UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LIVRO DINÂMICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

THAIS DE CARVALHO

Florianópolis – SC
2022

THAIS DE CARVALHO

LIVRO DINÂMICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

Projeto apresentado à disciplina TCC II como requisito parcial de avaliação, sob a orientação do Professor Jorge Cássio Costa Nóbriga.

Florianópolis – SC
2022

AGRADECIMENTOS

Destino esse espaço para agradecer todos que participaram, direta ou indiretamente, dessa etapa na minha vida. Carrego comigo o sentimento de gratidão, foi mágico, graças a UFSC pude vivenciar momentos incríveis que levarei comigo para sempre.

Inicio agradecendo a Deus e Nossa Senhora de Aparecida, quem sempre olhou por mim e pela minha família. Em seguida, as pessoas que são a minha base, minha mãe, Benta, quem sempre me apoiou em todos os momentos dessa minha trajetória, me motivando todos os dias. Meu pai, Itamar, meus irmãos, Leonardo e Marcelo, meu afilhado, Lorenzo e minha cunhada Janine. Eu amo vocês.

Gostaria de agradecer o meu namorado, Matheus Macedo de Roma, meu parceiro, que me escuta, me ajuda nos momentos que eu mais preciso, me apoia em todas as minhas decisões e me incentiva diariamente a ser a melhor versão de mim. Eu te amo.

Preciso agradecer também alguém que durante toda minha graduação foi meu alicerce, quem sempre segurou minha mão e nunca ousou soltar, Mayara Garcia Veríssimo, a grande amizade que a universidade me proporcionou. Amiga, você é muito especial.

Não posso esquecer também de quem sempre fez com que a universidade se tornasse algo mais leve e descontraído, pessoas que compartilharam comigo diversos momentos, Beli, Deborah, Jéssika, Karen, Sabrina e Murilo, muito obrigada por toda ajuda, vocês se tornaram especiais.

Ao meu orientador que transmitiu seus conhecimentos, me ajudou e me apoiou nas minhas ideias. Eu te admiro muito. Agradeço ao anjo chamado Silvia, nossos caminhos se cruzaram em 2018 e desde então em momentos difíceis você é a primeira pessoa para quem peço ajuda, nunca medindo esforços para me auxiliar, meu muito obrigada. Aproveito para agradecer os meus demais professores, todos, aprendi algo com cada um de vocês.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma pesquisa que teve o objetivo de analisar indícios de contribuições de um Livro Dinâmico de Matemática para o processo de ensino e aprendizagem das Funções Quadráticas. Para isso foi desenvolvido um livro dinâmico por meio da plataforma GeoGebra, integrando textos, imagens, vídeos, *applets*, *feedbacks* automáticos e questões de múltipla escolha. Para fundamentar a construção do livro dinâmico, buscamos suporte na Teoria de Representações Semióticas de Duval, nas habilidades a serem desenvolvidas segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC e em livros didáticos. Para o desenvolvimento do Livro Dinâmico fizemos um planejamento por meio de uma tabela contendo as habilidades, competências específicas e gerais, conforme a BNCC, e objetivos de aprendizagem. Fizemos pesquisas para identificar *applets* e materiais que pudessem ser úteis no nosso livro. Em seguida, fizemos adaptações e construção de novos *applets* e atividades para o livro. A análise das atividades do livro foi feita a partir dos pressupostos da teoria dos Registros de Representações Semiótica de Duval e das orientações da BNCC. Tal análise mostrou que o Livro Dinâmico de ensino de funções quadráticas possui contribuições tanto em relação às integrações de diferentes representações semióticas dos objetos matemáticos, quanto às orientações indicadas na BNCC.

Palavras-chaves: Funções Quadráticas. Livro Dinâmico. Representações Semióticas.

ABSTRACT

In this work, we present a research that aims to analyze evidence of the contributions of a Dynamic Mathematics Book to the teaching and learning process of Quadratic Functions. For this, a dynamic book was developed through the GeoGebra platform, integrating texts, images, videos, applets, automatic feedback, and multiple choice questions. To support the construction of the dynamic book, we sought support in Duval's Theory of Semiotic Representations, in developing skills according to the National Curricular Common Base – NCCB and in textbooks. For the development of the Dynamic Book, we made a plan through a table containing the skills, specific and general competencies, according to the NCCB, and learning objectives. We wanted to identify applets and materials that might be useful in our book. Then we made adaptations and built new applets and activities for the book. The analysis of the book's activities was based on the assumptions of Duval's Registers of Semiotic Representations theory and the NCCB guidelines. Such analysis showed that the Dynamic Book for teaching quadratic functions has contributions both to the integration of different semiotic representations of mathematical objects, as well as the guidelines indicated in the NCCB.

Keywords: Quadratic Functions. Dynamic Book. Semiotic Representations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A construção da história da matemática vem sendo escrita há milhares de anos e apesar de todos os esforços muito há de ser investigado e construído ainda. Analisando a trajetória dos avanços feitos sobre o tema "Funções Quadráticas" percebe-se que diversos povos se adentraram neste universo atrás de respostas. Evidências históricas mostram que povos do Egito, antiga Babilônia, Grécia, Índia e Europa Medieval são alguns destes grupos que trouxeram resultados importantíssimos para este tema matemático, onde um deles é a famosa Fórmula Geral, desenvolvida pelo francês François Viéte (1530 – 1603) em meados do século XIV. Segundo Refatti e Bisognin (2005, p. 90),

> Pode-se dizer que foi a partir desse grande matemático que surgiu a Álgebra Simbólica. Viéte introduzia uma vogal para representar uma quantidade desconhecida e uma consoante para uma grandeza ou número supostamente conhecido e foi utilizando esse fato para as funções quadráticas, que elaborou a fórmula geral até hoje conhecida como $ax^2 + bx + c = 0$.

O estudo das funções tem papel importante no ensino-aprendizagem dos estudantes do Ensino Médio. Trata-se de um conteúdo em que fica evidente a associação entre a geometria e a álgebra. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. (BRASIL, 1999, p.44)

Já para Reis (2017) o estudo das funções possui diversas aplicações no dia a dia. Ele diz que se pode ver aplicações nos faróis dos automóveis, onde a lâmpada está localizada no foco de um espelho parabólico. Por outro lado, é possível encontrar em centrais solares térmicas que utilizam discos parabólicos para captação da energia solar. Ou, também, existem alguns palcos construídos dentro de conchas acústicas parabólicas. Além disso, tal conteúdo é bastante usado no estudo da Cinemática, em Física.

Apesar da importância desse conteúdo e dos esforços para ensiná-lo, existem muitas dificuldades. De acordo com Silva e Teles (2020, p. 608),

> Levando em consideração as dificuldades pertinentes à aprendizagem desse conceito, se destaca grande complexidade ao que diz respeito à construção do gráfico da função, mas, principalmente, o reconhecimento do registro algébrico concernente ao registro gráfico apresentado. Isso pode ser desencadeado pelo ensino baseado na utilização do registro tabular, a fim de encontrar pares ordenados a serem ligados no plano cartesiano para formar o gráfico da função.

Podemos perceber nesses exemplos de dificuldades que elas estão muito relacionadas com as representações. Nesse sentido, a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval pode fornecer subsídios importantes para a compreensão das dificuldades e elaboração de estratégias para minimizá-las.

De acordo com Duval (2012, p. 268),

> [...] objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. De fato, toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações "inertes" que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática.

Fazer a distinção entre objeto e sua representação não é algo simples, porque desde os anos iniciais as crianças aprendem que a representação é o objeto. Por exemplo, ao se ensinar o conceito triângulo para a criança, é apresentado um desenho do triângulo, sem muita preocupação em fazer as relações entre as diferentes representações desse objeto.

Duval (2009, p. 101) diz que é importante "[...] possibilitar a exploração de todas as variações possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes da representação em outro registro". Isso é ainda mais imprescindível quando se está estudando as funções. Como fazer as variações concomitantes das representações gráficas e algébricas das funções em ambientes estáticos como o quadro e pincel? Quais instrumentos poderiam ajudar numa exploração que permita prever ou observar as variações concomitantes de representação em outro registro? Acreditamos que o uso do computador pode contribuir muito para o processo de ensino e aprendizagem do estudo das funções.

Nascimento (2012, p. 126) diz que "A utilização das novas tecnologias, principalmente as de comunicação e de interação (TCI), vem causando a reestruturação do método tradicional de ensino, [...]". Neste meio, se encontram os *softwares* educativos que apresentam diversas possibilidades de simulações virtuais, feitas em conjunto entre professores e/ou estudantes, com grande proximidade da realidade. Um exemplo bastante conhecido é o GeoGebra. Trata-se de um *software* matemático dinâmico, gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, unindo diversas áreas matemáticas, como geometria, álgebra, estatística, dentre outros. Diversas pesquisas já vêm mostrando as contribuições desse *software*. Todavia, ele sozinho não ensina nada. Para que se possa aprender com tal recurso é preciso criar situações de uso. Uma boa forma de se criar tais situações é por meio de Livros Dinâmicos de Matemática. Ele pode ser feito a partir da ferramenta Livro da plataforma GeoGebra. Essa ferramenta permite criar atividades que podem conter textos, figuras, questões abertas e fechadas, *applets*, vídeos, arquivos pdf e páginas da web. Nóbriga e Siple (2020, p. 13) afirmam que "uma característica fundamental desse tipo de livro está no fato de se integrarem dinamicamente, numa mesma página, as diferentes representações dos objetos da Matemática.".

Por acreditarmos que um livro dinâmico de Matemática pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da função quadrática, nos propomos a fazer uma pesquisa que busque responder à seguinte questão:

Quais as possíveis contribuições de um Livro Dinâmico de Matemática para o ensino das Funções Quadráticas?

O objetivo geral da pesquisa é:

- Analisar indícios de contribuições de um Livro Dinâmico de Matemática para o processo de ensino e aprendizagem das Funções Quadráticas, sobretudo no que diz respeito à percepção, por parte dos estudantes, das relações entre as diferentes representações.

Para isso, devemos considerar os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um Livro Dinâmico de matemática sobre Funções Quadráticas;
- Identificar indícios de contribuições de um Livro Dinâmico de Matemática de Funções Quadráticas, sobretudo no que diz respeito à integração entre as representações e o atendimento às orientações da BNCC;

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 O Estudo das Funções Quadráticas

Os estudos de funções quadráticas iniciam-se, efetivamente, no primeiro ano do Ensino Médio, porém, é no Ensino Fundamental onde ocorre o primeiro contato com a equação do segundo grau. No que diz respeito a esse conteúdo no Ensino Fundamental a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017), traz as seguintes habilidades:

- (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
- (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

No que diz respeito ao Ensino Médio, a BNCC (Brasil, 2018) traz as seguintes habilidades:

- (EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais;
- (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica;
- (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$;
- (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.

Podemos perceber que a BNCC usa expressões que são chaves na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval, dentre os quais destacamos a "Elaboração de registros", "Representar" e "Conversão". De acordo com Brasil (2017, p.530),

> Para tanto, esta Base assume que para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos deve-se incluir, quando possível, pelo menos dois registros de representação. Assim, os estudantes precisam estar preparados para escolher as representações mais convenientes para cada situação, para mobilizar, de modo simultâneo, ao menos dois registros de representação e para, a todo o momento, trocar de registro de representação.

Brasil (2017) ainda afirma que, para que ocorra o desenvolvimento do pensamento algébrico é necessário que o estudante crie, interprete e entenda o processo de transição entre as representações gráficas e algébricas. Ambas as afirmações estão em consonância com a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval que afirma que para que ocorra a aprendizagem matemática, as representações semióticas são imprescritíveis para a comunicação e transformação dos objetos matemáticos. Por outro lado, a BNCC nos afirma que,

> Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de fluxogramas e algoritmos. (BRASIL, 2017, p.518)

Pelo que foi abordado nessa seção, a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval é bastante importante para que as habilidades matemáticas possam ser desenvolvidas. Além disso, pode-se perceber que o uso de tecnologias pode contribuir para que o estudante possa transitar entre a linguagem simbólica, a representação e argumentação dos objetos matemáticos, gerando reflexão e formalização dos conceitos. Dessa forma, nos tópicos seguintes argumentamos sobre conceitos-chave da teoria de Duval e como ela pode ser integrada com o uso do GeoGebra.

2.2 A Teoria de Registros de Representações Semióticas de Duval

Desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, a Teoria de Registros de Representações Semióticas (DUVAL, 2011) busca compreender e investigar o uso da linguagem e dos registros de representações para o ensino de matemática.

Para Duval um objeto matemático não é acessível pela percepção ou à experiência intuitiva imediata. Desse modo, as diferentes representações semióticas de um objeto matemático são imprescritíveis para a aprendizagem da matemática. Mas, o que seriam as Representações Semióticas? Antes mesmo de definirmos, é importante ressaltar que para Santaella (2002, p.2) a "semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido”. Voltando aos Registros de Representação Semiótica, Duval (2009, pg.32) afirma que

> [...] a especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro. Essa operação tem sido primeiramente descrita como uma “mudança de forma”.

Os Registros de Representações possuem duas propriedades importantes: retratar o objeto e dar sentido ao mesmo. Podemos exemplificar, mostrando diferentes representações simbólicas do objeto matemático “dois”: 2, dois, $\sqrt{4}$, 1+1 e $\frac{4}{2}$. Trata-se de diferentes formas de representar o número dois, entretanto, vale ressaltar que a representação não é o objeto matemático em si. Duval (2011) considera que um registro de representação semiótica é algo primordial no desenvolvimento cognitivo, auxiliando no aprimoramento das capacidades de identificar, analisar e visualizar.

De acordo com Duval (2011) existem diferentes registros de representação, que podemos dividir em discursivos e não discursivos. Para facilitar o entendimento, consideremos a seguinte tabela:

Tabela 1 – Classificação dos registros de representação dos sistemas semióticos dos objetos matemáticos

SISTEMAS SEMIÓTICOS DOS OBJETOS MATEMÁTICOS			
	CUNHO DISCURSIVO		**CUNHO NÃO DISCURSIVO**
Registros de Representações	**Registro de representação linguística (Linguagem retórica, língua natural, língua materna, registro discursivo)**	**Registro de representação simbólica (Linguagem formal, representação aritmética e representação algébrica)**	**Registro de representação visual (Representação Figural, Representação Gráfica, Representação icônica (2d))**
Signos (ou unidades de sentido)	Frases ou expressões que combinam ao menos duas palavras[1]	Expressões algébricas, expressões aritméticas, equações, sistemas de equações, matrizes, entre outros.	Figuras, gráficos, diagramas, tabelas, esquemas, entre outros
Caracteres para codificar	Letras, siglas, alguns símbolos (. , ? !)	Letras, letras gregas, algarismos, símbolos de operações (+,-,/,x,^), símbolos de "demarcadores" ({},[],(),); símbolos de comparações <,>,=, ≤, ≥ , ≠; símbolos lógicos ← , →, ↔,	Ponto, linha (reta ou curva) e plano

Fonte: Nóbriga (2015, p. 37)

Duval (2008) afirma que para um sistema semiótico ser considerado um registro de representações é necessário que permita três atividades cognitivas fundamentais: formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

A *formação* consiste na representação de um registro dado, seja em forma de um enunciado, no desenho de uma figura geométrica, expressão de uma fórmula, etc. As outras duas são dadas pelas transformações que ocorrem no registro. Assim, o *tratamento* "é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação" (Duval, 2009, p.39). Já a *conversão* é dada pela transformação do registro inicial em outro registro, porém, conservando o objeto estudado. Ou seja, é a transformação que ocorre de maneira externa ao registro inicial. Apresentaremos a seguir um exemplo para facilitar a compreensão.

[1] As unidades de sentido correspondentes à designação dos objetos não são as palavras, mas as expressões que combinam ao menos duas palavras (DUVAL, 2011, p.78)

Tabela 2 – Diferença das transformações de tratamento e conversão no registro da função quadrática.

Exemplos de Transformações envolvendo Equações da Circunferência		
Transformações	**Tratamento**	$x^2 + y^2 - 6x - 16y + 24 = 0$ para $(x-3)^2 + (y-8)^2 = 49$
	Conversão	A equação da circunferência de raio 7 e centro (3,8) para $(x-3)^2 + (y-8)^2 = 49$

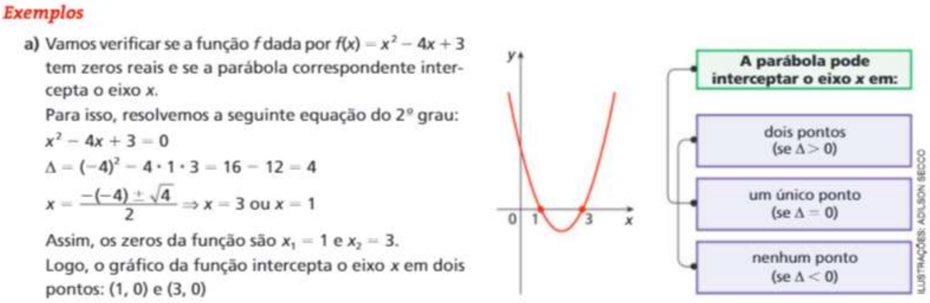
Fonte: A autora

Na tabela 2, percebemos um tratamento feito para transformar a equação geral da circunferência numa equação reduzida. Basicamente, foram feitas fatorações. Percebe-se também uma conversão para transformar o registro linguístico "A equação da circunferência de raio 7 e centro (3,8)" em um registro simbólico $(x-3)^2 + (y-8)^2 = 49$.

A conversão é fundamental quando se está trabalhando com dois registros de forma simultânea. Por outro lado, percebe-se as dificuldades encontradas ao se trabalhar com essas transformações, já que o ensino tem buscado focar na aprendizagem através da formação e do tratamento, deixando de lado a conversão. Nóbriga (2015) afirma que

> Seria importante também o professor priorizar, nas atividades a serem ensinadas, a conversão de diferentes registros de um mesmo objeto de forma alternada e simultânea, para que fique clara a diferença entre o objeto e sua representação. Em atividades envolvendo o estudo das funções, é comum a conversão do registro algébrico para o gráfico, mas não o contrário. (p. 43).

Duval (2009) defende a importância e necessidade do uso dos registros de representações semióticas no ensino de matemática. E, como dito acima, a conversão é essencial para compreensão matemática. Todavia, não é um processo simples. É importante ressaltar que os livros didáticos de Matemática, de maneira geral, apresentam diversas representações semióticas e operam com o processo de formação, tratamento e conversão, entretanto, fica a cargo do leitor conectar as informações, gerando assim mais dificuldades de aprendizagem. Vejamos alguns exemplos de como as atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão sobre Função Quadrática aparecem nos livros didáticos.



Exemplos

a) Vamos verificar se a função f dada por $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo x.

Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

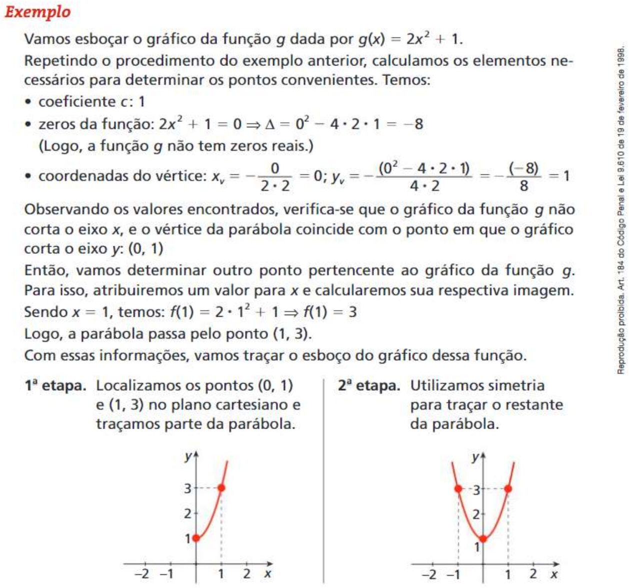
$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x = 3$ ou $x = 1$

Assim, os zeros da função são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo x em dois pontos: (1, 0) e (3, 0)

Figura 1 – Tratamento para determinar as raízes da função quadrática
Fonte: Leonardo (2016, p. 113)

Podemos destacar no exemplo apresentado na figura 1 que a Fórmula Geral não está apresentada de forma explícita no decorrer da resolução. Um estudante pouco habituado com o processo de resolução de equações quadráticas pode não compreender a passagem da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ para $\Delta = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4$. Isso pode ocorrer porque a substituição dos valores é feita de maneira imediata, sem apresentação dos coeficientes. Por outro lado, o modo em que a solução é apresentada nos permite perceber que o estudante é ensinado a seguir uma receita pronta. E, portanto, possivelmente não consegue prever o que de fato está acontecendo entre as diferentes representações. Caso o estudante não tenha domínio de tal procedimento, as dificuldades continuarão presentes e o exemplo não nos parece suficiente para evitar esse tipo de dúvida. Vejamos agora um exemplo de conversão.



Exemplo

Vamos esboçar o gráfico da função g dada por $g(x) = 2x^2 + 1$.

Repetindo o procedimento do exemplo anterior, calculamos os elementos necessários para determinar os pontos convenientes. Temos:

- coeficiente c: 1
- zeros da função: $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -8$
  (Logo, a função g não tem zeros reais.)
- coordenadas do vértice: $x_v = -\frac{0}{2 \cdot 2} = 0$; $y_v = -\frac{(0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1)}{4 \cdot 2} = -\frac{(-8)}{8} = 1$

Observando os valores encontrados, verifica-se que o gráfico da função g não corta o eixo x, e o vértice da parábola coincide com o ponto em que o gráfico corta o eixo y: (0, 1)

Então, vamos determinar outro ponto pertencente ao gráfico da função g. Para isso, atribuiremos um valor para x e calcularemos sua respectiva imagem.

Sendo $x = 1$, temos: $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow f(1) = 3$

Logo, a parábola passa pelo ponto (1, 3).

Com essas informações, vamos traçar o esboço do gráfico dessa função.

1ª etapa. Localizamos os pontos (0, 1) e (1, 3) no plano cartesiano e traçamos parte da parábola.

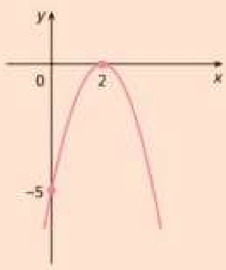
2ª etapa. Utilizamos simetria para traçar o restante da parábola.

