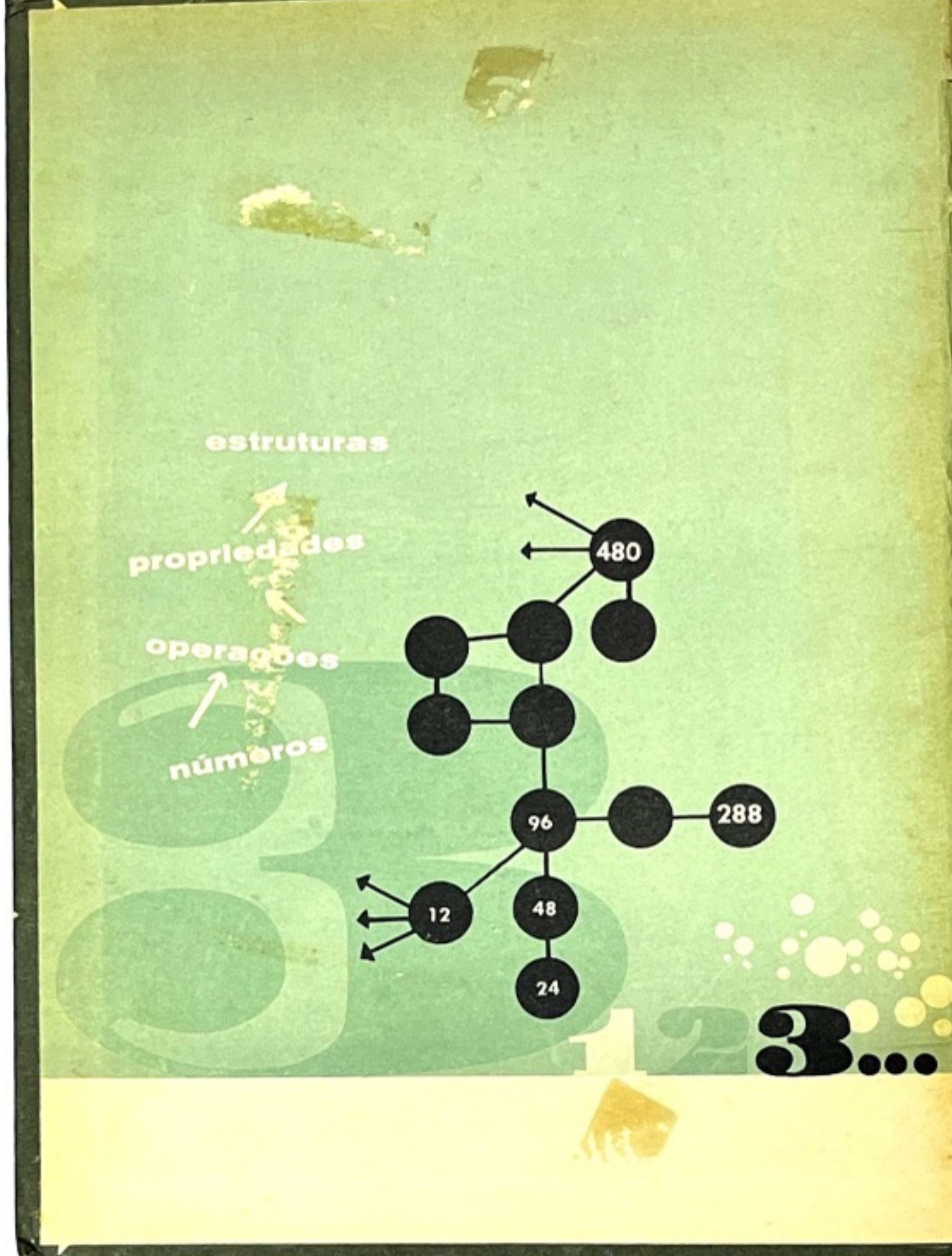
OSVALDO SANGIORGI

VOLUME 1

para os ginásios

matemática curso moderno


estruturas
propriedades
operações
números
480
96
288
12
48
24
123...

Homenagem à *1.ª Olimpíada de Matemática do Estado de São Paulo* (1967), realização do CEEM em convênio com a Chefia de Serviço do Ensino Secundário e Normal do Departamento de Educação de São Paulo.

MATEMÁTICA
CURSO MODERNO
1

Osvaldo
SANGIORGI
Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, da Universidade de São Paulo

MATEMÁTICA

curso moderno

para os ginásios

1.º volume

Companhia Editora Nacional

Prêmio *Jabuti* (1963) em Ciências Exatas,
outorgado pela
Câmara Brasileira do Livro.

ilustrações de
NESTOR BATTAGLIERO
e
JOEL LINK

13.ª edição, revista e ampliada

1969
Impresso no Brasil

PROGRAMA
para um
CURSO MODERNO
de
MATEMÁTICA
*(Para os cursos ginasiais)**

Os seguintes assuntos, para serem desenvolvidos na Primeira Série dos Ginásios, são distribuídos nos seguintes itens:

1. noções de conjunto; operações com conjuntos; relações;
2. número natural; numerais de um número — sistemas de numeração — bases;
3. operações (operações inversas) com os números naturais — propriedades estruturais;
4. divisibilidade — múltiplos e divisores; números primos; fatoração completa;
5. conjunto dos números racionais; números fracionários — operações (operações inversas); propriedades estruturais;
6. estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais — sistemas de medidas: decimal e não-decimais.

Tais itens, explicados neste Volume 1, fazem parte da programação dos *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios*, ratificados no 5.º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, promovido pelo GEEM de São Paulo (janeiro de 1966, São José dos Campos — SP), bem como seguem as sugestões para o *Desenvolvimento da Matemática para a Primeira Série Ginasial*, publicadas pelo Departamento de Educação do Estado de São Paulo (D. O. de 19-1-65) e, de um modo geral, atendem às *Recomendações sôbre Currículos para o Ensino Médio* da Segunda Conferência Interamericana de Educação Matemática (dezembro de 1966, Lima, Peru).

(*) Designação genérica do 1.º ciclo dos cursos médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais, os Ginásios Comerciais e os Ginásios Pluricurriculares.

Do autor:

Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática* – *1*).

Matemática, 2 — Curso Moderno.

Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática* – 2).

Matemática, *3* — Curso Moderno.

Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática* – *3*).

Matemática, *4* — Curso Moderno.

Guia para uso dos *Professôres* (para a *Matemática* – *4*).

Matemática e Estatística, para os Institutos de Educação e Escolas Normais.

Programa de Admissão — parte da Matemática Moderna para os ginásios (em colaboração).

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639

SÃO PAULO 2, SP

Uma palavra para você que inicia o ginásio . . .

Meu caro estudante:

Você, provàvelmente, já foi iniciado no estudo da *Matemática* de um modo diferente daquele pelo qual seus irmãos e colegas mais velhos estudaram.

Sabe por quê?

Porque *Matemática*, para êles, na maioria das vêzes, era um "exagêro de cálculos", "problemas complicados, trabalhosos e fora da realidade" que a tornavam, quase sempre, um *fantasma!*

Hoje, na Era Atômica em que vivemos, isto é trabalho para as máquinas (os fabulosos computadores electrônicos de que tanto falam os jornais . . .), razão pela qual você vai aproveitar o seu precioso tempo aprendendo o verdadeiro *significado* e as belas *estruturas* da *Matemática Moderna*. Então, você perceberá, por exemplo, uma certa *semelhança* entre o modo de raciocinar em *Matemática* e nas outras matérias de seus estudos, como Português, História, Geografia, Ciências, Música, Educação Física, etc.

Fazer conhecer *Matemática* dessa forma é o principal objetivo dêste livro em que você vai começar a estudar e que se completará com o auxílio indispensável de seu professor.

Vamos, pois, estudar *Matemática* com prazer!

Felicidades e até o próximo ano.

OSVALDO SANGIORGI

Índice da matéria

CAPÍTULO 1

Conjuntos
e
Relações

Noção de conjunto
Operações com conjuntos
Aplicações

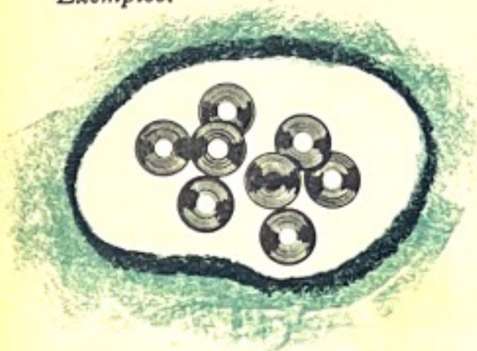
1ª PARTE

conjuntos e relações

1. *Noção de conjunto; relação de "pertinência"*

Tôda coleção de objetos, pessoas, animais ou coisas, constitui um *conjunto.*

Exemplos:



Conjunto de discos da minha coleção.

Conjunto dos alunos de minha classe que possuem 11 anos. Você *pertence* a êsse conjunto?

Conjunto das vogais de nosso alfabeto. Será que a letra *b pertence* a êsse conjunto?

Costuma-se dizer também que:

— o disco é um *elemento* do *conjunto* dos discos ou o disco *pertence* ao conjunto dos discos;

— a letra *a pertence* ao *conjunto* das vogais e a letra *b não pertence* a êsse *conjunto*.

E você, *pertence* ou *não pertence* ao *conjunto* dos alunos de sua classe que têm 11 anos?

Observação: Um conjunto fica *conhecido* quando você sabe se um dado objeto, pessoa, animal ou coisa, *pertence* ou *não pertence* a êsse conjunto. Assim, por exemplo, se você tiver 12 anos, então *não pertence* ao conjunto dos alunos de sua classe que têm 11 anos. Por outro lado, se o Paulo é um coleguinha de sua classe que tem 11 anos, então êle *pertence* àquele conjunto.

Outro exemplo: 8 é um elemento que *não pertence* ao conjunto dos *números ímpares*. Por quê? Porque 8 é um número par.

E o número 7? Êsse elemento *pertence* ao conjunto dos números *ímpares* porque é ímpar. É por essa razão que você *conhece* e *distingue* o conjunto dos números pares do conjunto dos números ímpares.

Já não é mais novidade para você que, em Matemática, a palavra *conjunto* tem um significado mais amplo do que o usado na linguagem comum, onde "conjunto" é empregado sòmente quando nos referimos a "mais de um elemento".

Assim, o nôvo significado da palavra *conjunto* surge ao observar, atentamente, os conjuntos "desenhados":

Conjunto de estrêlas

Conjunto de passarinhos

Conjunto de flôres (não estranhe que só tenha **uma** flor)

Conjunto de "nada", isto é, **vazio!**

Temos, então, exemplos de conjuntos com **muitos** elementos, com **poucos** elementos e com **nenhum** elemento. Assim são os conjuntos em Matemática . . .

Como nem sempre é possível "desenhar" conjuntos, costuma-se colocar os nomes de seus elementos entre *chaves* e usar uma das representações:

1.ª) *Nomeando*, um a um, os elementos do conjunto;

2.ª) indicando uma *propriedade comum* a seus elementos.

1.ª) **Nomeando,** um a um, os elementos do conjunto

Os elementos do conjunto recebem *nomes* e são separados por uma vírgula.

Exemplos:

1. *Conjunto* das vogais: $\{a, e, i, o, u\}$

Para indicar que um elemento *pertence* a um dado conjunto, usa-se o símbolo:

$\in$ (lê-se: "pertence")

A *negação* de *pertence* é feita pelo símbolo:

$\notin$ (lê-se: "não pertence")

Dêsse modo:

$a \in \{a, e, i, o, u\}$ (lê-se: "*a* pertence ao conjunto . . .")

$b \notin \{a, e, i, o, u\}$ (lê-se: "*b* não pertence ao conjunto . . .")

são *sentenças verdadeiras* dentro da atual linguagem da Matemática.

Observações:

1.ª) A **ordem** com que os elementos *nomeados* figuram no conjunto pode ser *qualquer*, pois o conjunto continua o mesmo por possuir os *mesmos elementos*. Assim, tanto faz escrever:

$\{a, e, i, o, u\}$ ou $\{e, a, o, i, u\}$ ou $\{u, i, a, o, e\}$

para representar o *conjunto das vogais*.

2.ª) Por outro lado, como os elementos pertencentes a um dado conjunto são sempre *distintos*, **não se deve repetir** o mesmo elemento na representação do conjunto. Logo: Todo elemento é *nomeado uma única vez!*

No caso do conjunto das vogais, a letra *a* pertence uma única vez a êsse conjunto, por isso não se deve escrever, por exemplo: $\{a, a, a, e, i, i, o, u, u\}$, porque o conjunto das vogais continua sendo sempre: $\{a, e, i, o, u\}$.

2. *Conjunto* dos meses cujos nomes comecem pela letra *j:*

{junho, janeiro, julho}

Agora:

janeiro $\in$ {junho, janeiro, julho}

fevereiro $\notin$ {junho, janeiro, julho}

são *sentenças verdadeiras*, enquanto que:

janeiro $\notin$ {junho, janeiro, julho}

fevereiro $\in$ {junho, janeiro, julho}

são *sentenças falsas*.

3. *Conjunto* dos números pares *maiores* que 2 e *menores* que 10:

$\{4, 6, 8\}$

Você sabe que o primeiro número par maior que 2 é o 4, depois vem o 6, o 8 e . . . chega, porque nesse conjunto o número par tem que ser menor que 10.

Responda você: 10 ∈ {4, 6, 8} é uma sentença *verdadeira* ou *falsa?*

2.º) INDICANDO UMA **propriedade comum** A SEUS ELEMENTOS

Nesta representação os elementos estão indicados por uma *propriedade comum* a todos êles.

Exemplos:

1. {vogais} (lê-se: "conjunto das vogais")

A propriedade comum que liga os elementos do conjunto é a de "ser vogal". Também, agora, as sentenças:

$a \in$ {vogais} e $b \notin$ {vogais} são *sentenças verdadeiras*

2. {dias da semana} (lê-se: "conjunto dos dias da semana")

A representação dêsse mesmo conjunto, *nomeando* seus elementos, é: {domingo, segunda, têrça, quarta, quinta, sexta, sábado}

OBSERVAÇÃO: Você pode usar qualquer uma das duas representações ensinadas para representar um conjunto. No caso de o conjunto possuir "muitos" elementos, é mais cômodo representá-lo pela indicação de uma *propriedade comum* do que pela *nomeação* de seus elementos, um a um.

Por exemplo, pode-se representar o conjunto dos *números naturais maiores que 50* assim:

{números naturais maiores que 50} (dando a *propriedade comum* a todos os elementos: "ser maior que 50")

Se você "tentasse" *nomear*, um a um, os elementos dêsse conjunto, começaria escrevendo:

{51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, . . .}

As reticências escritas depois do último elemento que se representa significam que não é possível escrever o "último" número natural do conjunto pedido, pois sempre se pode escrever o "seguinte".

Note bem que êste é um primeiro exemplo de CONJUNTO INFINITO, onde seria impossível nomear todos os elementos . . .

Outro exemplo de *conjunto infinito:*

{números ímpares} ou {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, . . .}

Responda se é verdadeira ou falsa a sentença:

4 ∈ {números ímpares}

ATENÇÃO: Os conjuntos que não são *infinitos* denominam-se *finitos*. A maioria dos exemplos até agora estudados são de conjuntos *finitos*.

O conjunto {3, 4, 7, 8} é *finito* ou *infinito?*

Como êsse conjunto possui sòmente os elementos 3, 4, 7 e 8, êle é *finito*.
E o conjunto

{números pares} ou {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, . . .}?

É fácil concluir que é *infinito* (experimente *nomear* todos os seus elementos . . .).
Já o conjunto:

{planêtas do Sistema Solar}

é *finito*, pois você pode *nomear* todos os seus elementos:

{Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno, Plutão}

2. *Conjuntos unitários*

Escreva, *nomeando* os elementos, o seguinte conjunto: *dias da semana cujos nomes comecem pela letra d.*

Você sabe que, na língua portuguêsa, há um único dia da semana cujo nome começa pela letra *d*. É o *domingo*. Logo, êsse conjunto possui *sòmente um elemento:*

{domingo}

Os conjuntos de *um só elemento* são chamados *conjuntos unitários*.
Outros exemplos de *conjuntos unitários:*

1. Conjunto das capitais do Estado do Paraná:

{Curitiba}

2. Conjunto dos números ímpares maiores que 4 e menores que 6:

{5}

3. *Conjunto vazio*

Considere, agora, o seguinte conjunto: *dias da semana cujos nomes comecem por x.*

Como não existe nenhum dia da semana, na língua portuguêsa, cujo nome comece por *x*, então o conjunto é . . . *sem elementos*, isto é:

{ }

O conjunto *sem elementos* é denominado *conjunto vazio*.
Outros *conjuntos vazios:*

1. Conjunto dos alunos do Ginásio com menos de 8 anos de idade. É, evidentemente . . . *vazio:* { }.

NOTA: A representação do *conjunto vazio* é feita também pelo símbolo $\varnothing$. Portanto: { } e $\varnothing$ representam a mesma coisa.

2. Conjunto dos números pares maiores que 4 e menores que 6.

Resposta: $\varnothing$ (. . . não há número *par* que seja ao mesmo tempo maior que 4 e menor que 6).

OBSERVAÇÃO: Só podemos conceber um *único* conjunto *vazio;* pouco importa saber se êle é vazio de pessoas, de números, de países ou de quaisquer outros elementos. Logo: $\varnothing$ *é único!*

LEMBRETE AMIGO

Em Matemática você encontra, entre outros:

o conjunto **vazio** (. . . *não possui* elementos)
os conjuntos **unitários** (. . . possuem *um só* elemento)
os conjuntos **infinitos** (. . . possuem um número *sem-fim* de elementos)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 1

Escrever os seguintes conjuntos, *nomeando* seus elementos entre chaves, onde couber:

1. Conjunto dos dias da semana cujos nomes comecem por *s*.
2. Conjunto dos números ímpares menores que 10.
3. Conjunto das consoantes do alfabeto português.
4. Conjunto das estações do ano.
5. Conjunto de cinco marcas de automóveis fabricados no Brasil.
6. Conjunto dos números pares maiores que 6 e menores que 10.
7. Conjunto das mulheres que foram presidente da República do Brasil.
8. Conjunto de seis frutas cujos nomes comecem por *m*.
9. Conjunto dos planêtas do Sistema Solar cujos nomes comecem por *u*
10. Conjunto dos Estados brasileiros banhados pelo Oceano Atlântico.
11. Conjunto dos Estados brasileiros banhados pelo Oceano Pacífico.
12. Conjunto dos números naturais desde 10 até 13.
13. Conjunto dos números naturais maiores que 100. (Cuidado: êsse conjunto é infinito . . .).
14. Conjunto dos números naturais menores que 10. (. . . êste não é).
15. Conjunto dos números que sejam pares e ímpares ao mesmo tempo. (. . . êste é fácil).

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 2

1. Dar dois exemplos de *conjunto vazio:*
   1.º) --
   2.º) --
2. Dar dois exemplos de *conjuntos unitários:*
   1.º) --
   2.º) --
3. Dar dois exemplos de *conjuntos infinitos:*
   1.º) --
   2.º) --
4. Escrever o conjunto dos nomes dos alunos de sua classe com menos de 12 anos (Obs.: Escrever os nomes de modo a distinguir um do outro).
5. Escrever o conjunto cujos elementos são as letras que figuram no nome de sua Escola e não figuram no nome do Estado em que se localiza a Escola.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 3

1. Escrever ao lado de cada uma das seguintes sentenças a letra *V* ou *F*, no caso de a sentença ser *verdadeira* ou *falsa*, respectivamente:

   1.ª) $2 \in \{3, 2, 1\}$ 2.ª) $2 \notin \{3, 2, 1\}$ 3.ª) $8 \in \{8\}$
   4.ª) $0 \notin \{0, 1\}$ 5.ª) $1 \in \{0, 1\}$ 6.ª) $5 \notin \{0, 1\}$
   7.ª) $x \notin \{a, e, i, o, u\}$ 8.ª) $e \notin \{a, e, i, o, u\}$ 9.ª) $u \in \{a, e, i, o, u\}$
   10.ª) Terra $\in$ {planêtas do Sistema Solar}
   11.ª) amarelo $\notin$ {côres da Bandeira brasileira}
   12.ª) $2 \notin$ {números pares}

2. Completar as seguintes sentenças, de modo a torná-las verdadeiras:

   (NOTA: No lugar do traço colocar o símbolo que achar conveniente)

   1.ª) $3 \in \{7, 2, -\}$ 2.ª) $5 \notin \{0, -, 9, 1\}$ **(cuidado!)** 3.ª) $0 - \{0\}$
   4.ª) $a \notin \{e, m, -, i\}$ 5.ª) $\square - \{\triangle, *, \square\}$ 6.ª) $* - \{\square, \triangle\}$
   7.ª) 4 – {números pares} 8.ª) 6 – {números ímpares}
   9.ª) verde – {côres da Bandeira brasileira}
   10.ª) rosa – {flôres} 11.ª) laranja – {animais}
   12.ª) Lua – {satélites da Terra} 13.ª) $0 - \varnothing$ (cuidado!)

3. Citados os nomes das seguintes coisas:

   doce, 6, Mário, *u*, espingarda, 40, *h*, Paulo, 13, cenoura, 5, ferro, automóvel, satélite, 1.000, banana, Antônio

   selecionar, entre elas, as que constituem:

   1.º) o conjunto de nomes de tôdas as pessoas.
   2.º) o conjunto dos números maiores que 3 e menores que 40.
   3.º) o conjunto de coisas para comer.

4. *Subconjuntos; relações de "inclusão"*

Para facilitar o trabalho com conjuntos, você pode sempre representá-los por letras maiúsculas quaisquer. Representemos, por exemplo, por A o conjunto das letras que compõem o alfabeto português:

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, x, z\}$$

Indicando por B o conjunto das vogais, isto é:

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

você nota que o conjunto B é uma "*parte*" do conjunto A, porque *tôdas as vogais* pertencem ao alfabeto.

Nesse caso diz-se que o conjunto B é um *subconjunto* do conjunto A ou que o conjunto B *está contido* no conjunto A.

Por sua vez o conjunto A *contém* o conjunto B.

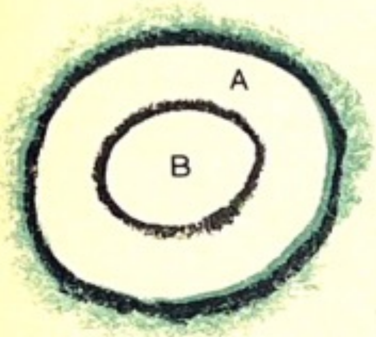


FIG. 1

A indicação de que o conjunto B *está contido* em A (ou que B *está incluso* em A) é feita pelo símbolo: $\subset$

Portanto: $B \subset A$ (lê-se: "B *está contido* em A")

Por sua vez: $A \supset B$ (lê-se: "A *contém* B")

A *negação* de $B \subset A$ é indicada por $B \not\subset A$.

Você pode visualizar a relação de *inclusão* "estar contido" entre os conjuntos B e A, pelo desenho (fig. 1).

Agora, guarde bem:

> Um conjunto B *está contido* em um conjunto A (ou B é subconjunto de A) quando *todo elemento que pertence a* B *pertence também a* A.

Outros exemplos:

1. Dar três *subconjuntos* do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Basta escolher, por exemplo, conjuntos como:

   $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$ e $D = \{4\}$

   pois todos êles estão *contidos* em A: lembre-se de que todo elemento de B (ou de C, ou de D) também pertence a A.

2. Dar alguns *subconjuntos* do conjunto:

   $$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, x, z\}$$

   Sejam os conjuntos:

   $C = \{a, b\}$ $D = \{d, h, i, v\}$ $E = \{a, z\}$ $F = \{d\}$

   Todos êles são *subconjuntos* ou *partes* do conjunto A, pois:

   $C \subset A$, $D \subset A$, $E \subset A$ e $F \subset A$

   Dê, a seu gôsto, como exercício, mais quatro *subconjuntos* de A.

3. Sendo: M = {habitantes do Amazonas}
   N = {habitantes do Brasil}
   então: $M \subset N$ (porque todo habitante do Amazonas também é habitante do Brasil)

4. A sentença: {animais} $\subset$ {sêres vivos} é *verdadeira*, porque todo animal (não morto . . naturalmente) é um ser vivo.

5. Se: $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $D = \{1, 3, 5\}$ e $E = \{0, 2\}$

   então:
   $$D \subset C \text{ porque: } \begin{cases} 1 \in D \text{ e também } 1 \in C \\ 3 \in D \text{ e também } 3 \in C \\ 5 \in D \text{ e também } 5 \in C \end{cases}$$

   $E \not\subset C$ porque: $0 \in E$ e $0 \notin C$

NOTA IMPORTANTE: Não confunda o uso dos símbolos: $\in$ e $\subset$; o símbolo $\in$ indica uma relação entre *elemento* e *conjunto* (no exemplo: $1 \in D$), enquanto que o símbolo $\subset$ indica uma relação entre *conjuntos* (no exemplo: $D \subset C$).

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 4

1. Dar três *subconjuntos* do conjunto: $A = \{1, 2, 3\}$.
2. Dar dois *conjuntos unitários* do conjunto das vogais.
3. A sentença: {macacos} $\subset$ {animais} é verdadeira ou falsa? Por quê?
4. Idem com a sentença: {brasileiros} $\supset$ {baianos}.
5. Se $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{0, 2, 6\}$, dizer porque: $C \subset A$, $B \not\subset A$ e $C \not\subset B$.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 5

1. **Assinalar com *V* as sentenças *verdadeiras* e com *F* as sentenças *falsas*:**

   1.ª) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ 2.ª) $\{1, 2\} \not\subset \{1, 2, 3\}$ 3.ª) $\{1\} \supset \{1, 2, 3\}$
   4.ª) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ 5.ª) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$ 6.ª) $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}$ (cuidado!)

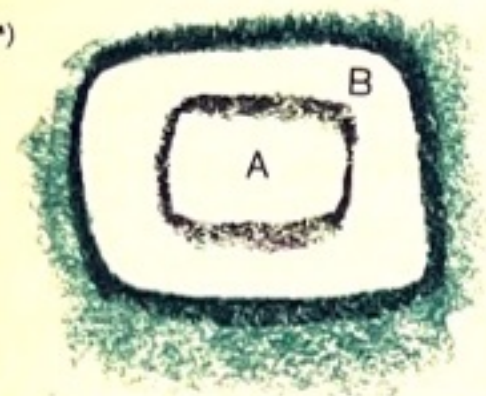
7.ª) $\{a, b, c, d, \ldots, x, z\} \supset \{a, e, i, o, u\}$ 8.ª) $\{a, e, i, o, u\} \subset \{a, b, c, d, \ldots, x, z\}$

9.ª) {Campinas} $\not\subset$ {cidades do Brasil}

10.ª) {Português, Matemática} $\subset$ {matérias do Curso Ginasial}.

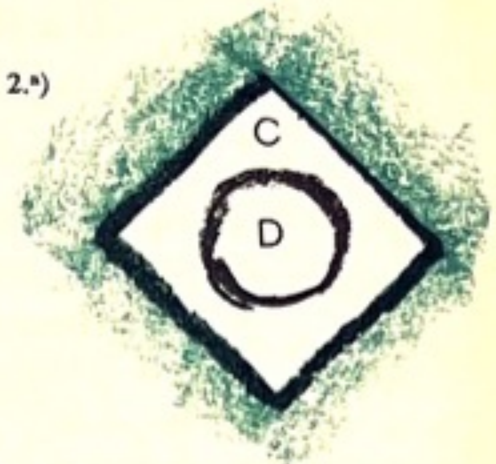
2. Completar com a relação de *inclusão* ($\subset$ ou $\supset$) que achar certa:

1.ª)



$A \ldots B$

2.ª)



$C \ldots D$

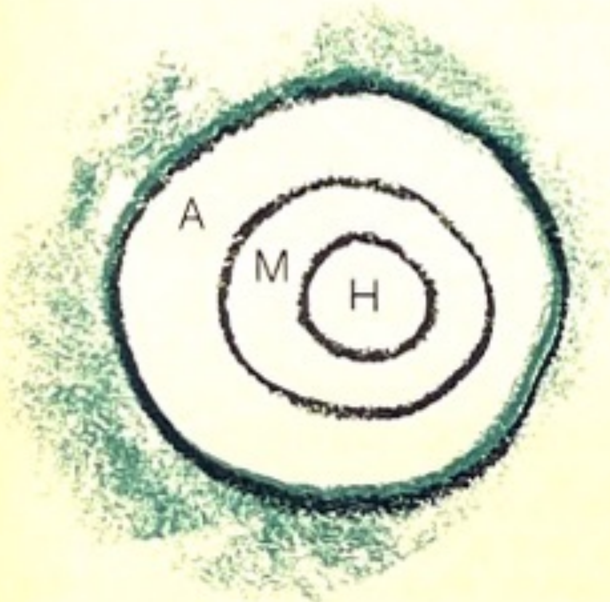
3. Completar com um dos símbolos $\subset$ ou $\supset$, de modo a tornar as seguintes sentenças verdadeiras:

   1.ª) {números pares} .... {números naturais}

   2.ª) {números naturais} .... {números ímpares}

4. Se: A = {sêres do reino animal}
   M = {mamíferos}
   H = {homens}

completar com um dos símbolos $\subset$ ou $\supset$:



1.ª) $H \ldots M$ 2.ª) $M \ldots A$
3.ª) $A \ldots H$ 4.ª) $M \ldots H$

NOTA: O desenho do exemplo 4 (ao lado) mostra que:
Se $H \subset M$ e $M \subset A$, então $H \subset A$, que é uma propriedade (denominada *transitiva*) da relação de inclusão "estar contido".

5. Dados os conjuntos:
   $A = \{1, 2, 3, 4, a, b, c\}$
   $B = \{1, 2, a, c\}$
   $C = \{a, b, c\}$
   $D = \{1, 3, 5, 7\}$

indicar se as seguintes sentenças são *verdadeiras* (V) ou *falsas* (F):

1.ª) $B \subset A$	2.ª) $B \not\subset A$
3.ª) $C \subset A$	4.ª) $C \not\subset A$
5.ª) $D \subset A$	6.ª) $C \in A$
7.ª) $I \in A$	8.ª) $5 \in A$

1. Separe três subconjuntos do conjunto dos alunos de sua classe, cujos sobrenomes comecem por *S*.

2. Separe por matéria dois subconjuntos do conjunto dos professôres de sua classe.

3. Dê um exemplo da propriedade *transitiva* da relação de inclusão "contém" (*Sugestão:* Relacione os alunos ginasianos do Brasil com os alunos ginasianos de seu colégio e ainda com os alunos ginasianos de sua classe).

LEMBRETE AMIGO

> As relações de *inclusão* $\subset$ ou $\supset$ permitem saber se um conjunto *está contido* em ou *contém* outro.
>
> Nunca diga que um conjunto é *maior* (!) ou *menor* (!) que outro.

5. *Conjuntos iguais; relação de "igualdade"*

Considere os conjuntos A e B:

$$A = \{a, e, i, o, u\} \qquad B = \{e, i, a, o, u\}$$

e observe que: *todos os elementos que pertencem a* A *também pertencem a* B e, recìprocamente, *todos os elementos de* B (são as mesmas vogais ...) *pertencem também a* A (fig. 2).

Nestas condições, A e B constituem o *mesmo conjunto* e diz-se que A e B são conjuntos *iguais*. Indicação: $A = B$.

A negação de $A = B$ é indicada por $A \neq B$ (o sinal $\neq$ é lido: "*diferente* de") e os conjuntos são denominados *desiguais* ou *diferentes*.

Exemplos:

$\{\text{régua, compasso}\} = \{\text{compasso, régua}\}$

$\{4, 3, 2, 5, 1, 0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\{1, 2, 3\} \neq \{0, 1, 2\}$

$\{a, b, c, d\} \neq \{1, a, 2, b\}$

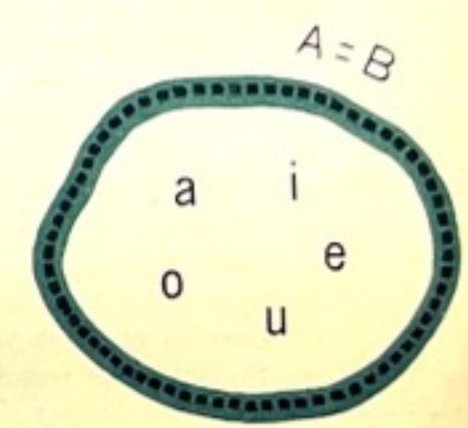


FIG. 2

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 7

1. Assinalar com *V* as sentenças *verdadeiras* e com *F* as sentenças *falsas:*

   1.ª) {Pelé, Tostão, Ademir} = {Ademir, Pelé, Tostão}

   2.ª) $\{1, 3, 5, 7\} \neq \{0, 2, 4, 6\}$ 3.ª) $\{1, 3, 5, 7\} = \{0, 2, 4, 6\}$

   4.ª) {Palmeiras, Corinthians, Grêmio, São Paulo, Internacional, Cruzeiro, Santos} = {Corinthians, Santos, Cruzeiro, São Paulo, Grêmio, Internacional, Palmeiras}

   5.ª) {múltiplos de 2} = $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ (**cuidado!**)

2. Êste exercício é *exploratório:* verificar, com exemplos, que a *igualdade* entre conjuntos goza das seguintes *propriedades:*

$$A = A \text{ (reflexiva)}$$
$$\text{Se } A = B, \text{ então } B = A \text{ (simétrica)}$$
$$\text{Se } A = B \text{ e } B = C, \text{ então } A = C \text{ (transitiva)}$$

3. Assinalar a resposta certa em cada um dos exercícios seguintes(*):

   I — O *conjunto unitário* é:

   1.º) um conjunto que só tem o elemento 1
   2.º) um conjunto que tem um só elemento
   3.º) um conjunto que não existe
   4.º) um conjunto que tem o elemento 1
   5.º) nenhuma das respostas anteriores

   II — O *conjunto vazio* é:

   1.º) o conjunto que possui o zero como elemento
   2.º) o conjunto que possui sòmente o elemento zero
   3.º) um conjunto que não existe
   4.º) um conjunto sem elementos
   5.º) nenhuma das respostas anteriores

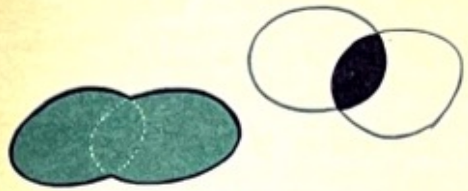
   III — Um exemplo de *conjunto infinito* é:

   1.º) {peixes do mar}
   2.º) {cidades do Brasil}
   3.º) {números naturais}
   4.º) {fios de cabelo da cabeça de uma pessoa}
   5.º) nenhuma das respostas anteriores

4. Assinalar a sentença verdadeira:

   a) Verde não pertence ao conjunto das côres
   b) Limão não pertence ao conjunto das frutas
   c) Cachorro não pertence ao conjunto dos invertebrados
   d) Curitiba não pertence ao conjunto das capitais de Estados do Brasil
   e) Nenhuma das respostas anteriores é correta.

(*) Questões propostas para a 1.ª OMESP, pela 2.ª Inspetoria Regional, São Paulo - Capital, coordenada pelas Professôras Maria Lúcia Smith e Eliana R. de Mendonça.



operações com conjuntos

6. *Conjunto-Universo. Diagrama de Venn*

O conjunto dos alunos que constituem a 1.ª Série *A* de seu colégio, por exemplo, faz parte de um conjunto mais amplo — o conjunto de todos os alunos do colégio — que é suposto como *Conjunto-Universo* (fig. 3).

Fig. 3

Para ajudar a "ver" as *relações* entre conjuntos, bem como as *operações* a serem estudadas entre êles, usa-se o *Diagrama de Venn*(*), onde um retângulo e sua região interior representam o Universo *U*. Os subconjuntos de *U* são representados por círculos (ou outras curvas simples fechadas) pertencentes à região interior do retângulo.

Observação: Você pode sempre escolher o *Conjunto-Universo* que, em determinada situação, fornece todos os elementos que constituem os conjuntos relacionados com essa situação. Se forem conjuntos numéricos, o conjunto-*Universo* será de números; se forem conjuntos que envolvem homens ou mulheres, o conjunto-*Universo* será de pessoas, etc.

7. *Operações: intersecção, reunião, complementação e produto cartesiano*

1. Intersecção ($\cap$)

Sejam, por exemplo, os conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{2, 3, 5\}$$

(*) John Venn (1834-1883) — Logicista inglês.

Formemos um nôvo conjunto com os **elementos comuns** a A e B:

$$\{2, 3\}$$

Êsse conjunto é chamado **intersecção** dos conjuntos A e B.

No diagrama (fig. 4) a região colorida é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e também ao conjunto B, isto é, a *intersecção* de A e B. Indicação: $\cap$ (lê-se: "inter").

FIG. 4

Assim: $A \cap B = \{2, 3\}$

Logo: A **intersecção** de dois conjuntos A e B é o *conjunto constituído pelos elementos que pertencem a* A **e** *a* B.

NOTA: A conjunção **e** traduz o fato de os elementos serem *comuns* aos dois conjuntos.

Outros exemplos:

a) $A = \{\square, \triangle, *\}$
$B = \{\bigcirc, \triangle, \square\}$ então: $A \cap B = \{\triangle\}$

b) X = {Nélson, Lúcia, Carlos, João}
Y = {Maria, Carlos, Antônio, Lúcia}
então: $X \cap Y$ = {Carlos, Lúcia}

Quando os conjuntos não possuem elementos comuns, a intersecção é o *conjunto vazio*. Nesse caso os conjuntos dizem-se *disjuntos*.

Exemplo:

$A = \{1, 3, 5\}$
$B = \{2, 4, 6\}$ então: $A \cap B = \varnothing$, isto é, os conjuntos A e B são *disjuntos*

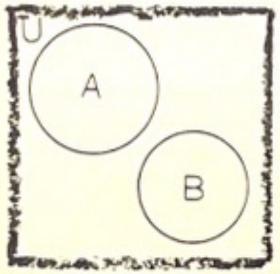


FIG. 5

No diagrama correspondente (fig. 5) os conjuntos A e B aparecem, agora, separados.

A *intersecção de vários conjuntos* é feita da mesma maneira. Basta acompanhar o seguinte exemplo: Dados os conjuntos:

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ $B = \{1, 5, 7\}$ $C = \{1, 5, 8\}$

a *intersecção* $A \cap B \cap C$ é determinada procurando-se os **elementos comuns** aos três conjuntos A, B e C. Logo:

$$A \cap B \cap C = \{1, 5\}$$

2. REUNIÃO OU UNIÃO ($\cup$)

Sejam, por exemplo, os conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$
$$B = \{2, 3, 5\}$$

Formemos um nôvo conjunto com *todos* os elementos dos conjuntos dados, de modo que não figurem *elementos repetidos:*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Êsse conjunto é chamado **reunião** ou **união** dos conjuntos A e B.

No diagrama (fig. 6) a região colorida é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A, ao conjunto B **ou** a ambos. Indicação: $\cup$ (lê-se: "união")

FIG. 6

Assim: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Se os conjuntos forem *disjuntos*, como por exemplo:

$$A = \{1, 3, 5\}$$
$$B = \{2, 4, 6\}$$

a *reunião* será o conjunto:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

assinalado, na região colorida do diagrama (fig. 7) como dois conjuntos separados.

FIG. 7

Logo: A **reunião** de dois conjuntos A e B é o *conjunto constituído pelos elementos que pertencem a* A **ou** *a* B.

NOTA: A disjunção **ou** traduz o fato de os elementos pertencerem a um dos conjuntos, ao outro ou a ambos.

Outros exemplos:

a) $A = \{\square, \triangle, *\}$
$B = \{\bigcirc, \triangle, \square\}$ então: $A \cup B = \{\square, \triangle, *, \bigcirc, \square\}$

b) X = {Nélson, Lúcia, Carlos, João}
Y = {Maria, Carlos, Antônio, Lúcia}
então: $X \cup Y$ = {Nélson, Lúcia, Carlos, João, Maria, Antônio}

A *reunião* de vários conjuntos é realizada de modo análogo.

Exemplo:

Se $A = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad B = \{1, 5, 7\}$ $\quad C = \{1, 5, 8\}$

então: $A \cup B \cup C = \{1, 3, 5, 7, 8\}$

ATENÇÃO para uma propriedade importante — denominada *comutativa* — que as operações *intersecção* e *reunião* de conjuntos possuem:

> *É indiferente a ordem com que os elementos de A e de B são considerados* para construir o *conjunto* ***intersecção*** e o *conjunto* ***reunião.***

Logo: $A \cap B = B \cap A$ (propriedade comutativa da $\cap$)

$A \cup B = B \cup A$ (propriedade comutativa da $\cup$)

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 8

Determinar a *intersecção* e depois a *reunião* dos seguintes conjuntos:

1.º) $A = \{2, 4, 6\}$ $\quad A \cap B = \{2, 4\}$
$B = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

2.º) $X = \{$verde, amarelo, azul$\}$ $\quad X \cap Y = \{$amarelo$\}$
$Y = \{$amarelo, vermelho$\}$ $\quad X \cup Y = \{$verde, amarelo, azul, vermelho$\}$

3.º) $C = \{m, n, p, q\}$ $\quad C \cap D = \varnothing$
$D = \{a, e, i, o, u\}$ $\quad C \cup D = \{a, e, i, o, u, m, n, p, q\}$

4.º) $H = \{$meninos da 1.ª Série$\}$ $\quad H \cap M = \varnothing$
$M = \{$meninas da 1.ª Série$\}$ $\quad H \cup M = \{$alunos da 1.ª Série$\}$

5.º) $P = \{$alunos do Colégio$\}$ $\quad P \cap Q = \{$alunos da 1.ª Série$\}$
$Q = \{$alunos da 1.ª Série$\}$ $\quad P \cup Q = \{$alunos do Colégio$\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 9

Determinar a *intersecção* e depois a *reunião* dos seguintes conjuntos:

1.º) $A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{2, 4, 6\}$

2.º) $C = \{a, b, c, d\}$
$D = \{b, c, d, e\}$

3.º) $E = \{10, 20, 30, 40, 50\}$
$F = \{50, 60, 70\}$

4.º) $G = \{100, 90, 80\}$
$H = \{55, 65, 75\}$

5.º) $A = \{$Mário, Paulo$\}$
$B = \{$João, Mário, Pedro$\}$

6.º) $C = \{$Sorocaba, Campos, Campinas$\}$
$D = \{$Campinas, Santos$\}$

7.º) $A = \{$feijão, arroz, tomate$\}$
$B = \{$cenoura, tomate, arroz$\}$
$C = \{$milho, carne, arroz, feijão$\}$

8.º) $A = \{$Terra$\}$
$B = \{$Terra, Lua, Marte$\}$
$C = \{$Terra, Lua$\}$

9.º) $A = \{$números naturais menores que 5$\}$
$B = \{$números naturais menores que 8$\}$

10.º) $A = \{$números pares$\}$
$B = \{$números ímpares$\}$

11.º) $H = \{$homens$\}$
$M = \{$mulheres$\}$

12.º) $B = \{$brasileiros$\}$
$P = \{$paraibanos$\}$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 10

Completar as seguintes sentenças, de modo a torná-las *verdadeiras:*

1.ª) $\{6, 8, 10\} \cap \{-, 8, 12\} = \{6, 8\}$
2.ª) $\{6, 8, 10\} \cup \{-, 8, 12\} = \{4, 6, 8, 10, 12\}$
3.ª) $\{0, 5, 7\} \cap \{-\} = \{7\}$
4.ª) $\{0, 5, 7\} \cap \{-\} = \varnothing$ (cuidado!)
5.ª) $\{11, 22, 33\} \cup \{-, 55\} = \{11, 22, 33, 44, 55\}$
6.ª) $\{a, b, c\} \cup \{a, -, -\} = \{a, b, c, d\}$
7.ª) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
8.ª) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\} = -$
9.ª) $\{1, 2, 3\} \cup - = \{1, 2, 3\}$
10.ª) $\{1, 2, 3\} \cap - = \varnothing$

3. COMPLEMENTAÇÃO (′)

O **complementar** de um conjunto A, em relação a um Conjunto-Universo U, é o conjunto constituído por todos os elementos do universo U que não pertencem a A. Indicação: A' (lê-se: "conjunto complementar de A")

Supondo: $U = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $A = \{2, 8\}$

o *complementar* do conjunto A, em relação a U, é:

$$A' = \{4, 6, 10\}$$

Fig. 8

A região colorida no diagrama (fig. 8) representa A', isto é, o *conjunto complementar* de A, em relação ao Conjunto-Universo U. Outros exemplos:

1. Se $U = \{a, e, i, o, u\}$
   e $A = \{a, i\}$
   então: $A' = \{e, o, u\}$

2. Se U = {verde, amarelo, branco, azul}
   e A = {verde}
   então: A' = {amarelo, branco, azul}

3. Se U = {alunos da 1.ª Série Ginasial}
   e A = {meninos da 1.ª Série Ginasial}
   então: A' = {meninas da 1.ª Série Ginasial}

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 11

1. Sendo $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $A = \{1, 5, 9\}$, calcular A'.
2. Sendo $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 4\}$ e $B = \{1, 5\}$, calcular:

1.º) A'	2.º) B'	3.º) $A' \cap B'$	4.º) $A' \cup B'$
5.º) $A' \cup B$	6.º) $A \cap B'$	7.º) $(A \cup B)'$	8.º) $(A \cap B)'$

Nota: Calcular, nos exercícios 7.º e 8.º, as operações indicadas entre parênteses e a seguir o *complementar* do resultado.

3. Sendo U = {planêtas do Sistema Solar} e A = {Terra}, calcular A'.
4. Sendo U = {alunos do Ginásio} e A = {alunos da 2.ª, 3.ª e 4.ª séries ginasiais} calcular A'.
5. Sendo U = {alfabeto latino} e A = {consoantes}, calcular A'.
6. Êste é *exploratório* . . . : qual é o *complementar* do próprio universo U?
7. Assinalar a resposta correta em cada um dos exercícios seguintes:

I — Se $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4\}$:

a) $A \cup B = \varnothing$
b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
c) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
d) $A \cap B \neq \varnothing$
e) Nenhuma das respostas anteriores

II — Se $X = \{m, n, p, q\}$
e $Y = \{m, p\}$:

a) $X \cap Y = \{m, n, p, q\}$
b) $X \cap Y = \{m, p\}$
c) $X \cup Y = \{m, p\}$
d) $X \cup Y = Y$
e) Nenhuma das respostas anteriores

III — Se A = {conjunto dos dias da semana}
e B = {conjunto dos dias da semana cujos nomes começam com *s*}
então o conjunto *complementar* de B em relação a A é:

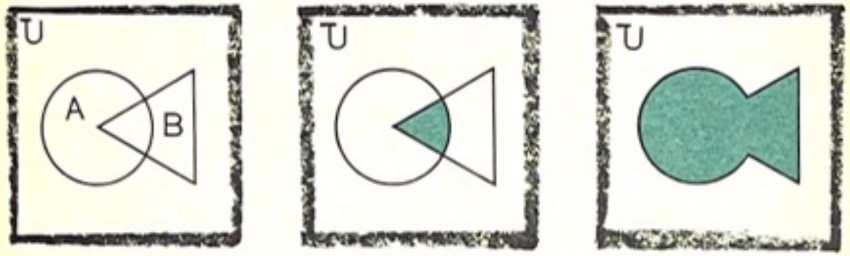
a) {segunda, sexta, sábado}
b) {têrça, quarta, quinta, sexta}
c) {têrça, quarta, quinta, sábado}
d) {têrça, quarta, quinta, domingo}
e) Nenhuma das respostas anteriores

aplicações

PRÁTICAS MODERNAS — Grupo 12

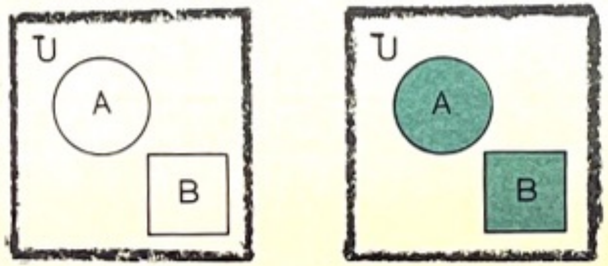
1. Considerando como Conjunto-*Universo* o retângulo e sua região interior, colorir no diagrama correspondente o resultado da operação indicada:

1.º) (Modêlo)



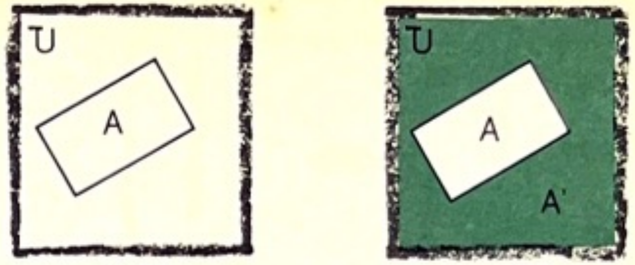
A e *B* dados $A \cap B$ $A \cup B$

2.º) (Modêlo)



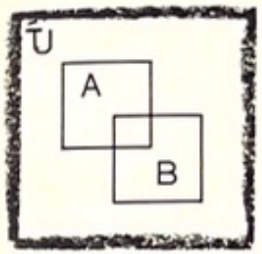
A e *B* dados $A \cup B$

3.º) (Modêlo)



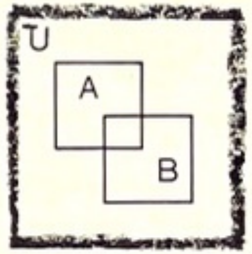
A dado A'

4.º)



$A \cap B$

5.º)

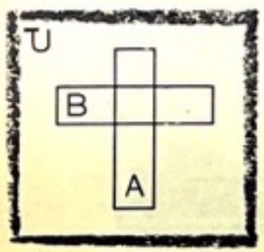


$A \cup B$

6.º)

$B \cap A'$

7.º)

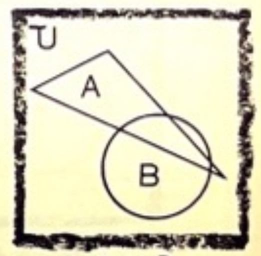


$A \cup B$

8.º)

$A \cap B$

9.º)



$A \cup B$

2. Idem com os conjuntos A, B e C:

1.º) Modêlo

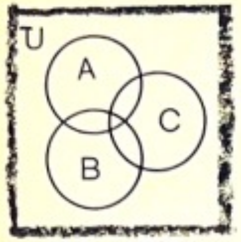
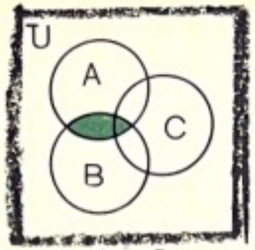
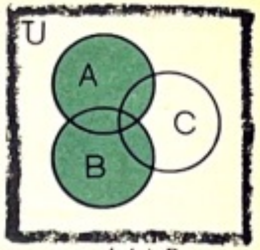


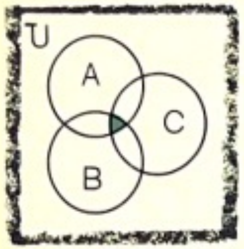
Diagrama dado



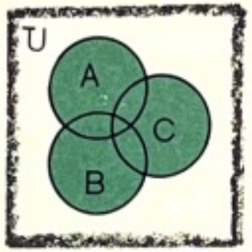
$A \cap B$



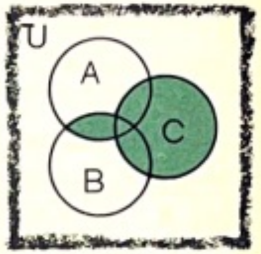
$A \cup B$



$A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$



$(A \cap B) \cup C$

2.º) No diagrama dado (Modêlo) colorir, separadamente, os seguintes conjuntos:

1. $A \cap C$ 2. $(A \cap C) \cup B$ 3. $A \cup (B \cap C)$

4. $A \cap (B \cup C)$ 5. $(A \cap B \cap C)'$ 6. $(A \cup B \cup C)'$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — GRUPO 13

1. Se U = [flôres da floricultura X] (Modêlo)
e A = [rosas da floricultura X]

representar, no diagrama correspondente, o conjunto das flôres da floricultura X que *não sejam rosas*. Temos:

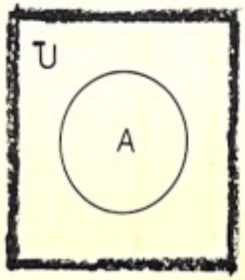
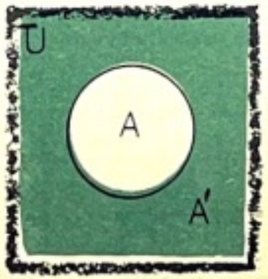


Diagrama dado



Solução: A' (conjunto complementar de A)

2. Se U = [alunos de sua classe] (Modêlo)
A = [alunos de sua classe que gostam de cinema]
B = [alunos de sua classe que gostam de futebol]

representar, separadamente por diagramas os conjuntos dos alunos de sua classe que:

1.º) gostam de cinema *e* gostam de futebol
2.º) gostam de cinema *ou* gostam de futebol
3.º) *não* gostam de cinema *nem* de futebol
4.º) gostam de cinema mas *não* gostam de futebol
5.º) gostam de futebol mas *não* gostam de cinema

Temos:

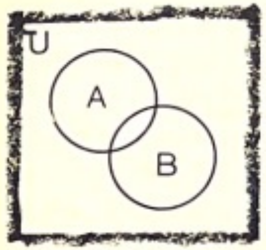
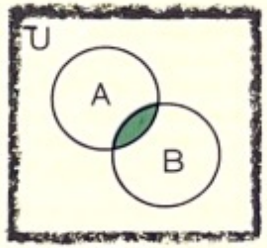
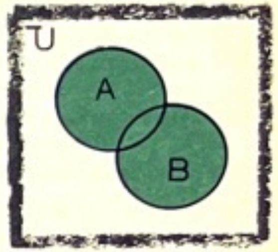


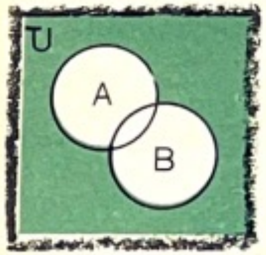
Diagrama dado



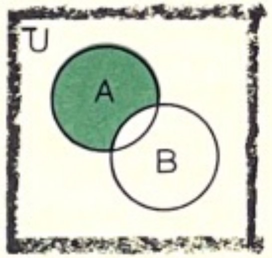
Gostam de cinema *e* gostam de futebol $(A \cap B)$



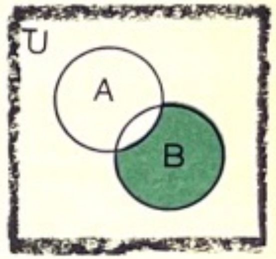
Gostam de cinema *ou* gostam de futebol $(A \cup B)$



Não gostam de cinema *nem* de futebol



Gostam de cinema mas *não* gostam de futebol



Gostam de futebol mas *não* gostam de cinema

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Não esqueça: a conjunção E traduz a operação *intersecção*; a disjunção OU traduz a operação *reunião*;

2.ª) a operação *complementação* está envolvida nas perguntas dos exercícios 3.º, 4.º e 5.º.

3. Se U = [alunos de seu Colégio]
A = [alunos de seu Colégio que pertencem ao Clube de Ciências (C. C.)]
B = [alunos de seu Colégio que pertencem ao Clube de Matemática (C. M.)]

representar, separadamente por diagramas, os seguintes conjuntos:

1.º) {alunos de seu Colégio que pertencem ao C. C. ou ao C. M.}
2.º) {alunos de seu Colégio que pertencem ao C. C. e ao C. M.}
3.º) {alunos de seu Colégio que pertencem ao C. C. mas não pertencem ao C. M.}
4.º) {alunos de seu Colégio que pertencem ao C. M. mas não pertencem ao C. C.}
5.º) {alunos que não pertencem ao C. C. nem ao C. M.}

4. Se U = {jovens de sua cidade}
   A = {jovens de sua cidade que tocam violão}
   B = {jovens de sua cidade que tocam piano}
   C = {jovens de sua cidade que tocam bateria}

representar em diagramas:

1.º) {jovens de sua cidade que tocam violão e bateria}
2.º) {jovens de sua cidade que tocam piano e violão}
3.º) {jovens de sua cidade que tocam piano ou bateria}
4.º) {jovens de sua cidade que tocam violão, piano e bateria}
5.º) {jovens de sua cidade que tocam piano, mas não tocam violão nem bateria}
6.º) {jovens de sua cidade que não tocam violão nem piano nem bateria}

5. Se U = {flôres da floricultura Y}
   A = {cravos da floricultura Y}
   B = {flôres vermelhas da floricultura Y}

representar em diagramas:

1.º) {flôres da floricultura Y que sejam cravos vermelhos}
2.º) {flôres da floricultura Y que sejam cravos não vermelhos}
3.º) {flôres da floricultura Y que não sejam cravos nem flôres vermelhas}

4. Produto cartesiano (×)

Mais uma operação entre conjuntos de muita utilidade para você: **produto cartesiano.** Sejam, por exemplo:

$A = \{2, 4, 6\}$ um *primeiro* conjunto
e $B = \{1, 3\}$ um *segundo* conjunto

Vamos construir um nôvo conjunto (fig. 9), cujos elementos são os *pares ordenados* com o primeiro elemento pertencente a A e o segundo a B, isto é:

(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)

1.º elemento 2.º elemento

Fig. 9

Êsse conjunto é indicado por:

$A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$

e denominado *produto cartesiano de* A *por* B

Observações:

1.ª) O conjunto A possui *três* elementos: 2, 4 e 6; o conjunto B possui *dois* elementos: 1 e 3, e o produto cartesiano $A \times B$ possui *seis* elementos: (2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1) e (6, 3) (. . .não se esqueça de que os elementos são *pares* de números . . .).

2.ª) O *produto cartesiano de* B *por* A, isto é:
$B \times A = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$
é um conjunto *diferente* de $A \times B$, pois seus elementos são pares ordenados, onde o primeiro elemento pertence agora ao conjunto B e o segundo ao conjunto A.

Não se esqueça de que: $(2, 1) \neq (1, 2)$

Fig. 10

Outros exemplos:

1. A = {Aldo, Rui}
   B = {Lúcia, Vera} (fig. 10)

   Então:

   $A \times B$ = {(Aldo, Lúcia), (Aldo, Vera), (Rui, Lúcia), (Rui, Vera)}

isto é, o produto cartesiano possui *quatro* elementos.

2. Mário possui duas calças: rancheira e social, e três blusas: branca, amarela e azul. De quantas maneiras pode Mário vestir-se, usando primeiramente uma das calças e depois uma das blusas de que dispõe?

Temos (fig. 11): A = {rancheira, social}
B = {branca, amarela, azul}
$A \times B$ = {(rancheira, branca), (rancheira, amarela), (rancheira, azul), (social, branca), (social, amarela), (social, azul)}

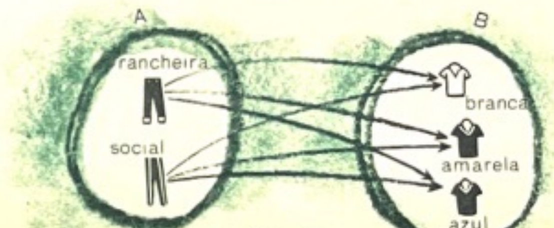


Fig. 11

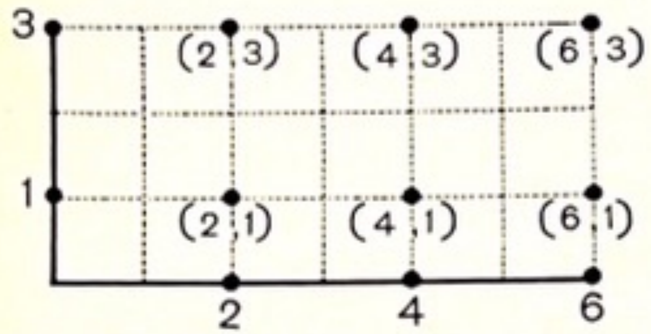
Como o conjunto $A \times B$ possui *seis* elementos, que são pares ordenados representando as diversas maneiras de vestir — calça e blusa — concluímos: Mário pode vestir-se de *seis maneiras* diferentes.

É sempre possível uma representação *tabular* do produto cartesiano, mediante uma tábua que dá, gràficamente, a totalidade dos *pares ordenados* do produto $A \times B$ de dois conjuntos.

Exemplos:

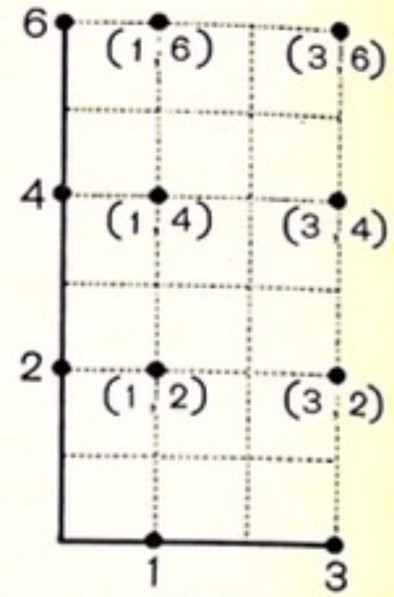
Construir a representação *tabular* dos produtos $A \times B$ e $B \times A$ (fig. 12), onde:

$$A = \{2, 4, 6\}$$
$$B = \{1, 3\}$$



$A \times B$

FIG. 12



$B \times A$

Observe, fàcilmente, pela representação *tabular* que:

$$A \times B \neq B \times A$$

ou seja, o produto cartesiano não goza da propriedade comutativa.

Você pode, ainda, calcular o produto cartesiano de *um conjunto por si mesmo*. Assim, por exemplo, dado o conjunto:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

temos (fig. 13):

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

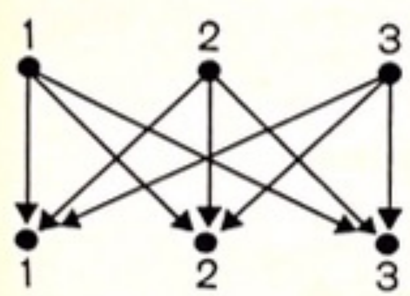


FIG. 13

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 14

1. Dados os conjuntos: $A = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{4, 9\}$, calcular:
   1.º) $A \times B$ 2.º) $B \times A$ 3.º) $A \times A$ 4.º) $B \times B$
2. Construir, de cada um dos produtos cartesianos do exercício anterior, a representação *tabular* respectiva.

3. No exercício 1, $A \times B = B \times A$ é uma sentença verdadeira ou falsa? E a sentença $A \times A = A \times A$?
4. Dados os conjuntos: $X = \{4\}$, $Y = \{1, 2\}$ e $E = \{a, b, c\}$, calcular:
   1.º) $X \times Y$ 2.º) $X \times E$ 3.º) $E \times Y$ 4.º) $E \times E$
5. De quantas maneiras posso fazer um lanche tendo, de um lado: uma guaraná e uma gasosa, e de outro lado: um sanduíche de queijo e um sanduíche de presunto?

APÊNDICE 1

Partição de um conjunto

1.º Exemplo: Seja A o conjunto das meninas da 1.ª Série Ginasial (pode ser nossa classe!) e B o conjunto dos meninos dessa 1.ª Série.

O conjunto C dos alunos da 1.ª Série é a *reunião* dos conjuntos A e B:

$$A \cup B = C$$

sendo A (conjunto das meninas) e B (conjunto dos meninos) *disjuntos*, isto é:

$$A \cap B = \varnothing$$

Nestas condições, dizemos que:

Os conjuntos A *e* B *constituem uma* ***partição*** *do conjunto* C

2.º Exemplo: Dados os conjuntos:

$I = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ (. . . dos números ímpares)
$P = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ (. . . dos números pares)

onde: $I \cup P = N$ (conjunto dos números naturais)
$I \cap P = \varnothing$ (. . . são disjuntos)

temos que:

O conjunto dos números ímpares e o conjunto dos números pares constituem uma ***partição*** *no conjunto dos números naturais.*

3.º Exemplo: Seja X o conjunto dos alunos de um Ginásio onde:

A = {alunos da 1.ª Série}
B = {alunos da 2.ª Série}
C = {alunos da 3.ª Série}
D = {alunos da 4.ª Série}

Você sabe que:

1. A *reunião* de tôdas as séries é o conjunto X;
2. *não há* nenhum aluno que pertença ao mesmo tempo a mais de uma série, isto é, os conjuntos A, B, C e D são *disjuntos*, dois a dois.

Logo:

Os conjuntos A, B, C e D *constituem uma* ***partição*** *no conjunto* X.

4.° *Exemplo:* No diagrama ao lado:

$$L \cup M \cup T \cup R \cup Q = X$$

e

L, M, T, R e Q são *disjuntos*, dois a dois;

então:

Os conjuntos L, M, T, R *e* Q *constituem uma* ***partição*** *no conjunto* X.

Conclusão:

> Dados vários subconjuntos de um conjunto U, se êstes subconjuntos são *disjuntos*, dois a dois, e a sua *reunião* é o conjunto U, diz-se que êles constituem uma **partição** do conjunto U.

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — Grupo 15

1. Ao dispor num álbum os selos, originários de diversos países, você efetua uma *partição* no conjunto dêsses selos? Por quê?
2. No conjunto de verbos regulares, separando-os segundo as diferentes conjugações a que pertencem, realiza-se uma *partição* no conjunto dos verbos. Represente essa *partição* por um desenho.

LEMBRETE AMIGO

Símbolos usados no estudo dos *conjuntos:*

$\in$ (pertence)	$\notin$ (não pertence)	$\varnothing$ (conjunto vazio)
$\subset$ (contido)	$=$ (igual)	$\supset$ (contém)
$\not\subset$ (não está contido)	$\not\supset$ (não contém)	$\neq$ (diferente)
$\cap$ (intersecção)	$\cup$ (reunião)	$'$ (complementação)
	$\times$ (produto cartesiano)	

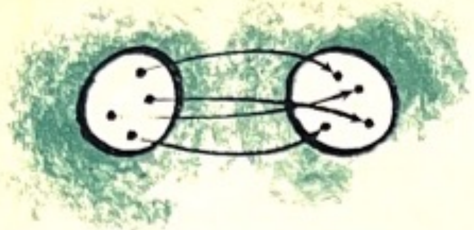
Cantor, Georg — foi o famoso fundador da *Teoria dos Conjuntos*, que hoje participa de tôda a Matemática. Nascido na Rússia em 1845, é considerado matemático alemão, pois passou na Alemanha a maior parte de sua vida, onde veio a falecer em 1918.

N

Conjunto dos números naturais

Correspondência biunívoca;
conjuntos eqüipotentes
Número e numerais
Sucessão dos números naturais
Estrutura de ordem; reta numerada

2ª PARTE



correspondência biunívoca

conjuntos eqüipotentes

1. *Correspondência biunívoca (ou um a um); conjuntos eqüipotentes*

Considere os seguintes conjuntos: *A*, de bolinhas, e *B*, de quadradinhos (fig. 14):

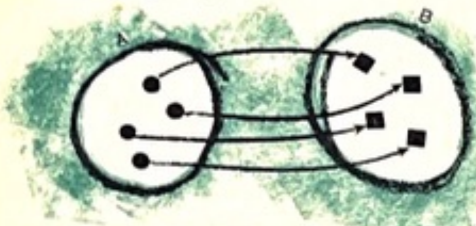


Fig. 14

Que está observando?

"Que a cada elemento (bolinha) do conjunto A *corresponde um único elemento (quadradinho) do conjunto* B *e que todo elemento do conjunto* B *é o correspondente de um único elemento do conjunto* A"

Quando isto acontece, dizemos que entre os dois conjuntos *A* e *B* existe uma *correspondência biunívoca* (ou *um a um*), e os conjuntos são chamados *eqüipotentes* ou *coordenáveis*. Indicação:

A eq *B* (lê-se: "*A eqüipotente a B*")

Contra-exemplo: *Não existe* correspondência *biunívoca* entre os conjuntos (fig. 15):

. . . porque "sobra" bolinha num dêles — Fig. 15 — . . . porque "sobram" quadradinhos num dêles

e, portanto, êsses conjuntos *não são eqüipotentes.*

Mais um exemplo familiar de conjuntos *eqüipotentes*, que ocorre quase diàriamente:

Fig. 16

Suponha que o professor entra na classe e manda todos os alunos se sentarem, e que (fig. 16):

1.º) em *tôda* carteira há um aluno sentado;

2.º) *todos* os alunos estão sentados.

Dessa maneira estabeleceu-se uma *correspondência biunívoca* entre o conjunto de carteiras e o conjunto de alunos, e, portanto, tais conjuntos são *eqüipotentes.*

Você pode ainda "testar" se o conjunto das carteiras e o conjunto dos alunos são *eqüipotentes*, por intermédio de outros conjuntos, tais

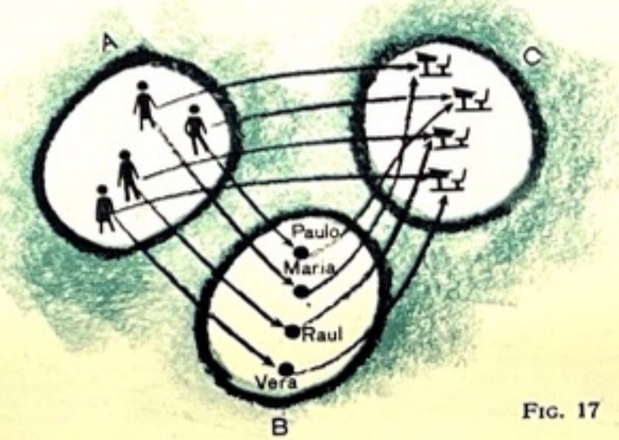


Fig. 17

como: o conjunto dos *nomes* dos alunos (ou de seus *números*) que figuram na chamada de classe. Assim, seguindo as flechas, você verifica a correspondência *biunívoca* existente entre os conjuntos A (alunos), B (nomes) e C (carteiras) (fig. 17) e estará empregando uma das *propriedades* que caracterizam a *eqüipotência* entre conjuntos, chamada *transitiva:*

se A eq B e B eq C então A eq C

Outras *propriedades* dos conjuntos eqüipotentes:

Reflexiva: A eq A (todo conjunto é *eqüipotente a si mesmo*).

Basta lembrar, por exemplo, que no conjunto dos alunos de sua classe podemos fazer corresponder cada aluno consigo mesmo!

Simétrica: se A eq B então B eq A

Se o conjunto de alunos está em correspondência biunívoca com o conjunto de carteiras, mudando o sentido das flechas você verifica que o conjunto de carteiras está em correspondência com o conjunto dos alunos.

Resumindo, a *eqüipotência* entre conjuntos goza das seguintes propriedades:

reflexiva: A eq A
simétrica: se A eq $B \Longrightarrow B$ eq A
transitiva: se A eq B e B eq $C \Longrightarrow A$ eq C

O símbolo lógico $\Longrightarrow$ é o da *implicação*, que se lê: "implica" ou "acarreta".

OBSERVAÇÃO: Relações como a *eqüipotência* entre conjuntos, que gozam das propriedades: *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*, denominam-se *relações de equivalência* e são de muita importância em tôda a Matemática.

n(A) = n(B) = 2

número natural

2. *Primeira idéia de número natural*

O que ocorre de importante entre *conjuntos eqüipotentes?*

A mente humana, pondo de lado a *qualidade* (carteiras, alunos, nomes, . . .) dos elementos que figuram nos *conjuntos eqüipotentes* e apoiando-se tão-sòmente na *correspondência biunívoca* existente entre os seus elementos, destaca a permanência de uma propriedade comum: a *quantidade* ou o *número de elementos*, também chamado **número natural** (*).

Assim, por exemplo, os conjuntos *eqüipotentes* (fig. 18):

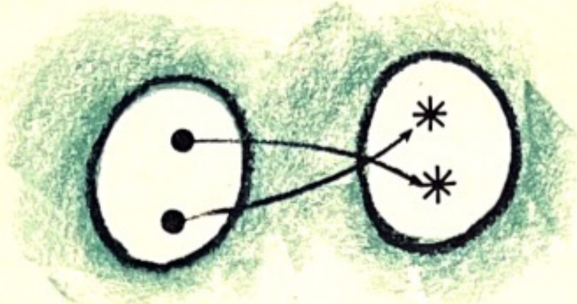
Propriedade comum: *número um*

FIG. 18

têm a seguinte *propriedade comum:* o mesmo número de elementos ou o mesmo *número natural*, denominado *um* (em português) e representado pelo símbolo (indo-arábico): 1.

(*) Também denominado *cardinal* de um conjunto. As expressões usadas com freqüência, tais como: *número inteiro* ou *número inteiro absoluto*, serão substituídas, com vantagem, nesta *nova reformulação* pela única denominação: **número natural**. Com o nome *número inteiro* entender-se-á, mais tarde, o elemento pertencente ao conjunto **Z**, também denominado *conjunto dos números inteiros relativos*, que será estudado posteriormente.

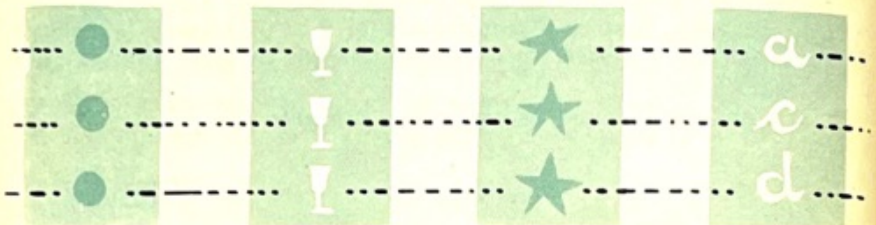
Por outro lado, os conjuntos *eqüipotentes* (fig. 19) têm a seguinte *propriedade comum:* o mesmo número de elementos ou o mesmo *número natural*, agora denominado *dois* e indicado por: 2.



Propriedade comum: *número dois*

Fig. 19

Os conjuntos *eqüipotentes* (fig. 20):



Propriedade comum: *número três*

Fig. 20

têm, por sua vez, a *propriedade comum:* o mesmo número de elementos ou o mesmo *número natural três*, indicado por: 3. E assim por diante, considerando-se outros conjuntos que podem ser postos em *correspondência biunívoca*, obter-se-ão novos *conjuntos eqüipotentes*, que possuirão por *propriedade comum*, respectivamente, os *números naturais:*

quatro, cinco, seis, . . . , dez, . . . , vinte, . . . , cem, . . . , mil, . . .

ou em símbolos:

4, 5, 6, . . . , 10, . . . , 20, . . . , 100, . . . , 1.000, . . .

Em particular, o número de elementos ou o *número natural* do conjunto *vazio* é denominado *zero* e indicado por 0.

Todos os números naturais usados para representar os diversos conjuntos finitos *eqüipotentes* entre si formam também um conjunto: o **conjunto dos números naturais,** que será indicado por:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$$

Quando do conjunto N se retira o 0, então o nôvo conjunto obtido é indicado por:

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$$

Tanto N como N^* são conjuntos *infinitos.*

Nota histórica:

O uso de conjuntos *eqüipotentes,* para poder "contar", sempre pertenceu ao homem.

Na Antiguidade os primitivos pastôres guardavam o *número* de suas ovelhas (sem saberem "contar" como nós . . .) estabelecendo uma correspondência biunívoca entre o *conjunto de ovelhas* e um *conjunto de pedrinhas* (ou de quaisquer outros objetos) (fig. 21):

Fig. 21

Se, na hora de recolher as ovelhas, à última delas correspondesse a última pedrinha, os dois conjuntos conservavam, naturalmente, o *mesmo número de elementos.* Eram, pois, *eqüipotentes.* Caso faltasse ou sobrasse alguma pedrinha, então os conjuntos já não eram mais eqüipotentes e, portanto, não possuíam o *mesmo número de elementos.*

O mesmo se dava com os antigos índios incas, quando queriam "contar" quantos dias tinham gasto para fazer uma certa viagem: num cordel que levavam, faziam um nó para cada pôr de Sol a que assistiam (fig. 22):

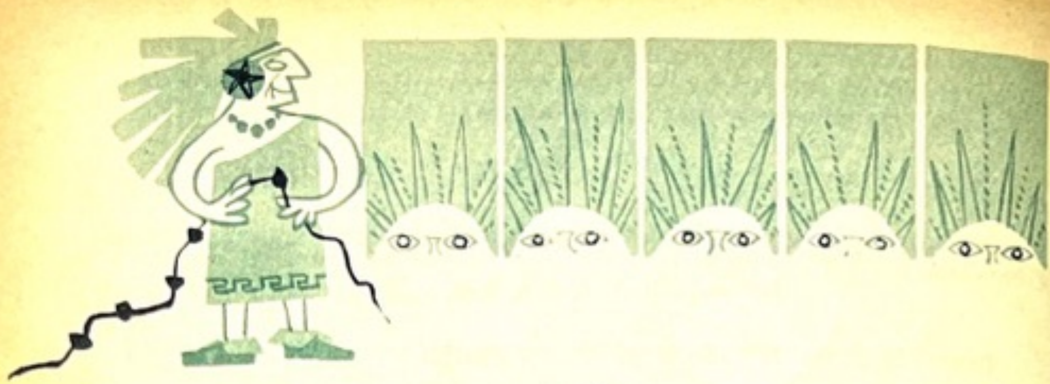


Fig. 22

No final da viagem o conjunto de nós indicava o *número* de dias gastos.

E... a história continua: você procede da mesma forma, hoje em dia, quando, por exemplo, jogando uma partida de pingue-pongue, assinala num quadro-negro os pontos ganhos (fig. 23), pois nesse instante estará estabelecendo uma *correspondência biunívoca* entre o *conjunto de pontos ganhos* e o *conjunto de marcas assinaladas no quadro-negro!*

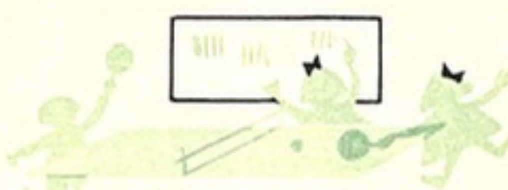


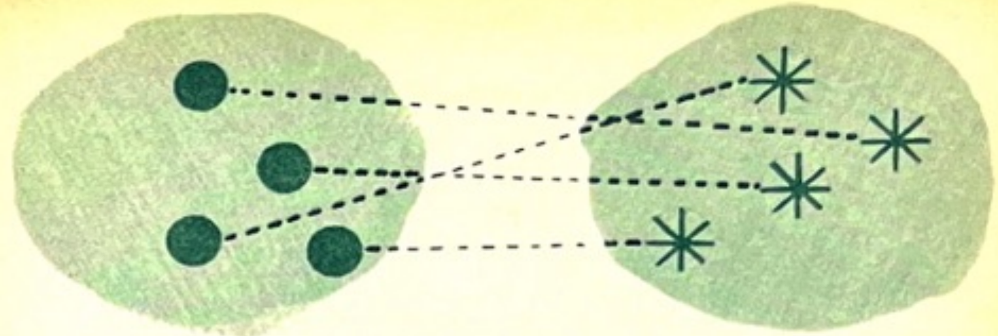
Fig. 23

Que é **número,** então?

Número ou *número natural* é a **propriedade comum** (*idéia*), associada a todos os conjuntos *eqüipotentes entre si,* e que não depende da *natureza* dos elementos nem da *ordem* com que êles figuram nos conjuntos.

Que é número *quatro?*

É a **propriedade comum** aos conjuntos eqüipotentes (fig. 24), que aparece quando você "liga" *um* a *um* os seus elementos, e representada, costumeiramente, pelo símbolo: 4.



Propriedade comum: *número quatro*

Fig. 24

Você pode também escrever:

número de elementos do conjunto A: 4 ou abreviando: $n(A) = 4$
número de elementos do conjunto B: 4 ou abreviando: $n(B) = 4$
ou ainda: $n(A) = n(B) = 4$

Outra maneira de você "testar" se dois conjuntos são *eqüipotentes* é proceder como no seguinte exemplo:

Os conjuntos:

são eqüipotentes, porque há uma correspondência *biunívoca* entre êles; portanto, têm o *mesmo número de elementos,* isto é:

$$n(A) = 4 \quad \text{e} \quad n(B) = 4 \quad \text{ou} \quad n(A) = n(B) = 4$$

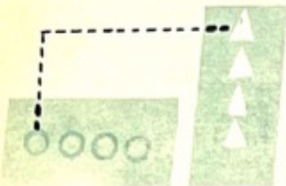
Contra-exemplo:

Os conjuntos: $X = \{\triangle, \square\}$, $Y = \{a, b, c\}$ *não são eqüipotentes*

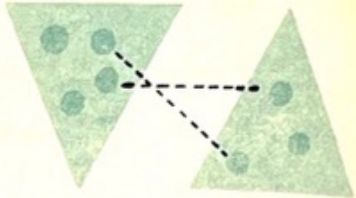
Agora: $n(X) = 2$ e $n(Y) = 3$ ou $n(X) \neq n(Y)$

1. Por intermédio de linhas pontilhadas verificar se são *eqüipotentes* os conjuntos desenhados:

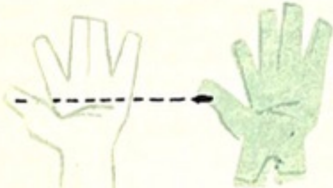
1.º)



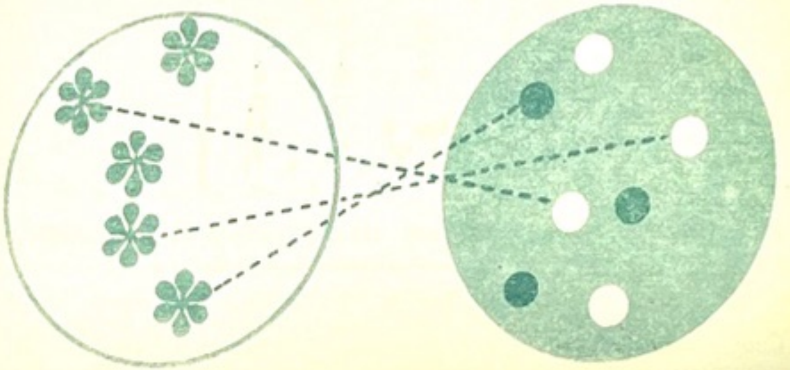
2.º)



3.º)

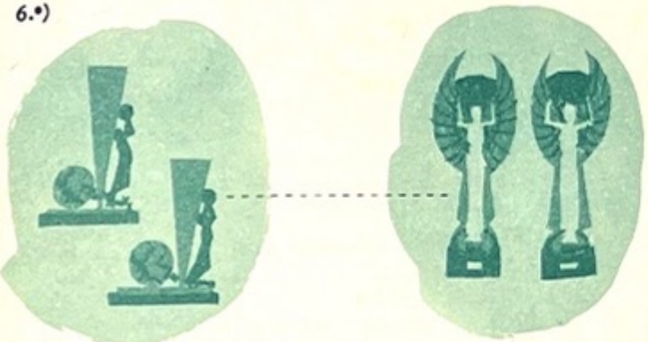


4.º)



5.º)

6.º)

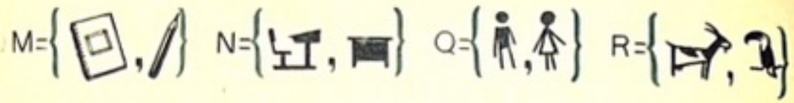


EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 17

1. São *eqüipotentes* os conjuntos: dos pontos cardeais e das estações do ano? Por quê?
2. Qual é a *propriedade comum* existente entre o conjunto dos dedos das mãos e o conjunto das vogais de nosso alfabeto?
3. Na sua classe há uma coleção de livros de Matemática Moderna. Se a cada aluno de sua classe corresponde um livro de Matemática Moderna e todo livro de Matemática Moderna é o correspondente de um aluno, como se chama a correspondência existente entre alunos e livros?
4. Se você e seus amiguinhos estão todos sentados ao redor de uma mesa, a fim de tomar um lanche, é possível contar os participantes do lanche, por intermédio das *cadeiras ocupadas* ou pelos *guardanapos* correspondentes a cada um? Por quê?

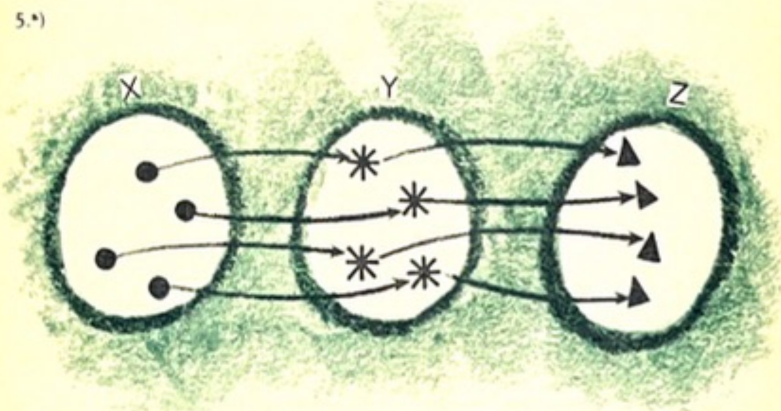
5. Preencher, tornando verdadeira cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $A = \{a, b, c, d\}$ $\quad n(A) = \ldots$
2.ª) $B = \{\triangle, \bigcirc, *\}$ $\quad n(B) = \ldots$
3.ª) $C = \{3, 5, 1, 2\}$ $\quad n(C) = \ldots$

4.ª) 

$n(M) = n(N) = n(Q) = n(R) = \ldots$

5.ª)



$n(X) = n(Y) = n(Z) = \ldots$

6. No exercício 5 há quatro conjuntos *eqüipotentes* entre si. Quais são êles?

7. Testar se são *eqüipotentes* os conjuntos:

1.º) 

2.º) $C = \{8, 5, 7\}$
$D = \{a, b, c\}$

LEMBRETE AMIGO

Os conjuntos: $A = \{a, b, c, d\}$
e $B = \{m, n, p, q\}$

não são iguais, por serem formados de elementos diferentes, porém são *eqüipotentes*, porque: $n(A) = n(B) = 4$, isto é, têm o *mesmo número* de elementos.

numerais de um número

3. *Numerais de um número*

As palavras *número* e *numeral* têm significados diferentes. Enquanto *número* é uma **idéia**, associada a conjuntos eqüipotentes entre si, *numeral* é qualquer **nome** ou **símbolo** que se possa usar para exprimir o número, e, portanto, a idéia (propriedade comum) que êle representa.

Visto que um *mesmo número* pode receber diversos *nomes* (dependendo da *língua* que se fala) e também ser representado por diversos *símbolos* (dependendo da *escrita* que se usa), você conclui que a *um mesmo número podem corresponder diversos numerais.*

Assim, por exemplo, quando falamos: *five* (em inglês) ou *cinq* (em francês) ou *cinque* (em italiano), estamos usando diferentes *numerais* (falados) para exprimir a mesma *idéia:* o número cinco!

E a representação escrita do *número cinco* pode ser feita pelos seguintes *numerais* (fig. 25):

Fig. 25

Nota: Os numerais indo-arábicos, que são os mais usados por todos os povos civilizados de hoje, são também chamados algarismos em homenagem ao matemático árabe Al-Karismi.

OBSERVAÇÃO:

> Por comodismo de linguagem, na prática não se costuma dizer, por exemplo: "escreva o *numeral* do número cinco" e, sim, simplesmente, "escreva o *número* cinco".

Por outro lado, quando você escreve:

"5" ou "2 + 3" ou "2 + 1 + 2" ou "5 × 1" ou "10 : 2" ou 5 + 0",

está usando *diferentes numerais* para exprimir sempre a *mesma idéia:* o número cinco!

Isso significa que *não devemos confundir* numeral com algarismo, pois todo algarismo é um numeral, porém nem todo numeral é um algarismo, uma vez que o numeral pode envolver na sua representação *diversos algarismos* e *sinais de operações.*

CURIOSIDADES ACÊRCA DE NUMERAIS

Vamos agora, para melhor destacar o conceito de *numeral*, trabalhar *sòmente* com *símbolos* que não envolvam, de nenhuma maneira, as idéias (número) que êsses símbolos, possam representar:

1. Mostre que a "metade" de 8 é 3

   É muito fácil: basta "dividir" ao meio (por uma vertical) o primeiro símbolo . . .

   Assim, de 8 resulta 3

   E, se a "divisão" ao meio fôsse por uma horizontal, qual seria a "metade" de 8 ? Resolva você êste caso.

2. Mostre que a "metade" de XII é VII.

   Basta traçar a horizontal pelo meio e . . . .

3. Mostre que, "tirando" 3 de 32, resulta 2.

   Trata-se, evidentemente, de eliminar o numeral 3 do numeral 32 (basta *apagar* o 3) e não de *subtrair* o número três do número trinta e dois que, como você sabe, é o número vinte e nove.

4. Uma *pergunta de atenção:* os diferentes numerais escritos (egípcios, babilônios, romanos e indo-arábicos), que constam das figuras abaixo, representam o *mesmo número.* Qual é êsse *número?*

1. Dados: **2** e **5**, pergunta-se: 1.º) qual é o maior numeral (símbolo maior)?
   2.º) qual é o "maior" número (idéia)?

2. Escrever à direita de cada sentença a letra *V*, se fôr *verdadeira*, e a letra *F*, se fôr *falsa*:

   1.º) Número é uma *propriedade comum* que se associa a conjuntos *eqüipotentes* entre si
   2.º) Numeral é qualquer símbolo que representa um número
   3.º) Um número pode ser representado sòmente por um numeral
   4.º) Um número pode ser representado por diferentes numerais
   5.º) **8** e 8 são numerais do mesmo número
   6.º) 3 é um numeral menor que **2**
   7.º) Três é um número "menor" que dois

3. Assinalar a resposta correta:

   Cinco ou **5** são:

   a) Números diferentes de mesmo numeral
   b) Numerais de números diferentes
   c) Numerais do mesmo número
   d) Numerais iguais
   e) Nenhuma das respostas anteriores

sucessão dos números naturais

estrutura de ordem

SUCESSÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

4. *Relação de igualdade com os números naturais*

Consideremos dois conjuntos *eqüipotentes* A e B, que podem ser, por exemplo:

A: conjunto de alunos
B: conjunto de carteiras

Nesse caso a correspondência entre A e B é *biunívoca*, não sobrando carteira vazia, como também nenhum aluno fica de pé.

Se a representa o número natural correspondente ao conjunto A
e b representa o número natural correspondente ao conjunto B

diremos que os números a e b são *iguais* e escrevemos:

$$a = b$$

Observe que os símbolos a e b estão representando dois *numerais diferentes* do *mesmo número natural* e, portanto, podem ser relacionados com o conhecido sinal =, dando origem à *relação de igualdade* acima, onde a é o primeiro membro e b, o segundo.

Para a *igualdade* valem as seguintes *propriedades:*

reflexiva: $a = a$
simétrica: $a = b \Longrightarrow b = a$
transitiva: $a = b$ e $b = c \Longrightarrow a = c$

Com tais propriedades, a *igualdade* é uma relação de *eqüivalência!*

5. *Relação de desigualdade com os números naturais*

Dois números naturais são *diferentes* ou *desiguais* quando a êles correspondem conjuntos finitos *não-eqüipotentes*. É o caso, por exemplo, de um conjunto A (de alunos) estar em correspondência biunívoca *sòmente* com **uma parte** de um conjunto B (de carteiras) (fig. 26).

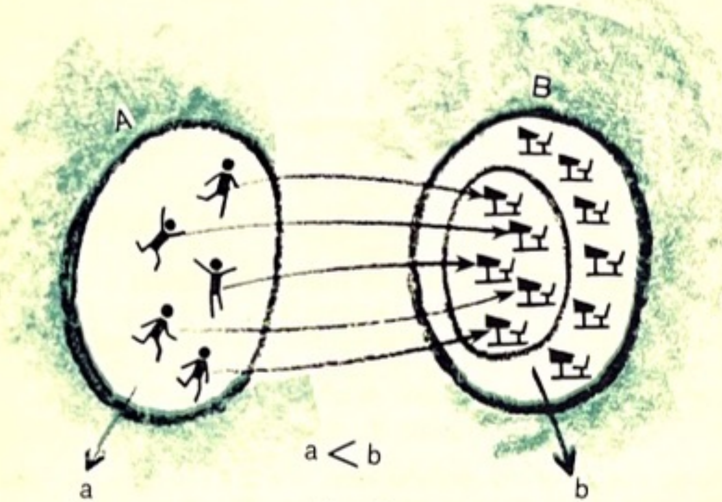


Fig. 26

Agora, sobrarão necessàriamente carteiras vazias, e diremos que: o número a (que corresponde ao conjunto A) é **menor** que o número b (que corresponde ao conjunto B) ou que o número b é **maior** que o número a.

Indicação: $a < b$ (lê-se: "a menor que b")

ou $b > a$ (lê-se: "b maior que a")

Os símbolos $<$ (menor) e $>$ (maior) indicam o *sentido* da desigualdade escrita. Na *relação de desigualdade:* $a < b$, a é o primeiro membro da desigualdade e b, o segundo.

Quando não há preocupação com o sentido da desigualdade, escrevemos:

$$a \neq b$$

Para as relações de desigualdade: $<$ e $>$, *não valem* as propriedades *reflexiva* e *simétrica*.

Agora:

1) *a estritamente menor* que *a* é *falso* para qualquer a ($a < a$ é falsa!)

2) *a estritamente menor* que *b* acarreta que *b estritamente menor* que *a* é *falso* ($a < b \Longrightarrow b < a$ é falsa!)

3) se *a estritamente menor* que *b* e *b estritamente menor* que *c*, então *a estritamente menor* que *c* é *verdadeiro* (*Propriedade transitiva:* $a < b$ e $b < c \Longrightarrow a < c$ é *verdadeira!*)

A *desigualdade* $<$ (ou $>$), por possuir essas três propriedades, é denominada **relação de ordem estrita.**

Observações:

1.ª) A aplicação da propriedade *transitiva*, como no exemplo:

$$\left.\begin{matrix} 5 < 6 \\ 6 < 8 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow 5 < 8$$

permite escrever a *dupla desigualdade*: $5 < 6 < 8$, que indica estarem os números 5, 6 e 8 dispostos em *ordem crescente*.

No caso de se escrever: $8 > 6 > 5$, então os números estão dispostos em *ordem decrescente*.

2.ª) Na comparação de dois números naturais quaisquer a e b é possível *sòmente uma* das relações:

$$a = b \quad \text{ou} \quad a < b \quad \text{ou} \quad a > b$$

Não se esqueça, pois: a existência de uma delas exclui as outras duas! Essa é a propriedade denominada *tricotomia*.

