UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Luiz Felipe Garcia

Introdução à Matemática Condensada

Orientador: Abdelmoubine Amar Henni

Florianópolis

2022

0.1 Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, principalmente minha mãe, Janete, meu pai, Sandro e meu irmão, Augusto que me ajudaram quando eu mais precisei e que me apoiaram por toda a minha jornada no curso de matemática.

Obrigado professor Felipe por me orientar por um tempo e por ter me acompanhado no início da minha jornada acadêmica. Nunca vou esquecer o período que aprendi Álgebra e Álgebra Comutativa supervisionado por ti. Uma das minhas memorias mais felizes na matemática foi ter conseguido entender a prova do teorema do isomorfismo para anéis e ter apresentado ao Felipe.

Meu sincero agradecimento ao professor Amar que aceitou me orientar. Me desculpe por mudar de tema 500 vezes e obrigado por ter aceitado a troca de tema todas as vezes e em especial a aceitar a fazer sobre condensados que é um difícil tema de se trabalhar por ser tão recente e ter pouquíssimas referências. Nossos encontros foram muito divertidos e proveitosos.

Muito obrigado professor Eduardo Tengan, conheci seu livro de teoria dos números antes mesmo de entrar na matemática e foi a partir dele que me interessei por aritmética. Quando entrei na UFSC nem sabia que ele trabalhava lá e quando na primeira fase do curso eu descobri isto, fui atrás dele e pedi para ele me orientar, infelizmente isso não foi possível, porém ele me deu varias dicas para um aluno interessado em Teoria Algébrica dos Números .Uma das coisas que ele me falou foi a começar a estudar Geometria Algébrica cedo, conselho que segui a risca e que me levou a conhecer meu livro favorito de matemática: "álgebra comutativa em quatro movimentos", que me levou ao trabalho do meu matemático favorito Alexander Grothendieck, a outros trabalhos de matemáticos brilhantes como Peter Scholze e Jacob Lurie. O meu primeiro encontro com o Professor Tengan foi o estopim para eu conhecer o tipo de matemática que eu gosto. Durante toda a graduação ele me deu diversos conselhos que marcaram minha formação acadêmica.

Quero agradecer aos professores professores Peter Scholze e Dustin Clausen que além de servirem como grande inspiração para mim, foram muito humildes quando falei com eles. Com o professor Scholze eu só interagi via e-mail e via mathoverflow, ele me insentivou a escrever a tese e me indicou várias referências obscuras de Matemática Condensada e Teoria de Topos. Já o professor Clausen falou comigo por vídeo em um seminário que ele mesmo apresentou e quando eu falei que estava fazendo meu TCC sobre condensados ele reagiu com um "Awesome!" bem empolgado e me disse que a responsabilidade do formalismo de Matemática Condensada vingar seria dos jovens matemáticos como eu trabalharem nela e aderirem a teoria, fiquei muito lisonjeado e feliz ao ouvir as palavras dele e com certeza me serviu de combustível para eu permanecer forte em meus estudos.

Agradeço ao professor Renan Mezabarba, seu livro em produção de Topologia Geral é a minha primeira opção de referência quando tenho alguma dúvida topológica. Obrigado pelas várias dúvidas que você me tirou e pelo tempo gasto conversando comigo no Twitter. E obrigado por ler e corrigir a versão prévia desse trabalho.

Quero agradecer aos meus amigos Bernardo e Ricardo por me acompanharem durante a graduação e por fazer essa difícil tarefa de se graduar em matemática ser mais divertida, demos boas risadas. Obrigado, João Ruiz meu veterano que me deu várias valiosas dicas durante todos esses quatro anos e por me fazer sentir menos sozinho como estudante de Geometria Aritmética. Obrigado, Francisco e Júlio pelas discussões matemáticas e filosóficas. Obrigado também ao Thiago Landim que foi o ponta pé final para jogar 80 páginas do TCC sobre esquemas que eu estava escrevendo no lixo e começar um texto sobre condensados do zero.

Agradeço também a professora Alda, ao professor Paulinho, ao professor Sergio Tadao, a professora Marianna, ao professor Jauber, ao professor Daniel Gonçalves e ao professor Koller por terem sido excelentes professores.

Sumário

For me, mathematics started with Grothendieck.

Peter Scholze, Lectures grothendieckiennes.

0.2 Prefácio

Existem vários motivos possíveis para uma pessoa se interessar por matemática, alguém pode fazer matemática para entender melhor o mundo a nossa volta já que ela é uma das principais linguagens para se fazer ciência, ou uma pessoa pode achar que os objetos matemáticos em si são reais e que estudá-los é conhecer melhor a realidade; mas para mim nunca foi sobre isso[1]. Sempre fui uma pessoa aficionada por jogos e matemática para mim é o jogo mais divertido que existe. Criar estratégias para demonstrar algo, resolver problemas, *craftar* objetos fazem parte do ofício de um *player* de matemática.

Outro aspecto que gosto na matemática é o artístico, principalmente quando se trata de criação de teorias matemáticas e na graduação pude conhecer um pouco do trabalho de grandes artistas, como Grothendieck, o grupo Bourbaki, Jacob Lurie, Peter Scholze e Dustin Clausen. Este trabalho é uma introdução ao formalismo da Matemática Condensada, que diz respeito a obra mais recente dos matemáticos Scholze e Clausen. Essa teoria também foi desenvolvida de forma independente pelos professores Peter Haine e Clark Barwick. Condensados se propõem a ser uma alternativa para Topologia nas situações em que nossos objetos geométricos carregam uma estrutura algébrica.

Os principais requisitos para uma leitura proveitosa desse texto são um bom curso de álgebra, topologia e de teoria das categorias. Também é bom uma familiaridade com teoria de feixes, por isso no segundo capítulo escrevemos uma introdução a teoria de feixes com todas as provas, mas se o leitor já está familiarizado com feixes recomendamos ir direto para ação no primeiro capítulo, não há problema pois os capítulos são independentes, os resultados de teoria das categorias que vão além de um (bom) primeiro curso estão listados no apêndice e é dado uma referência onde há uma demonstração. No capítulo 2 pegamos um pouco mais pesado em Teoria das Categorias.

Todo anel é comutativo com unidade nesse trabalho. Usamos $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ para denotar os conjuntos dos números naturais (com 0), inteiros, racionais, p-ádicos, reais e complexos respectivamente. $\mathbf{F}_q$ é o corpo finito com q elementos. Para A um anel denotamos $A[T]$ o anel de polinômios com coeficientes em A e $A[[T]]$ o anel de séries formais com coeficientes em A. Denotaremos por Set, Top, CHaus, Ab as categorias dos conjuntos, espaços topológicos, espaços topológicos compactos e Hausdorff, grupos abelianos respectivamente.

[1]Não que eu não ache interessante esta discussão.

0.3 Resumo

Este trabalho procura introduzir o formalismo da Matemática Condensada apresentado em [Pet19b] pelos matemáticos Peter Scholze e Dustin Clausen. Desenvolvemos o básico da teoria feixes em espaços topológicos, em seguida falamos de feixes sobre sites e definimos o que é um conjunto condensado. São demonstrados vários alguns teoremas sobre conjuntos e grupos abelianos condensados, em especial, provamos que existe uma imersão plenamente cheia de espaços compactamente gerados para conjuntos condensados e que a categoria de grupos abelianos condensados é abeliana.

Palavras-chave: Matemática Condensada, conjuntos condensados, Topologia, Teoria das Categorias.

Matemática Condensada

Introdução

O problema que inspira a Matemática Condensada é o seguinte:

Como fazer álgebra quando objetos algébricos carregam uma topologia?

Esse problema aparece em várias partes diferentes da matemática como análise funcional, geometria algébrica, topologia e teoria dos números e em cada área há uma abordagem diferente para se resolver ele. A teoria que iremos esboçar neste texto busca dar uma resposta universal a como lidar com essa situação substituindo a noção de espaço topológico pela noção de conjunto condensado.

Essa mudança parece ser um pouco radical, mas para os matemáticos Peter Scholze e Dustin Clausen as vantagens dessa nova teoria fazem essa revolução valer a pena. Vamos olhar mais de perto para um dos problemas que ocorrem quando se mistura topologia com álgebra.

Exemplo 0.3.1 (A categoria dos grupos topológicos não é abeliana)**.** Sejam $\mathbf{R}_{\text{disc}}$ o grupo topológico dos números reais com a topologia discreta e $\mathbf{R}$ os números reais com a topologia usual. O morfismo inclusão $i : \mathbf{R}_{\text{disc}} \to \mathbf{R}$ apesar de ser uma bijeção, não é um isomorfismo. Veja que $\ker i = 0$ e $\operatorname{coker} i = 0$, mas i não é um isomorfismo, portanto essa categoria não é abeliana.

Observação 0.3.2. Veja que o exemplo acima também mostra que a categoria dos grupos abelianos localmente compactos não é abeliana. A categoria dos grupos abelianos **compactos e Hausdorff** é abeliana, assim temos um indício de espaços topológicos compactos e Hausdorff se misturam melhor com álgebra, vamos nos aproveitar disso na definição de conjunto condensado.

O leitor pode pensar que a patologia do exemplo acima é devido à topologia discreta ser problemática, mas isso não é verdade. Para mostrar isso vamos a mais um exemplo:

Exemplo 0.3.3 ($\mathbf{Q} \to \mathbf{R}$)**.** Considere a inclusão dos racionais nos reais (ambos usando a topologia usual) $i : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$. Veja que i é um monomorfismo e um epimorfismo[2] na categoria dos grupos abelianos topológicos, porém i não é um isomorfismo.

Exemplos similares também ocorrem na análise funcional. A inclusão $\ell^1(\mathbf{N}) \to \ell^2(\mathbf{N})$ na categoria de espaços vetoriais topológicos sobre $\mathbf{R}$ é monomorfismo e epimorfismo (note que $\ell^1(\mathbf{N})$ é denso em $\ell^2(\mathbf{N})$), porém este mapa não é um isomorfismo.

As categorias de objetos algébricos que carregam uma topologia em geral falham

[2] Na categoria dos grupos abelianos topológicos o cokernel de um morfismo $f : A \to B$ é dado por $\operatorname{coker} f = \frac{B}{\overline{f(B)}}$ em que $\overline{f(B)}$ é o fecho de $f(B)$. Lembre-se também que numa categoria abeliana um morfismo é um epimorfismo (resp. monomorfismo) se o seu cokernel (resp. kernel) é nulo.

em ser abelianas e isto é um grande problema, pois assim nessas categorias não funcionam bem as nossas ferramentes de álgebra moderna como álgebra homológica e teoria de feixes. Muitas vezes essas teorias só são bem comportadas no caso em que os espaços topológicos em questão são compacto e Hausdorff.

Buscamos uma categoria que contenha os principais exemplos de espaços topológicos, mas que tenham propriedades categóricas melhores e que sejam objetos mais compatíveis com álgebra. Um detalhe para especialistas: A categoria dos conjuntos condensados forma um topos, intuitivamente um topos é uma categoria que se parece com Set. Os condensados capturam fenômenos topológicos, porém a categoria deles é mais parecida com a categoria dos conjuntos ou categoria de feixes de conjuntos que são compatíveis com álgebra.

A nossa estratégia para definirmos conjuntos condensados é mudar de perspectiva, ao invés de pensarmos com objetos vamos pensar com as flechas! A ferramenta que vai nos ajudar a mudar de perspectiva é o lema de Yoneda.

Um espaço topológico X define o funtor contravariante

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(-,X) : \mathrm{Top}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathrm{Set} \\ Y &\longmapsto \mathrm{Hom}(Y,X) \end{aligned}$$

e acontece que, pelo lema de Yoneda, a identificação $X \mapsto \mathrm{Hom}(-,X)$, chamada de mergulho de Yoneda, é plenamente fiel, ou seja, o funtor $\mathrm{Hom}(-,X)$ carrega todas as informações de X, de forma que podemos identificá-los e ver a categoria de espaços topológicos como uma subcategoria da categoria de funtores contravariantes de Top a Set. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, um **pré-feixe em $\mathcal{C}$** é um funtor contravariante $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ e um morfismo de pré-feixe é uma transformação natural; denotamos por $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ a categoria de pré-feixes em $\mathcal{C}$. Através do mergulho de Yoneda, identificando informalmente $\mathrm{Top} \subset \mathrm{PSh}(\mathrm{Top})$ e o que acontece é que muitas vezes $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ é mais bem comportada que $\mathcal{C}$, por exemplo $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ tem limites e colimites mesmo quando $\mathcal{C}$ não tem.

Mas para a nossa teoria dar certo não precisamos definir nosso pré-feixe sobre todos os espaços topológicos, podemos nos restringir a espaços topológicos mais bem comportados e que se misturam melhor com álgebra, ao invés de ver o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(-,X)$ sobre Top vamos considerar

$$\begin{aligned} \underline{X} : \mathrm{CHaus} &\longrightarrow \mathrm{Set} \\ S &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(S,X) \end{aligned}$$

Note que $\underline{X}$ é uma restrição de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(-,X)$. Via a identificação $X \mapsto \underline{X}$ obtemos um funtor $\mathrm{Top} \to \mathrm{PSh}(\mathrm{CHaus})$ e através desse funtor podemos enxergar um espaço topológico como pré-feixe de CHaus. Assim PSh(CHaus) é um candidato a substituto da categoria Top, porém a categoria de pré-feixes em CHaus contém muitos objetos, queremos selecionar os elementos de PSh(CHaus) que são mais parecidos com $\underline{X}$ para um espaço topológico X.

$\underline{X}$ possui três propriedades importantes[3]:

(i) Há uma bijeção $\underline{X}(\varnothing) \cong \{*\}$.

(ii) Para cada $S, T \in$ CHaus há a bijeção

$$\underline{X}(S \sqcup T) \cong \underline{X}(S) \times \underline{X}(T)$$

(iii) Para $S, T \in$ CHaus e para qualquer sobrejeção $S \twoheadrightarrow T$ com produto fibrado $S \times_T S$ e projeções p_0 e p_1 para S há a bijeção

$$\underline{X}(T) \cong \big\{ f \in \underline{X}(S) \mid f \circ p_0 = f \circ p_1 \big\}$$

Essas três propriedades fazem de $\underline{X}$ um feixe sobre uma certa topologia Grothendieck (vamos discutir no texto o que isso significa). Vamos definir um conjunto condensado como um feixe sobre essa mesma topologia e durante o próximo capítulo mostraremos as boas propriedades e exemplos dessa definição.

O formalismo de Matemática Condensada já tem algumas aplicações. Essa linguagem é excelente para tratar de análise não-arquimediana (sobre $\mathbf{Q}_p$ por exemplo), existe a definição de conjunto condensado *sólido* que intuitivamente quer dizer não-arquimedianamente completo, existe um completamento chamado solidificação e um produto tensorial completo. Esse produto tensorial completo se comporta de forma parecida com os produtos tensoriais da teoria clássica de análise funcional não-arquimediana, por exemplo o produto tensorial sólido de dois espaços vetoriais de Fréchet sobre $\mathbf{Q}_p$ é isomorfo ao produto tensorial projetivo desses mesmos espaços. A categoria dos grupos abelianos sólidos formam uma categoria abeliana e gerada por compactos projetivos.

Com conjuntos condensados também é possível tratar de análise sobre $\mathbf{R}$! É possível definir a categoria dos $\mathbf{R}$-espaços vetoriais *líquidos* que são uma versão condensada de $\mathbf{R}$-espaços vetoriais completos e convexos (objetos centrais em análise funcional), os espaços líquidos contém vários dos exemplos clássicos de espaços completos e convexos, mas com a vantagem de formarem uma categoria abeliana!

A aplicação mais interessante de Matemática Condensada é a nova teoria chamada Geometria Analítica, essa teoria apresenta novos objetos chamados espaços analíticos, a

[3]Não se preocupe com a tecnicalidade dessas propriedades agora.

categoria dos espaços analíticos contém a categoria de esquemas, espaços ádicos, esquemas formais e variedades complexas... Unindo o mundo da geometria complexa, p-ádica e algébrica! Com essa linguagem é possível provar teoremas dessas três áreas de uma vez só!

As principais referências foram [Pet19b], [Ásg21] e [Mai21].

Capítulo 1

Conjuntos Condensados

1.1 Preliminares

O conteúdo desta seção é uma generalização da teoria de feixes em espaços topológicos, se o leitor não estiver habituado com esta teoria, recomendamos começar pelo capítulo 2 apesar disso não ser estritamente necessário.

A definição de conjuntos condensados não é tão simples quanto a definição de espaços topológicos, é necessário um pouco mais de maquinário para descrever o que de fato é um conjunto condensado e para desenvolver a sua rica teoria.

Uma das definições de conjunto condensado é a de que é um feixe sobre um site, para a definição clássica de feixe observe que temos que usar propriedades da categoria $\operatorname{Open} X$. A ideia de um site é ser uma categoria parecida com $\operatorname{Open} X$ no sentido de ser uma categoria com alguma noção de "cobertura". Ao invés de um conjunto X acompanhado uma topologia, teremos uma categoria $\mathcal{C}$ com produto fibrado (pense como se fosse a interseção) acompanhado de uma topologia de Grothendieck.

As principais referências para essa seção foram [Mai21], [Ásg21] e [Jon22].

Definição 1.1.1 (Topologia de Grothendieck)**.** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produto fibrado. Uma **topologia de Grothendieck** na categoria $\mathcal{C}$ é uma coleção $\operatorname{Cov}(\mathcal{C})$ de famílias de morfismos da forma $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ com $U, U_i \in \mathcal{C}$ satisfazendo a seguinte lista de axiomas:

(i) Se $V \to U$ é um isomorfismo, então $\{V \to U\} \in \operatorname{Cov}(\mathcal{C})$.

(ii) Se $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \operatorname{Cov}(\mathcal{C})$ e para cada i tenhamos $\left\{V_{ij} \to U_i\right\}_{j\in J} \in \operatorname{Cov}(\mathcal{C})$, então $\left\{V_{ij} \to U\right\}_{i\in I, j\in J} \in \operatorname{Cov}(\mathcal{C})$.

(iii) Se $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \operatorname{Cov}(\mathcal{C})$ e $V \to U$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, então $\{U_i \times_U V \to V\}_{i\in I} \in \operatorname{Cov}(\mathcal{C})$.

Os elementos de $\mathrm{Cov}(\mathcal{C})$ são chamados de **coberturas de $\mathcal{C}$**. Um **Site** é uma categoria com uma topologia de Grothendieck .

Observação 1.1.2. Intuitivamente em uma categoria $\mathcal{C}$ com uma topologia de Grothendieck as flechas são inclusões, os objetos U_i cobrem U se $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$ e produtos fibrados são como interseções. A principal diferença é que agora existe mais de uma maneira de incluir um objeto dentro de outro.

A área que estuda topologias de Grothendieck é chamada Teoria de Topos que é uma generalização de Topologia.

Exemplo 1.1.3 (Exemplo inspirador)**.** Seja X um espaço topológico. Seja $X_{Zar} = \mathrm{Open}\, X$ a categoria dos abertos de X com inclusão. Definimos $\mathrm{Cov}(X_{Zar})$ da seguinte forma: $\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(X_{Zar})$ se, e somente se $\bigcup_i U_i = U$. Com isso precisamos checar que $\mathrm{Cov}(X_{Zar})$ de fato é uma topologia de Grothendieck, as propriedade *(i)* e *(ii)* são simples de serem checadas e a propriedade *(iii)* é imediata quando percebemos que na categoria $\mathrm{Open}\, X$ o produto é $U \times V = U \cap V$.

O exemplo acima é o canônico e o que deve de servir como intuição.

O próximo exemplo é para os familiarizados com a teoria de esquemas.

Exemplo 1.1.4 (Topologia de Zariski para esquemas)**.** Seja Sch a categoria dos esquemas. A topologia de **Zariski** em esquemas se dá da seguinte forma: Para X um esquema uma família de morfismos de esquemas $\{f_i : X_i \to X\}_i$ é uma cobertura (ou seja, pertence a $\mathrm{Cov}(\mathrm{Sch})$) se os mapas f_i forem imersões abertas e $X = \bigcup_i f_i(X_i)$.

Lembrando que uma das definições de conjunto condensado é de que ele é um feixe sobre um site, vamos conhecer o site sobre o qual esse tal feixe é definido.

Exemplo 1.1.5 (CHaus)**.** Considere CHaus a categoria de espaços topológicos compactos e Hausdorff. Seja $X \in \mathrm{CHaus}$. Seja $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família finita de objetos de CHaus. Uma família finita de funções contínuas $\{f_i : X_i \to X\}_i$ é **juntamente sobrejetiva** se juntas elas são sobrejetivas i.e. o mapa associado a essa família de funções $\bigsqcup_{i\in I} X_i \to X$ é sobrejetiva. Definimos então que $\{f_i : X_i \to X\}_i$ é cobertura se essa família (finita) de mapas é juntamente sobrejetiva. Isso define um conjunto de coberturas $\mathrm{Cov}(\mathrm{CHaus})$. Temos que checar que essas coberturas transforma CHaus em um site. Os axiomas de site *(i)* e *(ii)* são imediatos, agora para o axioma *(iii)* precisamos checar que o produto fibrado existe na categoria de espaços topológicos compactos e Hausdorff; vamos fazer mais que isso, mostraremos que CHaus possui todos os limites (em particular possui produto fibrado). Antes disso precisaremos de um lema.

Lema 1.1.6. Sejam X e Y espaços topológicos compactos e Hausdorff. Seja $f : X \to Y$

uma função contínua. O gráfico

$$\Gamma_f = \big\{(x, f(x)) \mid x \in X\big\}$$

é um fechado de $X \times Y$.

Demonstração. Note que Γ_f é imagem do mapa $F : X \to X \times Y$ com $F(x) = (x, f(x))$, como X é compacto e imagem de um compacto por uma função contínua é compacto temos que Γ_f é compacto. $X \times Y$ é Hausdorff pois X e Y são Hausdorff e conjuntos compactos em espaços Hausdorff são fechados. Concluímos assim que Γ_f é fechado. $\square$

Proposição 1.1.7. A categoria de espaços topológicos compactos e Hausdorff possui todos os limites i.e. limite de objetos em CHaus pertence a CHaus.

Demonstração. Seja I uma categoria pequena e $F : I \to$ CHaus um funtor. Sabemos que a categoria de espaços topológicos possui todos os limites e que ele é dado por

$$L = \varprojlim_{i\in I} F(i) = \left\{ (x_i) \in \prod_{i\in I} F(i) \mid \forall\alpha : i \to j \text{ in } I \ : \ F(\alpha)(x_i) = x_j \right\}$$

Considerando L com a topologia de subespaço de $\prod_i F(i)$. Vamos mostrar que L é compacto e Hausdorff, assim L é o limite de F tanto na categoria de espaços topológicos quanto na categoria CHaus. Pelo lema anterior para cada $\alpha : i \to j$ o conjunto $\Gamma_{F(\alpha)}$ é um fechado de $F(i) \times F(j)$ e portanto

$$G_{F(\alpha)} = \Gamma_{F(\alpha)} \times \prod_{k\neq i,j} F(k)$$

é um fechado de $\prod_k F(k)$. Note que

$$\bigcap_{\alpha:i\to j} G_{F(\alpha)} = L$$

E portanto L é um fechado do espaço topológico compacto[1] $\prod_i F(i)$ e portanto L é compacto.

Além disso L é Hausdorff, de fato se $x = (x_i), y = (y_i) \in L$ são pontos distintos, então $x_i \neq y_i$ para algum i, como X_i é Hausdorff existem abertos disjuntos $U, V \in X_i$ com $x_i \in U$ e $y_i \in V$. Seja $\pi_i : X \to X_i$ o morfismo projeção, perceba que $\pi_i^{-1}(U) \ni x$ e $\pi_i^{-1}(V) \ni y$ são abertos disjuntos. Concluímos que L é compacto e Hausdorff e portanto é o limite desejado. $\square$

Observação 1.1.8. Apesar de termos provado que o limite sempre existe em CHaus nada nos garante que esse limite não seja vazio.

[1]Lembre-se que pelo teorema de Tychonoff produto de espaços compactos é compacto.

Vamos voltar ao nosso exemplo. Agora sabemos que produtos fibrados existem vamos descreve-los explicitamente. Suponha que tenhamos o seguinte diagrama em CHaus

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] & \\ & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

O produto fibrado será

$$X \times_Z Y = \big\{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\big\}$$

com a topologia de subespaço de $X \times Y$.