Figura 2 – Conversão de um gráfico de função quadrática (I)
Fonte: Leornardo (2016, p. 111)

Na figura 2 temos um exemplo de conversão. É possível notar que inicialmente tem a função quadrática representada através de registro simbólico $g(x) = 2x^2 + 1$. Diante disso, a transformação para o registro gráfico se restringe à determinação de três pontos, que o livro destaca como "convenientes". Mas, como os estudantes poderão compreender que o gráfico é uma parábola apenas com esses três pontos "convenientes"? Neste momento, nota-se uma possível limitação do livro didático. É interessante ressaltar a importância do cálculo de mais pontos, para que o estudante consiga perceber que se trata de uma parábola. Destacamos também que o estudante precisa estar habituado com a leitura matemática, o que não parece ocorrer na maioria dos casos. Se faz necessário a transição entre os diferentes registros, que não se encontram na sequência de cada passo tomado, mas sim ao final da resolução. Consequentemente, dificuldades podem surgir. Vejamos agora outro exemplo de conversão.

Exercícios resolvidos

R5. Determinar a lei da função quadrática correspondente ao gráfico a seguir.



▸ ***Resolução***

Observe que a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, -5)$.

Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo

$f(x) = ax^2 + bx - 5$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Note também que a parábola intercepta o eixo x em um único ponto de coordenadas $(2, 0)$. Isso significa que 2 é o zero real duplo da função.

Substituindo as coordenadas do ponto $(2, 0)$ na lei da função, obtemos uma equação:

$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 5$

$0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 5$

$4a + 2b - 5 = 0$ (I)

Como a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto, temos $\Delta = 0$.

Assim:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot (-5) = 0$

$b^2 = -20a$

$a = -\dfrac{b^2}{20}$ (II)

Substituindo a equação (II) na equação (I), temos:

$$4 \cdot \left(-\frac{b^2}{20}\right) + 2b - 5 = 0 \Rightarrow -\frac{b^2}{5} + 2b - 5 = 0$$

Resolvendo essa equação:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot (-5) = 0$$

$$b = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} = 5$$

Pela equação (II), temos:

$$a = -\frac{5^2}{20} = -\frac{25}{20} = -\frac{5}{4}$$

Portanto, a lei da função é

$$f(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 5x - 5.$$

R6. Considerando a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 - 6x - k$, determinar para quais valores reais de k a função f:

a) tem dois zeros reais distintos.

b) tem um zero real duplo.

c) não tem zeros reais.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Figura 3 – Conversão de gráfico de função quadrática (II)
Fonte: Leonardo (2016, p. 114)

Na Figura 3, é possível perceber a conversão do registro de representação gráfico para o registro de representação simbólico da função quadrática dada. Nesse caso, o propósito é fazer a conversão inversa do que foi apresentado no exemplo da figura 2. Vejamos alguns pontos que podem gerar dificuldades:

- Por que pelo fato da parábola interceptar o eixo y em (0,-5), pode-se inferir que $f(x) = ax^2 + bx - 5$?
- Por que pelo fato da parábola interceptar o eixo x em um único ponto, pode-se inferir que 2 é zero real duplo e $\Delta = 0$?

Pelas questões levantadas anteriormente, pode-se perceber que muitas informações são omitidas no processo de conversão dos livros didáticos. Ao que parece, espera-se que os estudantes já conheçam essas informações. Mas o que pode garantir isso?

Através dos exemplos podemos inferir que os livros didáticos, apesar de utilizarem de diversos registros de representações semióticas, não mostram claramente como as transformações ocorrem. Sobretudo, nos casos de conversão. De fato, isso é muito difícil de fazer em ambientes estáticos, como os livros impressos. Mostrar como as transformações estão ocorrendo fica a cargo do professor. Mas e se o estudante estiver estudando sozinho?

O uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) podem ajudar a minimizar tais dificuldades. Nesse sentido, podemos destacar o *software* de matemática dinâmica GeoGebra que reúne geometria, estatística, cálculos, álgebra, gráficos, dentre outros. Segundo Molinari, Santos e Retslaff (2019 p. 5) o GeoGebra "possibilita que o aluno construa gráficos e objetos e explore ao mesmo tempo suas características geométricas e algébricas, bem como as particularidades e generalizações presentes nas construções". Ou seja, possibilita ao estudante o uso de diferentes registros de representações semióticas de objetos matemáticos. E, como afirma Duval (2005) citado por Oliveira (2019, p. 618) "Quando proporcionamos ao aluno diferentes registros de representações e ele por sua vez compreende as diversas representações como sendo um único conceito, podemos garantir que o processo de aprendizagem se concretizou com êxito.". A ferramenta em si não constitui novos registros, entretanto, possibilita novas maneiras de construir e visualizar os registros e suas transformações.

Inúmeras pesquisas já mostraram as contribuições do Geogebra para o ensino de Matemática. Segundo Basniak, Silva e Gaulovski (2017 p. 11) o *software* "pode trazer contribuições significativas ao processo de ensino e aprendizagem de matemática à medida que atividades de investigação e exploração sejam parte fundamental de sua aprendizagem". Todavia, acreditamos que o *software* sozinho pode não ensinar coisa alguma. É imprescindível o papel do professor. Segundo Faria (2004, p. 6) "Nessa perspectiva, espera-se do educador a competência para ser o mediador de todo processo de construção do conhecimento, com recursos tecnológicos, favorecendo a interação e a autonomia num clima de cooperação e colaboração, [...]". Além disso, é importante a criação de materiais didáticos de auxílio a utilização do Geogebra. Uma boa forma de organizar tais materiais é através dos Livros Dinâmicos de Matemática. O que será abordado na próxima seção.

2.3 Livros Dinâmicos de Matemática

Considerando a Teoria de Representações Semióticas de Duval, apresentada anteriormente, e as ferramentas disponibilizadas pela plataforma GeoGebra tais como a inserção de textos, vídeos, imagens, *applets*, questionários, arquivos pdf, dentre outros, Nóbriga e Siple (2020) propõem o conceito "Livro Dinâmico de Matemática". Diferente dos livros digitais clássicos, muitas vezes apresentados aos estudantes em formato de pdf, o Livro Dinâmico de Matemática possui características próprias dentre as quais destacamos a integração dinâmica das diferentes representações dos objetos matemáticos numa única página. Tais representações podem ocorrer de maneira simultânea e conectadas. Desse modo, contribui para a transição entre as representações de um mesmo objeto matemático e, consequentemente, pode ajudar a desenvolver a compreensão do conteúdo estudado.

Para melhor entendermos as características dos Livros Dinâmicos de Matemática, precisamos deixar claro o que entendemos por "Dinâmico". Segundo Bellemain (2001) citado por Nóbriga e Siple (2020, p. 91),

> [...] tal princípio permite ao usuário a sensação de agir direta e livremente sobre a representação do objeto e controlar imediatamente os efeitos dessa ação. Com o auxílio do mouse, pode-se arrastar ou manipular diferentes representações e visualizar os efeitos de suas ações. Isso contribui para a percepção das relações entre as representações, formulação de conjecturas, identificação de contraexemplos etc.

Para entendermos as características dos Livros Dinâmicos de Matemática, precisamos trazer algumas adaptações dos conceitos de formação, tratamento e conversão. Esses, quando produzidos em *softwares* de matemática dinâmica, podem apresentar características distintas das conhecidas em livros clássicos. Diante disso, Salazar e Almouloud (2015) trazem os conceitos de

Formação Dinâmica, Registro Figural Dinâmico e Tratamento Dinâmico associados a formação de Registros de Representação Figural. De acordo com esses autores, a Formação Dinâmica se dá através da escolha de uma ferramenta para a representação de um objeto geométrico. Nesta ação, o estudante mobiliza seus conhecimentos de geometria. Por outro lado, o Registro Figural Dinâmico se dá pela alteração da figura geométrica mantendo suas propriedades. Para que fique mais claro, consideremos o seguinte exemplo na Figura 4. Note que houve uma alteração no quadrilátero ABCD para o BCFE, mas pode-se perceber que o resultado da soma dos ângulos internos manteve-se constante. Ou seja, essa propriedade é preservada, apesar da transformação.

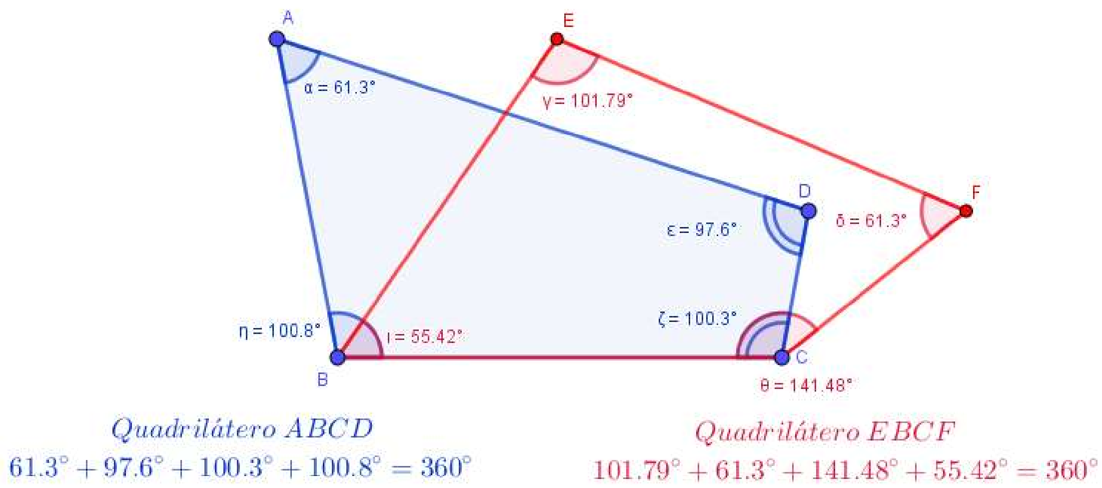


Figura 4 – Registro figural dinâmico
Fonte: A autora

E assim como os Registros Visuais, nos Ambientes de Geometria Dinâmica – AGD a formação dos Registros Linguísticos e Simbólicos também possuem características específicas. Produzidas a partir da ferramenta texto, o Registro Simbólico Dinâmico se dá pela alteração de parâmetros, alterando consequentemente a representação do objeto. Podemos tomar como exemplo o *applet* que está representado na figura 5, que envolve a equação do plano. Observando a Figura 5, ao alterarmos os controles deslizantes *a*, *b*, *c* e *d*, pode-se perceber a equação do plano sendo alterada.

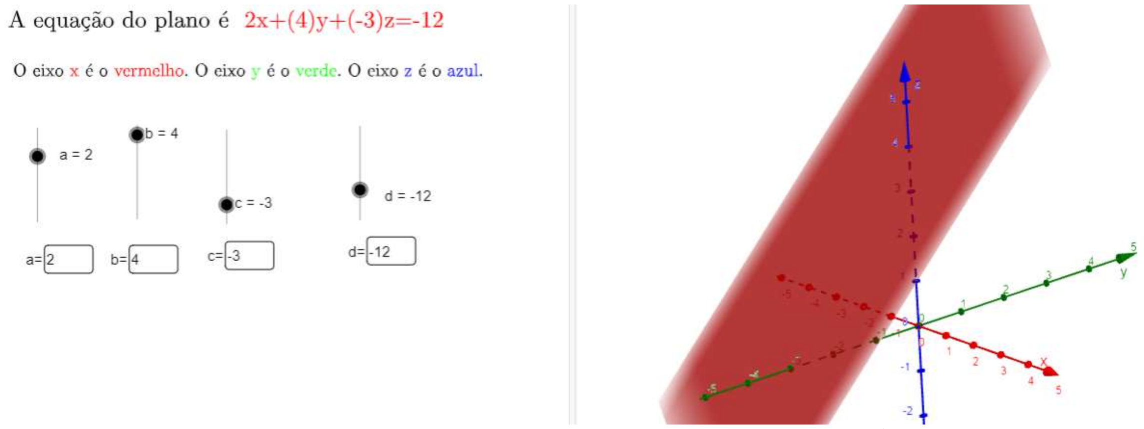


Figura 5 – Exemplo de registro simbólico dinâmico. [2]
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ajzr6gh2 acesso em 11 de agosto de 2021)

Para Nóbriga (2019, p. 7) o Registro Linguístico Dinâmico "[...] é um registro em que o texto é alterado dinamicamente quando ele está associado a alguma característica de outra representação e ela sofre alguma modificação que altera alguma propriedade.". Como mostra o exemplo a seguir, utilizando as definições de trapézios.

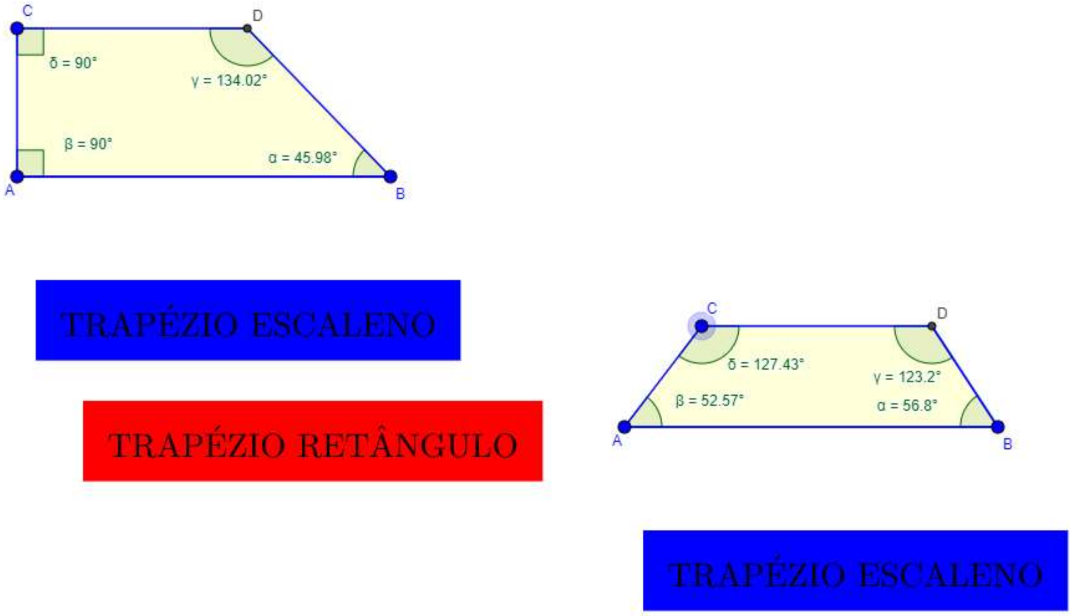


Figura 6 – Exemplo de registro linguístico.
(Disponível em https://www.geogebra.org/m/dXfysuQV acesso em 25 de julho de 2021)

[2] Para melhor compreensão das ideias apresentadas neste Trabalho de Conclusão de Curso, é de extrema importância que o leitor abra os links apresentados no decorrer do texto.

Para Duval (2011) o tratamento consiste na transformação no interior da representação do objeto matemático. Salazar & Almouloud (2015, p.930) apresentam o conceito de Tratamento Dinâmico restrito a Representação Figural da seguinte maneira:

> "[...] os tipos de tratamentos de uma figura que identificamos neste estudo quando se utiliza AGD são *mudar a posição da figura sem modificá-la* (para isso, se utiliza a função de manipulação direta), *mudar o comprimento dos lados da figura* (aqui, se utiliza a função de arrastamento e também se pode utilizar a ferramenta de homotetia) e *reconfigurar a figura* (neste caso, se utiliza a função de arrastamento e outras ferramentas especificas que dependem da figura construída)"

Nóbriga (2019, p.9) discorda desses autores quando os mesmos definem a mudança de posição da figura como Tratamento Dinâmico. Ele argumenta que a simples mudança de posição não gera relação de conhecimento comparada com a representação inicial. Desse modo, Nóbriga (2019, p. 9) propõe uma definição que abrange os Registros de Representação Linguístico, Figural e Simbólico. Para ele, o Tratamento Dinâmico são as transformações que ocorrem num mesmo registro e que sejam produzidas num ambiente que permita os princípios de manipulação direta, constituindo uma relação de conhecimento em comparação com as representações iniciais. Já a Conversão Dinâmica ocorre através de transformações entre diferentes tipos de registros semióticos, produzidos em ambientes de geometria dinâmica, possibilitando manipulações diretas e, assim como no tratamento, construindo uma relação de conhecimento em comparação com as representações iniciais.

Do ponto de vista matemático a compreensão é evidenciada através de demonstrações que validam um enunciado matemático. Nóbriga e Siple (2020, p.92) dizem que apesar de serem apresentadas aos estudantes através dos livros didáticos, a falta de orientações para a leitura dessas demonstrações pode acarretar grandes dificuldades durante o processo de aprendizagem. Assim, com o intuito de diminuir tais dificuldades para a aprendizagem, Nóbriga (2019) propõe as Demonstrações Matemáticas Dinâmicas. Vale destacar que não se trata de uma nova maneira de demonstrar resultados ou propriedades matemáticas, mas sim, de apresentar as demonstrações já validadas. Vejamos o seguinte exemplo da Demonstração Dinâmica da seguinte propriedade "As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que equidista dos 3 lados do triângulo.". Apresentando assim, as etapas consideradas pelo autor.

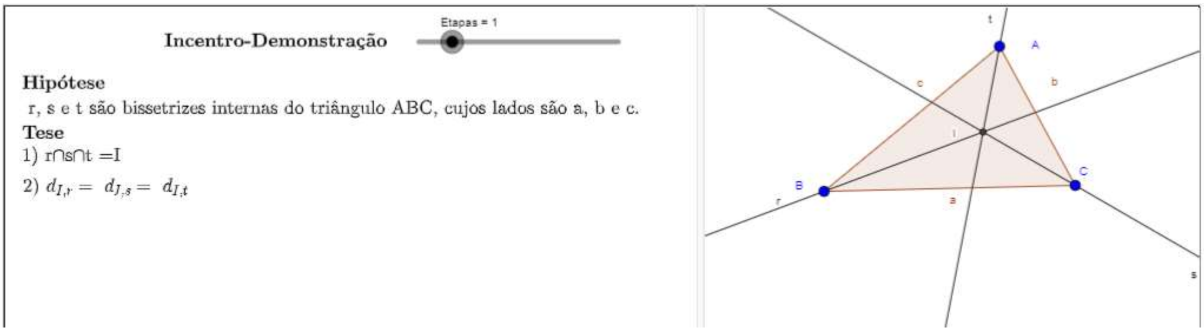


Figura 7 – Exemplo de demonstração dinâmica – Etapa 1
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xMv7bmYn acesso em 11 de agosto de 2021)

Temos que a primeira etapa é constituída pela apresentação da hipótese e da tese, na representação linguística. Por outro lado, é possível perceber que no *applet* encontrado a direita possuímos também a representação geométrica da hipótese.

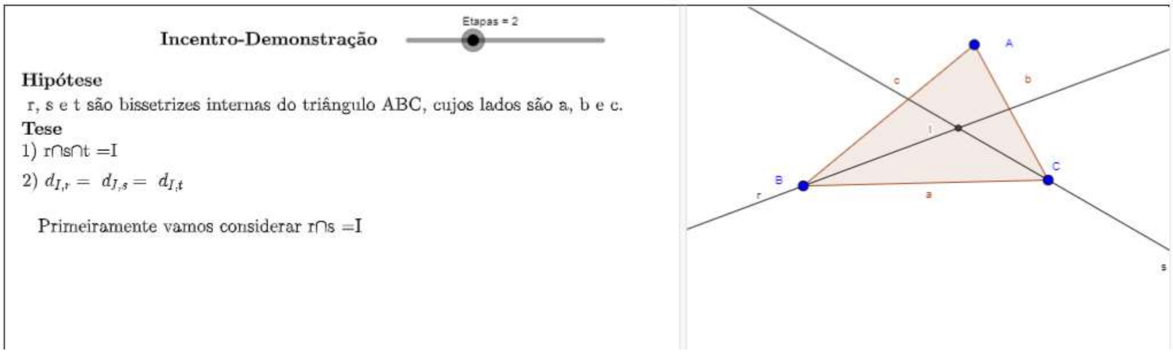


Figura 8 – Exemplo de demonstração dinâmica – Etapa 2
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xMv7bmYn acesso em 11 de agosto de 2021)

Na segunda etapa se inicia, de fato, a demonstração. Onde o autor considera apenas a intersecção de duas bissetrizes *r* e *s*, identificando como I o ponto de intersecção das mesmas. Note que o registro de representação figural é adaptado conforme iniciamos a demonstração.

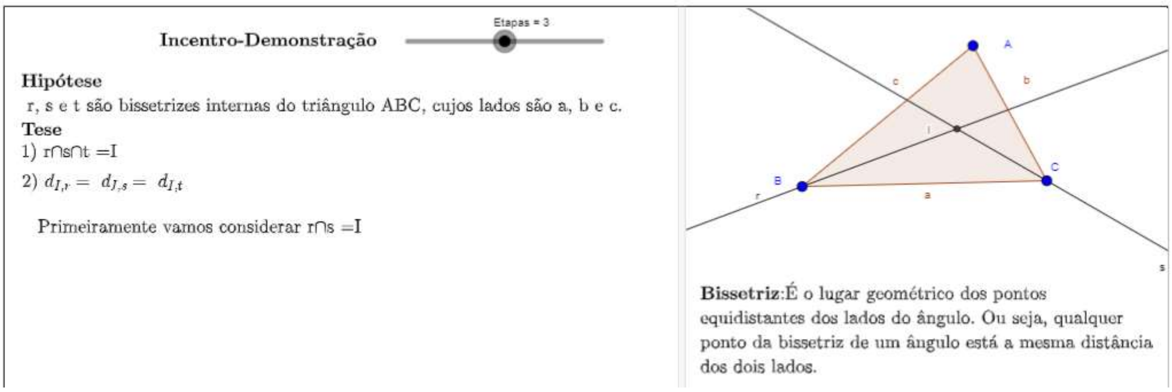


Figura 9 – Exemplo de demonstração dinâmica – Etapa 3
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xMv7bmYn acesso em 11 de agosto de 2021)

Na etapa 3 o autor relembra a definição de Bissetriz, fazendo com que o leitor possa perceber uma propriedade que virá nos próximos passos da demonstração.

