PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

TERCEIRO E QUARTO CICLOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEMÁTICA

Secretaria de Educação Fundamental
Iara Glória Areias Prado

Departamento de Política da Educação Fundamental
Virgínia Zélia de Azevedo Rebeis Farha

Coordenação-Geral de Estudos e Pesquisas da Educação Fundamental
Maria Inês Laranjeira

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (5ª A 8ª SÉRIES)

B823p Brasil. Secretaria de Educação Fundamental.
Parâmetros curriculares nacionais : Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC / SEF, 1998.
148 p.

1. Parâmetros curriculares nacionais. 2. Matemática : Ensino de quinta a oitava séries. I. Título.

CDU: 371.214

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

TERCEIRO E QUARTO CICLOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEMÁTICA

Brasília
1998

AO PROFESSOR

O papel fundamental da educação no desenvolvimento das pessoas e das sociedades amplia-se ainda mais no despertar do novo milênio e aponta para a necessidade de se construir uma escola voltada para a formação de cidadãos. Vivemos numa era marcada pela competição e pela excelência, onde progressos científicos e avanços tecnológicos definem exigências novas para os jovens que ingressarão no mundo do trabalho. Tal demanda impõe uma revisão dos currículos, que orientam o trabalho cotidianamente realizado pelos professores e especialistas em educação do nosso país.

Assim, é com imensa satisfação que entregamos aos professores das séries finais do ensino fundamental os **Parâmetros Curriculares Nacionais**, com a intenção de ampliar e aprofundar um debate educacional que envolva escolas, pais, governos e sociedade e dê origem a uma transformação positiva no sistema educativo brasileiro.

Os **Parâmetros Curriculares Nacionais** foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania.

Os documentos apresentados são o resultado de um longo trabalho que contou com a participação de muitos educadores brasileiros e têm a marca de suas experiências e de seus estudos, permitindo assim que fossem produzidos no contexto das discussões pedagógicas atuais. Inicialmente foram elaborados documentos, em versões preliminares, para serem analisados e debatidos por professores que atuam em diferentes graus de ensino, por especialistas da educação e de outras áreas, além de instituições governamentais e não-governamentais. As críticas e sugestões apresentadas contribuíram para a elaboração da atual versão, que deverá ser revista periodicamente, com base no acompanhamento e na avaliação de sua implementação.

Esperamos que os **Parâmetros** sirvam de apoio às discussões e ao desenvolvimento do projeto educativo de sua escola, à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de suas aulas, à análise e seleção de materiais didáticos e de recursos tecnológicos e, em especial, que possam contribuir para sua formação e atualização profissional.

Paulo Renato Souza
Ministro da Educação e do Desporto

OBJETIVOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

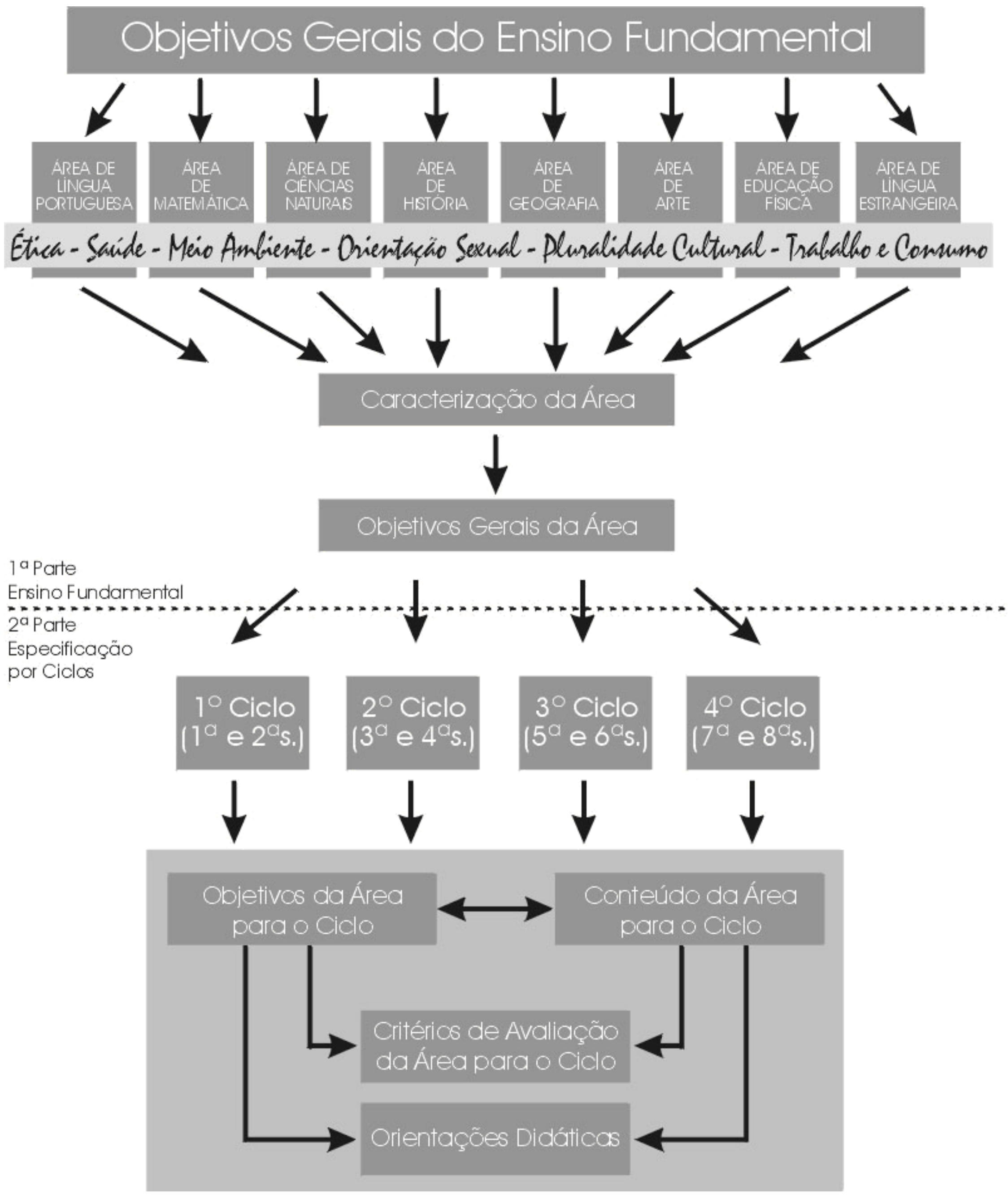
Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam como objetivos do ensino fundamental que os alunos sejam capazes de:

- compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;
- posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
- conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertinência ao país;
- conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;
- perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente, identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente;
- desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;
- conhecer o próprio corpo e dele cuidar, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva;
- utilizar as diferentes linguagens — verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal — como meio para produzir,

expressar e comunicar suas idéias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;

- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

ESTRUTURA DOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO FUNDAMENTAL



SUMÁRIO

Apresentação 15

1ª PARTE
Matemática no ensino fundamental 19
Breve análise da trajetória das reformas curriculares 19
Quadro atual do ensino de Matemática no Brasil 21
O conhecimento matemático 24
Principais características 24
Matemática e construção da cidadania 26
A Matemática e os Temas Transversais 28
Ética 29
Orientação Sexual 30
Meio Ambiente 31
Saúde 31
Pluralidade Cultural 32
Trabalho e Consumo 33
Aprender e ensinar Matemática no ensino fundamental 35
O professor e o saber matemático 36
O aluno e o saber matemático 37
As relações professor-aluno e aluno-aluno 37
A resolução de problemas e o ensino-aprendizagem de Matemática 39
Alguns caminhos para "fazer Matemática" na sala de aula 42
O recurso à história da Matemática 42
O recurso às tecnologias da comunicação 43
O recurso aos jogos 46
Objetivos gerais para o ensino fundamental 47
Conteúdos de Matemática para o ensino fundamental 48
Seleção de conteúdos 49
Números e operações 50
Espaço e forma 51
Grandezas e medidas 51
Tratamento da informação 52
Organização de conteúdos 53
Avaliação em Matemática 54
Síntese dos princípios norteadores 56

2ª PARTE
Terceiro ciclo 61
Ensino e aprendizagem de Matemática no terceiro ciclo 61
Objetivos de Matemática para o terceiro ciclo 64
Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no terceiro ciclo 66
Conceitos e procedimentos 71
Números e operações 71
Espaço e forma 72
Grandezas e medidas 73
Tratamento da informação 74
Atitudes 75
Critérios de avaliação para o terceiro ciclo 75
Quarto ciclo 79
Ensino e aprendizagem de Matemática no quarto ciclo 79
Objetivos de Matemática para o quarto ciclo 81

Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no quarto ciclo 83
Conceitos e procedimentos 87
Números e operações 87
Espaço e forma 88
Grandezas e medidas 89
Tratamento da informação 90
Atitudes 91
Critérios de avaliação para o quarto ciclo 92
Orientações didáticas para terceiro e quarto ciclos 95
Números e operações 95
Números 96
Operações 107
Adição e subtração: significados 107
Multiplicação e divisão: significados 109
Potenciação 112
Radiciação 113
Cálculo 114
Álgebra 115
Espaço e forma 122
Grandezas e medidas 128
Tratamento da informação 134
Conexões entre os conteúdos 138

Bibliografia 143

MATEMÁTICA

APRESENTAÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática têm como finalidade fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros.

Visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura.

Como decorrência, poderão nortear a formação inicial e continuada de professores, pois à medida que os fundamentos do currículo se tornam claros fica implícito o tipo de formação que se pretende para o professor, como também orientar a produção de livros e de outros materiais didáticos, contribuindo dessa forma para a configuração de uma política voltada à melhoria do ensino fundamental[1] .

Na primeira parte o documento apresenta uma breve análise dos mais recentes movimentos de reorientação curricular e de alguns aspectos do ensino de Matemática no Brasil, apontando duas grandes questões: a necessidade de reverter o quadro em que a Matemática se configura como um forte filtro social na seleção dos alunos que vão concluir, ou não, o ensino fundamental e a necessidade de proporcionar um ensino de Matemática de melhor qualidade, contribuindo para a formação do cidadão.

Essa análise abre uma discussão sobre o papel da Matemática na construção da cidadania — eixo orientador dos Parâmetros Curriculares Nacionais —, enfatizando a participação crítica e a autonomia do aluno. Sinaliza a importância do estabelecimento de conexões da Matemática com os conteúdos relacionados aos Temas Transversais — Ética, Pluralidade Cultural, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Trabalho e Consumo —, uma das marcas destes parâmetros.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Destacam a importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas

[1] Sobre a formação de professores ver documento Referencial Pedagógico Curricular para a Formação de Professores da Educação Infantil e Séries Iniciais do Ensino Fundamental – MEC/SEF, 1998.

e de perseverar na busca de soluções. Adotam como critérios para seleção dos conteúdos sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno, em cada ciclo.

Indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática e discutem caminhos para "fazer Matemática" na sala de aula, destacando a importância da História da Matemática e das Tecnologias da Comunicação.

Na segunda parte discute-se a especificidade do processo ensino-aprendizagem nos terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, levando em conta o desenvolvimento afetivo, social e cognitivo dos adolescentes.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática apresentam os objetivos em termos das capacidades a serem desenvolvidas em cada ciclo, assim como os conteúdos para desenvolvê-las. São apontadas as possíveis conexões entre os blocos de conteúdos, entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e com os Temas Transversais.

Quanto aos conteúdos, apresentam um aspecto inovador ao explorá-los não apenas na dimensão de conceitos, mas também na dimensão de procedimentos e de atitudes. Em função da demanda social incorporam, já no ensino fundamental, o estudo da probabilidade e da estatística e evidenciam a importância da geometria e das medidas para desenvolver as capacidades cognitivas fundamentais.

A avaliação em suas dimensões processual e diagnóstica é tratada como parte fundamental do processo ensino-aprendizagem por permitir detectar problemas, corrigir rumos, apreciar e estimular projetos bem-sucedidos.

Nessa perspectiva, apresentam, para cada ciclo, alguns critérios de avaliação que são considerados como indicadores das expectativas de aprendizagem possíveis e necessárias de serem desenvolvidas pelos alunos.

Na parte final do documento discutem-se algumas orientações didáticas relativas a conceitos e procedimentos matemáticos, analisando obstáculos que podem surgir na aprendizagem de certos conteúdos e sugerindo alternativas que possam favorecer sua superação.

Secretaria de Educação Fundamental

MATEMÁTICA

1ª PARTE

MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Discussões no âmbito da Educação Matemática que acontecem no Brasil e em outros países apontam a necessidade de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença da Matemática em diversos campos da atividade humana. Tais discussões têm influenciado análises e revisões nos currículos de Matemática no ensino fundamental.

Para melhor compreender os rumos dessas novas propostas é importante retomar a trajetória das reformas curriculares ocorridas nos últimos anos e analisar, mesmo que brevemente, o quadro atual do ensino de Matemática no Brasil.

Breve análise da trajetória das reformas curriculares

Os movimentos de reorientação curricular ocorridos no Brasil a partir dos anos 20 não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista desse ensino bem como melhorar sua qualidade. Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão.

Nas décadas de 60/70, o ensino de Matemática no Brasil, assim como em outros países, foi influenciado por um movimento de renovação que ficou conhecido como Matemática Moderna.

A Matemática Moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta na linha de frente do ensino por se considerar que, juntamente com a área de Ciências, ela constituía uma via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico. Para tanto procurou-se aproximar a Matemática desenvolvida na escola da Matemática como é vista pelos estudiosos e pesquisadores.

O ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizam o conhecimento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc. Esse movimento provocou, em vários países, inclusive no Brasil, discussões e amplas reformas no currículo de Matemática.

No entanto, essas reformas deixaram de considerar um ponto básico que viria tornar-se seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das série iniciais do ensino fundamental.

O ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas.

No Brasil, o movimento Matemática Moderna, veiculado principalmente pelos livros didáticos, teve grande influência, durante longo período, só vindo a refluir a partir da constatação de inadequação de alguns de seus princípios básicos e das distorções e dos exageros ocorridos.

Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics — NCTM —, dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento "Agenda para Ação"[2] . Nele a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática nos anos 80. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, lingüísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares.

Essas idéias influenciaram as reformas que ocorreram em todo o mundo, a partir de então. As propostas elaboradas no período 1980/1995, em diferentes países, apresentaram pontos de convergência, como:

- direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;
- importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
- ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;
- importância de trabalhar com amplo espectro de conteúdos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos;
- necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação.

Essas idéias vêm sendo discutidas no Brasil e algumas aparecem incorporadas pelas propostas curriculares de Secretarias de Estado e Secretarias Municipais de Educação, havendo experiências bem-sucedidas que comprovam sua fecundidade. No entanto, é

[2] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1983.

importante salientar que ainda hoje nota-se, por exemplo, a insistência no trabalho com a linguagem da teoria dos conjuntos nas séries iniciais, a formalização precoce de conceitos, o predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais e as poucas aplicações práticas da Matemática no ensino fundamental.

A análise das propostas curriculares oficiais, realizada em 1995 pela Fundação Carlos Chagas, mostra a marca dessa influência em algumas das propostas curriculares estaduais e municipais, mesmo as que foram elaboradas recentemente: "... os currículos dividem-se em duas grandes famílias: os que estão impregnados pela teoria dos conjuntos e os que a eliminaram ou a reduziram ao mínimo"[3].

Por outro lado, as propostas curriculares mais recentes são ainda bastante desconhecidas de parte considerável dos professores, que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivaram as reformas. O que se observa é que idéias ricas e inovadoras, veiculadas por essas propostas, não chegam a eles, ou são incorporadas superficialmente, ou ainda recebem interpretações inadequadas, sem provocar mudanças desejáveis.

Quadro atual do ensino de Matemática no Brasil

Entre os obstáculos que o Brasil tem enfrentado em relação ao ensino de Matemática, aponta-se a falta de uma formação profissional qualificada, as restrições ligadas às condições de trabalho, a ausência de políticas educacionais efetivas e as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas.

No entanto, muitos esforços vêm sendo empreendidos para minimizar esses problemas. Alguns com bastante sucesso, como os que acontecem em escolas que têm elaborado projetos educativos de modo a que contemple os interesses e necessidades da comunidade.

Também existem professores que, individualmente ou em pequenos grupos, têm iniciativa para buscar novos conhecimentos e assumem uma atitude de constante reflexão, o que os leva a desenvolver práticas pedagógicas mais eficientes para ensinar Matemática. De modo semelhante, universidades, secretarias de educação e outras instituições têm produzido materiais de apoio para a prática do professor.

No entanto, essas iniciativas ainda não atingiram o conjunto dos professores e por isto não chegam a alterar o quadro desfavorável que caracteriza o ensino de Matemática no Brasil. A formação dos professores, por exemplo, tanto a inicial quanto a continuada, pouco tem contribuído para qualificá-los para o exercício da docência. Não tendo oportunidade e

---

[3] FUNDAÇÃO CARLOS CHAGAS.

condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória.

A interpretação equivocada de concepções pedagógicas também tem sido responsável por distorções na implementação das idéias inovadoras que aparecem em diferentes propostas.

Assim, por exemplo, a abordagem de conceitos, idéias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas — ainda bastante desconhecida da grande maioria — quando é incorporada, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos.

De forma semelhante, nem sempre são observadas recomendações insistentemente feitas para que conteúdos sejam veículos para a aprendizagem de idéias fundamentais (como as de proporcionalidade, equivalência etc.) e que devem ser selecionados levando em conta sua potencialidade, quer para instrumentação para a vida, quer para o desenvolvimento de formas de pensar.

Quanto à organização dos conteúdos, de modo geral observa-se uma forma excessivamente hierarquizada de fazê-la. É uma organização dominada pela idéia de pré-requisito, cujo único critério é a estrutura lógica da Matemática. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem na forma de uma corrente, cada conteúdo sendo um pré-requisito para o que vai sucedê-lo.

Embora se saiba que alguns conhecimentos precedem outros e que as formas de organização sempre indicam um certo percurso, não existem, por outro lado, amarras tão fortes como algumas que podem ser observadas comumente, tais como: apresentar a representação fracionária dos racionais, para introduzir posteriormente a decimal; desenvolver o conceito de semelhança, para depois explorar o teorema de Pitágoras.

Por vezes, essa concepção linear faz com que, ao se definir qual será o elo inicial da cadeia, tomem-se os chamados fundamentos como ponto de partida. É o que ocorre, por exemplo, quando se privilegiam as noções de “ponto, reta e plano” como referência inicial para o ensino de Geometria ou quando se tomam os conjuntos como base para a aprendizagem de números e operações, caminhos que não são necessariamente os mais adequados.

O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos.

Também a importância de levar em conta o conhecimento prévio dos alunos na construção de significados geralmente é desconsiderada. Na maioria das vezes, subestimam-se os conceitos desenvolvidos no decorrer das vivências práticas dos alunos, de suas interações sociais imediatas, e parte-se para um tratamento escolar, de forma esquemática, privando os alunos da riqueza de conteúdos proveniente da experiência pessoal.

Outra distorção perceptível refere-se a uma interpretação equivocada da idéia de contexto, ao se trabalhar apenas com o que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno. Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata.

Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos. Do mesmo modo, a resolução de problema, que vem sendo apontada como um bom caminho para trabalhar conceitos e procedimentos matemáticos, tem sido objeto de interpretações equivocadas, pois ainda se resume em uma mera atividade de aplicação ao final do estudo de um conteúdo matemático.

A recomendação do uso de recursos didáticos, incluindo alguns materiais específicos, é feita em quase todas as propostas curriculares. No entanto, na prática, nem sempre há clareza do papel desses recursos no processo ensino-aprendizagem, bem como da adequação do uso desses materiais, sobre os quais se projetam algumas expectativas indevidas.

Os obstáculos apontados explicam em grande parte o desempenho insatisfatório dos alunos revelado pelas elevadas taxas de retenção em Matemática, o que a faz atuar como filtro social no Ensino Fundamental, selecionando os que terão oportunidade ou não de concluir esse segmento de ensino.

Os resultados obtidos pelos alunos do ensino fundamental nos testes de rendimento em Matemática, aplicados em todo o país, também são indicadores expressivos de como se encontra o ensino dessa área.

As provas de Matemática aplicadas em 1993, pelo Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica — SAEB — indicavam que, na primeira série do ensino fundamental, 67,7% dos alunos acertavam pelo menos metade dos testes. Esse índice caía para 17,9% na terceira série, tornava a cair para 3,1%, na quinta série e subia para 5,9% na sétima série. Nas provas de Matemática, aplicadas em 1995, abrangendo alunos de quartas e oitavas séries do ensino fundamental, os percentuais de acerto por série/grau e por capacidades cognitivas, além de continuar diminuindo à medida que aumentavam os anos de escolaridade, indicavam também que as maiores dificuldades encontravam-se nas questões relacionadas à aplicação de conceitos e à resolução de problemas.

Desse modo, pode-se concluir que em relação ao ensino de Matemática há problemas antigos e novos a serem enfrentados e resolvidos, tarefa que requer operacionalização efetiva das intenções anunciadas nas diretrizes curriculares dos anos 80 e início dos anos 90, e a inclusão de novos elementos na pauta de discussões e que este documento procura contemplar.

O conhecimento matemático

Para dimensionar a Matemática no currículo do ensino fundamental é importante que se discuta sobre a natureza desse conhecimento e que se identifiquem suas características principais e seus métodos particulares como base para a reflexão sobre o papel que essa área desempenha no currículo, a fim de contribuir para a formação da cidadania.

PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS

A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural.

Esta visão opõe-se àquela presente na maioria da sociedade e na escola que considera a Matemática como um corpo de conhecimento imutável e verdadeiro, que deve ser assimilado pelo aluno. A Matemática é uma ciência viva, não apenas no cotidiano dos cidadãos, mas também nas universidades e centros de pesquisas, onde se verifica, hoje, uma impressionante produção de novos conhecimentos que, a par de seu valor intrínseco, de natureza lógica, têm sido instrumentos úteis na solução de problemas científicos e tecnológicos da maior importância.

Em contrapartida, não se deve perder de vista os caracteres especulativo, estético não imediatamente pragmático do conhecimento matemático sem os quais se perde parte de sua natureza.

Duas forças indissociáveis estão sempre a impulsionar o trabalho em Matemática. De um lado, o permanente apelo das aplicações às mais variadas atividades humanas, das mais simples na vida cotidiana, às mais complexas elaborações de outras ciências. De outro lado, a especulação pura, a busca de respostas a questões geradas no próprio edifício da

Matemática. A indissociabilidade desses dois aspectos fica evidenciada pelos inúmeros exemplos de belas construções abstratas originadas em problemas aplicados e, por outro lado, de surpreendentes aplicações encontradas para as mais puras especulações.

A Matemática faz-se presente na quantificação do real — contagem, medição de grandezas — e no desenvolvimento das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas. No entanto, esse conhecimento vai muito além, criando sistemas abstratos, ideais, que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados quase sempre a fenômenos do mundo físico.

Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Freqüentemente um conhecimento foi amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico.

A Matemática desenvolveu-se seguindo caminhos diferentes nas diversas culturas. O modelo de Matemática hoje aceito, originou-se com a civilização grega, no período que vai aproximadamente de 700 a.C. a 300 d.C., abrigando sistemas formais, logicamente estruturados a partir de um conjunto de premissas e empregando regras de raciocínio preestabelecidas. A maturidade desses sistemas formais foi atingida no século XIX, com o surgimento da Teoria dos Conjuntos e o desenvolvimento da Lógica Matemática.

O advento posterior de uma multiplicidade de sistemas matemáticos — teorias matemáticas — evidenciou, por outro lado, que não há uma via única ligando a Matemática e o mundo físico. Os sistemas axiomáticos euclidiano e hiperbólico na Geometria, equivalentes sob o ponto de vista da consistência lógica, são dois possíveis modelos da realidade física. Além disso, essa multiplicidade amplia-se, nos tempos presentes, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos que envolvem o acaso — a Estatística e a probabilidade — e daqueles relacionados com as noções matemáticas de caos e de conjuntos fractais.

Convém, ainda, ressaltar que, desde os seus primórdios, as inter-relações entre as várias teorias matemáticas, sempre tiveram efeitos altamente positivos para o crescimento do conhecimento nesse campo do saber. Por fim, com o advento da era da informação e da automação e com a rapidez, antes impensada, na realização dos cálculos numéricos ou algébricos, torna-se cada vez mais amplo o espectro de problemas que podem ser abordados e resolvidos por meio do conhecimento matemático.

O acervo de conhecimento matemático tem sido preservado e exposto pela via da dedução lógica, no âmbito de um sistema de axiomas. A comunicação do saber matemático, seja nos periódicos especializados e nos livros, seja nos vários ambientes escolares, tem, tradicionalmente, seguido esse caminho.

Na criação desse conhecimento, contudo, interferem processos heurísticos e intervêm a criatividade e o senso estético, do mesmo modo que em outras áreas do conhecimento. A partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. Esse caráter indutivo é, em geral, pouco destacado quando se trata da comunicação ou do ensino do conhecimento matemático.

O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino.

Ao longo de sua história, a Matemática tem convivido com a reflexão de natureza filosófica, em suas vertentes da epistemologia e da lógica. Quando se reflete, hoje, sobre a natureza da validação do conhecimento matemático, reconhece-se que, na comunidade científica, a demonstração formal tem sido aceita como a única forma de validação dos seus resultados. Nesse sentido, a Matemática não é uma ciência empírica. Nenhuma verificação experimental ou medição feita em objetos físicos poderá, por exemplo, validar matematicamente o teorema de Pitágoras ou o teorema relativo à soma dos ângulos de um triângulo. Deve-se enfatizar, contudo, o papel heurístico que têm desempenhado os contextos materiais como fontes de conjecturas matemáticas.

Essas características permitem conceber o saber matemático como algo flexível e maleável às inter-relações entre os seus vários conceitos e entre os seus vários modos de representação, e, também, permeável aos problemas nos vários outros campos científicos. Um saber matemático desse tipo pode ser o motor de inovações e de superação dos obstáculos, desde os mais simples até aqueles que significam verdadeiras barreiras epistemológicas no seu desenvolvimento.

MATEMÁTICA E CONSTRUÇÃO DA CIDADANIA

Falar em formação básica para a cidadania significa refletir sobre as condições humanas de sobrevivência, sobre a inserção das pessoas no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura e sobre o desenvolvimento da crítica e do posicionamento diante das questões sociais. Assim, é importante refletir a respeito da colaboração que a Matemática tem a oferecer com vistas à formação da cidadania.

A sobrevivência na sociedade depende cada vez mais de conhecimento, pois diante da complexidade da organização social, a falta de recursos para obter e interpretar informações, impede a participação efetiva e a tomada de decisões em relação aos problemas sociais. Impede, ainda, o acesso ao conhecimento mais elaborado e dificulta o acesso às posições de trabalho.

Em função do desenvolvimento das tecnologias, uma característica contemporânea marcante no mundo do trabalho, exigem-se trabalhadores mais criativos e versáteis, capazes de entender o processo de trabalho como um todo, dotados de autonomia e iniciativa para resolver problemas em equipe e para utilizar diferentes tecnologias e linguagens (que vão além da comunicação oral e escrita). Isso faz com que os profissionais tenham de estar num contínuo processo de formação e, portanto, aprender a aprender torna-se cada vez mais fundamental.

No entanto, mesmo que o cidadão esteja qualificado para o mundo do trabalho, é verdade que ele terá de enfrentar uma acirrada disputa no campo profissional, pois o avanço tecnológico também gera diminuição de postos de trabalho, exigindo níveis de formação cada vez mais elevados. Por isso, na sociedade atual a um grande número de pessoas impõem-se novas necessidades de buscar formas alternativas para inserir-se na economia como a formação de cooperativas ou a atuação no mercado informal.

Parece haver um razoável consenso de que para responder a essas exigências é preciso elevar o nível da educação de toda a população. Desse modo, não cabe ao ensino fundamental preparar mão-de-obra especializada, nem se render, a todo instante, às oscilações do mercado de trabalho. Mas, é papel da escola desenvolver uma educação que não dissocie escola e sociedade, conhecimento e trabalho e que coloque o aluno ante desafios que lhe permitam desenvolver atitudes de responsabilidade, compromisso, crítica, satisfação e reconhecimento de seus direitos e deveres.

Nesse aspecto, a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.

Por outro lado, para a inserção de cada indivíduo no mundo das relações sociais, a escola deve estimular o crescimento coletivo e individual, o respeito mútuo e as formas diferenciadas de abordar os problemas que se apresentam.

Também é importante salientar que a compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais dependem da leitura crítica e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente etc.

No que se refere à inserção no mundo da cultura, a pluralidade de etnias existente no Brasil, que dá origem a diferentes modos de vida, valores, crenças e conhecimentos, apresenta-se para a educação matemática como um desafio interessante.

A par dos esquemas de pensamentos e práticas próprias das culturas de diferentes grupos sociais, todo aluno brasileiro faz parte de uma sociedade em que se fala uma mesma língua, utiliza o mesmo sistema de numeração, o mesmo sistema monetário; além disso, recebe informações veiculadas por mídias abrangentes, que usam de linguagens e recursos gráficos comuns, independentemente das características particulares dos grupos receptores.

Desse modo, um currículo de Matemática deve procurar contribuir, de um lado, para a valorização da pluralidade sociocultural, evitando o processo de submissão no confronto com outras culturas; de outro, criar condições para que o aluno transcenda um modo de vida restrito a um determinado espaço social e se torne ativo na transformação de seu ambiente.

Para que ocorram as inserções dos cidadãos no mundo do trabalho, no mundo das relações sociais e no mundo da cultura e para que desenvolvam a crítica diante das questões sociais, é importante que a Matemática desempenhe, no currículo, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.

