Cours de notions d'arithmétique, géométrie et algèbre (18e édition) / professeur : M. Maës

BIBLIOTHEQUE D'ENSEIGNEMENT POLYTECHNIQUE   N° 31

Publiée sous la direction de M. J. Galopin

ARITHMÉTIQUE, GÉOMÉTRIE ET ALGÈBRE

(18e Édition)

Professeur : M. MAES

Licencié es-Sciences

Edition et Propriété de l'École du Génie Civil

152, Avenue de Wagram — Téléphone 27-97

EXAMENS SPÉCIAUX

Auxquels prépare par correspondance l'Ecole du Génie Civil

Ecoles Spéciales et Examens Particuliers

L'Ecole prépare à toutes Ecoles spéciales suivantes : Ecoles d'Hydrographie, Ecoles d'Arts et Métiers, Ecoles des Mécaniciens de Brest, Toulon et Lorient, Instituts techniques spéciaux, Ecole supérieure d'Electricité, Ecole supérieure d'Aéronautique, Ecole Centrale, Ecoles de Physique et Chimie, etc.

Préparations spéciales à tous les examens des Douanes, des Postes, des Ministères, des Chemins de fer ; préparation spéciale aux Brevets simple, supérieur de l'Enseignement Primaire, ainsi qu'aux divers Baccalauréats, Certificats, Licences.

Industrie

Préparation à tous les grades (Contremaîtres, Conducteurs, Sous-Ingénieurs et Ingénieurs), pour la Mécanique, l'Electricité, les Mines, les Travaux Publics, etc.

Mécaniciens pour Usines et Ateliers : Electriciens. — Chefs mécaniciens. - Conducteurs électriciens. - Ingénieurs et Dessinateurs Industriels. — Contremaîtres et Chefs d'ateliers. — Ingénieurs et Sous-Ingénieurs.

Cours spéciaux de Contremaîtres, Dessinateurs et Ingénieurs des Constructions navales.

Marine de Guerre

Matelot élève mécanicien ; Quartier-maître mécanicien ; Brevet élémentaire de mécanicien ; Cours du brevet supérieur de mécanicien-électricien, etc. ; Admission au cours des élèves officiers (machine et pont) ; Examen direct pour le grade de mécanicien principal ; Examen de quartier-maître préparatoire à l'examen d'élève officier de vaisseau ; Obtention du grade d'officier électricien et d'officier des autres spécialités ; Ecoles techniques élémentaire et supérieure des arsenaux ; Commis de la Marine ; Commissaires et Administrateurs de l'Inscription maritime ; Ecoles navales et de Génie maritime ; Ingénieurs d'Artillerie navale ; Agents et Officiers des Travaux hydrauliques.

Marine de Commerce

Brevets de capitaines au Bornage, au Cabotage et au Long Cours ; Brevet pratique de mécanicien pour machines à vapeur ; Brevet pratique de mécanicien pour autres moteurs ; Brevet d'officier mécanicien de 2e classe ; Brevet d'officier mécanicien de 1re classe ; Brevet d'élève-officier mécanicien ; Emplois d'électriciens dans les grandes Compagnies ; Emplois d'élèves mécaniciens.

Armée

Officiers du service aéronautique. — Officiers mécaniciens. — Saint-Maixent. — Vincennes. — Saumur. - Versailles. - Dessinateurs de l'Armée. - Aspirants de toutes armes. - Saint-Cyr. - Polytechnique, etc.

Administrations

Adjoints techniques, dessinateurs et mécaniciens des Ponts et Chaussées. — Agents et Sous-Agents techniques des Poudres et Salpêtres. — Mécaniciens électriciens, Dessinateurs de la voie et de la traction, Piqueurs, emplois divers des Chemins de fer. — Mécaniciens et dessinateurs des Postes et Télégraphes. — Mécaniciens et dessinateurs des Manufactures de Tabacs. Dessinateurs et calqueurs du Ministère de la Guerre, etc.

Préparations Spéciales

Outre sa préparation aux examens ou carrières précités, l'Ecole se tient à la disposition de toutes les personnes n'ayant qu'une ou plusieurs parties à approfondir pour leur faire sur les matières qui les concernent (en tant que celles-ci sont du ressort de ce qu'enseigne l'Ecole) des préparations spéciales à des prix extrêmement avantageux.

En particulier elle a des préparations très suivies de T. S. F., Automobiles, Aviation, Langues vivantes, etc.

Elle prépare également à tous les emplois réservés aux anciens sous-officiers.

Cours de Vacances, Cours du Soir, du Dimanche matin, Leçons Particulières.

Des cours spéciaux sont organisés à toute époque et pour toutes les matières de nos programmes.

Les cours les plus suivis sont ceux de Mathématiques, Dessin et Croquis industriels appropriés à toutes les spécialités, cours démonstratifs sur les pièces elles-mêmes des différentes branches techniques.

École du Génie Civil

Placée sous le haut Patronnage de l'État.

Enseignement Oral & par Correspondance.

Cours de Notions d'Arithmétique, Géométrie & Algèbre.

18ème Édition

Professeur :

Mr. Maës, Licencié ès Sciences.

1° Notions d'Arithmétique.

Supposons que l'on se propose de savoir combien il y a de chaises dans une salle ; faire cette opération s'appelle compter les chaises et on exprime le résultat au moyen d'un mot que l'on appelle nombre.

L'Arithmétique est la science qui s'occupe des propriétés des nombres et des relations qu'ils ont entre eux.

La première chose dont on s'occupe, c'est évidemment la façon de former les nombres et de les écrire ; celà constitue la numération.

Numération parlée.

Pour mesurer une grandeur quelconque, on prend une quantité de même nature et on la compare à la grandeur que l'on veut mesurer.

Par exemple, pour mesurer la capacité d'un vase, on prendra un litre et on cherchera combien de litres on peut verser dans le vase. Cette grandeur qui sert de comparaison s'appelle unité.

Si, pour remplir le vase, il faut ajouter un litre au premier litre, on aura un nouveau nombre qu'on appelle deux.

Si l'on doit ajouter encore un litre, on aura le nombre trois.

En ajoutant l'unité, on aurait le nombre quatre et ainsi de suite.

On forme donc les nombres en ajoutant l'unité à l'unité ; il s'ensuit que la suite des nombres est infinie, car on peut répéter l'opération indéfiniment.

On a ainsi donné un nom différent aux dix premiers nombres : un, deux, trois, ... dix.

Pour ne pas créer un mot nouveau pour chaque nombre, on s'est servi des mots précédents pour former le nom des autres nombres.

Les dix premiers nombres forment ce que l'on appelle une dizaine ; on a formé 2 dizaines ou vingt, 3 dizaines ou trente, ... 10 dizaines ou cent. Entre chaque dizaine, on a dix nombres que l'on a formés avec les 10 premiers ; par exemple, entre trente et quarante, on a les nombres trente et un, trente deux, ..., trente neuf, quarante.

Entre dix et vingt, au lieu de dire : dix et un, dix et deux, on dit : onze, douze ....

De même que l'on a formé dix dizaines, on forme dix centaines, un cent, deux cents, ... 10 cents que l'on appelle mille.

Entre deux centaines, on a intercalé les 100 premiers nombres ; par exemple : 201, 202, ... 299 et trois cents.

Les neuf premiers nombres forment les unités de 1er ordre, les dizaines forment les unités de 2e ordre et les centaines les unités de 3e ordre. Ces 3 ordres réunis forment la première classe, ou classe des unités.

D'après la façon dont on a formé les nombres, on voit qu'une unité du 3e ordre vaut 10 dizaines, c'est-à-dire 10 unités du 2e ordre, et qu'une unité du 2e ordre ou dizaine vaut 10 unités du 1er ordre.

On forme ainsi une 2ème classe de la même façon que l'on a formé la 1ère, c'est-à-dire que l'on forme 1000, 2000, ... 10.000 ; puis 10.000, 20.000, ... et 100.000, 200.000 .... 900.000.

Entre deux mille consécutifs, on insère 999 unités ; par exemple : 5.000, 5.001, 5.002, ... 5.100, 5.101, 5102, ... 5.200..... 5.900, 5.901 ...... 5.999 et 6.000.

De même, entre 200.000 et 300.000 par exemple, on mettra 200.001, 200.002 .... 299.999 et 300.000.

Ensuite, entre 300.000 et 400.000, on mettra : 300.001, 300.002 et 399.999.

Cette 2e classe est la classe des mille.

La 3e classe, ou classe des millions, est formée de la même façon. La 4e classe forme les billions ou milliards, puis on a la 5e classe ou classe des trillions, la 6e ou quadrillions, etc.

D'après la façon de former les classes, on voit qu'une unité de la 2e classe vaut 1.000 unités de la 1ère; les classes vont donc de 1.000 en 1.000 et les ordres de 10 en 10.

Numération écrite.

Pour écrire les nombres, on a procédé de la même façon; on a représenté les 9 premiers nombres par 9 caractères différents: 1, 2, 3, ... 9, 0, appelés chiffres.

Pour les autres nombres, on convient que tout chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités dix fois plus grandes, c'est-à-dire des unités de l'ordre immédiatement supérieur.

Soit, par exemple, à écrire le nombre quarante neuf; il y a 9 unités et 4 dizaines; le 4 s'écrira donc à gauche du 9; on aura donc: 49.

De même trois cent quarante cinq; il y a 3 centaines, 4 dizaines et 5 unités; on écrira donc: 345.

Soit à écrire trente; il y a 3 dizaines, mais il n'y a pas d'unité de 1er ordre; alors on les représente par un caractère spécial 0, appelé zéro et l'on écrit 30.

De même quatre cents s'écrit 400; trois cent deux s'écrit 302.

On voit que les nombres s'écrivent de gauche à droite, c'est-à-dire que l'on écrit successivement chaque classe en commençant par la plus élevée et en mettant 3 chiffres par classe; si dans une classe il y a un ordre qui manque, on le remplace par un zéro.

Le nombre douze millions cent mille deux cents treize s'écrit: 12.100.213.

Inversement, pour lire un nombre, on le partage en classes, c'est-à-dire en tranches de trois chiffres à partir de la droite et on énonce chaque tranche en commençant par la gauche, c'est à dire par la classe la plus élevée, en la faisant suivre de son nom! †. 12.345.678.910 se lit: 12 milliards, 345 millions; 678 mille, 910 unités.

Opérations fondamentales

Les opérations fondamentales ont pour but de combiner les nombres entre eux pour en former de nouveaux ; elles sont au nombre de 4 : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

Addition

Supposons que l'on ait deux sacs renfermant chacun un certain nombre de billes ; chercher combien on aurait de billes si les deux sacs étaient vidés dans un 3e s'appelle additionner les nombres.

Il est évident que l'on aura toujours le même nombre de billes, quel que soit l'ordre dans lequel on vide les deux sacs.

De même, si on avait 4 sacs de billes, on pourrait d'abord vider 2 sacs, puis compter le nombre de billes, vider ensuite le 3e sac, compter de nouveau, puis après vider le 4e sac, et compter enfin ce dernier résultat.

En pratique, on videra les 4 sacs et on comptera ; on aura évidemment le même nombre de billes.

On peut donc dire que le résultat d'une addition est indépendant de l'ordre dans lequel on fait les additions et que pour additionner plusieurs nombres on peut ajouter les deux premiers, le résultat au 3e, ce résultat au 4e, etc .... ou bien on peut additionner tous les nombres ensemble.

Le résultat d'une addition s'appelle somme ou total.

Le signe de l'addition est le signe + que l'on énonce : plus.

__Exemple.__ Soit à faire l'addition $25 + 47 + 13$.

On écrit les nombres en colonnes de façon à mettre les unités de même ordre les unes sous les autres, car de même qu'on ne peut additionner 3 crayons avec 8 lampes, on ne pourrait pas additionner 3 centaines avec 5 unités, puisque ces quantités sont de natures différentes.

$$\begin{array}{r} 25 \\ 47 \\ 13 \\ \hline 85 \end{array}$$

On tire un trait horizontal sous le dernier nombre et on additionne colonne par colonne, en prenant les précautions suivantes : lorsque le résultat de l'addition d'une colonne dépasse 9, on n'écrit pas ce nombre entièrement, on n'écrit que le dernier chiffre, le nombre formé par les autres chiffres est reporté à la colonne suivante.

Ainsi par exemple, dans le cas choisi, la colonne des unités donne 15 unités, c'est-à-dire 5 unités et une dizaine ; On écrit le chiffre 5 au rang des unités et on reporte la dizaine à la colonne des dizaines.

Cette façon d'opérer n'est pas nécessaire, mais elle facilite le calcul.

En effet, si l'on n'opérait pas ainsi, on aurait au total 7 dizaines et 15 unités, c'est-à-dire : 7 dizaines + une dizaine + 5 unités, soit 85 ; on retrouve le même résultat, mais c'est long.

En opérant comme plus haut, cette décomposition se fait au fur et à mesure des additions des colonnes.

Preuve. En général, la preuve d'une opération est une 2e opération qui a pour but de vérifier que le résultat de la 1ère est exact.

Pour faire la preuve de l'addition, on recommence l'opération en mettant les nombres dans un autre ordre ; d'après ce que nous avons vu, le résultat doit être le même.

En général, pour ne pas recopier les nombres, on refait l'addition en commençant par le bas.

Soustraction

Si l'on a 2 sacs de billes, le premier en renfermant plus que le 2e, on peut se demander combien il en contient de plus ; chercher ce nombre, c'est soustraire le 2e nombre du 1er. Le résultat de l'opération s'appelle reste ou différence, et son signe est — (moins).

Il est évident que si au 2e sac on ajoute un nombre de billes égal au reste, on aura alors le nombre de billes du 1er.

De même, supposons que le 1er sac contienne 25 billes de plus que le 2e ; si on ajoute 40 billes aux deux sacs, il est évident que le 1er contiendra toujours 25 billes de plus que le 2e. Si au lieu d'ajouter 40 billes on les avait enlevées, le 1er sac aurait toujours 25 billes de plus que le 2e. On peut donc dire que la différence de deux nombres ne change pas quand on les augmente ou qu'on les diminue tous les deux de la même quantité.

La soustraction comprend 3 cas :

<u>1er Cas.</u> Les 2 nombres sont inférieurs à 10 ; soit 9 — 5, comme pour l'addition, on sait le résultat par cœur.

<u>2e Cas.</u> Les nombres ont plusieurs chiffres, mais les chiffres du 1er sont plus grands que les chiffres de même ordre du 2e.

Soit 9.845 — 3723 ; on écrit les deux nombres l'un au-dessous de l'autre, en mettant dans la même colonne les unités de même ordre, puis l'on soustrait colonne par colonne ; on a ainsi des soustractions d'un chiffre, ce qui est le premier cas.

$$\begin{array}{r} 9.845 \\ 3.723 \\ \hline 6.122 \end{array}$$

On a l'habitude de commencer par la droite, mais on pourrait commencer par n'importe quelle colonne.

<u>3e Cas.</u> Les nombres sont quelconques : 12345 — 7096. On dispose les nombres comme au 2e cas, mais ici on ne peut pas retrancher 6 unités de 5 unités ; on ajoute alors 10 unités au premier nombre, alors 6 ôté de 15 il reste 9.

$$\begin{array}{r} 12.345 \\ 7.096 \\ \hline 5.249 \end{array}$$

Pour que la différence des deux nombres ne change pas, comme on a ajouté 10 unités au premier, il faudra ajouter 10 unités au 2e ; on ajoute une dizaine, ce qui est la même chose ; on dit que l'on a 1 de retenue. 9 dizaines et 1 dizaine font 10 dizaines, que l'on ne peut retrancher de 4 dizaines ; on fera la même opération, c'est-à-dire qu'on ajoute 10 dizaines au premier nombre; alors : 10 ôté de 14 reste 4 dizaines et pour ne rien changer, on ajoutera 10 dizaines ou 1 centaine au 2e nombre.

0 centaine et 1 centaine font 1 centaine, qui ôtée de 3 centaines donnent 2 centaines ; il n'y a pas eu de retenue ici.

On ne peut retrancher 7 mille de 2 mille ; on dit alors : 7 ôté de 12, en ajoutant 10 mille. Il n'y a pas lieu ici de faire de retenues, puisque les 10 mille que l'on a ajoutés font partie du grand nombre ; donc, à la dernière soustraction, on ne fait pas de retenue.

Preuve. D'après ce que nous avons vu au début de la soustraction, en ajoutant le reste et le petit nombre, on devra trouver le grand nombre.

Multiplication

Supposons que l'on veuille savoir combien il y a de billes dans 63 sacs en renfermant 57 chacun. Un moyen de le savoir serait de vider tous ces sacs et de compter le tas de billes ; mais celà n'est pas pratique, car si le nombre de sacs était de 24.341 au lieu de 63 et si chacun d'eux renfermait 12.327 billes, on voit que ce moyen de procéder serait presque impraticable ; aussi a-t-on trouvé un moyen simple de trouver le résultat en faisant une opération appelée multiplication.

Multiplier 63 par 57, c'est trouver un nombre appelé produit, qui soit formé de 57 fois 63 ; 63 est appelé multiplicande et 57 est le multiplicateur. Le signe de la multiplication est (X) multiplié par.

On peut encore dire que le produit contient autant de fois le multiplicande qu'il y a d'unités dans le multiplicateur.

Multiplication d'une somme par un nombre.

Si l'on a plusieurs sacs de billes et que l'on veuille chercher le nombre de billes que l'on aurait si l'on avait 3 fois plus de sacs, on pourrait évidemment opérer de 2 façons :

1° Vider d'abord tous les sacs et tripler ensuite le nombre de billes obtenu ;

2° Tripler d'abord le nombre de billes de chaque sac et ensuite vider tous ces nouveaux sacs et compter le résultat.

On devra trouver le même résultat dans les deux façons de procéder.

On peut donc dire que pour multiplier une somme par un nombre, on peut multiplier chaque partie de la somme par le nombre et ajouter les résultats ainsi obtenus.

Multiplier un nombre par 10, 100, 1000, ...

Soit le nombre 57 que l'on veut multiplier par 10, c'est-à-dire que l'on cherche un nombre 10 fois plus grand que 57.

Dans 57, le chiffre 7 représente des unités et 5 représente des dizaines ; si le nombre devient 10 fois plus grand, 7 devra représenter des dizaines et 5 des centaines, le nombre cherché sera donc 570 ; on peut donc dire que pour multiplier un nombre par 10, il faut ajouter un zéro à sa droite.

De même, pour multiplier un nombre par 100, il faut ajouter 2 zéros à sa droite ; en effet, dans le nombre 5.700, 7 représente des centaines et 5 des mille ; c'est donc bien le nombre 57 rendu 100 fois plus grand.

Remarque. Si l'on avait à multiplier un nombre par 200, 300, ..., on peut évidemment multiplier le nombre par 100 et ensuite multiplier ce nombre par 2, 3, ..., car en opérant ainsi, on répète bien le nombre 200, 300 fois.

Ces préliminaires étant posés, nous allons montrer comment on peut faire la multiplication.

La multiplication de deux nombres se divise en 3 cas :

1er cas. Le multiplicateur et le multiplicande n'ont qu'un chiffre.

Soit à faire le produit 4 × 3. On sait le résultat par cœur ; pour cela on construit des tables, en faisant les additions pour chaque cas et on apprend ces tables de mémoire.

<u>2e cas.</u> Le multiplicande a plusieurs chiffres et le multiplicateur un seul. Soit : 2345×4. On a :

$$2345 = 2000 + 300 + 40 + 5$$

Pour multiplier 2345 par 4, il suffira donc de multiplier 2000, 300, 40 et 5 par 4 et d'ajouter les résultats.

5×4 donnera des unités ; on écrira ce produit au rang des unités.

Pour faire le produit 40×4, on remarque que 40 valant 4 dizaines, le produit vaudra 4×4 dizaines ; on écrira donc ce produit à gauche du précédent.

De même, 300×4 donnera 3×4 centaines ; par suite, ce produit s'écrira à gauche du précédent.

On voit donc que le produit s'obtient en multipliant le multiplicateur successivement par les chiffres du multiplicande en commençant par la droite et en écrivant les produits en allant de droite à gauche.

Généralement, il arrive que chaque produit partiel dépasse 9 ; on fait alors la retenue que l'on reporte au produit suivant, comme pour l'addition.

<u>3e cas.</u> Le multiplicande et le multiplicateur sont quelconques.

Soit 2319×427. On a : $427 = 400 + 20 + 7 = 4 \times 100 + 2 \times 10 + 7$.

$$\begin{array}{r} 2\,3\,1\,9 \\ 4\,2\,7 \\ \hline 1\,6\,2\,3\,3 \\ 4\,6\,3\,8 \\ 9\,2\,7\,6 \\ \hline 9\,9\,0\,2\,1\,3 \end{array}$$

Il suffit donc de multiplier 2319×7 par 2×10, 4×100 et d'ajouter les résultats.

Pour faire le premier produit 2319×7, on opérera d'après la règle du 2e cas.

Pour faire le 2e produit, on remarque que : $2319 \times 20 = 2319 \times 2 \times 10 = 2319 \times 2$ dizaines ; on écrira donc ce produit, qui se fait d'après la règle du 2e cas, au rang des dizaines, c'est-à-dire en reculant d'un rang sur la gauche, on écrit le chiffre 8 sous le rang des dizaines du 1er produit, c'est-à-dire sous le chiffre 3.

De même, 2319×400 2319×4 centaines ; on écrit donc en reculant d'un rang sous le 2e produit partiel.

On ajoute ces produits partiels colonne par colonne.

<u>Cas particuliers.</u> Lorsque l'un des facteurs ou les

les 2 facteurs sont terminés par des zéros, on fait la multiplication sans tenir compte des zéros, mais au produit on ajoute autant de zéros qu'il y en a dans les 2 facteurs.

Exemple : Soit 2520 × 530 ; on fera le produit 252 × 53 et à ce produit on ajoutera 2 zéros.

__Preuve.__ La preuve de la multiplication se fait de 2 manières :

1° En recommençant l'opération en changeant l'ordre des deux facteurs ; on doit trouver le même résultat.

__Preuve par 9.__ On additionne les chiffres du multiplicande en retranchant 9 chaque fois que la somme dépasse 9 et on inscrit le dernier nombre trouvé dans l'un des angles formés par deux droites qui se coupent (croix de St André) ; on fait la même opération sur le multiplicateur et on inscrit le nombre dans l'angle opposé au 1er.

```
     2345
      522
   ------
     4690
    4690
  11725
 --------
1.224.090
```

On multiplie les deux nombres ainsi trouvés, on retranche 9 autant de fois qu'on le peut de ce produit et on écrit le reste dans le 3e angle.

On fait ensuite la somme des chiffres du produit en retranchant 9 quand le total dépasse 9 et le dernier nombre trouvé doit être égal au nombre qui se trouve dans le 3e angle.

Principes relatifs à la multiplication des nombres entiers.

__Premier principe.__ Dans un produit de plusieurs nombres, on ne change pas le résultat en intervertissant d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.

Exemple :
$5 \times 8 \times 7 \times 4 = 1120$
$7 \times 5 \times 4 \times 8 = 1120$
$8 \times 5 \times 7 \times 4 = 1120$
$7 \times 5 \times 8 \times 4 = 1120$

__Deuxième principe.__ Dans un produit de plusieurs facteurs on peut remplacer deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué.

Exemple : $5 \times 8 \times 7 \times 4 = 1120$

$5 \times 8 \times 28 = 1120$

$40 \times 28 = 1120$

Dans la pratique, on utilise souvent ce principe, surtout lorsque le produit de deux ou plusieurs facteurs est 10 ou l'unité suivie de plusieurs zéros.

Exemple : $78 \times 5 \times 2 = 78 \times 10 = 780$

$25 \times 78 \times 4 = 78 \times 100 = 7800$

$7 \times 11 \times 125 \times 8 = 77 \times 1000 = 77000$

<u>Troisième principe.</u> Pour multiplier un nombre par un produit de plusieurs facteurs, on peut multiplier d'abord ce nombre par le premier facteur, le produit obtenu par le second facteur et ainsi de suite jusqu'au dernier facteur.

Exemple : Soit à multiplier 7 par $2 \times 3 \times 4$.

On peut multiplier 7 par 2 = 14

14 par 3 = 42

42 par 4 = 168

ou $7 \times 24 = 168$ car $2 \times 3 \times 4 = 24$

Dans la pratique, ce principe trouve son application en décomposant de tête un multiplicateur en plusieurs facteurs.

Exemple : $33 \times 15 = 33 \times 3 \times 5 = 99 \times 5 = 495$

$37 \times 24 = 37 \times 6 \times 4 = 222 \times 4 = 888$

$37 \times 500 = 37 \times 5 \times 100 = 185 \times 100 = 18500$

<u>Quatrième principe.</u> Pour multiplier un produit de plusieurs facteurs par un nombre, on peut multiplier l'un des facteurs du produit par le nombre.

Exemple : $(7 \times 8 \times 3) \times 5 = 840$

$7 \times 40 \times 3 = 840$

Dans la pratique, on applique ce principe chaque fois que le produit d'un des facteurs par le multiplicateur est facile à calculer de tête.

Exemple : $(37 \times 25 \times 7) \times 4 = 37 \times 7 \times 100 = 25900$

$(47 \times 16 \times 30) \times 5 = 47 \times 80 \times 30 = 112800$

$48 \times 125 = 6 \times 8 \times 125 = 6 \times 1000 = 6.000$

<u>Cinquième principe.</u> Pour multiplier une somme par un nombre, on multiplie chaque partie de la somme par ce nombre et on fait la somme des produits obtenus.

Exemple : $(7+3+2) \times 5 = 7 \times 5 + 3 \times 5 + 2 \times 5$
$= 35 + 15 + 10 = 60$

Dans la pratique, on effectue d'abord la somme donnée :
$(7+3+2) \times 5 = 12 \times 5 = 60$

<u>Sixième principe.</u> Pour multiplier un nombre par une somme, on multiplie le nombre par chacune des parties de la somme et on fait ensuite la somme des produits obtenus.

Exemples : $5 \times (7+3+2) = 5 \times 7 + 5 \times 3 + 2 \times 3$
$= 35 + 15 + 10 = 60$

$538 \times 11 = 538 \times (10+1)$
$= 5380 + 538 = 5918$

<u>Septième principe.</u> Pour multiplier une différence par un nombre, on multiplie les deux termes de la différence par ce nombre, puis on fait la différence des produits obtenus.

Exemple : $(7-2) \times 4 = 7 \times 4 - 2 \times 4 = 28 - 8 = 20$

Dans la pratique, on commence par effectuer la différence :
$(7-2) \times 4 = 5 \times 4 = 20$

Souvent, pour opérer rapidement, on considère le nombre comme la différence de deux autres plus faciles à multiplier.

Exemple : $97 \times 8 = (100-3) \times 8 = 800 - 24 = 776$

<u>Huitième principe.</u> Pour multiplier un nombre par une différence, on peut multiplier le nombre par chaque terme de la différence et faire la différence des produits obtenus.

Exemples : $4 \times (9-3) = 4 \times 9 - 4 \times 3 = 36 - 12 = 24$
$49 \times 9 = 49 \times (10-1) = 490 - 49 = 441$

<u>Remarque.</u> Il est souvent très avantageux de mettre un nombre en facteur commun, quand on a des nombres un peu grands à multiplier.

Exemple : $2340 \times 56 + 7800 \times 56 + 4523 \times 56$

$(2340 + 7800 + 4523) \times 56 = 14653 \times 56 = 821.128$

Neuvième principe. Pour multiplier une somme par une somme, on multiplie chaque terme du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur et on fait la somme des produits partiels.

Exemple : $(9+2) \times (7+3) = (9+2) \times 7 + (9+2) \times 3$

$= 9 \times 7 + 2 \times 7 + 9 \times 3 + 2 \times 3$

$= 63 + 14 + 27 + 6$

$= 110$

On se base sur ce principe pour multiplier une différence par une somme.

Exemple : $(9-2) \times (8+6) = (9-2) \times 8 + (9-2) \times 6$

$= 9 \times 8 - 2 \times 8 + 9 \times 6 - 2 \times 6$

$= 72 - 16 + 54 - 12$

$= 98$

Même principe pour multiplier une somme par une différence.

Exemple : $(9+3) \times (7-2) = (9+3) \times 7 - (9+3) \times 2$

$= 9 \times 7 + 3 \times 7 - 9 \times 2 - 3 \times 2$

$= 63 + 21 - 18 - 6$

$= 60$

Même principe pour multiplier une différence par une différence.

Exemple : $(9-3) \times (7-2) = (9-3) \times 7 - (9-3) \times 2$

$= 9 \times 7 - 3 \times 7 - (9 \times 2 - 3 \times 2)$

$= 9 \times 7 - 3 \times 7 - 9 \times 2 + 3 \times 2$

$= 63 - 21 - 18 + 6$

$= 30$

Carré, Cube, ...

Supposons que les facteurs soient égaux, 3×3 ; on dit que le produit est 3^2, que l'on énonce : 3 puissance 2.

Le chiffre 2 placé au-dessus est appelé exposant ; il indique combien de fois le facteur 3 est pris comme facteur.

5^6 indique que 5 est pris 6 fois comme facteur.

$5^6 \quad 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$.

Pour les puissances 2 ou 3, on dit souvent carré ou cube. Par exemple, 7^3 s'énonce 7 puissance 3, ou 7 au cube.

Division

Supposons que l'on veuille partager 30 billes entre 5 écoliers; le moyen que ces écoliers emploieront (en supposant qu'ils ne sachent pas faire la division) est le suivant :

Ils prendront chacun une bille, c'est-à-dire qu'ils enlèveront 5 billes du sac, puis ils recommenceront cette distribution jusqu'à épuisement du sac, et le nombre de billes qu'ils auront sera égal au nombre de distributions qu'ils se seront faites, c'est-à-dire autant de fois que le nombre 5 est contenu dans 30.

On voit que cette opération est impraticable si les nombres sont grands; aussi a-t-on imaginé un moyen de trouver rapidement le résultat; celà constitue la division.

Définition.

Diviser un nombre par un autre, c'est chercher combien de fois le 2e est contenu dans le premier.

Diviser 30 par 5, c'est chercher combien de fois 5 est contenu dans 30.

Le grand nombre 30 est appelé <u>dividende</u>; le petit nombre 5 est le <u>diviseur</u> et le résultat est le <u>quotient</u>.

Si nous revenons à nos écoliers, il est évident que s'ils remettent leurs billes dans le sac, on retrouvera 30 billes; c'est-à-dire qu'en ajoutant leur part, ou bien qu'en multipliant 5 par la part de chacun d'eux, on obtient 30 billes.

On voit donc que dans une division le dividende est égal au diviseur multiplié par le quotient.

Reste.

Généralement, les choses ne se passent pas aussi simplement ; dans le cas actuel, les écoliers ont pu vider le sac ; mais si celui-ci avait contenu 34 billes, après la dernière distribution, il serait resté 4 billes.

On voit que la quantité qui peut rester dans une division est toujours plus petite que le diviseur, car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait faire une nouvelle distribution.

En ajoutant au nombre de billes qu'ont tous les écoliers ce qui reste dans le sac, on retrouvera le nombre de billes que l'on possédait primitivement.

Or, le nombre de billes qu'ont les écoliers est égal au produit du quotient par le diviseur. On peut donc dire que dans le cas général :

Le dividende est égal au produit du diviseur multiplié par le quotient, plus le reste.

Lorsque le diviseur est contenu un nombre entier de fois dans le dividende, on dit que la division se fait sans reste.

Diminution du diviseur.

Supposons que, le nombre de billes à partager restant le même, le nombre d'écoliers diminue ; que va-t-il se passer ?

La première chose, qui est évidente, c'est que la part de ceux qui restent ne diminuera pas ; on est même tenté de dire qu'elle augmentera, mais celà n'est pas sûr.

Supposons, en effet, que l'on ait à partager 48 billes entre 12 écoliers ; ils auront 4 billes chacun. Si l'un d'eux s'en va, sa part, c'est-à-dire 4 billes, devra être partagée entre les 11 qui restent, et on voit que celà n'augmentera pas leur part.

Au contraire, soit 48 billes à partager entre 4 écoliers ; chacun aura 12 billes ; si l'un d'eux s'en va, sa part, c'est-à-dire 12 billes, sera partagée entre les 3 qui restent, et qui auront alors 4 billes de plus chacun.

Donc, quand on diminue le diviseur, la seule chose dont on soit sûr, c'est que le quotient ne diminue pas ; il peut rester le même, ou augmenter.

Diviser un nombre par 10, 100, ... Soit à

diviser 1257 par 10 ; je dis que le quotient est 125. En effet, 5, 2, 1, représentent des unités, dizaines, centaines ; ayant dans 1.257 ces chiffres représentant des dizaines, centaines et mille, on voit donc que 125 est dix fois plus petit que 1.257.

Si on avait voulu diviser par 100, on aurait trouvé 12.

On peut encore dire que diviser par 100, c'est trouver le nombre centaines contenues dans 1.257 et, d'après la convention dans la numération, les centaines commencent après le 3e chiffre à partir de la droite ; on a bien 12 centaines.

Remarque.

Si l'on avait à diviser par 200, 300, ..., comme 200 = 2 × 100, 300 = 3 × 100, on diviserait par 100 et le résultat serait divisé par 2, 3 ....

Nombre de chiffres du quotient.

Soit à chercher le nombre de chiffres du quotient de 25.345 par 52.

Si le quotient était 10, le dividende serait 52 × 10 = 520 ; or, il est plus grand, donc le quotient est plus grand que 10.

Si c'était 100, le dividende serait 52 × 100 = 5200, ce qui est encore plus petit que 25.345 ; donc le quotient est plus grand que 100.

Si le quotient était 1000, le dividende serait : 52 × 1000 = 52000 ; ce qui est plus grand que 25.345 ; par suite, le quotient est plus petit que 1.000.

Le quotient étant compris entre 100 et 1000 est un nombre de 3 chiffres, c'est-à-dire que le nombre de chiffres du quotient est égal au nombre de zéros qu'il faut ajouter au diviseur pour former un nombre immédiatement supérieur au dividende.

Règles d'opérations.

Comme pour la multiplication, on a considéré 3 cas dans la division.

1er Cas. Le diviseur et le quotient n'ont qu'un chiffre.

Soit 63 : 9 ; on essaie mentalement les divers chiffres : 2, 3, 4. ....., jusqu'à ce qu'en les multipliant par 9 on trouve 63.

C'est en somme une multiplication et le résultat est immédia

Si on ne trouve pas exactement le dividende, on s'arrête au nombre immédiatement inférieur.

Exemple : 48 : 7. Le quotient est 6, car $7 \times 6 = 42$; le quotient 7 donnerait $7 \times 7 = 49$; c'est donc trop fort.

2e Cas. Le diviseur a plusieurs chiffres et le quotient 1 seul

Soit : 545 : 67. On voit que le quotient n'a qu'un chiffre, car en ajoutant un zéro à 67 on a 670 et $670 > 545$ (le signe $>$ s'énonce plus grand qu $<$ veut dire plus petit que).

Si au lieu de diviser par 67 on divise par 60, on aura le vrai q tient ou un quotient trop fort d'après ce que nous avons vu, quand on dimin le diviseur.

