

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS BLUMENAU  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Victor Antônio Lima do Nascimento

**Introdução à Função de Green**

Blumenau  
2022

Victor Antônio Lima do Nascimento

## **Introdução à Função de Green**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.  
Orientador: Prof. Felipe Vieira, Dr.

Blumenau  
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Nascimento, Victor Antônio Lima do  
Introdução à função de Green / Victor Antônio Lima do  
Nascimento ; orientador, Felipe Vieira, 2022.  
49 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau,  
Graduação em Matemática, Blumenau, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Função delta de Dirac. 3. Equação  
Diferencial Parcial de Poisson. 4. Função de Green. I.  
Vieira, Felipe . II. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Graduação em Matemática. III. Título.

Victor Antônio Lima do Nascimento

## **Introdução à Função de Green**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado(a) em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau, 12 de dezembro de 2022.

---

Prof. Francis Felix Cordova Puma, Dr.  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Felipe Vieira, Dr.  
Orientador  
UFSC

---

Prof. Maicon José Benvenutti, Dr.  
Avaliador  
UFSC

---

Prof. Renan Gambale Romano, Dr.  
Avaliador  
UFSC

Este trabalho é dedicado a todos aqueles que me auxiliaram  
nessa caminhada, principalmente a minha família.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente aos meus pais e irmãos por sempre me apoiarem quando eu precisei, principalmente meu pai Francisco por sempre estar ao meu lado me aconselhando e auxiliando, minha mãe Luzia por torcer por mim e meu irmão Bruno por me mostrar como um irmão deve ser. Também, a minha tia Rosineis por me escutar sempre que eu precisei desabafar.

Ao meu orientador, professor Dr. Felipe Vieira, pois além da amizade e de contribuir significativamente para este trabalho, me mostrou muito sobre como é ser um ótimo profissional. Também por me convidar e me incentivar a participar de projetos, me apoiando sempre que necessário. Aproveito para agradecer a ele e sua esposa Dra. Louise Reips pelos conselhos e risadas.

Aos professores Dr. Maicon José Benvenuti, Dr. Renan Gambale Romano e Dr. Eleomar Cardoso Júnior por além de serem excelentes profissionais, serem também dedicados e preocupados.

Aos professores Dr. Rafael Aleixo de Carvalho, Dr. Luiz Rafael dos Santos e professora Dra. Laís Cristina Viel Gereti, pelos questionamentos e ensinamentos para a vida.

Ao professor Dr. André Vanderlinde da Silva, por ser um professor sensível aos seus alunos e estar lá para apoiar eles.

Aos demais professores e servidores da UFSC que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Aos meus amigos e amigas Adriana, Jhuliene, Nicolý e Victor, pelas conversas e risadas. Em especial para Aline e Ana por serem incríveis e estarem presentes na minha vida, sempre me motivando, me fazendo rir e não me deixando desistir.

A graduação é algo que almejei desde meus 4 anos de idade, por isso, estar conseguindo concluir esta etapa é tão importante e

feliz para mim. Ainda há muito o que realizar, sei que assim como a graduação não foi somente flores, o que terei pela frente não será somente espinhos. Esse caminho de graduação me fez ter momentos incríveis, me ajudaram a crescer e me permitiu conhecer pessoas incríveis, por isso, a todos que participaram de alguma forma dessa minha caminhada, meu mais sincero obrigado.

*“A Matemática é como um moinho de café  
que mói admiravelmente o que se lhe dá para moer,  
mas não devolve outra coisa senão o que se lhe deu.”*  
*(FARADAY)*



## RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo entender o teorema da função de Green em dimensão 3 para uma aplicação particular que resolva a Equação Diferencial Parcial de Poisson. Preliminarmente, estudaremos conceitos referentes ao cálculo vetorial, prosseguindo para uma introdução às Equações Diferenciais Parciais e, por fim, a função delta de Dirac.

**Palavras-chave:** Função delta de Dirac. Equação Diferencial Parcial de Poisson. Função de Green.

## ABSTRACT

The present work aims to understand the theorem of the function of Green in dimension 3 for a particular application that solves the Poisson Partial Differential Equation. Preliminarily, we will study concepts related to vector calculus, proceeding to a introduction to Partial Differential Equations and, finally, the Dirac delta function.

**Keywords:** Dirac delta function. Poisson Partial Differential Equation. Green's function.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Caminho Fechado ( $C_1 \cup C_2 = C$ ). . . . .	17
Figura 2 – $x$ fixado. . . . .	21
Figura 3 – $y$ fixado. . . . .	22
Figura 4 – Caixa $K$ . . . . .	26
Figura 5 – Caixa $K_1 \cup K_2$ . . . . .	27
Figura 6 – Representação de Parametrização. . . . .	30
Figura 7 – Representação da área de uma superfície. . . . .	31
Figura 8 – Representação das Partições de uma Superfícies. . . . .	33
Figura 9 – Representação da delta de Dirac com $a = 2$ . . . . .	41
Figura 10 – Representação do impulso de área 1. . . . .	41
Figura 11 – Representação da Propriedade da Filtragem. . . . .	43

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>INTEGRAIS DE LINHA</b>	<b>13</b>
2.1	CAMPOS, OPERADORES ESCALARES E VETORIAIS	13
2.2	INTEGRAL DE LINHA	14
2.3	TEOREMA DE GREEN	24
2.4	SUPERFÍCIES	29
<b>3</b>	<b>INTRODUÇÃO ÀS EDP</b>	<b>35</b>
3.1	LINEARIDADE E SUPERPOSIÇÃO	37
<b>4</b>	<b>TEOREMA DA FUNÇÃO DE GREEN</b>	<b>40</b>
4.1	FUNÇÃO DELTA DE DIRAC	40
4.2	FUNÇÃO DE GREEN	44
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>48</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>49</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Resolver Equações Diferenciais Parciais (EDP) é importante para conseguir modelar certas situações. Neste sentido, este trabalho será voltado ao entendimento do Teorema da função de Green para resolver a EDP de Poisson.

Inicialmente, no Capítulo 2, será abordado o cálculo vetorial com alguns de seus resultados mais importantes, como o teorema fundamental das integrais de linha, independência de caminhos e campos conservativos. Outros resultados que provém do cálculo vetorial são referentes à superfícies, tendo como principal ponto a integral de superfície.

Com os conceitos de cálculo, adentraremos ao estudo introdutório de EDPs no Capítulo 3, começando com a forma padrão na qual uma EDP é escrita. Serão apresentados alguns conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) para EDPs, como o conceito de ser ou não homogênea, linearidade, grau, entre outros.

Ainda nesse capítulo será abordado um resultado importante chamado princípio da superposição, que nos diz ser possível associar à EDP não homogênea a EDP linear homogênea.

Finalmente, será abordado a equação de Poisson utilizando a função de Green. Como o resultado modela o impulso, se faz necessário o estudo e entendimento da função conhecida como impulso unitário, a chamada função delta de Dirac, esta que não é propriamente uma função, pois, é definida de uma maneira nada convencional. Essa função do impulso é um importante aliado para demonstrar o teorema da Função de Green.

