



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

João Guilherme Dal Molin

**Desenvolvimento de programa computacional para simulações de propagação de ondas
eletromagnéticas com uso do método FDTD**

Florianópolis - SC
2022

João Guilherme Dal Molin

Desenvolvimento de programa computacional para simulações de propagação de ondas eletromagnéticas com uso do método FDTD

Dissertação submetida ao Programa de pós-graduação em engenharia elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em engenharia elétrica
Orientador: Prof. Dr. Walter Pereira Carpes Jr.

Florianópolis - SC

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Dal Molin, João Guilherme

Desenvolvimento de programa computacional para
simulações de propagação de ondas eletromagnéticas com uso
do método FDTD / João Guilherme Dal Molin ; orientador,
Walter Pereira Carpes Jr., 2022.

89 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. FDTD. 3. Cavidade
ressonante. 4. Ondas eletromagnéticas. I. Pereira Carpes
Jr., Walter. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

João Guilherme Dal Molin

Desenvolvimento de programa computacional para simulações de propagação de ondas eletromagnéticas com uso do método FDTD

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Charles Borges de Lima
Instituto Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. João Pedro Assumpção Bastos
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Walter Pereira Carpes Jr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica.

Prof. Telles Brunelli Lazzarin, Dr.
Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof. Dr. Walter Pereira Carpes Jr., Dr.
Orientador

Florianópolis, 2022

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus pela existência, por minha vida e por tornar possível e muito mais agradável a experiência de realizar um mestrado. Também gostaria de agradecer aos meus pais, que são parte desta conquista, a começar pela minha criação, a minha educação básica até todo o suporte que me deram durante a minha pós-graduação. Não posso deixar de agradecer aos meus irmãos, aos meus amigos – especialmente ao Lucas – e à minha namorada, Luana, os quais foram meu apoio emocional nesta árdua jornada. E, por último, mas não de menor importância, são os meus agradecimentos a todos os professores que tive desde a minha infância, que são responsáveis por todo o meu aprendizado e por minha vontade de lecionar. Em especial à minha mãe, que foi a minha primeira professora; ao prof. Walter, uma grande inspiração; ao prof. Charles, que me deu grande ajuda; ao prof. Reinaldo, meu primeiro professor de física; e ao prof. Sérgio Gobira, meu professor de Eletromagnetismo.

"If you can't fly, then run. If you can't run, then walk. If you can't walk, then crawl. But whatever you do, you have to keep moving forward" (KING JR., 1960).

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um *software* em MATLAB[®] para a solução de problemas de propagação de ondas eletromagnéticas em cavidades ressonantes utilizando o método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) bem como expõe os resultados das soluções de dois problemas simulados pelo programa. O objetivo do trabalho é disponibilizar um *software* acessível de FDTD para solução de problemas de baixa complexidade e que envolvam propagação de ondas em cavidades ressonantes. A dissertação dá uma explicação a respeito da teoria do método numérico e das partes mais relevantes do desenvolvimento do código do programa. No trabalho constam dois problemas: um de uma cavidade ressonante vazia e outro de uma cavidade ressonante parcialmente preenchida por dielétrico. Os resultados incluem gráficos dos espectros de frequência com as frequências de ressonância e imagens de animações de gráficos tridimensionais que ilustram os comportamentos dos campos ao longo do tempo. Os valores encontrados para as frequências de ressonância de ambas as cavidades foram satisfatórios e coerentes com os valores analíticos e com os valores do artigo de comparação.

Palavras-chave: FDTD. Cavidade ressonante. Ondas eletromagnéticas.

ABSTRACT

This work presents the development of a MATLAB[®] *software* that solves problems involving electromagnetic waves propagation in resonant cavities using the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) method. It also shows the results from the solutions of two different problems simulated by the program. The aim of this work is to offer an accessible FDTD software for solving problems with a low level of complexity and which are related to wave propagation in microwave cavities. This dissertation provides explanation regarding the theory behind the numerical method and the most relevant parts of the code development. In this work, there are two problems: one regarding an empty resonant cavity and the other is about resonant cavity partially filled with a dielectric. The results include graphs of frequency spectrums with the resonant frequencies as well as images from animations of the tridimensional graphs that exhibit the behavior of the fields with the passage of time. The values found for the resonant frequencies from both cavities were plausible and consistent with the analytic values and with the values presented by the article of reference.

Keywords: FDTD. Resonant cavity. Electromagnetic waves.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Disposição dos campos elétrico e magnético nas células de Yee.	21
Figura 2 - Discretização dos valores da variável tempo.	22
Figura 3 - Exemplo unidimensional da progressão dos cálculos dos campos com os passos de tempo.	23
Figura 4 - Disposição das propriedades eletromagnéticas na célula de YEE.	24
Figura 5 - Derivada exata e derivada aproximada por <i>diferenças progressivas</i>	26
Figura 6 - Derivada exata e derivada aproximada por <i>diferenças regressivas</i>	28
Figura 7 - Derivada exata e derivada aproximada por <i>diferenças centrais</i>	29
Figura 8 - Visualização de uma das equações de Maxwell na célula de Yee.	31
Figura 9 – Forma da equação de atualização do método FDTD.	32
Figura 10 - Fluxograma geral de um algoritmo do método FDTD.	38
Figura 11 - Exemplo de arranjo de células e componentes x do campo magnético. ...	44
Figura 12 - Geometria do problema de cavidade vazia.	45
Figura 13 - Gráfico do sinal gerado pela fonte de tensão 1 do problema de cavidade ressonante vazia.	48
Figura 14 - Gráfico da transformada de Fourier da fonte de tensão 1 do problema de cavidade vazia.	48
Figura 15 - Ilustração da forma de implementação da fonte pelo código.	49
Figura 16 - Equação de atualização da componente H_x	51
Figura 17 - Equação de atualização da componente E_y	53
Figura 18 - Laço principal de iterações do método FDTD, ao longo dos passos de tempo.	51
Figura 19 - Definição dos índices de elementos presentes nas equações de atualização.	52
Figura 20 - Ilustração da disposição de uma linha de células e componentes E_y na direção x do domínio.	54
Figura 21 - Gráficos da janela de Hann no domínio do tempo e no domínio da frequência.	55
Figura 22 - Configuração do problema de cavidade parcialmente preenchida.	56
Figura 23 - Configuração de um quarto do problema para simulação. $A = 200$ mm; $B = 500$ mm; $C = 300$ mm. $a = 75$ mm; $b = 125$ mm; $c = 175$ mm.	56

Figura 24 – Representação de um corte paralelo ao plano xy da configuração das células do problema de cavidade parcialmente preenchida.....	58
Figura 25 - Ilustração para visualização dos cálculos das propriedades elétricas.....	61
Figura 26 - Ilustração para visualização dos cálculos das propriedades magnéticas.	61
Figura 27 - Disposição da parede magnética de um problema hipotético.....	62
Figura 28 – Parte do código do programa responsável pela criação de paredes magnéticas.....	66
Figura 29 - Gráfico do sinal gerado pela fonte de tensão do problema de cavidade parcialmente preenchida com dielétrico.....	67
Figura 30 - Gráfico da transformada de Fourier da fonte de tensão do problema de cavidade parcialmente preenchida com dielétrico.....	68
Figura 31 - Imagens da animação do problema de cavidade vazia capturadas em quatro instantes diferentes.....	70
Figura 32 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_x no ponto de amostra da cavidade vazia.....	71
Figura 33 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_y no ponto de amostra da cavidade vazia.....	71
Figura 34 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_z no ponto de amostra da cavidade vazia.....	72
Figura 35 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_x no ponto de amostra da cavidade vazia.....	72
Figura 36 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_y no ponto de amostra da cavidade vazia.....	72
Figura 37 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_z no ponto de amostra da cavidade vazia.....	73
Figura 38 - Imagens da animação do problema de cavidade parcialmente preenchida capturadas em três instantes diferentes.....	74
Figura 39 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_x do campo (cavidade parcialmente preenchida).....	74
Figura 40 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_y do campo (cavidade parcialmente preenchida).....	75
Figura 41 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_z do campo (cavidade parcialmente preenchida).....	75

Figura 42 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_x do campo (cavidade parcialmente preenchida).....	75
Figura 43 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_y do campo (cavidade parcialmente preenchida).....	76
Figura 44 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_z do campo (cavidade parcialmente preenchida).....	76
Figura 45 - Gráfico do campo E_x no nó de amostra ao longo da simulação da cavidade parcialmente preenchida com dielétrico.	77
Figura 46 - Propagação unidimensional da onda de uma fonte de sinal gaussiano. ..	84
Figura 47 - Propagação unidimensional da onda de um sinal senoidal gerado por uma fonte do tipo TF/SF	84
Figura 48 - Propagação de onda gerada por uma fonte de sinal gaussiana em um problema bidimensional.	85
Figura 49 - Gráfico da FFT das amostras de campo propagando-se no modo TM. ..	86
Figura 50 - Gráfico da FFT das amostras de campo propagando-se no modo TE.....	86
Figura 51 - Gráfico dos números complexos de saída a função fft do MATLAB aplicada às amostras de campo do problema de cavidade vazia (à esquerda) e gráfico dos valores os módulos dos números complexos (à direita).	87
Figura 52 - Destaque à diferença de frequências entre dois elementos da FFT	88
Figura 53 - Parte do código do programa correspondente à FFT	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Número de componentes de campo no problema discretizado e na matriz.	46
Tabela 2 - Índices dos nós da posição da fonte de sinal e do ponto de amostragem (cavidade vazia).....	47
Tabela 3 - Número de elementos das matrizes das componentes dos campos elétrico e magnético (problema de cavidade parcialmente preenchida com dielétrico).....	59
Tabela 4 - Índices dos nós das posições da fonte de sinal e do ponto de amostragem.	67
Tabela 5 - Frequências de ressonância da cavidade retangular vazia.	73
Tabela 6 - Frequências de ressonância da cavidade retangular parcialmente preenchida com dielétrico.	76

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FDTD *finite-difference time-domain* (Diferenças Finitas no Domínio do Tempo)

FFT *fast Fourier transform* (transformada rápida de Fourier)

TF/SF *total-field scattered field*

GUI *graphic user interface* (interface gráfica do usuário)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	17
2.1	CAVIDADES RESSONANTES	17
2.2	AS EQUAÇÕES DE MAXWELL	18
2.3	DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO E A CÉLULA DE YEE.....	20
2.3.1	As componentes dos campos.....	21
2.3.2	O tempo.....	22
2.3.3	As propriedades dos materiais	23
2.4	DIFERENÇAS FINITAS	25
2.5	EQUAÇÕES DE ATUALIZAÇÃO	29
2.5.1	Equação de atualização de H_x.....	32
2.5.2	Equação de atualização de H_y	33
2.5.3	Equação de atualização de H_z.....	34
2.5.4	Equação de atualização de E_x	35
2.5.5	Equação de atualização de E_y	35
2.5.6	Equação de atualização de E_z	36
2.6	AS CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	37
2.7	ALGORITMO	38
2.8	CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE	39
2.9	Excitação GAUSSIANA	40
3	DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA.....	42
3.1	VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS.....	43
3.2	DEFINIÇÃO DO DOMÍNIO DOS PROBLEMAS	43
3.2.1	Número de células e de nós no FDTD.....	44
3.3	PROBLEMA DE CAVIDADE VAZIA.....	44
3.3.1	Definição do domínio espacial do problema.....	45

3.3.2	Passos de tempo.....	46
3.3.3	Fontes de sinal e pontos de amostragem.....	47
3.3.4	Equações de atualização.....	49
3.3.4.1	<i>Localização no tempo das componentes.....</i>	<i>50</i>
3.3.4.2	<i>Os elementos das matrizes atualizados nos laços de repetição</i>	<i>51</i>
3.3.5	Pós-processamento.....	54
3.4	PROBLEMA DE CAVIDADE PARCIALMENTE PREENCHIDA	56
3.4.1	Definição do domínio espacial do problema.....	57
3.4.2	As malhas de propriedades eletromagnéticas	59
3.4.2.1	<i>Cálculo das médias de propriedades eletromagnéticas</i>	<i>60</i>
3.4.2.2	<i>Atribuição das propriedades que definem as paredes magnéticas</i>	<i>61</i>
3.4.3	Passos de tempo.....	67
3.4.4	Fontes de sinal e pontos de amostragem.....	67
3.4.5	Pós-processamento.....	69
4	RESULTADOS	70
4.1	SIMULAÇÃO DE CAVIDADE VAZIA.....	70
4.2	SIMULAÇÃO DE CAVIDADE PARCIALMENTE PREENCHIDA	74
5	DISCUSSÃO	78
6	CONCLUSÃO.....	79
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	80
	REFERÊNCIAS.....	81
	APÊNDICE A – PROGRAMAS DE TESTES DE SIMULAÇÕES UNIDIMENSIONAIS.....	83
	APÊNDICE B – PROGRAMA DE TESTE DE SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL.....	85
	APÊNDICE C – FFT	87

1 INTRODUÇÃO

O método numérico de Diferenças Finitas no Domínio do Tempo, ou método FDTD (*Finite-difference time-domain*), é uma ferramenta desenvolvida, principalmente, para a solução das equações de Maxwell do eletromagnetismo. Suas equações no domínio do tempo formam um método robusto e prático que possibilita, em uma só simulação, a análise de períodos transitórios de campos em vários pontos do espaço e, no caso de campos oscilatórios, de uma larga banda de frequência de ondas. Desenvolvida por Kane S. Yee em 1966, essa técnica é aplicada a uma grande variedade de problemas eletrodinâmicos, tais como: propagações de ondas eletromagnéticas em espaço livre, antenas, circuitos ópticos integrados, óptica difrativa, câmaras de reverberação e, entre outros muitos, cavidades ressonantes.

Desde a publicação do artigo de Yee, muitas técnicas já foram desenvolvidas para aprimorar o método FDTD, o qual tem sido utilizado em aplicações muito diversas. Exemplos de trabalhos recentes são: *FDTD Scheme for Interfaces Formed by Space-Time Modulations* (BAHRAMI e CALOZ, 2022), *Accurate and Numerically Stable FDTD Modeling of Human Skin Tissues in THz Band* (PARK, BAEK e JUNG, 2022). Exemplos de novas técnicas associadas ao método estão em trabalhos como: *FiPo FDTD: Computational Electrodynamics Technique Producing Both Fields and Potentials* (AVAZPOUR et. al, 2022) e *A Performance-Enhanced Absorbing Boundary Condition for FDTD Methods on Face-Centered Cubic Grids* (WANG et. al, 2022).

As cavidades ressonantes constituem grande parte dos problemas resolvidos por meio do método FDTD. E, por se tratar de casos de pouca complexidade, é muito comum que se encontrem problemas de cavidades ressonantes – principalmente vazias – em livros didáticos que abordam este assunto. As características das condições de contorno de tais problemas bem como a simplicidade das diferentes configurações nas quais eles se apresentam na maioria dos casos reais faz com que formem um vasto nicho de estudos teóricos e de aplicações práticas. Entretanto, grande parte do material disponível acerca deste assunto não descreve ou não aprofunda a implementação do método em uma linguagem de programação específica. Ainda mais escassos, mesmo que os disponíveis sejam facilmente encontrados, são conteúdos que disponibilizam códigos funcionais de programas para que estudantes possam utilizá-los, analisá-los ou, eventualmente, aprimorá-los livremente. Exemplos são o livro *The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics*, de Elsherbeni e Demir (2015) e o livro *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method*, de Sullivan (2000).

Esta dissertação de mestrado apresenta os pontos mais relevantes do desenvolvimento de um *software* em MATLAB® voltado para a solução de problemas de cavidades ressonantes e sua aplicação em duas simulações de cavidades retangulares: uma de cavidade vazia e outra de cavidade parcialmente preenchida com um dielétrico. A apresentação destas simulações tem a finalidade de validar os resultados obtidos com o uso do programa.

Nesse contexto, a grande vantagem deste programa é possibilitar que o usuário altere os dados de entrada para que configure o seu próprio problema. No programa, é possível, por exemplo, definir o tamanho do domínio espacial, configurar diferentes regiões com diferentes propriedades elétricas e magnéticas – a serem definidas livremente pelo usuário – e inserir fontes de tensão que geram sinal com qualquer função desejada. Além disso, o programa provê animações tridimensionais como forma de visualizar o comportamento dos campos eletromagnéticos ao longo do tempo.

É oportuno acentuar que este *software*, de código disponível para visualização e edição, tem propósito não só de auxiliar novos pesquisadores que estão se introduzindo no conhecimento do método FDTD, como de ser uma ferramenta para soluções reais de problemas eletrodinâmicos em que se necessite de uma maior liberdade e transparência em relação ao código. De fato, a iniciativa de trabalhar com este método partiu da necessidade da modelagem dos campos eletromagnéticos de um forno de micro-ondas voltado para pesquisas científicas. Embora haja alguns exemplos de *softwares* de soluções eletromagnéticas que utilizam o método FDTD, estes geralmente não são gratuitos e não proveem acesso ao seu código fonte.

Ademais, uma motivação para o desenvolvimento deste trabalho foi notar a relevância que o *software* EFCAD, desenvolvido pelo professores J. P. A. Bastos e N. Sadowski, tem na introdução dos alunos de engenharia elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina ao método de elementos finitos (MEF) e, logo, na familiarização dos alunos à modelagem numérica de problemas eletromagnéticos. À vista disso, percebeu-se que um *software* com uma linguagem de programação relativamente simples, como é a do MATLAB®, pode vir a se tornar mais um material de acesso ao método FDTD, ao mesmo tempo que pode dar início a possíveis soluções de problemas eletromagnéticos em pesquisas da universidade.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O método FDTD consiste basicamente em resolver as equações rotacionais de Maxwell em dois domínios discretos (ou grades) intercalados entre si no tempo e no espaço. Os desafios da implementação do método FDTD em problemas eletromagnéticos não residem, em geral, na compreensão do seu princípio de operação, mas na resolução de eventuais detalhes relacionados às suas limitações numéricas. Entretanto, para entender como esse método se executa, é imprescindível o conhecimento de seus fundamentos, tais como as equações de Maxwell, diferenças finitas e certos conceitos básicos de eletromagnetismo.

2.1 CAVIDADES RESSONANTES

Antes de abordar os conceitos da teoria eletromagnética, é importante que sejam apresentadas – ainda que brevemente – as características da estrutura básica na qual ambos os problemas do trabalho são fundamentados: a cavidade ressonante. Tal estrutura pode ser descrita simplesmente como uma câmara completamente fechada (na maioria das vezes um cilindro ou um paralelepípedo) constituída de paredes eletricamente condutoras. Este trabalho trata de *cavidades retangulares*, ou seja, cavidades com forma de paralelepípedo.

As cavidades ressonantes são assim chamadas por admitirem em seu interior apenas a propagação de ondas eletromagnéticas de certas frequências. As frequências de ressonância das cavidades retangulares podem ser calculadas através da fórmula:

$$f_r = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} \quad (1)$$

na qual μ e ε são, respectivamente, a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do meio que preenche a cavidade; a , b e c são as três dimensões da cavidade ressonante; e m , n , e p são índices de números naturais cujas diferentes combinações identificam os diferentes *modos de propagação* da onda eletromagnética. Neste caso, da cavidade retangular, as combinações com pelo menos dois índices nulos correspondem a campos que não obedecem às condições de contorno e, por esta razão, não são permitidos.

2.2 AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

As equações de Maxwell, na forma diferencial, podem ser escritas da seguinte forma, mais adequada para os fins deste trabalho:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{J}_m \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{J}_e \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \quad (5)$$

onde \vec{B} é o vetor da densidade de fluxo magnético; \vec{E} é o vetor da intensidade do campo elétrico; \vec{D} é o vetor densidade de fluxo elétrico; \vec{H} é o vetor da intensidade do campo magnético; \vec{J}_m é o vetor de densidade de corrente magnética; \vec{J}_e é o vetor de densidade de corrente elétrica; ρ_e é a densidade de carga elétrica; e ρ_m é a densidade de carga magnética.

As densidades de carga e de corrente magnética não existem na realidade, mas são usadas para que as equações de Maxwell fiquem simétricas. Tais grandezas também podem ser utilizadas em simulações para representar grandezas que existem.

Ademais, há as relações constitutivas, necessárias para que os valores das propriedades dos meios sejam incluídos explicitamente nas análises eletromagnéticas:

$$\vec{B} = [\mu] \otimes \vec{H} \quad (6)$$

$$\vec{D} = [\varepsilon] \otimes \vec{E} \quad (7)$$

Nestas relações, \otimes representa a operação matemática de convolução; e $[\mu]$ e $[\varepsilon]$ são, respectivamente, os tensores de permeabilidade magnética e de permissividade elétrica:

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Em meios cujas permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ não dependem da direção (meios isotrópicos), nem dos campos (meios lineares), tampouco da frequência de oscilação dos campos (meios não-dispersivos), estes termos podem ser tratados como valores escalares constantes:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (10)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (11)$$

Quanto aos vetores de densidade de corrente, pode ser conveniente separar cada um deles em duas parcelas: uma resultante do campo e da condutividade; e outra diretamente imposta pelo método numérico, ou seja:

$$\vec{J}_m = \sigma_m \vec{H} + \vec{J}_{mi} \quad (12)$$

$$\vec{J}_e = \sigma_e \vec{E} + \vec{J}_{ei} \quad (13)$$

onde σ_m é a condutividade magnética; \vec{J}_{mi} é a densidade de corrente magnética imposta; σ_e é a condutividade elétrica; e \vec{J}_{ei} é a densidade de corrente elétrica imposta. As condutividades foram representadas como escalares por já se considerar somente casos em que os meios são isotrópicos, lineares e não dispersivos.

Isto posto, levando em conta as relações (10), (11), (12) e (13), as equações (2) e (3) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{E} + \sigma_m \vec{H} + \vec{J}_{mi}) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \sigma_e \vec{E} - \vec{J}_{ei}) \quad (15)$$

Ao se separar as componentes cartesianas dos vetores deste conjunto de duas equações e calcular os seus rotacionais, este expande-se em um conjunto de seis equações:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_m H_x - J_{mix} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_m H_y - J_{miy} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_m H_z - J_{miz} \right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_e E_x - J_{eix} \right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_e E_y - J_{eiy} \right) \quad (20)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_e E_z - J_{eiz} \right) \quad (21)$$

2.3 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO E A CÉLULA DE YEE

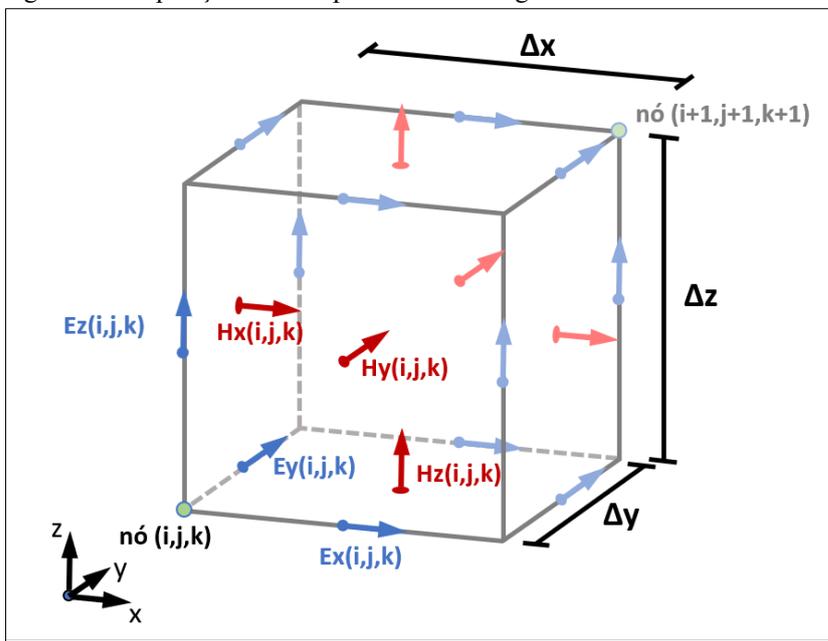
As equações ((16) a ((21) devem ser observadas de uma perspectiva numérica e computacional ao serem aplicadas ao método FDTD. Esse método se baseia na aproximação das derivadas espaciais e temporais usando diferenças finitas centrais. Na discretização espacial, o domínio é tratado como um conjunto composto por um número finito de células. Via de regra, quando se implementa o método FDTD para resolver problemas eletromagnéticos,

a discretização do domínio de cálculo é feita da forma como é apresentada no artigo de Kane S. Yee (1966).

2.3.1 As componentes dos campos

As equações de Maxwell envolvem variáveis que dependem do tempo e do espaço. A Figura 1 ilustra o modo como Yee divide o espaço em células, que são identificadas pelos índices inteiros positivos i, j , e k .

Figura 1 – Disposição dos campos elétrico e magnético nas células de Yee.



Fonte: próprio autor.

Cada célula é identificada por um nó, o qual está relacionado a três componentes do campo elétrico e a três do campo magnético. E cada componente está em uma determinada coordenada, nos arredores do nó. Tais componentes, em destaque na figura, são identificadas com o mesmo índice que o nó correspondente. Deste modo, duas componentes de campo E_x , por exemplo, estarão separadas, na direção de um dos eixos de coordenadas, pelo comprimento de uma célula (Δx , Δy ou Δz), que é definido segundo a precisão desejada para os resultados e um critério mínimo de estabilidade (explicado na seção 2.8). Vale observar, na Figura 1, que as setas menos destacadas e sem identificação dos nós não pertencem ao nó (i, j, k) , mas a outros nós (vértices) de outras células de Yee. Embora tais componentes não estejam identificadas pelo nó (i, j, k) , a região da célula (i, j, k) abarca tanto o nó (i, j, k) e suas componentes como os nós situados em seus vértices e arestas.