Pour diviser par 60, comme $60 = 6 \times 10$, on divisera par 10, pu on divisera le résultat par 6.

Pour diviser 545 par 10, on supprime un chiffre à droite ; on aur donc 54 et le quotient de la division sera le quotient de 54 par 6.

Le nombre 9 ainsi trouvé sera le quotient exact ou un chiffre trop fort.

Pour le savoir, on fera le produit 67×9 ; or ce produit est > 54. donc le nombre 9 est trop fort ; on mettra 8 ; comme on peut retrancher le produit 8×67 de 545, on en conclut que le quotien est 8.

$$\begin{array}{r|l} 545 & 67 \\ \hline 9 & 8 \end{array}$$

Le reste 9 s'obtient en retranchant le produit 8×67 de 545 ; dans la pratique, ce produit ne s'éc pas, on retranche au fur et à mesure de 545.

Remarque. Le premier chiffre trouvé 9 étant trop fort, on pou rait se dire 8 sera trop fort, essayons 7. Il est évident que le produit 7×67 pourra être retranché de 545 ; on serait donc tenté de dire que le quotient es 7, mais dans ce cas, on remarquera que le reste obtenu : 76 est > 67 ; donc cela montre que le quotient est trop faible et doit êt augmenté.

$$\begin{array}{r|l} 545 & 67 \\ \hline 76 & 7 \end{array}$$

On reconnaît donc que le chiffre essayé au quo est trop faible lorsque le reste trouvé est plus grand que le diviseur.

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante :

Règle. Pour diviser deux nombres, lorsque le quotient n'a qu'un chiffre, on prend le 1er chiffre à gauche du diviseur et on prend dans le dividende autant de chiffres qu'il faut pour que le nombre ainsi formé contienne au moins une fois le 1er chiffre du diviseur.

En faisant la division de ces 2 nombres, on trouvera le quotient, ou un nombre trop fort.

Pour voir si ce quotient convient, on fera le produit de ce quotient avec le diviseur et si le résultat ne peut pas être retranché du dividende, on diminuera le quotient d'une unité jusqu'à ce que la soustraction soit possible.

3e Cas. Le diviseur et le quotient ont plusieurs chiffres.

La théorie de ce 3e cas étant un peu compliquée, nous nous contenterons d'énoncer la règle pratique :

Règle. Pour diviser deux nombres quelconques, on prend le 1er chiffre à gauche du diviseur et on prend au dividende à partir de la gauche autant de chiffres qu'il faut pour que le nombre ainsi formé contienne au moins une fois le 1er chiffre du diviseur. En faisant cette division, on aura ainsi le 1er chiffre du quotient.

On multipliera le diviseur par ce chiffre et on retranchera le produit au fur et à mesure du dividende ; on aura ainsi un premier reste partiel.

En opérant sur ce premier reste comme sur le dividende, on aura le 2e chiffre du quotient ; on multipliera le diviseur par ce 2e chiffre et on aura un 2e reste partiel.

On continue l'opération jusqu'à ce qu'on arrive à un reste nul ou à un reste plus petit que le diviseur.

Cas particuliers.

Lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros, on simplifie l'opération en supprimant le même nombre de zéros au dividende et au diviseur.

Preuve.

Pour faire la preuve de la division, on multiplie le diviseur par le quotient en ajoutant le reste au produit, on devra, d'après ce que nous avons vu au début de la division, trouver le dividende.

Principes relatifs à la division.

1er Principe. Pour diviser une somme par un nombre, on divise chaque partie de la somme par ce nombre et on fait la somme des quotients obtenus.

Exemple : $(81+45+27) : 9 = 81 : 9 + 45 : 9 + 27 : 9$
$= 9 + 5 + 3 = 17$

2e Principe. Pour diviser une différence par un nombre, on divise chaque terme de la différence par ce nombre et on fait la différence des quotients obtenus.

Exemple : $(81-27) : 9 = 81 : 9 - 27 : 9 = 9 - 3 = 6$

3e Principe. Pour diviser un produit par un nombre, il suffit de diviser l'un des facteurs du produit par ce nombre.

Exemples : 1° $(4 \times 35 \times 14) : 5 = 4 \times (35 : 5) \times 14$
$= 4 \times 7 \times 14 = 392$

2° $(4 \times 5 \times 8) : 5 = 4 \times 1 \times 8 = 4 \times 8 = 32$

Dans cet exemple, il suffit de supprimer le facteur 5 pour effectuer la division.

4e Principe. Pour diviser un nombre par un produit de plusieurs facteurs, on divise ce nombre par le premier facteur, le quotient obtenu par le second facteur, puis le nouveau quotient par le troisième facteur et ainsi de suite jusqu'au dernier facteur.

Exemple : $360 : (2 \times 3 \times 4) = (360 : 2) : (3 \times 4) = 180 : (3 \times 4)$
$= (180 : 3) : 4 = 60 : 4 = 15$

5e Principe. Si on multiplie ou si on divise les deux termes d'une division par un même nombre, le quotient ne change pas; mais le reste est multiplié ou divisé par ce nombre.

Exemple : 33 : 4 donne 8 pour quotient et 1 pour reste.

Si nous multiplions 33 et 4 par 5, le quotient sera encore 8, mais le reste sera $1 \times 5 = 5$. On aura la division 165 : 20. On voit que 8 est le quotient et 5 le reste.

Calcul rapide.

Nous allons indiquer un grand nombre de procédés pratiques de calculs que l'on peut faire mentalement au moyen d'artifices qu'il est utile de connaître.

I - Pour multiplier un nombre par 4, on peut le doubler deux fois.

Exemple : Soit à multiplier 45 par 4.

On dit : 2 fois 45 = 90 et 2 fois 90 = 180.

II - On multiplie un nombre par 5 en prenant la moitié de son produit par 10.

Exemple : Soit à multiplier 59 par 5.

On a : 10 fois 59 = 590. La moitié de 590 = 295

C'est le produit cherché.

III - Pour multiplier un nombre par 9, on le multiplie par 10 et on retranche le nombre lui-même du produit.

Exemple : $84 \times 9 = 84 \times (10 - 1) = 840 - 84 = 756$

IV - Multiplication d'un nombre de 2 chiffres par 11. Le produit est formé de ces deux chiffres entre lesquels on a placé leur somme.

Exemples : $34 \times 11 = 374$

$36 \times 11 = 396$

Si la somme des deux chiffres est supérieure à 9, on opère comme plus haut, seulement on ajoute une unité aux centaines.

Exemples : $98 \times 11 = 1078$

$49 \times 11 = 539$

On multiplie un nombre quelconque par 11 en le multipliant par 10 et en ajoutant le nombre lui-même à ce produit.

Exemple : $835 \times 11 = 835 \times (10+1) = 8350 + 835 = 9185$

V – Pour multiplier un nombre par 12, on le multiplie par 10 et on ajoute le double de ce nombre au produit.

Exemple : $54 \times 12 = 54 \times (10+2) = 540 + 108 = 648$

VI – Pour multiplier deux nombres l'un par l'autre, il est souvent utile de multiplier le double de l'un par la moitié de l'autre.

Exemples : $65 \times 14 = 65 \times 2 \times 7 = 130 \times 7 = 910$

$55 \times 16 = 110 \times 8 = 880$

VII – On multiplie un nombre par 15 en le multipliant par 10 et en augmentant ce produit de sa moitié.

Exemple : $64 \times 15 = 64 \times (10+5) = 640 + 320 = 960$

VIII – Pour multiplier un nombre par 20, on le double et on ajoute un zéro à la droite du produit.

Exemple : $564 \times 20 = 564 \times (2 \times 10) = 1128 \times 10 = 11.280$

IX – Pour multiplier un nombre par 21, on le multiplie par 20 et on ajoute au produit le nombre lui-même.

Exemple : $378 \times 21 = 378 \times (20+1) = 378 \times 20 + 378$

$= 7560 + 378 = 7938$

X – On multiplie un nombre par 25 en le multipliant par 100 et en divisant le produit obtenu par 4.

Exemple : $95 \times 25 = 95 \times (100 : 4) = 9500 : 4 = 2375$

XI – On multiplie un nombre par 125, en divisant ce nombre, suivi de 3 zéros, par 8.

Exemple : $23 \times 125 = 23.000 : 8 = 2875$

XII – Pour multiplier un nombre par 0,5 on en prend la moitié.

Exemple : $42 \times 0,5 = 42 : 2 = 21$

XIII – On multiplie un nombre par 0,25 en en prenant le quart.

Exemple : $48 : 0,25 = 48 : 4 = 12$

XIV – On multiplie un nombre par 0,125 en en prenant le huitième.

Exemple : $56 : 0,125 = 56 : 8 = 7$

XV – Pour obtenir le produit de deux nombres compris entre 10 et 20, on peut ajouter au multiplicande les unités du multiplicateur, multiplier le résultat par 10 et ajouter au produit le produit des unités du multiplicande et du multiplicateur.

Exemple : $18 \times 13 = (18+3) \times 10 + 8 \times 3 = 210 + 24 = 234$

XVI – Le carré d'un nombre terminé par 5 est toujours terminé par 25. On obtient les centaines du carré en multipliant les dizaines du nombre proposé par le nombre des dizaines augmenté d'une unité.

Exemples : $\overline{35}^2 = (3 \times 4) \times 100 + 25 = 1225$

$\overline{85}^2 = (8 \times 9) \times 100 + 25 = 7225$

$\overline{115}^2 = (11 \times 12) \times 100 + 25 = 13225$

XVII – On divise un nombre par 20 en prenant la moitié de son quotient par 10.

Exemple : $6420 : 20 = 6420 : (10 \times 2) = (6420 : 10) : 2$
$= 642 : 2 = 321$

XVIII – Pour diviser un nombre par 25, on le multiplie par 4 et on divise le produit par 100.

Exemple : $2475 : 25 = (2475 \times 4) : 100 = 9900 = 99$

XIX – Pour diviser un nombre par 0,25, on le multiplie par 4.

Exemple : $17 : 0,25 = 17 \times 4 = 68$

XX – Pour diviser un nombre par 0,125, on le multiplie par 8.

Exemple : $19 : 0,125 = 19 \times 8 = 152$

Nombres premiers

Un nombre est premier lorsqu'il n'est divisible que par lui-même ou par l'unité. Ainsi les nombres 2, 3, 5, 7, 11, sont des nombres premiers ; 4, 6, 8, 9, ne sont pas premiers, car ils sont divisibles par 2 ou par 3.

Décomposition en facteurs premiers.

Si un nombre n'est pas premier, il est divisible par un nombre ; il peut arriver que le quotient obtenu soit un nombre premier ; alors on ne pourra plus faire de division.

Si le quotient n'est pas premier, on pourra alors le diviser par un nombre et ainsi de suite ; on arrivera ainsi à décomposer le nombre en un produit de facteurs qui sont tous premiers. Pour faire cette opération, à droite du nombre, on tire un trait vertical, puis on commence à diviser par les plus petits nombres premiers.

Quand on ne peut plus diviser avec l'un, on prend le suivant, et ainsi de suite.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	1

Exemple : Soit le nombre 360 ; on peut diviser par 2, le quotient est 180 ; on le place sous 360.

180 est divisible par 2, on place le quotient 90 dessous.

90 „ „ „ 45 „

45 n'est plus divisible par 2 ; on essaiera le nombre premier suivant : 3 ; le quotient est encore divisible par 3 ; le quotient 5 n'est plus divisible par 3 ; on essaie le nombre premier 5 ; le quotient étant 1, l'opération est terminée.

On peut donc écrire : $360 \quad 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

ou, d'après la notation des exposants : $360 \quad 2^3 \times 3^2 \times 5$

On voit que 360 est ainsi décomposé en un produit de facteurs premiers.

Caractères de divisibilité

On dit qu'un nombre est divisible par un autre lorsque la division de ces deux nombres se fait sans reste.

Il est utile de pouvoir reconnaître, sans faire la division, quand un nombre est divisible par un autre.

Nous allons indiquer les principaux caractères de divisibilité.

<u>Divisibilité par 2.</u> Un nombre est divisible par 2 quand il est terminé par un chiffre pair ou par un zéro.

Exemple : 18, 40, 54, sont divisibles par 2 ; 35, 47, 79, ne le sont pas.

<u>Divisibilité par 5.</u> Un nombre est divisible par 5 quand il est terminé par un 5 ou par un zéro.

Exemple : 25, 175, 2000, sont divisibles par 5 ; 83, 181, ne le sont pas.

<u>Divisibilité par 4.</u> Un nombre est divisible par 4 quand le nombre formé par les deux derniers chiffres à droite est divisible par 4, ou qu'il est terminé par 2 zéros.

Exemple : 184, 224, 4000 sont divisibles par 4, car 84 et 24 sont divisibles par 4.

<u>Divisibilité par 25.</u> Un nombre est divisible par 25 quand le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25 ou qu'il est terminé par deux zéros.

Exemple : 125, 6275, 24000, sont divisibles par 25, car 25 et 75 le sont.

<u>Divisibilité par 3 ou par 9.</u> Un nombre est divisible par 3 ou par 9 quand la somme de ses chiffres est divisible par 3 ou par 9.

Exemple : 2472 est divisible par 3, car $2 + 4 + 7 + 2 = 15$ et 15 est divisible par 3. 236.583 est divisible par 9, car $2 + 3 + 6 + 5 + 8 + 3 = 27$ et 27 est divisible par 9.

<u>Divisibilité par 11.</u> Un nombre est divisible par 11 quand la somme de ses tranches de deux chiffres à partir de la droite est divisible par 11.

Exemples : 134.574 est divisible par 11 car :

$74 + 45 + 13 = 132$ et 132 est divisible par 11.

Plus grand commun diviseur de deux ou de plusieurs nombres.

<u>Définition</u>. On appelle <u>plus grand commun diviseur</u> de plusieurs nombres le plus grand nombre qui les divise tous exactement.

Ainsi, 15 est le plus grand commun diviseur de 30, 45 et 75.

<u>Recherche du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres</u>.

Pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on les décompose en leurs facteurs premiers et on fait le produit des facteurs premiers communs en affectant chacun d'eux d'un exposant égal au plus faible des exposants dont ce facteur est affecté dans les différents nombres.

<u>Exemples</u>: 1° Soit à trouver le P.G.C.D. entre 360 et 172.

En décomposant ces nombres en leurs facteurs premiers, on a :

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$
$$172 = 2^2 \times 43$$

Le P.G.C.D. cherché est : $2^2 = 4$.

2° Soit à trouver le P.G.C.D. entre les nombres 35 et 24.

En les décomposant en leurs facteurs premiers, on a :

$$35 = 5 \times 7$$
$$24 = 2^3 \times 3$$

Ces deux nombres n'ont pas de facteur commun autre que l'unité ; ils sont donc <u>premiers entre eux</u>.

3° Soit à trouver le P.G.C.D. des nombres 360, 180 et 120.

Décomposant en facteurs premiers, on trouve :

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$
$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$
$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

Le P.G.C.D. sera donc : $2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres.

Définition. On appelle plus petit commun multiple de plusieurs nombres, le plus petit nombre qui est divisible par chacun d'eux.

Ainsi 720 est le P. P. C. M. des nombres 12, 16, 60 et 72.

Recherche du P. P. C. M.

Pour trouver le P. P. C. M. de plusieurs nombres, on les décompose en leurs facteurs premiers et on fait le produit des facteurs communs ou non affectés de leur plus fort exposant.

Exemples : 1° Soit à trouver le P. P. C. M. des nombres 360, 180 et 120.

En décomposant ces nombres en leurs facteurs premiers, on trouve :

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$
$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$
$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

Le P. P. C. M. est donc égal à $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$

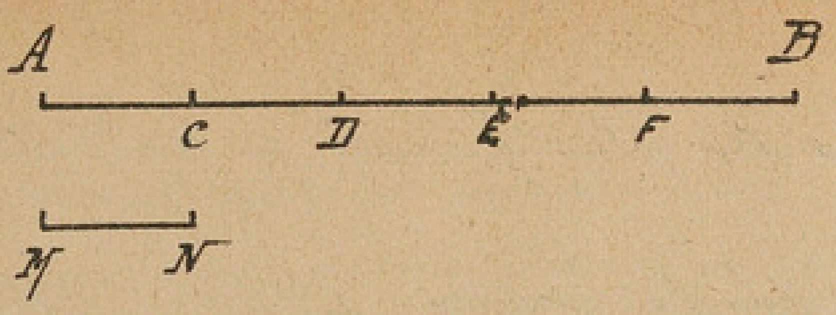
2° Soit à trouver le P. P. C. M. de 12, 80, 75 et 72.
Décomposant en facteurs premiers, on a :

$$12 = 2^2 \times 3$$
$$80 = 2^4 \times 5$$
$$75 = 3 \times 5^2$$
$$72 = 2^3 \times 3^2$$

Le P. P. C. M. est donc $2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 3.600$.

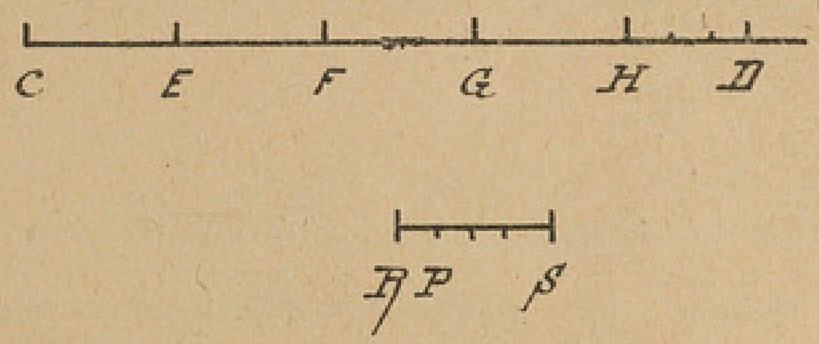
Fractions

On sait que pour mesurer une longueur AB, on prend une



une unité de mesure $MN = 1$ mètre, par exemple et qu'on porte cette unité autant de fois que l'on peut dans la longueur AB ; ici, MN étant contenu 5 fois dans AB, on dit que la longueur de AB est de 5 mètres.

En général, il n'en est presque jamais ainsi ; le plus souvent, en effet, l'unité n'est pas contenue un nombre entier de fois dans la grandeur.



Par exemple, si l'on veut mesurer CD en prenant RS comme unité de mesure, on trouve que RS est contenu 4 fois dans CH, mais qu'il reste une longueur $HD < RS$

De sorte que l'on peut dire que la longueur CD est plus grande que 4 mètres, mais plus petite que 5 mètres.

On fait alors l'opération suivante : on partage l'unité RS en 4 parties égales ; soit RP une de ces parties, on porte la longueur RP sur la longueur HD qui reste à mesurer. Supposons que RP soit contenu 3 fois dans HD, on dira alors que la longueur de CD est 4 mètres $\frac{3}{4}$.

La quantité $\frac{3}{4}$ est appelée fraction ; le nombre 4 est le dénominateur et le nombre 3, qui est au-dessus du trait horizontal, est le numérateur.

D'après la façon dont on a formé la fraction $\frac{3}{4}$, on peut dire qu'une fraction est une ou plusieurs parties de l'unité que l'on a partagée en parties égales.

Lecture d'une fraction.

Pour lire une fraction, on énonce successivement le numérateur et le dénominateur, que l'on fait suivre de la terminaison ième.

Ainsi, $\frac{5}{8}$, s'énonce cinq huitièmes.

On fait exception pour les fractions dont le dénominateur est 2, 3, 4 ; on dit alors demi, tiers, quart. Par exemple, $\frac{3}{4}$ s'énonce trois quarts.

Rendre une fraction 2, 3, 4 fois plus grande.

Pour rendre une fraction deux fois plus grande, on multiplie son numérateur par 2.

Soit la fraction $\frac{3}{11}$; je dis que la fraction $\frac{3 \times 2}{11} = \frac{6}{11}$ est deux fois plus grande.

En effet, $\frac{3}{11}$ représente 3 parties de l'unité partagée en 11 parties égales ; $\frac{6}{11}$ représente deux fois plus de ces parties, puisque $6 = 3 \times 2$; $\frac{6}{11}$ est donc 2 fois plus grand que $\frac{3}{11}$.

Pour rendre une fraction 3 fois plus grande, on multiplierait son numérateur par 3.

Remarque. Lorsque le dénominateur est divisible par 2, pour rendre une fraction deux fois plus grande, on peut également diviser le dénominateur par 2.

Soit, par exemple : $\frac{3}{8}$. $\frac{3}{4}$ est deux fois plus grand, car dans les deux fractions on prend le même nombre de parties, mais dans $\frac{3}{4}$, les parties sont deux fois plus grandes que dans $\frac{3}{8}$, puisque l'unité a été partagée en 4, au lieu de l'être en huit.

Rendre une fraction 2, 3 fois plus petite.

Pour rendre une fraction deux fois plus petite, on multiplie son dénominateur par 2.

Soit $\frac{5}{6}$. Je dis que $\frac{5}{6 \times 2} = \frac{5}{12}$ est deux fois plus petit.

En effet, les deux fractions représentent toutes les deux 5 parties de l'unité, mais dans la première fraction l'unité a été partagée en 6 parties et dans la deuxième l'unité a été partagée en $2 \times 6 = 12$ parties, les parties sont donc 2 fois plus petites.

Remarque. Lorsque le numérateur est divisible par 2, on peut le diviser par 2.

Par exemple, $\frac{6}{7}$; je dis que $\frac{3}{7}$ est deux fois plus petit car on prend 2 fois moins de parties.

On peut multiplier les 2 termes d'une fraction par un même nombre, sans changer sa valeur.

Soit, par exemple, la fraction $\frac{3}{4}$; en multipliant ses deux termes par 2, on aura $\frac{6}{8}$; je dis que l'on a : $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

En effet, dans la 2e fraction, l'unité est partagée en deux fois plus de parties que dans la 1ère ; les parties sont donc 2 fois plus petites, mais on en prend 6 au lieu de 3, c'est à dire qu'on en prend 2 fois plus : le résultat est donc le même.

On verrait également qu'on peut diviser les deux termes d'une fraction sans changer sa valeur.

Par exemple : $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Simplification des fractions.

Ce qui précède, permet de simplifier une fraction, c'est à dire de la remplacer par une autre équivalente, mais ayant des termes plus petits.

On sait qu'une fraction ne change pas quand on divise ses deux termes par un même nombre ; or, en divisant les termes, on obtient des nombres plus petits ; donc, pour simplifier une fraction, on divisera ses deux termes par un même nombre.

Pour la réduire à sa plus simple expression, on divisera les deux termes par leur plus grand commun diviseur. On dit alors que la fraction est irréductible.

Soit : $\frac{15}{45}$. Le P. G. C. D. de 15 et 45 est 15.
Divisant les 2 termes par 15, on a la fraction équivalente $\frac{1}{3}$, qui n'est plus simplifiable.

On dit encore que la fraction $\frac{1}{3}$ est réduite à sa plus simple expression.

Comparaison des fractions.

Comme on ne peut comparer que des quantités de même nature, il faut d'abord que les fractions représentent des quantités de même nature.

__1er Cas.__ $\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{5}$ sont comparables, car elles valent toutes les deux 3 parties de l'unité ; les parties de la 1ère fraction étant pl. grandes que celles de la 2ème, on a : $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$; donc :

Règle. Si deux fractions ont même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

2e Cas. $\frac{4}{5}$ et $\frac{2}{5}$ sont comparables car elles sont toutes les deux composées de cinquièmes parties de l'unité ; la 1ère fraction valant 4 parties et la 2e seulement deux. On aura : $\frac{4}{5} > \frac{2}{5}$; donc :

Règle. Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

3e Cas. En général, les fractions n'ont pas de termes égaux ; par exemple : $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{4}$. Elles ne sont pas comparables directement, car elles ne représentent pas des quantités de même nature ; l'une représente des septièmes et l'autre des quarts.

Pour leur faire exprimer des quantités de même nature, on les réduit au même dénominateur.

Réduction des fractions au même dénominateur.

Soit les fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{4}$.

On sait que $7 \times 4 = 4 \times 7$. Si donc on multiplie les deux termes de la 1e fraction par 4 et les deux termes de la 2e par 7, on aura deux fractions égales aux précédentes et qui auront même dénominateur :

$$\frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{20}{28} \qquad \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$$

Comme on a : $\frac{20}{28} < \frac{21}{28}$, on a : $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$

On peut énoncer la règle suivante :

Règle. Pour réduire deux fractions au même dénominateur, on multiplie les deux termes de la 1e par le dénominateur de la 2e et les deux termes de la 2e par le dénominateur de la 1e.

Si on avait plus de deux fractions, on opèrerait de la même façon, mais il faudrait multiplier les deux termes de la 1e fraction par le dénominateur des autres fractions, les deux termes de la 2e par le dénominateur des autres, etc.

Remarques très importantes. I. Pour simplifier les calculs sur les fractions, il faut toujours commencer par les simplifier.

Exemple : Soit à réduire au même dénominateur les fractions :

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{21}{63}, \frac{8}{12}$$

En simplifiant ces fractions, on obtient :

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

Comme ici il y a deux fractions ayant le dénominateur 3, il suffira de multiplier une fois par 3.

On multipliera les deux termes de la		1e fraction	par :	2×3
"	"	2e	"	4×3
"	"	3e	"	4×2
"	"	4e	"	4×2

Et on obtiendra : $\frac{18}{24}, \frac{12}{24}, \frac{8}{24}, \frac{16}{24}$.

II – Pour ne pas allonger inutilement les calculs, il est préférable de toujours réduire les fractions à leur plus petit dénominateur commun.

Celui-ci est le P.P.C.M. des dénominateurs (après simplification des fractions données, s'il y a lieu). Ainsi, opérant sur les données précédentes simplifiées, on trouve comme plus petit commun multiple des dénominateurs le nombre 12. Donc :

On multipliera les deux termes de la		1e fraction	par	$\frac{12}{4} = 3$
"	"	2e	"	$\frac{12}{2} = 6$
"	"	3e	"	$\frac{12}{3} = 4$
"	"	4e	"	$\frac{12}{3} = 4$

Et on obtiendra : $\frac{9}{12}, \frac{6}{12}, \frac{4}{12}, \frac{8}{12}$.

On constate aisément que cette solution est plus simple que la précédente.

Expressions fractionnaires.

Supposons que l'on partage l'unité en 4 parties égales ; on peut prendre 1, 2, 3 parties, on aura les fractions $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$, qui sont évidemment plus petites que l'unité.

Si on prend 4 parties, on aura la fraction $\frac{4}{4}$, et comme on a pris toutes les parties, on a évidemment $\frac{4}{4} = 1$.

Supposons, pour plus de clarté, que l'on ait des pommes partagées en 4 parties égales.

Quand on aura pris 4 parties, on aura une pomme entière et l'on peut dire aussi que l'on a la fraction $\frac{4}{4}$.

Si l'on continue à prendre des parties, on aura plus d'une pomme, c'est-à-dire plus d'une unité, mais l'on peut encore dire que l'on a les fractions $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, ...

Ces quantités, qui sont >1 et qui ont la forme des fractions, sont appelées expressions fractionnaires.

Les expressions fractionnaires étant >1, on peut se proposer, étant donné une expression fractionnaire, de chercher combien elle contient d'unités.

Extraire les entiers d'une expression fractionnaire et réduire en expressions fractionnaires.

Soit l'expression $\frac{17}{5}$; comme l'unité vaut 5 cinquièmes, on aura autant d'unités que 5 est contenu dans 17, soit 3 unités ; il reste $\frac{2}{5}$
On peut donc écrire :

$$\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$$

On a donc la règle suivante :

Règle. Pour extraire les entiers contenus dans une expression fractionnaire, on divise le numérateur par le dénominateur, et le quotient est le nombre d'entiers cherché. Le reste est le numérateur de la fraction, ayant pour dénominateur le même dénominateur que l'expression fractionnaire.

Inversement, pour réduire des entiers et une fraction en expression fractionnaire, on multiplie les entiers par le dénominateur et au produit on ajoute le numérateur de la fraction.

Exemple : $3 + \frac{2}{3} = \frac{3 \times 3 + 2}{3} = \frac{11}{3}$

Opérations fractionnaires

Addition. Comme on ne peut additionner que des quantités de même nature, on réduit d'abord les fractions au même dénominateur.

Soit les fractions : $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$

On a : $\frac{2\times 5}{3\times 5} = \frac{10}{15}$ $\qquad$ $\frac{4\times 3}{3\times 5} = \frac{12}{15}$

Donc : $$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15} = 1 + \frac{7}{15} = 1\frac{7}{15}$$

Il est évident que 10 parties plus 12 parties font $10 + 12 = 22$ parties. On extrait les entiers s'il y a lieu.

Règle. Pour additionner des fractions, on les réduit au plus petit dénominateur commun, puis on additionne les numérateurs et on prend comme dénominateur, le dénominateur commun aux fractions. On simplifie s'il y a lieu.

Autre exemple. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{15}$

En réduisant ces fractions au plus petit dénominateur comm.

On a :

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{15} = \frac{45}{60} + \frac{50}{60} + \frac{28}{60} = \frac{123}{60} = \frac{41}{20}$$

Souvent, on extrait les unités de l'expression fractionnaire on obtient ainsi $2\frac{1}{20}$ pour le résultat cherché.

Cas particuliers. Lorsqu'il y a des entiers à additionn on additionne les entiers à part et les fractions également à part, aprè avoir réduit les fractions au plus petit dénominateur commun.

$$2\frac{3}{4} + 1\frac{5}{6} = 2\frac{9}{12} + 1\frac{10}{12} = 2 + 1 + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = 3 + \frac{19}{12} = 3 + 1 + \frac{7}{12} = 4\frac{7}{12}$$

Soustraction. Pour soustraire deux fractions, on les r réduit d'abord au plus petit dénominateur commun.

Soit : $\frac{6}{7} - \frac{2}{3} = \frac{18}{21} - \frac{14}{21}$

On a immédiatement : 18 parties — 14 parties = 4 parties.

Donc :

$$\frac{6}{7} - \frac{2}{3} = \frac{18}{21} - \frac{14}{21} = \frac{18-14}{21} = \frac{4}{21}$$

Règle. Pour soustraire deux fractions, on les réduit au plus petit dénominateur commun, puis on soustrait les numérateurs et on donne comme dénominateur le dénominateur commun. On simplifie s'il y a lieu.

Exemple : $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$

Cas particuliers. Lorsqu'il y a des entiers, on commence par réduire les fractions au même dénominateur, ensuite on opère séparément sur les entiers et les fractions.

Exemples. 1° $2\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = 2\frac{4}{8} - \frac{3}{8} = 2\frac{1}{8}$

2° $17\frac{2}{3} - 12\frac{6}{7} = 17\frac{14}{21} - 12\frac{18}{21} = 16\frac{35}{21} - 12\frac{18}{21} = 4\frac{17}{21}$

On voit que dans le cas où la fraction à retrancher est plus grande que celle dont on retranche, on remplace cette dernière par une expression fractionnaire équivalente à la fraction dont on retranche, augmentée d'une unité et que l'on diminue d'une unité l'entier du nombre dont on retranche.

3° $24 - 17\frac{4}{13} = 23\frac{13}{13} - 17\frac{4}{13} = 4\frac{9}{13}$

Multiplication.

On distingue plusieurs cas, comme pour les nombres entiers.

1er cas. Multiplier une fraction par un nombre. Soit $\frac{3}{4} \times 2$.

D'après la définition de la multiplication, multiplier $\frac{3}{4}$ par 2, c'est rendre la fraction deux fois plus grande, et on sait que pour celà on multiplie le numérateur par 2.

Donc : $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3 \times 2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

<u>Règle.</u> Pour multiplier une fraction par un nombre, on multiplie le numérateur par ce nombre et on garde le même dénominateur.

<u>Remarque.</u> S'il y avait des entiers, il faudrait évidemment multiplier les entiers par le nombre.

<u>2e Cas.</u> Multiplier un nombre par une fraction. Soit $3 \times \frac{7}{8}$.

Le multiplicateur est les $\frac{7}{8}$ de l'unité ; donc, multiplier 3 par $\frac{7}{8}$, c'est en prendre les $\frac{7}{8}$.

Pour celà, on prendra d'abord le $\frac{1}{8}$ de 3, c'est-à-dire qu'on divisera 3 par 8, puis pour prendre les $\frac{7}{8}$, on multipliera ce résultat par 7 ; on a donc : $3 \times \frac{7}{8} = \frac{3}{8} \times 7$, ce qui se fait d'après le 1er cas.

Donc : $3 \times \frac{7}{8} = \frac{3}{8} \times 7 = \frac{3 \times 7}{8} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$

<u>Règle.</u> Pour multiplier un nombre par une fraction, on multiplie le nombre par le numérateur et on prend comme dénominateur le dénominateur de la fraction.

<u>3e Cas.</u> Multiplier une fraction par une fraction.

Soit : $\frac{5}{6} \times \frac{7}{9}$.

D'après la définition de la multiplication, multiplier $\frac{5}{6}$ par $\frac{7}{9}$, c'est en prendre les $\frac{7}{9}$; on en prend d'abord le $\frac{1}{9}$, c'est-à-dire qu'on rend la fraction $\frac{5}{6}$ neuf fois plus petite. Pour celà, on multiplie son dénominateur par 9 ; on aura donc $\frac{5}{6 \times 9}$; il reste à prendre 7 fois cette quantité, pour celà on la multiplie par 7, c'est-à-dire qu'on multiplie son numérateur par 7.

On a donc : $\frac{5}{6} \times \frac{7}{9} = \frac{5 \times 7}{6 \times 9}$

<u>Règle.</u> Pour multiplier une fraction par une fraction, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

<u>Cas des nombres fractionnaires.</u> Si les facteurs donnés

sont des nombres fractionnaires, on les met sous la forme de fraction et l'on applique la règle précédente.

Exemples : 1° — $7\frac{2}{3} \times 3\frac{4}{5} = \frac{23}{3} \times \frac{19}{5} = \frac{23 \times 19}{3 \times 5} = \frac{437}{15} = 29\frac{2}{15}$

2° — $9\frac{4}{5} \times 6\frac{3}{7} = \frac{49}{5} \times \frac{45}{7} = \frac{\overset{7}{\cancel{49}} \times \overset{9}{\cancel{45}}}{\cancel{5} \times \cancel{7}} = 63$

3° — $7\frac{2}{9} \times 4\frac{1}{5} = \frac{65}{9} \times \frac{21}{5} = \frac{\overset{13}{\cancel{65}} \times \overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \times \cancel{5}} = \frac{91}{3} = 30\frac{1}{3}$

Division.

La division des fractions comprend aussi 3 cas.

1er Cas. Diviser une fraction par un nombre.

Soit $\frac{2}{7} : 4$. Il faut rendre la fraction $\frac{2}{7}$ 4 fois plus petite. On a vu qu'il suffisait de multiplier le dénominateur par 4 ; donc :

$$\frac{2}{7} : 4 = \frac{2}{7 \times 4} = \frac{1}{7 \times 2} = \frac{1}{14}$$

Règle. Pour diviser une fraction par un nombre, on multiplie le dénominateur de la fraction par le nombre.

2e Cas. Diviser un nombre par une fraction.

