UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Nicoly Longaretti de Souza

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM NÃO INTEIRA

Blumenau
2022

Nicoly Longaretti de Souza

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM NÃO INTEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.
Orientador: Prof. Maicon José Benvenutti, Dr.

Blumenau
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Souza, Nicoly Longaretti de
Introdução ao cálculo de ordem não inteira / Nicoly Longaretti de Souza ; orientador, Maicon José Benvenutti, 2022.
95 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Graduação em Matemática, Blumenau, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Cálculo fracionário. 3. Derivada de Riemann-Liouville. 4. Derivada de Caputo. 5. Oscilador Harmônico Fracionário. I. Benvenutti, Maicon José. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática. III. Título.

Nicoly Longaretti de Souza

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM NÃO INTEIRA

Este Trabalho Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado(a) em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau, 16 de dezembro de 2022.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Francis Felix Cordova Puma
Data: 23/12/2022 14:36:50-0300
CPF: ***.649.087-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Francis Felix Cordova Puma, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maicon Jose Benvenutti
Data: 23/12/2022 12:38:01-0300
CPF: ***.968.189-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Maicon José Benvenutti, Dr.
Orientador
Universidade Federal de S

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Eleomar Cardoso Junior
Data: 23/12/2022 13:20:37-0300
CPF: ***.666.459-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof(a). Eleomar Cardoso Júnior, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof(a). Francis Felix Cordova Puma, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Este projeto é dedicado a todos os professores, por serem uma fonte constante de motivação e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente aos meus pais, irmãs e sobrinho, pelo incentivo aos estudos ao longo de toda a minha vida e pelo entendimento da minha ausência enquanto me dedicava à graduação, por mais que não compreendessem os temas que eu estudava.

Aos meus grandes amigos Adriana, Aline, Augusto e Victor Antônio, pelos ótimos momentos de risada e, também, pelos aprendizados em momentos difíceis que levarei para a vida. Nossos estudos durante a pandemia foram árduos mas, juntos, tornamo-nos fortes.

Aos professores Felipe Vieira e Louise Reips, por serem uma fonte de inspiração profissional e pessoal. Após as 52! disciplinas e bolsas, tornaram-se grandes amigos, conselheiros e motivadores.

Aos professores André Vanderlinde da Silva, Laís Cristina Viel Gereti e Luiz Rafael dos Santos, por mostrarem, cada um com sua maneira única, o significado de ser um bom educador e por exteriorizarem a paixão pela profissão.

Aos meus orientadores Francis Felix Cordova Puma e Maicon José Benvenutti, por dirigirem, em momentos distintos durante a graduação, meus estudos com excepcionalidade. Ambos contribuíram imensamente com o meu crescimento profissional e estimularam-me a continuar fazendo pesquisa.

Aos professores Fabiana Schmitt Correa e Giovanni Dalcastagné, por mostrarem a grande importância que a didática e a educação especial tem em sala de aula.

À Universidade Federal de Santa Catarina, uma instituição pública, gratuita e de qualidade, pela oportunidade de fazer o curso. Em especial, a todo o corpo docente e técnico do campus de Blumenau, que fazem um trabalho excepcional com pouco incentivo financeiro.

Por fim, a todos que fizeram parte da minha vida, obrigada!

"Deixem que o futuro diga a verdade e avalie cada um de acordo com o seu trabalho e realizações. O presente pertence a eles, mas o futuro pelo qual eu sempre trabalhei pertence a mim"

(TESLA, 1905)

RESUMO

A partir de uma pesquisa bibliográfica qualitativa e com objetivo geral de generalizar os conceitos do cálculo de ordem inteira, este trabalho apresenta as definições de integrais fracionárias de Riemman-Liouville e derivadas fracionárias pelas formulações de Riemann-Liouville e de Caputo, além de fatos históricos relacionados com o tema. Ademais, apresenta-se uma aplicação do cálculo fracionário no oscilador harmônico. Nesta parte, é utilizada a transformada de Laplace, em que são exploradas propriedades relacionadas com derivadas e integrais não inteiras utilizadas na resolução do problema do oscilador harmônico fracionário. Constatou-se que o cálculo fracionário apoiado na teoria das transformadas de Laplace torna a solução do oscilador harmônico fracionário mais consistente do que a solução do oscilador harmônico simples.

Palavras-chave: Integrais Fracionárias. Derivadas Fracionárias. Oscilador Harmônico Fracionário.

ABSTRACT

Based on a qualitative bibliographic research and with the general objective of generalizing the concepts of integer order calculus, this work presents the definitions of fractional Riemman-Liouville integrals and fractional derivatives by the Riemann-Liouville and Caputo formulations, as well as historical facts related to the subject. Furthermore, an application of the fractional calculation in the harmonic oscillator is presented. In this part, the Laplace transform is used, in which properties related to derivatives and non-integer integrals used in solving the fractional harmonic oscillator problem are explored. It was found that the fractional calculation based on the theory of Laplace transforms makes the fractional harmonic oscillator solution more consistent than the simple harmonic oscillator solution.

Keywords: Fractional Integrals. Fractional Derivatives. Fractional Harmonic Oscillator.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Generalizar conceitos usualmente é um processo desafiador dentro da matemática e, em particular, a expansão da ordem de derivadas de integrais para casos não inteiros tem mostrado-se um tópico intrincado. Ainda que a nomenclatura Cálculo Fracionário, como uma tradução livre de *fractional calculus*, preserve a fidelidade à história, as nomenclaturas Cálculo de Ordem Não Inteira e Cálculo de Ordem Arbitrária também serão usadas como sinônimos neste trabalho. Apesar da recente consolidação como área de pesquisa, ainda existem muitos questionamentos no que tange as aplicações, interpretações e validade das propriedades do cálculo de ordem não inteira.

O cálculo diferencial e o integral de ordem inteira ocupam-se, essencialmente, da solução de dois problemas: a área sob uma curva e a reta tangente à uma curva. O problema da área sob uma curva é resolvido pela integral definida, enquanto o problema da reta tangente à uma curva é resolvido pela primeira derivada. Todavia, no contexto do cálculo de ordem não inteira, as derivadas e integrais são escassas de interpretações geométricas ou físicas [1]. Importante salientar que, para uma generalização ser válida, os resultados do cálculo de ordem não inteira precisam recuperar os resultados do cálculo de ordem inteira.

Neste trabalho, admite-se que o leitor tenha domínio dos conceitos elementares do cálculo de ordem inteira, para que haja fluidez no estudo da generalização de derivadas e integrais. Caso não haja tal entendimento, recomenda-se a leitura das referências [2] e [3]. Entretanto, será feita uma revisão dos principais conceitos sobre integração de ordem inteira que foram utilizados neste trabalho.

1.1 METODOLOGIA

Seguindo uma abordagem qualitativa para a compreensão da teoria envolvida, usou-se o procedimento metodológico bibliográfico, em que as principais referências utilizadas foram [1], [4], [5] e [6], para explorar e responder o seguinte questionamento: como generalizar os conceitos de derivadas e integrais de ordem inteira para uma ordem não inteira?

Este trabalho de conclusão de curso aborda assuntos relacionados com a história do cálculo, derivadas e integrais fracionárias e aplicações. No primeiro capítulo consta a introdução e o segundo capítulo é dedicado aos primórdios dos cálculos. No terceiro capítulo apresenta-se uma síntese de conceitos preliminares necessários para o entendimento da teoria seguinte. O quarto capítulo propicia a generalização de integrais para uma ordem não inteira e o quinto capítulo faz o mesmo com as derivadas. Além disso, ambos apresentam exemplos e proposições demonstradas. O sexto capítulo é dedicado às Transformadas de Laplace de cada um dos operadores e o sétimo capítulo versa aplicação do cálculo fracionário no problema do oscilador harmônico. E, finalmente, as conclusões são apresentadas no oitavo capítulo.

1.2 OBJETIVOS

Pelo questionamento sobre a generalização da ordem de uma derivada, listam-se nas seções abaixo o objetivo geral e os objetivos específicos desta pesquisa.

1.2.1 Objetivo Geral

Generalizar os conceitos das derivadas e integrais do cálculo de ordem inteira para uma ordem não inteira.

1.2.2 Objetivos Específicos

Partindo do objetivo geral e com foco na análise e conhecimento da temática, elencam-se os seguintes objetivos específicos:

- Situar o contexto histórico das origens do cálculo inteiro e do cálculo fracionário;
- Identificar as funções especiais e os conceitos preliminares necessários para o entendimento do cálculo fracionário;
- Definir derivadas e integrais fracionárias seguindo formulações clássicas;
- Analisar algumas das propriedades advindas do cálculo inteiro que permanecem sendo válidas no cálculo fracionário;
- Exemplificar a utilização de derivadas e integrais fracionárias em funções reais;
- Estender as definições de Transformadas de Laplace para os operadores fracionários;
- Aplicar as derivadas e integrais fracionárias no problema do oscilador harmônico.

2 PRIMÓRDIOS DOS CÁLCULOS

A história da matemática é extensa, quase tanto quanto a da humanidade. Os primeiros vestígios apareceram na cultura primitiva através de contagem de objetos do cotidiano, padrões e formas geométricas. Com o passar dos anos e do desenvolvimento das sociedades, surgiram as percepções de semelhança em números e formas e, desta maneira, nasceram as ciências e a matemática [7]. O desenvolvimento dos conceitos de contagem foi longo e gradual e esteve presente em todas as civilizações conhecidas: Egito, África, Mesopotâmia, Grécia, China, Índia e tantas outras.

Em latim, *calx* significa *pedra*, sendo *calcular* o diminutivo que, no passado, significava calcular usando pedrinhas. O cálculo que fala-se aqui não é este do princípio de contagens, mas sim o Cálculo Diferencial e Integral que possui uma história longa e cheia de formalizações e aprimoramentos.

Neste capítulo, com objetivo de situar o contexto das origens do cálculo inteiro e do cálculo fracionário, apresenta-se uma breve revisão histórica do Cálculo Inteiro e do Cálculo Fracionário, investigando os primórdios do século XVII até o início do século XXI. Cabe ressaltar que este capítulo não é pré-requisito para o entendimento dos próximos capítulos, mas é o capítulo que localiza o leitor em relação ao início da teoria e identifica os principais autores envolvidos na área. As principais referências consultadas foram [1], [7], [8] e [9].

2.1 ORDEM INTEIRA

O cálculo de ordem inteira, sustentado pela geometria analítica, foi a maior ferramenta matemática do século XVII, resolvendo problemas até então insolúveis. O motivo de despertar tanta atenção dos matemáticos da época foi a aplicabilidade em amplos campos de estudo, como economia, biologia, engenharias, medicina, física e química [10]. Além disso, são métodos de aproximação que, ao utilizar a ferramenta certa, fazem o erro de aproximação tender a zero.

Desde o século XVII, o cálculo vem sendo estudado por diversos matemáticos: Barrow (Isaac Barrow, 1630-1677), Fermat (Pierre de Fermat, 1607-1665), Newton (Isaac Newton, 1642-1727), Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716), Riemann (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866) e tantos outros [7]. Porém, somente no século XIX que Cauchy (Augustin Louis Cauchy, 1789-1827) introduziu oficialmente os conceitos de Limite e Derivadas, fundamentando-o completamente [8].

Hoje é aceito como fato que o cálculo de ordem inteira foi inventado por Newton e por Leibniz durante a década de 1665-1675 [8]. Individualmente, eles configuraram os algoritmos de derivada e integral inteiras, os mesmos usados até hoje. No entanto, os estudos anteriores, principalmente os de Barrow e Fermat, ajudaram na construção dos cálculos de Newton e Leibniz.

O cálculo diferencial inteiro pode ser descrito como o estudo das taxas de mudança de uma quantidade variável. A maioria dos fenômenos físicos ao nosso redor envolve quantidades que mudam com o tempo, tais como a velocidade de um carro em movimento, as leituras de temperatura de um termômetro ou a corrente elétrica fluindo em um circuito. Essas quantidades são conhecidas como variáveis, mas Newton as chamava de *Fluentes* em seu Cálculo Fluxionário e usava a notação $\dot{x}$ e $\dot{y}$ para representar a fluxão de uma fluente no tempo, ou seja, a derivadas das variáveis x e y em relação ao tempo [7].

Grande parte das regras de diferenciação vistas no início de um curso de cálculo foram deduzidas por Leibniz em seu Cálculo Diferencial. Há um destaque especial para a regra de Leibniz: a fórmula da derivada enésima do produto de duas funções, conhecida também como Regra do Produto. Ainda sobre Leibniz, sua notação era muito mais flexível que a notação de Newton, em que a enésima derivada seria representada como $\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$ [11]. Essa notação só começou a ser usada em massa em 1812 com a criação da Analytical Society em Cambridge, cujo objetivo era justamente promover o uso da notação de Leibniz.

Na linha do cálculo integral, Fermat, além de chegar ao método para encontrar uma reta tangente à curva dada, também foi responsável por encontrar uma relação para a área sob a curva em um determinado intervalo. Para tal, fracionava o intervalo em infinitos subintervalos tomando pontos no eixo x, levantava retângulos até tocar a curva e aproximava a área sob a curva pela área dos infinitos retângulos [8]. "Leibniz [...] usou pela primeira vez o símbolo de integral $\int$, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina *summa* (soma) em 29 de outubro de 1675. O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis" [8]. Por fim, o conhecido Teorema Fundamental do Cálculo relaciona essas duas teorias: ao aplicar a diferenciação à integração, retorna-se a expressão original e vice-versa.

2.2 ORDEM NÃO INTEIRA

Diferente do cálculo inteiro, o cálculo fracionário tem uma data específica de surgimento. Para muitos pesquisadores, os primórdios do cálculo fracionário remetem a uma troca de correspondências entre Leibniz e l'Hôpital (Guillaume François Antonie l'Hôpital, 1661-1704), no ano de 1695 [12], em que Leibniz questionou sobre a generalização de uma derivada usual para uma derivada com ordem arbitrária. Ross pontua que talvez tenha sido uma manipulação de símbolos que levou o l'Hospital a perguntar a Leibnitz sobre a possibilidade do expoente da derivada ser uma fração, em vista da notação usada [9].

Partindo a notação de Leibniz, ao responder, l'Hôpital apresentou um caso particular: qual seria a interpretação da derivada de ordem 1/2 da função $f(x)$? Ou, equivalentemente, o que seria derivar a função $f(x)$ meia vez? Ou ainda, qual seria o significado da expressão

$$\mathrm{D}^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}\ f(x)}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}}?$$

Leibniz respondeu que a possibilidade de existir o conceito de tal derivada poderia cair num paradoxo e que, algum dia, consequências frutíferas seriam geradas [9]. A partir dessa troca de correspondência, houve o primeiro encontro dos dois cálculos, o de ordem inteira e o de ordem fracionária, sendo mais tarde generalizado para ordem real e até complexa [1].

