



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS TRINDADE
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Bruno Eduardo Bestetti

Método dos Elementos Finitos aplicado a treliças e pórticos planos

Florianópolis

2022

Bruno Eduardo Bestetti

Método dos Elementos Finitos aplicado a treliças e pórticos planos

Trabalho Conclusão do Curso de Graduação em Engenharia Civil do Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Tiago Morkis Siqueira, Dr.

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Bestetti, Bruno Eduardo
Método dos Elementos Finitos aplicado a treliças e
pórticos planos / Bruno Eduardo Bestetti ; orientador,
Tiago Morkis Siqueira, 2022.
77 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico,
Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Método dos Elementos Finitos. .
3. Análise elástica linear. 4. Algoritmos. 5. Treliças,
Pórticos planos. I. Morkis Siqueira, Tiago. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em
Engenharia Civil. III. Título.

Bruno Eduardo Bestetti

Método dos Elementos Finitos aplicado a treliças e pórticos planos

Este Trabalho Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil e aprovado em sua forma final pelo Curso Engenharia Civil

Florianópolis, 8 de dezembro de 2022.

Prof.^a Liane Ramos da Silva, Dra.
Coordenadora do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Tiago Morkis Siqueira, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Leandro Fleck Fadel Miguel, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Otávio Augusto Alves da Silveira, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais, minha fonte de
inspiração e admiração.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à minha família por todo apoio que recebi durante toda a minha vida, principalmente nos anos de graduação. Agradeço por priorizarem minha educação e pelo esforço realizado para possibilitar meu ingresso na universidade que sempre sonhei. Os meus valores e caráter são reflexo da criação que me foi dada por vocês.

À minha mãe, Josiane Felisberto Bestetti, pelo seu afeto e acolhimento que posso sempre contar e à minha irmã, Giovana Bestetti, por me inspirar a me tornar um exemplo a ser seguido. Um agradecimento especial ao meu pai, Claudio Eduardo Bestetti Filho, por despertar meu gosto pela Engenharia Civil desde pequeno e por ser meu mentor no dia-a-dia, tanto âmbito profissional como no pessoal.

À minha namorada, Beatriz Corazza Corrêa, por estar comigo nesta caminhada desde o princípio, por me proporcionar meus momentos mais felizes, por me incentivar a buscar novos desafios e por fazer parte de quem sou hoje.

Ao meu professor orientador, Tiago Morkis Siqueira, por todos os diálogos e materiais disponibilizados durante a realização deste trabalho. Agradeço por ter fomentado minhas ideias e meu conhecimento acerca de temáticas extremamente interessantes mas de pouca expressão na graduação, que certamente serão diferenciais no mercado de trabalho e em uma possível carreira acadêmica.

Finalmente, a todos os professores, técnicos e servidores da Universidade Federal de Santa Catarina que contribuíram direta ou indiretamente na minha formação e aos colegas e amigos que fiz em sala de aula: André, Carlos, Lucas, Rafaela.

“However difficult life may seem, there is always something you can do and
succeed at. It matters that you don’t just give up.”
(Stephen Hawking, 2012)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar a elaboração de dois algoritmos que contemplam a análise linear de treliças, vigas e pórticos planos, baseado em formulações do Método dos Elementos Finitos (MEF). Estes foram desenvolvidos em linguagem Python e são capazes de calcular os deslocamentos nodais, esforços normais, esforços cortantes, momentos fletores, deformações, tensões axiais e reações nos apoios das estruturas propostas. De modo a validar os resultados obtidos pelos algoritmos, estes foram comparados às bibliografias utilizadas e ao software de análise matricial FTOOL. Os algoritmos foram, então, aplicados para resolução de três exemplos previamente estudados na literatura. Por fim, após a realização de análises de convergência de malha e a representação gráfica dos resultados obtidos, algoritmo foi considerado preciso e calibrado, a depender apenas do refinamento da malha de elementos finitos utilizada nas análises.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos. Algoritmos. Análise elástica linear. Treliças planas. Pórticos planos. Vigas.

ABSTRACT

This study has the purpose of presenting the elaboration of two algorithms that approach the linear analysis of trusses, beams and planar frames, based on a Finite Elements Method (FEM) formulation. The Python-written algorithms elaborated are capable of calculating the node displacements, normal and shearing stresses, bending moments, deflections, tensions and support reactions of the proposed structures. In order to validate the obtained results, comparisons were made to the bibliography and to a matrix analysis software, FTOOL. The algorithms were, then, applied to the resolution of three examples previously studied in the literature. After mesh convergence studies and graphical representations of the obtained results, the algorithm was considered precise and calibrated, depending only on the refinement of the mesh used for the analysis.

Keywords: Finite Element Method. Algorithms. Linear elastic analysis. Planar trusses. Planar frames. Beams.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Malha de elementos finitos, configuração deformada e deslocamentos verticais.....	13
Figura 2 – Exemplo de Treliça.....	16
Figura 3 – Coordenadas globais e locais do elemento de treliça 2D.....	17
Figura 4 – Forças externas do elemento de treliça 2D.	18
Figura 5 – Fluxograma de montagem do código.....	26
Figura 6 – Esquema da treliça para validação, Exemplo 1.	27
Figura 7 – Configuração deformada da treliça, Exemplo 1.	29
Figura 8 – Esquema da treliça para validação, Exemplo 2.	30
Figura 9 – Configuração deformada da treliça, Exemplo 2.	32
Figura 10 – Sistema laje-viga-pilar.	33
Figura 11 – Exemplos de pórticos.....	33
Figura 12 – Ilustração da teoria de Euler-Bernoulli.....	34
Figura 13 – Elemento finito para pórticos planos.	35
Figura 14 – Elemento inclinado com carga variável.....	36
Figura 15 – Convenção de sinais para os esforços internos.	39
Figura 16 – Fluxograma de montagem do código.....	43
Figura 17 – Esquema do pórtico para validação, Exemplo 1.....	44
Figura 18 – Configuração deformada do pórtico, Exemplo 1.....	46
Figura 19 – Esquema do pórtico para validação, Exemplo 1.....	47
Figura 20 – Configuração deformada do pórtico, Exemplo 2.....	49
Figura 21 – Refinamento de resultados em elementos finitos.....	50
Figura 22 – Viga bi-apoiada sob carregamento uniforme.....	51
Figura 23 – Viga bi-apoiada sob carregamento uniforme, primeira análise.....	52
Figura 24 – Configuração deformada, primeira análise.....	53
Figura 25 – Configuração deformada teórica.....	54
Figura 26 – Configurações deformadas.	55
Figura 27 – Viga bi-apoiada sob carregamento trapezoidal.....	56
Figura 28 – Configuração deformada teórica.....	57
Figura 29 – Viga bi-apoiada sob carregamento trapezoidal, primeira análise.....	58
Figura 30 – Comparativo entre curvas de deslocamento.	60
Figura 31 – Pórtico hiperestático.	61
Figura 32 – Diagrama de momentos fletores.	63
Figura 33 – Configuração deformada do pórtico hiperestático – FTOOL.....	64
Figura 34 – Configuração deformada do pórtico hiperestático – Acadview.....	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Configuração da treliça, Exemplo 1	27
Tabela 2 – Comparativo dos resultados obtidos, Exemplo 1.	28
Tabela 3 – Configuração da treliça, Exemplo 2.	30
Tabela 4 – Comparativo dos resultados obtidos, Exemplo 2.	31
Tabela 5 – Configuração do pórtico, Exemplo 1.....	45
Tabela 6 – Comparativo dos resultados obtidos, Exemplo 1.	45
Tabela 7 – Configuração do pórtico, Exemplo 2.....	47
Tabela 8 – Comparativo dos resultados obtidos, Exemplo 2.	48
Tabela 9 – Comparativo dos resultados obtidos, primeira análise.	52
Tabela 10 – Valores de flecha calculados.	54
Tabela 11 – Valores de deslocamento do nó central.	58
Tabela 12 – Valores de deslocamento nodais.....	59
Tabela 13 – Valores de esforços internos obtidos.	62

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos.....	15
1.1.1	Objetivo Geral.....	15
1.1.2	Objetivos Específicos	15
2	ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA	16
2.1	Definição.....	16
2.2	Formulação	16
2.3	Metodologia.....	24
2.4	Validação do Código	27
2.4.1	Exemplo 1	27
2.4.2	Exemplo 2	29
3	ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS E PÓRTICOS.....	33
3.1	Definição.....	33
3.2	Formulação	34
3.3	Metodologia.....	41
3.4	Validação do Código	44
3.4.1	Exemplo 1	44
3.4.2	Exemplo 2	46
4	EXEMPLOS E APLICAÇÕES	50
4.1	Viga Bi-Apoiada sob Carregamento Uniforme	50
4.2	Viga Bi-Apoiada sob Carregamento Trapezoidal.....	56
4.3	Pórtico Hiperestático	61
5	CONCLUSÃO.....	65
6	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	66
	REFERÊNCIAS.....	67
	APÊNDICE A	69
	APÊNDICE B.....	72

1 INTRODUÇÃO

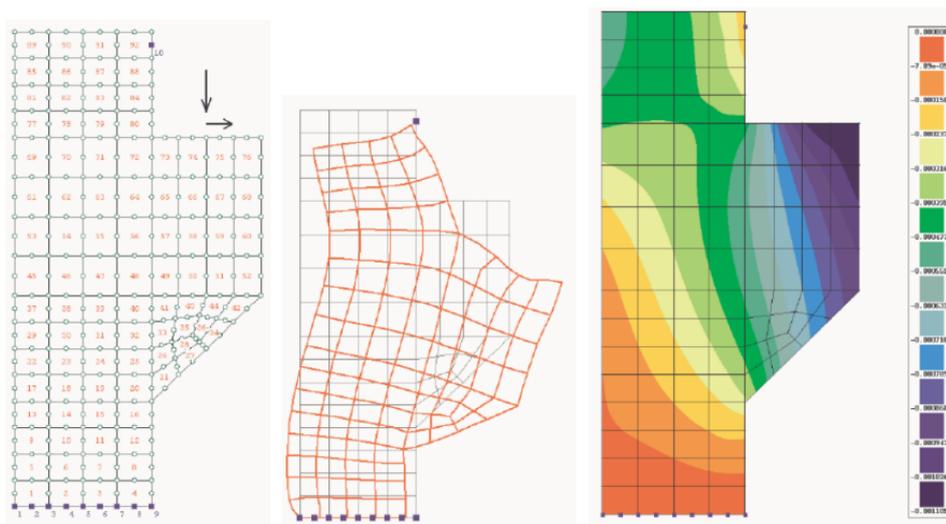
A análise estrutural é um desafio particular quando atrelada à evolução e modernização da construção, tornando praticamente mandatória a utilização da computação para ser realizada. Por este motivo, foram desenvolvidos novos procedimentos para tal análise e, neste trabalho, será destacado o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Segundo Soriano (2003), o MEF nada mais é que uma análise matemática, em que um meio contínuo é fragmentado em vários elementos, que mantêm as propriedades materiais idênticas às originais. Esses elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos.

De forma contextualizada, o método resolve um modelo matemático baseado em um problema físico como, por exemplo, uma estrutura ou componente estrutural sujeito a um carregamento. Vale ressaltar que a precisão das soluções deve sempre ser avaliada, visto que a técnica utilizada para resolução é um procedimento numérico. Segundo Bathe (2016), a escolha de um modelo matemático apropriado é essencial e determina completamente a percepção do problema físico real que pode ser obtido pela análise.

Um exemplo de aplicação do método dos elementos finitos é apresentado por Azevedo (2003) na Figura 1 e consiste na análise de uma estrutura do tipo consolo curto de pequena espessura, sujeito às forças indicadas.

Figura 1 – Malha de elementos finitos, configuração deformada e deslocamentos verticais.



Fonte: Azevedo (2003).

De acordo com Bathe (2016) e Lacerda (2014), a formulação do MEF para análise linear das estruturas assume as seguintes hipóteses de modelo estrutural:

- Os deslocamentos são pequenos;
- O material é linear elástico;
- As condições de contorno são constantes, logo, não se modificam durante a aplicação das cargas.

Na ocorrência destas condições, o vetor dos deslocamentos nodais \mathbf{u} se relaciona linearmente com o vetor de cargas externas \mathbf{F}_{ext} , da forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_{ext} \quad (1.1)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez global da estrutura. Sendo assim, ao aumentar as cargas por um fator λ , isto é, $\lambda\mathbf{F}_{ext}$, então os deslocamentos aumentam pelo menos fator $\lambda\mathbf{u}$. Caso isso não ocorra, não há linearidade no sistema.

Neste trabalho, serão abordadas apenas estruturas lineares reticuladas simples, tais como treliças, vigas e pórticos, compostas por barras prismáticas (de eixo longitudinal e seção transversal constante) e cujas dimensões transversais são pequenas se comparadas aos comprimentos dos elementos em análise. Ainda, serão consideradas algumas hipóteses simplificadoras citadas por Hibbeler (2010):

- Os materiais devem ter comportamento elástico linear, o que implica o uso da Lei de Hooke, em que a tensão é proporcional ao produto da deformação pelo módulo de elasticidade do material;
- A distribuição de tensões pode ser considerada equivalente numa seção suficientemente distante do ponto de aplicação dos carregamentos (princípio de Saint-Venant);
- As deformações e deslocamentos devem ser considerados infinitesimais.

Conforme os estudos de Lourenço (1999), o emprego simultâneo de estruturas com vãos cada vez maiores e com materiais cada vez mais resistentes conduz a estruturas mais sensíveis à instabilidade. Sendo assim, o grau de complexidade e de precisão aumenta à medida que a análise estrutural se torna cada vez mais sofisticada e outros aspectos podem ser levados em conta, tais como:

- As leis constitutivas do material, tais como linearidade ou não-linearidade, elasticidade ou plasticidade e afins;
- O comportamento estático ou dinâmico da estrutura;

- As imperfeições reais da estrutura, sejam flechas iniciais, imperfeições nas formas geométricas ou tensões residuais;
- Circunstâncias atípicas como cargas rolantes, amortecimento dinâmico, etc.

1.1 OBJETIVOS

Nas seções abaixo estão descritos o objetivo geral e os objetivos específicos deste Trabalho de Conclusão de Curso.

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver dois algoritmos, ambos em linguagem Python, capazes de calcular os deslocamentos nodais, reações de apoio e esforços internos de barras de treliças, vigas e pórticos planos através do Método dos Elementos Finitos.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar o funcionamento do algoritmo MEF elaborado;
- Abordar o método dos elementos finitos aplicado a treliças, vigas e pórticos por meio de modelos teóricos;
- Validar os resultados obtidos ao compará-los com os métodos de outros autores e estruturas de resultado analítico conhecido;
- Representar graficamente as estruturas deformadas após aplicação dos esforços considerados.
- Avaliar a convergência dos resultados obtidos em função do refinamento da malha utilizada.

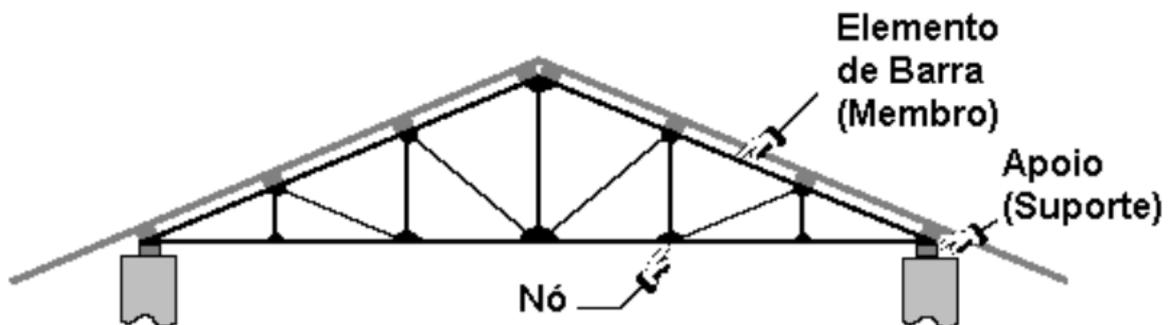
2 ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA

2.1 DEFINIÇÃO

Segundo Leet, Uang e Gilbert (2010), treliças são estruturas compostas por elementos de barras, delgadas e com extremidades conectadas por articulações sem atrito, os nós. Por receberem carregamentos apenas em seus nós, as barras transmitem apenas forças axiais ao longo da estrutura. As ligações geralmente são feitas por soldas ou parafusos, mas é possível considerá-las como ligações articuladas.

Para a modelagem de treliças planas através do Método dos Elementos Finitos, consideram-se barras de dois nós, de deformações infinitesimais e que obedecem à Lei de Hooke. Na Figura 2, tem-se uma ilustração de treliça plana geralmente utilizada em coberturas num geral.

Figura 2 – Exemplo de Treliça.



Fonte: Silva Neto et al. (2007).

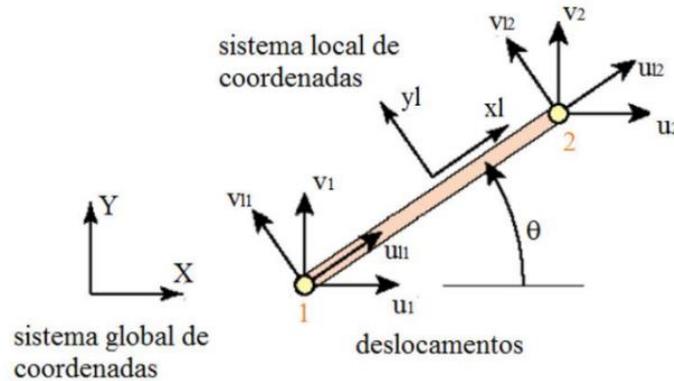
2.2 FORMULAÇÃO

Pela formulação de treliças planas em elementos finitos conforme Zienkiewicz, Taylor, e Zhu (2005), cada elemento de barra tem área de seção transversal constante A e é composto por dois nós (1 e 2) de coordenadas (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) no sistema global cartesiano, respectivamente. Essas coordenadas representam a configuração inicial de cada elemento na estrutura como um todo e serão necessárias futuramente. O comprimento inicial L_0 é calculado da seguinte forma:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (2.1)$$

Silva Neto propõe um desenho esquemático do elemento de treliça plana na Figura 3. O ângulo inicial do elemento em questão no sistema de coordenadas globais é chamado de θ .

Figura 3 – Coordenadas globais e locais do elemento de treliça 2D.



Fonte: Silva Neto et al. (2007).

Por ser uma treliça plana, a formulação é bidimensional e os valores de seno e cosseno do ângulo θ podem ser facilmente obtidos por:

$$\cos\theta = \frac{X_2 - X_1}{L_0} \quad (2.2)$$

$$\sen\theta = \frac{Y_2 - Y_1}{L_0} \quad (2.3)$$

O vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u} no sistema global de coordenadas é:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

no qual u_i e v_i , com $i = 1, 2$, são os deslocamentos horizontais e verticais, respectivamente.

Existe uma relação entre os deslocamentos no sistemas global e local de coordenadas, dada por:

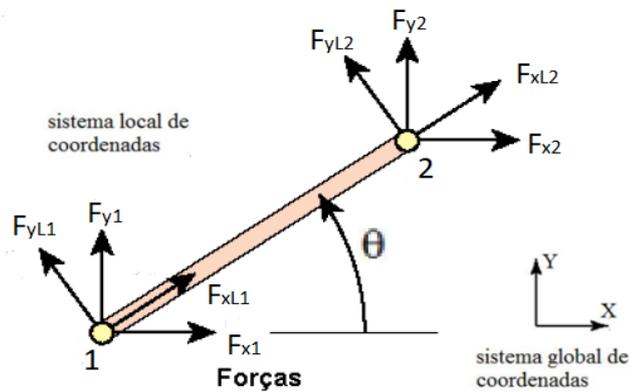
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} u_{L1} \\ v_{L1} \\ u_{L2} \\ v_{L2} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de rotação, representada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Silva Neto também propõe um desenho esquemático do elemento de treliça quanto às forças externas atuantes na Figura 4.

