



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Ana Carolina da Silva Pacheco

Estudo da confiabilidade relacionada à ductilidade de vigas de concreto armado

Florianópolis

2022

Ana Carolina da Silva Pacheco

Estudo da confiabilidade relacionada à ductilidade de vigas de concreto armado

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Wellison José de Santana Gomes, Dr.

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pacheco, Ana Carolina

Estudo da confiabilidade relacionada à ductilidade de vigas de concreto armado / Ana Carolina Pacheco ; orientador, Wellison José de Santana Gomes, 2022.

83 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Confiabilidade estrutural. 3. Concreto armado . 4. Vigas. 5. Ductilidade. I. de Santana Gomes, Wellison José. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

Ana Carolina da Silva Pacheco

Estudo da confiabilidade relacionada à ductilidade de vigas de concreto armado

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Roberto Caldas de Andrade Pinto, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Tiago Morkis Siqueira, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Caio Gorla Nogueira, Dr.
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof. Wellison José de Santana Gomes, Dr.
Orientador

Florianópolis, Julho de 2022.

AGRADECIMENTOS

Esta dissertação é a conclusão de uma fase durante a qual muitas pessoas foram importantes. Por isso, registro aqui os meus mais sinceros agradecimentos:

Ao meu orientador, professor Wellison Gomes, que dedicou parte do seu tempo para me ajudar a chegar ao final deste trabalho. Agradeço pela disponibilidade, paciência e ensinamentos.

Aos meus pais, Tânia e Amauri, por não medirem esforços para me verem feliz e alcançando os meus objetivos. Sou imensamente grata pelas oportunidades que me proporcionaram.

A minha dinda, Adriana, por ser um exemplo para mim e meu porto seguro em tantos momentos. Todos os conselhos e ajudas foram essenciais. Agradeço também as minhas amadas primas, Isabela e Antonela.

A Bruna, Catharine, Malena, Rafaela e Vitor, pela amizade e por sempre acreditarem em mim.

Aos colegas e amigos do PPGEC, que estiveram sempre presentes por meio de incentivos, ajudas e momentos de descontração que fizeram toda a diferença.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

O presente trabalho recebeu auxílio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), e foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“The difficulty lies, not in the new ideas, but in escaping from the old ones”
(KEYNES, 1936)

RESUMO

Vigas são elementos estruturais amplamente empregados em estruturas civis, nos quais o esforço de flexão é usualmente preponderante. Métodos semi-probabilísticos são os procedimentos utilizados na maioria das normas de projeto estrutural para garantir a segurança delas. Eles se baseiam na utilização de coeficientes de ponderação, aplicados sobre os valores característicos das resistências e ações, para obter valores de projeto. Contudo, há diversas incertezas relacionadas aos modelos estruturais, bem como incertezas nos carregamentos, nas propriedades geométricas dos elementos e nas propriedades mecânicas dos materiais empregados. Diante disso, torna-se necessária a aplicação de métodos probabilísticos para verificação da segurança, e os métodos de confiabilidade estrutural surgem nesse cenário como uma forma de calcular probabilidades de falha levando em conta as incertezas envolvidas. Diversos estudos foram desenvolvidos acerca da confiabilidade relacionada à resistência de vigas de concreto armado. Entretanto, análises de confiabilidade com foco na ductilidade ainda são escassas na literatura. No presente trabalho pretende-se determinar o nível de confiabilidade em relação à ductilidade de vigas de concreto armado dimensionadas com base na NBR 6118 (2014). Para isso, é implementado um modelo analítico que tenta representar de maneira adequada o comportamento não-linear das vigas. Para avaliação da confiabilidade estrutural é apresentada uma função de estado limite baseada na deformação da armadura tracionada. É também analisada a variabilidade da relação momento fletor-curvatura das seções transversais. É desenvolvido um código em MATLAB, no qual é implementado o método de simulação de Monte Carlo e diversas configurações de vigas são avaliadas. Os resultados são obtidos para dois modelos constitutivos do concreto comprimido, sendo verificada uma disparidade, em termos de confiabilidade, entre os modelos empregados. Deste estudo, conclui-se que a variabilidade associada à ductilidade é alta. Alguns casos analisados apresentaram confiabilidade baixa relacionada à ductilidade. Para obtenção de uma ruptura dúctil e com aviso prévio, é necessário, por exemplo, revisar os limites utilizados para a profundidade relativa da linha neutra e os parâmetros do bloco de tensão retangular do concreto comprimido utilizados no dimensionamento.

Palavras-chave: Vigas. Concreto armado. Ductilidade. Confiabilidade estrutural. Simulação de Monte Carlo.

ABSTRACT

Beams are structural elements widely used in civil structures, in which bending is usually predominant. Semi-probabilistic methods are the procedures used in most structural design codes to ensure their safety. They are based on the use of partial coefficients, applied to the characteristic values of resistances and actions, to obtain design values. However, there are several uncertainties related to the structural models, as well as uncertainties in the loads, in the geometric properties of the elements and in the mechanical properties of the materials employed. Therefore, it becomes necessary to apply probabilistic methods to verify safety, and structural reliability methods appear in this scenario as a way to calculate probabilities of failure taking into account the uncertainties involved. Several studies were developed about the reliability related to the strength of reinforced concrete beams. However, reliability analyzes focusing on the ductility of these structural elements are still rare in the literature. The present study aims at determining the level of reliability related to the ductility of reinforced concrete beams designed in accordance with the NBR 6118 (2014). For this, an analytical model which tries to adequately represent the non-linear behavior of the concrete beams is implemented. To evaluate the structural reliability, a limit state function based on strains in the tensile rebar is presented. An analysis of the variability of the moment-curvature curve of the cross-sections is also performed. A code in MATLAB is developed, in which the Monte Carlo simulation is implemented and several beams' configurations are evaluated. The results are obtained for two constitutive models for the compressed concrete, and a difference is found, in terms of reliability, between the models used. From this study, it is concluded that the variability associated to ductility is high. Some analyzed cases showed low reliability related to ductility. In order to obtain a ductile failure, it is necessary, for example, to review the limits used to the normalised axis depth and the parameters of the rectangular stress block for the compressed concrete, both used in the design.

Keywords: Beams. Reinforced concrete. Ductility. Structural reliability. Monte Carlo simulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Estrutura de concreto armado do edifício Copan.....	11
Figura 2.1 – Diagrama de deformações e tensões no concreto.	18
Figura 2.2 – Espaçamentos entre barras na seção transversal.	20
Figura 2.3 – Determinação da altura útil da seção transversal.	21
Figura 2.4 – Domínios de dimensionamento de uma seção transversal.....	22
Figura 2.5 – Níveis de verificação da ductilidade.	24
Figura 2.6 – Modelo constitutivo para o aço.	25
Figura 2.7 – Curva tensão-deformação de Attard e Setunge (1996) para o concreto comprimido.....	28
Figura 2.8 – Esforços atuantes na seção transversal.....	29
Figura 2.9 – Discretização da seção transversal.	30
Figura 3.1 – Funções de probabilidades.	34
Figura 4.1 – Diagrama de deformações no estado limite último.....	42
Figura 4.2 – Esquema da análise de confiabilidade relacionada à resistência.	45
Figura 5.1 – Diagramas de deformações e tensões no estado limite último.....	52
Figura 5.2 – Seções transversais analisadas.	56
Figura 5.3 – Histograma da razão de ductilidade, $\epsilon_s/\epsilon_{s, \text{lim}}$	59
Figura 5.4 – Índices de confiabilidade para cada f_{ck} e seção transversal.	61
Figura 5.5 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 20$ MPa.....	63
Figura 5.6 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 30$ MPa.....	64
Figura 5.7 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 40$ MPa.....	64
Figura 5.8 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 50$ MPa.....	65
Figura 5.9 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 60$ MPa.....	65
Figura 5.10 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 70$ MPa.....	66
Figura 5.11 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 80$ MPa.....	66
Figura 5.12 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 90$ MPa.....	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores de ξ_{lim} , λ e μ_{lim} para diferentes f_{ck} .	19
Tabela 2.2 – Taxas mínimas de armadura de flexão.	23
Tabela 3.1 – Exemplos de distribuições de probabilidade.	35
Tabela 3.2 – Índices de confiabilidade indicados para o estado limite último.	37
Tabela 3.3 – Índices de confiabilidade indicados para o estado limite de serviço.	37
Tabela 4.1 – Valores limites de ϵ_{cu} e x_d para diferentes f_{ck} .	43
Tabela 4.2 – Valores de ϵ_s , lim para diferentes f_{ck} .	43
Tabela 5.1 – Taxa de armadura tracionada máxima para diferentes normas de projeto estrutural e f_{ck} .	51
Tabela 5.2 – Distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias.	53
Tabela 5.3 – Índices de confiabilidade para cada f_{ck} e norma de projeto estrutural.	54
Tabela 5.4 – Índices de confiabilidade corrigidos para cada f_{ck} e norma de projeto estrutural.	55
Tabela 5.5 – Dimensionamento das seções transversais considerando aço CA-50 e coeficientes de ponderação $\gamma_s = 1,15$ e $\gamma_c = 1,4$.	57
Tabela 5.6 – Influência do <i>tension-stiffening</i> no momento resistente das vigas.	58
Tabela 5.7 – Resultados estatísticos da razão de ductilidade, $\epsilon_s/\epsilon_s, lim$.	59
Tabela 5.8 – Probabilidade de falha para cada f_{ck} e seção transversal.	60
Tabela 5.9 – Parâmetros estatísticos da razão $\epsilon_{cu}\epsilon_y$.	67
Tabela 5.10 – Índices de confiabilidade para o estado limite relacionado à resistência.	68
Tabela 5.11 – Áreas de armadura tracionada considerando aço CA-50 e coeficientes de ponderação $\gamma_s = 1,15$ e $\gamma_c = 1,4$.	70
Tabela 5.12 – Probabilidades de falha e índices de confiabilidade considerando o novo critério de dimensionamento.	70

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas

ACI *American Concrete Institute*

CDF Função de distribuição cumulativa de probabilidades (*cumulative distribution function*)

IBRACON Instituto Brasileiro do Concreto

JCSS *Joint Committee on Structural Safety*

PDF Função densidade de probabilidade (*probability density function*)

LISTA DE SÍMBOLOS

f_{ck}	Resistência característica à compressão do concreto
f_{cd}	Resistência de cálculo à compressão do concreto
γ_c	Coefficiente de minoração da resistência à compressão do concreto
ε_{cu}	Deformação última de compressão do concreto
ε_{c0}	Deformação de compressão do concreto no ponto de escoamento
h	Altura da seção transversal
b	Base da seção transversal
d	Altura útil da seção transversal
d'	Distância do centroide da armadura tracionada até a borda tracionada da seção
ρ	Taxa de armadura
λ	Coefficiente redutor da profundidade da linha neutra
α_c	Coefficiente redutor da resistência de cálculo à compressão do concreto
f_{yk}	Tensão de escoamento característica do aço
f_{yd}	Tensão de escoamento de cálculo do aço
γ_s	Coefficiente de minoração da tensão de escoamento do aço
M_k	Momento fletor de serviço
M_d	Momento fletor solicitante de cálculo
γ_f	Coefficiente de minoração do momento fletor
ξ	Profundidade relativa da linha neutra
σ_s	Tensão no aço
E_s	Módulo de elasticidade do aço
ε_s	Deformação do aço
ε_y	Deformação de escoamento do aço
A_s	Área de armadura tracionada
A'_s	Área de armadura comprimida
$A_{c,ef}$	Área de concreto efetiva
σ_c	Tensão no concreto
ε_c	Deformação no concreto
ε_{ic}	Deformação de compressão do concreto no ponto de inflexão
f_{ic}	Tensão de compressão no concreto no ponto de inflexão

f_t	Resistência à tração do concreto
E_c	Módulo de elasticidade secante do concreto
R_{ct}	Força resultante de tração no concreto
R_{cc}	Força resultante de compressão no concreto
R_{st}	Força resultante de tração na armadura
M_s	Momento solicitante
M_{sd}	Momento solicitante de cálculo
z_{ct}	Distância da força resultante de tração no concreto até a linha neutra
z_{cc}	Distância da força resultante de compressão no concreto até a linha neutra
z_{st}	Distância da força resultante de tração na armadura até a linha neutra
g	Função de estado limite
X	Variável aleatória
\mathbf{X}	Vetor de variáveis aleatórias
x	Profundidade da linha neutra, realização de uma variável aleatória
D_f	Domínio de falha
D_s	Domínio de não falha
P_f	Probabilidade de falha
β	Índice de confiabilidade
Φ	Distribuição normal padrão
I	Função indicadora
θ	Erro de modelo
M_r	Momento resistente
M_{rd}	Momento resistente de cálculo
μ	Média
σ	Desvio padrão
Var	Variância
CV	Coefficiente de variação
e_h	Espaçamento horizontal mínimo entre barras
e_v	Espaçamento vertical mínimo entre barras
c	Cobrimento
$d_{m\acute{a}x}$	Diâmetro máximo do agregado
ϕ	Diâmetro de barra longitudinal

ϕ_t	Diâmetro de barra transversal
b_{si}	Largura na seção transversal para colocação da armadura longitudinal
χ	Taxa de carregamento
σ_{cd}	Tensão de cálculo de compressão no concreto
G_k	Parcela permanente do momento solicitante
Q_k	Parcela acidental do momento solicitante
γ_g	Coefficiente de majoração da parcela permanente do momento solicitante
γ_q	Coefficiente de majoração da parcela acidental do momento solicitante
X	Curvatura
κ	Curvatura adimensional

SUMÁRIO

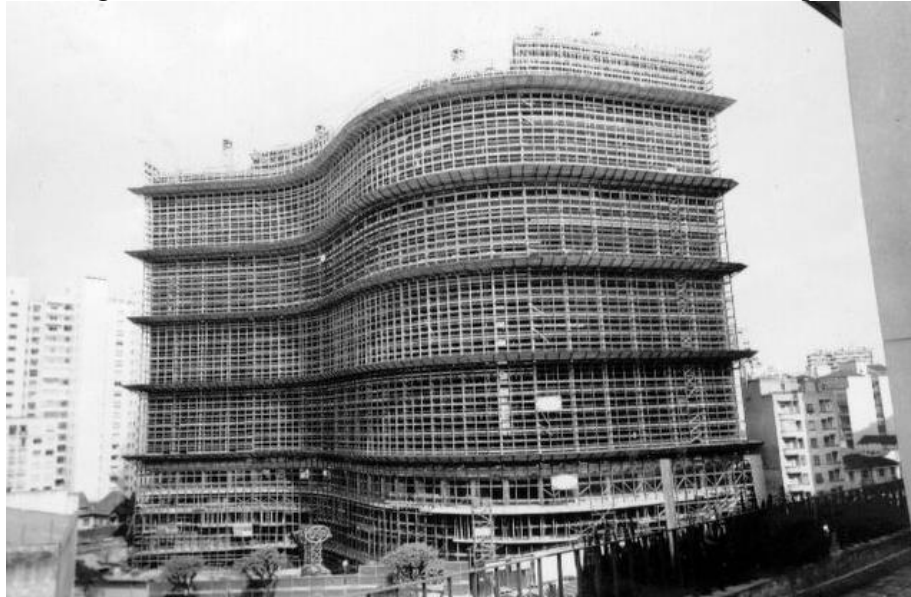
1	INTRODUÇÃO	11
1.1	JUSTIFICATIVA	13
1.2	OBJETIVOS	13
1.2.1	Objetivo geral.....	13
1.2.2	Objetivos específicos.....	14
1.3	DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS.....	14
2	VIGAS DE CONCRETO ARMADO E DUCTILIDADE	16
2.1	VIGAS DE CONCRETO ARMADO	16
2.2	DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO SEGUNDO A NBR 6118 (2014)	16
2.3	REQUISITOS MÍNIMOS DE DUCTILIDADE.....	21
2.4	NÍVEIS DE DUCTILIDADE.....	23
2.5	MODELOS CONSTITUTIVOS	25
2.5.1	Aço.....	25
2.5.2	Concreto.....	26
2.6	EQUILÍBRIO EM SEÇÕES TRANSVERSAIS.....	29
2.7	ESTUDOS SOBRE DUCTILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO	31
3	CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	33
3.1	INCERTEZAS NA ENGENHARIA CIVIL	33
3.2	DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	33
3.3	ALGUNS CONCEITOS DE CONFIABILIDADE	35
3.4	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	38
4	CONFIABILIDADE E DUCTILIDADE ESTRUTURAL	40
4.1	REVISÃO DA LITERATURA	40
4.2	FUNÇÕES DE ESTADO LIMITE UTILIZADAS.....	42
4.2.1	Ductilidade	42

4.2.2	Resistência	44
4.3	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONSIDERADAS.....	46
4.3.1	Dimensões da seção transversal (<i>d</i> e <i>b</i>)	46
4.3.2	Resistência à compressão do concreto (<i>f_c</i>)	46
4.3.3	Erro de modelo (<i>θ</i>)	47
4.3.4	Módulo de elasticidade do aço (<i>E_s</i>)	47
4.3.5	Área de armadura (<i>A_s</i>)	48
4.3.6	Deformação última de compressão do concreto (<i>ε_{cu}</i>)	48
4.3.7	Tensão de escoamento do aço (<i>f_y</i>)	48
4.3.8	Resistência à tração do concreto (<i>f_t</i>)	49
4.3.9	Parâmetro <i>k₃</i>	49
4.3.10	Momentos solicitantes (<i>M_g</i> e <i>M_k</i>)	50
5	ESTUDO DE CONFIABILIDADE EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO	51
5.1	VERIFICAÇÃO DE RESULTADOS OBTIDOS A PARTIR DE EXEMPLOS DA LITERATURA	51
5.2	INVESTIGAÇÃO DA DUCTILIDADE FRENTE AOS CRITÉRIOS DA NBR 6118 (2014)	55
5.2.1	Descrição das vigas em estudo	55
5.2.2	Resultados	57
5.2.2.1	<i>Influência do tension-stiffening</i>	57
5.2.2.2	<i>Variabilidade da razão de ductilidade (<i>ε_s/ε_{s,lim}</i>)</i>	58
5.2.2.3	<i>Confiabilidade relacionada à ductilidade</i>	59
5.2.2.4	<i>Simulação da curva momento fletor-curvatura</i>	62
5.2.2.5	<i>Confiabilidade relacionada à resistência</i>	68
5.2.3	Sugestão para melhora dos níveis de segurança em relação à ductilidade	69
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	72
	REFERÊNCIAS	73

1 INTRODUÇÃO

Dentre os materiais disponíveis na construção civil, o concreto armado é um dos principais e mais utilizados, sendo empregado em edifícios (Figura 1.1), pontes, obras de saneamento, usinas, etc. Isso se deve as suas vantagens, que incluem técnicas de execução bem estabelecidas, boa durabilidade, boa resistência ao fogo e trabalhabilidade. O bom desempenho desse material é consequência da união das qualidades dos seus dois principais componentes, o concreto e o aço (Carvalho e Figueiredo Filho, 2004).

Figura 1.1 – Estrutura de concreto armado do edifício Copan.



Fonte: São Paulo in Foco (2013).

Uma das propriedades que afeta o comportamento de elementos estruturais de concreto armado é a ductilidade. Ela é definida como a capacidade deles de suportar grandes deformações plásticas sem perda significativa de resistência, atingindo a ruptura somente após um considerável acúmulo de energia plástica de deformação. Quando um elemento estrutural apresenta essas características diz-se que ele tem comportamento dúctil, e apresentará falha dúctil. Caso contrário, diz-se que ele tem comportamento frágil, e apresentará falha frágil (Machado, 2005).

No projeto de estruturas de concreto armado é necessário assegurar que haja resistência adequada para prevenir a falha, bem como ductilidade suficiente para que, caso ela ocorra, não seja frágil. No contexto de um sistema estrutural, a ductilidade dos elementos

garante a capacidade de redistribuição de esforços internos à medida que as seções transversais sofrem plastificação. Esse comportamento dúctil evita rupturas bruscas, aumentando os níveis de segurança dos sistemas estruturais em relação aos estados limites últimos (Kara e Ashour, 2013; Ko *et al.*, 2001).

Do ponto de vista do dimensionamento, diversas normas de projeto estrutural exigem que a ductilidade dos elementos seja garantida, por meio da imposição de restrições sobre a deformação mínima do aço e da profundidade relativa da linha neutra no dimensionamento à flexão das seções transversais. A adoção de uma deformação mínima para o aço impede a ruína precoce no início da fissuração do concreto, enquanto que a profundidade relativa da linha neutra funciona como um parâmetro indicador da ductilidade do elemento estrutural, pois controla o nível de deformação do concreto comprimido e da armadura longitudinal (Silva e Araújo, 2015; Nogueira e Rodrigues, 2020).

No caso das vigas, a NBR 6118 (2014) recomenda limitações para a taxa de armadura de flexão e para a profundidade relativa da linha neutra a fim de garantir a ductilidade. Essa abordagem é de fácil consideração na fase de projeto, pois é definida por parâmetros de controle conhecidos durante o processo de dimensionamento. No entanto, diversos mecanismos importantes que interferem no comportamento geral de vigas em concreto armado não são levados em consideração de forma explícita, como: a evolução do dano e, conseqüentemente, da fissuração com o passar do tempo enquanto o carregamento atua durante o uso das edificações; e a contribuição do concreto à tração entre fissuras (Nogueira e Rodrigues, 2020).

