COURS

DE

GÉOMÉTRIE

ÉLÉMENTAIRE.

On trouve chez les mêmes Libraires, les Ouvrages suivans de M. Bourdon.

Élémens d'Arithmétique, 9ᵉ édition, 1832.	5 fr.
Élémens d'Algèbre, 6ᵉ édition, 1831,	8 fr.
Application de l'Algèbre à la Géométrie, 3ᵉ édit., 1831,	7 fr. 50 c.

COURS
DE
GÉOMÉTRIE
ÉLÉMENTAIRE

ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ;

SECONDE ÉDITION,
ENTIÈREMENT REFONDUE ;

PAR A.-J.-H. VINCENT,
Professeur de Mathématiques au Collége Royal de Saint-Louis ; ancien Élève de l'École Normale ; Membre correspondant des Sociétés académiques de Lille, Douay, Metz, Châlons-sur-Marne ; etc.

PARIS,
BACHELIER, PÈRE ET FILS,
LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1832

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature du Libraire et celle de l'Auteur, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricateurs de ces Exemplaires.

Bachelier

PRÉFACE

DE LA SECONDE ÉDITION.

Il y a environ cinq ans que j'ai publié la première édition de ce *Cours de Géométrie élémentaire*. Plusieurs professeurs s'étant empressés d'en faire le texte de leurs leçons, ont bien voulu me communiquer les résultats de leur expérience et de leurs observations sur le plan que j'avais adopté. En outre, il a été examiné avec un soin consciencieux dans plusieurs journaux scientifiques, et particulièrement dans le *Lycée*, par M. Cournot, jeune géomètre déjà connu avantageusement. Enfin, il a fait l'objet d'un rapport très étendu adressé par M. Ampère au Conseil royal de l'instruction publique, et à la suite duquel ces Élémens furent adoptés pour l'enseignement de la Géométrie dans les Colléges de l'Université. Toutes ces raisons, et d'autres encore, m'ayant imposé l'obligation de revoir mon ouvrage avec une attention scrupuleuse, et de le soumettre moi-même à une critique sévère, je me suis en définitive déterminé à en refondre toutes les parties, pour le reproduire presque en entier dans une rédaction nouvelle. Je vais rendre compte, le plus brièvement qu'il me sera possible, des divers changemens qui en sont résultés, soit dans l'ordre des matières, soit dans la manière dont elles sont présentées.

Le plus important de ces changemens est sans doute celui qui a pour but d'amener plus tôt la résolution des *Problèmes*. Dans la première édition, je les avais rejetés en entier à la fin de l'ouvrage, où ils formaient à part un Livre qui ne se rattachait à rien : de là un inconvénient grave, celui d'imposer aux Professeurs la tâche quelquefois difficile, d'aller rechercher ces questions à la fin du volume, et de les reporter une à une aux diverses théories dont elles dérivent, afin de ne pas attendre, pour exercer leurs élèves à la résolution des problèmes, que le Cours de Géométrie fût entièrement parcouru. Dans cette seconde édition, non content de rapprocher de la Géométrie plane les problèmes qui s'y rapportent, ce qui eût été insuffisant, j'en ai fait un classement dont j'ai réuni le tableau avec celui même des chapitres, et au moyen duquel on pourra reconnaître sur-le-champ les problèmes dont chaque théorie aura naturellement préparé la résolution. J'ai d'ailleurs évité par ce moyen, un autre écueil non moins à craindre, et que j'étais menacé de rencontrer en disséminant ces questions parmi les théorèmes : car alors se seraient trouvés rompus à la fois, d'une part le lien qui unit entre elles les propositions proprement dites, et d'autre part le lien non moins intime qui forme comme un seul faisceau des principales applications qu'on en peut faire. Un pareil défaut paraîtrait bien moins tolérable encore dans cette nouvelle édition, par suite de l'addition que j'y ai faite d'une collection de problèmes sur les contacts, que j'ai cherché à rendre aussi complète qu'élémentaire. On sait en effet, qu'une partie des questions qui se rapportent à cette théorie, dépendent des principes de la *similitude*, tandis que les autres se résolvent uniquement par les propriétés bien plus simples de l'*égalité* des figures; et par suite, si je n'avais réuni dans un même paragraphe tous les problèmes de ce genre, il en serait nécessairement résulté que des questions ayant entre elles la plus grande analogie, auraient été séparées les unes des autres par un intervalle de plusieurs chapitres.

Au changement dont je viens de parler s'en trouve lié un autre non moins important. La construction de la plupart des problèmes exigeant l'emploi du *compas* en même temps que celui de la *règle*, le classement des problèmes suivant l'ordre des théories eût été impossible à exécuter, si je n'avais traité des propriétés du *cercle* en même temps que de celles des figures *rectilignes*. Aussi, chaque chapitre de la Géométrie plane se termine-t-il par un paragraphe exclusivement consacré aux propriétés du cercle, relatives à la théorie exposée dans ce chapitre. La division en figures rectilignes et figures curvilignes n'est donc plus la division principale de l'ouvrage; et l'on s'accordera sans doute à reconnaître que les propriétés relatives à la *figure* et les propriétés relatives à l'*étendue*, tant pour la Géométrie *plane* que pour la Géométrie *dans l'espace*, en présentant une division plus nette et plus tranchée, conduisent par là même à une classification bien plus philosophique. Au surplus, les Professeurs que la séparation complète des propriétés du cercle avait particulièrement séduits, et qui continueraient à donner la préférence à ce système, n'éprouveront pas une grande peine à recomposer de toutes pièces la théorie du cercle, puisque, comme je l'ai déjà dit, cette théorie n'est autre chose que la réunion des derniers paragraphes des divers chapitres de la Géométrie plane.

Passons à d'autres améliorations plus ou moins importantes; et dans l'impossibilité de les exposer toutes sans entrer dans de grands développemens, bornons-nous à indiquer les principales.

La méthode désignée par les anciens géomètres sous le nom de méthode d'*exhaustion*, et dont l'usage est presque généralement répandu, est celle qu'à l'exemple de la plupart des auteurs, j'avais employée pour les démonstrations relatives aux *incommensurables*; mais convaincu maintenant, par les critiques fondées auxquelles cette application a donné lieu, comme par ma propre expérience, que ce mode d'argumentation, lorsqu'il a pour objet de démontrer l'égalité des rapports incommensurables, est alors un véritable paralogisme, puisqu'on y raisonne sur des quantités incommensurables entre elles [sans avoir pu établir ce que c'est qu'un rapport incommensurable] absolument comme on raisonne sur les quantités commensurables, convaincu, dis-je, de l'abus de ce genre de raisonnement, j'y ai substitué une méthode qui m'avait été communiquée depuis plusieurs années, ainsi qu'à diverses autres personnes, par M. Ampère. Cette méthode, uniquement fondée sur la notion la plus simple et la plus naturelle du rapport, a déjà acquis un certain degré de publicité par son introduction dans la nouvelle Géométrie que MM. Reynaud et Nicollet, dont je ne saurais mieux faire que de suivre les traces, ont rédigée pour l'usage des élèves qui se destinent à la marine; et elle finira sans doute par être généralement adoptée.

Quant aux autres circonstances où l'on emploie la méthode d'exhaustion, comme par exemple dans la détermination de l'aire du cercle, et dans d'autres cas semblables, dans celui même où il s'agit de démontrer la constance du rapport de la circonférence au diamètre, j'ai continué à l'employer, en y préparant l'esprit par des considérations de limites. J'en dirai autant de la méthode plus générale de la *réduction à l'absurde*. J'ai cependant apporté une modification assez importante à l'emploi de cette dernière pour la démonstration des réciproques, en réduisant cet emploi à deux principes généraux que j'établis aux *numéros* 49 et 51 de l'introduction, et qui dispensent une fois pour toutes de la répétition fastidieuse du même mode de raisonnement; ces deux principes s'appliquent, tantôt l'un, tantôt l'autre, à la démonstration de presque toutes les réciproques, à moins qu'elles ne soient fausses, ce que j'ai d'ailleurs le soin de faire remarquer quand il y a lieu.

Examinons maintenant quelques changemens de détail. — Je continue à employer, pour la théorie des *Parallèles*, le principe fondamental de Bertrand de Genève. Mais, en la rendant absolument indépendante des propriétés du triangle, et en la considérant comme le complément de celles des angles, j'ai peut-être rendu l'exposition de cette théorie plus simple, du moins aux yeux de ceux qui ne chercheront pas à y voir ce qui ne saurait s'y trouver, une chose qui implique contradiction. Comprennent-ils bien, en effet, ce qu'ils demandent, ceux qui prétendent dégager la théorie des parallèles, tant implicitement qu'explicitement, de toute notion d'infini? Je ne sais si je m'abuse moi-même, mais à mon sens, ils ne ressemblent pas mal à un mécanicien qui s'évertuerait pour asseoir les principes de la théorie du mouvement sur d'autres bases que les notions de la force, du temps, et de l'espace.

J'ai terminé le premier Livre, relatif aux propriétés des figures planes, par un chapitre dans lequel j'ai exposé synthétiquement les propriétés générales des *Courbes* et leurs principales affections. Plusieurs personnes seront sans doute disposées à regarder ce chapitre comme un hors-d'œuvre, abusivement emprunté à l'analyse. Je pense que cette manière de voir est erronnée : la théorie analytique des courbes présuppose évidemment certaines notions intuitives sur leur nature; et c'est à la Géométrie synthétique qu'il appartient de les exposer, pour les rendre susceptibles d'être ensuite fructueusement soumises au scalpel de l'analyse. Avec bien moins de raison encore prétendrait-on que ce sont là des choses qui *n'appartiennent pas aux élémens*, lorsque tous les jours nous voyons les artisans les plus vulgaires, guidés par un instinct quelquefois trompeur, mais plus souvent fidèle, se frayer péniblement une route à travers des obstacles où les géomètres de profession refusent l'utile et honorable mission de les diriger.

Les mêmes observations sont applicables à l'exposition élémentaire des principales propriétés des *Transversales*, que j'ai cru devoir introduire dans le second Livre, à la suite du chapitre des lignes proportionnelles. Ce n'est pas sans raison que l'on m'avait reproché d'avoir passé sous silence dans ma première édition, une théorie si riche en applications, et plus simple que la plupart des autres, en ce sens qu'étant entièrement dégagée de toute considération étrangère à la ligne droite, elle peut être, à juste titre, nommée la *Géométrie de la règle*.

Au surplus, j'ai noté ces théories, comme plusieurs autres, ainsi qu'un grand nombre de propositions que l'on n'exige point des élèves qui se présentent aux examens, d'un *signe* ostensible qui avertira le lecteur pressé d'arriver au but, et manquant du temps ou de la volonté nécessaire pour explorer en détail les avenues nombreuses de la science de l'étendue, qu'il peut passer outre sans se trouver exposé par la suite à revenir sur ses pas. Dans ma première édition, j'avais adopté pour le même usage, l'emploi d'un caractère plus faible qui présentait en outre l'avantage de diminuer le volume; mais j'y ai renoncé sur les observations et les plaintes de plusieurs personnes dont ce caractère fatiguait la vue.

Je reviens au fond du sujet. — La théorie des *Figures Semblables*, que j'ai, je crois, établie sur des principes beaucoup plus simples que ceux qu'on lui donne ordinairement pour *base, avait été* l'objet de quelques critiques auxquelles j'ai essayé de répondre par une note insérée dans le deuxième volume du *Lycée*, page 300. L'expérience m'a convaincu de plus en plus que j'avais envisagé cette théorie sous son vrai point de vue; et s'il m'était resté quelques incertitudes à cet égard, pouvait-il se présenter, pour les dissiper entièrement, une autorité plus imposante que celle du savant rapporteur dont le témoignage favorable a fait adopter mon Ouvrage pour servir de texte à l'enseignement de la Géométrie, lorsqu'il déclare que, d'après son opinion, ma théorie des figures semblables est celle que *l'on doit admettre exclusivement.*

Pour la détermination du *Rapport de la Circonférence au Diamètre*, je continue à employer la considération des polygones isopérimètres, d'où naît sans contredit la plus simple et la plus naturelle des méthodes élémentaires qui puissent conduire au but proposé. Cette méthode est due, comme on le sait, au géomètre allemand Schwab, mort à Nancy il y a quelques années, après avoir publié un petit Traité de Géométrie plane généralement peu connu, quoique rempli de choses neuves, et digne d'être regardé comme un modèle de simplicité et d'élégance. Seulement, au lieu de prendre, dans l'application de cette méthode, l'hexagone régulier pour point de départ, ainsi que je l'avais fait d'abord, j'y substitue le carré ou plutôt le polygone *bilatère*, dont l'emploi donne lieu, comme on le verra, à un très beau théorème qui réduit la détermination du rapport dont il est question, à un calcul aussi digne de remarque sous le point de vue théorique, qu'il est facile à exécuter.

Parvenu à la Géométrie dans l'espace, j'établis, dans les préliminaires, des notions un peu plus étendues sur les différentes espèces de *Surfaces*, et notamment sur les surfaces réglées, gauches et développables. Je me trouve ainsi conduit à donner plus loin, pour la détermination des aires des surfaces cylindriques et coniques, une méthode uniquement fondée sur leur développement, méthode qui est certainement la plus naturelle et la plus propre à éclairer l'esprit. J'ai indiqué toutefois, par forme de supplément, la méthode ordinaire dont j'ai déjà parlé, mais en la présentant d'une manière plus simple et plus en rapport avec les autres démonstrations du même genre.