Figura 4 – Forças externas do elemento de treliça 2D.



Fonte: Adaptado de Silva Neto et al. (2007).

O vetor de forças externas no sistema global de coordenadas, \mathbf{F}_G , é:

$$\mathbf{F}_G = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Análoga à relação entre os deslocamentos em ambos os sistemas de coordenadas, as forças seguem a relação:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} F_{xL1} \\ F_{yL1} \\ F_{xL2} \\ F_{yL2} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de rotação, representada na equação (2.6).

A matriz de rigidez de cada elemento é deduzida a partir da Energia Potencial Total Π , definida por:

$$\Pi = \sum_e^n U_e + P \quad (2.9)$$

tal que P é a energia potencial das forças externas:

$$P = - \sum_{i=x,y} \cdot \sum_{n=1}^{n\acute{o}s} F_i^n u_i^n \quad (2.10)$$

e U_e é a energia de deformação de um elemento finito e :

$$U_e = \int_V u_e dV \quad (2.11)$$

onde u_e é a energia específica de deformação, proveniente da relação σ x ε , ou seja, é o trabalho da tensão sobre a deformação.

Para a lei de Hooke uniaxial, tem-se:

$$\begin{aligned} du_e &= \sigma d\varepsilon \\ u_e &= \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \end{aligned}$$

Como $\sigma = E\varepsilon$:

$$\begin{aligned} u_e &= \int_0^\varepsilon E\varepsilon d\varepsilon \\ u_e &= E \frac{\varepsilon^2}{2} \Big|_0^\varepsilon \\ u_e &= \frac{E\varepsilon^2}{2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sabe-se que o elemento finito possui área de seção transversal A constante. Ainda, toma-se o comprimento deformado L como igual ao inicial dado pela equação (2.1) por se tratar de uma análise linear, e as inclinações por (2.2) e (2.3). Logo, a energia de deformação de um elemento é:

$$\begin{aligned} U_e &= \int_V u_e dV \\ U_e &= \int_L \int_A \frac{E\varepsilon^2}{2} dAdL \\ U_e &= \frac{EA}{2} \int_L \varepsilon^2 dL \end{aligned} \quad (2.13)$$

Obtidas as equações para P (2.10) e U_e (2.13), interessa a relação de ε e u_i^n , que são as incógnitas deste problema. É conhecida a relação entre os referenciais global e local, expressa pela matriz de rotação \mathbf{R} na equação (2.6). Sendo assim, como não há flexão nas barras, ou seja, está sob deformação uniaxial, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx_L} \quad (2.14)$$

tal que $u(x_L)$ é o campo de deslocamentos de qualquer ponto x_L na barra.

No MEF, este campo de deslocamentos é aproximado por funções de forma $\phi_i(x_L)$, já que, em casos gerais, não é possível determinar a resposta exata de $u(x_L)$. A aproximação para os deslocamentos da barra pode ser escrito como:

$$u(x_L) = \phi_1(x_L)u_{xL}^1 + \phi_2(x_L)u_{xL}^2 \quad (2.15)$$

$$\phi_1(x_L) = 1 - \frac{x_L}{L}$$

$$\phi_2(x_L) = \frac{x_L}{L}$$

tal que x_L pertence ao intervalo $[0, L]$.

A escolha das expressões de ϕ_1 e ϕ_2 e a forma como aproximação de $u(x_L)$ é escrita não são arbitrárias. Logo, $\phi_i(x_L)$ é arbitrada para valor 1 no nó i e zero no outro. Dessa forma, ao avaliar $u(x_L)$ sobre os nós, tem-se:

$$u(x_L^1) = \phi_1(x_L^1)u_{xL}^1 + \phi_2(x_L^1)u_{xL}^2$$

$$u(x_L^1) = \phi_1(0)u_{xL}^1 + \phi_2(0)u_{xL}^2$$

$$u(x_L^1) = 1 \cdot u_{xL}^1 + 0 \cdot u_{xL}^2$$

$$u(x_L^1) = u_{xL}^1$$

$$u(x_L^2) = \phi_1(x_L^2)u_{xL}^1 + \phi_2(x_L^2)u_{xL}^2$$

$$u(x_L^2) = \phi_1(L)u_{xL}^1 + \phi_2(L)u_{xL}^2$$

$$u(x_L^2) = 0 \cdot u_{xL}^1 + 1 \cdot u_{xL}^2$$

$$u(x_L^2) = u_{xL}^2$$

Isto é, quando o deslocamento aproximado pela função de forma é escrito como apresentado acima e avaliado sobre a coordenada de um nó x_L , resulta o próprio parâmetro incógnito e, portanto, o parâmetro nodal u_{xL} tem significado de deslocamento. No MEF, é uma consideração vantajosa visto que a solução do sistema de equação resultará diretamente nos deslocamentos dos nós.

Retomando a equação (2.15) e substituindo em (2.14), tem-se que:

$$\begin{aligned}
u(x_L) &= \phi_1(x_L)u_{xL}^1 + \phi_2(x_L)u_{xL}^2 \\
\varepsilon &= \frac{du}{dx_L} = \frac{d\phi_1}{dx_L}u_{xL}^1 + \frac{d\phi_2}{dx_L}u_{xL}^2 \\
\varepsilon &= \left(-\frac{1}{L}\right)u_{xL}^1 + \left(\frac{1}{L}\right)u_{xL}^2 \\
\varepsilon &= \frac{u_{xL}^2 - u_{xL}^1}{L}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Agora, ao retomar a equação (2.13) e substituir a equação (2.16), obtém-se:

$$\begin{aligned}
U_e &= \frac{EA}{2} \int_0^L \varepsilon^2 dx_L \\
U_e &= \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{u_{xL}^2 - u_{xL}^1}{L} \right)^2 dx_L \\
U_e &= \frac{EA}{2} \left(\frac{u_{xL}^2 - u_{xL}^1}{L} \right)^2 \cdot x_L \Bigg|_0^L \\
U_e &= \frac{EA}{2L} (u_{xL}^2 - u_{xL}^1)^2
\end{aligned}$$

Pelo Princípio da Energia Total Estacionária, o equilíbrio de uma estrutura se dá quando a sua energia total é estacionária (mínima) para os parâmetros que descrevem a energia da estrutura (neste caso, dos deslocamentos dos nós). Matematicamente:

$$\delta\Pi = 0 \Rightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial u_i^n} = 0 \Rightarrow \sum_e \frac{\partial U_e}{\partial u_i^n} + \frac{\partial P_e}{\partial u_i^n} = 0$$

com $i = x, y$ e $n = (1, \dots, n_n\acute{o}s)$.

Assim, ao derivar parcialmente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_e}{\partial u_{xL}^1} &= \frac{EA}{2L} 2(u_{xL}^2 - u_{xL}^1)(-1) = \frac{EA}{L} (u_{xL}^1 - u_{xL}^2) \\
\frac{\partial U_e}{\partial u_{xL}^2} &= \frac{EA}{2L} 2(u_{xL}^2 - u_{xL}^1)(1) = \frac{EA}{L} (-u_{xL}^1 + u_{xL}^2)
\end{aligned}$$

Na forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial U_e / \partial u_{xL}^1 \\ \partial U_e / \partial u_{xL}^2 \end{array} \right\} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_{xL}^1 \\ u_{xL}^2 \end{array} \right\} = \mathbf{K}_L \cdot \mathbf{u}_L$$

No sistema de coordenadas local, a matriz de rigidez de cada elemento, \mathbf{K}_L , pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_L = \frac{EA}{L_0} \mathbf{T} \quad (2.17)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e \mathbf{T} é a matriz dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Como a análise em questão é referente a barras nas coordenadas locais, supõe-se que estas recebem solicitações apenas de forças externas axiais, que geram energia sobre os deslocamentos nodais axiais. Então, ao retomarmos a equação (2.10) que define P , o potencial dessas forças é simplesmente:

$$\begin{aligned} P_e &= -F_{xL}^1 u_{xL}^1 - F_{xL}^2 u_{xL}^2 \\ \frac{\partial P_e}{\partial u_{xL}^1} &= -F_{xL}^1 \\ \frac{\partial P_e}{\partial u_{xL}^2} &= -F_{xL}^2 \end{aligned}$$

e, na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial P_e}{\partial u_{xL}^1} \\ \frac{\partial P_e}{\partial u_{xL}^2} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_{xL}^1 \\ F_{xL}^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_L$$

Portanto, segundo Bathe (2016), ao substituir na relação acima as matrizes obtidas, obtém-se o sistema de equações que rege cada um dos elementos:

$$\mathbf{K}_L \cdot \mathbf{u}_L = \mathbf{F}_L \quad (2.19)$$

Sabendo que a matriz de rotação \mathbf{R} é ortogonal, ou seja, $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, tem-se o desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_L \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{u}_G) &= \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{F}_G \\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_L \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{u}_G &= \mathbf{F}_G \\ \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{u}_G &= \mathbf{F}_G \end{aligned}$$

tal que \mathbf{K}_G , no sistema de coordenadas global é a matriz de rigidez de cada elemento, dada por:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_L \cdot \mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

O desenvolvimento acima resulta na definição de \mathbf{K}_G , a seguir:

$$\mathbf{K}_G = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\text{sen}\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\text{sen}\theta \\ \cos\theta\text{sen}\theta & \text{sen}^2\theta & -\cos\theta\text{sen}\theta & -\text{sen}^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\text{sen}\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\text{sen}\theta \\ -\cos\theta\text{sen}\theta & -\text{sen}^2\theta & \cos\theta\text{sen}\theta & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

A matriz de rigidez global da estrutura será o somatório de n matrizes de rigidez globais de cada elemento, respeitando a correspondência de graus de liberdade, da forma

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{K}_G^e \quad (2.21)$$

onde e é o elemento finito e n é o número total de elementos da treliça.

Ainda, a deformação específica de engenharia (ε_E) de cada elemento pode ser calculada, no sistema local de coordenadas, partindo da equação (2.16) dada por

$$\varepsilon_E = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

e da relação entre deslocamentos nodais nos sistemas global e local proposta na equação (2.4), tem-se

$$u_{Li} = u_i \cos\theta + v_i \text{sen}\theta$$

$$\varepsilon_E^e = \frac{\cos\theta(u_{L2} - u_{L1}) + \text{sen}\theta(v_{L2} - v_{L1})}{L} \quad (2.22)$$

Sendo assim, pode-se calcular as tensões normais (σ^e) e, por consequência, os esforços normais (N^e) de cada elemento e:

$$\sigma^e = E^e \varepsilon_E^e \quad (2.23)$$

$$N^e = \sigma^e A^e \quad (2.24)$$

Por fim, caso se deseje conhecer as reações dos apoios da treliça, calcula-se:

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{F} \quad (2.25)$$

2.3 METODOLOGIA

Com a plataforma computacional web Jupyter Notebook, elaborou-se o código em Python para a implementação da análise linear estática de treliças planas compostas por elementos de barra 2D.

Primeiramente, o usuário deve fornecer ao programa todas as informações requisitadas (os dados de entrada) sobre a estrutura em questão. De forma sequencial, insere-se:

- Número total de nós da estrutura;
- Número total de elementos de barra da estrutura;
- Posição dos nós em coordenadas X e Y;
- Conectividade dos elementos (incidência);
- Área de seção transversal A e módulo de elasticidade E de cada barra;
- Forças atuantes na estrutura;
- Número de nós restringidos e as próprias restrições de deslocamento;

Na sequência, o programa processa os dados de entrada e calcula as matrizes de rigidez de cada elemento \mathbf{K}_G (Equação (2.21)). Com essas matrizes, é possível montar a matriz de rigidez global do sistema \mathbf{K} (Equação (2.22)), conforme o seguinte algoritmo:

Etapa 1 – Dados do modelo (coordenadas, conectividade dos elementos, propriedades do material, condições de contorno e de carregamento):

- Define número de nós ($n_{\text{nós}}$) e número de elementos (n_{el});
- Calcula o número de graus de liberdade (GDL): $\text{GDL} = 2 * n_{\text{nós}}$;
- $\mathbf{K} = 0$ – Matriz da estrutura, tamanho $[\text{GDL}, \text{GDL}]$.

Etapa 2 – Início das iterações:

Percorre:

- Todos os elementos (de 1 a n_{el});
- Nós locais de cada elemento (1 e 2).

Etapa 3 – Nó local 1:

- Percorre os graus de liberdade do nó local 1 ($i = 1, 2$).

Calcula:

- Número do nó local 1: $\alpha = \text{inc}(\text{e}, \text{nó local 1})$;
- Número do grau de liberdade no sistema global: $k = 2 * \alpha + i$;

- Número do grau de liberdade no sistema local: $GDL1 = 2*(\text{nó local } 1 - 1) + i$;

Etapa 4 – Nó local 2:

- Percorre os graus de liberdade do nó local 2 ($j=1, 2$).

Calcula:

- Número do nó local 1: $\beta = \text{inc}(e, \text{nó local } 2)$;
- Número do grau de liberdade no sistema global: $l = 2*\beta + j$;
- Número do grau de liberdade no sistema local: $GDL2 = 2*(\text{nó local } 2 - 1) + j$;

Etapa 5 – Matriz de rigidez global:

- Calcula matriz de rigidez global: $K[k, l] = K[k, l] + K_G[GDL1, GDL2]$.

Computacionalmente, o procedimento de montagem do sistema da estrutura mostrado anteriormente necessita da incidência nodal do elemento, ou seja, a ordem dos nós de cada barra. A função incidência pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{inc}(e, 1) &= \alpha \\ \text{inc}(e, 2) &= \beta \end{aligned} \tag{2.26}$$

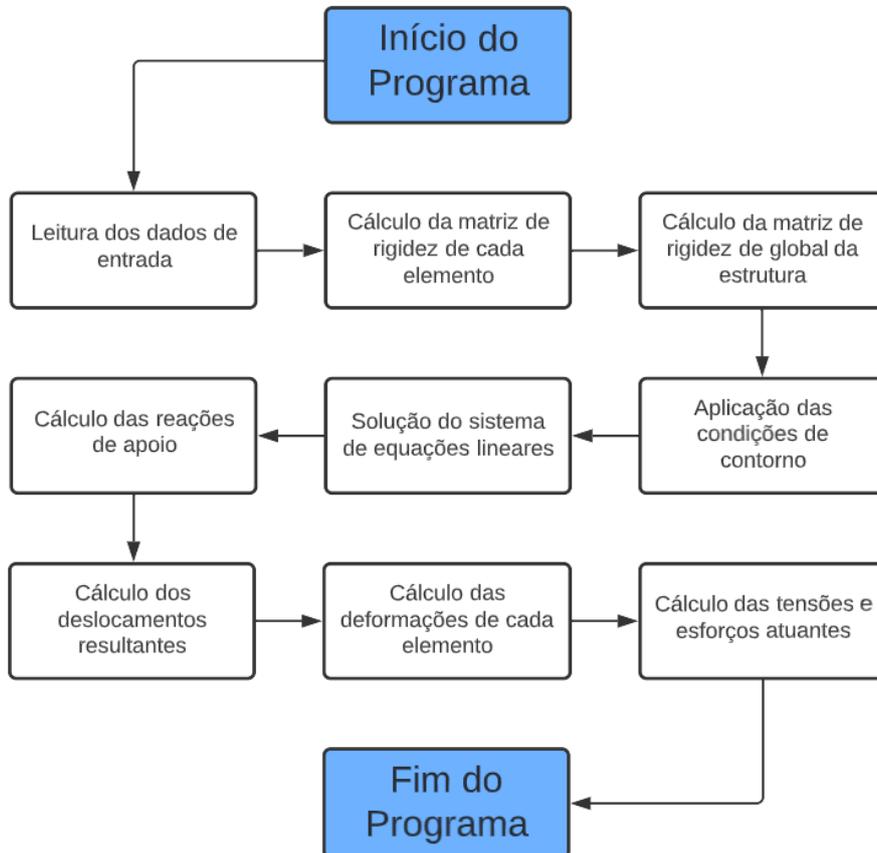
tal que e é o elemento, 1 e 2 são os números dos nós no sistema local e α e β são os números dos nós no sistema global da estrutura.

O passo seguinte é a aplicação das condições de contorno pré-estabelecidas nos dados de entrada do problema, ou seja, a verificação das restrições. O programa percorre um laço condicional e confere se há restrições nas direções x e y em cada um dos nós, conforme entrada do usuário. Caso haja restrição, a matriz de rigidez é modificada, zeram-se as linhas e colunas para todos os graus de liberdade com deslocamento nodal igual à zero e atribui-se valor unitário para os valores da diagonal principal.

A operação resulta em um sistema de equações lineares (Equação (2.20)) com uma matriz de rigidez não singular, ou seja, a inversa de \mathbf{K} existe. Uma vez obtida a solução desse sistema, o programa entrega como saída os valores dos deslocamentos nodais que compõe o vetor \mathbf{u} .

No pós-processamento, o programa calcula a deformação específica de engenharia ε_E (Equação (2.22)), a tensão normal σ (Equação (2.23)) e o esforço normal N (Equação (2.24)) de cada elemento. Devido ao emprego de funções de forma lineares (como as aproximações do campo de deslocamentos \mathbf{u} e a lei de Hooke) e as equações diferenciais que regem o problema, as grandezas de pós-processamento citadas anteriormente são constantes ao longo de todo o comprimento dos elementos de barra. Finalmente, o código calcula as reações nos apoios da estrutura (Equação (2.25)). A Figura 5 denota o fluxograma de montagem e funcionamento do código computacional, exposto no Apêndice A.

Figura 5 – Fluxograma de montagem do código.



Fonte: Autor, adaptado de Borges, Silva e Bezerra (2016).

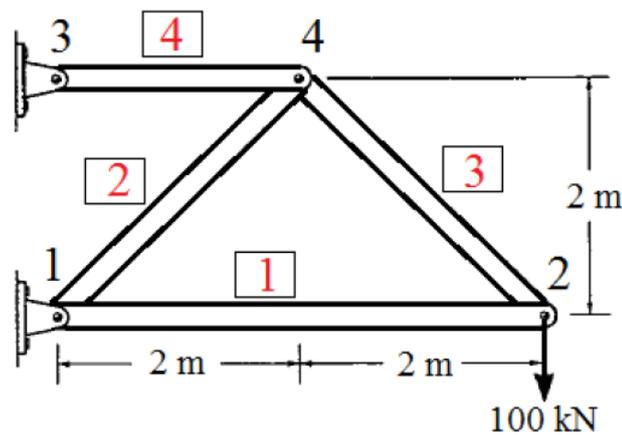
2.4 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

Com a finalidade de validar os resultados do programa elaborado, foram selecionados alguns exemplos de Farani (2021).

2.4.1 Exemplo 1

A treliça representada na Figura 6 é uma estrutura em aço, plana, biapoiada, constituída de quatro barras e quatro nós. Ao nó 2, está aplicada uma força vertical de intensidade 100 kN. As dimensões das barras estão dispostas na figura e todas possuem seção transversal constante $A = 400\text{mm}^2$ e módulo de elasticidade $E = 200\text{GPa}$.

Figura 6 – Esquema da treliça para validação, Exemplo 1.



Fonte: Farani (2021).

A partir da Figura 6, Farani elabora a Tabela 1 para demonstrar a configuração da treliça. Essa metodologia será replicada e utilizada ao longo dos exemplos seguintes.

Tabela 1 – Configuração da treliça, Exemplo 1

Coordenadas nodais			Conexão dos elementos		
Nó	X(m)	Y(m)	Elemento	Nó i	Nó j
1	0	0	1	1	2
2	4	0	2	1	4
3	0	2	3	2	4
4	2	2	4	3	4

Fonte: Farani (2021).

Com os dados acima, obtém-se todos os valores de deslocamentos, deformações, esforços normais, tensões e reações nos apoios. A Tabela 2 contém um comparativo entre os resultados obtidos no programa de elementos finitos desenvolvido e os de Farani (2021) para os deslocamentos nodais, esforços normais e reações de apoio.