Uma análise não-linear inelástica fornece um método preciso de avaliação da adequação da ductilidade de sistemas estruturais. No entanto, essa análise muitas vezes não é prática em projetos comuns, que geralmente se baseiam no cumprimento dos requisitos das normas de projeto estrutural. Algumas recomendações para modificar esses requisitos foram propostas anteriormente, mas esses estudos foram conduzidos principalmente em uma abordagem determinística (Baji *et al.*, 2016).

Sempre existem incertezas sobre os valores que as propriedades mecânicas dos materiais irão assumir em uma estrutura e quais serão as dimensões exatas dos elementos após a construção. Portanto, as resistências dos materiais e as dimensões da estrutura podem ser vistos como variáveis aleatórias que possuem determinados parâmetros estatísticos. Assim, a própria resposta a um determinado carregamento também é uma variável aleatória, visto que ela é uma função das diversas outras que a afetam (Real, 2000).

As ações permanentes e variáveis que atuam sobre uma estrutura também podem ser representadas como variáveis aleatórias. Sendo assim, o valor máximo da carga a qual a estrutura estará submetida ao longo de sua vida útil também não pode ser previsto com exatidão.

A atual norma brasileira de projeto estrutural, NBR 6118 (2014), utiliza um método semi-probabilístico para assegurar níveis de segurança adequados, no qual a aleatoriedade das variáveis não é tratada explicitamente. Nesse método, as cargas são majoradas e as resistências minoradas por meio de coeficientes de ponderação. Diante disso, uma forma de analisar as estruturas considerando as incertezas envolvidas é por meio da confiabilidade estrutural, utilizando métodos probabilísticos.

1.1 JUSTIFICATIVA

Vários estudos foram realizados sobre a confiabilidade estrutural em relação à resistência de vigas de concreto armado, que resultaram, por exemplo, na calibração de coeficientes de ponderação normativos (Nowak e Szerszen, 2003; Santos *et al.*, 2014; Santiago, 2019). Entretanto, pouco se discutiu a respeito da confiabilidade em relação à ductilidade, principalmente no que se refere às normas brasileiras. Diante disso, poucas pesquisas foram encontradas sobre esse tema. Surge então a necessidade da investigação do nível de segurança quanto à ductilidade de vigas de concreto armado dimensionadas segundo a NBR 6118 (2014), bem como a avaliação da influência de determinados parâmetros e quais podem ser as medidas para aumentar o nível de segurança desses elementos quanto à ductilidade.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral desse trabalho é avaliar a confiabilidade estrutural relacionada à ductilidade de vigas de concreto armado dimensionadas de acordo com a NBR 6118 (2014).

1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos desse trabalho são:

- implementar modelos analíticos que representem adequadamente o comportamento não-linear de seções transversais de vigas de concreto armado sob flexão;
- obter a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade relacionados à ductilidade de vigas de concreto armado dimensionadas de acordo com a NBR 6118 (2014), por meio do método de simulação de Monte Carlo;
- fazer uma análise paramétrica variando a resistência característica à compressão do concreto e a altura da seção transversal, e comparar os índices de confiabilidade obtidos com os valores aceitáveis indicados pela literatura;
- avaliar a ductilidade de vigas e a sua variabilidade por meio da relação momento fletor-curvatura;
- propor sugestões que levem à obtenção de valores aceitáveis e à uniformização dos níveis de segurança em relação à ductilidade;
- comparar o nível de confiabilidade obtido a partir do estado limite relacionado à ductilidade com o relacionado à resistência.

1.3 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

Esse trabalho encontra-se dividido em seis capítulos, sendo eles: Introdução; Vigas de concreto armado e ductilidade; Confiabilidade estrutural; Confiabilidade e ductilidade estrutural; Estudo de confiabilidade em vigas de concreto armado e Considerações finais. As referências utilizadas neste trabalho são apresentadas ao final.

O capítulo 2 aborda conceitos gerais de estruturas de concreto armado, com ênfase em vigas. É apresentado um breve roteiro para dimensionamento de vigas de acordo com a NBR 6118 (2014), é explicado como é levada em conta a ductilidade nas normas de projeto estrutural e como ela é influenciada pela curva tensão-deformação dos materiais. Também, são apresentados modelos constitutivos para o concreto e o aço.

O capítulo 3 aborda os conceitos de confiabilidade estrutural. É explicado como as incertezas inerentes aos problemas de engenharia são tratadas no estudo da confiabilidade estrutural e como é realizada a avaliação da segurança por meio dela. Por fim, é apresentado o método de simulação de Monte Carlo.

No capítulo 4 primeiramente é apresentada uma revisão da literatura sobre confiabilidade estrutural relacionada à ductilidade. Em seguida, é apresentada a função de estado limite proposta para avaliar a ductilidade de vigas de concreto armado dimensionadas com base na NBR 6118 (2014), bem como as variáveis aleatórias a serem consideradas nas análises.

No capítulo 5 são apresentados os resultados e as discussões. Primeiramente são reproduzidos alguns resultados obtidos de um trabalho encontrado na literatura, Baji *et al.* (2016). Em seguida, são apresentados os resultados da investigação da confiabilidade estrutural relacionada à ductilidade frente aos critérios da NBR 6118 (2014).

Para finalizar, o capítulo 6 apresenta as conclusões e os possíveis avanços obtidos neste trabalho.

2 VIGAS DE CONCRETO ARMADO E DUCTILIDADE

2.1 VIGAS DE CONCRETO ARMADO

O concreto é um material composto, constituído por cimento, água, areia e agregado graúdo (pedra ou brita). Ele apresenta alta resistência à compressão, o que o faz excelente para ser empregado em elementos estruturais submetidos primariamente à compressão. Por outro lado, suas características de fragilidade e baixa resistência à tração restringem seu uso isolado em elementos submetidos totalmente ou parcialmente à tração, como as vigas. Para contornar essa limitação, o aço é empregado em conjunto com o concreto, posicionado de modo a resistir às tensões de tração (Bastos, 2019).

A aderência entre a armadura e o concreto é um dos mecanismos mais importantes para a existência de vigas de concreto armado, pois é responsável pela ancoragem de um material no outro. Devido à aderência, as deformações da armadura e do concreto que a envolve são iguais. Contudo, o concreto não acompanha as grandes deformações do aço e fissura na zona de tração. Nesse sentido, a aderência serve também para impedir o escorregamento da armadura nos segmentos entre fissuras, limitando assim a abertura delas (Luke, 2015).

As vigas devem ser projetadas de modo que apresentem segurança satisfatória. A segurança está condicionada à verificação dos estados limites, que são situações em que a estrutura apresenta desempenho inadequado a sua finalidade. Os estados limites podem ser classificados em estados limites últimos ou de serviço. O estado limite último está associado a qualquer forma de ruína que paralise o uso da estrutura, enquanto que o estado limite de serviço corresponde à condição em que a utilização da estrutura torna-se prejudicada, por apresentar deformações ou fissurações excessivas (Pinheiro, 2007; Araújo, 2014).

2.2 DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO SEGUNDO A NBR 6118 (2014)

No projeto de vigas de concreto armado o dimensionamento é feito no estado limite último. Para que a probabilidade de falha seja baixa e aceitável, os elementos estruturais são projetados com uma margem de segurança assegurada por coeficientes de ponderação. Tais

coeficientes de ponderação são aplicados sobre os valores característicos das resistências e dos carregamentos.

No dimensionamento de vigas de concreto armado, as resistências de cálculo do aço e do concreto são obtidas dividindo as resistências características por coeficientes de ponderação. Assim, a tensão de escoamento de cálculo do aço e a resistência de cálculo à compressão do concreto são dadas, respetivamente, por:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}, \quad (2.1)$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}, \quad (2.2)$$

onde $\gamma_s = 1,15$ e $\gamma_c = 1,4$ para combinação de carregamentos normais.

O momento fletor solicitante de cálculo é obtido multiplicando o momento fletor característico por um coeficiente de ponderação:

$$M_d = \gamma_f M_k, \quad (2.3)$$

onde $\gamma_f = 1,4$ para combinação de carregamentos normais.

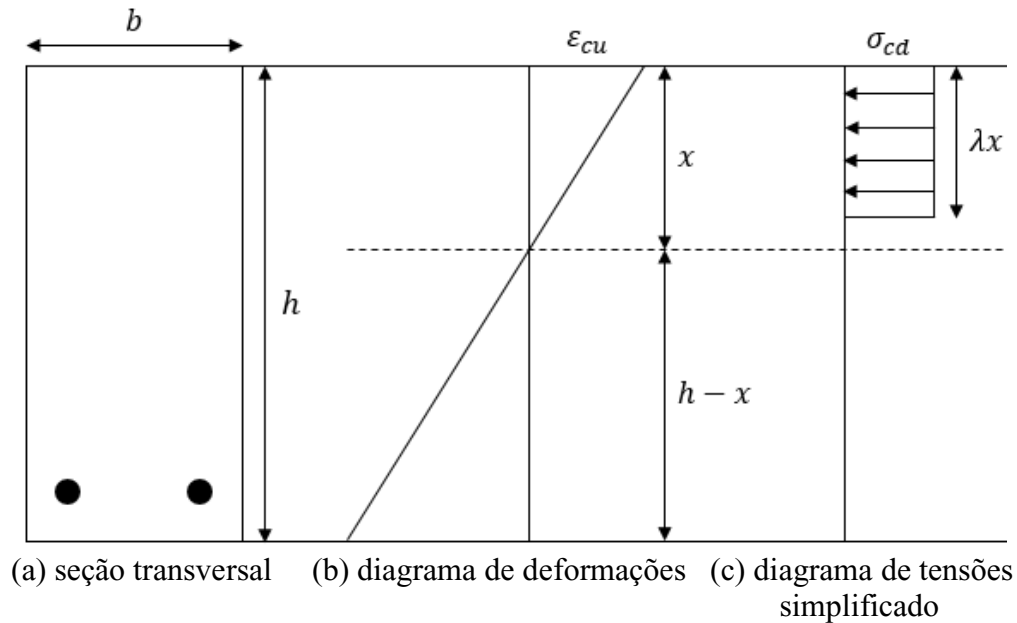
A NBR 6118 (2014) indica o emprego de um modelo curvo-retângulo para representar o comportamento do concreto à compressão. Contudo, com o objetivo de simplificar o cálculo, é permitido substituí-lo por um diagrama retangular de tensões, conforme ilustrado na Figura 2.1.

De acordo com a Figura 2.1, admite-se que a tensão no concreto seja igual a $\sigma_{cd} = \alpha_c f_{cd}$ desde a borda comprimida da seção transversal até uma distância λx , onde x é a profundidade da linha neutra. Os parâmetros α_c e λ são os coeficientes redutores dados respetivamente por:

$$\alpha_c = \begin{cases} 0,85, & \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0,85 \left[1 - \frac{(f_{ck} - 50)}{200} \right], & \text{se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\lambda = \begin{cases} 0,8, & \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0,8 - \frac{(f_{ck} - 50)}{400}, & \text{se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2.5)$$

Figura 2.1 – Diagrama de deformações e tensões no concreto.



Fonte: Autora.

Desta maneira, o dimensionamento à flexão normal simples é feito de acordo com o seguinte critério:

- calculado o momento fletor solicitante de cálculo M_d , determina-se o momento solicitante reduzido

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot \sigma_{cd}}; \quad (2.6)$$

- se $\mu \leq \mu_{lim}$, o dimensionamento é feito com armadura simples;
- se $\mu > \mu_{lim}$, o dimensionamento é feito com armadura dupla.

O momento limite adimensional (μ_{lim}) é um parâmetro indicador da necessidade de utilização de armadura dupla (uma armadura tracionada e outra comprimida), sendo esta empregada para reduzir a profundidade relativa da linha neutra e assegurar uma maior ductilidade. O momento limite adimensional é dado, de acordo com Araújo (2014), por:

$$\mu_{lim} = \lambda \cdot \xi_{lim} (1 - 0,5 \cdot \lambda \cdot \xi_{lim}), \quad (2.7)$$

onde ξ é a profundidade relativa da linha neutra, definida por x/d .

Na Tabela 2.1 encontram-se os valores de ξ_{lim} , λ e μ_{lim} para diferentes f_{ck} , válidos para análises sem redistribuição de esforços.

Tabela 2.1 – Valores de ξ_{lim} , λ e μ_{lim} para diferentes f_{ck} .

f_{ck} (MPa)	≤ 50	60	70	80	90
ξ_{lim}	0,45		0,35		
λ	0,8	0,775	0,75	0,725	0,7
μ_{lim}	0,2952	0,2345	0,2280	0,2216	0,2150

Fonte: Autora.

Para o caso de armadura simples, a área de armadura tracionada é calculada por:

$$A_s = \lambda \cdot \xi \cdot b \cdot d \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}}, \quad (2.8)$$

onde $\xi = (1 - \sqrt{1 - 2\mu})/\lambda$.

Nos casos de armadura simples é necessário considerar uma armadura construtiva, também chamada de armadura porta estribo, na zona comprimida. Ela usualmente contém duas barras com bitola de no máximo 6,3 milímetros.

Para o caso de armadura dupla, calcula-se a armadura tracionada a partir da seguinte equação:

$$A_s = \left(\lambda \cdot \xi_{lim} + \frac{\mu - \mu_{lim}}{1 - \delta} \right) \frac{b \cdot d \cdot \sigma_{cd}}{f_{yd}}, \quad (2.9)$$

onde $\delta = d'/d$.

A armadura comprimida é obtida por:

$$A'_s = \frac{(\mu - \mu_{lim})b \cdot d \cdot \sigma_{cd}}{(1 - \delta)\sigma'_{sd}}, \quad (2.10)$$

onde $\sigma'_{sd} = E_s \cdot \varepsilon_{cu} [(\xi_{lim} - \delta)/\xi_{lim}] \leq f_{yd}$, sendo ε_{cu} calculado de acordo com a classe do concreto, conforme mostrado na Equação 2.11.

$$\varepsilon_{cu}(\text{‰}) = \begin{cases} 3,5, \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 2,6 + 35 \left(\frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4, \text{ para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2.11)$$

Segundo a NBR 6118 (2014), existem três exigências que devem ser seguidas nas disposições construtivas. A primeira é que a largura mínima da seção transversal não seja inferior a 12 centímetros, a segunda é que seja respeitado o cobrimento de acordo com a classe de agressividade ambiental e a terceira se refere aos espaçamentos entre as barras.

Deve ser verificado se há espaço na seção transversal para a armadura dimensionada ser disposta em apenas uma camada ou se é necessário utilizar mais. Essa verificação leva em conta que as barras devem respeitar os espaçamentos mínimos na horizontal e na vertical, dados por:

$$e_h = \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi \\ 1,2d_{m\acute{a}x} \end{cases}, \quad (2.12)$$

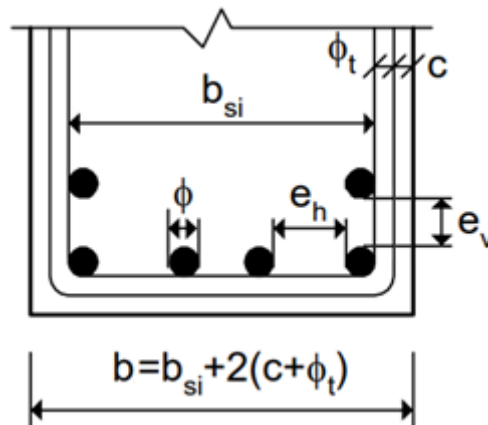
$$e_v = \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi \\ 0,5d_{m\acute{a}x} \end{cases}, \quad (2.13)$$

sendo $d_{m\acute{a}x}$ o diâmetro do agregado e ϕ o diâmetro das barras.

O espaçamento disponível na seção transversal, de acordo com a Figura 2.2, é calculado por:

$$b_{si,disp} = b - 2(c + \phi_t). \quad (2.14)$$

Figura 2.2 – Espaçamentos entre barras na seção transversal.



Fonte: Autora.

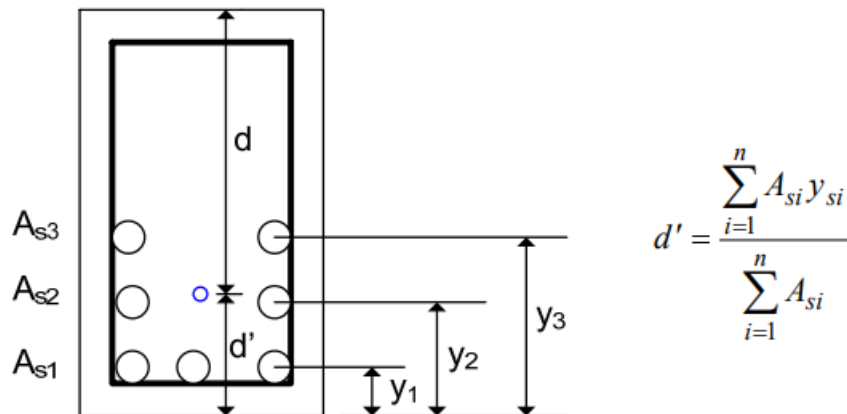
O espaçamento ocupado pelas barras é dado por:

$$b_{si} = n_b \cdot \phi + e_h \left(\frac{n_b}{n^\circ \text{ de camadas}} - 1 \right), \quad (2.15)$$

onde n_b é o número de barras obtido no dimensionamento.

Caso $b_{si,disp} < b_{si}$, deve-se aumentar o número de camadas até que a verificação seja atendida. Após definir o número de camadas necessário, é preciso conferir se a área de armadura atende a nova altura útil (d), visto que esta é estimada no começo do dimensionamento. A altura útil é calculada por meio da determinação do centroide das armaduras, conforme mostrado na Figura 2.3, onde A_{si} é a área de armadura na camada i e y_{si} é a distância da borda inferior da seção transversal até o centroide da armadura na camada i .

Figura 2.3 – Determinação da altura útil da seção transversal.



Fonte: Araújo (2014).

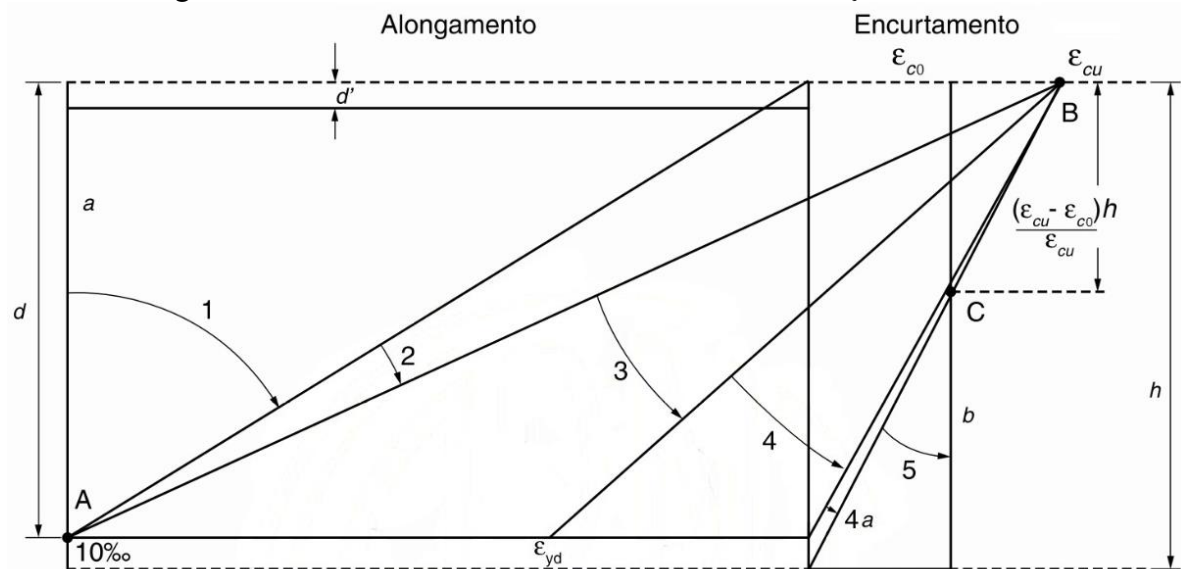
Os demais procedimentos a serem seguidos no dimensionamento de vigas de concreto armado, como dimensionamento ao esforço cortante e verificação da fissuração e flecha, podem ser encontrados na literatura, como em Araújo (2014).

2.3 REQUISITOS MÍNIMOS DE DUCTILIDADE

De acordo com a NBR 6118 (2014), o estado limite último, correspondente à ruína de uma seção transversal, pode ocorrer por ruptura do concreto ou por deformação excessiva

da armadura. Admite-se o estado limite último quando a distribuição de deformações ao longo da altura de uma seção transversal se enquadra em um dos domínios ilustrados na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Domínios de dimensionamento de uma seção transversal.



Fonte: NBR 6118 (2014).

Os domínios 1 e 2 caracterizam falha por deformação excessiva da armadura, e ocorrem quando a deformação na armadura mais tracionada atinge o valor de 10‰. Os domínios 3, 4 e 4a caracterizam falha por esmagamento do concreto em seções parcialmente comprimidas, e ocorrem quando a deformação na fibra mais comprimida atinge o valor de ϵ_{cu} . Por fim, o domínio 5 caracteriza ruína por esmagamento do concreto em seções totalmente comprimidas, e ocorre quando a deformação na fibra situada a $h(\epsilon_{cu} - \epsilon_{c0})/\epsilon_{cu}$ da borda mais comprimida atinge o valor de ϵ_{c0} (Araújo, 2014).

