



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

THAIS FELTRIN CANCELIER

**PROJETO DE METAMATERIAIS ACÚSTICOS MODELADOS
COMO REDES DE DUTOS RÍGIDOS UTILIZANDO
MÉTODO GRADIENTE DE OTIMIZAÇÃO E ANÁLISE DE
SENSIBILIDADE ANALÍTICA**

FLORIANÓPOLIS

2022

Thais Feltrin Cancelier

**PROJETO DE METAMATERIAIS ACÚSTICOS MODELADOS COMO
REDES DE DUTOS RÍGIDOS UTILIZANDO MÉTODO GRADIENTE DE
OTIMIZAÇÃO E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE ANALÍTICA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.

Coorientador: Olavo M. Silva, Dr. Eng.

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Cancelier, Thais Feltrin

Projeto de metamateriais acústicos modelados como redes de dutos rígidos utilizando método gradiente de otimização e análise de sensibilidade analítica / Thais Feltrin Cancelier ; orientador, Arcanjo Lenzi, coorientador, Olavo M. Silva, 2022.

136 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Metamateriais acústicos. 3. Absorção sonora. 4. Otimização gradiente. 5. Rede de dutos. I. Lenzi, Arcanjo . II. Silva, Olavo M.. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

Thais Feltrin Cancelier

Projeto de metamateriais acústicos modelados como redes de dutos rígidos utilizando método gradiente de otimização e análise de sensibilidade analítica

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.
Universidade Federal de Santa Catarina
Presidente

Prof. Andrey Ricardo da Silva, Ph.D.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Paulo Henrique Mareze, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Maria

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Prof. Henrique Simas, Dr. Eng.
Coordenador do Programa

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.
Orientador

Olavo M. Silva, Dr. Eng.
Coorientador

Florianópolis, 31 de outubro de 2022.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, José e Nelcide, que sempre me apoiam e me incentivam a estudar. Amo-os de todo o coração.

Ao meu companheiro, Jorge Luiz, por ser luz nos momentos sombrios.

Ao professor Arcanjo Lenzi (nosso querido chefe): por aceitar ser meu orientador, pelos conhecimentos compartilhados, pelo humanismo ímpar e por me dar a oportunidade de trabalhar com o Olavo.

Ao meu coorientador, Olavo Silva, umas das pessoas mais inteligentes que eu já conheci. Considero-o um exemplo de pessoa e profissionalismo. Obrigada por ter pego firme junto comigo nesta empreitada. Vou levar seus ensinamentos para vida.

Aos colegas do MOPT: Ana Rocha, deusa do Python, e Bruno Iwamoto, mestre supremo das macros e do FreeCAD. A ajuda de vocês tornou tudo mais fácil.

Aos colegas de turma: Willian Menegatt, Josafat Ribeiro, Marcelo Martinelli, Victor Bahu, Lucas Kulakauskas e Amanda Aliano.

Ao Jacson Vargas por projetar e confeccionar um porta amostra compatível com nossa geometria.

Ao Leandro Barbosa e ao Gildean do N. Almeida, pela ajuda para realizar os ensaios no tubo de impedância.

A Materializa, pela parceria formada para impressão das amostras.

Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro.

*“UM CIENTISTA NO SEU LABORATÓRIO NÃO É APENAS UM TÉCNICO: É,
TAMBÉM, UMA CRIANÇA COLOCADA À FRENTE DE FENÔMENOS NATURAIS
QUE IMPRESSIONAM COMO SE FOSSEM UM CONTO DE FADAS.”*

(Marie Curie)

RESUMO

Metamateriais acústicos representam um campo de pesquisa emergente nos quais as propriedades acústicas desejadas são resultado do arranjo estrutural e geométrico do material. A manufatura aditiva contribui ativamente para tornar este objetivo factível, uma vez que, permite a fabricação de estruturas complexas. Além disso, sua capacidade de produzir peças com detalhes pequenos viabiliza o emprego de ferramentas de otimização no projeto do material. Nesse contexto, esta pesquisa desenvolveu uma metodologia de projeto de metamateriais acústicos baseada na otimização por métodos gradientes da distribuição de dutos rígidos unidimensionais em um domínio fixo pré-estabelecido. O coeficiente de absorção do metamaterial foi definido a partir de uma abordagem energética e a análise de sensibilidade, essencial para o procedimento de otimização, foi determinada de forma totalmente analítica. O algoritmo utilizado retorna a representação ótima da rede de dutos (fluido) para três frequências de análise: 100, 250 e 500 Hz. O metamaterial é formado pelo “negativo” desta rede, que foi reconstruído tridimensionalmente com o auxílio de ferramentas CAD. A tecnologia de impressão 3D de estereolitografia (SLA) foi adotada para fabricar as amostras com resina polimérica. Após ensaios em tubo de impedância, diferenças relacionadas à supressão de dimensões no modelo numérico são observadas nos resultados de absorção máxima. Entretanto, depois de ajustado, o método se apresentou efetivo para obter metamateriais de alta absorção, associada à formação de ressonadores internos com sub-comprimento de onda, nas frequências de interesse.

Palavras-chave: metamateriais acústicos, absorção sonora, otimização gradiente, materiais porosos, rede de dutos, sub-comprimento de onda.

ABSTRACT

Acoustic metamaterials represent an emerging field of research where the desired acoustic properties are a result of the structural and geometric arrangement of the material. Additive manufacturing actively contributes to making this goal achievable, as it allows the fabrication of complex structures. In addition, its ability to produce parts with small details makes it possible to use optimization tools in material design. In this context, this research developed a methodology for the design of acoustic metamaterials based on the optimization by gradient methods of the distribution of one-dimensional rigid ducts in a pre-established fixed domain. The absorption coefficient of the metamaterial was defined from an energetic approach and the sensitivity analysis, essential for the optimization procedure, was determined in a fully analytical way. The algorithm used returns the optimal representation of the ducts network (fluid) for three analysis frequencies: 100, 250 and 500 Hz. The metamaterial is formed by the “negative” of this network, which was reconstructed three-dimensionally with the help of CAD tools. Stereolithography (SLA) 3D printing technology was adopted to manufacture the samples with polymeric resin. After impedance tube tests, differences related to the suppression of dimensions in the numerical model are observed in the maximum absorption results. However, after being adjusted, the method proved to be effective to obtain high absorption metamaterials, associated with the formation of internal resonators with sub-wavelength, at the frequencies of interest.

Keywords: acoustic metamaterials, sound absorption, gradient optimization, porous materials, duct network, sub-wavelength.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Rede de dutos e metamaterial correspondente.	33
Figura 2 – Rede de micro-dutos rígidos. Adaptado de Mareze et al. (2019).	41
Figura 3 – Geometrias porosas selecionadas para impressão. Adaptado de Zielinski et al. (2020).	43
Figura 4 – Modelo de Rayleigh de um material poroso. Adaptado de Mareze (2013).	56
Figura 5 – Equipamentos que compõem o tubo de impedância.	59
Figura 6 – Metamaterial representado por uma rede de dutos.	65
Figura 7 – Detalhe de um duto de entrada.	66
Figura 8 – Rede inicial formada por células grade. A sombra verde foi adicionada apenas para evidenciar o formato cilíndrico da rede.	69
Figura 9 – Redes iniciais formadas a partir de diferentes tamanhos de células.	70
Figura 10 – Tamanho dos elementos.	70
Figura 11 – Condições de contorno do problema acústico.	71
Figura 12 – Superposição local de geometrias. Diferença entre FEM 1D e FEM 3D.	72
Figura 13 – Resultados preliminares de referência.	72
Figura 14 – Correção do comprimento efetivo vertical.	73
Figura 15 – Rotinas computacionais.	76
Figura 16 – Condições de contorno do tubo.	77
Figura 17 – Modelo FEM 3D elaborado no Ansys.	77
Figura 18 – Coeficiente de absorção de um tubo cilíndrico de 10x500 mm com modelo de dissipação proporcional ($\eta_d = 1.5\%$).	78
Figura 19 – Coeficiente de absorção de um tubo cilíndrico de 10x500 mm com modelo de dissipação LRF.	78
Figura 20 – Relação entre os elementos horizontais e seus verticais vizinhos.	84
Figura 21 – Elementos avaliados na frequência 100 Hz.	90
Figura 22 – Elementos avaliados na frequência 250 Hz.	90
Figura 23 – Elementos avaliados na frequência 500 Hz.	90
Figura 24 – Elementos avaliados na frequência 1000 Hz.	90
Figura 25 – Esquema das configurações preliminares.	93

Figura 26 – Dilema da geometria cilíndrica: à esquerda $D_{max} = 2\text{mm}$ com todos os tubos inscritos no contorno e baixo desempenho de absorção; à direita $D_{max} > 2\text{ mm}$ com bom desempenho de absorção, porém impraticável.	94
Figura 27 – Rede inicial com contorno quadrangular.	95
Figura 28 – Coeficiente de absorção da geometria 200x200x200_10 otimizada em 100 Hz.	97
Figura 29 – Rede de dutos da geometria 200x200x200_10 otimizada em 100 Hz. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.	97
Figura 30 – Curva de convergência da geometria 200x200x200_10 otimizada em 100 Hz.	98
Figura 31 – Coeficiente de absorção da geometria 50x50x100_5 otimizada em 250 Hz.	98
Figura 32 – Rede de dutos da geometria 50x50x100_5 otimizada em 250 Hz. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.	99
Figura 33 – Curva de convergência da geometria 50x50x100_5 otimizada em 250 Hz.	99
Figura 34 – Coeficiente de absorção da geometria 100x100x100_10 otimizada em 500 Hz.	100
Figura 35 – Rede de dutos da geometria 100x100x100_10 otimizada em 500 Hz. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.	100
Figura 36 – Curva de convergência da geometria 100x100x100_10 otimizada em 500 Hz.	101
Figura 37 – Rede inicial das amostras cilíndricas.	103
Figura 38 – Amostra 107x100_10,7 otimizada em 100 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.	103
Figura 39 – Amostra 107x100_10,7 otimizada em 250 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.	104
Figura 40 – Amostra 107x100_10,7 otimizada em 500 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.	104

Figura 41 – Coeficiente de absorção da geometria 107x100_10,7 otimizada em 100 Hz.	105
Figura 42 – Coeficiente de absorção da geometria 107x100_10,7 otimizada em 250 Hz.	105
Figura 43 – Coeficiente de absorção da geometria 107x100_10,7 otimizada em 500 Hz.	106
Figura 44 – Curva de convergência da geometria 107x100_10,7 otimizada em 100 Hz.	106
Figura 45 – Curva de convergência da geometria 107x100_10,7 otimizada em 250 Hz.	107
Figura 46 – Curva de convergência da geometria 107x100_10,7 otimizada em 500 Hz.	107
Figura 47 – Malhas da geometria 107x100_10,7 nas três frequências de interesse.	109
Figura 48 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 100 Hz. Modelo sem correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 105$ Hz e $\alpha = 1,0$. FEM 3D: $f = 275$ Hz e $\alpha = 0,62$.	109
Figura 49 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 250 Hz. Modelo sem correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 245$ Hz e $\alpha = 0,92$. FEM 3D: $f = 325$ Hz e $\alpha = 0,89$.	110
Figura 50 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 500 Hz. Modelo sem correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 495$ Hz e $\alpha = 0,95$. FEM 3D: $f = 610$ Hz e $\alpha = 0,88$.	110
Figura 51 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 100 Hz. Modelo com correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 110$ Hz e $\alpha = 0,69$. FEM 3D: $f = 120$ Hz e $\alpha = 0,77$.	111
Figura 52 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 250 Hz. Modelo com correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 250$ Hz e $\alpha = 1,0$. FEM 3D: $f = 255$ Hz e $\alpha = 0,99$.	111
Figura 53 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 500 Hz. Modelo com correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 495$ Hz e $\alpha = 0,99$. FEM 3D: $f = 480$ Hz e $\alpha = 0,99$.	112

Figura 54 – Campo de pressões da amostra 107x100_10,7. (a) otimizada em 100 Hz (frequência efetiva Ansys: 125 Hz). (b) otimizada em 250 Hz (frequência efetiva Ansys: 255 Hz). (c) otimizada em 500 Hz (frequência efetiva Ansys: 480 Hz). Excitação aplicada na parte superior da amostra.	113
Figura 55 – Coeficiente de absorção do fluido das geometrias 107x50_10,7 ($f = 245$ Hz e $\alpha = 0,93$) e 107x100_10,7 ($f = 250$ Hz e $\alpha = 1,0$) otimizadas em 250 Hz.	114
Figura 56 – Coeficiente de absorção do fluido das geometrias 107x40_10,7 ($f = 520$ Hz e $\alpha = 1,0$) e 107x100_10,7 ($f = 495$ Hz e $\alpha = 0,99$) otimizadas em 500 Hz.	114
Figura 57 – Amostra 107x50_10,7 otimizada em 250 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.	115
Figura 58 – Amostra 107x40_10,7 otimizada em 500 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.	116
Figura 59 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x50_10,7 otimizada em 250 Hz. Modelo com correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 245$ Hz e $\alpha = 0,93$. FEM 3D: $f = 250$ Hz e $\alpha = 0,92$	116
Figura 60 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x40_10,7 otimizada em 500 Hz. Modelo com correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 520$ Hz e $\alpha = 1,0$. FEM 3D: $f = 530$ Hz e $\alpha = 1,0$	117
Figura 61 – Campo de pressões; (a) amostra 107x50_10,7 otimizada em 250 Hz (frequência efetiva Ansys: 285 Hz). (b) amostra 107x40_10,7 otimizada em 500 Hz (frequência efetiva Ansys: 530 Hz). Excitação aplicada na parte superior da amostra.	117
Figura 62 – Impressão das amostras por meio de estereolitografia.	119
Figura 63 – Componentes da bancada.	120
Figura 64 – Amostra otimizada em 100 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.	121

Figura 65 – Amostra otimizada em 250 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.	122
Figura 66 – Amostra otimizada em 500 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.. . . .	122
Figura 67 – Amostras finais impressas; (a) geometria otimizada em 100 Hz; (b) geometria otimizada em 250 Hz; (c) geometria otimizada em 500 Hz. . .	123
Figura 68 – Coeficiente de absorção da geometria 103x100_10,3 otimizada em 250 Hz. FEM 1D: $f = 250$ Hz e $\alpha_{\tau} = 0,65$. FEM 3D: $f = 260$ Hz e $\alpha_{\tau} = 0,60$. Experimental: $f = 250$ Hz e $\alpha_{exp} = 0,69$	124
Figura 69 – Coeficiente de absorção da geometria 103x40_10,3 otimizada em 500 Hz. FEM 1D: $f = 520$ Hz e $\alpha_{\tau} = 0,65$. FEM 3D: $f = 535$ Hz e $\alpha_{\tau} = 0,61$. Experimental: $f = 475$ Hz e $\alpha_{exp} = 0,68$	124

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades do ar a 20 °C. Adaptado de Fox, McDonald e Pritchard (2014).	71
Tabela 2 – Coeficiente de absorção total da superfície (α_τ) para diferentes configurações iniciais.	96
Tabela 3 – Lista dos componentes utilizados no ensaio.	120

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

1D unidimensional.

2D bidimensional.

3D tridimensional.

ABS *Acrylonitrile Butadiene Styrene.*

AFSA *Artificial Fish School Algorithm.*

ANN *Artificial Neural Network.*

CAD *Computer Aided Design.*

CONLIN *Convex Linearization.*

CSV *Comma-separated values.*

DLP *Digital Light Processing.*

EPDM *Ethylene Propylene Diene Methylene.*

FDM *Fused Deposition Modelling.*

FEM *Finite Element Method.*

FFF *Fused Filament Fabrication.*

FPC *Four-Pore Cell.*

IPSO *Improved Particle Swarm Optimization.*

KNN *K-Nearest Neighbor.*

LCD-SLA *LCD-based Stereolithography.*

LRF *Low Reduced Frequency.*

LVA *Laboratório de Vibrações e Acústica.*

MMA *Method of Moving Asymptotes.*

NSFL *Navier-Stokes-Fourier linearizado.*

OPC *One-Pore Cell.*

PLA *Ácido Polilático.*

PSO *Particle Swarm Optimization.*

SLA *Stereolithography.*

SLM *Selective Laser Melting.*

SLP *Sequential Linear Programming.*

SLS *Selective Laser Sintering.*

SQP *Sequential Quadratic Programming.*

TLBO *Teaching-learning-based Optimization.*

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Latino

A	constante complexa
B	constante complexa
c_0	velocidade do som no meio
\tilde{c}	velocidade do som complexa
C_i^+	amplitude complexa da pressão incidente no fluido
C_i^-	amplitude complexa da pressão refletida no fluido
C_r^+	amplitude complexa da pressão incidente no material rígido
C_r^-	amplitude complexa da pressão refletida no material rígido
d_t	diâmetro do tubo de impedância
D_a	diâmetro da amostra
D_e	diâmetro do elemento
D_h	diâmetro do elemento horizontal vizinho a um elemento vertical
D_{max}	diâmetro máximo do tubo
D_{min}	diâmetro mínimo do tubo
f	frequência
f_a	frequência mínima do tubo de impedância limitada pelo processador de sinal
f_c	frequência de corte do tubo de impedância
f_{max}	frequência máxima do tubo de impedância imposta pela distância entre os microfones
f_{min}	frequência mínima do tubo de impedância imposta pela distância entre os microfones
G	fator de correção de impedância
h_e	comprimento do elemento

h_e^v	comprimento do elemento vertical corrigido
h_m	tamanho do elemento
$H_{1,2}$	função de transferência
$H_{2,1}$	função de transferência com posição dos microfones invertida
H_a	altura ou espessura da amostra
H_c	função de transferência corrigida
j	componente complexa $\sqrt{-1}$
J_0	função de Bessel de ordem zero
J_1	função de Bessel de primeira ordem
J_2	função de Bessel de segunda ordem
K_0	módulo de compressibilidade do fluido
k	número de onda
\tilde{k}	número de onda complexo
\tilde{K}_{ef}	compressibilidade dinâmica efetiva do fluido equivalente
L	comprimento do tubo
L_a	lado da amostra
m	fator de divisão que define o tamanho do elemento
n	fator de divisão que define o tamanho da célula
N_{inf}	número de elementos vizinhos horizontais conectados ao nó inferior de um elemento vertical
n_{po}	constante complexa politrópica
N_{sup}	número de elementos vizinhos horizontais conectados ao nó superior de um elemento vertical
N_{surf}	número de nós dos dutos de entrada do metamaterial

N_τ	número de dutos na superfície exposta à excitação
N_{viz}	número de elementos vizinhos verticais de um elemento horizontal
P_0	pressão atmosférica estática
p_1	pressão no microfone 1
p_2	pressão no microfone 2
p	pressão acústica
p_i	pressão acústica de um duto de entrada do metamaterial
p_r	pressão acústica na superfície do material rígido
P_r	número de Prandtl
q	velocidade de volume
q_i	velocidade de volume de um duto de entrada do metamaterial
q_r	velocidade de volume no material rígido
R	coeficiente de reflexão
s	número de onda de cisalhamento
s_m	distância entre os microfones
S	área do tubo
S_e	área do elemento
S_i	área de um duto de entrada do metamaterial
S_p	área da superfície do fluido exposta à excitação
S_r	área da superfície do material rígido exposta à excitação
S_τ	área da superfície total da amostra exposta à excitação
t	tempo
T_n	tamanho da célula grade

v_0	amplitude da velocidade de partícula
v	velocidade de partícula
v_i	velocidade de partícula de um duto de entrada do metamaterial
v_{in}	velocidade de partícula no interior de um canal ou poro do material
v_n	componente normal da velocidade de partícula
v_x	velocidade de partícula através da amostra
V	volume de um tubo
V_{max}	volume máximo da rede de dutos
W_{ab}	potência absorvida complexa
\overline{W}_{ab}	potência ativa absorvida
\overline{W}_i^+	potência ativa incidente em um duto de entrada/fluido
\overline{W}_r^+	potência ativa incidente no material rígido
\overline{W}_τ^+	potência ativa incidente no metamaterial
\overline{W}^+	potência ativa total incidente no fluido
x	posição ou distância em relação a origem
x_i	posição de um nó de um duto de entrada do metamaterial
x_m	distância entre a face da amostra e o microfone mais afastado
z	argumento da função de Bessel
Z_c	impedância característica do meio
Z_e	impedância característica do elemento e
\tilde{Z}_c	impedância característica do fluido/fluido equivalente
\tilde{Z}_{cp}	impedância característica do material poroso
\tilde{Z}_s	impedância de superfície

Alfabeto Grego

α	coeficiente de absorção do fluido
α_{exp}	coeficiente de absorção total da superfície experimental
α_r	coeficiente de absorção do material rígido
α_τ	coeficiente de absorção total da superfície
δp	função de ponderação
ΔD_e	tamanho do passo do método de diferenças finitas
Δp	variação de pressão acústica
Δx	espessura da amostra
η	viscosidade dinâmica do fluido
η_d	fator de perda
ϕ	porosidade
Φ	função arbitrária
γ	razão de calor específico
Γ	constante de propagação complexa
ρ_0	densidade do meio
$\tilde{\rho}_{ef}$	densidade efetiva do fluido equivalente
σ	resistividade ao fluxo
ω	frequência angular
τ	superfície da amostra exposta à excitação

Matrizes e Vetores

\mathbf{C}	matriz de dissipação acústica
\mathbf{C}_e	matriz elementar de dissipação acústica

\mathbf{D}	vetor com os diâmetros de todos os elementos D_e
\mathbf{f}	vetor de carregamentos externos
\mathbf{f}_e	vetor de carregamentos externos do elemento
\mathbf{K}	matriz de rigidez acústica
\mathbf{K}_e	matriz elementar de rigidez acústica
\mathbf{K}_T	matriz de mobilidade do sistema acústico
λ	vetor multiplicador de Lagrange
λ_1	vetor multiplicador de Lagrange
λ_2	vetor multiplicador de Lagrange
\mathbf{M}	matriz de inércia acústica
\mathbf{M}_e	matriz elementar de inércia acústica
\mathbf{p}	vetor de pressões acústicas
\mathbf{p}_e	vetor de pressões acústicas nodais do elemento
\mathbf{p}_I	parte imaginária do vetor de pressões acústicas
\mathbf{p}_R	parte real do vetor de pressões acústicas
\mathbf{q}	vetor de excitações ou de velocidade de volume
\mathbf{q}_I	parte imaginária do vetor de excitações
\mathbf{q}_R	parte real do vetor de excitações
\mathbf{S}	matriz característica de entrada referente a pressão no fluido
$\bar{\mathbf{S}}$	matriz característica de entrada referente a pressão no metamaterial
$\underline{\mathbf{S}}$	matriz característica de entrada referente à excitação
\mathbf{v}	vetor de velocidade de partícula

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	33
1.1	OBJETIVOS	34
1.1.1	Objetivo Geral	34
1.1.2	Objetivos Específicos	34
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	35
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	37
2.1	PESQUISAS COM FOCO EM MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO PARA O PROJETO DE METAMATERIAIS	39
2.2	PESQUISAS QUE ABORDAM MÉTODOS DE MANUFATURA ADI- TIVA DE METAMATERIAIS	42
2.3	OUTRAS PESQUISAS ENVOLVENDO METAMATERIAIS ACÚSTICOS	44
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	47
3.1	EQUAÇÃO DA ONDA PARA ACÚSTICA UNIDIMENSIONAL	47
3.2	ELEMENTOS FINITOS PARA ACÚSTICA UNIDIMENSIONAL	48
3.3	MODELOS DE DISSIPACÃO VISCO-TÉRMICOS	51
3.3.1	Modelo <i>Low Reduced Frequency</i> (LRF) para tubos cilíndricos .	52
3.4	ABSORÇÃO SONORA	54
3.4.1	Coefficiente de absorção de materiais porosos	55
3.5	ABSORÇÃO SONORA DE UMA REDE DE DUTOS RÍGIDOS A PARTIR DA IMPEDÂNCIA DE SUPERFÍCIE	57
3.6	ENSAIOS EM TUBO DE IMPEDÂNCIA	58
3.7	OTIMIZAÇÃO E PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA	60
3.7.1	Método das Assíntotas Móveis (MMA)	62
4	ABSORÇÃO SONORA DE UMA REDE DE DUTOS RÍGIDOS	65
5	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DA ABSORÇÃO SONORA	69
5.1	PARAMETRIZAÇÃO DA REDE DE DUTOS	69
5.1.1	Propriedades do meio e do material sólido	71

5.2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA ACÚSTICO DA REDE DE DUTOS . . .	71
5.3	CORREÇÃO DO COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS VERTICAIS .	72
5.4	RESTRIÇÕES	73
5.5	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	74
5.6	ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO	74
5.7	ROTINAS COMPUTACIONAIS	75
5.8	VALIDAÇÃO DAS ROTINAS COMPUTACIONAIS	76
6	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	81
6.1	POTÊNCIA ATIVA ABSORVIDA	83
6.2	COEFICIENTE DE ABSORÇÃO	84
6.3	COEFICIENTE DE ABSORÇÃO TOTAL	85
6.4	DERIVADA DO VOLUME	86
6.5	DERIVADAS DAS MATRIZES ACÚSTICAS ELEMENTARES (FEM)	86
6.5.1	Dissipação proporcional	86
6.5.2	Dissipação visco-térmica	87
6.6	DIFERENÇAS FINITAS	89
7	RESULTADOS NUMÉRICOS	93
7.1	ANÁLISE PRELIMINAR	93
7.2	RESULTADOS OBTIDOS PARA AMOSTRAS CILÍNDRICAS	102
7.3	SIMULAÇÃO NUMÉRICA USANDO FEM 3D	108
7.4	DISCUSSÃO PRELIMINAR DOS RESULTADOS	112
8	VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL	119
8.1	MANUFATURA ADITIVA	119
8.2	DESCRIÇÃO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL	120
8.3	DIMENSIONAMENTO E FABRICAÇÃO DAS AMOSTRAS	121
8.4	ENSAIO EM TUBO DE IMPEDÂNCIA	123
9	CONCLUSÕES	127
9.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	128
	BIBLIOGRAFIA	129

1 INTRODUÇÃO

Os materiais porosos são comumente aplicados como uma forma passiva de controlar o ruído e a qualidade do som em salas, ambientes e equipamentos. O desempenho acústico destes materiais é determinado por meio do seu coeficiente de absorção, definido como sendo a razão entre a potência dissipada no material e a potência sonora incidente (PIERCE, 2019). Devido à natureza física dos fenômenos envolvidos, o coeficiente de absorção é maior para as frequências mais altas, tornando os materiais porosos conhecidos por não apresentarem boa performance nas baixas frequências.

Em função destas características, pesquisas para desenvolver metamateriais acústicos que supram a demanda por materiais absorvedores em baixas frequências ganharam destaque nas últimas décadas. Na maioria dos trabalhos, são projetados metamateriais regulares ou periódicos, modelados de forma numérico-analítica e, em geral, otimizados com algum algoritmo heurístico para maximizar a absorção sonora.

O aprimoramento dos recursos computacionais, fator impactante no tempo de processamento dos métodos numéricos e dos algoritmos de otimização, permite explorar diferentes topologias, modeladas numericamente e otimizadas com métodos gradientes. Com base nestas ferramentas e no comportamento dos materiais porosos, tornou-se viável o estudo de metamateriais compostos por redes de dutos com distribuição de diâmetros heterogênea, otimizados para apresentar absorção máxima em baixas frequências. Tal rede projetada representa os vazios existentes em um material sólido “poroso”, conforme esquematizado na Figura 1.

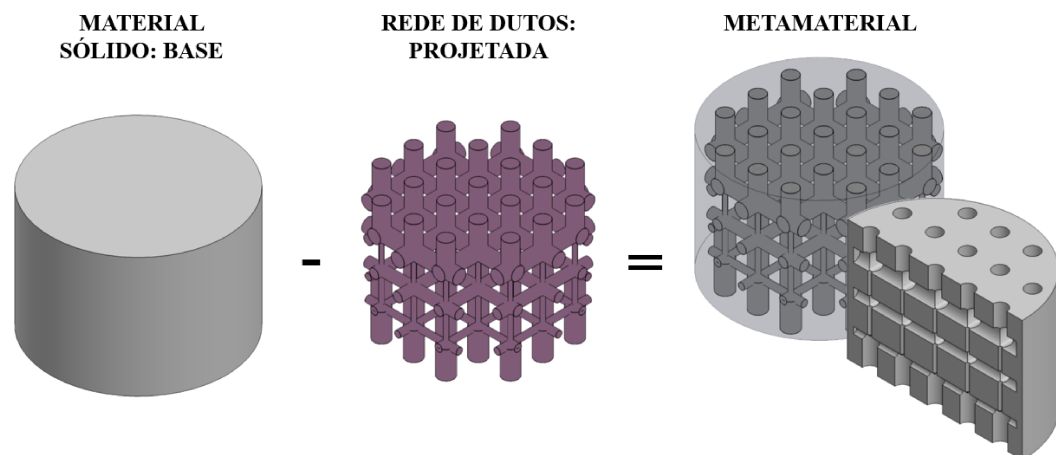


Figura 1 – Rede de dutos e metamaterial correspondente.

O primeiro modelo a introduzir o conceito de reprodução da absorção de materiais porosos por meio de redes de dutos de mesmo diâmetro e comprimento foi elaborado por Eerden (2000). Tomando como referência o trabalho de Eerden (2000), Mareze (2013) desenvolveu uma modelagem numérico-analítica para representação de um material poroso idealizado.

O seu estudo é baseado em uma rede de elementos de poros acústicos com seção transversal variável, interconectados no plano ou no espaço. A dimensão dos poros e a configuração da rede que proporciona um coeficiente de absorção ótimo para determinada faixa de frequência foi determinada utilizando ferramentas de otimização. O vigente trabalho busca aperfeiçoar o procedimento desenvolvido por Mareze (2013), tornando-o fisicamente mais representativo, além de mais robusto, rápido e adaptável a diversos tipos de geometrias.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Esta pesquisa tem como objetivo desenvolver uma metodologia de projeto de metamateriais acústicos baseada na otimização da distribuição de dutos rígidos em um domínio fixo pré-estabelecido. A prioridade é maximizar a absorção sonora destes metamateriais para “baixas frequências” (lembrando que o conceito de “baixa frequência” depende das dimensões envolvidas e da aplicação específica).

1.1.2 Objetivos Específicos

- Modelar redes de dutos rígidos por meio do Método de Elementos Finitos considerando os efeitos visco-térmicos;
- Implementar um procedimento de otimização, com base em programação matemática (métodos gradientes), utilizando os diâmetros de uma rede pré-estabelecida como variáveis de projeto;
- Desenvolver a análise de sensibilidade (obtenção das derivadas das funções envolvidas) por metodologia completamente analítica, evitando o método semi-analítico utilizado por Mareze (2013);

- Determinar redes 3D (metamateriais) que levem à maximização da absorção sonora em faixas de frequências específicas; o trabalho de Mareze (2013) envolvia apenas problemas 2D;
- Produzir os metamateriais resultantes por meio de manufatura aditiva e validá-los experimentalmente em tubo de impedância.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação de mestrado está organizada em nove capítulos apresentados na sequência. O Capítulo 2 identifica, por meio de uma revisão bibliográfica, pesquisas recentes que abordam métodos de otimização e manufatura aditiva de metamateriais acústicos.

O Capítulo 3 discorre sobre conceitos da propagação do som em dutos para fundamentar a metodologia desenvolvida. Os principais assuntos abordados são: efeitos visco-térmicos, ferramentas numéricas para solução de problemas acústicos 1D, absorção sonora através da impedância de superfície, algoritmos de otimização e procedimentos para ensaios em tubo de impedância.

O Capítulo 4 estuda a absorção sonora a partir de uma perspectiva energética. No Capítulo 5, o problema de maximização da absorção sonora é formulado utilizando a abordagem do capítulo antecessor. Nesta fase da pesquisa é feita a parametrização da rede dutos e são desenvolvidas as rotinas computacionais.

No Capítulo 6 é realizada a análise de sensibilidade, procedimento no qual são calculadas todas as derivadas das funções objetivo e restrições com relação às variáveis de projeto. Esta etapa da metodologia está atrelada ao algoritmo de otimização e faz parte das rotinas computacionais. Por ser um procedimento extenso e fundamental, foi separada em um capítulo próprio.

O Capítulo 7 exhibe os principais resultados obtidos e os valida por meio da comparação entre o modelo FEM 1D e FEM 3D. No Capítulo 8 esta validação é reforçada utilizando dados experimentais. Por último, no Capítulo 9, são feitas as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Metamateriais acústicos representam um campo de pesquisa emergente nos quais as propriedades acústicas desejadas são resultado do arranjo estrutural e geométrico do material. O foco dos estudos recentes está em aproximar os conceitos teóricos da realidade experimental (ARJUNAN; BAROUTAJI; ROBINSON, 2022). A manufatura aditiva contribui ativamente para tornar este objetivo factível, uma vez que, permite a fabricação de estruturas complexas. Além disso, sua capacidade de produzir peças com detalhes pequenos viabiliza o emprego de ferramentas de otimização no projeto do material (FAN et al., 2021). A união destes dois recursos proporciona maior liberdade de design e possibilita que a nova geração de metamateriais acústicos seja geometricamente menor e mais eficiente. (ARJUNAN; BAROUTAJI; ROBINSON; WANG, 2022).

Algumas pesquisas da última década se destacam por introduzir esta tendência. Lagarrigue et al. (2016) projetaram super-células meta-porosas para absorção em banda larga nas quais vários tipos de inclusões ressonantes impressas 3D são inseridas gradualmente no material base. A otimização da absorção acústica, condicionada pela distribuição das inclusões no meio poroso, foi realizada utilizando o algoritmo genético. Uma absorção quase total é obtida entre 1800 Hz e 7000 Hz.

O algoritmo genético também foi utilizado por Zhao, Chen et al. (2021) para otimizar a absorção do som em banda larga de redes de dutos 2D em médias frequências (500 - 1000 Hz). Estas redes foram dispostas em camadas para formar um metamaterial 3D, que foi fabricado por meio de manufatura aditiva e testado experimentalmente. A rede otimizada conferiu 84,11 % de absorção entre 500 e 800 Hz.

Boulvert, Cavalieri et al. (2019) propuseram um procedimento de otimização numérica para projetar metamateriais acústicos fibrosos continuamente graduados (em formato de grade) com absorção de banda larga (600 – 6000 Hz) em incidência normal. Dois métodos de otimização do tipo gradiente foram empregados, retornando materiais com grades regulares e materiais com espaçamento de grade variável. Os resultados numéricos mostraram uma mudança do pico de absorção para frequências mais baixas ou um alargamento da faixa de frequência de absorção para materiais graduados quando comparados aos uniformes. O processo de otimização também foi validado em tubo de impedância visando duas faixas de frequência alvo: 1600 a 1700 Hz e 2500 a 5500 Hz. As amostras foram fabricadas em Ácido Polilático (PLA) por Modelagem por Deposição Fundida (FDM).

Gao, Wang, Cheng et al. (2021) estudaram a aplicação de *machine learning* em estruturas de absorção acústica ressonantes. Para tal, um dissipador acústico, composto por um ressonador de Helmholtz e um material poroso, foi considerado o objeto de pesquisa. O modelo foi treinado por meio do método de otimização Adam (KINGMA; BA, 2017), utilizando um banco de dados de amostras (consistindo em dados de tamanhos de estruturas e curvas de absorção de som) e uma rede neural convolucional para retornar as dimensões de uma nova estrutura com as características de absorção sonora desejada. Quatro das estruturas resultantes com frequências alvo em 950, 900, 600 e 500 Hz foram validadas experimentalmente através de amostras fabricadas por manufatura aditiva. Os coeficientes de absorção obtidos foram, respectivamente, 0,7, 0,8, 0,6 e 0,4.

Também empregando *machine learning*, Kuschmitz et al. (2021) desenvolveram uma metodologia para otimizar metamateriais acústicos formados a partir de micro-redes de barras paralelas impressas 3D em PLA na faixa de frequência entre 900 e 6600 Hz. Os parâmetros das barras, como altura, largura e ângulo, representavam variáveis que podiam ser modificadas. Para elaborar o modelo, um corpo de prova genérico foi construído e medições do coeficiente de absorção e da resistividade ao fluxo foram realizadas. Então, por meio de um processo de caracterização inverso determinou-se os parâmetros Biot das amostras. Utilizando a geometria das amostras como entradas e os parâmetros Biot como saídas, dois modelos de *machine learning*, K-vizinhos Mais Próximos (KNN) e Rede Neural Artificial (ANN) foram construídos e treinados. Os modelos resultantes foram aplicados em um procedimento de design com o objetivo de gerar estruturas absorventes imprimíveis que exibissem características de absorção predefinidas. Ambos os modelos, cada um com suas ressalvas e particularidades, atenderam as expectativas.

Ainda há poucos estudos de metamateriais acústicos que aliam métodos matemáticos de otimização e manufatura aditiva, especialmente no campo dos porosos, devido a dificuldade de se reproduzir micro-poros em impressão 3D. No entanto, é possível encontrar várias referências que focam apenas na otimização, ou exploram métodos e materiais para fabricação de metamateriais acústicos por meio de manufatura aditiva.

2.1 PESQUISAS COM FOCO EM MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO PARA O PROJETO DE METAMATERIAIS

Os estudos notáveis por utilizar otimização podem ser agrupados em duas categorias de acordo com o método (determinístico ou heurístico) que utilizam para encontrar a solução ótima. Os métodos heurísticos se caracterizam por, em geral, utilizar poucos parâmetros geométricos como variáveis de projeto. Em virtude disso, resultam metamateriais com layout definido por estruturas de repetição. Na sequência, serão discutidos alguns trabalhos recentes que se beneficiam deste método de otimização.

Wang, Ma et al. (2021) propuseram um metamaterial multicamadas composto por espumas e placas com perfurações de seção variável, ambas de EPDM (*Ethylene Propylene Diene Methylene*), para melhorar as propriedades de absorção sonora em média e baixa frequência (300 – 1300 Hz). Dois algoritmos de otimização, Cardume de Peixes Artificiais (AFSA) e Enxame de Partículas Aprimoradas (IPSO), foram empregados para otimizar parâmetros estruturais do metamaterial. O IPSO proporcionou melhores resultados, apresentando dois picos de absorção próximos: 0,84 em 500 Hz e 0,86 em 800 Hz.

Zhao e Lin (2022) usaram uma versão parecida do IPSO, o PSO (Enxame de Partículas, apenas), para otimizar um absorvedor acústico composto por painéis micro perfurados de dupla camada inseridos em cavidades. Dados experimentais retornaram coeficiente de absorção de até aproximadamente 0,8 a partir de 400Hz.

Gao, Wang, Lu et al. (2021) e Yang et al. (2019) também empregaram otimização para melhorar o coeficiente de absorção de metamateriais do tipo multicamadas. Para tal, Gao, Wang, Lu et al. (2021) utilizaram o TLBO *Teaching-learning-based Optimization* (TLBO), um algoritmo baseado em ensino-aprendizagem no qual os parâmetros geométricos são usados como variáveis de otimização. O metamaterial desenvolvido foi projetado para atender banda larga (0 - 2000 Hz) e é formado por placas perfuradas, cavidades de ar e placas lisas imersas em espuma. Medições em tubo de impedância acústica indicaram que o absorvedor de som otimizado apresenta alta absorção de som entre 200 e 1715 Hz. Yang et al. (2019), por sua vez, usaram o *Cuckoo Search* com foco na faixa de frequência entre 100 e 6000 Hz. O metamaterial consiste em vários painéis microperfurados empilhados. A absorção sonora foi significativamente melhorada por meio da otimização dos parâmetros dos painéis.