Tabela 2 – Comparativo dos resultados obtidos, Exemplo 1.

Deslocamentos nos nós (m)				
Nó	Desloc.	Programa MEF	Farani (2021)	Variação
1	<i>u</i>	0,00000000	0,00000000	0,000%
	<i>v</i>	0,00000000	0,00000000	0,000%
2	<i>u</i>	-0,00500000	-0,00500000	0,000%
	<i>v</i>	-0,02914214	-0,02914210	0,000%
3	<i>u</i>	0,00000000	0,00000000	0,000%
	<i>v</i>	0,00000000	0,00000000	0,000%
4	<i>u</i>	0,00500000	0,00500000	0,000%
	<i>v</i>	-0,01207107	-0,01207110	0,000%

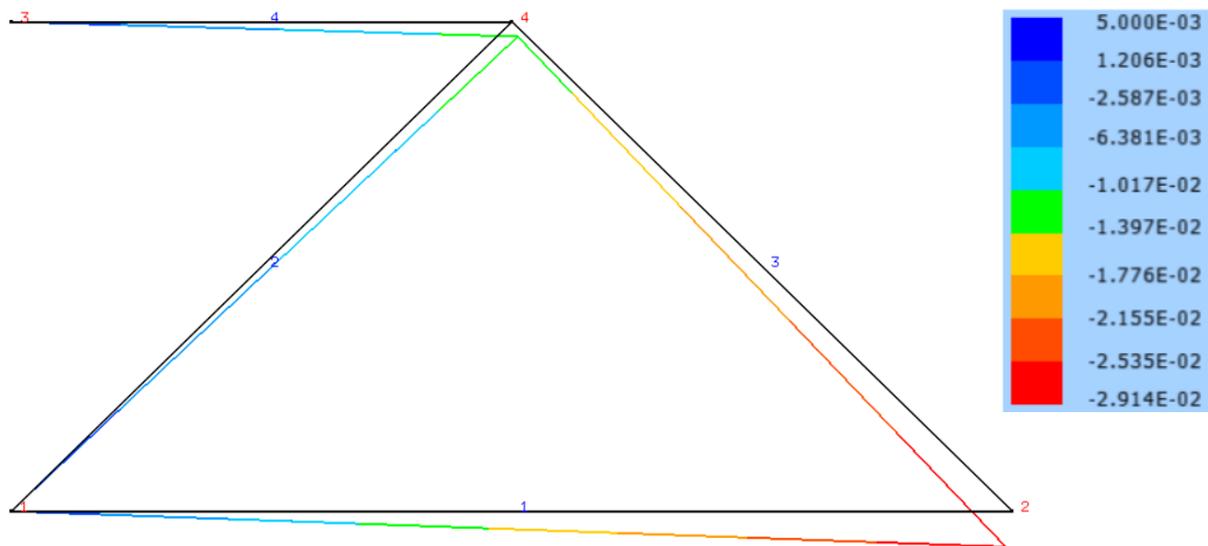
Força normal (kN)			
Barra	Programa MEF	Farani (2021)	Variação
1	-100,00	-100,00	0,000%
2	-141,42135624	-141,42136	0,000%
3	141,42135624	141,42136	0,000%
4	200,00	200,00	0,000%

Reações nos apoios (kN)				
Nó	Reação	Programa MEF	Farani (2021)	Variação
1	<i>x</i>	200,00	200,00	0,000%
	<i>y</i>	100,00	100,00	0,000%
3	<i>x</i>	-200,00	-200,00	0,000%
	<i>y</i>	0,00	0,00	0,000%

Fonte: Autor (2022).

A Figura 7 apresenta os deslocamentos nodais (verticais e horizontais, dados em m) da estrutura, visualizados com o programa de acesso livre para pós-processamento em elementos finitos, o AcadView (PACCOLA; CODA, 2005). Para melhor visualização a deformada foi ampliada em 5 vezes e estão indicados o números dos nós e elementos que compõe a treliça em análise.

Figura 7 – Configuração deformada da treliça, Exemplo 1.



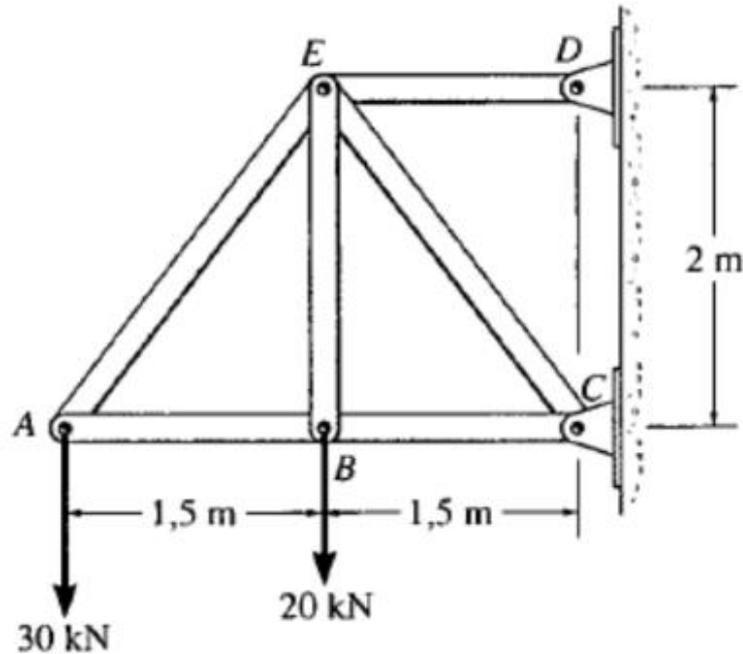
Fonte: Autor (2022).

Portanto, pode-se observar que o programa desenvolvido possui não possui diferença de resultado quando comparado a Farani (2021). Sendo assim, devido à similaridade do método aplicado por Farani e o método utilizado na elaboração do programa do presente trabalho, pode-se afirmar que o algoritmo está correto e pode ser utilizado para os cálculos desejados.

2.4.2 Exemplo 2

A treliça representada na Figura 8 é uma estrutura de aço, plana, biapoiada, constituída de seis barras e cinco nós. Ao nó 1, está aplicada uma força vertical de intensidade 30 kN e ao nó 2, está aplicada uma força vertical de intensidade 20 kN. As dimensões das barras estão dispostas na figura e todas possuem seção transversal constante $A = 400\text{mm}^2$ e módulo de elasticidade $E = 200\text{GPa}$. (HIBBELER, 2004).

Figura 8 – Esquema da treliça para validação, Exemplo 2.



Fonte: Hibbeler (2004).

A partir da Figura 8, Farani elabora a Tabela 3 para demonstrar a configuração da treliça, idem ao exemplo anterior.

Tabela 3 – Configuração da treliça, Exemplo 2.

Coordenadas nodais			Conexão dos elementos		
Nó	X(m)	Y(m)	Elemento	Nó i	Nó j
1	-3	0	1	1	2
2	-1,5	0	2	2	3
3	0	0	3	1	5
4	0	2	4	2	5
5	-1,5	2	5	3	5
			6	4	5

Fonte: Farani (2021).

Com os dados acima, obtém-se todos os valores de deslocamentos, deformações, esforços normais, tensões e reações nos apoios. Em sua bibliografia, Farani não apresenta os resultados obtidos para o exemplo acima. Sendo assim, foi necessário utilizar o programa de análise matricial, FTOOL (MARTHA, 2018) para a obtenção dos mesmos. A Tabela 4 contém um comparativo entre os resultados obtidos no programa de elementos finitos elaborado e os obtidos no programa FTOOL para os deslocamentos nodais, esforços normais e reações de apoio.

Tabela 4 – Comparativo dos resultados obtidos, Exemplo 2.

Deslocamentos nos nós (m)				
Nó	Desloc.	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	<i>u</i>	0,00084375	0,00084380	0,006%
	<i>v</i>	-0,00622656	-0,00622700	0,007%
2	<i>u</i>	0,00042188	0,00042190	0,005%
	<i>v</i>	-0,00378516	-0,00378500	0,004%
3	<i>u</i>	0,00000000	0,00000000	0,000%
	<i>v</i>	0,00000000	0,00000000	0,000%
4	<i>u</i>	0,00000000	0,00000000	0,000%
	<i>v</i>	0,00000000	0,00000000	0,000%
5	<i>u</i>	-0,00112500	-0,00112500	0,000%
	<i>v</i>	-0,00328516	-0,00328500	0,005%

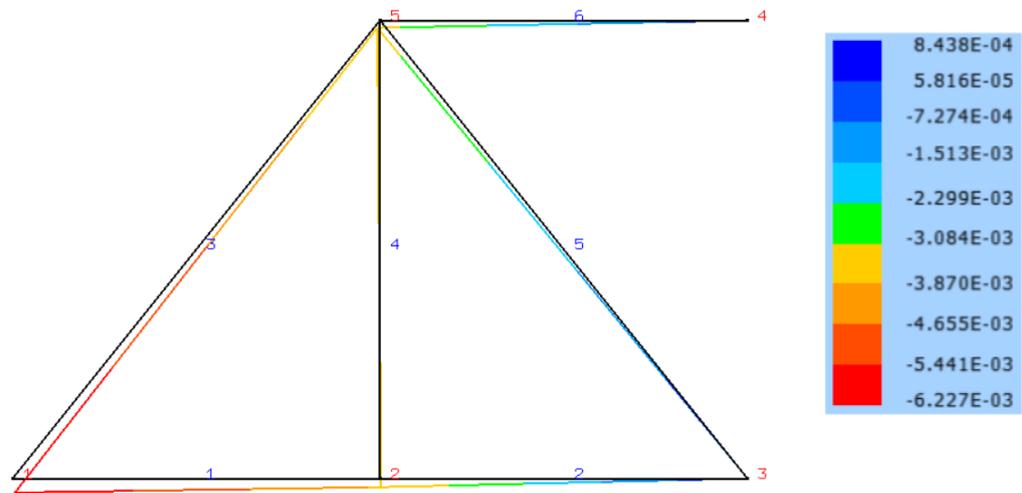
Força normal (kN)			
Barra	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	-22,50	-22,50	0,000%
2	-22,50	-22,50	0,000%
3	37,50	37,50	0,000%
4	20,00	20,00	0,000%
5	-62,50	-62,50	0,000%
6	60,00	60,00	0,000%

Reações nos apoios (kN)				
Nó	Reação	Programa MEF	FTOOL	Variação
3	<i>x</i>	-60,00	-60,00	0,000%
	<i>y</i>	-50,00	-50,00	0,000%
4	<i>x</i>	60,00	60,00	0,000%
	<i>y</i>	0,00	0,00	0,000%

Fonte: Autor (2022).

A Figura 9 apresenta os deslocamentos nodais (verticais e horizontais, dados em m) da estrutura, visualizados novamente com o AcadView (PACCOLA; CODA, 2005). Para melhor visualização a deformada foi ampliada em 10 vezes e estão indicados o números dos nós e elementos que compõe a treliça em análise.

Figura 9 – Configuração deformada da treliça, Exemplo 2.



Fonte: Autor (2022).

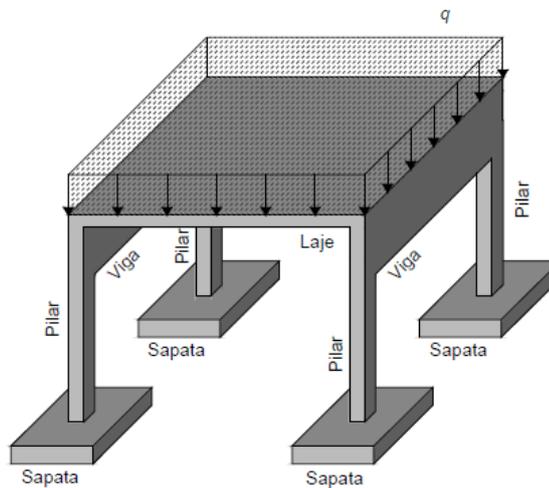
Novamente, pode-se observar que o programa desenvolvido possui pequenas diferenças de resultado quando comparado aos resultados do programa FTOOL (MARTHA, 2018). Logo, devido à similaridade do método aplicado por Farani (2021) e o método utilizado na elaboração do programa do presente trabalho, reafirma-se que o algoritmo está correto e pode ser utilizado para os cálculos desejados.

3 ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS E PÓRTICOS

3.1 DEFINIÇÃO

Segundo Souza, Rodrigues e Mascia (2008), vigas são estruturas lineares, dispostas horizontalmente ou inclinadas, com um ou mais apoios, sujeitas a carregamentos transversais. São comumente utilizadas em sistemas do tipo laje-viga-pilar (Figura 10) para transferir as cargas verticais recebidas da laje para os pilares ou para transmitir cargas concentradas nas situações que serve de apoio a um pilar.

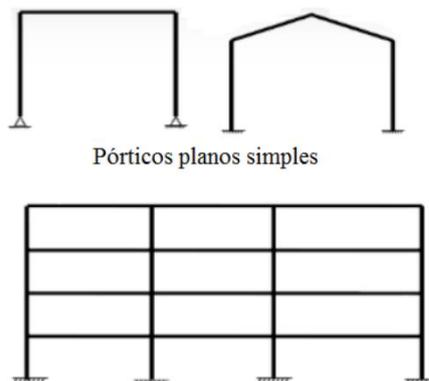
Figura 10 – Sistema laje-viga-pilar.



Fonte: FADESP (2015).

Por definição, os pórticos planos são estruturas lineares planas com solicitações coplanares. Por um olhar construtivo, pode-se dizer que os pórticos formam o esqueleto resistente da estrutura da edificação, nos quais são fixadas as vedações e cobertura.

Figura 11 – Exemplos de pórticos.



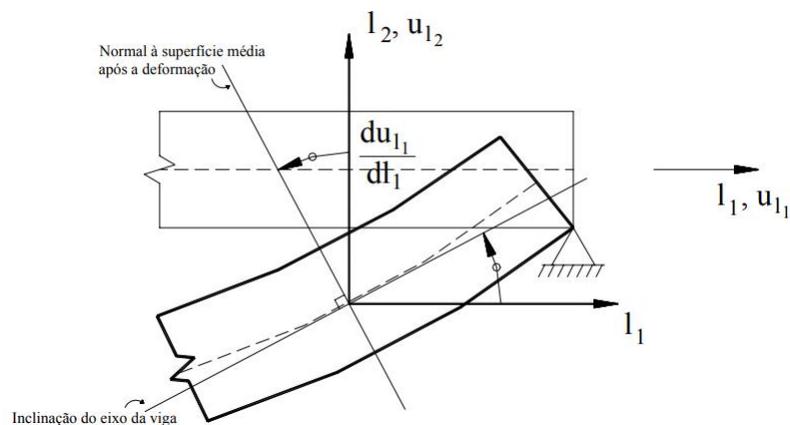
Pórtico plano de andares múltiplos

Fonte: Farani (2021).

Analicamente, os pórticos planos podem ser discretizados por elementos de viga com deformação axial. Recorrentemente, o comportamento dessas estruturas é analisado e modelado conforme as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

Para o presente trabalho, será utilizada a teoria de Euler-Bernoulli e, portanto, desprezam-se os efeitos decorrentes das deformações cisalhantes na seção transversal dos elementos e estima-se que as seções transversais planas se manterão planas e perpendiculares ao eixo neutro da viga após as deformações (SILVA et al., 2016).

Figura 12 – Ilustração da teoria de Euler-Bernoulli.

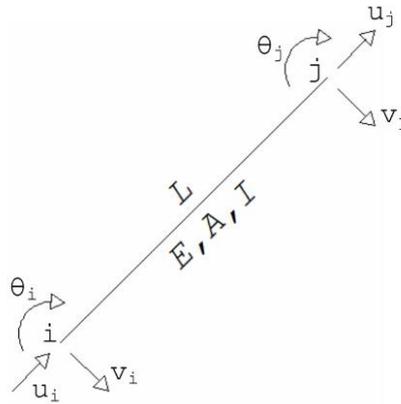


Fonte: Barbosa (2001).

3.2 FORMULAÇÃO

De maneira análoga à formulação de treliças planas, os elementos de barra dos pórticos planos possuem área de seção transversal constante A e são compostos por dois nós de coordenadas conhecidas no sistema global cartesiano. Sendo assim, a equação (2.1) que define o comprimento L_0 se mantém válida. Entretanto, no caso de pórticos planos, os elementos possuem 6 graus de liberdade no total, sendo 3 graus de liberdade por nó: translações horizontal u e vertical v e uma rotação θ . A Figura 13 ilustra as coordenadas globais, o comprimento inicial L_0 e os graus de liberdade.

Figura 13 – Elemento finito para pórticos planos.



Fonte: Paiva (2012).

Ainda, por se tratar de um pórtico plano, a bi dimensionalidade é mantida e as relações (2.2) e (2.3) que definem os valores de seno e cosseno do ângulo α (mesmo ângulo, mas agora renomeado para evitar confusão com a rotação) se mantêm válidas.

Quanto ao vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u} , há uma pequena alteração devido ao aumento do número de graus de liberdade como citado anteriormente. Logo, no sistema global de coordenadas, o vetor \mathbf{u} para elementos de pórticos planos é:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

No qual u_i , v_i e θ_i , com $i = 1, 2$, são os deslocamentos horizontais, verticais e rotações, respectivamente. De maneira similar a (2.5), há uma relação entre os deslocamentos nos sistemas global e local de coordenadas, dada por:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} u_{L1} \\ v_{L1} \\ \theta_{L1} \\ u_{L2} \\ v_{L2} \\ \theta_{L2} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

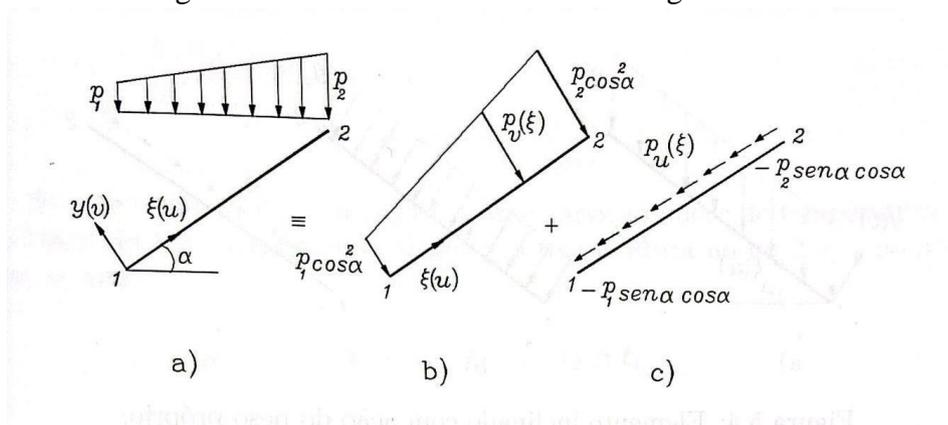
onde \mathbf{R} é a matriz de rotação representada, nesse caso, por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Uma outra diferença interessante na formulação do elemento finito de pórtico em comparação ao de treliça é o vetor de forças externas. Nas treliças, há apenas carregamentos concentrados nos nós, ou seja, o vetor é simplesmente as forças nodais. Para pórticos, há a possibilidade de cargas distribuídas ao longo dos elementos e momentos atuantes nos nós.

Conforme a formulação de Assan (1999), para obter-se um vetor de cargas nodais equivalentes, supõe-se o elemento finito inclinado de um ângulo α com a direção horizontal, solicitado por uma carga vertical linearmente variável, conforme a Figura 14:

Figura 14 – Elemento inclinado com carga variável.



Fonte: Assan (1999).