A MATEMÁTICA E OS TEMAS TRANSVERSAIS

A proposta de trabalhar com questões de urgência social numa perspectiva de transversalidade aponta para o compromisso a ser partilhado pelos professores das áreas, uma vez que é o tratamento dado aos conteúdos de todas as áreas que possibilita ao aluno a compreensão de tais questões, o que inclui a aprendizagem de conceitos, procedimentos e o desenvolvimento de atitudes.

Assim, ela traz aos professores de cada área a necessidade de um estudo sobre tais questões, o que pode ser feito inicialmente por meio da leitura dos documentos de Temas Transversais, que fazem parte dos Parâmetros Curriculares Nacionais, e de sua discussão no âmbito da escola.

O trabalho educativo que ocorre na escola é sempre marcado por concepções, valores e atitudes, mesmo que não-explicitados e, muitas vezes, contraditórios. Desse modo, é fundamental que os professores planejem não apenas como as questões sociais vão ser abordadas em diferentes contextos de aprendizagem das varias áreas, mas também como elas serão tratadas no convívio escolar.

Em termos de operacionalização dos temas em cada área, é preciso levar em conta que eles precisam se articular à própria concepção da área, o que significa que isso vai ocorrer de diferentes maneiras de acordo com a natureza de cada tema e de cada área. Também é importante destacar que a perspectiva da transversalidade não pressupõe o tratamento simultâneo, e num único período, de um mesmo tema por todas as áreas, mas o que se faz necessário é que esses temas integrem o planejamento dos professores das diferentes áreas, de forma articulada aos objetivos e conteúdos delas.

Tendo em vista a articulação dos Temas Transversais com a Matemática algumas considerações devem ser ponderadas. Os conteúdos matemáticos estabelecidos no bloco Tratamento da Informação fornecem instrumentos necessários para obter e organizar as informações, interpretá-las, fazer cálculos e desse modo produzir argumentos para fundamentar conclusões sobre elas. Por outro lado, as questões e situações práticas vinculadas aos temas fornecem os contextos que possibilitam explorar de modo significativo conceitos e procedimentos matemáticos.

Ética

Em sociedade, a Matemática usufrui de um *status* privilegiado em relação a outras áreas do conhecimento, e isso traz como conseqüência o cultivo de crenças e preconceitos. Muitos acreditam que a Matemática é direcionada às pessoas mais talentosas e também que essa forma de conhecimento é produzida exclusivamente por grupos sociais ou sociedades mais desenvolvidas.

Embora equivocadas, essas idéias geram preconceitos e discriminações, no âmbito mais geral da sociedade, e também se refletem fortemente no convívio da escola, fazendo com que a Matemática acabe atuando como filtro social: de um modo direto porque é uma das áreas com maiores índices de reprovação no ensino fundamental e, indiretamente, porque seleciona os alunos que vão concluir esse segmento do ensino e de certa forma indica aqueles que terão oportunidade de exercer determinadas profissões.

De maneira geral a escola, hoje, se organiza e difunde os conhecimentos matemáticos partindo de uma concepção idealizada do que seja esse conhecimento e de como ele deva ser ensinado/aprendido, sem considerar a existência de estilos cognitivos próprios a cada indivíduo e sem levar em conta que habilidades cognitivas não podem ser avaliadas fora de um contexto cultural. Com essa atitude cometem-se agressões culturais, rotulando e discriminando alunos, em função de certas predominâncias de ordem sociocultural.

Além de cometer injustiça ao não reconhecer o conhecimento do aluno, quando esse conhecimento não coincide com o da cultura dominante, a escola assume uma postura essencialmente reprodutivista ao favorecer apenas os alunos que já têm certo domínio sobre as representações da Matemática valorizadas e difundidas por ela[4] .

Por outro lado, o ensino de Matemática muito pode contribuir para a formação ética à medida que se direcione a aprendizagem para o desenvolvimento de atitudes, como a

---

[4] D’AMBROSIO, U., 1997.

confiança dos alunos na própria capacidade e na dos outros para construir conhecimentos matemáticos, o empenho em participar ativamente das atividades em sala de aula e o respeito ao modo de pensar dos colegas.

Isso ocorrerá à medida que o professor valorizar a troca de experiências entre os alunos como forma de aprendizagem, promover o intercâmbio de idéias como fonte de aprendizagem, respeitar ele próprio o pensamento e a produção dos alunos e desenvolver um trabalho livre do preconceito de que Matemática é um conhecimento direcionado para poucos indivíduos talentosos.

A construção de uma visão solidária de relações humanas nas aulas de Matemática contribuirá para que os alunos superem o individualismo por meio do diálogo e da valorização da interação e da troca, percebendo que as pessoas se complementam e dependem umas das outras.

Orientação Sexual

Os conteúdos matemáticos permitem a construção de um instrumental fundamental para a compreensão e análise das questões relativas à sexualidade numa dimensão macrossocial. Por exemplo, é possível compreender por meio da análise de dados estatísticos a diferença de remuneração de trabalho de homens e mulheres e do acesso aos cargos de chefia; o aumento da incidência da gravidez prematura entre jovens e adolescentes; o comportamento das doenças sexualmente transmissíveis, e discutir e avaliar a eficiência das políticas públicas voltadas para essa questão.

As medidas estatísticas permitem aos jovens compreender, por exemplo, a evolução da Aids nos diferentes grupos: se, por um lado, o número de homens infectados é maior que o de mulheres, por outro, a taxa de crescimento da doença entre as mulheres é maior do que a dos homens — o que leva a prever que no futuro serão elas as maiores vítimas.

Por outro lado situar num mesmo patamar os papéis desempenhados por homens e mulheres na construção da sociedade contemporânea ainda encontra barreiras que ancoram expectativas bastante diferenciadas com relação ao papel futuro de meninos e meninas.

Essas expectativas talvez possam influenciar comportamentos e desempenhos dos jovens na aprendizagem das diferentes áreas que compõem o currículo. É possível mesmo que os próprios docentes, em decorrência de seus valores e de suas representações acerca das competências de ambos os sexos para aprender Matemática, contribuam para que rapazes e moças sintam-se mais ou menos capazes ante esse conhecimento.

Como importante instituição formadora de cidadãos, a escola não pode reafirmar os preconceitos em relação à capacidade de aprendizagem de alunos de diferentes sexos.

Esse preconceito, na maioria das vezes, é muito sutil e, dificilmente, o professor faz essa discriminação conscientemente. É importante, então, que os professores reflitam permanentemente sobre essas questões de gênero.

Meio Ambiente

A busca de caminhos pessoais e coletivos que levem ao estabelecimento de relações econômicas, sociais e culturais cada vez mais adequadas à promoção de uma boa qualidade de vida para todos, exige profundas mudanças na visão que ainda prevalece sobre o que se chama de natureza e sobre as relações estabelecidas entre a sociedade humana e seu ambiente de vida.

A perspectiva ambiental consiste num modo de ver o mundo em que se evidenciam as inter-relações e a interdependência dos diversos elementos na constituição e manutenção da vida neste planeta. Em termos de educação, essa perspectiva contribui para evidenciar a necessidade de um trabalho vinculado aos princípios da dignidade do ser humano, da participação, co-responsabilidade, solidariedade, eqüidade. E a necessidade de se estender o respeito e o compromisso com a vida — para além dos seres humanos — a todos os seres vivos.

A compreensão das questões ambientais pode ser favorecida pela organização de um trabalho interdisciplinar em que a Matemática esteja inserida. A quantificação de aspectos envolvidos em problemas ambientais favorece uma visão mais clara deles, possibilitando tomar decisões e fazer intervenções necessárias (reciclagem e reaproveitamento de materiais, por exemplo).

O estudo detalhado das grandes questões do Meio Ambiente — poluição, desmatamento, limites para uso dos recursos naturais, sustentabilidade, desperdício, camada de ozônio — pressupõe que o aluno tenha construído determinados conceitos matemáticos (áreas, volumes, proporcionalidade etc.) e procedimentos (coleta, organização, interpretação de dados estatísticos, formulação de hipóteses, realização de cálculos, modelização, prática da argumentação etc.).

Desse modo, as possibilidades de trabalhar as questões do Meio Ambiente em Matemática parecem evidentes.

Saúde

As questões relacionadas à saúde no Brasil são bastante complexas e muitas vezes contraditórias. Por um lado, há informações de que a média de nossos padrões de saúde é aceitável dentro dos critérios apresentados pela Organização Mundial de Saúde. Por outro, existem estatísticas alarmantes quanto aos índices da fome, da subnutrição e da mortalidade infantil em várias regiões do país.

Hoje também se sabe que a falta de condições básicas de subsistência está alterando as médias do desenvolvimento físico de muitos brasileiros. Enquanto em países da Europa e nos Estados Unidos essas médias estão aumentando, em algumas regiões do Brasil ela está diminuindo.

Outro indicador que costuma surpreender é o elevado número de médicos/população, freqüentemente apresentado por várias cidades brasileiras. À primeira vista, esses números dão a impressão de um bom atendimento na área da saúde. Mas, ao serem cruzados esses dados com outras informações — como, por exemplo, o tempo real de trabalho dos médicos que atuam no setor público, as condições de atendimento nos postos de saúde e hospitais públicos, a falta de medicamentos para atender a população — pode-se perceber que a primeira impressão é insuficiente para compreender a questão de um modo mais amplo.

A análise dessas situações, tão presentes na vida da maioria dos alunos, é bastante favorável para que eles compreendam a relatividade das medidas estatísticas e de como elas podem ser manipuladas, em função de determinados interesses.

Além de permitir a compreensão das questões sociais relacionadas aos problemas de saúde, as informações e dados estatísticos relacionados a esse tema também favorecem o estabelecimento de comparações e previsões que contribuem para o autoconhecimento, favorecendo o autocuidado.

Os levantamentos de saneamento básico, condições de trabalho, assim como o acompanhamento do próprio desenvolvimento físico (altura, peso, musculatura) e o estudo dos elementos que compõem a dieta básica, são alguns exemplos de trabalhos que podem servir de contexto para a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Pluralidade Cultural

A construção e a utilização do conhecimento matemático não são feitas apenas por matemáticos, cientistas ou engenheiros, mas, de formas diferenciadas, por todos os grupos socioculturais, que desenvolvem e utilizam habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar, em função de suas necessidades e interesses.

Valorizar esse saber matemático cultural e aproximá-lo do saber escolar em que o aluno está inserido, é de fundamental importância para o processo de ensino e aprendizagem.

Por outro lado, ao dar importância a esse saber, a escola contribui para a superação do preconceito de que a Matemática é um conhecimento construído exclusivamente por determinados grupos sociais ou sociedades mais desenvolvidas. Pela análise da história da produção do conhecimento matemático os alunos verificarão também as contribuições significativas de culturas que não tiveram hegemonia política. No estudo comparativo dos sistemas de numeração, por exemplo, poderão constatar a supremacia do sistema indo-arábico e concluir que a demora de sua adoção pelos europeus deveu-se também ao preconceito contra os povos de tez mais escura e não-cristãos. Outros exemplos poderão ser encontrados ao se pesquisar a produção do conhecimento matemático em culturas como a chinesa, a maia e a romana.

Desse modo, é possível visualizar melhor a dimensão da História da Matemática no currículo da escola fundamental como um campo de problemas para construção e evolução dos conceitos e como um elemento de integração da Matemática com o tema Pluralidade Cultural. Conhecer os obstáculos enfrentados pelo homem na produção e sistematização desse conhecimento também pode levar o professor a uma melhor compreensão e aceitação das dificuldades enfrentadas pelos alunos e pensar em estratégias mais adequadas para favorecer a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos.

Ainda com relação às conexões entre Matemática e Pluralidade Cultural, destaca-se, no campo da educação matemática brasileira, um trabalho que busca explicar, entender e conviver com procedimentos, técnicas e habilidades matemáticas desenvolvidas no entorno sociocultural próprio a certos grupos sociais. Trata-se do Programa Etnomatemática, com suas propostas para a ação pedagógica.

Tal programa não considera a Matemática como uma ciência neutra e contrapõe-se às orientações que a afastam dos aspectos socioculturais e políticos — fato que tem mantido essa área do saber atrelada apenas a sua própria dinâmica interna. Por outro lado, procura entender os processos de pensamento, os modos de explicar, de entender e de atuar na realidade, dentro do contexto cultural do próprio indivíduo. A Etnomatemática procura entender a realidade e chegar à ação pedagógica de maneira natural mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural.

Assim, tanto a História da Matemática como os estudos da Etnomatemática são importantes para explicitar a dinâmica da produção desse conhecimento, histórica e socialmente.

Trabalho e Consumo

Uma primeira aproximação entre o tema do Trabalho e a Matemática está em reconhecer que o conhecimento matemático é fruto do trabalho humano e que as idéias, conceitos e princípios que hoje são reconhecidos como conhecimento científico e fazem parte da cultura universal, surgiram de necessidades e de problemas com os quais os homens depararam ao longo da história e para os quais encontraram soluções brilhantes e engenhosas, graças a sua inteligência, esforço, dedicação e perseverança.

Todos os grupos sociais trabalham, seja em ocupação remunerada ou não, seja na produção de bens para a própria sobrevivência ou para a sobrevivência de outros. Assim, de formas diferenciadas e desiguais, as pessoas produzem e consomem bens, produtos e serviços, estabelecendo relações por meio de trocas de caráter econômico, político e cultural, produzindo modos de ser e de viver.

Numa sociedade que a cada dia se torna mais complexa, produzindo e incorporando informações novas a todo instante, alterando as relações e modos de vida em curtos espaços de tempo, o conhecimento em seus aspectos mais essenciais — ao qual a maioria da população só tem acesso pela via da escola — torna-se indispensável para desenvolver qualquer uma dessas formas de trabalho e como condição de uma sobrevivência digna.

Um outro ponto a ser considerado é a influência das mudanças tecnológicas nos meios de produção. Essas características dominantes neste final de século imprimem novos sistemas organizacionais ao trabalho. Sistemas que exigem trabalhadores versáteis, dotados de iniciativa e autonomia, capazes de resolver problemas em equipe, de interpretar informações, de adaptar-se a novos ritmos e de comunicar-se fazendo uso de diferentes formas de representação.

Porém, é preciso pensar que as transformações políticas e econômicas, muitas vezes decorrentes do próprio avanço tecnológico, afastam cada vez mais setores da população do usufruto dos direitos ao trabalho. Assim, para garantir a sobrevivência grandes contingentes da população têm de encontrar formas de organização de trabalho que rompam com o modelo clássico do emprego. Para atuarem no mercado informal ou organizarem formas alternativas como as cooperativas, também é preciso ter domínio dos conhecimentos essenciais.

Para atender as demandas do trabalho contemporâneo é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender Matemática na sala de aula. Também o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo favorecem o desenvolvimento dessas capacidades.

Nesse sentido, situações ligadas ao tema do trabalho podem se tornar contextos interessantes a serem explorados em sala de aula: o estudo de causas que determinam aumento/diminuição de empregos; pesquisa sobre oferta/procura de emprego; previsões sobre o futuro mercado de trabalho em função de indicadores atuais; pesquisas dos alunos dentro da escola ou na comunidade, a respeito dos valores que os jovens de hoje atribuem ao trabalho.

Questões comuns à problemática do trabalho e do consumo — que envolvem a relação entre produtividade e distribuição de bens — dependem não só do acesso a informações, mas também de todo um instrumental matemático que permite analisar e compreender os elementos da política econômica que direciona essa relação.

O discurso, bastante difundido, de que somos todos igualmente livres para trabalhar, escolher o tipo de trabalho e consumir, encobre as reais questões das desigualdades de acesso ao trabalho, aos bens de consumo e aos serviços. A compreensão da noção de renda *per capita*, assim como a comparação entre os percentuais que indicam a distribuição de salários pelas camadas da população brasileira, evidenciam o quanto esse discurso é falso.

Além disso, com a criação permanente de novas necessidades transformando bens supérfluos em vitais, a aquisição de bens se caracteriza pelo consumismo. O consumo é apresentado como forma e objetivo de vida.

É fundamental que nossos alunos aprendam a se posicionar criticamente diante dessas questões e compreendam que grande parte do que se consome é produto do trabalho, embora nem sempre se pense nessa relação no momento em que se adquire uma mercadoria.

É preciso mostrar que o objeto de consumo — seja um tênis ou uma roupa de marca, um produto alimentício ou aparelho eletrônico etc. — é fruto de um tempo de trabalho, realizado em determinadas condições. Quando se consegue comparar o custo da produção de cada um desses produtos com o preço de mercado é possível compreender que as regras do consumo são regidas por uma política de maximização do lucro e precarização do valor do trabalho.

Aspectos ligados aos direitos do consumidor também necessitam da Matemática para serem mais bem compreendidos. Por exemplo, para analisar a composição e a qualidade dos produtos e avaliar seu impacto sobre a saúde e o meio ambiente, ou para analisar a razão entre menor preço/maior quantidade. Nesse caso, situações de oferta como "compre 3 e pague 2" nem sempre são vantajosas, pois geralmente são feitas para produtos que não estão com muita saída — portanto, não há, muitas vezes, necessidade de comprá-los em grande quantidade — ou que estão com os prazos de validade próximos do vencimento.

Habituar-se a analisar essas situações é fundamental para que os alunos possam reconhecer e criar formas de proteção contra a propaganda enganosa e contra os estratagemas de *marketing* a que são submetidos os potenciais consumidores.

Aprender e ensinar Matemática no ensino fundamental

O estudo dos fenômenos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Matemática pressupõe a análise de variáveis envolvidas nesse processo — aluno, professor e saber matemático —, assim como das relações entre elas.

Numa reflexão sobre o ensino de Matemática é de fundamental importância ao professor:

- identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações;
- conhecer a história de vida dos alunos, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais;
- ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções.

O professor e o saber matemático

Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Tornar o saber matemático acumulado um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a idéia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência.

Além disso, essa transposição implica conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos e procedimentos para que o professor possa compreender melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos.

Esse processo de transformação do saber científico em saber escolar não passa apenas por mudanças de natureza epistemológica, mas é marcado significativamente por condições de ordem social e cultural que resultam na elaboração de saberes intermediários, como aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras.

Por outro lado, um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem. Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem novamente contextualizados em outras situações. Mesmo no ensino fundamental, espera-se que o conhecimento aprendido não fique indissoluvelmente vinculado a um contexto concreto e único, mas que possa ser generalizado, transferido a outros contextos.

O aluno e o saber matemático

As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado.

Por isso é fundamental não subestimar o potencial matemático dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, ao lançar mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscar estabelecer relações entre o já conhecido e o novo.

O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do conhecimento e as situações do cotidiano.

Ao relacionar idéias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição, decomposição, inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como no trabalho com o espaço, forma e medidas.

O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos.

As relações professor-aluno e aluno-aluno

Tradicionalmente, a prática mais freqüente no ensino de Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem.

Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos.

É relativamente recente a atenção ao fato de que o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas.

Naturalmente, à medida que se redefine o papel do aluno diante do saber, é preciso redimensionar também o papel do professor que ensina Matemática no ensino fundamental.

Numa perspectiva de trabalho em que se considere o aluno como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizador da aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, precisará escolher os problemas que possibilitam a construção de conceitos e procedimentos e alimentar os processos de resolução que surgirem, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir.

Além de organizador o professor também é facilitador nesse processo. Não mais aquele que expõe todo o conteúdo aos alunos, mas aquele que fornece as informações necessárias, que o aluno não tem condições de obter sozinho. Nessa função, faz explanações, oferece materiais, textos etc.

Outra de suas funções é como mediador, ao promover a análise das propostas dos alunos e sua comparação, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar. Nesse papel, o professor é responsável por arrolar os procedimentos empregados e as diferenças encontradas, promover o debate sobre resultados e métodos, orientar as reformulações e valorizar as soluções mais adequadas. Ele também decide se é necessário prosseguir o trabalho de pesquisa de um dado tema ou se é o momento de elaborar uma síntese, em função das expectativas de aprendizagem previamente estabelecidas em seu planejamento.

Atua também como organizador ao estabelecer as condições para a realização das atividades e fixar prazos, respeitando o ritmo de cada aluno.

Como um incentivador da aprendizagem, o professor estimula a cooperação entre os alunos, tão importante quanto a própria interação professor-aluno. O confronto entre o que o aluno pensa e o que pensam seus colegas, seu professor e as demais pessoas com quem convive é uma forma de aprendizagem significativa, principalmente por pressupor a necessidade de formulação de argumentos (dizendo, descrevendo, expressando) e de validá-los (questionando, verificando, convencendo).

Destaca-se ainda a tarefa de avaliador do processo, que também é parte integrante do papel do professor. Ao procurar identificar e interpretar, mediante observação, diálogo e instrumentos apropriados, sinais e indícios das competências desenvolvidas pelos alunos, o professor pode julgar se as capacidades indicadas nos objetivos estão se desenvolvendo a contento ou se é necessário reorganizar a atividade pedagógica para que isso aconteça. Também faz parte de sua tarefa como avaliador levar os alunos a ter consciência de suas conquistas, dificuldades e possibilidades para que possam reorganizar suas atitudes diante do processo de aprendizagem.

Além da interação entre professor-aluno, a interação entre alunos desempenha papel fundamental no desenvolvimento das capacidades cognitivas, afetivas e de inserção social. Em geral, explora-se mais o aspecto afetivo dessas interações e menos sua potencialidade em termos de construção de conhecimento. Ao tentar compreender outras formas de resolver uma situação, o aluno poderá ampliar o grau de compreensão das noções matemáticas nela envolvidas.

Assim, trabalhar coletivamente, por sua vez, favorece o desenvolvimento de capacidades como:

- perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso;
- saber explicitar o próprio pensamento e procurar compreender o pensamento do outro;
- discutir as dúvidas, supor que as soluções dos outros podem fazer sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias idéias;
- incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender.

Essas aprendizagens só serão possíveis à medida que o professor proporcionar um ambiente de trabalho que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar idéias.

É importante atentar para o fato de que a explicitação clara de papéis e de responsabilidades é fundamental para nortear as interações que ocorrem na sala de aula — entre professor e aluno ou entre alunos. Também é necessário avaliar em conjunto essas relações em função dos papéis e responsabilidades definidas para redirecionar os rumos do processo de ensino e aprendizagem.

Ao trabalhar com essas relações nos terceiro e quarto ciclos o professor deve levar em conta que os alunos adolescentes/jovens atuam mais em grupo do que individualmente e, por isso, a interlocução direta com um determinado aluno é mais difícil de se estabelecer, principalmente diante de outros alunos. Tal fato exige do professor uma profunda compreensão das mudanças pelas quais eles estão passando, além da perseverança e criatividade para organizar e conduzir as situações de ensino de modo que garanta suas participações e interesses.

A resolução de problemas e o ensino-aprendizagem de Matemática

Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

Todavia, tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos.

A prática mais freqüente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações.

Conseqüentemente, o saber matemático não se tem apresentado ao aluno como um conjunto de conceitos inter-relacionados, que lhes permite resolver um conjunto de problemas, mas como um interminável discurso simbólico, abstrato e incompreensível. Nesse caso, a concepção de ensino e aprendizagem subjacente é a de que o aluno aprende por reprodução/imitação.

A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança[5] .

A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática.

A resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pode ser resumida nos seguintes princípios:

- a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;

[5] SCHOENFELD, A. H., 1985.

- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;

- aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;

- um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;

- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Considerados esses princípios, convém precisar algumas características das situações que podem ser entendidas como problemas.

Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la.

Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução.

O que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função dos conhecimentos de que dispõe.

Resolver um problema pressupõe que o aluno:

- elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);

- compare seus resultados com os de outros alunos;

- valide seus procedimentos.

Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido.

Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar a importância do processo de resolução.

O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos — que admitem diferentes respostas em função de certas condições —, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos.

Alguns caminhos para "fazer Matemática" na sala de aula

É consensual a idéia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. Dentre elas, destacam-se a História da Matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução.

O RECURSO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.

Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural.

Ao verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração.

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

Assim, a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles. Por exemplo, isso fica evidente quando se percebe que a ampliação dos campos numéricos historicamente está associada à resolução de situações-problema que envolvem medidas.

Entretanto, essa abordagem não deve ser entendida simplesmente que o professor deva situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou contar sempre em suas aulas trechos da história da Matemática, mas que a encare como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, datas e nomes a serem memorizados.

O RECURSO ÀS TECNOLOGIAS DA COMUNICAÇÃO

As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas conseqüências no cotidiano das pessoas[6].

Estudiosos do tema mostram que escrita, leitura, visão, audição, criação e aprendizagem são influenciados, cada vez mais, pelos recursos da informática. Nesse cenário, insere-se mais um desafio para a escola, ou seja, o de como incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer.

Por outro lado, também é fato que as calculadoras, computadores e outros elementos tecnológicos estão cada vez mais presentes nas diferentes atividades da população.

O uso desses recursos traz significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática à medida que:

- relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;

[6] Para uma visão mais ampla e profunda sobre este assunto, consultar a quinta parte da Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais.

- evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
- possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
- permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo.

Embora os computadores ainda não estejam amplamente disponíveis para a maioria das escolas, eles já começam a integrar muitas experiências educacionais, prevendo-se sua utilização em maior escala a curto prazo.

Eles podem ser usados nas aulas de Matemática com várias finalidades:

- como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem;
- como auxiliar no processo de construção de conhecimento;
- como meio para desenvolver autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;
- como ferramenta para realizar determinadas atividades — uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc.

Além disso, tudo indica que pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus erros.

Por outro lado, o bom uso que se possa fazer do computador na sala de aula também depende da escolha de *softwares*, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo.

As experiências escolares com o computador também têm mostrado que seu uso efetivo pode levar ao estabelecimento de uma nova relação professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interação e colaboração. Isso define uma nova visão do professor, que longe de considerar-se um profissional pronto, ao final de sua formação acadêmica, tem de continuar em formação permanente ao longo de sua vida profissional.

Portanto, longe da idéia de que o computador viria substituir o professor, seu uso vem, sobretudo, reforçar o papel do professor na preparação, condução e avaliação do processo de ensino e aprendizagem.

Quanto ao uso da calculadora, constata-se que ela é um recurso útil para verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um valioso instrumento de auto-avaliação. A calculadora favorece a busca e percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problema pois ela estimula a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses, uma vez que os alunos ganham tempo na execução dos cálculos. Assim elas podem ser utilizadas como eficiente recurso para promover a aprendizagem de processos cognitivos.

Como exemplo de uma situação exploratória e de investigação que se tornaria imprópria sem o uso de calculadora, poder-se-ia imaginar um aluno sendo desafiado a descobrir e a interpretar os resultados que obtém quando divide um número sucessivamente por dois (se começar pelo 1, obterá 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; 0,03125; 0,015625). Usando a calculadora, podem colocar sua atenção no que está acontecendo com os resultados, compará-los, levantar hipóteses e estabelecer relações entre eles, construindo significado para esses números.

Além disso, ela possibilita trabalhar com valores da vida cotidiana cujos cálculos são mais complexos, como conferir os rendimentos na caderneta de poupança, cujo índice é um número com quatro casas decimais.

No mundo atual saber fazer cálculos com lápis e papel é uma competência de importância relativa e que deve conviver com outras modalidades de cálculo, como o cálculo mental, as estimativas e o cálculo produzido pelas calculadoras, portanto, não se pode privar as pessoas de um conhecimento que é útil em suas vidas.

A utilização de recursos como o computador e a calculadora pode contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática se torne uma atividade experimental mais rica, sem riscos de impedir o desenvolvimento do pensamento, desde que os alunos sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica e o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem.

Em Matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade. Um exemplo bastante conhecido é a representação do teorema de Pitágoras, mediante figuras que permitem “ver” a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos.

Outro aspecto a ser considerado é o fato de que hoje a computação gráfica é um recurso bastante estimulador para compreensão e análise do comportamento de gráficos de funções como as alterações que estes sofrem quando ocorrem mudanças nos parâmetros de suas equações.

Assim, a visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são aspectos importantes, pois auxiliam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades de expressão gráficas. A disponibilidade de modernos recursos para produzir imagens impõe a necessidade de atualização das imagens matemáticas, de acordo com as tendências tecnológicas e artísticas, incorporando a cor, os gráficos, a fotografia, assim como a importância de ensinar os alunos a fazer uso desses recursos.

Também a atual tecnologia de produção de vídeos educativos permite que conceitos, figuras, relações, gráficos sejam apresentados de forma atrativa e dinâmica. Nos vídeos, o ritmo e a cor são fatores estéticos importantes para captar o interesse do observador. Além disso, esse tipo de recurso possibilita uma observação mais completa e detalhada na medida em que permite parar a imagem, voltar, antecipar.

Mesmo o rádio, que à primeira vista parece limitado como meio para a aprendizagem, pode ser um importante recurso para fazer chegar a diferentes localidades programas educativos para formação de professores e alunos, além de ser um veículo de acesso à informação.

Assim, o que se propõe hoje é que o ensino de Matemática possa aproveitar ao máximo os recursos tecnológicos, tanto pela sua receptividade social como para melhorar a linguagem expressiva e comunicativa dos alunos.

É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais.

O RECURSO AOS JOGOS

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.

Na situação de jogo, muitas vezes, o critério de certo ou errado é decidido pelo grupo. Assim, a prática do debate permite o exercício da argumentação e a organização do pensamento.

Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes — enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório — necessárias para aprendizagem da Matemática.

Nos jogos de estratégia (busca de procedimentos para ganhar) parte-se da realização de exemplos práticos (e não da repetição de modelos de procedimentos criados por outros) que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático.

As atividades de jogos permitem ao professor analisar e avaliar os seguintes aspectos:

- compreensão: facilidade para entender o processo do jogo assim como o autocontrole e o respeito a si próprio;
- facilidade: possibilidade de construir uma estratégia vencedora;
- possibilidade de descrição: capacidade de comunicar o procedimento seguido e da maneira de atuar;
- estratégia utilizada: capacidade de comparar com as previsões ou hipóteses.

