

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE
CURSO DE ENGENHARIA AEROESPACIAL

GABRIEL FERNANDES MARCONCINI ROBERTO

DESENVOLVIMENTO, IMPLEMENTAÇÃO E VERIFICAÇÃO DE UM SOLVER MHD
COMPRESSÍVEL NO SOFTWARE OPENFOAM

Joinville

2022

GABRIEL FERNANDES MARCONCINI ROBERTO

DESENVOLVIMENTO, IMPLEMENTAÇÃO E VERIFICAÇÃO DE UM SOLVER MHD
COMPRESSÍVEL NO SOFTWARE OPENFOAM

Trabalho apresentado como requisito para obtenção do título de bacharel no Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial do Centro Tecnológico de Joinville da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Juan Pablo de Lima Costa Salazar,
Ph.D.

Joinville

2022

GABRIEL FERNANDES MARCONCINI ROBERTO

DESENVOLVIMENTO, IMPLEMENTAÇÃO E VERIFICAÇÃO DE UM SOLVER MHD
COMPRESSÍVEL NO SOFTWARE OPENFOAM

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de bacharel em Engenharia Aeroespacial, na Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville.

Joinville (SC), 15 de dezembro de 2022.

Banca Examinadora:

Juan Pablo de Lima Costa Salazar, Ph. D.
Orientador
Presidente

Dr. Diogo Nardelli Siebert
Membro
Universidade Federal de Santa Catarina

Dr. Eduardo de Carli da Silva
Membro
Universidade Federal de Santa Catarina

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Juan Pablo de Lima Costa Salazar, por todo seu apoio e paciência desde o primeiro momento e por todo conhecimento que me passou, fazendo com que meu apreço pela fascinante área da mecânica dos fluidos computacional aumentasse ainda mais.

Aos meus pais Amarildo e Gisele por batalharem para que fosse possível eu estar aqui hoje, por sempre serem meus maiores exemplos e apoio em todos os passos da minha vida. Aos meus irmãos João Vitor e Ana Luiza por sempre serem um exemplo e uma motivação para ser melhor a cada dia. Aos meus tios Cândida e Antônio e às minhas primas que sempre me apoiaram em todos os momentos, aqui em Joinville, desde o momento que fiz o vestibular. E a todos os meus familiares e amigos que me apoiaram e contribuíram de alguma forma ao longo desses anos.

A fronteira negligenciada entre dois ramos do conhecimento costuma ser aquela que melhor compensa o cultivo.

(RAYLEIGH, 1884).

RESUMO

Com os diversos avanços na área da dinâmica de fluidos computacional (CFD) ao longo das últimas décadas, simulações de escoamentos de grande complexidade tornaram-se possíveis. Entre esses estão os magnetohidrodinâmicos (MHD), escoamentos regidos pelas forças hidrodinâmicas e eletromagnéticas. Com a finalidade de aumentar e disseminar o conhecimento sobre esse tipo de escoamento, foram desenvolvidas duas bibliotecas (solvers), o *mhdPimpleFoam* e o *mhdCentralFoam*, para o software CFD de código aberto Open Source Field Operation and Manipulation (OpenFOAM). Através desse software, as equações governantes dos escoamentos MHD compressíveis foram discretizadas, utilizando o método dos volumes finitos (FVM). O algoritmo de solução Pressure Implicit with Splitting of Operators (PISO) e sua variante magnética BPISO foram implementados no *mhdPimpleFoam*. Para o *mhdCentralFoam* utilizou-se um método de solução explícito das equações baseado no esquema central-upwind e o método hiperbólico-parabólico de limpeza do divergente do campo magnético. Por meio de três casos testes, o escoamento de Hartmann, o escoamento sobre uma lombada e um tubo de choque, realizou-se a verificação do solver, comparando o comportamento das soluções puramente hidrodinâmicas e MHD obtidas, com as soluções analíticas, ou com resultados disponíveis na literatura. Concluiu-se que o método de projeção, utilizado no BPISO para garantir o divergente nulo do campo magnético não é adequado para escoamentos com descontinuidades. No entanto, o método hiperbólico-parabólico mostrou-se suficientemente eficaz nesses casos. Desta forma, embora ambos os solvers reproduzam os resultados hidrodinâmicos esperados, o *mhdCentralFoam* apresentou maior acurácia na solução de escoamento MHD compressíveis, conseguindo capturar de maneira satisfatória efeitos de descontinuidades gerados pelo surgimento de choques em escoamentos compressíveis.

Palavras-chave: Magnetohidrodinâmica. Dinâmica de fluidos computacional. OpenFOAM.

ABSTRACT

Advancements over the last decades in computational fluid dynamics (CFD) have made the simulation of increasingly complex flows a reality. Among these are the magnetohydrodynamic (MHD) flows, where the electromagnetic effects are a prominent feature of the flow field, leading to a wide range of relevant and interesting phenomena. With the goal of increasing and disseminating knowledge about these MHD flows, this work implemented two libraries for compressible MHD flows within the framework of the open source CFD software Open Source Field and Manipulation (OpenFOAM). Through this software, the MHD governing equations were discretized using the finite volume method (FVM). In the *mhdPimpleFoam* solver, the Pressure Implicit with Splitting of Operators (PISO) algorithm was used to solve the pressure-velocity coupling, and a variant called BPISO was chosen for the magnetic field. The *mhdCentralFoam* uses a density-based method with semi-discrete central-upwind schemes and a hyperbolic-parabolic advection equation for treatment of the magnetic field divergence free condition. The verification of the solver was performed using three test cases, the Hartmann flow, the transonic bump and a shock tube. By comparing the hydrodynamics and MHD solutions to the results available in the literature. The projection method, used in the BPISO algorithm, was shown to be inadequate to guarantee divergence free conditions in flows with discontinuities. On the other hand, the hyperbolic-parabolic method presented precise results for this type of flow. For this reason, although both solvers were able to replicate the purely hydrodynamic results, the *mhdCentralFoam* solver produced more accurate results for the solution of compressible MHD flows, with the ability to capture discontinuities such as shocks in compressible flows.

Keywords: Magnetohydrodynamics. Computational fluid dynamics. OpenFOAM.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ilustração do efeito da pressão magnética sob a superfície da seção de um tubo de fluxo magnético.	27
Figura 2 - Exemplo de discretização de um domínio utilizando o FVM.	33
Figura 3 - Exemplo do modelo sintático empregado no OpenFOAM.	36
Figura 4 - Representação esquemática do escoamento de Hartmann.	46
Figura 5 - Esquemático da geometria do escoamento sobre uma lombada.	48
Figura 6 - Esquemático da condição inicial de um tubo de choque.	48
Figura 7 - Regiões formadas no tubo de choque após o rompimento do diafragma e propagação das ondas de choque e expansão.	49
Figura 8 - Comparativo das soluções hidrodinâmicas obtidas por meio dos solvers com a solução analítica.	51
Figura 9 - Comparação dos resultados para o perfil de velocidade para $Ha = 1$	52
Figura 10 - Comparação dos resultados para o perfil do campo magnéticos para $Ha = 1$	52
Figura 11 - Comparação dos resultados para o perfil de velocidade, ao longo da altura do canal, para $Ha = 5$	53
Figura 12 - Comparação dos resultados para o perfil do campo magnético na direção x, ao longo da altura do canal, para $Ha = 5$	53
Figura 13 - Comparativo dos resultados para o perfil de velocidade, ao longo da altura do canal, para $Ha = 20$	54
Figura 14 - Comparativo dos resultados para o perfil do campo magnético na direção x, ao longo da altura do canal, para $Ha = 20$	54
Figura 15 - Malha utilizada nas simulações do escoamento sobre uma lombada.	55
Figura 16 - Comparação dos resultados hidrodinâmicos obtidos com o novo solver <i>mhdPimpleFoam</i> e o <i>rhoPimpleFoam</i>	56
Figura 17 - Comparação dos resultados hidrodinâmicos obtidos com o novo solver <i>mhdCentralFoam</i> e o <i>rhoCentralFoam</i>	57
Figura 18 - Comparação dos resultados hidrodinâmicos ($N_B = 0$).	58
Figura 19 - Comparação dos resultados MHD, para $N_B = 0,8$, obtidos pelos novos solvers com os apresentados por Xisto et al. (2010).	59

Figura 20 - Comparação dos resultados MHD, para $N_B = 1,16$, obtidos pelos novos solvers com os apresentados por Xisto et al. (2010).....	59
Figura 21 - Comparação dos resultados obtidos por meio do <i>mhdPimpleFoam</i> para os diferentes valores de N_B	60
Figura 22 - Comparação dos resultados obtidos por meio do <i>mhdCentralFoam</i> para os diferentes valores de N_B	61
Figura 23 - Condições iniciais utilizadas na simulação do tubo de choque.	62
Figura 24 - Resultados dos novos solvers para pressão ao longo do tubo de choque.	62
Figura 25 - Resultados dos novos solvers para densidade ao longo do tubo de choque.	63
Figura 26 - Resultados dos novos solvers para a magnitude da velocidade ao longo do tubo de choque.....	63
Figura 27 - Resultados da simulação com o <i>mhdCentralFoam</i> para a pressão.....	64
Figura 28 - Resultados da simulação com o <i>mhdCentralFoam</i> para a densidade.....	64
Figura 29 - Resultados da simulação com o <i>mhdCentralFoam</i> para a componente na direção y da velocidade.	65
Figura 30 - Resultados da simulação com o <i>mhdCentralFoam</i> para a componente na direção y do campo magnético.....	65

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Classes e funções numéricas e de discretização disponíveis no OpenFOAM.36

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFD – Dinâmica de fluidos computacional

CFL – Número de Courant-Friedrichs-Lewy

EDP – Equação diferencial parcial

FVM – Método dos volumes finitos

KNP – Esquema Kurganov-Noelle-Petrova

KT – Esquema Kurganov-Tadmor

MHD – Magnetohidrodinâmica

MPD – Magnetoplasmodinâmica

OpenFOAM – Open Source Field Operation and Manipulation

PISO – Pressure-Implicit with Splitting of Operators

SIMPLE – Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations

LISTA DE SÍMBOLOS

a	velocidade do som local
\vec{A}	vetor potencial contendo a parte física do campo magnético
\vec{B}	campo magnético
c	velocidade magnetosônica rápida
c_f	velocidade de propagação
c_p	calor específico a pressão constante
c_v	calor específico a volume constante
e	energia específica interna
E	energia total específica
\vec{E}	campo elétrico total
\vec{E}_i	campo elétrico induzido
\vec{E}_s	campo eletroestático
\vec{f}	forças externas por unidade de volume agindo sobre um fluido
\vec{f}_b	forças de corpo agindo sobre um fluido
\vec{f}_s	forças de superfícies agindo sobre um fluido
\vec{f}_L	força de Lorentz por unidade de volume
\vec{F}_s	força eletroestática
Ha	número de Hartmann
\vec{j}	densidade de corrente
Ma	número de Mach
\dot{m}_f	fluxo mássico na face
N_B	parâmetro de interação
p	pressão estática de um fluido
p_B	pressão de fluxo magnético fictícia
q	carga de uma partícula
Q	soma da carga total agindo sobre um ponto
R	constante do gás
Re	número de Reynolds
Re_B	número de Reynolds magnético

\vec{S}_f	vetor normal a superfície
T	temperatura
u	componente na direção x do vetor velocidade
\vec{U}	vetor velocidade
v_A	velocidade de Alfvén
V	potencial eletrostático
V_C	volume de controle
\vec{W}	vetor das variáveis de fluxo
γ	razão dos calores específicos
ϵ_0	permissividade elétrica no vácuo
μ	viscosidade dinâmica do fluido
μ_0	permeabilidade magnética no vácuo
ρ	densidade de um fluido
ρ_e	densidade de cargas
σ	condutividade elétrica
$\bar{\tau}_{visc}$	tensor tensão viscoso
ϕ_f	fluxo do volumétrico através de uma face
ϕ_B	fluxo do campo magnético
ϕ_S	fluxo do campo eletrostático
ψ	compressibilidade
\mathcal{E}	força eletromotriz
$\vec{\nabla}$	operador gradiente

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
1.1. OBJETIVOS	16
1.1.1. Objetivo Geral	16
1.1.2. Objetivos Específicos	16
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	18
2.1. ELETROMAGNETISMO	18
2.2. LEIS DE CONSERVAÇÃO NA MECÂNICA DOS FLUIDOS	22
2.3. MAGNETOHIDRODINÂMICA	24
2.4. REVISÃO DA LITERATURA	30
3. METODOLOGIA.....	32
3.1. DISCRETIZAÇÃO	32
3.2. SOLUÇÃO	37
3.2.1. mhdPimpleFoam.....	37
3.2.2. mhdCentralFoam	42
3.4. VERIFICAÇÃO	46
3.4.1. Escoamento de Hartmann.....	46
3.4.2. Escoamento transônico sobre uma lombada.....	47
3.4.3. Tubo de Choque.....	48
4. RESULTADOS	50
4.1. ESCOAMENTO DE HARTMANN	50
4.2. ESCOAMENTO TRANSÔNICO SOBRE UMA LOMBADA.....	55
4.3. TUBO DE CHOQUE	61
4.4. DISPONIBILIDADE DOS ALGORITMOS E RESULTADOS.....	66
6. CONCLUSÃO.....	67
REFERÊNCIAS	69

1. INTRODUÇÃO

A magnetohidrodinâmica (MHD) é definida como o estudo da interação mútua entre o escoamento de um fluido e campos magnéticos, sendo que esses fluidos devem ser eletricamente condutores e não-magnéticos, limitando-se, portanto, a metais líquidos, eletrólitos fortes e principalmente plasmas (gases quentes ionizados) (DAVIDSON, 2001), sendo essa interação descrita pelo acoplamento das equações do eletromagnetismo e da mecânica dos fluidos.

As leis que descrevem o eletromagnetismo e o escoamento de um fluido já são conhecidas desde o final do século XIX, contudo, a MHD transformou-se em um objeto de estudo somente no início da década de 1950, quando o interesse pela física de plasma ganhou novos contornos, em função da possibilidade da utilização de campos magnéticos para controlar e confinar uma fusão termonuclear, de maneira a manter o plasma quente longe das paredes do reator (DAVIDSON, 2001).

Ao longo das décadas, diversos avanços na dinâmica de fluidos computacional (CFD) criaram ferramentas que permitem a simulação de escoamentos em diversas condições, incluindo escoamentos MHD. Porém, muitas dessas ferramentas são de difícil acesso, ou mesmo de acesso restrito.

Os programas especializados de simulação CFD são desenvolvidos nas universidades e laboratórios nacionais que, devido a enorme quantidade de tempo e recursos financeiros investidos, geralmente tem direito de propriedade e raramente são disponibilizados para o público. Assim, caso um pesquisador não seja desenvolvedor de um código, as únicas alternativas são comprar a licença de softwares comerciais, cujas licenças custam de \$10.000 a \$50.000 dólares por ano (CHEN et al., 2014) ou utilizar softwares de código aberto que dependem da contribuição da comunidade para implementação de métodos de simulação.

É no esforço de fortalecer a prática de código aberto que este trabalho propõe utilizar a ferramenta gratuita e de código livre Open Source Field Operation and Manipulation (OpenFOAM) para a implementação de um solver a fim de simular escoamentos MHD compressíveis. Essa ferramenta baseia-se no método dos volumes finitos (FVM) e é escrita na linguagem C++ utilizando o paradigma de programação orientada a objetos, para desenvolver um modelo sintático de mimetização de equações, podendo realizar simulações CFD básicas, combustão, modelagem de turbulência, transferência de calor, escoamento multifásico, análise de stress, matemática financeira e eletromagnética (CHEN et al., 2014).

O OpenFOAM já possui um módulo para escoamentos MHD (*mhdFoam*). Contudo, esse solver limita-se a solução de escoamentos incompressíveis de metais líquidos, não abrangendo escoamentos compressíveis, como o caso de tubos de choque MHD, propulsores magnetoplasmodinâmicos (MPD) e bocais magnéticos. Esses exemplos apresentam compressibilidade e descontinuidades no escoamento causadas por choque e não podem ser computadas pelo *mhdFoam*.