J'ai ajouté à cette partie importante de la Géométrie, un exposé succinct de la théorie des *Projections*, théorie qui sert de base à la *Géométrie descriptive*. Ces principes, ainsi rapprochés de la théorie des plans perpendiculaires et de celle des plans parallèles, dont elle est une application, seront sans doute mieux saisis, et auront l'avantage de familiariser de longue main les élèves qui liront le chapitre où ils sont exposés, avec une des branches les plus fécondes de la Géométrie pratique. Je ne prétends nullement, d'ailleurs, que ce que j'ai dit sur ce sujet puisse suffire à ceux qui seront appelés à en faire une étude spéciale : arrivés à ce point, ils devront consulter les livres où la matière est approfondie ; et ceux que des ouvrages un peu volumineux pourraient effrayer, trouveront dans l'excellent *Traité* publié par M. Lefébure de Fourcy, un livre parfaitement approprié à leurs besoins, et par son étendue, et par son mode de rédaction.

Telles sont les modifications principales et les additions les plus importantes que j'ai faites à cette nouvelle édition : quelques-unes cependant méritent encore d'être mentionnées. Par exemple, dans tous les théorèmes relatifs à la détermination des aires et des volumes, j'ai continuellement ramené les énoncés à l'expression d'une équivalence entre la quantité que l'on considère et une quantité de même espèce, telle qu'un parallélogramme ou un parallélépipède rectangle, mais en évitant constamment de faire dépendre ces énoncés, d'aucune hypothèse faite sur l'unité de mesure. Il est bien évident, en effet, qu'en changeant cette unité, ce qui est très permis puisqu'elle est entièrement arbitraire, on peut rendre fausses toutes les propositions dont les énoncés dépendent implicitement du choix de cette unité, telles, par exemple, que celle-ci : *un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur,* et une foule d'autres du même genre. Ces sortes de propositions ne doivent être établies que secondairement, et comme des formules pratiques qu'il faudrait remplacer par d'autres formules beaucoup moins simples et moins faciles à appliquer, si le choix de la grandeur unitaire venait à changer.

Enfin, j'avertis de nouveau que tous les énoncés sont rédigés de manière à être rendus totalement indépendans des lettres qui composent la légende des figures, et qu'ils doivent d'abord être lus une première fois et appris de mémoire sans ces lettres, bien que j'aie supprimé les parenthèses entre lesquelles je les renfermais autrefois, ayant reconnu depuis l'inutilité de cette précaution.

J'avais eu d'abord l'intention de joindre à ce *Cours de Géométrie élémentaire*, un supplément dans lequel j'aurais exposé les principes de la *Trigonométrie ;* mais j'y ai renoncé depuis la publication que M. Lefébure de Fourcy a faite de ses *Élémens*. Je me permettrai de dire que ce petit Traité, rédigé avec la précision qui caractérise tout ce qui sort de la plume judicieuse et sévère de cet estimable géomètre, doit être considéré comme le complément obligé de mon ouvrage, pourvu que les lecteurs veuillent bien me faire grâce d'une accablante comparaison. Une autre considération, bien que moins puissante, s'est jointe à la première pour me déterminer à ne pas rédiger la Trigonométrie; je veux parler de la crainte d'augmenter encore un volume déjà si étendu. C'est aussi une raison du même genre qui m'a engagé à supprimer presque en totalité deux chapitres sur la symétrie des figures, dont je n'ai conservé, en les disséminant, que quelques propositions, les seules véritablement importantes par leurs usages.

Il me reste maintenant à remplir un devoir, celui de reconnaître les obligations nombreuses que j'ai contractées envers les personnes qui ont bien voulu m'aider de leurs conseils. Et d'abord, comment pourrais-je m'acquitter dignement envers un homme qui honore la carrière des sciences autant par son caractère que par ses talens, et à qui je ne dois pas moins de reconnaissance pour les conseils paternels et pour l'amitié dont il m'honore, que pour les liens plus intimes par lesquels il a bien voulu que je lui fusse attaché. Dans l'impuissance où je suis d'exprimer tout ce que je lui porte et tout ce que je lui dois de sentimens de gratitude, je me bornerai à dire qu'il m'a permis d'emprunter sans relâche aux lumières de son expérience consommée dans l'enseignement oral comme dans l'enseignement écrit, et qu'ayant déjà rédigé en grande partie un traité sur le même sujet, il m'a généreusement sacrifié, en même temps que le fruit de ses laborieuses veilles, la nouvelle palme qu'il était appelé à cueillir. Puisse-t-elle n'avoir pas été par mes mains, entièrement frappée de stérilité; puissent surtout mes lecteurs, en parcourant la partie la plus difficile et la plus importante de mon travail, ne s'apercevoir que de loin en loin, combien m'est devenue préjudiciable pendant que je la rédigeais, la privation momentanée d'aussi utiles et d'aussi précieux conseils.

Après avoir, autant qu'il était en moi, rempli cette première obligation, je dois déclarer encore combien m'a été profitable la lecture des ouvrages-modèles de mes anciens Professeurs MM. Lacroix, Francœur, Hachette, celle des Traités de MM. Legendre, Dupin, Bergery, Terquem, Develey, et enfin l'étude des *Annales de Mathématiques*, dont le savant rédacteur a eu l'obligeance de m'adresser en outre diverses observations spécialement appropriées à mon ouvrage. — Je suis aussi redevable de plusieurs problèmes numériques au *Cours de Mathématiques* que MM. Billy, Puissant, et Lavigne, avaient rédigé pour l'usage des Écoles Militaires.

Redirai-je tout ce que m'a procuré de secours la discussion approfondie à laquelle M. Ampère s'est livré à l'occasion de ce livre?... Ai-je besoin d'ajouter que plusieurs des méthodes nouvelles de démonstration qu'il contient lui sont entièrement dues ?

Je ne dois pas oublier non plus de mentionner particulièrement, au nombre des personnes dont les avis ont le plus contribué à m'éclairer, deux Professeurs distingués, mes amis, anciens élèves de notre École Normale, MM. Laisné et Chenou.

Enfin, je terminerai en reconnaissant que si les figures de cette édition, construites avec un soin particulier, sont surtout plus propres à faciliter aux élèves l'intelligence de la Géométrie à trois dimensions, j'en suis redevable à l'amitié et aux talens de M. Guenet, qui a été secondé, pour la première partie, par M. Armand, actuellement élève de l'École Polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES

DU

COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

INTRODUCTION.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

Des Figures Considérées dans un Plan.

CHAPITRE PREMIER.

Des Perpendiculaires et des Obliques.

Problèmes graphiques à résoudre après le chapitre précédent :

Numéros... 309—310—314—317, 1re *constr.* —318—320—367, 1re *constr.* —369—376, 2e *Cas*—377—382.

CHAPITRE II.

Des Parallèles.

Problèmes graphiques à résoudre :

Numéros 370 et 373.

CHAPITRE III.

Du Triangle.

Problèmes graphiques à résoudre :

Numéros...311, 1re *constr.* — 314, *scol.* 2 — 317, *scol.* 1er, 1°, 2°, 3°, 4°, et 6° — 318, *scol.*, 2° — 321 — 322 — 323 — 324 — 325 — 326 — 336 — 367, 2e *constr.* — 371 — 372 — 374 — 375 — 379 — 381 — 385.

CHAPITRE IV.

Du Quadrilatère.

Problèmes graphiques à résoudre :

Numéros...313, 1re et 2e *constr.* — 315 — 316 — 319 — 327 — 328 — 368, 1re *constr.*

b..

CHAPITRE V.

Des Polygones.

Problèmes graphiques à résoudre :

Numéros... 317, *scol.* 1er, 5° — 318, *scol.*, 3° — 329 — 330 — 331 — 332.

CHAPITRE VI.

Des Courbes.

LIVRE DEUXIÈME.

De l'Étendue considérée dans un Plan.

Problèmes graphiques à résoudre :

Numéros 333, 334, et 335.

CHAPITRE PREMIER.

De la Similitude.

Problèmes graphiques à résoudre :

Numéros...311, 2e *constr.* — 337 — 338, 1re, 2e, et 3e *constr.* — 339 — 340 — 341, 1re *constr.* — 342 — 343 — 344 — 347 — 348 — 349 — 350, 1re *constr.*, et *scol.* 2 et 3 — 351 — 352, 1re *constr.* — 354 — 355 — 356 — 357 — — 364, 2e *Cas* — 365 — 366 — 368, 2e *constr.* — 376, 1er *Cas* — 378 — 380 — 383 — 384 — 386 — 387 — 388, 1re et 2e *constr.*

Problèmes numériques :

Tous les problèmes composant le paragraphe 1er, et compris depuis le n° 389 jusqu'au n° 397 inclusivement, excepté les nos 395 et 398.

CHAPITRE II.

≤[*Théorie des Transversales.*]≥

Problèmes graphiques à résoudre :

Numéros...312—313, 3e *constr.*—317, 2e *constr.*

Problème numérique :

Numéro 395.

CHAPITRE III.

Problème graphique à résoudre :

Numéro 364, 1er *Cas.*

Problème numérique :

Numéro 398.

CHAPITRE IV.

Problèmes graphiques à résoudre :

Numéros... 313, *scol.* — 339, *scol.* — 342, *scol.* — 343, *scol.* — 344, *scol.* — 345 — 346 — 358 — 359 — 360 — 361 — 362 — 363.

Problèmes numériques :

Tous les problèmes composant les paragraphes 2^e, 3^e, et 4^e, et compris depuis le n° 399 jusqu'au n° 431 inclusivement.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE PLANE.

CHAPITRE PREMIER.

Problèmes Graphiques.

CHAPITRE II.

Problèmes numériques.

SECONDE PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE TROISIÈME.

Des Figures considérées dans l'Espace.

CHAPITRE PREMIER.

Des Perpendiculaires et des Obliques. — Des Angles Dièdres. — Etc.

CHAPITRE II.

Du Parallélisme dans l'Espace.

CHAPITRE III.

≤[**Problèmes graphiques à résoudre :**

Tous les problèmes composant le paragraphe 1er, et compris depuis le n° 653 jusqu'au n° 667 inclusivement.]≥

CHAPITRE IV.

Des Angles Polyèdres en général, et des Angles Trièdres en particulier.

Problèmes graphiques à résoudre :

Numéros...668 — 669 — 670 — 671 — 672 — 673.

CHAPITRE V.

Des Prismes et du Cylindre.

CHAPITRE VI.

Des Pyramides et du Cône.

Problème graphique à résoudre :

Numéro 674.

CHAPITRE VII.

Des Polyèdres en général.

Problèmes graphiques à résoudre :

Numéros 675 et 676.

CHAPITRE VIII.

De la Sphère.

Problèmes graphiques à résoudre :

Tous les problèmes composant le paragraphe 3e, et compris depuis le n° 677 jusqu'au n° 685 inclusivement.

LIVRE QUATRIÈME.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

Des Aires.

Problèmes numériques à résoudre :

Numéro ...708 — 712 — 716 — 718.

CHAPITRE III.

Problèmes numériques à résoudre :

Tous les problèmes de Géométrie dans l'espace, compris depuis le n° 686 jusqu'au n° 729 inclusivement, excepté les *quatre* problèmes relatifs seulement aux aires, et déjà résolus.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

CHAPITRE PREMIER.

Problèmes Graphiques.

CHAPITRE II.

Problèmes Numériques.

NOTES.

Note A. — *Des Instrumens.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Signes empruntés à l'Algèbre et autres Abréviations, employés dans ce Cours de Géométrie.

1° Lorsqu'on veut raisonner sur des quantités d'une nature quelconque, de manière à rendre le raisonnement indépendant de leurs valeurs particulières, il est commode de représenter ces quantités par des *lettres*. Nous emploierons souvent ce genre de notation.

2° Le signe $=$ s'énonce : *égale*, ou *égal à*, ou *est égal à*; il indique par conséquent *l'égalité de deux quantités*.

3° Le signe $>$ s'énonce :

plus grand que....... *supérieur à*...
ou *est plus grand que*..., *est supérieur à*...
$<$ ...*plus petit*............ *inférieur à*...

Ces deux signes d'*inégalité* se distingueront facilement l'un de l'autre, d'après cette observation, que l'*ouverture* est toujours *tournée* du côté de la plus grande des deux quantités que l'on compare, et la *pointe* du côté de la plus petite.

Le signe $+$ s'énonce : *plus*.... ou *augmenté de*...., et marque l'*addition*.

5° Le signe $-$ s'énonce : *moins*... ou *diminué de*..., et marque la *soustraction*.

6° Le signe $\times$ s'énonce : *multiplié par*....

La *multiplication* s'indique encore au moyen d'un point que l'on place entre les deux quantités à multiplier.

La simple juxta-position de deux quantités [ou plutôt des lettres ou signes quelconques qui les représentent] suffit même pour indiquer leur multiplication.

Ainsi, les trois expressions $A \times B$, $A.B$, ou AB, signifient également A *multiplié par* B.

Le *double*, le *triple*, le *quadruple*,... d'une quantité, de A par exemple, s'indiquent par le moyen d'un chiffre [ou de plusieurs chiffres] nommé *coefficient*, que l'on écrit à gauche de cette quantité. Les expressions 2A, 3A, 4A,... signifient donc : A *multiplié par* 2, ou 2 *fois* A, ou *le double de* A ; A *multiplié par* 3, ou 3 *fois* A, ou *le triple* A; ... etc.

7° Le signe : signifie *divisé par*....

La *division* s'indique encore en plaçant verticalement le diviseur au-dessous du dividende, et en les séparant l'un de l'autre par un trait horizontal.

