáveis do *primeiro grau.* Assim, por exemplo, seja:

1.º) *Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que Juca possui duas bolinhas a mais que Zeca. Quantas bolinhas possui cada um?*

Se o número de bolinhas • ↗ de Juca fôr representado por . . . : x
↘ de Zeca fôr representado por . . . : y

então o problema será "traduzido" pelas seguintes equações:

$$x + y = 8 \quad \text{e} \quad x = y + 2$$

A resolução da sentença composta dessas equações consiste em procurar valôres de x e de y que satisfaçam **simultâneamente** ao *sistema* constituído pelas *duas equações.* Por isso:

$$x + y = 8 \wedge x = y + 2$$

é denominado *sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis.* Tal sistema é, geralmente, escrito sob a forma:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x = y + 2 \end{cases}$$

significando, a *chave,* que se procuram valôres de x e de y que satisfaçam *simultâneamente* a ambas as equações.

Êsses valôres são denominados *solução,* ou *valôres-verdade* do sistema e são *elementos* do Conjunto-Verdade V ou Conjunto-Solução, que é a *intersecção* dos Conjuntos-Solução das equações propostas.

Indicando por:

V_1: o Conjunto-Solução da equação: $x + y = 8$

V_2: o Conjunto-Solução da equação: $x = y + 2$

temos que:

$$V = V_1 \cap V_2$$

Para determinar os elementos de V_1 (lembre-se que, agora, os elementos do conjunto *são pares ordenados . . .*) atribuímos valôres *naturais* a x e achamos o correspondente valor de y na equação: $x + y = 8$. Assim, para:

$y = 0$, temos: $x = 8 - 0 = 8$ e, portanto, o *par* . . . . . . : (8, 0)
$y = 1$, temos: $x = 8 - 1 = 7$ e, portanto, o *par* . . . . . . : (7, 1)
$y = 2$, temos: $x = 8 - 2 = 6$ e, portanto, o *par* . . . . . . : (6, 2)
$y = 3$, temos: $x = 8 - 3 = 5$ e, portanto, o *par* . . . . . . : (5, 3)
$y = 4$, temos: $x = 8 - 4 = 4$ e, portanto, o *par* . . . . . . : (4, 4)
. . . .

Os *pares* que estamos determinando, pertencem ao *Conjunto-Universo* de todos os pares ordenados que podem ser formados com dois *números naturais* (lembre-se que as bolinhas do problema só têm sentido se forem *inteiras . . .*).

Nestas condições, o *Conjunto-Universo* que contém todos os pares ordenados que se podem formar com dois números naturais quaisquer, é o *produto cartesiano* $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ já estudado na 1.ª Série Ginasial.

Logo: $V_1 = [(8, 0), (7, 1), (6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), \ldots]$, sendo $U = \mathrm{N} \times \mathrm{N}$

Da mesma forma será determinado V_2, trabalhando com a equação: $x = y + 2$. Assim, para:

$y = 0$, temos: $x = 0 + 2 = 2$ e, portanto, o *par* . . . . . . : (2, 0)
$y = 1$, temos: $x = 1 + 2 = 3$ e, portanto, o *par* . . . . . . : (3, 1)
$y = 2$, temos: $x = 2 + 2 = 4$ e, portanto, o *par* . . . . . . : (4, 2)
$y = 3$, temos: $x = 3 + 2 = 5$ e, portanto, o *par* . . . . . . : (5, 3)
$y = 4$, temos: $x = 4 + 2 = 6$ e, portanto, o *par* . . . . . . : (6, 4)
. . . .

Logo: $V_2 = [(2, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4), \ldots]$ $U = \mathrm{N} \times \mathrm{N}$

Como: $V = V_1 \cap V_2$, vem:

$$V = \{(8, 0), (7, 1), (6, 2), \underline{(5, 3)}, (4, 4), (3, 5), \ldots\} \cap \{(2, 0), (3, 1), (4, 2), \underline{(5, 3)}, (6, 4), \ldots\}$$

ou $$V = \{(5, 3)\}$$

Portanto: a *solução* do sistema proposto é o par: (5, 3), e a resposta é: Juca tem 5 bolinhas e Zeca, 3.

Prova: n.º de bolinhas de Juca: 5
n.º de bolinhas de Zeca: 3 — diferença: 2 (Juca tem a mais)
soma: 8

ATENÇÃO:

Logo mais você aprenderá uma *técnica* rápida para a determinação da *solução* de um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: **Início de uma "Discussão"** . . . Será que o Conjunto-Solução V do sistema:

$$x + y = 8 \quad \wedge \quad x = y + 2$$

é constituído sòmente de um *único* elemento, ou seja, do par ordenado (5, 3)?

A resposta é: sim! O Conjunto-Solução V é sempre *unitário* para todos os sistemas simultâneos do primeiro grau que traduzem problemas envolvendo *duas variáveis* e *duas condições* **distintas** e **compatíveis**, isto é, que não sejam *inconciliáveis*.

Quer ver por quê?

Vamos supor que além de (5, 3) existisse em V um *outro par* ordenado: (a, b), onde a e b seriam números do conjunto N, isto é, *naturais*.

Então (a, b), por ser elemento do Conjunto-Solução, que é a *intersecção* dos conjuntos V_1 e V_2, deverá pertencer tanto a V_1, como a V_2. Logo: $(a, b) \in V_1 \Longrightarrow a + b = 8$ e $(a, b) \in V_2 \Longrightarrow a = b + 2$.

Nestas condições a e b são dois números naturais que *somados* dão como resultado 8 e um dêles *tem 2 a mais que o outro*. Como os *únicos* números naturais que gozam dessa propriedade são 5 e 3, respectivamente, segue-se que: $a = 5$ e $b = 3$, ou seja, (5, 3) é o *único elemento* do Conjunto-Solução V.

Em outras palavras: o sistema $x + y = 8 \wedge x = y + 2$ é *equivalente* ao sistema $x = 5 \wedge y = 3$.

LEMBRETE AMIGO

Se um problema envolve sòmente:

uma variável, então **uma equação** é suficiente para resolvê-lo;

duas variáveis, então **um sistema de duas equações distintas** é suficiente para resolvê-lo.

Se o problema fôsse:

2.º) *Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que Juca possui o triplo das bolinhas de Zeca. Quantas possui cada um?*

o sistema simultâneo seria:

$$x + y = 8 \quad \wedge \quad x = 3y$$

cujas equações traduzem *duas condições* **distintas** e **compatíveis.** Como:

$$V_1 = \{(8, 0), (7, 1), (6, 2), (5, 3), \ldots\}$$

e $$V_2 = \{(0, 0), (3, 1), (6, 2), (9, 3), \ldots\}$$

temos: $$V = V_1 \cap V_2 = \{(6, 2)\}$$

Sendo (6, 2) o *único par*, segue-se que: Juca possui 6 bolinhas e Zeca, 2.

Porém, se fôssem enunciados os seguintes problemas:

3.º) *Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que o dôbro das bolinhas que Juca possui somado com o dôbro das de Zeca é igual a 16 bolinhas. Quantas possui cada um?*

o sistema simultâneo seria:

$$x + y = 8 \quad \wedge \quad 2x + 2y = 16$$

Que percebe você?

Que as "duas" condições dadas resumem-se, na verdade, em *uma só*, isto é, as condições propostas *não são distintas*, pois é a mesma coisa dizer: "a soma de dois números é 8" e "a soma de seus dobros é 16" (dôbro de 8)! Nesse caso, você verificará fàcilmente que os Conjuntos-Solução: V_1 de $x + y = 8$ e V_2 de $2x + 2y = 16$ são os mesmos:

$$V_1 = \{(8, 0), (7, 1), (6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6), (1, 7), (0, 8)\}$$
$$V_2 = \{(8, 0), (7, 1), (6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6), (1, 7), (0, 8)\}$$

Logo: $V = V_1 \cap V_2 = V_1 = V_2$

e, agora, o Conjunto-Solução V *não é* mais unitário, pois *qualquer* um dos pares: (8, 0), (7, 1), (6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6), (1, 7) e (0, 8) é *solução* do sistema e, portanto, resolve o problema.

4.º) *Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que a soma das bolinhas que Juca e Zeca possuem é igual a 10. Quantas possui cada um?*

o sistema simultâneo seria:

$$x + y = 8 \quad \wedge \quad x + y = 10$$

que é composto de duas equações *incompatíveis*, ou seja, *inconciliáveis*, pois a soma das bolinhas que Juca e Zeca possuem *não pode ser*, ao mesmo tempo, 8 e 10!

Construídos os Conjuntos-Solução dessas equações, teríamos:

V_1 = [(8, 0), (7, 1), (6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6), (1, 7), (0, 8)]
V_2 = [(10, 0), (9, 1), (8, 2), (7, 3), (6, 4), (5, 5), (4, 6), (3, 7), (2, 8), (1, 9), (0, 10)]

que não apresentam *nenhum* elemento *em comum*. Logo, o Conjunto-Solução intersecção de ambos é *vazio*, isto é:

$$V = V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

Nesse caso, o sistema proposto *não tem solução* e o problema que o originou não é problema *possível*.

E daí?...

O que nós fizemos, estudando com pormenores êsses problemas, foi **"discutir"** a *existência*, ou não, da *solução* ou das *soluções* de problemas cuja "tradução" dos enunciados levava a um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis.

Essa *"discussão"* permite *concluir* que:

1. Se o enunciado envolve duas condições *distintas* e *compatíveis* (como nos exercícios 1.º) e 2.º), então o problema é considerado **possível e determinado,** e admite uma **única solução.**

NOTA: O *par* que deve constituir a *solução* do problema deve atender à *natureza* dos dados; assim, o problema cujos dados dizem respeito a bolinhas, alunos, livros,. . . deve ter como solução um par de números naturais (. . . não teria sentido encontrar $\frac{2}{5}$ de aluno ou −5 livros, etc. . .).

2. Se o enunciado envolve duas condições que *não sejam distintas* (exercício 3.º), então o problema é considerado **possível e indeterminado, e** admite sempre **mais de uma solução.**

3. Se o enunciado envolve duas condições *incompatíveis* (exercício 4.º), então o problema é considerado **impossível** e *não admite* solução.