Agora podemos verificar que CHaus com as coberturas de funções contínuas juntamente sobrejetivas satisfazem o axioma *(iii)* de um site. Seja $\{f_i : X_i \to X\}_i$ uma família finita de funções contínuas juntamente sobrejetivas e $g : Y \to X$ uma função contínua. Temos que mostrar que $\{X_i \times_X Y \to Y\}_i$ é juntamente sobrejetora. De fato, se $y \in Y$, então $g(y) \in X$ e como $\{f_i : X_i \to X\}_i$ é juntamente sobrejetora existe $x \in X_i$ para algum i com $f_i(x) = g(y)$, portanto $(x, y) \in X_i \times_X Y$ e concluímos que $\{X_i \times_X Y \to Y\}_i$ é juntamente sobrejetora.

Um tipo especial de espaço topológico compacto Hausdorff que serão muito úteis para nós são o conjuntos profinitos que também formam um site cujo as coberturas são famílias finitas de funções contínuas juntamente sobrejetivas. Um conjunto condensado também pode ser descrito como feixe sobre o site dos conjuntos profinitos.

Vamos relembrar a noção de um espaço ser totalmente desconexo.

Definição 1.1.9 (Totalmente desconexo)**.** Um espaço topológico X é **totalmente desconexo** se os únicos componentes conexos são os subconjuntos de um elemento de X.

Exemplo 1.1.10. Alguns exemplos de espaços topológicos totalmente desconexos são o conjunto de Cantor, os racionais $\mathbf{Q}$, os irracionais $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$, os p-ádicos $\mathbf{Q}_p$, e qualquer espaço discreto.

Definição 1.1.11 (Conjunto profinito)**.** Um espaço topológico X é dito **conjunto profinito** se ele é Hausdorff, compacto e totalmente desconexo. Vamos chamar de ProFin a categoria dos conjuntos profinitos cujo os morfismos são funções contínuas.

Observação 1.1.12. ProFin é uma subcategoria de CHaus.

Observação 1.1.13. Outros nomes para conjuntos profinitos são espaços profinitos e espaço de Stone. Na literatura existem diferentes definições de conjuntos profinitos, na próxima proposição vamos mostrar mais uma definição equivalente, mas antes precisamos de um lema.

Lema 1.1.14. Seja X um espaço topológico compacto e Hausdorff. Para qualquer ponto $x \in X$ o componente conexo de X contendo x é a interseção de todos os fabertos[2] contendo x.

Demonstração. Seja T o componente conexo contendo x. Seja $\mathcal{Z}$ o conjunto de fabertos de X contendo x. Seja $S = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} Z$. Perceba que S é um conjunto fechado. Note que qualquer interseção finita de elementos de $\mathcal{Z}$ pertence a $\mathcal{Z}$. Veja que $T \subseteq S$, pois para cada $Z \in \mathcal{Z}$ temos que $T = (T \cap Z) \cup (T \cap (X \setminus Z))$ é uma separação de T em dois abertos disjuntos e como $x \in T \cap Z$ e T é conexo temos $T \subseteq Z$ para cada Z e logo $T \subseteq S$. Resta mostrar que S é um conjunto conexo. Suponha que S não seja conexo, então existem dois fabertos B, C disjuntos com $S = B \cup C$. Lembre-se que todo fechado de um espaço compacto é compacto, em particular B e C são compactos. Além disso, lembre-se que todo espaço compacto e Hausdorff é normal, logo existem dois abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $B \subseteq U$ e $C \subseteq V$. Temos que $X \setminus U \cup V$ é fechado em X e portanto é compacto (fechado de um compacto). Suponha por absurdo que para cada $Z \in \mathcal{Z}$ temos $(X \setminus U \cup V) \cap Z \neq \varnothing$ então o conjunto de fechados da forma $(X \setminus U \cup V) \cap Z$ é tal que interseções de conjuntos dessa forma é novamente um conjunto da mesma forma, é um resultado da topologia que em um espaço compacto uma coleção não-vazia de fechados tal que a interseções finitas continuam pertencentes a coleção é não vazia, então a interseção de todos os elementos dessa coleção é não-vazia pelo seguinte resultado de topologia: Se num espaço compacto X há uma família de fechados $\{F_k\}_k$ tal que a interseção finita de membros dessa família é não-vazia, então a interseção de todos os F_i é não-vazia (tag 005D [Jon22]). Dessa forma teríamos $(X \setminus U \cup V) \cap S$ não-vazio, absurdo. Logo existe $Z_0 \in \mathcal{Z}$ com $(X \setminus U \cup V) \cap Z_0 = \varnothing$ i.e. $Z_0 \subseteq U \cup V$. Então $Z_0 = (Z_0 \cap U) \cup (Z_0 \cap V)$ é uma decomposição em dois abertos disjuntos, temos assim que $Z_0 \cap V$ e $Z_0 \cap U$ são fabertos em X. Assim, suponha sem perda de generalidade que $x \in B$, então $S \subseteq U \cap Z_0$ (pois $U \cap Z_0 \in \mathcal{Z}$) e logo $C = \varnothing$. Concluímos que S é conexo e provamos o teorema. □

Definição 1.1.15 (Conjunto Parcialmente Ordenado Dirigido)**.** Um **conjunto parcialmente ordenado dirigido** é um conjunto parcialmente ordenado $(I, \leq)$ tal que para cada $i, j \in I$ existe $k \in I$ com $i, j \leq k$.

Proposição 1.1.16. Seja X um espaço topológico. Então X é um conjunto profinito se,

[2]faberto é o conjunto que é aberto e fechado.

e somente se X pode ser escrito como limite de espaços topológicos finitos e discretos X_i:

$$X = \varprojlim_{i \in I} X_i$$

Onde o conjunto de índices I é um conjunto parcialmente ordenado dirigido.

Demonstração. (Ida) Suponha que X seja um conjunto profinito. Seja $\mathcal{I}$ o conjunto de coleções finitas $I = \{U_i\}_{i \in I}$ com U_i abertos tal que a união disjunta $\bigsqcup_i U_i = X$ i.e. $\mathcal{I}$ é o conjunto das coberturas disjuntas finitas. Note que os U_i são fabertos. Damos a cada $I \in \mathcal{I}$ a topologia discreta. Dado $I_0, I_1 \in \mathcal{I}$ vamos dizer que $I_0 \leq I_1$ se a cobertura I_1 refina a cobertura I_0. Essa relação torna $(\mathcal{I}, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado dirigido. Para cada $I \in \mathcal{I}$ há uma função contínua $\pi_I : X \to I$ tal que $\pi_I(x) = U_i$ se $x \in U_i$. Logo pela propriedade universal do limite há um mapa $\phi : X \to \varprojlim_{I \in \mathcal{I}} I$, explicitamente $\phi(x) = (U_{I,i_I})_I$ em que $x \in U_{I,i_I}$ e se $I_0 \leq I_1$, então $U_{I_0,i_{I_0}} \supseteq U_{I_1,i_{I_1}}$. Logo $\phi(x) = \phi(y)$ se, e somente se a interseção de todos os fabertos que contém x for igual a interseção de todos os abertos que contém y, usando o lema 1.1.14 e o fato de X ser totalmente desconexo temos que isso é equivalente a $x = y$, portanto ϕ é injetiva. O mapa ϕ é sobrejetivo pelo seguinte resultado de topologia: Se num espaço compacto X há uma família de fechados $\{F_k\}_k$ tal que a interseção finita de membros dessa família é não-vazia, então a interseção de todos os F_i é não-vazia (tag 005D [Jon22]). Logo por conta de ϕ ser bijetiva, X compacto e $\varprojlim_{I \in \mathcal{I}} I$ ser Hausdorff o mapa ϕ é fechado, de fato se $F \subset X$ é um fechado, então ele é um compacto e imagem contínua de compacto é compacta, portanto $\phi(F)$ é compacto e logo é fechado pois o limite é Hausdorff! Portanto ϕ é contínua, bijetiva e fechada que implica que ϕ é homeomorfismo.

(Volta) Seja $X = \varprojlim_{i \in I} X_i$. Note que cada X_i é compacto e Hausdorff, logo pela proposição 1.1.7 X é compacto e Hausdorff, resta mostrar que ele é totalmente desconexo. Seja $\pi_i : X \to X_i$ a projeção para cada i e seja $C \subseteq X$ um subconjunto conexo de X, lembrando que a imagem de um conexo por uma função contínua é conexo vemos que para cada i temos $\pi_i(C)$ conexo em X_i, como cada X_i é totalmente desconexo temos que $\pi_i(C) = \{x_i\}$ para algum $x_i \in X_i$ para cada i. Portanto $C = \big\{(x_i)_i\big\}$ um ponto e X é totalmente desconexo. $\square$

Exemplo 1.1.17. Seja A um anel e $\mathfrak{a}$ um ideal tal que cada $n \in \mathbf{N}$, o quociente $A/\mathfrak{a}^n$ é um anel finito. Considere o conjunto parcialmente ordenado $(\mathbf{N}, \leq)$ como uma categoria.

Considere o funtor

$$(\mathbb{N}, \leq)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ring}$$

$$\begin{tikzcd} n \arrow[d, "\leq"'] & & \frac{A}{\mathfrak{a}^n} \\ m \arrow[rr, phantom, "\Longrightarrow" description, shift left=4ex] & & \frac{A}{\mathfrak{a}^m} \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

O limite desse funtor é

$$\widehat{A} \overset{\text{def}}{=} \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \frac{A}{\mathfrak{a}^m} = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \prod_{n \in \mathbf{N}} \frac{A}{\mathfrak{a}^n} \mid n \leq m \implies a_m \equiv a_n \bmod \mathfrak{a}^n \right\}$$

Considerando cada $A/\mathfrak{a}^n$ com a topologia discreta vemos que $\widehat{A}$ é um conjunto profinito. Por exemplo se $A = \mathbf{Z}$ e $\mathfrak{a} = p\mathbf{Z}$ temos que $\widehat{A} = \mathbf{Z}_p$ com a topologia p-ádica usual! Outro exemplo é o anel de séries formais sobre um corpo finito, basta tomar $A = \mathbf{F}_q[T]$ e $\mathfrak{a} = T\mathbf{F}_q[T]$ dessa forma $\widehat{A} = \mathbf{F}_q[[T]]$ e a topologia nesse caso será a T-ádica.

Exemplo 1.1.18. O espaço $[0, 1]$ é compacto e Hausdorff, mas não é profinito, no entanto esse espaço admite uma sobrejeção contínua $S \twoheadrightarrow [0, 1]$ com S profinito. Basta considerar $S = \prod_{n \in \mathbf{N}} \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ e o mapa

$$\begin{aligned} d : S = \prod_{n \in \mathbf{N}} \{0, 1, 2, \ldots, 9\} &\longrightarrow [0, 1] \\ (a_n)_n &\longmapsto 0.a_0 a_1 a_2 \ldots \end{aligned}$$

Repare que S é profinito pois ele é limite de conjuntos finitos com a topologia discreta[3] Seja $U \subset [0, 1]$ um aberto e suponha adicionalmente que $0 \notin U$ e $1 \notin U$ (vamos deixar os casos em que $0 \in U$ ou $1 \in U$ para o leitor). Vamos mostrar que $d^{-1}(U)$ é aberto. Tome $x = (x_n)_n \in d^{-1}(U)$, então $d(x) \in U$ e como U é aberto existe $N \in \mathbf{N}$ com $I = (d(x) - \frac{1}{10^N}, d(x) + \frac{1}{10^N}) \subseteq U$. Nesse caso considere o conjunto:

$$V = \{x_0\} \times \{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times \{x_N\} \times \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \times \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \times \cdots$$

Repare que $x \in V$ é uma vizinhança aberta e que $V \subseteq d^{-1}(U)$ já que $d(V) \subseteq (d(x) - \frac{1}{10^N}, d(x) + \frac{1}{10^N})$, isso porque se $y \in V$, então $d(x)$ é igual $d(y)$ nas primeiras $n+1$ casas decimais.

Assim como fizemos com CHaus queremos mostrar que ProFin tem uma topologia de Grothendieck com as coberturas sendo as famílias finitas de mapas juntamente sobrejetivas, novamente precisamos mostrar a existência de produto fibrado nessa categoria e novamente iremos fazer mais, mostraremos que ProFin possui todos os limites.

[3] Lembre-se que o produto é um limite.

Proposição 1.1.19. A categoria dos conjuntos profinitos possui todos os limites.

Demonstração. Seja I uma categoria pequena e $F : I \to \text{ProFin}$ um funtor. Sabemos que a categoria de espaços topológicos compactos e Hausdorff possui todos os limites e que ele é dado por

$$L = \varprojlim_{i \in I} F(i) = \left\{ (x_i) \in \prod_{i \in I} F(i) \mid \forall \alpha : i \to j \text{ in } I \ : \ F(\alpha)(x_i) = x_j \right\}$$

vamos mostrar que L também é limite na categoria ProFin, note que apenas resta mostrar que L é totalmente desconexo, vamos usar a mesma estratégia que usamos na volta da proposição acima. Seja $\pi_i : L \to F(i)$ a projeção para cada i e seja $C \subseteq L$ um subconjunto conexo de L, lembrando que a imagem de um conexo por uma função contínua é conexo vemos que para cada i temos $\pi_i(C)$ conexo em $F(i)$, como cada $F(i)$ é totalmente desconexo temos que $\pi_i(C) = \{x_i\}$ para algum $x_i \in F(i)$ para cada i. Portanto $C = \big\{(x_i)_i\big\}$ um ponto e L é totalmente desconexo. $\square$

Exemplo 1.1.20 (ProFin)**.** Seja $X \in \text{ProFin}$. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família finita de objetos de ProFin. Definimos então que $\{f_i : X_i \to X\}_{i \in I}$ é cobertura se essa família (finita) de mapas é juntamente sobrejetiva. A prova de que isso faz de ProFin um site é análoga a prova que fizemos para CHaus.

Outro tipo de espaços topológicos que nos será útil são espaços extremamente desconexos

Definição 1.1.21 (Extremamente desconexo)**.** Um espaço topológico X é **extremamente desconexo** se ele é compacto, Hausdorff e o fecho de todo aberto de X é aberto. Os espaços topológicos extremamente desconexos formam uma subcategoria de CHaus que vamos denotar por ExtDisc.

Proposição 1.1.22 (ExtDisc $\subset$ ProFin)**.** Todo espaço extremamente desconexo é profinito.

Demonstração. A ideia da prova é mostrar que num espaço extremamente desconexo X dado, para quaisquer dois pontos distintos x, y é possível encontrar abertos A e B disjuntos com $x \in A$, $y \in B$ e $A \cup B = X$.

Seja $X \in \text{ExtDisc}$. Tome $x, y \in X$ distintos. Como X é Hausdorff, existem abertos disjuntos U, V com $x \in U$ e $y \in V$. Como X é extremamente desconexo, $\overline{U}$ é fechado e aberto (faberto). Afirmamos que $\overline{U} \cap V = \varnothing$, de fato, temos que

$$U \cap V = \varnothing \implies U \subseteq X \setminus V \implies \overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \implies \overline{U} \cap V = \varnothing$$

Então $\left\{\overline{U}, X \setminus \overline{U}\right\}$ é uma separação de X. Assim mostramos que para quaisquer dois pontos distintos podemos separá-los em dois abertos disjuntos, logo é impossível que um conexo de X tenha mais que um ponto, mostrando que X é totalmente desconexo. □

Para um futuro teorema a seguinte outra definição de espaço topológico extremamente desconexo vai ser essencial.

Proposição 1.1.23. Seja S um espaço topológico compacto e Hausdorff. S é extremamente desconexo se, e somente se para qualquer $T \in$ CHaus, para qualquer sobrejeção contínua $f : T \to S$ existe uma função contínua $t : S \to T$ tal que $f \circ t = \mathrm{id}_S$. Logo o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, two heads, "f"'] & \\ S \arrow[r, equal, "\mathrm{id}"'] & S \arrow[ul, dashed, "t"'] \end{tikzcd}$$

Demonstração. [Gle58] ou [Jon22, Tag 08YN]. □

Conjuntos finitos e discretos são exemplo de conjuntos extremamente desconexos. Infelizmente não há um catálogo muito diverso de exemplos desses espaços.

Os principais exemplos de espaços topológicos extremamente desconexos vêm de compactificações de Stone-Čech de espaços discretos, construímos essa compactificação no apêndice!

Proposição 1.1.24 (βX_{disc} é extremamente desconexo)**.** Seja X um espaço topológico com a topologia discreta. O espaço βX é extremamente desconexo.

Demonstração. Vamos usar de definição da proposição 1.1.23.

Seja $S \in$ CHaus e $f : S \twoheadrightarrow \beta X$ uma sobrejeção contínua. Chame de i a função contínua de X a βX. Para cada $x \in X$ tome $g(x) \in f^{-1}(i(x))$ arbitrário (f é sobrejetiva) dessa forma obtemos um mapa $g : X \to S$ que é contínua pois a topologia de X é a discreta com $f \circ g = i$.

Usando a propriedade universal da compactificação de Stone-Čech há um mapa contínuo $t : \beta X \to S$ com $g = t \circ i$. Agora perceba que para cada $x \in X$ vale que

$$(f \circ t)(i(x)) = f(t(i(x))) = f(g(x)) = i(x)$$

assim a função contínua $f \circ t$ deixa $i(X)$ fixo em βX em outras palavras $f \circ t = \mathrm{id}$ em $i(X)$ que é um conjunto denso de βX. Portanto $f \circ t = \mathrm{id}$ pelo lema 2.2.21. □

Proposição 1.1.25 (Há sempre um extremamente desconexo com uma sobrejeção para um compacto Hausdorff)**.** Seja $X \in$ CHaus, existe $S \in$ ExtDisc com uma sobrejeção $S \twoheadrightarrow X$.

Demonstração. Seja X compacto e Hausdorff. Seja X_{disc} igual a X como conjunto, mas com a topologia discreta. Note a função identidade dá origem a um mapa contínuo $X_{\text{disc}} \twoheadrightarrow X$ e usando a propriedade universal da compactificação de Stone-Čech obtemos um mapa $\beta X_{\text{disc}} \twoheadrightarrow X$ e βX_{disc} é extremamente desconexo pela proposição anterior. □

Um conjunto condensado também é um tipo especial de pré-feixe sobre a categoria ExtDisc, mas se definirmos as coberturas como em CHaus e ProFin não obtemos uma topologia de Grothendieck! Isso vem do fato de ExtDisc não ter produtos fibrados.

Voltando para definição de conjunto condensado, foi dito que um conjunto condensado é um feixe sobre o site CHaus ou um feixe sobre o site ProFin, resta descobrir o que seria um feixe sobre um site. Assim como um site é a generalização do que seria a categoria $\operatorname{Open} X$, um feixe sobre um site é a generalização do que seria um feixe sobre $\operatorname{Open} X$.

Definição 1.1.26 (Pré-feixe)**.** Seja $\mathcal{C}$ um categoria. Um **pré-feixe de conjuntos** na categoria $\mathcal{C}$ é um funtor

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set}$$

um morfismo de pré-feixes é uma transformação natural de funtores. Os pré-feixes de conjuntos na categoria $\mathcal{C}$ formam uma categoria que denotamos por $\text{PSh}(\mathcal{C})$.

Observação 1.1.27. Assim como definimos pré-feixes de conjuntos é possível definir pré-feixes de qualquer categoria, basta substituir Set pela categoria desejada na definição.

Observação 1.1.28. Quando falarmos pré-feixe de uma categoria $\mathcal{C}$ estaremos falando de um pré-feixe de conjuntos se não especificarmos a categoria do contradomínio.

Observação 1.1.29 (Diagrama de cola)**.** Seja $\mathcal{C}$ um site e $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ uma cobertura. Como $\mathcal{C}$ é um site temos que para cada $i, j \in I$ o produto fibrado $U_i \times_U U_j$ existe e temos dois mapas projeção

$$p^i_{i,j} : U_i \times_U U_j \longrightarrow U_i$$
$$p^j_{i,j} : U_i \times_U U_j \longrightarrow U_j$$

Agora de $\mathcal{F}$ ser um pré-feixe de conjuntos em $\mathcal{C}$. Aplicando $\mathcal{F}$ vamos ter

$$\mathcal{F}(p^i_{i,j}) : \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$
$$\mathcal{F}(p^j_{i,j}) : \mathcal{F}(U_j) \longrightarrow \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

e a partir desses mapas acima construímos o mapa produto

$$p_0 : \prod_i \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$
$$p_1 : \prod_i \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

A partir dos mapas $U_i \to U$ construímos um mapa $i : \mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i)$. Obtemos assim o que vamos chamar de **diagrama de cola** que é a generalização da sequência da cola 2.1.2 para o caso clássico:

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\ i\ } \prod_i \mathcal{F}(U_i) \overset{p_0}{\underset{p_1}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

Definição 1.1.30 (Feixe em um Site)**.** Seja $\mathcal{C}$ um site. Um **feixe de conjuntos** em $\mathcal{C}$ é um pré-feixe de conjuntos tal que para cada $U \in \mathcal{C}$ e para qualquer cobertura $\{U_i \to U\}_i$ vale que no diagrama de cola

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\ i\ } \prod_i \mathcal{F}(U_i) \overset{p_0}{\underset{p_1}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

o mapa i é um equalizador de p_0 e p_1. Um morfismo de feixes é uma transformação natural. Denotamos a categoria de feixes de conjuntos sobre um site $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$.

Observação 1.1.31. Analogamente definimos feixes de grupos abelianos, anéis, A-módulos...

Observação 1.1.32. Quando falarmos em feixes sem especificar de que, estaremos falando de feixes de conjuntos.

Observação 1.1.33 (Notação)**.** Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe em uma categoria $\mathcal{C}$ e $f : X \to Y$ um mapa na categoria $\mathcal{C}$. Quando não houver confusão vamos denotar $f^* = \mathcal{F}(f)$.

1.2 Definições de Conjuntos Condensados

As principais referências dessa seção foram [Mai21], [Ásg21] e [Pet19b].

Estamos quase prontos para a nossa definição principal, queremos definir um conjunto condensado como um feixe de conjuntos $X : \mathrm{CHaus}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ considerando CHaus com as coberturas sendo os mapas juntamente sobrejetivos.

Definindo dessa forma vamos mostrar que um conjunto condensado X satisfaz as seguintes propriedades:

(Cond0): $X(\varnothing) \cong \{*\}$ onde $\{*\}$ é um conjunto conjunto com 1 elemento.

(Cond1): Para cada $S, T \in \mathrm{CHaus}$ o mapa

$$X(S \sqcup T) \longrightarrow X(S) \times X(T)$$

é uma bijeção.

(Cond2): Para cada $S, T \in$ CHaus, para qualquer $S \twoheadrightarrow T$ sobrejeção contínua com produto fibrado $S \times_T S$ e projeções p_0 e p_1 do produto fibrado para S o mapa

$$X(T) \longrightarrow \big\{x \in X(S) \mid p_0^*(x) = p_1^*(x) \in X(S \times_T S)\big\}$$

Além disso se um funtor $Y : \mathrm{CHaus}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ satisfaz **(Cond0)**, **(Cond1)** e **(Cond2)**, então Y é um conjunto condensado.

Vamos mostrar **(Cond0)**: Seja I um conjunto e para cada $i \in I$ defina $U_i = \varnothing$, dessa forma $\{U_i \to \varnothing\}_i$ é uma cobertura e logo como X é um feixe, vale que $X(\varnothing)$ é o equalizador do seguinte diagrama

$$\textstyle\prod_{i\in I} X(\varnothing) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} X(\varnothing)$$

tomando $I = \varnothing$ vamos ter um produto vazio[4], que sempre é o objeto terminal de uma categoria, que nesse caso é $\{*\}$. Portanto o equalizador do diagrama acima é $X(\varnothing) \cong \{*\}$.

Para ver **(Cond1)**: Considere a cobertura $\{S \to S \sqcup T, T \to S \sqcup T\}$ de $S \sqcup T$. Como X é um feixe temos que $X(S \sqcup T)$ é o equalizador de

$$X(S) \times X(T) \overset{p_0}{\underset{p_1}{\rightrightarrows}} X(S \times_{S\sqcup T} S) \times X(S \times_{S\sqcup T} T) \times X(T \times_{S\sqcup T} S) \times X(T \times_{S\sqcup T} T)$$

e é simples calcular que $S \times_{S\sqcup T} T = \varnothing$, $S \times_{S\sqcup T} S = S$, $T \times_{S\sqcup T} T = T$ e que $p_0 = p_1 = \mathrm{id}$. Portanto temos que calcular o equalizador do diagrama

$$X(S) \times X(T) \overset{p_0}{\underset{p_1}{\overset{=}{\rightrightarrows}}} X(S) \times \{*\} \times \{*\} \times X(T)$$

que é $X(S) \times X(T)$. Logo, temos a bijeção $X(S \sqcup T) \cong X(S) \times X(T)$.