Outro trabalho interessante é o desenvolvido por Gorbushin, Naili e Nguyen (2019). Os autores elaboraram um procedimento baseado em homogeneização para projetar um painel poroelástico com ótima absorção acústica por meio da modificação de parâmetros celulares microestruturais. Basicamente, variando os parâmetros topológicos de uma célula unitária cilíndrica inclusa no painel, a absorção acústica ideal poderia ser alcançada. As dimensões do painel e da célula unitária são otimizadas com o algoritmo *Pattern Search* para maximizar a porosidade do metamaterial. Devido à simplicidade da geometria de poro escolhida, as propriedades de absorção só puderam ser melhoradas em espessuras de camada relativamente grandes. O melhor desempenho em baixas frequências foi apresentado pelo painel com base de borracha de silicone com 200 mm de espessura, cujo coeficiente de absorção alcançou 0,8 em 500 Hz.

Em contrapartida, os métodos determinísticos (gradientes) são conhecidos por permitir que se trabalhe com um número grande de variáveis de projeto e por admitir que se crie materiais com topologias diversificadas. Entre os trabalhos que optam por métodos gradientes pode-se citar a pesquisa de Yoon et al. (2019), na qual foi desenvolvido um método numérico baseado em elementos finitos para distribuir inclusões rígidas em um material poroso de espessura fixa. Para encontrar a distribuição ótima, foi realizado um procedimento de otimização topológica (BENDSOE; SIGMUND, 2003) empregando o Método das Assíntotas Móveis (MMA). O problema foi modelado de modo a considerar casos com frequência alvo única e casos com frequências múltiplas. Os autores mostraram resultados apenas para médias-altas frequências, desta forma, não é possível afirmar se o mesmo desempenho é obtido em baixas frequências.

Também ganha destaque o estudo de Chen et al. (2016). Neste, um modelo de material fibroso multicamadas composto por um arranjo hexagonal periódico de fibras alinhadas em uma direção foi apresentado. Para melhorar a absorção em baixas frequências, foi adotado um modelo de otimização baseado em Programação Linear Sequencial (SLP). O coeficiente de absorção foi definido como a função objetivo e as lacunas entre as fibras como as variáveis de projeto. Testes numéricos demonstraram que o modelo de otimização é aplicável e eficiente. Frequências como, por exemplo, 100, 250, 500 e 1000 Hz retornaram coeficiente de absorção de aproximadamente 0,17, 0,39, 0,59 e 0,88, respectivamente.

É possível apontar ainda o trabalho de An e Lee (2021). Os autores propuseram uma célula circular unitária para aplicação em silenciadores acústicos. A célula unitária pode ser considerada um Ressonador de Helmholtz aprimorado porque consiste em uma

estrutura interna em forma de chapéu, com uma cavidade e um pescoço. Um problema de otimização paramétrica, empregando o algoritmo COBYLA, foi formulado para obter células otimizadas para diferentes frequências alvo. O desempenho de atenuação acústica do silenciador otimizado foi validado experimentalmente.

Pode-se mencionar também o estudo de Sousa et al. (2021), no qual foi desenvolvido o projeto, a otimização e a combinação de cavidades espirais arquimedianas, totalmente parametrizadas como ressonadores acústicos, a fim de alcançar uma absorção perfeita em frequências abaixo de 1000 Hz. O procedimento de otimização foi executado com o solver *fmincon()* do MATLAB. Os resultados foram verificados por meio da análise de elementos finitos e validados experimentalmente para picos de absorção quase perfeitos em 700 Hz e 800 Hz. Um bom acordo é alcançado entre teoria, simulação e experimentos.

Outra contribuição importante são as pesquisas de Mareze (2013) e Mareze et al. (2019). Os autores desenvolveram um modelo que permite representar materiais acústicos porosos por meio de uma rede de micro-dutos rígidos. Essa rede é bidimensional, conforme representado na Figura 2, e foi construída a partir de um modelo analítico baseado na matriz de mobilidade dos elementos que a compõe.

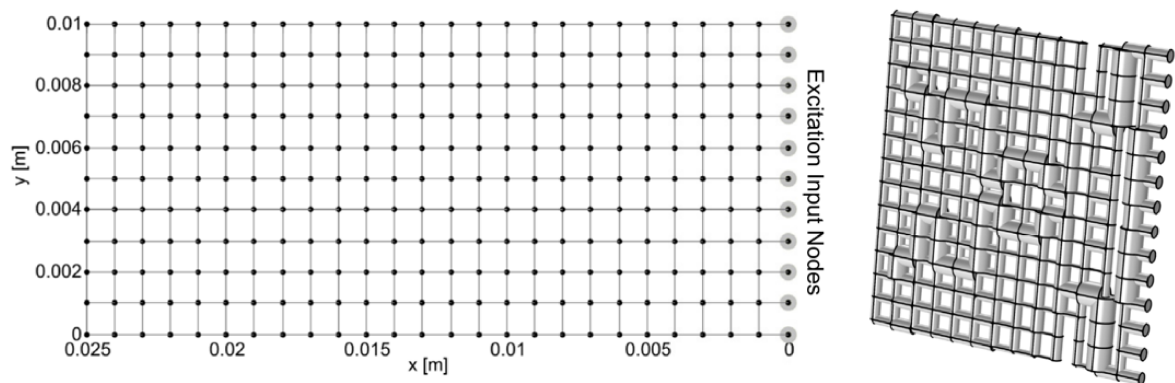


Figura 2 – Rede de micro-dutos rígidos. Adaptado de Mareze et al. (2019).

A dissipação causada pelos efeitos visco-térmicos foi adicionada por meio de propriedades complexas do fluido (ar), sendo essas propriedades dependentes dos diâmetros dos dutos. A grandeza acústica absorção sonora foi obtida a partir da impedância acústica da amostra. Então, um procedimento de otimização baseado em métodos gradientes foi utilizado para determinar a distribuição de diâmetros na rede que maximiza a absorção em determinadas frequências de interesse.

Esses trabalhos de Mareze (2013) e Mareze et al. (2019) serviram de inspiração

para a elaboração desta dissertação, que busca trazer algumas melhorias para o processo desenvolvido nas obras originais. Estas melhorias são:

- Uso de uma rede de dutos tridimensional modelada por elementos finitos acústicos 1D, ao invés de uma rede bidimensional baseada na matriz de mobilidade dos elementos;
- Determinação da absorção sonora a partir da potência de entrada complexa, ao invés do uso da impedância de superfície. Esta nova abordagem torna possível adaptar o modelo para procedimentos de otimização topológica;
- Análise de sensibilidade da absorção sonora com relação aos diâmetros da rede realizada de maneira completamente analítica, ao invés do uso do método semi-analítico que retorna as derivadas de forma “aproximada”.

2.2 PESQUISAS QUE ABORDAM MÉTODOS DE MANUFATURA ADITIVA DE METAMATERIAIS

Com o objetivo de verificar se as tecnologias de manufatura aditiva são adequadas para a reprodução de amostras porosas destinadas à absorção sonora, Zielinski et al. (2020) desenvolveram um trabalho inter-laboratorial para fabricar geometrias utilizando diferentes métodos e equipamentos de impressão.

A produção das amostras e as medições acústicas foram realizadas de forma independente, compartilhando apenas os mesmos códigos de geometria. Seis processos de manufatura aditiva foram empregados para fabricar cada amostra: Modelagem por Deposição Fundida (FDM) ou Fabricação com Filamento Fundido (FFF), Sinterização Seletiva a Laser (SLS), Fusão Seletiva a Laser (SLM), Estereolitografia (SLA), Processamento Digital de Luz (DLP) e Estereolitografia baseada em LCD (LCD-SLA).

As geometrias são formadas por células cúbicas com porosidade periódica. Dois tipos de células foram projetados para o estudo (Figura 3): células com apenas um poro (OPC) e células com quatro poros (FPC). A partir das células OPC foram projetadas duas amostras semelhantes, porém com tamanhos de células diferentes. Já para geometrias compostas por células FPC, foram produzidas três amostras, cada uma com uma distribuição de poros distinta.

Ao avaliar a qualidade geral da fabricação e o desempenho acústico das amostras, os autores fizeram algumas observações importantes. A principal dificuldade é a reprodução

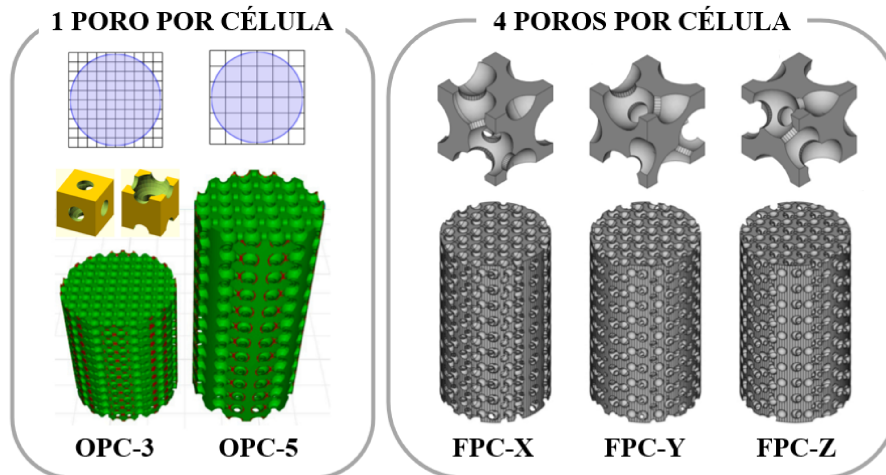


Figura 3 – Geometrias porosas selecionadas para impressão. Adaptado de Zielinski et al. (2020).

correta (não distorcida) da micro-geometria projetada, pois os diâmetros dos poros e canais sempre serão ligeiramente diferentes do modelo CAD.

Além da diferença geométrica, pequenas imperfeições como fibras, canais total ou parcialmente obstruídos, microporosidade e rugosidade, que aparecem tanto durante o processo de produção quanto no tratamento de pós-produção, impactam na performance do metamaterial. Estas pequenas imperfeições surgem devido a dificuldade de remoção da resina ou pó, deformação durante a cura, problemas com a cura nas partes internas e retração retardada. Como consequência, tendem a aumentar significativamente a absorção de som, o que geralmente é desejável em aplicações, mas não para fins de validação de modelo.

O estudo ainda aponta a correspondência das amostras com o diâmetro do tubo de impedância como possível razão para discrepâncias. No entanto, deve-se lembrar que este problema também está presente nos métodos convencionais de fabricação de protótipos. Por fim, devido a alta precisão de reprodução da geometria periódica projetada, os autores recomendam a tecnologia SLA como a mais adequada para produção de metamateriais porosos.

Outras pesquisas também fizeram contribuições interessantes. Boulvert, Costa-Baptista et al. (2020) investigaram o comportamento acústico de micro-redes impressas em 3D para avaliar o impacto dos defeitos induzidos pela técnica FDM sobre os parâmetros do meio fluido equivalente. Três defeitos relacionados ao filamento foram identificados: seção elíptica, retração da seção e rugosidade de superfície. Uma rotina de ajuste experimental

que pode ser, inclusive, aplicada a outros processos de impressão 3D, como SLA e SLM, foi proposta.

Johnston e Sharma (2021) investigaram a possibilidade de fabricar aditivamente absorvedores de som fibrosos usando modelagem por deposição fundida. Dois métodos para fibras de impressão 3D foram propostos: *fiber bridging* e *extrude-and-pull*. O método de ponte de fibra (*fiber bridging*) envolve a extrusão do filamento entre dois pontos sem nenhum suporte subjacente. O método de extruda e puxa (*extrude-and-pull*) requer a extrusão de uma gota de filamento antes de puxar a extrusora rapidamente para gerar fibras finas. Em ambos os casos, o desempenho do metamaterial acústico foi avaliado apenas em frequências superiores a 1000 Hz. Em média, o método de ponte de fibra resultou maior coeficiente de absorção.

Rice et al. (2020) descreveram um processo para modelar, imprimir e testar metamateriais formados pela repetição de células Kelvin. Dois processos de impressão foram analisados: DLP e SLM. O DLP proporcionou um acabamento superficial mais liso, porém com menor fidelidade geométrica quando comparado ao SLM. O metamaterial apresentou bom desempenho em aproximadamente 2200 Hz.

2.3 OUTRAS PESQUISAS ENVOLVENDO METAMATERIAIS ACÚSTICOS

Quando o interesse é alta absorção em baixas frequências, os materiais acústicos que apresentam melhor desempenho são os ressonadores e materiais labirínticos. Estes metamateriais são bem explorados na literatura. Entre as pesquisas recentes pode-se destacar o trabalho de N. Almeida et al. (2021). Os autores investigaram teórica, numérica e experimentalmente um absorvedor acústico para faixa de 100 - 600 Hz constituído por um painel microperfurado acoplado a uma multi-cavidade de espaços enrolados que é semelhante a um labirinto simétrico. Os protótipos foram fabricados com tecnologia de impressão 3D e avaliados em tubo de impedância. Os resultados para o coeficiente de absorção sonora adquirido na faixa de frequência desejada foram maiores que 91 % com largura de banda relativa acima de 35 %.

Absorvedores de som convencionais dificilmente apresentam bom desempenho de absorção em baixa frequência e banda larga simultaneamente. A fim de combinar essas duas funções em um único absorvedor, Liu, Yu e Xin (2021) propuseram um metamaterial composto por um material poroso gradualmente perfurado e apoiado sobre uma cavidade

ressonante de Helmholtz. Um modelo teórico e um modelo de elementos finitos foram desenvolvidos para investigar a absorção sonora do metamaterial proposto e medidas experimentais foram realizadas para verificar o sucesso deles. Os resultados mostraram que o orifício de perfuração gradual melhora substancialmente a correspondência de impedância entre o material e o ar para aumentar a absorção de som de banda larga. Enquanto isso, a cavidade ressonante de Helmholtz traz um pico de absorção de som em baixa frequência (aproximadamente 0,97 em 250 Hz).

Com um objetivo similar, Wang, Wang et al. (2019) propuseram um metamaterial formado por um material labiríntico embutido em um material poroso. Amostras foram fabricadas por meio de manufatura aditiva para validar experimentalmente o absorvedor desenvolvido. O metamaterial apresentou desempenho de absorção superior a 85 % em 105 Hz e 90 % em 315 Hz. A performance em banda larga foi de 75 % na faixa de 195 a 600 Hz.

Também existem estudos que focam em selecionar um tipo de metamaterial e a partir dele fazer diversas avaliações paramétricas para verificar qual configuração retorna melhor performance. Seguindo este conceito, Wu et al. (2019) propuseram um metamaterial acústico para absorções de baixa frequência (< 500 Hz) composto por três tubos de seção quadrada aninhados com direções de abertura invertidas. A eficiência do absorvedor foi investigada numericamente e experimentalmente através de amostras fabricadas por manufatura aditiva (FDM). O metamaterial resultou picos com absorção superior a 90 % e a frequência de pico pôde ser modificada ajustando os parâmetros geométricos do absorvedor.

Metamateriais que simulam o comportamento de materiais porosos ainda são pouco investigados na bibliografia, quando comparado aos demais materiais absorvedores tradicionais. Além dos trabalhos de Mareze (2013), Mareze et al. (2019) e Zielinski et al. (2020), citados nas seções anteriores, também contribuíram com este segmento de pesquisa Aslan e Turan (2020) e Opiela e Zieliński (2020).

Aslan e Turan (2020) estudaram um absorvedor de som celular poroso à base de gesso, fabricado com tecnologia de impressão 3D. Três tipos de células e três configurações de porosidade (tamanho das células) foram analisadas na faixa de frequência entre 1000 e 6000 Hz. Os autores verificaram que o comportamento da absorção do som de cada célula unitária piorava com o aumento da porosidade. As análises numéricas de fluxo indicaram que esta queda de desempenho ocorria porque o aumento da porosidade reduzia os níveis

de resistência ao fluxo e a tortuosidade das estruturas.

Opiela e Zieliński (2020) desenvolveram um compósito poroso com micro-geometria modificável de forma que sua capacidade de absorver ruído pudesse ser acomodada em diferentes faixas de frequência (entre 500 e 4500 Hz). O esqueleto polimérico do compósito possui uma estrutura periódica específica com dois tipos de poros (maiores e menores) e dois tipos de canais (amplos e estreitos), e cada um dos grandes poros contém uma pequena esfera de aço. Dependendo da situação, as esferas bloqueiam diferentes canais que conectam os poros e, portanto, alteram os fenômenos visco-inerciais entre a saturação do ar e o esqueleto sólido que ocorrem em nível de microescala e são responsáveis pela dissipação da energia acústica das ondas que penetram o compósito poroso.

É importante salientar que os autores modelaram o volume de fluido. O esqueleto polimérico representa o negativo deste volume e a geometria externa pode ter diferentes contornos: cilíndrico, cuboide e misto. Todas as configurações foram analisadas numericamente e testadas em tubo de impedância. Para tal, amostras foram construídas por manufatura aditiva, sendo o processo FDM e o material ABS (*Acrylonitrile Butadiene Styrene*). Vários picos de absorção puderam ser observados em cada configuração avaliada. Se o foco são baixas frequências, o melhor desempenho (coeficiente de absorção próximo a 1) foi registrado pela amostra retangular em 700 Hz.

Este estudo de metamateriais formados por meio de redes de dutos explora dois conceitos dos trabalhos anteriores: criação de um metamaterial de contorno cilíndrico a partir do negativo de um volume fluido e a análise de diferentes tamanhos de célula na composição da rede base.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Diante dos objetivos propostos, se evidencia que, para modelar um metamaterial a partir de uma rede de dutos, é importante relembrar conceitos de propagação do som em dutos, assim como estudar os efeitos visco-térmicos e as ferramentas numéricas utilizadas para solucionar problemas de acústica 1D. Conhecer os métodos de otimização também se faz necessário, uma vez que o metamaterial desenvolvido deve ter um desempenho ótimo. Estes pontos serão discutidos nas subseções seguintes.

3.1 EQUAÇÃO DA ONDA PARA ACÚSTICA UNIDIMENSIONAL

Ondas planas são ondas nas quais as variáveis acústicas, em um determinado momento, são constantes em qualquer plano perpendicular à direção de propagação. Elas representam o conceito fundamental da acústica de dutos (JACOBSEN; JUHL, 2013).

No interior de um duto uniforme com paredes rígidas, no qual as dimensões da seção transversal são muito menores que o comprimento de onda, e cujo fluido presente pode ser considerado estacionário e ideal (sem viscosidade), o campo sonoro existente é constituído de ondas planas até determinada frequência (MUNJAL, 2014). Esta frequência, denominada frequência de corte, é determinada em função da geometria da seção transversal e das dimensões do duto. Abaixo da frequência de corte apenas ondas planas podem se propagar, caracterizando assim um campo sonoro unidimensional (JACOBSEN; JUHL, 2013).

De acordo com as literaturas citadas acima, a equação da onda acústica unidimensional em função da pressão acústica é dada por:

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

cujas soluções são representadas pela expressão

$$p(x, t) = (Ae^{-jkx} + Be^{jkx})e^{j\omega t}, \quad (3.2)$$

na qual A e B são constantes e podem ser determinadas por meio das condições de contorno. No estudo de acústica de dutos normalmente se aplicam condições de contorno naturais (ou de *Neumann*), nas quais se prescreve a velocidade de partícula na direção normal à uma superfície.

Como a solução da equação da onda foi definida em termos da pressão, faz-se necessário associar a pressão acústica com a velocidade de partícula. Por meio da Equação de Euler (vide Blackstock (2000)) é possível relacionar as duas grandezas e obter uma expressão que permite aplicar as condições de contorno.

Condições de contorno de impedância também são muito utilizadas na bibliografia, uma vez que, em vários casos a terminação do tubo não é rígida. Também é possível aplicar condições de contorno geométricas (ou de *Dirichlet*), por meio das quais define-se a pressão acústica em algum ponto do domínio.

3.2 ELEMENTOS FINITOS PARA ACÚSTICA UNIDIMENSIONAL

O Método de Elementos Finitos (FEM) é um procedimento numérico por meio do qual é possível determinar soluções aproximadas de problemas de valores sobre o contorno de equações diferenciais. Um problema acústico pode ser discretizado em elementos finitos utilizando diferentes abordagens. Na literatura destaca-se o método dos resíduos ponderados, porém, o método variacional também é usual e seu desenvolvimento pode ser visualizado em Fahy e Gardonio (2007).

Neste estudo será utilizado o método de *Galerkin*, um caso particular do método de resíduos ponderados. De acordo com Atalla e Sgard (2015) o método de elementos finitos consiste em sete etapas básicas. Estas etapas serão expostas na sequência, tomando como referência um problema de propagação unidimensional harmônica de ondas sonoras, dado por

$$c_0^2 \frac{d^2 p}{dx^2} + \omega^2 p = 0 \quad x \in \Omega =]0, L[, \quad (3.3)$$

em que Ω representa o domínio de análise de um tubo de comprimento L .

A Equação 3.3 juntamente com as suas condições de contorno, que podem ser tipo naturais ou geométricas, representam a formulação forte do problema. Sendo assim, a primeira etapa consiste em utilizar o método de resíduos ponderados para escrever a forma integral fraca da Equação de Helmholtz:

$$W(p, \delta p) = \int_0^L \left(-c_0^2 \frac{d\delta p}{dx} \frac{dp}{dx} + \omega^2 p \delta p \right) dx + \left[c_0^2 \delta p \frac{dp}{dx} \right]_0^L = 0. \quad (3.4)$$

A integral da Equação 3.4 costuma ser representada em duas parcelas, tal que

$$K(p, \delta p) = c_0^2 \int_0^L \frac{d\delta p}{dx} \frac{dp}{dx} dx, \quad (3.5)$$

e

$$M(p, \delta p) = \int_0^L p \delta p \, dx. \quad (3.6)$$

O termo entre colchetes está associado às condições de contorno. É importante salientar que, assim como no caso analítico, podem ser empregadas condições de contorno naturais (velocidade de partícula), condições de contorno geométricas (pressão) e uma combinação de ambas.

Na segunda etapa discretiza-se a geometria do domínio em subdomínios, denominados elementos. Cada elemento é composto por um conjunto de nós. Dentre as configurações de nós clássicas encontradas na literatura, para o caso de FEM acústico 1D costuma-se utilizar elementos lineares (dois nós) de comprimento h_e .

Na terceira etapa faz-se a aproximação da variável independente e o cálculo das matrizes elementares. Define-se em cada subdomínio uma função aproximada (função de aproximação nodal) da função exata. A função de aproximação nodal deve envolver apenas as variáveis nodais localizadas no subdomínio e suas fronteiras. Também é imprescindível que ela seja contínua e satisfaça as condições de continuidade entre os elementos. O cálculo das matrizes elementares consiste em avaliar em cada subdomínio a aproximação nodal da forma integral, determinada na primeira etapa. Obtém-se assim a expressão

$$[\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e] \mathbf{p}_e = \mathbf{f}_e, \quad (3.7)$$

na qual \mathbf{p}_e corresponde ao vetor de pressões nodais do elemento, \mathbf{f}_e representa as reações no contorno deste elemento, e \mathbf{K}_e e \mathbf{M}_e são as matrizes elementares de rigidez e de massa, respectivamente, definidas como

$$\mathbf{K}_e = \frac{c_0^2}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

e

$$\mathbf{M}_e = \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

A quarta etapa é caracterizada pelo processo de montagem. Neste passo, as matrizes elementares são combinadas para formar matrizes globais. Em outros termos, a forma integrante é avaliada ao longo de todo o domínio. Ao fazê-lo, são aplicadas condições de continuidade entre os elementos. Com as matrizes globais obtém-se a equação do problema acústico na forma discreta, dada por

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad (3.10)$$

na qual \mathbf{p} é o vetor global de pressões de todo o sistema, \mathbf{f} o vetor global de carregamentos externos, e \mathbf{K} e \mathbf{M} representam as matrizes globais de rigidez e inércia acústica. Em outras literaturas costumam ser representadas por \mathbf{H} e \mathbf{Q} , respectivamente (FAHY; GARDONIO, 2007).

Na quinta etapa aplicam-se então as condições de contorno do problema e, quando praticável, as restrições. Condições de contorno de velocidade e pressão normalmente são aplicadas em nós específicos. Considerando velocidade de partícula $v = v_0 e^{j\omega t}$ imposta no primeiro nó, tem-se que

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{p} = -j\omega \rho_0 c_0^2 \mathbf{v}. \quad (3.11)$$

Assumindo que $q = Sv$, sendo S a área da seção transversal do tubo, pode-se escrever a equação acima em termos de velocidade de volume. Então,

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{p} = -j\omega \rho_0 c_0^2 \frac{\mathbf{q}}{S}. \quad (3.12)$$

Manipulando matematicamente, as matrizes elementares e a Equação 3.12 podem ser reescritas da seguinte forma:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{p} = -j\omega \mathbf{q}, \quad (3.13)$$

sendo,

$$\mathbf{K}_e = \frac{1}{\rho_{0e}} \frac{S_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

e

$$\mathbf{M}_e = \frac{1}{\rho_{0e} c_{0e}^2} \frac{S_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{K_{0e}} \frac{S_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

na qual K_{0e} representa o módulo de compressibilidade do elemento.

No caso de imposição de impedância, esta é representada por uma matriz de amortecimento \mathbf{C} no sistema, de modo que

$$[\mathbf{K} + j\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{p} = -j\omega \mathbf{q}, \quad (3.16)$$

no qual

$$\mathbf{C}_e = \frac{S_e}{Z_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

e Z_e representa a impedância do elemento e . A Equação 3.16 pode ser compactada em uma única matriz em função da frequência, tal que

$$\mathbf{K}_T \mathbf{p} = -j\omega \mathbf{q}, \quad (3.18)$$

com $\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}$.

Na sexta etapa emprega-se o método direto para solucionar o problema e encontrar as pressões nodais \mathbf{p} . Com as pressões nodais é possível plotar a resposta harmônica do sistema e a distribuição de pressão ao longo do tubo. Por fim, há a sétima etapa, marcada pelo pós processamento. Nela é realizado o estudo de convergência e interpretação dos resultados.

Caso necessário, os efeitos dissipativos do meio podem ser adicionados ao FEM adotando um modelo de dissipação proporcional simplificado na forma de velocidade do som complexa

$$\tilde{c} = c_0(1 + j\eta_d), \quad (3.19)$$

no qual a parte imaginária representa a atenuação (η_d é o fator de perda). Entretanto, este modelo não é capaz de representar adequadamente a dissipação em micro-dutos e materiais porosos, uma vez que, outros mecanismos de dissipação estão presentes nestas estruturas. Sendo assim, na próxima seção serão explorados os modelos de dissipação visco-térmicos.

3.3 MODELOS DE DISSIPACÃO VISCO-TÉRMICOS

Os modelos numéricos acústicos clássicos não consideram os efeitos dissipativos associados à fricção viscosa e a condução térmica. Estes fenômenos são importantes na avaliação de tubos de pequenos diâmetros, portanto, necessitam ser incluídos. Todavia, antes de estudar os modelos numéricos acústicos visco-térmicos, deve-se primeiro compreender como atuam os mecanismos de dissipação térmica e viscosa.

De acordo com Benade (1968) a força de fricção nas paredes do duto atua como uma resistência à aceleração do fluido, reduzindo a energia cinética do movimento oscilatório. Por sua vez, a troca de energia térmica entre a superfície do duto e o fluido transgride a característica adiabática das ondas sonoras em propagação livre e reduz sua energia potencial. Estes efeitos ocorrem em uma fina camada próxima às paredes do duto, conhecidas como camadas limite térmica e viscosa.

Visto isso, o fluido presente no interior do duto pode ser dividido em duas regiões: a camada limite e o volume interior. No caso de materiais porosos e micro-dutos, se a dimensão da camada limite for da mesma ordem da dimensão da geometria do poro ou do diâmetro do duto, não é possível distinguir de forma precisa estas duas regiões. Desta forma, o volume interior também deve ser modelado considerando os efeitos visco-térmicos

(MAREZE, 2013).

Na literatura, podem ser encontrados modelos acústicos visco-térmicos com diferentes níveis de complexidade. Estes modelos se distinguem pelas hipóteses assumidas para simplificar as equações básicas nas quais os modelos acústicos são fundamentados (MARTINS, 2011). Zwikker e Kosten (1949) e Iberall (1950), em seus estudos, desenvolveram um modelo no qual as hipóteses simplificativas aplicadas permitem que se considere a pressão acústica constante ao longo da seção transversal do duto. Este modelo ficou conhecido como *Low Reduced Frequency* (LRF) e se difundiu pela facilidade de solução.

Posteriormente, baseando-se nas premissas do LRF, Tijdeman (1975) avaliou a propagação de ondas em tubos cilíndricos por meio de implementação numérica. Deste então, o modelo LRF se destaca por ser computacionalmente eficiente e aplicável em casos de propagação uni ou bidimensional abaixo da frequência de corte, com variações de seção suaves. No entanto, é importante salientar que este modelo não é capaz de representar geometrias complexas adequadamente (MAREZE, 2013). Modelos mais recentes como o Navier-Stokes-Fourier linearizado permitem o emprego de geometrias arbitrárias, porém sua formulação é mais complexa e seu custo computacional é maior. Mais detalhes sobre este modelo podem ser obtidos em Kampinga (2010), Kampinga, Wijnant e Boer (2010) e Martins (2011).

Para o desenvolvimento de um metamaterial a partir de uma rede de dutos o modelo LRF atende os requisitos necessários. Sabe-se que este modelo retorna resultados satisfatórios pois já foi empregado em estudos similares (RIZZATTI, 2019; MAREZE et al., 2019). Sendo assim, O LRF será discutido na subseção abaixo.

3.3.1 Modelo *Low Reduced Frequency* (LRF) para tubos cilíndricos

Uma maneira simples de representar a dissipação visco-térmica em um modelo de elementos finitos é introduzindo uma velocidade de propagação do som complexa e uma densidade efetiva, também complexa. O procedimento completo, abrangendo desde a dedução analítica à formulação FEM do modelo LRF pode ser visualizada nos trabalhos de Mareze (2013) e Martins (2011). Nesta seção, o modelo será abordado de forma sucinta.

Para o desenvolvimento das equações do modelo LRF para tubos cilíndricos adota-se o sistema de coordenadas cilíndricas axis-simétricas adimensionais. As equações e variáveis são escritas em termos destas coordenadas e admitindo um número de onda complexo,

dado por

$$\tilde{k} = \frac{\Gamma k}{j}, \quad (3.20)$$

no qual k corresponde ao número de onda real, $j = \sqrt{-1}$ e Γ representa a constante de propagação complexa em um meio dissipativo. A determinação da velocidade de partícula e do campo de pressão devido a propagação sonora em um duto circular é um problema acústico clássico. Porém, para aplicar a solução via LRF algumas hipóteses devem ser assumidas:

- O comprimento de onda acústico é muito maior que o raio do tubo;
- O comprimento de onda acústico é muito maior que a espessura da camada limite viscosa.

Para demonstração da solução normalmente também são consideradas condições de contorno de paredes rígidas, de modo que, admite-se que a velocidade radial do fluido é igual a zero no centro e sobre o raio do tubo. Levando em conta as premissas citadas acima e considerando a propagação de onda na direção axial, pode-se representar Equação de Helmholtz em termos de um fluido equivalente, tal que

$$\frac{dp}{dx} + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{ef}(\omega)}{\tilde{K}_{ef}(\omega)} p = 0. \quad (3.21)$$

A propriedade $\tilde{\rho}_{ef}(\omega)$ é a densidade efetiva do fluido, dada por

$$\tilde{\rho}_{ef}(\omega) = -\rho_0 \frac{J_0(j^{3/2}s)}{J_2(j^{3/2}s)}, \quad (3.22)$$

e a propriedade $\tilde{K}_{ef}(\omega)$ corresponde ao módulo de compressibilidade dinâmica efetivo, definido como

$$\tilde{K}_{ef}(\omega) = P_0 \gamma / \left[\gamma + (\gamma - 1) \frac{J_2(j^{3/2}s\sqrt{Pr})}{J_0(j^{3/2}s\sqrt{Pr})} \right]. \quad (3.23)$$

Nas equações exibidas acima J_0 e J_2 são as funções de Bessel de ordem zero e ordem dois, respectivamente. $s = (D_e/2)\sqrt{\omega\rho_0/\eta}$ é o número de onda de cisalhamento, no qual D_e é o diâmetro do tubo e η é a viscosidade dinâmica do fluido. P_0 é a pressão atmosférica estática, Pr é o número de Prandtl, γ é a razão de calores específicos e n_{po} é a constante complexa politrópica, calculada por

$$n_{po} = \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{J_2(j^{3/2}s\sqrt{Pr})}{J_0(j^{3/2}s\sqrt{Pr})} \right]^{-1}. \quad (3.24)$$

Fazendo algumas manipulações matemáticas é possível determinar a constante de propagação complexa do fluido:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{J_0(j^{3/2}s)}{J_2(j^{3/2}s)} \frac{\gamma}{n_{po}}}. \quad (3.25)$$

Substituindo Γ na Equação 3.20 obtém-se o número de onda complexo e consequentemente a velocidade do som complexa. Assim sendo,

$$\tilde{c} = \frac{\omega}{\tilde{k}}. \quad (3.26)$$

É importante salientar que o meio com dissipação apresenta uma impedância característica nova. Essa nova impedância é dada por

$$\tilde{Z}_c = \frac{\rho_0 c_0}{j\gamma/\Gamma n_{po}} = \frac{\rho_0 c_0}{G}. \quad (3.27)$$

O termo G é utilizado para corrigir a impedância característica de um meio sem dissipação para um meio com perdas visco-térmicas.

As equações adaptadas para considerar os efeitos visco-térmicos são adicionadas no modelo FEM original substituindo a densidade e o módulo de compressibilidade das matrizes elementares por seus correspondentes efetivos, obtendo-se assim

$$\mathbf{K}_e = \frac{1}{\tilde{\rho}_{ef}^e} \frac{S_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

e

$$\mathbf{M}_e = \frac{1}{\tilde{K}_{ef}^e} \frac{S_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Feita a substituição das matrizes, o problema FEM acústico 1D é solucionado seguindo o mesmo procedimento da seção anterior. Apesar da propagação elementar ser unidimensional, um arranjo tridimensional pode ser construído a partir da conectividade entre elementos, formando a rede de dutos.

3.4 ABSORÇÃO SONORA

O coeficiente de absorção α_τ é a propriedade que determina o desempenho acústico dos materiais absorvedores. Ele representa a fração da energia sonora incidente que não é refletida, ou seja, que é absorvida ou transmitida pelo material. Desta forma, pode ser representado matematicamente como (KUTTRUFF, 2006)

$$\alpha_\tau = 1 - |R|^2, \quad (3.30)$$

sendo R o coeficiente de reflexão.

Os materiais acústicos também costumam ser caracterizados por sua impedância de superfície, definida como

$$\tilde{Z}_s = \frac{p}{v_n}, \quad (3.31)$$

na qual p e v_n são a pressão acústica e a componente normal da velocidade de partícula na superfície do material (KUTTRUFF, 2006). A impedância de superfície é frequentemente dividida em termo real (resistivo) e termo imaginário (reativo). O termo real está associado às perdas de energia e o termo imaginário às mudanças de fase. Esta grandeza é muito importante para a avaliação de um material acústico, pois fornece mais informações sobre as propriedades de absorção do que o coeficiente de absorção. (COX; D'ANTONIO, 2009).

Outra grandeza imprescindível relacionada ao coeficiente de absorção é a impedância característica. Ela determina a forma de propagação do som em um meio fluido, tal que $Z_c = \rho_0 c_0$. Em um material poroso, devido aos efeitos dissipativos do meio, esta propagação é representada através de uma densidade complexa e uma velocidade do som também complexa (MAREZE, 2013).

3.4.1 Coeficiente de absorção de materiais porosos

Os modelos acústicos utilizados para calcular as propriedades de absorção sonora dos materiais porosos de estrutura rígida costumam ser agrupados em quatro categorias: modelo empírico, modelo fenomenológico, modelo semifenomenológico e modelo de microestrutura. Os modelos se diferem pela complexidade e pelo número de parâmetros acústicos considerados (MAREZE, 2013).

Um dos modelos mais básicos é o modelo fenomenológico de Rayleigh (KUTTRUFF, 2006) que utiliza como base um material poroso simplificado composto por tubos ressonantes. Assume-se que as cavidades internas do material são interconectadas em canais com diferentes níveis de complexidade. Se o fluido for pressionado através da amostra, o diferencial de pressão entre as suas duas faces é dado por:

$$\Delta p = \sigma \Delta x v_x, \quad (3.32)$$

no qual σ é a resistividade ao fluxo do material, v_x é a velocidade através da amostra e Δx é a espessura da amostra.

Como um modelo idealizado de material poroso, considere um corpo rígido com canais de pequeno diâmetro equidistantes perpendiculares à superfície, conforme ilustrado na Figura 4.

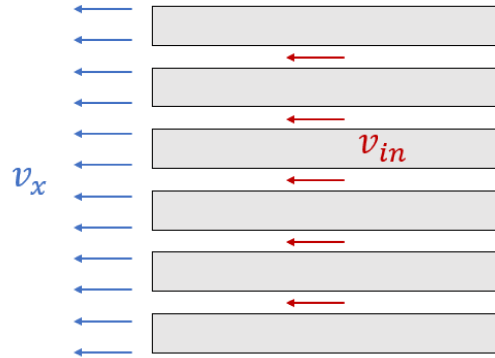


Figura 4 – Modelo de Rayleigh de um material poroso. Adaptado de Mareze (2013).

O fluxo de fluido ocorre por estes canais. A soma das secções transversais de todos os canais é menor que a área total da amostra. A razão entre estas duas áreas é chamada porosidade ϕ . Para que a continuidade seja atendida, a velocidade no interior de cada canal torna-se maior que a velocidade externa em uma proporção ϕ . Sendo assim, $v_{in} = v_x/\phi$. Se a fração $\Delta p/\Delta x$ da Equação 3.32 for substituída por um gradiente de pressão, pode-se obter uma relação diferencial válida para um canal:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\phi\sigma v_{in}. \quad (3.33)$$

Assume-se que esta relação é também válida para escoamentos alternados, ou seja, para a velocidade da partícula em uma onda sonora. Neste caso, entretanto, forças inerciais devem ser incluídas adicionando o termo $\rho_0(\partial v_{in}/\partial t)$ em 3.33. O gradiente de pressão torna-se então

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} - \phi\sigma v, \quad v = v_{in}. \quad (3.34)$$

A segunda equação necessária é a equação da continuidade, dada por:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.35)$$

Utilizando essas duas equações diferenciais e considerando soluções na forma:

$$p = Ae^{j(\omega t - \tilde{k}x)}, \quad (3.36)$$

$$v = Be^{j(\omega t - \tilde{k}x)}, \quad (3.37)$$

pode-se determinar o número de onda complexo introduzindo as duas soluções nas Equações 3.34 e 3.35. Obtém-se assim

$$-j\tilde{k}A = -(j\omega\rho_0 + \sigma\phi)B, \quad (3.38)$$

$$-j\tilde{k}\rho_0B = -\frac{1}{c_0}j\omega A, \quad (3.39)$$

Combinando 3.38 e 3.39 tem-se então

$$\tilde{k}(\omega) = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \frac{j\phi\sigma}{\rho_0\omega}}. \quad (3.40)$$

A impedância característica pode ser obtida por meio da razão entre a pressão sonora e a velocidade de partícula, tal que

$$\tilde{Z}_c = \frac{A}{B} = \rho_0 c_0 \sqrt{1 - \frac{j\phi\sigma}{\rho_0\omega}}. \quad (3.41)$$

Essa formulação descreve a propagação das ondas sonoras no interior de um canal ou poro. Para determinar a impedância característica média do material poroso, deve-se considerar a velocidade de partícula no meio externo, que difere da velocidade de partícula nos poros pelo fator ϕ . Logo, a impedância característica do material poroso é dada por $\tilde{Z}_{cp} = \tilde{Z}_c/\phi$, ou seja,

$$\tilde{Z}_{cp} = \frac{\rho_0 c_0}{\phi} \sqrt{1 - \frac{j\phi\sigma}{\rho_0\omega}}. \quad (3.42)$$

Por meio de \tilde{k} e \tilde{Z}_{cp} é possível calcular a impedância de superfície de uma amostra porosa apoiada em uma superfície rígida:

$$\tilde{Z}_s = \tilde{Z}_{cp} \frac{1 + e^{-j\tilde{k}H_a}}{1 - e^{-j\tilde{k}H_a}} = -j\tilde{Z}_{cp} \cot(\tilde{k}_c H_a), \quad (3.43)$$

na qual $e^{-j\tilde{k}_c H_a}$ representa o coeficiente de reflexão e H_a é a espessura da amostra. Visto isso, o coeficiente de absorção pode ser calculado como

$$\alpha_\tau = 1 - \left| \frac{\tilde{Z}_s - \rho_0 c_0}{\tilde{Z}_s + \rho_0 c_0} \right|^2. \quad (3.44)$$

3.5 ABSORÇÃO SONORA DE UMA REDE DE DUTOS RÍGIDOS A PARTIR DA IMPEDÂNCIA DE SUPERFÍCIE

O coeficiente de absorção de uma rede de dutos rígidos com distribuição 2D (Figura 2) pode ser determinado a partir da impedância de superfície do material. Esta metodologia foi desenvolvida por Mareze (2013) e consiste em escrever o coeficiente de absorção em

função da parte real e imaginária da impedância de superfície complexa, definida como $\tilde{Z}_s = Z_R + jZ_I$. Sendo assim,

$$\alpha_\tau = \frac{4Z_R/\rho_0 c_0}{(1 + Z_R/\rho_0 c_0)^2 + (Z_I/\rho_0 c_0)^2}. \quad (3.45)$$

A excitação acústica é aplicada apenas nos nós da superfície de entrada da malha e é definida como um fluxo de massa para uma velocidade de partícula de valor real conhecido, geralmente unitário. A partir da solução dos valores de pressão média nos nós dessa superfície, calcula-se a impedância e o coeficiente de absorção.