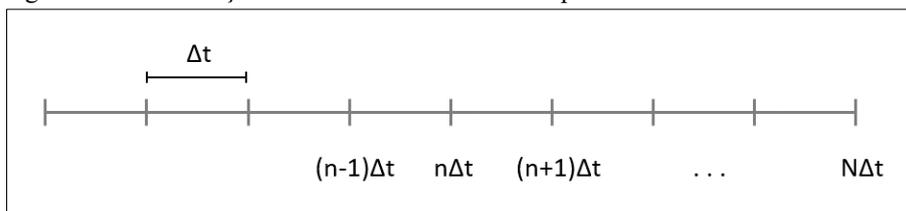
Outro aspecto a ser destacado acerca das células de Yee é que, nelas, as propriedades elétricas e os campos elétricos estão sempre alternados com as propriedades magnéticas e com os campos magnéticos em distâncias de metade de uma célula. Para exemplificar, enquanto as componentes x do campo elétrico são calculadas somente nas coordenadas $\left(i\left(\Delta x - \frac{1}{2}\right), j(\Delta y - 1), k(\Delta z - 1)\right)$, as componentes x do campo magnético são calculados nas posições $\left(i(\Delta x - 1), j\left(\Delta y - \frac{1}{2}\right), k\left(\Delta z - \frac{1}{2}\right)\right)$.

A escolha, neste trabalho, por índices que não incluem o zero se deve ao fato de que, no programa, as posições das componentes de campo são armazenadas em matrizes cujos elementos são identificados por estes mesmos índices. Na notação matemática habitualmente utilizada, índices de matrizes são números inteiros positivos (não nulos). Além disso, o MATLAB[®] utiliza esta mesma notação em suas matrizes.

2.3.2 O tempo

Quanto à discretização dos valores da variável tempo (Figura 2), os instantes em que as componentes de um determinado campo são calculadas são separados por um período Δt , o qual é definido de acordo com a precisão desejada para os resultados e com um critério mínimo de estabilidade, explicado na seção 2.8.

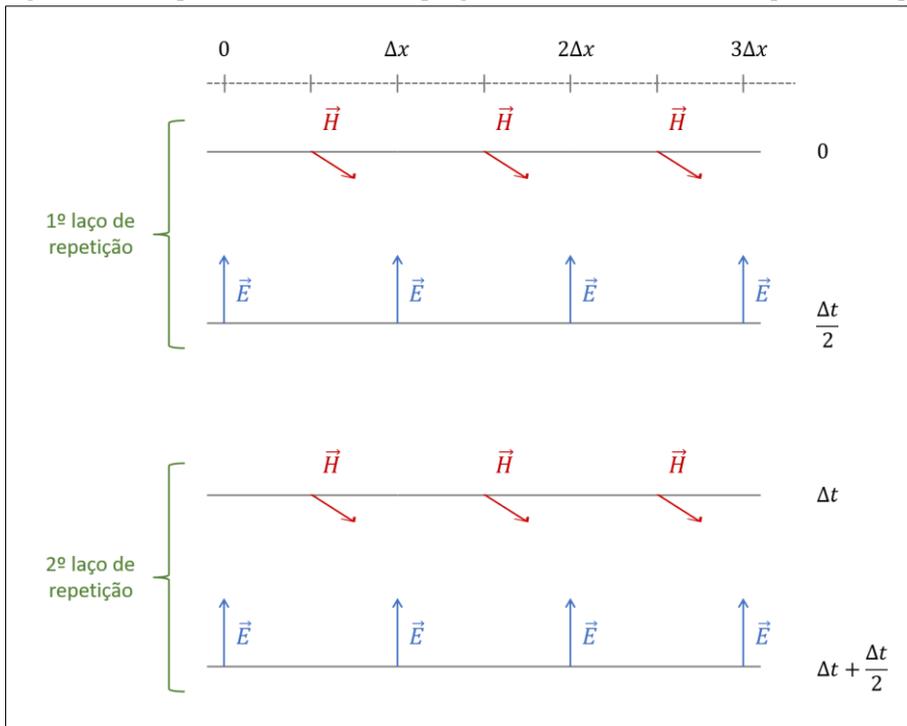
Figura 2 - Discretização dos valores da variável tempo.



Fonte: próprio autor.

De forma análoga à que ocorre no domínio do espaço, os campos elétrico e magnético são calculados em instantes de tempo diferentes, sempre separados por $\Delta t/2$. Ou seja, a cada passo de tempo Δt , os campos magnéticos e elétricos são calculados um após o outro: os campos elétricos nos instantes $(n - 1)\Delta t$; e os magnéticos nos instantes $(n - \frac{1}{2})\Delta t$.

Figura 3 - Exemplo unidimensional da progressão dos cálculos dos campos com os passos de tempo.



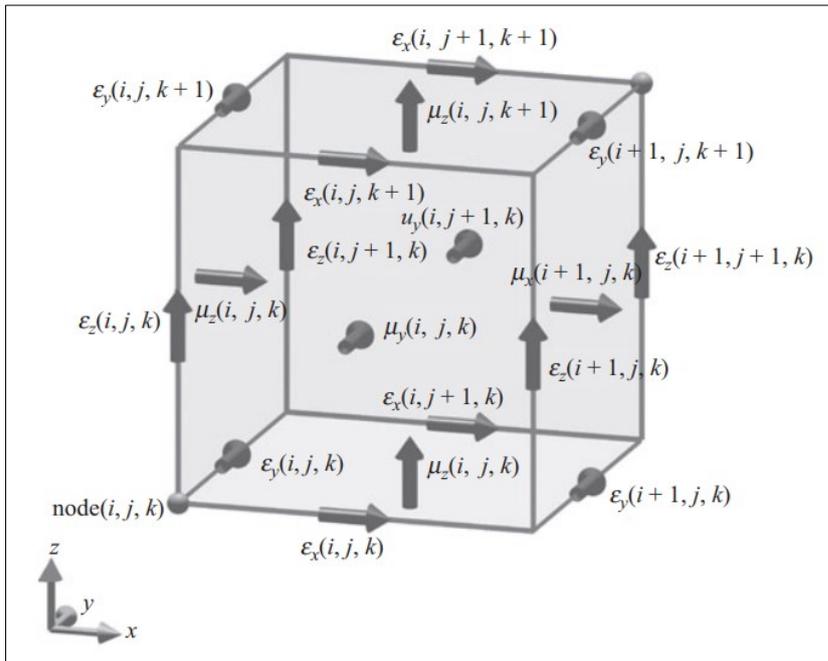
Fonte: próprio autor.

Esta alternância entre os cálculos ao longo dos passos de tempo, exemplificada na Figura 3, é chamada de *leapfrog scheme* (em português, esquema “pula-carniça”) (TAFLOVE, 1995).

2.3.3 As propriedades dos materiais

A forma usualmente utilizada nos cálculos de FDTD de atribuição das propriedades elétricas e magnéticas é posicioná-las como mostra a Figura 4, de modo que fiquem sobrepostas às componentes de campo elétrico e magnético, respectivamente. Apesar da figura ilustrar somente a disposição da permissividade elétrica e da permeabilidade magnética, esta mesma lógica também é seguida para a alocação das condutividades elétrica e magnética.

Figura 4 - Disposição das propriedades eletromagnéticas na célula de YEE.



(ELSHARBENI; DEMIR, 2015, p. 16)

Um ponto a ser levado em conta é que, assim como as posições de cada uma das componentes dos campos elétrico e magnético não são as mesmas, as localizações das propriedades dos meios também não coincidem entre si. Em vista disso, pode ser interessante que as equações (16) a (21) sejam escritas com uma sutil alteração:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu_x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_{mx} H_x - J_{mix} \right) \quad (22)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_y} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_{my} H_y - J_{miy} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_{mz} H_z - J_{miz} \right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_{ex} E_x - J_{eix} \right) \quad (25)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_{ey} E_y - J_{eiy} \right) \quad (26)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_{ez} E_z - J_{eiz} \right) \quad (27)$$

Uma maneira de enxergar esta alteração é imaginar que o tensor $[\varepsilon]$, por exemplo, teria somente componentes diagonais:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (28)$$

Embora pareça que esta forma de ver as permissividades se refira a um material *diagonalmente anisotrópico*, este trabalho só trata de meios isotrópicos (ou, pelo menos, de conjuntos de meios isotrópicos com fronteiras bem definidas). Esta forma de enxergar a permissividade como um tensor é somente uma representação para adaptar as equações ao meio discretizado, no qual cada componente do campo elétrico está em um ponto distinto e relacionado à permissividade naquele ponto.

Caso fossem calculadas analiticamente, todas as propriedades seriam iguais em um único ponto, ou seja, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$. Contudo, no domínio do FDTD, próximo à fronteira entre dois materiais, pode acontecer, por exemplo, das permissividades ε_x e ε_y relacionadas a um mesmo nó (i, j, k) estarem situadas cada uma em um material distinto. Toda esta análise também vale para as outras propriedades eletromagnéticas dos meios.

2.4 DIFERENÇAS FINITAS

Para se utilizar as equações de Maxwell com um domínio discreto, é necessário que as derivadas sejam aplicadas também na forma discreta. Usualmente, a derivada de uma função $f(x)$ em um certo ponto x é definida como:

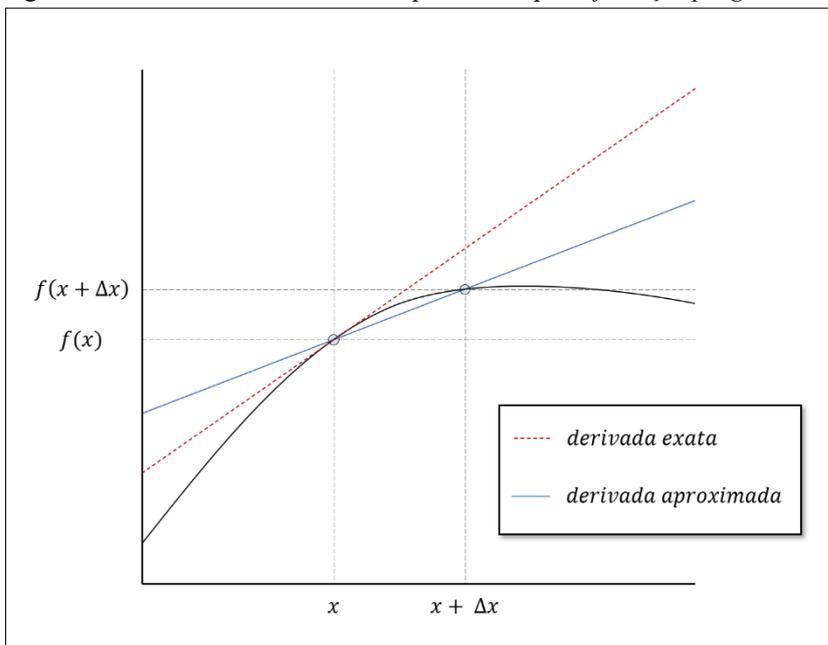
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (29)$$

se este limite existir. No caso da aplicação numérica em um cálculo computacional, em que Δx tem um valor mínimo possível (não infinitesimal), o valor da derivada $f'(x)$ pode ser aproximada por:

$$f'(x) \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (30)$$

Quanto menor o valor de Δx , mais próximo será o valor aproximado do valor real da derivada. Na Figura 5, observa-se esta aproximação no gráfico de uma função qualquer.

Figura 5 - Derivada exata e derivada aproximada por *diferenças progressivas*.



Fonte: próprio autor.

Uma abordagem mais precisa pode ser feita realizando-se a expansão de Taylor de $f(x + \Delta x)$:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x) + \dots \quad (31)$$

que pode ser organizada da seguinte forma:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} f''(x) - \frac{(\Delta x)^2}{6} f'''(x) + \dots \quad (32)$$

Nesta equação, as parcelas que são diferentes da equação (30) são o erro, que pode ser representado por $O(\Delta x)$:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (33)$$

A equação (33) é conhecida como a *fórmula das diferenças progressivas* (TAFLOVE, 1995). Se a mesma lógica for utilizada, mas levando-se em conta a função num ponto anterior, – isto é, com x menor que o do ponto que se deseja calcular a derivada – encontramos a aproximação com a *fórmula das diferenças regressivas*, representada em gráfico na Figura 6. Primeiro, realiza-se a expansão de Taylor de $f(x - \Delta x)$:

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \frac{\Delta x}{1} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x) - \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x) + \dots \quad (34)$$

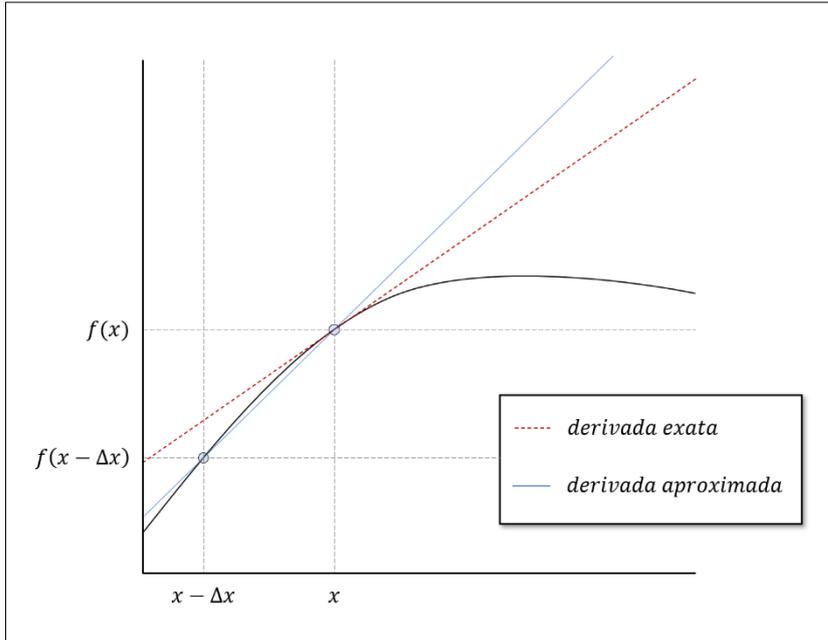
Então, encontra-se $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} f''(x) - \frac{(\Delta x)^2}{6} f'''(x) + \dots \quad (35)$$

E, substituindo-se o *termo de erro* $O(\Delta x)$, chega-se a:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (36)$$

Figura 6 - Derivada exata e derivada aproximada por *diferenças regressivas*.



Fonte: próprio autor.

No método FDTD, é utilizada a *fórmula das diferenças centrais* (Figura 7), que pode ser obtida através da subtração entre a expansão de Taylor da função no ponto sucessor e a expansão de Taylor no ponto antecessor do domínio discretizado:

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x f'(x) + \frac{2(\Delta x)^3}{6} f'''(x) + \dots \quad (37)$$

E, assim, resolvendo-se para $f'(x)$ a equação e substituindo-se o *termo de erro*, tem-se:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad (38)$$

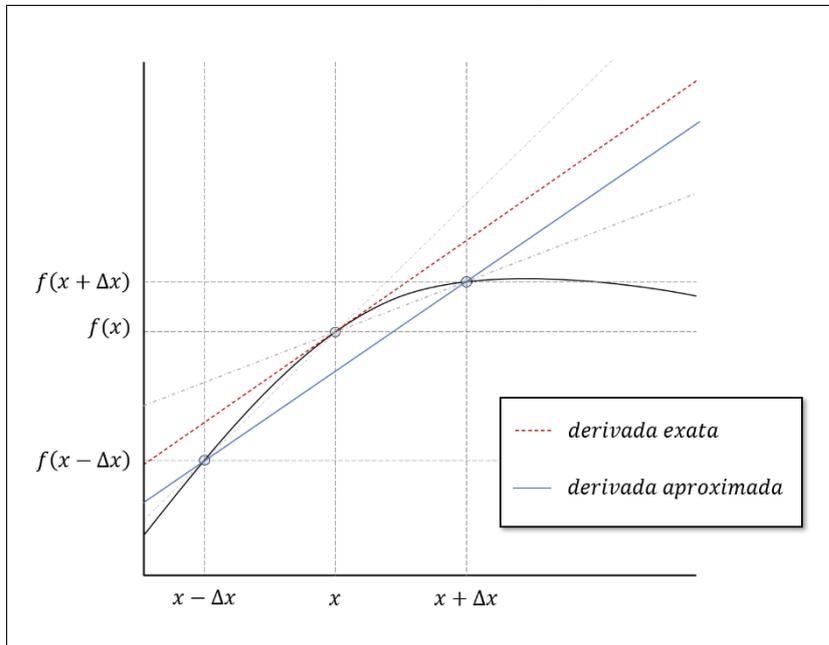
na qual o *termo de erro* $O((\Delta x)^2)$ é:

$$O((\Delta x)^2) = -\frac{(\Delta x)^2}{6} f'''(x) - \frac{(\Delta x)^4}{120} f^{(5)}(x) - \frac{(\Delta x)^6}{5040} f^{(7)}(x) - \dots \quad (39)$$

Nota-se, portanto, que o valor do *termo de erro* na *fórmula das diferenças centrais* se aproxima de zero com o quadrado da dimensão de Δx . Por este motivo, a equação (38) “é

comumente chamada de uma aproximação de segunda ordem de precisão” (TAFLOVE, 1995, p. 37, tradução nossa).

Figura 7 - Derivada exata e derivada aproximada por *diferenças centrais*.



Fonte: próprio autor.

2.5 EQUAÇÕES DE ATUALIZAÇÃO

As seções anteriores abordaram os conceitos sobre os quais o método FDTD se fundamenta. Estes conceitos formam o alicerce que possibilita a aplicação do método e a sua implementação através de algoritmos. Agora, a execução do FDTD propriamente dita ocorre durante a solução iterativa das equações de Maxwell ao longo de todo o espaço do domínio do problema e durante todo o período determinado.

Com os fundamentos abordados, resta utilizar as derivadas por diferenças centrais nas equações de Maxwell – (22) a (27) – para que estas sejam aplicadas sobre os domínios de tempo e espaço discretizados. Mas, antes, pode ser conveniente manipular as equações com o uso de uma notação mais adequada a estes domínios discretos.

Neste trabalho, é utilizada uma notação semelhante à que consta no artigo de 1966 de Yee, com algumas diferenças que aproximam a forma de indexação dos nós e coordenadas do problema à forma de indexação dos elementos das matrizes feitas pelo *software* MATLAB®. Nesta notação são usados: índices i , j e k entre parênteses para representar as coordenadas (i –

$1)\Delta x$, $(j - 1)\Delta y$ e $(k - 1)\Delta z$, respectivamente; índices $i + \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ e $k + \frac{1}{2}$ entre parênteses para indicar, respectivamente, as coordenadas $(i - \frac{1}{2})\Delta x$, $(j - \frac{1}{2})\Delta y$ e $(k - \frac{1}{2})\Delta z$; e o índice sobrescrito n para indicar os instantes de tempo $n\Delta t$. Deste modo, a componente x do campo elétrico no instante de tempo $n\Delta t$ e localizada em $((i - \frac{1}{2})\Delta x, (j - 1)\Delta y, (k - 1)\Delta z)$, – e, logo, relacionada ao nó (i, j, k) – por exemplo, seria representada por:

$$E_x \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta x, (j - 1)\Delta y, (k - 1)\Delta z, n\Delta t \right) = E_x^n(i, j, k) \quad (40)$$

Da mesma forma, a componente z do campo magnético no instante de tempo $n\Delta t$ e localizada em $((i - \frac{1}{2})\Delta x, (j - \frac{1}{2})\Delta y, (k - 1)\Delta z)$ – e, portanto, relacionada ao nó (i, j, k) – por exemplo, seria representada por:

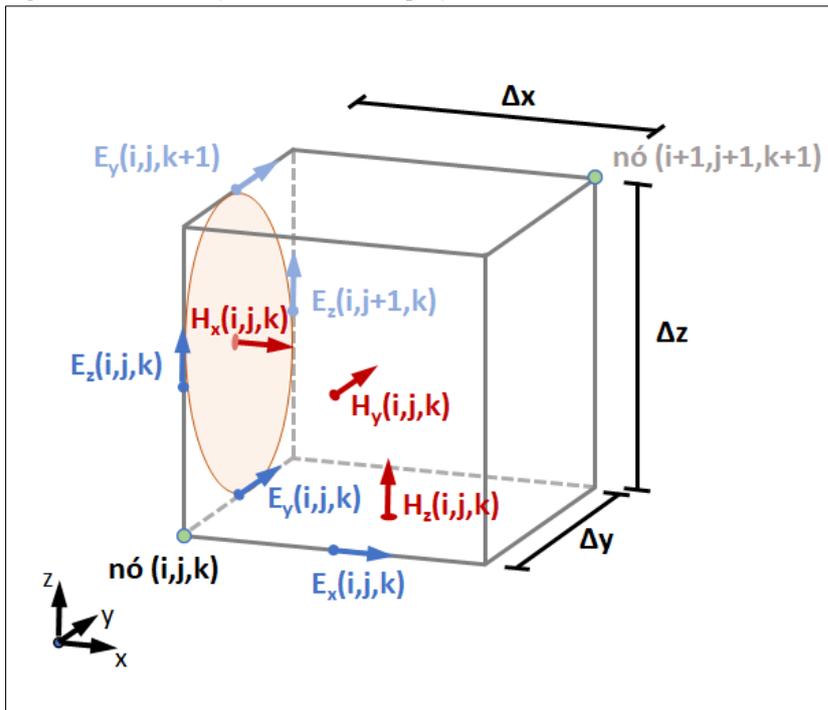
$$H_z \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta y, (k - 1)\Delta z, n\Delta t \right) = H_z^n(i, j, k) \quad (41)$$

Então, aplicando-se as derivadas de diferenças centrais à equação (22) e utilizando-se a notação acima, chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} = & \\ & \frac{1}{\mu_x(i, j, k)} \left(\frac{E_y^n(i, j, k + 1) - E_y^n(i, j, k)}{\Delta z} \right. \\ & - \frac{E_z^n(i, j, k + 1) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta y} - \sigma_{mx}(i, j, k)H_x^n(i, j, k) \\ & \left. - J_{mix}^n(i, j, k) \right) \end{aligned} \quad (42)$$

A forma como esta equação se manifesta no método FDTD pode ser visualizada melhor com a ilustração da Figura 8:

Figura 8 - Visualização de uma das equações de Maxwell na célula de Yee.



Fonte: próprio autor.

Como, na formulação do método, está sendo considerado que o campo magnético só é calculado nos instantes de tempo $\left(\frac{\Delta t}{2}, 1 + \frac{\Delta t}{2}, 2 + \frac{\Delta t}{2}, \dots\right)$, o termo $H_x^n(i, j, k)$ corresponde a um campo magnético em um instante que não é calculado. Então, para resolver este problema, o termo pode ser substituído pela sua “aproximação semi-implícita” (TAFLOVE, 1995, p. 64), uma média aritmética dos seus valores nos instantes válidos de tempo antecessor e sucessor:

$$H_x^n(i, j, k) = \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{2} \quad (43)$$

Ao empregar este termo na equação (42) e deixar somente o termo com índice de tempo $n + \frac{1}{2}$ à esquerda da igualdade, a equação fica assim:

$$\begin{aligned}
H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) = & \frac{1}{2\mu_x(i,j,k) + \Delta t\sigma_{mx}(i,j,k)} \left[(2\mu_x(i,j,k) \right. \\
& + \Delta t\sigma_{mx}(i,j,k)) H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
& + \frac{2\Delta t}{\Delta z} (E_y^n(i,j,k+1) - E_y^n(i,j,k)) \\
& \left. - \frac{2\Delta t}{\Delta y} (E_z^n(i,j+1,k) - E_z^n(i,j,k)) - 2\Delta t J_{mix}^n(i,j,k) \right]
\end{aligned} \tag{44}$$

Agora, pode ser interessante definir coeficientes formados pelas constantes que multiplicam os campos na equação. O objetivo é que as equações tenham um formato próximo ao ilustrado na Figura 9, para que possam ser resolvidas iterativamente com o avanço dos passos de tempo.

Figura 9 – Forma da equação de atualização do método FDTD.

$$\vec{H}\Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} = C_1 \vec{H}\Big|_{t-\frac{\Delta t}{2}} + C_2 \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\Big|_t \right) + C_3 \vec{J}_m\Big|_t$$

coeficientes de atualização

campo no passo de tempo futuro

campo no passo de tempo passado

rotacional do outro campo num passo de tempo intermediário (passado)

densidade de corrente imposta (somente onde houver)

Fonte: próprio autor.

Ao desenvolver-se as outras cinco equações e após definir os coeficientes e utilizá-los nas seis equações, são obtidas as chamadas *equações de atualização do método FDTD*.