Para ver **(Cond2)**: Basta usar que $\{S \twoheadrightarrow T\}$ vai ser uma cobertura de T e que para essa cobertura no diagrama de cola $X(T)$ é um equalizador.

Agora seja $X : \mathrm{CHaus}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ um pré-feixe que satisfaz **(Cond0)**, **(Cond1)** e **(Cond2)**, vamos mostrar que X é um conjunto condensado: Seja $S \in$ CHaus e $\{S_i \to S\}_i$ uma cobertura, caso $S = \varnothing$, basta usar **(Cond0)**. Suponha que $S \neq \varnothing$. Primeiramente note que temos um homeomorfismo

$$\begin{aligned} \bigsqcup_i S_i \times_S \bigsqcup_i S_i &\longleftrightarrow \bigsqcup_{i,j} S_i \times_S S_j \\ ((s, S_i), (s', S_j)) &\longleftrightarrow ((s, s'), S_i \times_S S_j) \end{aligned}$$

[4]Um produto indexado pelo conjunto vazio.

Como $\{S_i \to S\}_i$ é uma cobertura, temos uma sobrejeção $\bigsqcup_i S_i \twoheadrightarrow S$, usando **(Cond2)** nessa sobrejeção temos que $X(S)$ é o equalizador do seguinte diagrama

$$X(\textstyle\bigsqcup_i S_i) \overset{p_1^*}{\underset{p_0^*}{\rightrightarrows}} X(\textstyle\bigsqcup_i S_i \times_S \bigsqcup_i S_i)$$

Usando o homeomorfismo $\bigsqcup_i S_i \times_S \bigsqcup_i S_i \cong \bigsqcup_{i,j} S_i \times_S S_j$ obtemos que $X(S)$ é o equalizador de

$$X(\textstyle\bigsqcup_i S_i) \rightrightarrows X(\textstyle\bigsqcup_{i,j} S_i \times_S S_j)$$

E agora usamos **(Cond1)** para ver que $X(S)$ é o equalizador do diagrama

$$\textstyle\prod_i X(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} X(S_i \times_S S_j)$$

que é exatamente o diagrama de cola!

Observação 1.2.1. Na definição de conjunto condensado podemos substituir a categoria dos conjuntos pelas categorias de grupos abelianos/anéis/módulos... para obter grupos abelianos/anéis/módulos... condensados. Em **(Cond0)**, **(Cond1)** e **(Cond2)** temos resultados envolvendo bijeções, em outras categorias os resultados são análogos substituindo bijeções por isomorfismos.

Cada espaço topológico tem um conjunto condensado associado.

Exemplo 1.2.2 (Conjunto condensado associado a um espaço topológico)**.** Seja X um espaço topológico e considere o pré-feixe

$$\begin{aligned} \underline{X} : \mathrm{CHaus}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathrm{Set} \\ S &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(S, X) \end{aligned}$$

que faz o seguinte nos morfismos

$$\begin{array}{ccccc} S & & \mathrm{Hom}(S,X) & & \phi \circ f \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \Longrightarrow & \big\uparrow{\scriptstyle f^*} & & \big\uparrow \\ T & & \mathrm{Hom}(T,X) & & \phi \end{array}$$

Vamos mostrar que $\underline{X}$ é um conjunto condensado. As propriedades **(Cond0)** e **(Cond1)** são imediatas. Agora seja $f : S \twoheadrightarrow T$ uma sobrejeção. Sejam p_0, p_1 as projeções de $S \times_T S$ para S. Por ser um produto fibrado temos que $f \circ p_0 = f \circ p_1$. Considere o mapa:

$$\begin{aligned} \Xi : \mathrm{Hom}(T, X) &\longrightarrow Eq \overset{\mathrm{def}}{=} \big\{ s \in \mathrm{Hom}(S,X) \mid s \circ p_0 = s \circ p_1 \big\} \\ t &\longmapsto t \circ f \end{aligned}$$

Vamos mostrar que Ξ é uma bijeção.

Ξ é injetivo: Tome $t, t' \in \text{Hom}(T, X)$ com $t \circ f = t' \circ f$. Como f é sobrejetiva, para cada $b \in T$ existe $a \in S$ com $b = f(a)$, logo $t(b) = t(f(a)) = t'(f(a)) = t'(b)$. Concluímos que $t = t'$.

Ξ é sobrejetivo: Repare que

$$\begin{aligned} Eq &= \big\{s \in \text{Hom}(S, X) \mid s \circ p_0 = s \circ p_1\big\} \\ &= \big\{s \in \text{Hom}(S, X) \mid \forall a, b \in S \text{ com } f(a) = f(b) \text{ tem-se } s(a) = s(b)\big\} \end{aligned}$$

Tome $s \in Eq$ arbitrário. Para cada $a \in T$ temos que $f^{-1}(a)$ é não vazio pois f é sobrejetiva. Tome $b \in f^{-1}(a)$ arbitrário e defina

$$t(a) = s(b)$$

veja que $t(a)$ independe da escolha de b, porque se $b, b' \in f^{-1}(a)$, então $f(b) = f(b') = a$ e logo $s(b) = s(b') = t(a)$. Dessa forma temos $t \circ f = s$ como queríamos, resta mostrar que t é contínua.

t é contínua: Seja F um fechado de X, é fácil ver que

$$t^{-1}(F) = f(s^{-1}(F))$$

$s^{-1}(F)$ é fechado pois s é contínua. Todo subconjunto fechado de um compacto é compacto, logo $s^{-1}(F)$ é compacto. A imagem de um compacto por uma função contínua é compacto, logo $f(s^{-1}(F)) \subseteq T$ é um compacto. Todo subespaço compacto de um espaço Hausdorff é fechado, logo $f(s^{-1}(F)) = t^{-1}(F)$ é um fechado. Concluímos que t é contínua e finalizamos o que queríamos.

Observação 1.2.3 (Funtor condensação $X \mapsto \underline{X}$)**.** A construção acima dá origem a um funtor

$$\underline{\cdot} : \text{Top} \longrightarrow \text{Cond(Set)}$$

Em que Cond(Set) é a categoria dos conjuntos condensados (que não definimos ainda) que em objetos faz $X \mapsto \underline{X}$ e se $f : X \to Y$ é uma função contínua, definimos $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ como a seguinte coleção de mapas para cada $S \in \text{CHaus}$:

$$\begin{aligned} \underline{f}_S : \underline{X}(S) &\longrightarrow \underline{Y}(S) \\ \phi &\longmapsto f \circ \phi \end{aligned}$$

Esse funtor é a nossa forma de enxergar um espaço topológico como conjunto condensado, veremos na próxima seção que quando restringimos esse funtor a categoria dos espaços compactamente gerados obtemos um funtor plenamente fiel (como se fosse uma inclusão de categorias).

Tudo parece estar indo bem, mas a definição que demos de conjunto condensado não forma uma categoria por problemas de teoria dos conjuntos, o que acontece é que se quisermos formar uma categoria cujo os objetos são conjuntos condensados e os morfismos são transformações naturais de funtores, então uma coleção de morfismos entre dois conjuntos condensados pode não ser um conjunto.

Na literatura há duas formas de se lidar com este problema: A solução dos professores Dustin Clausen e Peter Scholze e a solução dos professores Clark Barwick e Peter Haine. A segunda solução utiliza de cardinais inacessíveis e portanto precisaríamos sair de ZFC para definir conjuntos condensados[5]. Já a primeira solução utiliza artifícios de teoria das categorias avançadas demais para a proposta deste texto. Vamos optar pela segunda solução.

Definição 1.2.4 (Cardinal de limite forte)**.** Um cardinal κ é um **cardinal de limite forte** se para qualquer cardinal λ com $\lambda < \kappa$ tem-se $2^\lambda < \kappa$.

Exemplo 1.2.5. $\aleph_0$ é um cardinal de limite forte, pois se $\lambda < \aleph_0$ então λ é finito e 2^λ também é finito.

Exemplo 1.2.6 (Existem cardinais de limite forte incontáveis)**.** É fácil construir cardinais de limite forte. Vamos dar um exemplo de como construí-los. Seja $\beth_0 = \aleph_0$ e para $n > 0$ defina $\beth_n = 2^{\beth_{n-1}}$. Considere o cardinal

$$\beth_\omega \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \beth_n$$

Construímos assim um cardinal de limite forte $\beth_\omega$, pois se $\lambda < \beth_\omega$, então $\lambda < \beth_k$ para algum $k \in \mathbf{N}$ e logo $2^\lambda < \beth_{k+1}$.

Definição 1.2.7. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria cujo os objetos são conjuntos e κ um cardinal. Definimos $\mathcal{C}_\kappa$ como a subcategoria cujo os objetos são os objetos de $\mathcal{C}$ com cardinalidade menor que κ.

Observação 1.2.8. A importância de κ ser um cardinal de limite forte é para que em $\mathcal{C}_\kappa$ limites ou colimites ou outras construções em geral permaneçam em $\mathcal{C}_\kappa$.

Por exemplo, para $X \in \mathrm{Top}_\kappa$ temos que a compactificação de Stone-Čech βX satisfaz $|\beta X| \leq 2^{2^{|X|}}$ e para κ cardinal de limite forte vale que $\beta X \in \mathrm{Top}_\kappa$.

Exemplo 1.2.9. CHaus_κ e ProFin_κ são categorias e são sites com as coberturas sendo as famílias finitas de mapas juntamente sobrejetivas.

Definição 1.2.10 (κ-conjunto/grupo abeliano/anel... condensado)**.** Seja κ um cardinal de limite forte incontável. Um **κ-conjunto/grupo abeliano/anel... condensado** é

[5]Clark Barwick e Peter Haine chamam as suas versões de conjuntos condensados de conjunto pyknotic.

um feixe X em CHaus_κ de conjunto/grupo abeliano/anel. Um morfismo de κ-conjuntos condensado é uma transformação natural de funtores. Dado uma categoria $\mathcal{C}$ denotamos a categoria de κ-(objetos de $\mathcal{C}$) condensados como $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathcal{C})$.

Observação 1.2.11. Tudo que mostramos para a nossa definição provisória de conjuntos condensados vale para κ-conjuntos condensados.

Observação 1.2.12 (Observação técnica importante)**.** Para não ficar carregando κ para lá e para cá e para evitar problemas de teoria dos conjuntos vamos supor que existem cardinais inacessíveis e vamos fixar κ um cardinal inacessível de limite forte durante o resto do texto. A partir de agora para nós as categorias envolvendo espaços topológicos como Top, CHaus, CG, ExtDisc, ProFin... Vão ter objetos menores que κ e $\mathrm{Cond}(\mathcal{C}) = \mathrm{Cond}_\kappa(\mathcal{C})$

Teorema 1.2.13 (Três Definições de Conjuntos Condensados)**.** A categoria Cond(Set) é equivalente a:

(i) Categoria dos feixes na categoria ProFin.

(ii) Categoria dos pré-feixes $X : \mathrm{ExtDisc}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ com $X(\varnothing) = \{*\}$ e $X(S \sqcup T) = X(S) \times X(T)$ para quaisquer $S, T \in \mathrm{ExtDisc}$.

Demonstração. Não vamos dar a demonstração inteira desse teorema por usar técnicas avançadas de Teoria das Categorias e Teoria de Topos, na nossa referência principal [Pet19b] é dado uma "prova" intuitiva e é ela que apresentaremos aqui. Também mostraremos como seria a cara de uma demonstração mais formal.

Demonstração intuitiva: A ferramenta principal que vamos utilizar na prova é que para um conjunto condensado X, se você tem uma sobrejeção contínua $T \twoheadrightarrow S$ e você conhece o diagrama

$$X(T) \rightrightarrows X(T \times_S T)$$

então você conhece $X(S)$.

Para ver (i) basta perceber que um condensado X está completamente definido pelos seus valores na ProFin. Dado um conjunto condensado X para obter um feixe em ProFin basta restringir X a ProFin, por outro lado, dado X um feixe em ProFin para obter um condensado basta definir $X(S)$ da seguinte forma: Para $S \in \mathrm{CHaus}$ há uma sobrejeção contínua $f : T \twoheadrightarrow S$ com $T \in \mathrm{ProFin}$ (use 1.1.25) e então $X(S)$ é o equalizador de

$$X(T) \rightrightarrows X(T \times_S T)$$

Vamos provar (ii): Primeiramente note que quando há uma sobrejeção contínua $f : S \twoheadrightarrow T$ e X é um conjunto condensado o mapa $f^* : X(T) \to X(S)$ é uma injeção, pois $X(f)$ é uma bijeção para um subconjunto $X(S)$ por **(Cond2)**. Seja $S \in \mathrm{CHaus}$, seja $E \in \mathrm{ExtDisc}$ com uma sobrejeção contínua $f : E \twoheadrightarrow S$. Seja $\tilde{E} \in \mathrm{ExtDisc}$ com uma sobrejeção contínua $g : \tilde{E} \twoheadrightarrow E \times_S E$

$$\tilde{E} \xrightarrow{g} E \times_S E \underset{p_1}{\overset{p_0}{\rightrightarrows}} E \xrightarrow{f} S$$

Assim, por **(Cond2)** e usando o fato que g^* é injetiva pela nossa discussão inicial

$$\begin{aligned} X(S) &\cong \left\{x \in X(E) \mid p_0^*(x) = p_1^*(x) \text{ em } X(E \times_S E)\right\} \\ &\cong \left\{x \in X(E) \mid g^*(p_0^*(x)) = g^*(p_1^*(x)) \text{ em } X(\tilde{E})\right\} \end{aligned}$$

O que mostra que $X(S)$ está totalmente definido por espaços extremamente desconexos.

<u>Ideia da demonstração formal:</u> Seja $\mathcal{C}$ a categoria dos pré-feixes de ExtDisc que satisfazem $X(\varnothing) = \{*\}$ e $X(S \sqcup T) = X(S) \times X(T)$. Temos um mapa

$$\begin{aligned} \mathrm{Cond(Set)} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ X &\longmapsto X|_{\mathrm{ExtDisc}^{\mathrm{op}}} \end{aligned}$$

e por outro lado há um mapa

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow \mathrm{Cond(Set)} \\ X &\longmapsto \tilde{X} \end{aligned}$$

em que $\tilde{X}$ é extensão de Kan à direita de X. Explicitamente, para $S \in \mathrm{CHaus}$ vamos ter

$$\tilde{X}(S) = \varprojlim_{E \to S} X(E)$$

onde esse limite é indexado por todos os mapas contínuos $E \to S$ em que E é extremamente desconexo. A priori, este limite não necessariamente existe pois ele esta indexado por algo que pode não ser um conjunto, porém ele de fato irá existir.

A dificuldade da demonstração está em demonstrar que $\tilde{X}$ de fato é condensado e que esses dois mapas entre Cond(Set) e $\mathcal{C}$ são inversos.

Existe apenas uma demonstração disso para o caso geral em [Lur18] nas proposições B.6.3, B.6.4 e B.6.6. □

Observação 1.2.14 (Observação importante)**.** Do teorema acima vemos que para definir um condensado X basta especificar os seus valores $X(S)$ para S extremamente desconexos! E por vezes ao longo do texto só especificaremos esses valores ao definir um condensado.

A definição de condensado usando extremamente desconexos tem vantagens importantes, em geral o colimite de feixes (como o cokernel e quociente) tem que passar por um processo chamado feixeficação análogo ao caso clássico 2.2.1 e este é um processo que complica bastante a descrição explicita de um feixe, mas para o caso da definição usando ExtDisc não é necessário feixeficação e é possível calcular colimites ponto a ponto assim como calculamos limites (produtos, kernel, produto fibrado...). Então por exemplo ao calcular o cokernel C de um morfismo de conjuntos condensados podemos calcular $C(S)$ para $S \in$ ExtDisc explicitamente o que geralmente é fácil, o difícil é calcular $C(T)$ explicitamente para $T \in$ CHaus, em teoria basta acharmos uma sobrejeção contínua $E \twoheadrightarrow T$ para $E \in$ ExtDisc e daí usamos **(Cond2)** para calcular $C(T)$, porém na prática é difícil de fazer isso explicitamente.

Em resumo a definição a partir de extremamente desconexos nos permite desviar de termos que feixeficar.

Observação 1.2.15. O teorema acima pode ser generalizado trocando Set por outras categorias como Ring, Ab, R-Módulos...

Observação 1.2.16. Quando é dito no texto que um conjunto condensado X está totalmente definido por seus valores em conjuntos profinitos (ou extremamente desconexos) o que quer ser dito é que X está totalmente definido a menos de isomorfismo.

1.3 Conjuntos Condensados

As principais referências dessa seção foram [Pet22], [Pet19a], [Pet19b] e [Ásg21].

Observação 1.3.1 (Pontos de um condensado)**.** Seja X um conjunto condensado. Intuitivamente pensamos $X(\{*\})$ como o conjunto de pontos de X, chamamos ele de **conjunto subjacente a** X. Para S um compacto pensamos o conjunto $X(S)$ como o conjunto de funções "contínuas" de S para X. Essa analogia é bem mais embasada do que parece à primeira vista pois pelo lema de Yoneda vale a identificação

$$X(S) \cong \mathrm{Hom}(\underline{S}, X)$$

mais explicitamente um elemento $f \in X(S)$ vai definir o morfismo de condensados $[f] : \underline{S} \to X$ que em um compacto Hausdorff T vale

$$\begin{aligned} [f]_T : \underline{S}(T) = \mathrm{Hom}(T, S) &\longrightarrow X(T) \\ \phi &\longmapsto \phi^*(f) = X(\phi)(f) \end{aligned}$$

reciprocamente, dado $\eta : \underline{S} \to X$ associamos η a $\eta(\mathrm{id}_S) \in X(S)$.

Para ver um espaço topológico X como um conjunto condensado basta olhar para $\underline{X}$, em geral essa identificação não é fiel, mas se restringirmos o funtor $X \mapsto \underline{X}$ para os espaços compactamente gerados obtemos um mapa plenamente fiel, ou seja, podemos enxergar a categoria dos espaços compactamente gerados como uma subcategoria dos conjuntos condensados.

Por sorte, a categoria dos espaços compactamente gerados engloba boa parte dos espaços topológicos que aparecem no dia a dia do *working mathematician* como: Espaços localmente compactos ($\mathbf{R}^n$, $\mathbf{Q}_p$, conjunto de cantor, variedades topológicas, conjuntos compactos...), espaços primeiro contáveis (espaços métricos, espaços pseudométricos, espaços segundo contáveis...), complexos CW...

Agora vamos nos preocupar em descrever o que é um espaço compactamente gerado e provaremos que espaços localmente compactos e espaços primeiro contáveis são compactamente gerados. Em seguida mostraremos que o funtor $X \mapsto \underline{X}$ é plenamente fiel quando restrito aos compactamente gerados.

Definição 1.3.2 (Função k-contínua)**.** Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ de conjuntos é **k-contínua** se para cada $S \in$ CHaus e para cada função contínua $t : S \to X$ a composição $f \circ t$ é contínua.

Observação 1.3.3. Toda função contínua é k-contínua, pois a composição de funções contínuas é contínua.

Definição 1.3.4 (Espaço Compactamente Gerado)**.** Seja X um espaço topológico. X é **compactamente gerado** se para todo espaço topológico Y e para toda função de conjuntos $f : X \to Y$ vale que f é contínua se, e somente se f é k-contínua.

Chamamos a categoria do espaços compactamente gerados de CG. Os morfismos nessa categoria são as funções contínuas (que nesse caso são o mesmo que funções k-contínuas).

Exemplo 1.3.5 (Localmente Compacto $\implies$ Compactamente Gerado)**.** Sejam X e Y espaços topológicos com X localmente compacto. Seja $f : X \to Y$ uma função k-contínua. Para cada $x \in X$ existe uma vizinhança aberta $U_x \ni x$ e um compacto $K_x \supseteq U_x$. A composição

$$K_x \xhookrightarrow{\subseteq} X \xrightarrow{f} Y$$

é contínua, pois f é k-contínua. Daí vemos que f é contínua, pois se $V \subseteq Y$ é aberto, então

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in X} (f|_{K_x})^{-1}(V)$$

e $(f|_{K_x})^{-1}(V)$ é aberto, logo $f^{-1}(V)$ é aberto e f é contínua.

Proposição 1.3.6. Seja X um espaço topológico. Suponha que um subconjunto $A \subseteq X$

seja fechado se, e somente se $A \cap K$ é fechado em K para cada $K \subseteq X$ compacto; então X é compactamente gerado.

Demonstração. Seja $Y \in \text{Top}$ e $f : X \to Y$ k-contínua. Tome $V \subseteq Y$ fechado. Para cada $K \subseteq X$ compacto a composição

$$K \xhookrightarrow{\subseteq} X \xrightarrow{f} Y$$

é contínua, logo $f^{-1}(V) \cap K$ é fechado para cada compacto K, portanto $f^{-1}(V)$ é fechado e f é contínua. $\square$

Observação 1.3.7. Dado o contexto da proposição acima é imediato $A \subseteq X$ fechado implica que $A \cap K$ é fechado em K.

Exemplo 1.3.8 (Primeiro Contável $\implies$ Compactamente Gerado)**.** Seja X um espaço topológico primeiro contável. Afirmamos que X satisfaz as hipóteses da proposição 1.3.6, de fato, suponha que $A \subset X$ não seja fechado. Tome $x \in \overline{A} \setminus A$, como X é primeiro contável existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ com $x_n \in A$ convergindo para x. O conjunto $K = \big\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\big\} \cup \{x\}$ é compacto, porém $A \cap K = \big\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\big\}$ não é fechado (não possuí um ponto limite). Concluímos a afirmação e provamos que X é compactamente gerado pela proposição 1.3.6.

Nossa estratégia para criar um funtor plenamente fiel $\text{CG} \to \text{Cond(Set)}$ passa por achar um funtor adjunto ao funtor "condensação" $X \mapsto \underline{X}$, esse funtor será exatamente $X \mapsto X(\{*\})$, com $X(\{*\})$ carregando a seguinte topologia:

Construção 1.3.9 (Topologia de $X(\{*\})$)**.** Seja X um conjunto condensado, considere a seguinte sobrejeção:

$$\pi : \coprod_{\substack{\underline{S} \to X \\ S \in \text{CHaus}}} S \twoheadrightarrow X(\{*\})$$

Moralmente esse coproduto é proibido, pois ele está indexado por algo que pode não ser um conjunto, porém isto é simples de consertar. Se estamos trabalhando com $\text{Cond}_\kappa(\text{Set}) = \text{Cond(Set)}$ podemos pegar compactos Hausdorff com cardinalidade menor que κ. Além disso, não podemos usar todos os morfismos, mas sim classes de morfismos usando a seguinte relação de equivalência: $\underline{S} \to X$ é equivalente a $\underline{S'} \to X$, se existir um isomorfismo $\underline{S} \to \underline{S'}$ que comuta o triângulo

$$\begin{tikzcd}
\underline{S} \arrow[r] \arrow[dr, "\cong"'] & X \\
& \underline{S'} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

O domínio de π é a união disjunta dos compactos Hausdorff S (a menos de isomorfismo) tal que existe um morfismo de condensados $\underline{S} \to X$. Sejam $\big\{f_{S_k} : \underline{S_k} \to X\big\}_k$ a família de mapas do índice dessa união disjunta, π é explicitamente o coproduto de todos os mapas $\{f_{S_k,\{*\}}\}_k$.

Através de π, damos a $X(\{*\})$ a topologia quociente i.e. a menor topologia em $X(\{*\})$ tal que π é contínua.

A melhor forma de entender essa topologia é saber o que ela faz acontecer: Ela é a topologia tal que uma função $X(\{*\}) \to Y$ para $Y \in \mathrm{Top}$ é contínua se, e somente se para cada S compacto Hausdorff e para cada morfismo de condensados $\underline{S} \to X$ a composição

$$S \to X(\{*\}) \to Y$$

é contínua[6].