A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para o estudante e um estímulo para o desenvolvimento de sua competência matemática.

Além de ser um objeto sociocultural em que a Matemática está presente, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um “fazer sem obrigação externa e imposta”, embora demande exigências, normas e controle.

Objetivos gerais para o ensino fundamental

As finalidades do ensino de Matemática visando à construção da cidadania indicam como objetivos do ensino fundamental levar o aluno a:

- identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;

- fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
- selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
- sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções;
- interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Conteúdos de Matemática para o ensino fundamental

A discussão sobre a seleção e a organização de conteúdos tem como diretriz a consecução dos objetivos arrolados no item precedente e seu caráter de essencialidade ao desempenho das funções básicas do cidadão brasileiro.

SELEÇÃO DE CONTEÚDOS

Atualmente, há consenso a fim de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento). Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão "tratar" as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando idéias relativas à probabilidade e à combinatória.

O desafio que se apresenta é o de identificar, dentro de cada um desses vastos campos que conceitos, procedimentos e atitudes são socialmente relevantes. Também apontar em que medida os conteúdos contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, para a construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, para o desenvolvimento da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos.

Embora nestes Parâmetros a Lógica não se constitua como um assunto a ser tratado explicitamente, alguns de seus princípios podem e devem ser integrados aos conteúdos, desde os ciclos iniciais, uma vez que ela é inerente à Matemática. No contexto da construção do conhecimento matemático é ela que permite a compreensão dos processos; é ela que possibilita o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações, bem como o da capacidade de justificar por meio de uma demonstração formal.

A seleção de conteúdos a serem trabalhados pode se dar numa perspectiva mais ampla, ao procurar identificá-los como formas e saberes culturais cuja assimilação é essencial para que produza novos conhecimentos. Dessa forma, pode-se considerar que os conteúdos envolvem explicações, formas de raciocínio, linguagens, valores, sentimentos, interesses e condutas. Assim, nesses parâmetros os conteúdos estão dimensionados não só em conceitos, mas também em procedimentos e atitudes.

Conceitos permitem interpretar fatos e dados e são generalizações úteis que permitem organizar a realidade, interpretá-la e predizê-la. Sua aprendizagem desenvolve-se de forma gradual e em diferentes níveis e supõe o estabelecimento de relações com conceitos anteriores. Nos terceiro e quarto ciclos alguns conceitos serão consolidados, uma vez que eles já vêm sendo trabalhados desde os ciclos anteriores, como o conceito de número racional. Outros serão iniciados como noções/idéias que vão se completar e consolidar no ensino médio, como é o caso do conceito de número irracional.

Os procedimentos por sua vez estão direcionados à consecução de uma meta e desempenham um papel importante pois grande parte do que se aprende em Matemática são conteúdos relacionados a procedimentos. Os procedimentos não devem ser encarados apenas como aproximação metodológica para aquisição de um dado conceito, mas como conteúdos que possibilitem o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o saber fazer, aplicáveis a distintas situações. Esse “saber fazer” implica construir as estratégias e os procedimentos, compreendendo os conceitos e processos neles envolvidos. Nesse sentido, os procedimentos não são esquecidos tão facilmente. Exemplos de procedimentos: resolução de uma equação, traçar a mediatriz de um segmento com régua e compasso, cálculo de porcentagens etc.

As atitudes envolvem o componente afetivo — predisposição, interesse, motivação — que é fundamental no processo de ensino e aprendizagem. As atitudes têm a mesma importância que os conceitos e procedimentos, pois, de certa forma, funcionam como condições para que eles se desenvolvam. Exemplos de atitudes: perseverança na busca de soluções e valorização do trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação.

Os conteúdos selecionados aparecem organizados em blocos, que serão apresentados a seguir.

Números e Operações

Ao longo do ensino fundamental o conhecimento sobre os números é construído e assimilado pelo aluno num processo em que tais números aparecem como instrumento eficaz para resolver determinados problemas, e também como objeto de estudo em si mesmos, considerando-se, nesta dimensão, suas propriedades, suas inter-relações e o modo como historicamente foram constituídos.

Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático.

Com relação às operações, o trabalho a ser realizado se concentrará na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo, contemplando diferentes tipos — exato e aproximado, mental e escrito.

Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação.

Esse encaminhamento dado a Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio.

Espaço e Forma

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.

O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações.

Este bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas.

Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes.

Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Grandezas e Medidas

Este bloco caracteriza-se por sua forte relevância social devido a seu caráter prático e utilitário, e pela possibilidade de variadas conexões com outras áreas do conhecimento. Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano.

As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da idéia de proporcionalidade e um campo fértil para uma abordagem histórica.

Neste bloco serão tratadas diferentes grandezas (comprimento, massa, tempo, capacidade, temperatura etc.) incluindo as que são determinadas pela razão ou produto de duas outras (velocidade, energia elétrica, densidade demográfica etc.). Será explorada a utilização de instrumentos adequados para medi-las, iniciando também uma discussão a respeito de algarismo duvidoso, algarismo significativo e arredondamento. Outro conteúdo destacado neste bloco é a obtenção de algumas medidas não diretamente acessíveis, que envolvem, por exemplo, conceitos e procedimentos da Geometria e da Física.

Além disso, os conteúdos referentes a grandezas e medidas proporcionarão contextos para analisar a interdependência entre grandezas e expressá-la algebricamente.

Tratamento da Informação

A demanda social é que leva a destacar este tema como um bloco de conteúdo, embora pudesse ser incorporado aos anteriores. A finalidade do destaque é evidenciar sua importância, em função de seu uso atual na sociedade.

Integrarão este bloco estudos relativos a noções de Estatística e de probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos.

Com relação à Estatística, a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem freqüentemente em seu dia-a-dia. Além disso, calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos.

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis).

Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades.

ORGANIZAÇÃO DE CONTEÚDOS

Uma vez selecionados os conteúdos para o ensino fundamental, eles se organizam em ciclos e, posteriormente, em projetos que cada professor realizará ao longo de um ano letivo.

A organização de conteúdos pressupõe, portanto, que se analisem alguns pontos:

- a variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos, ou seja, ao planejar suas atividades, o professor procurará articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando a possibilitar a compreensão mais ampla que o aluno possa atingir a respeito dos princípios e métodos básicos do corpo de conhecimentos matemáticos (proporcionalidade, equivalência, indução, dedução etc.); além disso, buscará estabelecer ligações entre a Matemática, as situações cotidianas dos alunos e as outras áreas do conhecimento;
- as possibilidades de seqüenciar os conteúdos são múltiplas e decorrem mais das conexões que se estabelecem e dos conhecimentos já construídos pelos alunos do que da idéia de pré-requisito ou de uma sucessão de tópicos estabelecida *a priori*. Embora existam conhecimentos que precedam outros, a hierarquização entre eles não é tão rígida como tradicionalmente é apresentada;
- os conteúdos organizados em função de uma conexão não precisam ser esgotados necessariamente de uma única vez, embora deva-se chegar a algum nível de sistematização para que possam ser aplicados em novas situações. Alguns desses conteúdos serão aprofundados, posteriormente em outras conexões, ampliando dessa forma a compreensão dos conceitos e procedimentos envolvidos;
- os níveis de aprofundamento dos conteúdos em função das possibilidades de compreensão dos alunos, isto é, levando em conta que um mesmo tema será explorado em diferentes momentos da aprendizagem e que sua consolidação se dará pelo número cada vez maior de relações estabelecidas;
- a ênfase maior ou menor que deve ser dada a cada item, ou seja, que pontos merecem mais atenção e que pontos não são

tão essenciais; assim, por exemplo, o estudo da representação decimal dos números racionais é fundamental devido à disseminação das calculadoras e de outros instrumentos que a utilizam.

O detalhamento de conteúdos por ciclos, que será feito na seqüência deste documento, não implica sua imediata transposição para a prática da sala de aula. É fundamental ressaltar que, ao serem reinterpretados regionalmente (nos estados e municípios) e localmente (nas unidades escolares), os conteúdos, além de incorporar elementos específicos de cada realidade, serão organizados de forma articulada e integrada ao projeto educacional de cada escola.

Avaliação em Matemática

Mudanças na definição de objetivos para o ensino fundamental, na maneira de conceber a aprendizagem, na interpretação e na abordagem dos conteúdos matemáticos implicam repensar sobre as finalidades da avaliação, sobre o que e como se avalia, num trabalho que inclui uma variedade de situações de aprendizagem, como a resolução de problemas, o uso de recursos tecnológicos, entre outros.

Nesse sentido, é preciso repensar certas idéias que predominam sobre o significado da avaliação em Matemática, ou seja, as que concebem como prioritário avaliar apenas se os alunos memorizam as regras e esquemas, não verificando a compreensão dos conceitos, o desenvolvimento de atitudes e procedimentos e a criatividade nas soluções, que, por sua vez, se refletem nas possibilidades de enfrentar situações-problema e resolvê-las. Outra idéia dominante é a que atribui exclusivamente ao desempenho do aluno as causas das dificuldades nas avaliações.

Na atual perspectiva de um currículo de Matemática para o ensino fundamental, novas funções são indicadas à avaliação, na qual se destacam uma dimensão social e uma dimensão pedagógica.

No primeiro caso, atribui-se à avaliação a função de fornecer aos estudantes informações sobre o desenvolvimento das capacidades e competências que são exigidas socialmente, bem como auxiliar os professores a identificar quais objetivos foram atingidos, com vistas a reconhecer a capacidade matemática dos alunos, para que possam inserir-se no mercado de trabalho e participar da vida sociocultural.

No segundo caso, cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábitos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos ainda parcialmente consolidados.

Assim, é fundamental que os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação, sejam eles provas, trabalhos, registros das atitudes dos alunos, forneçam ao professor informações sobre as competências de cada aluno em resolver problemas, em utilizar a linguagem matemática adequadamente para comunicar suas idéias, em desenvolver raciocínios e análises e em integrar todos esses aspectos no seu conhecimento matemático.

As formas de avaliação devem contemplar também as explicações, justificativas e argumentações orais, uma vez que estas revelam aspectos do raciocínio que muitas vezes não ficam evidentes nas avaliações escritas.

Se os conteúdos estão dimensionados em conceitos, procedimentos e atitudes, cada uma dessas dimensões pode ser avaliada por meio de diferentes estratégias. A avaliação de conceitos acontece por meio de atividades voltadas à compreensão de definições, ao estabelecimento de relações, ao reconhecimento de hierarquias, ao estabelecimento de critérios para fazer classificações e também à resolução de situações de aplicação envolvendo conceitos. A avaliação de procedimentos implica reconhecer como eles são construídos e utilizados. A avaliação de atitudes pode ser feita por meio da observação do professor e pela realização de auto-avaliações.

O grau de complexidade a ser avaliado é definido por critérios traduzidos em afirmações que precisem o tipo de aprendizagem desejados. Por exemplo, numa situação de aprendizagem em que se avalia a capacidade de resolver problemas abertos, os critérios relevantes podem ser o planejamento correto da situação, a originalidade na resolução e a variedade de estratégias utilizadas.

É fundamental que na seleção desses critérios se contemple uma visão de Matemática como uma construção significativa, se reconheçam para cada conteúdo as possibilidades de conexões, se fomente um conhecimento flexível com várias possibilidades de aplicações, se inclua a valorização do progresso do aluno, tomando ele próprio como o referencial de análise, e não exclusivamente sua posição em relação à média de seu grupo classe.

Nesse sentido, a observação do trabalho individual do aluno permite a análise de erros. Na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução. Ao procurar identificar, mediante a observação e o diálogo, como o aluno está pensando, o professor obtém as pistas do que ele não está compreendendo e pode planejar a intervenção adequada para auxiliar o aluno a refazer o caminho.

Na tentativa de mudar os rumos do que habitualmente acontece nas avaliações em Matemática, alguns professores têm procurado elaborar instrumentos para registrar observações sobre os alunos. Um exemplo são as fichas para o mapeamento do desenvolvimento de atitudes, que incluem questões como: Procura resolver problemas por seus próprios meios? Faz perguntas? Usa estratégias criativas ou apenas as convencionais? Justifica as respostas obtidas? Comunica suas respostas com clareza? Participa dos trabalhos em grupo? Ajuda os outros na resolução de problemas? Contesta pontos que não compreende ou com os quais não concorda? Ao levantar indícios sobre o desempenho dos alunos, o professor deve ter claro o que pretende obter e que uso fará desses indícios.

Embora a avaliação esteja intimamente relacionada aos objetivos visados, estes nem sempre se realizam plenamente para todos os alunos. Por isso, constroem-se critérios de avaliação com a função de indicarem as expectativas de aprendizagem possíveis de serem desenvolvidas pelos alunos ao final de cada ciclo, com respeito às capacidades indicadas. A determinação desses critérios deve ser flexível e levar em conta a progressão de desempenho de cada aluno, as características particulares da classe em que o aluno se encontra e as condições em que o processo de ensino e aprendizagem se concretiza.

Síntese dos princípios norteadores

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática no ensino fundamental estão pautados por princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos, cujo objetivo principal é o de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença dessa área do conhecimento em diversos campos da atividade humana. São eles:

- a Matemática é importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, que por sua vez são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais;
- a Matemática pode e deve estar ao alcance de todos e a garantia de sua aprendizagem deve ser meta prioritária do trabalho docente;
- a atividade matemática escolar não é "olhar para coisas prontas e definitivas", mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade;
- o ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa;
- o ensino-aprendizagem de Matemática tem como ponto de partida a resolução de problemas;
- no ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com

representações (esquemas, tabelas, figuras, escritas numéricas); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados;

- a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas, entre ela e os Temas Transversais, entre ela e o cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos;
- a seleção e organização de conteúdos deve levar em conta sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno e não deve ter como critério apenas a lógica interna da Matemática;
- o conhecimento matemático é historicamente construído e, portanto, está em permanente evolução. Assim, o ensino de Matemática precisa incorporar essa perspectiva, possibilitando ao aluno reconhecer as contribuições que ela oferece para compreender as informações e posicionar-se criticamente diante delas;
- recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadoras, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão;
- a avaliação é parte do processo de ensino e aprendizagem. Ela incide sobre uma grande variedade de aspectos relativos ao desempenho dos alunos, como aquisição de conceitos, domínio de procedimentos e desenvolvimento de atitudes. Mas também devem ser avaliados aspectos como seleção e dimensionamento dos conteúdos, práticas pedagógicas, condições em que se processam o trabalho escolar e as próprias formas de avaliação.

MATEMÁTICA

2ª PARTE

TERCEIRO CICLO

Ensino e aprendizagem de Matemática no terceiro ciclo

A caracterização do aluno de terceiro ciclo não é algo que possa ser feito de maneira simplificada. Nessa etapa da escolaridade convivem alunos de 11 e 12 anos, com características muitas vezes ainda bastante infantis, e alunos mais velhos, que já passaram por uma ou várias experiências de reprovação ou de interrupção dos estudos, sendo que, dentre estes, muitos já trabalham e assumem responsabilidades perante a família.

Principalmente no caso dos adolescentes, as significativas mudanças que interferem em seu desenvolvimento físico, emocional e psicológico repercutem fortemente no comportamento e trazem preocupações relacionadas ao futuro profissional, à vida afetiva, à sexualidade e à necessidade de liberdade.

Junto a certa instabilidade, medo e insegurança, que caracterizam as reações dos adolescentes diante das situações diversas, intensifica-se a capacidade para questionar, acirra-se a crítica, às vezes pouco fundamentada, que faz com que coloquem em dúvida a importância de certos valores, atitudes e comportamentos e, inclusive, a necessidade de certas aprendizagens.

Na escola tal comportamento costuma ser interpretado como falta de respeito, gerando conflitos no relacionamento entre professores e os alunos. Também é comum certa decepção, por parte dos professores, que esperam, de alunos desse ciclo, mais autonomia, maior capacidade de organização e maturidade.

Acentuando esse descompasso, a passagem para o terceiro ciclo marca o início da convivência do aluno com uma organização escolar com a qual não está habituado, horário compartilhado por diferentes matérias e diferentes professores, níveis de exigências distintos, posições variadas quanto à conduta em sala de aula e à organização do trabalho escolar, diferentes concepções quanto à relação professor-aluno.

A despeito da grande instabilidade que caracteriza a adolescência, a mudança de ciclo traz ainda, para os alunos, um aumento crescente de pressões e exigências.

Também em termos da organização curricular, há uma grande ruptura nesse ciclo em relação ao que vinha sendo desenvolvido anteriormente, pois os conhecimentos passam a se dividir em disciplinas distintas umas das outras, abordadas de forma isolada.

No caso da Matemática, há uma forte tendência em fazer do primeiro ano deste ciclo um ano de revisão dos conteúdos estudados em anos anteriores. De modo geral, os professores avaliam que os alunos vêm do ciclo anterior com um domínio de conhecimentos muito aquém do desejável e acreditam que, para resolver o problema, é necessário fazer uma retomada dos conteúdos.

No entanto, essa retomada é desenvolvida de forma bastante esquemática, sem uma análise de como esses conteúdos foram trabalhados no ciclo anterior e em que nível de aprofundamento foram tratados. Assim, a revisão infindável de tópicos causa grande desinteresse aos alunos e, ao final, fica a sensação de que a série inicial do terceiro ciclo é uma série “desperdiçada”.

O estudo repetitivo da maioria dos conteúdos, paradoxalmente, contribui para o fracasso escolar comprovado pelos elevados índices de retenção que aparecem no primeiro ano desse ciclo.

No ano seguinte, alguns conteúdos novos são explorados, o que garante, de certo modo, maior interesse por parte dos alunos. Porém, diferentemente do trabalho realizado nos ciclos anteriores, o vínculo da Matemática com as situações do cotidiano, a possibilidade de levantar hipóteses, de arriscar-se na busca de resultados sem a tutela do professor, vão ficando cada vez mais distantes.

A Matemática começa, desse modo, a se configurar para os alunos como algo que foge à sua possibilidade de compreensão, que é de pouca utilidade prática, gerando representações e sentimentos que vão se concretizar muitas vezes no divórcio entre aluno e conhecimento matemático.

Se por um lado, nessa fase do desenvolvimento dos alunos, acentuam-se de modo geral as atitudes de insegurança, por outro lado, ampliam-se as capacidades para estabelecer inferências e conexões lógicas, para tomar algumas decisões, para abstrair significados e idéias de maior complexidade, para argumentar expressando idéias e pontos de vista com mais clareza. Outro aspecto que se evidencia é a maior possibilidade de compreender e utilizar recursos tecnológicos.

Num quadro complexo como esse é necessário refletir sobre o que é possível fazer para minimizar os problemas que caracterizam a passagem dos alunos para o terceiro ciclo.

Dentre os aspectos a serem considerados para reverter esse quadro, destaca-se a importância de levar efetivamente em conta que os alunos chegam ao terceiro ciclo com uma bagagem razoável de conhecimentos matemáticos e que é fundamental dar continuidade ao processo de consolidação desses conhecimentos. No entanto, ocorre muitas vezes que esses alunos não conseguem exprimir suas idéias usando adequadamente a linguagem matemática; isso não significa que não tenham construído nenhum tipo de conceito ou desenvolvido procedimentos. Por isso, é fundamental diagnosticar o domínio que cada aluno tem sobre os diferentes conteúdos que serão explorados e identificar quais são suas possibilidades e dificuldades diante da aprendizagem desses conteúdos.

Outro aspecto importante que o professor precisa levar em conta consiste em canalizar para a aprendizagem toda a ebulição desse espírito questionador, que estimula os alunos a buscar explicações e finalidades para as coisas, discutindo questões relativas à utilidade da Matemática, como ela foi construída, como pode contribuir para a solução tanto de problemas do cotidiano como de problemas ligados à investigação científica. Desse modo, o aluno pode identificar os conhecimentos matemáticos como meios que o auxiliam a compreender e atuar no mundo.

Assim, é fundamental que os alunos ampliem os significados que possuem acerca dos números e das operações, busquem relações existentes entre eles, aprimorem a capacidade de análise e de tomada de decisões, que começam a se manifestar. Também é necessário explorar o potencial crescente de abstração, fazendo com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas. Com isso criam-se condições para que o aluno perceba que a atividade matemática estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos.

O estímulo à capacidade de ouvir, discutir, escrever, ler idéias matemáticas, interpretar significados, pensar de forma criativa, desenvolver o pensamento indutivo/dedutivo, é o caminho que vai possibilitar a ampliação da capacidade para abstrair elementos comuns a várias situações, para fazer conjecturas, generalizações e deduções simples como também para o aprimoramento das representações, ao mesmo tempo que permitirá aos alunos irem se conscientizando da importância de comunicar suas idéias com concisão.

Também a aprendizagem de certas atitudes é fundamental para que os alunos possam se concentrar em aprendizagens reflexivas. É preciso ajudá-los a se adaptarem a novas situações de aprendizagem, já que eles não têm muita flexibilidade para isso. É preciso ajudá-los a aceitar as diversas soluções dos colegas, pois nessa fase costumam ser reticentes a admitir soluções diferentes das suas, quando não as compreendem plenamente. É necessário, portanto, ajudá-los a compreender a lógica de outras soluções.

Neste ciclo, é preciso desenvolver o trabalho matemático ancorado em relações de confiança entre o aluno e o professor e entre os próprios alunos, fazendo com que a aprendizagem seja vivenciada como uma experiência progressiva, interessante e formativa, apoiada na ação, na descoberta, na reflexão, na comunicação. É preciso ainda que essa aprendizagem esteja conectada à realidade, tanto para extrair dela as situações-problema para desenvolver os conteúdos como para voltar a ela para aplicar os conhecimentos construídos.

Assim, o professor deve organizar seu trabalho de modo que os alunos desenvolvam a própria capacidade para construir conhecimentos matemáticos e interagir de forma cooperativa com seus pares, na busca de soluções para problemas, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Objetivos de Matemática para o terceiro ciclo

Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento:

- Do pensamento numérico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
  - ampliar e construir novos significados para os números — naturais, inteiros e racionais — a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;
  - resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
  - identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos;
  - selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta.
- Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
  - reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
  - traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;
  - utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.
- Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
  - resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção

e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas;

* estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações;

* resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução.

- Da competência métrica, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

  * ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns dos problemas históricos que motivaram sua construção;

  * resolver problemas que envolvam diferentes grandezas, selecionando unidades de medida e instrumentos adequados à precisão requerida.

- Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

  * observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade.

- Do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

  * coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, formular argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas;

  * resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão.

Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no terceiro ciclo

Para o estudo dos conteúdos apresentados no bloco Números e Operações é fundamental a proposição de situações-problema que possibilitem o desenvolvimento do sentido numérico e os significados das operações.

Com relação aos números naturais, muitas vezes se considera que o trabalho com eles se encerra no final do segundo ciclo; no entanto, é fundamental que o aluno continue a explorá-los em situações de contagem, de ordenação, de codificação em que tenha oportunidade de realizar a leitura e escrita de números “grandes” e desenvolver uma compreensão mais consistente das regras que caracterizam o sistema de numeração que utiliza. É pouco provável que ele tenha desenvolvido plenamente essas noções, tendo em vista a complexidade dos conteúdos, como saber quantos agrupamentos de centena são necessários para construir uma dezena de milhar — relações de inclusão. Também os estudos relacionados ao desenvolvimento histórico dos números podem fornecer excelentes contextos para evidenciar as regras desse sistema e a necessidade da construção de números, que não os naturais.

Conceitos como os de “múltiplo” e “divisor” de um número natural ou o conceito de “número primo” podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver.

Os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise de diferentes situações em que esses números estejam presentes. Eles podem representar diferença, “falta”, orientação e posições relativas. As primeiras abordagens dos inteiros podem apoiar-se nas idéias intuitivas que os alunos já têm sobre esses números por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou outras situações.

O estudo desses números não poderá, no entanto, restringir-se apenas a esses aspectos mas incorporar situações que permitam a compreensão das regras do cálculo com os inteiros pela observação de regularidades e aplicação das propriedades das operações com os naturais.

O estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merecem especial atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador.

A resolução de situações-problema com números naturais, racionais e inteiros permite, neste ciclo, a ampliação do sentido operacional, que se desenvolve simultaneamente à compreensão dos significados dos números.

A esse respeito convém salientar que a resolução de situações-problema com diferentes tipos de números é pouco trabalhada neste ciclo (e menos ainda no quarto ciclo), não possibilitando aos alunos ampliar ou construir novos significados, seja para a adição/subtração, multiplicação/divisão ou para a potenciação/radiciação.

O fato de que muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real. Assim, é desejável explorar no terceiro ciclo problemas que levem os alunos a fazer predições por meio de questões que envolvam aspectos qualitativos e quantitativos (O número encontrado deveria ser maior ou menor? Quanto maior? Essa resposta faz sentido?). Para resolver esses problemas os alunos poderão construir procedimentos não-convencionais, deixando para o quarto ciclo o estudo dos procedimentos convencionais.

Neste ciclo, os alunos devem ser estimulados a aperfeiçoar seus procedimentos de cálculo aritmético, seja ele exato ou aproximado, mental ou escrito, desenvolvido a partir de procedimentos não-convencionais ou convencionais, com ou sem uso de calculadoras. Certamente, eles ainda não têm domínio total de algumas técnicas operatórias, como da multiplicação e da divisão envolvendo números naturais, compostos de várias ordens, ou aquelas com números decimais, e isso precisa ser trabalhado sistematicamente. O importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos (“divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima”, “inverte a segunda e multiplica”) e os procedimentos mecânicos que limitam, de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo.

Com relação aos recursos de que o professor pode lançar mão no terceiro ciclo, a calculadora, apesar das controvérsias que tem provocado, tem sido enfaticamente recomendada pela maioria dos pesquisadores e mesmo pelos professores do ensino fundamental. Dentre as várias razões para seu uso, ressalta-se a possibilidade de explorar problemas com números freqüentes nas situações cotidianas e que demandam cálculos mais complexos, como: os fatores utilizados na conversão de moedas, os índices com quatro casas decimais (utilizados na correção da poupança), dos descontos como 0,25% etc.

Geralmente a escola se afasta desses dados reais e mesmo dos problemas aos quais eles estão associados com a intenção de facilitar os cálculos, quando ela deveria promover a aproximação da atividade matemática com a realidade em que se encontram esses problemas.

O uso de símbolos e da linguagem matemática para representar números pode ser estudado do ponto de vista histórico e também do ponto de vista prático. Neste ciclo, os alunos têm boas condições para perceber que os números têm múltiplas representações e compreender melhor as relações entre representações fracionárias e decimais, frações equivalentes, escritas percentuais e até a notação científica.

No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em seqüências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra.

Devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos não é desejável que no terceiro ciclo se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações. É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o que se recomenda é que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no quarto ciclo.

Neste ciclo, os alunos reorganizam e ampliam os conhecimentos sobre Espaço e Forma abordados no ciclo anterior, trabalhando com problemas mais complexos de localização no espaço e com as formas nele presentes. Assim é importante enfatizar as noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo, as classificações das figuras geométricas (quanto à planicidade, quanto à dimensionalidade), as relações entre figuras espaciais e suas representações planas, a exploração das figuras geométricas planas, pela sua decomposição e composição, transformação (reflexão, translação e rotação), ampliação e redução.

A partir de contextos que envolvam a leitura de guias, plantas e mapas pode-se propor um trabalho para que os alunos localizem pontos, interpretem deslocamentos no plano e desenvolvam a noção de coordenadas cartesianas, percebendo que estas constituem um modo organizado e convencionado, ou seja, um sistema de referência para representar objetos matemáticos como ponto, reta e curvas. Também é interessante que os alunos percebam a analogia entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas geográficas.

Ainda neste ciclo, as atividades geométricas centram-se em procedimentos de observação, representações e construções de figuras, bem como o manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras. Desse modo, o estudo do espaço e das formas privilegiará a observação e a compreensão de relações e a utilização das noções geométricas para resolver problemas, em detrimento da simples memorização de fatos e de um vocabulário específico. Porém, isso não significa que não se deva ter preocupação em levar os alunos a fazer uso de um vocabulário mais preciso.

Outro aspecto que merece atenção neste ciclo é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes.

É importante que essas atividades sejam conduzidas, de forma que mantenha ligações estreitas com o estudo de outros conteúdos, em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade.

Com relação ao bloco Grandezas e Medidas destaca-se a importância em proporcionar aos alunos experiências que permitam ampliar sua compreensão sobre o processo de medição e perceber que as medidas são úteis para descrever e comparar fenômenos. O estudo de diferentes grandezas, de sua utilização no contexto social e de problemas históricos ligados a elas geralmente desperta o interesse dos alunos.

A exploração de medidas relativas a comprimento, massa, capacidade, superfície, tempo, temperatura, iniciada nos ciclos anteriores, é ampliada, incorporando-se o estudo das medidas de ângulo, de volume e de algumas unidades da informática como quilobytes, megabytes, que se estão tornando usuais em determinados contextos. O trabalho com medidas deve centrar-se fortemente na análise de situações práticas que levem o aluno a aprimorar o sentido real das medidas.

Por meio de situações-problema, extraídas dos contextos práticos em que essas grandezas se encontram — como na arquitetura, nas artes, nos esportes, na culinária, nas atividades comerciais e na leitura de mapas, plantas e croquis — evidenciam-se para os alunos as aplicações práticas da Matemática e a necessidade de contar com unidades padronizadas e com sistemas comuns de medida e também a necessidade de encontrar estimativas plausíveis.

A natureza aproximada das medidas constitui um aspecto numérico que merece atenção especial. Além de orientar os alunos para que desenvolvam estratégias de estimativa e aprendam a julgar o grau de exatidão necessário para uma situação particular, é importante ensiná-los a utilizar adequadamente instrumentos como balanças, relógios, escalímetro, transferidor, esquadro, trenas, cronômetros e a selecionar os instrumentos e as unidades de medida adequadas à exatidão desejada.