Na flexão simples, que é a solicitação predominante em vigas, a ruptura pode ocorrer nos domínios 2, 3 e 4. Em função do tipo de ruptura, as vigas podem ser classificadas como subarmadas, quando possuem uma taxa de armadura baixa e rompem no domínio 2, normalmente armadas, quando rompem no domínio 3, e superarmadas, quando possuem uma taxa de armadura mais elevada e rompem no domínio 4.

Considera-se que uma viga tem comportamento dúctil quando há escoamento do aço, ou seja, quando a deformação do aço na ruptura é maior que a deformação de escoamento do aço, o que ocorre nos domínios 2 e 3. Já no domínio 4, em virtude do excesso de armadura, o aço não chega a escoar e a ruptura ocorre por esmagamento do concreto, sem aviso prévio. No

projeto de vigas, consegue-se evitar esse tipo de situação com o emprego de armadura dupla (Araújo, 2009).

A NBR 6118 (2014) tem como um de seus objetivos garantir a funcionalidade dos elementos estruturais e impedir a ruptura frágil dos mesmos. Nesse sentido, ela exige um valor mínimo para a área de aço da armadura de tração, a fim de evitar rupturas frágeis no limite entre os estádios 1 e 2 (Silva e Araújo, 2015). Além disso, a NBR 6118 passou a adotar, desde a sua última versão lançada em 2014, uma limitação para a profundidade da linha neutra que leva a uma ruptura distante do domínio 4 e assegura uma maior ductilidade para as vigas. Dessa maneira, parte do domínio 3 é eliminado.

A Tabela 2.2, adaptada da NBR 6118 (2014), indica as taxas mínimas de armadura de flexão para vigas com seção transversal retangular de acordo com a resistência à compressão do concreto, considerando o uso de aço CA-50 e uma relação $d/h = 0,8$. Caso a relação resulte em um valor diferente, ρ_{\min} deve ser recalculado seguindo as prescrições da norma.

Tabela 2.2 – Taxas mínimas de armadura de flexão.

f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90
ρ_{\min} (%)	0,15	0,15	0,15	0,164	0,179	0,194	0,208	0,219	0,233	0,245	0,256

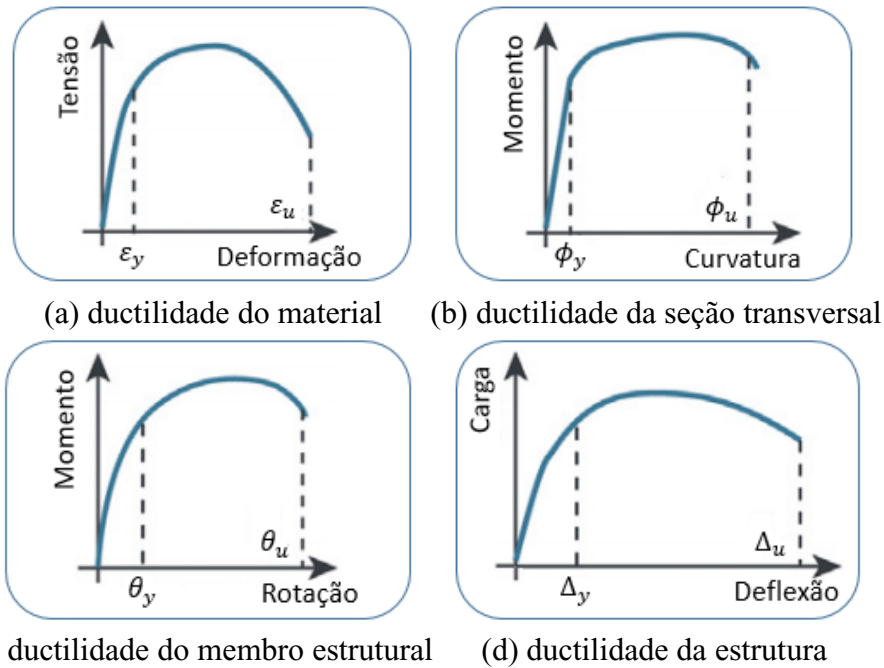
Fonte: Adaptada da NBR 6118 (2014).

2.4 NÍVEIS DE DUCTILIDADE

Na prática de projeto, a ductilidade é normalmente definida como a razão entre a deformação última e a correspondente ao ponto de escoamento. A deformação pode ser referente à deformação específica, à curvatura, à rotação ou à deflexão. Em qualquer caso, ela depende da ação aplicada, e é possível relacioná-la com esta por meio das chamadas curvas ação-deformação.

As curvas ação-deformação fornecem informações sobre o comportamento geral de uma estrutura. Elas podem ser obtidas para vários níveis: a nível do material, pela relação tensão-deformação específica; a nível da seção transversal, pela relação momento fletor-curvatura; a nível do membro estrutural, pela relação momento fletor-rotação; e a nível da estrutura, pela relação carga-deflexão (Anwar e Najam, 2017). As curvas de ductilidade para os vários níveis são ilustradas na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Níveis de verificação da ductilidade.



Fonte: Adaptada de Anwar e Najam (2017).

Sabendo que a ductilidade pode ser dada pela razão entre a deformação última e a deformação no ponto de escoamento, é possível afirmar que quanto mais próximos forem os valores dessas deformações, menor será a ductilidade associada. Dessa forma, analisando as curvas ilustradas na Figura 2.5, quanto mais longo for o patamar após o escoamento, maior será a ductilidade.

A curva tensão-deformação específica é a base para o entendimento do comportamento dúctil. A quantificação e previsão da ductilidade dos materiais utilizados nas estruturas tem sido um tópico de extensa pesquisa, e foram propostos vários modelos tensão-deformação para os mais diversos materiais (Attard e Setunge, 1996; Binici, 2005; Hognestad, 1951). Esses modelos podem variar bastante dependendo das considerações feitas para as suas formulações. Desta maneira, é necessário escolher o modelo mais apropriado para o problema em questão.

Conforme mencionado, para o concreto em compressão, a NBR 6118 (2014) indica o emprego de um diagrama parábola-retângulo. A curva tensão-deformação para o concreto tracionado, por sua vez, é simplificada por uma relação bilinear. Para o comportamento do aço, a norma indica uma relação bilinear tanto para compressão como para tração. Isto é detalhado na subseção a seguir.

2.5 MODELOS CONSTITUTIVOS

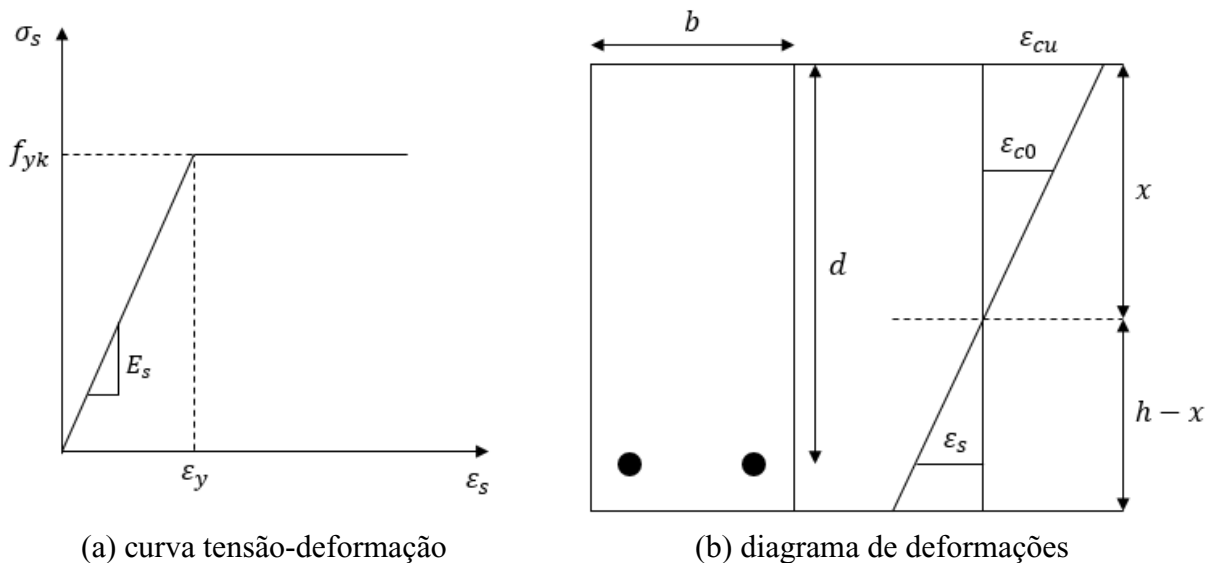
Nesta seção, primeiramente é apresentado o modelo constitutivo do aço indicado pela NBR 6118 (2014). Em seguida, são comparados dois modelos diferentes, encontrados na literatura, para o concreto comprimido.

Para o estado limite último, as normas de projeto estrutural atuais consideram que o concreto não resiste às forças de tração e que elas são suportadas apenas pela armadura. Apesar disso, sabe-se que após o início da fissuração o concreto tracionado entre as fissuras ainda colabora com a resistência do elemento, devido à transferência de tensões causada pela aderência entre o aço e o concreto. A essa capacidade do concreto intacto entre as fissuras de continuar a oferecer rigidez se dá o nome de *tension-stiffening* (Sokolov, 2010). Diante disso, são apresentados também dois modelos diferentes para o concreto tracionado encontrados na literatura.

2.5.1 Aço

Para o cálculo no estado limite último, a NBR 6118 (2014) permite utilizar a curva tensão-deformação do aço ilustrada na Figura 2.6. Esse modelo é válido para intervalos de temperatura entre $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ e pode ser aplicado tanto para compressão como para tração.

Figura 2.6 – Modelo constitutivo para o aço.



Fonte: Autora.

De acordo com a Figura 2.6, se a deformação do aço for menor que a deformação de escoamento do aço, o material se encontra no regime elástico-linear e a tensão pode ser calculada pela Equação 2.16. Caso contrário, visto que o modelo assume comportamento elastoplástico perfeito para o aço, a tensão no mesmo resulta igual a f_{yk} .

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \quad (2.16)$$

2.5.2 Concreto

Thorenfeldt *et al.* (1987) propuseram um modelo constitutivo para o concreto comprimido válido para uma faixa de f_{ck} de 15 a 125 MPa. Ele adota a seguinte equação:

$$\sigma_c = \frac{f_c \cdot w(\varepsilon_c/\varepsilon_{c0})}{w - 1 + (\varepsilon_c/\varepsilon_{c0})^{w \cdot m}} \quad (2.17)$$

Os parâmetros w e m são constantes calculadas por meio das Equações 2.18 e 2.19, sendo f_c inserido nelas em libra-força por polegada quadrada (psi).

$$w = 0,8 + \frac{f_c}{2500} \quad (2.18)$$

$$m = \begin{cases} 1, \text{ para } \varepsilon_c/\varepsilon_{c0} \leq 1 \\ 0,67 + \frac{f_c}{9000} \geq 1, \text{ para } \varepsilon_c/\varepsilon_{c0} > 1 \end{cases} \quad (2.19)$$

O termo ε_{c0} é a deformação de compressão do concreto no início do escoamento, ou seja, no ponto em que a tensão no concreto atinge o pico. Hognestad (1951) estabelece a seguinte equação para ela:

$$\varepsilon_{c0} = 2 \frac{f_c}{E_c} \quad (2.20)$$

Outro modelo constitutivo utilizado por diversos autores, como D'amato *et al.* (2012), Kwan *et al.* (2015) e Lim e Ozbakkaloglu (2015), é o de Attard e Setunge (1996), aplicável a uma faixa de f_{ck} de 20 a 130 MPa para concretos confinados ou não. A relação

tensão-deformação apresenta uma parábola tanto para o ramo ascendente da curva quanto para o descendente, e a equação é dada por:

$$\sigma_c = f_c \frac{A \cdot X_c + B \cdot X_c^2}{1 + X_c(A - 2) + X_c^2(B + 1)}, \quad (2.21)$$

onde $X_c = \varepsilon_c / \varepsilon_{c0}$.

Os parâmetros A e B são constantes calculadas de maneiras diferentes dependendo se o concreto é confinado ou não. Além disso, consideram-se equações distintas para os ramos ascendente e descendente da curva tensão-deformação.

Para concreto não confinado, as constantes para o ramo ascendente da curva são dadas por:

$$A = \frac{E_c \cdot \varepsilon_{c0}}{f_c}, \quad (2.22)$$

$$B = \frac{(A - 1)^2}{0,55} - 1, \quad (2.23)$$

onde E_c é o módulo de elasticidade secante do concreto.

Para o ramo descendente da curva, as constantes são dadas por:

$$A = \frac{f_{ic}(\varepsilon_{ic} - \varepsilon_{c0})^2}{\varepsilon_{ic} \cdot \varepsilon_{c0}(f_c - f_{ic})}, \quad (2.24)$$

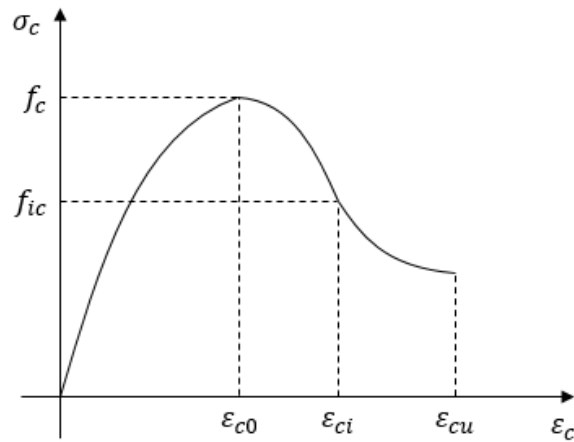
$$B = 0. \quad (2.25)$$

Os termos f_{ic} e ε_{ic} são a tensão e a deformação do concreto no ponto de inflexão do ramo descendente da curva, conforme ilustrado na Figura 2.7, e são estimados por:

$$f_{ic} = f_c[1,41 - 0,17\ln(f_c)], \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_{ic} = \varepsilon_{c0}[2,5 - 0,3\ln(f_c)]. \quad (2.27)$$

Figura 2.7 – Curva tensão-deformação de Attard e Setunge (1996) para o concreto comprimido.



Fonte: Autora.

Stramandinoli e La Rovere (2008) desenvolveram um modelo para representar o comportamento do concreto tracionado. Ele foi implementado em um programa computacional para análise não-linear de vigas de concreto armado, e os resultados numéricos obtidos demonstraram concordância adequada com resultados experimentais.

No modelo de Stramandinoli e La Rovere (2008) a curva tensão-deformação do concreto tracionado exibe um decaimento exponencial na faixa pós-fissuração e, antes da fissuração, o concreto apresenta comportamento elástico-linear. O modelo permite obter a tensão de tração do concreto por meio das seguintes equações:

$$\sigma_c = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon_c, & \text{para } \varepsilon_c \leq f_t/E_c \\ f_t \cdot \exp(-\zeta \cdot \varepsilon_c \cdot E_c/f_t), & \text{para } f_t/E_c < \varepsilon_c < \varepsilon_y, \\ 0, & \text{para } \varepsilon_c \geq \varepsilon_y \end{cases} \quad (2.28)$$

onde $\zeta = 0,017 + 0,255(\eta \cdot \rho_e) - 0,106(\eta \cdot \rho_e)^2 + 0,016(\eta \cdot \rho_e)^3$, sendo η a relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto (E_s/E_c) e ρ_e é a taxa de armadura efetiva, dada pela Equação 2.29.

$$\rho_e = \frac{A_s}{A_{c,ef}} \cong \frac{4 \cdot A_s}{b \cdot h} \quad (2.29)$$

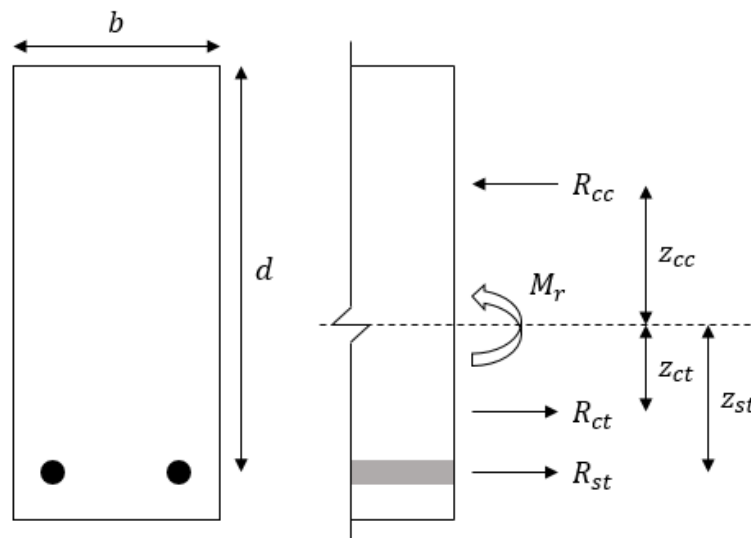
Fields e Bischoff (2004) desenvolveram um modelo bastante semelhante ao de Stramandinoli e La Rovere (2008) para descrever o comportamento do concreto tracionado. O modelo de Fields e Bischoff (2004) é definido pelas equações:

$$\sigma_c = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon_c, & \text{para } \varepsilon_c \leq f_t/E_c \\ f_t \cdot \exp[-800(\varepsilon_c - f_t/E_c)], & \text{para } \varepsilon_c > f_t/E_c \end{cases} \quad (2.30)$$

2.6 EQUILÍBRIO EM SEÇÕES TRANSVERSAIS

A Figura 2.8 ilustra os esforços atuantes em uma seção transversal considerando a contribuição do concreto comprimido e tracionado e da armadura tracionada.

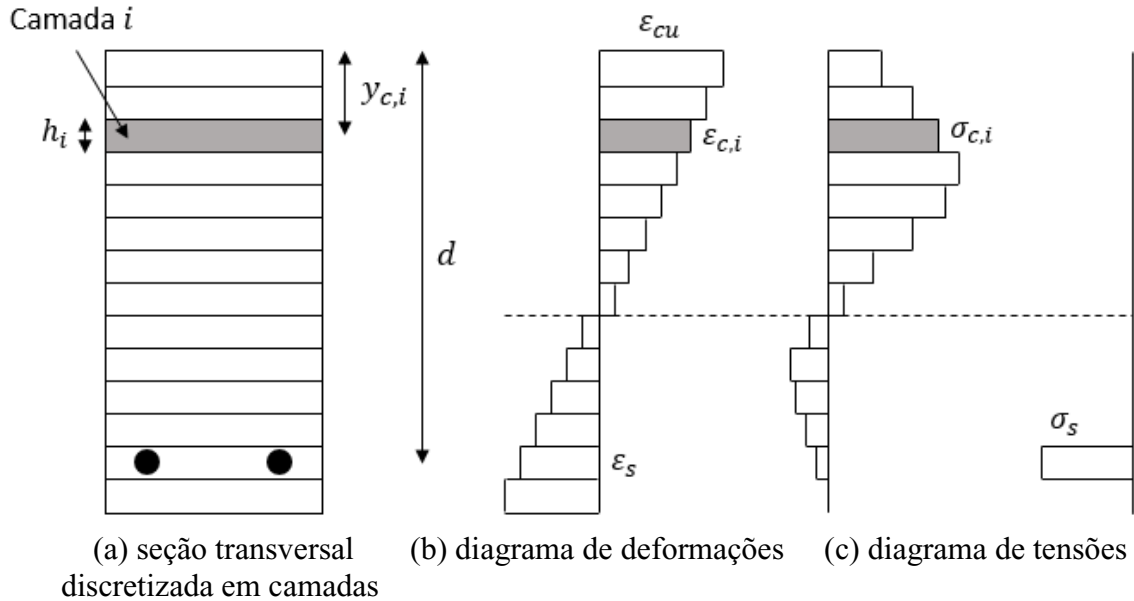
Figura 2.8 – Esforços atuantes na seção transversal.



Fonte: Autora.

Para representar o comportamento de uma seção transversal de maneira adequada é comum dividi-la em camadas, conforme ilustrado na Figura 2.9 (Arslan e Cihanli, 2010; Syed *et al.*, 2012). Neste trabalho é adotado o modelo de viga de Euler-Bernoulli, que admite a hipótese de que não há distorção na seção transversal. Sendo assim, o diagrama de deformações é linear e é possível determinar a deformação em cada camada por meio de semelhança de triângulos e, com isso, a tensão atuante em cada uma. Nas análises feitas neste trabalho as seções transversais são discretizadas em 50 camadas.

Figura 2.9 – Discretização da seção transversal.



Fonte: Autora.

A força resultante no concreto comprimido, R_{cc} , é obtida integrando-se a distribuição de tensões no mesmo ao longo do trecho comprimido. A força resultante no concreto tracionado, R_{ct} , é obtida de maneira análoga, efetuando a integração na região tracionada. Considerando a discretização em camadas da seção transversal, as forças resultantes nas parcelas tracionada e comprimida são, respectivamente:

$$R_{ct} = \sum_{i=1}^{n_t} \sigma_{c,i} \cdot b \cdot h_i, \quad (2.31)$$

$$R_{cc} = \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{c,i} \cdot b \cdot h_i, \quad (2.32)$$

onde n_t é o número de camadas na região tracionada e n_c o número de camadas na região comprimida.