Soit : $3 : \frac{4}{5}$. — Nous énoncerons simplement la règle :

Règle. Pour diviser un nombre par une fraction, on multiplie par la fraction diviseur renversée.

Exemple : $3 : \frac{4}{5} = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

3e Cas. Diviser une fraction par une fraction. On multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

Exemple : $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$

Cas des nombres fractionnaires. Pour diviser deux nombres fractionnaires l'un par l'autre, on met le dividende et le diviseur sous forme de fraction et l'on applique la règle précédente.

Exemple : $7\frac{2}{3} : 5\frac{4}{9} = \frac{23}{3} : \frac{49}{9} = \frac{23}{3} \times \frac{9}{49}$

$$= \frac{23 \times \cancel{9}^{3}}{\cancel{3} \times 49} = \frac{69}{49} = 1\frac{20}{49}$$

Nombres décimaux

Définition. Les nombres décimaux sont des fractions, seulement dans ce cas l'unité au lieu d'être divisée en un nombre quelconque de parties égales, est partagée en 10, 100, 1000 ...... parties ; au lieu d'écrire $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, on convient d'écrire 0,1 , 0,01 , 0,001, d'après la même règle que la numération des nombres entiers.

A partir de la virgule, les chiffres représentent des parties de 10 en 10 fois plus petites.

$\frac{5}{100}$ s'écrit 0,05, car le chiffre 5 représentant des centièmes doit être de deux rangs à droite après le chiffre des unités.

Les opérations sur les nombres décimaux se font d'après les mêmes règles que pour les nombres entiers.

Addition.

On place les nombres les uns au dessous des autres, en plaçant les unités de même ordre dans une même colonne ; on additionne ensuite les colonnes comme pour les nombres entiers et on place la virgule au résultat sous la virgule des nombres que l'on additionne.

$$\begin{array}{r} 2,25 \\ 3,07 \\ 1,145 \\ \hline 6,465 \end{array}$$

Soustraction.

On place les nombres l'un au dessus de l'autre, en faisant correspondre les unités de même ordre. On fait l'opération comme pour les nombres entiers, et on place la virgule sous la virgule des nombres que l'on a soustraits.

$$\begin{array}{r} 251,312 \\ 64,251 \\ \hline 187,061 \end{array}$$

Multiplication.

On multiplie les facteurs comme s'ils étaient entiers, mais au produit on prend autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs réunis.

```
     3,725
     0,142
    ------
     7450
    14900
   3725
  --------
  0,528950
```

Division.

1er Cas. Le dividende seul a des chiffres décimaux.

Soit : 4125,24 : 237. On fait la division comme si le dividende était entier, mais on sépare au quotient trouvé autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le dividende.

```
4125,24 | 237
1755    |-----
 962    | 17,40
  144
```

Ainsi, 4125,24 : 237 donne 17,40 pour quotient.

2e Cas. Le diviseur seul a des chiffres décimaux.

Soit 745 : 17,24. On multiplie le dividende et le diviseur par 10, 100, ..., jusqu'à ce que le diviseur devienne entier, puis on divise ensuite comme pour des nombres entiers.

```
74500 | 1724
 5540 |------
  368 | 43
```

Dans l'exemple choisi, on voit qu'il faudra multiplier le diviseur et le dividende par 100, puisque le diviseur contient des centièmes ; on est alors amené à diviser 74.500 par 1724. Le quotient cherché est 43.

3e Cas. Le diviseur et le dividende sont des nombres décimaux.

On multiplie ces deux nombres par 10, 100, ... jusqu'à ce que le diviseur devienne un nombre entier ; on fait alors la division d'après les règles précédentes.

Exemple : 125,32 : 8,34. Il faudra multiplier les deux nombres par 100 ; on est ramené à diviser 12532 par 834. Le quotient est 15.

```
12532 | 834
 4192 |-----
  022 | 15
```

2e Exemple. 342,427 : 41,4, il faut multiplier par 10. On est ramené à 3424,27 : 414. En opérant comme si les nombres étaient entiers, on trouve 827 au quotient ; mais le dividende ayant deux chiffres décimaux, le quotient sera : 8,27.

```
3424,27 | 414
 1122   |-----
  2947  | 8,27
    49
```

3e Exemple : 517,21 : 41,423. Il faut multiplier par

517210 | 41423 1000 ; on a alors à faire la division 517.210 : 4142.
102980 12 le quotient est 12.
20134

Application. Cela permet de faire la division lorsque le dividende est plus petit que le diviseur.

Soit à faire la division 3 : 4. On peut écrire : 3 = 3,00 ; il faut alors diviser 3,00 par 4 ; c'est une division décimale.

3.00 | 4
20 0,75
0

En appliquant la règle, on divise 300 par 4 : on trouve 75 au quotient ; en séparant deux chiffres décimaux on aura : 3 : 4 = 0,75.

Dans la pratique, les zéros s'ajoutent au fur et à mesure.

Il y a des cas où la division ne s'arrête jamais, si loin qu'on la prolonge.

Exemple : 2 : 3. On trouvera au quotient 0,66666 ....

Si l'on prend pour quotient 0,66, on dit que l'on a le quotient à $1/100^e$ près ; en prenant 0,666 on aura le quotient à $1/1000^e$ près.

Règle. Pour calculer le quotient à $1/10$, $1/100$ .... on calcule le quotient avec 1, 2, 3 chiffres décimaux.

Puissances & Racines

Définitions. On appelle carré d'un nombre, le produit de ce nombre par lui-même.

Exemple : 5 au carré = 5 × 5 = 25

5 au carré s'écrit 5 avec un petit 2 à droite et un peu au-dessus. Le petit 2 est appelé exposant : 5^2.

On appelle puissance d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre.

La première puissance d'un nombre est ce nombre lui-même.

Exemple : 5 est la 1^{re} puissance de 5.

La deuxième puissance s'appelle encore le carré du nombre

Exemple : 5 à la 2e puissance est $5^2 = 5 \times 5$ et s'énonce 5 au carré.

La troisième puissance s'appelle encore le cube du nombre.

Exemple : 5 à la 3e puissance, ou 5 au cube, s'écrit $5^3 = 5 \times 5 \times 5$.

On indique une puissance d'un nombre en écrivant à sa droite et un peu au dessus un nombre égal au degré de la puissance. Ce dernier nombre est l'exposant de la puissance.

Racines.

On appelle racine carrée d'un nombre un deuxième nombre dont le carré est égal au premier.

Exemple : La racine carrée de 25 est 5, parce que le carré de 5 est 25.

On appelle racine cubique d'un nombre un deuxième nombre dont le cube est égal au premier.

Exemple : La racine cubique de 27 est 3, parce que 3 au cube est égal à 27.

Radical. Indice de la racine.

On indique une racine d'un nombre en écrivant ce nombre sous le signe $\sqrt{}$ qu'on appelle radical.

On place dans l'ouverture de ce signe un chiffre qui fait connaître l'ordre de la racine.

Ainsi, la racine cubique de 27 s'écrit : $\sqrt[3]{27}$.

Le chiffre 3 placé dans le radical est l'indice de la racine. Quand l'indice est 2, on le sous-entend ; ainsi $\sqrt{9}$ est la même chose que $\sqrt[2]{9}$.

Carrés.

Les carrés des 9 premiers nombres sont : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, et l'on remarque qu'ils se terminent par un des chiffres : 1, 4, 5, 6 ou 9.

Les carrés des nombres : 10, 100, ... sont 100, 10000, ... c'est-à-dire l'unité suivi d'un nombre pair de zéros.

Un nombre de deux chiffres (compris entre 10 et 100) a son carré compris entre 100 et 10000 ; c'est donc un nombre de 3 ou 4 chiffres.

Le carré d'un nombre entier est un carré parfait.

Un nombre terminé par un nombre impair de zéros ne peut être un carré parfait.

Ainsi, 1.000 n'est pas un carré parfait.

Un nombre terminé par 2, 3, 7 ou 8 ne peut être un carré parfait.

Ainsi, 62, 73, 87, 98 ne sont pas des carrés parfaits.

Composition d'un carré.

Un nombre de plusieurs chiffres est décomposable en dizaines et en unités. Le carré de ce nombre se compose du carré des dizaines, du double produit des dizaines par les unités et du carré des unités.

Soit le nombre 234 ; il peut être décomposé en 23 dizaines et 4 unités. Son carré ou

$$234 \times 234 = (230+4)(230+4)$$

et si nous formons les produits partiels, nous voyons que :

$$\begin{aligned}(230+4)^2 &= (230\times 230)+(230\times 4)+(4\times 230)+(4\times 4)\\ &= \overline{230}^2 + 2\times 230\times 4 + 4^2\\ &= 52900 + 1840 + 16 = 54756\end{aligned}$$

Nous pourrons remarquer que le nombre 54.756 est la somme de trois parties :

1° Le carré des 23 dizaines, soit $\overline{230}^2 = 52900$

2° Le double produit des dizaines par les unités : $2 \times 230 \times 4 = 1840$.

3° Le carré des unités : $4^2 = 16$

Extraction de la racine carrée.

Extraire la racine carrée d'un nombre à une unité près, c'est chercher le plus grand nombre entier dont le carré soit inférieur ou égal au nombre donné.

Extraction de la racine carrée d'un nombre inférieur à 100.

Ces racines carrées sont données par la table de multiplication.

Ainsi : $\sqrt{81} = 9$ parce que $9 \times 9 = 81$.

Et $\sqrt{67} = 8$ à une unité près, parce que 8 est le plus grand nombre dont le carré 64 soit inférieur à 67.

Extraction de la racine carrée d'un nombre de plus de deux chiffres. Règle.

Pour extraire la racine carrée d'un nombre quelconque :

1° On le partage en tranches de deux chiffres, à partir de la droite. La dernière tranche comprend un ou deux chiffres.

2° On prend la racine carrée de la 1ère tranche à gauche. On a ainsi le premier chiffre de la racine. On forme le carré de ce chiffre que l'on soustrait de la 1ère tranche.

3° A côté du reste, on abaisse la 2e tranche et l'on divise le nombre dizaines du nombre ainsi obtenu par le double du premier chiffre de la racine. Le quotient est le 2e chiffre de la racine ou un nombre trop fort.

4° On écrit le chiffre ainsi obtenu à la suite du double de la racine et on le multiplie par le nombre ainsi formé. On retranche ce produit du 1er reste.

5° A droite du 2e reste, on abaisse une nouvelle tranche et l'on continue jusqu'à ce que la racine présente autant de chiffres qu'on a formé

63 91 72 35	7994		
49	149	1589	15984
	9	9	4
1491	1341	14301	63936
1341			
15072			
14301			
77135			
63936			
13199			

de tranches dans le nombre donné.

On dispose l'opération comme il est indiqué p. 43.

On a donc :

$$\sqrt{63'91'72'35} = 7994 \text{ à une unité près.}$$

L'opération se vérifie toujours en multipliant la racine carrée par elle-même et en ajoutant le reste au produit obtenu :

$$63917235 = 7994 \times 7994 + 13199$$

Extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 près.

__Règle.__ Pour extraire la racine carrée d'un nombre à 0,1, 0,01, 0,001 près, on recule la virgule de 2, 4 ou 6 rangs vers la droite. On extrait ensuite la racine carrée du nombre ainsi trouvé, puis on divise cette racine par 10, 100 ou 1000, suivant que l'approximation cherchée est 0,1, 0,01, 0,001.

__Exemple I.__ – Soit à extraire la racine carrée de 47 à 0,01 près.

On a : $47 = 47,0000$

$$\begin{array}{r|l|l}
47\;00\;00 & 685 & \\
\cline{2-3}
36 & 128 & 1365 \\
\cline{1-1}
11\,0'0 & 8 & 5 \\
\cline{2-3}
10\,24 & 1024 & 6825 \\
\cline{1-1}
76\,0'0 & & \\
68\,25 & & \\
\cline{1-1}
775 & &
\end{array}$$

d'où : $\sqrt{47} = 6,85$ à 0,01 près.

__Exemple II.__ – Soit à extraire la racine carrée du nombre 6891,723 à 0,01 près.

On avance la virgule de 4 rangs vers la droite, ce qui donne le nombre 63 917 230. On extrait la racine carrée de ce nombre et on obtient 7994.

On divise ce dernier nombre par 100 pour obtenir 79,94 qui est la racine carrée du nombre cherché à 0,01 près.

Rapports & Proportions

Définition. La comparaison de deux grandeurs se fait en les mesurant. Si l'une est deux fois plus grande que l'autre on dit que leur rapport est 2.

Si l'une est les $\frac{3}{4}$ de l'autre, on dit que leur rapport est $\frac{3}{4}$; On peut donc dire que le rapport de deux grandeurs est le résultat de leur comparaison.

On voit qu'un rapport se représente de la même façon qu'une fraction.

Proportion

On appelle proportion l'égalité de deux rapports.

Une proportion se représente par l'ensemble de deux fractions séparées par le signe = (égal).

Exemple: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$. Les nombres 3, 4, 9, 12, sont les termes de la proportion. 4 et 9 sont les moyens, 3 et 12 sont les extrêmes.

Si on réduit les deux fractions au même dénominateur, on aura:

$$\frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{9 \times 4}{12 \times 4}$$

Comme les dénominateurs sont égaux, les numérateurs le sont aussi. On a donc: $3 \times 12 = 9 \times 4$, c'est-à-dire que <u>dans une proportion le produit des moyens est égal au produit des extrêmes</u>.

Grandeurs proportionnelles.

On dit que deux grandeurs sont proportionnelles lorsque l'une devenant 2, 3 fois plus grande ou plus petite, l'autre devient 2, 3 fois plus grande ou plus petite.

Par exemple, le prix d'achat et la quantité achetée sont deux grandeurs proportionnelles, car si on achète 5 fois plus de marchandises, on paiera 5 fois plus cher.

Deux grandeurs sont inversement proportionnelles si l'une devenant 2, 3 fois plus petite ou plus grande, l'autre devient 2, 3 fois plus grande ou plus petite.

Par exemple, le volume d'un gaz et la pression qu'il supporte, sont deux grandeurs inversement proportionnelles, car on montre en physique que si l'on exerce une pression 2 ou 3 fois plus grande, le volume devient 2 ou 3 fois plus petit.

Règle de trois

La règle de trois est un problème dans lequel on se propose de trouver une quantité variant d'une façon proportionnelle ou inversement proportionnelle à des quantités données.

La méthode type de résolution de ces problèmes est la méthode qui consiste de passer d'une quantité à l'unité, puis de remonter à la quantité donnée ; c'est la méthode de réduction à l'unité.

On écrit sur une ligne horizontale la partie complète de la question et au-dessous on écrit la partie incomplète en faisant correspondre les quantités de même nature ; On remplace la quantité cherchée par x.

Règle de trois simple directe.

Cette règle est ainsi appelée parce qu'elle ne renferme que deux quantités variant dans le même sens.

Exemple : Si 25 m. de drap coûtent 300 frs, combien coûteront 80 m.?

Soit x le prix cherché. On écrit :

$$\begin{array}{ll} 25^{m} & 300^{frs} \\ 80^{m} & x \end{array}$$

Et l'on dit : Si 25^m coûtent 300^f

1^m coûte 25 fois moins, ou $\frac{300}{25}$

et 80^m coûteront 80 fois plus, ou $\frac{300 \times 80}{25} = 960$ frs.

Règle de trois inverse.

Si 12 ouvriers mettent 28 jours pour faire un ouvrage, combien 21 ouvriers mettront-ils de jours ?

Soit x ce nombre de jours. On a : 12 28

21 x

Et l'on dit : Si 12 ouvriers mettent 28 jours,

1 " mettra 12 fois plus, soit 28×12

et 21 " mettront 21 fois moins, soit :

$$\frac{28 \times 12}{21} = \frac{28 \times 4}{7} = 4 \times 4 = 16 \text{ jours.}$$

Règle de trois composée.

La règle de trois est composée lorsqu'il y a plus de deux grandeurs ; la méthode de résolution est la même.

Exemple : On paie 585 frs. à 15 ouvriers qui ont travaillé 12 jours : combien aurait on payé à 23 ouvriers qui auraient travaillé 9 jours ?

Soit x ce qu'on aurait payé. On écrit :

15 ouvriers 12 jours 585 frs.

23 " 9 " x

On raisonne ainsi :

Si 15 ouvriers pendant 12 jours ont gagné 585 frs.

1 " " " gagnera 15 fois moins, soit $\frac{585}{15}$

23 " " " gagneront 23 fois plus, soit $\frac{585 \times 23}{15}$

23 " " 1 jour " 12 fois moins : $\frac{585 \times 23}{15 \times 12}$

et 23 " " 9 " " 9 fois plus, soit $\frac{585 \times 23 \times 9}{15 \times 12}$

On aura donc :

$$x = \frac{585 \times 23 \times 9}{15 \times 12} = 672^f,75$$

Remarque. Il faut avoir soin de simplifier les fractions donnant x, celà abrège les calculs. Ainsi, dans l'exemple précédent on aurait successivement :

$$x = \frac{585 \times 23 \times 9}{15 \times 12} = \frac{39 \times 23 \times 9}{12} = \frac{13 \times 23 \times 9}{4} = 672,75$$

ou, plus simplement :

$$x = \frac{585 \times 23 \times 9}{15 \times 12} = \frac{585 \times 23}{5 \times 4} = \frac{2925 \times 23}{25 \times 4} = \frac{67275}{100} = 672,75$$

Système métrique.

Avant l'année 1801, chaque province et même chaque ville avait ses mesures particulières pour les mesures, les poids, les longueurs.

On comptait par toise, aune, pied, arpent, perche, etc, et ces quantités n'avaient pas la même valeur partout, ce qui compliquait les calculs ; de plus, ce qui ajoutait encore à la difficulté, c'est que ces mesures n'avaient pas de lien entre elles, ou bien elles ne suivaient pas la numération décimale, elles allaient de 4 en 4, ou de 12 en 12, etc.

Pour remédier à ces inconvénients, la Convention fit établir un système de mesures simples et suivant la numération décimale ; c'est cet ensemble de mesures qui constitue le système métrique.

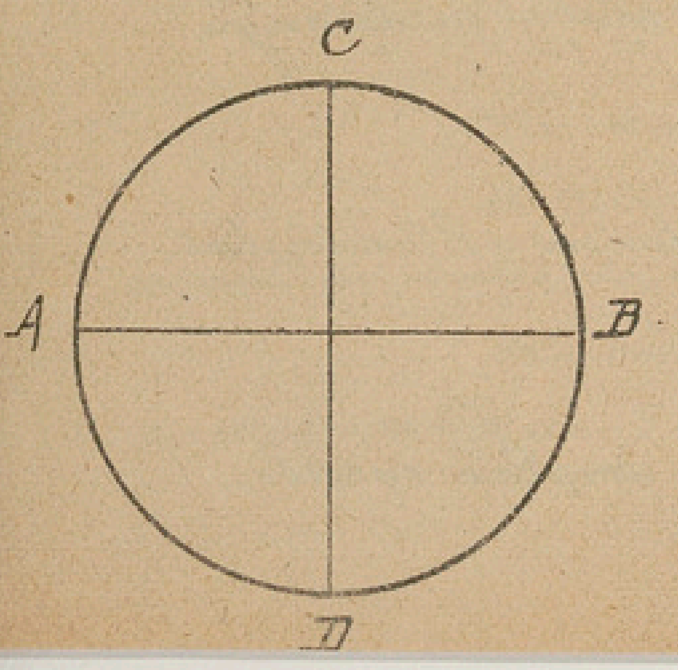
On l'appelle système métrique, car toutes les mesures dérivent du mètre.

Ce système a été rendu légal et obligatoire en 1801.

On appelle mesures effectives celles qui existent : le mètre, le franc.

On appelle mesures fictives celles qui n'existent que pour la commodité du langage : le kilomètre, l'hectare, le décamètre cube.

Mesures de longueur.



L'unité des mesures de longueur est le mètre. C'est l'unité fondamentale du système métrique de laquelle dérivent toutes les autres mesures.

Le mètre est la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.

On sait que le méridien est un grand cercle passant par les pôles ; en mesurant le quart de ce grand cercle et en prenant la dix-millionième partie, on a la longueur du mètre.

Multiples. Les multiples du mètre sont :

Le décamètre	(d.a.m.)	qui vaut	10 mètres.
L'hectomètre	h.m.	"	100 "
Le kilomètre	k.m.	"	1000 "
Le myriamètre	M.m.	"	10.000 "

Sous-Multiples. Les sous-multiples du mètre sont :

Le décimètre	(d.m.)	qui vaut	la 10e partie du mètre
Le centimètre	c.m.	"	100e "
Le millimètre	m.m.	"	1000e "

On voit que les mesures de longueur vont de 10 en 10.

Mesures réelles.

En général, les mesures réelles sont les unités, leurs multiples et sous-multiples, leur double et leur moitié.

Ainsi, pour les mesures de longueur, les mesures réelles sont : le mètre, le double mètre et le demi-mètre.

Ces longueurs ont la forme de règles droites ou brisées. le décamètre, le double-décamètre, le demi-décamètre.

Le décamètre, ou chaîne d'arpenteur, est formé de 50 tiges métalliques de 2 dm. de long, reliées par des anneaux. Il en est de même pour le double décamètre.

On construit également ces mesures sous la forme de rubans en acier.

Pour les sous-multiples, les mesures réelles sont : le décimètre et le double décimètre. Ce sont des règles plates ou triangulaires, divisées en cm et en mm.

Remarque. Pour évaluer les grandes distances, l'unité dont on se sert est le kilomètre.

Autres mesures des distances. On emploie encore, pour évaluer les distances plusieurs mesures non comprises dans le système métrique. De ce nombre sont :

1° La lieue métrique, distance de 4 km.

2° La lieue terrestre, de 25 au degré, distance de 4444,44 m.

3° La lieue marine ou géographique, de 20 au degré, distance de 5.555,55 m.

4° Le mille marin, un tiers de la lieue marine, distance de 1.852 m.

5° Le nœud marin, la 120e partie du mille, distance de 15,43 m.

Mesures de Surface.

L'unité des mesures de surface est le mètre carré. C'est un carré de 1 m. de côté.

Multiples. Les multiples sont :

Le décamètre carré	dam^2	qui est un carré de	10^m	de côté et vaut	100^{m^2}
L'hectomètre carré	hm^2	„	100^m	„	10.000^{m^2}
Le kilomètre carré	km^2	„	1000^m	„	$1.000.000^{m^2}$
Le myriamètre carré	Mm^2	„	10.000^m	„	$100.000.000^{m^2}$

Sous-Multiples. Les sous-multiples sont :

Le décimètre carré	dcm^2	qui est le carré de	1 dm	de côté et vaut	$0,01^{m^2}$
Le centimètre carré	cm^2	„	1 cm	„	$0,0001^{m^2}$
Le millimètre carré	mm^2	„	1 mm	„	$0,000001^{m^2}$

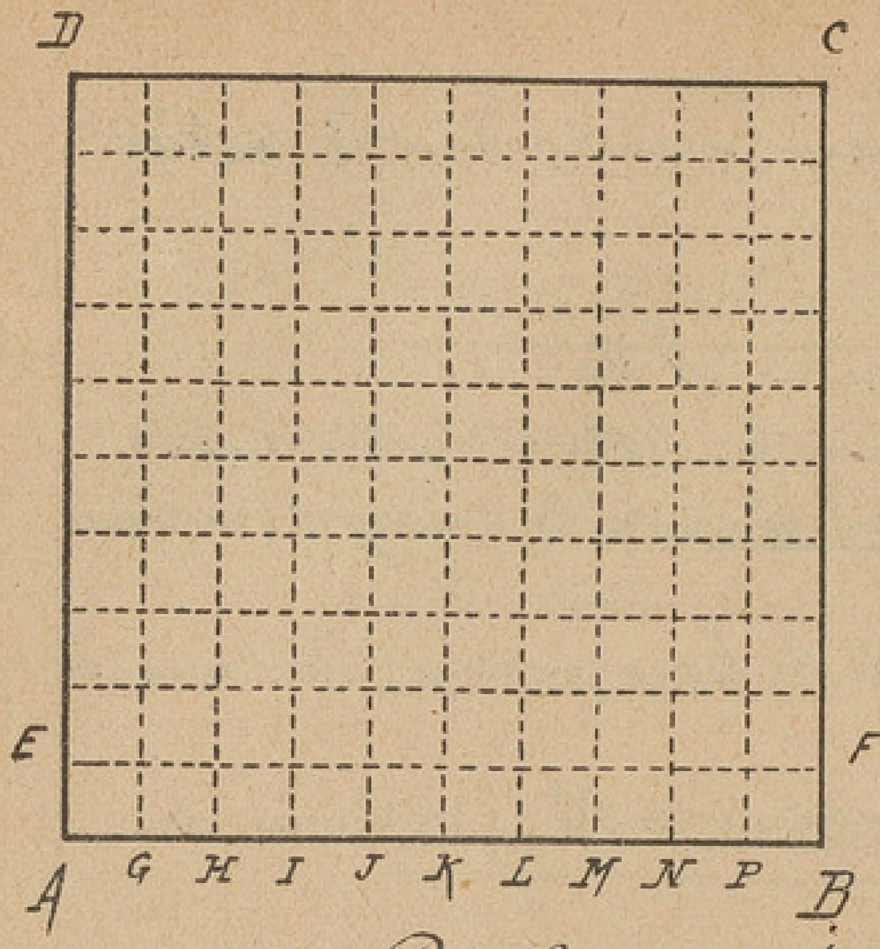
Relation entre les mesures.

Les mesures de surface vont de 100 en 100.

Le mètre carré, par exemple, vaut 100 dm^2.

Considérons en effet un mètre carré, c'est-à-dire un carré ayant un mètre de côté (voir p. 51).

Le côté AB ayant 1 m. de long, on peut le partager en 10 parties égales de 1 dm de long.



On pourra de même partager AD en 10 parties égales de 1 dm de long ; par les points de division ainsi obtenus, menons des parallèles aux côtés du carré.

Si nous considérons la bande A B E F, on voit qu'on peut y former 10 carrés ayant 1 dm de côté, c'est-à-dire 10 dm².

Comme on a 10 bandes égales à A B E F, on aura donc en tout : $10 \times 10 = 100$ carrés de 1 dm de côté, ou 100 dm².

Règle pour écrire et lire une mesure de surface.

Les mesures de surface allant de 100 en 100, il faut deux chiffres pour chaque mesure.

Par exemple : 25,3437 m² se lit : 25 $^{m^2}$, 34 $^{dm^2}$ 37 $^{cm^2}$

De même, 1 hm² 2 m² 27 dm² 3 cm² s'écrit : 10002,2703 m².

On voit que l'on a mis 2 zéros pour remplacer les dm² et un zé- pour avoir 2 chiffres pour les mètres carrés.

Les mesures de surface sont fictives. Pour mesurer une surface quelconque, un champ ou un toit, on ne se sert pas d'un mètre carré. On mesure les surfaces en prenant certaines longueurs que l'on combine au moyen d'une formule spéciale à chaque genre de surface.

Remarque. Les petites surfaces s'expriment en m² ou cm². Les grandes surfaces, comme la surface d'un département, s'expriment en km².

Mesures agraires.

Lorsque les surfaces sont des surfaces agraires, c'est-à-dire des champs, des bois, les mesures de surfaces s'appellent mesures agraires.

Unité. L'unité des mesures agraires est l'are ; c'est un carré de 10 m. de côté.

Multiple et Sous-Multiple. Il n'y a qu'un multiple : l'hectare (H.a) ou carré de 100 mètres de côté.

Le sous-multiple est le centiare (c.a.), ou carré de 1^m de côté.

On voit que le centiare est 1 m^2, l'are un dm^2 et l'hectare un hm^2. Les mesures agraires sont donc de 100 en 100 et on les écrit avec deux chiffres comme pour les surfaces.

Mesures de volume.

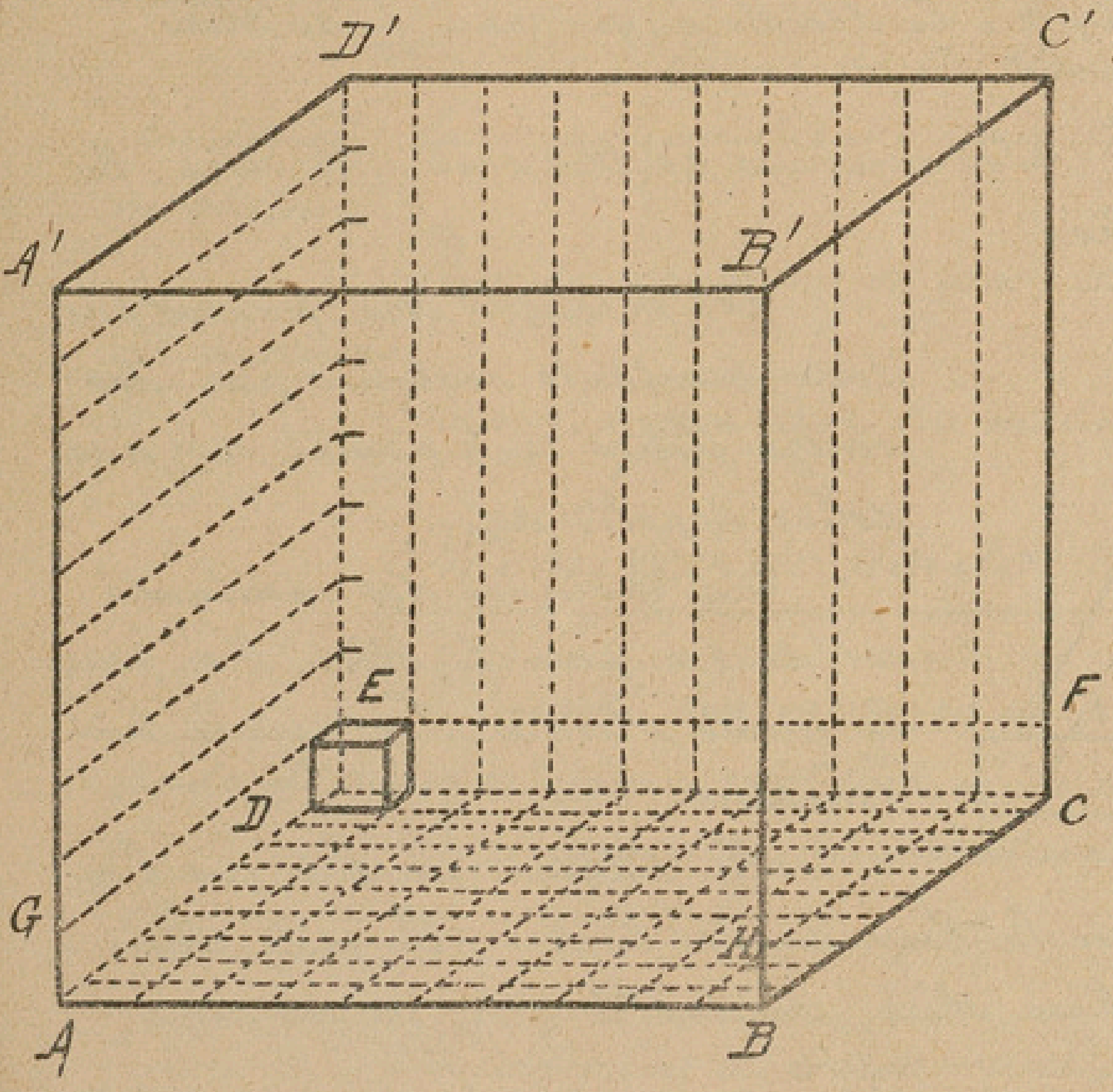
Unité. L'unité des mesures de volume est le mètre cube (m^3). C'est un cube ayant 1 mètre d'arête, c'est-à-dire que ses faces sont des m^2.

Multiples et Sous-Multiples.

Les mots : décamètre cube, hectomètre cube, ne sont pas employés. On dit : 10, 100, 1000 mètres cubes.

Les sous-multiples sont :

Le décimètre cube, dm^3, qui est un cube ayant un dm d'arête
Le centimètre cube, cm^3, " " un cm "
Le millimètre cube, mm^3, " " un mm "



Comme les mesures de surface, les mesures de volume sont fictives. Un volume s'évalue en mesurant certaines longueurs.

Le dm^3 et le cm^3 s'emploient pour exprimer des petits volumes.

Relation entre les mesures de volume.

Les mesures de volume vont de 1000 en 1000.

Considérons les bases ABCD du cube ABCD, A'B'C'D'. Cette base étant 1 m^2, on pourra y inscrire 100 dm^2. Partageons l'arête DD' en 10 parties de 1 dm. Nous pourrons construire dans le coin D un cube de

1 dm d'arête, c'est-à-dire 1 dm^3 et sur la base ABCD, on pourra placer 100 cubes égaux à celui-ci ; on aura ainsi sur la base ABCD une tranche de 1 dm de haut.

L'arête DD' ayant 1^m de long, on pourra ainsi placer 10 tranches l'une sur l'autre ; on aura donc en tout : $100 \times 10 = 1000$ cubes, ou 100 dm^3.

Ecrire ou lire une mesure de volume.

Les mesures allant de 1.000 en 1.000, il faut pour chaque mesure 3 chiffres.

Ainsi : 3 m^3, 21 dm^3, 1 cm^3 s'écrit : 3,021001 m^3

De même, le volume 25,025 250 012 m^3 se lit : 25 m^3, 25 dm^3, 250 cm^3, 12 mm^3.

Mesures pour les bois de chauffage.

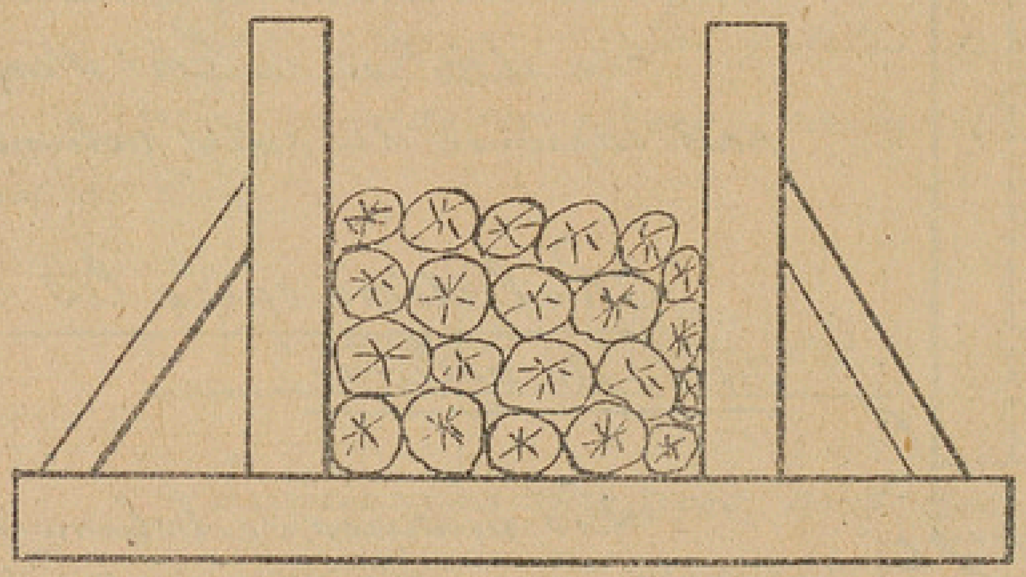
L'unité de mesure pour le bois de chauffage est le stère.