Seja então \mathbf{p} o vetor linha das soluções de pressões em todos os nós da malha e \mathbf{q} o vetor linha de excitação de velocidade. O vetor \mathbf{q} possui valores reais iguais a q_v apenas nos nós de excitação da superfície. Nos demais nós é nulo.

O coeficiente de absorção pode ser escrito em função dos valores de pressão dos nós. Para tal, o vetor complexo \mathbf{p} deve ser separado em parte real e imaginária, de modo que $\mathbf{p} = \mathbf{p}_R + j\mathbf{p}_I$. Desta forma,

$$\alpha_\tau = \frac{4\mathbf{p}_R^T \mathbf{t}}{[1 + \mathbf{p}_R^T \mathbf{t}]^2 + [\mathbf{p}_I^T \mathbf{t}]^2}, \quad (3.46)$$

sendo \mathbf{t} um vetor auxiliar, responsável por tornar a expressão do coeficiente de absorção uma função explícita de \mathbf{p}_R e \mathbf{p}_I . Este vetor é dado por:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}_u}{(\phi \ n_{ex} \ \rho_0 \ c_0 \ q_v)}, \quad (3.47)$$

no qual n_{ex} é o número de nós que possuem excitação de velocidade. O vetor \mathbf{t}_u possui as mesmas dimensões de \mathbf{q} , no entanto, seus respectivos valores não nulos devem ser unitários, ou seja, $\mathbf{t}_u = \mathbf{q}/q_v$.

Por conveniência, as variáveis das Equações 3.45, 3.46 e 3.47 seguem a nomenclatura da bibliografia original (MAREZE, 2013).

3.6 ENSAIOS EM TUBO DE IMPEDÂNCIA

Um tubo de impedância é um sistema de caracterização acústica utilizado para determinar o coeficiente de absorção sonora por incidência normal de materiais absorvedores. Os ensaios em tubo de impedância normalmente são executados seguindo a metodologia estabelecida pela norma ISO:10534-2 (2001), que utiliza o método da função de transferência.

O sistema de medição é composto, basicamente, por um alto falante, dois microfones e um porta amostra. O alto falante é responsável por excitar o campo acústico interno e está alojado em uma das extremidade do tubo. Na extremidade oposta se acopla o porta amostra. Os microfones são inseridos na face lateral do tubo e são utilizados para medir a pressão sonora. Para que cada equipamento desempenhe sua função é necessário um gerador e analisador de sinais, um amplificador e um computador. A Figura 5 ilustra o esquema de instrumentação do sistema.

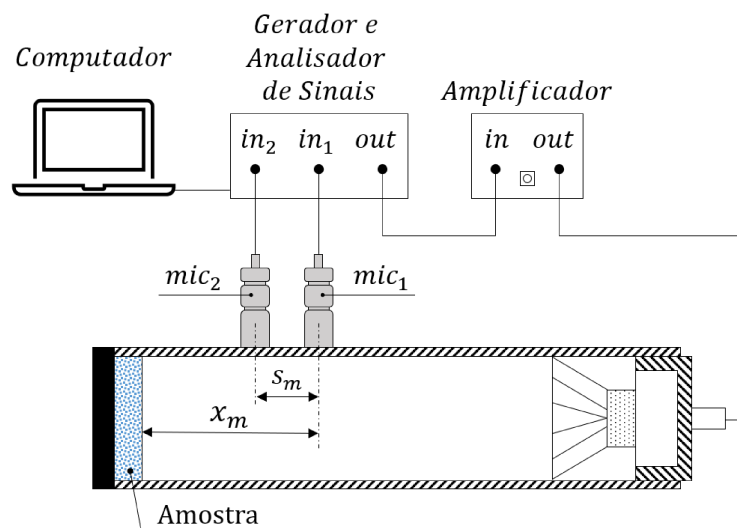


Figura 5 – Equipamentos que compõem o tubo de impedância.

Antes de iniciar o ensaio, é necessário definir a faixa de frequência de trabalho do tubo, dada por

$$f_a < f < f_c, \quad (3.48)$$

na qual f_a é limitada pela precisão do equipamento de processamento de sinal e f_c é a frequência de corte do tubo, definida como

$$f_c = \frac{1,84 c_0}{\pi d_t}, \quad (3.49)$$

sendo d_t o diâmetro interno do tubo de impedância.

Entretanto, as frequências máximas e mínimas do tubo também são limitadas pela distância entre os microfones (s_m). A norma estabelece que

$$f_{max} < 0,45 \frac{c_0}{s_m} \quad (3.50)$$

e recomenda que

$$f_{min} > 0,05 \frac{c_0}{s_m}. \quad (3.51)$$

A função de transferência acústica pode ser definida como a razão entre a pressão no microfone 2 e o microfone 1, tal que

$$H_{1,2} = \frac{p_2}{p_1}. \quad (3.52)$$

Para evitar erros de medição relacionados à diferença de fase entre os microfones, a norma sugere que um procedimento de calibração seja executado. Este procedimento consiste em realizar duas medições, uma conforme a configuração exibida na Figura 5 e outra invertendo a posição dos microfones. A função de transferência corrigida é obtida pela raiz quadrada da razão entre as funções de transferência obtidas em cada medição. Sendo assim,

$$H_c = \left(\frac{H_{1,2}}{H_{2,1}} \right)^{1/2}. \quad (3.53)$$

Conhecendo a função de transferência corrigida, é possível calcular o coeficiente de reflexão da amostra:

$$R = \frac{H_c - e^{-j\tilde{k}s_m}}{e^{j\tilde{k}s_m} - H_c} e^{2j\tilde{k}x_m}, \quad (3.54)$$

no qual s_m é a distância entre os microfones, x_m é a distância entre a face da amostra e o microfone mais afastado e \tilde{k} é o número de onda complexo. Consequentemente, para determinar o coeficiente de absorção sonora:

$$\alpha_{exp} = 1 - |R|^2. \quad (3.55)$$

α_{exp} representa o coeficiente de absorção experimental da amostra.

3.7 OTIMIZAÇÃO E PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Considerando que o principal objetivo deste estudo é maximizar a absorção sonora de uma rede de dutos, torna-se imprescindível conhecer o conceito de otimização. O processo de otimização consiste em determinar o valor ótimo de uma função, normalmente sujeita a um conjunto de restrições. Diferentes abordagens podem ser empregadas para otimizar um problema. A literatura costuma agrupá-las em duas categorias: os métodos determinísticos e os heurísticos. Os métodos determinísticos são baseados em cálculos de gradientes e aproximações, enquanto os métodos heurísticos se caracterizam pelo uso de uma aleatoriedade orientada.

De acordo com Arora (2004), independente do método selecionado, é importante formular adequadamente o problema de otimização, uma vez que a solução ótima será tão

boa quanto a sua formulação. O autor define como padrão um procedimento composto por cinco etapas que auxiliam a elaborá-lo de forma ideal.

O processo inicia com a descrição problema. A descrição deve englobar os objetivos gerais do projeto e os requisitos a serem satisfeitos. Na sequência, deve-se coletar dados e informações do sistema para formular o problema de forma matemática. A declaração do problema e a coleta de dados representam as duas primeiras etapas que precisam ser cumpridas.

A próxima etapa consiste em identificar o conjunto de variáveis que descrevem o sistema. Elas são conhecidas como as variáveis de otimização e devem ser livres, de modo que, podem assumir qualquer valor. Quando possível, as variáveis devem ser independentes entre si. Se há dependência, restrições de igualdade são incorporadas ao problema.

Uma vez que as variáveis de projeto foram definidas, é necessário identificar um critério a ser otimizado, pois muitos designs podem ser viáveis, mas nem todos são ótimos. O critério deve ser uma função do vetor das variáveis de projeto, conhecida como função objetivo. Esta função precisa ser minimizada ou maximizada de acordo com os requisitos do problema.

A última etapa do processo de formulação é identificar as restrições e desenvolver expressões para elas, pois o projeto e fabricação de um sistema deve atender especificações e requisitos de desempenho. Uma restrição significativa deve ser uma função de pelo menos uma variável de projeto.

Com o problema formulado, um algoritmo de otimização deve ser selecionado para encontrar a solução. Muitos casos de otimização estrutural são não-convexos e a função objetivo e as restrições são escritas como funções implícitas das variáveis de projeto. Nestes problemas, a solução pode ser obtida gerando uma sequência de subproblemas explícitos que sejam aproximações convexas do problema original (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

Christensen e Klarbring (2009) ainda indicam que diferentes métodos podem ser empregados para obter uma aproximação convexa explícita, entre os quais se destacam: *Sequential Linear Programming* (SLP), *Sequential Quadratic Programming* (SQP), *Convex Linearization* (CONLIN) e *Method of Moving Asymptotes* (MMA). De forma generalizada, estes métodos se diferem pelo tipo de função utilizada para obter a aproximação convexa, tempo de convergência e quantidade de variáveis presentes no problema.

3.7.1 Método das Assíntotas Móveis (MMA)

O Método das Assíntotas Móveis (MMA) é um método para programação não-linear aplicado em otimização estrutural proposto por Svanberg (1987). O MMA pode ser descrito como um aprimoramento do Método CONLIN, desenvolvido por Fleury e Braibant (1986), e se destaca por garantir que a aproximação das restrições ocorra por funções explícitas e convexas e por melhorar a convergência de problemas não-lineares (SILVA CASTRO, 2017; SILVA; NEVES; LENZI, 2020).

No MMA, um subproblema de aproximação convexa é gerado e resolvido em cada etapa do processo iterativo do algoritmo de programação. A geração destes subproblemas é controlada pelas assíntotas móveis, as quais auxiliam a estabilizar e acelerar a convergência do processo geral (SVANBERG, 1987).

As principais equações que representam as aproximações do MMA são exibidas abaixo, e, por conveniência, seguem a nomenclatura da bibliografia original. Para contextualizá-las, considere um problema geral de otimização dado por:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && f_0(x), \\ & \text{sujeito a} && f_j(x) \leq \check{f}_j, \quad j = 1 \dots m, \end{aligned} \quad (3.56)$$

no qual f_0 é a função objetivo, f_j são as restrições, \check{f}_j é o valor superior da restrição j e m é o número total de restrições.

As funções de aproximação do MMA para uma determinada iteração (k) são:

$$\tilde{f}_i(x) = r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right), \quad (3.57)$$

sendo que,

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \partial f_i / \partial x_j, & \text{se } \partial f_i / \partial x_j > 0 \\ 0, & \text{se } \partial f_i / \partial x_j \leq 0, \end{cases} \quad (3.58)$$

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{se } \partial f_i / \partial x_j \geq 0 \\ -(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \partial f_i / \partial x_j, & \text{se } \partial f_i / \partial x_j < 0, \end{cases} \quad (3.59)$$

e

$$r_i^{(k)} = \tilde{f}_i(x^{(k)}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right), \quad (3.60)$$

no qual p_{ij} e q_{ij} fazem referência a sensibilidade de f_i . L_j e U_j são as assíntotas inferiores e superiores, respectivamente. A solução via MMA requer uma série de iterações internas

(subproblema) e externas (problema geral). Detalhes do método requerem uma abordagem mais profunda dos conceitos de otimização e podem ser consultados na obra original (SVANBERG, 1987).

4 ABSORÇÃO SONORA DE UMA REDE DE DUTOS RÍGIDOS

Na fundamentação teórica o coeficiente de absorção foi determinado em termos do coeficiente de reflexão e da impedância de superfície do material. Nesta seção, a absorção será estudada do ponto de vista energético. Sendo assim, o coeficiente de absorção é definido como a relação entre a potência ativa absorvida \overline{W}_{ab} e a potência ativa incidente \overline{W}^+ (KUIPERS; WIJNANT; BOER, 2014) em uma determinada superfície, tal que (PIERCE, 2019; BLACKSTOCK, 2000; FAHY; GARDONIO, 2007)

$$\alpha = \frac{\overline{W}_{ab}}{\overline{W}^+}. \quad (4.1)$$

A potência ativa absorvida \overline{W}_{ab} corresponde a parte real da potência absorvida complexa W_{ab} (FAHY, 1989; SILVA; NEVES; LENZI, 2020), que é obtida multiplicando ambos os lados da Equação 3.16 por $(1/j2\omega)\mathbf{p}^H$ (o sobre-índice H corresponde ao complexo conjugado) (SILVA; CANCELIER; LENZI, 2022):

$$\frac{1}{2}\mathbf{p}^H\mathbf{C}\mathbf{p} + \frac{j}{2}\left(-\frac{1}{\omega}\mathbf{p}^H\mathbf{K}\mathbf{p} + \omega\mathbf{p}^H\mathbf{M}\mathbf{p}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{p}^H\mathbf{q} = W_{ab}. \quad (4.2)$$

Desta forma,

$$\overline{W}_{ab} = \text{Re}\{W_{ab}\} = -\frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{p}^H\mathbf{q}\}. \quad (4.3)$$

Em outros termos, \overline{W}_{ab} representa a taxa efetiva de energia injetada no sistema acústico pela excitação harmônica externa \mathbf{q} . Como pode ser visto comparando as Equações 4.2 e 4.3, a potência ativa absorvida é equivalente à energia dissipada pelo sistema acústico, de modo que,

$$\overline{W}_{ab} = -\frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{p}^H\mathbf{q}\} = \frac{1}{2}\mathbf{p}^H\mathbf{C}\mathbf{p}. \quad (4.4)$$

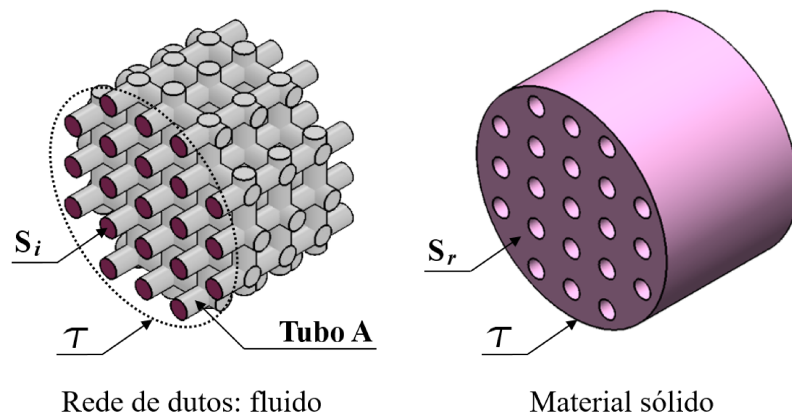


Figura 6 – Metamaterial representado por uma rede de dutos.

Considere uma amostra de metamaterial formada por uma rede de dutos, representados por furos cilíndricos dentro de um dado material sólido, conforme exibido na Figura 6. Para obter a potência ativa incidente \overline{W}^+ sobre a superfície τ é necessário identificar as partes incidente e refletida do campo acústico da região analisada. Considerando rígido o material que comporta a rede, a absorção ocorre apenas no fluido contido em cada duto. Portanto, os dutos de entrada, cujas faces de área S_i pertencem a τ , serão utilizados como referência para calcular a potência ativa incidente. Detalhes de um dos dutos de entrada são apresentados na Figura 7.

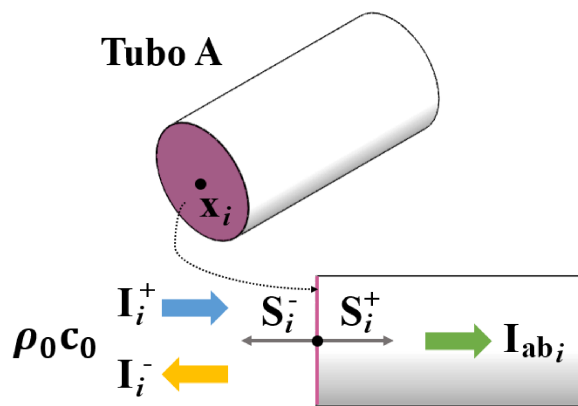


Figura 7 – Detalhe de um duto de entrada.

Admitindo propagação de ondas planas locais unidimensionais, a amplitude complexa da pressão e da velocidade em cada nó i (que corresponde a um nó de entrada do metamaterial, com coordenadas \mathbf{x}_i e respectiva área do duto S_i) da região τ pode ser escrita como (KUIPERS; WIJNANT; BOER, 2014)

$$p_i(\mathbf{x}_i) = C_i^+(\mathbf{x}_i) + C_i^-(\mathbf{x}_i) \quad (4.5)$$

e

$$v_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\rho_0 c_0} (C_i^+(\mathbf{x}_i) - C_i^-(\mathbf{x}_i)), \quad (4.6)$$

nas quais C_i^+ é a amplitude complexa da pressão incidente, e C_i^- é a amplitude complexa da pressão refletida. Reorganizando as Equações 4.5 e 4.6 e considerando que o índice i está relacionado à posição \mathbf{x}_i :

$$C_i^+ = \frac{1}{2} (p_i + \rho_0 c_0 v_i) \quad (4.7)$$

e

$$C_i^- = \frac{1}{2} (p_i - \rho_0 c_0 v_i). \quad (4.8)$$

Sabendo que os nós analisados pertencem a elementos tubulares com área S_i , a potência ativa incidente no nó i pode ser encontrada utilizando as parcelas de pressão (Equação 4.5) e velocidade (Equação 4.6) relacionada a C_i^+ . Desta forma,

$$\overline{W}_i^+ = \text{Re} \{W_i^+\} = \text{Re} \left\{ \int_{S_i} \frac{1}{2} C_i^{+*} \frac{C_i^+}{\rho_0 c_0} dS_i^- \right\} = \frac{1}{2\rho_0 c_0} C_i^{+*} C_i^+ S_i^-. \quad (4.9)$$

Uma vez que a potência ativa incidente está agindo em S_i^- e a propagação ocorre na mesma direção da área, pode-se dizer que $q_i = -S_i v_i$, sendo S_i o valor escalar da área. Substituindo as Equações 4.7 e 4.8 na Equação 4.9, \overline{W}_i^+ pode ser reescrita como

$$\overline{W}_i^+ = \frac{S_i}{8\rho_0 c_0} \left(p_i^* p_i + 2\rho_0 c_0 \text{Re} \{p_i^* (-v_i)\} + (\rho_0 c_0)^2 (-v_i)^* (-v_i) \right). \quad (4.10)$$

Rearranjando,

$$\overline{W}_i^+ = \frac{1}{8\rho_0 c_0} \left(S_i p_i^* p_i - 2\rho_0 c_0 \text{Re} \{p_i^* q_i\} + (\rho_0 c_0)^2 \frac{q_i^* q_i}{S_i} \right). \quad (4.11)$$

Assim, na superfície de interesse, a potência ativa incidente total, \overline{W}^+ , pode ser encontrada como uma soma dos termos \overline{W}_i^+ para N_{surf} nós (considerando que \mathbf{q} é aplicado apenas nos nós da superfície de interesse), tal que

$$\overline{W}^+ = \sum_{i=1}^{N_{surf}} \overline{W}_i^+ = \frac{1}{8\rho_0 c_0} \left(\sum_{i=1}^{N_{surf}} p_i^* S_i p_i - 2\rho_0 c_0 \text{Re} \{ \mathbf{p}^H \mathbf{q} \} + (\rho_0 c_0)^2 \sum_{i=1}^{N_{surf}} q_i^* \frac{1}{S_i} q_i \right), \quad (4.12)$$

ou (SILVA; CANCELIER; LENZI, 2022)

$$\overline{W}^+ = \frac{1}{2} \mathbf{p}^H \mathbf{S} \mathbf{p} - \frac{1}{4} \text{Re} \{ \mathbf{p}^H \mathbf{q} \} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \overline{W}_{ab} + \frac{1}{2} (\mathbf{p}^H \mathbf{S} \mathbf{p} + \mathbf{q}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{q}), \quad (4.13)$$

na qual \mathbf{S} e $\underline{\mathbf{S}}$ são matrizes diagonais $N \times N$ com valores diferentes de zero apenas nas entradas correspondentes aos graus de liberdade dos nós $i \in \tau$. Essas matrizes são definidas de modo que $\mathbf{S}(i, i) = (1/4\rho_0 c_0) S_i$ e $\underline{\mathbf{S}}(i, i) = (\rho_0 c_0 / 4 S_i)$. Aplicando a Equação 4.13 na Equação 4.1, o coeficiente de absorção α é então obtido por

$$\alpha = \frac{2\overline{W}_{ab}}{\overline{W}_{ab} + (\mathbf{p}^H \mathbf{S} \mathbf{p} + \mathbf{q}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{q})}. \quad (4.14)$$

Esta formulação indica a absorção própria de todos os dutos de entrada da superfície τ . Porém, a absorção total da superfície não é prevista pela Equação 4.14, uma vez que a potência ativa incidente \overline{W}_r^+ sobre a superfície rígida de área S_r não é utilizada. Assumindo que uma onda plana incide sobre a parte rígida de τ com uma pressão acústica p_r (na qual a velocidade de volume é $q_r = 0$), a Equação 4.15 pode ser aplicada de maneira que

$$\overline{W}_r^+ = \frac{1}{2\rho_0 c_0} C_r^{+*} C_r^+ S_r^- = \frac{1}{8\rho_0 c_0} S_r p_r^* p_r. \quad (4.15)$$

Considerando que a onda plana incidente apresenta a mesma pressão em todos os pontos da face de τ , pode-se representar p_r como uma média das pressões nas faces dos dutos de entrada, p_i . Desta forma,

$$p_r^* p_r = \frac{1}{N_\tau} \sum_{i=1}^{N_\tau} p_i^* p_i, \quad (4.16)$$

e, então,

$$\overline{W}_r^+ = \frac{1}{8\rho_0 c_0} \frac{S_r}{N_\tau} \sum_{i=1}^{N_\tau} p_i^* p_i = \frac{1}{2} \mathbf{p}^H \mathbf{S}_r \mathbf{p}, \quad (4.17)$$

sendo que \mathbf{S}_r é uma matriz diagonal com valores não-nulos apenas nas entradas correspondentes aos nós $i \in \tau$, com $\mathbf{S}_r(i, i) = (S_r/N_\tau)/4\rho_0 c_0$.

Consequentemente, a absorção total da superfície τ é obtida por

$$\alpha_\tau = \frac{\overline{W}_{ab}}{\overline{W}_\tau^+} = \frac{\overline{W}_{ab}}{\overline{W}^+ + \overline{W}_r^+}. \quad (4.18)$$

Substituindo,

$$\alpha_\tau = \frac{2\overline{W}_{ab}}{\overline{W}_{ab} + (\mathbf{p}^H \mathbf{S} \mathbf{p} + \mathbf{q}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{q}) + \mathbf{p}^H \mathbf{S}_r \mathbf{p}} = \frac{2\overline{W}_{ab}}{\overline{W}_{ab} + (\mathbf{p}^H \overline{\mathbf{S}} \mathbf{p} + \mathbf{q}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{q})}, \quad (4.19)$$

no qual $\overline{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + \mathbf{S}_r$, e

$$\overline{\mathbf{S}}(i, i) = \frac{1}{4\rho_0 c_0} \left(\frac{S_r}{N_\tau} + S_i \right) = \frac{1}{4\rho_0 c_0} \left(\frac{S_r + N_\tau S_i}{N_\tau} \right) = \frac{1}{4\rho_0 c_0} \frac{S_\tau}{N_\tau}. \quad (4.20)$$

Nota-se que a diferença entre as Equações 4.14 e 4.19 está relacionada à área efetiva de atuação da potência ativa incidente. Quanto maior o número de dutos de entrada, maior a influência da absorção própria do fluido, similar ao que seria observado com a expressão $\alpha_\tau = (S_p \alpha + S_r \alpha_r) / (S_p + S_r)$ (BERANEK, 1986).

Escrever o coeficiente de absorção como uma função explícita dos vetores de pressão e velocidade de volume, composta pelos termos quadráticos destes vetores facilita o processo de cálculo de suas derivadas. Esse processo é denominado análise de sensibilidade e será detalhado no Capítulo 6, após a formulação do problema de otimização, tema do capítulo seguinte.

5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DA ABSORÇÃO SONORA

Para atender os objetivos deste estudo, o coeficiente de absorção total do metamaterial composto pela rede de dutos deverá ser maximizado para apresentar bom desempenho em baixas frequências. Em virtude disso, o coeficiente de absorção total é considerado a função objetivo do problema de otimização. É importante mencionar que a otimização visa atender frequências únicas e não uma banda de frequência.

No Capítulo 4, o coeficiente de absorção foi definido em função das áreas dos tubos que compõem a rede de dutos. Sendo assim, os diâmetros desses tubos são as variáveis livres que descrevem o mecanismo de absorção e, portanto, são considerados como variáveis de projeto.

A rede de dutos possui uma configuração inicial representada geometricamente por linhas e colunas formadas pela repetição de células base. Esta rede inicial caracteriza um domínio fixo sobre o qual os diâmetros dos tubos poderão ser modificados pelo processo de otimização para obter o coeficiente de absorção máximo.

5.1 PARAMETRIZAÇÃO DA REDE DE DUTOS

Neste trabalho, a rede inicial de cada amostra de metamaterial possui contorno cilíndrico e é composta por células do tipo grade, conforme ilustrado na Figura 8. As células são formadas por ramos e os ramos podem ser discretizados em elementos.

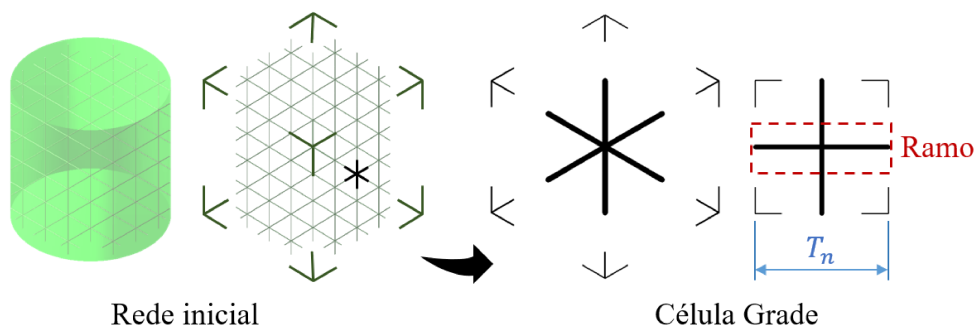


Figura 8 – Rede inicial formada por células grade. A sombra verde foi adicionada apenas para evidenciar o formato cilíndrico da rede.

O tamanho da célula (T_n) está relacionado com o diâmetro da amostra por um fator n que indica quantas células cabem no diâmetro da amostra. Desta forma,

$$\text{tamanho da célula} = T_n = \frac{D_a}{n}, \quad (5.1)$$

no qual D_a é o diâmetro da amostra e n é o fator de divisão. Para exemplificar, considere $D_a = 100$ mm e $n = 5$ mm. O tamanho da célula é dado por

$$T_5 = \frac{100}{5} = 20 \text{ mm.} \quad (5.2)$$

Sendo assim, foram avaliadas redes com quatro tamanhos de células diferentes: T_3 , T_5 , T_{10} e T_{20} . A diferença geométrica entre cada uma delas é exibida na Figura 9.

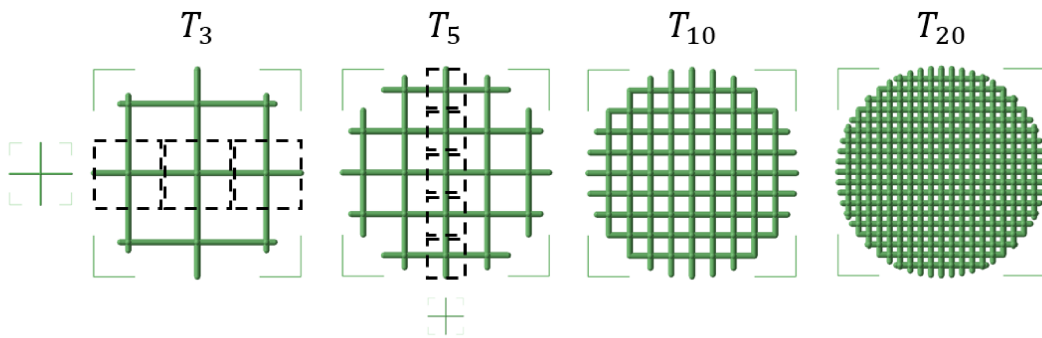


Figura 9 – Redes iniciais formadas a partir de diferentes tamanhos de células.

O tamanho do elemento (h_m), por sua vez, é obtido dividindo o ramo (tamanho da célula) pelo número de elementos desejados por ramo (y), tal que

$$h_e = h_m = \frac{T_n}{m}. \quad (5.3)$$

Para análises preliminares o estudo considerou células com um elemento por ramo e células com cinco elementos por ramo. A Figura 10 mostra a relação entre o tamanho da célula e o tamanho dos elementos.

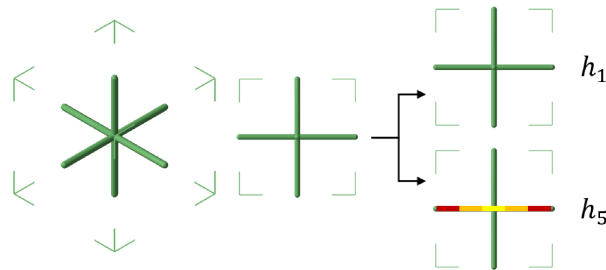


Figura 10 – Tamanho dos elementos.

Outros parâmetros importantes definidos nesta etapa do trabalho foram o diâmetro da amostra, estabelecido como $D_a = 100$ mm, e a sua altura H_a . Foram estudadas cinco alturas diferentes: 10, 20, 40, 60 e 100 mm. Todos estes parâmetros foram analisados em três frequências de interesse distintas: 100, 250 e 500 Hz. Sendo assim, considerando os 4

tamanhos de células, 2 tamanhos de elementos, 5 alturas de amostra e 3 frequências alvo, têm-se um total de 120 configurações preliminares.

5.1.1 Propriedades do meio e do material sólido

A rede de dutos representa o fluido no interior do metamaterial. Por isso, é importante definir as propriedades do ar, o fluido em questão. Essas propriedades podem ser vistas na Tabela 1.

Tabela 1 – Propriedades do ar a 20 °C. Adaptado de Fox, McDonald e Pritchard (2014).

Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Densidade	ρ_0	1,21	kg/m ³
Número de Prandtl	Pr	0,71	adimensional
Pressão atmosférica	P_0	101325	Pa
Razão de calor específico	γ	1,4	adimensional
Velocidade do som	c_0	342,4	m/s
Viscosidade dinâmica	η	1,81e-05	Pa.s

Por meio do negativo da rede de dutos se modela o metamaterial. Devido a complexidade da geometria resultante, só é possível construir amostras utilizando manufatura aditiva. Conseqüentemente, o material sólido é formado por resinas ou polímeros. Estes materiais não apresentam boa absorção em baixas frequências. Assim, para análises numéricas o coeficiente de absorção do material sólido foi considerado 0,001.

5.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA ACÚSTICO DA REDE DE DUTOS

O problema acústico foi desenvolvido com base na fundamentação teórica. A Figura 11 ilustra as condições de contorno e excitações aplicadas.

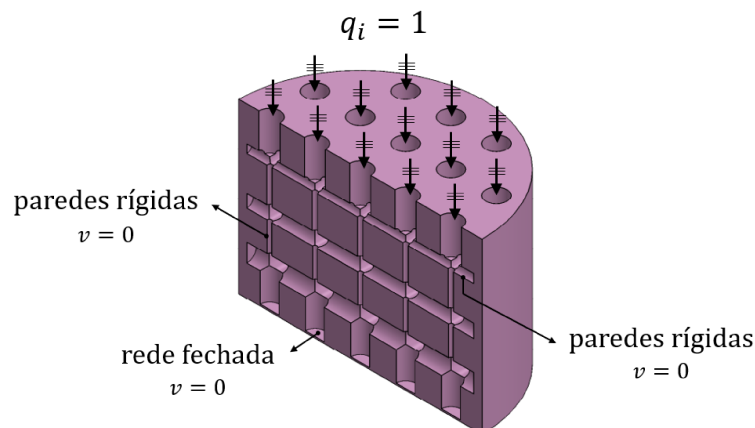


Figura 11 – Condições de contorno do problema acústico.

Os tubos que compõem a rede são considerados fechados e possuem paredes rígidas ($v = 0$). Nos tubos de entrada do metamaterial é aplicada excitação na forma de velocidade de volume unitária, tal que $q_i = 1 \text{ m}^3/\text{s}$. É importante mencionar que este modelo não considera a possível interação acústica entre furos vizinhos na face exposta a excitação.

5.3 CORREÇÃO DO COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS VERTICAIS

Elementos 1D não podem representar corretamente o comprimento efetivo de dutos 3D devido à superposição local de geometrias. Esta inconveniência é ilustrada na Figura 12.

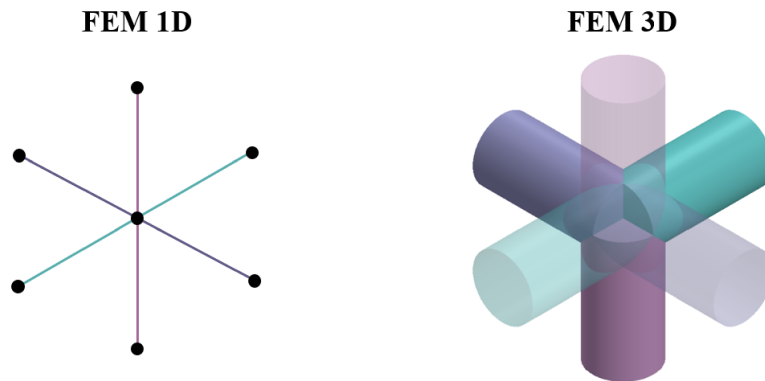


Figura 12 – Superposição local de geometrias. Diferença entre FEM 1D e FEM 3D.

Para minimizar os efeitos da superposição é proposta uma correção do comprimento efetivo dos dutos. Considerando que resultados preliminares mostraram que há predominância de diâmetros menores na vertical (Figura 13) e que o acréscimo da correção dificulta o procedimento analítico da análise de sensibilidade, a correção foi aplicada apenas aos elementos verticais.

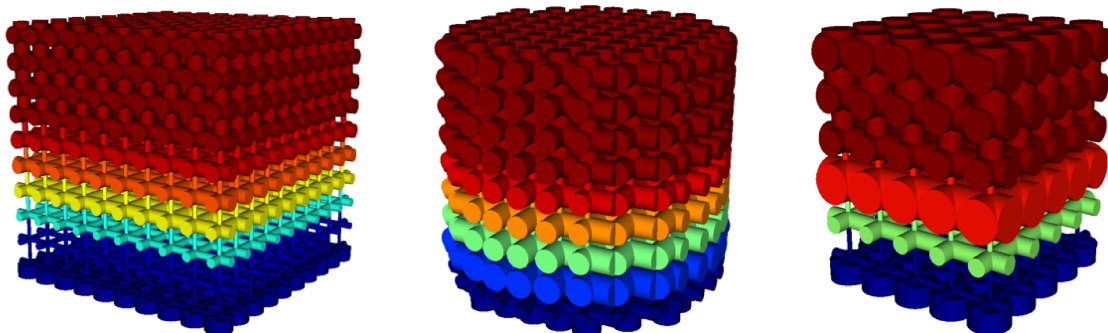


Figura 13 – Resultados preliminares de referência.

Desta forma, o novo comprimento vertical do elemento (h_e^v) é obtido descontando do comprimento original (h_e) a média dos raios dos elementos vizinhos horizontais ($d_h/2$) conectados nos nós superior e inferior, tal que

$$h_e^v = h_e - \frac{1}{N_{sup}} \sum_{h=1}^{N_{sup}} \frac{d_h}{2} - \frac{1}{N_{inf}} \sum_{h=1}^{N_{inf}} \frac{d_h}{2}, \quad (5.4)$$

no qual N_{sup} é o número de elementos vizinhos conectados ao nó superior e N_{inf} o número de elementos vizinhos conectados ao nó inferior de um dado elemento vertical e . Essa relação entre o elemento vertical e seus horizontais vizinhos utilizada para determinar a correção é exibida na Figura 14. É importante notar que usar esta estratégia torna as

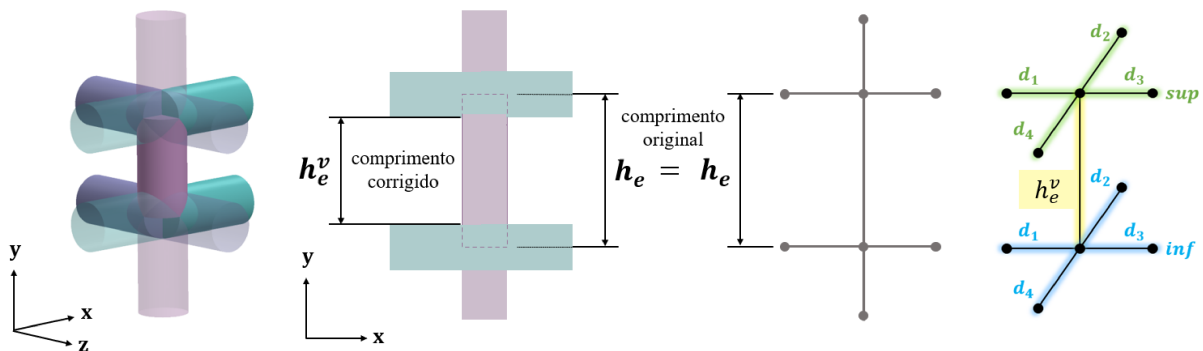


Figura 14 – Correção do comprimento efetivo vertical.

matrizes dos elementos verticais dependentes dos diâmetros dos elementos horizontais em sua vizinhança.

5.4 RESTRIÇÕES

Procedimentos de otimização baseados em métodos gradientes apresentam melhor performance quando associados a algum tipo de restrição. Isto evita o surgimento de mínimos locais inconvenientes. Normalmente as restrições surgem naturalmente nos problemas de projeto ótimo (ARORA, 2004). Para o metamaterial, a equação do equilíbrio (Equação 3.16) é intrínseca ao coeficiente de absorção e por isso é considerada como restrição. Essa é uma restrição implícita, pois não é diretamente dependente das variáveis de projeto.