A força resultante na armadura tracionada é obtida por:

$$R_{st} = A_s \cdot \sigma_s. \quad (2.33)$$

Pelo equilíbrio da seção transversal, a força resultante no concreto comprimido deve ser igual, em módulo, à soma das forças resultantes no concreto e armadura tracionados. Além

disso, o momento resistente deve ser igual, em módulo, ao momento solicitante. Para o equilíbrio de momentos, é possível considerar o momento das forças internas em relação à linha neutra, conforme mostrado na Equação 2.34.

$$R_{ct} \cdot z_{ct} + R_{cc} \cdot z_{cc} + R_{st} \cdot z_{st} = M_s \quad (2.34)$$

2.7 ESTUDOS SOBRE DUCTILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Diversos estudos foram realizados sobre o dimensionamento de vigas levando em conta a ductilidade. Alguns trabalhos considerados importantes no contexto dessa dissertação são apresentados a seguir.

Gamino (2003) apresentou um estudo numérico não-linear da ductilidade de vigas de concreto armado convencional e de alto desempenho. Foram obtidas curvas carga-deflexão e momento fletor-curvatura a fim de quantificar os índices de ductilidade global e local, respectivamente. Na sequência, foi determinada a capacidade de deformação inelástica das vigas para diferentes valores de resistência à compressão do concreto, taxa de armadura de tração, tensão de escoamento do aço, espaçamento entre estribos, base da seção transversal e efeito de escala. Além disso, foram avaliados dois casos de solicitação: flexão simples tipo I e flexão simples tipo II. O primeiro caso caracteriza-se pela ação de forças simétricas aplicadas a 1/3 e 2/3 do vão e o segundo por uma força centrada no meio do vão. O trabalho concluiu que vigas sujeitas à flexão tipo II apresentam maior ductilidade quando comparadas com as do tipo I. Quanto ao efeito de escala, observou-se que a ductilidade das vigas é inversamente proporcional à esbelteza das mesmas.

Araújo (2009) analisou a influência da profundidade relativa da linha neutra, adotada no dimensionamento à flexão simples, sobre a ductilidade de vigas e lajes de concreto armado. Para isso, foi elaborado um modelo não-linear para análise das seções transversais, foi verificada a ductilidade obtida no dimensionamento e constatado o aviso prévio da ruptura por meio do tamanho da abertura das fissuras. Salienta-se que o trabalho foi baseado na norma brasileira vigente na época, a NBR 6118 (2003). O trabalho concluiu que não se deve realizar o dimensionamento à flexão simples considerando todo o domínio 3, como era feito até então. Para a obtenção de uma ruptura dúctil e com aviso prévio, é necessário limitar a profundidade da linha neutra de modo a eliminar parte do domínio 3.

Carpinteri e Corrado (2010) desenvolveram um modelo numérico que permite descrever o comportamento não linear de vigas de concreto armado durante a fratura por tração e o esmagamento do concreto. Com o algoritmo proposto, baseado nos conceitos da mecânica da fratura não linear, foi possível analisar a curva momento fletor-curvatura das vigas. Em particular, os problemas de armadura mínima e o desenvolvimento de rótulas plásticas foram estudados a fim de discutir os limites prescritos pelas normas de projeto estrutural e propor novas fórmulas e/ou diagramas fáceis de utilizar.

Nogueira e Rodrigues (2020) propuseram um novo modelo de dimensionamento de vigas de concreto armado sujeitas a flexão simples, a partir da definição explícita de um parâmetro de entrada denominado fator de ductilidade, que quantifica a capacidade da estrutura de suportar deslocamentos antes de romper. Este trabalho concluiu que o fator de ductilidade está diretamente associado à posição da linha neutra, e que com a aplicação do modelo proposto é possível estabelecer limites para o fator de ductilidade em função do desempenho desejado.

3 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

3.1 INCERTEZAS NA ENGENHARIA CIVIL

A maioria dos fenômenos relacionados à engenharia civil apresenta incertezas. Por exemplo, se várias barras de aço tidas como idênticas forem carregadas até a falha em um ensaio em laboratório, cada barra romperá com um valor diferente de carga, o que caracteriza uma aleatoriedade relacionada principalmente à resistência do material. Essa é uma realidade dos diversos materiais utilizados na construção civil, cujos dados experimentais apresentam valores dispersos (Haldar e Mahadevan, 2000).

Entre as incertezas presentes em problemas de engenharia, a maioria delas pode ser classificada em intrínseca e epistêmica. A incerteza epistêmica está relacionada ao nosso conhecimento sobre o problema. Em tese, a incerteza epistêmica pode ser reduzida ou eliminada através da coleta de mais dados sobre os processos envolvidos ou através de melhor conhecimento do problema. Incerteza intrínseca é aquela que faz parte da natureza dos processos envolvidos e, portanto, é irreduzível, não pode ser eliminada. Outro tipo de incerteza que não se encaixa na classificação apresentada é o erro humano (Beck, 2014).

Na prática, as incertezas inerentes aos projetos de engenharia civil são usualmente consideradas indiretamente, por meio do uso de coeficientes de ponderação. Por meio destes, é possível conceber projetos seguros, ainda que não seja possível quantificar o nível de segurança deles. Diante disso, a confiabilidade se apresenta como uma maneira de avaliar, a partir das incertezas associadas às variáveis de projeto, qual a probabilidade de uma estrutura apresentar ou não desempenho satisfatório.

No estudo da confiabilidade estrutural, usualmente as variáveis de projeto são tratadas como sendo aleatórias, e define-se elas por meio de funções que representam suas distribuições de probabilidade, as chamadas funções de densidades de probabilidades (Scherer, 2018). Essas funções representam as variáveis aleatórias a partir do tipo de distribuição e seus parâmetros.

3.2 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

A função de densidades de probabilidades (*probability density function* - PDF) indica a natureza da aleatoriedade de uma variável aleatória. Sabendo que esta é denotada pela letra

maiúscula X e que um valor particular que ela assume é representado pela letra minúscula x , é possível calcular a probabilidade do evento $\{X \leq x\}$, chamado de função de distribuição cumulativa de probabilidades (*cumulative density function* - CDF). Essa função é calculada integrando a área abaixo da PDF ao longo de todos os valores de X menores ou iguais a x , ou seja, a integração deve ser feita de $-\infty$ a x (Haldar e Mahadevan, 2000). Dessa forma, a CDF por ser expressa por:

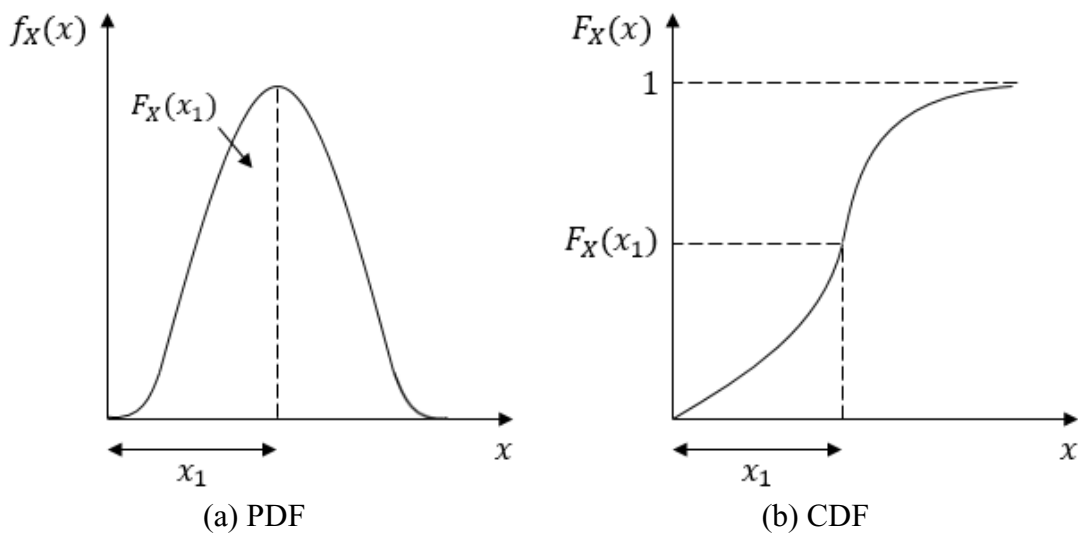
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx. \quad (3.1)$$

Sendo assim, a PDF é dada pela primeira derivada da CDF, conforme mostrado na Equação 3.2.

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (3.2)$$

Um exemplo de PDF e de CDF de uma variável aleatória é ilustrado na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Funções de probabilidades.



Fonte: Adaptada de Choi et al. (2007).

Um dos parâmetros estatísticos que representa uma variável aleatória é a média, que indica sua tendência central e é dada por:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx. \quad (3.3)$$

Outra medida utilizada para descrever uma variável aleatória é a variância, que reflete a sua dispersão em torno da média. Ela é igual ao quadrado do desvio padrão e é calculada por:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx. \quad (3.4)$$

Uma outra forma de descrever a dispersão de uma variável aleatória é por meio do coeficiente de variação, uma medida adimensional definida por:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}. \quad (3.5)$$

Algumas distribuições de probabilidade usuais e de interesse para esse trabalho são indicadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Exemplos de distribuições de probabilidade.

Distribuição	$f_X(x)$	Média (μ)	Variância (σ^2)
Normal N (μ, σ)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	μ	σ^2
Lognormal LN (Λ, ϵ)	$\frac{1}{\epsilon \cdot x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \Lambda}{\epsilon}\right)^2\right]$	$\exp(\Lambda + 0,5\epsilon^2)$	$\mu[\exp(\epsilon^2) - 1]$
Gumbel EV - I (μ, α)	$\alpha \cdot \exp[\alpha(u - x) - e^{\alpha(u-x)}]$	$u + \frac{\gamma}{\alpha}$ (*)	$\frac{\pi^2}{6\alpha^2}$

(*) γ é chamada de constante de Euler-Mascheroni, sendo igual a aproximadamente 0,577216.

Fonte: Adaptado de Beck (2014).

3.3 ALGUNS CONCEITOS DE CONFIABILIDADE

A confiabilidade estrutural permite avaliar a segurança das estruturas a partir da quantificação da probabilidade de um dado sistema falhar, ou seja, responder de forma indesejável em relação a qualquer requisito estabelecido. Cada distinta maneira que possa

levar a uma resposta indesejável é chamada de modo de falha, e cada modo de falha origina um estado limite. Sendo assim, os requisitos básicos das estruturas, inerentes à segurança e ao funcionamento, podem ser expressos na forma de estados limites (Beck, 2014).

Os estados limites e, portanto, os modos de falha podem ser quantificados através das chamadas funções de estado limite. Elas são escritas em função do vetor das variáveis aleatórias \mathbf{X} , conforme mostrado na Equação 3.6.

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.6)$$

Caso a função de estado limite assuma valores negativos ou iguais a zero, considera-se que houve falha. Para situações contrárias, nas quais ela assume valores positivos, considera-se não falha. Assim, é possível definir a fronteira entre os domínios de falha (D_f) e de não falha ou sobrevivência (D_s), conforme mostrado na Equação 3.7.

$$\begin{aligned} D_f &= \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) \leq 0\} \\ D_s &= \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) > 0\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

A segurança das estruturas é avaliada, portanto, a partir da quantificação das probabilidades de falha associadas a diversos estados limites. A probabilidade de falha, por sua vez, consiste na integração do conteúdo de probabilidades de todos os pontos pertencentes ao domínio de falha, conforme mostrado na Equação 3.8.

$$P_f = P[\{g(\mathbf{X}) \leq 0\}] = \int_{D_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.8)$$

Métodos para a solução da integral apresentada na Equação 3.8 incluem, por exemplo, o método de confiabilidade de primeira ordem (*first order reliability method* – FORM), o método de confiabilidade de segunda ordem (*second order reliability method* – SORM), o método de confiabilidade de primeira ordem e segundo momento (*first order second moment* – FOSM) e o método de simulação de Monte Carlo. Este último é empregado no presente trabalho e descrito sucintamente na seção 3.4.

Alternativamente, o índice de confiabilidade pode ser utilizado como medida de segurança das estruturas. Ele é dado por:

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f), \quad (3.9)$$

onde Φ^{-1} é a distribuição normal padrão inversa.

Quanto maior for o índice de confiabilidade associado a uma estrutura, maior o nível de segurança dela. Além disso, nos projetos baseados em confiabilidade normalmente são empregados valores mínimos aceitáveis para o índice de confiabilidade, conhecidos como índices de confiabilidade alvo.

O JCSS (2002), comitê da área de risco e confiabilidade estrutural que reúne seis entidades profissionais internacionais, apresenta índices de confiabilidade alvo para os estados limites últimos (Tabela 3.2) e de serviço (Tabela 3.3).

Tabela 3.2 – Índices de confiabilidade indicados para o estado limite último.

Custo relativo da medida de segurança	Índice de confiabilidade (β)		
	Pequenas consequências devido à falha	Moderadas consequências devido à falha	Grandes consequências devido à falha
Alto	3,1 ($P_f \cong 10^{-3}$)	3,3 ($P_f \cong 5 \cdot 10^{-4}$)	3,7 ($P_f \cong 10^{-4}$)
Normal	3,7 ($P_f \cong 10^{-4}$)	4,2 ($P_f \cong 10^{-5}$)	4,4 ($P_f \cong 5 \cdot 10^{-6}$)
Baixo	4,2 ($P_f \cong 10^{-5}$)	4,4 ($P_f \cong 5 \cdot 10^{-6}$)	4,7 ($P_f \cong 10^{-6}$)

Fonte: Adaptada do JCSS (2002).

Tabela 3.3 – Índices de confiabilidade indicados para o estado limite de serviço.

Custo relativo da medida de segurança	Índice de confiabilidade (β)
Alto	1,3 ($P_f \cong 10^{-1}$)
Normal	1,7 ($P_f \cong 5 \cdot 10^{-2}$)
Baixo	2,3 ($P_f \cong 10^{-2}$)

Fonte: Adaptada do JCSS (2002).

Além disso, qualquer modelo utilizado para estimar a resposta de um sistema estrutural está sujeito a hipóteses e simplificações e, portanto, a erros. Em um contexto probabilístico, o erro de modelo, também denominado incerteza de modelo, pode ser representado como uma variável aleatória, cuja distribuição e parâmetros são determinados, por exemplo, a partir de comparações entre ensaios realizados em laboratório e a resistência

avaliada segundo modelos teóricos ou numéricos (Furst, 2020). Dessa maneira, a variável erro de modelo é amplamente utilizada nos estudos de confiabilidade estrutural.

3.4 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

De acordo com Ang e Tang (1984), simulação é um procedimento numérico ou experimental que visa representar a realidade com base em suposições e modelos pré-concebidos. No contexto da confiabilidade, o método de simulação de Monte Carlo é amplamente utilizado para determinar a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade.

O método de simulação de Monte Carlo consiste na repetição de um processo de simulação, no qual em cada simulação é utilizado um conjunto de valores para as variáveis aleatórias gerado de acordo com as respectivas distribuições de probabilidade. Ao repetir o processo, uma amostra de soluções (pontos amostrais) é obtida, cada uma correspondendo a um conjunto diferente de valores para as variáveis aleatórias (Ang e Tang, 1984). O método é considerado exato, já que o resultado tende ao exato quando o número de simulações tende ao infinito.

A estimativa da probabilidade de falha, obtida pelo método de simulação de Monte Carlo, é tomada a partir da relação entre o número de falhas e o total de simulações realizadas. Para isso, em cada simulação é aplicada uma função indicadora, que assume valor unitário para os pontos pertencentes ao domínio de falha e valor nulo para os pertencentes ao domínio de sobrevivência (Furst, 2020). A função indicadora é mostrada na Equação 3.10.

$$I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } g(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0, & \text{se } g(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Dessa maneira, o valor da probabilidade de falha é estimado por:

$$P_f \cong \frac{1}{n_{si}} \sum_{i=1}^{n_{si}} I(\mathbf{x}_i) \cong \frac{n_f}{n_{si}}. \quad (3.11)$$

A Equação 3.11 está baseada em uma amostra de tamanho finito, logo está sujeita a um erro estatístico que corresponde à variância da probabilidade de falha. Esse erro diminui à medida em que se aumenta o número de simulações, porém ele depende também da ordem de

grandeza da probabilidade de falha exata. Quanto menor ela é, maior o número de simulações necessário para obter uma mesma variância (Melchers e Beck, 2018). Dado o coeficiente de variação da probabilidade de falha, mostrado na Equação 3.12, observa-se que a avaliação de uma probabilidade de falha da ordem de 10^{-p} com $CV_{P_f} \leq 10\%$ requer aproximadamente 10^{p+2} simulações.

$$CV_{P_f} \cong \frac{1}{\sqrt{n_{si}P_f}} \quad (3.12)$$

4 CONFIABILIDADE E DUCTILIDADE ESTRUTURAL

4.1 REVISÃO DA LITERATURA

Existem poucos estudos sobre os aspectos probabilísticos da ductilidade em vigas de concreto armado. Os trabalhos encontrados são resumidos a seguir.

Costello e Chu (1969 apud Baji *et al.*, 2016) desenvolveram uma metodologia para avaliar a confiabilidade de vigas de concreto armado dimensionadas com base na norma ACI 318 (1963) considerando a variabilidade nas propriedades dos materiais. As probabilidades de falha foram obtidas por:

$$P_f = P(\rho_b < \rho_{m\acute{a}x} = 0,75\rho_{bn}), \quad (4.1)$$

onde ρ_b é a taxa de armadura balanceada e ρ_{bn} a taxa de armadura balanceada dada pela norma. O estado balanceado se refere à condição na qual a armadura tracionada atinge a tensão de escoamento e o concreto atinge a sua deformação última de compressão.

Na Equação 4.1, ρ_b , que depende das propriedades do material e das dimensões da seção transversal, foi tratada como uma variável aleatória. De acordo com o estado limite proposto, a falha frágil ocorre quando essa variável é menor que a taxa especificada pela norma. Este trabalho concluiu que a probabilidade de falha de vigas de concreto armado dimensionadas com a taxa de armadura máxima permitida na época era de 16,6%.

Allen (1970) conduziu um estudo probabilístico de vigas de concreto armado submetidas ao momento fletor, com base na ACI 318 (1963). A razão da ductilidade da curvatura foi utilizada para definir o estado limite. Foi utilizado o método de simulação de Monte Carlo e considerada tanto a variabilidade nas propriedades dos materiais como nas dimensões da seção transversal, além de diferentes carregamentos. Este trabalho concluiu que, devido à variabilidade na resistência característica à compressão e na deformação última de compressão do concreto, mesmo em seções transversais subarmadas havia uma probabilidade significativa de ocorrer falha frágil.

Ito e Sumikama (1985) avaliaram a adequação dos fatores de redução para a taxa de armadura balanceada e para a redistribuição de momentos em vigas de concreto armado, de acordo com a norma ACI 318 (1983). Foi utilizada a mesma função de estado limite de Costello e Chu (1969). Foi demonstrado que para uma série de vigas de concreto armado

dimensionadas com a taxa de armadura máxima imposta pela norma da época ($0,75\rho_{bn}$) a probabilidade de ocorrer falha frágil é alta. Para calibrar o fator de redução a fim de garantir falha dúctil foi considerada uma probabilidade de falha alvo de 0,01, enquanto que para garantir o desenvolvimento da rótula plástica para a redistribuição de momentos, um valor de 0,00135 foi utilizado. A partir disso, o fator de redução (que reduz ρ_{bn}) foi calibrado. A conclusão deste trabalho é que os valores especificados pela norma de 0,75 e 0,50 para garantir a falha dúctil e o desenvolvimento da rótula plástica, respectivamente, deveriam ser reduzidos consideravelmente.

Baji *et al.* (2016) avaliaram a confiabilidade no nível seccional de vigas de concreto armado em relação à ductilidade para diversas normas de projeto estrutural. Com o intuito de investigar o pior cenário para a ductilidade, foi considerada a taxa de armadura tracionada máxima permitida pelas normas no dimensionamento das vigas. Para separar os modos de falha dúctil e frágil da seção transversal, foi proposta a seguinte função de estado limite, baseada na deformação da armadura tracionada:

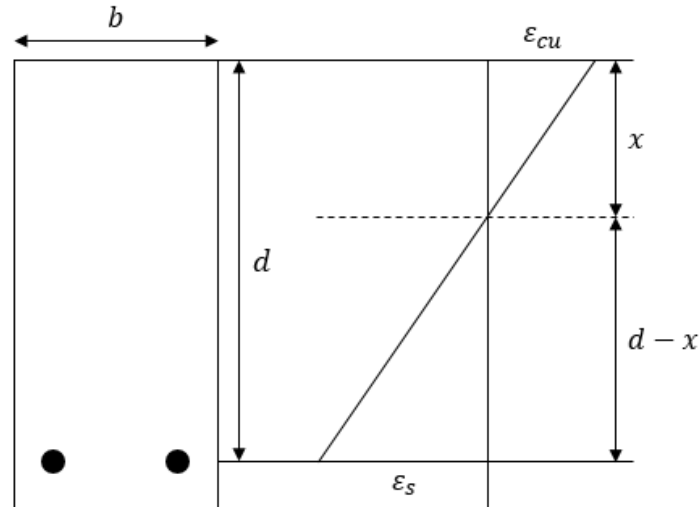
$$g = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_y} - 1. \quad (4.2)$$

Na Equação 4.2, a falha corresponde à falha frágil e ocorre quando a deformação do aço no estado limite último é menor que a deformação de escoamento do aço ($\varepsilon_s < \varepsilon_y$). Sabe-se que o que marca o estado limite último é a deformação excessiva da armadura tracionada ou o alcance da deformação última de compressão do concreto (esmagamento do concreto). Como esta é relativamente baixa, atingir a deformação última de compressão do concreto é geralmente o que governa o estado limite último nas vigas.