No início do século XVII, Euler (Leonhard Euler, 1707-1783) fez os primeiros processos para o desenvolvimento do cálculo fracionário, em que, em uma dissertação de 1730, escreveu: *Quando* n *é um inteiro positivo e* p *é uma função de* x*, a relação* $\mathrm{d}^n p$ *por* $\mathrm{d}x^n$ *pode sempre ser expressa algebricamente, de forma que se* $n = 2$ *e* $p = x^3$*, então* $\mathrm{d}^2 x^3$ *por* $\mathrm{d}x^2$ *é* $6x$ *por* 1. Assim, quando n é um inteiro positivo, $\mathrm{d}^n p$ pode ser obtida a partir de diferenciações sucessivas.

Em 1772, Lagrange (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813) contribuiu de forma indireta através da lei dos expoentes, em que mostrou a validade da relação

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)\right] = \frac{\mathrm{d}^{m+n} f(x)}{\mathrm{d}x^{m+n}}.$$

Conforme a teoria evoluiu, matemáticos consideraram novas condições e regras fundamentais no cálculo de ordem inteira.

No início do século XIX, vários outros autores seguiram estudando a teoria. Em 1812, Laplace (Pierre Simon Laplace, 1749-1827) definiu uma derivada fracionária a partir de uma integral e, em 1819, Lacroix (Silvestre François Lacroix) foi o primeiro a enunciar derivadas de ordem arbitrária em seu livro de cálculo. Em 1822, Fourier (Jean

Baptista Joseph Fourier, 1768-1830) obteve uma versão generalizada de uma derivada de ordem arbitrária [1].

Juntamente com o avanço da teoria, começou-se a explorar possíveis aplicações do cálculo fracionário: em 1823, a primeira aplicação foi feita por Abel (Niels Henrik Abel, 1802-1829) para o problema da tautócrona, em que sua solução envolve uma cicloide e considera o fato que a derivada fracionária de uma função constante não é sempre nula, como definida por Lacroix [12].

Em seguida, diversos outros trabalhos inovadores surgiram, sustentados por nomes como Liouville (Joseph Liouville, 1809-1882), De Morgan (Augustus De Morgan, 1806-1871), Riemann, Grünwald (Anton Karl Grünwald, 1838-1920), Cauchy, Letnikov (Aleksey Vasilievich Letnikov, 1837-1888) e muitos outros durante as décadas posteriores [1]. É fato que as publicações e o interesse na temática no Brasil são crescentes, assim como no restante do mundo.

3 CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo é dedicado à exposição de conceitos preliminares e funções especiais, bem como definições e propriedades que serão usadas para desenvolver o cálculo de ordem não inteira.

3.1 TEOREMAS DO CÁLCULO DE ORDEM INTEIRA

Há dois resultados do cálculo de ordem inteira que serão utilizados nas demonstrações de algumas propriedades que serão enunciados nos teoremas que seguem.

Teorema 3.1 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Sejam as funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Então F é de classe C^1 e

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no livro Análise Real, em [13].

■

Teorema 3.2 (Regra de Leibniz para integrais)**.** *Sejam $b : \mathbb{R} \to [c, d]$ de classe C^1 e $f : \mathbb{R} \times [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua com $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, t)$ contínua. Então*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^{b(x)} f(x, t)\mathrm{d}t = f(x, b(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} b(x) + \int_a^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\mathrm{d}t.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no livro Elementary Classical Analysis, em [14].

■

3.2 FUNÇÃO GAMA

A função gama é, de fato, a mais importante dentro deste contexto, uma vez que será usada para definir o operador de integração fracionária. Considerada uma generalização do conceito de fatorial, possibilita o cômputo do fatorial de um número positivo qualquer através de uma integral imprópria.

Definição 3.1 (Fatorial). *O fatorial de um número $n \in \mathbb{N}_+$, representado por $n!$, é obtido a partir da multiplicação de todos os seus antecessores naturais positivos. Desse modo,*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1.$$

Define-se também $0! = 1$.

Conforme proposto por Euler, o fatorial pode ser expresso por uma integral imprópria.

Proposição 3.3 (Fatorial). *O fatorial de $n \in \mathbb{N}_+$ é tal que*

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n \mathrm{d}t.$$

Demonstração. A demonstração pode ser feita usando repetidamente a integração por partes, mas aqui será feito via conceitos básicos de derivação e integração. Começando pela conhecida integral imprópria, tem-se que

$$\int_0^\infty e^{-At} \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-At}}{A} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{A}, \text{ para } A > 0.$$

Agora, diferenciando a integral acima uma vez em relação à A, obtém-se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} \left(\int_0^\infty e^{-At} \mathrm{d}t \right) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial A} \left(e^{-At} \right) \mathrm{d}t = \int_0^\infty (-t) e^{-At} \mathrm{d}t,$$

mas também,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\left(\int_0^\infty e^{-At}\mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\left(\frac{1}{A}\right) = -\frac{1}{A^2}.$$

Então

$$\int_0^\infty (-t)e^{-At}\mathrm{d}t = -\frac{1}{A^2}.$$

Diferenciando novamente em relação à A, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}A^2}\left(\int_0^\infty e^{-At}\mathrm{d}t\right) &= \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial A^2}\left(e^{-At}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{\partial}{\partial A}\left(e^{-At}\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial A}\left((-t)e^{-At}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^2 e^{-At}\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

mas também,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}A^2}\left(\int_0^\infty e^{-At}\mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\left(\frac{1}{A}\right)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\left(-\frac{1}{A^2}\right) = \frac{2}{A^3}.$$

Então

$$\int_0^\infty t^2 e^{-At}\mathrm{d}t = \frac{2}{A^3}.$$

Outrossim, diferenciando n vezes em relação à A, obtém-se

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}A^n}\left(\int_0^\infty e^{-At}\mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}A^n}\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{(-1)^n n!}{A^{n+1}},$$

e, também,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}A^n}\left(\int_0^\infty e^{-At}\mathrm{d}t\right) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}A^n}e^{-At}\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-At}\mathrm{d}t.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-At}\mathrm{d}t &= (-1)^n \frac{n!}{A^{n+1}} \\
\Rightarrow \int_0^\infty t^n e^{-At}\mathrm{d}t &= \frac{n!}{A^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Considerando $A = 1$, conclui-se que a integral imprópria que define o fatorial de n é

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} \mathrm{d}t = n!.$$

$\blacksquare$

Observação. *Note que a Proposição 3.3 também é válida para o caso* $n = 0$, *pois*

$$\int_0^\infty t^0 e^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t} \mathrm{d}t = 1 = 0!.$$

A extensão da definição de fatorial para um número real positivo é feita através da função gama, com notação Γ.

Definição 3.2 (Função Gama)**.** *A função* Γ, *para* $x \in \mathbb{R}_+$, *é tal que*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

Observação. *Note que* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *para qualquer* $n \in \mathbb{N}_+$.

Existem outras definições da função gama e duas delas estão apresentadas nas proposições que seguem.

Proposição 3.4 (Função Gama)**.** *A função* Γ *proposta por Euler é equivalente à função* Γ *proposta por Gauss, dada em termos do seguinte limite:*

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{i=0}^{n} (x+i)}. \tag{1}$$

Demonstração. O limite exponencial fundamental é dado por

$$\lim_{n \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

A partir do limite acima, tem-se que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}.$$

Substituindo na definição da função gama de Euler, tem-se que

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^{x-1}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

A igualdade acima é válida por conta do Teorema da passagem ao limite sob o sinal da integração, podendo ser visto com mais detalhes em [3]. Agora, integrar por partes uma vez produz

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{nx}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t\right).$$

Agora, integrar por partes n vezes produz

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{nx}\cdot\frac{n-1}{n(x+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n(x+n-1)}\cdot\int_0^n t^{n+x-1}\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{n^n x(x+1)\ldots(x+n-1)}\cdot\frac{n^{x+n}}{x+n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^n(x+i)},
\end{aligned}$$

exatamente como pretendido.

■

Proposição 3.5 (Função Gama)**.** *A função* Γ *proposta por Euler é equivalente à função* Γ *proposta por Weierstrass, dada em termos do seguinte produto infinito:*

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{x\gamma}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{\frac{-x}{n}}\right],$$

em que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right) - \ln(n) \right].$$

Demonstração. Pela equação (1) e usando o fato que $n^x = e^{x\ln(n)}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^{n}(x+i)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{x\ln(n)}}{x} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} + 1 \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x}{i}$ no expoente de $e^{x\ln(n)}$, tem-se

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{\sum_{i=1}^{n}(\frac{x}{i}) - \sum_{i=1}^{n}(\frac{x}{i}) + x\ln(n)}}{x} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} + 1 \right)^{-1} \right).$$

Perceba que a constante de Euler-Mascheroni γ é dada por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n) \right].$$

Então

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{x}{k} + 1 \right)^{-1} e^{\frac{x}{k}} \right] \right).$$

E conclui-se que

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \left(x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{x}{k} + 1 \right) e^{-\frac{x}{k}} \right] \right),$$

exatamente como pretendido.

$\blacksquare$

A seguinte proposição será usada para determinar o valor numérico da função $\Gamma(z+1)$ a partir da função $\Gamma(z)$.

Proposição 3.6. *Para $z \in \mathbb{R}_+$, tem-se que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Demonstração. De fato,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z+1-1} \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t} t^z \mathrm{d}t.$$

Usando integração por partes com $u = t^z$, $du = zt^{z-1}\mathrm{d}t$, $v = -e^{-t}$ e $dv = e^{-t}\mathrm{d}t$, tem-se

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} z \mathrm{d}t \\ &= \lim_{t\to\infty} (-t^z e^{-t}) - 0 + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \\ &= 0 + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \\ &= z\Gamma(z), \text{ para } z > 0.\end{aligned}$$

∎

A seguinte proposição será usada no Capítulo 5 de derivadas fracionárias para o cômputo de derivadas enésimas.

Proposição 3.7. *Para $\mu \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}_+$ e $n-1 < \mu$, tem-se que*

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-n+1) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}.$$

Demonstração. Fazendo uso da Proposição 3.6 para $s = 1$, tem-se que

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-s+1)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu)} = \frac{\mu\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu)} = \mu.$$

Fixe s natural tal que $1 \leq s \leq n-1$ e suponha que a igualdade seja válida para s, isto é, que é válida a igualdade

$$\mu(\mu-1)(\mu+2)...(\mu-s+1) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-s+1)}.$$

Deve-se mostrar que a igualdade permanece válida para $s+1$. Note que, pela Proposição 3.6, pode-se fazer

$$\Gamma(\mu - s + 1) = (\mu - s)\Gamma(\mu - s).$$

Então,

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-s+1) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-s+1)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{(\mu-s)\Gamma(\mu-s)},$$

ou ainda,

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-s)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-s+1)(\mu-s).$$

Portanto,

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-(s+1)+1)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-(s+1)+1).$$

Então, por recorrência, o resultado para n natural com $n-1<\mu$ é obtido.

∎

A seguir, serão tratadas alguns exemplos da função gama que servirão para resolver integrais e derivadas de ordens não inteiras nos Capítulos 4 e 5 seguintes.

Exemplo 3.1 (Função gama de $\frac{1}{2}$)**.** *A função* Γ *em* $x = \frac{1}{2}$ *é tal que*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t.$$

Fazendo a substituição $t = x^2$*, tem-se* $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$*. Então,*

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-x^2}x^{-1}2x\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\infty e^{-x^2}\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Assumindo

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y,$$

tem-se

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

e

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x \cdot \int_0^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Pelas coordenadas polares, com $(x, y) \to (r, \theta)$, $x = rcos(\theta)$, $y = rsen(\theta)$ *e* $x^2 + y^2 = r^2$, *tem-se que*

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r\mathrm{d}r \\ &= \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Usando a substituição $u = r^2$ *e* $\mathrm{d}u = 2r\mathrm{d}r$, *tem-se*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-r^2} r\mathrm{d}r &= \int_0^\infty e^{-u} r\frac{\mathrm{d}u}{2r} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left(-e^{-u}\Big|_0^\infty\right) = \frac{1}{2}(-e^{-\infty} + e^0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Então,

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Exemplo 3.2 (Função gama de 2)**.** *Como* $\Gamma(n + 1) = n!$, *tem-se*

$$\Gamma(2) = \Gamma(1 + 1) = 1\Gamma(1) = 1! = 1.$$

Exemplo 3.3 (Função gama de $\frac{3}{2}$)**.** *Pela Proposição 3.6,*

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exemplo 3.4 (Função gama de $\frac{5}{2}$)**.** *Pela Proposição 3.6,*

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Exemplo 3.5 (Função gama de $\frac{7}{2}$)**.** *Pela Proposição 3.6,*

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}.$$

3.3 FUNÇÃO BETA

A função beta, também conhecida como a integral de Euler de primeiro tipo, é definida pela integral que segue.

Definição 3.3 (Função Beta)**.** *Considerando $x, y \in \mathbb{R}_+$, a função beta, denotada por $\beta(x,y)$, é definida como*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Observação. *Fazendo a substituição $1-t=u$, conclui-se que a função beta é simétrica, ou seja, $\beta(x,y)=\beta(y,x)$.*

É possível relacionar as funções beta e gama via seguinte proposição:

Proposição 3.8. *Considerando $x, y \in \mathbb{R}_+$, a função beta pode ser escrita como a relação*

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Demonstração. De fato, através da função gama para $x, y \in \mathbb{R}_+$, tem-se

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

e

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}\mathrm{d}s.$$

Então,

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Substituindo $t = uv$ e $s = u(1-v)$, tem-se que $0 < u < \infty$, $0 < v < 1$ e o modulo do determinante da Jacobiana é

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = |-vu - u + uv| = |-u| = u.$$

Então

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^1 \int_0^\infty (uv)^{x-1}(u(1-v))^{y-1}e^{-u}u\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}\mathrm{d}v \int_0^\infty u^{x+y-1}e^{-u}\mathrm{d}u \\ &= \beta(x,y)\Gamma(x+y).\end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \beta(x,y)\Gamma(x+y) \Rightarrow \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

■

Com esses conceitos preliminares definidos, pode-se seguir para a generalização do cálculo integral e diferencial.

4 CÁLCULO INTEGRAL

É pouco habitual no cálculo clássico a disposição dos conceitos de integração antes dos de diferenciação, mas a integração desenvolveu-se mais rapidamente do que a derivação no cálculo de ordem arbitrária. Ademais, é a alternativa mais coerente, uma vez que as definições de diferenciação fracionária fazem uso dos conceitos de integração fracionária.

Provavelmente, na antiguidade, o conceito de uma integral teve aplicação no problema de dividir áreas com contornos não elementares e o que faz-se é fatiar tal área para obtenção de n trapézios ou, para simplificar, retângulos, com alturas determinadas pelos diferentes valores da função f. Tomando o limite da soma das áreas desses retângulos infinitesimais, obtém-se a definição de integral de ordem inteira.