O carregamento da Figura 14a pode ser decomposto em uma carga perpendicular ao elemento finito, como na Figura 14b e outra tangente ao mesmo, conforme Figura 14c. Dessa maneira, obtém-se:

$$\begin{aligned} p_u(\xi) &= -p_1(1-\xi)\sin\alpha\cos\alpha - p_2\xi\sin\alpha\cos\alpha \\ p_v(\xi) &= -p_1(1-\xi)\cos^2\alpha - p_2\xi\cos^2\alpha \end{aligned} \quad (3.4)$$

tal que ξ é a coordenada adimensional dada por x/L . Os sinais negativos se devem ao sentido contrário das cargas p_u e p_v em relação aos positivos dos eixos ξ e y , respectivamente.

É interessante escrever as funções definidas em (3.4) de forma matricial para ser utilizada futuramente. Portanto:

$$\begin{Bmatrix} p_u(\xi) \\ p_v(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-\xi)\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha & -\xi\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha \\ -(1-\xi)\text{cos}^2\alpha & -\xi\text{cos}^2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{Fq} \quad (3.5)$$

Na sequência, Assan utiliza de dois conceitos já apresentados no presente trabalho: as funções de forma (aproximadoras) e o Princípio da Energia Total Estacionária, ou seja, o equilíbrio de uma estrutura se dá quando a sua energia total é estacionária (mínima) para os parâmetros que descrevem a energia da estrutura (neste caso, dos deslocamentos dos nós).

Assim como na formulação para treliças, a escolha das funções de forma e as aproximações de $u(x_L)$, $v(x_L)$ e $\theta(x_L)$ não são arbitrárias. Como os deslocamentos transversais v e as rotações $\theta = dv/dx$ não são independentes, a componente v do deslocamento em qualquer ponto do elemento finito depende de quatro componentes de deslocamento: v_1 e θ_1 no nó 1 e v_2 e θ_2 no nó 2.

Com ξ sendo a coordenada adimensional dada por x/L , Assan propõe as seguintes funções de forma:

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \phi_2(\xi) &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L \\ \phi_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ \phi_4(\xi) &= (\xi^3 - \xi^2)L \end{aligned} \quad (3.6)$$

tal que ξ pertence ao intervalo $[0, 1]$.

Com as funções de forma definidas, obtém-se os campos de deslocamento (u e v):

$$\begin{aligned} u(\xi) &= u_1(1 - \xi) + u_2\xi \\ v(\xi) &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_1 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L\theta_1 + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_2 + (\xi^3 - \xi^2)L\theta_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

tal que u é o mesmo do elemento de treliça.

De maneira análoga ao observado para os elementos finitos de treliça, quando o deslocamento aproximado pela função de forma é escrito como apresentado acima e avaliado sobre a coordenada de um nó, resulta o próprio parâmetro incógnito e, portanto, este tem significado de deslocamento. Vale ressaltar que para obter os valores de θ_1 e θ_2 , deve-se calcular a primeira derivada da função $v(\xi)$, ou seja $v'(\xi)$.

Por fim, obtidos os deslocamentos, é interessante definir a matriz ϕ , pois esta será utilizada para obtenção do vetor de forças equivalentes e na deduções que seguem.

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L & 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & (\xi^3 - \xi^2)L \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Após isso, Assan deduz o vetor de cargas nodais equivalentes ao utilizar a energia potencial total do elemento (Π). Sabendo que o trabalho virtual realizado pelas forças volumétricas para este caso é nulo, a expressão de Π é similar a apresentada em (2.9) e vetor pode ser descrito por:

$$\mathbf{F}_{eq} = \int_S \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{p} dS \quad (3.9)$$

Portanto, ao substituirmos a matriz $\boldsymbol{\phi}$ definida em (3.8) e o vetor \mathbf{p} dado pela igualdade (3.5) na expressão (3.9) e integrarmos, obtém-se o vetor de cargas nodais equivalentes:

$$\mathbf{F}_{eq} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \left(p_1 + \frac{1}{2} p_2 \right) L \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha \\ \frac{1}{20} (7 p_1 + 3 p_2) L \text{cos}^2 \alpha \\ \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{3} p_2 \right) L \text{cos}^2 \alpha \\ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} p_1 + p_2 \right) L \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha \\ \frac{1}{20} (3 p_1 + 7 p_2) L \text{cos}^2 \alpha \\ - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{2} p_2 \right) L \text{cos}^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Quanto aos carregamentos nodais concentrados, é válida a ideia utilizada em (2.7), mas deve ser adaptada ao número de graus de liberdade considerados em um elemento de pórtico e aos momentos aplicados:

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Logo, o vetor de forças final, que contém todos os carregamentos existentes no elemento finito será a soma de ambos os vetores apresentados em (3.10) e (3.11).

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F}_{eq} + \mathbf{F}_N \quad (3.12)$$

Para determinar a matriz de rigidez do elemento finito, deve-se levar em conta as tensões e deformações do mesmo. No caso de pórticos planos, há duas parcelas: uma relativa ao esforço axial e outra devido ao momento fletor. A relações entre os esforços e os deslocamentos são:

$$N = \sigma A = E\varepsilon A = EA \frac{du}{dx} \quad (3.13)$$

$$M = EI\chi = -EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.14)$$

tal que E é o módulo de elasticidade, A é a área da seção transversal do elemento, ε é a deformação longitudinal, χ é a curvatura do eixo da barra no ponto em análise e I é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo neutro.

Os esforços N e M têm seus sentidos positivos indicados na Figura 15:

Figura 15 – Convenção de sinais para os esforços internos.



Fonte: Adaptado de Assan (1999).

Matricialmente, as igualdades (3.13) e (3.14) são escritas como:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

onde as deformações associadas ao elemento finito para pórtico plano são definidas por Assan (1999):

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{1}{L} \frac{du}{d\xi} \quad (3.16)$$

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{L^2} \frac{d^2v}{d\xi^2} \quad (3.17)$$

Na sequência, pode-se relacionar essas deformações às incógnitas nodais definidas em (3.1):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & (12\xi-6)/L^2 & (6\xi-4)/L & 0 & (6-12\xi)/L^2 & (6\xi-2)/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Assan (1999) define através da energia potencial total do elemento (Π) que a matriz de rigidez do elemento finito é dada por:

$$\mathbf{K}_L = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (3.19)$$

na qual \mathbf{B} é obtida ao derivar duas vezes a igualdade (3.7) e \mathbf{D} é a matriz que contém os parâmetros elásticos do material.

Logo, ao substituir \mathbf{B} e \mathbf{D} na igualdade (3.19), obtém-se:

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Da mesma maneira que fora citado no capítulo de treliças planas, a matriz de rigidez de cada elemento deve ser rotacionada para o sistema global de coordenadas. Sendo assim:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_L \cdot \mathbf{R}^T \quad (3.21)$$

E, portanto, a matriz de rigidez global da estrutura será o somatório de n matrizes de rigidez globais de cada elemento, respeitando a correspondência de graus de liberdade, da forma:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{K}_G^e \quad (3.22)$$

onde e é o elemento finito e n é o número total de elementos da treliça.

Ainda, caso se deseje conhecer as reações dos apoios do pórtico, a relação (2.26) se mantém válida.

Por fim, Assan (1999) demonstra, através do teorema de Castigliano, que os termos de cada coluna da matriz de rigidez representam os esforços que aparecem nos nós de cada elemento ao arbitrar um deslocamento unitário na direção do grau de liberdade de mesmo número da coluna da matriz, mantendo os outros graus de liberdade impedidos. Logo:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= EA \left(\frac{u_1 - u_2}{L} \right) \\
 V_1 &= EI \left(\frac{12}{L^3} v_1 + \frac{6}{L^2} \theta_1 - \frac{12}{L^3} v_2 + \frac{6}{L^2} \theta_2 \right) \\
 M_1 &= EI \left(\frac{6}{L^2} v_1 + \frac{4}{L} \theta_1 - \frac{6}{L^2} v_2 + \frac{2}{L} \theta_2 \right) \\
 N_2 &= -EA \left(\frac{u_1 - u_2}{L} \right) \\
 V_2 &= EI \left(-\frac{12}{L^3} v_1 - \frac{6}{L^2} \theta_1 + \frac{12}{L^3} v_2 - \frac{6}{L^2} \theta_2 \right) \\
 M_2 &= EI \left(\frac{6}{L^2} v_1 + \frac{2}{L} \theta_1 - \frac{6}{L^2} v_2 + \frac{4}{L} \theta_2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

3.3 METODOLOGIA

Da mesma forma como realizado no capítulo anterior, elaborou-se o código em Python, na plataforma computacional web Jupyter Notebook, para a implementação da análise linear estática de vigas e pórticos planos compostos por elementos de viga 2D.

Analogamente, o usuário deve fornecer ao programa todas as informações requisitadas (os dados de entrada) sobre a estrutura em questão. De forma sequencial, insere-se:

- Número total de nós da estrutura;
- Número total de elementos de barra da estrutura;
- Posição dos nós em coordenadas X e Y;
- Conectividade dos elementos (incidência);
- Área de seção transversal A de cada elemento;
- Módulo de elasticidade E de cada elemento;
- Momento de inércia I de cada elemento;
- Forças atuantes (concentradas e distribuídas) na estrutura;
- Momentos aplicados na estrutura;
- Número de nós restringidos e as próprias restrições de deslocamento;

Na sequência, o programa processa os dados de entrada e calcula as matrizes de rigidez de cada elemento K_G (Equação (3.21)). Com essas matrizes, é possível montar a matriz de rigidez global do sistema K (Equação (3.22)), conforme o seguinte algoritmo:

Etapa 1 – Dados do modelo (coordenadas, conectividade dos elementos, propriedades do material, condições de contorno e de carregamento):

- Define número de nós ($n_{\text{nós}}$) e número de elementos (n_{el});
- Calcula o número de graus de liberdade (GDL): $GDL = 3 * n_{\text{nos}}$;
- $K = 0$ – Matriz da estrutura, tamanho $[GDL, GDL]$.

Etapa 2 – Início das iterações:

Percorre:

- Todos os elementos (de 1 a n_{el});
- Nós locais de cada elemento (1 e 2).

Etapa 3 – Nó local 1:

- Percorre os graus de liberdade do nó local 1 ($i = 1, 2, 3$).

Calcula:

- Número do nó local 1: $\alpha = \text{inc}(\text{e}, \text{nó local 1})$;
- Número do grau de liberdade no sistema global: $k = 3 * \alpha + i$;
- Número do grau de liberdade no sistema local: $GDL1 = 3 * (\text{nó local 1} - 1) + i$;

Etapa 4 – Nó local 2:

- Percorre os graus de liberdade do nó local 2 ($j = 1, 2, 3$).

Calcula:

- Número do nó local 1: $\beta = \text{inc}(\text{e}, \text{nó local 2})$;
- Número do grau de liberdade no sistema global: $l = 3 * \beta + j$;
- Número do grau de liberdade no sistema local: $GDL2 = 3 * (\text{nó local 2} - 1) + j$;

Etapa 5 – Matriz de rigidez global:

- Calcula matriz de rigidez global: $K[k, l] = K[k, l] + K_G[GDL1, GDL2]$.

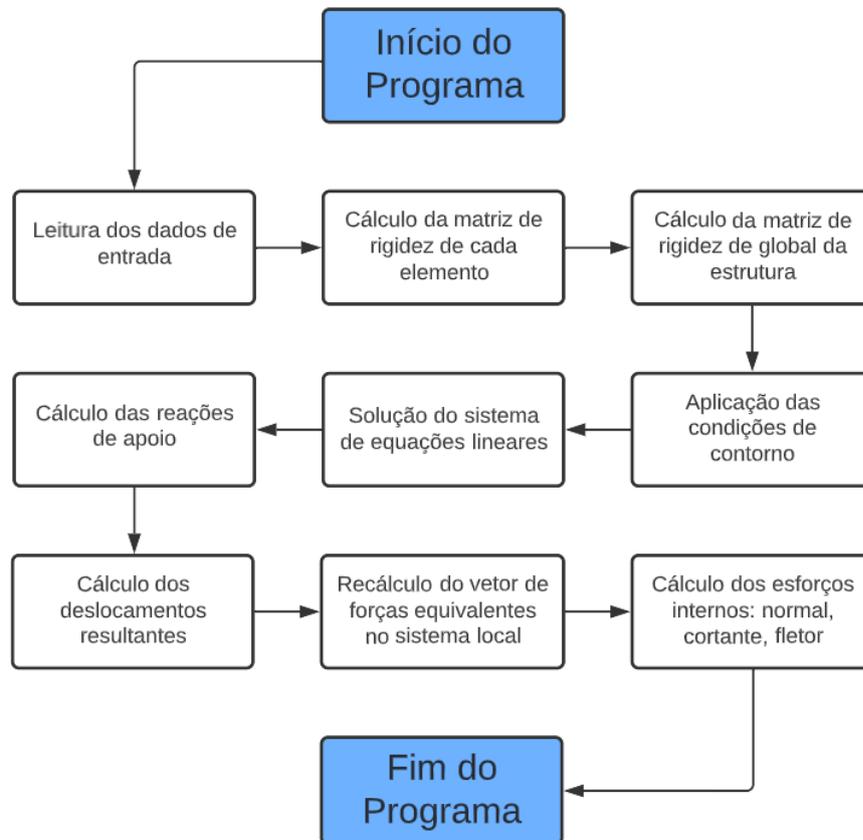
Perceba que o algoritmo é extremamente semelhante ao apresentado no capítulo anterior. A diferença principal se dá no número de graus de liberdade: enquanto para treliças há apenas 2, nos pórticos planos deve-se considerar a rotação juntamente aos deslocamentos verticais e horizontais. A função de incidência apresentada em (2.26) permanece válida.

Idem ao processo aplicado para treliças, o passo seguinte é a aplicação das condições de contorno pré-estabelecidas nos dados de entrada do problema, ou seja, a verificação das restrições. O programa percorre um laço condicional e confere se há restrições nas direções x e y em cada um dos nós, conforme entrada do usuário. Caso haja restrição, a matriz de rigidez é modificada, zeram-se as linhas e colunas para todos os graus de liberdade com deslocamento nodal igual à zero e atribui-se valor unitário para os valores da diagonal principal.

A operação resulta em um sistema de equações lineares (idem ao capítulo anterior) com uma matriz de rigidez não singular, ou seja, a inversa de \mathbf{K} existe. Uma vez obtida a solução desse sistema, o programa entrega como saída os valores dos deslocamentos nodais que compõe o vetor \mathbf{u} .

No pós-processamento, o programa calcula os esforços internos atuantes em cada um dos elementos em análise, conforme o conjunto de equações (3.23). Finalmente, o código calcula as reações nos apoios da estrutura (Equação (2.25)). A Figura 16 denota o fluxograma de montagem e funcionamento do código computacional, exposto no Apêndice B.

Figura 16 – Fluxograma de montagem do código.



Fonte: Autor (2022).

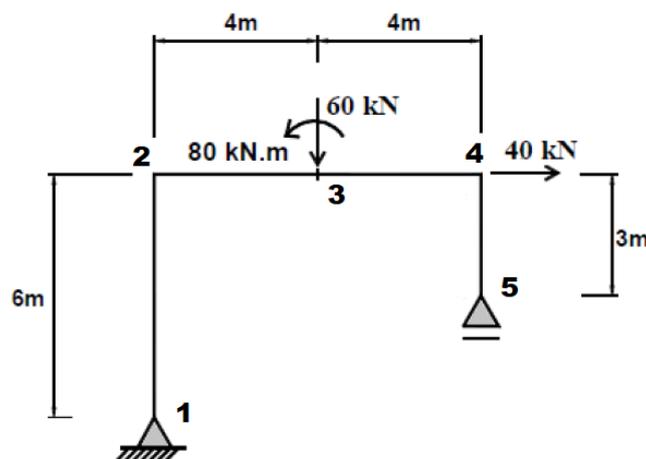
3.4 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

Com a finalidade de validar os resultados do programa elaborado, foram selecionados alguns exemplos de Farani (2021) e validados no programa FTOOL (MARTHA, 2018).

3.4.1 Exemplo 1

O pórtico representado na Figura 17 é composto por barras de perfil W310x24, de área de seção transversal $A = 3040\text{mm}^2$, momento de inércia $I = 42,8 \times 10^6 \text{mm}^4$ e módulo de elasticidade longitudinal $E = 200 \times 10^6 \text{kN/m}^2$. Está sujeito a um carregamento concentrado e vertical de intensidade 60 kN e um momento de 80 kN.m no nó 3, e um carregamento concentrado horizontal de intensidade 40 kN no nó 4. As dimensões estão dispostas na figura e os apoios são dados nos nós 1 (pino) e 5 (rolete).

Figura 17 – Esquema do pórtico para validação, Exemplo 1.



Fonte: Adaptado de Farani (2021).

A partir da Figura 17, elaborou-se a Tabela 5 para demonstrar a configuração da treliça, idem aos exemplos anteriores.

Tabela 5 – Configuração do pórtico, Exemplo 1.

Coordenadas nodais			Conexão dos elementos		
Nó	X(m)	Y(m)	Elemento	Nó i	Nó j
1	0	0	1	1	2
2	0	6	2	2	3
3	4	6	3	3	4
4	8	6	4	4	5
5	8	3			

Fonte: Adaptado de Farani (2021).

Com os dados acima, obtém-se todos os valores de deslocamentos, esforços normais, cortantes, momentos fletores e reações nos apoios. A Tabela 6 contém um comparativo entre os resultados obtidos no programa de elementos finitos elaborado e os obtidos no programa FTOOL (MARTHA, 2018) para os deslocamentos nodais, esforços normais e reações de apoio.

Tabela 6 – Comparativo dos resultados obtidos, Exemplo 1.

Esforço Normal (kN)				Reações nos apoios (kN)				
Barra	Programa MEF	FTOOL	Variação	Nó	Reação	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	-10,00	-10,00	0,000%	1	x	-40,00	-40,00	0,000%
2	40,00	40,00	0,000%		y	10,00	10,00	0,000%
3	40,00	40,00	0,000%	5	x	50,00	50,00	0,000%
4	-50,00	-50,00	0,000%		y	0,00	0,00	0,000%

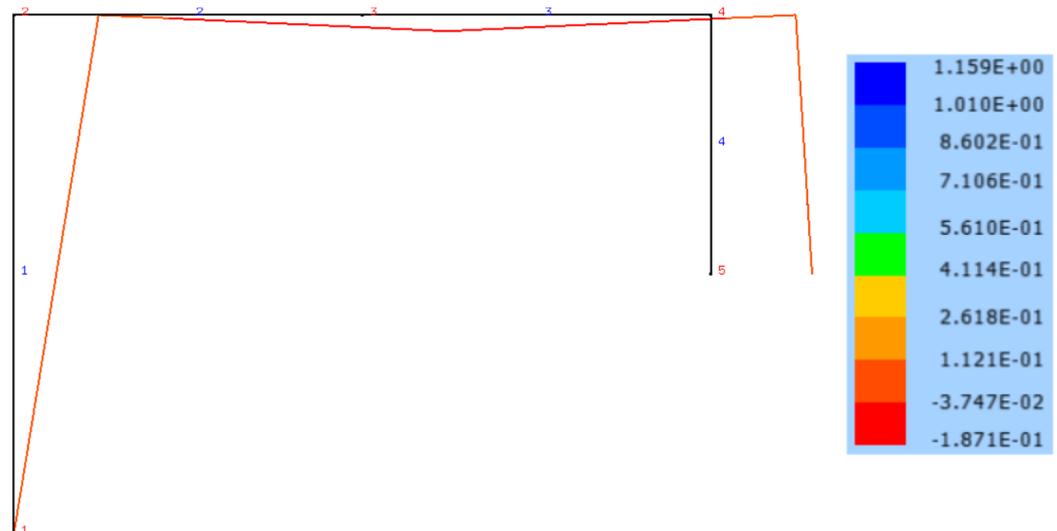
Esforço Cortante(kN)				Deslocamentos nos nós (m)				
Barra	Programa MEF	FTOOL	Variação	Nó	Desloc.	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	40,00	40,00	0,000%	1	u	0,00000000	0,00000000	0,000%
2	10,00	10,00	0,000%		v	0,00000000	0,00000000	0,000%
3	-50,00	-50,00	0,000%		θ (rad)	-0,19004966	-0,19000000	0,026%
4	0,00	0,00	0,000%	2	u	0,97207364	0,97210000	0,003%
					v	-0,00009864	-0,00009868	0,041%
					θ (rad)	-0,10593751	-0,10590000	0,035%
3	240,00	240,00	0,000%	3	u	0,97233678	0,97230000	0,004%
					v	-0,18708859	-0,18710000	0,006%
2	280,00	280,00	0,000%	4	θ (rad)	0,01555782	0,01556000	0,014%
					u	0,97259995	0,97260000	0,000%
3	200,00	200,00	0,000%	5	v	-0,00024671	-0,00024670	0,004%
					θ (rad)	0,06228679	0,06229000	0,005%
3	0,00	0,00	0,000%	5	u	1,15946033	1,15900000	0,040%
					v	0,00000000	0,00000000	0,000%
3	0,00	0,00	0,000%	θ (rad)	0,06228679	0,06229000	0,005%	

Momento Fletor Máximo (kN.m)				
Barra	Nó	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	1	0,00	0,00	0,000%
	2	240,00	240,00	0,000%
2	2	240,00	240,00	0,000%
	3	280,00	280,00	0,000%
3	3	200,00	200,00	0,000%
	4	0,00	0,00	0,000%
3	4	0,00	0,00	0,000%
	5	0,00	0,00	0,000%

Fonte: Autor (2022).