Espera-se que o leitor tenha conhecimento sobre cálculo vetorial, pois, este trabalho não possui como foco ensinar cálculo vetorial, somente relembrar alguns dos conceitos importantes relacionados.

## 2 INTEGRAIS DE LINHA

Como são importantes algumas noções prévias, iremos apresentar alguns aspectos importantes do cálculo vetorial. Para tal, começaremos com as noções de campos.

### 2.1 CAMPOS, OPERADORES ESCALARES E VETORIAIS

Para as definições a seguir, utilizaremos como base o livro na referência [4].

- **Campos escalares:** Dizemos que  $f$  define um campo escalar sobre uma região  $\Omega$  contida em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , quando as imagens de pontos em  $\Omega$  pela  $f$  são números reais.
- **Campos vetoriais:** Dizemos que  $f$ , uma função vetorial, define um campo vetorial sobre  $\Omega$  contido em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , quando as imagens de vetore em  $\Omega$  pela  $f$  são vetores.
- **Operadores em  $\mathbb{R}^3$ :**

– Operador  $\nabla$  é um operador diferencial dado como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k};$$

– Operador Gradiente ( $\nabla f$ ): Seja  $f$  uma função escalar de três variáveis. O gradiente de  $f$  é um vetor definido por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} = \text{grad } f;$$

– Operador Divergente ( $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ): é um escalar, calculado a partir de um campo vetorial  $\mathbf{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$  como

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \hat{k} = \text{div } \mathbf{F};$$

- Operador Rotacional ( $\nabla \times \mathbf{F}$ ): é um vetor calculado a partir de um campo vetorial  $\mathbf{F}$  em um ponto definido por

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{F}.$$

Com  $P$ ,  $Q$  e  $R$  escalares associados ao campo;

- Operador Laplaciano ( $\Delta$ ): é dado pelo divergente do gradiente ( $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ ), definido por

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

É importante ter em mente que o operador Laplaciano, citado acima, será o operador utilizado no resultado final deste trabalho.

Agora, com um pouco mais de entendimento sobre campos e operadores vetoriais, iremos adentrar em integrais de linhas.

Para o desenvolvimento dos subcapítulos seguintes (2.2, 2.3 e 2.4), utilizaremos [2], [3] e [6], sendo que os exemplos são retirados de [2] e [3].

## 2.2 INTEGRAL DE LINHA

Uma integral de linha é dada sobre uma curva. Considere um campo vetorial contínuo e um conjunto  $\Omega$  aberto, tal que  $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ainda, considere a curva  $C$  definida por  $\mathbf{r}(t)$  de classe  $C^1$ , com  $a \leq t \leq b$ . Definimos a integral de linha de  $\mathbf{F}$  sobre  $C$  como

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}'(t) dt.$$

**Exemplo 2.2.1.** Tome  $\mathbf{F}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$  e  $\gamma(t) = (t, t^2)$ , com  $t \in [-1, 1]$ .

Começaremos substituindo os itens fornecidos no enunciado na definição de integral de linha, assim conseguimos

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}'(t) dt .$$

Daí:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(t, t^2) = t\hat{i} + t^2\hat{j}.$$

Ainda, temos que

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 2t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}'(t) dt &= \int_{-1}^1 (t\hat{i} + t^2\hat{j})(1\hat{i} + 2t\hat{j}) dt \\ &= \int_{-1}^1 t + 2t^3 dt \\ &= \int_{-1}^1 t dt + \int_{-1}^1 2t^3 dt \\ &= \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{t=-1}^{t=1} + \left[ \frac{t^4}{2} \right]_{t=-1}^{t=1} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Perceba também, que a função que foi integrada no exemplo é uma função ímpar, e portanto, seu resultado em uma integral definida com intervalo simétrico deve ser zero.

Um resultado importante quando se fala de integrais de linha é o Teorema Fundamental das Integrais de Linha, que, basicamente é uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) só que no contexto de integrais de linhas. Lembrando que o TFC é dado por  $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$ , enunciamos o seguinte teorema.



**Teorema 2.2.2.** *Seja  $C$  uma curva suave definida por  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Seja  $f$  uma função diferenciável com  $\nabla f$  contínuo em  $C$ . Então,*

$$\int_C \nabla f \, d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ \text{(pela Regra da Cadeia)} &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) dt \\ \text{(utilizando o TFC)} &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)). \end{aligned}$$

□

Ou seja, o Teorema 2.2.2 nos diz que a integral de linha de um campo conservativo (Definição 2.2.5) independe do caminho (Definição 2.2.3) traçado.

Outros resultados importantes que seguirão, são os conceitos de independência do caminho e campos conservativos.

Para termos a ideia de independência do caminho para integrais de linha, suponha  $C_1$  e  $C_2$  duas curvas suaves por partes que possuem o mesmo ponto inicial e final. Desta forma se  $f$  for contínua, temos pelo Teorema 2.2.2 que  $\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ . Perceba que a independência do caminho só é válida se  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Neste caso temos a chamada função potencial que será enunciada no próximo capítulo.

**Definição 2.2.3.** *Dizemos que a integral de linha  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho se*

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são dois caminhos quaisquer no aberto  $\Omega$ , com os mesmos pontos iniciais e finais, e  $\mathbf{F}$  um campo vetorial contínuo em  $\Omega$ .

**Teorema 2.2.4.** A integral  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho em  $\Omega$  se, e só se,  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para todo caminho fechado  $C$  em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Dado um caminho  $C$ , divida-o em dois caminhos  $C_1$  e  $C_2$ , tal que  $C_1 \cup C_2 = C$ :

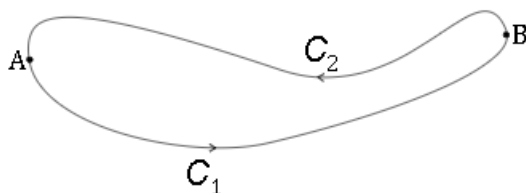


Figura 1 – Caminho Fechado ( $C_1 \cup C_2 = C$ ).

Assim, temos que,  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ . Logo

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \iff \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

□

Uma observação referente à demonstração anterior é que o caminho  $-C_2$  é simplesmente o caminho  $C_2$  tomado no sentido horário, assim, é necessário inverter seus limites de integração, ou seja,

$$\int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Se  $C$  é um caminho fechado, denotaremos sua integral como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

A seguir, trataremos sobre campos conservativos, e aproveitaremos para definir função potencial.

**Definição 2.2.5.** *Um campo vetorial é dito conservativo quando para  $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\Omega$  aberto, existe um campo escalar diferenciável  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = \mathbf{F}$  em  $\Omega$ . Essa  $f$  é denominada função potencial de  $\mathbf{F}$ .*

Agora, iremos enunciar o Teorema de Schwarz, que facilitará a demonstração do teorema que nos fornece uma condição para  $\mathbf{F}$  ser conservativo.