Considerando isso, o objetivo deste trabalho é desenvolver, implementar e verificar um solver a fim de simular escoamentos MHD para o regime de velocidade subsônico a supersônico, utilizando o OpenFOAM, de maneira a facilitar e disseminar o acesso a esse tipo de ferramenta para pessoas dentro e fora da academia.

Dois solvers foram implementados. O primeiro trata-se de um algoritmo baseado em pressão apresentado por Xisto et al. (2010), no qual é utilizado o Pressure Implicit with Splitting of Operators (PISO) para solução do acoplamento pressão-velocidade e, em seguida, solucionase a equação da indução por meio de uma variante magnética do PISO, chamado BPISO, já implementado no solver *mhdFoam*. O segundo solver baseia-se no método apresentado por Mayigüé e Groll (2016), que utiliza esquemas central-upwind para a solução das equações de maneira explícita.

Três casos foram analisados a fim de verificar o comportamento das soluções hidrodinâmicas e MHD em diferentes regimes de escoamento, além da capacidade dos solvers de capturar descontinuidades.

1.1. OBJETIVOS

Para resolver a problemática da simulação de escoamentos MHD em softwares de código aberto, propõe-se os seguintes objetivos.

1.1.1. Objetivo Geral

Implementar um solver para simulação de escoamentos MHD no regime de velocidade subsônico a supersônico, utilizando o OpenFOAM.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Comparar o funcionamento do código com os de outros algoritmos para escoamentos compressíveis do OpenFOAM, na ausência de campos magnéticos;
- Verificar os resultados obtidos com resultados disponíveis na literatura.
- Investigar fenômenos MHD a partir das simulações realizadas para aumentar a compreensão sobre esse tipo de escoamento.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As equações que governam os escoamentos MHD surgem do acoplamento das equações de Maxwell com as equações de conservação para um fluido. Esta seção apresentará os conceitos e os modelos matemáticos adequados para esses escoamentos.

2.1. ELETROMAGNETISMO

As forças eletromagnéticas agindo sobre uma partícula com carga q movendo-se a uma velocidade \vec{U} , em geral, podem ser divididas em três componentes. A primeira é a força eletroestática ou força de Coulomb, que surge da repulsão ou atração mútua das cargas elétricas. A segunda é a força que a partícula experimenta devido a um campo elétrico induzido (\vec{E}_i) por um campo magnético variável (\vec{B}). A terceira é a força de Lorentz, que surge do movimento de uma carga em meio a um campo magnético (DAVIDSON, 2001).

A lei de Coulomb determina que a força eletroestática é proporcional ao campo eletroestático (\vec{E}_s),

$$\vec{F}_s = q\vec{E}_s = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{(r_i)^2} \hat{r}_i. \quad (1)$$

Sendo q_i uma carga a distância r_i da carga q . A constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 8,98755 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ é sempre positiva. Logo, se q_i e q têm o mesmo sinal, a força é repulsiva; se têm sinais opostos, a força é atrativa. Além disso, a lei de Coulomb estabelece que o campo eletroestático é um campo conservativo, podendo ser escrito como o gradiente do potencial eletroestático (V) (NUSSENVEIG, 1997),

$$\vec{E}_s = -\vec{\nabla}V. \quad (2)$$

Pela identidade do cálculo vetorial, o rotacional do gradiente de um campo escalar é sempre nulo, pode-se concluir que o campo eletroestático é irrotacional (NUSSENVEIG, 1997),

$$\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}V) = \vec{\nabla} \times \vec{E}_s = 0. \quad (3)$$

O fluxo total do campo eletrostático sobre uma superfície fechada é igual a carga líquida dentro da mesma superfície. Esta é conhecida como a lei de Gauss para o campo elétrico (SILVA; SANTOS; PHILIPPI, 2010), dada por,

$$\Phi_S = \oint_S \vec{E}_s \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (4)$$

em que $Q = \sum_{i=1}^N q_i = Nq$ é a carga total (ou líquida) agindo sobre um ponto P no interior de uma superfície fechada S . Logo, é possível reescrever a Equação 4 utilizando o teorema da divergência para obter a forma local da lei de Gauss,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_s = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (5)$$

onde ρ_e é a densidade de cargas e $\epsilon_0 = 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 / \text{kg} \cdot \text{m}^3$ é a permissividade elétrica no vácuo.

Assumindo um circuito fechado C , sob efeito de um campo magnético \vec{B} variável no tempo, os elétrons livres sobre esse circuito sofrerão o efeito de uma força eletromotriz \mathcal{E} devido a um campo elétrico induzido pelo campo magnético (NUSSENZVEIG, 1997). Esta relação é dada pela Equação 6,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (6)$$

Pelo teorema de Stokes a integral de linha de \vec{E}_i pode ser reescrita como,

$$\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}_i) \cdot d\vec{S}. \quad (7)$$

Consequentemente, a Equação 6 pode ser escrita na forma diferencial, dada por,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (8)$$

Essa é conhecida como a lei de Faraday e a interpretação física desse resultado é que um campo magnético variável no tempo produz um campo elétrico induzido (não mais eletroestático) (NUSSENZVEIG, 1997).

Seja $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$ e utilizando a propriedade distributiva do operador $\vec{\nabla}$ tem-se,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}_s + \vec{\nabla} \times \vec{E}_i, \quad (9)$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_s + \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_i. \quad (10)$$

O campo elétrico induzido possui divergente nulo e rotacional determinado pela lei de Faraday, como visto na Equação 8. Já o campo eletroestático possui o rotacional nulo e o divergente definido pela lei de Gauss, como apresentado nas Equações 3 e 5, respectivamente (DAVIDSON, 2001). Portanto, as equações que descrevem o campo elétrico são dadas por,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (11)$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}. \quad (12)$$

O fluxo de um campo magnético \vec{B} através de uma superfície fechada S é sempre nulo, uma vez que não existem monopolos magnéticos, podendo ser escrito como,

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (13)$$

Novamente, utilizando o teorema da divergência é possível escrever a equação anterior na forma diferencial,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (14)$$

A relação dada pela Equação 14 é a lei de Gauss para o magnetismo, da qual conclui-se que as linhas de força magnética são sempre fechadas, não havendo fontes nem sumidouros (NUSSENZVEIG, 1997).

Semelhante ao efeito de indução, descrito pela lei de Faraday, uma corrente elétrica pode induzir um campo magnético. Esse efeito é descrito matematicamente pela lei de Ampère-Maxwell (NUSSENZVEIG, 1997),

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (15)$$

em que $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ é conhecido como corrente de deslocamento, introduzida por Maxwell como uma correção à forma original da lei de Ampère, a fim de satisfazer a conservação da carga (DAVIDSON, 2001), prescrita pela Equação 16,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}. \quad (16)$$

A densidade de corrente \vec{J} é definida pela lei de Ohm, sendo proporcional às forças experimentadas pelas cargas livres (DAVIDSON, 2001),

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}), \quad (17)$$

onde σ é a condutividade elétrica.

A força de Lorentz, definida como a força que age sobre uma partícula carregada em meio a um campo elétrico e um campo magnético, é dada por (DAVIDSON, 2001),

$$\vec{f}_L = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}. \quad (18)$$

A lei de Gauss para o campo elétrico (Equação 11), a lei da indução de Faraday (Equação 12), a lei de Gauss para o campo magnético (Equação 14) e a lei de Ampère (Equação

15) juntas são conhecidas como equações de Maxwell. Em conjunto com a conservação da carga (Equação 16) e a força de Lorentz (Equação 17), descrevem o eletromagnetismo (DAVIDSON, 2001).

2.2. LEIS DE CONSERVAÇÃO NA MECÂNICA DOS FLUIDOS

As equações governantes do escoamento de um fluido são modelos matemáticos que representam as leis de conservação da física. No modelo adotado, supõe-se que o fluido seja contínuo, isto é, a estrutura da matéria e os movimentos moleculares são ignorados, e o comportamento do fluido é descrito por meio das propriedades macroscópicas, como velocidade, pressão, densidade e temperatura (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

O princípio da conservação da massa indica que, na ausência de fontes ou sumidouros, uma determinada região irá conservar a massa (MOUKALLED; MANGANI; DARWISH 2016). Portanto, a taxa de aumento de massa de um elemento de fluido é igual taxa líquida de escoamento de massa para dentro do elemento de fluido (VERSTEEG; MALALASEKERA 2007). Este princípio físico é descrito matematicamente por,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0. \quad (19)$$

onde ρ a densidade do fluido,

A segunda lei de Newton diz que a taxa de variação da quantidade de movimento de um fluido é igual à soma de forças sobre o elemento de fluido (VERSTEEG; MALALASEKERA 2007). A Equação 20 apresenta a definição matemática do princípio da conservação da quantidade de movimento,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = \vec{f}, \quad (20)$$

onde \vec{f} são as forças externas agindo sobre o fluido. Essas forças são divididas em dois tipos:

- Forças de superfície (\vec{f}_s): forças de pressão e forças viscosas;
- Forças de corpo (\vec{f}_b): forças gravitacionais, força centrífuga, força de Coriolis e forças eletromagnéticas.

Assim, a força externa pode ser escrita como,

$$\vec{f} = \vec{f}_s + \vec{f}_b. \quad (21)$$

As forças de superfície podem ser escritas na forma apresentada pela Equação 22, a partir do teorema da divergência,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = -\vec{\nabla} \cdot (p \vec{I}) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}}_{visc} + \vec{f}_b, \quad (22)$$

em que p é a pressão hidrodinâmica (ou estática) do fluido, \vec{I} o tensor identidade e $\bar{\bar{\tau}}_{visc}$ o tensor tensão viscoso.

A equação da conservação da energia é obtida a partir da primeira lei da termodinâmica, na qual afirma-se que a energia não pode ser criada nem destruída durante um processo, podendo apenas mudar de forma. Consequentemente, a soma de todas as formas de energia em um sistema isolado permanece constante (MOUKALLED et al., 2016). Matematicamente o princípio da conservação da energia, em termos da energia interna específica, é expresso por,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{U}) = -\vec{\nabla} \cdot (p \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\tau}}_{visc} \cdot \vec{U}) + \vec{f}_b \cdot \vec{U}. \quad (23)$$

Além das equações de conservação, dois parâmetros são importantes para análise de escoamentos. O primeiro é o número de Reynolds, definido por,

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}, \quad (24)$$

onde L é o comprimento característico e μ é a viscosidade dinâmica do fluido. Sendo interpretado como uma medida relativa da importância entre as forças inerciais e viscosas (MOUKALLED et al., 2016).

O número de Reynolds permite determinar o regime do escoamento com relação as forças que o dominam, de modo que, para $Re < 5 \times 10^5$ tem-se um escoamento do tipo laminar, no qual os efeitos viscosos possuem uma importância maior sobre o escoamento que

os efeitos inerciais. Já para elevados Reynolds, $Re > 5 \times 10^5$, o escoamento se torna do tipo turbulento e passa a ser dominado pelos efeitos inerciais (MOUKALLED et al., 2016).

O segundo parâmetro é o número de Mach, definido como a razão entre a velocidade de um objeto se movendo por um fluido e a velocidade do som local (MOUKALLED et al., 2016),

$$Ma = \frac{U}{a}, \quad (25)$$

sendo U a magnitude da velocidade local do fluido relativo ao meio, e a a velocidade do som local, dada por,

$$a = \sqrt{\gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}. \quad (26)$$

Para um gás ideal a Equação 26 tem a forma específica,

$$a = \sqrt{\gamma RT}. \quad (27)$$

na qual $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ é a razão de calores específicos, também conhecido como coeficiente adiabático, e R a constante do gás.

O número de Mach é um parâmetro indicador da importância da compressibilidade do escoamento. Para $Ma < 1$, o escoamento é subsônico. Para casos em que $Ma > 1$, o escoamento é supersônico e define-se o regime transônico para $0,8 < Ma < 1,2$. Para valores de $Ma < 0,3$ os efeitos da compressibilidade, em geral, podem ser ignorados. Já para $Ma > 0,3$ o escoamento passa a sofrer efeitos da compressibilidade. Quando $Ma > 1$ podem surgir discontinuidades devido ao surgimento de choques. Ainda, costuma-se designar o regime hipersônico quando $Ma > 5$ e efeitos de alta temperatura devem ser considerados.

2.3. MAGNETOHIDRODINÂMICA

As equações do eletromagnetismo apresentadas até o momento estão escritas em suas formas generalizadas. Contudo, para escoamentos MHD assume-se que o fluido é suficientemente condutivo, de modo que o tempo de relaxação da carga é muito menor que o tempo de trânsito das ondas eletromagnéticas (plasmas não relativísticos). Assim, a corrente de deslocamento é desprezível. Com essas simplificações a lei de Gauss (Equação 12) e as equações de Maxwell adotam a seguinte forma (MOREAU, 1990),

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (28)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (29)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (30)$$

Adicionalmente, a conservação da carga e a força de Lorentz passam a ser expressas pelas Equações 31 e 32, respectivamente,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (31)$$

$$\vec{f}_L = \vec{J} \times \vec{B}. \quad (32)$$

A substituição das equações acima, juntamente com a lei de Ohm, nas equações de conservação dá origem ao modelo matemático que descreve um escoamento MHD. O acoplamento é realizado nas equações de conservação da quantidade de movimento e de conservação da energia. Já a equação da conservação da massa mantém-se inalterada para esse tipo de escoamento.

Como visto, as forças sentidas por uma partícula devido a um campo elétrico e um campo magnético são descritas pela força de Lorentz (Equação 32). Logo, além das forças de superfície, a equação da conservação da quantidade de movimento deve levar em conta essa força, como apresentado na Equação 33,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{U}\vec{U}) = -\nabla \cdot (p\vec{I}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_{visc} + \vec{J} \times \vec{B}. \quad (33)$$

É conveniente considerar o campo magnético \vec{B} como a principal quantidade eletromagnética, uma vez que todas as outras quantidades (\vec{E} , \vec{J} e q) podem ser deduzidas de \vec{B} a partir das equações de Maxwell e da lei de Ohm (MOREAU, 1990). Portanto, o termo da força de Lorentz pode ser reescrito partindo da Equação 34,

$$\vec{J} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} [-\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})]. \quad (34)$$

Utilizando a identidade do cálculo vetorial apresentada abaixo,

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{B} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (35)$$

é possível reescrever a Equação 34 como,

$$\vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B}) - \frac{1}{2\mu_0} \vec{\nabla} (\vec{B} \cdot \vec{B}). \quad (36)$$

O termo $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B}$ pode ser reescrito a partir da lei de Gauss para o magnetismo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (SILVA et al., 2010),

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{B}). \quad (37)$$

Consequentemente, a força de Lorentz pode ser escrita como,

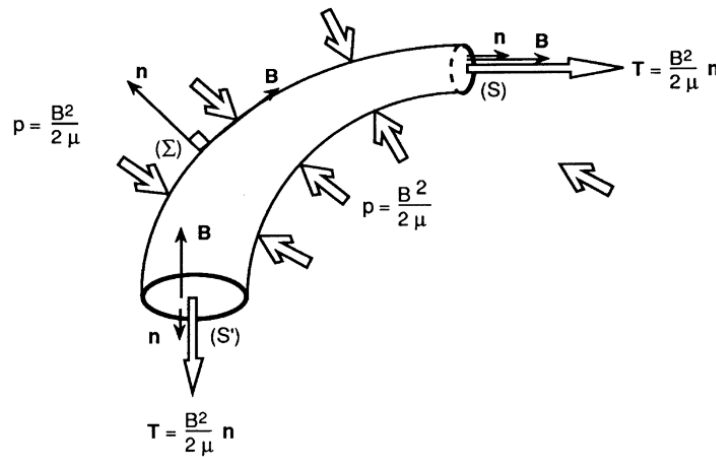
$$\vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{B}) - \frac{1}{2\mu_0} \vec{\nabla} (\vec{B} \cdot \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu_0} - \frac{B^2}{2\mu_0} \vec{I} \right), \quad (38)$$

em que o termo do lado direito da equação acima é conhecido como a componente magnética do tensor de Maxwell (MOREAU, 1990),

$$\bar{T} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu_0} - \frac{B^2}{2\mu_0} \bar{I}. \quad (39)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação 39 é conhecido como hoop stress e age como uma tensão na direção das linhas de campo, sendo semelhante à tensão viscosa (XISTO et al., 2010). Já o segundo termo é uma tensão que sempre atua de forma normal a superfície, como ilustrado pela Figura 1, agindo como uma pressão sobre a superfície. Por isso esse termo é conhecido como pressão magnética (MOREAU, 1990).