Ainsi ... A : B, $\frac{A}{B}$, signifient également : A *divisé par* B.

8° Dans une proportion, le signe :, sans changer pour cela de signification, s'énonce : *est à*....: c'est-à-dire *se compose avec*...., *contient*..., ou *est contenu dans*....

Il a pour corrélatif le signe :: que l'on énonce : *comme*..., et qui n'est qu'une sorte de signe d'égalité.

9° Le *carré* ou la *deuxième puissance*, le *cube* ou la *troisième puissance*,... d'une quantité, de A par exemple, s'indiquent par le moyen d'un petit chiffre nommé *exposant*, que l'on écrit au haut et à la droite de cette quantité, de la manière suivante : A^2, A^3 ; ces expressions s'énoncent : A *deux*, ou A *exposant deux*, ou A *seconde puissance*, ou enfin A *quarré*; A *trois*, ou A *exposant trois*, ou A *troisième puissance*, ou A *cube*.

10° La *racine quarrée* ou *deuxième* d'une quantité A s'indique en plaçant cette quantité sous le signe $\sqrt{}$, de la manière suivante : $\sqrt{A}$. De même $\sqrt[3]{A}$ signifie et s'énonce *racine cubique* ou *racine troisième de* A. — Le signe $\sqrt{}$ se nomme *un radical*.

11° Deux *parenthèses* ( ), ou deux *crochets* [ ], ou deux *accolades* { }, entre lesquels on enferme plusieurs quantités combinées entre elles par addition ou par soustraction, signifient qu'il faut considérer toutes ces quantités comme réduites en une seule, avant d'effectuer les opérations indiquées par les signes qui précèdent ou qui suivent ces parenthèses.

Ainsi : $(A+B)\,C$ signifie que la *somme* des quantités A et B doit être *multipliée* par C ;

$(A-B):(C+D)$ signifie que l'*excès* de A sur B doit être *divisé* par la *somme* des quantités C et D ;

$(A-B+C)^2$ signifie que de A il faut *retrancher* B, puis au reste *ajouter* C, puis *élever* le résultat *au quarré*, etc.

12° Les renvois aux propositions déjà vues, seront aussi indiqués par des numéros placés entre deux parenthèses, ainsi que la désignation des figures auxquelles le texte se rapporte.

13° Il existe quelquefois dans les énoncés, certaines portions qu'à la rigueur on peut y sous-entendre sans en altérer le sens, mais qui peuvent les rendre plus clairs : nous les renfermerons entre deux crochets.

14° Le signe $\lesssim[\ldots]\gtrsim$ sera employé pour indiquer que l'on peut, sans inconvénient, passer, à une première lecture, les propositions, les paragraphes, les chapitres,... qui s'y trouveront renfermés ; et que les objets ainsi notés ne sont point exigés aux examens.

15° Enfin : *C. Q. F. D.* signifie *Ce qu'il fallait démontrer*,

Voy.	*Voyez*,
n°	numéro,
Fig.	figure,
Ex.	exemple,
N. B.	*nota bene*.

ERRATA.

Pages.	Lignes.				
26	5 en descendant,	*effacez :*	à		
72, 74, 76, et 78,	en tête		§ I	*lisez*	§ II
88	16 en desc.		AMB	*lisez*	AMF
90	3 en montant		109	*lisez*	110
100	8 en mont.		94	*lisez*	96
108	3 en mont.		*coroll.*	lisez	*récipr.*
129	5 en mont.	après	*côtés*	ajoutez	*consécutifs*
154	3 en mont.		$a^2 -$	lisez	$a^2 +$
201	10 en desc.	*après*	usage	*ajoutez*	moins
230	7 en desc.		A'B	*lisez*	A'B'
233	8 en desc.	*effacez :*	et d'un nombre double de côtés		
243, à la marge			183	*lisez*	83
249	16 en desc.	*effacez :*	] ≥		
277	7 en desc.	*effacez :*	1er		
303	17 en desc.		solution	*lisez*	construction
311	3 en mont.		109	lisez	309
Ibid.	2 en mont.		145	lisez	104, *scol.* 3
326	5 en desc.		AB'	*lisez*	AB
403	7 en desc.		$\{g'i, gi'\}$	*lisez*	$\{gi, g'i'\}$
471	2 en mont.		*son*	lisez	*le*
475	1 en mont.	*effacez :*	que		
505	4 en desc.		cet angle	*lisez*	ce triangle
533	7 en mont.		D'O	lisez	D'O'
539	8 en desc.		V	*lisez*	VI
563	15 en desc.		$\left(\frac{5}{6}\right)$	lisez	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$
573	1 en montant		$\sqrt{2}$	*lisez*	$\sqrt[3]{2}$

COURS

DE

GÉOMÉTRIE

ÉLÉMENTAIRE.

INTRODUCTION.

Notions générales.

N° 1. Tout CORPS occupe, dans L'ESPACE *indéfini* qui embrasse l'univers matériel, un LIEU *déterminé* que l'on nomme proprement UN ESPACE.

Cet espace *fini*, rempli par le corps, a des *limites* ou *bornes* qui le *distinguent* du reste de l'espace indéfini : chacune d'elles prend le nom de SURFACE. La surface étant ainsi le lieu de la *séparation* d'un corps et du reste de l'espace, appartient également à l'un et à l'autre.

Comme il peut exister dans l'espace une infinité de corps ayant chacun ses limites propres, il en résulte que *Dans l'espace on peut concevoir une infinité de surfaces.*

Lorsqu'une surface est *rencontrée* ou *coupée* par une autre surface, le lieu de leur *intersection* s'appelle une LIGNE ; cette ligne appartient à la fois aux deux surfaces.

Toute ligne provenant de l'intersection de deux surfaces, et une même surface pouvant être rencontrée par une infinité d'autres entièrement distinctes, il s'ensuit que *Sur une surface quelconque on peut concevoir une infinité de lignes.*

Enfin, lorsque deux lignes viennent à se rencontrer, le lieu de leur intersection se nomme un POINT; ce point est commun aux deux lignes.

Ainsi, un point résultant de la rencontre de deux lignes, et une même ligne pouvant être coupée par une infinité d'autres en autant de lieux différens, il s'ensuit que *Toute ligne peut être regardée comme contenant une infinité de points.*

Quoique l'on acquière la notion du point par la considération des lignes, la notion de la ligne par la considération des surfaces, et la notion de la surface par la considération d'un *corps*, c'est-à-dire d'un objet *matériel*, on n'en doit pas conclure pour cela que les points, les lignes, et les surfaces, soient eux-mêmes des objets réellement matériels. En vertu d'une faculté inhérente à notre intelligence, nous nous accoutumons sans peine à considérer le point sans les lignes qui le déterminent, la ligne sans les surfaces dont elle représente l'intersection, la surface sans le corps ou l'espace auquel elle sert de limite, enfin l'espace lui-même comme étant absolument immatériel; et c'est le résultat de cette *abstraction* que nous nommons *point*, *ligne*, *surface*, ou *espace*. C'est encore ainsi que nous disons : les *points d'une ligne*, *d'une surface*, *d'un espace*.

2. L'espace, la surface, et la ligne, peuvent être envisagés sous deux points de vue distincts : sous le rapport de leur *forme*, ou sous le rapport de leur *grandeur*. On les désigne, dans le premier cas, sous la dénomination commune de FIGURES, et dans le second, sous celle d'ÉTENDUE.

L'étendue est dite *finie* lorsque la figure qui la détermine est limitée de toutes parts; elle est dite *infinie* ou *indéfinie* dans le cas contraire.

L'étendue finie prend le nom particulier de VOLUME, d'AIRE, ou de LONGUEUR, suivant que cette étendue est un espace, une surface, ou une ligne.

Ainsi la *longueur* d'une ligne [que l'on nomme encore *étendue linéaire*] est le nombre d'unités de ligne contenues dans cette ligne; l'*aire* d'une surface [ou l'*étendue superficielle*] est le nombre d'unités de surface que comprend cette surface; enfin, le *volume* d'un espace ou d'un corps est le nombre d'unités d'espace que cet espace renferme (*).

Quant aux figures, elles portent des noms très divers que nous ferons connaître par la suite.

La GÉOMÉTRIE est la science qui s'occupe de ces deux principaux objets : les PROPRIÉTÉS DES différentes sortes de FIGURES, et la MESURE DE L'ÉTENDUE considérée sous les différens aspects que nous venons d'indiquer.

3. Deux figures peuvent avoir la même étendue sans avoir nécessairement la même forme : dans ce cas, elles sont dites *équivalentes*.

Deux étendues peuvent avoir la même figure sans avoir nécessairement la même grandeur : alors elles sont dites *semblables*.

Enfin, deux figures ou deux étendues peuvent être *superposables*, c'est-à-dire être telles que l'on puisse les placer l'une *sur* l'autre, ou l'une *dans* l'autre, de manière à les faire *coïncider* ou se confondre parfaitement; elles sont alors tout-à-la-fois équivalentes et semblables, c'est-à-dire qu'elles ont en même temps la même grandeur et la même forme : on exprime cette double circonstance en disant que les deux figures ou les deux étendues sont *égales*.

(*) Dans tous les Traités de Géométrie, on emploie les dénominations d'étendue à *une dimension* [la *longueur*], d'étendue à *deux dimensions* [la *longueur* et la *largeur*], d'étendue à *trois dimensions* [la *longueur*, la *largeur*, et la *hauteur* que l'on nomme aussi *épaisseur* ou *profondeur*], pour désigner l'étendue des lignes, des surfaces, ou des corps. Mais nous avons cru devoir omettre ici ces dénominations, à cause de l'impossibilité d'en rendre raison, pour le moment, d'une manière rigoureuse.

Il faut observer toutefois que les figures ne peuvent être considérées comme superposables, qu'autant que l'on fait abstraction de leur *matérialité* (n° 1) ou de leur *impénétrabilité* [du moins lorsqu'elles ne sont pas de nature à être contenues sur une même surface]. Nous avertissons donc une fois pour toutes que ce ne sont point, à proprement parler, les corps eux-mêmes dont il sera question dans ce cours, mais les espaces qu'ils occupent; et ces espaces seront toujours regardés comme pouvant se pénétrer mutuellement.

Il faut observer encore que le signe =, bien que s'énonçant: *égale* (*Voy.*, au commencement de l'ouvrage, le tableau des *Signes et abréviations*), ne se rapporte, quand on l'applique aux figures, qu'à leur équivalence, et nullement à leur égalité absolue. Cependant, son emploi ne peut induire en erreur, d'abord parce que l'équivalence de deux figures n'est autre chose que l'égalité des deux nombres qui servent de mesure à leur étendue (n° 2), et ensuite parce qu'on ne se sert jamais du signe = pour désigner l'égalité géométrique proprement dite, c'est-à-dire pour exprimer que deux figures sont superposables.

4. *Le point n'a ni figure ni étendue*; et c'est là surtout ce qui le distingue des autres objets de la Géométrie, qui sont tous *descriptibles* et *mesurables*. Néanmoins, comme on a souvent besoin de considérer un ou plusieurs points *isolés*, on convient de désigner chacun d'eux par une légère *marque* faite avec un *crayon*, une *plume*, ou tout autre *instrument* taillé en *pointe* et propre à laisser une *empreinte* sur une surface donnée. Mais cette marque n'affecte aucune forme déterminée; et son étendue doit toujours être considérée comme rigoureusement *nulle* (*).

D'ailleurs, pour distinguer les uns des autres les différens points de l'espace, on place *à côté* de chacun d'eux, ou à

(*) Σημεῖόν ἐςιν οὗ μέρος οὐδὲν : *Le point est ce qui n'a pas de partie.* (*Euclide*, Livre I, défin. 1re.)

côté de la marque qui le représente aux yeux, une lettre qui sert à l'*énoncer* dans le discours; c'est ainsi qu'on dit : *le point* A, *le point* B, *le point* C.... (fig. 1). Lorsqu'il existe entre plusieurs points une *analogie* quelconque, on les désigne par les mêmes lettres, en ayant soin de distinguer ces lettres les unes des autres par différens caractères d'écriture, ou par un ou plusieurs accens que l'on place au haut et à la droite de chacune d'elles, de la manière suivante : A', A'', A'''...; ce que l'on énonce ainsi : A *prime*, A *seconde*, A *tierce*... Fig. 1.

[Au surplus, quand, au lieu de désigner un point, quelque lettre de l'alphabet sera employée à représenter la valeur numérique d'une ligne (n° 2 — *Voy.* aussi le tableau des *Signes et abréviations*) ou de tout autre quantité rapportée à son unité, nous aurons soin de faire en sorte que le sens du discours l'indique toujours d'une manière non équivoque.]

De la Ligne Droite.

5. De toutes les lignes dont traite la Géométrie, la plus simple est la *ligne droite*.

Quoique l'idée de la ligne droite soit une des premières auxquelles nous conduisent notre expérience et l'usage de nos sens, il n'en est pas moins difficile de la bien définir. Presque tous les auteurs se bornent à dire, d'après ARCHIMÈDE, que *La ligne droite est* LE PLUS COURT CHEMIN *d'un point à un autre* (*); et pour entendre cette définition, il faut concevoir qu'un point isolé de l'espace (n° 4) [*matérialisé* par la pensée] *se meuve* vers un autre point séparé du premier par un intervalle quelconque, en suivant, pour franchir cet intervalle, le plus court de tous les chemins en nombre infini, qui peuvent mener de la position primitive du premier point à la position du second. La route ainsi parcourue par le point supposé mobile, est ce que

(*) Ἀρχιμήδης τὴν εὐθεῖαν ὡρίσατο γραμμὴν, ἐλαχίστην τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν : *Archimède définit la ligne droite en disant que c'est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités.* (*Proclus*, Commentaire sur le premier livre d'*Euclide*, Livre II.)

l'on nomme une *ligne droite*, ou simplement une Droite (*).