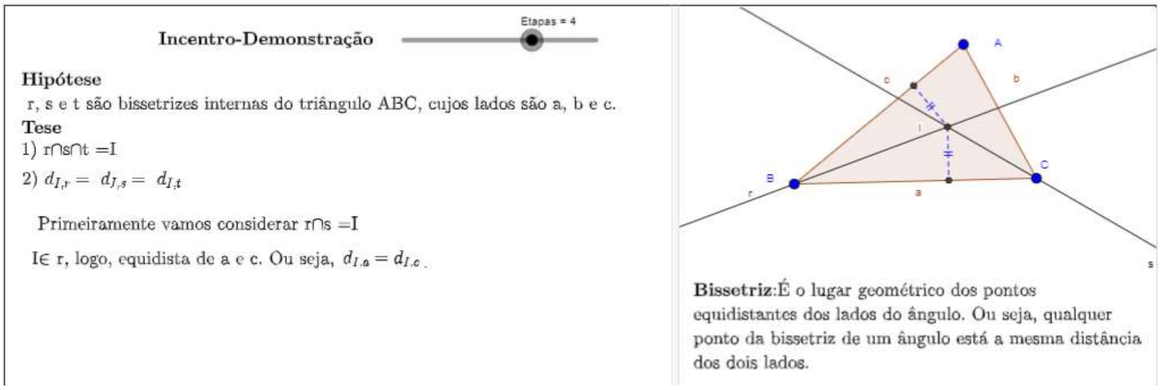


Figura 10 – Exemplo de demonstração dinâmica – Etapa 4
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xMv7bmYn acesso em 11 de agosto de 2021)

Na etapa 4, podemos perceber que o autor já utiliza dos registros de representação linguístico e simbólico para mostrar ao leitor que o ponto I, por pertencer a bissetriz *r*, equidista dos lados *a* e *c*. De maneira simultânea, note que no registro de representação figural surge dois segmentos, com mesma marcação, mostrando ao leitor que eles são congruentes. Deste modo, as novas considerações descritas podem ser visualizadas geometricamente.

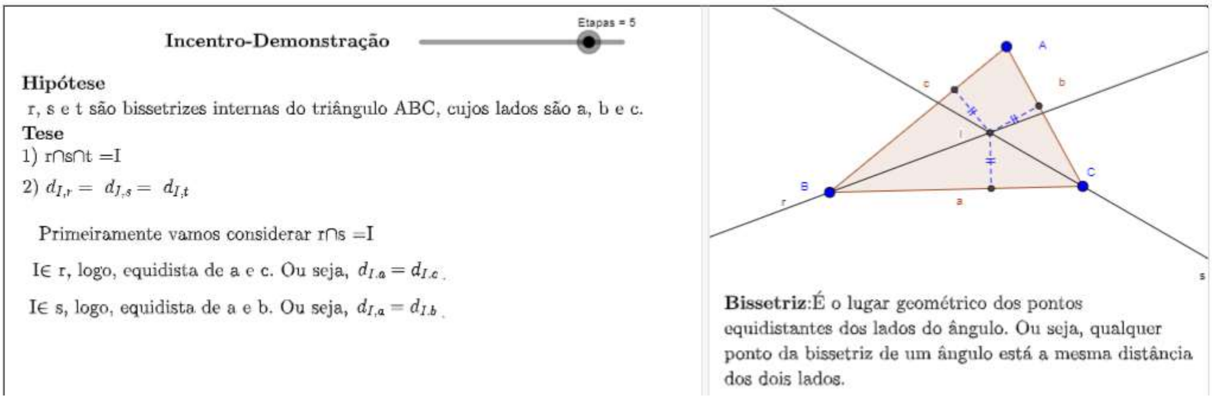


Figura 11 – Exemplo de demonstração dinâmica – Etapa 5
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xMv7bmYn acesso em 11 de agosto de 2021)

De maneira análoga, o autor utiliza da representação linguística e simbólica para mostrar que o ponto I, por pertencer a bissetriz *s*, equidista dos lados *a* e *b*. A partir disso, podemos perceber que o *applet* a direita utiliza do registro de representação figural para mostrar os novos segmentos congruentes.

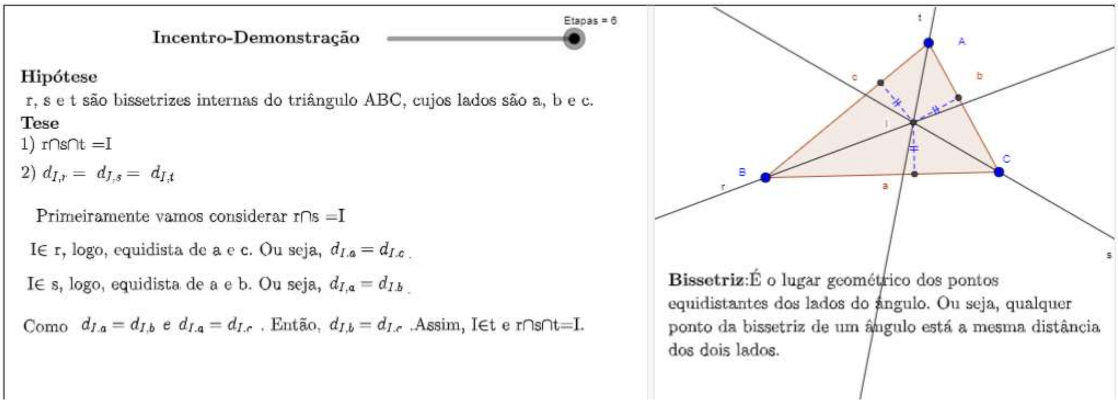


Figura 12 – Exemplo de demonstração dinâmica – Etapa 6
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xMv7bmYn acesso em 11 de agosto de 2021)

Por fim, na etapa 6 a demonstração é finalizada. Nesta o autor utiliza apenas os registros de representação linguístico e simbólico para encerrar a demonstração. Percebemos que no decorrer das etapas as representações vão aparecendo de forma gradativa, conectadas, podendo ser simultâneo ou não. O propósito é de que o estudante possa entender a ordem de leitura das representações e com isso possa compreender a demonstração.

Nóbriga e Siple (2019, p.94) afirmam ainda que a falta de orientação sobre a leitura de exercícios resolvidos também pode gerar dificuldades na aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Sendo assim, os livros dinâmicos possibilitam a resolução de exercícios por etapas, assim como nas demonstrações. Os autores apresentam também a alternativa de criação de exercícios dinâmicos. Neste caso, os estudantes fazem alterações nas diferentes representações, gerando um ambiente enriquecedor de simulação. Um exemplo está representado na Figura 13, que de maneira análoga às demonstrações dinâmicas, separado em etapas, a resolução dinâmica de um exercício envolvendo Sistemas Lineares.

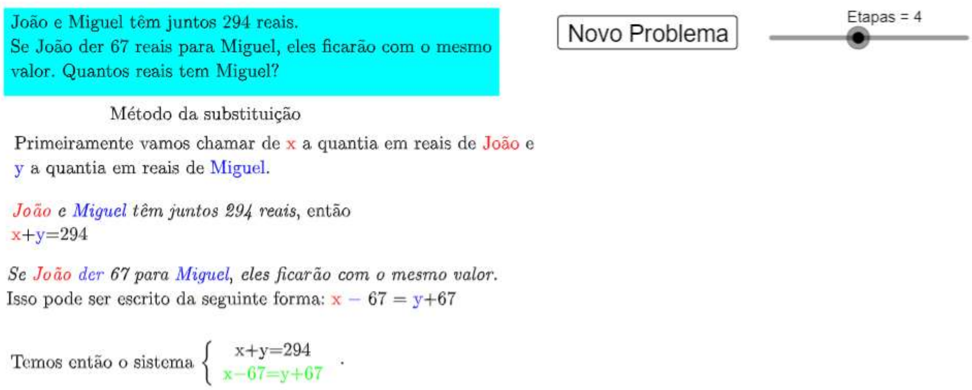


Figura 13 – Exemplo de exercício dinâmico – Etapa 4
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/y7zuadqg acesso em 11 de agosto de 2021)

E para que o estudante obtenha um retorno sobre suas resoluções, o livro dinâmico pode conter *feedbacks* automáticos. De acordo com Costa et al. (2016) citado por Nóbriga (2021)

> (...) o *feedback* pode contribuir para uma ação reflexiva por parte do estudante e para sua aprendizagem, pois ressalta alguma discrepância entre o resultado pretendido e o esperado, incentivando a revisão, ou ainda apontando os comportamentos adequados, motivando o estudante a repetir o acerto. (p. 3)

Vejamos um exemplo atividade com *feedback* automático no GeoGebra:

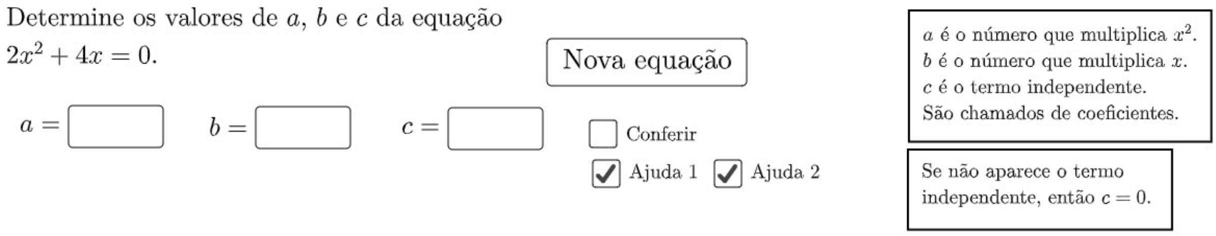


Figura 14 – Exemplo de *feedback* interacional.
(Disponível em https://www.geogebra.org/m/cyypnzqj acesso em 25 de julho de 2021)

Note que o *feedback* interacional, representado pelas *Ajudas*, tem como intuito relembrar as definições do conteúdo abordado. Por outro lado, temos na Figura 15 um exemplo do *feedback* motivacional que possui o intuito de motivar o estudante através de uma frase de incentivo.

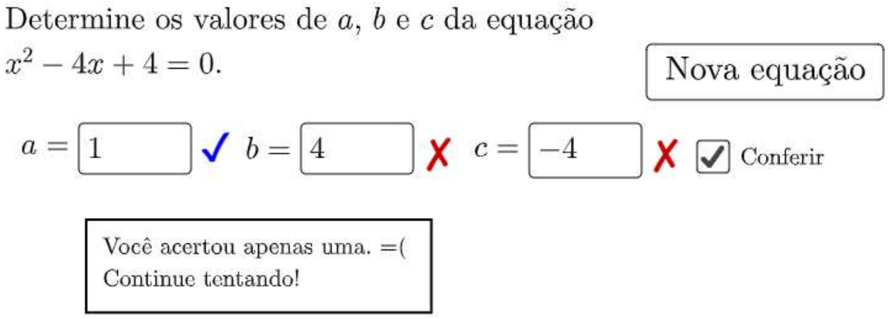


Figura 15 – Exemplo de *feedback* motivacional.
(Disponível em https://www.geogebra.org/m/cyypnzqj acesso em 25 de julho de 2021)

Por outro lado, possuímos também o exemplo de *feedback* elaborado. Nele, as mensagens são elaboradas pelo autor através de possíveis erros que poderão ser cometidos pelos estudantes. Na figura 16, temos um exemplo de *feedback* elaborado, onde o estudante considera que o coeficiente b é zero, por não aparecer nenhum número multiplicando x.

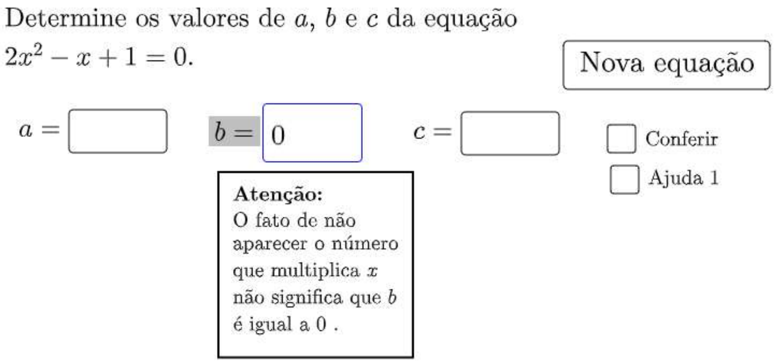


Figura 16 – Exemplo de *feedback* elaborado.
(Disponível em acesso https://www.geogebra.org/m/cyypnzqj em 11 de setembro de 2021)

O conceito "Livro dinâmico de Matemática" é novo e existem poucos exemplos. Nesse sentido, acreditamos que a nossa ideia de produzir um livro dinâmico de matemática para o ensino da Função Quadrática pode contribuir não apenas com o processo de aprendizagem e ensino como também para a divulgação do conceito. No capítulo seguinte, apresentaremos uma possibilidade de como isso pode ser realizado.

3. **METODOLOGIA**

Tendo em vista a configuração desse problema de pesquisa, propomo-nos a desenvolver um livro dinâmico de matemática para o ensino de Função Quadrática. Para isso, tivemos que elaborar estratégias metodológicas. Descrevemos isso a seguir.

Segundo Dante (1996, p.83) "o livro didático de matemática é tão necessário quanto um dicionário ou uma enciclopédia, pois ele contém definições, propriedades, tabelas e explicações, cujas referências são frequentemente feitas pelo professor.". Concordando com a importância dos livros didáticos, construímos nosso Livro Dinâmico de Funções Quadráticas, contendo tais elementos. O livro foi desenvolvido dentro da plataforma GeoGebra, utilizando a ferramenta livro que possibilita a inserção de diversas folhas de trabalho[3]. As folhas de trabalho são como as páginas do livro. Elas podem conter textos, imagens, arquivos PDF, vídeos, exercícios, questionários, *applets*, dentre outros. O procedimento técnico para a construção do livro não é complicado, não exigindo conhecimentos de programação. Basicamente, seguimos as orientações contidas no endereço https://www.geogebra.org/m/Ywtj4ejx#chapter/208571 .

---

[3] Recentemente a plataforma GeoGebra mudou a tradução "folha de trabalho" para "atividade", mas deixamos assim por acharmos mais coerente para este trabalho.

Para o planejamento e elaboração dos conteúdos que colocamos no livro dinâmico, primeiramente buscamos analisar livros didáticos estáticos, do primeiro ano do Ensino Médio. Tomaremos como base os livros **Conexões com a matemática (**LEONARDO, 2016) e **Matemática: contexto e aplicações. Ensino Médio** (DANTE, 2016), ambos livros do primeiro ano do Ensino Médio. Estudamos a abordagem utilizada pelos autores, sendo um dele já conhecido pela pesquisadora e outro não, identificando a ordem de apresentação do conteúdo, exemplos tratados e exercícios propostos. Também estávamos interessados em identificar alguns elementos do livro que poderiam dificultar a compreensão dos estudantes. Sobretudo, no que diz respeito à transformação das representações.

A partir das recomendações contidas na Base Nacional Comum Curricular, planejamos o nosso Livro Dinâmico. Este planejamento inicial conteve as habilidades relacionadas às Funções Quadráticas, objetivos e estratégias. Buscamos organizar o planejamento em uma tabela como a seguinte.

Tabela 3 – Planejamento do livro dinâmico

<table>
<tr><th>Habilidade</th><th>Competência Específica BNCC</th><th>Competência Geral BNCC</th><th>Objetivo de Aprendizagem</th><th>Objetivos específicos</th><th>Indícios</th></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Estratégias</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos específicos</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Fonte: Os autores

Num primeiro momento optamos pela busca de exemplos de materiais prontos tanto na plataforma GeoGebra como em outros ambientes (Youtube, Wikipedia, etc): vídeos, textos, questionários e, principalmente, *applets*. A partir disso, iniciamos a análise dos materiais encontrados, adaptando e organizando. No caso dos *applets*, o intuito era incluir alguns *feedbacks* automáticos e orientações de manipulação para auxiliar o estudante no processo de ensino-aprendizagem do conteúdo. Todavia, não descartamos também a possibilidade de, caso fosse necessário, construirmos novos materiais.

Após a fase de planejamento e pesquisa dos materiais, elaboramos um esboço de índice, contendo algumas ideias do que implementaríamos no livro. Ele está descrito a seguir.

O título do livro é *Aprendendo a Função Quadrática com a plataforma GeoGebra*. O capítulo 1 cujo título é "Definição e exemplos de funções quadráticas" contém 5 páginas. A página 1 possui a definição e alguns exemplos. Já na página 2 trabalhamos alguns exercícios resolvidos sobre a identificação dos coeficientes da função e, também, para quais valores de p uma função genérica dada se torna quadrática. Na página 3 indicamos exercícios para serem resolvidos referentes a página anterior. A página 4 foi destinada aos exercícios resolvidos acerca do valor da imagem e a lei de formação da função. E, por fim, a página 5 foi destinada a exercícios semelhantes aos da página 4 para os estudantes resolverem. O capítulo 2 cujo título é "Gráfico da função quadrática" contém 4 páginas. Na página 1 abordamos o gráfico da função quadrática, destacando as diferentes representações da função: parábola a tabela associada à sua construção e lei de formação. A página 2 trabalha com exercícios sobre a identificação de funções quadráticas. Na página 3 trabalhamos a influência dos coeficientes a, b e c no comportamento do gráfico. Por fim, a página 4 foi destinada aos exercícios resolvidos, e propostos. O título do capítulo 3 é "Pontos importantes do gráfico da função quadrática" e contém 10 páginas. Nas páginas 1 e 2 trabalhamos, respectivamente, a intersecção do gráfico da função com o $eixo\ y$ e alguns exercícios resolvidos e propostos. A partir da página 3 abordamos a identificação, os métodos de cálculos dos zeros da função quadrática e exercícios. Na página 3 mostramos aos estudantes que os zeros da função são os valores de x para qual a função é nula. Já na página 4 trouxemos exercícios referentes a determinação da quantidade de zeros que a função possui através de gráficos dados. A página 5 mostra o primeiro método de cálculo das raízes da função, usando a fórmula de Bhaskara. O segundo método, dado pela soma e produto, está destinado a página 6. Na página 7 destinamos ao cálculo das raízes quando as equações são incompletas, utilizando o método da fatoração e método do isolamento do x. A página 8, 9 e 10 conta com exercícios resolvidos, e propostos, envolvendo a determinação dos zeros da função, a quantidade dos zeros da função através do valor do discriminante e os valores de m para que a função possua uma, duas ou nenhuma raiz. O capítulo 4 tem como título "O vértice do gráfico da função quadrática" e conta com 6 páginas. Na página 1 definimos o ponto de máximo e mínimo de uma função quadrática. Na página 2 trabalhamos com exercícios em que os estudantes precisam determinar se a função dada possui ponto de máximo ou de mínimo. A página 3 foi destinada a determinação das coordenadas do vértice. Já na página 4 destinamos a determinação dos intervalos em que a função é crescente ou decrescente. Na página 5 trabalhamos o conjunto imagem de funções quadráticas. A página 6 aborda exercícios envolvendo os tópicos estudados nas páginas anteriores. Por fim, o último capítulo foi destinado a situações problema envolvendo funções quadráticas, como por exemplo, área máxima do retângulo e lucro máximo.

Após a elaboração do índice, passamos para a construção do livro na plataforma GeoGebra.

4. RESULTADO: APRENDENDO A FUNÇÃO QUADRÁTICA COM A PLATAFORMA GEOGEBRA

O livro dinâmico de Funções Quadráticas, disponível através do link https://www.geogebra.org/m/kmzykz5r se inicia com uma breve apresentação dos autores, seguida da apresentação do livro e da sua proposta. Composto por seis capítulos, com textos, *applets*, figuras, vídeos, exercícios e reflexões. Apresentaremos partes de cada capítulo, destacando pontos importantes e mostrando como as atividades propostas buscam atender as recomendações da BNCC, da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval. Além disso, mostraremos como as atividades podem ajudar a superar alguns limites do livro didático impresso.

O capítulo cujo título é Definição teve o objetivo oferecer condições para que os estudantes desenvolvam as seguintes habilidades da BNCC:

• (EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais;

Ele contém duas páginas. A primeira delas com textos, um *applet* e questões. Traz a definição de uma função quadrática, alguns exemplos, um exercício e uma reflexão de “Por que chamamos de função quadrática?”. A figura 17 mostra um *applet* desenvolvido que teve o objetivo de gerar e apresentar diversos exemplos aos estudantes. Nesse *applet*, o estudante pode ver também os coeficientes das funções geradas.

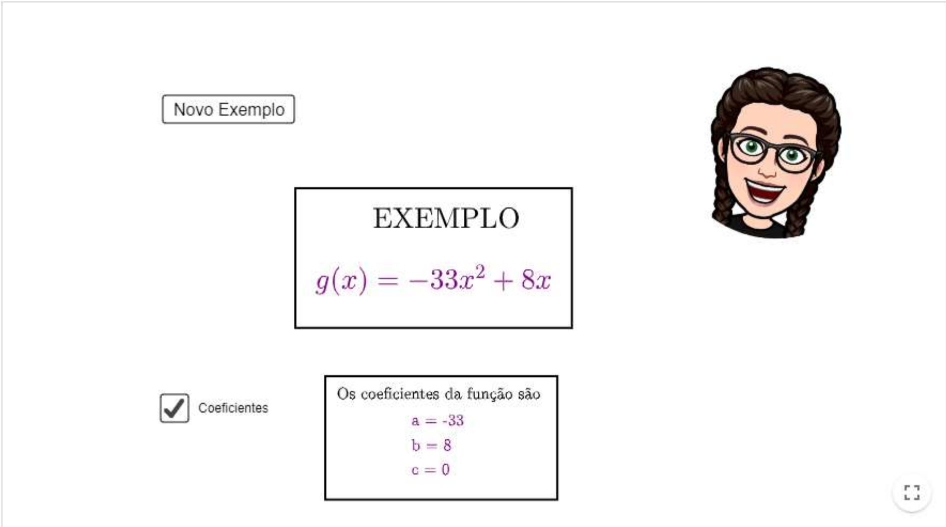


Figura 17 – Exemplos de funções quadráticas
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/sutkqfy4 acesso em 28 de junho de 2022)

Na segunda página, chamada de Exercícios, disponibilizamos diferentes exercícios, dentre eles alguns propostos e outros resolvidos. A maioria dos exercícios é feita através de *applets*, pois nos possibilita gerar novos exemplos. Referente aos exercícios criados, podemos destacar o "Exercício 1 – Determinando os coeficientes da função quadrática", que possui *feedbacks* automáticos, ou seja, o estudante tem um retorno imediato do seu desempenho.