1. Resolver os seguintes problemas por intermédio de um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis:

1.º) Dorotéia e Sílvia possuem juntas 6 bonecas. Sabe-se que Sílvia possui duas bonecas a mais que Dorotéia. Quantas bonecas possui cada uma?

2.º) Há, na caixa de jogos do Colégio, 6 bolas de voleibol do 1.º *A* e do 2.º *A*. Sabe-se que o 2.º *A* tem o dôbro de bolas de voleibol das que o 1.º *A* possui. Quantas bolas possui cada classe?

3.º) A soma de dois números é 9 e a diferença entre êles, 3. Que números são êsses?

4.º) A soma de dois números é 12 e um dêles é o triplo do outro. Determine êsses números.

5.º) Dois números têm por soma 4. Se duas vêzes o segundo fôr subtraído do primeiro o resultado será 7. Quais são os números?

2. *"Discutir"* os seguintes casos:

1.º) Raul e Diva possuem juntos 12 cadernos. Sabe-se que a soma das metades dos números de cadernos que Raul e Diva possuem é igual a 6. Quantos cadernos possui cada um?

2.º) Sabe-se que: 1) a diferença entre as figurinhas que Carlos e Edmur possuem é 5; 2) a soma dessas figurinhas é 7. Quantas figurinhas possuem Carlos e Edmur?

3.º) Antônio e Luís possuem juntos 8 lápis de côr. Sabe-se que a soma dos lápis de côr de Antônio e Luís é igual a 6. Quantos lápis possui cada um?

4.º) O total de soldados que policiam dois jardins é 15 e a diferença entre o número dêles é 1. Quantos soldados policiam cada jardim?

5.º) A diferença entre o número de bolinhas de pingue-pongue contidas numa caixa e o dôbro de bolinhas de pingue-pongue contidas em outra caixa é 8. Se o total das bolinhas contidas nas duas caixas é 5, quantas há em cada caixa?

6.º) Determinar dois números naturais que têm por soma 6, sendo o maior o triplo do menor.

3. *Técnicas operatórias*

I — Método da substituição de variáveis

Pode-se determinar, ràpidamente, a *solução* — quando existe — de um Sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis (incógnitas), pela Técnica denominada **Substituição de Variáveis.** Como tais Sistemas podem ser estudados independentemente dos problemas que eventualmente possam estar "traduzindo", vamos tomar, agora, como "universo" de trabalho, o conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, ou seja, as *duas variáveis* serão *quaisquer números racionais relativos.*

Seja, por exemplo, o Sistema:

$$\boxed{x + y = 8 \quad \wedge \quad x = y + 2 \qquad U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}$$

que pode, também, ser escrito na forma:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x = y + 2 \end{cases}$$

Substituindo o x, que figura na primeira das equações, pelo valor expresso por x na segunda equação (ou seja: $y + 2$), temos:

$$x + y = 8$$

$$(y + 2) + y = 8$$

(que é uma equação do 1.º grau sòmente com *uma variável* (y), cuja resolução você já conhece)

Logo: $(y+2) + y = 8 \iff y+y = 8-2 \iff 2y = 6 \implies y = \boxed{3}$

Substituindo êsse valor de y na segunda equação, vem:

$$x = y + 2$$

$$x = 3 + 2 = \boxed{5}$$

Então, $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ é um sistema *equivalente* ao sistema proposto: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x = y + 2 \end{cases}$ e, portanto, o *par* (5, 3) é a *solução* procurada.

Prova: $\left.\begin{matrix} x + y = 8 \\ x = y + 2 \end{matrix}\right\} \implies \begin{cases} 5 + 3 = 8 & (V) \\ 5 = 3 + 2 & (V) \end{cases}$

Outros exemplos:

1.º) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 3y \end{cases}$ $\qquad U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Basta substituir o x da primeira equação por $3y$ (que é o valor de x na segunda):

$$3y + y = 8 \iff 4y = 8 \implies y = 2$$

Portanto, o valor de x será: $x = 3y$ ou $x = 3 \times 2 = 6$.
Logo, a *solução* do Sistema é: (6, 2). Faça a prova . . .

2.º) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 4y = -12 \end{cases}$ $\qquad U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

"Tiramos" o valor de x na primeira equação, isto é:

$$x + 2y = 5 \iff x = 5 - 2y$$

e *substituímos* êsse valor de x na segunda equação:

$$3(5-2y) - 4y = -12 \iff 15 - 6y - 4y = -12 \iff -10y = -27 \implies$$
$$\implies y = \frac{27}{10} = \boxed{2,7}$$

O valor de x será:

$$x = 5 - 2y \text{ ou } x = 5 - 2 \times (2,7) = 5 - 5,4 = \boxed{-0,4}$$

Logo, a *solução* do Sistema é: (−0,4; 2,7)

Prova: $\begin{cases} -0,4 + 2 \times 2,7 = 5 \\ 3 \times (-0,4) - 4 \times 2,7 = -12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -0,4 + 5,4 = 5 & (V) \\ -1,2 - 10,8 = -12 & (V) \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{6} = 0 \end{cases}$ $\qquad U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Neste caso é preferível, antes de fazer a *substituição de variáveis*, "eliminar" os denominadores da segunda equação. Assim:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{6} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$$

"Tirando-se" o valor de y na primeira equação (é mais prático do que "tirar" o valor de x, cujo coeficiente é 2):

$-y = 3 - 2x \iff y = -3 + 2x$ (. . . lembre-se que trocamos o sinal de todos os têrmos . . .)

Substituindo-se êsse valor de y na segunda equação, vem:

$$6x - 4(-3 + 2x) = 0 \iff 6x + 12 - 8x = 0 \iff -2x = -12 \implies$$
$$\implies x = \boxed{6}$$

e, portanto: $y = -3 + 2 \times 6 = -3 + 12 = \boxed{9}$ *Solução:* (6, 9)

4.º) $\begin{cases} x = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ $\qquad U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

É só *substituir* x da primeira equação por 5 (... é o que diz a segunda ...):

$$2(5) - 3y = 1 \iff 10 - 3y = 1 \iff -3y = 1 - 10 \iff -3y = -9 \implies$$
$$\implies y = \boxed{3}$$

Portanto, *solução* do Sistema: (5, 3). Tire a *prova.*

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: **Término da "discussão" ...**

Observe com *atenção* o que aconteceria se você empregasse a *técnica* da *Substituição de variável* na solução dos seguintes sistemas:

1.º) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + y = 10 \end{cases}$ $\quad U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Teríamos: $x + y = 8 \iff x = 8 - y$ (... "tirando" o valor de x ...)

e $\quad (8 - y) + y = 10$ (... *substituindo* na segunda equação)

ou $\quad 8 - y + y = 10 \iff 0.y = 2$

Ora, você *já sabe* que não existe valor algum para y que, multiplicado por 0, dê 2, isto é: $\nexists y \mid 0.y = 2$. Da mesma forma você concluiria que *não existe* valor para x.

Nestas condições as equações são *incompatíveis* e o sistema é **impossível,** *não existindo,* portanto, *solução.*

2.º) $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$

Teríamos: $x + y = 8 \iff x = 8 - y$ (... "tirando" o valor de x ...)

e $\quad 2(8 - y) + 2y = 16$ (... *substituindo* na segunda equação)

ou $\quad 16 - 2y + 2y = 16 \iff 0.y = 0$

Como, *qualquer* que seja o valor de y, multiplicado por 0 dá 0, isto é, $\forall y,\ 0.y = 0$, o mesmo se poderia concluir para x, ou seja, $\forall x,\ 0.x = 0$.

Logo: *existem,* no $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, *infinitos pares de valôres* para x e para y que tornam *verdadeiras* as equações que compõem o sistema. Cada um dêsses pares constitui *solução* do sistema.

Nestas condições o sistema proposto é **possível** e **indeterminado,** existindo, portanto, **infinitas soluções.**

É natural que cada um dos sistemas de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis, resolvidos nos primeiros exemplos, onde era acusada a *existência* de um *único par* de valôres para x e y que tornavam verdadeiras as equações componentes, seja denominado **possível e determinado.**

Confere! ...

Discussão

Sistema simultâneo de 2 equações do 1.º grau com 2 variáveis

pode ser ↗ possível ↗ determinado $\implies$ única solução

possível ↘ indeterminado $\implies$ infinitas soluções

pode ser ↘ impossível $\implies$ não admite solução

II — Método de eliminação de variáveis por *adição*

Êste método vale-se dos dois princípios: **P.A.I.** (Princípio Aditivo da Igualdade) e **P.M.I.** (Princípio Multiplicativo da Igualdade). Um exemplo tornará fácil a aplicação dêsse método, considerado "muito rápido" para alguns casos.

Resolver, no $U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

Multiplicando-se a primeira equação por 3 (que é o coeficiente de x na segunda) e *multiplicando-se* a segunda equação por -2 (que é o *oposto* do coeficiente de x na primeira equação), obtemos o seguinte sistema *equivalente:*

$$\begin{matrix} \times 3 \\ \times -2 \end{matrix} \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + 9y = 21 \\ -6x + 10y = -2 \end{cases}$$

Adicionando-se, membro a membro, as equações dêsse sistema, a variável x será *eliminada*, pois:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} \cancel{6x} + 9y = 21 \\ -\cancel{6x} + 10y = -2 \end{cases} \\ \hline 19y = 19 \\ y = 1 \end{array}$$

Substituindo-se, na primeira equação, y pelo valor encontrado 1, temos:

$$2x + 3 \times 1 = 7 \iff 2x + 3 = 7 \iff 2x = 4 \implies x = 2$$

Nestas condições, resultou o sistema:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

que ainda é *equivalente* ao dado e de solução imediata: 2 e 1.

Logo: a *solução* do sistema proposto:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

é o *par ordenado* (2, 1).

Verificação: $\begin{cases} 2 \times 2 + 3 \times 1 = 7 \\ 3 \times 2 - 5 \times 1 = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4 + 3 = 7 \quad (V) \\ 6 - 5 = 1 \quad (V) \end{cases}$

NOTA: Da mesma maneira, pode-se determinar o valor de x, eliminando-se y das equações propostas no sistema.