Mais la définition précédente deviendra plus générale si nous
Fig. 2. disons qu'une *droite* est une *ligne indéfinie*, LMNO... (fig .2), que nous nous représentons comme ayant la propriété d'être *le plus court chemin entre deux quelconques de ses points*, L et M, L et N, L et O, M et N, M et O, N et O,..., pris partout où l'on vondra sur son étendue illimitée.

Toute ligne droite, MN, doit donc être, par la pensée, prolongée indéfiniment dans *les deux sens*, MNO......, NML ...., à moins que, par des circonstances particulières, elle ne se trouve limitée, soit dans les deux sens, soit dans un seul. Lorsqu'une droite sera terminée en deux points, M, N, nous dirons qu'elle est *déterminée de longueur*; et quant aux portions ou *moitiés* de droite INO...,IML..., limitées dans un sens en un point I et illimitées dans l'autre, nous les nommerons des *segmens* de droite.

6. *Toutes les lignes droites sont*, par leur nature, *égales* [ou superposables (n° 3)]; et pour que la superposition ait lieu parfaitement, *il suffit que deux* de leurs *points coïncident*.

Cette propriété, qui *caractérise* essentiellement la ligne droite, doit être considérée comme évidente, et par conséquent admise *à priori*.

[Cependant, il est facile d'en rendre raison de manière à ne rien laisser à désirer.

Fig. 3. En effet, soient deux droites indéfinies, AB, CD (fig. 3). *Matérialisons*, par la pensée, la seconde droite CD, et *portons*-la sur

(*) Telle est, par exemple, la forme qu'affecte naturellement un fil abandonné à lui-même, lorsque l'une de ses extrémités a été préalablement fixée, et qu'à l'autre est attaché un corps pesant.

Telle est encore la ligne que suit le plus ordinairement la lumière pour venir du corps lumineux à notre œil; et c'est ainsi que, suivant Platon, *La ligne droite est celle dont les extrémités sont cachées par les points intermédiaires* : Πλάτων ἀφορίζεται τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν, ἧς τα μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ. (*Proclus*, à l'endroit cité.)

On peut encore se figurer la *ligne droite* comme *la seule susceptible de tourner sur elle-même sans changer de position dans l'espace.*

la première AB, de façon qu'un point quelconque C de CD se trouve sur un point A de AB; puis faisons *tourner* la seconde droite autour du point commun jusqu'à ce qu'un second point D, pris à volonté sur CD, tombe en un point B de AB. Il est évident que les deux droites se confondront dans toute l'étendue comprise entre A et B, puisqu'*Il ne saurait y avoir qu'un seul plus court chemin d'un point à un autre;* et les deux portions de droite, AB, CD, seront égales (n° 3). Mais maintenant, les points C et D étant quelconques, il s'ensuit nécessairement que leur distance, ou l'étendue linéaire comprise entre eux, peut être prise aussi grande que l'on voudra; et que par conséquent, ce ne sont pas seulement des portions déterminées des deux droites que l'on peut faire coïncider, mais les droites elles-mêmes considérées dans toute leur étendue indéfinie.]

Ainsi, généralement, *Deux droites coïncident dans toute leur étendue indéfinie, lorsqu'elles ont* été amenées à passer par *deux points communs.*

7. En d'autres termes : *Par deux points donnés on ne peut mener qu'une seule droite;* et comme d'ailleurs on en peut toujours mener une, il s'ensuit que *Deux points déterminent complètement la position d'une droite.*

Voilà pourquoi il est d'usage de désigner une droite par *deux* lettres, M, N (fig. 2), placées *à côté* de cette ligne; *une* Fig. 2.
seule lettre suffit pourtant quelquefois, surtout quand la droite est regardée comme déterminée de longueur (n° 5). Cette lettre unique représente alors, le plus ordinairement, la valeur numérique de la droite, supposée rapportée à l'*unité linéaire* (n° 2).

On se sert souvent du mot *direction* pour désigner le *prolongement* d'une ligne droite, supposé *indéfini dans les deux sens;* et il est clair (n° 6) que *la direction est unique* pour chaque droite en particulier, c'est-à-dire qu'une portion de droite MN (fig. 2) ne peut avoir qu'*un seul prolongement* indéfini dans les deux sens MNO, NML.

Il résulte encore de ce qui précède, que *Deux droites distinctes ne peuvent avoir qu'un seul point commun;* et alors, chacune d'elles partage l'autre en deux *segmens* (n° 5) situés respectivement de part et d'autre de la première. Dans ce cas, les deux droites sont dites *concourantes*, et le point où elles se coupent se nomme leur *point de concours*, *de rencontre*, ou *d'intersection*.

Enfin, si sur une droite MN (fig. 2) déterminée de longueur, on marque un point I tel que les deux portions MI, IN, soient égales (n° 3), ce point est dit le *milieu de la droite* MN. Il est bien évident qu'une droite déterminée de longueur ne peut avoir qu'*un seul milieu*.

Du Plan.

8. La plus simple de toutes les surfaces est la *surface plane*, ou simplement le PLAN. On nomme ainsi une *surface indéfinie sur laquelle* on conçoit que, *par chacun de ses points, une ligne droite peut être appliquée exactement dans toutes les directions* (*).

Il résulte de cette définition que *Dans un plan, par chacun de ses points, on peut mener une infinité de droites.*

Il résulte encore de là et de la nature de la ligne droite, que *Toute droite qui a deux de ses points dans un plan y est contenue tout entière,* puisque ces deux points déterminent une des directions dans lesquelles la droite peut être placée sur la surface.

Ainsi, *Une droite ne saurait être en partie sur un plan et en partie au dehors de ce plan.* Toutefois, on conçoit qu'elle peut n'avoir qu'*un seul* point commun avec le plan, et alors on dit que la droite *rencontre* ou *perce* le plan, et que le plan *coupe* la droite. Il est visible que, dans ce cas, les deux

(*) Telle est la forme qu'affecte *sensiblement* la surface d'un liquide en repos considérée dans une petite étendue. Une glace bien polie, une feuille de papier bien tendue, nous offrent encore des exemples de surfaces sensiblement planes, en tant que nous jugeons qu'une droite matérielle [comme le bord d'une règle bien dressée] peut toujours s'appliquer sur ces surfaces par deux quelconques de leurs points.

segmens (n° 5) de la droite sont situés respectivement de part et d'autre du plan.

On conclut encore de ce qui vient d'être dit, que pour reconnaître si une surface est plane, il suffit de s'assurer si l'on peut, par chacun de ses points, y appliquer une droite dans toutes les directions.

Les surfaces planes, ainsi que les lignes droites (n° 5), sont toujours supposées indéfinies, à moins que des conditions particulières n'en restreignent l'étendue naturellement illimitée.

9. De même qu'une droite est déterminée de position (n° 7) par deux points, de même *La position d'un plan se trouve complètement déterminée par trois points*, pourvu que ces trois points *ne* soient *pas situés sur une même ligne droite;*

C'est-à-dire 1° qu'*On peut toujours faire passer un plan par trois points non situés en ligne droite;*

Et 2° que *Deux plans qui ont trois points communs non situés en ligne droite, coïncident dans toute leur étendue.*

Cette propriété du plan joue, par rapport à la surface plane, le même rôle que la propriété du n° 7 par rapport à la ligne droite; on doit, par conséquent, l'admettre également comme évidente.

[Cependant on peut aussi la rendre plus sensible.

Pour cela, considérons d'abord trois points, A, B, C (fig. 4), Fig. 4.
situés arbitrairement dans l'espace; et concevons qu'un plan quelconque [*matérialisé* par la pensée] soit disposé de manière à passer par les deux points A, B : la droite AB y sera contenue tout entière (n° 8). Cela posé, faisons tourner le plan autour de AB comme autour d'une *charnière*, jusqu'à ce qu'il vienne passer par le troisième point C. Il est clair que le plan est alors *fixé* de position dans l'espace, en ce sens qu'il ne peut plus continuer sa *révolution* autour de AB sans que le point C cesse de s'y trouver. Le plan que l'on considère est ainsi assujetti à passer par les trois points A, B, C.

Je dis maintenant que tout autre plan passant par les mêmes points coïncide avec le premier dans toute son étendue.

En effet, les points A, B, C, appartenant tous trois aux deux plans, il s'ensuit (n° 8) que les droites de jonction, AB, AC, BC, de ces points pris deux à deux, se trouvent à la fois contenues tout entières dans ces deux plans. Il en est par conséquent de même de la droite CB′ qui joint le point C à un point quelconque B′ du prolongement de AB, et de toutes les droites telles que AD, AE, AF, AG, AI, menées du point A aux différens points de BC, B′C. Or, toutes ces droites, menées ainsi autour du point A et prolongées indéfiniment dans les deux sens, *forment,* pour ainsi dire (n° 1), par leur ensemble, les deux surfaces que nous considérons. Donc enfin ces deux surfaces coïncident dans toute leur étendue.]⋗

Il résulte de là que l'on peut désigner un plan par trois de ses points, A, B, C, non situés en ligne droite. Cependant il suffit quelquefois d'en considérer *deux,* ou même *un* seul.

10. *Deux droites,* AB, AC (fig. 4), *qui se coupent, déterminent* également *un plan :* car si l'on fait passer un plan par leur point de rencontre A et par deux points quelconques, B, C, pris respectivement sur chacune d'elles, ce plan contiendra les deux droites (n° 8); et, de plus, ce sera le seul (n° 9); on le nomme, pour cette raison, *le plan des deux droites.*

Il est bon de remarquer d'ailleurs que, dans ce cas, le *système* [assemblage] des deux droites partage l'étendue de leur plan en quatre portions indéfinies, BAC, CAB′, B′AC′, C′AB, auxquelles on a donné le nom d'*angles.* La considération de cette sorte de grandeur, qui se présente très fréquemment dans les diverses parties de la Géométrie, est de la plus grande importance.

11. Il suit encore de ce qui précède, que *Toutes les surfaces planes*, considérées dans leur étendue indéfinie, *sont égales* entre elles (n° 3).

De plus, non-seulement deux plans distincts sont superposables, comme on vient de le voir; mais on peut encore faire coïncider les deux faces d'un plan, le *dessus* avec le *dessous.*

Fig. 5. En effet, si l'on trace dans ce plan une droite AB (fig. 5), cette

droite partagera le plan en deux portions telles que, si on le fait tourner autour de la droite, les points qui se trouvaient dans une de ces deux portions [soit pour exemple le point M] viendront tous occuper en même temps des lieux situés dans la position primitive de l'autre portion [par exemple en N]; *et vice versâ*.

Enfin, on doit conclure de là :

1° Que *Toute surface plane partage l'espace* indéfini (n° 1) *en deux moitiés superposables* dont, pour les distinguer, nous nommerons chacune une *région de l'espace;*

Et 2° que, de même, *Une droite quelconque partage tout plan* qui la contient *en deux moitiés superposables* que nous nommerons *régions du plan*, et que l'on peut faire coïncider, soit en faisant tourner le plan autour de la droite comme autour d'une *charnière*, soit en *pliant* le plan suivant la droite.

12. Deux plans ne sauraient avoir *un seul* point commun ; car en menant une droite par ce point dans l'un des deux plans, elle serait tout entière d'un même côté de l'autre, ce qui est impossible (n° 8). Deux plans qui se rencontrent ont donc *au moins deux* points communs.

Maintenant, si par ces deux points on mène une droite, elle sera contenue tout entière dans l'un et dans l'autre des deux plans (n° 8); et de plus, les différens points de cette droite seront évidemment les seuls qui puissent ainsi appartenir aux deux surfaces, puisque, si elles avaient trois points communs non situés en ligne droite, elles se confondraient (n° 9). On peut donc conclure de là que *Deux plans ne peuvent se rencontrer que suivant une ligne droite.*

D'ailleurs, il résulte évidemment de la définition de la surface plane (n° 8), que la propriété précédente en est encore une propriété *caractérisitque* puisqu'elle lui appartient exclusivement. Il existe bien, à la vérité, d'autres surfaces qui peuvent se rencontrer suivant des droites ; mais cela n'a lieu que pour certaines positions de ces surfaces l'une par rapport à l'autre, tandis que *L'intersection commune de deux plans* qui se rencontrent dans des situations respectives quelconques *est toujours une ligne droite.*

13. Enfin, on peut conclure de ce qui a été dit n° 9, que, *Par deux points donnés*, ou *par une droite donnée, on peut imaginer une infinité de plans*, puisqu'un plan passant par une droite donnée peut prendre autour de cette droite une infinité de positions différentes.

Au contraire, si l'on prend *quatre* points au hasard dans l'espace, le plan déterminé par trois d'entre eux ne passera pas ordinairement par le quatrième; et de là il résulte qu'en général, une figure n'a pas tous ses points situés dans un même plan.

Cela posé, on donne le nom de *figure plane* à une figure dont tous les points sont dans un même plan.

Une *ligne droite* est essentiellement *plane*, puisqu'il existe toujours une infinité de *plans* qui la contiennent (n° 9).

De la Ligne Brisée, de la Ligne Courbe; de la Surface Polyèdre, et de la Surface Courbe.