**Teorema 2.2.6.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar de classe  $C^2$ . Então, para qualquer ponto  $(x, y) \in \Omega$ , temos que:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

**Teorema 2.2.7.** *Uma condição necessária para um campo vetorial  $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$  no aberto  $\Omega$ , ser conservativo é que  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Suponha  $\mathbf{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ . Supondo  $\mathbf{F}$  conservativo, existirá  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = \mathbf{F}$ , que é o equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R,$$

com  $P$ ,  $Q$  e  $R$  definidos em  $\Omega$ .

Agora, perceba que como  $\mathbf{F}$  é de classe  $C^1$ , a  $f$  é de classe  $C^2$ . Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = P &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \end{aligned}$$

Como  $f$  é  $C^2$ , segue pelo Teorema 2.2.6 que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

em  $\Omega$ . De modo análogo, conseguimos que:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Ainda, como o rotacional é dado por  $\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F}$  temos que:

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial R}{\partial y} \hat{i} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{j} + \frac{\partial Q}{\partial x} \hat{k} - \frac{\partial P}{\partial y} \hat{k} - \frac{\partial R}{\partial x} \hat{j} - \frac{\partial Q}{\partial z} \hat{i} \\ &= \frac{\partial R}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial Q}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{j} - \frac{\partial R}{\partial x} \hat{j} + \frac{\partial Q}{\partial x} \hat{k} - \frac{\partial P}{\partial y} \hat{k}. \end{aligned}$$

E, portanto  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  em  $\Omega$ . □

O teorema seguinte servirá para entendermos quando um campo é conservativo.

**Teorema 2.2.8.** *Se  $\mathbf{F} = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$  é um campo vetorial conservativo, onde  $P$  e  $Q$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em  $\Omega$ , então em todos os pontos  $\Omega$ , temos*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

*Demonstração.* Segue pelo Teorema 2.2.6 (Schwarz).  $\square$

Antes de enunciarmos o próximo teorema, lembre que um conjunto aberto  $\Omega$  é conexo por caminhos se, dados dois pontos distintos em  $\Omega$ , existe uma poligonal que liga ambos os pontos.

Uma segunda observação é que uma curva  $C$  definida através de  $\mathbf{r}$  é  $C^1$  por partes, se for contínua e se existir uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  e curvas  $C_i$  definidas por  $\mathbf{r}_i(t) : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  de classe  $C^1$ , tais que, para todo  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ , vale que  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_i(t)$ .

**Teorema 2.2.9.** *Seja  $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial contínuo no aberto  $\Omega$  conexo por caminhos. São equivalentes as afirmações:*

1.  $\mathbf{F}$  é conservativo;
2.  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para toda curva  $C$ , fechada,  $C^1$  por partes, com imagem de  $C$  contida em  $\Omega$ ;
3.  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  independe do caminho de integração em  $\Omega$ .

*Demonstração.* 1  $\implies$  2: Segue do Teorema Fundamental das Integrais de Linha 2.2.2, pois  $\mathbf{F}$  é um campo conservativo.

2  $\implies$  3: A demonstração segue do Teorema 2.2.4.

3  $\implies$  1: Por definição, um campo é conservativo quando existe uma função potencial associada a ele, ou seja, estaremos interessados em construir esta função potencial. Façamos essa demonstração em <sup>2</sup> e, para tal, a separaremos em duas etapas, a primeira será fixando o  $x$  e a segunda fixando  $y$ .

Como por hipótese a integral de linha  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho, podemos modelar a curva  $C$  que desenha o caminho do ponto  $(a, b) \in \Omega$  até o ponto  $(x, y) \in \Omega$  em duas curvas,

tal que a primeira curva ( $C_1$ ) desenha o caminho do ponto  $(a, b)$  até um ponto  $(x_1, y) \in \Omega$  e a segunda curva ( $C_2$ ) desenha o caminho do ponto  $(x_1, y)$  até o ponto  $(x, y)$ , com  $x_1 < x$ . Assim, para o primeiro caminho estaremos interessados em calcular  $\frac{\partial}{\partial x}$  e, no segundo,  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Veja que  $(x_1, y)$  pode ser tomado em  $\Omega$  pois este é aberto, e essa construção está ilustrada na Figura 2. Fica evidente que a ideia da construção é apenas para facilitar a demonstração, pois como a integral na curva  $C$  é independente do caminho, o resultado final pelas integrais das curvas  $C_1$  e  $C_2$  será o mesmo.

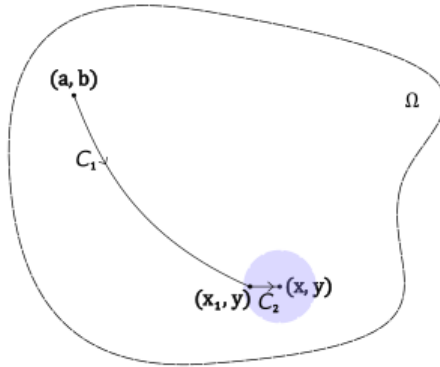


Figura 2 –  $x$  fixado.

Veja que os caminhos  $C_1$  e  $C_2$  estão em  $\Omega$ , o que foi possível pois  $\Omega$  é conexo por caminhos. Logo,

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Como a primeira dessas integrais é constante para  $x$ , temos que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Pondo  $\mathbf{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$ , temos,

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{C_2} Pdx + Qdy.$$

Em  $C_2$  temos que  $y$  é constante, portanto a integral em relação ao  $dy$  é nula, como ilustrado na Figura 2.

Usando  $t$  como parâmetro, onde  $x_1 \leq t \leq x$ , temos,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} Pdx + Qdy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(t, y)dt = P(x, y).$$

De modo análogo, conseguimos construir para  $Q$ ,

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} Pdx + Qdy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^y Q(x, t)dt = Q(x, y).$$

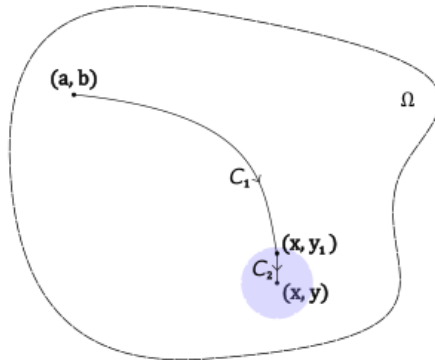


Figura 3 –  $y$  fixado.

Logo,  $\mathbf{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} = \nabla f$ , que é a função potencial de  $\mathbf{F}$ , portanto o campo  $\mathbf{F}$  é conservativo.  $\square$

A demonstração do teorema foi feita utilizando  $\mathbf{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$  e separando em duas construções, uma envolvendo  $P$  e a outra  $Q$ , fazendo uma ser constante e a outra variar, como nas figuras 2 e 3.

**Exemplo 2.2.10.** *Verifique se o campo  $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\hat{i} + (x - 2)\hat{j}$  é conservativo.*

*Sejam  $P(x, y) = x - y$  e  $Q(x, y) = x - 2$ . Pelo Teorema 2.2.8, como*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

*segue que o campo não é conservativo.*

Antes de verificarmos no próximo exemplo se o campo vetorial é ou não conservativo, precisaremos enunciar um teorema, que funciona como uma espécie de recíproca pro Teorema 2.2.8.

Para tal, dizemos que uma região  $\Omega$  é dita simplesmente conexa quando não possui buracos e também quando não é formada por regiões disjuntas.