Seguindo a discussão acima, quando a deformação última de compressão do concreto na fibra mais comprimida da seção transversal é atingida (Figura 4.1) e utilizando semelhança de triângulos, a deformação do aço é dada por $\varepsilon_s = \varepsilon_{cu}[-1 + 1/(x/d)]$. Ao introduzir um erro de modelo (θ) na previsão da profundidade da linha neutra, a função de estado limite mostrada na Equação 4.2 pode ser reescrita como:

$$g = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_y} \left(-1 + \frac{1}{\theta(x/d)} \right) - 1. \quad (4.3)$$

Figura 4.1 – Diagrama de deformações no estado limite último.



Fonte: Autora.

No artigo de Baji *et al.* (2016), a profundidade da linha neutra foi determinada utilizando um procedimento iterativo, no qual a profundidade da linha neutra é variada até que a condição de equilíbrio de esforços seja atendida. As tensões e deformações do concreto e do aço foram obtidas diretamente das curvas tensão-deformação dos materiais, sendo assumido um comportamento elastoplástico perfeito para o aço e utilizados os modelos constitutivos de Attard e Setunge (1996) e o de Fiels e Bischoff (2004) para o concreto comprimido e tracionado, respectivamente. Por fim, os índices de confiabilidade para diferentes resistências do concreto e do aço foram obtidos, sendo muitos considerados inaceitavelmente baixos.

4.2 FUNÇÕES DE ESTADO LIMITE UTILIZADAS

4.2.1 Ductilidade

Com o objetivo de analisar o nível de confiabilidade relacionada à ductilidade de vigas de concreto armado dimensionadas de acordo com a NBR 6118 (2014), uma função de estado limite baseada na deformação da armadura tracionada é utilizada. Essa função foi adaptada de Baji *et al.* (2016).

A função de estado limite proposta por Baji *et al.* (2016), apresentada na Equação 4.3, se baseia no fato de que o comportamento frágil ocorre quando a deformação do aço no estado limite último é menor que a deformação de escoamento do aço, o que corresponde ao domínio 4 de dimensionamento. Contudo, a NBR 6118 (2014) indica que parte do domínio 3

deve ser eliminado a fim de assegurar uma maior ductilidade, conforme apresentado na seção 2.3.

Desta maneira, neste trabalho é considerado que a falha frágil ocorre quando a deformação do aço no estado limite último é menor que uma determinada deformação limite ($\varepsilon_s < \varepsilon_{s,lim}$). Logo, a função de estado limite é dada por:

$$g = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{s,lim}} \left(-1 + \frac{1}{\theta(x/d)} \right) - 1. \quad (4.4)$$

A deformação limite pode ser calculada por $\varepsilon_{s,lim} = \varepsilon_{cu}[-1 + 1/(x/d)]$ substituindo ε_{cu} e x/d pelos valores limites estabelecidos na NBR 6118 (2014). Tais valores estão indicados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Valores limites de ε_{cu} e x/d para diferentes f_{ck} .

f_{ck} (MPa)	≤ 50	> 50
ε_{cu}	0,0035	$2,6\% + 35\% \left(\frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4$
$(x/d)_{lim}$	0,45	0,35

Fonte: Autora.

Com isso, as deformações limites para diferentes f_{ck} assumem os valores mostrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Valores de $\varepsilon_{s,lim}$ para diferentes f_{ck} .

f_{ck} (MPa)	≤ 50	60	70	80	90
$\varepsilon_{s,lim}$	$4,28 \cdot 10^{-3}$	$5,36 \cdot 10^{-3}$	$4,93 \cdot 10^{-3}$	$4,84 \cdot 10^{-3}$	$4,83 \cdot 10^{-3}$

Fonte: Autora.

Para determinar a profundidade da linha neutra é utilizado um procedimento iterativo, assim como em Baji *et al.* (2016). Com base no que foi apresentado na seção 2.6, a equação de equilíbrio de forças na seção transversal é dada por:

$$R_{ct} + R_{cc} + R_{st} = 0. \quad (4.5)$$

Durante o procedimento iterativo, para cada valor de x (ou de x/d), calculam-se as deformações ao longo da seção transversal. Com esses valores, determinam-se também as tensões atuantes. A profundidade da linha neutra é variada até que a Equação 4.5 seja atendida, dentro de uma tolerância considerada.

Salienta-se que não existe um critério explícito para definir o limite entre comportamento frágil e dúctil em um elemento estrutural. Porém, com base na literatura existente e nas indicações da NBR 6118 (2014), entende-se que com a função de estado limite proposta é possível obter resultados apropriados.

4.2.2 Resistência

A condição básica de segurança relativa ao estado limite de um elemento estrutural pode ser descrita como:

$$M_{rd} \geq M_{sd}. \quad (4.6)$$

Neste trabalho, o momento resistente parte da equação de equilíbrio de momentos apresentada na seção 2.6. Para obter o seu valor de cálculo, são empregados os coeficientes de ponderação sobre os valores das resistências.

O momento solicitante é dividido em duas parcelas, a permanente e a acidental, e o seu valor de cálculo é dado conforme a equação:

$$M_{sd} = \gamma_g \cdot G_k + \gamma_q \cdot Q_k, \quad (4.7)$$

onde $\gamma_g = \gamma_q = 1,4$.

A relação entre os carregamentos permanente e acidental pode ser obtida pela Equação 4.8, na qual χ varia de 0 a 1. Para um valor de χ igual a 0, o momento solicitante seria composto apenas pela parcela permanente, enquanto que para um valor igual a 1, seria composto apenas pela parcela acidental. De acordo com Santos *et al.* (2014), para vigas de concreto armado os valores usuais para χ variam entre 0,1 e 0,6.

$$\chi = \frac{Q_k}{G_k + Q_k} \quad (4.8)$$

Ao igualar o momento resistente ao momento solicitante (Equação 4.7) e adotando um valor para χ , passa-se a ter duas equações em função de G_k e Q_k . Dessa forma, seus valores podem ser determinados.

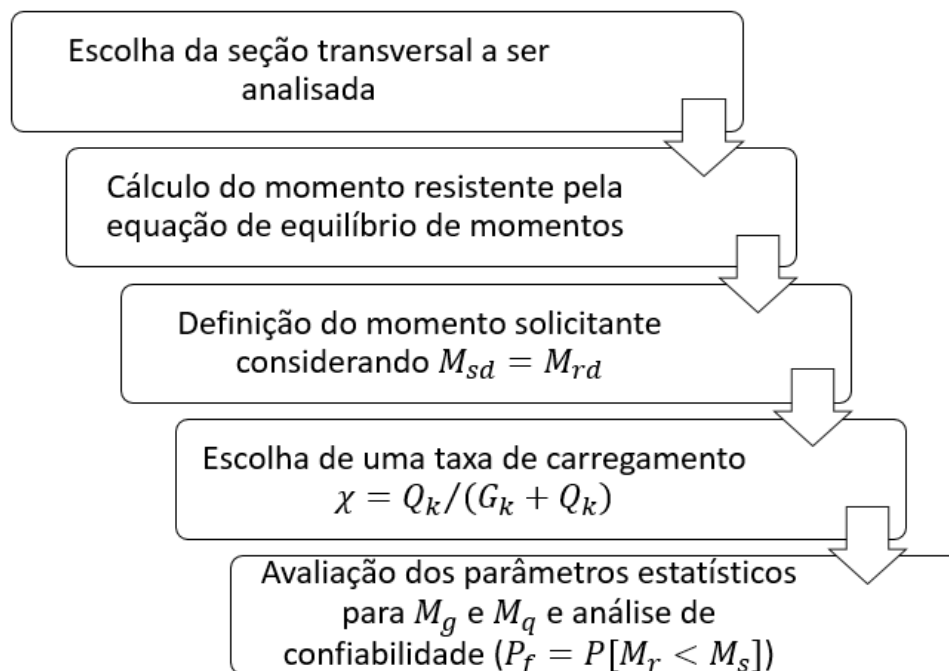
A função de estado limite que avalia a capacidade resistente de uma estrutura em relação à solicitação é dada pela Equação 4.9. Tendo definido os valores nominais para as parcelas permanente e acidental do momento solicitante, é possível calcular probabilidades de falha relacionadas à função.

$$g = \theta_r \cdot M_r - \theta_s \cdot M_s = \theta_r \cdot M_r - \theta_s(M_g + M_q), \quad (4.9)$$

onde θ_r e θ_s são os erros de modelo relativos aos momentos resistente e solicitante, respectivamente.

A Figura 4.2, adaptada de Santos *et al.* (2014), mostra um esquema resumindo o procedimento para análise da confiabilidade relacionada à resistência.

Figura 4.2 – Esquema da análise de confiabilidade relacionada à resistência.



Fonte: Adaptada de Santos *et al.* (2014).

4.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONSIDERADAS

Uma análise probabilística requer o estabelecimento de um conjunto de variáveis aleatórias que permita avaliar a variabilidade esperada em uma estrutura real. Contudo, o número de variáveis que afetam o comportamento real de um modelo dificilmente pode ser mensurado. Do ponto de vista de pesquisa, esse número deve ser limitado. Um critério razoável na seleção dessas variáveis é contemplar aquelas que sabidamente são significativas em relação ao estado limite estudado (Scherer, 2018).

Neste trabalho foram consideradas diversas variáveis aleatórias para a análise da confiabilidade de vigas, as quais são apresentadas detalhadamente nas seções a seguir.

4.3.1 Dimensões da seção transversal (d e b)

Com base no JCSS (2002), a média da base da seção transversal pode ser considerada igual ao seu respectivo valor nominal, e a sua variabilidade representada por uma distribuição normal de probabilidade. O desvio padrão é definido conforme mostrado na Equação 4.10.

$$\sigma_b = 4 + 0,006b_n \leq 10 \text{ mm} \quad (4.10)$$

De acordo com Israel *et al.* (1987), a altura útil da seção transversal pode ser representada por uma distribuição normal de probabilidade, sendo a sua média igual ao próprio valor nominal e o desvio padrão 15 mm. Outras referências indicam prescrições semelhantes para essa variável aleatória. O JCSS (2002), por exemplo, recomenda a consideração de uma distribuição normal de probabilidade para ela, com a média igual ao seu valor nominal e o desvio padrão 10 mm.

4.3.2 Resistência à compressão do concreto (f_c)

Para a determinação do valor da resistência média à compressão do concreto, a NBR 12655 (2015) apresenta a seguinte equação:

$$\mu_{f_c} = f_{ck} + 1,65\sigma_{f_c}. \quad (4.11)$$

A NBR 12655 (2015), assim como grande parte das referências consultadas, utiliza a distribuição normal de probabilidade para representar a variabilidade da resistência à compressão do concreto. Quanto aos parâmetros estatísticos, a NBR 12655 (2015) classifica o concreto em três condições de acordo com o controle e a forma de preparo, sendo apenas a condição A aplicável a todas as classes de concreto. Nesta situação, a norma admite um desvio padrão de 4 MPa para esta variável.

Conhecida a resistência média à compressão do concreto, o módulo de elasticidade pode ser determinado pela Equação 4.12, apresentada pelo CEB-FIP (2010). Optou-se por utilizar esta referência devido ao fato de que a equação indicada por ela apresenta um melhor ajuste a resultados experimentais se comparada com a da NBR 6118 (2014) (Araújo, 2014).

$$E_c = 21500 \left(\frac{\mu_{f_c}}{10} \right)^{1/3} \quad (4.12)$$

4.3.3 Erro de modelo (θ)

Na função de estado limite relacionada à ductilidade, é utilizado o erro de modelo proposto por Baji *et al.* (2016). Os autores coletaram dados experimentais de 12 fontes diferentes para definir o erro de modelo na previsão da profundidade relativa da linha neutra. Foi utilizado um total de 425 dados. Concluiu-se que a variabilidade da variável pode ser representada por uma distribuição Weibull, sendo a média igual a 1,04 e o coeficiente de variação 0,27.

Ambos os erros de modelo utilizados na função de estado limite relacionada à resistência foram obtidos de Santos *et al.* (2014). A variabilidade das variáveis é representada por uma distribuição Lognormal, sendo a média e o desvio padrão igual a 1 e 0,05, respectivamente.

4.3.4 Módulo de elasticidade do aço (E_s)

A variabilidade do módulo de elasticidade do aço é representada, conforme sugerido por Mirza *et al.* (1979), por uma distribuição lognormal de probabilidade. Para os autores, a média da variável é o seu valor nominal e o coeficiente de variação é igual a 0,033. Não foram encontradas referências mais recentes quanto à variabilidade desta variável. Para o

valor nominal do módulo de elasticidade do aço, é utilizado o indicado pela NBR 6118 (2014), de 210 GPa.

4.3.5 Área de armadura (A_s)

De acordo com Stucchi e Santos (2010), a variabilidade da área de armadura tracionada pode ser representada por uma distribuição normal de probabilidade. A média da variável é igual ao seu valor nominal e o coeficiente de variação vale 0,015.

4.3.6 Deformação última de compressão do concreto (ϵ_{cu})

Relacionada à consideração da deformação última de compressão do concreto está a dificuldade em medir o seu valor. Diferentes instrumentos podem ser utilizados para medi-la, e a inconsistência nos métodos de medição é um dos fatores que contribuem para a incerteza na sua avaliação. Uma discussão mais aprofundada sobre as fontes de incerteza e dificuldades na medição da deformação última de compressão do concreto está além do escopo deste trabalho, mas está claro que pesquisas adicionais são necessárias para a avaliação probabilística dessa variável (Baji *et al.*, 2016).

Baji *et al.* (2016) avaliaram um banco de dados abrangente de vigas de concreto armado testadas para ruptura por flexão para uma faixa de f_{ck} de 20 a 120 MPa, no qual as deformações últimas de compressão do concreto foram registradas. O banco de dados contém 220 dados experimentais de 17 fontes diferentes. Pôde-se observar que os resultados são dispersos, sendo o valor médio da variável cerca de 0,0037 e o seu coeficiente de variação igual a 0,21. Uma análise estatística posterior dos autores mostrou que a distribuição lognormal pode ser utilizada para representar a variabilidade da deformação última de compressão do concreto.

4.3.7 Tensão de escoamento do aço (f_y)

Santiago (2019) analisou a variabilidade da tensão de escoamento do aço com base em resultados de ensaios de tração realizados em mais de 8,7 mil barras de aço CA-50 oriundas de diferentes lotes produzidos no Brasil ao longo do ano de 2016. O autor concluiu

que pode ser utilizada uma distribuição normal de probabilidade para a variável, sendo sua média dada pela Equação 4.13 e seu coeficiente de variação igual a 0,04.

$$\mu_{f_y} = 1,22f_{yk} \quad (4.13)$$

4.3.8 Resistência à tração do concreto (f_t)

A NBR 6118 (2014) indica que a resistência média à tração do concreto seja calculada de acordo com a resistência à compressão utilizada, conforme mostrado na Equação 4.14.

$$\mu_{f_t} = \begin{cases} 0,3f_{ck}^{2/3}, & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 2,12 \ln(1 + 0,11f_{ck}), & \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4.14)$$

De acordo com o JCSS (2002), a resistência à tração do concreto possui uma distribuição lognormal de probabilidade e um coeficiente de variação igual a 0,3.

4.3.9 Parâmetro k_3

O modelo probabilístico para a resistência à compressão do concreto foi dividido em duas partes: a primeira é responsável pela variabilidade na resistência à compressão do cilindro padrão (f_c), enquanto que a segunda leva em consideração a diferença entre a resistência à compressão *in situ* do concreto e aquela determinada a partir de ensaios com cilindros padrão. O parâmetro k_3 é utilizado neste caso, e é empregado como um multiplicador do f_c . A média e o desvio padrão de k_3 são definidas, de acordo com Attard e Stewart (1998), conforme as Equações 4.15 e 4.16. A distribuição lognormal é utilizada para a variável.

$$\mu_{k_3} = 1,05 - 0,0009f_c \quad (4.15)$$

$$\sigma_{k_3} = 0,08\mu_{k_3} \quad (4.16)$$

4.3.10 Momentos solicitantes (M_g e M_k)

Santos *et al.* (2014) indica para a parcela permanente do momento solicitante a utilização de uma distribuição normal. A média da variável é o seu próprio valor nominal e o coeficiente de variação igual a 0,1. Para a parcela acidental do momento solicitante, é indicado o uso da distribuição Gumbel, sendo a média igual a $0,93Q_k$ e o coeficiente de variação igual a 0,2.

5 ESTUDO DE CONFIABILIDADE EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

5.1 VERIFICAÇÃO DE RESULTADOS OBTIDOS A PARTIR DE EXEMPLOS DA LITERATURA

Com o intuito de testar os códigos computacionais implementados, são reproduzidos alguns resultados obtidos no trabalho de Baji *et al.* (2016), apresentado brevemente na seção 4.1. Os autores avaliaram a confiabilidade relacionada à ductilidade para diversas normas de projeto de estruturas em concreto armado, sendo elas: a americana ACI 318 (2011), a canadense CSA A23.3 (2004), a europeia *fib* Model Code (2010), a neozelandesa NZS 3101 (2006) e a australiana AS 3600 (2009). Foi investigada a situação de máxima armadura aceitável, sendo esta calculada a partir da taxa de armadura tracionada máxima, conforme a Equação 5.1.

$$A_{s,máx} = \rho_{máx} \cdot b \cdot d \quad (5.1)$$

A taxa de armadura tracionada máxima é obtida por meio do equilíbrio de esforços na seção transversal (Figura 5.1) e é dada por:

$$\rho_{máx} = \frac{\alpha_c \cdot \lambda \cdot f_c}{f_y} \left(\frac{x}{d} \right)_{máx} \quad (5.2)$$

Os parâmetros α_c e λ utilizados no diagrama de tensões retangular, bem como a máxima profundidade relativa da linha neutra, variam de acordo com a norma considerada. A Tabela 5.1 indica os valores da taxa de armadura tracionada máxima para cada norma e diferentes f_{ck} .

Tabela 5.1 – Taxa de armadura tracionada máxima para diferentes normas de projeto estrutural e f_{ck} .

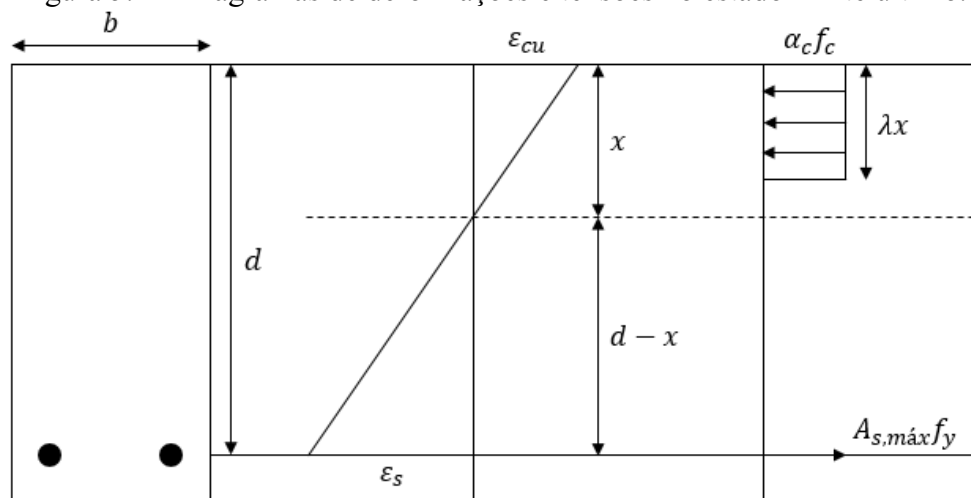
Norma	f_{ck} (MPa)	$\rho_{máx}$
ACI 318	20	0,0147
	30	0,0217
	40	0,0264
	50	0,0298

Tabela 5.1 – Taxa de armadura tracionada máxima para diferentes normas de projeto estrutural e f_{ck} (continuação).

Norma	f_{ck} (MPa)	$\rho_{m\acute{a}x}$
fib MC 2010	20	0,0131
	30	0,0196
	40	0,0262
	50	0,0327
CSA A 23.3	20	0,0172
	30	0,0246
	40	0,0313
	50	0,0373
NZS 3101	20	0,0152
	30	0,0228
	40	0,0275
	50	0,0308
AS 3600	20	0,0124
	30	0,0186
	40	0,0248
	50	0,0310

Fonte: Adaptada de Baji *et al.* (2016).

Figura 5.1 – Diagramas de deformações e tensões no estado limite último.



(a) seção transversal (b) diagrama de deformações (c) diagrama de tensões simplificado

Fonte: Autora.

A função de estado limite utilizada nas análises é a mostrada na Equação 4.3, na seção 4.1. Conforme mencionado nesta mesma seção, foi assumido um comportamento elastoplástico perfeito para o aço e utilizados os modelos constitutivos de Attard e Setunge (1996) e o de Fiels e Bischoff (2004) para o concreto comprimido e tracionado,

respectivamente. Esses modelos estão descritos na seção 2.5. A Tabela 5.2 indica as variáveis aleatórias utilizadas pelos autores e suas respectivas distribuições de probabilidade.

Tabela 5.2 – Distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias.