Idem ao exemplos anteriores, a Figura 18 apresenta os deslocamentos nodais (verticais e horizontais, dados em m e rotação dada em rad) da estrutura, visualizados novamente com o AcadView (PACCOLA; CODA, 2005). Neste caso não foi necessário ampliar a deformada e estão indicados o números dos nós e elementos que compõe o pórtico em análise.

Figura 18 – Configuração deformada do pórtico, Exemplo 1.



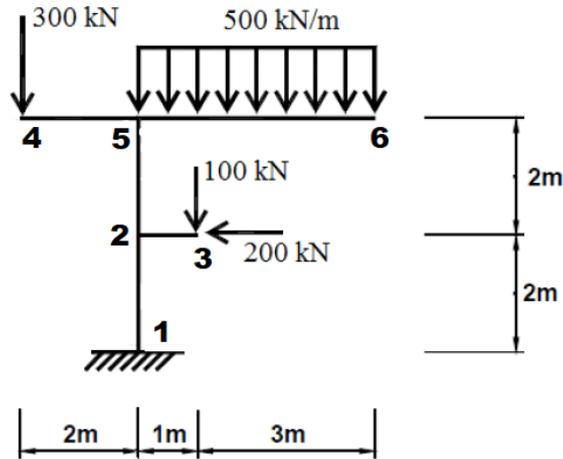
Fonte: Autor (2022).

Assim como no capítulo anterior, pode-se observar que o programa desenvolvido possui diferenças ínfimas de resultado quando comparado a Farani (2021) e os resultados do programa FTOOL (MARTHA, 2018). Logo, devido à similaridade do método aplicado por Farani e o método utilizado na elaboração do programa do presente trabalho, reafirma-se que o algoritmo está correto e pode ser utilizado para os cálculos desejados.

3.4.2 Exemplo 2

O pórtico representado na Figura 19 é composto por barras de perfil W410x85, de área de seção transversal $A = 10800\text{mm}^2$, momento de inércia $I = 315 \times 10^6 \text{mm}^4$ e módulo de elasticidade longitudinal $E = 200 \times 10^6 \text{kN/m}^2$. Ao nó 3, estão aplicadas duas forças concentradas, sendo uma vertical e de intensidade 100 kN e outra horizontal de intensidade 200 kN. Ao nó 4, está aplicada uma força concentrada, vertical e de intensidade 300 kN. Por fim, ao elemento 5, composto pelos nós 5 e 6, está aplicado um carregamento distribuído, vertical e de intensidade 500 kN/m. As dimensões estão dispostas nas figuras e o apoio se dá no nó 1 (engaste).

Figura 19 – Esquema do pórtico para validação, Exemplo 1.



Fonte: Adaptado de Farani (2021).

A partir da Figura 19, elaborou-se a Tabela 7 para demonstrar a configuração da treliça, idem aos exemplos anteriores.

Tabela 7 – Configuração do pórtico, Exemplo 2.

Coordenadas nodais			Conexão dos elementos		
Nó	X(m)	Y(m)	Elemento	Nó i	Nó j
1	0	0	1	1	2
2	0	2	2	2	3
3	1	2	3	2	5
4	-2	4	4	4	5
5	0	4	5	5	6
6	4	4			

Fonte: Adaptado de Farani (2021).

Com os dados acima, obtém-se todos os valores de deslocamentos, esforços normais, cortantes, momentos fletores e reações nos apoios. A Tabela 8 contém um comparativo entre os resultados obtidos no programa de elementos finitos elaborado e os obtidos no programa FTOOL para os deslocamentos nodais, esforços normais e reações de apoio.

Tabela 8 – Comparativo dos resultados obtidos, Exemplo 2.

Esforço Normal (kN)			
Barra	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	-2400,00	-2400,00	0,000%
2	-200,00	-200,00	0,000%
3	-2300,00	-2300,00	0,000%
4	0,00	0,00	0,000%
5	0,00	0,00	0,000%

Esforço Cortante(kN)			
Barra	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	-200,00	-200,00	0,000%
2	100,00	100,00	0,000%
3	0,00	0,00	0,000%
4	-300,00	-300,00	0,000%
5	2000,00	2000,00	0,000%

Momento Fletor Máximo (kN.m)				
Barra	Nó	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	1	-3100,00	-3100,00	0,000%
	2	-3500,00	-3500,00	0,000%
2	2	-100,00	-100,00	0,000%
	3	0,00	0,00	0,000%
3	3	-3400,00	-3400,00	0,000%
	4	-3400,00	-3400,00	0,000%
4	4	0,00	0,00	0,000%
	5	-600,00	-600,00	0,000%
5	5	-4000,00	-4000,00	0,000%
	6	0,00	0,00	0,000%

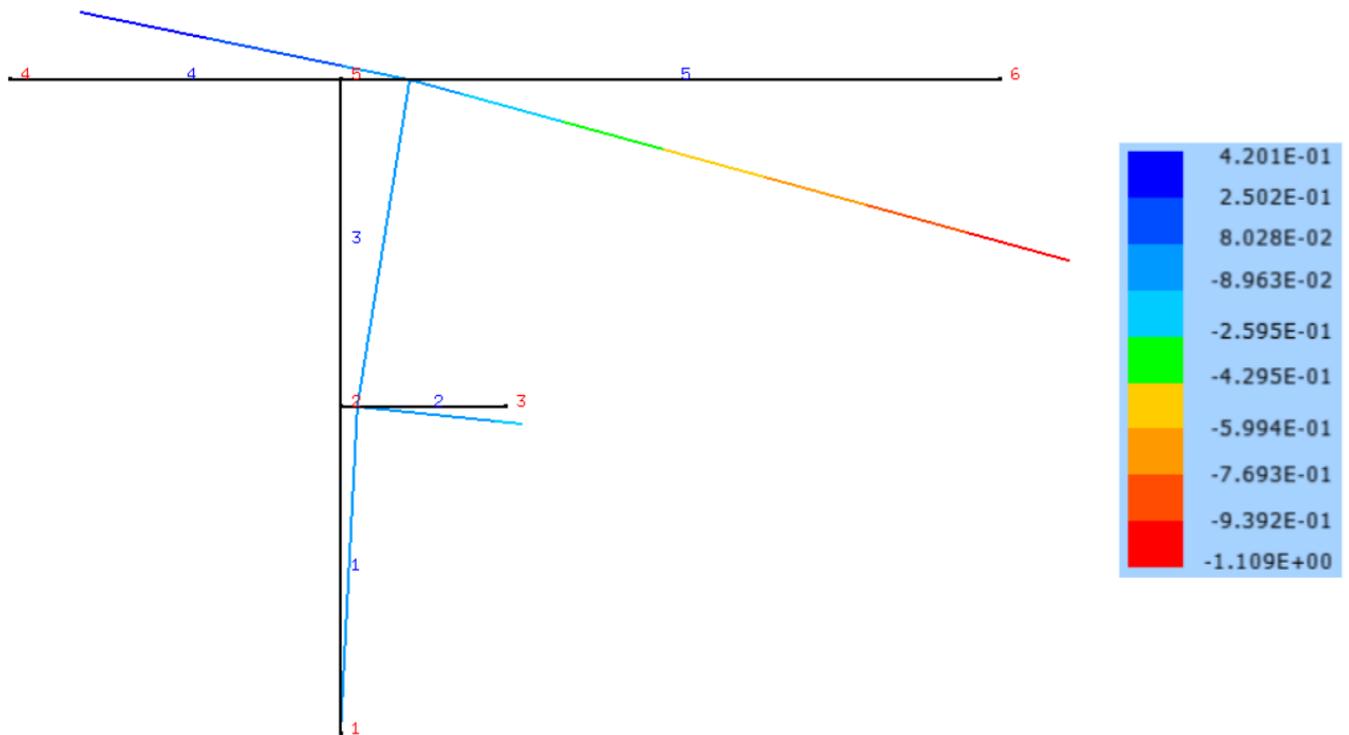
Deslocamentos nos nós (m)				
Nó	Desloc.	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	<i>u</i>	0,00000000	0,00000000	0,000%
	<i>v</i>	0,00000000	0,00000000	0,000%
	<i>θ (rad)</i>	0,00000000	0,00000000	0,000%
2	<i>u</i>	0,10264550	0,10260000	0,044%
	<i>v</i>	-0,00222222	-0,00222200	0,010%
	<i>θ (rad)</i>	-0,10476190	-0,10480000	0,036%
3	<i>u</i>	0,10255291	0,10260000	0,046%
	<i>v</i>	-0,10751323	-0,10750000	0,012%
	<i>θ (rad)</i>	0,10555556	0,10560000	0,042%
4	<i>u</i>	0,42010582	0,42010000	0,001%
	<i>v</i>	0,40834656	0,40830000	0,011%
	<i>θ (rad)</i>	-0,20317460	-0,20320000	0,012%
5	<i>u</i>	0,42010582	0,42010000	0,001%
	<i>v</i>	-0,00435185	-0,00435200	0,003%
	<i>θ (rad)</i>	-0,21269841	-0,21270000	0,001%
6	<i>u</i>	0,42010582	0,42010000	0,001%
	<i>v</i>	-1,10911376	-1,10900000	0,010%
	<i>θ (rad)</i>	-0,29734500	-0,29740000	0,018%

Reações nos apoios (kN)				
Nó	Reação	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	<i>x</i>	200,00	200,00	0,000%
	<i>y</i>	2400,00	2400,00	0,000%
	<i>θ (kN.m)</i>	3100,00	3100,00	0,000%

Fonte: Autor (2022).

Idem ao exemplos anteriores, a Figura 20 apresenta os deslocamentos nodais (verticais e horizontais, dados em m e rotação dada em rad) da estrutura, visualizados novamente com o AcadView (PACCOLA; CODA, 2005). Neste caso não foi necessário ampliar a deformada e estão indicados o números dos nós e elementos que compõe o pórtico em análise.

Figura 20 – Configuração deformada do pórtico, Exemplo 2.



Fonte: Autor (2022).

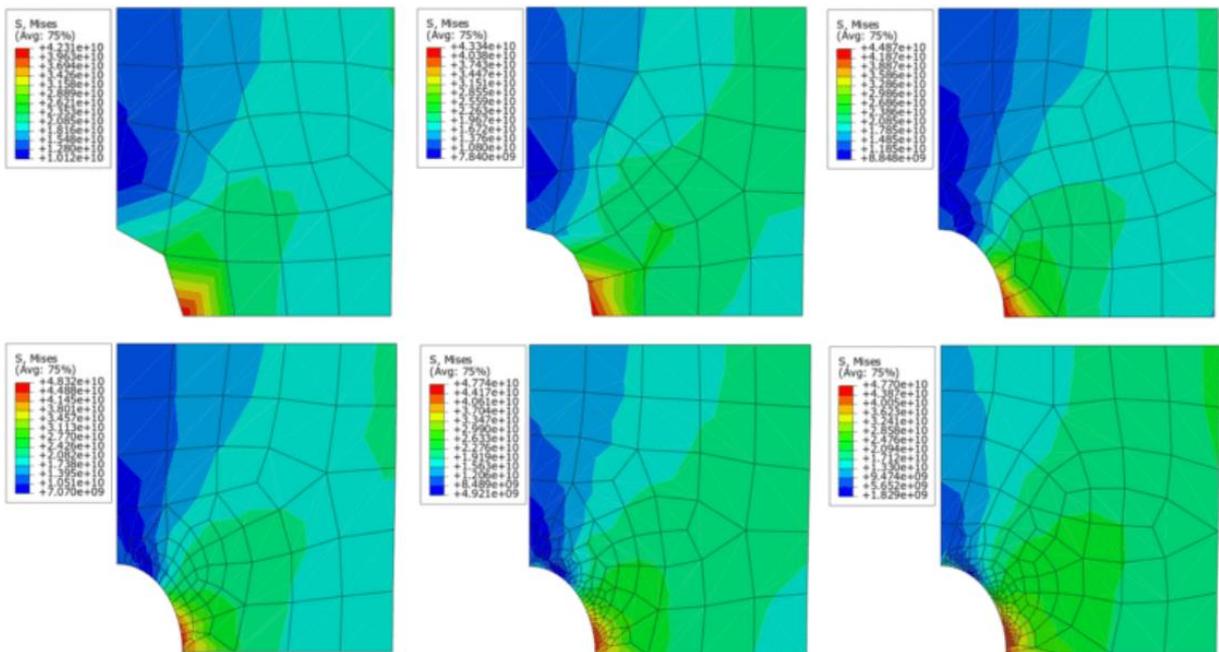
Assim como no exemplo anterior, pode-se observar que o programa desenvolvido possui diferenças ínfimas de resultado quando comparado a Farani (2021) e os resultados do programa FTOOL (MARTHA, 2018). Logo, devido à similaridade do método aplicado por Farani e o método utilizado na elaboração do programa do presente trabalho, reafirma-se que o algoritmo está correto e pode ser utilizado para os cálculos desejados.

4 EXEMPLOS E APLICAÇÕES

Neste capítulo, serão feitas aplicações do código e os resultados serão comparados aos modelos teóricos e ao programa FTOOL (MARTHA, 2018). Para tal, serão realizadas análises de convergência de malha a serem visualizadas através do programa AcadView (PACCOLA; CODA, 2005).

Este tipo de estudo é interessante para verificar o refinamento e a qualidade das malhas utilizadas para análise de estruturas. Na metodologia abordada neste trabalho, as malhas são formadas por elementos de barra de dois nós e, sendo assim, obtém-se uma maior precisão com um maior número de elementos. A Figura 21 ilustra a importância do refinamento dos resultados em elementos finitos.

Figura 21 – Refinamento de resultados em elementos finitos.



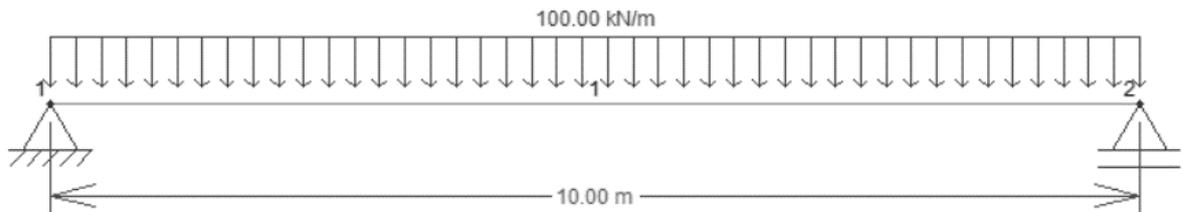
Fonte: Macedo (2020).

4.1 VIGA BI-APOIADA SOB CARREGAMENTO UNIFORME

Como primeira aplicação, fora escolhida uma viga bi-apoiada sob ação de um carregamento uniforme, vertical e de intensidade 100 kN/m, ilustrada na Figura 22. Para tal exemplo, foram utilizados os seguintes dados:

- Área da seção transversal (A) = $0,25\text{m} \times 0,40\text{m} = 0,10\text{m}^2$;
- Módulo de Elasticidade (E) = $200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$;
- Momento de Inércia (I) = $1,33 \times 10^{-3} \text{ m}^4$;
- Comprimento total da peça (L) = 10m .

Figura 22 – Viga bi-apoiada sob carregamento uniforme.



Fonte: Autor (2022).

Pelo modelo matemático da teoria de Euler-Bernoulli, a flecha (f) exata de uma viga bi-apoiada sob ação do carregamento descrito se dá pela equação retirada do material de Hibbeler (2010):

$$f = \frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI} \quad (4.1)$$

onde p , E , I e L são a carga uniformemente distribuída, o módulo de Elasticidade, o momento de inércia e o comprimento total da viga, respectivamente.

Sendo assim, com os dados acima, obtemos:

$$f = 0,04882812\text{m}$$

Ainda, a resposta exata, na teoria de Euler-Bernoulli, para a inclinação (θ) da seção transversal sobre um apoio sob a mesma situação de carregamento se dá pela equação, também retirada de Hibbeler (2010):

$$\theta = \frac{1}{24} \frac{pL^3}{EI} \quad (4.2)$$

onde, assim como na equação (4.1), p , E , I e L são a carga uniformemente distribuída, o módulo de Elasticidade, o momento de inércia e o comprimento total da viga, respectivamente.

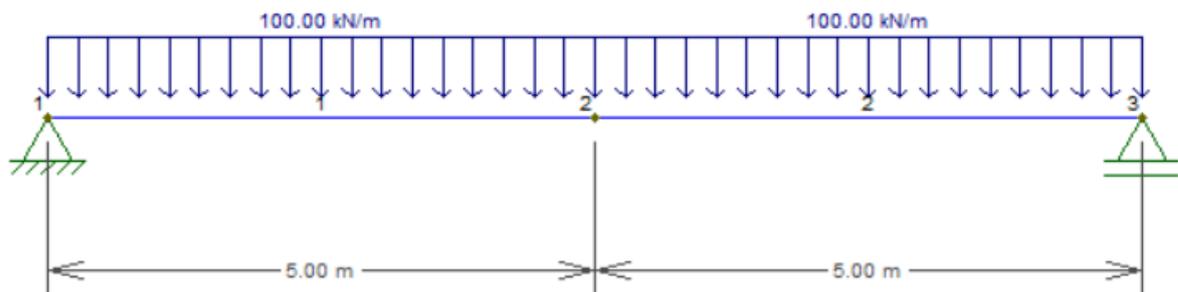
Sendo assim, com os dados acima, obtemos:

$$\theta = 0,0015625\text{rad}$$

Em seguida, estes dados foram inseridos no programa de elementos finitos elaborado e destes foram realizadas análises, nas quais foram aumentados gradualmente o número de nós e elementos a fim de melhorar a precisão dos resultados obtidos.

Na primeira análise, a viga foi dividida ao meio, ou seja, em 2 elementos de $L = 5\text{m}$. A Figura 23, elaborada no programa FTOOL, ilustra a configuração considerada, com 3 nós e 2 elementos.

Figura 23 – Viga bi-apoiada sob carregamento uniforme, primeira análise.



Fonte: Autor (2022).

Devido a formulação, o programa de elementos finitos calcula apenas o deslocamento vertical (v) e a inclinação (θ) de cada nó. Para os nós 1 e 3, v é igual a zero e θ atinge seu valor máximo, visto que são os nós restringidos (apoios). Logo, o deslocamento v do nó 2, ou seja, o meio do vão, é flecha (f) da viga. A Tabela 9 apresenta um comparativo entre os valores obtidos pelo MEF e os valores teóricos calculados para os deslocamentos nodais da estrutura em questão.