**Teorema 2.2.11.** *Se  $\mathbf{F} = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$  um campo vetorial em uma região aberta simplesmente conexa  $\Omega$ . Suponha que  $P$  e  $Q$  tenham derivadas contínuas de primeira ordem em todos os pontos de  $\Omega$  e*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

*então  $\mathbf{F}$  é conservativo.*

**Exemplo 2.2.12.** *Verifique se o campo  $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\hat{i} + (x^2 - 3y^2)\hat{j}$  é conservativo.*

*Sejam  $P(x, y) = 3 + 2xy$  e  $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$ . Assim, pelo teorema anterior, como*



$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

segue que o campo é conservativo.

Para encontrar sua função potencial  $f$ , veja que como já sabemos que o campo é conservativo, temos que  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Assim

$$f_x(x, y) = 3 + 2xy = P(x, y), \quad (1)$$

$$f_y(x, y) = x^2 - 3y^2 = Q(x, y). \quad (2)$$

Agora, iremos integrar (1) em relação a  $x$ , obtendo

$$f(x, y) = 3x + x^2y + g(y), \quad (3)$$

em que  $g(y)$  é uma função constante em relação a  $x$ . Seguindo, iremos derivar (3) em relação a  $y$ ,

$$f_y(x, y) = x^2 + g'(y). \quad (4)$$

Assim, comparando (2) com (4) descobrimos que  $g'(y) = -3y^2$ , que quando integrado em relação a  $y$  nos fornece  $g(y) = -y^3 + k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ . Por fim, substituindo em (3), temos que,

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + k,$$

que é a função potencial de  $F$ .

### 2.3 TEOREMA DE GREEN

Nesta seção iremos enunciar e demonstrar o Teorema de Green para um retângulo e então apresentar alguns exemplos. Após, iremos enunciar o Teorema de Green de forma mais ampla e também algumas aplicações.

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $C$  a fronteira de um retângulo  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subset \Omega$  orientada no sentido anti-horário, com  $\Omega$  aberto. Suponha que  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  sejam de classe  $C^1$  em  $\Omega$ . Então*

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_K \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy.$$

**Observação 2.3.2.** *Perceba que neste contexto  $dxdy$  são unidades de área, ou seja  $dxdy = dA$ .*

*Demonstração.* Iremos provar somente para  $P$ , pois para  $Q$  será análogo. Assim, precisamos provar que:

$$\int_C Pdx = - \iint_K \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Para tal, pondo  $x$  como o parâmetro  $t$ , temos:

$$\int_C P(x, y)dx = \int_a^b P(t, c)dt - \int_a^b P(t, d)dt. \quad (5)$$

Perceba na equação (5) que, como  $C$  é o contorno de um retângulo, então  $x$  está nas duas partes do contorno que varia no eixo horizontal, ou seja, no segmento superior e inferior. Consequentemente, temos que  $y$  vale  $c$  no segmento inferior e  $d$  no segmento superior.

Por outro lado,

$$\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy = \int_a^b [P(x, d) - P(x, c)]dx. \quad (6)$$

Logo, de 5 e 6, conseguimos que

$$\int_C P(x, y)dx = - \iint_K \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy.$$

□

**Exemplo 2.3.3.** Considere o campo  $\mathbf{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$  de classe  $C^1$  no aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $C$  a fronteira de  $K$  orientada no sentido anti-horário, em que  $K$  é o conjunto mostrado na Figura 4

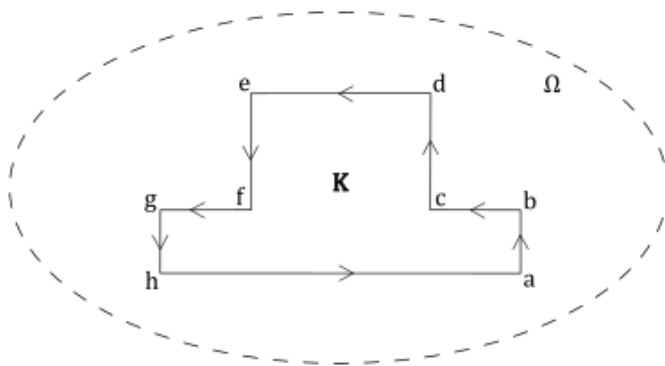


Figura 4 – Caixa  $K$ .

Vamos provar que

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Podemos dividir a figura original em dois retângulos  $K_1$  e  $K_2$  para aplicar o Teorema de Green para retângulos (2.3.1), como na figura a seguir:

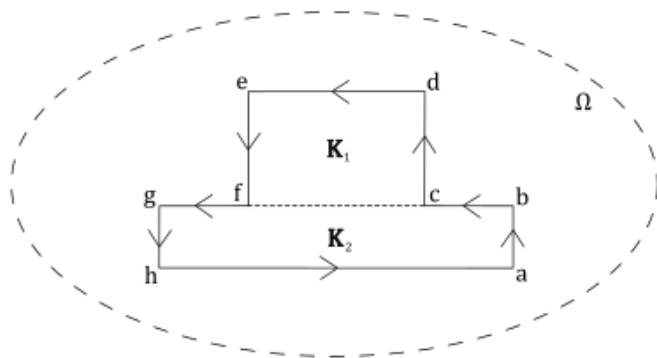


Figura 5 – Caixa  $K_1 \cup K_2$ .

Defina os caminhos  $cdef$  e  $fgahbc$  como  $\bar{K}_1$  e  $\bar{K}_2$ , respectivamente. Logo, pelo Teorema de Green (2.3.1), temos:

$$\int_{\bar{K}_1} Pdx + Qdy + \int_{FC} Pdx + Qdy = \iint_{K_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

e

$$\int_{\bar{K}_2} Pdx + Qdy + \int_{CF} Pdx + Qdy = \iint_{K_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Veja que a primeira integral mais a segunda integral desenha na verdade todo o  $K$ , assim, conseguimos calcular:

$$\oint Pdx + Qdy = \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Agora, iremos enunciar o Teorema de Green para curvas fechadas, simples e de classe  $C^1$ , ou seja, o Teorema de Green não só para retângulos, mas também para uma curva qualquer, desde que respeite algumas condições.

**Teorema 2.3.4.** *Seja  $C$  uma curva fechada, simples,  $C^1$  por partes e orientada no sentido anti-horário que é fronteira de  $K$ , com  $K \subset \mathbb{R}^2$  um compacto com interior não vazio. Sejam  $P$  e  $Q$  de classe  $C^1$  em um aberto contendo  $K$ . Então*

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_K \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy. \quad (7)$$

**Exemplo 2.3.5.** *Calcule  $\oint_C (3y - e^{\sin(x)})dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})dy$ , em que  $C$  é o círculo  $x^2 + y^2 = 9$ .*

*Solução:* Tome como  $K$  a região delimitada por  $C$ , ou seja  $K$  é a região  $x^2 + y^2 \leq 9$ . Vamos mudar para coordenadas polares depois de aplicar o Teorema de Green:

$$\begin{aligned} \oint_C Pdx + Qdy &= \iint_K \left[ \frac{\partial}{\partial x} (7x + \sqrt{y^4 + 1}) - \frac{\partial}{\partial y} (3y - e^{\sin(x)}) \right] dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3) r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr \\ &= 4 \cdot [\theta]_{t=0}^{t=2\pi} \cdot \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{t=0}^{t=3} \\ &= 36\pi. \end{aligned}$$

A seguir, vejamos algumas ocasiões que poderemos aplicar o Teorema de Green. Após, iremos aplicar em um exemplo para dar ao leitor a intuição de sua eficácia.