A identificação $X \mapsto X(\{*\})$ define um funtor da seguinte forma: Seja $f : X \to Y$ um morfismo de condensados, o funtor manda $f \mapsto f_{\{*\}} : X(\{*\}) \to Y(\{*\})$. Temos que checar que $f_{\{*\}}$ é contínua, de fato, seja $U \subseteq Y(\{*\})$ um aberto, isso significa que para cada $S \in \mathrm{CHaus}$ e para cada $h : \underline{S} \to Y$ o conjunto $h^{-1}_{\{*\}}(U)$ é aberto. Veja que $f^{-1}_{\{*\}}(U)$ é aberto se, e só se para cada $S \in \mathrm{CHaus}$ e para cada morfismo $g : \underline{S} \to X$ o conjunto $g^{-1}_{\{*\}}(f^{-1}_{\{*\}}(U)) = (f \circ g)^{-1}_{\{*\}}(U)$ é um aberto, de fato ele é um aberto, pois $f \circ g : \underline{S} \to Y$ é um morfismo de condensados e $S \in \mathrm{CHaus}$.

Estamos prontos para provar dois importantes teoremas desse texto.

Teorema 1.3.10. O funtor

$$\begin{aligned} \mathrm{Top} &\longrightarrow \mathrm{Cond(Set)} \\ Y &\longmapsto \underline{Y} \end{aligned}$$

admite um adjunto à esquerda

$$\begin{aligned} \mathrm{Cond(Set)} &\longrightarrow \mathrm{Top} \\ X &\longmapsto X(\{*\}) \end{aligned}$$

Demonstração. Seja X um conjunto condensado e T um espaço topológico. Precisamos mostrar a bijeção

$$\mathrm{Hom}(X(\{*\}), T) \cong \mathrm{Hom}(X, \underline{T})$$

Tome $f : X(\{*\}) \to T$ contínua. Pela topologia em $X(\{*\})$, f é contínua se, e somente se para cada $S \in \mathrm{CHaus}$ e para cada $g : \underline{S} \to X$ morfismo de conjuntos condensados, a composição $f \circ g_{\{*\}}$ é contínua, ou seja, para cada $g \in X(S)$, tem-se $f \circ g_{\{*\}} \in T(S)$. Logo

[6] Lembra uma certa definição?

f define um mapa

$$\begin{aligned} [f] : X &\longrightarrow \underline{T} \\ [f]_S : X(S) &\longrightarrow \underline{T}(S) \\ g &\longmapsto f \circ g_{\{*\}} \end{aligned}$$

Assim, temos um par de mapas

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X(\{*\}), T) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(X, \underline{T}) \\ f &\longmapsto [f] \\ \mathrm{Hom}(X, \underline{T}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(X(\{*\}), T) \\ g &\longmapsto g_{\{*\}} \end{aligned}$$

Esses mapas são inversos um do outro. De fato: Vamos mostrar que para $f \in \mathrm{Hom}(X(\{*\}), T)$ vale que $[f]_{\{*\}} = f$. Veja que para $g \in X(\{*\})$ temos

$$[f]_{\{*\}}(g) = f \circ g_{\{*\}} = f(g)$$

Resta provar que para $f \in \mathrm{Hom}(X, \underline{T})$ vale que $[f_{\{*\}}] = f$. Seja $S \in$ CHaus, para $g \in X(S)$ tem-se

$$[f_{\{*\}}]_S(g) = f_{\{*\}} \circ g_{\{*\}} = (f \circ g)_{\{*\}}$$

Por outro lado, usando o lema de Yoneda temos que

$$f_S(g) = (f \circ g)_S(\mathrm{id}_S)$$

Como $f \circ g : \underline{S} \to \underline{T}$ é uma transformação natural, para cada morfismo $p : \{*\} \to S$ o seguinte quadrado comuta

$$\begin{tikzcd} \underline{S}(S) \arrow[r, "(f \circ g)_S"] \arrow[d, "p^*"'] & \underline{T}(S) \arrow[d, "p^*"] \\ \underline{S}(\{*\}) \arrow[r, "(f \circ g)_{\{*\}}"] & \underline{T}(\{*\}) \end{tikzcd}$$

Logo para cada $a \in \underline{S}(S)$, seguindo por um lado do diagrama obtém-se

$$p^*((f \circ g)_S(a)) = ((f \circ g)_S(a)) \circ p$$

pelo outro lado calcula-se que

$$(f \circ g)_{\{*\}} \circ p^*(a) = (f \circ g)_{\{*\}} \circ a \circ p$$

Pela comutatividade do quadrado acima, usando $a = \mathrm{id}_S$ chegamos a conclusão que

$$\begin{aligned} ((f \circ g)_S(\mathrm{id}_S)) \circ p &= (f \circ g)_{\{*\}} \circ \mathrm{id}_S \circ p \\ \implies f_S(g)(p) &= (f \circ g)_{\{*\}}(p) \end{aligned}$$

para cada p, ou seja

$$f_S(g) = (f \circ g)_{\{*\}} = f_{\{*\}} \circ g_{\{*\}}$$

Como tomamos g arbitrário, percebemos que

$$f_S = [f_{\{*\}}]_S$$

E como S também é arbitrário, finalmente obtemos que

$$f = [f_{\{*\}}]$$

que era exatamente o que queríamos. $\square$

Corolário 1.3.11. O funtor

$$\begin{aligned} \mathrm{Top} &\longrightarrow \mathrm{Cond(Set)} \\ X &\longmapsto \underline{X} \end{aligned}$$

é fiel e a sua restrição

$$\begin{aligned} \mathrm{CG} &\longrightarrow \mathrm{Cond(Set)} \\ X &\longmapsto \underline{X} \end{aligned}$$

é plenamente fiel.

Demonstração. Vamos provar a primeira afirmação: Sejam X, Y espaços topológicos. Pelo teorema 1.3.10, temos a bijeção

$$\mathrm{Hom}(\underline{X}, \underline{Y}) \cong \mathrm{Hom}(\underline{X}(\{*\}), Y)$$

Logo a primeira afirmação do corolário é equivalente a dizer que o mapa

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathrm{Hom}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{X}(\{*\}), Y) \\ f &\longmapsto \underline{f}_{\{*\}} \end{aligned}$$

é injetivo. Seja $\tilde{X} = \underline{X}(\{*\})$. Repare que como conjunto podemos identificar $\tilde{X} = \mathrm{Hom}(\{*\}, X) = X$, mas com uma topologia (possivelmente) diferente de X. Fazendo essa identificação veja que

$$\underline{f}_{\{*\}}(x) = f(x)$$

Para cada $x \in \underline{X}(\{*\})$.

Note que Σ é uma bijeção justamente quando a topologia de $\tilde{X}$ for igual a de X e pela definição da topologia de $\tilde{X} = \underline{X}(\{*\})$ isso ocorre exatamente quando X é compactamente gerado! Provando a segunda afirmação do corolário. $\square$

Nossa *quest* agora é provar duas boas propriedades sobre Cond(Ab). Uma propriedade é que a categoria de grupos abelianos condensados possui todos os limites e colimites a outra é que ela é uma categoria abeliana.

Teorema 1.3.12. A categoria Cond(Ab) possui todos limites e colimites e eles são calculados ponto a ponto i.e. se I é uma categoria pequena de índices e

$$\begin{aligned} X : I &\longrightarrow \mathrm{Cond(Ab)} \\ i &\longmapsto X_i \end{aligned}$$

um funtor, para $S \in \mathrm{CHaus}$ o limite e o colimite em S são justamente

$$\left(\varprojlim_{i \in I} X_i\right)(S) = \varprojlim_{i \in I} X_i(S)$$

$$\left(\varinjlim_{i \in I} X_i\right)(S) = \varinjlim_{i \in I} X_i(S)$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração para colimites[7]. Seja I uma categoria pequena de índices e seja

$$\begin{aligned} X : I &\longrightarrow \mathrm{Cond(Ab)} \\ i &\longmapsto X_i \end{aligned}$$

um funtor. Usando o fato que Cond(Ab) está dentro da categoria de pré-feixes de ExtDisc e usando a proposição 2.2.18 temos que o colimite de X existe na categoria de pré-feixes de grupos abelianos ExtDisc. Vamos mostrar que esse colimite é um condensado usando a definição do teorema 1.2.13. Primeiramente

$$\left(\varinjlim_{i \in I} X_i\right)(\varnothing) = \varinjlim_{i \in I} X_i(\varnothing) = \varinjlim_{i \in I} \{*\} = \{*\}$$

Agora para $S, T \in \mathrm{ExtDisc}$ use o fato que em Ab o colimite[8] comuta com produto finito, daí

$$\begin{aligned} \left(\varinjlim_{i \in I} X_i\right)(S \sqcup T) &= \varinjlim_{i \in I} X_i(S \sqcup T) \\ &= \varinjlim_{i \in I} X_i(S) \times X_i(T) \\ &= \varinjlim_{i \in I} X_i(S) \times \varinjlim_{i \in I} X_i(T) \\ &= \left(\varinjlim_{i \in I} X_i\right)(S) \times \left(\varinjlim_{i \in I} X_i\right)(T) \end{aligned}$$

[7] Geralmente o colimite é mais complicado, por exemplo em uma categoria de feixes arbitrária é necessário feixeficar para obter o colimite.

[8] E o limite.

Mostrando que o colimite de X na categoria de pré-feixes é um grupo abeliano condensado e logo ele próprio é o colimite em Cond (Ab). $\square$

Com esse teorema obtemos que grupos abelianos condensados tem produto, coproduto, kernel, cokernel, equalizador, quociente...

Teorema 1.3.13. A categoria Cond(Ab) é abeliana.

Demonstração. Temos que mostrar que Cond(Ab) é aditiva. Seja X, Y dois grupos abelianos condensados. Transformar $\mathrm{Hom}(X, Y)$ em grupo é fácil, para $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ defina para cada $S \in \mathrm{CHaus}$ o morfismo

$$(f+g)_S \overset{\text{def}}{=} f_S + g_S \in \mathrm{Hom}(X(S), Y(S))$$

obtemos assim um morfismo soma $f + g$. É rotineiro provar que essa soma faz de $\mathrm{Hom}(X, Y)$ um grupo abeliano. Além disso é claro que Cond(Ab) tem produto, kernel e cokernel já que ela tem todos os limites e colimites. Resta checar o isomorfismo entre a imagem e a coimagem de um morfismo, mas isto é simples pois o limite e colimite podem ser calculados ponto a ponto, de fato, se $f : X \to Y$ é um morfismo de grupos abelianos condensados, para cada $S \in \mathrm{ExtDisc}$ vale que

$$(\mathrm{coim}\, f)(S) = \mathrm{coim}\, f_S \cong \mathrm{im}\, f_S = (\mathrm{im}\, f)(S)$$

o que nos leva a concluir que

$$\mathrm{coim}\, f \cong \mathrm{im}\, f$$

$\square$

Voltaremos a olhar para o exemplo 0.3.3 só que agora na categoria de grupos abelianos condensados e veremos o que muda.

Exemplo 1.3.14. Podemos olhar a inclusão $i : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ como mapa de grupos abelianos condensados utilizando o funtor visto na observação 1.2.3. Teremos para cada $S \in \mathrm{CHaus}$

$$\underline{i} : \underline{\mathbf{Q}} \longrightarrow \underline{\mathbf{R}}$$
$$\underline{i}_S : \mathrm{Hom}(S, \mathbf{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(S, \mathbf{R})$$

note que $\underline{i}_S$ será simplesmente a inclusão, daí é fácil ver que assim como na categoria de grupos abelianos topológicos o kernel será 0. A novidade é que diferente da situação clássica o cokernel não será nulo! Vamos olhar o cokernel como funtor partindo de ExtDisc usando a definição do teorema 1.2.13. Como os colimites são calculados ponto a ponto, o cokernel será o funtor que vale

$$C(S) \cong \frac{\mathrm{Hom}(S, \mathbf{R})}{\mathrm{Hom}(S, \mathbf{Q})}$$

Para S extremamente desconexo. Tomando $S = \{*\}$ o cokernel será $C(\{*\}) \cong \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Q}}$ e logo

$$C \neq 0$$

consertando o "*bug*" que existe para grupos abelianos topológicos.

Agora olharemos novamente para o exemplo 0.3.1.

Observação 1.3.15. Seja X um espaço topológico. Uma função $f : X \to Y$ é localmente constante se para cada $y \in Y$ a pré-imagem $f^{-1}(y)$ é aberta em X. Se Y carrega a topologia discreta uma função é localmente constante se, e só se for contínua.

Exemplo 1.3.16. Considere novamente o morfismo de grupos abelianos topológicos $i : \mathbf{R}_{\text{disc}} \to \mathbf{R}$, onde $\mathbf{R}_{\text{disc}}$ são os reais com a topologia discreta e $\mathbf{R}$ os reais com a topologia canônica. Aplicando o funtor visto na observação 1.2.3 tem-se

$$\underline{i} : \underline{\mathbf{R}_{\text{disc}}} \longrightarrow \underline{\mathbf{R}}$$
$$\underline{i}_S : \mathrm{Hom}(S, \mathbf{R}_{\text{disc}}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(S, \mathbf{R})$$

veja que $\mathrm{Hom}(S, \mathbf{R}_{\text{disc}}) = \{$funções localmente constantes $S \to \mathbf{R}\}$. Novamente, os mapas $\underline{i}_S$ serão inclusões e o kernel será nulo. Olhando o cokernel como funtor partindo de ExtDisc usando a definição do teorema 1.2.13 obtemos que o cokernel é o funtor vale

$$C(S) \cong \frac{\{\text{funções contínuas } S \to \mathbf{R}\}}{\{\text{funções localmente constantes } S \to \mathbf{R}\}}$$

para S extremamente desconexo[9]. Vamos mostrar que o cokernel é diferente de 0 olhando para $C(\beta\mathbf{N})$.

Provaremos que existe uma função contínua $\beta\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ que não é localmente constante e portanto o valor do cokernel em $\beta\mathbf{N}$ é não nulo concluindo que o cokernel é diferente de 0. Para $n \in \mathbf{N}$ defina $f(n) = \frac{1}{2^n}$ e obtemos uma função $f : \mathbf{N} \to [0,1]$. Como $[0,1]$ é compacto Hausdorff pela propriedade universal da compactificação de Stone-Čech existe uma função contínua $f' : \beta\mathbf{N} \to [0,1]$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} \mathbf{N} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & {[0,1]} \arrow[r, hook, "\subseteq"] & \mathbf{R} \\ \beta\mathbf{N} \arrow[ur, "f'"'] & & \end{tikzcd}$$

Com abuso de notação vamos enxergar f e f' como funções com contradomínio em $\mathbf{R}$. Como $\beta\mathbf{N}$ é compacto e f' é contínua temos que $f'(\beta\mathbf{N})$ é um compacto de $\mathbf{R}$ e portanto é um fechado de $\mathbf{R}$. Além disso, $f'(\beta\mathbf{N})$ contém o conjunto $\left\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$ e é fechado logo

[9] Um segredo é que nesse caso específico não é necessário restringir para ExtDisc por conta do teorema 3.2. de [Pet19b]

$0 \in f'(\beta\mathbf{N})$. Descobrimos assim que $f'^{-1}(0)$ é não-vazio, suponha por absurdo que ele seja aberto; como $\mathbf{N}$ é denso em $\beta\mathbf{N}$ teríamos que $f'^{-1}(0) \cap \mathbf{N}$ é não-vazio, ou seja, existe um natural n com $\frac{1}{2^n} = 0$, absurdo! Portanto $f'^{-1}(0)$ não é aberto e f' é uma função contínua que não é localmente constante.[10]

Daí $C(\beta\mathbf{N}) \neq 0$.

Um fato interessante desse exemplo é que $C(\{*\}) = 0$, isso nos diz que C é um condensado que não é isomorfo a $\underline{X}$ para algum espaço topológico X já que $\underline{X}(\{*\}) \cong X$ e vimos que C é não nulo!

Exemplo 1.3.17 (Transformação Quase Linear)**.** Considere os seguintes $\mathbf{R}$-espaços vetoriais topológicos

$$\ell^1(\mathbf{N}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \mid x_n \in \mathbf{R} \text{ e } \sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n| < \infty \right\}$$
$$\ell^2(\mathbf{N}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \mid x_n \in \mathbf{R} \text{ e } \sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

é simples verificar que $\ell^1(\mathbf{N}) \subset \ell^2(\mathbf{N})$, além disso é um resultado de análise funcional que $\ell^1(\mathbf{N})$ é denso em $\ell^2(\mathbf{N})$, logo o quociente $\ell^2(\mathbf{N})/\ell^1(\mathbf{N})$ é um espaço topológico indiscreto, ou seja, não carrega nenhuma informação geométrica útil além de que todos os pontos estão grudados. O que acontece é que no caso condensado esse quociente retem uma estrutura rica. Vamos nesse exemplo mostrar como esse quociente pode aparecer em análise funcional. Antes de tudo precisamos de dois lemas.

Lema 1.3.18 (Lema do lema)**.** Para $x \in [-1, 1]$ vale que

$$|x \log|x| - (x+1)\log|x+1|| \leq (2\log 2)(|x|+1)$$

Demonstração. Um bom exercício de Cálculo I. □

Lema 1.3.19 (Quase Linearidade)**.** Para s e t números reais vale que

$$|s\log|s| + t\log|t| - (s+t)\log|s+t|| \leq (2\log 2)(|s|+|t|)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade suponha que $|s| \leq |t|$. Se $t = 0$ o resultado é imediato. Se $t \neq 0$ use 1.3.18 colocando $x = \frac{s}{|t|}$. □

Agora considere a seguinte função contínua:

$$\begin{aligned} T : \ell^1(\mathbf{N}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbf{N}) \\ (x_n)_n &\longmapsto (x_n \log|x_n|)_n \end{aligned}$$

[10]A ideia central dessa demonstração é devida a Renan Mezabarba.

E perceba que para cada $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell^1(\mathbf{N})$ e $r \in \mathbf{R}$ vale que:

$$T(rx) - rT(x) = \log|r| \cdot x \in \ell^1(\mathbf{N})$$

Além disso pelo lema 1.3.19

$$T(x+y) - T(x) - T(y) \in \ell^1(\mathbf{N})$$

Assim, apesar de T não ser linear, a composição com a projeção para o quociente

$$\ell^1(\mathbf{N}) \xrightarrow{T} \ell^2(\mathbf{N}) \xrightarrow{\pi} \ell^2(\mathbf{N})/\ell^1(\mathbf{N})$$

é uma transformação linear! De fato, essa composição será contínua, mas como o quociente carrega a topologia discreta esse mapa não se recorda de nenhuma propriedade geométrica, diferente se olharmos a versão condensada desses mapas

$$\underline{\ell^1(\mathbf{N})} \xrightarrow{\underline{T}} \underline{\ell^2(\mathbf{N})} \xrightarrow{\underline{\pi}} \underline{\ell^2(\mathbf{N})}/\underline{\ell^1(\mathbf{N})}$$

Esse morfismo faz parte da teoria de **R**-espaços vetoriais líquidos que são um tipo de espaços vetoriais condensados. Veja [Pet19a] para mais informações, basicamente os professores Peter Scholze e Dustin Clausen estão trabalhando numa nova fundação para Análise Funcional. Um objeto central na teoria clássica são os espaços vetoriais localmente convexos completos, mas novamente estes não formam uma boa categoria, porém é possível substituir essa noção para espaços vetoriais condensados *líquidos* para o caso arquimediano e espaços vetoriais *sólidos* para o caso não-arquimediano que são objetos com uma categoria bem melhor.

O próximo exemplo é interessante para vermos o quanto trabalhar com grupos abelianos condensados é parecido com trabalhar com grupos abelianos. Mas antes do exemplo precisamos de um lema:

Lema 1.3.20 (Extremamente Desconexos são os objetos projetivos de CHaus)**.** Seja $S \in \text{ExtDisc}$ e $X, Y \in \text{CHaus}$. Seja $f : S \to X$ uma função contínua e $\pi : Y \twoheadrightarrow X$ um epimorfismo contínuo, então existe função contínua $\tilde{f} : S \to Y$ que comuta o triângulo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"'] & X \\ & Y \arrow[u, two heads, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

chamamos $\tilde{f}$ de **levantamento de** f.[11]

[11]Para quem recorda da definição de objeto projetivo de uma categoria, essa definição é o mesmo que dizer que extremamente desconexos são objetos projetivos de CHaus.

Demonstração. A ideia é "completar o quadrado" usando o produto fibrado e usar a propriedade da proposição 1.1.23 para "voltar" pelo morfismo projeção do produto fibrado.

Usando o produto fibrado obtemos o quadrado.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] & X \\ S \times_X Y \arrow[u, "p_S"] \arrow[r, "p_Y"'] & Y \arrow[u, two heads, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

lembre-se que

$$S \times_X Y = \big\{(s,y) \in S \times Y \mid f(s) = \pi(y)\big\}$$

Afirmamos que p_S é sobrejetivo, de fato, dado $s_0 \in S$, como π é sobrejetiva existe $y_0 \in Y$ com

$$f(s_0) = \pi(y_0)$$

e logo $(s_0, y_0) \in S \times_X Y$ e claro

$$p_S(s_0, y_0) = s_0$$

concluímos que p_S é de fato sobrejetiva. Agora usando a proposição 1.1.23 existe $q : S \to S \times_X Y$ com $p_S \circ q = \mathrm{id}$, disso e do fato que $f \circ p_S = \pi \circ p_Y$ obtemos que

$$f = \pi \circ p_Y \circ q$$

ou seja, o levantamento que queríamos é justamente $\tilde{f} = p_Y \circ q$. □

Exemplo 1.3.21. Vamos verificar que $\underline{\mathbf{R}}/\underline{\mathbf{Z}} \cong \underline{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}$ como grupo abeliano condensado. Começamos com a projeção que é um morfismo de grupos abelianos topológicos

$$\pi : \mathbf{R} \longrightarrow \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Z}}$$

e aplicamos o funtor "condensação" $X \mapsto \underline{X}$ em π

$$\underline{\pi} : \underline{\mathbf{R}} \longrightarrow \underline{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}$$

Afirmamos que $\ker \underline{\pi} = \underline{\mathbf{Z}}$, de fato, para $S \in \mathrm{ExtDisc}$ e $f \in \mathrm{Hom}(S, \mathbf{R})$ tem-se

$$\begin{aligned} & \underline{\pi}_S(f) = 0 \\ \iff & \forall s \in S \quad \overline{f(s)} = \overline{0} \\ \iff & \forall s \in S \quad f(s) \in \mathbf{Z} \\ \iff & f \in \mathrm{Hom}(S, \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

aqui estamos identificando $\operatorname{Hom}(S, \mathbf{Z})$ com $\big\{f : S \to \mathbf{R} \text{ contínua} \mid f(S) \subseteq \mathbf{Z}\big\}$. Pela propriedade universal do quociente existe o morfismo

$$\phi : \underline{\mathbf{R}}/\underline{\mathbf{Z}} \longrightarrow \underline{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}$$

Como $\underline{\mathbf{Z}} = \ker \underline{\pi}$ podemos concluir que $\ker \phi = 0$. Vamos provar que $\operatorname{coker} \phi = 0$, de fato seja $S \in \text{ExtDisc}$ tome $f \in \underline{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}(S)$ i.e. uma função contínua $f : S \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. A partir da função f queremos obter um levantamento $\tilde{f}$ comutando

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & \mathbf{R}/\mathbf{Z} \\ & \mathbf{R} \arrow[u, two heads, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

para isso vamos usar o lema 1.3.20. $\mathbf{R}$ não é compacto para usarmos o lema desejado, mas podemos aplicar o resultado anterior a $\pi|_{[0,1]}$ e obtemos um triângulo que queríamos

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[ddr, "\text{lema}"'] & \mathbf{R}/\mathbf{Z} \\ & \mathbf{R} \arrow[u, two heads, "\pi"'] \\ & {[0,1]} \arrow[u, hook, "\subseteq"'] \end{tikzcd}$$

obtendo $\tilde{f}$ desejado e temos que

$$\phi_S(\overline{\tilde{f}}) = f$$

e portanto ϕ_S é sobrejetiva para cada $S \in \text{ExtDisc}$ e logo $\operatorname{coker} \phi = 0$. Como Cond(Ab) é uma categoria abeliana e o kernel e o cokernel são nulos, então ϕ é um isomorfismo.