6. *Relação de ordem geral:* "$\leqslant$" *(ou* "$\geqslant$"*)*

Ao lado das relações já estudadas:

"$<$" *menor que*

"$=$" *igual a*

pode-se compor a relação: "$\leqslant$" *menor que ou igual a* (ou seja, *não-maior*) denominada RELAÇÃO DE ORDEM GERAL, da seguinte maneira:

$$a \leqslant b \quad \text{se} \quad a < b \quad \text{ou} \quad a = b$$

Guarde bem: tôda vez que se usa o conetivo *ou* para "ligar" duas sentenças ($a < b$, $a = b$), basta que *uma delas* seja *verdadeira* para que a sentença composta ($a \leqslant b$) seja *verdadeira*. Sòmente no caso de $a < b$ e $a = b$ serem *ambas falsas* é que a sentença composta $a \leqslant b$ é *falsa*.

Exemplos:

$3 \leqslant 3$ é verdadeira, pois $3 = 3$ é verdadeira (não importa que $3 < 3$ seja falsa)

$3 \leqslant 9$ é verdadeira, pois $3 < 9$ é verdadeira (não importa que $3 = 9$ seja falsa)

Contra-exemplo:

$8 \leqslant 5$ é falsa, pois $8 < 5$ é falsa e $8 = 5$ é falsa

Da mesma forma, a partir das relações:

"$>$" *maior que*
"$=$" *igual a*

pode-se compor a relação: "$\geqslant$" *maior que ou igual a* (ou seja, *não-menor*) da seguinte maneira:

$$a \geqslant b \quad \text{se} \quad a > b \quad \text{ou} \quad a = b$$

Exemplos:

$8 \geqslant 5$ é verdadeira, pois $8 > 5$ é verdadeira (não importa que $8 = 5$ seja falsa)

$3 \geqslant 9$ é falsa, pois $3 > 9$ é falsa e $3 = 9$ é falsa

Para a relação de *ordem geral* "$\leqslant$" (ou "$\geqslant$") valem as propriedades:

reflexiva: $a \leqslant a$

e *transitiva:* $a \leqslant b$ e $b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$

Não vale a propriedade *simétrica* ($a \leqslant b \Longrightarrow b \leqslant a$ é falsa!)

A relação "$\leqslant$" (ou "$\geqslant$") é denominada de *ordem geral*, pois *todos* os números naturais de um conjunto podem ser ordenados.

7. *Conjuntos ordenados. Estrutura de ordem no conjunto N*

Você sabe que é possível *ordenar* os elementos de qualquer conjunto finito desde que use um *certo critério*. Assim, por exemplo, pode-se *ordenar* os elementos do conjunto: $\{b, d, m, a, l\}$, usando como critério a *ordem alfabética* das letras $a, b, c, d, e, f, \ldots$ (a mesma que você usa quando procura palavras no dicionário), e escrever:

a precede *b*, *b* precede *d*, *d* precede *l*, *l* precede *m*.

No conjunto dos números naturais (*N*) a *relação de ordem geral* "$\leqslant$" (*menor que ou igual a*) constitui um *critério* que permite *ordená-los*, e nestas condições os números naturais *ordenados* passam a formar a **sucessão dos números naturais:**

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$$

Está assim presente a primeira **estrutura de ordem** (crescente) conhecida desde que aprendemos a contar, onde:

1. *Qualquer número natural tem um* ***sucessivo***
   (*Exs.:* 1 é *sucessivo* de 0; 2 é *sucessivo* de 1; 3 é *sucessivo* de 2; . . .)
2. *Zero não é sucessivo de nenhum número natural*, por isso é o *menor* dos números naturais
3. *Não existe o maior dos números naturais*, por isso a sucessão;

   $$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

   é *infinita*.

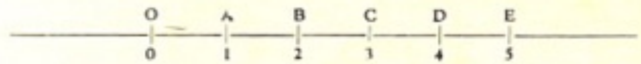
OBSERVAÇÕES:

1.ª) Se 9 é o *sucessivo* ou o *sucessor* de 8, então 8 diz-se o *antecessor* de 9.

2.ª) Se a é um número natural, então:
$a + 1$ indica o seu *sucessivo*
e $a - 1$ indica o seu *antecessor* (desde que a não seja 0).

8. *Reta numerada; representação geométrica do conjunto N*

Pode-se intuitivamente "ver" a *estrutura de ordem* dos números naturais, representando-os sôbre uma *reta numerada:*



obtida quando se marca sôbre uma reta qualquer um ponto *O*, denominado *origem*.

A seguir, usando uma unidade de comprimento (cm, por exemplo), marca-se à direita de *O* segmentos consecutivos de medidas iguais à unidade considerada, determinando-se, assim, os pontos: *A, B, C, D, E*,...

Fazendo corresponder ao ponto *O* o número zero, ao ponto *A* o número 1, ao ponto *B* o número 2, . . ., fica estabelecida uma correspondência *biunívoca* entre o conjunto dos números naturais $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ e o conjunto de pontos *O, A, B, C, D, E*, . . .

A reta, agora "numerada", constitui a *representação geométrica* do conjunto N e permite dizer que:

um número é *maior* que outro quando *segue* êste outro, isto é, *vem depois*

um número é *menor* que outro quando *precede* êste outro, isto é, *vem antes*

Exemplos: $5 > 3$ pois 5 *segue* 3

$3 < 4$ pois 3 *precede* 4

LEMBRETE AMIGO

Símbolos novos usados para *ordenar* os números naturais:

$>$ lê-se "maior que"
$<$ lê-se "menor que"
$\geqslant$ lê-se "maior que ou igual a"
$\leqslant$ lê-se "menor que ou igual a"

e para designar a relação de *implicação:*

$\Longrightarrow$ lê-se "implica"

"Estrutura de Ordem"

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 19

1. Se a representa um número natural (o mesmo que $a \in N$), escrever os valôres de a que satisfazem a sentença: $a \leqslant 5$.

   Temos para a os seguintes valôres: 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

2. Ordenar pela ordem "$\geqslant$" (ordem decrescente) os elementos do conjunto:

   $$\{5, 8, 3, 1, 7\}$$

   Temos: $8 \geqslant 7 \geqslant 5 \geqslant 3 \geqslant 1$

3. Calcular o valor de a, sabendo que $b = 8$ e $a = b$.

   Pela propriedade *transitiva*, como $a = b$ e $b = 8$, então $a = 8$.

4. Considerando-se o conjunto dos números naturais: $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, escrever o conjunto dos números naturais *maiores* que 5 e *menores* que 9.

   Temos: $\{6, 7, 8\}$

   Nota: 1. Se o conjunto pedido fôsse o dos números naturais *maiores* ou *iguais* a 5 e *menores* ou *iguais* a 9, então a resposta seria o conjunto:

   $$\{5, 6, 7, 8, 9\}$$

   2. Se o conjunto pedido fôsse o dos números naturais *maiores* ou *iguais* a 5 e *menores* que 9, então a resposta seria o conjunto:

   $$\{5, 6, 7, 8\}$$

5. Assinalar com *V*, se fôr *verdadeira*, e com *F*, se fôr *falsa*, cada uma das seguintes sentenças:

   1.ª) $9 > 5$ (*V*) 2.ª) $9 = 5$ (*F*) 3.ª) $9 < 5$ (*F*) 4.ª) $9 \geqslant 5$ (*V*) 5.ª) $9 \leqslant 5$ (*F*)
   6.ª) $6 \neq 6$ (*F*) 7.ª) $6 = 6$ (*V*) 8.ª) $6 \geqslant 6$ (*V*) 9.ª) $6 < 6$ (*F*) 10.ª) $6 \leqslant 6$ (*V*)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 20

1. Quais os valôres de a que satisfazem cada uma das seguintes sentenças:

   1.ª) $a \leqslant 7$ sabendo que $a \in N$
   2.ª) $a < 5$ " " $a \in N^*$
   3.ª) $a > 3$ " " $a \in N$ **(cuidado!)**
   4.ª) $a \geqslant 1$ " " $a \in N^*$ **(cuidado!)**

2. *Ordenar* os elementos do seguinte conjunto: $\{7, 1, 6, 3, 8, 0, 9\}$

   1.º) em ordem *crescente* (por intermédio da relação "$\leqslant$")
   2.º) em ordem *decrescente* (por intermédio da relação "$\geqslant$")

3. Escrever os seguintes números naturais: 5, 8, 3 e 3, em *sucessão*

   1.º) de ordem *crescente*, fazendo uso do sinal *menor que*
   2.º) de ordem *decrescente*, fazendo uso do sinal *maior que*

4. Assinalar com *V*, se fôr *verdadeira*, e com *F*, se fôr *falsa*, cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $5 > 2$	2.ª) $5 = 2$	3.ª) $5 \geqslant 2$	4.ª) $5 < 2$	5.ª) $5 \leqslant 2$
6.ª) $7 > 5$	7.ª) $3 < 2$	8.ª) $4 = 5$	9.ª) $4 \neq 4$	10.ª) $1 \geqslant 1$
11.ª) $3 = 3$	12.ª) $3 \geqslant 4$	13.ª) $0 < 2$	14.ª) $0 \leqslant 2$	15.ª) $0 > 0$

5. Escrever, dos seguintes números naturais: 1, 9 e a, respectivamente o *antecessor* e o *sucessivo*.

6. Responder às seguintes perguntas:

   1.ª) Se $a = 10$ e $x = a$, quanto vale x?

   2.ª) Se $a > 5$ e $5 > 2$, qual é a propriedade da desigualdade que permite dizer que: $a > 2$?

   3.ª) Se $n < 8$ e $8 < 10$, pode-se escrever $n < 10$? Por quê?

7. Considerando o conjunto N, como Conjunto-Universo de trabalho, escrever os seguintes conjuntos:

   1.º) dos números naturais *menores ou iguais* a 6

   2.º) dos números naturais *maiores* que 6 (**cuidado!**)

   3.º) dos números naturais *maiores* que 5 e *menores* que 10

   4.º) dos números naturais *maiores ou iguais* a 0 e *menores* ou *iguais* a 9

   5.º) dos números naturais *não maiores* que 10 (**cuidado!**)

8. Qual o conjunto de valôres que pode assumir o número natural n, sabendo-se que: $n > 3$ e $n < 7$ (o mesmo que: $3 < n < 7$)?

9. Idem, para as condições: $n \geqslant 3$ e $n < 9$ (o mesmo que: $3 \leqslant n < 9$)

10. Idem, para as condições: $5 \leqslant n \leqslant 7$.

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 21

1. Ordenar pelo critério que você emprega quando usa o dicionário, as palavras do seguinte conjunto:

   {sofrer, amar, partir, chegar, sorrir}

2. Designando por a o número natural que indica os olhos de um lôbo, por b o número de suas patas e por c o número de suas orelhas, escrever uma *igualdade* e duas *desigualdades* envolvendo êsses números.

3. Uma urna contém a bolas distribuídas entre b bolas brancas e c bolas pretas. Usando as relações de igualdade ou de desigualdade:

   1.º) compare os números a e b

   2.º) compare os números a e c

   3.º) quais as relações possíveis entre b e c?

4. Colocar no lugar de "?" os símbolos que tornam *verdadeira* cada uma das sentenças que se obtêm com essa substituição:

   1.ª) 8 ? 5 (Exemplo-modêlo: $8 > 5$ ou $8 \geqslant 5$ ou $8 \neq 5$)

   2.ª) 0 ? 2   3.ª) 7 ? 7   4.ª) 9 ? 1   5.ª) 1 ? 9

5. A relação: *ter a mesma mãe*, é uma *relação de equivalência*, como pode ser fàcilmente verificado com três alunos que são irmãos (filhos da mesma mãe): Antônio, Benedito e Carlos, pois essa relação é:

   reflexiva (re): Antônio tem a mesma mãe que Antônio

   simétrica (si): Se Antônio tem a mesma mãe que Benedito, então Benedito tem a mesma mãe que Antônio

   transitiva (tran): Se Antônio tem a mesma mãe que Benedito e Benedito tem a mesma mãe que Carlos, então Antônio tem a mesma mãe que Carlos

   Pesquise você, agora, se valem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva para as seguintes relações entre pessoas:

   1.ª) *ser mais alto*   3.ª) *ser primo*

   2.ª) *ter o mesmo pêso*   4.ª) *ser tão alto*

   aplicadas em três colegas de sua classe.

   Um aviso ...: duas delas são relações de *equivalência* (valem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva); uma outra é *relação de ordem estrita* (só vale a propriedade transitiva), e a outra é uma relação mais "pobre", porque só vale a propriedade simétrica ...

6. Assinalar a resposta correta em cada um dos exercícios seguintes:

   I — Se $n > 10$ e $10 > m$, a propriedade que permite escrever $n > m$ se chama:

   a) reflexiva
   b) simétrica
   c) comutativa
   d) transitiva
   e) nenhuma das respostas anteriores

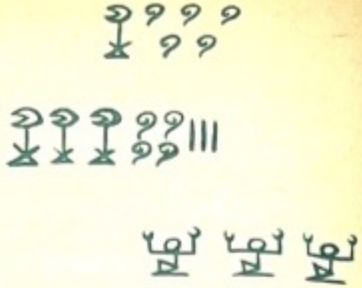
   II — Se João é maior que Paulo,
   Carlos é menor que Luís,
   e Paulo é maior que Luís,

   então:

   a) João é menor que Luís
   b) João é maior que Luís
   c) Paulo é menor que Carlos
   d) Não é possível comparar os três

7. Das sentenças abaixo, a verdadeira é:

   a) Se $x > 10$ e $y < 10 \Longrightarrow x < y$
   b) Se $x > 10$ e $10 > y \Longrightarrow x = y$
   c) Se $x > 10$ e $10 > y \Longrightarrow x > y$
   d) Se $x > 10$ e $10 = y \Longrightarrow x < y$
   e) Nenhuma das respostas anteriores



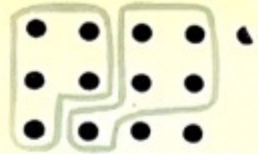
Sistemas de numeração; bases

sistema de numeração decimal

sistemas de numeração antigos e modernos

experimentos sôbre contagens em diversas bases

3ª PARTE



23_{cinco}

sistemas de numeração; bases

1. *Sistemas de numeração*

Como existem *infinitos* números naturais, *é impossível* inventar um *nome especial* para cada número, bem como representar cada um dêles por um *símbolo especial.* Daí a necessidade de certas regras que permitam *ler e escrever* **qualquer** número, usando *poucas* palavras e *poucos* símbolos.

O conjunto de tais regras constitui um *sistema de numeração.* Êsses sistemas, como será visto adiante, têm variado com as épocas e com os povos.

2. *Base de um sistema de numeração*

Um fato importante para qualquer sistema de numeração é o seguinte: qual o *número de elementos* necessários para formar um *conjunto-padrão* que auxilie a contagem de objetos?

Êsse número é chamado *base* do sistema de numeração.

Assim, por exemplo, quando falamos base *dez*, estamos *pensando* na formação de conjuntos com *dez elementos*, isto é, dada uma coleção de objetos, procuramos saber quantos conjuntos de **dez** podem ser formados. Por sinal é essa a base usada, desde a Antiguidade, dada a correspondência existente com os *dedos das duas mãos*, que são exatamente *dez*. Se tivéssemos oito dedos em nossas mãos, e não dez, provàvelmente a base seria oito, não?

Que é um sistema de base *doze?* É aquêle que forma conjuntos de *doze elementos* para contar os objetos de uma coleção. É nessa base que, costumeiramente, se contam (em *dúzias*) as frutas, os ovos, etc.

A *contagem do tempo*, desde os antigos babilônios, é feita na base *sessenta* (o conjunto de *sessenta segundos* constitui *um minuto*) e a civilização Maia, da América Central, usava a base *vinte* para a contagem de seus objetos.

As *máquinas eletrônicas* de hoje operam no sistema de numeração *binário*, isto é, de base *dois*, que é a mais indicada para as altas velocidades com que são feitos os cálculos.

sistema de numeração decimal

valor posição

3. *Que é Sistema de Numeração Decimal?*

O nome tão conhecido de *Sistema de Numeração Decimal* significa um sistema de numeração com os seguintes *característicos:*

1.º) é de base **dez;**
2.º) usa *sòmente* os dez numerais indo-arábicos (algarismos):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0

para escrever *todos* os números;
3.º) obedece ao **Princípio da Posição Decimal.**

Para melhor conhecimento dos *três característicos* do Sistema de Numeração Decimal que, de certa forma, já é conhecido de todos pelo uso constante que tem, lembremos que:

1. Os conjuntos de *dez* elementos são denominados **dezenas;** agrupando as dezenas em conjuntos de *dez*, obtemos as **centenas;** e assim, sucessivamente, aparecerão novas ordens, sempre agrupando os elementos de *dez* em *dez*. Reunindo as ordens **em classes,** simplificar-se-á a maneira de *falar* os números (numeração falada), de acôrdo com a seguinte disposição:

1.ª ordem: unidades simples 2.ª ordem: dezenas 3.ª ordem: centenas	1.ª classe (das *unidades simples*)
4.ª ordem: unidades de milhar 5.ª ordem: dezenas de milhar 6.ª ordem: centenas de milhar	2.ª classe (dos *milhares*)
7.ª ordem: unidades de milhão 8.ª ordem: dezenas de milhão 9.ª ordem: centenas de milhão	3.ª classe (dos *milhões*)
... .	....

e, assim por diante, *novas ordens* e *novas classes* aparecerão (dos bilhões, dos trilhões, dos quatrilhões, . . .).

À guisa de exercitação, lembraremos que em *Português* os *nomes* para a leitura de *qualquer* número surgem de algumas das *combinações* dos primeiros nomes usados. Assim, por exemplo, *dizemos:*

"*onze*" (ao invés de *dez* e *um*);
"*doze*" (ao invés de *dez* e *dois*), etc . . .
"*vinte*" (ao invés de *dois dez*); "*trinta*" (ao invés de *três dez*), . . .

2. Os *numerais indo-arábicos* (algarismos): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0, que permitem *contar* usando-se as pontas dos *dedos*, são também denominados dígitos. Quando se diz *algarismo significativo*, trata-se de qualquer dos algarismos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

3. Para poder *escrever* qualquer número (numeração escrita), usando *sòmente* os numerais indo-arábicos (algarismos), é necessário empregar o *importantíssimo Princípio da Posição Decimal*, de invenção hindu:

> **Todo algarismo escrito imediatamente à esquerda de outro representa unidades de ordem imediatamente superior (*dez vêzes*) à dêsse outro.**

Por êsse Princípio, um *mesmo algarismo* (e tome bem nota dêsse fato!) pode valer muitas ou poucas unidades. Assim, por exemplo, em:

33

o primeiro 3 "vale" *trinta* (3×10) e o segundo 3 "vale" *três* mesmo!

Observações:

1.ª) Cada *algarismo significativo* tem dois valôres: valor *absoluto* e valor *relativo*. Valor *absoluto* é o representado pelo algarismo *isoladamente* e valor *relativo* é o representado pelo algarismo de acôrdo com a *posição* que ocupa no numeral escrito.

2.ª) O *primeiro* algarismo escrito à direira indica as *unidades simples.*

3.ª) Caso *não contenha* as unidades de uma determinada ordem, escreve-se no lugar correspondente das mesmas o algarismo 0.

4.ª) Ao escrever-se um número de mais de três algarismos, deve-se separá-los em classes de três algarismos, a partir da direita; a separação é feita com um ponto(*).

Exemplos:

1. Escrever, no *Sistema de Numeração Decimal*, o número que contenha; duas dezenas de milhar, quatro unidades de milhar, seis centenas, nenhuma dezena e duas unidades simples.

   De acôrdo com o que foi ensinado, temos:

```
24.602
││ ││
││ │└──→ unidades simples
││ └───→ dezenas
││└────→ centenas
│└─────→ unidades de milhar
└──────→ dezenas de milhar
```

onde:

2. (o primeiro da esquerda, que representa as *dezenas de milhar*) tem

$$\begin{cases} \text{valor absoluto: } 2 \\ \text{valor relativo: } 20.000 \end{cases}$$

4 (representa as *unidades de milhar*) tem

$$\begin{cases} \text{valor absoluto: } 4 \\ \text{valor relativo: } 4.000 \end{cases}$$

6 (representa as *centenas*) tem

$$\begin{cases} \text{valor absoluto: } 6 \\ \text{valor relativo: } 600 \end{cases}$$

0 (representa "nenhuma" *dezena*)

2 (representa as *unidades simples*) tem

$$\begin{cases} \text{valor absoluto: } 2 \\ \text{valor relativo: } 2 \end{cases}$$

2. Escrever o número "oito milhões seiscentos e seis mil trezentos e um".

   Temos:

   8.606.301

3. Escrever a *leitura* do número: 3.567.918.015

   Temos: "três bilhões(**) quinhentos e sessenta e sete milhões novecentos e dezoito mil e quinze".

(*) De acôrdo com o Decreto Federal 52.423 — Portaria n.º 13 de 12/4/1967.

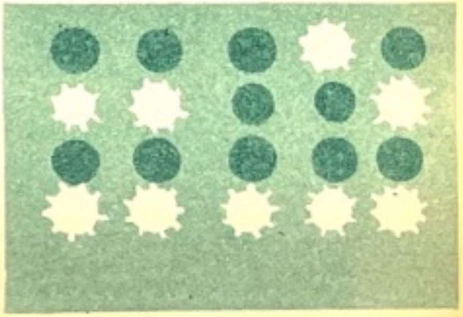
(**) Não confundir o bilhão português, que vale *mil milhões*, com o bilhão usado pelos povos de línguas espanhola e inglêsa, que vale um *milhão de milhões*.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 22

1. Para contar os botões do meu jôgo, agrupei-os em conjuntos de *doze* botões. Qual é a base que estou usando para essa contagem?
2. Se agrupar as minhas bolinhas de sete em sete, eu as estarei contando num sistema de numeração de base .....

Os exercícios a seguir referem-se ao *Sistema de Numeração Decimal:*

3. Um número tem seis algarismos. Qual é a *ordem* de sua unidade mais alta?
4. A que classe pertence a unidade de 2.ª ordem? De 5.ª ordem? De 9.ª ordem?
5. Quantas dezenas há num milhar? Quantas centenas há num milhão?
6. Qual é o maior número e qual é o menor número que se pode escrever com os algarismos 5, 3, 2 e 8, sem repetir nenhum algarismo?
7. Com os algarismos 7, 1 e 3 (sem repeti-los), escrever seis números dispostos em ordem decrescente.
8. Dado o número 293, pergunta-se: 1.º) Quantos algarismos possui? 2.º) Qual é o algarismo de maior valor absoluto? 3.º) Qual o algarismo de maior valor relativo?
9. Qual o valor relativo do 8 em cada um dos números: 8.315 e 12.080?
10. Escrever o maior e o menor número natural formado por dois algarismos significativos diferentes.
11. Quantos números de dois algarismos existem, cujo algarismo das unidades é 1? Idem, cujo algarismo das dezenas é 3?
12. Qual é o maior número de cinco algarismos significativos, diferentes entre si, que se pode escrever? Qual o menor?
13. Quando é que, trocando as posições de todos os algarismos de um número, êste não muda de valor?
14. Qual é o sucessivo de 9.001.001.999?
15. Qual é o sucessivo do maior número de sete algarismos?



LEMBRETE AMIGO

Não confunda *algarismo* com *número!*

Assim, por exemplo:

924 é um *número* representado pelos *algarismos* 9, 2 e 4
5 é um *número* representado pelo único *algarismo* 5

Responda: a "numeração" 1.239 de uma casa é formada de quatro *números* ou de quatro *algarismos?*

PRÁTICAS COM O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL — Grupo 23

Os exercícios se referem à *sucessão dos números naturais*

1. (Modêlo) Quem escreve de 28 até 35:

1.º) quantos *números* escreve?
2.º) quantos *algarismos* escreve?

Temos:

números escritos: 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 $\Longrightarrow$ total: 8 números
(*técnica:* $35 - 28 = 7$; $7 + 1 = 8$)

algarismos escritos: de 28 a 35 escrevem-se 8 números de 2 algarismos; logo, o total de algarismos escritos é: $8 \times 2 = 16$
(*técnica:* 28 a 35 $\Longrightarrow$ 8 n.os de 2 alg. $\Longrightarrow 8 \times 2 = 16$ (alg.)

2. (Modêlo) Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os números naturais de 1 a 68.

Temos: de 1 a 9 $\Longrightarrow$ 9 n.os de 1 alg. $\Longrightarrow 9 \times 1 = 9$ (alg.)
de 10 a 68 $\Longrightarrow$ 59 n.os de 2 alg. $\Longrightarrow 59 \times 2 = 118$ (alg.)
Total . . . . . 127 (alg.)

3. (Modêlo) Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os números naturais de 32 a 176.

Temos: de 32 a 99 $\Longrightarrow$ 68 n.os de 2 alg. $\Longrightarrow 68 \times 2 = 136$ (alg.)
de 100 a 176 $\Longrightarrow$ 77 n.os de 3 alg. $\Longrightarrow 77 \times 3 = 231$ (alg.)
Total . . . . . 367 (alg.)

4. (Modêlo) Para numerar as páginas de um livro foram necessários 258 tipos. Quantas páginas tem êsse livro?

Temos: para paginar as 9 primeiras usaram-se $9 \times 1 \Longrightarrow$ 9 (tipos)
para paginar as 90 seguintes usaram-se $90 \times 2 \Longrightarrow$ 180 (tipos)
Logo, as 99 primeiras páginas usaram . . . . 189 (tipos)

Os tipos restantes: $258 - 189 = 69$, foram empregados para numerar, as páginas de 3 algarismos, ou seja, $69 : 3 = 23$ páginas. O livro conterá assim 99 págs. + + 23 págs. = *122 págs.*

5. Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os inteiros de 1 a 78, de 1 a 756, de 1 a 2.507, de 50 a 2.000.

6. Um livro tem 187 páginas. Quantos algarismos são necessários para numerá-las?

7. Para numerar as páginas de um livro usaram-se 171 tipos. Quantas páginas tem o livro?

8. Certa pessoa, escrevendo a sucessão dos números naturais, interrompeu seu trabalho em um certo número. Em que número parou, se, até êsse número, empregou 1.506 algarismos?

9. Quantos números existem com um algarismo? Quantos existem com dois?

10. Quantos tipos são necessários para numerar um livro de Matemática Moderna de 327 páginas?

11. Assinalar a resposta correta:

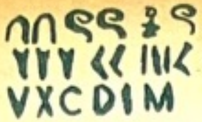
I — Num sistema de numeração decimal, todo algarismo escrito imediatamente à esquerda de outro representa unidades maiores que êsse outro:

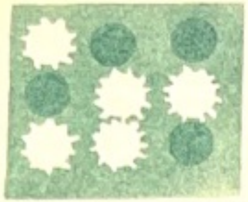
a) uma vez
b) dez vêzes
c) cem vêzes
d) mil vêzes
e) nenhuma das respostas anteriores

(Questão proposta à 1.ª OMESP pela 4.ª Inspetoria Regional, de Guarulhos, coordenada pelo prof. Oswaldo Luiz Guimarães.)

II — Num sistema de numeração decimal, um número representado por três algarismos tem:

a) sempre mais de dez dezenas
b) sempre menos de dez dezenas
c) no máximo dez unidades simples
d) no mínimo dez dezenas
e) nenhuma das respostas anteriores





sistemas de numeração antigos e modernos

4. *Preliminares*

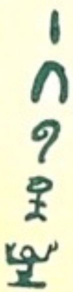
Para melhor compreensão de qualquer *sistema de numeração* é necessário o conhecimento das *operações fundamentais*, cuja iniciação todos vocês já têm e que serão reestudadas, com a importância que merecem, no capítulo seguinte.

Assim, o uso corrente que todos trazem das operações de adição e de subtração permitirá uma apresentação simples, porém explicativa, de quadros comparativos entre sistemas de numeração usados pelos antigos (egípcios, babilônios, romanos) e hoje pelos modernos.

5. *Sistemas de numeração antigos*

a) **Sistema de numeração egípcio** (3.500 anos antes de Cristo!)

Numerais usados:



(*um:* representava um cajado)

(*dez:* representava um osso de calcanhar)

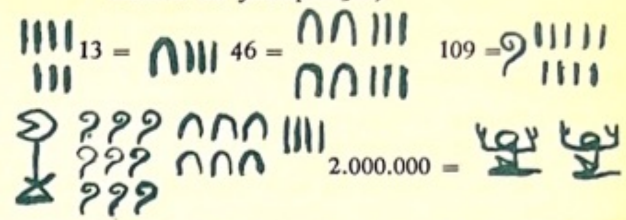
(*cem:* representava uma corda enrolada)

(*mil:* representava uma machadinha)

(*milhão:* representava um homem assustado, talvez por representar um número tão grande!)

Regra para escrever: um numeral escrito à direita (ou abaixo) de outro soma o seu valor ao dêsse outro (princípio aditivo da justaposição).

Exemplos: 7 = 13 = 46 = 109 = 1.968 = 2.000.000 =



Observação: O sistema é decimal, isto é, de base *dez* (dez *cajados* vale um *osso;* dez *ossos* vale uma *corda enrolada*, etc . . .), porém não usa o Princípio da Posição (os egípcios não o conheciam ainda), razão por que se tornava difícil a representação de números grandes.

b) **Sistema de numeração babilônio** (3.000 anos antes de Cristo!)

Numerais usados:

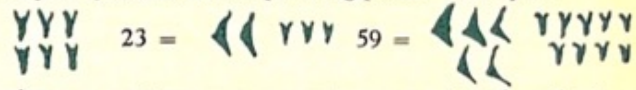
(*um:* representava uma cunha) — *símbolos cuneiformes*

(*dez:* cunha em posição horizontal) — *símbolos cuneiformes*

Regras para escrever:

1.ª) Para números *menores* que sessenta obedece ao mesmo princípio da justaposição usado pelos egípcios. *Exemplos:*

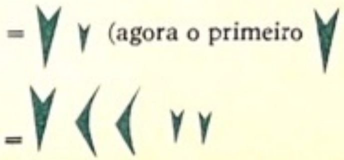
6 = 23 = 59 =



2.ª) Para números *maiores* que sessenta usa-se (e pela primeira vez na História!) o Princípio da Posição de base *sessenta* (Princípio Sexagesimal). *Exemplos:*

61 = (agora o primeiro vale 60 e o segundo , *um* mesmo!)

82 =



Nota: Para facilitar a representação, pode-se escrever o primeiro um pouco maior que o segundo.

Observação: O Sistema Sexagesimal, isto é, de base *sessenta*, usa o Princípio da Posição e ainda hoje é empregado, com algumas variações, para exprimir medidas de tempo (hora, minuto e segundo) e de ângulo (grau, minuto-ângulo, segundo-ângulo) conforme estudo que será feito no Cap. 4 (Sistemas de medidas *não-decimais*).

c) **Sistema de numeração romano** (alguns anos antes de Cristo!)

Numerais usados: I (um) V (cinco) X (dez) L (cinqüenta) C (cem) D (quinhentos) M (mil) que são letras maiúsculas do alfabeto latino.

Regras para escrever:

1.ª) *Sòmente* os numerais I, X, C e M podem ser repetidos no máximo três vêzes consecutivas.

2.ª) Se um numeral (ou mais) está escrito à direita de outro de igual ou maior valor, somam-se os seus valôres (princípio aditivo da justaposição) e se está (com exceção de V, L, D e M) escrito à esquerda de outro de valor imediatamente superior, subtraem-se (princípio subtrativo da justaposição).

3.ª) Para aumentar o valor do número mil vêzes, coloca-se um traço horizontal sôbre o numeral (com exceção do I); para aumentá-lo um milhão de vêzes, colocam-se dois traços e assim sucessivamente.

Exemplos:

3 =	III	206 =	CCVI
21 =	XXI	1.969 =	MCMLXIX
9 =	IX	4.719.002 =	$\overline{\overline{\mathrm{IV}}\mathrm{DCCXIX}}\mathrm{II}$

Observação: O *Sistema de Numeração Romano*, ainda hoje empregado para indicar capítulos de livros, datas históricas, mostradores de relógios (embora o *quatro* apareça escrito errado: IIII, para guardar uma antiga tradição relojoeira . . .), é decimal (base *dez*), porém não obedece a nenhum Princípio de Posição.

Outro aspecto que você deve observar é que os Sistemas de Numeração antigos apresentados não tinham *numerais* para representar o zero, que sòmente 500 anos depois de Cristo foi representado pelos hindus.

6. *Sistemas de numeração modernos*

Os vários Sistemas de Numeração que hoje prevalecem, visam a auxiliar o homem nas suas diversas atividades. Todos êles se valem do *Princípio da Posição*, que varia de acôrdo com a *base* adotada.

Em aplicações das mais diversas a base empregada *não é* mais *dez*. Alguns experimentos serão feitos no parágrafo seguinte, onde, para representar os números resultantes das contagens dos elementos de um conjunto, em *diversas bases*, serão empregados, de preferência, os *numerais indo-arábicos* (algarismos).

Se, por exemplo, fôr adotada a *base cinco* (Sistema de Numeração Quinário), necessitaremos:

1.º) dos cinco numerais: 0, 1, 2, 3 e 4

2.º) do Princípio da Posição Quinário: todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades cinco vêzes maiores que as dêsse outro.

Modernamente os *computadores eletrônicos* empregam a *base dois* (Sistema de Numeração Binário), usando, portanto, sòmente *dois numerais:* 0 e 1, para escrever *qualquer número.*

O algarismo 0 traduz a *lâmpada apagada* (circuito aberto) e o algarismo 1, a *lâmpada acesa* (circuito fechado). Sabendo o *lugar* de cada lâmpada, o operador poderá "ler" no quadro do computador os *números* que as lâmpadas acusarem.

Assim, por exemplo, a disposição:

onde ☼ representa lâmpada acesa e ● lâmpada apagada, é a do número:

1 1 0 1 (base *dois*)

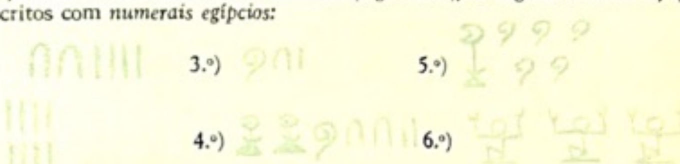
Que número é êsse para você, acostumado a trabalhar sòmente com números escritos no Sistema de Numeração Decimal?

No Sistema de Numeração Decimal, 1 1 0 1_{dois} representa o conhecido 13 da base decimal. Ver no *Apêndice* 2 o porquê.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 24

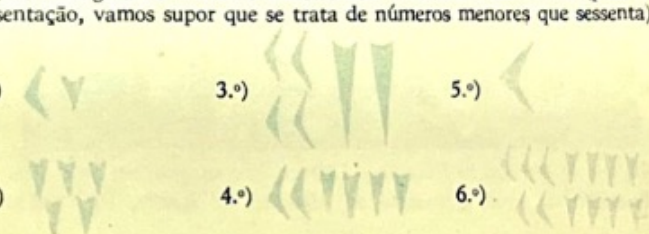
1. Escrever, usando os numerais indo-arábicos (algarismos), os seguintes números, que estão escritos com *numerais egípcios:*

1.º) 3.º) 5.º) 2.º) 4.º) 6.º)



2. Idem, sendo agora os números escritos com *numerais babilônios* (para facilitar a representação, vamos supor que se trata de números menores que sessenta).

1.º) 3.º) 5.º) 2.º) 4.º) 6.º)



c) **Sistema de numeração romano** (alguns anos antes de Cristo!)

Numerais usados:	I	V	X	L	C	D	M
	(um)	(cinco)	(dez)	(cinqüenta)	(cem)	(quinhentos)	(mil)

que são letras maiúsculas do alfabeto latino.

Regras para escrever:

1.ª) *Sòmente* os numerais I, X, C e M podem ser repetidos no máximo três vêzes consecutivas.

2.ª) Se um numeral (ou mais) está escrito à direita de outro de igual ou maior valor, somam-se os seus valôres (princípio aditivo da justaposição) e se está (com exceção de V, L, D e M) escrito à esquerda de outro de valor imediatamente superior, subtraem-se (princípio subtrativo da justaposição).

3.ª) Para aumentar o valor do número mil vêzes, coloca-se um traço horizontal sôbre o numeral (com exceção do I); para aumentá-lo um milhão de vêzes, colocam-se dois traços e assim sucessivamente.

Exemplos:

3 = III		206 = CCVI	
21 = XXI		1.969 = MCMLXIX	
9 = IX		4.719.002 = $\overline{\overline{\text{IV}}\text{DCCXIX}}\text{II}$	

Observação: O *Sistema de Numeração Romano*, ainda hoje empregado para indicar capítulos de livros, datas históricas, mostradores de relógios (embora o *quatro* apareça escrito errado: IIII, para guardar uma antiga tradição relojoeira . . .), é decimal (base dez), porém não obedece a nenhum Princípio de Posição.

Outro aspecto que você deve observar é que os Sistemas de Numeração antigos apresentados não tinham *numerais* para representar o zero, que sòmente 500 anos depois de Cristo foi representado pelos hindus.

6. *Sistemas de numeração modernos*

Os vários Sistemas de Numeração que hoje prevalecem, visam a auxiliar o homem nas suas diversas atividades. Todos êles se valem do *Princípio da Posição*, que varia de acôrdo com a *base* adotada.

Em aplicações das mais diversas a base empregada *não é* mais *dez.* Alguns experimentos serão feitos no parágrafo seguinte, onde, para representar os números resultantes das contagens dos elementos de um conjunto, em *diversas bases*, serão empregados, de preferência, os *numerais indo-arábicos* (algarismos).

Se, por exemplo, fôr adotada a *base cinco* (Sistema de Numeração Quinário), necessitaremos:

1.º) dos cinco numerais: 0, 1, 2, 3 e 4

2.º) do Princípio da Posição Quinário: todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades cinco vêzes maiores que as dêsse outro.

Modernamente os *computadores eletrônicos* empregam a *base dois* (Sistema de Numeração Binário), usando, portanto, sòmente *dois numerais:* 0 e 1, para escrever *qualquer número.*

O algarismo 0 traduz a *lâmpada apagada* (circuito aberto) e o algarismo 1, a *lâmpada acesa* (circuito fechado). Sabendo o *lugar* de cada lâmpada, o operador poderá "ler" no quadro do computador os *números* que as lâmpadas acusarem.

Assim, por exemplo, a disposição:

☼☼●☼

onde ☼ representa lâmpada acesa e ● lâmpada apagada, é a do número:

1 1 0 1 (base *dois*)

Que número é êsse para você, acostumado a trabalhar sòmente com números escritos no Sistema de Numeração Decimal?

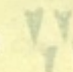
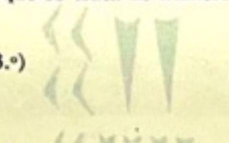
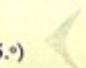
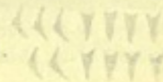
No Sistema de Numeração Decimal, 1 1 0 1$_{\text{dois}}$ representa o conhecido 13 da base decimal. Ver no *Apêndice 2* o porquê.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 24

1. Escrever, usando os numerais indo-arábicos (algarismos), os seguintes números, que estão escritos com *numerais egípcios:*

1.º)
2.º)
3.º)
4.º)
5.º)
6.º)

2. Idem, sendo agora os números escritos com *numerais babilônios* (para facilitar a representação, vamos supor que se trata de números menores que sessenta).

1.º)
2.º) 
3.º) 
4.º) 
5.º) 
6.º) 

3. Idem, sendo agora os números escritos com *numerais romanos:*

1.º) XXIX | 3.º) MCMLIV | 5.º) $\overline{\text{M}}$DCIX

2.º) DCCCLXVI | 4.º) $\overline{\text{IV}}$DCXLIII | 6.º) $\overline{\overline{\text{XI}}}\overline{\text{CDXXXIX}}$DXXII

4. Qual o maior número que pode ser escrito usando sòmente numerais romanos e não usando a 3.ª regra de seu sistema de numeração?

5. Dados os seguintes números, escritos no sistema de numeração decimal, com numerais indo-arábicos (algarismos), escrever os respectivos numerais egípcios e romanos:

1.º) 9 | 3.º) 210 | 5.º) 4.317

2.º) 36 | 4.º) 1.969 | 6.º) 8.016

6. No quadro de um computador eletrônico vê-se:

☼ ● ☼ ☼ ●

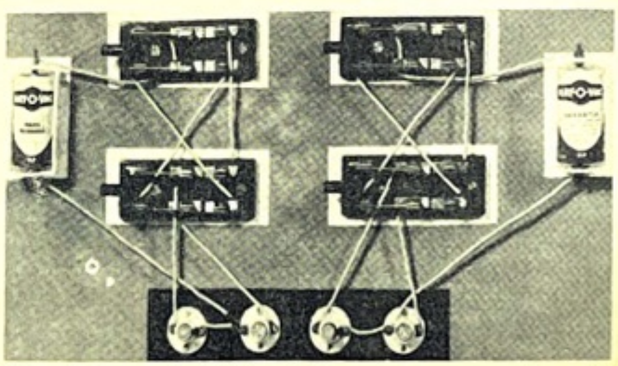
Escrever o número que está sendo registrado na base dois.
(É fácil ver que se trata do número: 1 0 1 1 0_{dois})

Escreva você, agora, os números (base dois) correspondentes às seguintes representações:

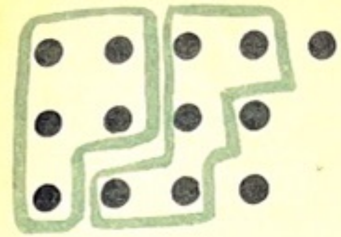
1.ª) ☼ ● ● ● ☼ ☼   4.ª) ● ● ● ● ● ●

2.ª) ● ☼ ● ☼ ● ☼   5.ª) ☼ ☼ ☼ ☼ ☼ ☼

3.ª) ☼ ● ☼ ● ☼ ●   6.ª) ☼ ● ● ● ● ●



Sistema de Numeração Binário — Leitura da contagem em base dois.
Trabalho do Prof. Fernando de Almeida, de Recife, PE, 1966.



experimentos sôbre contagens em diversas bases

7. *Contagens em bases diversas. Princípio da Posição Geral*

Os conjuntos de pontos desenhados nas figuras que se seguem serão *agrupados* de acôrdo com as perguntas feitas. Para *escrever* o número resultante da contagem dos pontos de qualquer conjunto, vamos valer-nos dos *numerais indo-arábicos*, isto é, dos *algarismos* com que estamos acostumados a trabalhar, e *mais* o Princípio da Posição Geral, que diz:

> **Todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades de ordem imediatamente superior às dêsse outro.**

É evidente que as unidades representadas pelo algarismo de ordem *imediatamente superior* vão depender da base adotada para efetuar a *contagem* dos pontos.

Com essa introdução, preste agora bastante ATENÇÃO:

1. No conjunto de pontos (fig. 27), quantos *grupos de dez* existem? Quantos pontos sobram?

Observe que, reunindo êsses pontos em grupos de *dez* (em *qualquer* ordem!), você obtém: *um* grupo de dez e *sobram oito* pontos. Então o número resultante na base *dez* é:

$$18_{\text{dez}}$$

Como se trata de contagem no usual Sistema de Numeração Decimal, pode-se dispensar de escrever a base dez como índice, logo abaixo do número encontrado. Logo:

18_{dez} ou simplesmente:
18 (lê-se: "dezoito")

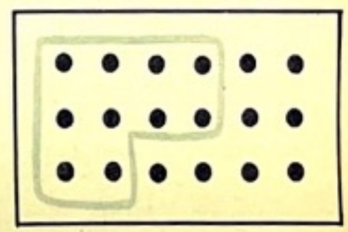


FIG. 27

2. No conjunto de pontos (fig. 28), quantos *grupos de cinco* existem? Quantos sobram? Escrever o número resultante na *base cinco* (Sistema de Numeração Quinário).

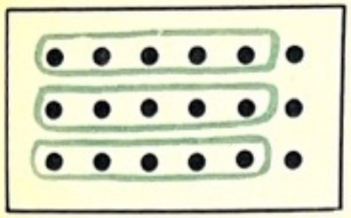


Fig. 28

Existem *três* grupos de cinco e *sobram três* pontos. Logo, na *base cinco*, o número de pontos será dado pelo *numeral:*

33_{cinco} (lê-se: "três, três — base cinco").

3. No conjunto de pontos (fig. 29) quantos *grupos de seis* existem? Quantos sobram? Escrever o número resultante na *base seis.*

Existem *três* grupos de seis e *não sobra* ponto algum. Logo, temos, na *base seis:*

30_{seis} (lê-se: "três, zero — base seis")

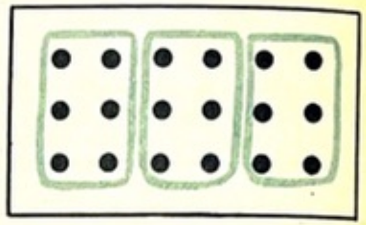
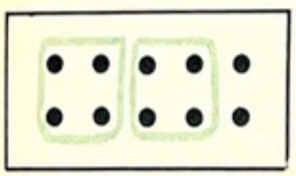


Fig. 29

4. Agrupe os seguintes conjuntos de pontos, de *quatro* em *quatro.* Escrever o número resultante na *base quatro.*

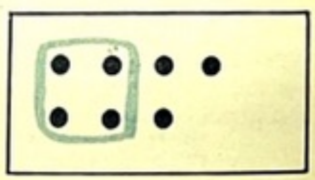


1.º) Temos *dois* grupos de quatro e *sobram dois* pontos. Portanto, o número na *base quatro* é:

22_{quatro}

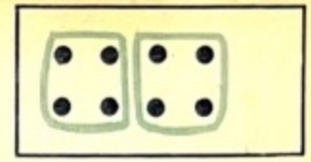
2.º) Agora, temos *um* grupo de quatro e sobram *três* pontos. Logo:

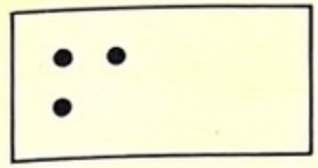
13_{quatro}



3.º) Existem *dois* grupos de quatro e *não sobra* nada. Logo:

20_{quatro}



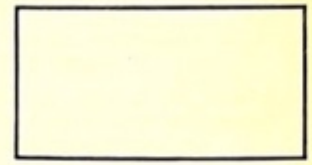


4.º) *Nenhum* grupo de quatro pontos; *sòmente* existem *três* pontos. Portanto:

3_{quatro}

5.º) *Nenhum ponto* (conjunto vazio). Logo, o número resultante será:

0_{quatro}



Observação: A contagem em bases *maiores que dez* vai exigir, como é natural, o uso de *mais de dez numerais* para representar os números. Assim, por exemplo, contando em *base doze* (Sistema de Numeração Duodecimal), necessitamos de *doze numerais.* Para representar os números nesse Sistema, costuma-se, geralmente, usar os *dez numerais indo-arábicos* (algarismos) e mais dois *numerais gregos:* α (alfa) e β (beta), que representam, respectivamente, os números: dez e onze.

Aplicações práticas: É comum você ter que contar em *outras* bases. Assim, por exemplo:

1) 25 dias representam quantas semanas? Sobrariam alguns dias tomando a semana (7 dias) como base?

Fig. 30

Usando a representação já conhecida (fig. 30), temos: *três* grupos de sete e sobram *quatro* pontos (que representam agora *dias*). Logo:

34_{sete} (3 semanas e 4 dias)

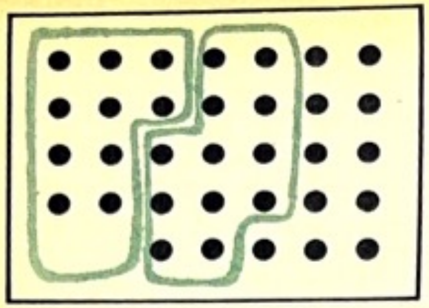


Fig. 31

2) 33 laranjas representam quantas dúzias? Sobram algumas?

Temos *dois* grupos de doze e sobram *nove* (fig. 31):

29_{doze} (2 dúzias e sobram nove)

Nota: Caso sobrassem 10 ou 11 laranjas, os símbolos empregados seriam α e β, respectivamente.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 25

1. No seguinte conjunto de pontos (fig. 32) fazer a contagem nos Sistemas de Numeração, de bases, respectivamente: *cinco, seis, sete, oito, nove* e *dez*.

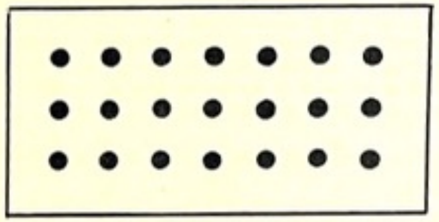
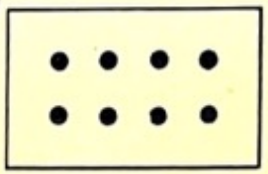


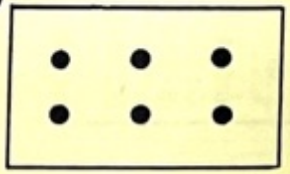
Fig. 32

2. Agrupar os seguintes conjuntos de pontos, de *três* em *três*. Escrever o número resultante na *base três:*

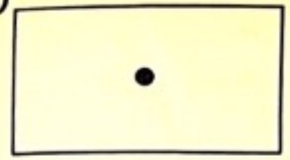
1º)



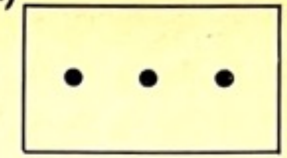
2º)



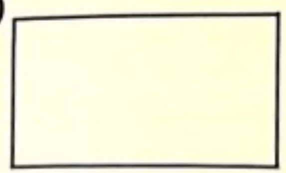
3º)



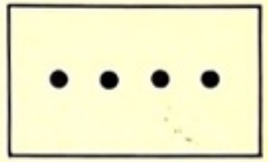
5º)



4º)

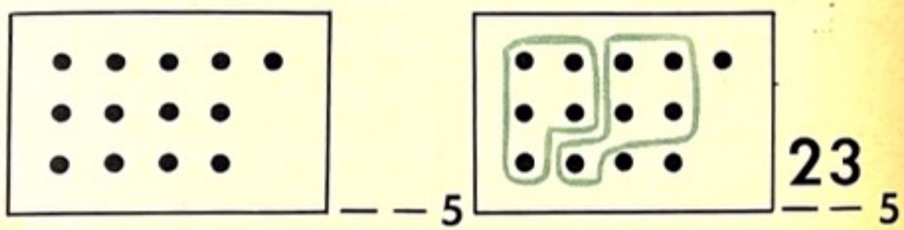


6º)



3. Agrupar os seguintes conjuntos de pontos numa *dada base*. Escrever o número resultante usando os numerais indo-arábicos (algarismos) e α e β, caso seja necessário. Como *modêlo*, os dois primeiros exercícios estão resolvidos (figs. 33 e 34):

1º)



(solução)

Fig. 33

2º)

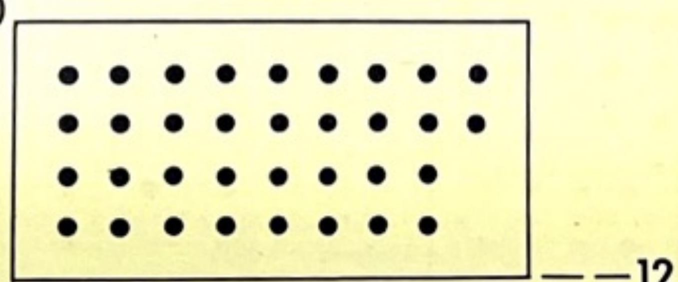
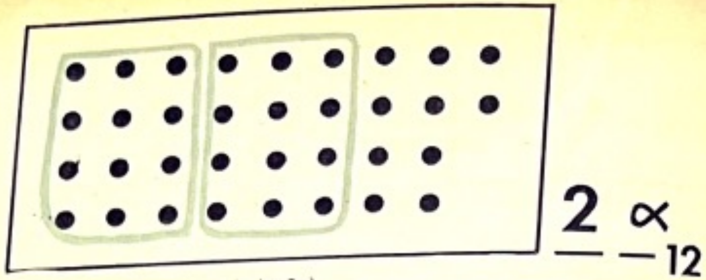
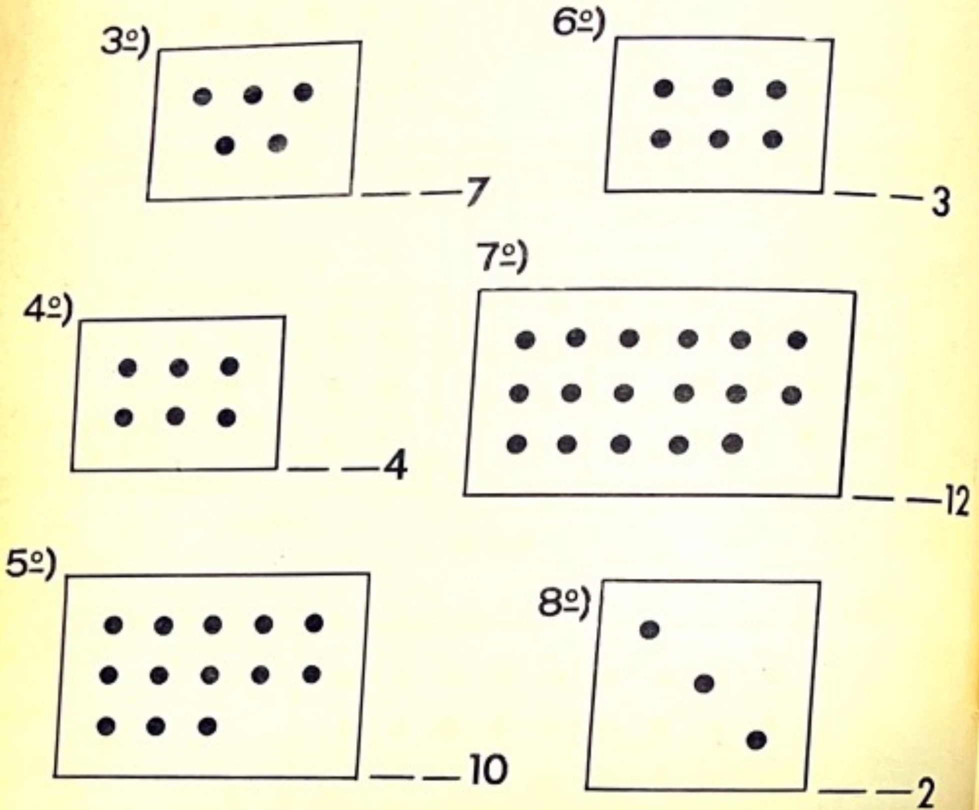


Fig. 34-a



(solução)

FIG. 34-b



4. Quantas *semanas* e quantos dias representam 44 dias?

5. Quantas *dúzias* e quantas laranjas representam 35 laranjas?

Classes Experimentais - Laboratório de Matemática

Com relação a *Sistemas de Numeração* é útil mostrar aos jovens alunos da 1.ª Série Ginasial a possibilidade de "construir" sistemas diferentes do *Decimal*. A finalidade é propiciar um contacto "concreto" com as idéias de *conjunto* e de *relações*, que constituem matéria importante para o desenvolvimento da **Matemática Moderna.**

A iniciação de um *Laboratório de Matemática*, que seria o local onde se concentrariam as atividades práticas, traria — sem dúvida — um nôvo interêsse pelo conhecimento "de perto" de certas partes da Matemática, a começar pela *contagem* dos elementos de um conjunto.

Essa contagem, em *qualquer base*, já foi feita através de "desenhos", reunindo-se em grupos os pontos de um conjunto. Agora, nossa "expe- riência" pode ser concretizada com uma *caixinha* (de papelão ... ou mesmo uma série de caixas de fósforos ligadas entre ... repartições iguais (conforme fig. 35) e que chamaremos d... seguinte ordem, da direita para a esquerda: 1.ª casa, 2.ª casa, ...

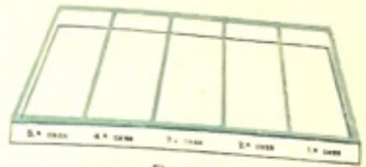


FIG. 35

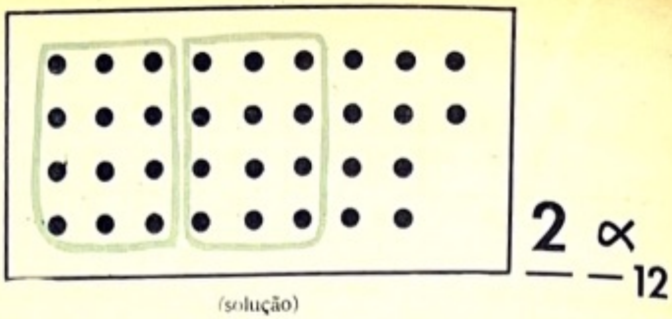
Vamos supor que você tenha um conjunto de feijões e que qu... contá-los usando o Sistema de Numeração de *base quatro*. Que é neces- sário você lembrar, antes de começar a contagem? O seguinte:

1.º) usar *sòmente* os *quatro algarismos:* 0, 1, 2 e 3, para escrever qualquer número na base quatro;

2.º) usar o *Princípio da Posição* para a *base quatro:* todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades *quatro vêzes maiores* que as dêsse outro.

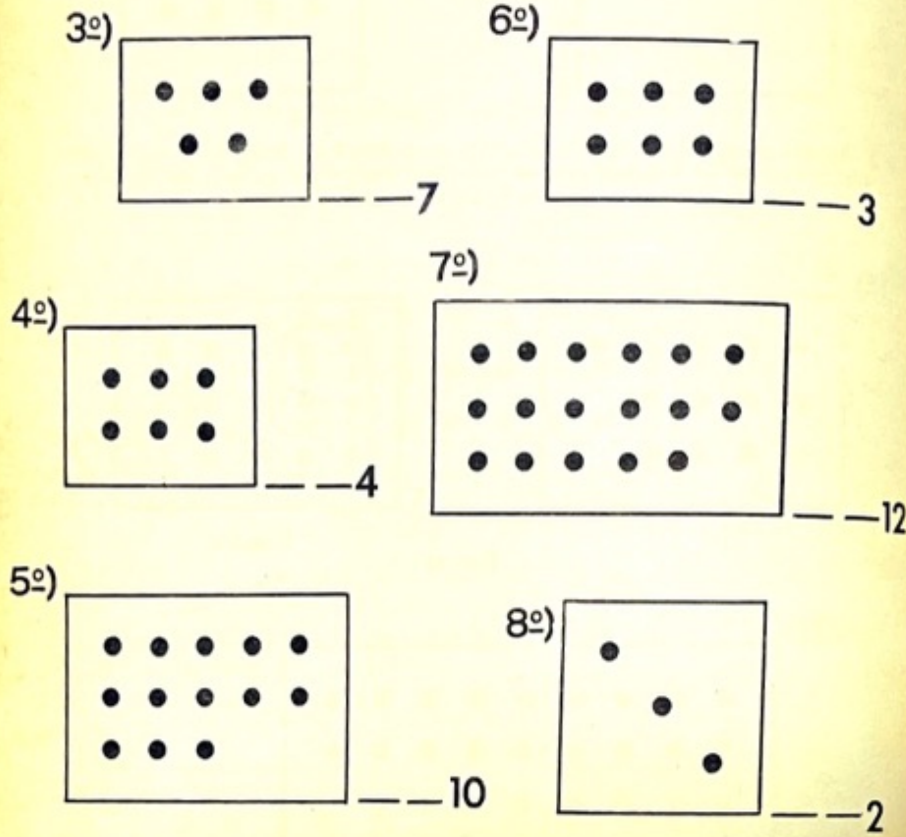
Agora, podemos começar a *contagem:*

Coloquemos os feijões, um a um, na 1.ª casa da caixinha até o máximo de quatro; ao colocarmos o quarto feijão na 1.ª casa, retiramos todos de uma vez e colocamos *apenas um feijão* na "casa" imediatamente à esquerda (2.ª casa). Para não fazer confusão, é preferível colocar um grão maior na 2.ª casa (um grão de milho, por exemplo) a fim de caracterizar melhor que agora são unidades de segunda ordem.



(solução)

Fig. 34-b



4. Quantas *semanas* e quantos dias representam 44 dias?

5. Quantas *dúzias* e quantas laranjas representam 35 laranjas?

Classes Experimentais - Laboratório de Matemática

Com relação a *Sistemas de Numeração* é útil mostrar aos jovens alunos da 1.ª Série Ginasial a possibilidade de "construir" sistemas diferentes do *Decimal*. A finalidade é propiciar um contacto "concreto" com as idéias de *conjunto* e de *relações*, que constituem matéria importante para o desenvolvimento da **Matemática Moderna.**

A iniciação de um *Laboratório de Matemática*, que seria o local onde se concentrariam as atividades práticas, traria — sem dúvida — um nôvo interêsse pelo conhecimento "de perto" de certas partes da Matemática, a começar pela *contagem* dos elementos de um conjunto.

Essa contagem, em *qualquer base*, já foi feita através de "desenhos", reunindo-se em grupos os pontos de um conjunto. Agora, nossa "experiência" pode ser concretizada com uma *caixinha* (de papelão, de madeira, ou mesmo uma série de caixas de fósforos ligadas entre si) que tenha repartições iguais (conforme fig. 35) e que chamaremos de "casas", na seguinte ordem, da direita para a esquerda: 1.ª casa, 2.ª casa, 3.ª casa, . . .

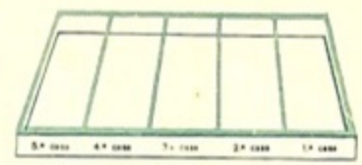


Fig. 35

Vamos supor que você tenha um conjunto de feijões e que queira contá-los usando o Sistema de Numeração de *base quatro*. Que é necessário você lembrar, antes de começar a contagem? O seguinte:

1.º) usar *sòmente* os *quatro algarismos:* 0, 1, 2 e 3, para escrever qualquer número na base quatro;

2.º) usar o *Princípio da Posição* para a *base quatro:* todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades *quatro vêzes maiores* que as dêsse outro.

Agora, podemos começar a *contagem:*

Coloquemos os feijões, um a um, na 1.ª casa da caixinha até o máximo de quatro; ao colocarmos o quarto feijão na 1.ª casa, retiramos todos de uma vez e colocamos *apenas um feijão* na "casa" imediatamente à esquerda (2.ª casa). Para não fazer confusão, é preferível colocar um grão maior na 2.ª casa (um grão de milho, por exemplo) a fim de caracterizar melhor que agora são unidades de segunda ordem.

Caixinha de numeração, auxiliar prático para escrever números em *qualquer base*. (Da "Exposição de Matemática", iniciada a partir de 1961, pelo Prof. João W. Inkis, no Colégio Estadual de Pereira Barreto, Estado de São Paulo.)

Para representar que a 1.ª casa (ou qualquer outra) não possui *nenhum* elemento, isto é, que representa um conjunto *vazio* de elementos, usamos o símbolo 0 (zero).

Nestas condições, as *duas representações* (fig. 36) *se equivalem* e,

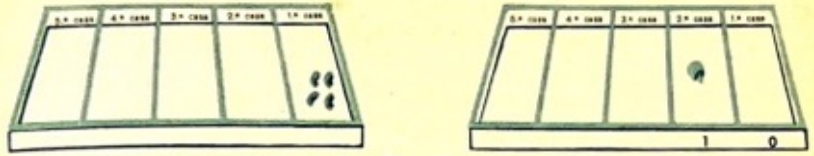


Fig. 36

se tivéssemos contado *sòmente* quatro feijões, por exemplo, o numeral que, no sistema de base quatro, representa êsse *número* seria:

$$10_{\text{quatro}}$$

(lê-se: "um, zero — base quatro" e não "dez", que seria a leitura no sistema decimal).

Caso tenhamos mais feijões para contar, continuamos a proceder da mesma maneira, isto é, colocamos feijões outra vez na 1.ª casa até o máximo de quatro, quando então os retiramos para colocar mais um grão de milho na 2.ª casa. E assim vamos agindo até que a 2.ª casa tenha atingido também um máximo de *quatro grãos de milho*. Neste instante, retiramos os quatro grãos de milho da 2.ª casa para colocar *apenas* um "grão-de-bico" (ou outro qualquer, de preferência maior que o do milho) na casa seguinte, ou seja, na 3.ª casa.

Se ainda houver mais feijões para contar (sempre no sistema de base quatro), o procedimento continuará o mesmo.

O grupo de feijões (fig. 37), que são 39 no sistema decimal (base dez), contado no sistema *quaternário* (base quatro) dá, com o processo(*) ensinado, o número 213_{quatro} (lê-se: "dois, um, três — base quatro").

Fig. 37

Cada aluno pode, portanto, "fabricar" a sua *caixinha de numeração*, para iniciar as atividades do *Laboratório de Matemática*, aplicando-a na contagem dos elementos de qualquer conjunto, no sistema de numeração *que quiser!*

Como exemplo de aplicação imediata, sugerimos que cada aluno *conte*, com sua *caixinha de numeração*, os colegas de sua classe, no sistema de numeração que achar conveniente.

Os mais habilidosos poderiam, inclusive, "modernizar" sua caixinha, trabalhando com pilhas e lâmpadazinhas de côres, ao invés de usar sementes.

(*) Ver no *Apêndice 2* o estudo das transformações entre bases diversas.

I — Decomposição de um número escrito numa determinada base; transformação para a base 10(*)

1.º) *Base 10*

Seja, por exemplo, o número 5.386. Decompondo-o na soma dos valôres relativos de seus algarismos, temos:

$$5.386 = 5.000 + 300 + 80 + 6$$

$$\begin{array}{llll} \text{Como: } 5.000 = 5 \times 1.000 & = 5 \times 10 \times 10 \times 10 & = 5 \times 10^3 \\ 300 = 3 \times 100 & = 3 \times 10 \times 10 & = 3 \times 10^2 \\ 80 = 8 \times 10 & = & = 8 \times 10^1 \\ 6 = & & = 6 \end{array}$$

$$\text{vem: } \boxed{5.386 = 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 8 \times \underbrace{10}_{\text{base}}{}^1 + 6}$$

NOTA: Da esquerda para a direita:

o 4.º alg. aparece multiplicado pela 3.ª potência da base
o 3.º alg. aparece multiplicado pela 2.ª potência da base
o 2.º alg. aparece multiplicado pela 1.ª potência da base (10)

Outros exemplos:

$$81.173 = 8 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 7 \times \underbrace{10}_{\text{base}}{}^1 + 3$$

$$a.bcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times \underbrace{10}_{\text{base}}{}^1 + d$$

2.º) *Base 4*

Seja, por exemplo, o número 213_{quatro} (lembre-se de que no sistema de base 4 usam-se sòmente os algarismos: 0, 1, 2 e 3).

Decompondo-o na soma dos valôres relativos de seus algarismos, caracterizados pelas "casas" da *caixinha de numeração*, temos:

$$213_4 = 2 \times 4^2 + 1 \times \underbrace{4}_{\text{base}}{}^1 + 3$$

(*) As operações: *adição, multiplicação* e *potenciação*, com as respectivas propriedades estruturais, serão estudadas no próximo capítulo.

Transformação para a base 10: Efetuando o cálculo do segundo membro, encontramos o valor do número representado por 213_4 na base 10:

$$213_4 = 2 \times 16 + 1 \times 4 + 3$$
$$213_4 = 32 + 4 + 3$$
$$213_4 = 39_{10}$$

Logo, quem escreve: 213_4, refere-se ao "trivial" número 39 da base 10.

3.º) *Base 2*

Seja, por exemplo, o número 1101_{dois} (lembre-se de que no sistema binário são usados sòmente os algarismos 0 e 1).

Decompondo-o na soma dos valôres relativos de seus algarismos, temos:

$$1101_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$$
$$1101_2 = 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1$$
$$1101_2 = 8 + 4 + 0 + 1$$
$$1101_2 = 13_{10}$$

II — Transformação de um número escrito na base 10 para uma outra base

Você já sabe dividir números representados no sistema de numeração decimal; por isso, o processo a seguir é efetuar as divisões pelo número que representa a base, formando grupos equivalentes a essa base.

A *técnica* é a seguinte. Seja, por exemplo, transformar o número 39 para a base 4, isto é: $39_{10} = ?_4$

Temos, efetuando as divisões por 4 e indicando-as de *modo contínuo:*

$$\begin{array}{l|l} 39 & 4 \\ \hline 3 & \begin{array}{l|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \end{array} \qquad 1.^\circ \; 2.^\circ \; 3.^\circ$$

Tomam-se, agora, como algarismos do número procurado, os *restos* dessas divisões e o *último quociente*, escrevendo-os da esquerda para a direita, na ordem inversa daquela em que foram obtidos: 213.

Logo: $39_{10} = 213_4$

Prova: $213_4 = 2 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 3 = 39_{10}$

Outros exemplos:

1.º) $13_{10} = ?_2$ Temos:

$$\begin{array}{llll} 13 & \underline{|\ 2} & & \\ 1 & 6 & \underline{|\ 2} & \\ & 0 & 3 & \underline{|\ 2} \\ & & 1 & 1 \end{array} \qquad 1.º\ \ 2.º\ \ 3.º\ \ 4.º$$

Logo: $13_{10} = 1101_2$

Prova: $1101_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 13_{10}$

2.º) $57_{10} = ?_6$ Temos: $57_{10} = 133_6$

$$\begin{array}{lll} 57 & \underline{|\ 6} & \\ 3 & 9 & \underline{|\ 6} \\ & 3 & 1 \end{array}$$

Logo: $57_{10} = 133_6$. Faça a *prova*.

III — Numeração binária

É o mais usual para os cálculos atuais. Emprega sòmente dois símbolos (podem ser os algarismos 0 e 1), apesar de repeti-los muitas vêzes, mesmo para representar "números pequenos".

Êsse fato é compensado pela enorme velocidade com que operam as modernas máquinas eletrônicas, denominadas "sêres", que possuem sòmente *dois dedos*, porém com tanto "cérebro" que resolvem em poucos instantes o que os homens levariam anos e anos para concluir!

Como exercício, vamos escrever de 0 até 10 na *base dois:*

$0_{10} = 0_2$

$1_{10} = 1_2$

$$\begin{array}{ll} 2 & \underline{|\ 2} \\ 0 & 1 \end{array} \qquad 2_{10} = 10_2$$

$$\begin{array}{ll} 3 & \underline{|\ 2} \\ 1 & 1 \end{array} \qquad 3_{10} = 11_2$$

$$\begin{array}{lll} 4 & \underline{|\ 2} & \\ 0 & 2 & \underline{|\ 2} \\ & 0 & 1 \end{array} \qquad 4_{10} = 100_2$$

$$\begin{array}{lll} 5 & \underline{|\ 2} & \\ 1 & 2 & \underline{|\ 2} \\ & 0 & 1 \end{array} \qquad 5_{10} = 101_2$$

$$\begin{array}{lll} 6 & \underline{|\ 2} & \\ 0 & 3 & \underline{|\ 2} \\ & 1 & 1 \end{array} \qquad 6_{10} = 110_2$$

$$\begin{array}{lll} 7 & \underline{|\ 2} & \\ 1 & 3 & \underline{|\ 2} \\ & 1 & 1 \end{array} \qquad 7_{10} = 111_2$$

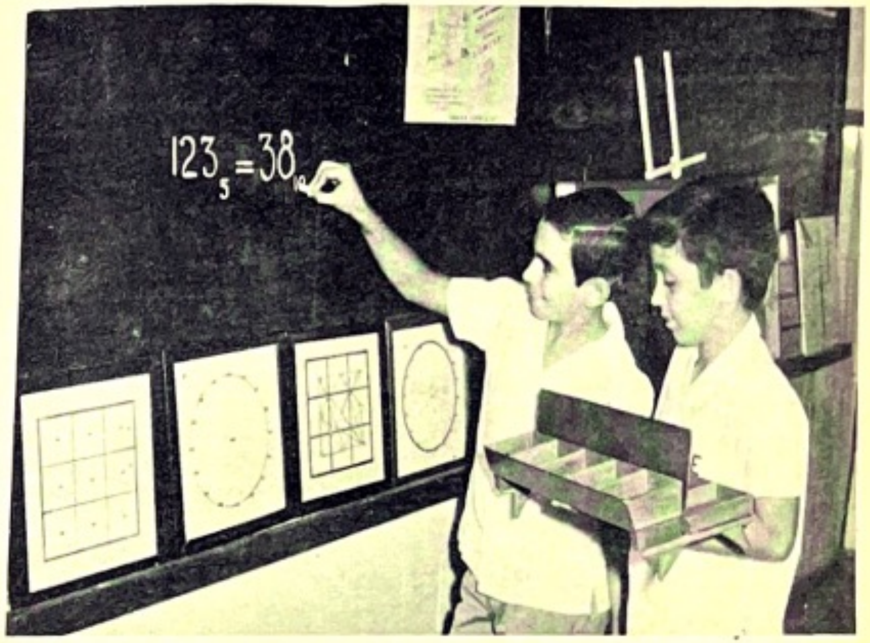
$$\begin{array}{llll} 8 & \underline{|\ 2} & & \\ 0 & 4 & \underline{|\ 2} & \\ & 0 & 2 & \underline{|\ 2} \\ & & 0 & 1 \end{array} \qquad 8_{10} = 1000_2$$

$$\begin{array}{llll} 9 & \underline{|\ 2} & & \\ 1 & 4 & \underline{|\ 2} & \\ & 0 & 2 & \underline{|\ 2} \\ & & 0 & 1 \end{array} \qquad 9_{10} = 1001_2$$

$$\begin{array}{llll} 10 & \underline{|\ 2} & & \\ 0 & 5 & \underline{|\ 2} & \\ & 1 & 2 & \underline{|\ 2} \\ & & 0 & 1 \end{array} \qquad 10_{10} = 1010_2$$

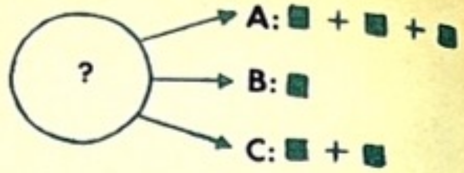
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 26

1. Escrever, respectivamente nas bases 2, 4 e 5, os seguintes números escritos na base 10:
   1.º) 38 2.º) 100 3.º) 26 4.º) 1.968
2. Escrever, na base 10, os seguintes números:
   1.º) 321_4 2.º) 1001_2 3.º) 123_5 4.º) 3450_6
3. Escrever na base 4 os seguintes números:
   1.º) 112_3 (*Sugestão:* Transforme 112_3 para a base 10 e a seguir transforme o número obtido para a base 4)
   2.º) 1101_2 3.º) 6501_8 4.º) 12.926_{10}
4. Verificar se os seguintes números são *consecutivos:* 1020_3 e 46_7.
5. Substituir "?" por uma relação de *igualdade* ou de *desigualdade:*
   1.º) 131_4 ? 29_{10} 2.º) 111_2 ? 100_3 3.º) 202_8 ? 1111_3



Mudança de base realizada por alunos do Instituto Estadual de Educação Manuel Bento da Cruz de Araçatuba em 1967 (Da "Exposição de Matemática" organizada pelo Prof. Antônio Arnot Crespo).

CAPÍTULO 2



Operações com números naturais. Propriedades estruturais

conceito de operação
adição e subtração
multiplicação e divisão
potenciação e radiciação

1a PARTE

3+4=7
7-4=3

conceito de operação

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS PROPRIEDADES ESTRUTURAIS

1. *Conceito de operação; propriedades estruturais*

No Curso Primário, você "praticou" as *operações:* adição, subtração, multiplicação e divisão com os números naturais, principalmente no que diz respeito às *técnicas de cálculo.*

Agora irá estudá-las novamente, sem repetir tais técnicas, porém destacando alguns aspectos novos, utilíssimos para sua formação, tais como:

conceito de operação
propriedades estruturais
relação de uma operação com sua inversa

Que é uma *operação* no conjunto $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$?

É uma *lei*(*) ou *regra* que permite associar *a dois números naturais um terceiro número natural.* Os dois números dados chamam-se *têrmos* e o terceiro número obtido, *resultado* da operação.

Assim, por exemplo, dados os números 3 e 2,

a operação *adição* associa, mediante *certa lei,* o número 5;
a operação *multiplicação* associa, mediante *certa lei,* o número 6.

Que tipos de *leis* são essas é o que você vai aprender agora.

(*) Também chamada *lei de composição.*

2. *Operação: adição; resultado: soma*

Consideremos dois conjuntos A e B, finitos e disjuntos:

$A = \{*, \triangle, \square\}$ onde $n(A) = 3$
$B = \{\bigcirc, \bigtriangledown\}$ onde $n(B) = 2$

sendo $A \cap B = \varnothing$ (. . . porque os conjuntos são *disjuntos*, isto é, não possuem elementos comuns)

Formando a **reunião** dêsses conjuntos, obtemos:

$S = A \cup B = \{*, \triangle, \square, \bigcirc, \bigtriangledown\}$ onde $n(S) = 5$ ou $n(A \cup B) = 5$

Considere, agora, o *número de elementos* (que é um *número natural!*) de cada um dêsses conjuntos:

$$\begin{array}{ccc} (A, & B) & \longrightarrow S \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 5 \end{array}$$

e adote a seguinte *lei* como operação **adição:**

a que **associa** ao par (3, 2), formado pelo *número de elementos* dos conjuntos dados, o *número de elementos* do conjunto-*reunião*, isto é, 5.

Indicação: $(3, 2) \longrightarrow 3 + 2 = 5$

onde: 3 e 2 são os *têrmos* da operação e se chamam **parcelas**
$+$ é o sinal conhecido da *adição*
5 é o *resultado* da operação, denominado **soma**

Outros exemplos. Pela operação *adição*, temos:

$$(1, 8) \longrightarrow 1 + 8 = 9$$
$$(7, 0) \longrightarrow 7 + 0 = 7$$

e, de um modo geral:

$$(a, b) \longrightarrow a + b = s$$

onde os *têrmos* a e b são as **parcelas** e o *resultado* s, a **soma.**

ATENÇÃO:

A *adição* é denominada uma *operação binária* porque, atuando sôbre *dois números naturais*, produz **sempre** um *terceiro número natural* (resultado).

1. Dados os conjuntos:

$C = \{x, y, z\}$ onde $n(C) = 3$
$D = \{a, b, c, d, e\}$ onde $n(D) = 5$

observe que C e D são *disjuntos*, ou seja: $C \cap D = \varnothing$
Formando a *reunião*, temos:

$C \cup D = \{x, y, z, a, b, c, d, e\}$ onde $n(C \cup D) = 8$

e, portanto, pela operação *adição*, podemos escrever:

$$(3, 5) \longrightarrow 3 + 5 = 8$$

2. Agora é a sua vez. *Complete* os seguintes exercícios:

1.º) Se $A = \{x\}$ onde $n(A) = \ldots$
e $B = \{p, q, r\}$ onde $n(B) = \ldots$
com $A \cap B = \varnothing$

Então: $A \cup B = \{\ldots, \ldots, \ldots, \ldots\}$ onde $n(A \cup B) = \ldots$
e, portanto:

$$(1, \ldots) \longrightarrow \ldots + \ldots = 4$$

2.º) Se $A = \varnothing$ onde $n(A) = \ldots$ **(cuidado!)**
e $B = \{x, y, z\}$ onde $n(B) = \ldots$
com $A \cap B = \ldots$

Então: $A \cup B = \{\ldots, \ldots, \ldots\}$ onde $n(A \cup B) = \ldots$
e, portanto:

$$(0, \ldots) \longrightarrow \ldots + 3 = 3$$

3.º) Se $A = \{m, p\}$ onde $n(A) = \ldots$
e $B = \varnothing$ onde $n(B) = 0$
com $A \cap B = \varnothing$

Então: $A \cup B = \{\ldots\ldots\}$ onde $n(A \cup B) = \ldots$
e, portanto:

$$(2, \ldots) \longrightarrow \ldots + 0 = \ldots$$

3. Você acha que as palavras *adição* e *soma* são palavras sinônimas? Se não acha, diga porquê.

3. *Tábua da adição* (base 10)

A *técnica de cálculo* para a obtenção da *soma* de dois números naturais quaisquer já é do seu conhecimento desde a Escola Primária. Costuma-se registrar os resultados da operação *adição*, na base 10, realizada no conjunto dos números naturais:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

numa tabela, denominada *tábua da adição:*

elemento neutro

+	0	1	2	3	4	5	6	·	·	·
0	0	1	2	3	4	5	6	·	·	·
1	1	2	3	4	5	6	7	·	·	·
2	2	3	4	5	6	7	8	·	·	·
3	3	4	5	6	7	8	9	·	·	·
4	4	5	6	7	8	9	10	·	·	·
5	5	6	7	8	9	10	11	·	·	·
6	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
7	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

Prática: Procura-se o *resultado* (que é a soma) no *cruzamento* das linhas horizontal e vertical, que "passam" pelos números operados (figuram na primeira coluna e primeira horizontal).

4. *Adição de vários números naturais*

Sejam os conjuntos A, B e C, disjuntos dois a dois:

$A = \{a, b, c, d, e\}$ onde $n(A) = 5$

$B = \{m, n\}$ onde $n(B) = 2$

$C = \{x, y, z\}$ onde $n(C) = 3$

Como: $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, m, n, x, y, z\}$ onde $n(A \cup B \cup C) = 10$

e $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ temos: $5 + 2 + 3 = (5 + 2) + 3$

isto é:

para somar três números naturais, somamos os dois primeiros e ao resultado somamos o terceiro.

De um modo geral, se a, b e c representam números naturais, temos:

$$a + b + c = (a + b) + c$$

onde a soma parcial $a + b$ é colocada entre parênteses.

Para adicionar mais de três números naturais, procede-se de forma análoga, usando colchêtes, chaves . . ., para associar as parcelas.

Exemplos:

$$5 + 2 + 3 + 6 = [(5 + 2) + 3] + 6$$

$$a + b + c + d + e = \{[(a + b) + c] + d\} + e$$

Os sinais: ( ), [ ], { }, são denominados sinais de *associação.*

5. *Propriedades estruturais*

No conjunto dos números naturais a *adição* possui as seguintes *propriedades estruturais*, que decorrem das propriedades da operação *reunião* entre conjuntos, e reconhecidas fàcilmente pela tábua:

1.ª) Fechamento: *A soma de dois números naturais é sempre um número natural.*

Isto significa: adicionando dois números naturais quaisquer, você já sabe que o resultado também será um *número natural!*

Exemplo:

$$\underset{\text{n.º natural}}{3} + \underset{\text{n.º natural}}{4} = \underset{\text{n.º natural}}{7} \quad \text{(observe a tábua)}$$

De um modo geral:

$$(a + b) \in N \quad \text{para qualquer} \quad a \in N \quad \text{e} \quad b \in N$$

e diz-se que *o conjunto* N *é fechado para a operação adição.*

Abreviatura: **p. f. a.** (lê-se: "propriedade *fechamento* da adição")

2.ª) Comutativa: *A ordem das parcelas não altera a soma.*

Isto significa que, trocando-se a ordem das parcelas, a soma obtida é sempre a mesma. *Exemplo:*

$$3 + 4 = 4 + 3$$

De um modo geral:

$$a + b = b + a \quad \text{para qualquer} \quad a \in N \quad \text{e} \quad b \in N$$

Abreviatura: **p. c. a.** (lê-se: "propriedade *comutativa* da adição")

3.ª) Elemento neutro: 0 (zero). Isto significa que no conjunto N existe 0, que é o único número que adicionado a outro, em qualquer ordem, dá para soma êsse outro número. *Exemplo:*

$$5 + 0 = 5 \quad \text{e} \quad 0 + 5 = 5$$

De um modo geral:

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \text{para qualquer} \quad a \in N$$

Abreviatura: **p. e. n. a.** (lê-se: "propriedade do *elemento neutro* da adição")

4.ª) Associativa: *A adição de três números naturais pode ser feita associando-se as duas primeiras ou as duas últimas parcelas. Exemplo:*

$$(4 + 5) + 7 = 4 + (5 + 7)$$

De um modo geral:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{para qualquer } a \in N, b \in N, \ c \in N$$

Abreviatura: **p. a. a.** (lê-se: "propriedade *associativa* da adição")

Observações:

1.ª) Somando-se 1 a um número natural qualquer, obtém-se o seu *sucessivo* ou *consecutivo*. Logo, o sucessivo de a é $a + 1$, para qualquer $a \in N$.

2.ª) Se $a + 3 = 5 + 3$, então $a = 5$, isto é, para a adição de dois números naturais vale a *lei do cancelamento*. De um modo geral:

$$a + c = b + c \Longrightarrow a = b$$

Também, se $a = 5$, então $a + 3 = 5 + 3$, isto é, *somando-se um mesmo número a ambos os membros de uma igualdade, obtém-se uma nova igualdade.*

Logo: $a = b \Longrightarrow a + c = b + c$

Reunindo os dois resultados, pode-se escrever:

$$a + c = b + c \Longleftrightarrow a = b$$

sendo $\Longleftrightarrow$ (lê-se: "equivalente") o símbolo da *equivalência*.

3.ª) Se $a < 5$, então $a + 3 < 5 + 3$. Logo: $a < 5 \Longrightarrow a + 3 < 5 + 3$
Se $a > 5$, então $a + 3 > 5 + 3$. Logo: $a > 5 \Longrightarrow a + 3 > 5 + 3$

Então, *somando-se um mesmo número a ambos os membros de uma desigualdade, obtém-se uma outra desigualdade de mesmo sentido.*

4.ª) A *prova* da operação adição baseia-se na aplicação da propriedade *comutativa* (p. c. a.), por meio da qual se refaz a operação, depois de trocada a ordem das parcelas (na prática, isto equivale a efetuar a operação "de baixo para cima"). *Exemplo:*

$$\downarrow \begin{array}{r} 1.024 \\ 20.132 \\ 89 \\ \hline 21.245 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 89 \\ 20.132 \\ 1.024 \\ \hline 21.245 \end{array} \uparrow$$

Se as somas forem as mesmas, tudo faz crer que a adição esteja certa, pois você ainda poderia correr o risco de encontrar duas somas iguais, porém erradas . . ., por não serem os resultados corretos.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 28

1. Suprimir os *sinais de associação*, efetuando:

$$12 + (5 + 9) + (3 + 18)$$

Calculam-se, primeiramente, as *adições* indicadas entre parênteses (diz-se, também, "eliminando-se os parênteses"):

$$12 + \underbrace{(5 + 9)}_{14} + \underbrace{(3 + 18)}_{21} = 12 + 14 + 21 = 47$$

Nota: 47 é o *numeral mais simples* do número representado por

$$12 + (5 + 9) + (3 + 18)$$

2. Idem, com: $39 + [20 + (11 + 5) + 8] + (1 + 0)$
Eliminando-se os parênteses e a seguir os colchêtes, vem:

$$39 + [20 + 16 + 8] + 1 = 39 + 44 + 1 = 84$$

3. Idem, com: $2 + \{100 + [8 + (3 + 11) + 0] + 215\}$
Eliminando-se os parênteses, a seguir os colchêtes e depois as chaves:

$$2 + \{100 + [8 + 14 + 0] + 215\} =$$
$$= 2 + \{100 + 22 + 215\} = 2 + 337 = 339$$

4. Calcular: $4 + (a + 3)$

Temos: $4 + (a + 3) = 4 + (3 + a) =$ p. c. a.
$= (4 + 3) + a =$ p. a. a.
$= 7 + a$

5. Se $a + b = 6$, calcular $a + (b + 5)$

Temos: $a + (b + 5) = (a + b) + 5 =$ p. a. a.
$= 6 + 5 =$
$= 11$

6. Se $a + b + c = m$, calcular $(a + 0) + (b + 8) + c$

Temos: $(a + 0) + (b + 8) + c = a + (b + 8) + c =$ p. e. n. a.
$= (a + b) + 8 + c =$ p. a. a.
$= (a + b) + c + 8 =$ p. c. a.
$= (a + b + c) + 8 =$ p. a. a.
$= m + 8$

7. Se a representa qualquer número natural, então:

$a + 1$ representa o *consecutivo* de a

e $(a + 1) + 1 = a + (1 + 1) = a + 2$ representa o consecutivo de $a + 1$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 29

1. Efetuar as adições indicadas:

1.ª) $36 + (8 + 0) + (15 + 12)$
2.ª) $111 + [19 + (11 + 126)] + 0$
3.ª) $10 + \{10 + [10 + (10 + 10)]\}$
4.ª) $31.800 + \{2.401 + [999 + (1 + 99)]\}$

2. Escrever, ao lado de cada uma das seguintes sentenças, a propriedade que está sendo aplicada:

1.ª) $(3 + 4) \in N$
2.ª) $4 + 2 = 2 + 4$
3.ª) $7 + 0 = 7$
4.ª) $(3 + 9) + 1 = 3 + (9 + 1)$
5.ª) $0 + a = a$
6.ª) $a + (b + c) = (a + b) + c$
7.ª) $\triangle + \square = \square + \triangle$
8.ª) $(a + b) \in N$

3. Completar:

1.º) $\square + 5 = 5 \Longrightarrow \square =$ ....
2.º) $a + 4 = b + 4 \Longrightarrow a =$ ....
3.º) $a = 8 \Longrightarrow a + 3 = 8 +$ ....
4.º) $b < 4 \Longrightarrow b +$ .... $< 4 + 1$
5.º) $x > 0 \Longrightarrow x + 5 > 0 +$ ....

4. Calcular, usando as propriedades da adição:

1.º) $8 + (m + 5)$ 2.º) $(x + 3) + 8$ 3.º) $(7 + b) + 8$

5. Se $a + b = 5$, calcular:

1.º) $a + (b + 5)$ 2.º) $(a + 0) + (8 + b)$ 3.º) $(6 + a) + (b + 1)$

6. Se $a + b + c = m$, calcular:

1.º) $(a + 1) + (b + 0) + c$ 2.º) $(a + 2) + (b + 20) + (c + 200)$

7. Se $10 + x < 15$, qual é o maior valor que se pode atribuir a x, de modo que a sentença seja verdadeira?

8. Se $4 + y > 10$, qual é o menor valor que se pode atribuir a y, a fim de que a sentença seja verdadeira?

TESTE DE ATENÇÃO — Grupo 30

1. Assinalar a resposta correta para cada uma das seguintes questões:

I. Se $5 + \square = 5$, então:
1.º) $\square$ é igual a 1
2.º) $\square$ é igual a 0
3.º) $\square$ é igual a 5
4.º) nenhuma das respostas anteriores é correta

II. Em $a + b = b + a$ foi aplicada a propriedade:
1.º) associativa
2.º) do fechamento
3.º) do elemento neutro
4.º) nenhuma das respostas anteriores é correta

III. Se $x + 8 > y + 8$, então:
1.º) nenhuma das respostas seguintes é correta
2.º) $x < y$
3.º) $x = y$
4.º) $x > y$

2. Completar, de modo a tornar verdadeira, cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) .... $+ 3 = 3 +$ ....
2.ª) $6 +$ .... $= 6$
3.ª) .... $+ 8 > 9 + 2$
4.ª) $3 +$ .... $\neq 5$
5.ª) $4 +$ .... $< 4 + 4$
6.ª) .... $+ 0 =$ ....
7.ª) $3 +$ .... $\neq 3 +$ ....
8.ª) .... $+$ .... $=$ .... $+$ ....
9.ª) $0 +$ .... $\neq$ .... $+ 0$
10.ª) .... $+ 1 < 1 +$ ....

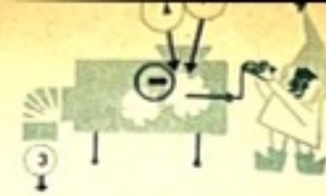
3. Completar:

O consecutivo de b é ....; o de $b + 1$ é .... e o consecutivo de $b + 2$ é ....

4. Considerando um conjunto ordenado de números naturais, tais que o primeiro é igual a 5 e outro qualquer é igual ao número que o precede mais 3, determinar o número que ocupa o 6.º lugar e calcular a *soma* dêsses números.

Êsse exercício é para desafiá-lo ...

SUBTRAÇÃO COMO OPERAÇÃO INVERSA DA ADIÇÃO



6. *Operação inversa da adição: subtração; resultado: diferença*

Consideremos dois números naturais, sendo, por exemplo:

5 o primeiro dêles
e 3 o segundo

A operação que permite encontrar um terceiro número natural que, *somado* com o segundo, dê para resultado o primeiro é denominada **subtração.**

A indicação da subtração é feita pelo sinal − (lê-se: "menos") e o terceiro número, *resultado* da operação, é chamado **diferença.**

Representando essa *diferença* por □, temos:

$$5 - 3 = \square \quad \text{tal que} \quad \square + 3 = 5$$

Como 2 é o único número natural que, somado com 3, resulta 5 (basta usar a tábua da adição, seguindo caminho "inverso"), concluímos que □ = 2.

Logo: $5 - 3 = 2$ porque $2 + 3 = 5$

e, por isso, a subtração é considerada *operação inversa* da adição.

Outros exemplos:

$11 - 7 = 4$ porque $4 + 7 = 11$
$5 - 5 = 0$ porque $0 + 5 = 5$

E se fôsse: $3 - 5$? Pode-se "tirar" o *maior* número do *menor?*

Você nota que, no conjunto *N*, *não é possível* encontrar número algum que somado com 5 dê 3. Logo, **muita atenção:**

> A subtração *nem sempre é possível* com dois números naturais quaisquer.

É necessário que o primeiro número seja *maior* que ou *igual* ao segundo para existir a *diferença* entre êles. Se os dois números são *iguais,* então a *diferença* é *zero,* como é fácil de se concluir.

De um modo geral:

> Ao par de números naturais (a, b), com $a \geqslant b$, a operação *subtração* (inversa da adição) faz corresponder um número natural *d*, denominado **diferença.**

Indicação: $(a, b) \longrightarrow a - b = d$ porque $d + b = a$

a e b são os têrmos da subtração e se denominam, respectivamente: *minuendo* e *subtraendo;*

d é o *resultado* da operação e se chama *diferença* ou *resto.*

Exemplos:

$(12, 8) \longrightarrow 12 - 8 = 4$ porque $4 + 8 = 12$
$(12, 12) \longrightarrow 12 - 12 = 0$ porque $0 + 12 = 12$

7. *Tábua da subtração* (base 10)

Tôda operação comporta uma tábua operatória. Na tábua da *subtração* o sinal "?" indica que não existe a *diferença,* sendo os cálculos feitos na base decimal e o primeiro têrmo (minuendo) tomado na primeira coluna vertical.