Outro exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

O método da *adição* torna rapidíssima a solução dêsse sistema, pois basta *adicionar*, membro a membro, as equações, e veja o que vai dar . . .

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + \cancel{y} = 12 \\ x - \cancel{y} = 2 \end{cases} \\ \hline 2x \quad = 14 \\ \implies x = 7 \end{array}$$

Portanto, o valor de y será conhecido substituindo-se na primeira equação x por 7:

$$7 + y = 12 \iff y = 12 - 7 \implies y = 5$$

e a *solução* do sistema proposto é o *par ordenado* (7, 5).

Tire a prova.

III — Método da comparação de variáveis

Por êsse método, "tira-se" o valor de uma mesma variável, em cada uma das equações, e pela *propriedade transitiva da igualdade* obtém-se uma única equação do primeiro grau, com uma só variável e de resolução já conhecida.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases} \qquad U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

Tirando-se o valor de x na primeira equação: $x = \dfrac{7 - 3y}{2}$

Tirando-se o valor de x na segunda equação: $x = \dfrac{1 + 5y}{3}$

Pela propriedade *transitiva* da igualdade:

$$\frac{7 - 3y}{2} = \frac{1 + 5y}{3}$$

Resolvendo-se essa equação, temos:

$$\begin{aligned} 3(7 - 3y) &= 2(1 + 5y) \\ \iff 21 - 9y &= 2 + 10y \\ \iff -19y &= -19 \\ \implies y &= 1 \end{aligned}$$

Substituindo-se êsse valor de y na equação: $x = \dfrac{7 - 3y}{2}$, vem

$$x = \frac{7 - 3 \times 1}{2} = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Logo, a *solução* do sistema proposto é o *par ordenado* (2, 1).

4. Forma geral dos sistemas estudados; método dos determinantes — pequena "discussão"

Todos os sistemas de equações simultâneas do primeiro grau em duas variáveis (costumeiramente representando as *incógnitas* x e y) podem ser colocados sob a *forma geral:*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad \begin{matrix} U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ a,\ b,\ a',\ b',\ c,\ c' \in \mathbb{Q} \end{matrix}$$

Resolvendo-o por qualquer um dos métodos conhecidos, por exemplo o da *adição*, tem-se:

Para *eliminar* x

$$\begin{matrix} (\times -a') \\ (\times a) \end{matrix} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$+\begin{cases} \cancel{(-a'a)x} + (-a'b)y = -a'c \\ \cancel{(aa')x} + (ab')y = ac' \end{cases}$$
$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c$$

Para *eliminar* y

$$\begin{matrix} (\times b') \\ (\times -b) \end{matrix} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$+\begin{cases} (ab')x + \cancel{(b'b)y} = b'c \\ (-a'b)x + \cancel{(-b'b)y} = -bc' \end{cases}$$
$$(ab' - a'b)x = b'c - bc'$$

Supondo $(ab' - a'b) \neq 0$, obtêm-se as seguintes equações, que constituem um sistema *equivalente* ao proposto:

$$\begin{cases} x = \dfrac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \\[2ex] y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \end{cases}$$

e de *solução* imediata: $\left(\dfrac{b'c - bc'}{ab' - a'b},\ \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right)$

Essa solução expressa por letras — que em nossos exemplos representam números racionais — constitui a chamada *Fórmula de Cramer* para resolver sistemas do primeiro grau. Quando fazemos hipóteses sôbre os valôres que tais letras podem assumir, estamos efetuando uma pequena *discussão*. Assim, por exemplo, podemos formular as seguintes hipóteses:

1.ª) $ab' - a'b \neq 0$
2.ª) $ab' - a'b = 0$ e $b'c - bc' \neq 0$ (ou $ac' - a'c \neq 0$)
3.ª) $ab' - a'b = 0$ e $b'c - bc' = 0$ (ou $ac' - a'c = 0$)

Pela 1.ª hipótese, sendo $ab' - a'b \neq 0$, o sistema proposto diz-se *possível* e *determinado*, e a sua *única solução* é dada pela *Fórmula de Cramer*.

Pela 2.ª, sendo $ab' - a'b = 0$ e $b'c - bc' \neq 0$, o sistema diz-se *impossível* (não se pode dividir por 0), isto é, *não admite solução*, e as equações são *incompatíveis*.

Pela 3.ª hipótese, sendo $ab' - a'b = 0$ e $b'c - bc' = 0$, o sistema diz-se *indeterminado* e admite sempre *mais de uma solução*.

Pràticamente, os números: $ab' - a'b$, $b'c - bc'$ e $ac' - a'c$, que permitem determinar a *solução* (quando existe!) do sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

podem ser obtidos fàcilmente por intermédio do *método dos determinantes*.

Êstes *determinantes* são números resultantes dos seguintes quadros:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

denominados *matrizes quadradas* de segunda ordem, construídos quando se dispõem os coeficientes a, b, a' e b', bem como os têrmos c e c', em linhas e colunas.

Os valôres de Δ (lê-se: "delta"), Δx (lê-se: "delta x") e Δy (lê-se: "delta y") são, respectivamente, dados pela *diferença* entre os produtos dos elementos que se encontram em cada diagonal do quadrado que "forma" a matriz quadrada. Assim:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b' \\ a' & b' \end{vmatrix} \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} c & b' \\ c' & b' \end{vmatrix} \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a & c' \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

diagonal secundária $-$ $\quad +$ diagonal principal

$\Delta = ab' - a'b$ $\qquad \Delta x = b'c - bc'$ $\qquad \Delta y = ac' - a'c$

NOTA: A disposição dos sinais + e − nas diagonais *principal* e *secundária* significa que: devemos conservar o sinal obtido no produto dos elementos que compõem a diagonal principal e trocar o sinal do produto dos elementos que compõem a diagonal secundária.

Finalmente, dividindo-se Δx e Δy por Δ (quando possível), resulta o seguinte sistema:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

equivalente ao sistema proposto e cuja *solução* é o par:

$$\left(\frac{b'c - bc'}{ab' - a'b},\ \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right)$$

APLICAÇÕES: Resolver e discutir, no Conjunto-Universo $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, os seguintes sistemas:

1.º) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

Usando o *método dos determinantes:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 9 = -19$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 3 = -38 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 21 = -19$$

Logo:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-38}{-19} = 2 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-19}{-19} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \textit{solução:}\ (2, 1)$$

Discussão: Como $\Delta = ab' - a'b \neq 0$ (no exemplo: -19) o sistema proposto é *possível* e *determinado.*

2.º) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$

Temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0 \quad \textbf{(cuidado!)}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3$$

Discussão: Como $\Delta = 0$ e $\Delta x \neq 0$ e $\Delta y \neq 0$, o sistema é *impossível, não admitindo,* pois, *solução.*

3.º) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 3x - 9y = 6 \end{cases}$

Temos: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$ **(cuidado!)**

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

Discussão: Neste caso o sistema é *indeterminado,* isto é, admite uma *infinidade de soluções* [(2, 0), (5, 1), (8, 2), . . . por exemplo].

LEMBRETE AMIGO

Ao você resolver um sistema de equações simultâneas, escolha o método de resolução que melhor se adapte à "forma" do sistema proposto. Assim, por exemplo, para resolver o sistema:

$\begin{cases} y = x + 2 \\ 2x + 5y = 31 \end{cases}$ é aconselhável usar o método da *substituição,* pois o valor de uma das variáveis (y) já vem "declarado" e pronto para ser substituído . . .

Já para resolver o sistema:

$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ -3x + 5y = 9 \end{cases}$ o recomendado é o método da *adição,* que permite eliminar ràpidamente uma das variáveis . . .

enquanto que para resolver o sistema:

$\begin{cases} x = 3(y - 1) \\ x = \dfrac{y + 14}{2} \end{cases}$ é óbvio que o método a ser empregado deve ser o da *comparação* . . .

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 86

1. Usando o método que achar mais conveniente, resolver, no Conjunto-Universo $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, os seguintes sistemas:

1.º) $x + y = 10 \ \wedge \ x = y + 6$

2.º) $\begin{cases} 2y = 6 \\ 3x + 5y = 19 \end{cases}$

3.º) $2x - 3y = 1 \ \wedge \ x = 5$

4.º) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$

5.º) $\begin{cases} 6x + y = 8 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$

6.º) $3x - 2y = 1 \ \wedge \ 3y - 2x = 6$

7.º) $\begin{cases} 3(x - 1) + 4(y - 3) = 4 \\ 5x - 2y = -3 \end{cases}$

8.º) $x = 3(y - 1) \ \wedge \ x = \dfrac{y + 14}{2}$

(*Sugestão:* basta igualar os valôres de x . . .)

