



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Egino Valcanaia

Introdução à Geometria Esférica no Ensino Médio

Blumenau, Santa Catarina

2022

Egino Valcanaia

Introdução à Geometria Esférica no Ensino Médio

Dissertação submetida ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Márcio de Jesus Soares, Dr.

Blumenau, Santa Catarina
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Valcanaia, Eginó
Introdução à Geometria Esférica no Ensino Médio / Eginó
Valcanaia ; orientador, Márcio Soares, 2022.
154 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Pós
Graduação em Matemática, Blumenau, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Geometria Esférica, Engenharia
Didática, sequência didática.. I. Soares, Márcio . II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Matemática. III. Título.

Egino Valcanaia

Introdução à Geometria Esférica no Ensino Médio

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.
UFSC/Blumenau

Prof. Wladimir Seixas, Dr.
UFSCar/São Carlos

Prof. Anderson Paião dos Santos, Dr.
UTFPR/Cornélio Procópio

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof. Márcio de Jesus Soares, Dr.
Orientador

Blumenau, Santa Catarina
2022

Dedico este trabalho a minha esposa Rita, meus filhos Anthony e Stéphanie e, aos professores Tercílio João Moser (Zinho Moser) e Evaldo Moresco que foram minhas primeiras referências no campo da Matemática.

Agradecimentos

A Deus Senhor de todas as coisas.

A meus pais Tibério Valcanaia (*in memoriam*) e Bernardina Pezzoti Valcanaia (*in memoriam*) por ter-me dado a vida e terem me educado com amor.

A minha esposa Rita Fiamoncini Valcanaia pelo apoio em todos os momentos dessa caminhada.

A minha filha Stéphaney Fiamoncini Valcanaia por ser um exemplo de dedicação nos estudos e uma filha amável e delicada.

A meu filho Anthony Fiamoncini Valcanaia por ter compreendido o empenho do papai neste trabalho e ter abdicado de muitos momentos de brincadeiras entre pai e filho.

Aos colegas de turma pelas trocas de conhecimento e momentos de amizade.

A meu orientador Dr. Márcio de Jesus Soares pelos seus conhecimentos, acompanhamento e profissionalismo que tem permitido a elaboração desta dissertação.

A todos meus professores que propiciaram a formação necessária para ingressar neste curso de Mestrado.

Aos professores do programa PROFMAT que tem me acompanhado nas disciplinas deste mestrado e que são os principais responsáveis por minha evolução intelectual: Dr. Andre Vanderline da Silva; Dr. Claudio Loesch; Dr. Eleomar Cardoso Junior; Dr. Felipe Vieira; Dr. Luiz Rafael dos Santos; Dr. Maicon José Benvenuti; Dr. Márcio de Jesus Soares; Dr. Rafael Aleixo de Carvalho; e, Dr. Renan Gambale Romano.

Ao Dr. Felipe Delfini Caetano Fidalgo, coordenador do PROFMAT, e aos demais servidores da UFSC que contribuíram direta, ou indiretamente, para a ocorrência desse programa de pós-graduação.

Resumo

A presente dissertação propõe uma sequência didática para o Ensino Médio que pretende auxiliar os alunos dessa faixa escolar no desenvolvimento de habilidades de argumentação dedutiva através da Geometria Esférica. Com a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, a sequência didática foi elaborada partindo da investigação dos textos de Geometria empregados no ensino progressivo do público alvo, que expôs lacunas concernentes à argumentação dedutiva no processo de ensino dessa área da Matemática. A revisão da literatura de Geometria Esférica sinalizou conceitos com potencial para serem trabalhados no Ensino Médio, os quais foram sequenciados, munidos de materiais didáticos e de uma metodologia de ensino, formando a versão preliminar da sequência didática que foi submetida à experimentação em duas turmas do último ano do Ensino Médio. Nesse processo, conforme preconizado pela Engenharia Didática, as atividades propostas na sequência didática foram submetidas à análise contínua, confrontando objetivos estabelecidos com a aprendizagem demonstrada pelos alunos, que possibilitou a implementação de melhorias para a versão final da sequência didática, considerada válida pela última fase da Engenharia Didática.

Palavras-chave: Geometria Esférica, Engenharia Didática, sequência didática.

Abstract

This dissertation proposes a didactic sequence for medium degree that aims to assist students of this school range in the development of deductive argumentation skills through Spherical Geometry. With Didactic Engineering as a research methodology, the didactic sequence was elaborated based on the investigation of the geometry texts used in the past teaching of the target audience, which exposed gaps concerning the deductive argumentation in the teaching process of this area of Mathematics. The literature review of Spherical Geometry signaled concepts with potential to be worked on in medium degree, which were sequenced, equipped with teaching materials and a teaching methodology, forming the preliminary version of the didactic sequence that was submitted to experimentation in two classes of the last year of medium degree. In this process, as recommended by Didactic Engineering, the activities proposed in the didactic sequence were submitted to continuous analysis, confronting objectives established with the learning demonstrated by the students, which allowed the implementation of improvements to the final version of the didactic sequence, considered valid by the last phase of Didactic Engineering.

Keywords: Spherical Geometry, Didactic Engineering, didactic sequence.

Lista de símbolos

\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros relativos.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}/2\pi$	Conjunto quociente de \mathbb{R} pela relação de equivalência módulo 2π .
\bar{x}	Elemento de $\mathbb{R}/2\pi$ em que $x \in \mathbb{R}$ é um de seus representantes.
\pm	Sinal utilizado para condensar duas expressões algébricas que diferem apenas pelos sinais positivo e negativo.
B^a	Antípoda do ponto B .
$\bigcirc AB$	Reta esférica que passa pelos pontos não antípodas A e B .
$d^e(A, B)$	Distância esférica entre os pontos A e B .
\widehat{AB}	Segmento de reta esférica de extremos A e B . ¹
\overrightarrow{AB}	Semirreta esférica de origem A e que passa pelo ponto B .
$\sphericalangle ABC$	Ângulo esférico de vértice B e de lados \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} .
$\sphericalangle B$	Ângulo esférico de vértice B .
$\Delta^e ABC$	Triângulo esférico de vértices A , B e C .
A'	Polo da reta $\bigcirc BC$ que está no mesmo lado de A , sendo A vértice do $\Delta^e ABC$.
$\Delta^e A'B'C'$	Triângulo polar do triângulo $\Delta^e ABC$.
$m\widehat{AB}$	Medida do segmento esférico \widehat{AB} .
$m\sphericalangle ABC$	Medida do ângulo esférico $\sphericalangle ABC$.

¹ No contexto do Capítulo 1, a notação \widehat{AB} também será usada para denotar o menor arco de circunferência máxima de extremos A e B .

Sumário

Sumário	9
INTRODUÇÃO.	11
1 A ESFERA NO ESPAÇO	13
1.1 Características da Esfera no Espaço Euclidiano	13
2 GEOMETRIA ESFÉRICA	19
2.1 Axiomas e primeiras definições	20
2.2 A representação através de figuras	22
2.3 Propriedades derivadas dos axiomas	25
2.4 Uma palavra com o professor de Ensino Médio	56
3 FASES INICIAIS DA ENGENHARIA DIDÁTICA	61
3.1 Fase das análises prévias	61
3.1.1 6º ano	61
3.1.2 7º ano	62
3.1.3 8º ano	62
3.1.4 9º ano	63
3.1.5 Ensino Médio	64
3.1.6 Algumas observações	64
3.1.7 Alguns dados da educação brasileira	65
3.1.8 Contribuições	65
3.1.9 Resumo das análises prévias	67
3.2 Fase das análises a priori	67
3.2.1 Escolhas globais	68
3.2.2 Escolhas Locais	69
3.2.3 Hipóteses e sequência didática	69
4 FASE DA EXPERIMENTAÇÃO E PRIMEIRAS ANÁLISES	71
4.1 Momento 1	72
4.1.1 Atividade 1	72
4.1.2 Atividade 2	73
4.1.3 Atividade 3	74

4.1.4	Considerações gerais dessa aula	75
4.2	Momento 2	75
4.2.1	Os axiomas apresentados na sequência didática	75
4.3	Momento 3	77
4.3.1	As definições dessa aula	78
4.3.2	Argumentos dedutivos	80
4.4	Momento 4	82
4.4.1	Análise das três primeiras questões	82
4.4.2	Análise das duas últimas questões	84
4.4.3	Observações Importantes	85
4.5	Momento 5	86
4.6	Momento 6	87
4.6.1	Definição de triângulos polares e atividades de compreensão e investigação	88
4.7	Momento 7	89
4.8	Oficina Matemática: representação de objetos geométricos na esfera	91
4.9	Considerações gerais do capítulo	93
 5 QUARTA FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: ANÁLISES A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA EXPERIÊNCIA.		95
5.1	Avaliação final.	95
5.2	Análises <i>a posteriori</i>.	98
5.3	Validação da sequência didática.	99
 CONSIDERAÇÕES FINAIS.		102
 REFERÊNCIAS		103
 Apêndice A. Menor distância entre dois pontos na esfera.		105
 Apêndice B. O conjunto $\mathbb{R}/2\pi$.		107
 Apêndice C. Algumas resoluções apresentadas pelos alunos		116
 Anexo A. Sequência Didática.		121
 Anexo B. Encarte.		143
 Anexo C. Questionário de avaliação 1.		150
 Anexo D. Questionário de avaliação 2.		152

Introdução

A educação básica brasileira procura dar conta de desenvolver habilidades e competências que assegurem aos educandos condições de viver e conviver dignamente em sociedade, fazendo as melhores escolhas para seu próprio bem e da sociedade em geral. A educação matemática, como parte integrante desse processo, ao final do Ensino Médio, deve, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2018, p.540), além de outras competências, garantir que o aluno seja eficiente em investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, procurando contraexemplos para refutá-las ou argumentos para validá-las, enfatizando ser indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem a forma dedutiva de raciocinar e argumentar. No entanto, a impressão, comungada por colegas de profissão, é que, ao final do ciclo básico, os estudantes não apresentam habilidades mínimas nessa competência. Dessa forma, propomo-nos, tentar contribuir nesse processo, no campo de ensino da Geometria, com a apresentação de uma sequência didática de Geometria Esférica para o Ensino Médio.

O desenvolvimento dessa sequência didática guiou-se pela metodologia de pesquisa da Engenharia Didática que estabelece quatro fases interligadas para sua execução. Inicia-se com a investigação das aprendizagens prévias dos alunos e culmina com a análise da eficiência da sequência didática em proporcionar as habilidades requeridas. O público alvo é composto por alunos do último ano do Ensino Básico de uma escola pública, exclusiva de Ensino Médio, formada por alunos vindos de diferentes escolas de Ensino Fundamental. Assim, na "*Fase das Análises Prévias*", examinamos o livro didático de Geometria usado nessas escolas, bem como o adotado no Ensino Médio para a população pesquisada, observando a forma como são investigadas as propriedades geométricas e como é desenvolvido o raciocínio e a argumentação dedutiva. Essas análises, apresentadas na primeira seção do Capítulo 3, dão pistas de como se deu o ensino-aprendizagem de Geometria na vida escolar pregressa desses alunos, permitindo inferir as habilidades desenvolvidas e os conceitos apreendidos.

De posse dessas informações, iniciou-se a segunda fase da Engenharia Didática, "*Fase das Análises a Priori*". Nessa fase, foram feitas as escolhas didáticas e as previsões dos resultados pedagógicos dessas escolhas. Nesse sentido, a segunda seção do Capítulo 3 é dedicada às escolhas metodológicas e de conteúdo, bem como, a projeção das habilidades a serem desenvolvidas, as

hipóteses na linguagem da Engenharia Didática. A definição dos conteúdos a serem abordados demanda compreensão das peculiaridades do tema e, nesse sentido, nos Capítulos 1 e 2, complementados pelos Apêndices A e B, apresenta-se a revisão teórica do tema escolhido.

A "*Fase das Análises a Priori*" também comporta o planejamento e a descrição detalhada dos conteúdos e atividades aplicados na fase seguinte. O produto deste exercício pedagógico, apresentado nos Anexos A e B, no entanto, sofreu adequações durante a interação com os alunos na "*Fase da Experimentação e Primeiras Análises*", a qual dedicou-se o Capítulo 4. Nesta fase, são discutidos e analisados os detalhes da aplicação da sequência didática, as dificuldades demonstradas pelos alunos, as necessidade de inclusão de novas atividades ou enfoques e as percepções quanto aos objetivos elencados em forma de hipóteses na "*Fase das Análises a Priori*". Essa reflexão contínua, ocorrida simultaneamente ao processo de interação com os alunos, foi importante para captar particularidades dos alunos participantes que não foram percebidas na "*Fase das Análises Prévias*", permitindo ajustes na sequência didática que contribuíssem no alcance dos objetivos estabelecidos.

Terminada a etapa de aplicação da sequência didática, a metodologia de pesquisa da Engenharia Didática estabelece o último momento, denominado de "*Fase das Análises a Posteriori e Validação da Experiência*". Nesta fase, a qual foi dedicado o Capítulo 5, examinamos e avaliamos todos os momentos da aplicação, inclusive os resultados das avaliações ocorridas durante e no final desse processo. A validação da sequência didática, objeto desta fase da Engenharia Didática, condiciona-se à satisfação das hipóteses elencadas na "*Fase das Análises a Priori*" através do confronto dos resultados das análises *a posteriori* com os objetivos estabelecidos nas hipóteses. E, o juízo de valor da sequência didática, bem como as considerações pertinentes estão apresentadas neste mesmo capítulo.

1 A Esfera no Espaço

Neste capítulo estudaremos as propriedades básicas de uma esfera de raio e centro quaisquer do espaço euclidiano, determinando características que independam do centro, do raio e do espaço que a contém. Essas características intrínsecas à esfera formarão um sistema de axiomas, utilizados no próximo capítulo, em sua versão original ou mais fraca, no desenvolvimento axiomático da Geometria Esférica.

1.1 Características da Esfera no Espaço Euclidiano

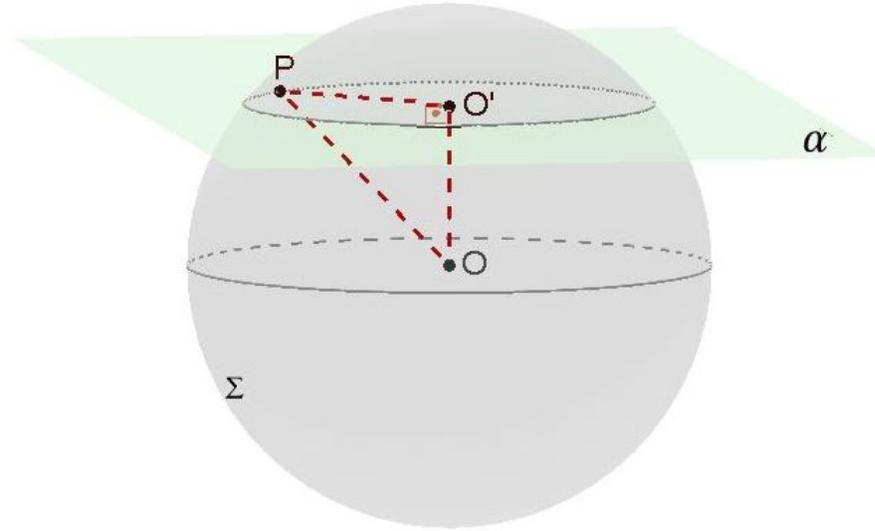
Definição 1.1 (Esfera). *Sejam dados um ponto O do espaço e um número real positivo r . A esfera de centro O e raio r , denotada por $\Sigma(O, r)$, é o lugar geométrico dos pontos do espaço euclidiano que distam r de O .*

Para simplificar a linguagem, quando não houver ambiguidade, usaremos a notação simplificada Σ para representar a esfera $\Sigma(O, r)$.

Definição 1.2 (Circunferência). *Dados um plano α , um ponto O desse plano e um número real positivo r , denominaremos circunferência em α , de centro O e raio r , ao conjunto de pontos de α que estão à distância r de O .*

Proposição 1.3. *Se um plano α intersecta uma esfera $\Sigma(O, r)$ em mais de um ponto, então:*

- (a) *O conjunto $\alpha \cap \Sigma$ é uma circunferência.*
- (b) *Se $O \in \alpha$, então o comprimento da circunferência $\alpha \cap \Sigma$ é igual a $2\pi r$.*
- (c) *Se $O \notin \alpha$, então o comprimento da circunferência $\alpha \cap \Sigma$ é menor que $2\pi r$.*

Figura 1 – Intersecção de um plano α e uma esfera Σ de centro O e raio r .

Fonte: O autor (2021).

Demonstração. (a) Caso α contenha o centro da esfera: seja P é um ponto qualquer de $\alpha \cap \Sigma$, então $m(\overline{OP}) = r$ pois $P \in \Sigma$, segue que P é um ponto da circunferência, em α , de centro O e raio r . Reciprocamente, seja Q um ponto desta circunferência, então $m(\overline{OQ}) = r$. Portanto, segue que Q é um ponto de Σ .

Caso α não contenha o centro da esfera: seja o ponto O' o pé da perpendicular baixada do centro O ao plano α e seja P um ponto qualquer de $\alpha \cap \Sigma$, distinto de O' . Observe que os pontos O e O' são distintos, pois O não está em α , e que toda reta em α que passa por O' é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OO'}$ e, portanto, o triângulo $\triangle PO'O$ é retângulo em O' , logo, pelo Teorema de Pitágoras

$$m(\overline{PO})^2 = m(\overline{OO'})^2 + m(\overline{O'P})^2. \quad (1.1)$$

Reescrevendo a última equação como $m(\overline{O'P}) = \sqrt{r^2 - m(\overline{OO'})^2}$, vemos que P pertence à circunferência, no plano α , de centro O' e raio $\sqrt{r^2 - m(\overline{OO'})^2}$. Chamando de λ esta circunferência, temos que $\alpha \cap \Sigma$ está contido em λ .

Por outro lado, se Q é um ponto qualquer da circunferência λ , então

$$m(\overline{O'Q}) = m(\overline{O'P}) \quad (1.2)$$

e os pontos Q , O' e O formam um triângulo retângulo em O' . Logo, segue que $m(\overline{QO})^2 = m(\overline{OO'})^2 + m(\overline{O'Q})^2$, ou ainda, $m(\overline{QO})^2 = m(\overline{OO'})^2 + m(\overline{O'P})^2$. Comparando a última equação com a equação (1.1), segue que $m(\overline{QO}) = m(\overline{PO}) = r$, logo Q é um ponto da esfera Σ . Portanto, a circunferência λ está contida em $\alpha \cap \Sigma$ e, como já provou-se a continência inversa, segue que $\alpha \cap \Sigma = \lambda$, ou seja, o conjunto de pontos $\alpha \cap \Sigma$ é uma circunferência.

Para provar (b) e (c), basta observar que o raio da circunferência $\alpha \cap \Sigma$ no caso (b) é r e, no caso (c) é $\sqrt{r^2 - m(\overline{OO'})^2}$, que é menor que r , pois O e O' são distintos. Assim, segue que o comprimento de $\alpha \cap \Sigma$ é $2\pi r$ para o caso (b) e, menor que $2\pi r$ para o caso (c). \square

Observe-se, portanto, que a intersecção de um plano com uma esfera $\Sigma(O, r)$, em mais de um ponto, é uma circunferência de comprimento $2\pi r$, se o plano passa pelo centro dessa esfera e, comprimento menor que $2\pi r$, caso contrário. Atente-se ainda que a última proposição mostra que numa esfera de raio r não há circunferências de comprimento maior que $2\pi r$, pois o plano que contém uma circunferência dessa esfera, ou passa pelo centro da esfera, e portanto tem comprimento $2\pi r$, ou não passa pelo centro e, conseqüentemente, seu comprimento será menor que $2\pi r$. Como serão de especial interesse nesse trabalho as circunferências de comprimento $2\pi r$, em que r é o raio da esfera em que estão contidas, estabeleceremos a seguinte definição:

Definição 1.4 (Circunferência máxima). *Denominaremos circunferências máximas da esfera $\Sigma(O, r)$ as circunferências contidas nessa esfera que possuam comprimento $2\pi r$.*

O próximo teorema mostra uma propriedade interessante das circunferências máximas. Mas antes de enunciá-lo, queremos ponderar que fixada uma medida r e um ponto de uma reta, existem exatamente dois pontos distintos que distam r desse ponto. Com isso, temos que se uma reta s passa pelo centro de uma esfera $\Sigma(O, r)$, então a intersecção entre a reta s e a esfera $\Sigma(O, r)$ é um conjunto de dois pontos.

Teorema 1.5. *Duas circunferências máximas distintas de uma esfera $\Sigma(O, r)$ possuem exatamente dois pontos distintos em comum, os quais pertencem a uma reta que passa pelo centro da esfera.*

Demonstração. Sejam β e γ duas circunferências máximas distintas contidas numa esfera $\Sigma(O, r)$, e sejam β^* e γ^* os respectivos planos que as contém. Pela Proposição 1.3, os planos β^* e γ^* passam pelo centro O da esfera $\Sigma(O, r)$ e são distintos, pois caso contrário as circunferências β e γ seriam iguais. Logo, $\beta^* \cap \gamma^*$ é uma reta, digamos reta s , que contém o centro O da esfera $\Sigma(O, r)$ e portanto passa por, exatamente, dois pontos distintos dessa esfera, os quais denominaremos por A e B . Como A e B estão em $\Sigma(O, r)$ e em $\beta^* \cap \gamma^*$, temos que A e B estão nas circunferências máximas β e γ , bem como na reta s que passa pelo centro da esfera. \square

Definição 1.6 (Antípodas). *Dois pontos A e B de uma esfera serão ditos antípodas se estão contidos numa reta que passa pelo centro dessa esfera. Diz-se ainda que A é antípoda de B , ou que B é antípoda de A .*

Teorema 1.7. *Por dois pontos distintos não antípodas da esfera $\Sigma(O, r)$ passa uma, e apenas uma, circunferência máxima.*

Demonstração. Sejam A e B pontos distintos não antípodos de $\Sigma(O, r)$. Logo, A e B não estão alinhados com o centro O da esfera e, portanto, determinam com este um único plano. Como este plano contém o centro O da esfera, segue da Proposição 1.3 que sua intersecção com a esfera $\Sigma(O, r)$ determina uma circunferência de comprimento $2\pi r$, que é uma circunferência máxima. A unicidade desta circunferência segue da unicidade do plano determinado pelos pontos O , A e B . \square

Teorema 1.8. *Cada ponto da esfera $\Sigma(O, r)$ possui exatamente um antípoda.*

Demonstração. Seja A um ponto de uma esfera $\Sigma(O, r)$. Logo, existe uma única reta s que passa pelos pontos A e O . Como esta reta encontra a esfera $\Sigma(O, r)$ em exatamente dois pontos distintos, sendo um deles o ponto A , o outro ponto será o antípoda de A . \square

Até então o reconhecimento de um par de pontos serem antípodos depende do centro da esfera, o qual não pertence à esfera. É possível, no entanto reconhecer se dois pontos são antípodos por propriedades exclusivas dos pontos da esfera, o que mostrará a próxima proposição e seu corolário.

Proposição 1.9. *Um par de pontos antípodos sempre está numa circunferência máxima da esfera.*

Demonstração. Sejam A e B pontos antípodos de uma esfera $\Sigma(O, r)$. Seja s a reta que os contém, a qual por definição passa pelo centro da esfera. Tomando um ponto C qualquer da esfera, distinto de A e de B , tem-se que $C \notin s$, então, existe um plano γ^* determinado por s e C . O plano γ^* contém a reta s , logo passa pelo centro O da esfera. Segue da Proposição 1.3 que $\gamma^* \cap \Sigma(O, r)$ é uma circunferência máxima de $\Sigma(O, r)$ que contém os pontos A e B . \square

Corolário 1.10. *Sejam A e B pontos de uma esfera $\Sigma(O, r)$, e λ uma circunferência máxima a qual pertencem. Então, A e B são antípodos se, e somente se, os arcos de λ de extremos A e B medem πr .*

Demonstração. Sejam A e B antípodos, então, por definição, o centro de $\Sigma(O, r)$ pertence à reta \overleftrightarrow{AB} . Como O é também centro da circunferência máxima λ , segue que o segmento \overline{AB} é um diâmetro de λ , logo os arcos de extremos A e B medem πr .

Reciprocamente, seja \widehat{AB} um arco de medida πr de uma circunferência máxima λ de $\Sigma(O, r)$. Então, \overline{AB} é um diâmetro de λ . Assim, a reta \overleftrightarrow{AB} contém o centro de λ , que também é o centro da esfera $\Sigma(O, r)$. Portanto, A e B são antípodos. \square

Teorema 1.11. *Dada uma circunferência máxima λ de uma esfera $\Sigma(O, r)$, existe um ponto P em $\Sigma(O, r)$ tal que λ é o conjunto de pontos X de $\Sigma(O, r)$ que possuem a seguinte propriedade: existe em $\Sigma(O, r)$ uma circunferência máxima que contém X e P tal que a medida do arco menor \widehat{XP} é $\frac{\pi}{2}r$.*

Demonstração. Seja λ^* o plano que contém λ . Temos que $O \in \lambda^*$.

Sejam s a reta perpendicular a λ^* que passa por O e, P' e P'' os pontos da intersecção da reta s com a esfera $\Sigma(O, r)$. Logo, P' não pertence a λ , e qualquer que seja o ponto de λ , ele não pertence a s . Fixemos um ponto A qualquer de λ , dessa forma, o plano (A, O, P') , determina em Σ , pela Proposição 1.3, uma circunferência máxima. Note que o ângulo $\angle AOP'$ é reto, logo o arco menor $\widehat{AP'}$ mede um quarto da circunferência que o contém, ou seja, a medida do arco menor $\widehat{AP'}$ é $\frac{\pi}{2}r$. Assim, P' é o ponto P procurado.

Falta ainda provar que se B é um ponto da esfera que está contido numa circunferência máxima γ que passa por B e P de tal forma que o arco menor \widehat{BP} de γ mede $\frac{\pi}{2}r$, então $B \in \lambda$. Para isso, observe primeiramente que os pontos B , P e O não são colineares e, dessa forma, o plano (B, P, O) , que contém γ também contém a reta s que passa pelos pontos P e O , que conforme a primeira parte é perpendicular ao plano λ^* . Dessa forma, s é perpendicular a toda reta de λ^* que passa por O . Observe também que, no plano (B, P, O) , a perpendicular a s no ponto O é a reta \overrightarrow{OB} , visto que o arco \widehat{BP} da circunferência de raio r e centro O mede $\frac{\pi}{2}r$. Finalmente, observe que a intersecção entre λ^* e (B, P, O) é uma reta que passa pelo ponto O e que deve ser perpendicular a s por estar contida no plano λ^* . Como a única reta com essa propriedade em (B, P, O) é a reta \overrightarrow{OB} , segue que $\overrightarrow{OB} \subset \lambda^*$, o que prova que $B \in \lambda$. \square

Definição 1.12 (Conjunto esfericamente convexo). *Um conjunto de pontos de uma esfera $\Sigma(O, r)$ é dito esfericamente convexo, se para quaisquer dois pontos A e B desse conjunto, existe um arco de circunferência máxima \widehat{AB} de medida menor ou igual a πr contido no conjunto.*

Todo plano que contém o centro de uma esfera, a divide em dois conjuntos disjuntos. O próximo teorema investiga a convexidade destes conjuntos e para isso será necessário recorrer aos conceitos de semiplano e semiespaço. Para dirimir qualquer confusão, deixaremos posto que a intersecção de um semiplano com sua reta geradora é vazia, bem como é vazia a intersecção de um semiespaço com seu plano gerador.

Definição 1.13 (Hemisfério). *Dados uma esfera $\Sigma(O, r)$ e um plano β^* que passa pelo centro da esfera, o conjunto de pontos da esfera que pertence ao mesmo semiespaço gerado por β^* é denominado de hemisfério.*

Referente à Definição 1.13, é importante observar que se H_1 e H_2 são os hemisférios gerados pelo plano β^* , então β^* gera em $\Sigma(O, r)$ uma circunferência máxima β tal que: $\beta \cap H_1 = \emptyset$; $\beta \cap H_2 = \emptyset$; $H_1 \cap H_2 = \emptyset$; e, $\beta \cup H_1 \cup H_2 = \Sigma(O, r)$.

Para provar o próximo teorema utilizaremos, sem demonstração, os seguintes resultados da Geometria Euclidiana:

- (i) Se E_1 e E_2 são os semiespaços gerados por um plano β^* e, se outro plano λ^* , diferente de β^* , é tal que $\lambda^* \cap \beta^* \neq \emptyset$, então $\lambda^* \cap \beta^*$ é uma reta s que gera em λ^* dois semiplanos, sendo um deles contido em E_1 e o outro, em E_2 .
- (ii) Sejam λ uma circunferência de centro O e s uma reta que passa por O , ambas contidas no plano λ^* . Se A e B são dois pontos de λ , pertencentes ao mesmo semiplano gerado por s em λ^* , então o menor arco \widehat{AB} de λ está contido nesse semiplano.

Teorema 1.14. *Um hemisfério de uma esfera $\Sigma(O, r)$ é esfericamente convexo.*

Demonstração. Sejam H um hemisfério de $\Sigma(O, r)$ gerado por um plano β^* e, A e B dois pontos deste hemisfério. O plano β^* contém o centro O da esfera e, pelo Teorema 1.7 e Proposição 1.9, segue que existe uma circunferência máxima, digamos λ , que contém os pontos A e B . Seja λ^* o plano que contém λ , o qual passa pelo centro O da esfera. Segue que $\beta^* \cap \lambda^*$ é diferente de vazio e como são distintos, pois A e B não pertencem a β^* , então sua intersecção é uma reta s que passa por O . Como O é também o centro de λ , nos valendo das observações que precedem este teorema, segue por (ii) que o arco menor \widehat{AB} está contido no mesmo semiplano de λ^* , que contém os pontos A e B . Usando (i) da observação precedente, segue que o arco menor \widehat{AB} está contido no mesmo semiespaço gerado pelo plano β^* , que contém os pontos A e B . Ou seja, o arco menor \widehat{AB} está contido no mesmo hemisfério que contém A e B . \square

As relações e propriedades exibidas pelos teoremas deste capítulo comporão a lista de axiomas da Geometria Esférica a ser desenvolvida no próximo, a qual se utiliza ainda da possibilidade de dispor os pontos de uma circunferência em correspondência biunívoca com os números do intervalo real $[0, 2\pi)$ ou ainda com conjunto $\mathbb{R}/2\pi$, conforme Teorema 11 do Apêndice B. Ou seja, os axiomas da Geometria Esférica serão válidos na esfera, tomando as circunferências máximas como as retas esféricas. Consequentemente a Geometria desenvolvida será válida nela.

Por fim, ponderamos que, se A e B são pontos da esfera, o menor caminho sobre ela que liga esses pontos é o menor arco de circunferência máxima \widehat{AB} , fato apresentado no Apêndice A.

2 Geometria Esférica

Este capítulo será dedicado ao desenvolvimento axiomático de uma geometria ambientada num conjunto, denominado esfera, cujos elementos serão denominados de pontos. Subconjuntos com certas características dadas axiomáticamente serão denominados de retas esféricas. Pontos e retas esféricas serão os elementos primitivos dessa geometria e uma esfera euclidiana de raio r qualquer é um modelo desta, no qual as circunferências máximas são as retas esféricas e a distância entre dois pontos é a medida em radianos do menor arco de circunferência máxima que passa por eles.

A utilização de imagens de pontos e circunferências máximas numa esfera física auxilia a percepção intuitiva de propriedades geométricas. As conjecturas somente serão aceitas como resultados válidos quando submetidas e validadas pelo método axiomático-dedutivo. Este método consistem na aceitação de certas afirmações sem necessidade de justificativa, os axiomas, e um consenso de certas regras da lógica. Consideraremos que o leitor esteja familiarizado com tais regras e sugerimos as treze regras da lógica apresentadas em Greenberg (2008, p.53-66) se houver interesse ou necessidade de recordá-las. Deste autor, destacamos a segunda regra: "São seis as justificativas permitidas nos passos de uma prova: por hipótese, axioma, teorema¹, definição, um passo previamente provado ou por uma regra da lógica". Não é incomum, no entanto, a omissão de justificativas num argumento de prova, o que procuraremos evitar nesse trabalho, e quando o fizermos será no intuito de tornarmos o texto menos carregado e considerando que o leitor depreenda a justificativa do contexto.

O desenvolvimento deste capítulo é baseado em Whittlesey (2020) e, algumas demonstrações, inclusive, são idênticas às apresentadas pelo autor. No entanto, a maioria das demonstrações é de nossa responsabilidade, mesmo que guiados pela notação, definições e enunciados apresentados pelo autor citado. É importante ressaltar que o principal objetivo deste capítulo é dar maior rigor e aprofundamento aos conceitos e proposições apresentados na sequência didática, objeto principal desta dissertação. Em particular, apresentamos a demonstração de dois teoremas, usados sem demonstração na sequência didática.

¹ Teorema aqui entendido como qualquer proposição previamente provada podendo receber o nome de teorema, proposição, lema ou corolário.

2.1 Axiomas e primeiras definições

As características básicas desse ambiente geométrico serão dadas por uma lista de oito axiomas. Esfera, pontos e retas esféricas serão tomados como elementos indefinidos e serão caracterizados pelos axiomas. O segundo axioma recorrerá ao conjunto $\mathbb{R}/2\pi$, para estabelecer um sistema de coordenadas sobre as retas esféricas, e a partir dele serão definidas as noções de pontos antípodos e de distância esférica. O conjunto $\mathbb{R}/2\pi$ é o conjunto quociente de \mathbb{R} pela relação de equivalência

$$x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ se, e somente se, existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x - y = k(2\pi),$$

sendo a notação \bar{x} reservada para elementos de $\mathbb{R}/2\pi$.

As propriedades da operação de adição sobre $\mathbb{R}/2\pi$ estão elencadas no Apêndice B, as quais serão utilizadas sem maiores menções nas demonstrações deste capítulo.

Axioma 1. *A esfera é um conjunto de pontos com, no mínimo, dois elementos distintos. A reta esférica é um subconjunto da esfera.*

Axioma 2. *Existe uma bijeção entre os pontos de uma reta esférica e o conjunto $\mathbb{R}/2\pi$.*

Definição 2.1 (Pontos antípodos). *Dois pontos da esfera serão ditos antípodos, se existe uma reta esférica que passa por eles cuja bijeção os relaciona com dois elementos de $\mathbb{R}/2\pi$ de tal forma que a diferença entre eles seja $\bar{\pi}$.*

Observe que, se ℓ é a bijeção garantida pelo Axioma 2, pelas propriedades de $\mathbb{R}/2\pi$,

$$\ell(A) - \ell(B) = \bar{\pi} \iff \ell(B) - \ell(A) = \bar{\pi}. \quad (2.1)$$

O que nos permitiu formular a definição de antípodos sem preocupação com a ordem da subtração e, portanto, se B é o antípoda de A , então A é o antípoda de B . Considerando a unicidade do antípoda dada pelo axioma a seguir, escreveremos C^a para denotar o ponto antípoda de C .

Axioma 3. *Um ponto da esfera não tem mais do que um antípoda.*

Axioma 4. *Se dois pontos distintos da esfera não são antípodos, então existe uma única reta esférica que passa por eles.*

Dados dois pontos A e B não antípodos, a única reta esférica que passa por esses dois pontos será denotada por $\circlearrowleft AB$. Quando não estamos interessados em pontos particulares, também denotamos uma reta esférica por letras gregas minúsculas.

Axioma 5. *Duas retas esféricas distintas possuem no mínimo um ponto em comum.*

Definição 2.2 (Distância esférica). *Sejam A e B dois pontos, e λ uma reta esférica que os contém. Seja, ainda, ℓ a bijeção associada à λ . Se δ é o representante da classe de equivalência $\ell(B) - \ell(A)$ no intervalo real $(-\pi, \pi]$, então definimos a distância entre A e B como o valor absoluto de δ e a representamos pela notação $d^e(A, B)$. Ou seja,*

$$d^e(A, B) = |\delta|$$

em que $\delta \in (-\pi, \pi]$, com $\bar{\delta} = \ell(B) - \ell(A)$ e $0 \leq d^e(A, B) \leq \pi$.

Observação 2.3. *Segue diretamente desta definição que se A e B são distintos não antípodas, então uma e, apenas uma das equações a seguir é válida:*

$$\ell(A) = \ell(B) + \overline{d^e(A, B)} \text{ ou } \ell(A) = \ell(B) - \overline{d^e(A, B)}.$$

A distância esférica, apresentada na Definição 2.2, possui as propriedades básicas esperadas, ou seja:

$$d^e(A, B) = 0 \iff A = B;$$

$$d^e(A, B) = d^e(B, A);$$

$$d^e(A, B) \leq d^e(A, C) + d^e(C, B).$$

Sendo as duas primeiras facilmente verificáveis pela definição. Já a terceira, a desigualdade triangular, possui demonstração mais sutil.

Axioma 6. *Para toda reta esférica existe um ponto tal que a reta esférica consiste de pontos da esfera que distam $\frac{\pi}{2}$ do ponto dado.*

Definição 2.4 (Polo de uma reta esférica). *Dada uma reta esférica λ , se todos os pontos de λ estiverem a uma distância $\frac{\pi}{2}$ de um ponto P , então P será dito polo dessa reta.*

Definição 2.5 (Segmento de reta). *Dados dois pontos A e B não antípodas, definimos o segmento de reta de extremos A e B como o conjunto de pontos da reta $\circ AB$ que estão entre A e B , além dos pontos A e B . Esse conjunto será representado por \widehat{AB} , sua medida $m\widehat{AB}$ será dada por $d^e(A, B)$.*

Definição 2.6 (Conjunto esféricamente convexo). *Um subconjunto da esfera é dito ser esféricamente convexo se para todo par de pontos não antípodas deste subconjunto o único segmento de reta de extremos nesses pontos está contido no próprio subconjunto.*

Definição 2.7 (Hemisfério). *Dado um ponto P da esfera, definimos hemisfério de centro P ao subconjunto dos pontos X da esfera de distância inferior a $\frac{\pi}{2}$ de P .*

Axioma 7. *Um hemisfério é esféricamente convexo.*

Definição 2.8 (Estar entre). *Dados três pontos distintos A , B e C , dizemos que B está entre A e C se: A e C não são antípodas; B está na reta $\circ AC$; e, $d^e(A, C) = d^e(A, B) + d^e(B, C)$.*

Definição 2.9 (Semirreta). *Sejam A e B dois pontos distintos não antípodas. O conjunto dos pontos C na reta $\circ AB$ que estão em \widehat{AB} , ou tais que B está entre A e C , será denominado semirreta esférica de origem A passando por B , e será representada por \overrightarrow{AB} .*

Também denotaremos uma semirreta por uma letra latina minúscula quando não estivermos interessados em pontos nela contidos.

Definição 2.10 (Ângulo esférico). *Sejam A , B e C pontos distintos que não estão contidos numa mesma reta esférica. A união das semirretas esféricas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} será denominada de ângulo esférico de vértice B e lados \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} , sendo denotado por $\sphericalangle ABC$. O interior do ângulo é a intersecção do hemisfério gerado por $\circ AB$ que contém C com o hemisfério gerado por $\circ BC$ que contém A .*

Definição 2.11 (Medida de ângulo). *Se $\sphericalangle ABC$ é um ângulo esférico. Escolha os pontos D e E em \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} , respectivamente, distando $\frac{\pi}{2}$ de B . Então, a medida de $\sphericalangle ABC$, denotada por $m \sphericalangle ABC$, é definida como $d^e(D, E)$.*

Axioma 8. *Suponha dois ângulos esféricos $\sphericalangle A_1B_1C_1$ e $\sphericalangle A_2B_2C_2$ tais que $m\widehat{A_1B_1} = m\widehat{A_2B_2}$ e $m\widehat{B_1C_1} = m\widehat{B_2C_2}$. Então $m \sphericalangle A_1B_1C_1 = m \sphericalangle A_2B_2C_2$ se, e somente se, $m\widehat{A_1C_1} = m\widehat{A_2C_2}$.*

Definição 2.12 (Triângulo esférico). *Sejam A , B e C pontos distintos não contidos numa mesma reta esférica. A união dos três segmentos de reta \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} será dito triângulo esférico de vértices A , B e C e lados \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} , e será representado por $\Delta^e ABC$. Os ângulos esféricos $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ e $\sphericalangle BCA$ são seus ângulos internos.*

Dessa lista de axiomas e definições, derivaremos as propriedades da Geometria Esférica necessárias à Engenharia Didática proposta neste trabalho. Antes disso, faremos uma reflexão acerca da utilidade de figuras na representação de objetos geométricos.

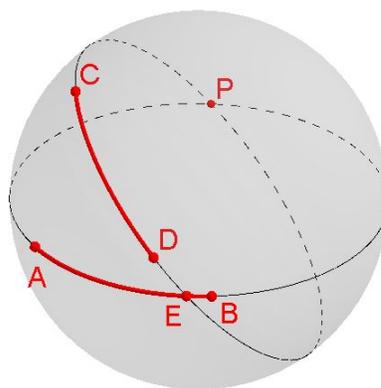
2.2 A representação através de figuras

Para melhor compreender os objetos geométricos apresentados, recorreremos a uma esfera euclidiana para obter sua representação, frisando, no entanto, que o apelo visual não será admitido como método de prova. Apesar disto, um bom desenho pode ser muito útil para traçar estratégias de prova, bem como fazer conjecturas interessantes.

Na Figura 2, a seguir, representamos dois segmentos \widehat{AB} e \widehat{CD} de mesma medida e contidos em retas distintas. É interessante notar que segmentos foram definidos como subconjuntos

de retas esféricas de extremos distintos não antípodas e, dessa forma, dois pontos determinam um único segmento, visto que por esses dois pontos passa uma única reta esférica. É esta propriedade que nos permitiu definir rigorosamente um triângulo esférico a partir de três pontos distintos não contidos numa mesma reta. Note também que se houvesse um par de antípodas dentre estes pontos, então os três pontos estariam na mesma reta e, portanto, não existiria um triângulo.

Figura 2 – Segmentos de reta esférica.



Fonte: O autor (2021).

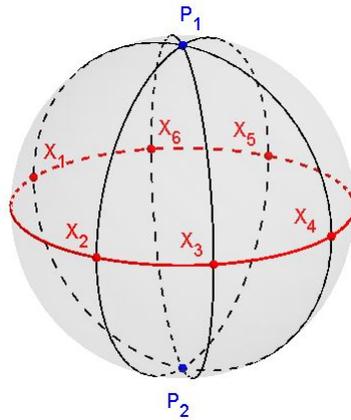
O conceito de um ponto estar entre outros dois está representada na Figura 2 pelo ponto E , que está nas duas retas esféricas representadas, mas enquanto está entre A e B , o mesmo não está entre C e D .

Outra observação interessante se refere ao fato de não haver pares de antípodas no mesmo segmento esférico, isto significa que na esfera euclidiana apenas o menor arco que liga dois pontos pertence a classe dos segmentos de reta esféricos. Desta forma, a união dos segmentos \widehat{BA} e \widehat{AP} , na Figura 2, formando o arco maior de extremos B e P não é um segmento esférico, o segmento esférico \widehat{BP} é o caminho que liga B e P , e que não passa pelo ponto A .

Ilustrações comumente são relevantes para estabelecer conjecturas e indicar possíveis caminhos de prova. Greenberg (2008, p.27-29) discorre acerca da importância de boas figuras em Geometria, e enfatiza que muitas pessoas raciocinam visualmente com mais facilidade do que simbolicamente.

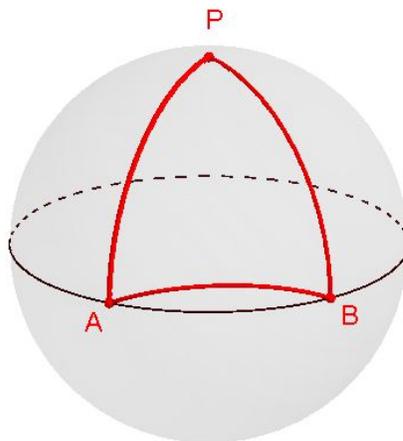
Nesse sentido, a Figura 3, por exemplo, sugere que se P_1 é polo da reta esférica $\bigcirc X_1 X_2$, então o seu antípoda P_2 é o outro polo dessa mesma reta, fato tornado rigoroso pela Proposição 2.18. Esta, também sugere, que duas retas esféricas distintas se encontram em pares de pontos antípodas (Proposição 2.15).

Figura 3 – Polos de uma reta esférica.



Fonte: O autor (2021).

Se a última figura faz justiça à importância das figuras, a Figura 4 servirá de alerta para as sugestões equivocadas de certas figuras. Nesta, P é um polo da única reta esférica que passa pelos pontos A e B . A figura destacada em vermelho "parece ser" o triângulo esférico $\Delta^e ABP$, mas de fato não é, visto que a linha que liga os pontos A e B não está contida numa reta esférica. Na verdade é um arco de circunferência não máxima, não sendo, então, um segmento de reta e, portanto, o objeto geométrico ABP não é um triângulo esférico.

Figura 4 – Região esférica ABP .

Fonte: O autor (2021).

Apresentada essa discussão informal acerca de alguns conceitos da Geometria Esférica, bem como do poder e perigo das figuras ilustrativas, sentimos-nos aptos a investigar rigorosamente propriedades advindas dos axiomas e definições. A compreensão da argumentação apresentada pode ser facilitada pela representação de pontos, retas esféricas e segmentos de reta através de

uma figura que, no entanto, não será utilizada como argumento de prova.