2.5.1 Equação de atualização de H_x

A equação de H_x fica assim:

$$\begin{aligned}
H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) &= C_{hxh}(i, j, k)H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) \\
&+ C_{hxey}(i, j, k) \left(E_y^n(i, j, k+1) - E_y^n(i, j, k) \right) \\
&+ C_{hx ez}(i, j, k) \left(E_z^n(i, j+1, k) - E_z^n(i, j, k) \right) \\
&+ C_{hxjm}(i, j, k)J_{mix}^n(i, j, k)
\end{aligned} \tag{45}$$

onde:

$$C_{hxh}(i, j, k) = \frac{2\mu_x(i, j, k) - \Delta t\sigma_{mx}(i, j, k)}{2\mu_x(i, j, k) + \Delta t\sigma_{mx}(i, j, k)}$$

$$C_{hxey}(i, j, k) = \frac{2\Delta t}{(2\mu_x(i, j, k) + \Delta t\sigma_{mx}(i, j, k))\Delta z}$$

$$C_{hx ez}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{(2\mu_x(i, j, k) + \Delta t\sigma_{mx}(i, j, k))\Delta y}$$

$$C_{hxjm}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{2\mu_x(i, j, k) + \Delta t\sigma_{mx}(i, j, k)}$$

2.5.2 Equação de atualização de H_y

A equação da componente H_y fica:

$$\begin{aligned}
H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) &= C_{hyh}(i, j, k)H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) \\
&+ C_{hyez}(i, j, k) \left(E_z^n(i+1, j, k) - E_z^n(i, j, k) \right) \\
&+ C_{hyex}(i, j, k) \left(E_x^n(i, j, k+1) - E_x^n(i, j, k) \right) \\
&+ C_{hyjm}(i, j, k)J_{miy}^n(i, j, k)
\end{aligned} \tag{46}$$

onde:

$$C_{hyh}(i, j, k) = \frac{2\mu_y(i, j, k) - \Delta t\sigma_{my}(i, j, k)}{2\mu_y(i, j, k) + \Delta t\sigma_{my}(i, j, k)}$$

$$C_{hyez}(i, j, k) = \frac{2\Delta t}{(2\mu_y(i, j, k) + \Delta t\sigma_{my}(i, j, k))\Delta x}$$

$$C_{hyex}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{(2\mu_y(i, j, k) + \Delta t\sigma_{my}(i, j, k))\Delta z}$$

$$C_{hxjm}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{2\mu_y(i, j, k) + \Delta t\sigma_{my}(i, j, k)}$$

2.5.3 Equação de atualização de H_z

A equação de H_z se torna:

$$\begin{aligned} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) &= C_{hzh}(i, j, k)H_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) \\ &+ C_{hzex}(i, j, k)(E_x^n(i, j+1, k) - E_x^n(i, j, k)) \\ &+ C_{hzey}(i, j, k)(E_y^n(i+1, j, k) - E_y^n(i, j, k)) \\ &+ C_{hzjm}(i, j, k)J_{miz}^n(i, j, k) \end{aligned} \quad (47)$$

onde:

$$C_{hzh}(i, j, k) = \frac{2\mu_z(i, j, k) - \Delta t\sigma_{mz}(i, j, k)}{2\mu_z(i, j, k) + \Delta t\sigma_{mz}(i, j, k)}$$

$$C_{hzex}(i, j, k) = \frac{2\Delta t}{(2\mu_z(i, j, k) + \Delta t\sigma_{mz}(i, j, k))\Delta y}$$

$$C_{hzey}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{(2\mu_z(i, j, k) + \Delta t\sigma_{mz}(i, j, k))\Delta x}$$

$$C_{hzjm}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{2\mu_z(i, j, k) + \Delta t\sigma_{mz}(i, j, k)}$$

2.5.4 Equação de atualização de E_x

A equação de E_x fica assim:

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i, j, k) &= C_{exe}(i, j, k)E_x^n(i, j, k) \\ &+ C_{exhz}(i, j, k) \left(H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j-1, k) \right) \\ &+ C_{exhy}(i, j, k) \left(H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k-1) \right) \\ &+ C_{exje}(i, j, k) J_{eix}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) \end{aligned} \quad (48)$$

onde:

$$C_{exe}(i, j, k) = \frac{2\varepsilon_x(i, j, k) - \Delta t\sigma_{ex}(i, j, k)}{2\varepsilon_x(i, j, k) + \Delta t\sigma_{ex}(i, j, k)}$$

$$C_{exhz}(i, j, k) = \frac{2\Delta t}{(2\varepsilon_x(i, j, k) + \Delta t\sigma_{ex}(i, j, k))\Delta y}$$

$$C_{exhy}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{(2\varepsilon_x(i, j, k) + \Delta t\sigma_{ex}(i, j, k))\Delta z}$$

$$C_{exje}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{2\varepsilon_x(i, j, k) + \Delta t\sigma_{ex}(i, j, k)}$$

2.5.5 Equação de atualização de E_y

A equação da componente E_y fica:

$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}(i, j, k) &= C_{eye}(i, j, k)E_y^n(i, j, k) \\
&+ C_{eyhx}(i, j, k) \left(H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k-1) \right) \\
&+ C_{eyhz}(i, j, k) \left(H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-1, j, k) \right) \\
&+ C_{eyje}(i, j, k) J_{eiy}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k)
\end{aligned} \tag{49}$$

onde:

$$C_{eye}(i, j, k) = \frac{2\varepsilon_y(i, j, k) - \Delta t \sigma_{ey}(i, j, k)}{2\varepsilon_y(i, j, k) + \Delta t \sigma_{ey}(i, j, k)}$$

$$C_{eyhx}(i, j, k) = \frac{2\Delta t}{(2\varepsilon_y(i, j, k) + \Delta t \sigma_{ey}(i, j, k))\Delta z}$$

$$C_{eyhz}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{(2\varepsilon_y(i, j, k) + \Delta t \sigma_{ey}(i, j, k))\Delta x}$$

$$C_{eyje}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{2\varepsilon_y(i, j, k) + \Delta t \sigma_{ey}(i, j, k)}$$

2.5.6 Equação de atualização de E_z

A equação de E_z fica assim:

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i, j, k) &= C_{eze}(i, j, k)E_z^n(i, j, k) \\
&+ C_{ezhy}(i, j, k) \left(H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i-1, j, k) \right) \\
&+ C_{ezhx}(i, j, k) \left(H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j-1, k) \right) \\
&+ C_{ezje}(i, j, k) J_{eiz}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k)
\end{aligned} \tag{50}$$

onde:

$$C_{eze}(i, j, k) = \frac{2\varepsilon_z(i, j, k) - \Delta t \sigma_{ez}(i, j, k)}{2\varepsilon_z(i, j, k) + \Delta t \sigma_{ez}(i, j, k)}$$

$$C_{ezhy}(i, j, k) = \frac{2\Delta t}{(2\varepsilon_z(i, j, k) + \Delta t \sigma_{ez}(i, j, k))\Delta x}$$

$$C_{ezhx}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{(2\varepsilon_z(i, j, k) + \Delta t \sigma_{ez}(i, j, k))\Delta y}$$

$$C_{ezje}(i, j, k) = -\frac{2\Delta t}{2\varepsilon_z(i, j, k) + \Delta t \sigma_{ez}(i, j, k)}$$

Os *coeficientes de atualização*, representados pela letra C nas equações de atualização, são, usualmente, calculados antes dos laços computacionais de iteração. Nos casos em que há alguma propriedade eletromagnética que varie com o tempo ou que dependa dos valores dos campos (ou de ambos), tal propriedade não deve ser incluída nos coeficientes de atualização – logo, deve ser calculada a cada execução do laço de repetição do algoritmo para que seu valor seja atualizado de acordo com cada novo valor de tempo ou de campo (ou de ambos).

2.6 AS CONDIÇÕES DE CONTORNO

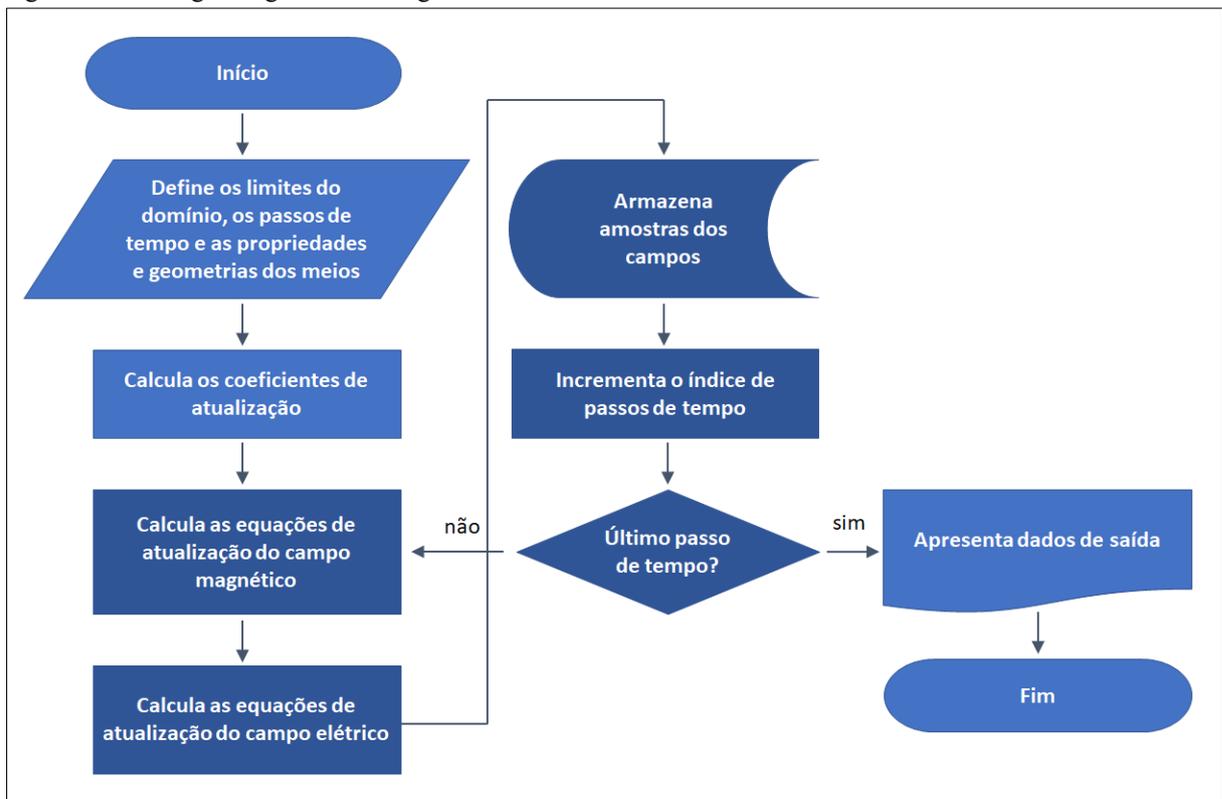
Existe uma variedade de formas de se atribuir as condições de contorno para cada tipo de problema. As configurações dos problemas tratados neste trabalho têm a vantagem de necessitar somente das formas mais simples de se aplicar as condições de contorno. Tais problemas envolvem ambientes cercados por paredes constituídas de condutores elétricos

perfeitos ($\sigma_e \rightarrow \infty$) ou por *paredes magnéticas* ($\sigma_m \rightarrow \infty$). Nestes casos, para que as condições de contorno sejam satisfeitas, basta que se imponha campo elétrico tangencial nulo (no caso dos condutores elétricos perfeitos) ou campo magnético tangencial nulo (no caso das paredes magnéticas) às superfícies das fronteiras.

2.7 ALGORITMO

O método FDTD é uma análise numérica desenvolvida especialmente para modelagens computacionais e há diversas formas de organizar um algoritmo para implementá-lo. A estrutura do algoritmo pode variar conforme a finalidade da sua aplicação, a linguagem de programação através do qual for desenvolvido ou, simplesmente, a preferência do desenvolvedor do programa. No entanto, é possível fazer um fluxograma que represente uma estrutura geral para entender melhor como o método funciona.

Figura 10 - Fluxograma geral de um algoritmo do método FDTD.



Fonte: próprio autor.

No fluxograma da Figura 10, as etapas que estão em azul claro são as etapas que correspondem ao *pré-processamento* e ao *pós-processamento* de um programa que realiza o

método FDTD, enquanto as que estão em azul escuro representam o *processamento*. O pré-processamento é onde são definidos e calculados os parâmetros necessários para a realização dos cálculos iterativos do método – como o número de passos de tempo, as dimensões e o número de células do domínio, as geometrias dos diferentes meios contidos no problema, as propriedades eletromagnéticas dos materiais e os coeficientes de atualização das equações. No processamento, as equações de atualização são executadas repetidas vezes para se calcular os campos elétrico e magnético em todos os pontos discretizados do domínio e por todos os passos de tempo determinados. Também é nesta fase que os valores desejados destes campos são armazenados. E o pós-processamento é a parte encarregada de utilizar os dados de saída para, por exemplo, criar os gráficos que possibilitem a observação do comportamento dos campos, realizar cálculos como a transformada de Fourier para a análise das frequências do problema, ou executar outros comandos que tratem os dados armazenados a fim de que se torne possível a compreensão do problema.

2.8 CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE

O critério de estabilidade que deve ser obedecido pelo método FDTD foi estabelecido por Taflove (1995), segundo o qual:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}. \quad (51)$$

Além disso, para que se tenha uma boa precisão na discretização espacial, com baixa dispersão numérica (resultante da anisotropia numérica introduzida pela discretização espacial), é necessário que:

$$\Delta x, \Delta y \text{ e } \Delta z \leq \frac{\lambda_{\min}}{10} \quad (52)$$

onde λ_{\min} é o menor comprimento de onda presente na simulação. Contudo, para se obter maior precisão, utilizou-se, no programa, células com dimensão máxima 20 vezes menores que o menor comprimento de onda. Esta proporção escolhida tendo como base alguns estudos explicados no livro *Computational Electrodynamics – The FDTD Method* (TAFLOVE, 1995).

A equação (51) é conhecida como a *Condição CFL* (Courant-Friedrichs-Lewy) (SUN, 2017). Ao passo de tempo que se estabeleceu através deste critério, multiplicou-se um fator de valor igual a 0,9. Este fator, também conhecido como *fator Courant*, é utilizado para que haja uma certa diferença entre o valor utilizado e o limite, o que pode evitar que eventuais erros causados por imprecisões de cálculos possam levar à instabilidade do algoritmo, com erros ainda maiores.

2.9 EXCITAÇÃO GAUSSIANA

Todos os campos eletromagnéticos dos problemas tratados neste trabalho são excitados através de fontes de tensão variável cujo valor varia em função do tempo conforme uma *curva de Gauss*:

$$V(t) = e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (53)$$

Na equação, o valor de τ determina a largura da curva e a frequência máxima de seu espectro de frequências. Logo, é importante que se estabeleça um valor que leve a fonte a gerar um sinal que contenha a maior frequência que se deseja analisar no sistema. Há duas maneiras de se determinar um valor adequado para τ . Uma delas é levar em conta a maior frequência que se deseja analisar. A outra é considerar como base a maior frequência suportada pela “resolução da malha” – ou seja, pelo tamanho da célula.

Como o tamanho da célula é, em geral, limitado pela condição de precisão dada em (52), pode acontecer, no caso de tal tamanho estar muito próximo ao valor da condição, de os dois limites de frequência acabarem por ter o mesmo valor. Todavia, é comum, como ocorre neste trabalho, que as dimensões das células sejam consideravelmente menores que a condição mínima de estabilidade, seja devido ao desejo de maior precisão, seja para evitar possíveis erros ou até mesmo por uma simples questão de arredondamento das medidas.

De qualquer maneira, ambas as formas de se determinar τ funcionam, visto que as dimensões das células já são definidas levando-se em conta a frequência que se deseja analisar. No programa desenvolvido neste trabalho, decidiu-se por se calcular τ com base nas dimensões escolhidas para as células. Desta forma, como as células são um pouco menores que a condição dada em (52), a fonte gera um sinal que inclui as frequências desejadas e mais uma faixa de frequências um pouco maiores. Isto em nada muda o custo computacional, uma vez que os

números de passos e de células do domínio se mantêm os mesmos. A vantagem é que as frequências próximas ao limite de análise se tornam mais evidentes nos resultados.

Elsherbeni e Demir (2015) sugerem como limite mínimo, para que se considere a frequência válida, a magnitude de 10% da magnitude máxima do espectro de frequências. Deste modo τ é calculado pela equação:

$$\tau \cong \frac{n_c \Delta s_{máx}}{2c} \quad (54)$$

onde n_c é o número de células por comprimento de onda e $\Delta s_{máx}$ é a maior dimensão da célula nas direções cartesianas (Δx , Δy e Δz).

Além disso, como se deseja que toda a curva de Gauss seja simulada e que a excitação se inicie com valores baixos e cresça lentamente, deve-se atrasar o sinal gerado pela fonte. Neste trabalho, utilizou-se o valor de $t_0 = 4,5\tau$. A equação (53) pode ser escrita desta forma:

$$V(t) = V_{máx} e^{-\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2} \quad (55)$$

na qual $V_{máx}$ é a tensão máxima atingida pela fonte.

O objetivo deste capítulo foi apresentar resumidamente um material teórico necessário para a compreensão do desenvolvimento do programa. Entretanto, tanto para esta compreensão quanto para o desenvolvimento em si, é provável que se torne inevitável o aprofundamento em tais conteúdos e a busca por fontes mais completas de conhecimento, as quais podem ser encontradas nas referências bibliográficas.

3 DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA

O programa de simulação de propagação de ondas eletromagnéticas foi desenvolvido através do *software* MATLAB[®]. Para que se dominasse a relação entre compreensão da teoria do método numérico e a criação de um código computacional que o executasse, foram escritos e testados alguns programas mais simples antes da criação do programa final, os quais consistiam, por exemplo, em aplicações do método para resolver problemas em espaços unidimensionais ou bidimensionais, ou mesmo em programas que executavam funções de partes específicas do código.

O MATLAB[®] foi escolhido como *software* devido à sua praticidade e por ser uma ferramenta com a qual o autor já possuía grande familiaridade. Além disso, decidiu-se por priorizar o aprendizado no método numérico, a didática e a eficiência para o tempo de desenvolvimento do trabalho à redução de tempo de simulações, a qual poderia ser obtida com linguagens de programação de nível mais baixo.

O programa final é dividido em três partes, cada uma constituída por várias sub-rotinas. A parte de *pré-processamento* define as variáveis, as constantes, o domínio de cálculo, as características físicas do problema e os parâmetros de saída. No *processamento*, as equações do FDTD são executadas repetidamente ao longo do domínio definido. O *pós-processamento* é responsável por utilizar os dados obtidos no processamento para se chegar aos resultados desejados – principalmente realizar a transformada de Fourier dos valores de campo – os quais são apresentados de forma compreensível através de gráficos e tabelas.

Durante todo o processo de desenvolvimento, a coerência do programa foi conferida de diferentes formas, entre elas a utilização de animações para a visualização dos gráficos. Estas animações foram executadas tanto nos programas de teste – de simulações unidimensionais e bidimensionais – quanto no programa tridimensional final, a fim de que se observasse com mais detalhes o comportamento da propagação das ondas ao longo do tempo e do espaço do problema. Nos APÊNDICES A e B, encontram-se breves descrições de alguns dos programas de testes de problemas unidimensionais e bidimensionais. A animação do programa para o problema de três dimensões de cavidade parcialmente preenchida, especificamente, foi feita com a ajuda do código contido na segunda edição do livro *The FDTD Method for Electromagnetics with MATLAB[®] Simulations*, dos autores Elsherbeni e Demir (1995).

3.1 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

Quanto à validação dos resultados, compararam-se as frequências de ressonância obtidas através de *FFTs* (*fast Fourier transforms*, ou transformadas rápidas de Fourier, em português) das amostras do campo em determinados pontos do problema com as frequências de ressonância obtidas de forma analítica. Dois tipos de problemas foram utilizados para comparação. Um deles consiste em problemas de cavidades vazias, que podem ter quaisquer dimensões (desde que não sejam muito próximas do comprimento de onda do sinal que se deseja analisar ou não sejam grandes o bastante para que o programa se mantenha executando por tempo indeterminado). O outro tipo é um problema específico tratado no artigo *Efficient analysis of resonant cavities by finite element method in the time domain* (CARPES; PICHON; RAZEK, 2000), publicado no periódico *IEE Proceedings - Microwaves, Antennas and Propagation*, do *IEEE*, o qual calcula as frequências de ressonância de uma cavidade parcialmente preenchida com um dielétrico através do método de elementos finitos. Neste trabalho, são abordadas duas simulações, cada uma com a configuração de um dos tipos de problema, utilizadas para validar os resultados do programa.

3.2 DEFINIÇÃO DO DOMÍNIO DOS PROBLEMAS

A quantidade de passos de tempo e o domínio espacial de cálculo dos problemas são definidos segundo os seguintes critérios:

- Os critérios de estabilidade;
- A geometria do problema;
- A precisão desejada dos resultados;
- O tempo que o computador leva para executar a simulação.

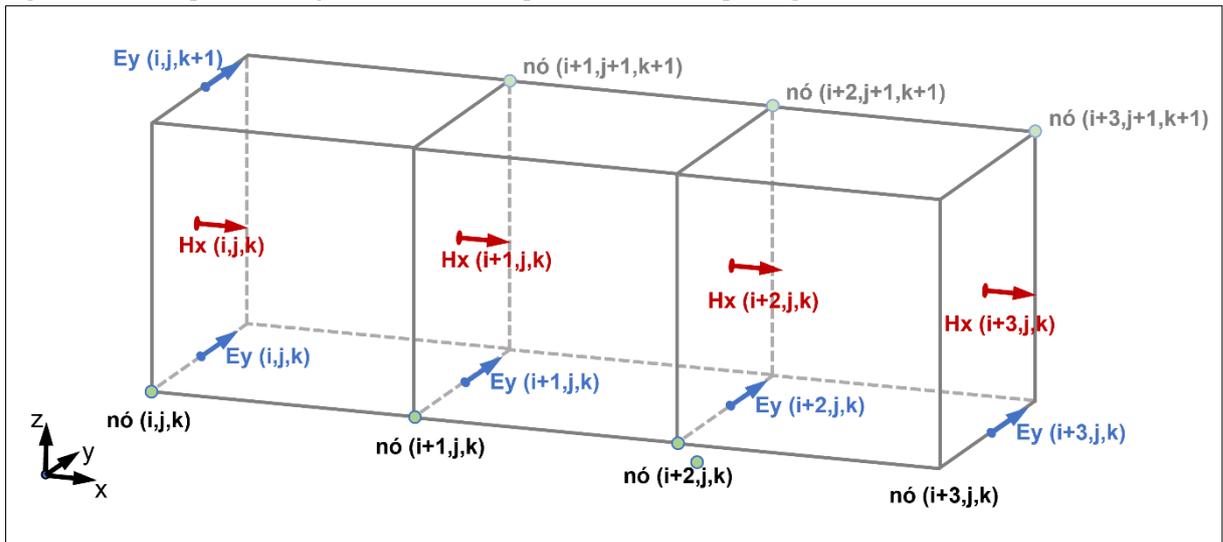
O tamanho das células deve se adequar à geometria do problema para que se ajuste, por exemplo, a casos em que há objetos de dimensões muito pequenas. Além disso, simulações com células menores costumam gerar resultados mais precisos, principalmente em problemas nos quais se torna importante diminuir certas imprecisões causadas pela intercalação de meia célula entre as propriedades elétricas e as propriedades magnéticas. Por outro lado, diminuir o tamanho das células significa aumentar o tempo computacional. Logo, realizaram-se vários testes até que se decidisse por tamanhos de células e números de passos de tempo – para cada

tipo de problema – que constituíssem uma simulação que chegasse a resultados com precisão aceitável levando um tempo de execução viável.

3.2.1 Número de células e de nós no FDTD

Parte dos fundamentos da criação de um programa de simulação do método FDTD é a definição do domínio do problema e a determinação da quantidade de nós e células no código do programa. Nem sempre a quantidade de células e a quantidade de nós em uma dimensão do problema são as mesmas uma da outra. No arranjo de células apresentado na Figura 11, é possível perceber que, na direção de x , há três células e quatro componentes x de campo magnético (H_x). O mesmo ocorre com o número de componentes y do campo elétrico (E_y) nas direções x e z .

Figura 11 - Exemplo de arranjo de células e componentes x do campo magnético.

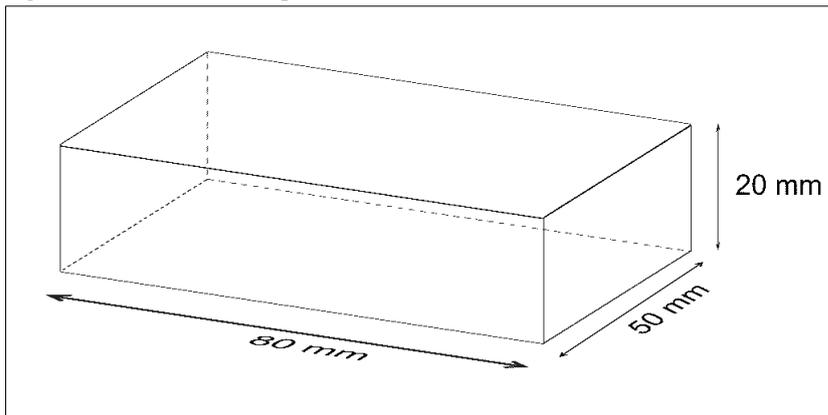


Fonte: próprio autor.

3.3 PROBLEMA DE CAVIDADE VAZIA

O exemplo de problema de cavidade ressonante vazia tratado neste trabalho possui paredes perfeitamente condutoras e dimensões que medem $80 \text{ mm} \times 50 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ (Figura 12). Foram analisadas, nesta simulação, as frequências de ressonância da cavidade até a frequência de 10 GHz.

Figura 12 - Geometria do problema de cavidade vazia.



Fonte: próprio autor.

3.3.1 Definição do domínio espacial do problema

As células utilizadas neste problema são cúbicas, com arestas de 1 mm de comprimento, pois células cúbicas simplificam as equações de atualização e forneceram resultados aceitáveis. Além disso, as três dimensões do problema são divisíveis por 1 mm, característica que dispensa a necessidade de adaptações de tamanhos do domínio. A simulação foi feita com 2^{17} passos de tempo, um número de passos que, nesta situação, levou um tempo razoável para ser executado e que permitiu ao programa chegar a resultados com a precisão desejada.