Fig. 6. 14. On appelle Ligne Brisée toute *ligne*, ABGDEF (fig. 6), *composée de portions de droites consécutives*, AB, BC, CD, DE, EF, *qui ont, deux à deux, une extrémité commune* [à l'exception des deux dernières *extrémités*, A, F, qui sont celles mêmes de la ligne brisée]. Ces portions de droites, que l'on suppose limitées aux points de rencontre, B, C, D, E, se nomment les *côtés* de la figure.

Toute ligne brisée qui n'est pas plane (n° 13) est dite une *ligne gauche*.

On nomme en général *ligne courbe*, ou simplement Courbe, toute *ligne dont aucune portion appréciable n'est rigoureusement droite*. (*Voy.* diverses figures de la planche V.)

Toute courbe qui n'est pas plane (n° 13) est dite une *courbe à double courbure*. Cette dénomination provient de ce qu'une ligne en général étant le lieu de l'intersection de deux surfaces (n° 1), ne peut avoir tous ses points situés dans un même plan, que dans certains cas particuliers, hors lesquels la ligne participe de ce qu'on appelle la *courbure* de chacune *des* deux *surfaces*.

Par opposition, on qualifie quelquefois les courbes planes de *courbes à simple courbure*.

Enfin, on désigne encore par l'expression de *ligne mixte*, toute ligne qui est en partie droite et en partie courbe.

[Au reste, nous reviendrons par la suite sur ces différentes sortes de lignes, et nous établirons d'une manière plus spéciale les caractères qui les distinguent de la ligne droite.]

La propriété d'être complètement déterminée par deux points, appartenant exclusivement à la ligne droite, il s'ensuit que, le plus ordinairement, il est nécessaire d'employer au moins trois points ou trois lettres pour désigner toute ligne différente d'une ligne droite. Néanmoins, deux lettres, ou même une seule, suffisent bien souvent.

15. On nomme Surface Polyèdre [ou *surface brisée* par analogie avec l'expression de *ligne brisée*] toute *surface composée de portions de plans consécutifs qui ont, deux à deux, une intersection commune*.

On appelle Surface Courbe toute *surface dont aucune portion appréciable n'est rigoureusement plane*.

Enfin, nous nommerons *surface mixte* toute surface qui est en partie plane et en partie courbe.

Du Cercle.

16. La ligne courbe que l'on peut considérer comme la plus simple, est la Ligne Circulaire, ou la Circonférence de Cercle, ou simplement encore la Circonférence. On nomme ainsi une *ligne plane* ABC (fig. 7) *fermée* [ou rentrante sur elle-même] Fig. 7.
dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur O que l'on appelle le Centre de la circonférence.

Le Cercle est la *portion de plan limitée par la circonfé-*

rence ; mais ce nom se donne quelquefois aussi, pour abréger, à *la circonférence elle-même.*

17. Chacune des *droites,* OA, OB, OC (fig. 7), *menées du centre* à la circonférence, est dite un Rayon du cercle.

Tous les rayons d'un même cercle sont égaux d'après sa définition, puisqu'ils représentent les distances du centre à la circonférence; et la circonférence est dite le *lieu géométrique* des points qui sont situés à une distance de son centre égale à son rayon, et dans un même plan.

Un cercle ou une circonférence se désigne par trois de ses points, A, B, C, ou par un de ses rayons OA [la lettre du centre étant énoncée la première], ou bien encore simplement par la lettre O du centre.

Deux circonférences décrites de points différens comme centres, mais *avec le même rayon, sont égales.*

Car si l'on *transporte* le second cercle sur le premier de manière que leurs centres se confondent, les deux circonférences coïncideront dans toute leur étendue; sans quoi tous les rayons de l'une ne seraient pas égaux à tous les rayons de l'autre.

18. On appelle Diamètre d'un cercle toute *droite* AD (fig. 7) qui aboutit à deux points de la circonférence en *passant par le centre.*

Tous les diamètres d'un même cercle sont égaux, puisque chacun se compose évidemment de la somme de deux rayons.

De plus, *tout diamètre* AD *divise le cercle* ABC *et sa circonférence en deux parties égales* (*).

(*) *N. B.* — Nous prévenons une fois pour toutes que les *énoncés* tels que celui-ci doivent toujours être lus deux fois de suite : la première fois sans les *lettres explicatives* des figures, et la seconde fois avec ces mêmes lettres ; c'est de la première manière qu'*Il faut les retenir de mémoire.*

Ainsi l'énoncé ci-dessus doit être développé comme il suit : — *Tout diamètre divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales ;* — Soit, par exemple, un cercle ABC, et AD l'un de ses diamètres; je dis que les deux parties du cercle, AODB, AODC, sont égales, ainsi que les deux parties ABD, ACD, de sa circonférence. — En effet, etc.

En effet, plions la figure suivant AD, ou faisons tourner la partie ABD autour de AD comme *charnière* (n° 11), de façon que cette partie vienne *s'appliquer* sur l'autre partie ACD. Il est évident que les deux portions de circonférence se *recouvriront* parfaitement : car si l'une des deux portions pouvait *déborder* l'autre, il y aurait des points de la circonférence inégalement éloignés du centre, ce qui implique contradiction avec la définition du cercle (n° 16).

Ainsi le diamètre AD [ou tout autre] divise le cercle en deux *demi-cercles*, et la circonférence en deux *demi-circonférences*.

19. Une *portion* quelconque, ACB ou ADB (fig. 8), *de circonférence*, comprise entre deux de ses points, A et B, se nomme un Arc de cercle. Fig. 8.

L'arc prend le nom de *quadrant* quand il est le quart de la circonférence.

Il est facile de voir que, quand deux arcs peuvent se placer de manière à avoir le même centre et les mêmes extrémités, ils appartiennent à des circonférences égales ; et alors, ou ils sont égaux, ou ils forment en somme une circonférence entière.

La *portion de droite* AB *comprise entre deux points*, A, B, *de la circonférence*, est dite la Corde ou *sous-tendante* de l'arc ACB, ou de l'arc ADB. Chaque corde *sous-tend* ainsi deux arcs dont la somme vaut une circonférence entière. Quand la corde passe par le centre, elle devient un diamètre ; et les deux arcs sous-tendus sont des demi-circonférences.

Soit C (fig. 8) un point placé sur l'arc ACB de manière que, si l'on tire le diamètre COD et qu'on applique la demi-circonférence CBD sur la demi-circonférence CAD, le point B tombe en A : les deux arcs AC, BC, sont alors égaux entre eux (n° 3), et le point C se nomme le *milieu de l'arc* ADC. Par une raison semblable, les deux arcs AD, BD, étant égaux entre eux, le point D est le milieu de l'arc ADB. Et de même, le point I, où le diamètre COD rencontre la corde AB, est le *milieu de la corde* AB (n° 7). Il est évident d'ailleurs qu'un même arc, comme une même portion de droite, ne peut avoir qu'*un seul milieu*.

Chacune des portions IC, ID, du diamètre CD, comprises respectivement entre les milieux C et D des deux arcs ACB et ADB et le milieu I de leur corde commune AB, se nomme la *flèche* de l'arc correspondant.

20. Lorsqu'une *corde* est *prolongée* indéfiniment dans les deux sens, elle prend le nom de SÉCANTE.

Fig. 9. Soit AB (fig. 9) une sécante au cercle, coupant la circonférence aux deux points A, B; et supposons que l'on fasse *tourner* cette droite autour du point A dans le plan du cercle, de manière que le second point d'intersection B se trouve successivement en B′, B″, B‴,... Ce second point d'intersection se rapprochant de plus en plus du premier, finira par *se confondre* avec lui: et alors la droite aura la position ST. Après cette *limite*, si la droite continue à tourner toujours de la même manière, le point d'intersection mobile passera au-delà du point fixe A et prendra les positions successives *b*, *b′*, *b″*,... etc., en s'éloignant d'abord du point A pour repasser ensuite par ses positions antérieures.

Cela posé, on nomme TANGENTE au cercle une *sécante* ST *dont deux points d'intersection avec le cercle sont réunis en un seul*; c'est pourquoi on la définit ordinairement en disant que c'est une *droite qui n'a qu'un point commun avec le cercle*. Cette *propriété* pouvant en effet servir à caractériser la tangente au cercle, nous l'adopterons pour le moment comme définition, sauf à revenir par la suite sur cet objet.

Lorsqu'une droite ST *touche* ainsi le cercle, ou est *tangente au cercle* en un point A, le *cercle* est dit réciproquement *tangent à la droite*; et le point A se nomme le *point de tangence* ou *de contact*.

Fig. 10. On dit encore que *deux cercles*, AC, BC (fig. 10), sont *sécans*, lorsque leurs circonférences ont *deux* points communs ou se coupent en deux points, C, C′.

Et de même, deux *cercles* sont dits *tangens* l'un à l'autre, lorsque leurs circonférences ont *un* seul point commun : tels sont les cercles AM, BM, CM (fig. 11), lesquels, pris deux à deux, se touchent au point M. Fig. 11.

21. On nomme SEGMENT *de cercle* la *portion de cercle comprise entre un arc*, ACB ou ADB (fig. 8), *et sa corde* AB. La corde est la *base* du segment. La même base AB appartient toujours à deux segmens dont la somme forme un cercle entier; et lorsque la base est un diamètre, les deux segmens correspondans sont des demi-cercles. Fig. 8.

Enfin, l'on nomme SECTEUR la *portion de cercle comprise entre un arc*, ACB ou ADB, *et les deux rayons*, OA, OB, *qui aboutissent à ses extrémités*. Ces rayons sont les *côtés* du secteur.

L'arc correspondant à un secteur peut être moindre qu'une demi-circonférence, comme dans le secteur OACB; il peut être plus grand, comme dans le secteur OADB; enfin cet arc peut être égal à la demi-circonférence elle-même, ce qui arrivera si les deux rayons que nous avons nommés les *côtés* du secteur, sont les deux moitiés d'un même diamètre; et alors le secteur sera lui-même un demi-cercle : tels sont les secteurs OCAD et OCBD.

De la Règle, du Compas, etc.

22. Pour *tracer* ou pour *décrire* une droite [ou plutôt une portion de droite], on se sert d'un instrument que l'on nomme une RÈGLE, et qui n'est autre chose qu'une *barre*, AB (fig. 12), de bois ou de métal, dont les bords saillans sont supposés *rectilignes*. Fig. 12.

Quand on veut exécuter le *tracé* de la droite, on place la règle dans une position fixe, de manière que l'un de ses bords passe par deux points donnés, A, B, que la droite doit *contenir;* et l'on fait glisser le long de ce bord un crayon, une plume, etc. (n° 4). C'est là ce qu'on appelle *Mener une droite par deux points donnés*, A, B.

23. Souvent, au lieu de règle, on emploie un *cordeau* tendu,

surtout lorsque la ligne à tracer doit avoir une certaine longueur ; mais il faut observer que ce moyen n'est généralement exact qu'autant que la surface sur laquelle on opère est plane et *horizontale*, sans quoi le *poids* du cordeau lui fait prendre une *courbure* (n° 14) que l'on ne saurait détruire complètement, quelque effort que l'on fasse pour le tendre.

24. Enfin quelquefois, opérant sur une grande étendue de *terrain*, on n'a pas besoin de tracer effectivement une droite, et il suffit de connaître des points situés dans une même *direction* (n° 7) ou sur un même *alignement*. Dans ce cas, on se sert de *piquets* longs et minces nommés *jalons*, A, B, C, D,...
Fig. 13. (fig. 13), que l'on plante *verticalement* de distance en distance : les pieds de ces jalons seront tous sur une même ligne droite MN, si, en dirigeant un rayon visuel par les deux premiers, A, B, on reconnaît que ce rayon visuel passe par tous les autres, c'est-à-dire si le premier jalon A cache tous les autres aux yeux de l'opérateur.

25. L'instrument dont on se sert ordinairement pour décrire une circonférence ou un arc de cercle, se nomme un COMPAS
Fig. 14. (fig. 14). Il se compose de deux *branches*, AC, BC, généralement égales, terminées en *pointe* à l'une de leurs extrémités, A, B, et réunies à l'autre extrémité C que l'on appelle la *tête* du compas, par une articulation qui permet aux branches de *s'ouvrir* ou de *s'écarter* plus ou moins l'une de l'autre. L'une des pointes A est destinée à *marquer* le centre, tandis que l'autre B doit être *armée* convenablement (n° 4) pour pouvoir tracer une ligne.

Lorsqu'on veut décrire, au moyen du compas, sur un plan donné, une circonférence dont le centre soit situé en un point donné A du plan, et dont le rayon ait une longueur déterminée AB, on commence par donner à l'instrument une *ouverture* égale à la longueur donnée, c'est-à-dire telle que les deux pointes puissent être placées en même temps sur les extrémités de cette longueur ; ensuite, on fixe la pointe A sur le point donné, et l'on fait glisser la pointe B sur le plan donné : cette dernière pointe, en tournant autour du point A, trace la circonférence demandée. C'est ce qu'on appelle *Décrire une circonférence d'un point donné* A *comme centre, et d'un rayon égal à une droite donnée* AB.

26. Le moyen que nous venons d'indiquer pour décrire la circonférence, n'est praticable que lorsque le cercle doit être de petites dimensions. Dans le cas contraire [pourvu toutefois que le plan sur lequel on opère soit horizontal] on prend un *cordeau* (n° 23) AB (fig. 15) d'une longueur égale au rayon; Fig. 15. on attache un *piquet* à chacune de ses extrémités; on fixe l'un de ces piquets au point A que l'on a pris pour centre, et, avec le second piquet B, on trace dans le plan donné une ligne qui [en supposant le cordeau toujours tendu] est la circonférence demandée.