2.3 Propriedades derivadas dos axiomas

Nesta seção derivaremos dedutivamente as propriedades básicas da Geometria Esférica culminando com dois teoremas utilizados sem demonstração na sequência didática: o Teorema dos triângulos polares; e, o Teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Proposição 2.13. *Todo ponto possui um único antípoda.*

Demonstração. Pelo Axioma 3, se esse ponto existir, é único. Sejam A um ponto qualquer da esfera e λ uma reta esférica que o contém. Pelo Axioma 2, existe uma bijeção $\ell : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$. Tome \bar{y} em $\mathbb{R}/2\pi$ tal que $\ell(A) - \bar{y} = \bar{\pi}$, segue que $\ell^{-1}(\bar{y})$ é antípoda de A . \square

Lema 2.14. *Se A é um ponto, então o antípoda de A pertence à mesma reta esférica que contém A .*

Demonstração. Sejam λ uma reta esférica passando por A e $\ell : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ a bijeção associada a λ . Escolhendo \bar{y} em $\mathbb{R}/2\pi$ tal que $\ell(A) - \bar{y} = \bar{\pi}$, segue que $\ell^{-1}(\bar{y}) \in \lambda$ é antípoda de A . \square

Proposição 2.15. *Se λ_1 e λ_2 são retas esféricas distintas, então λ_1 e λ_2 se encontram em exatamente dois pontos que são antípodas.*

Demonstração. Pelo Axioma 5, existe um ponto comum, digamos A , a λ_1 e λ_2 . Pelo Lema 2.14, segue que A^a também está em λ_1 e λ_2 . Caso existisse um ponto B distinto de A e de A^a em λ_1 e λ_2 , então B não seria antípoda de A e pelo Axioma 4, λ_1 e λ_2 seriam iguais, uma contradição com a hipótese. \square

Proposição 2.16. *Sejam A e B pontos da esfera, temos que A e B são pontos antípodas se, e somente se, $d^e(A, B) = \pi$.*

Demonstração. Sejam λ uma reta esférica que contém A e B , e ℓ uma bijeção a ela associada. Como $\ell(A) - \ell(B) = \bar{\pi}$ se, e somente se, A e B são antípodas, por definição. Então $d^e(A, B) = \pi$ se, e somente se, A e B são antípodas. \square

Proposição 2.17. *Se A é um ponto de uma reta esférica λ , então existem em λ exatamente dois pontos B e C tais que $d^e(A, B) = d^e(A, C) = \frac{\pi}{2}$. Além disso, B e C são antípodas.*

Demonstração. Sejam $\ell : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ a bijeção associada a λ e, \bar{x} e \bar{y} em $\mathbb{R}/2\pi$ definidos da seguinte forma:

$$\bar{x} = \ell(A) + \frac{\pi}{2} \quad (2.2)$$

e

$$\bar{y} = \ell(A) - \frac{\pi}{2}. \quad (2.3)$$

Considerando $B = \ell^{-1}(\bar{x})$ e $C = \ell^{-1}(\bar{y})$, segue que $\ell(B) - \ell(C) = \pi$, logo B e C são antípodas. Além disto, $\ell(B) - \ell(A) = \bar{x} - \left[\bar{x} - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$, pela equação (2.2). Portanto, $d^e(A, B) = \frac{\pi}{2}$. Analogamente, pela equação (2.3), $d^e(A, C) = \frac{\pi}{2}$.

Seja D um ponto em λ tal que $d^e(A, D) = \frac{\pi}{2}$. Então, $\frac{\pi}{2} = \ell(D) - \ell(A)$ ou $-\frac{\pi}{2} = \ell(D) - \ell(A)$. No primeiro caso segue que $\ell(D) = \ell(A) + \frac{\pi}{2} = \bar{x}$, logo $D = B$. No segundo caso $\ell(D) = \ell(A) - \frac{\pi}{2} = \bar{y}$, logo $D = C$. Portanto, existem exatamente dois pontos com tal propriedade. \square

Proposição 2.18. *Toda reta esférica possui exatamente dois polos. Além do mais, se P é um dos polos, o outro será P^a .*

Demonstração. Sejam λ uma reta esférica e P um polo de λ . Fixado $X \in \lambda$, temos que X e P não são antípodas visto que $d^e(X, P) = \frac{\pi}{2}$, logo pelo Axioma 4, existe uma única reta esférica que contém X e P . Seja $\ell : \circ XP \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ a bijeção associada a essa reta. Então, pela Proposição 2.17, $P^a \in \circ XP$ e $d^e(X, P^a) = \frac{\pi}{2}$. Como X é arbitrário em λ , segue que, para todo $X \in \lambda$, $d^e(X, P^a) = \frac{\pi}{2}$. Logo, P^a é também polo de λ .

Deriva diretamente da Proposição 2.17 que não existem pontos diferentes de P e P^a com esta propriedade. \square

Proposição 2.19. *Sejam P um polo de uma reta esférica λ e Q um ponto da esfera tal que $d^e(P, Q) = \frac{\pi}{2}$. Então, $Q \in \lambda$.*

Demonstração. Sejam ℓ a bijeção associada à reta que passa por P e Q , e A um ponto comum de $\circ PQ$ e λ , que existe pelo Axioma 5. Como $d^e(P, Q) = \frac{\pi}{2}$, tem-se

$$\ell(P) - \ell(Q) = \frac{\pi}{2} \quad (2.4)$$

ou

$$\ell(P) - \ell(Q) = -\frac{\pi}{2}. \quad (2.5)$$

Como P é polo de λ e $A \in \lambda$, então $d^e(P, A) = \frac{\pi}{2}$ e, assim, segue que

$$\ell(P) - \ell(A) = \frac{\pi}{2} \quad (2.6)$$

ou

$$\ell(P) - \ell(A) = -\frac{\pi}{2}. \quad (2.7)$$

Comparando as equações (2.4) e (2.6), ou (2.5) e (2.7), obtemos $Q = A$, logo $Q \in \lambda$. Comparando as equações (2.4) e (2.7), ou (2.5) e (2.6), obtemos $Q = A^a$. Pelo Lema 2.13, $A^a \in \lambda$, logo $Q \in \lambda$. E portanto, em qualquer uma das possibilidades $Q \in \lambda$. \square

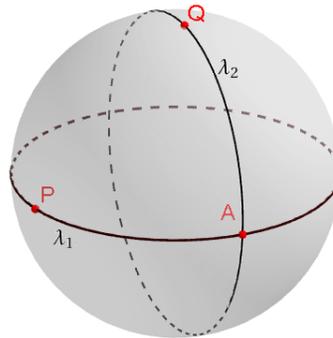
A última proposição mostra que se P é polo de uma reta esférica λ , então, além dos pontos de λ distarem $\frac{\pi}{2}$ de P , conforme expressado no Axioma 6, qualquer ponto da esfera que diste $\frac{\pi}{2}$ de P estará nesta reta. Essa propriedade das retas esféricas pode ser expressa dizendo que se P é polo de uma reta esférica, então esta reta é o lugar geométrico dos pontos da esfera que distam $\frac{\pi}{2}$ de P , terminologia que será utilizada doravante, sem maiores menções, nas argumentações de prova.

Lema 2.20. *Para quaisquer dois pontos P e Q da esfera, $d^e(P, Q) = \frac{\pi}{2}$ se, e somente se, $d^e(P^a, Q) = \frac{\pi}{2}$.*

Demonstração. Tome a reta esférica $\odot PQ$ e observe que P^a está nesta reta. Seja ℓ a bijeção associada a $\odot PQ$, então $\ell(P) - \ell(P^a) = \pi$ e, dessa forma, temos que $[\ell(P) - \ell(Q)] - [\ell(P^a) - \ell(Q)] = \pi$. Segue da última equação que $\ell(P) - \ell(Q) = \pm \frac{\pi}{2}$ se, e somente se, $\ell(P^a) - \ell(Q) = \mp \frac{\pi}{2}$. Portanto, $d^e(P, Q) = \frac{\pi}{2}$ se, e somente se, $d^e(P^a, Q) = \frac{\pi}{2}$. \square

Proposição 2.21. *Todo ponto é polo de uma única reta esférica.*

Figura 5 – Ilustração da demonstração.



Fonte: O autor (2021).

Demonstração. Sejam P um ponto, λ_1 uma reta esférica que contém P e ℓ_1 a bijeção associada a λ_1 . Tome em λ_1 o ponto A de coordenada $\ell_1(P) + \frac{\pi}{2}$, segue que $d^e(P, A) = \frac{\pi}{2}$. Pelo Axioma 6, existe um ponto Q que é polo de λ_1 , logo $d^e(Q, A) = \frac{\pi}{2}$.

Seja λ_2 a reta esférica que passa pelos pontos Q e A . Afirmamos que P é polo da reta λ_2 e que qualquer outra reta não possui P como um de seus polos. De fato, sejam ℓ_2 a bijeção associada à λ_2 e seja R um polo de λ_2 , logo $d^e(R, Q) = d^e(R, A) = \frac{\pi}{2}$.

Como Q é polo de λ_1 e $d^e(R, Q) = \frac{\pi}{2}$, pela Proposição 2.19, R está em λ_1 . Como os pontos P , A e R estão em λ_1 e $d^e(R, A) = d^e(P, A) = \frac{\pi}{2}$, temos que: $R = P$, logo P é polo de λ_2 ; ou, pela Proposição 2.17, $R = P^a$ e segue da Proposição 2.18 que P é polo de λ_2 .

A unicidade decorre da Proposição 2.19 que permite enxergar a reta esférica como um lugar geométrico dos pontos que equidistam $\frac{\pi}{2}$ do polo P . \square

Proposição 2.22. *Dados B e C pontos distintos não antípodas. Se A é um ponto que não está em $\bigcirc BC$ e $d^e(A, B) = d^e(A, C) = \frac{\pi}{2}$, então A é polo de $\bigcirc BC$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.21, A é polo de uma única reta esférica λ . Como λ é o lugar geométrico dos pontos da esfera que distam $\frac{\pi}{2}$ de A , segue que B e C estão em λ . Pelo o Axioma 4, existe uma única reta que passa por B e C , o que mostra que $\lambda = \bigcirc BC$. Logo, A é polo da reta $\bigcirc BC$. \square

Proposição 2.23. *Para quaisquer dois pontos A e B da esfera, $d^e(B, A) + d^e(A, B^a) = \pi$.*

Demonstração. Sejam λ a reta esférica que contém A e B e $\ell : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ a bijeção associada a λ . Temos que

$$\ell(B^a) - \ell(B) = \bar{\pi}. \quad (2.8)$$

Como os casos em que $A = B$ ou $A = B^a$ são imediatos, analisaremos apenas o caso em que $A \neq B$ e $A \neq B^a$. Temos que

$$\ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)} \quad (2.9)$$

ou

$$\ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)}. \quad (2.10)$$

Supondo que a equação (2.9) ocorra, segue que

$$\ell(B^a) - \ell(A) = \ell(B^a) - \left[\ell(B) - \overline{d^e(A, B)} \right] = \left[\ell(B^a) - \ell(B) \right] + \overline{d^e(A, B)} = \bar{\pi} + \overline{d^e(A, B)} \quad (2.11)$$

Note que

$$\overline{\pi + d^e(A, B)} = \overline{d^e(A, B)} - \pi, \quad (2.12)$$

em que $d^e(A, B) - \pi$ é o representante de $\ell(B^a) - \ell(A)$ em $(-\pi, \pi)$ e

$$-\pi < d^e(A, B) - \pi < 0.$$

Com isso

$$d^e(B^a, A) = |d^e(A, B) - \pi| = \pi - d^e(A, B).$$

Portanto,

$$d^e(B, A) + d^e(A, B^a) = d^e(B, A) + [\pi - d^e(A, B)] = \pi.$$

Analogamente, se considerarmos o caso da equação (2.10), chega-se a mesma conclusão. \square

Proposição 2.24. *Sejam A e B pontos da esfera e, λ a reta de polo A . Então, uma e apenas uma das seguintes situações ocorrerá:*

(a) B é ponto do hemisfério de centro A , hemisfério h_A ;

(b) B é ponto da reta λ ;

(c) B é ponto do hemisfério de centro A^a , hemisfério h_{A^a} .

Demonstração. Seja λ_1 uma reta esférica que contém os pontos A e B , logo A^a está em λ_1 . Seja $\ell_1: \lambda_1 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ a bijeção associada a λ_1 . Segue que:

$$0 \leq d^e(A, B) < \frac{\pi}{2} \tag{2.13}$$

ou

$$d^e(A, B) = \frac{\pi}{2} \tag{2.14}$$

ou

$$\frac{\pi}{2} < d^e(A, B) \leq \pi. \tag{2.15}$$

Observe ainda que

$$\ell_1(A) - \ell_1(A^a) = \bar{\pi}. \tag{2.16}$$

Se ocorrer (2.13), então, pela definição de hemisfério, segue que $B \in h_A$.

Se ocorrer (2.14), como A é polo de λ , então pela Proposição 2.18, $B \in \lambda$.

Se ocorrer (2.15), então

$$\ell_1(A) - \ell_1(B) = \bar{\delta}, \quad \delta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right] \tag{2.17}$$

ou

$$\ell_1(A) - \ell_1(B) = \bar{\delta}, \quad \delta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2} \right). \tag{2.18}$$

Observe que deriva de (2.16) e (2.17) que

$$\ell_1(B) - \ell_1(A^a) = \overline{\pi - \delta}, \quad \pi - \delta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.19)$$

E das relações (2.16) e (2.18) vem que

$$\ell_1(B) - \ell_1(A^a) = \overline{\pi - \delta} = \overline{-\delta - \pi}, \quad -\delta - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right). \quad (2.20)$$

Observe que $\pi - \delta$ não é o representante de $\ell_1(B) - \ell_1(A^a)$ em $(-\pi, \pi]$ na equação (2.20), pois as características de δ são dadas pela equação (2.18).

Segue portanto, que caso ocorra a equação (2.15), então ocorrerá a equação (2.19) ou a equação (2.20) e, em qualquer dos casos, $d^e(A^a, B) < \frac{\pi}{2}$, ou seja, $B \in h_{A^a}$. \square

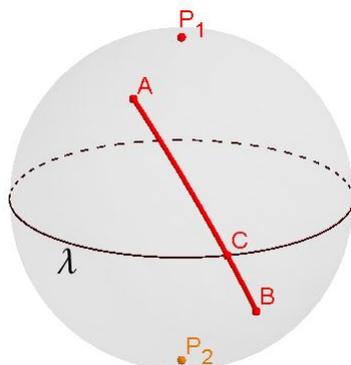
Proposição 2.25. *Se C é um ponto de um hemisfério de centro A , então C^a é um ponto do hemisfério de centro A^a .*

Demonstração. Supondo que C^a esteja na reta de polo A ou, C^a esteja no hemisfério de centro A , tem-se que $d^e(A, C) < \frac{\pi}{2}$ e $d^e(C^a, A) \leq \frac{\pi}{2}$. Temos, assim, $d^e(A, C) + d^e(C^a, A) < \pi$, contradizendo a Proposição 2.23. Segue, portanto, da Proposição 2.24, que C^a está no hemisfério de centro A . \square

As duas últimas proposições ampliam a compreensão de hemisfério e nos permitem, para todo P , identificar os hemisférios de centro P e P^a como lados da reta λ de polos P e P^a . Nesse sentido, a reta esférica λ será denominada de reta polar de P , ou reta polar de P^a . Referimo-nos também à reta λ bordo desses hemisférios.

Dois pontos que estão num mesmo hemisfério serão ditos que estão do mesmo lado de λ . Caso contrário, dizemos que os pontos estão em lados opostos de λ . Os hemisférios de centro P e P^a também são ditos os hemisférios gerados por λ .

Figura 6 – Hemisférios gerados por λ .



Fonte: O autor (2021).

As próximas duas proposições reinterpretam a noção de um ponto estar entre outros dois, digamos A e C . A primeira inclusive mostra como a bijeção sobre a reta, que contém esse par de pontos, percorre o conjunto $\mathbb{R}/2\pi$ nos pontos do segmento esférico de extremos A e C .

Proposição 2.26. *Se A , B e C são três pontos da esfera tais que B esteja entre A e C , então $0 < d^e(A, B) < d^e(A, C) < \pi$. E, se $\ell : \bigcirc AC \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ for a bijeção associada à reta $\bigcirc AC$, então apenas uma das seguintes sentenças é verdadeira:*

$$\ell(C) = \ell(A) + \overline{d^e(A, C)} \quad e \quad \ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)} \quad (2.21)$$

ou

$$\ell(C) = \ell(A) - \overline{d^e(A, C)} \quad e \quad \ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)}. \quad (2.22)$$

Demonstração.

Como os pontos A , B e C são distintos dois a dois e não antípodas, segue que

$$0 < d^e(A, C) < \pi, \quad d^e(A, B) > 0 \quad e \quad d^e(B, C) > 0. \quad (2.23)$$

Temos, também, de acordo com a Definição 2.8 e das hipóteses, $d^e(A, C) = d^e(A, B) + d^e(B, C)$. Usando as relações constantes em (2.23) na última igualdade, segue que

$$0 < d^e(A, B) < d^e(A, C) < \pi,$$

o que prova a primeira parte.

Para provarmos a outra parte, seja ℓ a bijeção associada à reta esférica $\bigcirc AC$. Para provar que (2.21) ou (2.22) derivam das hipóteses da proposição, atente que pela Observação 2.3, no mínimo duas das quatro sentenças seguintes são verdadeiras:

$$\ell(C) = \ell(A) + \overline{d^e(A, C)} \quad e \quad \ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)}, \quad (2.24)$$

$$\ell(C) = \ell(A) + \overline{d^e(A, C)} \quad e \quad \ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)}, \quad (2.25)$$

$$\ell(C) = \ell(A) - \overline{d^e(A, C)} \quad e \quad \ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)} \quad (2.26)$$

e

$$\ell(C) = \ell(A) - \overline{d^e(A, C)} \quad e \quad \ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)}. \quad (2.27)$$

Assuma, inicialmente, que (2.25) seja verdadeira. Então $\ell(C) + \ell(B) = \ell(A) + \ell(A) + \overline{d^e(A, C)} - \overline{d^e(A, B)}$ é verdadeira e, desde que, B está entre A e C , $d^e(A, C) = d^e(A, B) + d^e(B, C)$. Segue, portanto, que

$$\ell(C) + \ell(B) = \ell(A) + \ell(A) + \overline{d^e(B, C)}. \quad (2.28)$$

E, usando a Observação 2.3, segue que

$$\overline{d^e(B, C)} = \ell(B) - \ell(C) \quad (2.29)$$

ou

$$\overline{d^e(B, C)} = \ell(C) - \ell(B). \quad (2.30)$$

A combinação (2.28) e (2.29) não pode ocorrer, pois do contrário valeria $[\ell(C) - \ell(A)] + [\ell(C) - \ell(A)] = \bar{0}$, o que, pelas propriedades de $\mathbb{R}/2\pi$ resultaria em $[\ell(C) - \ell(A)] = \bar{0}$ ou $[\ell(C) - \ell(A)] = \bar{\pi}$. E como A e C são distintos não antípodas, isto não pode ocorrer.

A combinação 2.28 e 2.30 também não pode ocorrer, visto que do contrário resultaria em $[\ell(B) - \ell(A)] + [\ell(B) - \ell(A)] = \bar{0}$ e desta equação implicaria, por argumento similar ao anterior, que $A = B$ ou A e B antípodas. Nova contradição.

Segue destas contradições que (2.25) não pode ocorrer.

Assuma, então, que (2.26) seja verdadeira. Por argumento semelhante ao anterior, segue que

$$\ell(C) + \ell(B) = \ell(A) + \ell(A) - \overline{d^e(B, C)}. \quad (2.31)$$

Como (2.29) ou (2.30) é verdadeira, com argumento similar ao feito para o caso 2.25, segue que A e B são idênticos ou antípodas. Logo, (2.26) também não pode ocorrer.

Finalmente, provaremos que (2.24) e (2.27) não podem ocorrer simultaneamente. De fato, se ocorrerem simultaneamente, então (2.28) e (2.31) seriam simultaneamente verdadeiras e a diferença entre a primeira e a última geraria a equação $\overline{d^e(B, C)} + \overline{d^e(B, C)} = \bar{0}$ em $\mathbb{R}/2\pi$, mas pelas propriedades da adição nesse conjunto, resulta que $\overline{d^e(B, C)} = \bar{0}$ ou $\overline{d^e(B, C)} = \bar{\pi}$. No primeiro caso temos $B = C$ e no segundo, B e C antípodas. Desta contradição, resulta que (2.24) e (2.27) não podem ocorrer simultaneamente. \square

Proposição 2.27. *Sejam A, B e C pontos de uma reta esférica λ e $\ell : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ a bijeção associada a λ . Suponha que $0 < d^e(A, B) < d^e(A, C) < \pi$ e que $\ell(C) = \ell(A) + \overline{d^e(A, C)}$ e $\ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)}$ ou $\ell(C) = \ell(A) - \overline{d^e(A, C)}$ e $\ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)}$ se verifique. Então, B está entre A e C .*

Demonstração. Suponha, primeiramente

$$\ell(C) = \ell(A) + \overline{d^e(A, C)} \quad \text{e} \quad \ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)}. \quad (2.32)$$

Segue que subtraindo as equações em (2.32) resulta:

$$\ell(C) - \ell(B) = \overline{d^e(A, C) - d^e(A, B)}. \quad (2.33)$$

Observe que A, B e C são distintos e $A \neq C^a$. Observe também que $0 < d^e(A, C) - d^e(A, B) < \pi$. Segue da última informação combinada com a equação (2.33) que $d^e(B, C) = d^e(A, C) - d^e(A, B)$, ou seja, $d^e(A, C) = d^e(A, B) + d^e(B, C)$. Portanto, B está entre A e C .

Caso se verifique

$$\ell(C) = \ell(A) - \overline{d^e(A, C)} \quad \text{e} \quad \ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)}, \quad (2.34)$$

subtraindo as duas equações, obtemos $\ell(B) - \ell(C) = \overline{d^e(A, C) - d^e(A, B)}$ e o restante da demonstração ocorre de forma idêntica ao que fizemos acima. \square

A próxima proposição estabelece as regras que permitem mudar o sistema de coordenadas sem alterar as relações básicas entre os pontos de uma reta esférica.

Proposição 2.28. *Sejam λ uma reta esférica, X um elemento qualquer de λ e $\ell : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ uma bijeção. Então $g_k : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ definida por $g_k(X) = \ell(X) + \bar{k}$, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$, e $h : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ definida por $h(X) = -\ell(X)$ são bijeções que induzem a mesma distância de ℓ .*

Demonstração. Para provar que $g_k : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ é uma bijeção, observe que se $X_1 \neq X_2$ são pontos de λ , então $g_k(X_1) = \ell(X_1) + \bar{k}$ e $g_k(X_2) = \ell(X_2) + \bar{k}$ são elementos distintos de $\mathbb{R}/2\pi$. Logo, g_k é injetiva. Observe, também, que se \bar{a} é um elemento qualquer de $\mathbb{R}/2\pi$, como $\bar{a} - \bar{k}$ é um elemento de $\mathbb{R}/2\pi$, então existe um único $X_3 \in \lambda$ tal que $\ell(X_3) = \bar{a} - \bar{k}$. Portanto, $g_k(X_3) = \ell(X_3) + \bar{k} = \bar{a} - \bar{k} + \bar{k} = \bar{a}$. Segue, dessa forma, que g_k é sobrejetiva.

A prova de que $h : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ é uma bijeção segue observando que quaisquer que sejam os pontos X_4 e X_5 distintos de λ , $h(X_4) = -\ell(X_4)$ e $h(X_5) = -\ell(X_5)$ estão definidos e são distintos pela unicidade do oposto da adição, o que prova a injetividade de h . Para provar a sobrejetividade de h , tome um elemento \bar{a} qualquer de $\mathbb{R}/2\pi$ e observe que existe X_6 , único, em λ tal que $\ell(X_6) = -\bar{a}$. Segue, portanto, $h(X_6) = -\ell(X_6) = \bar{a}$.

A bijeção g_k induz a mesma distância que a bijeção ℓ : De fato, sejam A e B dois pontos quaisquer de λ . E seja $\delta \in (-\pi, \pi]$ e $\bar{\delta} \in \ell(A) - \ell(B)$. Pela Definição 2.2, $d_\ell^e(A, B) = |\delta|$, em que d_ℓ é a distância induzida pela bijeção ℓ . Ocorre que $g_k(A) - g_k(B) = \ell(A) + \bar{k} - [\ell(B) + \bar{k}] = \ell(A) - \ell(B)$ e, portanto, $d_{g_k}^e(A, B) = d_\ell^e(A, B)$.

A bijeção h induz a mesma distância que a bijeção ℓ : Para ver isto, tome A e B dois pontos quaisquer de λ . Observe que a distância entre os pontos A e B induzida por ℓ é $d_\ell^e(A, B) = |\delta|$, em que $\ell(A) - \ell(B) = \bar{\delta}$ e $\delta \in (-\pi, \pi]$. Como $\ell(A) - \ell(B) = \bar{\delta}$ reescrita em termos de h é $-h(A) + h(B) = \bar{\delta}$, segue $d_h^e(A, B) = |\delta| = d_\ell^e(A, B)$. \square

Proposição 2.29. *Sejam A e B pontos distintos não antípodas e $\ell : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ a bijeção associada à reta esférica $\bigcirc AB$, então uma e apenas uma das equações seguintes se verifica: $\ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)}$ ou $\ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)}$. Além disto, a semirreta \overrightarrow{AB} é o ponto A e o conjunto de todos os pontos C da reta $\bigcirc AB$ que satisfaz uma e apenas uma das sentenças a seguir:*

$$\ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)} \quad e \quad \ell(C) = \ell(A) + \bar{x} \quad (2.35)$$

ou

$$\ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)} \quad e \quad \ell(C) = \ell(A) - \bar{x}, \quad (2.36)$$

em que $x \in [0, \pi)$. Além disto, nas sentenças (2.35) e (2.36), $x = d^e(A, C)$.

Demonstração. Primeiramente observe que como A e B são distintos não antípodas, tem-se que

$$0 < d^e(A, B) < \pi. \quad (2.37)$$

Também, a Observação 2.3 mostra que quaisquer que sejam A e B :

$$\ell(A) - \ell(B) = \overline{d^e(A, B)} \quad (2.38)$$

ou

$$\ell(B) - \ell(A) = \overline{d^e(A, B)}. \quad (2.39)$$

Segue, portanto, das equações (2.38) e (2.39), respectivamente, que $\ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)}$ ou $\ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)}$ se verifica. Supondo que ocorressem simultaneamente, então teríamos $\overline{d^e(A, B)} + \overline{d^e(A, B)} = \bar{0}$ e, pelas propriedades da adição em $\mathbb{R}/2\pi$, isto ocorre se, e somente se, $\overline{d^e(A, B)} = \bar{0}$ ou $\overline{d^e(A, B)} = \bar{\pi}$. No primeiro caso, $A = B$ e no segundo, $A = B^a$, contradizendo a hipótese. Observe que isto prova também que as sentenças (2.35) e (2.36) não podem ocorrer simultaneamente.

O restante da prova será construída em duas partes. Na primeira parte, provaremos que se $C \in \overrightarrow{AB}$, então C satisfaz a sentença (2.35) ou a sentença (2.36). Para isso, observamos que pela definição de semirreta esférica, Definição 2.9, temos que $C \in \overrightarrow{AB}$ se, e somente se, uma das seguintes situações ocorrer:

- (a) $C = A$ ou $C = B$
- (b) C está entre A e B .
- (c) B está entre A e C .

Caso $C = A$, então $\ell(C) = \ell(A)$ e, portanto, satisfaz tanto $\ell(C) = \ell(A) + \bar{x}$ como $\ell(C) = \ell(A) - \bar{x}$ para $x = 0$. Caso $C = B$, então $\ell(B) = \ell(C)$ e substituindo $\ell(B)$ por $\ell(C)$ nas equações (2.38) e (2.39), observando que $d^e(A, B) \in [0, \pi)$, temos que, respectivamente, a sentença (2.35) ou a sentença (2.36) se verifica.

Caso ocorra (b) e a equação (2.39), então, pela Proposição 2.26, temos:

$$0 < d^e(A, C) < d^e(A, B) < \pi \quad (2.40)$$

e

$$\ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)} \quad \text{e} \quad \ell(C) = \ell(A) - \overline{d^e(A, C)}. \quad (2.41)$$

Fazendo $x = d^e(A, C)$, segue a sentença (2.36).

Caso ocorra (b) e 2.38, então, pela Proposição 2.26, temos:

$$0 < d^e(A, C) < d^e(A, B) < \pi \quad (2.42)$$

e

$$\ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)} \quad \text{e} \quad \ell(C) = \ell(A) + \overline{d^e(A, C)} \quad (2.43)$$

Fazendo $x = d^e(A, C)$, segue a sentença (2.35).

Observe que caso ocorra (c) e a equação (2.39), então usando a Proposição 2.26, temos o mesmo caso que (b) e (2.39) com a adequação $0 < d^e(A, B) < d^e(A, C) < \pi$. E a ocorrência de (c) e (2.38), implica no mesmo caso que (b) e (2.38) com a adequação $0 < d^e(A, B) < d^e(A, C) < \pi$. Portanto, segue que a ocorrência de (c) implica na ocorrência de (2.35) ou (2.36).

Para construir a segunda parte da demonstração, suponha que exista C em \overrightarrow{AB} tal que (2.36) se verifique (o caso em que se verifica (2.35) é análogo). Como $\ell(C) = \ell(A) - \bar{x}$, para algum $x \in [0, \pi)$, então $\overrightarrow{\ell(A)} - \ell(C) = \bar{x}$ e como $x \in [0, \pi)$ segue que $x = d^e(A, C)$. Caso $x = 0$ então $C = A$ e portanto $C \in \overrightarrow{AB}$. Caso $x \neq 0$, então $0 < d^e(A, C) < \pi$. Combinando a última desigualdade com (2.37) segue que uma das sentenças abaixo é verdadeira:

$$0 < d^e(A, B) = d^e(A, C) < \pi, \quad (2.44)$$

$$0 < d^e(A, B) < d^e(A, C) < \pi \quad (2.45)$$

e

$$0 < d^e(A, C) < d^e(A, B) < \pi. \quad (2.46)$$

Caso (2.44) se verifica, então $\ell(B) - \ell(A) = \ell(C) - \ell(A)$ devido à nossa hipótese, ou seja, a sentença (2.36). Segue que $\ell(B) = \ell(C)$ que é equivalente a $B = C$, o que mostra que $C \in \overrightarrow{AB}$.

Caso (2.45) se verifica junto com nossa hipótese (2.36), então segue da Proposição 2.27 que B está entre A e C e, conforme (b) acima, $C \in \overrightarrow{AB}$.

Caso (2.46) se verifica junto com nossa hipótese (2.36), então segue da Proposição 2.27 que C está entre A e B e, conforme (c) acima, $C \in \overrightarrow{AB}$. \square

Corolário 2.30. *Dada uma semirreta esférica \overrightarrow{AB} e um número real $x \in [0, \pi)$, existe um único ponto C em \overrightarrow{AB} tal que $d^e(A, C) = x$.*

Demonstração. Seja $\ell : \overrightarrow{AB} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ a bijeção associada à reta esférica \overrightarrow{AB} . Observe que $\ell(A) + \bar{x}$ e $\ell(A) - \bar{x}$ são elementos de $\mathbb{R}/2\pi$. Veja, então, que $C_1 = \ell^{-1}[\ell(A) + \bar{x}]$ e $C_2 = \ell^{-1}[\ell(A) - \bar{x}]$ são pontos da reta \overrightarrow{AB} tais que $d^e(A, C_1) = x$ e $d^e(A, C_2) = x$. Observe também que C_1 e C_2 satisfazem, respectivamente:

$$\ell(C_1) = \ell(A) + \bar{x}, \quad x \in [0, \pi) \quad (2.47)$$

e

$$\ell(C_2) = \ell(A) - \bar{x}, \quad x \in [0, \pi). \quad (2.48)$$

Segue da definição de semirreta \overrightarrow{AB} que A e B são distintos não antípodas. Portanto, a Proposição 2.29 mostra que:

$$\ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)} \quad (2.49)$$

ou

$$\ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)}, \quad (2.50)$$

não podendo ocorrer simultaneamente.

A mesma proposição também mostra que caso ocorra (2.49) então, pela equação (2.47), segue que $C_1 \in \overrightarrow{AB}$. E caso ocorra (2.50) então, pela equação (2.48), segue que $C_2 \in \overrightarrow{AB}$.

Provada a existência, vamos nos concentrar em provar a unicidade. Observe inicialmente que se $C_1, C_2 \in \overrightarrow{AB}$ então $C_1 = C_2$ pois pela Proposição 2.29 o conjunto de pontos da semirreta \overrightarrow{AB} satisfaz uma e apenas uma das sentenças (2.35) ou (2.36). Este caso ocorre quando $x = 0$ e conseqüentemente $C_1 = C_2 = A$. De forma geral, seja C_3 um ponto da reta esférica $\bigcirc AB$ tal que $d^e(A, B) = x$. Então $\ell(C_3) = \ell(A) + \bar{x}$ ou $\ell(C_3) = \ell(A) - \bar{x}$. O que mostra que $C_3 = C_1$ ou $C_3 = C_2$. \square

Corolário 2.31. Se C é um ponto de \overrightarrow{AB} e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Demonstração. Como $C \in \overrightarrow{AB}$, segue, da Proposição 2.29, que

$$\ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)} \quad \text{e} \quad \ell(C) = \ell(A) + \overline{d^e(A, C)}, \quad d^e(A, C) \in (0, \pi) \quad (2.51)$$

ou

$$\ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)} \quad \text{e} \quad \ell(C) = \ell(A) - \overline{d^e(A, C)}, \quad d^e(A, C) \in (0, \pi), \quad (2.52)$$

com $d^e(A, C) \neq 0$, pois $A \neq C$.

Caso ocorra (2.51) (o caso (2.52) se prova de forma equivalente), então usando novamente a Proposição 2.29 temos que \overrightarrow{AB} é o conjunto de todos os pontos X da reta $\bigcirc AB$ tais que $\ell(X) = \ell(A) + \overline{d^e(A, X)}$. Como $C \in \bigcirc AB$ com $C \neq A$ por hipótese, com $C \neq A^a$ visto que $\overline{d^e(A, C)} \neq \pi$ por (2.51), então $\bigcirc AB = \bigcirc AC$. Aplicando novamente a Proposição 2.29, segue que \overrightarrow{AC} é o conjunto de todos os pontos X da reta $\bigcirc AC$ tais que $\ell(X) = \ell(A) + \overline{d^e(A, X)}$. Logo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. \square

Proposição 2.32. Se \overrightarrow{AC} é uma semirreta esférica, então \overrightarrow{AC} não contém pares de pontos antípodas.

Demonstração. Seja $\ell : \bigcirc AB \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ a bijeção associada à reta esférica $\bigcirc AB$. Caso $A^a \in \overrightarrow{AB}$ então a Proposição 2.29 garante que $\ell(A^a) = \ell(A) + d^e(A, A^a)$ ou $\ell(A^a) = \ell(A) - \overline{d^e(A, A^a)}$ com $d^e(A, A^a) \in [0, \pi)$, logo $\overline{d^e(A, A^a)} \neq \pi$, contradizendo a Proposição 2.16. Logo, $A^a \notin \overrightarrow{AC}$. De forma geral, seja $X \neq A$ um ponto de \overrightarrow{AC} então, pelo Corolário 2.31 temos que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AX}$ e repetindo para X e X^a o argumento feito acima para A e A^a , segue que $X^a \notin \overrightarrow{AX}$ e portanto $X^a \notin \overrightarrow{AC}$. \square

Proposição 2.33. *Sejam A e B dois pontos distintos não antípodas e $\circlearrowleft AB$ a reta esférica que os contém. Seja C um ponto de $\circlearrowleft AB$ que não esteja em \overrightarrow{AB} e que não seja antípoda de A . Então:*

- (a) \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} possuem exatamente o ponto A em comum.
- (b) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \cup \{A^a\}$ é igual a $\circlearrowleft AB$.

Demonstração. Para provar (a), suponha que exista $X \neq A$ em \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} . Pelo Corolário 2.31, segue que $AB=AX$ e $AC=AX$ e, portanto, $AB=AC$, uma contradição visto que $C \notin \overrightarrow{AB}$ por hipótese.

Para provar (b), observe que se $X \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \cup \{A^a\}$ então, segue da combinação da Definição 2.5 com a Proposição 2.14, que $X \in \circlearrowleft AB$. Portanto, $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \cup \{A^a\} \subset \circlearrowleft AB$. Reciprocamente, suponha $X \in \circlearrowleft AB$. Se $X = A^a$ então $X \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \cup \{A^a\}$. Se $X \neq A^a$, tome a semirreta esférica \overrightarrow{AX} . Usando a Proposição 2.29 segue que para $x \in [0, \pi)$:

- (i) \overrightarrow{AB} é o conjunto dos pontos $W \in \circlearrowleft AB$ tais que $\ell(W) = \ell(A) + \bar{x}$ ou $\ell(W) = \ell(A) - \bar{x}$
- (ii) \overrightarrow{AC} é o conjunto dos pontos $Y \in \circlearrowleft AB$ tais que $\ell(Y) = \ell(A) + \bar{x}$ ou $\ell(Y) = \ell(A) - \bar{x}$
- (iii) \overrightarrow{AX} é o conjunto dos pontos $Z \in \circlearrowleft AB$ tais que $\ell(Z) = \ell(A) + \bar{x}$ ou $\ell(Z) = \ell(A) - \bar{x}$

Como $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC}$, segue que $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC}$. Em qualquer caso, $X \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \cup \{A^a\}$.

Dessa forma, $\circlearrowleft AB \subset \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \cup \{A^a\}$ e, como já provamos que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \cup \{A^a\} \subset \circlearrowleft AB$, segue que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \cup \{A^a\}$ é igual a $\circlearrowleft AB$. □

As semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} da última proposição são denominadas de semirretas opostas.

Definição 2.34 (Semirretas opostas). *Duas semirretas esféricas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são ditas opostas se são distintas e A, B e C são colineares.*

Corolário 2.35. *Se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são duas semirretas opostas, então:*

- (i) \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} possuem exatamente um ponto em comum, o qual é a origem de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .
- (ii) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \cup \{A^a\} = \lambda$, em que λ é a reta esférica que contém \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

Demonstração. O corolário deriva diretamente da Proposição 2.33, observando que as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são distintas, pois se fossem iguais, C deveria ser elemento de \overrightarrow{AB} , e também $\overrightarrow{AB} \subset \circlearrowleft AB$ e $\overrightarrow{AC} \subset \circlearrowleft AB$. □

Proposição 2.36. *Sejam r_1 e r_2 duas semirretas opostas de origem A e λ a reta esférica que as contém. Se X for um ponto qualquer de λ , $X \neq A$ e $X \neq A^a$, então X é um ponto de uma e apenas uma das duas semirretas. Além do mais, se X é um ponto de uma semirreta, X^a será ponto da outra.*

Demonstração. De fato, como X é diferente da origem de r_1 e r_2 , então, pela parte (i) do Corolário 2.35, X não pode ser comum a r_1 e r_2 . Também, como por hipótese $X \neq A^a$ pela parte (ii) do mesmo corolário, $X \in r_1 \cup r_2 \cup \{A^a\}$, segue que $X \in r_i$ para exatamente um $i \in \{1, 2\}$.

Para finalizar a demonstração, observe que X^a é um ponto de λ , pelo Corolário 2.14. Logo, $X^a \in r_1 \cup r_2 \cup \{A^a\}$ pela parte (ii) do Corolário 2.35. No entanto, $X^a \neq A^a$ por hipótese, logo $X^a \in r_1 \cup r_2$ e o conjunto $\{X, X^a\}$ não pode estar contido na mesma semirreta esférica pois contraria a Proposição 2.32. \square

Proposição 2.37. *Se r é uma semirreta esférica e λ é uma reta esférica que não contém r , então r e λ possuem exatamente um ponto em comum.*

Demonstração. Pela Definição 2.9 existe uma reta esférica α que contém r . Como α é distinta de λ , então, pela Proposição 2.15, $\alpha \cap \lambda = \{X, X^a\}$. Caso X seja a origem de r , então a Proposição 2.32 garante que X^a não é ponto de r e da mesma forma se prova que se X^a é origem de r então $X \notin r$. Caso nem X e nem X^a é origem de r , então pela Proposição 2.36, apenas e exatamente um elemento do conjunto $\{X, X^a\}$ é ponto de r . \square

Proposição 2.38. *Sejam A e B dois pontos dispostos em lados opostos de uma reta esférica λ e $A \neq B^a$, então o segmento de reta esférica \widehat{AB} intersecta λ em exatamente um ponto.*

Demonstração. Como, em particular, $A \notin \lambda$, então λ não contém \overrightarrow{AB} e, portanto, pela Proposição 2.37, a semirreta \overrightarrow{AB} intersecta a reta λ em exatamente um ponto X . Assim, em particular,

$$X \in \lambda. \quad (2.53)$$

Caso $X \in \widehat{AB}$, então a Proposição está demonstrada. Caso $X \notin \widehat{AB}$ então, pela Definição 2.9, B está entre A e X .

Vamos mostrar que a última afirmação não pode ser verdadeira. Assim, supondo que B está entre A e X , observe-se, inicialmente, que, pela Definição 2.9, \overrightarrow{AB} está contida na reta esférica $\circ AB$, a qual é igual à reta esférica $\circ AX$ e, associada a esta reta, pelo Axioma 2, existe uma bijeção $\ell : \circ AX \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$. Usando, então as proposições 2.26 e 2.23 segue, respectivamente:

$$0 < d^e(A, B) < d^e(A, X) < \pi, \quad (2.54)$$

$$d^e(A, X) + d^e(X, A^a) = \pi \quad \text{e} \quad d^e(A, B) + d^e(B, A^a) = \pi. \quad (2.55)$$

A Proposição 2.26 ainda garante que uma e apenas uma das seguintes sentenças é verdadeira:

$$\ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A, B)} \quad \text{e} \quad \ell(X) = \ell(A) + \overline{d^e(A, X)}, \quad (2.56)$$

$$\ell(B) = \ell(A) - \overline{d^e(A, B)} \quad \text{e} \quad \ell(X) = \ell(A) - \overline{d^e(A, X)}. \quad (2.57)$$

Caso ocorra (2.56), observe-se que, deriva das duas equação de (2.56),

$$\ell(X) = \ell(B) + \overline{d^e(A, X) - d^e(A, B)}. \quad (2.58)$$

Mas, da equação (2.54) segue que $0 < d^e(A, X) - d^e(A, B) < \pi$ e, assim a equação (2.58) mostra que

$$d^e(B, X) = d^e(A, X) - d^e(A, B). \quad (2.59)$$

Substituindo, na última equação, os valores reais $d^e(A, X)$ e $d^e(A, B)$, conforme a equação (2.55), segue que

$$d^e(B, X) = \pi - d^e(X, A^a) - [\pi - d^e(B, A^a)], \quad (2.60)$$

ou seja,

$$d^e(B, A^a) = d^e(B, X) + d^e(X, A^a). \quad (2.61)$$

Agora, observando que B e A^a não são antípodas e que $\circ AB = \circ BA^a$ e, portanto, X está em $\circ BA^a$, segue da Definição 2.8 que X está entre B e A^a . Ocorre que A^a está no hemisfério oposto de A , conforme a Proposição 2.25 e, portanto, A^a e B estão no mesmo hemisfério gerado por λ e, pelo Axioma 7 combinado com a Definição 2.6, o segmento de reta $\overline{A^a B}$ está contido neste hemisfério. Logo, como X está em $\overline{A^a B}$, segue, da Proposição 2.24 que X não está em λ , contradizendo a relação (2.53). Desta contradição, segue que $X \in \overline{AB}$.

Caso (2.57), com argumento semelhante ao caso anterior, temos que

$$\ell(X) = \ell(B) + \overline{d^e(A, B) - d^e(A, X)} \quad \text{e} \quad -\pi < d^e(A, B) - d^e(A, X) < 0. \quad (2.62)$$

Logo, segue que $d^e(B, X) = |d^e(A, B) - d^e(A, X)| = d^e(A, X) - d^e(A, B)$. Seguindo desse ponto em diante com o mesmo argumento usado após a equação (2.59), segue que $X \in \overline{AB}$, o que termina a demonstração. \square

Proposição 2.39. . Sejam $\circ AB$ uma reta esférica e $C \notin \circ AB$. Então, os pontos de \overrightarrow{AC} diferentes de A estão do mesmo lado de C em relação à reta $\circ AB$.

Demonstração. Suponha $X \neq A$ em $\overrightarrow{AC} \cap \circ AB$. Pelo Corolário 2.31, $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC}$ e como $\overrightarrow{AX} \subset \circ AB$ pela Definição 2.9, segue que $C \in \circ AB$, contradizendo uma hipótese. Logo, qualquer que seja $X \neq A$ em \overrightarrow{AC} , segue que $X \notin \circ AB$. Suponha, então, por contradição, que existam X' e X'' em \overrightarrow{AC} tais que estejam em lados opostos de $\circ AB$. Assim, pela Proposição 2.38, existe X''' entre X' e X'' que está em $\circ AB$ e $X''' = A$ pois o contrário contradiz a Proposição 2.37. Mas, combinando a Definição 2.8 com a Proposição 2.29 vemos, sem grandes dificuldades, que A não pode estar entre X' e X'' , o que termina a demonstração. \square

Proposição 2.40. Se $\circ BF$ é uma reta esférica e D e E estão do mesmo lado de $\circ BF$ e, além disto, F, D e E são colineares, então $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE}$.

Demonstração. Observe inicialmente que $D \neq F$ e $E \neq F$. Caso $E \in \overrightarrow{FD}$ então, pelo Corolário 2.31, $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE}$. Vamos mostrar que $E \notin \overrightarrow{FD}$ não pode ocorrer.

Suponha então, por contradição, que $E \in \overrightarrow{FD}$. Como $E \neq A$ e $E \in \odot FD$, segue pelo Corolário 2.35 que $E \in \overrightarrow{FD}^a$. Usando, então, a Proposição 2.39 segue que E e D^a estão do mesmo lado de $\odot BF$ e portanto D e D^a estão do mesmo lado de $\odot BF$, contradizendo a Proposição 2.25. Portanto $E \in \overrightarrow{FD}$ e conseqüentemente $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE}$. \square

Proposição 2.41. Se \overrightarrow{DF} e \overrightarrow{FD} são semirretas, então $\overrightarrow{DF} \cap \overrightarrow{FD}$ é o segmento de reta \overline{DF} .