Em contrapartida, o significado geométrico do cálculo de ordem não inteira ainda é um problema inconcluso. Mesmo que existam diversas definições de integrais de ordem arbitrária [1], neste capítulo apresentam-se apenas as integrais de ordem arbitrária de Riemann-Liouville (RL) e suas variações, bem como algumas propriedades. Para caracterizar as integrais RL, inicia-se pela definição de integral de ordem inteira.

Definição 4.1 (Integral de ordem inteira)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Define-se a integral de ordem inteira através do operador integral $\mathcal{I}$ que age na função $f(x)$ de forma que*

$$\mathcal{I}f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A partir de iterações, ***a integral inteira de ordem n****, para $n \in \mathbb{N}_+$,* *pode ser definida como*

$$\mathcal{I}^n f(x) = \int_0^x \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,\mathrm{d}t_n\,\mathrm{d}t_{n-1} \dots \mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Observação. *Note que é possível escrever*

$$\mathcal{I}^n f(x) = \mathcal{I}\left(\mathcal{I}^{n-1} f\right)(x).$$

Entretanto, a integral de ordem n também pode ser caracterizada conforme o lema subsequente.

Lema 4.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. A integral de ordem n, com $n \in \mathbb{N}_+$, é tal que*

$$\mathcal{I}^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Demonstra-se por indução no parâmetro n. Inicialmente, para $n = 1$, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^x f(\tau)\mathrm{d}\tau &= \int_0^x (x-\tau)^0 f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^x \frac{(x-\tau)^{1-1}}{0!} f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^x \frac{(x-\tau)^{1-1}}{(1-1)!} f(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Para concluir a indução, basta mostrar que se for válido para $\mathcal{I}^n f(x)$, então é válido para $\mathcal{I}^{n+1} f(x)$. Desta forma, a hipótese indutiva será

$$\mathcal{I}^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{n+1} f(x) &= \mathcal{I}(\mathcal{I}^n f(x)) \\ &= \int_0^x \int_0^u \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{4}$$

Note que $0 \leq u \leq x$ e $0 \leq \tau \leq u$, o que resulta na região de integração como exposta na figura abaixo. Mas também é possível inverter a ordem de integração, em que $0 \leq \tau \leq x$ e $\tau \leq u \leq x$.

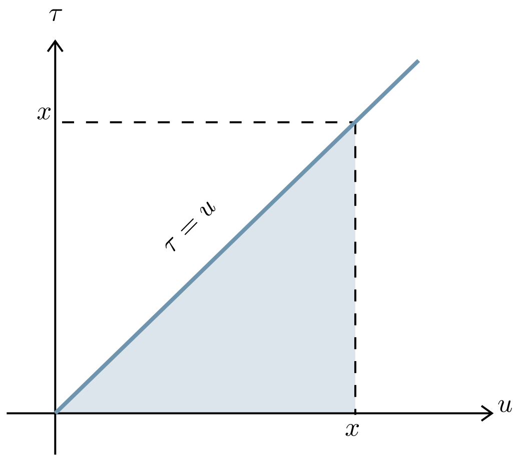

Figura 1 – Região de integração da equação (4).

Fonte: Autora da obra.

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{n+1} f(x) &= \int_0^x \int_0^u \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^x \int_\tau^x \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^x \frac{f(\tau)}{(n-1)!} \int_\tau^x (u-\tau)^{n-1}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^x \frac{f(\tau)}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{(u-\tau)^n}{n} \right]_{u=\tau}^{u=x} \mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^x \frac{f(\tau)}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{(x-\tau)^n}{n} - \frac{(\tau-\tau)^n}{n} \right] \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^x \frac{f(\tau)}{(n-1)! \cdot n} (x-\tau)^n \, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^x \frac{(x-\tau)^n}{n!} f(\tau) \, \mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

que é o resultado desejado para concluir a indução.

■

Agora, fazendo uso do Lema 4.1 e da função gama definida em 3.2, torna-se possível generalizar a ordem de integração de uma função, como feito na definição seguinte.

Definição 4.2 (Integral de ordem υ)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. A integral de ordem arbitrária $\upsilon \in \mathbb{R}_+$, denotada por $\mathcal{I}^{\upsilon} f(x)$, é tal que*

$$
\mathcal{I}^{\upsilon} f(x) = \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\upsilon-1}}{\Gamma(\upsilon)} f(\tau) \, d\tau, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.
$$

Observação. *No caso em que $\upsilon \in \mathbb{N}_+$, recupera-se o resultado para a integral de ordem inteira.*

Note que na definição acima, a região de integração é $[0, x]$, com $x \in \mathbb{R}_+$. No entanto, dado a um número real, pode-se estender a definição para o intervalo $[a, x]$ com $x > a$ e também para o intervalo $[x, a]$, com $x < a$, como definido em seguida. Esta classe de integrais é chamada de integral de Riemann-Liouville.

Definição 4.3 (Integral de Riemann-Liouville)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Fixado $a \in \mathbb{R}$, os operadores integrais de Riemann-Liouville de ordem arbitrária $\upsilon \in \mathbb{R}_+$, denotados por $\mathcal{I}^{\upsilon}_{a+}$ e $\mathcal{I}^{\upsilon}_{a-}$, que atuam na função $f(x)$ são definidos por*

$$
\mathcal{I}^{\upsilon}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \int_a^x (x-\tau)^{\upsilon-1} f(\tau) \, \mathrm{d}\tau, \quad \forall x > a \tag{5}
$$

e

$$\mathcal{I}^{\upsilon}_{a-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_x^a (\tau - x)^{\upsilon-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \forall x < a. \tag{6}$$

Essas integrais são chamadas de integrais de Riemann-Liouville (RL) à esquerda e à direita, respectivamente. Em seguida, apresentam-se algumas propriedades e exemplos.

Proposição 4.2 (Linearidade)**.** *A Integral de Riemann-Liouville é um operador linear.*

Demonstração. Sejam f e g funções contínuas e α uma constante real. Então

$$\begin{aligned} I^{\upsilon}_{a+}(\alpha f + g)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_a^x (x-\tau)^{\upsilon-1}\,(\alpha f + g)(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_a^x (x-\tau)^{\upsilon-1}\,(\alpha f)(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_a^x (x-\tau)^{\upsilon-1}\,g(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(\upsilon)}\int_a^x (x-\tau)^{\upsilon-1}\,f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_a^x (x-\tau)^{\upsilon-1}\,g(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \alpha I^{\upsilon}_{a+}f(x) + I^{\upsilon}_{a+}g(x). \end{aligned}$$

A demonstração para o caso $I^{\upsilon}_{a-}(\alpha f + g)(x)$ é equivalente e, desta forma, conclui-se que as integrais de Riemann-Liouville são operadores lineares.

■

Exemplo 4.1. *Considerando a função* $f(x) = x$*, a integral de ordem* $\upsilon = \dfrac{1}{2}$ *de* $f(x)$ *é tal que, usando a definição de Riemann-Liouville,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\upsilon}_{0+} f(x) &= \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\upsilon-1}}{\Gamma(\upsilon)}\, f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
\Rightarrow \mathcal{I}^{\frac{1}{2}}_{0+} x &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-\tau)^{\frac{1}{2}-1} \tau\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Substituindo $\tau = x\xi$ *e* $\mathrm{d}\tau = x\mathrm{d}\xi$*, em que os limites de integração são* $\xi \to 0$ *quando* $\tau \to 0$ *e* $\xi \to 1$ *quando* $\tau \to x$*, tem-se*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}_{0+} x &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (x - x\xi)^{-\frac{1}{2}} x\xi x \ \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{x^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} \xi \ \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} \xi \ \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} \xi \ \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Recorrendo à Definição 3.3 da função beta e à relação com a função gama, pela Proposição 3.8 tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}_{0+} x &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \beta\left(\frac{1}{2}, 2\right) \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right)}.
\end{aligned}$$

E como $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$*, pelo Exemplo 3.1,* $\Gamma(2) = 1$*, pelo Exemplo 3.2 e*

$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$, *pelo Exemplo 3.4, tem-se que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} x &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \\
&= x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \\
&= x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} \\
&= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}.
\end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que a integral de ordem $\frac{1}{2}$ *da função* $f(x) = x$ *é*

$$\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} x = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}, \quad \forall x > 0.$$

Uma formulação geral para o caso da função potência é obtida a partir da integração RL da função $f(x) = (x-a)^{\mu}$ com ordem arbitrária $\upsilon \in \mathbb{R}_+$, como é mostrado no exemplo subsequente.

Exemplo 4.2 (Integral da função potência)**.** *Considere a função* $f(x) = (x-a)^{\mu}$, *com* $a \in \mathbb{R}$ *e* $\mu \in \mathbb{R}_+$. *Usando a definição de Riemann-Liouville, tem-se que a integral de ordem* υ, *com* $\upsilon \in \mathbb{R}_+$, *é tal que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a+}^{\upsilon}(x-a)^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_a^x (x-\xi)^{\upsilon-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_a^x (x-\xi)^{\upsilon-1}(\xi-a)^{\mu}\,\mathrm{d}\xi, \ \text{com } x > a.
\end{aligned}$$

Com a mudança de variável $\xi = a + (x-a)t$, *tem-se que* $\mathrm{d}\xi = (x-a)\mathrm{d}t$ *e que os limites de integração são* $t \to 0$ *quando* $\xi \to a$ *e* $t \to 1$ *quando*

$\xi \to x$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a+}^{\upsilon}(x-a)^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_0^1 (x-a-(x-a)t)^{\upsilon-1}((x-a)t)^{\mu}(x-a)\mathrm{d}t \\
&= \frac{(x-a)}{\Gamma(\upsilon)}\int_0^1 ((x-a)(1-t))^{\upsilon-1}((x-a)t)^{\mu}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(x-a)^{\mu+1}}{\Gamma(\upsilon)}\int_0^1 (x-a)^{\upsilon-1}(1-t)^{\upsilon-1}t^{\mu}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(x-a)^{\mu+\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)}\int_0^1 (1-t)^{\upsilon-1}t^{\mu}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Fazendo uso das definições e propriedades das funções beta e gama, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a+}^{\upsilon}(x-a)^{\mu} &= \frac{(x-a)^{\mu+\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)}\cdot \beta(\upsilon,\mu+1) \\
&= \frac{(x-a)^{\mu+\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)}\cdot \frac{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\upsilon+1)} \\
&= (x-a)^{\mu+\upsilon}\cdot \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\upsilon+1)}.
\end{aligned}$$

Portanto, a integral de ordem $\upsilon > 0$ *da função potência* $f(x) = (x-a)^{\mu}$ *é*

$$\mathcal{I}_{a+}^{\upsilon}(x-a)^{\mu} = (x-a)^{\mu+\upsilon}\cdot \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\upsilon+1)}. \tag{7}$$

Note que é possível resolver o Exemplo 4.1 a partir do Exemplo 4.2.

4.1 LEI DOS EXPOENTES

A lei dos expoentes para as integrais de Riemann-Liouville é apresentada no teorema seguinte.

Teorema 4.3 (Lei dos expoentes)**.** *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua,* $a \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. *Então*

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}\left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta} f(x)\right) = \mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta} f(x)$$

e

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a-}\left(\mathcal{I}^{\beta}_{a-}f(x)\right) = \mathcal{I}^{\alpha+\beta}_{a-}f(x).$$

Demonstração. Da Definição 4.3, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\left(\mathcal{I}^{\beta}_{a+}f(x)\right) &= \mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-\beta}}\mathrm{d}\xi\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{1}{(x-\eta)^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^\eta \frac{f(\xi)}{(\eta-\xi)^{1-\beta}}\mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{1}{(x-\eta)^{1-\alpha}}\int_a^\eta \frac{f(\xi)}{(\eta-\xi)^{1-\beta}}\mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \int_a^\eta \frac{f(\xi)}{(x-\eta)^{1-\alpha}(\eta-\xi)^{1-\beta}}\mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta. \quad (8)
\end{aligned}$$

Note que $a \leq \eta \leq x$ e $a \leq \xi \leq \eta$, o que resulta na região de integração conforme figura abaixo. Mas também é possível parametrizar a região da forma $a \leq \xi \leq x$ e $\xi \leq \eta \leq x$. Logo, tem-se que

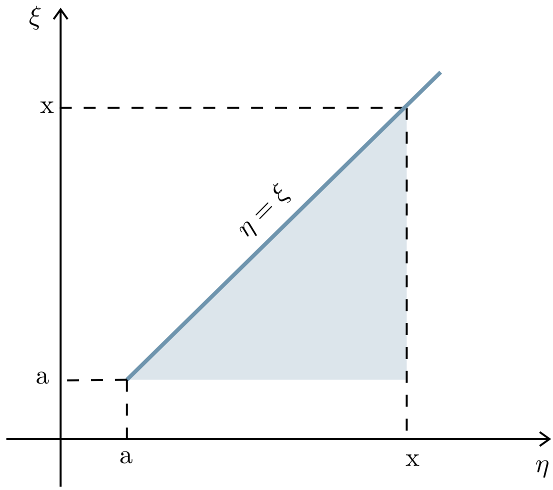

Figura 2 – Região de integração da equação (8).

Fonte: Autora da obra.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\left(\mathcal{I}^{\beta}_{a+}f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_\xi^x \frac{f(\xi)}{(x-\eta)^{1-\alpha}(\eta-\xi)^{1-\beta}}\mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(\xi)\int_\xi^x \frac{1}{(x-\eta)^{1-\alpha}(\eta-\xi)^{1-\beta}}\mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Seja

$$\kappa(x,\xi) = \int_\xi^x \frac{\mathrm{d}\eta}{(x-\eta)^{1-\alpha}(\eta-\xi)^{1-\beta}}.$$

Então,

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\left(\mathcal{I}^{\beta}_{a+}f(x)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(\xi)\kappa(x,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Agora, substituindo $t = \frac{\eta-\xi}{x-\xi}$ em $\kappa(x,\xi)$, obtém-se $\mathrm{d}\eta = (x-\xi)\mathrm{d}t$ e os limites de integração são $t \to 0$ quando $\eta \to \xi$ e $t \to 1$ quando $\eta \to x$. Desta forma,

$$\begin{aligned}\kappa(x,\xi) &= \int_0^1 \frac{(x-\xi)}{((1-t)(x-\xi))^{1-\alpha}(t(x-\xi))^{1-\beta}}\mathrm{d}t \\ &= (x-\xi)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{1-\alpha}t^{1-\beta}} \\ &= (x-\xi)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Usando a Definição 3.3 da função beta e a relação com a função gama da Proposição 3.8, tem-se

$$\begin{aligned}\kappa(x,\xi) &= (x-\xi)^{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\beta,\alpha) \\ &= (x-\xi)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

Substituindo $\kappa(x,\xi)$, conclui-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\left(\mathcal{I}^{\beta}_{a+}f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{\alpha+\beta-1}\mathrm{d}\xi \\ &= \mathcal{I}^{\alpha+\beta}_{a+}f(x), \quad \forall x > a.\end{aligned}$$

Portanto, a lei dos expoentes vale para integrais de ordem não inteira à esquerda, ou seja, os operadores de integração de Riemann-Liouville podem ser comutados. Para o caso $\mathcal{I}_{a-}^{\alpha}\left(\mathcal{I}_{a-}^{\beta} f(x)\right) = \mathcal{I}_{a-}^{\alpha+\beta} f(x)$, a demonstração é análoga e, assim, a lei dos expoentes vale para as integrais de ordem não inteira de Riemann-Liouville.