Figura 1 - Ilustração do efeito da pressão magnética sob a superfície da seção de um tubo de fluxo magnético.



Fonte: Moreau (1990, p. 15).

Portanto, a equação da conservação da quantidade de movimento para um escoamento MHD é,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = -\vec{\nabla} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau}_{visc} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu_0} \right), \quad (40)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação é a pressão geral (p_G), sendo resultado da soma da pressão magnética e da pressão hidrodinâmica,

$$p_G = p + \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (41)$$

Caso a força de Lorentz seja o único termo de força de corpo, a equação da conservação da energia tem-se a seguinte forma,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{U} \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) = -\vec{\nabla} \cdot (p \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\tau}_{visc} \cdot \vec{U}) + (\vec{J} \times \vec{B}) \cdot \vec{U}, \quad (42)$$

em que e é a energia interna específica, e $\frac{1}{2} U^2$ é a energia cinética específica. Novamente, por meio das leis de Maxwell e das identidades do cálculo vetorial, é possível escrever a Equação 42 da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \vec{\nabla} \cdot (\rho E \vec{U}) \\ = -\vec{\nabla} \cdot \left[\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \vec{U} \right] + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\tau}_{visc} \cdot \vec{U}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{U})) \\ + \nabla^2 \left(\frac{B^2}{2\mu_0^2 \sigma} \right) - \frac{1}{\mu_0^2 \sigma} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \vec{B})) \right], \end{aligned} \quad (43)$$

onde $E = e + \frac{1}{2} U^2 + \frac{B^2}{2\mu_0 \rho}$ é a energia total específica, que leva em conta a contribuição da energia interna, cinética macroscópica e magnética.

Duas equações ainda são necessárias a fim de descrever a propagação do campo magnético com o tempo em um escoamento MHD. A primeira equação é a própria lei de Gauss para o magnetismo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, utilizada como uma condição de contorno a fim de garantir a característica senoidal do campo magnético (XISTO et al., 2010).

A segunda equação é obtida a partir da substituição da lei de Ohm na lei de Faraday,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\sigma} \vec{J} + \vec{U} \times \vec{B} \right). \quad (44)$$

Usando a lei de Ampère (Equação 30) substitui-se a densidade de corrente e obtém-se a Equação 45,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_0 \sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{U} \times \vec{B} \right] = -\frac{1}{\mu_0 \sigma} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{B}), \quad (45)$$

da qual, por meio das identidades vetoriais, é possível escrever,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B}, \quad (46)$$

onde o primeiro termo do lado direito da igualdade é o termo de convecção e o segundo é o termo de difusão do campo magnético (XISTO et al., 2010). A relação entre esses termos permite a definição do número de Reynolds magnético, um parâmetro fundamental no estudo de escoamentos MHD, definido como:

$$Re_B = \mu_0 \sigma LU. \quad (47)$$

Quando $Re_B \ll 1$, o termo convectivo pode ser desprezado, o que torna todas as equações apresentadas desacopladas, de maneira que o termo eletromagnético é introduzido como um termo fonte. Para $Re_B \gg 1$, o termo de difusão pode ser ignorado. No entanto, as equações terão um forte acoplamento e não poderão ser tratadas de forma separada. Finalmente, nos casos em que $Re_B \approx 1$, as forças eletromagnéticas são governadas pelo campo de escoamento e os termos convectivos e dissipativos devem ser mantidos na equação (XISTO et al., 2010).

Outros dois parâmetros utilizados na análise de escoamentos MHD é o parâmetro de interação N_B , ou número de Stuart, definido como uma medida relativa da influência da força de Lorentz e das forças inerciais sobre o escoamento (XISTO et al., 2010),

$$N_B = \frac{\sigma LB^2}{\rho U}. \quad (48)$$

O segundo é o número de Hartmann (Ha), definido como a razão entre as forças eletromagnéticas e as forças viscosas em um escoamento MHD, dado por,

$$Ha = BL \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}. \quad (49)$$

As equações que descrevem matematicamente um escoamento MHD compressível são listadas abaixo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0, \quad (50)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau}_{visc} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu_0} \right), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \vec{\nabla} \cdot (\rho E \vec{U}) \\ = -\vec{\nabla} \cdot \left[\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \vec{U} \right] + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\tau}_{visc} \cdot \vec{U}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{U})) \\ + \nabla^2 \left(\frac{B^2}{2\mu_0^2 \sigma} \right) - \frac{1}{\mu_0^2 \sigma} [\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \vec{B}))], \end{aligned} \quad (52)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B}, \quad (53)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (54)$$

2.4. REVISÃO DA LITERATURA

Diversos métodos de solução das equações MHD foram desenvolvidos, em especial para os casos MHD ideais ($Re_B \gg 1$), com diversas aplicações na astrofísica e reatores de fusão nuclear. Os métodos mais comuns de solucionar essas equações é o método de Riemann, como o desenvolvido por Brio e Wu (1988) que utiliza a aproximação de Roe e o esquema de diferenciação upwind para resolver as equações, embora esse solver seja para escoamentos MHD ideais e unidimensionais.

Além dos solvers que utilizam o método de Riemann, existem os solvers que utilizam o FVM, como proposto por Xisto et al. (2010), baseado em acoplamento pressão-velocidade e uso do algoritmo PISO e sua variante magnética BPISO para a solução dos escoamentos MHD. Essa metodologia é utilizada como base para um dos solvers desenvolvidos, o mhdPimpleFoam.

O solver proposto para FVM por Mayigüé e Groll (2016), baseado em densidade, adota o esquema de Kurganov-Noelle-Petrova (KNP) e soluciona as equações de maneira explícita.

Este método apresenta bons resultados para a captura de descontinuidades. Entretanto, esse solver também assume escoamentos MHD ideais.

Um dos softwares mais utilizados nessa área é o Athena, desenvolvido pelo Departamento de Astrofísica da Universidade de Princeton, que utiliza um método Gudonov de alta ordem usando o FVM (STONE et al., 2008).

3. METODOLOGIA

A implementação dos solvers foi realizada no software de código aberto OpenFOAM e utilizou, para a discretização das equações, o FVM. Neste método a forma integral das leis de conservação são discretizadas para um volume computacional, resultando em equações algébricas discretas sobre um volume finito (MOUKALLED et al., 2016).

A solução numérica das equações para o *mhdPimpleFoam* se deu por meio dos algoritmos PISO e BPISO, já implementados no OpenFOAM. Para o *mhdCentralFoam* utilizou-se o método explícito baseado no central-upwind semi-discreto, descrito por Mayigüé e Groll (2016).

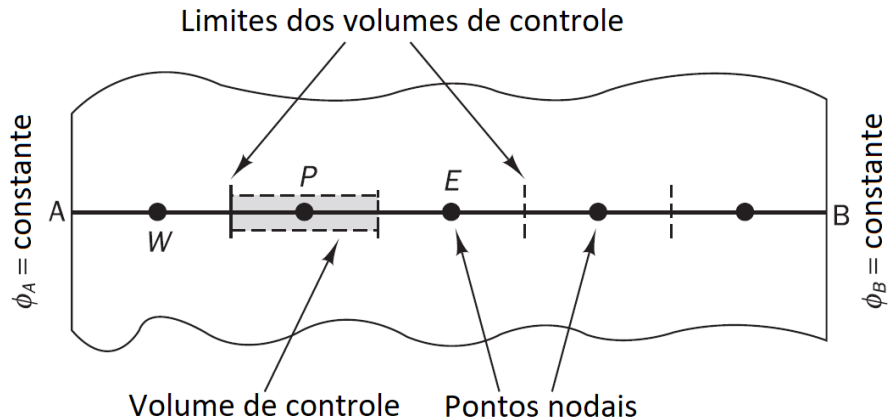
Após a implementação dos solvers, simulações foram realizadas em casos testes par fins de verificação dos códigos. Os casos escolhidos para verificação possuem solução analítica ou tem resultados bem documentados na literatura.

3.1. DISCRETIZAÇÃO

A solução numérica de uma EDP consiste em encontrar os valores de uma variável dependente ϕ em pontos específicos dentro do domínio de interesse. Esses pontos são chamados de pontos nodais (ou nós) e são resultado da discretização da geometria original em elementos discretos (MOUKALLED et al., 2016).

Assumindo um número qualquer de volumes na região entre A e B de um domínio, os pontos nodais estão localizados no centro desses volumes e os limites (ou faces) são posicionados na metade do caminho entre os nós adjacentes. Assim, cada nó está cercado por um volume de controle (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). A Figura 2 apresenta um exemplo de discretização de um domínio unidimensional.

Figura 2 - Exemplo de discretização de um domínio utilizando o FVM.



Fonte: Adaptado de Versteeg et al. (2007, p. 116).

O próximo passo é a discretização espacial e temporal das equações governantes sobre os elementos nos quais o domínio foi dividido. O teorema da divergência é então aplicado a fim de transformar as integrais de volume dos termos convectivos e difusivos em integrais de superfície. Uma equação discretizada sobre cada ponto nodal é gerada e resolvida numericamente (MOUKALLED et al., 2016).

As equações de conservação podem ser escritas de uma forma genérica como,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\phi\vec{U}) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma^\phi\vec{\nabla}\phi) + Q^\phi, \quad (55)$$

em que o primeiro e segundo termo do lado esquerdo da equação são os termos transientes e convectivos, respectivamente. Do lado direito da equação estão os termos de difusão e o termo fonte Q^ϕ , relacionado a efeitos externos agindo sobre o fluido (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Integrando a Equação 55 sobre o volume de controle (V_C) e de um tempo t a $t + \Delta t$, tem-se,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{V_C} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{V_C} \vec{\nabla} \cdot (\rho\phi\vec{U}) dV dt \\ = \int_t^{t+\Delta t} \int_{V_C} \vec{\nabla} \cdot (\Gamma^\phi\vec{\nabla}\phi) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{V_C} Q^\phi dV dt. \end{aligned} \quad (56)$$

A partir do teorema da divergência, as integrais dos termos difusivos e convectivos são substituídas por integrais de superfície no volume de controle. Essas integrais são aproximadas pelo somatório dos termos de fluxo sobre a face do elemento, sendo as formas semi-discretizadas dos termos convectivos e difusivos dadas pelas Equações 57 e 58, respectivamente (MOUKALLED et al., 2016),

$$\int_{V_C} \vec{\nabla} \cdot (\rho\phi\vec{U}) dV = \sum_{f \sim nb(P)} (\rho\phi\vec{U})_f \cdot \vec{S}_f, \quad (57)$$

$$\int_{V_C} \vec{\nabla} \cdot (\Gamma^\phi \vec{\nabla} \phi) dV = \sum_{f \sim nb(P)} (\Gamma^\phi \vec{\nabla} \phi)_f \cdot \vec{S}_f, \quad (58)$$

sendo $f \sim nb(P)$ as faces dos pontos vizinhos ao elemento P .

Para o termo fonte a integração sobre o volume pode ser diretamente discretizada obtendo-se o resultado apresentado pela Equação 59,

$$\int_{V_C} Q^\phi dV = Q_P^\phi V_C. \quad (59)$$

Assim, a equação semi-discretizada, para um elemento de volume P , pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) V_C dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[\sum_{f \sim nb(P)} (\rho\phi\vec{U})_f \cdot \vec{S}_f \right] dt \\ = \int_t^{t+\Delta t} \left[\sum_{f \sim nb(P)} (\Gamma^\phi \vec{\nabla} \phi)_f \cdot \vec{S}_f \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} Q^\phi V_C dt. \end{aligned} \quad (60)$$

O objetivo desse último passo é transformar as equações governantes em um conjunto de equações algébricas, expressando os fluxos nos volumes e faces em termos dos valores das variáveis vizinhas ao elemento de volume (MOUKALLED et al., 2016).

A linearização das equações pode ser escrita, para o termo espacial, da seguinte forma,

$$a_P \phi_P + \sum_{NB(P)} (a_{NB} \phi_{NB}) = b_P, \quad (61)$$

em que os coeficientes a_P , a_{NB} e b_P estão relacionados aos fluxos convectivos e difusivos no elemento P , nos elementos vizinhos e termo fonte, respectivamente.

$$a_P = \sum_{f \sim nb(P)} (FluxP_f - FluxP), \quad (62)$$

$$a_{NB} = FluxF_f, \quad (63)$$

$$b_P = \sum_{f \sim nb(P)} (FluxV_f - FluxV), \quad (64)$$

onde $FluxP_f$, $FluxF_f$ e $FluxV_f$ são os fluxos nas faces dependente do elemento P , vizinhos e termo fonte, enquanto $FluxP$ e $FluxV$ são fluxos volumétricos relacionados ao termo fonte. O termo transiente pode ser escrito como,

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) V_C dt = \frac{(\rho_P\phi_P) - (\rho_P\phi_P)^o}{\Delta t} V_C, \quad (65)$$

na qual o termo sem sobrescrito representa os valores em $t + \Delta t$, e os com o sobrescrito o representa os valores no tempo t . O mesmo pode ser feito para os termos espaciais, e ao incluir um termo de ponderação θ , que indica o peso da solução no tempo anterior na solução no tempo atual. Dessa forma tem-se a seguinte expressão para as equações de conservação discretizadas (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007),

$$\left[\left(\frac{\rho_P V_C}{\Delta t} + \theta a_P \right) \phi_P - \left(\frac{\rho_P^o V_C}{\Delta t} + (1 - \theta) a_P^o \right) \phi_P^o \right] + \sum_{NB(P)} [\theta (a_{NB} \phi_{NB}) - (1 - \theta) (a_{NB}^o \phi_{NB}^o)] = b_P. \quad (66)$$

Para $\theta = 0$, apenas os valores no tempo t são utilizados; se $\theta = 1$ apenas os valores em $t + \Delta t$ são usados; e finalmente se $\theta = \frac{1}{2}$, os valores em t e $t + \Delta t$ possuem o mesmo peso.

Portanto, a forma final da equação discretizada depende do valor de θ que, por sua vez, depende do esquema de discretização utilizado. Nos casos em que $\theta = 0$ os esquemas são

chamados de explícitos, quando $0 < \theta \leq 1$ tem-se os chamados esquemas implícitos e, por fim, se $\theta = 1$ o esquema é denominado totalmente implícito (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Todo o processo de discretização do domínio e das equações é realizado de maneira indireta dentro do OpenFOAM, utilizando um conjunto de classes de objetos que permitem a manipulação de malhas, geometrias e técnicas de discretização em um nível hierárquico elevado de programação. Essas classes representam a base do desenvolvimento em OpenFOAM, permitindo a construção de uma variedade de algoritmos e a reutilização dos códigos (MOUKALLED et al., 2016). O Quadro 1 apresenta algumas das classes de discretização.

Quadro 1 - Classes e funções numéricas e de discretização disponíveis no OpenFOAM.

<i>Objetos</i>	<i>Tipo de dado</i>	<i>Classe do OpenFOAM</i>
Interpolação	Esquemas de diferenciação	surfaceInterpolation<template>
Discretização explícita	ddt, div, grad, curl	fvc::
Discretização implícita	ddt, d2dt2, div, laplacian	fvm::

Fonte: Adaptado de Moukalled et al. (2016, p. 129).

O modelo sintático de mimetização de equações do OpenFOAM permite expressar os algoritmos de uma maneira natural. A Figura 3 apresenta um exemplo do modelo sintático empregado pelo OpenFOAM para implementação de uma equação de conservação de quantidade de movimento.