Exemplo 1.3.22. Note que em geral não vale que para G, H grupos abelianos topológicos com $H \leq G$ tenhamos o isomorfismo

$$\underline{G}/\underline{H} \cong \underline{G/H}$$

Por exemplo podemos tomar $G = \mathbf{R}$ com a topologia usual e $H = \mathbf{R}_{\text{disc}}$ com a topologia discreta, daí para verificar que eles não são isomorfos basta avaliá-los em $\beta\mathbf{N}$ pois já vimos que

$$\underline{\mathbf{R}}/\underline{\mathbf{R}_{\text{disc}}}(\beta\mathbf{N}) = \frac{\{\text{funções contínuas } \beta\mathbf{N} \to \mathbf{R}\}}{\{\text{funções localmente constantes } \beta\mathbf{N} \to \mathbf{R}\}} \ncong 0$$

e por outro lado

$$\underline{\mathbf{R}/\mathbf{R}_{\text{disc}}}(\beta\mathbf{N}) = \operatorname{Hom}(\beta\mathbf{N}, \mathbf{R}/\mathbf{R}_{\text{disc}}) = \operatorname{Hom}(\beta\mathbf{N}, \{*\}) \cong 0$$

que é nulo!

Definição 1.3.23 (Monomorfismo e Epimorfismo)**.** Seja $f : X \to Y$ um morfismo de conjuntos condensados. Dizemos que f é um **monomorfismo** se para cada $S \in \text{CHaus}$ a função $f_S : X(S) \to Y(S)$ é injetiva.

Por outro lado dizemos que f é um **epimorfismo** se para cada $S \in \text{CHaus}$ e para cada $y \in Y(S)$ existe uma cobertura $\{p_i : S_i \to S\}_{i \in I}$ tal que para cada $i \in I$ vale que $p_i^*(y)$ está na imagem de f_{S_i}.

Observação 1.3.24. É possível verificar que esses são justamente o monomorfismo e epimorfismo no sentido categórico.

Observação 1.3.25. Alguns autores exigem que para um espaço topológico ser compacto ele tenha que ser Hausdorff e chamam de quasicompacto um espaço que toda cobertura aberta tenha uma subcobertura finita, mas não necessariamente Hausdorff. Neste trabalho ser compacto e ser quasicompacto são sinônimos quando se trata de espaços topológicos e ser Hausdorff não é requisito de ser compacto.

Por outro lado, queremos definir o que significa um conjunto condensado ser compacto, em teoria das categorias já existe a definição de *objeto compacto* que é a seguinte: Para uma categoria $\mathcal{C}$, um objeto $X \in \mathcal{C}$ é **compacto** se o funtor $\text{Hom}(X, -)$ preserva colimites filtrados. Assim um conjunto condensado é compacto se for um objeto compacto de Cond(Set). Mas esta definição não é análoga a definição para espaços topológicos e neste texto não exploraremos condensados compactos, a noção que tentará capturar os mesmos fenômenos que espaços topológicos compactos é a de conjunto condensado *quasicompacto*.

Definição 1.3.26 (Conjunto condensado quasicompacto)**.** Seja X um conjunto condensado. Dizemos que X é **quasicompacto** se para cada família de morfismos de condensados $\{X_i \to X\}_{i \in I}$ vale que se

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i \twoheadrightarrow X$$

é um epimorfismo, então há um subconjunto finito $I_0 \subseteq I$ tal que a restrição

$$\bigsqcup_{i \in I_0} X_i \twoheadrightarrow X$$

é um epimorfismo.

Proposição 1.3.27 (Compactos Hausdorff são quasicompactos)**.** Seja $S \in \text{CHaus}$. $\underline{S}$ é conjunto condensado quasicompacto.

Demonstração. Seja S um espaço compacto Hausdorff. Seja $\{X_i \to S\}_{i \in I}$ uma família de morfismos de condensados com

$$\phi : \bigsqcup_{i \in I} X_i \twoheadrightarrow \underline{S}$$

um epimorfismo. Seja $a = \mathrm{id}_S \in \underline{S}(S) = \mathrm{Hom}(S, S)$. Como ϕ é um epimorfismo existe uma cobertura $\{p_j : S_j \to S\}_{j\in J}$[12] com $p_j^*(a) \in \mathrm{im}\, \phi_{S_j}$ e logo existe $a_j \in X_{i_j}(S_j)$ com

$$p_j^*(a) = \phi_{S_j}(a_j) \tag{1.1}$$

de uma lado vale que para cada $j \in J$

$$p_j^*(a) = a \circ p_j = \mathrm{id}_S \circ p_j = p_j$$

por outro lado usando o lema de Yoneda e vendo elementos como morfismos, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
a_j \arrow[r, mapsto] & \phi_{S_j}(a_j) \\
\coprod_i X_i(S_j) \arrow[r, "\phi_{S_j}"] \arrow[d, equal] & \underline{S}(S_j) \arrow[d, equal] \\
\coprod_i \mathrm{Hom}(\underline{S_j}, X_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\underline{S_j}, \underline{S}) \\
a_j \arrow[r] & \phi \circ a_j
\end{tikzcd}$$

Voltando para 1.1 vemos então que

$$p_j = \phi \circ a_j \tag{1.2}$$

Afirmamos que $\{X_{i_j} \to \underline{S}\}_{j\in J}$ define uma "subcobertura" i.e. a restrição de ϕ

$$\coprod_{j\in J} X_{i_j} \twoheadrightarrow \underline{S}$$

é um epimorfismo. De fato, Seja $T \in \mathrm{CHaus}$ e $t \in \underline{S}(T) = \mathrm{Hom}(T, S)$. Vamos olhar para o diagrama

$$T \xrightarrow{t} S \overset{p}{\twoheadleftarrow} \textstyle\coprod_{j\in J} S_j$$

onde $p|_{S_j} = p_j$. Repare que $p(S_j)$ é compacto pois é imagem contínua de um compacto, $p(S_j)$ é fechado pois é um subespaço compacto do espaço Hausdorff S. Seja $T_j = t^{-1}(p(S_j))$. T_j é fechado pois é pré-imagem de um fechado. T_j é compacto pois é um subespaço fechado do espaço compacto T. Note que $\bigcup_j T_j = T$ pois

$$\bigcup_j T_j = \bigcup_j t^{-1}(p(S_j)) = t^{-1}\left(\bigcup_j p_j(S_j)\right) = t^{-1}(S) = T$$

[12]Lembre-se que J é finito.

Assim se definirmos para cada $j \in J$ o mapa q_j como a inclusão $q_j : T_j \to T$, então a família $\{q_j : T_j \to T\}_{j \in J}$ é uma cobertura de T. Perceba que $q_j^*(t) = t \circ q_j$ e para $x \in T_j$ temos que $t \circ q_j(x) = t(x) \in p(S_j)$, logo existe $s \in S_j$ com

$$t(x) = p(s)$$

usando a equação 1.2

$$t(x) = (\phi \circ a_j)(s) = \phi_{S_j}(a_j(x))$$

mostrando o que queríamos. $\square$

Lema 1.3.28. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Sejam $A, B, C \in \mathcal{C}$ objetos satisfazendo o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \\
& C \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

com f epimorfismo. Então h é um epimorfismo.

Demonstração. Seja $D \in \mathcal{C}$ um objeto e $a, b : B \to D$ dois morfismos com $a \circ h = b \circ h$

$$\begin{tikzcd}
& & D \\
A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[ur, shift left, "a"] \arrow[ur, shift right, "b"'] & \\
& C \arrow[u, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

temos que

$$\begin{aligned}
& a \circ (h \circ g) = b \circ (h \circ g) \\
\implies & a \circ f = b \circ f \\
\implies & a = b
\end{aligned}$$

a última implicação vem do fato que f é épico. Dessa forma h é um epimorfismo. $\square$

Proposição 1.3.29 (Critério para ser quasicompacto)**.** Seja X um conjunto condensado. X é quasicompacto se, e somente se existe $S \in \text{CHaus}$ e um epimorfismo:

$$\underline{S} \twoheadrightarrow X$$

de conjuntos condensados.

Demonstração. (Ida) Seja X um conjunto condensado. Pelo lema de Yoneda para cada $S \in \text{CHaus}$ podemos identificar $X(S) = \text{Hom}(\underline{S}, X)$. Vamos considerar o coproduto de todos esses mapas

$$\phi : \coprod_{\substack{\underline{S} \to X \\ S \in \text{CHaus}}} \underline{S} \twoheadrightarrow X$$

Sobre os índices vale a mesma observação feita em 1.3.9.

Vamos mostrar que ϕ é um epimorfismo. De fato, seja $T \in \text{CHaus}$ e $t \in X(T)$, pelo lema de Yoneda t define um morfismo $[t] \in \text{Hom}(\underline{T}, X)$ que explicitamente para $K \in \text{CHaus}$ faz o seguinte

$$\begin{aligned} [t]_K : \text{Hom}(K, T) &\longrightarrow X(K) \\ f &\longmapsto f^*(t) = X(f)(t) \end{aligned}$$

Então podemos usar como cobertura o conjunto unitário $\{\text{id} : T \to T\}$ pois vale que

$$\text{id}^*(t) = t = [t]_T(\text{id}) = \phi_T(\text{id})$$

Mostrando que ϕ é epimorfismo. Como X é compacto, existem finitos morfismos $\underline{S_i} \to X$ com S_i compactos Hausdorff tal que a seguinte restrição de ϕ

$$\phi : \coprod_{\text{finitos } i} \underline{S_i} \twoheadrightarrow X$$

é um epimorfismo. Agora perceba que para índices finitos

$$\coprod_i \underline{S_i} \cong \underline{\coprod_i S_i}$$

Disso, basta definir o compacto Hausdorff $S = \coprod_i S_i$. Via o isomorfismo acima e o epimorfismo que é restrição de ϕ e obtemos um epimorfismo

$$\underline{S} \twoheadrightarrow X$$

(Volta) Seja X um conjunto condensado. Seja S um espaço compacto Hausdorff e

$$\phi : \underline{S} \twoheadrightarrow X$$

um epimorfismo. Suponha que $\{X_i \to X\}_{i \in I}$ seja uma família de morfismos de condensados com um epimorfismo

$$\alpha : \coprod_{i \in I} X_i \twoheadrightarrow X$$

aplicando o produto fibrado obtemos o quadrado

$$\begin{tikzcd} \underline{S} \arrow[r, two heads, "\phi"] & X \\ \coprod_i X_i \times_X \underline{S} \arrow[u, "\psi"] \arrow[r] & \coprod_i X_i \arrow[u, two heads, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Afirmamos que ψ é um epimorfismo, de fato, seja $T \in$ CHaus e $t \in S(T)$. Temos que $\phi_T(t) \in X(T)$ e como α é um epimorfismo existe uma cobertura $\{p_j : T_j \to T\}_{j \in J}$ tal que para cada $j \in J$ existe $a_j \in X_{i_j}(T_j)$

$$p_j^*(\phi_T(t)) = \alpha_{T_j}(a_j)$$

usando o fato que o seguinte quadrado comuta

$$\begin{tikzcd} \underline{S}(T) \arrow[r, "p_j^*"] \arrow[d, "\phi_T"'] & \underline{S}(T_j) \arrow[d, "\phi_{T_j}"] \\ X(T) \arrow[r, "p_j^*"'] & X(T_j) \end{tikzcd}$$

vemos que

$$\phi_{T_j}(p_j^*(t)) = \alpha_{T_j}(a_j)$$

e logo

$$(a_j, p_j^*(t)) \in X_{i_j}(T_j) \times_X S(T_j)$$

e como $p_j^*(t)$ é a imagem de $(a_j, p_j^*(t))$ via ψ_{T_j}, concluímos nossa afirmação. Como $\underline{S}$ é quasicompacto existe um subconjunto finito $I_0 \subseteq I$ tal que

$$\coprod_{i \in I_0} X_i \times_X \underline{S} \twoheadrightarrow \underline{S}$$

é um epimorfismo. Afirmamos que $\coprod_{i \in I_0} X_i \to X$ é um epimorfismo, de fato estamos na seguinte situação:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i \in I_0} X_i \times_X \underline{S} \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & X \\ & & \coprod_{i \in I_0} X_i \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Agora basta usar o lema 1.3.28 para ver que $\coprod_{i \in I_0} X_i \to X$ é um epimorfismo. Concluímos que X é quasicompacto. $\square$

A proposição acima nos dá um bom critério para checar se um condensado é compacto ou não.

Vamos fazer calcular alguns exemplos.

Exemplo 1.3.30. $\underline{\mathbf{R}}/\underline{\mathbf{Q}}$ e $\underline{\mathbf{R}}/\underline{\mathbf{R}_{\text{disc}}}$ são compactos. Vamos verificar explicitamente para $\underline{\mathbf{R}}/\underline{\mathbf{Q}}$, para o outro quociente o raciocínio é análogo.

Lembre-se que $\underline{\mathbf{R}}/\underline{\mathbf{Z}} \cong \underline{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}$. Queremos usar o critério de ser compacto 1.3.29. Considere o mapa

$$\phi : \underline{\mathbf{R}}/\underline{\mathbf{Z}} \to \underline{\mathbf{R}}/\underline{\mathbf{Q}}$$

que para $S \in \text{ExtDisc}$ é o morfismo de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \phi_S : \frac{\text{Hom}(S, \mathbf{R})}{\text{Hom}(S, \mathbf{Z})} &\longrightarrow \frac{\text{Hom}(S, \mathbf{R})}{\text{Hom}(S, \mathbf{Q})} \\ \overline{f} &\longmapsto \overline{f} \end{aligned}$$

é simples verificar que ϕ_S é sobrejetivo, logo $\operatorname{coker} \phi_S = 0$ para cada $S \in \text{ExtDisc}$, portanto $\operatorname{coker} \phi = 0$ e concluímos que ϕ é um epimorfismo pois numa categoria abeliana um morfismo é um epimorfismo se, e somente se o seu cokernel é zero.

Exemplo 1.3.31 (Não-compactos não são quasicompactos)**.** O critério para ser compacto 1.3.29 também nos ajuda a dizer quando um condensado não é compacto. O pulo do gato é usar um resultado de teoria das categorias que diz que um funtor adjunto à esquerda preserva epimorfismos. Lembramos então que o funtor que leva um condensado X ao espaço topológico $X(\{*\})$ é adjunto à esquerda do funtor que leva um espaço topológico Y a $\underline{Y}$.

Seja X é um espaço topológico não-compacto. Suponha por absurdo que existe um espaço compacto Hausdorff S e um epimorfismo

$$\underline{S} \twoheadrightarrow \underline{X}$$

aplicando o funtor $X \mapsto X(\{*\})$ pelos comentários inciais obtemos um epimorfismo contínuo

$$f : S \twoheadrightarrow X$$

Como S é compacto e imagem contínua de compacto é compacta temos que $f(S)$ é compacto, mas como f é sobrejetiva temos que $f(S) = X$, porém X não é compacto. Absurdo!

Então, por exemplo $\underline{\mathbf{R}}$ não é quasicompacto.

Na linguagem de teoria de topos também existe a noção de um feixe ser “Hausdorff”. Na literatura essa propriedade é chamada de quaseseparabilidade, mas neste texto vamos tomar a liberdade de chamar de Hausdorff mesmo.

Definição 1.3.32 (Hausdorff)**.** Um conjunto condensado é Hausdorff se para cada $S \in$ CHaus e para cada par de mapas $f, g : \underline{S} \to X$ o respectivo produto fibrado $\underline{S} \times_X \underline{S}$ é quasicompacto.

Exemplo 1.3.33 (Compactamente gerados Hausdorff são Hausdorff)**.** Seja X um espaço topológico compactamente gerado e Hausdorff, então $\underline{X}$ é Hausdorff como condensado.

De fato, seja $S \in$ CHaus e $f, g : \underline{S} \to \underline{X}$ um par de morfismos com produto fibrado $\underline{S} \times_{\underline{X}} \underline{S}$. Vamos mostrar que nesse caso $\underline{S} \times_{\underline{X}} \underline{S}$ é isomorfo a $\underline{S \times_X S}$: Seja T extremamente desconexo. Usando o fato que o funtor de compactamente gerados para condensados é plenamente fiel temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(\underline{T}, \underline{S} \times_{\underline{X}} \underline{S}) &= \left\{(s,t) \in \operatorname{Hom}(\underline{T}, \underline{S})^2 \mid f \circ s = g \circ t\right\} \\ &= \left\{(s,t) \in \operatorname{Hom}(T, S)^2 \mid f_{\{*\}} \circ s = g_{\{*\}} \circ t\right\} \\ &= \operatorname{Hom}(\underline{T}, \underline{S \times_X S}) \end{aligned}$$

Então para mostrar que $\underline{X}$ é Hausdorff é necessário e suficiente mostrar que $S \times_X S$ é compacto e isto é simples, basta observar que $T = f_{\{*\}}(S) \cup g_{\{*\}}(S)$ é união finita de compactos e logo é compacto. T é Hausdorff, pois X é Hausdorff. E é simples checar que

$$S \times_X S = S \times_T S$$

e $S \times_T S$ é compacto pois é limite de compactos Hausdorff (que é compacto Hausdorff).

Então por exemplo $\underline{\mathbf{R}}$ é um condensado Hausdorff.

Um teorema muito legal (mas que não vamos provar) que relaciona as noções compacidade e a de ser Hausdorff entre espaços topológicos e condensados é o seguinte:

Teorema 1.3.34. A categoria dos espaços topológicos compactos e Hausdorff é equivalente à categoria de conjuntos condensados quasicompactos e Hausdorff. Além disso, essa equivalência é dada via os funtores $X \mapsto \underline{X}$ e $X \mapsto X(\{*\})$ do teorema 1.3.10.

Demonstração. [Pet19b] teorema 2.16. □

Observação 1.3.35. Usando o teorema acima, quando um condensado X é compacto e Hausdorff vale que $X = \underline{X(\{*\})}$.

Vamos também denotar por CHaus a categoria dos conjuntos condensados quasicompactos e Hausdorff.

Com espaços topológicos o funtor esquecimento

$$\text{CHaus} \hookrightarrow \text{Top}$$

admite um adjunto à esquerda que é justamente a compactificação de Stone-Čech

$$\beta : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{CHaus}$$

Para conjuntos condensados também temos uma compactificação.

Proposição 1.3.36. O funtor esquecimento

$$\mathrm{CHaus} \longrightarrow \mathrm{Cond(Set)}$$

Admite um adjunto à esquerda. O adjunto a esquerda será a composição dos funtores

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Cond(Set)} & \longrightarrow & \mathrm{Top} & \longrightarrow & \mathrm{CHaus} & \longrightarrow & \mathrm{CHaus} \\ & & & & & & \\ X & \longmapsto & X(\{*\}) & \longmapsto & \beta X(\{*\}) & \longmapsto & \underline{\beta X(\{*\})} \end{array}$$

Demonstração. Para isso vamos usar a observação 1.3.35, o teorema 1.3.10, e a adjunção envolvendo a compactificação de Stone-Čech: Seja X um conjunto condensado qualquer. Seja S um conjunto condensado compacto e Hausdorff. Vale que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\underline{\beta X(\{*\})}, S) &= \mathrm{Hom}(\underline{\beta X(\{*\})}, \underline{S(\{*\})}) \\ &= \mathrm{Hom}(\underline{\beta X(\{*\})}(\{*\}), S(\{*\})) \\ &= \mathrm{Hom}(\beta X(\{*\}), S(\{*\})) \\ &= \mathrm{Hom}(X(\{*\}), S(\{*\})) \\ &= \mathrm{Hom}(X, \underline{S(\{*\})}) \\ &= \mathrm{Hom}(X, S) \end{aligned}$$

□

Vamos focar agora em uma construção condensada dos números reais. Trabalhar com esse exemplo lembra análise (não arquimediana e arquimediana), teoria dos números, álgebra e topologia ao mesmo tempo. Este exemplo nos revela a multidisciplinaridade das aplicações do formalismo da Matemática Condensada e de como essa linguagem é uma ponte entre diversas áreas.

Para A um anel comutativo com unidade, denotamos por $A[[T]]$ o anel das séries formais com coeficientes em A e $A((T)) = \left\{\sum_{n>-\infty} a_n T^n \mid a_n \in A\right\}$ o anel das séries de Laurent formais.

Com a notação

$$\sum_{n>-\infty} a_n$$

queremos dizer que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sum_{n>-\infty} a_n = \sum_{n>n_0} a_n$$

Vamos começar definindo o seguinte espaço topológico:

Exemplo 1.3.37. Sejam r e c números reais com $0 < r < 1$ e $c > 0$. Defina

$$\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{n>-\infty} a_n T^n \mid a_n \in \mathbf{Z}, \sum_n |a_n| r^n \leq c \right\}$$

definimos uma métrica nesse espaço da seguinte forma: Seja $f = \sum_n a_n T^n \in \mathbf{Z}((T))$, defina

$$v(f) = \max\left\{n \in \mathbf{Z} \mid a_n = 0\right\}$$

perceba que $v(f)$ assume valores em $\mathbf{Z} \cup \{\infty\}$. Agora fixe um número real $\beta > 1$ e defina

$$||f|| = \beta^{-v(f)}$$

chamada de norma T-ádica. Consideramos $\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}$ com a topologia induzida por esta norma. Essa topologia não depende do $\beta > 1$ escolhido.

Analisaremos um pouco da estrutura condensada de $\underline{\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}}$.

Observação 1.3.38. Seja $S \in \mathrm{CHaus}$. Para cada $n \in \mathbf{Z}$ seja $a_n : S \to \mathbf{Z}$ uma função. Vamos denotar por $\sum_{n>-\infty} a_n T^n$ a função

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \mathbf{Z}((T)) \\ s &\longmapsto \sum_{n>-\infty} a_n(s) T^n \end{aligned}$$

Proposição 1.3.39. Para $S \in \mathrm{ExtDisc}$ vale que

$$\underline{\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}}(S) = \left\{ \sum_{n>-\infty} a_n T^n \mid a_n \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(S, \mathbf{Z}), \forall s \in S \ \sum_n |a_n(s)| r^n \leq c \right\}$$

Demonstração. Seja $f \in \underline{\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}}(S)$ uma função contínua. Então para cada $s \in S$ vamos ter

$$f(s) = \sum_n a_n(s) T^n$$

para funções $a_n : S \to \mathbf{Z}$ e com

$$\sum_n |a_n(s)| r^n \leq c$$

Temos que mostrar que cada a_n é contínua. Como $\mathbf{Z}$ carrega a topologia discreta temos que mostrar que $a_n^{-1}(k)$ é aberto para cada $k \in \mathbf{Z}$.

Se $a_n^{-1}(k) = \varnothing$, é imediato. Suponha que $a_n^{-1}(k) \neq \varnothing$ e tome $s_0 \in a_n^{-1}(k)$. Seja $B(f(s_0), \beta^{-n})$ a bola aberta de centro $f(s_0)$ e raio β^{-n}. Considere o aberto

$$U = f^{-1}(B(f(s_0), \beta^{-n}))$$

É imediato que $s_0 \in U$. Agora tome $t \in U$ arbitrário, então

$$\begin{aligned} ||f(s_0) - f(t)|| &< \beta^{-n-1} \\ \implies v(f(s_0) - f(t)) &> n \\ \implies a_m(t) &= a_m(s_0) \text{ para } m \leq n \\ \implies a_n(t) &= k \\ \implies t &\in a_n^{-1}(k) \end{aligned}$$

concluímos desse raciocínio que U é uma vizinhança aberta de s_0 com $U \subseteq a_n^{-1}(k)$, portanto $a_n^{-1}(k)$ é aberto e a_n é contínua.

Reciprocamente, seja $\sum_n a_n T^n$ uma função com $a_n \in \mathrm{Hom}(S, \mathbf{Z})$ e $\sum_n |a_n(s)| r^n$ para cada $s \in S$. Temos uma função

$$\begin{aligned} \phi : S &\longrightarrow \mathbf{Z}((T))_{r,\leq c} \\ s &\longmapsto \sum_n a_n(s) T^n \end{aligned}$$

Que precisamos mostrar que é contínua. Repare que a família de bolas abertas da forma $B(f, \beta^k)$ para $f \in \mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}$ e $k \in \mathbf{Z}$ forma uma base para a topologia em $\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}$ pois toda distancia entre duas séries formais é da forma β^k para algum k inteiro.

Seja $g = \sum_n b_n T^n \in \mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}$ e n_0 um número inteiro. Vamos verificar que o conjunto

$$V = \phi^{-1}(B(g, \beta^{-n_0}))$$

é aberto. Tome $s_0 \in V$, então

$$\begin{aligned} ||\phi(s_0) - g|| &< \beta^{-n_0} \\ \implies v(\phi(s_0) - g) &> n_0 \\ a_n(s_0) &= b_n \text{ para } n \leq n_0 \\ s_0 &\in \bigcap_{n \leq n_0} a_n^{-1}(b_n) \end{aligned}$$

e $\bigcap_{n \leq n_0} a_n^{-1}(b_n)$ é aberto pois é uma interseção finita de abertos, é finita pois existe $m_0 \in \mathbf{Z}$ tal que $a_n^{-1}(b_n) = \varnothing$ para $n < n_0$.