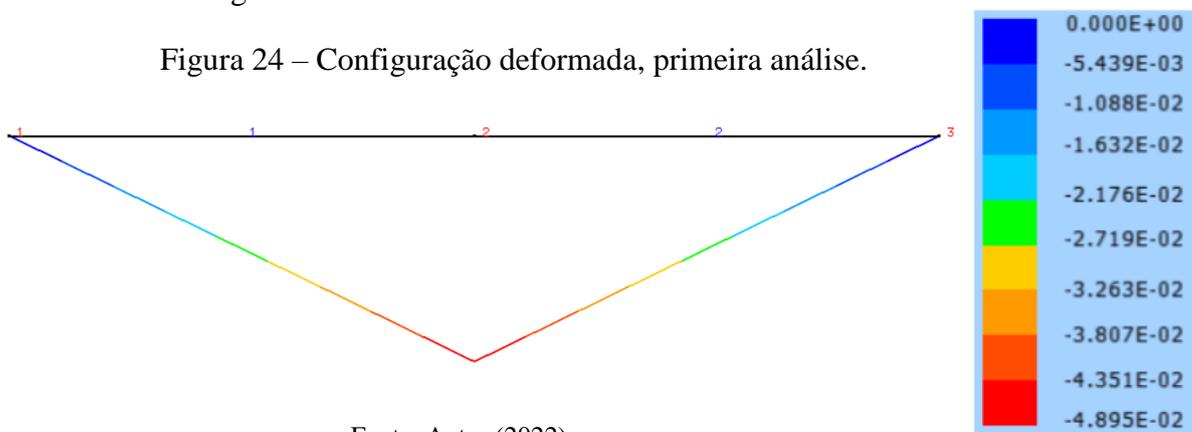
Tabela 9 – Comparativo dos resultados obtidos, primeira análise.

Deslocamentos nos nós (m)					
Nó	Desloc.	Programa MEF	Teórico	Variação	FTOOL
1	v	0,00000000	0,00000000	0,000%	0,00000000
	θ (rad)	-0,01562500	-0,01562500	0,000%	-0,01566000
2	v	-0,04882812	-0,04882812	0,000%	-0,04895000
	θ (rad)	0,00000000	0,00000000	0,000%	0,00000000
3	v	0,00000000	0,00000000	0,000%	0,00000000
	θ (rad)	-0,01562500	-0,01562500	0,000%	-0,01566000

Fonte: Autor (2022).

Pode-se observar que, pela variação de 0%, os valores obtidos são iguais aos teóricos e mais precisos que os obtidos pelo FTOOL, o que denota precisão no programa MEF para o cálculo da flecha. Sendo assim, para o que se propõe neste estudo, a análise feita é suficiente para caracterizar os deslocamentos da estrutura em questão.

A configuração deformada obtida pode ser visualizada com o AcadView (PACCOLA; CODA, 2005) na Figura 24. Para melhor visualização essa fora ampliada em 50 vezes e estão indicados o números dos nós e elementos que compõe a análise. Vale ressaltar que o programa AcadView é capaz de ilustrar somente os valores de deslocamentos fornecidos, ou seja, como nessa análise há apenas 3 valores, a configuração deformada assume forma de segmentos de reta.



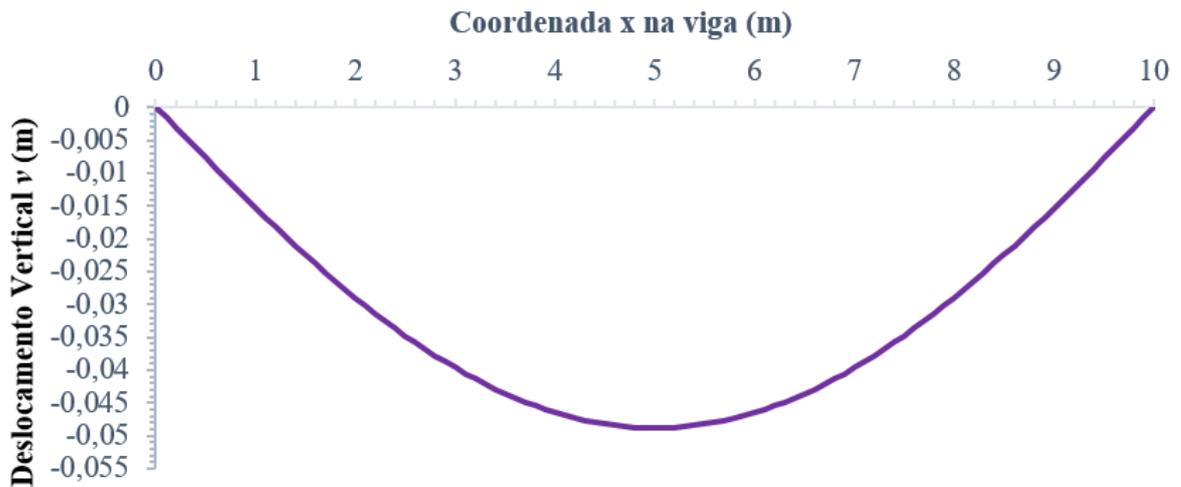
Conforme material de Hibbeler (2010) e pela equação da linha elástica, o deslocamento $v(x)$ de uma viga bi-apoiada sob carregamento uniformemente distribuído é dado por:

$$v(x) = \frac{-px}{24EI} (x^3 - 2Lx^2 + L^3) \quad (4.3)$$

onde, assim como na equação (4.3), p , E , I e L são o valor máximo da carga distribuída, o módulo de Elasticidade, o momento de inércia e o comprimento total da viga, respectivamente.

Para fins de comparação, a Figura 25 ilustra a configuração deformada teórica para a estrutura em questão, obtida com auxílio do programa Microsoft Excel.

Figura 25 – Configuração deformada teórica.



Fonte: Autor (2022).

Note que a configuração deformada ilustrada na Figura 24 é aproximada, pois contém apenas 3 valores de deslocamento. Para uma melhor representação, como na Figura 25, é necessário um refinamento maior da malha de elementos finitos, ou seja, deve-se considerar um número maior de nós e elementos. Entretanto, como comentado anteriormente, isso não diminui a precisão da primeira análise, pois há pequena variação entre o valor esperado do modelo teórico e o valor calculado pelo programa.

Na sequência, a viga foi dividida em 4, 10 e por último 100 elementos de igual comprimento para verificar a influência da malha na resposta. Assim como na primeira análise, o programa de elementos finitos calcula apenas o deslocamento vertical (v) e a inclinação (θ) de cada nó por não haver esforços no sentido horizontal. A Tabela 10 contém os valores calculados para o deslocamento do nó central da viga.

Tabela 10 – Valores de flecha calculados.

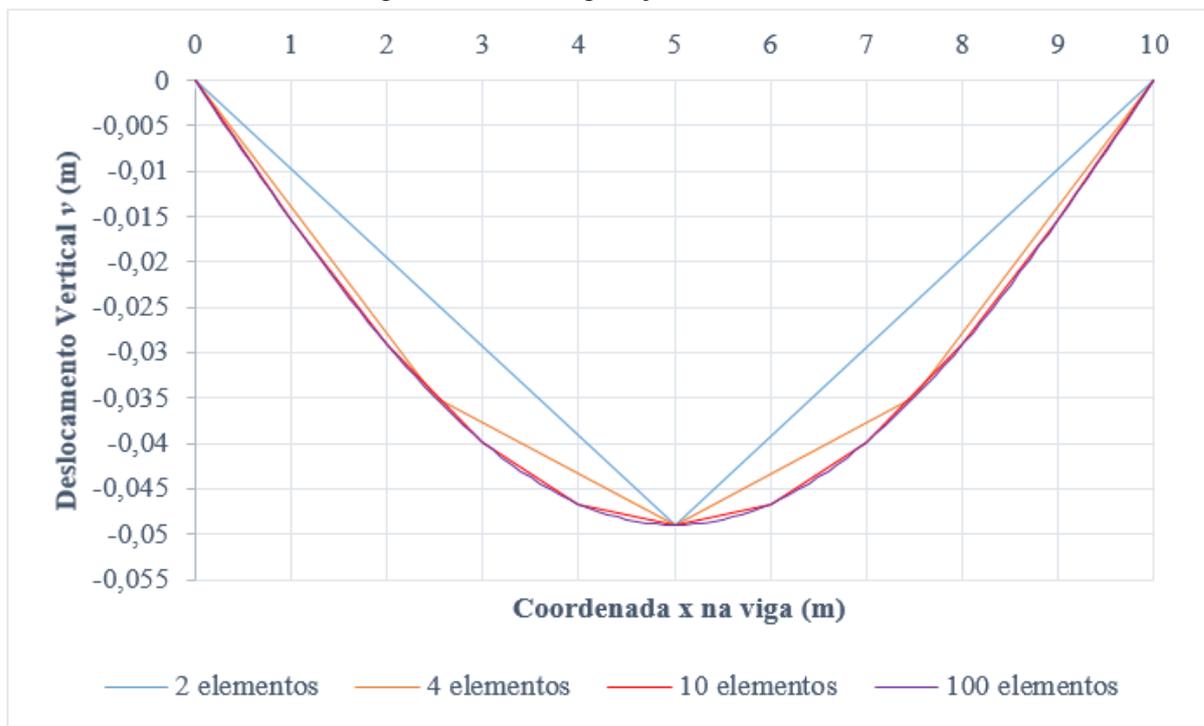
Deslocamentos nos nós (m)					
N Elementos	Desloc.	Programa MEF	Teórico	Variação	FTOOL
2	v	-0,04882812	-0,04882812	0,000%	-0,04895000
	θ (rad)	0,00000000	0,00000000	0,000%	0,00000000
4	v	-0,04882812	-0,04882812	0,000%	-0,04895000
	θ (rad)	0,00000000	0,00000000	0,000%	0,00000000
10	v	-0,04882812	-0,04882812	0,000%	-0,04895000
	θ (rad)	0,00000000	0,00000000	0,000%	0,00000000
100	v	-0,04882812	-0,04882812	0,000%	-0,04895000
	θ (rad)	0,00000000	0,00000000	0,000%	0,00000000

Fonte: Autor (2022).

Note que o valor da flecha calculado não se altera a depender do número de elementos utilizado, visto que o deslocamento do nó central considerado sempre será a flecha da viga e o modelo em elementos finitos utilizado é capaz de representar o valor teórico com apenas 2 elementos. Logo, o valor de flecha obtido no programa na segunda análise é exatamente igual ao obtido na primeira e, novamente, o programa obteve resultados mais precisos que o FTOOL.

Entretanto, com o aumento do número de elementos, é possível se aproximar da configuração deformada teórica, conforme a Figura 25. Sendo assim, na Figura 26, pode-se visualizar o gráfico plotado com auxílio do software Microsoft Excel que reúne todas as configurações deformadas obtidas para 2, 4, 10 e 100 elementos.

Figura 26 – Configurações deformadas.



Fonte: Autor (2022).

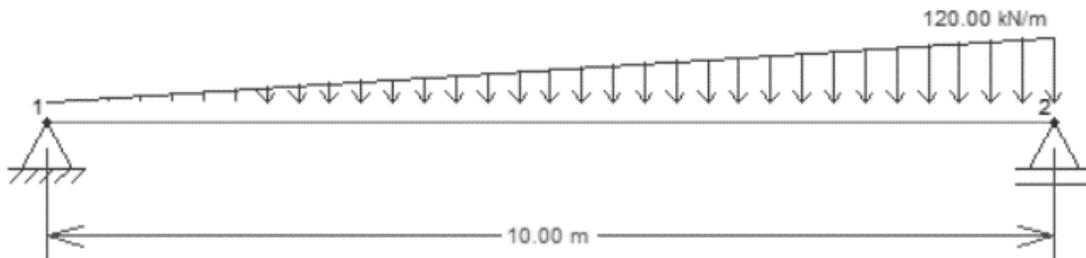
Agora, com uma maior quantidade de elementos, há uma suavização da curva, que se aproxima da deformada teórica esperada conforme a Figura 25 e que, de fato, o valor da flecha é exatamente o mesmo para todas, conforme abordado anteriormente na Tabela 10. Sendo assim, pode-se concluir que o método utilizado é satisfatório para o cálculo de deslocamentos mesmo com poucos elementos, porém é necessária uma melhor discretização da malha para obtenção de curvas de deslocamento mais suaves.

4.2 VIGA BI-APOIADA SOB CARREGAMENTO TRAPEZOIDAL

Como segunda aplicação, fora novamente escolhida uma viga bi-apoiada sob ação de um carregamento distribuído e vertical, mas agora de intensidade variável de 0 a 120 kN/m., ilustrada na Figura 27. Para tal exemplo, foram utilizados os seguintes dados (idem aos anteriores):

- Área da seção transversal (A) = 0,25m x 0,40m = 0,10m²;
- Módulo de Elasticidade (E) = 200 x 10⁶ kN/m²;
- Momento de Inércia (I) = 1,33 x 10⁻³ m⁴;
- Comprimento total da peça (L) = 10m.

Figura 27 – Viga bi-apoiada sob carregamento trapezoidal.



Fonte: Autor (2022).

Pelo modelo matemático da teoria de Euler-Bernoulli, a flecha (f) exata de uma viga bi-apoiada sob ação do carregamento descrito se dá pela equação retirada do material de Hibbeler (2010):

$$f = 0,00652 \frac{pL^4}{EI} \quad (4.4)$$

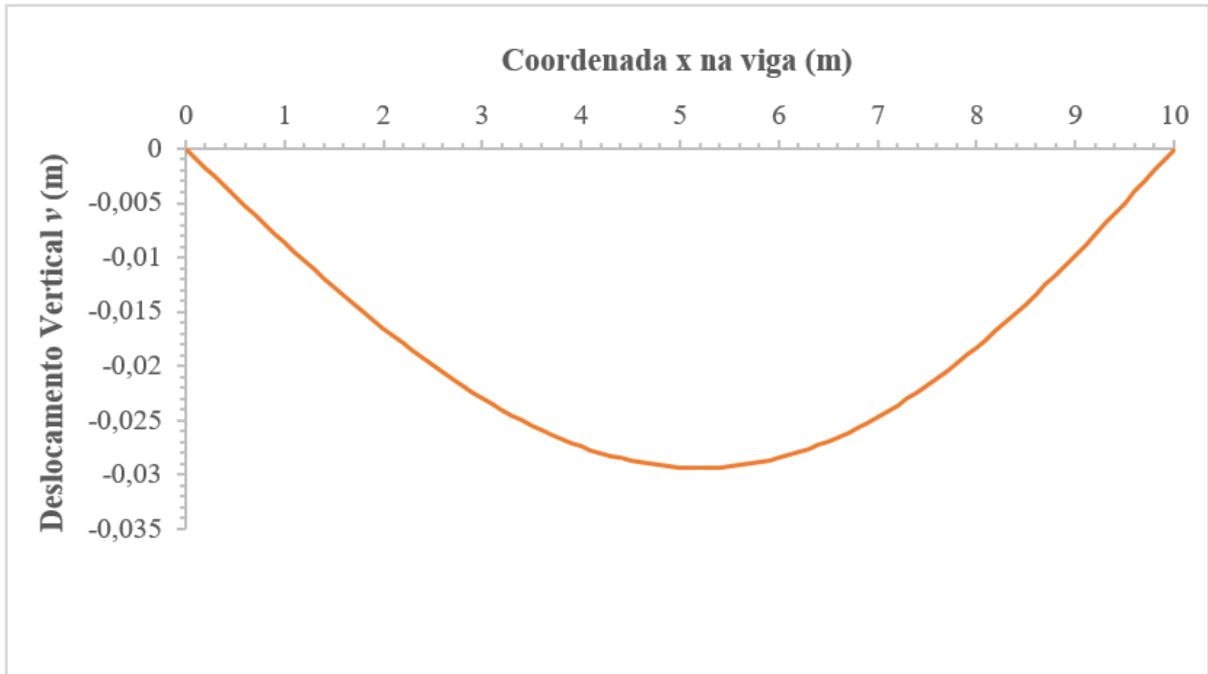
onde p , E , I e L são o valor máximo da carga distribuída, o módulo de Elasticidade, o momento de inércia e o comprimento total da viga, respectivamente.

Sendo assim, com os dados acima, obtemos:

$$f = 0,02934m$$

No exemplo anterior, a flecha ocorria no meio do vão devido à simetria do carregamento. Agora, f ocorre em $x = 0,5193L$ que, neste caso, é $x = 5,193m$. A Figura 28 ilustra a configuração deformada teórica para a estrutura em questão que, assim como a Figura 25, fora obtida com auxílio do programa Microsoft Excel.

Figura 28 – Configuração deformada teórica.



Fonte: Autor (2022).

Uma outra diferença está na inclinação dos apoios pois, como a carga é assimétrica, o carregamento recebido por cada um deles será diferente e, por consequência, suas inclinações também serão. A inclinação θ_1 remete ao apoio menos carregado e a inclinação θ_2 ao apoio mais carregado, conforme as equações, também retiradas de Hibbeler (2010):

$$\theta_1 = \frac{7}{360} \frac{pL^3}{EI}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{45} \frac{pL^3}{EI} \quad (4.5)$$

onde, assim como na equação (4.4), p , E , I e L são o valor máximo da carga distribuída, o módulo de Elasticidade, o momento de inércia e o comprimento total da viga, respectivamente.

Sendo assim, com os dados acima, obtemos:

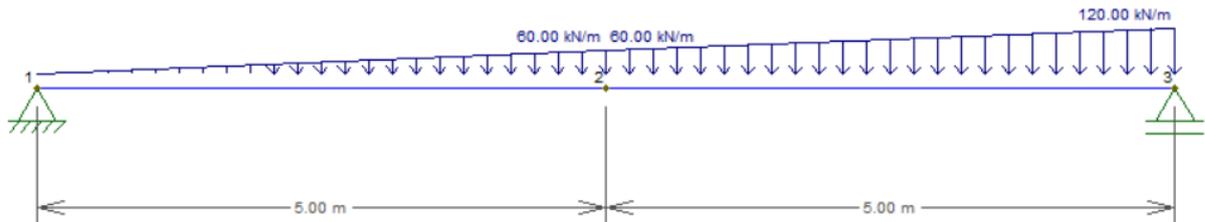
$$\theta_1 = 0,00875rad$$

$$\theta_2 = 0,01rad$$

Em seguida, o processo é idêntico ao exemplo anterior ao inserir os dados no programa de elementos finitos elaborado e realizar análises com aumento gradual de número de nós e elementos a fim de melhorar a precisão dos resultados obtidos.

Na primeira análise, assim como na aplicação anterior, a viga foi dividida ao meio, ou seja, em 2 elementos de $L = 5\text{ m}$. A Figura 29, elaborada no programa FTOOL, ilustra a configuração considerada com 3 nós e 2 elementos.

Figura 29 – Viga bi-apoiada sob carregamento trapezoidal, primeira análise.



Fonte: Autor (2022).

Devido a assimetria do carregamento, é esperado que a flecha, ou seja, o maior deslocamento vertical da viga, não esteja exatamente no ponto médio da mesma, como apontado anteriormente na Figura 28. No entanto, na configuração adotada na Figura 29, só é possível calcular v nos pontos em que x é igual a 0, 5m ou 10m.

Conforme Hibbeler (2010) e pela equação da linha elástica, o deslocamento $v(x)$ é:

$$v(x) = \frac{-px}{360EIL} (3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4) \quad (4.6)$$

onde, assim como na equação (4.4), p , E , I e L são o valor máximo da carga distribuída, o módulo de Elasticidade, o momento de inércia e o comprimento total da viga, respectivamente.

Com a equação (4.6), pode-se calcular o valor do deslocamento v para $x = 5\text{ m}$, a fim de comparar com o resultado obtido pelo programa de elementos finitos na Tabela 11.

$$v(x) = 0,029296875\text{ m}$$

Tabela 11 – Valores de deslocamento do nó central.

Deslocamentos nos nós (m)						
Nó	Coord.	Desloc.	Programa MEF	Teórico	Variação	FTOOL
Central	$x = 5\text{ m}$	v	-0,029296875	-0,029296875	0,000%	-0,02937000

Fonte: Autor (2022).