Como é conveniente ter pelo menos uma restrição dependente das variáveis de projeto, também foi adotado o volume total da rede como restrição. Ele é definido como

$$\sum \frac{\pi D_e^2 h_e}{4} \leq V_{max}, \quad (5.5)$$

sendo

$$D_{min} \leq D_e \leq D_{max}. \quad (5.6)$$

A Equação 5.6 é considerada uma restrição lateral das variáveis e não é tratada como restrição funcional. O diâmetro máximo dos tubos (D_{max}) deve ser dimensionado de modo que tubos paralelos da rede não se sobreponham. O diâmetro mínimo (D_{min}) é condicionado pela acurácia dos equipamentos de manufatura aditiva.

5.5 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O problema de otimização consiste em maximizar o coeficiente de absorção total α_τ para uma determinada frequência ω , sujeito a equação do equilíbrio e a uma restrição de volume. Em termos matemáticos, o problema é representado como

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{D}}{\text{minimize}} \quad & -\alpha_\tau(\mathbf{D}, \omega), \\ \text{sujeito a} \quad & (\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{p} = -j\omega\mathbf{q}, \\ & \sum \frac{\pi D_e^2 h_e}{4} \leq V_{max}, \\ & D_{min} \leq D_e \leq D_{max}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

As variáveis de projeto, os diâmetros elementares do tubo D_e , são contínuas e apresentam variação linear. A malha FEM representa um domínio fixo e o número de variáveis é igual ao número de elementos da malha.

5.6 ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO

Neste estudo, o número de variáveis está diretamente relacionando com o número de elementos da malha FEM da rede de dutos. Isso possibilita uma mudança local de diâmetros e a reconfiguração da topologia da rede. Este procedimento de parametrização é similar ao aplicado para Otimização Topológica (BENDSOE; SIGMUND, 2003), no qual as propriedades do material variam para cada elemento da malha. Sendo assim, em malhas muito discretizadas torna-se impossível utilizar algoritmos heurísticos para solucionar o problema de otimização, pois o número de variáveis é muito grande.

O problema de maximização do coeficiente de absorção apresenta um grande número de variáveis associado a um baixo número de restrições. Estas características tornam viável o uso do MMA. Além de se adequar aos requisitos do problema, o algoritmo também é viável porque já foi utilizado em outras pesquisas do Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA).

Conforme mencionado na fundamentação teórica, o MMA é um algoritmo de otimização baseado em métodos gradientes. Ele é programado considerando aproximações sequenciais convexas, assumindo a existência de subproblemas separáveis e tomando proveito do problema dual equivalente (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009; SVANBERG, 1987). O código-fonte do MMA para fins acadêmicos é disponibilizado por Svanberg (1987). Entretanto, as versões existentes estão programadas nas linguagens FORTRAN e MATLAB. Desta forma, foi necessário adaptar o código para Python, linguagem utilizada neste trabalho. A adaptação foi realizada com base em Deetman (2021).

Como o algoritmo de otimização é uma ferramenta auxiliar e não o principal objeto de estudo deste trabalho, serão discutidos apenas os parâmetros do código que precisaram ser ajustados para responder melhor ao problema acústico. Estes parâmetros são o *asyinit* e o *c*. O *asyinit* foi definido como 0,1 e está relacionado com o passo entre as iterações. O *c* foi fixado em 1000. Este parâmetro está associado com a penalização das restrições do problema de otimização.

5.7 ROTINAS COMPUTACIONAIS

Para obter o metamaterial otimizado as seguintes rotinas computacionais foram executadas: a rede inicial foi criada no Netfabb (AUTODESK, 2022), um software para manufatura aditiva que permite gerar uma geometria formada por linhas e colunas. Esta geometria pode ser exportada no formato CSV (valores separados por vírgula), o que facilita sua integração com outros softwares.

A partir da geometria que contém a rede inicial, um modelo FEM acústico visco-térmico 1D foi desenvolvido em Python. A linguagem Python foi selecionada para o desenvolvimento do código por ser gratuita e vastamente difundida na comunidade científica.

No FEM, as células que formam a rede são discretizadas em elementos e o problema é parametrizado de modo que cada um desses elementos que compõe a malha possa ter seu diâmetro modificado dentro de limites pré-estabelecidos. Estes limites são o diâmetro máximo e o diâmetro mínimo dos tubos. Para testes preliminares foram definidos como $D_{min} = 0,1$ mm e $D_{max} = 2$ mm. Além disso, todo desenvolvimento matemático exibido no Capítulo 4 e a análise de sensibilidade, que será detalhada no Capítulo 6, são incorporadas ao código. O MMA é então aplicado para otimizar o coeficiente de absorção.

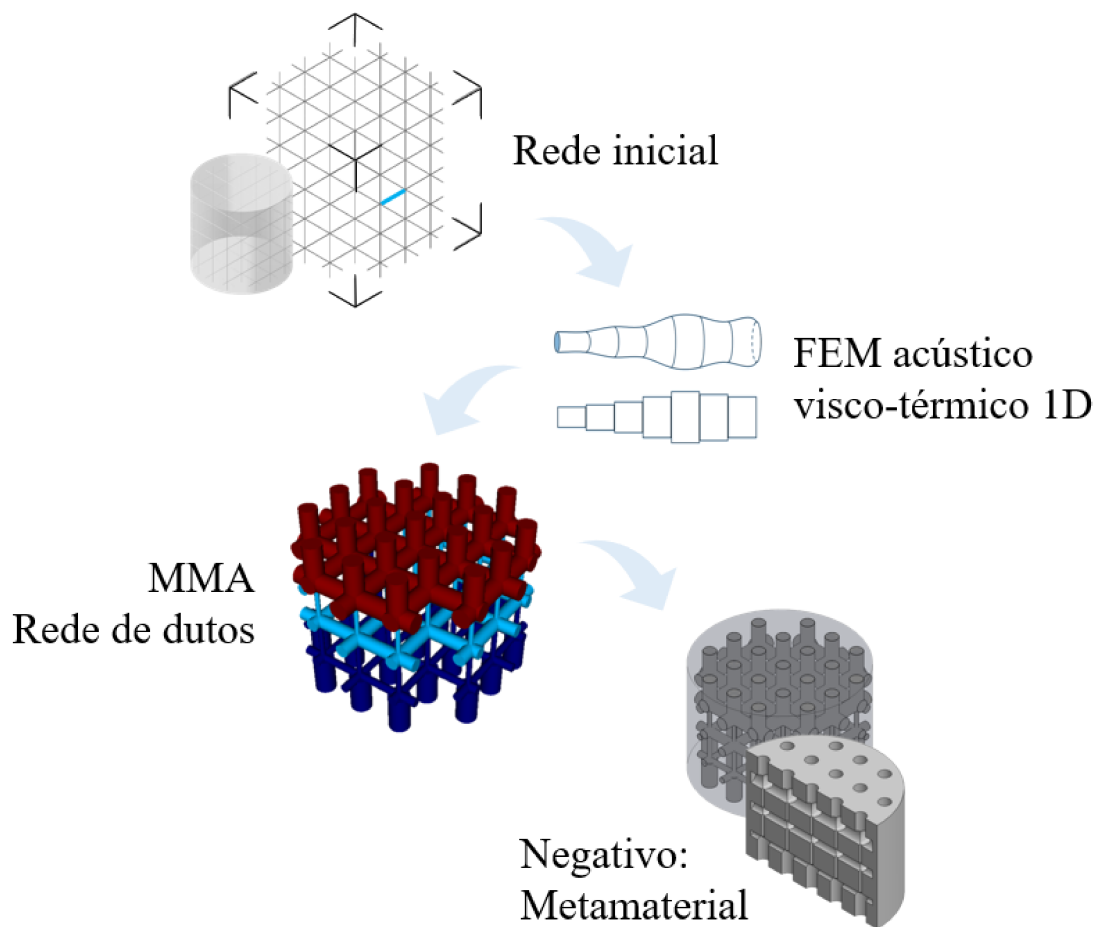


Figura 15 – Rotinas computacionais.

Após ser executado, o código retorna as curvas de absorção, os diâmetros dos tubos e suas coordenadas, a representação gráfica da rede de dutos e outros parâmetros auxiliares. No entanto, a rede simboliza o fluido. Para obter o metamaterial é necessário criar o negativo da rede. Para elaborar o negativo, os diâmetros dos tubos, suas coordenadas e a conectividade entre os elementos foram usadas para gerar uma macro com instruções para que um software de desenho subtraísse a rede de um cilindro sólido. O software utilizado para isso foi o FreeCAD (THE FREECAD TEAM, 2022). A Figura 15 mostra um esquema simplificado das rotinas executadas.

5.8 VALIDAÇÃO DAS ROTINAS COMPUTACIONAIS

As rotinas computacionais foram validadas utilizando como base um tubo cilíndrico com 10 mm de diâmetro e 500 mm de comprimento, cuja excitação e condições de contorno são ilustradas na Figura 16.

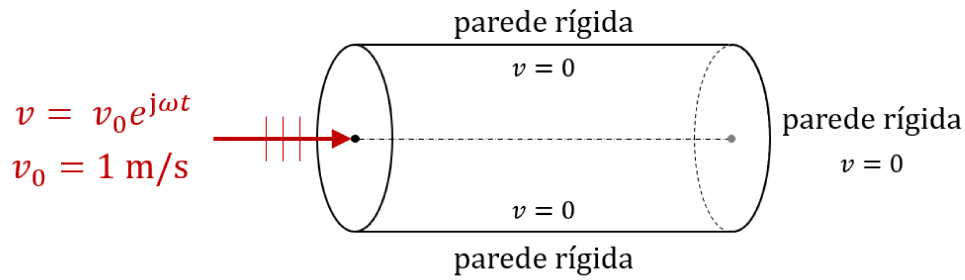


Figura 16 – Condições de contorno do tubo.

Para conferir a equivalência entre a abordagem energética de determinação do coeficiente de absorção (Equação 4.14) e a abordagem tradicional, baseada na impedância de superfície (Equação 3.45), o modelo FEM 1D foi estruturado considerando os dois métodos.

Então, para garantir que o FEM 1D foi implementado no Python corretamente, o coeficiente de absorção do tubo resultante deste método foi comparado com o do modelo analítico para tubos fechados, no qual a impedância de superfície é dada pela equação (COX; D'ANTONIO, 2009)

$$\tilde{Z}_s = \frac{p}{v} = -j\rho_0 c_0 \cot(kL) \quad (5.8)$$

e com o do modelo FEM 3D (Figura 17) elaborado no módulo acústico do software Ansys (ANSYS, 2022), que possui um recurso que retorna a absorção.

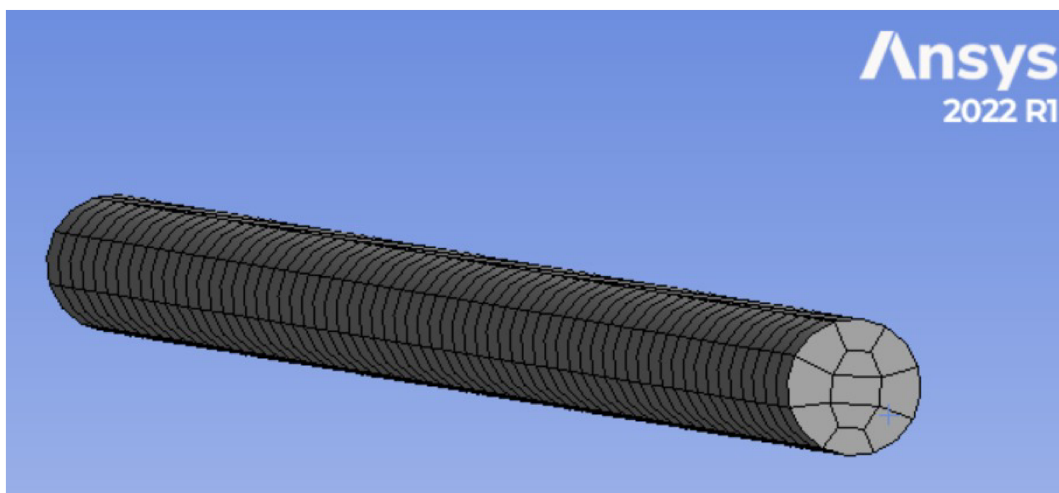


Figura 17 – Modelo FEM 3D elaborado no Ansys.

No Ansys, uma malha constituída de elementos tetraédricos de 10 nós é utilizada para representar o cilindro correspondente ao tubo em análise. Os modelos de dissipação usados

pelo software são os mesmos indicados nas Equações 3.19 (amortecimento proporcional), 3.22 e 3.23 (LRF). Para o modelo LRF é necessário indicar o diâmetro do tubo na entrada de propriedades do modelo. As mesmas condições de contorno aplicadas no modelo 1D são adotadas no 3D. Os resultados dos quatro métodos de cálculo da absorção são exibidos na Figura 18 para o modelo proporcional e na Figura 19 para o LRF.

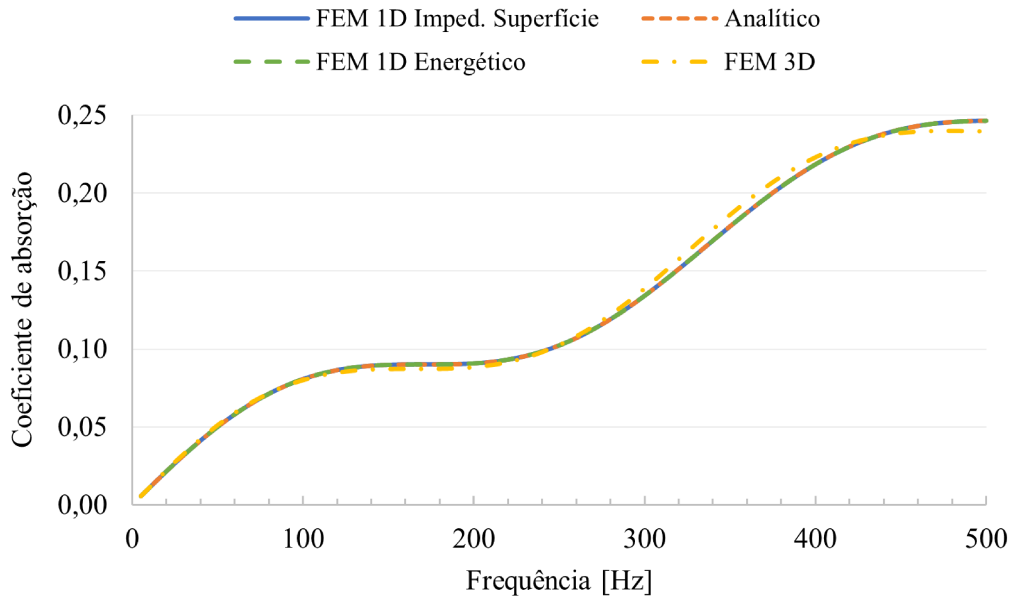


Figura 18 – Coeficiente de absorção de um tubo cilíndrico de 10x500 mm com modelo de dissipação proporcional ($\eta_d = 1.5\%$).

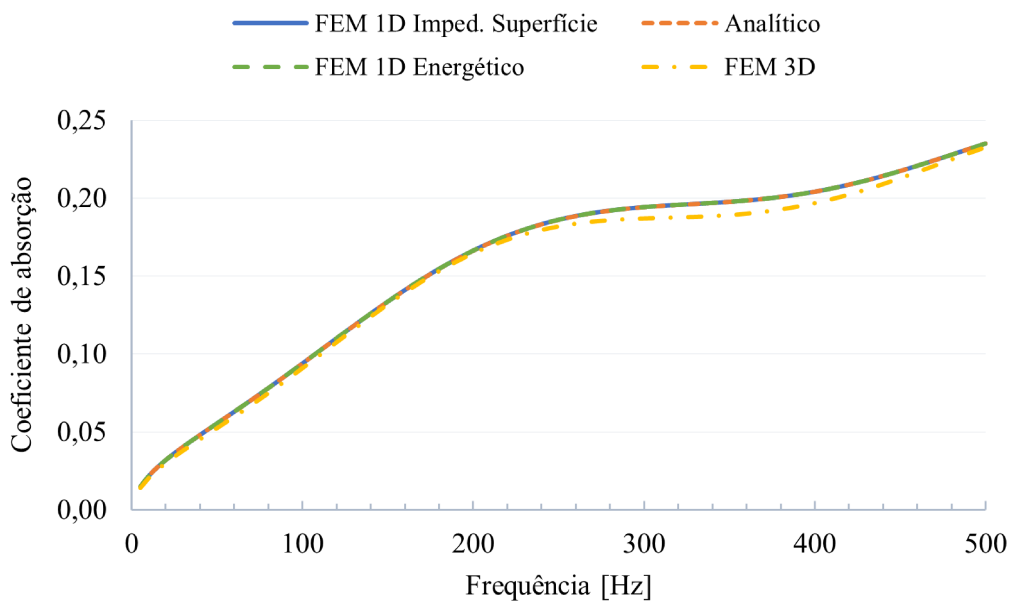


Figura 19 – Coeficiente de absorção de um tubo cilíndrico de 10x500 mm com modelo de dissipação LRF.

Observando as imagens é possível afirmar que os métodos comparados estão em concordância. Sendo assim, o modelo implementado em Python é considerado apto para determinar o coeficiente de absorção. Resta avaliar as possíveis modificações necessárias para melhor representar o comportamento da rede de dutos.

6 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

O uso de métodos gradientes exige o conhecimento das derivadas das funções objetivo e restrições com relação às variáveis de projeto. Esta etapa que compõe o método é conhecida como análise de sensibilidade. Para um problema formulado através do FEM, o Método Adjunto (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009; BENDSOE; SIGMUND, 2003; TORTORELLI; MICHALERIS, 1994) é muito utilizado, pois permite que as derivadas sejam obtidas analiticamente e em função das matrizes elementares.

Em geral, as grandezas acústicas usadas como função objetivo ou função de restrição em problemas de otimização têm valores reais. Para problemas acústicos harmônicos, uma função arbitrária de valor real Φ pode ser escrita em termos de partes reais e imaginárias do vetor de pressão complexo $\mathbf{p}(\omega) = \mathbf{p}_R(\omega) + j\mathbf{p}_I(\omega)$, e em termos do vetor das variáveis de projeto \mathbf{D} (vetor com os diâmetros de todos os elementos D_e). Assim,

$$\Phi = \Phi(\mathbf{D}, \mathbf{p}_R(\omega), \mathbf{p}_I(\omega)). \quad (6.1)$$

O Método Adjunto pode ser aplicado, conforme Jensen (2017) e Silva, Neves e Lenzi (2020) demonstram em seus trabalhos, para realizar a análise de sensibilidade desta função arbitrária aumentada, definida como:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{D}, \mathbf{p}_R, \mathbf{p}_I) + \frac{\boldsymbol{\lambda}_1^T}{2} (\mathbf{K}_T \mathbf{p} + j\omega \mathbf{q}) + \frac{\boldsymbol{\lambda}_2^T}{2} (\mathbf{K}_T^* \mathbf{p}^* + j\omega \mathbf{q}^*), \quad (6.2)$$

na qual $\boldsymbol{\lambda}_1$ e $\boldsymbol{\lambda}_2$ são os vetores multiplicadores de Lagrange, o símbolo * representa o complexo conjugado de uma entidade vetorial e \mathbf{K}_T é definida na Equação 3.18.

As derivadas de Φ em relação a cada variável elementar D_e podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dD_e} &= \frac{\partial\Phi}{\partial D_e} + \frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{p}_R} \frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial D_e} + \frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{p}_I} \frac{\partial \mathbf{p}_I}{\partial D_e} + \\ &\frac{\boldsymbol{\lambda}_1^T}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial D_e} \mathbf{p}_R + \mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial D_e} + j \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial D_e} \mathbf{p}_I + j \mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{p}_I}{\partial D_e} + j\omega \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial D_e} \right) + \\ &\frac{\boldsymbol{\lambda}_2^T}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T^*}{\partial D_e} \mathbf{p}_R + \mathbf{K}_T^* \frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial D_e} - j \frac{\partial \mathbf{K}_T^*}{\partial D_e} \mathbf{p}_I - j \mathbf{K}_T^* \frac{\partial \mathbf{p}_I}{\partial D_e} + j\omega \frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial D_e} \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

ou, reagrupando os termos,

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dD_e} &= \frac{\partial\Phi}{\partial D_e} + \frac{\boldsymbol{\lambda}_1^T}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial D_e} \mathbf{p} + j\omega \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial D_e} \right) + \frac{\boldsymbol{\lambda}_2^T}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T^*}{\partial D_e} \mathbf{p}^* + j\omega \frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial D_e} \right) + \\ &\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{p}_R} + \frac{\boldsymbol{\lambda}_1^T}{2} \mathbf{K}_T + \frac{\boldsymbol{\lambda}_2^T}{2} \mathbf{K}_T^* \right) \frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial D_e} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{p}_I} + j \frac{\boldsymbol{\lambda}_1^T}{2} \mathbf{K}_T - j \frac{\boldsymbol{\lambda}_2^T}{2} \mathbf{K}_T^* \right) \frac{\partial \mathbf{p}_I}{\partial D_e}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Determinar as derivadas $\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial D_e}$ e $\frac{\partial \mathbf{p}_I}{\partial D_e}$ é um processo dispendioso. Para eliminar os termos que multiplicam estas derivadas, é necessário definir $\boldsymbol{\lambda}_1$ e $\boldsymbol{\lambda}_2$. Sendo assim:

$$\boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{K}_T + \boldsymbol{\lambda}_2^T \mathbf{K}_T^* = -2 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}_R} \quad (6.5)$$

e

$$j \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{K}_T - j \boldsymbol{\lambda}_2^T \mathbf{K}_T^* = -2 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}_I}. \quad (6.6)$$

Combinando as Equações 6.5 e 6.6 tem-se:

$$\mathbf{K}_T^T \boldsymbol{\lambda}_1 = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}_R} - j \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}_I} \right)^T \quad (6.7)$$

e

$$\mathbf{K}_T^{T*} \boldsymbol{\lambda}_2 = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}_R} + j \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}_I} \right)^T. \quad (6.8)$$

Pode-se observar por meio das Equações 6.7 e 6.8 que $\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\lambda}_1^*$. Conseqüentemente, existe uma única equação adjunta, definida como

$$\mathbf{K}_T^T \boldsymbol{\lambda} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}_R} - j \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}_I} \right)^T. \quad (6.9)$$

Em vista disso, a Equação 6.4 pode ser reescrita, tal que

$$\frac{d\Phi}{dD_e} = \frac{\partial \Phi}{\partial D_e} + \text{Re} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial D_e} \mathbf{p} + j\omega \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial D_e} \right) \right\}, \quad (6.10)$$

sendo $\boldsymbol{\lambda}$ encontrado resolvendo o problema adjunto (Equação 6.9).

Para determinar as derivadas do coeficiente de absorção total da superfície α_τ (Equação 4.19), função objetivo do problema de otimização, deve-se primeiro aplicar o Método Adjunto para calcular as derivadas do coeficiente de absorção da parte fluida α (Equação 4.14) e da potência ativa absorvida \overline{W}_{ab} (Equação 4.3). O desenvolvimento matemático de cada uma dessas etapas é exibido nas seções seguintes. Entretanto, algumas observações importantes devem ser consideradas ao empregar o Método Adjunto para definir estas derivadas:

- As matrizes elementares \mathbf{K}_e , \mathbf{M}_e e \mathbf{C}_e são explicitamente dependentes da área do elemento e , conseqüentemente, do diâmetro elementar D_e ;
- As propriedades complexas elementares \tilde{K}_{ef}^e e $\tilde{\rho}_{ef}^e$ são explicitamente dependentes do número de onda de cisalhamento s , que por sua vez, é dependente do diâmetro elementar D_e ;

- O cálculo da Equação 6.10 deve levar em consideração todas essas dependências;
- Por cautela, é importante comparar os resultados das derivadas calculadas analiticamente com as obtidas através do método das diferenças finitas.

6.1 POTÊNCIA ATIVA ABSORVIDA

Para utilizar o Método Adjunto para determinar a derivada da potência ativa absorvida \overline{W}_{ab} deve-se reescrever a Equação 4.3 como:

$$\overline{W}_{ab} = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{p}_R^T \mathbf{q}_R + \mathbf{p}_I^T \mathbf{q}_I \right). \quad (6.11)$$

Observa-se que esta medida não é explicitamente dependente das variáveis de projeto. Portanto, $\frac{\partial \overline{W}_{ab}}{\partial D_e} = 0$ na Equação 6.10.

As derivadas parciais necessárias para resolver o problema adjunto (Equação 6.9) são obtidas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \overline{W}_{ab}}{\partial \mathbf{p}_R} = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_R^T \quad (6.12)$$

e

$$\frac{\partial \overline{W}_{ab}}{\partial \mathbf{p}_I} = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_I^T. \quad (6.13)$$

O problema adjunto (Equação 6.9) é então definido por

$$\mathbf{K}_T^T \boldsymbol{\lambda} = - \left(-\frac{1}{2} \mathbf{q}_R^T + j \frac{1}{2} \mathbf{q}_I^T \right)^T = \frac{1}{2} \mathbf{q}^*. \quad (6.14)$$

Se \mathbf{q} for puramente real e independente das variáveis de projeto, pode-se assumir que $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$, sendo \mathbf{q}^* um vetor de valor real. Consequentemente, $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial D_e} = 0$. Comparando as Equações 6.14 e 3.18, é óbvio que neste caso $\boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{2j\omega} \mathbf{p}$. Assim, a Equação 6.10 pode ser escrito como:

$$\frac{d\overline{W}_{ab}}{dD_e} = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re} \left\{ j \mathbf{p}^T \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial D_e} \mathbf{p} \right\}. \quad (6.15)$$

É importante lembrar que a correção do comprimento dos elementos verticais adicionada no Capítulo 5 tornou as matrizes elementares dos elementos verticais dependentes dos diâmetros dos elementos horizontais. Desta forma, todos os cálculos de derivadas que envolvem as matrizes elementares devem considerar esta dependência.

Para melhor compreensão observe a Figura 20. Cada elemento horizontal localizado na parte central da malha está relacionado com quatro elementos verticais vizinhos. Elementos horizontais da extremidade da malha se relacionam com apenas dois. As derivadas das

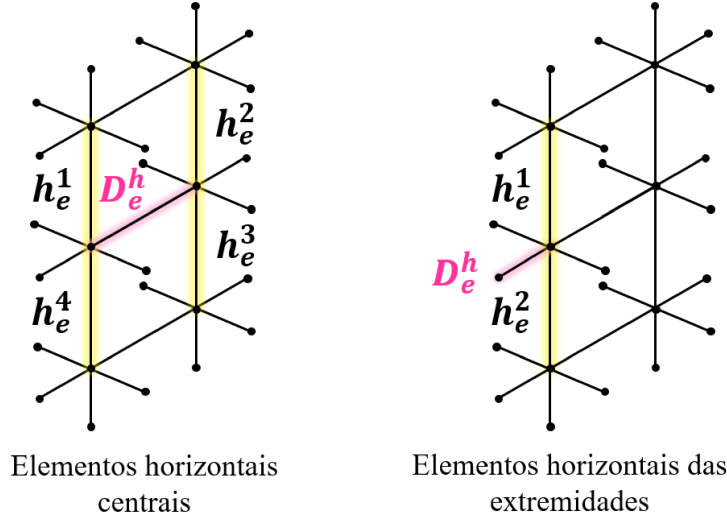


Figura 20 – Relação entre os elementos horizontais e seus verticais vizinhos.

matrizes dos elementos verticais em relação aos diâmetros horizontais são adicionadas no cálculo da derivada da potência ativa absorvida dos elementos horizontais na forma de um somatório que representa a contribuição de cada elemento vertical vizinho, ou seja,

$$\frac{d\bar{W}_{ab}^h}{dD_e^h} = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re} \left\{ j \left[\mathbf{p}_h^T \frac{\partial \mathbf{K}_T^h}{\partial D_e^h} \mathbf{p}_h + \sum_{v=1}^{N_{viz}} \mathbf{p}_v^T \frac{\partial \mathbf{K}_T^v}{\partial D_e^h} \mathbf{p}_v \right] \right\}. \quad (6.16)$$

N_{viz} é o número total de vizinhos verticais. Os subíndices ou sobre-índices h (horizontal) e v (vertical) designam a posição do elemento na rede de dutos. Eles foram aplicados para explicitar a relação entre elementos horizontais e verticais. Note que para a Equação 6.16 é válida somente para elementos horizontais. Se o elemento for vertical, a expressão da potência ativa absorvida original, Equação 6.15, é mantida.

6.2 COEFICIENTE DE ABSORÇÃO

O coeficiente de absorção da parte fluida α é definido na Equação 4.14. Como esta equação representa uma operação com três expressões diferentes, suas derivadas em relação às variáveis de projeto podem ser rearranjadas da seguinte forma:

$$\frac{d\alpha}{dD_e} = \frac{2 \frac{d\bar{W}_{ab}}{dD_e} (\mathbf{p}^H \mathbf{S} \mathbf{p} + \mathbf{q}^H \mathbf{S} \mathbf{q}) - 2\bar{W}_{ab} \left(\frac{d\mathbf{p}^H \mathbf{S} \mathbf{p}}{dD_e} + \frac{d\mathbf{q}^H \mathbf{S} \mathbf{q}}{dD_e} \right)}{\left(\bar{W}_{ab} + (\mathbf{p}^H \mathbf{S} \mathbf{p} + \mathbf{q}^H \mathbf{S} \mathbf{q}) \right)^2}. \quad (6.17)$$

As derivadas de \bar{W}_{ab} já foram obtidas na Equação 6.15. E, considerando \mathbf{q} puramente real e independente das variáveis de projeto, pode-se escrever

$$\frac{d\mathbf{q}^H \mathbf{S} \mathbf{q}}{dD_e} = \mathbf{q}^H \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D_e} \mathbf{q}, \quad (6.18)$$

sendo que $\frac{\partial \underline{\mathbf{S}}}{\partial D_e}$ é facilmente obtido devido à dependência explícita de $\underline{\mathbf{S}}$ em D_e .

Assim, resta encontrar $\frac{d\mathbf{p}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p}}{dD_e}$. Para usar o Método Adjunto, reescreve-se $\mathbf{p}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p}$ de modo que

$$\mathbf{p}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p} = \mathbf{p}_R^T \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p}_R + \mathbf{p}_I^T \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p}_I. \quad (6.19)$$

Uma vez que $\underline{\mathbf{S}}$ é explicitamente dependente de D_e , as derivadas parciais $\frac{\partial \mathbf{p}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p}}{\partial D_e}$ podem ser escritas como

$$\frac{\partial \mathbf{p}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p}}{\partial D_e} = \mathbf{p}^H \frac{\partial \underline{\mathbf{S}}}{\partial D_e} \mathbf{p}. \quad (6.20)$$

As derivadas parciais em relação a \mathbf{p}_R e \mathbf{p}_I necessárias para resolver o problema adjunto (Equação 6.9) são então obtidas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{p}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}_R} = 2\mathbf{p}_R^T \underline{\mathbf{S}} \quad (6.21)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{p}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}_I} = 2\mathbf{p}_I^T \underline{\mathbf{S}}. \quad (6.22)$$

O problema adjunto (Equação 6.9) é, por consequência, reescrito como

$$\mathbf{K}_T^T \boldsymbol{\lambda} = -2 \left(\mathbf{p}_R^T \underline{\mathbf{S}} - j\mathbf{p}_I^T \underline{\mathbf{S}} \right)^T = -2\mathbf{S}\mathbf{p}^*. \quad (6.23)$$

Finalmente, $\frac{d\mathbf{p}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p}}{dD_e}$ é encontrado por meio da Equação 6.24:

$$\frac{d\mathbf{p}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p}}{dD_e} = \mathbf{p}^H \frac{\partial \underline{\mathbf{S}}}{\partial D_e} \mathbf{p} + \text{Re} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial D_e} \mathbf{p} \right\}. \quad (6.24)$$

Considerando a dependência entre elementos verticais e horizontais explicada na seção anterior, $\frac{d\mathbf{p}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{p}}{dD_e}$ dos elementos horizontais torna-se

$$\frac{d\mathbf{p}_h^H \underline{\mathbf{S}}_h \mathbf{p}_h}{dD_e^h} = \mathbf{p}_h^H \frac{\partial \underline{\mathbf{S}}_h}{\partial D_e^h} \mathbf{p}_h + \text{Re} \left\{ \boldsymbol{\lambda}_h^T \frac{\partial \mathbf{K}_T^h}{\partial D_e^h} \mathbf{p}_h + \sum_{v=1}^{N_{viz}} \boldsymbol{\lambda}_v^T \frac{\partial \mathbf{K}_T^v}{\partial D_e^h} \mathbf{p}_v \right\}. \quad (6.25)$$

6.3 COEFICIENTE DE ABSORÇÃO TOTAL

Assim como realizado para o coeficiente de absorção da parte fluida, a derivada do coeficiente de absorção total em relação aos diâmetros elementares é obtida a partir da Equação 4.19, na forma

$$\frac{d\alpha_\tau}{dD_e} = \frac{2 \frac{d\bar{W}_{ab}}{dD_e} \left(\mathbf{p}^H \bar{\underline{\mathbf{S}}} \mathbf{p} + \mathbf{q}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{q} \right) - 2\bar{W}_{ab} \left(\frac{d\mathbf{p}^H \bar{\underline{\mathbf{S}}} \mathbf{p}}{dD_e} + \frac{d\mathbf{q}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{q}}{dD_e} \right)}{\left(\bar{W}_{ab} + \left(\mathbf{p}^H \bar{\underline{\mathbf{S}}} \mathbf{p} + \mathbf{q}^H \underline{\mathbf{S}} \mathbf{q} \right) \right)^2}. \quad (6.26)$$

O mesmo procedimento utilizado na Equação 6.24 é aplicado na equação acima para determinar a derivada do seu único termo desconhecido, definido como

$$\frac{d\mathbf{p}^H \bar{\mathbf{S}} \mathbf{p}}{dD_e} = \mathbf{p}^H \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial D_e} \mathbf{p} + \text{Re} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial D_e} \mathbf{p} \right\} \quad (6.27)$$

para elementos verticais e

$$\frac{d\mathbf{p}_h^H \bar{\mathbf{S}}_h \mathbf{p}_h}{dD_e^h} = \mathbf{p}_h^H \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_h}{\partial D_e^h} \mathbf{p}_h + \text{Re} \left\{ \boldsymbol{\lambda}_h^T \frac{\partial \mathbf{K}_T^h}{\partial D_e^h} \mathbf{p}_h + \sum_{v=1}^{N_{viz}} \boldsymbol{\lambda}_v^T \frac{\partial \mathbf{K}_T^v}{\partial D_e^h} \mathbf{p}_v \right\} \quad (6.28)$$

para elementos horizontais, sendo o problema adjunto em ambos os casos dado por

$$\mathbf{K}_T^T \boldsymbol{\lambda} = -2 \left(\mathbf{p}_R^T \bar{\mathbf{S}} - \mathbf{j} \mathbf{p}_I^T \bar{\mathbf{S}} \right)^T = -2 \bar{\mathbf{S}} \mathbf{p}^*. \quad (6.29)$$

6.4 DERIVADA DO VOLUME

O volume total da rede de dutos é utilizado como função restrição do problema de otimização, desta forma, também é necessário fazer sua análise de sensibilidade. A derivada do volume de cada duto em relação seu diâmetro é dada por

$$\frac{dV}{dD_e} = \frac{\pi D_e}{2} h_e. \quad (6.30)$$

Se o elemento for horizontal, acrescenta-se a parcela de dependência entre elementos verticais e horizontais, assim

$$\frac{dV^h}{dD_e^h} = \frac{\pi D_e^h}{2} h_e^h + \sum_{v=1}^{N_{viz}} \frac{\pi D_e^v}{2} h_e^v. \quad (6.31)$$

h_e^v foi definido na Equação 5.4. Os demais índices foram acrescentados apenas para referência.

6.5 DERIVADAS DAS MATRIZES ACÚSTICAS ELEMENTARES (FEM)

As derivadas das matrizes elementares de rigidez (\mathbf{K}_e) e inércia (\mathbf{M}_e) acústica em relação ao diâmetro elementar D_e são desenvolvidos nas subseções seguintes considerando os dois modelos de dissipação estudados neste trabalho.