9.º) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = 0 \end{cases}$

10.º) $y = x \wedge \dfrac{2x + y}{3} + 5 = 0$

11.º) $a = b + 7 \ \wedge \ a + 3b = 3$

12.º) $\begin{cases} r = s - 3 \\ r + s = 1 \end{cases}$

13.º) $\begin{cases} 2z + 3t = 13 \\ 2z + 5t = 19 \end{cases}$

14.º) $2a - b = b + 4 \ \wedge \ a = 2b - 3$

15.º) $\begin{cases} \dfrac{2m-n}{3} - \dfrac{m+2n}{2} = 1 \\ \dfrac{m+n}{2} - \dfrac{n}{4} = 2 \end{cases}$

16.º) $p + 2q = 7 \ \wedge \ p + 3q = 7$

17.º) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3} - \dfrac{x+2y}{2} = 0 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{2} \end{cases}$

18.º) $y = x + 3 \ \wedge \ y = 2x + 6$

19.º) $\begin{cases} a = b + 4 \\ a = 2b \end{cases}$

20.º) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 5 \\ \dfrac{x+y}{4} - \dfrac{x-y}{3} = 10 \end{cases}$

2. Resolver (se quiser pode usar o *método dos determinantes*) e *discutir* os seguintes sistemas no Conjunto-Universo $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$:

1.º) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases}$

4.º) $\begin{cases} 3x = 4y \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{2y}{3} = 9 \end{cases}$

5.º) $\begin{cases} 3(x+3) = 4y \\ 12y - 5 = 9x \end{cases}$

6.º) $\begin{cases} 2a + 2b = 4 \\ a + b = 2 \end{cases}$

7.º) $\begin{cases} a = 2b \\ a = 3b \end{cases}$

8.º) $\begin{cases} a + b = 8 \\ \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} = 4 \end{cases}$

9.º) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

10.º) $\begin{cases} m = n \\ m + n = 10 \end{cases}$

11.º) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x = y - 1 \end{cases}$

12.º) $\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 8x - 6y = 13 \end{cases}$

13.º) $\begin{cases} \dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{9} = \dfrac{22}{21} \\ \dfrac{x}{8} - \dfrac{y}{12} = \dfrac{3}{8} \end{cases}$

14.º) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{7} = \dfrac{7x-5y}{6} + \dfrac{x+4}{4} \\ \dfrac{x-6y}{2} = \dfrac{x-2y}{7} + 4 \end{cases}$

15.º) $\begin{cases} y = x \\ \dfrac{2x-5y}{3} + \dfrac{3x+8y}{11} = 0 \end{cases}$

16.º) $\begin{cases} x + 5y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$

17.º) $\begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases}$

18.º) $\begin{cases} 3p - 4q = 4 \\ -6p + 12q = -12 \end{cases}$

19.º) $\begin{cases} a = \dfrac{b}{2} \\ b = 500 \end{cases}$

20.º) $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 12x + 8y = -4 \end{cases}$

PROBLEMAS VARIADOS — Grupo 87

Resolver os seguintes problemas por intermédio de sistemas de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis:

1.º) O número de alunos de duas classes reunidas é igual a 67. Sabendo-se que uma das classes tem 12 alunos a mais que a outra, quantos alunos tem cada classe?

2.º) A soma de dois números é 12 e um dêles é o triplo do outro. Quais são os números?

3.º) Por 5m de um certo tecido e 4m de outro pagaram-se NCr$ 58,40. Sabendo-se que por 4m do primeiro e 5m do segundo pagam-se NCr$ 56,80, dizer o preço do metro de cada tecido.

4.º) A diferença entre dois números é -4. O dôbro do maior somado com o menor é 5. Determinar êsses números.

5.º) Decompor 98 em duas partes tais que a maior delas seja igual à menor mais 14.

6.º) Determinar os preços de duas camisas, sabendo-se que a soma dêles é NCr$ 32,80 e a diferença NCr$ 5,60.

7.º) A idade de um pai somada à idade de seu filho é igual a 42 anos. Se a idade do pai é cinco vêzes a idade do filho, dizer a idade de cada um.

8.º) A soma das idades de dois alunos é 20. Daqui 3 anos o mais velho terá 6 anos mais que o mais môço. Qual a idade atual de ambos?

Sugestão: Representando a idade de um dos alunos por . . .: x

e a idade do outro por . . . .: y

temos: $x + y = 20$ (1.ª equação do sistema)

Como, daqui 3 anos, um terá: $x + 3$ e o outro: $y + 3$, a 2.ª equação do sistema, relativa à segunda parte do problema, será:

$$x + 3 = 6 + (y + 3)$$

Agora é só resolver o sistema. . .

9.º) A idade de Nélson, há 18 anos, era o dôbro da de Carlos. Daqui 9 anos a idade de Nélson será os $\frac{5}{4}$ da idade de Carlos. Que idade tem cada um dêles atualmente?

10.º) A soma das idades de dois irmãos é 17. Um dêles tinha 5 anos quando o outro nasceu. Qual a idade de cada um?

11.º) Numa tecelagem fizeram-se 360 peças de tecido, umas de 20m e outras de 30m. A soma total foi de 9.600m. Quantas peças de cada foram feitas?

Sugestão: Representando o n.º de peças de 20m por x e o n.º de peças de 30m por y, o sistema que traduz as duas partes do problema é:

$$\begin{cases} x + y = 360 \\ 20x + 30y = 9.600 \end{cases}$$

12.º) Uma pessoa paga NCr$ 100,00 com 40 notas, umas de NCr$ 1,00 e outras de NCr$ 5,00. Quantas notas há de cada espécie?

13.º) O perímetro de um retângulo é de 80m. O dôbro do comprimento é igual ao triplo da largura. Quanto medem o comprimento e a altura dêsse retângulo?

14.º) Repartir 310 em duas partes tais que, dividindo-se a primeira por 15 e a segunda por 30, a soma dos quocientes obtidos seja 20.

Sugestão: . . . a segunda equação do sistema é: $\frac{x}{15} + \frac{y}{30} = 20$

15.º) Um número é formado de dois algarismos, cuja soma dos valôres absolutos é 8. Se adicionarmos 18 a êsse número, o resultado obtido será um número cuja representação decimal está na ordem inversa daquela com que figurava o número dado. Qual é êsse número?

Sugestão: Êste problema é interessante por usar resultados já conhecidos no sistema de numeração decimal. Assim, representando o algarismo das *unidades*, do n.º procurado, por y e o das *dezenas* por x, a primeira equação do sistema é:

$$x + y = 8$$

Como um n.º de dois algarismos, no sistema de numeração decimal, tem a representação: $10 \times x + y$, a segunda equação do sistema, relativa à segunda parte do problema, é:

$$(10 \times x + y) + 18 = 10 \times y + x$$

Resolva-o . . .

16.º) Um número é formado de dois algarismos, e a soma dos seus valôres absolutos é 11. Quando se trocam as posições dêsses algarismos entre si, o número obtido ultrapassa de 5 o triplo do número dado. Qual é o número?

17.º) Foram propostos neste Livro, entre outros, 80 Grupos de Exercícios distribuídos entre os de Fixação e os de Aplicação. Os Grupos de Exercícios de Aplicação constituem $\frac{1}{7}$ dos de Fixação. Quantos Grupos há dessas duas espécies?

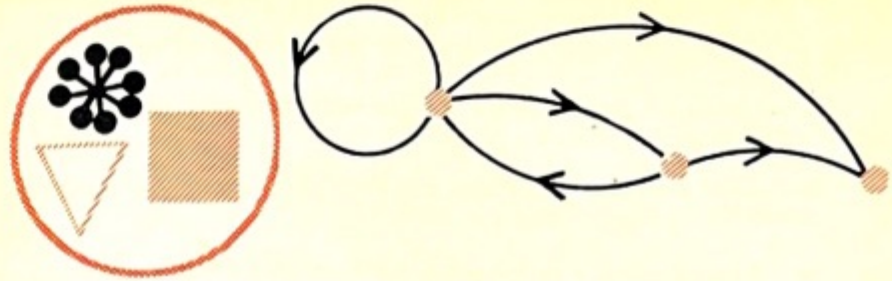
Não há *sugestão* . . .

18.º) A nave Apolo 10 (a mesma que em maio de 1969 permitiu ao homem se aproximar a 15km da Lua) apresentou os seguintes dados no momento em que entrou em órbita sôbre a Terra:

Soma do apogeu com o perigeu:	386km
diferença do apogeu para o perigeu:	12km

De quantos quilômetros foram o apogeu e o perigeu atingidos pela Apolo 10?

APÊNDICE



Estruturas matemáticas em outras disciplinas
Sistemas matemáticos — Aplicações

1. *Lembrando o estudo das* ***Relações binárias . . .***

Durante êste Curso, você já percebeu que as RELAÇÕES participam ativamente de seu *sistema mental.* Assim, por exemplo, ao dizer:

Paulo *é mais baixo que* Pedro

você está usando uma *relação de ordem* expressa pela sentença aberta:

. . . é mais baixo que . . .

Ora, quando, em Matemática, você enuncia que:

2 *é menor que* 5

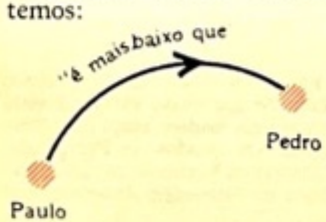
também está empregando uma *relação de ordem* dada pela sentença aberta:

. . . é menor que . . .

Então, as *relações:*

. . . é mais baixo que . . .   e   . . . é menor que . . .

têm a *mesma estrutura* (que é de ordem parcial). "Desenhando" os *pares* de pessoas (ou de números) que estão na *relação de ordem* estudada, temos:



onde a "flecha" relaciona dois elementos (no exemplo: (Paulo, Pedro) e (2, 5)).

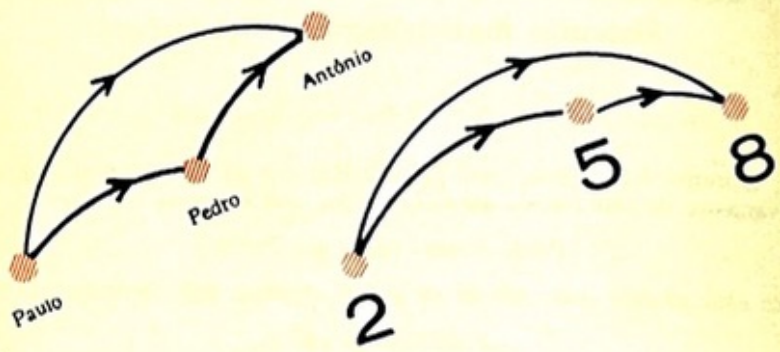
A *estrutura de ordem* comum a essas relações é caracterizada pela *propriedade transitiva*, isto é:

se Paulo *é mais baixo que* Pedro, e se Pedro *é mais baixo que* Antônio, então Paulo *é mais baixo que* Antônio;

e

se 2 *é menor que* 5, e se 5 *é menor que* 8, então 2 *é menor que* 8.