$\blacksquare$

As integrais de Riemann-Liouville são usadas na definição de algumas das derivadas fracionárias, sendo desenvolvidas no capítulo a seguir.

5 CÁLCULO DIFERENCIAL

Existe uma grande variedade de definições para as derivadas fracionárias e algumas delas podem ser vistas em [15]. Neste capítulo, apresentam-se as derivadas de ordem arbitrária de Riemann-Liouville e as de Caputo, além de algumas propriedades e exemplos.

5.1 FORMULAÇÃO DE RIEMANN-LIOUVILLE

A primeira exibição das derivadas de Riemann-Liouville foi em 1869, por Nikolay Sonin [16]. Nesta seção, apresenta-se a definição das derivadas de Riemann-Liouville, algumas propriedades e exemplos numéricos.

Definição 5.1 (Derivada de Riemann-Liouville)**.** *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua. Fixados* $a, \alpha \in \mathbb{R}$*, com* $\alpha \geq 0$*, considere* $n \in \mathbb{N}_+$ *de forma que* $n - 1 \leq \alpha < n$*. Define-se os operadores diferenciais de Riemann-Liouville em um intervalo finito do eixo real, representados por* ${}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}$ *e* ${}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}$*, à esquerda e à direita, por*

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x) &= \mathcal{D}^n \ \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a+}[f(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \ \mathcal{D}^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \mathrm{d}t; \ x > a \end{aligned} \tag{9}$$

e

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-} f(x) &= (-\mathcal{D})^n \ \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a-}[f(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (-\mathcal{D})^n \int_x^a \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \mathrm{d}t; \ x < a, \end{aligned} \tag{10}$$

em que $\mathcal{D}^n = \mathrm{d}^n/\mathrm{d}x^n$ *é a enésima derivada inteira, desde que estas derivadas existam.*

Observação. *Seja* $\alpha \geq 0$ *e* $n \in \mathbb{N}_+$ *tal que* $n - 1 \leq \alpha < n$*. Então* $n = [\alpha] + 1$*, em que* $[\alpha]$ *é a parte inteira de* α*.*

Proposição 5.1 (Critério de existência para $0 < \alpha < 1$)**.** *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $0 < \alpha < 1$. Então as derivadas de Riemann-Liouville ${}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}$ e ${}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}$ existem $\forall a \in \mathbb{R}$ e, além disso, tem-se as seguintes igualdades:*

$$ {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{\mathcal{D}f(t)}{(x-t)^{\alpha}} \mathrm{d}t \right], \quad \forall x > a $$

e

$$ {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(a-x)^{\alpha}} - \int_x^a \frac{\mathcal{D}f(t)}{(t-x)^{\alpha}} \mathrm{d}t \right], \quad \forall x < a. $$

Demonstração. Seja

$$ \psi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{\mathcal{D}f(t)}{(x-t)^{\alpha}} \mathrm{d}t \right]. $$

Então

$$ \begin{aligned} \int_a^x \psi(s)\mathrm{d}s &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_a^x \frac{f(a)}{(s-a)^{\alpha}} \mathrm{d}s + \int_a^x \int_a^s \frac{\mathcal{D}f(t)}{(s-t)^{\alpha}} \mathrm{d}t \ \mathrm{d}s \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_a^x \int_a^s \frac{\mathcal{D}f(t)}{(s-t)^{\alpha}} \mathrm{d}t \ \mathrm{d}s \right]. \end{aligned} \tag{11} $$

Note que a integral acima é tal que $a \leq s \leq x$ e $a \leq t \leq s$, assim como representado na região de integração da figura abaixo. Trocando a ordem de integração, tem-se que $a \leq t \leq x$ e $t \leq s \leq x$.

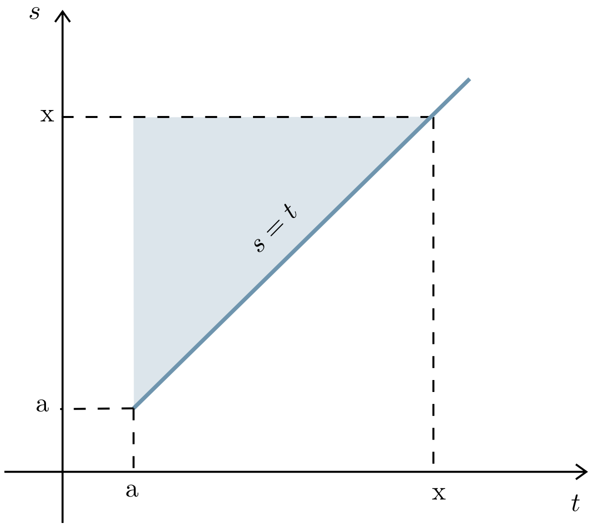

Figura 3 – Região de integração da equação (11)

Fonte: Autora da obra.

Então

$$\begin{aligned}\int_a^x \psi(s)\mathrm{d}s &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_a^x \int_t^x \frac{\mathcal{D}f(t)}{(s-t)^\alpha}\mathrm{d}s\ \mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_a^x \frac{\mathcal{D}f(t)(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\mathrm{d}t\right].\end{aligned}$$

Usando integração por partes, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_a^x \psi(s)\mathrm{d}s = &\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \left.\frac{f(t)(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{t=a}^{t=x}\right] \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{1}{1-\alpha}\int_a^x f(t)(1-\alpha)(x-t)^{-\alpha}\mathrm{d}t\right] \\ = &\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_a^x \psi(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t.$$

E como f é de classe C^1, a função $\psi(x)$ é contínua em (a, ∞). Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, dado em 3.1, tem-se que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x \psi(s)\mathrm{d}s = \psi(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}^\alpha_{a+} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x \psi(s)\mathrm{d}s \\ &= \psi(x). \end{aligned}$$

Portanto, ${}^{RL}\mathcal{D}^\alpha_{a+}$ existe para $0 < \alpha < 1$ e é dada por

$${}^{RL}\mathcal{D}^\alpha_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{\mathcal{D}f(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t \right].$$

A demonstração para o caso ${}^{RL}\mathcal{D}^\alpha_{a-} f(x)$ é análoga.

■

Observação. *Outros critérios de existência de derivadas fracionárias de Riemann-Liouville para funções absolutamente contínuas e para derivadas de ordens superiores podem ser encontrados nas páginas 39 e 40 de [17].*

Proposição 5.2 (Ordem natural)**.** *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^m, com $m \in \mathbb{N}_+$. Então, $\forall a \in \mathbb{R}$, as derivadas de ordem m recuperam os casos das derivadas de ordem ordinária:*

$${}^{RL}\mathcal{D}^m_{a+} f(x) = \mathcal{D}^m f(x) \quad \forall x > a$$

e

$${}^{RL}\mathcal{D}^m_{a-} f(x) = (-1)^m \mathcal{D}^m f(x), \quad \forall x < a.$$

Demonstração. Com $n = m + 1$, tem-se

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}\mathcal{D}^{m}_{a+} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-m)} \mathcal{D}^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{m-n+1}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(m+1-m)} \mathcal{D}^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{m-m-1+1}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} \mathcal{D}^n \int_a^x f(t) \mathrm{d}t \\
&= \mathcal{D}^{n-1} f(x) \\
&= \mathcal{D}^m f(x), \quad \forall x > a.
\end{aligned}
$$

De forma similar, ainda com $n = m + 1$, tem-se

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}\mathcal{D}^{m}_{a-} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-m)} (-\mathcal{D})^n \int_x^a \frac{f(t)}{(t-x)^{m-n+1}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} (-\mathcal{D})^n \int_x^a f(t) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} (-\mathcal{D})^n \left(- \int_a^x f(t) \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(1)} \mathcal{D}^n \int_a^x f(t) \mathrm{d}t \\
&= (-1)^{m+2} \mathcal{D}^{n-1} f(x) \\
&= (-1)^m \mathcal{D}^m f(x), \quad \forall x < a.
\end{aligned}
$$

Ou seja, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem natural n não nula de uma função é a n-ésima derivada ordinária.

■

Proposição 5.3 (Linearidade)**.** *A derivada fracionária de Riemann-Liouville é um operador linear.*

Demonstração. Sejam f e g funções contínuas, $n \in \mathbb{N}_+$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ e

$\alpha \in \mathbb{R}_+$. Para $n-1 \leq \alpha < n$, tem-se que

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}(f+\beta g)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\ \mathcal{D}^n \int_a^x \frac{(f+\beta g)(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\ \mathcal{D}^n \left(\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t \right. \\
&\left. + \beta \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\ \mathcal{D}^n \left[\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t \right] \\
&+ \frac{\beta}{\Gamma(n-\alpha)}\ \mathcal{D}^n \left[\int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t \right] \\
&= {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(t) + \beta\ {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}g(t).
\end{aligned}$$

A demonstração para o caso ${}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}(f+\beta g)(t)$ é análoga e, desta forma, conclui-se que as derivadas de Riemann-Liouville são operadores lineares.

■

Proposição 5.4 (Ordem zero). *A derivada de ordem zero de função $f(x)$ é a própria função.*

Demonstração. Com $n = 1$, tem-se que

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathcal{D}^{0}_{a+}f(x) &= D^1 \mathcal{I}^{1-0}_{a+} f(x) \\
&= \mathcal{D}^1 \mathcal{I}^{1}_{a+} f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} \mathcal{D}^1 \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{0-1+1}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} \mathcal{D}^1 \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Fazendo uso do Teorema Fundamental do Cálculo, dado em 3.1, conclui-se que

$${}^{RL}\mathcal{D}^{0}_{a+}f(x) = f(x).$$

Ou seja, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem zero de uma função é a própria função. A demonstração para o caso ${}^{RL}\mathcal{D}^{0}_{a-}f(x)$ é análoga.

■

Pode-se pensar no resultado composição dos operadores de integração e diferenciação de ordens não inteiras. Os dois casos possíveis são expostos nas proposições que seguem.

Proposição 5.5. *Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua, $a\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$. Então*

$$ {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x)=f(x), \quad \forall x>a $$

e

$$ {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}\mathcal{I}^{\alpha}_{a-}f(x)=f(x), \quad \forall x<a. $$

Demonstração. Pela Definição 5.1, tem-se que

$$ {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x)=\mathcal{D}^{n}\mathcal{I}^{n-\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x), $$

para $n\in\mathbb{N}_+$, tal que $n-1\leq\alpha<n$. Pelo Teorema 4.3, tem-se que

$$ {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x)=\mathcal{D}^{n}\mathcal{I}^{n-\alpha+\alpha}_{a+}f(x)=\mathcal{D}^{n}\mathcal{I}^{n}_{a+}f(x). $$

Seguindo a mesma linha da demonstração do Lema 4.1, mas agora para o intervalo (a,x), tem-se

$$ \mathcal{I}^{n}_{a+}f(x)=\int_a^x\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}...\int_a^{t_{n-1}}f(t_n)\,\mathrm{d}t_n\,\mathrm{d}t_{n-1}\,...\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1. $$

Portanto, tem-se que

$$ \begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x)&=\mathcal{D}^{n}\mathcal{I}^{n}_{a+}f(x)\\ &=\mathcal{D}^{n}\int_a^x\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}...\int_a^{t_{n-1}}f(t_n)\,\mathrm{d}t_n\,\mathrm{d}t_{n-1}\,...\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1. \end{aligned} $$

Como há n operadores de derivação e n operadores de integração, pode-se aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo, dado em 3.1, e conclui-se que

$$^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = \mathcal{D}^{n}\mathcal{I}^{n}f(x) = f(x).$$

A demonstração para o caso $^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}\mathcal{I}^{\alpha}_{a-}f(x)$ é análoga.

$\blacksquare$

Proposição 5.6. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $a \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+$, com $0 < \alpha < 1$. Então*

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = f(x), \quad \forall x > a$$

e

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a-}\,{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}f(x) = f(x), \quad \forall x < a.$$

Demonstração. Pelas Definições 4.3 e 5.1, tem-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\,{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_a^\tau \frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Note que

$$(x-\tau)^{\alpha-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(x-\tau)^{\alpha}}{\alpha}.$$

Então

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathrm{d}(x-\tau)^{\alpha}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_a^\tau \frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}\tau.$$

Utilizando a Regra de Leibniz para integrais, dada em 3.2, tem-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = &\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x (x-\tau)^{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_a^\tau \frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}\tau\right] \\ &- \left[(x-\tau)^{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_a^\tau \frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}\tau\right]^{\tau=x}.\end{aligned}$$

Note que a última expressão acima é zero após a substituição de τ por x. Agora, utilizando integração por partes, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_a^x (x-\tau)^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_a^\tau \frac{f(t)}{(\tau-t)^\alpha}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau &= \left[(x-\tau)^\alpha \int_a^\tau \frac{f(t)}{(\tau-t)^\alpha}\mathrm{d}t\right]_{\tau=a}^{\tau=x} \\ &\quad - \int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(x-\tau)^\alpha \int_a^\tau \frac{f(t)}{(\tau-t)^\alpha}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}\tau \\ &= \alpha \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} \int_a^\tau \frac{f(t)}{(\tau-t)^\alpha}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a+}^\alpha\, {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^\tau \frac{f(t)}{(\tau-t)^\alpha}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\mathcal{I}_{a+}^{1-\alpha} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathcal{I}_{a+}^\alpha(\mathcal{I}_{a+}^{1-\alpha} f)(x)\right].\end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.3 e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, dado em 3.1, conclui-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a+}^\alpha\, {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathcal{I}_{a+}^{\alpha+1-\alpha} f(x)] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= f(x).\end{aligned}$$

A demonstração para o caso $\mathcal{I}_{a-}^\alpha\, {}^{RL}\mathcal{D}_{a-}^\alpha f(x)$ é análoga.

■

Desta forma, a união das Proposições 5.5 e 5.6 forma uma espécie de Teorema Fundamental do Cálculo Fracionário para os operadores de Riemann-Liouville. Em seguida, apresentam-se alguns exemplos de aplicação das derivadas de Riemann-Liouville em funções reais.