A partir da explicação ilustrada pela Figura 11, é possível identificar quantas componentes de cada campo há em cada direção x , y e z . A quantidade de elementos de H_x ao longo do eixo x , por exemplo, é uma unidade a mais que o número de células contidas nesta direção. Como este problema de cavidade vazia possui 80 mm de comprimento na direção do eixo x e foi dividido em células cúbicas de arestas de 1 mm, então há 81 (80 células + 1) elementos de H_x ao longo desta direção. Ao longo da direção y , há apenas 50 – já que, nesta direção, há uma componente H_x para cada célula, como mostra a Figura 11. A mesma lógica foi seguida para as outras componentes de campo e para as propriedades elétricas e magnéticas.

No código, são definidas matrizes cujos elementos das linhas são as componentes de campo (ou de propriedade eletromagnética) na direção x , os elementos das colunas são as componentes na direção y e os elementos localizados na altura da matriz são as componentes na direção z . A Tabela 1 mostra as quantidades de elementos das matrizes de componentes dos campos, correspondentes às componentes em cada ponto do domínio.

Tabela 1 - Número de componentes de campo no problema discretizado e na matriz.

	Na direção x (linhas)	Na direção y (colunas)	Na direção z (altura)
H_x, μ_x e σ_{mx}	81	50	20
H_y, μ_y e σ_{my}	80	51	20
H_z, μ_z e σ_{mz}	80	50	21
E_x, ε_x e σ_{ex}	80	51	21
E_y, ε_y e σ_{ey}	81	50	21
E_z, ε_z e σ_{ez}	81	51	20

Fonte: próprio autor.

As matrizes dos campos elétrico e magnético, assim como as matrizes de condutividades elétrica e magnética, são declaradas inicialmente como matrizes de zeros. Já as de permissividades e permeabilidades relativas são declaradas inicialmente como matrizes cujos elementos são todos iguais a 1.

3.3.2 Passos de tempo

De acordo com alguns autores, entre eles Cerna e Harvey (2000) e SIMS (2022), para a aplicação da transformada rápida de Fourier a uma função, é importante que o número de pontos utilizados de seu domínio seja uma potência de 2. Utilizou-se, então, um valor com este requisito para o número de passos de tempo, de modo que se aplicasse corretamente a FFT no pós-processamento do programa.

Depois de se testar algumas simulações com diferentes números de passos de tempo, escolheu-se aproveitar os resultados da simulação em que se utilizou 2^{17} passos de tempo, pois tanto a precisão dos resultados obtidos quanto o tempo de espera até o término da simulação foram considerados aceitáveis. Ademais, a quantidade e o tamanho dos passos de tempo seguiram os critérios apresentados na seção 2.8.

O valor de cada passo de tempo foi calculado através da equação (51):

$$\Delta t = \frac{1}{299.792.458 \sqrt{\frac{1}{(1 * 10^{-3})^2} + \frac{1}{(1 * 10^{-3})^2} + \frac{1}{(1 * 10^{-3})^2}}} \cong 1,11 \text{ ms} \quad (56)$$

3.3.3 Fontes de sinal e pontos de amostragem

Introduziram-se três fontes de tensão com tamanho de uma célula e definiram-se dois pontos de amostragem de campos, cujas localizações foram escolhidas evitando-se sobreposições e posições simétricas (como no centro da cavidade ou com distâncias semelhantes de alguma parede), mas sem outros critérios (Tabela 2). É importante que ocorra excitações nas três direções cartesianas para que todas as frequências de ressonância se manifestem, uma vez que a relação entre o comprimento de onda e cada uma das dimensões da cavidade são diferentes.

Tabela 2 - Índices dos nós da posição da fonte de sinal e do ponto de amostragem (cavidade vazia).

	Coordenada(s) x (mm)	Coordenada(s) y (mm)	Coordenada(s) z (mm)
Fonte de tensão 1	23 e 24	14 e 15	7 e 8
Fonte de tensão 2	69 e 70	44 e 45	18 e 19
Fonte de tensão 3	26 e 27	27 e 28	8 e 9
Ponto de amostra	58	39	14

Fonte: próprio autor.

As três fontes possuem uma resistência de 20Ω e cada uma delas introduz um sinal de tensão com magnitude que forma uma curva gaussiana em função do tempo, conforme a equação (55):

$$V(t) = 1 * e^{-\left(\frac{t-4,5\tau}{\tau}\right)^2} \quad (57)$$

Nesta simulação, o valor de τ , determinado pela equação (54), ficou:

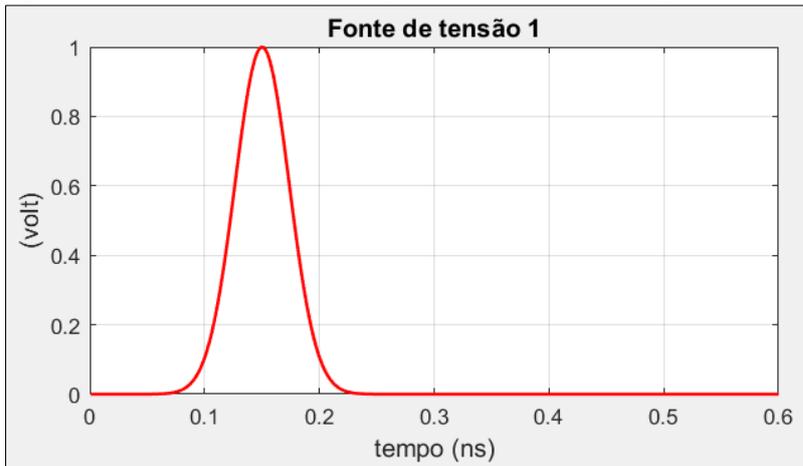
$$\tau = \frac{20 * (1 * 10^{-3})}{2 * 299\,792\,458} \cong 33,36 \text{ ps} \quad (58)$$

e, portanto:

$$t_0 = 4,5\tau \cong 0,15 \text{ ns} \quad (59)$$

A amplitude do sinal é igual a 1 V (equação (57) e Figura 13). A fonte 1 está orientada na direção de z , no sentido positivo; a fonte 2 está orientada na direção do eixo x , no sentido positivo; e a fonte 3 está orientada na direção de y , também no sentido positivo.

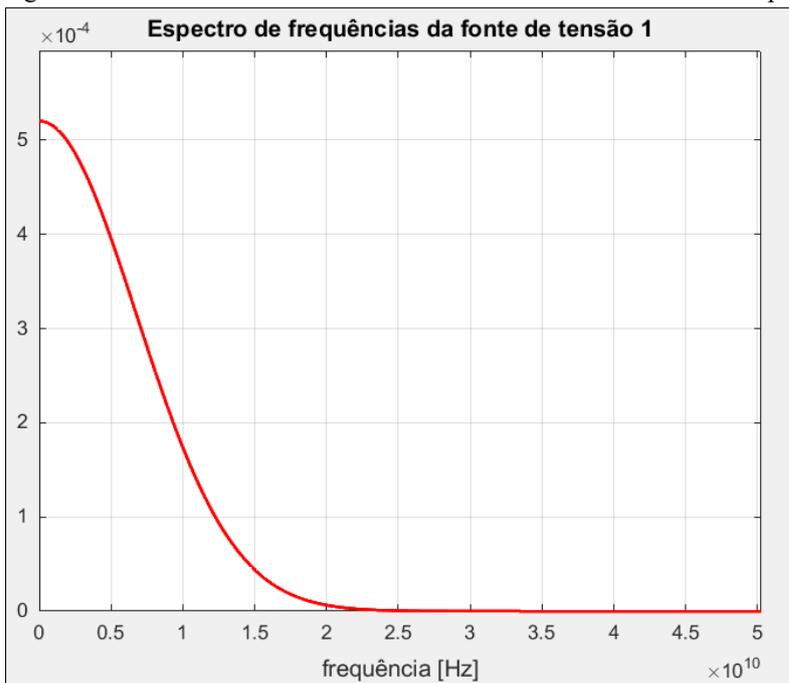
Figura 13 - Gráfico do sinal gerado pela fonte de tensão 1 do problema de cavidade ressonante vazia.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 14 mostra o gráfico da transformada de Fourier da função de geração do sinal de tensão da fonte 1. Nela, é possível perceber que as frequências que se deseja analisar – até 10 GHz – estão incluídas no espectro do sinal da fonte.

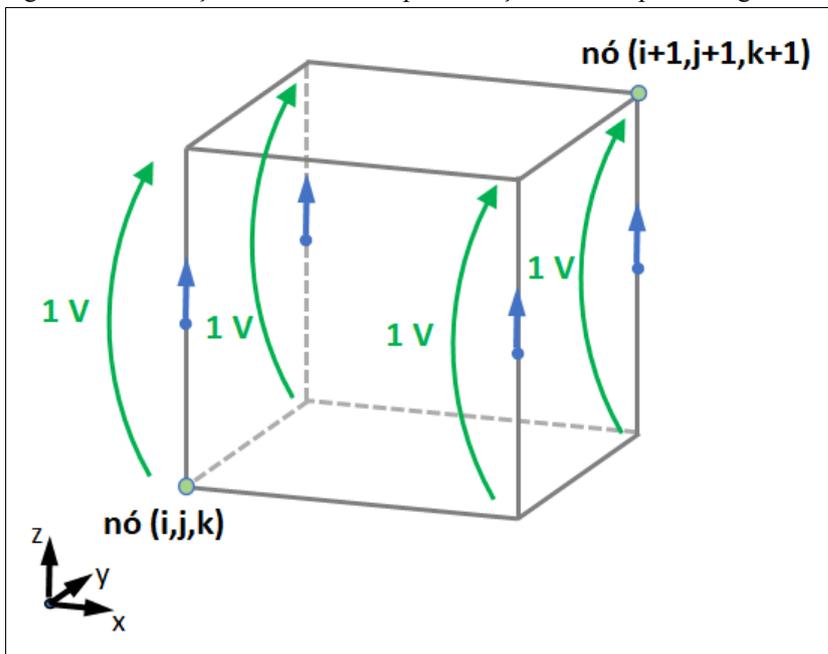
Figura 14 - Gráfico da transformada de Fourier da fonte de tensão 1 do problema de cavidade vazia.



Fonte: Próprio autor.

Como mencionado no início da seção, a fonte possui o tamanho de uma célula e uma resistência interna de 20Ω . Para a criação de uma fonte de tensão no volume de uma célula, o código é implementado com se houvesse quatro fontes, uma em cada aresta da célula, todas com a tensão de 1 V (Figura 15). Como as fontes de tensão do programa nada mais fazem que estabelecer uma diferença de potencial entre os dois nós que as cercam através da equação de atualização da componente do campo elétrico na aresta, as fontes posicionadas “lado a lado” se comportam como se estivessem em paralelo.

Figura 15 - Ilustração da forma de implementação da fonte pelo código.



Fonte: próprio autor.

A resistência interna da fonte é criada pelo programa de forma semelhante, subdividindo-a em outras quatro resistências. O seu valor é estabelecido através da alteração das componentes de condutividade elétrica nas posições estabelecidas pela fonte. Entretanto, neste caso, as suas subdivisões de resistência não possuem o mesmo valor da resistência interna da fonte, pois estão em paralelo. Ou seja, o valor da resistência da fonte é o valor da resistência equivalente ao paralelo das quatro resistências das arestas da fonte.

3.3.4 Equações de atualização

O problema de cavidade ressonante tem a vantagem da simplicidade em relação a problemas de propagação em meios abertos, pois as condições de contorno em suas paredes

perfeitamente condutoras (campo elétrico tangencial nulo) são facilmente impostas. De fato, como o campo em todos os pontos do domínio, incluindo os pontos nas paredes condutoras, são definidos inicialmente como nulos, basta que não se atualize os campos elétricos tangenciais situados nas paredes para que estas se comportem como paredes perfeitamente condutoras. Ou seja, não é necessário atribuir um valor para a condutividade nas paredes. Em vez disso, excluem-se os pontos de suas localizações das equações de atualização das componentes de campos elétricos cuja direção é a mesma que os planos das paredes.

Uma análise da forma como as equações de atualização constam no código do problema de cavidade vazia é uma boa forma de se compreender melhor a respeito de como o método FDTD e as condições do contorno do problema são aplicados no cálculo computacional.

3.3.4.1 *Localização no tempo das componentes*

No programa, as matrizes de campos são atualizadas a cada passo de tempo, e todos os seus elementos são substituídos e não estão vinculados individualmente a instantes de tempo específicos. Ora, o que faz com que as equações de atualização se relacionem com a passagem de tempo determinada são três características importantes:

- a atribuição, a cada passo de tempo, de novos valores para as componentes baseados nos valores calculados no passo de tempo anterior;
- o fato de que as equações das componentes elétricas e as equações das componentes magnéticas se executarem separadamente umas após a outras, em sequência – neste caso, primeiro são executadas as equações das componentes de campo magnético (de H_x , de H_y , e de H_z) e depois as equações de campo elétrico (de E_x , de E_y e de E_z);
- e o valor de Δt , presente nos coeficientes de atualização.

Por exemplo, como o sinal de igualdade na sintaxe do MATLAB[®] – assim como em grande parte das linguagens de programação – dá o comando de atribuição de valor a uma variável, então, no caso da equação de atualização de H_x do código (Figura 16), o elemento **Hx** que está à direita do sinal de igualdade possui o valor calculado no passo de tempo anterior ($n - 1$).

Figura 16 - Equação de atualização da componente H_x .

```

% Atualiza os campos magnéticos

tempo_atual = tempo_atual + dt/2;

Hx = Chxh.*Hx ...
    + Chxey.*(Ey(1:nxp1,1:ny,2:nzp1)-Ey(1:nxp1,1:ny,1:nz)) ...
    + Chxez.*(Ez(1:nxp1,2:nyp1,1:nz)-Ez(1:nxp1,1:ny,1:nz));

```

Fonte: próprio autor.

Além disso, em um único passo de tempo, todas as componentes magnéticas são calculadas e, depois, as elétricas (Figura 17). Estas últimas utilizam os valores das componentes magnéticas recém calculadas, ou seja, suas atualizações ocorrem, de fato, depois das atualizações das componentes magnéticas. O conjunto de equações magnéticas e o conjunto de equações elétricas estão, portanto, intercalados no tempo entre si.

Figura 17 - Laço principal de iterações do método FDTD, ao longo dos passos de tempo.

```

for passos_de_tempo = 1:numero_de_passos_de_tempo
    atualiza_campos_magneticos;
    registra_amostras_dos_campos_magneticos;
    atualiza_campos_eletricos;
    atualiza_fontes_de_tensao;
    registra_amostras_dos_campos_eletricos;
    registra_amostras_das_tensoes;
    exibe_as_amostras_dos_parametros;
end

```

Fonte: próprio autor.

Como as derivadas temporais das equações consistem na diferença entre as diferenças finitas das componentes calculadas anteriormente e das componentes sendo calculadas dividida pelo passo de tempo Δt , as atualizações de cada conjunto de componentes estão separadas por um passo de tempo entre si. Em outras palavras, cada atualização dos elementos da componente de campo E_x , por exemplo, é calculada para um passo de tempo depois da atualização anterior destes mesmos elementos.

3.3.4.2 Os elementos das matrizes atualizados nos laços de repetição

Outro ponto a ser destacado – o qual depende toda a geometria do problema – é o número de elementos das matrizes de componentes a serem atualizados em cada uma das

direções x , y e z . Na Figura 16, há alguns índices nas equações de atualização que se referem a elementos das matrizes de campos que serão atualizados. A Figura 18 mostra o significado destes índices, na qual as variáveis nx , ny e nz são os números de células do domínio ao longo das direções dos eixos x , y e z , respectivamente.

Figura 18 - Definição dos índices de elementos presentes nas equações de atualização.

```
% Alguns parâmetros auxiliares frequentemente usados
nxp1 = nx+1;    nyp1 = ny+1;    nzp1 = nz+1;
nxm1 = nx-1;    nxm2 = nx-2;    nym1 = ny-1;
nym2 = ny-2;    nzm1 = nz-1;    nzm2 = nz-2;
```

Fonte: próprio autor.

Nota-se que a equação de atualização dos elementos da matriz da componente H_x , mostrada na Figura 16, atualiza todos os seus elementos. Isso quer dizer que todos os elementos que representam a componente de campo magnético H_x por todo o domínio, inclusive as que se situam sobre as paredes perfeitamente condutoras, são atualizadas em todos os passos de tempo. O mesmo ocorre com as componentes H_y e H_z .

Neste problema, os elementos da matriz de componentes de campo magnético que representam campo situado sobre as paredes perfeitamente condutoras devem ser todos nulos. Entretanto, não é necessário que se imponha valor zero a tais elementos, uma vez que eles serão automaticamente nulos pela imposição de campo elétrico tangencial nulo nas paredes da cavidade (a Figura 8 pode facilitar a visualização do rotacional do campo elétrico).

A Figura 19 mostra como o valor nulo é imposto ao campo elétrico tangencial nas paredes. Consultando-se a Tabela 1, percebe-se que a matriz das componentes E_y possui 81 elementos na direção x (ou seja, a matriz tem **nxp1** linhas de elementos), 50 elementos na direção y (a matriz tem **ny** colunas de elementos) e 21 elementos na direção z (a matriz tem **nzp1** elementos em sua terceira dimensão). Na equação de atualização de E_x do programa, o primeiro e o último elemento de cada linha da matriz (os elementos com segundo índice **1** ou **nxp1**) não são atualizados. O mesmo ocorre com os elementos cujo terceiro índice são **1** ou **nzp1**. Isto ocorre porque estes elementos representam as componentes de campo elétrico tangenciais situadas sobre as paredes perfeitamente condutoras, como pode ser visualizado na Figura 20. Como tais elementos são declarados inicialmente com valor zero e não são atualizados, o campo elétrico tangencial às paredes da cavidade se mantém nulo ao longo da

simulação (e, conseqüentemente, o mesmo acontece com o campo magnético ortogonal às paredes).

Figura 19 - Equação de atualização da componente E_y .

```
% Atualiza os campos elétricos, exceto as componentes tangenciais
% nas fronteiras

tempo_atual = tempo_atual + dt/2;

Ey(2:nx,1:ny,2:nz) = Ceye(2:nx,1:ny,2:nz).*Ey(2:nx,1:ny,2:nz) ...
+ Ceyhx(2:nx,1:ny,2:nz).* ...
(Hx(2:nx,1:ny,2:nz)-Hx(2:nx,1:ny,1:nz-1)) ...
+ Ceyhz(2:nx,1:ny,2:nz).* ...
(Hz(2:nx,1:ny,2:nz)-Hz(1:nx-1,1:ny,2:nz));
```

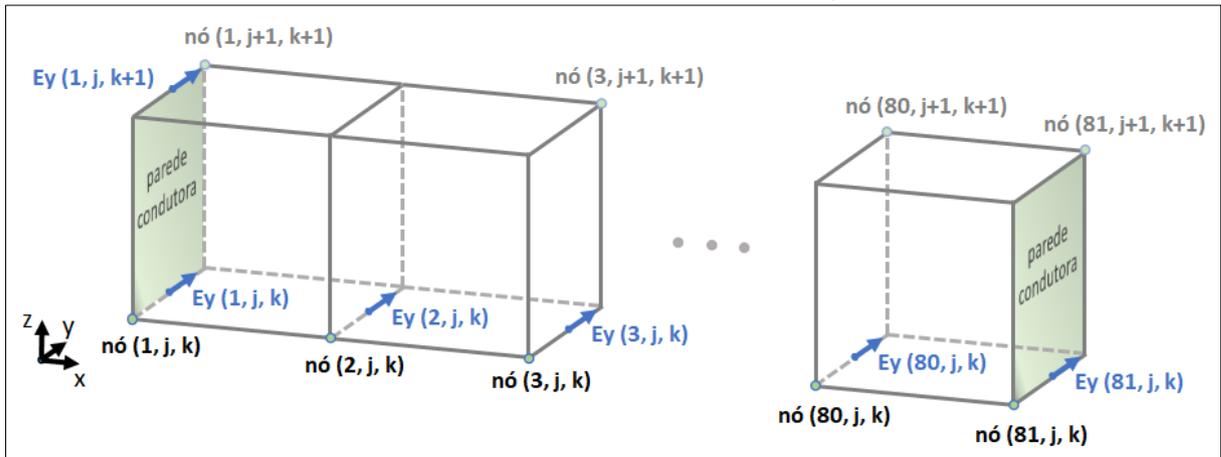
Fonte: próprio autor.

Já as primeiras e últimas componentes ao longo da direção y (elementos com segundo índice **1** e **ny** da matriz) não são, no geral, deixados de fora da atualização (exceto, claro os elementos deixados de fora por possuírem os outros índices mencionados no parágrafo anterior). Isto ocorre porque não há elementos que representem componentes de campo elétrico tangencial situadas sobre as paredes paralelas ao plano xz . Outra observação a se lembrar é que, neste caso, a disposição das componentes sobre as arestas que se situam entre dois nós faz com que a quantidade de elementos e a quantidade de células sejam iguais.

Vale ressaltar que a linha de células ilustrada na Figura 20 representa todas as camadas paralelas ao plano yz , exceto pelas linhas que tangenciam as paredes, pois estas últimas têm mais componentes nulas. As linhas de células que tocam o plano xy , por exemplo, possuem todos as componentes E_y representadas por elementos de terceiro índice iguais a **1** nulas.

No caso dos campos magnéticos, a diferença no procedimento é que não há a necessidade de se excluir os elementos situados sobre as paredes condutoras. Ocorre que a configuração de células adotada faz com que os elementos de componentes magnéticas situados sobre as paredes condutoras sejam todos ortogonais a elas. Portanto, como o campo elétrico tangente às paredes é todo nulo, os campos magnéticos resultantes de seus rotacionais também serão todos nulos. Durante o desenvolvimento do programa, testou-se a imposição e a não-imposição de campos magnéticos ortogonais às paredes nulos e, em ambos os casos, eles se mantiveram nulos e os resultados foram exatamente os mesmos.

Figura 20 - Ilustração da disposição de uma linha de células e componentes E_y na direção x do domínio.



Fonte: próprio autor.

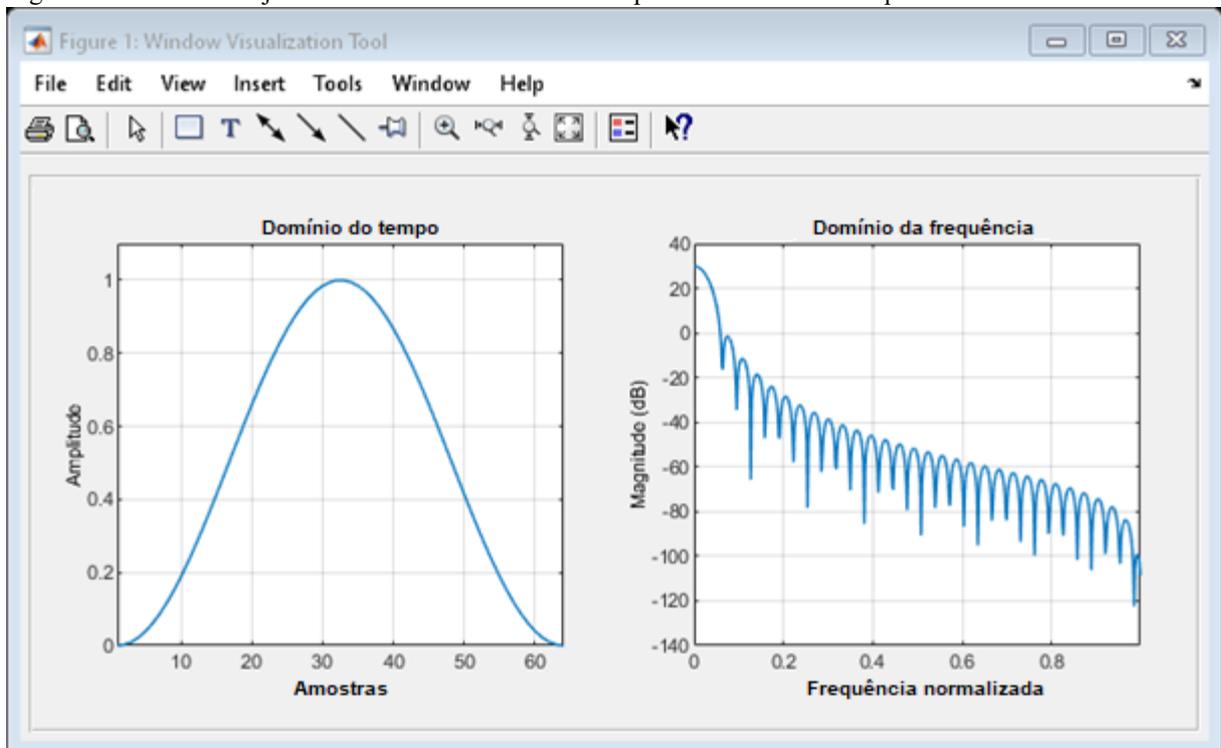
Há ainda uma última observação que pode ser útil para conferir se a construção das equações está correta em relação às quantidades de elementos de componentes de campo. Nos laços da equação de atualização de uma determinada componente de campo elétrico, o número de elementos nas direções diferentes à direção da componente (por exemplo, as atualizações de E_z nas direções x e y) são uma unidade maior que a quantidade de células – e o número de elementos na mesma direção é o mesmo da quantidade de células. Já nos laços da equação de atualização de uma componente de campo magnético, o número de elementos na mesma direção da componente (por exemplo, as atualizações de H_x na direção x) é o mesmo da quantidade de células. Nas outras direções, o número de elementos é uma unidade a mais.