6.5.1 Dissipação proporcional

Se for adotado o modelo de dissipação simplificado na forma de velocidade do som complexa (Equação 3.19), as derivadas de \mathbf{K}_e e \mathbf{M}_e em relação a D_e são facilmente obtidas,

uma vez que, essas matrizes são explicitamente dependentes da área do elemento S_e e, conseqüentemente, do diâmetro elementar. Desta forma:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial D_e} = \frac{1}{\rho_{0e}} \frac{1}{h_e} \frac{dS_e}{dD_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho_{0e}} \frac{1}{h_e} \frac{\pi D_e}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{M}_e}{\partial D_e} = \frac{1}{K_{0e}} \frac{h_e}{6} \frac{dS_e}{dD_e} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{K_{0e}} \frac{h_e}{6} \frac{\pi D_e}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

As Equações 6.32 e 6.33 relacionam as derivadas das matrizes dos elementos verticais com seus respectivos diâmetros verticais e as matrizes dos elementos horizontais com seus respectivos diâmetros horizontais. Para abranger a dependência entre elementos verticais e horizontais, calculam-se as derivadas das matrizes dos elementos verticais em relação aos diâmetros horizontais, tal que

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e^v}{\partial D_e^h} = \frac{S_e}{\rho_{0e}} \frac{d}{dD_e^h} \left(\frac{1}{h_e^v} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8 (h_e^v)^2} \frac{S_e}{\rho_0^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{M}_e^v}{\partial D_e^h} = \frac{S_e}{6K_{0e}} \frac{dh_e^v}{dD_e^h} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{48} \frac{S_e}{K_0^e} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

6.5.2 Dissipação visco-térmica

Quando aplicado o modelo de dissipação visco-térmico, o procedimento matemático executado para determinar as derivadas das matrizes \mathbf{K}_e e \mathbf{M}_e é mais complexo. Estas matrizes são explicitamente dependentes das propriedades complexas elementares $\tilde{\rho}_{ef}^e$ e \tilde{K}_{ef}^e , respectivamente. Sendo assim:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial D_e} = \frac{1}{h_e} \frac{d}{dD_e} \left(\frac{S_e}{\tilde{\rho}_{ef}^e} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{M}_e}{\partial D_e} = \frac{h_e}{6} \frac{d}{dD_e} \left(\frac{S_e}{\tilde{K}_{ef}^e} \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Derivando os termos entre parênteses:

$$\frac{d}{dD_e} \left(\frac{S_e}{\tilde{\rho}_{ef}^e} \right) = \frac{\pi D_e}{2 \tilde{\rho}_{ef}^e} - \frac{S_e}{\tilde{\rho}_{ef}^e{}^2} \boxed{\frac{d\tilde{\rho}_{ef}^e}{dD_e}} \quad (6.38)$$

e

$$\frac{d}{dD_e} \left(\frac{S_e}{\tilde{K}_{ef}^e} \right) = \frac{\pi D_e}{2 \tilde{K}_{ef}^e} - \frac{S_e}{\tilde{K}_{ef}^e{}^2} \boxed{\frac{d\tilde{K}_{ef}^e}{dD_e}}. \quad (6.39)$$

$\tilde{\rho}_{ef}^e$ e \tilde{K}_{ef}^e são dependentes do número de onda de cisalhamento s ($s = \frac{D_e}{2} \sqrt{\frac{\omega\rho_0}{\eta}}$), que por sua vez, depende do diâmetro elementar D_e . Derivando então os termos destacados, tem-se:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{ef}^e}{dD_e} = -\rho_0 \left(\frac{dJ_0(j^{3/2}s)}{dD_e} \frac{1}{J_2(j^{3/2}s)} - \frac{J_0(j^{3/2}s)}{J_2(j^{3/2}s)^2} \frac{dJ_2(j^{3/2}s)}{dD_e} \right) \quad (6.40)$$

e

$$\frac{d\tilde{K}_{ef}^e}{dD_e} = -(\gamma - 1) \frac{P_0\gamma}{\left(\gamma + (\gamma - 1) \frac{J_2(j^{3/2}s\sqrt{Pr})}{J_0(j^{3/2}s\sqrt{Pr})} \right)^2} \left(\frac{dJ_2(j^{3/2}s\sqrt{Pr})}{dD_e} \frac{1}{J_0(j^{3/2}s\sqrt{Pr})} - \frac{J_2(j^{3/2}s\sqrt{Pr})}{J_0(j^{3/2}s\sqrt{Pr})^2} \frac{dJ_0(j^{3/2}s\sqrt{Pr})}{dD_e} \right). \quad (6.41)$$

As derivadas das funções de Bessel do primeiro tipo podem ser determinadas por meio das expressões abaixo (KORENEV, 2002):

$$\frac{\partial J_0}{\partial z} = -J_1(z), \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial J_v}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(J_{(v-1)}(z) - J_{(v+1)}(z) \right). \quad (6.43)$$

Assumindo $z = j^{3/2}s = j^{3/2}D_e\sqrt{\omega\rho_0/\eta}/2$ (o que leva a $dz = [j^{3/2}\sqrt{\omega\rho_0/\eta}/2]dD_e$):

$$\frac{\partial J_0(j^{3/2}s)}{\partial D_e} = -\frac{1}{2}j^{3/2}\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{\eta}}J_1(j^{3/2}s) \quad (6.44)$$

e

$$\frac{\partial J_2(j^{3/2}s)}{\partial D_e} = \frac{1}{4}j^{3/2}\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{\eta}} \left(J_1(j^{3/2}s) - J_3(j^{3/2}s) \right). \quad (6.45)$$

Agora, assumindo $z = j^{3/2}s\sqrt{Pr} = j^{3/2}D_e\sqrt{\omega\rho_0/\eta}\sqrt{Pr}/2$ (o que leva a $dz = [j^{3/2}\sqrt{\omega\rho_0/\eta}\sqrt{Pr}/2]dD_e$):

$$\frac{\partial J_0(j^{3/2}s\sqrt{Pr})}{\partial D_e} = -\frac{1}{2}j^{3/2}\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{\eta}}\sqrt{Pr}J_1(j^{3/2}s\sqrt{Pr}) \quad (6.46)$$

e

$$\frac{\partial J_2(j^{3/2}s\sqrt{Pr})}{\partial D_e} = \frac{1}{4}j^{3/2}\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{\eta}}\sqrt{Pr} \left(J_1(j^{3/2}s\sqrt{Pr}) - J_3(j^{3/2}s\sqrt{Pr}) \right). \quad (6.47)$$

As derivadas das matrizes dos elementos verticais em relação aos diâmetros horizontais continuam sendo obtidas facilmente e são dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e^v}{\partial D_e^h} = \frac{S_e}{\tilde{\rho}_{ef}^e} \frac{d}{dD_e^h} \begin{pmatrix} 1 \\ h_e^v \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8(h_e^v)^2} \frac{S_e}{\tilde{\rho}_{ef}^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{M}_e^v}{\partial D_e^h} = \frac{S_e}{\tilde{K}_{ef}^e} \frac{dh_e^v}{dD_e^h} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{48} \frac{S_e}{\tilde{K}_{ef}^e} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

6.6 DIFERENÇAS FINITAS

Os métodos de diferenças finitas são uma abordagem popular para calcular derivadas, pois são simples e versáteis, exigindo apenas o conhecimento de valores da função que se deseja derivar. Muitos algoritmos de otimização baseados em gradientes executam diferenças finitas como padrão quando não são fornecidos os gradientes necessários. Entretanto, diferenças finitas não são precisas, nem eficientes (MARTINS; NING, 2021). Neste trabalho, o método será utilizado apenas como valor de referência.

A fórmula de diferenças finitas pode ser derivada diretamente de uma expansão em série de Taylor na j -ésima direção (MARTINS; NING, 2021),

$$f(x + h\hat{e}_j) = f(x) + h\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3} + \dots, \quad (6.50)$$

na qual \hat{e}_j representa um vetor unitário na j -ésima direção. Resolvendo isso para a primeira derivada, obtém-se a expressão de aproximação das diferenças finitas,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{f(x + h\hat{e}_j) - f(x)}{h} + O(h), \quad (6.51)$$

na qual h é o tamanho do passo e $O(h)$ é o erro de truncamento. Essa aproximação é chamada de diferença direta e está diretamente relacionada à definição de uma derivada porque (MARTINS; NING, 2021),

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h\hat{e}_j) - f(x)}{h} \approx \frac{f(x + h\hat{e}_j) - f(x)}{h}. \quad (6.52)$$

Aplicando então o método de diferenças finitas para derivar o coeficiente de absorção total da superfície α_τ em relação ao diâmetro D_e , tem-se:

$$\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial D_e} = \frac{\alpha_\tau(D_e + \Delta D_e) - \alpha_\tau(D_e)}{\Delta D_e}, \quad (6.53)$$

no qual ΔD_e representa o passo de diferença finita. Para validar o cálculo das derivadas deve-se conferir se os resultados obtidos por meio do Método Adjunto são iguais aos encontrados através de diferenças finitas, ou seja,

$$\frac{d\alpha_\tau}{dD_e} = \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial D_e}, \quad \Delta D_e \rightarrow 0. \quad (6.54)$$

Para tal, foram selecionados três elementos (10, 1000 e 2000) pertencentes a regiões distintas de uma geometria inicial com contorno cilíndrico, cujas características e dimensões são: célula grade, diâmetro 107 mm, altura 100 mm e tamanho da célula 10,7 mm. O

cálculo das derivadas desses três elementos foi realizado para quatro frequências de análise: 100, 250, 500 e 1000 Hz. Os resultados numéricos e analíticos são exibidos e comparados nas Figuras 21, 22, 23 e 24.

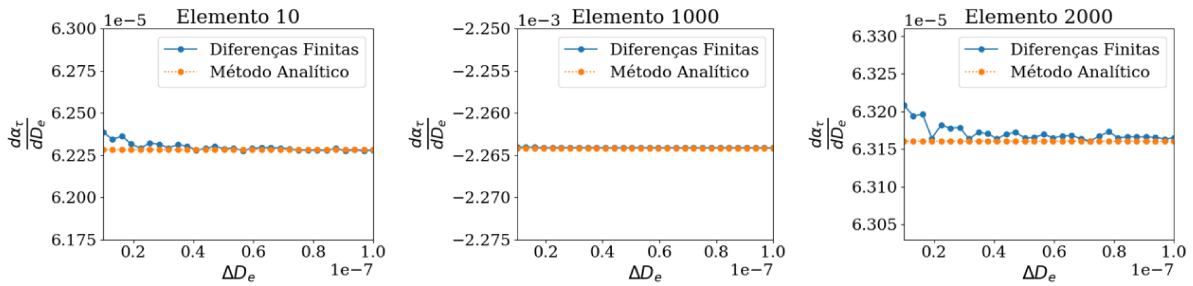


Figura 21 – Elementos avaliados na frequência 100 Hz.

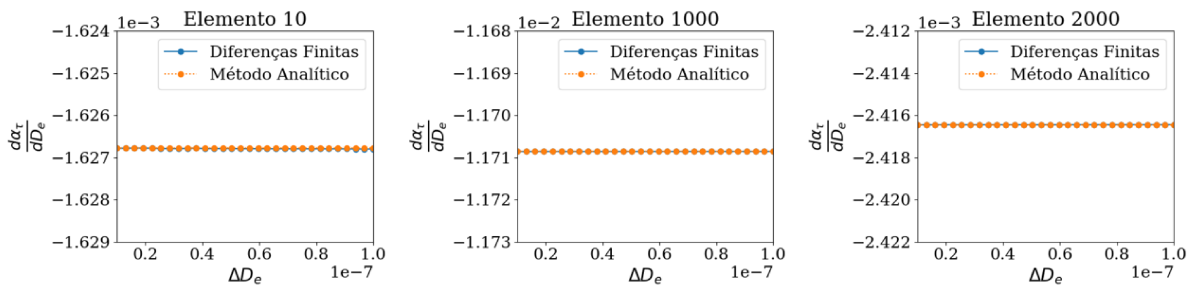


Figura 22 – Elementos avaliados na frequência 250 Hz.

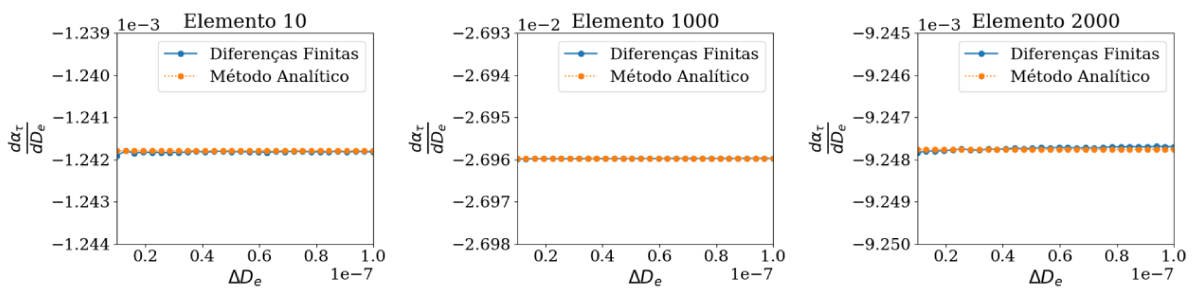


Figura 23 – Elementos avaliados na frequência 500 Hz.

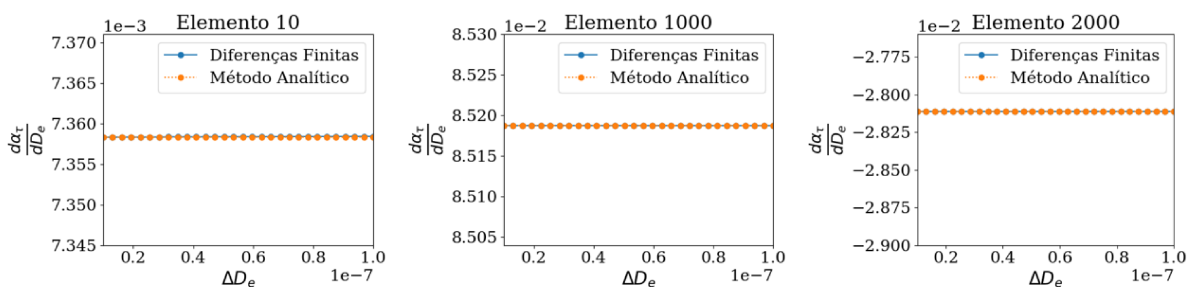


Figura 24 – Elementos avaliados na frequência 1000 Hz.

É possível observar nas imagens que, dependendo da frequência de análise, a faixa de perturbações necessária para o cálculo ideal das diferenças finitas pode sofrer alterações. Nota-se também boa concordância entre os dois métodos de obtenção de derivadas, o que valida o procedimento analítico desenvolvido neste capítulo.

7 RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo tem como objetivo mostrar os principais resultados da metodologia criada para desenvolver metamateriais acústicos a partir de redes de dutos formadas por elementos finitos 1D e validá-los utilizando simulação por meio de elementos finitos 3D.

7.1 ANÁLISE PRELIMINAR

Para criar um metamaterial com máxima absorção em uma frequência específica, a metodologia desenvolvida neste trabalho exige um domínio fixo pré-determinado. Conforme descrito na Seção 5.1 e resumido no esquema abaixo (Figura 25), há 120 configurações iniciais possíveis. Portanto, uma avaliação preliminar foi executada para compreender como o algoritmo de otimização atuava em cada uma das configurações de projeto iniciais e para identificar quais arranjos promoviam maiores benefícios. As variáveis de projeto foram delimitadas, tal que $0,1 \leq D_e \leq 2$ mm. O diâmetro inicial foi definido como o valor médio dos diâmetros, ou seja, $(D_{min} + D_{max})/2$ e o número máximo de iterações foi estabelecido como 120.

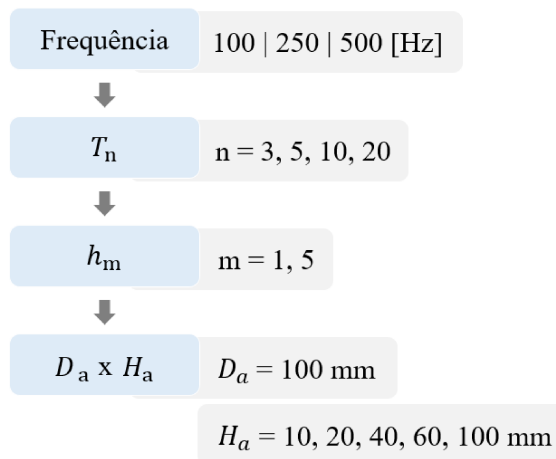


Figura 25 – Esquema das configurações preliminares.

É importante salientar que o problema de otimização proposto na Equação 5.7 apresenta como variáveis de projeto apenas os diâmetros dos dutos que compõem a rede. Em trabalhos futuros, dependendo da forma como a rede for definida, os parâmetros T_n , h_m e $D_a \times H_a$ poderão eventualmente fazer parte do conjunto de variáveis de otimização. A correção do comprimento dos elementos verticais proposta através da Equação 4.18 já foi considerada nesta avaliação.

Uma primeira rodada de testes revelou alguns aspectos importantes sobre o comportamento da rede de dutos com contorno cilíndrico: amostras com altura (ou espessura) maior e com tamanho de células grade menor apresentavam melhor desempenho de absorção. Com células grade menores a geometria fica mais discretizada e, conseqüentemente, possui mais tubos, ou área de fluido, na superfície exposta a excitação. Entretanto, com o diâmetro máximo fixado em 2 mm mesmo na maior discretização de rede inicial (T_{20}) a área fluida era muito menor que a área sólida. O coeficiente de absorção é obtido por meio de uma ponderação entre as duas fases, sendo assim, as características do material sólido prevaleciam, dificultando o encontro de mínimos expressivos pelo algoritmo. Curiosamente, o número de elementos por ramos não apresentou diferença relevante quando comparado ramos com cinco elementos e ramos com apenas um único elemento.

Para melhorar os resultados, foram realizados alguns ajustes paramétricos no algoritmo e na geometria. Elevar a discretização para aumentar a proporção de área fluida não era uma solução viável devido ao tempo de processamento computacional. Desta forma, optou-se por aumentar o diâmetro máximo dos tubos. Ainda levando em consideração o fator tempo, foi decidido eliminar a discretização dos ramos, pois sua contribuição não era significativa nas frequências de interesse. Adotou-se um segundo critério de parada baseado nas variações máximas das funções desempenho, com limite de 50 iterações. Além disso, mais opções de diâmetro da amostra foram incluídas ao estudo: 25, 50 e 200 mm (em amostras com $D_a = 100$ foi adicionada a altura de 150 mm e em amostras com $D_a = 200$, foram acrescentadas mais duas alturas: 150 e 200 mm). Para que os tubos não se sobrepusessem, o diâmetro máximo foi definido de modo que sempre houvesse uma espessura de 0,2 mm entre tubos paralelos.

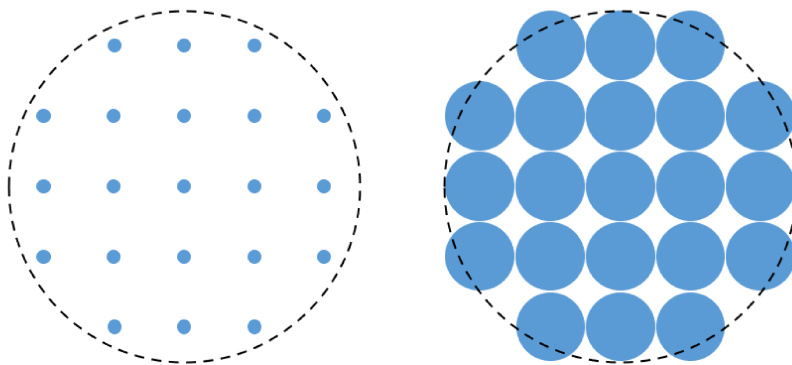


Figura 26 – Dilema da geometria cilíndrica: à esquerda $D_{max} = 2\text{mm}$ com todos os tubos inscritos no contorno e baixo desempenho de absorção; à direita $D_{max} > 2\text{ mm}$ com bom desempenho de absorção, porém impraticável.

Os resultados dos testes com os ajustes paramétricos foram promissores. Entretanto, ao avaliar as representações das redes foi encontrado uma incongruência: com os tubos assumindo o diâmetro máximo o contorno cilíndrico da geometria não era respeitado. O problema é ilustrado na Figura 26.

O contorno das geometrias foi inicialmente definido como cilíndrico porque um dos objetivos do trabalho é imprimir as amostras e testá-las em tubo de impedância. No entanto, para não limitar o algoritmo pela geometria do equipamento de mediação nesta fase preliminar, optou-se por fazer um ajuste geométrico e mudar o contorno das amostras para quadrangular. O novo formato das redes iniciais, que possuem perfil quadrado de lado L_a , é exibido na Figura 27. As geometrias cilíndricas serão reestruturadas e ainda serão utilizadas neste capítulo, após a fase preliminar, para comparar os resultados da modelagem FEM 1D em Python com a FEM 3D no Ansys e assim validar o procedimento desenvolvido. As amostras cilíndricas finais serão fabricadas e testadas. Detalhes desta última etapa são descritos no Capítulo 8.

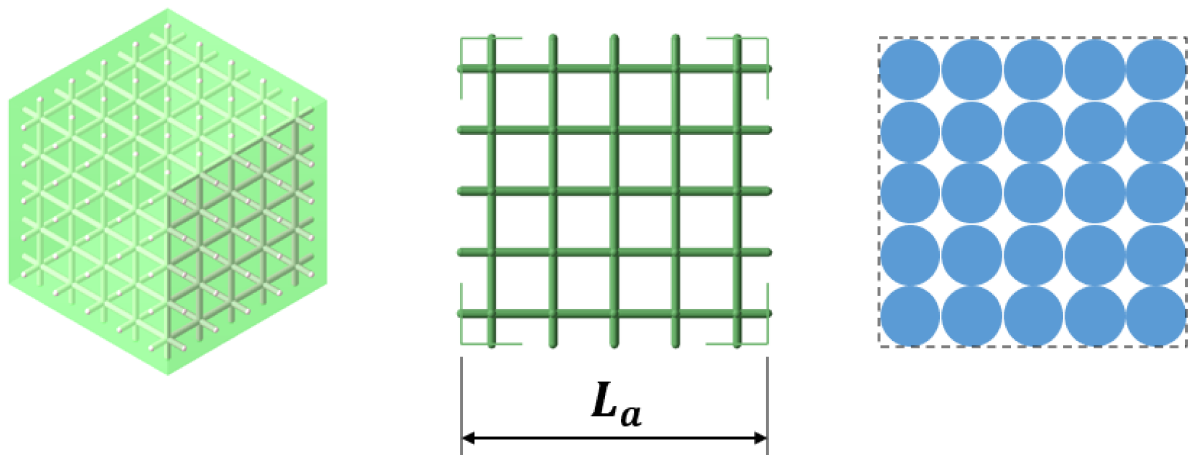


Figura 27 – Rede inicial com contorno quadrangular.

Os resultados dos testes com o ajuste geométrico são exibidos na Tabela 2. A primeira vista, se observa um certo padrão nas configurações estudadas: espessuras pequenas com baixa discretização (T_n pequeno) apresentam absorção praticamente nula. Porém, a medida que a espessura ou a discretização aumentam, o desempenho acústico melhora.

Para uma análise mais detalhada é possível relacionar cada frequência de análise com a espessura (H_a) da geometria e as dimensões de perfil da amostra ($L_a \times L_a$) com a discretização das células (T_n).

Em frequências mais altas, amostras pouco espessas já apresentam bons desempenhos

Tabela 2 – Coeficiente de absorção total da superfície (α_τ) para diferentes configurações iniciais.

MEDIDA		100 Hz				250 Hz				500 Hz			
L_a	H_a	T_n				T_n				T_n			
		3	5	10	20	3	5	10	20	3	5	10	20
25	10	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01	0,11
	20	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,12	0,01	0,42	0,27	0,30
	40	0,01	0,01	0,02	0,10	0,38	0,34	0,52	0,27	0,71	0,69	0,54	0,36
	60	0,01	0,17	0,20	0,12	0,62	0,53	0,51	0,28	0,72	0,72	0,65	0,45
	100	0,42	0,39	0,42	0,20	0,74	0,70	0,57	0,40	0,73	0,72	0,66	0,55
50	10	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,01
	20	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01	0,02	0,00	0,01	0,38	0,48
	40	0,00	0,01	0,01	0,02	0,01	0,50	0,34	0,47	0,72	0,72	0,66	0,50
	60	0,01	0,01	0,16	0,36	0,69	0,69	0,54	0,47	0,65	0,70	0,72	0,64
	100	0,53	0,41	0,57	0,39	0,72	0,75	0,70	0,52	0,63	0,72	0,72	0,67
100	10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,54	0,01
	20	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,03	0,01	0,38
	40	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,01	0,48	0,35	0,03	0,72	0,73	0,67
	60	0,00	0,01	0,01	0,17	0,00	0,71	0,67	0,51	0,05	0,59	0,70	0,72
	100	0,64	0,54	0,47	0,63	0,60	0,69	0,75	0,69	0,37	0,66	0,74	0,72
	150	0,68	0,68	0,59	0,55	0,48	0,63	0,72	0,72	0,44	0,64	0,74	0,72
200	10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,55
	20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	0,74	0,66
	40	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,05	0,01	0,49	0,00	0,09	0,67	0,71
	60	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,03	0,69	0,66	0,00	0,13	0,56	0,70
	100	0,00	0,00	0,58	0,39	0,02	0,58	0,70	0,68	0,25	0,32	0,65	0,64
	150	0,64	0,70	0,70	0,56	0,34	0,50	0,65	0,75	0,24	0,37	0,65	0,74
200	0,60	0,69	0,75	0,71	0,30	0,49	0,73	0,75	0,28	0,44	0,68	0,74	

de absorção. Para frequências mais baixas, os mecanismos de absorção de energia podem estar relacionados à formação de modos de parâmetros concentrados, o que implica na geração de tubos mais longos e com diâmetros maiores. Amostras mais espessas podem favorecer este mecanismo.

Em relação a seção L_a das geometrias e a discretização das células é plausível fazer as seguintes observações: $L_a = 25$ mm apresenta melhor desempenho acústico em baixa-média discretização; $L_a = 50$ mm em discretizações médias e amostras com $L_a = 100$ e 200 mm os melhores resultados de absorção são obtidos nas média-altas discretizações.

As curvas de absorção, a representação da rede e dados da otimização das melhores geometrias de cada frequência de análise serão examinadas na sequência. Para facilitar a identificação da amostra em meio a tantos parâmetros, elas serão nomeadas de modo que $L_a \times L_a \times H_a _ T_n$

Para 100 Hz a melhor amostra é obtida com a geometria 200x200x200_10. As Figuras 28, 29 e 30 exibem, respectivamente, sua curva de absorção, a representação da rede de

duto e a convergência do procedimento de otimização.

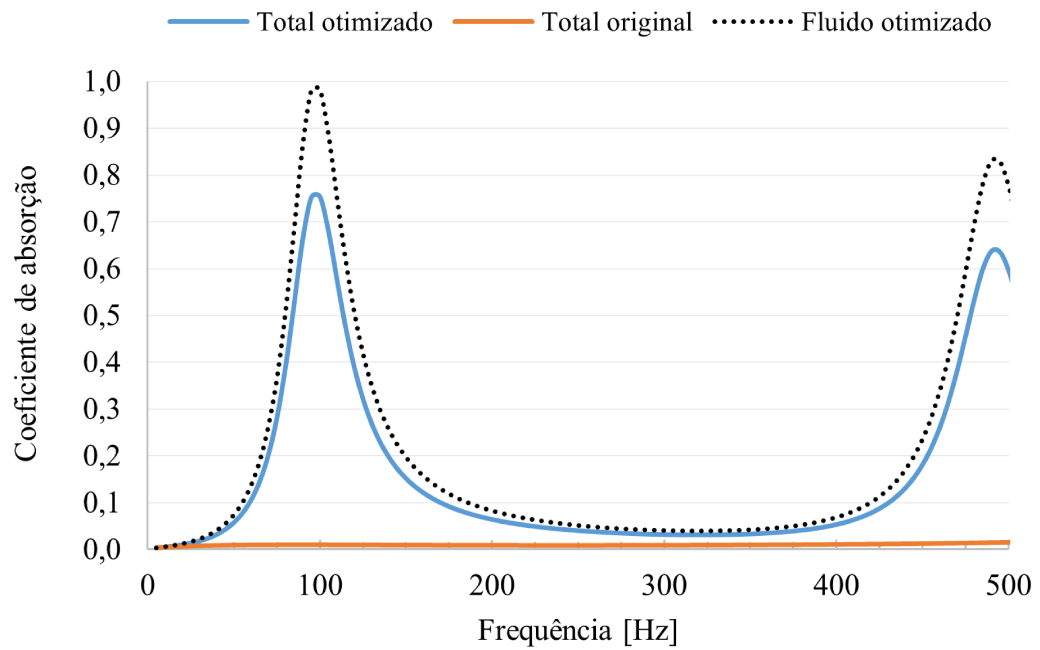


Figura 28 – Coeficiente de absorção da geometria 200x200x200_10 otimizada em 100 Hz.

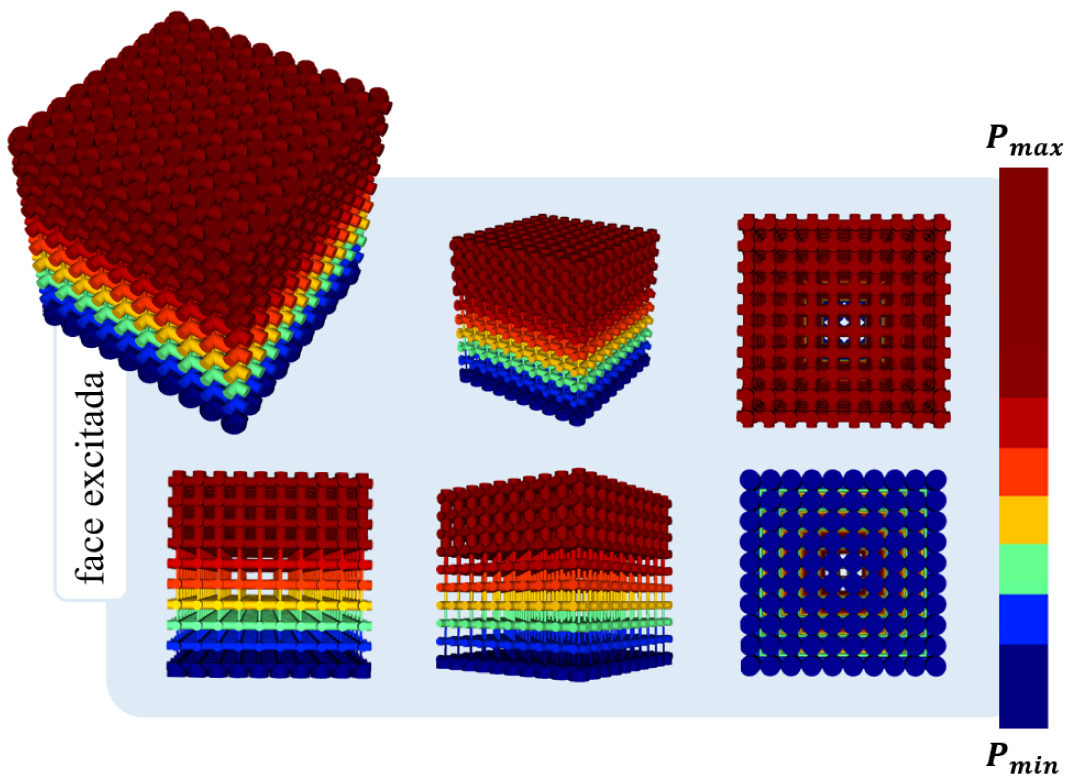


Figura 29 – Rede de dutos da geometria 200x200x200_10 otimizada em 100 Hz. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referências.

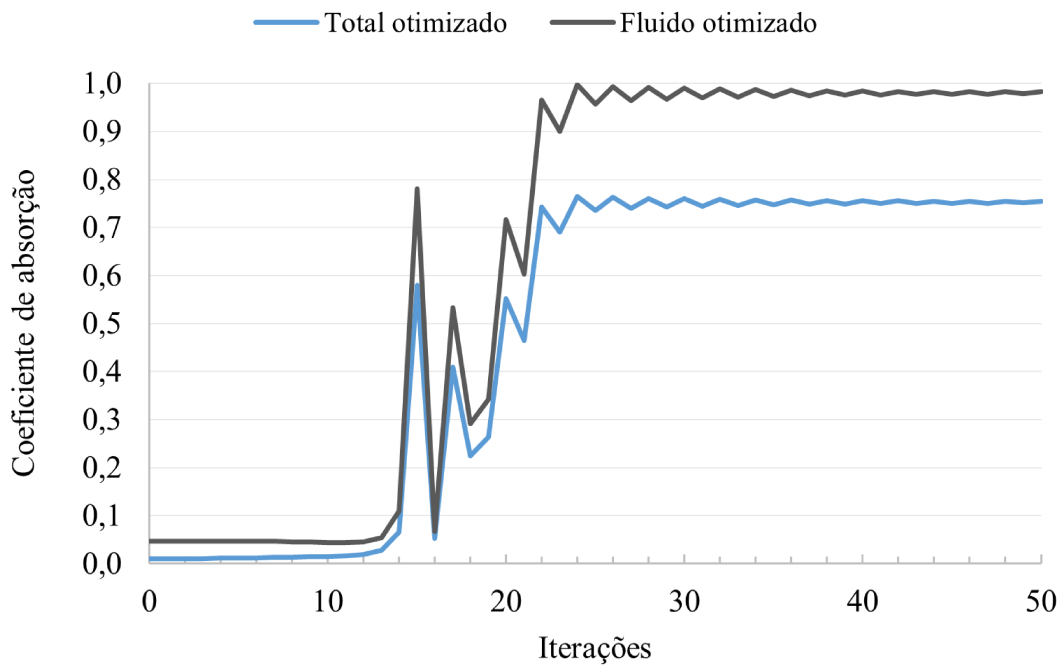


Figura 30 – Curva de convergência da geometria 200x200x200_10 otimizada em 100 Hz.

Em 250 Hz se destacou a geometria 50x50x100_5. Sua curva de absorção, rede de dutos e convergência são ilustradas nas Figuras 31, 32 e 33, respectivamente.

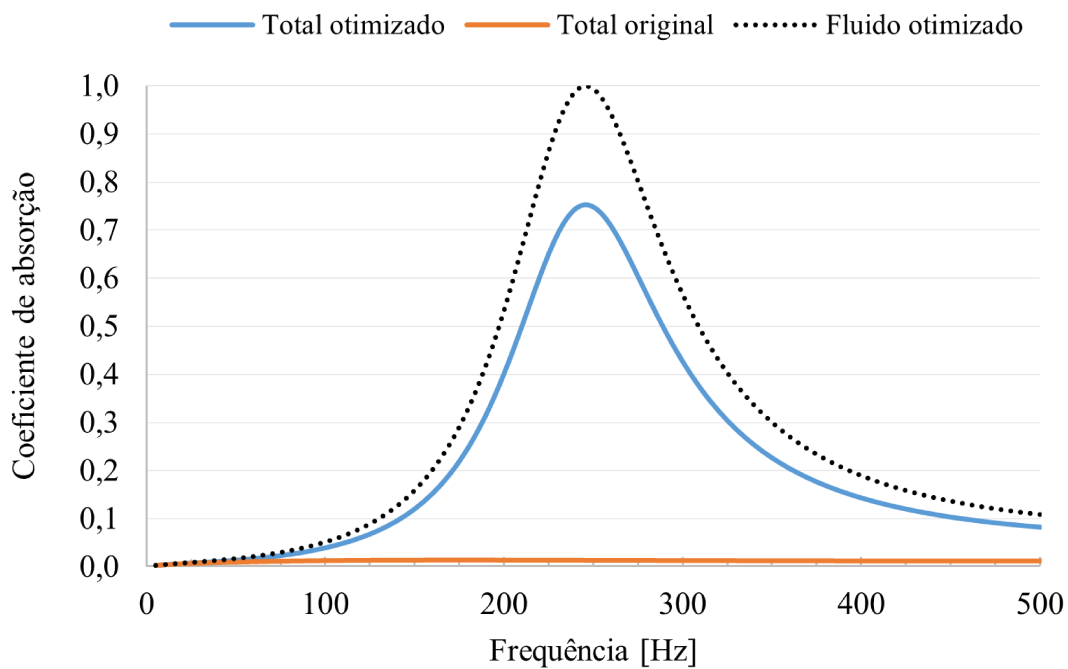


Figura 31 – Coeficiente de absorção da geometria 50x50x100_5 otimizada em 250 Hz.

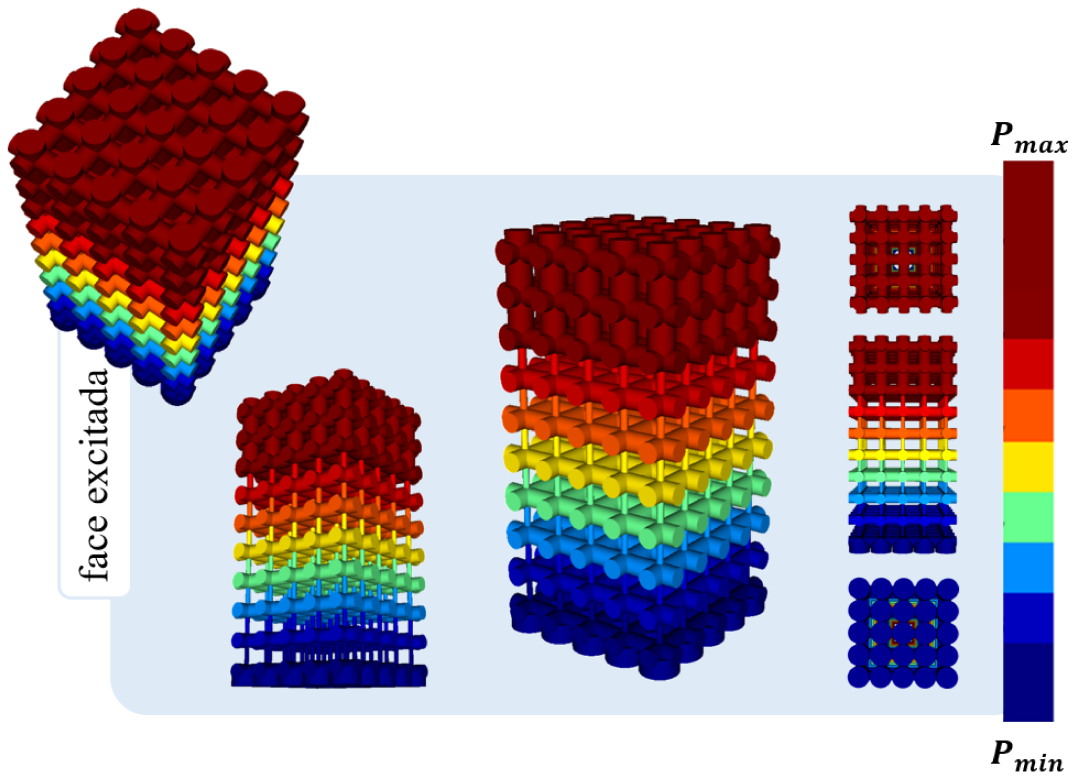


Figura 32 – Rede de dutos da geometria 50x50x100_5 otimizada em 250 Hz. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.

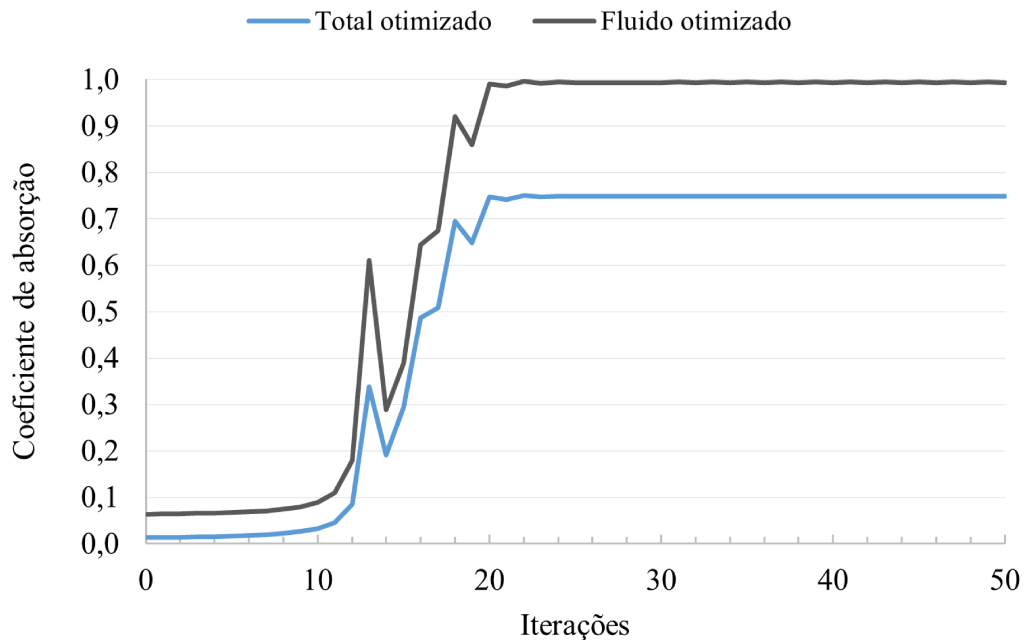


Figura 33 – Curva de convergência da geometria 50x50x100_5 otimizada em 250 Hz.

Por fim, para frequência alvo 500 Hz, a melhor geometria possui como dimensões 100x100x100_10. O desempenho de absorção, a representação da rede e a curva de

convergência desta amostra são expostos nas Figuras 34, 35 e 36.

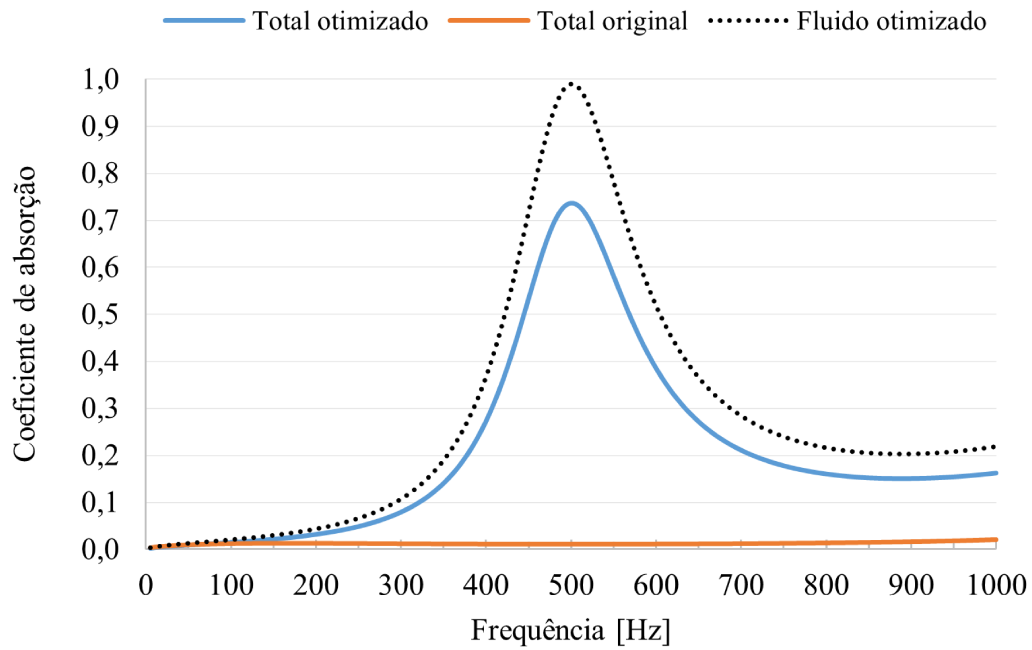


Figura 34 – Coeficiente de absorção da geometria 100x100x100_10 otimizada em 500 Hz.