"Desenhando" (*):



Anàlogamente, as *relações:*

... *é irmão de* ... e ... *é paralelo a* ...

usadas quando você diz, por exemplo:

Radamés *é irmão de* Osvaldo e a reta r *é paralela* à reta s

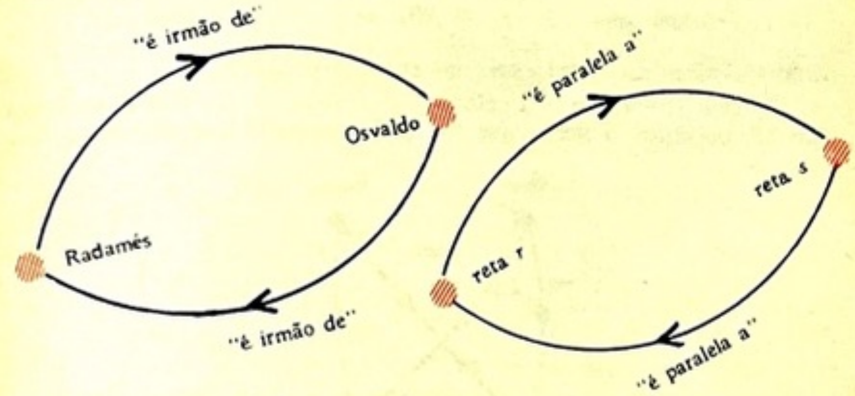
têm a *mesma estrutura* por possuírem exatamente as *mesmas propriedades:* simétrica e transitiva. A propriedade *simétrica* decorre de:

se Radamés *é irmão de* Osvaldo, então Osvaldo *é irmão de* Radamés;

se a reta r *é paralela* à reta s, então a reta s *é paralela* à reta r.

(*) O "desenho" ou "grafo" para representar RELAÇÕES BINÁRIAS, bem como as propriedades que caracterizam sua *estrutura*, é tratado de um modo extraordinário pelo Prof. Papy, da Universidade de Bruxelas, e responsável pela *modernização* do ensino da Matemática nas escolas secundária e normal da Bélgica. Os estudos do Prof. Papy constam pela primeira vez do Simpósio Internacional do Ensino da Matemática, realizado pela UNESCO, em Budapeste, 1962, e foram ratificados no Seminário Internacional de Eupen, Bélgica, em 1969.

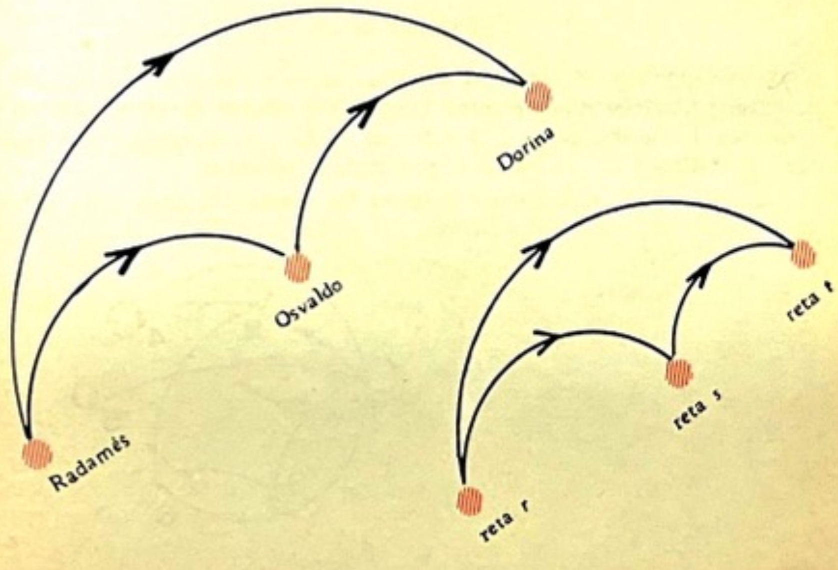
No "desenho", a *simetria* das relações é indicada por uma flecha que "vai" de um elemento a outro, e por outra que "volta" do segundo elemento para o primeiro.



Vale a propriedade *transitiva:*

se Radamés é irmão de Osvaldo, e *se* Osvaldo é irmão de Dorina, *então* Radamés é irmão de Dorina;

se a reta *r* é paralela à reta *s*, e *se* a reta *s* é paralela à reta *t*, *então* a reta *r* é paralela à reta *t*.

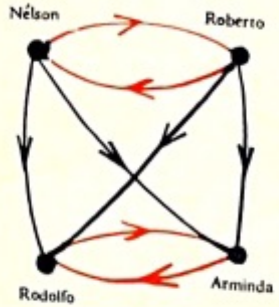


Suponhamos, agora, que o casal Rodolfo e Arminda tenha os filhos Nélson e Roberto. Vamos *desenhar*, em côres diferentes, as seguintes *relações:*

... *é casado com* ... ... *é filho de* ... ... *é irmão de* ...

ressaltando-lhes as propriedades no exemplo proposto:

Convém lembrar que a relação ... *é filho de* ... não é simétrica (não há, portanto, a flecha que "volta"), enquanto que as outras duas o são.



Consideremos, a seguir, um exemplo com *conjunto de números*. Seja o conjunto: {1, 2, 3, 4, 5, 6}, representado por pontos, dispostos em qualquer ordem.

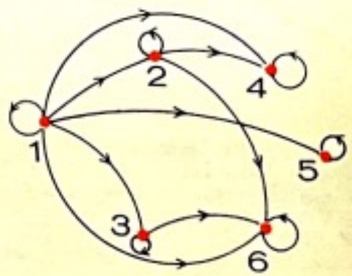
Vamos representar, com "desenho", a importante *relação* da Matemática:

... *é divisor de* ...

entre os elementos do conjunto dado.

Como *qualquer* número dêsse conjunto é *divisor de si mesmo* (1 é divisor de 1, 2 é divisor de 2, 3 é divisor de 3, ...), dizemos que a relação ... *é divisor de* ... possui a propriedade *reflexiva*.

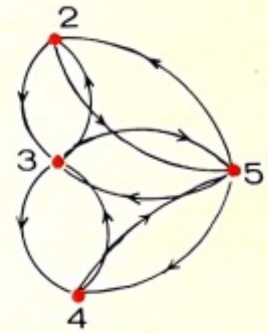
A propriedade *reflexiva* no desenho foi assinalada com um "giro" em tôrno de cada um dos números.



Com os elementos do conjunto {2, 3, 4, 5} vamos "desenhar" a relação:

... *é primo com* ...

Temos os seguintes *pares* de números dessa relação, que é *simétrica* (isto é, se 2 é primo com 3, então 3 é primo com 2, ...):



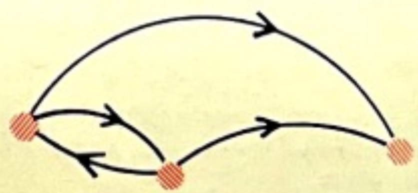
(2, 3)	(3, 2)
(2, 5)	(5, 2)
(3, 4)	(4, 3)
(3, 5)	(5, 3)
(4, 5)	(5, 4)

Observe que a relação ... *é primo com* ... *não é reflexiva* (ex.: 2 não é primo consigo mesmo) e *nem transitiva* (ex.: 2 é primo com 3, 3 é primo com 4 e, contudo, 2 não é primo com 4).

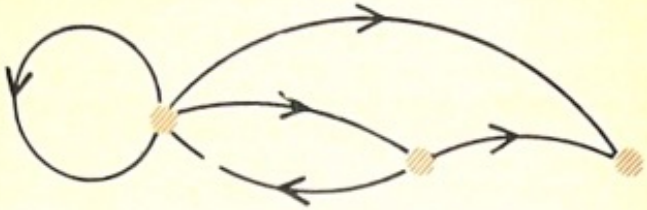
TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 88

1. Verifique as propriedades mencionadas (entre parênteses) de cada uma das seguintes *relações*, desenhando seus característicos e substituindo ... por elementos adequados:

   1.ª) Exemplo-modêlo: ... *é irmã de* ... (simétrica, transitiva)

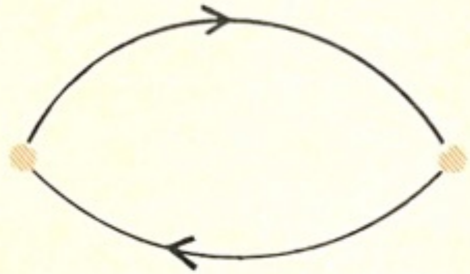


2.ª) Exemplo-modêlo: . . . *é tão alto como* . . . (reflexiva, simétrica, transitiva)



NOTA: A *relação* que possui as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva é denominada *relação de equivalência*.

3.ª) Exemplo-modêlo: . . . *é perpendicular a* . . . (simétrica)



4.ª) . . . *é igual a* . . . (reflexiva, simétrica, transitiva)

5.ª) . . . *é maior que* . . . (transitiva)

6.ª) . . . *é maior ou igual que* . . . (reflexiva, transitiva)

7.ª) . . . *é múltiplo de* . . . (reflexiva, transitiva)

8.ª) . . . *tem a mesma côr que* . . . (reflexiva, simétrica, transitiva)

9.ª) . . . *é pai de* . . . (?)

10.ª) . . . *é o dôbro de* . . . (?)

2. "Desenhe", para o conjunto: 2, 3, 5, 6, 8, 9, 12 (você pode dispor os pontos representativos dêsses números como quiser), as seguintes *relações:*

1.ª) . . . *é divisor de* . . .

2.ª) . . . *é primo com* . . .

3.ª) . . . *é maior que* . . .

4.ª) . . . *é múltiplo de* . . .

5.ª) . . . *é a metade de* . . .

6.ª) . . . *é menor que* . . .

3. Suponha que:

1.º) Carlos e João são irmãos e filhos do casal Antônio e Maria;

2.º) João e Luís são primos;

3.º) Pedro é pai de Antônio.

"Desenhe" as relações: . . . *é casado com* . . .; . . . *é filho de* . . .; . . . *é irmão de* . . .; . . . *é primo com* . . .; . . . *é neto de* . . .; . . . *é nora de* . . .