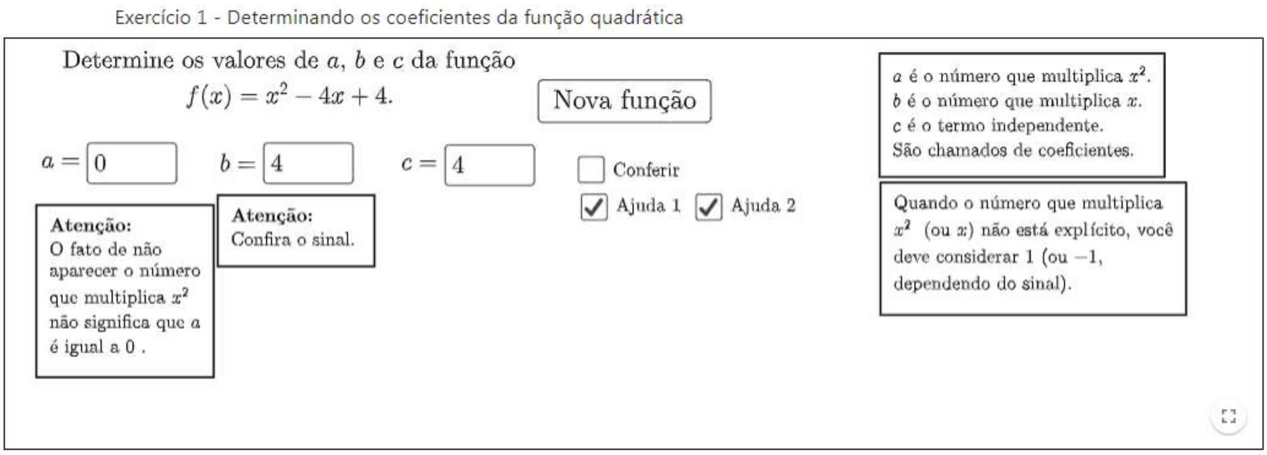


Figura 18 – Exercício 1 – Determinando os coeficientes da função quadrática.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/sutkqfy4 acesso em 28 de junho de 2022)

Na figura 18 podemos ver que, caso o estudante digite 0 no espaço destinado ao coeficiente a, o mesmo receberá imediatamente uma mensagem orientando sobre o erro cometido. Também poderá clicar na caixa conferir e obter um *feedback* referente ao seu acerto ou erro. Vale ressaltar que em caso de dúvidas o estudante poderá optar por duas ajudas, clicando nas caixas Ajuda 1 e Ajuda 2.

Nessa mesma página, apresentamos um exercício que atende a um dos objetivos da BNCC destacado anteriormente, no qual o intuito é elaborar um problema cujo modelo é uma função polinomial de segundo grau. Deste modo, o exercício propõe a determinação da área do trapézio em função de x. Nesse *applet*, conforme figura 19, o estudante pode solicitar uma ajuda, em primeiro caso, ou a resolução, caso as dúvidas continuem. Trata-se de um *applet* com exercício resolvido. A partir disso, solicitamos que o estudante não utilize a resolução e tente em seu caderno resolver novos exemplos.

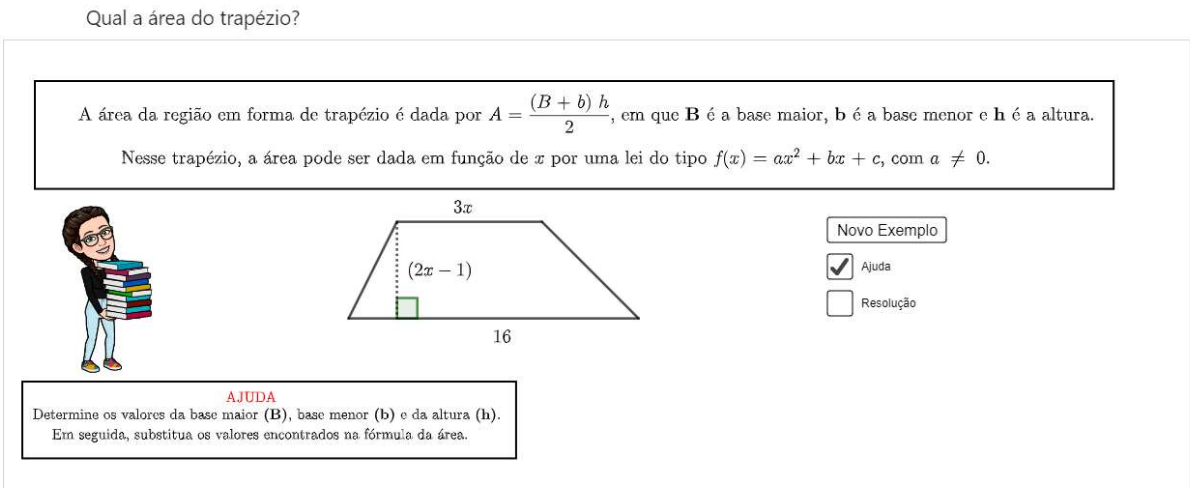


Figura 19 – Exercício resolvido – Área do trapézio
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/sutkqfy4 acesso em 28 de junho de 2022)

O capítulo 2, com título Gráfico de função quadrática, possui cinco páginas. O objetivo dele é criar condições para que os estudantes possam desenvolver as seguintes habilidades da BNCC:

- (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica;
- (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$;

Neste capítulo começamos a trabalhar explicitamente as representações algébricas e geométricas da Função Quadrática. Assim, em determinados momentos trabalharemos com os conceitos de tratamento e conversão no livro dinâmico. A primeira página, chamada “Gráfico da Função Quadrática”, introduz ao estudante a forma do gráfico de uma função quadrática. Utilizamos textos, *applets* e reflexões nessa página. O *applet* contido na figura 20 mostra como buscamos contemplar as habilidades da BNCC e também a recomendação de Duval de usar pelo menos duas representações concomitantes. Uma abordagem bastante utilizada e que facilita a compreensão por parte dos estudantes na visualização da parábola é a construção do gráfico através da tabela, como mostra a figura 20 a seguir.

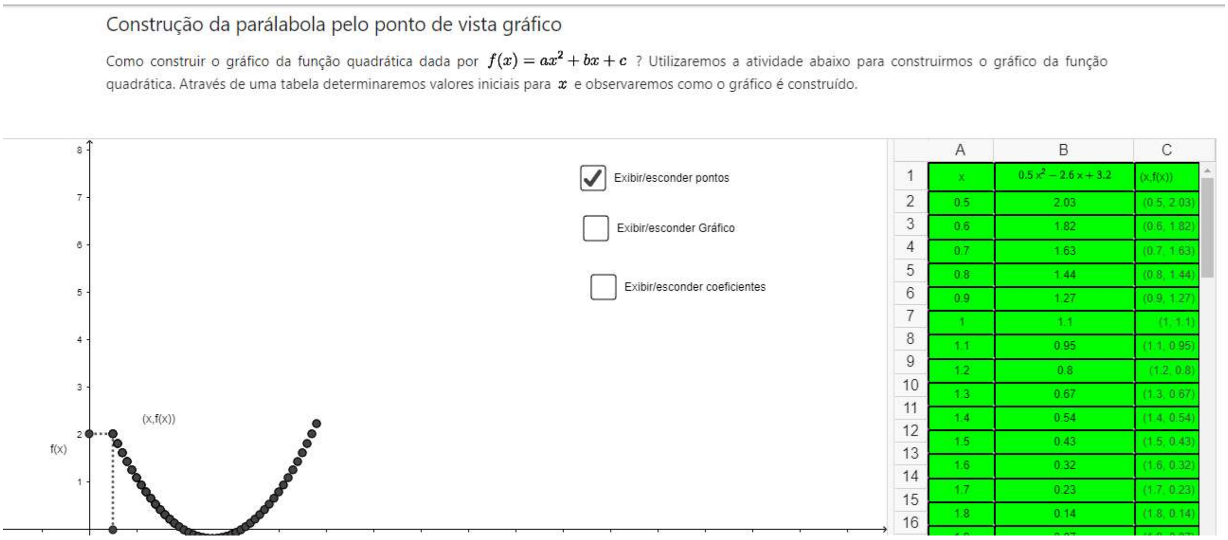


Figura 20 – Construção da parábola pelo ponto de vista gráfico
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/wq5rwmny acesso em 28 de junho de 2022)

A atividade conta com três caixas “Exibir/Esconder objetos”. A primeira Exibe/Esconde pontos que possibilita visualizar e modificar os pontos determinados através da tabela. Também temos o Exibir/Esconder gráfico, que mostra ao estudante o gráfico da função. Por fim, a caixa Exibir/Esconder coeficientes que possibilita modificar os coeficientes, estudar outras funções e os diferentes gráficos que essa modificação produz. Esse *applet* possui ainda função Rastro sobre o ponto $(x, f(x))$ que permite que o estudante possa ver o gráfico sendo formado à medida que ele movimenta o ponto x. Na figura 21 a seguir mostraremos o *applet* com as três caixas selecionadas.

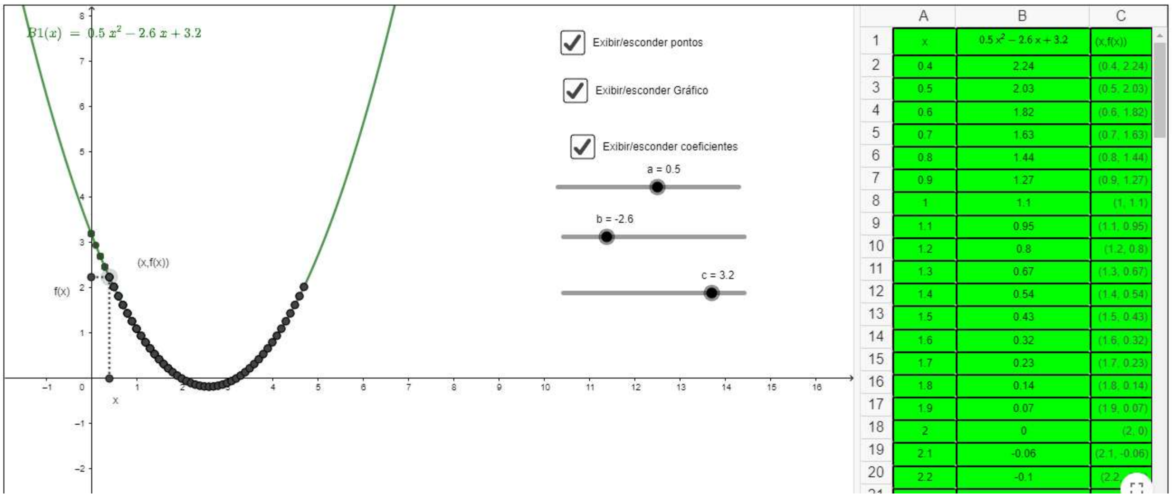
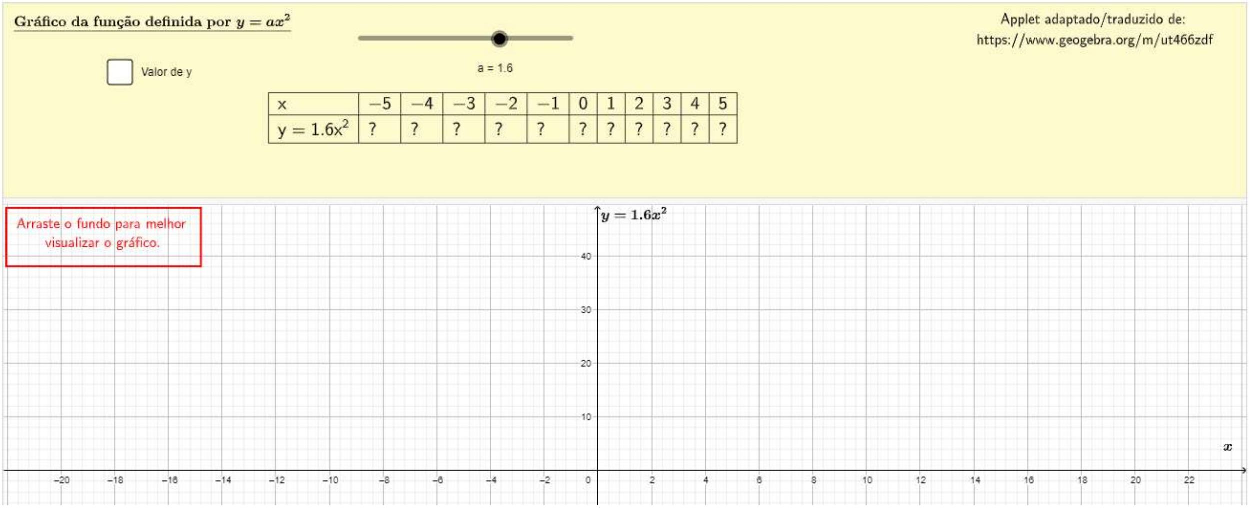


Figura 21 – Construção da parábola pelo ponto de vista gráfico – Caixas selecionadas.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/wq5rwmny acesso em 28 de junho de 2022)

Para complementar a atividade, solicitamos através de reflexões que os estudantes modifiquem pontos, marquem as caixas e observem as mudanças. O intuito com esse *applet* é fazer com que os estudantes percebam que o conjunto dos pontos na terceira coluna da tabela gera a curva que está no plano cartesiano ao lado.

As páginas seguintes deste capítulo tratam da influência dos coeficientes no comportamento do gráfico. Em todas elas buscamos atingir os objetivos descritos acima, da BNCC, sendo assim, utilizamos com bastante frequência a conversão da linguagem algébrica para a geométrica e buscamos fazer com que o estudante perceba padrões e consiga generalizar resultados.

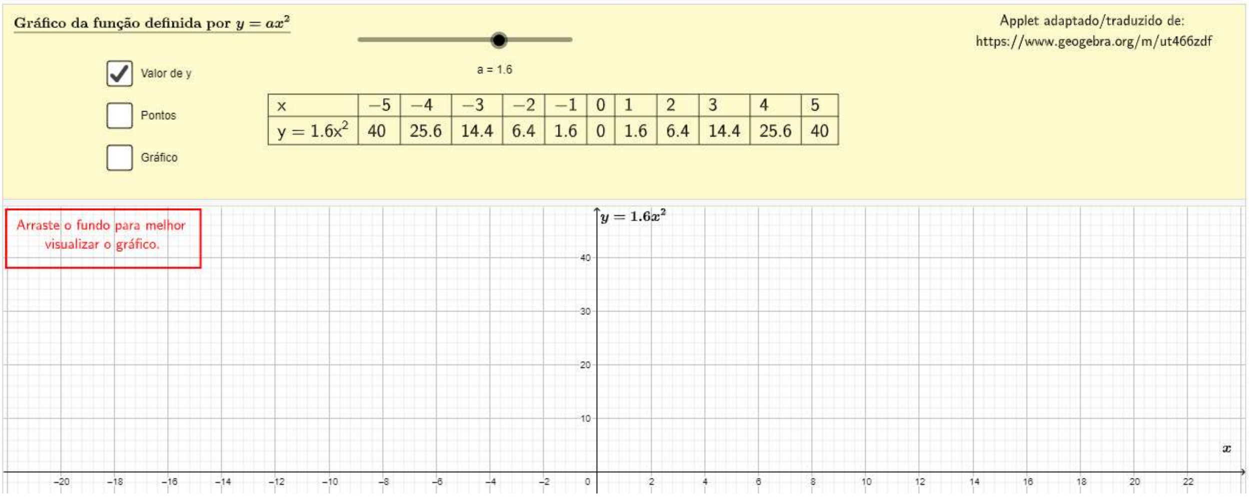
A página dois é chamada de Influência do coeficiente “a” no comportamento do gráfico. Para que o estudante perceba, de fato, a interferência do coeficiente no gráfico, adaptamos e traduzimos um *applet* que mostraremos nas figuras seguintes. Inicialmente o estudante observa que se trata de uma função do tipo $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$ e $b = c = 0$, e que utilizaremos uma tabela semelhante ao exercício anterior para construir o gráfico da função.



x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$y = 1.6x^2$	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Figura 22 – Influência do coeficiente "a" no gráfico – Parte I.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ekp4bm4e acesso em 28 de junho de 2022)

O *applet* da figura 22 possui uma caixa "Valor de y" e um controle deslizante para o coeficiente a que pode ser alterado. Após marcarmos a caixa, observamos os valores de y na tabela, mas também que aparecem outras duas caixas "Pontos" e "Gráfico" mostradas na figura 23 a seguir.



x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$y = 1.6x^2$	40	25.6	14.4	6.4	1.6	0	1.6	6.4	14.4	25.6	40

Figura 23 – Influência do coeficiente "a" no gráfico – Parte II.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ekp4bm4e acesso em 28 de junho de 2022)

Marcando as duas caixas temos os pontos obtidos da tabela e o gráfico formado pelos mesmos, como podemos ver na figura 24.

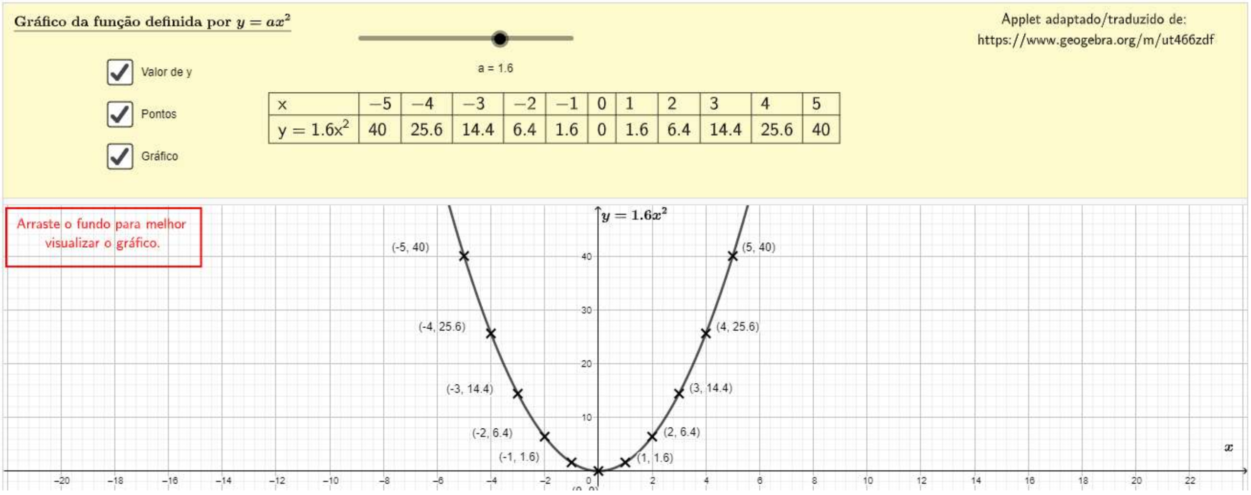


Figura 24 – Influência do coeficiente "a" no gráfico – Parte III
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ekp4bm4e acesso em 28 de junho de 2022)

A partir disso é possível notar a conversão da representação algébrica da função quadrática para a representação geométrica. Isso é bastante enfatizado na teoria de Duval. Seguido do gráfico, solicitamos que o estudante altere o parâmetro a e responda a seguinte reflexão “Qual a influência desse coeficiente no comportamento do gráfico?”, assinalando umas das alternativas seguintes:

- *Muda a concavidade da parábola. Se "a" for positivo, a concavidade será para baixo. Se "a" for negativo, a concavidade será para cima.;*
- *Muda a concavidade da parábola. Se "a" for positivo, a concavidade será para cima. Se "a" for negativo, a concavidade será para baixo.*

Para a terceira página, com título Influência do coeficiente b no comportamento do gráfico, utilizamos um *applet* em que o estudante pode alterar os coeficientes. Também decidimos investir na pergunta de reflexão, onde o estudante altera o parâmetro b e observa quais as alterações que ocorrem. Em seguida, através de textos e figuras, mostramos quais são as alterações que, de fato, ocorrem no gráfico quando $b = 0, b > 0$ e $b < 0$. Por fim, os exercícios sugeridos aos estudantes solicitam que eles determinem as informações sobre o coeficiente b através de um gráfico dado, sem informações algébricas, como vemos na figura 25.

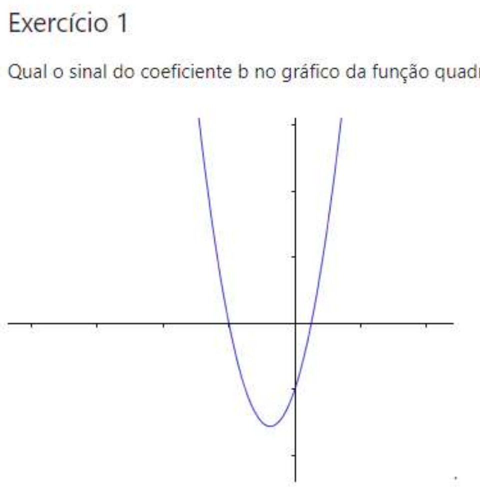


Figura 25 – Exercício 1 – Qual o sinal do coeficiente b no gráfico?
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/dtbarcac acesso em 28 de junho de 2022)

Na página 4, cujo título é “Influência do coeficiente c no comportamento do gráfico” trabalhamos um *applet* em que o estudante, novamente, precisa alterar o parâmetro c. O intuito é que ele perceba que o coeficiente c é a ordenada do ponto de intersecção do gráfico com o eixo y. Deste modo, utilizamos uma reflexão que auxilia o estudante que não consegue visualizar com facilidade essa influência. Em seguida, trabalhamos com dois exercícios importantes disponibilizados através de *applets*. O primeiro deles solicita que o estudante determine o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y, como podemos ver na figura 26 abaixo.

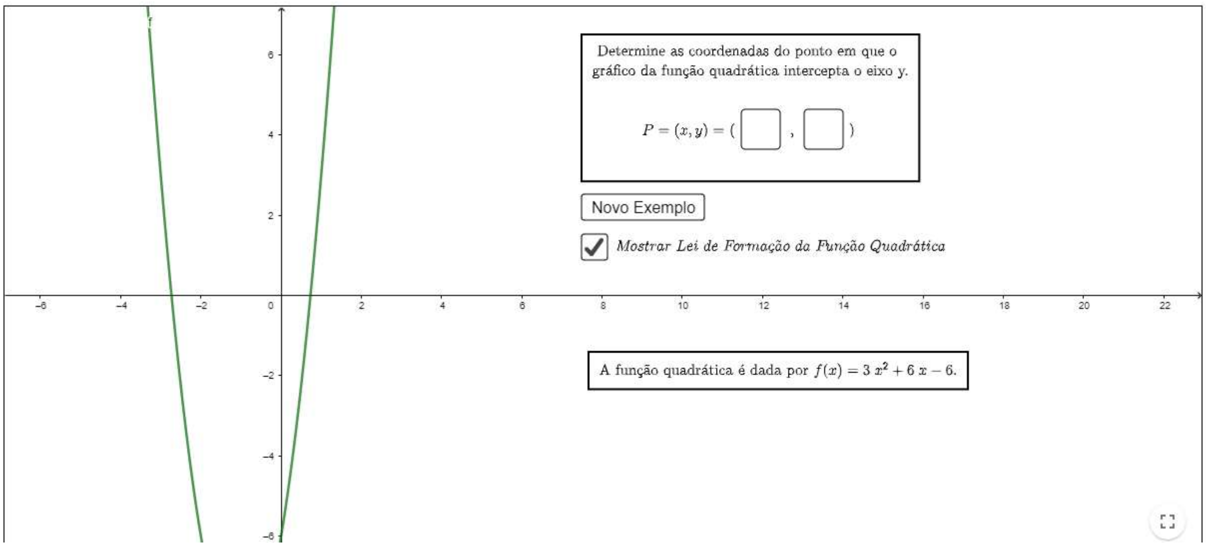


Figura 26 – Exercício 1 – Determine as coordenadas de P.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/aawnmet5 acesso em 28 de junho de 2022)

O intuito dessa atividade é que o estudante perceba que pode optar pela resolução do exercício através do gráfico, mas também utilizando o botão "Mostrar a Lei de Formação da Função Quadrática" que apresenta a forma algébrica da função. Através disso, pode calcular o valor de $f(x)$ quando $x = 0$. Nessa página, utilizamos também outro *applet* que tem como objetivo fazer com que o estudante posicione dois pontos do gráfico de uma função quadrática de forma que ele corresponda ao gráfico de uma função cuja representação algébrica está dada. Vejamos o *applets* na figura 27.