Exemplo 5.1 (Função quadrática)**.** *Considere a função* $f(x) = x^2$*. A derivada de Riemann-Liouville de ordem* $\alpha = \frac{1}{2}$*, com* $a = 0$*, é*

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+} f(x) &= {}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{0+} x^2 \\
&= \mathcal{D}^1 \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \mathcal{D}\left(\int_0^x \frac{t^2}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}t \right).
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = x - t$*, tem-se*

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{0+} x^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \mathcal{D}\left(\int_0^x \frac{(x-u)^2}{u^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}u \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \mathcal{D}\left(\int_0^x \frac{x^2}{u^{\frac{1}{2}}} - 2xu^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{3}{2}} \ \mathrm{d}u \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \mathcal{D}\left(2x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \right) \\
&= \mathcal{D}\left(\frac{16x^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}} \right) \\
&= \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \mathcal{D}\left(x^{\frac{5}{2}} \right) \\
&= \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\ \frac{5x^{\frac{3}{2}}}{2} \\
&= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Exemplo 5.2 (Função potência)**.** *Considere a função* $f(x) = (x-a)^{\mu}$*, com* $\mu, a \in \mathbb{R}$*,* $\mu > 0$ *e seja* $\alpha \geq 0$*. Então, para* n *natural tal que* $n - 1 \leq \alpha < n$*, tem-se*

$$ {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} (x-a)^{\mu} = (x-a)^{\mu-\alpha}\ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)} \prod_{i=1}^{n} (\mu - \alpha + i). \quad (12)$$

De fato, tem-se que

$$ {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} (x-a)^{\mu} = \mathcal{D}^n \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a+} (x-a)^{\mu}.$$

Pelo Exemplo 4.2, tem-se que

$$\mathcal{I}_{a+}^{\upsilon}(x-a)^{\mu} = (x-a)^{\mu+\upsilon}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\upsilon+1)}.$$

Então, considerando $\upsilon = n-\alpha$, a integral de Riemann-Liouville com ordem $n-\alpha$ é

$$\mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha}(x-a)^{\mu} = (x-a)^{\mu+n-\alpha}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)}.$$

Desta forma, a derivada de ordem α de Riemann-Liouville da função potência é

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\mu} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)}\mathcal{D}^{n}(x-a)^{\mu+n-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)}(x-a)^{\mu-\alpha}\prod_{i=1}^{n}(\mu-\alpha+i). \end{aligned}$$

Observação. *No exemplo acima, se $\mu > \alpha - 1$, então, da Proposição 3.7, tem-se que*

$$ {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\mu} = (x-a)^{\mu-\alpha}\ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}. \tag{13}$$

Observação. *Agora, estende-se a definição de função Γ para a fórmula acima ser válida num caso mais geral. Lembre-se que, até o momento, o domínio de Γ é $(0,\infty)$.*

Seja $x \in \mathbb{R}$ com $x < 0$ e $x \notin \mathbb{Z}$. Então, para $m \in \mathbb{N}_+$ tal que $m-1 < -x < m$, define-se $\Gamma(x)$ da seguinte forma:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+m)}{\prod_{i=0}^{m-1}(x+i)}.$$

Pela Proposição 3.6, tem-se que se $n \in \mathbb{N}_+$ tal que $-x < n$, então

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)}.$$

Portanto, para o caso $0 < \mu < \alpha - 1$ *com* $\mu - \alpha \notin \mathbb{Z}$*, tem-se também que*

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\mu} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)}(x-a)^{\mu-\alpha}\prod_{i=1}^{n}(\mu-\alpha+i) \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)} \cdot (x-a)^{\mu-\alpha}\frac{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} \\ &= (x-a)^{\mu-\alpha}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Note que, neste caso (13) *permanece válido.*

Observação. *Por fim, se* $0 < \mu \leq \alpha - 1$ *com* $\mu - \alpha \in \mathbb{Z}$*, então, como neste caso* $-n \leq \mu - \alpha \leq -1$*, por (12), tem-se diretamente que*

$$ {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\mu} = 0. $$

Neste caso, pode-se dizer que ainda tem-se (13) ao constatar que, $\forall z \in \mathbb{Z}$*, com* $z \leq 0$*, os limites laterais* $\lim_{x\to z^-}\Gamma(z)$ *e* $\lim_{x\to z^+}\Gamma(z)$ *são* $\pm\infty$*. Para mais detalhes, veja a referência [1].*

Para mostrar que nem sempre a lei dos expoentes para as derivadas de Riemann-Liouville é válida, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 5.3 (Não-comutatividade)**.** *Seja* $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ *e* $\beta = \frac{3}{2}$*. Usando o Exemplo 5.2, tem-se que*

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f(x) &= {}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{0+}x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)}x^{0} \\ &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Então, operando primeiro ${}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha} f(x)$, *tem-se que*

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}\mathcal{D}^{\beta}_{0+}\left({}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+} f(x)\right) &= {}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}_{0+}\left({}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{0+} t^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= {}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}_{0+}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,{}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}_{0+}(1) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\frac{3}{2})}\mathcal{D}^2\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\mathcal{D}^2\left[-2(x-t)^{\frac{1}{2}}\right]_{t=0}^{t=x} \\
&= \mathcal{D}^2 x^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}\mathcal{D}^{\beta}_{0+} f(x) &= {}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}_{0+} x^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\frac{3}{2})}\mathcal{D}^2\int_0^x \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(x-t)^{\frac{3}{2}-2+1}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\mathcal{D}^2\int_0^x \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Fazendo a substituição $t = x\bar{t}$, *os limites de integração são* $\bar{t} = 0$ *quando* $t = 0$ *e* $\bar{t} = 1$ *quando* $t = x$. *Assim,*

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}_{0+} x^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\mathcal{D}^2\int_0^1 \frac{(x\bar{t})^{\frac{1}{2}}}{(x-x\bar{t})^{\frac{1}{2}}}x\mathrm{d}\bar{t} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 \frac{(\bar{t})^{\frac{1}{2}}}{(1-\bar{t})^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\bar{t}\cdot\mathcal{D}^2(x) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Agora, operando primeiro ${}^{RL}\mathcal{D}^{\beta} f(t)$, *tem-se que*

$$
{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\left({}^{RL}\mathcal{D}^{\beta}_{a+} f(x)\right) = {}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{0+}(0) = 0.
$$

Por fim, operando com a soma dos expoentes, tem-se que

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} f(x) &= {}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{2}}) \\ &= \mathcal{D}^2(x^{\frac{1}{2}}) \\ &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, a comutatividade neste caso não é válida, já que

$${}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\beta}\left({}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f(x)\right) = {}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} f(x) \neq {}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}\left({}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\beta} f(x)\right).$$

A comutatividade é válida apenas em casos específicos, como no caso em que os operadores possuem a mesma ordem de derivação, ou seja, quando $\alpha = \beta$*. Neste caso, é possível comutar os operadores, uma vez que são iguais. Para mais detalhes, veja a referência [18].*

No exemplo a seguir vê-se que a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma função constante não é necessariamente zero.

Exemplo 5.4 (Função constante)**.** *Seja* $f(x) = c$*, com* $c \in \mathbb{R}$*. A derivada de Riemann-Liouville à esquerda da função* $f(x)$ *de ordem* $\alpha \in \mathbb{R}_+$*,* $\alpha \notin \mathbb{N}_+$ *e* $n-1 < \alpha < n$*, com* $n \in \mathbb{N}_+$*, será:*

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) &= {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} c \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\ \mathcal{D}^n\left(\int_a^x \frac{c}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\ \mathcal{D}^n\left(-\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Bigg|_{t=a}^{t=x}\right) \\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\ \mathcal{D}^n\left(\frac{(x-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right) \\ &= \frac{c}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\ \mathcal{D}^n\left((x-a)^{n-\alpha}\right). \end{aligned}$$

Fazendo uso da Proposição 3.7 e da Observação do Exemplo 5.2 que trata da extensão da função Γ *para o domínio negativo não inteiro,* *tem-se*

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}c &= \frac{c}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha+1)}\,(x-a)^{-\alpha} \\
&= \frac{c}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\,(x-a)^{-\alpha} \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\,(x-a)^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Então, conclui-se que a derivada fracionária à esquerda de Riemann-Liouville de uma função constante não é nula.

Observação. *Usando o Exemplo 5.4 e a notação dada na Observação do Exemplo 5.2, pode-se dizer que ainda tem-se (13) para o caso* $\mu = 0$.

Em vista dessa diferença com o cálculo diferencial inteiro, o italiano Michele Caputo reformulou a derivada fracionária de Riemann-Liouville. A diferença entre as duas formulação é a inversão da ordem dos operadores de integração e diferenciação e, com essa formulação de Caputo, é possível mostrar que a derivada fracionária de uma função constante é nula.

5.2 FORMULAÇÃO DE CAPUTO

Caputo, em 1967, inverteu a ordem dos operadores da derivada fracionária de Riemann-Liouville [19] e, em 1969, resolveu um problema de viscoelasticidade [20] fazendo uso dessa nova formulação. Nesta seção, apresenta-se a definição das derivadas de Caputo dadas em termo das derivadas de Riemann-Liouville, o teorema de caracterização da derivada de Caputo, algumas propriedades e exemplos numéricos.

Definição 5.2 (Derivada de Caputo via Riemann-Liouville)**.** *Seja* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}_+$ *tal que* $n-1 < \alpha \leq n$. *Suponha* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

contínua e $n-1$ vezes derivável em a. As derivadas fracionárias de Caputo ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}$ e ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}$ de ordem α são definidas via derivada de Riemann-Liouville por

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{D}^k f(a)}{k!}(x-a)^k\right] \tag{14} $$

e

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}f(x) = {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{D}^k f(a)}{k!}(a-x)^k\right], \tag{15} $$

se as derivadas de Riemann-Liouville existirem.

Estas derivadas são chamadas derivadas fracionárias no sentido de Caputo de ordem α, à esquerda e à direita, respectivamente.

Observação. *Em particular, quando $0 < \alpha < 1$, tem-se*

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}(f(x) - f(a)) $$

e

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}f(x) = {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}(f(x) - f(a)). $$

Observação. *Seja $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}_+$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$. Se $\alpha \notin \mathbb{N}_+$, então $n = [\alpha] + 1$, em que $[\alpha]$ é a parte inteira de α. Neste caso, usando a definição de derivada de Riemann-Liouville, pode-se reescrever as equações (14) e (15) como*

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = \mathcal{D}^n\ \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a+}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{D}^k f(a)}{k!}(x-a)^k\right] \tag{16} $$

e

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}f(x) = (-\mathcal{D})^n\ \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a-}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{D}^k f(a)}{k!}(a-x)^k\right]. \tag{17} $$

Observação. *Já, se $\alpha \in \mathbb{N}_+$, então $n = \alpha$. Neste caso, usando novamente a definição de derivada de Riemann-Liouville, pode-se reescrever as equações (14) e (15) como*

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x) &= \mathcal{D}^{n+1}\ \mathcal{I}^{1}_{a+}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{D}^k f(a)}{k!}(x-a)^k\right] \\ &= \mathcal{D}^n f(x) \end{aligned} \tag{18}$$

e

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-} f(x) &= (-\mathcal{D})^{n+1}\ \mathcal{I}^{1}_{a-}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{D}^k f(a)}{k!}(a-x)^k\right] \\ &= (-1)^n \mathcal{D}^n f(x). \end{aligned} \tag{19}$$

Proposição 5.7. *Se $f(x)$ for uma função tal que as derivadas de Caputo existam junto com as derivadas de Riemann-Liouville, então, conforme as equações* (14) *e* (15)*, elas são conectadas pelas relações seguintes:*

$${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{D}^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}$$

e

$${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-} f(x) = {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{D}^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(a-x)^{k-\alpha},$$

para $n-1 < \alpha \leq n$ e usando a notação dada na Observação do Exemplo 5.2.

Demonstração. Fazendo uso da Definição 5.2 e dos Exemplos 5.2 e

5.4, tem-se

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) &= {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathcal{D}^k f(a)}{k!}(x-a)^k\right] \\
&= {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\left[f(x)\right] - {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathcal{D}^k f(a)}{k!}(x-a)^k\right] \\
&= {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\left[f(x)\right] - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathcal{D}^k f(a)}{k!}{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\left[(x-a)^k\right] \\
&= {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathcal{D}^k f(a)}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} \\
&= {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathcal{D}^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.
\end{aligned}
$$

■

Por outro lado, é possível formular a derivada de Caputo sem depender da derivada de Riemann-Liouville, como feito no teorema que segue.

Teorema 5.8 (Caracterização da derivada de Caputo)**.** *Sejam as constantes $a, \alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}_+$ e $n \in \mathbb{N}_+$ tal que $n-1 < \alpha < n$. Se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for de classe C^n, então as derivadas fracionárias no sentido de Caputo de f com ordem α, à esquerda e à direita, são*

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a+}\mathcal{D}^n f(x), \quad \forall x > a
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}f(x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^a \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t \\
&= (-1)^n\mathcal{I}^{n-\alpha}_{a-}\mathcal{D}^n f(x), \quad \forall x < a.
\end{aligned}
$$

Em particular, quando $0 < \alpha < 1$, tem-se

$$ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}f(t)\mathrm{d}t}{(x-t)^{\alpha}} = \mathcal{I}^{1-\alpha}_{a+}\mathcal{D}f(x), \quad \forall x > a $$

e

$$ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^a \frac{\mathcal{D}f(t)\mathrm{d}t}{(t-x)^{\alpha}} = -\mathcal{I}^{1-\alpha}_{a-}\mathcal{D}f(x), \quad \forall x < a. $$

Demonstração. Note que

$$ \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}} = \frac{1}{n-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-t)^{n-\alpha}. $$

Então

$$ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t = \frac{(n-\alpha)^{-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-t)^{n-\alpha}\mathcal{D}^n f(t)\mathrm{d}t. $$

Pela Regra de Leibniz para integrais, dada em 3.2, tem-se

$$ \begin{aligned} \int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-t)^{n-\alpha}\mathcal{D}^n f(t)\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}\mathrm{d}t \\ &\quad - \left[\frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}\right]^{t=x} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}\mathrm{d}t. \end{aligned} $$

Portanto,

$$ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t = \frac{(n-\alpha)^{-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}\mathrm{d}t. $$

Utilizando integração por partes, tem-se que

$$ \begin{aligned} \int_a^x \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}\mathrm{d}t &= \left[\frac{\mathcal{D}^{n-1} f(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}\right]_{t=a}^{t=x} \\ &\quad - \int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x-t)^{n-\alpha}\mathcal{D}^{n-1} f(t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\mathcal{D}^{n-1} f(a)}{(x-a)^{\alpha-n}} \\ &\quad + (n-\alpha)\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-1} f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t. \end{aligned} $$

Então

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t = \frac{(n-\alpha)^{-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \Bigg\{ & \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(n-\alpha)\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-1} f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t\right] \\
& - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathcal{D}^{n-1} f(a)}{(x-a)^{\alpha-n}}\right] \Bigg\} \\
& = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-1} f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t\right] \\
& - \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathcal{D}^{n-1} f(a)}{(x-a)^{\alpha-n+1}}.
\end{aligned}
$$