U = {0,1,2,3...   V = {2}

2. *Lembrando o estudo das sentenças abertas, do Conjunto-Universo e do Conjunto-Solução . . .*

Observe, com atenção, como a História, a Geografia, as Ciências, de um modo geral, apresentam *questões* de *mesma estrutura* que as equações estudadas em Matemática. Assim, por exemplo, seja na

1. História

A sentença aberta: "$\mathcal{X}$" *é o descobridor do Brasil*

onde a variável "$\mathcal{X}$" pode assumir valôres do Conjunto-Universo:

U = {Colombo, Camões, Vasco da Gama, Cabral, Pêro Vaz de Caminha}

Qual o Conjunto-Verdade ou o Conjunto-Solução dessa sentença? É o conjunto unitário:

V = {Cabral}

e, portanto, o *valor-verdade* ou *solução* da sentença proposta é *Cabral.*

2. Geografia

Seja a sentença aberta: "*Êstes*" *são os dois maiores rios da Terra*

onde: U = {Tocantins, Nilo, Volga, São Francisco, Amazonas, São Lourenço}

Como: V = {Nilo, Amazonas}

então os rios Amazonas e Nilo são os *valôres-verdade* da sentença dada.

3. Ciências

Seja a sentença aberta: "*Êle*" *é o maior peixe que vive no mar*
onde: U = [baleia, mero, tubarão, pescada, barracuda]
Temos: V = [tubarão] e, portanto, *valor-verdade: tubarão.*

NOTA: Não se esqueça que a baleia, apesar de viver no mar, não é peixe: *é mamífero!*

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 89

Determinar o valor-verdade (solução) das seguintes sentenças:

1.ª) "*Êle*" *proclamou a independência do Brasil*
U = [José Bonifácio, Pedro II, Tiradentes, Joaquim Nabuco, Pedro I]

2.ª) "*Êste*" *é o pico mais alto do Brasil*
U = [Bandeiras, Itatiaia, Neblina, Dedo de Deus, Agulhas Negras]

3.ª) "*Aquêle*" *é o oceano que banha os Estados do Pará, Maranhão e Piauí.*
U = [Atlântico, Pacífico, Índico, Antártico, Ártico]

4.ª) "*X*" *é o maior animal que vive no Pólo Norte*
U = [Urso, Foca, Pingüim]

5.ª) "*Y*" *é o maior animal que vive no mar*
U = [tubarão, baleia, mero, barracuda, pescada]

6.ª) "*Êles*" *foram os fundadores de Roma*
U = [Romeu, Julieta, João, Maria, Rômulo, Remo]

Ao lado figura o *quadro mural*, relativo à resolução de sentenças abertas em *outras disciplinas*, que constou da *I Semana de Matemática*, organizada pelas alunas das Primeiras Séries Ginasiais, do *Clube de Estudos Matemáticos*, do Colégio Sagrado Coração de Jesus — Campinas — S. P.

Data: 28 de setembro a 3 de outubro de 1964

Professôra: Maria de Lourdes L. de Castro.

3. **Ciências**

Seja a sentença aberta: *"Êle" é o maior peixe que vive no mar*
onde: U = [baleia, mero, tubarão, pescada, barracuda]
Temos: V = [tubarão] e, portanto, *valor-verdade: tubarão.*

NOTA: Não se esqueça que a baleia, apesar de viver no mar, não é peixe: *é mamífero!*

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 89

Determinar o valor-verdade (solução) das seguintes sentenças:

1.ª) *"Êle" proclamou a independência do Brasil*
U = [José Bonifácio, Pedro II, Tiradentes, Joaquim Nabuco, Pedro I]

2.ª) *"Êste" é o pico mais alto do Brasil*
U = [Bandeiras, Itatiaia, Neblina, Dedo de Deus, Agulhas Negras]

3.ª) *"Aquêle" é o oceano que banha os Estados do Pará, Maranhão e Piauí.*
U = [Atlântico, Pacífico, Índico, Antártico, Ártico]

4.ª) *"X" é o maior animal que vive no Pólo Norte*
U = [Urso, Foca, Pingüim]

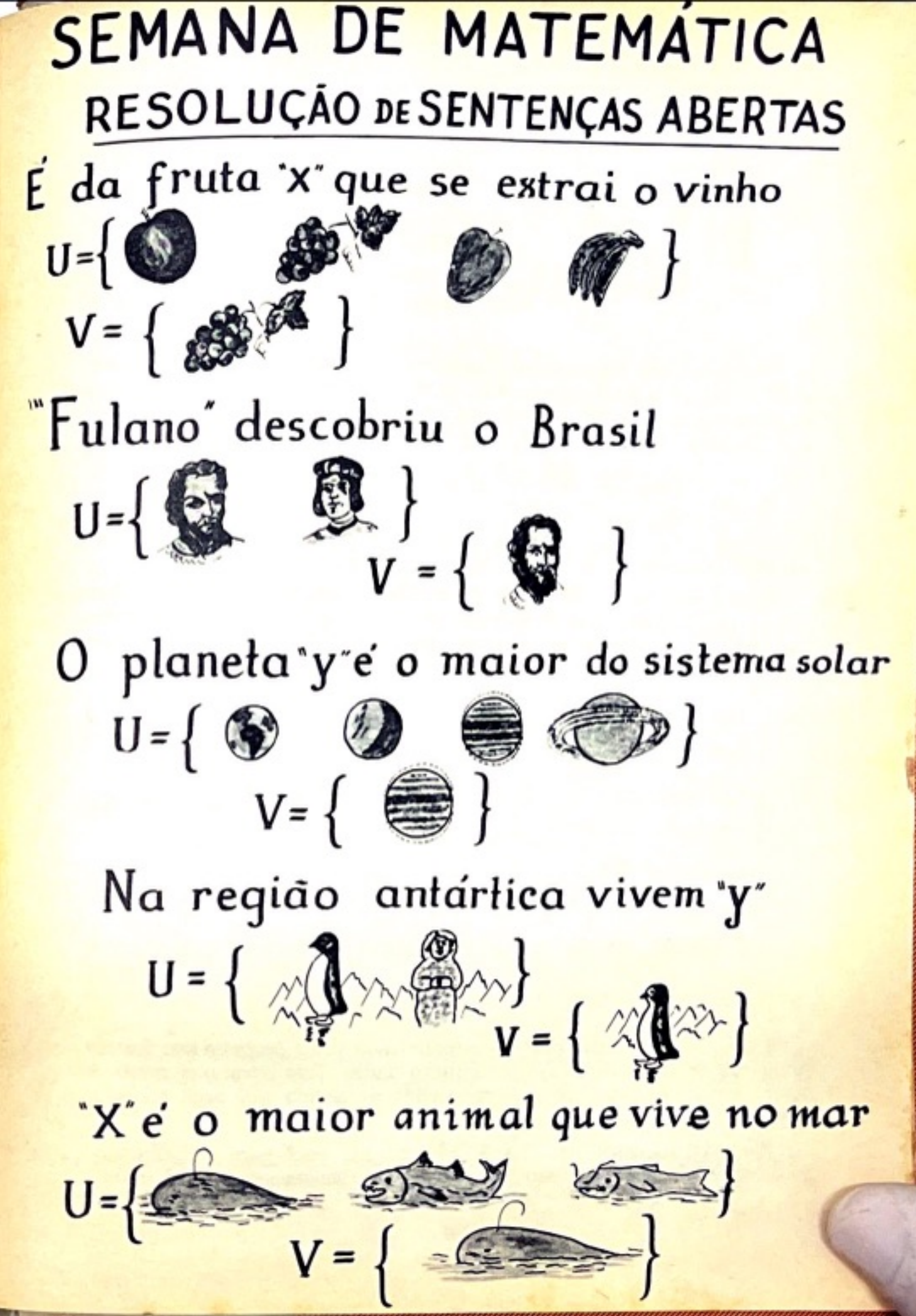
5.ª) *"Y" é o maior animal que vive no mar*
U = [tubarão, baleia, mero, barracuda, pescada]

6.ª) *"Êles" foram os fundadores de Roma*
U = [Romeu, Julieta, João, Maria, Rômulo, Remo]

Ao lado figura o *quadro mural*, relativo à resolução de sentenças abertas em *outras disciplinas*, que constou da *I Semana de Matemática*, organizada pelas alunas das Primeiras Séries Ginasiais, do *Clube de Estudos Matemáticos*, do Colégio Sagrado Coração de Jesus — Campinas — S. P.

Data: 28 de setembro a 3 de outubro de 1964

Professôra: Maria de Lourdes L. de Castro.



Sistemas Matemáticos

Aplicações

Desde o Curso Primário você está em contacto com *Sistemas Matemáticos* **(S. M.)**, isto é, um *conjunto* de elementos (quaisquer) e uma *operação* (qualquer) definida para os elementos dêsse conjunto. Assim, por exemplo, você conhece muito bem o S. M. :

$$\text{S. M.} \begin{cases} \textit{Conjunto: } \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\} \\ \textit{Operação: } \text{adição} \end{cases}$$

também indicado, abreviadamente, por: $(\mathbf{N}, +)$

Como você tem a liberdade de escolher o *conjunto que quiser*, bem como a de idealizar *qualquer operação* entre dois de seus elementos (operação binária), conclui-se que existem tantos S. M. *quantos se queiram.* Outros exemplos:

$$\begin{cases} \text{Conjunto: } \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} \\ \text{Operação: multiplicação} \end{cases} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{N}^*, \times)$$

$$\begin{cases} \text{Conjunto: } \mathbf{Z} = \{\ldots {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3, \ldots\} \\ \text{Operação: adição} \end{cases} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{Z}, +)$$

$$\begin{cases} \text{Conjunto: } \mathbf{Q}^* \\ \text{Operação: multiplicação} \end{cases} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{Q}^*, \times)$$

$$\begin{cases} \text{Conjunto: } \textit{rotações} \text{ de pontos no plano, em tôrno de um ponto} \\ \text{Operação: } \textit{composição} \text{ de rotações.} \end{cases} \quad \text{ou} \quad (\text{Rot}, \circ)$$

Os **S. M.** têm uma *estrutura* caracterizada pelas *propriedades* (estruturais) da operação definida no conjunto dado. Tais *estruturas* recebem nomes especiais, que você irá conhecendo à medida que seus conhecimentos se forem ampliando.