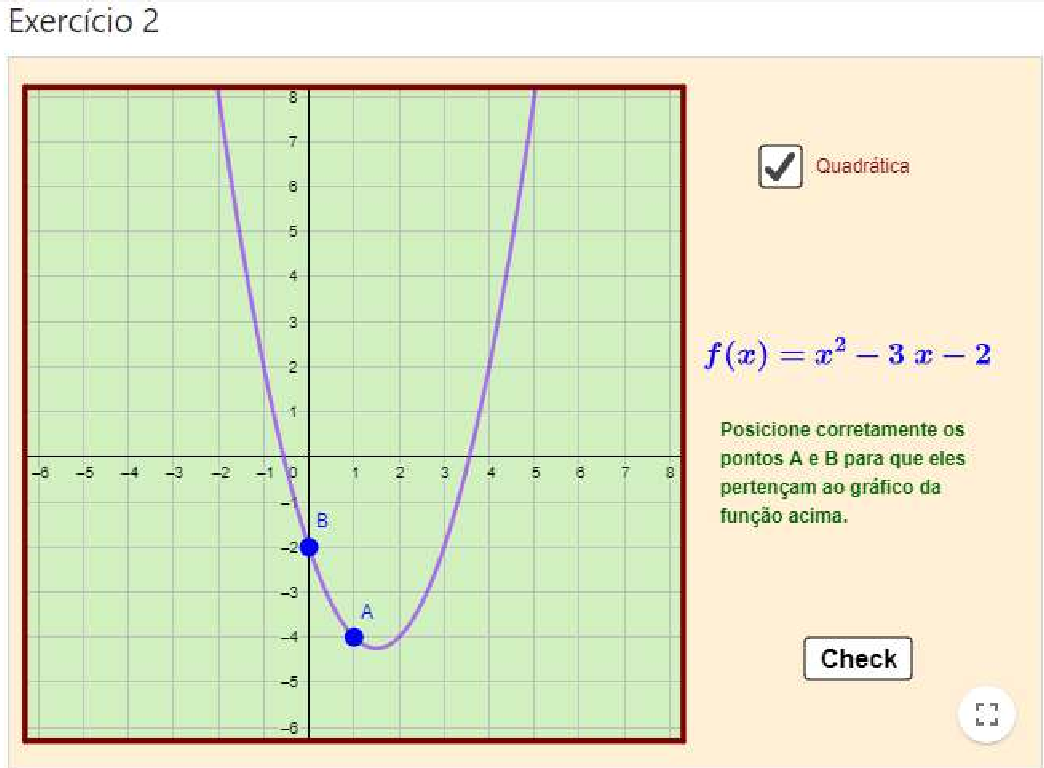


Figura 27 – Exercício 2 – Posicione corretamente os pontos A e B.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/aawnmet5 acesso em 28 de junho de 2022)

Apesar do ponto B ser livre para ser deslocado sobre todo o plano, imaginamos que o estudante perceberá que o coeficiente c determina a intersecção do gráfico com o eixo y. Assim, bastará posicionar corretamente ponto B sobre o eixo y. Para o outro ponto bastará escolher um valor qualquer x e substituir na função.

Por fim, a quinta e última página do capítulo traz exercícios sobre a influência dos coeficientes no gráfico da função quadrática. São três exercícios propostos e destacamos o *applet* que tem como intuito verificar se o estudante conseguiu compreender, de fato, as influências dos parâmetros. Vejamos na figura 28 a seguir.

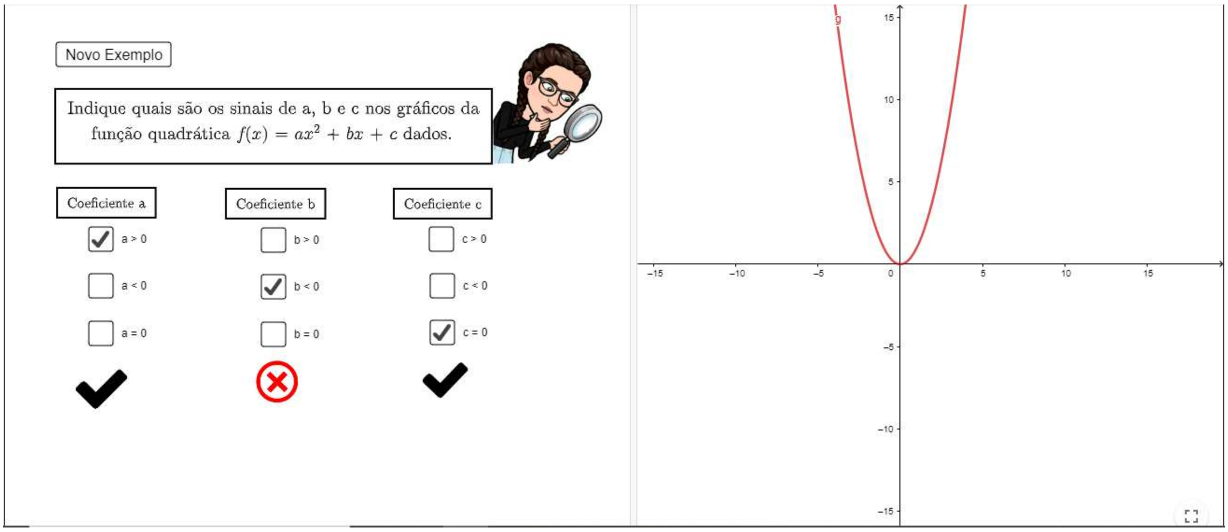


Figura 28 – Exercício 3 – Indique quais os sinais dos coeficientes.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/neb8jbbm acesso em 28 de junho de 2022)

O objetivo principal do *applet* é a determinação dos sinais dos coeficientes dado o gráfico da função, sem nenhuma representação algébrica para auxiliar. A partir do momento em que o estudante assinala qual alternativa se encaixa ao problema dado, o mesmo obtém o retorno imediato sobre seu acerto ou erro. Também, é possível observar uma mensagem quando o estudante assinala que o coeficiente $a = 0$, como mostraremos a seguir. Tratam-se de *feedbacks* automáticos.

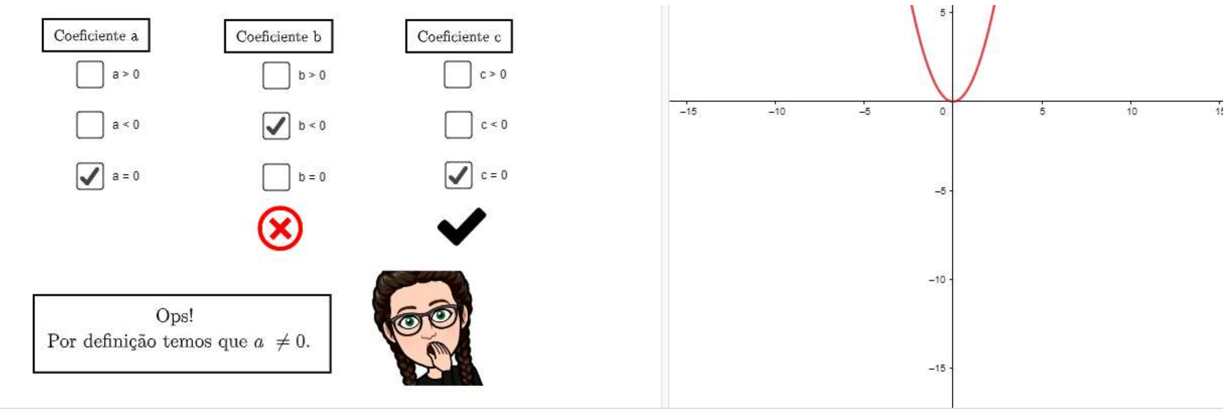


Figura 29 – Exercício 3 – *Feedback* automático.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/neb8jbbm acesso em 28 de junho de 2022)

O capítulo 3, com título “Pontos importantes do gráfico da função quadrática”, possui seis páginas. O objetivo dele é criar condições para que os estudantes possam desenvolver as seguintes habilidades da BNCC:

- (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

- (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Um ponto importante no estudo de funções quadráticas é a existência, ou não, das raízes da função. O capítulo 3 trabalha, detalhadamente, diferentes métodos de calcular os zeros da função. Consideramos, como analisado anteriormente, que a forma como os livros didáticos estáticos apresentam o cálculo das raízes da função pode ser uma limitação.

A primeira página, destinada à introdução do que são os zeros de uma função quadrática, possui título "Determinando os zeros da função quadrática". Utilizamos na página textos e um *applet* que trabalha com as representações algébrica e geométrica, concomitantemente. Como podemos ver nas figuras 30, 31 e 32, o objetivo do *applet* é mostrar ao estudante que as raízes da função são os pontos em que o gráfico intercepta o $eixo\ x$. Deste modo, ele poderá imediatamente trabalhar com as conversões em exercícios futuros.

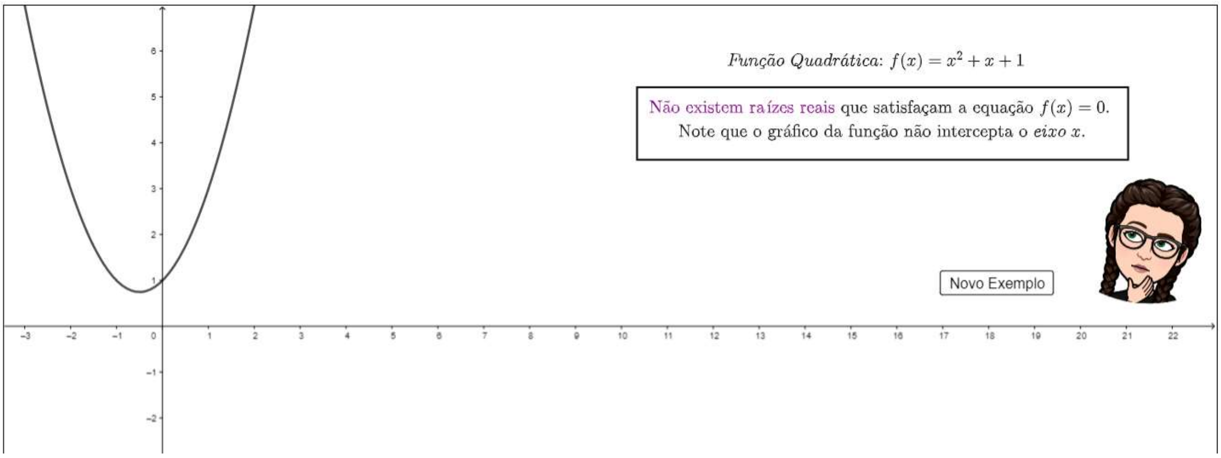


Figura 30 – Os zeros da função quadrática – Nenhuma raiz.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ftrvdyka acesso em 28 de junho de 2022)

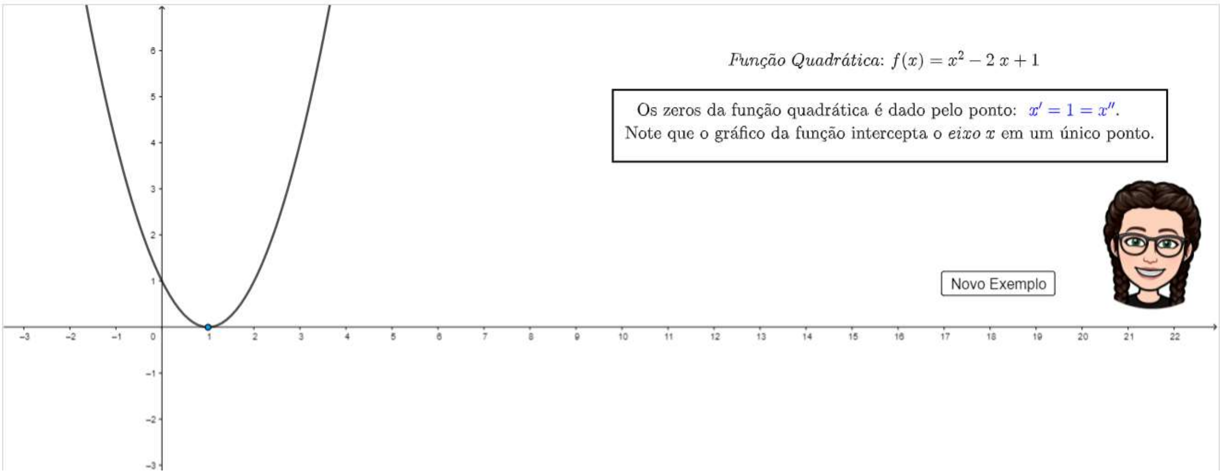


Figura 31 – Os zeros da função quadrática – Uma única raiz.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ftrvdyka acesso em 28 de junho de 2022)

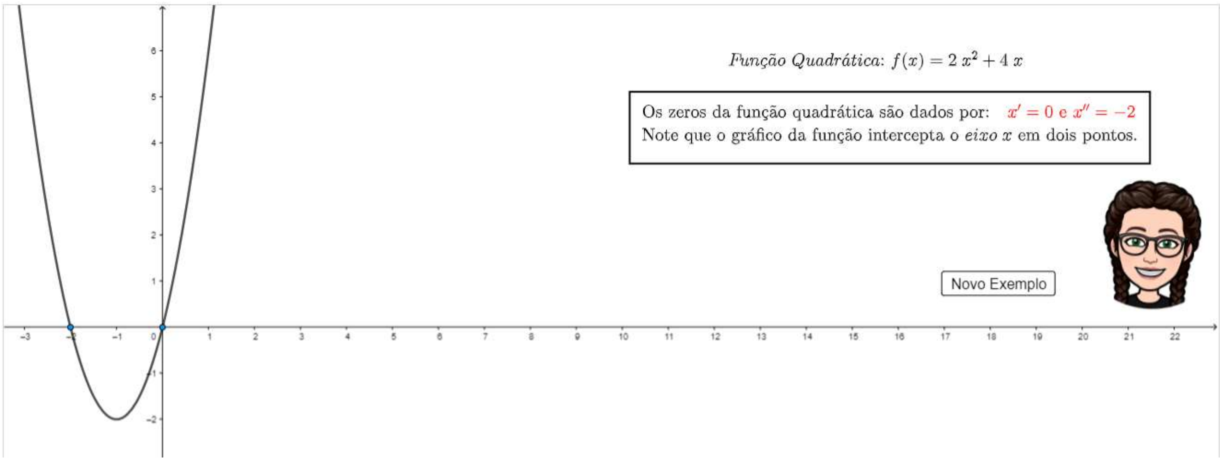


Figura 32 – Os zeros da função quadrática – Duas raízes.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ftrvdyka acesso em 28 de junho de 2022)

As figuras 30, 31 e 32 são exemplos em que o estudante pode trabalhar com a conversão na representação geométrica para a representação algébrica. Ou seja, a partir do gráfico dado, é possível identificar as raízes da função quadrática na sua forma algébrica e geométrica.

Ainda na primeira página damos início aos possíveis métodos de cálculo dos zeros da função, que trabalharemos nas páginas seguintes. Na página dois, chamada de “Método 1 – Fórmula de Bhaskara”, iniciamos utilizando textos para relembrar a fórmula de Bhaskara. Em seguida, com auxílio de um *applet*, como mostra a figura 33, introduzimos a influência do discriminante no número de raízes de uma função quadrática.

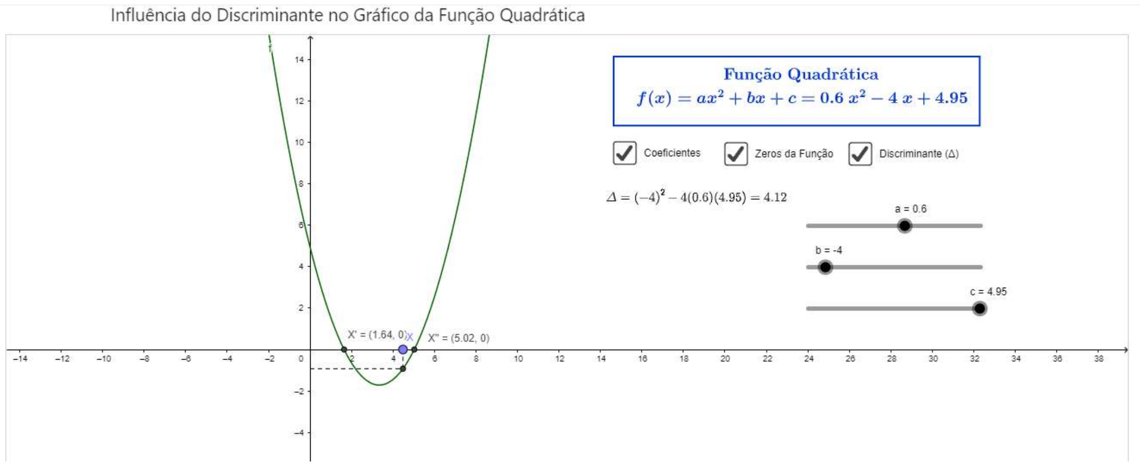


Figura 33 – Influência do discriminante no gráfico da função quadrática
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/mpfczj7f acesso em 07 de julho de 2022)

O intuito do *applet* é que o estudante possa alterar os coeficientes, mudando assim o gráfico da função para ver os zeros da função e o cálculo do discriminante. A partir disso, com algumas perguntas reflexivas induzimos o estudante à análise do sinal do discriminante. Por fim, logo após respondidas as reflexões, definimos a condição de existência das raízes.

Outro *applet* utilizado nessa mesma página é a calculadora de raízes da equação do segundo grau, como mostra a figura 34, onde o estudante determina os coeficientes e os cálculos imediatamente. O *applet* explicita todos os passos realizados nas operações, permitindo que o estudante possa ver vários exemplos passo a passo.

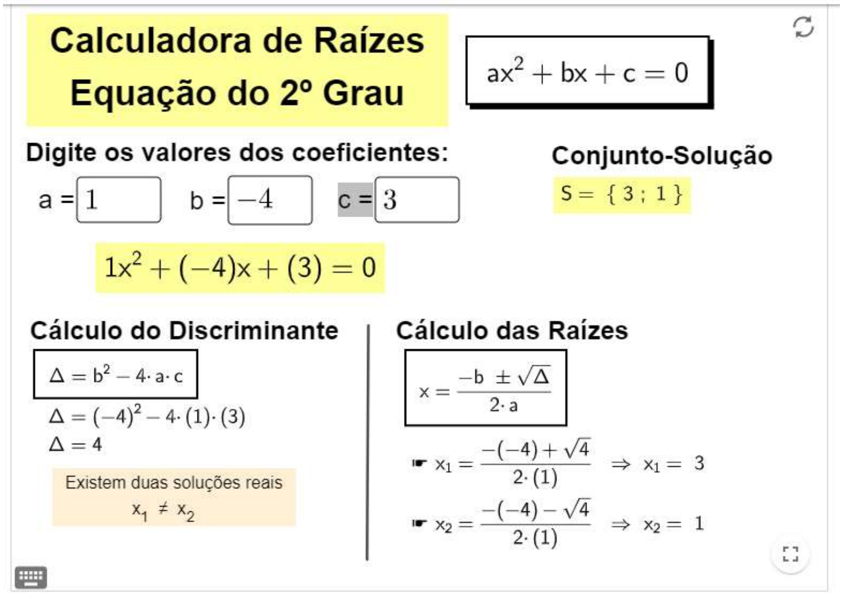


Figura 34 – Calculadora de raízes de equações do segundo grau.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/mpfczj7f acesso em 07 de julho de 2022)

A partir disso, finalizamos a página com exercícios e uma dica. Caso o estudante ainda possua dúvidas, indicamos buscar auxilio em outra atividade por meio de um link.

A terceira página, que chamamos de “Método 2 – Soma e Produto”, se inicia através de textos explicativos para mostrar como os coeficientes e as raízes da função quadrática se relacionam. O intuito é mostrar ao estudante o processo de dedução do método. Por fim, os exemplos e os exercícios, figura 35, foram apresentados por meio de *applets*. Acreditamos que isso pode oferecer uma possibilidade maior de exemplos do que as encontradas em alguns livros estáticos.

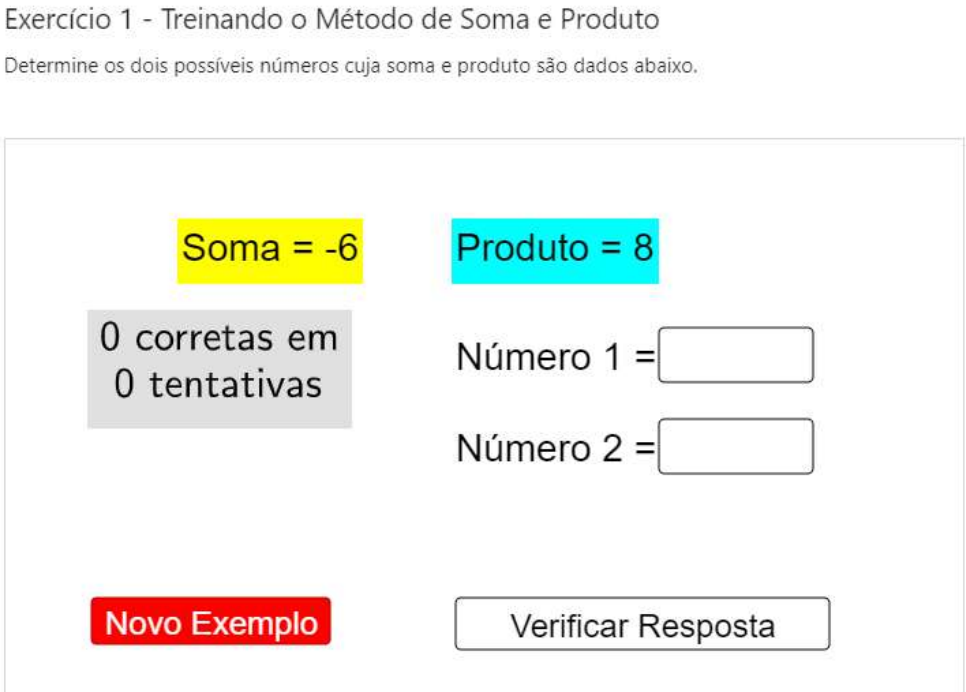


Figura 35 – Exercício 1 – Treinando o método de soma e produto
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/zfupabqb acesso em 07 de julho de 2022)

Vale ressaltar que o exercício mostrado na figura 35 oferece ao estudante um *feedback* automático, garantindo um retorno em caso de acerto ou erro.