−	0	1	2	3	4	5	6	7	·	·	·
0	0	?	?	?	?	?	?	?	?		
1	1	0	?	?	?	?	?	?	?		
2	2	1	0	?	?	?	?	?	?		
3	3	2	1	0	?	?	?	?	?		
4	4	3	2	1	0	?	?	?	?		
5	5	4	3	2	1	0	?	?	?		
6	6	5	4	3	2	1	0	?	?		
7	7	6	5	4	3	2	1	0	?		
•											
•											
•											
•											

O que você, agora, observa com relação à operação *subtração?*

1.º) *não possui* a propriedade do *fechamento*, pois a *diferença* entre dois números naturais *quaisquer* nem sempre é um número natural (como no caso de $2 - 3 = ?$);

2.º) *não possui* a propriedade *comutativa*, pois a ordem dos têrmos agora interessa à operação. *Exemplo:*

$$5 - 3 = 2 \text{ e } 3 - 5 = ?$$

permitindo dizer: a subtração é uma operação *não-comutativa;*

3.º) *não possui elemento neutro*, pois, enquanto: $5 - 0 = 5$, *não existe* resultado para·

$$0 - 5 = ?$$

8. *Aplicação do símbolo da equivalência ($\Longleftrightarrow$) entre a operação adição e sua inversa subtração*

A operação *subtração* é inversa da operação *adição*. Você poderá observar melhor êste fato com as ilustrações "vertical" e "horizontal" que se seguem:

$$- \begin{Bmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{Bmatrix} + \qquad 8 - 3 = 5 \Longleftrightarrow 5 + 3 = 8$$

onde $\Longleftrightarrow$ indica a *equivalência* entre as igualdades escritas. De um modo geral, pode-se escrever:

minuendo − subtraendo = diferença $\Longleftrightarrow$ **diferença + subtraendo = minuendo**

A segunda igualdade permite "tirar" a *prova* da subtração, isto é, verificar se a operação está certa.

APLICAÇÕES

A *equivalência* estudada permite calcular qualquer dos têrmos de uma *subtração* (ou de uma *adição*), usando a *adição* (ou *subtração*) correspondente, isto é:

$$\square + \triangle = \star \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \square = \star - \triangle \\ \triangle = \star - \square \end{cases}$$

Exemplos:

1. Calcular o valor de $\square$ na subtração: $\square - 5 = 12$, usando a adição correspondente. Temos:

$$\square - 5 = 12 \Longleftrightarrow \square = 12 + 5$$
$$\text{ou} \quad \square = 17$$

2. Determinar o valor de y tal que: $5 + y = 9$.
Temos:

$$5 + y = 9 \Longleftrightarrow y = 9 - 5$$
$$\text{ou} \quad y = 4$$

3. O *subtraendo* é 8 e a *diferença* 15. Calcular o *minuendo*.
Temos:

$$\text{minuendo} - 8 = 15 \Longleftrightarrow \text{minuendo} = 15 + 8$$
$$\text{ou} \quad \text{minuendo} = 23$$

4. Determinar o valor de x tal que: $x + a = b$, sendo $b \geqslant a$.
Temos:

$$x + a = b \Longleftrightarrow x = b - a$$

LEMBRETE AMIGO

Você está estudando a operação *adição* e sua inversa *subtração* no conjunto dos números naturais:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$$

que passou a ser o nosso **universo** de trabalho. Diz-se, então, que:

1. O conjunto N é **fechado** em relação à *adição*, porque a *soma* de dois números naturais quaisquer *é sempre* um número natural.
2. O conjunto N **não é fechado** em relação à *subtração*, porque a diferença de dois números naturais quaisquer *nem sempre* é um número natural.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 31

1. Completar:

1.º) (13, 5) $\quad 13 - 5 = \ldots$ porque $\ldots + 5 = 13$
2.º) (13, 13) $\quad 13 - 13 = \ldots$ porque $\ldots + 13 = 13$

2. Se $x - y = d$, sendo $x \geqslant y$, então $\ldots + y = \ldots$

3. Numa subtração, o subtraendo é 12, a diferença 14. Qual o minuendo?

4. Substituir os traços por algarismos que mantenham o cálculo indicado verdadeiro:

1.º) $-\left\{\begin{array}{r} 8.817 \\ \underline{\text{- - - -}} \\ 2.539 \end{array}\right.$ 2.º) $+\left\{\begin{array}{r} \text{- - - -} \\ \underline{3.572} \\ 8.105 \end{array}\right.$ 3.º) $-\left\{\begin{array}{r} 1\,\text{-}25 \\ \underline{4\text{- -}} \\ 1.158 \end{array}\right.$ 4.º) $+\left\{\begin{array}{r} 310 \\ 37\text{-} \\ 1\text{-}5 \\ \underline{\text{- -}86} \\ 4.000 \end{array}\right.$

5. Determinar o valor de $\square$ tal que:

1.º) $\square + 4 = 7$ 2.º) $\square - 2 = 5$ 3.º) $m + \square = n \quad (n \geqslant m)$

6. Nas subtrações que se seguem, calcular o valor da letra que torna verdadeira cada uma das seguintes sentenças (igualdades):

1.º) $a - 226 = 154$ 2.º) $10.001 - x = 839$ 3.º) $0 = y - 32$

7. Qual o número que somado com 1.836 dá como resultado 18.001.003?

8. Complete:

1.º) $7 + 5 = 12 \Longleftrightarrow \begin{cases} 12 - \text{- - -} = 5 \\ 12 - \text{- - -} = 7 \end{cases}$ 2.º) $42 + 18 = 60 \Longleftrightarrow \begin{cases} 60 - \text{- - -} = 18 \\ \text{- - -} - 18 = 42 \end{cases}$

9. Idem:

1.º) $12 + 0 = 12 \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{- - -} - \text{- - -} = 0 \\ \text{- - -} - 0 = \text{- - -} \end{cases}$ 2.º) $m + n = p \Longleftrightarrow \begin{cases} p - \text{- - -} = m \\ p - \text{- - -} = n \end{cases}$

10. *a*) Existe algum caso particular em que a *ordem* dos têrmos de uma subtração pode ser trocada sem que a *diferença* se altere? Exemplifique.

b) O conjunto dos números naturais é **fechado** em relação à operação *adição?* Por quê?

c) O conjunto dos números naturais é **fechado** em relação à operação *subtração?* Por quê?

Associação de Adições e Subtrações

9. *Propriedade fundamental da diferença de dois números*

Somando ou subtraindo um mesmo número aos têrmos de uma subtração, a diferença não se altera.

De fato, se você tem 8 selos e eu 5, a diferença é 3 selos. Agora, se cada um de nós ganhar mais 4 selos, a *diferença* entre o que passamos a possuir *continua sendo de 3 selos!* Logo:

$$(8 + 4) - (5 + 4) = 3$$

O mesmo ocorreria se ambos déssemos 2 selos dos que possuíamos, isto é:

$$(8 - 2) - (5 - 2) = 3$$

De um modo geral, se $a - b = d$, com $a \geqslant b$, então:

$$\boxed{(a + c) - (b + c) = a - b}$$

$$\boxed{(a - c) - (b - c) = a - b} \quad (\text{Com } a \geqslant c \text{ e } b \geqslant c)$$

Logo: Numa subtração, a diferença não se altera quando se *soma* (ou subtrai) de seus têrmos um mesmo número.

Observações:

1.ª) *Subtraindo-se o mesmo número dos membros de uma igualdade, obtém-se uma nova igualdade.* Exemplo:

Se $a = 5$, então $a - 3 = 5 - 3$

De um modo geral: $a = b \Longrightarrow a - c = b - c \; (a \geqslant c)$

2.ª) *Subtraindo-se o mesmo número dos membros de uma desigualdade, obtém-se uma nova desigualdade do mesmo sentido que a primeira.* Exemplos:

$a > 5 \Longrightarrow a - 3 > 5 - 3$

$b < 8 \Longrightarrow b - 1 < 8 - 1$

10. *Subtração de uma soma indicada*

Para subtrair de um número uma soma indicada de diversos números, é suficiente subtrair sucessivamente cada um dos têrmos da soma.

Com efeito, se você subtrair sucessivamente 8, 5 e 4 selos de sua coleção de 50 selos, obterá o *mesmo resultado* que se subtraísse dos 50 selos a *soma* dos selos subtraídos sucessivamente. Logo:

$$50 - (8 + 5 + 4) = 50 - 8 - 5 - 4$$

De um modo geral, temos:

$$\boxed{a - (b + c + d) = a - b - c - d}$$

Observação: Valeria a propriedade associativa para a subtração? Respondamos com um exemplo:

$$\begin{array}{lrcl} & (8 - 5) - 3 & = & 8 - (5 - 3) \\ \text{Ora:} & 3 - 3 & = & 8 - 2 \\ \text{ou} & 0 & = & 6 \quad (\text{FALSO!}) \end{array}$$

Logo: $(8 - 5) - 3 \neq 8 - (5 - 3)$, isto é, não vale a propriedade associativa para a operação subtração, pois basta existir um *contra-exemplo* para não valer a propriedade.

1. Completar:
   1.º) $(5 + 1) - (3 + 1) = 5 - \ldots$
   2.º) $(5 - 1) - (3 - 1) = 5 - \ldots$
2. Idem:
   1.º) se $a = 8$ então $a - 3 = 8 - \ldots$
   2.º) se $a < 8$ então $a - 3 < 8 - \ldots$
   3.º) se $a > 8$ então $a - 3 > 8 - \ldots$
3. Idem:
   1.º) $12 - (5 + 4) = 12 - 5 - \ldots$
   2.º) $10 - (2 + 8) = 10 - \ldots - 8$
4. Escrever *V* ou *F* conforme a sentença seja verdadeira ou falsa:
   1.º) $5 - 3 = 3 - 5$
   2.º) $(7 - 4) - 2 = 7 - (4 - 2)$
   3.º) $30 - 6 - 4 = 30 - (6 + 4)$
   4.º) $5 - 3 = (5 + 2) - (3 + 2)$
5. Qual é a diferença entre dois números naturais *consecutivos*?
6. Numa adição de três parcelas soma-se 5 a cada uma delas. Qual é a alteração que sofre a *soma*?
7. Numa adição de três parcelas subtrai-se 8 de duas delas e soma-se 7 à outra. Que alteração sofre o *resultado* dessa adição?
8. Que alteração sofre a *diferença* entre dois números naturais quando se soma 5 a cada um dêles?
9. Assinalar, em cada um dos seguintes exercícios, a resposta correta:
   I) Se $a - 5 = 12$, então o valor de a é:
      1.º) 5
      2.º) 15
      3.º) 19
      4.º) 12
      5.º) nenhuma das respostas anteriores é correta
   II) Se $b - 8 = 0$, então o valor de b é:
      1.º) 0
      2.º) 8
      3.º) 16
      4.º) 12
      5.º) nenhuma das respostas anteriores é correta
   III) Se $x - 1 > 10$, então o valor de x pode ser:
      1.º) 11
      2.º) 5
      3.º) 6
      4.º) 10
      5.º) nenhuma das respostas anteriores é correta

Expressões numéricas - "Pontuação"

11. *Que é uma expressão numérica? "Pontuação" de uma expressão*

Em $4 + 3$ você tem uma *soma* indicada, cujo numeral mais simples é 7; em $4 + 3 - 2$ você tem uma *soma* indicada e uma *diferença* indicada, cujo numeral mais simples é 5. O mesmo se dá com:

$$12 - 7 + 3$$

pois, desde que se efetuem as operações na *ordem indicada* (primeiro, $12 - 7 = 5$ e depois $5 + 3 = 8$), pode ser substituída por um valor (8): que é o seu *numeral mais simples*. As indicações, como:

$$\left.\begin{array}{r} 4 + 3 \\ 4 + 3 - 2 \\ 12 - 7 + 3 \end{array}\right\} \text{são chamadas } \textit{expressões numéricas}$$

que podem ser sempre substituídas, quando se efetuam as operações na ordem em que estão indicadas, por um valor que é o seu numeral mais simples!

Para melhor precisar a *ordem* na qual as operações indicadas numa *expressão* serão efetuadas, usamos os *sinais de associação* (parênteses, colchêtes, chaves, . . .) para "pontuar" a expressão.

Você aprendeu, em Português, a importância da "*pontuação*" numa sentença. Conforme a *posição* de uma *vírgula* na sentença, esta pode mudar de sentido completamente.

Veja, por exemplo, como a *vida* de um homem ficou dependendo da *posição de uma vírgula* na seguinte estória de um reinado antigo: um homem fôra condenado por um tribunal, e o resultado dêsse julgamento dependia da ordem final do Rei, que podia ou não absolver o réu.

Observe, então, que conforme a *posição* da vírgula, na ordem escrita pelo Rei, o homem poderá ser ou não absolvido!

(1) *O tribunal condenou; eu, não absolvo!*

(2) *O tribunal condenou; eu não, absolvo!*

Na (1) o Rei concorda com o tribunal e na (2), não.

Da mesma forma a "pontuação" de uma expressão numérica é decisiva para o resultado que se procura. Sejam, por exemplo, as questões:

1.ª) "Pontuar" convenientemente, com parênteses, a fim de tornar verdadeira a sentença:

$$8 - 5 + 3 = 0$$

Ora, se os parênteses são colocados de modo a envolverem $8 - 5$, obtemos:

$$\underbrace{(8 - 5)}_{3} + 3 = 6 \ (\textit{diferente de } 0)$$

Porém, colocados os parênteses envolvendo $5 + 3$, obtemos:

$$8 - \underbrace{(5 + 3)}_{8} = 0$$

e a sentença proposta tornou-se a verdadeira como desejávamos.

2.ª) "Pontuar", usando parênteses, a expressão: $10 - 6 - 3$, de modo que o seu *valor* seja igual a 7.

Só poderão envolver $6 - 3$, pois $10 - \underbrace{(6 - 3)}_{3} = 7$; de outro modo seria:

$$(10 - 6) - 3 = 1, \text{ cujo } \textit{valor} \text{ não é o procurado.}$$

Se, além de conter operações indicadas entre parênteses, a expressão numérica possui indicações entre colchêtes, chaves, . . . o seu valor (que é o *numeral mais simples* que a representa!) pode ser calculado efetuando-se, primeiramente, as operações indicadas entre parênteses, em seguida as que estão entre colchêtes e depois as que estão entre chaves.
Exemplos:

Calcular o *valor* das seguintes *expressões numéricas:*

1.º) $35 - [4 + (5 - 3)]$
Temos: $35 - [4 + \underbrace{(5 - 3)}_{2}] = 35 - \underbrace{[4 + 2]}_{6} = 35 - 6 = 29$

2.º) $25 - \{26 - [8 - (2 + 5)]\}$
Temos: $25 - \{26 - [8 - \underbrace{(2 + 5)}_{7}]\} = 25 - \{26 - \underbrace{[8 - 7]}_{1}\} = 25 - \underbrace{\{26 - 1\}}_{25} =$
$= 25 - 25 = 0$

1. "Pontuar", usando parênteses, a expressão: $12 - 2 + 3$, de modo a obter *dois* resultados diferentes.

2. Usando parênteses, tornar verdadeiras as seguintes sentenças:

1.ª) $5 - 3 + 2 = 4$	3.ª) $15 - 8 - 2 = 5$
2.ª) $5 - 3 + 2 = 0$	4.ª) $15 - 8 - 2 = 9$

3. Calcular o *valor* das seguintes expressões numéricas, ou seja, o numeral mais simples que representa cada uma delas:

1.ª) $(12 + 3) - (4 + 8)$
2.ª) $14 + \{8 - [(48 - 3) - (38 + 1 + 5)]\} - 1$
3.ª) $\{213 - [(14 + 7) - (11 - 3)]\} - \{(8 + 5) - [6 - (10 - 9)]\}$
4.ª) $76 - [55 - (48 + 3)] + 28$
5.ª) $(240 - 30) - \{204 + [(16 + 10 - 24) - (36 - 32) + 8]\}$
6.ª) $1.000 - \{100 - [10 - (1 - 1)]\} + 90$
7.ª) $\{215 - [48 - (23 + 25)]\} - \{215 + [112 - (12 + 100)]\}$
8.ª) $130 - \{15 + (11 - 7) - [9 - (7 - 3)]\}$
9.ª) $21 - [22 - (4 + 5 + 2)] - \{15 - [(19 - 4) - (7 - 3)]\}$
10.ª) $133 - [(35 + 8) - (12 - 3)] - \{(17 + 4) - [15 - (11 - 9)]\}$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Todos vocês conhecem as inúmeras aplicações que as operações estudadas, adição e subtração, têm na resolução dos *primeiros problemas* da vida prática. "Juntar" e "tirar" constituem as "operações" mais usuais de nossas atividades e, portanto, são elas que fornecem o "material" para as primeiras **estruturas operatórias** do nosso pensamento.

Essa é a razão por que se deve, sempre, empregar as *propriedades das operações* na resolução dos problemas.

Exemplos:

1.º) *Depois de colar mais 30 figurinhas em meu álbum verifiquei que já tinha um total de 128 figurinhas coladas. Quantas figurinhas havia no álbum antes dessa "operação"?*

Vamos representar por □ (ou qualquer outro *numeral*) o número de figurinhas que estamos procurando, isto é, aquelas que já deviam estar coladas no álbum.

Como "somando" 30 a □ resulta 128, a sentença matemática que traduz êsse fato é a seguinte:

$$\square + 30 = 128$$

O *valor* de $\square$ será determinado, a partir dessa sentença, aplicando as propriedades já estudadas. Assim, procurando a *operação inversa* de "somar 30", que é "subtrair 30", obtemos:

$$\square = 128 - 30$$

ou $$\square = 98$$

Resposta: O álbum possuía 98 figurinhas coladas.

2.°) *Tinha algumas bolinhas no bôlso, não sei quantas. A seguir coloquei nesse bôlso 5 bolinhas que ganhei do Cid e tive que tirar 7, que perdi para o Mário. Então contei um total de 8 bolinhas no bôlso. Quantas eu tinha no início?*

Representemos por $\square$ o número de bolinhas que eu tinha no bôlso no início.

Como, "somando" 5 a $\square$ e "subtraindo" 7 do resultado, obtenho 8, segue-se que a sentença matemática que traduz êsses fatos é:

$$(\square + 5) - 7 = 8$$

O valor de $\square$ será determinado procurando, primeiramente, a *operação inversa* de "subtrair 7", que é "somar 7", ou seja:

$$(\square + 5) = 8 + 7$$

ou $$\square + 5 = 15$$

e a seguir procurando a *operação inversa* de "somar 5", que é "subtrair 5", isto é:

$$\square = 15 - 5$$

ou $$\square = 10$$

Resposta: Tinha 10 bolinhas no bôlso.

PROBLEMAS PARA SEREM RESOLVIDOS — GRUPO 34

1. Ganhei NCr\$ 2,50(*) do papai e, com o que já tinha, fiquei com NCr\$17,50. Quanto possuía?
2. Num jôgo de bolinhas, perdi 2 na primeira partida, ganhei 8 na segunda e ainda saí com 10 bolinhas. Quantas eu possuía?
3. Se Elsa der à Lucília oito lápis de côr, cada uma delas ficará com duas dúzias de lápis de côr. Quantos lápis possuía cada uma?
4. Se Pedro der a Rubens NCr\$ 100,00 ambos ficarão com a mesma quantia. Se Rubens der a Pedro NCr\$ 100,00 acaba ficando sem nada. Quanto possuía cada um?

(*) O uso dos centavos na resolução dos problemas é imposição da linguagem corrente, embora o Capítulo diga respeito ao conjunto dos números naturais.

5. Francisco e Joel possuem, cada um dêles, um rádio de pilhas, sendo que o de Francisco possui 6 transistores. O meu rádio possui 2 transistores a mais que o de Joel e sei que o total de transistores dos nossos três rádios é 22. Quantos transistores tem o rádio de Joel? (NOTA: Usar o conceito intuitivo de "dôbro").
6. Numa parada cívica desfilam os alunos de um Colégio distribuídos em três pelotões. O primeiro dêles é formado por 68 alunos; o segundo pelotão por dois alunos a mais que o primeiro e o terceiro é constituído de tantos alunos quantos os dois primeiros menos 48 alunos. Quantos alunos do Colégio estão desfilando?
7. Um pai tem 41 anos. Seus três filhos, Vera Maria, Osvaldo e Sílvia têm respectivamente: 17, 15 e 13 anos. Qual era a idade do pai ao nascer cada um de seus filhos?
8. Isto acontece êste ano em minha casa: o fato de meu irmão ser mais velho do que eu 2 anos e minha irmã 2 anos também mais môça que eu, faz com que a soma das nossas três idades seja de 33 anos. Qual é a minha idade? (NOTA: Usar o conceito intuitivo de "triplo").
9. No último concurso da T. V. Escolar, distribuíram-se NCr\$ 80,00 em prêmios aos três primeiros classificados. O primeiro recebeu NCr\$ 40,00, e o segundo NCr\$ 16,00 a menos que o primeiro. Quanto recebeu o terceiro classificado?
10. Acêrca dos vôos dos astronautas Gagarin e Glenn, sabe-se que:
    1.°) a cabine espacial de Gagarin pesou 3.225kg a mais do que a de Glenn;
    2.°) a altura máxima atingida por Glenn foi 45km a menos da de Gagarin;
    3.°) o tempo de vôo de Glenn foi 186 minutos a mais do de Gagarin.

Pergunta-se:
1. qual o pêso da cabine de Glenn, se a de Gagarin pesava 4.725kg?
2. qual a altura máxima atingida por Gagarin, se a de Glenn foi de 256km?
3. qual o tempo de vôo de Gagarin, se o de Glenn foi de 294 minutos?

MULTIPLICAÇÃO

12. *Operação: multiplicação; resultado: produto*

Consideremos dois conjuntos finitos A e B:

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{onde} \quad n(A) = 3$$
$$B = \{x, y\} \quad \text{onde} \quad n(B) = 2$$

Formando o **produto cartesiano** dêsses conjuntos, obtemos:

$$P = A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\} \quad \text{onde} \quad n(P) = 6$$

Considere, agora, o *número de elementos* (que é um *número natural*) de cada um dêsses conjuntos:

$$\begin{array}{ccc} (A, B) & \longrightarrow & P \\ \downarrow\ \ \downarrow & & \downarrow \\ 3,\ 2 & \longrightarrow & 6 \end{array}$$

(*Não se esqueça:* os elementos do conjunto P são *pares*) e adote a seguinte *lei* como operação **multiplicação:**

> a que **associa** ao par (3, 2), formado pelos *números de elementos* dos conjuntos dados, o *número de elementos* do conjunto *produto cartesiano*, isto é, 6.

Indicação: $(3, 2) \longrightarrow 3 \times 2 = 6$

onde 3 e 2 são os *têrmos* da operação e se chamam FATÔRES
$\times$ ou $\cdot$ são os sinais conhecidos da *multiplicação*
6 é o *resultado* da operação, denominado PRODUTO.

Outros exemplos. Pela operação *multiplicação*, temos:

$$(4, 5) \longrightarrow 4 \times 5 = 20$$
$$(8, 1) \longrightarrow 8 \times 1 = 8$$

e, de um modo geral:

$$(a, b) \longrightarrow a \times b = p$$

onde os *têrmos* a e b são os **fatôres** e o *resultado* p, o **produto.**

ATENÇÃO:

> A *multiplicação* também é uma *operação* ***binária*** porque, atuando sôbre *dois números naturais*, produz sempre um *terceiro número natural* (resultado).

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 35

1. Sejam os conjuntos:

$C = \{m, n\}$ onde $n(C) = 2$
$D = \{a, b\}$ onde $n(D) = 2$

Formando o *produto cartesiano*, temos:

$C \times D = \{(m, a), (m, b), (n, a), (n, b)\}$ onde $n(C \times D) = 4$

e, portanto, pela operação *multiplicação*, podemos escrever:

$$(2, 2) \longrightarrow 2 \times 2 = 4$$

2. Agora é a sua vez. *Complete . . .*

1.°) $A = \{x, y, z\}$ onde $n(A) = \ldots$
$B = \{m\}$ onde $n(B) = \ldots$

Como: $A \times B = \{(\ldots, \ldots), (\ldots, \ldots), (\ldots, \ldots)\}$

$(3, \ldots) \longrightarrow \ldots \times 1 = \ldots$

2.°) $A = \varnothing$ onde $n(A) = \ldots$ **(cuidado!)**
$B = \{a, b, c, d\}$ onde $n(B) = \ldots$

Como: $A \times B = \varnothing$ (não há pares porque A não possui elementos . . .)
e $n(A \times B) = 0$

$(0, 4) \longrightarrow 0 \times 4 = \ldots$

3. Você acha que as palavras *multiplicação* e *produto* são palavras sinônimas? Se não acha, diga porquê.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) *A multiplicação como adição de parcelas iguais.*
No exemplo estudado:

$A = \{a, b, c\}$ onde $n(A) = 3$
$B = \{x, y\}$ onde $n(B) = 2$

o *produto cartesiano* $A \times B$ pode ser escrito:

$\{a, b, c\} \times \{x, y\} = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$

ou $\{a, b, c\} \times \{x, y\} = \underbrace{\{(a, x), (a, y)\}}_{2} \cup \underbrace{\{(b, x), (b, y)\}}_{2} \cup \underbrace{\{(c, x), (c, y)\}}_{2}$

ou $3 \times 2 = 2 + 2 + 2$

levando em conta o que já foi ensinado.

Logo: o *produto* 3×2 é o mesmo que a *soma* de *três* parcelas *iguais* a 2.

De um modo geral:

> O produto de um número natural n por um número natural a é a soma de n *parcelas iguais* a a:
> $$n \times a = \underbrace{a + a + a + \ldots\ldots + a}_{n \text{ parcelas}}$$

2.ª) Embora $A \times B \neq B \times A$, tem-se sempre $n(A \times B) = n(B \times A)$. Verifique!
3.ª) Do Exercício 2 — 2.° (*Teste de Atenção* — Grupo 35) é fácil concluir que, se na multiplicação de dois números um dêles é zero, o produto é zero:

$$0 \times 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 4 \times 0 = 0$$

> Se em uma multiplicação de dois números naturais um dos fatôres é zero, o produto é zero e, recìprocamente, se o produto de dois fatôres é zero, um dos fatôres é zero.
> $$(a \times b = 0) \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

13. *Tábua da multiplicação* (base 10)

Com a técnica operatória da multiplicação já conhecida (a clássica tabuada!) temos a seguinte *tábua:*

elemento neutro

×	0	1	2	3	4	5	6	7	.	.	.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	.	.	.
1	0	1	2	3	4	5	6	7	.	.	.
2	0	2	4	6	8	10	12	14	.	.	.
3	0	3	6	9	12	15	18	21	.	.	.
4	0	4	8	12	16	20	24	28	.	.	.
5	0	5	10	15	20	25	30	35	.	.	.
6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

14. *Multiplicação de vários números naturais*

Para o caso de três números naturais o cálculo é feito efetuando-se, primeiramente, a multiplicação dos dois primeiros (cálculo conhecido) e, a seguir, a multiplicação do produto obtido com o terceiro.

Exemplo:

$$5 \times 3 \times 6 = (5 \times 3) \times 6 = 15 \times 6 = 90$$

De um modo geral:

$$a \,.\, b \,.\, c = (a \,.\, b) \,.\, c$$

De maneira análoga, calcula-se o produto resultante da multiplicação de *mais de três números:*

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d = [(a \,.\, b) \,.\, c] \,.\, d$$

NOTA: Se na multiplicação de vários números naturais um dêles é zero, então o produto é igual a zero. Exemplo:

$$7 \times 5 \times 0 \times 4 \times 3 = 0$$

Por essa razão o *zero* é considerado o elemento "terrível" da multiplicação!

15. *Propriedades estruturais*

1.ª) FECHAMENTO: *O produto de dois números naturais é sempre um número natural.*

Exemplo:

$$5 \times 4 = 20$$

De um modo geral:

$$(a \times b) \in N \quad \text{para qualquer} \quad a \in N \quad \text{e} \quad b \in N$$

Abreviatura: **p. f. m.** (lê-se: "propriedade *fechamento* da multiplicação")

2.ª) COMUTATIVA: *A ordem dos fatôres não altera o produto.*

Isto significa que, trocando-se a ordem dos fatôres, o produto obtido é sempre o mesmo.

Exemplo:

$$5 \times 4 = 4 \times 5$$

De um modo geral:

$$a \times b = b \times a \quad \text{para qualquer} \quad a \in N \quad \text{e} \quad b \in N$$

Abreviatura: **p. c. m.** (lê-se: "propriedade *comutativa* da multiplicação")

NOTA: A p. c. m. pode ser usada para "tirar" a prova da operação.

3.ª) ELEMENTO NEUTRO: 1 (um). Isto significa que no conjunto N existe 1, que é o único número que, multiplicado por outro, em qualquer ordem, dá para produto êsse outro número.

Exemplo:

$$5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$$

De um modo geral:

$$a \times 1 = 1 \times a = a \quad \text{para qualquer} \quad a \in N$$

Abreviatura: **p. e. n. m.** (lê-se: "propriedade do *elemento neutro* da *multiplicação*")

4.ª) ASSOCIATIVA: *A multiplicação de três números naturais pode ser feita associando-se os dois primeiros ou os dois últimos fatôres.*

Exemplo:

$$(5 \times 3) \times 8 = 5 \times (3 \times 8)$$

De um modo geral:

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ para qualquer $a \in N$, $b \in N$ e $c \in N$

Abreviatura: **p. a. m.** (lê-se: "propriedade *associativa* da multiplicação")

5.ª) DISTRIBUTIVA *da multiplicação em relação à adição (ou subtração). Para se multiplicar um número por uma soma indicada* (ou diferença), *pode-se multiplicar o número pelos têrmos da soma* (ou diferença) *e adicionar* (ou subtrair) *os produtos obtidos.*

Isto significa que a *multiplicação* "se distribui" pelos têrmos de uma adição (ou subtração), como mostram os seguintes exemplos:

$$4 \times (5 + 3) = 4 \times 5 + 4 \times 3$$
$$4 \times (5 - 3) = 4 \times 5 - 4 \times 3$$

Abreviatura: **p. d. m.** (a) (lê-se: "propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição")
p. d. m. (s) (lê-se: "..... em relação à subtração")

Como "treino" das propriedades já estudadas, vamos justificar a propriedade DISTRIBUTIVA, das mais importantes *propriedades estruturais,* por envolver **duas operações.** Temos:

$4\times(5+3) = (5+3)+(5+3)+(5+3)+(5+3)$ (pela definição de multiplicação)

$= (5+5+5+5)+(3+3+3+3)$ (pela p. a. a.)

$= 4\times5+4\times3$ (pela definição de multiplicação)

Visto a multiplicação ser *comutativa,* a propriedade DISTRIBUTIVA é feita nos "dois sentidos", isto é:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \text{ e } (b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

Como aplicações da propriedade DISTRIBUTIVA temos:

1.º) A multiplicação "distribui" a adição e a subtração ao mesmo tempo.

Exemplo:

$$8 \times (5 + 3 - 1) = 8 \times 5 + 8 \times 3 - 8 \times 1$$

2.ª) Dá a regra para se efetuar o produto de *duas somas indicadas.*

Exemplo:

$$(6 + 3) \times (2 + 5) = 6 \times (2 + 5) + 3 \times (2 + 5)$$
$$= 6 \times 2 + 6 \times 5 + 3 \times 2 + 3 \times 5$$

ATENÇÃO: Inversamente, não se pode "distribuir" a *adição* (ou *subtração*) em relação à *multiplicação,* pois:
$3 + (4 \times 5) = (3 + 4) \times (3 + 5)$ é FALSO! (faça os cálculos!)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 36

1. Qual é a outra maneira de escrever as seguintes adições:

1.ª) $7 + 7 + 7 + 7$ — 4.ª) $\square + \square + \square + \square + \square$
2.ª) $0 + 0 + 0$ — 5.ª) $\triangle + \triangle$
3.ª) $a + a + a + a + a$ — 6.ª) $\underbrace{x + x + x + \ldots + x}_{y \text{ parcelas}}$

2. Indicar de dois modos diferentes a multiplicação dos números 12 e 5.

3. Completar as seguintes igualdades, de modo a torná-las verdadeiras:

1.ª) $5 \times \ldots = 0$ — 2.ª) $\ldots \times 1 = 5$ — 3.ª) $1 \times \ldots = 5$

4. Escrever, ao lado de cada uma das seguintes sentenças, a propriedade que está sendo aplicada:

1.ª) $4 \times 9 = 9 \times 4$ — 6.ª) $a \times 1 = a$
2.ª) $8 \times 1 = 8$ — 7.ª) $(m + n) \times r = m \times r + n \times r$
3.ª) $(5 \times 3) \times 4 = 5 \times (3 \times 4)$ — 8.ª) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
4.ª) $(4 \times 5) \in N$ — 9.ª) $b \times a = a \times b$
5.ª) $2 \times (3 + 9) = 2 \times 3 + 2 \times 9$ — 10.ª) $(a \times b) \in N$

5. Calcular os seguintes produtos, *associando* os fatôres cujo produto efetuado seja 10 ou 100:

1.º) $7 \times 2 \times 8 \times 5$ — 2.º) $4 \times 32 \times 5 \times 25$

6. Escrever três multiplicações diferentes tendo cada uma três fatôres e por produto, 12.

7. Escrever de todos os modos possíveis (trocando a ordem dos fatôres) os produtos:

1.º) 5×3 — 2.º) $a \times b \times c$ — 3.º) $4 \times x \times y$

8. Completar as igualdades:

1.ª) $32 \times 15 \times 0 \times 2 = \ldots$
2.ª) $8 \times 96 \times \ldots \times 36 = 0$

9. Aplicar a propriedade DISTRIBUTIVA em:

1.º) $4 \times (3 + 5)$ — 4.º) $a \times (x + y)$
2.º) $(7 - 1) \times 8$ — 5.º) $(n + m) \times p$
3.º) $8 \times (4 + 5 - 7)$ — 6.º) $a \times (b + c - d - e)$

10. Idem, nos seguintes produtos de *soma* por *soma* (indicadas):

1.º) $(4 + 5) \times (7 + 3)$ 3.º) $(3 + 0) \times (0 + 8)$

2.º) $(a + b) \times (c + d)$ 4.º) $(x + y + z) \times (m + n)$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 37

Observe bem os quatro primeiros exercícios . . . e resolva os outros quatro:

1. Usando a propriedade DISTRIBUTIVA, tornar verdadeira a sentença:

$$5 \times (4 + \ldots) = 5 \times 4 + 5 \times 7$$

No lugar de ... só pode ser o 7. Verifique!

2. Somando-se 3 ao fator 4 do produto 5×4, de quanto *aumentará* o produto? Ora, somando-se 3 ao fator 4 (que é o segundo fator), obtemos: $5 \times (4 + 3)$, que pela propriedade DISTRIBUTIVA nos dá:

$$5 \times (4 + 3) = 5 \times 4 + 5 \times 3$$

isto é, o produto 5×4 aumenta de 5×3, ou seja, 3 *vêzes* o primeiro fator (5).

3. Subtraindo-se 2 do fator 5 do produto 5×3, qual é a variação que sofre êsse produto?

Subtraindo-se 2 de 5 (primeiro fator do produto), obtemos: $(5 - 2) \times 3$ e, pela propriedade DISTRIBUTIVA:

$$(5 - 2) \times 3 = 5 \times 3 - 2 \times 3$$

isto é, o produto 5×3 diminuirá de 2×3, ou seja, *duas vêzes* o outro fator.

4. Somando-se 4 ao fator a da multiplicação: $a \times b$, qual a alteração do produto? Temos: $(a + 4) \times b = a \times b + 4 \times b$, ou seja, aumentará de 4 *vêzes* o outro fator (b).

Agora é sua vez . . .

5. Usando a propriedade DISTRIBUTIVA, tornar verdadeiras as seguintes sentenças:

1.ª) $4 \times (3 + \ldots) = 4 \times 3 + 4 \times 5$ 4.ª) $\ldots \times 5 + \ldots \times 5 = (4 + 3) \times \ldots$

2.ª) $2 \times (\ldots - 4) = 2 \times 5 - \ldots \times 4$ 5.ª) $4 \times 7 + \ldots \times 3 = 4 \times (\ldots + \ldots)$

3.ª) $(6 + 9) \times 8 = \ldots \times 8 + 9 \times \ldots$ 6.ª) $6 \times (\ldots + 8) = \ldots \times 7 + \ldots \times 8$

6. Tornar verdadeiras as seguintes igualdades (sentenças):

1.ª) $(3 + \ldots) \times (4 + 9) = \ldots \times 4 + 3 \times 9 + 2 \times 4 + 2 \times \ldots$

2.ª) $(\ldots + q) \times (m + \ldots) = p \times m + \ldots \times n + \ldots \times m + q \times \ldots$

7. Somando-se 2 ao fator 5 do produto 5×7, qual é a *variação do produto?*

8. Qual é a alteração sofrida pelo produto de dois números a e b, quando:

1.º) somamos 4 a a 3.º) somamos 5 a b

2.º) subtraímos 2 de a 4.º) subtraímos 1 de b

9. Assinalar a resposta certa em cada um dos seguintes exercícios:

1.º) $a \cdot b = a$, então o valor de b é:

1.ª) 1 2.ª) 0 3.ª) a 4.ª) nenhuma das respostas anteriores

2.º) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ indica a propriedade:

1.ª) distributiva 2.ª) comutativa da multiplicação

3.ª) associativa da adição 4.ª) nenhuma das anteriores

3.º) a propriedade associativa da multiplicação é:

1.ª) $(a + b) \times c = a + (b \times c)$ 2.ª) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

3.ª) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ 4.ª) nenhuma das anteriores

16. *Propriedades da igualdade e da desigualdade relacionadas com a multiplicação*

1.ª) *Lei do cancelamento na igualdade*

Se $a \times 3 = 5 \times 3$ então $a = 5$ e, vice-versa:
se $a = 5$ então $a \times 3 = 5 \times 3$

Logo: $a \times 3 = 5 \times 3 \iff a = 5$

De um modo geral:

$$a \times c = b \times c \iff a = b \quad (c \neq 0)$$

2.ª) *Lei do cancelamento na desigualdade*

Se $2 \times 3 < 5 \times 3$ então $2 < 5$ e, vice-versa:
se $2 < 5$ então $2 \times 3 < 5 \times 3$

Logo: $2 \times 3 < 5 \times 3 \iff 2 < 3$

De um modo geral:

$$a \times c < b \times c \iff a < b \quad (c \neq 0)$$

e $$a \times c > b \times c \iff a > b \quad (c \neq 0)$$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 38

Complete:

1. $a \times 4 = 6 \times 4 \iff a = \ldots$
2. $m = n \iff 2 \times m = \ldots \times n$
3. $p \times q = p \times r \iff \ldots = r$
4. $3 < 5 \iff 3 \times 2 \ldots 5 \times 2$
5. $12 \times 5 \ldots 1 \times 5 \iff 12 > 1$.

17. *Múltiplos de um número natural*

Chama-se múltiplo de um número natural o *produto* dêsse número por um número natural qualquer.

Exemplo:

3×4 é um múltiplo de 3 (e de 4)

Todos os *múltiplos* de um número natural são obtidos multiplicando-o pelos números que constituem o conjunto dos números naturais.

Exemplos:

múltiplos de 2: $2 \times 0 = 0$; $2 \times 1 = 2$; $2 \times 2 = 4$; . . . . .; $2 \times n = 2n$; . . . .

múltiplos de 3: $3 \times 0 = 0$; $3 \times 1 = 3$; $3 \times 2 = 6$; . . . . .; $3 \times n = 3n$; . . . .

múltiplos de 4: $4 \times 0 = 0$; $4 \times 1 = 4$; $4 \times 2 = 8$; . . . . .; $4 \times n = 4n$; . . . .

. . . .

Como o conjunto dos números naturais é *infinito*, dizemos que todos os números naturais têm uma *infinidade de múltiplos.*

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Os múltiplos de 2: $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2n, \ldots\}$ constituem o conjunto dos números pares; a terminação dêsses números é: 0, 2, 4, 6 e 8.

2.ª) Os números que não são múltiplos de 2 terminam necessàriamente em: 1, 3, 5, 7 e 9, e constituem o conjunto dos números ímpares: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots, 2n + 1, \ldots\}$.

3.ª) O *zero* é múltiplo de qualquer número natural.

De fato: 0 é múltiplo de 2, pois: $0 = 0 \times 2$
0 é múltiplo de 3, pois: $0 = 0 \times 3$, etc...

4.ª) Um número qualquer é sempre múltiplo de 1 e de si mesmo.

Realmente: 2 é múltiplo de 2, pois: $2 = 2 \times 1$
2 é múltiplo de 1, pois: $2 = 1 \times 2$, etc...

5.ª) Os produtos (múltiplos) de um número por 2, 3, 4, ..., chamam-se, respectivamente: dôbro, triplo, quádruplo, ..., também chamados, na gramática portuguêsa, de *numerais multiplicativos.*

6.ª) Os múltiplos de 10, 100, 1.000, ..., terminam por um, dois, três, ..., zeros, respectivamente. Com efeito é fácil ver que:

$5 \times 10 = 50$ (múlt. de 10)
$4 \times 100 = 400$ (múlt. de 100), etc...

18. *"Pontuação" de expressões numéricas que envolvem adições, subtrações e multiplicações*

Seja, por exemplo, a expressão:

$$5 + 3 \times 4$$

que envolve uma *adição* e uma *multiplicação.* Tal expressão pode ser "pontuada" através de parênteses, das seguintes maneiras:

$$5 + (3 \times 4) \text{ e } (5 + 3) \times 4$$

cujos *resultados* são, respectivamente:

$$5 + 12 = 17 \text{ e } 8 \times 4 = 32$$

Preste atenção, agora, no seguinte "*acôrdo*" que vamos fazer, caso a expressão se apresente sem os parênteses:

1. efetuamos *primeiramente* as *multiplicações* (consideradas operações mais "fortes"!);
2. a seguir, efetuamos as *adições* e as *subtrações*, na ordem em que figuram.

Exemplo:

Calcular o *valor* da expressão: $4 + 3 \times 7$. Lembre-se de que é o mesmo que procurar o *numeral mais simples* da expressão. Como não figuram parênteses, efetuamos *primeiramente* a multiplicação e a seguir a *adição*, isto é:

$$4 + 3 \times 7 = 4 + 21 = 25$$

Uma boa questão acêrca de expressões é a seguinte:

Usando parênteses convenientemente, tornar verdadeiras as seguintes sentenças:

1.ª) $3 + 4 \times 2 - 1 = 10$	Temos:	$3 + (4 \times 2) - 1 = 10$
2.ª) $3 + 4 \times 2 - 1 = 13$	"	$(3 + 4) \times 2 - 1 = 13$
3.ª) $3 + 4 \times 2 - 1 = 7$	"	$(3 + 4) \times (2 - 1) = 7$

Se, além de parênteses, a expressão numérica contém colchêtes e chaves, obedece-se à mesma *ordem* já estudada em outras expressões.

Exemplo:

Calcular o valor da expressão:

$$54 - \{3 \times [12 + 3 \times (5 - 1) - 3 \times 2]\}$$

$$\begin{aligned}\text{Temos: } & 54 - \{3 \times [12 + 3 \times (5 - 1) - 3 \times 2]\} = \\ = {} & 54 - \{3 \times [12 + 3 \times 4 - 6]\} = \\ = {} & 54 - \{3 \times [12 + 12 - 6]\} = \\ = {} & 54 - \{3 \times 18\} = \\ = {} & 54 - 54 = \\ = {} & 0\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 39

1. Escrever todos os *múltiplos* de 5 compreendidos entre 32 e 71.
2. A soma do *dôbro* de um número natural com o próprio número representa o ...... dêsse número. Completar essa sentença, tornando-a verdadeira.
3. Idem, com a sentença: "Se um número é o *quádruplo* de outro, a diferença entre êles representa o ...... do menor.
4. Se a forma geral de um número par é $2n$ e, sabendo-se que um número ímpar é o *sucessivo* de um número par, qual é a forma geral dos números ímpares?
5. Calcular o valor das seguintes expressões numéricas:

   1.ª) $5 + 4 \times 3$ 2.ª) $(5 + 4) \times 3$ 3.ª) $5 \times 4 + 3$ 4.ª) $5 \times (4 + 3)$
6. Usando os *parênteses*, tornar verdadeiras as seguintes sentenças:

   1.ª) $5 + 3 \times 4 - 2 = 15$
   2.ª) $5 + 3 \times 4 - 2 = 30$
   3.ª) $5 + 3 \times 4 - 2 = 16$
7. "Pontuar", usando sinais de associação, a expressão: $3 + 7 \times 2 - 1$, a fim de obter três resultados diferentes.
8. Idem, com a expressão: $7 - 3 \times 2 + 8 - 1$, a fim de obter quatro resultados diferentes.
9. Calcular o *valor* das seguintes expressões numéricas (ou procurar o numeral *mais simples* dessas expressões):

   1.ª) $(25 - 3 \times 7) \times [14 + 3 \times (12 - 3 \times 3) - 4 \times 2] - 4 \times (5 + 1 \times 4)$
   2.ª) $30 - 3 \times \{11 + [8 - (2 + 1 \times 3)] - 4\}$
   3.ª) $(30 + 9 \times 2 + (18 - 17) \times 12 - (45 \times 2) \times 1$
   4.ª) $94 - \{4 + [3 \times (2 + 5) - 4 \times 3] \times 10\}$
   5.ª) $[60 - (31 - 6) \times 2 + 15] \times [3 + (12 - 5) \times 2]$
   6.ª) $\{72 - 2 \times [21 - 5 \times (2 + 1)]\} + (477 - 10 \times 5) \times 0$
   7.ª) $\{58 - 3 \times [15 + 2 \times (5 - 3)]\} \times 1$
   8.ª) $3 \times (4 \times 32) - \{[(0 + 2) \times 4] \times 6\} \times 8$
   9.ª) $\{[(1 + 1) \times 1 - (1 - 1) \times 1] \times 1\} \times (1 - 1)$
   10.ª) $\{[(200 - 100) \times 10] \times 1 - [10 + 10 \times (1 + 9)]\} + 110$

DIVISÃO COMO OPERAÇAO INVERSA DA MULTIPLICAÇÃO

19. *Operação inversa da multiplicação: divisão; resultado: quociente*

Consideremos dois números naturais, sendo, por exemplo:

20 o primeiro dêles
e 5 o segundo

A operação que permite encontrar um terceiro número natural que, *multiplicado* pelo segundo, dê para resultado o primeiro é denominada **divisão** (exata).

A indicação da divisão é feita pelo sinal : (lê-se: "dividido por") e o terceiro número, resultado da operação, é chamado **quociente** (exato).

Representando êsse *quociente* por □, temos:

$$20 : 5 = \square \quad \text{tal que} \quad \square \times 5 = 20$$

Como 4 é o único número natural que, multiplicado por 5, resulta 20 (basta usar a tábua da multiplicação, seguindo caminho "inverso"), concluímos que $\square = 4$. Logo:

$$20 : 5 = 4 \quad \text{porque} \quad 4 \times 5 = 20$$

e, por isso, a divisão é considerada *operação inversa* da multiplicação.

Outros exemplos, usando o conhecido símbolo da *equivalência:*

$$18 : 3 = 6 \iff 6 \times 3 = 18$$
$$5 : 5 = 1 \iff 1 \times 5 = 5$$

que permite passar de uma igualdade a outra, mediante o emprêgo da *multiplicação* e sua inversa a *divisão.*

E se fôsse: $20 : 7 = ?$ ou $20 : 0?$

Você nota, no primeiro caso, que não é possível encontrar, no conjunto N, número algum que multiplicado por 7 dê 20 (... experimente procurar na tábua da multiplicação ...). No segundo caso, também, com a seguinte diferença: 7 não é divisor de 20, porém é divisor de outros números (14, 21, 28, ...) enquanto que 0 não é divisor de 20 e de *nenhum outro número!*

Em outras palavras: "dividir por zero" *não é uma operação* e "multiplicar por zero" *não tem operação inversa!* Portanto, **muita atenção:**

> A divisão (exata), assim como a subtração, nem sempre é possível com dois números naturais quaisquer.

É necessário que o primeiro número seja **múltiplo** do segundo, que por sua vez é diferente de zero, para existir o *quociente* (exato) entre êles. Guarde bem:

NÃO É POSSÍVEL DIVIDIR UM NÚMERO POR ZERO!

Portanto, de um modo geral:

ao par de números naturais (a, b), com a múltiplo de b e $b \neq 0$, a operação *divisão* (inversa da multiplicação) faz corresponder um número natural q, denominado *quociente*.

Indicação: $(a, b) \longrightarrow a : b = q$ porque $q \times b = a$

a e b são os *têrmos* da divisão e se chamam respectivamente a, *dividendo*, e b, *divisor*

q é o *resultado* da operação e se denomina *quociente* (exato)

Exemplos:

$(12, 4) \longrightarrow 12 : 4 = 3$ porque $3 \times 4 = 12$

$(8, 8) \longrightarrow 8 : 8 = 1$ porque $1 \times 8 = 8$

Também: $\boxed{a : b = q} \iff \boxed{q \times b = a}$

ou

dividendo : divisor = quociente $\iff$ quociente × divisor = dividendo

relação que permite "tirar" a *prova* da operação divisão.

CURIOSIDADE

Não tente "dividir um número por zero" . . .

Se você experimentar usar uma máquina de calcular (manual ou elétrica) na tentativa de "dividir um número por zero", vai notar que a máquina *emperra*, como se estivesse "protestando" contra tal fato. Por isso, cuidado com os "estalos" e "choques", se tentar essa "*espécie*" de divisão . . ., pois:

Zero, como divisor, é o elemento **impossível!**

Casos particulares:

1.º) Se *o dividendo é zero*, então *o quociente é zero*. De fato:

$0 : 5 = 0$ porque $0 \times 5 = 0$

2.º) Se *o dividendo e o divisor são iguais* entre si, então *o quociente é igual a 1*. Com efeito:

$8 : 8 = 1$ porque $1 \times 8 = 8$

3.º) Se *o divisor é igual a 1*, então *o quociente é igual ao dividendo*.

Exemplo:

$9 : 1 = 9$ porque $9 \times 1 = 9$

ATENÇÃO: *O símbolo* 0 : 0 *não representa um número!*

É só pensar que, se o produto de dois números é 0 e um dêles 0, você não poderá determinar o valor do outro, isto é:

$0 \times ? = 0$

pois *qualquer número* tornaria *verdadeira* essa sentença.

LEMBRETE AMIGO

Você nunca supôs que o 0 (zero) fôsse tão "saliente" em Matemática, não é? Sempre pensou no 0 sòmente agindo "à esquerda" ou "à direita" do numeral de um número. Pois bem, *de agora em diante*, lembre-se de que:

0 é o elemento **neutro** na *adição* ($5+0=0+5=5$, ou seja, êle aqui é "bonzinho" por ser "indiferente" a operação)

0 é o elemento **"terrível"** na *multiplicação* ($5 \times 0 = 0$, aqui êle *anula* "tudo")

0 é o elemento **"impossível"**, como divisor, na *divisão* (5 : 0, NÃO!. . .)

20. *Tábua da divisão* (base 10)

Também aqui o sinal "?" indica que não existe o quociente.

elemento impossível

:	0	1	2	3	4	5	6	7	·	·
0	?	0	0	0	0	0	0	0	·	·
1	?	1	?	?	?	?	?	?	·	·
2	?	2	1	?	?	?	?	?	·	·
3	?	3	?	1	?	?	?	?	·	·
4	?	4	2	?	1	?	?	?	·	·
5	?	5	?	?	?	1	?	?	·	·
6	?	6	3	2	?	?	1	?	·	·
7	?	7	?	?	?	?	?	1	·	·
8	?	8	4	?	2	?	?	?	1	·
·	·									
·	·									
·	·									

Que você observa, agora, com relação à operação *divisão?* Por intermédio de contra-exemplos, pode-se verificar que a *divisão* (exata), como a subtração:

1.º) ***não possui** a propriedade do **fechamento;*** por quê?
contra-exemplo: $8 : 5 = ?$

2.º) ***não possui** a propriedade **comutativa;*** por quê? responda você mesmo.

3.º) ***não possui elemento neutro;*** por quê?
contra-exemplo: $4 : 1 = 4$ e $1 : 4 = ?$

4.º) ***não possui** a propriedade **associativa.***

Que significaria, por exemplo:

$$18 : 6 : 3 \ ?$$

Poderia ser:

$$(18 : 6) : 3 \text{ ou } 18 : (6 : 3)$$

usando os parênteses para "forçar" a propriedade associativa. Mas você já concluiu que estas duas expressões têm resultados diferentes (a primeira vale 1 e a segunda, 9) e, portanto:

$$(18 : 6) : 3 = 18 : (6 : 3) \text{ é FALSO!}$$

isto é, não vale a propriedade *associativa* para a *divisão*, a exemplo do que já fôra visto para a *subtração.*

Aplicação: Colocar parênteses em: $125 : 25 : 5$, de modo que o resultado da expressão seja igual a 1.

Ora, você tem duas possibilidades para colocar parênteses:

$$(125 : 25) : 5 \text{ e } 125 : (25 : 5)$$

A primeira delas tem valor 1 (calcule!) e a segunda, 25.

Logo, a resposta é: $(125 : 25) : 5$.

21. *Aplicações usando equivalência (novas para você!)*

Lembrando a *equivalência* que relaciona a *multiplicação* com a sua operação *inversa*, a *divisão*, como no exemplo:

$$4 \times 5 = 20 \begin{cases} 4 = 20 : 5 \\ 5 = 20 : 4 \end{cases} \text{ e, portanto: } \square \times \triangle = \bigstar \iff \begin{cases} \square = \bigstar : \triangle \\ \triangle = \bigstar : \square \end{cases}$$

podemos fazer as seguintes *aplicações*, bem importantes pelo uso que terão:

1.ª) Calcular o valor de $\square$ na divisão: $\square : 3 = 12$
Temos: $\square : 3 = 12 \iff \square = 12 \times 3$
ou $\square = 36$

2.ª) Determinar o valor de y tal que: $5 \times y = 30$
Temos: $5 \times y = 30 \iff y = 30 : 5$
ou $y = 6$

3.ª) O dividendo é 8 e o quociente 4. Calcular o divisor.
Chamando o divisor de d, vem:
$8 : d = 4 \iff 4 \times d = 8 \iff d = 8 : 4$ ou $d = 2$

4.ª) Determinar o valor de x tal que: $x \times a = b$
Temos: $x \times a = b \iff x = b : a$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 40

1. Na igualdade: $24 : 3 = 8$
   1.º) Qual a *operação* indicada?
   2.º) Qual o nome do *resultado?*
   3.º) Qual a *multiplicação* correspondente?

2. Escrever a *divisão* que dá o *quociente* dos seguintes números e as *multiplicações* correspondentes:

   1.º) 42 e 6; 2.º) 9 e 9; 3.º) 0 e 5; 4.º) a e b ($b \neq 0$, a múltiplo de b)

3. Da igualdade: $12 = 4 \times 3$, deduzir duas *divisões* (use as equivalências!).

4. Tornar verdadeiras as seguintes sentenças:

   1.ª) $36 : 36 = \dots$ 3.ª) $0 \ . \ 18 = \dots$
   2.ª) $12 : \dots = 12$ 4.ª) $\dots : 1 = 10$

5. Assinalar quais das seguintes operações são *impossíveis* (no conjunto N):

   1.ª) $8 : 8$ 3.ª) $0 : 9$ 5.ª) $5 : 3$ 7.ª) 0×0
   2.ª) $3 - 5$ 4.ª) $9 : 0$ 6.ª) $3 : 5$ 8.ª) $0 : 0$

6. Completar as seguintes igualdades, tornando-as verdadeiras:

   1.ª) $16 \times \dots = 256$ 2.ª) $\dots \times 20.000 = 40.000$

7. Idem, com as *equivalências:*

   1.ª) $\square \times 4 = 20 \iff \square = 20 : \dots$ 2.ª) $\square : 15 = 4 \iff \square = 15 \times \dots$
   3.ª) $42 : a = 2 \iff 42 = \dots \times 2 \iff a = 42 : \dots$ ou $a = \dots$

8. Idem: $m \times n = p \iff \begin{cases} p : \dots = n \\ p : n = \dots \end{cases}$

9. Existe algum caso particular que permite trocar a *ordem* dos *têrmos* de uma divisão sem que o *quociente* se altere?

10. "Pontuar" com parênteses a expressão: $8 : 8 : 8$, de modo que seu *valor* seja igual a 8.

11. Idem, a fim de tornar verdadeiras as seguintes sentenças:

    1.ª) $24 : 8 : 4 = 12$
    2.ª) $36 : 9 : 6 : 3 = 2$

12. Para que caso a sentença: $(a : b) : c = a : (b : c)$, é verdadeira?

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 41

1. O conjunto N, dos números naturais, *é fechado* em relação à *multiplicação*, porque o produto de dois números naturais quaisquer é *sempre um número natural.*
   Diga você, agora, porque o conjunto N *não é fechado* em relação à *divisão.*

2. Considerando como *Conjunto-Universo* o *conjunto dos números pares:*

   $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$

   responder, justificando: o conjunto dos números pares *é fechado* em relação a que operações (adição, subtração, multiplicação, divisão)?
   (Não esquecer que a *soma* de dois números *pares* é sempre um número *par* ...)

3. Idem, supondo agora como *Conjunto-Universo* o conjunto dos números *ímpares:*

   $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$

   (Lembrar que a *soma* de dois números *ímpares* é um número par ...)

4. Como Exercício-Recordação, tornar *verdadeira* cada uma das seguintes sentenças:

   1.ª) $\dots + 6 = 8 + 4$ 6.ª) $8 - 2 > \dots : 1$
   2.ª) $3 \times \dots \neq 12 + 3$ 7.ª) $\dots : 12 = 1$
   3.ª) $8 : \dots = 1 + 3$ 8.ª) $\dots : 12 = 0$
   4.ª) $15 > 4 \times \dots$ 9.ª) $\dots : 12 \neq 0$
   5.ª) $12 : 4 < 3 + \dots$ 10.ª) $\dots \times 4 = 0$

Associação de Multiplicações, Divisões, Adições e Subtrações

22. *Divisão de um produto por um número, quando um dos fatôres é múltiplo dêsse número*

Neste caso, basta dividir êsse fator pelo número e multiplicar o quociente obtido pelos outros fatôres.

Exemplo:

$$(7 \times 12 \times 5) : 3 = 7 \times 4 \times 5$$

Conseqüência: Se um número é *múltiplo de um outro* que, por sua vez, é *múltiplo de outros*, então o primeiro número será *múltiplo dos últimos.*

Exemplo:

48 é múltiplo de 12 que, por sua vez, é múltiplo de 3 e 4; então, 48 é múltiplo de 3 e 4.

23. *Propriedade distributiva da divisão em relação à adição e à subtração*

Essa propriedade só vale num sentido! (à direita).

Exemplo:

$(15 + 18) : 3 = 15 : 3 + 18 : 3$ **é verdadeiro**

(Calcule o valor de cada uma das expressões; ambas valem 11.)

A distributividade da divisão em relação à *adição* e à *subtração* não se faz nos *dois sentidos*, como foi visto na multiplicação, porque a divisão é *não-comutativa*. Assim, por exemplo:

$$12 : (4 + 2) = 12 : 4 + 12 : 2 \text{ é } \textbf{falso!}$$

(A primeira expressão vale 2 e a segunda, 9.)

24. *Expressões numéricas envolvendo adições, subtrações, multiplicações e divisões*

O cálculo do valor (ou do numeral mais simples) dessas expressões, caso *não contenham* sinais de associação, é feito na seguinte *ordem:* 1.º) multiplicações e divisões; 2.º) adições e subtrações.

Havendo *sinais de associação,* você já sabe como deve proceder.

Exemplos:

1.º) $6 + 12 : 3$ (*não contém* parênteses!)

Temos: $6 + 12 : 3 = 6 + 4 = 10$

2.º) $(6 + 12) : 3$

Temos: $(6 + 12) : 3 = 18 : 3 = 6$

3.º) $46 - \{54 - 3 \times [(7 + 6 : 2) - (4 \times 3 - 5)]\}$

Temos:

$$46 - \{54 - 3\times[(7+\underbrace{6 : 2}_{3}) - (\underbrace{4\times3}_{12} - 5)]\} = 46 - \{54 - 3\times[(7+3) - (12 - 5)]\} =$$

$$= 46 - \{54 - 3\times[10 - 7]\} = 46 - \{54 - 3\times3\} = 46 - \{54 - 9\} = 46 - 45 = 1$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 42

1. Qual o resultado de:

1.º) $(8 \times 5 \times 7) : 4$? 2.º) $(3 \times 20 \times 25) : 5$? 3.º) $(a \times b \times c \times d) : d$?

2. Você sabe que 36 é múltiplo de 18 e que 18 é múltiplo de 3 e 6. Que pode concluir acêrca de 36 com relação a 3 e a 6?

3. Aplicar a propriedade *distributiva* em:

1.º) $(12 + 8) : 4$ 2.º) $(18 - 12) : 3$

4. Idem, em:

1.º) $(14 + 8 - 6) : 2$ 2.º) $(m + n) : p$ 3.º) $(m - n) : q$

(supondo m e n múltiplos de p e q, com $p \neq 0$ e $q \neq 0$)

5. É possível aplicar-se a propriedade distributiva em: $(12 + 8) : 3$? Por quê?

6. Idem, em: $24 : (8 + 4)$? Por quê?

7. Assinalar, em cada exercício, as respostas corretas:

I) Se $a : b = 1$, então
1.º) $a \neq 1$ e $b = 1$
2.º) $a = 2$ e $b \neq 2$
3.º) $a = b$
4.º) $a \neq b$
5.º) nenhuma das respostas anteriores é correta

II) Se $a . b = 12$, então
1.º) $a = 10$ e $b = 2$
2.º) $a = 4$ e $b = 3$
3.º) $a \neq 3$ e $b = 4$
4.º) $a = 12$ e $b = 1$
5.º) nenhuma das respostas anteriores é correta

8. Calcular o valor das seguintes expressões numéricas:

1.ª) $8 + 6 : 2$ 2.ª) $(8 + 6) : 2$ 3.ª) $8 : 2 + 6$
4.ª) $(1 + 3 \times 5) \times (12 - 6 : 2)$
5.ª) $\{130 - 2 \times [24 - 6 \times (10 - 2 \times 3)] : (15 \times 2 - 3)\} - 130$
6.ª) $[(18 + 6) : (4 \times 2) + 5 \times 3] : 6 + (125 \times 5 - 11 \times 5) : 10$
7.ª) $[3 \times (7 - 2) - (4 \times 2) : (14 - 10)] \times 3 + (2 + 15 \times 2) : 8$
8.ª) $(3 + 4 \times 5) . (20 - 32 : 4) - 3 \times [17 - (6 + 2 \times 3) : 4] : (9 - 4 \times 2)$
9.ª) $\{16 + 8 \times [28 - (15 - 3) : (5 + 1)] - 24 : 3\} : [14 - 3 \times (5 - 3)]$
10.ª) $\{240 - 3 \times [24 - (2 + 5) . (9 - 6)] - 180 : 9\} . (2 + 3 \times 4)$
11.ª) $[18 : 6 + 2 \times (7 + 14) : 7] . [6 + 4 \times 2 - 24 : 4] + 15 : 3$
12.ª) $200 \times (15 + 3 \times 9) - 40 : [15 \times (6 \times 2 - 10) - 80 : (12 - 4 \times 2)]$

EXERCÍCIOS COM OPERAÇÕES INVERSAS — GRUPO 43

Usando operações inversas, substituir $\square$ (ou qualquer outro numeral) por um valor que torne verdadeiras as seguintes sentenças (as quatro primeiras são "modelos"):

1.ª) $\square + 8 = 13$ $\square$?
$\square = 13 - 8$ (pela operação inversa *subtração*)
ou $\square = 5$

2.ª) $\triangle - 5 = 8$ $\triangle$?
$\triangle = 8 + 5$ (pela definição de *diferença*)
ou $\triangle = 13$

3.ª) $10 \times \square = 40$ $\square$?
$\square = 40 : 10$ (pela operação inversa *divisão*)
ou $\square = 4$

4.ª) $\triangle : 8 = 7$ $\triangle$?
$\triangle = 7 \times 8$ (pela definição de *quociente*)
ou $\triangle = 56$

5.ª) $(\star - 5) \times 4 = 20$ $\quad \star$? (★ será determinado em duas passagens)

$(\star - 5) = 20 : 4$ (pela operação inversa *divisão*)

ou $\star - 5 = 5$

$\star = 5 + 5$ (pela definição de *diferença*)

ou $\star = 10$

6.ª) $x + 6 = 9$ $\quad x$? 7.ª) $\square - 8 = 8$ $\quad \square$?

8.ª) $9 + \triangle = 15$ $\quad \triangle$? 9.ª) $7 \times \nabla = 56$ $\quad \nabla$?

10.ª) $\star : 6 = 42$ $\quad \star$? 11.ª) $\triangle \times 4 = 20$ $\quad \triangle$?

12.ª) $(\square - 6) \times 3 = 12$ $\quad \square$? 13.ª) $(\square \times 3) + 10 = 25$ $\quad \square$?

14.ª) $(x : 5) - 8 = 10$ $\quad x$? 15.ª) $(x + 8) \times 6 = 72$ $\quad x$?

16.ª) $(\triangle - 5) : 4 = 7$ $\quad \triangle$? 17.ª) $(30 : \triangle) + 2 = 4$ $\quad \triangle$?

18.ª) Expressar as seguintes proposições em *sentenças matemáticas* e determinar o valor *desconhecido:*

a) Qual o número que multiplicado por 5 resulta 55?

b) Qual o número cujo dôbro é 128?

c) Qual o número ao qual, adicionando 15, e subtraindo 8 do resultado, obtém-se 50?

d) Qual o número que, multiplicado por 7 e depois dividindo por 7 o resultado, obtém-se 10?

e) Qual o número ao qual subtraindo 3, multiplicando por 8 o resultado e dividindo por 5 êsse resultado, obtém-se 24?

Divisão aproximada

25. *Quociente aproximado. Resto da divisão aproximada*

Você já estudou que a operação *divisão* — inversa da multiplicação — só era *possível* no caso de o dividendo ser *múltiplo* do divisor.

Contudo, pode-se estender a noção de divisão, estudando as *divisões por aproximação* que permitem interpretar problemas da vida prática, tais como:

Você quer repartir 53 figurinhas por 6 colegas. Quantas receberá cada um?

Ora, *não é possível* encontrar um número inteiro que, multiplicado por 6, dê 53, pois:

$8 \times 6 = 48$ é *menor* que 53
$9 \times 6 = 54$ é *maior* que 53

Então, se você der 8 figurinhas a cada colega, *sobrarão* 5 ($53 - 48 = 5$) e, dando 9, *faltará* 1 ($54 - 53 = 1$). Nestas condições, só cabe resolver o problema por *aproximação*, uma vez que o "quociente" procurado não é nem o número inteiro 8 nem o número inteiro 9.

O número 8, que é o maior número que multiplicado por 6 não ultrapassa 53, é denominado quociente aproximado por falta, a menos de uma unidade, porque o *êrro* que se comete, quando se toma o número 8 como quociente, é *menor que uma* unidade.

Da mesma forma, o 9 é o quociente aproximado por excesso, a menos de uma unidade.

Para as nossas aplicações, quando se fizer necessária a *divisão aproximada*, escolheremos o *quociente aproximado por falta*. Daí a *definição:*

> **Divisão aproximada (por falta) de um número inteiro por outro (diferente de zero), dados numa certa ordem, é a operação que tem por fim determinar o maior número que, multiplicado pelo segundo, dê um resultado menor que o primeiro.**

Os números dados continuam recebendo os nomes de *dividend*[o] (o primeiro) e *divisor* (o segundo).

Chama-se resto de uma divisão aproximada (por falta) a *diferença* entre o dividendo e o produto do divisor pelo quociente aproximado. A indicação de uma *divisão aproximada* é, geralmente, feita com a "chave de divisão":

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \cline{2-2} \text{resto} & \text{quociente (aprox.)} \end{array}$$

Para o exemplo estudado, temos:

$$\begin{array}{r|l} 53 & 6 \\ \cline{2-2} 5 & 8 \end{array} \qquad \text{onde: } \boxed{53 = 8 \times 6 + 5}$$

e de um modo geral:

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}}$$

que é a *relação fundamental* entre o dividendo, o quociente, o divisor e o resto, para as divisões aproximadas. Pode-se pensar, naturalmente, a *divisão* (exata) como aquela de resto *nulo*, pois para ela vale a relação:

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor}}$$

O importante é você observar que, para as *divisões aproximadas* o resto é *sempre menor que o divisor*. Indicando-se o dividendo, o divisor, o quociente e o resto, respectivamente, pelas letras D, d, q, r, temos:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \qquad \boxed{D = q \times d + r} \qquad \text{onde } r < d$$

5.ª) $(\star - 5) \times 4 = 20$ $\star$? ($\star$ será determinado em duas passagens)

$(\star - 5) = 20 : 4$ (pela operação inversa *divisão*)

ou $\star - 5 = 5$

$\star = 5 + 5$ (pela definição de *diferença*)

ou $\star = 10$

6.ª) $x + 6 = 9$ x ? 7.ª) $\square - 8 = 8$ $\square$?

8.ª) $9 + \triangle = 15$ $\triangle$? 9.ª) $7 \times \nabla = 56$ ∇ ?

10.ª) $\star : 6 = 42$ $\star$? 11.ª) $\triangle \times 4 = 20$ $\triangle$?

12.ª) $(\square - 6) \times 3 = 12$ $\square$? 13.ª) $(\square \times 3) + 10 = 25$ $\square$?

14.ª) $(x : 5) - 8 = 10$ x ? 15.ª) $(x + 8) \times 6 = 72$ x ?

16.ª) $(\triangle - 5) : 4 = 7$ $\triangle$? 17.ª) $(30 : \triangle) + 2 = 4$ $\triangle$?

18.ª) Expressar as seguintes proposições em *sentenças matemáticas* e determinar o valor *desconhecido:*

a) Qual o número que multiplicado por 5 resulta 55?
b) Qual o número cujo dôbro é 128?
c) Qual o número ao qual, adicionando 15, e subtraindo 8 do resultado, obtém-se 50?
d) Qual o número que, multiplicado por 7 e depois dividindo por 7 o resultado, obtém-se 10?
e) Qual o número ao qual subtraindo 3, multiplicando por 8 o resultado e dividindo por 5 êsse resultado, obtém-se 24?

Divisão aproximada

25. *Quociente aproximado. Resto da divisão aproximada*

Você já estudou que a operação *divisão* — inversa da multiplicação — só era *possível* no caso de o dividendo ser *múltiplo* do divisor.

Contudo, pode-se estender a noção de divisão, estudando as *divisões por aproximação* que permitem interpretar problemas da vida prática, tais como:

Você quer repartir 53 figurinhas por 6 colegas. Quantas receberá cada um?

Ora, *não é possível* encontrar um número inteiro que, multiplicado por 6, dê 53, pois:

$8 \times 6 = 48$ é *menor* que 53
$9 \times 6 = 54$ é *maior* que 53

Então, se você der 8 figurinhas a cada colega, *sobrarão* 5 $(53 - 48 = 5)$ e, dando 9, *faltará* 1 $(54 - 53 = 1)$. Nestas condições, só cabe resolver o problema por *aproximação*, uma vez que o "quociente" procurado não é nem o número inteiro 8 nem o número inteiro 9.

O número 8, que é o maior número que multiplicado por 6 não ultrapassa 53, é denominado quociente aproximado por falta, a menos de uma unidade, porque o *êrro* que se comete, quando se toma o número 8 como quociente, é *menor que uma* unidade.

Da mesma forma, o 9 é o quociente aproximado por excesso, a menos de uma unidade.

Para as nossas aplicações, quando se fizer necessária a *divisão aproximada*, escolheremos o *quociente aproximado por falta*. Daí a *definição:*

> **Divisão aproximada (por falta) de um número inteiro por outro (diferente de zero), dados numa certa ordem, é a operação que tem por fim determinar o maior número que, multiplicado pelo segundo, dê um resultado menor que o primeiro.**

Os números dados continuam recebendo os nomes de *dividendo* (o primeiro) e *divisor* (o segundo).

Chama-se resto de uma divisão aproximada (por falta) a *diferença* entre o dividendo e o produto do divisor pelo quociente aproximado. A indicação de uma *divisão aproximada* é, geralmente, feita com a "chave de divisão":

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \cline{2-2} \text{resto} & \text{quociente (aprox.)} \end{array}$$

Para o exemplo estudado, temos:

$$\begin{array}{r|l} 53 & 6 \\ \cline{2-2} 5 & 8 \end{array} \qquad \text{onde: } \boxed{53 = 8 \times 6 + 5}$$

e de um modo geral:

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}}$$

que é a *relação fundamental* entre o dividendo, o quociente, o divisor e o resto, para as divisões aproximadas. Pode-se pensar, naturalmente, a *divisão* (exata) como aquela de resto *nulo*, pois para ela vale a relação:

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor}}$$

O importante é você observar que, para as *divisões aproximadas* o resto é *sempre menor que o divisor*. Indicando-se o dividendo, o divisor, o quociente e o resto, respectivamente, pelas letras D, d, q, r, temos:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \qquad \boxed{D = q \times d + r} \qquad \text{onde } r < d$$

2. Alguns problemas de aplicação; "estruturas" diversas

1.º) *Comprei 6 bolinhas de pingue-pongue por NCr$ 4,80. Quanto pagarei por 10 dessas bolinhas?*

É dado um "plural" (preço de 6 bolinhas) e *pede-se* um outro "plural" (preço de 10 bolinhas).

Então, se $\square$ representa o preço de uma bolinha de pingue-pongue, a *sentença matemática* correspondente a essa parte do problema é:

$6 \times \square = 4{,}80$ (plural *dado*)

e, portanto, $\square = 4{,}80 : 6$

ou $\square = 0{,}80$ (singular)

O preço de 10 bolinhas (plural *pedido*) será dado por:

$10 \times \square = 10 \times 0{,}80$

ou $10 \times \square = 8{,}00$

Resposta: Pagarei NCr$ 8,00 por 10 bolinhas de pingue-pongue.

2.º) *Somando-se 3 a um certo número e multiplicando o resultado por 5, encontra-se 90. Qual é êsse número?*

Não se trata de "adivinhação" e sim de um *problema*, que deve ser resolvido fàcilmente por quem já sabe trabalhar com as *operações inversas!*

De fato, se $\square$ representa o número procurado, os seguintes "passos" serão dados para formar a *sentença matemática* correspondente ao problema:

I $\square+3$ (somando-se 3)

II $(\square+3)\times 5$ (multiplicando-se o resultado por 5)

III $(\square+3)\times 5 = 90$ (sentença matemática)

Partindo da *sentença matemática*, você já sabe determinar o valor de $\square$:

$(\square+3)\times 5 = 90$ $\square$?

Temos: $\square+3 = 90 : 5$ (pela operação inversa *divisão*)

ou $\square+3 = 18$

$\square = 18 - 3$ (pela operação inversa *subtração*)

ou $\square = 15$

Resposta: O número procurado é 15.

Prova: Somando 3 a 15, você obtém 18; multiplicando-o por 5, obtém 90.

3.º) *O seu ioiô custou NCr$ 0,90 mais do que o meu. Ambos custaram NCr$ 3,90. Qual o preço de cada um?*

Agora, temos: se $\square$ representa o preço do meu ioiô

$\square + 90$ representará o preço do seu

A "estrutura" do problema será melhor "vista" através do desenho:

e a sentença matemática correspondente será:

$\square+(\square+0{,}90) = 3{,}90$

ou $(\square+\square)+0{,}90 = 3{,}90$ (pela propriedade *associativa* da adição: p.a.a.)

ou $2\times\square+0{,}90 = 3{,}90$

$2\times\square = 3{,}90 - 0{,}90$ (pela operação inversa *subtração*)

ou $2\times\square = 3{,}00$

$\square = 3{,}00 : 2$ (pela operação inversa *divisão*)

ou $\square = 1{,}50$

Logo:

Resposta:

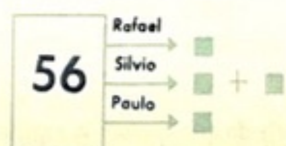
$\square$: NCr$ 1,50 (preço do meu ioiô)

$\square + 0{,}90$: NCr$ 2,40 (preço do seu ioiô)

NCr$ 3,90 (prova)

4.º) *Repartir 56 figurinhas entre Rafael, Sílvio e Paulo, de modo que Rafael e Paulo recebam quantias iguais e Sílvio o dôbro do que recebe cada um dos outros.*

A *estrutura* do problema tem o seguinte "esquema":



Sentença matemática:

$\square+(\square+\square)+\square = 56$

ou $\square+\square+\square+\square = 56$

ou $4\times\square = 56$

$\square = 56 : 4$

ou $\square = 14$

Resposta:

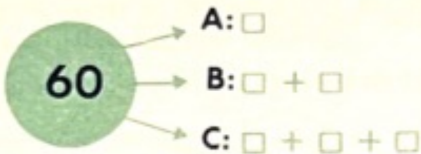
Rafael ($\square$) : 14

Sílvio ($\square+\square$) : 28

Paulo ($\square$) : 14

56 (prova!)

Agora uma NOVIDADE: Você está convidado a formular (ou seja, *imaginar!*) um *problema* com a seguinte *estrutura:*



NOTA: Os 60 elementos do conjunto inicial (representado em "desenho" por um círculo ou qualquer outra figura geométrica) podem representar o que você quiser! Depois de formada a *sentença matemática* correspondente, você calculará as partes recebidas por A (seria o Antônio?), B e C.

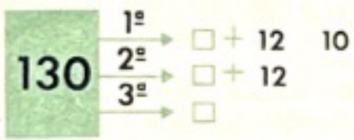
5.º) *Distribuir NCr$ 130,00 entre três pessoas, de modo que a primeira receba NCr$ 10,00 a mais que a segunda e esta NCr$ 12,00 a mais que a terceira.*

Vamos "esquematizar" a *estrutura* do problema vindo do "fim":

$\square$: representa o que recebe a terceira; portanto,
$\square+12$: representa o que receberá a segunda, e
$\square+12+10$: representa o que receberá a primeira. Logo:

Sentença matemática:

$$\square+(\square+12)+(\square+12+10) = 130$$
$$(\square+\square+\square)+(12+12+10) = 130$$
$$3\times\square+34 = 130$$
$$3\times\square = 130-34$$
$$\text{ou}\quad 3\times\square = 96$$
$$\square = 96:3$$
$$\square = 32$$

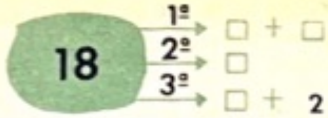


Resposta:

1.º) $(\square+12+10)$	: NCr$	54,00
2.º) $(\square+12)$	: NCr$	44,00
3.º) $(\square)$	: NCr$	32,00
	Prova: NCr$	130,00

6.º) *Um pacote de 18 balas vai ser distribuído entre três meninas. A primeira deve receber o dôbro do que receber a segunda e a terceira deve receber* duas a mais *do que receber a segunda.*

Observe atentamente que vamos "partir" da segunda, que receberá $\square$; procure destacar bem, nessa *estrutura*, o que é "receber o dôbro" $(\square+\square)$ e o que é "receber duas a mais" $(\square+2)$. Logo:



Resposta:

1.º) $(\square+\square)$: 8
2.º) $(\square)$: 4
3.º) $(\square+2)$: 6
18 (prova!)

Sentença matemática:

$$(\square+\square)+\square+(\square+2) = 18$$
ou
$$(\square+\square+\square+\square)+2 = 18$$
$$\text{ou}\quad 4\times\square+2 = 18$$
$$4\times\square = 18-2$$
$$4\times\square = 16$$
$$\square = 16:4$$
$$\square = 4$$

7.º) O esquema, a seguir, representa a *estrutura* de uma série enorme de problemas, onde $\square$ está representando qualquer elemento.

Assim, por exemplo, pode ser do seguinte problema:

190 cavalos devem ser distribuídos a quatro herdeiros, de modo que o segundo herdeiro receba 3 cavalos a mais do que deve receber o primeiro; o terceiro 4 a mais do que recebe o segundo e, finalmente, o quarto deve receber o triplo do que irá receber o primeiro. Quantos cavalos vai receber cada herdeiro?

Sentença matemática:

$$\square+(\square+3)+(\square+3+4)+(\square+\square+\square) = 190$$
$$\text{ou}\quad (\square+\square+\square+\square+\square+\square)+(3+3+4) = 190$$
$$\text{ou}\quad 6\times\square+10 = 190$$
$$6\times\square = 190-10$$
$$6\times\square = 180$$
$$\square = 180:6$$
$$\square = 30$$

Logo: o 1.º herdeiro receberá:			30
„ 2.º „ „	:	30+3	33
„ 3.º „ „	:	30+3+4	37
„ 4.º „ „	:	30+30+30 ..	90
			190 (prova!)

Redija você, agora, uma série de problemas com essa mesma *estrutura*.

8.º) Outra *estrutura:*

Sentença matemática:

$$\begin{aligned} (\square+6)+\square+(\square-2) &= 52\\ [(\square+\square+\square)+6]-2 &= 52\\ [3\times\square+6]-2 &= 52 \iff\\ \iff 3\times\square+6 &= 52+2\\ 3\times\square+6 &= 54 \iff\\ \iff 3\times\square &= 54-6\\ 3\times\square &= 48 \iff\\ \iff \square &= 48:3\\ \square &= 16 \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} \square+6: 16+6 = 22\\ \square: \dots\dots\dots = 16\\ \square-2: 16-2 = \underline{14} \end{cases}$$

52 (prova!)

9.º) *Distribuir 16 revistinhas entre Maria, Joana e Luíza, de maneira que Joana receba* 3 a mais *que Maria e Luíza,* 5 a menos *que Maria.*

Temos:

Sentença matemática:

$$\begin{aligned} \square+(\square+3)+(\square-5) &= 16 && \\ \text{(novidade!)}\quad [(\square+\square+\square)+3]-5 &= 16 && \text{(propriedade associativa)}\\ [3\times\square+3] &= 16+5 && \text{(definição de diferença)}\\ \text{ou}\quad 3\times\square+3 &= 21 && \\ 3\times\square &= 21-3 && \text{(pela operação inversa subtração)}\\ \text{ou}\quad 3\times\square &= 18 && \\ \square &= 18:3 && \text{(pela operação inversa divisão)}\\ \text{ou}\quad \square &= 6 && \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} \square: \dots\dots = 6\\ \square+3: 6+3 = 9\\ \square-5: 6-5 = \underline{1} \end{cases}$$

16 (prova!)

10.º) *Duas pessoas possuem juntas a importância de NCr\$ 16.875,00. A diferença entre essas importâncias é igual ao triplo da menor. Calcular a importância pertencente a cada pessoa.*

Ora, se $\square$ representa a importância *menor*, a outra importância (*maior*) será representada por: $\square+\square+\square$ *a mais*, ou seja, por $\square+\square+\square+\square$ e a *estrutura* do problema será:

Sentença matemática:

$$\begin{aligned} \square+(\square+\square+\square+\square) &= 16.875\\ \square+\square+\square+\square+\square &= 16.875\\ 5\times\square &= 16.875\\ \square &= 16.875:5\\ \square &= 3.375 \end{aligned}$$

A outra importância (maior) será: $\square+\square+\square+\square = 4\times 3.375 = 13.500$

Resposta: Uma das pessoas possui NCr\$ 3.375,00 e a outra NCr\$ 13.500,00

11.º) *Papai comprou-me 6 borrachas e 2 canetas esferográficas, tudo por NCr\$ 1,30. Quis experimentar-me na parte de Matemática e propôs-me o seguinte problema: calcule o preço de cada borracha (eram tôdas iguais) e de cada caneta (também iguais, porém de côres diferentes), sabendo que o preço de uma caneta é dez vêzes mais que o preço de uma borracha.*

Tome *cuidado*, pois agora vamos usar propriedades que ainda não participaram dos problemas anteriores. Assim, se:

$\square$ representa o preço de cada borracha

$10\times\square$ representará o preço de cada caneta esferográfica

Sentença matemática:

$$\begin{aligned} 6\times\square+2\times(10\times\square) &= 1{,}30 &&\\ \text{(novidade!)}\quad \text{ou } 6\times\square+(2\times10)\times\square &= 1{,}30 && \text{(pela propriedade associativa da multiplicação: p.a.m.)} \end{aligned}$$

ou

(novidade!)

$$6\times\square+20\times\square = 1{,}30$$

$$(6+20)\times\square = 1{,}30 \text{ [pela propriedade distributiva: p.d.m.(a)]}$$

$$26\times\square = 1{,}30$$

$$\square = 1{,}30 : 26$$

$$\square = 0{,}05$$

Logo: { preço de um lápis (□): NCr$ 0,05
preço de uma caneta (10×□) : NCr$ 0,50

Prova: { 6 borrachas: NCr$ 0,30
2 canetas: NCr$ 1,00
NCr$ 1,30

EXERCÍCIOS SÔBRE ESTRUTURAS — Grupo 45

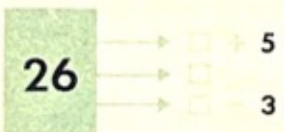
1. Determinar o valor de □ nas seguintes estruturas, depois de estabelecidas as respectivas *sentenças matemáticas:*

1.º)


2.º)


3.º)

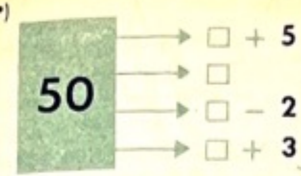

4.º)

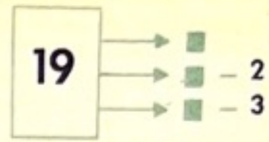

5.º)


6.º)


7.º)


8.º)

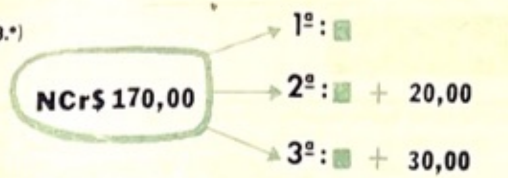

9.º)


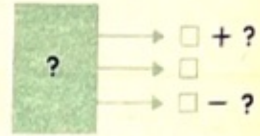
10.º)


2. *"Formular"*, pelo menos um problema, que tenha a seguinte estrutura:

1.º)


2.º)


3.º)


4.º)


PROBLEMAS PARA SEREM RESOLVIDOS — Grupo 46

1. Paguei por oito cadernetas iguais NCr$ 0,96. Quanto pagaria por nove cadernetas?
2. Se papai me der NCr$ 2,00 e eu juntar com o que tenho, poderei comprar um livro de NCr$ 5,50 e ainda ficar com NCr$ 1,50. Quanto possuo?
3. Eu e João, comprando chocolate, gastamos NCr$ 3,60. O dêle custou três vêzes mais que o meu. Qual o preço pago por chocolate?
4. Pensei em um certo número. A seguir acrescentei 8 a êsse número e multipliquei o resultado por 3, obtendo então 36. Em que número pensei?
5. Agora é sua vez de pensar em um número do qual subtraiu 5 e multiplicou o resultado por 4. A seguir, somou 10 ao que obteve, encontrando 130. O número que você pensou foi ......
6. A minha lancheira custou três vêzes mais que a sua (mesmo que "triplo"...). Por ambas se pagou NCr$ 4,00. Qual o preço de cada uma?
7. Distribuir 12 novelos de lã entre Cecília e Sílvia, de modo que Sílvia receba 2 novelos *a mais*. Quantos novelos recebeu cada uma?
8. Distribuir um pacote de 30 balas entre três meninos, de modo que o primeiro receba o dôbro do que vai receber o segundo e o terceiro receba o triplo do que vai receber o segundo.
9. O meu caderno custou NC$ 0,20 *a menos* que o seu. Os dois juntos custaram ..... NCr$ 1,00. Qual o preço de cada um?

10. Repartir 81 selos entre André, Nélson e Roberto, de modo que André receba o dôbro do que recebe Nélson e Roberto o triplo do que recebe André.

11. Distribuir 49 pregos em três caixinhas, de modo que a primeira tenha 4 pregos a mais que a segunda e esta 3 pregos a mais que a terceira.

12. Distribuir 16 bolinhas entre Paulo, Pedro e Joaquim, de modo que Pedro receba 3 a mais que Paulo e Joaquim 5 a menos que Paulo.

13. O Diretor de meu Ginásio vai distribuir um prêmio de NCr$ 14,50 aos alunos classificados nos dois primeiros lugares por média mais alta. A diferença entre as importâncias a serem distribuídas é de NCr$ 2,50. Quanto receberá cada aluno classificado?

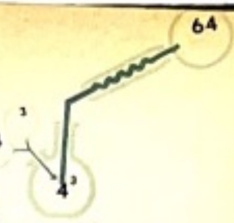
14. O total de livros que eu e meu colega possuímos é 88. A diferença entre o número dos livros dêle e os meus representa o dôbro do número de meus livros. Quantos livros possui cada um de nós?

15. Marina comprou para suas coleguinhas 5 réguas (iguais) e 3 estojos (iguais), tudo por NCr$ 3,20. Cada estôjo custou cinco vêzes mais que cada régua. Qual o preço pago por estôjo e por régua?

RESUMO

OPERAÇÃO	PROPRIEDADES ESTRUTURAIS OPERATÓRIAS				
	Fechamento	*Comutativa*	*Elemento Neutro*	*Associativa*	*Distributiva* (envolvendo *duas* operações)
Adição	SIM	SIM Ex.: $5+3=3+5$	SIM: 0 Ex.: $5+0=$ $=0+5=5$	SIM Ex.: $(5+3)+8=$ $=5+(3+8)$	—
Subtração	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	—
Multiplicação	SIM	SIM Ex.: $5\times3=3\times5$	SIM: 1 Ex.: $5\times1=$ $=1\times5=5$	SIM Ex.: $(5\times3)\times8=$ $=5\times(3\times8)$	SIM (nos *dois* sentidos) em relação à {adição, subtração} Exs.: $5\times(7+4)=$ $=5\times7+5\times4$; $5\times(7-4)=$ $=5\times7-5\times4$
Divisão	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	SIM (em *um* sentido) Exs.: $(12+8):4=$ $=12:4+8:4$; $(12-8):4=$ $=12:4-8:4$

POTENCIAÇÃO DE NUMEROS NATURAIS



26. *Operação: potenciação; resultado: potência*

Da mesma forma como foram estudadas *somas* de parcelas *tôdas iguais*, cabe agora estudar *produtos* que apresentem *todos* os *fatôres iguais*, como por exemplo:

$$3\times3\times3\times3$$

Tal produto pode ser indicado, abreviadamente, escrevendo-se o fator igual *uma só vez* e, a seguir, um pouco mais acima à direita, em tamanho menor, o *número de fatôres iguais:*

$$3^4$$

que se lê: "três elevado à quarta potência" ou "quarta potência de três". Logo:

$$3^4 = 3\times3\times3\times3$$

O fator que se repete (3, no exemplo) é chamado **base**; o número de fatôres iguais (4, no exemplo) é denominado **expoente**, que, também, indica o *grau* da potência. Outros exemplos:

$5^2 = 5\times5$ (lê-se: "cinco ao *quadrado*", pelo fato de a área de um quadrado ser dada pela *segunda potência* da medida de seu lado)

$4^3 = 4\times4\times4$ (lê-se: "quatro ao *cubo*", em virtude de o volume de um cubo ser dado pela *terceira potência* da medida de sua aresta)

$7^5 = 7\times7\times7\times7\times7$ (lê-se: "sete à quinta potência")

Observação: Quando o expoente é superior a 3, lê-se o *ordinal feminino* correspondente, acrescentando-se-lhe a palavra *potência*.

De um modo geral, se a e n são números naturais e $n \geqslant 2$, chama-se *potência* n – *ésima* de a ao produto de n fatôres iguais a a:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fatôres}}$$

A operação que *associa* a cada par ordenado de números naturais, não-nulos simultâneamente (sendo o primeiro *base* e o segundo *expoente*), um terceiro número chamado *potência* do primeiro, é denominada **potenciação.**

Indicação: $(a, n) \longrightarrow a^n$

base ↓ expoente ↓

Exemplo: $(4, 3) \longrightarrow 4^3 = 64$

Erros comuns:

1. Confundir *potenciação*, que é uma OPERAÇÃO com *potência*, que é um número (RESULTADO da operação).
2. Confundir o *dôbro* de um número com o seu *quadrado;* confundir o *triplo* de um número com o seu *cubo.*

Exemplos:

o *dôbro* de 4 é .... $2 \times 4 = 8$
o *quadrado* de 4 é .... $4^2 = 16$
o *triplo* de 4 é .... $3 \times 4 = 12$
o *cubo* de 4 é .... $4^3 = 64$

OBSERVAÇÕES: Você pode concluir, ràpidamente, que:

$$\left.\begin{array}{l} 0^5 = 0\times0\times0\times0\times0 = 0 \\ 0^3 = 0\times0\times0 = 0 \end{array}\right\} \text{as potências de 0 são iguais a 0.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^4 = 1\times1\times1\times1 = 1 \\ 1^{10} = \underbrace{1\times1\times\ldots\times1}_{10} = 1 \end{array}\right\} \text{as potências de 1 são iguais a 1.}$$

CASOS PARTICULARES: Pelo fato de o expoente ser maior, ou no mínimo igual a 2 (pois não há multiplicação com menos de dois fatôres), *convencionou-se* que:

$\boxed{5^1 = 5}$ isto é, potência indicada de "expoente" 1 é a *própria base.*

$\boxed{5^0 = 1}$ ou seja, potência indicada de "expoente" 0 é o *número 1.*

Mais tarde você verá a *razão principal* dessas convenções: é que com elas continuam válidas as *propriedades estruturais*, quando se opera com potências.

NOTA: À expressão: 0^0, não se atribui significado algum.

Potências úteis. Observe as potências de 10:

$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1.000$
. .
$10^6 = 1.000.000$

isto é, as potências de 10 são iguais a 1, *seguido de tantos zeros quantas são as unidades do expoente.*

As potências indicadas de 10 são cômodas para exprimirem grandes números. Por exemplo, o meridiano terrestre, que mede cêrca de 40.000km, pode ser expresso assim:

$$40.000\text{km} = 4\times10^4\text{km}$$

ou

$$4\times10^7\text{m ou } 4\times10^9\text{cm}$$

A distância da Terra ao Sol, cêrca de 150 milhões de quilômetros, pode ser escrita:

$$15\times10^7\text{km}$$

A velocidade da luz, cêrca de 300.000 quilômetros por segundo, pode ser expressa:

$$3\times10^5\text{km/s}$$

27. *Tábua operatória*

As *tábuas da potenciação* aparecem, freqüentemente, em tabelas de *quadrados, cubos,* etc..., razão por que não faremos uma tábua geral.

Faremos, como exercício, a tábua de *quadrados* de 1 até 10 e você fará a dos *cubos*, por serem as mais usuais.

números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Na página 279 figura uma *tábua* mais completa.