Demonstração. Pela Definição 2.9:

- (1) \overrightarrow{DF} é o conjunto dos pontos X da reta $\odot DF$ tais que $X \in \overline{DF}$ ou F está entre D e X .
- (2) \overrightarrow{FD} é o conjunto dos pontos Y da reta $\odot DF$ tais que $Y \in \overline{DF}$ ou D está entre F e Y .

Observe que resulta diretamente de (1) e (2) que $\overline{DF} \subset \overrightarrow{DF} \cap \overrightarrow{FD}$ e, para provar a continência inversa tome um ponto $X \in \overrightarrow{DF} \cap \overrightarrow{FD}$. Supondo que $X \notin \overline{DF}$, então pela Definição 2.9, temos

- (3) F está entre D e X ,

ou

- (4) D está entre F e X .

Usando a Definição 2.8 segue de (3) que $d^e(D, X) = d^e(D, F) + d^e(F, X)$ e segue de (4) que $d^e(F, X) = d^e(D, F) + d^e(D, X)$, mas a coexistência das duas equações só pode ocorrer caso $D = F$, contradição com a definição das semirretas tomadas por hipótese. Logo, desta contradição, segue que $X \in \overline{DF}$ e portanto $\overrightarrow{DF} \cap \overrightarrow{FD} \subset \overline{DF}$, o que termina a demonstração. \square

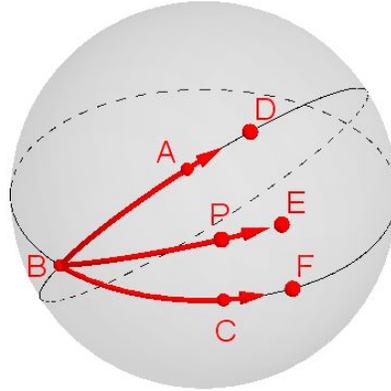
Proposição 2.42. Sejam \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{AB} semirretas esféricas opostas e C um ponto externo à reta esférica que as contém. Então, $m \sphericalangle CAD + m \sphericalangle CAB = \pi$.

Demonstração. Tome E, F e G , respectivamente, nas semirretas $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$ e \overrightarrow{AB} distando $\frac{\pi}{2}$ do ponto A . Como pela Proposição 2.21 A é polo de uma única reta esférica λ e como λ é o conjunto de todos os pontos da esfera que distam $\frac{\pi}{2}$ de A , então E, F e G estão em λ . Usando, então, a Proposição 2.17, segue que E e G são antípodas. Logo, conciliando a Definição 2.11 com a Proposição 2.23, temos que $m \sphericalangle CAD + m \sphericalangle CAB = \pi$. \square

Proposição 2.43. Seja $\sphericalangle ABC$ um ângulo esférico e seja P um ponto da esfera. Então as seguintes condições são equivalentes:

- (1) P está no interior de $\sphericalangle ABC$.
- (2) P está do mesmo lado de A em relação à reta esférica $\odot BC$ e $m \sphericalangle PBC < m \sphericalangle ABC$.
- (3) P não está sobre $\odot AB$ e nem sobre $\odot BC$ e $m \sphericalangle ABC = m \sphericalangle ABP + m \sphericalangle PBC$.

Figura 7 – Ilustração da Proposição 2.43.



Fonte: O autor (2021).

Demonstração. Observe, primeiramente, que tomando qualquer uma das três sentenças como hipótese, P não está na reta esférica $\odot AB$ e P não está na reta esférica $\odot BC$. Usaremos, então, essa propriedade sem maiores menções na demonstração a seguir.

Sejam D , E e F , respectivamente, sobre \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BP} e \overrightarrow{BC} , distando $\frac{\pi}{2}$ de B . Temos que $E \neq D$ e $E \neq F$, pois caso $E = D$, então, pelo Corolário 2.31, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BP}$. Logo $P \in \odot AB$, uma contradição com a observação inicial. Da mesma forma se mostra uma contradição caso $E = F$.

(1) \implies (3): Se (1) se verifica, então, pela Definição 2.10, P e A estão do mesmo lado de $\odot BC$.² Também, D e E estão do mesmo lado da reta $\odot BC$, pois, de acordo com a Proposição 2.39, D está do mesmo lado de A e E está do mesmo lado de P em relação à reta $\odot BC$. Observe ainda que F , E e D pertencem à reta de polo B , e como D e E estão do mesmo lado de $\odot BC = \odot BF$, as semirretas \overrightarrow{FE} e \overrightarrow{FD} são iguais de acordo com a Proposição 2.40. De forma similar demonstra-se que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DF}$. Desde que, pela Proposição 2.41, a intersecção de \overrightarrow{DF} e \overrightarrow{FD} é \widehat{DF} e desde que E é diferente de D e F , então E está entre D e F e portanto, pela Definição 2.8, segue que $m\widehat{DF} = m\widehat{DE} + m\widehat{EF}$ o que mostra que $m \angle ABC = m \angle ABP + m \angle PBC$, que nos dá (3).

(3) \implies (2): Se (3) se verifica, então como P não está sobre a reta $\odot BA$ e nem sobre a reta $\odot BC$, o que mostra que a semirreta \overrightarrow{BP} não está contida nas retas citadas e portanto, pela Proposição 2.37, esta semirreta possui com as referidas retas exatamente o ponto B em comum, ou seja, E é diferente de D e de F . Também, conciliando as hipóteses com as definições 2.11 e 2.5 segue que $m\widehat{DF} = m\widehat{DE} + m\widehat{EF}$ e, sendo E é diferente de D , tem-se que $m\widehat{DE} \neq 0$ e assim $m\widehat{EF} < m\widehat{DF}$, ou seja, $m \angle PBC < m \angle ABC$.

Observando que D , E e F são colineares e distintos por construção, segue da equação $m\widehat{DF} = m\widehat{DE} + m\widehat{EF}$, aplicando a Definição 2.8, que E está entre D e F . Logo $E \in \overrightarrow{FD}$ pela Definição 2.9 e, além disto, pelo Corolário 2.31, $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE}$. Como $F \in \odot BC$ e $D \notin \odot BC$, por construção,

² A reta esférica $\odot BC$ gera dois hemisférios H_1 e H_2 , de intersecção vazia. Estar do mesmo lado da reta esférica $\odot BC$ significa estar em apenas um dos hemisférios gerados por $\odot BC$.

então segue, da Proposição 2.39, que \overrightarrow{D} e \overrightarrow{E} estão do mesmo lado da reta $\odot BC$. Aplicando a mesma proposição às semirretas \overrightarrow{BE} e \overrightarrow{BD} segue que os pontos P e A estão do mesmo lado da reta $\odot BC$. Deste resultado e da sentença $m\angle PBC < m\angle ABC$ segue que (3) \implies (2).

(2) \implies (1): Se (2) se verifica então P e A estão do mesmo lado da reta $\odot BC$ e portanto, pela Proposição 2.39 aplicada às semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BP} , segue que D e E estão do mesmo lado de $\odot BC$. Pela mesma proposição, a semirreta \overrightarrow{FD} , exceto o ponto F , está do mesmo lado de $\odot BC$ e supondo, por contradição, que $\overrightarrow{FD} \neq \overrightarrow{FE}$, pela Definição 2.34, são semirretas opostas. Assim, pelo Corolário 2.36, $E^a \in \overrightarrow{FD}$ e, portanto, segue da Proposição 2.39 que E^a e D estão do mesmo lado de $\odot BC$ e assim E^a e E estão do mesmo lado de $\odot BC$, uma contradição com a Proposição 2.24. Segue, portanto, que (i) $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE}$. Conciliando as definições 2.5 e 2.11 com a sentença $m\angle PBC < m\angle ABC$ dada por hipótese, segue que (ii) $m\widehat{FE} < m\widehat{FD}$ e conciliando (i) e (ii) com a Definição 2.9 tem-se que (iii) E está entre F e D . Aplicando a Proposição 2.39 na semirreta \overrightarrow{DF} e usando (iii), segue que (iv) E e F estão do mesmo lado de $\odot BA$. Mas C e F estão do mesmo lado da reta $\odot BA$, para ver isto basta aplicar a Proposição 2.39 na semirreta \overrightarrow{BC} , e a dessa forma temos que (v) E e C estão do mesmo lado da reta $\odot BA$. Finalmente, observando que $P \in \overrightarrow{BE}$, segue da Proposição 2.39 que P e E estão do mesmo lado de $\odot BA$ e por (v) segue que P e C estão do mesmo lado de $\odot BA$. Utilizando então a última sentença com a hipótese, segue da Definição 2.10 que P é ponto interior ao ângulo $\angle ABC$. \square

Recorreremos por diversas vezes à ultima proposição, de ora em diante, na investigação da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico e nas propriedades entre um triângulo e seu polar. Resultado utilizado, sem a devida comprovação, na sequência didática proposta para o Ensino Médio neste trabalho. Nesse sentido, apresentamos a seguir um conjunto de lemas que exploram as relações dos polos de uma reta λ , particularmente um destes polos, com um ângulo em que o lado deste esteja contido em λ .

Lema 2.44. *Sejam B e C distintos não antípodas. Se A' é polo da reta esférica $\odot BC$, então o ângulo esférico $\angle A'BC$ é reto.*

Demonstração. Escolha na semirreta \overrightarrow{BC} o ponto D distando $\frac{\pi}{2}$ de B . Como A' é polo de $\odot BC$, segue que $d^e(A', D) = \frac{\pi}{2}$. Usando, então, a Definição 2.11, segue que $m\angle A'BC = \frac{\pi}{2}$. \square

Lema 2.45. *Seja $\angle ABC$ um ângulo reto. Então o polo de $\odot BC$ que está do mesmo lado de A em relação à reta $\odot BC$ está na semirreta \overrightarrow{BA} .*

Demonstração. Escolha D em \overrightarrow{BA} e E em \overrightarrow{BC} distando, respectivamente, $\frac{\pi}{2}$ de B . Pela Proposição 2.21, D é polo de uma única reta esférica λ e, pela Proposição 2.10, $B, E \in \lambda$.

Como $d^e(B, E) = \frac{\pi}{2}$ por construção, segue que $B \neq E$ e $B \neq E^a$ e, portanto, pelo Axioma 4, existe uma única reta que passa por B e E , ou seja, $\odot BE = \lambda$.

Como $B, E \in \overset{\curvearrowright}{BC}$, $B \neq E^a$ e $B, E \in \overset{\curvearrowright}{BE}$, segue da contrapositiva da Proposição 2.15 que $\overset{\curvearrowright}{BC} = \overset{\curvearrowright}{BE}$. Portanto, $\lambda = \overset{\curvearrowright}{BC}$, o que mostra que D é polo de $\overset{\curvearrowright}{BC}$ e, por construção, D está em BA .

Falta ainda demonstrar que D está do mesmo lado de A em relação à reta $\overset{\curvearrowright}{BC}$, ou seja, provar que $d^e(D, A) < \frac{\pi}{2}$, visto que D é polo de $\overset{\curvearrowright}{BC}$. Para isso, observe que $D \in \overset{\curvearrowright}{BA}$ e, usando as definições 2.9, 2.8 e 2.5, segue que

$$d^e(B, A) = d^e(B, D) + d^e(D, A) \quad (2.63)$$

ou

$$d^e(B, D) = d^e(B, A) + d^e(A, D). \quad (2.64)$$

Observe que $A \neq B^a$, pois do contrário, a reta esférica que passa por C e B conteria, pelo Lema 2.14, o ponto A . Mas isto contraria a Definição 2.10 de ângulo esférico $\sphericalangle ABC$, o qual existe por hipótese. Assim, $A \neq B^a$ e portanto

$$\pi > d^e(B, A). \quad (2.65)$$

De $d^e(B, D) = \frac{\pi}{2}$ e (2.65) segue que caso (2.63) ocorrer, então $d^e(D, A) < \frac{\pi}{2}$.

Caso ocorra (2.64), observando que $d^e(B, A) > 0$ pois $B \neq A$, e como $d^e(B, D) = \frac{\pi}{2}$, segue que $d^e(D, A) < \frac{\pi}{2}$. \square

Observação 2.46. *Da mesma forma que ocorre na Geometria Euclidiana, um ângulo é dito reto se sua medida é $\frac{\pi}{2}$. Se sua medida for maior que $\frac{\pi}{2}$, será dito obtuso e, se for menor que $\frac{\pi}{2}$, será dito agudo.*

Lema 2.47. *Seja $\sphericalangle ABC$ um ângulo obtuso. E sejam:*

(a) A' polo da reta $\overset{\curvearrowright}{BC}$ do mesmo lado de A ;

(b) C' polo da reta $\overset{\curvearrowright}{BA}$ do mesmo lado de C .

Então, A' e C' estão no interior do ângulo esférico $\sphericalangle ABC$.

Demonstração. Como A' é polo de $\overset{\curvearrowright}{BC}$, segue do Lema 2.44 que $m \sphericalangle A'BC = \frac{\pi}{2}$. Como o ângulo $\sphericalangle ABC$ é obtuso, segue que

$$m \sphericalangle A'BC < m \sphericalangle ABC. \quad (2.66)$$

Combinando a hipótese (a) com a sentença (2.66), segue da Proposição 2.43 que A' está no interior de ABC .

A prova para C' ocorre de forma similar usando a hipótese (b). \square

Lema 2.48. *Seja $\sphericalangle ABC$ um ângulo obtuso. Sejam ainda:*

(a) A' polo da reta esférica $\overset{\curvearrowright}{BC}$ que está do mesmo lado de A ;

(b) C' polo da reta esférica $\bigcirc AB$ que está do mesmo lado de C ;

(c) A' pertence ao interior do ângulo $\sphericalangle ABC$;

(d) C' pertence ao interior do ângulo $\sphericalangle ABC$.

Então, C' está no interior do ângulo $\sphericalangle A'BC$.

Demonstração. Pela Definição 2.10 combinada com (d) segue que C' está no hemisfério gerado pela reta $\bigcirc BC$ que contém o ponto A . Observe que, pela Definição 2.10, como A' é polo da reta $\bigcirc BC$ do mesmo lado de A e A' é interior ao ângulo $\sphericalangle ABC$, então o hemisfério gerado pela reta $\bigcirc BC$ é o hemisfério de centro A' . Em particular, temos, portanto, que C' está no hemisfério de centro A' e, dessa forma, $d^e(A', C') < \frac{\pi}{2}$. Isso mostra que

$$C' \text{ está do mesmo lado de } A' \text{ em relação à reta } \bigcirc BC. \quad (2.67)$$

Queremos, a seguir, provar que

$$m \sphericalangle C'BC < m \sphericalangle A'BC. \quad (2.68)$$

Para isso, suponha, por contradição, que $m \sphericalangle A'BC \leq m \sphericalangle C'BC$. Como $m \sphericalangle ABC' = \frac{\pi}{2}$, para ver isso basta combinar o Lema 2.44 com a hipótese (a), segue que

$$\frac{\pi}{2} \leq m \sphericalangle C'BC. \quad (2.69)$$

Ocorre ainda que usando a hipótese (d), combinada com a Proposição 2.43, segue que

$$m \sphericalangle ABC = m \sphericalangle ABC' + m \sphericalangle C'BC. \quad (2.70)$$

Mas observe que substituindo $m \sphericalangle ABC'$ por $\frac{\pi}{2}$ e usando (2.69) segue que $m \sphericalangle ABC > \pi$, uma contradição com a definição de medida de um ângulo esférico. Portanto, (2.68) é verdadeira.

Dessa forma, combinando (2.68), (2.67) e a Proposição 2.43, segue que C' está no interior do ângulo $\sphericalangle A'BC$. \square

Lema 2.49. *Seja $\sphericalangle ABC$ um ângulo agudo e sejam:*

(a) A' polo da reta esférica $\bigcirc BC$ que está do mesmo lado de A ;

(b) C' polo da reta esférica $\bigcirc AB$ que está do mesmo lado de C .

Então, A é interior ao ângulo $\sphericalangle A'BC$ e C é interior ao ângulo $\sphericalangle C'BA$.

Demonstração. Tome o ponto D na semirreta \overrightarrow{BC} distando $\frac{\pi}{2}$ de B . Logo, segue da Definição 2.11 combinada com a hipótese (a) que $m \sphericalangle A'BC = d^e(A', D) = \frac{\pi}{2}$. Além disto, por hipótese, $\sphericalangle ABC$ é agudo e portanto

$$m \sphericalangle ABC < m \sphericalangle A'BC. \quad (2.71)$$

Observe que segue da hipótese (a) que A está do mesmo lado de A' em relação à reta $\odot BC$. Combinando, então, esta informação com (2.71), segue da Proposição 2.43 que A é interior ao ângulo $\sphericalangle A'BC$.

A demonstração de que C é interior ao ângulo $\sphericalangle C'BA$ se faz de forma similar. □

Proposição 2.50. *Sejam A, B e C pontos da esfera não colineares. Sejam ainda:*

(a) A' polo da reta esférica $\odot BC$ que está do mesmo lado de A ;

(b) C' polo da reta esférica $\odot AB$ que está do mesmo lado de C .

Então, $m\widehat{A'C'} = m\angle A'BC' = \pi - m\angle ABC$.

Demonstração. Observe que usando as hipóteses (a) e (b) combinadas com o Lema 2.44, segue que:

$$m\angle A'BC = \frac{\pi}{2} \quad (2.72)$$

e

$$m\angle C'BA = \frac{\pi}{2}. \quad (2.73)$$

Observe que o ângulo $\angle ABC$ pode ser reto, obtuso ou agudo. Nossa demonstração será desenvolvida para cada caso:

Caso reto: Caso $m\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ então C' está em \overline{BC} e A' está em \overline{BA} , conforme pode ser visto combinado as hipóteses (a) e (b) com o Lema 2.45. Logo $m\angle A'BC' = m\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ e além disto, pela Definição 2.11, temos que $m\widehat{A'C'} = m\angle A'BC'$. Segue, portanto, que $m\widehat{A'C'} = m\angle A'BC' = \pi - m\angle ABC$.

Caso obtuso: Caso $m\angle ABC > \frac{\pi}{2}$ então, combinando as hipótese (a), (b) e o Lema 2.47, segue que A' e C' estão no interior do ângulo $\angle ABC$. Segue, então, da Proposição 2.43 que, em particular

$$m\angle ABC = m\angle ABA' + m\angle A'BC \quad (2.74)$$

e

$$m\angle ABC = m\angle C'BA + m\angle C'BC. \quad (2.75)$$

Usando (2.72) e (2.73), respectivamente, nas equações (2.74) e (2.75), obtemos

$$m\angle C'BC = m\angle ABA'. \quad (2.76)$$

Da combinação de (2.75) com (2.73) resulta

$$m\angle C'BC = m\angle ABC - \frac{\pi}{2}. \quad (2.77)$$

Como A' e C' estão no interior do ângulo obtuso $\angle ABC$, combinando essa informação com as hipóteses (a) e (b), temos exatamente as hipóteses do Lema 2.48 e, portanto, segue que C' está no interior do ângulo $\angle A'BC$. Usando, então, a Proposição 2.43, segue que

$$m\angle A'BC = m\angle A'BC' + m\angle C'BC. \quad (2.78)$$

Combinando (2.74) e (2.78), segue que

$$m \sphericalangle ABC = m \sphericalangle ABA' + m \sphericalangle A'BC' + m \sphericalangle C'BC. \quad (2.79)$$

Combinando (2.79) com (2.76) segue que

$$m \sphericalangle ABC = m \sphericalangle C'BC + m \sphericalangle A'BC' + m \sphericalangle C'BC. \quad (2.80)$$

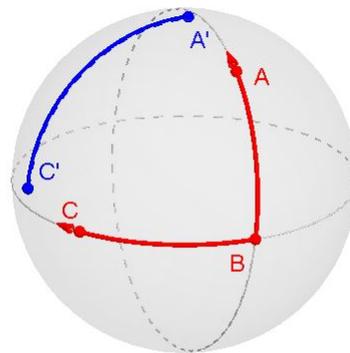
Finalmente, combinando (2.77) com (2.80), segue que

$$m \sphericalangle ABC = \frac{\pi}{2} - m \sphericalangle ABC + m \sphericalangle A'BC' + \frac{\pi}{2} - m \sphericalangle ABC. \quad (2.81)$$

Esta é equivalente a $m \sphericalangle A'BC' = \pi - m \sphericalangle ABC$ e, como $m \sphericalangle A'BC' = m \widehat{A'C'}$ pela Definição 2.10, a demonstração para esse caso está completa. \square

A última proposição nos brinda com uma importante relação entre as medidas de um ângulo esférico $\sphericalangle ABC$ e do segmento $\widehat{A'C'}$, em que A' é polo da reta esférica $\bigcirc BC$ que está do mesmo lado de A , enquanto que C' é polo da reta esférica $\bigcirc AB$ que está do mesmo lado de C . A figura a seguir resume o resultado:

Figura 8 – Relação entre as medida de um ângulo e do segmento que liga os polos das retas que contém seus lados.

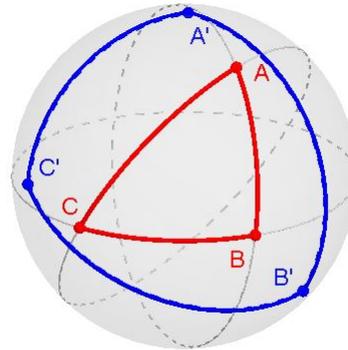


$$m \widehat{A'C'} = \pi - m \sphericalangle ABC$$

Fonte: O autor (2021).

A importância desse resultado fica mais evidente na figura a seguir onde determinamos B' , o polo da reta $\bigcirc AC$ que está do mesmo lado de B e destacamos os triângulos $\triangle^e ABC$ e $\triangle^e A'B'C'$, o último será definido logo em seguida como o polar do triângulo $\triangle^e ABC$.

Figura 9 – Relação entre um ângulo de um triângulo e um determinado lado do seu polar.



$$m\widehat{A'C'} = \pi - m\angle ABC$$

Fonte: O autor (2021).

Esta figura sugere corretamente que a igualdade $m\widehat{A'C'} = \pi - m\angle ABC$ relaciona lados com ângulos de certos pares de triângulos esféricos. E, de fato, isto será tornado mais claro após as formalizações e resultados estabelecidos a seguir.

Definição 2.51 (Triângulo polar). *Seja $\triangle^e ABC$ um triângulo esférico. Define-se o triângulo polar $\triangle^e A'B'C'$ de $\triangle^e ABC$ da seguinte forma:*

- (a) *Tomamos A' o polo da reta esférica $\odot BC$ que está do mesmo lado de A em relação à $\odot BC$.*
- (b) *Tomamos B' o polo da reta esférica $\odot AC$ que está do mesmo lado de B em relação à $\odot AC$.*
- (c) *Tomamos C' o polo da reta esférica $\odot AB$ que está do mesmo lado de C em relação à $\odot AB$.*

É necessário verificar se a definição é consistente no sentido de que A' , B' e C' , de fato, não sejam colineares. Para isto, segue a próxima proposição:

Proposição 2.52. *Se $\triangle^e ABC$ é um triângulo esférico conforme a Definição 2.12, então $\triangle^e A'B'C'$ também é um triângulo esférico no sentido da mesma definição.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que os pontos A' , B' e C' estejam contidos numa reta esférica λ com polos N e S . Como a reta esférica $\odot BC$ é o conjunto dos pontos da esfera que distam $\frac{\pi}{2}$ de A' e, desde que N e S distam $\frac{\pi}{2}$ de A' , segue da mesma proposição que N e S são elementos da reta esférica $\odot BC$. Usando um argumento similar, concluímos que N e S são elementos das retas esféricas $\odot AB$ e $\odot AC$. Desde que A , B e C não são colineares por hipótese, segue $\odot AB$ e $\odot BC$ são distintas. Segue, portanto, da Proposição 2.15 que os únicos pontos comuns a $\odot AB$ e $\odot BC$ são os pontos N e S . Mas as retas esféricas $\odot AB$ e $\odot BC$ também possuem o ponto B em comum e, portanto, $B = N$ ou $B = S$. Um argumento similar mostra que $A = N$ ou $A = S$ e que $C = N$ ou $C = S$. Mas, se isto ocorrer, então qualquer reta esférica que contém N e S ,

conterá os pontos A , B e C , o que mostra que A , B e C são colineares, uma contradição. Desta contradição segue que os pontos A' , B' e C' não estão contidos numa reta esférica e, portanto, o triângulo esférico $\Delta^e A'B'C'$ está bem definido. \square

Proposição 2.53. *Com a notação da Definição 2.51, o polar do triângulo esférico $\Delta^e A'B'C'$ é o triângulo esférico $\Delta^e ABC$.*

Demonstração. Demonstraremos que C é polo de $\odot A'B'$ do mesmo lado de C' em relação à reta $\odot A'B'$. A demonstração de que B é polo de $\odot A'C'$ do mesmo lado de B' em relação à reta $\odot A'C'$ e de que A é polo de $\odot B'C'$ do mesmo lado de A' em relação à reta $\odot B'C'$ se faz com argumento similar.

A nossa demonstração utilizará as quatro relações a seguir que serão provadas nos parágrafos subsequentes:

$$d^e(C, C') < \frac{\pi}{2}, \quad (2.82)$$

$$d^e(A', C) = \frac{\pi}{2}, \quad (2.83)$$

$$d^e(B', C) = \frac{\pi}{2} \quad (2.84)$$

e

$$A' \neq B' \quad \text{e} \quad A' \neq (B')^a. \quad (2.85)$$

Como C e C' estão do mesmo lado de $\odot AB$, visto que $\Delta^e ABC$ é polar do $\Delta^e A'B'C'$, segue que $d^e(C, C') < \frac{\pi}{2}$, o que prova (2.82).

Por hipótese, A' é polo de $\odot BC$. Como $C \in \odot BC$, segue que $d^e(A', C) = \frac{\pi}{2}$, o que prova (2.83). Da mesma forma, B' é polo de $\odot AC$, por hipótese e, portanto, por argumento similar ao anterior, segue que (2.84) está provada.

Caso A' e B' fossem iguais, então, pela Proposição 2.21 existiria uma única reta esférica λ tal que A' e B' são polos de λ . Como A' é polo da reta esférica $\odot BC$ e B' o polo da reta esférica $\odot AC$, $\odot BC \neq \odot AC$, temos uma contradição. Logo $A' \neq B'$, o que prova a primeira parte de (2.85).

Caso A' e B' fossem antípodas então, pela combinação das proposições 2.18 e 2.21, $\odot BC$ e $\odot AC$ deveriam ser iguais, o que implicaria na colinearidade de A, B e C , que contraria a hipótese de A, B e C serem vértices de um triângulo. Logo, $A' \neq (B')^a$, o que termina a prova de (2.85).

Observe que, pela Proposição 2.21, C é polo de uma única reta esférica α . Segue então de (2.83) e (2.84), aplicando a Proposição 2.19, que $A', B' \in \alpha$. De (2.85), aplicando o Axioma 4, segue que existe uma única reta esférica que passa por A' e B' , o que mostra que $\odot A'B' = \alpha$ e, portanto, C é polo da reta $\odot A'B'$ e, pela relação (2.82), C' está do mesmo lado de C em relação à reta $\odot A'B'$. \square

Proposição 2.54. Se $\Delta^e ABC$ é um triângulo esférico e $\Delta^e A'B'C'$ é o polar deste triângulo, então:

$$m \sphericalangle A' = \pi - m\widehat{BC}, \quad (2.86)$$

$$m \sphericalangle B' = \pi - m\widehat{AC}, \quad (2.87)$$

$$m \sphericalangle C' = \pi - m\widehat{AB}, \quad (2.88)$$

$$m\widehat{A'B'} = \pi - m \sphericalangle C, \quad (2.89)$$

$$m\widehat{A'C'} = \pi - m \sphericalangle B \quad (2.90)$$

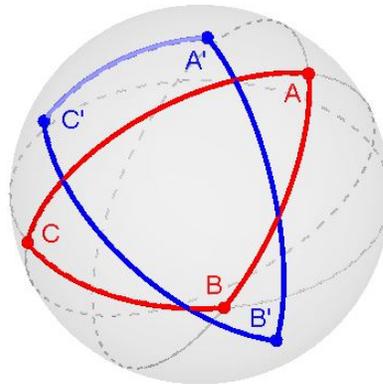
e

$$m\widehat{B'C'} = \pi - m \sphericalangle A. \quad (2.91)$$

Demonstração. A equação (2.90) segue imediatamente da Proposição 2.50, enquanto as equações (2.89) e (2.91) seguem pela permutação de vértices do triângulo. As três primeiras seguem do fato, provado na Proposição 2.53, que o polar do triângulo esférico $\Delta^e A'B'C'$ é o triângulo esférico $\Delta^e ABC$. \square

Definido o polar de um triângulo e demonstrado que o polar do polar é o triângulo original, as relações entre lados e ângulos de um par de triângulos polares dadas pela Proposição 2.54 permitem "transportar" relações conhecidas válidas entre ângulos de um triângulo para relações entre lados, e vice-versa.

Figura 10 – Um triângulo e seu polar.

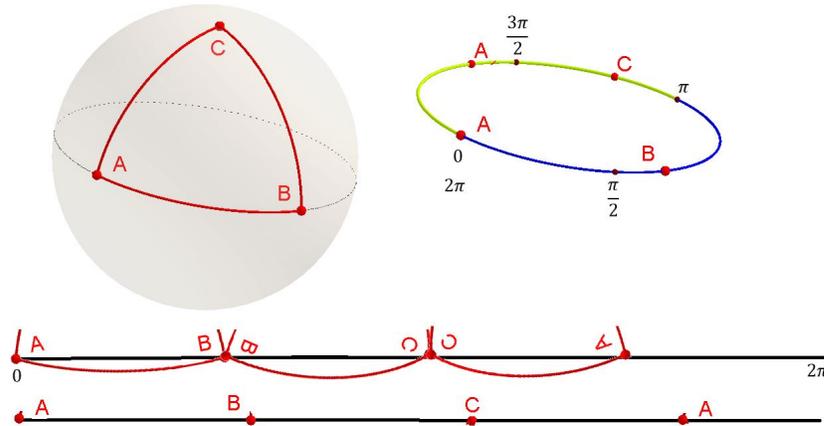


Fonte: O autor (2021).

Para um exemplo simples do poder da última proposição na Geometria Esférica, suponha que exista um triângulo esférico $\Delta^e ABC$ tal que a soma dos seus ângulos internos seja $m \sphericalangle A + m \sphericalangle B + m \sphericalangle C \geq 3\pi$. Então, $m\widehat{B'C'} + m\widehat{A'C'} + m\widehat{A'B'} = \pi - m \sphericalangle A + \pi - m \sphericalangle B + \pi - m \sphericalangle C \leq 0$, ou seja, existiria um triângulo esférico cuja soma dos três lados seria menor ou igual a zero, um absurdo.

Esse artifício será usado inclusive na nossa sugestão de sequência didática, por exemplo, ao provar para o Ensino Médio que a soma dos lados de um triângulo esférico não pode exceder ou igualar a 2π .

Figura 11 – Triângulo esférico: somando os lados.



Fonte: O autor (2021).

A última figura reflete visualmente a soma dos três lados de um triângulo particular $\Delta^e ABC$ pela justaposição dos três lados deste triângulo na reta esférica, à esquerda, e conseqüentemente retificação euclidiana, abaixo. Indicando que a soma das medidas dos três lados do triângulo é menor que 2π .

Nas proposições a seguir, trataremos de uma propriedade de grande interesse que é a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico. Na Geometria Euclidiana Plana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é a constante π . Propriedade esta derivada da existência e unicidade de uma reta euclidiana paralela a uma reta dada passando por um ponto fixado e, externo a esta.

Proposição 2.55. *Se um triângulo esférico $\Delta^e ABC$ possui um ângulo reto, então a soma das medidas dos ângulos internos é maior que π .*

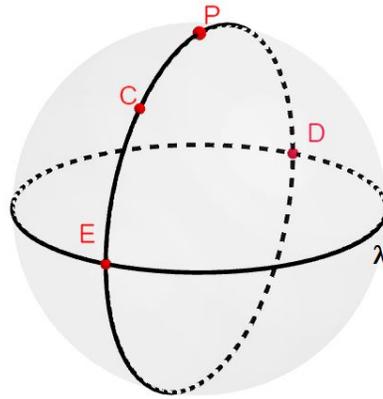
A demonstração dessa proposição está detalhada em Whittlesey (2020, p.92) e, não a repetiremos aqui por considerar que os desenvolvimentos apresentados até então permitem ao leitor interessado fazê-lo, bem como, evitaremos sobrecarregar esse capítulo com uma lista demasiadamente extensa de demonstrações.

Definição 2.56 (Menor e maior segmento perpendicular). *Sejam λ uma reta esférica de polo P e $C \neq P$ um ponto do mesmo lado de P em relação à λ . Sejam ainda D e E os pontos de intersecção entre λ e a reta $\odot CP$ então: (i) $d^e(C, D) < d^e(C, E)$ ou (ii) $d^e(C, E) < d^e(C, D)$. No primeiro caso*

dizemos que D é o pé do menor segmento perpendicular baixado de C à reta λ e D é o maior. No segundo caso, D é o menor e E é o maior.

Observe-se que, de acordo com a Proposição 2.15, os pontos D e E são antípodas e pela Proposição 2.23, $d^e(C, E) + d^e(C, D) = \pi$. Observe-se também que escolhendo um ponto F em λ , $F \neq D$ e $F \neq E$, o Lema 2.44 nos mostra que o ângulo $\sphericalangle PEF = \sphericalangle CEF$ é reto, o mesmo ocorrendo com o ângulo $\sphericalangle CDF$, o que faz jus à denominação apresentada.

Figura 12 – Ilustração da Definição 2.56 para o caso (ii).



Fonte: O autor (2021).

Observação 2.57. De forma distinta do que ocorre na Geometria Euclidiana, um lado de um triângulo é sempre menor que π . Dizemos ainda que o lado de um triângulo é reto, se medir $\frac{\pi}{2}$. Se sua medida for maior que $\frac{\pi}{2}$, dizemos que o lado é obtuso e, se sua medida for menor que $\frac{\pi}{2}$, dizemos que é agudo.

Proposição 2.58. Um par de ângulos em um triângulo são retos se, e somente se, seus respectivos lados opostos são retos.

Demonstração. Suponha um triângulo esférico $\triangle^e ABC$ com ângulos $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle C$ retos. Então, pelo Lema 2.45, o polo A' da reta $\circ BC$ que está do mesmo lado de A pertence às semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{CA} . Logo $A = A'$, pois, do contrário, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$, pelo Corolário 2.31, e isto não pode ocorrer, pois \widehat{BA} e \widehat{CA} são lados distintos do triângulo $\triangle^e ABC$. Dessa forma, provamos que A é polo de $\circ BC$ e, portanto, \widehat{BA} e \widehat{CA} são retos.

Reciprocamente, suponha que os lados \widehat{BA} e \widehat{CA} do triângulo $\triangle^e ABC$ sejam retos. Então A dista $\frac{\pi}{2}$ dos pontos distintos não antípodas B e C . Logo, pela Proposição 2.22, A é polo de $\circ BC$ e, portanto, qualquer ponto da reta $\circ BC$ dista $\frac{\pi}{2}$ de A . Tomando, então, D na semirreta \overrightarrow{BC} distando $\frac{\pi}{2}$ de B e usando a Definição 2.11, segue que $m \sphericalangle ABC = d^e(B, D) = \frac{\pi}{2}$, o que mostra que $\sphericalangle B = \sphericalangle ABC$ é reto. De forma equivalente, mostra-se que $\sphericalangle C = \sphericalangle ACB$ é reto, tomando um ponto E na semirreta \overrightarrow{CB} distando $\frac{\pi}{2}$ de C . □

Lema 2.59. *Sejam B e C pontos da esfera distintos não antípodas e A' polo da reta $\circ BC$. Seja A um ponto entre B e A' . Então, A e A' estão do mesmo lado da reta $\circ BC$ e A está no interior do ângulo $\sphericalangle A'CB$.*

Demonstração. De fato, pela Definição 2.9, A' está na semirreta \overrightarrow{BA} e portanto, pela Proposição 2.39, A e A' estão do mesmo lado de $\circ BC$.

Falta ainda provar que B e A estão do mesmo lado da reta $\circ CA'$. Para isto, observe que caso B e A estivessem em lados opostos de $\circ CA'$ então, pela Proposição 2.38, \widehat{BA} intersecta a reta $\circ CA'$ em exatamente um ponto X . Mas $\circ BA$ e $\circ CA'$, por serem distintas, possuem, de acordo com a Proposição 2.15, exatamente dois pontos antípodas em comum, o que mostra que $X = A'$ ou $X = (A')^a$, visto que A' está nas duas retas. No entanto, o primeiro caso não pode ocorrer pois por hipótese A está entre B e A' . Logo, segue da Definição 2.8 que (i) $d^e(B, A') = d^e(B, A) + d^e(A, A')$ e caso $X = A'$, pela mesma definição, (ii) $d^e(B, A') + d^e(A', A) = d^e(B, A)$. Mas, da ocorrência simultânea de (i) e (ii) segue que $d^e(A', A) = 0$ e portanto $A' = A$, contrariando a hipótese que afirma A está entre B e A' , logo A e A' são distintos pela Definição 2.8.

O segundo caso também não pode ocorrer, pois se $(A')^a$ estivesse no segmento $\widehat{BA'}$, então, pela Definição 2.9, $(A')^a$ estaria na semirreta $\overrightarrow{BA'}$. Mas, neste caso, aplicando Proposição 2.39, segue que A' e $(A')^a$ estão do mesmo lado da reta $\circ BC$, contrariando a Proposição 2.25.

Portanto, A e A' estão do mesmo lado de $\circ BC$ e, B e A estão do mesmo lado de $\circ CA'$. Dessa forma, segue, pela Definição 2.10, que A é interior ao ângulo esférico $\sphericalangle A'CB$. \square

Lema 2.60. *Sejam B e C pontos da esfera distintos não antípodas e A' polo da reta $\circ BC$. Seja A um ponto da esfera tal que A' está entre B e A . Então, A e A' estão do mesmo lado da reta $\circ BC$ e A' está no interior do ângulo $\sphericalangle ACB$.*

Demonstração. Pela Definição 2.9, A está na semirreta $\overrightarrow{BA'}$ e, portanto, pela Proposição 2.39 A e A' estão do mesmo lado da reta $\circ BC$.

Provaremos, agora, que B e A' estão do mesmo lado da reta $\circ CA$. Observe que B não está em $\circ CA$ visto que A, B e C são vértices de um triângulo, por outro lado A' não está em $\circ CA$ pois A' está em \overrightarrow{BA} pelo Lema 2.45 e, portanto, pela Proposição 2.37, A é o único ponto de \overrightarrow{BA} que está em $\circ CA$. Suponha então, por absurdo, que B e A' estejam em lados opostos de $\circ CA$. Usando a Proposição 2.38 segue que $\widehat{BA'}$ intersecta a reta $\circ CA$ em exatamente um ponto. Mas isto não pode ocorrer visto que $\widehat{BA'} \subset \widehat{BA}$, $A \notin \widehat{BA'}$ e A é o único ponto de \widehat{BA} que está em $\circ CA$, de acordo com a Proposição 2.37.

Portanto, A e A' estão do mesmo lado de $\circ BC$ e, B e A' estão do mesmo lado de $\circ CA$. Usando, então, a Definição 2.10 temos que A' é interior ao ângulo esférico $\sphericalangle ACB$. \square

Proposição 2.61. *Seja $\triangle^e ABC$ reto em $\sphericalangle B$. Então cada um dos outros ângulos é agudo, reto ou obtuso se, e somente se, seus respectivos lados opostos são agudos, retos ou obtusos.*

Demonstração. Usando o Lema 2.45, temos que: (i) A' , polo de $\odot BC$ que do mesmo lado de A , está na semirreta \overrightarrow{BA} . Usando, então, o Corolário 2.31 neste resultado, segue que: (ii) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA'}$. Com argumento equivalente, prova-se que: (iv) C' , o polo de $\odot BA$ que está do mesmo lado de C , está na semirreta \overrightarrow{BC} ; (v) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC'}$. Também, usando o Lema 2.44 em (i) e (iv), segue: (vi) $m\angle A'BC = \frac{\pi}{2}$, $m\angle A'CB = \frac{\pi}{2}$, $m\angle C'BA = \frac{\pi}{2}$, $m\angle C'AB = \frac{\pi}{2}$.

Caso \widehat{BA} é reto, então, combinando o Corolário 2.30 com (ii), segue que $A = A'$. Logo, $\angle ACB = \angle A'CB$ que é reto por (vi). Segue, portanto, que $\angle C = \angle ACB$ é reto.

Caso \widehat{BA} é agudo, como A' está em \overrightarrow{BA} por (i) e observando que $A' \notin \widehat{BA}$ (pois do contrário, usando a Definição 2.8, temos que $d^e(B, A') < d^e(B, A) < \frac{\pi}{2}$, uma contradição, visto que $d^e(B, A') = \frac{\pi}{2}$) segue da Definição 2.9 que A está entre B e A' e, portanto, segue do Lema 2.59 que A está no interior do ângulo $\angle A'CB$. Usando, então, a Proposição 2.43, segue que $m\angle ACB < m\angle A'CB = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\angle C = \angle ACB$ é agudo.

Caso \widehat{BA} é obtuso e como A' está em \overrightarrow{BA} por (i), segue, da Definição 2.9, que $A' \in \widehat{BA}$ ou A está entre B e A' . Observe que o segundo caso não pode ocorrer, pois se ocorresse teríamos, pela Definição 2.8, $\frac{\pi}{2} = d^e(B, A') > d^e(B, A)$, uma contradição, visto que \widehat{BA} é obtuso. Logo, $A' \in \widehat{BA}$ e obviamente $A' \neq B$ e $A' \neq A$. Segue, portanto, das definições 2.5 e 2.8 que A' está entre B e A . Usando, então, o Lema 2.60 segue que A' está no interior do ângulo $\angle ACB$ que, pela Proposição 2.43 implica que $\frac{\pi}{2} = m\angle A'CB < m\angle ACB$ e, portanto, $\angle C = \angle ACB$ é obtuso.

Caso $\angle C = \angle ACB$ é agudo, então segue do Lema 2.49 que A é interior ao ângulo $\angle A'CB$. Logo, pela Definição 2.10, A e B estão do mesmo lado de $\odot A'C$ e portanto $\widehat{BA} \cap \odot A'C = \emptyset$. Isso mostra que $A' \notin \widehat{AB}$ e como $A' \in \overrightarrow{BA}$ por (i), segue da Definição 2.9 que A está entre B e A' . Usando então a Definição 2.8 segue que $d^e(B, A) < d^e(B, A') = \frac{\pi}{2}$, ou seja, \widehat{BA} é agudo.

Caso $\angle C = \angle ACB$ é obtuso, então segue do Lema 2.47 que A' é interior ao ângulo $\angle ACB$. Logo, pela Definição 2.10, A' e B estão do mesmo lado de $\odot AC$ e portanto $\widehat{BA'} \cap \odot AC = \emptyset$. Isso mostra que $A \notin \widehat{BA'}$ e, como, por (ii), $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA'}$, segue que $A \in \overrightarrow{BA'}$ e usando a Definição 2.9 obtém-se que A' está entre B e A . Usando então a Definição 2.8, segue que $d^e(B, A) > d^e(B, A') = \frac{\pi}{2}$, ou seja, \widehat{BA} é obtuso.

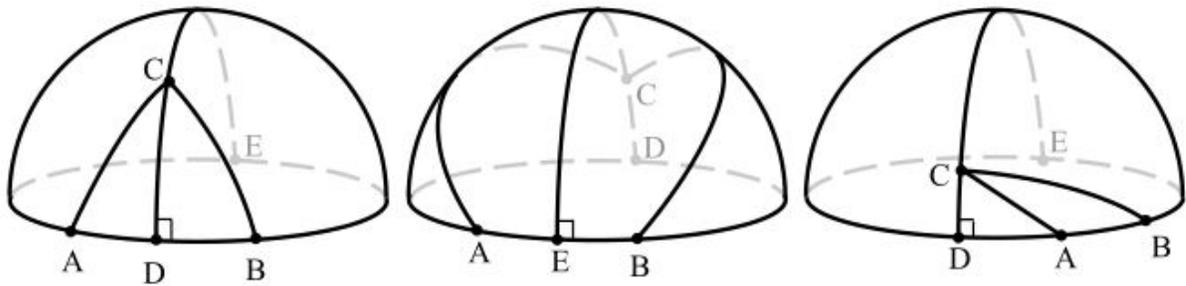
Caso $\angle C = \angle ACB$ é reto, segue da Proposição 2.58 que o lado oposto a \widehat{BA} é reto.

Os casos em que \widehat{BC} é reto, agudo ou obtuso são idênticos aos casos demonstrados para \widehat{BA} . Da mesma forma, os casos em que $\angle A$ é agudo, obtuso ou reto são idênticos aos casos demonstrados para o ângulo $\angle C$. Portanto, a proposição está demonstrada. \square

Proposição 2.62. *Suponha um triângulo $\triangle^e ABC$ em que os ângulos $\angle A$ e $\angle B$ não sejam retos. Então C não é um polo de $\odot AB$. Além do mais, se D e E são, respectivamente, os pés do menor e do maior segmento perpendicular baixado de C em $\odot AB$, então D está entre A e B se, e somente se, $\angle A$ e $\angle B$ são agudos.*

Demonstração. Observe que C não é polo de $\odot AB$, pois do contrário \widehat{CA} e \widehat{CB} seriam retos e, portanto, $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ seriam retos, pela Proposição 2.58, contradizendo a hipótese. Também C não está nas semirretas $\overrightarrow{AC'}$ ou $\overrightarrow{BC'}$, em que C' é polo da reta $\odot AB$ do mesmo lado de C , pois implicaria respectivamente que $\sphericalangle A$ ou $\sphericalangle B$ seriam retos, contradizendo novamente a hipótese. Observe que usando o fato de que nem $\sphericalangle A$ e nem $\sphericalangle B$ são retos, segue do Lema 2.44 que D e E são distintos dois a dois de A e B . Note que D e E sendo antípodas não podem estar simultaneamente entre A e B . Logo, há três casos a considerar: (i) D está entre A e B ; (ii) E está entre A e B ; (iii) nem D nem E estão entre A e B .