Todavia, as estruturas dos S. M. em que você vem trabalhando, desde a Escola Primária, são as **algébricas**. Que *estruturas* são essas?

Basta lembrar as propriedades das operações definidas nos conjuntos dados pelo S. M., para se obterem as seguintes *estruturas algébricas:*

1) de SEMIGRUPO, quando a operação possui a propriedade *Associativa*(*) *(A)*;
2) de MONÓIDE, quando a operação possui as propriedades *Associativa* (*A*) e *Elemento Neutro* (*N*);
3) de GRUPO, quando a operação possui as propriedades *Associativa* (*A*), *Elemento Neutro* (*N*) e *Elemento Inverso* (*I*).

Se, além dessas propriedades, a operação é *Comutativa* (C), então a estrutura algébrica é ainda *comutativa*. Assim, se o S. M. possui as propriedades:

A–C a estrutura algébrica é de SEMIGRUPO COMUTATIVO

A–N–C a estrutura algébrica é de MONÓIDE COMUTATIVO

A–N–I–C a estrutura algébrica é de GRUPO COMUTATIVO

Como exercício, determinemos o tipo da estrutura algébrica dos S. M., tomados como exemplos:

1. **(N, +)**

Como valem para êsse S. M., para *quaisquer* elementos do conjunto, as propriedades: *A–N–C*, isto é:

$(2+3)+5 = 2+(3+5)$ (*A*)
$2 + 0 = 2$ (*N*)
$3 + 4 = 4 + 3$ (*C*)

a sua estrutura é a de MONÓIDE COMUTATIVO

2. **(Z, +)**

É fácil concluir que a estrutura dêsse S. M. é a de GRUPO COMUTATIVO, pois:

$({}^{+}3 + {}^{-}2) + {}^{-}7 = {}^{+}3 + ({}^{-}2 + {}^{-}7)$ (*A*)
${}^{-}5 + 0 = {}^{-}5$ (*N*)
${}^{+}3 + {}^{-}3 = 0$ (*I*)
${}^{+}4 + {}^{+}3 = {}^{+}3 + {}^{+}4$ (*C*)

(*) A propriedade do *Fechamento* é considerada em nossos exemplos como *verdadeira* no exame da estrutura de um S. M., pois, caso contrário, não teria sentido tal exame.

Sistemas Matemáticos

Aplicações

Desde o Curso Primário você está em contacto com *Sistemas Matemáticos* **(S. M.)**, isto é, um *conjunto* de elementos (quaisquer) e uma *operação* (qualquer) definida para os elementos dêsse conjunto. Assim, por exemplo, você conhece muito bem o S. M. :

S. M. $\begin{cases} \textit{Conjunto: } \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\} \\ \textit{Operação: } \text{adição} \end{cases}$

também indicado, abreviadamente, por: $(\mathbf{N}, +)$

Como você tem a liberdade de escolher o *conjunto que quiser*, bem como a de idealizar *qualquer operação* entre dois de seus elementos (operação binária), conclui-se que existem tantos S. M. *quantos se queiram.* Outros exemplos:

$\begin{cases} \text{Conjunto: } \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} \\ \text{Operação: multiplicação} \end{cases}$ ou $(\mathbf{N}^*, \times)$

$\begin{cases} \text{Conjunto: } \mathbf{Z} = \{\ldots {}^-3, {}^-2, {}^-1, 0, {}^+1, {}^+2, {}^+3, \ldots\} \\ \text{Operação: adição} \end{cases}$ ou $(\mathbf{Z}, +)$

$\begin{cases} \text{Conjunto: } \mathbf{Q}^* \\ \text{Operação: multiplicação} \end{cases}$ ou $(\mathbf{Q}^*, \times)$

$\begin{cases} \text{Conjunto: } \textit{rotações} \text{ de pontos no plano, em tôrno de um ponto} \\ \text{Operação: } \textit{composição} \text{ de rotações.} \end{cases}$ ou $(\text{Rot}, \circ)$

Os **S. M.** têm uma *estrutura* caracterizada pelas *propriedades* (estruturais) da operação definida no conjunto dado. Tais *estruturas* recebem nomes especiais, que você irá conhecendo à medida que seus conhecimentos se forem ampliando.

Todavia, as estruturas dos S. M. em que você vem trabalhando, desde a Escola Primária, são as **algébricas.** Que *estruturas* são essas?

Basta lembrar as propriedades das operações definidas nos conjuntos dados pelo S. M., para se obterem as seguintes *estruturas algébricas:*

1) de SEMIGRUPO, quando a operação possui a propriedade *Associativa*(*) (*A*);
2) de MONÓIDE, quando a operação possui as propriedades *Associativa* (*A*) e *Elemento Neutro* (*N*);
3) de GRUPO, quando a operação possui as propriedades *Associativa* (*A*), *Elemento Neutro* (*N*) e *Elemento Inverso* (*I*).

Se, além dessas propriedades, a operação é *Comutativa* (*C*), então a estrutura algébrica é ainda *comutativa.* Assim, se o S. M. possui as propriedades:

A–C	a estrutura algébrica é de SEMIGRUPO COMUTATIVO
A–N–C	a estrutura algébrica é de MONÓIDE COMUTATIVO
A–N–I–C	a estrutura algébrica é de GRUPO COMUTATIVO

Como exercício, determinemos o tipo da estrutura algébrica dos S. M., tomados como exemplos:

1. $(\mathbf{N}, +)$

Como valem para êsse S. M., para *quaisquer* elementos do conjunto, as propriedades: *A–N–C*, isto é:

$(2+3)+5 = 2+(3+5) \quad (A)$
$2 + 0 = 2 \quad (N)$
$3 + 4 = 4 + 3 \quad (C)$

a sua estrutura é a de MONÓIDE COMUTATIVO

2. $(\mathbf{Z}, +)$

É fácil concluir que a estrutura dêsse S. M. é a de GRUPO COMUTATIVO, pois:

$({}^+3 + {}^-2) + {}^-7 = {}^+3 + ({}^-2 + {}^-7) \quad (A)$
${}^-5 + 0 = {}^-5 \quad (N)$
${}^+3 + {}^-3 = 0 \quad (I)$
${}^+4 + {}^+3 = {}^+3 + {}^+4 \quad (C)$

(*) A propriedade do *Fechamento* é considerada em nossos exemplos como *verdadeira* no exame da estrutura de um S. M., pois, caso contrário, não teria sentido tal exame.

NOTA: A estrutura de *Grupo Comutativo*, das mais importantes em Matemática e que possui o mesmo tipo de estrutura de sua *mente*, recebe também o nome de *Grupo Abeliano*, em homenagem ao jovem matemático Abel que morreu com 27 anos.

3. $(\mathbb{Q}^*, \times)$

Verifique você mesmo que a estrutura dêsse S. M. é de *Grupo Comutativo*. Não se esqueça: $\mathbb{Q}^*$ significa o conjunto dos números racionais relativos, com exceção do 0.

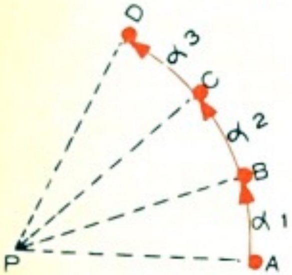
4. S. M. $\begin{cases} \text{Conjunto: } \textit{rotações} \text{ de pontos no plano, em tôrno de um ponto } P \\ \text{Operação: } \textit{composição} \text{ de rotações (indicação: o)} \end{cases}$

NOTA: Entende-se por *composição* de rotações (operação aqui indicada por o) a sucessão de duas rotações consecutivas, num dado sentido (p. ex.: anti-horário).

Assim, pela rotação α, em tôrno de P, leva-se o ponto A ao ponto B e a operação:

$$\alpha_1 \circ \alpha_2$$

significa que, compondo a rotação α_1 com a rotação α_2, leva-se o ponto A ao ponto C(*).



Propriedades:

(*A*) $(\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ \alpha_3 = \alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ \alpha_3)$

(*N*) $\alpha_1 \circ 0 = \alpha_1$ (0 é a rotação *nula*)

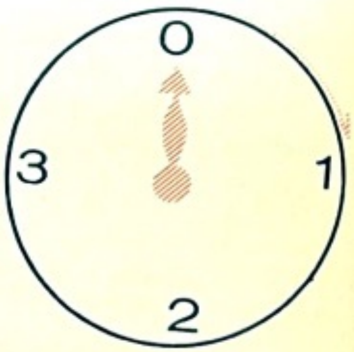
(*I*) $\alpha_1 \circ (-\alpha_1) = 0$ ($-\alpha_1$ é a rotação "inversa" de α_1)

(*C*) $\alpha_1 \circ \alpha_2 = \alpha_2 \circ \alpha_1$

Logo: a estrutura do S. M. estudado é a de GRUPO COMUTATIVO.

Consideremos, agora, alguns SISTEMAS MATEMÁTICOS FINITOS, isto é, constituídos por conjuntos com um número *finito* de elementos.

Seja, por exemplo, o S. M. formado pelo conjunto [0, 1, 2, 3] e da operação "adição-círculo", definida sôbre um "relógio" especial que possui sòmente *um ponteiro;* marque *quatro* minutos: 0, 1, 2 e 3, onde 0 é o ponto inicial e também final de uma *rotação completa.*



(*) A rigor, o composto de α_1 com α_2 significa aplicar primeiramente α_2 e a seguir α_1, embora se escreva: $\alpha_1 \circ \alpha_2$.

Imprimindo ao ponteiro um movimento (no sentido horário), cada espaço percorrido, que será entendido como uma rotação (por exemplo, entre 0 e 1, 1 e 2, . . .), representa um quarto da rotação completa do mostrador. Logo, no

S. M. $\begin{cases} \text{Conjunto: } [0, 1, 2, 3] \\ \text{Operação: } \otimes \end{cases}$

que significa:

$$2 \otimes 3 = ?$$

Basta fazer o ponteiro, a partir de 0, percorrer *dois* espaços e pará-lo em 2; a seguir, percorrer mais *três* espaços e encontrar o resultado 1.

Logo: $2 \otimes 3 = 1$, que é o resultado de uma "nova" adição!