Por intermédio de contra-exemplos, pode-se verificar que para a *potenciação* (assim como já foi visto para a subtração e a divisão) *não valem* as *propriedades estruturais* estudadas para a adição e multiplicação.

Dêsse modo, a *potenciação:*

1.º) ***não possui a propriedade comutativa,*** pois: $2^3 = 3^2$ é FALSA! $(8 = 9?)$

2.º) ***não possui elemento neutro,*** pois:
$5^1 = 5$, porém $1^5 = 1$ e, portanto: $5^1 \neq 1^5$

3.º) *não possui a propriedade associativa,* pois:

$$(2^3)^2 = 2^{(3^2)} \text{ é FALSA! } (64 = 512?)$$

4.º) *não possui a propriedade distributiva em relação à adição e à subtração:*

De fato: $(4+3)^2 = 4^2 + 3^2$ é FALSA! $(49 = 25?)$

$(4-3)^2 = 4^2 - 3^2$ é FALSA! $(1 = 7?)$

Associação da Potenciação com Multiplicações e Divisões

28. *Propriedade distributiva em relação à multiplicação e à divisão*

De fato:

$$(4\times3)^2 = 4^2\times3^2$$
$$(8:4)^2 = 8^2:4^2$$

Justifiquemos a primeira delas:

$$\begin{aligned}(4\times3)^2 &= (4\times3)\times(4\times3) && \text{(definição de segunda potência)}\\ &= (4\times4)\times(3\times3) && \text{(p.a.m.)}\\ &= 4^2\times3^2 && \text{(definição de potência)}\end{aligned}$$

29. *Regras das operações sôbre potências indicadas de mesma base*

1.º) O *produto* de potências indicadas de mesma base é uma potência de mesma base que tem por expoente a *soma* dos expoentes. Assim, por exemplo:

$$4^3\times4^2 = 4^{3+2} = 4^5$$

pois: $4^3\times4^2 = \underbrace{4\times4\times4}_{3\text{ fat.}}\times\underbrace{4\times4}_{2\text{ fat.}} = 4^5$

De um modo geral: $\boxed{a^m\times a^n = a^{m+n}}$

2.º) O *quociente* de duas potências indicadas de mesma base (com o expoente da primeira maior ou igual ao expoente da segunda) é uma potência indicada de mesma base que tem por expoente a *diferença* dos expoentes.

Exemplo:

$$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$$

pois: $2^2\times2^3 = 2^5$

De um modo geral: $\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}\ (m \geqslant n)}$

E, se as potências indicadas têm o mesmo expoente:

$$3^2 : 3^2 = 3^{2-2} = 3^0 = 1$$

Observe, agora, que a convenção feita de que: $3^0 = 1$, satisfaz ao resultado da divisão das potências indicadas efetuadas:

$$3^2 : 3^2 = 9 : 9 = 1$$

3.º) A *potência indicada* de uma potência indicada, de certa base, é igual a uma potência indicada com essa mesma base e cujo expoente é o *produto* dos expoentes dados. Por exemplo:

$$(2^3)^2 = 2^{3\times2} = 2^6$$

pois: $(2^3)^2 = (2^3)\times(2^3)$ (definição de segunda potência)

$(2^3)^2 = 2^6$ (1.ª Regra)

De um modo geral: $[(a)^n]^m = a^{n\cdot m}$

30. *Expressões numéricas contendo também potências indicadas*

No cálculo dessas expressões efetuam-se em *primeiro lugar* as *potenciações* e, a seguir, obedece-se à ordem já estabelecida para as outras operações.

Exemplos:

Calcular o valor das seguintes expressões:

1.º) $4+3^2\times5$

Temos: $4+3^2\times5 =$
$= 4+9\times5 =$
$= 4+45 = 49$

2.º) $[5+[4^3:(3^2-1)+1^5\times3]]:(6-2)^2$

Temos: $[5+[64:(9-1)+1\times3]]:4^2$
$= [5+[64:8+1\times3]]:16 =$
$= [5+[8+3]]:16 =$
$= [5+11]:16 =$
$= 16:16 = 1$

1. Na igualdade $2^3 = 8$:
   1.º) Qual a *operação* indicada?
   2.º) Qual o nome do *resultado*?

2. Escrever, sob forma de produto (fatôres iguais), as seguintes potências:
   1.ª) 2^3 2.ª) 8^2 3.ª) 1^5 4.ª) 10^4 5.ª) a^3 6.ª) a^n

3. Escrever, sob forma de potências indicadas, os seguintes produtos:
   1.º) $5 \times 5 \times 5$ 2.º) $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$ 3.º) 1×1 4.º) 8 5.º) $a \times a$ 6.º) 1
   7.º) $3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$ 8.º) $8 \times 8 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 11 \times 11 \times 11$

4. Calcular o valor das potências indicadas:
   1^{10}; 2^3; 3^2; 4^4; 6^2; 7^1; 8^0; 9^2; 10^6

5. Escrever as potências sucessivas de 10:
   $10^2 = \ldots$ $10^3 = \ldots$ $10^4 = \ldots$ $10^5 = \ldots$
   Como seria $10^n = \ldots\ldots$?

6. Escrever o número 3.000.000.000 com auxílio de uma potência indicada de 10.

7. Aplicar a *propriedade distributiva* em:
   1.º) $(2 \times 5)^3$ 2.º) $(3 \times 7 \times 8)^4$ 3.º) $(2 \times 5 \times 7 \times 11)^2$

8. Calcular: 5^2, 3^2, $(5 + 3)^2$ e $(5 - 3)^2$, e verifique que o *quadrado da soma* ou da *diferença* dos números 5 e 3 *não é igual* à soma ou à diferença dos *quadrados dêsses números*.

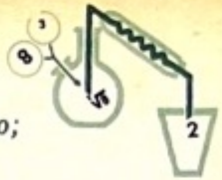
9. Efetuar: 1.º) $2^3 \times 2^2$ 2.º) $3 \times 3^2 \times 3^5$ 3.º) $6^3 \times 6 \times 6^2 \times 6^5$ 4.º) $a^p \times a^3$
   5.º) $x^m \times x$ 6.º) $b^n \times b^m \times b^p$ 7.º) $8^3 : 8^2$ 8.º) $5^4 : 5^2$
   9.º) $2^5 : 2^5$ 10.º) $a^p : a^q$ $(p \geqslant q)$

10. Calcular: 1.º) $(3^2)^4$ 2.º) $(3^4)^2$ 3.º) 2^{3^2}

11. Mostrar que: 1.º) 3^4 é diferente de 4^3
    2.º) $(3^2)^4$ é diferente de $3^{(2^4)}$

12. Aplicar as regras de cálculo de potências indicadas em:
    1.º) $(2^2 \times 3 \times 4^3)^2$ 2.º) $(2^3 \times 3^4)^2 \times (3^2 \times 2)^3$ 3.º) $(4^3 \times 4^2) : (4^2 \times 4)$

13. Calcular o *valor* das expressões (ou o numeral mais simples):
    1.ª) $2^5 - 3^2 \times 1^8$ 2.ª) $(3+4+5)^2$ 3.ª) $(5+2)^2 + 3^4 \times 2^1$
    4.ª) $[3^4 : (5-2)^3 \times [15 - 2 \times (9 - 2^3)] - 6^2] : 3^0$
    5.ª) $\{(7^2 - 5 \times 3^2 + 1)^3 : [(2^3 - 6)^2 + 7 \times 3]\}^2 : [2^2 + (5-4)^3]$
    6.ª) $3^4 \times 2 + 150 : (9-4)^2 - 3^2 \times 5 + 24 : (2^4 - 10)$
    7.ª) $4^3 : 2^4 + (50 \times 2^2) : (1 + 3 \times 2^3) + 2 \times 5^2 - 36 : (2^2 + 5)$
    8.ª) $6^2 + 5 \times (2^3 \times 3 - 20 : 2^2 + 1^0) - (3^2 + 2^2 \times 5 + 1^8) : (21 - 4^2)$
    9.ª) $7 \times 2^3 - 2^3 \times [3^2 - 2 \times (5^2 : 5^2)]$
    10.ª) $[2 + 4^2 : (2 \times 5 - 3^2)] : [2 + 2^4]$



31. *Operação inversa da potenciação: radiciação; resultado: raiz*

Esta é uma operação *nova* para você. Embora "sentida" nos casos simples (raiz quadrada, por exemplo), desde a Escola Primária — quando se queria saber "qual o número que multiplicado por si mesmo resulta num determinado número" — não foi até agora ensinada, para essa nova operação, nenhuma *técnica de cálculo*.

Lembre-se de que isso não ocorreu com as operações já estudadas (adição, subtração, . . .), para as quais você trazia uma técnica de cálculo bem desenvolvida.

Sejam, por exemplo, os números 4 e 2. Considerando o primeiro dêles como *base* e o segundo como *expoente*, obtemos a *potência* (16):

$$4^2 = 16$$

graças à operação *potenciação* (que "mandava" multiplicar 4 por 4).

Qual será a *operação inversa* da potenciação?

Será a que permitir encontrar a *base* (4), conhecidos a *potência* (16) e o *expoente* (2), não é?

Como exemplo "popular" você sabe que a área de um quadrado é dada pelo *quadrado da medida de seu lado*, isto é, se o lado tiver 4m (fig. 38), então a área será:

$$4\text{m} \times 4\text{m} = 16\text{m}^2$$

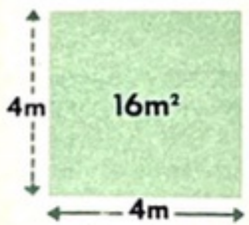


FIG. 38

Naturalmente, nasce o *problema inverso:* sabendo-se que 16m^2 é a área de um quadrado, qual é a medida do lado dêsse quadrado?

O número que vai dar essa medida — que sabemos ser 4 (pois $4 \times 4 = 4^2 = 16$) — chama-se *raiz quadrada* de 16, e a operação que permite determiná-lo chama-se *radiciação*.

Indicação: $\sqrt[2]{16} = 4$

onde
- $\sqrt[2]{\ }$ (lê-se: "raiz quadrada") é o *radical* de índice 2 (normalmente dispensa-se escrever o 2)
- 16 é o *radicando*
- 4 é a *raiz quadrada* de 16

São, pois, *equivalentes* as expressões que traduzem as operações que dão: $4^2 = 16$ (operação: "elevar ao quadrado") e $\sqrt{16} = 4$ (operação inversa: "extração da raiz quadrada"), isto é:

$$4^2 = 16 \iff \sqrt{16} = 4$$

Outros exemplos:

$2^3 = 8 \iff \sqrt[3]{8} = 2$ (lê-se: "raiz cúbica de oito")

$1^5 = 1 \iff \sqrt[5]{1} = 1$ (lê-se: "raiz quinta de um")

De um modo geral:

$x^n = a \iff \sqrt[n]{a} = x$ (lê-se: "raiz de ordem n de a")

Erros comuns:

1. Confundir *radiciação*, que é uma *operação*, com *raiz*, que é o *resultado* dessa operação.
2. Confundir a operação "extração da raiz quadrada", que é *inversa*(*) da operação "elevar ao quadrado", com a *divisão por* 2. Assim, por exemplo, *não é dividindo* 16 por 2 que você encontrará a medida do lado do quadrado da figura acima, pois $16 : 2 = 8$ e $8 \times 8 = 8^2 = 64$ está muito longe de 16. . . .

32. *Técnica de cálculo da radiciação; tábua operatória*

A *técnica de cálculo* empregada na operação *radiciação* apresenta dificuldades que aumentam de acôrdo com o grau da potência (representado pelo expoente).

No Capítulo seguinte você aprenderá um *processo geral* e simples para efetuar a operação *radiciação*, baseado na fatoração completa de um número, a fim de destacá-la como operação inversa da potenciação.

Isto será feito sempre que a operação *radiciação* seja *possível* no Conjunto-Universo onde se trabalha, como ocorreu com as operações *subtração* (inversa da *adição*) e divisão (inversa da multiplicação).

Você já deve ter percebido (com o "treino" que adquiriu nas outras operações!) que a *radiciação:*

(*) Com relação à *potenciação* podemos considerar uma *outra* operação inversa: conhecidas a *potência* e a *base*, determinar o *expoente*. Agora não é mais a *radiciação* que resolve e sim a *logaritmação*, operação que será estudada no 2.º ciclo.

1.º) ***não possui** a propriedade do **fechamento***, pois a raiz de ordem *qualquer* de um número natural *nem sempre* é um número natural.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{5} = ?$$

2.º) ***não possui** a propriedade **comutativa***, pois a *ordem* do índice e do número de que se extrai a raiz agora interessa à operação.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[8]{3} \text{ é FALSA!}$$

Como, na *radiciação*, a extração da raiz quadrada é a operação mais usual no Ginásio, o seu estudo merecerá *maior destaque*, incluindo técnica de cálculo, bem útil para as aplicações que você tiver que efetuar.

Na página 279 consta uma *tábua operatória* de *raízes quadradas* e *raízes cúbicas* dos números de 1 a 100.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 48

1. Na igualdade $\sqrt{25} = 5$:
   1.º) Qual a *operação* indicada?
   2.º) Qual o nome do *resultado?*
   3.º) Qual a *potenciação* correspondente?
2. *a*) Qual a operação inversa da operação "elevar ao quadrado"?
   b) Idem, da operação "elevar ao cubo"?

Preencher os claros das seguintes *equivalências:*

3. $3^2 = 9 \iff \sqrt{\ldots} = \ldots$
4. $4^3 = 64 \iff \sqrt[3]{\ldots} = 4$
5. $1^5 = 1 \iff \sqrt[5]{\ldots} = 1$
6. $\square^{\bullet} = \triangle \iff \sqrt[\bullet]{\ldots} = \ldots$
7. $\sqrt[3]{27} = 3 \iff 3^{\ldots} = \ldots$
8. $\sqrt[5]{32} = 2 \iff \ldots^{\ldots} = 32$
9. $\sqrt[\bullet]{\square} = \triangle \iff \triangle^{\ldots} = \ldots$
10. O conjunto dos números naturais é *fechado* em relação à operação *potenciação?* Por quê? E em relação à operação *radiciação?* Por quê?

São, pois, *equivalentes* as expressões que traduzem as operações que dão: $4^2 = 16$ (operação: "elevar ao quadrado") e $\sqrt{16} = 4$ (operação inversa: "extração da raiz quadrada"), isto é:

$$4^2 = 16 \iff \sqrt{16} = 4$$

Outros exemplos:

$2^3 = 8 \iff \sqrt[3]{8} = 2$ (lê-se: "raiz cúbica de oito")

$1^5 = 1 \iff \sqrt[5]{1} = 1$ (lê-se: "raiz quinta de um")

De um modo geral:

$x^n = a \iff \sqrt[n]{a} = x$ (lê-se: "raiz de ordem n de a")

Erros comuns:

1. Confundir *radiciação*, que é uma *operação*, com *raiz*, que é o *resultado* dessa operação.
2. Confundir a operação "extração da raiz quadrada", que é *inversa*(*) da operação "elevar ao quadrado", com a *divisão por* 2. Assim, por exemplo, *não é dividindo* 16 por 2 que você encontrará a medida do lado do quadrado da figura acima, pois $16 : 2 = 8$ e $8 \times 8 = 8^2 = 64$ está muito longe de 16. . . .

32. *Técnica de cálculo da radiciação; tábua operatória*

A *técnica de cálculo* empregada na operação *radiciação* apresenta dificuldades que aumentam de acôrdo com o grau da potência (representado pelo expoente).

No Capítulo seguinte você aprenderá um *processo geral* e simples para efetuar a operação *radiciação*, baseado na fatoração completa de um número, a fim de destacá-la como operação inversa da potenciação.

Isto será feito sempre que a operação *radiciação* seja *possível* no Conjunto-Universo onde se trabalha, como ocorreu com as operações *subtração* (inversa da *adição*) e divisão (inversa da multiplicação).

Você já deve ter percebido (com o "treino" que adquiriu nas outras operações!) que a *radiciação:*

(*) Com relação à *potenciação* podemos considerar uma *outra* operação inversa: conhecidas a *potência* e a *base*, determinar o *expoente*. Agora não é mais a *radiciação* que resolve e sim a *logaritmação*, operação que será estudada no 2.º ciclo.

1.º) **não possui** *a propriedade do* **fechamento,** pois a raiz de ordem *qualquer* de um número natural *nem sempre* é um número natural.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{5} = \ ?$$

2.º) **não possui** *a propriedade* **comutativa,** pois a *ordem* do índice e do número de que se extrai a raiz agora interessa à operação.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[8]{3} \text{ é FALSA!}$$

Como, na *radiciação*, a extração da raiz quadrada é a operação mais usual no Ginásio, o seu estudo merecerá *maior destaque*, incluindo técnica de cálculo, bem útil para as aplicações que você tiver que efetuar.

Na página 279 consta uma *tábua operatória* de *raízes quadradas* e *raízes cúbicas* dos números de 1 a 100.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 48

1. Na igualdade $\sqrt{25} = 5$:
   1.º) Qual a *operação* indicada?
   2.º) Qual o nome do *resultado?*
   3.º) Qual a *potenciação* correspondente?
2. *a*) Qual a operação inversa da operação "elevar ao quadrado"?
   b) Idem, da operação "elevar ao cubo"?

Preencher os claros das seguintes *equivalências:*

3. $3^2 = 9 \iff \sqrt{\ldots} = \ldots$
4. $4^3 = 64 \iff \sqrt[3]{\ldots} = 4$
5. $1^5 = 1 \iff \sqrt[5]{\ldots} = 1$
6. $\square^{\bullet} = \triangle \iff \sqrt[\bullet]{\ldots} = \ldots$
7. $\sqrt[3]{27} = 3 \iff 3^{\ldots} = \ldots$
8. $\sqrt[5]{32} = 2 \iff \ldots^{\ldots} = 32$
9. $\sqrt[\bullet]{\square} = \triangle \iff \triangle^{\ldots} = \ldots$
10. O conjunto dos números naturais é *fechado* em relação à operação *potenciação?* Por quê? E em relação à operação *radiciação?* Por quê?

Divisibilidade no conjunto N

número um, números primos
e números compostos
fatoração completa
raiz quadrada aproximada
operações: maximação e minimização

2ª PARTE

divisibilidade no conjunto N

1. *Múltiplos e divisores; relações*

Um número é *divisível* por outro quando a sua divisão por êsse outro é *exata.*

Exemplo: 20 é **divisível por** 5, pois $20 : 5 = 4$
e 20 é **divisível por** 4, pois $20 : 4 = 5$

Se um número é *divisível* por outro, diz-se também que êle é *múltiplo* dêsse outro (que, aliás, é uma expressão já estudada por você); o outro passa a ser seu *divisor* ou submúltiplo. Assim, por exemplo, de:

$$\boxed{20 : 5 = 4}$$

temos que:

$\boxed{20}$ é *divisível por* 5 (e por 4) ou *múltiplo de* 5 (e de 4)

$\boxed{5}$ é *divisor de* 20 ou *submúltiplo de* 20

Você também pode ouvir a expressão (correta): 5 (ou 4) *divide* 20. Observe, agora, que:

múltiplo e divisor sempre andam juntos!

pois, se o primeiro número é *múltiplo* (ou divisível) do segundo, êste é *divisor* (ou submúltiplo) do primeiro. Êste fato permite dizer que no *conjunto dos números naturais* a **relação:** "*ser divisível por*", ou sua *inversa:* "*ser divisor de*", são **relações de *ordem*,** valendo, pois, a propriedade *transitiva.*

Exemplo:

Se 20 é *divisível* por 10 e 10 é *divisível* por 5, ***então*** 20 é *divisível* por 5.

Outro fato importante que você deve guardar é que:

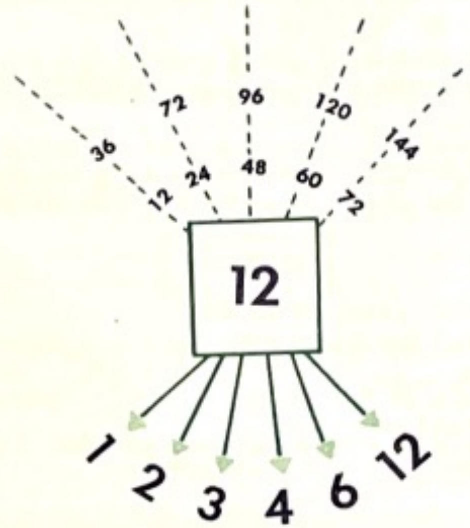
Um número tem um conjunto infinito de múltiplos e um conjunto finito de divisores.

Seja, por exemplo, o número 12, que tem os seguintes conjuntos de *múltiplos* e *divisores*, respectivamente:

$\boxed{12}$ *múltiplos:* $\{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots\}$ (conjunto infinito)

divisores: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ (conjunto finito)

NOTA: Em todo o estudo da divisibilidade, o 0 e o 1 desempenham papéis especiais: enquanto o 0 *é múltiplo de qualquer número*, o 1 *é divisor de qualquer número!*



2. *Propriedade*

A soma e a diferença de dois múltiplos de um número são também múltiplos dêsse número.

De fato, consideremos, por exemplo, dois múltiplos de 4:

$$a = 4 \times 5$$
$$b = 4 \times 3$$

Adicionando, membro a membro, essas igualdades, temos:

$$a + b = 4 \times 5 + 4 \times 3$$

ou $a + b = 4 \times (5+3)$ pela propriedade *distributiva*

ou $a + b = 4 \times 8$

Logo, se o número $a+b$ é igual a 4×8, então $a+b$ é também *múltiplo* de 4.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 49

1. Escrever o conjunto dos divisores dos seguintes números: 4, 18, 7 e 1. Temos:
   divisores de 4: $\{1, 2, 4\}$ divisores de 7: $\{1, 7\}$
   divisores de 18: $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ divisores de 1: $\{1\}$

2. Verificar se são *V* ou *F* as seguintes sentenças:
   1.ª) 9 *pertence ao conjunto dos divisores de* 12.
   Como: divisores de 12: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, temos que $9 \notin \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e portanto a sentença é *F*.
   2.ª) O conjunto dos divisores de 9 está *contido* no conjunto dos divisores de 18.
   Fácil é ver que: $\{1, 3, 9\} \subset \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Logo, a sentença é *V*.
   3.ª) $0 \in \{0, 1, 2, 3\}$ *V* 4.ª) $\{0, 1\} \supset \{0, 1, 2, 3\}$ *F* 5.ª) $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$ *V*
   6.ª) É vazio *o conjunto dos múltiplos de 4 compreendidos entre 9 e 11.*
   Ora, o único número natural compreendido entre 9 e 11 é 10, que não é múltiplo de 4, e portanto o conjunto é $\varnothing$. Sentença *V*

3. O elemento neutro da adição pertence ao conjunto dos números naturais?
   Sim, pois o 0, que é o *elemento neutro* da adição, pertence ao conjunto:
   $$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

4. O conjunto das vogais está *contido* no conjunto das letras de nosso alfabeto?
   Sim, pois como é fácil perceber:
   $\{a, e, i, o, u\} \subset \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, x, z\}$

5. Usar o *símbolo* conveniente para exprimir as relações entre os seguintes conjuntos:
   1.º) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ 2.º) $\{m, n\}$ e $\{m, n, p, q\}$ 3.º) a e $\{a, b, c\}$
   4.º) a e $\{l, m, n\}$ 5.º) $\{\triangle, \square, \bigtriangledown\}$ e $\{\triangle, \square\}$ 6.º) $\{\triangle, \square, \bigtriangledown\}$ e $\{\triangle, \square, \bigtriangledown, \star\}$
   Temos: 1.º) $\supset$ 2.º) $\subset$ 3.º) $\in$ 4.º) $\notin$ 5.º) $\supset$ 6.º) $\subset$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 50

1. Escrever o conjunto dos divisores dos seguintes números: 5, 15, 12, 24 e 1.

2. Escrever *V* ou *F*, ao lado das seguintes sentenças, conforme seja verdadeira ou falsa:
   1.ª) $9 \in \{1, 3, 5, 11\}$ 2.ª) $5 \notin \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 3.ª) $\{2, 4\} \supset \{1, 2, 3, 4\}$
   4.ª) $\{a, e, i, o, u\} \subset \{a, b, c, d, a, e, i, o, u\}$ 5.ª) $0 \in \{1, 2, 3\}$
   6.ª) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\} \supset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$ 7.ª) $\{2, 4, 6, 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$
   8.ª) $\{\ \} \subset \{1, 2, 3\}$ 9.ª) $\{0\} \in \{0, 1, 2\}$ 10.ª) $\{0\} \subset \{0, 1, 2\}$

3. O número 12 pertence ao conjunto dos *números naturais?* Escreva com símbolos.
4. 6 pertence ao conjunto dos divisores de 20? Escrever com símbolos essa sentença.
5. Escrever o conjunto dos múltiplos de 5 compreendidos entre 6 e 9.
6. O *elemento neutro* da multiplicação pertence ao conjunto dos números naturais? Por quê?
7. O conjunto dos alunos da 1.ª Série "A" está *contido* no conjunto dos alunos do Ginásio? Por quê?
8. Escrever o conjunto dos múltiplos de 3 compreendidos entre 10 e 22.
9. Usar o símbolo conveniente para exprimir as relações entre *elementos* e *conjuntos*; entre *conjuntos* e *conjuntos:*

   1.ª) $\{0, 1, 2\}$ e $\{0, 1, 2, 3\}$ 2.ª) 0 e $\{0, 1, 2, 3\}$ 3.ª) 4 e $\{0, 1, 2, 3\}$
   4.ª) $\{a, b, c\}$ e $\{a, b, c\}$ 5.ª) l e $\{l, m\}$ 6.ª) $\{l\}$ e $\{l, m\}$ 7.ª) $\{\ \}$ e $\{a, b\}$
   8.ª) $\triangle$ e $\{\triangle, \square\}$ 9.ª) $\{\triangle\}$ e $\{\triangle, \square\}$ 10.ª) $\{\triangle, \square, \triangledown, \bigstar\}$ e $\{\triangle, \square, \triangledown\}$
   11.ª) $\{\ \}$ e $\varnothing$ 12.ª) $\{\bigstar\}$ e $\{\bigstar\}$

Critérios de Divisibilidade

3. *Técnicas*

A verificação de que um número é *divisível* por outro é feita, geralmente, por intermédio da *divisão;* se o resto fôr zero, o número será divisível pelo outro. Existem, porém, *regras especiais* que permitem verificar se um número é divisível ou não por outro, *sem efetuar a divisão,* bem como determinar o valor do *resto,* caso contrário.

Tais regras constituem os **critérios** ou **caracteres de divisibilidade:**

1.º) Divisibilidade por 2:

> **Um número é divisível por 2 quando é par.**

Exemplos:

358 é divisível por 2 porque é par
78.391 não é divisível por 2 por não ser par

De fato, todo número par é múltiplo de 2 (pág. 114) e, portanto, divisível por 2.

2.º) Divisibilidade por 3:

> **Um número é divisível por 3 quando a soma dos valôres absolutos de seus algarismos é divisível por 3.**

Exemplos:

7.536 é divisível por 3, porque a soma: $7+5+3+6 = 21$, é divisível por 3;

217 não é divisível por 3, pois a soma: $2+1+7 = 10$, não o é.

Com efeito, vamos ver o que ocorre quando decompomos um número qualquer em suas unidades. Seja, por exemplo, o número 7.536. Temos:

$$7.536 = 7.000 + 500 + 30 + 6 \text{ pela p. d. a.}$$

ou

$$7.536 = 7 \times 1.000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 6$$

Lembrando que:

$$\left.\begin{aligned} 10 &= 9 + 1 \\ 100 &= 99 + 1 \\ 1.000 &= 999 + 1 \\ &\ \vdots \end{aligned}\right\} \text{m. } 9 + 1 \text{ (indica m. 9 que uma das parcelas é \textit{sempre} múltipla de 9)}$$

vem:

$$\begin{aligned} 7.536 &= 7\times(\text{m.}9+1) + 5\times(\text{m.}9+1) + 3\times(\text{m.}9+1) + 6 \\ 7.536 &= 7\times\text{m.}9+7\times1+5\times\text{m.}9+5\times1+3\times\text{m.}9+3\times1+6 && \text{p. d. m. (a)} \\ 7.536 &= \text{m.}9 + 7 + \text{m.}9 + 5 + \text{m.}9 + 3 + 6 && 7 \times \text{m.}9 \text{ ainda é m.}9 \\ 7.536 &= (\text{m.}9+\text{m.}9+\text{m.}9) + (7+5+3+6) && \text{p. a. a.} \\ 7.536 &= \text{m.}9 + (7+5+3+6) && \text{a soma de m.}9 \text{ ainda é m.}9 \end{aligned}$$

Logo: 7.536 (ou qualquer outro número) representa uma *soma* de duas parcelas das quais a primeira é *sempre divisível (ou múltipla) por* 9 (e portanto por 3, de acôrdo com a propriedade transitiva, n.º 1) e a segunda é constituída pela soma dos valôres absolutos $(7+5+3+6)$ de seus algarismos. Se esta segunda parcela fôr divisível por 3, então o número dado 7.536 (que é soma de duas parcelas múltiplas de 3) também será (Propriedade, págs. 123/4).

3.º) Divisibilidade por 4:

> **Um número é divisível por 4 quando o numeral formado pelos seus dois últimos algarismos da direita é divisível por 4.**

Exemplos:

1.964 é divisível por 4 porque 64, que é o número formado pelos seus *dois últimos* algarismos da direita, é divisível por 4 (como é fácil de se ver!);

873.215 não é divisível por 4, pois 15 não o é.

Realmente, todo número de mais de dois algarismos (por exemplo, 1.964) representa sempre a *soma* de duas parcelas, assim:

$$1.964 = 1.900 + 64$$

isto é, a primeira delas é *múltipla* de 100 (termina em dois zeros).

A primeira parcela é sempre divisível por 100 (e, portanto, por 4 e 25, que são divisores de 100) e a segunda parcela é constituída pelos *dois últimos algarismos* da direita. Como a primeira delas é sempre divisível por 4, se a segunda parcela fôr divisível por 4, o número dado também será.

4.º) Divisibilidade por 5:

Um número é divisível por 5 quando o seu numeral termina em 0 ou 5.

Exemplos:

8.715 é divisível por 5, porque termina em 5;
432.540 também é, porque termina em 0;
92.387 não é divisível por 5, porque não termina em 5 ou 0.

A justificação dêsse critério é imediata, pois todo número de mais de um algarismo (por exemplo: 8.175) pode ser decomposto em uma *soma* de duas parcelas, *das quais a primeira é sempre divisível por* 10, e portanto por 2 e 5 (seus divisores), e a segunda parcela é constituída pelo último algarismo da direita do número dado:

$$8.715 = 8.710 + 5$$

Se esta segunda parcela fôr divisível por 5, o número dado (que representa a *soma*) também será. Ora, os números de um algarismo divisíveis por 5 são só o 0 e o 5. Daí o critério.

5.º) Divisibilidade por 6:

Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3.

Exemplos:

36.384 é divisível por 6, porque é divisível por 2 (par) e por 3 (soma: 24);

1.412 não é divisível por 6 porque, apesar de par, não é divisível por 3 (soma: 8).

Êste critério, embora enunciado agora, por questão de *ordem*, será justificado depois.

6.º) Divisibilidade por 7 (Critério prático e rápido):

Um número é divisível por 7 quando: separando o primeiro algarismo da direita, multiplicando-o por 2 e subtraindo o produto obtido do que restou à esquerda, e assim sucessivamente, resulta 0 ou 7

Observação: Se o produto do primeiro algarismo da direita por 2 não pode ser subtraído do que restou à esquerda, então trocam-se os têrmos da diferença.

Exemplos(*):

1.º) 588 *é divisível* por 7, pois:

58'8	8×2 = 16
− 16	
4'2	2×2 = 4
− 4	
0	

2.º) 18.351 *não* é divisível por 7, pois:

18 35'1	1×2 = 2
− 2	
183'3	3×2 = 6
− 6	
17'7	7×2 = 14
− 14	
3	

3.º) 512.099 *é divisível* por 7, porque:

512 09'9	9×2 = 18
− 18	
5119'1	1×2 = 2
− 2	
511'7	7×2 = 14
− 14	
49'7	7×2 = 14
− 14	
3'5	5×2 = 10
10	
7	

7.º) Divisibilidade por 8:

Um número é divisível por 8 quando o numeral formado pelos seus *três últimos* algarismos da direita é divisível por 8.

Exemplos:

2.782.104 é divisível por 8, porque 104 (que é o número formado pelos *três últimos algarismos*) é divisível por 8;

847.417 não é divisível por 8, pois 417 não o é.

(*) Método empregado, desde 1956, pelo Prof. Michel Abi Saad.

De fato, todo número de mais de três algarismos, é uma *soma* de duas parcelas, a primeira das quais é sempre divisível por 1.000, e portanto por 8 e 125, e a segunda parcela constituída pelos *três últimos algarismos*. Se esta segunda parcela fôr divisível por 8, o número dado também o será. Com o exemplo acima, vem:

$$2.782.104 = 2.782.000 + 104$$

e como 104 é divisível por 8, o número 2.782.104 também o é.

8.º) Divisibilidade por 9:

Um número é divisível por 9 quando a *soma* dos valôres absolutos de seus algarismos é divisível por 9.

Exemplos:

27.738 é divisível por 9, porque a soma: $2+7+7+3+8 = 27$ o é;
44.319 não é divisível por 9, pois a soma: $4+4+3+1+9 = 21$ não o é.

A justificativa é análoga à já estudada no caso da divisibilidade por 3.

9.º) Divisibilidade por 10:

Um número é divisível por 10 quando o seu numeral termina em zero.

Exemplos:

19.230 é divisível por 10, porque termina em 0;
736.238 não é divisível por 10, porque não termina em 0.

Êste caso já foi estudado quando se tratou da forma dos múltiplos de 10 (pág. 114).

10.º) Divisibilidade por 11:

Um número é divisível por 11 quando a *diferença* entre as somas dos valôres absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par é divisível por 11.

Os algarismos de *ordem ímpar* são os que ocupam o 1.º, 3.º, 5.º. . . lugares, e os de ordem par, o 2.º, 4.º, 6.º, . . . lugares, a partir da direita.

Exemplos:

9	5	5	6	8	
↓	↓	↓	↓	↓	
5.º	4.º	3.º	2.º	1.º	

9 5 5 6 8 é divisível por 11, pois a *diferença* entre a soma dos algarismos de ordem ímpar ($S_i = 8+5+9 = 22$) e os de ordem par ($S_p = 6+5 = 11$) é $22 - 11 = 11$ (que é divisível por 11).

736 não é divisível por 11, porque:

$$\begin{array}{rl} S_i = 6+7 = & 13 \\ S_p = \quad 3 = & 3 \\ \hline & 10 \end{array} \text{ (não é divisível por 11)}$$

Observação: Se S_i é *menor* que S_p, acrescenta-se à primeira soma um conveniente múltiplo de 11, que torne possível a subtração.

Exemplo:

429.085 não é divisível por 11, pois:

$$\begin{array}{rl} S_i = 5+0+2 = & 7 \\ S_p = 8+9+4 = & 21 \\ \hline & ? \end{array}$$

Acrescentando-se 22 (múltiplo de 11) a S_i, vem:

$$29 - 21 = 8 \text{ (que não é divisível por 11)}$$

Justificação: Basta observar que tôda potência de 10 é um múltiplo de 11 mais ou menos 1; *mais* 1 quando o número de zeros é par e *menos* 1, quando é ímpar. De fato:

$$\begin{array}{rcl} 10 = & 11 - 1 = & m.11 - 1 \\ 100 = & 99 + 1 = & m.11 + 1 \\ 1.000 = & 1.001 - 1 = & m.11 - 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Seja agora, por exemplo, o número: 7.128, que se decompõe em:

$$\begin{array}{ll} 7.128 = 7.000 + 100 + 20 + 8 & \text{pela p. d. a.} \\ 7.128 = 7\times1.000 + 1\times100 + 2\times10 + 8 & \\ 7.128 = 7\times(m.11 - 1) + 1\times(m.11+1) + 2\times(m.11 - 1) + 8 & \rangle \text{ p. d. m. (a)} \\ 7.128 = 7\times m.11 - 7\times1 + 1\times m.11 + 1\times1 + 2\times m.11 - 2\times1 + 8 & \\ 7.128 = m.11 - 7 + m.11 + 1 + m.11 - 2 + 8 & \rangle \text{ p. a. a.} \\ 7.128 = \underbrace{m.11}_{1.^a\ parc.} + \underbrace{(8+1) - (2+7)}_{2.^a\ parcela} & \end{array}$$

Como a primeira parcela é m.11, se a segunda parcela: $(8+1) - (2+7)$ fôr m.11, o número 7.128 também será m. 11. Nesse exemplo, 7.128 é divisível por 11, pois a segunda parcela é $9 - 9 = 0$, que é divisível por 11.

11.º) Divisibilidade por 12:

Um número é divisível por 12 quando é divisível por 3 e por 4.

Exemplos:

324 é divisível por 12, porque é divisível por 3 (soma: 9) e por 4 (os dois últimos algarismos, 24);
8.618 não é divisível por 12, pois não é divisível por 3 (nem por 4).

A justificação é análoga à que irá ser estabelecida para o critério por 6.

RESUMO

Um número será $\boxed{\text{divisível}}$ por:

$\boxed{2}$	quando fôr $\boxed{\text{par}}$ ou seja $\boxed{\text{o seu numeral termina em 0, 2, 4, 6 ou 8}}$		
$\boxed{3}$	"	a $\boxed{\text{soma dos valôres absolutos}}$ de seus algarismos fôr : por 3	
$\boxed{4}$	"	o numeral formado pelos $\boxed{\text{dois últimos algarismos}}$ fôr : por 4	
$\boxed{5}$	"	$\boxed{\text{terminar em 0 ou 5}}$	
$\boxed{6}$	"	fôr divisível por $\boxed{2 \text{ e } 3}$	
$\boxed{7}$	"	aplicando a $\boxed{\text{regra prática}}$ der 0 ou 7	
$\boxed{8}$	"	o numeral formado pelos $\boxed{\text{três últimos algarismos}}$ fôr : por 8	
$\boxed{9}$	"	a $\boxed{\text{soma dos valôres absolutos}}$ de seus algarismos fôr : por 9	
$\boxed{10}$	"	$\boxed{\text{terminar em 0}}$	
$\boxed{11}$	"	$\boxed{S_i - S_p}$ fôr divisível por 11	
$\boxed{12}$	"	fôr divisível por $\boxed{3 \text{ e } 4}$	

Guarde bem êsses critérios! Êles serão utilizados como "meio" para realizar outros estudos!

Observação importante: Os *critérios de divisibilidade* estudados foram estabelecidos para o *sistema decimal*, onde os numerais usados são os algarismos indo-arábicos. Assim, por exemplo, dizer que um número é *par* quando terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8, é uma propriedade do numeral indo-arábico, que está representando o número. Logo:

Os critérios de divisibilidade em qualquer base, dependem dos numerais!

Exemplo de aplicação:

Verificar por que números (até 12) é divisível 24.318. Temos, pelos critérios estudados:

24.318 é divisível por

- $\boxed{2}$ *V* (porque é *par*)
- $\boxed{3}$ *V* (porque a *soma:* 18, o é)
- 4 *F*
- 5 *F*
- $\boxed{6}$ *V* (porque é por 2 e 3)
- $\boxed{7}$ *V* (aplicando a regra prática)
- 8 *F*
- $\boxed{9}$ *V* (porque a *soma:* 18, o é)
- 10 *F*
- 11 *F*
- 12 *F*

V — Verdadeira
F — Falsa

4. *Propriedades elementares do resto; prova das operações por um divisor*

As propriedades elementares dos restos podem ser resumidas nas seguintes:

1.ª) **O resto da divisão de uma soma por um número é igual ao resto da divisão, pelo mesmo número, da soma dos restos das parcelas.**

De fato, seja por exemplo a soma: 312+415+68 = 795, e procuremos determinar os *restos das divisões*, por 9, das *parcelas* e da *soma*. Obteremos, de acôrdo com o estudado:

$$\left.\begin{array}{rl} 312 &= m.9+(3+1+2) = m.9+6 \\ +\ 415 &= m.9+(4+1+5) = m.9+1 \\ 68 &= m.9+(6+8) \quad\ = m.9+5 \end{array}\right\} \text{somando: } m.9+(6+1+5) = \boxed{m.9+3}$$

$$795 \longrightarrow m.9+(7+9+5) = \boxed{m.9+3}$$

2.ª) **O resto da divisão de um produto por um número é igual ao resto da divisão, pelo mesmo número, do produto dos restos dos fatôres.**

Com efeito, seja, por exemplo, a multiplicação: $2.315 \times 78 = 180.570$, onde:

$$2.315 = m.9+2$$
$$78 = m.9+6$$

e, portanto:

$$2.315 \times 78 = (m.9+2)\ (m.9+6)$$

Aplicando a regra do *produto de duas somas* (pág. 111), obteremos uma soma de produtos, que são m.9 e o produto 2×6, isto é:

$$2.315 \times 78 = m.9+2 \times 6$$

e, portanto, o resto da divisão por 9 do produto: 2.315×78 é o *mesmo resto* da divisão do produto 2×6 por 9, ou seja, 3.

APLICAÇÃO: Prova por um divisor.

Como aplicação dessas propriedades, costuma-se verificar a *exatidão* das operações fundamentais mediante as PROVAS POR UM DIVISOR, de critério de divisibilidade conhecido. Pelas vantagens que oferecem, os divisores mais empregados são 9 e 11.

Contudo, deve-se notar que estas provas oferecem uma *probabilidade de acêrto* das operações sem, todavia, *garantir* que estejam *absolutamente certas*, como você terá oportunidade de ver.

Exemplos:

1. Prova da *adição*, usando o divisor 9 (chamada Prova dos "nove").

$$\begin{array}{rlll} 4.318 & (\text{Soma } 16:9) & \to \text{resto} & 7 \\ +2.593 & (\text{Soma } 19:9) & \to \text{resto} & 1 \\ 1.876 & (\text{Soma } 22:9) & \to \text{resto} & 4 \\ \hline 8.787 & (\text{Soma } 30:9) & \to \text{resto} & \boxed{3} \end{array} \left.\right\} \to (\text{Soma } 12:9) \to \text{resto } \boxed{3}$$

NOTA: Não podemos com essa prova garantir que a operação esteja absolutamente certa, pois, caso no resultado da soma figurasse, por engano, 7.887, ainda assim a prova pelo divisor 9 *daria certo* (lembre-se: a ordem das parcelas não altera a soma!)

2. Prova da *multiplicação*, usando o divisor 11 (Prova dos "onze").

$$\begin{array}{rll} 5.713 & \text{resto da divisão por } 11 \to & 4 \\ \times 32 & \text{resto da divisão por } 11 \to & 10 \\ \hline 11426 & & 40 \to \boxed{7} \\ 17139 & & \\ \hline 182.816 & \text{resto da divisão por } 11 \to & \boxed{7} \end{array}$$

1. Verificar se são divisíveis por: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 os seguintes números: 21.540; 8.433; 7.777; 194.180; 1.001; 397; 3.600 e 12.349.

2. Que restos pode dar, na divisão por 5, um número que não seja divisível por 5?

3. Escrever à direita de 36 um algarismo tal que o número formado seja divisível, ao mesmo tempo, por 3 e por 11.

4. Indicar quais os algarismos, de menor valor absoluto, que devem ser colocados no lugar de □ para que:

   1.º) 532□ seja divisível por 3 e por 9; 2.º) 1□89 seja divisível por 11;
   3.º) 143□5 seja divisível por 3 e por 5; 4.º) 892□6 seja divisível por 4;
   5.º) 512□ seja divisível por 8; 6.º) 6□724 seja divisível por 2 e por 11.

5. Qual é o menor número que se deve somar a 4.831 para que resulte um número divisível por 3?

6. Qual é o menor número que se deve somar a 12.318 para que resulte um número divisível por 5?

7. *Sem efetuar a divisão*, calcular os restos das seguintes divisões:

   1.ª) 81.345.786 por 9 e por 11;
   2.ª) 18.315 por 4, 5 e 8;
   3.ª) 303.171 por 2, 3 e 10.

8. Verificar que a diferença entre dois números constituídos pelos mesmos algarismos, mas *escritos em ordem inversa*, é divisível por 9.

9. Verificar que a soma de dois números pares é um número par; que a soma de dois números ímpares é um número par e que a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

10. Numa caixinha existem menos de 60 bolinhas. Se elas forem contadas de 9 em 9, não sobrará nenhuma bolinha e, se forem contadas de 11 em 11, faltará uma. Quantas são as bolinhas?

11. "Tirar" a prova "dos nove", "dos três" e "dos onze" e verificar se estão certas as seguintes operações:

    1.ª) $8.503 + 7.128 + 564 = 16.387$
    2.ª) $4.018 - 3.297 = 721$

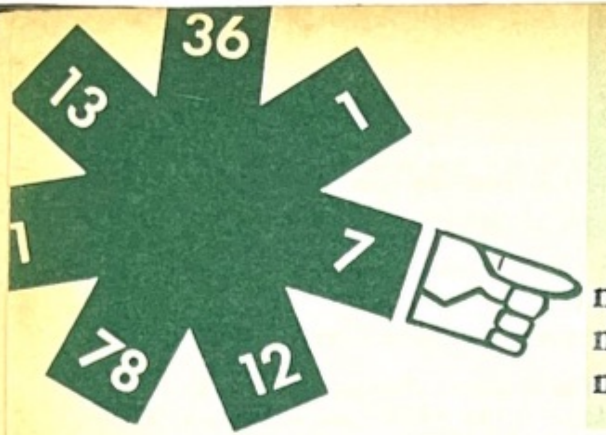
12. Idem, para as seguintes operações:

    1.ª) $4.301 \times 45 = 192.145$
    2.ª) $11.414 : 26 = 439$

13. O conjunto dos números pares: {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, . . .}, é *fechado* em relação à operação *adição?* Por quê? E em relação à *multiplicação?*

14. O conjunto dos números ímpares: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}, é *fechado* em relação à operação *adição?* Por quê? E em relação à *multiplicação?*

15. Dizer que um número é *ímpar* quando terminar em 1, 3, 5, 7 ou 9 é ou não uma propriedade do numeral indo-arábico que o representa?



número um
números primos
números compostos

5. *Número 1; números primos; números compostos*

Você já percebeu que o *número* 1 tem uma posição privilegiada na divisibilidade, pois é *divisor de qualquer número* ou, em outras palavras, *qualquer número é divisível por 1.*

Veja, agora, o que ocorre com os outros números da sucessão dos números naturais:

o 2 é divisível por 1 e 2 (e só!)
o 3 " " " 1 e 3 (e só!)
o 4 " " " 1, 2 e 4
o 5 " " " 1 e 5 (e só!)
o 6 " " " 1, 2, 3 e 6
o 7 " " " 1 e 7 (e só!)
o 8 " " " 1, 2. 4 e 8
o 9 " " " 1, 3 e 9. . . .
. . . .
. . . .

Logo:

1.º) Existem números (como: 2, 3, 5, 7, . . .) divisíveis sòmente por 1 e por si mesmos; tais números chamam-se *primos*.

2.º) Existem números (como: 4, 6, 8, 9, . . .) que, além de serem divisíveis por 1 e por si mesmos, são divisíveis por outros números; tais números são chamados *compostos*.

Portanto, qualquer *número natural* do conjunto N^* apresenta-se como:

↗ **número 1**
ou → **número primo**
↘ **número composto**

e, DENTRO DESTA CLASSIFICAÇÃO, valem as *definições:*

Número primo é o número (diferente de 1) que possui sòmente dois divisores: 1 e êle mesmo.

Número composto é o número que possui mais de dois divisores.

Êrro comum:

Confundir *número primo* (que é divisível *sòmente* por 1 e por si mesmo) com *número ímpar* (que pode ser *número composto*, como por exemplo: 9, 15, 21, . . .).

É evidente que pode coincidir um número ser *primo* e *ímpar*, como por exemplo os números 3, 5, 7, 11, 13, . . .

OBSERVAÇÃO CURIOSA: O *único* número primo par é o 2 (que é divisível sòmente por 1 e 2); qualquer outro número par *não poderá ser primo*, pois seria necessàriamente divisível por 2!

6. *Tábua dos números primos*

Quantos números primos existem? Você já conhece os primeiros:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

que iniciam a *sucessão dos números primos*, os quais, como você percebe, formam um *conjunto infinito*, pois é sempre possível encontrar *novos* números primos.

Nestas condições constroem-se *tábuas*, onde são registrados, ordenadamente, todos os números primos *menores* que um certo número prefixado.

Aliás, êsse costume vem da Antiguidade, pois a primeira tábua conhecida e que recebeu o nome de *Crivo de Eratóstenes* (por se assemelhar a um *peneiro* quando eram furados os números compostos dispostos em ordem), deve-se a Eratóstenes, insigne matemático grego, que viveu antes de Cristo.

Apliquemos o processo do Crivo de Eratóstenes na construção de uma tábua dos números primos até 50. Veja como é fácil:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
31 32 33 34 35 36 37 38 39 40
41 42 43 44 45 46 47 48 49 50

Escrevem-se todos os números de 2 a 50;
riscam-se todos os múltiplos de 2, a partir de 2;
riscam-se todos os múltiplos de 3, a partir de 3;
riscam-se todos os múltiplos de 5, a partir de 5 (onde o primeiro múltiplo que ainda não foi riscado é o $25 = 5^2$;

e assim do mesmo modo com o número 7, onde o primeiro múltiplo que ainda não foi riscado é o $49 = 7^2$. Agora, temos que parar, pois o primeiro múltiplo ainda não riscado do 11 (que é o número primo seguinte ao 7) seria $11^2 = 121$, que está fora do quadro dos 50 números.

Logo, os números não riscados:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47

constituem o *conjunto dos números primos até 50.*

Depois dos Exercícios de Fixação encontra-se uma *tábua dos números primos menores que 1.000* (pág. 174).

7. *Reconhecimento de um número primo*

Dado um número, como você faria para saber se êle é primo? A primeira resposta será: consulte-se uma tábua de números primos. Bem, consultando, por exemplo, a tábua de números primos que figura neste livro (pág. 174), só podemos usá-la se o número proposto fôr menor que 1.000. E para números maiores que 1.000? Bastaria consultar tábuas maiores.

Outro processo para reconhecer se um número é primo ou não, é *usar a própria sucessão dos números primos* e os *critérios de divisibilidade*, mediante a seguinte *Regra:*

> **Divide-se o número dado, sucessivamente, pelos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, . . . , até encontrar um quociente *menor* ou *igual* ao divisor. Se nenhuma dessas divisões é exata, o número dado é primo.**

Nos exemplos dados será justificada essa regra. Reconhecer se é ou não *primo:*

1.º) **211**

Divide-se 211 respectivamente por 2, 3, 5, 7, 11, 13, . . . Ora, algumas dessas divisões podem ser evitadas com a aplicação dos critérios de divisibilidade. Assim, não serão feitas as divisões por 2, 3, 5, 7 e 11, que autorizam, *por enquanto*, dizer que o 211 não é divisível por nenhum dêles e que também não é primo, pois os quocientes obtidos são *maiores* que os divisores. As outras divisões serão:

$$\begin{array}{r|l} 211 & 13 \\ \hline 81 & 16 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 211 & 17 \\ \hline 41 & 12 \\ 7 & \end{array}$$

— quociente menor que o divisor
→ resto diferente de zero
} 211 é *primo*

Como agora foi encontrado um quociente *menor* que o divisor e a divisão não é *exata* (resto 7), então podemos concluir que 211 *é primo*, pois, caso contrário, 211 seria divisível por um número maior que 17 e também pelo quociente dessa divisão, que necessàriamente seria um número primo menor que 12. Ora, isso é impossível, visto que já foi verificado que 211 não é divisível por números primos menores que 12.

2.º) **5.277**

Não é divisível por 2 (não é par); mas *é divisível por 3* (soma 21). Logo, o número 5.277 não é primo.

3.º) **173**

Não é divisível por 2, 3, 5, 7, 11. Por 13, temos:

$$\begin{array}{r|l} 173 & 13 \\ \hline 43 & 13 \\ 4 & \end{array}$$

— iguais
(resto)

Como foi encontrado um quociente (13) *igual* ao divisor (13) e a divisão não é exata (resto 4), conclui-se que 173 *é primo.*

4.º) **1.027**

Não é divisível por 2, 3, 5, 7 e 11. Por 13, temos:

$$\begin{array}{r|l} 1.027 & 13 \\ \hline 117 & 79 \\ 0 & \end{array}$$

Como a divisão é *exata*, o número 1.027 é divisível por 13 e, portanto, *não é primo.*

8. *Números primos entre si*

Quando dois ou mais números admitem sòmente o 1 como divisor comum, são chamados de PRIMOS ENTRE SI.

Exemplos:

12 e 7, cujo único divisor comum é o 1, são *primos entre si;*

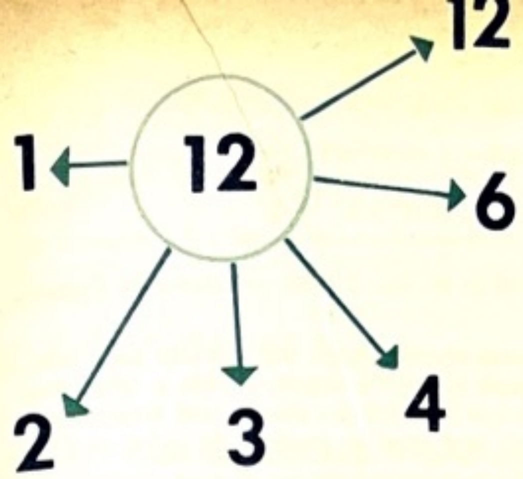
5, 10 e 14 também são *primos entre si*, pois o único divisor, que é de todos ao mesmo tempo, é o 1.

Êrro comum: pensar que os *números primos entre si* devam, necessàriamente, ser *primos* (no exemplo acima o 5 é primo e 10 e 14, compostos).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 52

1. Construir uma tábua dos números primos até 100.
2. Quais os números pares que são primos?
3. Qual é o menor número primo de dois algarismos? E o maior?
4. Um número pode ser ímpar e não ser primo? Exemplificar.
5. Sem usar a tábua de números primos, reconhecer quais dos seguintes números são primos: 109, 197, 243, 373, 641, 761, 863, 957, 1.181, 4.313 e 12.349.
6. Determinar os números primos, menores que 100, cuja diferença entre êles é 2. (NOTA: Tais números são chamados primos gêmeos.)
7. Você é capaz de exprimir cada número par, desde 4 até 22, como soma de dois números primos? (NOTA: Os matemáticos acreditam que todo número par, maior que 2, é a soma de dois números primos, mas *não o provaram ainda . . .*).
8. Existiriam números primos trigêmeos, isto é, em que a diferença entre dois números primos consecutivos é 2?
9. Escrever a sucessão dos números naturais até 15. Desenhar um *círculo* ao redor dos números primos; um *quadrado* ao redor dos números pares e um *triângulo* ao redor dos números ímpares.
10. Três números pares e um número ímpar são primos entre si? Por quê?
11. Dois números primos diferentes são primos entre si?
12. Verificar se 147 e 175 são números primos entre si.
13. Um número formado de dois algarismos iguais pode ser um número primo?

NOTA: Você percebeu que foi proposto "um número primo" de exercícios de fixação? E não tenha "receio" dêle, porque é um número "tão bom" quanto os outros . . .



fatoração completa

9. *Fatôres de um número*

A palavra *fator*, por demais usada em Matemática, está associada à idéia de *multiplicação*. Assim, por exemplo:

em $5 \times 4 = 20$, temos que: 5 e 4, são *fatôres* de 20

em $2 \times 3 \times 5 = 30$, " " 2, 3 e 5, são *fatôres* de 30

Em ambos os casos, diz-se que os números 20 e 30 foram *fatorados*, sendo que o 30 foi fatorado *completamente* (é fácil concluir por quê . . .)

Observe, agora, com atenção que:

1.º) o 1 tem sòmente *um fator:* êle mesmo;

2.º) cada número primo tem exatamente dois fatôres: o 1 e êle mesmo.

Quantos fatôres tem um *número composto?*

10. *Fatoração completa de um número composto*

Todo número composto pode ser fatorado de uma maneira única, num *produto de fatôres primos*. Assim, por exemplo, o número 60, que é composto, é igual ao produto:

$$60 = 2 \times 30$$

por sua vez o 30, que é composto, é igual a 2×15; logo:

$$60 = 2 \times 2 \times 15$$

e, como o 15 é número composto: 3×5, vem finalmente:

$$60 = 2\times2\times3\times5$$

ou $$\boxed{60 = 2^2\times3\times5}$$

e temos assim a *fatoração completa* de 60, isto é, *todos* os fatôres da decomposição *são primos*.

Se você quiser, poderá fatorar *completamente* um número composto, dividindo-o pelo seu *menor divisor primo;* a seguir, divida o quociente obtido pelo seu *menor divisor primo* e assim por diante, até encontrar o quociente 1. O número composto será igual ao produto de todos os divisores primos encontrados.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Na prática, dispõem-se os quocientes e os divisores respectivos em duas colunas separadas por um traço vertical. Aliás, essa técnica você já conhece, desde a Escola Primária.

Portanto: $60 = 2^2\times3\times5$

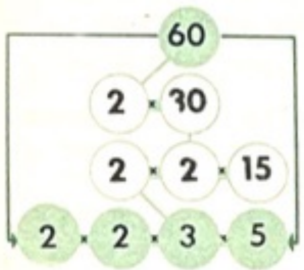


Fig. 39

Observação: A decomposição de 60 em fatôres primos é *única* (fig. 39), embora a ordem dos fatôres possa ser trocada. Assim:

$$60 = 5\times3\times2^2$$

ou $$60 = 3\times2^2\times5$$

representam a mesma *fatoração completa.*

Outros exemplos: Decompor os números 1.144 e 2.532, respectivamente, em seus fatôres primos (fatoração completa).

1.144	2
572	2
286	2
143	11 (Ver nota)
13	13
1	

$1.144 = 2^3\times11\times13$

2.532	2
1.266	2
633	3
211	211 (Ver nota)
1	

$2.532 = 2^2\times3\times211$

Nota: É necessário verificar, com as regras estudadas (ou com a tábua), se os números 143 e 211 são ou não primos, pois à primeira vista podem enganar!

11. *Aplicações gerais*

1.ª) **Divisibilidade de um número por outro, mediante seus fatôres primos.** — Você pode, agora, reconhecer se um número é divisível por outro, com o seguinte critério:

"decompostos dois números em seus fatôres primos o primeiro *é divisível* pelo segundo se contiver, pelo menos, os fatôres primos do segundo com *expoentes iguais ou maiores*".

Exemplos:

1. Verificar se 504 é *divisível* por 36.

Temos: $$504 = 2^3\times3^2\times7$$ $$36 = 2^2\times3^2$$

Como 504 contém *todos* os fatôres primos de 36 (com expoentes iguais ou maiores), segue-se que 504 é divisível por 36.

2. Idem, se 360 é divisível por 54.

Como: $$360 = 2^3\times3^2\times5$$ $$54 = 2\times3^3$$

segue-se que 360 *não é divisível* por 54, pois, embora contenha todos os fatôres primos de 54, possui um dêles (3) com expoente menor do que tal fator figura em 54.

3. Qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar 540 para se obter um número divisível por 126?

Decompondo êsses números em seus fatôres primos, vem:

$$540 = 2^2\times3^3\times5$$ $$126 = 2\times3^2\times7$$

Como o único fator que consta da decomposição do 126, e não consta da do 540, é o 7, basta multiplicar 540 por 7 para se obter um número divisível por 126.

Observação: Levando em conta que os fatôres primos da fatoração completa são *primos entre si*, pode-se agora justificar alguns critérios de divisibilidade enunciados (por 6 e por 12), dizendo: *um número divisível por dois números primos entre si é também divisível pelo produto dêles.* Assim:

um número divisível por 2 e por 3 o é por 6 (critério por 6)
um número divisível por 3 e por 4 o é por 12 (critério por 12)
um número divisível por 2 e por 7 o é por 14 (critério por 14)
um número divisível por 3 e por 5 o é por 15 (critério por 15)
etc.

2.ª) **Determinação de todos os divisores de um número.** — A decomposição de um número em seus fatôres primos (fatoração completa) permitiu que se conhecessem *alguns* de seus divisores. Assim, o número 60 que, decomposto em seus fatôres primos, apresentou como divisores sòmente os números primos: 2, 3 e 5 e o número 1, admite *outros* divisores, tais como: 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

Vamos procurar determiná-los, lembrando o seguinte fato importante: os divisores de um número constituem um *conjunto finito*, pois devem ser *menores* que o número dado, sendo o maior dêles o próprio número.

Nestas condições, como:

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$$

é natural que os divisores de 60 serão todos os números que contiverem apenas os fatôres 2, 3 e 5 com *expoentes menores ou iguais* aos que figuram na fatoração completa de 60. Logo, os divisores de 60 aparecerão a partir dos fatôres:

$2^0, 2^1, 2^2$ (com expoentes menores ou iguais ao de 2^2)
$3^0, 3^1$ (com expoentes menores ou iguais ao de 3^1)
$5^0, 5^1$ (com expoentes menores ou iguais ao de 5^1)

ou

1.ª linha: 1, 2, 4 (lembre-se de que $2^0 = 1$)
2.ª linha: 1, 3
3.ª linha: 1, 5

Quando multiplicamos cada número que figura na 1.ª linha por todos os números das demais linhas, depois cada número da 2.ª linha por todos os números da 3.ª e, finalmente, cada número da 1.ª linha por todos os números da 2.ª e 3.ª (produtos de três fatôres), obtemos, assim, os números:

(1 da 2.ª × 1.ª linha): 1 2 4
(3 da 2.ª × 1.ª linha): 3 6 12
(5 da 3.ª × 1.ª linha): 5 10 20
(5 da 3.ª × 2.ª linha): 5 15
(5(3.ª) × 3(2.ª) × 2(1.ª)): 30
(5(3.ª) × 3(2.ª) × 4(1.ª)): 60

Êsses produtos podem ser efetuados e distribuídos, mais fàcilmente, com a seguinte *disposição prática:*

		1
60	2	2
30	2	4
15	3	3 – 6 – 12
5	5	5 – 10 – 20 – 15 – 30 – 60
1		

Faz-se um traço vertical à direita dos fatôres da decomposição completa de 60 e escreve-se 1 um pouco acima do 1.º fator primo (2). Os divisores serão obtidos, a partir de 1, multiplicando cada um dos fatôres primos (que estão à esquerda do traço) pelos números que vêm à direita do traço, e situados acima dêle. Os divisores obtidos mais de uma vez não são repetidos.

e, portanto, o conjunto de divisores de 60 é:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

Outro exemplo: Determinar todos os divisores de 144. Temos:

		1
144	2	2
72	2	4
36	2	8
18	2	16
9	3	3 – 6 – 12 – 24 – 48
3	3	9 – 18 – 36 – 72 – 144
1		

Conjunto de divisores de 144: {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144}

3.ª) **Número de divisores de um número.** — Mesmo não se conhecendo todos os divisores de um número, você pode determinar o *número* (total) *dêles*, com a seguinte *regra*, fàcilmente justificável:

"O número (total) de divisores de um número é obtido somando 1 a cada expoente de seus fatôres primos (na fatoração completa) e multiplicando os resultados encontrados".

Exemplos: Determinar o número de divisores de:

1.º) 60

Como: $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

$$\text{temos} \begin{cases} \text{os expoentes são: } 2 \quad 1 \quad 1 \\ \text{aumentando 1: } 3 \quad 2 \quad 2 \\ \text{e o produto: } 3 \times 2 \times 2 = \boxed{12} \end{cases}$$

dá o número (total) de divisores de 60 (já conhecidos em exercícios).

2.º) 189

Temos: $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$$\text{onde} \begin{cases} \text{os expoentes são: } 2 \quad 2 \quad 1 \\ \text{aumentando 1: } 3 \quad 3 \quad 2 \\ \text{e o produto: } 3 \times 3 \times 2 = \boxed{18} \end{cases}$$

dá o número (total) de divisores de 180.

A justificativa da regra aplicada decorre do fato de que o aumento do expoente de cada fator primo de *uma unidade*, corresponde aos fatôres de expoente zero (2^0, por exemplo) que participam do cálculo dos divisores de um número. O produto dos resultados encontrados representará o total de divisores procurados.

Observação: Podemos, reciprocamente, determinar números *que tenham um dado número de divisores*. Seja, por exemplo, determinar um número que tenha 45 divisores.

Você vai notar que muitos números respondem à questão.

Decompondo o 45 em seus fatôres primos (fatoração completa), temos:

$$45 = 3^2 \times 5$$

ou

$$45 = 3 \times 3 \times 5$$

ou

$$45 = (\underset{\downarrow}{2}+1) \times (\underset{\downarrow}{2}+1) \times (\underset{\downarrow}{4}+1)$$

Então os números 2 2 4 representam os expoentes de três fatôres primos *quaisquer* diferentes, cujos produtos dão, respectivamente, os números que possuem 45 divisores.

Logo, você pode *escolher* uma *porção de números* que tenham 45 divisores.

Escolhendo, por exemplo, os três fatôres: 2, 3 e 5, vem:

$2^2 \times 3^2 \times 5^4 = 22.500$ (número que tem 45 divisores!)
ou $2^2 \times 3^4 \times 5^2 = 8.100$ (número que tem 45 divisores!)
ou $2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 3.600$ (número que tem 45 divisores!)

Escolha você, agora, outros três fatôres primos quaisquer e escreva os números que possuam êsses fatôres, na sua fatoração completa, e que tenham 45 *divisores*.

PENSANDO EM DIVISORES DE UM NÚMERO . . .

Você também pode determinar todos os divisores de um número "desenhando"(*).
Preste bem atenção! Seja, por exemplo, construir todos os divisores de 30 (que são oito).

Como: $30 = 2 \times 3 \times 5$

vamos usar três flechas, uma para cada fator primo: 2, 3 e 5 (de preferência de côres diferentes), indicando três direções diferentes a partir do 1, que é o primeiro divisor de qualquer número (fig. 40).

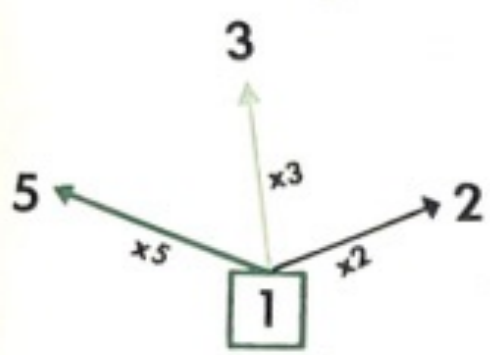


Fig. 40

A seguir traçam-se, pela extremidade de cada flecha, flechas respectivamente paralelas às outras duas, colocando nas respectivas extremidades os produtos obtidos pelas multiplicações do número da extremidade pelo número que representa cada uma das flechas iniciais. Êsse procedimento é feito até "fechar" a figura, que ocorre quando se obtém o número dado (que é o último divisor a se encontrar). No exemplo estudado os oito divisores de 30 são precisamente os "vértices" da figura desenhada (fig. 41).

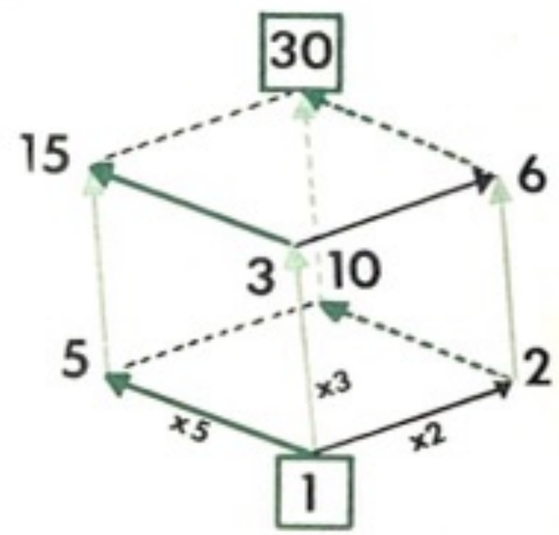


Fig. 41

Outro exemplo: determinar, "desenhando", todos os divisores de 60.

Temos: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

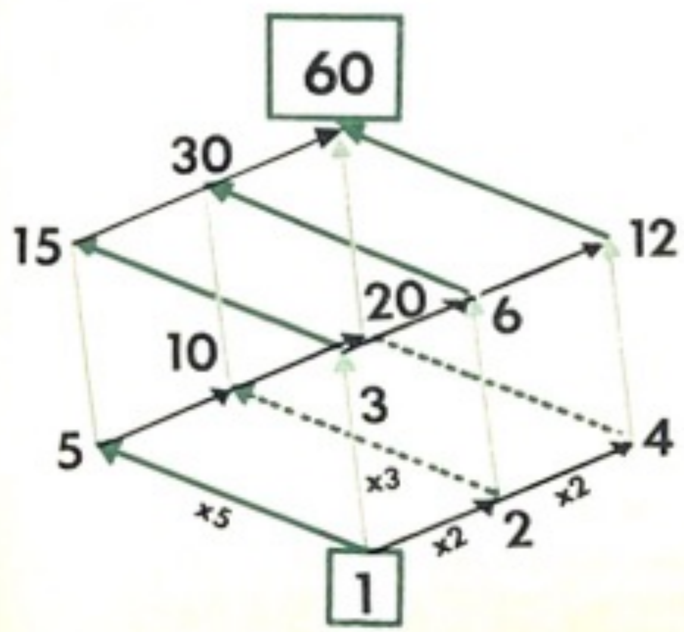


Fig. 42

Como, aqui, o fator 2 figura com expoente 2, então se usam, na *mesma direção, duas* flechas consecutivas e se procede da mesma forma na construção da figura (fig. 42).

Se aparecesse o expoente 3, seriam usadas *três flechas na mesma direção*, e assim por diante.

(*) Sugestão da Prof.ª Lucienne Félix, quando visitou o G.E.E.M. (S. Paulo).

NÚMEROS AMIGOS E NÚMEROS PERFEITOS

Você já conhece os números primos; conhece também os números primos entre si. Sabe que existem os números amigos e os números perfeitos?

Dois números são *amigos* quando a soma de todos os divisores de um dêles, com exclusão do próprio número, é igual ao outro e vice-versa.

Exemplo:

220 e 284 são amigos (verifique!!)

Um número é perfeito quando é igual à soma de seus divisores, com exclusão dêle próprio.

Exemplo: $6 = 1 + 2 + 3$

Seja você "amigo", agora, descobrindo um outro *número perfeito!*

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 53

1. Determinar qual o menor fator primo de cada um dos seguintes números:
   a) 125; *b*) 405; *c*) 1.964; *d*) 539; *e*) 121
2. Decompor em fatôres primos (fatoração completa) os seguintes números:
   68; 210; 243; 312; 540; 750; 1.001; 1.331; 5.250; 7.007; 14.157; 28.413; 12.349 e 256.000.
3. Decompor 144^2 em fatôres primos, sem calcular a potência.
4. Verificar se o número 1.280 é divisível por 32, usando a decomposição em fatôres primos.
5. Idem, para 2.016 e 48; 360 e 54.
6. Verificar se 180 é divisível por 15 e 12, sem efetuar a divisão.
7. Qual o menor número pelo qual se deve multiplicar 1.080 para se obter um número divisível por 252?
8. Idem, para os números 2.205 e 1.050.
9. Enunciar um critério de divisibilidade por 10, baseado na propriedade de dois números primos entre si.
10. Quais são os divisores e o número dêles dos seguintes números:
    68; 114; 148; 306; 581; 1.200; 1.331; 4.332.
11. Quantos divisores tem um número que apresenta a seguinte fatoração completa:
    a) $2^3 \times 3 \times 5^2$? *b*) $3^4 \times 5 \times 7^3$? *c*) 13?
12. Achar todos os divisores comuns dos números 630 e 990 (são comuns os divisores de 630 e 990, ao mesmo tempo).
13. Determinar um número qualquer com 15 divisores; e, depois, outro também com 15 divisores.
14. Qual é o menor número com 18 divisores?
15. Escrever um número que seja divisível por 8 e tenha 16 divisores.

16. Os divisores de 60 que são números compostos são ....

17. Determinar o valor de n para que: $2^n \times 3^2$ tenha 15 divisores.

18. Qual é o número: $2^3 \times 3^n$ que possui 12 divisores?

19. Determinar os números de 8 divisores cujos fatôres primos são 3 e 5.

20. Decompor em fatôres primos (fatoração completa) o número: 111.111 e depois, *sem repetir o processo*, decompor os números: 222.222 e 333.333.

Pensando em *divisores*, em números *amigos* e números *perfeitos*, procurar fazer os seguintes exercícios:

1.º) Construir "desenhando", todos os divisores dos números:
a) 27 *b*) 90 *c*) 105

2.º) Verificar se são "amigos" os números: 2.620 e 2.924.

3.º) Verificar se o número 28 é "perfeito".

TÁBUA DOS NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE 1.000

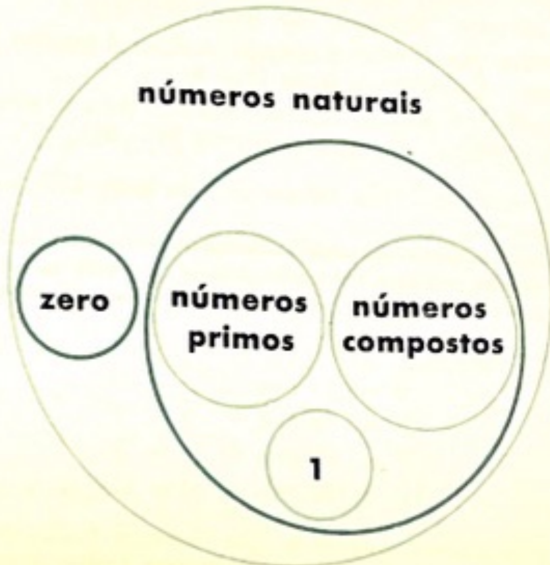
	43	107	181	263	349	433	521	613	701	809	887
2	47	109	191	269	353	439	523	617	709	811	907
3	53	113	193	271	359	443	541	619	719	821	911
5	59	127	197	277	367	449	547	631	727	823	919
7	61	131	199	281	373	457	557	641	733	827	929
11	67	137	211	283	379	461	563	643	739	829	937
13	71	139	223	293	383	463	569	647	743	839	941
17	73	149	227	307	389	467	571	653	751	853	947
19	79	151	229	311	397	479	577	659	757	857	953
23	83	157	233	313	401	487	587	661	761	859	967
29	89	163	239	317	409	491	593	673	769	863	971
31	97	167	241	331	419	499	599	677	773	877	977
37	101	173	251	337	421	503	601	683	787	881	983
41	103	179	257	347	431	509	607	991	797	883	991
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	997

Lembrando a Divisibilidade . . .

Assinalar com um X *a resposta certa:*
O conjunto dos divisores de 37 é:

a) vazio ☐
b) unitário ☐
c) {1, 37} ☐
d) infinito ☐
e) nenhuma das anteriores ☐

(Sugestão da 9.ª Inspetoria Regional — Campinas, à 1.ª OMESP, coordenada pela Prof.ª Cecília Natividade.)



$\sqrt{729}$ 27

técnica operatória da radiciação

raiz quadrada aproximada

12. *Potências e raízes exatas*

Lembre-se de que:

QUADRADO(*) é o número que se obtém quando se eleva à *segunda potência* qualquer número. *Exemplo:* 25 (pois $5^2 = 25$)

CUBO é o número que se obtém quando se eleva à *terceira potência* qualquer número. *Exemplo:* 8 (pois $2^3 = 8$)

QUARTA POTÊNCIA é o número que se obtém quando se eleva ao *expoente* 4 qualquer número. *Exemplo:* 81 (pois $3^4 = 81$).

e assim sucessivamente. Pelo estudo já feito (pág. 145) você guardou o seguinte resultado:

A tôda potência deve corresponder uma raiz exata.

Assim, por exemplo:

$$5^2 = 25 \iff \sqrt{25} = 5$$
$$2^3 = 8 \iff \sqrt[3]{8} = 2$$
$$3^4 = 81 \iff \sqrt[4]{81} = 3$$
$$12^2 = 144 \iff \sqrt{144} = 12$$

A raiz exata correspondente a uma potência pode ser determinada usando-se a *decomposição de um número em seus fatôres primos* (fatoração completa). De fato, seja por exemplo a igualdade:

$$\sqrt{144} = 12$$

(*) Não é necessário dizer quadrado *perfeito*.

Fatorando, completamente, os números 144 e 12, temos (sendo: $144 = 2^4 \times 3^2$ e $12 = 2^2 \times 3^1$) ainda a igualdade:

$$\sqrt{2^4 \times 3^2} = 2^2 \times 3^1$$

O que você está observando agora? É fácil ver que os *fatôres primos* de 144 e de 12 são os MESMOS. Note mais: os expoentes (2 e 1) que figuram nos fatôres da raiz podem ser obtidos *dividindo por* 2 (que é o índice do radical, por se tratar de raiz quadrada), os expoentes (4 e 2) dos fatôres do radicando. Logo, para se extrair a raiz quadrada de um número quadrado pode-se:

1.º) *fatorar* completamente o número dado;

2.º) *dividir por* 2 todos os expoentes dos fatôres primos;

3.º) *multiplicar* os resultados obtidos.

Assim, por exemplo, para extrair a raiz quadrada de 144 (que é um quadrado), procedemos:

1.º) $144 = 2^4 \times 3^2$

2.º) $\sqrt{144} = \sqrt{2^4 \times 3^2} = 2^2 \times 3^1$

3.º) $\sqrt{144} = \boxed{12}$

Logo: $\sqrt{144} = \sqrt{2^{\overset{:2}{4}} \times 3^{\overset{:2}{2}}} = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = \boxed{12}$

Êsse processo é *geral* para a extração da raiz de ordem qualquer, desde que os expoentes dos fatôres primos da decomposição sejam divisíveis pelo índice do radical.

Exemplos:

1.º) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^{\overset{:4}{4}}} = 2^1 = 2$

2.º) $\sqrt[3]{2^{\overset{:3}{6}}} = 2^2 = 4$

3.º) $\sqrt[3]{4.096} = \sqrt[3]{2^{\overset{:3}{6}} \times 4^{\overset{:3}{3}}} = 2^2 \times 4^1 = 4 \times 4 = \boxed{16}$

Como você deverá estar prevendo, *não é possível* extrair-se a *raiz exata* de um número que não seja uma *potência*. Aliás, fato semelhante já ocorreu com as outras *operações inversas* já estudadas, pois a *subtração* de dois números não era possível quando o primeiro dêles era *menor* que o segundo, nem a *divisão* entre dois números era possível se o primeiro dêles não fôsse *múltiplo* do segundo. Por isso é que dizíamos que o conjunto dos números naturais é NÃO-FECHADO em relação às operações: *subtração* e *divisão*.

13. *Prática de extração de raiz quadrada por aproximação; resto*

Sendo a *extração da raiz quadrada* uma das operações que você, com mais freqüência, usará no Ginásio, vamos estudá-la no caso de o número, com o qual vai operar, não ser um quadrado, pois para êste caso já conhecemos processo geral de extração (fatoração completa).

Então, no caso de o número dado *não ser quadrado*, a extração da raiz quadrada será denominada *por aproximação*. Estudaremos o caso da *aproximação por falta*, A MENOS DE UMA UNIDADE, isto é, será considerado o *maior número* cujo *quadrado* esteja *contido* no número dado. O êrro cometido será *menor* que uma unidade e a diferença entre o número dado e o maior quadrado nêle contido chama-se RESTO da raiz quadrada.

Destaquemos os casos:

I) *o número não ultrapassa 100:* a extração da raiz quadrada (exata ou aproximada) será feita de *memória*, pois basta lembrar que os quadrados dos números:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 são, respectivamente:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100(*)

e, portanto:

$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{49} = 7$ $\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{18} = 4$ (*aproximada* por falta)

$\sqrt{63} = 7$ (*aproximada* por falta)

II) *o número é maior que 100:* nesse caso vale a seguinte regra, que será exposta em parte, num exemplo, e justificada a seguir. Seja extrair a raiz quadrada de 731. Temos os seguintes "passos" como técnica de extração:

1.°) Decompomos o número em grupos de dois algarismos, a partir da direita, podendo o último grupo conter um único algarismo; a cada grupo separado corresponde um algarismo na raiz. Então: 7.31 → a raiz possui *dois* algarismos (um para cada grupo).

(*) Observe que a *terminação* de um número quadrado só pode ser: 1, 4, 9, 6, 5, 00.

2.°) Extraímos a raiz quadrada aproximada, por falta (se não fôr quadrado), do último grupo (no exemplo: 7), encontrando o *primeiro algarismo da raiz*. Êste no exemplo é 2.

3.°) Subtraímos do primeiro grupo o quadrado do número encontrado ($2^2 = 4$) e à direita do resto (3) "baixamos" o segundo grupo (31), separando com um ponto o *último* algarismo da direita. Logo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7.31} & 2 \\ 4 & \\ \hline 33.1 & \end{array}$$

4.°) Duplicamos o número da raiz ($2 \times 2 = 4$) escrevendo-o na linha logo abaixo da raiz e dividimos, por êsse número, o número que permaneceu à esquerda do ponto (33); o quociente aproximado obtido (8) escreve-se à direita daquele dôbro e, a seguir, multiplicamos o número assim formado (48) pelo mesmo quociente (8). Temos então:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7.31} & \times 2 \quad 2 \\ 4 & \quad 48 \times 8 = 384 \\ \hline 33.1 & \quad 33 \,\underline{|\,4} \\ & \qquad\; 8 \end{array}$$

NOTA: Se o quociente obtido é igual ou maior que 10, escreve-se 9; se é menor que 1, escreve-se 0.

5.°) Se fôr possível subtrair o produto obtido (384) do número (331), o quociente encontrado (8) será o *segundo* algarismo da raiz; caso contrário, diminuímos o quociente de uma unidade até que se encontre um produto que torne possível tal subtração. No exemplo, 384 não pode ser subtraído de 331; então, ao invés de 8, usaremos 7 como quociente. Agora: $47 \times 7 = 329$ já pode ser subtraído de 331, e a raiz procurada (aproximada) é 27, sendo o *resto* 2. Logo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7.31} & 27 \\ 4 & \overline{47} \\ \hline 33.1 & \;\;7 \times \\ 32\,9 & \overline{329} \\ \hline \text{resto } \rightarrow 2 & \end{array}$$

$\sqrt{731} = 27$ (*aproximada* por falta) Prova: $27 \times 27 = 729$

resto: 2 $729 + 2 = \boxed{731}$

Observações:

1.ª) Se o número dado possui mais algarismos, continua-se aplicando o mesmo processo;

2.ª) o resto da raiz quadrada pode ser *menor*, *igual* à raiz e *no máximo igual ao dôbro da raiz*; se o resto é zero, a raiz encontrada é *exata* e o número proposto é um *quadrado*.

Outros exemplos:

1)
```
√1.44 | 12
 1    | 22×2 = 44
 04.4 | ↗
  4 4 |   4 |2
  0 0 |        2
```

2)
```
√13.75 | 37
  9    | 67×7 = 469
  47.5 | ↗
  46 9 |   46 |6
     6 |         7
```

Logo: $\sqrt{144} = \boxed{12}$ (exata)   Logo: $\sqrt{1.375} = \boxed{37}$ (aprox.)

resto: 6

3)
```
√16.16.84 | 402
 16       | 80×0 = 0
  01.6    | .........
   168.4  |
   160 4  | 802×2 = 1.604
      80  |
```

Logo: $\sqrt{161.684} = \boxed{402}$ (aprox.)

resto: 80

Justificação: Seja o exemplo inicial, 731. Sendo 731 um número maior que 100, sua raiz será um *número maior que* 10 e, portanto, conterá dezenas (□) e unidades (△), ou seja, será um número da forma:

$$10 \times \square + \triangle$$

A *sentença matemática* correspondente é:

$$\boxed{731 = (10 \times \square + \triangle)^2}$$

ou

$731 = (10 \times \square + \triangle)\ (10 \times \square + \triangle)$ ⟶ definição de quadrado

$731 = 10\times\square\times10\times\square+10\times\square\times\triangle+10\times\square\times\triangle+\triangle\times\triangle$ ⟶ produto de duas somas indicadas

$731 = (10 \times \square)^2 + 2 \times 10 \times \square \times \triangle + \triangle^2$ ⟶ definições de potência e produto

$731 = (10 \times \square)^2 + (20 \times \square + \triangle) \times \triangle$ ⟶ inversa da p. d. m. (a)

É preciso, agora, determinar os valôres de □ e △, a fim de conhecer a raiz quadrada de 731 (exata ou aproximada).

```
        □
       ↙
√7.3 1 | 2
 4 0 0 | 20×□+△=40+8
 3 3.1 | (20×□+△)△=48×8
       |    33 |4
       |         8
```

Como o número de centenas (7) do 731 deve *conter* o quadrado das dezenas ($\square^2$) da raiz (na disposição prática êste fato foi indicado separando-se os algarismos de 731 em grupos de dois), segue-se que □ pode ser, no máximo, 2, pois $2^2 = 4$, que está contido em 7. Em outras palavras, as 700 unidades das centenas do 731 contêm as 400 unidades correspondentes ao quadrado das 20 unidades das dezenas da raiz procurada (daí a subtração: 731 – 400, efetuada na disposição prática) e mais um resto (300), que juntamente com as outras 31 unidades devem ser distribuídas pelas outras partes que compõem o 731:

$$(20\times\square+\triangle)\triangle.$$

```
√7.3 1 | 2 7
 4     | (20×□+△)△=47×7
 3 3.1 |
 3 2 9 | 47×7=329
     2 |
```

Ora, dividindo 331 por $20\times\square+\triangle$ (que na disposição prática equivale a dividir 33 por $2\times\square$, que está representando o dôbro do primeiro algarismo da raiz), vamos encontrar, por aproximação, o △, que é o segundo algarismo da raiz. Então:

33 |4
    8,

e o número: $20\times\square+\triangle$, poderá ser: $40+8=48$ (essa é a razão por que se coloca o quociente 8 ao lado do dôbro do primeiro algarismo da raiz, que é 4). Logo, o produto:

$(20 \times \square + \triangle)\triangle$ será: $48 \times 8 = 384$ e, como é maior que 331, isto é, supera as unidades disponíveis, temos que tomar uma unidade a menos. Então: $\triangle = 7$, e teremos: $47 \times 7 = 329$, agora possível de ser subtraído de 331. O *resto*: 2, jamais poderá superar o número: $2 \times (10\times\square+\triangle)$ (que representa o *dôbro* da raiz), pois, caso contrário, o △ teria sido tomado, por engano, com uma unidade a menos de seu valor verdadeiro.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 54

1. Escrever as raízes (exatas) correspondentes às seguintes potências (como resultado da operação inversa):

   1.°) $4^2 = 16 \iff \sqrt{16} = 4$ (exemplo-modêlo)

   2.°) $2^5 = 32$ 3.°) $15^2 = 225$ 4.°) $3^3 = 27$ 5.°) $0^6 = 0$ 6.°) $1^5 = 1$

2. Preencher com um numeral que as torne verdadeiras as seguintes sentenças:

   1.°) $\sqrt{3^2} = \ldots$ 2.°) $\sqrt[4]{5^4} = \ldots$ 3.°) $\sqrt[3]{2^3} = \ldots$ 4.°) $\sqrt[5]{1^5} = \ldots$

3. Idem: 1.°) $\sqrt{5^{\ldots}} = 5$ 2.°) $^{\ldots}\sqrt{2^3} = 2$ 3.°) $\sqrt[4]{3^{\ldots}} = 3$ 4.°) $\sqrt[3]{8^3}\ldots$

4. Extrair a raiz quadrada (exata) dos seguintes números, usando a fatoração completa:

   1.°) 289   2.°) 1.024   3.°) 2.401   4.°) 7.225

   5.°) 11.664   6.°) 36.100   7.°) 88.209   8.°) 651.249

5. O dôbro do quadrado de um número é 288. Qual é êsse número?

6. Qual é o número cujo quadrado aumentado de 11 dá 300?

7. Calcular o valor de $\square$ nas seguintes sentenças matemáticas:

$$1.^a)\ \square^2 + 3 = 52$$
$$2.^a)\ 3 \times \square^2 = 147$$

8. O produto de dois números iguais é 484. Qual é êsse número?

9. Extrair a raiz quadrada aproximada, por falta, dos seguintes números:

1.º) 120	2.º) 315	3.º) 6.245	4.º) 9.712
5.º) 16.130	6.º) 57.164	7.º) 163.516	8.º) 654.482

10. Calcular com aproximação (por falta) o valor de $\square$ na sentença matemática:

$$2 \times \square^2 = 816$$

11. Determinar o número cuja raiz quadrada aproximada, por falta, é 13 e o resto 18.

12. Qual o menor número que se deve somar a 272 para se obter um quadrado?

PARA VOCÊ GUARDAR . . . .

Observe (êste é um fato importante!) que, aplicando a um certo número, qualquer das operações estudadas: adição, multiplicação e potenciação, e, a seguir, aplicando ao resultado a respectiva operação inversa: subtração, divisão e radiciação, você obterá o *próprio número. Exemplo:*

Vamos "operar" com o número 3. Temos:

1) SOMANDO 2 ao 3 e SUBTRAINDO 2 do resultado, obteremos o próprio 3:

$$(3+2) - 2 = 3$$

2) MULTIPLICANDO por 2 o 3 e DIVIDINDO o resultado por 2, obteremos o próprio 3:

$$(3 \times 2) : 2 = 3$$

3) ELEVANDO AO QUADRADO o 3 e EXTRAINDO A RAIZ QUADRADA do resultado, obteremos o próprio 3:

$$\sqrt{3^2} = 3$$

operações: maximação e minimação

Operação maximação (m. d. c.)

14. *Divisores comuns: intersecção de conjuntos finitos*

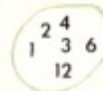
Quais são todos os *divisores de 8?* Você sabe que são: 1, 2, 4 e 8, isto é, formam o conjunto:

{1, 2, 4, 8}

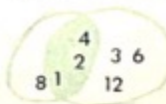
Quais são os divisores de 12?

São os elementos do conjunto:

{1, 2, 3, 4, 6, 12}



Quais são os **divisores comuns** de 8 e 12?



São aquêles que pertencem *ao mesmo tempo* aos dois conjuntos, ou seja, os que formam o conjunto:

{1, 2, 4}

que é o **conjunto-intersecção** dos dois conjuntos dados. Logo:

$$\{1, 2, 4, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{1, 2, 4\}$$

15. *Operação: maximação (ou máximo divisor comum); resultado: maior divisor comum*

Dos divisores *comuns* de dois (ou mais) números tem muita importância o *maior* dêles. Assim, no exemplo considerado dos divisores comuns: {1, 2, 4}, o *maior* dêles é o 4 (*maior* elemento do conjunto-intersecção).

A *operação* que permite determinar o *maior divisor comum* de dois (ou mais) números é denominada *maximação*. Indicação:

m.d.c. (8, 12) = 4

ou 8D12 = 4

Êrro comum: Confundir *maximação*, que é uma OPERAÇÃO(*), com *maior divisor comum*, que é o RESULTADO da operação.

Consideremos outros exemplos da *operação maximação:*

1. Determinar o *maior divisor comum* dos números 12 e 18.

   Temos: divisores de 12: {1, 2, 3, 4, 6, 12}
   divisores de 18: {1, 2, 3, 6, 9, 18}

   divisores comuns: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \{1, 2, 3, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{maior divisor comum}}}{6}\}$

   Logo: 12D18 = 6

2. Determinar o *maior divisor comum* dos números 4 e 5.

   Temos: divisores de 4: {1, 2, 4}
   divisores de 5: {1, 5}

   divisores comuns: $\{1, 2, 4\} \cap \{1, 5\} = \{1\}$ (*único* divisor *comum* e *maior*)

   Logo: 4D5 = 1

OBSERVAÇÃO: Outra maneira de você dizer que dois números são *primos entre si* (4 e 5, por exemplo) é dizer que o *maior divisor comum* entre êles é 1 (4D5 = 1, no exemplo).

3. Determinar o *maior divisor comum* dos números: 18, 24 e 30.

   Temos:

   divisores de 18: {1, 2, 3, 6, 9, 18}
   divisores de 24: {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
   divisores de 30: {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}

(*) O nome *maximação* decorre do fato de tôdas as demais operações estudadas possuírem em seus nomes a terminação *ão* (adição, subtração, multiplicação, divisão, ...).

Inicialmente, você determina a intersecção dos dois primeiros conjuntos, isto é, o conjunto dos *divisores comuns* de 18 e 24:

$$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

A seguir, a intersecção do conjunto obtido com o terceiro conjunto, isto é:

$$\{1, 2, 3, 6\} \cap \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

Logo: m.d.c. (18, 24, 30) = 6

ou 18D24D30 = 6

OBSERVAÇÃO: Você obterá o *mesmo resultado* se efetuar a intersecção do primeiro conjunto com o conjunto-intersecção dos dois últimos. Portanto, a operação *maximação* é associativa, ou seja:

(18D24)D30 = 18D(24D30) Verifique!

> NOTA IMPORTANTE: *Lembre-se de que agora você está aprendendo o conceito da operação maximação*, ou seja, que tipo de operação é!
>
> A técnica de cálculo para efetuá-la, que você já conhece desde a Escola Primária, será refeita neste livro depois que fôr entendida a *operação* e suas *propriedades*. Por isso, não se preocupe em pensar como deveria agir para determinar o *maior divisor comum* de números "grandes" usando a intersecção. O mesmo ocorreu, por exemplo, quando você estudou a operação *multiplicação*, onde: 4 × 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20, foi calculado usando o *conceito* da operação, enquanto que 835 × 137, por exemplo, foi calculado com técnica de cálculo, por todos conhecida (como você fazia no Grupo Escolar).

Operação minimação (m.m.c.)

16. *Múltiplos comuns: intersecção de conjuntos infinitos*

Com exceção do *zero*, que é *múltiplo* de *todos os números*, qual é o conjunto dos múltiplos de 4?

É: {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...} (lembre-se de que é um conjunto infinito!

E o conjunto dos múltiplos de 6?

É: {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...} (idem)

Os múltiplos comuns de 4 e 6 são aquêles que pertencem, *ao mesmo tempo*, aos dois conjuntos e, portanto, formam o conjunto-intersecção:

$$\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \ldots\} \cap \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \ldots\} = \{12, 24, \ldots\}$$

Como você está observando, o conjunto dos *múltiplos comuns* de dois números é *infinito*, isto é, vai crescendo cada vez mais. Daí o fato de *não existir* o "maior múltiplo comum"; existe, porém, o menor múltiplo comum.