1. uma união finita de regiões simples;
2. regiões com furos, desde que tenha uma quantidade finita de furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas.

**Exemplo 2.3.6.** Calcule  $\int_C y^2 dx + 3xy dy$ , onde  $C$  é o limite da região semianular  $K$  contida no semiplano superior entre os círculos  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ .

*Solução:* Transformando em coordenadas polares, temos o conjunto  $K = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ . O teorema nos fornece então a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \oint_C y^2 dx + 3xy dy &= \iint_K \left[ \frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA \\ &= \iint_K (3y - 2y) dA \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 (r \sin(\theta)) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_1^2 r^2 dr \\ &= [-\cos(\theta)]_0^\pi \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_1^2 \\ &= \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

## 2.4 SUPERFÍCIES

Nesta seção iremos introduzir ao leitor alguns conceitos sobre superfícies, para entendermos como calcular a chamada integral de superfície.

Tomamos a superfície parametrizada como a função  $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ , em que  $A$  é uma região limitada, fechada e conexa de  $\mathbb{R}^2$ . Considere  $\sigma(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$ , com as componentes  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  e  $z(u, v)$  funções contínuas de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$ .

A notação da imagem de  $\sigma$ ,  $Im\sigma$ , será também utilizada para representar a própria superfície parametrizada.

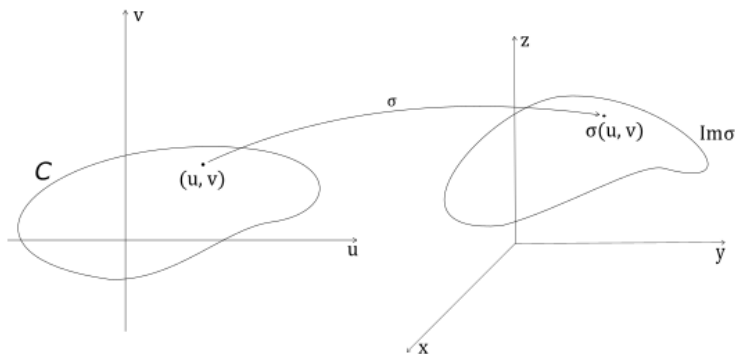


Figura 6 – Representação de Parametrização.

**Exemplo 2.4.1.** *Seja a função  $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por:  $x(u, v) = u + 2v$ ,  $y(u, v) = 2u - v + 1$  e  $z(u, v) = u + v + 2$ . Veja que é uma superfície em que sua imagem é um plano em  $\mathbb{R}^3$  passando pelo ponto  $(0, 1, 2)$  e paralelo aos vetores  $(1, 2, 1)$  e  $(2, -1, 1)$ :*

$$\sigma(u, v) = (0, 1, 2) + u(1, 2, 1) + v(2, -1, 1).$$

Iremos determinar o plano tangente por um ponto da superfície e para tal tome  $P_0$  com vetor posição  $\sigma(u, v)$ . Se mantivermos  $u$  constante usando  $u = u_0$ , temos que  $\sigma(u_0, v)$  torna-se uma função vetorial do parâmetro único  $v$  e define uma curva  $C_1$  em  $S$ . O vetor tangente a  $C_1$  em  $P_0$  é obtido tomando-se a derivada de  $\sigma$  em relação ao parâmetro  $v$ :

$$\sigma_v = \frac{d}{dv}(\sigma(u_0, v)) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{k}.$$

De forma análoga, se mantivermos  $v$  constante, obteremos a curva  $C_2$  dada por  $\sigma(u, v_0)$  sobre  $S$ , cujo vetor tangente em  $P_0$  é

$$\sigma_u = \frac{d}{du}(\sigma(u, v_0)) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{k}.$$

Ao tomarmos o produto vetorial  $\sigma_u \times \sigma_v$ , conseguimos definir o plano tangente em  $P_0$ , desde que esse produto vetorial seja diferente de zero, neste caso teremos uma superfície regular. O plano tangente dado pelo produto interno contém os vetores tangentes  $\sigma_u$  e  $\sigma_v$ , e  $\sigma_u \times \sigma_v$  é o vetor normal ao plano tangente.

Agora, entenderemos como funciona o conceito para o cálculo da área de uma superfície para então elucidar integral de superfície. Mas antes, será necessário definir conteúdo nulo para um melhor entedimento sobre áreas de uma superfície.

**Definição 2.4.2.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^3$ . Dizemos que  $X$  tem conteúdo nulo quando, para todo  $\epsilon > 0$ , for possível obter uma coleção finita de intervalos abertos  $I_1, \dots, I_k$  tal que  $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$  e a soma dos comprimentos dos intervalos  $I_j$  seja menor que  $\epsilon$ .*

Essa definição pode ser encontrada em [1], e é comum dizer que  $c(X) = 0$  quando  $X$  tem conteúdo nulo.

Seja  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $K$  é compacto e com fronteira de conteúdo nulo e interior não vazio. Suponha que  $\sigma$  é  $C^1$  em  $K$  e regular no interior de  $K$ .

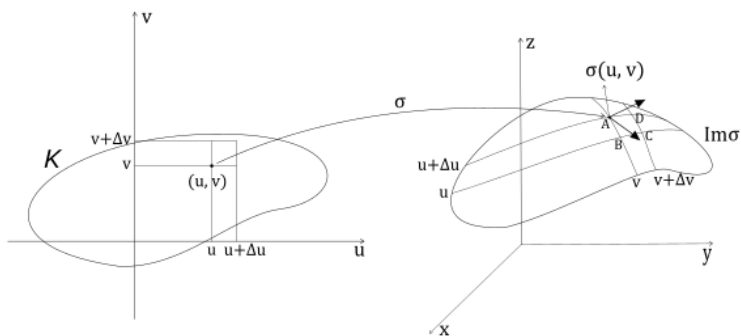


Figura 7 – Representação da área de uma superfície.