Dando continuidade aos métodos de determinação das raízes da função quadrática criamos a página quatro, chamada de “Método 3 – Fatoração”. Nela mostramos aos alunos que é possível reescrever a equação $ax^2 + bx + c = 0$, de maneira que fique fatorada. Entretanto, também mostramos que o método é mais viável quando o coeficiente $c = 0$. Diante disso, utilizamos um *applet* para apresentar exemplos aos estudantes, uma reflexão e indicamos exercícios para que sejam feitos com o auxílio de um caderno. Na figura 36 é possível visualizar a maneira que mostramos aos estudantes os exemplos de funções, que convém resolver com o método da fatoração.

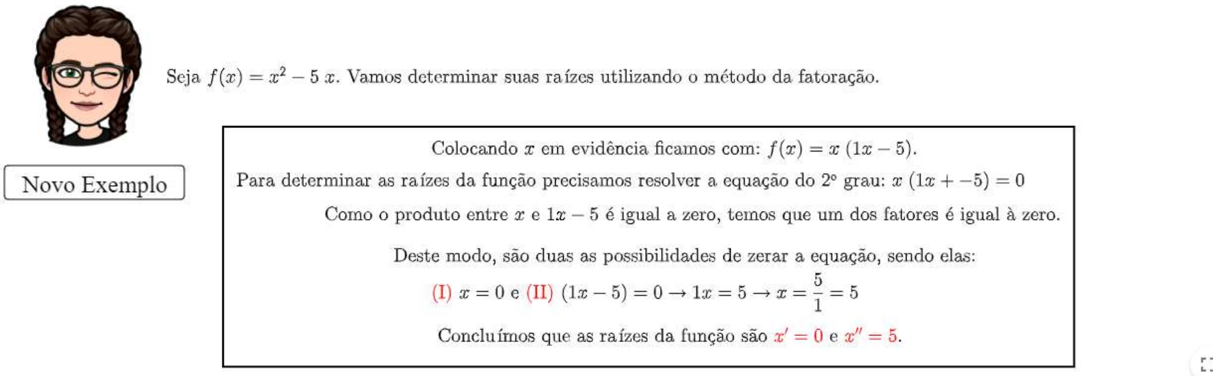


Figura 36 – Exemplos – Método da fatoração
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/sx877pku acesso em 07 de julho de 2022)

Na página cinco temos o quarto e último método de determinação das raízes da função quadrática. Chamamos a página de “Método 4 – Isolar o x”. Como o próprio nome diz, o método consiste em isolar o termo x, deste modo, indicamos o uso quando $b = 0$. Assim como feito nos métodos anteriores, utilizamos um *applet*, figura 37, para mostrar alguns exemplos e reforçar o método com os estudantes. Por fim, propomos alguns exercícios em formato de questões para que eles resolvam com o auxílio do caderno.

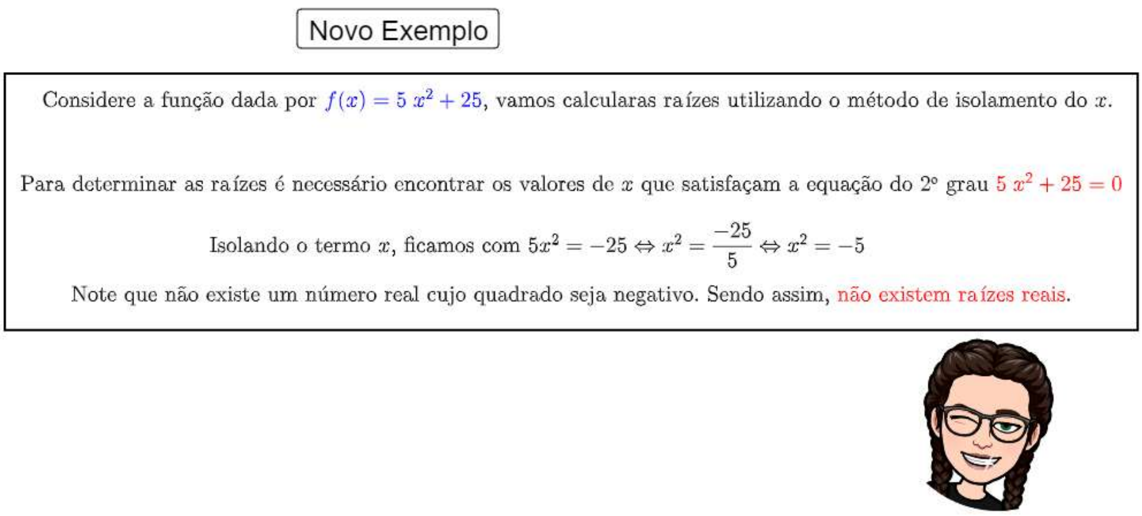
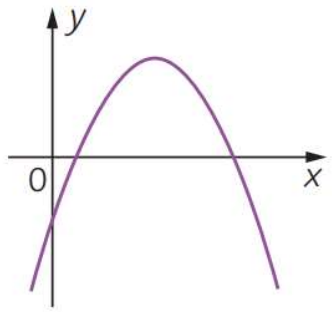


Figura 37 – Exemplos – Método de isolamento do x.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/gb7vxkqw acesso em 07 de julho de 2022)

Finalizamos o capítulo com uma página destinada apenas aos exercícios. Chamamos de "Exercícios – Pontos Importantes do Gráfico". São seis exercícios, alguns destinados apenas a cálculos. Na figura 38, trabalhamos com um exercício que exigirá do estudante a compreensão sobre a relação entre o gráfico da função quadrática e os sinais dos coeficientes da função. Isso tem muita relação com o processo de conversão apontado por Duval.

O gráfico abaixo representa uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.



É possível afirmar que:

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ $a > 0$, $\Delta = 0$, $c > 0$ e $b < 0$.

B ☐ $a < 0$, $\Delta > 0$, $c < 0$ e $b > 0$.

C ☐ $a < 0$, $\Delta < 0$, $c < 0$ e $b > 0$

D ☐ $a < 0$, $\Delta > 0$, $c > 0$ e $b > 0$

Figura 38 – Exercício 4 – Determinando os coeficientes e o discriminante da função.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ggg59hb9 acesso em 07 de julho de 2022)

Também podemos destacar o *applet*, mostrado na figura 39, em que o estudante precisa calcular o valor do discriminante e a partir disso determinar o número de raízes da função quadrática dada. Além do *feedback* de ajuda, contamos também com o *feedback* de acerto, ou erro, estimulando o estudante nas próximas resoluções.

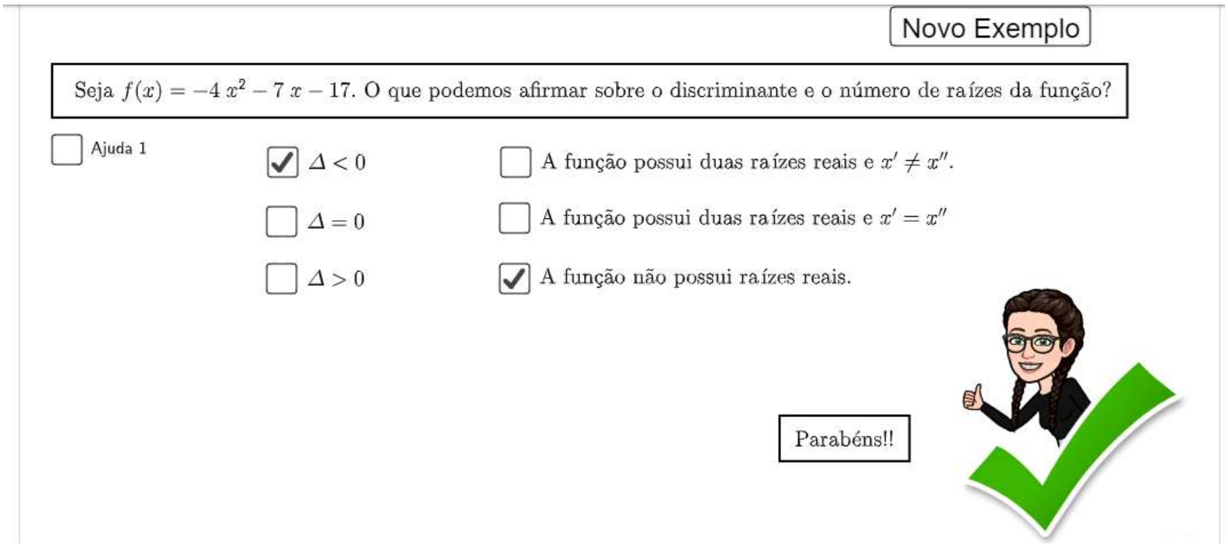


Figura 39 – Exercício 3 – Determinando o discriminante e o número de raízes da função.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ggg59hb9 acesso em 07 de julho de 2022)

O quarto capítulo, chamado de “Vértice e Conjunto Imagem da Função Quadrática”, tem quatro páginas. O objetivo dele é criar algumas condições iniciais para que os estudantes possam desenvolver a seguinte habilidade da BNCC:

• (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.

Na primeira página, chamamos de “Valor da função no elemento”. Iniciamos definindo dois problemas importantes encontrados no estudo de funções quadráticas, que é:

1. Determinar $f(x_o)$, dado $x_0 \in \mathbb{R}$;
2. Determinar $x_0 \in \mathbb{R}$, dado $f(x_0)$.

Apesar de se tratar de um tópico com enfoque mais algébrico, trouxemos *applets* algébricos e geométricos.

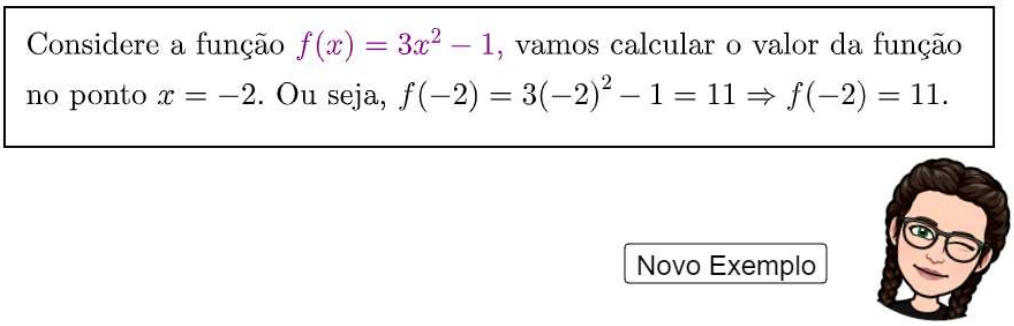


Figura 40 – Exemplos – Valor da função no elemento.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/v5httjdf acesso em 08 de julho de 2022)

Neste applet, figura 40, mostramos como resolver o problema 1, onde o estudante calcula o valor da função no elemento dado. Por outro lado, na figura 41, mostramos como resolver o problema 2, onde será calculado o valor do elemento x.

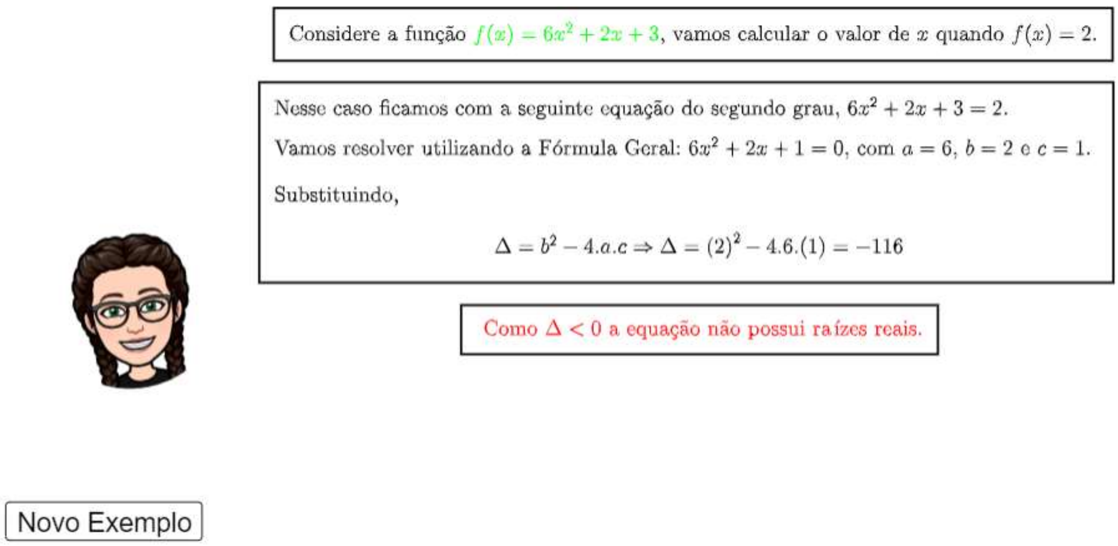


Figura 41 – Exemplos – Cálculo do ponto x
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/v5httjdf acesso em 08 de julho de 2022)

Apesar de indicarmos a resolução por meio da fórmula de Bhaskara, acreditamos que o estudante pode possuir conhecimentos para optar por qualquer outro método. Buscamos mostrar aos estudantes o que, de fato, ocorre geometricamente quando calculamos o valor da função no elemento x. Vejamos na figura 42.

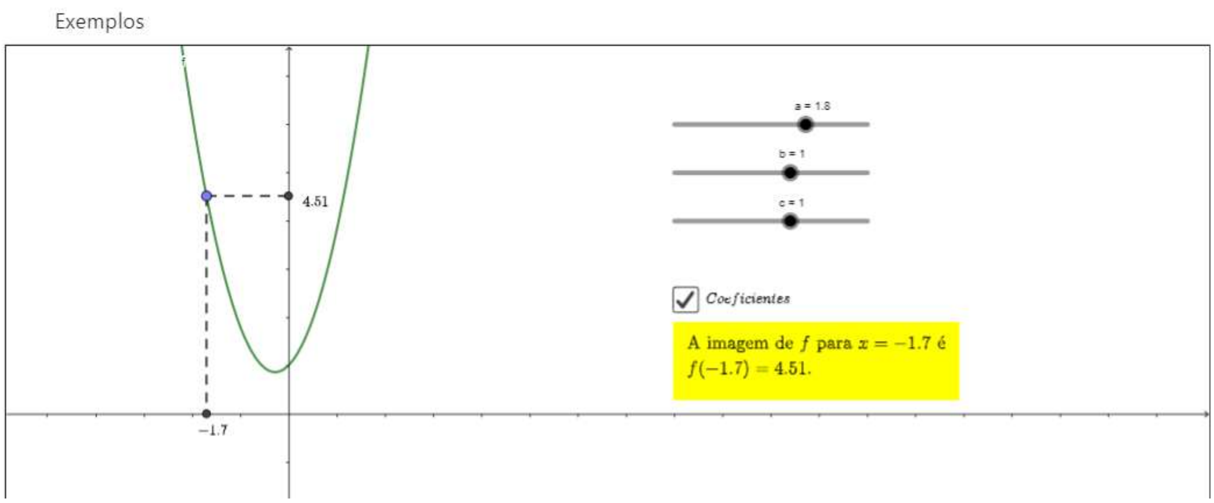


Figura 42 – Valor da função no elemento – Geometricamente
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/v5httjdf acesso em 12 de julho de 2022)

Por fim, indicamos exercícios através de *applets* e questões de múltipla escolha.

A próxima página, chamada de "Vértice da Parábola", traz através de texto a definição de vértice. Para auxiliar nosso estudo sobre esse ponto da função utilizamos um *applet* no qual o estudante pode alterar os coeficientes e observar como o gráfico se comporta. Vejamos na figura 43.

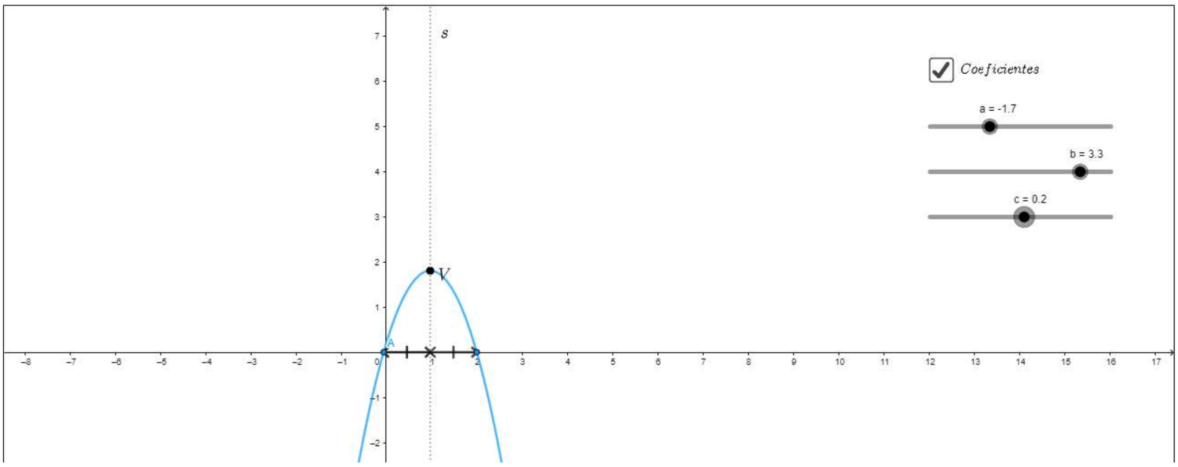


Figura 43 – Vértice da parábola.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/crspdjtr acesso em 08 de julho de 2022)

Para complementar a atividade solicitamos, através de perguntas de reflexão, que o estudante observe a distância entre a reta *s* e as raízes da função e nos diga o que pode afirmar sobre o vértice da parábola. Pelo fato do *applet* ser limitado para o caso de a função não possuir raízes reais, demonstramos aos estudantes, através de textos, como determinar o vértice sem depender das raízes da função. Vejamos isso na figura 44, o desenvolvimento da fórmula da abscissa.

Vamos calcular $f(x_v + k) = f(x_v - k)$, temos que:

$$
\begin{aligned}
& f(x_v + k) = f(x_v - k) \\
& \Longrightarrow a(x_v + k)^2 + b(x_v + k) + c = a(x_v - k)^2 + b(x_v - k) + c \\
& \Longrightarrow a\left(x_v^2 + 2kx_v + k^2\right) + b(x_v + k) + c = a\left(x_v^2 - 2kx_v + k^2\right) + b(x_v - k) + c \\
& \Longrightarrow ax_v^2 + 2akx_v + 2ak^2 + bx_v + bk + c = ax_v^2 - 2akx_v + 2ak^2 + bx_v - bk + c \\
& \Longrightarrow ax_v^2 - ax_v^2 + 4akx_v + 2ak^2 - 2ak^2 + bx_v - bx_v + c - c = -2bk \\
& \Longrightarrow 4akx_v = -2bk \\
& \Longrightarrow x_v = \frac{-2bk}{4ak} = \frac{-b}{2a}
\end{aligned}
$$

Figura 44 – Determinando a fórmula da abscissa do vértice.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/crspdjtr acesso em 08 de julho de 2022)

No processo de demonstração estamos fazendo o que Duval chama de tratamento. Por fim, vale destacar que além de exercícios resolvidos, também propomos aos estudantes um *applet* que trabalha com as representações algébrica e geométrica. Vejamos na figura 45.

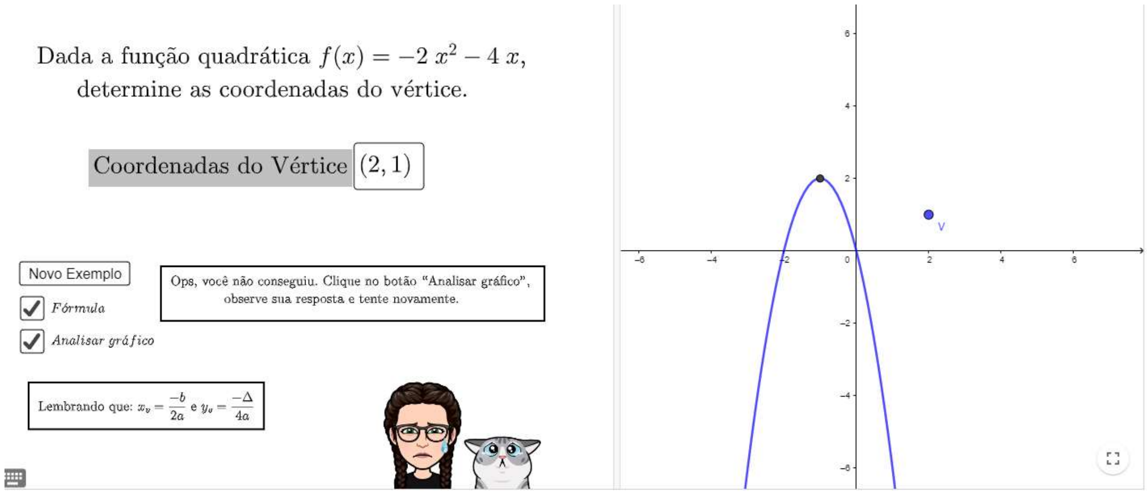


Figura 45 – Exercício 1 – Determinando as coordenadas do vértice.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/crspdjtr acesso em 08 de julho de 2022)

O *applet* conta com *feedback* automático de certo ou errado, uma ajuda para lembrar a fórmula do vértice e ainda possui uma possível análise gráfica. A análise gráfica possui o objetivo de auxiliar o estudante a localizar o ponto escolhido por ele, que chamamos de V, e de fato, observar onde está o vértice da parábola.

A página seguinte chamamos de "Valor de máximo, ou mínimo, e imagem". Iniciamos definindo o que, de fato, são os valores de máximo ou mínimo de uma função quadrática. A partir disso, adaptamos um *applet* utilizado na página anterior para mostrar ao estudante que tanto os pontos, quanto os valores de máximo e mínimo são determinados através do vértice da parábola. Em seguida, através de uma pergunta de reflexão, figura 46, solicitamos que o estudante altere o parâmetro a e defina quando possuímos ponto de máximo ou de mínimo.