Repetindo esse mesmo procedimento para

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-1} f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t,$$

obtém-se que

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-1} f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t = \frac{(n-\alpha)^{-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-t)^{n-\alpha}\mathcal{D}^{n-1} f(t)\mathrm{d}t.$$

Pela Regra de Leibniz para integrais, dada em 3.2, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-t)^{n-\alpha}\mathcal{D}^{n-1} f(t)\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-1} f(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}\mathrm{d}t \\
&- \left[\frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}\right]^{t=x} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-1} f(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Utilizando integração por partes, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-1}f(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}\mathrm{d}t &= \left[\frac{\mathcal{D}^{n-2}f(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}\right]_{t=a}^{t=x} \\ &- \int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x-t)^{n-\alpha}\mathcal{D}^{n-2}f(t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\mathcal{D}^{n-2}f(a)}{(x-a)^{\alpha-n}} \\ &+ (n-\alpha)\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-2}f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-1}f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-2}f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t\right] \\ &- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)}\frac{\mathcal{D}^{n-2}f(a)}{(x-a)^{\alpha-n}}\right].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n}f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-1}f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t\right] \\ &- \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathcal{D}^{n-1}f(a)}{(x-a)^{\alpha-n+1}} \\ &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-2}f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t\right] \\ &- \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{(x-a)^{n-\alpha}\mathcal{D}^{n-2}f(a)}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)}\right] \\ &- \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathcal{D}^{n-1}f(a)}{(x-a)^{\alpha-n+1}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-2}f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t \\ &- \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)\mathcal{D}^{n-2}f(a)}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)(x-a)^{\alpha+2-n}} \\ &- \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathcal{D}^{n-1}f(a)}{(x-a)^{\alpha-n+1}}.\end{aligned}$$

Pela Observação do Exemplo 5.2, tem-se que

$$\frac{(n-\alpha-1)}{\Gamma(n-\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha-1)}.$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^{n-2} f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t \\ &\quad - \sum_{k=n-2}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-\alpha}\mathcal{D}^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento outras $n-2$ vezes, conclui-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\mathrm{d}t \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-\alpha}\mathcal{D}^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\ &= {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-\alpha}\mathcal{D}^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Por fim, pela Proposição 5.2, obtém-se o resultado para ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x)$ e a demonstração para o caso ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-} f(x)$ é similar.

■

Em seguida, apresentam-se algumas propriedades provenientes do cálculo de ordem inteira para as derivadas fracionárias de Caputo.

Proposição 5.9 (Linearidade)**.** *A derivada fracionária de Caputo é um operador linear.*

Demonstração. Pela Definição 5.2, as derivadas de Caputo são dadas em termos das derivadas de Riemann-Liouville e estas últimas são lineares, pela Proposição 5.3. Portanto, as derivadas de Caputo também são lineares.

■

Da mesma forma que nas derivadas de Riemann-Liouville, pode-se pensar no resultado da composição dos operadores de integração e de derivação de ordens fracionárias. Os dois casos possíveis são tratados nas proposições que seguem.

Proposição 5.10. *Sejam $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ com $\alpha \notin \mathbb{N}_+$ e $n \in \mathbb{N}_+$ tal que $n-1 < \alpha < n$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então*

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = f(x). $$

Demonstração. Pela Proposição 5.7, tem-se

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}^{k}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(a)\frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. $$

Note que, pela Proposição 5.5,

$$ {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = f(x). $$

Além disso, para $0 \leq k \leq n-1$,

$$ \mathcal{D}^{k}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{D}^{k}\int_{a}^{x}(x-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau. $$

Usando a Regra de Leibniz para integrais, dada em 3.2 k vezes, obtém-se

$$ \mathcal{D}^{k}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\mathcal{D}^{k}_{x}(x-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau. $$

Então,

$$ \begin{aligned} \mathcal{D}^{k}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(a) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{a}\mathcal{D}^{k}_{x}(x-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau. \\ &= 0. \end{aligned} $$

Portanto,

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = f(x). $$

∎

Proposição 5.11. *Sejam $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ com $\alpha \notin \mathbb{N}_+$ e $n \in \mathbb{N}_+$ tal que $n-1 < \alpha < n$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for de classe C^n, então*

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}^k f(a) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 5.8, tem-se que

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = \mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\mathcal{I}^{n-\alpha}_{a+}\mathcal{D}^n f(x).$$

Agora, pelo Teorema 4.3,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x) &= \mathcal{I}^{\alpha+n-\alpha}_{a+}\mathcal{D}^n f(x) \\
&= \mathcal{I}^{n}\mathcal{D}^n f(x) \\
&= \int_a^x \int_a^{x_1} ... \int_a^{x_{n-1}} \mathcal{D}^n f(x_n) \mathrm{d}x_n ... \mathrm{d}x_1 \\
&= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{D}^k f(a)(x-a)^k}{\Gamma(k+1)}.
\end{aligned}$$

■

Observação. *Resultados similares podem ser obtidos para as derivadas à direita ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}\mathcal{I}^{\alpha}_{a-} f(x)$ e $\mathcal{I}^{\alpha}_{a-}\,{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-} f(x)$.*

Diferentemente das derivadas de Riemann-Liouville, a união das Proposições 5.10 e 5.11 não forma um Teorema Fundamental do Cálculo Fracionário para os operadores de Caputo, visto que o resultado da composição $\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x)$ não é necessariamente a própria função $f(x)$. Em seguida, apresentam-se alguns exemplos de aplicação das derivadas de Caputo em funções reais.

Exemplo 5.5 (Função constante)**.** *Seja $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$. As derivadas de Caputo da função $f(x)$ de ordem $\alpha > 0$ serão, via Teorema*

5.8,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) &= {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}c \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}f(x) &= {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a-}c \\
&= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^a \frac{\mathcal{D}^n f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}
$$

Desta forma, conclui-se que as derivadas de Caputo de uma função constante são nulas, diferente do caso 5.4 em Riemann-Liouville.

Exemplo 5.6 (Função linear)**.** *Considere a função $f(x) = x$ com $a \in \mathbb{R}$. A derivada de ordem $\alpha = \frac{1}{2}$, usando a formulação de Caputo, é tal que, para $n = 1$,*

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f(x) &= {}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{a+}x \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-2(x-t)^{\frac{1}{2}}\Big|_{t=a}^{t=x}\right] \\
&= \frac{-2}{\sqrt{\pi}}\left[(x-x)^{1/2} - (x-a)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x-a)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 5.7 (Função quadrática)**.** *Considere a função $f(x) = x^2$. A derivada de ordem $\alpha = \frac{1}{2}$, com $n = 1$ e $a = 0$, usando a derivada* *de Caputo, é*

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f(x) &= {}^{C}\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}} x^2 \\
&= \mathcal{I}_{0+}^{1-\frac{1}{2}} \left[\mathcal{D}(x^2)\right] \\
&= \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} [\mathcal{D}(x^2)] \\
&= \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} (2x) \\
&= 2\,\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} (x).
\end{aligned}$$

Pelo Exemplo 4.1, tem-se que

$$\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} (x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f(x) &= 2\,\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} (x) \\
&= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

exatamente como no Exemplo 5.1.

Por fim, para mostrar que nem sempre a lei dos expoentes para as derivadas de Caputo é válida, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 5.8 (Não-comutatividade)**.** *Seja* $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ *e* $\beta = \frac{1}{4}$. *Usando a Definição 5.2 para* $0 \leq \alpha < 1$ *e* $0 \leq \beta < 1$*, tem-se que*

$${}^{C}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f(x) = {}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}} (f(x) - f(0)) = {}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}} f(x).$$

Pelo Exemplo 5.3,

$${}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = g(x).$$

Então, operando primeiro ${}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha} f(x)$, *tem-se que*

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\beta}_{0+}\left({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+} f(x)\right) &= {}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{4}}_{0+}\left({}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{0+} f(x)\right)\\
&= {}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{4}}_{0+}\left(g(x)\right)\\
&= {}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{1}{4}}_{0+}\left(g(x)-g(0)\right)\\
&= {}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{1}{4}}_{0+} 0\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha+\beta}_{0+} f(x) &= {}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}_{0+} f(x)\\
&= {}^{C}\mathcal{D}^{\frac{3}{4}}_{0+} f(x)\\
&= {}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{3}{4}}_{0+}(f(x)-f(0))\\
&= {}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{3}{4}}_{0+} f(x)\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{3}{4})}\mathcal{D}\int_0^x \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(x-t)^{\frac{3}{4}-1+1}}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{4})}\mathcal{D}\int_0^x \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(x-t)^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $t = x\bar{t}$, *os limites de integração são* $\bar{t} = 0$ *quando* $t = 0$ *e* $\bar{t} = 1$ *quando* $t = x$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\frac{3}{4}}_{0+} x^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{4})}\mathcal{D}\int_0^1 \frac{(x\bar{t})^{\frac{1}{2}}}{(x-x\bar{t})^{\frac{3}{4}}} x\mathrm{d}\bar{t}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{4})}\int_0^1 \frac{(\bar{t})^{\frac{1}{2}}}{(1-\bar{t})^{\frac{3}{4}}}\mathcal{D}(x^{\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}})\mathrm{d}\bar{t}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{4})}\int_0^1 \frac{(\bar{t})^{\frac{1}{2}}}{(1-\bar{t})^{\frac{3}{4}}}\mathcal{D}(x^{\frac{3}{4}})\mathrm{d}\bar{t}\\
&= \frac{3}{4\Gamma(\frac{1}{4})}\int_0^1 \frac{(\bar{t})^{\frac{1}{2}}}{(1-\bar{t})^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}\bar{t}.
\end{aligned}$$

Logo, a comutatividade neste caso não é válida, já que

$$^{RL}\mathcal{D}^{\beta}_{0+}\left(^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f(x)\right) \neq {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha+\beta}_{0+}f(x).$$

Desta forma, finaliza-se o estudo sobre os operadores de derivação de ordem não inteira e os dois capítulos seguintes abordam uma aplicação de cálculo fracionário.

6 TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Cunhada pelo matemático Pierre-Simon Laplace (1749-1827), a transformada de Laplace é uma transformada integral que gera uma função na variável de frequência s a partir de uma função na variável de tempo t. Em geral, ela reduz a complexidade dos processos de análise do comportamento do sistema ao transformar uma equação diferencial em uma equação algébrica.

6.1 TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE ORDEM INTEIRA

Em seguida, apresenta-se a definição de transformada de Laplace e algumas propriedades elementares.

Definição 6.1 (Transformada de Laplace)**.** *Seja* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$*. A transformada de Laplace da função* $f(t)$ *é a função* $\mathscr{L}[f(t)] : D(F) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\mathscr{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t, \tag{20}$$

em que

$$D(F) = \{s \in \mathbb{R}\,;\ \text{a integral imprópria em (20) existe e é finita}\}\,.$$

Observação. *Usa-se também a notação* $F(s)$ *para* $\mathscr{L}[f(t)](s)$*.*

Observação. *Note que a transformada de Laplace é um operador linear no sentido que se* $\mathscr{L}[f(t)]$ *e* $\mathscr{L}[g(t)]$ *existem em* s *e* β *é uma constante real, então* $\mathscr{L}[f(t) + \beta g(t)]$ *também existe em* s *e tem-se a relação* $\mathscr{L}[f(t) + \beta g(t)] = \mathscr{L}[f(t)] + \beta\mathscr{L}[g(t)]$*.*

Observação. *Seja* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Suponha que existam constantes reais* K*,* a *e* M*, com* K *e* M *não negativas e tais que*

$$|f(t)| \leq Ke^{at},\ \forall t \geq M.$$

Então, $\mathscr{L}[f(t)]$ existe, para todo $s > a$.

É possível estabelecer a transformada de Laplace para derivadas, como disposto no teorema a seguir.

Teorema 6.1 (Derivadas de ordem 1)**.** *Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Suponha que existam constantes reais K, a e M, com K e M não negativas e tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$, $\forall\, t \geq M$. Então a transformada de Laplace da derivada da função $f(t)$ existe para todo $s > a$ e é dada pela expressão*

$$\mathscr{L}[\mathcal{D}f(t)](s) = s\mathscr{L}[f(t)](s) - f(0), \tag{21}$$

em que s é o parâmetro da transformada.

Demonstração. Como f é de classe C^1, tanto $f(t)$ quanto $\mathcal{D}f(t)$ são contínuas. Então, usando integração por partes na Definição 6.1 e as propriedades de f, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\mathcal{D}f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\mathcal{D}f(t)\mathrm{d}t \\
&= f(t)e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty f(t)(-se)^{-st}\mathrm{d}t \\
&= -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= s\mathscr{L}[f(t)](s) - f(0).
\end{aligned}$$

Portanto, obtém-se o resultado desejado.

■

Pode-se estender o Teorema 6.1 para uma ordem qualquer inteira positiva, como feito a seguir.

Teorema 6.2 (Derivadas de ordem n)**.** *Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de classe C^n. Suponha que existam constantes reais K, a e M, com K e M não* *negativas e tais que* $\left|\mathcal{D}^i f(t)\right| \leq Ke^{at}$, $\forall\, t \geq M$ *e* $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. *Então, a transformada de Laplace da derivada de ordem* n *da função* $f(t)$ *existe para todo* $s > a$ *e é dada pela expressão*

$$\mathscr{L}[\mathcal{D}^n f(t)](s) = s^n \mathscr{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \mathcal{D}^k f(0),$$

em que s *é o parâmetro da transformada.*

Demonstração. Basta aplicar a igualdade (21) n vezes para as derivadas e concluir o resultado.

∎

De modo semelhante, é possível estabelecer a transformada de Laplace para integrais, como posto abaixo.

Teorema 6.3 (Integrais de ordem 1)**.** *Sejam* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Suponha que existam constantes reais* K *e* a, *com* K *não negativa,* a *não nula e tais que* $|f(t)| \leq Ke^{at}$, $\forall\, t \geq 0$. *Então a transformada de Laplace* $g(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$ *existe para todo* $s > a$ *e é dada pela expressão*

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right](s) = \frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)]\,(s).$$

Demonstração. Note que $\mathcal{D}g(t) = f(t)$ e que

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)|\mathrm{d}\tau \leq \int_0^t Ke^{a\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{K}{a}\left(e^{at} - 1\right) < \frac{K}{a}e^{at}.$$

Então, usando o Teorema 6.1, tem-se que

$$\mathscr{L}[\mathcal{D}g(t)](s) = s\mathscr{L}[g(t)](s) - g(0).$$

Como $g(0) = 0$, obtém-se

$$\mathscr{L}[\mathcal{D}g(t)](s) = s\mathscr{L}[g(t)](s).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right](s) &= \mathscr{L}[g(t)](s)\\ &= \frac{1}{s}\mathscr{L}[\mathcal{D}g(t)](s)\\ &= \frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)](s).\end{aligned}$$

■

Assim como a transformada de Laplace existe para derivadas e integrais de ordem inteira, também existe para os casos fracionários, como estruturado nas seções a seguir.