Figura 3 - Exemplo do modelo sintático empregado no OpenFOAM.

```
(
    fvm::ddt(rho, U) + fvm::div(phi, U)
+ MRF.DDt(rho, U)
+ turbulence->divDevRhoReff(U)
==
    fvOptions(rho, U)
);
```

Fonte: Autor (2022).

As discretizações das equações governantes são incluídas dentro do arquivo principal dos solvers, nesse caso chamados de *mhdPimpleFoam.C* e *mhdCentralFoam.C*, ou por meio de arquivos headers, arquivos com a extensão *.H*, que são chamados no arquivo principal e executam as ações implementadas.

Por fim, através de dicionários como *controlDict*, *fvSchemes* e *blockMeshDict*, é possível especificar a forma e o número de elementos na malha, esquemas de discretização da derivada temporal, divergente, gradiente, entre outros, além de controlar a simulação, como início e fim, passo de tempo, e o número máximo de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

3.2. SOLUÇÃO

Após a discretização das equações 50 a 53 é necessário solucionar os sistemas lineares resultantes para determinar as três componentes de velocidade, pressão, temperatura e os três componentes do campo magnético.

Neste trabalho foram desenvolvidos dois algoritmos: o primeiro, chamado *mhdPimpleFoam*, baseado no algoritmo descrito por Xisto et al. (2010); o segundo, chamado *mhdCentralFoam*, baseia-se no algoritmo por Mayigüé e Groll (2016).

3.2.1. mhdPimpleFoam

O solver é dividido em duas partes: na primeira a parte hidrodinâmica das equações é solucionada utilizando o algoritmo Pressure Implicit with Splitting of Operators (PISO). Esse é um procedimento de cálculo baseado no acoplamento pressão-velocidade desenvolvido por Issa (1986) para computação não iterativa de escoamentos compressíveis transientes e utiliza um passo de predição e dois de correção, sendo visto como uma extensão do Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations (SIMPLE) (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

A partir da discretização da equação da conservação da quantidade de movimento, é possível escrever a equação algébrica, em forma matricial,

$$[\mathcal{M}]\vec{U} = -\vec{\nabla}p, \quad (67)$$

onde $[\mathcal{M}]$ é a matriz dos coeficientes, determinados a partir da discretização da equação, \vec{U} e $\vec{\nabla}p$ são os vetores de velocidade e gradiente de pressão de cada elemento, respectivamente. A forma expandida da Equação 67 é expressa como,

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,1} & \cdots & M_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_1 \\ \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_2 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_n \end{bmatrix}. \quad (68)$$

O gradiente da pressão é calculado de forma explícita a partir dos valores de pressão do passo anterior ou da condição inicial. A seguir, soluciona-se a Equação 67 para um campo de velocidades \vec{U}^* , que não satisfaz a equação da continuidade. Essa etapa é conhecida como passo de predição da quantidade de movimento, ou momentum predictor (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Com essa primeira estimativa \vec{U}^* para o campo de velocidades, entra-se no loop do PISO. Soluciona-se, primeiramente, a equação para a energia total (Equação 52) e obtém-se uma estimativa para o campo de temperaturas (T), compressibilidade (ψ) e densidade, através da definição da energia total e da equação de estado para um gás perfeito, dados pelas Equações 69, 70 e 71, respectivamente,

$$T^* = \frac{1}{\rho c_v} \left[\rho E - \frac{1}{2} \rho U^{*2} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right], \quad (69)$$

$$\psi^* = \frac{1}{RT^*}, \quad (70)$$

$$\rho^* = \psi^* p, \quad (71)$$

em que R é a constante do gás e c_v é o calor específico a volume constante.

A etapa seguinte é a construção do operador $[H(\vec{U}^*)]$, obtido por meio da extração da diagonal principal da matriz $[\mathcal{M}]$. Essa componente, contendo a diagonal, é denominada como $[a_p^U]$ e escrita como,

$$[a_p^U] = \begin{bmatrix} M_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Essa matriz possui uma propriedade muito útil, uma vez que o inverso de uma matriz diagonal é apenas o inverso dos valores de sua diagonal,

$$[a_p^U]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_{1,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_{2,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{M_{n,n}} \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Assim, torna-se possível reescrever o termo $[\mathcal{M}]\vec{U}$,

$$[\mathcal{M}]\vec{U}^* = [a_p^U]\vec{U}^* - [H(\vec{U}^*)]. \quad (74)$$

A matriz $[H(\vec{U}^*)]$ é construída utilizando os valores estimados para velocidade \vec{U}^* e é composta dos termos que não foram extraídos de $[\mathcal{M}]$ (MOUKALLED et al., 2016). Rearranjando a Equação 74 é possível definir o operador $[H(\vec{U}^*)]$,

$$[H(\vec{U}^*)] = [a_p^U]\vec{U}^* - [\mathcal{M}]\vec{U}^*. \quad (75)$$

Utilizando a Equação 75 é possível reescrever a Equação 67 como,

$$[a_p^U]\vec{U}^* - [H(\vec{U}^*)] = -\vec{\nabla}p. \quad (76)$$

Multiplicando ambos os lados por $[a_p^U]^{-1}$ a Equação 76 torna-se,

$$\vec{U}^* = [a_p^U]^{-1}[H(\vec{U}^*)] - [a_p^U]^{-1}\vec{\nabla}p. \quad (77)$$

Inserindo esse resultado na equação da continuidade (Equação 50), juntamente com a Equação 71 para a densidade, tem-se a equação para correção da pressão,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* p) + \vec{\nabla} \cdot (\psi^* p [a_p^U]^{-1} [H(\vec{U}^*)]) - \vec{\nabla} \cdot (\psi^* p [a_p^U]^{-1} \vec{\nabla} p) = 0. \quad (78)$$

Soluciona-se essa equação a fim de obter uma estimativa para o campo de pressão. Com essa nova estimativa de pressão, p^* , o fluxo nas faces e o campo de velocidades podem ser corrigidos, por meio das equações,

$$\dot{m}_f = \vec{S}_f \cdot \left[(\psi^* p^* [a_p^U]^{-1} [H(\vec{U}^*)])_f - (\psi^* p^* [a_p^U]^{-1} \vec{\nabla} p^*)_f \right], \quad (79)$$

e

$$\vec{U}^{**} = [a_p^U]^{-1} [H(\vec{U}^*)] - [a_p^U]^{-1} \vec{\nabla} p^*. \quad (80)$$

A correção para a velocidade é realizada de maneira explícita, utilizando o novo gradiente de pressão $\vec{\nabla} p^*$, determinado na Equação 78, e a primeira estimativa da velocidade, \vec{U}^* .

O novo valor para o campo de velocidades \vec{U}^{**} é utilizado como entrada do loop, ou seja, $\vec{U}^* = \vec{U}^{**}$. Em seguida, calcula-se novamente a equação da energia e as correções de T , ψ e ρ , constrói-se um novo operador $[H(\vec{U}^*)]$, soluciona-se a equação de pressão e realizam-se as correções de fluxo e velocidade. Esse ciclo é repetido até que a convergência desejada ou um número fixo de laços seja alcançado, obtendo-se um campo de velocidades e de pressão que satisfazem as equações de conservação. Por fim, utiliza-se a solução do campo de pressão para determinar a solução do campo de densidade, através da equação de estado de um gás perfeito $\rho = \psi p = \frac{p}{RT}$.

Até o momento apenas a parte hidrodinâmica do escoamento foi solucionada, isso significa que foram assumidos valores do passo de tempo anterior para o campo magnético, sendo tratado como um termo explícito e integrado à matriz de coeficientes $[\mathcal{M}]$. Após determinadas as soluções dos campos hidrodinâmicos, inicia-se o processo de solução da componente magnética por meio do algoritmo BPISO. O nome vem da ideia de que o campo $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^*$ é obtido utilizando um esquema similar ao do PISO. Este algoritmo, assim como o PISO, já está implementado no OpenFOAM, e disponível no solver incompressível *mhdFoam*.

Inicialmente, o campo magnético é computado pela equação da indução (Equação 53). Essa solução deve satisfazer a lei de Gauss para o magnetismo, o que é realizado utilizando o

método de projeção de Brackbill e Barnes (1980). Esse método garante que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \approx 0$ e é descrito de forma sucinta a seguir.

Assumindo que o escoamento é suave, isto é, sem descontinuidades, o vetor de campo magnético pode ser decomposto na soma de um rotacional e um gradiente (XISTO et al., 2010),

$$\vec{B}^* = \nabla \times \vec{A} + \vec{\nabla} p_B. \quad (81)$$

Sendo \vec{B}^* uma estimativa inicial para o campo magnético obtida por meio da equação da indução (Equação 53). O rotacional do vetor potencial \vec{A} contém a parte física de \vec{B}^* assim, aplicando o divergente em ambos os lados da equação e lembrando que o divergente do rotacional é sempre nulo, pode-se reescrever a Equação 81 como,

$$\phi_B^* = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^* = \nabla^2 p_B, \quad (82)$$

em que ϕ_B representa a componente não-solenoidal do fluxo magnético.

Essa abordagem introduz uma pressão de fluxo magnético fictícia (p_B) para prescrever a restrição senoidal de maneira similar à equação para a pressão no método PISO, não possuindo significado físico. Após convergência esse termo deve ser da ordem do erro de discretização (WELLER et al., 1998), sendo solucionado por meio da seguinte equação,

$$\phi_B^* = \nabla^2 \left([a_{p_B}^B]^{-1} p_B \right), \quad (83)$$

onde $[a_{p_B}^B]^{-1}$ é definido de maneira similar a $[a_p^U]^{-1}$. Após a solução da Equação 83, efetua-se um passo de correção do fluxo magnético conforme a equação abaixo,

$$\phi_B = \vec{S}_f \cdot \left[(\vec{B}^*)_f - \vec{\nabla} \left([a_{p_B}^B]^{-1} p_B \right)_f \right]. \quad (84)$$

O fluxo magnético atualizado é incorporado na equação da indução (Equação 53), cuja solução fornece um valor atualizado para o campo magnético \vec{B} . O loop BPISO é realizado até que o critério de tolerância (erro residual) seja satisfeito.

Faz-se necessário ressaltar que as soluções das equações matriciais apresentadas são realizadas utilizando métodos consolidados para sistemas lineares. O OpenFOAM possui diversos métodos implementados, que são especificados pelo usuário no dicionário *fvSolution*, assim como o algoritmo para a solução das equações (PISO e BPISO).

3.2.2. mhdCentralFoam

Para o segundo solver modificou-se a implementação do *rhoCentralFoam*, solver disponível no OpenFOAM e desenvolvido por Greenshields (2009), de maneira semelhante ao realizado por Mayigüé e Groll (2016). Contudo não supôs-se escoamento MHD ideal e as equações foram implementadas incorporando os termos resistivos e viscosos.

O primeiro passo é a obtenção dos fluxos volumétricos por meio da semi-discretização dos termos convectivos, realizada através do FVM como apresentado da Equação 57, aqui reescrita,

$$\int_{V_c} \vec{\nabla} \cdot (\vec{U}\vec{W}) dV = \int_S (\vec{U}\vec{W}) \cdot d\vec{S} \approx \sum_f (\vec{U}_{f,\pm} \vec{W}_{f,\pm}) \cdot \vec{S}_{f,\pm} = \sum_f \phi_{f,\pm} \vec{W}_{f,\pm}, \quad (85)$$

em que Σ_f denota o somatório sobre a face das células e $\phi_{f,\pm} = \vec{U}_{f,\pm} \cdot \vec{S}_{f,\pm}$ é o fluxo volumétrico através da face f e \vec{W} são as variáveis de fluxo, dado por $\vec{W} = (\rho, \rho\vec{U}, \vec{B}, \rho E + p_c)$ interpoladas na face das células de maneira linear. O subíndice \pm representa a direção da interpolação.

A interpolação das variáveis dependentes é realizada de maneira linear utilizando um coeficiente de peso ω_f definido por,

$$\omega_f = \frac{|\vec{S}_f \cdot \vec{d}_{fNB}|}{|\vec{S}_f \cdot \vec{d}|}, \quad (86)$$

Onde \vec{d}_{fNB} é a distância da face do volume de controle até o centro do volume de controle vizinho e \vec{d} é a distância entre o centro da célula em análise e a vizinha. Assim, a interpolação para cada uma das variáveis de fluxo W é realizada de acordo com,

$$W_f = \omega_f W_P + (1 - \omega_f) W_{NB}. \quad (87)$$

Em escoamentos compressíveis as propriedades dos fluidos não são transportadas apenas pelo escoamento, mas também pela propagação de ondas. Portanto é necessário que a interpolação dos fluxos seja estabilizada com base no transporte que possa ocorrer em qualquer direção. Para isso aplicam-se os métodos de reconstrução dimensão por dimensão para sistemas multi-dimensionais de Kurganov e Tadmor (KT) ou de Kurganov, Nolle e Petrova (KNP) (GREENSHIELDS et al., 2009).

A discretização apresentada na Equação 85 pode ser reescrita como,

$$\sum_f \phi_f \vec{W}_f = \sum_f \left[\alpha(\phi_{f,+} \vec{W}_{f,+} + \kappa_{f,+}) + (1 - \alpha)(\phi_{f,-} \vec{W}_{f,-} + \kappa_{f,-}) + \tilde{\omega}_f(\vec{W}_{f,-} - \vec{W}_{f,+}) + \frac{1}{2}(\Phi_{f,-} - \Phi_{f,+}) \right]. \quad (88)$$

Na equação acima, os dois primeiros termos representam as variáveis de fluxo interpoladas nas faces f_+ e f_- , o terceiro termo é utilizado apenas em casos em que a variável dependente é parte de uma derivada substantiva, e o último está relacionado ao acoplamento da componente magnética do tensor de Maxwell. Os termos da Equação 88 são apresentados abaixo,

$$\vec{W}_f = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \vec{U} \\ \rho E + p_G \\ \vec{B} \end{bmatrix}, \quad \kappa_f = \begin{bmatrix} 0 \\ S_f p_G \\ -\frac{1}{\mu_0} b_f (\vec{U} \cdot \vec{B}) \\ -b_f \vec{U} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\omega}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_f \\ \omega_f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{B} b_f \\ \mu_0 \\ 0 \\ S_f p_B \end{bmatrix}, \quad (89)$$

sendo $b_f = \frac{B_{f,-} + B_{f,+}}{2}$ e $B_f = \vec{B} \cdot \vec{S}_f$.

A composição do termo de fluxo da equação da energia é realizada assumindo apenas a parte ideal das equações MHD. Por meio de um laço condicional o fluxo dos termos MHD não-ideais é adicionado ao fluxo MHD ideal de acordo com a equação abaixo,

$$\begin{aligned}
& \sum_f \phi_f (\rho E + p_G)_f \\
&= \left(\sum_f \phi_f (\rho E + p_G)_f \right)_{MHD-ideal} \\
&+ \left[\alpha \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} (\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \vec{B}))_{f,+} \cdot \vec{S}_f \right) + (1 - \alpha) \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} (\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \vec{B}))_{f,-} \cdot \vec{S}_f \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\mu_0^2 \sigma} \left(\vec{\nabla} \frac{1}{2} B^2 \right)_f \cdot \vec{S}_f \right].
\end{aligned} \tag{90}$$

Nas Equações 88 e 90, o valor dos coeficientes α e $\tilde{\omega}_f$ é determinado de acordo com o método utilizado. No método KT (esquema central) a contribuição de f_+ e f_- possui o mesmo peso. No método KNP os coeficientes são calculados com base na velocidade de propagação (esquema central-upwind), por meio de fluxos volumétricos definidos pelas Equações 91 e 92 (MAYIGUÉ; GROLL, 2016),

$$\Psi_{f,+} = \max(c_f |\vec{S}_f| + \phi_{f,+}, c_f |\vec{S}_f| + \phi_{f,-}, 0), \tag{91}$$

$$\Psi_{f,-} = \min(c_f |\vec{S}_f| - \phi_{f,+}, c_f |\vec{S}_f| - \phi_{f,-}, 0), \tag{92}$$

onde $c_f = \min(c_+, c_-)$ é a velocidade de propagação, calculada a partir da velocidade característica. Neste trabalho, assim como adotado por Mayigüé e Groll (2016), foi utilizada a velocidade magnetosônica rápida, expressa pela Equação 93,

$$c_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[a_{\pm}^2 + v_{A,\pm}^2 + \sqrt{(a_{\pm}^2 + v_{A,\pm}^2)^2 - 4a_{\pm}^2 v_{A,\pm}^2 \cos^2 \theta} \right]}, \tag{93}$$

em que a_{\pm} é a velocidade do som, $v_{A,\pm}$ a velocidade de Alfvén nas faces, e θ é o ângulo entre o vetor \vec{B} e a normal à face. A velocidade de Alfvén é uma medida da velocidade de propagação de ondas ao longo das linhas de campo magnético sujeitas à uma perturbação no fluido (MOREAU, 1990), definida pela Equação 94,

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}}. \tag{94}$$

Os coeficientes α e $\tilde{\omega}_f$ são matematicamente expressas pelas Equações 95 e 96,

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{método KT} \\ \frac{\Psi_{f,+}}{\Psi_{f,+} + \Psi_{f,-}} & \text{método KNP} \end{cases} \quad (95)$$

$$\tilde{\omega}_f = \begin{cases} \alpha \max(\Psi_{f,+}, \Psi_{f,-}) & \text{método KT} \\ \alpha(1 - \alpha)(\Psi_{f,+} + \Psi_{f,-}) & \text{método KNP} \end{cases} \quad (96)$$

Nas simulações realizadas apenas o método KNP foi utilizado uma vez que esse método oferece uma maior precisão nos resultados (GREENSHIELDS et al., 2009).