Figura 13 – Ilustração dos casos (i), (ii) e (iii).



Fonte: Whittlesey (2020, p.76)

Caso (i), então $\sphericalangle A = \sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD$ e $\sphericalangle B = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CBD$. Observando que os ângulos $\sphericalangle CDA$ e $\sphericalangle CDB$ são retos pela argumentação apresentada parágrafo seguinte à Definição 2.56, segue então do Lema 2.45 que o polo C' de $\odot AB$ está na semirreta \overrightarrow{DC} e ainda, pela definição de menor segmento perpendicular, Definição 2.56, temos que C está entre D e C' . Usando então o Lema 2.59 segue que C está no interior dos ângulos $\sphericalangle C'AD$ e $\sphericalangle C'BD$ que são retos, pelo Lema 2.44, visto que C' é polo de $\odot AB$. Logo, usando a Proposição 2.43 segue que $m \sphericalangle CAD < m \sphericalangle C'AD = \frac{\pi}{2}$ e $m \sphericalangle CBD < m \sphericalangle C'BD = \frac{\pi}{2}$. Ou seja, $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ são agudos, que termina a prova da implicação direta da proposição.

Para provar a implicação inversa, provaremos, inicialmente que os casos (ii) e (iii) implicam $\sphericalangle A$ obtuso ou $\sphericalangle B$ obtuso. Feito isso, basta tomar por hipótese $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ agudos e supor que E esteja entre A e B . Mas se isto ocorrer, então ter-se-á $\sphericalangle A$ obtuso ou $\sphericalangle B$ obtuso, uma contradição. Da mesma forma, não podem ocorrer simultaneamente a sentença $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ agudos e a sentença nem D nem E estão entre A e B . Dessa forma, a única possibilidade restante é que D está entre A e B .

Caso (ii), observe que aplicando a Proposição 2.61 aos triângulos $\triangle^e CEA$ e $\triangle^e CEB$, retos em E e de lado \widehat{CE} obtuso, segue que os ângulos $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ são obtusos.

Caso ocorra (iii), então observe que A e B estão do mesmo lado de $\odot DC = \odot EC$, pois do contrário, pela Proposição 2.38, ou D ou E estariam em \widehat{AB} , contradizendo a suposição ini-

cial. Observe também que segue diretamente da Proposição 2.40 que $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$ e, portanto, em particular, B está em DA . Usando, então, a Definição 2.9, percebemos que há dois subcasos a considerar: (1) A está entre D e B ; (2) B está entre A e D .

Quanto ao subcaso (1), atente que \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{AB} são opostas. Logo, usando a Proposição 2.42, segue que

$$m \sphericalangle CAB + m \sphericalangle CAD = \pi. \quad (2.92)$$

Ainda, assumindo A entre D e B e atentando que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$, segue que

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBD. \quad (2.93)$$

Usando, então, a Proposição 2.61 nos triângulos $\triangle^e CDA$ e $\triangle^e CDB$, observando que \widehat{CD} é agudo, segue que os ângulos $\sphericalangle CAD$ e $\sphericalangle CBD$ são agudos. Combinando este resultado com as equações 2.92 e 2.93, segue que $\sphericalangle CAB$ é obtuso.

Para o subcaso (2), com argumento equivalente, mostra-se que $\sphericalangle CBD$ e $\sphericalangle CBA$ são suplementares e $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB$ e, por fim, concluindo que $\sphericalangle CBA$ é obtuso. \square

Proposição 2.63. *Num triângulo esférico, a medida de cada ângulo interno é menor que π .*

Demonstração. Seja $\triangle^e ABC$ um triângulo esférico qualquer. Pela Definição 2.10, A , B e C são distintos não colineares. Disto segue que $\bigcirc_{AB} \neq \bigcirc_{BC}$. Temos também, pela Definição 2.1, que $m \sphericalangle A = d^e(D, E)$, em que $D \in BA$ e $E \in BC$ distando, ambos, $\frac{\pi}{2}$ de B . Como $A \notin BC$ (pois do contrário $\bigcirc_{AB} = \bigcirc_{BC}$) e $D \neq B$, segue que $D \notin BC$ (pois, do contrário, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$, pelo Corolário 2.31, o que implicaria que A , B e C são colineares).

Como, pelo Corolário 2.14, o antípoda de E está na reta \bigcirc_{BC} e $D \notin \bigcirc_{BC}$. Logo, D não é antípoda de E e, portanto, $d^e(D, E) < \pi$. Assim, segue que $m \sphericalangle A = d^e(D, E) < \pi$.

O mesmo argumento se aplica aos ângulos $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle C$ pela simples troca de variável. \square

Proposição 2.64. *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico qualquer é maior que π e menor que 3π .*

Demonstração. Se o triângulo possui um ângulo reto, então o resultado é dado pela Proposição 2.55. Se o triângulo tem apenas um ângulo agudo, então a soma dos demais já é maior que π . Seja, então, $\triangle^e ABC$ um triângulo esférico com dois ângulos, digamos $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ agudos. Pela Proposição 2.62, o ponto D , pé da menor perpendicular baixada de C à reta \bigcirc_{AB} está entre A e B . Observando que $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB$ e que $\sphericalangle CDA = \frac{\pi}{2}$, segue da Proposição 2.55 que

$$m \sphericalangle B + m \sphericalangle BCD > \frac{\pi}{2}. \quad (2.94)$$

Observando, ainda, que $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBA$ e que $\sphericalangle CDB = \frac{\pi}{2}$, segue da Proposição 2.55 que

$$m \sphericalangle A + m \sphericalangle ACD > \frac{\pi}{2}. \quad (2.95)$$

Segue, portanto, que $m \sphericalangle A + m \sphericalangle B + m \sphericalangle C = m \sphericalangle A + m \sphericalangle B + (m \sphericalangle ACD + m \sphericalangle BCD)$, em que a última igualdade pode facilmente ser demonstrada³. Por fim, aplicando a Proposição 2.55 aos triângulos $\triangle^e CAD$ e $\triangle^e CBD$, retos em D , segue que $(m \sphericalangle A + m \sphericalangle ACD) + (m \sphericalangle B + m \sphericalangle BCD) > \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Ficando, portanto, demonstrada que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que π .

A segunda desigualdade segue diretamente da Proposição 2.63. □

Com o resultado da Proposição 2.64 consideramos logrados os objetivos teóricos deste capítulo. A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico e a relação entre triângulos polares são fundamentalmente os únicos resultados que serão utilizados na sequência didática, objeto deste trabalho, sem serem satisfatoriamente desenvolvidos na mesma. Além disto, proposições provadas neste capítulo também propiciaram uma discussão esclarecedora acerca das propriedades da bijeção estabelecida pelo Axioma 2.

A axiomatização da esfera aqui proposta tinha estes resultados como principais focos, no entanto a lista de axiomas utilizada, com exceção de áreas e trigonometria, é suficiente para um desenvolvimento ainda mais robusto de resultados, como congruência de triângulos e o estudo de polígonos esféricos. Um desenvolvimento ainda mais completo pode ser obtido acrescentando, conforme Whittlesey (2020, p.106 e p.111), três axiomas para áreas e um para trigonometria.

Antes de encerrar este capítulo, teceremos alguns comentários referentes ao comportamento da bijeção entre os pontos de uma reta esférica e o conjunto $\mathbb{R}/2\pi$, procurando apresentar sugestões que possam ser úteis em atividades didáticas com materiais concretos, particularmente no Ensino Básico.

2.4 Uma palavra com o professor de Ensino Médio

A representação dos objetos e propriedades, desenvolvidas na Geometria Esférica, numa esfera espacial física ou em desenhos planos dessa esfera, auxiliam na compreensão dos objetos e propriedades estabelecidas, bem como apresenta um ambiente para utilidade prática desses conhecimentos. No Ensino Médio, em particular, sugerimos que o estudo da Geometria Esférica seja feito acompanhado de materiais concretos, ilustrações e do GeoGebra3D. A representação de uma reta esférica numa esfera euclidiana é feita por uma circunferência máxima desta, enquanto o sistema de coordenadas sobre essa reta é feito com o conjunto $\mathbb{R}/2\pi$.

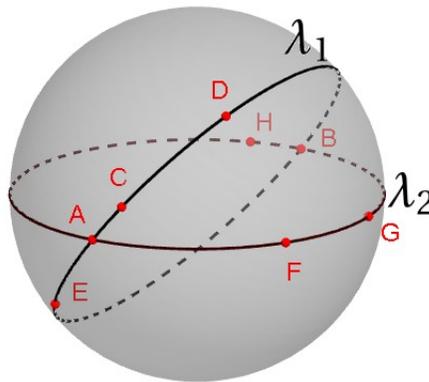
³ Para demonstrar que o ângulo $m \sphericalangle C = m \sphericalangle ACD + m \sphericalangle BCD$, pode-se demonstrar que D e A estão do mesmo lado de $\odot CB$ supondo, por contradição, que D e A estejam em lados opostos de $\odot CB$ e aplicando as proposições 2.38, 2.15 e 2.23 e a Definição 2.8. Com argumento semelhante, prova-se que D e B estão do mesmo lado de $\odot CA$. Finalmente conciliando a Definição 2.10 e a Proposição 2.43, segue o resultado.

Como cada elemento de $\mathbb{R}/2\pi$ possui um único representante num intervalo real semiaberto de comprimento 2π , e vice-versa, o intervalo $[0, 2\pi)$ poderá ser utilizado para esse sistema de coordenadas, o que é interessante para a introdução desse tema no Ensino Médio.

Outra consideração pertinente é quanto a pares de pontos na esfera, os quais podem gozar ou não da característica de antípodas. Na esfera euclidiana, os pares de antípodas são extremos de um diâmetro de qualquer circunferência máxima que os contenha, ou seja, se A e B possuem essa característica, então a medida de qualquer um dos arcos \widehat{AB} é π (radianos) e para dois pontos C e D , não antípodas, a medida do arco \widehat{CD} é um número do intervalo $[0, \pi)$. Na esfera abstrata da Geometria Esférica, a bijeção existente entre uma reta esférica e o conjunto $\mathbb{R}/2\pi$ caracteriza os pares de pontos da reta em antípodas, quando a distância esférica entre esses pontos é π , e de não antípodas quando a distância esférica é menor que π .

Para o Ensino Médio, uma atividade interessante é apresentar aos alunos uma esfera de isopor com duas retas esféricas (circunferências máximas) nela representadas, e com pontos marcados nelas, veja a Figura 14, e pedir aos alunos que estabeleçam coordenadas que respeitem os axiomas da Geometria esférica e que preservem a noção intuitiva de distância entre dois pontos.

Figura 14 – As bijeções $\ell_1 : \lambda_1 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ e $\ell_2 : \lambda_2 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ no modelo da esfera euclidiana.



Fonte: O autor (2021).

Ou seja, as coordenadas estabelecidas em λ_1 , por exemplo, para os pontos A e C devem ser tais que a diferença entre elas tenha como representante no intervalo $(-\pi, \pi]$ um valor cujo módulo seja igual ao número que representa a medida em radianos do menor arco de extremos A e C .

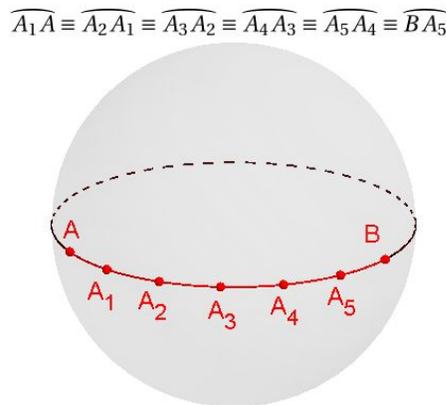
Em relação ao par de antípodas A e B , os alunos devem garantir que a diferença entre as coordenadas de A e B tenha π como um de seus representantes, conforme discutido no segundo parágrafo desta seção. Pois, caso contrário, os pontos A e B teriam a classificação de não antípodas, de acordo com a Geometria Esférica e, portanto, haveria exatamente uma reta esférica passando por eles. Logo as circunferências máximas não poderiam ser as retas esféricas do

nosso modelo, e isto não queremos visto que os axiomas escolhidos para caracterizar as retas esféricas são propriedades gozadas pelas circunferências máximas de uma esfera euclidiana.

Ainda referente a essa atividade, a Observação 2.3 garante que uma e, apenas uma, das seguintes condições é verdadeira: $\ell(D) = \ell(A) + \overline{d^e(A,D)}$ ou $\ell(D) = \ell(A) - \overline{d^e(A,D)}$. Supondo a primeira, a Proposição 2.26 mostra que os pontos X do arco \widehat{AD} , distintos de A , serão dados por $\ell(X) = \ell(A) + \overline{d^e(A,X)}$, que determina um sentido, horário ou anti-horário, para o sistema de coordenadas de λ_1 .

Dessa forma, considere o modelo da esfera euclidiana, Figura 15, e tome a reta esférica que passa pelos pontos distintos não antípodas A e B e seja $\delta = \frac{d^e(A,B)}{6}$. Suponha ainda que para a bijeção $\ell : \bigcirc AB \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ seja válida a condição $\ell(B) = \ell(A) + \overline{d^e(A,B)}$ (a outra condição gera um raciocínio equivalente), então podemos escrever $\ell(B) = \ell(A) + 6\delta$. Sejam A_i , i percorrendo $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que $A_0 = A$ e $A_6 = B$, pontos nos segmento \widehat{AB} tais que os segmentos $\widehat{A_{i+1}A_i}$, com i percorrendo $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, sejam congruentes. A Proposição 2.3 nos mostra que todo ponto do segmento \widehat{AB} é dado em função de $\ell(A)$, e da distância entre A e o ponto em questão. Em particular, $\ell(A_1) = \ell(A) + \delta$, $\ell(A_2) = \ell(A) + 2\delta$ ou ainda $\ell(A_n) = \ell(A) + n\delta$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

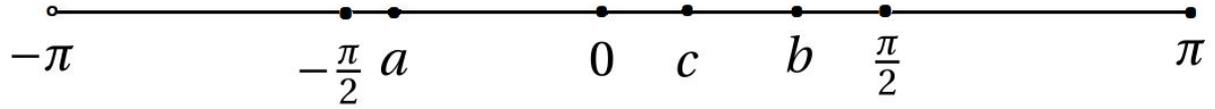
Figura 15 – Pontos que dividem o segmento \widehat{AB} em segmentos congruentes.



Fonte: O autor (2021).

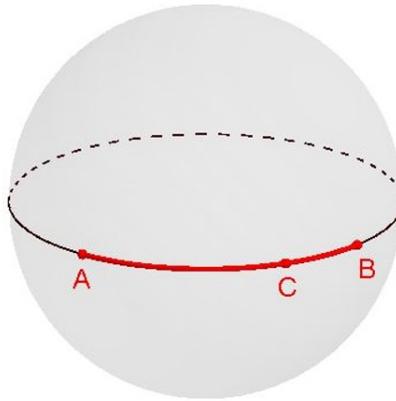
Em atividades didáticas em que a esfera é representada por uma "esfera" de isopor, por exemplo, uma forma simples de enxergar o comportamento dessa bijeção é imaginar a representação geométrica usual do intervalo real semiaberto $(-\pi, \pi]$ num segmento com mesma medida (em cm) das circunferências máximas desse objeto de isopor. Unir, então, o ponto π com o lugar que seria destinado ao ponto $-\pi$, ínfimo do intervalo, mas não pertencente ao mesmo, formando uma circunferência de raio unitário. Em seguida, substituir cada número desse intervalo pelo correspondente elemento de $\mathbb{R}/2\pi$. As figuras a seguir exemplificam o comportamento da bijeção sobre a reta esférica $\bigcirc AB$ e sobre o segmento esférico \widehat{AB} .

Figura 16 – Representação geométrica de $(\pi, \pi]$.



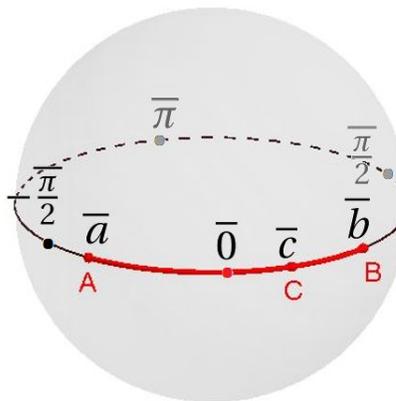
Fonte: O autor (2021).

Figura 17 – Reta esférica $\circ AB$ e segmento \widehat{AB} .



Fonte: O autor (2021).

Figura 18 – Comportamento da bijeção $\ell : \circ AB \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ sobre a reta $\circ AB$ e no segmento \widehat{AB} .



Fonte: O autor (2021).

Observe-se que, neste exemplo, temos que $\ell(C) = \ell(A) + \overline{d^e(A, C)}$ e, de forma geral, para $X \in \widehat{AB}$, $\ell(X) = \ell(A) + \overline{d^e(A, X)}$. Ou seja, um ponto do segmento \widehat{AB} possui coordenada da forma $\bar{a} + \bar{k}$, para algum real $k \in [0, \pi]$. Por outro lado, em função da coordenada de B , temos $\ell(X) = \ell(B) - \overline{d^e(A, X)}$.

Feitas essas considerações, encerramos este capítulo ponderando que os capítulos seguintes delinearão o processo de construção da sequência didática de introdução à Geometria Esférica

no Ensino Médio, bem como analisarão a experiência didática desenvolvida com essa sequência e procurarão, através da metodologia de pesquisa da engenharia didática, apresentar as dificuldades e resultados desse enfoque no Ensino Médio.

3 Fases Iniciais da Engenharia Didática

3.1 Fase das análises prévias

Para desenvolver uma sequência didática de ensino em Geometria que contribuísse significativamente para o processo de desenvolvimento intelectual dos alunos da Educação Básica, somando ao currículo de geometria adotado por autores credenciados pelo Ministério da Educação, faremos uma análise de Dante (2015), quatro volumes para o Ensino Fundamental 2 e, Dante (2016), três volumes para o Ensino Médio. A escolha foi motivada pelo fato de que os alunos da escola de Ensino Médio, que será objeto de aplicação da sequência didática, tiveram sua formação matemática no Ensino Fundamental 2 com a coleção citada e, no Ensino Médio, está sendo adotada a coleção do mesmo autor, de edição posterior, porém, sem mudanças significativas.

O Ensino Básico catarinense é dividido em Infantil, Fundamental e Médio. O Ensino Fundamental está atualmente dividido em cinco séries iniciais (Fundamental 1) e quatro série finais (Fundamental 2), sendo estas últimas denominadas de 6^o, 7^o, 8^o e 9^o anos. O Ensino Médio é dividido em 1^o, 2^o e 3^o anos. Nossa análise será feita no Fundamental 2 e no Ensino Médio.

3.1.1 6^o ano

No 6^o ano, Dante (2015a) apresenta a Geometria através de formas espaciais presentes na natureza ou artefatos humanos. Das formas espaciais são extraídas as formas planas segmento de reta, semirretas, pontos, ângulos, retas paralelas, segmentos de reta paralelos, triângulos e quadriláteros e suas classificações, além de alguns outros polígonos. Enfatiza-se a apresentação de definições (em linguagem simples) de objetos geométricos planos e da compreensão dessas definições, bem como da descoberta intuitiva de propriedades desses objetos através da manipulação de materiais práticos.

3.1.2 7º ano

No 7º ano, Dante (2015b) retoma as definições apresentadas no 6º ano e apresenta, também, as definições de tipos de ângulos, bissetriz, pares de ângulos especiais e de posições relativas de retas no plano. A apresentação dos pares de ângulos opostos pelo vértice, adjacentes suplementares e complementares é feita com a apresentação do modelo clássico desenhado e através de situações cotidianas como cruzamento de ruas. A bissetriz de um ângulo é introduzida através de dobraduras com consequente elaboração do desenho clássico, enquanto que as paralelas, concorrentes oblíquas e concorrentes perpendiculares são apresentadas classicamente.

De forma sutil, o método dedutivo é utilizado para demonstrar que ângulos opostos pelo vértice são congruentes. E essa demonstração utiliza como “axioma” que qualquer semirreta, com origem numa reta e não contida nela, forma com essa um par de ângulos suplementares. Esta propriedade é discutida e aceita sem maiores digressões, da mesma forma que ocorrerá com diversas outras propriedades demonstráveis, evitando assim os rigores do método dedutivo para garantir, supõe-se, um texto acessível aos alunos do Ensino Fundamental. Saliente-se ainda que essa propriedade, usada como axioma pelo autor, é demonstrada no livro I, proposição XIII, dos Elementos de Euclides.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é tratada medindo casos particulares com transferidor e com recorte e colagem, concluindo que a soma dos três ângulos internos é 180° , evitando o método dedutivo nesse momento. Nessa altura, o autor observa que é possível “provar logicamente” essa propriedade, e o faz em anos posteriores da coleção. Com essa propriedade como hipótese, prova dedutivamente que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $180^\circ(n - 2)$.

Nesse sentido, o objetivo do autor é introduzir e aplicar o método dedutivo paulatinamente com a progressão de série dos alunos. Ou seja, no 6º ano apresenta definições e contextualizações e no 7º, além das definições, apresenta resultados intuitivamente aceitáveis como axiomas. Além disto, utiliza, sem demonstração, propriedades demonstráveis, fazendo a demonstração em momento posterior e deixando claro tal procedimento.

3.1.3 8º ano

No 8º, Dante (2015c) estabelece explicitamente a diferença entre propriedade demonstrada dedutivamente, propriedade básica aceita sem demonstração e conjectura obtida através da análise de exemplos particulares e de experiências práticas. As intenções estão claramente resumidas na página 76, “[...] vamos estudar a Geometria dedutiva, demonstrando algumas propriedades [...] a partir de definições e de outras propriedades aceitas como verdadeiras.”

No entanto, no estudo de ângulos formados por uma transversal a um feixe de paralelas, as relações entre os ângulos, com exceção dos opostos pelo vértice, são enunciadas sem de-

monstração ou mesmo análise de casos particulares¹. De qualquer forma, estabelecidas essas relações, o autor ataca dedutivamente o problema da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, usando essas relações como propriedades válidas em geral e, com isto, dá um fechamento propício ao problema, trabalhado na série anterior com transferidor e recorte e colagem. Com esses resultados estabelece dedutivamente o teorema do ângulo externo do triângulo, a soma dos ângulos internos e externos de um polígono convexo qualquer e a medida de um ângulo interno e externo de um polígono regular.

A relação entre o maior lado e o maior ângulo de um triângulo bem como a desigualdade triangular (condição de existência de um triângulo) são atacadas para casos particulares e usando esses resultados é enunciada a propriedade como válida em geral, não sem observar a possibilidade de dedução dessas propriedades. Fato é, que o autor não retorna a essa questão nas séries seguintes, o que é justificável pela dificuldade inerente a essa demonstração para o nível básico, conforme podemos avaliar em Neto (2013, p.46-48).

A congruência de triângulos é utilizada para demonstrar a igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles, propriedades de paralelogramos em geral e propriedades particulares do losango e do retângulo. No entanto, os três casos LLL, LAL e ALA são tomados como axiomas sem fazer referência à possibilidade de fazer isso com apenas o caso LAL, conforme procedido em Barbosa (1994, p.27-30).

Mesmo nessa série, o autor não pede demonstrações nas listas de exercícios, sendo, o teorema da base média de um triângulo, exceção. Nas páginas seguintes, usa esse resultado para demonstrar o teorema da base média de um trapézio. Finalmente, são tratados os ângulos inscrito, central e de segmento numa circunferência.

3.1.4 9º ano

No 9º, Dante (2015d) dedica cinco de nove capítulos à Geometria Euclidiana Plana, desenvolvendo, em sequência: proporcionalidade de segmentos; semelhança de triângulos; relações métricas e trigonometria no triângulo retângulo; relação entre cordas concorrentes de uma circunferência; áreas; e, volumes. No desenvolvimento da teoria, o método dedutivo é amplamente aplicado com as devidas observações sempre que algum resultado é aceito sem demonstração. A aceitação de resultados intuitivos é restrita apenas ao capítulo de áreas e volumes, e mesmo nesse caso utiliza-se de argumentos dedutivos para estender resultados aceitos intuitivamente.

¹ Uma alternativa à metodologia aplicada pelo autor, nesse caso, seria enunciar como axioma que ângulos correspondentes formados por uma transversal a duas paralelas são congruentes e, dessa propriedade e da relação entre opostos pelo vértice, estabelecer dedutivamente que os pares de colaterais internos ou externos são suplementares, e que os alternos internos ou externos são congruentes. Outra alternativa seria analisar casos particulares com recorte e sobreposição ou medindo com transferidor para conjecturar essas propriedades, deixando a demonstração dedutiva para séries seguintes do ensino básico.

Dessa forma, no 9º ano, o autor utiliza o método dedutivo em sua essência, método este que é introduzido no 6º ano com listas de definições, no 7º ano com as primeiras demonstrações formais e ampliando a taxa de demonstrações no 8º ano, sendo ano a ano, gradativamente, reduzidas as propriedades aceitas intuitivamente.

3.1.5 Ensino Médio

No Ensino Médio, no último capítulo do livro do 1º ano, Dante (2016a) retoma os tópicos teorema de Tales, semelhança de triângulos e aprofunda a trigonometria e as relações métricas no triângulo retângulo, mantendo a abordagem essencialmente dedutiva. No 2º ano, Dante (2016b) retoma e amplia a trigonometria para o ciclo trigonométrico, já nos três primeiros capítulos. No capítulo 6, o autor retoma o estudo de áreas visto no 9º ano, resgatando as demonstrações daquele ano e ampliando a investigação de propriedades para um número maior de figuras. A área do círculo é determinada por um raciocínio heurístico que aproxima o círculo por um polígono de n lados, com n muito grande. Os capítulos 7 e 8 são dedicados à Geometria Espacial.

No 3º ano do Ensino Médio, Dante (2016c) apresenta a Geometria Espacial dos corpos redondos: cilindro, cone e esfera, no capítulo 3, e reserva mais três capítulos para geometria analítica.

3.1.6 Algumas observações

Percebe-se assim que essa coleção apresenta basicamente todo programa de Geometria Euclidiana Plana, com algumas exceções no estudo de áreas e trigonometria, no Ensino Fundamental. Que o caráter dedutivo da Matemática é explorado e aprofundado gradativamente com o aumento de série/ano até o 9º ano, sendo mantido nesse nível no decorrer do Ensino Médio. A coleção traz, também, diversos exercícios com aplicações práticas dos resultados desenvolvidos na teoria.

O desenvolvimento teórico da Geometria Euclidiana Plana, substancialmente feito no Fundamental 2 e complementado no Ensino Médio, é baseado numa lista de características básicas (axiomas) próprias do método dedutivo. Contudo, não há intenção ou clareza na coleção de delimitar a quantidade de características básicas aceitas sem demonstração, cabendo ao professor esclarecer essa questão aos alunos, prevenindo-os dos riscos do excesso de confiança na aceitação de resultados intuitivos.

Saliente-se, ainda, que nossa experiência de 26 anos de docência na Educação Básica e das inúmeras conversas com professores da área referente ao ensino de Geometria, nos cafés das salas dos professores durante os intervalos, tem mostrado que a aplicação das propriedades, das

fórmulas, em problemas didático-práticos² propostos nas listas de exercícios tem azequenado a investigação dedutiva das propriedades geométricas e, acreditamos, essa exploração seria de grande utilidade para a compreensão da disciplina e o desenvolvimento do raciocínio.

3.1.7 Alguns dados da educação brasileira

De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) de 2020, nesse ano o Brasil possuía 26,7 milhões de estudantes matriculados no Ensino fundamental e 7,5 milhões no Ensino Médio. O estado de Santa Catarina contava com 876.392 matrículas no Fundamental e 254.670 matrículas no Ensino Médio.

Ainda de acordo com o mesmo órgão, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) de 2019, da rede pública, foi 4,6 de uma pontuação máxima de 10,0. Santa Catarina atingiu 4,9 pontos no IDEB 2019, estando ligeiramente acima da média nacional. Em relação ao Ensino Médio, de acordo com relatório da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) de (2020) acerca da Educação no Brasil, a avaliação do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) de 2018 demonstra que 68% dos estudantes de 15 anos de idade não demonstram níveis básicos de proficiência em Matemática, enquanto que os países membros da OCDE apresentam taxa de 22% com essa classificação e algumas regiões da China tem menos de 10% dos alunos classificados nesse patamar. Em números absolutos, a pontuação em Matemática do Brasil na última avaliação PISA, em 2018, foi de 384 pontos enquanto a média dos 34 países membros da OCDE foi de 489 pontos.

3.1.8 Contribuições

É sabido que com um pequeno número de propriedades é possível demonstrar todos os resultados da Geometria Euclidiana Plana. Euclides, 300 a.C, nos Elementos, considera apenas cinco postulados aceitos sem demonstração, enquanto que, Hilbert, início do século XX, utiliza vinte axiomas para construir a Geometrias Euclidianas Plana e Espacial.³ Isso porque Euclides assumiu algumas propriedades implicitamente ao longo das demonstrações, enquanto Hilbert se vale apenas de propriedades de redação explícita.

Consideramos, portanto, importante que os alunos sejam esclarecidos da possibilidade de estabelecer todas as propriedades geométricas dos objetos do plano, recorrendo a um número pequeno e fixo de propriedades que não serão (e não poderão) ser provadas dedutivamente. Tarefa, que o professor pode fazer, contribuindo para que a coleção proporcione aos alunos a

² Denominaremos de problemas didático-práticos às situações particulares apresentadas nas listas de exercícios em contraposição aos problemas práticos que serão entendidos como os problemas reais da sociedade ou comunidade, analisados com auxílio da teoria matemática estudada.

³ Hilbert (2003) apresenta vinte axiomas, dos quais, catorze são exclusivos da Geometria Euclidiana Plana.

compreensão de que, no que concerne à Geometria Euclidiana Plana, a matemática é uma ciência essencialmente dedutiva, em consonância com a atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC) nesse quesito.

[...] é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências. (BRASIL, 2018, p.540).

Em toda a exploração no campo da Geometria, a obra dá destaque único à Geometria Euclidiana, o que de fato reflete a posição da maioria dos autores de Educação Básica de conhecimento deste professor. O que sugerimos é enriquecer esses conhecimentos analisando aspectos de outras Geometrias, ou seja, de geometrias que divirjam da Euclidiana em algum aspecto básico, como o quinto postulado ou outros, implícita ou explicitamente, elencados nos Elementos.

E esta nossa sugestão, será levada à cabo com uma sequência didática de Geometria Esférica, na busca de uma educação matemática que desenvolva habilidades de argumentação, transformando o indivíduo em ser atuante na sociedade, com capacidade própria e válida de interpretação de fatos e fenômenos do seu meio físico e social. E que a Matemática, em geral, e a Geometria, em particular, componha uma educação alicerçada em:

[...] uma prática docente voltada para o desenvolvimento de habilidades de pensamento (ou ferramentas intelectuais) [...] uma educação para o pensar: o ensino-aprendizagem pautado na investigação crítica e criativa, na reflexão e fundamentação de ideias [...] uma educação que visa a autonomia do pensamento [...](VELASCO, 2010, p.13).

Destaque-se, ainda, nossa opção pela importância da avaliação no decorrer do processo de ensino-aprendizagem, avaliação não apenas restrita aos resultados esperados dos alunos, mas uma avaliação inerente ao trabalho do professor, a escolha dos conteúdo, sua metodologia e enfoque, e por este encabeçada, sem prejuízo de avaliações externas. Avaliação como resultado de investigação, de pesquisa, no sentido defendido por D' Ambrósio (2009, p.94):

[...] pesquisa está ligada à investigação, à busca [...] e a idéia [sic], sempre a mesma, é a de mergulhar na busca de explicações, dos porquês, dos comos, com foco em uma prática. Claro, o professor está permanentemente num processo de busca de aquisição de novos conhecimentos e de entender e conhecer os alunos. Portanto, as figuras do professor e do pesquisador são indissolúveis.

Nesse sentido, quer-se apresentar uma sequência didática que desenvolva habilidades de argumentação dedutiva e contribua na compreensão da Geometria Euclidiana Plana estudada

nos demais anos do Ensino Básico, avaliando o impacto do ensino de uma geometria distinta da euclidiana e apresentada de modo axiomático-dedutivo para o 3º ano do Ensino Médio, sob o crivo da Engenharia Didática.

3.1.9 Resumo das análises prévias

Do exposto, destacaremos a seguir, o que consideramos aspectos relevantes para descrever o atual ensino de Geometria Euclidiana Plana:

- A1.** O ensino de geometria é restrito à Geometria Euclidiana.
- A2.** O método dedutivo no estudo da Geometria, no livro didático, é restrito ao desenvolvimento da teoria, não sendo pedido nas listas de exercícios de aprofundamento e compreensão direcionadas aos alunos. E é nas listas de exercícios que efetivamente o aluno é convocado a enfrentar os desafios propostos.
- A3.** Para a resolução das questões propostas nas listas de exercícios, a propriedade geométrica e seu uso correto é que o importa. O conhecimento da propriedade se sobrepõe à forma e método de descoberta desta.
- A4.** É comum que os professores de Geometria dediquem pouco tempo à descoberta das propriedades geométricas, aos raciocínios de descoberta, em prol da sua utilização em problemas didático-práticos.
- A5.** Os dados do PISA e do IDEB demonstram a necessidade da melhoria da qualidade do ensino de Matemática nas escolas brasileiras.

Além disto, a revisão teórica da literatura de Geometria Esférica nos deu pistas da viabilidade do tratamento do tema no Ensino Médio. Em tese, o tema permite a investigação axiomático-dedutiva de resultados interessantes diretamente dos axiomas, bem como, investigações que utilizem propriedades de triângulos polares ou da soma dos ângulo internos de um triângulo.

3.2 Fase das análises a priori

De posse das informações, colhidas nas análises prévias, construímos uma sequência didática de Geometria Esférica com enfoque axiomático-dedutivo. Nossa escolha pelo estudo dessa Geometria a partir de uma pequena lista de axiomas se apoia em três premissas: os axiomas caracterizam o ambiente de estudo, no caso particular são uma "fotografia matemática" da superfície esférica; o desenvolvimento dos primeiros argumentos dedutivos, utilizando apenas os

axiomas, são de compreensão simples e, portanto, adequados para a iniciação de alunos que porventura tenham tido poucas aulas nessa direção; resultados pouco evidentes e até contraintuitivos são obtidos nos raciocínios que utilizam os primeiros teoremas.

Nessa sequência temos o intuito de não apenas tratar uma geometria distinta da euclidiana plana, mas de confrontar resultados da Geometria Esférica com resultados da Geometria Euclidiana Plana. Por exemplo: a desigualdade triangular; a soma dos ângulos internos de um triângulo; e, a análise relativa à congruência de um par de triângulos que possuam ângulos de mesma medida, aos pares, entre si.

Não perseguiremos a aplicação dos resultados em problemas práticos, o que seria interessante e útil, acreditando que a habilidade de raciocinar dedutivamente seja por si de grande importância para o crescimento intelectual dos alunos e que o confronto entre resultados das duas geometrias seja relevante para o aprofundamento da compreensão da Geometria Euclidiana Plana e de suas aplicações.

De toda forma, apresentaremos os axiomas e definições com o rigor matemático necessário, contudo não mediremos esforços para traduzir visualmente as definições e propriedades, deduzidas ou assumidas, em material prático⁴, no software GeoGebra 3D e representações esquemáticas em papel plano.

Importante atentar que ao planejar nossas aulas fazemos escolhas. Para Carneiro (2005, p.101-103), numa engenharia didática, as escolhas efetuadas precisam estar descritas e são de caráter global, dizem respeito ao âmbito geral de enfoque do conteúdo escolhido, e local, o conteúdo propriamente dito. E é com base nessas escolhas que podemos fazer previsões, hipóteses, em relação à aprendizagem dos alunos, que permitam ser checadas durante e ao término da fase de aplicação da sequência didática. Nesse sentido, procederemos, a seguir, no intuito de operacionalizar uma sequência didática que intervenha e contribua para o processo de educação matemática no ramo da geometria, com foco na compreensão do processo de construção desses saberes e no desenvolvimento da habilidade de raciocinar e argumentar dedutivamente, bem como revisar conceitos e propriedades da Geometria Euclidiana Plana e, através do estudo comparativo de objetos semelhantes das Geometrias Esférica e Euclidiana Plana, aprofundar a compreensão da Geometria Euclidiana Plana estudada pelo aluno no seu percurso escolar.

3.2.1 Escolhas globais

EG1. Ênfase ao método axiomático-dedutivo na descoberta de propriedades geométricas de uma geometria distinta da Euclidiana, a Geometria Esférica.

⁴ Desenhos geométricos esféricos em esferas de isopor de circunferência máxima igual a 20π cm de comprimento.

- EG2.** Criação de um ambiente didático-visual com representação de objetos geométricos em esferas de isopor, balões *bubble* e representações com o software GeoGebra 3D.
- EG3.** Comparação, análise, discussão entre conceitos e propriedades semelhantes dessa geometria com a Geometria Euclidiana Plana .
- EG4.** O aluno sendo sujeito de atividades que explorem a investigação de propriedades da Geometria Esférica através do raciocínio dedutivo, usando a intuição apenas como auxiliar nesse processo.

3.2.2 Escolhas Locais

- EL1.** Apresentar a esfera com uma pequena lista de propriedades básicas, os axiomas.
- EL2.** Identificar (intuitivamente) essas propriedades básicas em esferas de isopor, balões *bubble*, representações do planeta Terra e em representações do software GeoGebra 3D. Conjecturar novas propriedades e colocar as mesmas à prova através do método dedutivo.
- EL3.** Construir uma notação sugestiva para os objetos geométricos esféricos e definir segmento de reta e sua medida, semirreta, ângulo, fuso esférico e triângulo.
- EL4.** Investigar, através do método axiomático-dedutivo, as relações entre as medidas: dos ângulos de um fuso esférico; de um par de ângulos adjacentes cujos lados sejam duas semirretas opostas e uma terceira semirreta qualquer; dos ângulos opostos pelo vértice; e, dos ângulos internos de um triângulo esférico. Definir e investigar as propriedades de pares de triângulos cofusos e polares. Investigar a desigualdade triangular e a congruência de triângulos com ênfase especial ao caso AAA⁵.

3.2.3 Hipóteses e sequência didática

Pelas escolhas delineadas acreditamos que:

- H1.** Os alunos perceberão a importância do raciocínio e da argumentação dedutiva para a descoberta e confiabilidade de propriedades geométricas, em particular, e da Matemática, em geral.
- H2.** Os alunos conseguirão distinguir um argumento dedutivo de um argumento de outra natureza.

⁵ Caso de congruência AAA: é a notação utilizada para significar que um par de triângulos esféricos são congruentes desde que haja uma correspondência biunívoca entre os ângulos de um triângulo com os ângulos do outro, de forma a relacionar um ângulo de um triângulo com um ângulo de mesma medida no outro triângulo. Essa propriedade não é válida para triângulos planos (euclidianos).

- H3.** Os alunos desenvolverão habilidades básicas de raciocínio e argumentação dedutiva.
- H4.** Os alunos reconhecerão a superfície da esfera como ambiente de desenvolvimento de uma geometria reconhecendo as principais propriedades das retas, semirretas, segmentos de retas, ângulos e triângulos desse ambiente.
- H5.** Os alunos compreenderão que algumas propriedades geométricas planas⁶ não são verdadeiras para objetos geométricos esféricos semelhantes, enquanto outras permanecem válidas⁷ e que há propriedades válidas em objetos esféricos que não são satisfeitas nos objetos planos (euclidianos)⁸.
- H6.** A apresentação axiomática da Geometria Esférica, utilizando materiais concretos para a visualização dos objetos geométricos dessa geometria, será compreendida pelos alunos dessa faixa escolar.

Delineadas as escolhas e estabelecidas as hipóteses, objetivos a serem atingidos, está-se apto ao sequenciamento dos conteúdos específicos e à construção do instrumental pedagógico complementar da sequência didática. Desta forma, a sequência didática, Anexo A, traz o sequenciamento dos conceitos do tema, bem como atividades de investigação e compreensão. Elaborada no formato apostila, compõe, com o encarte, os materiais concretos e o software GeoGebra, o ferramental pedagógico do professor no processo de construção do conhecimento e desenvolvimento das habilidades aspiradas. O encarte, Anexo B, apresenta de forma resumida os principais conceitos e teoremas da sequência didática. Os materiais concretos, compostos de esferas de isopor e balões *bubble*, bem como de construções sobre este material, constituem, junto com o software GeoGebra, estratégias de visualização dos conceitos e propriedades investigadas. Os últimos serão apresentados no decorrer do próximo capítulo que explora a terceira fase da Engenharia Didática.

⁶ Existência e unicidade da paralela passando por um ponto externo a uma reta dada; soma dos ângulos internos de um triângulo.

⁷ Relação entre ângulos opostos pelo vértice; desigualdade triangular; caso LLL de congruência de triângulos.

⁸ Caso AAA de congruência de triângulos; limitante da soma dos lados de um triângulo; definição e propriedades de pares de triângulos cofusos e polares.

4 Fase da Experimentação e Primeiras Análises

Nessa fase, aplicamos a sequência didática em duas turmas do 3º ano do Ensino Médio de uma escola¹ pública estadual pertencente à Coordenadoria Regional de Educação de Timbó, Santa Catarina. Devido à pandemia do coronavírus, a turma A contava com 11 alunos e a turma B, com 12. Isso porque os demais alunos dessas turmas estavam alocados em outra escola, denominada "escola polo", com aulas *online* e professores próprios que ministravam as aulas e acompanhavam os alunos via *internet*. Dessa forma, a experimentação ocorreu com número reduzido de alunos, que em condições normais variam entre 24 a 37 alunos por turma.

Importante destacarmos que durante a fase de experimentação, decorrente da observação do professor frente ao comportamento dos alunos, a sequência didática e os tempos projetados podem e devem sofrer adequações. A análise *a posteriori* inicia, portanto, durante a aplicação da sequência didática e, dessa forma, discutiremos a seguir, não apenas o processo de experimentação, mas também as primeiras análises que confirmam ou refutam o planejamento inicial.

O planejamento geral consistia de uma apostila de 20 páginas contendo a sequência de atividades idealizadas para a exploração do tema; de um encarte com o resumo dos axiomas, teoremas e definições da apostila; e, de um conjunto de materiais concretos para a exploração visual dos objetos geométricos investigados. A sequência didática, sistematizada em forma de apostila, estava organizada em 8 momentos, sendo que cada momento corresponderia a, no mínimo, uma aula de 45 minutos, tempo este que no decorrer da experimentação foi ajustado para 12 aulas.

A seguir, discutiremos a experimentação e as primeiras análises *a posteriori* dos 8 momentos da sequência didática. Em cada seção, discutiremos um momento constante no planejamento inicial, podendo esta estar ajustada em mais de um período de tempo, devido a ajustes temporais indicados pela engenharia didática no decorrer da aplicação.

¹ O nome da escola será mantido em sigilo para preservar a identidade dos alunos participantes da pesquisa, em consonância às normas éticas da pesquisa.

4.1 Momento 1

O objetivo dessa aula foi apresentar e introduzir o conteúdo partindo de características básicas da Geometria Euclidiana Plana, confrontando-as com características semelhantes em superfícies não planas. Feitas as considerações iniciais apresentando as características e os objetivos da pesquisa-ação, bem como os materiais e a proposta metodológica, partimos para a exploração das atividades planejadas.

4.1.1 Atividade 1

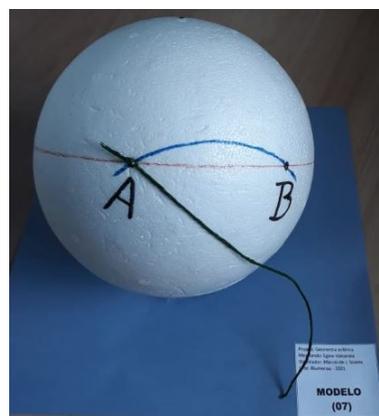
Consistia na observação de regiões de superfícies não planas tentando reconhecer visualmente a linha, o caminho, de menor distância entre dois pontos.

Figura 19 – Superfície Plana.



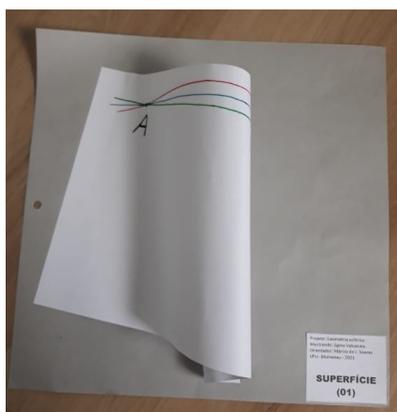
Fonte: O autor (2021).

Figura 20 – Superfície Esférica



Fonte: O autor (2021).

Figura 21 – Superfície de curvatura irregular - Vista 1.



Fonte: O autor (2021).

Figura 22 – Superfície de curvatura irregular - Vista 2.



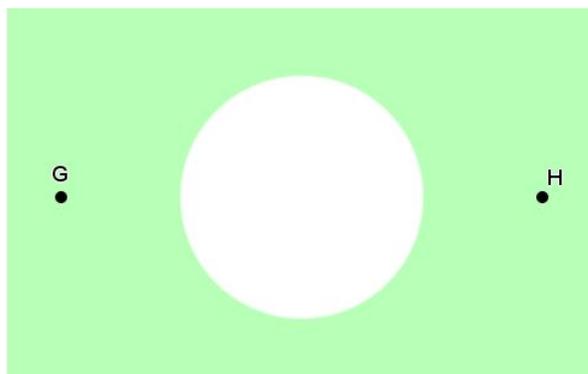
Fonte: O autor (2021).

Foram apresentadas aos alunos diversas regiões, três delas podem ser vistas nas Figuras 19, 20, 21 e 22, e foi pedido para que decidissem, evitando medições diretas, qual linha continha o caminho de menor distância entre os pontos A e B . Na Figura 19, os alunos identificaram com facilidade ser a linha azul a de menor distância e, na região representada pela Figura 20, o barbante auxiliou na conclusão correta, mas houve justificadas dúvidas quanto à unicidade dessa linha. Na região contorcida, representada nas Figuras 21 e 22, o poder da intuição não foi suficiente para decidir que a linha verde é a de menor distância, sendo necessário apelar para a planificação através de um corte apropriado na base da região em estudo.