6.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE DA INTEGRAL DE ORDEM NÃO INTEIRA

Para obter as transformadas de Laplace dos operadores fracionários, será necessário o emprego de uma fórmula em que é possível escrever uma transformada de uma integral, cujo integrando é o produto de duas funções, em termos da transformada das funções do integrando. Para isto, utiliza-se o conceito de convolução, denotado por $\star$, e como vê-se a seguir.

Definição 6.2 (Integrais de convolução)**.** *Sejam $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ funções contínuas. A integral de convolução de f e g, denotada por $f \star g$, é definida por*

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Além disso, é possível obter o produto de convolução, como feito no teorema que segue.

Teorema 6.4 (Produto de convolução)**.** *Sejam $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Se existirem as transformadas $\mathscr{L}[f(t)](s)$ e $\mathscr{L}[g(t)](s)$ em s, então $\mathscr{L}\left[(f \star g)(t)\right](s)$ também existe em s e tem-se a seguinte fórmula:*

$$\mathscr{L}\left[(f \star g)(t)\right](s) = \mathscr{L}[f(t)](s) \cdot \mathscr{L}[g(t)](s).$$

Demonstração. Note que

$$\mathscr{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi$$

e

$$\mathscr{L}[g(t)](s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Então

$$\mathscr{L}[f(t)](s) \cdot \mathscr{L}[g(t)](s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Como as integrais não dependem simultaneamente das variáveis de integração, é possível escrevê-las como uma integral iterada, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f(t)](s) \cdot \mathscr{L}[g(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi\right] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^\infty g(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-s(\xi+\tau)} f(\xi) \mathrm{d}\xi\right] \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\xi = t - \tau$, tem-se $\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}t$, $t \to \tau$ quando $\xi \to 0$ e $t \to \infty$ quando $\xi \to \infty$. Assim,

$$\mathscr{L}[f(t)](s) \cdot \mathscr{L}[g(t)](s) = \int_0^\infty g(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau) \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}\tau.$$

Invertendo a ordem de integração, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f(t)](s) \cdot \mathscr{L}[g(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-st} (f \star g)(t) \mathrm{d}t \\ &= \mathscr{L}[(f \star g)(t)](s). \end{aligned}$$

■

Observação. *O produto de convolução recupera algumas propriedades da multiplicação usual, como a comutatividade, a distributividade, a associatividade e o elemento neutro da adição, posto como a função identicamente nula, mas falha em outras propriedades, como é o caso de* $(f \star 1)(t) \neq f(t)$ *e que* $f \star f$ *pode ser negativa, como pode ser visto na referência [6].*

Com esta ferramenta em mãos, pode-se obter a transformada de Laplace para os operadores fracionários.

Teorema 6.5 (Integrais de ordem α)**.** *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua e* $\alpha \in \mathbb{R}_+$*. Se existir a transformada* $\mathscr{L}[f(t)](s)$ *em* $s > 0$*, então a transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville* $\mathcal{I}^{\alpha}_{0+} f(t)$ *também existe em* s *e é dada pela expressão*

$$\mathscr{L}[\mathcal{I}^{\alpha}_{0+} f(t)](s) = s^{-\alpha} \mathscr{L}[f(t)](s).$$

Demonstração. Pela Definição 4.3, a integral de Riemann-Liouville pode ser escrita como

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{0+} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad \forall t > 0.$$

E, tomando a transformada de Laplace dessa integral, tem-se

$$\mathscr{L}[\mathcal{I}^{\alpha}_{0+} f(t)](s) = \mathscr{L}\left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right](s).$$

Considerando $g(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ e $f(t)$, note que

$$(g \star f)(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \mathcal{I}^{\alpha}_{0+} f(t).$$

Desta forma, $\mathscr{L}[\mathcal{I}^{\alpha}_{0+} f(t)](s) = \mathscr{L}[(g \star f)(t)](s)$.

Agora, pelo Teorema 6.4, pode-se fazer

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}f(t)](s) &= \mathscr{L}[g(t)](s)\mathscr{L}[f(t)](s) \\
&= \mathscr{L}\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](s)\mathscr{L}[f(t)](s) \\
&= \frac{\mathscr{L}[t^{\alpha-1}](s)}{\Gamma(\alpha)}\mathscr{L}[f(t)](s)(s) \\
&= \frac{\mathscr{L}[f(t)](s)}{\Gamma(\alpha)}\mathscr{L}[t^{\alpha-1}](s).
\end{aligned}$$

Pela Definição 6.1 aplicada em $\mathscr{L}[t^{\alpha-1}]$, tem-se que

$$\mathscr{L}[\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}f(t)](s) = \frac{\mathscr{L}[f(t)](s)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

Fazendo a mudança de variável $\xi = st$, tem-se $\mathrm{d}t = s^{-1}\mathrm{d}\xi$ e os limites de integração permanecem inalterados. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}f(t)](s) &= \frac{\mathscr{L}[f(t)](s)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-\xi}\left(\frac{\xi}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{\mathscr{L}[f(t)](s)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}s^{-1-\alpha+1}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{s^{-\alpha}\mathscr{L}[f(t)](s)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Pela estrutura da função gama na Definição 3.2, conclui-se que

$$\mathscr{L}[\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}f(t)](s) = s^{-\alpha}\mathscr{L}[f(t)](s).$$

■

Observação. *Note que a transformada de Laplace foi definida apenas no intervalo* $[0, \infty)$ *na definição 6.1. Sendo assim, neste trabalho, as transformadas de Laplace dos operadores fracionários serão definidas e demonstradas apenas para os casos à esquerda, ou seja, apenas para* $\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}$, ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}$ *e* ${}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}$.

6.3 TRANSFORMADA DE LAPLACE DA DERIVADA DE ORDEM NÃO INTEIRA

As transformadas de Laplace para os operadores diferenciais de ordem fracionária de Caputo e de Riemann-Liouville são distintas. Sendo assim, serão descritos nas duas seções que seguem.

6.3.1 Transformada de Laplace das derivadas de Caputo

Teorema 6.6. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+$ com $\alpha \notin \mathbb{N}_+$, $n \in \mathbb{N}_+$ tal que $n-1 < \alpha < n$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^n. Suponha que existam constantes reais K e a, com K não negativa e tais que $\left|\mathcal{D}^i f(t)\right| \leq Ke^{at}$, $\forall\, t \geq 0$ e $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Então, a transformada de Laplace da derivada de Caputo $\mathscr{L}[{}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{0+} f(t)]$ existe para todo $s > a$ e é dada pela expressão*

$$\mathscr{L}[{}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{0+} f(t)](s) = s^{\alpha}\mathscr{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}\mathcal{D}^k f(0), \qquad (22)$$

em que s é o parâmetro da transformada.

Demonstração. Pelo Teorema 5.8, tem-se que

$$\mathscr{L}[{}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{0+} f(t)](s) = \mathscr{L}[\mathcal{I}^{n-\alpha}_{0+}\mathcal{D}^n f(t)](s).$$

Com $g(t) = \mathcal{D}^n f(t)$, pode-se fazer

$$\mathscr{L}[{}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{0+} f(t)](s) = \mathscr{L}[\mathcal{I}^{n-\alpha}_{0+} g(t)](s).$$

Agora considerando as transformadas de Laplace das integrais de Riemann-Liouville do Teorema 6.5, tem-se que

$$\mathscr{L}[\mathcal{I}^{n-\alpha}_{0+} g(t)](s) = \frac{\mathscr{L}[g(t)](s)}{s^{n-\alpha}}$$

e, usando a transformada de Laplace da derivada de ordem n dada pelo Teorema 6.2, obtém-se

$$\mathscr{L}[g(t)](s) = s^n\mathscr{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\mathcal{D}^k f(0).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f(t)](s) &= \frac{1}{s^{n-\alpha}}\left(s^{n}\mathscr{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\mathcal{D}^{k}f(0)\right)\\ &= s^{\alpha}\mathscr{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}\mathcal{D}^{k}f(0).\end{aligned}$$

■

Há dois casos particulares interessantes para as aplicações em Equações Diferenciais Fracionárias, dispostos nas observações imediatas.

Observação. *Quando* $0 < \alpha \leq 1$, *tem-se que*

$$\mathscr{L}[{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f(t)](s) = s^{\alpha}\mathscr{L}[f(t)](s) - s^{\alpha-1}f(0).$$

Observação. *Quando* $1 < \alpha \leq 2$, *tem-se que*

$$\mathscr{L}[{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f(t)](s) = s^{\alpha}\mathscr{L}[f(t)](s) - s^{\alpha-1}f(0) - s^{\alpha-2}\mathcal{D}f(0). \quad (23)$$

6.3.2 Transformada de Laplace das derivadas de Riemann-Liouville

Teorema 6.7. *Sejam* $\alpha \in \mathbb{R}_{+}$ *com* $\alpha \notin \mathbb{N}_{+}$, $n \in \mathbb{N}_{+}$ *tal que* $n-1 < \alpha < n$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^{n}. *Suponha que existam constantes reais* K *e* a, *com* K *não negativa e tais que* $\left|\mathcal{D}^{i}f(t)\right| \leq Ke^{at}$, $\forall\, t \geq 0$ *e* $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. *Então, a transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville* $\mathscr{L}[{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f(t)]$ *existe para todo* $s > a$ *e é dada pela expressão*

$$\mathscr{L}[{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f(t)](s) = s^{\alpha}\mathscr{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\mathcal{D}^{k}\mathcal{I}^{n-\alpha}_{0+}f(0), \quad (24)$$

em que s *é o parâmetro da transformada.*

Demonstração. Pela Definição 5.1, tem-se que

$$\mathscr{L}[{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f(t)](s) = \mathscr{L}[\mathcal{D}^n \mathcal{I}^{n-\alpha}_{0+}f(t)](s) = \mathscr{L}[\mathcal{D}^n g(t)](s),$$

com $g(t) = \mathcal{I}^{n-\alpha}_{0+}f(t)$. Agora, considerando as transformadas de Laplace das derivadas de ordem n da função $g(t)$ dada pelo Teorema 6.2, tem-se que

$$\mathscr{L}[\mathcal{D}^n g(t)](s) = s^n \mathscr{L}[g(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\mathcal{D}^k g(0).$$

E considerando o resultado do Teorema 6.5,

$$\mathscr{L}[g(t)](s) = \mathscr{L}[\mathcal{I}^{n-\alpha}_{0+}f(t)](s) = s^{\alpha-n}\mathscr{L}[f(t)](s).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f(t)](s) &= s^{\alpha}\mathscr{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\mathcal{D}^k g(0)\\ &= s^{\alpha}\mathscr{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\mathcal{D}^k \mathcal{I}^{n-\alpha}_{0+}f(0).\end{aligned}$$

■

Perceba que, enquanto a transformada de Laplace das derivadas de Caputo dada por (22) contém apenas derivadas de ordem inteira de f, a transformada de Laplace das derivadas de Riemann-Liouville dada por (24) contém derivadas de ordem inteira de integrais de ordem não inteira de f. Esta é uma das justificativas pelo qual muitas das aplicações usam a formulação de Caputo, já que as derivadas de ordem inteira de f são mais simples de tratar do que as derivadas de ordem inteira de integrais de ordem não inteira de f, além de possuírem interpretações mais facilmente reconhecidas na aplicação.

No capítulo seguinte, apresenta-se uma utilização de derivadas fracionárias no problema do oscilador harmônico. No entanto, antes disto, precisa-se estabelecer o conceito de transformada de Laplace inversa, tratado na próxima seção.

6.4 TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

Inicia-se com o seguinte resultado auxiliar:

Lema 6.8. *Seja $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que*

$$\int_0^1 u^n h(u)du = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_+.$$

Então,

$$h(t) = 0,\ \forall\, 0 \leq t \leq 1.$$

Demonstração. A demonstração deste lema pode ser encontrada em [21].

∎

Proposição 6.9. *Seja $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que existam constantes reais K e a, com K não negativa e tais que*

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, \quad \forall t \geq 0.$$

Suponha que

$$\mathscr{L}[f(t)](s) = 0, \quad \forall s > a.$$

Então,

$$f(t) = 0, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração. Fixe $s_0 > a$. Então, para n natural e $s = s_0 + n + 1$, fazendo a mudança de variável $u = e^{-t}$ na transformada $\mathscr{L}[f(t)](s)$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathscr{L}[f(t)](s) \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-nt}e^{-s_0t}e^{-t}dt \\
&= \int_0^1 f(-ln(u))u^n u^{s_0}du. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Seja $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(u) = f(-ln(u))u^{s_0}$ se $0 < u \leq 1$ e $h(0) = 0$. Desde que f é contínua, então h é obviamente contínua em (0,1]. Também, desde que $s_0 > a$, pelas propriedades de f e fazendo novamente $u = e^{-t}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\left|\lim_{u\to 0^+} h(u)\right| &= \left|\lim_{t\to\infty} e^{-s_0t}f(t)\right| \\
&\leq \lim_{t\to\infty} e^{-s_0t}|f(t)| \\
&\leq \lim_{t\to\infty} e^{-s_0t}Ke^{at} \\
&= K\lim_{t\to\infty} e^{(a-s_0)t} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto $\lim_{u\to 0^+} h(u) = 0 = h(0)$. Logo, h é contínua em $[0,1]$. Pela arbitrariedade de n, e usando (25), obtém-se

$$\int_0^1 u^n h(u)du = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_+.$$

Usando o Lema 6.8, tem-se que $h(u) = 0$, $\forall u \in [0,1]$. Pela relação dada acima entre u e f, tem-se que $f(t) = 0$, $\forall\, t \geq 0$.

∎

Teorema 6.10. *Sejam $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínuas. Suponha que existam constantes reais K, K', a e a', com K e K' não* *negativas e tais que* $|f(t)| \leq Ke^{at},\ \forall\, t \geq 0$ *e* $|g(t)| \leq K'e^{a't},\ \forall\, t \geq 0$. *Suponha que*

$$\mathscr{L}[f(t)](s) = \mathscr{L}[g(t)](s),\ \forall\, s > \max\{a, a'\}.$$

Então,

$$f(t) = g(t),\ \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 6.9 em $f - g$.

■

Observação. *Pelo teorema acima tem-se que* $\mathscr{L} : D(\mathscr{L}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *é um operador injetor, em que*

$$D(\mathscr{L}) = \Bigg\{ f : [0, \infty) \to \mathbb{R}; \quad f \text{ é contínua tal que existem}$$
$$\text{constantes reais } K \text{ e } a, \text{ com } K \text{ não negativa}$$
$$\text{e tal que } |f(t)| \leq Ke^{at},\ \forall\, t \geq 0 \Bigg\}$$

e

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \Bigg\{ F : D(F) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Bigg\}.$$

Estabelecidas as proposições necessárias, torna-se possível abordar a transformada de Laplace inversa.