On peut aussi, sur un plan quelconque, employer, à la place du cordeau, une règle suffisamment longue (*).

Division générale de cet Ouvrage.

27. Les figures planes étant celles que l'esprit se représente le plus facilement, et les propriétés de toutes les figures se ramenant d'ailleurs à celles des figures planes, c'est par ces dernières que commence ordinairement l'étude de la Géométrie : de là résulte une division naturelle de cette science en deux parties.

La première, uniquement bornée aux propriétés des figures planes (n° 13), ainsi qu'à la mesure des diverses sortes d'étendue qu'elles présentent (n° 2), est appelée Géométrie Plane.

(*) On fait encore usage, dans la Géométrie *pratique*, de quelques autres instrumens que ceux dont il vient d'être question; mais leur emploi n'a pour but que d'abréger ou de simplifier des opérations *graphiques* que l'on pourrait, à la rigueur, exécuter avec la règle et le compas seulement. Nous donnerons, dans une note placée à la fin de l'ouvrage, la description et la théorie de quelques-uns des principaux; et nous indiquerons la manière de s'en servir.

La seconde, qui comprend les propriétés des figures dont les diverses parties ne sont pas dans un même plan, ainsi que la mesure de leurs étendues, a reçu le nom de GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

Mais de tous les objets, en nombre infini, qui occupent un aussi vaste champ, la ligne droite et le cercle, ainsi que certaines surfaces dont ces lignes représentent les intersections ou qui en dérivent, sont les seuls que l'on considère dans ce que l'on est convenu d'appeler la GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE ou les ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE. Encore même serait-il impossible de faire entrer dans ces élémens toutes les propriétés de ces lignes ou de ces surfaces. On doit donc se borner à exposer les principales, en ayant soin de faire ressortir celles dont l'existence une fois constatée suffit ensuite pour conduire à la découverte de toutes les autres.

28. Pour faciliter l'étude que nous allons entreprendre, et aider la mémoire à retenir l'ordre et l'enchaînement des matières qu'elle embrasse [ce qui est indispensable si l'on ne veut s'exposer à violer à chaque instant les premiers principes de la *Logique*], nous diviserons en *quatre* LIVRES le corps entier de notre ouvrage.

Les *deux premiers* comprendront tout ce qui constitue la *première partie* ou la *Géométrie plane;* et les *deux derniers* formeront la *seconde partie* ou la *Géométrie dans l'espace.*

Nous examinerons spécialement dans le *premier* livre celles des *propriétés de la ligne droite et du cercle*, dans lesquelles on fait abstraction de la mesure de l'étendue. Ainsi nous y éviterons l'emploi des proportions et de toute relation numérique autre que celles qui se rattachent à l'égalité absolue des figures.

Le *deuxième* livre présentera au contraire l'exposition des propriétés de ces mêmes figures, qui dépendent plus particulièrement du *calcul numérique*. Ainsi, par exemple, la théorie des *lignes proportionnelles*, celle de la *similitude* des figures planes qui en dépend, la détermination du *rapport de la* *circonférence au diamètre*, la mesure des *aires* des figures planes limitées par des lignes droites ou circulaires, etc., feront partie de ce second livre.

A la suite du deuxième livre, nous placerons, sous forme d'APPENDICE, un recueil d'*applications* relatives à la *Géométrie plane*, qui termineront ainsi la *première* partie du cours.

Le *troisième* livre traitera des *propriétés du plan et de la ligne droite considérés dans l'espace*, et de quelques-unes des *surfaces les plus simples* après la surface plane, abstraction faite de la mesure de toute espèce d'étendue.

Le *quatrième* livre contiendra la théorie de la *similitude* des figures terminées par des surfaces planes ou par d'autres surfaces, ainsi que la détermination de la mesure de leurs *aires* et de leurs *volumes*.

Enfin, un second APPENDICE, composé d'*applications* relatives à la *Géométrie dans l'espace*, complétera cette seconde partie et l'ouvrage entier.

D'ailleurs, chacun des quatre livres dont nous venons de faire l'énumération, sera divisé en *chapitres*, les chapitres seront subdivisés en *paragraphes*, et chaque paragraphe comprendra un certain nombre de *propositions*, de *questions*, etc.

Quant aux deux *appendices* consacrés aux applications, chacun d'eux sera partagé en deux chapitres, l'un relatif aux figures, l'autre à l'étendue, soit sur un plan, soit dans l'espace; et chaque chapitre sera également divisé en paragraphes, renfermant chacun un groupe de questions analogues.

Des diverses espèces de Propositions et de Questions.

29 Il y a plusieurs sortes de propositions et de questions que l'on distingue les unes des autres par autant de termes différens qu'il faut d'abord *expliquer*. Ces sortes d'explications se nomment des *définitions*: ainsi, par exemple, nous venons de définir le mot DÉFINITION.

Autres exemples: — En expliquant (n° 2) ce que l'on entend par le mot *Géométrie*, nous avons donné la définition de la Géométrie ; de même, en expliquant ce que c'est que la *ligne droite* (n° 5), le *plan* (n° 8), le *cercle* (n° 16), etc., nous avons défini la ligne droite, le plan, le cercle, etc.

En général, on ne saurait attacher une trop grande importance aux définitions : des définitions précises sont le commencement ou le préambule nécessaire de toute théorie exacte, de tout raisonnement rigoureux.

30. L'Axiome est une *vérité évidente par elle-même*, et dont le simple énoncé suffit pour en faire immédiatement reconnaître l'existence; telles sont les suivantes :

1° *Un tout est plus grand que chacune de ses parties prise séparément ;*

2° *Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles ;*

3° *Deux quantités égales, augmentées ou diminuées à la fois d'une même quantité, donnent des résultats égaux.*

31. La Demande [en latin *postulatum*] est une *proposition du même genre que l'axiome*, qui n'a peut-être pas *immédiatement* le même degré d'évidence, mais que l'on peut cependant admettre sans preuve ; telles sont les propositions suivantes, dont, avec un peu d'attention, on sentira tout de suite la vérité :

1° *Entre deux points déterminés il n'existe qu'un seul plus court chemin*, c'est-à-dire qu'*Entre deux points on ne peut mener qu'une seule ligne droite ;* proposition qui ne doit pas être confondue avec celle du n° 6 : *Deux droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue ;*

2° *Il existe des surfaces sur lesquelles on peut, en chacun de leurs points, appliquer une ligne droite dans tous les sens.* [Ce sont les surfaces que nous avons nommées planes (n° 8).]

Au reste, la vérité des propositions que l'on nomme *demandes* est souvent susceptible d'être prouvée rigoureusement.

C'est ce qui est arrivé, par exemple, pour les propositions des nos 6 et 9, que nous aurions pu, à l'exemple de plusieurs auteurs, présenter simplement sous forme de demandes. Dans tous les cas semblables, si l'on préfère assimiler les demandes aux axiomes, c'est que la longueur ou les embarras de la route qu'il faudrait suivre pour les prouver, ne seraient pas compensés par le faible avantage qui pourrait provenir d'un peu plus de rigueur dans la manière d'établir les propositions dont il s'agit.

La demande forme une sorte de transition entre l'axiome et le théorème, autre sorte de proposition dont nous parlerons tout à l'heure.

32. Le Lemme est une proposition préliminaire peu digne d'attention pour elle-même, et dont l'objet principal est de servir de *préparation aux propositions ou aux questions qui doivent suivre*. Ce qui caractérise encore le lemme, c'est que, le plus ordinairement, il est emprunté à une autre science ou à une autre partie de la science que celle dont il forme l'introduction, ou que du moins il n'a pas avec elle un rapport bien direct.

33. Le Théorème est une *proposition dont la vérité n'est pas évidente par elle-même, mais le devient au moyen d'un raisonnement appelé* Démonstration. Telle est la proposition du n° 18.

Dans l'*énoncé* d'un théorème [et généralement d'une proposition quelconque], on peut ordinairement distinguer deux parties, dont la première, nommée Hypothèse, est une *supposition* faite sur un certain Sujet considéré comme principal, et dont l'autre, nommée Conclusion, est la *conséquence* de cette supposition.

Exemple : — *Un cercle étant tracé dans un plan* [sujet], *si un point de ce plan est à une distance du centre égale au rayon* [hypothèse], *ce point est* (n° 17) *sur la circonférence* [conclusion].

34. La Réciproque d'une proposition est une autre *proposition établie en sens inverse* de la première, de telle sorte

que le sujet principal restant le même, la conclusion primitive prend la place de l'hypothèse, *et vice versâ*.

Exemples : — 1° *Tout diamètre d'un cercle divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales* (n° 18) ; ou bien *Toute corde* [sujet] *qui passe par le centre d'un cercle* [hypothèse] *divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales* [conclusion].

Réciproquement : — *Toute corde* [même sujet] *qui divise un cercle ou sa circonférence en deux parties égales* [hypothèse] passe par le centre [conclusion], et par conséquent cette corde *est un diamètre*.

2° *Toute figure est étendue* (n° 2) [proposition directe ou primitive] ; et *Toute étendue est figurée* [proposition inverse ou réciproque].

C'est comme si l'on disait : *Toute chose* [sujet] *qui a une figure* [hypothèse] *a une étendue* [conclusion] ; et réciproquement, *Toute chose* [même sujet] *qui a une étendue* [hypothèse] *a une figure* [conclusion].

3° Réciproque de l'axiome 3ᵉ du n° 30 : — *Deux quantités sont égales lorsque, augmentées ou diminuées à la fois de quantités égales, elles donnent des résultats égaux.*

35. Souvent une même proposition admet plusieurs réciproques : ainsi, lorsque l'hypothèse peut se décomposer en plusieurs suppositions partielles indépendantes les unes des autres, la démonstration de chacune d'elles fournit une réciproque particulière. *Exemple : — On suppose démontré qu'*Une droite passant par deux points déterminés, A, B, passe aussi par un troisième point déterminé C ; — *Réciproque* 1ʳᵉ : Toute droite qui passe par les points A et C passe par le point B ; — *Réc.* 2ᵉ : Toute droite qui passe par les points B et C passe par le point A.

Au contraire, *Il existe beaucoup de propositions dont les réciproques sont fausses*. Telle serait la réciproque suivante de l'axiome 2ᵉ du n° 30 : deux quantités égales entre elles sont égales à une troisième quelconque. La fausseté de cette dernière proposition saute aux yeux ; mais il s'en faut bien qu'une absurdité puisse toujours se reconnaître aussi facilement. De là résulte, en général, la nécessité, soit de démontrer les propositions inverses lorsqu'elles sont vraies et qu'elles ne sont pas d'ailleurs des conséquences évidentes de leurs directes, soit, quand elles sont fausses, d'en faire ressortir l'absurdité.

Quelquefois aussi, une proposition qui est en apparence la réciproque d'une autre ne fait que reproduire cette dernière en d'autres termes. Telle est la proposition suivante par rapport à l'axiome 1er ci-dessus (nº 30) : *La partie est plus petite que le tout.*

Enfin, il y a des propositions qui ne sont susceptibles d'aucune sorte de *renversement,* c'est-à-dire dont les énoncés pris *à rebours* n'offrent aucun sens raisonnable à l'esprit.

36. Le Corollaire est la *conséquence immédiate d'une proposition qui précède.* On doit voir, par cette définition, qu'il ne saurait exister de différence bien essentielle entre un corollaire et un théorème : car, d'une part, presque tous les théorèmes sont des conséquences de ceux qui les précèdent plus ou moins immédiatement, et, d'autre part, les corollaires *sont souvent* des propositions aussi importantes que les théorèmes qui y conduisent. Aussi pourrait-on, dans bien des cas, employer indifféremment l'une ou l'autre des deux dénominations ; seulement, celle de corollaire appliquée à une proposition, suppose ordinairement que, quand il faut un nouveau raisonnement pour l'établir, ce raisonnement est simple et court, et pourrait presque toujours être sous-entendu sans inconvénient.

37. Le Problème est une *question* qui a pour objet la *détermination de certaines choses inconnues,* au moyen d'une ou de plusieurs autres choses *connues* ou *données* qui ont avec les premières des relations indiquées par l'énoncé. *Résoudre un problème,* c'est parvenir à la détermination de ces choses inconnues ; et le résultat auquel on parvient s'appelle la Solution du problème.

Les problèmes de Géométrie peuvent se grouper en deux espèces principales : les *problèmes graphiques* ou relatifs aux *figures*, et les *problèmes numériques* ou relatifs à l'*étendue* (nº 2).

38. Les *problèmes graphiques* consistent à *tracer* une figure qui remplisse certaines conditions données, c'est-à-dire à *décrire* certaines lignes inconnues qui aient certaines relations déterminées avec certaines lignes données (nº 37), soit de forme et de position, soit de grandeur seulement ; et c'est là ce qu'on appelle *faire la construction du problème.*

Quant aux *problèmes numériques* de la Géométrie, ils consistent simplement en *applications* particulières des propositions générales relatives à la mesure des différentes sortes d'étendue. Les questions de cette espèce rentrant donc, sous certain point de vue, dans le domaine de l'*Arithmétique*, on pourrait, à la rigueur, les séparer du cours de Géométrie proprement dit. Mais comme, d'un autre côté, il est très important que les élèves soient habiles à appliquer des connaissances qui, s'ils en négligeaient la *pratique*, leur deviendraient à peu près inutiles, nous avons cru devoir, pour cette raison, réunir dans les deux appendices dont il a été question plus haut (nº 28), un choix nombreux et varié de problèmes de ce genre, qu'il est d'ailleurs facile de multiplier autant qu'on le juge convenable.