4.1.2 Atividade 2

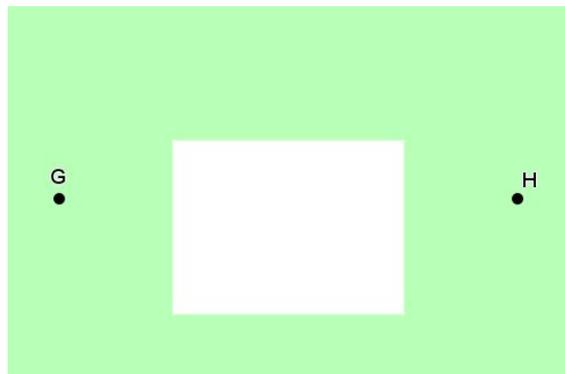
O objetivo dessa atividade, constante na apostila, seria traçar em cada região apresentada, a melhor aproximação possível de uma linha de menor distância entre os pontos G e H . Essa linha deveria ficar completamente contida na região colorida, verde, e analisar a unicidade dessa. As figuras a seguir, apresentam as regiões apresentadas aos alunos.

Figura 23 – Região 1.



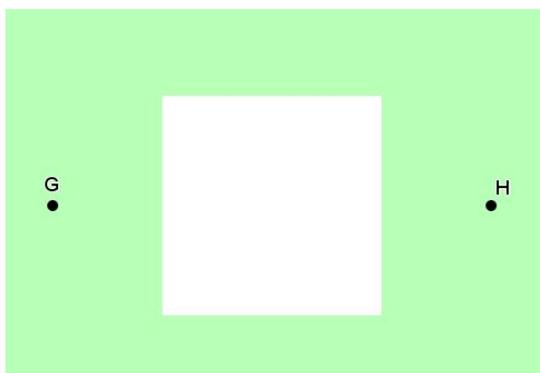
Fonte: O autor (2021).

Figura 24 – Região 2.



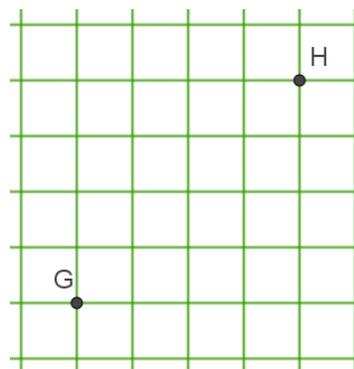
Fonte: O autor (2021).

Figura 25 – Região 3.



Fonte: O autor (2021).

Figura 26 – Região 4.



Fonte: O autor (2021).

Nessa atividade, os alunos perceberam que as regiões apresentam características que impedem a utilização da régua para traçar o caminho de menor distância, procedimento comum em regiões planas no sentido euclidiano. Alguns alunos notaram, de pronto, que as Figuras 23 e 25 possuem duas linhas com a característica pedida, enquanto, na Figura 24, essa linha é única e, na Figura 26, há um número maior de possibilidades. Uma parcela de alunos apresentou dificuldades em determinar uma resposta plausível para a Figura 23. Essa dificuldade foi solucionada, na turma A, com a ideia de uma aluna que consistia em imaginar a região como uma tábua em que fora recortado um círculo, com pregos na circunferência desse círculo, além de um prego no ponto G e outro, no ponto H . Acoplando, então, um barbante inflexível na parte superior da circunferência e abaixo dos pregos nos pontos G e H e puxando o barbante pelas extremidades, obter-se-ia uma linha de menor distância entre esses pontos e na região exigida. A mesma experiência mental foi indicada na turma B.

4.1.3 Atividade 3

Para essa atividade foram distribuídas na turma quatro esferas de isopor² para, em grupos, determinarem a linha de menor distância entre dois pontos A e B prefixados. Numa das quatro esferas, os pontos A e B escolhidos eram antípodas.

Figura 27 – Pontos não antípodas A e B na esfera.



Fonte: O autor (2021).

Nessa atividade, os alunos puderam utilizar barbante inflexível para auxiliar na determinação da linha de menor distância entre A e B . Foi levantada a questão da unicidade dessa linha, sendo que professor optou por deixar a resposta em aberto no intuito de manter a curiosidade aguçada para as aulas seguintes. Em relação à esfera de pontos antípodas, na turma A, os alunos

² As esferas de isopor estavam contornadas com filme PVC, transparente e maleável, comumente usado para cobrir alimentos. Dessa forma, as anotações na esfera não inutilizam a mesma para outras experiências.

indicaram haver mais de uma linha e, na turma B, não houve essa percepção. Enquanto que na análise das demais esferas, dois grupos indicaram haver mais de uma linha com a propriedade elencada³.

4.1.4 Considerações gerais dessa aula

Acreditamos que confrontando propriedades geométricas desses ambientes, os alunos tenham reavaliado suas concepções geométricas cristalizadas e tenham vivenciado uma experiência de reflexão crítica dessas propriedades. Dessa forma, essa aula foi importante para prepará-los para a aventura da Geometria Esférica, ressignificando suas convicções geométricas e possibilitando, assim, o estudo axiomático proposto.

4.2 Momento 2

Nessa aula, foram apresentadas as características básicas da esfera através de seis axiomas, ficando o axioma da medição de ângulos para outra aula. O intuito foi apresentar a esfera através dessas seis propriedades que relacionam pontos e retas esféricas. A esfera, portanto, não foi apresentada como seria feito na Geometria Euclidiana Espacial⁴, como um objeto dessa geometria, mas como um espaço em si, onde os objetos geométricos definidos nesse espaço, denominado de esfera, serão conjuntos de pontos bem definidos.

Foi também apresentada a definição de distância esférica entre dois pontos, a noção de "estar entre" para pontos, pontos antípodas e segmento de reta.

Durante a aplicação, percebeu-se que não seria adequado trabalhar esse momento em 45 minutos, ajustando-se então o planejamento para duas aulas escolares, ou seja, 90 minutos.

4.2.1 Os axiomas apresentados na sequência didática

Reconhecemos, conforme desenvolvimento teórico, capítulo 2, um pequeno conjunto de propriedades básicas, os axiomas da esfera. Estes axiomas foram reescritos em linguagem acessível ao Ensino Médio e formaram a base da teoria geométrica apresentada na sequência didática e, destes derivaram as definições e teoremas constantes na mesma.

Aos axiomas, manteve-se a interpretação restrita à redação explícita, quando utilizados para definir objetos geométricos ou para provar dedutivamente alguma propriedade. Mas, a interpretação intuitiva, com materiais concretos, foi amplamente utilizada, identificando retas esféricas com traçados de circunferências máximas e, "pontos de caneta" com pontos.

³ Para pontos não antípodas existe uma e apenas uma linha de menor distância entre esses pontos.

⁴ Sob o enfoque da Geometria Euclidiana Espacial, esfera é um conjunto de pontos do espaço que equidistam de um ponto prefixado, o centro da esfera, por uma constante.

Dos sete axiomas apresentados na sequência didática, os seis primeiros foram discutidos nesta aula. São os seguintes:

Axioma 1. Uma esfera e uma reta esférica são conjuntos de pontos. Existem, no mínimo, dois pontos distintos na esfera.

Axioma 2. Existe uma bijeção entre os pontos de uma reta esférica e o conjunto $[0, 2\pi)$.

Axioma 3. Todo ponto possui exatamente um antípoda.

Axioma 4. Por dois pontos distintos quaisquer da esfera sempre passa uma reta esférica. Se os pontos não forem antípodas, então a reta esférica é única.

Axioma 5. Duas retas esféricas distintas sempre possuem, no mínimo, um ponto em comum.

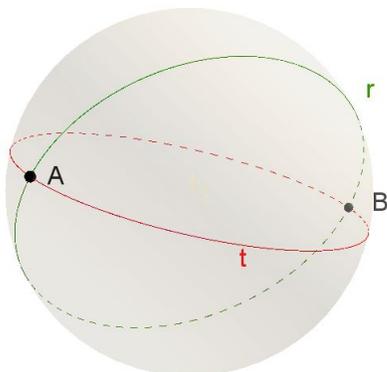
Axioma 6. Para toda reta esférica existe um ponto tal que a reta esférica é o conjunto de pontos que distam $\frac{\pi}{2}$ desse ponto.

A primeira interpretação desses axiomas foi feita com os alunos em círculo e o professor no centro, com auxílio de uma esfera de isopor com duas circunferências máximas traçadas sobre ela, bem como alguns pontos. Discutimos particularmente a noção de pontos antípodas, a não existência de retas esféricas paralelas e a unicidade da reta que passa por dois pontos não antípodas. Além disso, exploramos a noção de função bijetiva e, complementando essa discussão, estabelecemos um sistema de coordenadas sobre uma reta esférica, no "isopor". Demos, então, especial atenção aos pares de antípodas, que permitiu estabelecer um diálogo interpretativo sobre a definição de distância entre dois pontos.

Terminada essa atividade participativa, os alunos sentaram em duplas e trios para resolver a seguinte atividade:

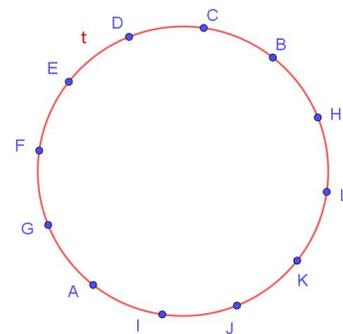
Desafio: Observe as retas esféricas r e t a seguir.

Figura 28 – A reta na esfera.



Fonte: O autor (2021).

Figura 29 – Pontos equidistantes na reta esférica.



Fonte: O autor (2021).

Na primeira figura, estão representados apenas os pontos A e B pertencentes a essas retas. Já na segunda figura, representamos doze pontos, igualmente espaçados, na reta t . A atividade consistia estabelecer um sistema de coordenadas para os pontos da reta t , em conformidade com o Axioma 2, o Axioma 4 e a noção intuitiva de distância.

Inicialmente, houve dificuldade por parte dos alunos, então discutiu-se brevemente como seriam essas coordenadas se a bijeção fosse aplicada no conjunto real $[0, 12)$ e, associando o ponto K com zero. De imediato, parcela de alunos associaram L com 1, H com 2, e assim sucessivamente, até associar J com 11. A partir disto e reforçando para atentarem para as regras estabelecidas pelos Axiomas 2 e 4 ao estabelecerem essa relação, não houve dificuldades em perceber que o ponto inicial pode ser qualquer e que o sentido de crescimento das coordenadas (horário ou anti-horário) não está submetido às regras.

Corrigida essa questão, coube aos alunos resolver as atividades de investigação e compreensão propostas na sequência didática, podendo trocar ideias entre grupos ou com o professor, que acompanhou de perto o trabalho dos grupos. Os alunos tiveram acesso ao gabarito, no dia seguinte, através do "whatsapp" de um dos alunos da turma, para que analisassem suas respostas como tarefa e trouxessem, para a aula seguinte, as dúvidas não sanadas.

No final do tempo estimado para esse momento, consideramos que os principais aspectos dos cinco primeiros axiomas foram compreendidos. O sexto axioma, de simples compreensão intuitiva, foi abordado superficialmente, sendo retomado e analisado em profundidade no sexto momento da sequência didática. Através das atividades escritas, consideramos que os alunos compreenderam o comportamento da bijeção garantida pelo Axioma 2, bem como do cálculo de distância entre dois pontos.

Finalmente, observamos que nessas duas aulas e nas seguintes foi dada ênfase à notação estabelecida, reforçando constantemente a utilidade da notação na simplificação da escrita matemática. Foi também, obstinadamente, reforçada a distinção em essência de axiomas e definições, explicando que, enquanto os primeiros estabelecem as regras a serem seguidas, caracterizam o espaço de estudo através das relações estabelecidas entre pontos e retas esféricas, as definições se prestam a nominar relações consideradas especiais ou conjuntos que se distinguem dos demais por escolha particular e comumente de utilidade teórica.

4.3 Momento 3

Nessa aula, inicialmente, dialogamos acerca da tarefa e, em seguida, procedeu-se a duas definições importantes. A definição de semirreta esférica como um conjunto particular de pontos que possuem a propriedade de pertencer à mesma reta esférica e, portanto, gozam das pro-

priedades estabelecidas pelos axiomas apresentados no Momento 2, e a definição de ângulo esférico como um sistema de duas semirretas de mesma origem.

4.3.1 As definições dessa aula

Definição 6. Dados três pontos distintos A , A^a e B . A união dos segmentos de reta \widehat{AB} e $\widehat{BA^a}$, excluído o ponto A^a , será denominada de semirreta esférica de origem A , passando por B .

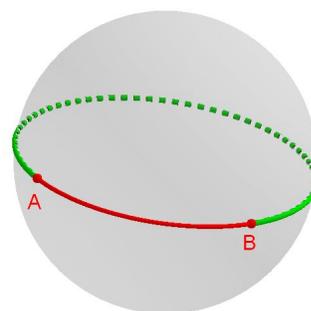
A apresentação dessa definição demanda a compreensão da definição de segmento de reta esférica apresentada no Momento 2. Como forma de aprofundar essa compreensão, discutimos esse conceito com o uso do Geobebra3D e de material concreto, conforme representado nas duas figuras a seguir:

Figura 30 – Segmento de reta esférica em isopor.



Fonte: O autor (2021).

Figura 31 – Segmento de reta esférica com o GeoGebra 3D.



Fonte: O autor (2021).

Enquanto o material apresentado na Figura 30 pôde ser manuseado pelos alunos, a apresentação em GeoGebra, conforme Figura 31, foi muito interessante para uma explanação do professor. A compreensão de segmento de reta esférica, com base no que sugerem as figuras citadas,⁵ soma ao rigor da Definição 4, constante no Momento 2 da sequência didática.

Assimilado o conceito de segmento de reta, apresentamos a definição formal de semirreta esférica. A noção intuitiva (visual), conforme Figura 32 abaixo, foi apresentada com o uso de modelos em isopor e do GeoGebra3D.

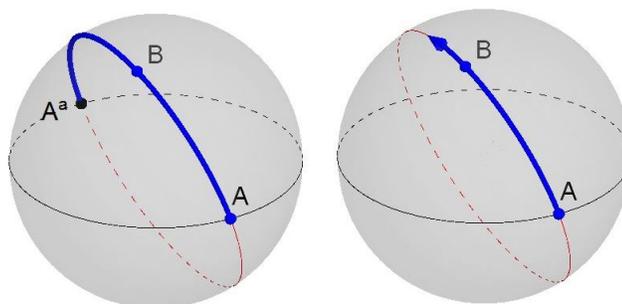
A representação à esquerda, Figura 32, é útil para compreender quais pontos de fato pertencem à semirreta de origem A , passando por B , enquanto a representação à direita é de grande valia na compreensão intuitiva de ângulo esférico.

Notou-se, no decorrer dessa aula, que a segunda representação foi melhor compreendida. De qualquer forma, é importante frisar, que deve ficar claro ao aluno que a seta, na Figura 32, in-

⁵ O segmento de reta de extremos A e B compreende o menor caminho entre A e B . Logo, a representação em vermelho na Figura 31 é, ao contrário da verde, o segmento indicado.

dica que os pontos do segmento esférico $\widehat{BA^a}$, exceto o ponto A^a , pertencem à semirreta citada e que pares de antípodas não estão contidos numa mesma semirreta⁶.

Figura 32 – Representação de uma semirreta esférica.



Fonte: O autor (2021).

A representação à esquerda, Figura 32, é útil para compreender quais pontos de fato pertencem à semirreta de origem A , passando por B , enquanto a representação à direita é de grande valia na compreensão intuitiva de ângulo esférico.

Notou-se, no decorrer dessa aula, que a segunda representação foi melhor compreendida. De qualquer forma, é importante frisar, que deve ficar claro ao aluno que a seta, na Figura 32, indica que os pontos do segmento esférico $\widehat{BA^a}$, exceto o ponto A^a , pertencem à semirreta citada e que pares de antípodas não estão contidos numa mesma semirreta⁷.

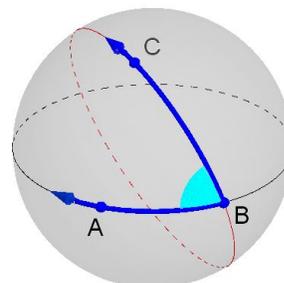
A representação da semirreta de origem A e contendo B , na parte direita da Figura 32, facilitou sobremaneira a compreensão da definição de ângulo esférico apresentada na Definição 7 na nossa aula. Isto ocorreu devido à semelhança com a semirreta euclidiana. Mas, faz-se necessário diferenciar, dentre outras características, a finitude da semirreta esférica, cotada pelo antípoda da origem, fato que não ocorre na semirreta euclidiana. Essa representação não deve, no entanto, substituir, mas colaborar com a compreensão da definição formal apresentada, pois enquanto a primeira propicia uma imagem intuitiva, a segunda, permite demonstrações lógicas rigorosas.

⁶ A flecha, nessa representação, não indica o prolongamento infinito do segmento de extremos A e B , na direção deste, mas, embora exista um ponto origem na semirreta, não existirá extremo final, apesar do antípoda de B ser extremo, este não pertence à semirreta. Ou seja, na semirreta citada, qualquer ponto dista por um valor menor que π da origem B e, em particular, existe um ponto e exatamente um que está na semirreta e dista $\frac{\pi}{2}$ da origem, o que é muito útil para definir medida de ângulo.

⁷ A flecha, nessa representação, não indica o prolongamento infinito do segmento de extremos A e B , na direção deste, mas, embora exista um ponto origem na semirreta, não existirá extremo final, apesar do antípoda de B ser extremo, este não pertence à semirreta. Ou seja, na semirreta citada, qualquer ponto dista por um valor menor que π da origem B e, em particular, existe um ponto e exatamente um que está na semirreta e dista $\frac{\pi}{2}$ da origem, o que é muito útil para definir medida de ângulo.

Figura 33 – Ângulo esférico.

Definição 7. Denomina-se ângulo esférico à união de duas semirretas de mesma origem não contidas numa mesma reta esférica.



Fonte: O autor (2021).

Na Figura 33, observamos a representação do ângulo esférico $\sphericalangle ABC$. Já sua medida, bem como a definição de fuso esférico, apresentadas nas definições 8 e 9 da sequência didática, foram imediatamente compreendidas utilizando as representações elencadas em esferas de isopor.

4.3.2 Argumentos dedutivos

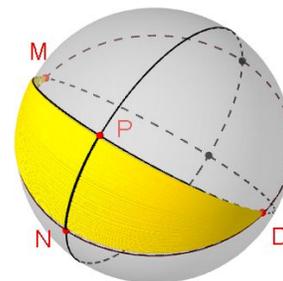
Dessa forma, a maior parte dessa aula foi dedicada às questões 1 e 3 das atividades de investigação propostas na sequência didática. Na atividade 1, respondendo perguntas direcionadas, demonstrou-se que os dois ângulos de um fuso esférico são congruentes. A questão está enunciada na sequência didática com a seguinte redação:

1. A figura ao lado representa um fuso esférico de vértices M e D , em que $D = M^a$. Os pontos N e P pertencem a lados distintos do ângulo $\sphericalangle NMP$ e são tais que $d^e(M, P) = d^e(M, N) = \frac{\pi}{2}$.

(a) Qual é a medida do segmento \widehat{DN} ? Explique.

(b) Qual é a medida do segmento \widehat{DP} ? Explique.

(c) Demonstre que o ângulo $\sphericalangle NDP$ tem mesma medida do ângulo $\sphericalangle NMP$.



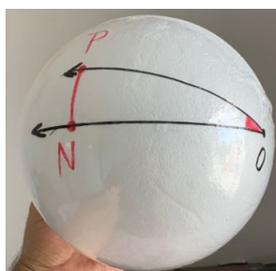
A questão foi formulada indicando os pontos P e N distando $\frac{\pi}{2}$ dos vértices e contidos nas semirretas que formam o fuso⁸, o que poderia ser deixado a cargo dos alunos numa programação com mais tempo. No entanto, é importante acompanhar os alunos nessa fase da sequência didática, visto termos observado nas análises prévias que atividades dessa natureza comumente eram apresentadas no desenvolvimento teórico a cargo do professor.

⁸ A existência e unicidade desses pontos, com essa característica, é derivada do Axioma 2.

Na aplicação, observamos que os alunos chegaram rapidamente nas respostas de (a) e (b), mas que apresentavam dificuldade em justificar o resultado. Instigamos então os alunos a procurarem as justificativas nos axiomas e definições

Para a questão (c), acompanhamos as discussões dos grupos e auxiliamos na interpretação da Definição 7. Cada grupo recebeu uma esfera de isopor, como a da Figura 34, em que a construção apresenta os pontos P e N distantes $\frac{\pi}{2}$ do vértice O do ângulo representado. Usando a Definição 7, a medida do ângulo esférico considerado é $d^e(P, N)$, representada na construção pelo segmento \widehat{PN} . Com isto, os grupos não tiveram dificuldade em elaborar o argumento dedutivo para a questão (c).

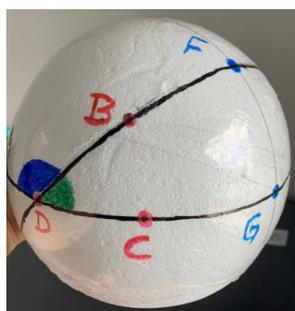
Figura 34 – Medindo ângulos esféricos.



Fonte: O autor (2021).

A questão 3 também foi resolvida pelos alunos com intervenções do professor e da construção em esfera de isopor, apresentada nas Figuras 35 e 36.

Figura 35 – Vista do ângulo $\sphericalangle BDC$ construído em esfera de isopor.



Fonte: O autor (2021).

Figura 36 – Vista do ângulo $\sphericalangle ADB$ construído em esfera de isopor.



Fonte: O autor (2021).

O ponto chave dessa questão foi fazer com que os alunos percebessem que identificando os pontos E , F e G , respectivamente, nos lados \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} e \overrightarrow{DC} , distando $\frac{\pi}{2}$ do ponto D , os pontos E e G são antípodas pois E, D, G são colineares, distintos e $d^e(D, E) + d^e(D, G) = \pi$. Desse ponto em diante não foi difícil para perceberem que a reta esférica $\bigcirc EF$ contém o ponto G e, portanto, $d^e(E, F) + d^e(F, G) = \pi$, que é a soma pedida, de acordo com a Definição 8.

O mais importante desta aula, julgamos ter conseguido, foi convencer os alunos a justificar os resultados com argumentos construídos com base nas definições, axiomas e resultados já provados.

4.4 Momento 4

Essa aula foi reservada para a aplicação de questionário avaliativo que procurava captar a compreensão individual das ideias tratadas, bem como das habilidades desenvolvidas ou aperfeiçoadas nas aulas pregressas. O questionário, composto por cinco perguntas, em que as três primeiras exploravam regiões que falhavam em alguma propriedade da Geometria Euclidiana Plana e procuravam captar a compreensão dos alunos referente à distinção entre o método dedutivo e métodos intuitivos. A quarta questão procurava se restringir a obter informações acerca da compreensão da notação e de propriedades das retas esféricas e de conjuntos de pontos contidos nestas, e a quinta questão pretendia dirigir os alunos para uma descoberta, não vista em aula, através do método dedutivo.

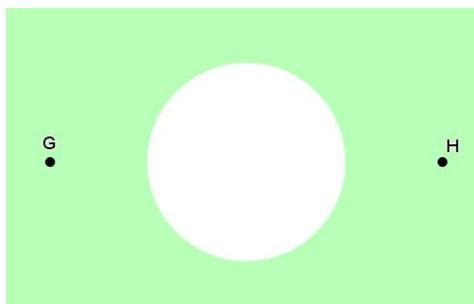
Para a aplicação, inicialmente, foram entregues as três primeiras questões por um tempo de 15 minutos. Recolhidas estas, foi dado um tempo de 12 minutos para responder a questão 4 e, finalmente, 15 minutos para desenvolver a questão 5. Os alunos puderam pesquisar nas três primeiras páginas do encarte e, na quinta, referente aos Teoremas (T_1) e (T_2).

As respostas dos 23 alunos participantes serão analisadas a seguir e, no Anexo C, apresentamos o questionário completo.

4.4.1 Análise das três primeiras questões

A questão 1 pedia para escolher, dentre quatro alternativas, qual apresentava uma linha de menor distância entre os pontos G e H , conforme a Figura 37. E essa linha deveria estar totalmente contida na região colorida em verde.

Figura 37 – Região plana com buraco.



Fonte: O autor (2021).

A maioria dos alunos, 87,0%, escolheram a alternativa (b), que de fato representa a resposta correta. No entanto, para os nossos objetivos, o importante dessa questão não era necessariamente a escolha da melhor alternativa, mas que junto à questão 2, permitia a pergunta que, de fato, estávamos interessados, a questão 3. Esta indagava como o aluno classificaria o método por ele utilizado na resolução da primeira questão.

A questão 2 indaga se o aluno chegou à resposta da questão 1 utilizando algum instrumento de medida, se concluiu visualmente ou se apenas escolheu uma alternativa ao acaso. Ao analisar as respostas, constatamos que a maioria, 87,0%, informou ter chegado a essa conclusão visualmente, que 4,3% utilizaram instrumento de medida e 8,7% escolheram uma alternativa ao acaso. 100% dos participantes consideraram que seu método de raciocínio estava delineado dentre as três primeiras alternativas, não explorando, portanto, a alternativa de resposta aberta.

Das respostas obtidas na questão 2, intrigou-nos a opção dos 8,7%. A escolha de uma alternativa ao acaso é, na nossa compreensão, uma indicação de que as aulas não prenderam a atenção ou aguçaram a curiosidade dessa parcela de alunos. Em verificação posterior, concluímos, no entanto, que se tratava de possível⁹ falha de interpretação textual dessa parcela de alunos, pois em conversa com as turmas, na aula seguinte¹⁰, analisando o significado da expressão "escolhido ao acaso", constatou-se haver alunos que acreditavam ser uma escolha de provável validade.

A questão 3 explora a distinção entre raciocínio dedutivo e outras formas de percorrer um caminho em busca de uma resposta. 78,2% responderam terem feito um raciocínio de comparação visual ou de medição, 4,3% escolheram as alternativas (a) e (c) como resposta e 17,4% consideraram ter feito um raciocínio dedutivo. Na Tabela 1, a seguir, resumimos os principais resultados:

Tabela 1 – Questionário de Pesquisa 1 - Parte 1.

Questão	(a)	(b)	(c)	(d)	Total
1	0,0%	87,0%	0,0%	8,7%	95,7%
2	8,7%	4,3%	87,0%	-	100,0%
3	17,4%	4,3%	73,9%	-	95,6%

Nota: Nas questões 1 e 3, percentual de alunos assinalaram duas alternativas.

Fonte: O autor (2021).

Comparando os percentuais, em relação às respostas dadas pelos alunos, das questões 2 e 3, considerávamos esperado, no mínimo, 91,3% em vez dos 78,2% obtidos ao considerar a

⁹ Possível, mas não certa, visto que o questionário de pesquisas não identificava o aluno.

¹⁰ A análise do questionário nos indicou ser necessário acrescentar uma aula para discussão das resoluções apresentadas pelos alunos. Dessa forma, replanejamos o cronograma adicionando a primeira aula após a aplicação do questionário para esse fim.

escolha das alternativa (b) ou (c) na questão 3. Essa discrepância nos leva a concluir que não há ainda uma compreensão clara do que significa um raciocínio dedutivo por parte de 19,1% dos alunos¹¹ que haviam declarado ter utilizado a intuição visual ou a medição direta na resolução da questão 1. Desta forma, se faz necessário averiguar se as atividades propostas nas aulas seguintes darão conta dessa questão para atingirmos o que prevê a hipótese (H2) nas análises a priori.

Nesse sentido, verificando que, na sequência didática para as aulas seguintes, há um bom número de demonstrações axiomático-dedutivas planejadas, refez-se apenas o planejamento metodológico. incluindo, neste, em cada caso, uma discussão dialogada acerca do método de prova utilizado, comparando, inclusive, com raciocínios intuitivos, buscando respostas para situações particulares.¹²

4.4.2 Análise das duas últimas questões

Trata-se de duas questões de natureza distinta. A primeira procura identificar a compreensão de conceitos específicos, maioria com enfoque numérico, tratados nas aulas. A segunda, de natureza investigativa, procura identificar habilidades básicas necessárias para desenvolver um argumento dedutivo.

A questão 4 procurava verificar a compreensão do Axioma 2, bem como de algumas definições básicas e do uso apropriado da notação estabelecida. A Tabela 2 resume o resultado.

Tabela 2 – Questionário de Pesquisa 1 - Questão 4.

Acertos	Alunos pesquisados
6 itens	78,26%
5 itens	13,04%
4 itens	4,35%
3 itens	4,35%
Total	100,00%

Nota: Questão composta por 6 itens.

Fonte: O autor (2021).

Percebe-se que a maioria, 91,3%, obtiveram sucesso em todos os itens focados ou no máximo erraram um item. Dessa forma, considera-se que a sequência didática é eficiente para a compreensão do processo de cálculo de distância esférica e da medida de um segmento esférico. Também está à contento para a compreensão de pontos antipodais e de um ponto estar ou não, de acordo com a definição, entre outros dois pontos dados. A questão também identificou, com sucesso, a compreensão da notação usada para retas esféricas.

¹¹ Esse valor corresponde a 17,4% do total de participantes da pesquisa

¹² Os Teoremas T₃, T₆ e T₇ permitem uma análise intuitiva proveitosa para a discussão de métodos de prova.

Generalizando esse resultado para os demais conceitos desse nível de dificuldade, tratados nessas aulas da sequência didática, presumimos, nesse momento, que haja compreensão adequada desses conceitos para a grande maioria dos alunos.

A questão 5 será analisada em dois blocos. Os itens (a), (b) e (c) serão analisados no primeiro bloco e o item (d), no segundo. Para o primeiro bloco, com assuntos de mesma natureza da questão 4, houve poucos erros. No segundo bloco, de ênfase especificamente no desenvolvimento da argumentação dedutiva, percebemos haver dificuldades, conforme mostrado na Tabela 3.

Tabela 3 – Questionário de Pesquisa 1 - Questão 5(d).

Itens corretos	Alunos participantes
Primeiro	65,2%
Primeiro e segundo	47,8%
Os três primeiros	47,8%
Os quatros primeiros	43,5%
Todos	43,5%

Fonte: O autor (2021).

Analisando a Tabela 3 percebemos haver dificuldade em completar a sequência de argumentos. Consideramos não ser necessário mudar a abordagem organizada na sequência didática, mas dialogar com os alunos acerca da dificuldade apresentada procurando traçar uma estratégia metodológica mais eficiente. Nesse sentido, procedeu-se na aula seguinte, e percebeu-se, principalmente, haver dificuldades em trabalhar com duas variáveis na mesma equação, habilidade requerida, inclusive, pelo primeiro item. Procuramos também identificar, na mesma aula, os motivos que induziram 26,7%, dos que acertaram o primeiro item a errar o segundo. Parece ter havido certa dificuldade em perceber que o item (ii) poderia ser obtido por simples manipulação algébrica de item antecedente, o que levou parcela de alunos a procurarem formas de deduzir esse resultado dos axiomas e definições do encarte.

4.4.3 Observações Importantes

A análise do questionário nos permitiu identificar falhas, que procuraremos corrigi-las no decorrer das aulas seguintes. Identificamos também sucessos que nos permitem concluir que as três primeiras hipóteses, elencadas nas análises *a priori*, estão sendo atingidas por parcela de alunos e, acreditamos, que as escolhas de conteúdo e metodologia, com as correções ora planejadas, sejam suficientes para que a maioria dos alunos desenvolvam as habilidades e os conhecimentos projetados nas hipóteses.

Consideramos ainda importante manter em constante análise os tempos planejados, visto poderem influir no processo. Nesse sentido, foi acrescentada uma aula para discussão e análise

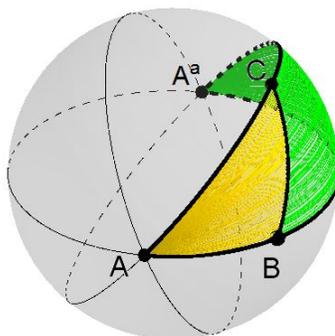
dos resultados com os alunos. Nesta, foram discutidas as resoluções, explorado observações e dúvidas dos alunos, rediscutindo os conceitos constantes na avaliação.

4.5 Momento 5

Inicialmente, exploramos as questões 1 e 2 utilizando material concreto e recorte e colagem para explorar intuitivamente a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano¹³ e, também, desenvolvemos a dedução formal dessa propriedade, fazendo, em seguida, uma análise comparativa entre os dois métodos.

Partiu-se, em seguida, para a definição formal de triângulos esféricos explorando, também, a noção de pares de triângulos cofusos. Junto às definições formais, utilizamos representações em material concreto em isopor para obter uma noção visual desses conceitos. A representação da Figura 38 dá uma ideia dos materiais concretos manuseados nessa aula.

Figura 38 – Vista do triângulo esférico ABC .



Fonte: O autor (2021).

Aproveitamos, então, para instigar os alunos a conjecturar propriedades entre pares de triângulos cofusos representados em esferas de isopor¹⁴ entregues na sala. E, nesse contexto, foi explorada a atividade 3, incentivando os alunos a tentarem desenvolver uma demonstração e que a argumentação indicasse claramente cada passo justificado nas definições, axiomas ou teoremas provados.

Como a sala havia sido previamente organizada em quatro grupos de, no máximo, três integrantes, acompanhamos de perto as discussões e anotações de cada grupo, dando instruções específicas em cada caso, procurando, no entanto, não intervir demasiadamente no processo.

¹³ Utilizamos essa nomenclatura para nos referir especificamente aos triângulos contidos num plano da Geometria Euclidiana.

¹⁴ Quatro modelos em "isopor", com a construção geométrica da Figura 38, foram distribuídos nos grupos formados em cada turma participante da pesquisa.

Aos grupos que apresentavam maior dificuldade na elaboração da argumentação, demos pistas dos principais aspectos a serem atacados, dando uma ideia dos passos que poderiam ser seguidos. Com auxílio de um cartaz previamente elaborado, procuramos auxiliar esses grupos no traçado de uma estratégia de demonstração que basicamente se resumia em seguir os três passos seguintes:

- Determinar a relação entre os ângulos esféricos $m \sphericalangle A$ e $m \sphericalangle A^a$, justificando através de um axioma, definição ou teorema já provado.
- Completar as equações (4.1) e (4.2), com a devida justificativa.

$$b_1 + b_2 =? \quad (4.1)$$

$$c_1 + c_2 =? \quad (4.2)$$

- Analisar a soma (4.3):

$$m \sphericalangle A + b_1 + c_1 + m \sphericalangle A + b_2 + c_2 \quad (4.3)$$

Antes do término da aula, foi ainda possível apresentar em PowerPoint a argumentação elaborada pelo professor e discutir brevemente a relação entre esse resultado e a propriedade da soma dos ângulos internos nos triângulos euclidianos.

Importante notar que esse resultado não tem a pretensão de encerrar a investigação quanto à soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, apenas nos ensina que dado um triângulo $\Delta^e ABC$, se olharmos para ele e seu cofuso $\Delta^e A^a BC$, ao menos um desses triângulos possui a referida soma maior que π . Resultado que mostra uma diferença substancial dessa geometria com a Geometria Euclidiana Plana do currículo escolar.

Finalmente, vale frisar que durante essa aula houve perceptível evolução na compreensão e obtenção de habilidades referentes ao método dedutivo e demais objetivos elencados nas hipóteses referidas nas análises *a priori*.

4.6 Momento 6

Nesta aula, retomamos o Axioma 6, apresentamos a definição de triângulo polar e os Teoremas (T₄) e (T₅). O primeiro, afirma que soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é uma variável real entre π e 3π e, o segundo, relaciona lados com ângulos em pares de triângulos polares. Os alunos, sob supervisão do professor, investigaram a desigualdade triangular e o Teorema do limitante para a soma dos lados de um triângulo.

Os dois primeiros teoremas foram apresentados sem demonstração, visto serem necessárias demonstrações prévias para chegar a esses resultados. Isto foi deixado claro aos alunos e os mesmos foram incentivados a refletir ou pesquisar, futuramente, acerca dessas demonstrações.

4.6.1 Definição de triângulos polares e atividades de compreensão e investigação

A apresentação dessa definição foi feita utilizando as ilustrações da apostila¹⁵ e em material concreto, conforme Figura 39. A formalização do conceito de polar de um triângulo, a sua existência e propriedades foram analisadas de forma intuitiva, conforme planejado na sequência didática. Não aconselhamos um desenvolvimento teórico rigoroso, desse tema, nessa faixa escolar, mas consideramos que esse nível de compreensão deva ser alcançado pelo docente que se disponha a repetir a experiência desse estudo, sendo por isto apresentada em detalhes no capítulo 2. Neste, através dos Teorema 2.52, prova-se que o polar do polar é o triângulo original. Prova-se, também que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é encontrada no intervalo real $(\pi, 3\pi)$, Teorema 2.64, e, as relações entre lados e ângulos em pares de triângulos polares, Teorema 2.54.

Figura 39 – $\Delta^e ABC$ e seu polar $\Delta^e A'B'C'$.



Nota: À esquerda, vista do vértice B' e, à direita, vista dos vértices A' e C' do polar do $\Delta^e ABC$.

Fonte: O autor (2021).

A compreensão do Teorema (T_5) foi feita nesse contexto e com as atividades 5 a 7 da apostila. Aos alunos coube, com acompanhamento do professor¹⁶, desenvolver as demonstrações das questões 2 e 3 das atividades de investigação e compreensão.

Os minutos finais foram utilizados para discutir os passos da demonstração de cada questão. A correção ficou para a aula seguinte (que ocorreu na sequência desta, visto se tratar de aulas geminadas). Dessa forma, os alunos, que ainda estavam organizando e elaborando a redação, puderam concluir suas ideias.

De forma geral, considerando a observação direta, feita durante o processo, e as discussões finais, percebeu-se evolução significativa na compreensão da forma de pensar matemática.

¹⁵ Utilizando o Paint (programa do Windows) em projeção multimídia, frisamos que cada lado do triângulo está contido numa reta esférica e que a mesma possui um ponto denominado de polo em cada hemisfério por esta determinado. Por exemplo, em relação ao lado \widehat{AB} , no mesmo hemisfério que contém C , existe um ponto (único) C' que é polo da reta \widehat{AB} .

¹⁶ Nas atividades de demonstração foi utilizada metodologia similar ao Momento 5.

ticamente e na compreensão dos objetos geométricos estudados. Em análise inicial, ocorrida após a aplicação desta aula e no mesmo dia, decidimos replanejar a finalização da sequência didática, acrescentando uma aula, antecedendo a avaliação final, de construções geométricas na esfera no intuito de aprofundar a compreensão intuitiva dos principais conceitos desenvolvidos nesta sequência didática.

4.7 Momento 7

Esta aula foi iniciada com a discussão/correção das atividade 2 e 3 da aula anterior, finalizada minutos antes, com apresentação¹⁷ da resolução proposta pelo professor. Aproveitou-se a ocasião para, inclusive, aprofundar a discussão do método axiomático-dedutivo, da eficácia dos resultados e da importância e cuidados necessários no uso de "métodos" intuitivos.

Em seguida, conversamos acerca de congruência de triângulos na Geometria Euclidiana Plana procurando lembrar a definição dada na Geometria Euclidiana Plana e, também a "definição" intuitiva desse conceito. Percebeu-se que parcela de alunos tinham um noção intuitiva clara (é possível justapor dois triângulos euclidianos congruentes de forma a coincidirem vértices e lados, bem como suas regiões internas), enquanto que a definição em termos matemáticos rigorosos não foi mencionada por nenhum aluno. De fato, tivemos alunos que mencionaram a propriedade LLL.

No contexto da discussão anterior, apresentamos a Definição 12 da apostila e, utilizando material concreto, conforme Figura 40, analisamos a ideia intuitiva da congruência na esfera.

Figura 40 – Triângulos esféricos congruentes.



Fonte: O autor (2021).

Na Figura 40, inclusive, podemos perceber que existem pares de triângulos esféricos congruentes que não coincidem por sobreposição, fato que não ocorre no caso euclidiano. Essa

¹⁷ Apresentação com projeção multimídia preparada preliminarmente.

discussão também fez parte do diálogo ocorrido na aula e para tal foi utilizado inclusive o material concreto apresentado na Figura 41.

Figura 41 – Triângulos planos congruentes.



Fonte: O autor (2021).

Em relação ao Teorema (T_8), o caso de congruência LLL para triângulos esféricos, pedido na questão 1 das atividades, optamos por estabelecer prazo de 10 minutos para os alunos redigirem a demonstração, sem ajuda do professor, mas sendo por este observados¹⁸. Na Tabela 4, detalhamos a análise do material produzido pelos alunos.

Tabela 4 – Dedução do caso LLL de congruência de triângulos esféricos.

Progresso na demonstração.	Alunos participantes.
Demonstração correta, organizada e com boa redação.	50,0%
Demonstração correta, precisando de melhorias na redação.	25,0%
Demonstração parcialmente correta.	12,5%
Demonstração que precisa ser totalmente refeita.	12,5%

Nota: O percentuais foram calculados com base em 8 grupos de 2 e 3 membros.

Fonte: O autor (2021).

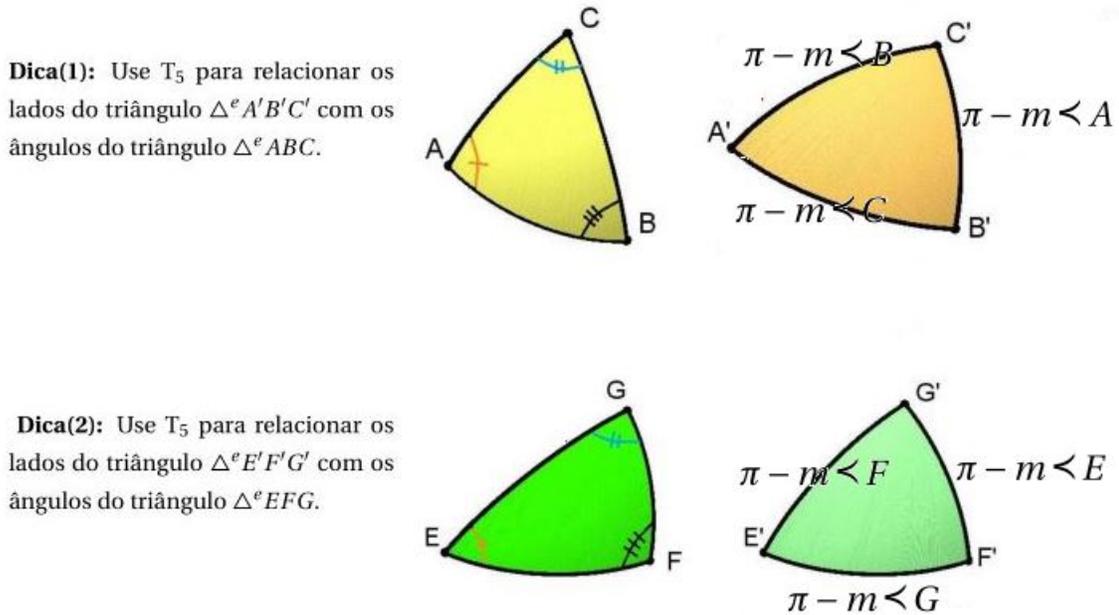
Em relação a essa demonstração, destacamos que a maior exigência não era a estratégia, visto necessitar apenas do Axioma 7 e estar indicada na pergunta, mas o cuidado com a redação. Isto porque, cada aplicação do axioma resulta na congruência em apenas um dos três pares de ângulos que formam a Definição 12, congruência de triângulos.

Corrigida e discutida a questão 1, iniciamos a discussão da questão 2.¹⁹

¹⁸ Além da observação direta, a demonstração de cada grupo foi fotografada ao final do tempo estabelecido para análise posterior.

¹⁹ A discussão e anotações iniciais da questão 2 foi feita com auxílio de projeção da questão com o Paint.

Figura 42 – Discussões da questão 2.



Fonte: O autor (2021).

Nesta, resolvemos juntos a parte representada na Figura 42 e, indicamos o restante como tarefa a ser corrigida, na última aula planejada, oficina de construções geométricas na esfera.

4.8 Oficina Matemática: representação de objetos geométricos na esfera

No início desta aula, finalizamos a correção da questão 2 da última aula. Aproveitamos para dialogar com os alunos acerca das suas conclusões, das dificuldades inerentes à demonstração em questão e da comparação desse resultado, que será chamada de caso AAA de congruência de triângulos esféricos, com o caso euclidiano²⁰.

Em seguida, com a sala organizada em quatro grupos, distribuimos balões *bubble* cheios, régua esférica e pincéis para a oficina matemática. Previamente, havíamos anotado no quadro a seguinte lista numerada de objetos geométricos:

- 1) Reta esférica contendo os pontos antípodas A e B .

²⁰ Na Geometria Euclidiana Plana, a propriedade AAA garante a semelhança de triângulos, mas não é suficiente para garantir a congruência.

- 2) Segmento esférico \widehat{AB} contendo o ponto C .
- 3) Semirreta esférica de origem A e que passa por B .
- 4) Ângulo esférico $\sphericalangle BAC$.
- 5) Reta esférica $\bigcirc AB$ e seus polos P_1 e P_2 .
- 6) Triângulo esférico trirretângulo.
- 7) Reta esférica $\bigcirc AB$ com 8 pontos equidistantes. Anotar também a coordenada de cada ponto segundo a bijeção garantida pelo Axioma 2.

A representação 7 coube a um grupo e as demais foram distribuídas de forma que um grupo recebesse as atividades 1 e 2, outro recebeu as questões 3 e 4, ficando 5 e 6 para o grupo restante. Pesquisando no material, cada grupo estava imbuído de desenhar os objetos geométricos pedidos e fazer uma breve explanação ao final da atividade. Nas figuras a seguir, apresentamos alguns materiais desenvolvidos nessa oficina.

Figura 43 – Reta esférica.