Após o cálculo dos fluxos, as equações são resolvidas de maneira explícita. Solucionase primeiramente a equação da continuidade, em seguida a equação da indução. Esta equação é implementada por meio de um laço condicional. Caso o escoamento for MHD ideal, despreza-se o termo difusivo; caso contrário é resolvida por completo, como apresentado na Equação 53. A condição MHD não-ideal é selecionada no solver ao se fornecer um valor negativo para a condutividade elétrica (σ) no dicionário *transportProperties*.

Posteriormente, a equação da quantidade de movimento e da energia são solucionadas de maneira explícita, com o termo de fluxo apropriado. Caso o escoamento seja viscoso, um laço condicional soluciona a parte viscosa como uma correção do valor obtido para o escoamento invíscido, assim como apresentado por Greenshields (2009).

Por fim, para garantir a condição $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, aplicou-se o método hiperbólico-parabólico de limpeza do divergente, descrito por Dedner et al. (2002) no qual uma variável potencial p_B é solucionada a partir da seguinte equação,

$$\frac{\partial p_B}{\partial t} + c_h^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = -\frac{c_h^2}{c_d^2} p_B. \quad (97)$$

Acima, c_h é a velocidade de convecção e c_d é o coeficiente de dissipação do erro, definidos pelas Equações 98 e 99, respectivamente,

$$c_h = \frac{CFL}{\Delta t \cdot \max\left(\frac{1}{d}\right)}, \quad (98)$$

$$c_d = \sqrt{-\Delta t \frac{c_h^2}{\ln(C_r)}}, \quad (99)$$

sendo $0 < C_r < 1$ e d é uma medida do tamanho da célula. Nesse trabalho o valor $C_r = 0,9$ foi escolhido, assim como em Mayigué e Groll (2016).

O segundo termo da Equação 97 é calculado de maneira explícita e sua discretização é apresentada na Equação 100,

$$c_h^2(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \approx c_h^2 b_f. \quad (100)$$

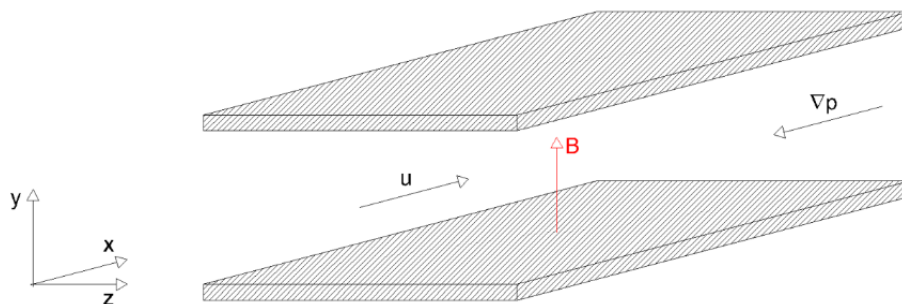
3.4. VERIFICAÇÃO

A verificação dos solvers foi realizada a partir da simulação de três casos distintos, com o objetivo de analisar o comportamento das soluções em diferentes regimes de escoamento.

3.4.1. Escoamento de Hartmann

Trata-se de um caso MHD simples e bastante conhecido, no qual um fluido escoar entre placas planas isoladas eletricamente, separadas pela distância $2h$, com um campo magnético externo aplicado no sentido transversal ao escoamento (WELLER et al., 1998). A condição de não escorregamento é imposta às superfícies sólidas. Esse problema está esquematizado na Figura 4.

Figura 4 - Representação esquemática do escoamento de Hartmann.



Fonte: Tassone (2016, p. 12).

A solução adimensional para o perfil de velocidade e campo magnético, na direção x , é apresentada por Weller et al. (1998) e definida por meio das seguintes equações,

$$\frac{u}{u_0} = \frac{\cosh(Ha) - \cosh\left(Ha \frac{y}{h}\right)}{\cosh(Ha) - 1}, \quad (101)$$

$$\frac{B}{u_0 \mu \sqrt{\sigma \nu \rho}} = - \left[\frac{\left(\frac{y}{h}\right) \sinh(Ha) - \sinh\left(Ha \frac{y}{h}\right)}{\cosh(Ha) - 1} \right], \quad (102)$$

onde $u_0 = u(y = 0)$ e $-1 \leq y/h \leq 1$.

No caso hidrodinâmico, em que $\vec{B} = 0$, a solução para o perfil de velocidade na direção x torna-se a solução de Poiseuille para um escoamento laminar completamente desenvolvido entre placas planas paralelas, dada por,

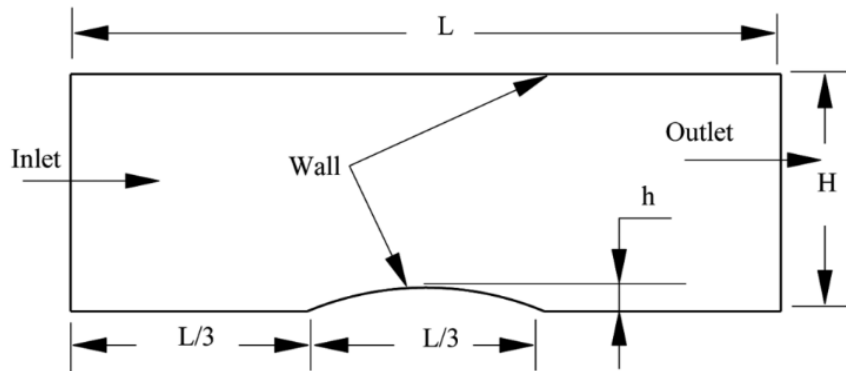
$$\frac{u}{u_0} = \left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2 \right]. \quad (103)$$

Com o estudo desse caso, é feita a análise do comportamento da solução para escoamentos incompressíveis MHD com soluções suaves, ou seja, sem descontinuidades.

3.4.2. Escoamento transônico sobre uma lombada

O segundo caso analisado foi o do escoamento de um fluido invíscido em regime transônico, por cima de uma lombada, com paredes isoladas eletricamente e campo magnético no sentido transversal à direção do escoamento. Um desenho esquemático do caso é ilustrado pela Figura 5.

Figura 5 - Esquemático da geometria do escoamento sobre uma lombada.



Fonte: Darwish e Moukalled (2014).

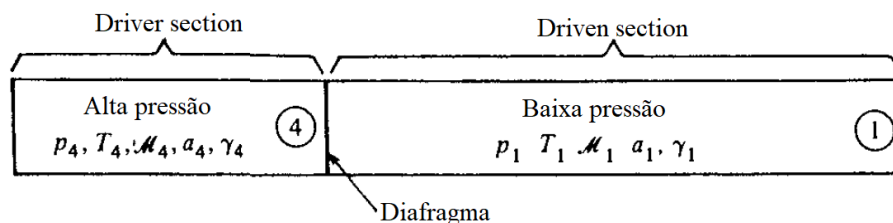
O canal possui um comprimento total L e altura H , a lombada possui comprimento igual a um terço do comprimento total, e altura igual a 10% de seu comprimento e o número de Mach na entrada, $Ma=0,675$.

Esse caso não possui solução analítica, contudo, está bem documentado na literatura, sendo comumente utilizado para verificação de solvers hidrodinâmicos compressíveis. Os resultados das simulações foram comparados aos resultados apresentados por Xisto et al. (2010) a fim de analisar o comportamento da solução dos novos solvers para escoamentos transônicos com descontinuidades.

3.4.3. Tubo de Choque

O último caso analisado foi o tubo de choque, no qual um tubo fechado em ambos os lados, possui um diafragma separando uma região de alta pressão (região 4) de uma de baixa pressão (região 1). Tem-se, portanto, uma distribuição descontínua das propriedades. Como apresentado na Figura 6,

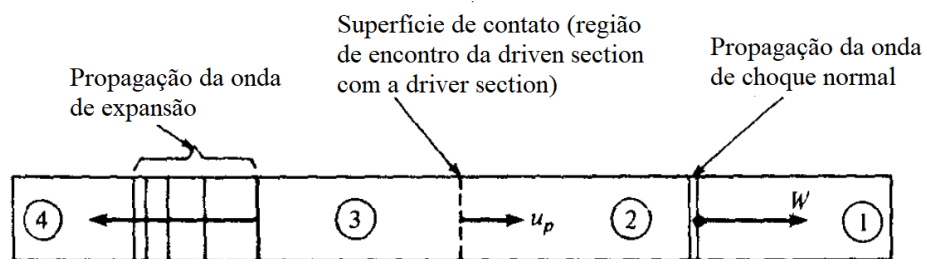
Figura 6 - Esquemático da condição inicial de um tubo de choque.



Fonte: Adaptado de Anderson (1990, p. 208).

Quando o diafragma é rompido uma onda de choque é formada que se propaga pela região 1 e uma onda de expansão se propaga pela região 4. A onda de choque se propaga para a direita de maneira descontínua causando um aumento da pressão na região atrás do choque (região 2). Já a onda de expansão se propaga para a esquerda de maneira contínua e suave, diminuindo a pressão até o valor da região 3 (ANDERSON, 1990). Esse processo é ilustrado na Figura 7.

Figura 7 - Regiões formadas no tubo de choque após o rompimento do diafragma e propagação das ondas de choque e expansão.



Fonte: Adaptado de Anderson (1990, p. 209).

Esse problema possui uma solução analítica para a condição sem campo magnético. A versão MHD, proposta por Brio e Wu (1988), adota as mesmas condições hidrodinâmicas utilizadas por Sod (1978), e adicionalmente um campo magnético é aplicado. O tubo de choque proposto por Brio e Wu (1988) não possui solução analítica, porém é um caso comumente utilizado para verificação da captura de discontinuidades em solvers MHD ideal.

4. RESULTADOS

Inicialmente, realizou-se a simulação da versão hidrodinâmica dos casos, a fim de verificar se os solvers implementados são capazes de reproduzir os resultados em suas versões não MHD já existentes. Posteriormente, a versão MHD foi simulada e seus resultados comparados com a solução analítica, ou com os dados disponíveis na literatura.

Assim como a implementação dos solvers, todos os casos analisados foram simulados utilizando o software OpenFOAM-v2012.

4.1. ESCOAMENTO DE HARTMANN

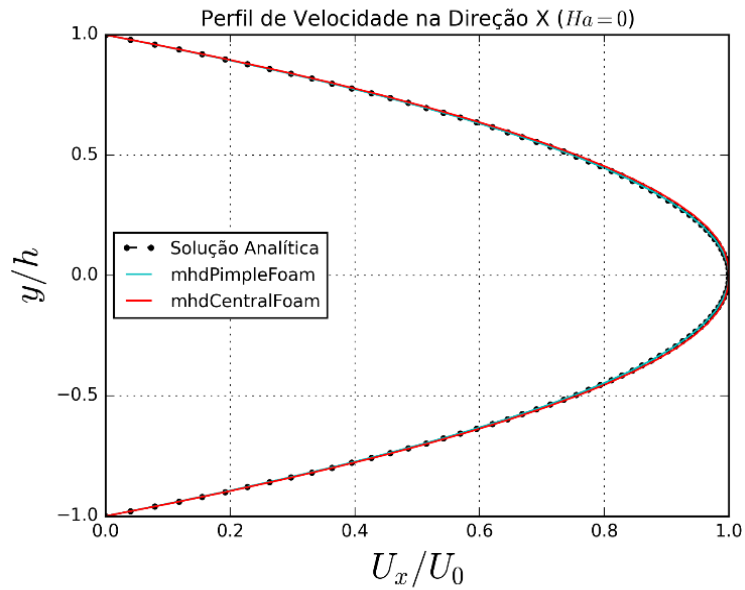
O domínio utilizado foi o de um canal bidimensional com comprimento $L = 20$ m e altura $h = 2$ m, com a origem fixada na entrada do canal em uma altura $h/2$, sendo uniformemente dividido em 100 volumes na direção x e 40 na direção y .

As condições de contorno são de velocidade $\vec{U} = (1, 0, 0)$ m/s na entrada do canal e pressão prescrita na saída do canal, $p = 0$ Pa. Como condição inicial assume-se que a velocidade dentro do canal é nula e a pressão é $p = 100$ Pa. Nas paredes inferior e superior, assumiu-se condição de não escorregamento e, nos casos MHD campo magnético fixo com componente apenas na direção y , transversal ao escoamento. Para as propriedades de transporte do fluido, assume-se viscosidade dinâmica $\mu = 1$ kg/m·s, permeabilidade magnética $\mu_0 = 1$ H/m e condutividade elétrica $\sigma = 1$ ($\Omega \cdot m$)⁻¹.

Entre os casos simulados houve apenas a variação do número de Hartmann (Equação 49), sendo $Ha = 0$ no caso hidrodinâmico e, para os casos MHD, três casos foram simulados: $Ha = 1$, $Ha = 5$ e $Ha = 20$.

A Figura 8 apresenta o resultado obtido para o perfil de velocidade do escoamento ao longo da altura do canal para o caso hidrodinâmico, no qual a solução analítica é a solução de Poiseuille (Equação 103).

Figura 8 - Comparativo das soluções hidrodinâmicas obtidas por meio dos solvers com a solução analítica.

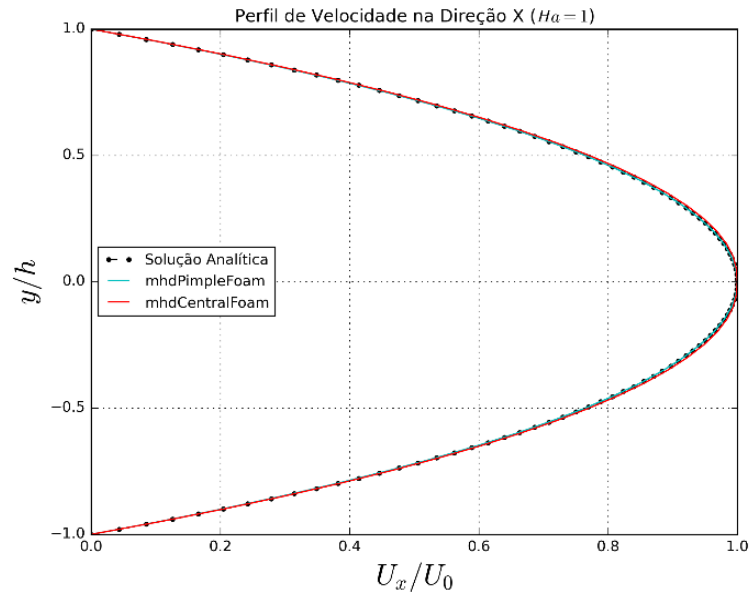


Fonte: Autor (2022).