17. *Operação: minimação (ou mínimo múltiplo comum); resultado: menor múltiplo comum*

O nome já está "dizendo": o *menor* dos múltiplos comuns de dois ou mais números é denominado MENOR MÚLTIPLO COMUM dêsses números. Assim, no exemplo acima, o menor dos múltiplos *comuns* dos números 4 e 6 é o 12 (o *menor* elemento do conjunto-intersecção).

A *operação* que permite determinar o *menor múltiplo comum* de dois (ou mais) números é denominada *minimação.* Indicação:

$$\text{m.m.c. } (4,\ 6) = 12$$

ou

$$4M6 = 12$$

Êrro comum: Confundir *minimação*, que é uma OPERAÇÃO, com *menor múltiplo comum*, que é o RESULTADO da operação.

Consideremos outros exemplos da *operação minimação* no conjunto-universo dos *números naturais:*

1. Determinar o *menor múltiplo comum* dos números 4 e 5.

Temos:

múltiplos de 4: $\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24, \ldots\}$
múltiplos de 5: $\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30, \ldots\}$

$$\text{múltiplos comuns: } \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\} \cap \{5, 10, 15, 20, 25, \ldots\} = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{menor múltiplo comum}}}{20},\ 40, \ldots\}$$

Logo: $4M5 = 20$ ou m.m.c. $(4,\ 5) = 20$.

OBSERVAÇÃO: Repare que os números 4 e 5, *primos entre si*, têm por *menor múltiplo comum* o produto dêles, isto é, $4M5 = 20$

2. Determinar o *menor múltiplo comum* de 4, 6 e 8. Temos:

múltiplos de 4: $\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28, \ldots\}$
múltiplos de 6: $\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42, \ldots\}$
múltiplos de 8: $\{8,\ 16,\ 24,\ 32,\ 40,\ 48,\ 56, \ldots\}$

A primeira *intersecção* dá os múltiplos comuns de 4 e 6:

$$\{4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\} \cap \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\} = \{12, 24, \ldots\}$$

A seguir, a *intersecção* do conjunto obtido com o terceiro conjunto dará:

$$\{12,\ 24, \ldots\} \cap \{8,\ 16,\ 24,\ 32, \ldots\} = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{menor múltiplo comum}}}{24},\ 48, \ldots\}$$

Logo: m.m.c. $(4,\ 6,\ 8) = 24$ ou $4M6M8 = 24$

OBSERVAÇÃO: A operação minimação é também *associativa*, isto é:

$(4M6)M8 = 4M(6M8)$ Verifique!

ATENÇÃO:

> **Vale a mesma nota importante escrita para a operação *maximação*, isto é, você está conhecendo, agora, o conceito da operação *minimação*. Depois, verá a técnica de cálculo dessa operação!**

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 55

1. Escrever o conjunto dos *divisores* dos seguintes números:
   1.°) 6 2.°) 12 3.°) 15 4.°) 8 5.°) 36 6.°) 21 7.°) 48 8.°) 50
2. Calcular (usando a *intersecção*) o conjunto dos *divisores comuns* dos seguintes números:
   1.°) 6 e 26 2.°) 8 e 6 3.°) 6, 8 e 12 4.°) 21, 36 e 48
3. Valendo-se dos resultados anteriores, dizer qual é o *maior divisor comum* dos números dos exercícios 1.°), 2.°), 3.°) e 4.°) do 1?
4. Dizer qual é o *maior divisor comum* dos seguintes números:
   1.°) 8 e 8 2.°) 1 e 8 3.°) 8 e 1 4.°) 3 e 4 5.°) 4 e 3 6.°) 8 e 4
5. Efetuar: 1.°) 17D2 (o mesmo que m.d.c. (17, 2))
   2.°) 4D6D8 3.°) 8D12D16D28
6. Escrever o conjunto dos *múltiplos* dos seguintes números (lembre-se de que são conjuntos infinitos!):
   1.°) 5 2.°) 4 3.°) 8 4.°) 12 5.°) 10 6.°) 6 7.°) 18 8.°) 20
7. Escrever o conjunto dos múltiplos, *menores* que 50, dos seguintes números (agora os conjuntos são finitos!):
   1.°) 5 2.°) 8 3.°) 10 4.°) 18

8. Calcular (usando a *intersecção*) o conjunto dos *múltiplos comuns* dos números seguintes:
   1.º) 5 e 4   2.º) 5 e 10   3.º) 8 e 12   4.º) 6, 12 e 18
9. Valendo-se dos resultados do Exercício 8, dizer qual é o *menor múltiplo comum* dos números dos exercícios 1.º), 2.º), 3.º) e 4.º).
10. Determinar a *intersecção* dos seguintes conjuntos:
    1.º) conj. dos múltiplos de 3 com o conj. dos múltiplos de 9 menores que 36;
    2.º) conj. dos números pares com o conj. dos múltiplos de 5 menores que 35;
    3.º) conj. dos números pares com o conj. dos números ímpares.
11. Dizer qual é o *menor múltiplo comum* dos seguintes números:
    1.º) 8 e 8   2.º) 1 e 8   3.º) 8 e 1   4.º) 3 e 4   5.º) 4 e 3   6.º) 8 e 4
12. Efetuar: 1.º) 18M12 (mesmo que m.m.c. (18, 12))
    2.º) 2M5M6   3.º) 3M8M12M4

Propriedades estruturais das operações maximação e minimação

Você acabou de estudar mais duas *operações:* maximação e minimação, cujos conceitos foram fixados através da linguagem de *intersecção de conjuntos.*

É natural — como aliás aconteceu com as demais operações estudadas — que, operando com números "maiores" que os apresentados nos exemplos, você conheça uma *técnica de cálculo* que facilite a obtenção dos *resultados* dessas operações. No caso das operações maximação e minimação, essas técnicas (baseadas na decomposição em fatôres primos), conhecidas desde a Escola Primária, serão reestudadas a seguir.

Antes, porém, cabe uma pergunta:

As operações maximação e minimação, definidas no conjunto-universo dos números naturais, gozam das mesmas propriedades estruturais(*) (fechamento, comutativa, elemehto neutro, . . .) *válidas para as operações já estudadas* (adição, multiplicação)?

Resposta: SIM, também gozam das mesmas propriedades estruturais! Observe:

Propriedades da operação maximação (m.d.c.) (conjunto-universo: *N*)

1.ª) FECHAMENTO: o *maior divisor comum* de dois números naturais *quaisquer* é *sempre* um número natural.

Exemplo:

4D6 = 2
↙ ↓ ↘
natural natural natural

(*) Nesse estudo se está *estendendo* a definição do *maior divisor comum* de dois números ao caso excepcional de ambos serem nulos, colocando-se POR DEFINIÇÃO: 0D0 = 0 (Ver *Elementos de Álgebra*, de L. H. JACY MONTEIRO, Publicação do IMPA, Conselho Nacional de Pesquisas).

2.ª) COMUTATIVA: a *ordem* dos números *não altera* o *maior divisor comum* entre êles.

Exemplo:

4D6 = 6D4 (Verifique você mesmo!)

3.ª) ELEMENTO NEUTRO: 0, pois: 4D0 = 0D4 = 4 (lembre-se de que 0 é divisível por todos os números naturais e, portanto, pelo 4)

4.ª) ASSOCIATIVA: (4D6)D8 = 4D(6D8) (É fácil verificar . . .)

OBSERVAÇÃO: Como aplicação do *elemento neutro*, se o 0 figurar, juntamente com outros números, pode-se desprezá-lo na operação maximação. *Exemplo:*

m.d.c. (8, 6, 0, 12) = m.d.c. (8, 6, 12).

Propriedades da operação minimação(*) *(m.m.c.)* (conjunto-universo: *N**)

1.ª) FECHAMENTO: o *menor múltiplo comum* de dois números naturais *quaisquer* é sempre um número natural.

Exemplo:

4M6 = 12
↙ ↓ ↘
natural natural natural

2.ª) COMUTATIVA: a *ordem* dos números *não altera* o menor múltiplo comum entre êles.

4M6 = 6M4 (Verifique você mesmo!)

3.ª) ELEMENTO NEUTRO: 1, pois: 4M1 = 1M4 = 4 (lembre-se de que o 1 é divisor de todos os números naturais e, portanto, de 4)

4.ª) ASSOCIATIVA: (4M6)M8 = 4M(6M8) (É fácil verificar . . .)

OBSERVAÇÃO: Como aplicação do *elemento neutro*, se o 1 figurar, juntamente com outros números, pode-se desprezá-lo na operação minimação. *Exemplo:*

m.m.c. (8, 6, 1, 12) = m.m.c. (8, 6, 12).

Propriedade DISTRIBUTIVA *que relaciona as duas operações:*

1.ª) Propriedade DISTRIBUTIVA do D em relação ao M:

8D(4M3) = (8D4)M(8D3) (Faça você os cálculos e verifique que essa sentença é verdadeira)

2.ª) Propriedade DISTRIBUTIVA do M em relação ao D:

8M(4D3) = (8M4)D(8M3)

NOTA CURIOSA: Repare bem que a propriedade DISTRIBUTIVA vale tanto de D para M como de M para D!

(*) Associando-se a operação *minimação* (M) à operação *reunião*, obtém-se a importante *estrutura do reticulado*.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 56

1. Nas seguintes igualdades dizer qual a *operação* indicada e o nome do *resultado:*
   1.ª) 8D36 = 4 2.ª) 5M20 = 20

2. Dizer as *propriedades* que estão sendo aplicadas em:
   1.ª) 6D4 = 2
   2.ª) 12D8 = 8D12
   3.ª) 1M5 = 5
   4.ª) (4D8)D7 = 4D(8D7)
   5.ª) 3M4 = 4M3
   6.ª) 6M4 = 12
   7.ª) 9D0 = 9
   8.ª) 6D(8M5) = (6D8)M(6D5)
   9.ª) (12M5)M3 = 12M(5M3)
   10.ª) 7M(6D8) = (7M6)D(7M8)

3. Se 1D1 = 1, 2D2 = 2, 3D3 = 3, ... então $a\text{D}a$ = ...

4. Verificar se é *V* ou *F* (assinale ao lado):
   1.ª) O maior divisor comum de 21 e 7 é a unidade.
   2.ª) O menor múltiplo comum entre 0 e 4 é 0.
   3.ª) O conjunto dos divisores de 12 é *fechado* em relação à operação D.

5. Colocar, convenientemente, os parênteses ("pontuar"), a fim de tornar verdadeiras as seguintes sentenças:
   1.ª) 4D2M6 = 2 2.ª) 4D2M6 = 6

Técnicas de cálculo para a determinação do m.d.c. e m.m.c.; conseqüências e aplicações

I. Operação maximação (m.d.c.)

18. *Determinação do maior divisor comum por fatoração completa*

1.º) Decompõem-se os números em seus fatôres primos (fatoração completa);

2.º) Multiplicam-se os fatôres primos *comuns* tomados com seus *menores* expoentes; o produto dêles é o maior divisor comum.

Exemplos:

1. Efetuar o m.d.c. (18, 24, 30)

Como:

$$\left.\begin{aligned} 18 &= 2^1\times3^2 \\ 24 &= 2^3\times3^1 \\ 30 &= 2^1\times3^1\times5 \end{aligned}\right\} \to \text{fatôres primos } \textit{comuns} \text{ (2 e 3) com os } \textit{menores} \text{ expoentes: } 2^1 \text{ e } 3^1$$

Logo: m.d.c. (18, 24, 30) = $2^1\times3^1 = \boxed{6}$

2. Efetuar o m.d.c. (693, 108, 90)

Como:

$$\left.\begin{aligned} 693 &= 3^2\times7^1\times11^1 \\ 108 &= 2^2\times3^3 \\ 90 &= 2\times3^2\times5 \end{aligned}\right\} \to \text{fatôres primos } \textit{comuns} \text{ (o único é o 3) com os } \textit{menores} \text{ expoentes: } 3^2$$

Portanto: m.d.c. (693, 108, 90) = $3^2 = \boxed{9}$

19. *Determinação do maior divisor comum por divisões sucessivas; disposição prática de Euclides*

Pode-se, também, determinar o m.d.c. de dois números dividindo-se o maior pelo menor; se a divisão fôr exata, o maior divisor comum será o *menor* dêles. Se a divisão não fôr exata, divide-se o menor pelo resto e assim sucessivamente. O *último divisor* será o maior divisor comum.

Êste é o processo que você conhece desde o Curso Primário, não é?

Essas divisões você as fazia, usando um dispositivo prático atribuído a *Euclides*, que foi um dos mais notáveis matemáticos gregos da Antiguidade.

Exemplo:

1. Efetuar o m.d.c. (693, 108, 90)

Primeiramente podemos achar o maior divisor comum entre 693 e 108:

	6	2	2	2
693	108	45	18	$\boxed{9}$
45	18	9	0	

e, a seguir, determinamos o maior divisor comum de 90 e o primeiro resultado encontrado: 9. Logo:

	10
90	$\boxed{9}$
0	

Portanto: m.d.c. (693, 108, 90) = $\boxed{9}$.

2. Efetuar o m.d.c. (4, 5)

Temos:

	1	4
5	4	$\boxed{1}$
1	0	

Logo: m.d.c. (4, 5) = $\boxed{1}$

20. *Conseqüências*

1.º) *O maior divisor comum de dois números, em que o maior é divisível pelo menor, é o* MENOR.

Exemplo:

m.d.c. (8, 4) = 4 (bem natural, pois o menor é *fator* do maior)

2.º) *O maior divisor comum de dois números primos entre si é* 1.

Exemplo:

m.d.c. (4, 5) = 1 (já vimos que o 1 é o único fator e é o maior)

3.º) *Os divisores comuns de vários números são divisores de seu maior divisor comum.* De fato, os divisores comuns de vários números são constituídos de fatôres primos comuns que, necessàriamente, devem figurar no maior divisor comum.

Exemplo:

Determinar os divisores comuns de 48 e 60.

Como: m.d.c. (48, 60) = 12, os divisores comuns de 48 e 60 são, lògicamente, os divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

4.º) *Multiplicando ou dividindo dois ou mais números por um certo número* (diferente de zero), *seu maior divisor comum ficará multiplicado ou dividido por êsse número.* Com efeito, multiplicando os números dados por um certo número, você introduzirá novos fatôres que, forçosamente, figurarão no maior divisor comum.

Exemplo:

Como: m.d.c. (18, 12) = 6, multiplicando 18 e 12 por 2, obteremos:

m.d.c. (18×2, 12×2) = 6×2 (Verifique!)

No caso de você *dividir* os dois números pelo próprio *maior divisor comum* dêles (no exemplo: 6), então os quocientes que você obterá serão *primos entre si*, pois: m.d.c. (18 : 6, 12 : 6) = 6 : 6 = 1.

Esta conseqüência é aplicada para simplificar o *cálculo*. Assim, por exemplo: efetuar o m.d.c. (1.200, 1.800) é o mesmo que efetuar o m.d.c. (12, 18) = 6, e a seguir multiplicar 6 por 100, isto é:

m.d.c. (1.200, 1.800) = 600

21. *Aplicações em exercícios diversos*

1. Determinar os dois *menores* números pelos quais *devemos* dividir 144 e 160, a fim de obter *quocientes iguais*.

Primeiramente determina-se o maior divisor comum de 144 e 160, isto é: m.d.c. (144, 160) = 16.

Como: 144 : 16 = 9 e, sendo 16 o *maior* divisor de 144, o *menor* quociente será 9;

160 : 16 = 10; também 16 é o *maior* divisor de 160 e, portanto, o *menor* quociente será 10.

Logo, os números procurados são: 9 e 10, pois $\begin{cases} 144 : 9 = 16 \\ 160 : 10 = 16 \end{cases}$

2. Na procura do maior divisor comum de dois números, pelo processo das divisões sucessivas, encontrei os quocientes 1, 2 e 6 e os restos 432, 72 e 0, respectivamente. Determinar os dois números.

O exercício tem o seguinte "esquema":

	1	2	6
?	?	432	72
432	72	0	

Procedendo na ordem inversa da que se emprega no método das divisões sucessivas, o 72, por ser o penúltimo resto (o último é o 0), é o maior divisor comum dos números procurados. Logo:

$2 \times 432 + 72 = 936$ (que é o segundo número procurado)
$1 \times 936 + 432 = 1.368$ (que é o primeiro número procurado)

3. Um terreno de forma retangular tem as dimensões: 24m de frente e 56m de fundo. Qual deve ser o comprimento do *maior* cordel que sirva para medir *exatamente* as duas dimensões?

Como: m.d.c. (56, 24) = 8, segue-se que o *maior* cordel que pode ser usado para medir o terreno deve ter 8m, pois 8 é o *maior divisor comum* de 56 e 24.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 57

1. Dos divisores comuns aos números 48 e 72, determinar (usando *qualquer* processo ensinado):
   1.º) os pares; 2.º) os múltiplos de 3; 3.º) o *maior* dêles
2. Efetuar (usando as *técnicas de cálculo* ensinadas):
   1.º) m.d.c. (120, 384); 2.º) m.d.c. (3.600, 4.050); 3.º) m.d.c. (185, 222, 259); 4.º) m.d.c. (128, 136, 256, 440); 5.º) m.d.c. (1.000, 100, 10).
3. Usando as *conseqüências* estudadas, efetuar:
   1.º) m.d.c. (48, 2); 2.º) m.d.c. (7, 9); 3.º m.d.c. (1.200, 60, 30); 4.º) m.d.c. (15, 26, 29); 5.º) m.d.c. (12, 4, 0).
4. Encontrar todos os números compreendidos entre 100 e 500 que tenham 102 por *maior divisor comum*.

5. Na procura do maior divisor comum de dois números, pelo método das divisões suecssivas, encontrei os quocientes 1, 3 e 2, e os restos 48, 24 e 0, respectivamente. Quais são êsses dois números?

5. Calcular os dois menores números pelos quais devemos dividir 180 e 204, a fim de que os quocientes sejam iguais.

7. Determinar os divisores comuns dos números 80 e 130 que sejam múltiplos comuns de 5 e 10.

8. Dados dois números: 182 e 238, verificar que o maior divisor comum dêles é também o maior divisor comum entre o menor (182) e a sua diferença (238 - 182 = 56).

9. Quer-se dividir três peças de fazenda que medem, respectivamente, 90, 108 e 144 metros, em partes iguais e do *maior tamanho possível*. Determinar o número das partes de cada peça e o comprimento do maior tamanho.

10. Deseja-se circundar de árvores, plantadas a *maior distância comum*, um terreno de forma quadrilátera. Quantas árvores são necessárias, se os lados do terreno medem, respectivamente, 3.150m, 1.980m, 1.512m e 1.890m?

LEMBRETE AMIGO

Não se esqueça de que o maior divisor comum de dois números primos entre si é 1; e que o de dois números em que o maior é divisível pelo menor é o MENOR.

II. Operação minimação (m.m.c.)

22. *Determinação do menor múltiplo comum por fatoração completa*

1.º) Decompõem-se os números em seus fatôres primos (fatoração completa).

2.º) Multiplicam-se todos os fatôres primos (comuns e não-comuns) considerados, cada um, com seu *maior* expoente; o produto dêles é o *menor múltiplo comum.*

Esta *regra* é ràpidamente justificada, desde que você lembre o seguinte fato: um número para ser *múltiplo comum de outros* deve possuir, *pelo menos*, os fatôres dêsses outros.

Exemplos:

1. Efetuar o m.m.c. (4, 6, 8)

Como:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 6 = 2^1\times 3^1 \\ 8 = 2^3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{fatôres primos comuns (maiores expoentes): } 2^3 \\ \rightarrow \text{fatôres primos não-comuns (maiores expoentes): } 3^1 \end{array}$$

Logo: m.m.c. (4, 6, 8) = $2^3\times 3^1 = 8\times 3 = \boxed{24}$

Êsse cálculo pode ser efetuado com um *dispositivo prático*, que você emprega há muito tempo:

$$\begin{array}{r|l} 4,\ 6,\ 8 & 2 \\ 2,\ 3,\ 4 & 2 \\ 1,\ 3,\ 2 & 2 \\ 1,\ 3,\ 1 & 3 \\ \hline 1,\ 1,\ 1 & 2^3\times 3 = 8\times 3 = 24 \end{array}$$

Logo: m.m.c. (4, 6, 8) = $\boxed{24}$

2. Efetuar o m.m.c. (4, 5). Temos:

$$\begin{array}{r|l} 4,\ 5 & 2 \\ 2,\ 5 & 2 \\ 1,\ 5 & 5 \\ \hline 1,\ 1 & 2^2\times 5 = 4\times 5 = 20 \end{array}$$

Logo: m.m.c. (4, 5) = $\boxed{20}$

23. *Determinação do menor múltiplo comum usando relação existente entre as operações maximação e minimação*

Outra técnica de cálculo que serve para a determinação do menor múltiplo comum de dois números é a que decorre da seguinte relação: *"O produto de dois números é igual ao produto do seu maior divisor comum pelo seu menor múltiplo comum".*

De fato, sejam por exemplo os números: 12 e 15, onde $\begin{cases} 12 = 2^2\times 3^1 \\ 15 = 3^1\times 5^1 \end{cases}$

Como: $\begin{cases} \text{m.d.c. } (12,\ 15) = 3^1 \\ \text{m.m.c. } (12,\ 15) = 2^2\times 3^1\times 5^1 \end{cases}$

e o produto: $12\times 15 = (2^2\times 3^1)\times(3^1\times 5^1) = \underset{\text{maior divisor comum}}{3^1}\times\underbrace{(2^2\times 3^1\times 5^1)}_{\text{menor múltiplo comum}} \begin{cases} \text{p.c.m.} \\ \text{p.a.m.} \end{cases}$

temos que: m.d.c. (12, 15) × m.m.c. (12, 15) = 12×15

relação que permite concluir:

$$\boxed{\text{m.m.c. } (12,\ 15) = (12\times 15)\text{: m.d.c. } (12,\ 15)}$$

Exemplo:

Determinar o *menor múltiplo comum* de 12 e 15, por intermédio da operação que permite achar o m.d.c. (12, 15).

Temos: Sendo o m.d.c. (12, 15) = 3 e o produto: $12 \times 15 = 180$, vem:

$$\text{m.m.c. } (12, 15) = 180 : 3 = \boxed{60}$$

24. *Conseqüências*

1.ª) *O menor múltiplo comum de dois números, em que o maior é divisível pelo menor, é o* MAIOR.

Exemplo:

m.m.c. (8, 4) = 8 (o que é evidente, pois o *maior* é o primeiro múltiplo comum)

2.ª) *O menor múltiplo comum de dois números primos entre si é o produto dêles.*

Exemplo:

m.m.c. (4, 5) = 20 (bem natural, pois o produto de dois números primos entre si é o primeiro múltiplo comum dêles)

3.ª) *Multiplicando ou dividindo dois ou mais números por um certo número* (diferente de zero), *seu menor múltiplo comum ficará multiplicado ou dividido por êsse número.* Vale a mesma explicação feita para a operação maximação.

Exemplo:

Sendo: m.m.c. (18, 12) = 36, verifique você mesmo que, multiplicando por 2 os números 18 e 12, o menor múltiplo comum (36) aparecerá multiplicado, também, por 2.

25. *Aplicações em exercícios diversos*

1. Determinar os dois *menores* números pelos quais devemos multiplicar os números 24 e 36, a fim de obter *produtos iguais.*

   Sendo o m.m.c. (24, 36) = 72 e 72 : 24 = 3, 72 : 36 = 2, segue-se que 2 e 3 são os *menores* números que, multiplicados respectivamente por 24 e 36, dão *produtos iguais.*

2. Determinar todos os números compreendidos entre 1.000 e 3.000 e que sejam divisíveis, ao mesmo tempo, por 48, 60 e 72.

   O primeiro múltiplo comum de 48, 60 e 72 é o menor múltiplo comum: 720. Logo, o exercício estará resolvido procurando-se os múltiplos de 720 compreendidos entre 1.000 e 3.000, isto é: $720 \times 2 = 1.440$; $720 \times 3 = 2.160$; $720 \times 4 = 2.880$ (os demais múltiplos de 720 ultrapassam 3.000).

3. Três navios fazem viagens entre dois portos. O primeiro cada 4 dias, o segundo cada 6 e o terceiro cada 9 dias. Se êsses navios partirem juntos, depois de quantos dias voltarão a sair juntos, pela primeira vez?

   O primeiro múltiplo comum dêsses números é o menor múltiplo comum: 36. Logo, depois de 36 dias êsses navios partirão juntos novamente, pela primeira vez.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 58

1. Efetuar (usando as técnicas de cálculo ensinadas):
   1.º) m.m.c. (45, 12) 2.º) m.m.c. (36, 96, 112) 3.º) m.m.c. (48, 120, 96, 144)
   4.º) m.m.c. (4.320, 6.480) 5.º) m.m.c. (123, 205, 287)
2. Usando as *conseqüências* estudadas, efetuar:
   1.º) m.m.c. (48, 2) 2.º) m.m.c. (7, 9) 3.º) m.m.c. (1.200, 60, 30)
   4.º) m.m.c. (5, 6, 11) 5.º) m.m.c. (12, 4, 1) 6.º) m.m.c. (8.916, 4)
3. Qual é a diferença entre o menor múltiplo comum e o maior divisor comum dos números 101 e 337?
4. O menor múltiplo comum de dois números é 11.352 e o maior divisor comum é 6. Se um dos números é 264, qual é o outro?
5. Qual é o produto de dois números, se o maior divisor comum entre êles é 8 e o menor múltiplo comum, 48?
6. Determinar todos os números compreendidos entre 1.000 e 4.000 que sejam divisíveis, ao mesmo tempo, por 75, 150 e 180.
7. Calcular os dois menores números pelos quais devemos multiplicar os números 60 e 78, a fim de obter produtos iguais.
8. Numa República, o presidente deve permanecer 4 anos em seu cargo, os senadores 6 anos e os deputados 4 anos. Se em 1960 houve eleições para os três cargos, em que ano se realizarão novamente eleições para êsses cargos, simultâneamente?
9. Duas rodas de uma engrenagem têm 14 e 21 dentes, respectivamente. Cada roda tem um dente estragado. Se, num dado instante, estão em contacto os dois dentes estragados, depois de quantas voltas se repetirá novamente êsse encontro?
10. Dois ciclistas percorrem a pista circular de um velódromo no mesmo sentido. O primeiro a percorre em 36 segundos e o segundo em 30. Tendo os ciclistas partido juntos, pergunta-se depois de quanto tempo se encontrarão novamente no ponto de partida e quantas voltas dará cada um.
11. Assinalar *V* ou *F* no quadrinho conforme seja verdadeira ou falsa cada uma das seguintes sentenças:

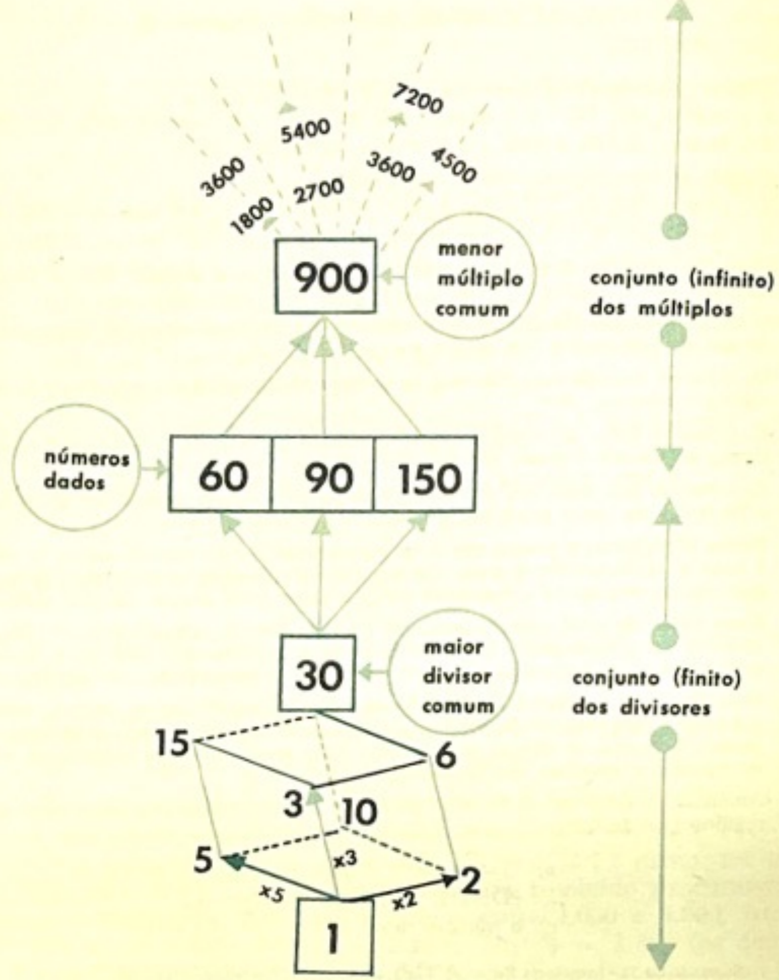
    a) $(3 + 5 + 2)^3 = 3^3 + 5^3 + 2^3$ ☐
    b) 8D(4M3) = (8D4)M(8D3) ☐
    c) o número um é primo ☐

(Sugestão da 12.ª Inspetoria Regional, Tupã, à 1.ª OMESP, coordenada pelo Prof. Thiago A. S. Leandro).

LEMBRETE AMIGO

Não se esqueça de que o *menor múltiplo comum* de *dois números primos entre si é o* PRODUTO DÊLES; *o de dois números em que o maior é divisível pelo menor é o* MAIOR.

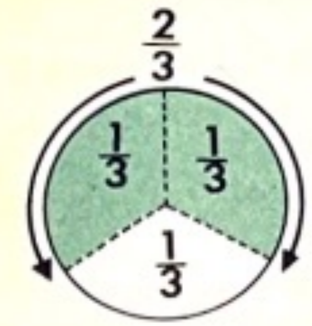
Esquema dos *divisores e múltiplos comuns* de 60, 90 e 150.



CAPÍTULO 3

Conjunto dos números racionais
(naturais e fracionários)

números fracionários
classes de equivalência entre frações
estrutura de ordem nos números fracionários



números fracionários

1. *Noção intuitiva de número fracionário*

Você tem a primeira idéia de número fracionário quando, *repartindo* um objeto (que nesse instante representa a *unidade*) em um número qualquer de *partes iguais*, considera uma ou algumas dessas partes.

Assim, por exemplo, *repartindo-se* um tablete de chocolate (fig. 43) em três partes *iguais*, temos que:

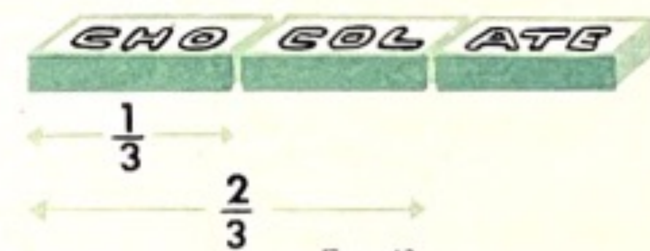


Fig. 43

1) uma dessas partes representa uma *fração* do chocolate, chamada *um têrço* e indicada por $\frac{1}{3}$;
2) duas dessas partes representam outra *fração* do chocolate, chamada *dois terços* e indicada por $\frac{2}{3}$.

Nasce, portanto, uma nova *espécie* de número (lembre-se de que até agora você só "trabalhou" com os *números naturais*), denominado *número fracionário*, cujo numeral — agora chamado *fração* — compõe-se de *dois números naturais*, tomados numa certa ordem, com o segundo dêles diferente de zero, sendo ambos separados por um traço horizontal.

Assim, com o par de *números naturais:* 2 e 3, você tem um *número fracionário* representado pela *fração:* $\frac{2}{3}$.

O primeiro dêsses números é chamado *numerador* e o segundo, *denominador*.

O denominador indica em *quantas partes iguais* foi *dividida* a unidade e o numerador, quantas dessas partes foram *tomadas*. O numerador e o denominador constituem os *têrmos* da fração.

Então, o número fracionário, representado pela *fração* $\frac{2}{3}$ (*numerador* 2 e *denominador* 3), "indica" que a *unidade* foi *dividida* em *três* partes iguais e foram tomadas *duas* dessas partes. A *unidade*, de que tanto se fala, é qualquer *grandeza:* o chocolate da fig. 43, a vareta da fig. 44, o círculo da fig. 45.

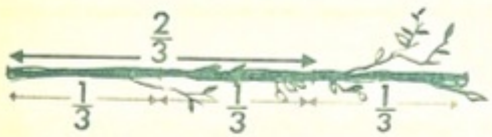


FIG. 44

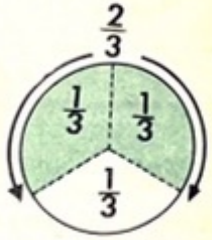


FIG. 45

NOTA HISTÓRICA: Desde a Antiguidade conhecem-se os números fracionários. Os *egípcios* foram os primeiros a introduzirem os números fracionários, quando verificaram que sòmente com o conhecimento dos números naturais *não poderiam* efetuar *tôdas as medidas!* Num famoso documento histórico (Papiro de Rhind), datado de 1.700 anos *antes de Cristo*, encontram-se registradas as frações de maior uso: um meio, um têrço, um quarto, com as representações:

(um meio) **(um têrço)** **(um quarto)**

onde significava "parte". A presente representação de número fracionário com um traço — foi introduzida sòmente no século XVI.

2. *Leitura de uma fração; frações decimais*

Se o numerador é 1 e o denominador, qualquer dos números:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9

lê-se o numerador e em seguida, na mesma ordem, as palavras:

meio, têrço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo e nono

que são as *unidades fracionárias*. Se o numerador fôr maior que 1, formar-se-ão os respectivos *plurais*.

Exemplos: $\frac{1}{3}$ lê-se: "um têrço"

$\frac{2}{5}$ lê-se: "dois quintos"

$\frac{1}{2}$ lê-se: "um meio" ou simplesmente "meio"

Se o denominador é uma *potência de 10*, isto é, 10, 100, 1.000, . . ., lê-se o numerador acompanhado das palavras:

décimo(s), centésimo(s), milésimo(s), ...

respectivamente.

Exemplos: $\frac{3}{10}$ lê-se: "três décimos"

$\frac{1}{100}$ lê-se: "um centésimo"

Em qualquer outro caso, lê-se o numerador e em seguida o denominador acrescido da palavra *avo* (no *plural, avos*).

Exemplos: $\frac{1}{13}$ lê-se: "um treze avo"

$\frac{5}{13}$ lê-se: "cinco treze avos"

As frações, cujos denominadores são potências de 10, são chamadas *decimais* e as demais, *frações ordinárias*. As frações decimais desempenham um papel saliente no estudo dos números fracionários, por isso receberão um tratamento à parte, posteriormente.

Exemplos:

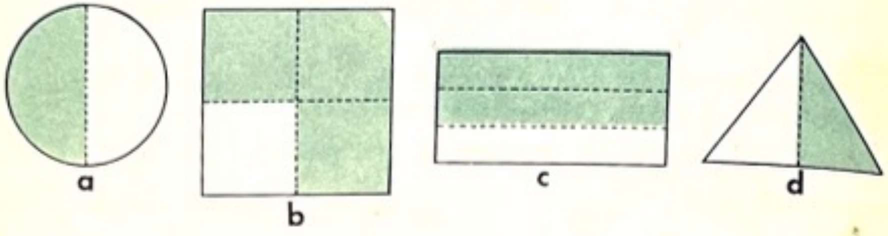
$\frac{2}{15}, \frac{1}{7}, \frac{4}{9},$ . . . . são *frações ordinárias*

$\frac{3}{10}, \frac{1}{100}, \frac{7}{1.000},$ . . . . são *frações decimais*

Êrro comum: Confundir, por exemplo: $\frac{3}{20}$, que é uma fração ordinária (três vinte avos), com fração decimal, pois 20 *não é* uma potência de 10 e sim *múltiplo* de 10!

3. *Interpretação do número fracionário através de desenhos geométricos*

Dizer que fração (número fracionário) representa a parte "colorida" das seguintes figuras:

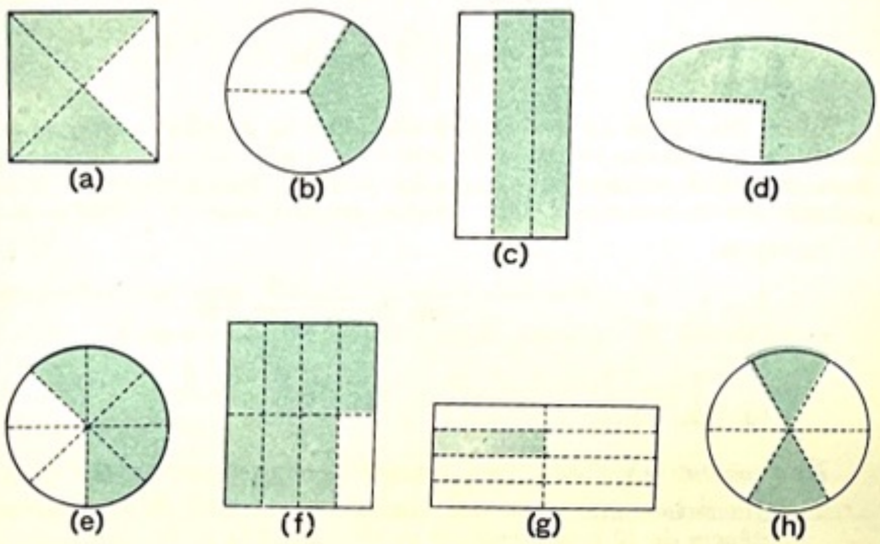


Como é fácil constatar, representam:

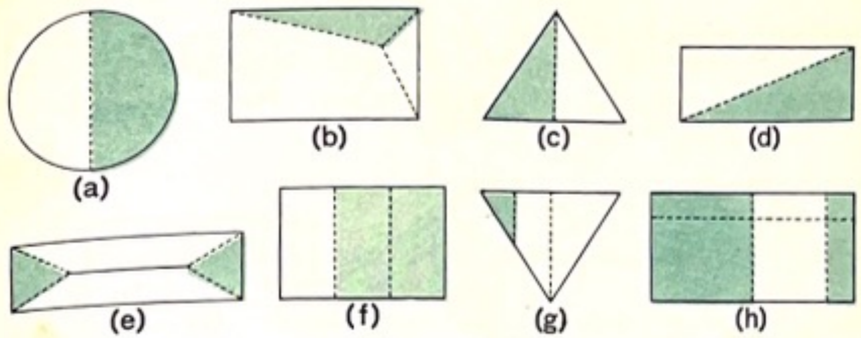
fig. *a* $\longrightarrow \frac{1}{2}$; fig. *b* $\longrightarrow \frac{3}{4}$; fig. *c* $\longrightarrow \frac{2}{3}$; fig. *d* $\longrightarrow \frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 59

1. Dizer que número fracionário representa a parte "colorida" das seguintes figuras:

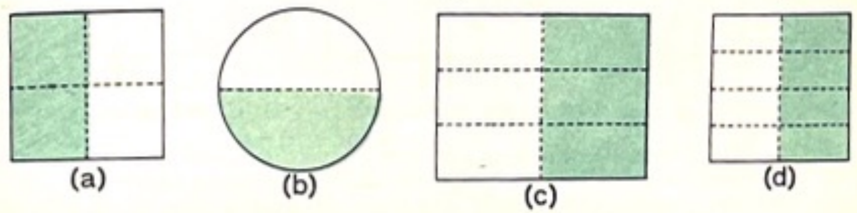


2. Das seguintes sentenças, correspondentes às figuras abaixo, dizer qual é verdadeira (*V*) ou falsa (*F*).

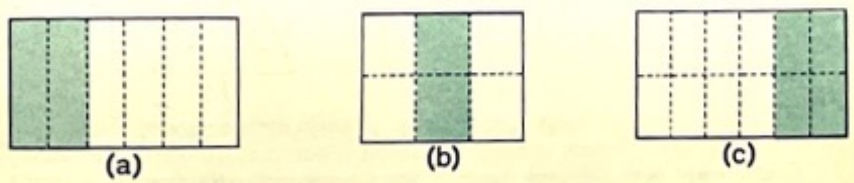


(a) "um meio" da figura inteira foi "colorido".
(b) "um quarto" da figura inteira foi "colorido".
(c) "dois terços" da figura inteira foram "coloridos".
(d) "um meio" da figura inteira foi "colorido".
(e) "dois quartos" da figura inteira foram "coloridos".
(f) "dois terços" da figura inteira foram "coloridos".
(g) "um meio" da figura inteira foi "colorido".
(h) "quatro sextos" da figura inteira foram "coloridos".

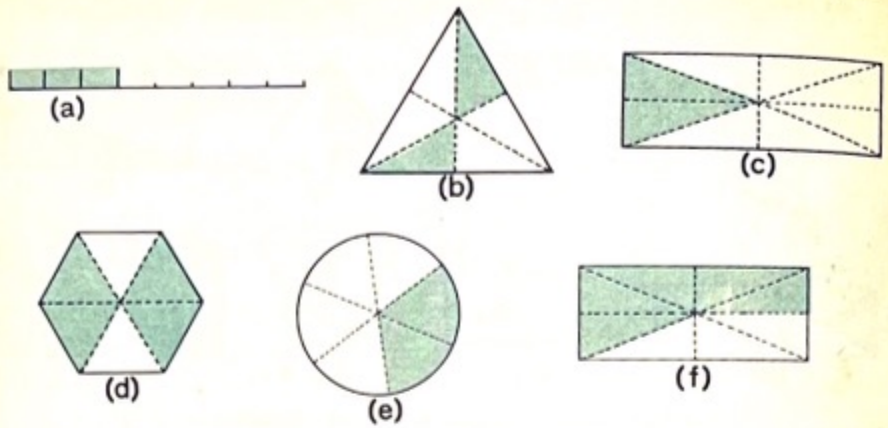
3. As partes "coloridas" das seguintes figuras sugerem o número fracionário *um meio*. Responder (escrevendo), para cada uma delas, que parte da figura inteira foi "colorida". (No exemplo (a) a resposta é $\frac{2}{4}$)



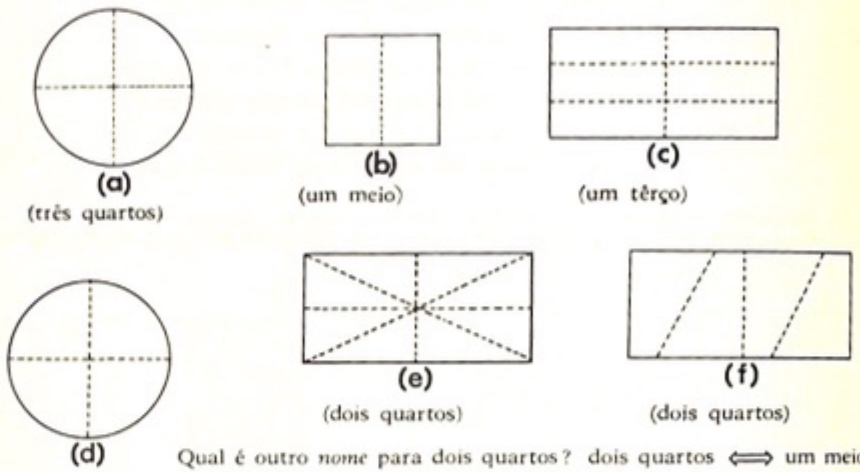
4. Idem, para o número fracionário *um têrço*:



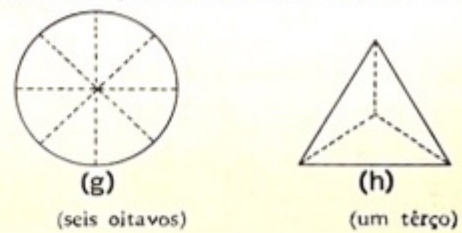
5. Dizer que número fracionário representa a parte "colorida" das seguintes figuras:



6. Colorir, das seguintes figuras, as partes correspondentes às frações indicadas:



Qual é outro *nome* para dois quartos? dois quartos $\Longleftrightarrow$ um meio.



Qual é outro *nome* para seis oitavos? seis oitavos $\Longleftrightarrow$ três quartos.

4. *Frações próprias, frações impróprias e frações aparentes: definição "geral" de número fracionário*

Se, no exemplo dado do chocolate, fig. 43, forem consideradas *tôdas as três partes* da divisão feita, você obterá o chocolate *inteiro* (unidade).

Êsse *fato*, observe bem, pode ser representado pelo símbolo:

$$\boxed{\frac{3}{3}}$$

e você obteve agora a indicação de um número fracionário constituído por um *par de números naturais iguais*.

Se, além dêsse chocolate, você considerar *mais* a têrça parte de um chocolate *igual* (fig. 46)

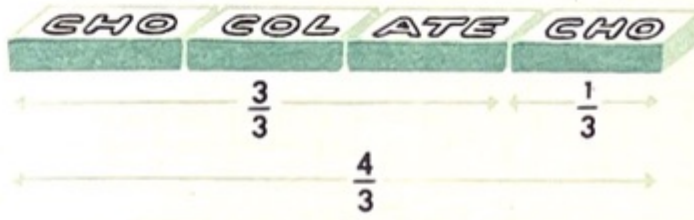


FIG. 46

o nôvo total de *quatro partes iguais* (três do primeiro e uma do segundo) pode ser representado com o símbolo:

$$\boxed{\frac{4}{3}}$$

e "nasce" uma fração constituída por um *par de números naturais* com o primeiro *maior* que o segundo.

Até então a *noção intuitiva de número fracionário* era entendida como a divisão de *uma só unidade* em partes iguais, considerando *algumas delas*. Para destacar bem êsse fato, aos novos numerais (frações):

$$\boxed{\frac{3}{3}} \quad e \quad \boxed{\frac{4}{3}}$$

que possuem o primeiro número (numerador) *igual ou maior* que o segundo (denominador), atribuímos o nome de frações *impróprias*, porque representam quantidades *iguais ou maiores* que a unidade.

Por acompanharem a noção intuitiva, recebem o qualificativo de *próprias* as frações que possuem o primeiro número (numerador) *menor* que o segundo (denominador), porque representam quantidades *menores* que a unidade. Logo:

$$\left.\begin{matrix}\frac{2}{3}\\[4pt] \frac{4}{7}\\[4pt] \frac{123}{457}\end{matrix}\right\} < 1 \qquad \text{e} \qquad \left.\begin{matrix}\frac{3}{3}\\[4pt] \frac{4}{3}\\[4pt] \frac{217}{39}\end{matrix}\right\} \geqslant 1$$

são exemplos de frações *próprias* | são exemplos de frações *impróprias*

Entre as frações impróprias existem as que apresentam o numerador *divisível* pelo denominador. Tais frações são denominadas *aparentes*, por serem *iguais* aos *números naturais* que se obtêm *dividindo* o numerador pelo denominador.

Exemplos:

$\boxed{\frac{3}{1} = 3}$ $\boxed{\frac{3}{3} = 1}$ $\boxed{\frac{20}{5} = 4}$ $\boxed{\frac{196}{28} = 7}$

Você, agora, já está "amadurecido" para receber uma *definição "geral"* de *número fracionário* que "apanhe" todos os casos estudados. Na verdade, em todos êles foi destacado que em um número fracionário participam *dois números naturais:* o primeiro (numerador) e o segundo (denominador). Êsse segundo número natural (denominador) jamais poderá ser *zero*, pois, de acôrdo com o que já foi estudado, é impossível "dividir" alguma coisa por zero! Logo:

Número fracionário é um par ordenado de números naturais, com o segundo diferente de zero.

O par ordenado (primeiro: "numerador"; segundo: "denominador") de números naturais que "define" *número fracionário* será indicado entre parênteses.

Exemplos: $(3,\ 4) = \frac{3}{4}$ $(0,\ 5) = \frac{0}{5}$

$(4,\ 3) = \frac{4}{3}$ $(5,\ 0)$ . . . ??? (FALSO)

$(8,\ 8) = \frac{8}{8}$

5. *Identificação entre números naturais e frações de denominador 1*

Todo número natural pode ser considerado como uma fração de denominador igual a 1.

Exemplos:

$\boxed{5 = \frac{5}{1}}$ $\boxed{16 = \frac{16}{1}}$ $\boxed{1 = \frac{1}{1}}$

n.º natural n.º fracionário

ATENÇÃO: Uma fração indica, também, a divisão entre o numerador e o denominador.

Se a divisão fôr *exata*, o quociente será um *número natural*.

Exemplo:

$\boxed{8 : 2}$ é o mesmo que $\boxed{\frac{8}{2} = 4}$

Se a divisão *não* fôr *exata*, a indicação dessa operação será feita através de um *número fracionário*.

Exemplo:

$\boxed{8 : 3}$ é o mesmo que $\boxed{\frac{8}{3}}$

Logo: Conhecendo os NÚMEROS FRACIONÁRIOS, a DIVISÃO entre dois números naturais É SEMPRE POSSÍVEL (naturalmente com o divisor diferente de zero).

Lembre-se, também, com o que você já estudou acêrca dos *numerais* de um *mesmo número*, de que:

$\boxed{8 : 3}$ e $\boxed{\frac{8}{3}}$

são agora NUMERAIS diferentes de um mesmo número.

OBSERVAÇÃO:

Quanto vale $\frac{0}{2}$?

Vale 0, pois, dentro da *noção intuitiva* estudada, se você dividir a unidade em duas partes e considerar "nenhuma" dessas partes, ficará com zero . . . e, dentro do conceito da *operação divisão*, o quociente é 0, pelo fato de: $0 \times 2 = 0$.

Excepcionalmente: $\frac{0}{1}$, $\frac{0}{2}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{0}{4}$, ... são consideradas frações "*impróprias*".

1. Você já sabe que o símbolo $\frac{8}{2}$ indica também a operação *divisão* (8 : 2). Logo: $\frac{8}{2} = 4$ e, portanto: $4 \times 2 = 8$, onde 4 é o quociente de 8 por 2.

Da mesma forma, se:

$\frac{5}{2} = n$, então $n \times 2 = 5$, e n é o quociente de 5 por 2.

Como exercício, *complete* as sentenças:

1.ª) se $\frac{12}{4} = n$, então $n \times \ldots = 12$ 2.ª) se $\frac{8}{3} = m$, então $m \times 3 = \ldots$

3.ª) se $\frac{0}{5} = a$, então $a \times \ldots = \ldots$ 4.ª) se $\frac{9}{1} = b$, então $b \times \ldots = \ldots$

2. Em que casos n, m, a ou b são *números naturais?* É fácil ver: 1.º e ...

3. Você pode saber se uma *sentença composta* da forma *condicional: se ... então ...*, é *verdadeira* [*V*] ou *falsa* [*F*] obedecendo à seguinte *tabela de valôres lógicos:*

1.ª sent.	2.ª sent.	*se* 1.ª sent., *então* 2.ª sent.
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*F*	*V*

isto é, só é *F* no caso de a 1.ª sentença ser *V* e a 2.ª sentença, *F*; nos demais casos é sempre *V*. Exemplos:

se $\frac{42}{6} = 7$ (*V*) então $7 \times 6 = 42$ (*V*) [*V*]

se $\frac{56}{8} = 12$ (*F*) então $12 \times 8 = 56$ (*F*) [*V*]

se $\frac{0}{7} = 0$ (*V*) então $0 \times 7 = 7$ (*F*) [*F*]

É *V* ou *F* o condicional:

se $\frac{32}{6} = 7$ então $7 \times 6 = 32$?

6. *Parte natural de uma fração imprópria ("extração de inteiros"); forma mista*

Pode-se, sempre, *extrair os inteiros* de uma fração imprópria, que constituem a sua *parte natural*, bastando para isso *dividir* o numerador pelo denominador. O quociente obtido é a *parte natural* da fração imprópria, enquanto que a parte fracionária, *menor do que* 1, tem o *mesmo denominador* e para numerador o *resto* da divisão.

O numeral cuja representação consta de um número natural e de uma fração própria é denominado *forma mista*(*) de uma fração imprópria.

Exemplos:

1. A fração imprópria $\frac{19}{5}$ tem a seguinte *forma mista:* $3\frac{4}{5}$, pois: $\begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$. Logo:

$$\boxed{\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}}$$

2. A fração imprópria $\frac{7}{3}$ tem a seguinte *forma mista:*

$$\boxed{\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}}$$

Pois: $\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

Inversamente, pode-se passar da *forma mista* para a de *fração imprópria* construindo-se uma fração de *mesmo denominador* e de numerador igual ao *produto do número natural pelo denominador somado com o numerador.*

Exemplo:

$$3\frac{4}{5} = \frac{19}{5} \rightarrow \begin{cases} \text{numerador: } 5 \times 3 + 4 = 19 \\ \text{denominador: } 5 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 61

1. Representar:
   1.º) três números *naturais*, usando o numeral indo-arábico (*algarismo*)
   2.º) três números *fracionários*, usando o numeral *fração*
2. Dividi um torrão em cinco partes iguais. Dei três dessas partes à Luísa. Que fração de torrão recebeu Luísa?
3. Que fração do ano (12 meses) representam 7 meses?
4. Que fração do mês (30 dias) representam 3 dias?

(*) Também chamado "número misto".

5. Um pacote de balas foi repartido entre três meninos, cabendo ao primeiro 5 balas ao segundo 7 e ao terceiro 4 balas. Que números fracionários traduzem as balas que cada menino recebeu?

6. Representar, por meio de frações, os *números fracionários* definidos pelos seguintes pares de números naturais:

1.º) (4, 3) 2.º) (2, 5) 3.º) (8, 2) 4.º) (2, 8) 5.º) (0, 3)
6.º) (7, 10) 7.º) (6, 1) 8.º) (9, 9) 9.º) (1, 30) 10.º) (a, b) $(b \neq 0)$

7. Do exercício 6, quais são os *números fracionários* representados por frações: próprias, impróprias e aparentes?

8. Do mesmo exercício 6, dizer quais são as frações ordinárias e quais as decimais.

9. O *número natural* 3 pode ser considerado como um *número fracionário* de denominador igual a ...; uma outra maneira de escrever o *número natural* 3 é com a *fração aparente*: $\frac{6.}{...}$

10. Quanto vale $\frac{0}{8}$? Por quê?

11. Escrever quatro *numerais* diferentes dos seguintes *números:*

(Exemplo: *três* tem os seguintes: 3; III; 6 : 2; $\frac{6}{2}$; 3 : 1; 3 × 1, . . .

1.º) cinco; 2.º) doze terços; 3.º) oito meios; 4.º) um

12. Completar as seguintes sentenças:

1.º) se $\frac{8}{4} = 2$, então ... × 4 = ...

2.º) se $\frac{0}{9} = 0$, então 0 × ... = ...

3.º) se $\frac{7}{1} = 7$, então ... × ... = ...

13. Sem efetuar a *divisão*, quais das seguintes sentenças compostas (*condicionais*) são *verdadeiras?*

1.º) se $\frac{105}{30} = 5$, então $5 \times 30 = 105$

2.º) se $\frac{196}{14} = 14$, então $14 \times 14 = 196$

3.º) se $\frac{25}{25} = 1$, então $25 \times 25 = 1$

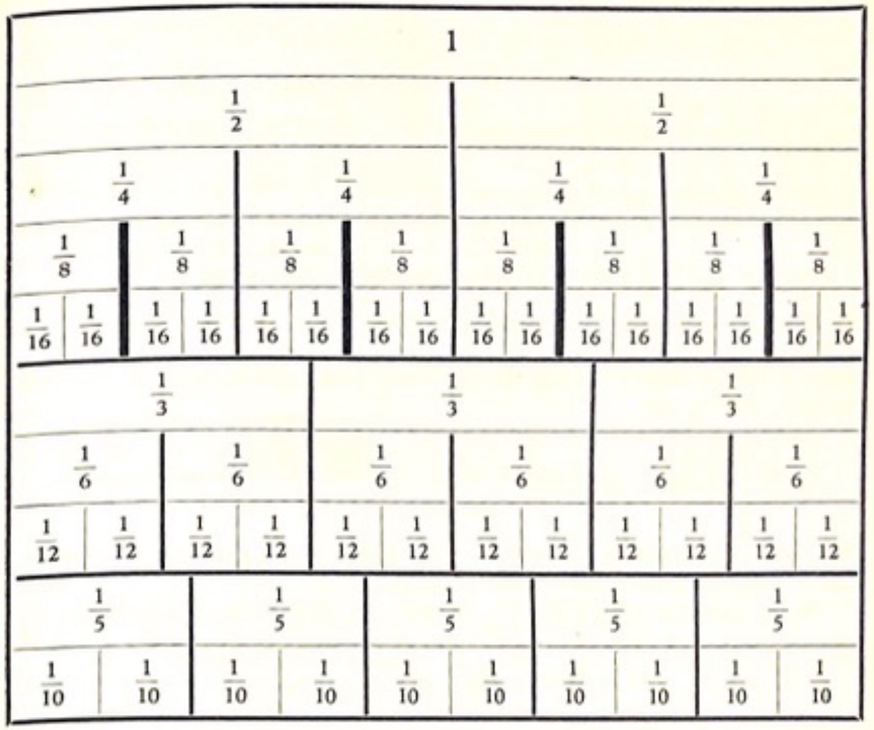
14. Extrair os *inteiros* (o mesmo que procurar a *parte natural*) das seguintes frações *impróprias*, e escrever, a seguir, a *forma mista* correspondente:

1.ª) $\frac{18}{7}$ 2.ª) $\frac{5}{4}$ 3.ª) $\frac{12}{5}$ 4.ª) $\frac{179}{21}$ 5.ª) $\frac{4.315}{2.716}$

15. Escrever as frações *impróprias* correspondentes às seguintes *formas mistas:*

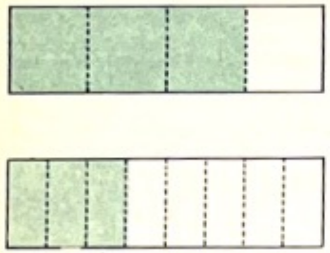
1.º) $4\frac{1}{3}$ 2.º) $21\frac{2}{5}$ 3.º) $7\frac{1}{4}$ 4.º) $43\frac{11}{12}$ 5.º) $1\frac{83}{87}$

QUADRO DE ALGUMAS UNIDADES FRACIONÁRIAS



Responda:

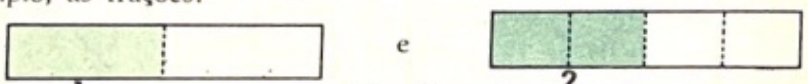
1. Que é $\frac{1}{2}$ de 1 ? ...
2. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$? ...
3. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$? ...
4. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{8}$? ...
5. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$? ...
6. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{6}$? ...
7. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{5}$? ...
8. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}$? ...
9. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{8}$? ...
10. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$? ...



classes de equivalência entre frações

7. *Frações equivalentes; frações iguais; aplicações*

A noção de *equivalência*, entre frações, você "sentiu" através dos exercícios de fixação (Grupo 59), quando as frações representavam o *mesmo valor* (colorido), apesar de os *têrmos* serem *diferentes.* Assim, por exemplo, as frações:



$\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$

FIG. 47

que indicam as partes "coloridas" de retângulos de mesmas dimensões (fig. 47) representam o *mesmo valor* (quantitativo).

As frações que representam o *mesmo valor* são denominadas **equivalentes.** Com o mesmo raciocínio você pode dizer que as frações:

$$\frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{10},\ \ldots\ldots$$

são tôdas *equivalentes* à fração $\frac{1}{2}$. Indicação:

$$\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4} \sim \frac{3}{6} \sim \frac{4}{8} \sim \ldots\ldots\ldots\ldots$$

onde tais frações *equivalentes* representam NUMERAIS diferentes de um *mesmo número fracionário:* meio.

NOTA: Para as frações equivalentes valem as *propriedades:*

1) *reflexiva:* $\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}$

2) *simétrica:* se $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$, então $\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$

3) *transitiva:* se $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \sim \frac{m}{n}$, então $\frac{a}{b} \sim \frac{m}{n}$

O *conjunto* das frações equivalentes a uma dada fração constitui uma **classe de equivalência.** A classe de equivalência, determinada pela fração $\frac{1}{2}$, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\boxed{\frac{1}{2}}\ \left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8},\ \ldots\ldots\right\} \left(\textit{Classe de equivalência} \text{ da fração: } \frac{1}{2}\right)$$

Observe que a fração $\frac{1}{2}$ é a representante *mais simples* de sua *classe de equivalência.*

Por outro lado, duas frações que pertencem à mesma *classe de equivalência* representam o *mesmo número fracionário,* pois valem para frações equivalentes as propriedades *simétrica* e *transitiva.*

Outros exemplos:

$$\boxed{\frac{3}{4}}\ \left\{\frac{3}{4},\ \frac{6}{8},\ \frac{9}{12},\ \frac{12}{16},\ \ldots\ldots\right\} \left(\textit{Classe de equivalência} \text{ da fração: } \frac{3}{4}\right)$$

$$\boxed{\frac{5}{1}}\ \left\{\frac{5}{1},\ \frac{10}{2},\ \frac{15}{3},\ \frac{20}{4},\ \ldots\ldots\right\} \left(\textit{Classe de equivalência} \text{ da fração: } \frac{5}{1}\right)$$

OBSERVAÇÃO: Na prática costuma-se, para facilitar os cálculos entre frações equivalentes, usar o sinal = ao invés do $\sim$. Contudo, é preciso destacar, desde já, o conceito de equivalência do conceito de *igualdade.* A equivalência é mais "ampla" que a *igualdade,* como você poderá concluir da seguinte interpretação:

Será que, dividindo uma certa fita em 30 pedaços iguais e tomando 20 dêsses pedaços, você faria o *mesmo laço* caso dividisse essa mesma fita em 3 pedaços iguais e tomasse 2 dêles?

Como você está notando, apesar de frações *equivalentes:* $\frac{2}{3}$ e $\frac{20}{30}$ (pois pertencem à mesma *classe de equivalência*), a *igualdade* entre os laços é discutível . . . .

Dizemos, então, que duas frações são IGUAIS quando têm os numeradores e os denominadores respectivamente *iguais.* Assim, por exemplo:

$\frac{2}{3}$ só é IGUAL à fração $\frac{2}{3}$

e $\frac{2}{3}$ é EQUIVALENTE às frações: $\frac{4}{6},\ \frac{6}{9},\ \frac{8}{12},\ \frac{10}{15},\ \ldots,\frac{20}{30},\ \ldots$

Como você resolveria êste exercício:

Qual o valor de a, para que a fração $\frac{a}{5}$ seja igual à fração $\frac{2}{5}$?

Usando o *devido* sinal de =, você formaria a sentença:

$$\frac{a}{5} = \frac{2}{5}$$

e, fàcilmente, concluiria que $a = 2$.

8. *Técnica de cálculo*

Para se construir a *classe de equivalência* de uma dada fração, basta aplicar a seguinte *Regra Fundamental:*

> **Multiplicando-se (ou dividindo-se) os dois têrmos de uma fração por um mesmo número natural ($\neq 0$), obtém-se uma fração equivalente à dada.**

Exemplo:

Dada a fração $\frac{2}{3}$, as suas equivalentes são:

$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 2} \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \cdots\cdots \qquad \left(\frac{2\times 2}{3\times 2} = \frac{4}{6},\ \frac{2\times 3}{3\times 3} = \frac{6}{9}\right)$$

que, como já vimos, constituem a *classe de equivalência:*

$$\boxed{\frac{2}{3}} \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \cdots \right\}$$

NOTA: Tornamos a *repetir:* o sinal = que está sendo usado *também* para as frações *equivalentes* é mais para *facilitar* o trabalho de cálculo com essas frações.

O reconhecimento *imediato* de que duas frações são *equivalentes* pode ser feito verificando se são *iguais* os produtos: *numerador da primeira* × × *denominador da segunda* e *denominador da primeira* × *numerador da segunda*.

Exemplos:

1.º) São *equivalentes* as frações: $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$?

Como: $2\times 6 = 3\times 4$ (ambos os produtos valem 12), as frações são *equivalentes*.

2.º) Qual deve ser o valor de a para que as frações: $\frac{a}{4}$ e $\frac{9}{12}$, resultem equivalentes?

Ora, é preciso que:

$$a\times 12 = 4\times 9$$

ou $\quad a\times 12 = 36$

e, portanto: $\quad a = 36 : 12 = \boxed{3}$

9. *Simplificação de frações: frações irredutíveis*

Simplificar uma fração é obter uma fração que lhe seja *equivalente* e de têrmos, respectivamente, *menores*. Em outras palavras, você pode dizer que *simplificar* uma fração é, na verdade, procurar o *numeral* mais simples para representar essa fração.

De acôrdo com a Regra Fundamental, para *simplificar* uma fração basta *dividir* (quando possível) ambos os seus têrmos por um divisor comum.

Exemplo:

$$\frac{24}{36} \xrightarrow{:2} \frac{12}{18} \xrightarrow{:2} \frac{6}{9} \xrightarrow{:3} \frac{2}{3}$$

Quando uma fração *não pode* ser mais simplificada, diz-se que ela é IRREDUTÍVEL ou que está reduzida à sua *expressão mais simples*. Nesse caso, o numerador e o denominador da fração devem ser *primos entre si*, isto é, não admitem divisor comum a não ser o 1.

Para se chegar mais ràpidamente à expressão mais simples (fração irredutível) basta, portanto, dividir ambos os têrmos da fração (suposta simplificável) pelo *maior divisor comum* entre êles.

Exemplo:

Reduzir à expressão mais simples a fração $\frac{36}{54}$.

Como: m.d.c. (36, 54) = 18, temos:

$$\frac{36}{54} \xrightarrow{:18} \frac{2}{3} \text{ (fração irredutível)}$$

Observação importante: NÚMERO RACIONAL

O conjunto de tôdas as frações equivalentes a uma dada fração é uma *classe de equivalência*.

Tôda classe de equivalência determina uma nova espécie de número — **número racional** — do qual cada fração da classe é um representante.

No *Apêndice 3* (pág. 280) você encontrará o *número racional* bem apresentado . . .

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 62

1. Determinar uma fração equivalente à fração $\frac{15}{20}$ que possua:

1.º) denominador 4;
2.º) denominador 28.

Primeiramente, você deve determinar a fração *equivalente mais simples* da fração $\frac{15}{20}$ (que será naturalmente a fração *irredutível* de sua classe de equivalência), isto é:

$$\frac{15}{20} \xrightarrow[:5]{:5} \frac{3}{4} \qquad \text{Então:} \quad \frac{3}{4} \text{ responde à 1.ª pergunta.}$$

Para determinar a fração equivalente de denominador 28, basta procurar qual o fator (caso exista!) que multiplicado por 4 resulta 28. Êsse fator é 28 : 4 = 7. Logo, multiplicando ambos os têrmos da fração $\frac{3}{4}$ por 7, vem:

$$\frac{3}{4} \xrightarrow[\times 7]{\times 7} \frac{21}{28} \qquad \text{que responde à 2.ª pergunta.}$$

Prova:

$$\frac{3}{4}\left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \frac{18}{24}, \frac{21}{28}, \dots\dots\right\}$$

1.ª pergunta — fração dada — 2.ª pergunta

2. Determinar a fração equivalente a $\frac{24}{32}$, cujos têrmos somem 42.

Temos, inicialmente: $\frac{24}{32} \xrightarrow[:8]{:8} \frac{3}{4}$ (equivalente mais simples)

Como: $3+4 = 7$, para essa *soma* tornar-se 42, as suas parcelas deverão ser multiplicadas por 6 (pois, $42 : 7 = 6$). Logo:

$$\frac{24}{32} \xrightarrow[:8]{:8} \frac{3}{4} \xrightarrow[\times 6]{\times 6} \frac{18}{24} \qquad (\text{com } 18+24 = 42)$$

10. *Conversão de frações ao mesmo denominador e ao menor denominador comum*

Converter frações ao *mesmo denominador* é transformá-las respectivamente em frações *equivalentes* de mesmo denominador (denominador comum). De acôrdo com a *Regra Fundamental* basta multiplicar os têrmos de cada fração pelos denominadores das outras.

Exemplo:

Converter ao *mesmo denominador* as frações:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}$$

Temos: $$\frac{2\times(5\times6)}{3\times(5\times6)}, \frac{4\times(3\times6)}{5\times(3\times6)}, \frac{1\times(3\times5)}{6\times(3\times5)}$$

ou $$\frac{60}{90}, \frac{72}{90}, \frac{15}{90}$$

A fim de se evitarem frações com têrmos muito grandes procura-se, nas conversões, usar o *menor denominador possível*. Em tais casos, diz-se que as frações foram convertidas ao *menor denominador comum*, procedendo-se assim, no cálculo:

1.º) determina-se o menor denominador comum (operação m.m.c. dos denominadores);

2.º) calcula-se o quociente do menor denominador comum pelo denominador de cada fração, multiplicando-o, a seguir, pelo numerador respectivo.

Exemplo:

Converter ao menor denominador comum as frações:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}$$

Como: m.m.c. (3, 5, 6) = 30, vem:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6} \xrightarrow[10\times2=20]{30:3=10} \frac{20}{30}, \frac{24}{30}, \frac{5}{30}$$

ou $$\frac{20}{30}, \frac{24}{30}, \frac{5}{30}$$

Observação: Embora não tenha a mesma aplicação pode-se, de maneira análoga, converter também frações ao *mesmo numerador* e ao *menor numerador comum*.

1. Determinar o valor de a que torne *verdadeiras* as seguintes sentenças:

1.ª) $\frac{a}{5} = \frac{4}{10}$ 2.ª) $\frac{2}{a} = \frac{6}{3}$ 3.ª) $\frac{12}{9} = \frac{a}{3}$ 4.ª) $\frac{76}{95} = \frac{4}{a}$

2. Construir a *classe de equivalência* das seguintes frações:

1.ª) $\frac{1}{2}$ 2.ª) $\frac{2}{3}$ 3.ª) $\frac{5}{4}$ 4.ª) $\frac{3}{1}$ 5.ª) $\frac{1}{1}$

3. *Simplificar* as seguintes frações, reduzindo-as às respectivas expressões mais simples (*fração irredutível*):

1.ª) $\frac{18}{24}$ 2.ª) $\frac{80}{104}$ 3.ª) $\frac{189}{243}$ 4.ª) $\frac{150}{100}$

5.ª) $\frac{81}{729}$ 6.ª) $\frac{1.512}{1.620}$ 7.ª) $\frac{504}{672}$ 8.ª) $\frac{105}{147}$

4. Determinar:

1.º) uma *fração equivalente* a $\frac{12}{16}$ de *denominador* 8;

2.º) uma *fração equivalente* a $\frac{5}{6}$ de *denominador* 12;

3.º) uma *fração equivalente* a $\frac{30}{40}$ de *denominador* 24;

4.º) uma *fração equivalente* a $3\,\frac{4}{5}$ de *denominador* 15.

5. Determinar a *fração equivalente* a $\frac{3}{4}$ cuja *soma* dos têrmos seja 14.

6. Determinar a *fração equivalente* a $\frac{21}{28}$ cuja *soma* dos têrmos seja 63.

7. Determinar a *fração equivalente* a $\frac{5}{2}$ cuja *diferença* dos têrmos (numerador menos o denominador) seja 12.

8. Converter ao *mesmo denominador* os seguintes conjuntos de frações:

1.º) $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 2.º) $\frac{4}{7}, \frac{5}{6}, \frac{2}{5}$

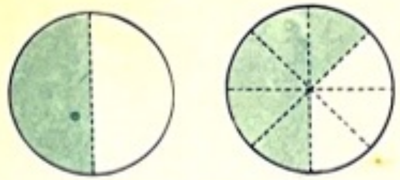
3.º) $\frac{1}{9}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}$ 4.º) $\frac{11}{24}, \frac{3}{11}$

9. Converter ao *menor denominador comum* os seguintes conjuntos de frações:

1.º) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ 2.º) $\frac{21}{48}, \frac{3}{15}, \frac{1}{30}, \frac{7}{96}$

3.º) $\frac{1}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}$ 4.º) $\frac{16}{25}, \frac{1}{7}, \frac{4}{14}, \frac{3}{15}, 4$

10. Converter ao *menor numerador comum* os conjuntos de frações do Exercício 9.



estrutura de ordem nos números fracionários

11. *Comparação de frações de mesmo denominador*

Se duas frações têm o mesmo denominador, então a maior é a que tem o maior numerador.

De fato, sejam, por exemplo, as frações de *mesmo denominador* (fig. 48):

$$\frac{5}{7} \quad \text{e} \quad \frac{2}{7}$$

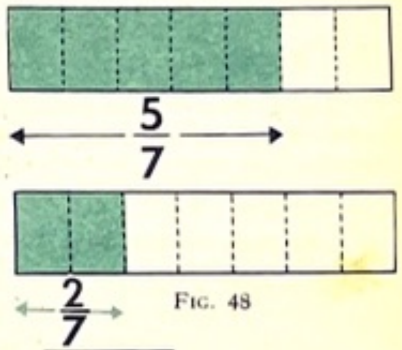


FIG. 48

Intuitivamente, você pode pensar assim: quem toma *cinco* partes iguais das sete em que ficou dividida a unidade (no exemplo, o retângulo), toma mais de quem toma sòmente *duas* dessas partes. Logo:

$$\boxed{\frac{5}{7} > \frac{2}{7}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{2}{7} < \frac{5}{7}}$$

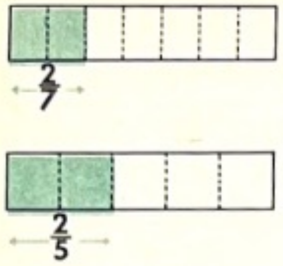
Outros exemplos:

$$\boxed{\frac{3}{8} > \frac{1}{8}} \qquad \boxed{\frac{a}{5} > \frac{b}{5} \text{ se } a > b}$$

12. *Comparação de frações de mesmo numerador*

Se duas frações têm o mesmo numerador, então a maior é a que tem o menor denominador.

Sejam, por exemplo, as frações de *mesmo numerador* (fig. 49):



$$\frac{2}{7} \quad \text{e} \quad \frac{2}{5}$$

Da mesma forma: duas partes iguais tomadas da primeira divisão (em sete partes iguais) do retângulo *é menor que* duas partes iguais tomadas da segunda divisão (em cinco partes iguais) de retângulo igual. Logo:

$$\boxed{\frac{2}{7} < \frac{2}{5}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{2}{5} > \frac{2}{7}}$$

FIG. 49

Outros exemplos:

$$\boxed{\frac{1}{8} < \frac{1}{4}} \; ; \quad \boxed{\frac{3}{a} < \frac{3}{b} \text{ se } a > b,\ a \neq 0 \text{ e } b \neq 0}$$

13. *Comparação de frações quaisquer*

Dadas duas *frações quaisquer*, para se saber qual é a *maior* ou *menor* basta transformá-las, respectivamente, em *equivalentes* de *mesmo denominador* (ou mesmo numerador).

Exemplo:

Comparar as frações:

$$\frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \frac{2}{3}$$

Convertendo-as ao menor denominador comum (m.m.c. (5, 3) = 15), vem:

$$\frac{12}{15}, \ \frac{10}{15}$$

e pelo já visto: $\frac{12}{15} > \frac{10}{15}$ e como estas são respectivamente *equivalentes* às frações dadas, vem:

$$\boxed{\frac{4}{5} > \frac{2}{3}}$$

NOTA: Chega-se ao mesmo resultado convertendo as frações dadas ao *menor numerador comum*.

14. *Frações diferentes; reconhecimento*

Duas frações *não-equivalentes* dizem-se DIFERENTES.

Indicação: $\frac{4}{5} \neq \frac{2}{3}$

Reconhece-se, fàcilmente, que duas frações são *diferentes* verificando se os produtos: *numerador da primeira × denominador da segunda* e *denominador da primeira × numerador da segunda são diferentes.*

Exemplo:

$$\frac{4}{5} \neq \frac{2}{3} \qquad \text{pois:} \quad 4 \times 3 \neq 5 \times 2$$

De um modo geral, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$:

$$\boxed{\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \text{ se } a \times d \neq b \times c}$$

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO — GRUPO 64

Dispor em ordem de valor *crescente* as frações: $\frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$.

Segundo a *estrutura da ordem natural* temos que, em primeiro lugar, deve vir a *menor* fração, em seguida a que lhe é imediatamente maior e assim por diante. Assim, convertendo-se as frações ao *menor denominador comum*, para poder *compará-las*, vem:

$$\frac{7}{12}, \ \frac{9}{12}, \ \frac{6}{12} \qquad \text{(suas equivalentes)}$$

ou

$$\frac{6}{12} < \frac{7}{12} < \frac{9}{12}$$

e, portanto:

$$\boxed{\frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{3}{4}}$$

NOTA: Se a disposição das frações fôsse em ordem de valor *decrescente*, teríamos:

$$\boxed{\frac{3}{4} > \frac{7}{12} > \frac{1}{2}}$$

15. *Variação do valor de uma fração*

Operando-se com os têrmos de uma fração, o seu *valor* pode *alterar-se.* Observe essas *variações,* através das seguintes *Regras:*

1.ª)	**Multiplicando-se (ou dividindo-se) o numerador de uma fração por um número natural, o valor da fração fica multiplicado (ou dividido) por êsse número.**

Com efeito, seja por exemplo a fração: $\frac{4}{9}$ (fig. 50-a)

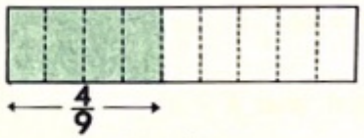


FIG. 50-a

Multiplicando-se o numerador por 2, obtém-se a fração $\frac{8}{9}$ (fig. 50-b), que é, precisamente, de valor duas vêzes maior que o valor de $\frac{4}{9}$.

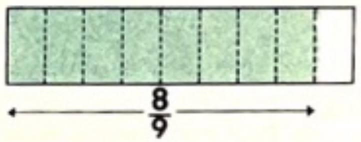


FIG. 50-b

No caso de *se dividir* o numerador da fração $\frac{8}{9}$ por 2, obtém-se a fração $\frac{4}{9}$, cujo valor é duas vêzes menor que o valor de $\frac{8}{9}$. Logo:

As operações efetuadas com o numerador de uma fração *refletem-se diretamente* no valor da fração, isto é, aumentando o valor do numerador, o *valor* da fração aumenta (ou diminuindo o valor do numerador, o valor da fração diminui).

2.ª)	**Multiplicando-se (ou dividindo-se) o denominador de uma fração por um número natural, o valor da fração fica dividido (ou multiplicado) por êsse número.**

Seja, por exemplo, a fração $\frac{3}{4}$ (fig. 51-a).

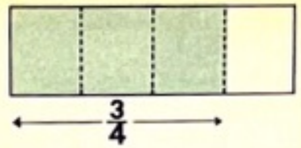


FIG. 51-a

Multiplicando-se o denominador por 2, obtém-se a fração $\frac{3}{8}$ (fig. 51-b), de valor duas vêzes menor que o valor de $\frac{3}{4}$, como é fácil de se constatar.

FIG. 51-b

No caso de *se dividir* o denominador da fração $\frac{3}{8}$ por 2, obtém-se a fração $\frac{3}{4}$, cujo valor é duas vêzes maior que $\frac{3}{8}$.

Agora, as operações efetuadas com o denominador *refletem-se inversamente* no valor da fração, isto é, aumentando o valor do denominador, o *valor* da fração diminui (ou diminuindo o valor do denominador, o valor da fração aumenta).

OBSERVAÇÃO: É natural que, multiplicando-se (ou dividindo-se) *ambos os têrmos de uma fração* por um mesmo número natural, o valor da fração não se altere, pois obtém-se, de acôrdo com o que já foi estudado, uma *fração equivalente* à dada.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 65

1. Qual é a *maior?*

   1.º) $\frac{3}{5}$ ou $\frac{4}{5}$ 2.º) $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{7}$ 3.º) $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$ 4.º) $\frac{7}{1}$ ou $\frac{9}{1}$

2. Dispor em ordem de valor *crescente* o conjunto das seguintes frações:

   1.º) $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ 2.º) $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$

   3.º) $\frac{5}{2}$, $\frac{14}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{3}$ 4.º) 3, $\frac{15}{3}$, $\frac{7}{2}$

3. Dispor em ordem de valor *decrescente* o conjunto das seguintes frações:

   1.º) $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$. 2.º) $\frac{132}{144}$, $\frac{34}{72}$, $\frac{12}{63}$, $\frac{1}{3}$

4. Verificar se são *verdadeiras* ou *falsas* (colocando *V* ou *F*) as seguintes sentenças:

1.ª) $\frac{2}{7} = \frac{2}{7}$ (*V*) } (Modêlo)

2.ª) $\frac{3}{4} = \frac{2}{5}$ (*F*) }

3.ª) $\frac{3}{4} \neq \frac{2}{5}$

4.ª) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$

5.ª) $\frac{3}{8} \neq \frac{3}{8}$

6.ª) $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$

7.ª) $\frac{2}{5} > \frac{3}{6}$

8.ª) $\frac{3}{5} < \frac{3}{5}$

9.ª) $\frac{10}{2} > \frac{12}{3} > 3$

10.ª) $\frac{3}{11} < \frac{2}{7} < \frac{3}{11}$

11.ª) $\frac{3}{5} < 1 < \frac{5}{3}$

12.ª) $3\frac{2}{5} \geqslant 4\frac{1}{2}$

5. $\frac{20}{4}$ e $20 : 4$ são *numerais* diferentes de um *mesmo número*. É *V* ou *F*?

6. $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ são *numerais* diferentes de *números diferentes*. É *V* ou *F*?

7. Da igualdade: $3 \times 4 = 2 \times 6$, conclui-se que: $\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$. É *V* ou *F*?

8. Completar as igualdades seguintes:

1.ª) $\frac{4}{1} = \ldots$ 2.ª) $\frac{0}{4} = \ldots$ 3.ª) $\frac{4}{4} = \ldots$

4.ª) $\frac{6}{2} = \ldots$ 5.ª) $\frac{2}{6} = \ldots$ 6.ª) $3\frac{2}{5} = \ldots$

9. Quais das seguintes expressões *não têm sentido*?

1.ª) 5×0 2.ª) $5 : 0$ 3.ª) $0 - 5$ 4.ª) $5 - 0$ 5.ª) $5 : 5$ 6.ª) $0 : 5$

7.ª) $6 : 3$ 8.ª) $3 : 6$ 9.ª) $\frac{8}{1}$ 10.ª) $\frac{8}{0}$ 11.ª) $\frac{0}{8}$ 12.ª) $\frac{8}{8}$

10. Quanto à *variação* do valor de uma fração, dizer:

1.º) O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o seu numerador por 3? E quando se divide o numerador por 2?

2.º) O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o seu denominador por 5? E quando se divide o denominador por 3?

3.º) O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o seu numerador por 2 e se divide o seu denominador por 3?

4.º) Qual é a alteração sofrida por uma fração quando se multiplicam *ambos* os seus têrmos por 3? E quando se dividem *ambos* por 2?

Operações com números racionais

operações com números fracionários
propriedades estruturais
problemas de aplicação
representação decimal dos números racionais
dízimas periódicas

operações com números fracionários propriedades estruturais

1. *Introdução*

São possíveis com os números fracionários as *mesmas operações* estudadas com os números naturais, isto é:

ADIÇÃO e sua inversa SUBTRAÇÃO
MULTIPLICAÇÃO e sua inversa DIVISÃO
POTENCIAÇÃO e sua inversa RADICIAÇÃO

A técnica de cálculo das quatro primeiras operações no conjunto dos numeros fracionários já é conhecida desde a Escola Primária. Também, agora, o que será mais ressaltado, ao lado do *conceito* de cada operação, são as *propriedades estruturais* existentes para essas operações no conjunto dos números fracionários.

Comece guardando bem êste fato:

> *As Propriedades Estruturais das Operações Definidas no Conjunto dos Números Naturais Continuam* ***Valendo*** *no Conjunto dos Números Fracionários!*

Assim, PERMANECERÃO com as operações entre números fracionários as propriedades conhecidas:

fechamento, comutativa, associativa, elemento neutro, distributiva e

mais uma *nova propriedade*, que aparecerá na operação multiplicação: existência do elemento inverso.

As operações com os números fracionários serão efetuadas com seus numerais, que são as *frações*.

Adição

2. *Operação: adição; resultado: soma*

Adição de duas frações é a operação que permite determinar a *soma* dessas frações. Há dois casos a destacar:

1.º) **As frações têm o mesmo denominador:** Seja, por exemplo, adicionar $\frac{2}{7}$ com $\frac{3}{7}$, isto é:

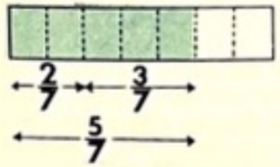


FIG. 52

As parcelas contêm, respectivamente, duas e três unidades fracionárias (sétimos), e portanto a *soma*, que é a *reunião* dessas unidades, contém cinco (conforme fig. 52). Logo: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$ e, portanto:

A soma de duas frações de *mesmo denominador* é uma fração que tem por numerador a *soma dos numeradores* e por denominador o *denominador comum.*

2.º) **As frações têm denominadores diferentes:** Nesse caso basta considerar frações *equivalentes* às dadas, e que tenham o *mesmo denominador.*

Assim procedendo, reduz-se êste caso ao anterior. A técnica de cálculo a ser empregada para êsse fim é a da *conversão das frações ao menor denominador comum.*

Exemplo:

Efetuar: $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$

Temos: $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12}{15} + \frac{10}{15} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$

ou, usando um *traço único* (o que é aconselhável):

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12 + 10}{15} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$$

Observação importante: Reparar que a *técnica de cálculo* agora empregada (e que você já conhecia há tempo!) visa, tão-sòmente, a simplificar a procura das frações *equivalentes* de mesmo denominador, pertencentes às classes de equivalência das frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$, respectivamente:

$$\boxed{\frac{4}{5}} \left\{ \frac{8}{10}, \boxed{\frac{12}{15}}, \frac{16}{20}, \frac{20}{25}, \frac{24}{30}, \ldots \right\} \qquad \boxed{\frac{12}{15}}$$

$$\boxed{\frac{2}{3}} \left\{ \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \boxed{\frac{10}{15}}, \frac{12}{18}, \ldots \right\} \qquad \boxed{\frac{10}{15}}$$

Se a adição envolver números naturais e formas mistas, a operação pode ser feita transformando as formas mistas em *frações impróprias* e os números naturais em *frações aparentes.*

Exemplo:

Efetuar: $$2\frac{1}{5} + 6$$

Temos: $$\frac{11}{5} + \frac{6}{1} = \frac{11 + 30}{5} = \frac{41}{5} = 8\frac{1}{5}$$

Ou, também, pode-se somar as *partes naturais entre si, assim como as partes fracionárias.* Assim:

$$2\frac{1}{5} + 6 = 8 + \frac{1}{5} = \frac{41}{5} = 8\frac{1}{5}$$

Note você que a forma mista $8\frac{1}{5}$ *equivale* à soma: $8+\frac{1}{5}$, que são *numerais* diferentes de um mesmo número fracionário. Êste resultado é de grande valor para o *cálculo.*

3. *Adição de várias frações*

Como na soma de vários números naturais, *somam-se as duas primeiras frações, depois soma-se o resultado obtido com a terceira, e assim por diante.* A indicação dêste cálculo pode ser feita com um traço apenas, como no exemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \frac{20+24+5}{30} = \frac{49}{30} = 1\frac{19}{30}$$

4. *Propriedades*

1.ª) *Fechamento:*

$$\underset{\text{fração}}{\frac{2}{3}} + \underset{\text{fração}}{\frac{4}{5}} = \underset{\text{fração}}{\frac{22}{15}}$$

2.ª) *Comutativa:*

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \quad \text{(é fácil de verificar)}$$

3.ª) *Elemento neutro:* 0

De fato: $$\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

pois: $$\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3} + \frac{0}{3} = \frac{2+0}{3} = \frac{2}{3}$$

4.ª) *Associativa*

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{6}\right)$$

Subtração — operação inversa da adição

5. *Operação: subtração; resultado: diferença*

Dadas duas frações, numa certa *ordem*, chama-se *diferença*, entre a primeira fração e a segunda, a *fração*, se existir, que *somada* à segunda dá como resultado a primeira. Assim, por exemplo, se □ representa a *diferença* entre as frações: $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$, temos a seguinte sentença matemática:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \square, \text{ o que acarreta: } \square + \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$

A operação que permite determinar a *diferença* (□) entre duas frações é denominada *subtração*. Também, agora, destacam-se dois casos:

1.º) **As frações têm o mesmo denominador:** basta *subtrair* o numerador da segunda fração do numerador da primeira e *conservar* o denominador comum.

Exemplo:

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7} \quad \text{pois} \quad \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

2.º) **As frações têm denominadores diferentes:** basta considerar frações *equivalentes* às dadas e que tenham o *mesmo denominador.*

Exemplo:

$$\frac{6}{7} - \frac{3}{4} = \frac{24}{28} - \frac{21}{28} = \frac{24-21}{28} = \frac{3}{28}$$

Valem as técnicas de cálculo análogas às observadas para a adição de frações. Assim, por exemplo:

1. Efetuar: $3\frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

Temos: $\frac{17}{5} - \frac{3}{10} = \frac{34-3}{10} = \frac{31}{10} = 3\frac{1}{10}$

2. Efetuar: $1 - \frac{3}{4}$

Temos: $\frac{1}{1} - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$

3. Efetuar: $5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{8}$

Temos: $5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{8} = \frac{23}{4} - \frac{17}{8} = \frac{46-17}{8} = \frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$

ou também: $5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{8} = 5\frac{6}{8} - 2\frac{1}{8} = 3\frac{5}{8}$

Condição de possibilidade: A *primeira* fração dada (minuendo) deve ser *maior* ou *igual* ($\geqslant$) que a segunda fração (subtraendo).

Você percebe, assim, porque as frações são dadas *numa certa ordem.*

A subtração é, pois, uma operação *não-comutativa*, pelo fato de a *ordem* influir no resultado da operação.

Como também aconteceu na subtração de números naturais, você pode dar contra-exemplos mostrando que não valem para a subtração de números fracionários as propriedades estruturais do *fechamento, elemento neutro* e *associativa.*

Associação de Adições e Subtrações

6. *Técnica de cálculo*

É a mesma já estudada com os números naturais: efetuam-se, primeiramente, as operações indicadas entre os sinais de associação, a partir dos mais internos.

Exemplo:

Efetuar: $\frac{23}{5} - \left[3 - \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{3}\right)\right]$

Temos: $\frac{23}{5} - \left[3 - \left(\frac{12+14}{21}\right)\right] = \frac{23}{5} - \left[3 - \frac{26}{21}\right] = \frac{23}{5} -$

$- \left[\frac{63-26}{21}\right] = \frac{23}{5} - \frac{37}{21} = \frac{483-185}{105} = \frac{298}{105} = 2\frac{88}{105}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 66

1. Na igualdade: $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$

   Qual a *operação* indicada? Qual o nome do *resultado?*

2. Dizer que propriedade está sendo aplicada nas seguintes sentenças:

   1.ª) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{3}{4}$

   2.ª) $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

   3.ª) $\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) + \frac{3}{8} = \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{7} + \frac{3}{8}\right)$

   4.ª) $0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$

3. Na igualdade: $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

   Qual a *operação* indicada? Qual o nome do *resultado?*

4. Procurar o valor de $\square$ que torne *verdadeiras* as seguintes sentenças:

1.ª) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \square$ 2.ª) $\square + \frac{4}{7} = \frac{2}{3}$ 3.ª) $\frac{1}{2} + \square = 5$

5. Da adição: $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{23}{20}$ resultam duas subtrações: $\begin{cases} \frac{23}{20} - \ldots = \frac{3}{4} \\ \frac{23}{20} - \ldots = \ldots \end{cases}$

6. Calcular o valor de x na seguinte subtração, usando a adição correspondente:

$$x - 1\,\frac{3}{8} = 0$$

7. Efetuar: 1.º) $2\,\frac{1}{3} + \frac{4}{6} + 5$ 2.º) $\left(8 - \frac{4}{7}\right) + \left(1 - \frac{3}{5}\right)$

8. Colocar os parênteses de modo que seja *possível* efetuar a expressão:

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$

9. Efetuar: $4 - \left[\left(\frac{21}{10} + \frac{7}{12}\right) - \left(\frac{5}{3} - \frac{8}{12}\right)\right]$

10. Efetuar. $\frac{55}{20} - \left\{\frac{2}{5} + \left[3 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)\right]\right\}$

Multiplicação

7. *Operação: multiplicação; resultado: produto*

Multiplicação de duas frações é a *operação* que permite determinar o *produto* das duas frações. Destacamos os casos:

1.º) **Multiplicação de um número natural por uma fração.** Seja, por exemplo:

$$3 \times \frac{2}{7}$$

que corresponde à *soma:*

$$\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}$$

Portanto, o *produto* procurado será:

$$3 \times \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

valendo a seguinte *técnica operatória:*

> **O produto de um número natural por uma fração é uma fração de mesmo denominador e cujo numerador é o produto do número natural pelo numerador da fração.**

Cuidado: Não *confundir:* $3\,\frac{2}{7}$ (que é a *forma mista* da fração imprópria $\frac{23}{7}$) com $3 \times \frac{2}{7}$ ou $3 \cdot \frac{2}{7}$ (que são *produtos indicados* de valor $\frac{6}{7}$).

2.º) **Multiplicação de uma fração por outra fração:** É feita com a seguinte *técnica de cálculo:*

> **Constrói-se uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores e cujo denominador é o produto dos denominadores das frações dadas.**

Exemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$$

De fato, se ao invés de multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{7}$, multiplicássemos $\frac{3}{4}$ por 5, teríamos: $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4}$, que representa um valor 7 vêzes maior que se tivéssemos multiplicado por $\frac{5}{7}$. Portanto, o verdadeiro valor será obtido se dividirmos $\frac{3 \times 5}{4}$ por 7, o que equivale, de acôrdo com o estudado (n.º 15), a multiplicar o denominador por 7, isto é: $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$.

Observações:

1.ª) Para multiplicar formas mistas costuma-se reduzi-las a frações impróprias e aplicar as técnicas já conhecidas. *Exemplo:*

$$3\,\frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{17}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{68}{35}$$

2.ª) Quando se multiplica uma fração por outra fração diz-se, também, que se calculou uma *"fração de fração"*. Assim, por exemplo, obtêm-se os $\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{7}$ efetuando-se o produto:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$$

8. *Multiplicação de várias frações*

O procedimento é o mesmo já conhecido com os números naturais: *multiplicam-se as duas primeiras frações*, depois o *resultado obtido* com a *terceira* e assim por diante. Como *técnica de cálculo* pode-se multiplicar os numeradores entre si, bem como os denominadores.