Constate você mesmo que:

$$2 \otimes 2 = 0 \qquad 3 \otimes 1 = 0 \qquad 1 \otimes 2 = 3$$

e fazendo tôdas as composições (isto é, operando com dois elementos quaisquer do conjunto), "teste" a tábua operatória:

⊗	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Qual é a *estrutura* dêsse S. M. de "bôlso"?

É fácil concluir que a estrutura é a de *Grupo Comutativo*, pois:

(*A*) $(2 \otimes 3) \otimes 1 = 2 \otimes (3 \otimes 1)$ (experimente . . .)

(*N*) $3 \otimes 0 = 3$

(*I*) $1 \otimes 3 = 0$ (o "inverso" de 1 é 3, de 0 é 0, de 2 é 2, de 3 é 1, pois a soma dêles dá o neutro 0)

(*C*) $2 \otimes 3 = 3 \otimes 2$

APLICAÇÕES:

1.ª) O cálculo usual da adição de horas (que pertence a um sistema de medidas não-decimal) se enquadra dentro de uma "adição especial". O S. M. correspondente é:

$\begin{cases} \text{Conjunto: } [1h, 2h, 3h, 4h, \ldots 12h] \\ \text{Operação: } \otimes \end{cases}$

Então: 7h + 8h = 3h (verifique . . .)

NOTA: Quando dizemos 15h referimo-nos, na verdade, às 3h registradas pelo relógio comum. É fácil descobrir uma "técnica" para êsses cálculos. Observe bem o *resto* da divisão de 15 por 12:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 12 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

2.º) O mesmo fato ocorre com as contagens que envolvem *dias*, como êste por exemplo:

7 dias depois do dia 28 de julho, que dia será?

Temos o seguinte S. M.:

$\begin{cases} \text{Conjunto: } \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots 31\} \\ \text{Operação: } \otimes \end{cases}$

Cálculo: $28 \otimes 7 = 4$ Técnica: $\begin{array}{r|l} 35 & 31 \\ \hline 4 & 1 \end{array}$

Logo: 7 dias depois do dia 28 de julho será o dia 4 de agôsto.

3.º) *Que dia será cinco dias depois de quarta-feira?*

A resposta será dada através de uma "*nova tabuada*", onde:

domingo 1
2.ª feira 2
3.ª feira 3
4.ª feira 4
5.ª feira 5
6.ª feira 6
Sábado 7

⊗	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	1
2	3	4	5	6	7	1	2
3	4	5	6	7	1	2	3
4	5	6	7	1	2	3	4
5	6	7	1	2	3	4	5
6	7	1	2	3	4	5	6
7	1	2	3	4	5	6	7

Então: $\underset{\text{4.ª feira}}{4} \otimes \underset{\text{5.ª feira}}{5} = \underset{\text{2.ª feira}}{2}$

Logo: cinco dias depois de 4.ª feira será 2.ª feira.

1. Determinar o tipo da estrutura algébrica dos seguintes Sistemas Matemáticos:

1.º) $(N, \times)$ 2.º) $(Z, +)$ 3.º) $(N^*, +)$ 4.º) $(N^*, \times)$
5.º) $(\mathbf{Q}, +)$ 6.º) $(\mathbf{Q}, \times)$ 7.º) $(\mathbf{Q}^*, +)$ 8.º) $(\mathbf{Q}^*, \times)$

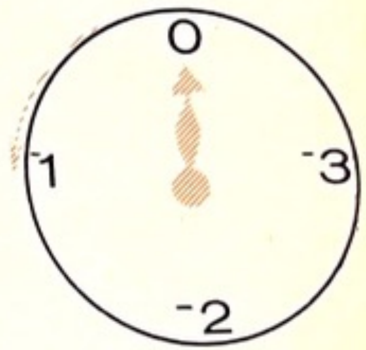
2. Qual é a estrutura do seguinte S. M.:

$\begin{cases} \text{Conjunto: deslocamentos de pontos numa reta} \\ \text{Operação: composição de deslocamentos} \end{cases}$

NOTA: Considere cada deslocamento de um ponto numa reta como se fôsse o trajeto percorrido por um carrinho, numa estrada, de um local para outro.

3. Construa a tábua operatória do seguinte S. M., através do "relógio" ao lado, cujo ponteiro gira no sentido anti-horário:

○	$^-3$	$^-2$	$^-1$	0
$^-3$	·	$^-1$	·	$^-3$
$^-2$	·	0	·	·
$^-1$	0	·	·	·
0	·	·	$^-1$	·

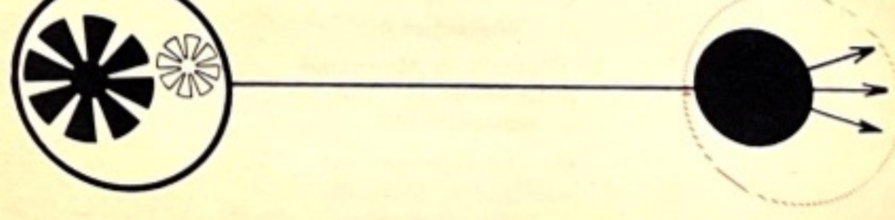


Ex.: $^-1 \circ {}^-2 = {}^-3$
$^-1 \circ {}^-3 = 0$
$^-2 \circ {}^-3 = {}^-1$

Qual é a estrutura dêsse S. M.?

4. Responda:

1.º) Que dia será 11 dias depois de 27 de março?
2.º) Que dia da semana será 9 dias depois de 3.ª feira?
3.º) Que dia da semana será 6 dias depois de sábado?
4.º) Que dia da semana será 12 dias depois do domingo?



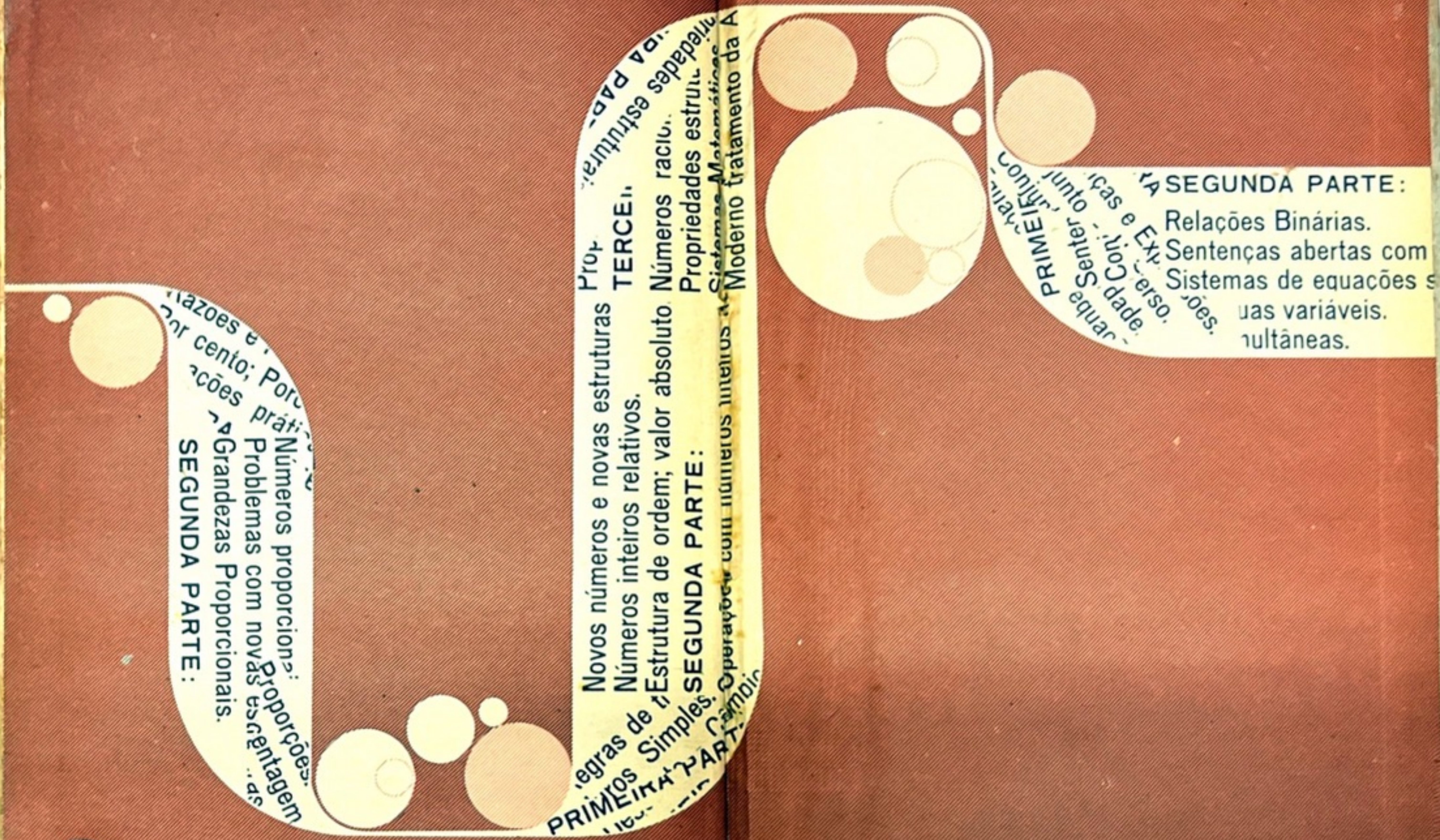
2.ª OMESP

Homenagem à

2.ª Olimpíada de Matemática
do Estado de São Paulo
outubro de 1969

★

Obra executada nas oficinas da
SÃO PAULO EDITORA S. A.
São Paulo — Brasil


SEGUNDA PARTE:
Relações Binárias.
Sentenças abertas com
Sistemas de equações
Novos números e novas estruturas
Números inteiros relativos.
Estrutura de ordem; valor absoluto
SEGUNDA PARTE:
Propriedades estru
Moderno tratamento da A
Números proporciona
Problemas com novas
Grandezas Proporcionais.
SEGUNDA PARTE:
Proporções.
PRIMEIRA PARTE

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

COMPANHIA EDITORA NACIONAL