Variável	Distribuição	Unidade	μ	σ	Referência
f_y	Beta	MPa	$1,14f_{yk}$	$0,068\mu$	Bournoville <i>et al.</i> (2004)
A_s	Normal	cm ²	$A_{smáx}$	$0,02\mu$	Mirza <i>et al.</i> (1979)
f_c	Lognormal	MPa	$f_{ck} + 7,5$	6	Attard e Stewart (1998)
E_c	Normal	MPa	$9876f_c^{0,33}$	$0,16\mu$	Logan <i>et al.</i> (2009)
k_3	Lognormal	-	$1,05 - 0,0009f_c$	$0,08\mu$	Attard e Stewart (1998)
b	Normal	cm	b	1	Israel <i>et al.</i> (1987)
d	Normal	cm	d	1,5	Israel <i>et al.</i> (1987)
E_s	Lognormal	GPa	E_s	$0,033\mu$	Mirza <i>et al.</i> (1979)
ε_{cu}	Lognormal	-	0,0037	$0,21\mu$	Baji <i>et al.</i> (2016)
θ	Weibull	-	1,04	$0,27\mu$	Baji <i>et al.</i> (2016)
f_t	Lognormal	MPa	$0,3f_c^{2/3}$	$0,3\mu$	JCSS (2002)

Fonte: Adaptada de Baji *et al.* (2016).

Para caracterizar a deformação de compressão do concreto no ponto de escoamento, foi utilizado o modelo do JCSS (2002):

$$\varepsilon_{c0} = 0,001(f_c \cdot k_3)^{1/6}. \quad (5.3)$$

O módulo de elasticidade considerado para o aço é 200 GPa. Um dos aços avaliados pelos autores é o ASTM 615 G60 ($f_{yk} = 420$ MPa), cuja função de densidades de probabilidades para a resistência característica ao escoamento é dada, de acordo com Bournoville *et al.* (2004), por:

$$PDF = C \left(\frac{f_{yk} - LI}{D} \right)^\tau \left(\frac{LS - f_{yk}}{D} \right)^v,$$

$$PDF = 257,43 \left(\frac{f_{yk} - 413,69}{13375,83} \right)^3 \left(\frac{13789,51 - f_{yk}}{13375,83} \right)^{813,21}, \quad (5.4)$$

onde todos os termos estão em MPa, com exceção do τ e do ν , que são adimensionais.

O caso estudado pelos autores é uma viga de seção transversal retangular com 30 cm de base, 60 cm de altura e 54 cm de altura útil. O método de simulação de Monte Carlo foi utilizado, sendo considerado um número de simulações igual a 10000. A fim de reproduzir alguns dos resultados obtidos em Baji *et al.* (2016), foi implementado um código no *software* MATLAB, o que permitiu gerar um número n_{si} de valores randômicos para cada variável aleatória seguindo suas respectivas distribuições de probabilidade. Com isso, a função de estado limite foi avaliada n_{si} vezes, de tal forma que pudesse ser calculada a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade. Os resultados apresentados em Baji *et al.* (2016) são mostrados na Tabela 5.3 juntamente com os obtidos neste trabalho utilizando um procedimento similar.

Tabela 5.3 – Índices de confiabilidade para cada f_{ck} e norma de projeto estrutural.

Norma	f_{ck} (MPa)	Índice de confiabilidade (β)	
		Baji et al. (2016)	Presente trabalho
ACI 318	20	1,55	1,52
	30	1,23	1,14
	40	1,23	1,06
	50	1,28	1,10
fib MC 2010	20	1,88	1,86
	30	1,55	1,49
	40	1,23	1,08
	50	0,92	0,74
CSA A 23.3	20	1,08	1,04
	30	0,77	0,71
	40	0,58	0,47
	50	0,47	0,32
NZS 3101	20	1,48	1,43
	30	1,08	0,96
	40	1,08	0,90
	50	1,13	0,95
AS 3600	20	2,05	2,09
	30	1,75	1,66
	40	1,48	1,31
	50	1,13	0,95

Fonte: Autora.

Percebe-se que os resultados obtidos neste trabalho são próximos dos de Baji *et al.* (2016) e com tendências semelhantes. Entretanto, constatou-se diferença em uma equação empregada pelos autores no cálculo de um dos parâmetros do modelo constitutivo para o

concreto comprimido de Attard e Setunge (1996) em relação a outras referências. Diante disso, optou-se por resolver novamente o problema considerando a equação correta. Ao refazer a avaliação, obtém-se os resultados mostrados na Tabela 5.4, que apresentam uma diferença significativa dos anteriores.

Tabela 5.4 – Índices de confiabilidade corrigidos para cada f_{ck} e norma de projeto estrutural.

Norma	f_{ck} (MPa)	Índice de confiabilidade (β)
ACI 318	20	1,45
	30	0,96
	40	0,80
	50	0,77
<i>fib</i> MC 2010	20	1,84
	30	1,27
	40	0,85
	50	0,46
CSA A 23.3	20	0,97
	30	0,58
	40	0,30
	50	0,13
NZS 3101	20	1,35
	30	0,81
	40	0,71
	50	0,66
AS 3600	20	1,96
	30	1,49
	40	1,02
	50	0,66

Fonte: Autora.

Em todas as avaliações foram obtidos índices de confiabilidade abaixo do alvo considerado pelos autores, que seria de 2,3 (Ito e Sumikama, 1985).

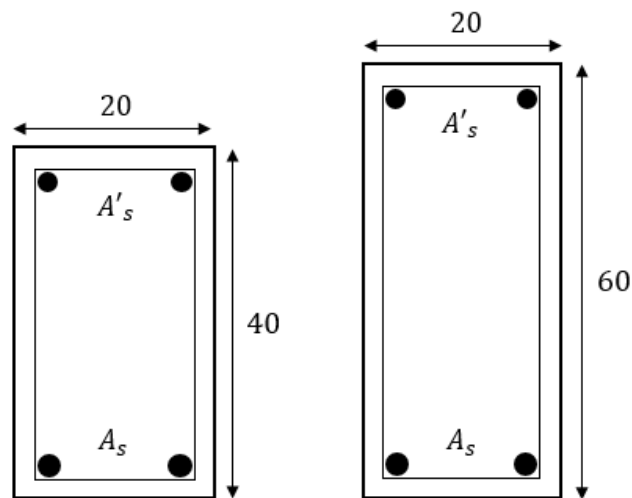
5.2 INVESTIGAÇÃO DA DUCTILIDADE FRENTE AOS CRITÉRIOS DA NBR 6118 (2014)

5.2.1 Descrição das vigas em estudo

Para investigar a confiabilidade relacionada à ductilidade de vigas frente aos critérios da NBR 6118 (2014), são consideradas duas seções transversais comuns em edifícios de concreto armado: a primeira com 20 cm de base e 40 cm de altura e a segunda com 20 cm de

base e 60 cm de altura (Figura 5.2). Ambas as seções são avaliadas para uma faixa de f_{ck} de 20 a 90 MPa e aço CA-50 ($f_{yk} = 500$ MPa). É considerada a classe de agressividade ambiental II, que corresponde a um ambiente urbano com pequeno risco de deterioração. Logo, o cobrimento das vigas é 3 centímetros. O diâmetro máximo dos agregados considerado é de 19 milímetros.

Figura 5.2 – Seções transversais analisadas.



Fonte: Autora.

Para o dimensionamento da seção transversal, é considerado o caso de armadura simples. A fim de analisar as situações menos favoráveis no quesito de ductilidade, são adotadas as maiores áreas de armadura de tração permitidas pela norma.

De acordo com o que foi discutido na seção 2.2, utiliza-se armadura simples para $\mu \leq \mu_{lim}$, ou $\xi \leq \xi_{lim}$, sendo ξ_{lim} igual a 0,45 para $f_{ck} \leq 50$ MPa e 0,35 para $f_{ck} > 50$ MPa. Para os casos de armadura simples, a área de aço é calculada pela Equação 5.5.

$$A_s = \lambda \cdot \xi \cdot b \cdot d \frac{\alpha_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} \quad (5.5)$$

Seguindo a discussão acima, é possível afirmar que a maior área de aço permitida, para o caso de armadura simples, ocorre quando ξ for igual ao próprio ξ_{lim} . Ao considerar $\xi = \xi_{lim}$ e seguindo os procedimentos apresentados na seção 2.2, obtém-se as áreas de armadura tracionada indicadas na Tabela 5.5. Salienta-se que estas são determinadas a partir da escolha de um arranjo de barras que resulte na área de armadura mais próxima e igual ou

inferior à calculada, para que a profundidade relativa da linha neutra não ultrapasse o valor limite. A altura útil correspondente ao reforço adotado em cada caso também é indicada na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Dimensionamento das seções transversais considerando aço CA-50 e coeficientes de ponderação $\gamma_s = 1,15$ e $\gamma_c = 1,4$.

f_{ck} (MPa)	b = 20, h = 40 cm			b = 20, h = 60 cm		
	A_s (cm ²)	Reforço	d (cm)	A_s (cm ²)	Reforço	d (cm)
20	6,28	2 ϕ 20,0	35,37	10,05	5 ϕ 16,0	54,13
30	10,05	5 ϕ 16,0	34,13	16,08	2 ϕ 32,0	54,77
40	12,57	4 ϕ 20,0	33,38	19,63	4 ϕ 25,0	52,62
50	16,08	2 ϕ 32,0	34,77	24,54	5 ϕ 25,0	53,12
60	14,07	7 ϕ 16,0	33,00	22,81	6 ϕ 22,0	53,07
70	16,08	2 ϕ 32,0	34,77	24,54	5 ϕ 25,0	53,12
80	16,08	2 ϕ 32,0	34,77	24,54	5 ϕ 25,0	53,12
90	16,08	2 ϕ 32,0	34,77	24,54	5 ϕ 25,0	53,12

Fonte: Autora.

5.2.2 Resultados

5.2.2.1 Influência do *tension-stiffening*

O comportamento do concreto tracionado é considerado em todas as análises feitas nas seções subsequentes, sendo representado por meio do modelo constitutivo de Stramandinoli e La Rovere (2008). A escolha da consideração da contribuição do concreto tracionado tem como objetivo realizar as simulações da maneira mais real possível. A fim de verificar a influência do modelo utilizado, avaliou-se a contribuição do *tension-stiffening* no momento resistente, para diferentes f_{ck} e uma seção transversal com 20 cm de base e 40 cm de altura, adotando o modelo constitutivo de Thorenfeldt *et al.* (1987) para o concreto comprimido. A análise é feita considerando todas as variáveis determinísticas e consiste na obtenção dos momentos resistentes totais e as respectivas parcelas referentes à tensão no concreto tracionado. Os resultados são mostrados na Tabela 5.6 e é possível perceber que o *tension-stiffening* apresenta apenas uma pequena influência no momento resistente.

Tabela 5.6 – Influência do *tension-stiffening* no momento resistente das vigas.

f_{ck} (MPa)	M_r (kN.m) total	Parcela do M_r (kN.m) referente ao <i>tension-stiffening</i>
20	96,77	0,25
30	145,54	0,39
40	179,62	0,47
50	241,39	0,60
60	208,70	0,40
70	253,68	0,46
80	256,49	0,42
90	257,98	0,44

Fonte: Autora.

5.2.2.2 Variabilidade da razão de ductilidade ($\varepsilon_s/\varepsilon_{s,lim}$)

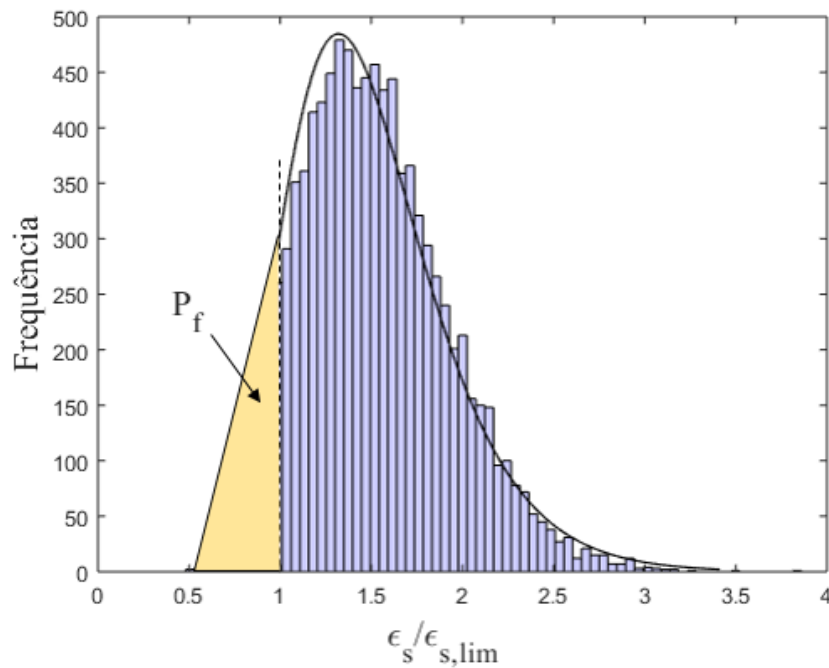
Os resultados estatísticos para a ductilidade expressa em termos da razão entre a deformação simulada e a deformação limite do aço, $\varepsilon_s/\varepsilon_{s,lim}$, são apresentados nesta seção. A Figura 5.3 mostra o histograma dos valores simulados de $\varepsilon_s/\varepsilon_{s,lim}$, bem como uma curva ajustada aos dados de frequência. Considera-se um f_{ck} de 30 MPa, uma seção transversal com 20 cm de base e 40 cm de altura e o modelo constitutivo de Thorenfeldt *et al.* (1987) para o concreto comprimido. Salienta-se que como se trata de um histograma de frequência, a probabilidade de falha (P_f) é proporcional à área ilustrada. O histograma mostra que há grande variabilidade na razão de ductilidade. Além disso, a probabilidade de ocorrer falha frágil, que é a probabilidade de $\varepsilon_s/\varepsilon_{s,lim}$ ser menor que 1, é relativamente alta.

A média e o coeficiente de variação da razão de ductilidade são utilizados para se ter uma noção do seu valor e verificar o seu nível de incerteza. A Tabela 5.7 indica os resultados estatísticos obtidos para diferentes f_{ck} . Percebe-se que a razão de ductilidade varia bastante, com coeficientes de variação acima de 0,3. Grande parte dessa variabilidade decorre do erro de modelo, que por sua vez está relacionado à incerteza na estimativa da posição da linha neutra. No entanto, a incerteza devido a outras variáveis aleatórias também é alta.

Tabela 5.7 – Resultados estatísticos da razão de ductilidade, $\epsilon_s/\epsilon_{s,lim}$.

f_{ck} (MPa)	μ ($\epsilon_s/\epsilon_{s,lim}$)	CV ($\epsilon_s/\epsilon_{s,lim}$)
20	2,22	0,28
30	1,50	0,28
40	1,36	0,29
50	1,23	0,30
60	1,33	0,33
70	1,45	0,35
80	1,65	0,38
90	1,79	0,41

Fonte: Autora.

Figura 5.3 – Histograma da razão de ductilidade, $\epsilon_s/\epsilon_{s,lim}$.

5.2.2.3 Confiabilidade relacionada à ductilidade

Para avaliar a confiabilidade relacionada à ductilidade das vigas dimensionadas de acordo com a NBR 6118 (2014), é empregado o método de simulação de Monte Carlo, com um número de simulações igual a 10000. Como as probabilidades de não haver ductilidade suficiente são relativamente altas, este número de simulações é o bastante. A avaliação é feita

duas vezes. Em uma delas, é considerado o modelo constitutivo de Attard e Setunge (1996) para o concreto comprimido, e na outra o de Thorenfeldt *et al.* (1987).

Um estudo paramétrico é feito com o intuito de avaliar a influência de alguns parâmetros na confiabilidade das vigas. Dessa forma, fixando algumas variáveis e variando outras de forma isolada, é possível verificar o reflexo dessa variação nas probabilidades de falha e nos índices de confiabilidade obtidos.

A Tabela 5.8 e a Figuras 5.4 indicam as probabilidades de falha e os índices de confiabilidade para diferentes f_{ck} e dimensões da seção transversal, considerando os modelos constitutivos de Thorenfeldt *et al.* (1987) e de Attard e Setunge (1996) para o concreto comprimido.

Tabela 5.8 – Probabilidade de falha para cada f_{ck} e seção transversal.

f_{ck} (MPa)	Probabilidade de falha (%)			
	b = 20, h = 40 cm		b = 20, h = 60 cm	
	Thorenfeldt et al. (1987)	Attard e Setunge (1996)	Thorenfeldt et al. (1987)	Attard e Setunge (1996)
20	7,00	5,82	8,87	7,75
30	26,89	19,37	26,44	19,18
40	35,06	22,15	33,52	20,92
50	42,75	26,19	42,51	26,27
60	36,28	17,68	36,92	18,82
70	31,09	11,60	29,51	12,47
80	24,77	7,67	24,75	7,18
90	22,40	4,91	22,42	4,84

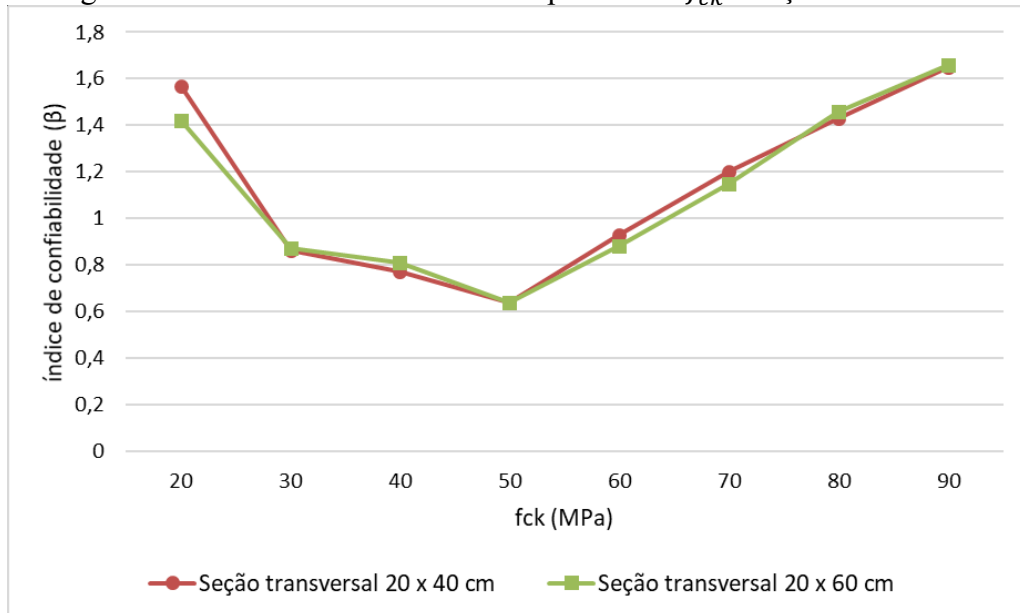
Fonte: Autora.

Os resultados apresentados demonstram que o nível de confiabilidade varia quando se utiliza o modelo constitutivo para o concreto comprimido de Attard e Setunge (1996) e o de Thorenfeldt *et al.* (1987), apesar de apresentar uma tendência semelhante. Em todos os casos o nível de confiabilidade obtido para o modelo de Thorenfeldt *et al.* (1987) é inferior, e percebe-se que a diferença em termos da probabilidade de falha pode chegar a quase 20%. Esses resultados são justificáveis, já que os modelos utilizam formulações bastante diferentes para a relação tensão-deformação.

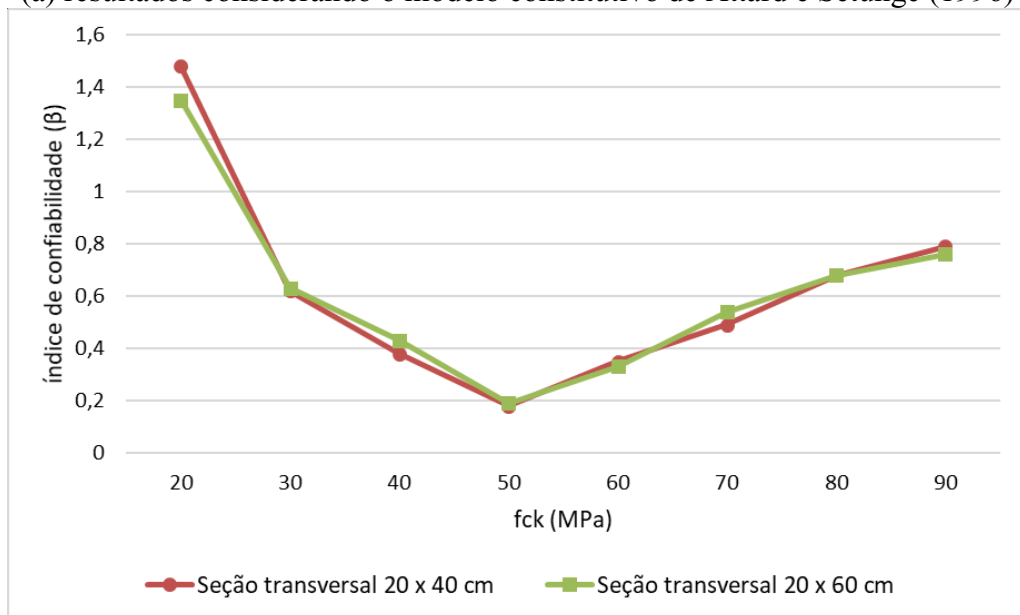
Do ponto de vista determinístico, diferenças também ocorrem. Ao se tomar a viga com seção transversal de 20 cm de base e 60 cm de altura e f_{ck} 50 MPa, o momento resistente

calculado empregando o modelo de Attard e Setunge (1996) é de 567,89 kN.m, enquanto que utilizando o modelo de Thorenfeldt *et al.* (1987) o mesmo resulta igual a 562,88 kN.m.