Exemplo:

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{6}=\frac{3\times 2\times 7}{4\times 5\times 6}=\frac{42}{120}=\frac{14}{40}=\frac{7}{20}$$

Observação: Sempre que possível, efetua-se a operação *simplificando-se* as frações, cancelando os fatôres comuns a qualquer numerador com qualquer denominador. Assim, por exemplo:

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\times\overset{1}{\cancel{2}}\times 7}{\underset{2}{\cancel{4}}\times 5\times\underset{2}{\cancel{6}}}=\frac{7}{20}$$

9. *Propriedades*

1.ª) *Fechamento:*

$$\underset{\text{fração}}{\frac{3}{4}}\times\underset{\text{fração}}{\frac{5}{7}}=\underset{\text{fração}}{\frac{15}{28}}$$

2.ª) *Comutativa:*

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\quad\text{(é fácil de verificar)}$$

3.ª) *Elemento neutro:* 1

$$\text{De fato: }\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

4.ª) *Associativa:*

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}\right)$$

5.ª) ***Elemento inverso*** (propriedade nova!) ←——

Que é que você obtém multiplicando, por exemplo, $\frac{3}{5}$ por $\frac{5}{3}$?

Vejamos:

$$\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{15}{15}=1\text{ (elemento neutro)}$$

Então: quando o produto de duas frações é igual a 1 (que é o elemento neutro da multiplicação), as frações dizem-se INVERSAS uma da outra. Nas frações inversas o *denominador de cada uma é o numerador da outra.*

Exemplos:

Fração dada	*Fração inversa*	*Produto*
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1$
$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{5}\times\frac{5}{1}=1$
$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}\times\frac{1}{3}=1$
$\frac{0}{7}$	não há!	???
$\frac{a}{b}\ \begin{pmatrix}a\neq 0\\ b\neq 0\end{pmatrix}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$

Nestas condições, há mais uma importante *propriedade* a figurar no *conjunto dos números fracionários*, com relação à operação *multiplicação:* a que dá "vida" ao *elemento inverso* de um dado elemento. Logo:

> **Tôda fração, não-nula, admite um elemento inverso, que é a fração inversa da fração considerada; o produto dessas frações é igual ao elemento neutro (1) da multiplicação.**

Observe, com atenção, que o INVERSO de um *número natural* n ($\neq 0$) é o *número fracionário* $\frac{1}{n}$.

6.ª) *Distributiva da multiplicação em relação à adição* (ou subtração):

$$\frac{4}{5}\times\left(\underbrace{\frac{3}{4}+\frac{1}{6}}_{\frac{11}{12}}\right)=\underbrace{\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}}_{\frac{3}{5}}+\underbrace{\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}}_{\frac{2}{15}}$$

$$\underbrace{\frac{4}{5}\times\frac{11}{12}}_{\frac{11}{15}}\qquad\underbrace{\frac{3}{5}+\frac{2}{15}}_{\frac{11}{15}}$$

Divisão — operação inversa da multiplicação

10. *Operação: divisão; resultado: quociente*

Dadas duas frações, numa certa ordem, chama-se *quociente* da primeira fração pela segunda a *fração*, se existir, que multiplicada pela segunda dá como resultado a primeira. Assim, por exemplo, se $\square$ representa o *quociente* entre as frações: $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$, temos a seguinte sentença matemática:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \square, \text{ o que acarreta: } \square \times \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$

A operação que permite determinar o *quociente* ($\square$) entre duas frações é denominada *divisão*.

A *técnica de cálculo* usada para determinar o *quociente* de duas frações está baseada na existência do elemento inverso (fração inversa) da primeira fração dada. De fato, seja, por exemplo, a *divisão:*

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \square$$

que equivale a:

$$\square \times \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$

O valor de $\square$ será conhecido quando você multiplicar *ambos* os têrmos dessa igualdade por $\frac{5}{2}$, isto é, a fração inversa de $\frac{2}{5}$, pois:

$$\square \times \underbrace{\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}}_{1 \text{ (elemento neutro)}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

e, portanto:

$$\square \times 1 = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad \square = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

Vale, assim, a seguinte *regra* como técnica operatória:

Para se dividir uma fração por outra, basta multiplicar a primeira fração pela fração inversa da segunda.

Exemplos:

1.º) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = \boxed{1\frac{7}{8}}$

2.º) $\frac{7}{9} : 4 = \frac{7}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{36}$

3.º) $5 : \frac{2}{9} = \frac{5}{1} \times \frac{9}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Para dividirmos *formas mistas*, convertemo-las primeiramente em frações impróprias. *Exemplo:*

$$3\frac{4}{5} : 2\frac{1}{7} = \frac{19}{5} : \frac{15}{7} = \frac{19}{5} \times \frac{7}{15} = \frac{133}{75} = \boxed{1\frac{58}{75}}$$

2.ª) Pode-se, também, indicar o *quociente de duas frações* com uma *nova fração*, cujos têrmos são as frações dadas. *Exemplo:*

$$\frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}} \qquad \text{e vice-versa: } \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{2}{5} : \frac{4}{7}$$

CUIDADO com o *traço de separação* das duas frações: deve ser um pouco maior do que os traços das frações dadas.

3.ª) Não esquecer, também, que a *ordem* com que as frações são consideradas na *divisão* é importantíssima; a divisão é uma operação *não-comutativa!*

11. *Propriedades da divisão*

Você já sabe que a divisão por 0 não é possível. Todavia, tôda vez que se pode efetuar uma divisão com os números fracionários, vale para essa operação a *propriedade do fechamento* (que não valia para os números naturais, lembra-se?).

Exemplo:

$$\underset{\text{n.º fracionário}}{\frac{3}{4}} : \underset{\text{n.º fracionário}}{\frac{2}{5}} = \underset{\text{n.º fracionário}}{\frac{15}{8}}$$

Também valem as *propriedades distributivas*, mas só num sentido (à direita). Verifique, você mesmo, com os seguintes exemplos:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}=\frac{2}{3}:\frac{1}{2}+\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$$ em relação à *adição*

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right):\frac{5}{3}=\frac{3}{4}:\frac{5}{3}-\frac{1}{2}:\frac{5}{3}$$ em relação à *subtração*

Usando contra-exemplos, é fácil constatar que não valem, para a divisão de números fracionários, as propriedades *comutativa*, do *elemento neutro* e *associativa*.

12. *Quociente exato de dois números naturais*

Suponha você, agora, que o dividendo e o divisor sejam *números naturais:* 53 e 6, por exemplo. Então, pelo visto, vem:

$$\boxed{53:6}=53\times\frac{1}{6}=\boxed{\frac{53}{6}}$$

e a fração $\frac{53}{6}$ será denominada *quociente exato* de 53 por 6, para distinguir do *quociente aproximado* de 53 por 6, estudado no Cap. 2, 1.ª parte (n.º 25).

Logo, o símbolo da *divisão exata* de um número natural por outro número natural pode ser, ao invés do sinal :, o *traço de fração.* Assim, por exemplo, escrever $\frac{12}{4}$ não é *sòmente* escrever uma *fração;* é, também, indicar que você deseja calcular o *quociente exato* de 12 por 4, que é, neste caso, 3.

Se fôsse escrito $\frac{12}{5}$, o *quociente exato* de 12 por 5 seria, precisamente, o número fracionário $\frac{12}{5}$.

13. *Expressões numéricas com frações*

O cálculo dessas expressões é feito seguindo a *mesma ordem* estudada no cálculo das expressões numéricas com os números naturais.

1.º) as multiplicações e divisões;

2.º) as adições e subtrações, respeitadas as ordens dos parênteses, colchêtes e chaves, caso existam.

Exemplos:

1) Calcular o *valor* da expressão:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\times 10$$

Temos:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{\cancel{5}_1}\times\cancel{10}^{2}=\frac{3}{4}+\frac{4}{1}=\boxed{4\frac{3}{4}}$$

Observação:

$4\frac{3}{4}$ é um numeral mais simples da expressão: $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\times 10$

2) Idem da expressão:

$$\left[\underbrace{\left(2+\frac{1}{3}\right)}_{*}\times\frac{3}{4}+\underbrace{\frac{1}{6}:3}_{**}\right]\times\frac{4}{5}+2$$

Temos, efetuando, os seguintes cálculos parciais:

$$*\ 2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$**\ \frac{1}{6}:3=\frac{1}{18}$$

$$=\left[\frac{7}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{18}\right]\times\frac{4}{5}+2=$$

$$=\left[\frac{7}{4}+\frac{1}{18}\right]\times\frac{4}{5}+2=$$

$$=\frac{65}{36}\times\frac{4}{5}+2=\frac{13}{9}+2=\frac{31}{9}=\boxed{3\frac{4}{9}}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 67

1.º) Determinar o valor de □ tal que:

$$\square\times\frac{3}{4}=\frac{2}{5}$$

Ora, essa expressão (que é uma sentença matemática) equivale a esta outra:

$$\square=\frac{2}{5}:\frac{3}{4}$$ (pela operação inversa divisão)

ou

$$\square=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\boxed{\frac{8}{15}}$$

2.º) Idem, em:

$$\square : \frac{3}{7} = 8$$

Temos: $\square = 8 \times \frac{3}{7} = \boxed{\frac{24}{7}}$ (pela definição de *quociente*)

3.º) Determinar o valor de x na expressão:

$$\left(x + \frac{1}{7}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{4}{9}$$

Temos: $\left(x + \frac{1}{7}\right) = \frac{4}{9} : \frac{3}{4}$

ou $x + \frac{1}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{27}$

e, portanto: $x = \frac{16}{27} - \frac{1}{7} = \boxed{\frac{85}{189}}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 68

1. Na igualdade: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, dizer qual a *operação* indicada e qual o nome do *resultado*.

2. Qual a propriedade que está sendo aplicada nas seguintes sentenças:

   1.ª) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$? 3.ª) $\left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{7} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{3}{7}\right)$?

   2.ª) $\frac{2}{9} \times 1 = \frac{2}{9}$? 4.ª) $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$?

3. Na igualdade: $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} = \frac{9}{10}$, dizer qual a *operação* indicada e qual o nome do *resultado*.

4. Da multiplicação: $\frac{2}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$, resultam duas divisões: $\begin{cases} \frac{8}{45} : \ldots = \frac{4}{9} \\ \frac{8}{45} : \ldots = \frac{2}{5} \end{cases}$

5. Procurar o valor de $\square$ tal que:

   1.º) $\frac{1}{8} : \frac{3}{5} = \square$ 2.º) $\square \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ 3.º) $\frac{3}{8} \times \square = \frac{1}{8}$

6. Calcular o valor de $\square$ nas seguintes *divisões* usando as multiplicações correspondentes:

   1.ª) $\square : \frac{4}{9} = \frac{1}{2}$ 2.ª) $\frac{2}{5} : \square = 1$ 3.ª) $8 : \square = 8$

7. Efetuar (simplificando onde couber):

   1.º) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ 2.º) $\frac{1}{8} \times 8$ 3.º) $\frac{3}{8} \times 16 \times \frac{2}{5}$

   4.º) $2\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times 1$ 5.º) $\frac{3}{5} : 6$ 6.º) $4 : \frac{8}{3}$

   7.º) $\frac{3}{8} : \frac{1}{4}$ 8.º) $2\frac{3}{4} : 2$ 9.º) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

8. Calcular:

   1.º) os $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ 2.º) os $\frac{3}{4}$ dos $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ 3.º) o $\frac{1}{5}$ de 20

   4.º) os $\frac{3}{5}$ dos $\frac{2}{3}$ de 5 5.º) o $\frac{1}{2}$ dos $2\frac{1}{5}$ de $3\frac{1}{4}$

9. Completar:

   1.º) $1 \times \ldots = \frac{4}{5}$ 3.º) $\frac{3}{7} \times \ldots = 1$

   2.º) $1 : \ldots = \frac{4}{5}$ 4.º) $\frac{5}{6} : \ldots = \frac{2}{3}$

   5.º) $\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{7}\right) : \frac{2}{3} = \frac{3}{5} : \frac{2}{3} + \ldots : \ldots$

   6.º) $\left(4 - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{2} = 4 : \ldots + \ldots : \frac{3}{2}$

10. Multiplica-se uma fração por $\frac{2}{3}$, depois o produto obtido por $\frac{4}{5}$ e encontra-se o resultado $\frac{2}{5}$. Que fração é essa?

11. Determinar o valor de x nas seguintes sentenças:

    1.ª) $x \times \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$ 2.ª) $\frac{5}{8} : x = 2$ 3.ª) $2 : x = \frac{1}{2}$

    4.ª) $\left(x \times \frac{2}{3}\right) : \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$ 5.ª) $\left(x : \frac{1}{9}\right) \times \frac{2}{3} = 1$ 6.ª) $\left(x - \frac{1}{3}\right) \times \frac{5}{6} = \frac{6}{5}$

12. Completar as seguintes sentenças de modo que se tornem verdadeiras (V):

    1.ª) $\frac{15}{8} = \frac{3}{4} \times \ldots$ 2.ª) $\ldots = \frac{2}{5} : \frac{5}{2}$

    3.ª) $0 = \frac{3}{4} \times \ldots$ 4.ª) $1 = \frac{3}{4} \times \ldots$

13. Assinalar V (verdadeira) ou F (falsa) nas seguintes sentenças:

    1.ª) $4 \times \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$ 2.ª) $4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ 3.ª) $4 + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$

    4.ª) $4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ 5.ª) $\frac{2}{3} + 4 = 4\frac{2}{3}$ 6.ª) $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

14. O conjunto dos números fracionários é FECHADO em relação às operações:
(a) *adição* (por quê?); (b) *subtração* (por quê?); (c) *multiplicação* (por quê?);
(d) *divisão* (por quê?).

15. Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões:

1.ª) $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{8}\right) \times \left(1 - \frac{1}{79}\right)$

2.ª) $\dfrac{3 \times \frac{2}{5} + 1}{2 - \frac{3}{4} : 2} - 1\frac{23}{65}$

3.ª) $\left\{\left[\left(3 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{4}{11} + 3 : \frac{1}{2}\right] \times \frac{3}{22} + 5\right\} + 4$

4.ª) $\left[1 : \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right] - \left[1 : \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right]$

5.ª) $\left(5 + \frac{1}{4}\right) : \left[\left(7 + \frac{2}{9}\right) : \left(9 + \frac{2}{7}\right)\right]$

6.ª) $\left[\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{5} : \frac{12}{25}\right] \times \frac{5}{2} - \frac{1}{8}$

7.ª) $\dfrac{\frac{3}{8} + \frac{3}{16} : \frac{9}{4}}{\frac{11}{16} - \frac{1}{4} \times \frac{9}{4}} - \dfrac{\frac{1}{12} + \frac{1}{9} \times \frac{3}{4}}{\frac{7}{12} - \frac{1}{4} : \frac{3}{4}}$

8.ª) $\dfrac{4 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5} + 1\right)}{\frac{1}{8} + \frac{139}{40}} - 1$

9.ª) $\dfrac{1 + \dfrac{1 + \frac{1}{4}}{4}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{4}}$

10.ª) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{4 - \dfrac{1}{2 - \frac{1}{2}}}$

11.ª) $\dfrac{1 + \dfrac{1 + \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{2}}{2}}{1 - \dfrac{2}{2 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$

12.ª) $\dfrac{\frac{3}{4} \times \left\{\frac{1}{6} + \frac{5}{2} \times \left[\frac{5}{9} - \dfrac{\frac{1}{4} \times \left(2 - \frac{2}{5}\right)}{\frac{3}{2} - \frac{3}{8}}\right]\right\}}{\left[\frac{2}{3} + 3 \times \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}\right] \times \frac{3}{7} - \frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)}$

Potenciação

14. *Operação: potenciação; resultado: potência*

Potência de uma fração é um produto de *fatôres iguais* a essa fração. Da mesma forma que foi estudada para os números naturais, a *potenciação* é a *operação* que permite determinar a potência. Assim, por exemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

ou

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

A *técnica de cálculo* é dada pela seguinte *regra:*

Para se elevar uma fração a uma potência, elevam-se os seus dois têrmos a essa potência.

Para os expoentes *especiais* 0 e 1, tem-se, também, como no caso dos números naturais:

$\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$ (tôda fração não-nula elevada ao expoente zero é igual a 1)

$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$ (tôda fração elevada ao expoente 1 é igual à própria fração)

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Se estiver sob *forma mista*, convertemo-la, primeiramente, numa fração *imprópria. Exemplo:*

$$\left(2\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{17}{7}\right)^2 = \frac{17^2}{7^2} = \frac{289}{49}$$

2.ª) É indispensável o uso de *parênteses* para evitar confusões, como por exemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \boxed{\frac{8}{27}} \quad \text{e} \quad \frac{2^3}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

3.ª) Continuam válidas as propriedades operatórias estudadas na *potenciação com os números naturais*. Assim, por exemplo:

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ isto é, para *multiplicar* potências de *mesma base*, basta conservar a base e somar os expoentes.

NOTA: Estudamos, por enquanto, a operação *potenciação* com *expoente natural*. No caso da *potenciação* com *expoentes fracionários*, como por exemplo: $5^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$, é preciso ampliar o conjunto dos números já conhecidos, estudo que será feito em outras séries.

Radiciação — **operação inversa da potenciação**

15. *Operação: radiciação; resultado: raiz*

Conhecida a *potência* de uma fração, bem como o *expoente* a que essa fração está elevada, pode-se determinar a *base* (que é a fração de que se está falando) pela *operação inversa* da potenciação, que é a *radiciação*. Assim, por exemplo:

$$\text{de } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad \text{temos } \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

ou também:

$$\boxed{\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Longleftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}}$$

Outros exemplos:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

16. *Expressões numéricas envolvendo potenciações e radiciações de frações*

São calculadas, levando-se em conta a seguinte ordem:

1.º) potenciações e radiciações

2.º) multiplicações e divisões

3.º) adições e subtrações

Exemplo: Calcular o valor das seguintes expressões:

1.ª) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 8$

Temos:

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 8 = 1 - \frac{1}{\cancel{8}_1} \times \cancel{8}^1 = 1 - 1 = \boxed{0}$$

2.ª) $9 + \sqrt{\frac{4}{25}} : \frac{2}{5}$

Temos:

$$9 + \sqrt{\frac{4}{25}} : \frac{2}{5} = 9 + \underbrace{\frac{2}{5} : \frac{2}{5}}_{1} = 9 + 1 = \boxed{10}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 69

1. Na igualdade: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, dizer qual a *operação* indicada e qual o nome do *resultado*.

2. Efetuar:

1.º) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ 2.º) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ 3.º) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ 4.º) $\left(3\frac{2}{5}\right)^3$ 5.º) $\left(\frac{1}{100}\right)^2$ 6.º) $\left(\frac{19}{21}\right)^0$

7.º) $\left(1\frac{1}{2}\right)^1$ 8.º) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ 9.º) $\left(3+\frac{1}{2}\right)^2 : \frac{7}{2}$ 10.º) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2$

3. Calcular o valor de $\square$ nas seguintes sentenças:

1.ª) $\square = 5 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 : \frac{1}{4}$ 2.ª) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \square = \left(\frac{1}{2}\right)^0$

3.ª) $\square = \left[\left(2 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{3}{5}\right] : \left[5 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 12^1\right]$ 4.ª) $\square - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

4. Na igualdade: $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, dizer qual a *operação* indicada e qual o nome do *resultado*.

5. Escrever, usando a *operação inversa*, as igualdades correspondentes:

Exemplo: $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \iff \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

1.ª) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$ 2.ª) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ 3.ª) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

6 Efetuar:

1.º) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ 2.º) $\sqrt[3]{\frac{8}{1}}$ 3.º) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ 4.º) $\sqrt[3]{\frac{1}{1.000}}$ 5.º) $\sqrt{\frac{25}{144}}$

7. Qual é maior: $\sqrt{\frac{1}{16}}$ ou $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$?

8. Se $1^5 = 1$ então $\sqrt[5]{1} = \ldots$

9. Calcular o valor de $\square$ nas seguintes sentenças:

1.ª) $\square = \sqrt{\frac{1}{4}} : \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ 2.ª) $\sqrt{\frac{1}{9}} \times \square = \sqrt{\frac{1}{9}}$

10. Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões:

1.ª) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \sqrt{\frac{1}{16}} \times 4$ 2.ª) $3^2 - \sqrt[3]{\frac{8}{125}} : \frac{2}{5}$

3.ª) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{4}{3}\right)^3\right] : \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right]$

4.ª) $\left[\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 : \left(3 + \frac{1}{3}\right)^3\right] : \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2$

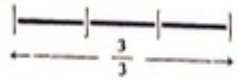
5.ª) $\left(5 + \frac{1}{2} \times 3\right)^2 : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^4$ 6.ª) $\left\{1 + \left[4 : \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3\right]\right\} : \frac{1}{2}$

7.ª) $\dfrac{\left(2 - \frac{1}{3}\right)^3 : \frac{125}{27}}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} : 2^4$ 8.ª) $(100 - 99)^{10} : (200 - 199)^{10}$

problemas de aplicação

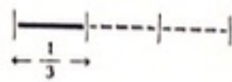
Aproveitando as *mesmas estruturas* usadas nos "problemas de aplicação" com os números naturais, procuremos examinar alguns exemplos de problemas com números fracionários, onde serão destacados:

a unidade (que é o "objeto dado" considerado no seu "todo", ou por "inteiro"; por comodidade será, agora, representada por um *segmento*).
Exemplo:



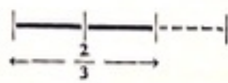
$:$

o singular (ou *unidade fracionária*, que é *uma* fração da unidade considerada).
Exemplo:



$\times$

o plural (soma de *diversas* unidades fracionárias, cada uma representando o singular).
Exemplo:



É óbvio que a *unidade* é, por sua vez, um *plural*.

Lembre-se, *com atenção*, de que:

1. a passagem do *singular* para o *plural* é feita com a operação *multiplicação;*
2. a passagem do *plural* para o *singular* é feita com a operação *divisão;*
3. as frações *só podem* ser operadas entre elas; os seus valôres correspondentes também *só podem* ser operados *entre êles*.

Exemplos:

1. *O preço de um objeto é* NCr$ 180,00. *Quanto custa* $\frac{1}{3}$ *dêsse objeto?*

Temos:

$$\begin{array}{lll}
|\!\text{——}\!|\!\text{——}\!|\!\text{——}\!| & \text{unidade:} & \frac{3}{3} \longrightarrow 180 \\
 & & \qquad\qquad :3 \\
|\!\text{——}\!|\text{- - - -}|\text{- - - -}| & \text{singular:} & \frac{1}{3} \longrightarrow 60
\end{array}$$

Resposta: $\frac{1}{3}$ do objeto *custa* $\boxed{\text{NCr\$ 60,00}}$.

2. *No problema anterior, quanto* custam $\frac{2}{3}$ *do objeto?*

Temos:

$$\begin{array}{lll}
|\!\text{——}\!|\!\text{——}\!|\!\text{——}\!| & \text{unidade:} & \frac{3}{3} \longrightarrow 180 \\
 & & \qquad\qquad :3 \\
|\!\text{——}\!|\text{- - - -}|\text{- - - -}| & \text{singular:} & \frac{1}{3} \longrightarrow 60 \\
 & & \qquad\qquad \times 2 \\
|\!\text{——}\!|\!\text{——}\!|\text{- - - -}| & \text{plural:} & \frac{2}{3} \longrightarrow 120
\end{array}$$

Resposta: $\frac{2}{3}$ do objeto custam $\boxed{\text{NCr\$ 120,00}}$.

3. *No mesmo problema* (o preço de um objeto é NCr$ 180,00) *quanto custam* $\frac{4}{5}$ *do objeto?*

Temos:

$$\begin{array}{lll}
|\!\text{—}\!|\!\text{—}\!|\!\text{—}\!|\!\text{—}\!|\!\text{—}\!| & \text{unidade:} & \frac{5}{5} \longrightarrow 180 \\
 & & \qquad\qquad :5 \\
|\!\text{—}\!|\text{- -}|\text{- -}|\text{- -}|\text{- -}| & \text{singular:} & \frac{1}{5} \longrightarrow 36 \\
 & & \qquad\qquad \times 4 \\
|\!\text{—}\!|\!\text{—}\!|\!\text{—}\!|\!\text{—}\!|\text{- -}| & \text{plural:} & \frac{4}{5} \longrightarrow 144
\end{array}$$

Resposta: $\frac{4}{5}$ do objeto custam $\boxed{\text{NCr\$ 144,00}}$.

4. *Se* $\frac{2}{3}$ *do pêso de uma pessoa é igual a* 60kg, *qual é o pêso dessa pessoa?*

$$\begin{array}{lll}
|\!\text{——}\!|\!\text{——}\!|\text{- - - -}| & \text{plural:} & \frac{2}{3} \longrightarrow 60\text{kg} \\
 & & \qquad\qquad :2 \\
|\!\text{——}\!|\text{- - - -}|\text{- - - -}| & \text{singular:} & \frac{1}{3} \longrightarrow 30\text{kg} \\
 & & \qquad\qquad \times 3 \\
|\!\text{——}\!|\!\text{——}\!|\!\text{——}\!| & \text{unidade:} & \frac{3}{3} \longrightarrow 90\text{kg}
\end{array}$$

Resposta: O pêso é de $\boxed{\text{90kg}}$

5. *Uma certa importância foi repartida entre três pessoas, cabendo à primeira uma parte equivalemte a* $\frac{2}{3}$ *da importância repartida, à segunda* $\frac{1}{4}$ *e à terceira a fração restante. Qual o valor dessa importância, sabendo-se que a terceira recebeu* NCr$ 300,00?

Temos que calcular, primeiramente, a *fração correspondente* a cada pessoa:

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ})\ \boxed{\frac{2}{3}} \\ \\ 2.^{\circ})\ \boxed{\frac{1}{4}} \end{array}\right\} \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$$

$$3.^{\circ})\ \frac{12}{12} - \frac{11}{12} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

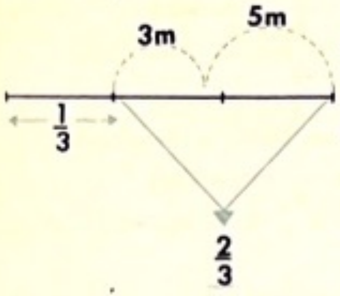
Logo:

$$\begin{array}{ll}
\text{singular:} & \frac{1}{12} \longrightarrow 300 \\
 & \qquad\qquad \times 12 \\
\text{unidade:} & \frac{12}{12} \longrightarrow 3.600
\end{array}$$

Resposta: A importância repartida vale: $\boxed{\text{NCr\$ 3.600,00}}$.

6. *Corto $\frac{1}{3}$ de um fio. Depois corto* 3m *e restam-me, ainda,* 5m. *Qual é o comprimento do fio?*

Temos, agora, o seguinte "esquema":



e, portanto, $\frac{2}{3} \longrightarrow (3m+5m) = 8m$

Logo:

$$\begin{array}{l} \frac{2}{3} \longrightarrow 8m \\ \qquad\qquad :2 \\ \frac{1}{3} \longrightarrow 4m \\ \qquad\qquad \times 3 \\ \frac{3}{3} \longrightarrow 12m \end{array}$$

Resposta: O fio mede $\boxed{12m}$.

7. *Tenho uma certa importância. Gastei $\frac{1}{4}$ dessa importância na mercearia; no açougue gastei $\frac{1}{9}$ do resto e ainda fiquei com* NCr$ 4,80. *Quanto possuo?*

O "esquema" que envolve *unidade* e *frações* de um lado e os *valôres correspondentes* (que é "dinheiro" neste exemplo) de outro, é:

$\frac{4}{4}$ (unidade correspondente à importância que tenho)

$\boxed{\frac{1}{4}}$ (fração correspondente ao gasto na mercearia)

$\longrightarrow \frac{3}{4}$ (fração correspondente ao resto)

$\frac{1}{9} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{12}}$ (fração correspondente ao gasto no açougue)

$+ \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$ (todos os gastos)

Então: $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (fração correspondente à importância que sobrou depois dos gastos, que é NCr$ 4,80).

Logo: se $\frac{2}{3} \longrightarrow 4{,}80$, então $\frac{3}{3} \longrightarrow 7{,}20$

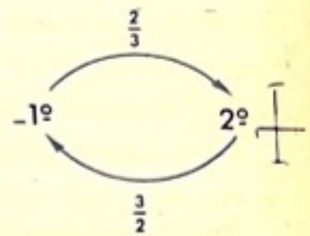
Resposta: Possuo $\boxed{\text{NCr\$ 7,20}}$.

8. *Três rádios portáteis de pilha custaram* NCr$ 174,50. *Sabendo-se que o preço do segundo foi os $\frac{2}{3}$ do preço do primeiro e também os $\frac{3}{5}$ do preço do terceiro, qual é o preço de cada um dos rádios?*

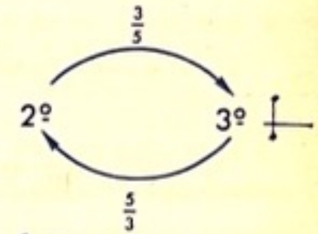
NOTA: Êste problema, considerado "difícil", tem sua resolução facilitada desde que se identifique sua *estrutura* (que é de *Grupo Multiplicativo*), que pode ser "vista" através de desenhos.

Temos:

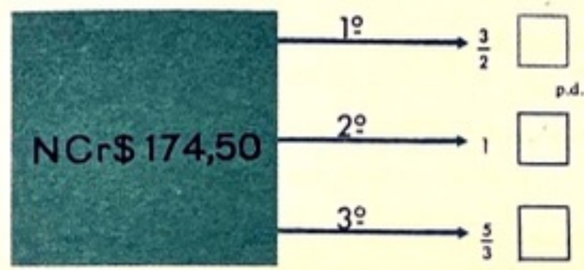
1. *Se* o preço do 2.º é os $\frac{2}{3}$ do preço do 1.º, *então*
   o preço do 1.º é os $\frac{3}{2}$ do preço do 2.º, ou seja:



2. *Se* o preço do 2.º é os $\frac{3}{5}$ do preço do 3.º, *então*
   o preço do 3.º é os $\frac{5}{3}$ do preço do 2.º, ou seja:



Logo, se o 2.º recebe $1\square$, o 1.º receberá $\frac{3}{2}\square$, o 3.º $\frac{5}{3}\square$, e o *esquema* da *estrutura* do problema é:



Sentença Matemática:

$$\frac{3}{2}\square + 1\square + \frac{5}{3}\square = 174{,}50$$

p.d.m.

$$\left(\frac{3}{2}+1+\frac{5}{3}\right)\cdot\square = 174{,}50$$

$$\frac{25}{6}\square = 174{,}50 \iff$$

$$\iff \square = 174{,}50 : \frac{25}{6}$$

$$\square = 41{,}88$$

Portanto: o preço do 2.º é: $1\square =$ NCr$ 41,88

o preço do 1.º é: $\frac{3}{2}\square = \frac{3}{2} \times 41{,}88 =$ NCr$ 62,82

o preço do 3.º é: $\frac{5}{3}\square = \frac{5}{3} \times 41{,}88 =$ NCr$ 69,80

preço dos três rádios . . . . NCr$ 174,50

1. Paguei por um certo objeto NCr$ 36,00. Quanto pagaria por:

   1.º) $\frac{1}{4}$ dêsse objeto?

   2.º) $\frac{3}{4}$ dêsse objeto?

   3.º) $\frac{2}{3}$ dêsse objeto?

2. Se $\frac{3}{4}$ do percurso de minha casa ao Colégio equivalem a 3km, qual é, em quilômetros, o percurso total?

3. Para encher os três quintos de uma piscina são necessários 240.000 litros de água. Qual é a capacidade, em litros, dessa piscina?

4. Você efetuou, em um dia, os $\frac{2}{5}$ de uma certa tarefa e no dia seguinte mais $\frac{1}{3}$ da mesma tarefa. Nesses dois dias você fêz *mais* ou *menos* da metade de tôda a tarefa?

5. Paulo correu 100m em $11\frac{1}{5}$ segundos. José percorreu a mesma distância em $10\frac{3}{5}$ segundos. Quantos segundos Paulo gastou a mais que José?

6. Eu moro a $\frac{3}{4}$ de quilômetro do Ginásio e Luísa a $\frac{2}{5}$ de quilômetro do Ginásio. Quem mora mais longe?

7. Um negociante pagou $\frac{3}{5}$ de sua dívida bancária e ficou ainda devendo NCr$ 840,00. Quanto devia êsse negociante?

8. Um avião percorre 1.800km em 2 horas. Quantos quilômetros percorrerá em $3\frac{1}{4}$ horas de vôo?

9. Para construir os $\frac{3}{7}$ de uma certa estrada, a Prefeitura de minha cidade gastou NCr$ 2.853,00. Quanto gastaria para construir uma estrada que fôsse os $\frac{2}{5}$ daquela?

10. Prêmios em livros foram distribuídos aos três primeiros alunos classificados na 1.ª série Ginasial. Ao primeiro coube $\frac{1}{2}$ dos livros, ao segundo $\frac{1}{3}$ e ao terceiro, o restante, 2 livros. Quantos livros receberam os dois primeiros classificados?

11. Se um menino gasta por dia $\frac{2}{7}$ de um lápis, quantos dias durará meia dúzia de lápis iguais ao primeiro?

12. Quero atingir o cume de um morro. Percorri $\frac{2}{7}$ do percurso e em seguida mais $\frac{3}{5}$, faltando-me ainda 24m. Qual o percurso total em metros?

13. Uma emprêsa transporta em dois dias 5.390 sacas de feijão de um armazém para outro. No primeiro dia transporta $\frac{3}{7}$ das sacas. Quantas deve transportar no dia seguinte?

14. Quantas garrafas de $\frac{3}{4}$ de litro podem ser enchidas com uma partida de $55\frac{1}{2}$ litros?

15. Um vasilhame de 32 litros de capacidade contém leite sòmente até os seus $\frac{3}{4}$. Tirando $\frac{2}{3}$ do leite contido, quantos litros restam?

16. Um automobilista, depois de ter percorrido os $\frac{2}{3}$ de uma estrada, faz mais 12km e assim percorre os $\frac{3}{4}$ do percurso que deve fazer. Quanto percorreu o automobilista e qual o total do percurso em quilômetros?

17. Uma estante de livros tem três prateleiras. A altura da primeira é os $\frac{3}{7}$ da altura da estante e a da segunda, os $\frac{2}{5}$. Qual é a altura da terceira prateleira sabendo-se que a da primeira é 60cm?

18. Titio ficou $\frac{1}{3}$ de sua vida solteiro, $\frac{2}{5}$ casado e ainda viveu mais 20 anos viúvo. Com que idade faleceu?

19. Um operário gastou no empório $\frac{2}{3}$ do que possuía na carteira. A seguir, $\frac{1}{4}$ do resto na quitanda e ainda ficou com NCr$ 2,50. Quanto tinha na carteira?

20. Antônio possuía 75 bolinhas. Deu ao seu colega Pedro $\frac{1}{3}$ delas; ao Luís, $\frac{2}{5}$ do resto e a João, $\frac{1}{6}$ do segundo resto. Com quantas bolinhas ficaram Antônio e seus colegas?

21. Numa corrida, $\frac{2}{9}$ dos atletas, que dela participam, desistem depois de darem a primeira volta na pista; na segunda volta desiste $\frac{1}{7}$ do que restou e terminam a corrida 18 corredores. Quantos atletas participaram da corrida, desde o início?

22. Uma vara foi fincada numa lagoa de maneira que os seus $\frac{3}{7}$ ficaram fora da água, enquanto que os seus $\frac{2}{5}$ ficaram dentro. Pede-se o comprimento da parte da vara que está fincada no fundo da lagoa, sabendo-se que a parte que ficou fora da água mede 1,35m.

23. Na festa da uva dividiram-se 920kg de uvas em pequenos sacos de $\frac{5}{8}$kg cada um, que foram vendidos à razão de NCr$ 0,50 cada. Quanto foi apurado na venda da uva?

24. $\frac{8}{9}$ dos eleitores de uma certa cidade apresentaram-se às urnas por ocasião das últimas eleições. Se a população era de 91.440 pessoas, das quais a quarta parte não é eleitora, quantos são os eleitores que se abstiveram de votar?

25. Uma certa importância em dinheiro foi repartida entre três herdeiros. O primeiro recebeu os dois sétimos da importância, o segundo os três quintos e o terceiro o resto. Determinar a importância de cada herdeiro, sabendo-se que um quinto da importância que coube ao primeiro foi de NCr$ 169,00.

26. Respondendo a uma pergunda sôbre sua idade e a de sua espôsa, Carlos disse: os três oitavos de minha idade representam 15 anos, e a idade de minha espôsa é os três quartos da que possuo. Qual a idade de Carlos e de sua espôsa?

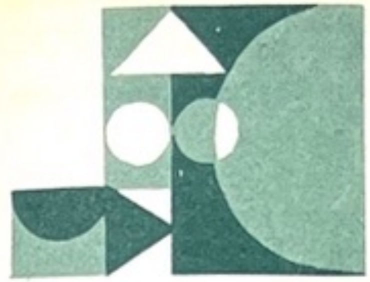
27. Três automóveis usados custaram juntos NCr$ 7.250,00. O preço do primeiro foi os $\frac{3}{4}$ do preço do segundo e também os $\frac{2}{5}$ do do terceiro. Qual o preço de cada automóvel?

ATENÇÃO(*):

Preencha os quadrinhos em branco do quadrado mágico, de modo que a soma dos números de cada linha seja a mesma:

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$

(*) Do livro *SMSG* — Vol. I.



numerais decimais operações dízimas periódicas

17. *Representação decimal dos números racionais*

Você já viu que *fração decimal* é tôda fração cujo denominador é uma *potência de 10:*

$$\frac{3}{10}, \frac{25}{100}, \frac{4.139}{1.000}, \ldots$$

Há outra maneira de se representar *fração decimal?* Ou seja: há outros numerais para representar os números que se apresentam como frações decimais?

Sim. O fato de o denominador dessas frações ser uma *potência de 10* (base do sistema de numeração que empregamos) facilita uma representação semelhante à usada para escrever os *números naturais*, com a única introdução de UMA VÍRGULA!

Basta lembrar que, pelo *princípio da numeração decimal escrita*, um algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades dez vêzes maiores que as dêsse outro. Assim, por exemplo, em 35, temos:

3 5
→ unidades
→ dezenas

E se fôsse escrito mais um algarismo à direita do 5, por exemplo 8? Êle estará representando *também* um valor dez vêzes menor que o representado pelo 5 e, portanto, representará 8 décimos. Para fixar que o 5 representa o algarismo das unidades, escreve-se a sua direita uma vírgula (os povos da língua inglêsa usam o *ponto*). Então:

35,8

significa: 3 *dezenas*, 5 *unidades* e 8 *décimos*, e costuma-se ler: "trinta e cinco unidades e oito décimos".

Pode-se, ainda, *continuar* escrevendo novos algarismos à direita (também denominados "casas decimais"), que passarão a ter um significado *semelhante* ao dado às *centenas, dezenas, . . .,* escritas à esquerda.

Há, portanto, uma **simetria** em relação ao algarismo das unidades:

Logo: uma *nova maneira* (ou seja, um *nôvo numeral!*) de se escrever:

$\frac{8}{10}$ é 0,8 (o 0 indica que a fração (própria) *não contém* unidades)

$\frac{82}{100}$ é 0,82

$\frac{5.825}{1.000} = 5\frac{825}{1.000}$ é 5,825

Os novos numerais: 0,8, 0,82 e 5,825, que constituem respectivamente a representação decimal dos números fracionários:

$$\frac{8}{10},\ \frac{82}{100}\ \text{e}\ \frac{5.825}{1.000}$$

são denominados *numerais decimais* e comumente tomados como "números" decimais.

Tais números, que você conhece desde a Escola Primária, e de uso obrigatório nos sistemas de medidas, são escritos com uma técnica que obedece à seguinte *regra:*

Para se escrever uma fração decimal sob forma de numeral decimal, escreve-se o seu numerador e separa-se com uma vírgula (a partir da direita) *tantos algarismos quantos são os zeros do denominador, separados em classes de três algarismos por um ponto, da esquerda para a direita.*

Outros exemplos:

$\frac{3.258}{100} = \boxed{32{,}58}$ lê-se: "trinta e duas unidades e cinqüenta e oito centésimos" (ou 32 *vírgula* 58)

$\frac{29}{10.000} = \boxed{0{,}002.9}$ lê-se: "vinte e nove décimos milésimos"

$\frac{8.005}{1.000} = \boxed{8{,}005}$ lê-se: "oito unidades e cinco milésimos"

Por sua vez, *um número decimal é igual à fração que se obtém escrevendo para numerador o número sem vírgula e dando para denominador a unidade, seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais.*

Exemplos:

$\boxed{1{,}9} = \frac{19}{10}$ (fração irredutível)

$\boxed{0{,}25} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\boxed{0{,}000.1} = \frac{1}{10.000}$

LEMBRETE AMIGO

Os *"números" decimais* não constituem uma nova categoria de números; êles são as *frações decimais* escritas de outra maneira.

Portanto: $\boxed{\frac{25}{100}}$; $\boxed{0{,}25}$; $\boxed{\frac{1}{4}}$

são numerais diferentes do MESMO NÚMERO FRACIONÁRIO!!

18. *Propriedades características dos numerais decimais; aplicações*

O numeral decimal não altera de valor quando se acrescentam ou se suprimem zeros à direita do seu último algarismo.

De fato: seja, por exemplo, a fração decimal $\frac{23}{100}$, que possui *valor igual* à fração $\frac{23 \times 10}{100 \times 10} = \frac{230}{1.000}$ (pois pertencem à mesma *classe de equivalência*). Essas frações decimais, de igual valor, sob forma de *numeral decimal*, permitem escrever:

$$\boxed{0{,}23 = 0{,}230}$$

Aplicações:

1. Um *número natural* pode ser sempre *escrito* sob forma de *numeral decimal.*

   Exemplo:

   $$5 = 5{,}0 = 5{,}00 = 5{,}000 \ldots$$

   pois correspondem às *frações equivalentes:*

   $$\frac{5}{1} = \frac{50}{10} = \frac{500}{100} = \frac{5.000}{1.000} = \ldots$$

2. Dois ou mais números podem ser sempre escritos de modo que todos tenham o *mesmo número de decimais.*

   Exemplos:

   7,43; 0,2; 56 podem ser escritos:
   7,430; 0,200; 56,000

   Dessa forma, a conversão de frações decimais a um mesmo denominador é imediata, desde que essas frações sejam escritas sob forma de numerais decimais.

19. *Comparação de dois numerais decimais*

É feita *comparando-se*, a partir da esquerda, os algarismos que representam unidades decimais de *mesma ordem*.

Exemplos:

$8{,}32 > 5{,}9$ pois $8 > 5$

$4{,}528 > 4{,}52$ pois o algarismo 8 (dos milésimos) do primeiro número é *maior* que o algarismo 0 (não escrito) dos milésimos do segundo número.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 71

1. Escrever, sob forma de *numerais decimais*, as seguintes frações decimais:

   $$\frac{541}{1.000};\quad \frac{832}{10};\quad \frac{23}{100.000};\quad \frac{1.279}{100}$$

2. Idem, para as frações decimais:

   $$\frac{50}{100};\quad \frac{250}{10};\quad \frac{78.500}{1.000};\quad \frac{10}{10}$$

3. Escrever, sob forma de *fração decimal*, os seguintes numerais decimais:

   5,6; 0,001; 0,000.8; 0,324.5

4. Idem, para os numerais decimais:

   0,10; 1,010; 53,400; 2,903.0

5. Multiplicar os dois têrmos das seguintes frações:

   $$\frac{2}{5};\quad \frac{3}{2};\quad \frac{1}{4};\quad \frac{6}{25}$$

   por um mesmo número natural, a fim de achar as frações decimais *equivalentes* e, a seguir, escrevê-las sob forma de *numerais decimais.*

6. Para as seguintes frações, dizer se existem frações decimais *equivalentes:*

   $$\frac{1}{6};\quad \frac{1}{5};\quad \frac{1}{4};\quad \frac{4}{7};\quad \frac{9}{12}$$

7. Escrever, sob forma de fração decimal, e simplificar (quando possível) os seguintes numerais decimais:

   0,5; 0,4; 1,25; 0,001.5

8. Escrever, em ordem de *valor crescente*, os seguintes numerais decimais:

   2,718; 2,718.2; 2,708

9. Escrever, em ordem de *valor decrescente*, os seguintes numerais decimais:

   0,30; 0,039; 0,039.1

10. Assinalar quais, dos seguintes numerais, representam o *mesmo número:*

    $5{,}0;\quad 0{,}5;\quad 2 \times 3;\quad 5 \times 1$

    $\frac{1}{2};\quad 25 : 5;\quad 6 : 1;\quad \frac{50}{100}$

    $4 : 8;\quad \frac{60}{10};\quad \frac{10}{2};\quad 6{,}00$

Contagem de todos os tempos . . . (Foto *Life*)

Operações com os numerais decimais

↗ **Adição e Subtração**

↘ **Multiplicação e Divisão**

20. *Adição*

Convertem-se, primeiramente, os numerais decimais a unidades de *mesma ordem* (que é sempre possível pela Propriedade Característica) e procede-se como na adição de números naturais. Como *técnica de cálculo* escrevem-se os numerais decimais uns sob os outros, de modo que as vírgulas se correspondam; somam-se, a seguir, os números como se *fôssem naturais*, colocando-se a vírgula na *soma* em correspondência com as das parcelas.

Exemplo:

Efetuar: $13{,}81 + 0{,}052 + 2{,}9$

Temos:

$$\begin{array}{r} 13{,}81 \\ 0{,}052 \\ 2{,}9 \\ \hline 16{,}762 \end{array} \quad \text{ou} \quad \left.\begin{array}{r} 13{,}810 \\ 0{,}052 \\ 2{,}900 \end{array}\right\} + \quad \begin{array}{r} \\ \hline 16{,}762 \end{array}$$

Valem as mesmas *propriedades estruturais* conhecidas para os números fracionários, pois os "números" decimais são numerais diferentes dêsses números.

21. *Subtração*

Procede-se de forma semelhante à da adição.

Exemplo:

Efetuar: $5{,}08 - 3{,}485.2$

Temos:

$$\left.\begin{array}{r} 5{,}080.0 \\ 3{,}485.2 \end{array}\right\} - \quad \begin{array}{r} \\ \hline 1{,}594.8 \end{array}$$

NOTA: As *provas*, tanto para a adição como para a subtração, são as mesmas estudadas com os números naturais.

22. *Multiplicação*

A *técnica operatória* para se obter o *produto* será enunciada após a aplicação num exemplo. Seja multiplicar: 5,32 por 3,8.

Como: $5{,}32 = \frac{532}{100}$ e $3{,}8 = \frac{38}{30}$

temos:

$$5{,}32 \times 3{,}8 = \frac{532}{100} \times \frac{38}{10} = \frac{20.216}{1.000} = 20{,}216$$

isto é:

Multiplicam-se os dois "números" decimais como se fôssem naturais e separam-se no resultado, a partir da direita, tantas casas decimais quantos forem os algarismos das partes decimais dos números dados.

Valem as *propriedades estruturais* já estudadas para a multiplicação dos números fracionários.

Caso particular: Para multiplicar um numeral decimal por uma *potência* de 10, 100, 1.000, . . . , desloca-se a vírgula para *a direita* uma, duas, três, . . . , casas.

Exemplos:

1.º) $4{,}532 \times 100 = \frac{4.532}{1.000} \times 100 = \frac{4.532}{10} = 453{,}2$

2.º) $134{,}5 \times 1.000 = 134.500$

3.º) $0{,}002.7 \times 10 = 0{,}027$

23. *Divisão*

A *divisão* de dois numerais decimais deve ser tratada com mais cuidado, pois, ao contrário do que aconteceu com a adição, subtração e multiplicação, o *quociente* de dois numerais decimais *pode não* representar uma *fração decimal*.

Exemplos:

1. Efetuar: $4{,}12 : 8{,}273$

Considerando as frações decimais correspondentes, temos:

$$\frac{412}{100} : \frac{8.273}{1.000} = \frac{412}{100} \times \frac{1.000}{8.273} = \frac{4.120}{8.273}$$

onde $\boxed{\frac{4.120}{8.273}}$ *não é uma fração decimal.*

2. Efetuar: $0{,}92 : 0{,}2$

Temos: $$\frac{92}{100} : \frac{2}{10} = \frac{92}{100} \times \frac{10}{2} = \boxed{\frac{46}{10}}$$

e, agora, o quociente é uma *fração decimal.*

De qualquer maneira, a *divisão de dois "números" decimais* reduz-se, sempre, à *divisão de dois números naturais.* A obtenção dêsse quociente, sob forma de *numeral decimal* é, na maioria das vêzes, apresentada como valor aproximado (quociente aproximado), cometendo-se, então, um êrro que pode ser controlado, conforme a aproximação desejada.

Antes dêsse estudo, destaquemos o seguinte *caso particular:*

Para dividir um numeral decimal por uma *potência* de 10, 100, 1.000, . . . , desloca-se a vírgula para *a esquerda* uma, duas, três, . . ., casas.

Exemplos:

1.º) $3{,}28 : 1.000 = \frac{328}{100} : 1.000 = \frac{328}{100} \times \frac{1}{1.000} = \frac{328}{100.000} = 0{,}003.28$

2.º) $196{,}3 : 100 = 1{,}963$

24. *Quociente aproximado*

Seja, por exemplo, a *divisão* de 73 por 14, onde:

$$\left.\begin{array}{l} 73 \,\underline{|\,14} \\ \;3 \quad 5 \end{array} \text{(é pouco} \rightarrow \text{quociente } \textit{por falta} \atop \begin{array}{l} 73 \,\underline{|\,14} \\ \qquad 6 \end{array} \text{(é muito} \rightarrow \text{quociente } \textit{por excesso}\right\} \textit{quocientes aproximados}$$

Quer se tome o quociente *por falta* (5), ou *por excesso* (6), comete-se um êrro *menor que uma unidade*, pois o quociente verdadeiro está entre 5 e 6. Logo:

$$\boxed{5 < \frac{73}{14} < 6}$$

Seja, agora, a divisão de 730 por 14. Obteremos:

$$52 < \frac{730}{14} < 53$$

como quociente aproximado, respectivamente, *por falta* e *por excesso*, a *menos de uma unidade.* Dividindo todos os números por 10, vem:

$$\frac{52}{10} < \frac{730}{14 \times 10} < \frac{53}{10}$$

ou $$\boxed{5{,}2 < \frac{73}{14} < 5{,}3}$$

onde 5,2 e 5,3 são, neste instante, os quocientes aproximados, respectivamente, *por falta* e *por excesso*, a *menos de 0,1* (isto é, o êrro cometido é menor que um décimo).

Vale, pois, a seguinte *técnica de cálculo*, que dá a *regra* para se obter o quociente aproximado de dois números naturais, sob a forma de *numeral decimal:*

> **Obtém-se o quociente aproximado, por falta, a menos de 0,1; 0,01; 0,001; . . . . de dois números naturais, acrescentando-se ao dividendo um, dois, três, . . ., zeros e efetuando-se a divisão como é conhecida. No quociente obtido separa-se com uma vírgula, respectivamente, uma, duas, três, . . . , casas decimais.**

Exemplos de *quocientes aproximados:*

1.º)

73 | 14	73,0 | 14	73,00 | 14
3 — 5	30 — 5,2	30 — 5,21
	2	20
		6
a menos de *uma unidade*	a menos de *um décimo* (0,1)	a menos de *um centésimo* (0,01)

2.º) 3 ⌊ 7	3,0 ⌊ 7	3,00 ⌊ 7	3,000 ⌊ 7
0 (*)	2 0,4	20 0,42	20 0,428
		6	60
			4
a menos de *uma unidade*	a menos de 0,1	a menos de 0,01	a menos de 0,001

3.º) Calcular o *quociente aproximado*, por falta, a menos de 0,01, de 43 por 15.

Temos:

43,00 ⌊ 15
130 2,86
100
10

No caso da divisão de *dois "números" decimais*, reduzem-se, primeiramente, o dividendo e o divisor *ao mesmo número de casas decimais* e procede-se como na divisão de dois números naturais.

Exemplos.

1.º) Calcular o *quociente aproximado*, por falta, a menos de 0,1 ou $\left(\frac{1}{10}\right)$, de 4,3 por 8,25.

Temos as seguintes *passagens:*

4,3 ⌊ 8,25 4,30 ⌊ 8,25 430 ⌊ 825

e, portanto: 430,0 ⌊ 825 isto é, o *quociente aproximado* procurado
175 0,5

é $\boxed{0,5}$

2.º) Calcular o *quociente aproximado*, por falta, a *menos de 0,01*, de 52,18 por 0,859.

Temos: 52,18 ⌊ 0,859 52,180 ⌊ 0,859 52180,00 ⌊ 859
6400 60,74 ←—
3870
434

(*) No caso de o dividendo ser *menor* que o divisor o primeiro algarismo do quociente é 0.

1. Efetuar as seguintes operações:
 1.ª) 12,1 + 0,003.9 + 1,98 + 6
 2.ª) (1 − 0,732.1) + (4,82 + 0,18)
 3.ª) (13,01 + 0,01 × 100) − (2,3 × 5,261 − 4 × 1,001)

2. Tornar *verdadeiras* as seguintes sentenças:
 1.ª) 5,32 × 0,01 = 0,01 × ...
 2.ª) 3,029 × ... = 3,029
 3.ª) 3,029 + ... = 3,029
 4.ª) 2,1 × (0,3 + 0,7) = 2,1 × 0,3 + 2,1 × ...

3. Calcular o valor das seguintes expressões:
 1.ª) $\left(3{,}069 + \frac{32}{1.000}\right) - \left(3\,\frac{1}{10} + 0{,}001\right)$
 2.ª) $1{,}2 \times 0{,}021 \times 4 + \frac{41}{100} \times 3{,}01$

4. Tornar *verdadeiras* as seguintes sentenças:
 1.ª) 3,461 × 10 = ...
 2.ª) 3,461 : 10 = ...
 3.ª) 482,1 × 100 = ...
 4.ª) 482,1 : 100 = ...
 5.ª) 84,5 × 0,01 = ...
 6.ª) 84,5 : 0,11 = ...

5. Dar os *quocientes aproximados*, por falta, a menos de uma unidade, um décimo, um centésimo, das seguintes divisões:
 1.ª) 62 : 13 2.ª) 5 : 8 3.ª) 2,9 : 3,7
 4.ª) 72,6 : 0,21 5.ª) 0,048 : 1,2 6.ª) 0,396 : 29

6. Calcular os seguintes *quocientes aproximados*, por falta:
 1.º) 56 por 17 a menos de 0,01
 2.º) 3,9 por 2,5 a menos de 0,1
 3.º) 5 por 7 a menos de 0,001
 4.º) 42,7 por 0,315 a menos de 0,01
 5.º) 0,032.1 por 1,27 a menos de 0,001

7. Multiplicar um número por 0,01 significa também dividi-lo por ...

8. Dividir um número por 100 significa também multiplicá-lo por ...

9. O produto de 2 por 0,3 é equivalente ao produto de 0,2 por ...

10. O quociente de dois numerais decimais é sempre um numeral decimal. É verdadeira ou falsa esta sentença?

Conversões - Dízimas Periódicas

25. *Conversão de fração ordinária em numerais decimais e vice-versa; dízimas periódicas*

Já vimos que *tôda* fração decimal pode ser escrita como *numeral decimal* (exemplo: $\frac{75}{100} = 0{,}75$).

Existem também *algumas* frações ordinárias que podem ser *transformadas em numerais decimais:* basta que tenham como equivalentes frações decimais. É o que acontece, por exemplo, com a fração ordinária $\frac{3}{4}$, onde:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Já o mesmo não ocorre, por exemplo, com a fração ordinária $\frac{3}{7}$, que *não admite* uma fração decimal equivalente. Daí a expressão: *conversão de uma fração ordinária em numeral decimal,* só ter sentido em *alguns casos.*

Pràticamente, a procura da fração decimal equivalente a uma fração ordinária dada é feita dividindo-se o numerador dessa fração pelo seu denominador. Podem acontecer *dois casos:*

1.º) a divisão é *exata:* nesse caso diz-se que a fração ordinária *converteu-se* numa **decimal exata** (o mesmo que *numeral decimal*), pelo fato de o quociente dessa divisão admitir, na sua representação, um número finito de casas decimais;

2.º) a divisão *não é exata:* nesse caso existirão restos *não-nulos* que se repetirão *periòdicamente;* o quociente, por sua vez, prolongar-se-á *indefinidamente* e diz-se que a fração ordinária converteu-se numa **decimal periódica** ou **dízima periódica.**

Exemplos:

Efetuar a *conversão* das seguintes *frações ordinárias:*

$$\frac{3}{25}, \quad \frac{47}{20} \quad \frac{8}{11}, \quad \frac{308}{90}$$

Fazendo as respectivas divisões, temos:

$\frac{3}{25} = 0{,}12 \longrightarrow$ decimal exata

$$\begin{array}{r|l} 3{,}0 & 25 \\ \cline{2-2} 50 & 0{,}12 \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{47}{20} = 2{,}35 \longrightarrow$ decimal exata

$$\begin{array}{r|l} 47 & 20 \\ \cline{2-2} 70 & 2{,}35 \\ 100 & \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{8}{11} = 0{,}727.272\ldots \longrightarrow$ dízima periódica

$$\begin{array}{r|l} 8{,}0 & 11 \\ \cline{2-2} 30 & 0{,}7272\ldots \\ 80 & \\ 30 & \\ 80 & \\ \vdots & \end{array}$$

$\frac{308}{90} = 3{,}422.2\ldots \longrightarrow$ dízima periódica

$$\begin{array}{r|l} 308 & 90 \\ \cline{2-2} 380 & 3{,}4222\ldots \\ 200 & \\ 200 & \\ 200 & \\ \vdots & \end{array}$$

26. *Condição para que uma fração ordinária se converta numa decimal exata*

Como numa fração decimal o denominador é *uma potência de 10,* segue-se que tôda fração ordinária cujo denominador possa ser *transformado* numa potência de 10 se tornará, na conversão, uma decimal exata (numeral decimal!). Sendo 2 e 5, com determinados expoentes, os únicos fatôres das potências de 10, vale a seguinte *técnica de cálculo,* que permite saber o resultado da conversão sem efetuar a divisão!

Fatora-se completamente o denominador da fração ordinária (irredutível); se êle contiver sòmente os fatôres 2 e 5, a fração converter-se-á numa decimal exata; o número de casas decimais é igual ao maior dos expoentes de 2 ou 5.

Conversões - Dízimas Periódicas

25. *Conversão de fração ordinária em numerais decimais e vice-versa; dízimas periódicas*

Já vimos que *tôda* fração decimal pode ser escrita como *numeral decimal* (exemplo: $\frac{75}{100} = 0{,}75$).

Existem também *algumas* frações ordinárias que podem ser *transformadas* em *numerais decimais:* basta que tenham como equivalentes frações decimais. É o que acontece, por exemplo, com a fração ordinária $\frac{3}{4}$, onde:

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times25}{4\times25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Já o mesmo não ocorre, por exemplo, com a fração ordinária $\frac{3}{7}$, que *não admite* uma fração decimal equivalente. Daí a expressão: *conversão de uma fração ordinária em numeral decimal,* só ter sentido em *alguns casos.*

Pràticamente, a procura da fração decimal equivalente a uma fração ordinária dada é feita dividindo-se o numerador dessa fração pelo seu denominador. Podem acontecer *dois casos:*

1.°) a divisão é *exata:* nesse caso diz-se que a fração ordinária *converteu-se* numa **decimal exata** (o mesmo que *numeral decimal*), pelo fato de o quociente dessa divisão admitir, na sua representação, um número finito de casas decimais;

2.°) a divisão *não é exata:* nesse caso existirão restos *não-nulos* que se repetirão *periòdicamente;* o quociente, por sua vez, prolongar-se-á *indefinidamente* e diz-se que a fração ordinária converteu-se numa **decimal periódica** ou **dízima periódica.**

Exemplos:

Efetuar a *conversão* das seguintes *frações ordinárias:*

$$\frac{3}{25},\ \frac{47}{20},\ \frac{8}{11},\ \frac{308}{90}$$

Fazendo as respectivas divisões, temos:

$\frac{3}{25} = 0{,}12 \longrightarrow$ decimal exata

$$\begin{array}{r|l} 3{,}0 & 25 \\ \hline 50 & 0{,}12 \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{47}{20} = 2{,}35 \longrightarrow$ decimal exata

$$\begin{array}{r|l} 47 & 20 \\ \hline 70 & 2{,}35 \\ 100 & \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{8}{11} = 0{,}727.272\ldots \longrightarrow$ dízima periódica

$$\begin{array}{r|l} 8{,}0 & 11 \\ \hline 30 & 0{,}7272\ldots \\ 80 & \\ 30 & \\ 80 & \\ \vdots & \end{array}$$

$\frac{308}{90} = 3{,}422.2\ldots \longrightarrow$ dízima periódica

$$\begin{array}{r|l} 308 & 90 \\ \hline 380 & 3{,}4222\ldots \\ 200 & \\ 200 & \\ 200 & \\ \vdots & \end{array}$$

26. *Condição para que uma fração ordinária se converta numa decimal exata*

Como numa fração decimal o denominador é *uma potência de 10,* segue-se que tôda fração ordinária cujo denominador possa ser *transformado* numa potência de 10 se tornará, na conversão, uma decimal exata (numeral decimal!). Sendo 2 e 5, com determinados expoentes, os únicos fatôres das potências de 10, vale a seguinte *técnica de cálculo,* que permite saber o resultado da conversão sem efetuar a divisão!

> **Fatora-se completamente o denominador da fração ordinária (irredutível); se êle contiver sòmente os fatôres 2 e 5, a fração converter-se-á numa decimal exata; o número de casas decimais é igual ao maior dos expoentes de 2 ou 5.**

Exemplos:

1.º) *Converter* a fração: $\frac{27}{120}$

Primeiramente, tornamo-la irredutível: $\frac{27}{120} = \frac{9}{40}$ e, como o denominador $40 = 2^3 \times 5$ só contém os fatôres 2 e 5, segue-se que a fração $\frac{9}{40}$ converter-se-á numa *decimal exata* com três casas decimais (que é o expoente de 2). Logo:

$\frac{27}{120} \longrightarrow$ decimal exata (com três casas decimais)

Verifique você êste resultado *efetuando* a divisão!

2.º) *Converter* a fração: $\frac{13}{4}$

Temos: $4 = 2^2$ e portanto: $\frac{13}{4} \longrightarrow$ decimal exata (com duas casas)

NOTA: O fato de aparecer no denominador sòmente o fator 2 (ou 5) ainda satisfaz a técnica empregada, pois a ausência de um dos fatôres significa que no produto êsse fator figura com o expoente *zero* que, como sabemos, vale 1. No exemplo, temos: $4 = 2^2 \times 5^0$.

3.º) *Converter* a fração: $\frac{1}{100}$

Temos: $100 = 2^2 \times 5^2$ e, portanto: $\frac{1}{100} \longrightarrow$ decimal exata (com duas casas).

27. *Condição para que uma fração ordinária se converta numa dízima periódica*

Seja a fração $\frac{8}{11}$. Dividindo-se 8 por 11, os restos que se vão obtendo (nunca são *nulos*) devem ser menores que 11 e, portanto, depois de um certo número de vêzes êles *se repetirão*, provocando no quociente os mesmos algarismos sempre na mesma ordem. Assim:

$$\begin{array}{l|l} 8{,}0 & 11 \\ \hline \;\;30 & 0{,}727.272\ldots \\ \;\;\;80 & \\ \;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;80 & \\ \;\;\;\;\;\cdot & \\ \;\;\;\;\;\;\cdot & \\ \;\;\;\;\;\;\;\cdot & \end{array}$$

Dêsse modo, o quociente é um número cuja representação decimal apresenta um grupo de algarismos — chamado período — que se repete *indefinidamente.* Tal quociente é a dízima periódica ou decimal periódica.

Se o *período* vier logo *depois da vírgula*, a dízima periódica diz-se simples e, no caso de existir entre a vírgula e o período *uma parte decimal*, a dízima periódica diz-se composta. Tal parte decimal é, geralmente, denominada *não-periódica*.

Exemplos:

1.º) 0,727.272 . . . que também se representa por $0,\overline{72}$, é uma dízima periódica simples, de *período* 72(*);

2.º) 8,513.513.513. . . ou $8,\overline{513}$ é uma dízima periódica simples, de *período* 513;

3.º) 0,826.464.64. . . ou $0,82\overline{6.4}$ é uma dízima periódica composta de *período* 64 e cuja *parte não-periódica* é 82;

4.º) 67,033.3. . . ou $67,0\dot{3}$ é uma dízima periódica composta de *período* 3 e *parte não-periódica* 0.

Também, agora, é possível prever-se a *espécie* da dízima periódica, quando se converte uma fração ordinária, *sem efetuar a divisão.* A *técnica de cálculo* é a seguinte:

> **Fatora-se completamente o denominador da fração ordinária (irredutível); se êle não contiver os fatôres 2 e 5, a fração converter-se-á numa dízima periódica simples; caso contenha um dêsses fatôres e outros, a dízima periódica será composta.**

Exemplos:

1.º) Converter a fração: $\frac{4}{11}$

Como o denominador não contém os fatôres 2 e 5, esta fração converter-se-á numa dízima periódica simples. Logo:

$\frac{4}{11} \longrightarrow$ dízima periódica simples. (Verifique efetuando a divisão!)

2.º) Converter a fração: $\frac{21}{45}$

Simplificando, temos: $\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

Como o denominador $15 = 3 \times 5$, além do fator 5, contém o fator 3, a fração converter-se-á numa dízima periódica composta. Logo:

$\frac{21}{45} \longrightarrow$ dízima periódica composta

3.º) Converter a fração: $\frac{191}{60}$

Como $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, além dos fatôres 2 e 5, contém o fator 3, então:

$\frac{191}{60} \longrightarrow$ dízima periódica composta

(*) Costuma-se usar também a notação: 0,[72], para representar a dízima periódica 0,727.272. . .

Geratrizes

28. *Conversão das dízimas periódicas em frações ordinárias*

Conhecendo-se uma dízima periódica (simples ou composta), pode-se determinar a fração ordinária que a gerou. Tal fração ordinária chama-se GERATRIZ.

Observando que:

$$\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$$

$$\frac{1}{99} = 0{,}010.101\ldots$$

$$\frac{1}{999} = 0{,}001.001.001\ldots$$

$$\vdots$$

segue-se que a *geratriz* de uma dízima periódica *simples*, de período igual a uma unidade decimal (0,1; 0,01; 0,001; . . .), é *uma fração cujo numerador é 1 e o denominador é formado de tantos noves quantos forem os algarismos do período.*

Para uma dízima periódica simples qualquer, como por exemplo:

0,525.252 . . . .

pode-se sempre escrevê-la sob a forma:

$$0{,}525.252\ldots = 52\times 0{,}010.101\ldots =$$

e. portanto:

$$= 52\times\frac{1}{99} =$$

$$= \frac{52}{99}$$

isto é,

> **A geratriz de uma dízima periódica simples (de parte inteira nula) é uma fração que tem para numerador o período e para denominador um número formado por tantos noves quantos forem os algarismos do período.**

NOTA: Se a parte inteira da dízima periódica não é nula, *soma-se* a parte inteira com a geratriz da dízima. Exemplo:

Calcular a geratriz da dízima periódica: 3,444 . . .

Temos:

$$3{,}444\ldots = 3 + 0{,}444\ldots = 3 + \frac{4}{9} = 3\,\frac{4}{9}$$

Estudemos agora a *técnica de cálculo* que permite determinar a *geratriz* de uma dízima periódica *composta.*

Seja a dízima periódica composta: 0,348.484.8 . . .

Como:

$$0{,}348.484.8\ldots = \frac{3{,}484.848\ldots}{10} = \frac{3 + 0{,}484.848\ldots}{10} = \frac{3+\frac{48}{99}}{10} =$$

$$= \frac{\frac{3\times 99+48}{99}}{10} = \frac{3\times 99+48}{990} = \frac{3\times(100-1)+48}{990} =$$

$$= \frac{300-3+48}{990} = \frac{348-3}{990}$$

vale a seguinte *técnica de cálculo:*

> **A geratriz de uma dízima periódica composta (de parte inteira nula) é uma fração que tem para numerador a diferença entre o número formado pela parte não-periódica, acompanhada de um período e a parte não-periódica; e, para denominador, um número formado de tantos noves quantos forem os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte não-periódica.**

NOTA: Se existir a parte inteira, procede-se como no caso anterior. Exemplo:

Calcular a geratriz da dízima periódica: 5,273.33 . . .

Temos:

$$5{,}273.33\ldots = 5 + 0{,}273.33\ldots = 5 + \frac{273-27}{900} = 5\,\frac{246}{900}$$

OBSERVAÇÃO: As dízimas periódicas de período 9, como por exemplo:

0,999 . . . (denominada *pura*)
e 7,349.99 . . . (denominada *mista*)

não têm geratrizes no sentido até agora estudado, por isso serão evitadas neste curso.

29. *Expressões envolvendo dízimas periódicas*

Como as dízimas periódicas não são *valôres exatos*, tôda vez que elas figurarem em expressões, serão substituídas pelas respectivas *geratrizes*.

Exemplos:

1.º) Efetuar: $0{,}\overline{42} + 3{,}2\dot{1}$

Tomando as respectivas *geratrizes*, vem:

$$0{,}\overline{42} + 3{,}2\dot{1} = \frac{42}{99} + 3\,\frac{21-2}{90} = \frac{42}{99} + \frac{289}{90} = \frac{3.599}{990} = 3\,\frac{629}{990}$$

2.º) Efetuar: $5{,}\overline{34} : 0{,}\dot{8}$

Temos: $$5{,}\overline{34} : 0{,}\dot{8} = 5\,\frac{34}{99} : \frac{8}{9} = \frac{529}{99} \times \frac{9}{8} = \frac{4.761}{792} = 6\,\frac{1}{88}$$

3.º) Efetuar: $1{,}21 + 0{,}\dot{3} \times \dfrac{1}{0{,}\dot{1}}$.

Temos: $$1{,}21 + 0{,}\dot{3} \times \frac{1}{0{,}\dot{1}} = 1{,}21 + \frac{3}{9} \times \frac{1}{\frac{1}{9}} = 1{,}21 + \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \overset{3}{\cancel{9}} =$$
$$= 1{,}21 + 3 = 4{,}21$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 73

1. *Converter* as seguintes frações ordinárias em decimal exata ou dízima periódica:

1.ª) $\frac{3}{4}$ 2.ª) $\frac{8}{3}$ 3.ª) $\frac{5}{11}$ 4.ª) $\frac{11}{200}$ 5.ª) $\frac{27}{75}$

6.ª) $\frac{50}{99}$ 7.ª) $\frac{13}{125}$ 8.ª) $\frac{1}{50}$ 9.ª) $\frac{7}{6}$ 10.ª) $\frac{18}{74}$

2. Indicar, sem efetuar a divisão, qual o tipo do resultado que se obtém ao se *converterem* as seguintes frações ordinárias:

1.ª) $\frac{10}{24}$ 2.ª) $\frac{7}{15}$ 3.ª) $\frac{36}{48}$ 4.ª) $\frac{9}{64}$ 5.ª) $\frac{4}{50}$ 6.ª) $\frac{3}{11}$

3. Calcular as *geratrizes* das seguintes dízimas periódicas:

1.ª) $0{,}\dot{7}$ 2.ª) $3{,}\overline{45}$ 3.ª) $0{,}85\overline{3.4}$ 4.ª) $2{,}0\dot{3}$ 5.ª) $5{,}143.\overline{21}$

6.ª) $0{,}0\overline{01.6}$ 7.ª) $22{,}3\overline{00.1}$ 8.ª) $0{,}010.01\overline{0.02}$ 9.ª) $1{,}20\dot{2}$ 10.ª) $0{,}0\overline{41.5}$

4. É dízima periódica a expressão: 0,010.010.001.000.01 . . . ?

5. É verdadeira ou falsa a sentença: "Tôda fração ordinária é equivalente a uma fração decimal"?

6. Efetuar a multiplicação: $(0{,}444\ldots) \times (2{,}555\ldots)$

7. Efetuar a divisão: $(0{,}323.232\ldots) : (0{,}232.323\ldots)$

8. Calcular o valor da expressão: $0{,}\overline{31} + 0{,}0\dot{1}$

9. Idem, da expressão: $0{,}\overline{345} + 3{,}\dot{2} \times \dfrac{4}{0{,}3\dot{1}}$

10. Idem: $\left[(0{,}\overline{30} - 0{,}\overline{16}) : 0{,}\dot{7} + 1{,}4 \times \dfrac{9}{13}\right] : \dfrac{13}{11}$

Potenciação e Radiciação de Numerais Decimais

30. *Potenciação*

O cálculo da *potência* (resultado da operação potenciação) de um "número" decimal, pode ser efetuado transformando-o na *fração decimal correspondente*.

Exemplos:

$$(0{,}9)^3 = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1.000} = \boxed{0{,}729}$$ que equivale a $(0{,}9)^3 = 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}729$

$$(3{,}01)^2 = \left(\frac{301}{100}\right)^2 = \frac{90.601}{10.000} = \boxed{9{,}060.1}$$ que equivale a $(3{,}01)^2 = 3{,}01 \times 3{,}01 = 9{,}060.1$

Observações:

1.ª) Pode-se, também, calcular a potência indicada de um numeral decimal não se levando em conta a vírgula (isto é, como se fôsse natural) e, depois, separar do resultado um número de casas decimais igual ao produto do número que indica as casas decimais do número dado pelo expoente da potência indicada. *Exemplo:*

$$(3{,}01)^2 \qquad (301)^2 = 90.601 \qquad 9{,}060.1$$

2.ª) O cálculo da potência indicada de uma dízima periódica é feito por intermédio da respectiva *geratriz*. *Exemplo:*

$$(0{,}777\ldots)^2 = \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \boxed{\frac{49}{81}}$$

31. *Radiciação. Raiz quadrada aproximada*

Conhecida a *potência* de um numeral decimal, o cálculo de sua raiz (quadrada, cúbica, . . .) é feito da mesma maneira como foi estudado para os números fracionários.

Exemplos:

1.º) de $(0{,}9)^3 = 0{,}729$ temos $\sqrt[3]{0{,}729} = 0{,}9$

ou também:

$$\sqrt[3]{0{,}729} = 0{,}9 \qquad (0{,}9)^3 = 0{,}729$$

2.º) de $(0{,}3)^2 = 0{,}09$ temos $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$

ou também:

$$\sqrt{0{,}09} = 0{,}3 \qquad (0{,}3)^2 = 0{,}09$$

Se o numeral decimal dado *não é uma potência*, o cálculo de sua raiz é feito sòmente com certa aproximação.

Dada a aplicação que tem, estudaremos sòmente o caso da *extração da raiz quadrada* com determinadas *aproximações:* décimos (0,1); centésimos (0,01); milésimos (0,001), . . .

Êsse estudo reduz-se ao cálculo da raiz quadrada de *números naturais*, com *aproximação por falta, a menos de uma unidade*, a partir da seguinte *regra:*

> **Extrai-se a raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de 0,1; 0,01; 0,001; . . . de um número natural, extraindo-se a sua raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de uma unidade, e colocando-se, a seguir, à direita da raiz uma vírgula. Acrescentando-se dois zeros à direita do número natural dado, a continuação da extração da raiz permitir-nos-á encontrar o algarismo dos décimos da raiz procurada; acrescentando-se quatro zeros, a operação permitirá encontrar o algarismo dos centésimos da raiz quadrada e, assim por diante, até a ordem de aproximação desejada.**

A representação, por exemplo, da *raiz quadrada aproximada* de 8 nas diversas aproximações decimais é:

$\sqrt{8} = 2$ (por falta a menos de uma unidade)

$\overset{0,1}{\sqrt{8{,}00}} = 2{,}8$ [por falta a menos de um décimo (0,1)]

$\overset{0,01}{\sqrt{8{,}000.0}} = 2{,}82$ [por falta a menos de um centésimo (0,01)]

Exemplo:

Extrair a *raiz quadrada aproximada*, por falta, a menos de 0,01, do número 2.

Como a aproximação é de centésimos (0,01), deve-se acrescentar quatro zeros à direita do 2; logo:

```
√2,00 00 | 1,41
 1       | 24 × 4=96
 10.0    | 281×1=281
  96     |
   40.0  |
   28 1  |
   11 9  |
```

Portanto: $\overset{0,01}{\sqrt{2}} = 1{,}41$ (por falta, a menos de 0,01, e o *resto* é 0,011.9, da mesma espécie do radicando)

Prova: $(1{,}41)^2 = 1{,}41 \times 1{,}41 = 1{,}988.1$; $1{,}988.1 + 0{,}011.9 = \boxed{2}$

Do estudo feito segue-se que *a extração da raiz quadrada de um "número" decimal qualquer* obedece à seguinte *técnica de cálculo:*

1.º) faz-se o numeral decimal dado ter duas, quatro, seis, . . ., casas decimais, conforme a aproximação desejada seja a menos de 0,1; 0,01; 0,001; . . . (você sabe que isso é sempre possível!);

2.º) extrai-se a raiz quadrada do numeral decimal assim preparado, como se a vírgula *não existisse;*

3.º) separa-se, com uma vírgula, no resultado obtido, respectivamente, uma, duas, três, . . ., casas decimais.

Exemplo:

Extrair a raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de 0,01, do "número" decimal 0,941.

Como a aproximação é de centésimos (0,01), o "número" decimal deve possuir quatro casas decimais. Logo:

```
0,941.0 ——→ √94 10 | 97
             81    | 187×7 = 1.309
             13 10 |
             13 09 |
                 1 |
```

Portanto: $\overset{0{,}01}{\sqrt{0{,}941}}=0{,}97$ (por falta, a menos de 0,01, e o *resto* é 0,000.1)

Prova: $(0{,}97)^2 = 0{,}940.9;\ 0{,}940.9 + 0{,}000.1 = \boxed{0{,}941}$

NOTA: No final dêste Capítulo consta uma Tábua dos quadrados, cubos, raízes quadradas e raízes cúbicas dos números de 1 a 100.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 74

1. Calcular as seguintes potências indicadas:

   1.ª) $(0{,}3)^2$ 2.ª) $(0{,}01)^3$ 3.ª) $(1{,}2)^4$ 4.ª) $(13{,}001)^0$ 5.ª) $(0{,}01)^1$

   6.ª) $(0{,}444\ldots)^3$ 7.ª) $(3{,}266.6\ldots)^2$ 8.ª) $(8{,}013.33\ldots)^2$

2. Escrever as raízes (exatas) correspondentes às seguintes potências, como resultado da operação inversa:

   1.ª) $(0{,}2)^2 = 0{,}04 \iff \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$ (exemplo-modêlo)

   2.ª) $(3{,}10)^3 = 29{,}791$ 3.ª) $(0{,}1)^4 = 0{,}000.1$ 4.ª) $(0{,}2)^5 = 0{,}000.32$

3. Qual a raiz quadrada (exata) dos seguintes *numerais decimais?*

   1.ª) 0,04 2.ª) 0,01 3.ª) 0,16 4.ª) 1,44 5.ª) 4,41

4. Idem, das seguintes frações decimais:

   1.ª) $\frac{1}{100}$ 2.ª) $\frac{4}{10.000}$ 3.ª) $\frac{9}{100}$ 4.ª) $\frac{49}{10.000}$

5. Extrair a raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de 0,1, dos seguintes *números naturais:*

   1.º) 3 2.º) 5 3.º) 8 4.º) 12 5.º) 17 6.º) 82

6. Idem, a menos de 0,01.

7. Idem, a menos de 0,001.

8. Extrair a raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de 0,1, dos seguintes *numerais decimais:*

   1.º) 4,3 2.º) 0,09 3.º) 1,231 4.º) 0,3 5.º) 2,16

9. Idem, a menos de 0,01, dos seguintes *numerais decimais:*

   1.º) 0,52 2.º) 3,214 3.º) 33,8 4.º) 0,007.81

10. Idem, a menos de 0,001, das seguintes *frações ordinárias:*

   1.ª) $\frac{5}{9}$ 2.ª) $\frac{144}{166}$ 3.ª) $\frac{16}{3}$ 4.ª) $\frac{1}{8}$ (Sugestão: *convertê-las!*)

TÁBUA DOS QUADRADOS, CUBOS, RAÍZES QUADRADAS E RAÍZES CÚBICAS DOS NÚMEROS DE 1 A 100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,0000	1,0000	51	26 01	132 651	7,1414	3,8084
2	4	8	1,4142	1,2599	52	27 04	140 608	7,2111	3,7325
3	9	27	1,7321	1,4422	53	28 09	148 877	7,2801	3,7563
4	16	64	2,0000	1,5874	54	29 16	157 464	7,3485	3,7798
5	25	125	2,2361	1,7100	55	30 25	166 375	7,4162	3,8030
6	36	216	2,4495	1,8171	56	31 36	175 616	7,4833	3,8259
7	49	343	2,6458	1,9129	57	32 49	185 193	7,5498	3,8385
8	64	512	2,8284	2,0000	58	33 64	195 112	7,6158	3,8709
9	81	729	3,0000	2,0801	59	34 81	205 379	7,6811	3,8930
10	1 00	1 000	3,1623	2,1544	60	36 00	216 000	7,7460	3,9149
11	1 21	1 331	2,3166	2,2240	61	37 21	226 981	7,8102	3,9365
12	1 44	1 728	3,4641	2,2894	62	38 44	238 328	7,8740	3,9579
13	1 69	2 197	3,6056	2,3513	63	39 69	250 047	7,9373	3,9791
14	1 96	2 744	3,7517	2,4101	64	40 96	262 144	8,0000	4,0000
15	2 25	3 375	3,8730	2,4662	65	42 25	274 625	8,0623	4,0207
16	2 56	4 096	4,0000	2,5198	66	43 56	287 496	8,1240	4,0412
17	2 89	4 913	4,1231	2,5713	67	44 89	300 763	8,1854	4,0615
18	3 24	5 832	4,2426	2,6207	68	46 24	314 432	8,2462	4,0817
19	3 61	6 859	4,3589	2,6684	69	46 71	328 509	8,3066	4,1016
20	4 00	8 000	4,4721	2,7144	70	49 00	343 000	8,3666	4,1213
21	4 41	9 261	4,5826	2,7589	71	50 41	357 911	8,4261	4,1408
22	4 84	10 648	4,6904	2,8020	72	51 84	373 248	8,4853	4,1602
23	5 29	12 167	4,7958	2,8439	73	53 29	389 017	8,5440	4,1793
24	5 76	13 824	4,8990	2,8845	74	54 76	405 224	8,6023	4,1983
25	6 25	15 625	5,0000	2,9240	75	56 25	421 875	8,6603	4,2172
26	6 76	17 576	5,0990	2,9625	76	57 76	438 976	8,7178	4,2358
27	7 29	19 683	5,6192	3,0000	77	59 29	446 533	8,7750	4,2543
28	7 84	21 952	5,2915	3,0366	78	60 84	474 552	8,8318	4,2727
29	8 41	24 389	5,3852	3,0723	79	62 41	493 039	8,8882	4,2908
30	9 00	27 000	5,4772	3,1072	80	64 00	512 000	8,9443	4,3089
31	9 61	29 791	5,5678	3,1414	81	65 61	531 441	9,0000	4,3267
32	10 24	32 768	5,6569	3,1748	82	67 24	551 368	9,0554	4,3445
33	10 89	35 937	5,7446	3,2075	83	68 89	571 787	9,1104	4,3621
34	11 56	39 304	5,8310	3,2396	84	70 56	592 704	9,1652	4,3795
35	12 25	42 875	5,9161	3,2711	85	72 25	614 125	9,2195	4,3968
36	12 96	46 656	6,0000	3,3019	86	73 96	636 056	9,2736	4,4140
37	13 69	50 653	6,0828	3,3322	87	75 69	658 503	9,3274	4,4310
38	14 44	54 872	6,1644	3,3620	88	77 44	681 472	9,3808	4,4480
39	15 21	59 319	6,2450	3,3912	89	79 21	704 969	9,4340	4,4647
40	16 00	64 000	6,3246	3,4200	90	81 00	729 000	9,4868	4,4814
41	16 81	68 921	6,4031	3,4482	91	82 81	753 571	9,5394	4,4979
42	17 64	74 088	6,4807	3,4760	92	84 64	778 688	9,5917	4,5144
43	18 49	79 507	6,5574	3,5034	93	86 49	804 357	9,6437	4,5307
44	19 36	85 184	6,6332	3,5303	94	88 36	830 584	9,6954	4,5468
45	20 25	91 125	6,7082	3,5569	95	90 25	857 375	9,7468	4,5629
46	21 16	97 336	6,7823	3,5830	96	92 16	884 637	9,7980	4,5789
47	22 09	103 823	6,5887	3,6088	97	94 09	912 673	9,8489	4,5947
48	23 04	110 592	6,9282	3,6342	98	96 04	941 192	9,8995	4,6104
49	24 01	117 649	7,0000	3,5693	99	98 01	970 299	9,9499	4,6261
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416

1 — 100

Conjunto dos números racionais absolutos

Até agora, para resolver todos os seus problemas, você empregou *duas espécies de números:*

os *números naturais*
e os *números fracionários*

Pelo fato de que *todo número natural pode ser representado por uma fração de denominador 1* $\left(\text{exemplo: } 5 = \frac{5}{1}\right)$, é possível englobar as duas espécies de números já estudados (*naturais* e *fracionários*) numa *única definição* de **número racional absoluto** e usar, para representá-lo, o numeral *fração*.

Ao falar, pois, em **número racional,** você se refere tanto a um número *natural* como a um número *fracionário.*

Qual seria a *definição* de um *número racional absoluto?*

A sua definição é dada por intermédio das *classes de equivalência,* estabelecidas quando foram estudadas as frações equivalentes e da qual se destacou o representante mais simples. Então:

> ***Número racional*** **é aquêle definido por uma *classe de equivalência* da qual cada fração é um representante.**

Assim, por exemplo:

Número racional natural ou, simplesmente, *número natural:*

$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \ldots$ (definido pela *classe de equivalência* que representa o *mesmo número racional 0*)

$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \ldots$ (definido pela *classe de equivalência* que representa o *mesmo número racional 1*)

$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots$ (definido pela *classe de equivalência* que representa o *mesmo número racional 2*)

$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \ldots$ (definido pela *classe de equivalência* que representa o *mesmo número racional 3*)

. . . .

Número racional fracionário ou, simplesmente, *número fracionário:*

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$ (definido pela *classe de equivalência* que representa o *mesmo número racional* $\frac{1}{2}$)

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots$ (definido pela *classe de equivalência* que representa o *mesmo número racional* $\frac{2}{3}$)

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \ldots$ (definido pela *classe de equivalência* que representa o *mesmo número racional* $\frac{3}{2}$)

. . . .

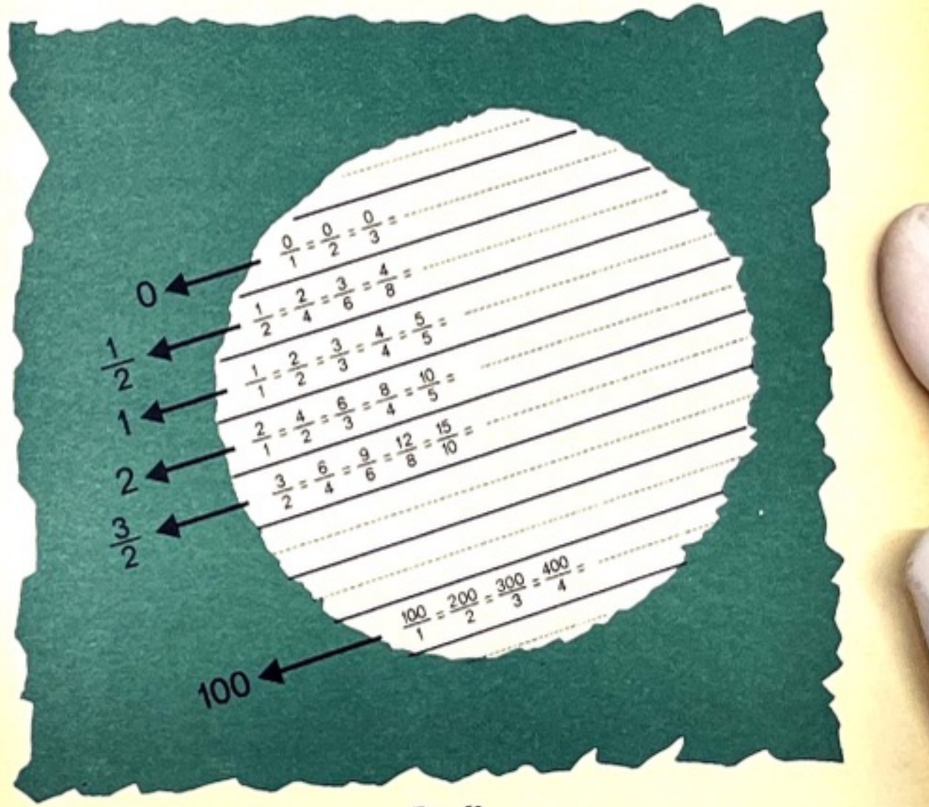


Fig. 53

Dessa forma, pode-se concluir que:

> **Todo número racional pode ser representado por uma fração:**
>
> $$\frac{a}{b}$$
>
> **onde a e b são números naturais, sendo $b \neq 0$**

E foi assim que você tem estudado o *número racional*, pois no caso de:

a *ser múltiplo* de b, tem-se o *número natural*
a *não ser múltiplo* de b, tem-se o *número fracionário*

Logo:

$$\textit{número racional}\begin{cases}\textit{número natural}\\ \textit{número fracionário}\end{cases}$$

r surge um nôvo *conjunto numérico*, denominado CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS ABSOLUTOS, que será representado pela letra Q (inicial da palavra *quociente*).

Tal conjunto é *reunião* do *conjunto dos números naturais* (N) com o *conjunto dos números fracionários:*

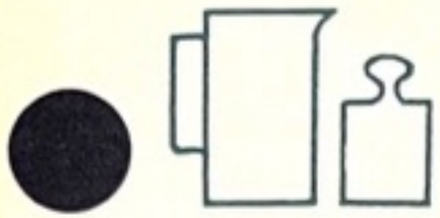
$$Q = \left\{0, \ldots \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{2}, \ldots 1, \ldots \frac{3}{2}, \ldots 2, \ldots \frac{5}{2}, \ldots 3, \ldots\ldots\right\}$$

Para terminar, *guarde bem:*

1) Q é um conjunto *infinito*, do qual o 0 é o *menor* dos números racionais.
2) $N \subset Q$, pois o conjunto N é um *subconjunto* de Q.

CAPÍTULO 4

medidas



sistemas de medidas usuais

1. *Contagem e medida*

Saber *medir* "qualquer coisa" é dos mais importantes conhecimentos da vida moderna. As perguntas diárias:

Quantos alunos tem o 1.º Ano "B"?

Qual a distância daqui a Brasília? *Qual o comprimento* desta corda?

Quanto de carne você vai comprar? E de azeite?

Qual a capacidade de produção da Usina de "Paulo Afonso"?

Qual a superfície do nôvo Estado da Guanabara?

Quantos jogadores foram convocados para a seleção?

Qual a velocidade com que passou o "jacto"?

envolvem *medidas* das mais diversas, cujas respostas são dadas *sempre* por meio de números!

Alguns dêsses *números* são determinados por *contagens* (geralmente no Sistema de Numeração Decimal) e outros *medindo* "algo" (geralmente no Sistema Métrico Decimal). Assim, por exemplo, as respostas às perguntas:

Quantos alunos tem o 1.º Ano "B"? ou *Quantos* jogadores foram convocados?, são determinadas por contagens, pois cada pessoa é um *objeto inteiro*. Logo, para "medir" um conjunto de pessoas, animais, casas, bolinhas de gude, etc., e todos aquêles cujos elementos são "separáveis" por unidades, valemo-nos *sòmente* dos números *naturais*. Assim, podem existir 35 ou 40 alunos no 1.º Ano "B", mas *nunca* poderiam existir 35,6 *alunos* ("frações" de alunos!).

Agora, para responder à pergunta:

Qual o comprimento desta corda?

não vamos dizer *contando*, porque a corda é um objeto *contínuo*, isto é, não é feita por partes "separadas" que possam ser contadas.

Então, neste caso, *medimos*, e a *medida* é feita através de números naturais e números fracionários (ou seja, pelos *números racionais*) de certas *unidades*. Exemplo: a corda mede 3,8m ou 4m ou ainda 2,93m.

Para distinguir as *quantidades* que podem ser contadas das que podem ser medidas, chamamos de:

quantidades discretas — aquelas que respondem à pergunta: *quantos são?*

(*Exemplo:* conjunto de pessoas, de animais, etc.)

quantidades contínuas — aquelas que respondem à pergunta: *qual o comprimento? qual a superfície? quanto pesa?*

(*Exemplo:* comprimento de uma estrada, o seu pêso, etc.)

Vamos, neste Capítulo, estudar as *medidas* das quantidades *contínuas* como mais uma operação!

2. *Operação: medir; resultado: medida* (*número*)

Para melhor conhecimento das grandezas contínuas usuais, tais como: *comprimento, superfície, volume, capacidade, massa, dinheiro, tempo,* etc., costuma-se compará-las com outras grandezas, de *mesma espécie*, conhecidas como unidades de medidas.

Assim, por exemplo, o *comprimento* de uma régua pode ser determinado *comparando-a* com o *comprimento* de 1cm (que seria a unidade). A *superfície* de um terreno pode ser conhecida *comparando-a* com a *superfície de um quadrado de* 1m *de lado* (1m²) (que seria a unidade) e assim por diante.

Entre as unidades de medidas são escolhidas algumas como *principais* ou *padrões*, das quais derivam outras maiores (múltiplos) e menores (submúltiplos), denominadas *unidades secundárias*. O conjunto das unidades *principais* e *secundárias* constitui um Sistema de Medidas. Os de maior uso entre os povos são:

O SISTEMA MÉTRICO DECIMAL (S.M.D.)

e O SISTEMA INGLÊS DE MEDIDAS (S.I.M.)

Como você pode perceber fàcilmente, o ato de comparar duas grandezas *contínuas* de mesma espécie, sendo uma delas tomada como unidade, é uma OPERAÇÃO. O nome dessa nova operação é: MEDIÇÃO, e o resultado, que é um *número*, MEDIDA.

Assim, por exemplo, para se efetuar a medição ou medir o comprimento do segmento AB (*) (fig. 54) deve-se, primeiramente, escolher a unidade de medida que permitirá realizar a *operação*.

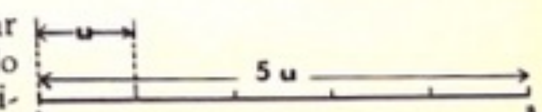


FIG. 54

(*) De acôrdo com a sugestão de Max Beberman (Grupo de Illinois, E.U.A.), o *segmento geométrico* será indicado usando-se um *traço horizontal* sôbre as letras que indicam suas extremidades (exemplo: $\overline{AB}$). A representação sem o traço (exemplo: AB) indicará a *medida* do segmento geométrico.