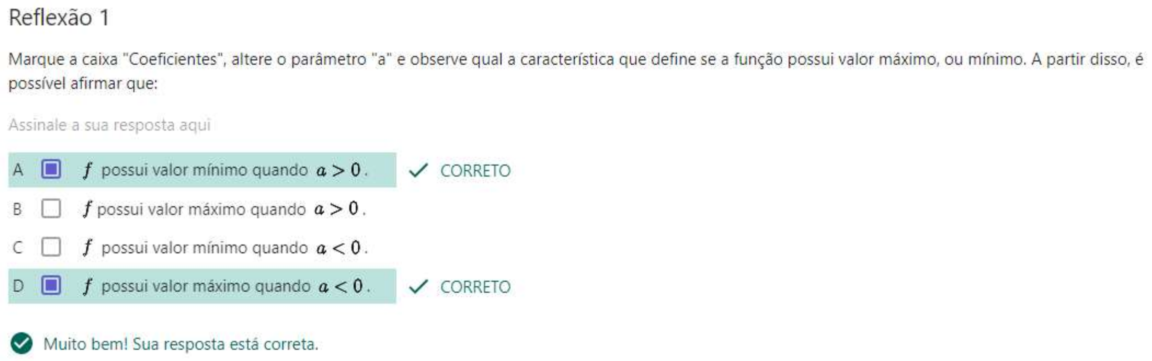


Figura 46 – Reflexão 1 – Valor de máximo, ou mínimo, da função.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/pez4rxhq acesso em 08 de julho de 2022)

O estudante também possui *feedback* automático, gerado pela própria plataforma. Isso acontece porque, ao prepararmos a pergunta na plataforma, já deixamos indicado quais serias as opções corretas. Logo em seguida, utilizamos também de outras questões de múltipla escolha para que o estudante altere todos os coeficientes num *applet*, definindo uma função específica e explicitando os valores de máximo ou mínimo da função dada. Vejamos na figura 47, abaixo.

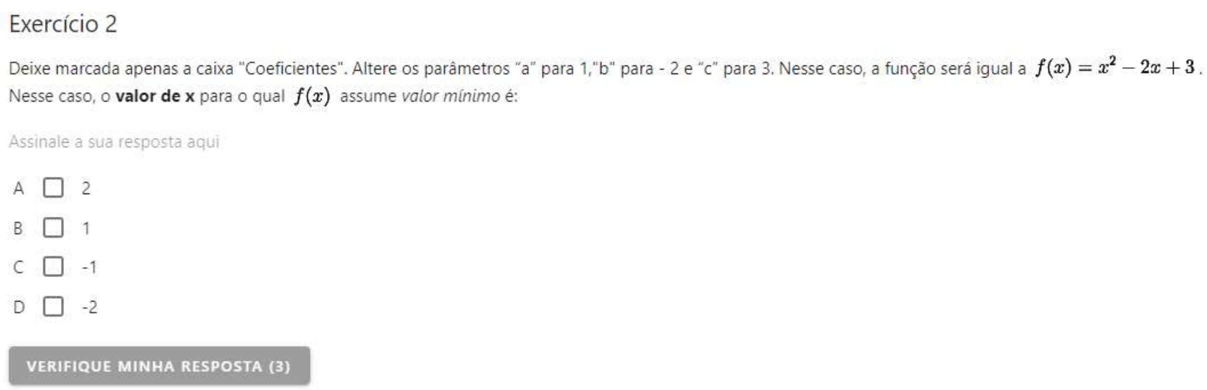


Figura 47 – Exercício 2 – Valor mínimo da função.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/pez4rxhq acesso em 08 de julho de 2022)

Ainda na mesma página, damos início à definição do conjunto imagem. Decidimos então apresentar a definição através de um texto e, logo em seguida, utilizamos um *applet* para que o estudante possa observar o que ocorre no gráfico. Vejamos nas figuras 48 e 49 a seguir.

A partir do ponto de máximo ou mínimo, ou seja, o valor da imagem que função pode assumir é possível determinar o **conjunto imagem** de f. Sendo assim, temos que:

Quando $a > 0$, o conjunto imagem será dado por $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$;
Quando $a < 0$, o conjunto imagem será dado por $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$.

Vejamos no exemplo a seguir, em roxo, os possíveis valores que a imagem da função pode assumir.

Figura 48 – Definição do conjunto imagem da função quadrática.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/pez4rxhq acesso em 08 de julho de 2022)

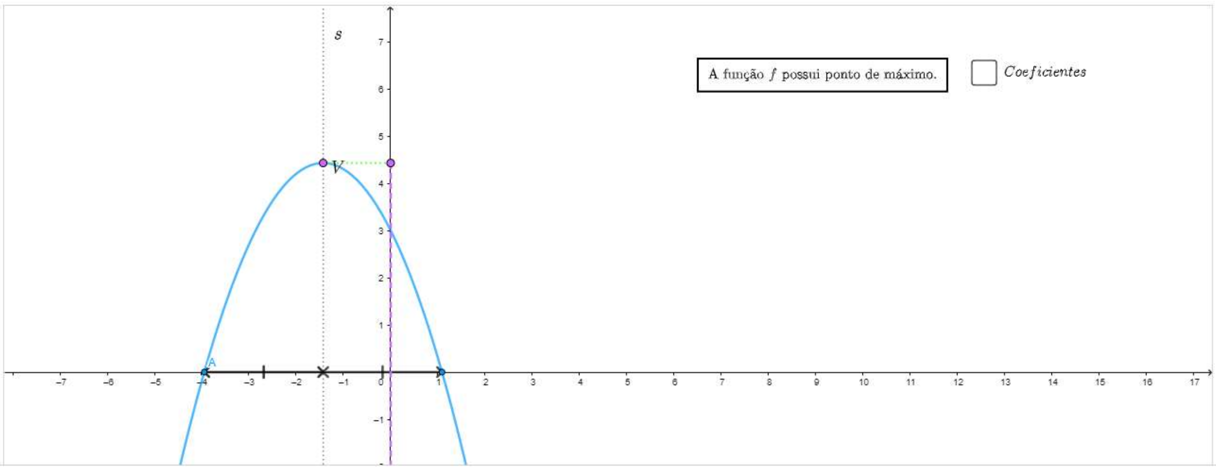


Figura 49 – Definição geométrica do conjunto imagem da função.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/pez4rxhq acesso em 08 de julho de 2022)

No *applet* representado na figura 49 trabalhamos com dois registros de representações semióticas diferentes. Implicitamente é possível perceber o processo de conversão da representação geométrica para a representação algébrica. O conjunto imagem está representado na sua forma geométrica pela semirreta rosa. Nessa atividade, espera-se que o estudante possa determinar o conjunto imagem por meio de uma representação algébrica apenas analisando o gráfico. Ou seja, o estudante não precisa fazer cálculos para determinar as coordenadas do vértice, porque essas já estão explícitas no gráfico. Por fim, utilizamos alguns exercícios em que o estudante altera os parâmetros definindo uma função e obtém o conjunto imagem.

A última página, chamada de “Exercícios – Vértice e Conjunto Imagem”, busca trabalhar exercícios estudados nas páginas anteriores. Temos dois exercícios a serem destacados na página, sendo o primeiro deles um *applet* que solicita o cálculo do valor de máximo, ou mínimo, da função.

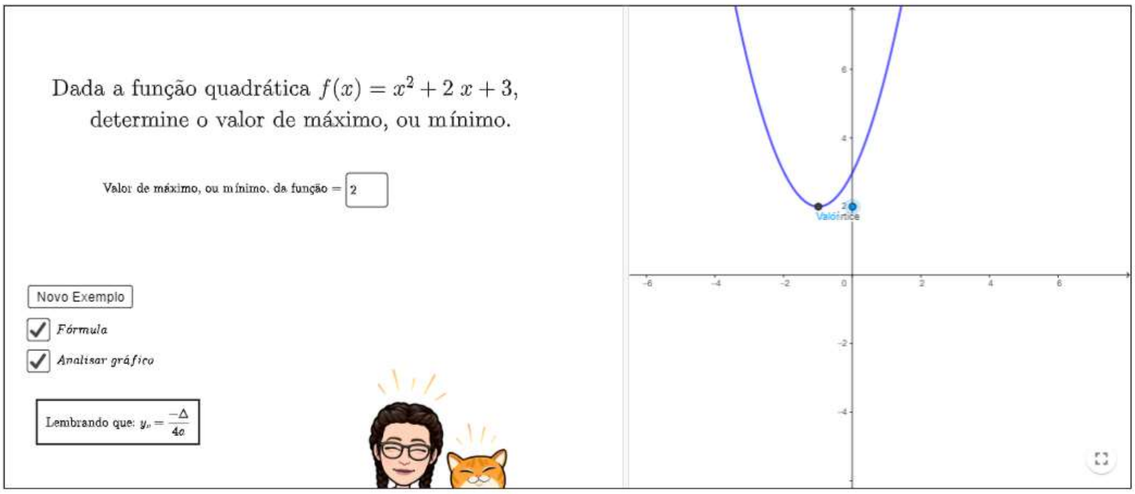


Figura 50 – Cálculo do valor de máximo, ou mínimo, da função
(Disponível em: http://www.geogebra.org/m/udgkbw6h acesso em 12 de julho de 2022)

No *applet* da figura 50 o estudante pode analisar graficamente o vértice da função e o valor de máximo, ou mínimo, escolhido. Também podemos destacar o *applet* chamado "Quadratic Cannon", em formato de jogo. Como podemos ver na figura 51, a seguir.

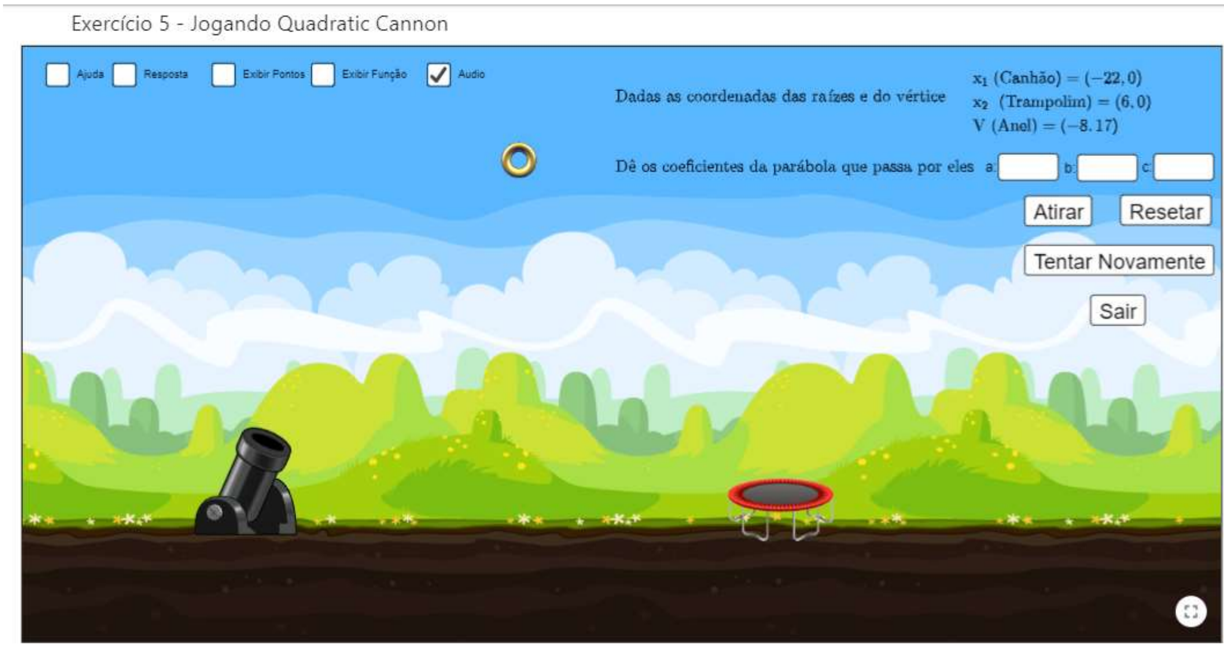


Figura 51 – Quadratic Cannon
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/udgkbw6h acesso em 12 de julho de 2022)

O objetivo do jogo é disparar o canhão com o personagem, de modo, que ele colete o anel. Note que o estudante possui as coordenadas das raízes da função, o vértice e precisa determinar os coeficientes da função que descreverá a trajetória parabólica que é a solução correta. Além disso, vale ressaltar que o *applet* conta com caixas de ajuda, resposta, exibição de pontos e exibição da função. É uma atividade lúdica e educativa.

O quinto capítulo propõe ao estudante o estudo do sinal da função e isso envolve a resolução de inequações quadráticas. Não exploramos métodos algébricos para resolução de inequações. Por outro lado, mostramos como podemos explorar algumas inequações por meio do estudo do sinal da função quadrática. Chamamos este capítulo de “Estudo do Sinal da Função Quadrática” e o mesmo possui o objetivo de oferecer algumas condições para que os estudantes desenvolvam a seguinte habilidade da BNCC:

- (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

O capítulo possui duas páginas, sendo a primeira delas chamada de “Estudo do Sinal (ou Inequações Quadráticas)”. Introduzimos o estudo do sinal da função de maneira básica e objetiva, explicando que analisaremos o sinal da função para determinados valores de x, ou seja, se $f(x)$ para tais valores é positiva, negativa ou nula. Logo após, utilizaremos um vídeo seguido de um *applet* que possui o objetivo de mostrar ao estudante como o sinal da função se comporta. O vídeo pode ser visto através do seguinte link: https://www.geogebra.org/m/smaghjnr. A figura 52 abaixo apresenta um *applet* dessa atividade.

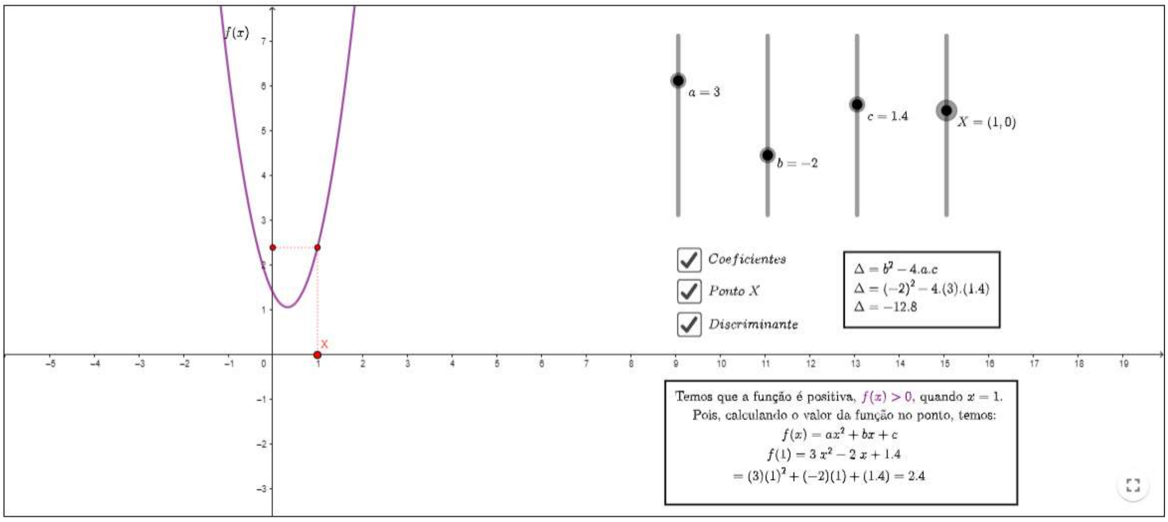


Figura 52 – Estudo do sinal da função quadrática.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/smaghjnr acesso em 08 de julho de 2022)

A partir do *applet* mostrado na figura 52, criamos 5 reflexões diferentes. O intuito de cada reflexão é que o estudante altere os coeficientes e o controle deslizante x, perceba as alterações no cálculo do discriminante. Com isso, espera-se que ele consiga responder as perguntas dos momentos de reflexão. Por fim, propomos dois *applets* com exercícios para os estudantes, em que o primeiro utiliza apenas representação algébrica e solicita que o estudante determine os intervalos em que as funções são positivas ou negativas. Espera-se que o estudante perceba pelo *applets* anterior que precisará calcular os zeros da função. Já o segundo exercício apresenta a função na sua representação geométrica e solicita que o estudante determine o intervalo em que a função é positiva ou negativa. Vejamos na figura 53 a seguir.

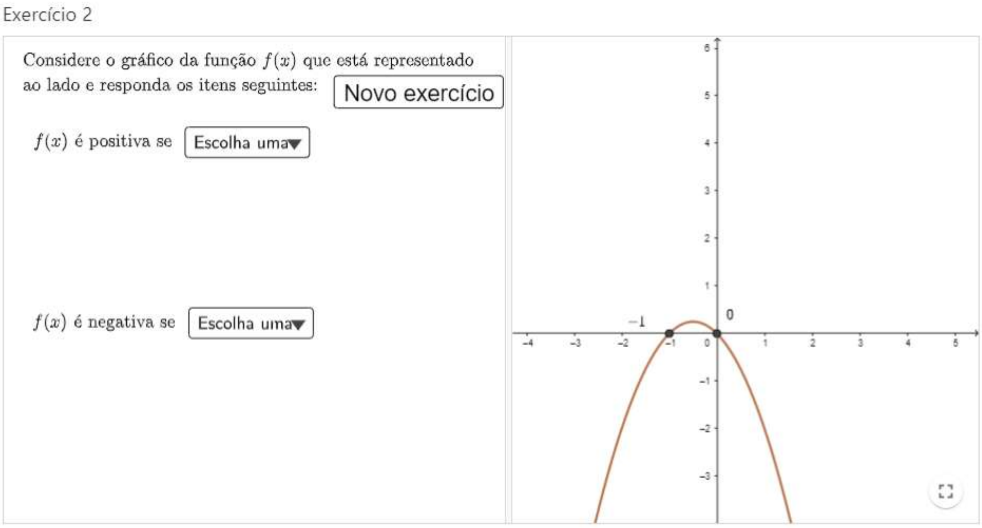


Figura 53 – Exercício 2 – Determinando o sinal da função.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/smaghjnr acesso em 08 de julho de 2022)

A segunda página é chamada de "Exercícios Estudo do Sinal" e possui diferentes exercícios propostos ao estudante. Entre eles, apresentamos um exercício resolvido, como mostramos na figura 54. Trata-se de um exemplo de exercício clássico dos livros didáticos em que o intuito é mostrar ao estudante que podemos analisar quais as condições que devem ser satisfeitas para que uma função seja sempre positiva.

Exercício Resolvido

Para quais valores de m a função $f(x) = x^2 + 5x + 5m$ assume valores positivos para todo x real?

Resolução: Sabemos que a função assume valores positivos para todo x real quando $a > 0$ e $\Delta < 0$. Note que $a > 0$ é satisfeito, deste modo, vamos calcular o valor do discriminante, onde $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Temos que $a = 1$, $b = 5$ e $c = 5m$, substituindo na fórmula ficamos com:

$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(1)(5m) = 25 - 20m$, ou seja, $25 - 20m < 0 \Longrightarrow -20m < -25 \Longrightarrow m > \frac{5}{4}$

Portanto, a função assume valores positivos para todo x real quando $m > \frac{5}{4}$.

Figura 54 – Exercício resolvido – Função positiva.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/hrdxb4aq acesso em 09 de julho de 2022)

Na figura 55, propomos ao estudante um exercício em que ele precisa determinar três pontos de modo que a função seja positiva num certo intervalo. Note que o intuito é que o estudante perceba que dois desses pontos deverão ser as raízes da equação e o terceiro poderá ser qualquer um, desde que ele determine a concavidade correta. O *applet* contém *feedbacks* automáticos que indicam quantos pontos estão corretos, que alertam também sobre a concavidade. Também fornece um link com vídeo contendo explicações, dica e uma possível solução.

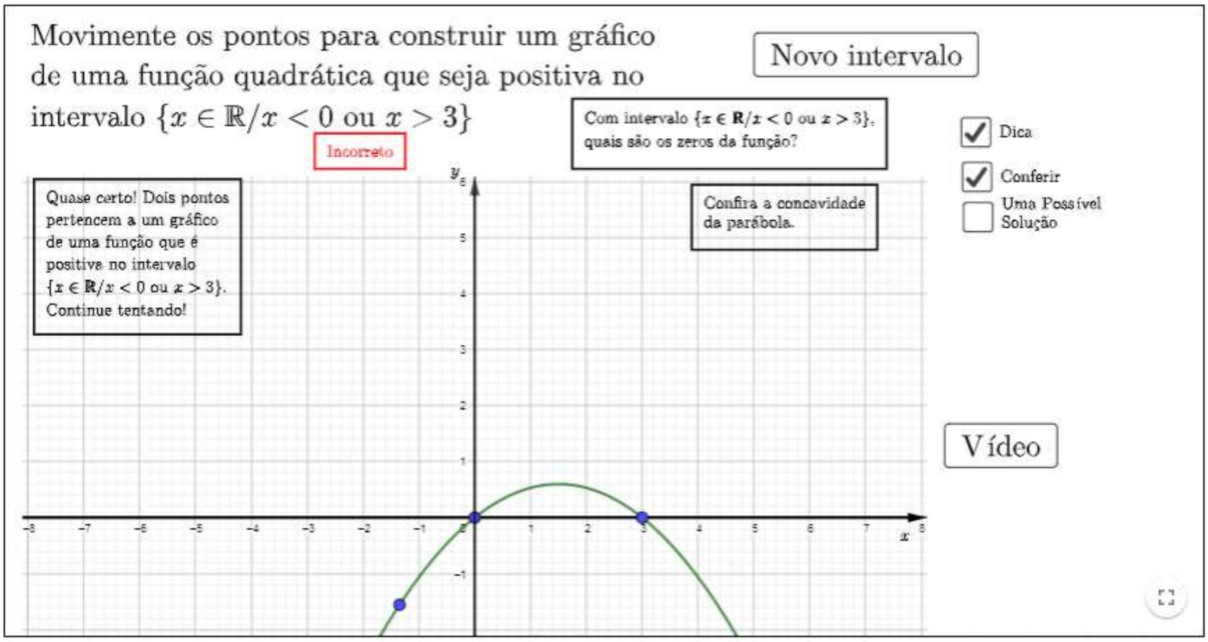


Figura 55 – Exercício 6 – Determine os pontos para que a função seja positiva.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/hrdxb4aq acesso em 09 de julho de 2022)

O último capítulo chamamos de “Problemas Envolvendo a Função Quadrática” e o objetivo dele é oferecer algumas condições para que os estudantes desenvolvam as seguintes habilidades da BNCC:

• (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

• (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.

Na primeira página do capítulo, chamada de “Área Máxima de um Retângulo”, temos problemas envolvendo funções quadráticas e área do retângulo. Desse modo, a página aborda diferentes exercícios em que o estudante trabalhará a área máxima que um retângulo pode obter. Vejamos a seguir alguns dos exercícios propostos aos alunos.