Concluímos que V é aberto e logo ϕ é contínua. □

Proposição 1.3.40. O espaço $\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}$ é profinito.

Demonstração. Vamos escrever este espaço como limite de espaços finitos discretos.

Note que para cada k inteiro há o homeomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}((T))_{r,\leq c} &\longrightarrow \mathbf{Z}((T))_{r,\leq c\cdot r^k} \\ f &\longmapsto T^k \cdot f \end{aligned}$$

assim, tomando k suficientemente grande podemos fazer com que $cr^k < 1$, logo podemos supor que $c < 1$ de início para provar esta proposição.

Note que quando $c < 1$ as series formais em $\sum_n a_n T^n \in \mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}$ tem que ter $a_n = 0$ para $n < 0$, do contrário a desigualdade

$$\sum_n |a_n| r^n \leq c < 1$$

não é satisfeita. Então toda série aqui começa a partir do índice 0 e logo podemos incluir

$$\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c} \subseteq \mathbf{Z}[[T]]$$

Defina para $m \in \mathbf{N}$ o conjunto

$$Z_m = \left\{ \sum_{0\leq n\leq m} a_n T^n \mid a_n \in \mathbf{Z}, \sum_n |a_n| r^n \leq c \right\}$$

pela condição de que $\sum_n |a_n| r^n \leq c$ vemos que Z_m é finito. Considere Z_m com a topologia discreta e note que para cada $m \leq n$ há uma função contínua

$$\begin{aligned} Z_n &\longrightarrow Z_m \\ \sum_{0\leq k\leq n} a_k T^k &\longmapsto \sum_{0\leq k\leq m} a_k T^k \end{aligned}$$

que é a função que trunca a soma. Podemos tomar o limite do diagrama envolvendo os mapas $Z_n \to Z_m$. Vamos chamar esse limite de L. Para cada $n \in \mathbf{N}$ temos uma função contínua $\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c} \to Z_n$ que trunca a série formal numa soma finita. Como para cada $m \leq n$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z_n \arrow[dd] \\ \mathbf{Z}((T))_{r,\leq c} \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\ & Z_m \end{tikzcd}$$

comuta, pela propriedade universal do limite há uma única função contínua $\phi : \mathbf{Z}((T))_{r,\leq c} \to L$ que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & Z_n \arrow[dd] \\
\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c} \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[urr, bend left] \arrow[drr, bend right] & L \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
 & & Z_m
\end{tikzcd}$$

agora seja $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in L$ pela comutatividade do triângulo

$$\begin{tikzcd}
 & Z_n \arrow[dd] \\
L \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
 & Z_m
\end{tikzcd}$$

Obrigatoriamente as somas f_n são da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
f_0 &= a_0 \\
f_1 &= a_0 + a_1T \\
f_2 &= a_0 + a_1T + a_2T^2 \\
&\vdots \\
f_n &= a_0 + \cdots a_nT^n
\end{aligned}$$

para $a_n \in \mathbf{Z}$, assim podemos definir o mapa

$$\begin{aligned}
\psi : L &\longrightarrow \mathbf{Z}((T))_{r,\leq c} \\
(a_0, a_0 + a_1T, \dots) &\longmapsto \sum_n a_nT^n
\end{aligned}$$

é imediato que ϕ e ψ são inversas, resta mostrar que ψ é contínua. De fato, seja $f = \sum_n a_nT^n$ e considere a bola aberta $B = B(f, \beta^{-n_0})$. Lembre-se que a topologia do limite é a topologia de subespaço advinda da topologia produto $L \subseteq \prod_{n\in\mathbf{N}} Z_n$. Vamos mostrar que $U = \psi^{-1}(B)$ é aberto: Seja $g = (b_0, b_0 + b_1T, \dots) \in U$ e considere a vizinhança aberta de g definida por

$$V = \left(\{b_0\} \times \{b_0 + b_1T\} \times \cdots \times \{b_0 + \cdots + b_{n_0}T^{n_0}\} \times \prod_{n>n_0} Z_n \right) \cap L$$

repare que $\psi(V) \subseteq B$ e logo $V \subseteq U$. Portanto U é aberto e ψ é contínua.

Agora da proposição 1.1.16 temos que $\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}$ é profinito. $\square$

Agora podemos definir o seguinte anel condensado:

Definição 1.3.41. Seja $0 < r < 1$ defina

$$\mathbf{Z}((T))_r = \bigcup_{s>0} \underline{\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}}$$

i.e. para $S \in \mathrm{ExtDisc}$

$$\mathbf{Z}((T))_r(S) = \bigcup_{s>0} \underline{\mathbf{Z}((T))_{r,\leq c}}(S)$$

é simples checar usando a definição de conjunto condensado como funtor partindo de ExtDisc no teorema 1.2.13.

Observação 1.3.42. Note que

$$\mathbf{Z}((T))_r(\{*\}) = \left\{ \sum_{n>-\infty} a_n T^n \mid \sum_n |a_n| r^n < \infty \right\}$$

Definição 1.3.43. Para $0 < r < 1$ defina

$$\mathbf{Z}((T))_{>r} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{n>-\infty} a_n T^n \mid a_n \in \mathbf{Z}, \exists r' > r : \lim_n |a_n|(r')^n = 0 \right\}$$

Observação 1.3.44. Seja $f = \sum_n a_n T^n \in \mathbf{Z}((T))_{>r}$. Então existe $r' > r$ tal que $\lim_n |a_n|(r')^n = 0$ em particular a sequência cujo os elementos são $|a_n|(r')^n$ é limitada i.e. existe $C > 0$ real com

$$|a_n|(r')^n < C$$

Agora repare que para $0 < s < r'$ vale que

$$\left| \sum_n a_n s^n \right| \leq \sum_n |a_n|(r')^n \left(\frac{s}{r'}\right)^n \leq C \sum_n \left(\frac{s}{r'}\right)^n < \infty$$

Em particular temos que

$$\mathbf{Z}((T))_{>r} \subseteq \mathbf{Z}((T))_r(\{*\})$$

O anel $\mathbf{Z}((T))_{>r}$ reúne o mundo arquimediano com o não arquimediano, vamos enunciar um resultado sobre o espectro desse anel.

Proposição 1.3.45. Seja $0 < r < 1$. O anel $\mathbf{Z}((T))_{>r}$ é um domínio de ideais principais e os seus ideais primos não-nulos são da seguinte forma:

(i) $\mathfrak{p}$ o kernel do seguinte morfismo avaliação: Para $z \in \mathbf{C}^\times$ com $|z| \leq r$ o morfismo

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}((T))_{>r} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \sum_n a_n T^n &\longmapsto \sum_n a_n z^n \end{aligned}$$

(ii) $\mathfrak{p} = (p)$ para algum primo $p \in \mathbf{Z}$.

(iii) $\mathfrak{p}$ o kernel do seguinte morfismo: Para p primo e $x \in \overline{\mathbf{Q}_p}$ tal que $\lim_n x^n = 0$ (quando isso acontece dizemos que x é topologicamente nilpotente) o morfismo avaliação

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}((T))_{>r} &\longrightarrow \overline{\mathbf{Q}_p} \\ \sum_n a_n T^n &\longmapsto \sum_n a_n x^n \end{aligned}$$

Demonstração. Teorema 7.1 de [Pet19a]. $\square$

Por fim, o resultado que também não vamos provar é o seguinte:

Proposição 1.3.46. Para $0 < r' < r < 1$ defina o morfismo

$$\theta : \mathbf{Z}((T))_r \longrightarrow \underline{\mathbf{R}}$$

que para $S \in \mathrm{ExtDisc}$ faz o seguinte

$$\begin{aligned} \theta : \mathbf{Z}((T))_r(S) &\longrightarrow \underline{\mathbf{R}}(S) \\ \sum_n a_n T^n &\longmapsto \sum_n a_n (r')^n \end{aligned}$$

em que $a_n : S \to \mathbf{Z}$ são funções contínua. θ é um epimorfismo.

Capítulo 2

Feixes Sobre Conjuntos

Este capítulo é uma passagem rápida pela teoria de feixes para o leitor que não tenha alguma familiaridade com esse tipo de objeto. Em geometria é comum estudar famílias espaços de funções que estão definidos sobre abertos do nosso objeto geométrico. Nesse contexto quando temos duas funções definidas sobre duas cartas diferentes do nosso objeto geométrico, podemos checar se essas duas funções concordam na interseção das cartas e caso a resposta seja positiva podemos colar essas funções; a linguagem de feixes nos dá uma ferramenta simples para lidar com situações assim. Feixes são essenciais para qualquer área da geometria moderna.

As principais referências para este capítulo foram [Edu15] e [Tor20].

2.1 Definições Básicas

Definição 2.1.1 (A Categoria dos Feixes)**.** Seja X um espaço topológico. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Chamamos de $\operatorname{Open} X$ a categoria dos abertos de X cujo os morfismos são inclusões. Um **pré-feixe** de $\mathcal{C}$ em X é um funtor contravariante:

$$\mathcal{F} : \operatorname{Open} X^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$$

Dados $U, V \in \operatorname{Open} X$ com $U \subseteq V$, chamamos os elementos de $\mathcal{F}(U)$ de **seções de $\mathcal{F}$ sobre** U e o morfismo $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ que é imagem da flecha $U \to V$ em $\operatorname{Open} X$ de **restrição de** V **a** U. Escrevemos $f|_U = \rho_{V,U}(f)$ quando V estiver claro no contexto.

Um morfismo de pré-feixes é uma transformação natural de funtores. Obtemos assim a categoria dos pré-feixes (de $\mathcal{C}$) em X, que denotaremos por $\operatorname{PSh} X$.

Um **feixe** de $\mathcal{C}$ em X é um pré-feixe $\mathcal{F} \in \operatorname{PSh} X$ que satisfaz, para cada aberto $U \subseteq X$ e para qualquer cobertura aberta $U = \bigcup_i U_i$, os seguintes axiomas de cola:

(Unicidade) Dados $f, g \in \mathcal{F}(U)$ com:

$$\forall i : f|_{U_i} = g|_{U_i}$$

Então $f = g$.
(Cola) Dados $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ para cada i que concordam nas interseções i.e.

$$\forall i, j : f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$$

existe (e é único se valer *(Unicidade)*) $f \in \mathcal{F}(U)$ com:

$$f|_{U_i} = f_i$$

Um morfismo de feixes é um morfismo de pré-feixes. Temos então uma categoria de feixes que denotamos por $\operatorname{Sh} X$.

Ao longo deste capítulo $\mathcal{C}$ vai ser uma das seguintes categorias Set, Ab, Ring, Alg_k (para algum corpo k) e Mod_A (para algum anel A).

Observação 2.1.2 (Sequência da cola)**.** Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um pré-feixe de grupos abelianos em X[1]. Seja U um aberto de X com uma cobertura aberta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ a partir dos morfismos de grupos abelianos

$$\sigma : \mathcal{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$$
$$f \mapsto (f|_{U_i})_{i \in I}$$
$$\tau : \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$
$$(f_i)_{i \in I} \mapsto (f_i|_{U_i \cap U_j} - f_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j \in I}$$

vemos que $\mathcal{F}$ é um feixe se, e somente se, para cada aberto $U \subseteq X$ e para cada cobertura aberta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sigma} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\tau} \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

é exata. Essa será referida neste texto como **sequência da cola**.

O exemplo a seguir é canônico e irá nos auxiliar a ganhar intuição sobre feixes.

Exemplo 2.1.3 (Exemplo canônico)**.** Seja X o seu espaço topológico favorito, para cada $U \in \operatorname{Open} X$ defina $\mathcal{C}(U) = \mathcal{C}(U, \mathbf{R})$ a $\mathbf{R}$-álgebra das funções contínuas com contradomínio $\mathbf{R}$. Se U, V são abertos com $U \subseteq V$, defina o morfismo restrição $\mathcal{C}(V) \to \mathcal{C}(U)$ como o morfismo que manda uma função $f \in \mathcal{C}(V)$ a sua restrição $f|_U$, que é contínua em U pois f é contínua.

[1]É analógo para feixes de A-módulos, k-álgebras e anéis

Vamos verificar que $\mathcal{C}$ é um feixe. Sejam U um aberto e $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ uma cobertura aberta. Seja $f \in \mathcal{C}(U)$ tal que $f|_{U_i} = 0$ para cada $i \in I$, então $f = 0$ pois todo ponto de U está em algum U_i.

Agora seja $f_i \in \mathcal{C}(U_i)$ para cada $i \in I$ uma família de funções com $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo $i, j \in I$. Precisamos "colar" essas funções f_i em uma única função $f \in \mathcal{C}(U)$. Para cada $x \in U$ existe i com $x \in U_i$, defina então $f(x) \overset{\text{def}}{=} f_i(x)$. É necessário verificar a boa definição de f, pois é possível que $x \in U_i \cap U_j$ para $j \neq i$. Logo, precisaríamos verificar que $f_i(x) = f_j(x)$ nesse caso, mas isso vem do fato que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para cada $i, j \in I$. Dessa forma, obtemos uma função $f \in \mathcal{C}(U)$ com $f|_{U_i} = f_i$ para cada $i \in I$. A função f é contínua, de fato, se $U \subseteq \mathbf{R}$ é um aberto, então $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(U)$ que é aberto, logo f é contínua.

Observação 2.1.4. No exemplo acima pode-se substituir funções contínuas por funções n vezes diferenciáveis ou até mesmo por apenas funções. Outro exemplo são as $\mathbf{C}$-álgebras das funções holomorfas.

Observação 2.1.5 (Feixe a partir da base)**.** Seja X um espaço topológico. Seja $\mathcal{B}$ uma base para topologia de X. Para definir um feixe $\mathcal{F}$ em X basta definir $\mathcal{F}(V)$ para $V \in \mathcal{B}$ e mostrar que $\mathcal{F}$ satisfaz os axiomas de cola para membros da base. E para U aberto não necessariamente da base definimos

$$\mathcal{F}(U) = \varprojlim_{\substack{V \subseteq U \\ V \in \mathcal{B}}} \mathcal{F}(V)$$

Para ver a demonstração de que isso de fato dá certo e $\mathcal{F}$ é um feixe veja o lema 15.2.1 de [Edu15].

Como exemplo de feixe vamos definir um dos objetos centrais em geometria algébrica, o feixe estrutural de um anel.

Construção 2.1.6 (Feixe estrutural)**.** Dado um anel A queremos construir um feixe $\mathcal{O}$ de anéis sobre o espaço topológico $\operatorname{Spec} A$. O conjunto $\{D(f)\}_{f \in A}$ é uma base de abertos para o espaço topológico $\operatorname{Spec} A$ pelo teorema 3.3.3 de [Edu15], assim, pela observação anterior, basta definir $\mathcal{O}(D(f))$ para cada $f \in A$. Definimos assim:

$$\mathcal{O}(D(f)) \overset{\text{def}}{=} A_f$$

Denotaremos por l_f o mapa de localização $A \to A_f$.

Proposição 2.1.7 (Boa definição)**.** Seja A um anel comutativo e $f, g \in A$ com $D(f) = D(g)$. Então $A_f \cong A_g$.

Demonstração. $D(f) = D(g) \iff V(f) = V(g) \iff \sqrt{fA} = \sqrt{gA}$. Logo, $f \in \sqrt{gA}$ e $g \in \sqrt{fA}$. Assim, existem $n, m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ e $a, b \in A$ com $f^n = ga$ e $g^m = fb$, portanto g

é invertível em A_f pois $\frac{1}{g} = \frac{a}{f^n}$ e f é invertível em A_g, já que $\frac{1}{f} = \frac{b}{g^m}$.
Pela propriedade universal da localização (teorema 4.1.4 [Edu15]) existem **únicos** $l_{f,g} : A_f \to A_g$ e $l_{g,f} : A_g \to A_f$ de forma que $l_f = l_g \circ l_{f,g}$ e $l_g = l_f \circ l_{g,f}$. Portanto

$$l_f = l_f \circ (l_{g,f} \circ l_{f,g}) \qquad (1)$$

E aqui vem o pulo do gato: Aplicando a propriedade universal da localização em A_f, existe **único** $l_{f,f} : A_f \to A_f$ com

$$l_f = l_f \circ l_{f,f} \qquad (2)$$

agora veja que tanto id_{A_f} quanto $l_{g,f} \circ l_{f,g}$ (usando (1)) satisfazem a igualdade em (2). Concluímos, pela unicidade de $l_{f,f}$ que $l_{f,f} = l_{g,f} \circ l_{f,g} = \mathrm{id}_{A_f}$. De maneira análoga se mostra que $l_{g,g} = l_{f,g} \circ l_{g,f} = \mathrm{id}_{A_g}$. Concluindo assim que $A_f \cong A_g$. $\square$

Observação 2.1.8. Considerando A_f e A_g como A-álgebras usando l_f e l_g como morfismos estruturais tem-se que o isomorfismo apresentado acima é canônico, a unicidade é garantida pela propriedade universal da localização.

Temos agora a boa definição de $\mathcal{O}(D(f))$. Para cada $f, g \in A$ com $D(g) \subseteq D(f)$ a demonstração acima nos dá um mapa $l_{f,g} : A_f \to A_g$ que vai fazer as vezes do mapa restrição do feixe $\mathcal{O}$. Veja que se $f, g, h \in A$ são tais que $D(h) \subseteq D(g) \subseteq D(f)$, então pela unicidade dos mapas que vem da propriedade universal, é simples verificar que $l_{f,h} = l_{g,h} \circ l_{f,g}$. Verificamos na demonstração acima também que $l_{f,f} = \mathrm{id}_{A_f}$.
Resta mostrar que $\mathcal{O}$ é de fato um feixe mostrando que este satisfaz os axiomas de cola. Vamos fazer algumas considerações iniciais antes de provar este fato.
Lembre-se que apenas precisamos mostrar que o axioma de cola funciona nos abertos da base e mais, podemos pegar uma cobertura de abertos só com elementos da base.
Agora seja I um conjunto, $f \in A$ um elemento de um anel e $g_i \in A$ para cada $i \in I$ com

$$D(f) = \bigcup_i D(g_i)$$

Lembre-se que há um homeomorfismo $\operatorname{Spec} A_f \cong D(f)$ e o espectro de um anel é compacto, portanto podemos sem perda de generalidade supor que I é finito.
Certo, seja $D(f) = \bigcup_{1 \le i \le n} D(g_i)$ precisamos mostrar que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(D(f)) \xrightarrow{\alpha} \prod_{1 \le i \le n} \mathcal{O}(D(g_i)) \xrightarrow{\beta} \prod_{1 \le i,j \le n} \mathcal{O}(D(g_i) \cap D(g_j))$$

é exata. Note que $D(g_i) \cap D(g_j) = D(g_i g_j)$, além disso perceba que como $D(g_i) \subseteq D(f)$ temos que $D(g_i) = D(g_i f)$. Utilizando estes dois fatos e como $\mathcal{O}(D(h)) = A_h$ para cada $h \in A$ temos que o diagrama acima é igual a

$$0 \longrightarrow A_f \xrightarrow{\alpha} \prod_{1 \le i \le n} A_{fg_i} \xrightarrow{\beta} \prod_{1 \le i,j \le n} A_{fg_ig_j}$$

agora chame $\overline{g_i} = l_f(g_i)$ a imagem de g_i em A_f, pelas propriedades da localização o diagrama acima é igual a

$$0 \longrightarrow A_f \xrightarrow{\alpha} \prod_{1\leq i\leq n}(A_f)_{\overline{g_i}} \xrightarrow{\beta} \prod_{1\leq i,j\leq n}(A_f)_{\overline{g_i g_j}}$$

substituindo $B \overset{\text{def}}{=} A_f$ temos finalmente

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} \prod_{1\leq i\leq n} B_{\overline{g_i}} \xrightarrow{\beta} \prod_{1\leq i,j\leq n} B_{\overline{g_i g_j}}$$

Repare que $\operatorname{Spec} B = \bigcup_{1\leq i\leq n} D(\overline{g_i})$. Simplificamos nosso problema em provar a seguinte proposição:

Proposição 2.1.9. Seja A um anel e $f_1, \ldots, f_n \in A$ elementos com

$$\operatorname{Spec} A = \bigcup_{1\leq i\leq n} D(f_i)$$

então o seguinte diagrama é exato:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} \prod_{1\leq i\leq n} A_{f_i} \xrightarrow{\beta} \prod_{1\leq i,j\leq n} A_{f_i f_j}$$

Onde $\alpha(a) = (\frac{a}{1}, \ldots, \frac{a}{1})$ e $\beta(\frac{a_1}{f_1^{e_1}}, \ldots, \frac{a_n}{f_1^{e_n}}) = (\frac{a_i}{f_i^{e_i}} - \frac{a_j}{f_j^{e_j}})_{(i,j)}$ Os índices do problema podem intimidar e dificultar o leitor a entender as ideias principais da demonstração dessa proposição. Para ganhar a intuição da prova o leitor pode tentar realizar essa demonstração para $n = 2$. Nesse caso $\operatorname{Spec} A = D(f) \cup D(g)$ simplificamos o problema em demonstrar que a sequência:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A_f \times A_g \longrightarrow A_{fg}$$

$$a \longmapsto (\tfrac{a}{1}, \tfrac{a}{1})$$

$$(\tfrac{a}{f^n}, \tfrac{b}{g^m}) \longmapsto \tfrac{a}{f^n} - \tfrac{b}{g^m}$$

é exata.

Demonstração. Vamos por partes:
α é injetiva: Tome $a \in A$ com $\alpha(a) = 0$, isso é equivalente a dizer que

$$\frac{a}{1} = 0$$

em A_{f_i} para cada i, logo, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $e_i \in \mathbf{N}$ tal que

$$a f_i^{e_i} = 0 \tag{2.1}$$

em A. O truque final é o seguinte; repare que para da i tem-se $D(f_i) = D(f_i^{e_i})$ e por isso usando a hipótese

$$\operatorname{Spec} A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} D(f_i) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} D(f_i^{e_i})$$

lembre-se que a igualdade acima isso é equivalente a mostrar que existem $b_1, \ldots, b_n \in A$ com $f_1^{e_1} b_1 + \cdots + f_n^{e_n} b_n = 1$ (teorema 3.3.3 de [Edu15]), multiplicando essa igualdade por a e usando 2.1 temos:

$$\begin{aligned} a &= (a f_1^{e_1}) b_1 + \cdots + (f_n^{e_n}) b_n \\ a &= 0 \end{aligned}$$

como queríamos.

<u>$\operatorname{im} \alpha = \ker \beta$:</u> Dado $a \in A$ temos

$$\begin{aligned} \beta(\alpha(a)) &= \beta((\frac{a}{1}, \ldots, \frac{a}{1})) \\ &= (\frac{a}{1} - \frac{a}{1})_{(i,j)} = (0)_{(i,j)} = 0 \end{aligned}$$

concluindo que $\operatorname{im} \alpha \subseteq \ker \beta$.