Observação. *A transformada inversa de* $\mathscr{L}$ *está definida nos seguintes conjuntos:*

$$\mathscr{L}^{-1} : \mathscr{L}[D(\mathscr{L})] \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to D(\mathscr{L}).$$

Como a transformada de Laplace inversa será usada apenas na resolução do problema do oscilador harmônico com derivada de segunda ordem, não serão feitas definições mais gerais. Sendo assim, considere o exemplo específico abaixo e a proposição que segue.

Exemplo 6.1. *Usando integração por partes, tem-se que*

$$\mathscr{L}[\cos(at)](s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

para $s > 0$. *Portanto,*

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + a^2}\right](t) = \cos(at)$$

.

A próxima proposição será utilizada na resolução do oscilador harmônico com derivada fracionária. Para isto, antes observe que, escrevendo $\cos(at)$ em sua série de potência, seguindo a referência [13], tem-se que

$$\cos(at) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (at)^{2n}}{(2n)!}$$

e, então,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + a^2}\right](t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (at)^{2n}}{(2n)!},$$

para $s > 0$.

A proposição a seguir faz uma generalização dessa transformada inversa para uma ordem α.

Proposição 6.11. *Para* $1 \leq \alpha \leq 2$ *e* $a > 0$, *tem-se que*

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a^\alpha}\right](t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (at)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \tag{26}$$

para $s > 0$.

Demonstração. A demonstração desta proposição envolve integrais em variáveis complexas e séries geométricas, o que foge do escopo deste trabalho. Ela pode ser encontrada na página 112 em [1] e, para mais detalhes, veja as referências [22] e [23].

■

Observação. *A série dada em* (26) *pertence à classe de funções denominadas funções de Mittag-Leffler e que costumam aparecer no tratamento de equações diferenciais fracionárias. Para mais detalhes, veja [1] ou [24]. Ademais, pode-se definir a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros por* $E_{\alpha,\beta}$*, em que*

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}. \tag{27}$$

Agora, em posse desses resultados, é possível resolver o problema do oscilador harmônico e generalizá-lo para uma equação diferencial fracionária, como será feito no capítulo seguinte.

7 OSCILADOR HARMÔNICO

É de interesse prático a descrição de fenômenos naturais e humanos através de sistemas de equações, podendo ser estas algébricas, a diferenças, diferenciais, etc. Chama-se esta área de conhecimento de modelagem matemática. Além de auxiliar no melhor entendimento de eventos, estas equações induzem predições que facilitam o controle do homem sobre o ambiente que o cerca (veja [25]). Chamam-se de diferenciais o caso em que estes sistemas são descritos por variações instantâneas, isto é, através de elementos diferenciais.

O *Movimento Harmônico* é um movimento periódico que ocorre exclusivamente em sistemas conservativos, isto é, em que há uma força restauradora atuante no corpo fazendo com que ele volte à sua posição de equilíbrio. Em particular, será estudado neste capítulo um modelo muito utilizado na área da física, chamado de *Oscilador Harmônico* em sua forma simples e fracionária.

7.1 OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

O oscilador harmônico é o modelo empregado para descrever o movimento retilíneo de um objeto que sofre uma força de atração a um ponto de equilíbrio e com magnitude igual a um múltiplo $k > 0$ da sua distância a este mesmo ponto. O físico inglês Robert Hooke [26] observou este comportamento ao tentar descrever o movimento de um determinado objeto preso por uma mola, como enunciou na lei que carrega seu nome.

Lei de Hooke. *A magnitude da força elástica F em um sistema massa-mola é diretamente proporcional a deformação $\Delta x = x - x_0$, em que x_0 é a posição de equilíbrio do sistema.*

O princípio fundamental da dinâmica também é importante para a modelagem deste problema e está enunciado a seguir.

Princípio Fundamental da Dinâmica (Segunda Lei de Newton). *A força resultante F que atua sobre um corpo é igual ao produto de sua massa m pela aceleração a: $F = ma$.*

O sistema massa-mola será estudado na seção seguinte.

7.1.1 Sistema massa-mola

Considere um objeto de massa m preso por uma mola na posição vertical, e esta presa no teto como descrito na Figura 4 (a). Estabelecendo um sistema de coordenadas na vertical, de forma que 0 é a localização do objeto quando o sistema está em repouso, considera-se o sistema livre de atrito.

Seja $x(t)$ a posição do objeto no tempo t. Então, pelo Princípio Fundamental da Dinâmica e pela Lei de Hooke, a força do sistema no tempo t é $-kx(t)$, para alguma constante elástica k que depende das propriedades da mola. Portanto, tem-se a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$m\mathcal{D}^2 x(t) = -kx(t). \tag{28}$$

Perceba que o sentido da força é sempre em direção ao ponto de equilíbrio que, neste caso, é a origem. A Figura 4 representa algumas posições possíveis.

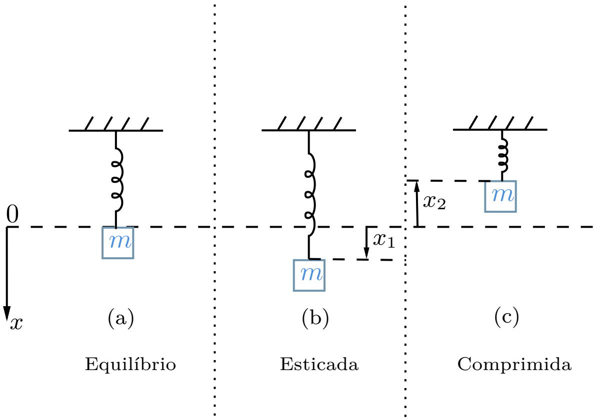

Figura 4 – Posições do sistema massa-mola.

Fonte: Autora da obra.

Considerando $\omega^2 = \frac{k}{m}$, a equação (28) pode ser reescrita como

$$\mathcal{D}^2 x(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{29}$$

Para esta equação, considera-se as condições iniciais

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{D}x(0) = 0, \tag{30}$$

em que x_0 representa a posição do objeto no tempo inicial e $\mathcal{D}x(0) = 0$ revela que a velocidade do objeto no tempo inicial é nula. Aplicando a transformada de Laplace para derivada de ordem inteira em (29), usando Teorema 6.2 e as condições iniciais (30), tem-se que

$$s^2 F(s) - s x_0 + \omega^2 F(s) = 0 \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} x_0,$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace da função $x(t)$ e s é parâmetro da transformada. Agora, aplicando a transformada inversa de Laplace, via Exemplo 6.1, e considerando (27), conclui-se que a solução $x(t)$ é da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \ cos(\omega t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{(2n)!} \\ &= x_0 E_{2,1}(-(\omega t)^2). \end{aligned} \tag{31}$$

7.2 OSCILADOR HARMÔNICO FRACIONÁRIO

A fim de comparar a modelagem de ordem inteira com a de ordem fracionária, considera-se a versão fracionária da equação diferencial ordinária associada ao problema do oscilador harmônico simples (29) dada da seguinte forma:

$$\mathcal{D}^\alpha x(t) + \omega^\alpha x(t) = 0, \tag{32}$$

com $1 < \alpha \leq 2$ e tendo as mesmas condições iniciais dadas em (30).

Será utilizada a definição da derivada fracionária de Caputo ${}^C\mathcal{D}^\alpha_{0+}$. Neste caso, aplicando a transforma de Laplace à equação (32), usando a propriedade (23) e as condições iniciais de (30), obtém-se que

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}[{}^C\mathcal{D}^\alpha_{0+} x(t) + \omega^\alpha x(t)](s) = 0 \\ \Rightarrow\ & s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} x(0) + \omega^\alpha F(s) = 0, \end{aligned}$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $x(t)$ e s é o parâmetro da transformada. Logo, tem-se que

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^\alpha} x_0.$$

Agora, aplicando a transformada inversa de Laplace via Proposição

6.11 e considerando (27), conclui-se que a solução $x(t)$ é da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \\ &= x_0 E_{\alpha,1}(-(\omega t)^{\alpha}). \end{aligned} \tag{33}$$

Note que (33) generaliza (31) e o caso do oscilador harmônico simples é recuperado com $\alpha = 2$.

O gráfico da Figura 5 representa a solução (33) da equação do oscilador harmônico fracionário para alguns valores diferentes da ordem α da derivada e considerou-se a condição inicial $x_0 = 1$.

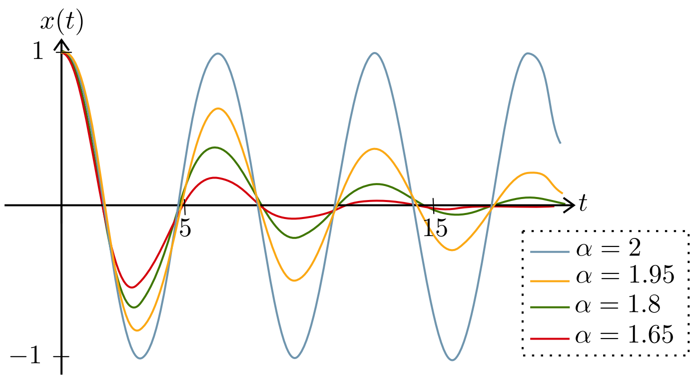

Figura 5 – Gráfico de $x(t)$ com variação de α

Fonte: Autora da obra

A partir do gráfico das soluções com diferentes valores de α, fica indicado que, para valores de α menores que 2, o sistema fracionário se comporta de forma parecida com o sistema amortecido, mesmo que o atrito tenha sido desconsiderado no caso fracionário (veja [22]). Portanto, conclui-se que a modelagem usando os operadores fracionários pode, em certas situações, oferecer uma descrição mais aprimorada do fenômeno em comparação com o uso de operadores ordinários.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho buscou compreender os aspectos do cálculo de ordem não inteira para validar algumas das propriedades advindas do cálculo de ordem inteira, a partir de uma pesquisa bibliográfica qualitativa.

O objetivo geral era generalizar os conceitos das derivadas e integrais do cálculo de ordem inteira para uma ordem não inteira. Para que se tornasse possível essa generalização, foi necessário estudar previamente as funções gama e beta e o cálculo integral. Levando em consideração as definições e proposições presentes neste trabalho, é plausível afirmar que os objetivos gerais e específicos foram cumpridos.

Após o primeiro capítulo de introdução, o segundo capítulo situou o contexto histórico das origens dos dois cálculos e o Capítulo 3 identificou e definiu os conceitos preliminares necessários. Os Capítulos 4 e 5 definiram e analisaram integrais e derivadas fracionárias, bem como expuseram exemplos envolvendo algumas funções reais. Já o Capítulo 6 expandiu os conceitos de transformadas de Laplace e o Capítulo 7 descreveu a modelagem e aplicação de derivadas e integrais fracionárias no oscilador harmônico. Por fim, este último capítulo conclui o trabalho.

Com todos os capítulos visíveis, é seguro concluir que a utilização do cálculo fracionário para generalizar a clássica teoria do cálculo de ordem inteira possui impacto na precisão da descrição e solução de problemas. Este fato pôde ser observado na solução do oscilador harmônico fracionário.

Em relação aos trabalhos futuros, há outras formulações interessantes e muito o que explorar nas aplicações de cálculo fracionário, como em equações de difusão, em problemas de viscoelasticidade, ou ainda, em Controladores Proporcionais Integrais Derivativos.

REFERÊNCIAS

[1] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira, *Cálculo Fracionário*. 2015.

[2] H. L. Guidorizzi, "Um Curso de Cálculo", *Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Cientıficos. 5ª edição*, v. 1, 2001.

[3] E. L. Lima, "Curso de Análise", *Projeto Euclides IMPA*, v. 2, 2009.

[4] J. V. da Costa Sousa, J. V. Júnior e E. C. de Oliveira, "Cálculo de ordem não inteira para iniciantes", em *Notas em Matemática Aplicada, volume 90*, S. M. C. Malta, E. V. O. Teixeira, L. Markenzon, M. Sobottka, P. F. de Arruda Mancera e S. A. Santos, ed., São Paulo: Sociedade Brasileira de Matem´atica Aplicada e Computacional, 2020, pp. 1–94.

[5] G. S. Teodoro, "Derivadas Fracionárias: tipos e critérios de validade", tese de dout., Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas, 2019.

[6] W. E. Boyce, R. C. DiPrima e D. B. Meade, *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, 2021.

[7] C. B. Boyer e U. C. Merzbach, *História da matemática*, 3ª ed. São Paulo: Editora Blucher, 2019.

[8] H. W. Eves, *Introdução à história da matemática*. Unicamp, 1995.

[9] B. Ross, “A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus”, *Fractional calculus and its applications*, pp. 1–36, 1975.

[10] T. I. M. Torres e L. M. M. Giraffa, “O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: da régua de calcular ao MOODLE”, *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 4, n. 1, pp. 18–25, 2009.

[11] T. Roque, *História da matemática.* Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

[12] K. Oldham e J. Spanier, *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.* Elsevier, 1974.

[13] E. L. Lima, *Análise real: funções de uma variável.* IMPA, 2004, vol. 1.

[14] J. Marsden e M. Hoffman, *Elementary Classical Analysis.* W. H. Freeman, 1993.

[15] E. C. de Oliveira e J. A. T. Machado, “A review of definitions for fractional derivatives and integral”, *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2014, 2014.

[16] N. Y. Sonin, “On differentiation with arbitrary index”, *Moscow Matem. Sbornik*, v. 6, n. 1, pp. 1–38, 1869.

[17] S. G. Samko, A. A. Kilbas e O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. Gordon e breach science publishers, Switzerland, 1993, vol. 1.

[18] R. A. Rossato e V. V. Ferreira, "Lei dos expoentes envolvendo derivadas e integrais fracionárias segundo Riemann-Liouville", *Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco*, v. 7, pp. 98–112, 2020.

[19] M. Caputo, "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent", *Geophysical Journal International*, v. 13, n. 5, pp. 529–539, 1967.

[20] M. Caputo, "Elasticita de dissipazione, Zanichelli, Bologna, Italy", *SIAM journal on numerical analysis*, 1969.

[21] D. V. Widder, *Laplace transform (PMS-6)*. Princeton university press, 2015.

[22] M. D. de Carvalho e J. E. Ottoni, "Introdução ao Cálculo Fracionário com aplicações", *Revista de Matemática de Ouro Preto*, v. 5, n. 1, pp. 50–77, 2018.

[23] N. Varalta, "Das transformadas integrais ao cálculo fracionário aplicado à equação logıstica", 2014.

[24] I. Podlubny, "Fractional differential equations academic press", *San Diego, Boston*, v. 6, 1999.

[25] J. Baumeister e A. Leitão, *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica.* IMPA, 2008, vol. 1.

[26] J. Rychlewski, “On Hooke’s law”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, v. 48, n. 3, pp. 303–314, 1984.