Além de fornecer os contextos práticos para a realização da atividade matemática é importante pensar nas Grandezas e Medidas como um bloco que possibilita férteis articulações com os outros blocos de conteúdos, uma vez que seu estudo está fortemente conectado com o estudo da Geometria e com os diferentes tipos de números.

Assim, neste ciclo, o trabalho com medidas buscará privilegiar as atividades de resolução de problemas e a prática de estimativas em lugar da memorização sem compreensão de fórmulas e de conversões entre diferentes unidades de medidas, muitas vezes pouco usuais.

Quanto ao bloco Tratamento da Informação, se nos ciclos anteriores os alunos começaram a explorar idéias básicas de estatística — aprendendo a coletar e organizar dados em tabelas e gráficos, a estabelecer relações entre acontecimentos, a fazer algumas previsões, a observar a freqüência de ocorrência de um acontecimento — neste ciclo é importante fazer com que ampliem essas noções, aprendendo também a formular questões pertinentes para um conjunto de informações, a elaborar algumas conjecturas e comunicar informações de modo convincente, a interpretar diagramas e fluxogramas.

No decorrer desse trabalho é possível iniciar o estudo das medidas estatísticas, como a média aritmética que possibilitará uma interpretação mais aperfeiçoada dos dados.

É recomendável que seja privilegiada uma abordagem dos conteúdos que evidencie a função dos elementos estatísticos — apresentação global da informação, leitura rápida, destaque dos aspectos relevantes — e que mostre a importância dos procedimentos associados a eles para descrever, analisar, avaliar e tomar decisões.

Neste ciclo, também amplia-se a exploração das possibilidades de quantificar o incerto. Com as noções elementares de probabilidade os alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (moedas, dados, cartas). Assim, poderão ir se familiarizando com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana.

Os conteúdos que constituem o bloco Tratamento da Informação propiciam estabelecer ligações entre a Matemática e os conteúdos de outras áreas e com os Temas Transversais, à medida que o aluno os perceba como instrumentos essenciais para a constituição de uma atitude crítica diante de questões sociais, políticas, culturais, científicas da atualidade.

No terceiro ciclo é importante que os alunos sejam estimulados a construir e analisar diferentes processo de resolução de situações-problema e compará-los. Ao desenvolver a capacidade de buscar soluções favorece a que o aluno passe a reconhecer a necessidade de construir argumentos plausíveis.

A argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la.

Assim, um argumento será aceito se for pertinente, ou seja, se ele estiver sustentado por conteúdos matemáticos e se for possível responder aos contra-argumentos ou réplicas que lhe forem impostos.

Uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração.

Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração.

Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas.

CONCEITOS E PROCEDIMENTOS

Números e Operações

- Reconhecimento dos significados dos números naturais em diferentes contextos e estabelecimento de relações entre números naturais, tais como “ser múltiplo de”, “ser divisor de”.
- Compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão das regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal.
- Reconhecimento de números inteiros em diferentes contextos — cotidianos e históricos — e exploração de situações-problema em que indicam falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos.
- Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos — cotidianos e históricos — e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador.
- Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações.
- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema.
- Cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações — com números naturais, inteiros e

racionais —, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados.

- Compreensão da potência com expoente inteiro positivo como produto reiterado de fatores iguais, identificando e fazendo uso das propriedades da potenciação em situações-problema.
- Atribuição de significado à potência de expoente nulo e negativo pela observação de regularidades e pela extensão das propriedades das potências com expoente positivo.
- Compreensão da raiz quadrada e cúbica de um número, a partir de problemas como a determinação do lado de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de volume dado.
- Cálculos aproximados de raízes quadradas por meio de estimativas e fazendo uso de calculadoras.
- Resolução de situações-problema que envolvem a idéia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não-convencionais.
- Resolução de problemas de contagem, incluindo os que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de esquemas e tabelas.
- Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas seqüências numéricas.
- Compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas.
- Construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

Espaço e Forma

- Interpretação, a partir de situações-problema (leitura de plantas, croquis, mapas), da posição de pontos e de seus deslocamentos no plano, pelo estudo das representações em um sistema de coordenadas cartesianas.
- Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e

tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria.

- Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados.
- Composição e decomposição de figuras planas.
- Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros.
- Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área).
- Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números.
- Construção da noção de ângulo associada à idéia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas.
- Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Grandezas e Medidas

- Reconhecimento de grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo uso de terminologia própria.

- Reconhecimento e compreensão das unidades de memória da informática, como bytes, quilobytes, megabytes e gigabytes em contextos apropriados, pela utilização da potenciação.
- Obtenção de medidas por meio de estimativas e aproximações e decisão quanto a resultados razoáveis dependendo da situação-problema.
- Utilização de instrumentos de medida, como régua, escalímetro, transferidor, esquadro, trena, relógios, cronômetros, balanças para fazer medições, selecionando os instrumentos e unidades de medida adequadas à precisão que se requerem, em função da situação-problema.
- Compreensão da noção de medida de superfície e de equivalência de figuras planas por meio da composição e decomposição de figuras.
- Cálculo da área de figuras planas pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas.
- Indicar o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior.
- Estabelecimento de conversões entre algumas unidades de medida mais usuais (para comprimento, massa, capacidade, tempo) em resolução de situações-problema.

Tratamento da Informação

- Coleta, organização de dados e utilização de recursos visuais adequados (fluxogramas, tabelas e gráficos) para sintetizá-los, comunicá-los e permitir a elaboração de conclusões.
- Leitura e interpretação de dados expressos em tabelas e gráficos.
- Compreensão do significado da média aritmética como um indicador da tendência de uma pesquisa.
- Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias.

- Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão.

Atitudes

- Desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados.
- Predisposição para alterar a estratégia prevista para resolver uma situação-problema quando o resultado não for satisfatório.
- Reconhecimento que pode haver diversas formas de resolução para uma mesma situação-problema e conhecê-las.
- Valorização e uso da linguagem matemática para expressar-se com clareza, precisão e concisão.
- Valorização do trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação.
- Interesse pelo uso dos recursos tecnológicos, como instrumentos que podem auxiliar na realização de alguns trabalhos, sem anular o esforço da atividade compreensiva.

Critérios de avaliação para o terceiro ciclo

Os critérios de avaliação explicitam as expectativas de aprendizagem, considerando objetivos e conteúdos propostos para a Matemática no terceiro ciclo, e apontam as experiências educativas a que os alunos devem ter acesso e que são consideradas essenciais para o seu desenvolvimento e socialização.

Nesse sentido, eles procuram refletir de forma equilibrada os diferentes tipos de capacidades e as três dimensões dos conteúdos (conceitos, procedimentos e atitudes) de modo que o professor possa identificar assuntos que necessitam ser retomados e organizar novas situações que possibilitem sua efetiva aprendizagem.

Os critérios não expressam todos os conteúdos que foram trabalhados no ciclo, mas apenas aqueles que são fundamentais para que se possa considerar que um aluno desenvolveu as capacidades previstas de modo que possa continuar aprendendo no ciclo seguinte, sem que seu aproveitamento seja comprometido.

Os critérios de avaliação definidos, ainda que indiquem o tipo e o grau de aprendizagem que se espera que os alunos tenham realizado a respeito dos diferentes conteúdos, apresentam formulação suficientemente ampla como referência para as adaptações necessárias em cada escola, de modo que possam se constituir em critérios reais para a avaliação.

- **Decidir sobre os procedimentos matemáticos adequados para construir soluções num contexto de resolução de problemas numéricos, geométricos ou métricos.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de interpretar uma situação-problema, distinguir as informações necessárias das supérfluas, planificar a resolução, identificar informações que necessitam ser levantadas, estimar (ou prever) soluções possíveis, decidir sobre procedimentos de resolução a serem utilizados, investigar, justificar, argumentar e comprovar a validade de resultados e apresentá-los de forma organizada e clara.

- **Utilizar os diferentes significados e representações dos números naturais, inteiros, racionais e das operações envolvendo esses números, para resolver problemas, em contextos sociais, matemáticos ou de outras áreas do conhecimento.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de comparar e ordenar números naturais, inteiros e racionais; reconhecendo suas diferentes formas de expressão como fracionária, decimal e percentual; representar na forma decimal um número racional expresso em notação fracionária; efetuar cálculos envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação; escolher adequadamente os procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função dos contextos dos problemas, dos números e das operações envolvidas.

- **Utilizar a linguagem algébrica para representar as generalizações inferidas a partir de padrões, tabelas e gráficos em contextos numéricos e geométricos.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de utilizar representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas seqüências numéricas, assim como construir procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

- **Utilizar as noções de direção, sentido, ângulo, paralelismo e perpendicularismo para representar num sistema de coordenadas a posição e a translação de figuras no plano.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de utilizar as noções geométricas como paralelismo, perpendicularismo, ângulo, direção, sentido, para descrever e representar a posição e o deslocamento de figuras no referencial cartesiano.

- **Analisar, classificar e construir figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais, utilizando as noções geométricas como ângulos, paralelismo, perpendicularismo, estabelecendo relações e identificando propriedades.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de identificar figuras planas (polígonos e círculo) e espaciais (prismas e pirâmides, poliedros regulares, esfera, cilindro, cone), descrever elementos das figuras bidimensionais e tridimensionais, construir modelos dessas figuras, interpretar e obter representações planas de figuras tridimensionais, bem como realizar classificações utilizando-se das noções de paralelismo, de perpendicularismo e de ângulo.

- **Obter e expressar resultados de medições, utilizando as principais unidades padronizadas de medida de comprimento, capacidade, massa, superfície, volume, ângulo e tempo.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de obter resultados de diferentes medições, escolhendo e utilizando unidades de medida padronizadas, instrumentos apropriados e expressar os resultados em função do grau de precisão desejável e indicado pelo contexto da situação-problema.

- **Construir, ler e interpretar tabelas e gráficos e escolher o tipo de representação gráfica mais adequada para expressar dados estatísticos.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de recolher dados e organizá-los em tabelas e gráficos, escolhendo as representações mais apropriadas para comunicá-los.

- **Resolver problemas de contagem e indicar as possibilidades de sucesso de um evento por meio de uma razão.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de resolver problemas de contagem com quantidades que possibilitem obter o número de agrupamentos, utilizando procedimentos diversos, como a construção de diagrama de árvore, tabelas etc., sem o uso de fórmulas. Verifica, também, se o aluno é capaz de indicar a probabilidade de sucesso de um evento por meio de uma razão, construindo um espaço amostral em situações como o lançamento de dados, moedas etc.

QUARTO CICLO

Ensino e aprendizagem de Matemática no quarto ciclo

No quarto e último ciclo do ensino fundamental, muitos alunos ainda estão às voltas com um processo de mudanças corporais, e de inquietações emocionais e psicológicas, que repercutem na vida afetiva, na sexualidade, nas relações com a família e também na escola. Também nessa época começa a se configurar para esses alunos uma nova e grande preocupação, a continuidade dos estudos e o futuro profissional.

Também é fato que alguns alunos já estão inseridos no mercado de trabalho, assumindo responsabilidades perante a família e ansiosos por melhores condições de vida. Pode-se dizer mesmo que, ao longo desse ciclo, para grande parte dos alunos começa a se esboçar um projeto de vida para o qual é necessário concluir o ensino fundamental.

Essas novas preocupações, que se instalam na vida dos jovens, podem interferir positivamente no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, quando o aluno avalia que os conhecimentos dos quais se apropria na escola são fundamentais para seus estudos futuros e para que possa inserir-se, como profissional, no mundo do trabalho.

Para que isso aconteça é preciso que a aprendizagem da Matemática esteja ancorada em contextos sociais que mostrem claramente as relações existentes entre conhecimento matemático e trabalho.

No entanto, para a grande maioria dos alunos essas relações não estão bem definidas. Muitos têm a sensação de que a Matemática é uma matéria difícil e que seu estudo se resume em decorar uma série de fatos matemáticos, sem compreendê-los e sem perceber suas aplicações e que isso lhes será de pouca utilidade. Tal constatação os leva a assumir atitudes bastante negativas, que se manifestam no desinteresse, na falta de empenho e mesmo na pouca preocupação diante de resultados insatisfatórios ou nos sentimentos de insegurança, bloqueio e até em certa convicção de que são incompetentes para aprendê-la, o que os leva a se afastar da Matemática em situações na vida futura.

Constata-se por outro lado que as experiências, emoções, anseios e indagações ampliam-se e trazem novas questões para os jovens a respeito de suas próprias vidas e dos rumos da humanidade.

O conhecimento do professor sobre essas questões e sua disponibilidade para compreender que nesse momento os jovens estão numa etapa da vida essencial para constituição de sua identidade e de seu projeto de vida, pode levar à superação de alguns aspectos negativos ligados aos seus comportamentos exteriores e desenvolver participações menos conflituosas no trabalho escolar.

Nesse ponto, o caráter especulativo da Matemática para além de seu aspecto técnico, e que também reside no âmbito dos limites das indagações do intelecto humano, pode despertar interesse nos alunos, como as considerações e investigações sobre a infinitude dos conjuntos numéricos, a infinitude de racionais entre dois naturais e a infinitude dos irracionais ou o impacto causado por uma representação de π com um bilhão de casas decimais sem o surgimento de um período.

A História da Matemática pode ser também uma fonte de interesse para os jovens na medida em que permite reflexões sobre acasos, coincidências e convergências do espírito humano na construção do conhecimento acumulado pela humanidade. Não obstante os casos de rivalidade, ocultamentos e até mesquinharias, o conhecimento se constitui soberanamente. Uma história que pode levar à reflexão sobre as relações entre os homens e sobre indeléveis teias que conspiram a favor do avanço do conhecimento humano — quem sabe a favor dos próprios homens.

A perspectiva de ingresso na juventude, além de expectativas quanto ao futuro, traz para os alunos do quarto ciclo novas experiências e necessidades. Nessa fase, o conhecimento do mundo e as experiências de vida acontecem no círculo do grupo, fora da tutela dos pais. Isso faz com que esses jovens ampliem suas percepções e tornem-se mais independentes e autônomos diante de certas vivências: administrar as próprias economias, seja a mesada ou o salário, decidir sobre a prioridade de gastos, adquirir coisas das quais necessitam, transitar sozinhos por novos espaços e lidar com novos referenciais de localização, ter consciência e participar das decisões sobre o orçamento familiar. Mesmo as atividades de lazer, como organizar comemorações, participar de grupos de música, de esportes etc., exigem planejamento, previsão e capacidade para gerenciar as próprias ações.

Essas novas vivências e situações colocam em jogo os conhecimentos matemáticos, evidenciando para os alunos sua importância e significado e fazendo com que se sintam mais competentes ante esse conhecimento.

Também fica mais evidente para eles a presença da Matemática em outras áreas do currículo, particularmente no estudo de alguns fenômenos físicos, químicos, no estudo da informática etc.

Em síntese, é preciso fazer uso de todas essas situações para mostrar aos alunos que a Matemática é parte do saber científico e que tem um papel central na cultura moderna, assim como também para mostrar que algum conhecimento básico da natureza dessa área e uma certa familiaridade com suas idéias-chave são requisitos para ter acesso a outros conhecimentos, em especial à literatura científica e tecnológica.

Isso muitas vezes é diferente do que se faz tradicionalmente no quarto ciclo. Em geral, a ênfase recai no estudo dos conteúdos algébricos, abordados de forma mecânica, distanciando-se ainda mais das situações-problema do cotidiano. É como se, neste ciclo, o aluno tivesse de esquecer quase tudo o que aprendeu antes, porque esses conhecimentos já não lhe servem mais para resolver as situações que ora lhe são propostas. No entanto, essa situação poderá ser revertida se, para os novos conteúdos a serem estudados, esses alunos conseguirem estabelecer relações com os conhecimentos construídos anteriormente. Nesse sentido é importante considerar que alguns aspectos associados ao desenvolvimento cognitivo dos alunos que estão no quarto ciclo em muito favorecem a aprendizagem. Por exemplo, a observação ganha em detalhes, ampliam-se as capacidades para pensar de forma mais abstrata e argumentar com maior clareza.

Objetivos de Matemática para o quarto ciclo

Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento:

- Do pensamento numérico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
  - ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais;
  - resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
  - selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais.
- Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
  - produzir e interpretar diferentes escritas algébricas — expressões, igualdades e desigualdades —, identificando as equações, inequações e sistemas;
  - resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
  - observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.
- Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
  - interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;

  * produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
  * ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.
- Da competência métrica, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
  * ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, utilizando dígitos significativos para representar as medidas, efetuar cálculos e aproximar resultados de acordo com o grau de precisão desejável;
  * obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e para cálculo de volumes de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas).
- Do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
  * representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional;
  * resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três.
- Do raciocínio estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
  * construir tabelas de freqüência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos;
  * construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.

Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no quarto ciclo

Neste ciclo, além da consolidação dos números e das operações já conhecidas pelos alunos, ampliam-se os significados dos números pela identificação da existência de números não-racionais.

É importante salientar que no quarto ciclo não se pode configurar o abandono da Aritmética, como muitas vezes ocorre. Os problemas aritméticos praticamente não são postos como desafios aos alunos deste ciclo; em geral, as situações trabalhadas pelos professores privilegiam a aplicação de conceitos algébricos. Pode-se até afirmar que os procedimentos "não-algébricos" (os que não utilizam equações, sistemas etc.) para resolver problemas são desestimulados nos últimos anos do ensino fundamental, mesmo em situações em que a álgebra não é necessária.

Desse modo, é desejável que o professor proponha aos alunos a análise, interpretação, formulação e resolução de novas situações-problema, envolvendo números naturais, inteiros e racionais e os diferentes significados das operações, e que valorize as resoluções "aritméticas" tanto quanto as "algébricas".

Na perspectiva de que o aluno amplie e aprofunde a noção de número, é importante colocá-lo diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais. Recomenda-se, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se evite a identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como ocorre tradicionalmente.

O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas "casas" decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra-exemplos para ampliar a compreensão dos números.

Outro aspecto importante dos conteúdos do quarto ciclo é o de levar o aluno a selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) mais adequados à situação-problema proposta, fazendo uso da calculadora como um instrumento para produzir resultados e para construir estratégias de verificação desses resultados.

Particularmente com relação aos cálculos numéricos com aproximação convém observar que no campo dos racionais ocorrem duas representações, a fracionária e a decimal, que pode ser: finita ou infinita periódica. Sabe-se, além disso, que os irracionais podem ser aproximados tanto quanto se queira por números racionais e que sua representação decimal é necessariamente infinita, e não-periódica. No caso das representações infinitas (tanto de racionais como de irracionais) surge o problema da aproximação numérica, ou seja, a necessidade que se tem de considerar apenas um número finito de ordens decimais na representação do número. Tem-se aqui uma instância apropriada para abordar o conceito de arredondamento e suas conseqüências nos resultados das operações numéricas.

A respeito das operações aritméticas e algébricas com os irracionais quando eles aparecem em representações simbólicas ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, π etc.), o aluno pode ser conduzido a efetuá-las seguindo regras operatórias análogas às que são válidas para os racionais.

O trabalho com a Álgebra, neste ciclo, tem como ponto de partida a "pré-álgebra" desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações.

Desse modo, o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas).

Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação. Para apoiar a compreensão desses conceitos pode-se lançar mão da construção e interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador.

O trabalho com a Álgebra também está presente em atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes aos demais blocos, como ao generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais para qualquer polígono, ao indicar a expressão que relaciona duas grandezas, ao calcular medidas da tendência central de uma pesquisa.

É importante que os alunos percebam essas conexões. A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais — os contra-exemplos.

O aluno poderá desenvolver essa noção ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (função afim ou quadrática). Essas situações são oportunas para que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica, representando-a no plano cartesiano.

O estudo de Grandezas e Medidas é outro articulador entre diversos conteúdos matemáticos, por proporcionar um vasto campo de problemas que permitem consolidar e ampliar a noção de número e possibilitar a aplicação de noções geométricas.

Como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a interpretação deste, as possibilidades de integração da Matemática com as outras áreas do ensino fundamental ficam evidentes, como Ciências Naturais (densidade, velocidade, energia elétrica) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias).

Convém destacar que as medidas indicadas para este ciclo não são apenas as que se referem às grandezas de fenômenos físicos ou sociais, mas também as medidas de memória do computador.

A utilização dos instrumentos de medida é fundamental para iniciar a exploração dos significados e usos de termos como algarismo duvidoso, algarismo significativo, ordem de grandeza, erro de medição e arredondamento. Neste ciclo, o trabalho com essas noções pode ficar restrito às primeiras aproximações, reservando para o Ensino Médio seu aprofundamento. Ao discutir esses conceitos, o aluno poderá perceber que todas as medidas são inevitavelmente acompanhadas de erros, identificando uma dimensão da Matemática que é o trabalho com a imprecisão.

Também com o objetivo de ampliar a noção de medida, indica-se o estudo de grandezas determinadas pela razão de duas outras, como a densidade demográfica, ou pelo produto, como a energia elétrica (kWh).

O Tratamento da Informação pode ser aprofundado neste ciclo pois os alunos têm melhores condições de desenvolver pesquisas sobre sua própria realidade e interpretá-la, utilizando-se de gráficos e algumas medidas estatísticas. As pesquisas sobre Saúde, Meio Ambiente, Trabalho e Consumo etc., poderão fornecer contextos em que os conceitos e procedimentos estatísticos ganham significados.

Na resolução de situações-problema envolvendo estatística, os alunos podem dedicar mais tempo à construção de estratégias e se sentir estimulados a testar suas hipóteses e interpretar resultados de resolução se dispuserem de calculadoras para efetuar cálculos, geralmente muito trabalhosos. Para isso também há *softwares* interessantes, como os de planilhas eletrônicas, os que permitem construir diferentes tipos de gráfico.

Tendo em vista que os alunos já desenvolveram estratégias para resolver os problemas de contagem nos ciclos anteriores, apoiados em tabelas, diagramas etc., os problema poderão apresentar números um pouco maiores de modo que percebam que o princípio multiplicativo é um recurso que auxilia resolver mais facilmente muitos problemas.

O estudo da probabilidade tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático. Para tanto, terão de construir o espaço amostral como referência para estimar a probabilidade de sucesso, utilizando-se de uma razão.

Para compreender, avaliar e decidir sobre algumas situações da vida cotidiana, como qual a melhor forma de pagar uma compra, de escolher um financiamento etc. é necessário trabalhar situações-problema sobre a Matemática Comercial e Financeira, como calcular juros simples e compostos e dividir em partes proporcionais pois os conteúdos necessários para resolver essas situações já estão incorporados nos blocos.

O estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma tem como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades. É importante também na exploração desse bloco desenvolver atividades que permitam ao aluno perceber que pela composição de movimentos é possível transformar uma figura em uma outra.

Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). De forma análoga, o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (homotetias).

Também neste quarto ciclo, os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria.

Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos. A busca da construção de argumentos plausíveis pelos alunos vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos de conteúdos.

Assim, esse trabalho terá continuidade no quarto ciclo, uma vez que a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações. Mesmo que a argumentação e a demonstração empreguem freqüentemente os mesmos conectivos lógicos, há exigências formais para uma demonstração em Matemática que podem não estar presentes numa argumentação. O refinamento das argumentações produzidas ocorrem gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações.

Embora no quarto ciclo se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos.

CONCEITOS E PROCEDIMENTOS

Números e Operações

- Constatação que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais (caso do p, da $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc.).
- Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso.
- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais.
- Resolução de situações-problema de contagem, que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de diagramas, tabelas e esquemas sem a aplicação de fórmulas.
- Construção de procedimentos para calcular o número de diagonais de um polígono pela observação de regularidades existentes entre o número de lados e o de diagonais.
- Identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano.
- Resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.
- Resolução de situações-problema que envolvem juros simples e alguns casos de juros compostos, construindo estratégias variadas, particularmente as que fazem uso de calculadora.
- Tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.

- Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.
- Construção de procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas.
- Obtenção de expressões equivalentes a uma expressão algébrica por meio de fatorações e simplificações.
- Resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta.

Espaço e Forma

- Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado.
- Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
- Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).
- Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.
- Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.
- Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.
- Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.
- Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.
- Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não-convexos.

- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.
- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).
- Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.
- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras.

Grandezas e Medidas

- Resolução de situações-problema envolvendo grandezas (capacidade, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida, fazendo conversões adequadas para efetuar cálculos e expressar resultados.
- Cálculo da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações.
- Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência).
- Cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros).
- Cálculo do volume de alguns prismas retos e composições destes.

- Análise das variações do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do lado e construção dos gráficos cartesianos para representar essas interdependências.
- Resolução de situações-problema envolvendo grandezas determinadas pela razão de duas outras (densidade e velocidade) ou pelo produto (energia elétrica: kWh).
- Compreensão dos termos algarismo duvidoso, algarismo significativo e erro de medição, na utilização de instrumentos de medida.
- Estabelecimento da relação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um quadrado e a relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de um círculo.

Tratamento da Informação

- Leitura e interpretação de dados expressos em gráficos de colunas, de setores, histogramas e polígonos de freqüência.
- Organização de dados e construção de recursos visuais adequados, como gráficos (de colunas, de setores, histogramas e polígonos de freqüência) para apresentar globalmente os dados, destacar aspectos relevantes, sintetizar informações e permitir a elaboração de inferências.
- Compreensão de termos como freqüência, freqüência relativa, amostra de uma população para interpretar informações de uma pesquisa.
- Distribuição das freqüências de uma variável de uma pesquisa em classes de modo que resuma os dados com um grau de precisão razoável.
- Obtenção das medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), compreendendo seus significados para fazer inferências.
- Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.
- Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas.

ATITUDES

- Predisposição para usar os conhecimentos matemáticos como recursos para interpretar, analisar e resolver problemas em contextos diversos.
- Desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados.
- Predisposição para encontrar exemplos e contra-exemplos, formular hipóteses e comprová-la.
- Interesse em comparar diferentes métodos e processos na resolução de um problema, analisando semelhanças e diferenças entre eles e justificando-os.
- Interesse por utilizar as diferentes representações matemáticas que se adaptam com mais precisão e funcionalidade a cada situação-problema de maneira que facilite sua compreensão e análise.
- Compreensão da importância da estatística na atividade humana e de que ela pode induzir a erros de julgamento, pela manipulação de dados e pela apresentação incorreta das informações (ausência da freqüência relativa, gráficos com escalas inadequadas).
- Valorização do trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação.
- Predisposição para analisar criticamente informações e opiniões veiculados pela mídia, suscetíveis de ser analisadas à luz dos conhecimentos matemáticos.
- Valorização do uso dos recursos tecnológicos, como instrumentos que podem auxiliar na realização de alguns trabalhos, sem anular o esforço da atividade compreensiva.
- Interesse em dispor de critérios e registros pessoais para emitir um juízo de valor sobre o próprio desempenho, comparando-o com o dos professores, de modo que se aprimore.

Critérios de avaliação para o quarto ciclo

Os critérios de avaliação explicitam as expectativas de aprendizagem, considerando objetivos e conteúdos propostos para a Matemática no quarto ciclo. Seus significados estão expressos no texto sobre os critérios de avaliação apontados no terceiro ciclo.

- **Decidir sobre os procedimentos matemáticos adequados para construir soluções num contexto de resolução de problemas numéricos, geométricos ou métricos.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de interpretar uma situação-problema, distinguir as informações necessárias das supérfluas, planejar a resolução, identificar informações que necessitam ser levantadas, estimar (ou prever) soluções possíveis, decidir sobre procedimentos de resolução a serem utilizados, investigar, justificar, argumentar e comprovar a validade de resultados e apresentá-los de forma organizada e clara.

- **Usar os diferentes significados dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e das operações para resolver problemas, em contextos sociais, matemáticos ou de outras áreas do conhecimento.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de resolver situações-problema com números naturais, racionais, inteiros e irracionais aproximados por racionais, em diversos contextos, selecionando e utilizando procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, escrito ou mental), em função da situação-problema proposta.

- **Resolver situações-problema por meio de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de resolver situações-problema por meio de equações (incluindo sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas) aplicando as propriedades da igualdade para determinar suas soluções e analisá-las no contexto da situação-problema enfocada.

- **Resolver situações-problema que envolvem a variação de duas grandezas direta ou inversamente proporcionais e representar em um sistema de coordenadas cartesianas essa variação.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de resolver situações-problema (escalas, porcentagem e juros simples) que envolvem a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias como as regras de três; de representar, em um sistema de coordenadas cartesianas, a variação de grandezas envolvidas em um fenômeno, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional.

- **Estabelecer relações de congruência e de semelhança entre figuras planas e identificar propriedades dessas relações.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de perceber que, por meio de diferentes transformações de uma figura no plano (translações, reflexões em retas, rotações), obtêm-se figuras congruentes e, por meio de ampliações e reduções, obtêm-se figuras semelhantes e de aplicar as propriedades da congruência e as da semelhança em situações-problema.

- **Obter e expressar resultados de medidas de comprimento, massa, tempo, capacidade, superfície, volume, densidade e velocidade e resolver situações-problema envolvendo essas medidas.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de obter medidas de grandezas, utilizando unidades e instrumentos convenientes (de acordo com a precisão desejável), representar essas medidas, fazer cálculos com elas e arredondar resultados; bem como resolver situações que envolvem grandezas determinadas pela razão de duas outras (como densidade demográfica e velocidade).

- **Ler e interpretar tabelas e gráficos, coletar informações e representá-las em gráficos, fazendo algumas previsões a partir do cálculo das medidas de tendência central da pesquisa.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de ler e interpretar dados estatísticos registrados em tabelas e gráficos, como também elaborar instrumentos de pesquisa e organizar os dados em diferentes tipos de gráficos, determinando algumas medidas de tendência central da pesquisa, indicando qual delas é a mais adequada para fazer inferências.