Indiquemos por u tal unidade de medida, que poderá ser tanto do S.M.D. (*cm*, por exemplo) ou do S.I.M. (*polegada*, por exemplo).

Preste bem atenção agora na *operação:* se, "colocando" u sôbre $\overline{AB}$, resultar que u esteja contido *exatamente* em $\overline{AB}$, então a medida é um *número natural* (de unidades). No exemplo, u está contida, exatamente, *cinco vêzes* em $\overline{AB}$ e escreve-se:

$m(\overline{AB})_u = 5$ (lê-se: "medida de $\overline{AB}$, em relação à unidade u, é 5")

Para facilitar os cálculos com as medidas, em relação a determinadas unidades, vamos indicar, de agora em diante, simplesmente por:

$$\boxed{AB = 5\,u}$$

Se u for cm, temos: $\boxed{AB = 5\text{cm}}$

Se u *não* estiver contida exatamente em $\overline{AB}$, então a medida *não* será um *número natural* (poderá ser fracionário, decimal, . . .). Seja, por exemplo, *medir* o comprimento de um segmento (fig. 55) usando a unidade u. Chamando de $\overline{CD}$ êsse segmento e comparando-o com u, verifica-se que $\overline{CD}$ contém *duas vêzes* u e *mais uma fração* de u.

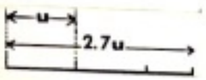


Fig. 55

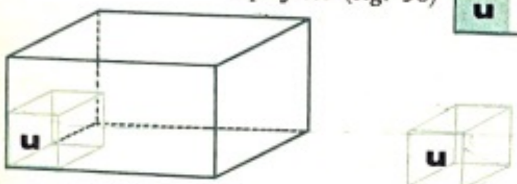
Se forem considerados os *submúltiplos decimais* de u, você encontrará:

$\boxed{CD = 2{,}7\,u}$ (Experimente!)

O mesmo ocorrerá quando você pretender medir:

superfície (fig. 56)

Fig. 56



volume (fig. 57)

Fig. 57

capacidade (fig. 58)

Fig. 58

massa (fig. 59)

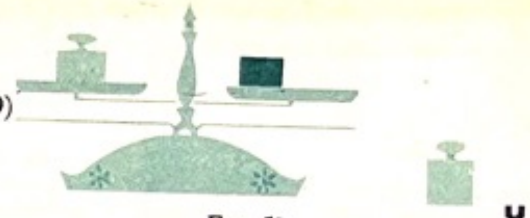


Fig. 59

tempo (fig. 60)

Fig. 60

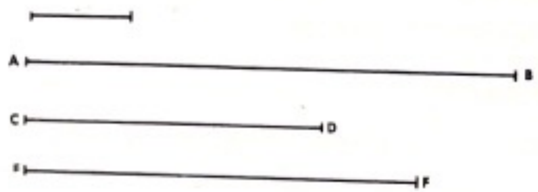
dinheiro (fig. 61)

Fig. 61

onde a *unidade* u *variará* de acôrdo com o Sistema de Medidas escolhido.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS DE APLICAÇÃO — Grupo 75

1. Usando **u** como *unidade*, meça os seguintes *segmentos*, dando a resposta na unidade **u**. (Sugestão: corte uma fita de cartolina do tamanho de **u** para poder *operar* melhor.)



AB = ... **u**

CD = ... **u**

EF = ... **u**

2. Usando a *unidade* **u**, meça as seguintes figuras (planas) (vale a sugestão do exercício anterior):

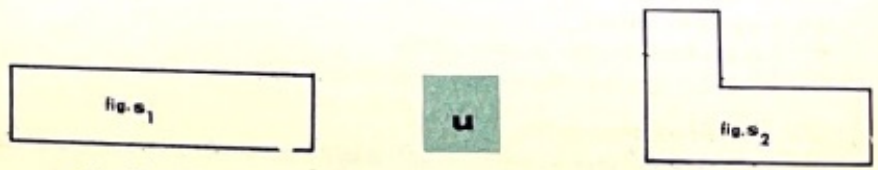


fig. S_1 = ... **u**

fig. S_2 = ... **u**

3. Idem, meça a figura T usando a unidade **u**:

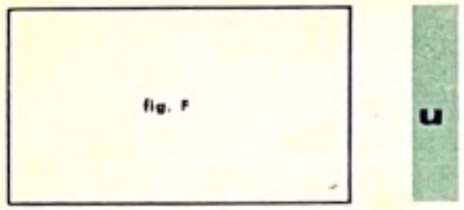
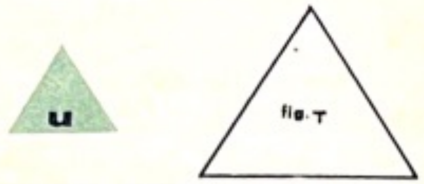


fig. F = ... u

4. Idem, meça a figura T usando a unidade **u**:

fig. T = ... u



5. Observe a figura C, que representa uma *caixa*. Meça êsse sólido usando a caixinha u como unidade. Você obterá:

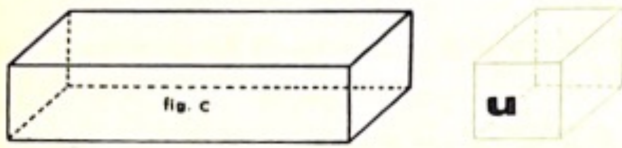


fig. C = ... u

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 76

1. A quais das seguintes perguntas você responderia *contando* ou *medindo?*
   1.ª) Quantas pessoas compareceram ao Maracanã?
   2.ª) Qual a distância daqui à Lua?
   3.ª) Ufa! Que calor está fazendo?
   4.ª) Qual é a sua idade?
   5.ª) Quantos pneus foram trocados na última corrida de Interlagos?

2. Classifique as seguintes quantidades em *contínuas* ou *discretas:*
   1.ª) Seu pêso
   2.ª) Os alunos de sua classe com mais de 11 anos
   3.ª) Os números pares compreendidos entre 0 e 25
   4.ª) A altura da Renata
   5.ª) A quantidade de água de uma piscina

Questões sôbre medida de quantidades contínuas

3. Se a unidade u estiver contida:
   1. exatamente *três vêzes* no segmento $\overline{AB}$, então: AB = ... u;
   2. *quatro unidades e três décimos* no segmento $\overline{CD}$, então: CD = ... u.

4. Usando o seu *palmo*, meça o comprimento de sua carteira de classe. Que unidade você empregou? E se você sabe que seu palmo mede 20cm, qual será o comprimento da carteira em cm?

5. Utilize o seu *pé* (calçado, naturalmente...) para medir a largura de sua classe em *pés*. Depois, meça o comprimento de seu *pé* com uma régua usual, graduada em cm, e responda: Quantos *pés* (iguais ao seu, lògicamente...) tem a largura da classe? E quantos centímetros?

6. Sílvio mediu o comprimento de uma vara de pescar com uma certa unidade u (era um pedaço de pau que encontrou) e obteve como medida: 8 u. O seu irmão Fernando mediu a mesma vara usando uma outra unidade v, que era a metade de u $\left(\text{isto é: } v = \frac{1}{2}u\right)$. Qual o resultado encontrado por Fernando na unidade v?

7. Antônio Carlos mediu a mesma vara do problema anterior usando o seu palmo, que é precisamente $\frac{2}{3}$ de u. Sabendo-se que o palmo de Antônio Carlos mede 18cm, qual a medida da vara, em centímetros?

8. Houve uma falta perigosa no jôgo de futebol entre as duas primeiras séries ginasiais. O juiz deu doze passos para que os nossos adversários formassem barreira. Descobri que cada três passos do juiz equivalia a quatro dos meus. Qual o comprimento de meu passo se o do juiz é de 80cm?

9. Usar os símbolos $=$, $>$, $<$ para tornar *verdadeiras* as seguintes sentenças, sabendo-se que a unidade u é três vêzes maior que a unidade v (isto é: $u = 3v$):
   1.ª) $4u$? $12v$ (exemplo-modêlo: $4u = 12v$, pois sendo $u = 3v$, temos: $12v = 12v$)
   2.ª) $5u$? $13v$ (exemplo-modêlo: $5u > 13v$, pois $15v > 13v$)
   3.ª) $6u$? $20v$
   4.ª) $2u$? $6v$

10. Idem, nas seguintes sentenças, sendo $u = \frac{1}{3}v$:
    1.ª) u ? v 2.ª) $3u$? v 3.ª) u ? $\frac{2}{3}v$

11. Idem, nas seguintes sentenças, sendo $u = v$:
    1.ª) $3u$? $2v$ 2.ª) u ? v 3.ª) u ? $2v$

12. Idem, nas seguintes sentenças, sendo $u = 2v$:
    1.ª) $2u + 3u$? $4v + 3v$ 2.ª) $8u - 6u$? $6v$

sistema métrico decimal (s. m. d.)

1. *Importância*

O S.M.D., dos mais importantes do Universo, é adotado oficialmente pela maioria dos países, com exceção apenas dos povos de língua inglêsa (Inglaterra, E.U.A., . . .), que já tendem a adotá-lo definitivamente.

A *unidade fundamental* de comprimento é o **metro** (do grego: *metron*, que significa *medida*). O importante é você *não esquecer* as vantagens que o S.M.D. apresenta, com relação a outros sistemas de medidas, e que assim se resumem:

1.º) *possui as unidades secundárias (múltiplos e submúltiplos) do metro em* ***relações decimais*** *e, portanto, os cálculos nesse sistema enquadram-se no mesmo critério da representação dos números decimais;*

2.º) *possui as unidades de superfície, volume, capacidade e massa também relacionadas com o metro.*

Outro aspecto importantíssimo para todos nós:

> O *Sistema Métrico Decimal* é o único *legal* e de uso *obrigatório* no Brasil(*).

Unidades de Comprimento

2. *Unidade fundamental: metro*

O metro é um comprimento aproximadamente igual à décima milionésima $\left(\frac{1}{10.000.000}\right)$ parte do quarto do meridiano terrestre.

(*) O Instituto Nacional de Pesos e Medidas, de acôrdo com o Sistema Internacional de Unidades (S.I.) resolveu que sejam adotadas como legais no Brasil (D.O., 4-9-1962) as seguintes unidades fundamentais: *metro* (m) para *comprimento*; *quilograma* (kg) para *massa*; *segundo* (s) para *tempo*, que pertencem ao S.M.D.

Também, por essa resolução, *não é permitido* o uso de unidades diferentes das legais em: documentos, contratos, propaganda comercial, invólucros e envoltórios de mercadorias.

Diz-se *aproximadamente*, porque o metro construído de platina iridiada (fig. 62), depositado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas (Sèvres, França) e que *serviu* de *padrão* para todos os países que o adotaram, possui dois décimos de milímetro *a menos* do quarto do meridiano terrestre.

Observação: De acôrdo com o Sistema Internacional de Unidades (S.I.), a partir de 1962 a definição de metro, como padrão *internacional de comprimento*, não seria mais a barra de platina iridiada, e sim um comprimento de onda emitido por um isótopo do criptônio de massa atômica 86, que é cêrca de *cem vêzes* mais preciso! Como êsse "nôvo" *metro* é um pouco difícil para você entender agora, basta lembrar que *modernamente* o *metro é dado por* UM COMPRIMENTO DE ONDA!

Fig. 62 — *Metro-padrão* (terciário) existente no Departamento de Pesos e Medidas da Prefeitura Municipal de São Paulo.

3. *Unidades secundárias do metro: múltiplos e submúltiplos*

Os principais *múltiplos* e *submúltiplos* do metro constam da seguinte tabela:

	NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES EM METRO
Múltiplos	quilômetro	*km*	1.000m
	hectômetro	*hm*	100m
	decâmetro	*dam*	10m
Unidade	*metro*	*m*	1m
Submúltiplos ...	decímetro	*dm*	0,1m
	centímetro	*cm*	0,01m
	milímetro	*mm*	0,001m

Para as medidas de *pequenos comprimentos*, onde se exige *precisão*, usa-se o:

mícron (μ), que é igual a 0,001 do milímetro,

e, para *mais precisão* ainda, emprega-se o:

milimícron ($m\mu$), que é igual a 0,001 do mícron.

Os *físicos* usam ainda o angstrom (Å), que vale 0,1 do milimícron.

Para os *grandes comprimentos*, tais como as *distâncias astronômicas*, emprega-se como unidade de comprimento o *segundo-luz*, que é a distância percorrida pela luz em um segundo (aproximadamente 300.000km!). Assim, por exemplo, dizer que a Lua dista cêrca de um *segundo-luz*, significa que a Lua se encontra a cêrca de 300.000km da Terra.

O mesmo acontece quando se diz que o Sol se encontra a cêrca de 8 minutos e 20 segundos-luz da Terra (ou seja, cêrca de 150.000.000km!). Se acontecesse de o Sol se apagar de repente, você sabe que durante 8 minutos e 20 segundos continuaríamos recebendo sua luz e seu calor!

E você sabia que, depois do Sol, a estrêla mais próxima da Terra está a cêrca de 4 anos-luz?!

Para as medidas de *comprimentos marítimos* emprega-se a milha marítima (*M*), que é igual a 1.852m.

4. *Representação e leitura dos números que exprimem comprimentos; numerais diferentes da mesma medida*

Representam-se os números naturais e decimais escrevendo-se à *direita* o símbolo da unidade correspondente. A *leitura* da medida é completada acrescentando-se o nome relativo ao símbolo usado.

Exemplos:

$\boxed{8\text{m}}$

lê-se: "oito *metros*"

$\boxed{39{,}215\text{km}}$

lê-se: "trinta e nove *quilômetros* e duzentos e quinze *milésimos do quilômetro* ou 39 *quilômetros* e 215 *metros*"

$\boxed{0{,}07\text{dm}}$

lê-se: "sete centésimos do decímetro ou 7 *milímetros*"

Êrro comum: Escrever "ms" para abreviar metros; está errado!, pois *não há* plural para a abreviatura dos nomes das unidades. Também *não se deve* colocar a abreviatura de metro *acima* do número. Logo, NÃO ESCREVA:

8 *ms*, ou 8 *mts* nem 8^{m}

Assim como existem *numerais* diferentes que representam o *mesmo número*, também agora você tem *numerais* diferentes para representar a *mesma medida*. Assim, por exemplo:

1m, 10dm, 100cm

são *numerais diferentes* que representam a *mesma medida*. O sinal = permite relacioná-los, isto é:

$\boxed{1\text{m} = 10\text{dm} = 100\text{cm}}$

5. *Mudança de unidade*

A técnica, sabendo-se que uma unidade qualquer de comprimento é 10 vêzes maior que a unidade imediatamente inferior e 10 vêzes menor que a unidade imediatamente superior, é a seguinte:

Passa-se de uma unidade para outra que lhe seja menor (ou maior) deslocando-se a vírgula para a direita (ou para a esquerda) de tantas casas decimais quantos são os espaços que separam as duas unidades na série:

km, hm, dam, m, dm, cm, mm

usando zeros para as posições vagas.

Exemplos:

1.º) Reduzir 28,569hm a *metros*.

Como: km, hm, dam, m, dm, cm, mm

desloca-se a vírgula duas casas para a DIREITA. Logo:

28,569hm = 2.856,9m

2.º) Exprimir 456,835cm em *quilômetros* (só para exercitar!)

Como: km, hm, dam, m, dm, cm, mm

desloca-se a vírgula cinco casas para a ESQUERDA: 0,004.568.35km.

3.º) Quantos *metros* existem em 8dm?

Como: 1dm = 0,1m

segue-se que: 8dm = 0,8m

6. *Instrumentos usuais para medir comprimentos*

Os mais comuns são os que medem comprimentos da ordem de um metro. Há os que medem grandes distâncias e os que medem pequenas distâncias, inclusive os de grande precisão. Destacamos:

metro de madeira (comerciantes), fig. 63; *odômetro* (computador quilométrico para medir distâncias percorridas), fig. 63-A; *antena de radar* (para medir distâncias astronômicas), fig. 63-B; *metro articulável* (pedreiros), fig. 63-C; *metro de fita* (costureiras), fig. 63-D; *marco de estrada*, fig. 63-E; *pálmer* (para medidas micrométricas), fig. 63-F.

FIG. 63 – *Metro de madeira*

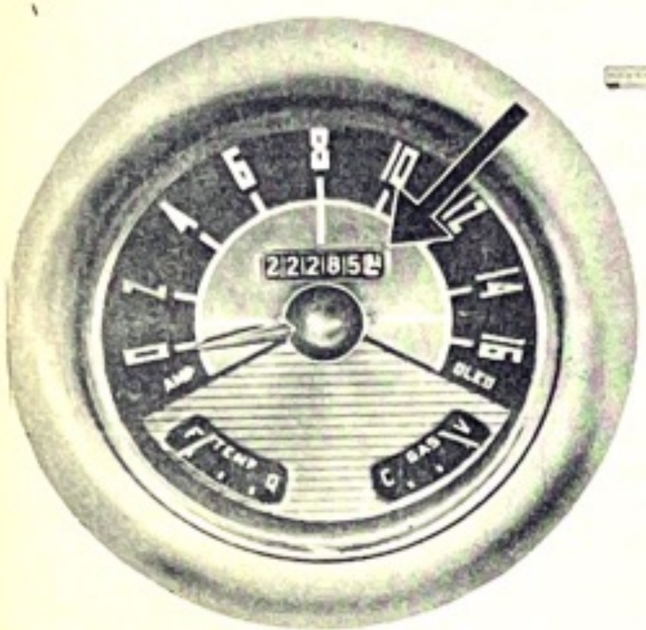


FIG. 63-A – *Odômetro*

FIG. 63-B – *Antena de radar*

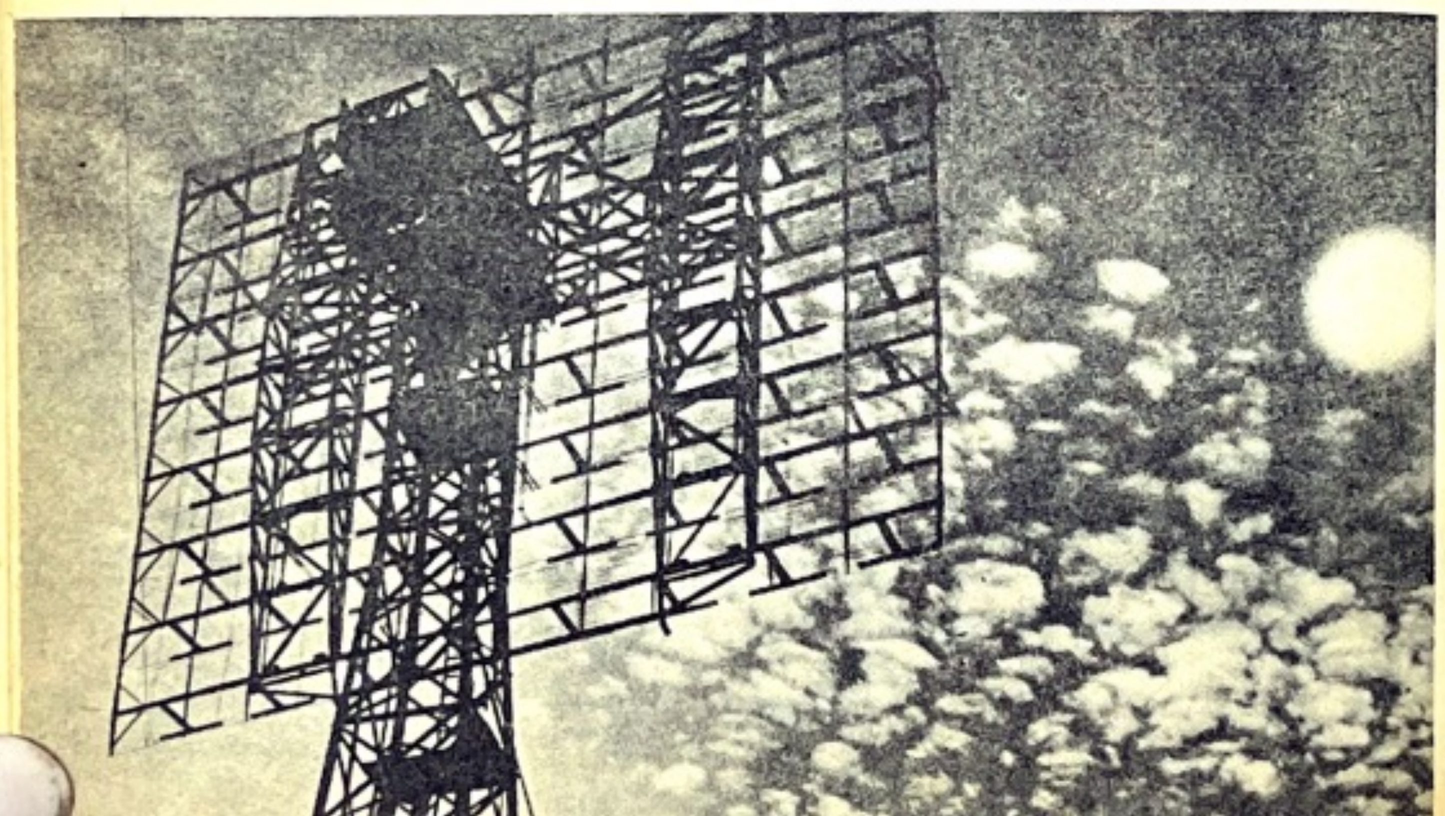


FIG. 63-C – *Metro articulável*

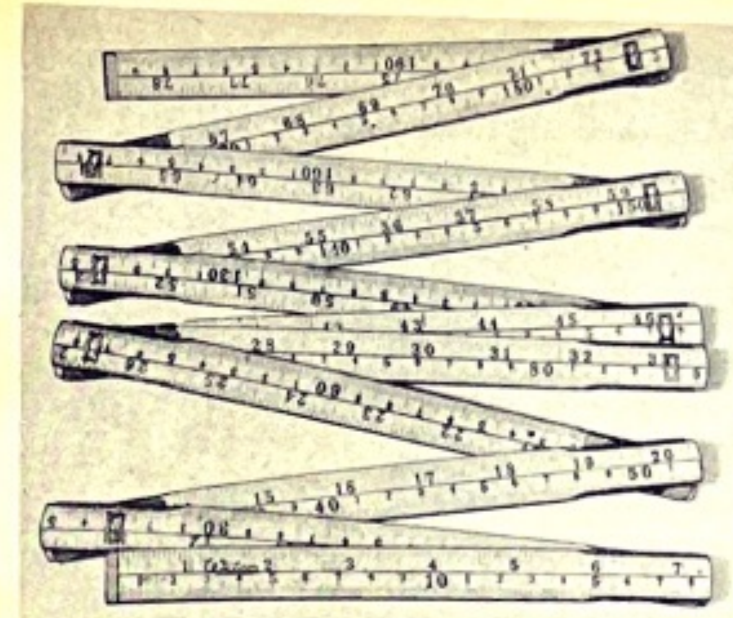


FIG. 63-D – *Metro de fita*

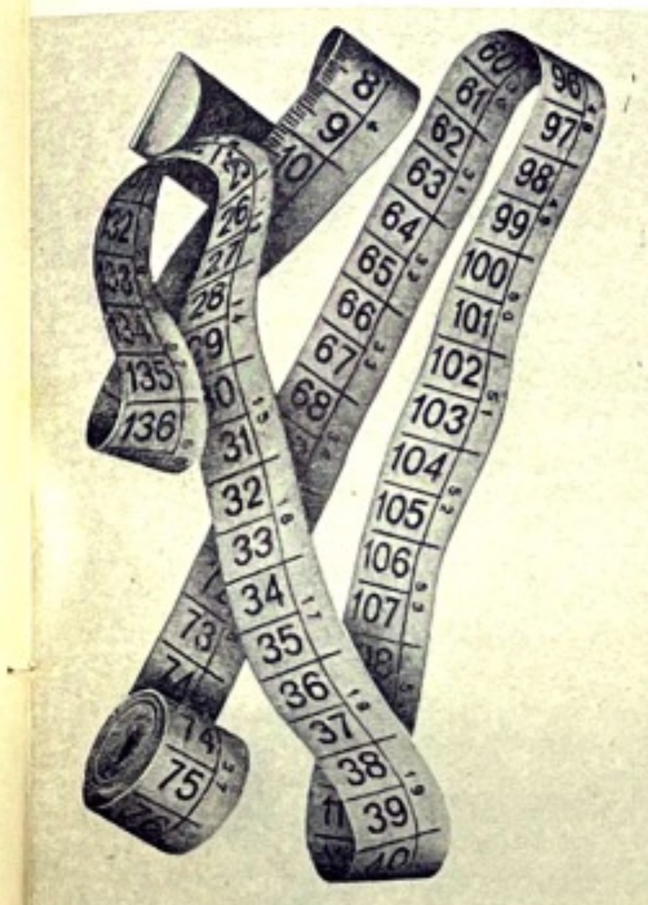
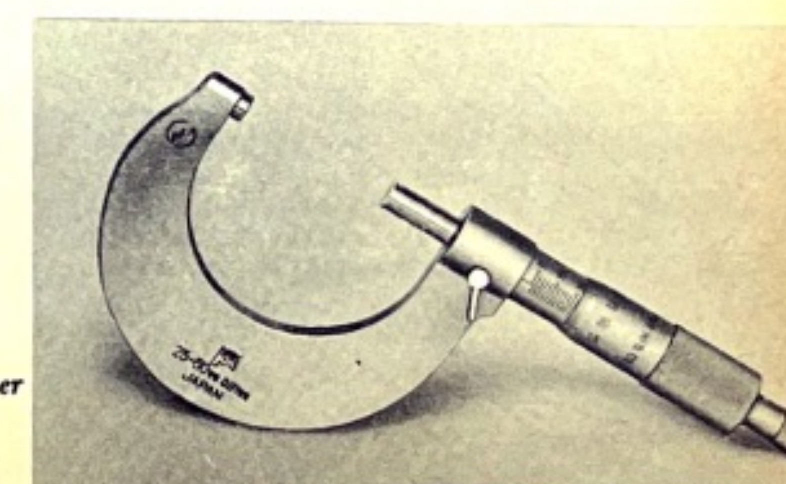


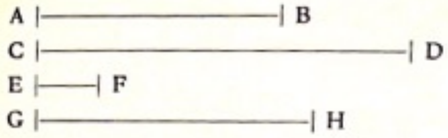
FIG. 63-E – *Marco de estrada*

FIG. 63-F – *Pálmer*



EXERCÍCIOS PRÁTICOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 77

1. Medir cada um dos seguintes segmentos, tomando por unidade o *mm:*

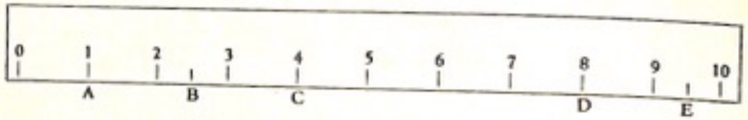


AB = ... mm
CD = ... mm
EF = ... mm
GH = ... mm

2. Na régua graduada de 10cm, pergunta-se:

1.º) quais os números da régua que correspondem, respectivamente, aos pontos *A, B, C, D* e *E?*

2.º) quanto mede cada um dos segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BE}$?



AB = ... cm AC = ... cm
CD = ... cm BE = ... cm

3. Um ponto *P* marcado sôbre o segmento $\overline{AB}$ dista 62mm do extremo *A* e 28mm do extremo *B:*

Calcular: 1.º) o comprimento da *metade* de $\overline{AB}$,
2.º) a distância de *P* ao *ponto médio* (isto é, que está no *meio*) do segmento $\overline{AB}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 78

1 Completar as seguintes sentenças, de modo a torná-las *verdadeiras:*

1.ª) 1m = ... dm	7.ª) $2\frac{3}{4}$dm = ... cm
2.ª) 1m = ... cm	8.ª) 12dam = ... dm
3.ª) 1m = ... mm	9.ª) $3\frac{1}{4}$hm = ... m
4.ª) $\frac{1}{4}$m = ... cm	10.ª) 200cm = ... m
5.ª) $\frac{1}{5}$m = ... dm	11.ª) 8mm = ... cm
6.ª) $\frac{3}{5}$m = ... mm	12.ª) 12dm = ... dam

13.ª) ... m = 46dm	17.ª) ... mm = 500dm
14.ª) ... dam = 250dm	18.ª) ... km = 12dam
15.ª) ... dm = $2\frac{1}{2}$m	19.ª) ... hm = 20km
16.ª) ... cm = 12m	20.ª) ... km = 20hm

2. Assinalar quais, das seguintes sentenças, são *verdadeiras* ou *falsas:*

1.ª) 1dm = 100cm	6.ª) $\frac{1}{4}$m = $20\frac{1}{2}$cm
2.ª) 1m = 100cm	7.ª) $\frac{4}{10}$dm = 40cm
3.ª) 1dm = 0,1m	8.ª) 120mm = 12dm
4.ª) $\frac{1}{2}$dm = 2cm	9.ª) 5dm = $\frac{1}{5}$m
5.ª) 3m = $\frac{1}{3}$dam	10.ª) 1.000mm = 1m

3. Dizer:
   1.º) Quantos metros existem em 5 decímetros?
   2.º) Um decâmetro quantos milímetros tem?
   3.º) Quantos centímetros existem num hectômetro?

4. Efetuar as seguintes operações, exprimindo os resultados respectivamente em *km* e *cm:*
   1.º) 21,32hm + 309dm + 0,015.2km + 432,52m + 1.235dam
   2.º) (48,392km − 832dam) + [3,568km − (8,01hm − 223m)]

5. Idem:
   1.º) 4,32cm × 12
   2.º) 131,89hm + (8,32km − 5,2dam) × 10
   3.º) 82,256hm : 4
   4.º) 0,3 × (89,5km − 125hm) + 12km

6. O comprimento de uma estrada é de 38,41km; de uma segunda é 256,15hm e de uma terceira tanto quanto as duas primeiras juntas. Exprimir em *metros* o comprimento das três estradas juntas.

7. Quanto dista, em quilômetros, a Terra da Lua, sabendo-se que essa distância equivale, em média, a 60 raios terrestres? (NOTA: Raio da Terra, 6.370.000m.)

8. Um viajante percorreu em 7 horas, 33.600 metros. Quantos quilômetros fêz, em média, por hora?

9. O passo de um homem mede cêrca de 0,80m. Quanto tempo empregará êsse homem para percorrer 4,240km de uma estrada, sabendo-se que anda à razão de 100 passos por minuto?

10. Uma senhora comprou 20 metros de fazenda à razão de NCr$ 8,40 o metro. Se esta fazenda foi medida com uma régua que era 1cm mais curta que o metro verdadeiro, pergunta-se: 1.º) Quanto de fazenda a senhora recebeu? 2.º) Quanto pagou a mais?

MEDIDA DO COMPRIMENTO DE POLIGONAIS – POLÍGONOS

7. *Que é poligonal?*

Linha poligonal ou simplesmente *poligonal* (fig. 64) é o conjunto de segmentos de retas consecutivos, não pertencentes à mesma reta, tais que a extremidade do primeiro coincide com a origem do segundo, a extremidade do segundo com a origem do terceiro, e assim por diante. Tais segmentos dizem-se *lados* da poligonal.

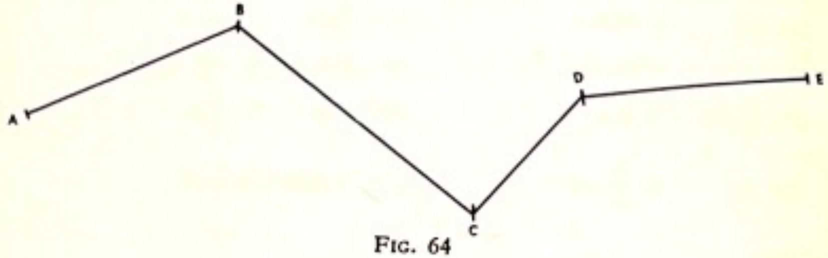


FIG. 64

A medida do comprimento de uma poligonal é dada pelo seu perímetro, que é a *soma das medidas dos comprimentos dos lados* que a compõem.

Exemplo:

Calcular o *perímetro* da poligonal (fig. 64), cujos lados medem, respectivamente: $AB = 3\text{cm}$; $BC = 4\text{cm}$; $CD = 2\text{cm}$; $DE = 3\text{cm}$

Temos: $\text{perímetro} = AB + BC + CD + DE$

$$= 3\text{cm} + 4\text{cm} + 2\text{cm} + 3\text{cm} = 12\text{cm}$$

8. *Polígono convexo; região interior*

Se a linha poligonal é *fechada*, isto é, a extremidade do último segmento *coincide* com a origem do primeiro, então a figura geométrica constituída por essa poligonal é denominada POLÍGONO CONVEXO (fig. 65). A parte colorida da figura constitui a *região interior* do polígono.

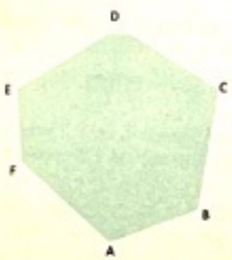


FIG. 65

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ são os *lados*, e os pontos A, B, C, D, E e F, os *vértices* do polígono. Os ângulos (internos) do polígono são: $F\widehat{A}B$, $A\widehat{B}C$, $B\widehat{C}D$, $C\widehat{D}E$, $D\widehat{E}F$ e $E\widehat{F}A$.

Os polígonos determinados recebem denominações especiais, de acôrdo com o número de lados que possuem.

Assim, temos:

número de lados	*nome do polígono*
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
.	.
.	.
.	.
10	decágono

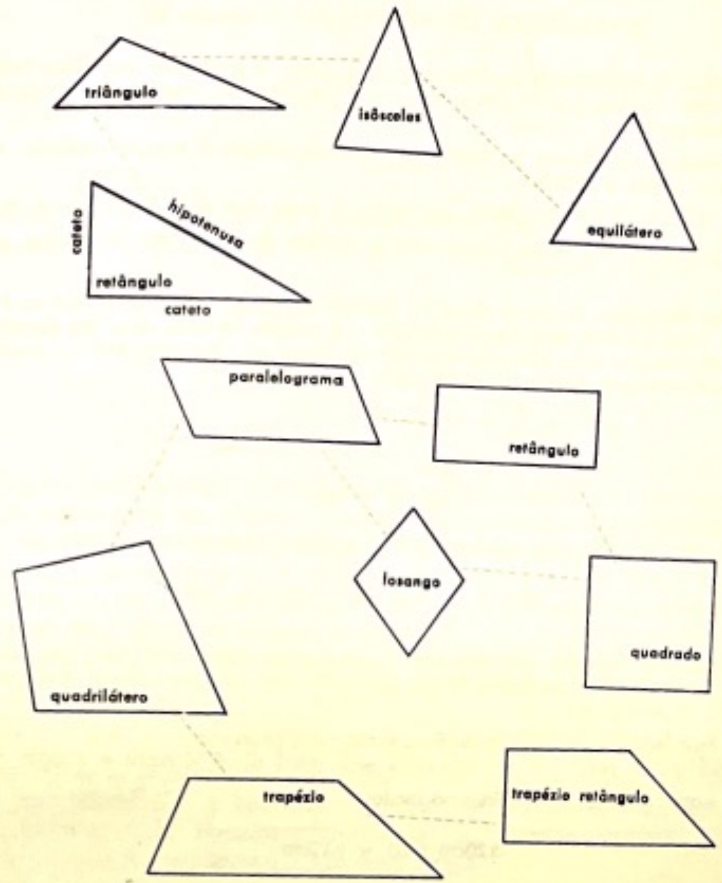


Fig. 66

Um polígono é REGULAR quando possui *todos* os seus *lados* iguais. assim como *todos* os seus *ângulos* (fig. 66).

Chama-se *apótema* de um polígono regular a *distância* do centro do polígono a um de seus lados (portanto, é o segmento de reta que une o centro do polígono ao meio do lado). O segmento de reta, cujas extremidades são *vértices* não consecutivos do polígono, diz-se DIAGONAL.

Qualquer polígono, com exceção do triângulo, admite diagonais.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 79

1. Num triângulo isósceles de perímetro igual a 32dm (é o mesmo que dizer trilátero de perímetro 32dm), o lado desigual mede 64cm. Quanto mede (em *cm*) cada um dos lados iguais?

   Primeiramente reduzem-se os *dados* do problema sempre à *mesma unidade*. Logo, *perímetro*: 32dm = 320cm.

   Então: 320cm − 64cm = 256cm representa a *soma* dos dois lados iguais e, portanto, 256cm : 2 = $\boxed{128\text{cm}}$ representa a *medida* de cada um dos lados iguais.

2. Uma das dimensões de um retângulo é o *dôbro* da outra. A soma de ambas é igual a 24m. Qual é o perímetro dêsse retângulo e a medida de cada uma das dimensões? Indicada uma das dimensões (comprimento da base, por exemplo) por □, a *sentença matemática* correspondente ao problema é:

   $$\underbrace{2\,\square + \square}\ = 24\text{m}$$

   ou $$3\,\square = 24\text{m}$$

   e $$\square = 24\text{m} : 3 = 8\text{m}$$

   Logo, uma das dimensões mede 8m; a outra, 16m e o perímetro:

   $$16\text{m} + 16\text{m} + 8\text{m} + 8\text{m} = \boxed{48\text{m}}$$

3. Um decágono (o mesmo que decalátero para o problema) regular tem um perímetro *seis vêzes maior* que o perímetro de um quadrado cujo lado mede 5cm. Quanto mede o lado do decágono?

   Se o lado do quadrado mede 5cm, então o seu perímetro vale: 4 × 5cm = 20cm, e, portanto, o perímetro do decágono será igual a: 6 × 20cm = 120cm.

   Logo, cada lado do decágono mede:

   $$120\text{cm} : 10 = \boxed{12\text{cm}}$$

9. *Comprimento de uma circunferência*

Como é que você *mediria* o "comprimento" de uma circunferência qualquer? Qual o seu *"perímetro"?*

Agora, você deverá levar em conta, necessàriamente, o raio ou o diâmetro (que equivale a dois raios):

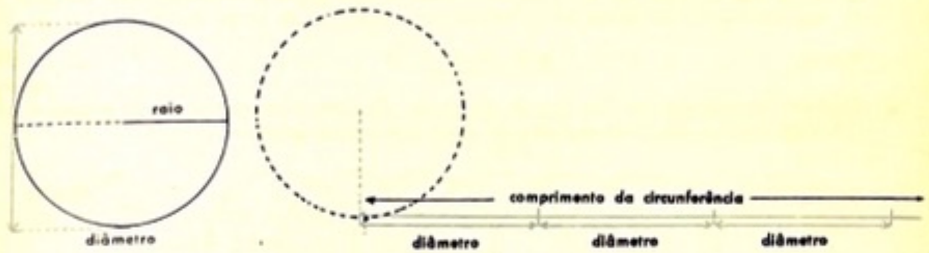


Fig. 67

A figura 67 mostra que o *comprimento* da circunferência vale um pouco mais do *triplo* do seu diâmetro!

Experimentalmente é fácil você mesmo constatar: contorne, por exemplo, uma roda de bicicleta com um barbante que fique bem ajustado à sua periferia e sôbre uma régua graduada procure ler, com a melhor aproximação possível, o resultado dessa *medida*. A seguir divida o número encontrado na régua pela medida do diâmetro da roda e você encontrará para quociente, mais ou menos, o número:

$$\boxed{3{,}14\ldots.}$$

Êsse número (que dá *quantas vêzes* a circunferência contém o seu diâmetro) muito famoso em Matemática, pois **não é natural** nem decimal (exato ou periódico), é conhecido desde a Antiguidade (egípcios, babilônios, gregos, . . .). Recebe o nome de "pi", sendo representado pelo numeral π, que é uma letra do alfabeto grego.

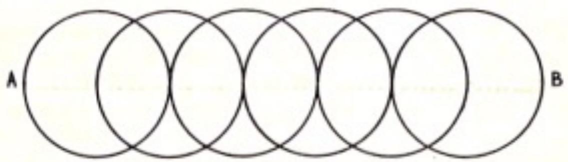
1. Observe o "nascimento" de π, efetuando a medida do contôrno de qualquer objeto de forma circular, como por exemplo: fundo de garrafas, a "bôca" de um copo, discos (dos diversos tamanhos que você conhece), direção de automóvel, etc. . . , justapondo sempre um barbante ao redor do objeto escolhido e *dividindo* a medida encontrada pela do diâmetro dêsse mesmo objeto. O quociente que você encontrará (com aproximação, naturalmente) será sempre:

$$\boxed{3{,}141.5\ldots}$$

E se, como exemplo "não palpável", você considerasse agora a circunferência da Terra, isto é, a medida do Equador (cêrca de 40.000km) e dividisse pela medida do diâmetro da Terra (cêrca de 12.740km), que encontraria como *quociente?*

Ainda: $\underline{3{,}141.5\ldots\,!}$

2. Tôdas as circunferências têm 2cm de diâmetro. Calcule o comprimento do segmento AB e verifique o resultado encontrado sôbre uma régua graduada.



10. *"Fórmula" que dá o comprimento das circunferências*

Do que já foi estudado você pode concluir que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\text{medida do comprimento da}\\ \text{circunferência}\end{bmatrix}}\ :\ \underbrace{\begin{bmatrix}\text{medida do}\\ \text{diâmetro}\end{bmatrix}} = \underline{3{,}141\ldots}$$

ou, representando por C a medida do comprimento de qualquer (*) circunferência; por $2r$ a medida de seu diâmetro, e por π o 3,141 . . . , temos:

$$C \quad : \quad 2r \quad = \quad \pi$$

ou

$\boxed{C = 2r\times\pi}$ como também $\boxed{C = 2\times\pi\times r = 2\pi r}$ (lembrando a propriedade comutativa do produto)

(*) Representando o comprimento de *qualquer* circunferência por C, já se pode pensar C como uma *variável*, isto é, pode assumir infinitos valôres. O mesmo se pode dizer de r, enquanto que π, por ser uma *constante*, tem sempre o *mesmo valor* (3,141.592.6. . . . . . .).

OBSERVAÇÃO: Nos cálculos práticos o valor de π é tomado com um êrro por falta (3,14) ou por excesso (3,141.6) quando se emprega a "fórmula": $C = 2r\pi$. De preferência usaremos o valor de π, por falta, nos dois problemas fundamentais:

1.º) Determinar o *comprimento* de uma circunferência, conhecido o valor do *raio* (ou diâmetro).

2.º) Determinar o valor do *raio* (ou diâmetro) de uma circunferência, da qual se conhece o *comprimento*.

Exemplos:

1. Calcular o *comprimento* de uma circunferência que possui 5cm de raio.

   Aplicando a "fórmula": $C = 2r\times\pi$ e tomando π como 3,14, temos:

$$C = 2 \times 5\text{cm} \times 3{,}14$$

ou

$$\boxed{C = 31{,}4\text{cm}}$$

2. Determinar o valor do *raio* de uma circunferência, cujo comprimento é 12,56dm.

   Agora conhece-se o C da fórmula e, portanto, dividindo-se (operação inversa da multiplicação) C por π, obtém-se o valor de $2r$ (diâmetro). O raio é a metade dêsse valor. Logo:

$$12{,}56\text{dm} : 3{,}14 = 4\text{dm (diâmetro)}$$

e

$$4\text{dm} : 2 = \boxed{2\text{dm}} \quad \text{(raio)}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 81

1. Uma poligonal é constituída de cinco segmentos tais que o primeiro mede 10cm e os seguintes sempre 5cm a mais que o anterior. Qual é, em decímetros, o valor de seu perímetro?
2. Num triângulo isósceles (mesmo que trilátero isósceles) o lado desigual mede 10dm e os lados iguais medem 120cm cada. Qual é, em *cm*, o perímetro dessa figura?
3. Uma das dimensões de um retângulo é o triplo da outra. A soma das duas é igual a 36m. Qual o perímetro dêsse retângulo?
4. Completar a seguinte tabela relativa às dimensões de cinco retângulos:

comprimento . . .	8m	9m	---	4dam	68m
largura	6m	---	8m	27m	---
perímetro	---	32m	40m	---	2hm

5. Uma roda de bicicleta tem 65cm de diâmetro. Qual é o seu "perímetro"? Que distância percorreu um ciclista depois de a roda ter dado 1.000 voltas?

6. Completar o quadro:

raio	5dm	---	3,5cm
comprimento	---	62,8cm	22cm
π	3,141	3,14	---

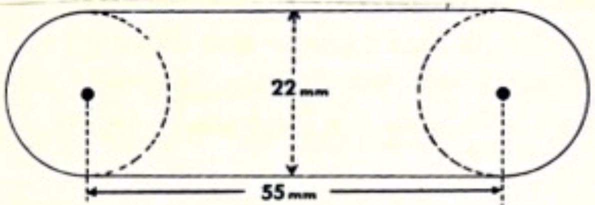
7. Cada uma das rodas, de 0,30m de raio, de um automóvel deu 4.500 voltas percorrendo um certo trajeto. Quantos quilômetros percorreu êsse automóvel?

8. Qual o diâmetro da roda de minha bicicleta, sabendo-se que tem 31,4dm de comprimento? (Usar π com o valor de 3,14.)

9. Meu carrinho andou 628 metros. Sei que cada uma de suas rodas tem 2cm de raio. Quantas voltas deu cada uma das rodas?

10. Calcular o percurso feito pelas meninas *A*, *B* e *C*, sabendo-se que cada *uma* dá uma volta em tôrno do poste.

11. Qual é o comprimento da correia que passa pelas duas polias de mesmo diâmetro?



12. Completar as seguintes sentenças, tornando-as *verdadeiras:*

a) $\pi = \frac{c}{2 \times \ldots}$ *b)* $c = 2 \times \ldots \times r$ *c)* $\ldots = \frac{c}{2\pi}$

Unidades de Área

11. *Área de uma superfície; unidade fundamental (S.M.D.): metro quadrado*

A MEDIDA de uma superfície é denominada área. Assim, é bom não *confundir:* superfície é uma GRANDEZA (de duas dimensões) e área é a MEDIDA dessa grandeza (portanto, um *número*).

Unidade fundamental: **metro quadrado**, que é a área de um quadrado de 1m de lado.

Símbolo: $\mathbf{m^2}$ (o expoente 2 "lembra" as duas *dimensões* da superfície).

Os *múltiplos* e *submúltiplos* do *metro quadrado* são as áreas dos quadrados que têm para lados os *múltiplos* e *submúltiplos* do metro. Assim, por exemplo, um *decímetro quadrado*, que se indica por $1dm^2$, é a área do quadrado (fig. 68) que tem para lado 1dm.

Como: $1dm = 10cm$

dividindo-se dois lados consecutivos de um quadrado em 10 partes iguais e traçando-se paralelas aos lados, obteremos 100 quadrados menores, cada um dêles tendo 1cm de lado e, portanto, $1cm^2$ de área. Logo:

$$\boxed{1dm^2 = 100cm^2}$$

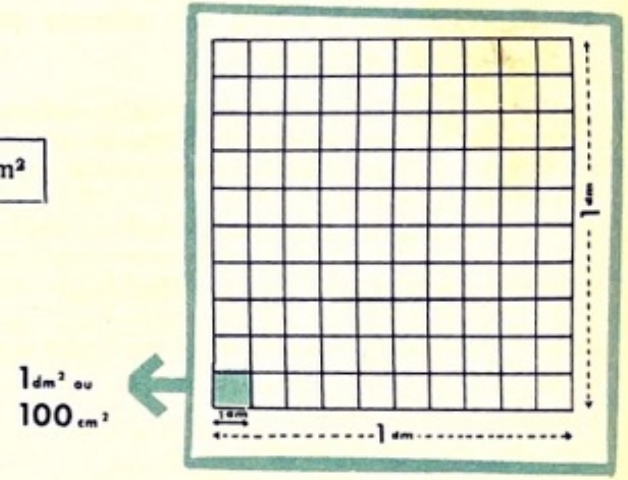


Fig. 68

e dizemos:

As unidades de superfície variam de 100 em 100, isto é, cada unidade vale 100 vêzes a que lhe é imediatamente inferior.

12. *Unidades secundárias do metro quadrado: múltiplos e submúltiplos*

Os principais múltiplos e submúltiplos do *metro quadrado* figuram na tabela:

	NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES EM m^2
Múltiplos	quilôm. quadrado	km^2	$1.000.000m^2$
	hectôm. quadrado	hm^2	$10.000m^2$
	decâm. quadrado	dam^2	$100m^2$
Unidade	*metro quadrado*	m^2	$1m^2$
Submúltiplos	decím. quadrado	dm^2	$0{,}01m^2$
	centím. quadrado	cm^2	$0{,}000.1m^2$
	milím. quadrado	mm^2	$0{,}000.001m^2$

13. *Representação e leitura dos números que exprimem medidas de superfície*

Pelo fato de as unidades de superfície variarem de 100 em 100, os números decimais que exprimem medidas de superfície devem possuir um número par de algarismos decimais. Assim, por exemplo, ao invés de se escrever:

$$43{,}2dm^2$$

é conveniente escrever: $\boxed{43{,}20dm^2}$

e lê-se: "quarenta e três decímetros quadrados e vinte centímetros quadrados".

14. *Mudança de unidade*

A mudança de unidade é, agora, feita deslocando-se a vírgula duas casas (*) para a *direita* ou para a *esquerda*, segundo se passa para uma unidade de ordem imediatamente *menor* ou *maior* e suprindo de zeros, caso faltem algarismos.

Exemplos:

1.º) Reduzir $34{,}569.7dam^2$ a metros quadrados.

Nessa redução deve-se passar para *uma* unidade imediatamente inferior (m^2); portanto, basta deslocar a vírgula sòmente duas casas para a direita. Logo:

$$\boxed{34{,}569.7dam^2 = 3.456{,}97m^2}$$

(*) O expoente 2, usado para escrever as medidas de superfície, "lembra" também que o deslocamento da vírgula, agora, é de duas em duas casas.

2.º) Exprimir $126{,}80dm^2$ em decâmetros quadrados.

Agora, deve-se passar para *duas* unidades imediatamente superiores (m^2 e dam^2) e, portanto, a vírgula deve ser deslocada de QUATRO casas para a esquerda. Logo:

$$\boxed{126{,}80dm^2 = 0{,}012.680dam^2}$$

3.º) Exprimir $19{,}013.0m^2$ nas outras unidades de superfície.

Temos:
$$19{,}013.0m^2 = 190.130cm^2$$
$$19{,}013.0m^2 = 1.901{,}30dm^2$$
$$19{,}013.0m^2 = 0{,}190.130dam^2$$
$$19{,}013.0m^2 = 0{,}001.901.30hm^2$$
$$19{,}013.0m^2 = 0{,}000.019.013.0km^2$$

15. *Medidas agrárias*

Para medir as superfícies de campos, utilizam-se algumas das unidades já conhecidas, que recebem denominações especiais. A unidade agrária principal é o ARE, que equivale a $1dam^2$, ou seja, $100m^2$. Um múltiplo: hectare e um submúltiplo: centiare, completam o quadro.

Os símbolos e valôres correspondentes são:

hectare (ha)	$\Longleftrightarrow$	hectômetro quadrado	$\Longleftrightarrow$	$10.000m^2$
are (a)	$\Longleftrightarrow$	decâmetro quadrado	$\Longleftrightarrow$	$100m^2$
centiare (ca)	$\Longleftrightarrow$	metro quadrado	$\Longleftrightarrow$	$1m^2$

É evidente que:
$$1ha = 100a$$
$$1ca = 0{,}01a$$

A mudança de unidade entre ca, a e ha é feita da mesma forma que nas medidas de superfície (deslocando-se a vírgula DUAS casas).

Exemplos:

1.º) Reduzir 32,56a a centiares.

Temos: 32,56a = 3.256ca

2.º) Reduzir 0,689.2ca a hectares.

Temos: 0,689.2ca = 0,000.068.92ha

OBSERVAÇÕES: As medidas agrárias visam a concentrar as unidades de superfície do S. M. D. sòmente nas três mais usuais: m^2, dam^2, hm^2, respectivamente, com os nomes de centiare, are e hectare. Nestas condições deve-se empregar, principalmente, o hectare (ha) nas medidas das superfícies das *fazendas, sítios,* etc. ..., ao invés do *alqueire* que, apesar de muito usado ainda, *não é* unidade oficial (basta lembrar êste inconveniente: o alqueire *varia* de valor em diversos Estados brasileiros!).

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 82

1. Desenhar um quadrado de 5cm de lado e verificar quantos cm^2 possui êsse quadrado.
2. Justificar, desenhando, que $\frac{1}{4}\ dm^2 = 25cm^2$.
3. Mostrar quantos quadrados de 1cm de lado existem num quadrado de 0,8dm de lado.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 83

1. Completar as seguintes sentenças, de modo a torná-las *verdadeiras:*

1.ª) $1m^2 = \ldots\ dm^2$	11.ª) $\ldots\ dm^2 = 200cm^2$
2.ª) $1m^2 = \ldots\ cm^2$	12.ª) $\ldots\ dam^2 = 46m^2$
3.ª) $\frac{1}{4}m^2 = \ldots\ dm^2$	13.ª) $\ldots\ m^2 = 30dm^2$
4.ª) $\frac{3}{4}dam^2 = \ldots\ m^2$	14.ª) $\ldots\ hm^2 = 84dam^2$
5.ª) $\frac{1}{2}m^2 = \ldots\ cm^2$	15.ª) $\ldots\ cm^2 = 2m^2$
6.ª) $\frac{1}{5}km^2 = \ldots\ m^2$	16.ª) $\ldots\ km^2 = 768.315m^2$
7.ª) $\frac{3}{5}dm^2 = \ldots\ cm^2$	17.ª) $\ldots\ mm^2 = 200cm^2$
8.ª) $2\frac{1}{4}hm^2 = \ldots\ m^2$	18.ª) $\ldots\ m^2 = 4.500cm^2$
9.ª) $1\frac{3}{4}dam^2 = \ldots\ dm^2$	19.ª) $\ldots\ cm^2 = 24dm^2$
10.ª) $200cm^2 = \ldots\ m^2$	20.ª) $\ldots\ m^2 = 20dm^2$

2. Assinalar quais, das seguintes sentenças, são verdadeiras ou falsas:

1.ª) $1m^2 = 100dm^2$	6.ª) $10.000mm^2 = 10cm^2$
2.ª) $1m^2 = 100cm^2$	7.ª) $\frac{3}{5}m^2 = 600dm^2$
3.ª) $1dm^2 = 0,01m^2$	8.ª) $\frac{1}{2}cm^2 = 50mm^2$
4.ª) $\frac{1}{2}m^2 = 5dm^2$	9.ª) $1hm^2 = 10.000cm^2$
5.ª) $\frac{1}{4}m^2 = 5dm^2$	10.ª) $1km^2 = 10.000m^2$

3. Exprimir:
   1.°) em ares: 6ha; 500ca; 3ha 25a; 4ha 8a
   2.°) em centiares: 5a; 3ha; 5a 15ca; 3a 8ca; 1ha 5a 20ca
   3.°) em hectares: 400a; 13.500ca; 8.000a; 80.000ca.

4. Completar:
   1.°) 350ca = ... a 2.°) 35ca = ... a 3.°) 4.315a = ... ha 4.°) 207a = ... ha 5.°) 8,5ha = ... a 6.°) 0,92ha = ... a
5. Exprimir:
   1.°) em ares: $6.400m^2$; $32dam^2$; $80hm^2$
   2.°) em hectares: $12hm^2$; $400dam^2$; $50.000m^2$
   3.°) em centiares: $36m^2$; $8dam^2$; $0,875.0hm^2$
6. Completar:
   1.°) 6ha 15a 10ca = ... m^2 2.°) 36a 9ca = ... m^2 3.°) $53.560m^2$ = ... ha ... a ... ca 4.°) $8.709m^2$ = ... a ... ca
7. Efetuar as seguintes *operações*, exprimindo os resultados em m^2:
   1.°) $42,35dam^2 + 0,018.1km^2 + 4.351m^2 + 2,01hm^2$
   2.°) $131,25dam^2 - 9.835,10m^2$
8. Idem, exprimindo os resultados em km^2:
   1.°) $8.400km^2 \times 10$
   2.°) $3.525,21hm^2 + 5.681,50dam^2 \times 0,5$
   3.°) $12.300.000m^2 : 300$
   4.°) $1,90 \times (3,21km^2 - 15,35hm^2)$
9. Um país de superfície igual a $8.500.000km^2$ tem uma população de 85 milhões de habitantes. Qual a população dêsse país por km^2?
10. Um Estado tem a população de 10.000.000 habitantes e uma média de 40 habitantes por km^2. Qual é a sua superfície?
11. Uma fazenda de pasto, com a superfície de 480ha 25a, foi vendida à razão de .... NCr$ 1.000,00 o hectare. Qual foi o total da venda?
12. Em um campo de 3ha de superfície, um fazendeiro deseja colhêr 250kg de certo tipo de grão, por hectare. Quantos sacos de 50kg, dêsse grão, poderá colhêr?

ÁREAS DAS PRINCIPAIS FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

16. *Área de uma região poligonal*

Região poligonal é a figura plana que resulta da *reunião* de um polígono com a sua *região interior*.

A *medida* de uma região poligonal é expressa pela sua *área*. Assim, pode-se escolher *qualquer* figura geométrica conhecida (triângulo, quadrado, etc. . .) para essa medida.

Seja, por exemplo, *medir* um *hexágono regular* (região hexagonal) (fig. 69), de 1cm de lado, tomando por *unidade* o *triângulo eqüilátero* **u**, de 1cm de lado.

É fácil verificar, *experimentalmente*, que o hexágono conterá exatamente 6 dêsses triângulos. Basta desenhar, em papel à parte,

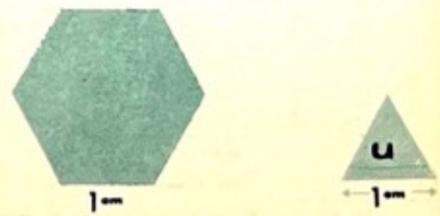


FIG. 69

o triângulo eqüilátero **u** e, a seguir, com uma tesoura (que siga o contôrno do triângulo) destacar o pedaço de papel que contenha a sua superfície e verificar que tal superfície está contida 6 vêzes na superfície do hexágono. Logo:

$$\left[\begin{array}{c}\text{medida da superfície do hexágono,}\\ \text{em relação à unidade } \mathbf{u}\end{array}\right] = 6$$

ou

$$m\ (\text{hexágono})_{u} = 6$$

e, mais pràticamente:

$$\boxed{\text{Área do hexágono} = 6\ \mathbf{u}}$$

Calcule você, agora, como exercício, a área do *triângulo eqüilátero* (fig. 70) que possui 2cm de lado, usando a mesma unidade anterior **u**.

O resultado será:

$$\boxed{\text{Área do triângulo} = \_\_\_\ \mathbf{u}}$$

Fig. 70

Nas expressões usuais da *área* de uma figura plana, dentro do S.M.D., emprega-se como *unidade de medida* o quadrado, cujo lado é dado pelas unidades de comprimento (do S.M.D.) conhecidas.

17. *Área do quadrado*

Seja, por exemplo, calcular a área do quadrado de 4cm de lado (fig. 71), tomando por *unidade de medida* o quadrado que possui 1cm de lado, isto é:

$$\mathbf{u} = 1\text{cm}^2$$

Como cada "faixa" do quadrado dado contém **4u** e existindo quatro faixas no total, segue-se que a *medida* do quadrado, ou seja, a sua área é dada por: $4 \times 4\mathbf{u} = \mathbf{16u}$, isto é:

$$\boxed{A_{\square} = 16\text{cm}^2}$$

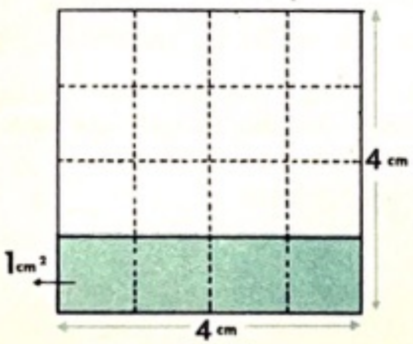


Fig. 71

(*) Por "área de um triângulo", expressão comumente usada, entenda-se a área da *região triangular*, isto é, da *reunião* do triângulo com o seu interior. Anàlogamente se dirá com relação à *área do quadrado*, do *retângulo*, etc.

Se o lado do quadrado fôr medido em m, a área será expressa em m^2; se fôr em dm, a área será em dm^2, e assim por diante. Portanto:

A área do quadrado é expressa sempre na unidade de superfície que corresponde à unidade de comprimento utilizada para a medida do lado.

Do que foi visto decorre que a área de um quadrado é obtida multiplicando a medida de seu lado por si mesma. Como técnica de cálculo, usa-se a fórmula:

$$\boxed{\text{Área do quadrado} = \text{lado} \times \text{lado}}$$

ou indicando o lado de um quadrado *qualquer* por l:

$$\boxed{A_{\square} = l \times l = l^2}$$

Observação: Pode acontecer que o quadrado não contenha um *número exato de centímetros quadrados*, como por exemplo, no caso de o lado medir (fig. 72):

$$34\text{mm} = 3{,}4\text{cm}$$

a área será:

$$(34 \times 34)\text{mm}^2 = \boxed{1.156\text{mm}^2} = \boxed{11{,}56\text{cm}^2}$$

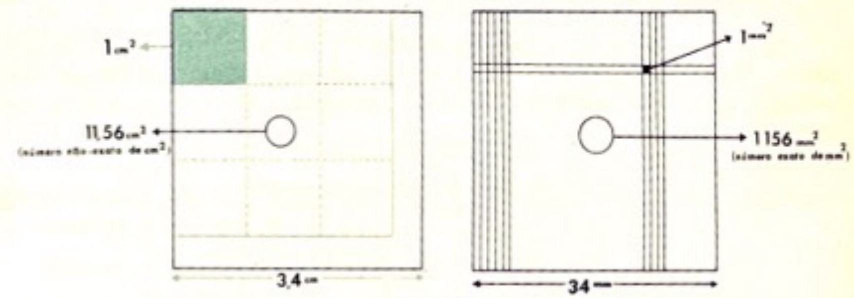


Fig. 72

Preste, agora, atenção nas duas importantes questões:

1.ª) Para calcular a *área* de um *quadrado*, conhecida a medida de seu *lado*, basta *elevar ao quadrado* essa medida.

2.ª) Inversamente, conhecida a *área do quadrado*, a medida de seu *lado* é calculada aplicando a operação inversa de "elevar ao quadrado", isto é, *extrair a raiz quadrada*.

Logo: $\boxed{A_{\square} = l^2} \iff \boxed{l = \sqrt{A_{\square}}}$

Aplicações:

1. Determinar a área do quadrado, cujo lado mede 15cm.

Temos: $A_{\square} = l^2$

ou $A_{\square} = (15)^2\text{cm}^2 = \boxed{225\text{cm}^2}$

2. Um quadrado tem 144m^2 de área. Qual a medida de seu *lado?*

Temos: $l = \sqrt{A_{\square}}$

ou $l = \sqrt{144}\text{m} = \boxed{12\text{m}}$

3. O perímetro de um quadrado é de 52dm. Calcular a área do quadrado.

Temos: medida de um lado: $52\text{dm} : 4 = 13\text{dm}$

área do quadrado: $(13)^2\text{dm}^2 = \boxed{169\text{dm}^2}$

18. *Área do retângulo*

Seja, por exemplo, o *retângulo* (fig. 73) de 5cm de *base* e 3cm de *altura*. Êsse retângulo contém: $3 \times 5 = 15$ quadrados de 1cm de lado, ou seja, 15cm^2. Portanto, a *área* do retângulo, em cm^2, é obtida pelo produto:

$$(3 \times 5)\text{cm}^2 = 15\text{cm}^2$$

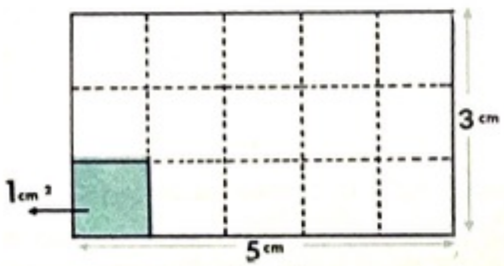


Fig. 73

Logo: a área de um *retângulo* é calculada multiplicando a medida da base pela medida da altura.

$$\boxed{\text{Área do retângulo} = \text{base} \times \text{altura}}$$

Indicando a medida da base por b e a da altura por a, a técnica de cálculo usa a *fórmula:*

$$\boxed{A_{\square} = b \times a}$$

Duas importantes questões:

1.ª) Para calcular a *área* de um *retângulo*, conhecidas as medidas da *base* e da *altura*, basta *multiplicar* essas medidas.

2.ª) Inversamente, conhecidas a *área do retângulo* e a medida de *uma* das dimensões, para calcular a medida da outra dimensão, basta *dividir* a área pela medida conhecida.

Logo:

$$\boxed{A_{\square} = b \times a} \iff \boxed{b = A_{\square} : a} \qquad \iff \boxed{a = A_{\square} : b}$$

Aplicações:

1. Calcular a área do retângulo que possui 3,5dm de base e 22cm de altura.

Reduzem-se, primeiramente, as medidas da base e da altura à *mesma unidade de medida* (de preferência na menor delas), isto é:

$$\left.\begin{array}{l}\text{base} = 3{,}5\text{dm} = 35\text{cm}\\ \text{altura} = 22\text{cm}\end{array}\right\} \text{área} = (35 \times 22)\text{cm}^2 = \boxed{770\text{cm}^2}$$

2. Um retângulo tem 96cm^2 de área. Sabendo-se que a base mede 12cm, calcular a medida da altura.

Como: $a = A_{\square} : b$

vem: $a = (96 : 12)\text{cm} = \boxed{8\text{cm}}$

19. *Área do paralelogramo*

Consideremos o *paralelogramo* (fig. 74) de base b e altura a. É fácil concluir que o paralelogramo colorido compõe-se das *mesmas partes* que o retângulo "prêto", isto é, são *equivalentes*.

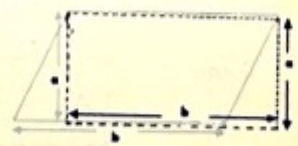


Fig. 74

Nestas condições êles têm a *mesma área.*

Logo:

$$\boxed{\text{Área do paralelogramo} = \text{base} \times \text{altura}}$$

ou $$A_{\square} = b \times a$$

Continuam valendo as DUAS IMPORTANTES QUESTÕES (direta e inversa) estudadas com o retângulo.

20. *Área do triângulo*

Seja o *triângulo* (fig. 75) que, como é fácil de se verificar, é a metade do paralelogramo pontilhado.

Logo:

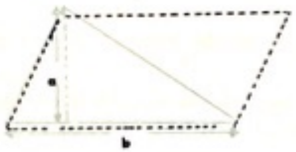


FIG. 75

$$\boxed{\text{Área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}}$$

ou $$\boxed{A_{\triangle} = \frac{b \times a}{2}}$$

No caso de o triângulo ser *retângulo* a *base* e a *altura* são os *catetos* do triângulo e, portanto, a área será igual ao semiproduto dos catetos.

DUAS IMPORTANTES QUESTÕES:

1.ª) Para calcular a *área* de um *triângulo*, conhecidas as medidas da *base* e da *altura*, basta *multiplicar* essas medidas e *dividir* o resultado por 2.

2.ª) INVERSAMENTE, conhecidas a *área do triângulo* e a medida de *uma* das dimensões, para calcular a medida da outra dimensão, basta *dividir* o dôbro da área (isto é, área multiplicada por 2) pela medida conhecida.

Logo: $$\boxed{A_{\triangle} = \frac{b \times a}{2}} \quad \begin{array}{l} \Longleftrightarrow \boxed{b = (2 \times A_{\triangle}) : a} \\ \Longleftrightarrow \boxed{a = (2 \times A_{\triangle}) : b} \end{array}$$

Aplicações:

1. Calcular a *área* do triângulo, sabendo-se que a base mede 1,8dm e a altura 50cm.

Temos: 1,8dm = 18cm e, portanto: $A_{\triangle} = \frac{18 \times 50}{2}\text{cm}^2 = \boxed{450\text{cm}^2}$

2. Calcular a *base* de um triângulo, cuja área é 500cm², sabendo-se que a sua altura é de 20cm.

Temos: $b = [(2 \times 500) : 20]\text{cm} =$

$b = (1.000 : 20)\text{cm} = \boxed{50\text{cm}}$

21. *Área do trapézio*

Seja o *trapézio* (fig. 76), onde b_1, b_2 e a representam as medidas da *base maior, base menor* e *altura*, respectivamente.

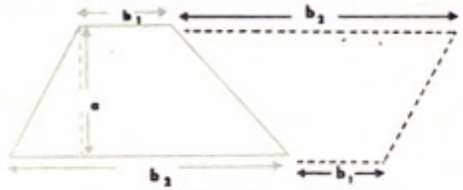


FIG. 76

A figura pontilhada, obtida completando a base maior com a menor e a base menor com a maior, é um paralelogramo de base (b_1+b_2) e altura a, cuja área é:

$$(b_1+b_2) \times a$$

Fácil é verificar que o trapézio dado é a *metade* dêsse paralelogramo e, portanto, a sua área será igual a:

$$\boxed{A_{\square} = \frac{(b_1 + b_2) \times a}{2}}$$

ou seja:

$$\boxed{\text{Área do trapézio} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}}$$

DUAS IMPORTANTES QUESTÕES:

1.ª) Conhecidos: (b_1+b_2) e a, determina-se $A_{⏢}$ por meio de uma MULTIPLICAÇÃO e uma *divisão* por 2.

2.ª) INVERSAMENTE, conhecidos $A_{⏢}$ e (b_1+b_2), determina-se a por meio de uma MULTIPLICAÇÃO por 2 e uma *divisão;* o mesmo processo é aplicado quando se conhece $A_{⏢}$ e a, e deseja-se (b_1+b_2).

Logo: $\boxed{A_{⏢} = \dfrac{(b_1 + b_2) \times a}{2}}$ $\iff$ $\boxed{a = (2 \times A_{⏢}) : (b_1+b_2)}$

$\iff$ $\boxed{(b_1+b_2) = (2 \times A_{⏢}) : a}$

Aplicações:

1. Calcular a área do trapézio cujas bases medem, respectivamente, 16cm e 12cm, e a altura, 8cm.

   Temos:

$$A_{⏢} = \frac{(12+16) \times 8}{2}\,\text{cm}^2 = \frac{28 \times 8}{2}\,\text{cm}^2 = \boxed{112\text{cm}^2}$$

2. Calcular a altura de um trapézio de área igual a 48dm^2, sabendo-se que a base menor mede 4dm e que a maior mede o triplo da menor.

   Temos:

$$\left.\begin{array}{l} b_2 = \ \ 4\text{dm} \\ b_1 = 12\text{dm} \end{array}\right\} b_1+b_2 \qquad \underline{\ 16\text{dm}}$$

e, portanto: $a = [(2 \times 48) : 16]\text{dm}$

$a = [96 : 16]\text{dm} = \boxed{6\text{dm}}$

22. *Área do losango*

Seja o *losango* (fig. 77), onde d_1 e d_2 representam as medidas das diagonais *maior* e *menor*, respectivamente.

A figura pontilhada, que é um retângulo, contém oito triângulos *iguais*, dos quais quatro compõem o losango. Portanto, a área do losango é a metade da área do retângulo de dimensões d_1 e d_2. Logo:

FIG. 77

$$\boxed{\text{Área do losango} = \frac{\text{diagonal maior} \times \text{diagonal menor}}{2}}$$

ou $\boxed{A_{\lozenge} = \dfrac{d_1 \times d_2}{2}}$

DUAS IMPORTANTES QUESTÕES:

1.ª) Para calcular a *área* de um *losango*, conhecidas as medidas das *diagonais*, basta *multiplicar* essas medidas e *dividir* o resultado por 2.

2.ª) INVERSAMENTE, conhecidas a *área do losango* e a medida de *uma* das diagonais, para calcular a medida da outra, basta *dividir* o dôbro da área pela medida conhecida.

Logo:

$\boxed{A_{\lozenge} = \dfrac{d_1 \times d_2}{2}}$ $\iff$ $\boxed{d_1 = (2 \times A_{\lozenge}) : d_2}$

$\iff$ $\boxed{d_2 = (2 \times A_{\lozenge}) : d_1}$

Aplicações:

1. As diagonais de um losango medem, respectivamente, 14dm e 6dm. Calcular a área dêsse losango.

   Temos:

$$A_{\lozenge} = \frac{14 \times 6}{2}\,\text{dm}^2 = \boxed{42\text{dm}^2}$$

2. A área de um losango, cuja diagonal maior mede 14dm, é igual a 42dm^2. Quanto mede a outra diagonal dêsse losango?

   Temos: $d_2 = [(2 \times 42) : 14]\text{dm}$

   $d_2 = [84 : 14]\text{dm} = \boxed{6\text{dm}}$

23. *Área do círculo (disco fechado)*

Consideremos o *círculo* de centro *O* e cujo RAIO meça *r* (fig. 78):

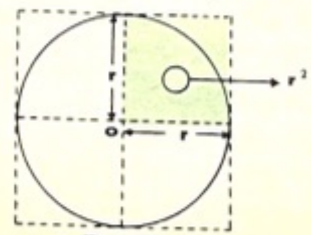
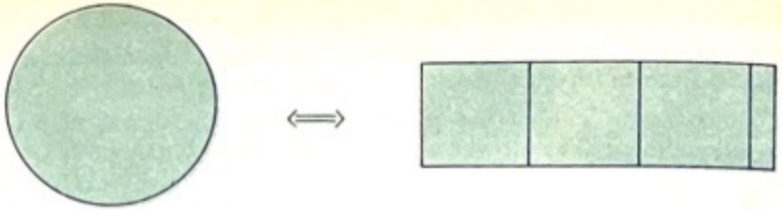


FIG. 78

Observe, atentamente, que a superfície de tal círculo é menor que a superfície dos *quatro* quadrados *iguais* (pontilhados na fig. 78), de lado *r*, porém um pouco maior que três dêles, sugerindo assim o seguinte "*esquema*":



Logo: a *área do círculo* vale *um pouco mais* do triplo da *área do quadrado* que tem para *lado* o *raio do círculo*, ou seja:

$$\boxed{\text{Área do círculo} = 3{,}1\ \ldots \times r^2}$$

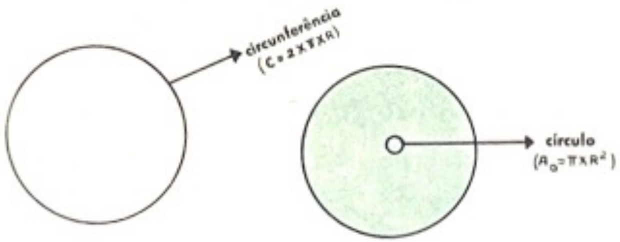
Com *mais precisão*, podemos adiantar que êsse 3,1 . . . é o já famoso "pi" (π) e, portanto:

$$\boxed{\text{Área do círculo} = \text{"pi"} \times (\text{raio})^2}$$

ou

$$\boxed{A_{\odot} = \pi \times r^2}$$

Êrro comum: Confundir *circunferência* (que possui *comprimento* $\Longleftrightarrow$ uma dimensão) com *círculo* (que possui *superfície* $\Longleftrightarrow$ duas dimensões).



DUAS IMPORTANTES QUESTÕES:

1.ª) Para calcular a *área* de um *círculo*, conhecida a medida de seu *raio*, basta *multiplicar* π pelo *quadrado* da medida do raio.

2.ª) INVERSAMENTE, conhecida a *área* de um *círculo*, para calcular a medida de seu *raio*, basta *extrair a raiz quadrada* do quociente da área por π.

Logo:

$$\boxed{A_{\odot} = \pi \times r^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{r = \sqrt{A_{\odot} : \pi}}$$

Aplicações:

1. Calcular a área do círculo cujo diâmetro mede 20cm. Usar $\pi = 3{,}14$.

Temos: $r = 20\text{cm} : 2 = 10\text{cm}$

e $A_{\odot} = 3{,}14 \times (10)^2\text{cm}^2 = \boxed{314\text{cm}^2}$

2. Determinar a medida do raio de um círculo que possui 28,26dm² de área. Usar π com aproximação de 0,01.

Temos: $r = \sqrt{28{,}26 : 3{,}14}\text{dm} = \sqrt{9}\text{dm} = \boxed{3\text{dm}}$

RESUMO

$$\boxed{A_{\square} = l^2} \qquad \boxed{A_{\text{trapézio}} = \frac{(b_1 + b_2) \times a}{2}}$$

$$\boxed{A_{\text{retângulo}} = b \times a}$$

$$\boxed{A_{\text{paralelogramo}} = b \times a} \qquad \boxed{A_{\lozenge} = \frac{d_1 \times d_2}{2}}$$

$$\boxed{A_{\triangle} = \frac{b \times a}{2}} \qquad \boxed{A_{\odot} = \pi \times r^2}$$

ÁREA DE UMA FIGURA PLANA QUALQUER

24. *Cálculo por decomposição*

A área de uma *figura plana qualquer*, no caso de ser possível decompô-la em figuras de áreas conhecidas, é calculada somando e, às vêzes, subtraindo tais áreas.

Exemplos:

1.º) Calcular a área do seguinte polígono (fig. 79):

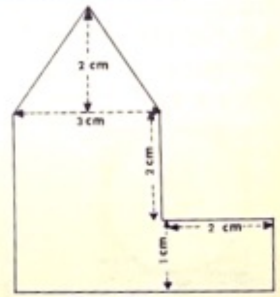


FIG. 79

Êsse polígono pode ser decomposto nas figuras: triângulo, quadrado e retângulo, tôdas de áreas fàcilmente calculáveis, isto é:

$$A_{\triangle} = \frac{3 \times 2}{2}\,cm^2 = 3cm^2 \qquad A_{\square} = (3)^2cm^2 = 9cm^2$$

e

$$A_{\square} = (2 \times 1)cm^2 = 2cm^2$$

Logo: $A_{figura} = 3cm^2 + 9cm^2 + 2cm^2 = \boxed{14cm^2}$

2.°) Calcular a área da seguinte figura plana (fig. 80):

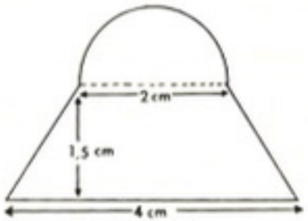


Fig. 80

Temos, agora, um trapézio e um semicírculo e, portanto:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(4+2) \times 1{,}5}{2}\,cm^2 = \frac{6 \times 1{,}5}{2}\,cm^2 = 4{,}5cm^2$$

$$A_{\text{semicírculo}} = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 1cm^2}{2} = 1{,}57cm^2$$

Logo: $A_{figura} = 4{,}5cm^2 + 1{,}57cm^2 = \boxed{6{,}07cm^2}$

3.°) Calcular a área da parte colorida da seguinte figura (fig. 81):

Neste caso a área da parte colorida é dada fazendo-se a *diferença* entre a área do quadrado e a área do círculo. Assim:

Fig. 81

$$\begin{aligned} A_{figura} &= A_{\square} - A_{\bigcirc} = \\ &= (40)^2mm^2 - \pi(20)^2mm^2 = \\ &= 1.600mm^2 - 3{,}14 \times 400mm^2 = \\ &= \boxed{344mm^2} \end{aligned}$$

EXERCICIOS EXPLORATÓRIOS — Grupo 84

1. Você quer medir a superfície do retângulo da fig. 82 e dispõe das seguintes unidades: quadrado *u* (desenhe-o numa cartolina para poder trabalhar melhor) e triângulo retângulo *v* (idem).
   Exprima a medida do retângulo nas unidades *u* e *v*.

Fig. 82

2. Os dois quadriláteros (fig. 83), o primeiro de forma quadrada e o segundo de forma retangular, têm o *mesmo perímetro*. Calcular a *área* de cada um dêles.

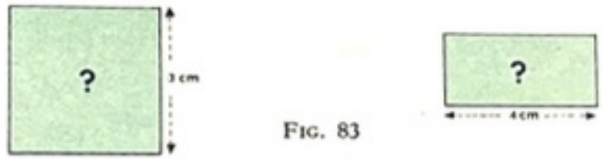


Fig. 83

3. Que diz você das áreas dos três triângulos construídos em retângulos iguais (fig. 84)? Por quê?


Fig. 84

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 85

1. Completar o seguinte quadro, relativo a dados de *retângulos:*

base	9cm	8cm	5dm	...	...	3mm	2m	...
altura	6cm	...	35cm	18m	5m	...	...	95m
perímetro	...	...	...	1hm	34m	32mm	...	39dam
área	...	32cm²	...	...	...	...	200dm²	... m²

2. Paulo pretende medir as dimensões de um jardim retangular usando o seu passo de 80cm como unidade. Calcular as dimensões do jardim, bem como a sua área, sabendo-se que Paulo contou 30 passos de largura e 45 de comprimento.

3. Qual é, em m², a área de um aeroporto de forma retangular que possui 3,2km de comprimento por 93dam de largura?

4. Determinar o *comprimento* (?) do retângulo na fig. 85, sabendo-se que:

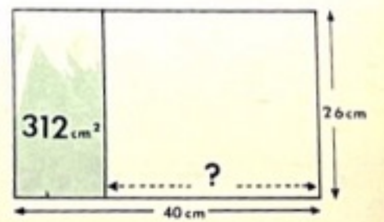


Fig. 85

5. O quadrado e o retângulo (fig. 86) têm a *mesma área*. Calcular:

1.º) *comprimento* do retângulo

2.º) o *perímetro* de cada um dêles

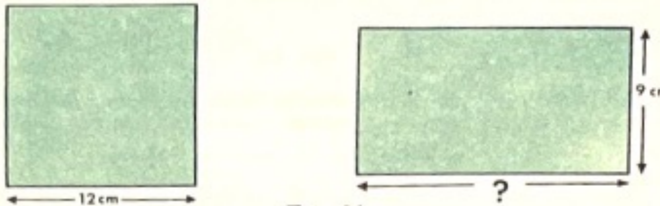


Fig. 86

6. Completar o seguinte quadro relativo a dados de *quadrados:*

lado	2m	3,5m	---	0,25m	---	---	---- cm
perímetro ..	---	---	24m	--- cm	---	---	---------
área	---	... dm²	---	--- cm²	49m²	225m²	210,25dm²

7. Calcular a área de um paralelogramo que possui 18,36m de base e cuja altura mede um têrço da medida da base.

8. Completar o seguinte quadro relativo a dados de *triângulos:*

base	20cm	8dm	10m	--- cm
altura	1,2dm	50cm	---	15dm
área	---	--- dm²	40m²	60m²

9. Calcular a área do triângulo retângulo e isósceles, sabendo-se que o seu perímetro é igual a 24dm e a hipotenusa mede 10dm.

10. Verificar se os triângulos (fig. 87) têm a *mesma área:*

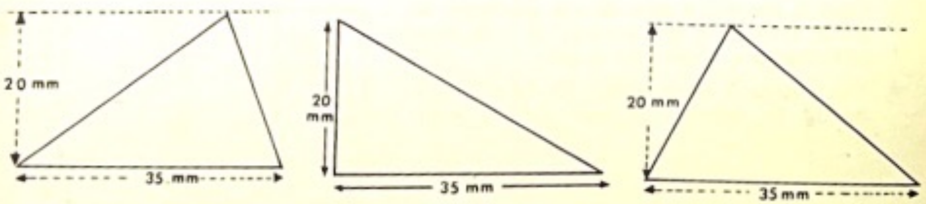


Fig. 87

11. Completar o seguinte quadro relativo a dados de *trapézios:*

base maior	3,8m	18cm	15dm	---	2m
base menor	2,6m	12cm	120cm	10dm	1m
altura	3,2m	---	0,80m	15dm	---
área	---	150cm²	---	225dm²	15m²

12. Completar o seguinte quadro relativo a dados de *losangos:*

diagonal menor ...	12dm	60cm	---	4,8dam
diagonal maior ...	8dm	---	12cm	60m
área	---	72dm²	48cm²	---

13. Completar o seguinte quadro relativo a dados de um *círculo* e da *circunferência* que o contorna:

raio	5cm	---	---	10dm
comprimento da circunferência	---	31,4cm	---	--- m
área do círculo	---	---	12,56m²	--- dm²
π	3,14	3,14	3,14	3,14

14. Calcular a área de um semicírculo pertencente a uma circunferência de 20dm de diâmetro (tomar π como 3,14).

15. Determinar o valor da área da *coroa* (superfície compreendida entre dois círculos de mesmo centro) na figura 88:

16. Uma corda estendida mede 3m. Qual é a *área máxima* de terreno de pasto de que o animal (fig. 89) pode dispor?

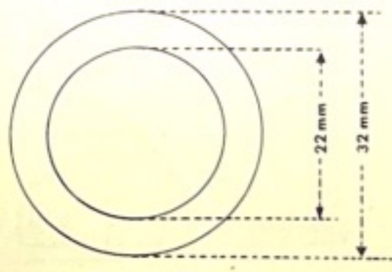


Fig. 88

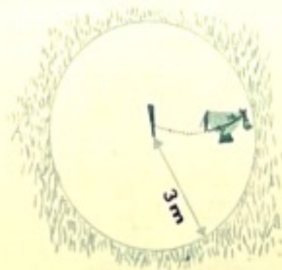
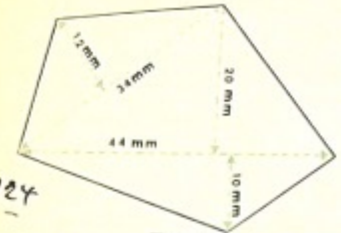


Fig. 89

17. Calcular a área das seguintes figuras 90 e 91, que se compõem de figuras planas conhecidas:



324

Fig. 90

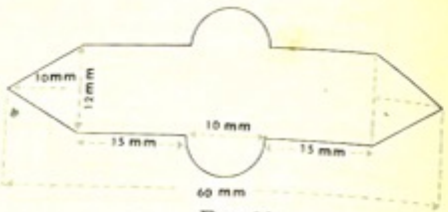


Fig. 91

18. Calcular a área do seguinte terreno (figura 92):

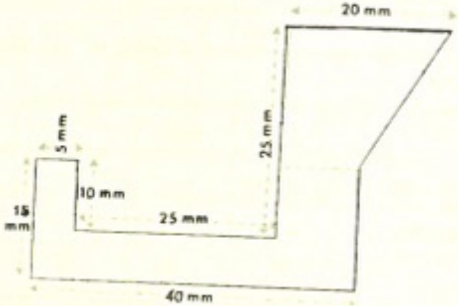


Fig. 92

19. Calcular a área da parte cólorida das seguintes figuras 93 e 94:

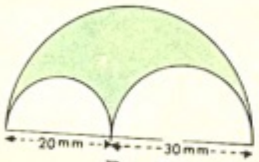


Fig. 93

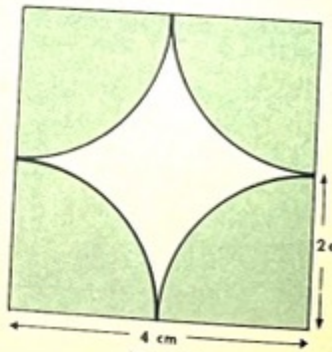
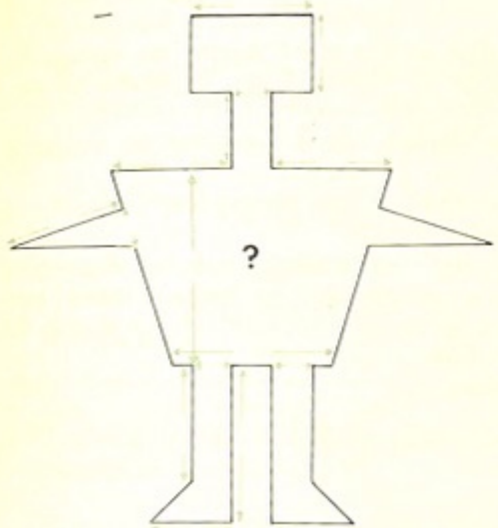


Fig. 94

20. Calcular, em cm^2, a área da superfície ocupada pela figura do "Zé-Robô", composta de figuras geométricas conhecidas (fig. 95). Usar sua régua comum *graduada* para determinar as medidas assinaladas.



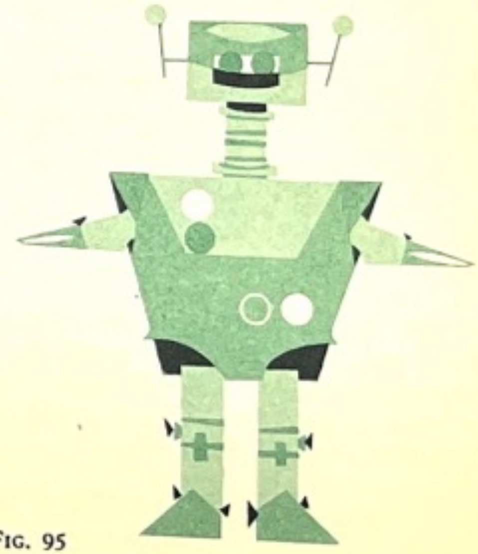


Fig. 95

Unidades de Volume

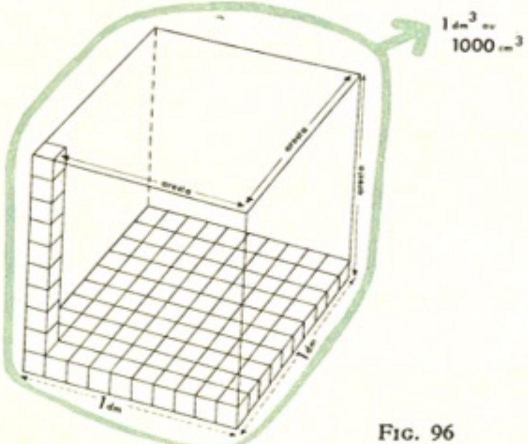
25. *Volume de um corpo; unidade fundamental (S.M.D.): metro cúbico*

A medida dos *sólidos*, isto é, dos corpos que "vivem" no espaço de *três dimensões*, é chamada de volume do sólido. Logo, o volume de um sólido, a exemplo da *área* de uma superfície, também é um *número*.

Unidade fundamental: **metro cúbico,** que é o volume de um cubo de 1m de *aresta*.

Símbolo: $\mathbf{m^3}$ (expoente 3 "lembra" as três dimensões(*) do sólido: comprimento, largura (ou espessura) e altura).

Os *múltiplos* e *submúltiplos* do *metro cúbico* são os volumes dos cubos que têm por arestas os múltiplos e submúltiplos do metro. Assim, por exemplo, um *decímetro cúbico*, que se indica por $1dm^3$, é o volume do cubo (fig. 96) que tem por *aresta* 1dm.



Fɪɢ. 96

De fato, consideremos um cubo com a aresta de 1dm e dividamos a sua altura em 10 partes iguais (1cm cada). Pelos pontos de divisão tracemos planos paralelos à base. Fazendo-se a mesma operação com os lados da base (lados de um quadrado), obteremos 1.000 cubos de 1cm de aresta, ou seja, $1.000cm^3$.

Logo: $\boxed{1dm^3 = 1.000cm^3}$

(*) No caso do cubo essas dimensões são *iguais* entre si e caracterizadas pela *aresta*.

e dizemos:

As unidades de volume variam de 1.000 em 1.000, isto é, cada unidade vale 1.000 vêzes a que lhe é imediatamente inferior.

26. *Unidades secundárias do metro cúbico: múltiplos e submúltiplos*

Os principais múltiplos e submúltiplos do *metro cúbico* figuram na tabela:

	NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES EM m^3
Múltiplos ...	quilôm. cúbico	km^3	$1.000.000.000m^3$
	hectôm. cúbico	hm^3	$1.000.000m^3$
	decâm. cúbico	dam^3	$1.000m^3$
Unidade	*metro cúbico*	m^3	$1m^3$
Submúltiplos.	decím. cúbico	dm^3	$0,001m^3$
	centím. cúbico	cm^3	$0,000.001m^3$
	milím. cúbico	mm^3	$0,000.000.001m^3$

27. *Representação e leitura dos números que exprimem medidas de volume*

Pelo fato de as unidades de volume variarem de 1.000 em 1.000, os números decimais que exprimem medidas de volume devem possuir um número de algarismos decimais múltiplo de três. Assim, por exemplo, ao invés de se escrever:

$$35,24dm^3$$

é conveniente escrever: $\boxed{35,240dm^3}$

e lê-se: "trinta e cinco decímetros cúbicos e duzentos e quarenta centímetros cúbicos".

28. *Mudança de unidade*

A mudança da unidade é feita deslocando-se a vírgula três casas para a *direita* ou para a *esquerda*, segundo se passa para uma unidade de ordem imediatamente *menor* ou *maior*, e suprindo de zeros, caso faltem algarismos.

Exemplos:

1.º) Exprimir $65,300dm^3$ em centímetros cúbicos.

Basta deslocar a vírgula três casas para a *direita:*

$$\boxed{65,300dm^3 = 65.300cm^3}$$

2.º) Exprimir $12mm^3$ em metros cúbicos.

Como: $1mm^3 = 0{,}000.000.001m^3$

temos: $12mm^3 = 0{,}000.000.012m^3$

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — Grupo 86

1. Quantos cubos de 1cm de aresta você acha que existem na figura abaixo?

2. De quantos cubinhos de 1cm de aresta você precisaria para formar um cubo de 1dm de aresta?
3. Você tem em sua frente um monte de areia e um carrinho de transporte (fig. 97). Imagine um enunciado para um problema à sua escolha e resolva-o.