Le stère est le volume de 1 m^3.

On a un multiple : le décastère, qui vaut 10 stères ou 10 m^3.

Il y a un sous-multiple : le décistère, qui vaut $\frac{1}{10}$ du stère.

Mesures réelles. Les mesures réelles sont : le stère, le double stère et le demi-décastère.



Ces mesures sont formées par deux montants soutenus par des contre-fiches et reposant sur une solive appelée sole.

La distance des montants est de 1 m. pour le stère, 2 m. pour le double stère et 5 m. pour le demi-décastère.

La hauteur du bois que l'on met entre les montants varie avec la longueur des bûches. On met une hauteur telle que le volume soit un stère, un double-stère ou un demi-décastère.

Mesures de Capacité.

Ces mesures servent à évaluer les contenances, liquides, grains, etc.

Unité. Le litre est la capacité de 1 dm³.

Multiples et Sous-multiples. Les multiples du litre sont :
Le décalitre dal, qui vaut 10 litres.
L'hectolitre hl, " 100 "

Les sous-multiples sont :
Le décilitre dl, qui vaut $\frac{1}{10}$ de litre
Le centilitre cl, " $\frac{1}{100}$ "

Mesures réelles. Ces mesures sont :
Le litre, le double-litre et le demi-litre.
Le décalitre, le double et le demi-décalitre.
L'hectolitre et le demi-hectolitre.
Le centilitre et le double-centilitre.

Ces mesures ont la forme cylindrique, celà est plus commode à manier.

On les fabrique en fer blanc pour l'huile et le lait ; elles vont du double-litre au centilitre ; pour les autres liquides, ces mesures sont en étain.

Pour le commerce en gros, de l'Hl au $\frac{1}{2}$ dl, on les fait en fonte ou en cuivre.

Pour les grains et les matières sèches, les mesures sont en bois.

Mesures de poids.

L'unité des mesures de poids est le kilogramme ; c'est le poids d'un dm³ d'eau distillée à la température de 4° C.

On a pris cette température, car c'est à 4° que 1 dm³ pèse le plus.

Multiples et Sous-multiples. Le quintal qui vaut 100 kg. et la tonne qui en vaut 1.000.

Les sous-multiples du kilogramme sont :

L'hectogramme	hg,	qui vaut	100 grammes
Le décagramme	dg,	"	10 "
Le gramme	g.	"	$\frac{1}{1000}$ de kg.
Le décigramme	dg,	"	$\frac{1}{10}$ de gramme
Le centigramme	cg,	"	$\frac{1}{100}$ "
Le milligramme	mg.	"	$\frac{1}{1000}$ "

Mesures réelles. Les mesures réelles se divisent en 3 séries :

1ère Série. 10 poids en fonte, ayant la forme d'un tronc de pyramide à base quadrangulaire ou hexagonale.

On a les poids de : 50^{kg}, 20^{kg}, 10^{kg}, 5^{kg}, 2^{kg}, 1^{kg}, 5^{hg}, 2^{hg}, 1^{hg}, 50^{gr}.

2ème Série. 14 poids en cuivre, cylindriques, surmontés par un bouton.

20^{kg}, 10^{kg}, 5^{kg}, 2^{kg}, 1^{kg}, 500^{gr}, 200^{gr}, 100^{gr}, 50^{gr}, 20^{gr}, 10^{gr}, 5^{gr}, 2^{gr}, 1^{gr}.

3ème Série. 9 poids en cuivre ou aluminium, ayant la forme de lames carrées, métalliques, avec un côté relevé pour qu'on puisse les saisir.

5^{dg}, 2^{dg}, 1^{dg}, 5^{cg}, 2^{cg}, 1^{cg}, 5^{mg}, 2^{mg}, 1^{mg}.

Cette 3e série est employée par les bijoutiers, les chimistes, les pharmaciens.

Remarque. Les gros poids sont évalués en tonnes ou en quintaux.

Mesures de monnaie.

Les mesures de monnaie servent à évaluer le prix des objets ou du travail.

Elles sont faites en métal : or, argent, cuivre ou nickel, auquel on mélange un autre métal pour diminuer l'usure due au frottement.

On appelle titre d'un alliage le rapport qui existe entre le poids du métal fin et le poids de l'alliage.

Dire, par exemple, qu'un alliage est au titre de 0,900 celà veut dire que sur 1000 parties d'alliage, il y a 900 parties de métal fin et 100 parties d'autre métal.

Les pièces d'or sont au titre de 0,900, c'est-à-dire que dans 1000 gr. d'alliage il y a 900 gr. d'or et 100 gr. de cuivre.

Les pièces de 5 francs en argent sont au titre de 0,900 ; dans 1 kg. il y a 900 gr. d'argent et 100 gr. de cuivre.

Les autres pièces d'argent : 2 frs, 1 fr. 0,50 c/ sont au titre de 0,835.

La monnaie de billon comprend 95 parties de cuivre, 4 parties d'étain et 1 de zinc.

Unité. L'unité des mesures de monnaie est le franc ; c'est une pièce d'argent au titre de 0,835, pesant 5 grammes.

Au lieu de dire : décafranc, hectofranc, on dit 10 ou 100 francs.

Sous-Multiples. Les sous-multiples sont :
Le décime, qui vaut la 10e partie du franc.
Le centime, " 100e "

Mesures réelles. Les mesures réelles se divisent en 3 séries :

1° Pièces d'or. On a les pièces de 5, 10, 20, 40, 50 et 100 francs.

2° Pièces d'argent. On a les pièces de 0,50 c/, 1 et 2 francs au titre de 0,835 et la pièce de 5 francs au titre de 0,900.

3° Pièces de bronze. On a les pièces de 0,10, 0,05.

4° Pièces de nickel. On a les pièces de 0,25, 0,10 et 0,05.

Tableau des différentes pièces de monnaies fabriquées actuellement en France.

Valeur des pièces		Poids	Diamètre
Or	100 francs	32,258 gr	35 m/m.
	50 "	16,129 "	28 "
	20 "	6,45161 "	21 "
	10 "	3,2258 "	19 "
	5 "	1,6129 "	17 "

Valeur des pièces		Poids	Diamètre
Argent	5 francs	25 grammes	37 m/m.
	2 "	10 "	27 "
	1 "	5 "	23 "
	0,50 Centimes	2,5 "	18 "
Nickel	25 Centimes	7 grammes	24 m/m
	25 " (percées)	5 "	23 "
	10 " "	4 "	21 "
	5 " "	2 "	19 "
Bronze	10 Centimes	10 grammes	30 m/m
	5 "	5 "	25 "

Géométrie

Nous avons vu en arithmétique que le résultat d'une mesure de longueur, d'une surface ou d'un volume, s'exprimait au moyen d'un nombre et nous avons étudié les moyens de combiner ces nombres, mais nous n'avons pas montré comment on mesurait les longueurs, surfaces et volumes. Cette étude constitue ce que l'on appelle la Géométrie.

La géométrie est donc la Science qui apprend à mesurer les volumes, les surfaces et les longueurs.

Volume, Surface, Ligne, Point.

Si l'on considère les corps qui nous environnent, on voit qu'ils n'occupent pas tous la même place dans l'espace ; par exemple, si l'on a des billes, il y en a qui sont plus grosses les unes que les autres.

La place qu'un corps occupe dans l'espace est le volume de ce corps.

On voit de plus qu'un corps est limité ; il ne s'étend pas indéfiniment ; une boule, par exemple, est nettement séparée de l'air. La

Séparation entre un corps et l'air forme la surface du corps. On peut dire que la surface d'un corps est toute la partie visible du corps.

De ce que les objets nous apparaissent sous différentes formes, on voit qu'il y a différentes surfaces.

Il y a 2 séparations à faire ; Prenons, par exemple, une boule et un tuyau de poêle ; ces deux surfaces ont un aspect assez différent, cependant elles ont un caractère commun qui est celui-ci : si on prend une règle, il sera impossible d'appliquer la règle sur la boule, il en sera de même pour le tuyau de poêle ; pour cette surface, on pourra bien appliquer la règle, dans le sens de la longueur du tuyau, mais si on la tourne, elle ne sera plus appliquée (fig. 1 et 2).

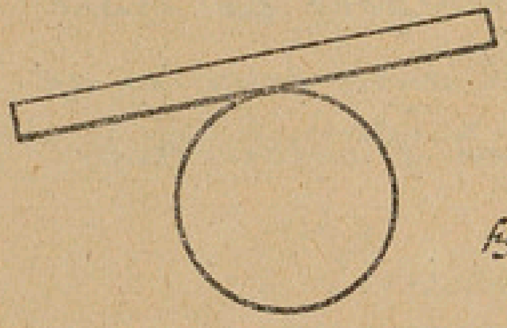


fig. 1

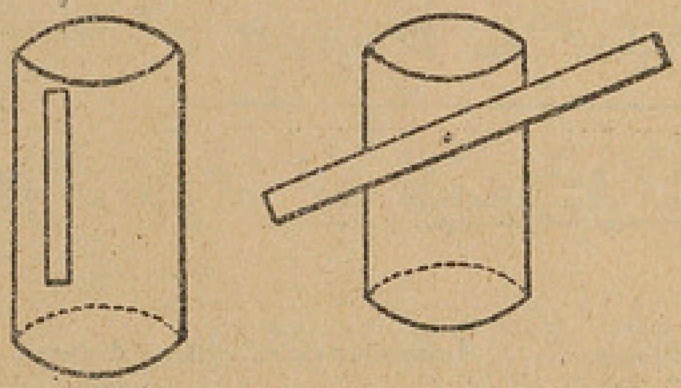


fig. 2

Au contraire, prenons un mur ou le dessus d'une table ; quelle que soit la position dans laquelle on place la règle, elle sera tout entière sur le mur ou sur la table (fig. 3).

Les premières sont appelées des surfaces courbes, et les autres des surfaces planes.

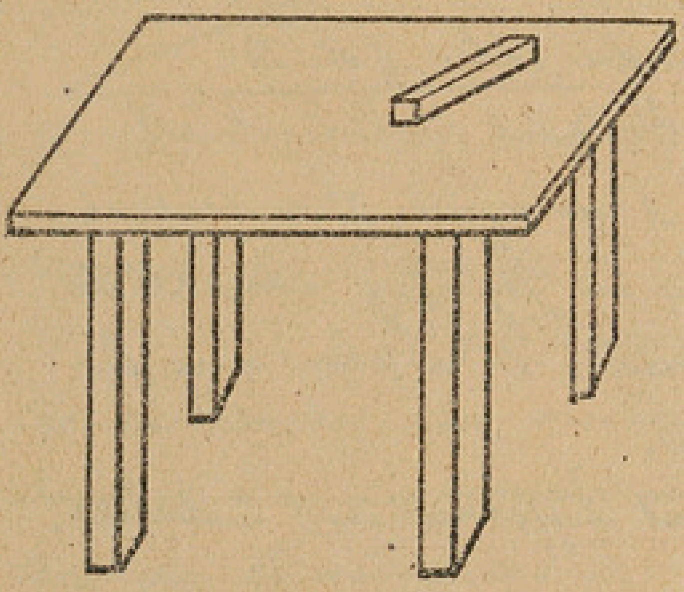


fig. 3

Une règle appliquée sur une boule ne la touche qu'en un point.

Une règle appliquée sur un tuyau dans le sens de la longueur s'appuie tout entière sur le tuyau.

Si on met la règle dans une autre position, la règle n'est plus appuyée sur le tuyau qu'en un point.

Une règle s'applique dans tous les sens sur une table.

En général, un objet n'a pas un aspect uniforme et offre des surfaces planes et des surfaces courbes.

On appelle ligne, l'intersection de deux surfaces.

Par exemple, si nous considérons la table et la règle, les faces de cette règle sont des surfaces ; l'intersection de ces surfaces avec le dessus de la table donneront des lignes qui seront ici des lignes droites.

Si nous posons un verre sur la table, la surface du verre, qui est analogue à la surface du tuyau, en rencontrant la table donnera une autre ligne, qui sera différente de la précédente; on l'appelle ligne courbe. Dans le cas actuel, cette ligne sera une circonférence.

Si l'on pose la main sur la table, on tracera une autre ligne.

On peut encore dire qu'une ligne est un trait tracé sur une surface.

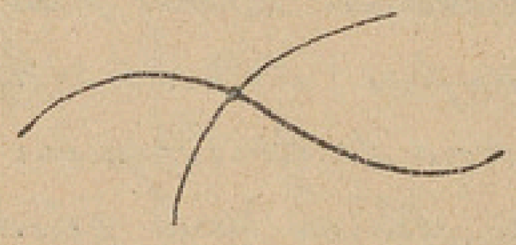


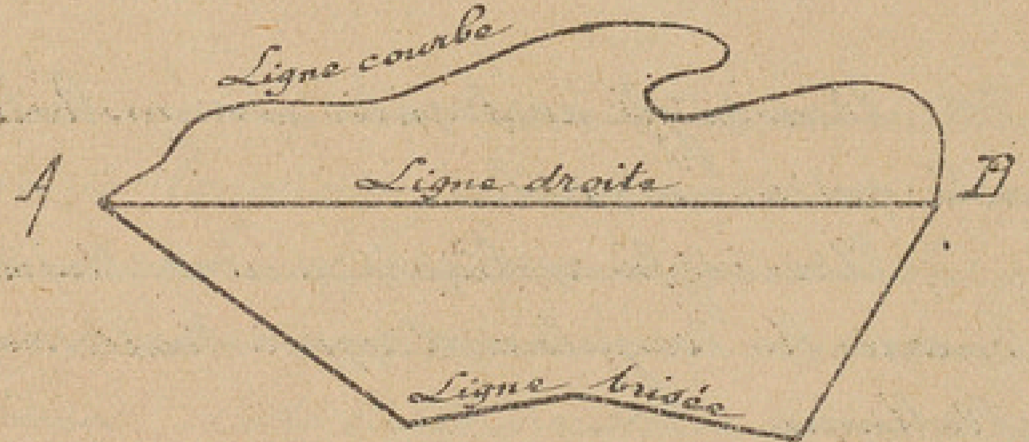
fig. H

Si sur la table on trace avec la craie 2 lignes qui se coupent, on aura ce qu'on appelle un point, c'est-à-dire l'intersection des deux lignes (fig. H).

Différentes sortes de lignes.

De même qu'il y a différentes sortes de surfaces, il y a différentes sortes de lignes.

Prenons 2 points A et B sur le tableau; pour aller du point A au point B, il y a plusieurs chemins; celui qui est plus court que tous les autres, c'est en suivant la droite AB qui serait donnée par un fil tendu entre A et B.



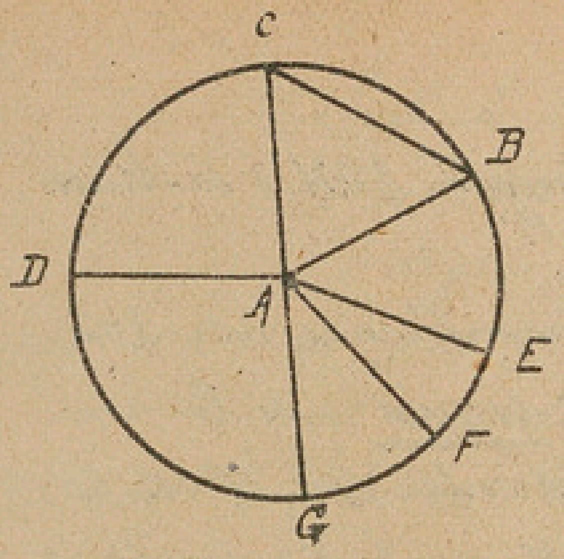
On peut également aller du point A au point B en faisant un chemin en Zig-Zag composé de lignes droites; on a alors une ligne brisée.

On peut aussi suivre un chemin qui serait différent des 2 autres, on aurait une ligne courbe.

Circonférence.

La ligne courbe qui se présente la plus souvent est la circonférence.

Supposons que l'on plante un piquet dans un champ en un point A, puis qu'en A on attache une corde de longueur AB; si l'on tourne autour du point A en tenant toujours la corde tendue, on voit que l'on décrira une certaine courbe autour du point A.



La distance de tous les points de la courbe au point A est égale à la longueur de la corde ; toutes ces distances sont donc égales.

Cette courbe est appelée circonférence ; le point A est le centre et les droites égales AB, AC, AD, AE, AF, sont appelées rayons.

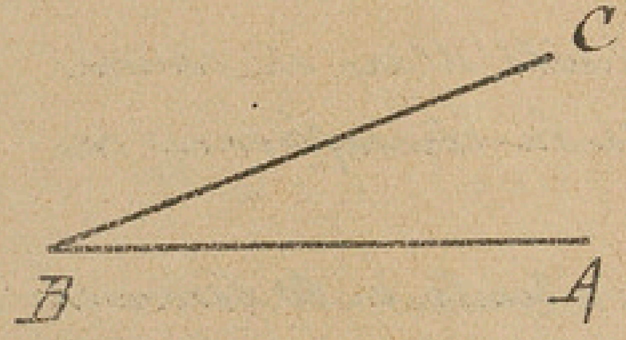
Si on prolonge le rayon CA, on aura une droite CG qui est égale à deux rayons et que l'on appelle diamètre.

On voit que dans une circonférence on peut mener autant de rayons et de diamètres que l'on veut.

Remarque. Sur une feuille de papier, ou sur le tableau, on trace les circonférences avec un compas.

Arc, Corde.

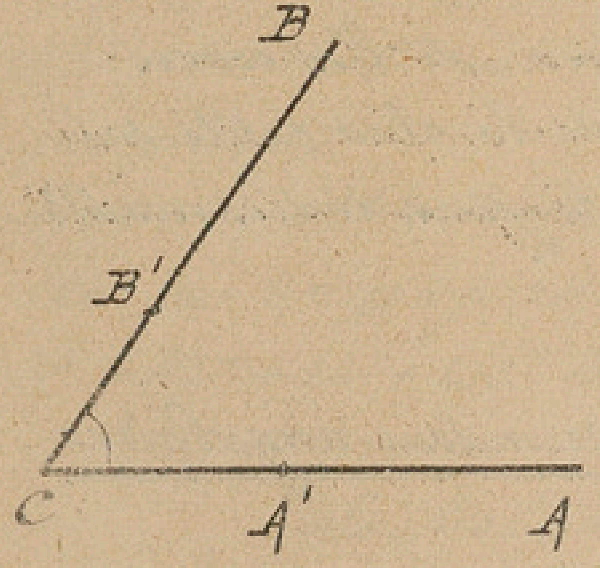
La partie de la circonférence comprise entre deux points B et C s'appelle un arc, et la droite BC qui joint ces deux points est une corde (fig. 6)



Angles. Lorsque deux droites se coupent, elles forment ce qu'on appelle un angle ; les droites forment les côtés de l'angle et leur point d'intersection est le sommet de l'angle.

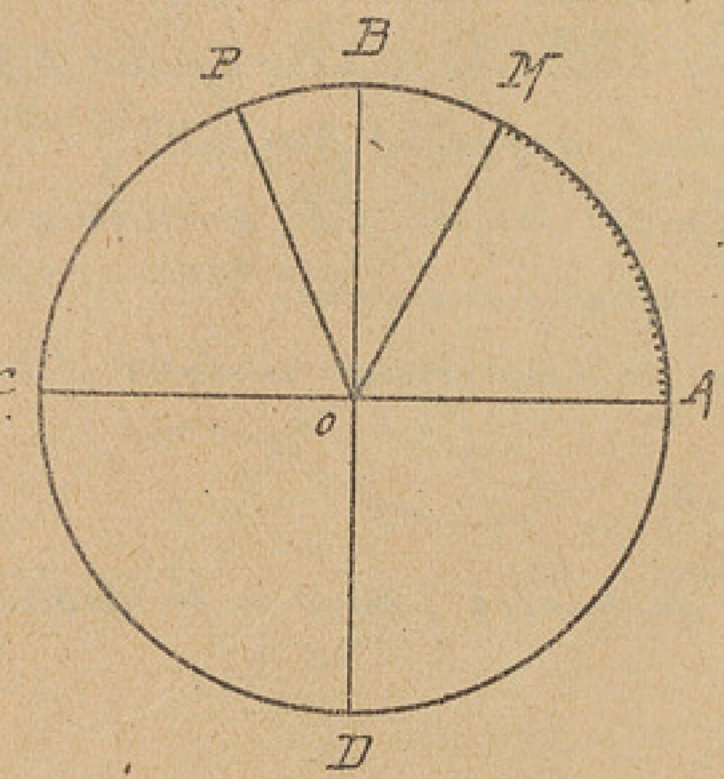
Pour désigner un angle, on indique ses côtés en mettant la lettre du sommet au milieu ; on dira par exemple l'angle ABC ; on écrit souvent d'une façon plus simple : $\widehat{ABC}$, en mettant un angle au dessus des lettres qui le désignent.

La grandeur d'un angle est caractérisée par l'écartement des côtés et non par leur longueur. Il est en effet évident que si au lieu de prendre les points A et B on prend les points A' et B', les angles ACB et A'C'B' seront les mêmes puisque leurs côtés ont le même écartement, étant donné que ce sont les mêmes droites.



Mesure des angles. Pour comparer les angles entre eux, on les mesure. Cette mesure se fait au moyen de la circonférence.

Supposons que l'on veuille mesurer l'angle AOM ; on trace la circonférence ayant le point O pour centre.



Partageons la circonférence en 360 parties égales, appelées degrés ; si le nombre de divisions compris entre A et M est 60, on dit que l'angle AOM vaut 60 degrés et on écrit : 60°.

Si on partage la circonférence en 4 parties égales : AB, BC, CD, DA, qui renferment 360 : 4 = 90 divisions ou degrés, on a 4 angles égaux qui valent 90° et que l'on appelle angles droits.

Les côtés de l'angle AO et OB forment alors deux droites perpendiculaires.

La droite OB en rencontrant la droite OA forme 2 angles AOB, BOC, et ces angles sont égaux, puisque ce sont des angles de 90° ; on peut donc dire que deux droites sont perpendiculaires lorsqu'elles forment deux angles égaux.

Le degré que nous avons pris comme unité d'arc et comme unité de l'angle correspondant est la 360e partie de la circonférence ou du total des angles formés autour d'un point.

Le degré se divise en 60 minutes et la minute en 60 secondes.

Un angle de 51 degrés, 21 minutes, 54 secondes, s'écrit : 15° 21' 54".

Les fractions de secondes s'évaluent en dixièmes, en centièmes, etc, c'est-à-dire en fractions décimales.

Opérations sur les grandeurs angulaires.

Les opérations sur les grandeurs angulaires peuvent s'effectuer comme celles qui se font sur les nombres ordinaires, si l'on convertit préalablement les grandeurs angulaires en unités de la plus petite subdivision donnée ; mais cette transformation n'est pas toujours indispensable ni utile.

Tansformation I. Convertir une grandeur angulaire en unités de la plus petite subdivision.

Soit à convertir en secondes : $15° 21' 45''$.

On opère comme suit :

1 degré vaut $60'$, $15°$ vaudront $15 \times 60 = 900'$;
$900' + 21' = 921'$.

1 minute valant $60''$, $921'$ vaudront $921 \times 60 = 55260''$
$55.260'' + 45'' = 55.305''$.

Donc : $15° 21' 45'' = 55305''$.

II. Soit à trouver combien il y a de degrés, de minutes, de secondes dans 1 276 724, 46 secondes.

Une minute valant $60''$, autant de fois 60 sera contenu dans 1 276 724, autant il y aura de minutes. Le quotient de la division est 21278 et le reste $44''$, 46.

Un degré valant $60'$, autant de fois 60 sera contenu dans 21278, autant il y aura de degrés. Le quotient est $354°$ et le reste est $38'$.

1 276 724, 46	60	
76	21278	60
167	327	354
472	278	
524	reste $38'$	
reste $44''$, 46		

Ainsi $1\,276\,724'', 46 = 354° 38' 44'', 46$

Addition.

Soit à additionner les angles suivants :

$45° 55' 43'' + 16° 45' 54'' + 103° 57' 08''$

On opère comme suit :

$43'' + 54'' + 8'' = 105''$; dans $105''$ il y a $60''$ ou $1'$ que je retiens et $45''$ que j'écris.

$1' + 55' + 45' + 57'$ font $158'$; dans $158'$ il y a $120'$ ou $2°$ que je retiens et $38'$ que j'écris.

$2° + 45° + 16° + 130°$ font $166°$ que j'écris.

	$45° 55' 43''$
	$16° 45' 54''$
	$103° 57' 08''$
Le total est donc ————	$166° 38' 45''$

Soustraction.

Soit à retrancher 39° 15' 45" de 56° 8' 51".

On dit : 45" ôtées de 51" reste 6", que j'écris.

15' ne pouvant se retrancher de 8', j'augmente le nombre supérieur de 60' : 60' + 8' = 68' ; 15' ôtées de 68', reste 53' que j'écris.

Ayant augmenté le nombre supérieur de 60' ou d'un degré, j'augmente aussi le nombre inférieur : 39° + 1° = 40° ; 40° ôtés de 56°, reste 16° que j'écris :

La différence est 16° 53' 06"

$$\begin{array}{r} 56°\ 08'\ 51'' \\ 39°\ 15'\ 45'' \\ \hline 16°\ 53'\ 06'' \end{array}$$

Multiplication.

Soit à multiplier 12° 7' 42", 35 par 4.

On dit : 4 fois 5 font 20, j'écris 0 et je retiens 2 ; 4 fois 3 font 12 et 2.... 14 ; j'écris 4 et je retiens 1" ; 4 fois 42".... 168" et 1".... 169" ; dans 169", il y a 120" ou 2', que je retiens et 49" que j'écris.

4 fois 7' 28' et 2' 30' que j'écris. 4 fois 12° font 48°, que j'écris.

Le produit demandé est : 48° 30' 49", 4.

$$\begin{array}{r} 12°\ 7'\ 42'',35 \\ 4 \\ \hline 48°\ 30'\ 49'',40 \end{array}$$

Division.

Soit à diviser 295° 4' 18" par 12.

$$\begin{array}{l|l} 295°\ \ 04'\ \ 18'' & 12 \\ \hline \ \ 55 & 24°\ 35'\ 21'',5 \\ \ \ \ 7 \times 60 = 420 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \overline{424} & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 64 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 4 \times 60 = 240 & \\ \overline{258} & \\ 18 & \\ 60 & \end{array}$$

On opère comme suit :

295° divisé par 12 donne 24° pour quotient et 7 pour reste ; 1° valant 60', 7° vaudront 7 × 60 = 420' ; 420' + 4' = 424'. 424' divisé par 12 donne : 35 et le reste est 4. 1' valant 60", 4' vaudront 4 × 60 = 240".

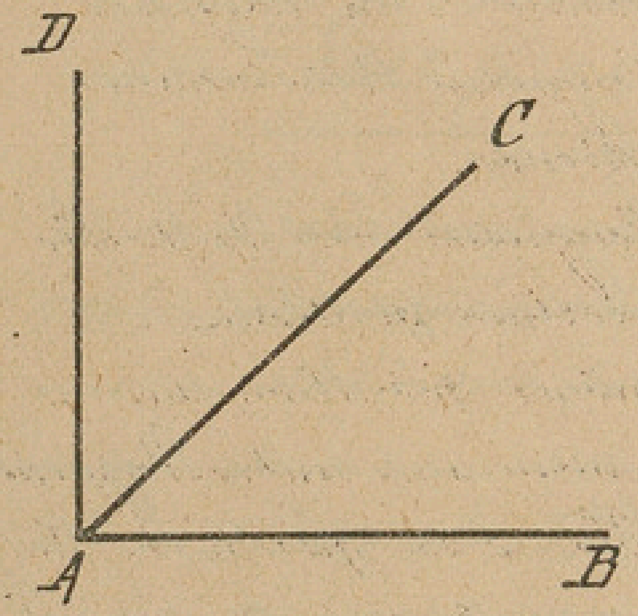
240" + 18" = 258" ; 258 : 12 = 21,5

Ainsi, le quotient demandé est 24° 35' 21",5.

Complément d'un angle.

Deux angles sont complémentaires l'un de l'autre quand leur somme est égale à un droit.

Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{DAC}$ sont complémentaires.



Problème. Quel est le complément de l'angle de 24° 35' 21".

Le complément cherché vaut :

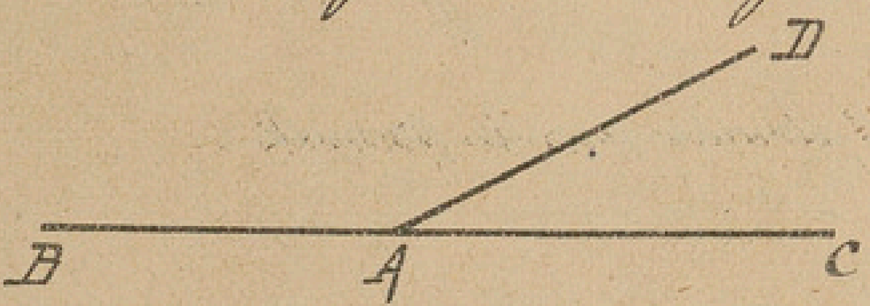
90° — 24° 35' 21" = 65° 24' 39"

Il suffit d'écrire l'opération ainsi :

$$\begin{array}{r} 89°\ 59'\ 60'' \\ 24°\ 35'\ 21'' \\ \hline 65°\ 24'\ 39'' \end{array}$$

Supplément d'un angle.

Deux angles sont supplémentaires l'un de l'autre quand leur somme est égale à deux angles droits.



Les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DAC}$ sont supplémentaires.

Problème. Quel est le supplément de l'angle 85° 17' 54".

Le supplément cherché vaut : 180° — 85° 17' 54"

Le supplément cherché vaut donc : 180° — 85° 17' 54" = 94° 42' 06"

L'opération peut se poser comme suit :

$$\begin{array}{r} 179°\ 59'\ 60'' \\ 85°\ 17'\ 54'' \\ \hline 94°\ 42'\ 06'' \end{array}$$

Angles aigus ou obtus.

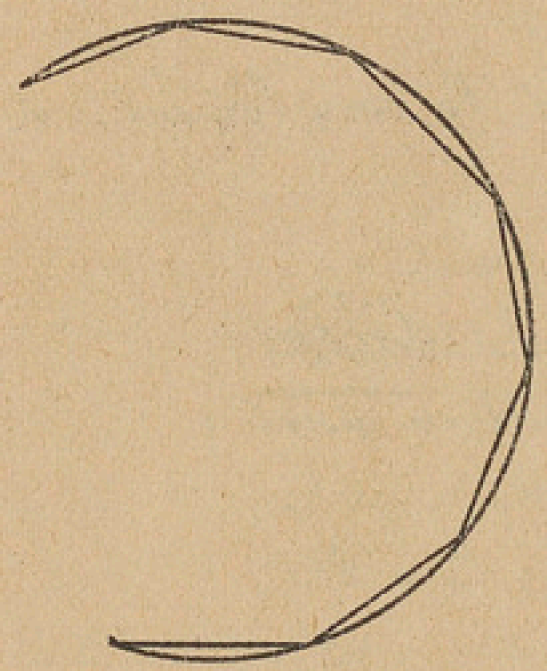
Tous les angles qui sont plus petits que l'angle droit sont appelés des angles aigus.

Les angles plus grands que l'angle droit sont des angles obtus.

Longueur de la circonférence.

Supposons que l'on veuille mesurer la longueur d'une circonférence.

Un moyen approché sera de planter des piquets très rapprochés le long de la circonférence, puis d'entourer tous ces piquets avec une corde.



Il est évident qu'en mesurant la longueur de la corde, on aura une longueur très voisine de la longueur de la circonférence.

Si l'on divise cette longueur par le double du rayon, on trouvera un certain quotient.

Si nous faisons la même opération sur une deuxième circonférence, on aura une autre longueur, mais ce qui est remarquable, c'est que si on la divise par le double du nouveau rayon, on aura le même quotient.

Et celà aura lieu quelle que soit la circonférence.

On peut donc dire que le rapport de la circonférence au double du rayon, c'est-à-dire au diamètre, est un nombre constant.

Ce nombre constant est représenté par la lettre grecque π, que l'on énonce *pi*; sa valeur est 3,1416.

La longueur d'une circonférence est donnée par la formule:

$$C = 2\pi R$$

C'est-à-dire qu'on multiplie 2 par π et le résultat par le rayon R.

Exemple. I. Quelle est la longueur de la circonférence dont le rayon est égal à 2 mètres ?

On a la formule: $C = 2\pi R = 2 \times 3,1416 \times 2 = 12,5664$ m.

Exemple II. Calculer le rayon d'une circonférence de 9 m. de longueur.

On a la formule : $C = 2\pi R$

d'où : $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{9}{2\pi} = \underline{1,43 \text{ m}}.$

Remarque. Souvent, au lieu de prendre $\pi = 3,1416$, on prend la valeur $\pi = 3,14$. On trouverait alors $C = 2 \times 3,14 \times 2 = 12,56$ dans l'exemple I.

On voit que la différence entre les deux longueurs n'est que de 6 m/m.

Surface.

La surface comprise à l'intérieur de la circonférence est un cercle. Sa surface est donnée par la formule : $S = \pi R^2$.

Celà signifie qu'il faut multiplier π par le carré du rayon.

Exemple I. Quelle est la surface d'un cercle de 3 m. de rayon ?

On a : $S = \pi R^2 = 3,1416 \times 3^2 = 3,1416 \times 9 = 22,2744 \text{ m}^2$.

Exemple II. Calculer le rayon d'un cercle de 10 m² de surface.

On a : $S = \pi R^2$, d'où :

$$R^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{10}{\pi} = 3,183$$

$$\text{et } R = \sqrt{3,183} = 1,78 \text{ m}.$$

Exemple III. On demande la surface d'un cercle qui a 2,75 m. de circonférence.

On a : $C = 2\pi R$, d'où :

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{2,75}{2\pi} = 0,438 \text{ m}.$$

Ensuite : $S = \pi R^2 = \pi \times 0,438^2 = 0,576 \text{ m}^2$.

Surface d'un Secteur.

La surface d'un secteur s'obtient en multipliant la surface du cercle auquel le secteur appartient par l'angle du secteur et en divisant le produit obtenu par 360.

On aura donc, a étant l'angle du secteur :

$$S = \frac{\pi R^2 a}{360}$$

Application. Le rayon d'un cercle est de 5 m. et l'angle du secteur vaut 42°. On demande la surface du secteur.