- **Resolver problemas de contagem e indicar as possibilidades de sucesso de um evento por meio de uma razão.**

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de resolver problemas de contagem utilizando procedimentos diversos, inclusive o princípio multiplicativo e de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, indicando a probabilidade de um evento por meio de uma razão.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS PARA TERCEIRO E QUARTO CICLOS

As orientações didáticas apresentadas a seguir pretendem contribuir para a reflexão a respeito de como ensinar, abordando aspectos ligados às condições em que se constituem os conhecimentos matemáticos.

Analisam conceitos e procedimentos a serem ensinados, modos pelos quais eles se relacionam entre si, e também formas por meio das quais os alunos constroem esses conhecimentos matemáticos.

Certamente estas orientações não abordam todos os aspectos dos conteúdos a serem desenvolvidos nos terceiro e quarto ciclos e, portanto, devem ser complementadas e ampliadas com a leitura de documentos e trabalhos que discutam pesquisas, estudos e outras orientações didáticas sobre os conteúdos matemáticos que fazem parte do currículo do ensino fundamental. Elas também não indicam uma seqüência de tratamento dos blocos ao longo dos terceiro e quarto ciclos.

Números e Operações

Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante nos currículos do ensino fundamental, constata-se, com freqüência, que muitos alunos chegam ao final desse curso com um conhecimento insuficiente dos números, de como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações. Provavelmente isso ocorre em função de uma abordagem inadequada para o tratamento dos números e das operações e à pouca ênfase que tradicionalmente é dada a este assunto nos terceiro e quarto ciclo.

Mesmo os alunos das séries mais adiantadas, que calculam corretamente, muitas vezes não sabem interpretar os números obtidos para dar resposta a um problema. Em situações como: “Quantos ônibus de 36 lugares são necessários, no mínimo, para transportar 1128 passageiros, se nenhum ônibus pode transportar mais que 36 pessoas?” é freqüente aparecerem respostas como 31,333... ou 31, e não 32 que, no caso, é a correta. Além de não saberem interpretar os números, também é comum apresentarem dificuldade para ler, escrever e comparar números com vários dígitos.

Do mesmo modo no trabalho com as operações, ao longo de todo o ensino fundamental, os professores constatam que uma das maiores dificuldades dos alunos está em relacionar a situação-problema com a operação que permite obter a resposta.

Por isso, nos terceiro e quarto ciclos o trabalho com os conteúdos relacionados aos números e as operações deve privilegiar atividades que possibilitem ampliar o sentido numérico e a compreensão do significado das operações, ou seja, atividades que permitam estabelecer e reconhecer relações entre os diferentes tipos de números e entre as diferentes operações.

NÚMEROS

Números naturais

Nos terceiro e quarto ciclos os problemas relacionados à evolução histórica dos números podem ser usados como interessantes contextos para ampliar a visão dos alunos sobre os números naturais, não apenas relatando como se deu essa evolução, mas explorando as situações com as quais as civilizações antigas se defrontaram, como: as limitações dos sistemas não-posicionais, os problemas com a representação numérica antes do surgimento do zero, os procedimentos de cálculo utilizados pelas civilizações suméria, egípcia, grega, maia, chinesa etc.

Mostrar que a história dos números está ligada à das necessidades e preocupações de povos que, ao buscar recensear seus membros, seus bens, suas perdas, ao procurar datar a fundação de suas cidades e as suas vitórias, usando os meios disponíveis, construíram interessantes sistemas de numeração. Quando foram além e se impuseram a obrigação de representar grandes quantidades, como exprimir a quantidade de dias, meses e anos a partir de uma data específica ou de tentar fazer os cálculos utilizando os próprios símbolos do sistema, foram colocados no caminho da numeração posicional.

Com relação aos números naturais é possível identificar alguns fatores que têm concorrido para que sua aprendizagem acabe não se consolidando ao longo do ensino fundamental.

Por um lado, destacam-se os aspectos relacionados à complexidade do conteúdo envolvido, tais como:

- compreensão das relações de inclusão — que caracterizam o sistema decimal — como saber quantos agrupamentos de dezenas ou de centenas são necessários para se construir a dezena de milhar;
- leitura dos números — que implica a compreensão de regras estabelecidas para a formação das classes — agrupamentos de mil (milhares, milhões, bilhões, trilhões...);
- valor posicional dos algarismos na escrita numérica — que nem sempre é percebido: mesmo alunos que sabem escrever números corretamente, muitas vezes não os sabem interpretar, afirmando, por exemplo, que 2.343 é próximo de 2.340, mas não reconhecendo que em 2.343 há 234 dezenas.

Por outro lado, alguns aspectos do tratamento habitualmente dado ao estudo dos naturais nos ciclos finais do ensino fundamental também comprometem sua aprendizagem:

- ausência de situações-problema envolvendo números "grandes";
- desestímulo ao uso dos procedimentos aritméticos, considerados como "raciocínios inferiores" quando comparados aos procedimentos algébricos;
- ausência de um trabalho com estimativas e com cálculo mental e o abandono da exploração dos algoritmos das operações fundamentais;
- trabalho centrado nos algoritmos, como o cálculo do mmc e do mdc sem a compreensão dos conceitos e das relações envolvidos e da identificação de regularidades que possibilitem ampliar a compreensão acerca dos números.

Diante dessas dificuldades, pode-se concluir que a compreensão dos números naturais acontece por um processo de sucessivas aproximações e para que sua aprendizagem se consolide é necessário desenvolver, ao longo dos terceiro e quarto ciclos, um trabalho sistemático de exploração das funções dos naturais (quantificar, ordenar, codificar), de análise e produção de números que expressem diferentes ordens de grandeza e do reconhecimento da característica posicional de sua escrita, de interpretação de suas variadas formas de representação (canônica, decomposta, fatorada, polinomial, científica).

Números inteiros

A análise da evolução histórica dos números negativos mostra que por muito tempo não houve necessidade de pensar em números negativos e por isso a concepção desses números representou para o homem um grande desafio.

O uso pioneiro dos números negativos é atribuído aos chineses e aos hindus, que conceberam símbolos para as faltas e diferenças "impossíveis" (dívidas). A adoção do zero teve um papel-chave na construção dos inteiros, possibilitando operar com grandezas negativas, mudando o caráter de "zero-nada" para "zero-origem", favorecendo, assim, a idéia de grandezas opostas ou simétricas.

Além das situações do cotidiano os números negativos também surgiram no interior da Matemática na resolução de equações algébricas. No entanto, sua aceitação seguiu uma longa e demorada trajetória. Só no século XIX os negativos foram interpretados como uma ampliação dos naturais e incorporam as leis da Aritmética. Passaram então a integrar a hierarquia dos sistemas numéricos como números inteiros.

Também na escola o estudo dos números inteiros costuma ser cercado de dificuldades, e os resultados, no que se refere à sua aprendizagem ao longo do ensino fundamental, têm sido bastante insatisfatórios.

A fim de auxiliar a escolha de caminhos mais adequados para abordar os inteiros, é importante reconhecer alguns obstáculos que o aluno enfrenta ao entrar em contato com esses números, como:

- conferir significado às quantidades negativas;
- reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir de zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
- reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero-origem);
- perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais — por exemplo, é possível "adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado", como também é possível "subtrair um número de 2 e obter 9";
- interpretar sentenças do tipo x = - y, (o aluno costuma pensar que necessariamente x é positivo e y é negativo).

Quanto ao tratamento pedagógico dado a esse conteúdo, a ênfase na memorização de regras para efetuar cálculos, geralmente descontextualizados, costuma ser a tônica da abordagem dada aos números inteiros no terceiro e no quarto ciclos. Uma decorrência dessa abordagem é que muitos alunos não chegam a reconhecer os inteiros como extensão dos naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não as conseguem aplicar adequadamente, por não terem desenvolvido uma maior compreensão do que seja o número inteiro.

Por outro lado, é preciso levar em conta que os alunos desenvolvem, já nas séries iniciais, uma noção intuitiva dos números negativos que emerge de experiências práticas, como perder no jogo, constatar saldos negativos, observar variações de temperaturas, comparar alturas, altitudes etc. Essas noções intuitivas permitem as primeiras comparações entre inteiros.

Assim, os contatos dos alunos com os significados dos números inteiros podem surgir da análise de situações-problema do campo aditivo. Situações em que esses números indicam falta, diferença, posição ou deslocamento na reta numérica.

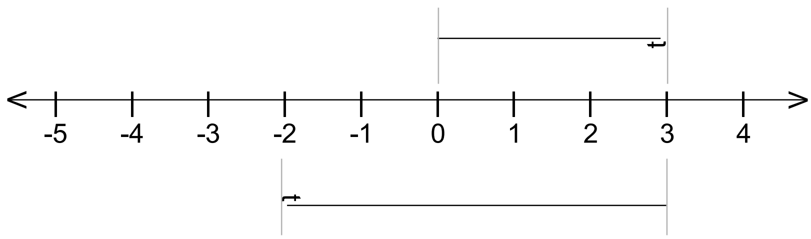
A representação geométrica dos inteiros numa reta orientada também é um interessante recurso para explorar vários aspectos desse conteúdo, como:

- visualizar o ponto de referência (origem) a partir da qual se definem os dois sentidos;
- identificar um número e seu o oposto (simétrico): números que se situam à mesma distância do zero;

- reconhecer a ordenação dos inteiros: dados dois números inteiros quaisquer, o menor é o que está à esquerda (no sentido positivo da reta numérica); assim, dados dois números positivos será maior o que estiver mais distante do zero e dados dois negativos será maior o que estiver mais próximo do zero;
- comparar números inteiros e identificar diferenças entre eles;
- inferir regras para operar com a adição e a subtração, como:

$$(+3) + (-5) = +3 - 5 = -2.$$

Para explorar a adição e subtração, outro recurso interessante é o ábaco de inteiros, que consiste em duas varetas verticais fixadas num bloco, nas quais se indica a que vai receber as quantidades positivas e a que vai receber as quantidades negativas, utilizando argolas de cores diferentes para marcar pontos. Esse material permite a visualização de quantidades positivas e negativas e das situações associadas ao zero: varetas com a mesma quantidade de argolas. Ao manipular as argolas nas varetas, os alunos poderão construir regras para o cálculo com os números inteiros.



Um terceiro recurso é a construção de tabelas que permitam observar regularidades e de padrões de comportamento da série numérica.

As tabelas podem ser usadas no trabalho da multiplicação e da divisão com inteiros, uma vez que a compreensão dos procedimentos de cálculo envolvidos dependem do conhecimento de conceitos, propriedades e processos que implicam identificar regularidades, estabelecer relações, fazer algumas inferências.

Por exemplo: construir uma tabela de multiplicação com números positivos e negativos, registrando inicialmente os produtos entre os números positivos. Para multiplicar números positivos por negativos pode-se aplicar a idéia da multiplicação como adição de parcelas iguais. Assim, a multiplicação de (+3) x (-2) pode ser interpretada como a soma de três parcelas de –2 e resolvida por um procedimento aditivo:

$(+3) \times (-2) = 3 \times (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = (-6).$

Pela observação das regularidades das seqüências numéricas construídas, pode-se completar a tabela com os produtos dos negativos pelos positivos e dos negativos pelos negativos, mantendo o padrão numérico observado (acrescentar 3 ou retirar 3).

-3	-2	-1	0	1	2	3	x
-9	-6	-3	0	3	6	9	**3**
-6	-4	-2	0	2	4	6	**2**
-3	-2	-1	0	1	2	3	**1**
0	0	0	0	0	0	0	**0**
							-1
							-2
							-3

Também o estudo de um problema histórico pode ser interessante para trabalhar com a multiplicação de inteiros. Os antigos perceberam, em várias situações, que quantidades retiradas (números negativos) multiplicadas entre si deviam produzir quantidades acrescidas (números positivos). Por exemplo: no caso da área de um retângulo com lados medindo 5 e 7, portanto, com área 35, se fossem diminuídos os lados em 2 e 3 unidades respectivamente, obteriam um retângulo com medidas 3 e 4, portanto, com área 12. Quando pensaram na área desse retângulo como o produto dos lados 5 – 2 por 7 – 3 para poder encontrar 12, eles perceberam que deveriam subtrair de 35 os produtos de 2 por 7 e 5 por 3 e ainda adicionar ao resultado o produto de 2 por 3. Assim, concluíram que a quantidade retirada 2 multiplicada pela quantidade retirada 3 produzia a quantidade acrescida 6.

Ao buscar as orientações para trabalhar com os números inteiros, deve-se ter presente que as atividades propostas não podem se limitar às que se apóiam apenas em situações concretas, pois nem sempre essas concretizações explicam os significados das noções envolvidas. É preciso ir um pouco além e possibilitar, pela extensão dos conhecimentos já construídos para os naturais, compreender e justificar algumas das propriedades dos números inteiros.

Por outro lado, ao desenvolver um tratamento exclusivamente formal no trabalho com os números inteiros, corre-se o risco de reduzir seu estudo a um formalismo vazio, que geralmente leva a equívocos e é facilmente esquecido. Assim, devem-se buscar situações que permitam aos alunos reconhecer alguns aspectos formais dos números inteiros a partir de experiências práticas e do conhecimento que possuem sobre os números naturais.

Números racionais

Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal.

Uma explicação para as dificuldades encontradas possivelmente deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com idéias construídas para os números naturais. Ao trabalhar com os números racionais, os alunos acabam tendo de enfrentar vários obstáculos:

- cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$,... são diferentes representações de um mesmo número;
- a comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
- se o "tamanho" da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza ($8345 > 83$), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
- se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;
- se a seqüência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87.

No terceiro e no quarto ciclos a abordagem dos racionais, em continuidade ao que foi proposto para os ciclos anteriores, tem como objetivo levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema como as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão.

Para abordar o estudo dos racionais, sob essa perspectiva, os problemas históricos envolvendo medidas, que deram origem a esses números, oferecem bons contextos para seu ensino.

Pode-se discutir com os alunos, por exemplo, que os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C. para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Eles utilizavam apenas frações unitárias (frações de numerador 1), com exceção de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Assim, numa situação em que precisavam dividir 19 por 8 eles utilizavam um procedimento que na nossa notação pode ser expresso por $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. A partir dessa situação pode-se propor aos alunos que mostrem que essa soma é $\frac{19}{8}$, que encontrem outras divisões que podem ser determinadas por soma de frações unitárias e que pesquisem outros problemas históricos envolvendo os números racionais.

Os racionais assumem diferentes significados nos diversos contextos: relação parte/todo, divisão e razão.

A relação parte/todo se apresenta quando um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. A fração, por exemplo, indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes, é o caso das tradicionais divisões de uma figura geométrica em partes iguais.

A interpretação da fração como relação parte/todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas.

Uma outra interpretação do número racional como quociente de um inteiro por outro (a: b = $\frac{a}{b}$; $b \neq 0$). Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais. No entanto, nos dois casos, o resultado é dado pelo mesmo número: $\frac{2}{3}$.

Uma interpretação diferente das anteriores é aquela em que o número racional é usado como um índice comparativo entre duas quantidades, ou seja, quando é interpretado como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com situações do tipo: 2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes e se conclui que $\frac{2}{3}$ da população da cidade é de imigrantes. Outras situações são as que envolvem probabilidades: a chance de sortear uma bola verde de uma caixa em que há 2 bolas verdes e 8 bolas de outras cores é de $\frac{2}{10}$. Ainda outras situações ocorrem na abordagem de escalas em plantas e mapas (escala de 1cm para 100 m: representada por 1:10.000 ou $\frac{1}{10.000}$). Também, a exploração da porcentagem (70 em cada 100 alunos da escola gostam de futebol: $\frac{70}{100}$, 0,70 ou 70% ou ainda $\frac{7}{10}$ e 0,7).

Existe ainda uma quarta interpretação que atribui ao número racional o significado de um operador, ou seja, quando ele desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Essa idéia está presente, por exemplo, em problemas do tipo “que número devo multiplicar por 5 para obter 2”.

Na perspectiva do ensino não é desejável tratar isoladamente cada uma dessas interpretações. A consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo do terceiro e quarto ciclos, que possibilite análise e comparação de variadas situações-problema.

Ao abordar os racionais pelo seu reconhecimento no contexto diário, deve-se observar que eles aparecem muito mais na forma decimal do que na forma fracionária.

Embora o contato com representações fracionárias seja bem menos freqüente nas situações do cotidiano seu estudo também se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico). Também nas situações que envolvem cálculos com dízimas periódicas, a representação na forma fracionária favorece a obtenção dos resultados com maior precisão, uma vez que na forma decimal é preciso fazer aproximações.

A familiaridade do aluno com as diferentes representações dos números racionais (representação fracionária, decimal, percentual) pode levá-lo a perceber qual delas é mais utilizada ou adequada para expressar um resultado. Numa situação em que se deve comunicar um aumento de salário é mais freqüente dizer, por exemplo, que o acréscimo no salário foi de 12% ($\frac{12}{100}$) do que de $\frac{3}{25}$.

O conceito de equivalência assim como a construção de procedimentos para a obtenção de frações equivalentes são fundamentais para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números.

O estudo do cálculo com números racionais na forma decimal pode ser facilitado se os alunos forem levados a compreender que as regras do sistema de numeração decimal, utilizadas para representar os números naturais, podem ser estendidas para os números racionais na forma decimal. Além disso, é importante que as atividades com números decimais estejam vinculadas a situações contextualizadas, de modo que seja possível fazer uma estimativa ou enquadramento do resultado, utilizando números naturais mais próximos. Como, ao tentar encontrar o valor da área de uma figura retangular que mede 7,9 cm por 5,7 cm o aluno pode recorrer à estimativa calculando mentalmente um resultado aproximado (8 x 6) que lhe pode dar uma razoável referência para conferir o resultado exato, obtido por um procedimento de cálculo escrito.

Também é importante que os alunos compreendam as regularidades das multiplicações de números racionais na forma decimal por 10, 100, 1.000,... O domínio desse conhecimento é importante para dar sentido aos procedimentos de cálculo com esses números. Por exemplo: 32,7 x 2,74

X10

32,7 327

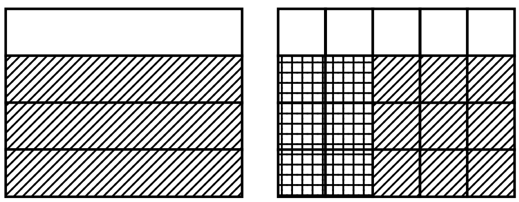
X100

2,74 274

89,598 :1000 89,598

Quanto ao cálculo da adição e da subtração envolvendo frações com denominadores diferentes, pode-se transformá-las em frações com o mesmo denominador (não necessariamente o menor), aplicando as propriedades das frações equivalentes.

A compreensão da multiplicação com frações pode ser pensada como "partes de partes do total" (neste caso a multiplicação não se apóia na idéia de adição reiterada). Assim, $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ pode ser interpretado como procurar $\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{4}$ de um todo.



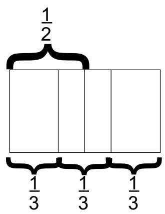
$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

A partir de várias experiências como essas, os alunos poderão construir um procedimento para multiplicar frações.

Observe-se também que é possível explicar a multiplicação de decimais pela multiplicação de frações. Exemplo:

$$0{,}12 \times 0{,}8 = \frac{12}{100} \times \frac{8}{10} = \frac{12 \times 8}{100 \times 10} = \frac{96}{1.000} = 0{,}096$$

No caso da divisão envolvendo frações pode-se interpretá-la como “partes que cabem em partes”. Assim, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ pode ser interpretado como quantas partes de $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{1}{2}$.



Comparando $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$ pode-se observar que $\frac{1}{3}$ cabe uma vez e meia em $\frac{1}{2}$ ou

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Entretanto, nem sempre representações desse tipo permitem a visualização do resultado e por isso deve-se lançar mão de outras estratégias. Por exemplo, a propriedade: “um quociente não se altera quando dividendo e divisor são multiplicados por um mesmo número” (“invariância do quociente”) permite obter na divisão de frações, uma fração com denominador 1.

$$\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{4} \times \frac{3}{2}}{\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}} = \frac{\frac{15}{8}}{1} = \frac{15}{8}.$$

Assim, uma forma de interpretar a divisão é lançar mão da idéia do inverso multiplicativo de um racional diferente de zero: “dividir é multiplicar pelo inverso”

$$\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}.$$

Uma outra instância em que a propriedade da invariância do quociente quando se multiplicam o dividendo e o divisor pelo mesmo número ocorre na divisão de racionais na forma decimal. Neste caso, transforma-se o dividendo e divisor em números de mesma ordem decimal.

$$0{,}3 \;\underline{\big|\; 0{,}012 \quad} \qquad\qquad 0{,}300 \;\underline{\big|\; 0{,}012 \quad}$$

Números irracionais

De modo geral, as formas utilizadas no estudo dos números irracionais têm se limitado quase que exclusivamente ao ensino do cálculo com radicais. Apesar de tradicionalmente ocupar um razoável espaço no currículo do quarto ciclo, o trabalho com os irracionais pouco tem contribuído para que os alunos desenvolvam seu conceito.

Do ponto de vista de sua evolução histórica, a existência e a caracterização dos números irracionais foram questões bastante complicadas. Apesar de ser antiga a convivência do homem com os números irracionais, somente há pouco mais de cem anos é que esses números foram sistematizados.

Possivelmente contribui para as dificuldades na aprendizagem dos irracionais a inexistência de modelos materiais que exemplifiquem os irracionais. Além disso, quando se estuda a reta numérica racional e se constrói o conhecimento da densidade dos números racionais — entre dois racionais há uma infinidade de racionais — parece não haver mais lugar na reta numérica para nenhum tipo de número além dos racionais. Assim, a idéia de número irracional, nessa fase do aprendizado, não é seguramente intuitiva. Por outro lado, ancorar o estudo do conjunto dos racionais e irracionais no âmbito do formalismo matemático não é certamente indicado nessa etapa. Por esses motivos, julga-se inadequado um tratamento formal do conceito de número irracional no quarto ciclo.

O estudo desses números pode ser introduzido por meio de situações-problema que evidenciem a necessidade de outros números além dos racionais. Uma situação é a de encontrar números que tenham representação decimal infinita, e não periódica. Outra é o problema clássico de encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número $\sqrt{2}$. Nesse caso, pode-se informar (ou indicar a prova) da irracionalidade de $\sqrt{2}$, por não ser uma razão de inteiros. O problema das raízes quadradas de inteiros positivos que não são quadrados perfeitos, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ etc., poderia seguir-se ao caso particular de $\sqrt{2}$.

Outro irracional que pode ser explorado no quarto ciclo é o numero π. De longa história e de ocorrência muito freqüente na Matemática, o número π nessa fase do aprendizado aparece como a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Essa razão, sabe-se, não depende do “tamanho” da circunferência em virtude do fato de que duas circunferências quaisquer são figuras semelhantes.

A verificação da irracionalidade de um dado número só é possível, naturalmente, no âmbito da própria Matemática. Nenhuma verificação empírica, nenhuma medição de grandezas, por mais precisa que seja, provará que uma medida tem valor irracional. No caso do número π a prova matemática de sua irracionalidade, ou seja, a impossibilidade de escrevê-lo como quocientes de inteiros (ou equivalentemente como quocientes de racionais) é seguramente inadequada para o ensino fundamental. Por outro lado deve-se estar atento para o fato de que o trabalho com as medições pode se tornar um obstáculo para o aluno aceitar a irracionalidade do quociente entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, uma vez que ele já sabe que as medições envolvem apenas números racionais.

É possível, no entanto, propor situações que permitam aos alunos várias aproximações sucessivas de π. Ao trabalhar com essas aproximações, é interessante usar diferentes calculadoras e informar os alunos a respeito dos cálculos que são feitos em computadores de grande porte, que produzem o valor de π com milhões de dígitos sem que haja o aparecimento de um período na expansão decimal.

Com relação aos cálculos aritmético e algébrico com números irracionais, configuram-se duas possibilidades.

Numa delas o aluno deve ser orientado a efetuar os cálculos seguindo regras operatórias análogas às que são válidas para os racionais. Esse fato pode conduzir, inclusive, à obtenção de infinitos irracionais por meio das operações fundamentais. Por exemplo, explorar números na forma $a + b\sqrt{2}$, com a e b racionais, pode contribuir para a superação da idéia equivocada de que há poucos irracionais. Uma segunda possibilidade é a de efetuar cálculos com os irracionais por meio de aproximações racionais. Nesses casos apresenta-se uma situação apropriada para tratar o conceito de arredondamento e utilizar as calculadoras.

OPERAÇÕES

Adição e Subtração: significados

Embora o estudo dos significados da adição e da subtração se inicie nos ciclos anteriores, o que se tem notado, em função da variedade e complexidade dos conceitos que integram esse tema, é que eles levam tempo para ser construídos e consolidados pelos alunos. Isso impõe um trabalho sistemático desse conteúdo ao longo dos terceiro e quarto ciclos, concomitante ao trabalho de sistematização da aprendizagem dos números naturais e da construção dos significados dos números inteiros, racionais e irracionais.

Assim, sugere-se que a adição e a subtração sejam desenvolvidas paralelamente por meio de situações-problema dos tipos que se indicam a seguir[1].

- Associadas à idéia de combinar estados para obter um outro — ação de "juntar".
  Exemplo: os resultados de uma pesquisa sobre os esportes preferidos pelos alunos de uma escola indicaram que 2/5 preferem futebol, 1/4 prefere

[1]VERGNAUD, G. e DURAND, C., 1976.

voleibol, 1/3 prefere basquete e os demais não optaram por nenhuma dessas modalidades. Qual é a fração do total de alunos que indica a opção por esses três esportes?

Mudando-se essa pergunta, é possível formular outras situações comumente identificadas como ações “separar e retirar”.

Exemplos: Qual é a fração do total de alunos que indica a não-opção por essas modalidades? Qual é a fração do total de alunos que indica a não-opção por futebol?

- Associadas à idéia de transformação, ou seja, alteração de um estado inicial, que pode ser positiva ou negativa.

  Exemplo: há um ano atrás Carlos media 1,57 m. Neste último ano ele cresceu 0,12 m. Qual é a altura de Carlos hoje?

  Cada uma dessas situações pode gerar outras, exemplos:

  Hoje Carlos mede 1,83 m de altura. Neste último ano ele cresceu 7 cm. Qual era sua altura há um ano?

  Há um ano a altura de Carlos era de 1,67 m e hoje é de 1,76 m. Quanto ele cresceu neste último ano?

- Associadas à idéia de comparação.

  Exemplo: Carlos pesa 65,5 kg e Paulo 7,5 kg a mais que Carlos. Qual é o peso de Paulo?

  Alterando-se a formulação do problema e a proposição da pergunta, podem-se gerar várias outras situações. Exemplos:

  Carlos está pesando 87 kg e Paulo 76 kg. Qual é a diferença de peso entre eles?

  Carlos pesa 54 kg e Paulo pesa 7 kg a menos que Carlos. Qual é o peso de Paulo?

- Associadas à composição de transformações (com variações positivas e negativas) e que levam à necessidade dos números inteiros negativos.

  Exemplo: no início de um jogo Ricardo tinha um certo número de pontos. No decorrer do jogo ele ganhou 10 pontos e, em seguida, perdeu 25 pontos. O que aconteceu com seus pontos no final do jogo?

  Ricardo iniciou uma partida com 15 pontos de desvantagem com relação aos pontos de Pedro. Ele terminou o jogo com 30 pontos de vantagem em relação a Pedro. O que aconteceu durante o jogo?

  No segundo tempo de um jogo Paulo perdeu 7 pontos. No final ele estava com uma desvantagem de 9 pontos. O que aconteceu no primeiro tempo do jogo?

  No primeiro tempo de um jogo Carlos perdeu 7 pontos e no segundo ele perdeu 9. Como estavam seus pontos no final do jogo?

Multiplicação e Divisão: significados

Uma abordagem freqüente no trabalho com a multiplicação é o estabelecimento de uma relação entre ela e a adição: nesse caso a multiplicação é apresentada como uma adição de parcelas iguais. Por exemplo: preciso tomar 2 comprimidos durante 6 dias. Quantos comprimidos serão necessários?

Assim, associa-se a escrita 6 x 2, na qual se definem papéis diferentes para o 6 (número de repetições) e para o 2 (número que se repete), não sendo possível tomar um pelo outro. Essa escrita apresenta-se como uma forma abreviada da escrita:

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 .

No contexto de um problema como o que foi apresentado, essa abordagem gera ambigüidade. Embora 2 x 6 = 6 x 2, apenas a escrita 6 x 2 traduz o problema, pois a outra escrita indicaria que deve tomar 6 comprimidos durante 2 dias.

Além disso, ela é insuficiente para que os alunos compreendam e resolvam outras situações relacionadas à multiplicação, mas apenas aquelas que são essencialmente situações aditivas.

Para desenvolver uma compreensão mais ampla da multiplicação é necessário trabalhar paralelamente multiplicação e divisão, envolvendo os significados dessas operações que ocorrem em situações dos tipos indicados a seguir.

- Associadas a "multiplicação comparativa".
  Exemplo:
  Um prédio tem duas caixas d'água com capacidades de 5.000 litros cada. Uma delas está com 1/4 de sua capacidade e a outra está com três vezes mais. De quantos litros de água o prédio dispõe?
  A partir dessa situação é possível formular outras que envolvem a divisão.
  Exemplo: Uma caixa d'água tem 4.500 litros de água e está com 2/3 de sua capacidade. Uma outra caixa tem três vezes menos água. Qual é a quantidade de litros que essa caixa possui?

- Associadas à comparação entre razões e que, portanto, envolvem a idéia de proporcionalidade.
  Exemplo:
  Se 8 metros de tela custam R$ 5,80, quanto pagarei por 16 metros de tela? (situação em que o aluno deve perceber que comprará o dobro de tela e que deverá pagar — se não houver desconto — o dobro de R$ 5,80, não sendo necessário achar o preço de 1 metro para depois calcular o de 16).
  A partir das situações de proporcionalidade, é possível formular outras que vão conferir significados à divisão, associadas às ações "repartir (igualmente)" e "determinar quanto cabe".