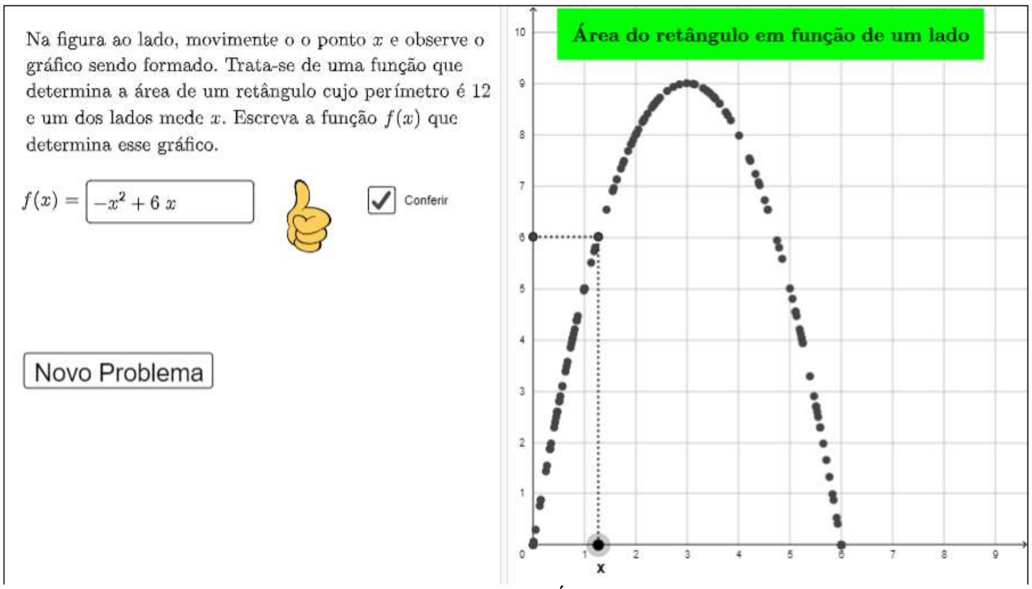


Figura 56 – Exercício 3 – Área do retângulo.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/gedcyf4e acesso em 09 de julho de 2022)

O exercício mostrado na figura 56 solicita ao estudante que determine a função $f(x)$ que representa a área de um retângulo cujo perímetro é 12. O *applet* possui uma representação gráfica da função que modela tal situação. Se o estudante souber fazer a conversão da representação gráfica para a algébrica poderá resolver o exercício.

Outro exercício mostrado na figura 57 solicita que o estudante determine a função $f(x)$ que representa a área de um retângulo cujo perímetro é 8 e um lado medindo x. Também pede que o estudante posicione dois pontos que represente o gráfico da função definida. O intuito é que o estudante lembre o que foi visto no capítulo três, veja que a função definida está na forma incompleta e que podem determinar as raízes de forma simples, com o método de isolar o x.

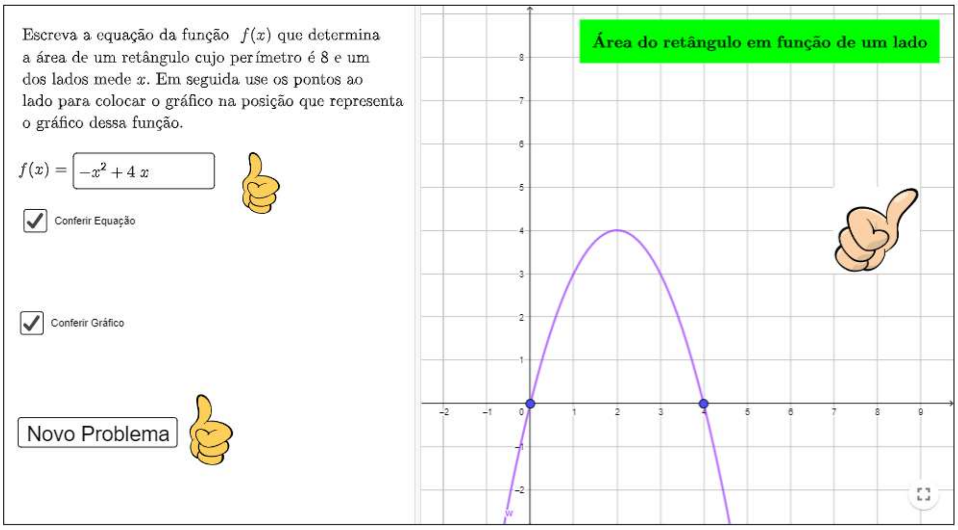


Figura 57 – Exercício 5 – Determinando a área em função de x.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/gedcyf4e acesso em 09 de julho de 2022)

Ambos os exercícios possuem *feedback* automático, que além de estimular o estudante também oferece imediatamente uma resposta para as suas ações.

Em seguida, passamos para a próxima página que se chama “Área de um retângulo dentro de um triângulo retângulo”. Utilizamos o mesmo padrão do utilizado na página anterior, trabalhando apenas com exercícios. Vejamos na figura 58 um exercício em que o estudante deve determinar a área de um retângulo inscrito num triângulo retângulo de lados 6 e 7.

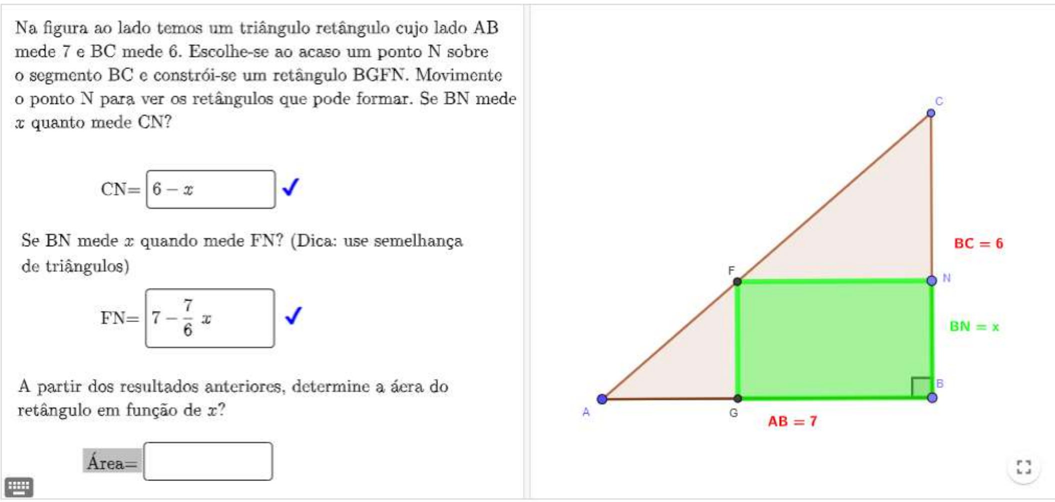


Figura 58 – Exercício 2 – Área de um retângulo dentro de um triângulo retângulo.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/bwpmujex acesso em 09 de julho de 2022)

Para que o estudante não encontre apenas as informações algébricas e parta disso para resolver o problema, o exercício possui uma representação geométrica que permite que o estudante possa ver diferentes retângulos no interior do triângulo, facilitando a interpretação do que se pede.

Na página seguinte trabalhamos com exercícios sobre lançamentos. Chamada de "Problemas envolvendo lançamentos", buscamos trazer exercícios onde o estudante responda algebricamente e tenha suas representações geométricas ao lado. O intuito é que o estudante perceba o que está de fato acontecendo com a função. Vejamos na figura a seguir.

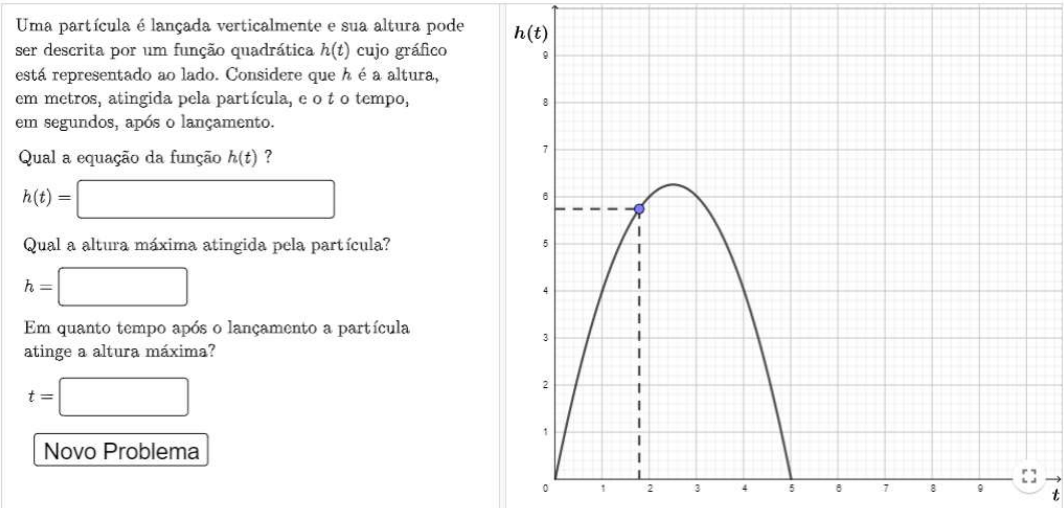


Figura 59 – Exercício 1 – Problemas envolvendo lançamentos.
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/zdsxftfd acesso em 16 de julho de 2022)

Neste exercício solicitamos que o estudante determine a equação da função $h(t)$, onde o mesmo pode visualizar, no gráfico, a concavidade da parábola, o vértice e suas raízes. Ele também precisará determinar a altura máxima e o tempo até o lançamento obter altura máxima. Por um lado, temos esse exercício onde é proposto novos exemplos, por outro, temos um exercício único, porém apresentado através de um *applet*. Como vemos a seguir.

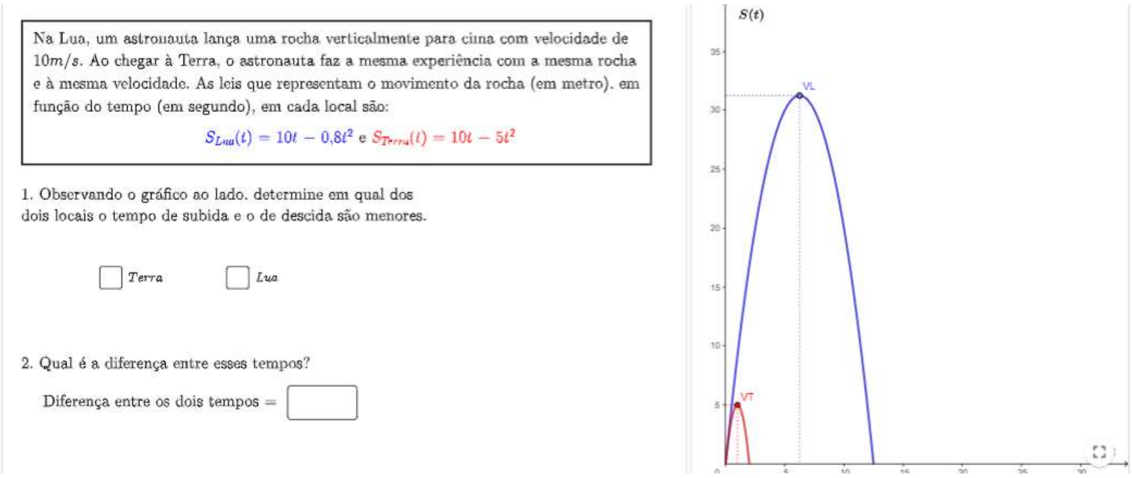


Figura 60 – Exercício 2 – Problemas de lançamentos
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/zdsxftfd acesso em 16 de julho de 2022)

No *applet* da figura 60, trabalhamos a relação entre duas funções em que o estudante precisa perceber qual gráfico possui menor subida e descida. E, também, calcular a diferença entre os tempos de subida e descida da rocha. O intuito de ambos os exercícios é trabalhar com as diferentes representações.

Para finalizar, a página conta com exercícios sobre o lucro máximo. Chamada de "Problemas envolvendo Custos e Lucros". Com o mesmo objetivo de integrar as diferentes representações do objeto matemática, foi proposto o exercício mostrado na figura 61.

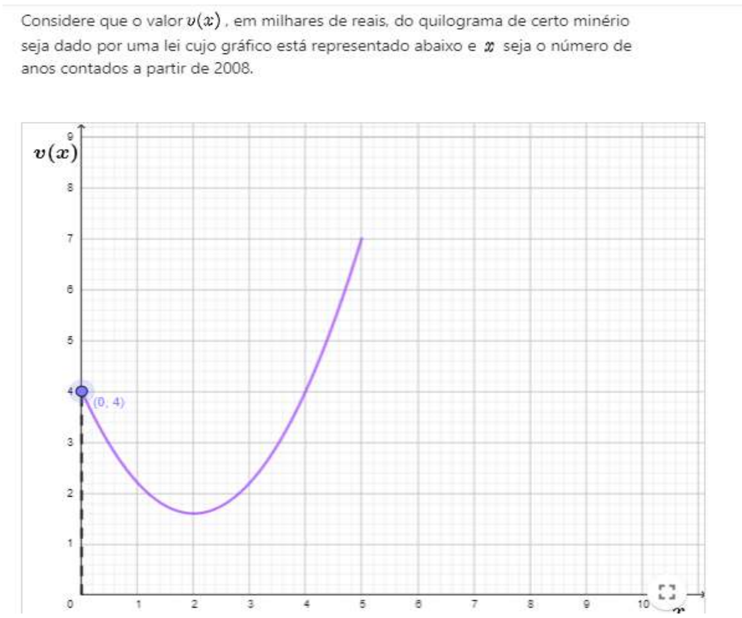


Figura 61 – Exercício 2 – Problemas envolvendo custos e lucros
(Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xse7uxny acesso em 16 de julho de 2022)

Trouxemos novamente exercícios na sua forma algébrica para que o estudante possa interpretar as informações e solucionar o problema. Logo abaixo do exercício é possível encontrar algumas perguntas em caixas de textos, como por exemplo, “Em qual ano o valor do quilograma do minério teve seu menor valor?” ou “Quais foram os anos em que o quilograma custou 4 mil?”. Também é possível perceber que o ponto está livre sobre a parábola, fazendo com que o estudante possa interpretar o problema e obter as respostas das perguntas propostas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciarmos esse trabalho o nosso maior propósito era responder à pergunta de pesquisa “Quais as possíveis contribuições de um Livro Dinâmico de Matemática para o ensino das Funções Quadráticas?”.

Para respondermos essa pergunta primeiramente buscamos estudar as teorias que envolvem a aprendizagem matemática, fundamentam o conceito “Livro Dinâmico” e tratam do ensino das funções. Também estudamos a BNCC e como o ensino da Função Quadrática era abordado em dois livros didáticos. Esses estudos foram fundamentais para conhecermos as características dos Livros Dinâmicos, algumas dificuldades no ensino das Funções Quadráticas e algumas limitações do livro didático impresso. O estudo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica também nos forneceu informações importantes sobre o que era necessário para aprender matemática.

Ao final, produzimos o livro dinâmico “Aprendendo a Função Quadrática com a plataforma GeoGebra”. Os resultados apresentados no capítulo 4 mostram os indícios das contribuições desse livro para o ensino da Função Quadrática. Os primeiros indícios estão relacionados com as orientações da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval. As atividades propostas no livro dinâmico buscam explicitar e integrar, de maneira simultânea, as diferentes representações da Função Quadrática. Além disso, as atividades exploram os tratamentos e conversões de forma que o estudante tenha mais condições de perceber as relações entre as representações. Muitas atividades exploram os cálculos algébricos por meio de etapas (com controles deslizantes ou caixas para exibir ou esconder objetos). Tudo isso pode contribuir para atender uma recomendação básica da teoria do Duval: “[...] possibilitar a exploração de todas as variações possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes da representação em outro registro” (DUVAL, 2009, p. 101).

Outro indício de contribuição está relacionado com os *feedbacks* automáticos, que podem auxiliar os estudantes quando estiverem estudando sozinhos. Várias atividades possuem *feedbacks* de acerto ou erro, *feedback* com um possível alerta ou explicação sobre o erro do estudante, *feedbacks* com ajudas que auxiliam o estudante durante o processo de resolução do exercício. Também consideramos um indício de contribuição o fato de as atividades conterem mais exemplos do que o que são apresentados nos livros impressos. Os exemplos não aparecem todos dispostos de uma vez como acontece nos livros impressos. Vão aparecendo conforme a vontade/necessidade do estudante por meio de um clique num botão.

Quando iniciamos a construção do projeto, tínhamos o propósito de verificar na prática as contribuições do livro dinâmico de funções quadráticas. Ou seja, pretendíamos experimentá-lo com estudantes do primeiro ano do Ensino Médio. Acreditamos que se tivéssemos tido condições de fazer isso, teríamos muito mais do que indícios. Poderíamos ter evidências das contribuições do livro no ensino de funções quadráticas. Infelizmente, não pudemos fazer experimentações por motivos relacionados ao tempo disponível para a execução da pesquisa.

Se por um lado não temos evidências concretas sobre as contribuições do livro dinâmico para o ensino da Função Quadrática, por outro temos as evidentes contribuições desse livro para a pesquisadora que o desenvolveu. A pesquisadora, enquanto graduanda e professora, teve a oportunidade de conhecer uma teoria extremamente importante que pode auxiliá-la na compreensão das dificuldades dos estudantes. Fez a pesquisadora refletir sobre como a integração das diferentes representações dos objetos matemáticos é fundamental para a construção do conhecimento matemático pelo estudante. A pesquisadora também aprendeu muito sobre a plataforma GeoGebra, o desenvolver atividades, análise de livro didático e estratégias de *feedbacks* aos estudantes. Também, foi muito positivo a sensação de que o livro pode beneficiar tanto a pesquisadora, quanto outros colegas de profissão. Por fim, concluímos com a expectativa que o livro dinâmico possa contribuir para a aprendizagem do estudo das funções quadráticas. Um grande prazer da pesquisadora, enquanto professora de matemática, é ajudar os estudantes.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOHRER, Alice. **Uma proposta de estudo de função quadrática na educação de jovens e adultos: integrando dispositivo móvel, WhatsApp e GeoGebra.** Abril, 2020. 170 f., Dissertação, Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

BRITO, Ramon G. S; BRANCO, Mauricio N.; BRITO, Estela M. S. **Dificuldade de estudante em resolver equação quadrática no ensino médio: uma pesquisa quantitativa.** Science and Knowledge in Focus. Macapá, v. 2, n. 1, p. 05-17, jun. 2019. ISSN 2594-9233.

CRESWELL, John W. **Projeto de Pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. 3. Ed. – Porto Alegre: Artmed, 2010. 296 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações. Ensino Médio**. 3. ed. – São Paulo: Ática, 2016.

DUVAL, R. (2009). ***Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.*** (L. F. LEVY & M. R. . SILVEIRA, Trans.) (1st ed.). São Paulo: Livraria da Física.

DUVAL, R. (2011). ***Ver e Ensinar a Matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas***. (T. M. M. CAMPOS, Ed.) (Vol. 1). São Paulo: PROEM.

FARIA, Elaine Turk; **O professor e as novas tecnologias.** Capítulo publicado no livro: ENRICONE, Délcia (Org.). Ser Professor. 4 ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004 (p. 57-72).

JORGE, Jair Lucas; SAVIOLI, Angela M. P. D. **DIFICULDADES DE ESTUDANTES DA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO SOBRE REPRESENTAÇÕES DO OBJETO MATEMÁTICO FUNÇÃO: A FUNÇÃO QUADRÁTICA.** Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

LEONARDO, Fabio Martins de. (Ed.) **Conexões com a matemática.** 3 ed. – São Paulo: Moderna, 2016.

NASCIMENTO, Eimard G. A. **AVALIAÇÃO DO USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE GEOMETRIA: REFLEXÃO DA PRÁTICA NA ESCOLA.** GeoGebra Uruguay 2012. ISSN 2301-0185

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **GGBOOK: uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica geogebra com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de narrativas matemáticas dinâmicas.** 2015. 246 f., il. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

NÓBRIGA, Jorge C. Costa; SIPLE, Ivanete Zuchi. **Livros Dinâmicos de Matemática**. Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, v. 9, n. 2, p. 78-102, 2020 - ISSN 2237-9657.

NÓBRIGA, Jorge C. Costa; DANTAS, Sérgio Carrazedo. **Uma Proposta de Atividade com *Feedbacks* Automáticos no GeoGebra.** Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS – v. 14, n. 34 – Ano 2021.

OLIVEIRA, Vania Doneda de; VITOLO, Ana Paula Mayara; SILVA, Andrei Maia e. **Uso do GeoGebra à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** Anais dos Workshops do Congresso Brasileiro de Informática na Educação, [S.l.], p. 614, nov. 2019. ISSN 2316-8889. doi:http://dx.doi.org/10.5753/cbie.wcbie.2019.614.

REFATTI, Liliane Rose; BISOGNIN, Eleni. **ASPECTOS HISTÓRICOS E GEOMÉTRICOS DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA.** Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas, S. Maria, v. 6, n. 1, p.79-95, 2005. 79 ISSN 1981-2841.

REIS, Fabiao Santana. **UMA PROPOSTA DE ESTUDO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS MEDIADAS PELA TECNOLOGIA.** 2017, 63 f. Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT – Dissertação Mestrado – Universidade Federal da Bahia, Bahia, 2017.

RIBEIRO JUNIOR, O. A.; VIEIRA, B. M. .; COSTA, R. G. da . **Duval Raymond theory in teaching mathematical functions.** Research, Society and Development, [S. l.], v. 10, n. 3, p. e27310313325, 2021. DOI: 10.33448/rsd-v10i3.13325.

SILVA, Willian Ribeiro. **APLICAÇÃO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS.** SynThesis Revista Digital FAPAM, Pará de Minas, v.5, n.5, 160 – 185, abr. 2014. ISSN 2177-823X.

SILVA, A., & TELES, R. (2020). **Convergências entre a abordagem do livro didático e o ensino de função quadrática: um olhar sob o ponto de vista dos registros de representação semiótica.** *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 22*(2), 604-634. doi:https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p604-634

SILVA, Andreza S; TELES, Rosinalda Aurora M. **Convergences between textbook and the quadratic function teaching: a look from the semiotic representation registry perspective.** Educação Matemática Pesquisa : revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. - São Paulo. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. São Paulo, v. 22, n. 2, p. 604-634, 2020. doi:https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p604-634

SILVA, Carolina F.; BISOGNIN, Vanilde. **Teoria de registros de representações semióticas e sistemas lineares: contribuições de uma sequência didática.** Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis, v. 16, p. 01-21, jan./dez., 2021 – INSS 1981-1322. DOI: 10.5007/1981-1322.2021.e79048