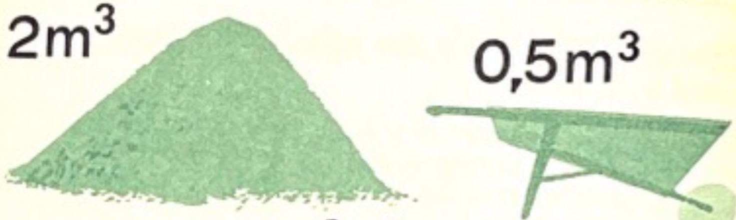


Fig. 97

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 87

1. Completar as seguintes sentenças, de modo a torná-las *verdadeiras:*

1.ª) $1m^3$ = ... dm^3

2.ª) $1m^3$ = ... cm^3

3.ª) $\frac{1}{4}m^3$ = ... dm^3

4.ª) $\frac{3}{4}dm^3$ = ... m^3

5.ª) $\frac{1}{2}m^3$ = ... cm^3

6.ª) $\frac{1}{5}km^3$ = ... m^3

7.ª) $2\frac{1}{4}m^3$ = ... dm^3

8.ª) $200cm^3$ = ... m^3

9.ª) $0{,}050m^3$ = ... dm^3

10.ª) $1.000dm^3$ = ... m^3

11.ª) ... dam^3 = $2.350m^3$

12.ª) ... dm^3 = $1.964cm^3$

13.ª) ... m^3 = $12dam^3$

14.ª) ... cm^3 = $5dm^3$ e $120cm^3$

15.ª) 5 ... e 7 ... = $5.007cm^3$

16.ª) 3 ... e 28 ... = $3.028m^3$

17.ª) $\frac{1}{2}$ ... = $500dm^3$

18.ª) 35 ... = $35.000cm^3$

19.ª) 4.000 ... = $4m^3$

20.ª) ... m^3 = ... dm^3

2. Assinalar quais, das seguintes sentenças, são *verdadeiras* ou *falsas:*

1.ª) $1m^3 = 100dm^3$

2.ª) $1m^3 = 1.000dm^3$

3.ª) $1dm^3 = 0{,}001m^3$

4.ª) $\frac{1}{2}m^3 = 5dm^3$

5.ª) $\frac{1}{2}m^3 = 500dm^3$

6.ª) $\frac{1}{2}m^3 = 50dm^3$

3. Efetuar as seguintes operações, exprimindo os resultados em m^3:
   1.º) $31{,}512dam^3 + 0{,}000.800.0hm^3 + 120{,}035m^3$
   2.º) $8{,}25dam^3 - (412cm^3 + 12{,}150dm^3)$
4. Idem, exprimindo os resultados em dm^3:
   1.º) $24{,}391m^3 + 0{,}219dam^3 \times 0{,}002$
   2.º) $(1.512dm^3 : 3) : 7$
5. É a mesma coisa dizer: um centímetro cúbico e um centésimo de metro cúbico?
6. Quantas vêzes $10m^3$ é maior que $100dm^3$?
7. Se $1dm^3$ de determinada substância custa NCr$ 1,80, quanto custam $2m^3$ dessa substância?
8. Uma caixa de injeções contém cinco ampolas, de $2cm^3$ cada, de um produto antigripal. Quantas dessas caixas podem ser produzidas por um laboratório que dispõe de $5dm^3$ dêsse produto?

Medidas de Capacidade

29. *As capacidades são também volumes*

Para medir volumes de recipientes que contenham líquidos e gases (outrora também grãos, como arroz, feijão, etc.), usamos como unidade o **litro**, que é o volume pràticamente igual a $1dm^3$.

O *litro*, cujo símbolo é *l*, passa a ser a *segunda unidade legal de volume* do S.M.D., e, para você ter uma idéia do litro, observe a figura 98, onde um litro enche completamente uma caixinha de $1dm^3$ de volume. Logo:

$$\boxed{1l = 1dm^3}$$

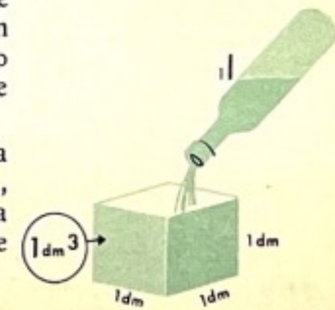


Fig. 98

Os principais múltiplos e submúltiplos do litro constam do quadro:

	NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES EM LITROS
Múltiplos	quilolitro	*kl*	1.000*l*
	hectolitro	*hl*	100*l*
	decalitro	*dal*	10*l*
Unidade	*litro*	*l*	1*l*
Submúltiplos	decilitro	*dl*	0,1*l*
	centilitro	*cl*	0,01*l*
	mililitro	*ml*	0,001*l*

As *unidades de capacidade* variam de dez em dez, e, portanto, a *mudança* de unidade é feita como nas medidas de comprimento.

1. Reduzir 6,287dal em *l*, dl, cl e ml.

Temos:

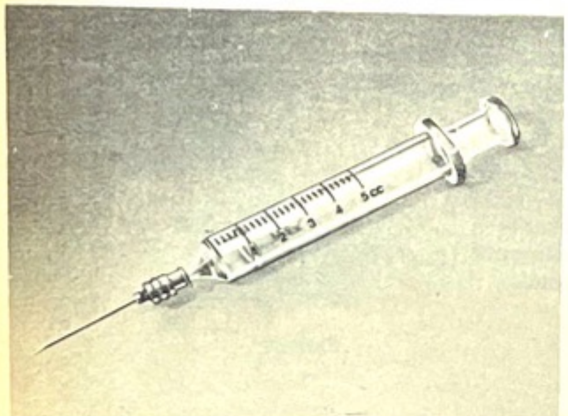
$$\begin{aligned} 6{,}287\text{dal} &= 62{,}87l \\ &= 628{,}7\text{dl} = \\ &= 6.287\text{cl} \\ &= 62.870\text{ml} \end{aligned}$$

2. Exprimir 42,5*l* em hectolitros.

Temos: $42{,}5l = 0{,}425\text{hl}$

Os recipientes usados como *medidas efetivas* de capacidade são, geralmente, de *forma cilíndrica* (fig. 99) e constituídos dos mais variados materiais, de acôrdo com a aplicação que passam a ter.

FIG. 99



Erros comuns:

1. Confundir litro com garrafa (que é menos de um litro, pois vale $\frac{3}{4}$, isto é, 7,5 dl);
2. escrever e dizer para as capacidades das seringas de injeção, símbolos e enunciado sem sentido. Exemplo: *Não se deve dizer* 3cc e sim $3cm^3$.

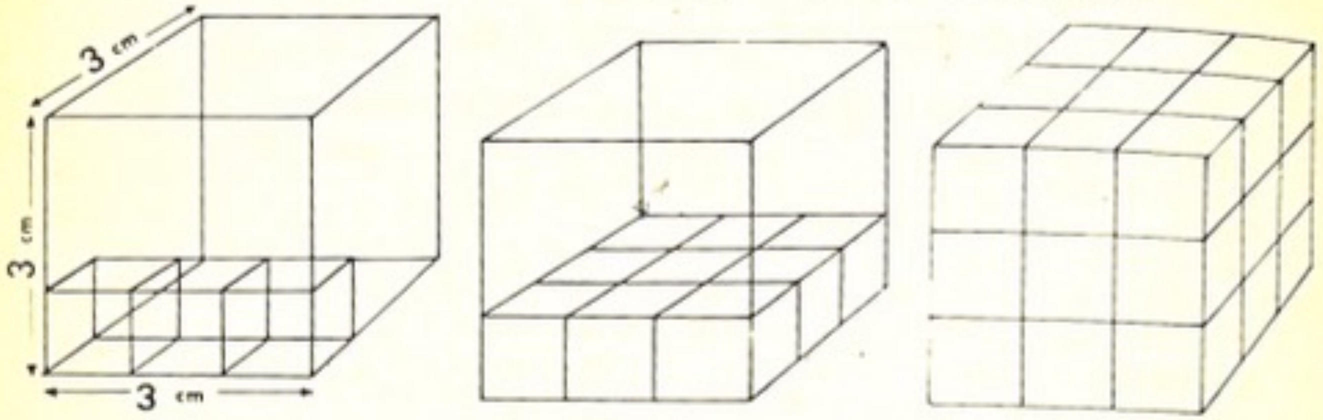
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 88

1. Completar as seguintes sentenças, de modo a torná-las *verdadeiras:*
   - 1.ª) $1l = \ldots dm^3$
   - 2.ª) $5l = \ldots dm^3$
   - 3.ª) $\frac{1}{4}l = \ldots dm^3$
   - 4.ª) $2hl = \ldots l$
   - 5.ª) $100cl = \ldots dal$
   - 6.ª) $40kl = \ldots cl$
   - 7.ª) $2m^3 = \ldots l$
   - 8.ª) $3.000cm^3 = \ldots l$
   - 9.ª) $100mm^3 = \ldots l$
   - 10.ª) $100l = \ldots hl$
   - 11.ª) $1l = \ldots cl$
   - 12.ª) $\frac{1}{4}l = \ldots ml$
2. Assinalar quais, das seguintes sentenças, são *verdadeiras* ou *falsas:*
   - 1.ª) $1l = 1cm^3$
   - 2.ª) $1l = 1dm^3$
   - 3.ª) $1cl = 1cm^3$
   - 4.ª) $1cm^3 = 1cc$
   - 5.ª) $1m^3 = 1.000l$
   - 6.ª) $1m^3 = 100l$
3. Completar, juntando o nome *verdadeiro* da unidade correspondente:
   - 1.ª) $15m^3 = 15.000 \ldots$
   - 2.ª) $20l = 20 \ldots$
   - 3.ª) $3l = 3.000 \ldots$
   - 4.ª) $3{,}28hl = 328 \ldots$
   - 5.ª) $300cm^3 = 30 \ldots$
   - 6.ª) $7dl = 700 \ldots$
4. Efetuar as seguintes *operações*, exprimindo os resultados em litros:
   - 1.ª) $42{,}3l + 212{,}25dl + 0{,}31kl$
   - 2.ª) $5m^3 - (26{,}315dm^3 + 4.657cm^3)$
   - 3.ª) $18{,}32hl + 3{,}900m^3 + 1.250cm^3 + 36{,}4dal$
5. Uma caixa tem $1m^3$ de volume. Pergunta-se: quantos *litros* de água pode conter? Quantos *hl*? Quantos *dal?*
6. Um negociante comprou, em barris, 46dal de vinho e já vendeu 2,3hl. Quantos *litros* possui ainda?
7. Uma pessoa vendeu 45,30*l* de um certo produto à razão de NCr$ 1,50 o *dal*. Quanto recebeu?
8. Quantos vasilhames de 5dl são necessários para engarrafar a bebida que está num recipiente de capacidade igual a 8,4hl?
9. Se $1cm^3$ de uma droga custa NCr$ 5,80, qual é o preço de 2dl dessa droga?
10. Cada meio litro de um certo refrêsco custa NCr$ 0,20. Um caminhão, que transporta 4hl dêsse refrêsco, deixa $\frac{3}{8}$ da sua carga para um negociante. Quanto deve pagar o negociante pela mercadoria recebida?

VOLUME DOS PRINCIPAIS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

CUBO

Seja o *cubo* de 3cm de aresta (fig. 100), onde destacamos:



3 cubos de $1cm^3$ $\quad$ $3 \times 3 = 9$ (cubos de $1cm^3$) $\quad$ $3 \times 3 \times 3 = 27$ (cubos de $1cm^3$)

FIG. 100

Portanto, o volume de um cubo de 3cm de aresta é:

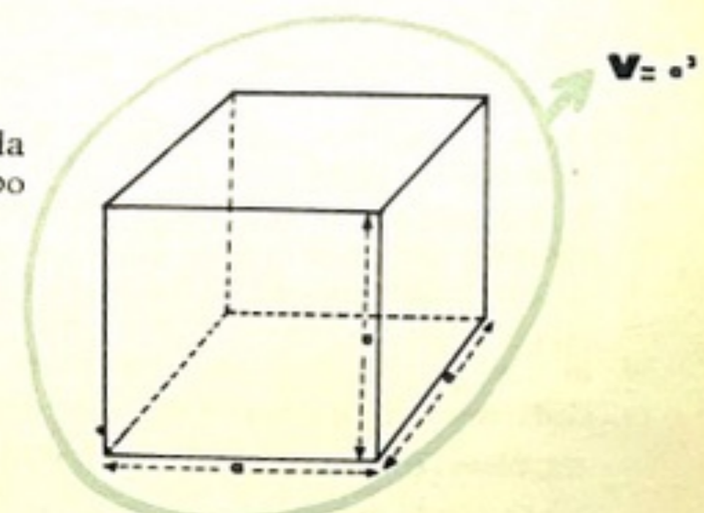
$$3cm \times 3cm \times 3cm = 27cm^3, \text{ ou seja:}$$

VOLUME DO CUBO = med. *aresta* × med. *aresta* × med. *aresta*

notando-se que a unidade de volume corresponde à unidade de comprimento utilizada para a medida da aresta (nesse caso em *cm*).

Indicando por a a medida da aresta e por V o volume do cubo ao lado, temos a "fórmula":

$$\boxed{V = a \times a \times a = a^3}$$



Problema inverso:

Conhecido o *volume* de um cubo, como você poderia determinar a *medida da aresta* dêsse cubo?

Ora, a operação inversa da operação "elevar ao cubo" é a operação "extração da raiz cúbica" e, portanto, se o volume de um cubo é, por exemplo, $64cm^3$, a medida de sua aresta será:

$$\boxed{\sqrt[3]{64}cm = 4cm}$$

Se o volume fôsse $65cm^3$, como 65 *não é um cubo* (não precisa dizer perfeito . . .), a medida da aresta só poderia ser expressa por *aproximação:*

$$\sqrt[3]{65}cm = 4cm \text{ (aproximação por falta!)}$$

Área lateral e área total: Um cubo possui 6 *faces* iguais (são os quadrados que o "limitam"), 12 *arestas* iguais (são os lados dos quadrados das faces) e 8 *vértices* (são os vértices dos quadrados).

É fácil *desenvolver* a superfície (fig. 101) que "contorna" o cubo:

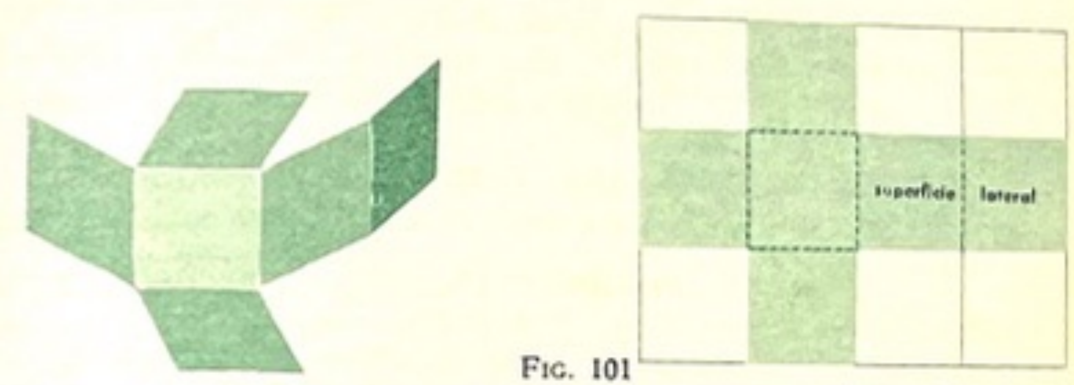


FIG. 101

A medida de tal superfície, que é igual à soma das seis áreas dos quadrados das faces, é chamada *área total do cubo.* Não considerando as faces do "fundo" e a de "cima", isto é, sòmente a soma de quatro *faces laterais*, temos a área lateral do cubo.

Assim, por exemplo, o cubo de 3cm de aresta possui:

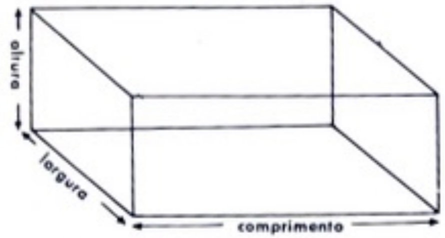
$$6 \times (3)^2cm^2 = 6 \times 9cm^2 = \boxed{54cm^2} \text{ como área total}$$

e

$$4 \times (3)^2cm^2 = 4 \times 9cm^2 = \boxed{36cm^2} \text{ como área lateral}$$

30. *Paralelepípedo retângulo*

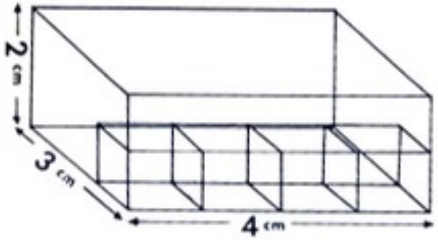
Trata-se do sólido geométrico que possui 6 faces *retangulares*, iguais *duas* a *duas*. As três dimensões (comprimento, largura e altura) estão caracterizadas na fig. 102, onde também são notadas 12 arestas iguais, *quatro* a *quatro*.



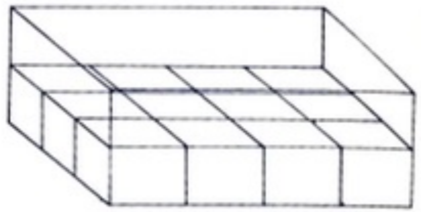
Os "paralelepípedos" usados no calçamento das ruas, por exemplo, têm a *forma* de um paralelepípedo retângulo. E as caixas de fósforo? Também, não é?

Fig. 102

Vamos calcular o *volume* de um paralelepípedo retângulo. Seja o da fig. 103:

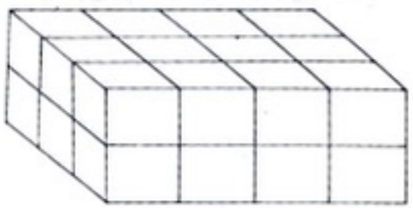


(4 cubos de 1cm³)



4 × 3 = 12 (cubos de 1cm³)

Fig. 103



4 × 3 × 2 (cubos de 1cm³)

Portanto, o volume do paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são: 4cm, 2cm e 3cm, respectivamente, é: $4cm \times 3cm \times 2cm = 24cm^3$, ou seja:

VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO = med. *comprimento* × med. *largura* × med. *altura*

Indicando por *a*, *b* e *c* as medidas das dimensões do paralelepípedo, temos a "fórmula":

$$\boxed{V = a \times b \times c}$$

Substituindo o produto $a \times b$ (que indica a área do retângulo da base do paralelepípedo) por B, e a outra dimensão c (altura) por h, o volume do paralelepípedo retângulo pode, *também*, ser dado pela "fórmula":

$$\boxed{V = B \times h}$$

Problema inverso:

O conhecimento do *volume* e da *área da base*, de um paralelepípedo retângulo, permite calcular a *altura* dêsse paralelepípedo.

Basta dividir (operação *inversa* da multiplicação), isto é:

altura = volume : área da base

Da mesma forma, conhecendo-se o *volume* e a *altura* de um paralelepípedo retângulo, pode-se determinar a *área de sua base:*

área da base = volume : altura

Exemplo:

O volume de um paralelepípedo retângulo é igual a $448dm^3$. Sabendo-se que a área da base é de $56dm^2$, calcular o valor da *altura*.

Temos: $(448 : 56)dm = 8dm$ (altura).

Área lateral e área total: Um paralelepípedo retângulo tem 6 *faces* retangulares, iguais *duas* a *duas* (fig. 104):

12 *arestas*, iguais *quatro* a *quatro* e 8 *vértices*.

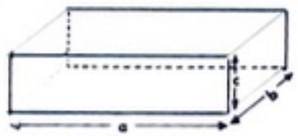
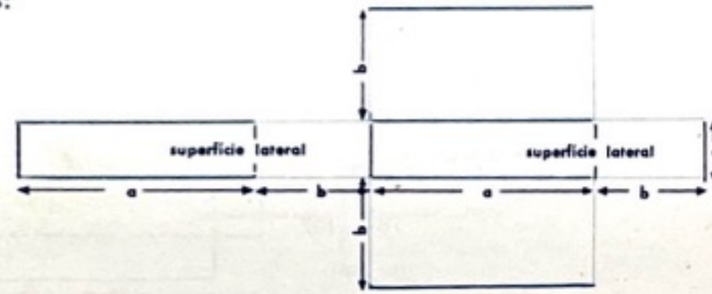


Fig. 104

Desenvolvendo a sua superfície, obtemos:



ou seja:

área lateral = perímetro da base × med. altura	Verifique!
área total = área lateral + 2 × área da base	Verifique!

No exemplo da fig. 103 temos:

$$\text{área lateral}: 2\times(4\times3)\text{cm}^2 + 2\times(2\times3)\text{cm}^2 = 24\text{cm}^2 + 12\text{cm}^2 = 36\text{cm}^2$$

$$\text{área total}: 2\times(4\times3)\text{cm}^2 + 2\times(2\times3)\text{cm}^2 + 2\times(4\times2)\text{cm}^2 = 36\text{cm}^2 + 16\text{cm}^2 = 52\text{cm}^2.$$

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS (de aplicação) — Grupo 89

1. Qual o comprimento do barbante que você deve usar para amarrar a caixa (fig. 105) de forma *cúbica*, sabendo-se que são necessários 10cm para dar o laço?

Fig. 105

2. Observe bem as figuras abaixo (fig. 106): Quanto vale a soma dos pontos de duas faces opostas? Então complete, agora, os pontos na segunda figura.

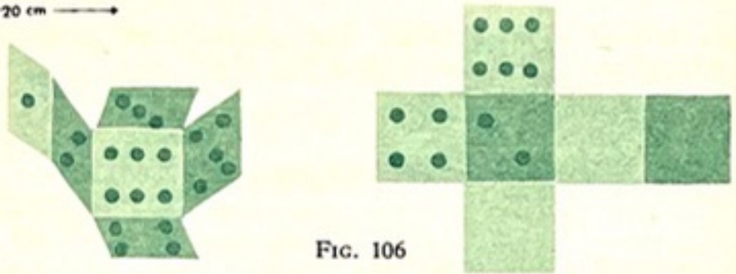


Fig. 106

3. Preste atenção: Se você *duplicar* a aresta de um cubo, será que o seu volume também *duplica?* Experimente, "partindo" de um cubo de 2cm de aresta, e conclua.

4. Você vai construir uma *caixinha retangular* com uma fôlha de cartolina (fig. 107). Recortando nos quatro cantos quadradinhos de 2cm, e dobrando onde se vê linha pontilhada, calcule a área lateral da caixinha construída.

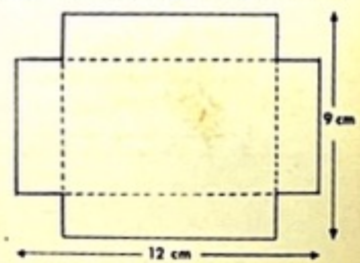


Fig. 107

1. Completar o seguinte quadro relativo às dimensões e medidas de *cubos:*

medida da aresta	5cm	---	---	---	---
área de uma face	---	36dm²	---	---	---
área lateral	---	---	64cm²	---	---
área total	---	---	---	54m²	---
volume	---	---	---	---	216cm³

2. Completar o seguinte quadro relativo às dimensões e medidas de um paralelepípedo retângulo (cuidado! transformar as medidas na mesma unidade para poder operar ...):

comprimento	3m	120cm	8cm	---	1m
largura	4m	6dm	---	60cm	---
altura	5m	400mm	3cm	---	---
área da base	---	---	16cm²	48dm²	2m²
área lateral	---	---	---	---	---
área total	---	---	---	---	---
volume	---	---	---	192dm³	2m³

3. As dimensões de meu quarto de dormir são: 4,5m (comprimento), 3m (largura) e 2,90m (altura). Qual o volume ocupado por meu quarto?

4. As três caixas (fig. 108) têm as mesmas dimensões. Em qual delas estamos usando mais "durex"?

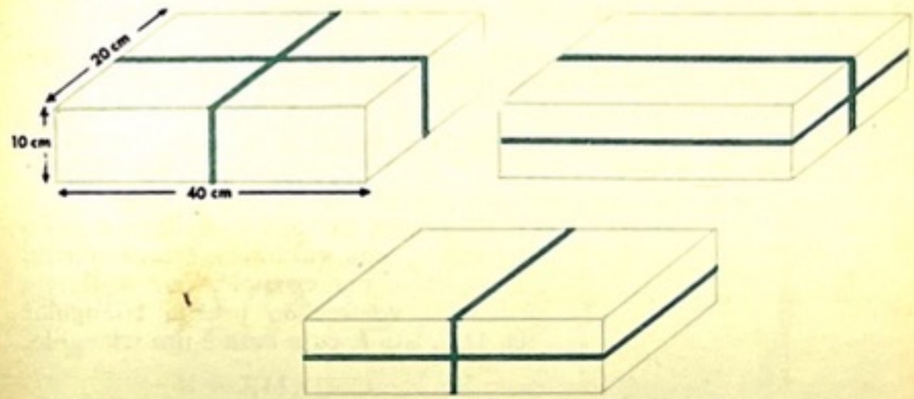


Fig. 108

31. *Prisma reto; cilindro reto*

Considere as seguintes figuras geométricas (fig. 109):

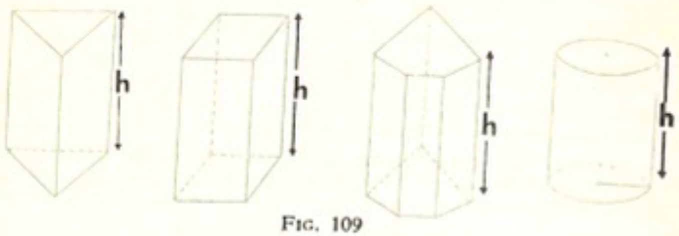


Fig. 109

Os sólidos representados por essas figuras são bem conhecidos, através dos contactos que todos nós temos com os objetos que guardam essas *formas*.

Os três primeiros sólidos são exemplos de **prismas** e o último de **cilindro,** todos retos ("de pé"!), pois os *oblíquos* ("inclinados") serão estudados mais tarde.

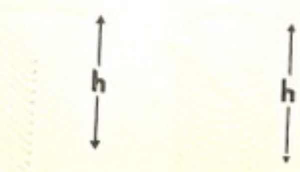
Observe bem que nos *prismas* as *bases* são polígonos (no primeiro é um *triângulo*, no segundo um *retângulo*, no terceiro um *pentágono*, ...) e nos *cilindros* as bases são *sempre* círculos.

Como são as *faces laterais* dos prismas? É fácil ver que são sempre paralelogramos, onde um dos lados (que é a aresta lateral) representa a altura do prisma.

O cilindro é também chamado "um corpo redondo", o que é natural pela forma da superfície que o "envolve". A sua altura é a *distância* entre as bases inferior e superior.

Observação: Você deve agora estar pensando que o segundo prisma (fig. 109) *é também* um paralelepípedo. É mesmo! Portanto, *todo prisma de base retangular é um paralelepípedo.*

32. *Cálculo do volume*



O volume, tanto o do prisma como o do cilindro, será calculado *intuitivamente*. Suponhamos, por exemplo, que se deseja calcular o volume do prisma triangular (fig. 110), isto é, cuja base é um triângulo.

Fig. 110

Você poderia "pensar" êsse prisma como um *conjunto* de triângulos, todos *iguais* à base, desenhados sôbre um cartão de espessura unitária (1mm, 1cm, . . .) e a seguir "empilhados", depois de recortados.

O prisma assim formado "compõe-se" de *tantas bases triangulares* quantas forem as unidades da *altura* do prisma. Logo, o volume do prisma será conhecido *multiplicando-se a área da base pela medida da altura* (nas mesmas unidades).

Êsse mesmo raciocínio poderá ser feito com *qualquer* base.

Se a base fôr um círculo, a figura "composta" será um cilindro. Aliás, você já deve ter visto as "rodelas" que são empregadas como descanso dos copos em que são servidas bebidas. Elas constituem um ótimo exemplo para sua "experiência" (não para ser feita nas festas, naturalmente . . .).

Logo:

$$\text{VOLUME} \begin{cases} \textit{prisma} \Longleftrightarrow \\ \textit{cilindro} \Longleftrightarrow \end{cases} \boxed{\text{área da base} \times \text{med. altura}}$$

valendo as "fórmulas":

para o
- PRISMA: $\boxed{V = B \times h}$ onde B representa a *área* do polígono da base e h a *altura* do prisma.
- CILINDRO: $\boxed{V = \pi \times r^2 \times h}$ onde $\pi . r^2$ é a *área* do círculo da base e h a *altura* do cilindro.

Exemplos:

1. Calcular o volume do *prisma triangular* de altura igual a 12dm e cujo triângulo da base tem as seguintes dimensões: base do triângulo, 5dm; altura do triângulo, 4dm.

   Temos: $V = B \times h$, onde $B = \dfrac{5\text{dm} \times 4\text{dm}}{2} = 10\text{dm}^2$ (área do triângulo da base)

   e, portanto: $V = 10\text{dm}^2 \times 12\text{dm} = 120\text{dm}^3$.

2. Calcular o volume do cilindro (reto) de 10cm de altura, sabendo-se que o raio do círculo da base mede 3cm.

   Sendo: $V = \pi . r^2 . h$, $\boxed{r = 3\text{cm}}$ e $h = 10\text{cm}$, temos:

   $$V = 3{,}14 \times (3\text{cm})^2 \times (10\text{cm}) = \boxed{282{,}600\text{cm}^3}$$ (por aproximação).

Problemas inversos:

1. Um prisma reto tem $336dm^3$ de volume e 60cm de altura. Qual a área da base dêsse prisma?

   Da fórmula $V = B \times h$, concluímos que a área da base (B) é obtida dividindo-se o volume (V) pela medida da altura (h), isto é:

$$336dm^3 : 6dm = 56dm^2$$

2. São conhecidos o volume de um cilindro ($785cm^3$) e a medida da altura dêsse cilindro (10cm). Calcular o valor do raio do cilindro.

   Agora, as operações inversas são:

$$785cm^3 : 10cm = 78{,}50cm^2 \text{ (área da base)}$$
$$78{,}50cm^2 : 3{,}14 = 25cm^2 \text{ (quadrado do raio)}$$

logo, $r = \sqrt{25cm^2} = 5cm$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 91

1. Completar o seguinte quadro relativo a medidas de *prismas retos:*

BASE	ÁREA DA BASE	ALTURA	VOLUME
quadrado: lado: 4cm	...	1dm	... cm^3
retângulo: comprimento: 6dm largura: 40cm	...	...	$360dm^3$
triângulo: base: 12cm altura:	$36cm^2$	...	$1.440cm^3$
trapézio: base maior: 6dm base menor: 4dm altura: 3dm	...	15dm	... dm^3

2. Completar o seguinte quadro relativo a medidas de *cilindros retos:*

RAIO DA BASE	ALTURA	ÁREA DA BASE	PERÍMETRO DA BASE	VOLUME
10cm	12cm	... cm^2	...	...
...	20cm	... dm^2	125,6m	...
...	0,5m	... dm^2	...	$141{,}300dm^3$
2m	...	... m^2	...	$125{,}600m^3$

33. *Pirâmide reta; cone circular reto*

Consideremos os seguintes *sólidos* — também do conhecimento de todos — através das figuras geométricas (fig. 111):

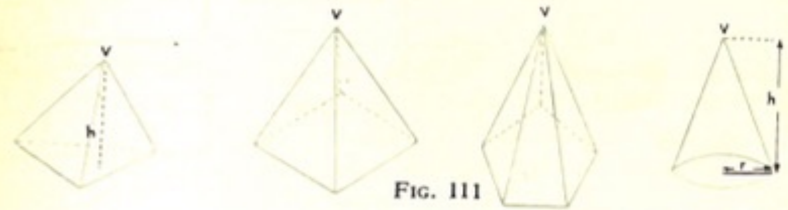


Fig. 111

Os três primeiros são exemplos de **pirâmides** (lembra-se das Pirâmides do Egito?) e o último de **cone** (lembra-se da forma dos chapéus de palhaço?), todos retos.

A *base* das pirâmides são polígonos (triângulo na primeira, quadrado na segunda, pentágono na terceira, . . .) e a do cone sempre círculo.

Como são as *faces laterais* das pirâmides? São *sempre* triângulos, não é? Todos êsses triângulos têm um *vértice comum* (ponto V na fig. 111) chamado vértice da pirâmide. A *distância* dêsse vértice à base determina a altura da pirâmide.

O cone, por sua vez, é mais um "corpo redondo" que possui um vértice; a *distância* dêsse vértice à base (que é um círculo) determina a altura do cone.

34. *Cálculo do volume*

Intuitivamente é simples calcular o volume dêsses sólidos. Suponhamos, como exemplo, que uma pirâmide triangular e um cone (fig. 112) estejam completamente cheios de areia fina. Se a areia da pirâmide fôr tôda despejada num prisma triangular, de *mesma base e altura* que ela, e a do cone, num cilindro de *mesma base e altura* que êle, que acontecerá quando *tôda* a areia fôr despejada?

Você pode observar (fig. 112) ou também verificar, fazendo a experiência, que *sòmente* $\frac{1}{3}$ (um têrço!) da capacidade do prisma e do cilindro ficará coberta. Em outras palavras, isto significa que você deve operar três vêzes, se quiser encher *totalmente* o prisma ou o cilindro. Logo:

Os volumes da pirâmide e do cone são, respectivamente, um têrço dos volumes do prisma e do cilindro, de mesma base e altura.

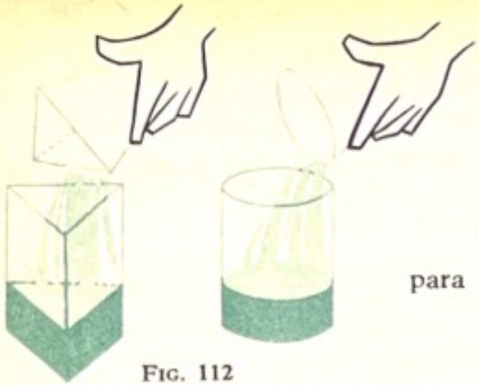


Fig. 112

Agora, valem as "fórmulas":

para
- a PIRÂMIDE: $\boxed{V = \frac{B \times h}{2}}$
- o CONE: $\boxed{V = \frac{\pi . r^2 \times h}{3}}$

Exemplos:

1. Calcular o *volume* de uma pirâmide de 12dm de altura, cuja base é um quadrado de perímetro igual a 16dm.

   A "fórmula" a ser aplicada é: $V = \frac{B \times h}{3}$ onde B representa a área do quadrado (que é a base) e h a altura da pirâmide. Sendo 16dm o perímetro do quadrado, cada lado vale:

   16dm : 4 = 4dm e a área da base valerá: $(4\text{dm})^2 = 16\text{dm}^2$.

   Portanto: $V = \frac{16\text{dm}^2 \times 12\text{dm}}{3} = 64\text{dm}^3$

   Problema inverso: *Conhecidos* o volume e a área da base (ou a altura), a medida da altura (ou a área da base) será dada por:

   $$h = \frac{3 \times V}{B} \left(\text{ou a área da base: } B = \frac{3 \times V}{h}\right)$$

   aplicando as respectivas operações inversas.

2. Calcular o volume de um cone que possui 4dm de diâmetro e 9dm de altura. Como o diâmetro vale 4dm, o raio mede: 4dm : 2 = 2dm e, portanto:

   $$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{3{,}14 \times (2\text{dm})^2 \times 9\text{dm}}{3} = \frac{3{,}14 \times 4\text{dm}^2 \times 9\text{dm}}{3}$$

   $$= 37{,}68\text{dm}^3 \text{ (por aproximação)}$$

   Resolva você mesmo o *problema inverso*, aplicando naturalmente as operações inversas das empregadas no problema (direto): são conhecidos o volume, $37{,}68\text{dm}^3$, e a altura, 9dm, de um cone. Quanto mede o *diâmetro* dêsse cone?

35. *O "mais redondo" dos sólidos*

Sòmente por razões de curiosidade você vai conhecer a "fórmula" que dá o volume da **esfera** (fig. 113) que, afinal, é realmente o corpo

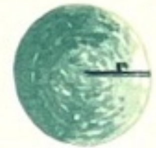


Fig. 113

"redondo" por excelência. Isto porque o cálculo do volume da esfera — mesmo intuitivo — exigiria aqui um esfôrço maior do que os que foram empregados até agora. Por enquanto, contente-se em "guardar" o seguinte *resultado*, que será mais tarde "deduzido":

O volume de uma esfera é igual a $\frac{4}{3}$ do produto de π pelo cubo do raio.

ou seja:

$$\boxed{V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3}$$

Portanto, *basta* que se conheça o *raio* de uma esfera para que o seu volume fique prontamente determinado.

Exemplo: Calcular o volume da esfera cujo raio mede 3cm.

Temos: $V = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times (3\text{cm})^3 = 113{,}040\text{cm}^3$ (por aproximação).

Problema inverso: É mais trabalhoso do que difícil, pois, conhecido o volume da esfera, a medida de seu raio é encontrada efetuando as operações inversas das que constam na "fórmula": $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$, isto é: *multiplica-se* o V por 3; *divide-se* o resultado por 4; *divide-se* ainda por 3,14 (π) e finalmente extrai-se a *raiz cúbica* (por fatoração completa, naturalmente) do resultado encontrado. Experimente, partindo da resposta do problema do exemplo ($V = 113{,}040\text{cm}^3$) e veja se encontra 3cm para o raio!

1. Completar o seguinte quadro relativo a medidas de *pirâmides retas:*

BASE	ÁREA DA BASE	ALTURA	VOLUME
quadrado: lado: 2dm	...	8dm	... dm^3
triângulo: base: 6cm altura: 4cm	...	21cm	... dm^3
retângulo: comprimento: 12cm largura:	$36cm^2$	...	$324cm^3$

2. Completar o seguinte quadro relativo a medidas de *cones* (circular reto): [Usar π com a aproximação: 3,14].

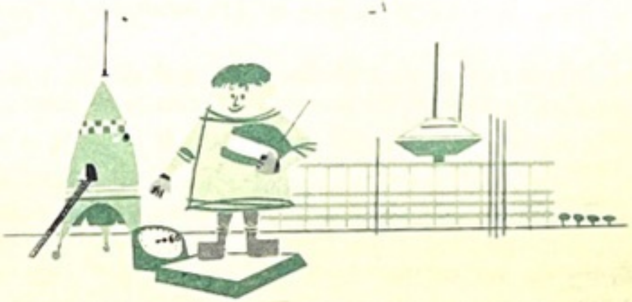
RAIO DA BASE	ÁREA DA BASE	PERÍMETRO DA BASE	ALTURA	VOLUME
5cm	... cm^2	... cm	15cm	... cm^3
... m	... dm^2	62,8m	20m	... dm^3
... dm	... dm^2	... dm	3m	$3{,}14m^3$
2m	... m^2	... m	... dm	$25{,}12m^3$

3. Qual o volume da esfera cujo diâmetro é 6dm?

4. Qual, em cm, o raio da esfera de volume igual a $904{,}320cm^3$?

ATENÇÃO

Peso 60 kg-fôrça, estou na TERRA e pronto para ir à LUA! Quanto pesarei lá? (Leia a página seguinte e ... a solução na pág. 349).



Unidades de Massa

36. *Pêso e massa de um corpo*

Pêso de um corpo é a *fôrça* com que a Terra o atrai para o seu centro. Como essa fôrça de atração *não é a mesma* para todos os lugares da Terra, porque esta não se apresenta rigorosamente esférica (basta lembrar as informações prestadas pelos atuais *satélites-observatórios*, que dão à Terra a forma aproximada de uma *pêra!*), um mesmo corpo pode ter diferentes pesos conforme a posição que ocupa na Terra.

Massa de um corpo é a *quantidade de matéria* que êsse corpo contém. Como a quantidade de matéria de um certo corpo é *sempre a mesma* para qualquer lugar da Terra, a massa de um corpo não varia qualquer que seja a posição que esteja ocupando.

Veja que *curioso:* se você estivesse na Lua, o seu *pêso* seria cêrca de seis vêzes menor do que seu *pêso* aqui na Terra, enquanto que a sua *massa* continuaria a mesma.

Na prática a medida da *massa* é feita por *balanças* que variam de tipo, de acôrdo com a natureza da medida. Dado o fato de se empregar usualmente a palavra *pêso* para significar *massa*, diz-se vulgarmente *pesagem* ao invés de *medição de massa* (não soaria bem dizer *massagem* . . . !).

Para o comércio, as balanças mais usuais são as do tipo *Roberval* (fig. 114) e as *automáticas* (fig. 115).

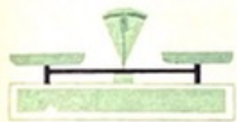


FIG. 114

FIG. 115

FIG. 116

Para as farmácias usam-se as balanças de *pratos suspensos* (fig. 116) e para os laboratórios as balanças de *precisão*, que são as de tipo de pratos suspensos, porém protegidas por paredes de vidro, pois até a respiração do operador pode influenciar numa medida de precisão.

Para as "pesadas" médias (sacos de cereais, de viagens, etc . . .) usam-se balanças tipo *báscula* (fig. 117) e para as grandes "pesadas" (veículos de transporte: caminhões, vagões, etc. . .) usam-se as *pontes-básculas* (fig. 118).

FIG. 117

FIG. 118

37. *Unidade fundamental de massa*

É o **quilograma.** Abreviatura: **kg**

Fig. 119

Quilograma é a massa *aproximada* de um decímetro cúbico de água destilada (pura) (fig. 119).

A unidade principal usada na prática é o *grama*, que é a milésima parte do quilograma, a partir do qual se constroem os múltiplos que constam do seguinte quadro:

	NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES EM GRAMAS
Múltiplos	tonelada	*t*	1.000.000 ou 1.000kg
	quintal	*q*	100.000g ou 100kg
	quilograma	*kg*	1.000g
	hectograma	*hg*	100g
	decagrama	*dag*	10g
Unidade	*grama*	*g*	1g
Submúltiplos	decigrama	*dg*	0,1g
	centigrama	*cg*	0,01g
	miligrama	*mg*	0,001g

As medidas relativas a pedras preciosas e metais preciosos são avaliadas em quilates, sendo 1 quilate equivalente à massa de 2dg.

As unidades de massa variam de dez em dez. As regras para a *mudança de unidade* são idênticas às estudadas para as unidades de comprimento.

Exemplos:

1. Reduzir 3,825kg a gramas
   Temos: 3,825kg = 3.825g
2. Exprimir 703,02hg em dag, g, cg e t
   Temos:

$$\begin{aligned}703{,}02\text{hg} &= 7.030{,}2\text{dag} =\\ &= 70.302\text{g} =\\ &= 7.030.200\text{cg} =\\ &= 0{,}070.302\text{t}\end{aligned}$$

As formas mais comuns dos "pesos" efetivos aprovados pelas nossas leis são fabricadas em ferro fundido (grandes pesadas), em latão (médias pesadas) e em lâminas de cobre (pequenas pesadas) (fig. 120).

Fig. 120

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — Grupo 93

1. Calcular quantos *gramas* pesa a mercadoria do embrulho (fig. 121):
2. Quanto "pesa" o "frango" (fig. 122)?

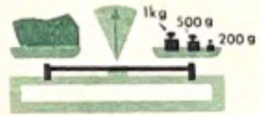


Fig. 121

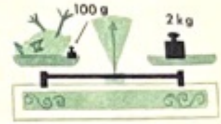


Fig. 122

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 94

1. Tornar *verdadeiras* as seguintes sentenças:

1.ª) 3kg = ... g	6.ª) ... t = 10q
2.ª) 3,5kg = ... g	7.ª) ... dag = 320hg
3.ª) 1q = ... kg	8.ª) 14hg e 12cg = ... g
4.ª) 2t = ... kg	9.ª) 3dg e 8cg = ... mg
5.ª) 4,018t = ... q	10.ª) $\frac{20}{8}$ g = ... dg

2. Efetuar, exprimindo os resultados em kg, as seguintes operações:
   1.ª) 32,55hg + 48,01dag + 3,81kg + 79dg
   2.ª) 4,039t − 21,05q
   3.ª) 8,01hg − (20,01g + 3,1dag) × 4

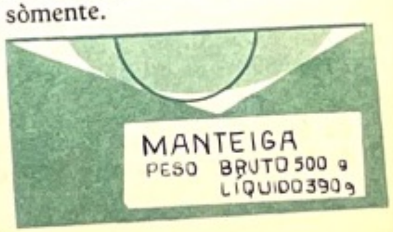
38. *Pêso bruto, pêso líquido e tara*

São nomes comuns de todo dia. Chama-se:

"pêso" bruto: ao pêso de uma mercadoria com a sua embalagem;
"pêso" líquido: ao pêso da mercadoria sòmente;
tara: ao pêso da embalagem sòmente.

Assim, por exemplo, numa lata de manteiga das comuns lê-se na própria lata:

pêso bruto: 500g
pêso líquido: 390g



Isto significa que a lata vazia (tara) pesa 110g, não é?

Nos veículos de transporte de carga, a *tara* figura escrita no próprio veículo, a fim de controlar o pêso da carga, tendo em vista o pêso máximo permitido por estradas, pontes, etc.

Observação importante: **1 litro de água "pesa" 1kg!**

Para a *água pura* vale a seguinte *equivalência* entre as unidades de volume, capacidade e massa:

$$\boxed{1dm^3 \iff 1l \iff 1kg}$$

Vale também para os respectivos *múltiplos:*

$$\boxed{1m^3 \iff 1kl \iff 1t}$$

e *submúltiplos:*

$$\boxed{1cm^3 \iff 1ml \iff 1g}$$

Isto é *sòmente* para água pura! Para um outro corpo qualquer, embora $1dm^3$ seja equivalente a $1l$, êle *não "pesa"* 1kg. Assim, por exemplo, $1dm^3$ de ferro "pesa" quase 8kg!, enquanto que $1dm^3$ de óleo pesa menos de 1kg (razão por que quando você tenta "misturar" volumes iguais de água e óleo, êste, como é menos "pesado", fica "em cima").

Exemplos:

1. Calcular a *capacidade* e o *pêso* de uma caixa de água de 2m de comprimento por 1m de largura e 0,80m de altura.

   Temos, para *volume* da caixa: $2m \times 1m \times 0{,}80m = 1{,}600m^3 = 1.600dm^3$.

   Logo: $1.600dm^3 = 1.600l$ (capacidade), e como cada litro de água pesa 1kg, a caixa *pesará* 1.600kg.

2. Qual é, em litros, a *capacidade* de uma caldeira que, cheia de água, pesa 680kg (pêso bruto, portanto), e vazia 140kg (o mesmo que tara)?

   A diferença: 680kg − 140kg = 540kg, representa o pêso líquido da água que enche a caldeira. Como 1kg de água ocupa o volume de 1 litro, conclui-se que a *capacidade* da caldeira é de 540 *litros.*

1. Preencher com as unidades fundamentais do S.M.D. correspondentes:
   a) a *capacidade* daquele tanque é de 3.200 ...
   b) o *pêso* que êste carrinho transportou foi de 75 ...
   c) o *volume* de minha caixa de brinquedos é de 1.200 ...
   d) a *área* do corredor de meu ginásio é de 240 ...
   e) o *comprimento* do varal de casa é de 12 ...
2. A nossa sala de aula tem as seguintes dimensões: comprimento 9m, largura 7m e altura 4m. Somos 35 alunos. Com o professor presente, quantos m^3 de ar caberão a cada pessoa?
3. Uma bola de futebol cheia de ar tem 20cm de diâmetro interno. Quantos mm^3 de ar ela contém?
4. Quantos litros de água cabem numa jarra de forma cilíndrica de 23cm de altura, sendo de 5cm o raio da base da jarra?
5. Sabendo-se que 4kg de certo produto custam NCr$ 6,00, qual o preço que você pagará por 600g dêsse produto?
6. Uma lata vazia pesa 1,40kg e cheia de água pura pesa 11,40kg. Qual é a capacidade dessa lata em litros?
7. Uma lata cheia de balas pesa 3,100kg. Vazia, pesa 600g. Pergunta-se:
   a) qual o pêso das balas; b) qual o preço de 1kg de balas se a lata cheia custou NCr$ 3,00; c) quantos potes, que comportam 500g de balas cada um, são necessários para distribuir tôdas as balas da lata?
8. Um recipiente vazio pesa 1,500kg. Com óleo pela metade pesa 6,225kg. Pergunta-se:
   a) o pêso do óleo que enche o recipiente; b) a capacidade dêsse recipiente, sabendo que 1 litro de óleo pesa 0,900kg; c) o pêso dêsse recipiente cheio de água pura.
9. Um caminhão, cuja tara é de 3 toneladas, deve atravessar uma ponte que suporta carga máxima de 7.000 quilos:
   a) quantos quintais de cereais pode carregar êsse caminhão?
   b) qual é o menor número de viagens que deverá fazer para poder transportar 14 toneladas de cereal? Uma das viagens terá pêso diferente das outras; qual o pêso da carga dessa viagem?
10. Um cargueiro deixou 330t de açúcar num certo pôrto:
    a) sabendo-se que o açúcar se encontra em sacos de 60kg cada um, quantos sacos o cargueiro transportou?
    b) na descarga foram usados vagões que transportam 220 sacos cada um; quantos vagões foram usados para o transporte de tôda a carga?

sistemas de medidas não-decimais

1. *O que é um sistema de medidas não-decimal; números não-decimais*

Todo sistema de medidas, cuja unidade principal não está em relação decimal com seus múltiplos e submúltiplos, diz-se **não-decimal.**

Os números que exprimem as medidas das grandezas, em um sistema *não-decimal*, são chamados *não-decimais* (ou "complexos")(*), porque apresentam a medida por meio de *dois* ou *mais* múltiplos ou submúltiplos (não-decimais, naturalmente) da unidade principal.

Assim, por exemplo, o **Sistema Inglês de Medidas** (S.I.M.) *é não-decimal*, pois, para exprimir-se um comprimento de 10 *jardas* e 5 *pés* (você está acostumado a ouvir essas medidas no futebol, no cinema, . . .), escreve-se:

10 yd 5 ft

e *nunca* 10,5 jardas (**não!**)

porque 10 jardas e meia *não correspondem* à medida expressa pelo número não-decimal 10 yd 5 ft!

Portanto, a vantagem do uso da vírgula pertence ao S.M.D., que se vale das regras do *sistema de numeração decimal.* É por isso que um comprimento, por exemplo, de 3 metros e 25 centímetros pode ser expresso pelo *número decimal:*

3,25m (**sim!**)

Observe, também, que essa medida envolve sòmente *uma* espécie de unidade (o metro), coisa que não ocorre com os números não-decimais.

(*) A expressão número complexo pertence à importante classe de números que será estudada no 2.º ciclo.

Também quando você diz que são 8 *horas* e 20 *minutos*, não pode escrever:

8,20h (**não!**)

que, em absoluto, significa a hora que você disse, e sim 8 *horas* e 12 *minutos*, pois os 12 minutos equivalem aos 2 décimos da hora (cada décimo vale 6 minutos!).

Dentro do sistema de *medida de tempo*, que é *não-decimal* (*é sexagesimal*), a hora que você disse só poderá ser escrita através do *número* não-decimal:

8h 20min (**sim!**)

Medida do Tempo

2. *O tempo "voa"; calendários*

Você bem sabe como "passa" o *tempo* através de:

- o *dia* (solar), que é o intervalo de tempo que a Terra leva para dar uma volta sôbre si mesma;
- o *ano* (solar), que é o intervalo de tempo que a Terra leva para dar uma volta ao redor do Sol.

Como o ano é um pouco mais de 365 dias, ou seja: 365,242.198.5 dias, evita-se trabalhar com tal número decimal, tomando-se para o ano 365 dias com o nome de ano civil. O êrro que se comete é compensado cada 4 anos, quando se acrescenta um dia ao ano civil, que passa a ter 366 dias e recebe o nome de bissexto.

Assim, o ano civil está dividido em 12 *meses:* janeiro (31d), fevereiro (28d ou 29d), março (31d), abril (30d), maio (31d), junho (30d), julho (31d), agôsto (31d), setembro (30d), outubro (31d), novembro (30d), dezembro (31d).

Uma semana compõe-se de 7 dias.

Os anos são contados a partir de um acontecimento marcante; para nós é o nascimento de Cristo (Era Cristã), há 1.969 anos!

As tábuas que registram dias e anos chamam-se calendários e são conhecidos por todos como "folhinhas". O calendário que usamos é o Gregoriano (do Papa Gregório XIII), responsável pelas correções do ano bissexto.

São *bissextos* os anos divisíveis por 4 (ex.: 1.968), excetuando-se os terminados por dois zeros, a menos que os dois primeiros algarismos formem um número divisível por 4.

Exemplos:

1900 não foi bissexto; 2000 será bissexto.

3. *Unidade principal (legal)*

É o segundo, cujo símbolo é: *s*.

> **Segundo é o intervalo de tempo igual à fração $\frac{1}{86.400}$ do dia solar(*)**

As *unidades secundárias*, que se apresentam sòmente como múltiplos, constam do quadro:

NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES
segundo	s	1s (unidade)
minuto	min	60s
hora	h	3.600s = 60min
dia	d	86.400s = 14.400min × 24h

Logo:

$$\boxed{1d} = 24h = 14.400min = \boxed{86.400s}$$

A *representação* da medida não-decimal que indica unidades de tempo, é feita escrevendo-se em ordem *decrescente de valor* os numerais correspondentes às diversas unidades, acompanhados dos respectivos símbolos.

Exemplo:

4d 12h 35min, que se lê: "quatro *dias*, doze *horas* e trinta e cinco *minutos*"

OBSERVAÇÃO: Para aplicação no comércio e em outras atividades sociais, temos:

o ano comercial .... 360 dias
o trimestre .... 3 meses
o semestre .... 6 meses

Ainda é bom você guardar os nomes dos seguintes períodos de anos:

2 anos: *biênio;* 3 anos: *triênio;* 4 anos: *quadriênio;* 5 anos: *qüinqüênio;* 10 anos: *decênio* ou *década;* 100 anos: *século;* 1.000 anos: *milênio!*

4. *Instrumentos que "medem" o tempo*

Os instrumentos que medem "o passar" do tempo são conhecidos de todos vocês, pelo menos os modernos: relógios e cronômetros. Através dos tempos as mais diferentes espécies de "relógios" foram usadas: desde

(*) Trata-se do dia solar *médio* definido de acôrdo com as convenções da Astronomia.

as clepsidras ou "relógios" de água, dos antigos egípcios, que mediam o tempo enchendo de água um recipiente em forma de vaso, com uma pequena abertura na base por onde escoava pouco a pouco o líquido: à medida que o nível descia, a "hora" ficava sendo conhecida. A seguir, os relógios de sol, que muitos de vocês conhecem(*); as ampulhetas e os pêndulos de precisão, que medem o tempo com um mínimo de êrro, usados pelos Observatórios.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 96

1. Assinalar, nas seguintes sentenças, quais as *verdadeiras:*
   a) 12 yd 8 ft é um *número decimal*
   b) 106,450km é um *número decimal*
   c) 7h 30min é um *número não-decimal*
2. Dividir 365 por 7. Quantas semanas há num ano? Quantos dias sobram?
3. Pelo fato de haver um dia a mais do que 52 semanas num ano comum (365d), qualquer data que caia numa têrça-feira dêsse ano, cairá no próximo ano na quarta-feira, se não houver fevereiro com 29 dias entre êles. Assim, por exemplo, se 9 de maio cai neste ano numa sexta-feira, e se o próximo ano não fôr bissexto, em que dia da semana cairá 9 de maio do próximo ano?
4. Um ano bissexto (366d) tem dois dias a mais que 52 semanas. Se 16 de julho de 1967 caiu num domingo, em que dia caiu 16 de julho de 1968 (que é bissexto)?
5. Há 10 anos numa década e 100 num século. Quantas décadas há num século?
6. O último ano do século I foi o ano 100 e o primeiro ano do século II foi o ano 101. Qual foi o último ano do século II? do século VII? do século XV? do século XX?
7. Qual foi o primeiro ano do século XIX? do século XX? Quantos anos bissextos houve no século XIX? Quantos haverá no século XX?
8. Em que séculos foram os anos: 1612? 1690? 1967? Qual foi a data (mês e dia) do último dia do século XIX? do primeiro dia do século XX?
9. Dar a data (mês e dia) em que a primeira metade do século XX terminou; quando a segunda metade do século XX começou.
10. Um homem foi aos E.U.A. em dezembro de 1900 e retornou ao Brasil em abril de 1901. Em quantos séculos diferentes estêve nos E.U.A.?

Medida de Ângulos Planos

5. *Que é ângulo?*

Não é demais lembrar que:

1.°) *ângulo* é uma figura formada pela *reunião* de duas semi-retas tendo a mesma origem (fig. 123), que são seus *lados;*

2.°) a *grandeza* de um ângulo não depende do *comprimento de seus lados*, mas sim do "afastamento" entre êles;

(*) A cidade de FRANCA (Est. São Paulo) possui um famoso "relógio de sol" numa de suas principais praças.

3.º) duas retas que se interceptam (fig. 124) determinam quatro ângulos; se êsses ângulos são todos *iguais*, as retas dizem-se *perpendiculares* (fig. 125) e os ângulos, retos.

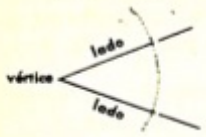


FIG. 123

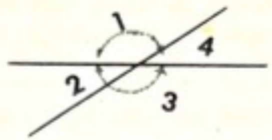


FIG. 124

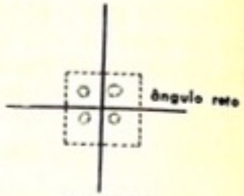


FIG. 125

6. *Unidade principal; unidades secundárias*

Unidade *principal:* ângulo reto; símbolo: **r**.

Entre as unidades *secundárias* do ângulo reto constam as sexagesimais (dos antigos babilônios), que figuram no seguinte quadro:

NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES
grau	°	$\frac{1}{90}$ r
minuto (de ângulo)	′	$\frac{1}{60}$ °
segundo (de ângulo)	″	$\frac{1}{60}$ ′

Logo:

$$\boxed{\text{1 grau tem } 60' \text{ e um minuto } 60''}$$

A representação do número *não-decimal* que exprime a medida de um *ângulo*, em unidades sexagesimais, é feita escrevendo-o em ordem de valor decrescente, como nas unidades de tempo.

Exemplo:

42° 18′ 26″, que se lê: "quarenta e dois graus, dezoito minutos e vinte e seis segundos".

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: A tendência de "medir" grandezas num sistema decimal, naturalmente pelas vantagens que êste apresenta sôbre os demais (uso de vírgula, operações decimais, etc. . .), é hoje em dia bem acentuada em países como os E.U.A. e Inglaterra, onde o S.M.D. não é o oficial. Basta ver que em diversos setores da medicina, dos esportes (corrida dos 100m, . . .) da fotografia (filmes de 8mm, 16mm, . . .), êsses países já o tomam oficialmente. Na Inglaterra a Câmara dos Comuns votou proposição no sentido de transformar o seu histórico, mas complicado sistema monetário, em decimal, como aliás já é feito nos E.U.A.

Para a medida de ângulos planos já se adota também um sistema decimal, cuja unidade — o grado — está relacionada *decimalmente* com o seu múltiplo (ângulo reto) e com seus submúltiplos.

O grado é o ângulo equivalente a $\frac{1}{100}$ do ângulo reto. Símbolo: gr(*)

Seus submúltiplos, cujos nomes têm os prefixos do S.M.D., constam do quadro:

NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES
decigrado	dgr	$\frac{1}{10}$ gr
centigrado	cgr	$\frac{1}{100}$ gr
miligrado	mgr	$\frac{1}{1.000}$ gr

Agora sim a representação da medida de um ângulo, nesse sistema, é bem simples.

Exemplo:

36,28gr, que se lê: "trinta e seis grados e vinte e oito centigrados".

Erros comuns:

1. Confundir o *minuto* e o *segundo*, das unidades de tempo, com o *minuto* (de ângulo) e o *segundo* (de ângulo) das unidades de ângulo, escrevendo-os, inclusive, conjuntamente!

Exemplo:

8h 15min 23s não pode ser escrito 8h 15′ 23″

2. Usar a vírgula na representação da medida de um ângulo no sistema sexagesimal.

Exemplo:

32, 6° como se fôsse 32° 6′ (não pode!)

7. *Instrumentos que medem ângulos planos*

Para construir um ângulo reto (que é a unidade principal de medida) usa-se o esquadro (fig. 126), que é um instrumento bem popular entre os alunos. O *esquadro* é também usado para a construção de uma *reta perpendicular* a outra, passando por um ponto.

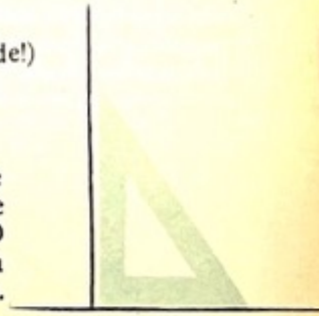


FIG. 126

(*) Não confundir *grado* (gr) com *grama* (g).

Então, sabendo que um *ângulo reto* vale 90° ou 100gr, você pode concluir fàcilmente que:

Fig. 127

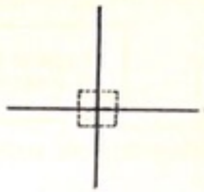


Fig. 128

dois ângulos retos valem 180° ou 200gr (fig. 127)

quatro ângulos retos valem 360° ou 400gr (fig. 128).

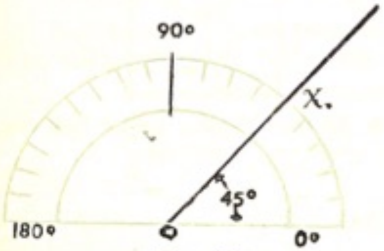


Fig. 129

A *construção* e a *medida* dos ângulos planos são feitas com o transferidor (fig. 129), instrumento em geral de material transparente e que consta, substancialmente, de um semicírculo graduado (em 180° ou 200gr).

Para usá-lo, coloca-se o seu centro *O* no vértice do ângulo que se quer medir, de modo que a sua "linha-base" coincida com um dos lados do ângulo. A medida do ângulo é dada pela leitura da graduação por onde passa o outro lado do ângulo.

Para *traçar* um ângulo (na fig. 129, quer-se construir um ângulo de 45°), escolhe-se uma semi-reta como um dos lados do ângulo sôbre a qual se apóia a "linha-base" do transferidor, de modo que o centro *O* coincida com a origem da semi-reta, que passa a ser o vértice do ângulo que se está construindo. A seguir, marca-se na graduação a medida do ângulo que se deseja obter, assinalando-se um ponto *X*. A semi-reta $\overrightarrow{OX}$ é o outro lado do ângulo procurado. Um ângulo *menor* que o ângulo reto é denominado ângulo agudo (fig. 130) e um ângulo *maior* que o ângulo reto, porém menor que o de "meia-volta", é chamado obtuso (fig. 131).

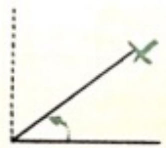


Fig. 130

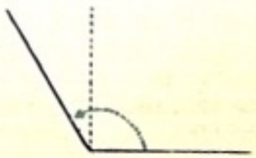
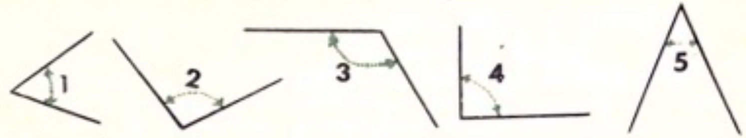


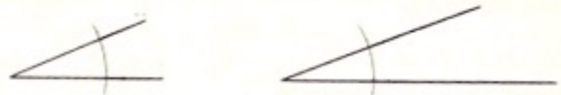
Fig. 131

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 97

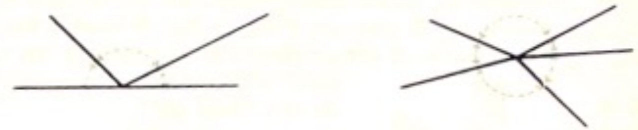
1. Quais os ângulos *agudos*, *retos* e *obtusos* das figuras abaixo?



2. Medir os dois seguintes ângulos e dizer o que encontrou de interessante:



3. Medir todos os ângulos das seguintes figuras e calcular a soma dêles (pode ser em graus).



4. Desenhar um triângulo isósceles (é o que tem dois lados iguais) e verificar como são os ângulos da base dêsse triângulo.
5. Calcular, em graus, o valor dos ângulos de um triângulo *eqüilátero*.
6. Quanto é a soma dos dois ângulos agudos de um triângulo *retângulo?* Quanto vale cada um dos ângulos agudos de um triângulo *retângulo e isósceles?*
7. Desenhar um triângulo *ABC*, tal que: $BC = 3cm$, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 30°$.
8. Desenhar um triângulo *ABC*, tal que: $BC = 6cm$, $\hat{B} = 120°$ e $\hat{C} = 30°$.
9. Desenhar um triângulo *ABC*, tal que: $\hat{A} = 65°$, $AB = 6cm$ e $AC = 7cm$.
10. Meça os ângulos de seu *esquadro:* quanto vale a soma? Meça os ângulos de um *triângulo qualquer* que você queira desenhar; quanto vale a soma? Que você pode concluir depois de efetuadas essas medidas?

Sistema Inglês de Medidas (S.I.M.)

8. *Preliminares*

É o sistema de medidas usado, principalmente, pelos E.U.A. e Inglaterra. Vale a pena insistir: trata-se de um **sistema não-decimal** e, portanto, não desfruta das vantagens do S.M.D.

Apresentaremos, resumidamente, as unidades de medidas do S.I.M. mais usuais entre nós.

9. *Unidades de comprimento*

Algumas dessas unidades foram construídas tomando-se como modelos as dimensões de certas partes corporais do homem (pé, braço, polegar, . . .). Conta-se até que, em 1324, o Rei Eduardo III da Inglaterra decretou que a unidade de comprimento a ser adotada em todo o império seria exatamente expressa pela medida de seu "real pé".

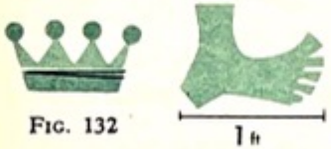


FIG. 132

Assim, um calculista mediu com tôda a solenidade o pé de sua majestade (fig. 132), e a medida encontrada foi tornada oficial: **pé** (foot, em inglês), símbolo: **ft.**

A **jarda** (yard, em inglês), símbolo: **yd,** corresponde ao comprimento da distância entre o *nariz* e o *polegar* da mão direita quando uma pessoa "estica" o braço direito (fig. 133).

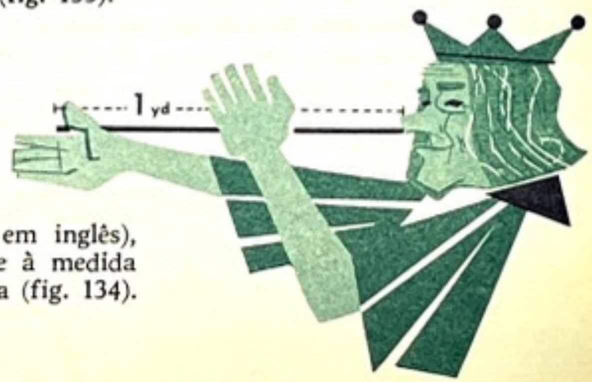


FIG. 133

A **polegada** (inch, em inglês), símbolo: **in,** corresponde à medida do polegar da mão direita (fig. 134).

FIG. 134

No quadro abaixo, constam os valôres aproximados dessas medidas em metros, e outras relações julgadas importantes pelo uso que têm:

NOMES		SÍMBOLOS	VALÔRES EM JARDAS	VALÔRES APROXIMADOS EM METROS
inglês	*português*			
1 yard	uma jarda	yd	1 yd	0,914m
1 foot	um pé	ft	1/3 yd	0,305m
1 inch	uma polegada	in	1/36 yd	0,025m
1 mile	uma milha	mi	1.760 yd	1.609m

Convém lembrar, também, as conversões do S.M.D. ao S.I.M. Assim, temos:

$\boxed{1\text{m} = 1{,}094 \text{ yd}}$ $\boxed{1\text{m} = 3{,}28 \text{ ft}}$ $\boxed{1\text{m} = 39{,}37 \text{ in}}$

$\boxed{1\text{km} = 0{,}62 \text{ mi}}$

Logo:

uma jarda vale — 3 pés, e 1 pé vale 12 polegadas
— 36 polegadas

(Observe como as relações não são decimais)

NOTA: Nas conversões oficiais (norte-americanas) uma polegada é tomada "exatamente" como: 2,54cm, isto é: 1 in = 2,54cm.

10. *Unidades de superfície e de volume*

Derivam das unidades de comprimento.

Assim, por exemplo, tem-se:

uma jarda quadrada (square yard, em inglês), símbolo: *sq. yd.*: é a área da superfície de um quadrado de *uma jarda de lado;*

um pé cúbico (cubic foot, em inglês), símbolo: *cu. ft.*: é o volume de um cubo de *um pé de aresta.*

11. *Unidades de capacidade* (norte-americanas)

Constam do quadro:

NOMES		SÍMBOLOS	VALÔRES APROXIMADOS EM LITROS
inglês	*português*		
1 liquid quart	uma quarta	liq. qt.	0,046*l*
1 gallon	um galão	gal.	3,785*l*

12. *Unidades de massa*

NOMES		SÍMBOLOS	VALÔRES APROXIMADOS EM GRAMAS (ou kg)
inglês	*português*		
1 ounce	uma onça	oz.	28,350g
1 pound	uma libra	lb.	453,592g
1 ton.	uma tonelada	tn.	1.016kg

13. *Moeda inglêsa* (só na Inglaterra e Commonwealth)

Unidade: **Libra esterlina;** símbolo: £

A libra esterlina tem 20 *shillings* (sh) e o shilling tem 12 *pence* (d) (*); pence é o plural de *penny*. Logo: a libra esterlina tem 240 *pence*.

A representação, por exemplo, de 8 libras, 12 shillings e 9 pence é feita do seguinte modo:

£ 8 – 12 – 9

Observações:

1.ª) A conversão da libra em *cruzeiros novos* (moeda nacional) depende do "câmbio do dia", que é fornecido pelo Banco do Brasil.

(*) *Pence* também é chamado *dinheiro*, razão por que é abreviado por *d*.

2.ª) As unidades monetárias (moedas) dos demais países, como por exemplo: pêso (Argentina), escudo (Portugal), dólar (E.U.A.), franco (França), lira (Itália), marco (Alemanha), rublo (U.R.S.S.), iene (Japão), são tôdas subdivididas *decimalmente*.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 98

1. Escrever *V* na frente das sentenças consideradas *verdadeiras:*

   a) uma *jarda* é menor que um *metro;*
   b) o *centímetro* é maior que a *polegada;*
   c) uma *milha* é igual a um *quilômetro;*
   d) um *pé* equivale mais ou menos a 30 *centímetros,*
   e) um *galão* norte-americano não chega a 4 *litros.*

2. Completar as seguintes sentenças, de modo a torná-las *verdadeiras:*

   a) um avião que está a 1.500 pés de altitude está a .... metros de altitude;
   b) a altura daquela "miss" é de 5,8 pés, isto é, cêrca de .... cm;
   c) cano de uma polegada de diâmetro, significa que êsse diâmetro mede .... cm; de 3/4 de polegada significa .... cm.
   d) o "bíceps" de 15 polegadas daquele lutador equivale a .... cm;
   e) a luta foi com luvas de 11 onças, isto é, ... g;
   f) o nosso automóvel percorreu 230 milhas, ou seja, ... km;
   g) comprei 2 galões de óleo, isto é, ... *l*;
   h) Para bater o "penalty" o juiz contou 12 jardas, ou seja, ... m;
   i) 1.º) 1 yd = ...in; 2.º) 1 yd = ...ft; 3.º) 6mi ≐ ...yd = ...m;
   j) 1.º) 100m = ...yd; 2.º) 100m = ...ft; 3.º) 100km = ... mi.

Conversões com os Números Não-Decimais

14. *Primeiro caso*

Converter um número não-decimal em um número natural de unidades inferiores.

Exemplos:

1) Converter 3d 8h 13min em minutos é o mesmo que:
   quantos minutos há em 3d 8h 13min?

Como um dia vale 24h, temos que 3 dias valerão: $3 \times 24h = 72h$ .... que, somadas com 8h, dão 80h

Valendo 1h, 60 minutos, temos que 80h valerão: $80 \times 60min = 4.800min$ que, com mais 13min, dão um total de

4.813 minutos

(a técnica de cálculo pode ser a que figura ao lado)

$$\begin{array}{r} 24h \\ \times 3 \\ \hline 72h \\ +8h \\ \hline 80h \\ \times 60 \\ \hline 4.800min \\ +\ 13min \\ \hline 4.813min \end{array}$$

2) Reduzir £3–16–7 a pence (dinheiro)

Uma libra vale 20sh, logo 3 libras valerão: $3 \times 20sh = 60sh$ que, somadas com 16sh, resultam 76sh.

Como 1sh vale 12 pence, segue-se que 76sh valerão: $76 \times 12d = 912d$ que, com mais 7d, dão o total de 919 pence

$$\begin{array}{r} 20sh \\ \times 3 \\ \hline 60sh \\ +16sh \\ \hline 76sh \\ \times 12 \\ \hline 912d \\ +\ 7d \\ \hline 919d \end{array}$$

15. *Segundo caso*

Converter um número natural de unidades inferiores em um número não-decimal

Exemplos:

1) Converter 4.813 minutos (de tempo) em número não-decimal.

É o mesmo que: quantos dias, horas e minutos há em 4.813 minutos?

Basta efetuar as operações *inversas* do problema anterior. Assim:

```
4.813min | 60
   13min   80h | 24
               8h    3d               3d 8h 13min
```

2) Converter 919 pence em número não-decimal.

Temos:

```
919d | 12
 79    76sh | 20
  7d   16sh   3£                      £3–16–7
```


Observação: No caso de se querer converter um número fracionário de unidades inferiores em um número não-decimal, procede-se de maneira análoga à empregada no seguinte exemplo:

Converter $\frac{3}{8}$ do ano em número não-decimal.

É o mesmo que: quantos meses e dias há na fração $\frac{3}{8}$ do ano?

Como cada *ano* tem 12 *meses*, vem: $\frac{3}{8}a = \frac{3}{8} \times 12me = \frac{9}{2}me = 4\frac{1}{2}me$ ou 4me e $\frac{1}{2}$me.

Valendo cada *mês* 30 *dias* (salvo quando o problema declarar 31d ou 29d), temos:

$$\frac{1}{2}me = \frac{1}{2} \times 30d = 15d \text{ e, portanto:}$$

$$\frac{3}{8}a = 4me\ 15d.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 99

1. Tornar verdadeiras as seguintes sentenças:
   1.º) Numa hora há .... minutos e .... segundos
   2.º) Num dia há .... horas, ... minutos e .... segundos
   3.º) Numa semana há .... minutos
   4.º) Em duas semanas e três dias há .... horas
   5.º) Um arco de 42° possui .... segundos (de ângulo!)
   6.º) 150 milésimos de um dia equivalem a .... minutos (de tempo)
   7.º) Em 8 yd 1 ft 7 in há .... polegadas (in)
   8.º) Em 5 pés há .... polegadas
   9.º) Em £30–12–5 há .... pence (d)
   10.º) Em 56 shillings há .... pence.

2. Converter em *número natural de unidades* (as menores dos números não-decimais indicados):
   1.º) 2d 12h 15min = ... minutos
   2.º) 8h 10min 36s = ... segundos
   3.º) 4a 8me 12d = ... dias
   4.º) 5yd 2ft 9in = ... polegadas
   5.º) 1ft 5in = ... polegadas
   6.º) 88° 12′ = ... ′
   7.º) 36° 8′ 23″ = ... ″
   8.º) 12′ 56″ = ... ″
   9.º) £14–40–8 = ... d
   10.º) £37–15 = ... sh

3. Converter em número não-decimal os seguintes números naturais de unidades:
   1.º) 192s (segundos-tempo)
   2.º) 8.000s (segundos-tempo)
   3.º) 18.540min (minutos-tempo)
   4.º) 192″ (segundos-ângulo)
   5.º) 8.565in (polegadas)
   6.º) 116.045″ (segundos-ângulo)
   7.º) 500in (polegadas)
   8.º) 1.692d (dias)
   9.º) 1.318d (dinheiro ou pence)
   10.º) 336h (horas)
   11.º) 7.349d (dinheiro ou pence)

4. Tornar verdadeiras as seguintes sentenças (usando frações):

1.ª) 1h = ... do dia
2.ª) 6h = ... do dia
3.ª) 1 minuto = ... da hora
4.ª) 15 minutos = ... da hora
5.ª) 1 segundo = ... do minuto
6.ª) 1 segundo = ... da hora
7.ª) 1 segundo = ... do dia
8.ª) 1′ = ... do grau
9.ª) 1″ = ... do grau
10.ª) 20″ = ... do grau
11.ª) 1 pé = ... da jarda
12.ª) 1 polegada = ... do pé
13.ª) 1 polegada = ... da jarda
14.ª) 1 shilling = ... da libra
15.ª) 1 pence = ... do shilling
16.ª) 1 pence = ... da libra

5. Converter os seguintes números fracionários de unidades em números não-decimais:

1.º) Quantos meses e dias contém a fração $\frac{5}{8}$ do ano?

2.º) Quantas horas e minutos representam a fração $\frac{7}{32}$ de um dia?

3.º) Quantos dias, horas e minutos representam $\frac{4}{5}$ de uma semana?

4.º) Quantos graus são $\frac{2}{5}$ de um ângulo reto?

5.º) Quantas jardas, pés e polegadas há em $\frac{15}{4}$ de uma jarda?

Operações com os Números Não-Decimais

16. Adição

Vamos aprender a técnica da operação através de problemas.

1. Hoje tenho 20 minutos de ginástica ritmada no colégio. Tendo começado às 8h 15min, a que horas terminarei?

Temos:

$$\begin{array}{rr} & 8h\ 15min \\ + & 20min \\ \hline & 8h\ 35min \end{array}$$

(sem qualquer dificuldade!)

2. A prova de Matemática vai ser só de 50 minutos! Se começarmos às 9h 20min, até que horas poderemos entregar a prova?

Temos:

$$\begin{array}{rr} & 9h\ 20min \\ + & 50min \\ \hline & ?\ \ 70min \end{array}$$

Agora há uma "aparente dificuldade", pois 70m já é mais de 1h. Caímos então no segundo caso da conversão:

$$\begin{array}{r|l} 70min & 60 \\ \cline{2-2} 10min & 1h \end{array}$$

e usamos a seguinte disposição prática:

$$\begin{array}{rr} & 1h \\ & 9h\ 20min \\ + & 50min \\ \hline & 10h\ 10min \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70min & 60 \\ \cline{2-2} 10min & 1h \end{array}$$

3. Três motores ficaram "amaciando" respectivamente:

3h 45min 36s; 2h 54min 48s e 4h 36min 55s

Qual o tempo total gasto pelos três motores?

Temos, procedendo de forma semelhante à do exercício anterior:

$$\begin{array}{rr} & 2h\ \ 2min\qquad \\ & 3h\ 45min\ 36s \\ + & 2h\ 54min\ 48s \\ & 4h\ 36min\ 55s \\ \hline & 11h\ 17min\ 19s \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 139s & 60 \\ \cline{2-2} 19s & 2min \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 137min & 60 \\ \cline{2-2} 17min & 2h \end{array} \qquad 11h$$

4. Calcular a soma das três seguintes importâncias (dadas em moeda inglêsa):

£32-15-8; £24-5-7 e £3-13-10. Temos:

$$\begin{array}{rr} & 1\quad\ 2\quad\ \ \\ £ & 32 - 15 - 8 \\ £ & 24 - 5 - 7 \\ £ & 3 - 13 - 10 \\ \hline £ & 60 - 15 - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25d & 12 \\ \cline{2-2} 1d & 2sh \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35sh & 20 \\ \cline{2-2} 15sh & 1£ \end{array}$$

17. Subtração

Sejam, por exemplo, os problemas:

1. Qual a diferença entre as horas registradas pelos relógios (fig. 135)?

Temos:

$$\begin{array}{rr} & 9h\ 50min \\ - & 7h\ 20min \\ \hline & 2h\ 30min \end{array}$$

(sem qualquer dificuldade!)

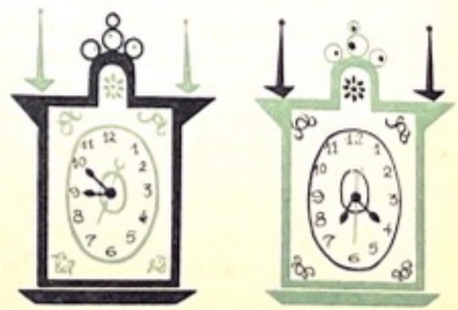


FIG. 135

2. E agora (fig. 136):

$$\begin{array}{rrr} & 9h & 15min \\ - & 7h & 40min \\ \hline & & ? \end{array}$$

FIG. 136

Não se podendo subtrair 40min de 15min, juntamos aos 15 minutos da segunda coluna 60 minutos = 1 hora da primeira coluna (que passará a ter 8h), tornando a operação possível: 75min − 40min = 35min. Disposição prática:

$$\begin{array}{rrr} & 8 & 75 \\ & \cancel{9}h & 15min \\ - & 7h & 40min \\ \hline & 1h & 35min \end{array}$$

3. Dois ângulos têm respectivamente as medidas: 48° 25″ e 35° 43′ 36″. Calcular a diferença entre êles.

   Temos:

$$\begin{array}{rrrr} & & 59' & \\ & 47^\circ & \cancel{60}' & 85'' \\ & 48^\circ & 0' & 25'' \\ - & 35^\circ & 43' & 36'' \\ \hline & 12^\circ & 16' & 49'' \end{array}$$

18. *Multiplicação e divisão*

Estudaremos os casos da multiplicação e da divisão de um número não-decimal por um *número natural*, que são os casos mais usuais na vida prática. Para efetuar essas operações, *basta multiplicar* ou *dividir* as unidades que compõem o número não-decimal pelo número natural, efetuando-se as *reduções*, sempre que se fizerem necessárias.

Exemplos:

1. Cada um dos cinco funcionários de um escritório registrou num mês: 25d 30h de trabalho efetivo. Exprimir o total de trabalho efetivo dos *cinco* funcionários, em dias e horas.

   Trata-se de multiplicar por 5 o número não-decimal 25d 30h.

Temos:

$$\begin{array}{rr} 6d & \\ 25d & 30h \\ & \times 5 \\ \hline 131d & 6h \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30h \\ \times\ 5 \\ \hline 150h \\ 6h \end{array} \begin{array}{|l} 24 \\ \hline 6d \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25d \ (*) \\ \times 5 \\ \hline 125d \\ +6d \\ \hline 131d \end{array}$$

2. Qual é a medida do ângulo cujo valor é o *triplo* da do ângulo: 18° 56′ 28″?

   Temos:

$$\begin{array}{rrr} 2^\circ & 1' & \\ 18^\circ & 56' & 28'' \\ & \times & 3 \\ \hline 56^\circ & 49' & 24'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28'' \\ \times 3 \\ \hline 84'' \\ 24'' \end{array} \begin{array}{|l} 60 \\ \hline 1' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56' \\ \times 3 \\ \hline 168' \\ +1' \\ \hline 169' \\ 49' \end{array} \begin{array}{|l} 60 \\ \hline 2^\circ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18^\circ \\ \times 3 \\ \hline 54^\circ \\ +2^\circ \\ \hline 56^\circ \end{array}$$

3. Um operário durante um mês trabalhou efetivamente 25d 22h 30min. Um segundo operário, por ter estado doente, trabalhou sòmente a *têrça parte* dêsse período. Qual o tempo de trabalho do segundo operário?

   Basta *dividir* por 3 o número não-decimal: 25d 20h 30min. Temos:

$$\begin{array}{r} 25d \\ -\ 24d \\ \hline 1d \\ \times 24 \\ \hline 24h \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 20h \\ \rightarrow +24h \\ \hline 44h \\ -\ 42h \\ \hline 2h \\ \times 60 \\ \hline 120min \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 30min \\ \rightarrow +120min \\ \hline 150min \\ -\ 150min \\ \hline 0min \end{array} \begin{array}{|l} 3 \\ \hline 8d\ 14h\ 50min \end{array}$$

(*) CUIDADO! *Primeiro* multiplicar 25d por 5 e *só depois* somar 6d ao total (125d) obtido, pois, se fôsse somado antes (6d em 25d, isto é: 31d) e depois multiplicado (31d × 6 = 186d) na realidade estaríamos *somando*: 5 × 6d = 30d a mais!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 100

1. Efetuar as seguintes *operações:*

1.ª) 13d 15h 42min + 8d 22h 30min

2.ª) 28° 52′ 55″ + 36° 24″ + 18′ 27″

3.ª) 8h 48min − (3h 12min 50s + 2h 30min)

4.ª) 90° − 36° 20′ 54″

5.ª) 5yd 2ft + 16yd 1ft 9in + 8yd 6in

6.ª) £54-12-4 − £18-19-10

7.ª)
```
 2h 30min
 1h 30min +
    20min
 5h 40min
 ---------
```

8.ª)
```
 5h 34min
 2h 55min −
 ---------
```

9.ª)
```
 3h 20min
 --------- +
 8h 10min
```

10.ª) 6 × (27d 21h 13min)

11.ª) (3a 6me 20d) : 5

12.ª) $(30° \; 13' \; 5'') \times \frac{2}{5}$

13.ª) (£171-1-2) : 13

14.ª) $\frac{1}{3} \times (180° - 53° \; 17')$

15.ª) (48′ : 3) : (12′ : 3)

2. Assinalar quais das seguintes respostas são *verdadeiras:*

1.ª) Trabalhando das 7h 30min às 11h 15min, trabalhei:
(a) 3h 15min (b) 3h 45min (c) 3h 30min

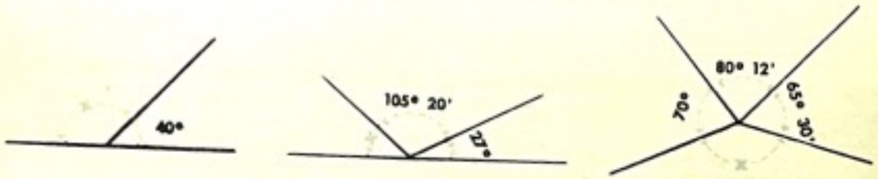
2.ª) "1 hora e $\frac{1}{4}$" corresponde a:
(a) 1h 20min (b) 1h 45min (c) 1h 15min

3.ª) (2h 45min × 5) × 0 é igual a:
(a) 0 (b) 13h 45min (c) 13h 15min

4.ª) Se um campo de futebol possui 100 jardas de comprimento, então êle possui:
(a) 150metros (b) 91metros (c) 100metros

5.ª) Dormi 500 minutos! Portanto, dormi:
(a) 8h 20min (b) 20h 8min (c) 5h 100min

3. Calcular a medida do ângulo X nas seguintes figuras:



4. Quantos graus existem: *numa* circunferência? em *meia* circunferência? num *têrço* de circunferência? num *décimo* de circunferência?

5. Calcular a medida do ângulo X nas seguintes figuras:

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — GRUPO 101

1. Em 3 horas uma máquina impressora produz 1.620 gravuras. Em 25 minutos, uma segunda produz 200 das mesmas gravuras. Qual das máquinas produz mais?

2. Conte as batidas do seu coração (basta apertar levemente o indicador da mão direita na artéria principal do pulso esquerdo) por minuto. Quanto bate seu coração por dia?

3. Um relógio adianta 3 segundos por hora. No fim de uma semana, quantos minutos êle adiantou?

4. Às 9 horas da manhã acertou-se um relógio que atrasa 6 minutos cada 24 horas. Que horas serão, na verdade, quando o relógio estiver marcando 5 horas da tarde?

5. Um trem parte de São Paulo às 7h 50min e chega a Campinas às 9h 40min:
(*a*) qual é a duração da viagem?
(*b*) quando Raimundo fêz essa viagem, o trem só chegou às 10h 5min; qual foi o atraso do trem?

6. Um "bico de gás" consome 18 litros de gás por hora. Se ficar aceso 2h 40min, quanto consumirá?

7. Uma pessoa nasceu em 12 de outubro de 1955. Qual será sua idade (anos, meses e dias) em 15 de setembro de 1970?

8. Numa certa fábrica um operário trabalhou 3a 10me 15d e um outro 2a 11me 28d. Quanto tempo trabalhou a mais o primeiro operário?

9. Um operário ganha por determinado serviço $\frac{2}{3}$ do que ganha um operário especializado. Tendo o operário especializado recebido £96-14-0, quanto ganhou o primeiro?

10. Paulo pulou 10ft 8in. Seu irmão pulou 12ft 6in. Quanto pulou Paulo a mais do que seu irmão?

ATENÇÃO(*)

— Não diga "a grama", mas "o grama".

— Não escreva 3m,25 mas 3,25m.

— Não coloque o símbolo no alto, como se fôsse expoente, mas na mesma linha do número: 3km. Esta regra só admite exceção no caso de unidades de temperatura e tempo e das unidades sexagesimais de ângulo.

— Não separe por ponto, mas por vírgula, a parte inteira da decimal: 3,35m e não 3.35m.

— Não coloque ponto após o símbolo das unidades: escreva 3g, 4m, e não 3g. e 4m.

— Não pluralize os símbolos de medidas, isto é, não escreva 3gs, 4ts, mas 3g, 4t.

— Não escreva cc, mas cm³, por centímetro cúbico.

— Não fale mais em "miriâmetro" para designar 10 quilômetros.

— Os minutos e os segundos relativos a tempo devem ser representados por *m*. (ou *min*) e *s*, e não por ′ e ″. Assim, escreva 5h 10m 7s ou 5h 10min 7s e não 5h 10′ 7″.

— Não fale em "milhas", "polegadas", "libras", "pés", "graus Fahrenheit". Quando tiver de traduzir escritos em que apareçam essas medidas, converta-os ao sistema métrico decimal.

A inobservância da legislação metrológica é mais do que infração. É prova de ignorância e falta de brasilidade.

PREFIXOS DOS MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS DECIMAIS DAS UNIDADES INTERNACIONAIS DE MEDIDA(**)

FATOR PELO QUAL A UNIDADE É MULTIPLICADA	PREFIXO A ANTEPOR AO NOME DA UNIDADE	SÍMBOLO A ANTEPOR AO NOME DA UNIDADE
1.000.000.000.000 = 10^{12}	tera	*T*
1.000.000.000 = 10^{9}	giga	*G*
1.000.000 = 10^{6}	mega	*M*
1.000 = 10^{3}	quilo	*k*
100 = 10^{2}	hecto	*h*
10 = 10^{1}	deca	*da*
0,1 = 10^{-1}	deci	*d*
0,01 = 10^{-2}	centi	*c*
0,001 = 10^{-3}	mili	*m*
0,000.001 = 10^{-6}	micro	*μ*
0,000.000.001 = 10^{-9}	nano	*n*
0,000.000.000.001 = 10^{-12}	pico	*p*
0,000.000.000.000.001 = 10^{-15}	femto	*f*
0,000.000.000.000.000.001 = 10^{-18}	atto	*a*

Exs.: 5 Gm (lê-se: cinco *gigâmetros*) = 5 × 1.000.000.000m = 5.000.000.000m
26 pl (lê-se: vinte e seis *picolitros*) = 26 × 0,000.000.000.001*l* = 0,000.000.000.026*l*.

(*) Transcrito da *Fôlha de São Paulo*, de 17/6/1962 — Trabalho do Dr. J. Reis — por ocasião das comemorações do *centenário* do uso do Sistema Métrico Decimal no Brasil (26/6/1962).

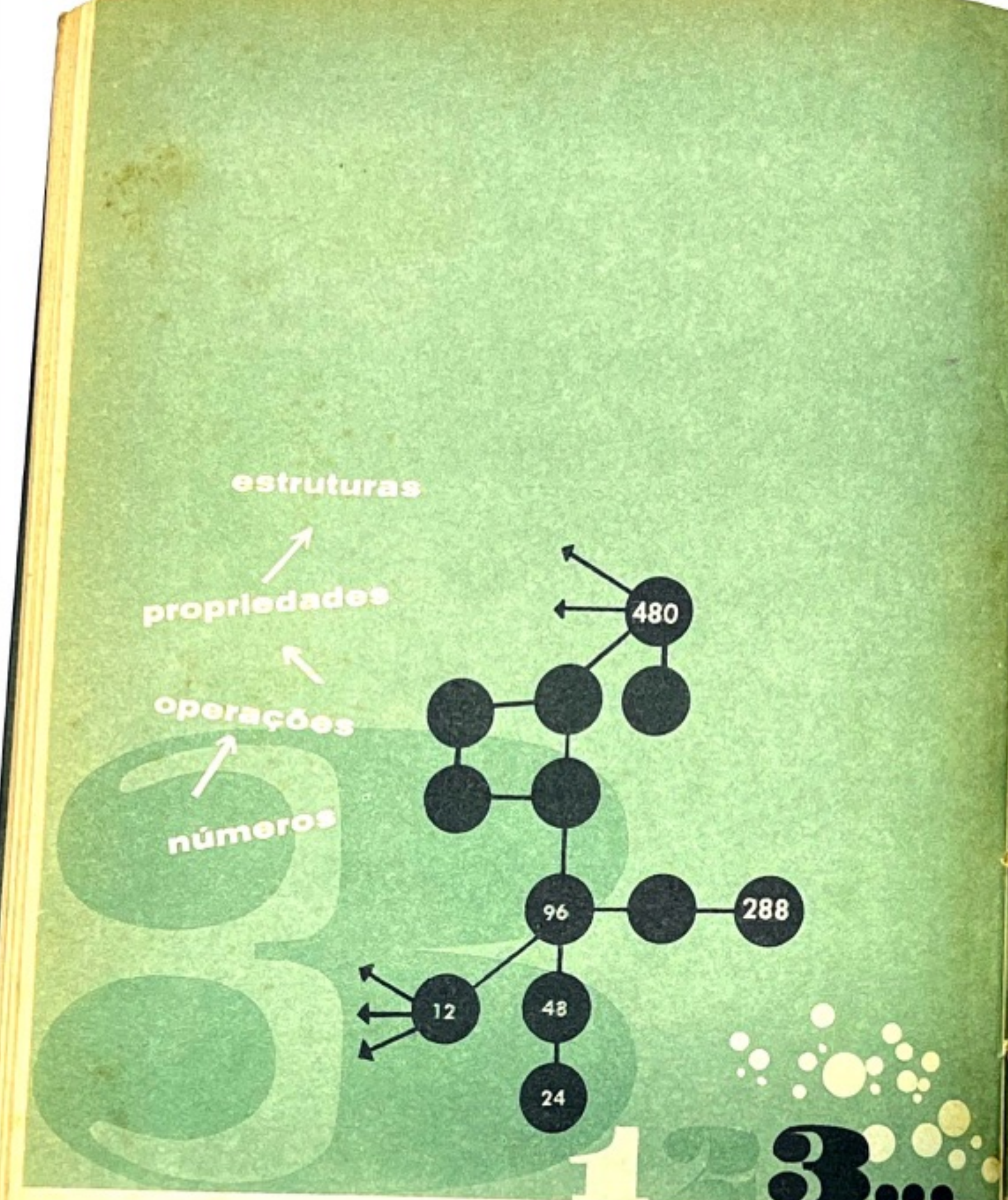
(**) Reunião da Comissão Internacional de Pesos e Medidas, Paris, outubro de 1962.

Painel de abertura da Exposição organizada pelo *Instituto de Educação de Araçatuba* (SP), para o 5.º CONGRESSO BRASILEIRO DO ENSINO DA MATEMÁTICA (S. José dos Campos, São Paulo, 1966.)

Obra executada nas oficinas da

SÃO PAULO EDITORA S. A.

São Paulo — Brasil


estruturas
propriedades
operações
números
480
96
288
12
48
24
1 2 3...

COMPANHIA EDITORA NACIONAL