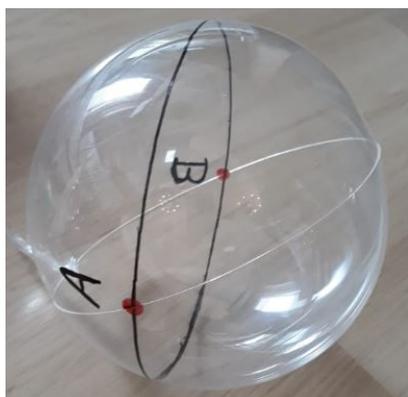
Fonte: O autor (2021).

Figura 44 – Reta e régua esféricas.



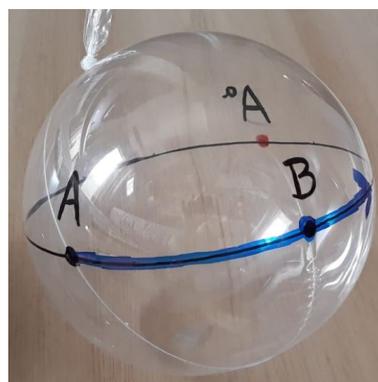
Fonte: O autor (2021).

Figura 45 – Pontos A e B antípodas.



Fonte: O autor (2021).

Figura 46 – Semirreta esférica \overrightarrow{AB} .



Fonte: O autor (2021).

Figura 47 – Reta esférica $\odot AB$ e seus polos P_1 e P_2 .



Fonte: O autor (2021).

Figura 48 – Triângulo esférico trirretângulo.



Fonte: O autor (2021).

Figura 49 – Reta esférica $\odot AB$.



Fonte: O autor (2021).

Figura 50 – Segmento de reta \widehat{AB} contendo o ponto C .



Fonte: O autor (2021).

Ao fim da aula, cada grupo fez uma pequena explanação acerca das representações geométricas feitas. E, da observação ocorrida durante a oficina e explanações finais, concluímos que os alunos aprofundaram, conforme desejado, a noção intuitiva dos objetos geométricos tratados na sequência didática.

4.9 Considerações gerais do capítulo

Conforme visto no decorrer deste capítulo, a metodologia específica e os tempos planejados na sequência didática sofreram adequações durante o processo de aplicação impulsionados pelas peculiaridades do assunto e dos alunos. Os conceitos e sua abordagem axiomático-dedutiva, no entanto, não necessitaram de mudanças e, a avaliação, Momento 4, permitiu corrigir falhas

que não estavam sendo percebidas pela observação direta.

À sequência didática original, conforme apresentada nos Anexos A e B, acrescentou-se, no Momento 4, uma aula de discussão da avaliação feita através do questionário 1 e, no Momento 7, uma Oficina Matemática com materiais concretos. A primeira, motivada pelas dificuldades indicadas na avaliação, e a segunda, com intuito de revisar e aprofundar a compreensão dos conceitos geométricos apresentados na sequência didática.

Encerramos assim a fase de experimentação e primeiras análises, fase essa que permite reelaborar e adequar a sequência didática durante a aplicação, encaminhando-nos para a fase final, análises *a posteriori* propriamente ditas e validação.

5 Quarta fase da Engenharia Didática: Análises a Posteriori e Validação da Experiência.

Neste capítulo, faremos a descrição e análise da avaliação final correspondente ao Momento 8 da sequência didática, ocorrida em aula geminada correspondendo às décimas primeira e segunda aulas (devido aos ajustes demandados pela própria engenharia didática). Faremos também um apanhado das análises *a posteriori* ocorridas e elencadas na fase de experimentação, bem como discutiremos acerca da validade da sequência didática apresentada.

5.1 Avaliação final.

O questionário avaliativo final (Anexo D), foi preparado com a intenção de priorizar a avaliação da compreensão dos conceitos estudados, bem como, habilidades de argumentação dedutiva, sem grandes preocupações com a memorização de conceitos e da notação. Dessa forma, cada questão seria respondida individualmente com pesquisa no encarte (Anexo B). Na aplicação, cada questão foi discutida imediatamente após ter sido recolhida a respectiva resposta, por acreditarmos que os momentos de avaliação auxiliam, inclusive, na complementação da aprendizagem.

Foram propostas seis questões. Destas, as duas primeiras avaliavam a percepção do aluno quanto aos métodos intuitivos de investigação matemática. As duas seguintes, a utilização correta da notação apresentada nas aulas e a compreensão conceitual e intuitiva de semirreta, ângulo esférico e medida de ângulos. A questão 5 contemplava a compreensão do teorema que relaciona ângulos de um triângulo com os lados do seu triângulo polar. A última questão se propunha a avaliar habilidades em argumentação dedutiva. A avaliação ocorreu numa aula geminada de 90 minutos com os tempos de cada questão previamente estabelecidos, conforme Quadro 5.1.

Quadro 5.1 – Tempos estabelecidos para a avaliação final da sequência didática.

Questão.	Tempo máximo permitido.
1	6 minutos
2	5 minutos
3	10 minutos.
4	10 minutos.
5	7 minutos.
6	10 minutos.

Fonte: O autor (2021).

A questão 1, baseada em Wentworth e Smith (1888, p.15), pedia para que os alunos comparassem dois segmentos de reta sem ajuda de instrumentos de medida ou dados numéricos. Trata-se de uma pergunta preparatória para a questão seguinte e, conforme esperado, a resolução dessa questão através da comparação visual e da capacidade intuitiva, indubitavelmente, levaria a equívocos. A pergunta foi organizada em cartaz 1 e cartaz 2, sendo que para a primeira parte da pergunta houve apenas 17,4% de respostas corretas e, para a segunda parte, 30,4%.

A questão 2 pedia para que o aluno refletisse acerca da utilidade e confiabilidade da intuição para a Matemática e assinalasse verdadeiro (V) ou falso (F) para cada uma das alternativas apresentadas. No Quadro 5.2, estão elencadas as alternativas propostas e na Tabela 5 apresentamos os resultados obtidos.

Quadro 5.2 – Alternativas propostas a fim de verificar a concepção dos alunos em relação a métodos intuitivos de prova em matemática.

a() A intuição é muito importante para a matemática, mas os resultados obtidos pela intuição não são 100% confiáveis.
b() Essa experiência nos ensina que nunca devemos confiar na intuição.
c() Pela minha experiência como aluno, os resultados da intuição são sempre verdadeiros e confiáveis.
d() Nos anos escolares, tenho percebido que muitos resultados vindos da intuição eram verdadeiros.

Nota: Alternativas apresentadas a duas turmas do Ensino Médio após participarem de um experimento que demandava a comparação de dois segmentos usando apenas a percepção visual.

Nota: Cada alternativa deveria ser assinalada com verdadeiro (V) ou falso (F).

Fonte: O autor (2021).

Comparando os resultados apresentados na Tabela 5 com a Tabela 1, questionário 1 do Momento 4, percebe-se evolução na compreensão do método dedutivo versus análise intuitiva

Tabela 5 – Questão 2 - Percepção quanto à utilidade e eficiência da intuição para o raciocínio matemático.

Alternativas verdadeiras	Alunos participantes
(a) e (d)	78,3%
Apenas (a)	21,7%
Demais escolhas.	0,0%

Fonte: O autor (2021).

numa investigação matemática. Embora almejássemos 100% dos alunos a considerar as alternativas (a) e (d) como verdadeiras para a questão 2, cujos resultados da Tabela 5 demonstram ter havido 78,3%, consideramos importante observar que todos os participantes da pesquisa escolheram a alternativa (a) como verdadeira e que nenhum aluno considerou como verdadeiras as alternativas (b) ou (c), em conformidade com nossos objetivos.

A questão 3 obteve altos índices de acertos, conforme percebemos pela Tabela 6 a seguir, sinalizando que a notação apresentada foi assimilada a contento e que a representação geométrica na esfera dos conceitos apresentados foi compreendida.

Tabela 6 – Questão 3 - Compreensão de conceitos básicos da Geometria Esférica.

Critério.	Alunos participantes.
Marcação correta do ponto C .	95,7%
Representação correta da semirreta \overrightarrow{AC} .	91,3%
Classificação correta das semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} em contidas ou não na mesma reta.	82,7%
Classificação correta das semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} em opostas quando for o caso.	82,7%

Nota: Para que a classificação das semirretas seja considerada correta é necessário a representação correta da semirreta \overrightarrow{AC} .

Fonte: O autor (2021).

A questão 4 exigia dos alunos a interpretação correta da definição 8 do encarte, apresentando uma redação equivalente à seguinte: "Para determinar a medida do ângulo $\sphericalangle ABC$ devemos determinar na semirreta \overrightarrow{BC} um ponto distando $\frac{\pi}{2}$ de B , denominemos esse ponto de P . Em seguida, determinar na semirreta \overrightarrow{BA} um ponto distando $\frac{\pi}{2}$ de B , denominemos esse ponto de Q . A medida do segmento esférico \widehat{PQ} será a medida do ângulo esférico $\sphericalangle ABC$ ". A análise das repostas mostrou que 69,6% dos alunos montaram e redigiram a estratégia corretamente, que 13,0% apresentaram uma estratégia correta, mas de redação um pouco confusa e que os demais não redigiram uma estratégia convincente.

As questão 5, de interpretação direta do teorema (T_5) da sequência didática, não apresentou dificuldades para os alunos, sendo apresentada com correção por 91,3% dos alunos. A compre-

ensão desta é de suma importância para a dedução solicitada na questão seguinte. Esta requeria que o aluno utilizasse corretamente os teoremas (T_5) e (T_4) da sequência didática. Dessa forma era necessário que o aluno traçasse uma estratégia de demonstração, demonstração esta já explorada na aula 6, na semana anterior.

Os resultados dessa questão foram considerados satisfatórios e estão elencados no Quadro 5.3 abaixo.

Quadro 5.3 – Questão 6 - Habilidades em demonstrações dedutivas.

Perícia/habilidade	Alunos pesquisados.
Descrição da justificativa de todos os passos.	87,0%
Utilização correta do teorema (T_5).	95,7%
Utilização correta do teorema (T_4).	82,6%
Demonstração considerada correta e bem redigida.	69,6%.
Demonstração considerada correta, com redação regular.	8,7%.
Demonstração considerada insuficiente.	21,7%.

Fonte: O autor (2021).

Observando particularmente a última linha deste quadro percebemos que 78,3% dos alunos que participaram das aulas elaboraram uma demonstração considerada suficiente. A observação dos demais resultados apresentados no mesmo quadro nos indica que dentre os 21,7% restantes, boa parcela de alunos apresentavam algum domínio sobre o método dedutivo. Cite-se o alto percentual que justificaram todos os passos da demonstração e a utilização correta dos teoremas (T_4) e (T_5) por percentuais não menos consideráveis.

5.2 Análises a posteriori.

No decorrer do capítulo anterior e na primeira seção do capítulo atual, descrevemos a aplicação da sequência didática proposta e a análise das observações diretas ocorridas durante as aulas e dos questionários avaliativos¹. As análises *a posteriori*, que se iniciaram durante a aplicação das aulas e que levaram, inclusive, a ajustes na sequência didática, serão agora reavaliadas observando o conjunto das aulas.

Nesse sentido, destacamos, primeiramente, as seguintes análises decorridas de observação direta durante a aplicação das aulas:

(a) Houve assimilação da notação apresentada na sequência didática.

¹ Trata-se de dois questionários: questionário 1, aplicado no decorrer do processo, e questionário final, aplicado após a exploração do conteúdo da sequência didática.

- (b) Os objetos geométricos definidos na sequência didática foram bem compreendidos no contexto do modelo de esfera apresentado em materiais concretos.
- (c) A aceitação de conclusões intuitivas por observação visual foi cedendo espaço à investigação através do método dedutivo.
- (d) Os alunos adquiriram progressivamente habilidades básicas de leitura e redação de argumentos dedutivos.
- (e) No decorrer da exploração de propriedades clássicas dos triângulos euclidianos que não valem para triângulos esféricos, notou-se crescente maturidade crítica em relação aos ambientes de validade das propriedades geométricas internalizadas em estudos progressivos.
- (f) No decorrer da investigação de propriedades de triângulos esféricos não gozadas por triângulos euclidianos, notou-se crescente compreensão da restrição das propriedades matemáticas ao ambiente da demonstração, especificamente, aos axiomas que caracterizam esse ambiente.

De posse destas conclusões decorridas do acompanhamento das expressões, perguntas, respostas e observações feitas pelos alunos durante o processo de estudo, procederemos, a seguir, à listagem das análises derivadas do questionário final:

- (i) Dos resultados derivados da questão 2, inferimos que houve compreensão da importância do método dedutivo no processo de validação de resultados obtidos intuitivamente.
- (ii) Das respostas dadas à questão 3, concluímos que houve assimilação e compreensão da notação e da representação pictórica dos objetos geométricos apresentados na sequência didática.
- (iii) Deriva das respostas dadas nas questões 4 e 5 que houve boa interpretação e compreensão de resultados e definições propostas na sequência didática.
- (iv) Das resoluções apresentadas na questão 6, concluímos que foram obtidas habilidades básicas de argumentação dedutiva pela maioria dos alunos participantes, sem deixar de observar, no entanto, as dificuldades apresentadas por parcela dos pesquisados.

5.3 Validação da sequência didática.

Com base nas conclusões delineadas nas análises *a posteriori* da seção anterior, retornamos agora às hipóteses elencadas nas análises *a priori* a fim de verificar se houve sucesso nos objetivos previstos.

As análises *a posteriori* apresentadas em (c) e (i) indicam que os alunos perceberam a importância e confiabilidade da argumentação dedutiva na descoberta ou prova de propriedades, o que nos permite validar a hipótese (H1).

Dos itens (c), (d) e (iv), derivamos a validação da hipótese (H2). A validação dessa hipótese está pensada em contexto estrito de provas matemáticas, comparando a argumentação dedutiva com argumentações de cunho intuitivo, com comparações visuais ou argumentos sem justificação em hipóteses válidas.

O desenvolvimento de habilidades básicas de raciocínio e argumentação dedutiva, hipótese (H3), foi atingida pelos itens (d) e (iv). Saliente-se ainda que o Quadro 5.3, que apresenta os resultados estatísticos da pergunta 6 do questionário final, donde deriva (iv), mostra que 21,7% dos alunos participantes da experiência didática não apresentaram uma demonstração dedutiva considerada suficiente para a questão apresentada. No entanto, consideramos o fato de que, dentre esse percentual, a maioria utilizou corretamente passos coerentes de argumentação dedutiva, caso do uso correto do teorema (T_5). Também, na observação direta constatou-se que todos estavam se empenhando na descrição das justificativas com base nos axiomas, definições e teoremas, de cada passo nas investigações propostas, o que configura por si o alcance da projeção prevista na hipótese (H3).

Dos itens (b), (e) e (f), concluímos ter atingido o previsto pela hipótese (H4). Os objetos geométricos tratados axiomáticamente no contexto do termo primitivo "esfera" e com o apelo visual às representações dos modelos de "esfera" em material concreto, esferas de isopor e balões *bubble*, permitiram aos alunos reconhecer os objetos geométricos do ambiente esférico, distinguindo-o do ambiente euclidiano plano.

A validação da hipótese (H5) segue dos itens (e) e (f), que provém da observação das falas e expressões dos alunos perante as comparações de propriedades de triângulos euclidianos e esféricos apresentadas na sequência didática. E, finalmente, consideramos validada a hipótese (H6), a qual segue da validação das duas hipóteses precedentes.

Importante, também, analisar qualitativamente a evolução em argumentação dedutiva percebida no decorrer da aplicação da sequência didática. Nesse sentido, no Apêndice C, apresentamos e comentamos algumas argumentações apresentadas pelos alunos participantes da pesquisa. Neste, percebem-se as dificuldades iniciais em organizar e descrever um argumento dedutivo. Estas dificuldades, no entanto, foram, aos poucos, sendo superadas para dar lugar a argumentações bem organizadas e com todos os passos devidamente justificados. Percebeu-se que as dez aulas dedicadas à exploração dessa competência foram suficientes para desenvolver as principais habilidades requeridas em argumentação matemática.

Validadas, portanto, as hipóteses apresentadas na "*Fase das Análises a Priori*", bem como, orientados pelos resultados apreciados na análise qualitativa, consideramos, de acordo com a Engenharia Didática, válida a sequência didática apresentada. Isto não significa, no entanto, a

minimização de outros enfoques da Geometria Esférica, como pode, por exemplo, ser observado nos trabalhos de Prestes (2006) e de Souza (2019), os quais propõem estudos de Geometria Esférica para o ensino básico, respectivamente, através da exploração visual de propriedades e da apresentação da esfera como um objeto da Geometria Euclidiana Espacial.

Considerações Finais

A experiência de 26 anos de docência em Matemática no Ensino Básico tem brindado a mim com realizações e percalços. A dosagem teórica adequada para cada momento dessa fase escolar, o melhor enfoque aos exercícios de fixação e às aplicações são parte do cotidiano docente da disciplina e tem acompanhado-me em meus planejamentos diários. A percepção das dificuldades apresentadas pelos alunos em argumentação matemática ou mesmo de leitura e interpretação de textos com esse perfil tem pautado conversas com colegas de profissão. Estes, por vezes, optam apenas pela utilização da teoria em aplicações, levando à mera memorização das *fórmulas*, induzidos pelas listas de exercícios sugeridas nos livros didáticos, que evitam essa discussão nos exercícios, conforme sugere a obra avaliada em nossa pesquisa.

A competência em leitura de textos dessa natureza bem como o desenvolvimento de habilidades de argumentação dedutiva é preconizada pela BNCC (2018, p.540), que reserva uma dentre as cinco competências esperadas para o Ensino Médio para esse fim. Desta forma, é nossa responsabilidade, como professores da disciplina, garantir que os alunos tenham acesso aos conteúdos e materiais didáticos que lhes permitam desenvolver as habilidades requeridas para essa competência.

A sequência didática desta dissertação considera o desenvolvimento dessas habilidades como um dos objetivos, além de propiciar a comparação de conceitos da Geometria Esférica com equivalentes da Geometria Euclidiana Plana, proporcionando a rediscussão e aprofundamento da compreensão de resultados geométricos cristalizados. A validade desta sequência didática, demonstrada pela Engenharia Didática na *Fase das Análises a Posteriori e Validação da Experiência*, acrescentada ao Momento 4, uma aula de discussão dos resultados da avaliação, e ao Momento 7, uma aula com materiais concretos, indica ser um material didático que pode contribuir para a melhoria da qualidade do ensino da Matemática no ciclo básico. Esse *status*, no entanto, só pode ser alcançado quando, e se, aplicada por pares nos diferentes contextos educacionais, podendo ser inclusive aperfeiçoada sob o olhar desses professores.

Dessa forma, consideramos ter levantado uma discussão relevante quanto ao papel do ensino de Geometria no ciclo básico que, esperamos, possa contribuir inclusive para outras discussões com esse fim e levar outros professores a refletir sobre o papel da Matemática no desenvolvimento de habilidades de pensamento dos educandos.

Referências

- BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1994.
- BRASIL. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Fundação Carlos Alberto Vanzolini, 2018.
- CARNEIRO, V. C. G. *Engenharia Didática: Um Referencial para a Ação Investigativa e para formação de Professores de Matemática*. 2005. Zetetiké, Campinas-UNICAMP, v. 13, n. 23, p. 85-118. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646981/13882>>. Acesso em: 15 de jul. 2021.
- D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática: Da Teoria à Prática*. 17. ed. Campinas: Papirus, 2009.
- DANTE, L. R. *Teláris Matemática, 6º ano: Ensino Fundamental*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.
- DANTE, L. R. *Teláris Matemática, 7º ano: Ensino Fundamental*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.
- DANTE, L. R. *Teláris Matemática, 8º ano: Ensino Fundamental*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.
- DANTE, L. R. *Teláris Matemática, 9º ano: Ensino Fundamental*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.
- DANTE, L. R. *Teláris Matemática, 1º ano: Ensino Médio*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
- DANTE, L. R. *Teláris Matemática, 2º ano: Ensino Médio*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
- DANTE, L. R. *Teláris Matemática, 3º ano: Ensino Médio*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
- GREENBERG, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. 4. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 2008.
- HEFEZ, A. *Aritmética*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- HILBERT, D. *Fundamentos da Geometria*. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.
- IBGE. *Educação*. 2020. Disponível em: <<https://cidades.ibge.gov.br/brasil/panorama>>. Acesso em: 04 de out. 2021.
- JENNINGS, G. A. *Modern Geometry with applications*. New York: Springer, 1994.
- MONTEIRO, L. H. J. *Elementos de Álgebra*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1969.
- NETO, A. C. M. *Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

OCDE. *A Educação no Brasil: Uma perspectiva Internacional*. 2020. Disponível em: <https://todospelaeducacao.org.br/wordpress/wp-content/uploads/2021/06/A-Educacao-no-Brasil_uma-perspectiva-internacional.pdf>. Acesso em: 19 de jul. 2021.

PRESTES, I. d. C. R. et al. *Geometria esférica: Uma conexão com a geografia*. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

SOUZA, M. R. d. *Geometria esférica e o relógio de sol*. Dissertação (Mestrado) — Brasil, 2019.

VELASCO, P. del N. *Educando Para a Argumentação: Contribuições do Ensino de Lógica*. Minas Gerais: Autêntica, 2010.

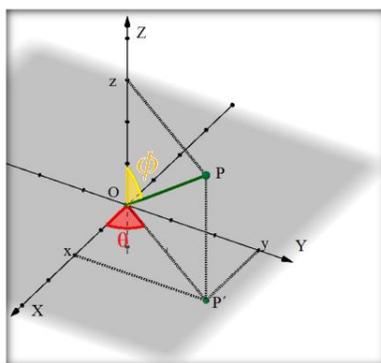
WENTWORTH, G.; SMITH, D. E. *Plane Geometry*. New York: Ginn and Company, 1888.

WHITTLESEY, M. A. *Spherical Geometry and its applications*. 1. ed. Florida: CRC Pres, 2020.

Apêndice A. Menor distância entre dois pontos na esfera

Neste Apêndice, com base em Jennings (1994, p.47), investigaremos a curva que contém o caminho de menor distância entre dois pontos sobre uma esfera Σ de raio r . Para isso, observamos que um ponto P de uma esfera de raio r e centro na origem é escrito em coordenadas esféricas, convenção norte americana, por $P(r, \theta, \phi)$ em que $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\phi \in [0, \pi]$, conforme sugere a Figura 1. Em coordenadas retangulares, o ponto $P(x, y, z)$ é dado por $x = r \cos\theta \sin\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$ e $z = r \cos\phi$.

Figura 1 – Ponto $P(r, \theta, \phi)$ em coordenadas esféricas.

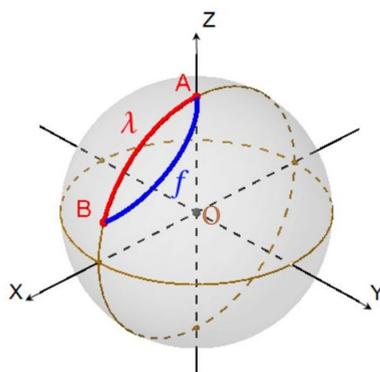


Fonte: O autor (2021).

Uma curva sobre a esfera Σ é o conjunto de pontos P de Σ tais que $P = f(t)$, em que $f : [a, b] \rightarrow \Sigma$ é uma aplicação contínua. Se ela for derivável e sua derivada for contínua diremos que a curva é de classe C^1 .

Teorema 1. *O menor caminho entre dois pontos na esfera é um arco de circunferência máxima.*

Figura 2 – Menor caminho sobre a esfera.



Fonte: O autor (2021).

Demonstração. Sejam A e B dois pontos sobre uma esfera Σ de centro O e raio r . Estabeleça um sistema ortogonal XYZ de eixos com origem em O , com A na parte positiva do eixo Z e com o plano (XOZ) coincidindo com o plano AOB , conforme sugerido na figura acima. Temos que $\phi(b)$ é a medida do arco de circunferência máxima de extremos A e B e se $f : [a, b] \rightarrow \Sigma$ é uma curva parametrizada em Σ tal que $f(a) = A$ e $f(b) = B$, escrevendo $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ em coordenadas retangulares, temos que o seu comprimento $m(f)$ é

$$m(f) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (1)$$

Observe que

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos[\theta(t)] \operatorname{sen}[\phi(t)]; \\ y(t) &= r \operatorname{sen}[\theta(t)] \operatorname{sen}[\phi(t)]; \\ z(t) &= r \cos[\phi(t)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Cuja derivada é

$$\begin{aligned} x'(t) &= -r \operatorname{sen}[\theta(t)] \theta'(t) \operatorname{sen}[\phi(t)] + r \cos[\theta(t)] \cos[\phi(t)] \phi'(t); \\ y'(t) &= r \cos[\theta(t)] \theta'(t) \operatorname{sen}[\phi(t)] + r \operatorname{sen}[\theta(t)] \cos[\phi(t)] \phi'(t); \\ z'(t) &= -r \operatorname{sen}[\phi(t)] \phi'(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1) e simplificando os resultados através da relação fundamental da trigonometria obtém-se

$$m(f) = r \int_a^b \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\theta'(t)]^2 \operatorname{sen}^2[\phi(t)]} dt. \quad (4)$$

Segue, portanto, que $m(f) \geq r \int_a^b \phi'(t) dt = r |\phi(b) - \phi(a)| = r |\phi(b) - 0| = r \phi(b)$. Em que a desigualdade estrita ocorre, a menos que, $\theta'(t) = 0$ ou $\operatorname{sen}^2 \phi(t) = 0$, para todo t . Ou seja, a igualdade ocorre se, e apenas se, f é um arco de circunferência máxima de extremos A e B , o qual é único se os pontos A e B não são antípodas. \square

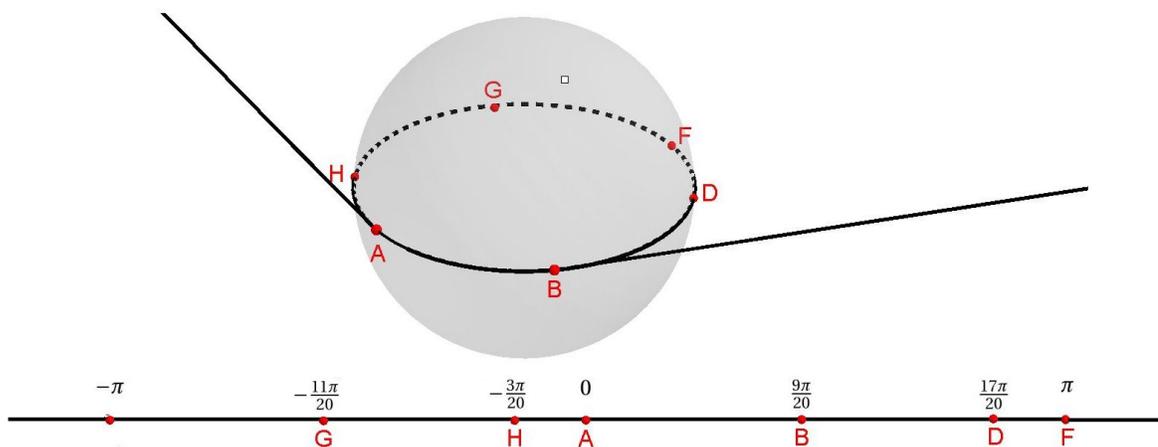
Apêndice B. O conjunto $\mathbb{R}/2\pi$

Neste Apêndice² construiremos um subconjunto das partes de \mathbb{R} , denominado $\mathbb{R}/2\pi$ e nele definiremos uma operação de adição. Demonstraremos as propriedades que foram úteis no tratamento axiomático dado à Geometria Esférica no Capítulo 2, clareando eventuais dúvidas teóricas daquele capítulo.

Cada elemento desse conjunto é um conjunto de números reais da forma $x+2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e x é um real qualquer fixado. Observe-se, por exemplo, que $\{\dots, -6\pi, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots\}$ é um elemento de $\mathbb{R}/2\pi$, o qual será representado por $\bar{0}$ ou por qualquer número real desse conjunto com um traço acima dele. Da mesma forma, temos $\bar{\pi} = \{\dots, -5\pi, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots\}$ e $\frac{9\pi}{20} = \{\dots, -\frac{71\pi}{20}, -\frac{31\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}, \frac{49\pi}{20}, \dots\}$ ou qualquer outro elemento de $\mathbb{R}/2\pi$ é dessa forma.

Geometricamente, podemos imaginar esse conjunto sobre uma circunferência máxima de uma esfera³ de forma que cada ponto corresponda a exatamente um elemento de $\mathbb{R}/2\pi$. Intuitivamente, "enrolamos" uma reta numerada em \mathbb{R} sobre uma circunferência máxima da esfera de forma que cada representante de \bar{x} , para todo $x \in (-\pi, \pi]$, coincida no mesmo ponto. Observe, π e $-\pi$ são representantes de $\bar{\pi}$ e por isso a reta será enrolada de forma que esses elementos coincidam num mesmo ponto, conforme sugerido pelas duas figuras a seguir.

Figura 1 – "Enrolando" a reta real na circunferência máxima.

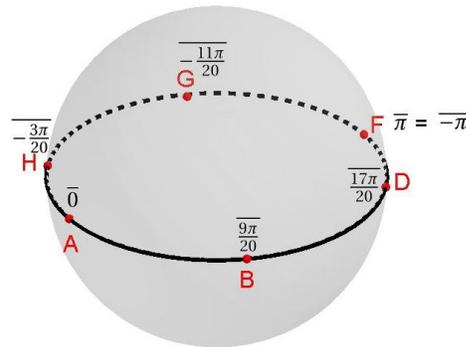


Fonte: O autor (2021).

² O desenvolvimento deste apêndice será baseado em Whittlesey (2020, p.46-47), Monteiro (1969, p.15-21, p.43-44, p.145-148) e Hefez (2016, p.165-192). Em particular, as Proposições 2 e 6 são muito semelhantes às desenvolvidas por Monteiro (1969) no desenvolvimento da teoria geral das relações de equivalência.

³ Obviamente pode ser numa circunferência qualquer, mas devido aos nossos objetivos trabalharemos com circunferências máximas de uma esfera particular.

Figura 2 – $\mathbb{R}/2\pi$ e a circunferência máxima.



Fonte: O autor (2021).

Dessa forma, a cada ponto da circunferência máxima que passa por A e B está associado um único $\bar{x} \in \mathbb{R}/2\pi$, resultado que será provado rigorosamente no final deste Apêndice. Além do mais, será mostrado também que a adição em $\mathbb{R}/2\pi$ é feita com qualquer um dos representantes reais do "pacote". Uma operação, por exemplo, útil no capítulo que tratamos do estudo axiomático da Geometria Esférica, é a adição da coordenada de um ponto de uma circunferência máxima com o inverso aditivo da coordenada de outro ponto. No caso específico do sistema de coordenadas adotado na Figura 2, aplicando a referida operação aos pontos G e B de respectivas coordenadas $-\frac{11\pi}{20} = \{\dots, -\frac{91\pi}{20}, -\frac{51\pi}{20}, -\frac{11\pi}{20}, \frac{29\pi}{20}, \dots\}$ e $\frac{9\pi}{20} = \{\dots, -\frac{71\pi}{20}, -\frac{31\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}, \frac{49\pi}{20}, \frac{89\pi}{20}, \dots\}$ teremos como resultado um representante que está no mesmo "pacote" de π e pontos com essa propriedade foram definidos como antípodas.

De fato, um sistema de coordenadas com qualquer intervalo semiaberto de comprimento 2π , na sequência didática usamos o intervalo $[0, 2\pi)$, dá conta dessa teoria. A vantagem em usar o conjunto $\mathbb{R}/2\pi$ está em podermos definir neste uma operação de adição que herda as propriedades básicas da adição em \mathbb{R} , facilitando a manipulação algébrica das coordenadas.

Feitas essas considerações, apresentamos a seguir a teoria formal desse conjunto e das operações a que seus elementos estarão submetidos.

Definição 1. *Seja $x \in \mathbb{R}$, fixado $a \in \mathbb{R}$, caso exista $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - a = k(2\pi)$, diremos que x é congruente a a módulo 2π e escrevemos $x \equiv a \pmod{2\pi}$. Do contrário, escrevemos $x \not\equiv a \pmod{2\pi}$.*

Proposição 2. (Propriedades da congruência módulo 2π) *A congruência módulo 2π sobre \mathbb{R} é uma relação de equivalência, ou seja, goza das seguintes propriedades:*

Reflexiva: *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \equiv x \pmod{2\pi}$.*

Simétrica: Se x e y são dois elementos quaisquer de \mathbb{R} e $x \equiv y \pmod{2\pi}$, então $y \equiv x \pmod{2\pi}$.

Transitiva: Se x , y e z são elementos quaisquer de \mathbb{R} , com $x \equiv y \pmod{2\pi}$ e $y \equiv z \pmod{2\pi}$, então $x \equiv z \pmod{2\pi}$.

Demonstração. Observando que qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, temos que $x - x = 0 \cdot (2\pi)$, segue que $x \equiv x \pmod{2\pi}$, que prova a propriedade reflexiva.

Para provar a propriedade simétrica, observe que se x e y são dois elementos quaisquer de \mathbb{R} e $x \equiv y \pmod{2\pi}$, então $x - y = k(2\pi)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Como esta equação é equivalente a $y - x = (-k)(2\pi)$ e $(-k) \in \mathbb{Z}$, segue que $y \equiv x \pmod{2\pi}$.

Finalmente, para provar a propriedade transitiva, sejam x , y e z elementos quaisquer de \mathbb{R} , com $x \equiv y \pmod{2\pi}$ e $y \equiv z \pmod{2\pi}$, então para algum $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$:

$$x - y = k_1(2\pi), \quad (1)$$

$$y - z = k_2(2\pi). \quad (2)$$

Somando as equações (1) e (2) obtemos $x - z = (k_1 + k_2)(2\pi)$ e como $(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$, segue que $x \equiv z \pmod{2\pi}$. \square

Definição 3. Seja a um real qualquer. Definimos o conjunto $\bar{a} = \{x \in \mathbb{R}; x \equiv a \pmod{2\pi}\}$ e denominaremos esse conjunto de classe de equivalência módulo 2π sobre \mathbb{R} .

Proposição 4. Qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$, a classe de equivalência \bar{b} é formada pelos reais $x = b + k(2\pi)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Em particular, $\bar{b} \neq \emptyset$, com $b \in \bar{b}$.

Demonstração. Tome o real $x = b + k(2\pi)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ e observe que $x - b = k(2\pi)$, ou seja, pela Definição 1, $x \equiv b \pmod{2\pi}$. Usando a Definição 3, segue que $x \in \bar{b}$.

De outra forma, se x for um real tal que $x \neq b + k(2\pi)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, teremos $x - b \neq k(2\pi)$ e, conseqüentemente, $x \notin \bar{b}$. E, finalmente, observe que tomando $k = 0$ em $x = b + k(2\pi)$ teremos $x = b$, o que mostra que $b \in \bar{b}$ e, inclusive, garante que $\bar{b} \neq \emptyset$. \square

Definição 5. O conjunto de todas as classes de equivalência módulo 2π sobre \mathbb{R} será indicado por $\mathbb{R}/2\pi$ e diremos que $\mathbb{R}/2\pi$ é o conjunto quociente de \mathbb{R} pela relação de equivalência módulo 2π .

Proposição 6. Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, as seguintes condições são equivalentes:

(i) $a \equiv b \pmod{2\pi}$;

(ii) $a \in \bar{b}$;

(iii) $b \in \bar{a}$;

(iv) $\bar{a} = \bar{b}$.

Demonstração.

(i) implica (ii) pela Definição 3.

Supondo (ii), segue da Definição 3 que $a \equiv b \pmod{2\pi}$ e, por simetria (Proposição 6), segue que $b \equiv a \pmod{2\pi}$. Usando novamente a Definição 3, temos que $b \in \bar{a}$ e, portanto, (ii) implica (iii).

Supondo (iii), $b \in \bar{a}$ e portanto

$$b \equiv a \pmod{2\pi}. \quad (3)$$

Aplicando a propriedade simétrica na equação (3), temos

$$a \equiv b \pmod{2\pi}. \quad (4)$$

Seja $y \in \bar{a}$ para algum $y \in \mathbb{R}$, então

$$y \equiv a \pmod{2\pi}. \quad (5)$$

Usando a propriedade transitiva da congruência módulo 2π nas equações (4) e (5), segue que $y \equiv b \pmod{2\pi}$, ou seja, $y \in \bar{b}$ e portanto

$$\bar{a} \subset \bar{b}. \quad (6)$$

Para provar que $\bar{b} \subset \bar{a}$, suponha $x \in \bar{b}$, para algum $x \in \mathbb{R}$. Segue que

$$x \equiv b \pmod{2\pi}. \quad (7)$$

Das equações (3) e (7), segue, por transitividade, que $x \equiv a \pmod{2\pi}$ e, portanto, $x \in \bar{a}$, o que prova que

$$\bar{b} \subset \bar{a}. \quad (8)$$

Observando, agora, as equações (6) e (8), segue que $\bar{a} = \bar{b}$ e, assim, provamos que (iii) implica (iv).

Para finalizar a demonstração da proposição, observe que qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, pela propriedade reflexiva, $a \equiv a \pmod{2\pi}$, o que mostra que

$$a \in \bar{a}. \quad (9)$$

Tomando (iv) por hipótese junto com a equação (9), temos que $a \in \bar{b}$ e portanto $a \equiv b \pmod{2\pi}$, o que mostra que (iv) implica (i). \square

Proposição 7. *Sejam x' e x'' dois reais quaisquer e tais que $x', x'' \in A$, para algum $A \in \mathbb{R}/2\pi$, então $x' \equiv x'' \pmod{2\pi}$ e $x'' \equiv x' \pmod{2\pi}$.*

Demonstração. Das definições 5 e 3 segue que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{a} = A$ e, dessa forma, $x' \equiv a \pmod{2\pi}$ e $x'' \equiv a \pmod{2\pi}$. Usando a Proposição 2, segue, sem maiores dificuldades, que $x' \equiv x'' \pmod{2\pi}$ e $x'' \equiv x' \pmod{2\pi}$. \square

Proposição 8. *Seja $x' \in \bar{x}$, para algum $x' \in \mathbb{R}$ e algum $\bar{x} \in \mathbb{R}/2\pi$ e seja ainda $y \equiv x' \pmod{2\pi}$, para algum real y . Então, $y \in \bar{x}$.*

Demonstração. De fato, basta observar que a hipótese $x' \in \bar{x}$ é equivalente, pela Definição 3, a $x' \equiv x \pmod{2\pi}$. E, usando transitividade entre esta equação e a equação $y \equiv x' \pmod{2\pi}$ dada por hipótese, segue que $y \equiv x \pmod{2\pi}$, o que é equivalente, pela Proposição 6, a $y \in \bar{x}$. \square

Proposição 9. *Se $\bar{x} \in \mathbb{R}/2\pi$, então existe um único $x' \in (-\pi, \pi]$ tal que x' é um representante de \bar{x} .*

Demonstração. Provaremos inicialmente a existência de $x' \in (-\pi, \pi]$ que satisfaz $x \equiv x' \pmod{2\pi}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ previamente fixado.

1º caso: $x > 0$. Neste caso observe que para algum inteiro $k \geq 0$, uma e apenas uma das seguintes afirmações é verdadeira:

$$x \in (k \cdot 2\pi, k \cdot 2\pi + \pi]; \quad (10)$$

$$x \in (k \cdot 2\pi + \pi, (k+1) \cdot 2\pi]. \quad (11)$$

Caso ocorra (10), então $x = k \cdot 2\pi + y'$, para algum $y' \in (0, \pi]$, ou seja, tomando $x' = y'$, segue da última equação e da Definição 1 que

$$x \equiv x' \pmod{2\pi}, \quad x' \in (-\pi, \pi]. \quad (12)$$

Caso ocorra (11), então $x = k \cdot 2\pi + \pi + y''$, para algum $y'' \in (0, \pi]$, ou seja, $x = (k+1) \cdot 2\pi + y'''$, para algum $y''' \in (-\pi, 0]$. Segue que fazendo $x' = y'''$ na última equação e usando novamente a Definição 1, temos

$$x \equiv x' \pmod{2\pi}, \quad x' \in (-\pi, \pi]. \quad (13)$$

2º caso: $x \leq 0$. Neste caso observe que para algum inteiro $k \geq 0$, uma e apenas uma das seguintes afirmações é verdadeira:

$$x \in (-(k+1) \cdot 2\pi, -k \cdot 2\pi - \pi]; \quad (14)$$

$$x \in (-k \cdot 2\pi - \pi, -k \cdot 2\pi]. \quad (15)$$

Observe que caso ocorra a relação (14), para algum $y_1 \in (0, \pi]$,

$$x = -(k+1) \cdot 2\pi + y_1. \quad (16)$$

No entanto, se a relação (15) ocorrer, então, para algum $y_2 \in (-\pi, 0]$

$$x = -k \cdot 2\pi + y_2. \quad (17)$$

Portanto, tomando $x' = y_1$ na equação (16) ou ainda $x' = y_2$ na equação (17) segue, em qualquer caso que

$$x \equiv x' \pmod{2\pi}, \quad x' \in (-\pi, \pi]. \quad (18)$$

A existência, portanto, está provada, para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}/2\pi$, pelas equações (12), (13) e (18).

Para provar a unicidade, seja $x \in \mathbb{R}$ e sejam x_1 e x_2 elementos do intervalo real $(-\pi, \pi]$, tais que:

$$x \equiv x_1 \pmod{2\pi}; \quad (19)$$

$$x \equiv x_2 \pmod{2\pi}. \quad (20)$$

Das equações (19) e (20) e da Definição 1 segue que existem inteiros k_1 e k_2 tais que:

$$x - x_1 = k_1(2\pi); \quad (21)$$

$$x - x_2 = k_2(2\pi). \quad (22)$$

Subtraindo a equação (22) da equação (21), temos

$$x_2 - x_1 = (k_1 - k_2)(2\pi). \quad (23)$$

Observe ainda que $-\pi < x_1 \leq \pi$ e $-\pi < x_2 \leq \pi$ pela hipótese feita sobre x_1 e x_2 . Segue, portanto, que

$$-2\pi < x_2 - x_1 < 2\pi. \quad (24)$$

Substituindo $x_2 - x_1$ na equação (24) por $(k_1 - k_2)(2\pi)$, conforme a equação (23), e dividindo por 2π , obtemos

$$-1 < k_1 - k_2 < 1 \quad (25)$$

e, portanto, $k_1 - k_2 = 0$. Usando este resultado na equação (23), segue que $x_1 = x_2$, o que prova a unicidade. \square

A última proposição nos mostra que todo elemento de $\mathbb{R}/2\pi$ pode ser escrito por \bar{x} , em que $x \in (-\pi, \pi]$. O que nos permite dizer que $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$, definida por $f(x) = \bar{x}$, é uma bijeção. Usando esse resultado, provaremos a seguir que os pontos de uma circunferência máxima podem ser colocados em correspondência biunívoca com os elementos de $\mathbb{R}/2\pi$.

Mas antes queremos frisar que é fato conhecido da Geometria Euclidiana Plana que dada uma circunferência λ e fixado um ponto A e um sentido, digamos anti-horário, existe uma bijeção entre os pontos X de λ e o intervalo real $[0, 2\pi)$. Ou seja, para cada $X \in \lambda$, o arco \widehat{AX} , de sentido anti-horário a partir de A , possui uma medida x , única, em radianos com $x \in [0, 2\pi)$. Reciprocamente, para cada $x \in [0, 2\pi)$ existe um único ponto $X \in \lambda$ tal que o arco \widehat{AX} , de sentido anti-horário a partir de A , possui a medida x .

Formalmente, o último parágrafo pode ser reescrito da seguinte forma:

Lema 10. *Se λ é uma circunferência, então existe uma bijeção $g : \lambda \rightarrow [0, 2\pi)$.*

Teorema 11. *Se λ é uma circunferência máxima de uma esfera, então existe uma bijeção $h : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$.*

Demonstração. Observe que $m : [0, 2\pi) \rightarrow (-\pi, \pi]$ dada por $m(x) = \pi - x$ é uma bijeção. Seja $g : \lambda \rightarrow [0, 2\pi)$ uma bijeção e seja $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ definida por $f(x) = \bar{x}$, que é uma bijeção conforme observação feita após a Proposição 9. Observando que o contradomínio de g é igual ao domínio de m , que o contradomínio de m é igual ao domínio de f e que compostas de bijeções é uma bijeção, segue que $h : \lambda \rightarrow \mathbb{R}/2\pi$ definida por $h = f \circ m \circ g$, é uma bijeção. \square

Definição 12. *Sejam \bar{x} e \bar{y} elementos de $\mathbb{R}/2\pi$, definimos $\overline{\bar{x} + \bar{y}} = \overline{x_1 + y_1}$, qualquer que seja $x_1 \in \bar{x}$ e qualquer que seja $y_1 \in \bar{y}$.*

Observe que quaisquer que sejam os reais x_1 e y_1 , pela combinação das definições 3 e 5, $\overline{x_1 + y_1}$ é elemento de $\mathbb{R}/2\pi$. Mas precisamos ainda mostrar que a operação de adição é independente da escolha particular de x_1 e y_1 . Isso será feito na proposição a seguir:

Proposição 13. *Sejam \bar{x} e \bar{y} dois elementos de $\mathbb{R}/2\pi$, então $\overline{x_1 + y_1} = \overline{x_2 + y_2}$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in \bar{x}$ e $y_1, y_2 \in \bar{y}$.*

Demonstração. Observe que se $x_1, x_2 \in \bar{x}$ e $y_1, y_2 \in \bar{y}$, então, pela Definição 3, temos:

$$x_1 \equiv x \pmod{2\pi}; \quad (26)$$

$$x_2 \equiv x \pmod{2\pi}; \quad (27)$$

$$y_1 \equiv y \pmod{2\pi}; \quad (28)$$

$$y_2 \equiv y \pmod{2\pi}. \quad (29)$$

Pela Definição 1, existem inteiros k_1, k_2, k_3, k_4 , tais que as equações (26) a (29) são respectivamente equivalentes a:

$$x_1 - x = k_1(2\pi); \quad (30)$$

$$x_2 - x = k_2(2\pi); \quad (31)$$

$$y_1 - y = k_3(2\pi); \quad (32)$$

$$y_2 - y = k_4(2\pi). \quad (33)$$

Somando as equações (30) e (32), obtemos

$$x_1 + y_1 - (x + y) = (k_1 + k_3)(2\pi). \quad (34)$$

Enquanto que, somando as equações (31) e (33), tem-se

$$x_2 + y_2 - (x + y) = (k_2 + k_4)(2\pi). \quad (35)$$

Finalmente, subtraindo a equação (34) da (35) resulta

$$x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) = (k_1 + k_3 - k_2 - k_4)(2\pi). \quad (36)$$

Como $k_1 + k_3 - k_2 - k_4 \in \mathbb{Z}$, segue da equação (36) que $x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{2\pi}$. Por fim, usando a Proposição 6 na última equação, segue que $\overline{x_1 + y_1} = \overline{x_2 + y_2}$. \square

A próxima proposição demonstrará que diversas propriedades da adição em \mathbb{R} continuam válidas na adição em $\mathbb{R}/2\pi$.