Embora haja concordância dos resultados das simulações com os resultados analíticos, especialmente para os resultados do *mhdPimpleFoam*, observa-se uma certa discrepância dos resultados obtidos por meio do *mhdCentralFoam*. Isso possivelmente está ligado a maneira na qual o caso foi implementado, uma vez que foi necessário impor uma pequena compressibilidade no ($Ma = 0,01$), a fim de obter uma solução física para o problema, enquanto a solução analítica assume escoamento incompressível.

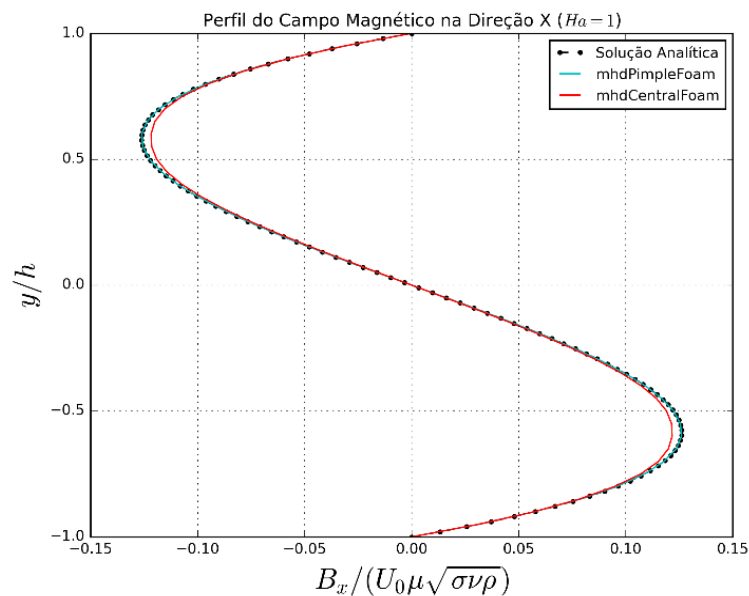
Um comparativo dos perfis de velocidade e campo magnético, ao longo da altura do canal, para $Ha = 1$ é apresentado pelas Figuras 9 e 10, respectivamente.

Figura 9 - Comparação dos resultados para o perfil de velocidade para $Ha = 1$.



Fonte: Autor (2022).

Figura 10 - Comparação dos resultados para o perfil do campo magnéticos para $Ha = 1$.



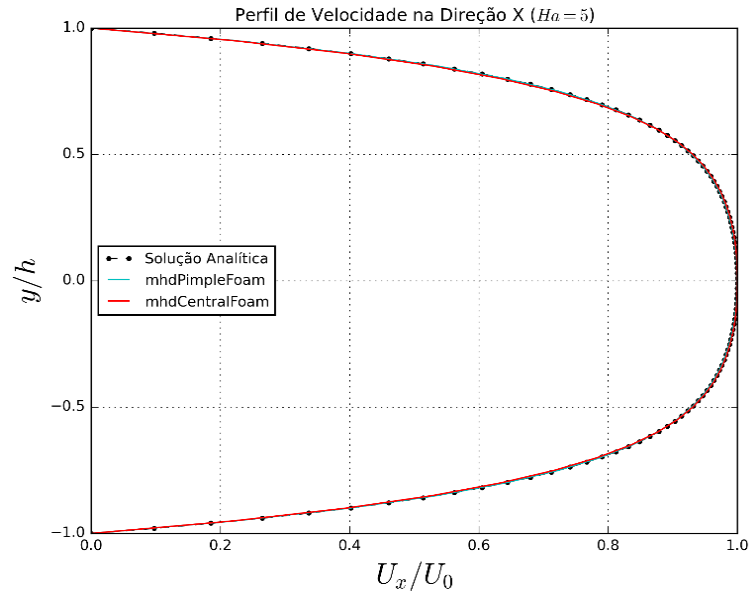
Fonte: Autor (2022).

O perfil de velocidade para $Ha = 1$ é bastante similar ao obtido para $Ha = 0$, isso se deve ao fato de que, para $Ha = 1$, as forças viscosas ainda são dominantes no escoamento. Para o campo magnético na direção x observa-se a formação de um perfil senoidal que, como esperado, é nulo nas paredes e no centro.

Para o caso de $Ha = 5$ é possível notar, a partir das Figuras 11 e 12, o começo de um achatamento no perfil de velocidade na região central, indicando uma redução da velocidade

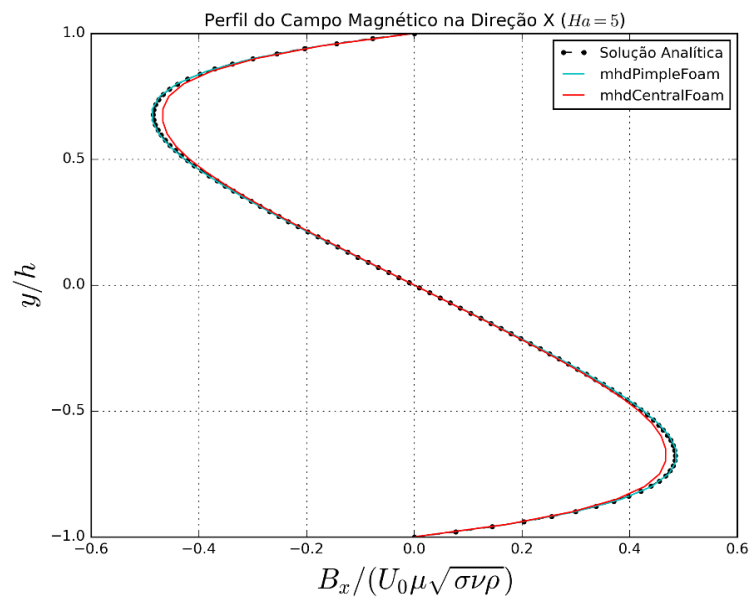
do escoamento que se deve ao efeito de amortecimento causado pela introdução de um campo magnético uniforme transversal ao escoamento. Para o campo magnético obteve-se um perfil similar ao $Ha = 1$, contudo observa-se um aumento na amplitude.

Figura 11 - Comparação dos resultados para o perfil de velocidade, ao longo da altura do canal, para $Ha = 5$.



Fonte: Autor (2022).

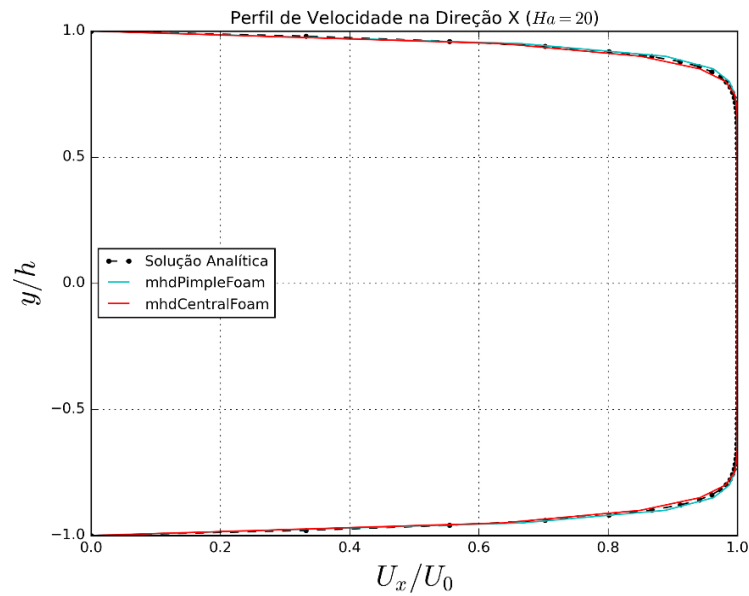
Figura 12 - Comparação dos resultados para o perfil do campo magnético na direção x, ao longo da altura do canal, para $Ha = 5$.



Fonte: Autor (2022).

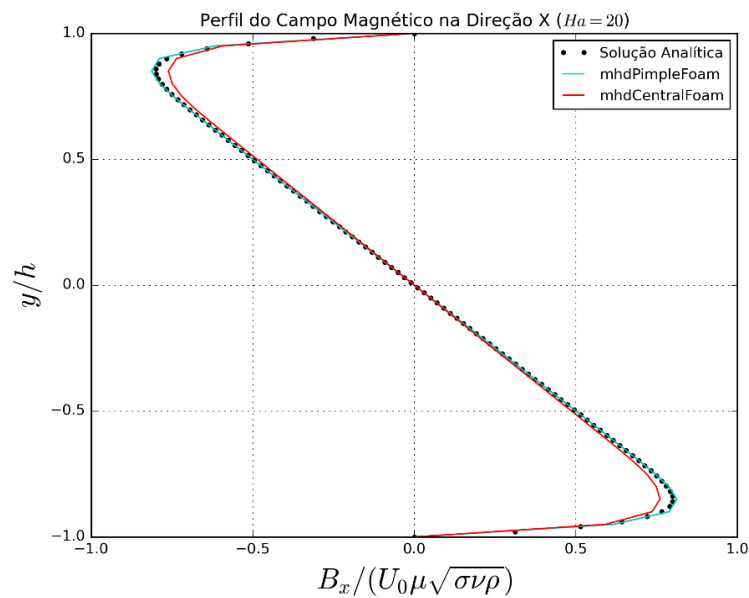
Os resultados para $Ha = 20$ são apresentados nas Figuras 13 e 14.

Figura 13 - Comparativo dos resultados para o perfil de velocidade, ao longo da altura do canal, para $Ha = 20$.



Fonte: Autor (2022).

Figura 14 - Comparativo dos resultados para o perfil do campo magnético na direção x, ao longo da altura do canal, para $Ha = 20$.



Fonte: Autor (2022).

Para $Ha = 20$ as forças eletromagnéticas tornam-se mais significativas no escoamento, de modo que se observa um forte achatamento do perfil de velocidade, indicando uma uniformização da velocidade ao longo da altura do canal. Nota-se, ainda, a formação de uma camada limite próxima as paredes, conhecida como camada limite de Hartmann. O perfil do

campo magnético apresenta um aumento em sua amplitude e uma tendência linear, em que o ponto de máxima amplitude deslocou-se para a região próxima às paredes.

De maneira geral observa-se uma concordância entre os resultados das simulações e a solução analítica. Contudo, nota-se claramente que os resultados obtidos por meio do *mhdPimpleFoam* são mais precisos que os obtidos por meio do *mhdCentralFoam*. Isso se deve ao fato do primeiro ser um solver baseado em pressão, que tende a ser mais preciso em regimes incompressíveis, do que solvers baseados em densidade, como o *mhdCentralFoam*.

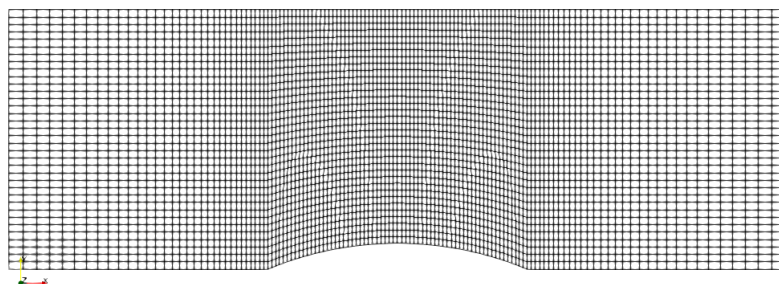
4.2. ESCOAMENTO TRANSÔNICO SOBRE UMA LOMBADA

O domínio consiste em um canal, como apresentado na Figura 5, de comprimento $L = 1$ m, com uma lombada no meio, de comprimento igual a um terço do comprimento total do canal. A altura é igual ao comprimento da lombada e a altura da lombada é igual a 10% do seu comprimento.

A malha é composta por três regiões: a primeira é a entrada do canal, que possui 32 divisões na direção x e 35 na direção y; a segunda é a região da lombada, que possui 64 na direção x e 35 na direção y; a terceira região é a saída do canal que possui as mesmas divisões que a entrada. Logo, a malha possui um total de 128 divisões na direção x e 35 na direção y. A escolha por esse número de divisões foi feita para permitir a comparação dos resultados obtidos com os apresentados em Xisto et al. (2010), que utiliza uma malha de mesmo tamanho.

A fim de evitar erros de continuidade na simulação, nas regiões de entrada e saída do canal, um gradiente de tamanho da célula na direção x foi adotada, de maneira que as células próximas ao ressalto tenham o mesmo tamanho. A Figura 15 apresenta uma visualização da malha utilizada.

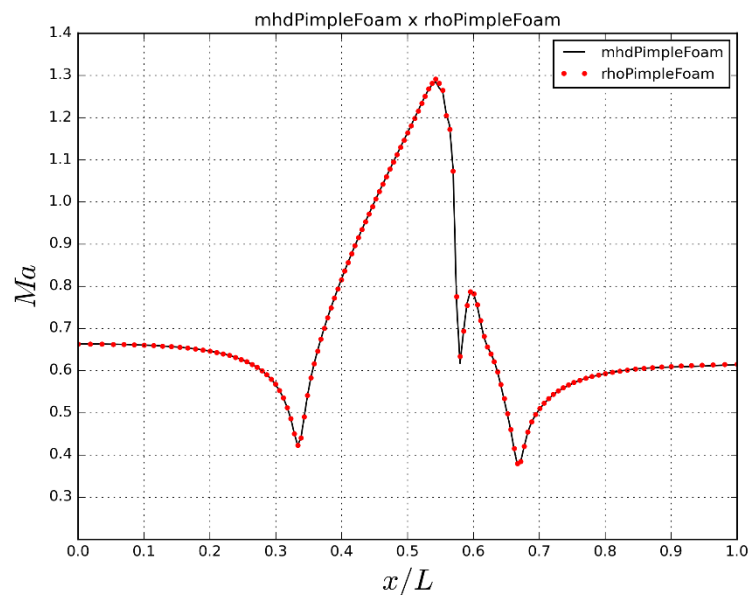
Figura 15 - Malha utilizada nas simulações do escoamento sobre uma lombada.



Como condições de contorno, na entrada prescreveu-se pressão e temperatura total, de maneira a garantir $Ma = 0,675$. Para os casos MHD, também foi imposto a condição de $Re_B = 20$. Na saída apenas a pressão estática foi prescrita. Uma vez que o escoamento é invíscido, assume-se condição de escorregamento nas paredes superior e inferior. Nos casos MHD impõe-se um campo magnético transversal à direção do escoamento.

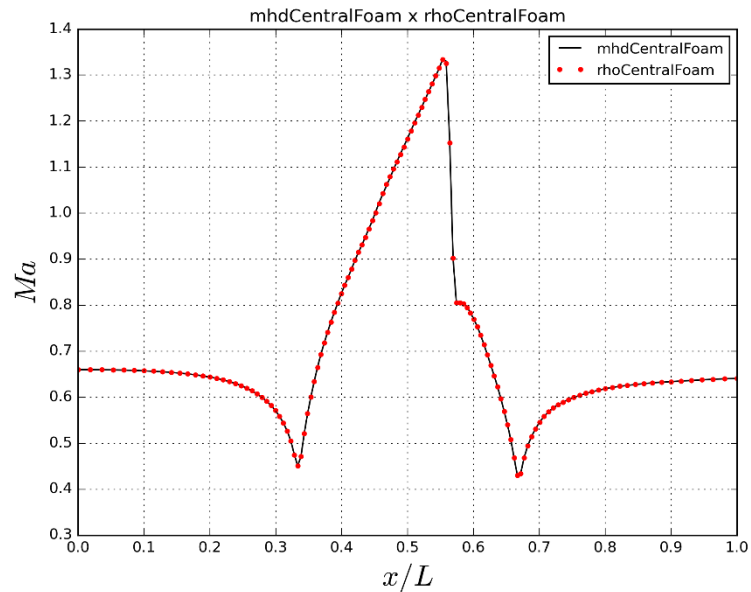
O primeiro passo na verificação foi a comparação dos resultados hidrodinâmicos dos novos solvers, *mhdPimpleFoam* e *mhdCentralFoam*, com os dos solvers disponíveis no OpenFOAM no qual foram baseados, *rhoPimpleFoam* e *rhoCentralFoam*, respectivamente. As Figuras 16 e 17 apresentam as comparações, nas quais nota-se que a nova implementação reproduz os resultados hidrodinâmicos de ambos os solvers exatamente.