Au reste, il existe encore des problèmes *mixtes* qui tiennent à la fois des problèmes graphiques et des problèmes numériques. Ainsi, tantôt il y a une construction préparatoire à effectuer pour arriver à un résultat numérique, tantôt il y a des longueurs à mesurer pour fixer la position de certains points d'une figure, etc. On rencontrera, par la suite, des exemples de ces différens cas.

39. Outre les diverses classes de problèmes dont nous venons de parler, et que l'on peut comprendre sous la dénomination commune de *problèmes pratiques*, puisque leur résolution consiste toujours dans des opérations manuelles, ou dans des applications particulières de propositions précédemment dé-

montrées, on doit encore distinguer un autre genre de questions dont la solution fournit, au contraire, de nouvelles connaissances générales, et auxquelles on pourrait, par cette raison, appliquer le nom de *problèmes théoriques*.

Mais ces sortes de questions étant, en réalité, bien moins des problèmes que de véritables théorèmes auxquels on est obligé de donner une forme empruntée, parce qu'il serait long ou difficile, et quelquefois même impossible, de les énoncer clairement sous la forme qui leur est propre, on doit, pour agir conséquemment, les classer parmi les théorèmes. D'ailleurs, comme on le conçoit facilement, il n'est aucune proposition qu'à la rigueur on ne puisse, en intervertissant l'ordre des idées, transformer en une question à résoudre, *et vice versâ*.

40. Nous observerons en outre que beaucoup de problèmes, surtout les problèmes numériques, sont susceptibles, comme les théorèmes, de donner lieu à des *problèmes réciproques* ou *inverses* : c'est ce qui arrive lorsque, après avoir résolu une question, l'on s'en propose une autre dans laquelle les inconnues de la première sont prises, en totalité ou en partie, pour données de la seconde, *et vice versâ*. Ainsi, *Etant donnée une circonférence, déterminer son rayon*, et *Etant donné le rayon, déterminer la circonférence*, sont deux problèmes réciproques l'un de l'autre. — La solution des problèmes inverses peut servir de *preuve* ou de *vérification* à celle des *problèmes directs*.

41. Enfin, pour terminer l'énumération qui précède, il nous reste à parler du SCOLIE. On nomme ainsi une *remarque* ou *observation* faite *sur une ou sur plusieurs des propositions ou des questions précédentes*, et ayant pour objet de faire ressortir l'*extension* qu'on peut leur donner, les *restrictions* auxquelles elles sont soumises, leur *liaison* mutuelle, leur *utilité*, etc. Quelquefois aussi, le scolie est une portion de théorème que l'on juge assez importante par elle-même pour mériter une attention spéciale.

Au reste, nous emploierons généralement le titre de *scolie* quand les observations auxquelles il devra s'appliquer n'auront qu'une petite étendue et porteront principalement sur *une* proposition ou sur une question déterminée ; dans tous les cas contraires, nous nous servirons du mot REMARQUE.

Souvent, le scolie donne lieu à établir de nouvelles définitions, à démontrer de nouveaux théorèmes, à résoudre de nouveaux problèmes : nous en rencontrerons fréquemment des exemples.

Méthodes de Démonstration et de Résolution.

42. Des différens moyens de démonstration particuliers à la Géométrie, le plus fécond à la fois, et le plus simple lorsqu'il est susceptible d'être employé, se trouve sans contredit dans la SUPERPOSITION des figures (n° 3). Il consiste à prouver que l'on peut faire coïncider, ou que l'on peut appliquer exactement l'une sur l'autre, deux figures ou portions de figures ; et alors, ou bien de la superposition possible des deux figures totales on conclut l'égalité de toutes leurs parties *chacune à chacune ;* ou bien de la superposition des *parties essentielles* des deux figures, c'est-à-dire des parties qui, une fois données, déterminent toutes les autres, on conclut l'égalité des figures totales, et par suite celle de toutes les autres parties.

43. *Il existe pour les figures planes deux modes différens de superposition.* — C'est ce qu'on admettra sans peine si l'on observe que toute figure tracée d'abord sur un plan, et ensuite détachée de ce plan par la pensée, offre toujours deux *faces* que l'on peut appeler le *dessus* et le *dessous* (n° 11) de la figure, ou bien, en termes vulgaires, *l'endroit* et *l'envers*. Or, les deux faces qui, dans la superposition, s'appliquent l'une *contre* l'autre, peuvent être, ou les deux faces de même nom, ou les deux faces de noms contraires. On a un exemple du premier cas dans la démonstration employée n° 18 pour faire voir que *Tout diamètre* [d'un cercle] *divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales.* La proposition du n° 17, que *Deux circonférences de même rayon sont égales,* offre un exemple

du second cas. Nous dirons que la *superposition* est *directe* lorsque les deux faces de noms contraires sont appliquées l'une contre l'autre, ou, ce qui est la même chose, lorsque les deux faces de même nom *regardent* la même région (n° 11) de l'espace; et nous nommerons *superposition inverse* celle qui a lieu dans le cas contraire. De plus, pour exprimer que deux figures sont *inversement superposables*, nous dirons qu'elles sont *symétriques entre elles*, ou plus simplement, *symétriques*.

44. Cela posé, pour obtenir la coïncidence de deux figures tracées dans le même plan, il y a généralement trois sortes de mouvemens distincts et successifs à faire prendre à la figure supposée mobile, avant de l'amener à se confondre avec la figure fixe.

Soient en effet (fig. 16) ABC ou *abc* la figure fixe, et A′B′C′ ou *a′b′c′* la figure mobile que l'on veut faire coïncider avec la première [les *points homologues*, c'est-à-dire ceux qui doivent se confondre deux à deux dans la superposition, étant désignés par les mêmes lettres]. Fig. 16.

Premier mouvement : la *translation* ou la *transposition*.— Faisons *glisser* la figure A′B′C′ ou *a′b′c′* (fig. 16) dans son plan, de manière que l'un de ses points, A′ ou *a′*, vienne coïncider avec son homologue, A ou *a* (fig. 17), de la figure ABC ou *abc*. Fig. 17.

Deuxième mouvement : la *rotation* ou le *pivotement*. — Faisons *tourner* la figure A′B′C′ ou *a′b′c′* (fig. 17), toujours en glissant dans son plan, autour du point A ou *a* supposé fixe, de manière qu'un second point, B′ ou *b′*, vienne coïncider avec son homologue B ou *b* (fig. 18 et 19). [Le point A prend, dans ce mouvement, le nom de *centre de rotation*]. Fig. 18 et 19.

Troisième mouvement [auquel on n'a jamais recours que pour la superposition inverse] *:* le *rabattement* ou le *renversement*. — *Plions* la figure totale *abca′b′c′* (fig. 19) le long de la droite *ab* ou *a′b′*; faisons tourner la partie *a′b′c′* autour de *ab* comme *charnière* (n° 11) en soulevant le point *c′* au-dessus du plan de la figure fixe, et continuons ce mouvement jusqu'à ce que le point *c′* revienne, de l'autre côté de *ab*, retomber dans Fig. 19.

le plan et se placer sur son homologue *c*. [La droite *ab* est dite l'*axe de rabattement* ou *de symétrie*.]

45. Ces trois mouvemens effectués, les deux figures, supposées égales, se confondent nécessairement; mais notons bien que tous les trois ne sont pas toujours nécessaires : c'est ainsi que le rabattement dans le n° 18, et la translation dans le n° 17, ont suffi pour déterminer la coïncidence.

Il est important d'observer encore que le troisième mouvement, le rabattement, est celui qui caractérise le genre de superposition : c'est-à-dire que la superposition est directe quand on n'est pas obligé, pour l'exécuter, de *retourner* l'une des figures *sens dessus dessous*, comme dans la série des figures ABC, A'B'C' (fig. 16, 17, et 18); et au contraire, que la superposition est inverse quand le rabattement est nécessaire, comme dans les figures *abc*, *a'b'c'* (fig. 16, 17, et 19), lesquelles sont alors *symétriques* entre elles (n° 43).

Remarquons enfin, que, dans beaucoup de cas, les deux modes de superposition pourraient s'exécuter sur les mêmes figures. C'est ainsi que la proposition du n° 18 se démontrerait tout aussi bien en faisant *pivoter* l'un des demi-cercles autour de son centre, et que, dans celle du n° 17, on pourrait au contraire *renverser* les deux cercles l'un sur l'autre.

46. Quoique nous n'ayons parlé que de la superposition des figures planes, ce que nous en avons dit s'applique également, à quelques légères modifications près, aux figures considérées dans l'espace. Ainsi, pour faire coïncider, dans l'espace, deux figures égales, ABC..., A'B'C'..., il faudra de même faire prendre à la figure mobile A'B'C'... trois mouvemens successifs.

1°. On *transportera* A'B'C'... de manière que le point A', par exemple, décrivant une ligne droite [ou une ligne quelconque], vienne se placer sur son homologue A.

2°. On amènera un second point B' à coïncider avec son homologue B, en faisant *pivoter* la figure A'B'C'... autour du point A. [Le point B' devra, pour plus de simplicité, dans ce second mouvement, rester constamment dans le plan déterminé (n° 9) par sa position primitive et par les points A et B.]

3°. Enfin, on fera faire à la figure A'B'C'... une *révolution* autour de la droite AB [que l'on nomme alors l'*axe de révolution*], de manière qu'un troisième point C' vienne coïncider avec son homologue C :

Et alors les deux figures, supposées égales, se confondront.

On voit par là que, *Pour les figures dans l'espace, il n'y a qu'une seule sorte de superposition* ou d'égalité; et l'on aperçoit sans peine que les deux modes de superposition que nous avons signalés dans les figures planes, en sont deux cas particuliers.

Au reste, devant avoir une foule d'occasions de revenir sur l'égalité et la superposition des figures, nous n'en parlerons pas davantage pour le moment.

47. Il existe un autre mode de démonstration plus fécond encore que le premier, en ce que ses applications, ne se bornant pas à la seule Géométrie, peuvent s'étendre à toutes les sciences de raisonnement. Cette méthode, connue sous le nom de Réduction a l'Absurde, consiste à supposer d'abord que la proposition à établir ne soit pas vraie, puis, par quelques raisonnemens fondés sur des vérités déjà reconnues, à faire ressortir une contradiction, soit avec quelqu'une de ces vérités, soit avec la supposition elle-même.

Un pareil genre de démonstration, quoique très rigoureux, a pourtant quelque chose d'*indirect*; aussi ne doit-on en faire usage qu'avec circonspection, et lorsqu'on a déjà acquis, par des considérations quelconques, un pressentiment de l'existence de la proposition qu'il s'agit de démontrer : c'est ce qui arrive en particulier dans les propositions *réciproques* (n° 34).

48. Prenons pour exemple le théorème du n° 18, dont la réciproque est la seconde citée n° 34; et voyons comment on démontre cette réciproque par la réduction à l'absurde.

Il s'agit de prouver que *Toute corde* AG (fig. 20) *qui divise un cercle* OA *ou sa circonférence en deux parties égales, est un diamètre*. Fig. 20.

En effet, si AG n'était pas un diamètre, on pourrait toujours mener par le point A un diamètre AOD; et l'on aurait, en vertu de la proposition directe, ABD égal à DCA. Or ABG est évidemment plus petit que ABD, tandis qu'au contraire, GCA est plus grand que DCA ou ABD; donc ABG est plus petit que GCA : ce qui implique contradiction avec la supposition que ces deux arcs ou ces deux segmens sont égaux. Donc il est impossible que AG ne soit pas un diamètre.

On peut raisonner d'une manière plus simple en disant :
« Il passe certainement par le point A une corde *unique* ayant
» la propriété de partager le cercle en deux parties équiva-
» lentes; et il passe aussi par le point A un diamètre unique
» (nº 7); or ce diamètre partage le cercle en deux parties
» équivalentes : donc les deux droites se confondent. »

49. En généralisant cette dernière manière de raisonner, on est évidemment conduit à établir l'axiome suivant :

Toutes les fois que, dans une figure, il existe quelque ligne remplissant à la fois plusieurs conditions qui ne sont pas toutes nécessaires à la détermination de cette ligne, on peut affirmer que toute ligne de même nature que la première sera identique avec elle, si, parmi ces conditions, elle en remplit un nombre suffisant pour la déterminer.

On a une application bien simple de ce principe, dans la proposition prise pour exemple au commencement du nº 35. En effet, puisque l'on suppose démontré que la droite qui passe par les deux points A et B, passe aussi par le troisième point C; comme d'ailleurs il suffit de *deux* points pour déterminer une droite, on peut établir immédiatement les deux réciproques citées.

50. Voici de nouveaux exemples fort simples de propositions et de leurs réciproques, lesquels donneront lieu à établir un autre principe général également fort important.

— *Un cercle étant tracé sur un plan :*

1º *Tout point situé sur la circonférence est à une distance du centre égale au rayon;*

2° *Tout point situé en dedans du cercle est à une distance du centre plus petite que le rayon ;*

3° *Tout point situé en dehors du cercle est à une distance du centre plus grande que le rayon.*

La première de ces propositions est comprise dans la définition même du cercle, et les deux autres en sont des conséquences évidentes.