Exemplos associados ao primeiro problema:

Paguei R$ 11,60 por 4 metros de tela. Quanto custa 0,50 m dessa mesma tela? (Como 0,5 cabe 8 vezes em quatro, a quantia em dinheiro será repartida igualmente em 8 partes e o que se procura é o valor de uma parte, ou calcular quanto custa cada metro e achar a metade.

Paguei R$ 11,60 por um rolo de tela cujo metro custa R$ 2,90. Quantos metros de tela há no rolo? (Procura-se verificar quantas vezes R$ 2,90 cabe em R$ 11,60 — identifica-se a quantidade de partes.)

Ao trabalhar com situações que envolvem o conceito de proporcionalidade direta, em que o quociente entre as quantidades que se correspondem é constante, como uma relação entre número de pacotes e seus pesos (ver tabela a seguir) o aluno terá oportunidade de identificar a manutenção da razão peso/nº de pacotes quando se multiplicam as quantidades por um mesmo número. No exemplo citado tal razão é expressa por 4 kg por pacote.

Nº de pacotes	Peso (kg)
1	4
2	8
3	12
4	16

Convém notar que a familiaridade com situações-problema em que aparecem essas relações leva os alunos a construir procedimentos não-convencionais para resolver esse tipo de problema antes de compreender e utilizar os procedimentos convencionais como a regra de três.

Ao orientar o estudo de situações desse tipo nos terceiro e quarto ciclos é preciso levar em conta alguns fatores que interferem no grau de complexidade dessas situações.

Um deles está relacionado com os números envolvidos no problema, ou seja, o domínio numérico pode transformar o problema tornando sua resolução mais fácil ou difícil. O fato de as situações envolverem números naturais (com poucos ou muitos dígitos) ou racionais (fracionários ou decimais) influi nas possibilidades de o aluno tomar as decisões para resolver o problema, ou seja: escolher as operações que precisa realizar, em que precisa estimar resultados e efetuar cálculos.

Por exemplo, operar com números racionais positivos menores que 1 é um aspecto que torna a situação mais complexa e dificulta o controle das operações. Ao obterem o produto de 12 por 0,34, os alunos chegam a duvidar do resultado pois este é menor do que um dos fatores envolvidos. Este fato talvez decorra de uma representação que o aluno constrói do conceito de multiplicação quando este é explorado apenas no campo dos números naturais: “o efeito da multiplicação é sempre o de aumentar”. Ao trabalhar a multiplicação de racionais, devem-se propor situações que permitam ao aluno compreender que tal fato não se aplica sempre a esse campo de números.

- Associadas ao produto de medidas
  Exemplos:
  Qual é a área em centímetros quadrados de um retângulo cujos lados medem 6 cm e 9 cm?
  Qual é o volume em centímetros cúbicos de uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo de 5 cm² de área da base e 8 cm de altura?

Nessas situações trabalha-se com grandezas que são produtos de outras grandezas. Por exemplo, a área 54 cm² é o produto dos comprimentos dos segmentos 6 cm por 9 cm. O volume 40 cm³ é o produto da área de 5 cm² pelo comprimento 8 cm. A mudança da dimensão de grandeza, presente nesse caso, traz um grau de complexidade maior para os problemas, o que gera dificuldades na aprendizagem. Uma das dificuldades a esse respeito revela-se quando, por exemplo, se duplicam os lados de um retângulo e sua área fica quadruplicada e não multiplicada por dois, como podem pensar de imediato muitos alunos.

Por outro lado, em tais problemas a associação entre a multiplicação e a divisão pode ser estabelecida por meio de situações, como:

A área de uma figura retangular é de 54 cm². Se um dos lados mede 6 cm, quanto mede o outro lado?

O volume de uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo é de 40 cm³ a altura é 8 cm. Qual é a é a área da base?

- Associadas à idéia de combinatória.
  Exemplo:
  Lancei dois dados: um vermelho e um azul. Quantos resultados diferentes é possível encontrar?
  A combinatória também está presente em situações relacionadas com a divisão:
  No decorrer de uma festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todas elas dançaram com todos os rapazes, quantos eram os rapazes?

Nesse caso trata-se de uma situação em que é necessário determinar a quantidade de elementos de uma coleção finita, organizada de uma determinada maneira — contagem dos casos possíveis. Em princípio, problemas como este podem ser resolvidos sem que seja necessário fazer nenhum cálculo, uma vez que a solução pode ser obtida pela contagem direta das possibilidades. Nesse caso, o objeto da aprendizagem é a descoberta de um procedimento, como a construção de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama de árvore que assegure a identificação de todos os casos possíveis.

Assim, é indispensável que os alunos produzam diversas representações para buscar os casos possíveis, antes de se pretender que reconheçam a utilização de um cálculo multiplicativo. Por outro lado, se lhes forem apresentados apenas problemas com quantidades pequenas, não terão a necessidade de aplicar o princípio multiplicativo, pois o procedimento da contagem direta é suficiente para obter a solução.

Em relação a todos esses significados convém destacar que é desejável que os problemas a serem trabalhados em sala de aula não sejam tratados separadamente. O que se recomenda é que os professores garantam que todos eles sejam explorados em situações mais ricas, contextualizadas, que possibilitem o desenvolvimento da interpretação, da análise, da descoberta, da verificação e da argumentação.

Em síntese, os aspectos a serem considerados ao se trabalhar com os significados das operações nos ciclos finais são:

- identificar os grupos de problemas que os alunos resolveram em ciclos anteriores, com o objetivo de consolidar alguns deles e ampliar outros;
- modificar intencionalmente algumas informações (tipos de números e grandezas envolvidas) numa determinada situação-problema com o objetivo de mobilizar novos conhecimentos para que os alunos ampliem os significados das operações;
- estimular a busca de diferentes procedimentos para solucionar um problema e favorecer a análise e a comparação desses procedimentos no que refere a sua validade, economia e praticidade.

Potenciação

O conceito de potenciação com os números naturais pode ser trabalhado por meio de situações que envolvam multiplicações sucessivas de fatores iguais, que são freqüentes por exemplo, nos problemas de contagem. Ao desenvolver esse conceito, o professor pode conduzir o trabalho de modo a que os alunos observem a presença da potenciação no Sistema de Numeração Decimal. Por exemplo:

874.615 = 800.000 + 70.000 + 4.000 + 600 + 10 + 5

874.615 = 8x100.000 + 7x10.000 + 4x1.000 + 6x100 + 1x10 + 5

874.615 = $8x10^5 + 7x10^4 + 4x10^3 + 6x10^2 + 1x10 + 5$.

Pela observação das regularidades das seqüências numéricas construídas numa tabela o aluno poderá identificar propriedades da potenciação e, dessa forma, compreender a potência de expoente 1 e expoente zero.

4^6	4^5	4^4	4^3	$4^{...}$
4.096	1.024	....	....	....

÷4 ÷4 ÷4 ÷4

Acrescentando mais duas colunas a essa tabela os alunos poderão indicar que $4^1 = 4$ e $4^0 = 1$, considerando a regularidade observada.

4^6	4^5	4^4	4^3	4^2	?	?
4.096	1.024	256	64	16	....	....

÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4

O trabalho com a potenciação envolvendo números naturais pode ser ampliado para o estudo da potência cujo expoente é um número inteiro negativo, partindo da análise de uma tabela como a anterior. Estendendo para as potências de expoente negativo as regularidades observadas nesta tabela, podem-se obter os valores para 4^{-1}, 4^{-2}, 4^{-3}...

4^4	4^3	4^2	4^1	4^0	4^{-1}	4^{-2}	4^{-3}	4^{-4}
256	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	

÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4

Um outro contexto interessante relacionado com a potenciação é a notação científica. Essa notação consiste numa representação apoiada em igualdades, tais como: $34.000.000 = 3,4 \times 10^7$ e $0,00056 = 5,6 \times 10^{-4}$. A notação científica, no lado direito das igualdades, é bastante utilizada para lidar com números muito grandes ou muito pequenos (comparação, cálculos).

Radiciação

O conceito de radiciação está associado ao conceito de potenciação e pode ser introduzido por problemas como o da determinação do lado de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de volume dado.

Por exemplo, a resolução de um problema que solicite a construção de um quadrado que tenha mesma área de um retângulo com as dimensões 4 e 5 é oportuna para que se discutam algumas questões relacionadas à radiciação e à ampliação do sentido numérico.

Esse problema poderá ser resolvido pela equação $x^2 = 20$. Nesse caso, aceita-se $x = \sqrt{20}$, abandonando a outra raiz, que é $x = -\sqrt{20}$, pois x representa a medida de um lado do quadrado. O aluno no terceiro ciclo, que provavelmente não conhece a existência dos irracionais, poderá encontrar a solução desse problema, utilizando a calculadora para obter um resultado aproximado.

Para ampliar a compreensão sobre o conceito de raiz quadrada, é interessante que os alunos façam estimativas antes de obter a raiz utilizando a calculadora. Uma primeira aproximação a que podem chegar é concluir que o resultado é maior que 4, pois $4^2 = 16$ e menor que 5, pois $5^2 = 25$. Continuando, verificam que a raiz é maior que 4,4, pois $4{,}4^2 = 19{,}36$ e menor que 4,5, pois $4{,}5^2 = 20{,}25$. A partir dessa constatação terão condições de concluir que $\sqrt{20}$ está mais próxima de 4,5 do que 4,4, pois 20 é mais próximo de 20,25 do que 19,36. Assim, poderão indicar, por exemplo, que 4,47 é um número melhor para o resultado do que 4,41. Posteriormente, a calculadora será utilizada para validar esses procedimentos.

Cálculo

Além do trabalho com os significados das operações, é fundamental desenvolver nos ciclos finais um trabalho sistematizado de cálculo que inclua a construção e análise de vários procedimentos, tendo em vista que eles relacionam-se e complementam-se. O cálculo escrito, para ser compreendido, apóia-se no cálculo mental, nas estimativas e aproximações. Por sua vez, as estratégias de cálculo mental, pela sua própria natureza, são limitadas: é difícil gravar na memória vários resultados, principalmente tratando-se de cálculos envolvendo números com muitos dígitos. Assim, a necessidade de registro de resultados parciais acaba originando procedimentos de cálculo escrito.

A importância do estudo do cálculo, em suas diferentes modalidades, justifica-se também pelo fato de que é uma atividade básica para o desenvolvimento das capacidades cognitivas do aluno, visto que:

- possibilita o exercício de capacidades como memória, dedução, análise, síntese, analogia e generalização;
- permite a descoberta de princípios matemáticos como a equivalência, a decomposição, a igualdade, a desigualdade e a compreensão da estrutura do sistema de numeração decimal;
- favorece o desenvolvimento da criatividade, da capacidade para tomar decisões e de atitudes de segurança para resolver problemas numéricos cotidianos.

No terceiro e no quarto ciclos, o objetivo principal do trabalho com o cálculo (mental, escrito, exato, aproximado) consiste em fazer com que os alunos construam e selecionem procedimentos adequados à situação-problema apresentada, aos números e às operações nela envolvidas[2].

A esse respeito, a calculadora pode ser um eficiente recurso por possibilitar a construção e análise de estratégias que auxiliam na consolidação dos significados das operações e no reconhecimento e aplicação de suas propriedades. Um exemplo pode ser o de desafiar o aluno a determinar o quociente de uma divisão exata sem utilizar a tecla de dividir. Nesse caso o uso da calculadora facilitará e estimulará a investigação até que ele descubra que esse quociente pode ser obtido pela contagem de vezes que se pode subtrair o divisor do dividendo, pelo número de vezes que se pode somar o divisor até atingir o dividendo, pelas estimativas de quocientes "parciais", apoiando-se na multiplicação etc. No caso da divisão não exata essas estratégias também possibilitam a obtenção do resto.

A calculadora também é um recurso interessante para que o aluno aperfeiçoe e potencialize sua capacidade de estimar. Na situação em que se propõe ao aluno que estime o resultado da multiplicação de 12,7 por 8,536 por exemplo, inicialmente ele pode determinar o intervalo em que esse resultado se encontra construindo os seguintes percursos: sem utilizar a calculadora, pode concluir que o produto é maior que 96 e menor que 117, pois $12 \times 8 = 96$ e $13 \times 9 = 117$. Para fazer uma estimativa mais refinada, pode somar ao 96 os resultados de $0{,}7 \times 8 \cong 6$ e $12 \times 0{,}5 = 6$, obtendo $96 + 6 + 6 = 108$. Pode ainda dar uma estimativa melhor se calcular o produto $0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}35$ e adicionar ao 108, obtendo 108,35. Esse é um resultado bastante próximo do resultado real: 108,4072. Para conferir suas estimativas, o aluno utilizará a calculadora, validando ou não os procedimentos utilizados.

Ao se retomar nos terceiro e quarto ciclos o estudo da Aritmética pela via da construção dos significados das operações e pela construção e análise de procedimentos de cálculo, é fundamental que os alunos compreendam que esse campo da Matemática tem trazido diversas contribuições à história e à cultura (procedimentos para quantificar, sistema de agrupamentos, estabelecimento de relações de medidas e números) e que hoje constitui um suporte para a linguagem universal da informática (códigos numéricos, representações fracionárias e percentuais).

Álgebra

O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas.

Entretanto, a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do SAEB,

[2] Para mais informações sobre cálculo com naturais recomenda-se a leitura das orientações didáticas apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para primeiro e segundo ciclos.

por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país.

Isso faz com que os professores procurem aumentar ainda mais o tempo dedicado a este assunto, propondo em suas aulas, na maioria das vezes, apenas a repetição mecânica de mais exercícios. Essa solução, além de ser ineficiente, provoca grave prejuízo no trabalho com outros temas da Matemática, também fundamentais, como os conteúdos referentes à Geometria.

Existem também professores que, na tentativa de tornar mais significativa a aprendizagem da Álgebra, simplesmente deslocam para o ensino fundamental conceitos que tradicionalmente eram tratados no ensino médio com uma abordagem excessivamente formal de funções. Convém lembrar que essa abordagem não é adequada a este grau de ensino.

Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as “manipulações” com expressões e equações de uma forma meramente mecânica.

Existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra.

O quadro a seguir sintetiza de forma bastante simplificada as diferentes interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras:

Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e proce-dimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

É fato conhecido que os professores não desenvolvem todos esses aspectos da Álgebra no ensino fundamental, pois privilegiam fundamentalmente o estudo do cálculo algébrico e das equações — muitas vezes descoladas dos problemas. Apesar de esses aspectos serem necessários, eles não são, absolutamente, suficientes para a aprendizagem desses conteúdos. Para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos é necessário um trabalho articulado com essas quatro dimensões ao longo dos terceiro e quarto ciclos.

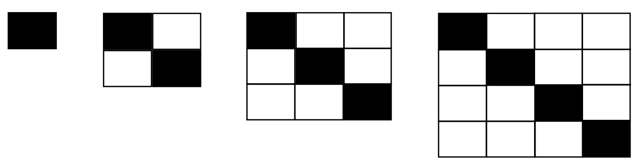
Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar “abstratamente”, se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados.

Embora se considere importante que esse trabalho — chamado de “pré-álgebra” — aconteça nas séries iniciais, ele deve ser retomado no terceiro ciclo para que as noções e conceitos algébricos possam ser ampliados e consolidados. Para isso é desejável que o professor proponha situações de modo que permitam identificar e generalizar as propriedades das operações aritméticas, estabelecer algumas fórmulas (como a da área do triângulo: $A = \frac{bxh}{2}$. Nessa dimensão a letra simplesmente substitui um valor numérico.

É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a idéia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. Exemplo:

Posição:	1º	2º	3º	4º	5º	nº
Nº quadradinhos:	1	2 + 1 = 3	3 + 2 = 5	4 + 3 = 7	5 + 4 = 9	n + n - 1

Um outro exemplo:



1 2 3 4

Nessa situação, o professor pode encaminhar uma atividade para que os alunos encontrem a expressão $n^2 - n$ que determina o número de quadradinhos brancos da n-ésima figura (ao retirar-se n quadradinhos pretos do total n^2 de quadradinhos). Eles também verificam que os quadradinhos brancos de cada figura, a partir da segunda, podem formar um retângulo de x (n - 1) quadradinhos brancos. Assim os alunos podem constatar a equivalência entre as expressões: $n^2 - n$ e $n \times (n - 1)$.

Outro exemplo interessante para que os alunos expressem e generalizem relações entre números é solicitar que adivinhem a regra para transformar números, inventada pelo professor, como: um aluno fala 3 e o professor responde 8, outro fala 5 e o professor 12, para o 10 o professor responde 22, para o 11, responde 24 etc.; o jogo termina quando concluírem que o número respondido é o dobro do pensado, acrescentado de 2 unidades ou o número respondido é sempre o dobro do consecutivo do pensado — poderão também discutir as representações $y = 2x + 2$ ou $y = 2(x + 1)$ e a equivalência entre elas.

No desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e medidas, os alunos terão também oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas, como para os cálculos das áreas. O aluno também poderá ser estimulado a construir procedimentos que levam à obtenção das fórmulas para calcular o número de diagonais ou determinar a soma dos ângulos internos de um polígono.

Iniciar o estudo da sintaxe que o aluno está construindo com as letras poderá completar a noção da álgebra como uma linguagem com regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico. Esse trabalho é significativo para que o aluno perceba que a transformação de uma expressão algébrica em outra equivalente, mais simples, facilita encontrar a solução de um problema.

A noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental e por isso muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra sempre significa uma incógnita.

A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja uma outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações.

Além disso, situações-problema sobre variações de grandezas fornecem excelentes contextos para desenvolver a noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Os alunos podem, por exemplo, estabelecer como varia o perímetro (ou a área) de um quadrado, em função da medida de seu lado; determinar a expressão algébrica que representa a variação, assim como esboçar o gráfico cartesiano que representa essa variação.

No quarto ciclo pode-se construir uma série de retângulos semelhantes (como a medida da base igual ao dobro da medida da altura) e analisar a variação da área em função da variação da medida da base, determinando a sentença algébrica que relaciona essas medidas e expressando-a por meio de um gráfico cartesiano.

Convém também destacar a importância dos gráficos para o desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos e para mostrar a variedade de relações possíveis entre duas variáveis. Quando uma variável aumenta, a outra pode permanecer constante, aumentar ou diminuir na mesma razão da primeira, crescer ou decrescer mas não exatamente na mesma razão, aumentar ou diminuir muito mais acentuadamente, aproximar-se mais e mais de um determinado valor, aumentar e diminuir alternadamente, aumentar ou diminuir em etapas, formando platôs.

Existem alguns *softwares* interessantes que podem ser integrados às atividades algébricas, como os que utilizam planilhas e gráficos. Hoje em dia, com o uso cada vez mais comum das planilhas eletrônicas que calculam automaticamente a partir de fórmulas, a necessidade de escrever algebricamente uma seqüência de cálculos é maior que tempos atrás.

O preenchimento de planilhas também poderá ser explorado por meio de calculadoras.

O exemplo a seguir mostra uma situação em que o aluno perceberá as vantagens do uso de letras (como variáveis) para generalizar um procedimento, bem como reconhecerá a letra ora funcionando como variável, ora como incógnita.

"O dono de um grande estabelecimento concluiu que o preço de uma determinada linha de produtos deveria ser vendida a varejo com um valor majorado em 40% sobre o de custo para que a margem de lucro fosse significativa."

Após discussões, os alunos anotariam os cálculos em uma tabela do tipo:

Produto	**P**: preço de custo (R$)	**V**: preço de venda (R$)
I	2,80	2,80 + 2,80 x 0,4 = 3,92
I I	5,00	5,00 + 5,00 x 0,4 = 7,00
I I I	8,25	8,25 + 8,25 x 0,4 = 11,55
I V	9,45	9,45 + 9,45 x 0,4 = 13,23
V	10,00	2 x 7,00 = 14,00
	....	...
	P	P + P x 0,4

O aluno poderá descrever oralmente os procedimentos e em seguida empregar a noção de variável para indicar genericamente o preço de venda (V) dos produtos em função do preço de custo (P): V = P + P x 0,4.

Para esse exemplo, pode propor questões do tipo: "qual é o preço de custo de uma mercadoria que tem o preço de venda R$ 11,20?". É interessante solicitar aos alunos que façam inicialmente estimativas e depois procurem estabelecer procedimentos (inclusive por meio da calculadora) que possibilitem responder a situações como essa. Para isso, não é necessário que eles já conheçam as técnicas de resolução de equações do primeiro grau, mas que percebam o novo significado da letra P, agora uma incógnita: P + P x 0,4 = 11,20.

A situação-problema citada poderá favorecer o desenvolvimento de um trabalho que visa à simplificação de expressões algébricas. Para tanto, os alunos devem se apropriar de algumas convenções da notação algébrica, como: escrever as constantes antes das variáveis e eliminar o sinal de multiplicação. Desse modo, poderão escrever P + 0,4P em vez de P + P x 0,4. Para simplificar a expressão P + 0,4P eles se defrontarão com a propriedade distributiva: P + 0,4P = (1 + 0,4)P = 1,4P. Assim, o aluno resolve mais facilmente a equação 1,4P = 11,20, descobrindo qual é o número que multiplicado por 1,4 resulta 11,20.

Situações-problema como essas podem ser ampliadas de modo que deixem ainda mais claras para o aluno as vantagens de determinar expressões algébricas para o preenchimento de planilhas.

"O dono da loja decidiu dar um desconto de 10% sobre o preço a varejo para quem comprar suas mercadorias no atacado e elaborou uma tabela com o preço de custo, o preço no varejo e o do atacado para cada um dos produtos."

Produto	**P**: preço de custo (R$)	**V**: preço no varejo (R$)	**A**: preço no atacado (R$)
I	5,80		
II	7,10		
III	9,45		
IV	12,95		
V	15,00		

O professor pode solicitar aos alunos que façam a seqüência de operações para obter os preços no varejo e no atacado e depois determinem a expressão algébrica que permite calcular o preço no atacado em função do preço de custo.

Preço de custo: P

Preço no varejo com 40% de acréscimo sobre o preço de custo: V = 1,4P

Desconto de 10% sobre o preço no varejo: 0,1 x 1,4P = (0,1 x 1,4)P = 0,14P

Preço no atacado com o desconto: A = 1,4P - 0,14P = (1,4 - 0,14)P = 1,26P

Assim, é fácil perceber que é mais prático obter-se uma expressão algébrica simplificada para determinar o preço no atacado de cada produto, pois multiplicar o preço de custo pelo fator 1,26 é menos trabalhoso que fazer toda a seqüência de operações para cada valor da tabela. Verifica-se também que a taxa de lucro do preço no atacado em relação ao preço de custo é de 26%, e não 30%, como se poderia supor.

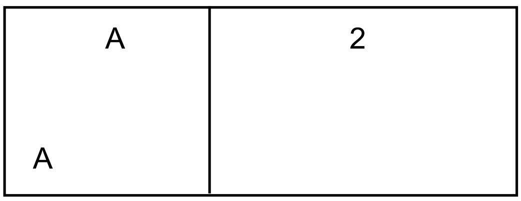
No exemplo discutido, pode-se explorar a noção de variável e de incógnita. Além disso, seu contexto possibilita que os alunos pesquisem e ampliem seus conhecimentos sobre matemática comercial e financeira: taxas, juros, descontos, fatores de conversão, impostos etc. Esse trabalho propicia conexões com os temas transversais Trabalho e Consumo e Ética.

Ao longo desses ciclos é importante que os alunos percebam que as equações, sistemas e inequações facilitam muito as resoluções de problemas difíceis do ponto de vista aritmético. Nesse caso, a letra assume o papel de incógnita e eventualmente de parâmetro.

Nesse documento, recomenda-se que o estudo das técnicas convencionais para resolver equações seja desenvolvido apenas no quarto ciclo, pois em caso contrário os conteúdos do terceiro ciclo ficarão mais extensos, dificultando o trabalho com os demais blocos. Entretanto, é possível que nesse ciclo os alunos traduzam algumas situações-problema por equações. Nesses casos, é desejável que eles desenvolvam estratégias próprias para resolvê-las.

Convém também salientar que a "visualização" de expressões algébricas, por meio do cálculos de áreas e perímetros de retângulos, é um recurso que facilita a aprendizagem de noções algébricas, como:

Exemplo:



1º) Cálculo da área do retângulo pela multiplicação das dimensões do retângulo: a e a+2: $a.(a + 2)$.

Obtendo-se assim $a.(a + 2) = a^2 + 2a$.

2º) Cálculo da área do retângulo pela soma das áreas das figuras que o compõem, o quadrado e o retângulo menor: $a^2 + 2a$.

A utilização desses recursos possibilita ao aluno conferir um tipo de significado às expressões. No entanto, a interpretação geométrica dos cálculos algébricos é limitada, pois nem sempre se consegue um modelo geométrico simples para explicá-lo. Além disso, é preciso que ele perceba que é possível atribuir outros significados às expressões. Assim, as "visualizações" desse tipo podem ser interessantes em alguns momentos, dependendo do contexto da situação-problema, mas o trabalho não pode apoiar-se exclusivamente nelas.

As atividades algébricas propostas no ensino fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras. Os contextos dos problemas deverão ser diversificados para que eles tenham oportunidade de construir a "sintaxe" das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis), e construir as "regras" para resolução de equações.

Espaço e forma

As questões relacionadas com as formas e relações entre elas, com as possibilidades de ocupação do espaço, com a localização e o deslocamento de objetos no espaço, vistos sob diferentes ângulos são tão necessárias hoje quanto o foram no passado.

Situações quotidianas e o exercício de diversas profissões, como a engenharia, a bioquímica, a coreografia, a arquitetura, a mecânica etc., demandam do indivíduo a capacidade de pensar geometricamente. Também é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno.

No entanto, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações.

Como campo de problemas, o estudo do espaço e das formas envolve três objetos de natureza diferente:

- o espaço físico, ele próprio — ou seja, o domínio das materializações;
- a geometria, concebida como modelização desse espaço físico — domínio das figuras geométricas;
- o(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais — domínio das representações gráficas.

A esses objetos correspondem três questões relativas à aprendizagem que são ligadas e interagem umas com as outras. São elas:

- a do desenvolvimento das habilidades de percepção espacial;
- a da elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem que permitam agir nesse modelo;
- a de codificação e de decodificação de desenhos.

A respeito do desenvolvimento das habilidades de percepção espacial, a leitura e a utilização efetiva de mapas e de plantas, nas situações cotidianas, são fonte de numerosas dificuldades para muitas pessoas. Por exemplo, localizar um escritório num grande edifício, deslocar-se numa cidade, encontrar um caminho numa montanha são procedimentos que muitas vezes solicitam uma certa sistematização dos conhecimentos espaciais. Porém, essas habilidades não têm objeto de aprendizagem nas aulas de Matemática.

Para desenvolver esses conhecimentos, diferentes situações podem ser trabalhadas pelos alunos desses ciclos, como aquelas em que utilizam mapas para comunicar informações sobre um grande espaço desconhecido para uma pessoa que deve deslocar-se nele, ou aquelas em que os mapas comunicam ou determinam uma localização precisa, onde uma ação deve ser executada — construção de uma casa, de uma auto-estrada etc. O trabalho com mapas pode levar a um estudo de coordenadas cartesianas e a uma analogia com as coordenadas geográficas.

Outro aspecto importante refere-se ao uso de recursos como as maquetes tridimensionais, e não apenas as representações desenhadas. As maquetes, por exemplo, têm por objetivo, de um lado, contribuir para melhorar as imagens visuais dos alunos e, de outro, favorecer a construção de diferentes vistas do objeto pelas mudanças de posição do observador, freqüentemente indispensáveis na resolução de problemas que envolvem a localização e movimentação no espaço.

Além disso, é uma atividade que leva o aluno a observar as relações entre tamanhos e aproximar-se da noção de proporcionalidade, o que permitirá, num momento posterior, a utilização das escalas na construção de maquetes.

No que diz respeito ao campo das figuras geométricas, inúmeras possibilidades de trabalho se colocam. Por exemplo, as atividades de classificação dessas figuras com base na observação de suas propriedades e regularidades.

Atividades que exploram a composição e decomposição de figuras, como ladrilhamentos, tangrans, poliminós, fazem com que os alunos verifiquem que o recobrimento de uma superfície pode ser feito por determinadas figuras, como triângulos equiláteros, quadrados, retângulos, hexágonos regulares. Assim como a descoberta de que toda figura poligonal pode ser composta/decomposta por outra e em particular por triângulos, o que facilita o cálculo de áreas e a determinação da soma das medidas dos seus ângulos internos.

As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais “dinâmico” para este estudo. Atualmente, existem *softwares* que exploram problemas envolvendo transformações das figuras. Também é interessante propor aos alunos situações para que comparem duas figuras, em que a segunda é resultante da reflexão da primeira (ou da translação ou da rotação) e descubram o que permanece invariante e o que muda. Tais atividades podem partir da observação e identificação dessas transformações em tapeçarias, vasos, cerâmicas, azulejos, pisos etc.

O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas.

À primeira vista as transformações podem parecer um assunto que não tem relação com o dia-a-dia, mas, refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. Em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de simetria de reflexão. Em representações planas desses objetos, tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria. No corpo humano pode-se observar (aproximadamente) um plano de simetria. Assim, também a imagem de um objeto no espelho é simétrica a ele. Há eixos de simetria em diversas criações do homem, como desenhos de aeronaves, edifícios e móveis.

As simetrias centrais e de rotação também surgem em diversos situações: desenhos de flores, logotipos de empresas, desenhos de peças mecânicas que giram, copos, pratos, bordados etc. Os exemplos de translação também são fáceis de encontrar: grades de janelas, cercas de jardins, frisos decorativos em paredes, azulejos decorados etc.