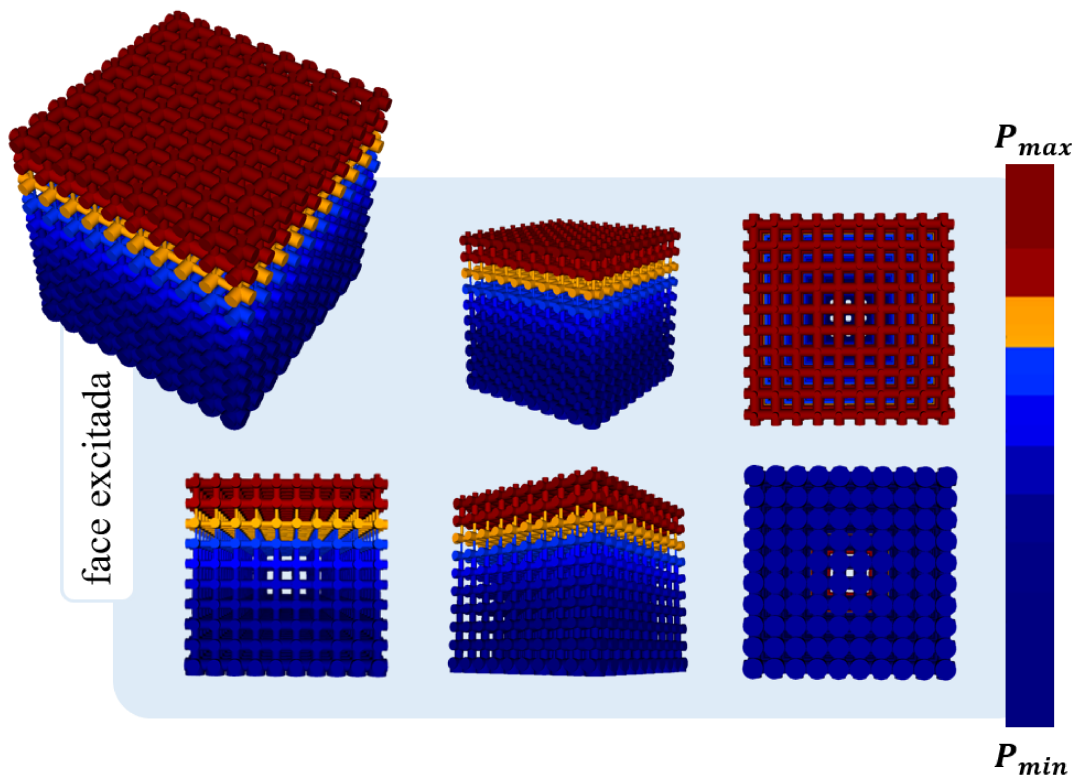


Figura 35 – Rede de dutos da geometria 100x100x100_10 otimizada em 500 Hz. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.

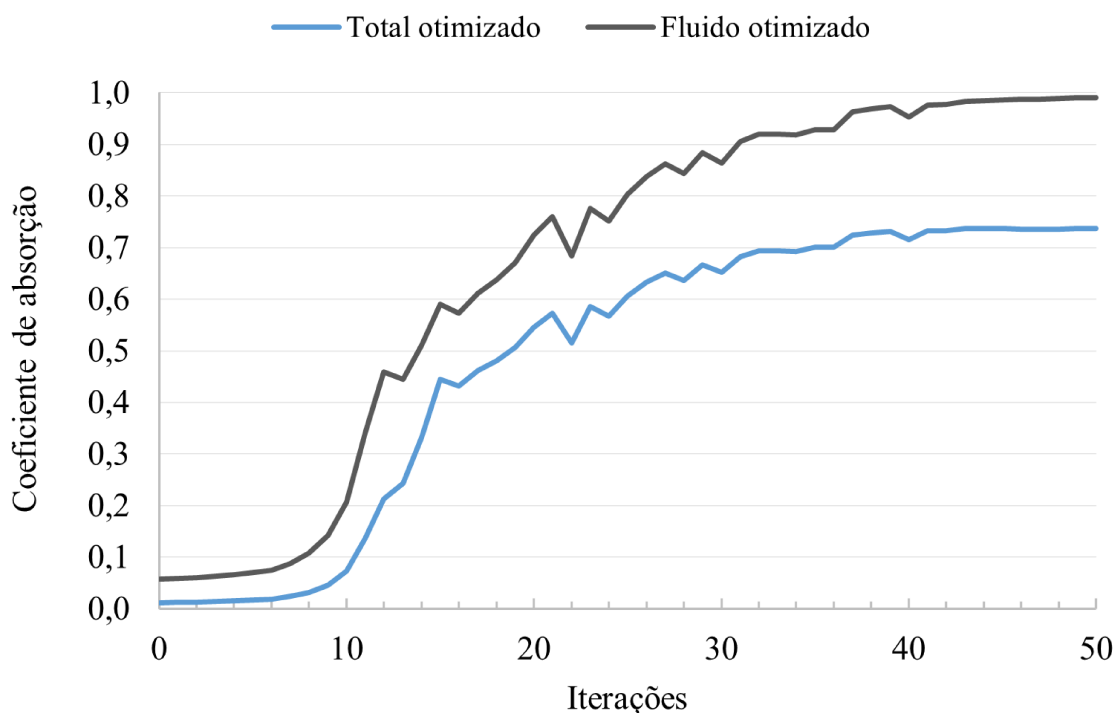


Figura 36 – Curva de convergência da geometria 100x100x100_10 otimizada em 500 Hz.

Os gráficos de absorção mostram três curvas importantes: o coeficiente de absorção total da amostra original, na qual todos os dutos possuem o mesmo diâmetro, dado pelo valor médio entre o diâmetro mínimo e o diâmetro máximo; o coeficiente de absorção total otimizado e o coeficiente de absorção do fluido otimizado. É importante notar que a absorção total otimizada e a absorção do fluido otimizado possuem o mesmo perfil. As curvas se diferem na amplitude.

Analisando as três curvas em conjunto pode-se afirmar que o algoritmo desempenha sua função com êxito, levando a rede (fluido otimizado) a uma absorção perfeita. No entanto, devido aos efeitos locais e a contribuição da parede rígida (considerando a potência ativa incidente total), a performance final do metamaterial é reduzida. Mesmo não alcançando a absorção máxima, quando comparado o desempenho acústico das geometrias com e sem otimização, a melhoria que o procedimento proporciona é notável.

Para melhorar os resultados de absorção total, as configurações iniciais definidas (parâmetros das redes e limites das variáveis) poderiam ser estudadas para permitir que o domínio tenha mais opções de exploração. Utilizar o comprimento dos ramos como variável de otimização também seria extremamente benéfico, pois eliminaria a etapa de avaliação preliminar do domínio. Além disso, uma análise relacionada ao comportamento

da derivadas poderia ajudar na estabilização da convergência do processo. Alguns testes indicaram que nos domínios fixos escolhidos e limites de diâmetros definidos, a sensibilidade de $\mathbf{p}^H \mathbf{S}_r \mathbf{p}$ (vide Equação 4.19) é muito baixa. No entanto, estas questões precisarão ser abordadas em trabalhos futuros, pois esta pesquisa tem como objetivo principal desenvolver uma metodologia analítica para determinar as sensibilidades que o método gradiente de otimização necessita.

Avaliando as representações das redes de dutos foi constatado que os resultados finais sempre apresentavam tubos com diâmetros efetivos mínimos maiores que 0,1 mm. Provavelmente, em frequências mais altas, regiões nas quais os efeitos visco-térmicos são mais acentuados, tubos com diâmetros menores seriam formados.

As curvas de convergência mostram oscilação no valor da função objetivo ao longo das iterações. Isso ocorre porque o MMA é um método de programação sequencial convexa baseado em sub-aproximações monotônicas que apresentam modificação de curvatura de acordo com a direção dos gradientes das funções de desempenho. Portanto, próximo de um mínimo local, as funções de aproximação são alteradas conforme o passo dado ao redor do mínimo, onde sabe-se que há troca de direções dos gradientes.

7.2 RESULTADOS OBTIDOS PARA AMOSTRAS CILÍNDRICAS

Métodos analíticos e semi-analíticos normalmente são validados por meio de comparações com modelos numéricos e testes experimentais. Validar o modelo de redes de dutos FEM 1D requer que a geometria resultante do procedimento seja reconstruída em CAD para ambas as opções. Por ser um processo dispendioso, a geometria selecionada para validação numérica será a mesma utilizada para validação experimental.

O tubo de impedância que opera em baixas frequências disponível no LVA possui 107 mm de diâmetro. Tendo em conta as limitações das geometrias cilíndricas, mencionadas no capítulo anterior, foi necessário encontrar uma configuração inicial na qual todos os tubos mantivessem-se circunscritos no contorno das amostras. Sendo assim, a rede inicial selecionada (Figura 37) possui 107 mm de diâmetro, 100 mm de altura e tamanho da célula 10,7 mm (T_{10}). Essa altura foi escolhida com base na Tabela 2, que mostra que amostras com lado de 100 mm apresentam bons resultados nas três frequências de análise quando adotado $H_a = 100$ mm. Os diâmetros dos tubos foram definidos de modo que $0,5 \leq D_e \leq 10,5$ mm.

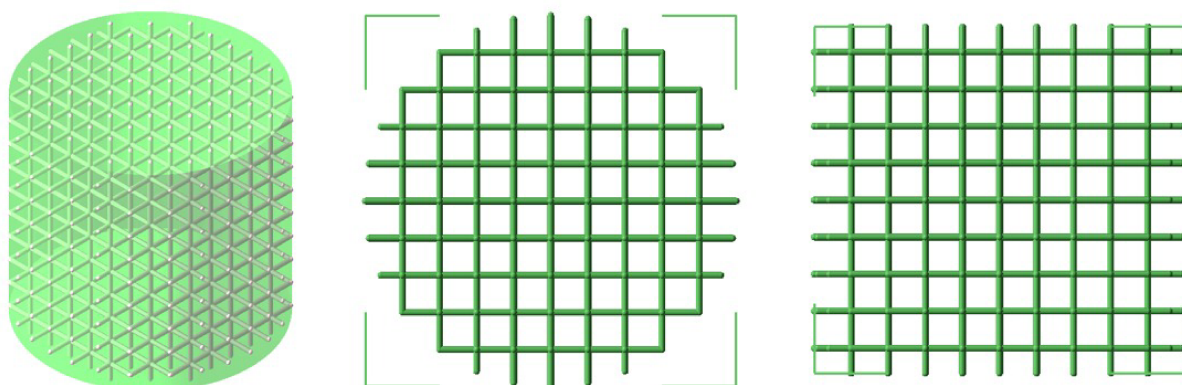


Figura 37 – Rede inicial das amostras cilíndricas.

A rede foi otimizada, considerando a correção do comprimento dos tubos verticais, para as frequências de 100 e 250 e 500 Hz. É importante destacar que o objetivo deste capítulo é obter amostras que atendam as restrições geométricas e as restrições do processo de manufatura aditiva, que serão discutidas no Capítulo 8. Neste contexto, as amostras resultantes das configurações setadas para esta rede não são a melhor opção de desempenho acústico para frequência selecionada.

As geometrias finais das amostras otimizadas são ilustradas nas Figuras 38, 39 e 40. Observa-se um padrão de dutos verticais com diâmetro menor que os horizontais.

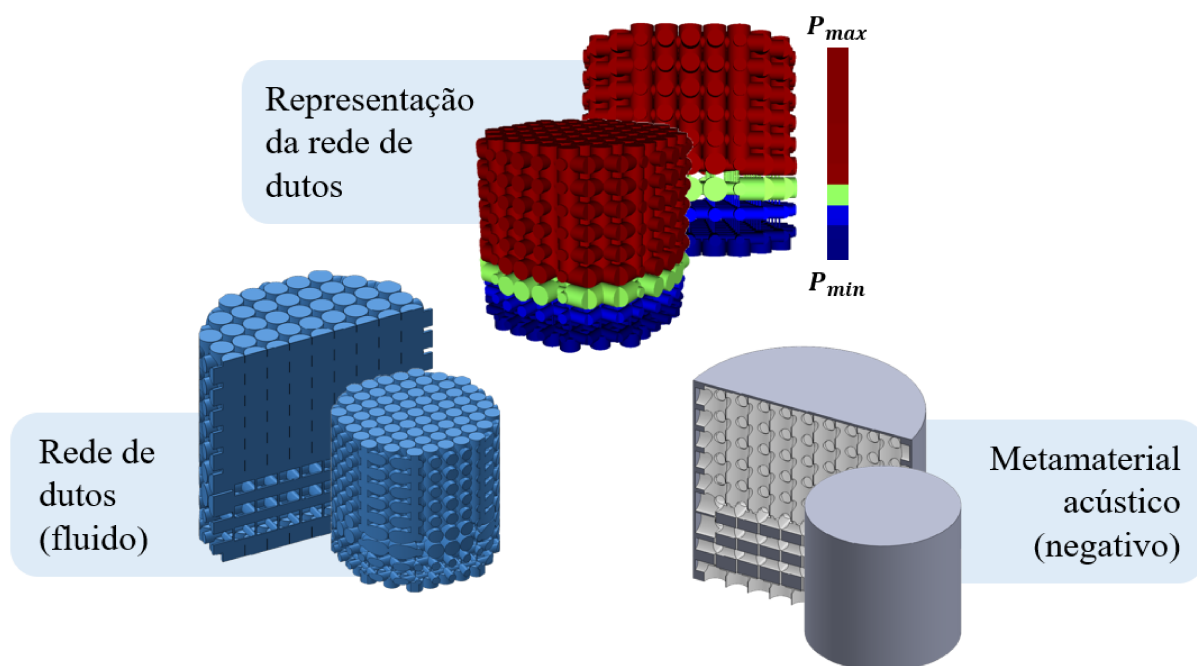


Figura 38 – Amostra 107x100_10,7 otimizada em 100 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.

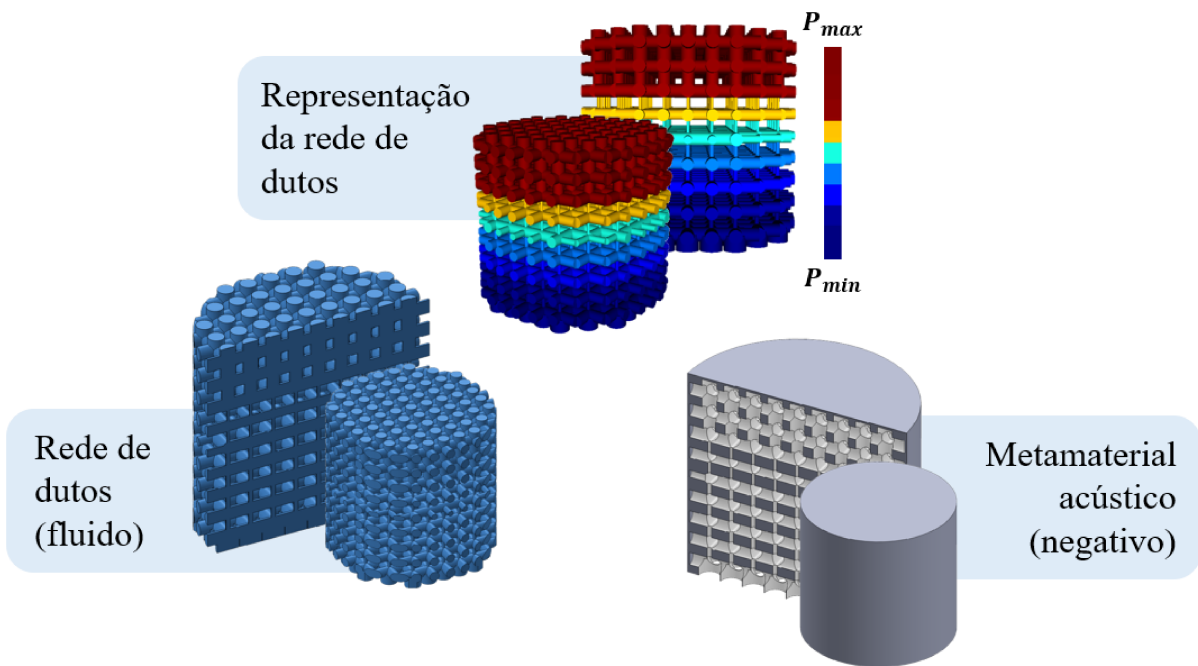


Figura 39 – Amostra 107x100_10,7 otimizada em 250 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.

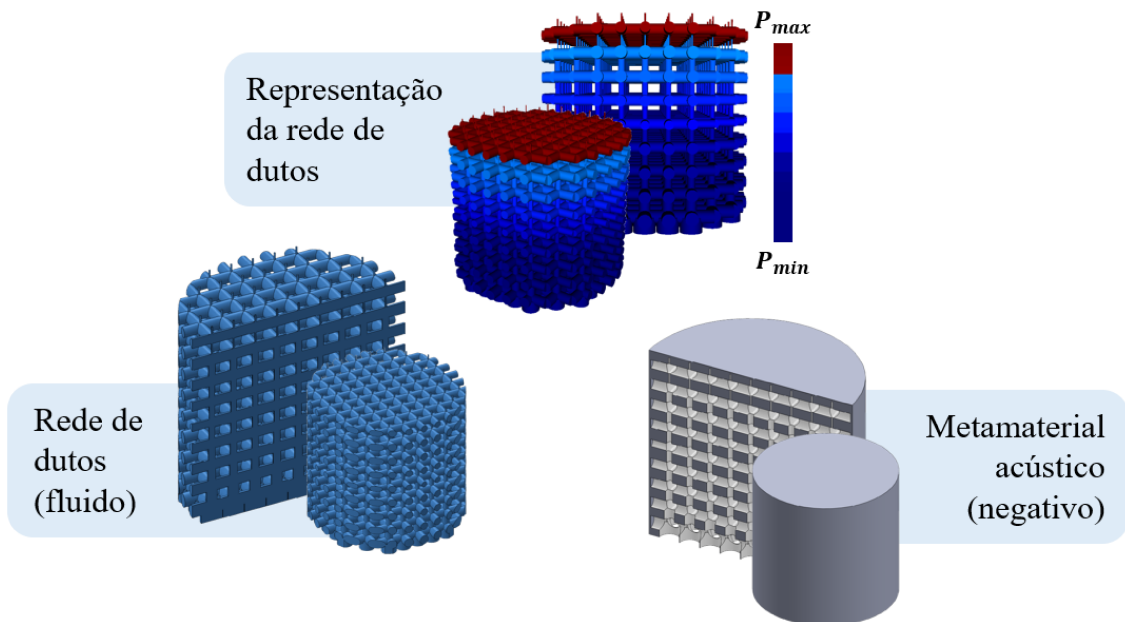


Figura 40 – Amostra 107x100_10,7 otimizada em 500 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.

Os gráficos da absorção do fluido e da absorção total das três amostras são apresentados nas Figuras 41, 42 e 43. Pode-se observar um máximo de absorção próximo às frequências de interesse.

Em 100 Hz a absorção otimizada total é 0,42 e a do fluido 0,64. Para 250 Hz o total otimizado é 0,66 e o fluido apresenta absorção total. Em 500 Hz a absorção total da amostra é 0,65 e do fluido 0,98.

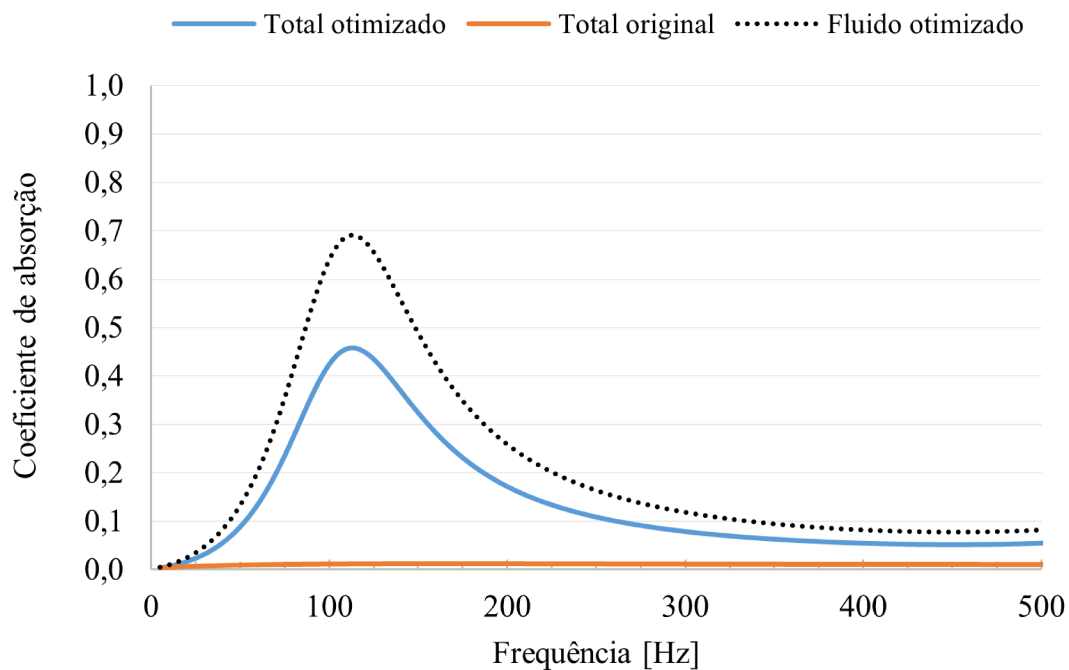


Figura 41 – Coeficiente de absorção da geometria 107x100_10,7 otimizada em 100 Hz.

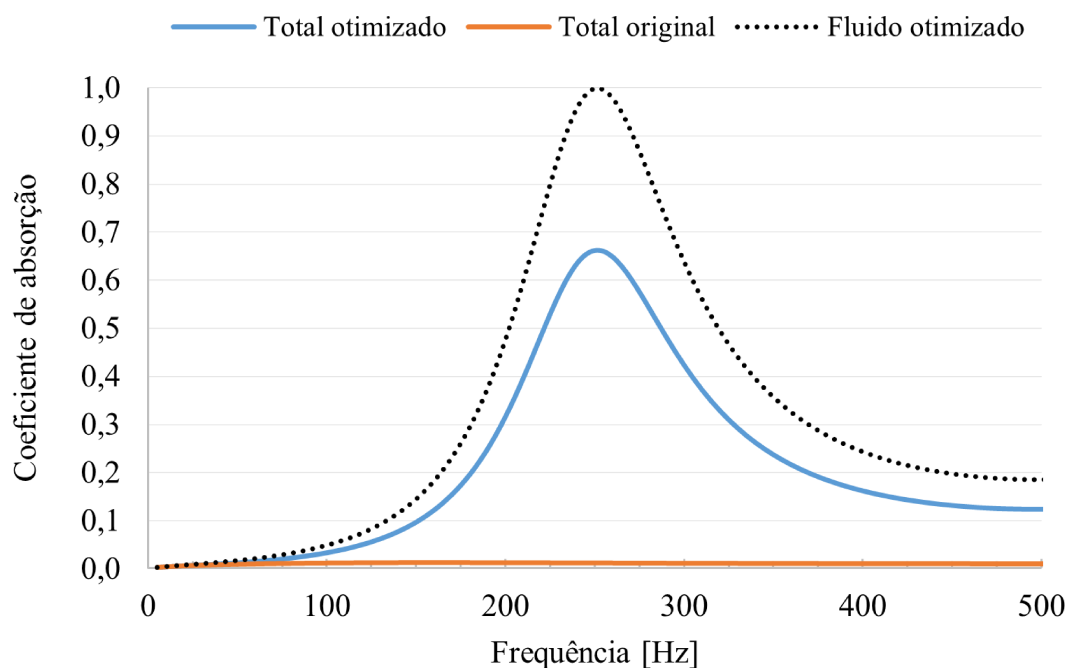


Figura 42 – Coeficiente de absorção da geometria 107x100_10,7 otimizada em 250 Hz.

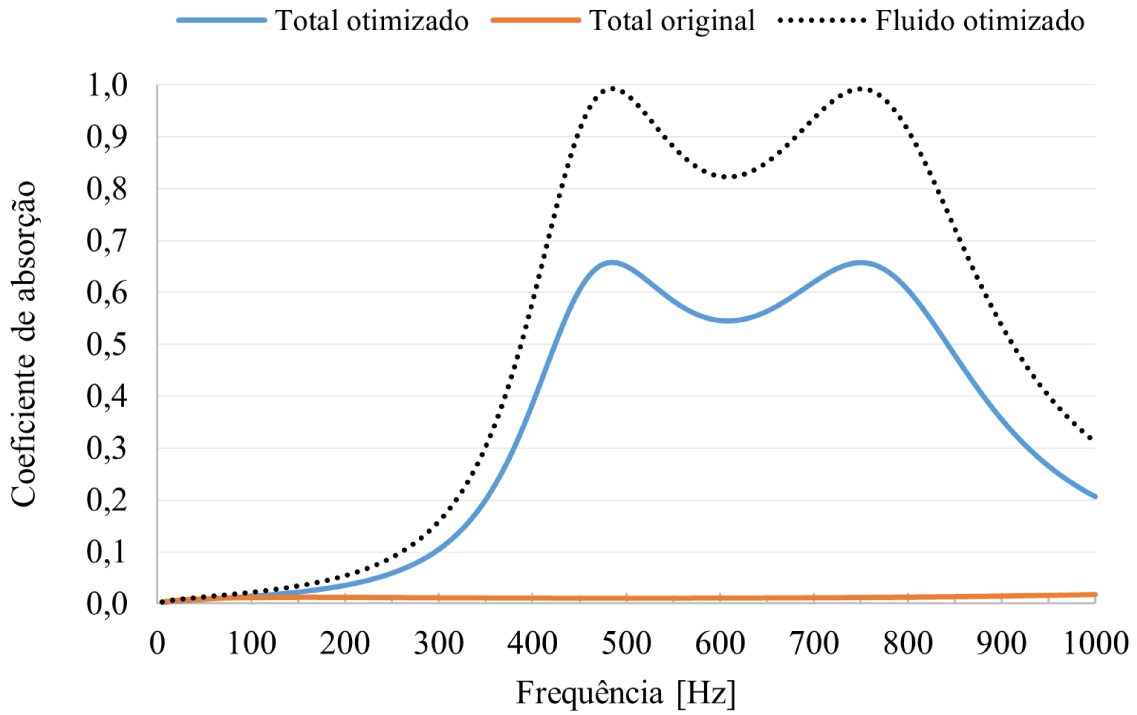


Figura 43 – Coeficiente de absorção da geometria 107x100_10,7 otimizada em 500 Hz.

A evolução da função objetivo com as iterações do MMA é exibida nas Figuras 44, 45, 46 para cada amostra.

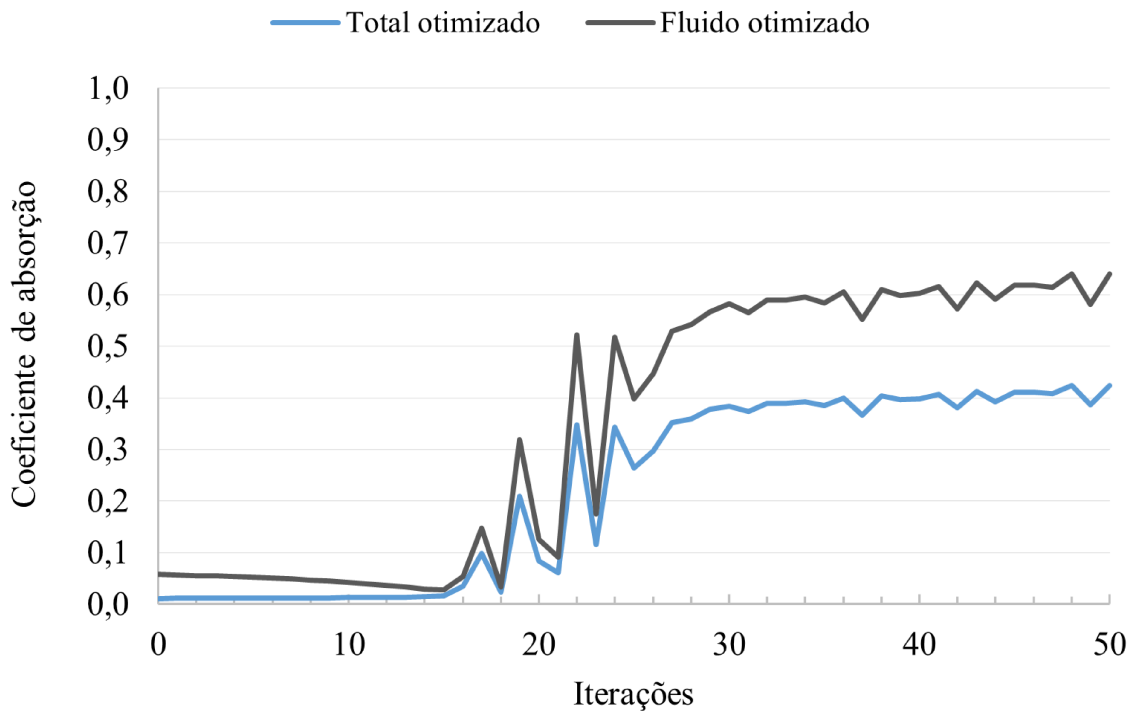


Figura 44 – Curva de convergência da geometria 107x100_10,7 otimizada em 100 Hz.

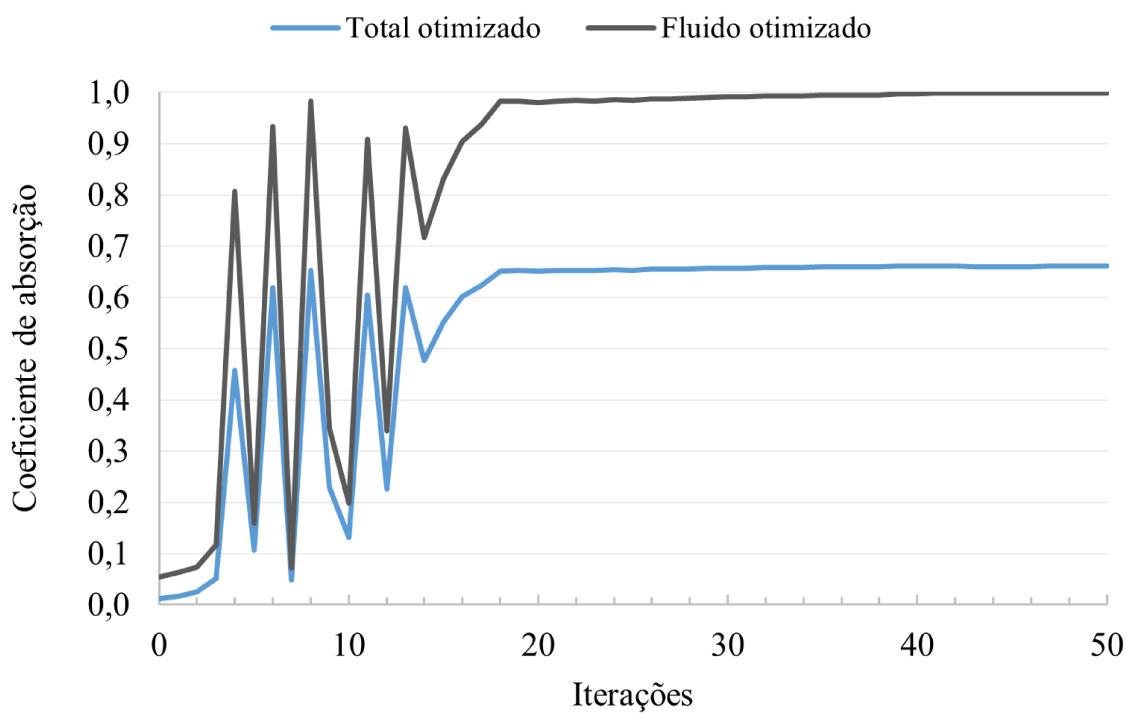


Figura 45 – Curva de convergência da geometria 107x100_10,7 otimizada em 250 Hz.

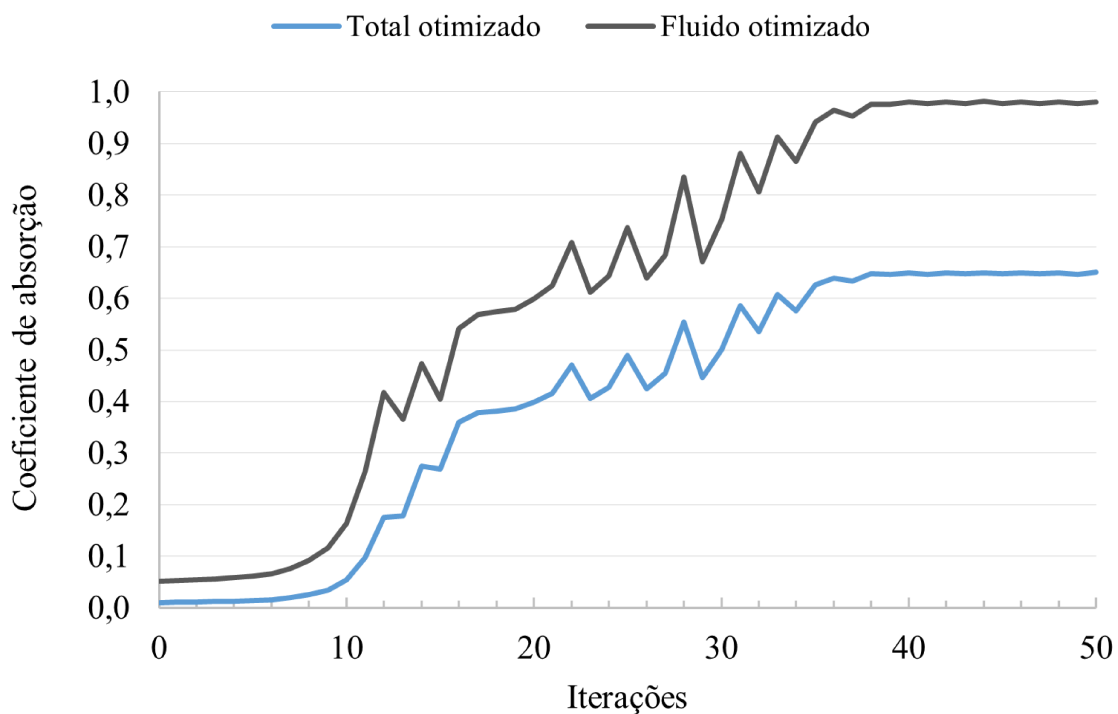


Figura 46 – Curva de convergência da geometria 107x100_10,7 otimizada em 500 Hz.

Nota-se nos gráficos de convergência uma instabilidade nas primeiras iterações do MMA. Isso ocorre devido à existência de ressonâncias do sistema na frequência de interesse,

porém, essa questão será discutida posteriormente. Por ora, é importante compreender que o algoritmo atua rapidamente para entrar nessa condição e, assim maximizar o coeficiente de absorção. Entretanto, nas proximidades dessas frequências específicas, as derivadas apresentam comportamento oscilatório, mudando de direção de acordo com a posição da frequência de análise em relação a frequência de ressonância em cada iteração. O MMA possui ajustes internos que vão refinando esta busca do algoritmo até que ocorra a convergência.

Também foi observado que quanto menor a dissipação do sistema, mais sensível o método se torna a essas oscilações. Testes realizados apontam que o uso de diâmetros mínimos próximos a 1 mm provocam maiores instabilidades a ponto de “quebrar” o processo.

7.3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA USANDO FEM 3D

Utilizar a hipótese de ondas planas para a modelar problemas acústicos através de elementos finitos unidimensionais pode originar resultados na prática intangíveis caso haja uma falta de representatividade física ou mesmo geométrica do problema em estudo. No caso das redes de dutos, conforme mencionado na Seção 5.3, foi constatado que os comprimentos dos tubos não podem ser representados adequadamente.

A simulação por meio de elementos finitos tridimensionais, apesar de ter um custo computacional maior (o que inviabiliza alguns métodos de otimização), é mais representativa para a predição do comportamento acústico de dutos e cavidades, com aplicação discutida e validada por diversos autores, entre eles Fahy e Gardonio (2007) e Petyt (1983). Em vista disso, o método foi utilizado para fazer a validação inicial da metodologia empregada para modelar a rede de dutos, com e sem a adição da correção do comprimento dos elementos verticais. As duas opções entraram em pauta porque a diferença no tempo de processamento entre elas era significativa.

O procedimento consistiu em importar a geometria tridimensional resultante do FreeCAD (neste caso o positivo, o fluido) no módulo de acústica do Ansys. O software gera uma malha de elementos tetraédricos de 10 nós (Figura 47) e realiza uma análise harmônica para a frequência de interesse. Este pacote comercial também possui uma ferramenta para cálculo do coeficiente de absorção, o que possibilitou configurar o problema acústico com o modelo de dissipação visco-térmico LRF (ANSYS, 2022). As condições de contorno

foram impostas diretamente sobre as faces que representam os furos da superfície exposta. Conseqüentemente, não há representação da possível interação acústica entre furos vizinhos (da mesma forma que o modelo FEM 1D).

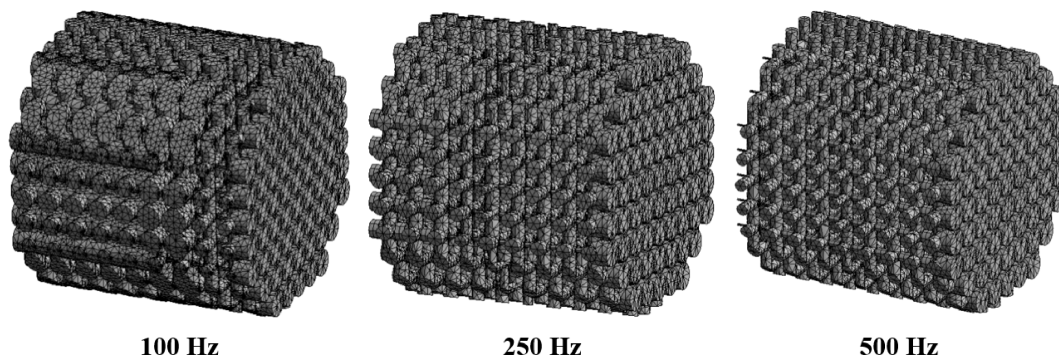


Figura 47 – Malhas da geometria 107x100_10,7 nas três frequências de interesse.

As Figuras 48, 49 e 50 mostram as diferenças entre o FEM 1D e o FEM 3D do modelo sem a correção do comprimento dos elementos verticais. A comparação desconsiderou a parte rígida da face exposta, ou seja, foi realizada utilizando apenas os valores do coeficiente de absorção dos dutos de entrada, ou do fluido, pois o Ansys gera este resultado como *default*. Um procedimento para determinar a absorção total no Ansys está sendo desenvolvido por meio de uma ação conjunta entre pesquisadores e desenvolvedores de rotinas que adaptam o software para problemas acústicos.