Proposição 14. *A operação de adição em $\mathbb{R}/2\pi$ é associativa, comutativa, $\bar{0}$ é o único elemento neutro e todo elemento de $\mathbb{R}/2\pi$ possui um único elemento oposto.*

Demonstração. Sejam \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} elementos quaisquer do conjunto $\mathbb{R}/2\pi$, então:

Propriedade associativa: $\overline{\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})} = \overline{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}} = \overline{\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})} = \overline{(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}} = \overline{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}} = \overline{(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}}$, em que a primeira, terceira e quarta igualdades decorrem da Definição 12 e a segunda, decorre da propriedade associativa dos números reais.

Propriedade comutativa: $\overline{\bar{a} + \bar{b}} = \overline{\bar{a} + \bar{b}} = \overline{\bar{b} + \bar{a}} = \overline{\bar{b} + \bar{a}}$, em que a primeira e última igualdades decorrem da Definição 12 e a segunda, decorre da propriedade comutativa dos números reais.

$\bar{0}$ é o único elemento neutro para a adição: $\overline{\bar{a} + \bar{0}} = \overline{\bar{a} + \bar{0}} = \bar{a}$, sendo que a primeira igualdade deriva da Definição 12 e a segunda, do elemento neutro dos números reais.

Para provar que $\bar{0}$ é o único elemento neutro, suponha a existência de um elemento $\bar{d} \in \mathbb{R}/2\pi$ tal que $\overline{\bar{a} + \bar{d}} = \bar{a}$, qualquer que seja $\bar{a} \in \mathbb{R}/2\pi$. Então, $\bar{d} = \bar{d} + \bar{0} = \bar{0}$, em que a primeira igualdade deriva do fato de $\bar{0}$ ser elemento neutro em $\mathbb{R}/2\pi$ e a segunda, decorre da hipótese feita sobre \bar{d} .

Existência e unicidade do oposto: Para cada elemento de $\mathbb{R}/2\pi$ fixado: Fixe $\bar{a} \in \mathbb{R}/2\pi$, então defina $\bar{a}' = \{x \in \mathbb{R}; x \equiv -a \pmod{2\pi}\}$. Observe que $-a \equiv -a \pmod{2\pi}$ pela Proposição 2 e, portanto, $-a \in \bar{a}'$. Segue, então, que $\overline{\bar{a} + \bar{a}'} = \overline{\bar{a} + (-a)} = \overline{a + (-a)} = \bar{0}$, em que a primeira igualdade decorre da Definição 12 e a outra segue da propriedade do elemento oposto em \mathbb{R} . E, para provar a unicidade, suponha a existência de $\bar{b}' \in \mathbb{R}/2\pi$ tal que $\overline{\bar{a} + \bar{b}'} = \bar{0}$. Então, $\bar{b}' = \bar{b}' + \bar{0} = \bar{b}' + (\bar{a} + \bar{a}') = (\bar{a} + \bar{b}') + \bar{a}' = \bar{0} + \bar{a}' = \bar{a}'$. As igualdades derivam, não exatamente nessa ordem, da Definição 12, do elemento neutro e das propriedades associativa e comutativa em $\mathbb{R}/2\pi$. \square

O argumento de prova do oposto, na última proposição, nos permite fazer a seguinte definição:

Definição 15. *Qualquer que seja $\bar{a} \in \mathbb{R}/2\pi$, o oposto de \bar{a} será definido pelo conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \equiv -a \pmod{2\pi}$ e será denotado por $-\bar{a}$.*

Proposição 16. *Qualquer que seja $\bar{a} \in \mathbb{R}/2\pi$, $-\bar{a} = \overline{-a}$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$ e $x \in -\bar{a}$, então, pela Definição 15, $x \equiv -a \pmod{2\pi}$. Segue, usando a Proposição 6, que

$$x \in \overline{(-a)}. \quad (37)$$

Reciprocamente, se $x \in \overline{(-a)}$ então, pela Proposição 6, $x \equiv -a \pmod{2\pi}$. Usando, novamente, a Definição 15, segue que:

$$x \in -\bar{a}. \quad (38)$$

Finalmente, das relações (37) e (38), segue que $-\bar{a} = \overline{(-a)}$. \square

Os resultados a seguir mostram propriedades da adição em $\mathbb{R}/2\pi$ que não são satisfeitas em \mathbb{R} .

Proposição 17. *Se $\bar{x} + \bar{x} = \bar{0}$, então $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{x} = \bar{\pi}$.*

Demonstração. Observe que $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{x} = \bar{\pi}$ cumprem a condição $\bar{x} + \bar{x} = \bar{0}$. Para provar que essa condição é cumprida apenas por $\bar{0}$ ou $\bar{\pi}$, seja \bar{y} um elemento de $\mathbb{R}/2\pi$ tal que $\bar{y} + \bar{y} = \bar{0}$. Seja \bar{y}' o representante de \bar{y} no intervalo $(-\pi, \pi]$. Então $\bar{y}' + \bar{y}' = \bar{0}$, ou seja $\overline{y' + y'} = \bar{0}$ e portanto $y' + y' \equiv 0 \pmod{2\pi}$, sendo a última relação equivalente a $y' + y' = 2k\pi$ ou ainda a $y' = k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Como $y' \in (-\pi, \pi]$, temos que $k = 0$ ou $k = 1$, o que mostra que $y' = 0$ ou $y' = \pi$. Mas $\bar{x} = \bar{y}'$ e portanto $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{x} = \bar{\pi}$. \square

Esta proposição significa que em $\mathbb{R}/2\pi$ há dois elementos distintos cujo oposto aditivo é ele mesmo, a saber $\bar{\pi}$ e $\bar{0}$. Enquanto em \mathbb{R} , apenas o elemento 0 possui essa propriedade.

Corolário 18. *$\bar{x} - \bar{y} = \bar{\pi}$ se, e somente se, $\bar{y} - \bar{x} = \bar{\pi}$*

Demonstração. De fato, supondo $\bar{x} - \bar{y} = \bar{\pi}$, então $\bar{y} - \bar{x} = \overline{-\pi}$ e como $\overline{-\pi} = \bar{\pi}$, segue que $\bar{y} - \bar{x} = \bar{\pi}$. A recíproca se prova com o mesmo argumento, trocando x por y e y por x . \square

Proposição 19. *Se $\delta \in \mathbb{R}$, então $\overline{\pi - \delta} = \overline{-\delta - \pi}$*

Demonstração. Para ver isto, basta observar que $\pi - \delta \equiv -\delta - \pi \pmod{2\pi}$ para todo $\delta \in \mathbb{R}$. \square

Sendo essas as propriedades de $\mathbb{R}/2\pi$ usadas nas demonstrações do Capítulo 2, objetivo deste Apêndice, encerramos a lista de propriedades desse conjunto convidando o leitor a demonstrar outras que achar pertinente.

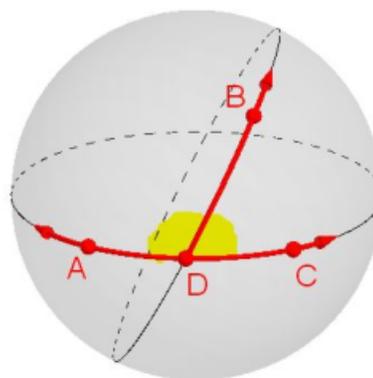
Apêndice C. Algumas resoluções apresentadas pelos alunos

Apresentaremos neste apêndice, a transcrição *ipsis litteris* de um conjunto de resoluções feitas pelos alunos participantes da aplicação da sequência didática. A transcrição será feita na cor azul para facilitar a leitura, mantendo a grafia original. Nosso objetivo é propiciar uma análise qualitativa da evolução da compreensão dos conceitos apresentados na sequência didática e do desenvolvimento de habilidades de argumentação dedutiva. A menos que sejamos explícitos do contrário, a disposição dos alunos durante a aplicação da sequência didática foi de quatro grupos por sala de, no máximo, três integrantes.

1. Questão apresentada no Momento 3 da sequência didática

A figura abaixo representa as retas esféricas distintas $\odot AD$ e $\odot DB$. Contidas na primeira estão representadas as semirretas opostas \overrightarrow{DA} e \overrightarrow{DC} . Contida na segunda, está representada a semirreta \overrightarrow{DB} .

Monte uma estratégia que possibilite uma argumentação dedutiva que demonstre que a soma das medidas dos ângulos $\sphericalangle ADB$ e $\sphericalangle CDB$ é π . Será nosso resultado (T_2).



1.1 Primeira tentativa

Argumentação (i): A soma das medidas dos ângulos $\sphericalangle ADB$ e $\sphericalangle CDB$ é π .

Argumentação (ii): A, B, C estão longe $\frac{\pi}{2}$ de D.

$$\text{Mas } \widehat{AB} + \widehat{BC} = \pi.$$

A argumentação (i) foi apresentada por um grupo e, a argumentação (ii) por outro grupo da mesma turma (turma A). Estas duas "argumentações" mostram as dificuldades enfrentadas pelos alunos nesse estágio da aplicação da sequência didática. Estas respostas, mesmo não se aproximando ainda da resposta esperada, foram elogiadas pelo professor, sendo, em seguida, apontadas as adequações mínimas necessárias à validade do argumento, quais sejam, justificar cada passo nos axiomas, definições ou teoremas já provados. Também percebemos ser necessário adequar a técnica de argumentação e, então, propomos que os alunos enumerassem os argumentos em uma coluna e justificassem cada argumento em outra coluna.

1.2 Segunda tentativa

Argumentação:

- (1) Marque os pontos E, F, G à $\frac{\pi}{2}$ do vértice.
- (2) E e G são antípodas
- (3) E, F, G estão na mesma reta.
- (4) $m\widehat{EF} + m\widehat{FG} = m\angle ADB + m\angle CDB$
- (5) $m\angle ADB + m\angle CDB = \pi$

Justificativa de cada passo:

- (1) Seguimos a definição 8.
- (2) E e G estão na reta esférica $\bigcirc AD$ e estão $\frac{\pi}{2}$ longe do ponto D. Quer dizer que se D é $\frac{2\pi}{2}$, E será $\frac{1\pi}{2}$. F será $\frac{3\pi}{2}$ - por exemplo.
- (3) Seguimos os axiomas 3 e 4.
- (4) Seguimos a definição 8.
- (3) É porque a $d^e(E, G) = \pi$.

A argumentação apresentada na segunda tentativa, por um grupo da turma (B), mostra como essa técnica de enumeração impulsionou os alunos à justificar cada passo da argumentação. Além disto, a discussão com a turma das primeiras tentativas lhes trouxe as primeiras noções do formato da argumentação, conforme discutido acima. Resoluções como esta foram muito elogiadas pelo professor, sem no entanto deixar de apontar os erros de grafia e a necessidade de uma reação sucinta e clara.

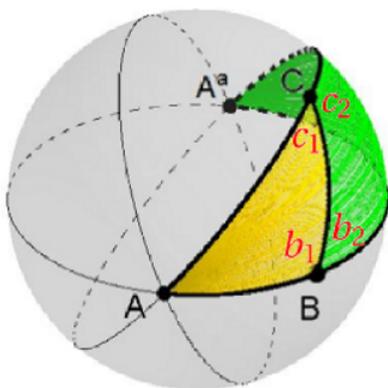
No intuito de prestigiar a resolução apresentada, não foi pedido ao grupo para eliminar nenhum item. Mas sugerimos correções e adequações, dentre as quais destacaremos:

- Mudar a redação (1) para: "Marque nas semirretas \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} e \overrightarrow{DC} , respectivamente, os pontos E, F e G, distando $\frac{\pi}{2}$ ponto D".

- Utilizar expressões como "pela definição 8" ou "de acordo com a definição 8" e "segue dos axiomas 3 e 4".
- Substituir na justificativa (2) a expressão "e estão $\frac{\pi}{2}$ longe do ponto D" por "e distam $\frac{\pi}{2}$ do ponto D".

2. Questão apresentada no Momento 5 da sequência didática

Prove o teorema (**T₃**): Dado um triângulo esférico $\triangle^e ABC$ ou a soma dos seus ângulos internos é maior que π ou o triângulo $\triangle^e A^a BC$ é tal que a soma dos seus ângulos internos é maior que π . (Dica: Use a figura sugerida abaixo.)



Argumentação:

- (1) $c_1 + c_2 = \pi$
- (2) $b_1 + b_2 = \pi$
- (3) $(c_1 + c_2) + (b_1 + b_2) = \pi$
- (4) $m \sphericalangle A + (c_1 + c_2) + (b_1 + b_2) + m \sphericalangle A^a > 2\pi$
- (5) A soma dos ângulos dos triângulos $\triangle^e ABC$ e $\triangle^e A^a BC$ é maior que 2π .
- (6) Ou a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle^e A^a BC$ é maior que π ou o triângulo $\triangle^e A^a BC$ é tal que a soma dos seus ângulos internos é maior que π .

Justificativa dos passos:

- (1) T_2
- (2) T_2
- (3) Juntando as contas (1) e (2).
- (4) Por causa da (3)
- (5) Por causa que na (4) somamos os ângulos dos dois triângulos.

(6) Segue diretamente do passo (5).

Essa resposta foi apresentada por um grupo da turma A. Destacamos que o grupo utilizou corretamente o Teorema T_2 para justificar a soma dos pares de ângulos adjacentes suplementares dos dois primeiros passos, bem como, no quarto passo, perceberam que a soma dos ângulos internos dos triângulos $\Delta^e ABC$ e $\Delta^e A^a BC$ é maior que 2π . Além disto, justificaram corretamente cada passo com suas palavras, sendo, portanto, tal resolução considerada correta, apenas recomendando um maior cuidado com a pontuação final.

É importante observar que dos oito grupos formados nas duas turmas, cinco grupos deram uma resposta próxima à apresentada acima, enquanto três grupos necessitaram de auxílio para elaborar corretamente a demonstração.

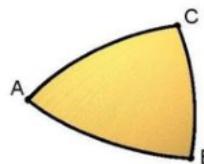
3. Questionário final - Questão 6

A evolução do pensamento e escrita da argumentação dedutiva está muito bem representada pela resposta dada por um aluno⁴ referente a esta questão. Nesta, o aluno ensaiou uma argumentação em que justificada cada passo no decorrer da argumentação, se aproximando das argumentações presentes na maioria das obras de Matemática.

Apresentamos a seguir a questão 6, constante no questionário final, bem como a resposta dada por um estudante participante da pesquisa.

Utilizando o método dedutivo, amplamente utilizado nas aulas das sequência didática, prove justificando os passos nas definições, axiomas ou teoremas do seu encarte, que:

Qualquer que seja o triângulo esférico ABC é válida a seguinte propriedade:
 $2\pi > m\widehat{AB} + m\widehat{AC} + m\widehat{BC}$



Argumentação:

- (1) Seja $\Delta^e A'B'C'$ o triângulo esférico polar do triângulo esférico $\Delta^e ABC$.
- (2) Usando T_4 em (1), resulta: $\pi < m\angle A' + m\angle B' + m\angle C'$
- (3) Mas, usando T_5 em (2), temos: $\pi < \pi - m\widehat{BC} + \pi - m\widehat{AC} + \pi - m\widehat{AB}$

⁴ Resposta semelhante a esta foi percebida em outros nove alunos participantes da pesquisa, sendo ainda apresentada uma boa redação por outros seis alunos.

(4) Resolvendo a equação do item (3), chega-se ao resultado esperado.

Ou seja: $2\pi > m\widehat{AB} + m\widehat{AC} + m\widehat{BC}$.

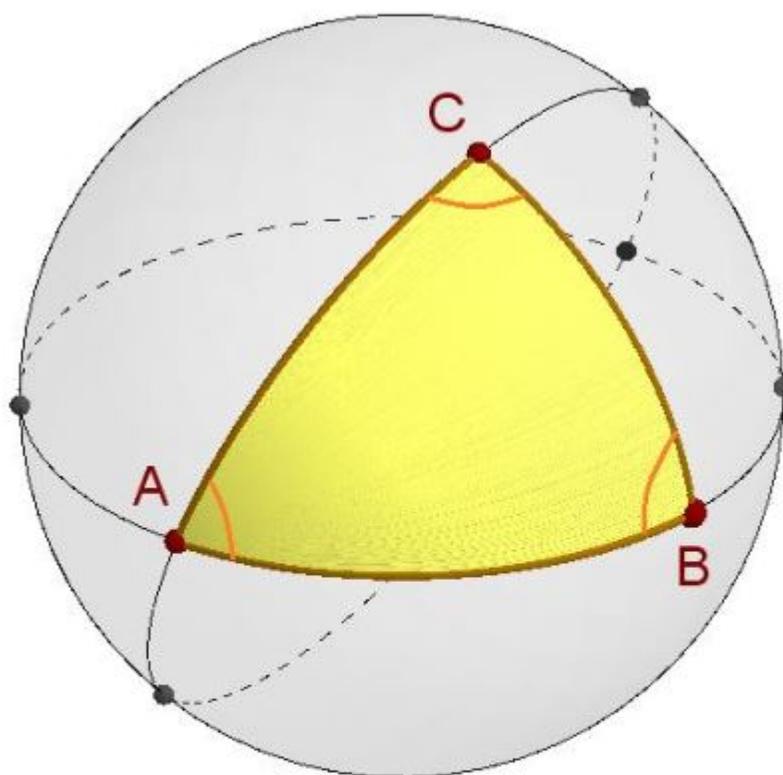
Rascunho:

$$\begin{aligned} \pi &< \pi - m\widehat{BC} + \pi - m\widehat{AC} + \pi - m\widehat{AB} \\ + m\widehat{BC} + m\widehat{AC} + m\widehat{AB} &< +\pi + \pi + \pi - \pi \\ m\widehat{AB} + m\widehat{AC} + m\widehat{BC} &< 2\pi \\ 2\pi &> m\widehat{AB} + m\widehat{AC} + m\widehat{BC}. \end{aligned}$$

Observamos que a ideia da demonstração está clara, de redação concisa. Apresenta alguns erros de pontuação final e, o uso da palavra "equação" foi usado ao invés do termo correto "inequação". No entanto, tais incongruências não invalidam o argumento.

Anexo A. Sequência Didática

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESFÉRICA.



$$m \sphericalangle A + m \sphericalangle B + m \sphericalangle C = ?$$

Ensino Médio

Egino Valcanaia
Márcio de Jesus Soares

Palavras Iniciais

A Matemática é uma construção do intelecto humano e seus conhecimentos são desenvolvidos com auxílio de observações práticas, conjecturas teóricas e, principalmente, pela aplicação rigorosa do raciocínio dedutivo, o qual usa como balizas um pequeno conjunto de informações tomadas como verdadeiras e constrói os demais conhecimentos através do encadeamento lógico dessa lista de informações. A Geometria, como parte da Matemática, teve seu início com medições de terras feitas pelos egípcios há mais de 4.000 anos e seu desenvolvimento teórico se deu, inicialmente, pelos matemáticos gregos Tales de Mileto e Euclides de Alexandria.

Tales de Mileto é considerado o primeiro a dar um tratamento dedutivo à geometria prática dos egípcios em 600 a.C e Euclides é famoso pela obra Os Elementos em que compila, organiza e dá um tratamento axiomático dedutivo ao conhecimento de Geometria do mundo grego de 300 a.C. E a metodologia axiomática dedutiva adotada por Euclides, com aprimoramentos, é a base da Matemática moderna.

No raciocínio dedutivo, a conclusão deriva necessariamente das premissas, ou seja, todo conhecimento está contido nas premissas e através do método de raciocínio dedutivo deduzem-se informações que estavam ocultas nas premissas, por vezes, inimagináveis. As fórmulas matemáticas de Geometria Euclidiana Plana, conhecidas dos alunos, por exemplo, todas elas derivam de um pequeno conjunto de informações básicas, os chamados axiomas da Geometria Euclidiana Plana.

A sequência didática organizada nessas vinte páginas, revisitará conceitos importantes da Geometria Euclidiana Plana, mas principalmente penetrará na Geometria Esférica, em que os objetos geométricos, por vezes, se comportam de forma totalmente distinta dos da Geometria Euclidiana Plana.

Blumenau, setembro de 2021.

Egino Valcanaia (mestrando)

Dr. Márcio de Jesus Soares (orientador)

Resumo teórico do 1º momento

- Trabalhamos a ideia de reta na superfície plana. Observamos que a menor distância entre dois pontos dessa superfície é um segmento de reta.
- Observamos linhas em superfícies não planas que mantêm a propriedade da menor distância entre dois pontos.
- Comparamos ângulos planos por sobreposição de uma parte próxima ao vértice.
- Analisamos o 4º postulado de Euclides: "Todos os ângulos retos são iguais". E observamos intuitivamente sua validade para o plano através da sobreposição de ângulos retos construídos por alunos.
- Assistimos a uma breve exposição sobre o matemático grego Euclides e sua obra Os Elementos. Discutiui-se o significado do termo "postulado" e foi apresentado o 1º postulado (adaptado) de Euclides: "Por dois pontos passa uma e apenas uma reta".

Atividades de Investigação e Compreensão do 1º momento

1. Com base nas atividades práticas desenvolvidas, trace, em cada figura a seguir uma linha (aproximada) de menor distância entre os pontos G e H . Essa linha deve ficar completamente contida na região colorida (verde). Essa linha é única?

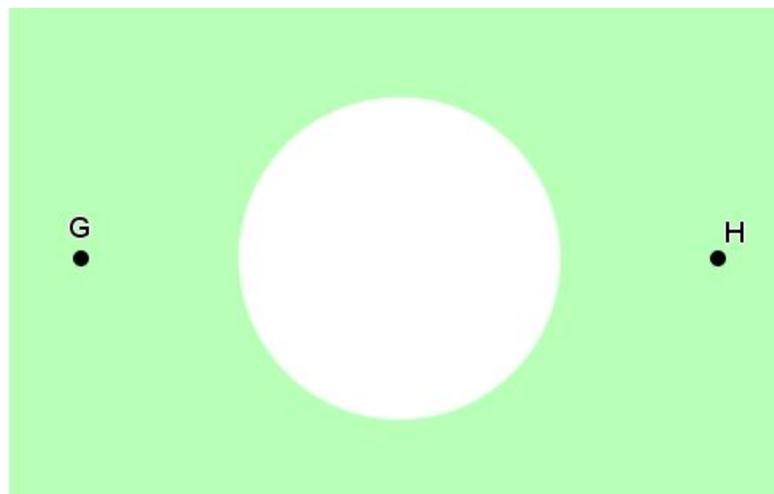


Figura 3



Figura 4

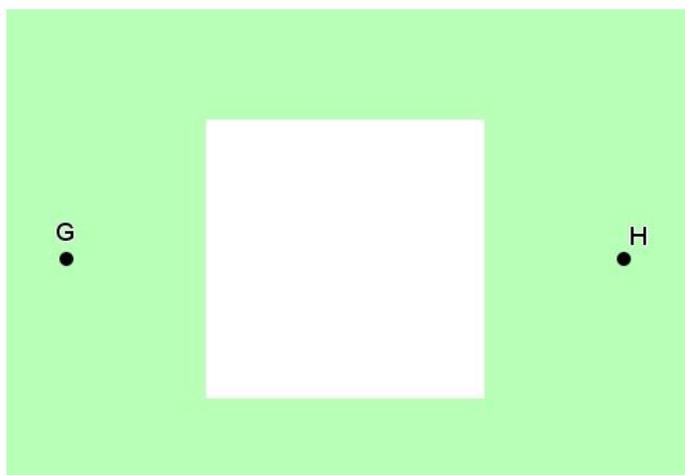


Figura 5

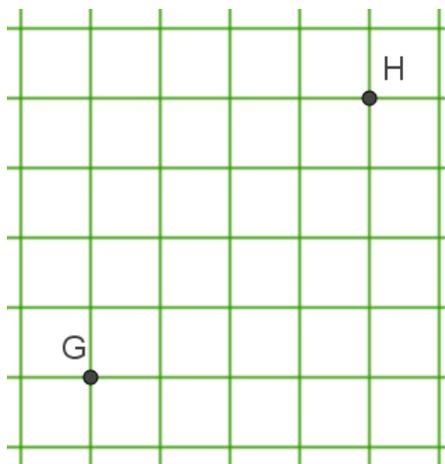
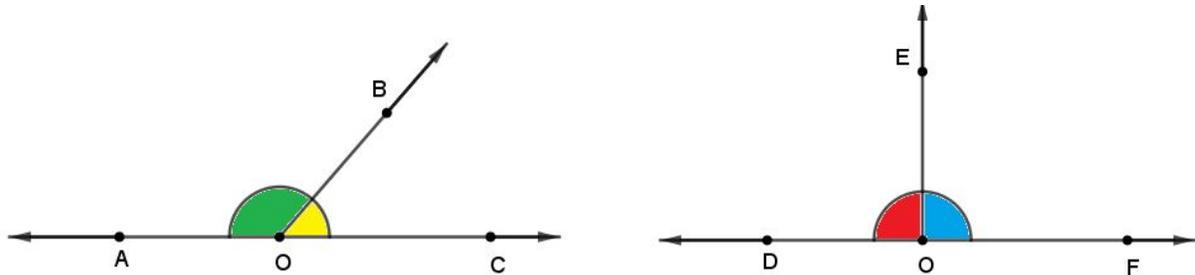


Figura 6

2. **Definição.** Quando uma reta corta outra formando ângulos adjacentes iguais, cada um dos dois ângulos é dito ângulo reto⁵.



Com base nessa definição, visualmente, percebemos que o par de ângulos planos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ não são retos, enquanto que o par $\angle EOD$ e $\angle EOF$ são retos.

Justifique essa afirmação, com base na definição dada.

Resumo teórico do 2º momento

Nessa aula apresentamos a teoria inicial de Geometria Esférica, isto é, os objetos geométricos não serão planos, estarão contidos na superfície esférica, que denominaremos simplesmente de esfera.

Teremos três objetos geométricos não definidos: **esfera, ponto e reta esférica**. Isto significa que não tentaremos explicar rigorosamente o que é uma esfera, um ponto ou uma reta esférica, mas teremos regras rigorosas chamadas de axiomas que ditam o seu comportamento e que estas regras serão seguidas ao pé da letra.

Os pontos serão representados por letras latinas maiúsculas.

Axioma 1. Uma esfera e uma reta esférica são conjuntos de pontos. Existem, no mínimo, dois pontos distintos na esfera.

Axioma 2. Existe uma bijeção entre os pontos de uma reta esférica e o conjunto $[0, 2\pi)$.

⁵ Baseada em Os Elementos de Euclides, tradução de Irineu Bicudo, p.97.

Observação. Salvo menção contrária, se um ponto foi denotado por uma letra maiúscula, o elemento pertencente a $[0, 2\pi)$, associado pela bijeção do axioma 2 a esse ponto, será denotado pela respectiva letra minúscula.

Definição 1. A distância esférica entre dois pontos genéricos A e B , denotada por $d^e(A, B)$, é definida por $d^e(A, B) = \min \{ |a - b|, 2\pi - |a - b| \}$.

Definição 2. Dizemos que B está entre A e C se:

- i) A, B e C pertencem à mesma reta esférica.
- ii) $|a - c| \neq \pi$.
- iii) $B \neq A$ e $B \neq C$.
- iv) $d^e(A, B) + d^e(B, C) = d^e(A, C)$.

Definição 3. Dois pontos genéricos A e B são ditos antípodas se existe uma reta esférica que passa por eles e se $|a - b| = \pi$. Usaremos a notação X^a para designar o antípoda de um ponto X .

Axioma 3. Todo ponto possui exatamente um antípoda.

Axioma 4. Por dois pontos distintos quaisquer da esfera sempre passa uma reta esférica. Se os pontos não forem antípodas, então a reta esférica é única.

Definição 4. Se A e B são distintos e são tais que $|a - b| \neq \pi$, então define-se o segmento de reta esférica de extremos A e B como o conjunto formado pelos pontos A, B e os pontos entre A e B . Este será representado pela notação \widehat{AB} e sua medida será dada por $d^e(A, B)$.

Axioma 5. Duas retas esféricas distintas sempre possuem, no mínimo, um ponto em comum.

Axioma 6. Para toda reta esférica existe um ponto tal que a reta esférica é o conjunto de pontos que distam $\frac{\pi}{2}$ desse ponto.

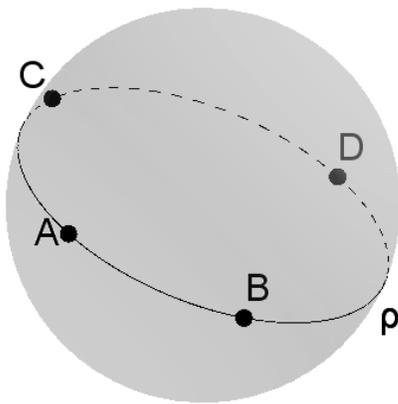
Definição 5. O ponto a que se refere o axioma 6 será denominado de polo da reta esférica associada.

Observação. A bijeção garantida pelo axioma 2 para cada reta esférica está presente, direta ou indiretamente, nos axiomas 3, 4 e 6. Qualquer valor real que corresponde a um ponto por

essa função, também será chamado de coordenada do ponto. Por outro lado, sempre que usarmos o termo coordenadas estaremos nos referindo a valores de uma bijeção que obedece aos referidos axiomas.

Atividades de Investigação e Compreensão do 2º momento

1. Na reta esférica ρ , representada abaixo, os pontos A, B, C e D dessa reta estão associados a números de $[0, 2\pi)$, segundo a bijeção $f : \rho \rightarrow [0, 2\pi)$, garantida pelo axioma 2, da seguinte forma: $f(A) = \frac{\pi}{6}$, $f(B) = \frac{3\pi}{6}$, $f(C) = \frac{5\pi}{3}$ e $f(D) = \frac{7\pi}{6}$.



a) A distância esférica entre os pontos A e B .

b) A distância esférica entre os pontos A e C .

c) A distância esférica entre os pontos B e C .

d) A distância esférica entre os pontos A e D .

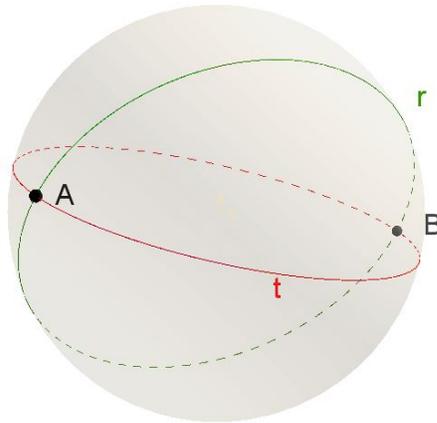
2. Referente à questão anterior, assinale a única alternativa que apresenta um par de pontos antípodas:

a) A e B b) A e C c) A e D d) B e C

3. Ainda em relação à questão 1, podemos afirmar que a medida do segmento de reta esférica \widehat{AB} é:

a) $\frac{3\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{2\pi}{6}$

4. A figura a seguir representa duas retas esféricas distintas, denominadas de r e t , com A e B distintos e pertencentes a ambas.



Explique porque as coordenadas de A e B em relação à reta r não podem ser, respectivamente, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$:

Dicas: Calcule $|a - b|$ e releia as redações da definição 3 e do axioma 4.

5. Em relação à figura da questão anterior, suponha que a coordenada de A em relação à reta r seja $\frac{\pi}{4}$, qual deverá ser a coordenada de B em relação à essa reta para que cumpra o axioma 4?

6. Ainda em relação à figura da questão 4, suponha que certo estudante da turma tenha atribuído, corretamente, as seguintes coordenadas:

- Em relação à reta r , atribuiu a coordenada $\frac{\pi}{2}$ ao ponto A e a coordenada $\frac{3\pi}{2}$ ao ponto B .
- Em relação à reta t , atribuiu a coordenada $\frac{4\pi}{7}$ ao ponto A .

O professor chamou outro estudante para atribuir a coordenada ao ponto B em relação à reta t , seguindo a regra imposta pelo axioma 3.

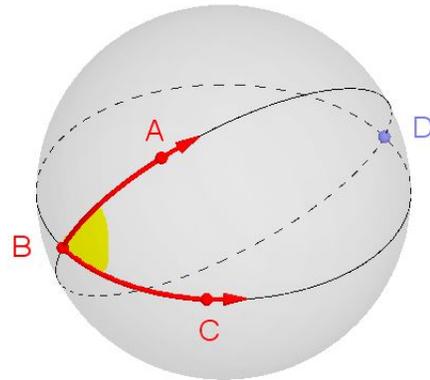
Qual coordenada esse estudante deve atribuir?

Resumo teórico do 3º momento

Definição 6. Dados três pontos distintos A , A^a e B . A união dos segmentos de reta \widehat{AB} e $\widehat{BA^a}$, excluído o ponto A^a , será denominada de semirreta esférica de origem A e que passa pelo ponto B .

Definição 7. Denomina-se ângulo esférico à união de duas semirretas de mesma origem não contidas numa mesma reta esférica.

Observação. A figura ao lado representa um ângulo de vértice B e semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} como lados. Esse ângulo esférico será denotado por $\sphericalangle ABC$.



Axioma 7. Suponha que os ângulos esféricos $\sphericalangle A_1B_1C_1$ e $\sphericalangle A_2B_2C_2$ sejam tais que $\widehat{A_1B_1} \equiv \widehat{A_2B_2}$ e $\widehat{B_1C_1} \equiv \widehat{B_2C_2}$, então $\sphericalangle A_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle A_2B_2C_2$ se, e somente se, $\widehat{A_1C_1} \equiv \widehat{A_2C_2}$.

Definição 8. Dado um ângulo esférico $\sphericalangle ABC$. Escolha os pontos D e E nas semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} , respectivamente, tais que $d^e(B, D) = d^e(B, E) = \frac{\pi}{2}$. Então a medida do ângulo esférico $\sphericalangle ABC$ é igual a medida do segmento esférico \widehat{DE} .

Definição 9. Um ângulo esférico $\sphericalangle ABC$ junto a B^a é denominado de fuso esférico de vértices B e B^a ou ainda fuso esférico de ângulo $\sphericalangle ABC$.

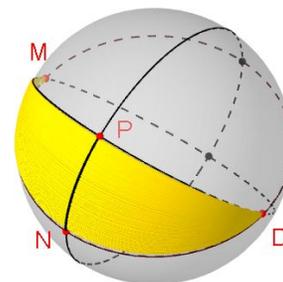
Notação:

- Semirreta de origem B que passa pelo ponto A : \overrightarrow{BA}
- Reta esférica que passa pelo pontos não antípodas A e B : $\bigcirc AB$ ou $\bigcirc BA$
- Ângulo esférico formado pelas semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} : $\sphericalangle ABC$ ou $\sphericalangle B$
- Congruente: \equiv

Observação. Dois segmentos serão ditos congruentes se possuírem a mesma medida. Ângulos de mesma medida também serão ditos congruentes.

Atividades de Investigação e Compreensão do 3º momento

1. A figura ao lado representa um fuso esférico de vértices M e D , onde $D = M^a$. Os pontos N e P pertencem a lados distintos do ângulo $\sphericalangle NMP$ e são tais que $d^e(M, P) = d^e(M, N) = \frac{\pi}{2}$.



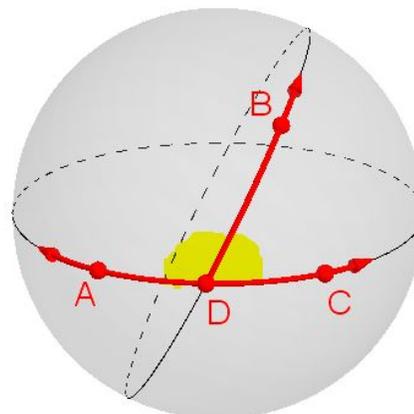
(a) Qual é a medida do segmento \widehat{DN} ? Explique.

(b) Qual é a medida do segmento \widehat{DP} ? Explique.

(c) Demonstre que o ângulo $\sphericalangle NDP$ tem mesma medida do ângulo $\sphericalangle NMP$.

2. Na questão anterior, demonstramos o seguinte teorema (**T₁**): Os dois ângulos de um fuso esférico possuem a mesma medida.

3. A figura abaixo representa as retas esféricas distintas $\odot AD$ e $\odot DB$. Contidas na primeira estão representadas as semirretas opostas \overrightarrow{DA} e \overrightarrow{DC} . Contida na segunda, está representada a semirreta \overrightarrow{DB} .



Monte uma estratégia que possibilite uma argumentação dedutiva que demonstre que a soma das medidas dos ângulos $\sphericalangle ADB$ e $\sphericalangle CDB$ é π . Será nosso resultado (**T₂**).

4º momento: Avaliação

Nas aulas anteriores, revisitamos alguns conceitos importantes da Geometria Euclidiana Plana e, partindo de propriedades básicas da superfície esférica, construímos as primeiras noções dessa Geometria. Agora vamos fazer uma pausa para refletir acerca do que foi estudado. Dessa forma, utilizaremos essa aula para tirar dúvidas, num primeiro momento, e avaliar a sequência didática em seguida.

Com os resultados da avaliação, o professor poderá ajustar a metodologia, se necessário, para as próximas aulas, rever conceitos, se a avaliação assim o demonstrar, e readequar a construção de conceitos das aulas seguintes. Portanto, suas respostas serão muito importantes para que a sequência didática proporcione aos alunos do 3º ano do Ensino Médio uma compreensão crítica dos conceitos geométricos e do raciocínio matemático aplicado.

Ao final da sequência didática, avaliaremos novamente a sequência didática para que possamos fazer as últimas adequações, contribuindo assim para a qualidade da sequência didática de Introdução à Geometria Esférica no Ensino Médio.

Resumo teórico do 5º momento

Definição 10: Sejam A , B e C três pontos que não estão na mesma reta esférica. A união dos três segmentos de reta \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} é denominado de triângulo esférico ABC , de vértices A , B e C e lados \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} . Os ângulos esféricos $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ e $\sphericalangle BAC$ serão denominados de ângulos internos do triângulo e o triângulo será representado pela notação $\Delta^e ABC$.

Atividades de Investigação e Compreensão do 5º momento

1. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo plano é 180° ou, o que é equivalente, π radianos. Recorte os ângulos de um triângulo ΔABC congruente ao triângulo $\Delta A^*B^*C^*$ da Figura 7 abaixo e, na Figura 8, junte os três ângulos em torno do ponto O formando um novo ângulo.

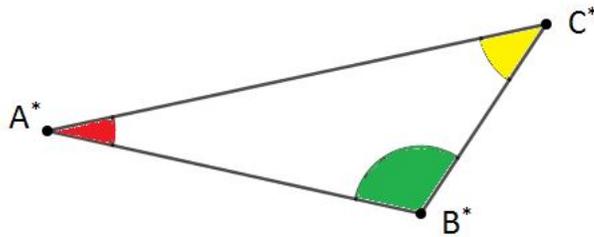


Figura 7 – Triângulo Plano

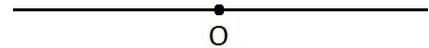
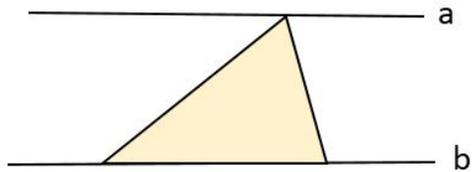
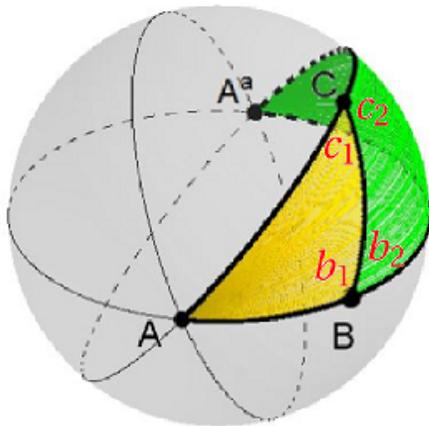


Figura 8 – Soma dos Ângulos.

2. Usando o fato de que ângulos alternos internos formados por paralelas são congruentes, prove que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo euclidiano plano é 180° .



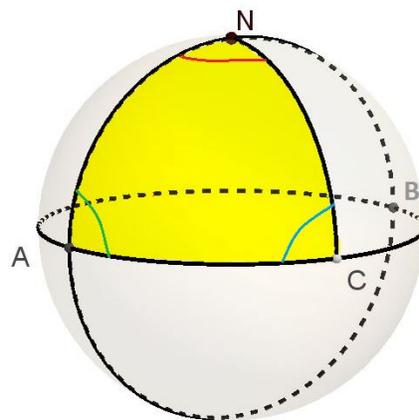
3. Prove o teorema (T₃): Dado um triângulo esférico $\Delta^e ABC$ ou a soma dos seus ângulos internos é maior que π ou o triângulo $\Delta^e A^a BC$ é tal que a soma dos seus ângulos internos é maior que π . (Dica: Use a figura sugerida abaixo.)



4. Classifique as alternativas a seguir como verdadeiras (V) ou falsas (F) em relação ao teorema (T_3) demonstrado na questão anterior:

- a() T_3 nos mostra que é falso que a soma dos ângulos internos num triângulo euclidiano plano é 180° .
- b() T_3 nos mostra que é falso que a soma dos ângulos internos num triângulo euclidiano plano é π radianos.
- c() T_3 nos ensina que propriedades que são válidas para a Geometria Euclidiana Plana nunca valem para a Geometria Esférica.
- d() T_3 nos ensina que propriedades que são válidas para a Geometria Euclidiana Plana podem não valer para a Geometria Esférica.

5. Três pontos A , N e C são vértices de um triângulo esférico com a propriedade de que os segmentos \widehat{AN} , \widehat{NC} , \widehat{AC} são congruentes e medem $\frac{\pi}{2}$. Quanto mede cada ângulo interno desse triângulo e qual é a soma dos ângulos internos desse triângulo?



Resumo teórico do 6º momento

Na aula anterior, relembramos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo plano é 180° (ou, o que é equivalente, π radianos) e vimos que os triângulos esféricos não possuem essa propriedade. Isso significa que sempre que usamos essa propriedade na resolução de um problema plano, o mesmo não pode ser feito para problemas equivalentes em ambiente esférico.

Teorema (T_4): A soma das medidas dos ângulos de um triângulo esférico é maior que π e menor que 3π .

Este resultado não será demonstrado em nossas aulas, pois exigiria muito do nosso tempo, mas é importante salientar que pode ser rigorosamente demonstrado utilizando as regras iniciais dadas (os axiomas). Ele nos ensina que se escolhermos dois triângulos esféricos quaisquer,

a soma dos ângulos de cada triângulo, possivelmente não será igual, mas com certeza estará no intervalo $(\pi, 3\pi)$.

Definição 11. Seja $\Delta^e ABC$ um triângulo esférico. Definimos o triângulo $\Delta^e A'B'C'$, chamado de triângulo polar de $\Delta^e ABC$, como segue⁶:

- A' é o polo da reta $\odot BC$ que está do mesmo lado de A em relação à reta $\odot BC$.
- B' é o polo da reta $\odot AC$ que está do mesmo lado de B em relação à reta $\odot AC$.
- C' é o polo da reta $\odot AB$ que está do mesmo lado de C em relação à reta $\odot AB$.

A Figura 9 a seguir apresenta a reta esférica $\odot AB$, um polo de $\odot AB$ representado pelo ponto C' , que no caso está do mesmo lado de C em relação à reta dada. Já a figura 10 mostra o triângulo $\Delta^e ABC$ e o seu polar $\Delta^e A'B'C'$.

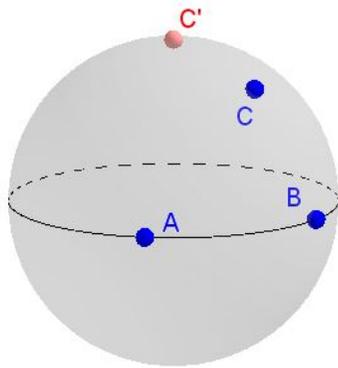


Figura 9

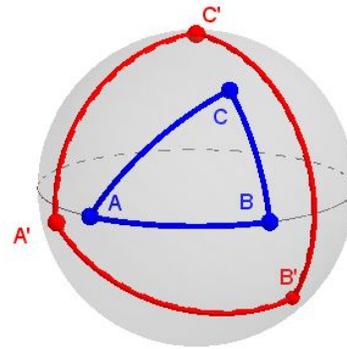


Figura 10

Teorema (T₅). Se $\Delta^e ABC$ é um triângulo esférico e $\Delta^e A'B'C'$ é o triângulo polar de $\Delta^e ABC$, então:

$$m \sphericalangle A' = \pi - m\widehat{BC}, \tag{39}$$

$$m \sphericalangle B' = \pi - m\widehat{AC}, \tag{40}$$

$$m \sphericalangle C' = \pi - m\widehat{AB}, \tag{41}$$

$$m\widehat{A'B'} = \pi - m \sphericalangle C, \tag{42}$$

$$m\widehat{A'C'} = \pi - m \sphericalangle B, \tag{43}$$

$$m\widehat{B'C'} = \pi - m \sphericalangle A. \tag{44}$$

⁶ A definição de triângulo polar deriva do Axioma 6.