A ideia é que  $\sigma$  transforme um retângulo de lados  $\Delta u$  e  $\Delta v$  em uma espécie de paralelogramo curvo contido na superfície, seguindo a curvatura da superfície. Assim, através das derivadas parciais, conseguimos um retângulo no plano tangente ao ponto  $A$ , a qual, conseguiremos aproximar sua área da área do paralelogramo curvilíneo, pelo seu comprimento de arco, assim, a área determinada pelos vetores

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)\Delta u, \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)\Delta v$$

é

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)\Delta u \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)\Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| \Delta u \Delta v.$$

Assim, separadamente, temos que

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)\Delta u \right\| \approx \text{comprimento de arco } AB$$

e

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)\Delta v \right\| \approx \text{comprimento de arco } AD.$$

Dessa forma conseguimos que a área  $\Delta S$  do paralelogramo curvilíneo é aproximada pela área do paralelogramo de lados  $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)\Delta u$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)\Delta v$ , e conseguimos aproximar

$$\text{área} \Delta S \approx \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv.$$

Logo, podemos pensar na área de  $\sigma$  como

$$A_\sigma = \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv.$$

Iremos entender um pouco melhor como determinar a área da região dada pelo item anterior entendendo como funciona a soma de

regiões no item seguinte. Seja  $K$  definido em  $\mathbb{R}^2$  um compacto, com fronteira de conteúdo nulo e interior não vazio. Seja  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  em  $K$ , regular e injetora no interior de  $K$ .

Seja  $\omega = f(x, y, z)$  uma função a valores reais definida e contínua na imagem  $\sigma$ . Definimos a integral de superfície de  $f$  sobre  $\sigma$  por

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_K f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv,$$

em que  $dS = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv$  é o elemento de área.

Seja  $P = \{(u_i, v_j) | i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m\}$  uma partição de  $K$ . Suponha que  $K$  seja um retângulo de lados paralelos aos eixos.

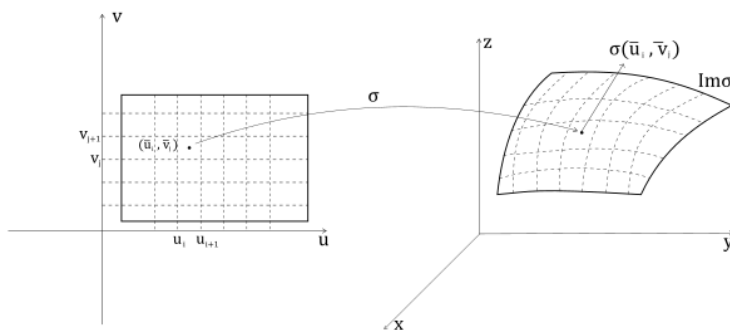


Figura 8 – Representação das Partições de uma Superfícies.

Para entendermos a construção da área, tome essas partições de  $K$  como o seguinte somatório

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\sigma(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) \Delta S_{ij},$$

onde  $\Delta S_{ij}$  desenha a área da região sombreada na superfície de  $\sigma$ .

Tomando o limite no somatório acima, conseguimos basicamente uma soma de Riemann, nos fornecendo:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\sigma(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) \Delta S_{ij} = \iint_{\sigma} f(x, y, z) dS. \quad (8)$$

Um resultado importante que utiliza integral de superfície é o Teorema da Divergência, também conhecido como Teorema de Gauss.

O Teorema da Divergência expressa a relação entre um integral de volume dada por um sólido em uma integral dupla relacionada a superfície desse sólido.

**Teorema 2.4.3.** *Seja  $V \subset \mathbb{R}^3$  um sólido limitado por uma superfície orientável e fechada  $S$ , e  $\mathbf{n}$  um vetor unitário normal a superfície de  $V$  e apontado para fora. Ademais, tome  $\mathbf{F}$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em um aberto contendo  $V$ . Assim, temos que*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

Este teorema será utilizado na Seção 4.2 para encontrarmos uma Função de Green.

### 3 INTRODUÇÃO ÀS EDP

Neste capítulo iremos adentrar em Equações Diferenciais Parciais (EDP), mais precisamente, serão abordados alguns conceitos básicos, com o intuito de demonstrar a proposição do Princípio da Superposição. Para tal, adotaremos como material base o livro da referência [8].

Alguns conceitos importantes, são:

- Dados dois vetores  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ , a distância entre  $x$  e  $y$  é

$$\|x - y\| = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} ;$$

- Dado  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , o fecho de  $A$  é denotado  $\bar{A}$ , e por definição é o menor conjunto fechado que contém  $A$ ;
- Dado  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , o interior de  $A$  será denotado por  $int(A)$ , e por definição é o maior conjunto aberto contido em  $A$ ;
- Dado  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , a fronteira de  $A$  será denotado por  $\partial A$ , em que  $\partial A = \{x \in \bar{A} : x \notin int(A)\}$ .

**Definição 3.0.1.** *Uma EDP é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes  $x, y, z, t, \dots$  e derivadas parciais de uma função, esta por sua vez dependente,  $u = u(x, y, z, t, \dots)$ . Ou seja, uma EDP, tal que  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in int(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$  é uma equação da forma:*

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0, \quad (9)$$

com  $F$  sendo uma função dada e  $u = u(x)$  sendo a função que queremos determinar.

É importante ressaltar que a classificação das EDPs, segue a mesma ideia de EDOs para sua ordem e linearidade, ou seja, sua ordem será dada pela derivada parcial de maior ordem.

Uma EDP é linear se  $F$  for linear, isto é, se for de primeiro grau em  $u$  e em todas as suas derivadas parciais. Assim, a forma mais geral de uma EDP linear de primeira ordem é:

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x)u + c(x) = 0, \quad (10)$$

com ao menos um dos  $a_j$  não nulo.

Já, para equações de segunda ordem, sua forma mais geral é dada por:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u + d(x) = 0, \quad (11)$$

com algum dos  $a_{ij}$  não nulo.

Outro conceito é o de equações semilineares, que são aquelas que possuem sua parte principal linear, ou seja, a parte da EDP que contém as derivadas de maior ordem precisa ser linear. Como exemplo, tome uma equação com três variáveis independentes  $x, y$  e  $z$ , da forma:

$$A(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = F(x, y, z, u).$$

Assim, veja que da equação (11) é fácil deduzir a forma mais geral de uma EDP semilinear de segunda ordem,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Agora, com alguns conceitos importantes vistos, iremos adentrar em uma seção em que reescreveremos as EDPs em forma de operadores  $Lu = f$  para então falar sobre o Teorema da Linearidade e Superposição em EDP.

### 3.1 LINEARIDADE E SUPERPOSIÇÃO

Iremos reescrever a equação (11) na seguinte forma:

$$Lu = f,$$

em que

$$f(x) = -d(x) \tag{12}$$

e

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x)u(x). \tag{13}$$

De tal forma que para cada função  $u$  corresponde a uma única função  $Lu$ , desde que  $u$  seja suficientemente diferenciável. Dessa maneira, definimos o operador  $L$ .

**Definição 3.1.1.** *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Suponha que as funções  $a_{ij}, b_j$  e  $c$  são contínuas em  $\Omega$ , assumindo valores reais, com  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , definimos*

$$L: C^k(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$$

$$u \mapsto Lu,$$

como sendo o operador cuja ação é dada por (13), sendo  $C^k(\Omega)$  o conjunto das funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis.

Uma observação interessante é que estaremos interessados no operador linear dado pelo gradiente, e pelo fato de ser linear, fica valendo que  $L(u + \alpha v) = Lu + \alpha Lv$ .