Figura 5.4 – Índices de confiabilidade para cada f_{ck} e seção transversal.



(a) resultados considerando o modelo constitutivo de Attard e Setunge (1996)



(b) resultados considerando o modelo constitutivo de Thorenfeldt *et al.* (1987)

Fonte: Autora.

Em relação à análise paramétrica, percebe-se que a variação da altura da seção transversal não leva a diferenças grandes entre as probabilidades de falha calculadas. Isso se deve ao fato de que a NBR 6118 (2014) trata a linha neutra em termos da sua posição relativa na seção transversal (x/d).

Os resultados sugerem uma tendência de redução do índice de confiabilidade com o aumento do f_{ck} para concretos do grupo I ($f_{ck} \leq 50$ MPa). Já para concretos do grupo II ($f_{ck} > 50$ MPa), o índice de confiabilidade tende a aumentar com o aumento do f_{ck} .

Isso está relacionado à influência da profundidade relativa da linha neutra (ξ) e dos parâmetros do bloco de tensão retangular do concreto comprimido (α_c e λ), utilizados no dimensionamento da armadura tracionada. Para concretos do grupo I, α_c e λ são constantes, logo, com o aumento do f_{ck} a armadura tracionada aumenta e isso gera uma redução no índice de confiabilidade. Para concretos do grupo II, o limite para a profundidade relativa da linha neutra é menor, o que gera um aumento no índice de confiabilidade. Além disso, para o grupo II, α_c e λ são calculados a partir do f_{ck} , e diminuem conforme o aumento deste. Dessa forma, mesmo com o aumento do f_{ck} , a armadura tracionada dimensionada não aumenta consideravelmente, o que faz o índice de confiabilidade em relação à ductilidade aumentar, pois a configuração da viga se afasta da condição de superarmada.

Percebe-se que os índices de confiabilidade indicados nas Figuras 5.3 e 5.4 apresentam tendências semelhantes aos obtidos a partir do *fib* Model Code (2010), conforme apresentado na seção 5.1. Esta semelhança vem do fato de que os conteúdos presentes na NBR 6118 (2014) são similares aos de diversas normas internacionais, em particular, do *fib* Model Code (2010).

Para estabelecer uma conclusão acerca do nível de segurança atingido pelas vigas aqui estudadas, se faz necessário fixar o valor alvo com o qual os índices de confiabilidade obtidos possam ser comparados. Contudo, é encontrada na literatura pouca informação sobre valores apropriados para índices de confiabilidade para ductilidade. Ito e Sumikama (1985) propuseram um índice de confiabilidade alvo igual a 2,3 para calibrar a taxa de armadura máxima indicada pela norma ACI 318 (1983). Baji *et al.* (2016) consideraram esse mesmo valor para avaliar a confiabilidade relacionada à ductilidade para diversas normas. No presente estudo, todos os índices de confiabilidade obtidos são inferiores a 2, sendo alguns muito baixos. Isso destaca a necessidade de mais pesquisas sobre os níveis de confiabilidade adequados relacionados à ductilidade de elementos de concreto armado.

5.2.2.4 Simulação da curva momento fletor-curvatura

Outra forma de avaliar a ductilidade de vigas é por meio da análise das relações momento fletor-curvatura das seções transversais de concreto armado. A curvatura última ou

de ruptura, para os domínios 3 e 4, é calculada pela Equação 5.6, e o seu valor adimensional pela Equação 5.7.

$$X_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \quad (5.6)$$

$$\kappa_u = 1000X_u \cdot d = \frac{1000\varepsilon_{cu}}{\xi} \quad (5.7)$$

As curvas momento fletor-curvatura são aqui obtidas para a seção transversal com 20 cm de base e 40 cm de altura e diferentes valores de f_{ck} , por meio do método de simulação de Monte Carlo. É utilizado o modelo constitutivo de Attard e Setunge (1996) para o concreto comprimido. Na análise de confiabilidade são utilizadas 10000 simulações, e para uma melhor visualização dos resultados são mostradas apenas 50 dentre estas. As Figuras 5.5 a 5.12 ilustram as curvas obtidas.

Figura 5.5 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 20$ MPa.

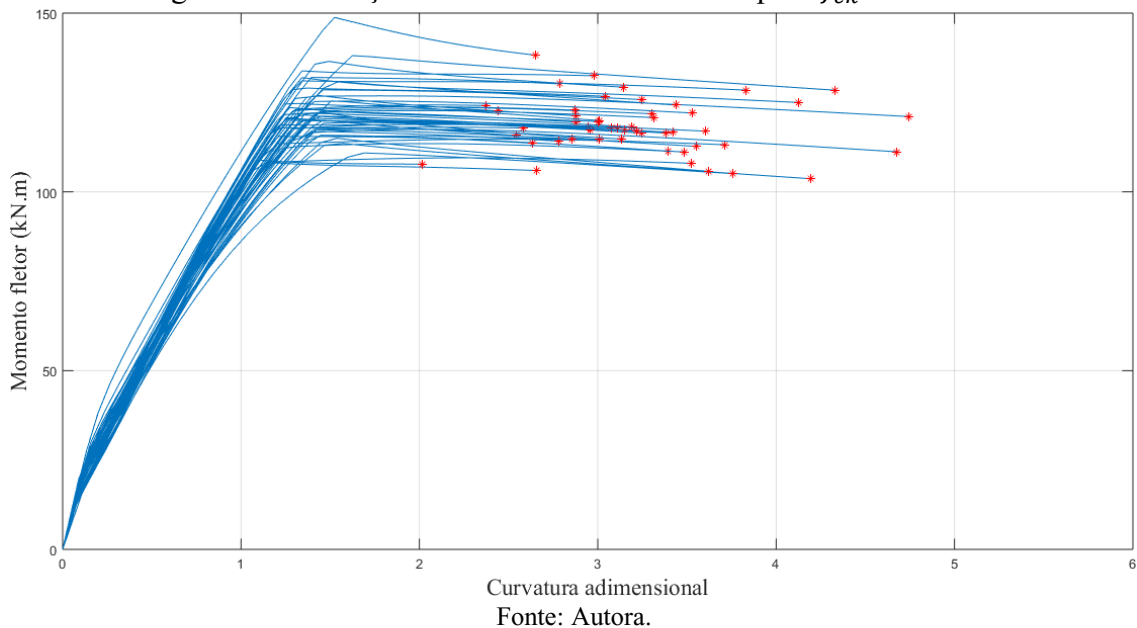


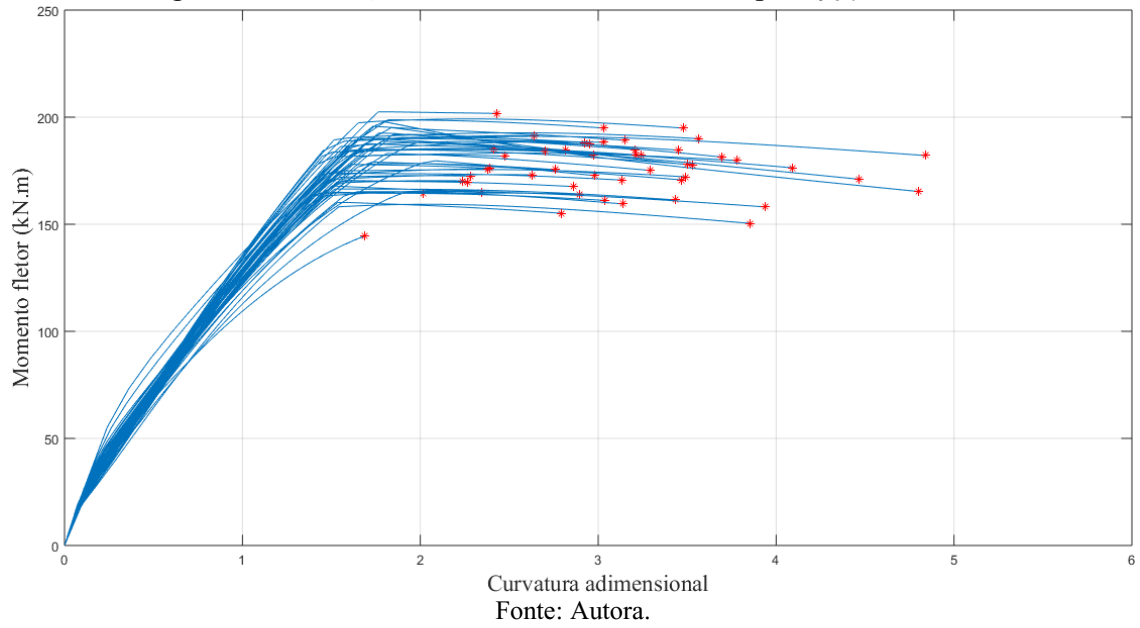
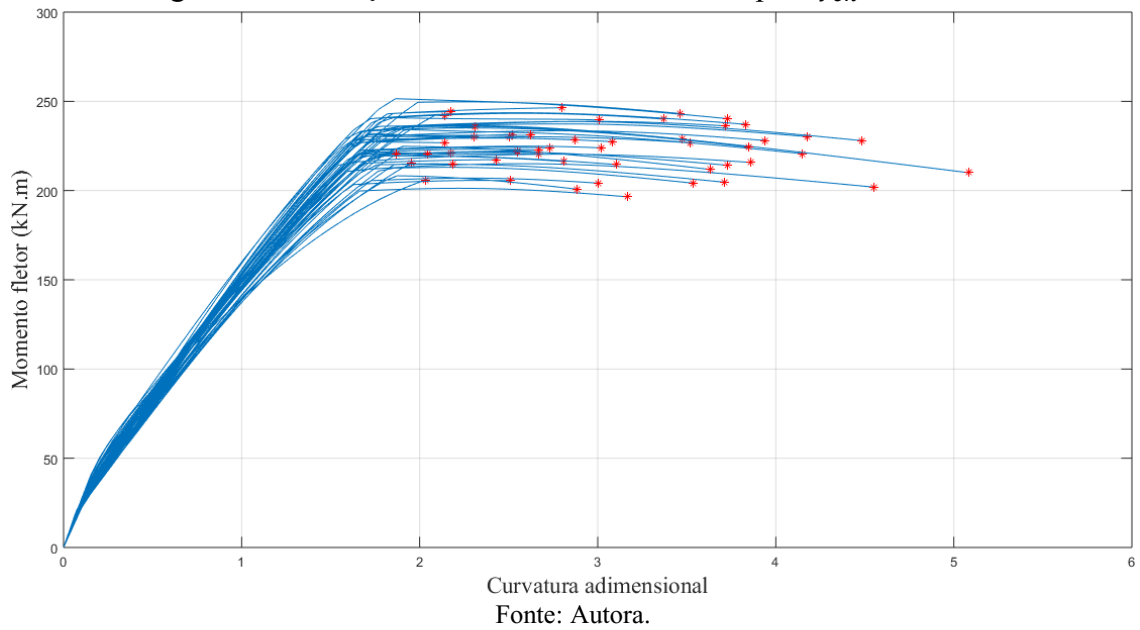
Figura 5.6 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 30$ MPa.Figura 5.7 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 40$ MPa.

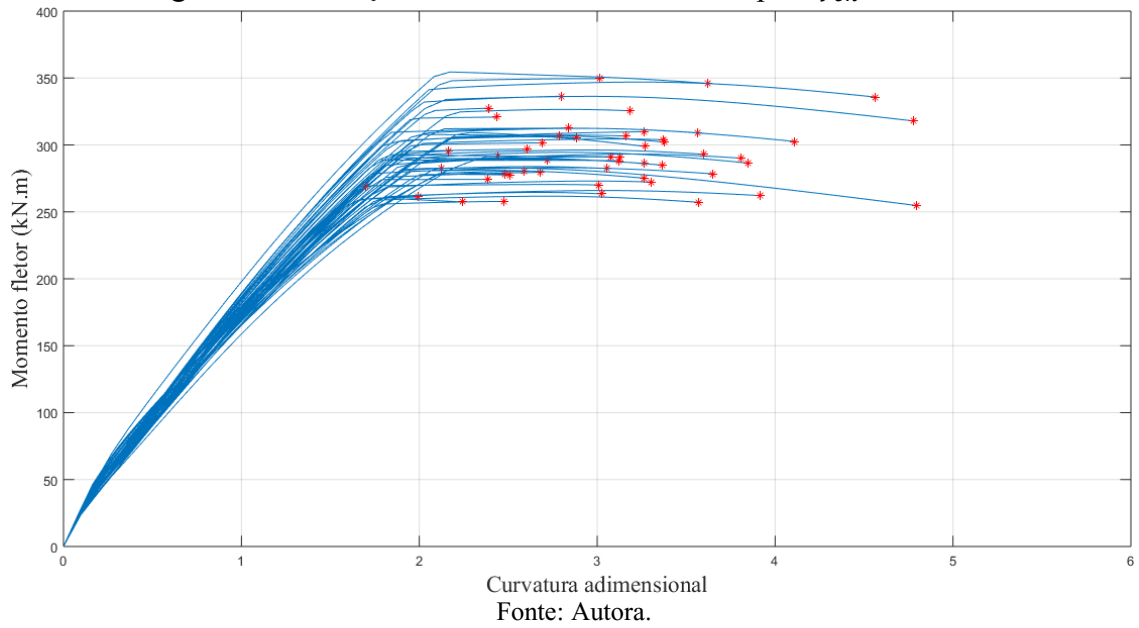
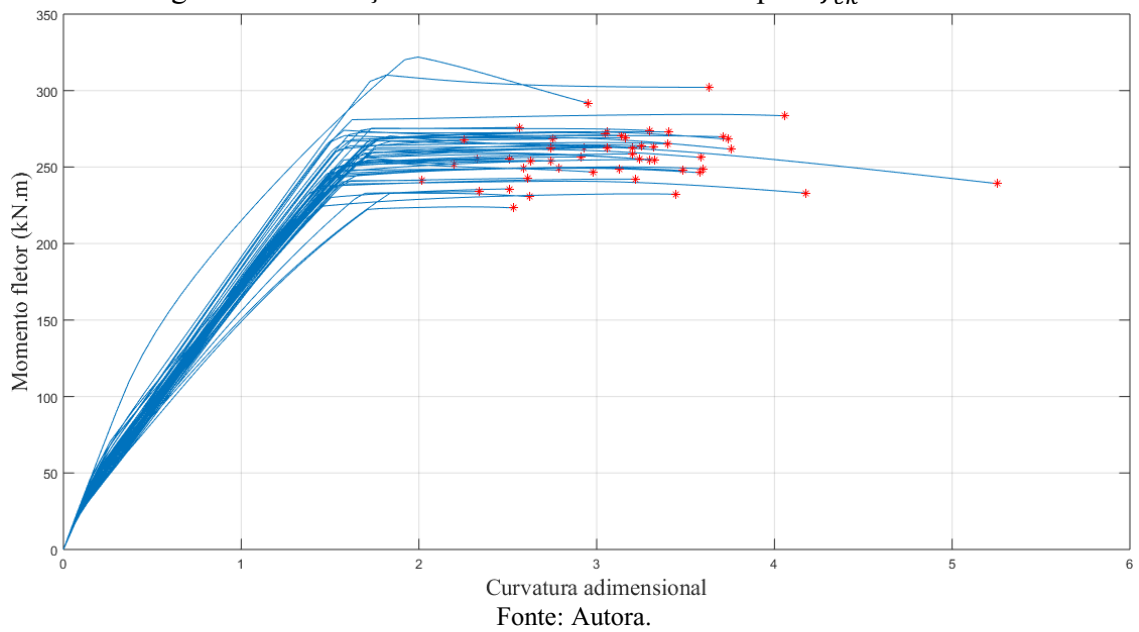
Figura 5.8 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 50$ MPa.Figura 5.9 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 60$ MPa.

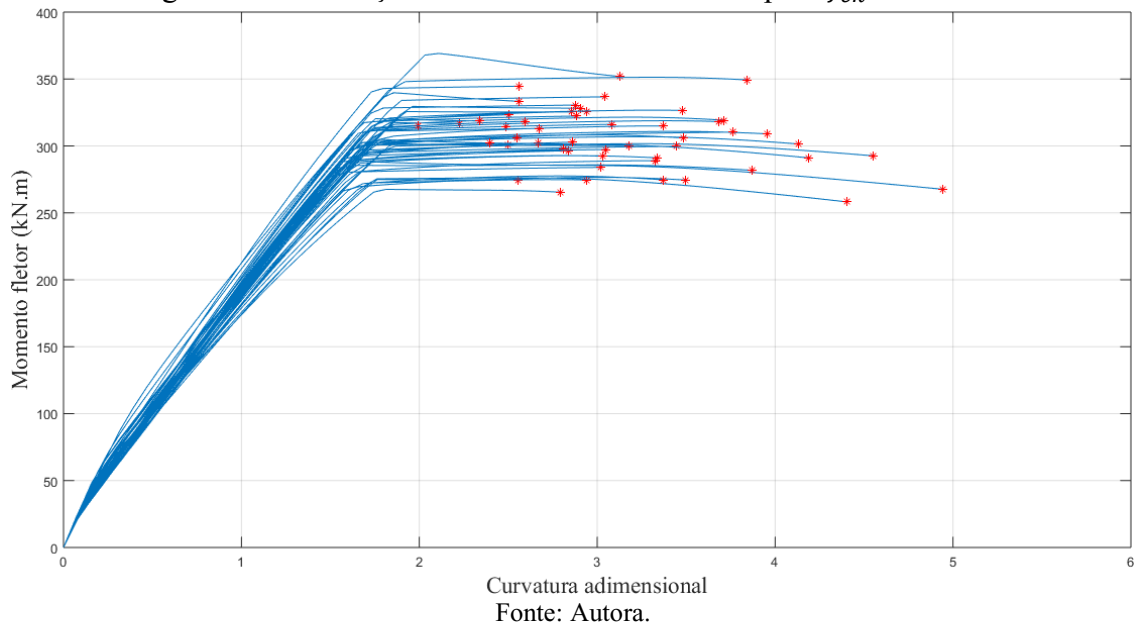
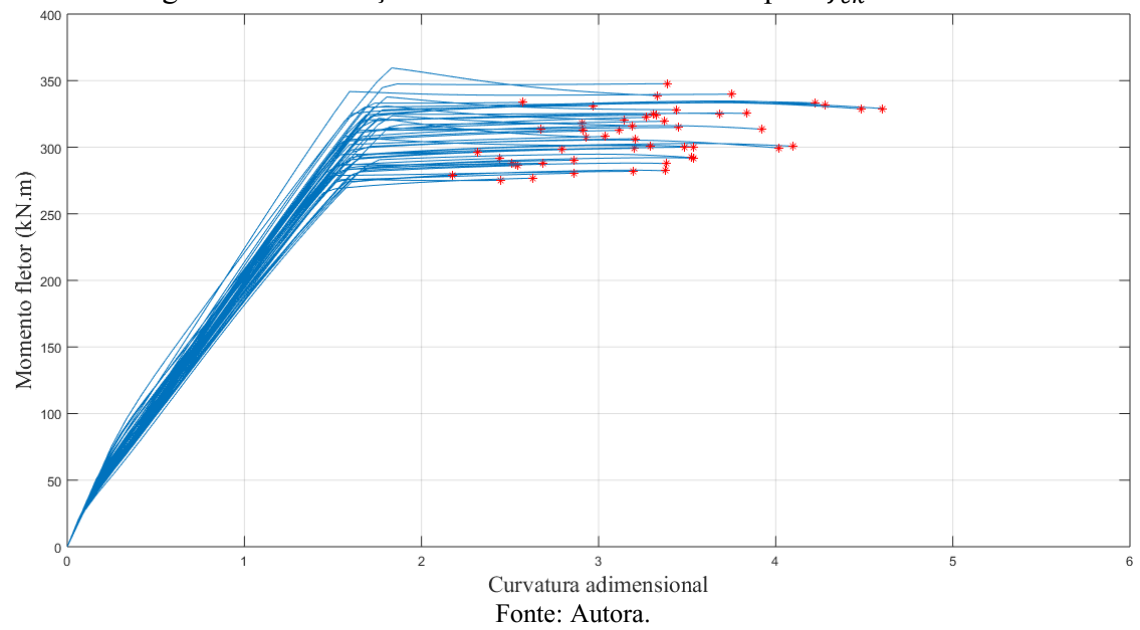
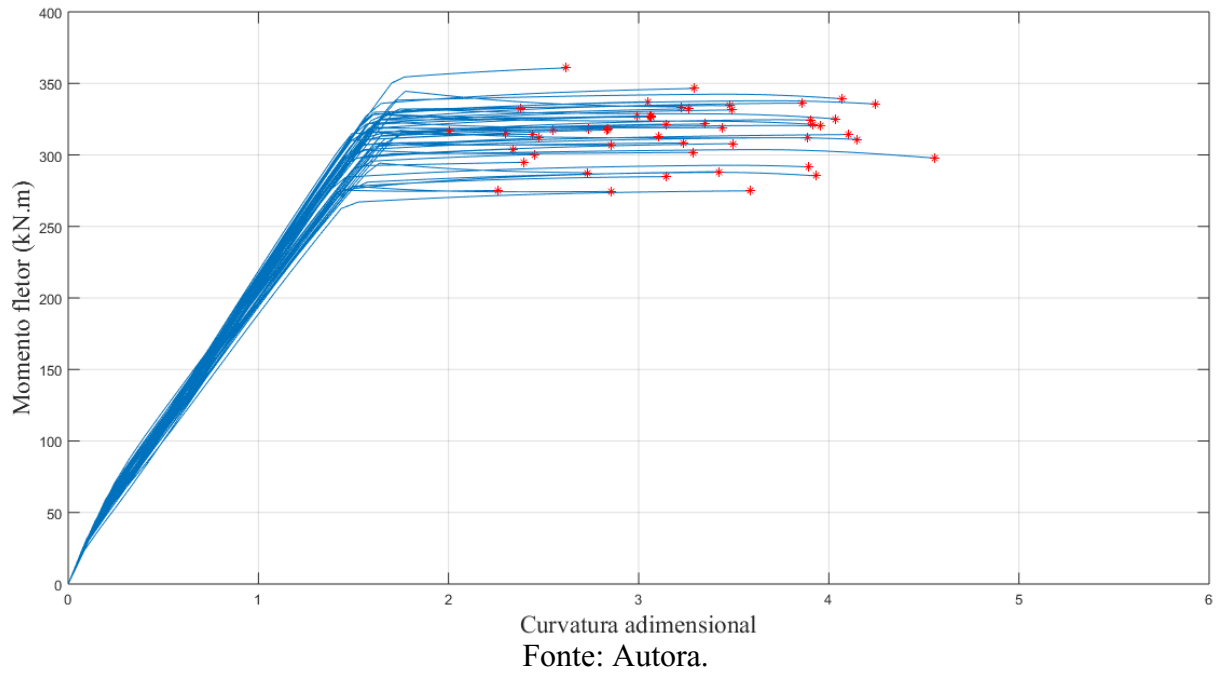
Figura 5.10 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 70$ MPa.Figura 5.11 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 80$ MPa.