Note que a novamente há uma variação de 0% entre os valores obtidos e os teóricos, ou seja, não há problemas com a precisão de cálculo dos deslocamentos nodais com um carregamento trapezoidal aplicado na estrutura. Porém, para o caso da análise em questão (2 elementos), o programa não é capaz de obter a flecha da viga, pois esta ocorre em $x = 5,193\text{ m}$, o que torna necessário um maior refinamento na malha de elementos finitos utilizada.

Portanto, foi feita uma nova análise, na qual a viga foi dividida em 100 elementos de $L = 0,10\text{m}$. Dessa maneira, é possível calcular os valores de deslocamento para a coordenada $x = 5,20\text{m}$, o que deve apontar um resultado mais próximo da flecha teórica. A Tabela 12 compara os deslocamentos v dos nós 50, 51, 52 e 52 com valores exatos calculados pela equação (4.6) e os obtidos pelo software FTOOL.

Tabela 12 – Valores de deslocamento nodais.

Deslocamentos nos nós (m)						
Nó	Coord.	Desloc.	Programa MEF	Teórico	Variação	FTOOL
50	$x = 5,0\text{m}$	v	-0,02929688	-0,02929688	0,000%	-0,02937000
51	$x = 5,1\text{m}$	v	-0,02933747	-0,02933747	0,000%	-0,02941000
52	$x = 5,2\text{m}$	v	-0,02934977	-0,02934977	0,000%	-0,02942000
53	$x = 5,3\text{m}$	v	-0,02933361	-0,02933361	0,000%	-0,02941000

Fonte: Autor (2022).

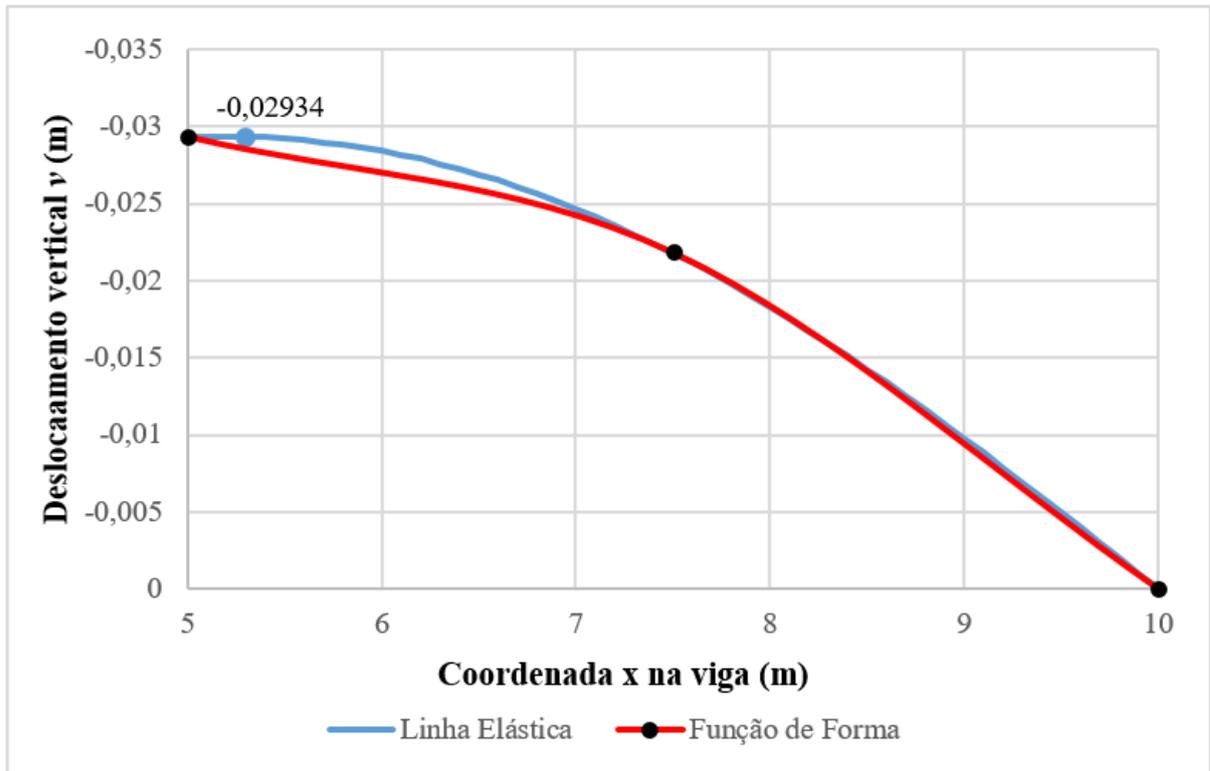
Essa necessidade de refinamento para obtenção de resultados consistentes está intrínseca à formulação de elementos finitos proposta para o problema de vigas. Enquanto a função de forma definida em (3.7) é de terceiro grau, a equação diferencial da linha elástica, definida como a configuração geométrica de deslocamento vertical dos pontos situados no eixo longitudinal de uma viga, é de quarto grau:

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = -p(x) \quad (4.7)$$

Na qual p , E , I e v são a carga distribuída ao longo do comprimento, o módulo de Elasticidade, o momento de inércia e o deslocamento vertical dos nós, respectivamente.

Sendo assim, as equações diferenciais resolvidas pelo método dos elementos finitos aplicado necessitam de uma função para descrever o deslocamento transversal com continuidade de derivadas mais alta do que a aproximação permite. Neste caso, como o carregamento em questão é descrito por uma função linear, necessita-se de uma função de quinto grau. No gráfico elaborado no software Microsoft Excel e exposto na Figura 30, é possível visualizar essa diferença.

Figura 30 – Comparativo entre curvas de deslocamento.



Fonte: Autor (2022).

O gráfico apresenta, em azul, a curva de deslocamentos exata, obtida ao aplicar a função definida em (4.5) no intervalo de $x = 5\text{m}$ a $x = 10\text{m}$ que contém a flecha teórica. Em vermelho, tem-se a curva de deslocamentos obtida ao interpolar os valores de deslocamento nodais calculados pelo programa de elementos finitos pela função de forma definida em (3.7) no mesmo intervalo. Ainda, estão destacados os três pontos de intersecção das curvas, que ocorrem nos nós ($x = 0$, $x = 5\text{m}$ e $x = 10\text{m}$) e a flecha exata f , que ocorre em $x = 5,193\text{m}$.

Como as curvas se encontram quando se avaliam os nós da estrutura, o programa não tem dificuldades em calcular os deslocamentos, mas há uma discrepância entre essas na região próxima à flecha. Sendo assim, com um maior refinamento da malha, ou seja, ao aumentar o número de nós, criam-se novos pontos no qual o programa é preciso, o que melhora a aproximação e possibilita calcular a flecha da viga.

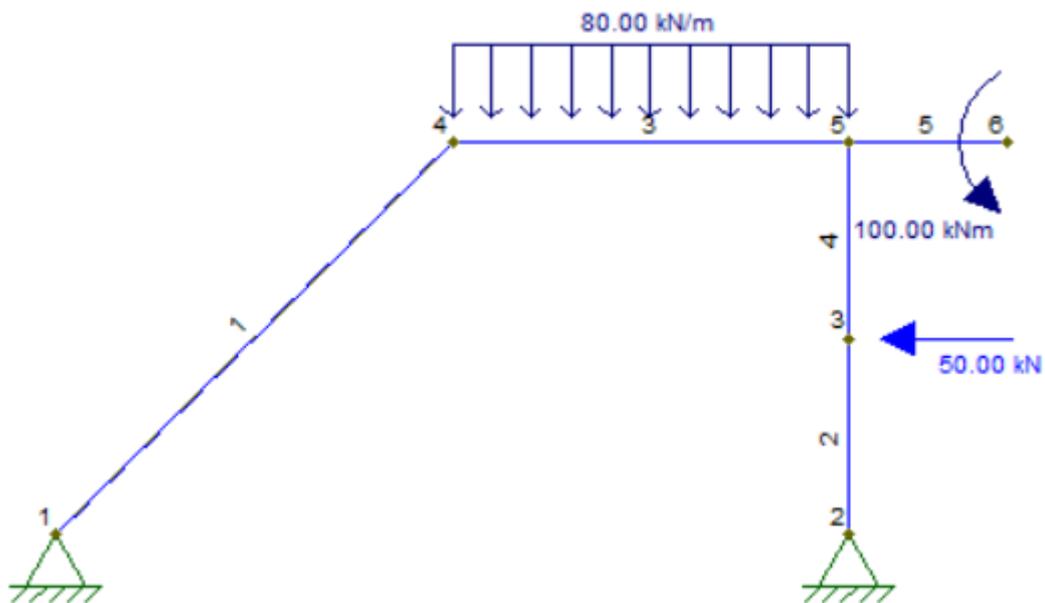
4.3 PÓRTICO HIPERESTÁTICO

Como última aplicação, foi escolhido um pórtico hiperestático sob ação de um carregamento uniforme, vertical e de intensidade 80 kN/m, de um momento aplicado de intensidade 100 kN.m e uma força concentrada, horizontal e de intensidade 50 kN. Composto por barras de tamanhos variados, suas dimensões estão dispostas na Figura 31, elaborada no FTOOL. Quanto às propriedades, tem-se:

- Área da seção transversal (A) = 0,30m x 0,30m = 0,09m²;
- Módulo de Elasticidade (E) = 200 x 10⁶ kN/m²;
- Momento de Inércia (I) = 6,75 x 10⁻³ m⁴;
- Nós considerados: 6 nós;

Figura 31 – Pórtico hiperestático.

- Elementos de barra considerados: 5 barras.



Fonte: Autor (2022).

A partir da aplicação do algoritmo neste exemplo, foram obtidos os esforços normais, cortantes e momentos fletores. A Tabela 13 dispõe estes resultados e os compara com os obtidos pelo programa de análise matricial FTOOL (MARTHA, 2018) para os nós da estrutura.

Tabela 13 – Valores de esforços internos obtidos.

Esforço Normal (kN)			
Nó	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	-159,5787	-159,5787	0,000%
2	-103,1784	-103,1784	0,000%
3	-103,1784	-103,1784	0,000%
4	0,0000	0,0000	0,000%
5	-277,5000	-277,5000	0,000%
6	-277,5000	-277,5000	0,000%

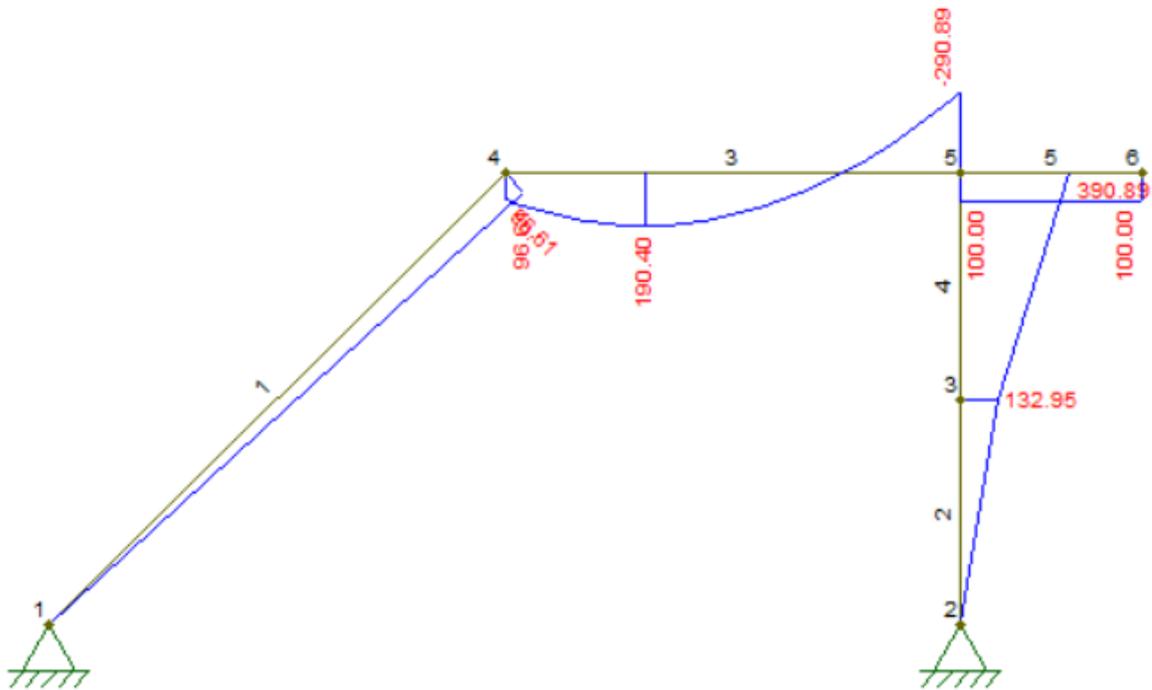
Esforço Cortante (kN)			
Nó	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	13,6625	13,6625	0,000%
2	122,5000	122,5000	0,000%
3	-277,5000	-277,5000	0,000%
4	0,0000	0,0000	0,000%
5	103,1784	103,1784	0,000%
6	53,1784	53,1784	0,000%

Momento Fletor (kN.m)			
Nó	Programa MEF	FTOOL	Variação
1	0,0000	0,0000	0,000%
2	96,6082	96,6082	0,000%
3	-290,8918	-290,8918	0,000%
4	100,0000	100,0000	0,000%
5	132,9459	132,9459	0,000%
6	0,0000	0,0000	0,000%

Fonte: Autor (2022).

Ao avaliar os esforços internos nos nós, o programa obtém resultados exatamente iguais ao programa de análise matricial e se mostra consistente mesmo ao trabalhar com problemas hiperestáticos. Porém, ao analisar o diagrama de momentos fletores da Figura 32, obtido pelo FTOOL (MARTHA, 2018), percebe-se que o programa não foi capaz de calcular os esforços máximos nos elementos em pontos fora dos nós pois há valores de momento maiores nos vãos.

Figura 32 – Diagrama de momentos fletores.

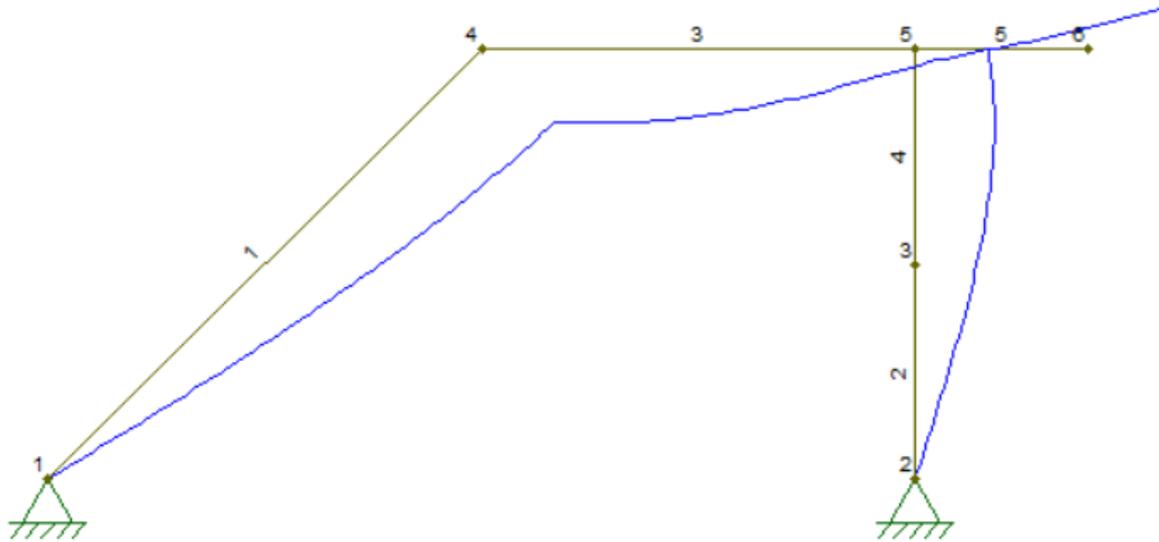


Fonte: Autor (2022).

Como os esforços internos calculados dependem dos deslocamentos, o limite da aproximação utilizada para a formulação do MEF se faz presente novamente, ou seja, como o programa não é capaz de calcular corretamente esses deslocamentos devido à limitação de continuidade de derivadas da função de forma considerada, os esforços internos obtidos ao avaliar somente os nós não serão suficientes para caracterizar corretamente o comportamento da estrutura. Para tal, se faz necessário um maior refinamento da malha utilizada ou utilizar uma formulação que considere polinômios de grau maior.

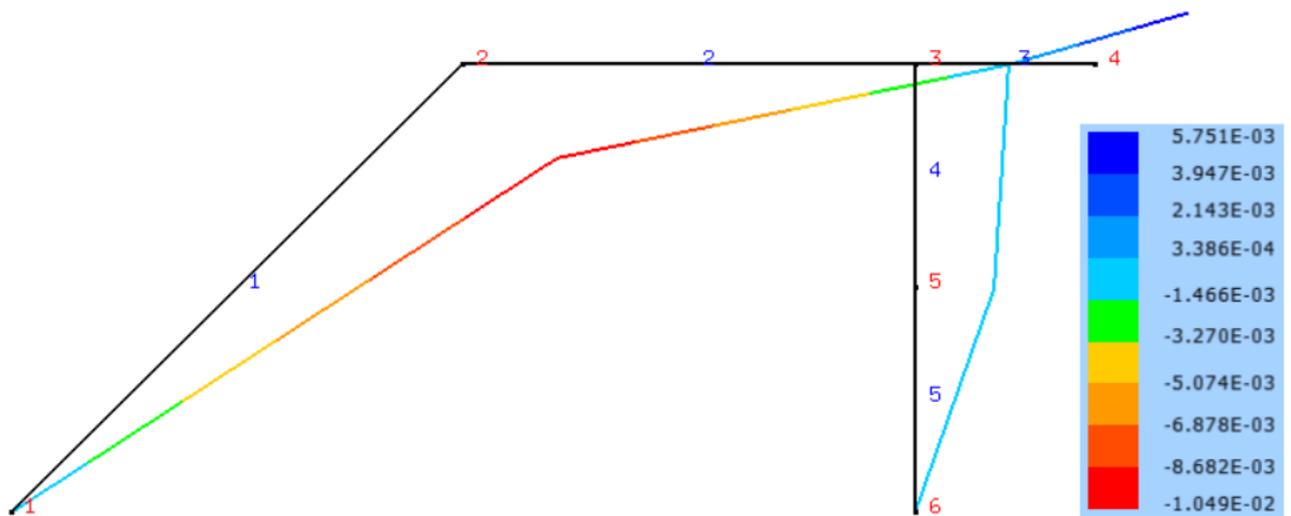
Quanto aos deslocamentos calculados, a Figura 33, elaborada no FTOOL, demonstra a configuração deformada esperada e a Figura 34, elaborada no AcadView (PACCOLA; CODA, 2005), ilustra os resultados obtidos. Para melhor visualização a deformada foi ampliada em 100 vezes.

Figura 33 – Configuração deformada do pórtico hiperestático – FTOOL.



Fonte: Autor (2022).

Figura 34 – Configuração deformada do pórtico hiperestático – Acadview



Fonte: Autor (2022).

De forma geral, o resultado obtido é satisfatório se comparado ao esperado e para o que foi proposto nesta aplicação, mas é visível que há pouca suavidade nas curvas, algo que poderia ser melhorado com o refinamento da malha de elementos finitos.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve por objetivo principal a apresentação de uma formulação baseada nos modelos do Método dos Elementos Finitos e a implementação de algoritmos computacionais capazes de realizar a análise linear-elástica das estruturas propostas: as treliças, os pórticos planos e as vigas.

De maneira geral, pode-se dizer que os algoritmos elaborados obtiveram ótimos resultados quando comparados às literaturas base ao software de análise matricial. Nos exemplos de treliças, não houve qualquer variação de deslocamento nodais ou esforços internos superior a 0,010%, precisão essa devido ao modelo matemático e a malha de elementos finitos utilizada. Com relação aos exemplos estudados no capítulo de pórticos, não houve variação superior a 0,050%, reflexo da simplicidade das estruturas analisadas e da precisão do algoritmo desenvolvido.