Agora para conseguirmos enunciar a proposição sobre o princípio da superposição, precisamos perceber que, é possível associar uma EDP não homogênea a uma EDP linear homogênea, assim como no caso de EDOs. Para tal, basta por  $-d(x)$ , dado na equação (12), como sendo identicamente nulo.

$$Lu = 0. \quad (14)$$

Assim, se  $u_1, u_2, \dots, u_m$  satisfaz (14) e se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  são escalares, vale que o somatório

$$u = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i,$$

é solução de (14), sendo este resultado conhecido como princípio da superposição. Assim, enunciamos a proposição.

**Proposição 3.1.2.** *Seja um operador diferencial parcial  $L$  linear e de ordem  $k$  com coeficientes em um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Suponha o conjunto  $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty} \subseteq \Omega$  como o conjunto de funções de classe  $C^k$  satisfazendo (14) e uma sequência de escalares  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$  tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x), \quad (15)$$

*é uniformemente convergente e  $k$  vezes diferenciável termo a termo em  $\Omega$ . Então  $u$  satisfaz (14).*

*Demonstração.* Seguindo [8], à título de simplicidade, iremos demonstrar no caso de  $k = 1$  ou  $k = 2$ , ou seja, quando  $L$  é definida como em (13). Assim, por hipótese temos que para  $x \in \Omega$  e  $1 \leq i, j \leq n$ ,

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x); \\
 \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j}; \\
 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial^2 u_m(x)}{\partial x_i \partial x_j},
 \end{aligned}$$

e essas séries convergem. Portanto, para todo  $x \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned}
 Lu(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x)u(x) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial^2 u_m(x)}{\partial x_i \partial x_j} \\
 &+ \sum_{j=1}^n b_j(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j} + c(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \\
 &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u_m(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\
 &\left. + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j} + c(x)u_m(x) \right] \\
 &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m (Lu_m)(x) = 0.
 \end{aligned}$$

□



## 4 TEOREMA DA FUNÇÃO DE GREEN

Os estudos referentes à esta seção serão baseados nos livros das referências [5] e [7], mais precisamente, a referência [7], é o livro da qual foi retirada o teorema principal deste trabalho, assim, toda a parte da subseção 4.2 será baseada nele.

Nesta seção verificaremos alguns resultados importantes para então chegar no teorema principal deste trabalho. Para tal iremos entender como funciona a chamada função delta de Dirac, também conhecida como função do impulso unitário.

Vale comentar que este resultado é para um caso particular da função de Green utilizada para resolver a EDP dada pela equação de Poisson.

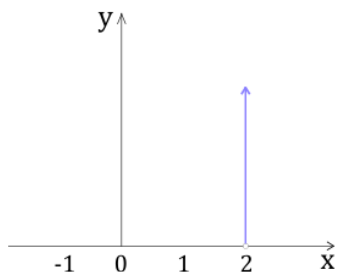
### 4.1 FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

A função delta de Dirac, é uma função de impulso, que, na verdade não é bem uma função e, sim uma distribuição, porém, mantereí a nomenclatura de função.

A priori a função impulso delta de Dirac é dada por

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & \forall x \neq a, \\ \infty, & x = a. \end{cases} \quad (16)$$

Ou seja, a delta de Dirac vale zero em todos os pontos de seu domínio, exceto no ponto de descontinuidade, a qual vale infinito. Uma observação importante de ser feita, é que seu impulso acontece justamente no ponto de descontinuidade, assim como representa a figura a seguir:

Figura 9 – Representação da delta de Dirac com  $a = 2$ .

E, ainda, esta função também é conhecida como função de impulso unitário, valendo que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = 1,$$

conforme ilustrado pela figura a seguir.

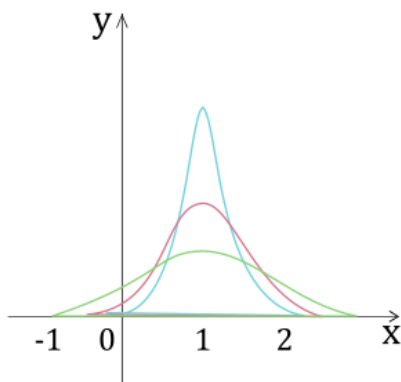


Figura 10 – Representação do impulso de área 1.

Porém, para trabalhar com a delta, precisamos de uma definição mais rigorosa matematicamente, como a seguir.

**Definição 4.1.1.** A função delta de Dirac em  $a$  é a distribuição  $\delta$  tal que para toda função  $f$  contínua em  $a$ , vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} f(x)dx.$$

Em particular, se tomarmos  $f(x) = 1$ , veja que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} [2\epsilon] = 1.$$

Pode-se provar também que  $\delta(x-a) = 0, \forall x \neq a$ .

Um resultado importante que é basicamente, inerente a função do impulso unitário, é a propriedade da filtragem.

**Proposição 4.1.2.** Se  $f(x)$  for uma função contínua em torno de um ponto  $a$ , então, vale que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a).$$

*Demonstração.* Utilizando a delta como na Definição 4.1.1

Suponha que  $F$  seja a primitiva de  $f$ . Assim, dado  $\epsilon > 0$ , temos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} [F(x)]_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} [F(a+\epsilon) - F(a-\epsilon)] \\ &= F'(a) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

□

Perceba que a propriedade da filtragem nos diz que o valor da integral da função impulso multiplicado pela  $f$  é o valor da  $f$  no ponto da função impulso, assim como representado na figura a seguir.

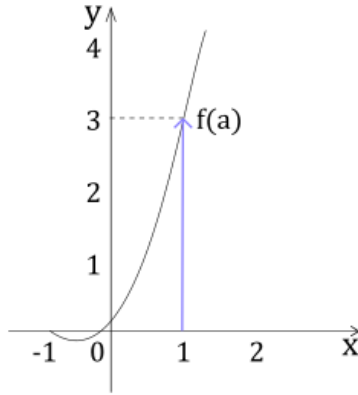


Figura 11 – Representação da Propriedade da Filtragem.

Entendido como funciona a delta de Dirac no contexto de uma dimensão, iremos reintroduzir as definições e propriedades para o contexto de 3 dimensões.

**Definição 4.1.3.** Em  $\mathbb{R}^3$ , a função delta de Dirac em  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  é a distribuição  $\delta$  tal que para toda  $f$  contínua em  $\mathbf{y}$ , vale

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y_3 - \epsilon}^{y_3 + \epsilon} \int_{y_2 - \epsilon}^{y_2 + \epsilon} \int_{y_1 - \epsilon}^{y_1 + \epsilon} \frac{1}{8\epsilon^3} f(\mathbf{y}) dy_1 dy_2 dy_3.$$

Novamente tomando  $f(\mathbf{y}) = 1$ , temos  $\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$ .

Ou seja, percebe-se que quando estendida para dimensão maior suas propriedades são mantidas, assim como sua principal propriedade que é a propriedade da filtragem. Então temos que a propriedade da filtragem em 3 dimensões é dada por

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = f(\mathbf{x}). \tag{17}$$

## 4.2 FUNÇÃO DE GREEN

Aqui iremos definir a função de Green e enunciar o teorema referente a ela. Lembrando que a função será definida para um caso particular em que resolva a equação de Poisson. Assim, a função de Green é definida pelas seguintes propriedades:

1.  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ;
2.  $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ .

Ou seja, neste contexto, para ser função de Green, ela precisa ser simétrica e validar a equação de Poisson, nos devolvendo uma delta de Dirac quando tomamos o Laplaciano de  $G$ .

A seguir, enunciaremos a o Teorema da Função de Green. Para ele, será necessário utilizar as propriedades da função de Green e também a propriedade da filtragem (17) da função impulso de Dirac.

**Teorema 4.2.1.** *Se  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  satisfaz as propriedades de sua definição, então*

$$u(\mathbf{x}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

*é solução para  $\nabla^2 u = \rho$ .*

*Demonstração.* Queremos provar que  $\nabla^2 u = \rho$  e, para tal, precisamos aplicar o Laplaciano em relação a  $\mathbf{x}$  na função  $u(\mathbf{x})$  dada no teorema, como fazemos a seguir:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \iiint_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \rho(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Perceba que este teorema nos diz que, se  $G$  satisfaz a equação de Poisson com  $\delta$  no lugar de  $\rho$ , então a função  $u$  dada por aquela integral tripla é solução para qualquer  $\rho$  fornecida.

Ou seja, para resolver a EDP de Poisson, basta conseguir encontrar uma tal  $G$ . Mas, fica alertado que isto nem sempre é simples, e, ainda, mesmo que seja encontrada uma  $G$ , calcular a integral envolvendo ela pode ser muito complicado.

Como citado no final do Capítulo 2, agora iremos encontrar a solução fundamental para  $\mathbb{R}^3$  utilizando o Teorema da Divergência (2.4.3). Para encontrarmos uma função de Green, iremos tomar uma esfera de raio  $R$  centrada na origem. Lembre-se que  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Como a esfera é centrada na origem faça  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(r)$ , tal que  $r = \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ . Assim, se  $S$  for uma esfera de raio  $R$  limitado por uma superfície  $\partial S$ , temos,

$$\begin{aligned}
 1 &= \iiint_S \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV \\
 (\text{Teo. da Divergência}) &= \iint_{\partial S} \nabla G(r) \cdot \mathbf{n} dS \\
 &= \iint_{\partial S} \frac{dG(R)}{dr} dS \\
 &= \frac{dG(R)}{dr} \iint_{S_R} dS \\
 &= \frac{dG(R)}{dr} 4\pi R^2.
 \end{aligned}$$

Perceba que esta última integral é justamente a área da superfície  $S_R$  de uma esfera de raio  $R$ . Note que  $\mathbf{n}$  é um vetor unitário na direção radial, por isso, não influencia no resultado na conta.

Como o resultado vale para qualquer  $R$ , em particular, vale para  $\mathbf{r}$  e, ainda, conseguimos que

$$\frac{dG(R)}{dr} 4\pi R^2 = 1.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dG(R)}{dr} = \frac{1}{4\pi R^2} &\implies \frac{dG(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \\ &\implies G(r) = -\frac{1}{4\pi r} + K. \end{aligned}$$

Note que  $K$  constante se anula, já que  $G$  deve se anular quando  $r$  tende ao infinito. Assim, temos a solução da equação como

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = -\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}\|}.$$

É importante perceber que a solução foi encontrada para um caso específico em que a esfera está na origem, logo, se a esfera estiver deslocada, basta adaptar a solução para

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}. \quad (18)$$

Agora que conseguimos encontrar um candidato que resolva o Teorema 4.2.1, iremos verificar se este candidato valida as propriedades da definição de  $G$ . Perceba que é imediato notar que vale a simetria de  $G$ . Para verificar  $\nabla^2 G = \delta$ , precisamos verificar que:

1.  $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ;
2.  $\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$ ,

estes dois itens, sendo referentes a definição da delta de Dirac.

Para resolver 1, basta calcular o laplaciano na  $G$ . Para isso, começamos calculando o gradiente de  $G$ :

$$\begin{aligned} \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \nabla \left( -\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)}{\left[ \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 \right]^{3/2}}, -\frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)}{\left[ \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 \right]^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Agora, como o laplaciano é o produto interno  $\nabla \cdot (\nabla G)$  e obtivemos que  $\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial y}$ , fica simples estender e perceber que  $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$ , portanto, ao fazer a soma das derivadas parciais segundas, teremos que o resultado será zero.

Para 2, assuma uma bola fechada  $B$ , com  $r = \|\mathbf{r}\|$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \iiint_B \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \iint_{\partial B} \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_{\partial B} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Perceba que para a primeira igualdade aplicamos o Teorema da Divergência. Da passagem da segunda para a terceira igualdade calculamos o produto interno  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{n}\| \cos(\theta) = \|\mathbf{r}\|$ , com  $\theta$  o ângulo entre os vetores. Como os vetores são os vetores radial e normal referente à esfera, eles apontam na mesma direção, logo  $\theta = 0$  e como  $\mathbf{n}$  é um vetor unitário, temos que o resultado do produto interno é  $\|\mathbf{r}\|$ .

Então, pelo teorema da função de Green, temos que a solução de  $\nabla^2 u = \rho$  será dada por:

$$u(\mathbf{x}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} -\frac{\rho(\mathbf{y})}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}.$$



## 5 CONCLUSÃO

No decorrer do trabalho estudamos definições e propriedades de cálculo vetorial, e também em alguns casos abordamos visões geométricas desses resultados para um entendimento mais claro do que está ocorrendo, assim, permitindo uma visualização mais simples dos conceitos. Também estudamos uma introdução à EDP para auxiliar num melhor entendimento do objetivo principal do trabalho.

Dentre os temas vistos, a parte mais necessária foi referente ao operador gradiente, uma vez que este é necessário em cálculo vetorial e em EDP.

O estudo deste tema permitiu um conhecimento introdutório de um conteúdo que não é visto no Curso de Licenciatura em Matemática da UFSC-Campus Blumenau, que é o de EDP, e conseqüentemente, o principal teorema do trabalho, permitindo um maior entendimento em cálculo vetorial.

## REFERÊNCIAS

- [1] LIMA E L. *curso de análise vol. 1*. 1<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2014.
- [2] STEWART J. *Cálculo*. 7<sup>a</sup> ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [3] GUIDORIZZI H L. *Um curso de cálculo*. 5<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- [4] MARTINS M H S e PEREIRA R. *Cálculo III e IV*. Florianópolis: ISBN, 2010.
- [5] AZEVEDO F e SAUTER E e STRAUCH I. *Transformada de Laplace*. 1<sup>a</sup> ed. UFRGS: REAMAT, 2022. Disp. em: [www.ufrgs.br/reamat/TransformadasIntegrais/livro-t1/o.html](http://www.ufrgs.br/reamat/TransformadasIntegrais/livro-t1/o.html) (acesso em 25/11/2022).
- [6] APOSTOL T M. *Calculus*. 2<sup>a</sup> ed. George Springer: Indiana University, 1969.
- [7] MARSDEN J e TROMBA A. *Internet Supplement for Vector Calculus*. 5<sup>a</sup> ed. New York: W.H. Freeman e Co, 2003.
- [8] IÓRIO V. *EDP: Um Curso de Graduação*. 4<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.