Observação. T_5 , a exemplo de T_4 é um resultado muito importante cuja demonstração foge aos objetivos das nossas aulas. Esse teorema relaciona os ângulos de um triângulo dado com os lados do respectivo triângulo polar e, da mesma forma, relaciona os lados do triângulo dado com os ângulos do respectivo triângulo polar.

Atividades de Investigação e Compreensão do 6º momento

1. É possível provar que a soma dos lados de qualquer triângulo esférico não atinge valores muito altos, ao contrário dos triângulos planos.

Siga o roteiro abaixo para analisar essa questão:

Na figura ao lado está representado em vermelho um triângulo esférico ABC de interior amarelo. Também estão representadas as retas esféricas que contêm os lados \widehat{AB} e \widehat{AC} . Observe que estas retas se encontram em dois pontos, o ponto A e o ponto A^a .

a) Com base no Axioma 4 e nas definições 1 e 3, qual é a distância entre A e A^a ?

b) Com base em (a) segue que o lado \widehat{AB} (ou mesmo o lado \widehat{AC}) é menor que:

() $\frac{\pi}{2}$ () $\frac{\pi}{4}$ () π

c) Esse raciocínio sugere que a soma das medidas dos lados \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} é menor que No entanto, provaremos na próxima questão que o valor limitante é ainda menor.

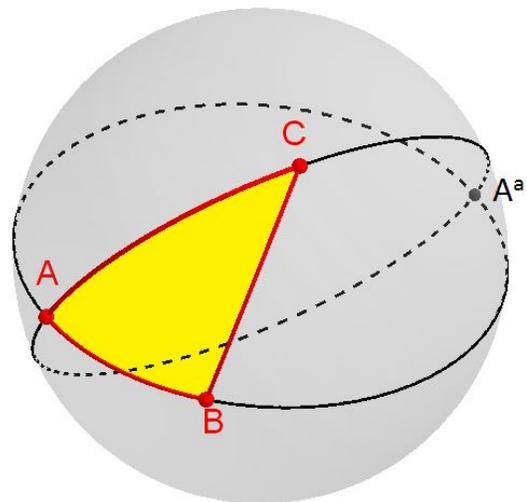


Figura 11

2. Acompanhe junto com o professor a demonstração do **Teorema (T₆)**: Qualquer que seja o triângulo esférico ABC tem-se que $m\widehat{AB} + m\widehat{AC} + m\widehat{BC} < 2\pi$.

3. Sabemos que na Geometria Euclidiana Plana a soma das medidas de dois lados quaisquer de um triângulo é maior do que a medida do terceiro lado. É a conhecida desigualdade triangular. Convidamos o aluno a investigar essa questão para os triângulos esféricos. Será esse resultado ainda válido?

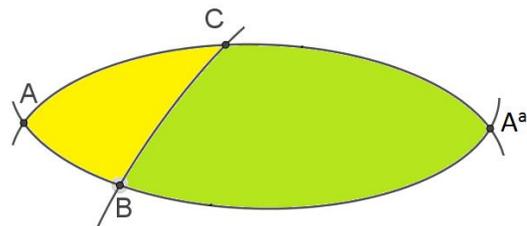


Figura 12 – Esboço do triângulo ABC , representado na Figura 11, com o respectivo triângulo cofuso A^aBC .

Observação: _____

4. Um triângulo esférico $\Delta^e DEF$ possui as seguintes medidas: $m\widehat{DE} = \frac{2\pi}{10}$ e $m\widehat{EF} = \frac{3\pi}{10}$.

Dentre as alternativas abaixo, assinale a única correta:

a() $m\widehat{DF} = \frac{\pi}{10}$

b() $m\widehat{DF} = \frac{4\pi}{10}$

c() $m\widehat{DF} = \frac{5\pi}{10}$

d() $m\widehat{DF} = \frac{8\pi}{10}$

5. Reescreva as seis relações do teorema T_5 para os triângulos $\Delta^e EFG$ e $\Delta^e E'F'G'$.

6. Reescreva as seis relações do teorema T_5 para os triângulos $\Delta^e PQR$ e $\Delta^e P'Q'R'$.

7. Reescreva as seis relações do teorema T_5 para os triângulos $\Delta^e APR$ e $\Delta^e A'P'R'$.

Resumo teórico do 7º momento.

Definição 12. Dois triângulos esféricos $\triangle^e ABC$ e $\triangle^e DEF$ são ditos congruentes se as seis condições seguintes forem satisfeitas:

- $m\widehat{AB} = m\widehat{DE}$
- $m\widehat{AC} = m\widehat{DF}$
- $m\widehat{BC} = m\widehat{EF}$
- $m\angle A = m\angle D$
- $m\angle B = m\angle E$
- $m\angle C = m\angle F$

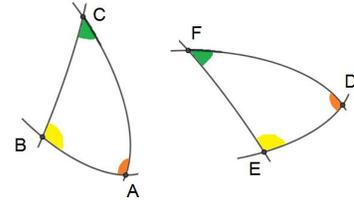


Figura 13

Dizemos que os lados e ângulos correspondentes são congruentes e escrevemos

$$\triangle^e ABC \equiv \triangle^e DEF.$$

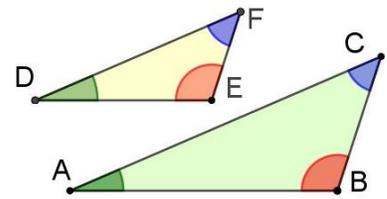
Atividades de Investigação e Compreensão do 7º momento

1. Para os triângulos planos quando as três primeiras condições da Definição 12 são satisfeitas, sabemos que serão satisfeitas as últimas três. Esse é o denominado caso LLL de congruência para triângulos planos. Será que os triângulos esféricos gozam dessa propriedade?

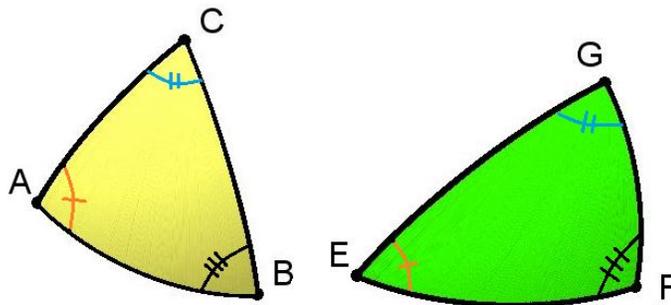
Argumente dedutivamente para provar o teorema **T₈**: Se um par de triângulos esféricos $\triangle^e ABC$ e $\triangle^e DEF$ são tais que $m\widehat{AB} = m\widehat{DE}$, $m\widehat{AC} = m\widehat{DF}$ e $m\widehat{BC} = m\widehat{EF}$, então $\triangle^e ABC \equiv \triangle^e DEF$.

(Dica: Faça um desenho ilustrativo e utilize o Axioma 7).

2. Sabemos que na Geometria Euclidiana Plana, se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ forem tais que os ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ forem, respectivamente, congruentes aos ângulos $\angle D$, $\angle E$ e $\angle F$, **NÃO SIGNIFICA**, necessariamente, que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ sejam congruentes.

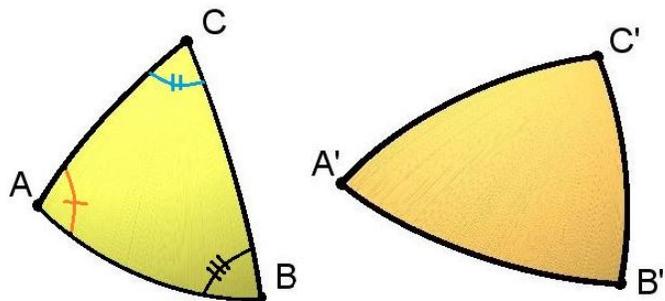


Vamos investigar essa questão para a Geometria Esférica? Ou seja, considere dois triângulos esféricos quaisquer, digamos, $\triangle^e ABC$ e $\triangle^e EFG$, tais que os ângulos $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle C$ sejam, respectivamente, congruentes aos ângulos $\sphericalangle E$, $\sphericalangle F$ e $\sphericalangle G$.

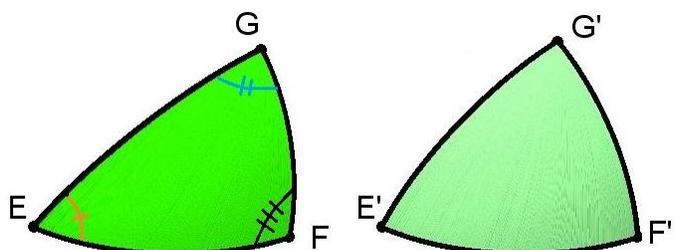


Siga as dicas propostas e complete, nas figuras, as medida sugeridas:

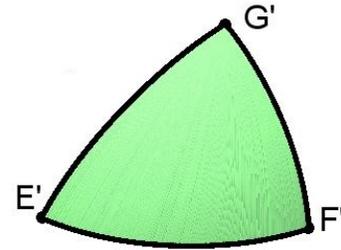
Dica 1. Use T_5 para relacionar os lados do triângulo $\triangle^e A'B'C'$ com os ângulos do triângulo $\triangle^e ABC$.



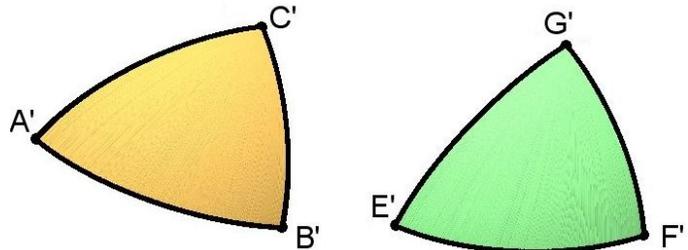
Dica 2. Use T_5 para relacionar os lados do triângulo $\triangle^e E'F'G'$ com os ângulos do triângulo $\triangle^e EFG$.



Dica 3. Observando seu resultado na dica 2, use as informações do enunciado para relacionar os lados do triângulo $\triangle^e E'F'G'$ com os ângulos do triângulo $\triangle^e ABC$.



Dica 4. Use suas conclusões acima para anotar as medidas dos lados dos triângulos $\triangle^e A'B'C'$ e $\triangle^e E'F'G'$ em função dos ângulos do triângulo $\triangle^e ABC$.

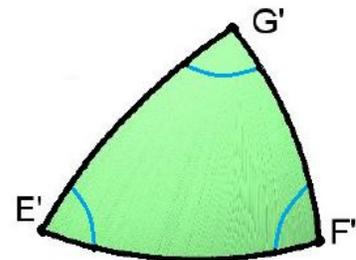


Dica 5. Observando sua conclusão na dica 4 e usando teorema **T₈** o que você conclui? Em particular, existe alguma relação entre os ângulos do triângulo $\triangle^e E'F'G'$ e os ângulos do triângulo $\triangle^e A'B'C'$?

Dica 6. Use suas conclusões da dica 5 para preencher corretamente as medidas **dos ângulos** do triângulo $\triangle^e E'F'G'$ em função dos ângulos do triângulo $\triangle^e A'B'C'$.

Em seguida, aplique o teorema **T₅** no triângulo da dica 6 e complete as sentenças abaixo em função das medidas dos lados do triângulo $\triangle^e ABC$:

- a) $m\widehat{EF} = \dots\dots\dots$
- b) $m\widehat{EG} = \dots\dots\dots$
- c) $m\widehat{FG} = \dots\dots\dots$



Dica 7. Usando o teorema **T₈** nas conclusões da dica 6, o que você pode afirmar em relação aos triângulos $\triangle^e ABC$ e $\triangle^e EFG$ do enunciado?

Logo, podemos enunciar o teorema **T₉**: Se dois triângulos esféricos, $\triangle^e ABC$ e $\triangle^e EFG$, são tais que os ângulos $m\angle A = m\angle E$, $m\angle B = m\angle F$ e $m\angle C = m\angle G$, então os triângulos $\triangle^e ABC$ e $\triangle^e EFG$ são.....

8º momento: Avaliação

Esta aula será reservada para a avaliação. A avaliação procurará aferir, através de um formulário, valor quanto ao alcance dos objetivos almejados com a sequência didática. Esse formulário, de forma isolada, não tem condições de cumprir tal tarefa, mas em conjunto com as observações realizadas durante a aplicação, com a aferição das anotações feitas pelos alunos, das perguntas e observações destes e das dificuldades enfrentadas para a compreensão dos conceitos tratados, bem como das respostas dadas no formulário do momento 4, será um instrumento de grande valia para a melhoria e validação da sequência didática apresentada.

Esse questionário não se aterá à memorização de resultados, mas ao desenvolvimento de habilidades de interpretação, da compreensão de que o método dedutivo produz resultados confiáveis, de que a intuição tem importância desde que seus resultados sejam colocados sob o crivo do método dedutivo. Dessa forma, é permitido que o aluno pesquise no encarte durante sua aplicação.

ALGUMAS OBSERVAÇÕES

Nesse conjunto de aulas, tivemos oportunidade de olhar para alguns conceitos de Geometria de forma crítica e investigativa. Revisitamos conceitos da Geometria Euclidiana Plana e construímos conceitos equivalentes de Geometria Esférica onde percebemos que em alguns casos as propriedades se mantinham nas duas geometrias e, em outros, as propriedades dos objetos geométricos eram totalmente distintas.

Vimos que, nas duas geometrias, as retas contém o caminho de menor distância entre dois pontos, mas, enquanto na Geometria Euclidiana Plana existem retas paralelas, sem pontos comuns, na Geometria Esférica, as retas se encontram em dois pontos antípodas.

Observe-se também que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° para a Geometria Euclidiana Plana, no entanto, na Geometria Esférica essa soma sempre assume um valor maior que 180° e menor que 540° (relembrando que 180° equivale a π radianos e 540° é equivalente a 3π radianos). Isto significa que o conhecimento de dois ângulos de um triângulo esférico não é suficiente para determinarmos o terceiro ângulo, ao contrário da Geometria Euclidiana Plana em que dado um $\triangle ABC$, conhecendo-se $m\angle A$ e $m\angle B$, tem-se que $m\angle C = \pi - m\angle A - m\angle B$.

Um ponto a ser destacado é que dado um triângulo esférico $\triangle^e ABC$, associado a ele sempre existem dois triângulos esféricos, $\triangle^e A^a BC$ e $\triangle^e A' B' C'$, noção que não existe para triângulos planos. O primeiro forma com $\triangle^e ABC$ o fuso esférico de ângulo $\sphericalangle A$, ou seja, os triângulos $\triangle^e ABC$ e $\triangle^e A^a BC$ são cofusos e como tal gozam de propriedades elencadas pelos teoremas **T₁** e **T₂**, bem como de relações entre seus lados, a saber: $m\widehat{AB} + m\widehat{BA^a} = \pi$ e $m\widehat{AC} + m\widehat{CA^a} = \pi$, derivadas das noções de pontos antípodas. Já o segundo triângulo é dito o triângulo polar do $\triangle^e ABC$ e suas relações estão apresentadas no teorema **T₅**.

Vimos ainda que a desigualdade triangular (em qualquer triângulo a soma das medidas de dois lados é sempre maior que a medida do outro lado) é válida nas duas geometrias. Por outro lado, a congruência de triângulos apresenta propriedades inesperadas: na Geometria Euclidiana Plana, mantendo-se as medidas dos ângulos podemos construir triângulos distintos, mas na Geometria Esférica, fixando-se os ângulos obtém-se triângulos congruentes.

Dessa forma, foi apresentado a você, caro estudante, um conteúdo de Geometria que, esperamos, além de enriquecer seus conhecimentos de Geometria Euclidiana Plana, tenha lhe proporcionado um momento rico de investigação matemática através do método próprio dessa ciência, o método dedutivo, e que as ilustrações e materiais concretos apresentados durante as aulas tenham lhe proporcionado uma visualização esclarecedora dos objetos e propriedades estudadas. Esperamos ter colaborado para um aprofundamento de seus conhecimentos de Geometria, bem como ter estimulado seu espírito de investigação matemática. Destaque-se ainda que a aplicabilidade da Geometria Euclidiana Plana é bem conhecida pelas diversas situações-problema apresentadas durante sua trajetória escolar e que a Geometria Esférica se

presta a resolver problemas em superfícies de curvatura esférica, por exemplo, a superfície do nosso planeta.

Anexo B. Encarte

LISTA DE AXIOMAS

Axioma 1: Uma esfera e uma reta esférica são conjuntos de pontos. Existem, no mínimo, dois pontos distintos na esfera.

Axioma 2: Existe uma bijeção entre os pontos de uma reta esférica e o conjunto $[0, 2\pi)$.

Axioma 3: Todo ponto possui exatamente um antípoda.

Axioma 4: Por dois pontos distintos quaisquer da esfera sempre passa uma reta esférica. Se os pontos não forem antípodas, então a reta esférica é única.

Axioma 5: Duas retas esféricas distintas sempre possuem, no mínimo, um ponto em comum.

Axioma 6: Para toda reta esférica existe um ponto tal que a reta esférica é o conjunto de pontos que distam $\frac{\pi}{2}$ desse ponto.

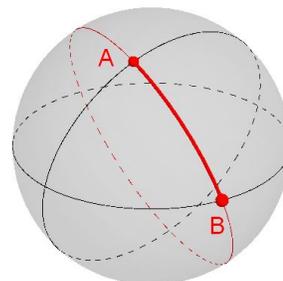
Axioma 7: Suponha que os ângulos esféricos $\sphericalangle A_1B_1C_1$ e $\sphericalangle A_2B_2C_2$ sejam tais que $\widehat{A_1B_1} \equiv \widehat{A_2B_2}$ e $\widehat{B_1C_1} \equiv \widehat{B_2C_2}$, então $\sphericalangle A_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle A_2B_2C_2$ se, e somente se, $\widehat{A_1C_1} \equiv \widehat{A_2C_2}$.

NOTAÇÃO

X^a	Antípoda de um ponto genérico X .
$\circ AB$	Reta esférica que passa pelo pontos não antípodas A e B .
\widehat{AB}	Segmento de reta esférica de extremos A e B .
$d^e(A, B)$	Distância esférica entre os pontos A e B .
$m\widehat{AB}$	Medida do segmento de reta esférica de extremos A e B .
\overrightarrow{BA}	Semirreta esférica de origem B que passa pelo ponto A .
$\sphericalangle B$	Ângulo plano de vértice B .
$\sphericalangle ABC$	Ângulo plano formado pelas semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} .
$\sphericalangle ABC$	Ângulo esférico formado pelas semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} .
$\sphericalangle B$	Ângulo esférico de vértice B .
$m\sphericalangle ABC$	Medida do ângulo esférico $\sphericalangle ABC$.
$m\sphericalangle B$	Medida do ângulo esférico de vértice B .
$m\sphericalangle ABC$	Medida do ângulo plano formado pelas semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} .
$m\sphericalangle B$	Medida do ângulo plano de vértice B .
\equiv	Símbolo de congruente.
$<$	Símbolo de menor que.
$\triangle^e ABC$	Triângulo esférico de vértices A , B e C .
$\triangle ABC$	Triângulo plano de vértices A , B e C .
$\triangle^e A'B'C'$	Triângulo polar do triângulo esférico $\triangle^e ABC$.

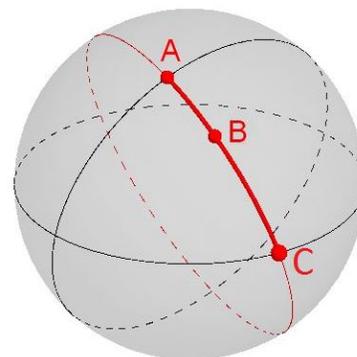
LISTA DE DEFINIÇÕES

Definição 1. A distância esférica entre dois pontos genéricos A e B , denotada por $d^e(A, B)$, é definida por

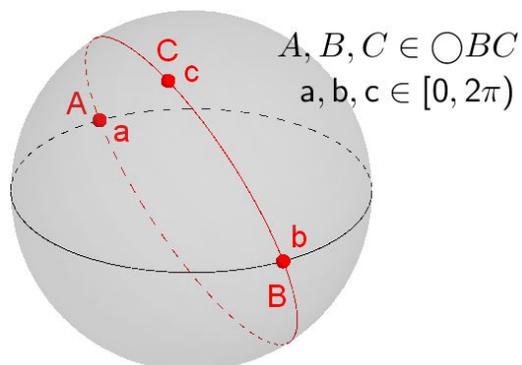
$$d^e(A, B) = \min \{ |a - b|, 2\pi - |a - b| \}.$$


Definição 2. Dizemos que B está entre A e C se:

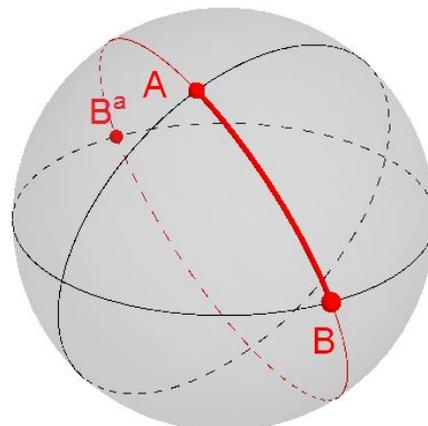
- i) A, B e C pertencem à mesma reta esférica;
- ii) $|a - c| \neq \pi$;
- iii) $B \neq A$ e $B \neq C$;
- iv) $d^e(A, B) + d^e(B, C) = d^e(A, C)$.



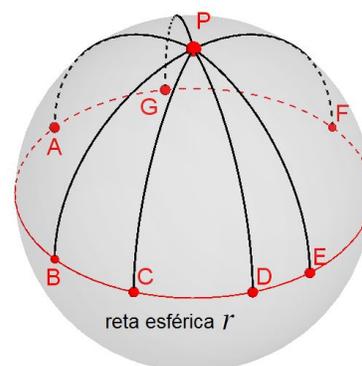
Definição 3. Dois pontos genéricos A e B são ditos antípodas se existe uma reta esférica que passa por eles e se $|a - b| = \pi$.



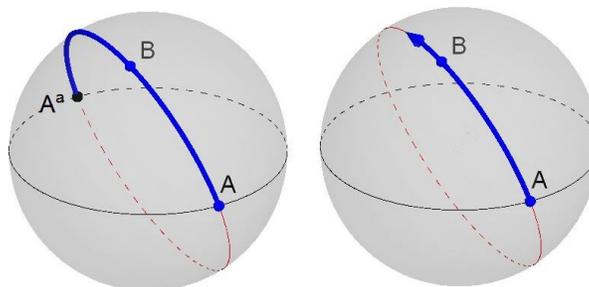
Definição 4. Se A e B são distintos e são tais que $|a - b| \neq \pi$, então define-se o segmento de reta esférica de extremos A e B como o conjunto formado pelos pontos A , B e os pontos entre A e B . Este será representado pela notação \widehat{AB} e sua medida será dada por $m\widehat{AB} = d^e(A, B)$.



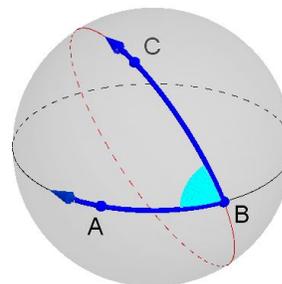
Definição 5. O ponto a que se refere o axioma 6 será denominado de polo da reta esférica associada. Ou seja, se P é polo de uma reta esférica r supondo que A, B, C, D, E, F, G sejam pontos de r , então a distância de P a qualquer um desses pontos, bem como dos demais pontos de r , é $\frac{\pi}{2}$.



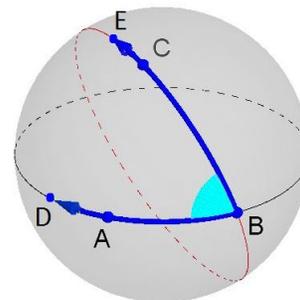
Definição 6. Dados três pontos distintos A , A^a e B . A união dos segmentos de reta \widehat{AB} e $\widehat{BA^a}$, excluído o ponto A^a , será denominada de semirreta esférica de origem A e que passa pelo ponto B .



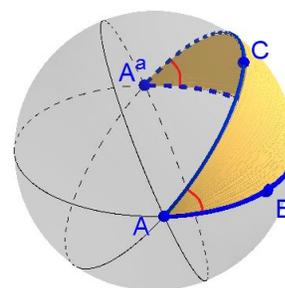
Definição 7. Denomina-se ângulo esférico à união de duas semirretas de mesma origem não contidas numa mesma reta esférica.



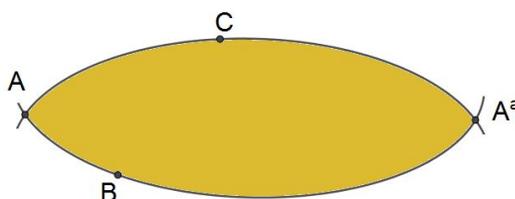
Definição 8. Dado um ângulo esférico $\sphericalangle ABC$. Escolha os pontos D e E nas semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} , respectivamente, tais que $d^e(B, D) = d^e(B, E) = \frac{\pi}{2}$. Então a medida do ângulo esférico $\sphericalangle ABC$ é igual a medida do segmento esférico \widehat{DE} .



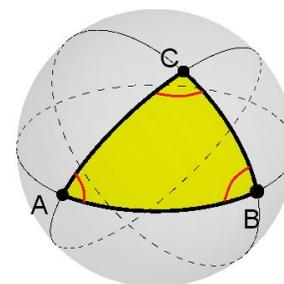
Definição 9. Um ângulo esférico $\sphericalangle BAC$ junto a A^a é denominado de fuso esférico de vértices A e A^a ou ainda fuso esférico de ângulo $\sphericalangle BAC$.



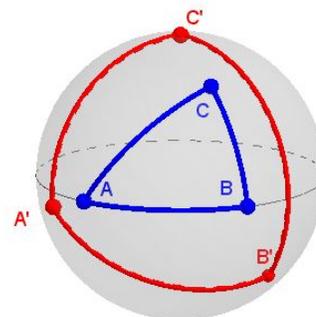
Uma representação útil da definição 9 é dada pela figura abaixo:



Definição 10. Sejam A, B e C três pontos que não estão na mesma reta esférica. A união dos três segmentos de reta \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} é denominado de triângulo esférico ABC , de vértices A, B e C e lados \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} . Os ângulos esféricos $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ e $\sphericalangle BAC$ serão denominados de ângulos internos do triângulo e o triângulo será representado pela notação $\Delta^e ABC$.



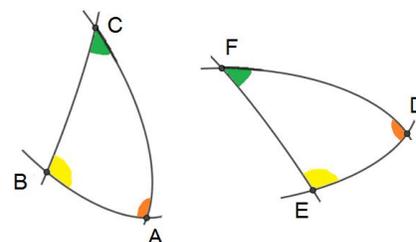
Definição 11. Seja $\Delta^e ABC$ um triângulo esférico. Definimos o triângulo $\Delta^e A'B'C'$, chamado de triângulo polar de $\Delta^e ABC$, como segue:



- A' é o polo da reta $\odot BC$ que está do mesmo lado de A em relação à reta $\odot BC$.
- B' é o polo da reta $\odot AC$ que está do mesmo lado de B em relação à reta $\odot AC$.
- C' é o polo da reta $\odot AB$ que está do mesmo lado de C em relação à reta $\odot AB$.

Definição 12. Dois triângulos esféricos $\Delta^e ABC$ e $\Delta^e DEF$ são ditos congruentes se as seis condições seguintes forem satisfeitas:

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------|
| • $m\widehat{AB} = m\widehat{DE}$ | • $m\angle A = m\angle D$ |
| • $m\widehat{AC} = m\widehat{DF}$ | • $m\angle B = m\angle E$ |
| • $m\widehat{BC} = m\widehat{EF}$ | • $m\angle C = m\angle F$ |

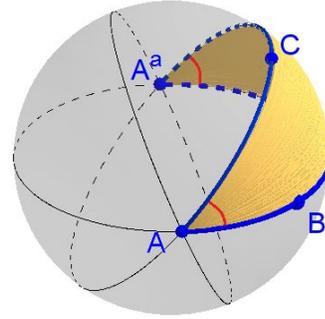


Dizemos que os lados e ângulos correspondentes são congruentes e escrevemos:

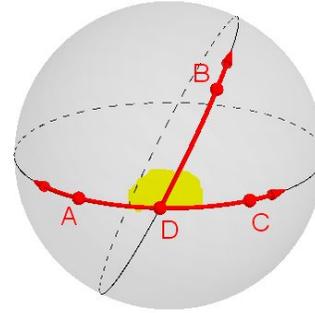
$$\Delta^e ABC \equiv \Delta^e DEF$$

LISTA DE TEOREMAS

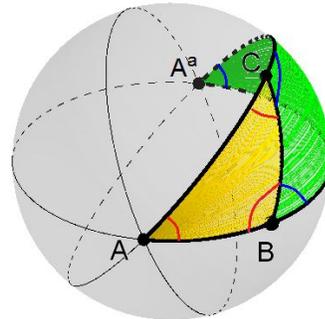
(T₁). Os dois ângulos de um fuso esférico possuem a mesma medida.



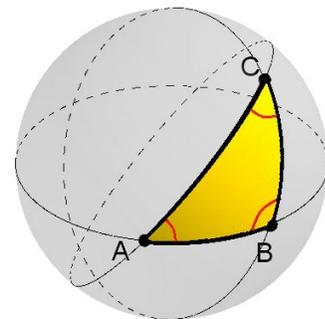
(T₂). Se dois ângulos $\sphericalangle ADB$ e $\sphericalangle CDB$ forem adjacentes e se \overrightarrow{DA} e \overrightarrow{DC} forem semirretas opostas, então $m\sphericalangle ADB + m\sphericalangle CDB = \pi$.



(T₃). Dado um triângulo esférico $\triangle^e ABC$ ou a soma dos seus ângulos internos é maior que π ou o triângulo $\triangle^e A^aBC$ é tal que a soma dos seus ângulos internos é maior que π .



(T₄). A soma das medidas dos ângulos de um triângulo esférico é maior que π e menor que 3π .



(T₅). Se $\Delta^e ABC$ é um triângulo esférico e $\Delta^e A'B'C'$ é o triângulo polar de ABC, então:

$$m\angle A' = \pi - m\widehat{BC}$$

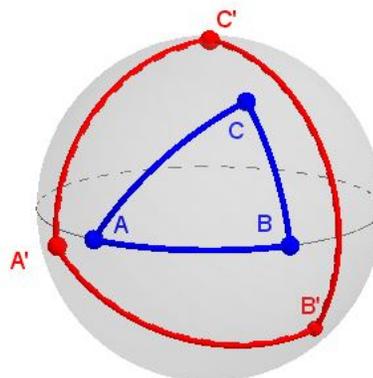
$$m\angle B' = \pi - m\widehat{AC}$$

$$m\angle C' = \pi - m\widehat{AB}$$

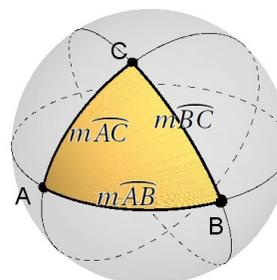
$$m\widehat{A'B'} = \pi - m\angle C$$

$$m\widehat{A'C'} = \pi - m\angle B$$

$$m\widehat{B'C'} = \pi - m\angle A$$



(T₆). Qualquer que seja o triângulo esférico ABC tem-se que $m\widehat{AB} + m\widehat{AC} + m\widehat{BC} < 2\pi$.

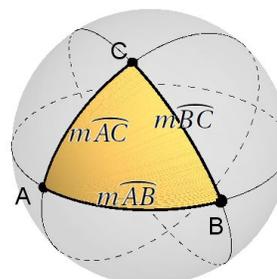


(T₇). Qualquer que seja o triângulo esférico ABC tem-se que:

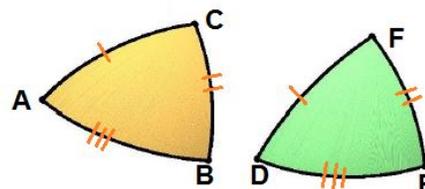
$$m\widehat{BC} < m\widehat{AB} + m\widehat{AC}$$

$$m\widehat{AC} < m\widehat{AB} + m\widehat{BC}$$

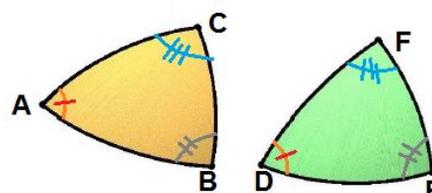
$$m\widehat{AB} < m\widehat{AC} + m\widehat{BC}$$



(T₈). Se um par de triângulos esféricos $\Delta^e ABC$ e $\Delta^e DEF$ são tais que $m\widehat{AB} = m\widehat{DE}$, $m\widehat{AC} = m\widehat{DF}$ e $m\widehat{BC} = m\widehat{EF}$, então $\Delta^e ABC \cong \Delta^e DEF$.



(T₉). Se dois triângulos esféricos, $\Delta^e ABC$ e $\Delta^e DEF$, são tais que os ângulos $m\angle A = m\angle D$, $m\angle B = m\angle E$ e $m\angle C = m\angle F$, então os triângulos $\Delta^e ABC$ e $\Delta^e DEF$ são congruentes.



Anexo C. Questionário de avaliação 1 - Primeiras três aulas da sequência didática

PESQUISA: INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESFÉRICA NO ENSINO MÉDIO

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - UFSC

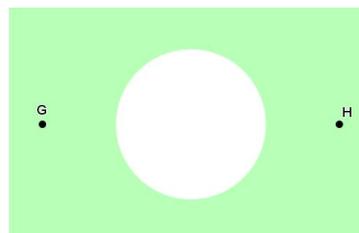
PESQUISADOR RESPONSÁVEL: Dr. MÁRCIO DE JESUS SOARES

PESQUISADOR ASSISTENTE: MESTRANDO EGINO VALCANAIA

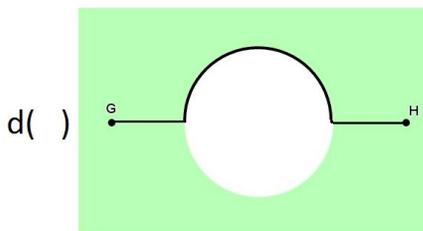
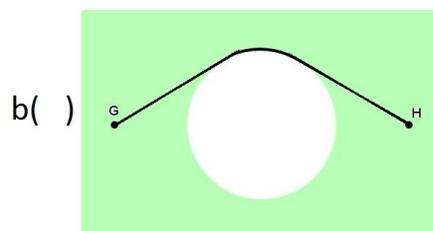
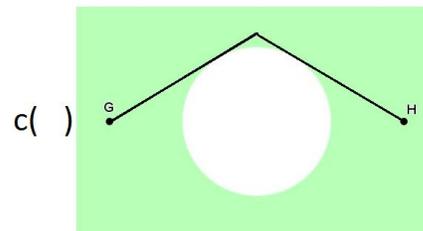
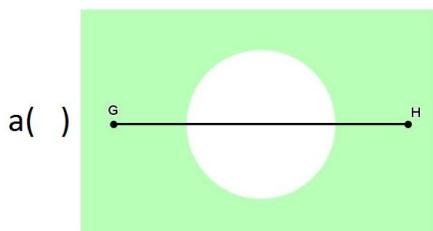
QUESTIONÁRIO 1.

2º SEMESTRE DE 2021

1. Na região verde, representada ao lado, temos o ponto G e o ponto H . Quer-se traçar uma linha (aproximada) de menor distância entre esses dois pontos e esta linha deve ficar inteiramente contida na região verde.



Assinale com (x) a alternativa abaixo que, na sua opinião, melhor representa a linha requisitada.



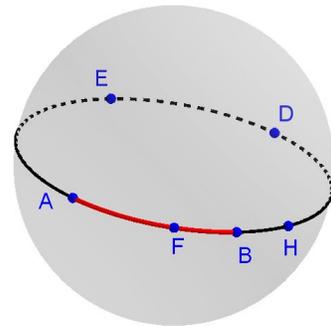
2. Você escolheu uma alternativa na questão anterior. Gostaríamos de saber qual foi o seu método de raciocínio que o levou a tomar essa decisão. Escolha a alternativa a seguir que melhor explique o seu método.

- a() Escolhi uma alternativa ao acaso.
 b() Usei régua e procurei medir a linha de menor distância.
 c() Visualmente eu concluí que essa era a linha de menor distância.
 d() Nenhuma das anteriores. Explique.

3. Como você classificaria seu método?

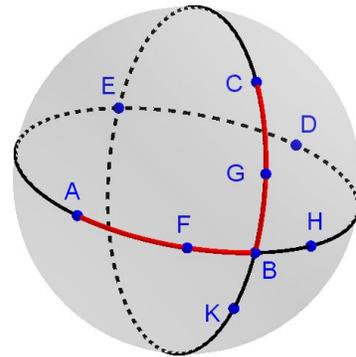
- a() Foi um raciocínio de dedução (através da lógica construí passo a passo, partindo de informações mais simples e supostamente verdadeiras até chegar na conclusão).
- b() Foi um raciocínio de medição (com instrumentos de medida).
- c() Foi um raciocínio de comparação visual (olhando atentamente para as quatro linhas, concluí qual delas teria menor medida de comprimento).
- d() Nenhuma das anteriores. Explique.

4. A figura ao lado representa a reta esférica $\odot BF$ e estão destacados alguns pontos dessa reta. Usando a notação vista em aula (a é a coordenada de A , b é a coordenada de B , ...) e sabendo que $a = \frac{13\pi}{7}$, $f = \frac{\pi}{7}$, $b = \frac{2\pi}{7}$, $h = \frac{3\pi}{7}$, $d = \frac{6\pi}{7}$ e $e = \frac{9\pi}{7}$, assinale (V) para alternativas abaixo que são verdadeiras e (F) para as falsas.



- a() A reta $\odot BF$ também pode ser denominada de reta $\odot AB$.
- b() As retas esféricas $\odot BF$ e $\odot AB$ são distintas.
- c() $d^e(A, B) = \frac{3\pi}{7}$.
- d() A medida do segmento esférico \widehat{AB} é $\frac{3\pi}{7}$.
- e() Os pontos A e D são antípodas.
- f() O ponto F está entre A e B .

5. A figura ao lado apresenta as retas esféricas $\odot BF$ e $\odot BG$ distintas. As coordenadas dos pontos destacados na reta $\odot BF$ já foram descritas na questão 4 e as coordenadas escolhidas para os pontos destacados na reta $\odot BG$ são $k = \frac{13\pi}{6}$, $b = 0$, $g = \frac{\pi}{6}$, $c = \frac{2\pi}{6}$ e $e = \frac{6\pi}{6}$.



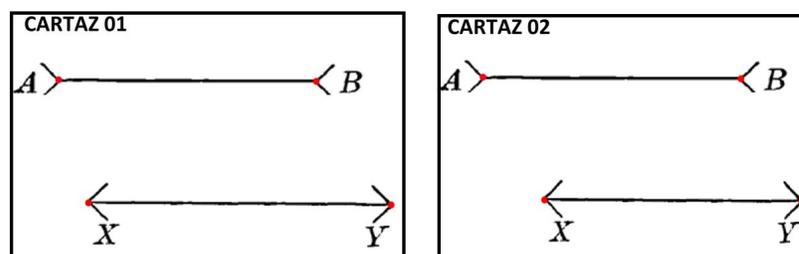
- a) Determine $|b - e|$:
- b) B e E são antípodas? () Sim () Não
- c) Quais são os pontos comuns das retas esféricas $\odot BF$ e $\odot BG$?
- d) Finalmente, observando na figura os ângulos esféricos $\sphericalangle FBG$ e $\sphericalangle KBH$:
 - (i) Usando T_2 temos que $m \sphericalangle KBH + m \sphericalangle KBF = \dots\dots\dots$ e $m \sphericalangle FBG + m \sphericalangle KBF = \dots\dots\dots$
 - (ii) Dessa forma, da primeira equação resulta $m \sphericalangle KBH = \dots\dots\dots$
 - (iii) E, da segunda equação resulta $m \sphericalangle FBG = \dots\dots\dots$
 - (iv) Segue que $m \sphericalangle KBH$ e $m \sphericalangle FBG$ são: () iguais, () diferentes, () nada se conclui.
 - (v) Complete, com suas palavras, a conclusão dessa investigação: Ângulos opostos pelo vértice

Muito obrigado pela sua cooperação com a pesquisa.

Anexo D. Questionário de avaliação 2 - Avaliação final da sequência didática

Para este questionário, na questão 1, foram dispostos dois cartazes a uma distância média de 2 metros dos alunos, cuja miniatura representamos na Figura 1 a seguir. No cartaz 1, os segmentos \overline{AB} e \overline{XY} mediam, respectivamente, de 12cm e 14cm, enquanto no cartaz 2 os segmentos \overline{AB} e \overline{XY} eram congruentes, medindo 12cm.

Figura 1 – Miniatura dos cartazes 1 e 2.



Nota: Com base em Wentworth e Smith (1888, p.15).

Fonte: O autor (2021).

PESQUISA: INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESFÉRICA NO ENSINO MÉDIO

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - UFSC

PESQUISADOR RESPONSÁVEL: Dr. MÁRCIO DE JESUS SOARES

PESQUISADOR ASSISTENTE: MESTRANDO EGINO VALCANAIA

QUESTIONÁRIO 2.

2º SEMESTRE DE 2021

Este formulário de pesquisa fará um pequeno apanhado do que foi desenvolvido durante a aplicação da sequência didática. O aluno pesquisará no encarte os axiomas, definições e teoremas provados na aplicação, bem como a notação utilizada. Importante ressaltar que o encarte não traz a argumentação dedutiva constante na sequência, servindo, portanto, apenas como um instrumento auxiliar da memória e sendo muito útil para justificar a argumentação.

Serão seis questões apresentadas na ordem numérica, uma questão de cada vez. Antecedendo a entrega de cada questão, o professor fará uma conversa preliminar acerca da mesma, sem necessariamente dar pistas da pergunta, mas procurando incentivar os alunos participantes a confiarem na sua interpretação e construir, quando o for o caso, argumentos que justifiquem suas respostas.

Questão 1. Utilizando apenas o sentido da visão, procure identificar a alternativa correta referente aos cartazes expostos à frente:

CARTAZ 01:

- a() O segmento \overline{AB} é maior que o segmento \overline{XY} .
- b() O segmento \overline{AB} é menor que o segmento \overline{XY} .
- c() O segmento \overline{AB} é igual ao segmento \overline{XY} .

CARTAZ 02:

- a() O segmento \overline{AB} é maior que o segmento \overline{XY} .
- b() O segmento \overline{AB} é menor que o segmento \overline{XY} .
- c() O segmento \overline{AB} é igual ao segmento \overline{XY} .

Questão 2. Na questão 1 não haviam dados matemáticos que possibilitassem um raciocínio dedutivo. Por isto você precisou usar sua intuição para decidir qual alternativa estaria correta. Feita a questão, nós verificamos diretamente qual seria a alternativa correta em cada caso e, agora, que você já sabe as medidas dos segmentos de cada cartaz, dê sua opinião referente à confiabilidade da intuição para a matemática.

- a() A intuição é muito importante para a matemática, mas os resultados obtidos pela intuição não são 100% confiáveis.
- b() Essa experiência nos ensina que nunca devemos confiar na intuição.
- c() Pela minha experiência como aluno, os resultados da intuição são sempre verdadeiros e confiáveis.
- d() Nos anos escolares, tenho percebido que muitos resultados vindos da intuição eram verdadeiros.

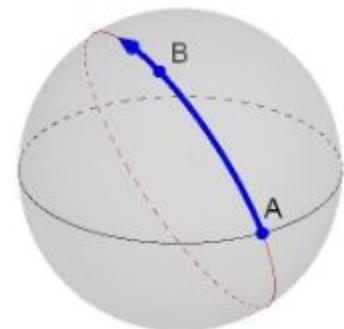
Questão 3. Na esfera a seguir estão representadas duas retas esféricas. Uma reta que passa pelos pontos A e B e outra, distinta desta, que passa no ponto A mas não passa no ponto B . Sobre uma das retas está também representada a semirreta \overrightarrow{AB} .

a) Marque o ponto C numa dessas duas retas sob as seguintes regras:

- O ponto C não é antípoda de A .
- O ponto C não pertence à semirreta esférica \overrightarrow{AB} .

b) Marque a semirreta \overrightarrow{AC} .

c) Agora responda:



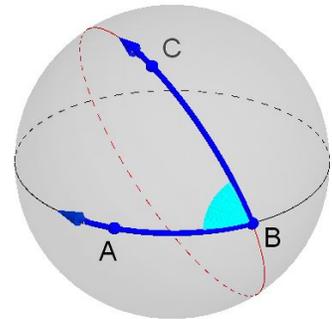
i() As semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} estão contidas na mesma reta esférica?

() sim () não

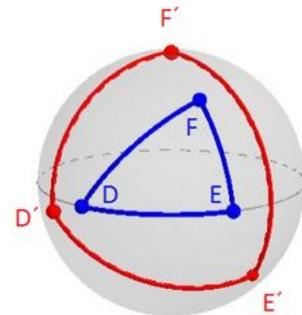
ii() As semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são opostas?

() sim () não

Questão 4. Monte uma estratégia detalhada para obter a medida do ângulo esférico $\sphericalangle ABC$, apresentado a seguir. Essa estratégia deve estar de acordo com a definição 8.



Questão 5. Ao lado o triângulo $D'E'F'$ é o polar do triângulo DEF , conforme a definição 11.

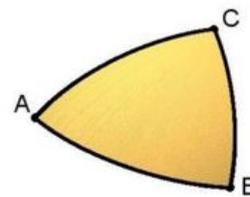


Utilize corretamente o teorema 5 para anotar sobre os lados do triângulo $D'E'F'$ as medidas de cada lado desse triângulo em função dos ângulos do triângulo DEF .

Questão 6. Utilizando o método dedutivo, amplamente utilizado nas aulas das sequência didática, prove justificando os passos nas definições, axiomas ou teoremas do seu encarte, que:

Qualquer que seja o triângulo esférico ABC é válida a seguinte propriedade:

$$2\pi > m\widehat{AB} + m\widehat{AC} + m\widehat{BC}$$



Muito obrigado pela sua cooperação com a pesquisa.