O estudo das transformações que envolvem a ampliação e redução de figuras é um bom ponto de apoio à construção do conceito de semelhança. Porém, esse conceito é geralmente abordado apenas para os triângulos, tendo como única referência a definição que é apresentada ao aluno já na introdução desse conteúdo: “dois triângulos são semelhantes quando e somente quando têm os três ângulos respectivamente congruentes ou os lados correspondentes proporcionais”. Tal abordagem é limitada para uma compreensão mais ampla do conceito de semelhança. Isso pode ser favorecido se tal conceito for estudado em outras figuras, inclusive nas não-poligonais.

Além disso, é preciso ficar claro para o aluno como e em que circunstâncias são produzidas figuras semelhantes. Para tanto, é preciso compreender a idéia de razão de semelhança (“a razão k que existe entre dois de seus lados homólogos”), por meio de ampliações e reduções que podem ser feitas numa figura pelas transformações conhecidas como homotetias.

Pode-se iniciar a exploração da noção de semelhança em figuras tridimensionais por meio de atividades que mostrem, por exemplo, que recipientes de um mesmo produto de diferentes capacidades muitas vezes não são semelhantes, como as garrafas de refrigerante de capacidades diferentes: a razão entre suas alturas não é igual à razão entre os diâmetros dos gargalos.

As relações entre as medidas de área de uma figura e de outra, que é resultado de sua ampliação (ou redução), também podem ser observadas. Na ampliação ou redução de corpos tridimensionais é interessante verificar o que ocorre com seus volumes.

O conceito de semelhança está presente no estudo de escalas, plantas, mapas, ampliações de fotos, fotocópias como também quando se verifica, por exemplo, se as medidas das partes do corpo humano se mantêm proporcionais entre um representante jovem e um representante adulto.

Esse conceito poderá ser desenvolvido e/ou aprofundado também pela análise de alguns problemas históricos, como os procedimentos utilizados pelos antigos egípcios para determinar a altura de suas pirâmides. Outras fontes interessantes de problemas são as que envolvem a noção de semelhança de triângulos e as medidas de distâncias inacessíveis.

Assim, o conceito de semelhança é proveitoso para estabelecer conexões com outros conteúdos matemáticos, como razões e proporções, propriedades das figuras, ângulos, medidas (áreas, volumes) e conteúdos de outras áreas (artes, educação física, ciências, geografia, física).

É importante que os alunos percebam que as transformações foram incorporadas como linguagem básica nos programas de computação gráfica. Assim, ao manipular esses programas, o usuário faz simetrias de todos os tipos, ampliações e reduções.

No que diz respeito aos sistemas de representação plana das figuras espaciais, sabemos que as principais funções do desenho são as seguintes:

- visualizar — fazer ver, resumir;
- ajudar a provar;
- ajudar a fazer conjecturas (o que se pode dizer).

Quando os alunos têm de representar um objeto geométrico por meio de um desenho, buscam uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades e organizam o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem mental global que têm do objeto.

As produções dos alunos mostram que eles costumam situar-se em relação a dois pólos, geralmente antagônicos:

- um que consiste em procurar representar o objeto tal como ele (aluno) imagina como o objeto se apresentaria à sua vista;
- outro que consiste em procurar representar, sem adaptação, as propriedades do objeto que ele (aluno) julga importantes.

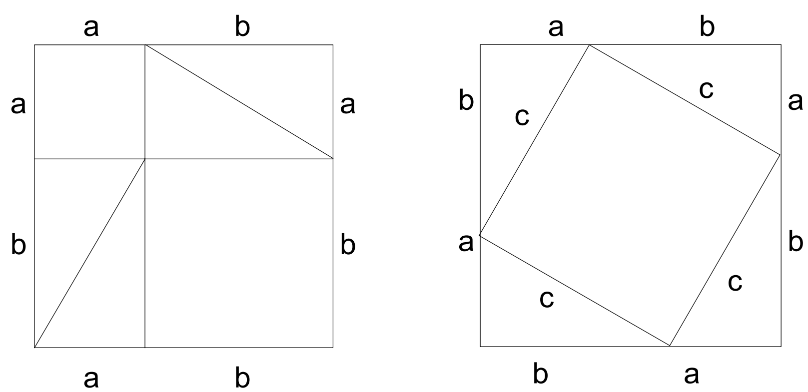
Como, quase sempre, é impossível conjugar os dois critérios, o aluno faz composições para obter um resultado que ele julga o melhor possível. A situação do aluno em relação aos dois pólos depende de diversos fatores; ela evolui com a idade, mas também com as capacidades gráficas, os conhecimentos geométricos, a natureza da tarefa, o objetivo visado etc.

A dificuldade dos alunos é a de encontrar articulações entre as propriedades que ele conhece e a maneira de organizar o conjunto do desenho, pois ele deverá escolher entre sacrificar ou transformar algumas delas, como o desenho das figuras tridimensionais.

Mesmo no início do terceiro ciclo os alunos usam ainda de forma bastante espontânea sua percepção para representar figuras; aos poucos, essa espontaneidade tende a diminuir e é substituída por uma tendência de apoiar-se nos métodos do professor.

As atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Para delinear esse caminho, não se deve esquecer a articulação apropriada entre os três domínios citados anteriormente: o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas.

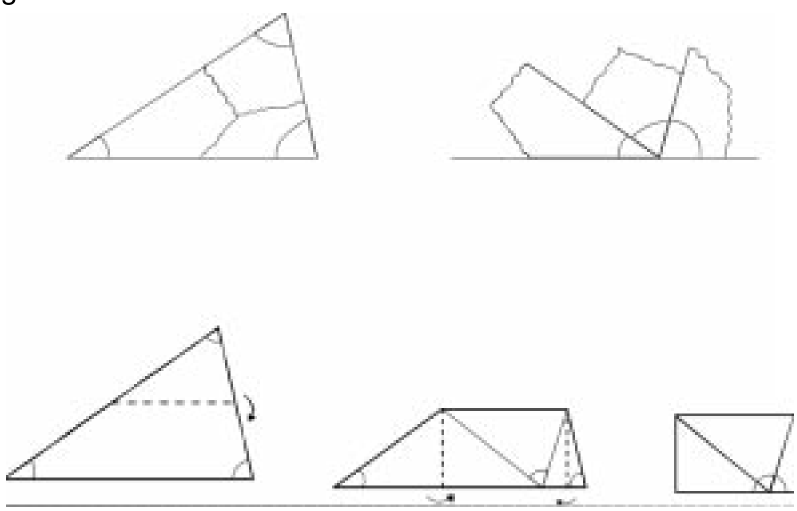
Tome-se o caso do teorema de Pitágoras para esclarecer um dos desvios freqüentes quando se tenta articular esses domínios. O professor propõe ao aluno, por exemplo, um quebra-cabeças constituído por peças planas que devem compor, por justaposição, de duas maneiras diferentes, um modelo material de um quadrado (ver figura). Utilizando o princípio aditivo relativo ao conceito de área de figuras planas, observa-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Diz-se, então, que o teorema de Pitágoras foi "provado".



Apesar da força de convencimento para os alunos que possam ter esses experimentos com material concreto ou com a medição de um desenho, eles não se constituem provas matemáticas. Ainda que essas experiências possam ser aceitas como “provas” no terceiro ciclo, é necessário, no quarto ciclo, que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais.

No caso do teorema de Pitágoras, essa justificativa poderá ser feita com base na congruência de figuras planas e no princípio da aditividade para as áreas. Posteriormente, os alunos poderão também demonstrar esse teorema quando tiverem se apropriado do conceito de semelhança de triângulos e estabelecido as relações métricas dos triângulos retângulos.

Por outro lado, há casos em que a concretização utilizada distancia-se da prova formal adotada. Nesses casos, a exemplificação num contexto pode apenas desempenhar um papel de fontes de conjecturas a serem provadas formalmente. Um exemplo desse fato pode ser identificado na “comprovação” de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180º, feita por meio da decomposição e composição de um modelo material de um triângulo.



A demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, acessível a um aluno do quarto ciclo, recorre a axiomas e teoremas envolvendo um par conveniente de retas paralelas que, no entanto, não tem correspondente na concretização acima mencionada. Mesmo assim, nesse caso, a concretização é bastante útil para levantar conjecturas sobre esse resultado.

O estudo de temas geométricos possibilita ainda a exploração de interessantes aspectos históricos. Como sabemos, a Geometria é um dos ramos mais antigos da Matemática, que se desenvolveu em função de necessidades humanas. As civilizações da época pré-histórica utilizavam regras para medir comprimentos, superfícies e volumes. Seus desenhos continham figuras geométricas em que a simetria era uma das características predominantes.

A origem essencialmente prática da geometria egípcia mostra-se nitidamente pela maneira com que os escribas, do médio império, propunham e resolviam os problemas. É interessante discutir com os alunos que essa forma, apesar de engenhosa e criativa, não facilitava em nada a transferência dos conhecimentos obtidos para novas situações. O estudo de alguns dos problemas resolvidos pelos egípcios poderá mostrar a importância da generalização das relações espaciais e suas representações para resolver situações mais diversificadas e complexas.

Como exemplo, pode-se analisar como eles prescreviam o cálculo da área de um campo triangular e de uma região circular:

1. "Se te dizem para calculares a superfície de um triângulo de 10 varas de altura e 4 varas de base, qual a sua superfície? Calcularás assim: tomarás a metade de 4, ou seja, 2, para fazer teu retângulo. Multiplicarás 10 por 2. É a sua superfície."

2."Se te dizem para calculares a área de uma porção de terra circular, cujo diâmetro é de 9 varas, como farás para calcular sua superfície? Calcularás assim: deves subtrair 1 do diâmetro, que é a nona parte dela. Restam 8 varas; deves, então multiplicar 8 vezes 8, o que resulta 64. Vês que a superfície é de 6 kha (60) e 4 setat."

Como se pode observar nessa segunda situação, o processo utilizado consiste em subtrair 1/9 do diâmetro e em elevar o resultado ao quadrado. Tal cálculo dá para π um valor de 3,1605.

Supõe-se que os egípcios chegaram aos resultados desses problemas por procedimentos gráficos: no primeiro caso, transformando o triângulo em um retângulo equivalente e, no caso do círculo, inscrevendo-o em um quadrado. Nesse caso, parece que o cálculo era feito por aproximações com a ajuda dos 4 triângulos determinados pela inscrição.

Grandezas e Medidas

Os conteúdos referentes ao bloco Grandezas e Medidas cumprem um importante papel no currículo de Matemática, pois estabelecem conexões entre os diversos temas, proporcionando um campo de problemas para a ampliação e consolidação do conceito de número e a aplicação de conceitos geométricos.

Além disso, como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são essenciais para a interpretação deste, as possibilidades de integração com as outras áreas são bastante claras, como Ciências Naturais (utilização de bússolas, e noções de densidade, velocidade, temperatura, entre outras) e Geografia (utilização de escalas, coordenadas geográficas, mapas etc.). As medidas também são necessárias para melhor compreensão de fenômenos sociais e políticos, como movimentos migratórios, questões ambientais, distribuição de renda, políticas públicas de saúde e educação, consumo, orçamento, ou seja, questões relacionadas aos Temas Transversais.

No entanto, as medidas têm tido pouco destaque nas aulas de Matemática, em especial nas últimas séries do ensino fundamental, pois muitos professores, apesar de reconhecerem sua importância, preferem que elas sejam estudadas de forma mais detalhada em Ciências Naturais.

O professor, ao organizar as atividades que envolvem Grandezas e Medidas, deverá levar em conta que o trabalho com esse tema dá oportunidade para abordar aspectos históricos da construção do conhecimento matemático, uma vez que os mais diferentes povos elaboraram formas particulares de comparar grandezas como comprimento, área, capacidade, massa e tempo. Assim também, o estudo das estratégias de medida usadas por diferentes civilizações pode auxiliar o aluno na compreensão do significado de medida. Além disso, possibilita discutir a temática da pluralidade cultural.

Neste estudo, os alunos poderão constatar, por exemplo, que para os egípcios e babilônios a Aritmética constituía algumas regras de cálculo que permitiam resolver problemas práticos, como as medições das diferentes grandezas geométricas e "astronômicas" (agricultura, construções, observações do espaço), enquanto os gregos teorizaram a Geometria separadamente da Aritmética e consideravam que as medidas podiam estabelecer articulações entre esses dois campos.

No estudo dos conteúdos referentes a Grandezas e Medidas nos terceiro e quarto ciclos é preciso retomar as experiências que explorem o conceito de medida. Por exemplo, para medir o comprimento de um objeto o aluno precisa saber quantas vezes é necessário aplicar uma unidade previamente escolhida nesse objeto, ou seja, executar duas operações: uma geométrica (aplicação da unidade no comprimento a ser medido) e outra aritmética (contagem de quantas unidades couberam). Os mesmos procedimentos são utilizados para obter áreas e volumes. Evidentemente, essa constatação somente será percebida em situações em que as medidas são acessíveis a essas comparações e contagens.

No entanto, para calcular áreas e volumes o aluno terá contato com uma dimensão da medida que não é obtida por uma comparação direta, e sim pelo produto de medidas lineares (lados, arestas etc.).

Para medir outras grandezas, utilizam-se procedimentos em que é preciso realizar uma operação física, não necessariamente geométrica, que possibilita a comparação com o padrão previamente estabelecido e que depende da natureza da grandeza envolvida (massa, tempo).

O trabalho com as medidas deve ser desenvolvido de modo que o aluno perceba que nem todas as grandezas são medidas por comparação direta com uma unidade da mesma espécie do atributo que se deseja medir. Exemplo, a temperatura é uma dessas grandezas, pois para medi-la geralmente recorre-se ao fenômeno da dilatação térmica, ou seja, à variação das dimensões que os corpos sofrem quando ocorre variação de temperatura — no termômetro comum usa-se a dilatação do mercúrio.

O trabalho com Grandezas e Medidas também deve propiciar aos alunos a oportunidade de perceberem que muitas vezes, pela sua inacessibilidade, não se pode comparar diretamente uma grandeza a ser medida com o padrão. Para esses casos, é necessária uma determinação indireta usando métodos operacionais mais elaborados. Deseja-se, por exemplo, saber a distância de um ponto da Terra à Lua em um dado instante. Um método indireto para determinar essa distância pode ser o envio de um sinal de radar que será refletido pela superfície da Lua e captado num receptor da estação emissora. Conhecidos a velocidade do sinal e o tempo decorrido entre sua emissão e recepção, pode-se calcular a distância em questão, levantando algumas hipóteses e condições para relacionar a medida indireta com a medida direta.

Para a determinação de distâncias inacessíveis podem-se também propor situações-problema de natureza histórica, como a forma com que Eratóstenes mediu o comprimento da circunferência máxima e o raio da Terra. Para resolver esse problema os alunos poderão aprofundar seu conhecimento sobre algumas noções e procedimentos geométricos (circunferências, ângulos e paralelismo), elaborando, inclusive, uma síntese dos conceitos envolvidos. Para calcular essas distâncias podem-se propor situações em que seja necessário utilizar noções geométricas como o teorema de Tales e a semelhança de triângulos. Exemplos: determinar a altura de um edifício conhecendo-se a medida da sombra projetada; determinar a distância entre dois objetos separados por um obstáculo.

Esse trabalho pressupõe também a obtenção de medidas por intermédio de diferentes instrumentos adequados ao grau de exatidão requerida. A utilização de diversos instrumentos é fundamental para que se possa iniciar — e apenas iniciar — a discussão dos significados e usos de termos como algarismo duvidoso, algarismo significativo, arredondamento, intervalo de tolerância. O aluno, ao discutir esses conceitos, poderá concluir que todas as medidas são inevitavelmente acompanhadas de erros, identificando uma dimensão da Matemática que é o trabalho com a imprecisão, pois o que se mede não é o valor verdadeiro de uma grandeza, mas sim um valor mais aproximado do qual, na maioria das vezes, se conhece a margem de erro. Para melhorar essa margem é possível aplicar métodos estatísticos aos diversos valores obtidos em medições sucessivas para encontrar um valor mais representativo, como a média aritmética.

É importante o aluno reconhecer que as relações entre as unidades padronizadas de algumas grandezas não são decimais, como as de ângulo e as de tempo, e que esse fato encontra suas razões nas origens históricas dessas unidades. É importante notar que atualmente se utiliza em várias situações um “sistema misto” (sexagesimal e decimal) como nas corridas de automóvel, provas de natação em que o tempo é expresso em décimos e centésimos de segundo.

No trabalho com as medidas é bastante freqüente os alunos confundirem noções de área e de perímetro ou estabelecerem relações não verdadeiras entre elas; assim, por exemplo, quando comparam dois polígonos concluem que “a figura de maior área tem necessariamente maior perímetro e vice-versa”. Uma das possíveis explicações é a de que, raramente, os alunos são colocados ante situações-problema em que as duas noções estejam presentes. Variando as situações propostas (comparar duas figuras que tenham perímetros iguais e áreas diferentes ou que tenham áreas iguais e perímetros diferentes; duas figuras de modo que uma tenha maior perímetro e menor área que a outra ou maior perímetro e maior área) e solicitando aos alunos que construam figuras em que essas situações possam ser observadas, cria-se a possibilidade para que compreendam os conceitos de área e perímetro de forma mais consistente.

Outro aspecto a ser salientado em relação às áreas e perímetros diz respeito à obtenção de fórmulas. A experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle, além de as esquecerem rapidamente. Desse modo, o trabalho com áreas deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter a área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações.

É comum encontrar alunos, mesmo entre os que tenham estudado as medidas, que não desenvolveram a noção do "tamanho" do metro quadrado; ao perguntar a esses alunos quantas pessoas podem ficar em pé numa superfície de 1 m², é comum surgirem respostas absurdas como 50, 300, 1.000 etc. Esse fato dificulta a compreensão de diversos conceitos e o desenvolvimento de estimativas. Experiências simples, como a construção de um quadrado de 1 m de lado com papel para verificar quantas vezes esse "quadrado" cabe numa determinada superfície, poderá desenvolver a referida noção.

Desse modo, a estimativa é um outro aspecto que também deve ser considerado no tratamento metodológico do bloco Grandezas e Medidas, uma vez que para desenvolver essa habilidade o aluno terá de estabelecer comparações em situações reais, podendo ampliar sua compreensão sobre o processo de medida e seu conhecimento sobre as unidades padronizadas das grandezas envolvidas.

Um outro ponto a ser considerado é a importância de levar em conta as conexões das medidas com os demais blocos de conteúdos matemáticos. Ou seja: o professor, ao propor situações-problema envolvendo grandezas e medidas, proporcionará contextos para a construção de conceitos e procedimentos não só os estritamente relacionados a este tema, mas também a outros, como ampliação dos campos numéricos, razões e proporções, gráficos cartesianos, relações geométricas, medidas estatísticas etc. Por exemplo, no quarto ciclo, os alunos poderão perceber a equivalência entre algumas figuras planas pela aplicação de propriedades das congruências e semelhanças.

Situações-problema envolvendo áreas e perímetros também são contextos interessantes para um trabalho com a variação de grandezas. Assim, por exemplo, os alunos podem estabelecer como varia o perímetro (ou a área) de um quadrado em função de seu lado; ou então, estabelecer relações entre os lados de retângulos que têm um mesmo perímetro (ou área). Desse modo, observam que existem diferentes tipos de variações (diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não-proporcionais).

Uma dificuldade bastante comum com relação às medidas entre os alunos dos primeiro e segundo ciclos referem-se às medidas de tempo. Apesar disso, o trabalho com essa grandeza nem sempre é retomado nos terceiro e quarto ciclos por se considerar que os alunos possuem certo domínio sobre esse assunto.

No entanto, os alunos se interessam muito por assuntos como o extermínio dos dinossauros ocorrido há 65 milhões de anos, ou pelo intervalo de tempo entre duas batidas sucessivas das asas de um beija-flor e, além disso, compreendem que esses valores estão muito além dos limites que os sentidos podem perceber. O trabalho com o tempo pode permitir discussões interessantes, como sobre quanto tempo decorreu muito antes de existirem os homens das cavernas, ou ainda sobre como será a paisagem da Terra daqui a um milhão de anos etc.

As dificuldades encontradas pelos alunos podem estar relacionadas ao fato de que o tempo não pode ser observado diretamente como propriedade dos objetos. A medição do tempo é essencialmente um processo de contagem. Qualquer fenômeno periódico (fenômeno que se repete num ritmo regular) pode ser usado para a medição do tempo e esta consiste, então, na contagem das repetições do fenômeno escolhido.

Também é interessante destacar para os alunos as diferentes formas pelas quais os homens historicamente mediram o tempo, percebendo que, apesar de não se poder “segurar o tempo”, foi possível medi-lo registrando as repetições de fenômenos periódicos. Qualquer evento familiar era usado para marcar o tempo, como o período entre um e outro nascer do Sol, a sucessão das luas cheias, o número de primaveras; costumava-se então contar os anos por invernos (ou verões), os meses por luas e os dias por sóis, o que os levou a conclusões como a de que o período entre uma lua e outra era constante (29 dias e meio).

A compreensão da relação entre as unidades de tempo hoje utilizadas fica mais clara quando se retomam alguns aspectos históricos das medidas: em 2000 a.C. os babilônios já adotavam seu “ano”, como período de 360 dias. Eles escolheram como base do seu sistema de numeração o número 60 (divisor de 360), e isso se mantém até hoje na nossa contagem de tempo: 1 hora eqüivale a 60 minutos e 1 minuto a 60 segundos.

A resolução de situações-problema envolvendo medida de tempo favorece a construção de procedimentos de cálculo com as diferentes unidades de medida.

Muitas atividades que envolvem a questão do tempo podem interessar os alunos, como:

- pesquisa sobre o funcionamento e construção de um relógio solar, cujos horários são determinados pelas sombras;

- determinação do tempo que a areia leva para escoar da parte superior para a parte inferior de uma ampulheta;
- pesquisa sobre o funcionamento de relógios de pêndulo, mecânicos, de quartzo e digitais, identificando neles os fenômenos periódicos que são contados.

Outra dificuldade comum na aprendizagem de Grandezas e Medidas está na distinção entre peso e massa. Trata-se de duas noções distintas, apesar da íntima relação entre elas. A massa está relacionada com a “quantidade de matéria” que um corpo possui, isto é, indica o quanto um objeto resiste em modificar sua velocidade (quanto maior for essa dificuldade, maior é a massa). O peso, por sua vez, é determinado pela força de atração gravitacional que a Terra exerce sobre o objeto, ou seja, indica o quanto este é atraído pela Terra. O peso varia em função da distância do corpo ao centro da Terra; assim, o peso de um corpo no Pólo Norte é maior que no Equador, pois a distância do centro da Terra ao pólo é menor. A massa é uma propriedade inalterável de um corpo e, para determinar seu valor, é preciso compará-la com outra massa, que será a unidade.

Ao discutir esse assunto é importante destacar que o peso de um corpo de massa 1 kg é aproximadamente 1kgf na superfície terrestre. Assim, um corpo de massa 60 kg terá 60 kgf na superfície da Terra; na Lua, por exemplo, sua massa continuará 60 kg, embora seu peso será bem menor que 60 kgf (aproximadamente 6 vezes menor).

Apesar de ser cada vez menos comum o uso das balanças de dois pratos, elas constituem um recurso recomendável não só para desenvolver o conceito de massa, mas para verificar alguns princípios da igualdade.

A unidade-padrão de massa foi definida como a massa da água pura contida em um cubo cuja aresta interna mede um decímetro, ou seja, de volume igual a um decímetro cúbico. Os alunos poderão verificar experimentalmente essa relação e a equivalência entre o decímetro cúbico e o litro ($1\ dm^3 = 1l$) e, desse modo, concluir que a densidade da água é de 1 kg/l.

Nos terceiro e quarto ciclos é também interessante abordar determinados aspectos históricos a respeito da forma como os homens do passado conseguiram medir massas. Nos túmulos egípcios, por exemplo, foram encontradas balanças feitas de pedra com os “pesos” que serviam como unidades-padrão também em pedra: essas balanças chegavam a detectar diferenças de alguns poucos gramas, mostrando que eles conseguiram uma precisão muito maior para as medidas de massa do que as medidas de espaço e tempo.

Convém destacar que as grandezas a serem estudadas nos terceiro e quarto ciclos não são apenas as geométricas (comprimento, área, volume) ou as relacionadas aos fenômenos físicos (comprimento, massa, tempo, temperatura, densidade, velocidade, energia), mas também quanto à informática, como os números que indicam a capacidade de memória de calculadoras e computadores ou sua velocidade de processamento.

Tratamento da Informação

A importância e interesse alcançados pelo Tratamento da Informação nos dias de hoje, tanto nos aspectos voltados para uma cultura básica quanto para a atividade profissional, se deve à abundância de informações e às formas particulares de apresentação dos dados com que se convive cotidianamente.

Assim, o estudo, nos terceiro e quarto ciclos, dos conteúdos estabelecidos no Tratamento da Informação[3] justifica-se por possibilitar o desenvolvimento de formas particulares de pensamento e raciocínio para resolver determinadas situações-problema — as que envolvem fenômenos aleatórios — nas quais é necessário coletar, organizar e apresentar dados, interpretar amostras, interpretar e comunicar resultados por meio da linguagem estatística.

Por ser um campo que abarca uma ampla variedade de conteúdos matemáticos, o desenvolvimento desse bloco pode favorecer o aprofundamento, a ampliação e a aplicação de conceitos e procedimentos como porcentagem, razão, proporção, ângulo, cálculos etc. Esse estudo também favorece o desenvolvimento de certas atitudes, como posicionar-se criticamente, fazer previsões e tomar decisões ante as informações veiculadas pela mídia, livros e outras fontes.

Uma forma de explorar os processos estatísticos e probabilísticos é a partir da leitura e discussão das informações que aparecem nos jornais. Nesse trabalho a calculadora é um instrumento imprescindível porque os cálculos são muitos e costumam ser trabalhosos em virtude dos números envolvidos, revistas, rádio, televisão, Internet etc. Assuntos que tratam de economia, política, esportes, educação, saúde, alimentação, moradia, meteorologia, pesquisas de opinião, entre outros, geralmente são apresentados por meio de diferentes representações gráficas: tabelas, diagramas e fluxogramas, gráficos (barras, setores, linhas, pictóricos, histogramas e polígonos de freqüência).

Além disso, tais assuntos costumam despertar o interesse dos alunos pelas questões sociais e podem ser usados como contextos significativos para a aprendizagem dos conceitos e procedimentos matemáticos neles envolvidos. Constituem-se também num campo de integração com os conteúdos de outras áreas do currículo, como os das Ciências Sociais e Naturais e, em particular, com as questões tratadas pelos Temas Transversais.

---

[3] Assunto tratado na quinta parte da Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Outras formas interessantes de explorar os conteúdos do tratamento da informação é por meio da realização de pesquisas que tenham interesse para os alunos, como o desenvolvimento físico (peso, altura, idade) de adolescentes e jovens.

Ao propor o trabalho com pesquisas é preciso mostrar ao aluno que nesse tipo de atividade é importante levar em conta alguns aspectos: definir clara e precisamente o problema, indicando a população a ser observada e as variáveis envolvidas; decidir se a coleta dos dados será por recenseamento ou por amostragem; fazer uma análise preliminar das informações contidas nos dados numéricos que possibilite uma organização adequada desses dados, a observação de aspectos relevantes e a realização de cálculos. Além disso, é preciso encontrar as representações mais convenientes para comunicar e interpretar os resultados, obter algumas conclusões e levantar hipóteses sobre outras.

No desenvolvimento de um trabalho de pesquisa os alunos terão oportunidade de construir o conceito de amostra quando se discutir a possibilidade de fazer um recenseamento ou não com toda a população a ser pesquisada. Nesse caso, deverão ser tomadas decisões para indicar os critérios de escolha da amostra.

Ao se colocar essa questão, o aluno terá possibilidades de começar a fazer inferências sobre a representatividade da amostra. Assim, por exemplo, a partir de uma pesquisa realizada com todos os alunos de uma mesma sala, ele terá condições de verificar se esses alunos poderão ser considerados como amostra de toda a escola. Poderá concluir então que é muito provável que sua classe seja uma amostra representativa quando os dados levantados referirem-se ao local de moradia e que não é provável que ela seja representativa, se a variável pesquisada for a altura (alunos de séries diferentes geralmente têm idades diferentes, o que influencia na altura).

No trabalho de coleta de dados é importante levar o aluno a perceber que, em pesquisas quantitativas, muitas vezes, não é adequado agrupar os dados segundo cada valor assumido pela variável. Isso poderia gerar muitos grupos e a tabela para organizar os dados praticamente repetiria a listagem dos valores encontrados. Por isso se faz a distribuição de freqüências por faixas ou classes de valores assumidos pela variável.

É importante ele perceber que, ao agrupar os dados em classes, mesmo que se perca um pouco da precisão das informações, consegue-se um resumo bastante razoável da pesquisa e, conseqüentemente, uma melhor compreensão e análise dela. Assim, o aluno poderá concluir que a escolha do número de classes a ser considerada é também uma questão de bom senso, pois, se o número de classes for muito grande, podem-se não resumir os dados convenientemente ou, se o número for muito reduzido, perde-se muita informação.

Outro aspecto a ser discutido é a escolha dos recursos visuais mais adequados, os que permitem a apresentação global da informação, a leitura rápida e o destaque dos aspectos relevantes, para comunicar os resultados da pesquisa.

Para ampliar a análise dos alunos, levá-los a fazer resumos estatísticos e a interpretar resultados é fundamental para que compreendam o significado e a importância das medidas de tendência central de uma pesquisa, ou seja, a média, a moda e a mediana.