Figura 5.12 – Relação momento fletor-curvatura para $f_{ck} = 90$ MPa.

As curvas obtidas fornecem uma visão geral da tendência de as seções transversais apresentarem ou não comportamento dúctil. Contudo, a fim de obter resultados mais precisos, são também analisados os parâmetros estatísticos da razão entre a deformação última e a correspondente ao ponto de escoamento (ϵ_{cu}/ϵ_y). A Tabela 5.9 indica a média e o coeficiente de variação obtidos para diferentes f_{ck} .

Tabela 5.9 – Parâmetros estatísticos da razão ϵ_{cu}/ϵ_y .

f_{ck} (MPa)	μ (ϵ_{cu}/ϵ_y)	CV (ϵ_{cu}/ϵ_y)
20	2,08	0,28
30	1,58	0,25
40	1,41	0,25
50	1,26	0,23
60	1,89	0,22
70	1,88	0,22
80	1,95	0,21
90	2,01	0,22

Fonte: Autora.

Observa-se que as vigas dimensionadas com f_{ck} igual a 40 e 50 MPa são as que apresentam menor ductilidade, visto que as médias da razão $\varepsilon_{cu}/\varepsilon_y$ são as mais baixas e, conseqüentemente, o patamar após o início do escoamento da armadura tende a ser pequeno. O dimensionamento com concretos do grupo II e com f_{ck} igual a 20 MPa leva a uma maior ductilidade, visto que os diagramas tendem a apresentar um razoável patamar após o início do escoamento.

Isso indica que os procedimentos de dimensionamento podem resultar, em muitos casos, em níveis de segurança inadequados no que se refere à ductilidade do elemento estrutural.

5.2.2.5 Confiabilidade relacionada à resistência

Para a análise da confiabilidade relacionada à resistência as probabilidades de falha são bem menores do que nos casos anteriores, e o método de simulação de Monte Carlo é empregado com 10 milhões de simulações. São utilizados os modelos constitutivos de Thorenfeldt *et al.* (1987) e de Attard e Setunge (1996) para o concreto comprimido e analisada uma seção transversal com 20 cm de base e 60 cm de altura. São analisados os resultados para uma taxa de carregamento (χ) igual a 0,6. Os resultados são mostrados na Tabela 5.10.

Tabela 5.10 – Índices de confiabilidade para o estado limite relacionado à resistência.

f_{ck} (MPa)	Índice de confiabilidade (β)	
	Thorenfeldt et al. (1987)	Attard e Setunge (1996)
20	4,99	4,12
30 (*)	-	4,16
40	4,89	4,17
50	4,49	4,15
60	4,89	4,11
70	4,63	4,06
80	4,59	4,05
90	4,59	4,01

(*) Devido a limitações de processador e memória computacional, não foi possível obter a probabilidade de falha para o f_{ck} de 30 MPa para o modelo constitutivo de Thorenfeldt *et al.* (1987).

Fonte: Autora.

Percebe-se que o nível de confiabilidade obtido para o estado limite de resistência é muito maior que o de ductilidade, e há uma maior uniformidade nos índices de confiabilidade frente à variação do f_{ck} .

O valor de índice de confiabilidade exigido para que exista segurança minimamente adequada em relação à resistência de um elemento estrutural ainda é objeto de discussão na literatura. Contudo, os valores mais consolidados atualmente são aqueles indicados por normas internacionais. As normas americana e europeia indicam os valores alvo de 3,5 e 3,8, respectivamente. Como pode ser observado na Tabela 5.10, os índices obtidos são maiores do que esses valores.

Os resultados demonstram que a escolha do modelo constitutivo para o concreto comprimido influenciou significativamente no nível de confiabilidade. Analogamente ao que ocorreu na análise de confiabilidade relacionada à ductilidade, na qual os índices de confiabilidade apresentaram uma variação para cada modelo constitutivo, na análise relacionada à resistência os seus valores também variaram consideravelmente.

5.2.3 Sugestão para melhora dos níveis de segurança em relação à ductilidade

Com os resultados obtidos, percebe-se que a profundidade relativa da linha neutra e os parâmetros do bloco de tensão retangular do concreto comprimido têm grande influência na ductilidade. Dessa forma, o estabelecimento de limites diferentes para essas variáveis é uma forma de tentar melhorar os níveis de segurança em relação à ductilidade dos elementos estruturais.

Para as vigas dimensionadas com f_{ck} igual a 40 e 50 MPa a probabilidade da falha ser frágil é alta. Diante disso, propõe-se a redução do limite da profundidade relativa da linha neutra para $f_{ck} > 35$ MPa, conforme mostrado na Equação 5.8.

$$\xi_{lim} = \begin{cases} 0,45, & \text{para } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa} \\ 0,35, & \text{para } f_{ck} > 35 \text{ MPa} \end{cases} \quad (5.8)$$

O critério proposto é o mesmo indicado pelo CEB-FIP Model Code (1990). Ao realizar o dimensionamento de vigas com f_{ck} igual a 40 e 50 MPa considerando este critério, obtém-se as áreas de armadura tracionada indicadas na Tabela 5.11.

Tabela 5.11 – Áreas de armadura tracionada considerando aço CA-50 e coeficientes de ponderação $\gamma_s = 1,15$ e $\gamma_c = 1,4$.

f_{ck} (MPa)	b = 20, h = 40 cm	
	A_s (cm ²)	Reforço
40	10,05	5 ϕ 16,0
50	12,57	4 ϕ 20,0

Fonte: Autora.

Com as armaduras dimensionadas e considerando o modelo constitutivo de Thorenfeldt *et al.* (1987) para o concreto comprimido, obtém-se as probabilidades de falha e os índices de confiabilidade indicados na Tabela 5.12. Percebe-se que o redimensionamento das vigas seguindo o novo critério de dimensionamento aumenta consideravelmente o nível de confiabilidade obtido. Entretanto, como os valores alvo para índices de confiabilidade relacionados à ductilidade foram pouco discutidos na literatura atual, é fundamental que haja discussões mais aprofundadas quanto a isso em trabalhos futuros. Apenas após a definição de valores alvo será possível estabelecer critérios adequados para o dimensionamento.

Tabela 5.12 – Probabilidades de falha e índices de confiabilidade considerando o novo critério de dimensionamento.

f_{ck} (MPa)	Probabilidade de falha (%)	Índice de confiabilidade (β)
40	11,08	1,22
50	20,39	0,83

Fonte: Autora.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscou-se encontrar maneiras de avaliar a ductilidade de vigas de concreto armado dimensionadas com base na NBR 6118 (2014) por meio da confiabilidade estrutural. A ductilidade dos elementos estruturais foi estudada utilizando uma função de estado limite baseada na deformação da armadura tracionada e por meio da variabilidade da curva momento-fletor curvatura. Foi analisada a probabilidade de a falha nas vigas ser frágil, dado que os elementos falharam por flexão.

Conforme proposto inicialmente, foram implementados modelos analíticos para representar o comportamento não-linear das vigas. Essa etapa permitiu um melhor entendimento dos modelos constitutivos utilizados para os materiais. Em um primeiro momento, foram reproduzidos os resultados de um artigo encontrado na literatura, com os procedimentos e objetivos similares aos deste trabalho, com o intuito de aprofundamento no tema e de testar os códigos computacionais implementados. Em seguida, o método de simulação de Monte Carlo foi aplicado para avaliar a confiabilidade de vigas de concreto armado dimensionadas com a máxima armadura tracionada permitida pela NBR 6118 (2014), visto que esse é o pior cenário para a ductilidade. As análises foram feitas para uma faixa de f_{ck} de 20 a 90 MPa, duas seções transversais diferentes e utilizando dois modelos constitutivos para o concreto comprimido.

Em geral, foi observada uma falta de uniformidade dos índices de confiabilidade obtidos para diferentes f_{ck} . Em contrapartida, a variação das dimensões da seção transversal não apresentou influência significativa no nível de confiabilidade obtido. Tendo em vista os diversos modelos constitutivos para o concreto existentes, foram escolhidos dois diferentes para o concreto comprimido, e percebeu-se que a escolha dos mesmos tem impacto significativo na estimativa da confiabilidade.

Verificou-se que a probabilidade de a falha ocorrida ser frágil pode chegar a quase 43%, e os piores níveis de confiabilidade obtidos são para vigas dimensionadas com f_{ck} igual a 40 e 50 MPa. Os resultados mostraram que a ductilidade diminui com o aumento do f_{ck} para concretos do grupo I (f_{ck} até 50 MPa), e aumenta com o aumento do f_{ck} para concretos do grupo II (f_{ck} acima de 50 MPa). Isso ocorre, principalmente, devido à influência do limite da profundidade relativa da linha neutra e dos parâmetros do bloco de tensão retangular do concreto comprimido considerados no dimensionamento da armadura tracionada em cada caso.

Este trabalho mostrou que, apesar do estado limite relacionado a resistência ter sido amplamente estudado, os requisitos de confiabilidade para atingir uma ductilidade mínima receberam pouca atenção. Constatou-se que a incerteza associada ao estado limite de ductilidade é alta, e em parte isso é devido à ductilidade depender de múltiplas variáveis aleatórias e haver um grau relativamente alto de incerteza associado a cada uma.

De modo geral, o trabalho atingiu o objetivo de apresentar maneiras para a avaliação da ductilidade de vigas de concreto armado dimensionadas de acordo com a NBR 6118 (2014). Deve-se ressaltar que as abordagens utilizadas avaliaram simulações numéricas de elementos estruturais com diversas limitações inerentes à estimativa de seus parâmetros estatísticos e à própria definição de comportamento dúctil. Assim, compreende-se que este trabalho fornece uma base inicial para a sua continuidade.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Ao longo deste trabalho foi evidenciada a carência de estudos sobre a confiabilidade relacionada à ductilidade de elementos estruturais. Diante disso, destacam-se aqui os estudos considerados de maior potencial:

- investigar as variáveis aleatórias erro de modelo e deformação última de compressão do concreto a fim de melhor caracterizar as mesmas;
- estabelecer níveis de confiabilidade adequados relacionados à ductilidade de elementos estruturais de concreto armado, bem como um índice de confiabilidade alvo para este quesito;
- investigar a confiabilidade relacionada à ductilidade de vigas de concreto armado dimensionadas com armadura dupla;
- avaliar outros tipos de elementos estruturais de concreto armado, como lajes, no que diz respeito à ductilidade dos mesmos.

REFERÊNCIAS

- ALLEN, D. **Probabilistic study of reinforced concrete in bending**. ACI Journal Proceedings, v. 67, n. 12, p. 989-995, 1970.
- ABNT. **NBR 12655: concreto de cimento Portland – preparo, controle, recebimento e aceitação – procedimento**. Rio de Janeiro, 2015.
- ABNT. **NBR 6118: projeto de estruturas de concreto – procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- ACI 318. **Building code requirements for structural concrete and commentary**. Detroit, MI, USA: American Concrete Institute, 1963.
- ACI 318. **Building code requirements for structural concrete and commentary**. Farmington Hills, MI, USA: American Concrete Institute, 2011.
- ANG, A.; TANG, W. **Probability concepts in engineering planning and design**, v. 2. [S.l]: John Wiley & Sons, 1984.
- ANWAR, N.; NAJAM, F. A. **Structural cross-sections**. [S.l]: Elsevier, 2017.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**, v. 1. 4ª ed. Rio Grande: Dunas, 2014.
- ARAÚJO, J. M. **Dimensionamento à flexão simples de seções transversais de concreto armado com ênfase na ductilidade**. Teoria e Prática na Engenharia Civil, n. 14, p. 1-13, 2009.
- ARSLAN, G; CIHANLI, E. **Curvature ductility prediction of reinforced high-strength concrete beam sections**. Journal of Civil Engineering and Management, v. 16, n. 4, p. 462-470, 2010.
- AS 3600. **Australian concrete structures standard**, in Standards Australia: Sydney, Australia, 2009.
- ATTARD, M.; SETUNGE, S. **Stress-strain relationship of confined and unconfined concrete**. ACI Materials Journal, v. 93, n. 5, p. 432-442, 1996.
- ATTARD, M.; STEWART, M. **A two parameter stress block for high-strength concrete**. ACI Structural Journal, v. 95, n. 3, p. 305-317, 1998.
- BAJI, H. **The effect of uncertainty in material properties and model error on the reliability of strength and ductility of reinforced concrete members**. Tese (Doutorado) – The University of Queensland, 2014.
- BAJI, H.; RONAGH, R.; MELCHERS, R. **Reliability of ductility requirements in concrete design codes**. Structural Safety, v. 62, p. 76-87, 2016.

- BASTOS, P. S. **Fundamentos do concreto armado**. Notas de aula, departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista, 2019.
- BECK, A. **Curso de confiabilidade estrutural**. Notas de aula, departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, 2014.
- BINICI, B. **An analytical model for stress-strain behavior of confined concrete**. Engineering Structures, Elsevier, v. 27, n. 7, p. 1040-1051, 2005.
- BOURNOVILLE, M.; DAHNKE, J.; DARWIN, D. **Statistical analysis of the mechanical properties and weight of reinforcing bars**. Lawrence, KS: The University of Kansas, 2004.
- CARPINTERI, A.; CORRADO, M. **Investigação sobre a ductilidade de vigas de concreto armado com base na mecânica da fratura não-linear**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 3, n. 2, p. 137-148, 2010.
- CARVALHO, R.; FIGUEIREDO FILHO, J. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado segundo a NBR 6118:2003**. São Carlos: EdUFSCar, 2004.
- CHOI, S.; GRANDHI, R.; CANFIELD, R. **Reliability-based structural design**. [S.l]: Springer, 2007.
- COSTELLO, J.; CHU, K. **Failure probabilities of reinforced concrete beams**. Journal of the Structural Division, v. 95, p. 2281-2304, 1969.
- CSA A23.3. **Design of concrete structures**. Rexdale, Ontario: Canadian Standards Association, 2004.
- D'AMATO, M.; BRAGA, F.; GIGLIOTTI, R.; KUNNATH, S.; LATERZA, M. **A numerical general-purpose confinement model for non-linear analysis of R/C members**. Computers & Structures, v. 102-103, p. 64-75, 2012.
- fib* (CEB-FIP) **Model Code 2010. Draft Model Code**. Bulletin 55, v. 1, 2010.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETÓN. **CEB-FIP Model Code 1990**. Published by Thomas Telford, London, 1993.
- FIELDS, K.; BISCHOFF, P. **Tension stiffening and cracking of high-strength reinforced concrete tension members**. ACI Structural Journal, v. 101, n. 4, p. 447-456, 2004.
- FURST, A. **Erro de modelo e confiabilidade estrutural de vigas de concreto armado**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, 2020.
- GAMINO, A. L. **Análise numérica da ductilidade de vigas de concreto armado convencional e de alto desempenho**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, 2003.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, reliability and statistical methods in engineering design**. Nova York, NY: John Wiley & Sons, 2000.

HOGNESTAD, E. **A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members**. Champaign, IL: University of Illinois at Urbana-Champaign, 1951.

ISRAEL, M.; ELLINGWOOD, B.; COROTIS, R. **Reliability-based code formulations for reinforced concrete buildings**. Journal of Structural Engineering, v. 113, n. 10, 1987.

ITO, K.; SUMIKAMA, A. **Probabilistic study of reduction coefficient for balanced steel ratio in the ACI code**. ACI Structural Journal, v. 82, n.5, p. 701-709, 1985.

JCSS. **Probabilistic model code**. Technical University of Denmark, 2002.

KARA, I.; ASHOUR, A. **Moment redistribution in continuous FRP reinforced concrete beams**. Construction and Building Materials, v. 49, p. 939-948, 2013.

KO, M.; KIM, S.; KIM, J. **Experimental study on the plastic rotation capacity of reinforced high strength concrete beams**. Materials and Structures, v. 34, n. 5, p. 302-311, 2001.

KWAN, A.; DONG, C.; HO, J. **Axial and lateral stress-strain model for FRP confined concrete**. Engineering Structures, v. 99, p. 285-295, 2015.

LIM, J.; OZBAKKALOGLU, T. **Unified stress-strain model for FRP and actively confined normal-strength and high-strength concrete**. Journal of Composites for Construction, v. 19, n. 4, 2015.

LOGAN, A.; CHOI, W.; MIRMIRAN, A. **Short-term mechanical properties of high-strength concrete**. ACI Materials Journal, v. 106, n. 5, p. 413-418, 2009.

LUKE, W. **Análise numérica não-linear de elementos de concreto estrutural considerando a variação de aderência**. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília, 2015.

MACHADO, M. **Estudo experimental da ductilidade de vigas em concreto armado reforçadas à flexão utilizando compósitos com tecido de fibras de carbono**. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2005.

MELCHERS, R.; BECK, A. **Structural reliability analysis and prediction**. 3^a ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2018.

MIRZA, S.; MACGREGOR, J. **Variability of mechanical properties of reinforcing bars**. Journal of the Structural Division, v. 105, n. 5, p. 921-937, 1979.

NZS 3101. **Concrete Structures Standard–Part1–The Design of Concrete Structures**, in Wellington: Standards New Zealand, 2006.

NOGUEIRA, C. G.; RODRIGUES, I. D. **Novo modelo de dimensionamento de vigas em concreto armado à flexão simples considerando o fator de ductilidade**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 13, n. 1, p. 120-141, 2020.

NOWAK, A.; SZERSZEN, M. **Calibration of design code for buildings (ACI 318): part 1 – statistical models for resistance**. ACI Structural Journal, v. 100, n. 3, p. 377-382, 2003.

NOWAK, A.; SZERSZEN, M. **Calibration of design code for buildings (ACI 318): part 2 – reliability analysis and resistance factors**. ACI Structural Journal, v. 100, n. 3, p. 383-391, 2003.

OLIVEIRA, Abrahão. **Uma Obra de Oscar Niemeyer – A História do Edifício Copan**. Disponível em: <https://www.saopauloinfoco.com.br/historia-do-edificio-copan/>. Acesso em: 16 abr. 2022.

PINHEIRO, L. **Fundamentos do concreto e projeto de edifícios**. Notas de aula, departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, 2007.

REAL, M. **Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

SANTIAGO, W. **Calibração baseada em confiabilidade dos coeficientes parciais de segurança das principais normas brasileiras de projeto estrutural**. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2019.

SANTOS, D.; STUCCHI, F.; BECK, A. **Confiabilidade de vigas projetadas de acordo com as normas brasileiras**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 7, n. 5, p. 723-746, 2014.

SCHERER, M. **Avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2018.

SILVA, R.; ARAÚJO, C. **Estudo das taxas mínimas de armadura de tração em vigas de concreto armado segundo a ABNT NBR 6118:2014**. Essentia, v. 16, p. 38-54, 2015.

SOKOLOV, A. **Tension-stiffening model for reinforced concrete beams**. Tese (Doutorado) – Vilnius Gediminas Technical University, 2010.

STRAMANDINOLI, R.; LA ROVERE, H. **An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members**. Engineering Structures, v. 30, n. 7, p. 2069-2080, 2008.

STUCCHI, F.; SANTOS, S. **Evaluation of the safety criteria of brazilian standard NBR 6118 based on reliability analyses**. Joint IABSE fib Conference: Codes in Structural Engineering, Dubrovnik, 2010.

SYED, Z.; MENDIS, P.; LAM, N.; NGO, T. **Curvature ductility of concrete element under high strain-rates**. Applied Mechanics and Materials, v. 166-169, p. 2910-2917, 2012.

THORENFELDT, E.; TOMASZEWICZ, A.; JENSEN, J. J. **Mechanical properties of high strength concrete and application to design**. Anais do simpósio: Utilization of High-Strength Concrete, Stavanger, Noruega, 1987, Tapir, Trondheim, p. 149–159.