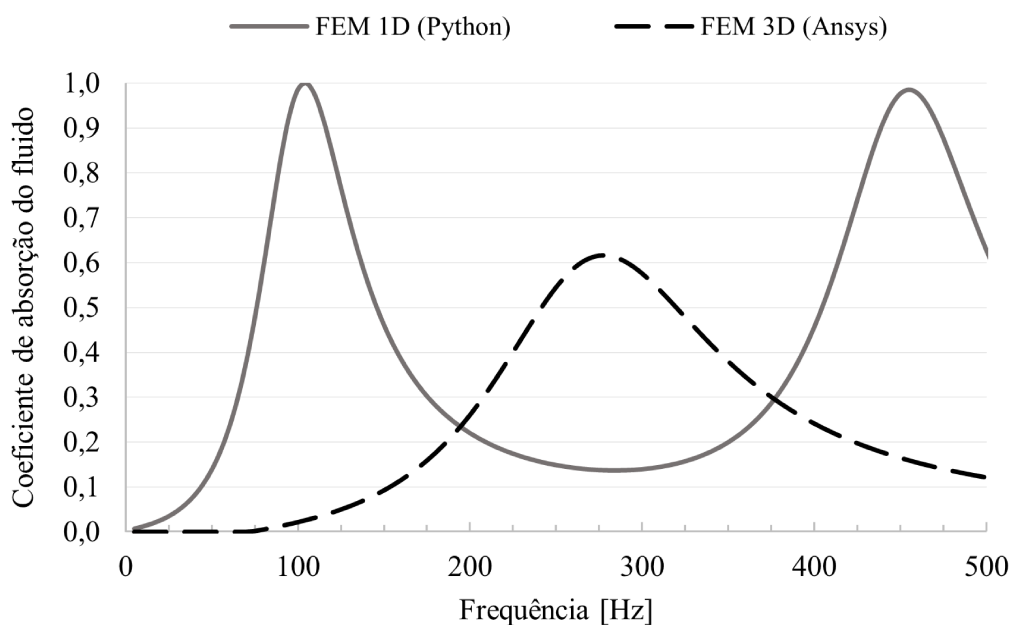


Figura 48 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 100 Hz. Modelo sem correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 105$ Hz e $\alpha = 1,0$. FEM 3D: $f = 275$ Hz e $\alpha = 0,62$.

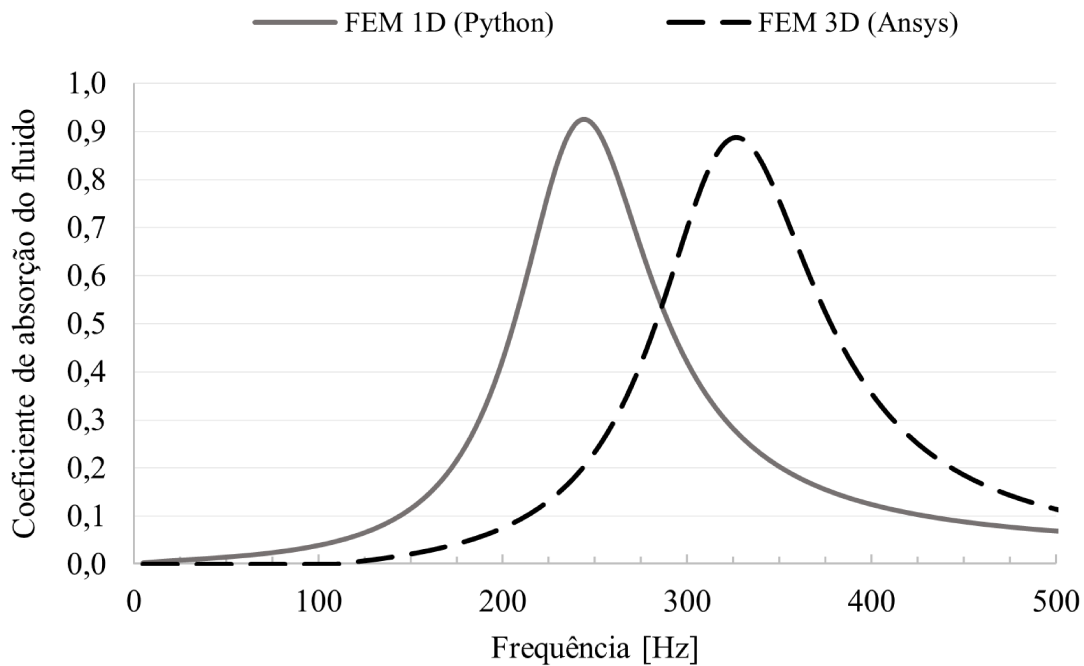


Figura 49 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 250 Hz. Modelo sem correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 245$ Hz e $\alpha = 0,92$. FEM 3D: $f = 325$ Hz e $\alpha = 0,89$.

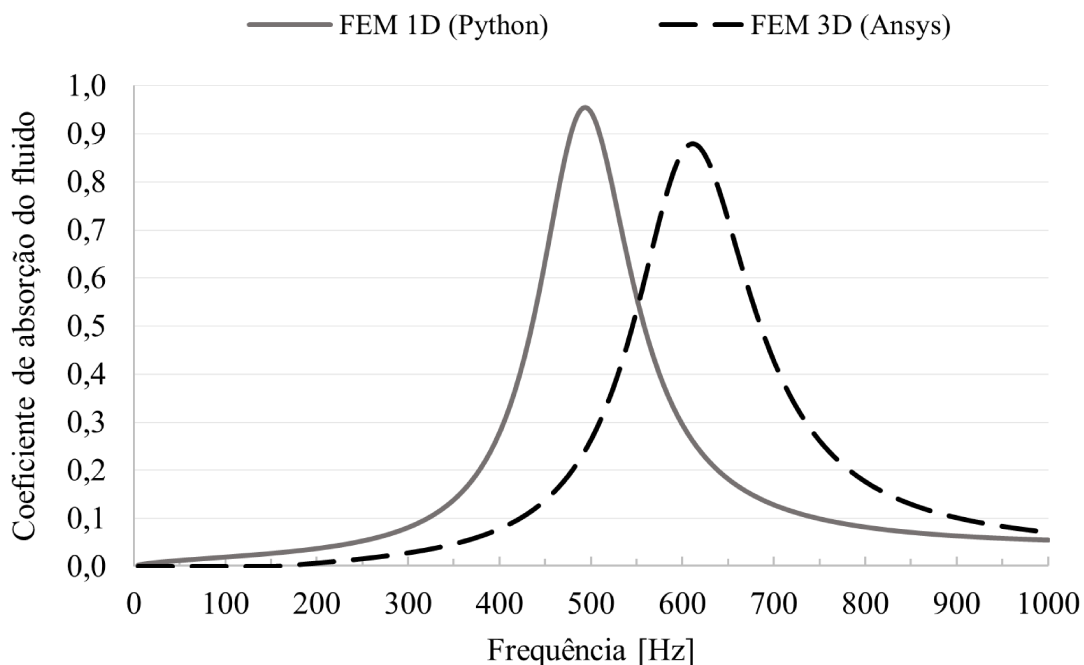


Figura 50 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 500 Hz. Modelo sem correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 495$ Hz e $\alpha = 0,95$. FEM 3D: $f = 610$ Hz e $\alpha = 0,88$.

Os efeitos da não adoção de hipóteses adequadas no modelo FEM 1D tem um impacto

notável. As curvas do modelo com a adição da correção do comprimento dos elementos verticais (Equação 5.4) são exibidas nas Figuras 51, 52 e 53.

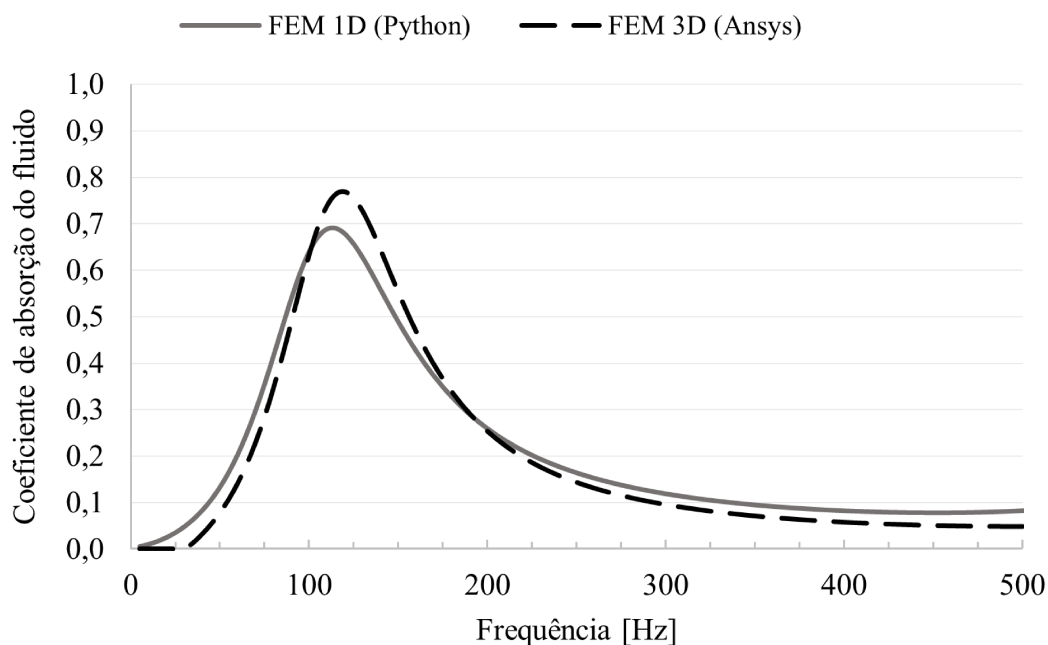


Figura 51 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 100 Hz. Modelo com correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 110$ Hz e $\alpha = 0,69$. FEM 3D: $f = 120$ Hz e $\alpha = 0,77$.

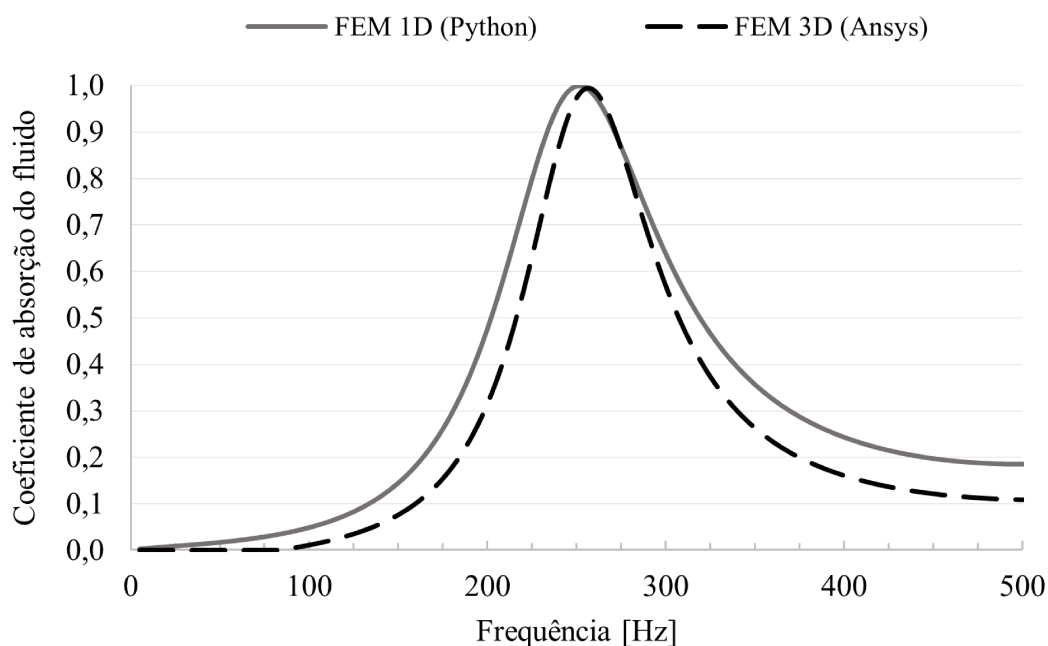


Figura 52 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 250 Hz. Modelo com correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 250$ Hz e $\alpha = 1,0$. FEM 3D: $f = 255$ Hz e $\alpha = 0,99$.

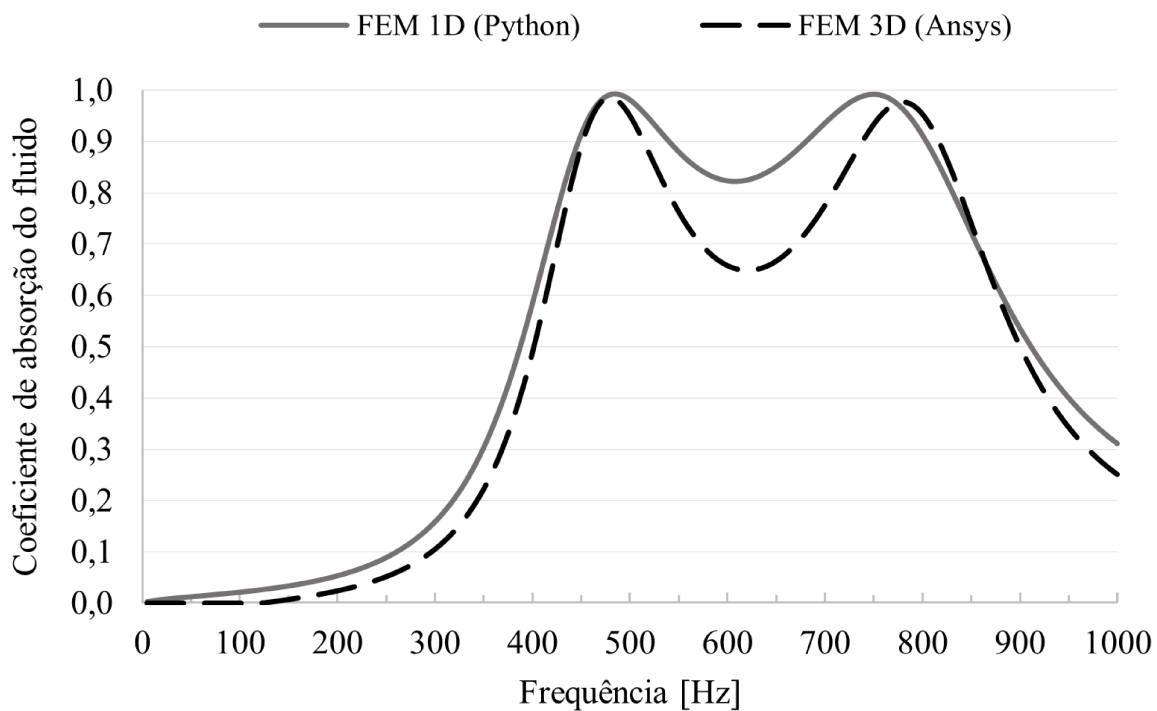


Figura 53 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x100_10,7 otimizada em 500 Hz. Modelo com correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 495$ Hz e $\alpha = 0,99$. FEM 3D: $f = 480$ Hz e $\alpha = 0,99$.

Nota-se que, apesar de simplificado, o procedimento proposto ajuda a corrigir o valor da frequência de máxima absorção (tomando o Ansys como valor de referência). As diferenças entre as duas formas de modelagem podem ser tema de um estudo futuro, uma vez que o foco deste trabalho está na aplicação da otimização.

7.4 DISCUSSÃO PRELIMINAR DOS RESULTADOS

Materiais porosos e fibrosos proporcionam absorção acústica efetiva e em banda larga em médias/altas frequências. Estes tratamentos tradicionais resultam em materiais espessos e pesados quando designados para baixas frequências. Para superar estas limitações, nos anos recentes metamateriais tem sido propostos para projetar estruturas absorventes com sub-comprimento de onda. Nesses metamateriais, o comprimento de onda associado com a frequência de ressonância é muito maior que a espessura do material (JIMÉNEZ; UMNOVA; GROBY, 2021).

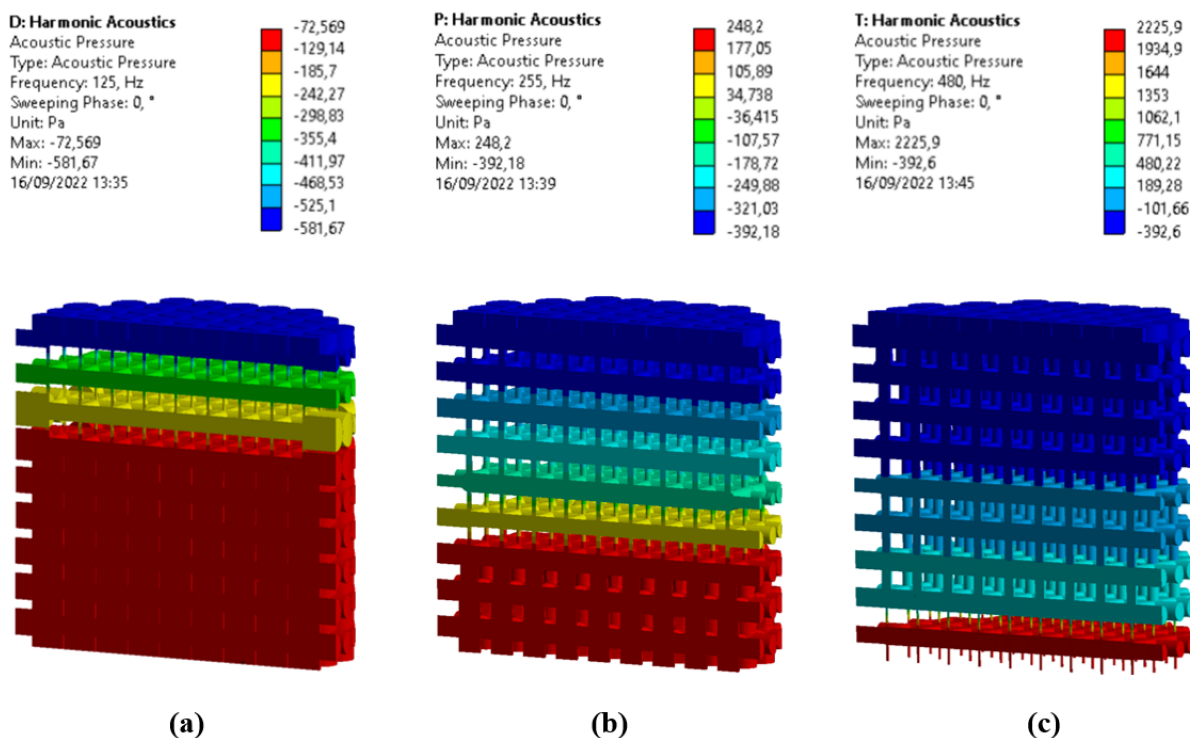


Figura 54 – Campo de pressões da amostra 107x100_10,7. (a) otimizada em 100 Hz (frequência efetiva Ansys: 125 Hz). (b) otimizada em 250 Hz (frequência efetiva Ansys: 255 Hz). (c) otimizada em 500 Hz (frequência efetiva Ansys: 480 Hz). Excitação aplicada na parte superior da amostra.

A Figura 54 apresenta os cortes dos modelos FEM 3D das amostras que maximizam a absorção em 100, 250 e 500 Hz. Através da parte real do campo de pressões, observa-se que, nas frequências de máxima absorção do modelo FEM 3D (125 Hz, 255 Hz e 480 Hz), os tubos verticais de menor diâmetro se comportam como massas concentradas sobre os tubos horizontais, que possuem maior diâmetro e se comportam como volume (ou “mola” equivalente). Esses subsistemas acústicos encontram-se em ressonância. As regiões de máxima pressão nos modelos representados na figura indicam armazenamento de energia potencial elástica, enquanto as regiões com transição de pressão indicam armazenamento de energia cinética.

Nessas geometrias, as ressonâncias locais ocorrem em frequências bem menores que as frequências relativas aos comprimentos de onda estacionária correspondentes ao comprimento das amostras. Tem-se várias “massas” sintonizadas, com dissipação provida pelo efeito visco-térmico nos dutos de menor diâmetro, que armazenam praticamente toda energia cinética do sistema. Verifica-se também que, a medida que a frequência aumenta, a localização dos conjuntos dessas “massas” concentradas se deslocam em direção a superfície

oposta a excitação.

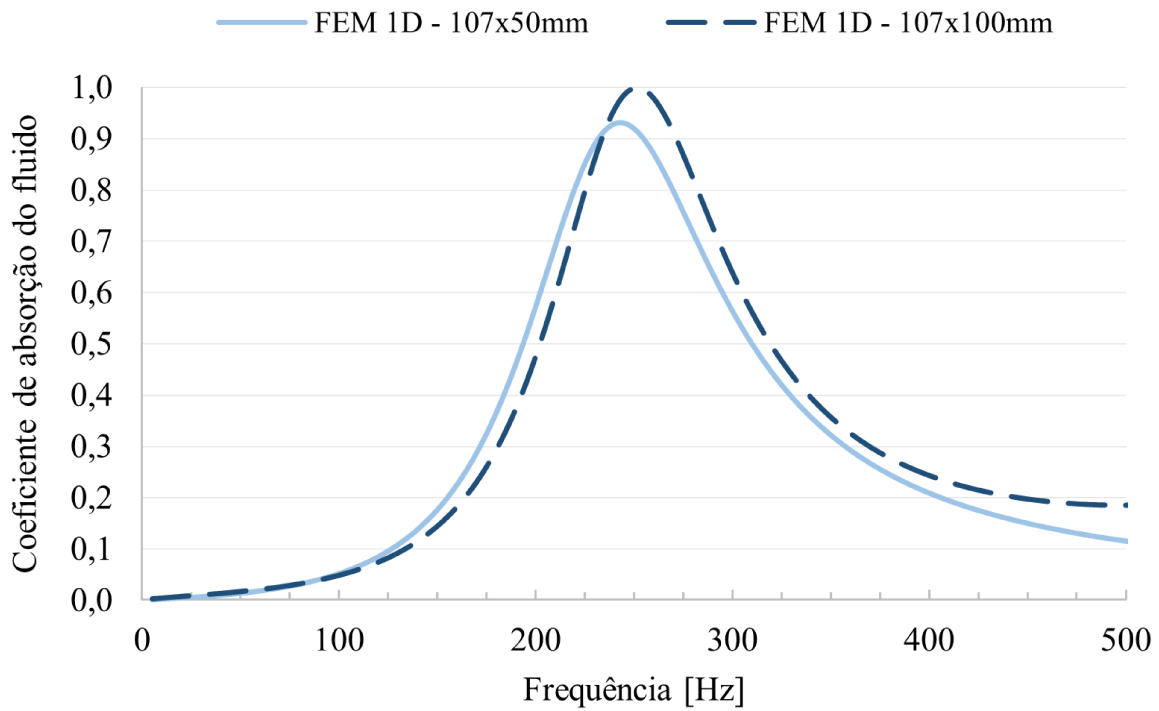


Figura 55 – Coeficiente de absorção do fluido das geometrias 107x50_10,7 ($f = 245$ Hz e $\alpha = 0,93$) e 107x100_10,7 ($f = 250$ Hz e $\alpha = 1,0$) otimizadas em 250 Hz.

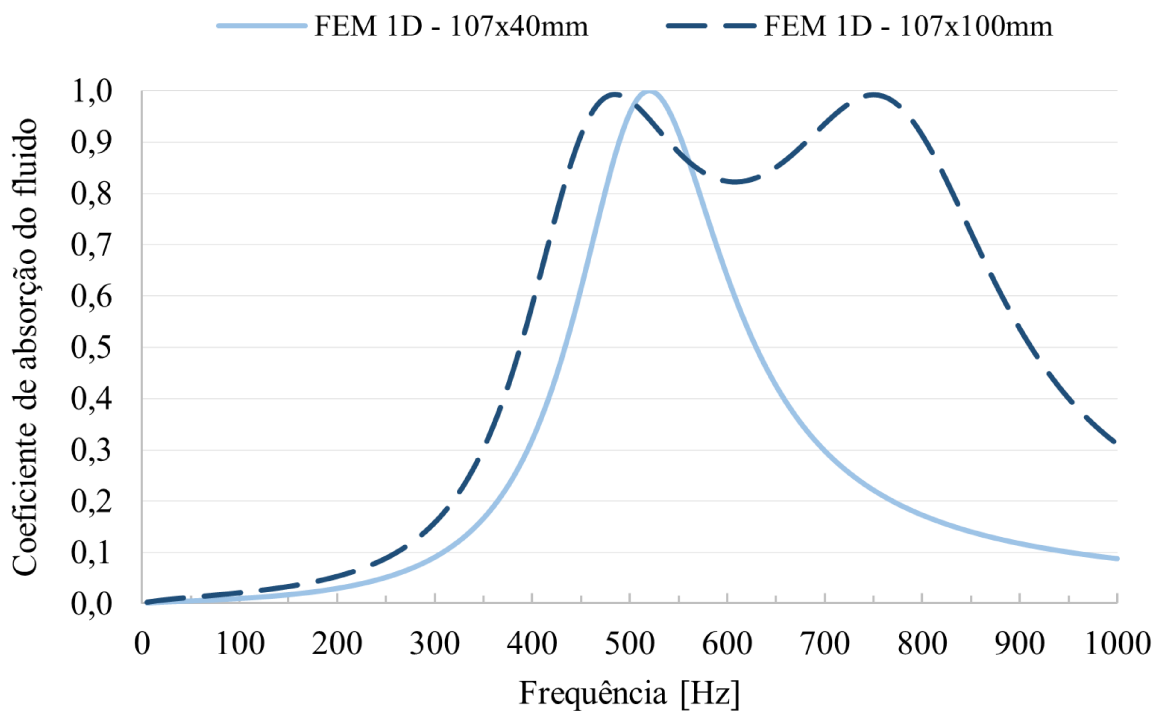


Figura 56 – Coeficiente de absorção do fluido das geometrias 107x40_10,7 ($f = 520$ Hz e $\alpha = 1,0$) e 107x100_10,7 ($f = 495$ Hz e $\alpha = 0,99$) otimizadas em 500 Hz.

Utilizar um *grid* de dimensões fixas, mesmo tornando livre a busca por diâmetros em todo o domínio, ainda limita o procedimento de otimização em sua procura pelas melhores soluções do ponto de vista de engenharia. Observando a Figura 54 novamente, nota-se que condições de ressonâncias localizadas podem ser alcançadas em redes com alturas menores nas amostras otimizadas em 250 e 500 Hz. Então, para avaliar os efeitos da redução da altura da configuração inicial, novas otimizações foram realizadas em 250 Hz considerando $H_a = 50$ mm e em 500 Hz com $H_a = 40$ mm. As diferenças nas curvas de absorção do fluido das novas geometrias em relação às alturas das amostras originais (Figuras 52 e 53) são exibidas nas Figuras 55 e 56.

Nas geometrias maximizadas em 250 Hz percebe-se que a amostra de maior altura apresentou pico de absorção sonora mais acentuado em relação a de menor. Este comportamento pode ser explicado pela maior quantidade de dutos com movimentação de fluido, o que gera maior dissipação por efeitos visco-térmicos.

Já para análise em 500 Hz, a amplitude do pico de absorção se mantém, mas há um pequeno desvio na frequência de interesse nas duas amostras. É interessante observar que a geometria maior permite a formação de outras ressonâncias em frequências mais elevadas (o que não foi propositalmente solicitado ao procedimento). As Figuras 57 e 58 exibem as redes finais das amostras com altura menor e as geometria dos respectivos metamateriais.

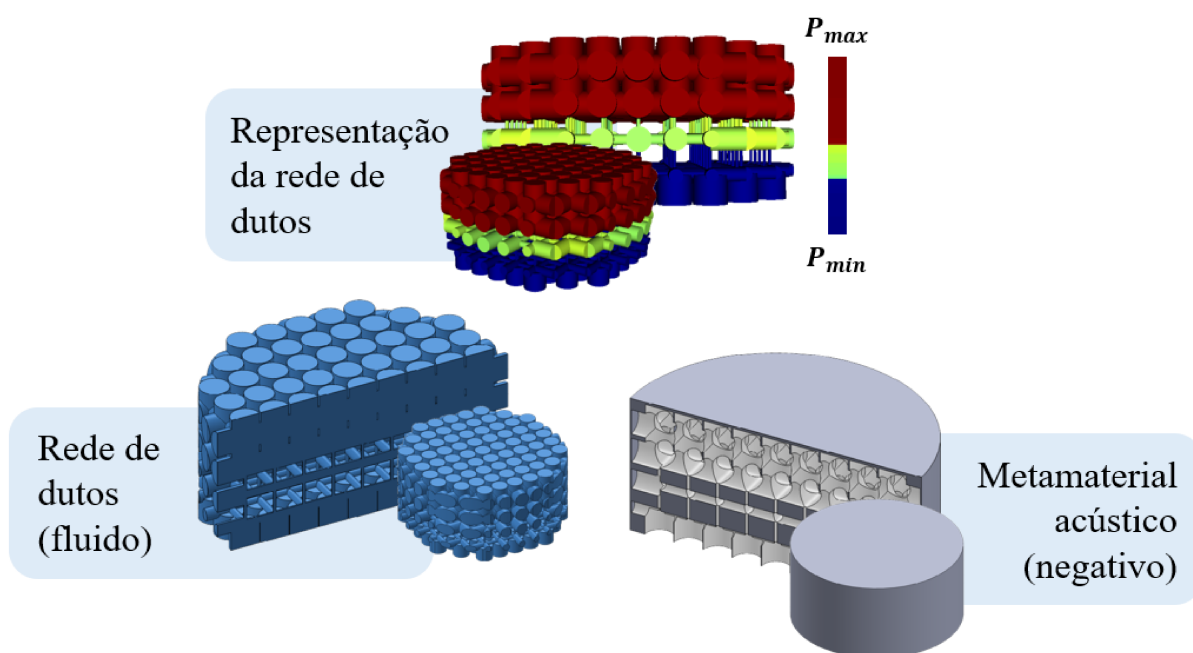


Figura 57 – Amostra 107x50_10,7 otimizada em 250 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.

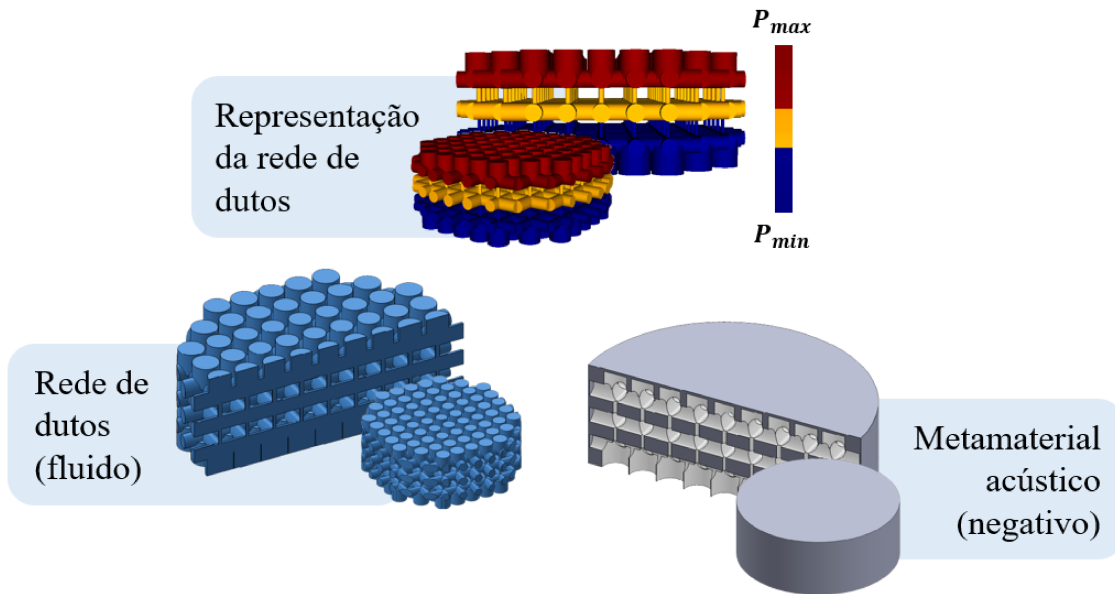


Figura 58 – Amostra 107x40_10,7 otimizada em 500 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.

Para validação do procedimento, o software Ansys foi novamente empregado. As comparações entre o FEM 1D e FEM 3D das amostras menores são ilustradas nas Figuras 59 e 60.

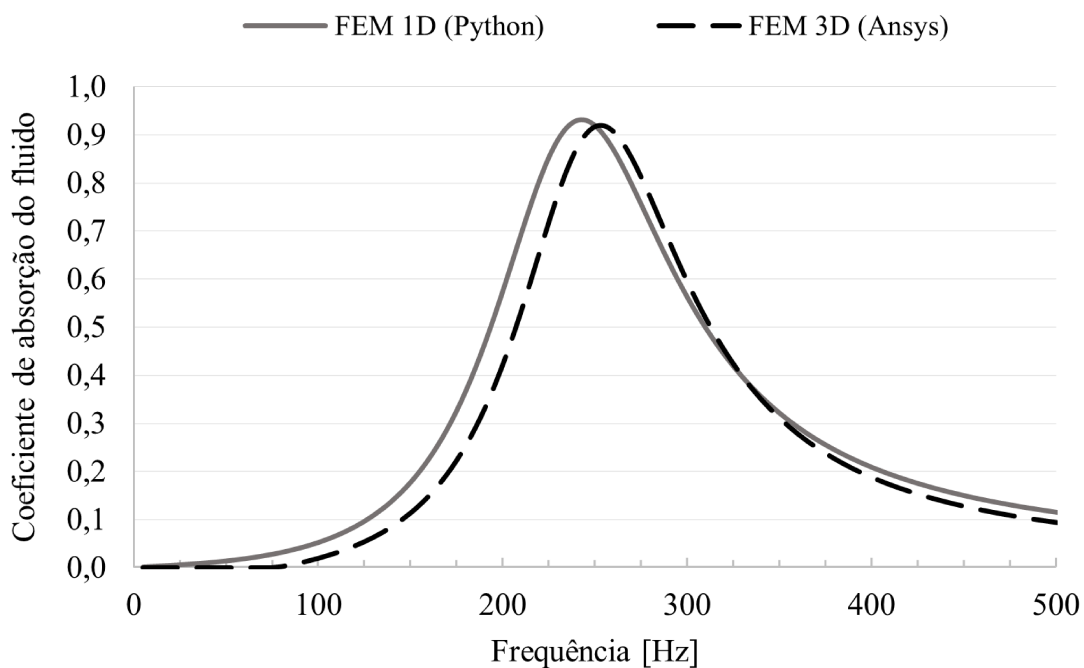


Figura 59 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x50_10,7 otimizada em 250 Hz. Modelo com correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 245$ Hz e $\alpha = 0,93$. FEM 3D: $f = 250$ Hz e $\alpha = 0,92$.

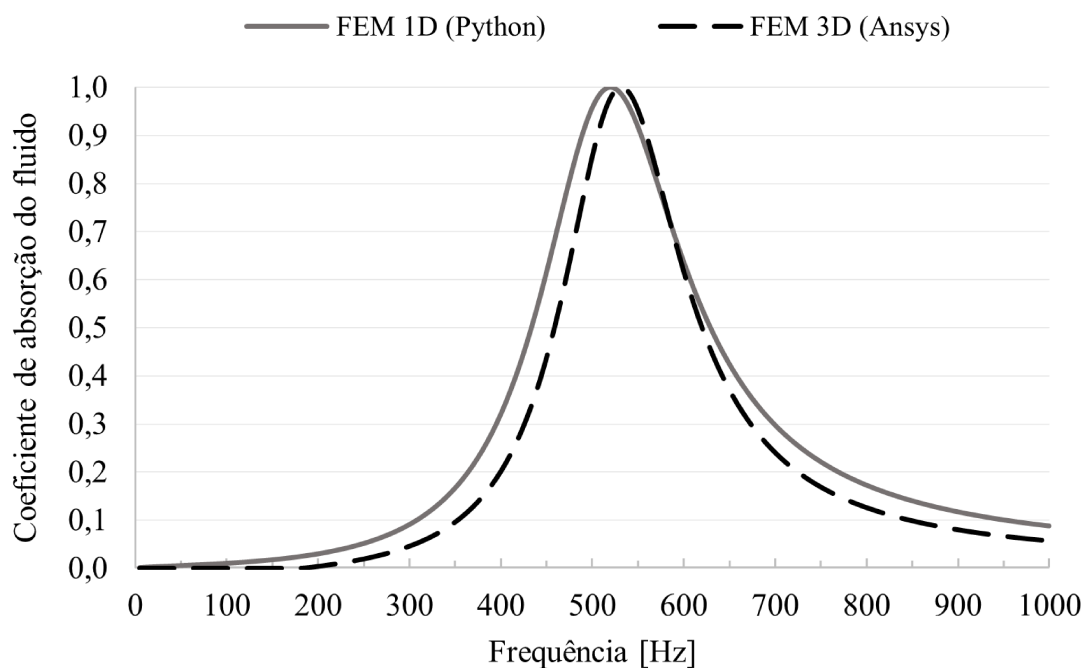


Figura 60 – Coeficiente de absorção do fluido da geometria 107x40_10,7 otimizada em 500 Hz. Modelo com correção dos comprimentos dos elementos verticais. FEM 1D: $f = 520$ Hz e $\alpha = 1,0$. FEM 3D: $f = 530$ Hz e $\alpha = 1,0$.

O campo de pressões nas frequências de pico de cada geometria está disposto na Figura 61. É possível notar novamente os efeitos das ressonâncias “massa-mola” já observados nas amostras de altura maior.

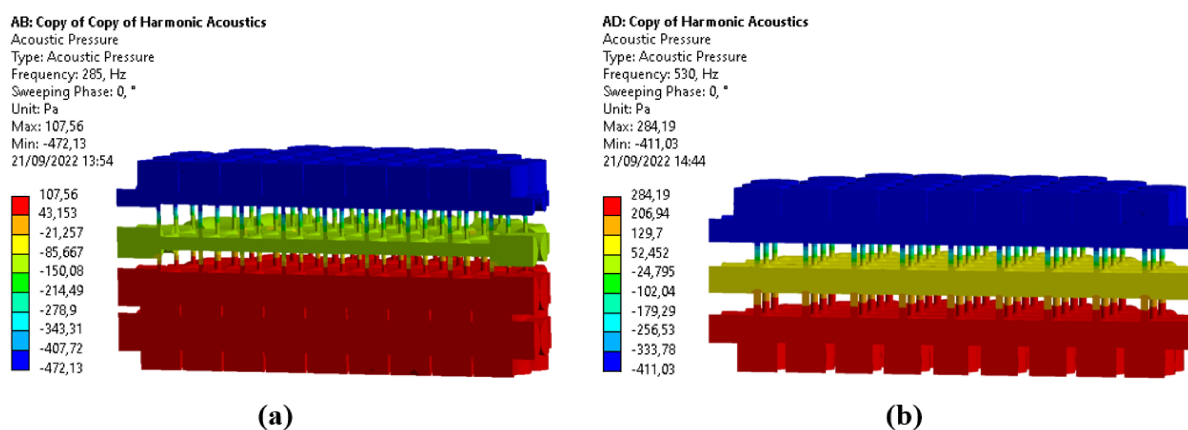


Figura 61 – Campo de pressões; (a) amostra 107x50_10,7 otimizada em 250 Hz (frequência efetiva Ansys: 285 Hz). (b) amostra 107x40_10,7 otimizada em 500 Hz (frequência efetiva Ansys: 530 Hz). Excitação aplicada na parte superior da amostra.