Figura 16 - Comparação dos resultados hidrodinâmicos obtidos com o novo solver *mhdPimpleFoam* e o *rhoPimpleFoam*.



Fonte: Autor (2022).

Figura 17 - Comparação dos resultados hidrodinâmicos obtidos com o novo solver *mhdCentralFoam* e o *rhoCentralFoam*.

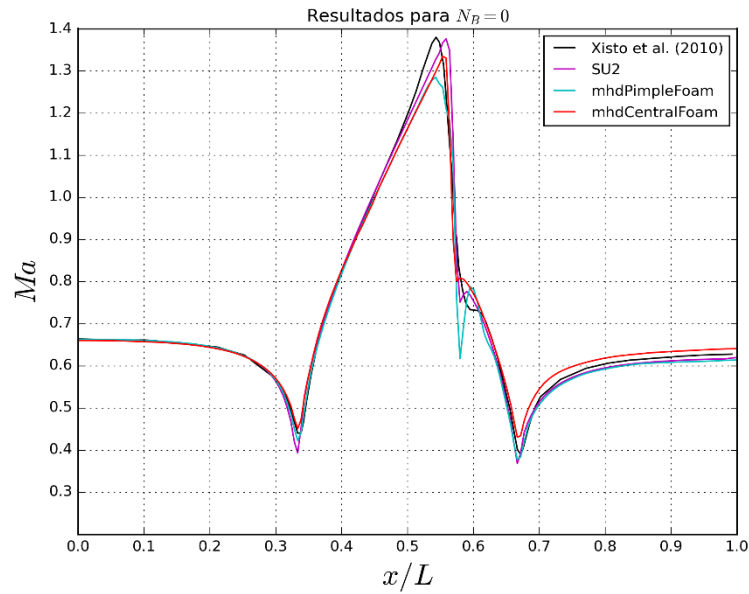


Fonte: Autor (2022).

Em seguida realizou-se a comparação com os resultados apresentados por Xisto et al. (2010, para três valores diferentes do parâmetro de interação: $N_B = 0$ (caso hidrodinâmico), $N_B = 0,8$ (MHD) e $N_B = 1,16$ (MHD).

Os resultados hidrodinâmicos também foram comparados com valores obtidos por meio de uma simulação utilizando o software SU2, como apresentado na Figura 18. Essa simulação foi realizada com o intuito de garantir uma melhor replicabilidade dos resultados, além ser outro meio de comparação da qualidade da solução produzida pelos novos solvers.

Figura 18 - Comparação dos resultados hidrodinâmicos ($N_B = 0$).

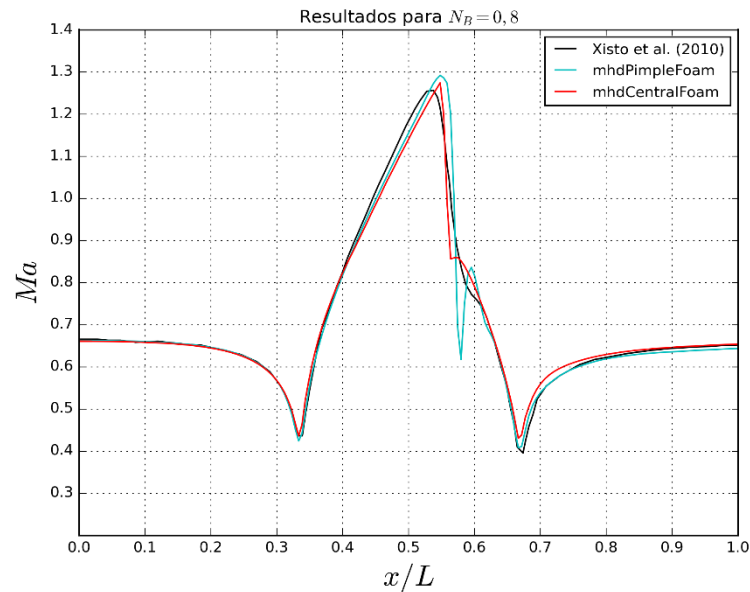


Fonte: Autor (2022).

Observa-se uma concordância dos resultados obtidos pelos novos solvers, especialmente na região anterior ao choque normal e na posição na qual ocorre o choque. O *mhdPimpleFoam* fornece resultados bastante precisos nas regiões de entrada e saída do canal, contudo apresenta resultados significativamente inferiores na região da descontinuidade, evidenciado pelo arredondamento do perfil nessa região. Já o *mhdCentralFoam* parece capturar melhor o choque, embora também subestime o valor máximo de Ma , o que causa a elevação da curva na região de saída.

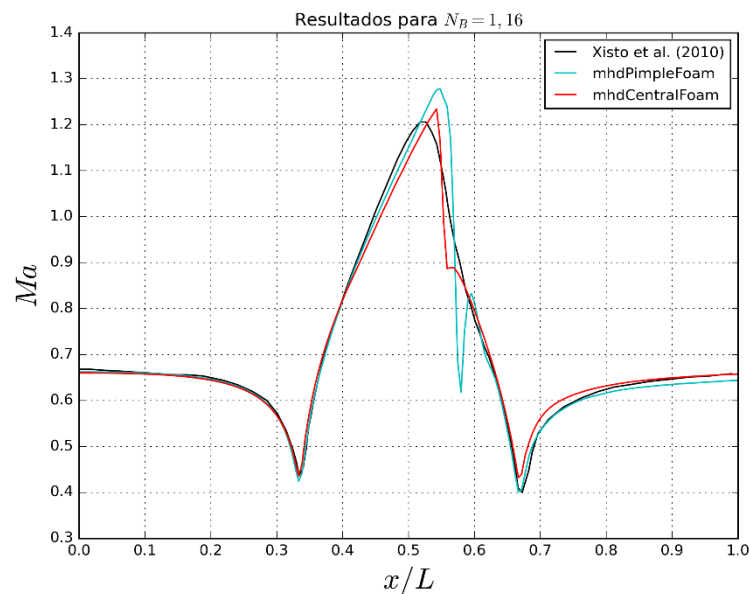
As comparações dos resultados MHD são apresentadas nas Figuras 19 e 20, nas quais novamente é possível observar uma melhor concordância da solução obtida por meio do *mhdCentralFoam*, em que a resolução da descontinuidade se mostra até mesmo melhor que a referência.

Figura 19 - Comparação dos resultados MHD, para $N_B = 0,8$, obtidos pelos novos solvers com os apresentados por Xisto et al. (2010).



Fonte: Autor (2022).

Figura 20 - Comparação dos resultados MHD, para $N_B = 1,16$, obtidos pelos novos solvers com os apresentados por Xisto et al. (2010).

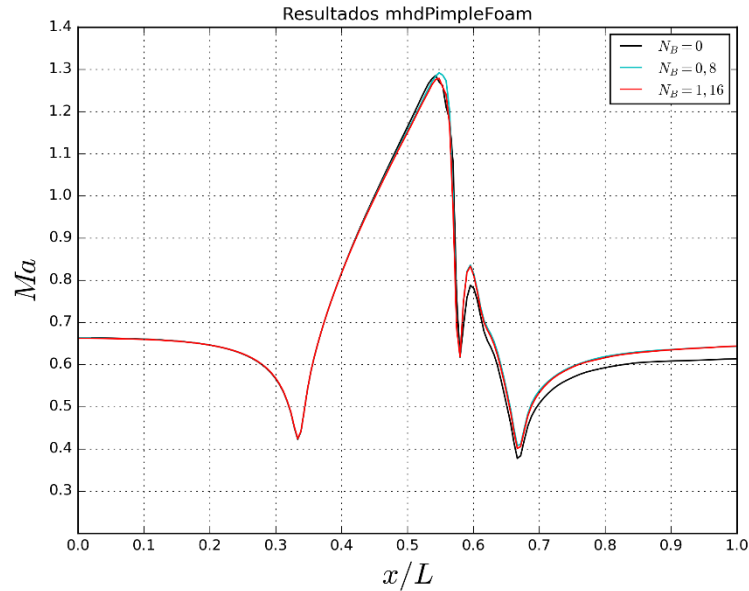


Fonte: Autor (2022).

Embora a captura do choque, na solução pelo *mhdPimpleFoam*, pareça melhor nesses casos, é possível observar que a solução pouco difere com a variação do parâmetro de interação. Espera-se, com o aumento do valor de N_B , que um efeito de amortecimento ocorra no choque, de modo a reduzir o valor máximo de Ma e, conseqüentemente, a intensidade do choque.

Contudo, não é isso que se observa nos resultados do *mhdPimpleFoam*, como evidenciado pela Figura 21.

Figura 21 - Comparação dos resultados obtidos por meio do *mhdPimpleFoam* para os diferentes valores de N_B .

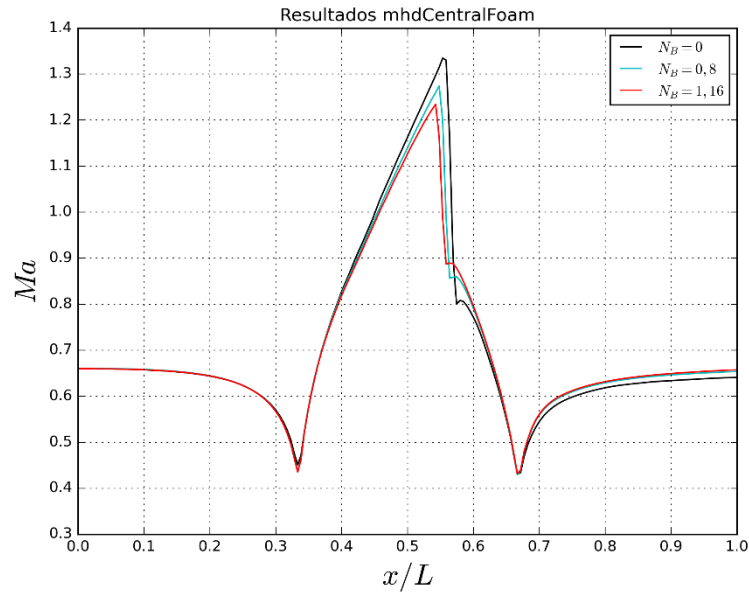


Fonte: Autor (2022).

Essa pouca variação dos resultados para os diferentes valores de N_B possivelmente ocorre devido a inabilidade do algoritmo BPISO de garantir $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ em regiões de discontinuidades, isso é evidenciado pelo desaparecimento da discontinuidade, gerada pelo choque normal, com o aumento de N_B nos resultados apresentados por Xisto et al. (2010).

O mesmo não ocorre para os resultados obtidos por meio do *mhdCentralFoam*, como evidenciado pelo gráfico na Figura 22, no qual observa-se uma excelente captura do choque, mesmo como aumento de N_B , e uma maior concordância com os resultados da referência. Isto parece indicar que o método hiperbólico-parabólico de limpeza do divergente, descrito por Dedner et al. (2002) é mais efetivo em garantir a condição $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, quando comparado ao método de projeção descrito por Brackbill e Barnes (1980).

Figura 22 - Comparação dos resultados obtidos por meio do *mhdCentralFoam* para os diferentes valores de N_B .



Fonte: Autor (2022).

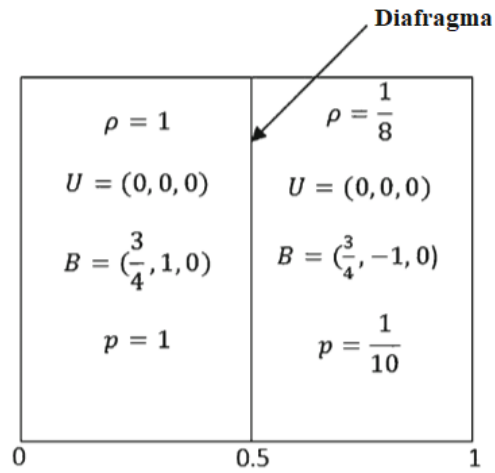
Por fim, nota-se na região imediatamente após o choque, um comportamento não-físico na solução obtida pelo *mhdPimpleFoam*, indicando que o fluido volta a acelerar após o choque, e então desacelera novamente. Como esse é um comportamento também observado no solver disponível no OpenFOAM, conclui-se que o erro possa estar relacionado à escolha dos esquemas numéricos utilizados para discretização dos termos nas equações. Para os termos convectivos do *mhdPimpleFoam*, utilizou-se o esquema Gamma, assim como em Xisto et al. (2010), de modo a permitir uma melhor comparação dos resultados.

4.3. TUBO DE CHOQUE

Para o tubo de choque assume-se um canal com comprimento $L = 1$ m, no qual um diafragma é posicionado na metade, $L = 0,5$ m. Utilizou-se uma malha unidimensional com 1000 volumes igualmente distribuídos na direção x .

As condições iniciais são as mesmas utilizadas do caso apresentado por Brio e Wu (1988) e estão apresentadas na Figura 23. No caso hidrodinâmico assume-se que os campos magnéticos são nulos, obtendo as mesmas condições utilizadas por Sod (1978). Para o caso MHD, assim como Brio e Wu (1988), assume-se $\gamma = 2$, enquanto no caso hidrodinâmico, assim como Sod (1978), assume-se $\gamma = 1,4$.

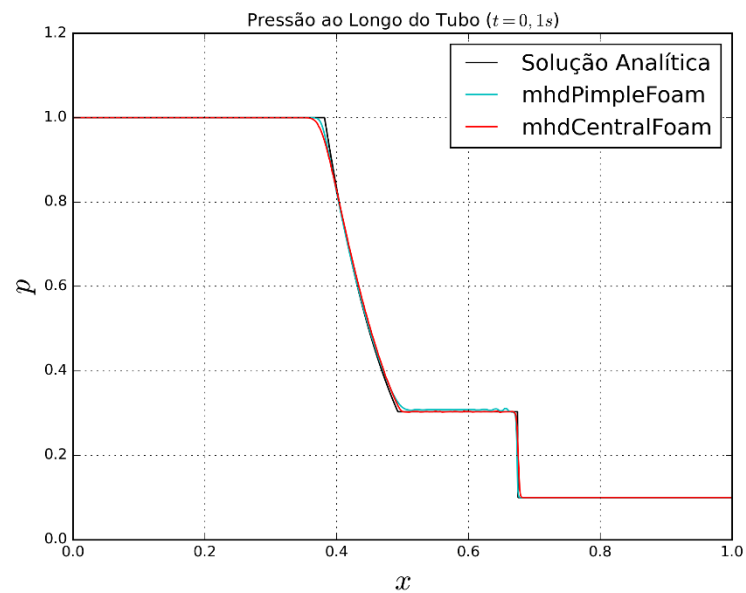
Figura 23 - Condições iniciais utilizadas na simulação do tubo de choque.



Fonte: Adaptado de Mayigué e Groll (2016).

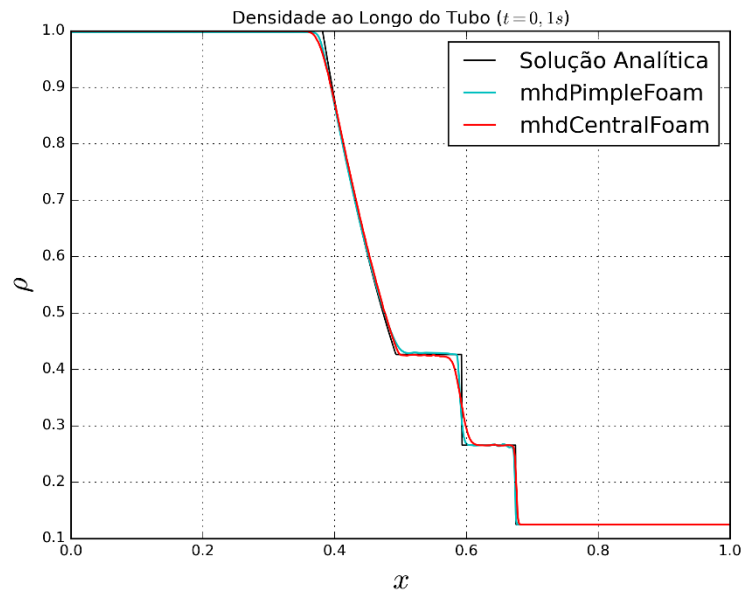
As Figuras 24, 25 e 26 apresentam os resultados para pressão, densidade e a magnitude da velocidade, respectivamente, obtidos na simulação hidrodinâmica ($\vec{B} = 0$) com os novos solvers. Todos os resultados apresentados são para um tempo $t = 0,1$ s.