Reciprocamente, tome $(\frac{a_1}{f_1^{e_1}}, \ldots, \frac{a_n}{f_1^{e_n}})$ com $\beta(\frac{a_1}{f_1^{e_1}}, \ldots, \frac{a_n}{f_1^{e_n}}) = (\frac{a_i}{f_i^{e_i}} - \frac{a_j}{f_j^{e_j}})_{(i,j)} = 0$ i.e. para cada $1 \leq i, j \leq n$ tem-se

$$\frac{a_i}{f_i^{e_i}} = \frac{a_j}{f_j^{e_j}}$$

em $A_{f_i f_j}$. Agora defina $e \overset{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} e_i$ e seja $b_i \overset{\text{def}}{=} a_i f_i^{e - e_i}$, dessa forma teremos

$$\frac{b_i}{f_i^e} = \frac{a_i}{f_i^{e_i}} = \frac{a_j}{f_j^{e_j}} = \frac{b_j}{f_j^e}$$

em $A_{f_i f_j}$. Logo para cada $1 \leq i, j \leq n$ existe $E_{i,j} \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ com

$$(f_i f_j)^{E_{i,j}} (b_i f_j^e - b_j f_i^e) = 0$$

tome $E = \max_{1 \leq i,j \leq n} E_{i,j}$, dessa forma podemos nos livrar dos índices nos expoentes pois veja que vale que

$$(f_i f_j)^E (b_i f_j^e - b_j f_i^e) = 0 \tag{2.2}$$

$$\iff b_i f_i^E f_j^{e+E} = b_j f_i^{e+E} f_j^E \tag{2.3}$$

Vamos usar o mesmo truque de antes notando que $D(f_i) = D(f_i^{e+E})$ e notando que

$$\operatorname{Spec} A = \bigcup_i D(f_i) = \bigcup_i D(f_i^{e+E})$$

e se isto acontece, existem $s_1, \dots, s_n \in A$ com

$$s_1 f_1^{e+E} + \cdots + s_n f_n^{e+E} = 1 \tag{2.4}$$

Os preparativos estão feitos. Vamos notar que o que precisamos é de um elemento $a \in A$ tal que $\alpha(a) = (\frac{a_1}{f_1^{e_1}}, \dots, \frac{a_n}{f_1^{e_n}}) = (\frac{b_1}{f_1^e}, \dots, \frac{b_n}{f_1^e})$. Afirmo que

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \le i \le n} b_i f_i^E s_i$$

é quem a gente procura. Pois veja que para $j \in \{1, \dots, n\}$ fixo

$$\begin{aligned} a f_j^{e+E} &= \sum_{1 \le i \le n} b_i f_j^{e+E} f_i^E s_i \\ &= \sum_{1 \le i \le n} b_j f_i^{e+E} f_j^E s_i \\ &= b_j f_j^E \sum_{1 \le i \le n} f_i^{e+E} s_i \\ &= b_j f_j^E \end{aligned}$$

usando 2.4 e 2.2. E logo

$$f_j^E (a f_j^e - b_j) = 0$$

e portanto

$$\frac{a}{1} = \frac{b_j}{f_j^e}$$

em A_{f_j}. Concluindo o que queríamos. □

Definição 2.1.10 (Feixe estrutural)**.** Dado um anel A, o feixe construído acima é chamado de **feixe estrutural** de A e é denotado por $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$.

Definição 2.1.11 (Talo)**.** Seja X um espaço topológico. Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe em X. Seja $p \in X$ um ponto. O **talo** de $\mathcal{F}$ em p é definido por:

$$\mathcal{F}_p \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{U \ni p} \mathcal{F}(U)$$

A categoria dos índices desse colimite é a subcategoria cheia de $\operatorname{Open} X$ cujo os objetos são as vizinhanças abertas de p.

Essa definição é bem abstrata, vamos construir o talo explicitamente na próxima construção.

Construção 2.1.12 (Construção explicita do talo)**.** Seja X um espaço topológico. Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe em X. Seja $p \in X$ um ponto. Vamos fazer para o caso em que $\mathcal{F}$ é um pré-feixe de grupos abelianos, essa construção é análoga para pré-feixes em outras categorias.

Considere o conjunto

$$S = \big\{(U, f) \mid U \text{ é uma vizinhança aberta de } p \text{ e } f \in \mathcal{F}(U)\big\}$$

e a seguinte relação em S

$$(U, f) \sim (V, g) \iff \text{existe um aberto } W \ni p \text{ com } \begin{cases} W \subseteq U \cap V, \text{ e} \\ f|_W = g|_W \text{ em } \mathcal{F}(W) \end{cases} \tag{2.5}$$

É rotineiro verificar que essa relação é de equivalência. Assim, denotamos o quociente por

$$T \overset{\text{def}}{=} \frac{S}{\sim}$$

e denotamos a classe de (U, f) em T por $[U, f]_p$. T vem de fábrica com uma coleção de mapas

$$\begin{aligned} \pi_U : \mathcal{F}(U) &\longrightarrow T \\ f &\longmapsto [U, f]_p \end{aligned}$$

Podemos dar um estrutura de grupo abeliano para T de forma que os mapas π_U sejam morfismos de grupos, basta definir para $[U, f]_p$, $[V, g]_p \in T$ a seguinte operação:

$$[U, f]_p + [V, g]_p = \big[U \cap V, f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}\big]_p$$

É simples (mas gasta bastante tinta) provar que esta operação é bem definida e que $(T, +)$ é um grupo abeliano[2]. Seja I a subcategoria de Open X cujo os objetos são as vizinhanças abertas de p. Para quaisquer $U, V \in I$ com $U \subseteq V$ o triângulo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[dd, "\rho_{V,U}"'] \arrow[dr, "\pi_V"] & \\ & T \\ \mathcal{F}(U) \arrow[ur, "\pi_U"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Com efeito, tome $f \in \mathcal{F}(V)$ e considere W igual a U em (2.5), então temos que

$$[f|_U, U]_p = [f, V]_p.$$

[2]Para o caso em que $\mathcal{F}$ é um feixe de anel, k-álgebra ou A-módulo as operações são definidas de forma similar.

Portanto, T é um (co)cone do funtor $\mathcal{F} : I \to \text{Ab}$. Para mostrar que T é o colimite desse funtor, seja $C \in \text{Ab}$ outro cone de $\mathcal{F}$, ou seja, para cada $U \in I$ há um morfismo $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to C$ e se $U \subseteq V$ o triângulo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[dd, "\rho_{V,U}"'] \arrow[dr, "\phi_V"] & \\
& C \\
\mathcal{F}(U) \arrow[ur, "\phi_U"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta. Defina o morfismo de grupos $\phi : [U, f]_p \mapsto \phi_U(f)$, vamos mostrar que ϕ é bem definida

$$[U, f]_p = [V, g]_p \iff \text{existe um aberto } W \ni p \text{ com} \begin{cases} W \subseteq U \cap V, \text{ e} \\ f|_W = g|_W \text{ em } \mathcal{F}(W) \end{cases}$$

e como C é cone o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[d] \arrow[dr, "\phi_V"] & \\
\mathcal{F}(W) \arrow[r, "\phi_W"] & C \\
\mathcal{F}(U) \arrow[u] \arrow[ur, "\phi_U"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\phi([U, f]_p) &= \phi_U(f) \\
&= \phi_W(f|_W) \\
&= \phi_W(g|_W) \\
&= \phi_V(g) \\
&= \phi([V, g]_p)
\end{aligned}$$

assim temos que ϕ é bem definido e para cada $U, V \in I$ com $U \subseteq V$ o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[dd] \arrow[dr, "\pi_V"] \arrow[drr, bend left, "\phi_V"] & & \\
& T \arrow[r, dashed, "\phi"] & C \\
\mathcal{F}(U) \arrow[ur, "\pi_U"'] \arrow[urr, bend right, "\phi_U"'] & &
\end{tikzcd}$$

em outras palavras

$$T = \mathcal{F}_p = \varinjlim_{U \ni p} \mathcal{F}(U)$$

concluindo a construção.

Observação 2.1.13. Os elementos do talo são chamados de **germes**.

Observação 2.1.14. Para $\mathcal{F}$ um feixe em X e $x \in X$ um ponto, o talo $\mathcal{F}_x$ carrega informação local da vizinhança de x. Intuitivamente é como se $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}(\{x\})$.

Exemplo 2.1.15. Considere $\mathcal{C}$ o feixe das funções contínuas, como no exemplo 2.1.3. Seja $x \in X$, vamos analisar o talo $\mathcal{C}_x$.

Veja que o conjunto $\mathfrak{m} \overset{\text{def}}{=} \big\{[U, f]_x \mid f(x) = 0\big\}$ é um ideal, além disso este é o único ideal maximal de $\mathcal{C}_x$. De fato, seja $[U, f]_x \in \mathcal{C}_x \setminus \mathfrak{m}$ (ou seja, $f(x) \neq 0$), como f é uma função contínua, existe V uma vizinhança aberta de x com $f(v) \neq 0$ para todo $v \in V$. Assim, podemos considerar o elemento $\left[V, \dfrac{1}{f|_V}\right]_x \in \mathcal{C}_x$ que vai ser o inverso multiplicativo de $[U, f]_x = [V, f|_V]_x$ e portanto $\mathcal{C}_x \setminus \mathfrak{m} \subseteq \mathcal{C}_x^\times$. Reciprocamente, se $[W, g]_x \in \mathcal{C}_x^\times$, então é impossível que $g(x) = 0$, pois nesse caso g não tem inverso multiplicativo nesse ponto. Logo $\mathfrak{m} = \mathcal{C}_x \setminus \mathcal{C}_x^\times$ e isso só ocorre se $\mathcal{C}_x$ é um anel local.
É possível interpretar $[U, f]_x$ como $f(x)$.

Exemplo 2.1.16 (Feixe restrição)**.** Sejam $\mathcal{F}$ um pré-feixe num espaço topológico X e U um aberto em X. Usando topologia de subespaço, todo aberto V de U também é um aberto em X, dessa forma definimos $(\mathcal{F}|_U)(V) = \mathcal{F}(V)$. É simples checar que isso define um pré-feixe $\mathcal{F}|_U$ e que se $\mathcal{F}$ é feixe, então $\mathcal{F}|_U$ também é.

Proposição 2.1.17 (Talos)**.** Seja A um anel, $x = \mathfrak{p}_x \in \operatorname{Spec} A$ um ponto. Então

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, x} = A_{\mathfrak{p}_x}$$

Demonstração. Note que

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, x} = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U) = \varinjlim_{D(f) \ni x} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f)) = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}_x} A_f = A_{\mathfrak{p}_x}$$

□

Construção 2.1.18 ($\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_p$ é um funtor)**.** Sejam X um espaço topológico, $p \in X$ um ponto, I a subcategoria de $\operatorname{Open} X$ cujo os elementos são as vizinhanças abertas de p e $\operatorname{PSh} X$ a categoria de pré-feixes de grupo abeliano. Dados $\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}} \in \operatorname{PSh} X$ e um morfismo de pré-feixe $\phi : \mathcal{F} \to \hat{\mathcal{F}}$, para quaisquer $U, V \in I$ com $U \subseteq V$, o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[dd] & \hat{\mathcal{F}}(V) \arrow[dr] & \\
 & & \hat{\mathcal{F}}_p \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] & \hat{\mathcal{F}}(U) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Logo, pela propriedade universal do colimite, existe único $\phi_p : \mathcal{F}_p \to \hat{\mathcal{F}}_p$ tal que o diagrama a seguir é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[rr, "\phi_V"] \arrow[dd] \arrow[dr] & & \hat{\mathcal{O}}(V) \arrow[dr] & \\
 & \mathcal{F}_p \arrow[rr, dashed, "\phi_p"] & & \hat{\mathcal{F}}_p \\
\mathcal{F}(U) \arrow[rr, "\phi_U"] \arrow[ur] & & \hat{\mathcal{F}}(U) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Explicitamente $\phi_p([U, f]_p) = [U, \phi_U(f)]_p$. Obtemos assim um funtor

$$\mathrm{PSh}\, X \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} & & \mathcal{F}_p \\
\phi \downarrow & \longmapsto & \downarrow \phi_p \\
\hat{\mathcal{F}} & & \hat{\mathcal{F}}_p
\end{array}$$

Proposição 2.1.19 (O que o talo nos dá?)**.** Seja X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ e $\hat{\mathcal{F}}$ dois pré-feixes (de grupo abeliano) em X. ϕ, $\psi : \mathcal{F} \to \hat{\mathcal{F}}$ dois morfismos de pré-feixe.

(i) Se $\mathcal{F}$ é um feixe, então para cada $U \in \mathrm{Open}\, X$ o morfismo

$$\begin{aligned} \rho_U : \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p \\ f &\longmapsto ([U, f]_p)_{p \in U} \end{aligned}$$

é injetivo.

(ii) Se $\mathcal{F}$ é um feixe, então ϕ_U é injetivo para cada $U \in \mathrm{Open}\, X$ se, e somente se, ϕ_p é injetivo para cada $p \in X$.

(iii) Se $\mathcal{F}$ e $\hat{\mathcal{F}}$ são feixes, então ϕ_U é bijetivo para cada $U \in \mathrm{Open}\, X$ se, e somente se, ϕ_p é bijetivo para cada $p \in X$.

(iv) Se $\hat{\mathcal{F}}$ é feixe, então $\phi = \psi$ se, e somente se, $\phi_p = \psi_p$ para cada $p \in X$.

Demonstração. *(i)* Seja $U \in \operatorname{Open} X$, $f, g \in \mathcal{F}(U)$, logo

$$\begin{aligned}
\rho_U(f) = \rho_U(g) &\iff ([U,f]_p)_{p\in U} = ([U,g]_p)_{p\in U} \\
&\iff \forall p \in U : [U,f]_p = [U,g]_p \\
&\iff \forall p \in U : \text{existe um aberto } W_p \ni p \text{ com } \begin{cases} W_p \subseteq U, \text{ e} \\ f|_{W_p} = g|_{W_p} \text{ em } \mathcal{F}(W_p). \end{cases}
\end{aligned}$$

Como, para cada ponto $p \in U$, temos que $p \in W_p \subseteq U$, $U = \bigcup_{p\in U} W_p$ e $f|_{W_p} = g|_{W_p}$.Segue do axioma *(Unicidade)* da definição de feixe, que $f = g$ *(ii)* (Ida) Tome $p \in X$ arbitrário e $[U,f]_p, [V,g]_p \in \mathcal{F}_p$, logo

$$\begin{aligned}
&\phi_p([U,f]_p) = \phi_p([U,g]_p) \\
\iff &[U, \phi_U(f)]_p = [V, \phi_V(g)]_p \\
\iff &\text{ existe um aberto } W \ni p \text{ com } \begin{cases} W \subseteq U \cap V, \text{ e} \\ \phi_U(f)|_W = \phi_V(g)|_W \text{ em } \hat{\mathcal{F}}(W). \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, como ϕ é uma transformação natural, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d] & \hat{\mathcal{O}}(U) \arrow[d] \\
\mathcal{O}(W) \arrow[r, "\phi_W"] & \hat{\mathcal{O}}(W) \\
\mathcal{O}(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[u] & \hat{\mathcal{O}}(V) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\phi_W(f|_W) &= \phi_U(f)|_W \\
&= \phi_V(g)|_W \\
&= \phi_W(g|_W),
\end{aligned}$$

mas por hipótese ϕ_W é injetivo, logo $f|_W = g|_W$ para W uma vizinhança aberta de p, assim, por (2.5)

$$[U,f]_p = [V,g]_p,$$

mostrando que ϕ_p é injetivo.

(Volta) Seja $U \in \operatorname{Open} X$ um aberto qualquer e usando o item *(i)* e o fato ϕ_p ser injetivo considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \hat{\mathcal{F}}(U) \\
{\scriptstyle \rho_U}\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\prod_{p\in U}\mathcal{F}_p & \xrightarrow{\prod \phi_p} & \prod_{p\in U}\hat{\mathcal{F}}_p
\end{array}$$

Tome agora $f, g \in \mathcal{F}(U)$ com

$$\begin{aligned}
&\phi_U(f) = \phi_U(g) \\
\implies &([U, \phi_U(f)]_p)_{p\in U} = ([U, \phi_U(g)]_p)_{p\in U} \text{ em } \prod_{p\in U}\hat{\mathcal{O}}_p
\end{aligned}$$

pela comutatividade do diagrama acima

$$\begin{aligned}
(\phi_p([U, f]_p))_{p\in U} &= ([U, \phi_U(f)]_p)_{p\in U} \\
&= ([U, \phi_U(g)]_p)_{p\in U} \\
&= (\phi_p([U, g]_p))_{p\in U}
\end{aligned}$$

e como $\prod \phi_p$ é injetivo (que é a mesma coisa que dizer que ϕ_p é injetivo para cada p)

$$([U, f]_p)_{p\in U} = ([U, g]_p)_{p\in U}$$

e como ρ_U é injetivo, concluímos que $f = g$ como desejado.

(iii) (Ida) Seja $p \in X$ um ponto qualquer. Do item *(ii)* temos que ϕ_p é injetivo. Tome $[V, g]_p \in \hat{\mathcal{F}}_p$ como ϕ_V é sobrejetivo, existe $f \in \mathcal{F}(V)$ com $\phi_V(f) = g$, logo

$$\phi_p([V, f]_p) = [V, \phi_V(f)]_p = [V, g]_p$$

mostrando que ϕ_p é sobrejetivo.
(Volta) Seja $U \in \operatorname{Open} X$ um aberto. Do item *(ii)* temos que ϕ_U é injetivo.
Tome $g \in \mathcal{F}(U)$ como para cada $p \in X$ tem-se ϕ_p sobrejetivo, para todo $p \in X$ existe $[U_p, f_p]_p \in \mathcal{F}_p$ tal que

$$\begin{aligned}
&\phi_p([U_p, f_p]_p) = [U, g]_p \\
\implies &[U_p, \phi_{U_p}(f_p)] = [U, g]_p \\
\implies &\text{existe um aberto } W_p \ni p \text{ com} \begin{cases} W_p \subseteq U \cap U_p, \text{ e} \\ \phi_{W_p}(f_p|_{W_p}) = g|_{W_p} \end{cases}
\end{aligned}$$

para cada p defina $h_p \overset{\text{def}}{=} f_p|_{W_p} \in \mathcal{F}(W_p)$, o plano agora é colar os h_p. Repare primeiramente que $\phi_{W_p}(h_p) = g|_{W_p}$ e além disso $\bigcup_p W_p = U$, resta saber se os h_p concordam nas interseções, para mostrar isso vamos utilizar a injetividade de ϕ. Tome $p, q \in U$ e acompanhe a manipulação

$$\begin{aligned}\phi_{W_p \cap W_q}(h_p|_{W_p \cap W_q}) &= \phi_{W_p}(h_p)|_{W_p \cap W_q} \\ &= (g|_{W_p})|_{W_p \cap W_q} \\ &= g|_{W_p \cap W_q} \\ &= (g|_{W_q})|_{W_p \cap W_q} \\ &= \phi_{W_q}(h_q)|_{W_p \cap W_q} = \phi_{W_p \cap W_q}(h_q|_{W_p \cap W_q})\end{aligned}$$

pela injetividade de $\phi_{W_p \cap W_q}$ temos

$$\begin{aligned}&\forall p, q \in U : h_p|_{W_p \cap W_q} = h_q|_{W_p \cap W_q} \\ \overset{\text{(Cola)}}{\Longrightarrow}\ &\exists! h \in \mathcal{F}(U) : h|_{W_p} = h_p\end{aligned}$$

resta mostrar que $\phi_U(h) = g$, para fazer isso usaremos o axioma *(Unicidade)* em $\hat{\mathcal{F}}$, repare que para cada $p \in U$

$$\begin{aligned}\phi_U(h)|_{W_p} &= \phi_{W_p}(h|_{W_p}) \\ &= \phi_{W_p}(h_p) \\ &= g|_{W_p}\end{aligned}$$

usando o axioma *(Unicidade)* em $\hat{\mathcal{F}}$

$$\phi_U(h) = g$$

finalizando a demonstração.

(iv) (Ida) É imediato.

(Volta) Tome $f \in \hat{\mathcal{F}}(U)$ pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\psi_U"'] \arrow[d, shift left, "\phi_U"] & \prod_{p \in U} \mathcal{O}_p \arrow[d, "\prod \phi_p = \prod \psi_p"] \\ \hat{\mathcal{O}}(U) \arrow[r] & \prod_{p \in U} \hat{\mathcal{O}}_p \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

vale que

$$([U, \phi_U(f)]_p)_{p \in U} = ([U, \psi_U(f)]_p)_{p \in U}$$

usando o item *(i)* dessa proposição $\phi_U(f) = \psi_U(f)$. $\square$

2.2 Feixeficação

Existem pré-feixes que não são feixes, porém muitas vezes é útil considerar o feixe "mais próximo" do pré-feixe, assim como é útil pensar no espaço métrico completo "mais próximo" de um espaço métrico qualquer, no caso de um completamento de um espaço métrico, ou no espaço topológico Hausdorff "mais próximo" de um espaço topológico qualquer, no caso da Hausdorfficação, ou no corpo algébricamente fechado "mais próximo" de um corpo arbitrário no caso do fecho algébrico.

Mais geralmente temos um objeto que tem uma propriedade boa "mais próximo" de um objeto arbitrário, existem muitos exemplos de construções assim na matemática e como de costume esse conceito é formalizado em Teoria das Categorias. Digamos que $\mathcal{C}$ seja uma categoria e seja $(+)$ uma propriedade que alguns objetos de $\mathcal{C}$ tenham, como por exemplo a propriedade de um pré-feixe ser feixe, a propriedade de um espaço topológico ser Hausdorff, a propriedade de um espaço métrico ser completo e etc... Seja $\mathcal{C}_+$ a subcategoria de $\mathcal{C}$ dos objetos que satisfazem $(+)$. Seja $X \in \mathcal{C}$ um objeto arbitrário o objeto $X_+ \in \mathcal{C}_+$ junto com um morfismo $i : X \to X_+$ (que deve ser pensado como inclusão, assim como vemos a copia isométrica dentro do espaço métrico que foi completado) é o objeto que tem $(+)$ mais perto de X se para cada $Y \in \mathcal{C}_+$ e para cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ existe um **único** morfismo $X_+ \to Y$ comutando o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ X_+ \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

e logo, tem-se uma bijeção $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \overset{\text{bij}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_+}(X_+,Y)$.
Veja que todos os exemplos que citamos no começo são casos particulares da construção acima. Esta construção ainda pode ser generalizada para o conceito de **funtores adjuntos** em Teoria das Categorias.

Isso justifica a seguinte definição:

Definição 2.2.1 (Feixeficação)**.** Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um pré-feixe em X. O **feixe associado a o pré-feixe** $\mathcal{F}$ é o único[3] feixe $\mathcal{F}^+$ junto de um morfismo de pré-feixes $\iota_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ tal que para cada $\mathcal{G}$ feixe e para cada morfismo $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de pré-feixe, existe um único morfismo de feixe $\overline{\phi} : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ que comuta o diagrama:

[3] a menos de isomorfismo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

A unicidade (a menos de isomorfismo) vem da propriedade universal do feixe associado.

Vamos mostrar a existência construindo ele explicitamente.