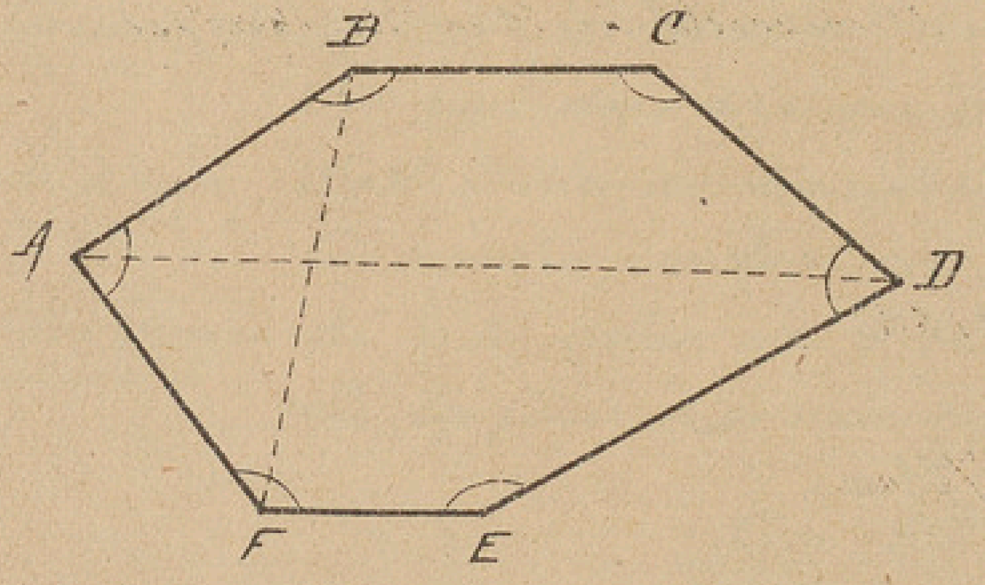
On a :

$$S = \frac{\pi \times 5^2 \times 42}{360} = 9,163\ m^2$$

Polygones

Le polygone est la figure formée sur le tableau par des droites qui se coupent 2 à 2.

Les points d'intersection des droites sont les sommets du polygone.



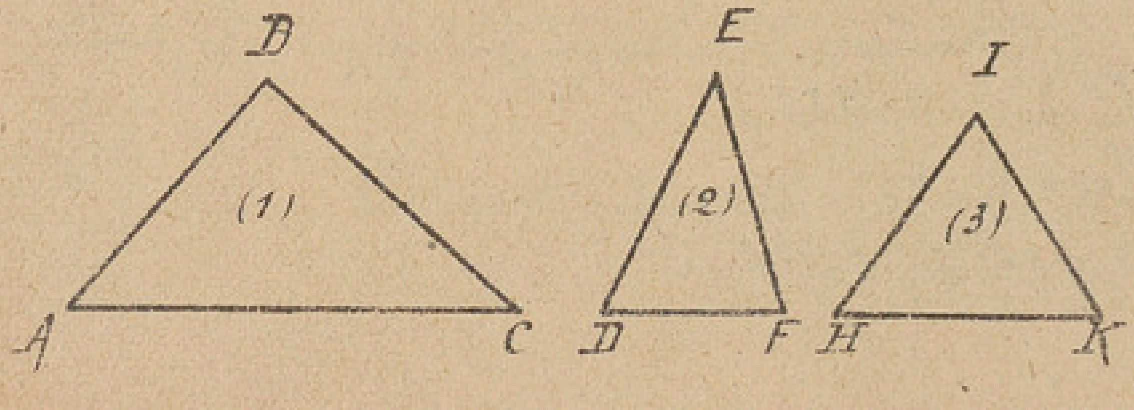
On désigne un polygone par des lettres placées aux sommets.

On dira, par exemple, le polygone ABCDEF.

La droite qui joint deux sommets non consécutifs est une diagonale ; BF, AD, sont des diagonales.

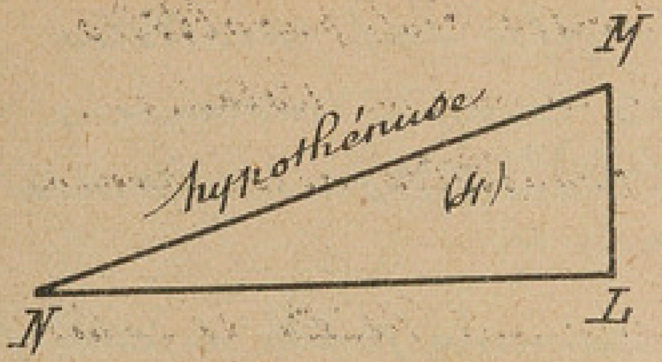
Les angles qui ont pour sommets A, B, C, D, E, F, sont les angles du polygone.

Triangles.



Le polygone le plus simple est le polygone formé par 3 droites ; on l'appelle triangle.

On a, par exemple, le triangle ABC (fig. 1).



En général, les trois côtés d'un triangle sont inégaux.

Si un triangle a deux côtés égaux, on a un triangle isocèle ; par exemple DEF est isocèle, car on a : DE = EF (fig. 2)

Les angles $\hat{D}$ et $\hat{F}$ opposés aux côtés égaux d'un triangle isocèle sont égaux.

Si un triangle a ses 3 côtés égaux ; on a un triangle équilatéral ; par exemple, le triangle HIK est équilatéral, car IH = KI = HK (fig. 3)

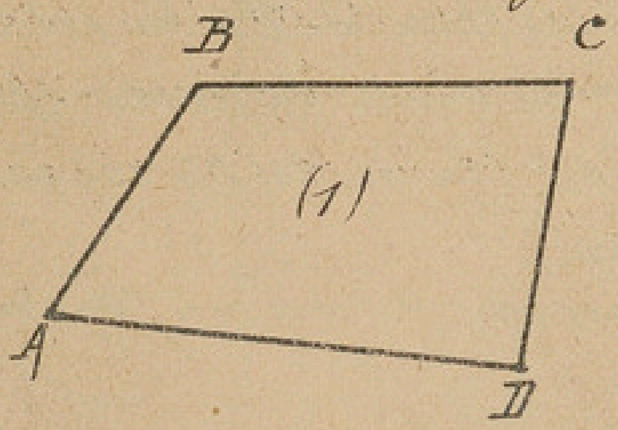
Dans un triangle équilatéral, les 3 angles sont égaux.

Si un triangle a deux côtés perpendiculaires, c'est-à-dire s'il a un angle droit, on a un triangle rectangle. C'est la figure formée par une équerre à dessin (fig. 4), par exemple, le triangle LMN.

Le côté opposé à l'angle droit est appelé hypothénuse. MN est l'hypothénuse du triangle LMN.

Quadrilatères.

Le quadrilatère est le polygone de 4 côtés, par exemple le quadrilatère ABCD (fig. 1).

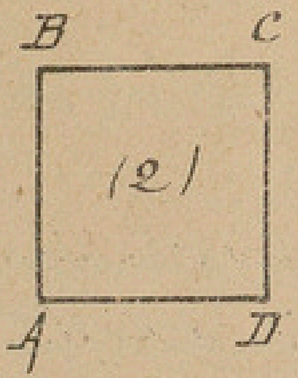


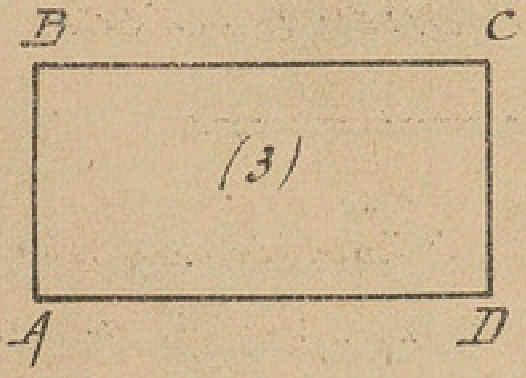
On distingue plusieurs sortes de quadrilatères :

1° Carré. C'est un quadrilatère dont les côtés sont égaux et qui a ses angles droits.

Par exemple, ABCD est un carré (fig. 2), car AB = BC = CD = DA et les angles ABCD sont des angles droits.

Les faces d'un cube sont des carrés.





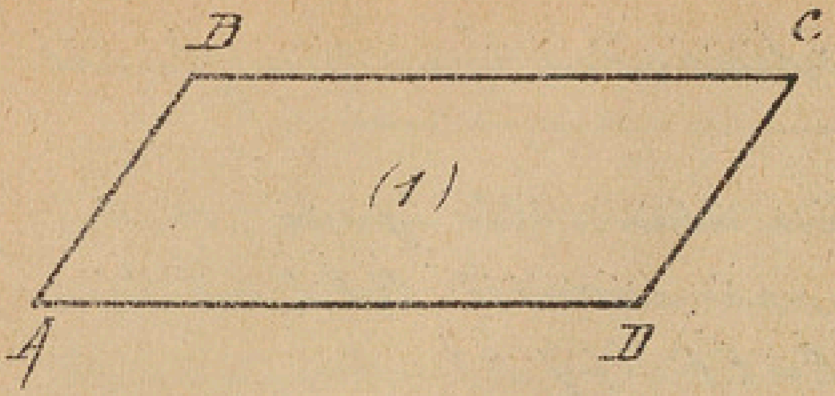
2° Rectangles. C'est un quadrilatère dont les angles sont droits et dont les côtés opposés sont égaux.

Par exemple, ABCD est un rectangle (fig. 3) car AB = CD et AD = BC. De plus, les angles ABCD sont droits.

Les faces d'une boîte sont, en général, des rectangles.

Parallélogramme.

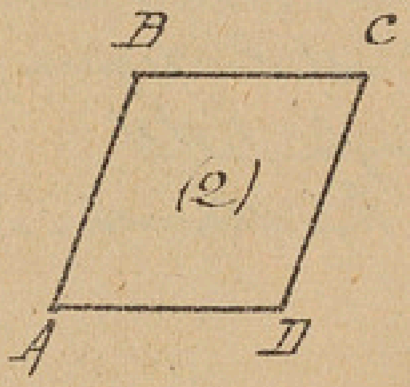
Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés parallèles 2 à 2.



On dit que deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont toujours à la même distance ; on voit donc que deux parallèles ne se rencontrent jamais.

Les raies tracées sur une feuille de cahier sont des droites parallèles ; les rails de chemins de fer, de tramways, sont aussi des droites parallèles.

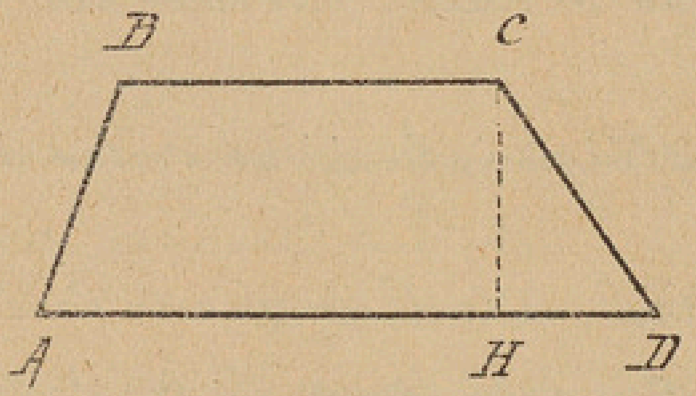
ABCD est un parallélogramme, car AB est parallèle à CD et AD est parallèle à BC. On voit de plus que les droites étant parallèles on a : AB = CD et AD = BC ; donc les côtés opposés sont égaux.



Si un parallélogramme a ses 4 côtés égaux, on a un losange ; par exemple, ABCD (fig. ci-contre) est un losange, car AB = BC = CD = DA.

Trapèze.

Le trapèze est un quadrilatère qui a 2 côtés parallèles ; ces deux côtés s'appellent la grande et la petite base.



La figure ci-contre est un trapèze, car BC et AD sont parallèles.

AD est la grande base et BC la petite.

Si, du point C on mène la droite CH perpendiculaire sur AD, la droite CH est appelée hauteur du trapèze.

Problèmes de Construction

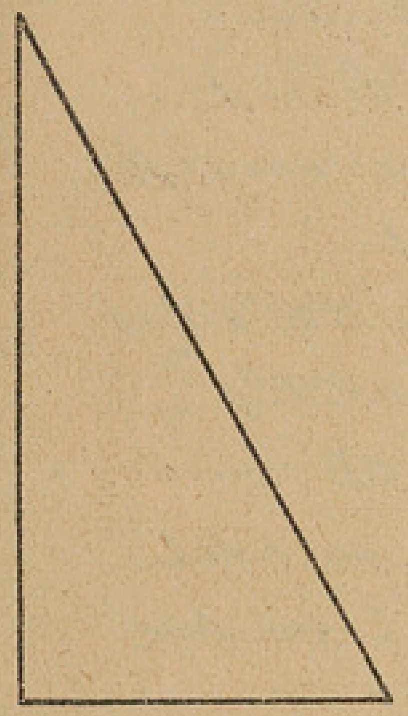
Tracé des lignes droites. Pour tracer les lignes droites sur le papier, on se sert de la règle.

Les menuisiers, les ouvriers métallurgistes emploient aussi la règle, dont la longueur varie suivant l'usage auquel ils la destinent.

Les charpentiers tracent les lignes droites au moyen d'un cordeau tendu entre deux points de la ligne à tracer ; ce cordeau est blanchi à la craie, ou coloré en rouge ou en noir. En le soulevant au milieu et le laisant tomber, il marque la droite joignant les deux points.

Sur le terrain, on ne trace pas les droites ; on plante des jalons verticalement de distance en distance.

Tracé des perpendiculaires.



1° Avec l'équerre. L'équerre est une planchette légère en bois, ayant la forme d'un triangle rectangle.

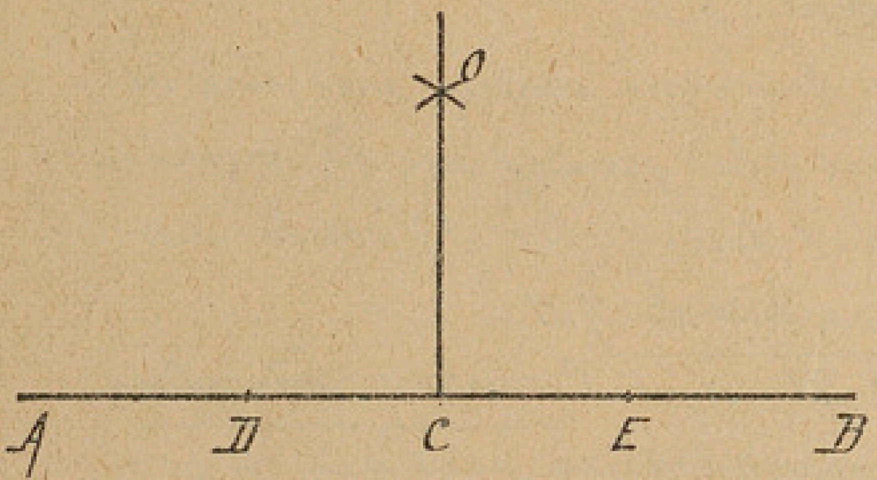
On emploie aussi le T pour tracer les perpendiculaires ; c'est une double équerre.

Les ouvriers métallurgistes, les tailleurs de pierres, les maçons, emploient des équerres formées de deux règles à angles droits, en fer.

Les charpentiers, menuisiers, emploient des équerres formées de deux parties de bois d'inégale épaisseur, assemblées à angle droit.

Sur le terrain, on élève des perpendiculaires au moyen de l'équerre d'arpenteur.

2° Au moyen du compas et de la règle. Soit le point C donné sur la droite AB.

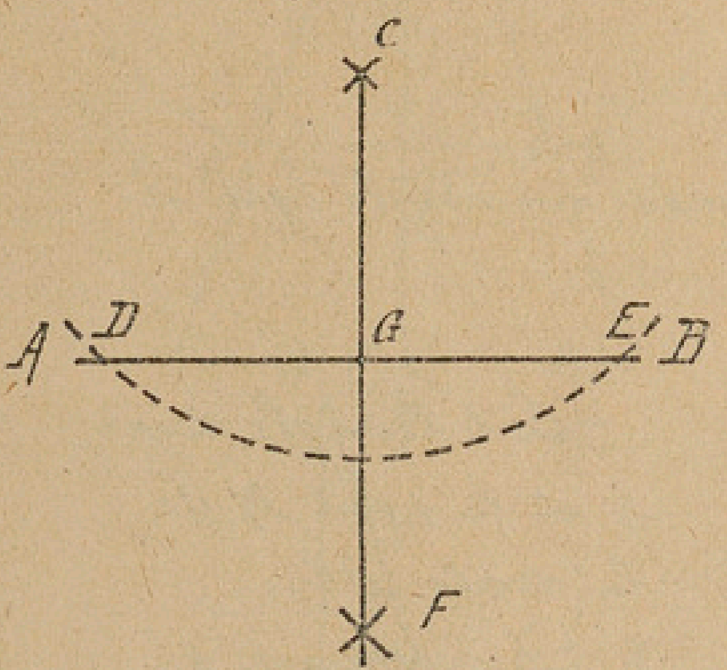


Portons sur AB et de part et d'autre de C deux longueurs égales CD et CE.

Des points D et E comme centres, avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de DE, décrivons deux arcs de cercle qui se coupent en O.

Menons, au moyen de la règle, la droite OC qui est la perpendiculaire demandée.

3° D'un point situé hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire sur cette droite.

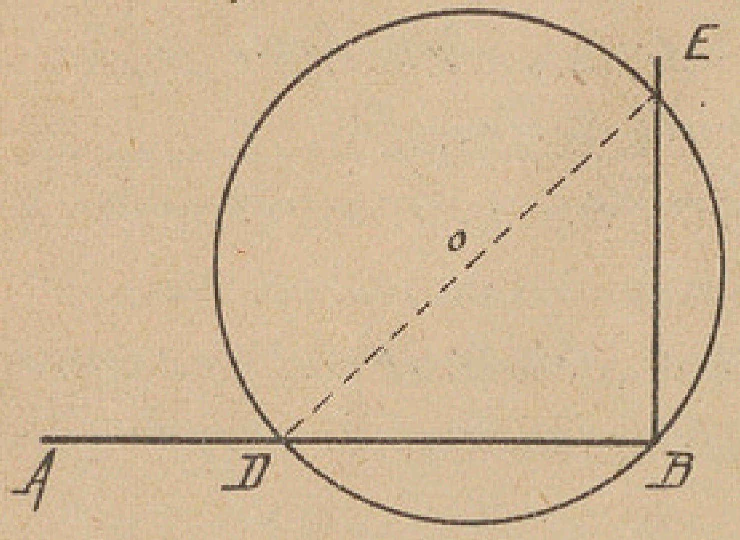


Soit le point C et la droite AB.

Du point C comme centre, avec une ouverture de compas suffisamment grande, décrivons un arc de cercle qui coupe la droite AB en deux points D et E ; puis, des points D et E comme centre avec un rayon plus grand que la moitié de DE, décrivons au-dessous de AB deux arcs de cercle qui se coupent en F. Joignons les points C et F au moyen de la règle et nous aurons la perpendiculaire demandée.

4° Elever....

4° Elever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite qu'on ne peut prolonger.

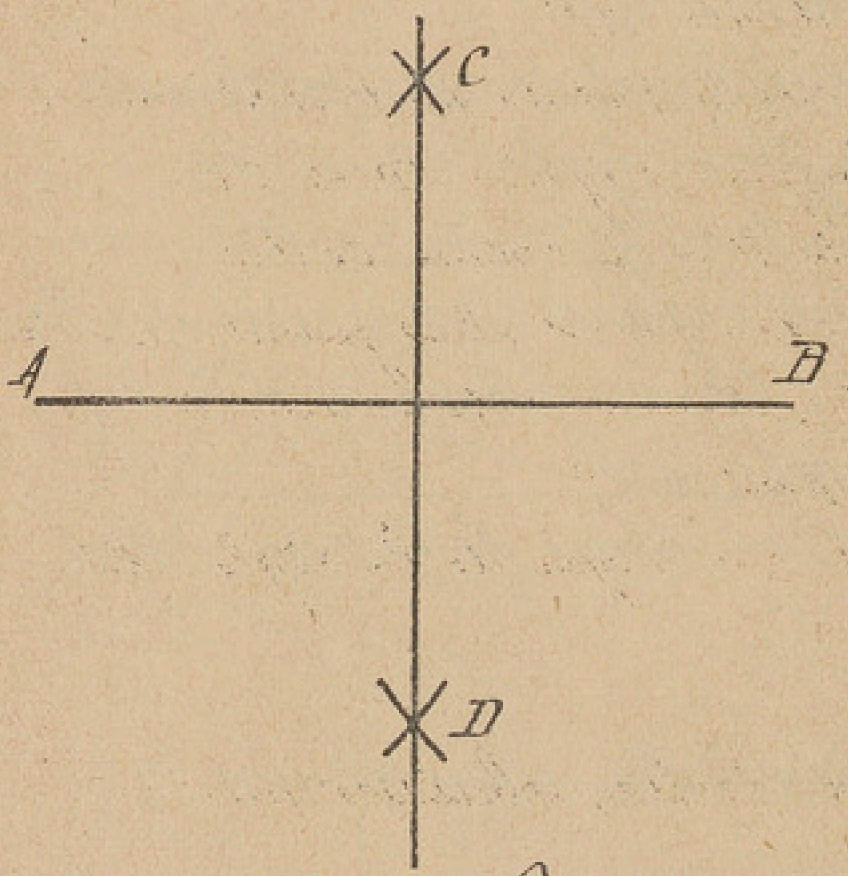


Soit la droite AB à l'extrémité de laquelle on veut élever une perpendiculaire.

On pourrait se servir de la règle et de l'équerre, mais avec un compas et une règle, on peut arriver au même résultat.

Prenons un point O quelconque en dehors de la droite AB et à gauche du point B ; décrivons une circonférence avec OB pour rayon. Elle coupe la droite AB au point D. Menons le diamètre DOE et joignons BE ; nous aurons BE qui sera la perpendiculaire demandée.

5° Diviser une droite en deux parties égales, ou élever une perpendiculaire sur le milieu d'une droite donnée.



Soit la droite AB.

Du point A comme centre, avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de AB, décrivons deux arcs de cercle au-dessus et au-dessous de AB.

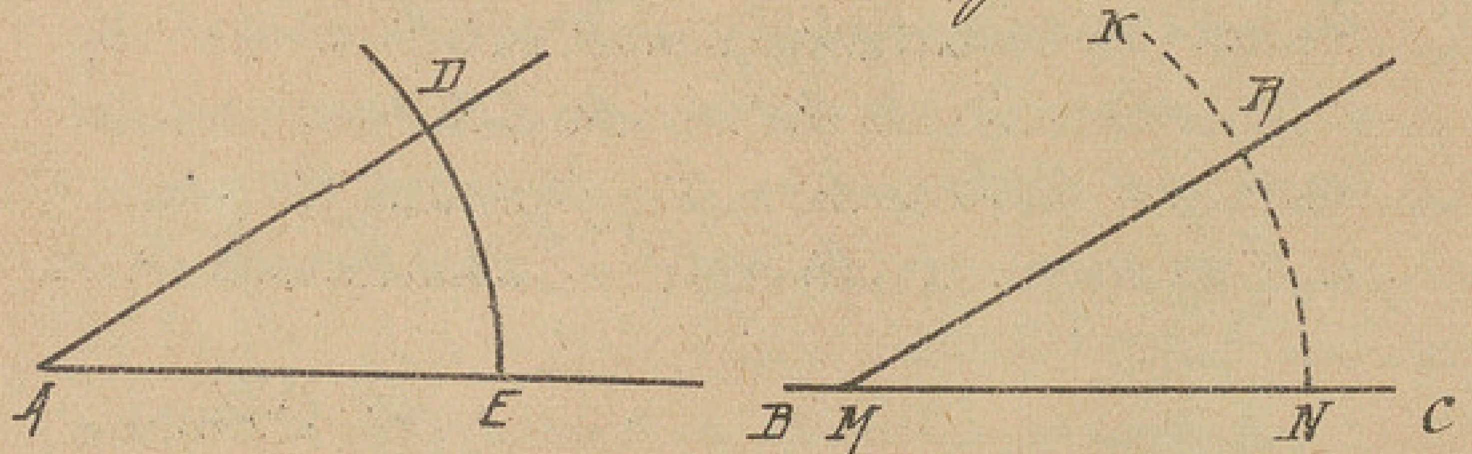
Du point B, avec la même ouverture de compas, décrivons deux arcs qui coupent les premiers en C et D.

En joignant C et D, on a une droite qui est perpendiculaire sur AB et qui divise AB en deux parties égales.

Tracé des angles.

Construire en un point d'une droite donnée un angle égal à un angle donné.

1° Au moyen de la règle & du compas.



Soit l'angle donné A et le point M de la droite BC.

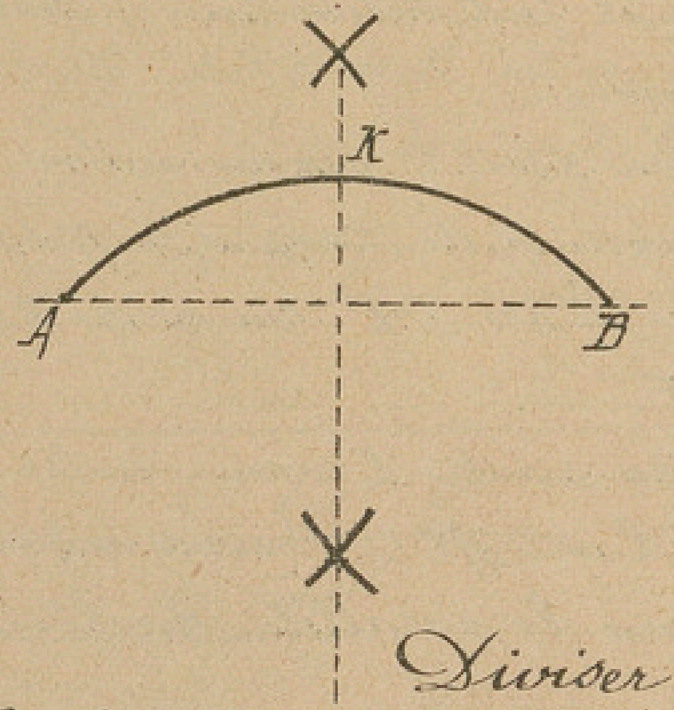
Du sommet A, avec une ouverture de

compas quelconque, décrivons l'arc DE.

Du point M comme centre, et avec la même ouverture de compas, décrivons l'arc KN sur lequel on porte, au moyen du compas, un arc NR égal à l'arc DE. Menons ensuite la droite RM et l'angle RMN est l'angle cherché.

2° Au moyen du rapporteur et de la fausse équerre, on pourrait résoudre le problème, mais ces méthodes sont moins précises que la première.

Diviser un arc en deux parties égales.



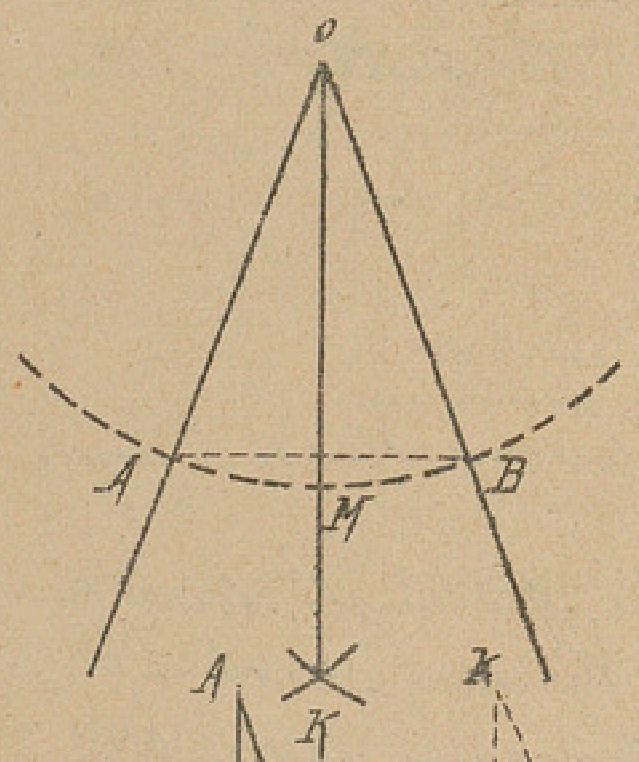
Soit l'arc AKB à diviser en deux parties égales.

Menons la corde AB et élevons une perpendiculaire sur le milieu de la corde.

Cette perpendiculaire passe par le centre et divise l'arc en deux parties égales en K.

Diviser un angle en deux parties égales, ou mener la bissectrice.

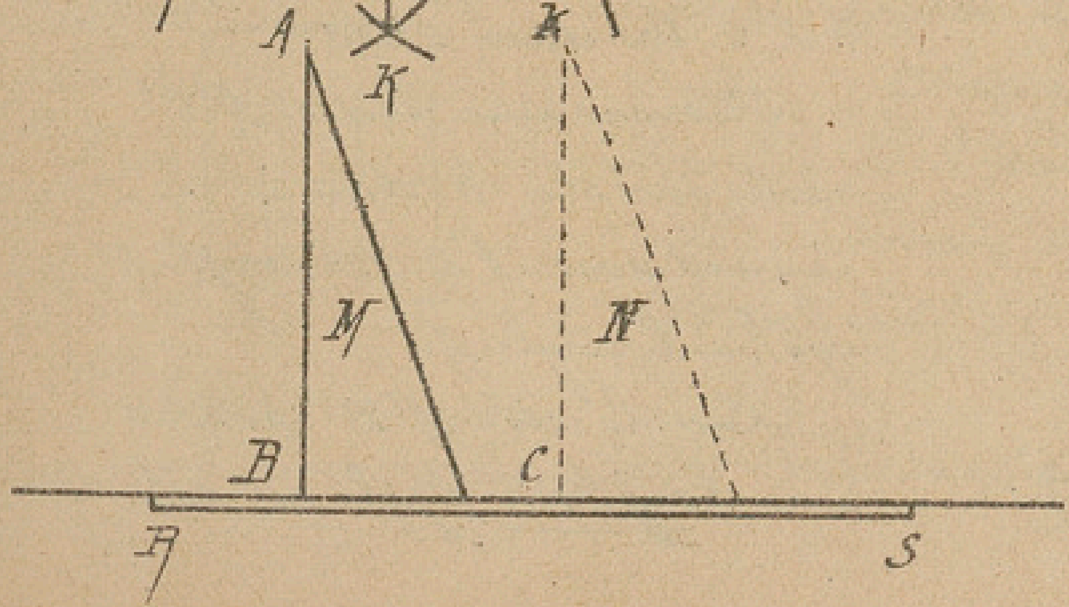
Soit l'angle AOB.



Décrivons du sommet O, comme centre, un arc AMB ; menons la corde AB et élevons en son milieu la perpendiculaire OK.

La droite OK divise l'arc AB en deux parties égales et, par suite, l'angle AOB.

Parallèles.



1° Avec règle et équerre. Pour mener par un point C une parallèle à une droite donnée AB, on dispose l'équerre en M, de manière que l'un de ses côtés coïncide avec AB et on applique la règle RS le long de l'autre branche de l'équerre.

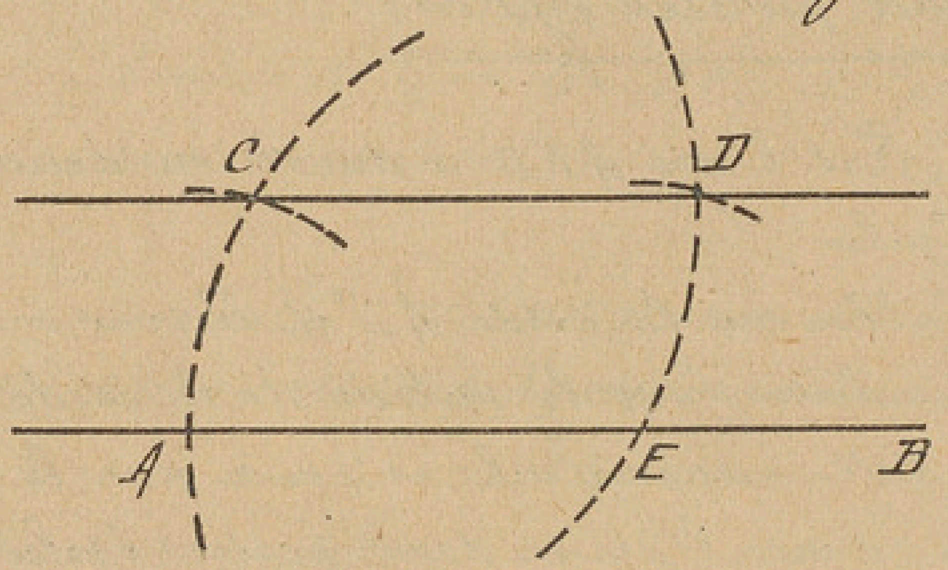
On fait glisser ensuite l'équerre

sur la règle jusqu'à ce que le premier côté passe par le point C. Il suffit de mener la droite CK pour obtenir la parallèle cherchée.

On peut, sans déranger la règle, mener autant de parallèles que l'on veut.

Les ouvriers métallurgistes, les menuisiers, les charpentiers, mènent des parallèles avec leur équerre en l'appuyant contre le bord de la pièce et en la faisant glisser. Parfois on se sert de cordeaux pour mener des parallèles. Souvent on se sert d'un instrument appelé trusquin.

2° Avec la règle & le compas.



Soit AB la droite donnée, à laquelle il faut mener une parallèle par le point C.

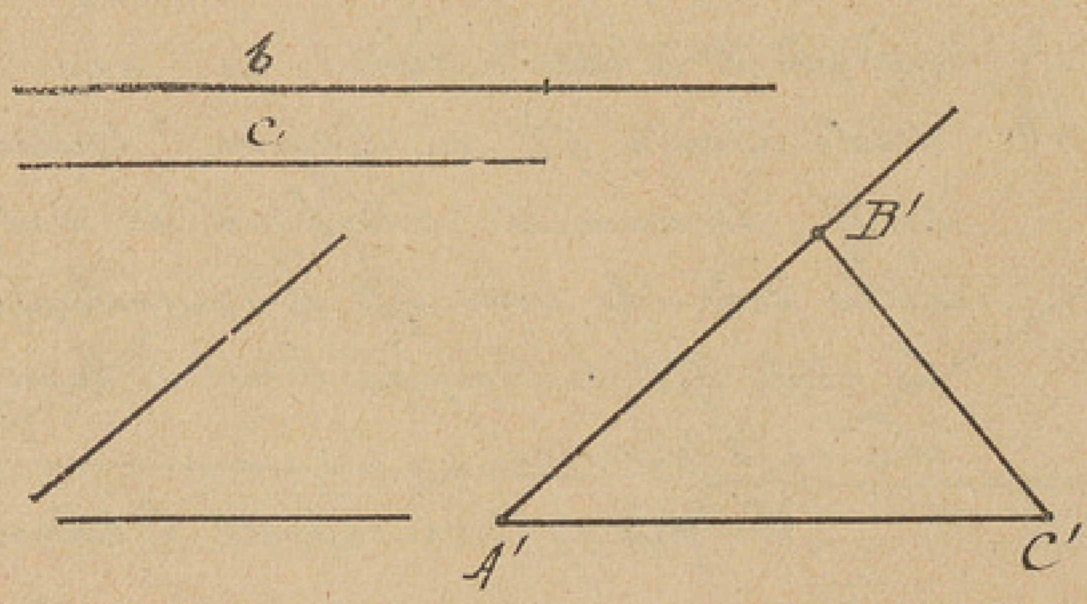
Du point C comme centre, avec une ouverture de compas suffisante, décrivons l'arc DE qui coupe AB au point E.