8 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

O Capítulo 7 mostrou o potencial do método desenvolvido para criar e otimizar um metamaterial acústico formado por rede de dutos. No entanto, para tornar a metodologia mais robusta e confiável também é necessário validá-la de forma experimental. Devido a complexidade das geometrias formadas, as amostras precisam ser fabricadas por meio de manufatura aditiva. Uma pré-avaliação destas geometrias revelou que processos tradicionais de impressão 3D, como o FDM, não conseguiriam reproduzi-las com precisão. Conforme visto na revisão bibliográfica, Zielinski et al. (2020) estudaram diferentes tecnologias para manufatura aditiva de materiais acústicos e indicaram a estereolitografia (SLA) para fabricação de metamateriais porosos. Este processo foi adotado para confecção das amostras deste estudo.

8.1 MANUFATURA ADITIVA

A fabricação das amostras foi feita em parceria com a empresa Materializa (2022) pelo método SLA em equipamento profissional, modelo Form 3L (FORMLABS, 2022), considerando espessura de camada de 0,025 mm. O material utilizado na impressão foi a resina (foto-polímero líquido) *standard grey*, cujas propriedades podem ser visualizadas no catálogo disponível em Industry (2022).

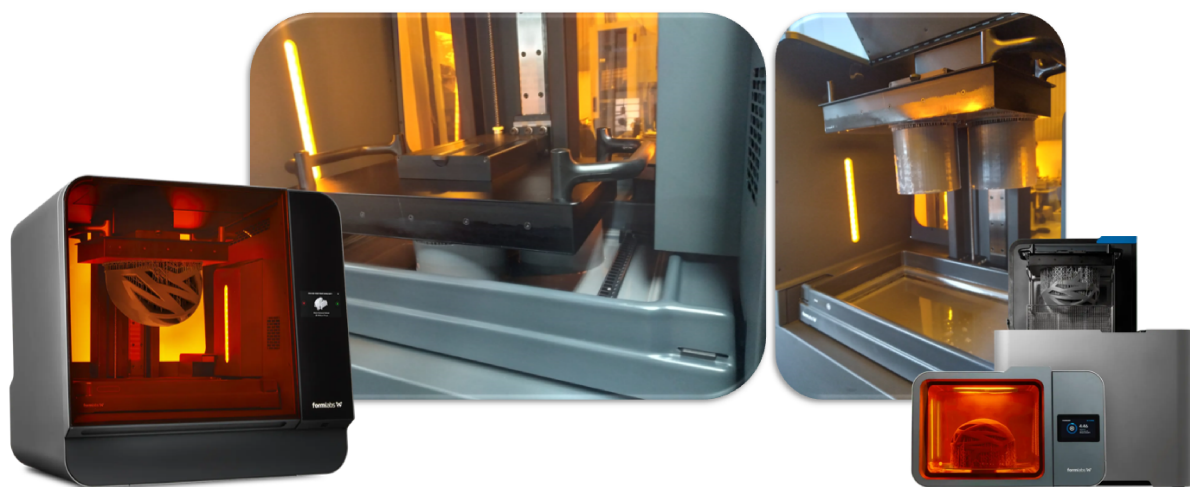


Figura 62 – Impressão das amostras por meio de estereolitografia.

Neste processo de manufatura aditiva o objeto 3D é construído camada por camada sob uma plataforma móvel (Figura 62). Essa plataforma entra em contato com um recipiente

contendo a resina líquida. Então, um laser ultravioleta atinge o recipiente e solidifica as regiões necessárias para construir a geometria (3DILLA, 2022).

Assim que uma camada é concluída, a plataforma móvel, sob a qual as camadas sólidas são alojadas, é deslocada a uma distância correspondente à espessura de camada pré-estabelecida. Desta forma, a superfície do líquido é exposta mais uma vez ao laser, que traçará uma camada nova.

Quando este processo é concluído, a amostra impressa é enxaguada em uma solução química para remover o excesso de resina. Para finalizar, se realiza a cura em um forno ultravioleta. Esse pós-processamento é necessário para endurecer a geometria.

8.2 DESCRIÇÃO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Os ensaios das amostras em tubo de impedância foram realizados conforme o procedimento descrito na Seção 3.6. O tubo possui diâmetro interno $d_t = 107$ mm e sua frequência de corte é $f_c = 1874$ Hz. A distância entre os microfones é $s_m = 80,5$ mm, assim, as frequências máximas e mínimas recomendadas são, respectivamente $f_{max} = 1914$ Hz e $f_{min} = 212$ Hz.

Os componentes da bancada experimental são exibidos na Figura 63 e identificados na Tabela 3.

Tabela 3 – Lista dos componentes utilizados no ensaio.

Item	Qtde	Descrição
1	1	Amplificador de potência Bruel & Kjaer tipo 2718
2	1	Analisador de sinais B&K Pulse 6 canais
3	1	Notebook com software LMS Test Lab
4	2	Microfone Bruel & Kjaer tipo 4189-A-021
5	1	Tubo de impedância com 107 mm de diâmetro interno

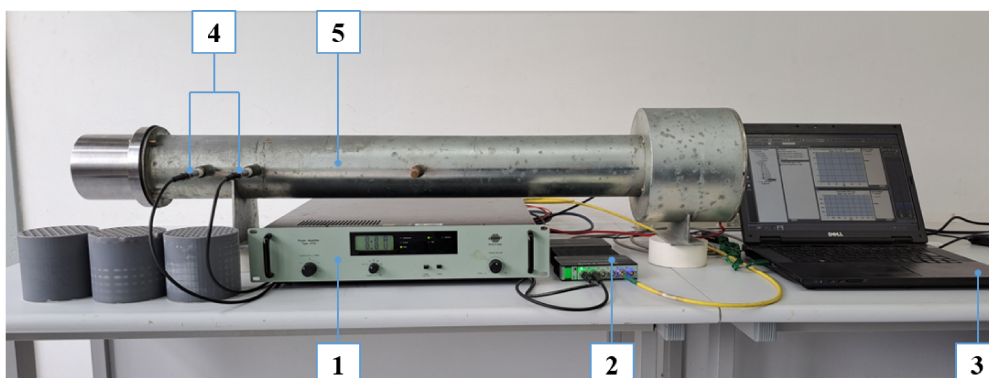


Figura 63 – Componentes da bancada.

8.3 DIMENSIONAMENTO E FABRICAÇÃO DAS AMOSTRAS

Para eleger amostras com resultado de absorção relevante na quais a impressão ocorresse com êxito, foi feita uma análise das geometrias em conjunto com a Materializa. Foi definido que as peças poderiam ter espessuras pequenas desde que tivessem um esqueleto de sustentação sólido e rígido nas laterais. Assim, alguns parâmetros precisaram ser adaptados. Foi estabelecido uma espessura lateral com no mínimo 3 mm de espessura. Para isso, as redes iniciais foram ajustadas em 103 mm de diâmetro, 10,3 mm para o tamanho da célula (T_{10}), 100 mm de altura nas amostras otimizadas em 100 e 250 Hz e 40 mm de altura na geometria otimizada em 500 Hz. As espessuras mínimas internas foram aumentadas para 0,3 mm. Assim, $D_{min} = 0,5$ mm e $D_{max} = 10$ mm. O diâmetro inicial foi definido como o valor médio dos limites inferior e superior, assim como nos casos anteriores. É importante mencionar que outros pontos iniciais diferentes do diâmetro médio para cada elemento foram testados, entretanto os resultados finais sempre apresentavam o mesmo padrão de geometria e resposta.

As redes otimizadas em 100, 250 e 500 Hz geraram três amostras com coeficiente de absorção total na frequência alvo de 0,42, 0,65 e 0,61 respectivamente. Estas geometrias foram reconstruídas em CAD e podem ser visualizadas nas Figuras 64, 65 e 66.

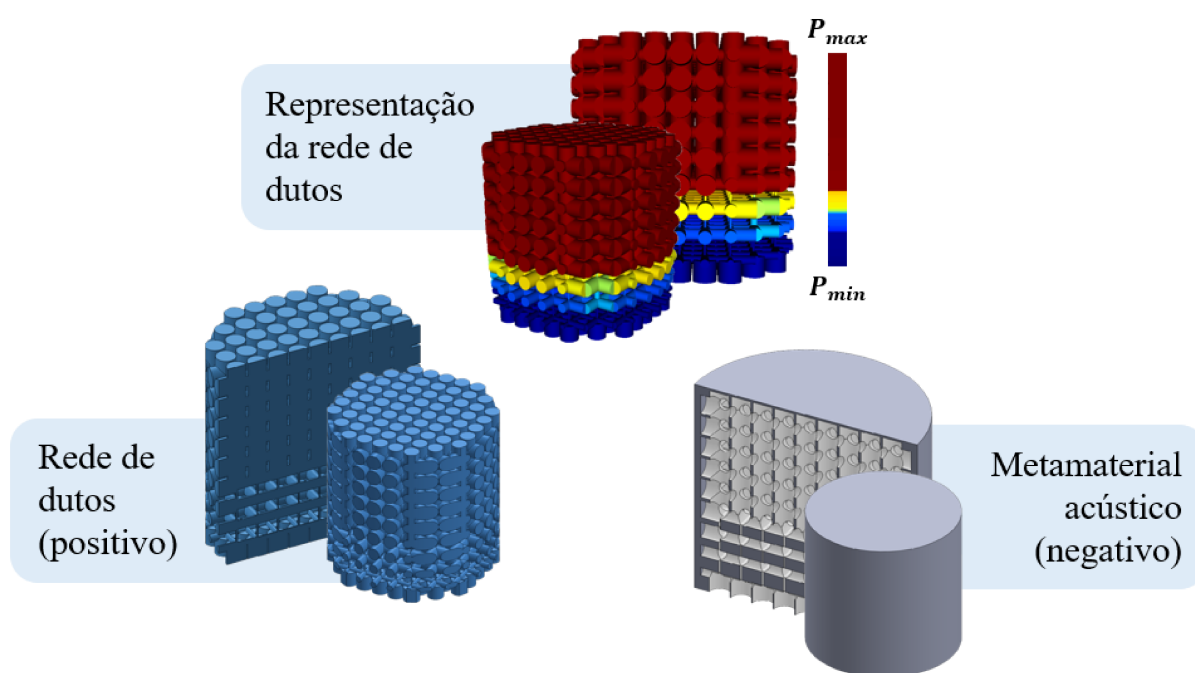


Figura 64 – Amostra otimizada em 100 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.

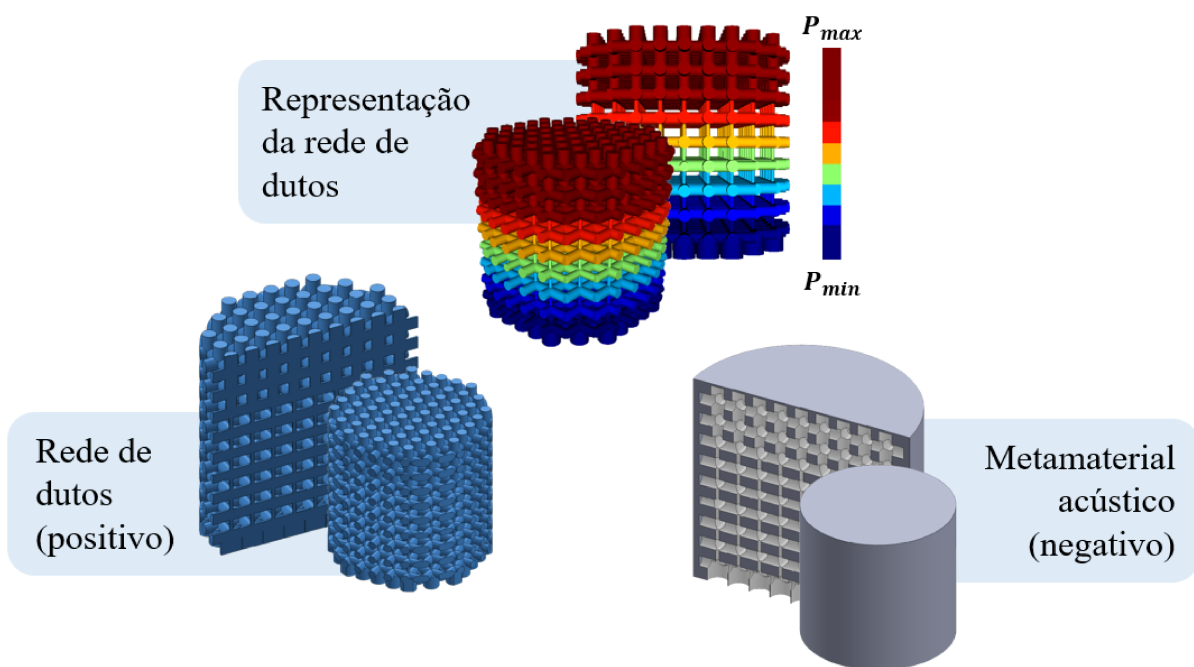


Figura 65 – Amostra otimizada em 250 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência.

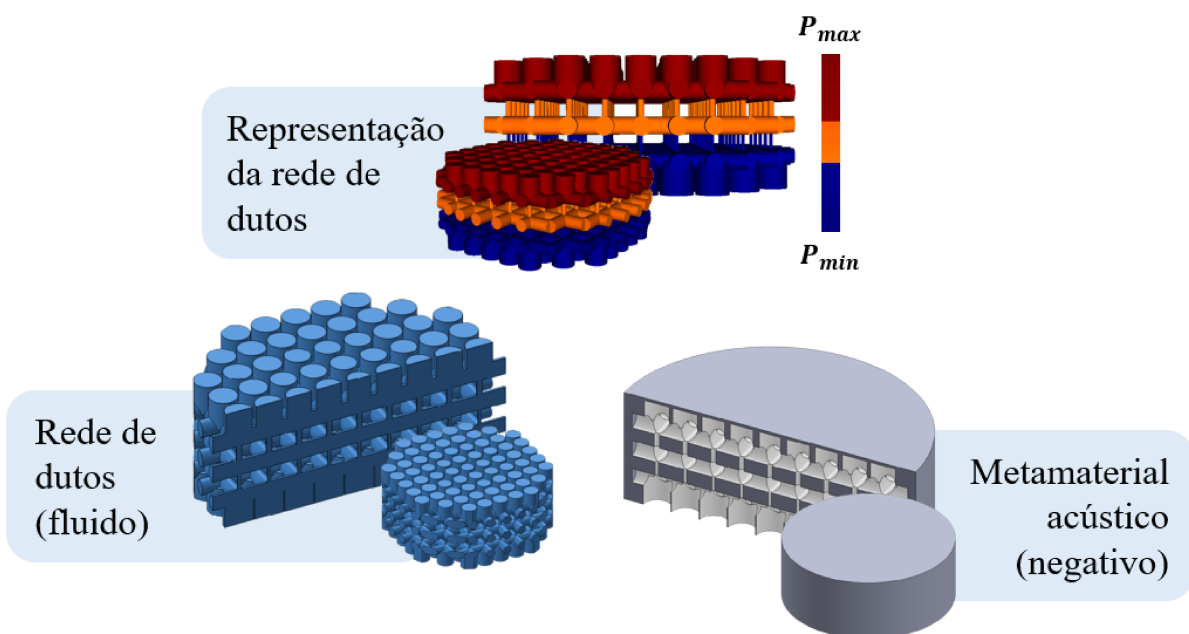


Figura 66 – Amostra otimizada em 500 Hz. Excitação aplicada na face inferior. A escala de cor representa a variação de pressão absoluta na amostra. Os valores P_{min} e P_{max} são apenas referência..

As amostras finais impressas com o apoio da empresa Materializa são exibidas na Figura 67. As peças possuem um bom acabamento superficial, entretanto algumas

imprecisões geométricas foram encontradas. Na amostra de 100 Hz, uma deformação durante a cura provocou um aumento do seu diâmetro externo. Um processo de lixamento foi executado para tentar recuperar a amostra, porém, em função da sua fragilidade, ela acabou quebrando (Figura 67a). As demais peças também apresentaram certos problemas dimensionais, como um pequeno estreitamento dos diâmetros mínimos e deformações localizadas. Tais detalhes podem ser visualizados nas Figuras 67b e 67c, respectivamente. A empresa Materializa está estudando a origem destes problemas para dar suporte ao Laboratório de Vibrações e Acústica em trabalhos futuros.

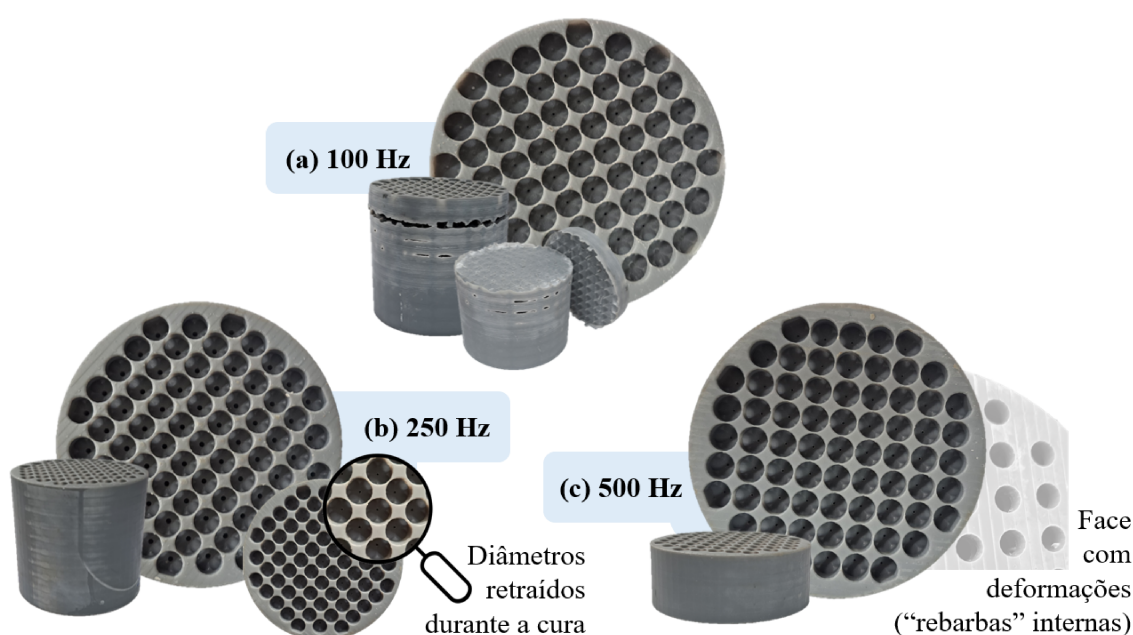


Figura 67 – Amostras finais impressas; (a) geometria otimizada em 100 Hz; (b) geometria otimizada em 250 Hz; (c) geometria otimizada em 500 Hz.

8.4 ENSAIO EM TUBO DE IMPEDÂNCIA

As duas amostras restantes foram ensaiadas em tubo de impedância para obter dados experimentais do coeficiente de absorção total. Os resultados desses ensaios foram comparados com os valores de absorção dos modelos FEM 1D e FEM 3D e são exibidos nas Figuras 68 e 69. Os coeficientes de absorção total dos modelos numéricos foram determinados a partir de uma adaptação da Equação 4.19.

Na amostra de 250 Hz a frequência de pico experimental coincidiu com a frequência de pico do modelo FEM 1D. Entretanto, os valores máximos dos coeficientes de absorção apresentaram uma pequena divergência, sendo o coeficiente experimental maior. Na amostra de 500 Hz o pico de absorção experimental se deslocou para uma frequência inferior (475

Hz) a prevista. Assim como no caso anterior, o valor total da absorção experimental é levemente maior que o projetado (FEM 1D).

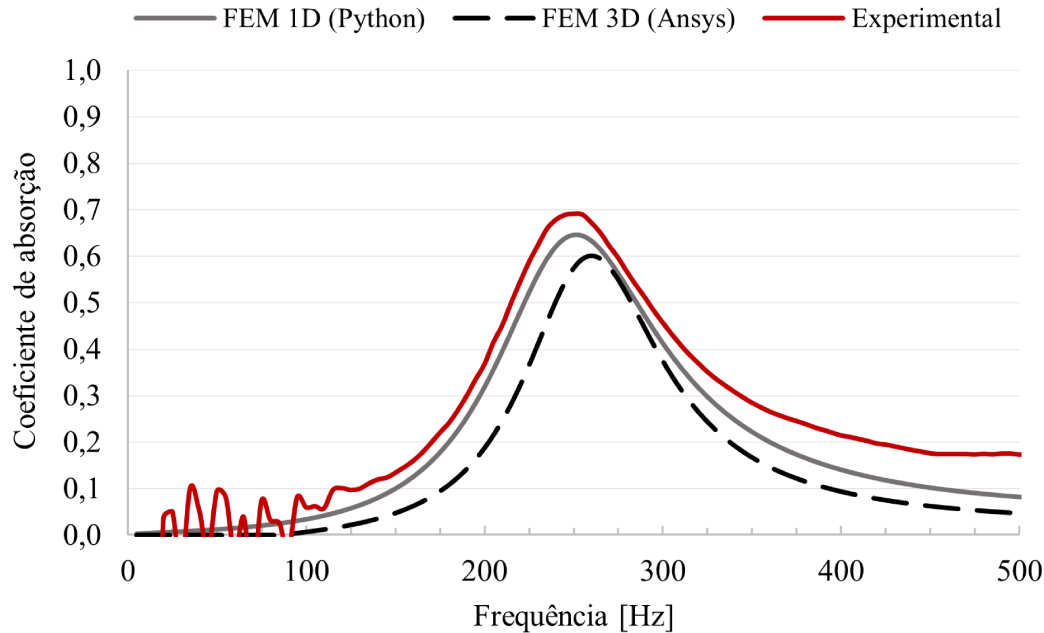


Figura 68 – Coeficiente de absorção da geometria 103x100_10,3 otimizada em 250 Hz. FEM 1D: $f = 250$ Hz e $\alpha_{\tau} = 0,65$. FEM 3D: $f = 260$ Hz e $\alpha_{\tau} = 0,60$. Experimental: $f = 250$ Hz e $\alpha_{exp} = 0,69$.

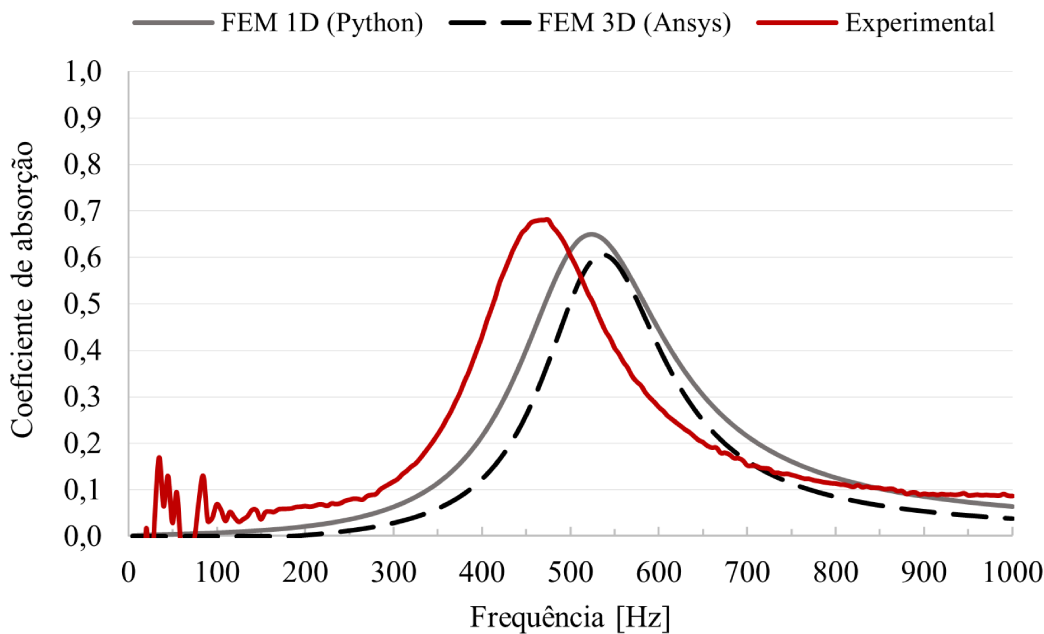


Figura 69 – Coeficiente de absorção da geometria 103x40_10,3 otimizada em 500 Hz. FEM 1D: $f = 520$ Hz e $\alpha_{\tau} = 0,65$. FEM 3D: $f = 535$ Hz e $\alpha_{\tau} = 0,61$. Experimental: $f = 475$ Hz e $\alpha_{exp} = 0,68$.

Essas discordâncias podem estar associadas às imprecisões dimensionais encontradas no processo de fabricação. Além disso, fatores como rugosidade, canais parcialmente obstruídos e deformações internas durante a cura podem ter contribuído. Estes problemas tendem a aumentar o coeficiente de absorção das amostras e também foram apontados por Zielinski et al. (2020) (vide Capítulo 2) para justificar as diferenças entre resultados numéricos e experimentais.

Na perspectiva acústica, a discrepância de resultados pode ser consequência de algumas decisões tomadas para tornar o trabalho mais prático e viável: corrigir apenas o comprimento dos elementos verticais para melhorar a representatividade entre elementos 1D e 3D; não considerar os efeitos locais no comportamento da rede de dutos (interseção entre dutos e variações sucessivas de diâmetros). Também não pode-se descartar a hipótese de que as diferenças possam ser causadas por uma possível interação entre os furos da superfície exposta a excitação.

O custo elevado da manufatura aditiva pelo método SLA impossibilitou a construção de mais amostras para esta pesquisa. No entanto, uma parceria formada a partir deste trabalho permitirá investigar novos parâmetros para impressão de protótipos com maior fidelidade e menor custo.

9 CONCLUSÕES

Os resultados obtidos com a metodologia desenvolvida para criar um metamaterial acústico a partir de uma rede de dutos com domínio inicial pré-estabelecido e diâmetro variável foram analisados e discutidos detalhadamente nos Capítulos 7 e 8. No entanto, algumas considerações finais merecem destaque.

O metamaterial foi inicialmente idealizado como uma rede de dutos que imitaria o comportamento de um material poroso, porém com bom desempenho em baixas frequências. Entretanto, foi obtido uma estrutura composta por múltiplos ressonadores com sub-comprimento de onda. Isso mostra que o modelo é abrangente o suficiente para atender vários tipos de estruturas acústicas absorvedoras. Uma adaptação do procedimento que permitisse realizar um ajuste automático do comprimento das células poderia trazer grandes benefícios.

O Método das Assíntotas Móveis convergiu e retornou metamateriais com coeficiente de absorção ótimo (mesmo que local) na frequência desejada ou em torno dela. As instabilidades iniciais na evolução do MMA podem ter causado alterações no “caminho” de busca do algoritmo, mas não impossibilitaram o encontro de mínimos locais. Um estudo com base em estratégias para maximização de grandezas dinâmicas pode ser realizado conforme o trabalho de Silva e Neves (2020).

Há uma concordância satisfatória entre os resultados FEM 1D, FEM 3D e experimentais. A superposição local das geometrias resultante da discordância entre o modelo 1D e o 3D foi uma inconveniência ponderada nesta pesquisa, e, corrigir apenas o comprimento dos elementos verticais foi uma decisão consciente. Esta escolha apresentou um bom custo-benefício quando utilizado redes base robustas. Todavia, em amostras mais finas e em baixa frequência nota-se que os efeitos dessa representatividade parcial podem ter sido subestimados. Além disso, erros intrínsecos à manufatura aditiva e os efeitos locais das discontinuidades também podem ter contribuído para divergência de resultados entre os três modelos.

No contexto geral, pode-se afirmar que o trabalho mostrou que procedimentos de otimização gradientes podem ser utilizados no desenvolvimento de absorvedores acústicos, porém há uma dependência forte das configurações de domínio. Essa dependência provavelmente impediu o método de encontrar resultados excelentes, próximos de 1.

Os designs encontrados apresentaram nível de absorção semelhante a outros materiais

já desenvolvidos na literatura por procedimentos até mais simples. Entretanto, há um potencial para o uso desta metodologia se medidas como elevar a complexidade do domínio de projeto e aumentar o número de variáveis de otimização (o que não é um fator limitante quando se trata de métodos gradientes de otimização) forem adotadas.

9.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A compreensão dos resultados obtidos permite fazer as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Adicionar uma metodologia de correção do comprimento dos elementos horizontais;
- Acrescentar os efeitos locais no comportamento das redes de dutos (interseção entre dutos e variações sucessivas de diâmetros);
- Utilizar células base diferentes;
- Usar o tamanho das células como variável de otimização;
- Avaliar os efeitos da interação entre os furos da superfície exposta à excitação da amostra;
- Avaliar o comportamento da Equação 4.19 referente à parcela da potência incidente na parede rígida. Como o sistema final é ressonante, problemas numéricos podem ter ocorrido.

BIBLIOGRAFIA

- 3DILLA. **Estereolitografia: o processo**. 2022. Disponível em: <<https://pt.3dilla.com/impressora-3d/estereolitografia/>>.
- AN, B. H.; LEE, J. W. Metamaterial-based muffler with broadband tunability in a limited space: optimal design, theoretical investigation and experiment. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 205, p. 106594, 2021.
- ANSYS, I. **Theory Guide**. Technology Drive Canonsburg, 2022.
- ARJUNAN, A.; BAROUTAJI, A.; ROBINSON, J. Advances in Acoustic Metamaterials. **Encyclopedia of Smart Materials**, v. 3, p. 1–10, 2022.
- ARJUNAN, A.; BAROUTAJI, A.; ROBINSON, J.; WANG, C. Characteristics of Acoustic Metamaterials. **Encyclopedia of Smart Materials**, v. 3, p. 35–45, 2022.
- ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. 2. ed.: Elsevier Academic Press, 2004.
- ASLAN, R.; TURAN, O. Gypsum-based sound absorber produced by 3D printing technology. **Applied Acoustics**, v. 161, p. 107162, 2020.
- ATALLA, N.; SGARD, F. **Finite Element and Boundary Methods in Structural Acoustics and Vibration**. CRC Press, 2015.
- AUTODESK. **Netfabb**. 2022. Disponível em: <<https://www.autodesk.com.br/>>.
- BENADE, A. H. On the Propagation of Sound Waves in a Cylindrical Conduit. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 44, p. 616–623, 1968.
- BENDSOE, M.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications**. Springer Berlin Heidelberg, 2003. (Engineering online library).
- BERANEK, L. L. **Acoustics**. Rev Sub: Amer Inst of Physics, 1986.
- BLACKSTOCK, D. T. **Fundamentals of Physical Acoustics**. Wiley-Interscience, 2000.
- BOULVERT, J.; CAVALIERI, T. et al. Optimally graded porous material for broadband perfect absorption of sound. **Journal of Applied Physics**, v. 126, p. 175101, 2019.
- BOULVERT, J.; COSTA-BAPTISTA, J. et al. Acoustic modeling of micro-lattices obtained by additive manufacturing. **Applied Acoustics**, v. 164, p. 107244, 2020.

CHEN, W. et al. Design of multi-layered porous fibrous metals for optimal sound absorption in the low frequency range. **Theoretical and Applied Mechanics Letters**, v. 6, p. 42–48, 2016.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An Introduction to Structural Optimization**. Springer Science, 2009. v. 153.

COX, T. J.; D'ANTONIO, P. **Acoustic Absorbers and Diffusers: Theory, Design and Application**. 2. ed.: Taylor & Francis, 2009.

DEETMAN, A. **GCMMA-MMA-Python**. 2021. Disponível em:
<<https://github.com/arjendeetman/GCMMA-MMA-Python>>.

EERDEN, F. van der. **Noise reduction with coupled prismatic tubes**. 2000. Tese (Doutorado) – University of Twente.

FAHY, F. **Sound Intensity**. Elsevier Applied Science, 1989.

FAHY, F.; GARDONIO, P. **Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response**. 2. ed.: Elsevier, 2007.

FAN, J. et al. A review of additive manufacturing of metamaterials and developing trends. **Materials Today**, v. 50, p. 303–328, 2021.

FLEURY, C.; BRAIBANT, V. Structural Optimization: a new dual method using mixed variables. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 23, p. 409–428, 1986.

FORMLABS. **Formlabs Form 3L**. 2022. Disponível em:
<<https://formlabs.com/3d-printers/form-3l/>>.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 8. ed.: LTC, 2014.

GAO, N.; WANG, B.; LU, K. et al. Teaching-learning-based optimization of an ultra-broadband parallel sound absorber. **Applied Acoustics**, v. 178, p. 107969, 2021.

GAO, N.; WANG, M.; CHENG, B. et al. Inverse design and experimental verification of an acoustic sink based on machine learning. **Applied Acoustics**, v. 180, p. 108153, 2021.

GORBUSHIN, N.; NAILI, S.; NGUYEN, V.-H. Optimizing microstructure of a poroelastic layer with cylindrical pores for absorption properties. **Mechanics Research Communications**, v. 102, p. 103422, 2019.

- IBERALL, A. S. Attenuation of Oscillatory Pressures in Instrument Lines. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, v. 45, p. 85–108, 1950.
- INDUSTRY, D. **Formlabs Standart Grey**. 2022. Disponível em:
<<https://pdf.directindustry.com/pdf/formlabs/standard/160746-827277.html>>.
- ISO:10534-2. **Acoustics. Determination of sound absorption coefficient and impedance in impedance tubes Transfer-function method**. 2001.
- JACOBSEN, F.; JUHL, P. M. **Fundamentals of General Linear Acoustics**. 1. ed.: John Wiley & Sons, Inc, 2013.
- JENSEN, J. S. **Adjoint sensitivity analysis for linear dynamic systems with time-harmonic excitation**. 2017. Course notes for topopt. Technical University of Denmark.
- JIMÉNEZ, N.; UMNOVA, O.; GROBY, J.-P. **Acoustic Waves in Periodic Structures, Metamaterials, and Porous Media: From Fundamentals to Industrial Applications**. 1. ed.: Springer, 2021.
- JOHNSTON, W.; SHARMA, B. Additive manufacturing of fibrous sound absorbers. **Additive Manufacturing**, v. 41, p. 101984, 2021.
- KAMPINGA, R. **Viscothermal acoustics using finite elements – analysis tools for engineers**. 2010. Tese (Doutorado) – Universiteit Twente, The Netherlands.
- KAMPINGA, W. R.; WIJNANT, Y. H.; BOER, A. de. Performance of Several Viscothermal Acoustic Finite Elements. **Acta Acustica united with Acustica**, v. 96, p. 115–124, 2010.
- KINGMA, D. P.; BA, J. **Adam: A Method for Stochastic Optimization**. 2017. arXiv: 1412.6980 [cs.LG].
- KORENEV, B. G. **Bessel functions and their applications**. 277. ed.: Taylor & Francis, 2002.
- KUIPERS, E. R.; WIJNANT, Y. H.; BOER, A. de. Measuring Sound Absorption: Considerations on the Measurement of the Active Acoustic Power. **Acta Acustica united with Acustica**, v. 100, p. 193–204, 2014.
- KUSCHMITZ, S. et al. Design and Additive Manufacturing of Porous Sound Absorbers—A Machine-Learning Approach. **Materials**, v. 14, p. 1747, 2021.

KUTTRUFF, H. **Acoustics: An Introduction**. Spon Press, 2006.

LAGARRIGUE, C. et al. Design of metaporous supercells by genetic algorithm for absorption optimization on a wide frequency band. **Applied Acoustics**, v. 102, p. 49–54, 2016.

LIU, X.; YU, C.; XIN, F. Gradually perforated porous materials backed with Helmholtz resonant cavity for broadband low-frequency sound absorption. **Composite Structures**, v. 263, p. 113647, 2021.

MAREZE, P. H. et al. Modeling of acoustic porous material absorber using rigid multiple micro-ducts network: Validation of the proposed model. **Journal of Sound and Vibration**, v. 443, p. 376–396, 2019.

MAREZE, P. H. **Análise da influência da microgeometria na absorção sonora de materiais porosos de estrutura rígida**. 2013. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

MARTINS, G. C. **Modelagens acústicas incluindo efeitos viscotérmicos com vistas à aplicação em alto-falantes de aparelhos auditivos**. 2011. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

MARTINS, J. R. R. A.; NING, A. **Engineering Design Optimization**. Cambridge University Press, 2021.

MATERIALIZA. **Materializa**. 2022. Disponível em: <<https://materializa.com.br/>>.

MUNJAL, M. L. **Acoustics of Ducts and Mufflers**. 2. ed.: John Wiley & Sons, Inc, 2014.

N. ALMEIDA, G. do et al. Low-frequency sound absorption of a metamaterial with symmetrical-coiled-up spaces. **Applied Acoustics**, v. 172, p. 107593, 2021.

OPIELA, K. C.; ZIELIŃSKI, T. G. Microstructural design, manufacturing and dual-scale modelling of an adaptable porous composite sound absorber. **Composites Part B**, v. 187, p. 107883, 2020.

PETYT, M. **Finite element techniques for acoustics**. In: **Theoretical Acoustics and Numerical Techniques**. 277. ed.: Springer, 1983.

PIERCE, A. D. **Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications**. 3. ed.: Springer, 2019.

- RICE, H. et al. Design of a Kelvin cell acoustic metamaterial. **Journal of Sound and Vibration**, v. 472, p. 115167, 2020.
- RIZZATTI, R. S. **Uso de metamaterial no tratamento acústico de painel duplo**. 2019. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina.
- SILVA, O. M.; CANCELIER, T. F.; LENZI, A. **Robust design of acoustic metamaterials modeled as rigid micro-ducts networks**. 2022. Submitted. MOPT/UFSC.
- SILVA, O. M.; NEVES, M. M. A strategy based on the strain-to-kinetic energy ratio to ensure stability and convergence in topology optimization of globally resonating one-material structures. **John Wiley & Sons, Inc**, v. 121, p. 3636–3659, 2020.
- SILVA, O. M.; NEVES, M. M.; LENZI, A. On the use of active and reactive input power in topology optimization of one-material structures considering steady-state forced vibration problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 464, 2020.
- SILVA CASTRO, M. da. **Preservação de forma em estruturas vibrantes através de otimização topológica**. 2017. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina.
- SOUSA, A. C. de et al. On the assembly of Archimedean spiral cavities for sound absorption applications: Design, optimization and experimental validation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 147, p. 107102, 2021.
- SVANBERG, K. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 359–373, 1987.
- THE FREECAD TEAM. **FreeCAD**. 2022. Disponível em: <<https://www.freecadweb.org/>>.
- TIJDEMAN, H. On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 39, p. 1–33, 1975.
- TORTORELLI, D. A.; MICHALERIS, P. Design Sensitivity Analysis: Overview and review. **Inverse Problems in Engineering**, v. 1, p. 71–105, 1994.
- WANG, X.; MA, L. et al. Design of multilayer sound-absorbing composites with excellent sound absorption properties at medium and low frequency via constructing variable section cavities. **Composite Structures**, v. 266, p. 113798, 2021.

WANG, Y.; WANG, Y. et al. Broadband low-frequency sound absorption by coiled-up space embedded in a porous layer. **Applied Acoustics**, v. 182, p. 108226, 2019.

WU, P. et al. Acoustic absorbers at low frequency based on split-tube metamaterials. **Physics Letters A**, v. 383, p. 2361–2366, 2019.

YANG, X. et al. Optimal design and experimental validation of sound absorbing multilayer microperforated panel with constraint conditions. **Applied Acoustics**, v. 146, p. 334–344, 2019.

YOON, W. U. et al. Topology optimization design for total sound absorption in porous media. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, p. 112723, 2019.

ZHAO, L.; LIN, T. R. A turned double-layer microperforated panel for low frequency sound absorption in enclosures with limited cavity space. **Applied Acoustics**, v. 188, p. 108594, 2022.

ZHAO, T.; CHEN, Y. et al. Tunable network sound absorber based on additive manufacturing. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 150, p. 94–101, 2021.

ZIELINSKI, T. G. et al. Reproducibility of sound-absorbing periodic porous materials using additive manufacturing technologies: Round robin study. **Additive Manufacturing**, v. 36, p. 101564, 2020.

ZWIKKER, C.; KOSTEN, C. W. **Sound Absorbing Materials**. Elsevier, 1949.