3.3.5 Pós-processamento

A última parte do programa é encarregada de duas atribuições principais. A primeira é encontrar e apresentar em gráficos as frequências de ressonância da cavidade através da realização das transformadas de Fourier dos conjuntos de amostras de campo colhidas pelo código ao longo da execução do laço das equações de atualização. O pacote de ferramentas *Signal Processing Toolbox*TM, do MATLAB[®], oferece uma forma de realizar a *transformada rápida de Fourier* através da função `fft()`. Esta função do MATLAB[®] não fornece de imediato as frequências de ressonância, mas, com alguns poucos passos, explicados no **APÊNDICE C**, os dados de saída da função são tratados para que se tornem o gráfico de espectro de frequências desejado.

Neste programa, todavia, antes ainda da aplicação da transformada de Fourier, o conjunto de amostras é multiplicado por uma função janela, a *função de Hann*. Esta janela, ilustrada na Figura 21, é utilizada, neste caso, para tornar os picos de frequências de ressonância do gráfico da transformada de Fourier mais definidos e discrimináveis entre si. No MATLAB®, esta função é facilmente implementada através da função interna **hanning()**. Esta janela é usualmente aplicada à fonte de sinal para suavizar a excitação no início e no final da simulação. No caso da fonte de curva gaussiana, não existe esta necessidade, uma vez que a curva gaussiana já se inicia com uma baixa taxa de crescimento, a qual também aumenta lentamente.

Figura 21 - Gráficos da janela de Hann no domínio do tempo e no domínio da frequência.



Fonte: MathWorks®.

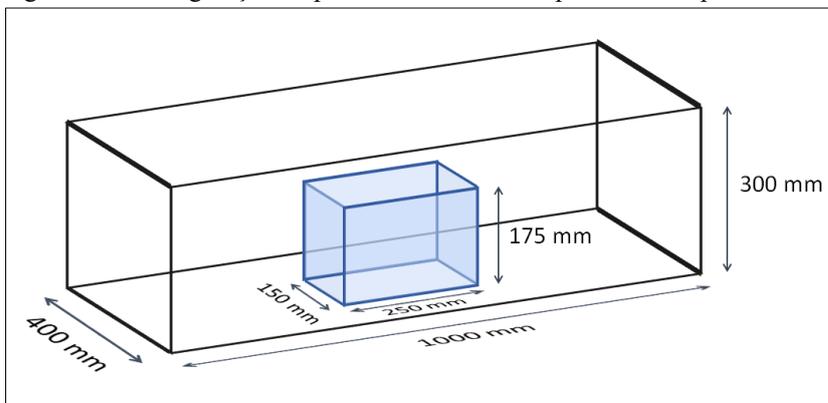
A segunda principal atribuição do pós-processamento do programa é a de gerar uma animação tridimensional para a visualização da propagação da onda ao longo do domínio de cálculo. A parte de animação do programa foi feita com base nas instruções do livro *The FDTD Method for Electromagnetics with MATLAB® Simulations*, dos autores Elsherbeni e Demir (1995).

Ao se utilizar o programa, geralmente é oportuno escolher apenas um dos dois tipos de resultado, – ou o gráfico da transformada de Fourier, ou a animação – pois a transformada de Fourier requer um número demasiadamente grande de passos de tempo para que proveja um bom resultado.

3.4 PROBLEMA DE CAVIDADE PARCIALMENTE PREENCHIDA

No problema de cavidade parcialmente preenchida com dielétrico semelhante ao problema de Carpes, Pichon e Razek (2000), a cavidade mede $400 \text{ mm} \times 1000 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$, enquanto o meio dielétrico (o “objeto”) contido na cavidade mede $150 \text{ mm} \times 250 \text{ mm} \times 175 \text{ mm}$. O objeto, de permissividade elétrica relativa $\epsilon_r = 16$, está centralizado na cavidade em relação aos eixos x e y e está encostado no plano z inferior, como mostra a Figura 22.

Figura 22 - Configuração do problema de cavidade parcialmente preenchida.

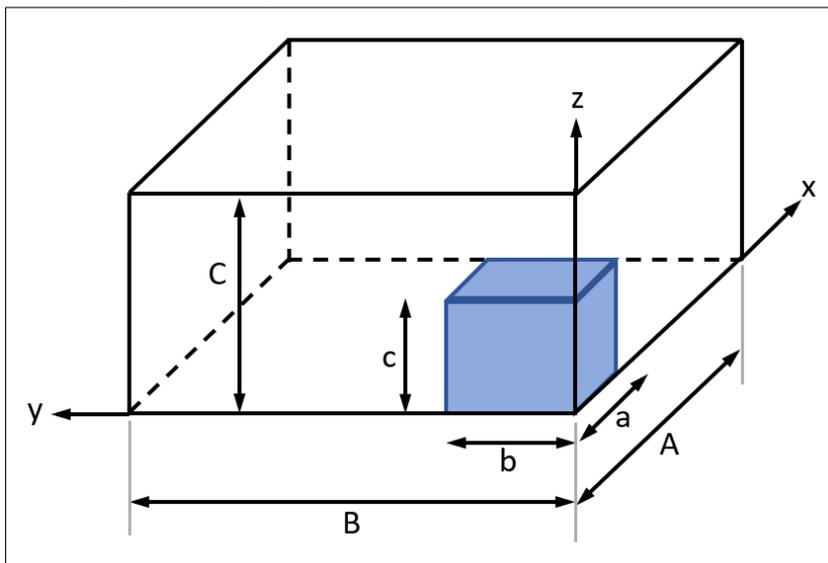


Fonte: próprio autor.

Figura 23 - Configuração de um quarto do problema para simulação.

$A = 200 \text{ mm}$; $B = 500 \text{ mm}$; $C = 300 \text{ mm}$.

$a = 75 \text{ mm}$; $b = 125 \text{ mm}$; $c = 175 \text{ mm}$.



(CARPES; PICHON; RAZEK, 2000)

Entretanto, a construção do problema no programa é feita da mesma forma que no artigo de referência, no qual a simulação é realizada levando-se em conta apenas um quarto da

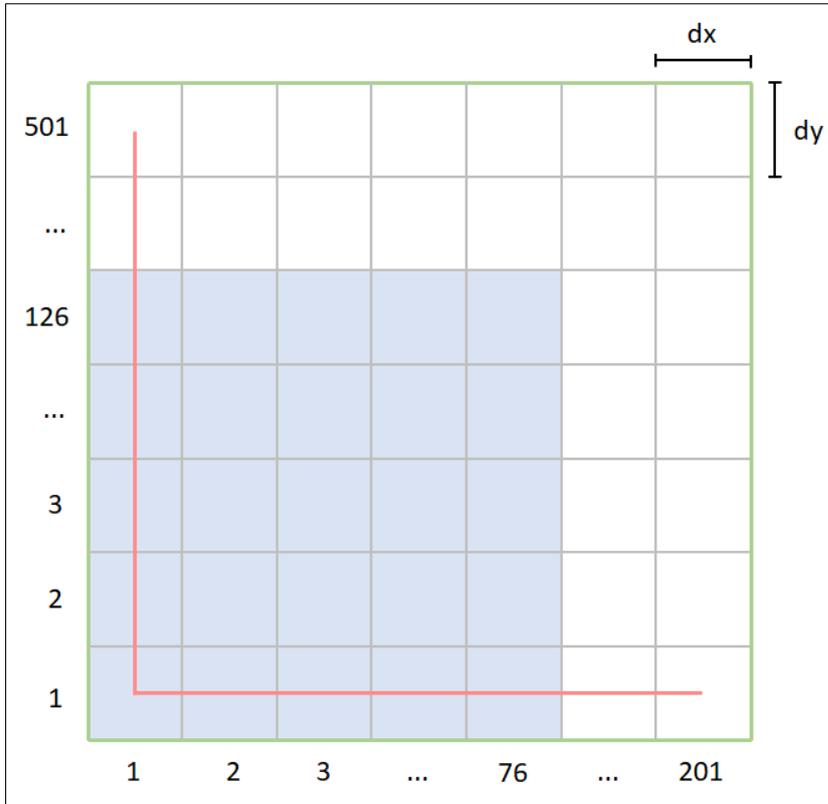
cavidade e inserindo-se duas paredes magnéticas (com campo magnético tangencial nulo) – uma no plano zx e outra no plano yz . (Figura 23). Esta abordagem reduz o domínio do cálculo e, portanto, o tempo de simulação. As frequências de ressonância analisadas nesta simulação foram de até 600 MHz, assim como no artigo de referência.

3.4.1 Definição do domínio espacial do problema

Adotou-se, neste problema, o uso de células cujas arestas possuem comprimentos com valores diferentes para cada dimensão x , y e z , pois houve a necessidade de minimizar as imprecisões das distâncias e comprimentos causadas pelo deslocamento de meia célula entre as propriedades elétricas e as propriedades magnéticas. Neste caso, não havia um tamanho de célula que levasse a dimensões exatas tanto do meio dielétrico quanto da cavidade ressonante. Diante disso, escolheram-se células cujas dimensões fossem divisores das distâncias entre as paredes magnéticas e as paredes elétricas (perfeitamente condutoras), de modo que o tamanho da cavidade ressonante fosse exatamente o mesmo do problema do artigo de comparação. Em contrapartida, o tamanho do meio dielétrico sofreu uma pequena alteração, a qual foi minimizada pela utilização de células pequenas.

A Figura 24 possibilita uma visualização de como o domínio espacial foi configurado. Nela, as linhas em verde representam as paredes perfeitamente condutoras, as linhas em vermelho simbolizam as paredes magnéticas e a região em azul ilustra o meio dielétrico. Embora as linhas vermelhas não toquem as linhas verdes, o programa funciona como se as paredes magnéticas e condutoras se tocassem, pois as linhas são apenas ilustrações de ligação entre o ponto máximo e o mínimo das paredes. As paredes condutoras inferior e à esquerda não influenciam no resultado da simulação, já que a fonte está do outro lado das paredes magnéticas e a onda não as atravessa. Elas servem somente para limitar o domínio de simulação do programa.

Figura 24 – Representação de um corte paralelo ao plano xy da configuração das células do problema de cavidade parcialmente preenchida.



Fonte: próprio autor.

Entre a parede magnética que é paralela ao eixo y e a parede condutora oposta, há 200,5 células. Tendo isto em vista, dividiram-se os 200 mm (o valor distância no problema) por esta quantidade de células para se obter o tamanho das células na dimensão x . O mesmo cálculo foi feito para se obter o comprimento das células na direção y (equações (60) e (61)). No caso do tamanho na direção de z , em que ambos os contornos são paredes condutoras, não houve necessidade de células tão pequenas, já que não existe o problema de imprecisão causado pelo deslocamento de meia célula entre as propriedades elétricas e magnéticas.

$$dx = \frac{200 \text{ mm}}{205,5 \text{ células}} \cong 0,9975 \text{ mm} \quad (60)$$

$$dy = \frac{500 \text{ mm}}{505,5 \text{ células}} = 0,999000 \text{ mm} \quad (61)$$

$$dz \cong \frac{\lambda_{min}}{20} \cong 6,25 \text{ mm} \quad (62)$$

Assim como no problema de cavidade vazia, as paredes da cavidade ressonante são feitas perfeitamente condutoras através da imposição de campos elétricos tangenciais nulos aos nós que as sobrepõem, os quais se mantêm nulos ao não serem incluídos nos laços das equações de atualização. As quantidades de elementos que compõem as matrizes de componentes dos campos constam na Tabela 3.

Tabela 3 - Número de elementos das matrizes das componentes dos campos elétrico e magnético (problema de cavidade parcialmente preenchida com dielétrico).

	Na direção x (linhas)	Na direção y (colunas)	Na direção z (altura)
H_x, μ_x e σ_{mx}	202	501	48
H_y, μ_y e σ_{my}	201	502	48
H_z, μ_z e σ_{mz}	201	501	49
E_x, ε_x e σ_{ex}	201	502	49
E_y, ε_y e σ_{ey}	202	501	49
E_z, ε_z e σ_{ez}	202	502	48

Fonte: próprio autor.

3.4.2 As malhas de propriedades eletromagnéticas

O programa define as propriedades eletromagnéticas, em geral, a partir da atribuição das propriedades a cada unidade de célula seguida pela realização de uma média, a fim de que um valor aproximado seja atribuído às componentes das propriedades, as quais estão posicionadas sobre as arestas e sobre as faces das células. As exceções são as paredes elétricas (perfeitamente condutoras) e as paredes magnéticas (usadas nos planos de simetria). Essas últimas são definidas conferindo-se diretamente uma alta condutividade magnética aos elementos de matriz correspondentes aos pontos em que estão situadas. A escolha por esta maneira de definir as paredes magnéticas se deve à forma que o programa é estruturado. Quando as dimensões do domínio são inseridas, o código automaticamente define, nos limites deste domínio, campos elétricos tangenciais nulos, pois o programa é voltado para soluções de problemas de cavidades ressonantes. Em seguida, o código do programa executa a subrotina de definição de objetos. Nesta subrotina, o usuário insere os limites das regiões que terão as propriedades eletromagnéticas desejadas. Então, neste caso, basta que o usuário insira um

objeto bidimensional de condutividade magnética extremamente alta para que uma parede magnética com formato, posição e orientação que desejar esteja definida.

3.4.2.1 Cálculo das médias de propriedades eletromagnéticas

As equações (63) e (64) mostram como foram calculadas as médias das componentes de direção z das permissividades elétricas e das condutividades elétricas, respectivamente. As equações (65) e (66) mostram, respectivamente, os cálculos das médias das permeabilidades magnéticas e das condutividades magnéticas (ELSHARBENI e DEMIR, 2015). As demais componentes das propriedades eletromagnéticas são calculadas de maneira análoga.

$$\varepsilon_z(i, j, k) = \frac{\varepsilon(i, j, k) + \varepsilon(i - 1, j, k) + \varepsilon(i, j - 1, k) + \varepsilon(i - 1, j - 1, k)}{4} \quad (63)$$

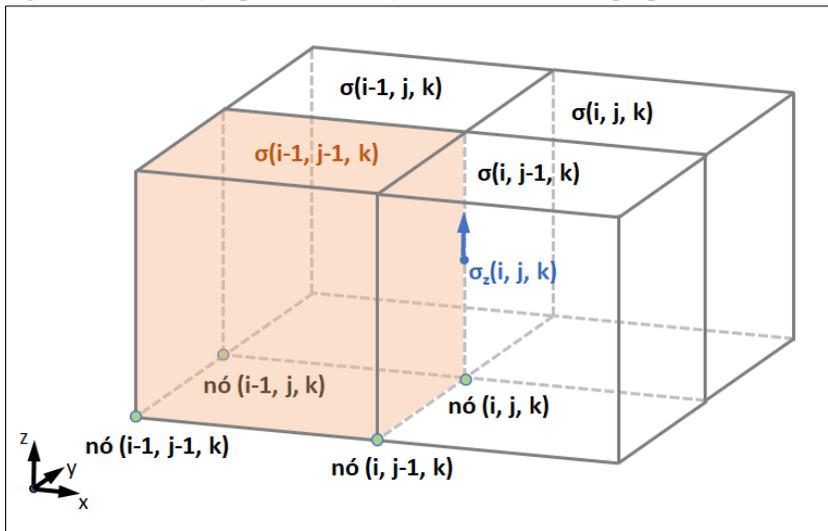
$$\sigma_z(i, j, k) = \frac{\sigma(i, j, k) + \sigma(i - 1, j, k) + \sigma(i, j - 1, k) + \sigma(i - 1, j - 1, k)}{4} \quad (64)$$

$$\mu_x(i, j, k) = \frac{2 * \mu(i, j, k) * \mu(i - 1, j, k)}{\mu(i, j, k) + \mu(i - 1, j, k)} \quad (65)$$

$$\sigma_{mx}(i, j, k) = \frac{2 * \sigma_m(i, j, k) * \sigma_m(i - 1, j, k)}{\sigma_m(i, j, k) + \sigma_m(i - 1, j, k)} \quad (66)$$

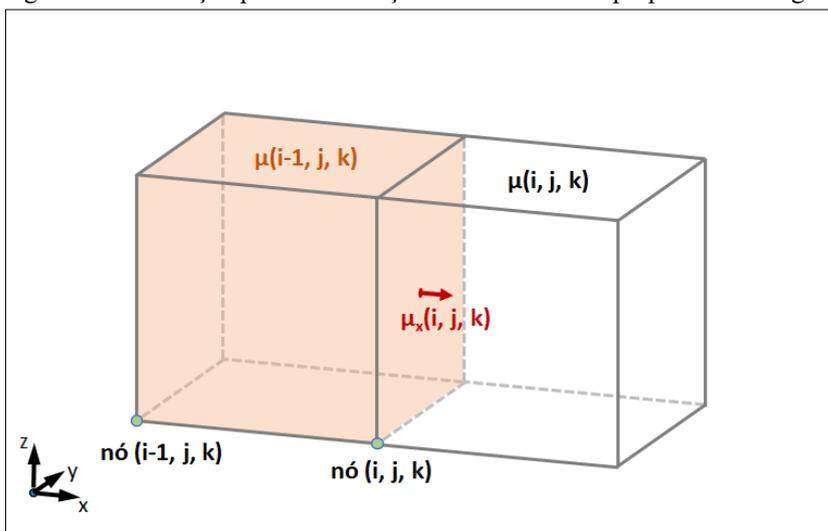
Nessas equações, cada termo sem índice de direção cartesiana representa a propriedade associada a uma célula, a qual está relacionada a um nó (e situada entre os oito nós de seus oito vértices). Os termos com índice cartesiano, por sua vez, são as propriedades eletromagnéticas associadas às posições em que estão localizados no domínio espacial discretizado. As Figuras Figura 25 e Figura 26 facilitam a visualização das posições dos termos presentes nas equações.

Figura 25 - Ilustração para visualização dos cálculos das propriedades elétricas.



Fonte: próprio autor.

Figura 26 - Ilustração para visualização dos cálculos das propriedades magnéticas.



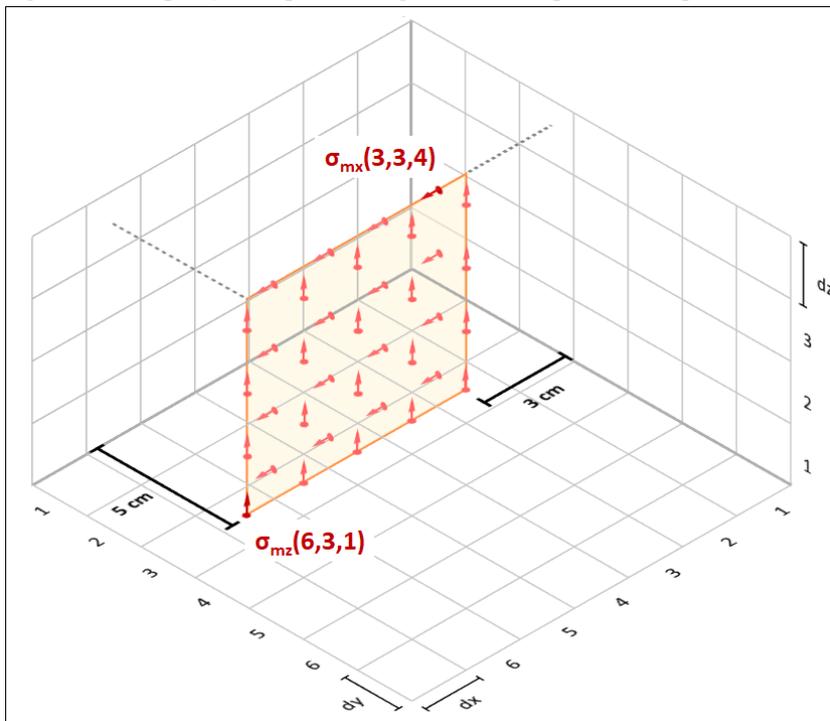
Fonte próprio autor.

3.4.2.2 Atribuição das propriedades que definem as paredes magnéticas

Em razão dos deslocamentos de posições entre as propriedades magnéticas e elétricas bem como das diferenças de posicionamentos entre os elementos das componentes de propriedades magnéticas em cada direção, foi necessário desenvolver uma forma de aproximação pelo programa para a criação das paredes magnéticas. Para explicar de maneira didática como são feitas as aproximações dimensionais, será tomada como exemplo a criação de uma parede magnética paralela ao plano yz de um domínio inventado.

No código do programa, quando se define um bloco (paralelepípedo) cujas coordenadas máxima e mínima são iguais em uma das direções cartesianas, este bloco é automaticamente reconhecido como uma parede. Se a este bloco está atribuído o material de alta condutividade magnética, esta parede é reconhecida como uma “parede magnética”. Dessa forma, considerando-se uma parede paralela ao plano yz, a primeira coisa a se explicar é a definição do posicionamento da parede em relação à direção x.

Figura 27 - Disposição da parede magnética de um problema hipotético.



Fonte: próprio autor.

A Figura 27 mostra que a parede magnética deste problema hipotético está situada a uma distância de 5 cm (2,5 células) do plano $y = 0$. As células são cúbicas ($2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$) e as setas vermelhas simbolizam as propriedades magnéticas que estão sobre a placa, em suas respectivas posições. O programa desenvolvido recebe como dados de entrada os valores das coordenadas da posição e do tamanho da placa em milímetros. As coordenadas são então convertidas para as posições das propriedades magnéticas que estiverem mais próximas e que forem tangentes à parede.

Se a distância da placa magnética até a parede do domínio (que, no caso do programa, é uma parede perfeitamente condutora) for dividida pelo tamanho das células, o valor encontrado corresponde ao número de células (não inteiro) entre a placa magnética e a parede do domínio. Neste caso, o número de células é **2,5**.

O problema é que os índices dos nós – os quais determinam as posições de suas respectivas componentes de propriedades eletromagnéticas – são sempre números inteiros positivos, pois são armazenados em elementos de matrizes. Nesse caso, é necessário que se faça um arredondamento. Contudo, se o número for simplesmente arredondado, a propriedade magnética da parede pode ser atribuída a um elemento que corresponde a uma posição diferente da posição mais próxima de onde ela realmente deve estar. Por exemplo, se o número for arredondado para 2, a simulação funcionaria como se a parede estivesse atravessando os centros das células de índice y igual a 2 ($\sigma_{mz}(i, 2, k)$). O adequado seria que suas propriedades fossem atribuídas às células de índice y igual a 3 ($\sigma_{mz}(i, 3, k)$).

A solução encontrada para este problema foi adicionar, antes do arredondamento, uma unidade à quantidade de células que separa as duas paredes (ou seja, $2,5 + 1$) e depois fazer um arredondamento “para baixo” (para o maior número inteiro menor que $3,5$). No MATLAB® este arredondamento é feito pela função **floor()**. Para facilitar o entendimento, a equação (67) mostra como a conta é feita para a parede do exemplo. Na equação, o **índice y do nó da parede** corresponde tanto aos índices y dos elementos de condutividade magnética σ_{mx} quanto dos elementos σ_{mz} .

$$\text{índice } y \text{ do nó da parede} = \mathbf{floor} \left(\left(\frac{\text{coordenada } y \text{ da parede}}{\text{tamanho da célula em } y} \right) + 1 \right) \quad (67)$$

Esse cálculo resolve o problema de aproximação da posição y da parede magnética paralela ao plano xz . Ademais, mesmo que a posição desejada para a parede seja qualquer valor não inteiro entre 2 e 3 células, a parede sempre será colocada de modo que corte o centro da terceira célula.

Os arredondamentos dos outros índices das propriedades da placa são um pouco mais complicados, embora partam da mesma lógica que foi explicada. A complexidade está no fato de que, para cada componente das propriedades, há um arredondamento para a célula mínima e outra para a máxima de cada direção. Exemplificando, para σ_{mx} , há uma forma de aproximação e arredondamento para a fronteira mínima da parede na direção z e outra forma para a fronteira máxima. Assim como também há um modo de aproximação e arredondamento da posição de σ_{mx} para cada aresta mínima e máxima na direção x . As equações de cada aproximação que seria utilizada no exemplo acima, adaptadas com as funções de arredondamento do MATLAB®, podem facilitar a compreensão e ser utilizadas para o

desenvolvimento de casos análogos em que as paredes estejam direcionadas diferentemente. Nas equações (68) a (75), **round()** corresponde à função do MATLAB® de arredondamento para o número inteiro mais próximo e **ceil()** à função de arredondamento “para cima”.