Du point E comme centre, avec la même ouverture de compas, décrivons l'arc AC. Prenons ensuite DE égal à CA et menons la droite CD, qui sera la parallèle cherchée.

Applications. Dans l'industrie, on applique souvent le tracé des parallèles parce que les produits réguliers de l'industrie sont généralement terminés par des rectangles ou des carrés ; ainsi, les planches, les vitres, les feuilles de papier, les étoffes, etc.

Triangles.

1° Construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle qu'ils comprennent.

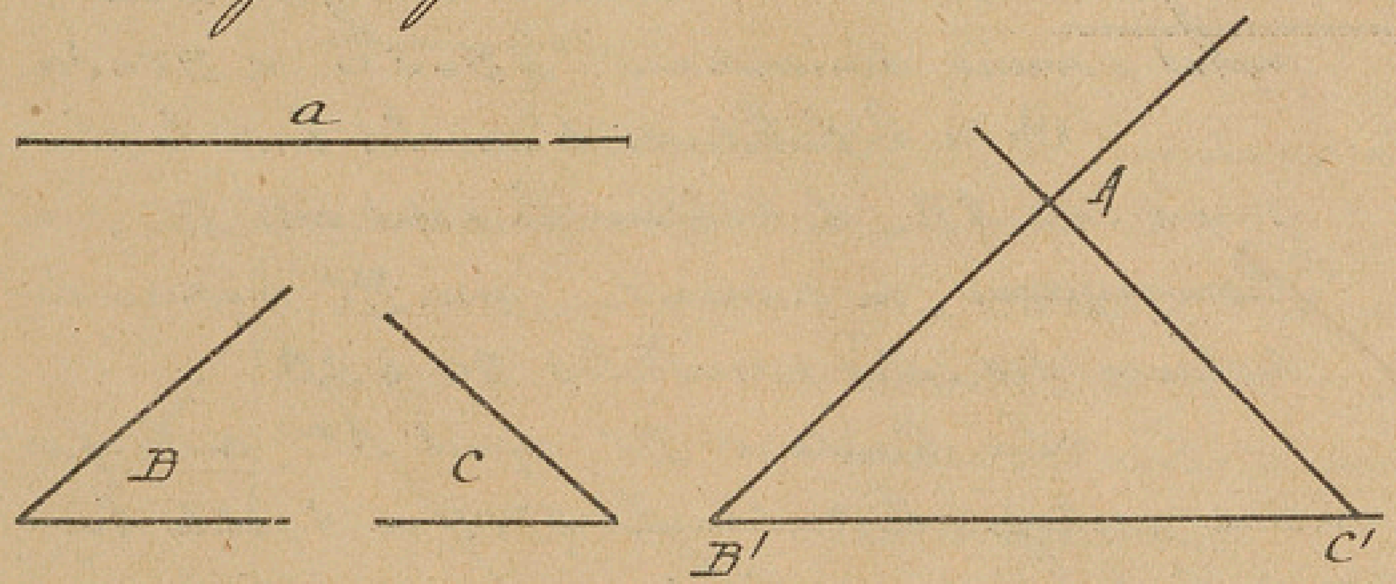


Soit A l'angle donné, b et c les deux côtés.

Menons une droite A'C' égale au côté b donné et faisons avec A'C' un angle A' égal à l'angle A.

Sur le côté A'B' portons une longueur égale au côté donné C. En joignant B'C', nous aurons le triangle demandé.

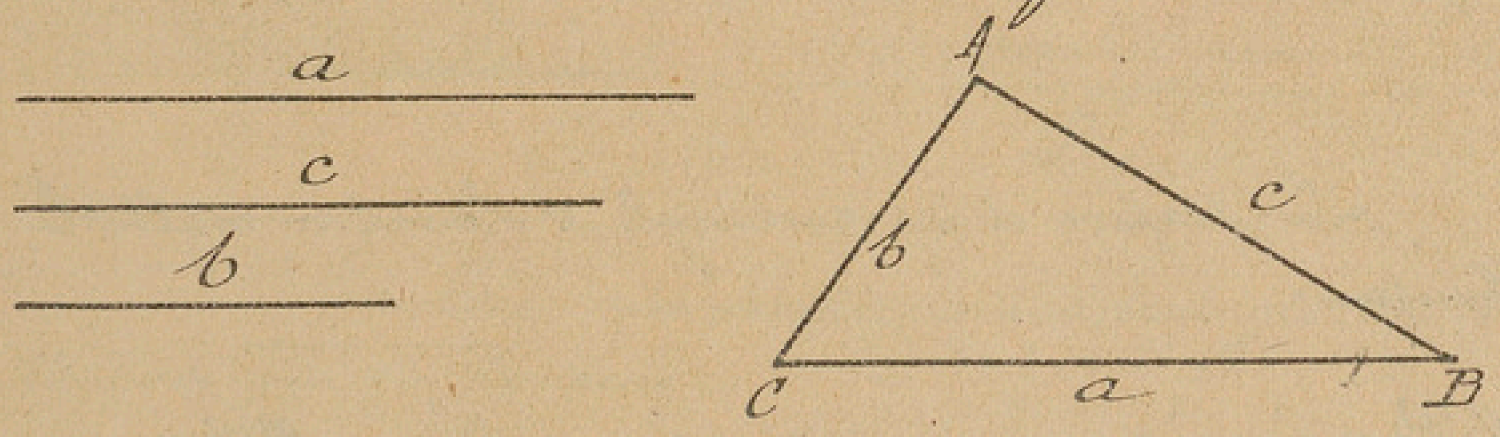
2° Construire un triangle, connaissant un côté et les deux angles adjacents.



Soit le côté a et les deux angles adjacents B et C donnés. Prenons sur une droite quelconque une longueur B'C' égale à a, puis construisons au point B' un angle AB'C' = $\hat{B}$ et en C' un angle AC'B' égal à l'angle C.

Le triangle AB'C' sera le triangle cherché.

3° Construire un triangle, connaissant les 3 côtés.



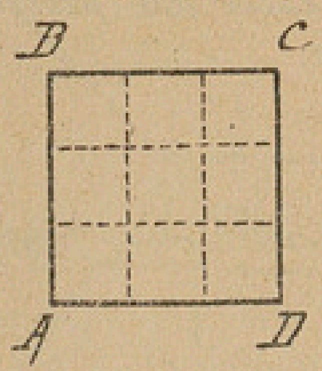
Soit a, b et c les 3 côtés donnés.

Menons une droite CB égale au côté donné a. Des extrémités C et B, avec des rayons respectivement égaux aux côtés donnés b et c, décrivons deux arcs de cercle qui se coupent en A. Joignons AB et AC pour obtenir le triangle cherché.

Pour que le problème soit possible, il faut que le côté a soit plus petit que la somme des deux côtés b + c.

Surface des Quadrilatères.

On a vu, dans le système métrique que l'unité des surfaces est le m² ou le carré qui a 1 m. de côté. Supposons que l'on ait un carré de 3 m. de côté, soit le carré ABCD.

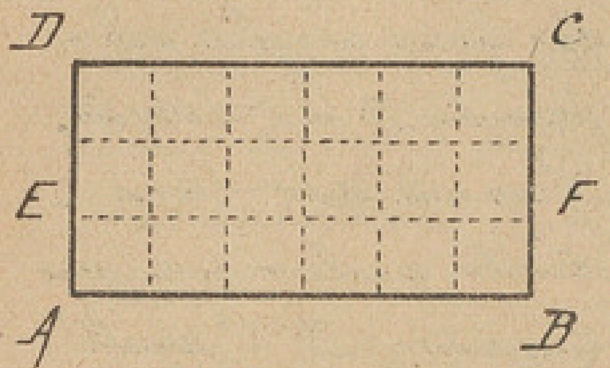


Chaque côté ayant 3 m. de long, on pourra les diviser en 3 parties égales de 1 m et en joignant les points de division, on aura évidemment 3 × 3 = 9 carrés de 1 m. de côté, c'est-à-dire que la surface sera de 9 m²; donc :

Règle. La surface d'un carré est égale au carré de son côté.

Exemple. La surface d'un carré de 5^m de côté est : $5 \times 5 = 25^{m^2}$.

Surface du rectangle. Considérons un rectangle $ABCD$ ayant comme dimensions : $AB = 5\,m.$ et $BC = 3\,m.$



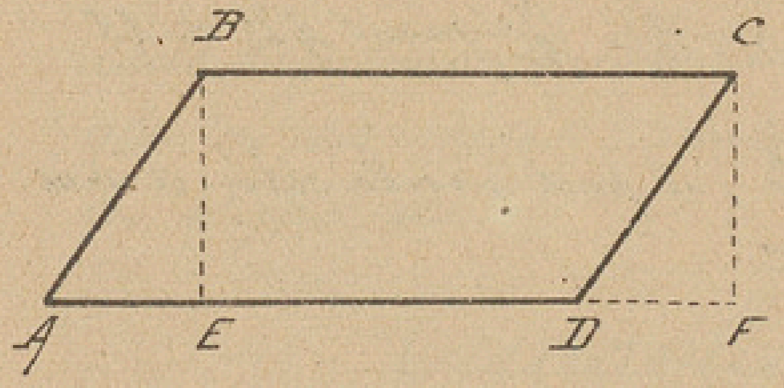
On a l'habitude d'appeler base le plus grand côté AB, et hauteur le petit côté BC. Remarquons, en passant, que BC mesure la distance des côtés parallèles DC & AB.

La hauteur BC ayant 3^m, en la partageant en 3 parties, on pourra partager le rectangle $ABCD$ en 3 petits rectangles ayant chacun 6^m de base et 1^m de hauteur.

Considérons le premier rectangle $ABEF$; comme AB a $6\,m.$ de long, en partageant la base en 6 parties égales à 1^m, on pourra placer 6 carrés de 1^m de côté et comme on a 3 petits rectangles égaux à $ABEF$, on voit que le rectangle $ABCD$ contiendra $3 \times 6 = 18$ carrés de 1^m de côté, ou $18\,m^2$.

Règle. La surface d'un rectangle s'obtient en multipliant la base par la hauteur.

Parallélogramme. Considérons le parallélogramme $ABCD$; la distance BE des deux côtés parallèles AD, BC est appelée hauteur du parallélogramme.



On voit que si l'on mène CF perpendiculaire sur AD, on a encore : $CF = BE$, puisque les parallèles AD, BC sont toujours à égale distance.

Si l'on transporte le triangle rectangle ABE en DCF, on aura le rectangle $EFCB$, qui a pour base $EF = AD$ car EF et AD sont tous les deux égaux à BC, et pour hauteur DE, c'est-à-dire la hauteur du parallélogramme.

On a : Surface rectangle $\quad EF \times ED = AD \times DE$.

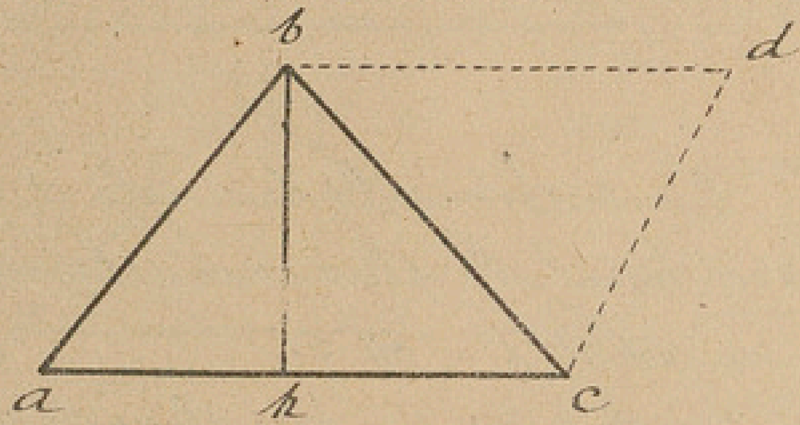
Or, la surface du rectangle étant équivalente à celle du parallélogramme, on peut dire :

Surface parallélogramme $\quad AD \times DE = \text{base} \times \text{hauteur}$.

Règle. La surface d'un parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur.

Triangle.

Soit le triangle a, b, c ; menons la hauteur b.h, c'est-à-dire la perpendiculaire b.h sur le côté a.c.



Menons b.d parallèle à a.c et c.d parallèle à a.b ; le quadrilatère a.b.c.d ayant ses côtés parallèles 2 à 2, est un parallélogramme.

Il a pour base la base a.c du triangle, et pour hauteur la hauteur b.h du triangle ; de plus, sa surface est le double de la surface du triangle a.b.c.

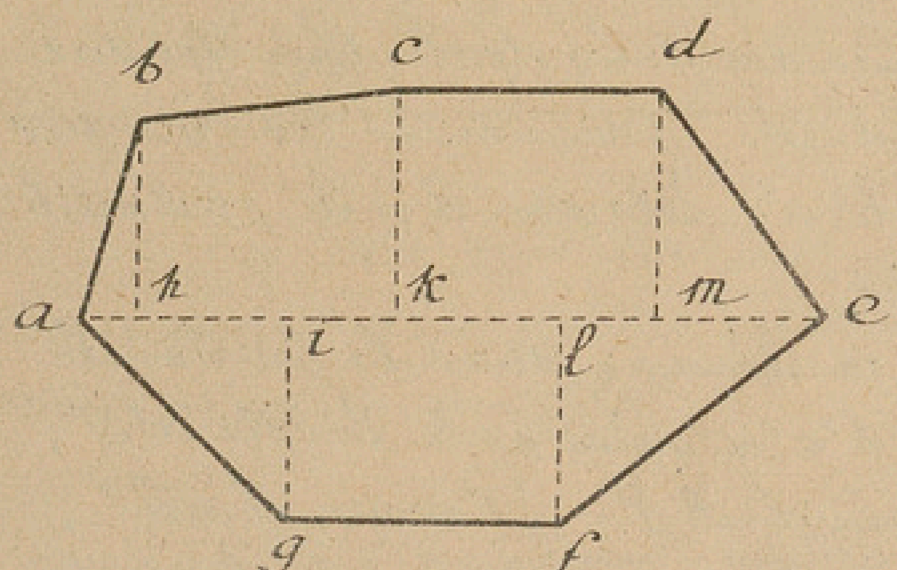
On peut donc écrire :

$$\text{Surface triangle} = \frac{\text{Surface parallélogramme}}{2} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{ac \times bh}{2}$$

Règle. La surface d'un triangle est égale au demi-produit de la base par la hauteur.

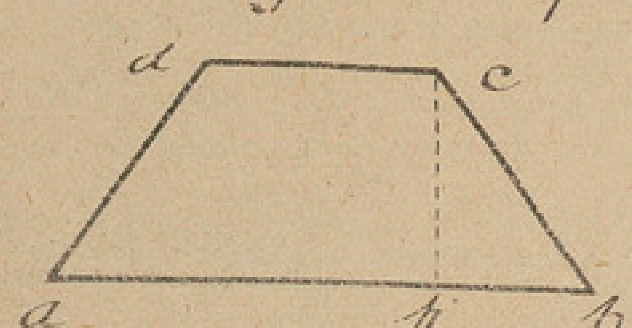
Polygone quelconque.

Lorsqu'on a à évaluer la surface d'un polygone quelconque, on le décompose en triangles, trapèzes rectangles, et on évalue séparément chaque surface.



Par exemple, le polygone a.b.c.d.e.f.g se compose des triangles a.b.h, d.m.e, e.l.f, et a.i.g et des trapèzes b.h.k.c, k.c.d.m, et i.l.f.g.

Surface du trapèze.



Nous nous contenterons de donner la formule :

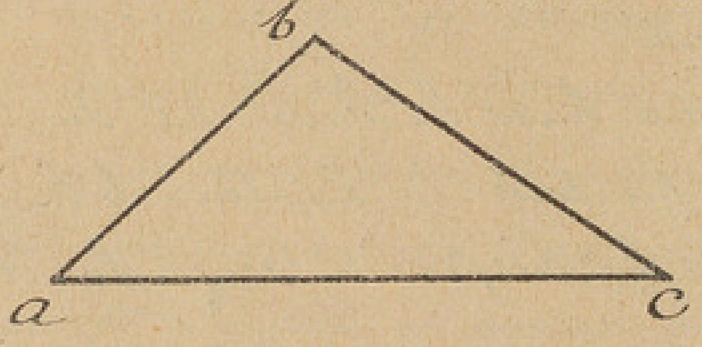
$$S = \frac{(ab + dc) \times ch}{2}$$

La surface d'un trapèze est égale au produit de la $\frac{1}{2}$ somme des bases par la hauteur.

Triangles

Nous allons indiquer quelques propriétés très simples des triangles.

Relations entre les côtés. Considérons le triangle a.b.c.



Le côté a.c étant le plus court chemin du point a au point c, on a :

$$a.c < a.b + b.c \quad (< = \text{plus petit que})$$

Donc, dans un triangle, un côté est plus petit que la somme des deux autres.

Si nous enlevons b.c des deux côtés de l'inégalité, on aura :

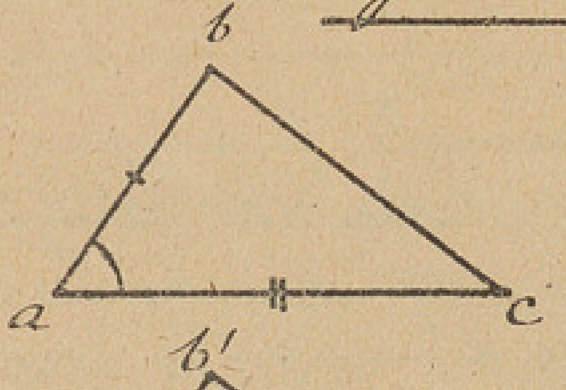
$$a.c - b.c < a.b \quad \text{c'est-à-dire} \quad a.b > a.c - b.c$$

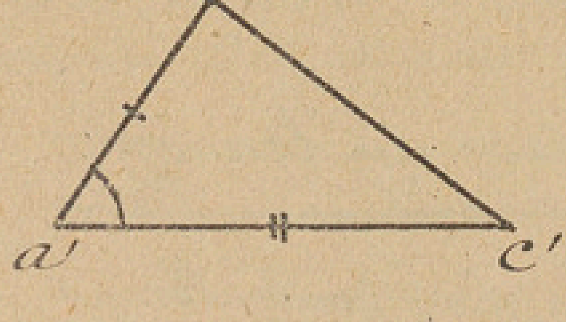
($>$ = plus grand que)

Donc, dans un triangle, un côté est plus grand que la différence des deux autres.

Il s'ensuit que 3 longueurs quelconques ne peuvent pas être les côtés d'un triangle. Par exemple, il n'y a pas de triangle ayant pour côtés 2^m, 4^m et 7^m, car ce dernier serait plus grand que la somme des deux autres, ce qui est impossible.

Egalité des triangles. On dit que deux triangles sont égaux quand on peut les faire coïncider dans toute leur étendue.





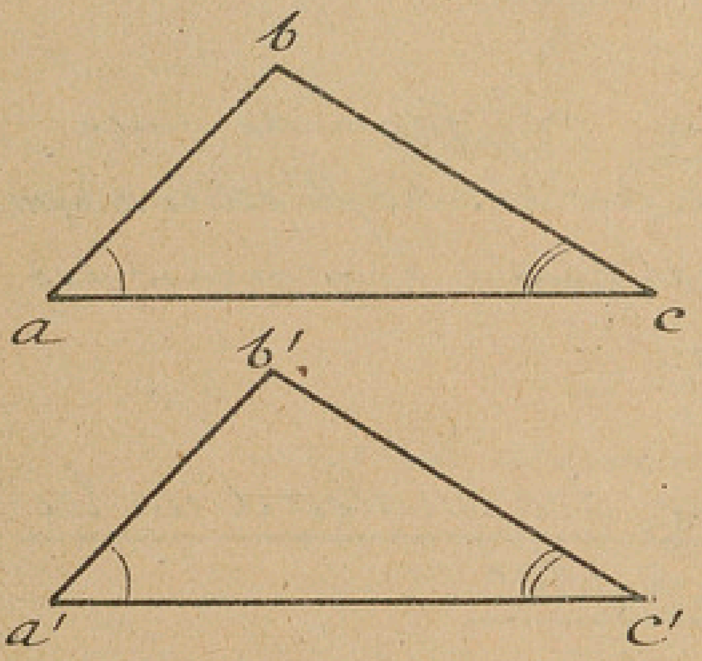
1^er^ Cas. Considérons les triangles a.b.c, a'.b'.c', tels que $\hat{a} = \hat{a}'$, $a.b = a'.b'$ et $a.c = a'.c'$

Si on découpe dans la feuille le triangle a'b'c' et qu'on porte le côté a'c', que se passera-t-il ? Puisque $\hat{a} = \hat{a}'$, la droite a'.b' se confondra avec la droite a.b. et comme $a'b' = a.b$, le point b' sera sur le point b ; donc, les deux triangles seront superposés.

On peut donc dire que : <u>deux triangles sont égaux quand</u>

ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun.

2^e^ Cas. Considérons les triangles a.b.c, a'b'c', tels que : $a.c = a'c'$, $\hat{a} = \hat{a}'$ et $\hat{c} = \hat{c}'$.



Découpons encore le triangle a'b'c' et portons le côté a'c' sur son égal a.c ; puisque $\hat{a}' = \hat{a}$, le côté a'b' tombera sur a.b ; de même, comme $\hat{c}' = \hat{c}$, le côté c'b' se confondra avec b.c ; par suite, le point b' tombera au point b et les deux triangles seront superposés.

Donc, deux triangles sont égaux quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

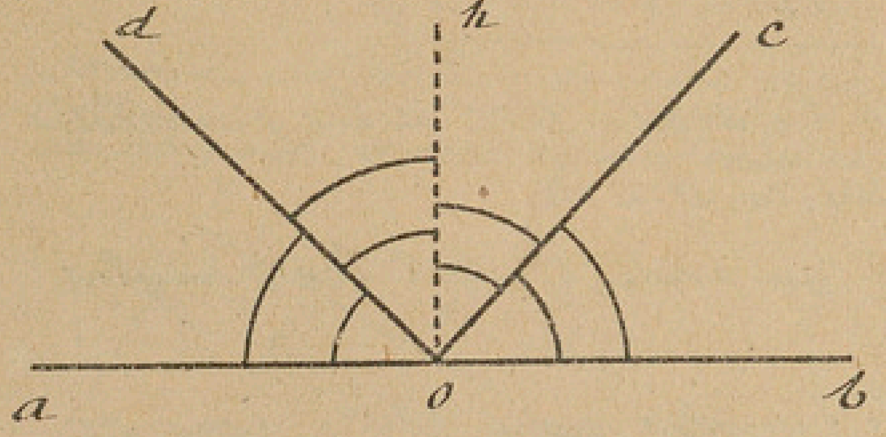
3^e^ Cas. Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont leurs 3 côtés égaux chacun à chacun.

Nous nous bornons à énoncer ce théorème, sans le démontrer.

Valeur des angles d'un triangle.

Nous ferons d'abord quelques remarques préliminaires.

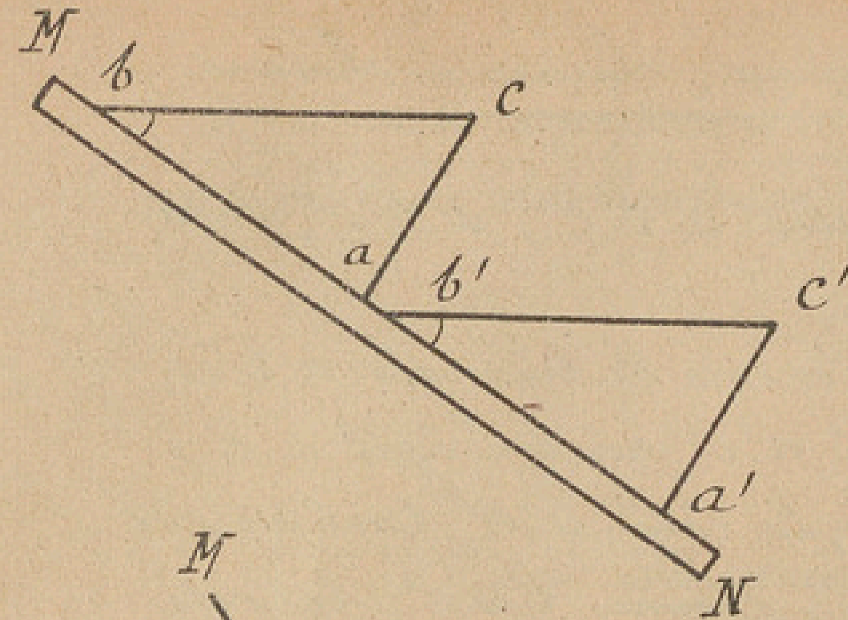
Considérons une droite a.b et un point o sur cette droite ; par le point o, menons des droites o.c, o.d, et la perpendiculaire o.h.



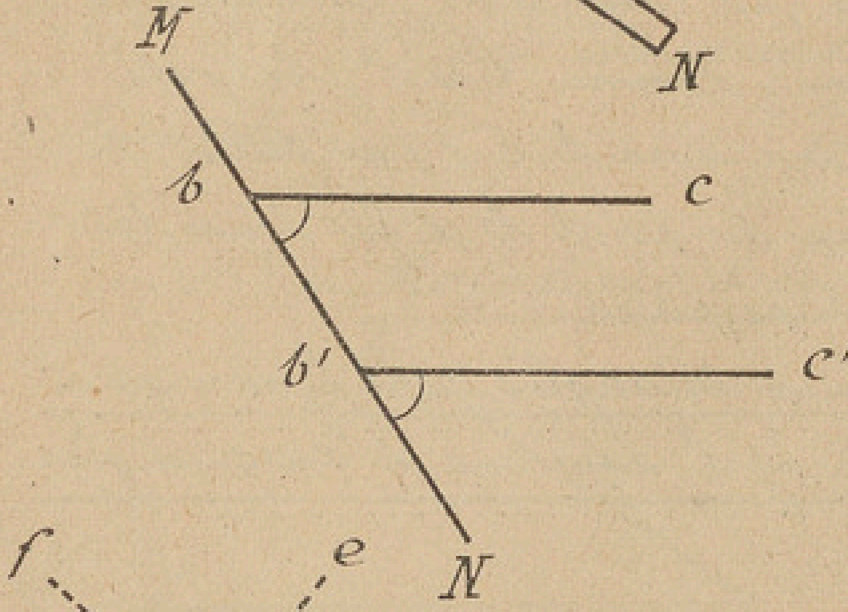
On forme ainsi 3 angles $\widehat{b.o.c}$, $\widehat{c.o.d}$, $\widehat{d.o.a}$, ayant leur sommet au point o. Si on fait la somme de ces 3 angles, on aura le même résultat qu'en faisant la somme des deux angles droits b.o.h et h.o.a.

On peut donc dire que la somme des angles que l'on peut former autour d'un point o au-dessus d'une droite est égale à deux angles droits, c'est-à-dire 180°.

Considérons maintenant une règle plate MN et appliquons le côté a.b de l'angle droit d'une équerre le long de la règle ; si l'on fait glisser l'équerre le long de la règle, l'hypothénuse b.c va se déplacer parallèlement à elle-même en b.c et l'angle b va venir en b'.

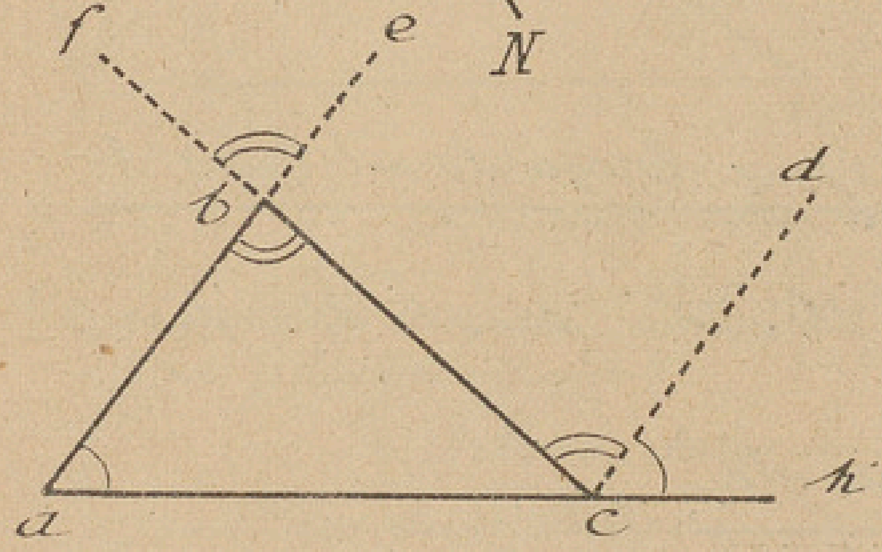


On peut donc dire que lorsqu'on a une droite MN, si par deux points c et c' de cette droite on mène des parallèles c.b et c'.b', les angles en b et en b' sont égaux.



Remarque. La façon de faire glisser une équerre sur une règle est le moyen que l'on emploie en dessin pour mener des droites parallèles.

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.



Considérons le triangle a.b.c ; prolongeons a.c et, par le point c, menons c.d parallèle à a.b.

Au point c, on a formé aussi 3 angles.

Le 1er, $\widehat{a.c.b}$ est un angle du triangle a.b.c ; si l'on prolonge les côtés a.b et b.c du triangle, l'angle b du triangle se reproduit à l'opposé en f.b.e.

Mais alors, si on regarde la droite c.b.f, on voit que c.d et b.e sont parallèles et, par suite, d'après ce que nous avons vu plus haut, les angles f.b.e et b.c.d sont égaux ; donc l'angle $\hat{b}$ du triangle se reproduit en b.c.d.

On voit de même, en considérant la droite a.c et les parallèles a.b et c.d que l'angle a du triangle se retrouve en d.c.h.

Donc, les 3 angles que l'on a formé au point c sont les 3 angles du triangle a.b.c.

Mais on sait que la somme des 3 angles vaut 180° ; donc on peut dire que la somme des angles d'un triangle est 180°.

Exemple. Quelle est la valeur des angles d'un triangle équilatéral ?

Dans un triangle équilatéral, les 3 angles sont égaux ; donc la valeur de l'un d'eux est : $\frac{180}{3} = 60°$

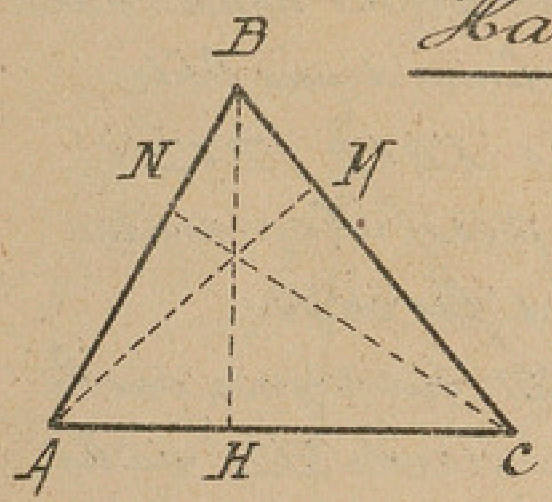
Problème. Deux angles B et C d'un triangle valent respectivement 89° 54' 50" et 22° 53' 37". On demande la valeur du 3e angle A du triangle.

L'angle A est le supplément de la somme des deux angles B et C.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } B &= 89°\ 54'\ 50'' \\ C &= 22°\ 53'\ 37'' \\ \hline B+C &= 112°\ 48'\ 27'' \end{aligned}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} 180° &= 179°\ 59'\ 60'' \\ B+C &= 112°\ 48'\ 27'' \\ \hline 180° - (B+C) = A &= 67°\ 11'\ 33'' \end{aligned}$$

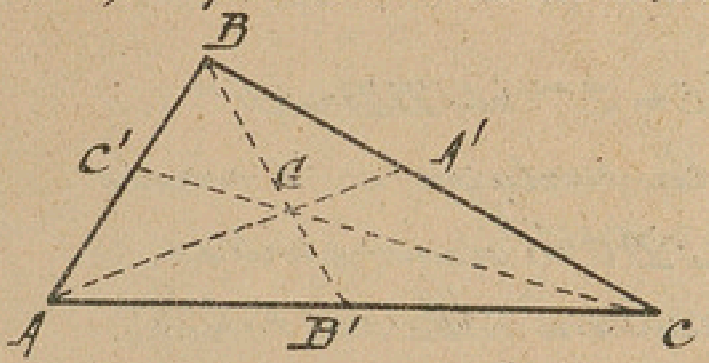


Hauteurs. On a déjà vu que dans un triangle la hauteur était la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé.

Comme il y a 3 sommets, on voit qu'il y a 3 hauteurs.

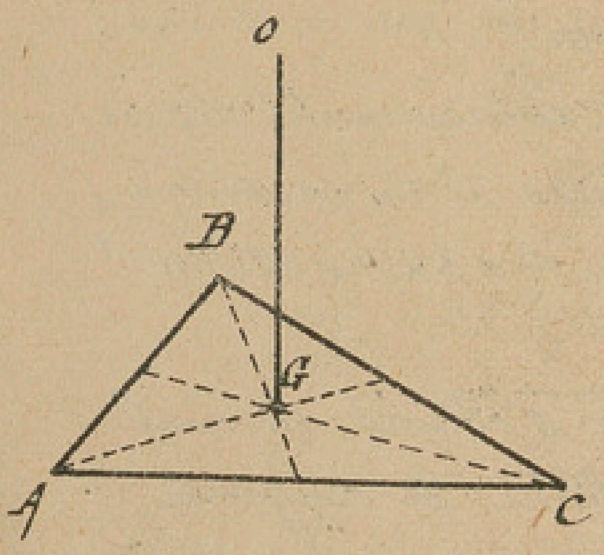
Dans un triangle, les 3 hauteurs se coupent en un même point.

Médianes. On appelle médiane la droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé ; On aura encore 3 médianes et ces 3 médianes se coupent encore en un même point.



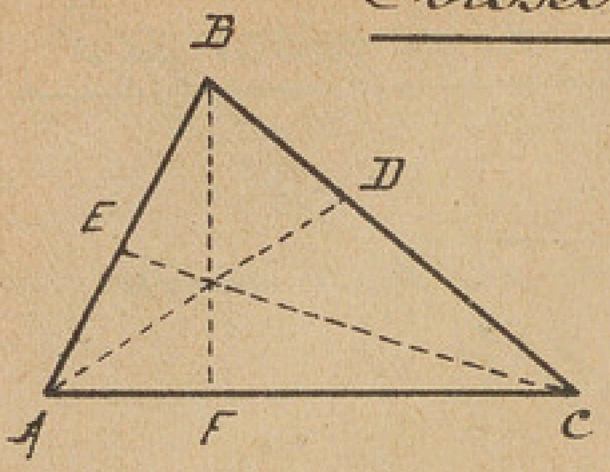
Soit le triangle ABC ; prenons le milieu A' de BC ; la droite AA' est une médiane ; On a de même 2 autres médianes CC' et BB', qui se coupent toutes en un même point G.