Já no capítulo de aplicações, faz-se necessária a realização de análises de convergência pois os exemplos estudados (vigas bi-apoiadas e pórtico hiperestático) exigem maior refinamento das malhas utilizadas para uma melhor representação da configuração deformada. Entretanto, na primeira aplicação, constatou-se que o valor da flecha calculada não depende do número de elementos, visto que o deslocamento do nó central considerado sempre será a flecha da viga quando esta for submetida a um carregamento uniformemente distribuído. Logo, o modelo em elementos finitos utilizado se mostrou capaz de representar o valor teórico da flecha f com apenas 2 elementos.

Na segunda aplicação, inferiu-se que o programa de elementos finitos não é capaz de calcular a flecha exata com apenas 2 elementos como na aplicação anterior. Neste caso, como o carregamento é assimétrico, a flecha não ocorre no meio do vão, mas sim deslocada para um ponto mais próximo do apoio mais carregado. Portanto, devido ao limite inerente à formulação de elementos finitos proposta para o problema de vigas, que consiste na necessidade de uma função para descrever o deslocamento transversal com continuidade de derivadas mais alta do que a aproximação de terceiro grau permite, se faz essencial o refinamento da malha para o cálculo da flecha da viga quando esta for submetida a um carregamento trapezoidal.

Por fim, na terceira aplicação, concluiu-se que ao avaliar os esforços internos e deslocamentos nos nós, o programa obtém resultados exatamente iguais ao programa de análise matricial e se mostra consistente mesmo ao trabalhar com problemas hiperestáticos.

Porém, o programa MEF não se mostrou capaz de calcular corretamente os valores de momento máximos que ocorrem no meio do vão, pois o mesmo analisa apenas os nós que compõe estrutura. Novamente, isso se deve ao limite da aproximação utilizada em relação a linha elástica, visto que o cálculo dos esforços internos no programa depende dos deslocamentos e avaliar somente os nós não é suficiente para caracterizar corretamente o comportamento da estrutura, conforme o diagrama de momentos fletores da Figura 32 e, para tal, se faz necessário um maior refinamento da malha utilizada ou utilizar uma formulação que considere polinômios de grau maior.

6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com base nos resultados apresentados por este trabalho e com o objetivo de desenvolver ainda mais os estudos acerca de algoritmos e elementos finitos, principalmente em nível de graduação, sugere-se os seguintes estudos:

- Otimização das estruturas modeladas pelo Método dos Elementos Finitos;
- Aplicação da metodologia utilizada para treliças e pórticos espaciais;
- Consideração de efeitos de não-linearidade para as estruturas abordadas;
- Avaliação do comportamento não-linear dos materiais;
- Utilização de restrições relacionadas às normativas para estruturas de concreto e metálicas aplicadas ao algoritmo desenvolvido.

REFERÊNCIAS

- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos**. 3ª Ed. São Paulo, 2020.
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos elementos finitos**. 1ª Ed. Portugal: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2011.
- BARBOSA, I. C. D. V. **Análise Comparativa entre os métodos construtivos de concreto armado e madeira em uma residência unifamiliar no Tocantins**. Monografia. Palmas, Tocantins, Brasil, Universidade Federal do Tocantins, 2019.
- BARROS, J. **Método dos Elementos Finitos aplicado a estruturas reticuladas**. Braga, Portugal, Universidade do Minho, 2001.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. 2ª Ed. Watertown, MA: Klaus-Jurgen Bathe, 2016.
- BORGES, R. A.; SILVA, S. S.; BEZERRA, A. A. B. **Estudo de treliças planas e espaciais utilizando a linguagem de programação Python e o software VTK**. In: XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, Brasil, 2007. **Anais...** Brasília: XXXVII CILAMCE, 2016.
- DIAS, Raul P. **Formulação do Método dos Elementos Finitos para análise elástica linear de pórticos planos**. 2014. 68 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2014.
- FARANI, L. A.; **Método dos Elementos Finitos para Treliça 2D**. Análise linear – Estruturas reticuladas. 1ª Ed. 2021.
- FARANI, L. A.; **Método dos Elementos Finitos Aplicado a Vigas e Pórticos Planos**. Análise linear – Estruturas reticuladas. 1ª Ed. 2021.
- FTOOL, version 4.00.04**. Pontifícia Universidade Católica, Tecgraf/PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2018.
- HIBBELER, R. C. **Estática: mecânica para engenharia**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2005.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. Ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2004.
- LACERDA, E. G. M. **Análise não-linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. 2014. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- LEET, K. M.; UANG, C. M.; GILBERT, A. M. **Fundamentos da Análise Estrutural**. 3ª ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

LOURENÇO, P. B. **Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não-linear**. Guimarães, Portugal, 1999.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **Acadview: Software para pós-processamento em elementos finitos 2D e 3D**. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005. Disponível em: <<https://set.eesc.usp.br>>, Acesso em: Jul. 2022.

PAIVA, J.B. **Notas de Aula: Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 2012.

SILVA, J. L.; LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R. D. **Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas**. In: XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, Brasil, 2016. Anais... Brasília: XXXVII CILAMCE, 2016.

SILVA NETO, G. C.; LOPES, R. C.; LOPES, A. P. **O método dos elementos finitos em treliças planas na disciplina de mecânica computacional**. In: XXXV Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Curitiba, Brasil, 2007. Anais... Curitiba: XXXV COBENGE, 2007.

SORIANO, H. L. **Análise de estruturas - Formulação matricial e implementação computacional**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2005.

SOUZA, M. F. S. M.; RODRIGUES, R. B.; MASCIA, N. T. **Sistemas estruturais de edificações e exemplos**. Departamento de Estruturas – DES, FEC - UNICAMP, Campinas, 2008.

TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D. H.; WEAVER, J. W. **Vibration Problems in Engineering**. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1974.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The finite element method: its basis and fundamentals**. Elsevier, 2005.

APÊNDICE A

PROGRAMA MEF - TRELIÇAS

```
import numpy as np
```

DADOS INICIAIS

```
#Número de nós
```

```
n_nos =
```

```
#Número de elementos
```

```
n_el =
```

```
no = [0, 1, ... , n_nos]
```

```
x = [coordenadas]
```

```
y = [coordenadas]
```

MATRIZ DE CONECTIVIDADE

```
# Matriz de conectividade: [elemento, primeiro nó, segundo nó]
```

```
conec = np.array([[0, 0, 1], [1, 1, 2]])
```

```
# Elemento 1
```

```
E1 =, A1 =
```

```
# Elemento 2
```

```
E2 =, A2 =
```

```
# Matriz de propriedade: [elemento, E, A]
```

```
prop = np.array([[0, E1, A1], [1, E2, A2]])
```

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

```
# Cálculo da matriz de cada elemento
```

```
GDL = 2*n_nos
```

```
K = np.zeros((GDL,GDL))
```

```
for el in range(n_el):
```

```
    no1=conec[el,1]
```

```
    no2=conec[el,2]
```

```
    L = np.sqrt((x[no2] - x[no1])**2 + (y[no2] - y[no1])**2)
```

```
    #Propriedades
```

```
    A = prop[conec[el,0],2]
```

```
    E = prop[conec[el,0],1]
```

```
# Cossenos diretores a partir das coordenadas dos nós do elemento
```

```
c = (x[no2] - x[no1])/L #cosseno
```

```
s = (y[no2] - y[no1])/L #seno
```

```
# Matriz de transformação do elemento "el"
```

```
T=np.array([[c**2, c*s, -c**2, -c*s],
            [c*s, s**2, -c*s, -s**2],
            [-c**2, -c*s, c**2, c*s],
            [-c*s, -s**2, c*s, s**2]])
```

```
Kg = np.matrix(((E*A)/L)*T)
```

```
for n1 in range(2):
```

```
    for i in range(2):
```

```
        alfa = conec[el,n1+1]
```

```
        k = 2*(alfa) + i
```

```
        gll1 = 2*(n1) + i
```

```
        for n2 in range(2):
```

```
            for j in range(2):
```

```
                beta = conec[el,n2+1]
```

```
                l = 2*(beta) + j
```

```
                gll2 = 2*(n2) + j
```

```
                K[k, l] = K[k, l] + Kg[gll1, gll2]
```

FORÇAS ATUANTES

```
n_forcas = #Número de nós no qual atuam forças
```

```
forcas=np.matrix([[2, 1, 2]]) #Matriz de forças [nó, força em x, força em y]
```

```
F=np.zeros((GDL,1))
```

```
for i in range(n_forcas):
```

```
    F[int(2*forcas[i,0])]=forcas[i,1]
```

```
    F[int(2*forcas[i,0])+1]=forcas[i,2]
```

CONDIÇÕES DE CONTORNO

```
n_rest = 2 #número de nós restringidos
```

```
# Matriz de condições de contorno
```

```
# [número do nó, restringido_x, restringido_y] (1 para restringido, e 0 para livre)
```

```
GDL_rest=np.array([[0, 1, 1], [1, 1, 1], [2, 0, 0]])
```

```

# Guardar os originais de K e F
Kc=np.copy(K)
# Aplicar Restrições (condições de contorno)
for k in range(n_nos):
    # Verifica se há restrição na direção x
    if GDL_rest[k,1]==1:
        j=2*GDL_rest[k,0]
        #Modificar Matriz de Rigidez
        for i in range(GDL):
            Kc[j,i]=0 #zera linha
            Kc[i,j]=0 #zera coluna
            Kc[j,j]=1 #valor unitário na diagonal principal
    # Verifica se há restrição na direção y
    if GDL_rest[k,2]==1:
        j=2*GDL_rest[k,0]+1
        #Modificar Matriz de Rigidez
        for i in range(GDL):
            Kc[j,i]=0 #zera linha
            Kc[i,j]=0 #zera coluna
            Kc[j,j]=1 #valor unitário na diagonal principal

DESLOCAMENTOS RESULTANTES
U = np.linalg.solve(Kc,F)
CÁLCULO DAS REAÇÕES
R = np.matmul(K,U) - F
PÓS-PROCESSAMENTO
for el in range(n_el):
    no1=conec[el,1]
    no2=conec[el,2]
    e = (c*(U[2*no2] - U[2*no1]) + s*(U[(2*no2+1)] - U[(2*no1+1)]))/L
    S = E*e
    N = S*A

```

APÊNDICE B

PROGRAMA MEF – PÓRTICOS E VIGAS

```

import numpy as np

DADOS INICIAIS

#Número de nós
n_nos =

#Número de elementos
n_el =

no = [0, 1, ... , n_nos]
x = [coordenadas]
y = [coordenadas]

MATRIZ DE CONECTIVIDADE

# Matriz de conectividade: [elemento, primeiro nó, segundo nó]
conec = np.array([[0, 0, 1], [1, 1, 2]])

E =
A =
I =

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

# Cálculo da matriz de cada elemento
GDL = 3*n_nos
K = np.zeros((GDL,GDL))
for el in range(n_el):
    no1=conec[el,1]
    no2=conec[el,2]
    L = np.sqrt((x[no2] - x[no1])**2 + (y[no2] - y[no1])**2)
    #Cossenos diretores a partir das coordenadas dos nós do elemento
    c = (x[no2] - x[no1])/L #cosseno
    s = (y[no2] - y[no1])/L #seno
    # Matriz de transformação do elemento "el"

```

```

T=np.array([[ c, s, 0, 0, 0, 0],
            [-s, c, 0, 0, 0, 0],
            [ 0, 0, 1, 0, 0, 0],
            [ 0, 0, 0, c, s, 0],
            [ 0, 0, 0, -s, c, 0],
            [ 0, 0, 0, 0, 0, 1]])

c1 = I/(L**2)
c2 = I/L

Ki=np.array([[A, 0, 0, -A, 0, 0],
            [0, 12*c1, 6*c2, 0, -12*c1, 6*c2],
            [0, 6*c2, 4*I, 0, -6*c2, 2*I],
            [-A, 0, 0, A, 0, 0],
            [0, -12*c1, -6*c2, 0, 12*c1, -6*c2],
            [0, 6*c2, 2*I, 0, -6*c2, 4*I]])

Tt = np.transpose(T)
Kel = np.matrix((E/L)*Ki)
Kg = np.matrix(Tt*Kel*T)
for n1 in range(2):
    for i in range(3):
        alfa = conec[el,n1+1]
        k = 3*(alfa) + i
        gll1 = 3*(n1) + i
        for n2 in range(2):
            for j in range(3):
                beta = conec[el,n2+1]
                l = 3*(beta) + j
                gll2 = 3*(n2) + j
                K[k, l] = K[k, l] + Kg[gll1, gll2]

```

CARGAS CONCENTRADAS ATUANTES

```

n_forcas = # Número de nós no qual atuam forças
forcas=np.matrix([[2, 1, 2]]) # Matriz de forças [nó, força em x, força em y]
F=np.zeros((GDL,1))

```

```
for i in range(n_forcas):
```

```
    F[int(2*forcas[i,0])]=forcas[i,1]
```

```
    F[int(2*forcas[i,0])+1]=forcas[i,2]
```

CARGAS DISTRIBUÍDAS ATUANTES

```
n_eq = # Número de elementos que contém carregamentos equivalentes
```

```
# Matriz de carregamento equivalente = [elemento, tipo, carga inicial, carga final]
```

```
w_eq= np.array([[1, 1, -80, -80]])
```

VECTOR DE FORÇAS EQUIVALENTES

```
#Forças equivalentes
```

```
Feq=np.zeros((GDL,1))
```

```
for i in range(n_eq):
```

```
    el=int(w_eq[i,0]) #elemento onde está aplicada
```

```
    f=np.zeros((6,1))
```

```
    no1=conec[el,1]
```

```
    no2=conec[el,2]
```

```
    L = np.sqrt((x[no2] - x[no1])**2 + (y[no2] - y[no1])**2)
```

```
    w1=w_eq[i,2]
```

```
    w2=w_eq[i,3]
```

```
    c = (x[no2] - x[no1])/L # cosseno
```

```
    s = (y[no2] - y[no1])/L # seno
```

```
    f[0]=0
```

```
    f[1]=+(7/20*w1 + 3/20*w2)*L
```

```
    f[2]=+(1/20*w1 + 1/30*w2)*L**2
```

```
    f[3]=0
```

```
    f[4]=+(3/20*w1 + 7/20*w2)*L
```

```
    f[5]=-((1/30*w1 + 1/20*w2)*L**2)
```

```
# Matriz de transformação do elemento "el"
```

```
T=np.array([[c, s, 0, 0, 0, 0],
```

```
            [-s, c, 0, 0, 0, 0],
```

```
            [0, 0, 1, 0, 0, 0],
```

```
            [0, 0, 0, c, s, 0],
```

```
            [0, 0, 0,-s, c, 0],
```

```
            [0, 0, 0, 0, 0, 1]])
```

```

feq=np.matmul(np.transpose(T), f)
Feq[3*no1]=Feq[3*no1]+feq[0]
Feq[3*no1+1]=Feq[3*no1+1]+feq[1]
Feq[3*no1+2]=Feq[3*no1+2]+feq[2]
Feq[3*no2]=Feq[3*no2]+feq[3]
Feq[3*no2+1]=Feq[3*no2+1]+feq[4]
Feq[3*no2+2]=Feq[3*no2+2]+feq[5]

```

CONDIÇÕES DE CONTORNO

```

n_rest = 2 #número de nós restringidos
# Matriz de condições de contorno
# [número do nó, restringido_x, restringido_y] (1 para restringido, e 0 para livre)
GDL_rest=np.array([[0, 1, 1],
                   [1, 1, 1],
                   [2, 0, 0]])
# Guardar os originais de K e F
Kc=np.copy(K)
Fg = F + Feq
# Aplicar Restrições (condições de contorno)
for k in range(n_rest):
    # Verifica se há restrição na direção x
    if GDL_rest[k,1]==1:
        j=3*GDL_rest[k,0]
        #Modificar Matriz de Rigidez
        for i in range(GDL):
            Kc[j,i]=0 #zera linha
            Kc[i,j]=0 #zera coluna
        Kc[j,j]=1 #valor unitário na diagonal principal
        Fg[j]=0

```

```

# Verifica se há restrição na direção y
if GDL_rest[k,2]==1:
    j=3*GDL_rest[k,0]+1
    #Modificar Matriz de Rigidez
    for i in range(GDL):
        Kc[j,i]=0 #zera linha
        Kc[i,j]=0 #zera coluna
        Kc[j,j]=1 #valor unitário na diagonal principal
        Fg[j]=0
# Verifica se há restrição na rotação
if GDL_rest[k,3]==1:
    j=3*GDL_rest[k,0]+2
    #Modificar Matriz de Rigidez
    for i in range(GDL):
        Kc[j,i]=0 #zera linha
        Kc[i,j]=0 #zera coluna
        Kc[j,j]=1 #valor unitário na diagonal principal
        Fg[j]=0

```

DESLOCAMENTOS RESULTANTES

```
U = np.linalg.solve(Kc,F)
```

CÁLCULO DAS REAÇÕES

```
R = np.matmul(K,U) - F
```

PÓS-PROCESSAMENTO

```
# Esforços nos elementos
```

```
f_el= np.zeros((n_el,6))
```

```
N = np.zeros((n_el,1))
```

```
V = np.zeros((n_el,1))
```

```
Mzi = np.zeros((n_el,1))
```

```
Mzj = np.zeros((n_el,1))
```

```
Mmax = np.zeros((n_el,1))
```

```

for el in range(n_el):
    no1=conec[el,1]
    no2=conec[el,2]
    L = np.sqrt((x[no2] - x[no1])**2 + (y[no2] - y[no1])**2)
    c = (x[no2] - x[no1])/L #cosseno
    s = (y[no2] - y[no1])/L #seno
    # Matriz de transformação do elemento "el"
    T=np.array([[ c, s, 0,  0, 0, 0],
                [-s, c, 0,  0, 0, 0],
                [ 0, 0, 1,  0, 0, 0],
                [ 0, 0, 0,  c, s, 0],
                [ 0, 0, 0, -s, c, 0],
                [ 0, 0, 0,  0, 0, 1]])
    c1 = I/(L**2)
    c2 = I/L
    Ki=np.array([[A,  0,  0, -A,  0,  0],
                 [0, 12*c1, 6*c2, 0, -12*c1, 6*c2],
                 [0, 6*c2, 4*I, 0, -6*c2, 2*I],
                 [-A,  0,  0, A,  0,  0],
                 [0, -12*c1, -6*c2, 0, 12*c1, -6*c2],
                 [0, 6*c2, 2*I, 0, -6*c2, 4*I]])
    Kel = np.matrix((E/L)*Ki)
    u1 = U[no1*3]
    u2 = U[no2*3]
    v1 = U[no1*3+1]
    v2 = U[no2*3+1]
    th1= U[no1*3+2]
    th2= U[no2*3+2]
    dg = np.array([u1, v1, th1, u2, v2, th2])
    de = np.matmul(T,dg)

```

```

# Forças equivalentes: recalcula vetor de feq. no sistema local
w1=w_eq[aux,2]
w2=w_eq[aux,3]
feqq=np.zeros((6,1))
feqq[0]=0
feqq[1]=+(7/20*w1 + 3/20*w2)*L
feqq[2]=+(1/20*w1 + 1/30*w2)*L**2
feqq[3]=0
feqq[4]=+(3/20*w1 + 7/20*w2)*L
feqq[5]=-(1/30*w1 + 1/20*w2)*L**2
f_el[el,:]= np.transpose(np.matmul(Kel, de)-feqq)
# Esforços para cálculo de tensão
N[el,0]=(f_el[el,0])
V[el,0]=(f_el[el,1])
Mzi[el,0]=(f_el[el,2])
Mzj[el,0]=(f_el[el,5])
aux=np.array([Mzi,Mzj])
Mmax[el]=max(aux)

```