Equação para encontrar o **índice x** dos elementos de matriz das componentes σ_{mz} da **aresta com menor coordenada x** da placa magnética:

$$\text{índice } x \text{ mínimo de } \sigma_{mz} = \mathbf{round} \left(\left(\frac{\text{menor coordenada } x \text{ da aresta}}{\text{tamanho da célula em } x} \right) + 1 \right) \quad (68)$$

Equação para encontrar o **índice x** dos elementos de matriz das componentes σ_{mz} da **aresta com maior coordenada x** da placa magnética:

$$\text{índice } x \text{ máximo de } \sigma_{mz} = \mathbf{round} \left(\left(\frac{\text{maior coordenada } x \text{ da aresta}}{\text{tamanho da célula em } x} \right) + 1 \right) - 1 \quad (69)$$

Equação para encontrar o **índice z** dos elementos de matriz das componentes σ_{mz} da **aresta com menor coordenada z** da placa magnética:

$$\text{índice } z \text{ mínimo de } \sigma_{mz} = \mathbf{ceil} \left(\left(\frac{\text{menor coordenada } z \text{ da aresta}}{\text{tamanho da célula em } z} \right) + 1 \right) \quad (70)$$

Equação para encontrar o **índice z** dos elementos de matriz das componentes σ_{mz} da **aresta com maior coordenada z** da placa magnética:

$$\text{índice } z \text{ máximo de } \sigma_{mz} = \mathbf{ceil} \left(\left(\frac{\text{maior coordenada } z \text{ da aresta}}{\text{tamanho da célula em } z} \right) + 1 \right) - 1 \quad (71)$$

Equação para encontrar o **índice x** dos elementos de matriz das componentes σ_{mx} da **aresta com menor coordenada x** da placa magnética:

$$\text{índice } x \text{ mínimo de } \sigma_{mx} = \mathbf{ceil} \left(\left(\frac{\text{menor coordenada } x \text{ da aresta}}{\text{tamanho da célula em } x} \right) + 1 \right) \quad (72)$$

Equação para encontrar o **índice x** dos elementos de matriz das componentes σ_{mx} da **aresta com maior coordenada x** da placa magnética:

$$\text{índice } x \text{ máximo de } \sigma_{mx} = \text{ceil} \left(\left(\frac{\text{maior coordenada } x \text{ da aresta}}{\text{tamanho da célula em } x} \right) + 1 \right) - 1 \quad (73)$$

Equação para encontrar o **índice z** dos elementos de matriz das componentes σ_{mx} da **aresta com menor coordenada z** da placa magnética:

$$\text{índice } z \text{ mínimo de } \sigma_{mx} = \text{round} \left(\left(\frac{\text{menor coordenada } z \text{ da aresta}}{\text{tamanho da célula em } z} \right) + 1 \right) \quad (74)$$

Equação para encontrar o **índice z** dos elementos de matriz das componentes σ_{mx} da **aresta com maior coordenada z** da placa magnética:

$$\text{índice } z \text{ máximo de } \sigma_{mx} = \text{round} \left(\left(\frac{\text{maior coordenada } z \text{ da aresta}}{\text{tamanho da célula em } z} \right) + 1 \right) - 1 \quad (75)$$

Talvez seja oportuno frisar, mais uma vez, que é possível utilizar o raciocínio deste exemplo para chegar às aproximações e arredondamentos de placas direcionadas paralelamente aos outros planos do sistema cartesiano. Para a criação do programa, foi necessário realizar um código que generalizasse estes passos lógicos para qualquer parede que fosse paralela aos planos xy, yz ou zx. O código desta etapa do programa consta na Figura 28.

No código, **cuboides(ind).min_x** e **dominio_fdt.min_x** representam as menores coordenadas x da placa magnética e do domínio do problema, respectivamente. Uma analogia pode ser feita para as variáveis semelhantes. A variável **sigma_pmc** possui o valor de alta condutividade magnética da parede, que foi previamente atribuído pelo programa. A parede é identificada como um paralelepípedo (cuboide) que possui valores idênticos para as coordenadas máxima e mínima em alguma direção x, y ou z.

Figura 28 – Parte do código do programa responsável pela criação de paredes magnéticas.

```

disp('Criando placas PMC na malha de material');

for ind = 1:numero_de_cuboides

    tipo_m = cuboides(ind).tipo_de_material;
    sigma_pmc = tipos_de_material(tipo_m).sigma_m;

    % Converte as coordenadas em índices dos nós na malha FDTD
    % (dois arredondamentos, que serão escolhidos conforme o
    % direcionamento da placa) PMC
    blx_r = round((cuboides(ind).min_x - dominio_do_fDTD.min_x)/dx)+1;
    bly_r = round((cuboides(ind).min_y - dominio_do_fDTD.min_y)/dy)+1;
    blz_r = round((cuboides(ind).min_z - dominio_do_fDTD.min_z)/dz)+1;

    bux_r = round((cuboides(ind).max_x - dominio_do_fDTD.min_x)/dx)+1;
    buy_r = round((cuboides(ind).max_y - dominio_do_fDTD.min_y)/dy)+1;
    buz_r = round((cuboides(ind).max_z - dominio_do_fDTD.min_z)/dz)+1;

    blx_f = floor((cuboides(ind).min_x - dominio_do_fDTD.min_x)/dx)+1;
    bly_f = floor((cuboides(ind).min_y - dominio_do_fDTD.min_y)/dy)+1;
    blz_f = floor((cuboides(ind).min_z - dominio_do_fDTD.min_z)/dz)+1;

    bux_f = floor((cuboides(ind).max_x - dominio_do_fDTD.min_x)/dx)+1;
    buy_f = floor((cuboides(ind).max_y - dominio_do_fDTD.min_y)/dy)+1;
    buz_f = floor((cuboides(ind).max_z - dominio_do_fDTD.min_z)/dz)+1;

    blx_c = ceil((cuboides(ind).min_x - dominio_do_fDTD.min_x)/dx)+1;
    bly_c = ceil((cuboides(ind).min_y - dominio_do_fDTD.min_y)/dy)+1;
    blz_c = ceil((cuboides(ind).min_z - dominio_do_fDTD.min_z)/dz)+1;

    bux_c = ceil((cuboides(ind).max_x - dominio_do_fDTD.min_x)/dx)+1;
    buy_c = ceil((cuboides(ind).max_y - dominio_do_fDTD.min_y)/dy)+1;
    buz_c = ceil((cuboides(ind).max_z - dominio_do_fDTD.min_z)/dz)+1;

    % Encontra os "cuboides" de espessura igual a zero
    if (blx_r == bux_r) && (tipo_m == 3)

        sigma_m_y(blx_f, bly_c:buy_c-1, blz_r:buz_r-1) = sigma_pmc;
        sigma_m_z(blx_f, bly_r:buy_r-1, blz_c:buz_c-1) = sigma_pmc;
    end
    if (bly_r == buy_r) && (tipo_m == 3)

        sigma_m_z(blx_r:bux_r-1, bly_f, blz_c:buz_c-1) = sigma_pmc;
        sigma_m_x(blx_c:bux_c-1, bly_f, blz_r:buz_r-1) = sigma_pmc;
    end
    if (blz_r == buz_r) && (tipo_m == 3)

        sigma_m_x(blx_c:bux_c-1, bly_r:buy_r-1, blz_f) = sigma_pmc;
        sigma_m_y(blx_r:bux_r-1, bly_c:buy_c-1, blz_f) = sigma_pmc;
    end
end
end

```

Fonte: próprio autor.

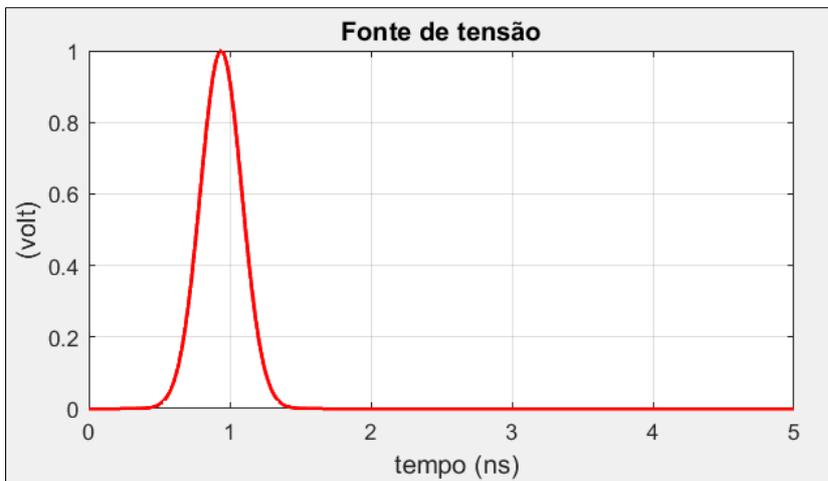
3.4.3 Passos de tempo

Para determinar o valor do passo de tempo e a quantidade de passos de tempo desta simulação, realizou-se o mesmo procedimento do problema de cavidade vazia, descrito na seção 3.3.2. Decidiu-se, desta maneira, por uma simulação com 2^{18} passos de tempo e calculou-se um valor de $\Delta t = 2,105693086994827$ ps de duração para cada passo de tempo.

3.4.4 Fontes de sinal e pontos de amostragem

Neste problema, foi utilizada apenas uma fonte de tensão de sinal de uma curva de Gauss de amplitude igual a 1 V, orientada no sentido positivo da direção do eixo z e cujo gráfico é mostrado na Figura 29. A fonte possui uma resistência de 20Ω e está posicionada nos nós indicados na **Tabela 4**. A forma como a fonte deste problema é implementada no código é explanada na **seção 3.3.3**.

Figura 29 - Gráfico do sinal gerado pela fonte de tensão do problema de cavidade parcialmente preenchida com dielétrico.



Fonte: próprio autor.

Tabela 4 - Índices dos nós das posições da fonte de sinal e do ponto de amostragem.

	Índice(s) do(s) nó(s) na direção x	Índice(s) do(s) nó(s) na direção y	Índice(s) do(s) nó(s) na direção z
Fonte de tensão	126 e 127	336 e 337	33 e 34
Ponto de amostra	95	200	26

Próprio autor.

A curva possui uma largura determinada pelo valor de τ , calculado pela equação (54):

$$\tau = \frac{20 * 6,25 * 10^{-3}}{2 * 299\,792\,458} \cong 0,21 \text{ ns} \quad (76)$$

E um atraso t_0 igual a:

$$t_0 = 4,5\tau = 0,94 \text{ ns} \quad (77)$$

Na Figura 30, vê-se o gráfico da transformada de Fourier do sinal de tensão da fonte da simulação. Percebe-se que no espectro do sinal estão presentes frequências muito maiores que a frequência máxima analisada neste problema – de 600 MHz. Isto ocorre porque as dimensões das células são muito menores que o limite máximo determinado pelas condições de estabilidade.

Figura 30 - Gráfico da transformada de Fourier da fonte de tensão do problema de cavidade parcialmente preenchida com dielétrico.



Fonte: próprio autor.

3.4.5 Pós-processamento

Assim como no programa de cavidade vazia, esta última parte do programa é encarregada de encontrar e apresentar em gráficos as frequências de ressonância da cavidade bem como de gerar a animação tridimensional que ilustra o problema.

Tanto a transformada de Fourier quanto o uso da *janela de Hann* e a animação foram feitos conforme é explicado na **seção 3.3.5** e no **APÊNDICE C**.

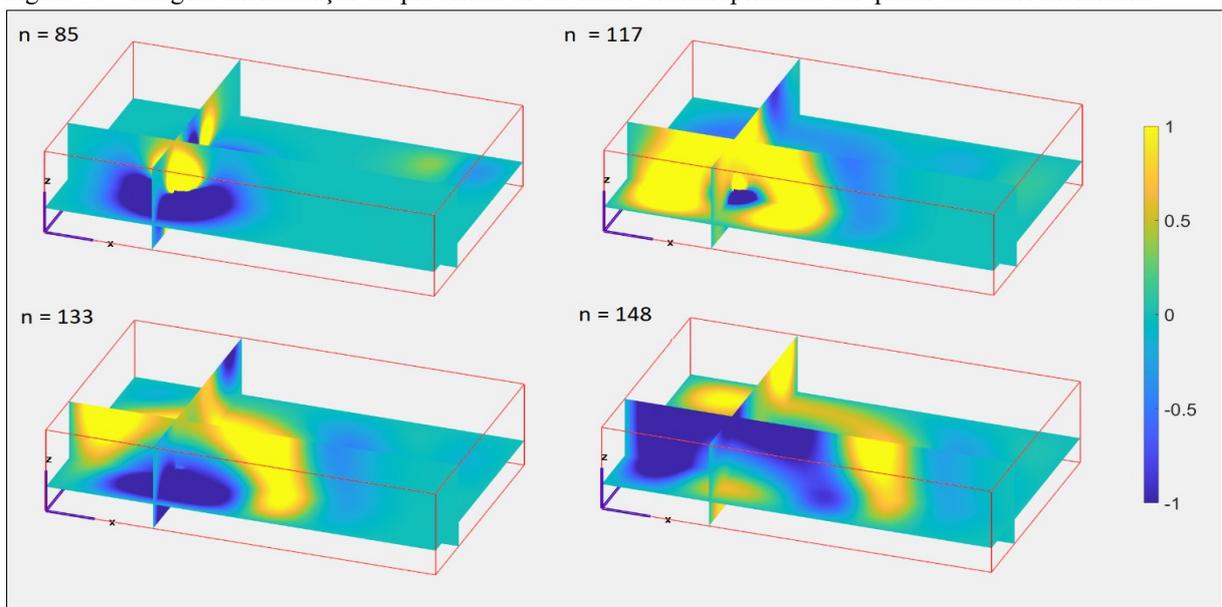
4 RESULTADOS

Os resultados apresentados neste trabalho são imagens de alguns instantes das animações tridimensionais que mostram as propagações dos campos eletromagnéticos e os gráficos de espectro de frequência de todas as componentes de campo elétrico e magnético nos pontos de amostra de ambos os problemas. No problema de cavidade vazia, decidiu-se por apresentar os espectros de frequência até 10 GHz, pois essa faixa apresenta várias frequências ressonantes. Já no problema de cavidade parcialmente preenchida, os gráficos vão até 600 MHz, como no artigo de referência. As tabelas de valores foram construídas a partir dos picos de frequência dos gráficos das transformadas de Fourier.

4.1 SIMULAÇÃO DE CAVIDADE VAZIA

Na Figura 31, estão apresentadas quatro capturas de imagem da animação tridimensional do problema de cavidade ressonante vazia. Os números indicados por n indicam o índice do passo de tempo no instante em que cada imagem foi capturada; e os números na legenda da barra de cores são os valores de campo elétrico, em V/m.

Figura 31 - Imagens da animação do problema de cavidade vazia capturadas em quatro instantes diferentes.

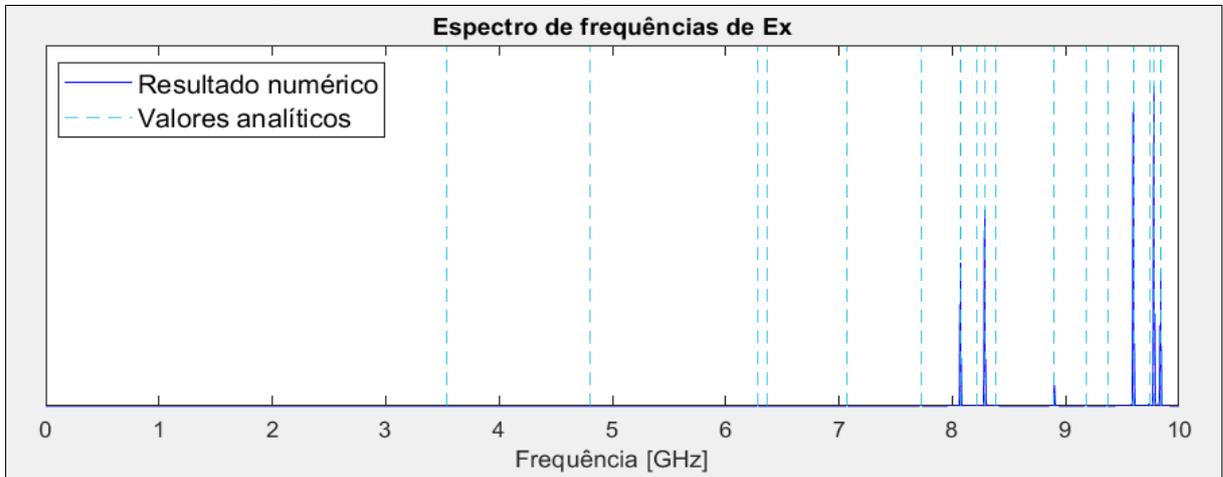


Fonte: próprio autor.

Os gráficos dos espectros de frequências das transformadas de Fourier das amostras das componentes de campo E_x , E_y , E_z , H_x , H_y e H_z , respectivamente, no nó de índices (57, 38,

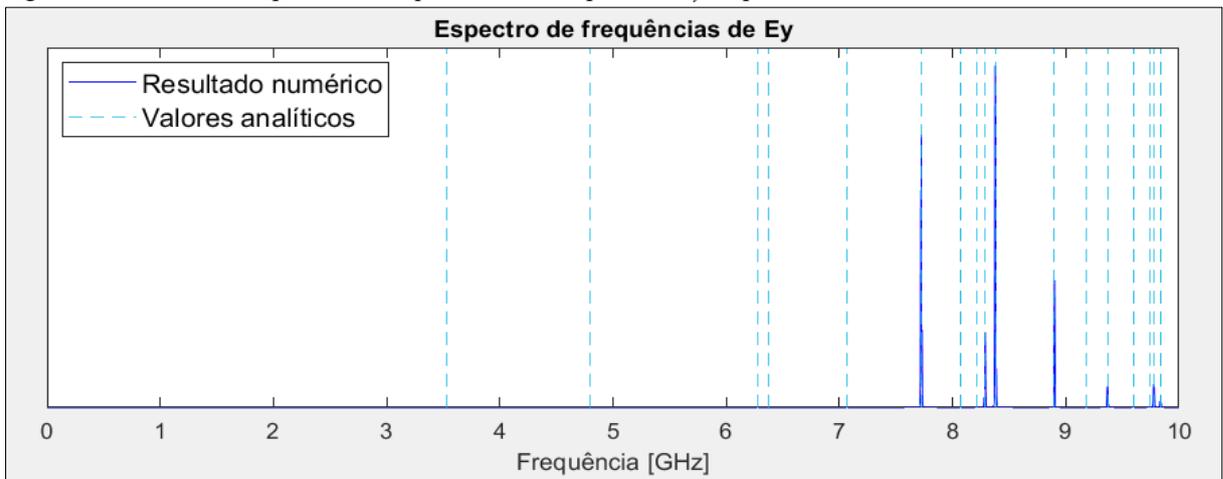
13) do domínio do problema, estão nas Figuras Figura 32, Figura 33, Figura 34, Figura 35, Figura 36 e Figura 37.

Figura 32 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_x no ponto de amostra da cavidade vazia.



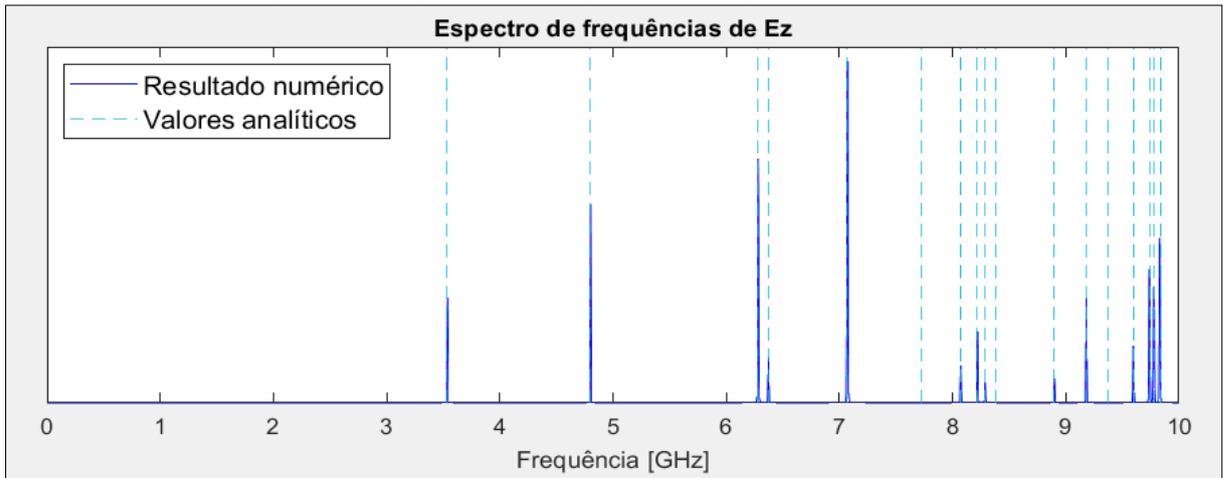
Fonte: próprio autor.

Figura 33 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_y no ponto de amostra da cavidade vazia.



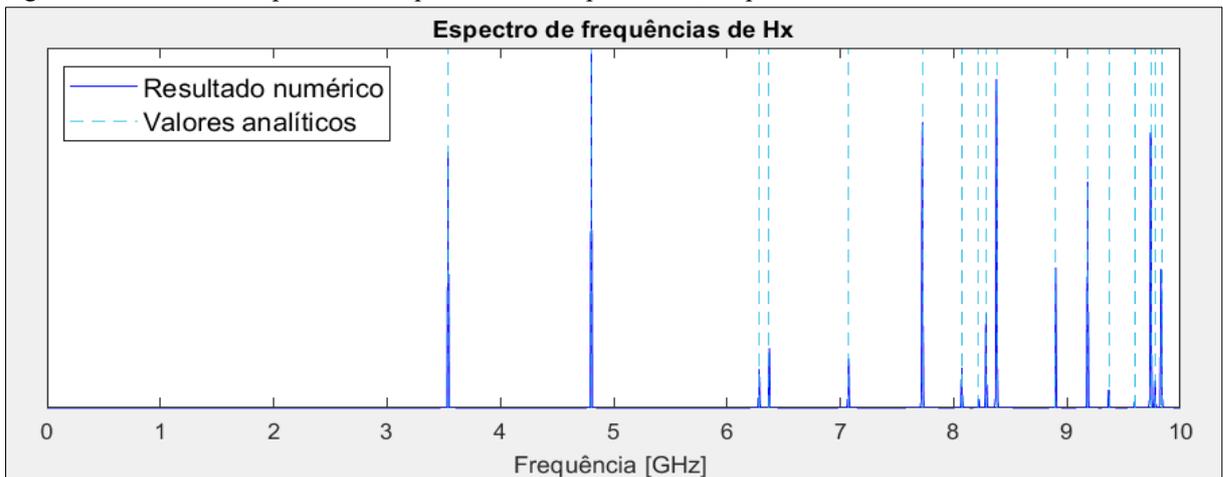
Fonte: próprio autor.

Figura 34 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_z no ponto de amostra da cavidade vazia.



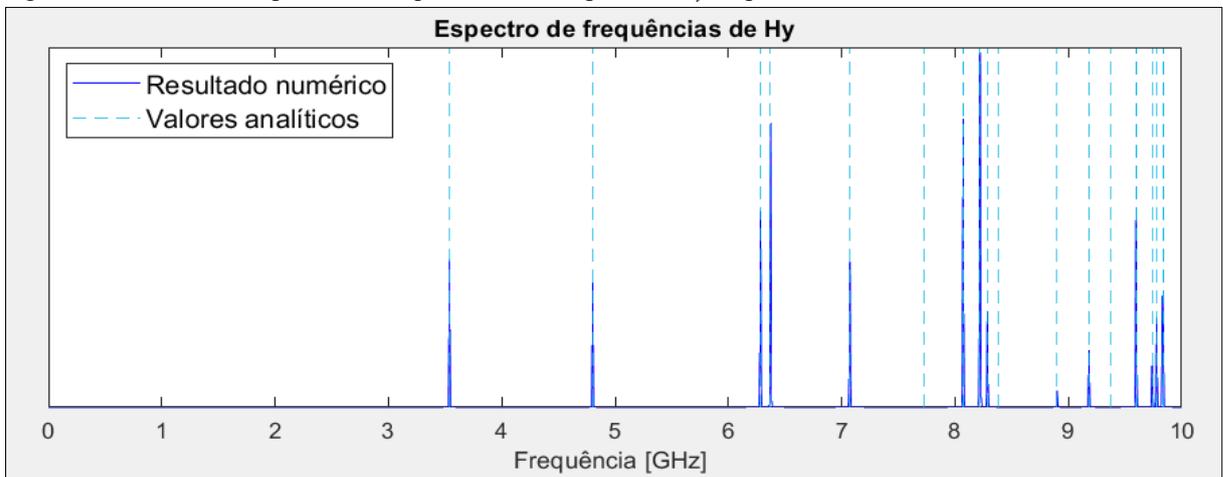
Fonte: próprio autor.

Figura 35 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_x no ponto de amostra da cavidade vazia.

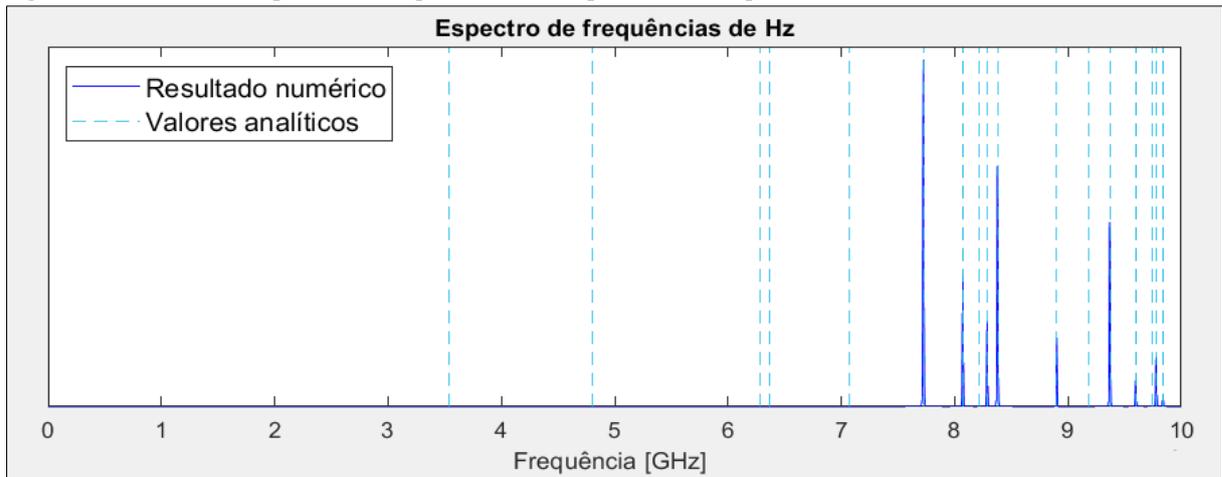


Fonte: próprio autor.