Ce point G jouit de la propriété suivante :



Supposons que sur une plaque en fer ayant la forme d'un triangle, on ait tracé avec la craie les 3 médianes ; si on fait un trou en ce point pour pouvoir y faire passer une ficelle, que l'on empêchera de sortir en faisant un nœud à son extrémité, sous la plaque, et si l'on tient la ficelle, on verra le triangle suspendu prendre la position horizontale.

C'est pour cela que le point G est appelé centre de gravité.



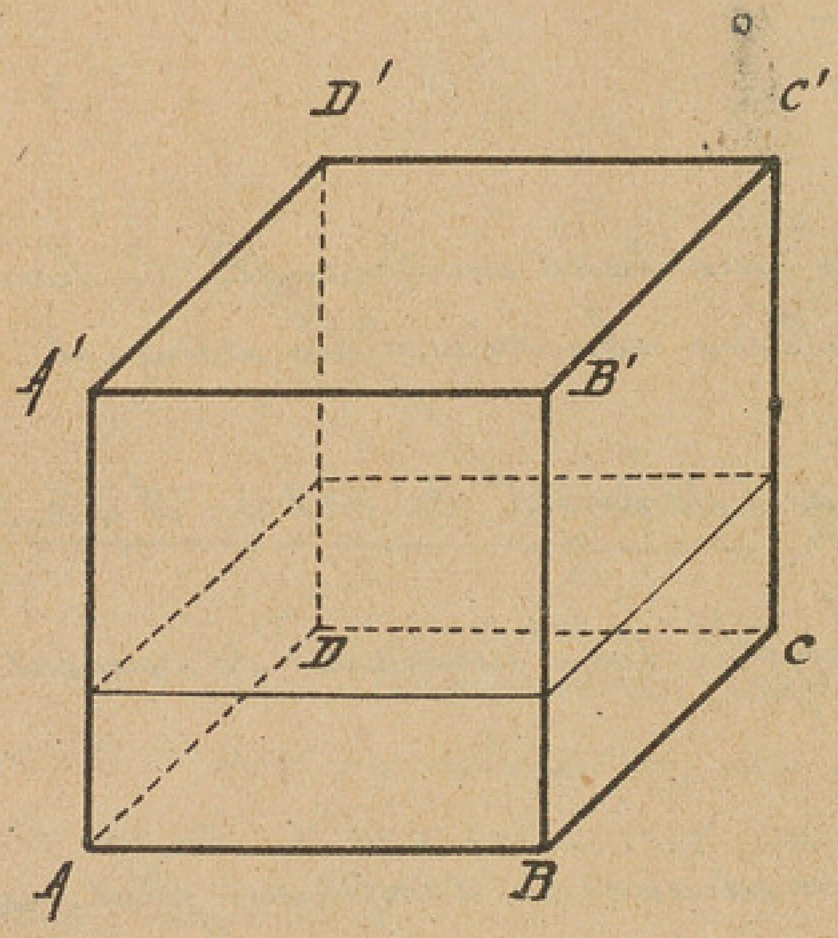
Bissectrice. On sait que la bissectrice d'un angle est la droite qui partage l'angle en deux angles égaux ; on aura donc 3 bissectrices dans un triangle et elles passent aussi par un même point.

Volumes.

De même que nous avons donné des formules permettant de trouver les surfaces, nous allons indiquer des formules permettant de trouver les volumes.

Volume d'un parallélipipède.

Soit un rectangle ABCD ; par les sommets A, B, C, D, menons des perpendiculaires à ce rectangle et prenons des longueurs égales AA', BB', CC', DD' ; on détermine ainsi un volume appelé parallélipipède, c'est le volume d'une boîte.



Les rectangles ABCD, BCB'C', CDC'D', sont appelés faces. Les droites AB, BC, BB', etc, sont les arêtes.

La face ABCD qui repose sur le sol est appelée base et l'arête BB' qui lui est perpendiculaire est la hauteur.

On sait que l'unité de volume est le m^3, c'est-à-dire un cube ayant 1^m d'arête. On va donc chercher combien ce parallélipipède contient de m^3.

Supposons que l'on ait : $AB = 3^m$, $BC = 2^m$ et $BB = 4^m$.

La base ayant $3 \times 2 = 6\ m^2$, on pourra la partager en 6 carrés de 1^m de côté, en divisant AB en 3 parties égales et BC en deux parties.

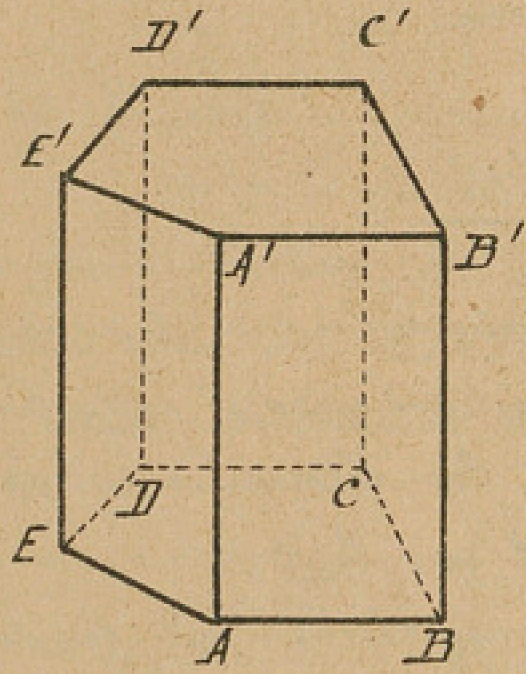
Sur chacun de ces côtés, on pourra placer un cube de 1 mètre de hauteur, on aura donc sur la base 2×3 cubes ou m^3.

Comme la hauteur BB' a 4 m, on pourra évidemment placer l'une au-dessus de l'autre 4 rangées de cubes parallèles à la première ; on aura donc en tout : $2 \times 3 \times 4$ cubes de 1^m d'arête, ou $2 \times 3 \times 4 = 24\ m^3$.

Règle. Le volume d'un parallélipipède s'obtient en multipliant la base par la hauteur, c'est-à-dire en multipliant sa longueur la hauteur et par l'épaisseur.

Prisme.

Si au lieu de considérer un rectangle, on considère un triangle ou un polygone quelconque, le volume que l'on obtient en menant des perpendiculaires au plan du polygone, est un prisme.



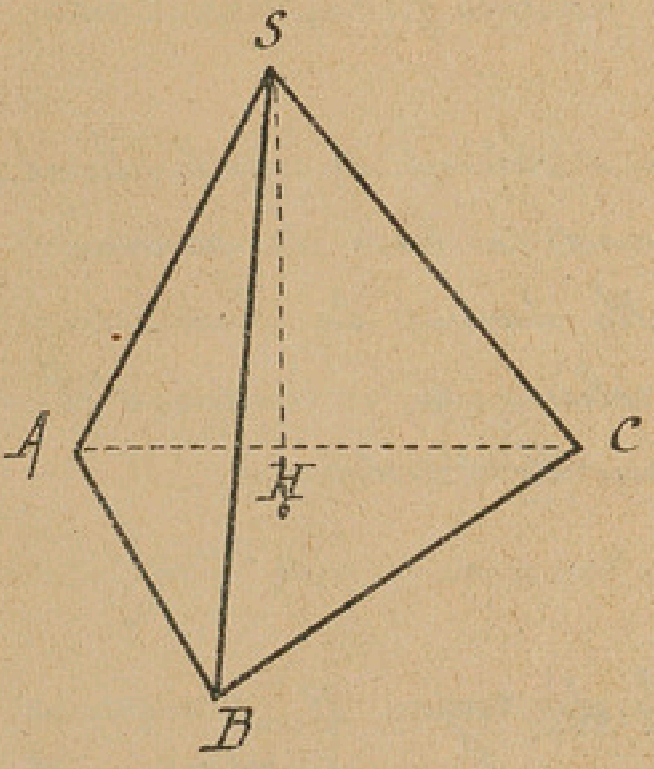
En appelant B la surface de la base, c'est-à-dire la surface du polygone, on a encore.

$$V = B \times h$$

h étant la longueur d'une arête BB'.

Pyramide.

On appelle pyramide le volume limité par une base ABC et des arêtes AS, BS et CS, qui passent toutes par un même point S, que l'on appelle sommet de la pyramide.



Si la base est un triangle, on a une pyramide triangulaire.

Du point S, abaissons une droite SH perpendiculaire sur la base ABC ; cette droite est appelée hauteur.

On démontre que le volume de la pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

Exemple. Quel est le volume de la grande pyramide d'Egypte, sachant que la base est un carré de 233^m de côté et que la hauteur est de 146^m ?

On a :

$$V = \frac{1}{3} \times 223^2 \times 146 = \frac{1}{3} \times 223 \times 223 \times 146 = 2.420.143^{m^3}.$$

Cylindre

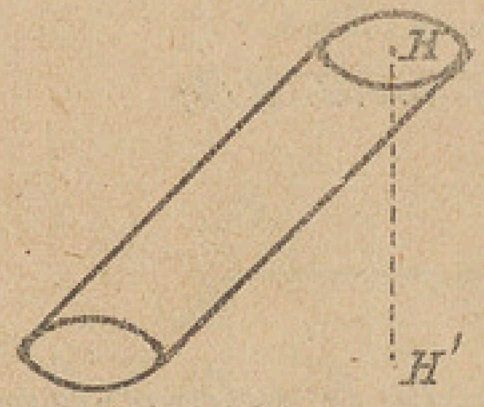
Le cylindre est le volume occupé par un tuyau de poêle. On a alors un cylindre circulaire droit, car la base est un cercle et ...

hauteur, c'est-à-dire la distance des deux cercles qui limitent le cylindre, est perpendiculaire sur la base.

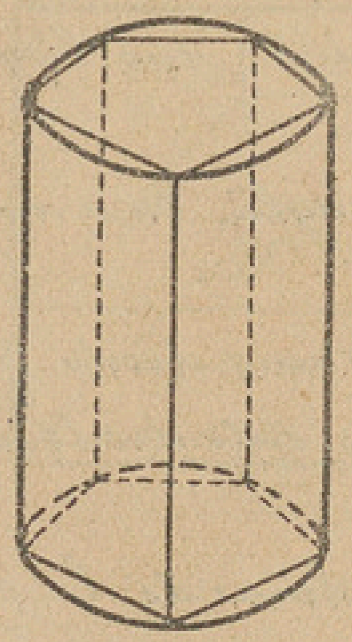
Si on coupe le tuyau d'une façon oblique, on aura un cylindre, mais la base ne sera plus un cercle et de plus ce cylindre sera incliné sur la base; on dit que l'on a un cylindre oblique.

La hauteur HH' est toujours la distance des 2 cercles qui limitent le cylindre.

Volume du cylindre.



Dans le cercle de base du cylindre, traçons un polygone et menons des perpendiculaires à cette base par les sommets du polygone. On détermine un prisme dont le volume est plus petit que le volume du cylindre; mais si on augmente indéfiniment les côtés du polygone, on voit que le prisme remplira tout le cylindre.



Or, le volume du prisme s'obtient en multipliant la base par la hauteur; quand la base du prisme a un grand nombre de côtés elle devient la base du cylindre, c'est-à-dire que le volume du cylindre s'obtient en multipliant la base par la hauteur:

$$V = Bh$$

Si la base est un cercle de rayon R, ce qui a lieu le plus souvent, alors sa surface est πR^2 et le volume du cylindre est donné par la formule:

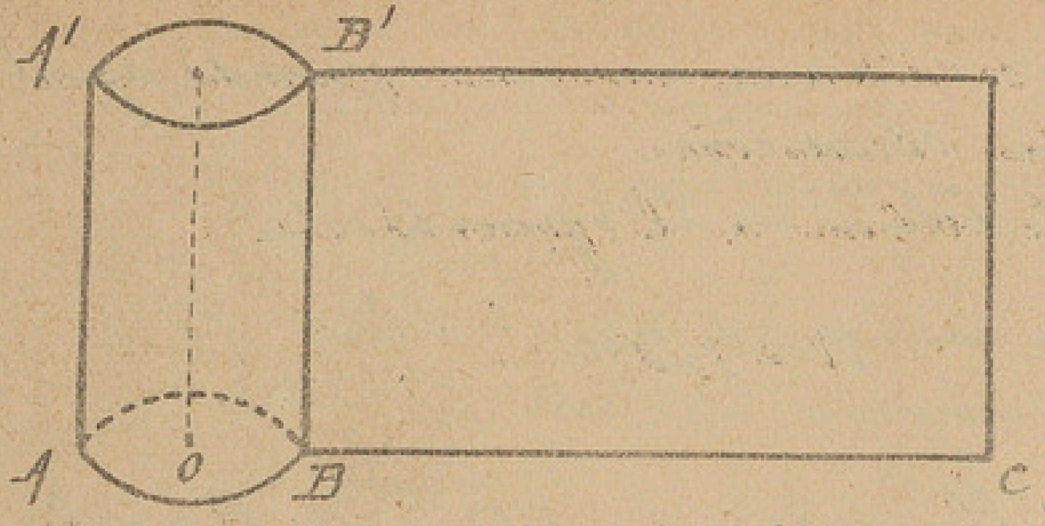
$$V = \pi R^2 h$$

Exemple. On a une cuve cylindrique de 0^m50 de rayon et de 2^m de hauteur; Quel est son volume?

On a:

$$V = \pi R^2 h = 3,1416 \times \overline{0,5}^2 \times 2 = 1,5708\ m^3$$

Développement du Cylindre. On a vu au début de la Géométrie que si l'on applique une droite sur un cylindre dans le sens de la longueur, cette droite coï-



tout entière sur le cylindre.

Supposons que l'on coupe le cylindre suivant cette droite BB' et faisons rouler le cylindre sur le tableau, alors toute la surface va pour ainsi dire s'étaler ; la circonférence de base AB se déroulera suivant la droite BC et la surface donnera le rectangle ACDB'.

La hauteur de ce rectangle est BB', c'est la hauteur du cylindre ; la base BC est la longueur de la circonférence de base AB, sa longueur est donc $2\pi R$; par suite, la surface du rectangle est $2\pi R h$, c'est aussi la surface latérale du cylindre.

Exemple. On a une cuve cylindrique de 0,5 m. de rayon et de 2 m. de hauteur. Quelle est sa surface latérale ?

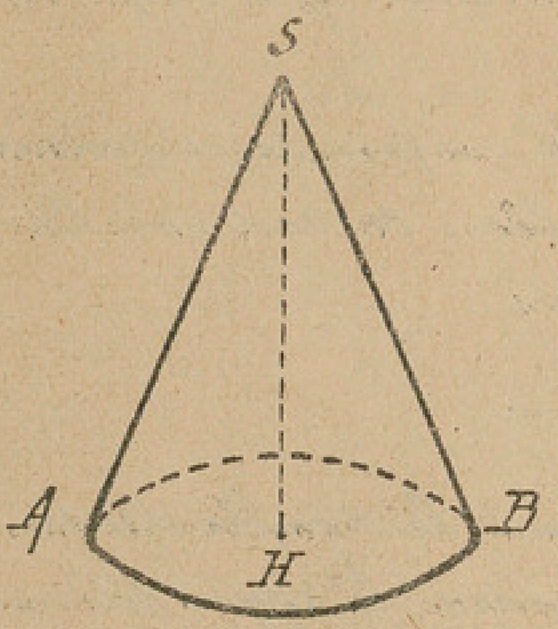
On a :

$$S = 2\pi R h$$
$$= 2\pi \times 0{,}5 \times 2$$
$$= 6{,}28 \text{ m}^2$$

Cône.

Le cône est le volume occupé par un pain de sucre.

Considérons ce volume, on peut constater que toutes les règles que l'on peut appuyer sur la surface passent toutes par le sommet S.



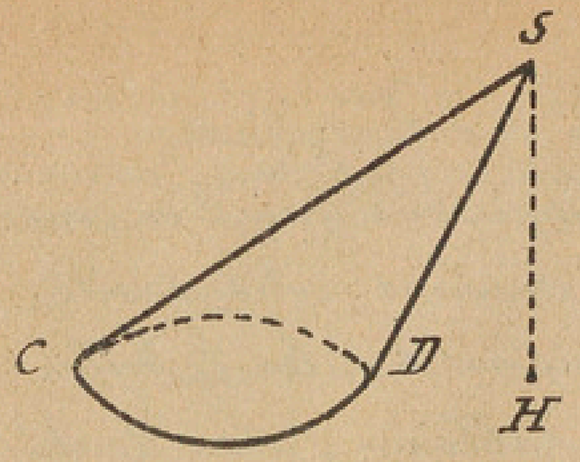
On peut donc dire que le cône est le volume formé par un cercle et les droites que l'on obtient en joignant les points de la circonférence à un point S.

La perpendiculaire menée du point S sur la base est la hauteur du cône ; elle passe par le centre du cercle. Ce volume est appelé un cône droit.

La droite SA est appelée la génératrice du cône.

Si on coupe le pain de sucre obliquement, la base ne sera plus un cercle et la hauteur peut passer en dehors de la base. On a un cône oblique.

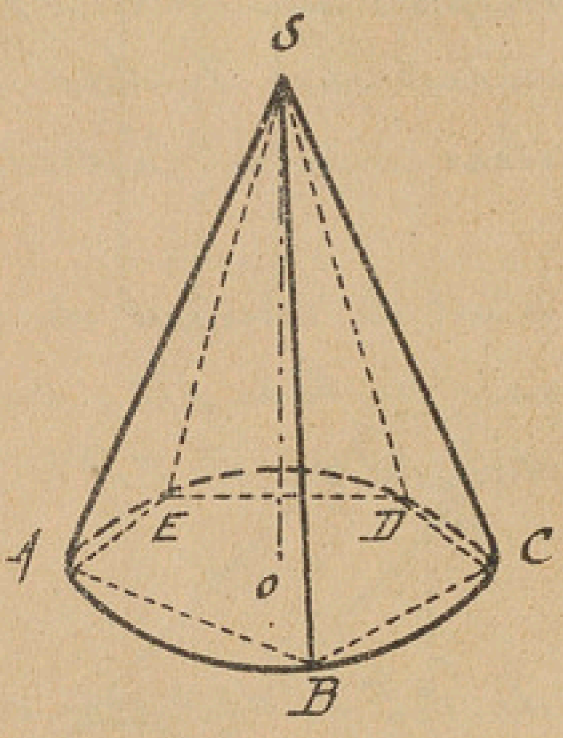
Volume. Considérons un cône de sommet S. Dans la base ABCDE, inscrivons un polygone et joignons ses sommets au sommet S



du cône ; on détermine ainsi une pyramide ayant pour hauteur OS du cône.

Le volume de la pyramide est :

$$V = \frac{1}{3} B h$$



Si l'on augmente indéfiniment le nombre des côtés du polygone, le volume de la pyramide deviendra le volume du cône et la base de la pyramide sera alors la base du cône ; on peut donc encore écrire pour le volume d'un cône :

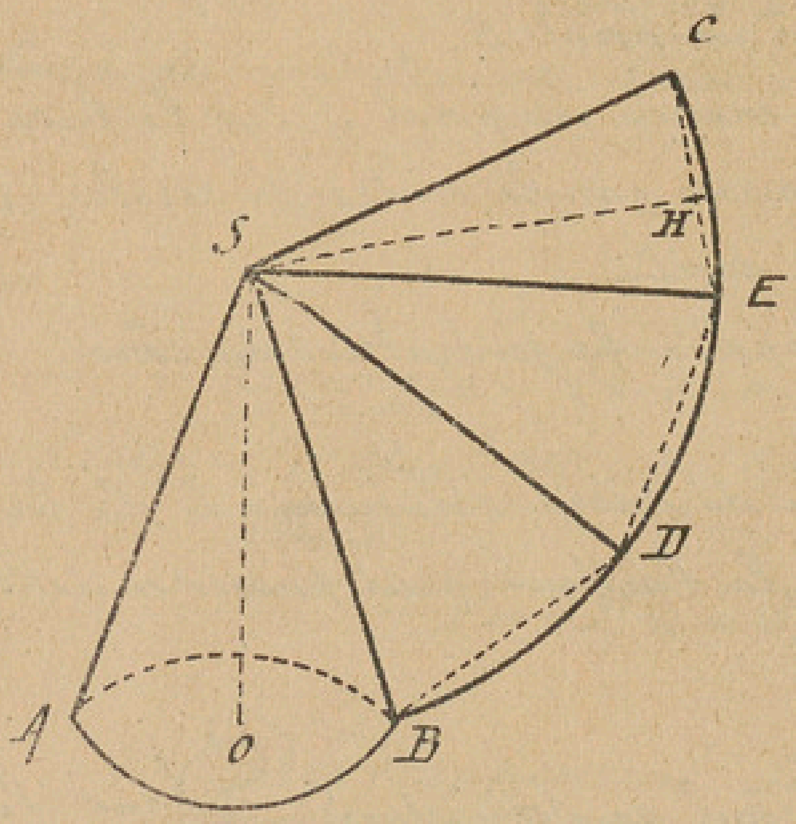
$$V = \frac{1}{3} B h$$

Remarque. Si la base du cône est un cercle, sa surface est πR^2 et le volume est :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Développement et Surface latérale du cône.

Toutes les droites passant par le sommet S étant entièrement sur le cône, coupons celui-ci suivant cette droite et déroulons-le sur le tableau. Alors la surface latérale du cône va s'appliquer tout entière sur le tableau et prendra la forme d'un secteur circulaire, l'arc de secteur étant égal à la circonférence de base du cône.



Pour mesurer la surface de ce secteur, inscrivons-y des triangles ; on sait que la surface d'un triangle est

$$\frac{SH \times CE}{2}$$

Si on double indéfiniment le nombre des triangles, la hauteur deviendra le rayon du cercle, c'est-à-dire la droite SB que l'on peut appliquer sur le cône et que l'on appelle arête.

Les bases des triangles forment l'arc BC dont la longueur est la circonférence de base du cône et les triangles forment la surface du secteur.

On peut donc écrire :

$$\text{Surface Secteur} = \frac{SB \times \text{arc } BC}{2}$$

Or : $SB = a =$ arête du cône

Arc $BC =$ circonférence de base $= 2\pi R$

Donc :

$$\text{Surface Secteur} = \frac{a \times 2\pi R}{2} = \pi R a$$

Donc, la surface latérale du cône est donnée par la formule :

$$S = \pi R a$$

Problème I. Quel est le volume d'un cône dont le rayon de la base est 1,2 m. et la hauteur les $\frac{4}{5}$ de ce rayon ?

On a : $h = \frac{1,2 \times 4}{5} = 0,96$ m.

Ensuite :

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 1,2 \times 1,2 \times 0,96}{3}$$

Ou : $V = \underline{1,448 \text{ m}^3}$

Problème II. Quelle est la surface latérale d'un cône dont le rayon de base est 1,5 m. et le côté les $\frac{3}{5}$ de la circonférence de cette base.

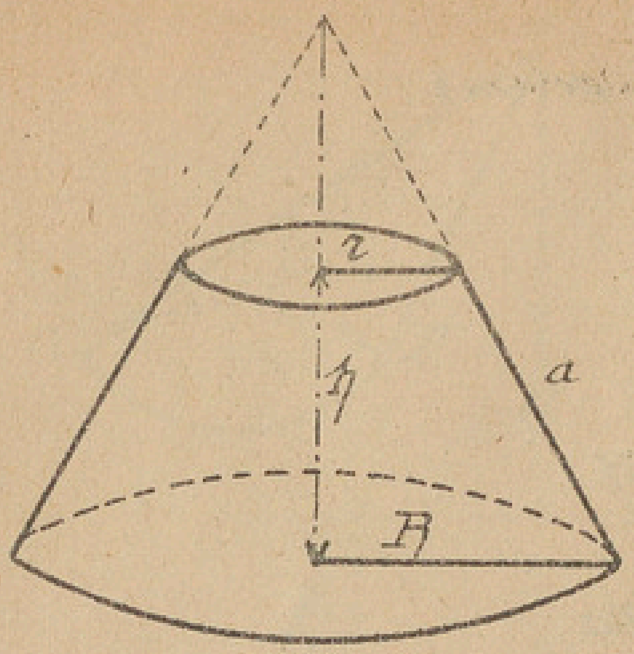
On a : $C = 2\pi R = 9,4248$ m.

$$a = \frac{3}{5}\ C = \frac{9,4248 \times 3}{5} = 5,65 \text{ m}$$

$$S = \pi R a = \pi \times 1,5 \times 5,65 = \underline{26,625 \text{ m}^2}$$

Tronc de Cône.

On appelle tronc de cône à bases parallèles, ou cône tronqué, la portion de volume d'un cône comprise entre la base et un plan parallèle à la base.



Volume. Le volume d'un tronc de cône s'obtient par la formule :

$$V = \frac{\pi h}{3} \left(R^2 + r^2 + Rr \right)$$

où : h = hauteur du tronc
R = rayon de la grande base
r = rayon de la petite base

La formule : $S = \pi \left(R + r \right) a$
donne la surface latérale du tronc.

Problème I. On demande le volume d'un tronc de cône, connaissant les rayons 6,5 m. et 4,5 m. de la grande et de la petite base et la hauteur 3,75 m.

On a : $$V = \frac{h}{3} \left(R^2 + r^2 + Rr \right)$$

$$= \frac{3{,}75}{3} \left[6{,}5^2 + 4{,}5^2 + 6{,}5 \times 4{,}5 \right]$$

$$= 1{,}25 \left(42{,}25 + 20{,}25 + 29{,}25 \right)$$

$$= 1{,}25 \times 91{,}75 = \underline{114{,}6875 \ m^3}$$

Problème II. Quelle est la surface latérale d'un cône dont le diamètre de la grande base est 5,2 m., celui de la petite base 3,4 m. et le côté 4,83 m.

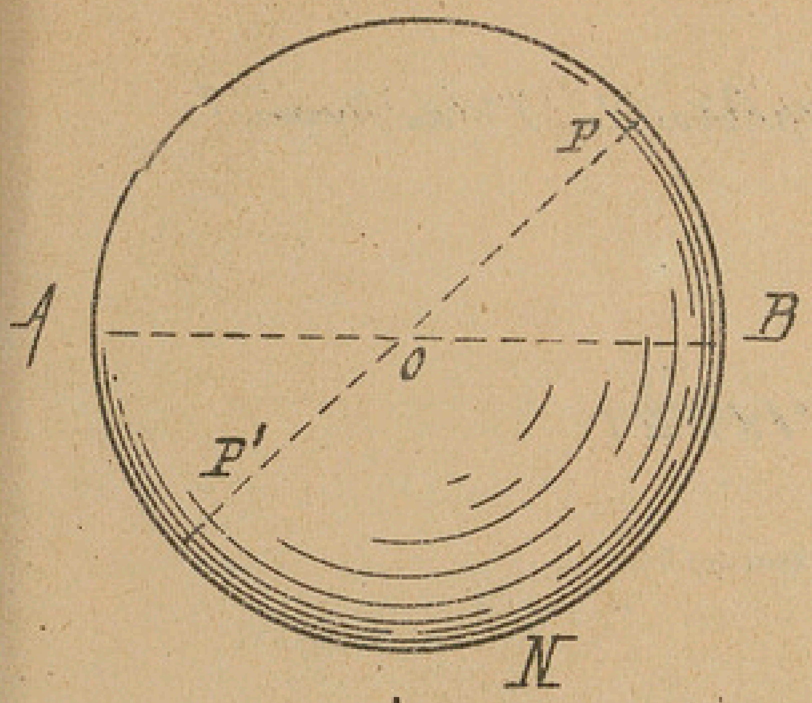
On a : $S = \pi \left(R + r \right) a$

Ou : $S = \pi \left(5{,}2 + 3{,}4 \right) \times 4{,}83 = 8{,}6 \times 4{,}83 = \underline{41{,}538 \ m^2}$.

Sphère.

La sphère est le volume occupé par une boule, une orange, une bille de billard, etc.

Si on prend une circonférence AMBN de centre O, si on la fait tourner autour du diamètre AB, en avant du tableau, quand elle aura décrit



un tour, elle aura détaché dans l'espace une sphère.

On peut donc dire que tous les points de la sphère sont à égale distance d'un point qu'on appelle centre. La distance d'un point P au centre O de la sphère est le rayon de la sphère $OP = R$.

Si on prolonge OP jusqu'en P', on a alors le diamètre : $PP' = 2$ rayons.

Section d'une sphère par un plan.

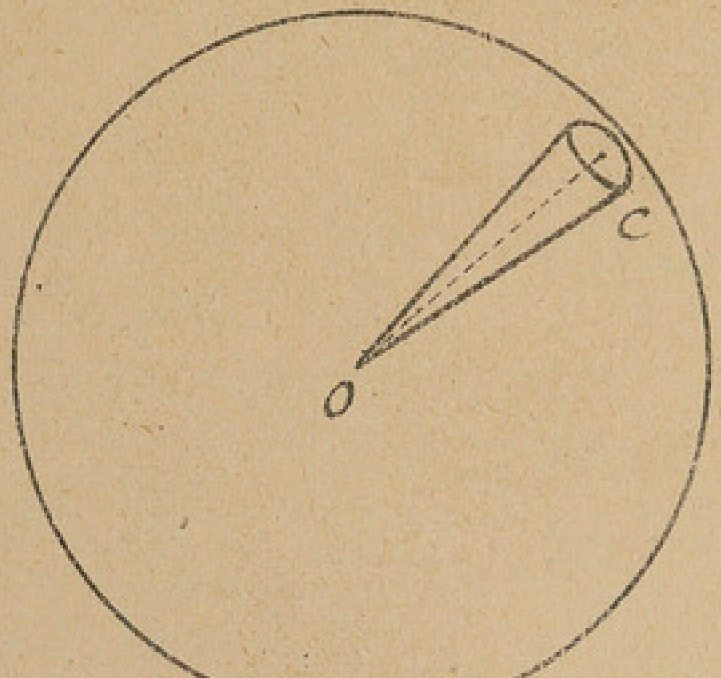
Si on coupe une orange avec un couteau, la section que l'on obtient est un cercle ; on peut remarquer que ce cercle augmente au fur et à mesure que l'on approche du centre de l'orange ; à ce moment, l'orange est partagée en deux parties égales et la section est un grand cercle ; son rayon est le rayon de la sphère.

Au contraire, les autres rayons sont plus petits quand les sections s'éloignent du centre.

Surface. On démontre que la surface de la sphère est donnée par la formule :

$$S = 4\pi R^2.$$

Volume. Soit une sphère de rayon R ; imaginons un cône ayant pour base un petit cercle C tracé sur la sphère et ayant pour sommet le centre O de la sphère.



Si le nombre des cônes augmente indéfiniment, ils rempliront toute la sphère et leur base remplira la surface de la sphère ; le rayon de ces cônes est alors le rayon de la sphère.

Or, le volume d'un cône est :

$$\frac{1}{3} B h$$

Comme h devient R et que la somme des bases des cônes devient la surface de la sphère, c'est-à-dire $4\pi R^2$, on a pour le volume de la sphère :

$$V = \frac{1}{3} \times 4 \pi R^2 \times R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Exemple. Quelle est la surface d'une sphère de 1m de rayon? Quel est son volume ?

On a les formules :

$S = 4 \pi R^2$ comme $R = 1$ $R^2 = R \times R = 1 \times 1 = 1$

Donc :

$$S = 4 \times 3,14 \times 1 = 12,56 \; m^2$$

De même :

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$, on a encore $R^3 = R \times R \times R = 1 \times 1 \times 1 = 1$

Donc :

$$V = \frac{4}{3} \times 3,14 = \frac{4 \times 3,14}{3} = \frac{12,56}{3} = 4,186 \; m^3$$

Développement —.

Il est impossible de pouvoir développer la sphère sur un plan, comme on l'a fait pour le cylindre et le cône.

Algèbre

Supposons que l'on ait à faire le problème suivant :

Trouver deux nombres, connaissant leur somme 15 et leur différence 5 ?

On sait que si l'on ajoute la différence de 2 nombres au petit nombre, on obtient le grand nombre ; donc, si à la somme 15 on ajoute la différence, qu'aura-t-on ?

La somme 15 se compose du grand et du petit nombre ; en ajoutant la différence 5, on aura le grand nombre, plus le petit, plus la différence mais nous venons de voir que le petit nombre, plus la différence, donne le grand nombre ; donc on peut dire que la somme plus la différence valent deux fois le grand nombre ; par suite :

2 fois le grand nombre $= 15 + 5 = 20$
Donc le grand nombre $= \frac{20}{2} = 10$

Et, par suite, le petit nombre $= 15 - 10 = 5$.

Si l'on avait la même question en prenant 20 pour somme et 11 pour différence, il faudrait recommencer tout le raisonnement.

Essayons de traiter la question d'une autre façon.

Appelons le grand nombre N et le petit nombre n ; soit S la somme et d leur différence ; d'après l'énoncé, on a :

$$N + n = S$$
$$N - n = d$$

Si nous additionnons ces deux égalités, on aura :

$$N + n + N - n = S + d$$

Or : $n - n = 0$ et $N + N = 2N$; on a donc :

$$2N = S + d$$

d'où :

$$N = \frac{S + d}{2}$$

Ici, $S = 15$ et $d = 5$; donc : $N = \frac{15+5}{2} = \frac{20}{2} = 10$

Si on avait $S = 20$ et $d = 4$, on aurait :

$$N = \frac{20+4}{2} = 12$$

On voit immédiatement l'avantage qu'il y a de représenter les nombres par des lettres ; cela simplifie le raisonnement et, de plus, lorsqu'on arrive à une formule, il est inutile de refaire tout le raisonnement, on n'a qu'à appliquer la formule.

Cette façon de raisonner sur les quantités en les représentant par des lettres sans s'occuper de leur valeur, constitue l'algèbre.

L'algèbre est donc la science qui a pour but de combiner les grandeurs entre elles, sans s'occuper de leur valeur particulière.

Nombres positifs et négatifs.

Nous commencerons d'abord par élargir l'idée de nombre telle qu'on la conçoit en arithmétique.

Supposons une ville placée en O sur une route ; si l'on dit qu'un village se trouve à 4 km. de la ville O, il est évident que la position de ce village n'est pas déterminée suffisamment, car on peut prendre le village en A à 4 km. à droite, ou en B à 4 km. à gauche de O ; pour déterminer le village, il faudra donc dire qu'il se trouve à 4 km. à gauche ou à droite du point O.

Pour simplifier le langage, on convient de dire que les points à droite du point O sont à des distances positives ; on dira le point A est + 4 km. de O ; les points à gauche sont à des distances négatives, on dira le point B est à — 4 km. de O.

Le nombre + 4 est appelé nombre positif et le nombre — 4 est appelé nombre négatif.

Cette façon de compter est d'ailleurs employée pour les températures.

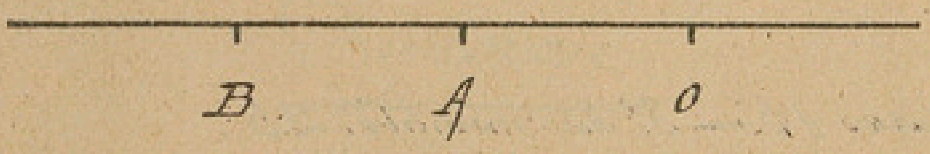
Une température + 10° indique qu'il y a 10° au-dessus de 0° et une température de — 5° indique qu'il y a 5° au-dessous de Zéro.