É interessante propor situações em que haja discrepâncias bastante acentuadas entre essas medidas para que os alunos possam refletir sobre qual é a mais significativa para expressar a tendência da maioria. Por exemplo, na seguinte situação: suponha que cada um dos sete números da seqüência 1, 2, 2, 2, 3, 3, 22 represente a quantidade de salários mínimos de um funcionário de uma firma que tem sete funcionários, ou seja, um funcionário ganha 1 mínimo, três funcionários ganham 2 mínimos, dois ganham 3 mínimos e um ganha 22 mínimos. A mediana desses valores é 2 (para determinar a mediana dessa seqüência é preciso identificar o número que ocupa a posição central, neste caso, é o quarto elemento, pois tanto antes quanto depois dele existem três valores). A média desse conjunto de valores, no entanto, é 5, pois $\frac{1+2+2+2+3+3+22}{7} = 5$. Nesse caso os alunos poderão perceber que a mediana representa melhor a situação real dos dados, pois o valor 22, por ser muito superior aos outros termos, "eleva" a média. Desse modo, se no lugar do 22 constasse um salário ainda maior, a média aumentaria, enquanto a mediana continuaria a mesma. A moda dos salários apresentados também é de 2 mínimos, pois é o valor de maior freqüência.

No trabalho com a estatística, a calculadora é, muitas vezes, um instrumento imprescindível porque os cálculos são muitos e costumam ser trabalhosos em virtude dos números envolvidos.

Ao trabalhar com o Tratamento da Informação é fundamental ainda que, ao ler e interpretar gráficos, os alunos se habituem a observar alguns aspectos que permitam confiar ou não nos resultados apresentados: por exemplo, observar a presença da freqüência relativa e se as escalas utilizadas são convenientes. Costuma ser freqüente nos resumos estatísticos a manipulação dos dados, que são apresentados em gráficos inadequados, o que leva a erros de julgamento. Esses erros também poderão ser evitados se os alunos forem habituados, em seus trabalhos de pesquisa, a identificar informações que não foram levantadas, bem como informações complementares, a comprovar erros que são cometidos ao recolher os dados, a verificar informações para chegar a uma conclusão.

Assim, eles terão oportunidade de desenvolver conhecimentos para poder compreender, analisar e apreciar as estatísticas apresentadas pelos meios de comunicação e para um melhor reconhecimento das informações confiáveis. Também poderão constatar que um problema estatístico pode ser resolvido por diferentes procedimentos e que nem todos os procedimentos estatísticos se adaptam bem a todos os problemas.

A resolução de problemas de contagem, no ensino fundamental, coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. Conseqüentemente, poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, e dispor de uma ferramenta útil e motivadora para a aprendizagem da probabilidade e da estatística.

Os primeiros contatos dos alunos com os problemas de contagem devem ter como objetivo a familiarização com a contagem de agrupamentos de objetos, de maneira formal e direta — fazer uma lista de todos os agrupamentos possíveis e depois contá-los.

A exploração dos problemas de contagem levará o aluno a compreender o princípio multiplicativo. Tal princípio está quase sempre associado a situações do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo pode-se formar?

Além disso, o emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental.

Nos ciclos finais, a noção de probabilidade continua a ser explorada de maneira informal, por meio de investigações que levem os alunos a fazer algumas previsões a respeito do sucesso de um evento.

Para ampliar a noção de probabilidade pode-se partir de uma situação como: em 10 lançamentos de uma moeda deu 9 vezes cara, ou seja, 90% dos lançamentos. A partir dessa afirmação é possível explorar as seguintes situações: se a moeda for lançada mais 10 vezes, é provável que essa porcentagem se repita? e se o número de lançamentos for 1.000? ou 10.000? Qual é a porcentagem que deve dar em cada caso? As respostas dos alunos evidenciam sua intuição a respeito de algumas idéias envolvidas na probabilidade e favorecem um trabalho de familiarização com esse assunto. É importante que eles descubram, pela experimentação, que as chances de cada resultado ser igual — 50% — deve-se à simetria da moeda e sua homogeneidade (moeda honesta).

Com esse trabalho espera-se que o aluno também perceba que ele poderia ter lançado uma moeda 15 vezes obtendo nesses lançamentos 15 caras. Mas, mesmo que isso tivesse acontecido — o que é bem difícil — no 16º lançamento, a chance de obter cara continua sendo a mesma de obter coroa e que a "disparidade" entre os resultados de cara e de coroa tendem a diminuir conforme se amplia o número de experimentos.

Ao se realizarem experiências para calcular probabilidades, é interessante utilizar materiais manipulativos que permitam explorar a propriedade da "simetria" (dados, moedas), como também os que não possuem essa "simetria" (roletas com áreas desiguais para os números).

No trabalho com probabilidade é fundamental que os alunos compreendam o significado de espaço amostral e sua construção pela contagem dos casos possíveis, utilizando-se do princípio multiplicativo e de representações como uma tabela de dupla entrada ou um diagrama de árvore. Desse modo, será possível indicar o sucesso de um evento utilizando-se de uma razão.

Os conteúdos do bloco Tratamento da Informação podem ser explorados em projetos mais amplos, de natureza interdisciplinar, que integrem conteúdos de outras áreas do currículo, como a História e a Geografia, além da Matemática e os temas como Saúde e Meio Ambiente. O tema Trabalho e Consumo, por exemplo, é um bom eixo para articular um desses projetos, uma vez que esse assunto é de grande interesse dos alunos, principalmente os de quarto ciclo, que começam a tomar algumas decisões em relação ao seu encaminhamento profissional.

O objetivo do projeto pode ser o de fazer um levantamento estatístico sobre a oferta de empregos, os salários de algumas profissões e discussões sobre alguns aspectos relacionados ao Trabalho. Para estimular o debate pode-se propor aos alunos que reflitam e pesquisem sobre questões como: a “relação entre trabalho e conhecimento”; “a necessidade de especialização no mundo moderno”; “a influência da informática no aumento da taxa de desemprego” e “as contribuições que a Matemática pode oferecer para a formação de um cidadão para o mundo do trabalho”.

Conexões entre os conteúdos

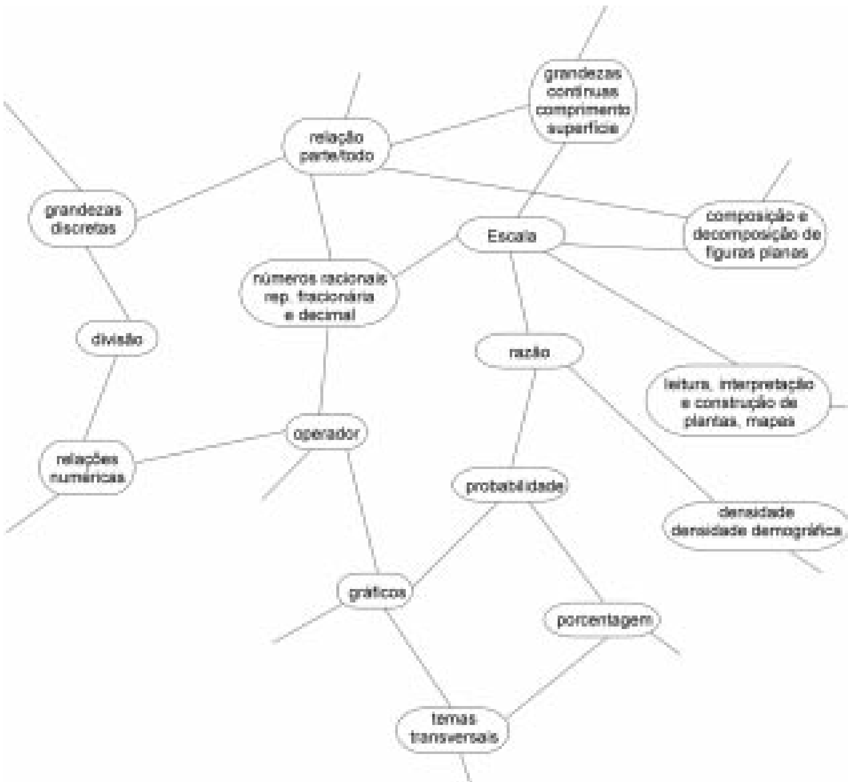
Muitos professores consideram que é possível trabalhar com situações do cotidiano ou de outras áreas do currículo somente depois de os conhecimentos matemáticos envolvidos nessas situações terem sido amplamente estudados pelos alunos. Como esses conteúdos geralmente são abordados de forma linear e hierarquizada, apenas em função de sua complexidade, os alunos acabam tendo poucas oportunidades de explorá-los em contextos mais amplos. Mais ainda, as situações-problema raramente são colocadas aos alunos numa perspectiva de meio para a construção de conhecimentos.

Essa organização linear e bastante rígida dos conteúdos, que vem sendo mantida tradicionalmente na organização do ensino de Matemática, é um dos grandes obstáculos que impedem os professores de mudar sua prática pedagógica numa direção em que se privilegie o recurso à resolução de problemas e a participação ativa do aluno.

Porém, isso pode ser rompido se o professor se predispuser a traçar no seu planejamento algumas conexões entre os conteúdos matemáticos. Para tanto, ao construir o planejamento, é preciso estabelecer os objetivos que se deseja alcançar, selecionar os conteúdos a serem trabalhados, planejar as articulações entre os conteúdos, propor as situações-problema que irão desencadeá-los. É importante que as conexões traçadas estejam em consonância com os eixos temáticos das outras áreas do currículo e também com os temas transversais.

Os exemplos apresentados a seguir têm a mera função de dar uma idéia de como o professor pode organizar algumas conexões entre os conteúdos.

Exemplo 1 — Número racional: significados

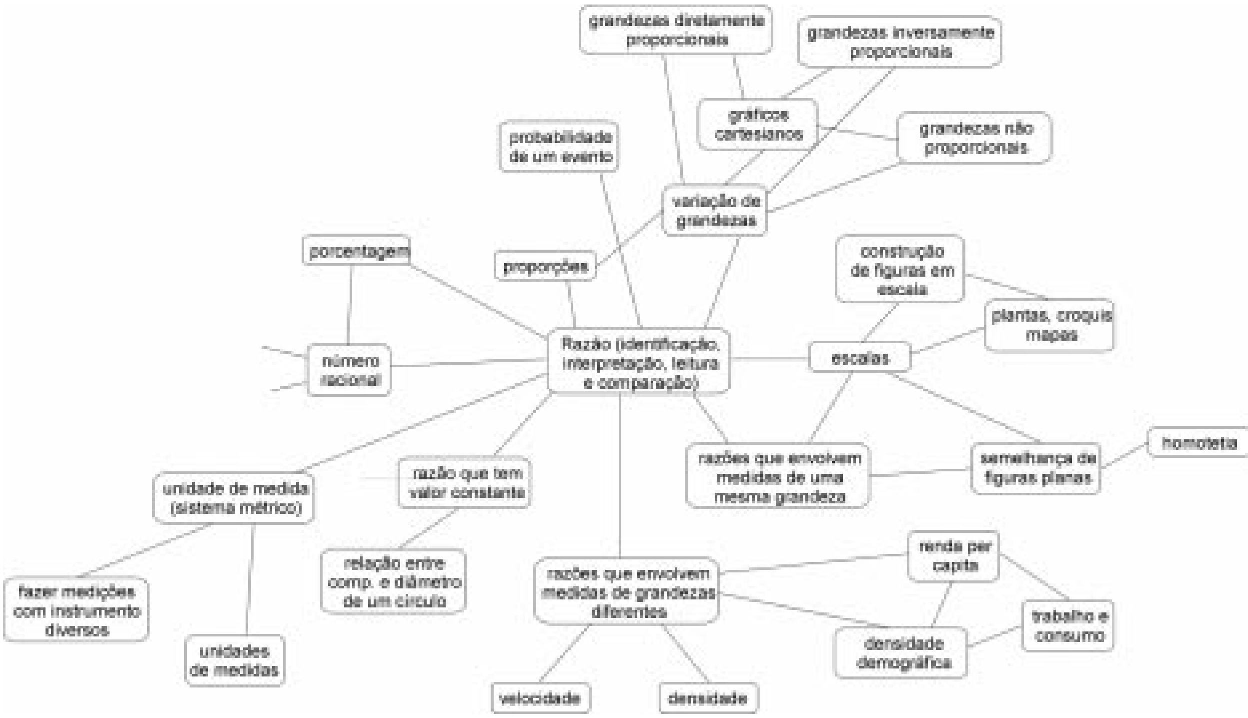


Exemplo 1

Alguns dos possíveis contextos das situações-problema:

- notícias de jornal, em particular as que envolvem índices econômicos — leitura, interpretação, cálculos;
- guias de cidade e atlas — leitura, compreensão e utilização de escalas;
- medições envolvendo as diferentes grandezas (comprimento, área, volume, massa, tempo, temperatura) — interpretação das medidas obtidas;
- bulas de remédio, receitas (massa, capacidade) — interpretação, cálculos, transformação de unidades;
- problemas históricos.

Exemplo 2 — Variação de grandezas: medidas



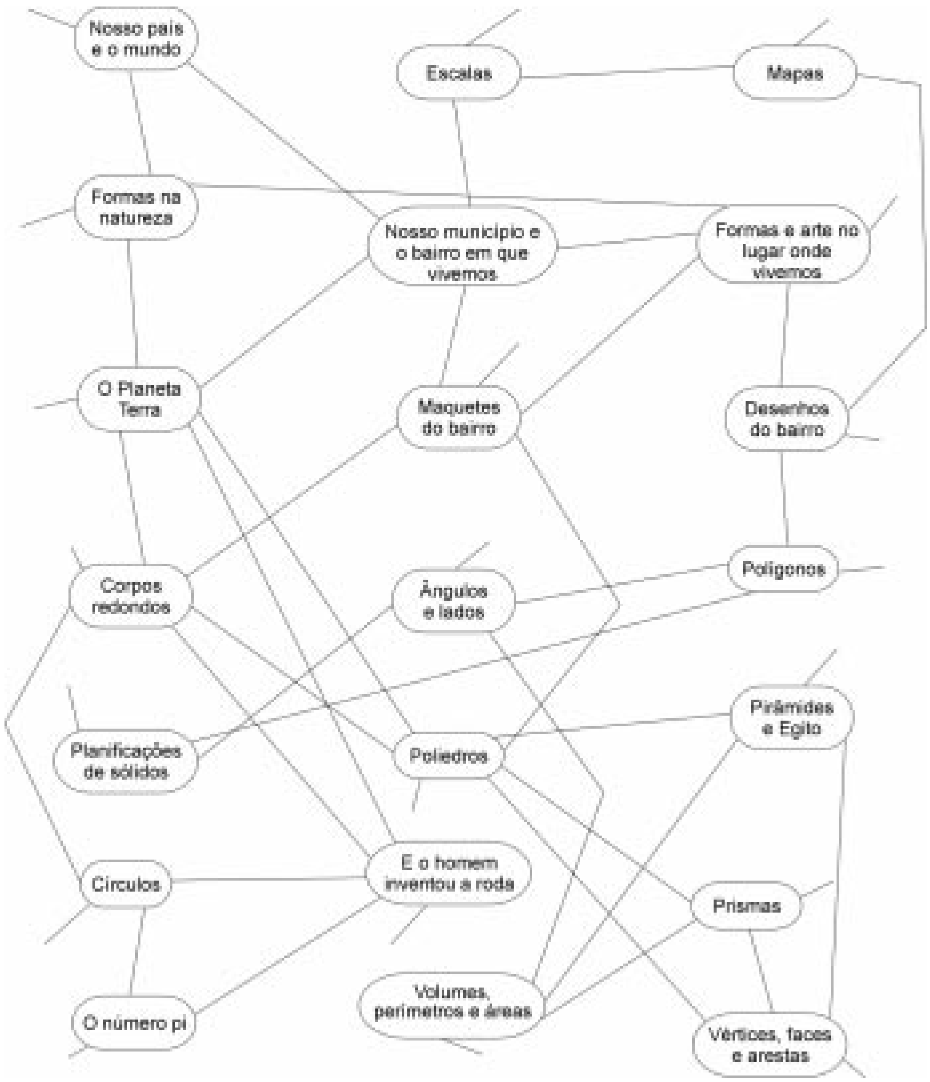
Exemplo 2

Alguns dos possíveis contextos das situações-problema:

- planta baixa de uma casa — interpretação, desenho, cálculos, ampliação, redução;
- índices relacionados a saúde (taxas de mortalidade, doenças endêmicas etc.) — interpretação, cálculos, gráficos;
- índices relacionados ao trabalho (taxas de desemprego, salários) — interpretação, cálculos, gráficos;
- questão da terra (reforma agrária, erosão, preço, desmatamento) — unidades de medida, cálculos;
- produção agrícola (produção de grãos, exportação, importação, custo, lucro, impostos) — unidades de medidas, gráficos e cálculos;
- construção de uma horta (planejamento de canteiros, obtenção das medidas de um canteiro retangular de maior área entre vários de mesmo perímetro) — cálculos, gráficos;
- tabelas de fatores de conversão (unidades de diferentes grandezas, moedas) elaboração, interpretação, cálculos;

- energia elétrica — unidades, cálculo do custo em função do consumo;
- custo de uma quantidade de uma mercadoria a ser comprada (preços no varejo e no atacado) — cálculos, descontos, impostos;
- problemas históricos dos números racionais e medidas;
- renda *per capita* e densidade demográfica (de diferentes países e estados) — interpretação, cálculos;
- velocidade em estradas — velocidade máxima, consumo de combustível — unidades, cálculos (tempos, distâncias).

Exemplo 3 — Espaço e formas: o lugar em que se vive, os objetos do entorno



Exemplo3

Alguns dos possíveis contextos das situações-problema:

- formas e órbitas dos planetas;
- as embalagens das coisas — planificações, construções;
- construção de maquetes;
- as pirâmides do Egito;
- guias da cidade e mapas;
- decomposição da luz — prismas.

BIBLIOGRAFIA

ABELLÓ, F. *Aritmética y calculadoras*. Madri: Editorial Sinteses, 1992.

ALEKSANDROV A. D. *et al. La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madri: Alianza Universidad, 1985.

ALFONSO, B. *Numeracion y calculo*. Madri: Editorial Sintesis, 1989.

AMALDI, U. *Imagens da Física*. São Paulo: Scipione, 1995.

ARGENTINA. Secretaria da Educação. *Matemática, documento de trabalho nº 4. Atualización curricular*. Buenos Aires.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA. *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: 1988.

________. *Agenda para acção: recomendações para o ensino de Matemática nos anos 80*. Lisboa: 1985.

CASTELNUOVO, E. Los programas de Matematica en la scuola media italiana. *Revista Epsilon*. Sociedad Andaluza de Educacion Matematica Thales, 1984.

CASTRO, E. *et al. Estimacion en calculo y medida*. Madri: Editorial Sintesis, 1989.

CHAMORRO, C. *El aprendizage significativo en área de las matemáticas*. Madri: Editorial Sintesis, 1992.

CHAMORRO, C. *et al. El problema de la medida. Didactica de las magnitudes lineales.* Madri: Editorial Sintesis, 1988.

CHARLOT, B. Qu'est-ce que faire des maths? L'épistemologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques. *Bulletin APMEP*, IREM du Mans, n. 359. França, 1987.

__________. Histoire de lá réforme des "maths modernes"; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique. *Bulletin APMEP*, IREM du Mans, n. 35, França, 1986.

CHARNAY, R. Aprender (por meio de) la resolucion de problemas. *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Argentina: Paidós Educador, 1994.

CISCAR, S. L. e GARCIA, M. V. S. *Fracciones: la relacion parte-todo*. Madri: Editorial Sintesis, 1988.

COLL, C. *et al. Los contenidos en la reforma. Enseñanza y aprendizage de conceptos, procedimentos y atitudes*. Madri: Santillana, 1992.

________. *Psicologia y currículum*. Barcelona: Paidós, 1992.

COXFORD, A. e SHULTE, A. *As idéias da álgebra.* São Paulo: Atual, 1995.

D'AMBROSIO, U. Globalização, educação multicultural e etnomatemática. In: *Jornada de reflexão e capacitação sobre Matemática na educação básica de jovens e adultos*. MEC/ SEF: 1997.

________. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. Campinas: Unicamp, 1986.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas em Matemática*. São Paulo: Ática, 1991.

DAVIS, P. J. e HERSH, R. *A experiência matemática*. Tradução de João B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

________. *O sonho de Descartes*. Tradução de Mário C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

DOUADY, R. De la Didactique des Mathématiques a l'heure actuelle. *Cahier de didactique des mathématiques*. IREM, Université Paris VII, n. 6, s/d.

DOWBOR, L. O espaço do conhecimento. *A revolução tecnológica e os novos paradigmas da sociedade*. Belo Horizonte: Ipso/Oficina de livros, 1994.

DUVAL, R. A*rgumenter, demontrer, expliquer: continuite ou rupture cognitive.* IREM de Strasbourg, n. 31. França: 1993.

ESPANHA. Ministerio de Educación y Ciencia Primaria. *Curriculo Oficial*. Área de Matemáticas.

FRANCHI, A. *Compreensão das situações multiplicativas elementares*. Tese de doutorado, PUC-SP, 1995 (mimeo).

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia – saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra, 1997.

FREUDENTHAL, H. *Problemas mayores de la educacion matematica*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel. Versão ao espanhol: Alejandro López Yánez, 1981.

GARDNER, H. *Estruturas da mente: a teoria das inteligências múltiplas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

GATES, P. O currículo nacional em Inglaterra: desenvolvimento curricular ou controle político? *Educação e Matemática*, n. 19/20, 3º e 4º trimestres de 1991.

GIMENEZ, J. R. *Evaluación en Matemáticas: uma integración de perspectivas.* Madri: Síntesis Editorial.

GÓMEZ, C. M. *Enseñanza de la multiplication y division*. Madri: Editorial Síntesis, 1991a.

________. *Multiplicar y dividir através de la resolucion de problemas*. Madri: Visor, 1991b.

INGLATERRA e País de Gales. Department for Education and the Welsh Office. *Mathematics in the national curriculum*. 1991.

JAPIASSU, H. *Interdisciplinaridade e patologia do saber*. Rio de Janeiro: Imago, 1976.

KLINE, M. *El fracasso de la Matematica Moderna*. Espanha: Siglo Veintiuno Editores, 1976.

KOOJI, H. Matemática realista na Holanda. *Educação e Matemática*, n. 23, 3º trimestre de l992.

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LINS, R. e GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas: 1997

LINARES, S. e SANCHES, M.V. *Fracciones: la relacionn parte-todo.* Madri: Editorial Sintesis, 1988.

LOPES, A. J. Explorando o uso da calculadora no ensino de matemática para jovens e adultos. In: *Alfabetização e Cidadania*, n. 6, 1998.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e didática: a alegoria como norma e o conhecimento como rede*. Tese de Livre Docência. São Paulo: Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 1994.

MICHEL, F. La enseñanza de la matematica en Belgica. *Revista Epsilon*. Sociedad Andaluza de Educacion Matematica Thales, 1984.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *An agenda for action. Recommendations for school Mathematics of the 1980s.* Reston, VA: 1983.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Estandares curriculares y de evaluation para la educacion matematica*. S. A. E. M. Thales, s/d.

NIVEN, I. *Números racionais e irracionais*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1984.

PARRA, C. e SAIZ, I. (Org.). *Didática de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós, 1994.

PIAGET, J. *La ensenãnza de las matematicas modernas*. Espanha: Alianza Editorial, 1978.

__________. *La ensenãnza de las matematicas.* Espanha: Aguilar, 1965.

PIRES, C. M. C. *Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede*. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 1995 (tese de doutorado).

PONTECORVO, C. Teoria do currículo e sistema italiano de ensino. Apud BECCHI, E. *et alii. Teoria da didática*. São Paulo: Cortez/Autores Associados, 1986.

PROPOSTAS CURRICULARES DOS SEGUINTES ESTADOS: Alagoas, Amazonas, Bahia, Ceará, Distrito Federal, Espírito Santo, Goiás, Mato Grosso do Sul, Minas Gerais, Pará, Paraíba, Paraná, Pernambuco, Piauí, Rio de Janeiro, Rio Grande do Norte, Rio Grande do Sul, Santa Catarina, São Paulo e Tocantins.

PUIG, L. e CERDÁN, F. *Problemas aritméticos escolares*. Madri: Editorial Sintesis, 1988.

REVISTA DE DIDÄTICA DE LAS MATEMÄTICAS. *Probabilidade y estatística* Barcelona: Grao, jul/1995.

SANTOS, B. S. Um discurso sobre as ciências na transição para uma ciência pós-moderna. *Revista do IEA/USP*, 1988.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. *Projeto: inovações do ensino básico. Textos para professores de Matemática de 5ª a 8ª séries.* São Paulo: 1997.

__________. Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Experiências matemáticas - 5ª a 8ª séries*. São Paulo: 1994.

__________. Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta educacional. Currículo e avaliação*. São Paulo: 1992.

SCHOENFELD, A. H. *Mathematical problem solving*. Nova York: Academic Press, 1985.

SEKIGUSHI, Y. Reforma curricular em educação matemática em curso no Japão. *Educação e Matemática*, n. 19/20, 3º e 4º trimestres de 1991.

SERRES, M. *A comunicação*. Porto: Rés, 1967.

SOCAS, M. M., CAMACHO, M., PALAREA, M. e HERNANDES, J. *Iniciciacion al algebra.* Madri: Editorial Sintesis, s/d.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *A Educação Matemática em Revista*, n. 1, 1993.

UNESCO. Division of Science Technical and Environmental Education. Mathematics for all. *Scienc and Technology Education*, n. 20, 1984.

VERGNAUD, G. e DURAND, C. Estructuras aditivas y complejidad psicogenética. Tradução de Reyes de Villalonga. *Revue Française de Pédagogie*, 1976.

VYGOSTSKY, L.S. *Pensamento e linguagem*. Lisboa: Antídoto, 1979.

FICHA TÉCNICA

Coordenação Geral
Célia Maria Carolino Pires e Maria Tereza Perez Soares.

Coordenação de Temas Transversais
Neide Nogueira

Elaboração
Ana Rosa Abreu, Angela Martins Baeder, Antonia Terra de Calazans Fernandes, Antonio Carlos Egyto, Bernard Kenj, Caio Martins Costa, Célia Maria Carolino Pires, Conceição Aparecida de Jesus, Flávia Shilling, Francisco Capuano Scarlato, Geraldo Antonio de Carvalho, Ghisleine Trigo Silveira, Hugo Montenegro, Kátia Lomba Bräkling, Luiz Paulo da Moita Lopes, Marcelo Barros da Silva, Margarete Artacho de Ayra Mendes, Maria Amábile Mansutti, Maria Antonieta Alba Celani, Maria Cecilia Guedes Condeixa, Maria Cristina Ribeiro Pereira, Maria Helena Maestri Gios, Maria Heloísa Corrêa de Toledo Ferraz, Maria José Nóbrega, Maria Teresinha Figueiredo, Maria Tereza Perez Soares, Maria Virgínia de Freitas, Marília Costa Dias, Marina Valadão, Neide Nogueira, Regina Célia Lico Suzuki, Rosa Iavelberg, Roseli Fichmann, Ruy César Pietropaolo, Silvio Duarte Bock, Sueli Ângelo Furlan, Yara Sayão e Zysman Neiman.

Consultoria
Ana Mae Tavares Bastos Barbosa, Ângela de Castro Gomes, Antônio Augusto Gomes Batista, Carlos Franchi, César Coll Salvador, Circe Maria Fernandes Bittencourt, Claudio Antonio G. Egler, Délia Lerner de Zunino, Edson Claro, Egon de Oliveira Rangel, Elianor Kunz, Elias Thomé Saliba, Francisco Cardoso Gomes de Matos, Hédio Silva Jr., Hilário Flávio Bohn, Ilana Blaj, Ingrid Dormiem Koudela, Jan Bitou, João Bosco Pitombeira F. de Carvalho, Jurandyr Luciano Sanches Ross, Liliana Petrilli Segnini, Luís Carlos de Menezes, Luís Percival Leme Britto, Luiz Marcelo de Carvalho, Luiz Roberto Dante, Maria Adélia Aparecida de Souza, Maria Aurora Consuelo Alfaro Lagório, Maria Beatriz Borba Florenzano, Maria Filisminda Rezende Fusari, Maria Helena Simielli, Marilena Lazzarini, Marta Maria C. A. Pernambuco, Mauro Betti, Miguel Arroyo, Modesto Florenzano, Nélio Bizzo, Nilza Eingenheer Bertoni, Otavio Aloisio Maldaner, Paulo Figueiredo Lima, Rômulo Campos Lins, Silvia M. Pompéia, Suraya Cristina Darido, Ubiratan D'Ambrósio e Vera Junqueira.

Assessoria

Abuendia Padilha Peixoto Pinto, Aloma Fernandes de Carvalho, Andréa Shilling, Áurea Dierberger, Cláudia Aratangy, Heloísa Margarido Sales, Iolanda Huzak Furini, Isabel de Azevedo Marques, Iveta Maria Borges Ávila Fernandes, Jelsa Ciardi Avolio, Juarez Tarcísio Dayrell, Lydia Rosenberg Aratangy, Maria Del Carmen Fátima Gonzalez Daher, Paula Virgínia Shneider, Romildo Póvoa Faria, Thereza Christina Holl Cury, Therezinha Azerêdo Rios, Vera Lúcia A. Santana e Yves de La Taille.

Revisão e Copydesk

Ana Maria Viana Freire, Lilian Jenkino e Maristela Felix de Lima.

Agradecimentos

Anna Maria Lambert, Beatriz Carlini Cotrim, Érica Pellegrini Caramaschi, Gilda Portugal Gouveia, Helena Wendel Abramo, Hércules Abraão de Araújo, José Antonio Carletti, José Otávio Proença Soares, Márcia Ferreira, Marcos Sorrentino, Maria Auxiliadora Albergaria Pereira, Maria Helena Maestri Gios, Marília Pontes Spósito, Paulo Eduardo Dias de Mello, Raquel Glezer, Regina Rebolo, Volmir Matos e Walter Takemoto.

Presidente da República
Fernando Henrique Cardoso

Ministro de Estado da Educação e do Desporto
Paulo Renato Souza

Secretário Executivo
Luciano Oliva Patrício

2ª capa

Presidente da República
Fernando Henrique Cardoso

Ministro de Estado da Educação e do Desporto
Paulo Renato Souza

Secretário Executivo
Luciano Oliva Patrício

Ministério da
Educação e do
Desporto