Construção 2.2.2 (feixe associado a um pré-feixe)**.** Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um pré-feixe em X. Para U um aberto qualquer vamos olhar para o conjunto das listas $\prod_{x\in U}\mathcal{F}_x$, as listas nesse espaço que nos interessam são as localmente constantes i.e. são as listas $([U_x, f_x]_x)_{x\in U}$ que satisfazem a propriedade (+) que é a seguinte

$$\begin{aligned} &\text{para cada } x\in U \text{ existe uma vizinhança aberta } x\in V\subseteq U \\ &\text{e existe } f\in\mathcal{F}(V) \text{ tal que para cada } y\in V \text{ vale que} \\ &[U_y, f_y]_y = [V, f]_y \end{aligned} \tag{+}$$

assim definimos

$$\mathcal{F}^+(U) = \left\{ ([U_x, f_x]_x)_{x\in U} \in \prod_{x\in U}\mathcal{F}_x \mid ([U_x, f_x]_x)_{x\in U} \text{ satisfaz } (+) \right\}$$

agora se $U\subseteq V$ o mapa restrição $\mathcal{F}^+(V)\to\mathcal{F}^+(U)$ é definido como $([U_x, f_x]_x)_{x\in V}\mapsto([U_x, f_x]_x)_{x\in U}$. Vamos ver que este mapa está bem definido. Dado $([U_x, f_x]_x)_{x\in V}\in\mathcal{F}^+(V)$ temos que mostrar que $([U_x, f_x]_x)_{x\in U}$ satisfaz (+). Para cada $x\in U\subseteq V$, como $([U_x, f_x]_x)_{x\in V}$ satisfaz (+) em V, existe uma vizinhança aberta $W\ni x$ com $W\subseteq V$ e existe $f\in\mathcal{F}(W)$ tal que para cada $y\in W$

$$[U_y, f_y]_y = [W, f]_y$$

portanto para cada $y\in W\cap U$ vale que

$$[U_y, f_y]_y = [W, f]_y = [W\cap U, f|_{W\cap U}]_y$$

e concluímos $([U_x, f_x]_x)_{x\in U}$ satisfaz (+).
Dessa forma provamos que $\mathcal{F}^+$ é um pré-feixe, para ver que ele é um feixe temos que mostrar que ele satisfaz as condições de cola.
Vamos mostrar que $\mathcal{F}^+$ é feixe para $\mathcal{F}$ um pré-feixe de grupos abelianos i.e. $\mathcal{F}(U)\in\mathrm{Ab}$ para cada U. A demonstração para outras categorias como Set, Ring, A-Mod, ... São

análogas! Seja $U \subseteq X$ um aberto com cobertura $U = \bigcup_{i \in I} U_i$.
(Unicidade): Suponha que $f = ([U_x, f_x]_x)_{x \in U} \in \mathcal{F}^+(U)$ tal que $f|_{U_i} = 0$ para cada $i \in I$. Daí fica fácil pois então

$$\begin{aligned} f|_{U_i} &= 0 \quad \forall i \in I \\ \iff ([U_x, f_x]_x)_{x \in U_i} &= (0)_{x \in U_i} \quad \forall i \in I \\ \iff [U_x, f_x]_x &= 0 \quad \forall i \in I \ \forall x \in U_i \\ \iff [U_x, f_x]_x &= 0 \quad \forall x \in U \\ \iff ([U_x, f_x]_x)_{x \in U} &= (0)_{x \in U} \\ \iff f &= 0 \end{aligned}$$

(Cola): Suponha agora que $f_i = ([U_{x,i}, f_{x,i}]_x)_{x \in U_i} \in \mathcal{F}^+(U_i)$ com $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para cada $i, j \in I$.
Temos que colar os f_i. Para $x \in U$, como $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ vai existir um índice $i_x \in I$ com $x \in U_{i_x}$, defina assim

$$\begin{aligned} U_x &\stackrel{\text{def}}{=} U_{x,i_x} \\ g_x &\stackrel{\text{def}}{=} f_{x,i_x} \\ g &\stackrel{\text{def}}{=} ([U_x, g_x]_x)_{x \in U} \end{aligned}$$

mas veja que temos que estar preocupados se estes objetos estão bem definidos, a boa definição deles vem do fato que

$$\begin{aligned} f_i|_{U_i \cap U_j} &= f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I \\ \iff [U_{x,i}, f_{x,i}]_x &= [U_{x,j}, f_{x,j}]_x \quad \forall i, j \in I \ \forall x \in U_i \cap U_j \end{aligned} \tag{2.8}$$

Precisamos verificar que de fato $g \in \mathcal{F}^+(U)$.
Condição (+): Para cada $x \in U$ como $f_{i_x} \in \mathcal{F}^+(U_{i_x})$ tem a propriedade (+), existe uma vizinhança aberta $W_x \ni x$ com $W_x \subseteq U_{i_x} \subseteq U$ e existe uma seção $h_x \in \mathcal{F}(W_x)$ tal que para cada $y \in W_x$ vale que

$$[U_{y,i_x}, f_{y,i_x}]_y = [W_x, h_x]_y$$

vamos ter $[U_y, g_y]_y = [U_{y,i_x}, f_{y,i_x}]_y$ para cada $y \in W_x$ e portanto

$$[U_y, g_y]_y = [W_x, h_x]_y$$

e está feito.
Agora temos que mostrar que $\mathcal{F}^+$ de fato satisfaz a propriedade universal descrita na definição. Mas antes precisamos de um lema.

Lema 2.2.3. Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe e $\mathcal{F}^+$ como na construção acima. Se $x \in X$ é um ponto qualquer, então

$$\mathcal{F}_x \cong (\mathcal{F}^+)_x$$

Demonstração. Vamos continuar trabalhando com um feixe de grupos abelianos. Considere o morfismo

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{F}_x &\longrightarrow (\mathcal{F}^+)_x \\ [U, f]_x &\longmapsto [U, ([U, f]_y)_{y \in U}]_x \end{aligned}$$

queremos mostrar que ι é injetivo e sobrejetivo.
Injetivo: Sejam $[U, f]_x$, $[V, g]_x \in \mathcal{F}_x$ com $\iota([U, f]_x) = \iota([V, g]_x)$, então

$$[U, ([U, f]_y)_{y \in U}]_x = [V, ([V, g]_y)_{y \in V}]_x$$

E logo existe $W \ni x$ vizinhança aberta, com $W \subseteq U \cap V$ e

$$[U, f]_y = [V, g]_y$$

para cada $y \in W$, em particular como $x \in W$ temos $[U, f]_x = [V, g]_x$.
Sobrejetivo: Tome $[U, ([U_y, f_y]_y)_{y \in U}]_x \in \mathcal{F}^+_x$, como $U \ni x$ e $([U_y, f_y]_y)_{y \in U} \in \mathcal{F}^+(U)$, existe uma vizinhança aberta $V \ni x$ com $V \subseteq U$ e existe $f \in \mathcal{F}(V)$ tal que para cada $z \in V$ temos

$$[U_z, f_z]_z = [V, f]_z$$

daí temos que

$$[U, ([U_y, f_y]_y)_{y \in U}]_x = [V, ([V, f]_z)_{z \in V}]_x = \iota([V, f]_x)$$ □

Um corolário disso é que se $\mathcal{G}$ é um feixe, então $\mathcal{G}^+$ é um feixe isomorfo a $\mathcal{G}$! Para ver isso basta usar 2.1.19 e ver dois feixes são isomorfos se e somente se são isomorfos nos talos.

Certo, agora seja X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ um pré-feixe em X, $\mathcal{G}$ um feixe em X e $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes. Veja que para cada U temos um morfismo

$$\begin{aligned} \iota_U : \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \mathcal{F}^+(U) \\ f &\longmapsto ([U, f]_x)_{x \in U} \end{aligned}$$

e é fácil ver que para cada $V \subseteq U$ o quadrado

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\iota_U"] \arrow[d] & \mathcal{F}^+(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\iota_V"] & \mathcal{F}^+(V) \end{tikzcd}$$

comuta. Logo temos um morfismo $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ de pré-feixes. De forma análoga construa um morfismo de **feixes** $i : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^+$, lembre-se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}^+$ são feixes isomorfos. Queremos completar o quadrado comutativo com um morfismo ϕ^+ de feixes

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"] & \mathcal{G} \arrow[d, "i"] \\
\mathcal{F}^+ \arrow[r, dashed, "\phi^+"] & \mathcal{G}^+
\end{tikzcd}$$

e de fato só há uma maneira de completar esse quadrado, já que para cada aberto U teremos um quadrado

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\iota_U"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "i_U"] \\
\mathcal{F}^+(U) \arrow[r, dashed, "\phi_U^+"] & \mathcal{G}^+(U)
\end{tikzcd}$$

isso nos força a definir $\phi_U^+(([U_x, f_x]_x)_{x\in U}) = ([U_x, \phi_U(f_x)]_x)_{x\in U}$.
Lembrando que i é isomorfismo, podemos ir e voltar através dele. Teremos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"] & \mathcal{G} \arrow[d, equal, "i"] \\
\mathcal{F}^+ \arrow[r, "\phi^+"] & \mathcal{G}^+
\end{tikzcd}$$

e finalmente

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"] & \mathcal{G} \\
\mathcal{F}^+ \arrow[ur, dashed, "i^{-1}\circ\phi^+"'] &
\end{tikzcd}$$

A sua unicidade, vem da unicidade de ϕ^+.

Exemplo 2.2.4 (Feixeficação do pré-feixe das funções limitadas)**.** Seja X um espaço topológico, já sabemos que $\mathcal{C}(U, \mathbf{R}) = \mathcal{C}(U)$ para cada $U \subseteq X$ aberto define um feixe de $\mathbf{R}$-álgebras, porém definindo

$$\mathcal{C}_b(U) = \mathcal{C}_b(U, \mathbf{R}) = \big\{f \in \mathcal{C}(U) \mid f \text{ é limitada}\big\}$$

e os morfismos restrições como restrições de funções temos pré-feixe que não é feixe! De fato, podemos colar funções limitadas em uma função ilimitada, por exemplo considere a função real $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ com $f(x) = \frac{1}{x}$ contínua e ilimitadas veja que $(0,1) = \bigcup_{i\in\mathbf{N}}(\frac{1}{i+1}, 1)$ e as funções $f_i = f|_{(\frac{1}{i+1},1)}$ são contínuas, limitadas, concordam nas interseções e colam em f pelo feixe $\mathcal{C}$, mas f é ilimitada.
Agora podemos nos perguntar qual é a feixeficação de $\mathcal{C}_b$. Repare que as inclusões $\mathcal{C}_b(U) \subseteq \mathcal{C}(U)$ dão origem a um morfismo de pré-feixe $\mathcal{C}_b \to \mathcal{C}$ e pela propriedade universal da

feixeficação há um único morfismo $\mathcal{C}_b^+ \to \mathcal{C}$ e de fato esse morfismo é um isomorfismo de feixe pois

$$\left(\mathcal{C}_b^+\right)_x \cong (\mathcal{C}_b)_x \cong \mathcal{C}_x$$

o último isomorfismo vem do fato de que se f é contínua no ponto x, então existe uma vizinhança aberta $V \ni x$ tal que $f|_V$ é limitada e contínua em x. Logo é natural que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_b$ sejam iguais nos talos.
Portanto podemos considerar $\mathcal{C}$ como a feixeficação de $\mathcal{C}_b$!

Exemplo 2.2.5 (Feixe constante)**.** Seja X um espaço topológico e A o seu grupo abeliano favorito. Defina $A_X(U) = A$ para cada $U \subseteq X$ aberto. Considerando o morfismo identidade como restrição obtemos um pré-feixe A_X.
A_X quase nunca é feixe, pois para todo feixe $\mathcal{F}$ temos $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$.
Vamos tentar descrever A_X^+. Primeiramente note que $(A_X)_x = A$ e portanto para U aberto temos

$$A_X^+(U) = \left\{ (a_x)_{x\in U} \in \prod_{x\in U} A \mid (a_x)_{x\in U} \text{ satisfaz } (+) \right\}$$

para descrever melhor veja que uma lista $(a_x)_{x\in U}$ é o mesmo que uma função $f : U \to A$. E a condição $(+)$ pode ser descrita da seguinte forma: Uma função $f : U \to A$ pertence a $A_X^+(U)$ se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança aberta $V \ni x$, e existe $b \in A$ tal que para cada $y \in V$

$$f(y) = b$$

ou seja $A_X^+(U)$ é o espaço das funções localmente constantes.
Se considerarmos A com a topologia discreta[4] as funções $f : U \to A$ que são localmente constantes são justamente as funções contínuas! Pois veja se f é contínua, dado $x \in X$ arbitrário temos $f^{-1}(\{f(x)\}) \ni x$ é uma vizinhança aberta e logo f é localmente constante. Reciprocamente, se f é localmente constante, dado $b \in A$ temos que mostrar que $f^{-1}(\{b\})$ é aberto. Se $f^{-1}(\{b\}) = \varnothing$, então ele é aberto; caso o contrário tome $x \in f^{-1}(\{b\})$, como f é localmente constante, existe uma vizinhança aberta $V \ni x$ tal que para cada $y \in V$ tem-se $f(y) = b$. Portanto $x \in V \subseteq f^{-1}(\{b\})$, concluindo a nossa afirmação.
Logo podemos interpretar $A_X(U) = \mathcal{C}(U, A)$.

Exemplo 2.2.6 (Reinterpretando a feixeficação como espaço de funções)**.** Seja $\mathcal{F}$ um

[4] todo mundo é aberto.

pré-feixe em X. Para cada aberto $U \in \operatorname{Open} X$ cada seção $s \in \mathcal{F}(U)$ define uma função

$$\begin{aligned} s^+ : U &\to \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x \\ p &\mapsto [U, s]_p \end{aligned}$$

perceba que a identificação $s \mapsto s^+$ é justamente o mapa em 2.1.19(i) e veja que está é uma aplicação injetiva. Perceba assim que podemos descrever $\mathcal{F}^+(U)$ como as funções $f : U \to \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ que são localmente da forma s^+ i.e. Para cada ponto $p \in U$, há um uma vizinhança aberta $V \ni p$ e há uma seção $s \in \mathcal{F}(V)$ com

$$f|_V = s^+$$

Apêndice

Teoria das Categorias

Aqui vamos colocar sem deixar provas alguns resultados envolvendo teoria das categorias que podem não ter sido vistos em um primeiro curso de teoria das categorias.

Intuitivamente uma categoria abeliana é uma categoria parecida com a categoria de A-módulos. É um lugar excelente para se usar técnicas de álgebra homológica.

Vamos apresentar algumas definições envolvendo a teoria de categorias abelianas.

Definição 2.2.7 (Categoria Aditiva)**.** Uma categoria $\mathcal{C}$ é aditiva se

(i) Para cada objetos $A, B \in \mathcal{C}$ o conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}(A, B)$ é um grupo abeliano.

(ii) Para cada objetos $A, B, C \in \mathcal{C}$ a composição

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

é bilinear.

(iii) Produto finito existe.

Proposição 2.2.8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Então o coproduto finito existe e para cada $A, B \in \mathcal{C}$ vale o isomorfismo

$$A \sqcup B \cong A \times B$$

Demonstração. [Jon22] na tag 0101. □

Definição 2.2.9 (Kernel)**.** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Seja $f : A \to B$ um morfismo em $\mathcal{C}$. O **kernel** de f (que é único a menos de isomorfismo) é um par $(\ker f, k)$ tal que $\ker f \in \mathcal{C}$ é um objeto e $k : \ker f \to A$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que a composição

$$\ker f \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B$$

satisfaz $f \circ k = 0$ (lembre-se que $\mathrm{Hom}(\ker f, B)$ é um grupo abeliano e logo possui um 0) e além disso, para cada objeto C e para cada morfismo $g : C \to A$ com $f \circ g = 0$ existe único $\phi : C \to \ker f$ que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ C \arrow[u, dashed, "\exists!"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

Definição 2.2.10 (Cokernel)**.** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Seja $f : A \to B$ um morfismo em $\mathcal{C}$. O **cokernel** de f é um par $(\operatorname{coker} f, c)$ em que $\operatorname{coker} f \in \mathcal{C}$ é um objeto e $c : B \to \operatorname{coker} f$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que a composição

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{c} \operatorname{coker} f$$

satisfaz $c \circ f = 0$ e além disso, para cada objeto $C \in \mathcal{C}$ e para cada morfismo $g : B \to C$ satisfazendo $g \circ f = 0$ existe único morfismo $\phi : \operatorname{coker} f \to C$ que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "g"'] & \operatorname{coker} f \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

Definição 2.2.11 ((Co)imagem)**.** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Seja $f : A \to B$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Definimos a **imagem** como o kernel do mapa $B \to \operatorname{coker} f$. Definimos a **coimagem** como o cokernel de $\ker f \to A$.

Observação 2.2.12. Vamos denotar o kernel, o cokernel, a imagem e a coimagem de f respectivamente por $\ker f$, $\operatorname{coker} f$, $\operatorname{im} f$ e $\operatorname{coim} f$.

Observação 2.2.13. Vamos dizer que uma categoria tem kernel ou cokernel se todo morfismo tiver kernel ou cokernel.

Proposição 2.2.14. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva com kernel e cokernel. Seja $f : A \to B$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Existe um morfismo $\operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ que comuta o quadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \\ \operatorname{coim} f \arrow[r] & \operatorname{im} f \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Definição 2.2.15 (Categoria abeliana)**.** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma **categoria abeliana** se ela for aditiva, tem kernel, tem cokernel e para cada morfismo f em $\mathcal{C}$ o morfismo associado $\operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ é um isomorfismo.

Observação 2.2.16. Intuitivamente dizer que para cada morfismo f em $\mathcal{C}$ o morfismo associado $\operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ é um isomorfismo é o mesmo que dizer que vale o teorema do isomorfismo!

Exemplo 2.2.17. Temos como exemplos clássicos de categorias pré-aditivas as categorias de grupos abelianos, A-módulos, espaços vetoriais, grupos topológicos, espaços de Banach com morfismos sendo transformações lineares limitadas...

Proposição 2.2.18. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A categoria de pré-feixes $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ possui todos os limites e colimites e eles são calculados ponto a ponto i.e. se I é uma categoria pequena de índices e

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathrm{PSh}(\mathcal{C}) \\ i &\longmapsto F_i \end{aligned}$$

é um funtor, para $X \in \mathcal{C}$ um objeto o limite e o colimite em X são justamente

$$\left(\varprojlim_{i \in I} F_i\right)(X) = \varprojlim_{i \in I} F_i(X)$$
$$\left(\varinjlim_{i \in I} F_i\right)(X) = \varinjlim_{i \in I} F_i(X)$$

Demonstração. [Jon22] na tag 00VB. $\square$

Compactificação de Stone-Čech

Construção 2.2.19 (Compactificação de Stone-Čech)**.** Seja X um espaço topológico. A compactificação de Stone-Čech de X é um espaço topológico compacto e Hausdorff βX com um mapa $X \to \beta X$ tal que se S é compacto e Hausdorff e $f : X \to S$ é uma função contínua, existe uma única função contínua $\tilde{f}$ que comuta o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & S \\ & \beta X \arrow[u, dashed, "\exists! \tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

Ou seja, $X \mapsto \beta X$ é o funtor adjunto a esquerda do funtor esquecimento F : CHaus $\to$ Top.

Vamos construir βX explicitamente, mas antes vamos precisar de um lema.

Lema 2.2.20. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua com $\overline{f(X)} = Y$ e Y Hausdorff. Há uma cota superior para a cardinalidade de Y:

$$|Y| \leq 2^{2^{|X|}}$$

Demonstração. Seja

$$\mathcal{D} = \left\{ D \subseteq Y \mid D = \overline{\text{int} D} \right\}$$

onde int$D$ é o interior de D. Temos que que se $U \subseteq Y$ é um aberto, então $\overline{U} \in \mathcal{D}$, de fato, temos

$$U \subseteq \overline{U}$$
$$U = \text{int} U \subseteq \text{int} \overline{U}$$
$$\overline{U} \subseteq \overline{\text{int} \overline{U}}$$

para ver que $\overline{U} \supseteq \overline{\text{int}\overline{U}}$ note que se $x \in \overline{\text{int}\overline{U}}$, então todas as suas vizinhança intersectam int$\overline{U}$ e logo em particular, intersectam $\overline{U}$.

Para cada $y \in Y$ defina

$$I_y \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ T \subseteq f(X) \mid \exists D \in \mathcal{D} \text{ com } T = f(X) \cap D \text{ e } y \in D \right\}$$

Como $f(X)$ é denso em Y temos que para cada $D \in \mathcal{D}$ vale que $D \cap f(X)$ é denso em D; dessa forma se $D, D' \in \mathcal{D}$ são tais que $D \cap f(X) = D' \cap f(X)$, então $D = D'$. Afirmamos que se $y, y' \in Y$ são tais que $I_y = I_{y'}$, então $y = y'$, de fato, se $y \neq y'$ como Y é Hausdorff existem abertos disjuntos $U \ni y$ e $V \ni y'$ com $U \cap V = \varnothing$ e mais que isso, na demonstração de 1.1.22 vimos que temos $\overline{U} \cap V = \varnothing$, logo temos $\overline{U} \cap f(X) \in I_y$, mas $\overline{U} \cap f(X) \notin I_{y'}$.

Temos assim que a cardinalidade de Y é menor que a cardinalidade dos conjuntos da forma I_y para algum $y \in Y$ que $2^{2^{|f(X)|}} \leq 2^{2^{|X|}}$. □

Agora vamos descrever βX. Seja X um espaço topológico. Vamos dizer que duas funções contínuas $f : X \to Y$ e $f' : X \to Y'$ com $Y, Y' \in \mathrm{CHaus}$ e $\overline{f(X)} = Y$, $\overline{f(X)} = Y'$ são equivalentes se existe um homeomorfismo $h : Y \to Y'$ com $f' = h \circ f$. Seja I o conjunto de classes de equivalência de funções por essa relação. Sabemos que I é um conjunto pelo lema 2.2.20.

Para cada classe $i \in I$ escolha um representante $f_i : X \to Y_i$ e considere a seguinte função contínua:

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow \prod_{i \in I} Y_i \\ x &\longrightarrow (f_i(x))_{i \in I} \end{aligned}$$

Defina $\beta X = \overline{F(X)}$. Repare que $\prod_{i \in I} Y_i$ é Hausdorff e também é compacto pelo teorema de Tychonoff, logo βX é um fechado de um espaço compacto e Hausdorff, concluímos que βX é compacto e Hausdorff.

Vamos mostrar que βX satisfaz a propriedade universal descrita. Seja $Y \in \mathrm{CHaus}$ e seja $f : X \to Y$. Podemos fatorar f em

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & \overline{f(X)} \arrow[r, hook, "\subseteq"'] & Y \end{tikzcd}$$

note que $\tilde{f}$ é um mapa com imagem densa em um espaço compacto e Hausdorff logo ele possui uma classe em $i_0 \in I$ com $\overline{f(X)} \cong Y_{i_0}$ e obtemos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d] & \overline{f(X)} \arrow[r, hook, "\subseteq"'] & Y \\ \beta X \arrow[r, hook] & \prod_i Y_i \arrow[u, two heads] & \end{tikzcd}$$

Obtendo um mapa $g : \beta X \to Y$. A unicidade desse mapa vem do fato que X é denso em βX, de fato chamando o mapa $X \to \beta X$ de b temos que $f = g \circ b$ e se houver outro mapa $g' : X \to Y$ com $f = g' \circ b$, então g coincide com g' em $b(X)$ que é denso em βX, disso e do fato que Y é Hausdorff obtemos que $g = g'$ usando o seguinte lema.

Lema 2.2.21 (Se funções contínuas concordam num subconjunto denso, então elas são iguais.)**.** Sejam $p, q : X \to Y$ um par de funções contínuas. Seja Y Hausdorff. Suponha que exista um subconjunto denso $D \subseteq X$ tal que

$$p(d) = q(d)$$

para cada $d \in D$. Então $p = q$.

Demonstração. Tome $x \in X$ e suponha por absurdo que $p(x) \neq q(x)$, como Y é Hausdorff, existem abertos disjuntos U, V com $p(x) \in U$ e $q(x) \in V$. Note que

$$x \in p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

e $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ é aberto, como D é denso, existe $d \in D$ com $d \in p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ e logo

$$p(d) = q(d) \in U \cap V$$

mas U e V são disjuntos! Absurdo. □

A compactificação de Stone-Čech se comporta de forma diferente de outras compactificações como vamos ver no próximo exemplo.

Exemplo 2.2.22. Vamos verificar que $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ não é homeomorfo a $\beta\mathbf{N}$. De fato, $\mathbf{N}$ é contável e $\beta\mathbf{N}$ é incontável, caso o contrário existe uma função sobrejetiva

$$f : \mathbf{N} \twoheadrightarrow \beta\mathbf{N}$$

como $\beta\mathbf{N}$ é extremamente desconexo por 1.1.24 podemos usar a proposição 1.1.23 para ver que existe $h : \beta\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ com $f \circ h = \mathrm{id}$.

Considere a inclusão $i : \mathbf{N} \hookrightarrow \beta\mathbf{N}$. Como a imagem de compacto é compacta, então $h(\beta\mathbf{N})$ é compacto e logo é finito. Porém $h(\beta\mathbf{N}) = f^{-1}(\beta\mathbf{N}) = \mathbf{N}$ que é infinito. Absurdo! Concluímos que $\beta\mathbf{N}$ é incontável e não é homeomorfo a $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

Bibliografia

[Gle58] Andrew M. Gleason. “Projective topological spaces”. Em: *Illinois J. Math* (1958), pp. 482–489.

[Edu15] Herivelto Borges Eduardo Tengan. *álgebra comutativa em quatro movimentos*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2015.

[Lur18] Jacob Lurie. *Ultracategories*. 2018. URL: `https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/Conceptual.pdf`.

[Pet19a] Dustin Clausen Peter Scholze. *Lectures on Analytic Geometry*. 2019. URL: `https://www.math.uni-%20bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf`.

[Pet19b] Dustin Clausen Peter Scholze. *Lectures on Condensed Mathematics*. 2019. URL: `http://www.math.%20uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf`.

[Tor20] Ulrich Görtz Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry I: Schemes*. Springer, 2020.

[Ásg21] Dagur Ásgeirsson. *The Foundations of Condensed Mathematics*. 2021. URL: `https://dagur.sites.ku.dk/files/2022/01/condensed-foundations.pdf`.

[Mai21] Catrin Mair. *Animated Condensed Sets and Their Homotopy Groups*. 2021. URL: `https://arxiv.org/pdf/2105.07888.pdf`.

[Jon22] Aise Johan de Jong. *The Stacks project*. 2022. URL: `https://stacks.math.columbia.edu/`.

[Pet22] Dustin Clausen Peter Scholze. *Condensed Mathematics and Complex Geometry*. 2022. URL: `https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Complex.pdf`.