Addition des nombres.

Si les deux nombres sont positifs, on a l'addition arithmétique $5 + 4 = 9$.

Cas de 2 nombres négatifs.

Soit à additionner les nombres -2 et -3.



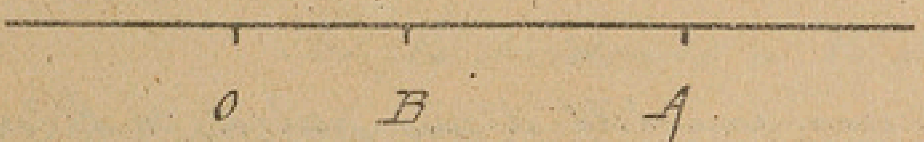
Celà veut dire, par exemple : un piéton fait 2 km. à gauche de 0 et arrive en A ; ensuite il fait 3 km. à gauche de A ; à quelle distance se trouve-t-il de 0 ?

La distance est évidemment : $OB = OA + OB = -2 - 3 = -5$.

Donc :

Règle. Pour additionner deux nombres qui ont le même signe, on additionne les valeurs arithmétiques et on donne au résultat le signe commun.

3° Cas. Soit à faire l'addition : $5 + (-3)$.

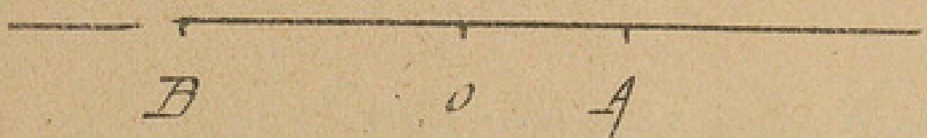


C'est-à-dire qu'on fait 5 km. à droite de 0, on arrive en A, puis on fait 3 km. à gauche de A ; à quelle distance est-on de 0 ?

La distance est $OB = 2$ km. ; on a donc :

$$5 + (-3) = 2$$

C'est-à-dire que lorsque les nombres ont des signes contraires, on fait la soustraction arithmétique et on donne au résultat le signe du plus grand nombre ; soit par exemple : $2 + (-5)$, c'est-à-dire on fait 2 km. à droite de 0, on arrive en A, puis de là on fait 5 km. à gauche ; à quelle distance arrive-t-on de 0 ?



La distance est $OB = -3$, car B est à gauche de 0.

On a bien : $2 + (-5) = 2 - 5 = -3$.

On a fait la soustraction $5 - 2$ et au résultat on a donné le signe $-$ car le plus grand nombre 5 a le signe $-$.

Soustraction.

Soit à soustraire 12 du nombre 25.

Comme les deux nombres n'ont pas de signe devant eux, on sous-entend qu'ils ont le signe $+$.

D'après l'arithmétique, on écrit :

$$25 - 12 = 13$$

On remarquera que le nombre 12 qui avait le signe + a été écrit à la suite de 25 avec le signe —, c'est-à-dire qu'on lui a changé son signe.

2e Cas. Soit à soustraire $15 - 8$ du nombre 25.

Si l'on soustrayait 15 de 25, on aurait un résultat trop fort de 8 unités, car ce qu'il faut retrancher de 25 ce n'est pas 15, mais $15 - 8$; donc, à la différence $25 - 15$ il faudra ajouter 8.

Le résultat sera donc : $25 - 15 + 8$.

On remarquera encore que 15 qui avait le signe + a été écrit à la suite de 25 avec le signe — et, au contraire, 8 qui avait le signe — a été écrit avec le signe +.

Donc :

Règle. Pour soustraire une quantité d'une autre, on l'écrit à la suite de la première en changeant son signe.

Exemple : $25 - (34 - 5) = 25 - 34 + 5 = 25 + 5 - 34 = 30 - 34 = -4$.

Remarque. La quantité $(34 - 5)$ indique qu'il faut soustraire $34 - 5$ de 25.

Si on avait écrit $25 - 34 - 5$, cela n'a plus la même signification, car cela indique qu'il faut soustraire 34 de 25 et puis soustraire 5 du résultat trouvé.

On aurait d'ailleurs :

$$25 - 34 - 5 = -9 - 5 = -14$$

On voit bien que c'est différent du résultat trouvé plus haut.

Multiplication.

Nous énoncerons simplement la règle sans la démontrer.

Pour multiplier deux facteurs, on fait la multiplication arithmétique et on donne au résultat le signe + ou le signe —, suivant que les facteurs ont le même signe ou des signes différents.

Exemple : $3 \times 4 = 12$.

Au contraire, $(-3) \times 4 = -12$

On donne le signe — car le 1er facteur -3 a le signe — et le 2e facteur 4 a le signe +.

$(-3) \times (-4) = +12$; le produit a le signe +, car les facteurs ont tous les deux le signe —.

Division.

La règle de la division est analogue à celle de la multiplication.

Le quotient s'obtient comme en arithmétique, mais il a le signe + ou — suivant que le dividende et le diviseur ont le même signe ou des signes différents.

Exemples: $\frac{24}{6} = 4$

$$\frac{-24}{6} = -4.$$

Ici le dividende a le signe — et le diviseur le signe +; le quotient a donc le signe —.

$$\frac{-24}{-6} = +4$$

Le dividende et le diviseur ont tous les deux le signe —; donc le quotient a le signe +.

$$\frac{24}{-6} = -4$$

Le dividende a le signe + et le diviseur le signe —; donc le quotient aura le signe —.

Expressions algébriques.

On appelle expression algébrique un ensemble de quantités sur lesquelles il faut effectuer des opérations.

Monôme. La plus simple expression est le monôme.

Les opérations à effectuer ne sont que des multiplications ou des divisions.

$$ab^2, \quad 5a^3c, \quad \frac{8a^2b}{c}, \text{ sont des monômes.}$$

Les lettres a, b, c, sont appelées les facteurs des monômes ; les chiffres 5 et 8 sont les coefficients.

Le 1er monôme est considéré comme ayant 1 comme coefficient ; on ne l'écrit pas.

$a^2 b$ veut dire qu'il faut multiplier le carré de a par b.

$5a^3c$ veut dire qu'il faut multiplier 5 par le cube de a et multiplier le résultat par c.

De même, $\frac{8a^2b}{c}$ indique qu'il faut multiplier 8 par le carré de a, multiplier le résultat par b et diviser ce dernier résultat par c.

Valeur numérique.

On appelle valeur numérique d'une expression, la valeur de cette expression quand on remplace les lettres par des nombres.

Exemple : Valeur numérique de a^2b pour $a = 2$ et $b = 3$.
La valeur sera : $2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$

Valeur numérique de $5a^3c$ pour $a = 2$, $c = -3$.
La valeur sera : $5 \times 2^3 \times (-3) = 5 \times 8 \times (-3) = 40 \times (-3) = -120$.

Degré d'un monôme.

On entend par degré d'un monôme la somme des exposants des facteurs.

Lorsqu'une lettre n'a pas d'exposant, on considère qu'elle a l'exposant 1.

Exemple. a^2b est au 3e degré, car b ayant l'exposant 1, la somme des exposants est $2 + 1 = 3$.

$5a^3c$ est du 4e degré, car $3 + 1 = 4$.

Remarque. On peut considérer le degré par rapport à une seule lettre, alors le degré est l'exposant de la lettre.

Exemple. a^2b est du 2e degré par rapport à a et du 1er par rapport à b.

Multiplication de deux monômes.

Soit à multiplier : $2a^2b \times 3b^2c$.

D'après l'arithmétique, on sait qu'un produit ne change pas quand on change l'ordre des facteurs.

Ainsi, $2 \times 2 \times 4 \times 5 = 5 \times 4 \times 2 \times 2$.

On pourra écrire :

$$2a^2b \times 3b^2c = 2 \times 3 \times a^2bb^2c = 6a^2b^3c$$

car $bb^2 = b^3$, puisqu'il faut multiplier b 3 fois par lui-même.

De même :

$$5a^3b^2 \times (-4)a^2b^3c = 5 \times (-4)a^3a^2b^2b^3c$$

Or :

$a^3a^2 = a^{3+2} = a^5$, car a est pris 5 fois comme facteur, et :

$b^2b^3 = b^{2+3} = b^5$, car b est pris 5 fois comme facteur également.

On a donc : $5a^3b^2 \times (-4)a^2b^3c = 20a^5b^5c$

__Règle.__ Pour multiplier deux monômes, on multiplie les coefficients entre eux et on ajoute les exposants pour les facteurs.

__Remarque.__ Il est évident que le facteur c étant seulement dans le 2e monôme ne change pas.

Division.

Nous envisagerons d'abord le cas d'un seul facteur.

Soit $a^5 : a^2$; cela revient à faire la division :

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a}$$

On voit que l'on peut simplifier la fraction, car a est 2 fois facteur aux deux termes ; en le supprimant, il reste :

$$\frac{a \times a \times a}{1 \times 1} = \frac{a^3}{1} = a^3$$

car $a^3 : 1$ donne a^3 ; d'où :

__Règle.__ Pour diviser deux puissances, on soustrait les exposants.

On aurait de même :

$$a^7 : a^4 = a^{7-4} = a^3$$

Cas général.

$$6a^3b^2 : 2ab^2 = \frac{6a^3b^2}{2ab^2} = \frac{6}{2} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^2}{b^2} = 3a^{3-1}b^{2-2} = 3a^2$$

On aurait de même :

$$24a^4b^5c : (-4)a^3b^2 = \frac{24a^4b^5c}{-4a^3b^2} = \frac{24}{-4} \cdot \frac{a^4}{a^3} \cdot \frac{b^5}{b^2} \times c = -6ab^3c$$

Règle. Pour diviser deux monômes, on divise les coefficients et on soustrait les exposants des mêmes lettres.

Polynômes.

Un polynôme est la réunion de plusieurs monômes, reliés par le signe + ou −.

Exemple : $5a^3b - 4a^3 + 5b^3c^2 - \frac{8a^4b^3}{d}$

Lorsque dans un polynôme on n'a pas de signe de fraction, on a un polynôme entier ; sinon, on a un polynome fractionnaire.

$8a^3b - 4c^2 + 5a^2b^2c^2$ est un polynome entier.

Le précédent est un polynome fractionnaire.

Degré. On considère le degré de deux façons :

1° Par rapport à toutes les lettres ; c'est le degré du terme du monôme qui a le degré le plus élevé.

Exemple : Soit $5a^6b^4 + 12ab^2 - 2a^7bc^3$

Ce polynôme est du 11° degré, car le dernier monôme est du 11° degré et c'est lui qui a le plus fort degré.

2° Le degré par rapport à une lettre. C'est l'exposant le plus élevé de la lettre.

Le polynôme précédent est du 7^e^ degré par rapport à a et du 4^e^ par rapport à b.

Valeur numérique.

La valeur numérique d'un polynôme est la valeur de ce polynôme quand on remplace les lettres par des nombres.

Exemples. I. Valeur numérique du polynôme :

$$5a^3bc - 8a^2b^2 + 4ab^2c.$$

pour $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$.
La valeur numérique est :

$$5 \times 1^3 \times (-1) \times 2 - 8 \times 1^2 \times (-1)^2 + 4 \times 1 \times (-1)^2 \times 2$$

C'est-à-dire, en remarquant que $1^3 = 1$ et $1^2 = 1$ et que $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = +1$

$$5 \times (-1) \times 2 - 8 + 4 \times 2 = -10 - 8 + 8 = -10$$

2° Calculer les valeurs que prennent les formules suivantes :

1° $e = vt$

2° $e = \frac{1}{2} jt$

3° $e = a + vt + \frac{1}{2} jt^2$

pour $a = 15$, $v = 3$, $t = 6$ et $j = 5$.
En remplaçant les lettres par leurs valeurs, il vient :

1° $e = vt = 3 \times 6 = \underline{18}$

2° $e = \frac{1}{2} jt^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 36 = \underline{90}$

3° $e = a + vt + \frac{1}{2} jt^2 = 15 + 3 \times 6 + \frac{1}{2} \times 5 \times 36$

$= 15 + 18 + 90 = \underline{123}$

3° – Calculer la valeur x que prend la formule :

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pour $a = 5$, $b = 12$; $c = 4$.
Remplaçant, il vient :

$$x = \frac{-12 + \sqrt{144 - 4 \times 5 \times 4}}{2 \times 5} = \frac{-12 + \sqrt{144 - 80}}{10}$$

$$= \frac{-12 + \sqrt{64}}{10} = \frac{-12 + 8}{10} = \frac{-4}{10} = -\underline{0,4}$$

Termes semblables. On appelle termes semblables deux termes qui ne diffèrent que par le coefficient.

Ainsi :

$$8a^3b^2c, \quad 5a^3b^2c, \quad 4a^3b^2c, \quad a^3b^2c,$$

sont des termes semblables.

a^3b^2c et a^3bc ne sont pas semblables, car dans le premier il n'y a que le facteur b^2 et dans le deuxième il y a le facteur b.

Réduction des termes semblables. Lorsque plusieurs termes semblables sont réunis par le signe + ou –, on les réunit en un seul ; celà s'appelle réduire les termes semblables.

Exemple : Soit à réduire

$$5a^2bc - 8a^2bc + 12a^2bc + a^2bc$$

Si l'on considère a^2bc comme un seul nombre, on aura à faire l'opération :

5 nombres – 8 nombres + 12 nombres + 1 nombre.

C'est-à-dire :

18 nombres – 8 nombres

On aura donc finalement 10 nombres, c'est-à-dire $10a^2bc$.
Pour faire la réduction, on s'occupe donc seulement des coeffi-

cients, on ne s'occupe pas des facteurs et des exposants.

Soit encore :

$$-8a^2b^2 + 4a^2b^2 - 12a^2b^2 - 6a^2b^2$$

En ne prenant que les coefficients, on aura :

$$-8 + 4 - 12 - 6 = -4 - 12 - 6 = -22$$

Il reste donc : $-22a^2b^2$

Règle. Pour réduire les termes semblables, on additionne les coefficients, sans toucher aux facteurs et aux exposants.

Opérations sur les Polynômes.

Addition. On opère comme en arithmétique.

Pour additionner deux polynômes, on écrit le 2e à la suite du 1er et on réduit les termes semblables s'il y en a.

Soit à additionner les polynômes :

$$2a^2b^2 - 5a^3bc + 8a^2c^3 \quad \text{et} \quad -4a^2b^2 - 5a^2c^3 + 6a^3bc + d^2$$

On écrira : $\underline{2a^2b^2} \underline{\underline{-5a^3bc}} + \underline{\underline{8a^2c^3}} - \underline{4a^2b^2} - \underline{\underline{5a^2c^3}} + \underline{\underline{6a^3bc}} + d^2$

ou, en réduisant les termes semblables qui sont soulignés, il vient :

$$-2a^2b^2 + a^3bc + 3a^2c^3 + d^2$$

Pratiquement, on les écrit l'un en dessous de l'autre, de manière que les termes semblables se trouvent dans une même colonne verticale.

Exemple 1. Soit à additionner les polynômes :

$$-7a^5b^3 + 8a^4b^2 + 5a^3b^4 \quad \text{et} \quad 15a^5b^3 - 12a^4b^2 + 6a^3b^4 - 8a$$

L'opération se pose comme suit :

$$\begin{array}{r} -7a^5b^3+8a^4b^2+5a^3b^4 \\ 15a^5b^3-12a^4b^2+6a^3b^4-8a \\ \hline 8a^5b^3-4a^4b^2+11a^3b^4-8a \end{array}$$

Exemple 2. Additionner les polynômes suivants et opérer les réductions :

$$x^3+2x^2y-4xy^2+5y^3,$$

$$7x^3-12x^2y+15xy^2-13y^3, \quad -4x^3+5x^2y-7xy^2+9y^3,$$

$$\text{et } -2x^3+11x^2y-12xy^2+3y^3$$

On a :

$$\begin{array}{r} x^3+2x^2y-4xy^2+5y^3 \\ 7x^3-12x^2y+15xy^2-13y^3 \\ -4x^3+5x^2y-7xy^2+9y^3 \\ -2x^3+11x^2y-12xy^2+3y^3 \\ \hline 2x^3+6x^2y-8xy^2+4y^3 \end{array}$$

Soustraction.

D'après la règle de la soustraction que nous avons vue au début, pour soustraire deux polynômes, on écrit le deuxième à la suite du premier, en le changeant de signe et on réduit les termes semblables.

Exemple. Soit le polynôme :

$$5a^3b^2-8a^3bc^2+4a^2d^2-5c^2$$

et le polynôme à soustraire :

$$4a^3b-5a^3b^2+6a^3bc^2+2a^2d^2+15c^2$$

On écrira :

$$\underline{5a^3b^2}-\underline{\underline{8a^3bc^2}}+\underline{\underline{4a^2d^2}}-\underline{\underline{5c^2}}-4a^3b+\underline{5a^3b^2}-\underline{\underline{6a^3bc^2}}-\underline{\underline{2a^2d^2}}-\underline{\underline{15c^2}}$$

et, en réduisant les termes semblables soulignés, il vient :

$$10a^3b^2-14a^3bc^2+2a^2d^2-20c^2-4a^3b$$

Pratiquement, on opère comme suit :

$$\begin{array}{r} 5a^3b^2 - 8a^3bc^2 + 4a^2d^2 - 5c^2 \\ -4a^3b + 5a^3b^2 - 6a^3bc^2 - 2a^2d^2 - 15c^2 \\ \hline -4a^3b + 10a^3b^2 - 14a^3bc^2 + 2a^2d^2 - 20c^2 \end{array}$$

Autre exemple. On donne les polynômes suivants :

$$P = 4a^3 - 5a^2b + 7b^2$$

$$P_1 = 2a^3 - 11a^2b - 8b^2 \quad , \quad P_2 = 4a^3 + 5a^2b - 8b^2$$

Calculer : 1° $P - P_1$, 2° $P + P_1 - P_2$.

On opère comme suit :

1°
$$\begin{array}{r} P = 4a^3 - 5a^2b + 7b^2 \\ -P_1 = -2a^3 + 11a^2b + 8b^2 \\ \hline P - P_1 = 2a^3 + 6a^2b + 15b^2 \end{array}$$

2°
$$\begin{array}{r} P = 4a^3 - 5a^2b + 7b^2 \\ P_1 = 2a^3 - 11a^2b - 8b^2 \\ -P_2 = -4a^3 - 5a^2b + 8b^2 \\ \hline P + P_1 - P_2 = 2a^3 - 21a^2b + 7b^2 \end{array}$$

Multiplication.

1er cas. Multiplier un polynôme par un monôme.
Soit :

$$(5a^2b - 8bc + 4c^2)\, 2ab$$

La parenthèse indique qu'il faut multiplier toute la quantité $5a^2b - 8bc + 4c^2$ par $2ab$.

Si l'on avait écrit :

$$5a^2b - 8bc + 4c^2 \times 2ab$$

cela indiquerait que seule la quantité $4c^2$ doit être multipliée par $2ab$.

Faire la multiplication indiquée revient à multiplier une somme par $2ab$; on multipliera chaque partie de la somme par $2ab$; donc on écrira :

$$(5a^2b - 8bc + 4c^2)2ab = 5a^2b \times 2ab - 8bc \times 2ab + 4c^2 \times 2ab$$

$$= 10a^3b^2 - 16ab^2c + 8abc^2$$

Règle. Pour multiplier un polynôme par un monôme, on multiplie chaque terme du polynôme par le monôme et on ajoute les résultats.

2e Cas. Multiplier un polynôme par un polynôme.

Soit :

$$(5a^2b - 4bc + 3b^2)(3a^2 - 4bc + 3ab^2)$$

Les parenthèses indiquent qu'il faut multiplier toute la quantité $5a^2b - 4bc + 3b^2$ par $3a^2 - 4bc + 3ab^2$.

Si l'on avait écrit :

$$5a^2b - 4bc + 3b^2 \times 3a^2 - 4bc + 3ab^2$$

il n'y a alors que $3b^2$ qui est multiplié par $3a^2$.

L'opération indique qu'il faut multiplier une somme par une autre ; on multiplie la première par chaque terme de la 2e. en suivant la règle du 2e cas et on ajoute les résultats.

Pour ne pas disperser les calculs sur plusieurs lignes, on adopte la disposition suivante :

On écrit le multiplicateur sous le multiplicande et on multiplie le multiplicande successivement par chaque terme du multiplicateur.

Si en multipliant on trouve des termes semblables, on les écrit les uns sous les autres.

$$\begin{array}{l} 5a^2b - 4bc + 3b^2 \\ 3a^2 - 4bc + 3ab^2 \\ \hline 15a^4b - 12a^2bc + 9a^2b^2 \\ \qquad\qquad - 20a^2b^2c + 16b^2c^2 - 12b^3c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 15a^3b^3 - 12ab^3c + 9ab^4 \\ \hline 15a^4b - 12a^2bc + 9a^2b^2 - 20a^2b^2c + 16b^2c^2 - 12b^3c + 15a^3b^3 - 12ab^3c + 9ab^4 \end{array}$$

Remarque. Généralement, les polynômes ont des termes semblables et souvent ils ne renferment qu'une lettre ; les calculs se simplifient alors, surtout si l'on a soin d'ordonner les polynômes.

Ordonner un polynôme, c'est placer ses termes de façon que leurs degrés croissent ou décroissent toujours dans le même sens.

Exemple :

$$5a^3+8a^2-5$$

est un polynôme ordonné par rapport aux puissances décroissantes de a.

$$5a^4+8a-5a^2+1$$

n'est pas ordonné, car le degré va d'abord en diminuant, puis augmente.

$$2+3a-5a^2+8a^4$$

est ordonné par rapport aux puissances croissantes.

Exemple de multiplication de polynômes ordonnés.

Soit à faire le produit :

$$(5a^2+8a-1)(2a^3-5a+2)$$

$$\begin{array}{l}
5a^2+8a-1 \\
2a^3-5a^2+2 \\
\hline
10a^5+16a^4-2a^3 \\
\qquad -25a^4-40a^3+5a^2 \\
\qquad\qquad\qquad +10a^2-16a-1 \\
\hline
10a^5-9a^4-42a^3+15a^2+16a-1
\end{array}$$

Produits remarquables.

Il y a quelques produits que l'on rencontre souvent dans les expressions algébriques et qu'il est indispensable de savoir par cœur.

1° $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

donc :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$
\begin{array}{l}
a+b \\
a+b \\
\hline
a^2+ab \\
\quad ba+b^2 \\
\hline
a^2+2ab+b^2
\end{array}
$$

C'est-à-dire que le carré d'une somme est égal au carré du 1er terme, plus le double produit du 1er terme par le 2e, plus le carré du 2e terme.

2° $(a-b)^2=(a-b)(a-b)$

donc : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$
\begin{array}{l}
a-b \\
a-b \\
\hline
a^2-ab \\
\quad -ba+b^2 \\
\hline
a^2-2ab+b^2
\end{array}
$$

C'est-à-dire que le carré d'une différence est égal au carré du 1er terme, moins 2 fois le double produit du 1er terme par le 2e, plus le carré du 2e terme.

3° $(a+b)(a-b)$

donc : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$
\begin{array}{l}
a+b \\
a-b \\
\hline
a^2+ab \\
\quad -ba-b^2 \\
\hline
a^2-b^2
\end{array}
$$

C'est-à-dire que le produit d'une somme par une différence est égal au carré du 1er terme, moins le carré du 2e.

Division.

Nous n'étudierons que la division d'un polynôme par un monôme.
Soit à diviser :

$$8a^3b^2c-4a^2b^3c^4+12ab^4 \text{ par } 2ab^2.$$

Il faut diviser une somme par $2ab^2$; on divisera donc chaque partie de la somme par $2ab^2$.

On écrira donc :

$$\frac{8a^3b^2c - 4a^2b^3c^4 + 12ab^4}{2ab^2} = \frac{8a^3b^2c}{2ab^2} - \frac{4a^2b^3c^4}{2ab^2} + \frac{12ab^4}{2ab^2}$$

en faisant chaque division d'après la règle de division des monômes, on aura au quotient $4a^2c - 2abc^4 + 6b^2$.

Mise en facteur commun.

Dans un polynôme, il peut arriver qu'un ou plusieurs facteurs se reproduisent dans tous les termes.

Chercher la quantité qui est multipliée par ce ou ces facteurs, s'appelle mettre ce ou ces facteurs en facteur commun.

Soit le polynôme :

$$4a^2b^2 - 8a^2b^3c + 4a^2c^2$$

On voit que a^2 est facteur dans tous les termes, le coefficient 4 aussi b^2 n'est pas facteur commun à tous les termes, car il manque au dernier, de même c manque au 1er terme.

La quantité qui est en facteur commun est donc $4a^2$.

Dans le 1er terme, $4a^2$ est multiplié par b^2.

Dans le 2e terme, pour trouver par quoi est multiplié $4a^2$, il suffit évidemment de diviser $-8a^2b^3c$ par $4a^2$; on aura $(-2b^3c$ au quotient, et on aura bien :

$$-8a^2b^3c = 4a^2 \times (-2b^3c)$$

puisque dans la division le dividende est égal au diviseur multiplié par le quotient.

De même, en divisant $4a^2c^2$ par $4a^2$, on trouve c^2 au quotient ; donc dans le terme $4a^2c^2$, $4a^2$ est multiplié par c^2 ; ce résultat était d'ailleurs évident.

On pourra donc écrire :

$$4a^2b^2 - 3a^2b^3c + 4a^2c^2 = 4a^2(b^2 - 2b^3c + c^2)$$

car si l'on effectue la multiplication, on retrouvera évidemment la 1e quantité.

Règle. Pour mettre une quantité en facteur commun, on divise chaque terme du polynôme par la quantité que l'on veut mettre en facteur.

Opérations fractionnaires

Les opérations sur les fractions se faisant absolument comme pour les opérations arithmétiques, nous ne ferons que rappeler les règles.

Addition.

Pour additionner des fractions, on les réduit au même dénominateur et on additionne les numérateurs.

Exemple.

$$\frac{x}{a+b}+\frac{x}{a-b}=\frac{x(a-b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{x(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{x(a-b)+x(a+b)}{(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{ax-bx+ax+bx}{(a+b)(a-b)}=\frac{2ax}{(a+b)(a-b)}=\frac{2ax}{a^2-b^2}$$

Soustraction.

On réduit les fractions au même dénominateur et on soustrait les numérateurs.

Soit : $$\frac{x}{a+b}-\frac{x}{a-b}=\frac{x(a-b)}{(a+b)(a-b)}-\frac{x(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{x(a-b)-x(a+b)}{(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{ax-bx-ax-bx}{(a+b)(a-b)}=\frac{-2bx}{(a+b)(a-b)}=\frac{-2bx}{a^2-b^2}$$

Multiplication.

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux également.

Soit :

$$\frac{a}{bx} \times \frac{cx}{d} = \frac{a \times cx}{bx \times d} = \frac{acx}{bxd}$$

En supprimant le facteur commun x, on a :

$$\frac{ac}{bd}$$

Division.

On multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

Soit :

$$\frac{6x^2y^2}{7} : \frac{24x^2}{49y^2} = \frac{6x^2y^2 \times 49y^2}{7 \times 24x^2}$$

Ou, en simplifiant : $\frac{7y^4}{4}$

— Equations au 1er degré.

On appelle égalité l'ensemble de deux expressions algébriques séparées par le signe $=$.

Ainsi :

$$8a^2 - 4bc = 5d^2$$

est une égalité.

L'expression qui est à gauche du signe $=$ est le 1er membre de l'égalité ; à droite, c'est le 2e membre de l'égalité.

Ajouter des égalités membre à membre, celà veut dire qu'on ajoute les premiers membres ensemble et les deuxièmes membres ensemble.

Il y a deux sortes d'égalités :

1° — Les égalités qui sont vérifiées par toutes les valeurs des lettres qu'elles renferment.

Exemple : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Cette égalité est toujours vérifiée quels que soient a et b, c'est-à-dire que si l'on remplace a et b par n'importe quel nombre, le 1er membre est toujours égal au 2e.

Faisons par exemple :

$$a = 2 \quad , \quad b = 3$$

Le 1er membre devient :

$$(2+3)^2 = 5^2 = 25$$

Le 2e devient :

$$2^2 + 2 \times 2 \times 3 + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$$

On a bien :

$$25 = 25$$

2o. Il y a des égalités qui ne sont vérifiées que pour certaines valeurs des lettres.

Par exemple, soit l'égalité :

$$5a + 8 = 3a + 18$$

Si on fait $a = 3$, le 1er membre devient 23, le 2e devient 27 ; on voit que l'égalité n'est pas vérifiée ; il en est de même si on fait : $a = 4$.

Si on fait $a = 5$, l'égalité est vérifiée, car on trouve 33 dans les deux membres, mais si on fait $a = 6$, l'égalité n'est plus vérifiée.

Il n'y a donc qu'une valeur de a qui vérifie l'égalité.

Les égalités qui ne sont pas toujours vérifiées sont appelées équations.

La lettre pour laquelle l'égalité n'est pas toujours vérifiée, est l'inconnue ; ainsi dans l'équation :

$$5a + 8 = 3a + 18$$

a est l'inconnue.

La valeur de l'inconnue qui vérifie l'équation s'appelle racine de l'équation ; chercher cette racine, c'est résoudre l'équation. Ordinairement, l'inconnue se représente par la lettre x.

Degré.

Le degré d'une équation est l'exposant le plus élevé de l'inconnue dans l'équation.

$$5x + 1 = 3x - 5$$

est une équation du 1er degré.

$$5x^2 - 8x = 5 + 4x^2$$

est une équation du 2e degré.

Résolution de l'équation du 1er degré.

Soit une équation du 1er degré :

$$5x + 3 = 8x - 15$$

Si on ajoute 15 aux deux membres, il y aura évidemment encore égalité ; on peut donc écrire :

$$5x + 3 + 15 = 8x - 15 + 15 = 8x$$

On remarque alors que 15 qui était dans le 2e membre, n'y est plus, mais qu'il est dans le 1er avec le signe +, alors qu'il avait le signe − dans le 2e ; on peut donc dire que lorsqu'un terme change de membre, il change de signe.

2e Principe. Remarquons d'abord que :

$$\frac{2}{3} \times 3 = \frac{2 \times 3}{3} = 2$$

c'est-à-dire qu'une fraction multipliée par son dénominateur donne le numérateur comme produit.

Cette remarque permet de rendre entière une équation lorsqu'il y a des dénominateurs, ou, comme l'on dit, de chasser les dénominateurs.

Soit :

$$\frac{5x - 1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{x + 2}{3}$$

Multiplions tout par le produit des dénominateurs $2 \times 5 \times 3$.

On multipliera d'abord la 1ère fraction $\frac{5x-1}{2}$ par 2 ; le produit est $5x - 1$; il suffit ensuite de multiplier par 5×3.

On aura donc :

$$(5x-1)2\times3+2\times2\times3=2\times5(x+2) \quad \text{ou} \quad 30x-6+12=10x+20$$

Donc : **Règle.** Pour rendre une équation entière, on multiplie tout par le produit des dénominateurs.

Ces deux principes étant établis, on peut facilement résoudre une équation du 1er degré.

Pour résoudre une équation du 1er degré, on la rend entière et ensuite on fait passer tous les termes connus dans un membre et tous les termes inconnus dans l'autre.

Cela étant fait, on a immédiatement l'inconnue, par une division.

Remarque. Pratiquement, on multiplie par le plus petit commun multiple des dénominateurs.

Exemple : $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=4x-38$

Multiplions tout par le produit $2\times3=6$

On aura :

$$3x+2x=24x-228$$

ou, en faisant passer tous les x dans le 1er membre :

$$3x+2x-24x=-228$$

C'est-à-dire : $-19x=-228$

Donc : $x=\frac{-228}{-19}=12$

2e Exemple : $\frac{5x}{8}+5=\frac{3x}{4}-20$

Multiplions tout par 8, p. p. c. m. des dénominateurs ;

On aura : $5x+40=6x-160$

Faisons passer $6x$ dans le 1er membre et 40 dans le 2e :

$$5x-6x=-160-40$$

$$-x=-200$$

d'où : $x=200$

Table des Matières

ENSEIGNEMENT PAR CORRESPONDANCE

ECOLE DU GÉNIE CIVIL

DIRECTEUR : J. GALOPIN, ✠, INGÉNIEUR

152, Avenue de Wagram, PARIS-XVII° (14° Année) — Téléphone Wagram 27-97.

Service Annexe de Renseignements et de Librairie : 24, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

Section Navale (Renseignements et Inscription) : 36, RUE VICTOR-HUGO, LE HAVRE

COURS ENSEIGNÉS :

Mathématiques, Mécanique, Machines à Vapeur Moteurs, Dessin, Electricité, Automobile Aviation, T. S. F., Langues, Droit, etc.

500 *ouvrages rédigés par de nombreux professeurs spécialistes*

Le nombre des élèves inscrits à l'Ecole a dépassé 20.000 en 1920

Nombreux résultats aux Examens

PLACEMENT GRATUIT

Par la SOCIÉTÉ des ANCIENS ÉLÈVES

(plus de 3.000 situations procurées)

REVUE TECHNIQUE MENSUELLE
LA REVUE POLYTECHNIQUE
Tirage 12.000 — Spécimen contre 1 fr.

COURS SUR PLACE
Jour et Soir

LEÇONS PARTICULIÈRES

COURS de Vacances

1908 32 élèves
1910 87 élèves
1911 185 élèves
1912 313 élèves
1913 1.189 élèves
1914 2.157 élèves
1915 3.213 élèves
1916 3.948 élèves
1917 5.633 élèves
1918 8.623 élèves
1919 11.313 élèves
1920 23.611 élèves

T.S.F.

8° GÉNIE
Marine
Industrie
P. T. T.

Tous les Concours du Pont, de la Machine et des Bureaux de la Marine de Guerre

MARINE

Capitaines au Long Cours
Officiers Mécaniciens T. S. F.
et Commissaires de la Marine Marchande

ARMÉE

Cours d'Aspirants, Saint-Cyr, etc.

ADMINISTRATIONS

Arsenaux, Mines, Ponts et Chaussées, Postes et Télégraphes, Poudres et Salpêtres, Chemins de Fer, Manufactures de l'Etat, Douanes, etc.

ÉCOLES SPÉCIALES

Ecole Centrale, Supérieure d'Electricité, d'Aéronautique, des Ponts, des Postes, Navale, Génie Maritime, Physique, Chimie, Polytechnique, Baccalauréats, Licences

INDUSTRIE

L'Ecole délivre des diplômes pour les branches de l'Industrie et à tous les grades : Ingénieurs, Sous-Ingénieurs, Chefs d'Atelier, Conducteurs, Dessinateurs Contremaîtres, Monteurs, Surveillants.

Section sur place de T. S. F., de calqueurs et dessinateurs industriels

RENSEIGNEMENTS ET PROGRAMMES GRATIS

Bureau d'Etudes techniques pour toutes les branches de l'Industrie

L'Enseignement par Correspondance *permet à chacun de travailler* **seul les matières qu'il veut, quand il le peut et comme il le désire.** *Il est le moyen le plus certain d'améliorer votre situation aujourd'hui ou demain.*

IMP. BIRTÈGUE & GARDERAULT, ISSOUDUN.