Figura 24 - Resultados dos novos solvers para pressão ao longo do tubo de choque.



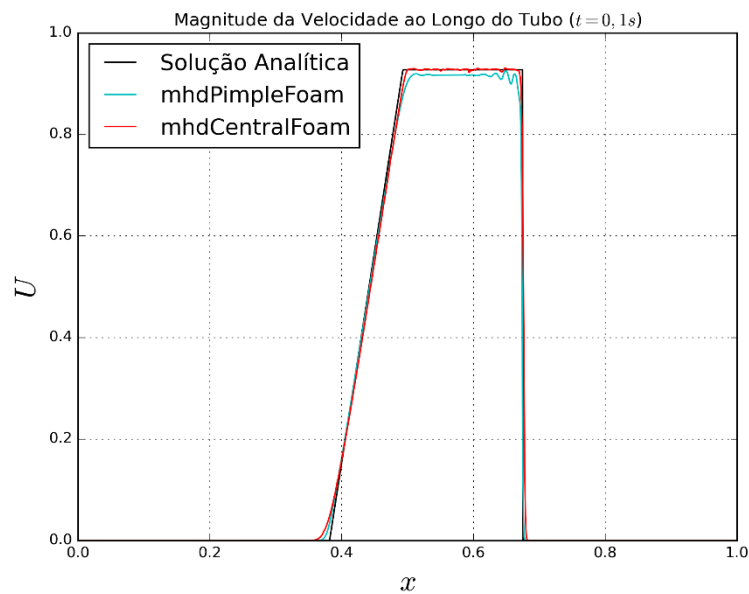
Fonte: Autor (2022).

Figura 25 - Resultados dos novos solvers para densidade ao longo do tubo de choque.



Fonte: Autor (2022).

Figura 26 - Resultados dos novos solvers para a magnitude da velocidade ao longo do tubo de choque.



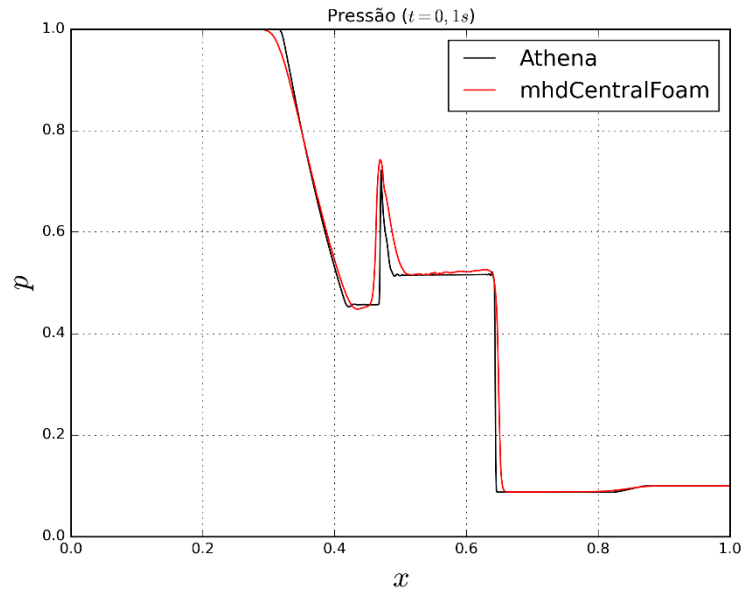
Fonte: Autor (2022).

Observa-se que os resultados estão de acordo com a solução analítica e que o *mhdPimpleFoam* possui uma melhor concordância na região de expansão, onde há menores discontinuidades, enquanto o *mhdCentralFoam* se mostra bastante preciso na região de contato, onde há fortes discontinuidades.

A solução MHD foi possível de ser obtida apenas com o solver *mhdCentralFoam*, evidenciando, uma vez mais, a dificuldade do *mhdPimpleFoam* de lidar com discontinuidades

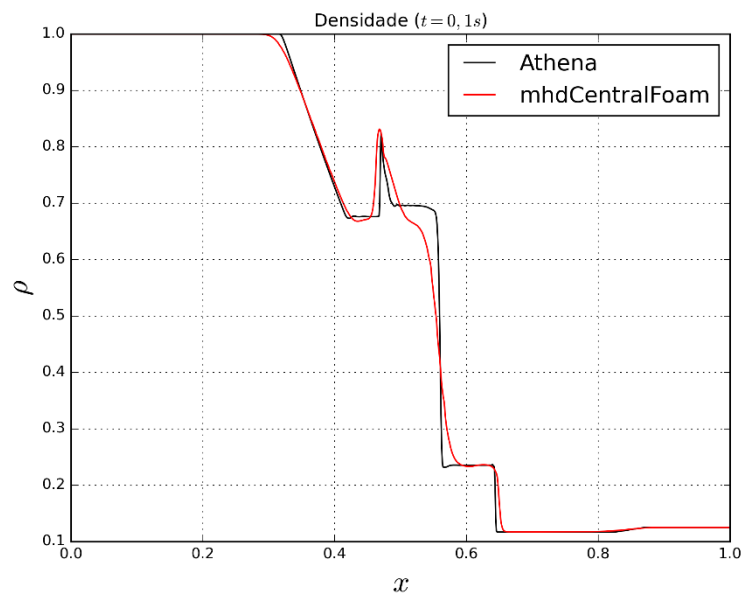
no escoamento. As Figuras 27 a 30 apresentam um comparativo dos resultados obtidos por meio do *mhdCentralFoam* com a solução de referência do software Athena, para uma malha com o mesmo número de células utilizadas nas simulações.

Figura 27 - Resultados da simulação com o *mhdCentralFoam* para a pressão.



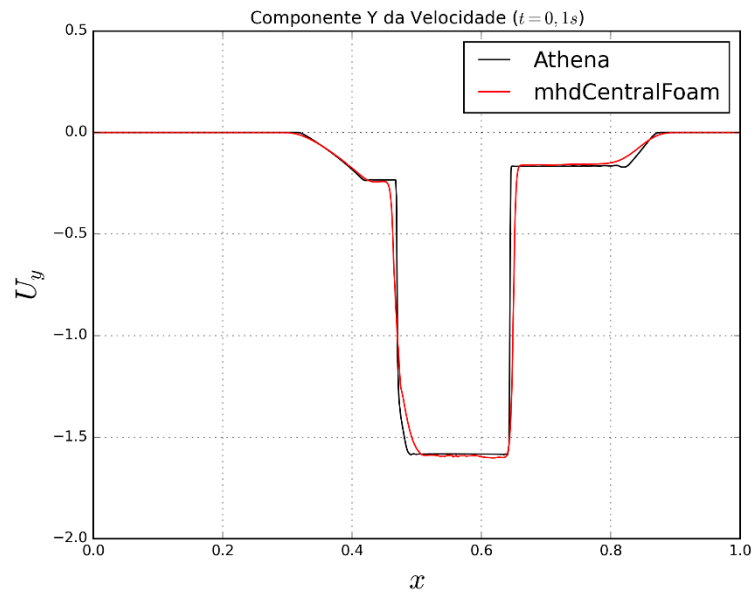
Fonte: Autor (2022).

Figura 28 - Resultados da simulação com o *mhdCentralFoam* para a densidade.



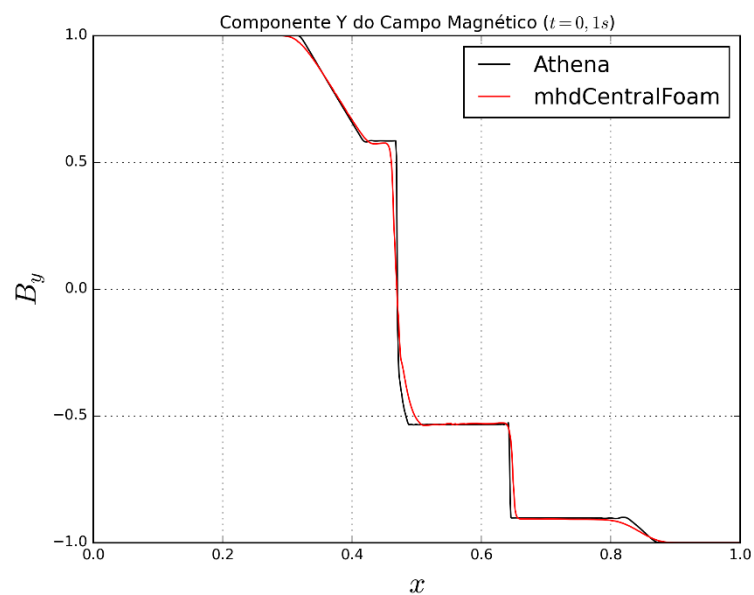
Fonte: Autor (2022).

Figura 29 - Resultados da simulação com o *mhdCentralFoam* para a componente na direção y da velocidade.



Fonte: Autor (2022).

Figura 30 - Resultados da simulação com o *mhdCentralFoam* para a componente na direção y do campo magnético.



Fonte: Autor (2022).

Uma boa concordância com a solução exata pode ser observada nos resultados obtidos por meio do *mhdCentralFoam*, evidenciando novamente sua capacidade de lidar com descontinuidades. Há de se notar que os erros presentes na solução possivelmente se devem a discretização, contudo nenhum estudo de independência de malha foi realizado para confirmar essa hipótese.

4.4. DISPONIBILIDADE DOS ALGORITMOS E RESULTADOS

Todos os algoritmos desenvolvidos e configurações dos casos simulados podem ser acessados livremente no link: <https://github.com/GabrielMarconcini/mhdOpenFoam.git>.

6. CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho dois métodos numéricos para solução das equações MHD, *mhdPimpleFoam* e *mhdCentralFoam*, foram desenvolvidos e implementados por meio do software de código aberto OpenFOAM. Três casos distintos foram simulados a fim de comparar o funcionamento dos novos solvers com os algoritmos para escoamentos compressíveis disponíveis no OpenFOAM, verificar os resultados produzidos de forma a compará-los com os disponíveis na literatura, e investigar os fenômenos MHD presentes nesses casos.

Inicialmente, planejou-se a implementação apenas do solver MHD compressível baseado em pressão. Contudo, como verificou-se nos resultados apresentados, o *mhdPimpleFoam* possui problemas na solução de escoamentos com descontinuidades, em função da inabilidade do algoritmo BPISO de garantir $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ nessas regiões.

Assim, optou-se pela implementação de um segundo solver, *mhdCentralFoam*, baseado em densidade e com um esquema hiperbólico-parabólico para limpeza do divergente, que se mostrou capaz de produzir soluções consistentes com os fenômenos físicos, além da habilidade de capturar de maneira precisa descontinuidades, como evidenciado pelos resultados para o escoamento transônico sobre uma lombada e o para o tubo de choque.

Porém, observa-se, a partir dos resultados para o escoamento de Hartmann, que as soluções produzidas pelo *mhdPimpleFoam* apresentam maior acurácia quando comparadas ao *mhdCentralFoam*, especialmente para o campo magnético. Contudo, isso pode estar relacionada a implementação da simulação dos casos, sendo necessário realizar futuras análises a fim de identificar as possíveis causas das diferenças.

De maneira geral o *mhdCentralFoam* pode ser considerado um solver melhor que o *mhdPimpleFoam*, sendo capaz de produzir resultados consistentes nos diferentes regimes para o qual foi implementado: hidrodinâmico, MHD não-ideal e MHD ideal.

De modo a dar continuidade ao trabalho realizado sugere-se para trabalhos futuros:

- Verificação numérica mais aprofundada dos códigos implementados, para a identificação possíveis erros e melhorias;
- A análise de diferentes casos MHD a fim de verificar os resultados e identificar novas limitações;
- A implementação do método hiperbólico-parabólico de limpeza do divergente no *mhdPimpleFoam* para verificação de possíveis melhorias nos resultados;

- O estudo dos efeitos de malha e dos esquemas de interpolação e discretização nos resultados.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J. D. **Modern compressible flow**. 2. ed. Singapura: McGraw-Hill Publishing Company, 1990.
- BRACKBILL, J.; BARNES, D. The effect of nonzero $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ on the numerical solution of magnetohydrodynamics equations. **Journal of Computational Physics**, Los Angeles, v. 35, n. 3, p. 426-230, mai. 1980.
- BRIO, M.; WU, C. C. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, Los Angeles, v. 75, n. 2, p. 400-422, abr. 1988.
- CHEN, G. *et al.* OpenFOAM for computational fluid dynamics. **Notices of the AMS**, Rhode Island, v. 64, n. 4, p. 354-363, abr. 2014.
- DARWISH, M.; MOUKALLED, F. A fully coupled Navier-Stokes solver for fluid flow at all speeds. **Numerical Heat Transfer**, Beirut, v. 65, n. 5, p. 410-444, mar. 2012.
- DAVIDSON, P. A. **An introduction to magnetohydrodynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- DEDNER, A. *et al.* Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations. **Journal of Computational Physics**, Freiburg, v. 175, n. 2, p. 645-673, jan. 2002.
- GREENSHIELDS, C. J. *et al.* Implementation of semi-discrete, non-staggered central schemes in a colocated, polyhedral, finite volume framework, for high-speed viscous flows. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Glasgow, v. 63, p. 1-21, mai. 2009.
- ISSA, R. I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. **Journal of Computational Physics**, Londres, v. 62, n. 1, p. 40-65, jan. 1986.
- MAYIGUÉ, C. C.; GROLL, R. A density-based method with semi-discrete central-upwind schemes for ideal magnetohydrodynamics. **Archive of Applied Mechanics**, Bremen, v. 87, n. 4, p. 667-683, dez. 2016.
- MOREAU, R. **Magnetohydrodynamics**. St. Martin d'Hères: Springer Science+Business Media Dordrecht, 1990.
- MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. **The finite volume method in computational fluid dynamics**. Suíça: Springer International Publishing, 2016.
- NUSSENVEIG, H. M. **Curso de física básica 3: eletromagnetismo**. São Paulo: Edgar Blücher, 1997.
- SILVA, E. C.; SANTOS, L. O. E.; PHILIPPI, P. C. **Formas discretas da equação de Boltzmann para a magnetohidrodinâmica**. 2010. Tese (Doutorado em Engenharia

Mecânica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

SOD, G. A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. **Journal of Computational Physics**, Nova Iorque, v. 27, n. 1, p. 1-31, apr. 1978.

STONE, J. M. et al. Athena: a new code for astrophysical MHD. **The Astrophysical Journal, Princeton**, v. 178, n. 1, p. 137-177, set. 2008.

TASSONE, A. Magnetic induction and electric potential solvers for incompressible MHD flows. In: **Proceedings** of CFD with OpenSource Software, 2016, Göteborg. Disponível em: http://www.tfd.chalmers.se/~hani/kurser/OS_CFD_2016/AlessandroTassone/report_Tassone.pdf. Acesso em: 20 jun. 2022.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to fluid dynamics: the finite volume method**. 2. ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2007.

WELLER, H. et al. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. **Computer in Physics**, v. 12, n. 6, p. 620-631, dez. 1998.

XISTO, C. M. *et al.* Implementation of a 3D compressible MHD solver able to model transonic flows. In: **Proceedings** of the V EUROPEAN CONFERENCE ON COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS ECCOMAS CFD, 2010, Lisboa. Disponível em: <http://www.eccomas-cfd2010.org/proceedings.php>. Acesso em: 05 mai. 2022.