Figura 36 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_y no ponto de amostra da cavidade vazia.



Fonte: próprio autor.

Figura 37 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_z no ponto de amostra da cavidade vazia.

Fonte: próprio autor.

A Tabela 5 compara os resultados obtidos através da simulação com os cálculos analíticos (equação (1)) das frequências de corte.

Tabela 5 - Frequências de ressonância da cavidade retangular vazia.

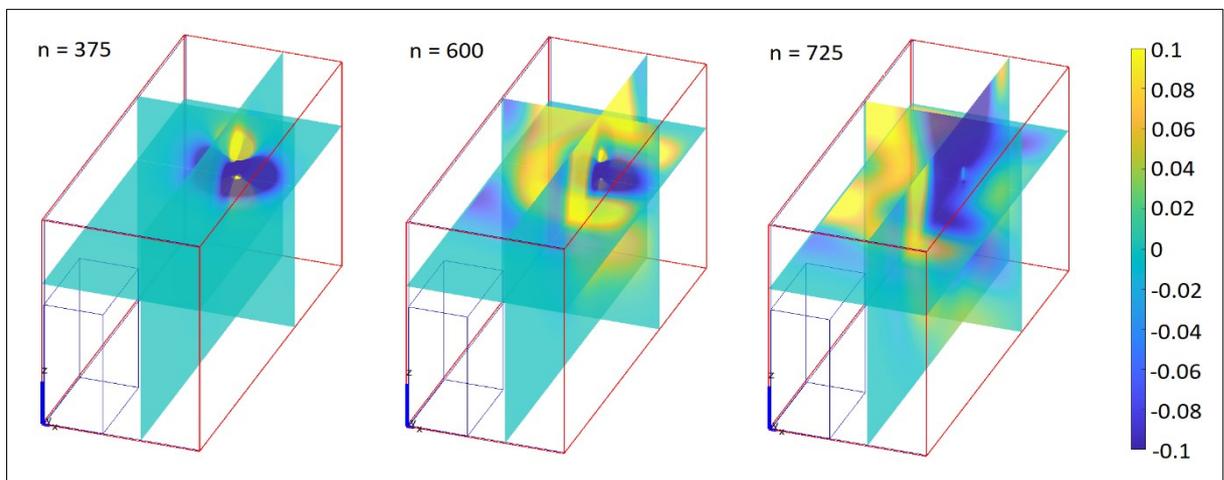
m, n, p	Valor analítico (GHz)	Valor encontrado (GHz)	Erro percentual
1, 1, 0	3,5353	3,5390	0,10%
2, 1, 0	4,7990	4,8024	0,07%
1, 2, 0	6,2818	6,2814	0,01%
3, 1, 0	6,3706	6,3738	0,05%
2, 2, 0	7,0706	7,0737	0,04%
1, 0, 1	7,7255	7,7251	0,01%
4, 1, 0 e 0, 1, 1	8,0722	8,0729	0,01%
3, 2, 0	8,2187	8,2225	0,05%
1, 1, 1	8,2868	8,2886	0,02%
2, 0, 1	8,3795	8,3766	0,03%
2, 1, 1	8,8996	8,9004	0,01%
1, 3, 0	9,1869	9,1821	0,05%
3, 0, 1	9,3685	9,3670	0,02%
4, 2, 0 e 0, 2, 1	9,5980	9,5959	0,02%
2, 3, 0	9,7433	9,7368	0,07%
1, 2, 1	9,7792	9,7808	0,02%
5, 1, 0 e 3, 1, 1	9,8365	9,8380	0,02%

Próprio autor.

4.2 SIMULAÇÃO DE CAVIDADE PARCIALMENTE PREENCHIDA

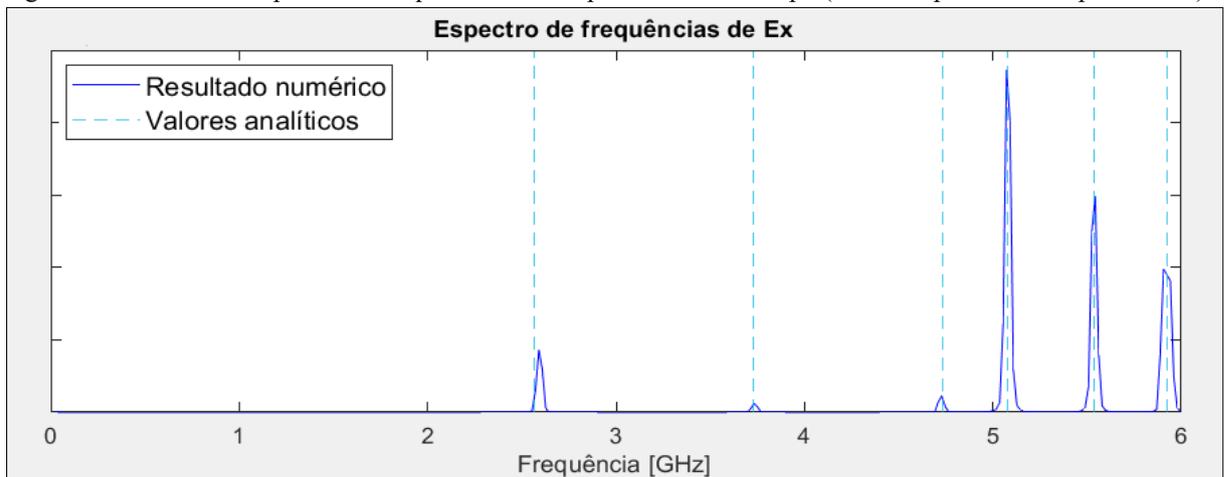
A Figura 38 apresenta imagens da animação da simulação da cavidade ressonante parcialmente preenchida com dielétrico nos passos de tempo 375, 600 e 725. Nas Figuras (39)-(44), constam os gráficos dos espectros de frequência de cada uma das componentes dos campos elétrico e magnético no ponto de amostragem. E, na Tabela 6, pode-se comparar os valores analíticos, consultados do artigo de Carpes Jr., Pichon e Razek (2000), com os valores obtidos através da simulação.

Figura 38 - Imagens da animação do problema de cavidade parcialmente preenchida capturadas em três instantes diferentes.



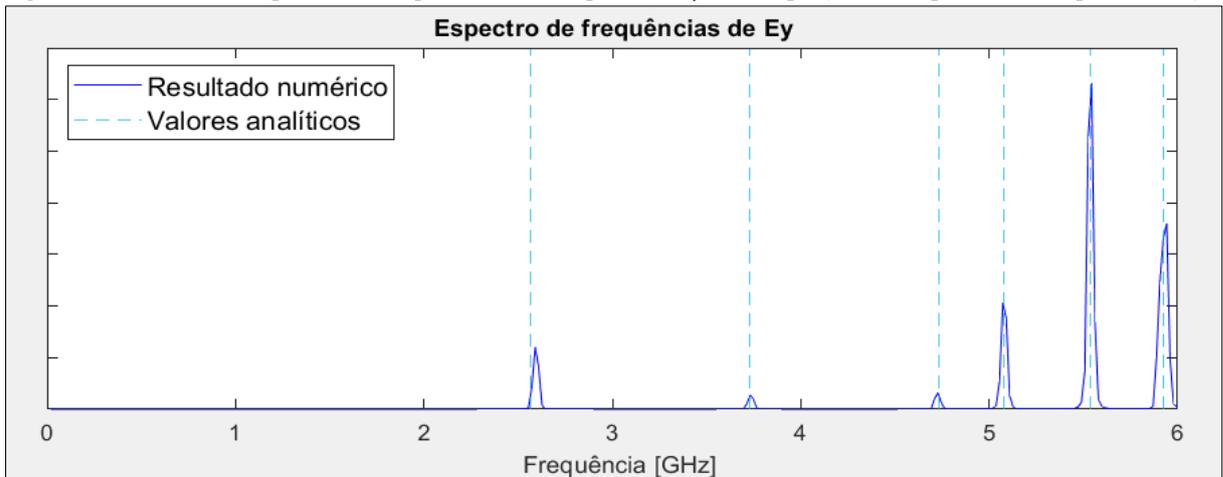
Fonte: próprio autor.

Figura 39 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_x do campo (cavidade parcialmente preenchida).



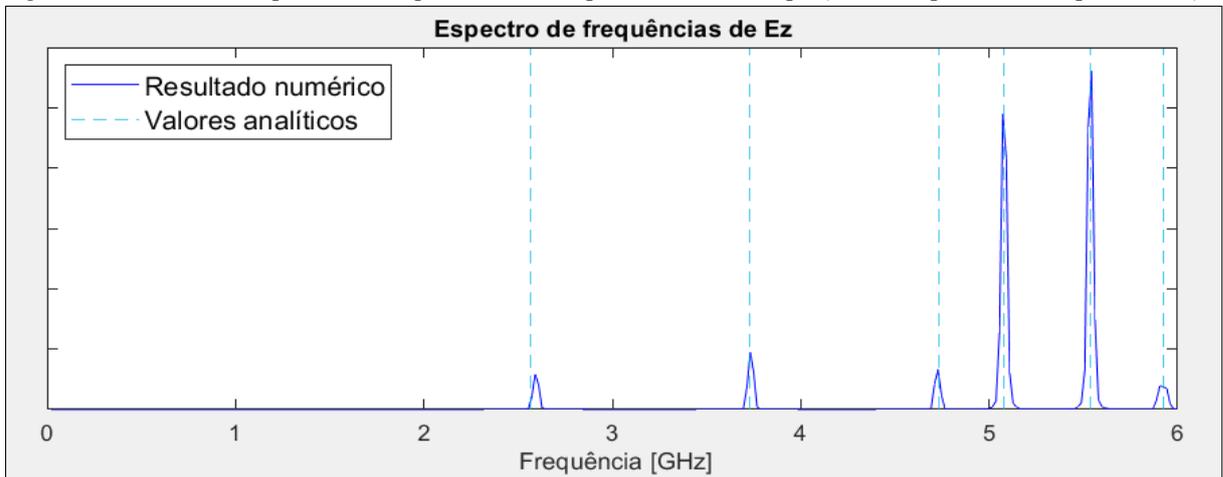
Fonte: próprio autor.

Figura 40 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_y do campo (cavidade parcialmente preenchida).



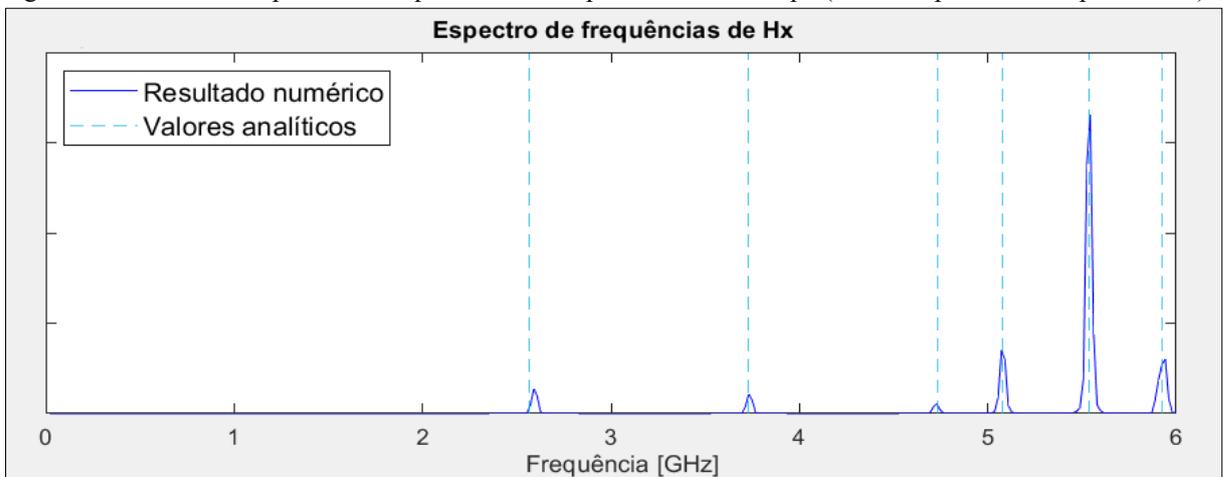
Fonte: próprio autor.

Figura 41 - Gráfico do espectro de frequências da componente E_z do campo (cavidade parcialmente preenchida).



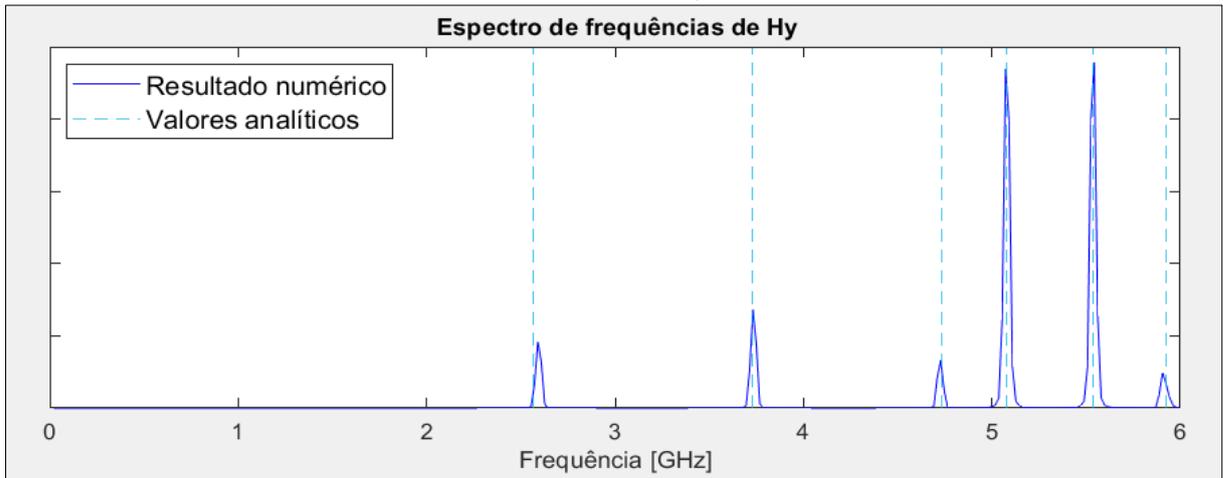
Fonte: próprio autor.

Figura 42 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_x do campo (cavidade parcialmente preenchida).



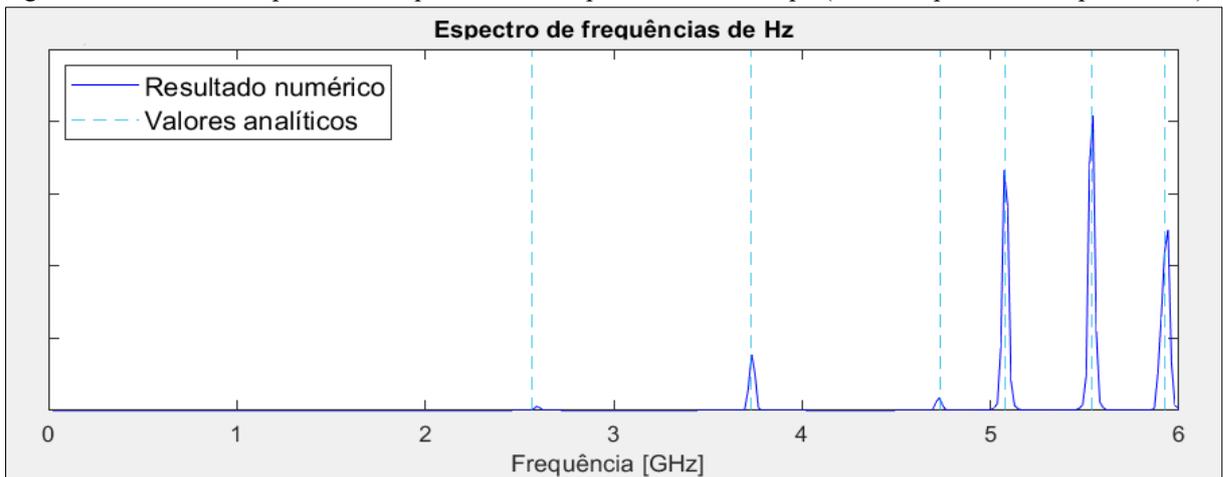
Fonte: próprio autor.

Figura 43 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_y do campo (cavidade parcialmente preenchida).



Fonte: próprio autor.

Figura 44 - Gráfico do espectro de frequências da componente H_z do campo (cavidade parcialmente preenchida).



Fonte: próprio autor.

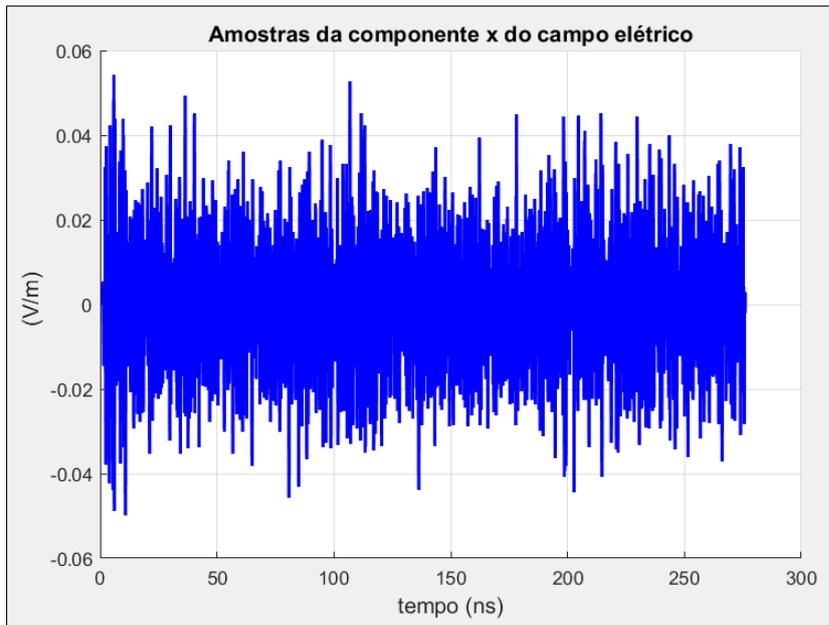
Tabela 6 - Frequências de ressonância da cavidade retangular parcialmente preenchida com dielétrico.

Modo	Valor analítico (MHz)	Valor encontrado (MHz)	Erro percentual
1	256,7	259,1	0,93%
2	373,0	373,2	0,05%
3	473,3	472,8	0,11%
4	507,6	507,3	0,06%
5	553,7	554,4	0,13%
6	592,3	590,6	0,29%

Fonte: próprio autor.

Para se ter uma ideia de como os campos se comportam na simulação, o gráfico do campo E_x em função do tempo consta na Figura 45. Os espectros foram obtidos aplicando a transformada de Fourier sobre cada função do tempo correspondente a cada uma das componentes de campo.

Figura 45 - Gráfico do campo E_x no nó de amostra ao longo da simulação da cavidade parcialmente preenchida com dielétrico.



Fonte: próprio autor.

5 DISCUSSÃO

As simulações de ambos os problemas executadas pelo programa levaram a resultados com proximidade aceitável aos resultados buscados, com erros percentuais baixos. Os gráficos de espectros de potência estão legíveis e as frequências de ressonância facilmente identificáveis. As animações tridimensionais parecem representar de forma próxima à realidade a propagação dos campos ao longo do tempo.

A simulação do problema de cavidade vazia apresentou um erro percentual absoluto médio de **0,04%**, inferior ao da simulação da cavidade parcialmente preenchida com dielétrico, de **0,26%**. O gráfico de espectro de frequências da simulação da cavidade parcialmente preenchida deixa visível uma baixa resolução de frequências, de **1,81 MHz**, que se deve ao alto valor da razão entre a frequência de amostragem ($1 / 2,105693086994827$ ps) e o número de amostras da FFT (2^{18}). A resolução de frequências do gráfico da simulação do problema de cavidade vazia, por outro lado, está visivelmente boa, com razão entre frequência de amostragem ($1 / 1,11$ ms) e número de amostras (2^{17}) resultando no valor de **0,0069 Hz**. Uma desvantagem deste programa é a falta de uma interface gráfica do usuário – também conhecida como GUI (do inglês, *graphic user interface*) – para tornar a sua utilização mais prática e interativa. Entretanto, o código foi desenvolvido de forma que desse prioridade à didática e, desta forma, dispõe de comentários explicativos e de comandos cuja disposição foi planejada para que houvesse uma sequência intuitiva para o leitor do código. Ademais, a criação de uma GUI no MATLAB[®] se tornou mais simples após a introdução do *App Designer* que possui uma interface prática e intuitiva.

6 CONCLUSÃO

Como os erros percentuais possuem valores aceitáveis e as simulações abordam problemas com configurações com certas distinções, pode ser razoável assumir que outros problemas com características distintas, mas similares, possam ser resolvidos pelo programa com uma boa confiabilidade. Há outros trabalhos que podem ser encontrados em buscas na internet que envolvem soluções de problemas eletromagnéticos através do Método FDTD. Estes trabalhos podem ser utilizados para comparar e aprimorar o método de acordo com as necessidades e com o uso do programa desenvolvido nesta dissertação.

Os resultados também indicam que simulações com detalhes de dimensões pequenas exigem simulações com mais passos de tempo para que se obtenha uma resolução de frequências razoável no gráfico de espectro de frequências. A razão disso é que células menores exigem, devido ao critério de estabilidade, passos de tempo menores, que levam a frequências de amostragem maiores. Logo, para uma melhor resolução de frequências, é necessário muitos passos de tempo.

Ao longo do desenvolvimento do programa e à medida que simulações foram sendo executadas, muitos problemas surgiram. Muito tempo foi gasto para se descobrir que são necessárias excitações em mais de uma direção para que todas as frequências de ressonância sejam observadas, já que há uma íntima relação entre a direção do campo que se propaga, a sua frequência e cada uma das dimensões da cavidade ressonante. Outro grande desafio foi definir um modo adequado e geral de posicionamento das propriedades magnéticas levando-se em consideração que as posições das componentes das propriedades elétricas e das propriedades elétricas estão sempre deslocadas entre si.

Além desses fatores, os longos períodos de simulação também foram um contratempo. O computador utilizado para o trabalho foi um Dell Inspiron 17 5000, com um processador Intel® Core™ i7 de 2,40 GHz e com 7,88GB memória RAM instalada utilizável. Este tipo de computador não é o mais adequado para as simulações. As simulações do problema de cavidade parcialmente preenchida com dielétrico levavam cerca de três dias completos, enquanto as do problema de cavidade vazia levavam entre 2 e 4 minutos.

Por fim, o programa desenvolvido neste trabalho pode ser utilizado para a solução de problemas eletromagnéticos de baixa complexidade por interessados que não possuam familiaridade com o método FDTD ou com *softwares* que exijam um treinamento ou pagamento para seu uso. Assim como pode ser muito útil para a visualização do comportamento campos através de suas animações gráficas tridimensionais e de seus gráficos de espectro de

frequências. Seu código também pode ser uma boa fonte de aprendizado de como o método FDTD pode ser implementado em uma linguagem de programação.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A implementação de uma interface gráfica do usuário pode realmente acrescer à sua utilidade como uma introdução ao método FDTD a pesquisadores interessados em compreendê-lo. O código, desenvolvido para que destacasse as suas funções de forma intuitiva, se aliado a uma boa forma de interação com o usuário, pode contribuir para abreviar o tempo levado para a compreensão do método FDTD.

Existe a possibilidade de se aprimorar as funções do programa para que cheguem a resultados mais precisos e para que ampliem os problemas abarcados. Aliás, a variedade de problemas resolvidos pelo programa pode ser estendida até mesmo através da inclusão de novas funções ao código. O programa, desta forma, pode ser aprimorado futuramente para que lhe sejam atribuídos novos elementos, novas funcionalidades ou uma interface gráfica para o usuário.

Portanto, o programa pode ser aproveitado de diversas maneiras, seja através de sua utilização direta, de sua exploração, de seu aperfeiçoamento ou do desenvolvimento de novas funções para seu código.

REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 10520**: informação e documentação: citações em documentos: apresentação. Rio de Janeiro: ABNT, 2002.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6024**: informação e documentação: numeração progressiva das seções de um documento escrito: apresentação. Rio de Janeiro, ABNT, 2012.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 14724**: informação e documentação: trabalhos acadêmicos: apresentação. Rio de Janeiro, ABNT, 2011.
- AVAZPOUR, Laleh; KING, Michelle; BELLING, Samuel; KNEZEVIC, Irena. FiPo FDTD: Computational Electrodynamics Technique Producing Both Fields and Potentials. **2022 International Conference on Numerical Simulation of Optoelectronic Devices (NUSOD)**, 2022, p. 111-112. DOI 10.1109/NUSOD54938.2022.9894842.
- BAHRAMI, Amir; CALOZ, Christophe. **FDTD Scheme for Interfaces Formed by Space-Time Modulations**. KU Leuven, ESA, 2022.
- BASTOS, João Pedro A. **Eletromagnetismo para engenharia**: estática e quase estática. 3. ed. rev. Florianópolis: editora UFSC, 2012.
- BASTOS, João Pedro A.; SADOWSKI, Nelson. **Finite Element 2D System for Electromagnetic and Thermal Field Analysis**. GRUCAD, 2008.
- CARPES JR., Walter P.; PICHON Lionel; RAZEK, Adel. Efficient analysis of resonant cavities by finite element method in the time domain. **IEEE Proceedings - Microwaves, Antennas and Propagation**, v. 147, n. 1, fev. 2000, p. 53-57. DOI <https://doi.org/10.1049/ip-map:20000012>.
- CERNA, Michael; HARVEY, Audrey F. **The fundamentals of FFT-based signal analysis and measurement**. Application Note 041, National Instruments, 2000.
- DEV, Satyanarayan R. S.; GARIEPY, Yvan; ORSAT, Valerie; RAGHAVAN, Vijaya G. S. FDTD Modeling and Simulation of Microwave Heating of in-Shell Eggs. **Progress in Electromagnetics Research M**, Sainte-Anne-de-Bellevue, v. 13, p. 229-243, 2010. DOI <https://doi.org/10.2528/PIERM10072609>.
- ELECTROMAGNETIC ANALYSIS USING FINITE-DIFFERENCE TIME-DOMAIN. 2014-2020. Lista de reprodução de 24 vídeos. Publicado pelo canal EMPossible. Disponível em <https://www.youtube.com/playlist?list=PLLYQF5WvJdJWoU9uEeWJ6-MRzDSziNnGt>. Acesso em: 05 dez. 2020.
- ELSHARBENI, Atef; DEMIR, Veysel. **The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB® Simulations**. 2. ed. Raleigh: SciTech Publishing, 2015. ISBN 978-1-61353-175-4.
- HAFNER, Angelo; HOFFMANN, Kleyton. **Análise de guias de ondas com o método FDTD 2D**. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

LIMA, Charles B. **Diferenças Finitas no Domínio do Tempo: FDTD**. 2004. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2004.

ODABAŞI, Hayrettin; BAŞARAN, Erkul; AKSOY, Serkan; TAYYAR, İsmail H. **The numerical time domain analysis of partially filled rectangular cavity with a dielectric material**. 2005. Gebze Institute of Technology, Gebze, 2005.

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS (GUIAS E CAVIDADES). 2020. Lista de reprodução de 10 vídeos. Publicado pelo canal Professor Walter - UFSC. Disponível em: <https://www.youtube.com/channel/UCnkcNVh48RFy0FihIURFYA/playlists>. Acesso em: 02 dez. 2020.

PARK, Jaesun; BAEK, Jae-Woo; JUNG, Kyung-Young. Accurate and Numerically Stable FDTD Modeling of Human Skin Tissues in THz Band. **IEEE Access**, vol. 10, p. 41260-41266, 2022. DOI 10.1109/ACCESS.2022.3168160.

REITZ, John R.; MILFORD, Frederick J.; CHRISTY, Robert W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. 3. ed. Editora Campus, 1982. ISBN-13: 978-8570011039.

SIMS, Karl. **Fast Fourier Transform Tutorial**. Tutorial interativo. Disponível em: <https://www.karlsims.com/fft.html>. Acesso em: 18 jan. 2022.

SULLIVAN, Dennis. M. **Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method**. 1. ed. New York: IEEE Press, 2000. ISBN 0-7803-4747-1.

SUN, Chen. **Minimizing Dispersion in FDTD Methods with CFL Limit Extension**. 2017. University of Toronto. Toronto 2017.

TAFLOVE, Allen. **Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method**. 1. ed. Boston: Artech House, 1995. ISBN 0-89006-792-9.

WANG, Xinsong; CHEN, Guangzhi; YANG, Shunchuan; LI, Yaoyao; DU, Wanli; SU, Donglin. A Performance-Enhanced Absorbing Boundary Condition for FDTD Methods on Face-Centered Cubic Grids. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, vol. 21, no. 9, p. 1812-1816, set. 2022. DOI 10.1109/LAWP.2022.3181165.

YEE, Kane S. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 14, n. 3, p. 302-307, maio 1966. DOI <https://doi.org/10.1109/TAP.1966.1138693>. Disponível em <https://ieeexplore.ieee.org/document/1138693>.

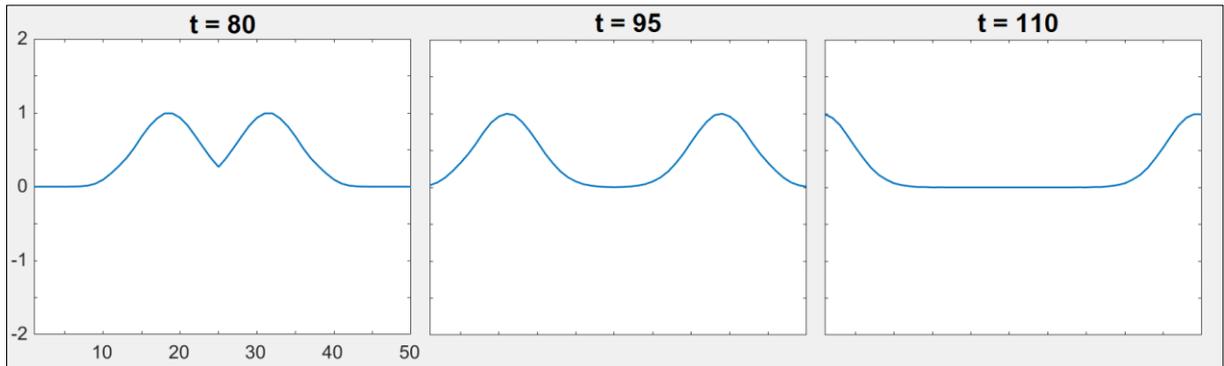
APÊNDICE A – PROGRAMAS DE TESTES DE SIMULAÇÕES UNIDIMENSIONAIS

Os primeiros códigos desenvolvidos no desenvolvimento desse trabalho foram de programas que simulam propagações de ondas em espaços unidimensionais. Estes programas tiveram como finalidade a identificação de possíveis erros através da observação de problemas com um grau de menor complexidade, para que pudessem ser localizados mais facilmente e, desta forma, corrigidos. Testaram-se algumas formas de fontes de sinal e seus dados de saída eram basicamente animações que apresentavam as intensidades dos campos eletromagnéticos em cada ponto da única dimensão espacial considerada e em cada instante de tempo.

Foram feitos testes com fontes de sinal de funções gaussianas e senoidais, assim como com fontes dos tipos *hard*, *soft* e *TF/SF* (*total-field scattered-field*). Os primeiros testes foram com fontes de tipo *hard* – uma fonte que impõe o campo em uma região do domínio desprezando-se qualquer influência externa a tal região – e de tipo *soft* – a qual consiste em uma fonte que soma o campo da fonte ao campo existente no local em que a fonte se encontra. Ou seja, a região da fonte *hard* funciona como um condutor perfeito e reflete as ondas incidentes, enquanto a fonte *soft* não interfere no problema, exceto pelo sinal que ela gera. No caso do problema, estas fontes atribuíam a um ponto um campo (elétrico ou magnético) que era uma função gaussiana ou senoidal em relação ao tempo.

Às fronteiras do problema aplicaram-se, primeiramente, paredes de condutores perfeitos e, depois, condições de contorno ideais que fizessem com que as ondas se comportassem como se estivessem se propagando para fora do domínio. Embora esta última forma de estabelecer condições de contorno não fosse vir a ser utilizada no programa final de três dimensões, esta é uma boa maneira de melhorar a visualização da propagação da onda. A Figura 46 mostra três instantes diferentes da animação da propagação da onda de um dos testes, na qual os numerais do eixo horizontal representam o número de células e, os do eixo vertical, a amplitude da componente z do campo elétrico, em volt por metro (V/m).

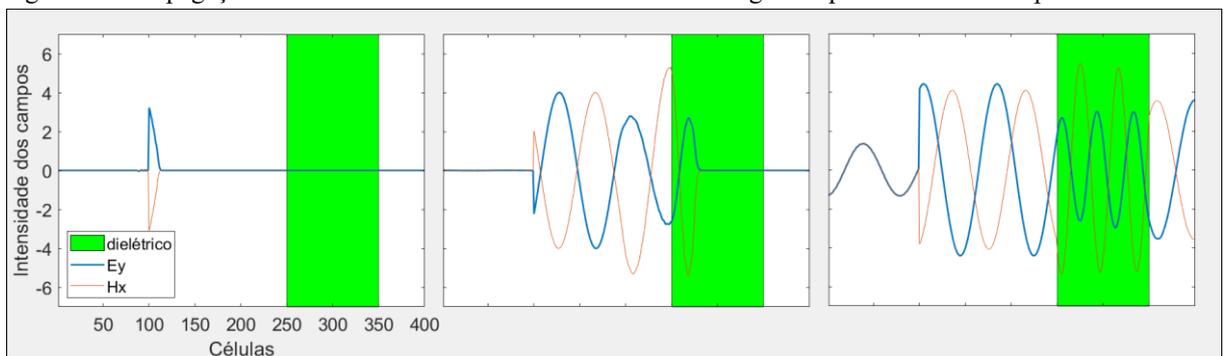
Figura 46 - Propagação unidimensional da onda de uma fonte de sinal gaussiano.



Fonte: próprio autor.

Depois, os programas foram modificados através da introdução de uma região que simulava um meio dielétrico de permissividade relativa igual a 4 e da substituição da fonte por uma do tipo *TF/SF*. Assim como as condições de contorno ideais, a fonte *TF/SF* só foi utilizada nos problemas unidimensionais, pois o objetivo era unicamente facilitar a observação da propagação (e das reflexões) da onda. Este tipo de fonte anula o sinal gerado por ela própria em uma determinada direção e sentido, restando apenas os campos nas outras direções e sentidos (no caso unidimensional, só resta o campo em um sentido).

Figura 47 - Propagação unidimensional da onda de um sinal senoidal gerado por uma fonte do tipo *TF/SF*.



Fonte: próprio autor.

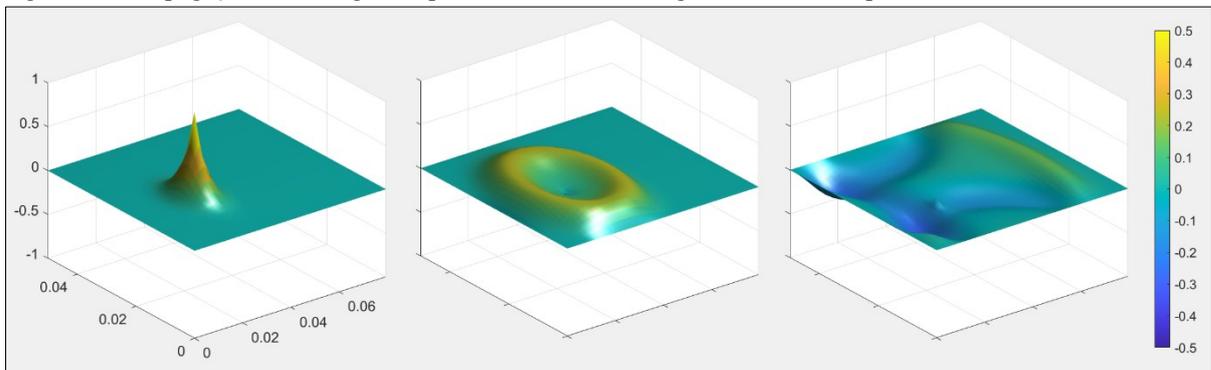
Na Figura 47, vê-se a propagação de uma onda gerada por uma fonte de sinal senoidal do tipo *TF/SF* em três instantes diferentes. A linha alaranjada representa a intensidade da componente x do campo magnético, enquanto a linha azul representa a intensidade da componente y do campo elétrico. A região verde é o meio dielétrico. Na última figura, à esquerda do ponto de geração do sinal, é possível observar parte da propagação da onda refletida nas interfaces entre os meios.

APÊNDICE B – PROGRAMA DE TESTE DE SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL

Depois de se fazer alguns testes e observações de programas unidimensionais, aumentou-se a complexidade do problema acrescentando-se uma dimensão espacial. Os programas bidimensionais, além de auxiliarem a desenvolver mais familiaridade com o método e possibilitar a observação do comportamento dos campos de uma nova perspectiva, foram usados para se iniciar a criação do código da transformada rápida de Fourier (ou *FFT*).

A Figura 48 mostra três instantes da animação da simulação bidimensional de uma onda gerada por uma fonte de campo elétrico de componente z com forma de curva gaussiana de amplitude igual a 1 V/m se propagando no modo TM.

Figura 48 - Propagação de onda gerada por uma fonte de sinal gaussiana em um problema bidimensional.



Fonte: próprio autor.

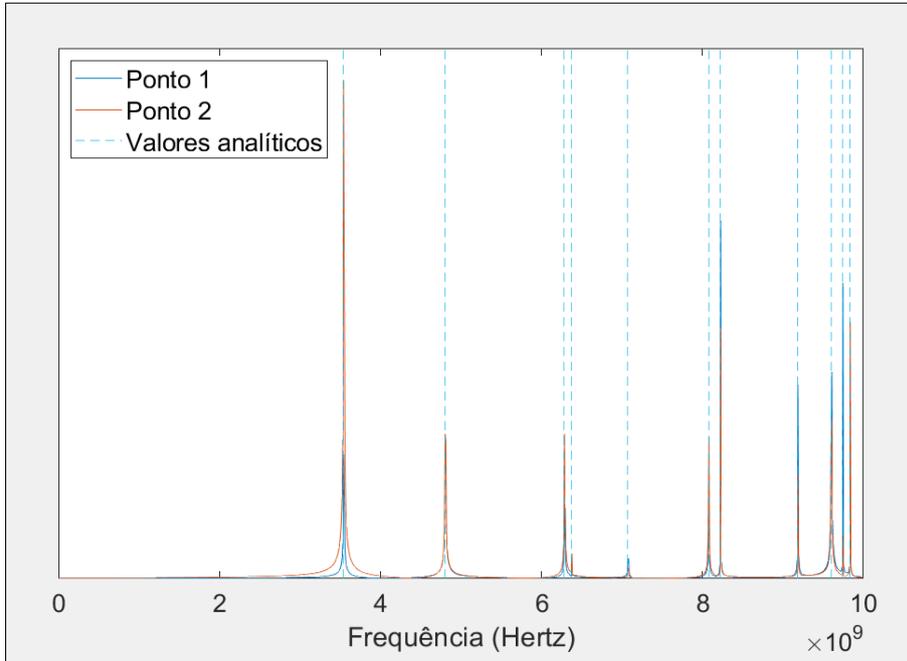
Como a simulação bidimensional representa um problema físico tridimensional no qual os campos e cujas propriedades não variam em uma das dimensões, este programa se trata de um guia de onda retangular infinito preenchido com ar (ou vácuo) e alimentado por um fio infinito. Além disso, a utilização de uma fonte tipo *hard* significa que o fio que gera o sinal é um fio perfeitamente condutor. Quanto às dimensões do problema, estas podem ser facilmente alteradas no programa e, portanto, diversas combinações foram testadas – entre elas, as mesmas do trabalho acadêmico *Análise de guias de ondas com o método FDTD 2D* (HAFNER; HOFFMAN, 2012)¹.

A análise das frequências de ressonância do guia de onda foi feita observando-se o gráfico da *FFT* das amostras de campo de um ponto do problema com localização arbitrária. A Figura 49 e a Figura 50 mostram os gráficos das *FFT* das amostras de campo propagando-se

¹ HAFNER, Angelo; HOFFMANN, Kleyton. **Análise de guias de ondas com o método FDTD 2D**. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

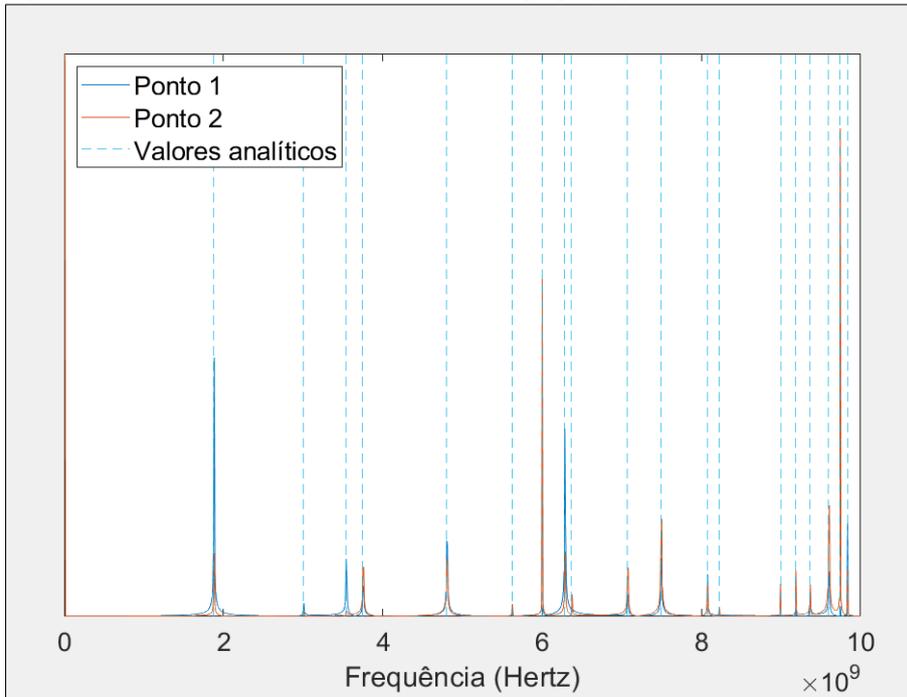
nos modos TM e TE, respectivamente, em um guia de ondas de dimensões que medem $8 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$.

Figura 49 - Gráfico da *FFT* das amostras de campo propagando-se no modo TM.



Fonte: próprio autor.

Figura 50 - Gráfico da *FFT* das amostras de campo propagando-se no modo TE.

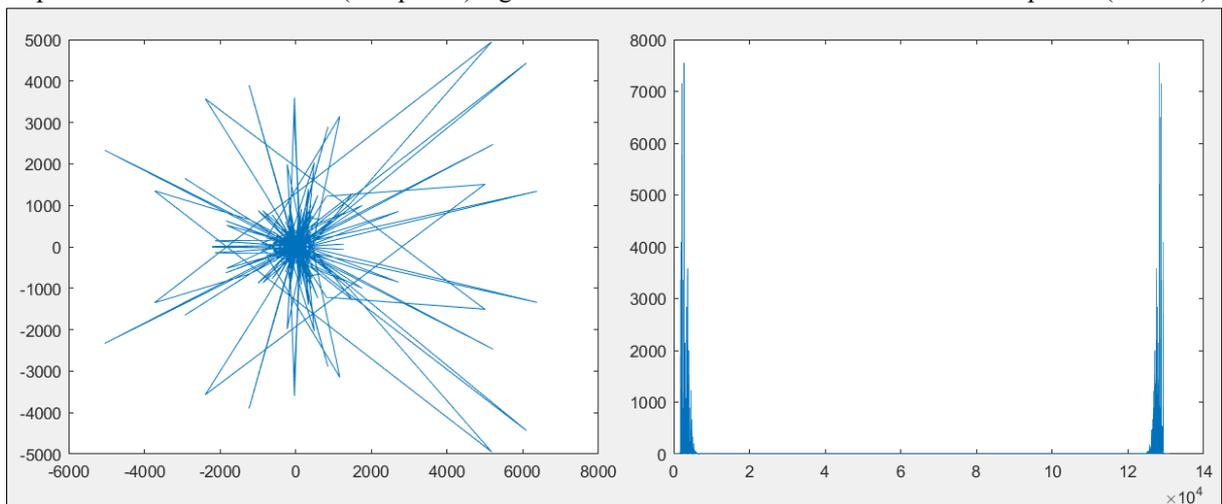


Fonte: próprio autor.

APÊNDICE C – FFT

A função interna **fft**, do pacote de ferramentas *Signal Processing* do MATLAB®, calcula a *transformada discreta de Fourier* (FDT) através de um algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT). Levando-se em conta que os dados de saída desta função do MATLAB® são números complexos que não exprimem explicitamente o espectro de frequências do conjunto de dados de entrada, faz-se necessário que se realize algumas etapas a partir dos dados de saída da função **fft** para que se obtenha o gráfico do espectro de frequências de uma determinada função. Neste apêndice, será ignorada a aplicação da *janela de Hann* feita ao sinal de amostra nas simulações descritas no trabalho.

Figura 51 - Gráfico dos números complexos de saída a função **fft** do MATLAB aplicada às amostras de campo do problema de cavidade vazia (à esquerda) e gráfico dos valores os módulos dos números complexos (à direita).



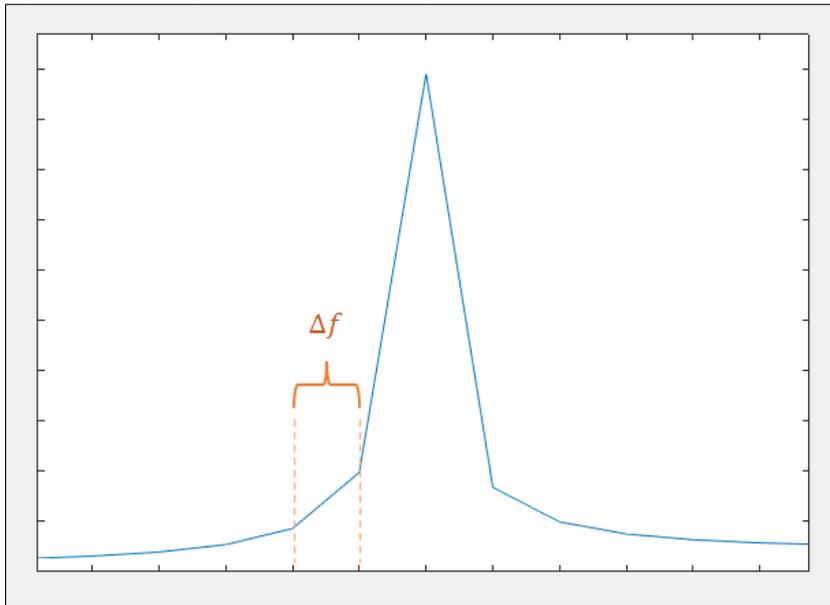
Fonte: próprio autor.

A ilustração à esquerda na Figura 51 representa o gráfico dos números complexos providos pela implementação da função **fft** ao conjunto de amostras da componente de campo E_x do problema de cavidade vazia, enquanto à direita está o gráfico dos módulos destes números complexos, ambos obtidos através da função **plot**. Este último gráfico possui duas metades simétricas em relação à posição da mediana dos elementos de seu eixo x e, portanto, é seguro afirmar que a segunda metade do gráfico é redundante. Também não são relevantes os valores numéricos das magnitudes do gráfico, já que estes valores sofrem grandes mudanças de acordo com o tempo de simulação, a posição da amostra e o sinal de excitação.

É oportuno frisar que o número de pontos no gráfico da função **fft** é o mesmo número de pontos de amostra de função de entrada. Isto quer dizer que a diferença de frequência entre

dois elementos consecutivos do gráfico é igual ao inverso do valor do passo de amostragem (Figura 52 e equação (78)):

Figura 52 - Destaque à diferença de frequências entre dois elementos da FFT.



Fonte: próprio autor.

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta t} \quad (78)$$

Logo, se o índice (1, 2, 3, ..., 2^{17}) de cada elemento do conjunto de amostras for dividido pelo total de número de amostras (2^{17}) – de modo que o valor do último elemento seja 1 – e, depois, cada valor resultante for multiplicado por Δf , encontra-se um conjunto cuja primeira metade dos elementos corresponde às frequências do eixo x do gráfico do espectro de frequências da função de entrada. Explicando-se através de equação:

$$f_n = \frac{n}{\text{total de passos de tempo}} \quad (79)$$

onde f_n é cada elemento do eixo x do gráfico do espectro de frequências (ou seja, cada frequência representada no gráfico) e n representa o número de passos de tempo (que é o número de amostras da função de entrada).

A partir disto, basta utilizar o comando **plot** para gerar o gráfico da metade dos elementos do conjunto dos módulos da **fft** da função de entrada e ajustar o eixo conforme a equação (79).

A Figura 53 mostra a parte central do código do programa responsável pela FFT.

Figura 53 - Parte do código do programa correspondente à FFT.

```

% Retira metade do tamanho da matriz de amostras de campo, para remover
% a metade redundante do gráfico FFT
L = numero_de_passos_de_tempo/2;

% Frequência de amostragem das funções
fs = 1/dt;

% Faz a FFT do conjunto de amostras de campo (os elementos são números
% complexos)
registros_de_amostras_de_campos_FFT = fft(registros_de_amostras_de_campos_han);

% Encontra a magnitude do matriz de números complexos da FFT
registros_de_amostras_de_campos_FFT_mag = abs(registros_de_amostras_de_campos_FFT);

% Ajusta a amplitude de cada componente harmônica do campo
registros_de_amostras_de_campos_FFT_ampl = registros_de_amostras_de_campos_FFT_mag / L;

% Eixo x para o gráfico da transformada de Fourier
FFT_xaxis = 1:1:numero_de_passos_de_tempo;

% Ajusta o eixo x do FFT para que fique com os valores corretos
% das frequências em Hertz
freq_axis = (FFT_xaxis/numero_de_passos_de_tempo)*fs;

figure

% Plota o gráfico de espectro de frequências do campo (De 1 até L, para
% não incluir a metade redundante)
plot1 = plot(freq_axis(1:L),registros_de_amostras_de_campos_FFT_ampl(1:L),'-b');

% Estabelece os limites do gráfico
xlim([0 10e9])

```

Fonte: próprio autor.