Réciproquement : — *Un cercle étant donné sur un plan,*

1° *Tout point dont la distance au centre est égale au rayon, est situé sur la circonférence ;*

2° *Tout point dont la distance au centre est plus petite que le rayon, est situé en dedans du cercle ;*

3° *Tout point dont la distance au centre est plus grande que le rayon, est situé en dehors du cercle.*

Ces trois réciproques résultent nécessairement de l'existence déjà bien constatée des trois propositions directes. Ainsi, par exemple, si le point est à une distance du centre, moindre que le rayon, il ne peut être situé qu'en dedans du cercle ; car, pour qu'il fût situé sur la circonférence ou en dehors du cercle, il faudrait, en vertu de la première et de la troisième des propositions directes, que sa distance au centre fût égale au rayon ou plus grande que le rayon : ce qui, dans un cas comme dans l'autre, serait contraire à l'hypothèse, et par conséquent absurde.

51. On peut évidemment fonder sur la remarque précédente cet autre axiome :

Toutes les fois que, dans une proposition ou dans une série de propositions, toutes les hypothèses admissibles ont été faites sur un sujet déterminé, et que ces hypothèses ont conduit à des conclusions respectives essentiellement distinctes et telles que chacune d'elles exclue toutes les autres, on peut affirmer que les réciproques des propositions établie sont toutes vraies.

Ainsi, en revenant sur les trois premières propositions du numéro précédent, comme il est visible 1°. que le point pris pour *sujet* ne peut avoir que *trois* sortes de positions essentiellement différentes dans le plan du cercle ; 2°. que pour chacune de ces positions, il y a une conclusion particulière relativement à sa distance au centre ; et 3°. qu'enfin une quelconque de ces trois conclusions exclut les deux autres, on ne saurait plus révoquer en doute l'existence des trois réciproques.

52. Nous engageons les commençans à se bien pénétrer des deux principes précédens qui, tantôt l'un, tantôt l'autre, sont applicables à la plupart des réciproques.

Le dernier de ces deux principes (n° 51) peut servir en outre à expliquer pourquoi certaines réciproques sont fausses (n° 35). Il fait voir que telles sont particulièrement les réciproques des théorèmes dont la conclusion ne convient pas seulement à l'hypothèse établie, mais encore à d'autres hypothèses faites sur le même sujet.

Par exemple, si la réciproque de l'axiome 2° du n° 30 est fausse (n° 35), cela tient à ce que deux quantités sont égales entre elles, non-seulement quand elles sont respectivement égales à une troisième, mais encore lorsqu'elles sont à la fois *doubles, triples, quadruples, ... sous-doubles....,* etc., d'une troisième quelconque.

53. Passons maintenant aux moyens de résolution des problèmes.

Pour parvenir à la solution (n° 37) d'un problème graphique (n° 38), on peut employer deux MÉTHODES distinctes : l'ANALYSE, ou la SYNTHÈSE.

Lorsqu'on veut procéder par la *méthode analytique*, on commence par *supposer le problème résolu*, c'est-à-dire par décrire sans instrument, et tant bien que mal, une figure à laquelle *on suppose* les propriétés exigées par l'énoncé (*). Alors,

(*) Il arrive ainsi bien souvent, dans la démonstration des théorèmes comme dans la résolution des problèmes, que les constructions ont seulement pour but de diriger le raisonnement. En pareil cas, elles n'ont pas besoin d'être faites avec beaucoup de soin ; il n'est pas même nécessaire que l'on par une suite d'opérations préparatoires et de conséquences successives tirées des relations qui lient les *données* aux *inconnues*, ou *tâche* de découvrir quelque construction qui, réellement exécutée, conduirait à la véritable solution ; ou bien, on ramène la question proposée à d'autres questions plus ou moins simples que l'on sait déjà résoudre. C'est en procédant de cette manière que l'*on fait* ce qu'on appelle *l'analyse du problème*.

La *méthode synthétique* est l'inverse de la précédente : elle consiste à prescrire tout d'abord les opérations à effectuer, sauf à prouver ensuite que le résultat de cette construction satisfait aux conditions du problème.

54. Pour donner un exemple de l'emploi de ces deux méthodes, proposons-nous le problème suivant :

Deux points, A et B (fig. 10), *étant donnés sur un plan, trou-* Fig. 10.
ver dans ce plan un troisième point C *qui soit à une distance du point* A *égale à* 3 *unités de longueur, et à une distance du point* B *égale à* 2 *unités.*

Si l'on veut procéder par l'analyse, voici comment on raisonnera :

« Supposons le problème résolu, et soit C le point cherché ;
» en menant les droites AC, BC, on aura AC égal à 3 unités,
» et BC égal à 2. Or, tous les points qui sont à une distance
» du point A égale à 3, sont situés sur une circonférence dé-
» crite du point A comme centre, avec un rayon égal à 3 ; et
» tous les points qui sont à une distance du point B égale à 2,
» sont situés sur une circonférence décrite du centre B et
» d'un rayon égal à 2. D'où résulte la construction suivante :
» — 1° *Du point* A *comme centre, et d'un rayon égal à* 3
» *unités de longueur, décrivons une circonférence de cercle ;*

---

sache sur quels principes elles sont fondées, ni par quels moyens on pourrait les effectuer. Il suffit de tracer grossièrement des lignes auxquelles on suppose les propriétés dont il est question ; et l'on conçoit sans peine que les vérités générales découvertes à l'aide de pareilles figures sont tout aussi rigoureusement établies que si les opérations eussent été parfaitement exécutées.

» 2° *du point* B *comme centre et d'un rayon égal à* 2 *unités*;
» *décrivons une autre circonférence* : le point cherché se trou-
» vera à la rencontre C des deux circonférences. »

Si, au contraire, on veut employer la synthèse, on dira :
« 1° *Du centre* A *et d'un rayon égal à* 3 *unités, décrivons*
» *une circonférence*; 2° *du centre* B *et d'un rayon égal à* 2,
» *décrivons une autre circonférence* : le lieu C où les deux cir-
» conférences se rencontrent est le point cherché. — En effet,
» tout point de la première circonférence est situé à une dis-
» tance du point A égale à 3, et tout point de la seconde est situé
» à une distance du point B égale à 2; donc tout point commun
» aux deux circonférences est *une solution* du problème. »

55. On voit que ces deux méthodes ont chacune leur caractère propre. La première est la *méthode d'invention*; son emploi est indispensable pour conduire à la connaissance d'une construction qui satisfasse aux conditions exigées. La seconde est la *méthode de démonstration*; elle ne peut s'employer que lorsque l'analyse a déjà fait connaître cette construction; mais elle en démontre plus directement l'efficacité. Celle-ci est plus courte, parce qu'en l'employant, on marche droit à un but que l'on aperçoit d'avance. Celle-là est plus longue, d'abord parce que son emploi suppose des tâtonnemens pour parvenir à un but que l'on n'aperçoit pas immédiatement; et ensuite parce qu'après avoir découvert ce but par l'analyse, on ne peut, le plus souvent, se dispenser d'avoir recours encore à la synthèse pour démontrer complètement que les conditions voulues sont bien remplies.

En général, nous emploierons simultanément ces deux méthodes dans la résolution des problèmes graphiques. Cependant, quand la construction se présentera d'elle-même assez naturellement, nous nous dispenserons d'avoir recours à l'analyse; et de même, nous abrégerons la synthèse en ne donnant que la construction sans démonstration, lorsque l'analyse aura suffisamment indiqué cette démonstration, qui, dans tous les cas, n'est au fond que l'analyse renversée.

56. Au reste, l'emploi des méthodes dont nous parlons ne se borne pas à la résolution des problèmes : toutes deux peuvent être appliquées aux théorèmes, l'analyse pour les *découvrir*, et la synthèse pour les *démontrer*. Toute la différence se réduit en réalité à ceci : que *L'énoncé suit ou précède la démonstration, suivant que l'on fait usage de l'analyse ou de la synthèse.*

Néanmoins, la méthode synthétique ayant, par sa nature, quelque chose de moins diffus que la méthode analytique, doit lui être généralement préférée pour la démonstration des théorèmes dont l'existence a déjà été reconnue ; et au contraire la méthode analytique, la seule susceptible de *conduire* l'esprit dans la recherche de nouvelles connaissances, aura le plus ordinairement l'avantage lorsqu'il s'agira de découvrir la solution d'un problème.

En résumé, l'*analyse* sert à *trouver* les vérités *inconnues*, et la *synthèse* à *prouver* les vérités *connues*.

57. Pour que la résolution d'un problème soit complète, il faut encore, dans la plupart des cas, que l'analyse ou la synthèse soit accompagnée d'une *discussion*. On nomme ainsi l'examen détaillé des circonstances variables de la question, et des conséquences particulières qu'elles entraînent, d'où il résulte que, suivant les cas, le problème est *déterminé*, ou *indéterminé*, ou bien *impossible* : c'est-à-dire qu'il a *un nombre limité* de solutions, ou *un nombre illimité*, ou bien qu'il n'en a *aucune*. C'est ainsi que dans le problème fort simple pris tout à l'heure pour exemple (n° 54), on peut voir aisément que dans certaines circonstances qui sont celles de la figure 10, il y aura *deux* Fig. 10.
solutions ; que dans d'autres, ces deux solutions se réduiront à *une* seule, comme dans la figure 11 ; et enfin qu'il pourrait n'y Fig. 11.
avoir *aucune* solution. C'est d'ailleurs ce dont nous nous convaincrons encore mieux par la suite.

58. Au surplus, il y a une distinction bien essentielle à faire entre le nombre ou la *multiplicité des solutions* d'un même problème, et le nombre ou la *diversité des constructions* que l'on peut employer pour y arriver. Ainsi, d'une part, il peut y

avoir *plusieurs points* différens, *plusieurs lignes*, etc., qui remplissent également certaines conditions exigées ; et, d'un autre côté, il peut y avoir *diverses manières* de parvenir à la détermination de chacun de ces points, de chacune de ces lignes, etc.

Relativement aux divers moyens d'obtenir une même solution, la construction employée peut être plus ou moins *simple*, suivant que le nombre des lignes à tracer est moindre ou plus considérable ; et elle est dite aussi plus ou moins *élégante*, suivant qu'elle tire un parti plus ou moins avantageux des lignes données ou déjà décrites ainsi que des analogies qui peuvent exister entre elles, suivant qu'elle assigne aux lignes inconnues des positions plus ou moins bien appropriées à leur objet, enfin, suivant qu'elle suppose plus ou moins de sagacité de la part de celui qui la découvre.

59. Nous terminerons ce qui a rapport aux méthodes, en signalant deux *faux raisonnemens* très communs de la part des commençans, et contre lesquels on ne saurait trop chercher à les prémunir : ce sont, en termes de Logique, le Cercle vicieux et la Pétition de principe.

Le *cercle vicieux* est un raisonnement dans lequel, pour démontrer une proposition, l'on s'appuie, soit implicitement, soit explicitement, sur une autre qui, d'après la marche qu'on a suivie, ne peut, au contraire, être démontrée qu'à l'aide de la première.

La *pétition de principe* est un raisonnement dans lequel, pour démontrer une proposition, l'on s'appuie sur la proposition elle-même : c'est donc une espèce de cercle vicieux.

Le jugement et la réflexion paraissent suffire pour faire éviter ces deux écueils. Cependant on ne peut se dissimuler que la *mémoire* ne soit également nécessaire, en tenant sans cesse présent à l'esprit, soit l'ordre des différentes propositions, soit l'enchaînement des diverses parties d'une même démonstration. Nous ne saurions donc trop recommander aux élèves de faire tous leurs efforts pour se bien pénétrer de cet ordre et de cet enchaînement : car ce n'est qu'en perdant de vue l'un ou l'autre, que l'on peut commettre, dans le premier cas, un cercle vicieux, et dans le second, une pétition de principe.

Des Rapports et des Proportions en Géométrie.

60. Il est important de bien fixer les idées sur le sens qu'on doit attacher en Géométrie aux mots Rapport, Proportion ; c'est ce que nous allons tâcher de faire en prenant pour exemple la détermination du rapport de deux droites, après avoir toutefois résolu quelques questions subsidiaires qui ne supposent pas d'autres connaissances que celle de l'usage de la règle et du compas.

Problème. (Fig. 21.) — *Trouver une droite égale en longueur à la somme de deux ou de plusieurs droites données, m, n, p,....* Fig. 21.

Pour exécuter cette opération, il faut :

1° Tracer d'une manière quelconque une droite indéfinie AX (n° 22) ; — 2° Prendre une ouverture de compas (n° 25) égale à m, et l'appliquer sur la droite AX, par exemple de A en B ; — 3° Prendre une autre ouverture de compas égale à la seconde droite n, et la porter à la suite de la première et dans le même sens, de B en C ; — 4° Prendre une troisième ouverture de compas égale à p, et la porter à la suite des deux autres de C en D ; .... et ainsi de suite.

La distance entre le point A et l'extrémité de la dernière des droites m, n, p, est la droite cherchée, puisque

$$AB + BC + CD\ldots = m + n + p\ldots$$

Scolie. — On peut, par le même moyen,

Multiplier une droite donnée par un nombre entier donné.

En effet, cette question n'est qu'un cas particulier du problème qui précède, dans lequel on supposerait les droites m, n, p,... égales entre elles et en nombre égal au *nombre* donné. Il est donc inutile de s'y arrêter.

Fig. 22. **Problème.** (Fig. 22.) — *Trouver une droite égale en longueur à l'excès d'une droite donnée m, sur une autre droite donnée n.*

1° Traçons une droite indéfinie AX ; — 2° Portons, au moyen d'un compas, la droite m de A en B ; — 3° Portons la droite n de B en C en sens contraire de la première.

La droite AC sera égale à la droite cherchée, puisque l'on a

$$AC = AB - BC = m - n.$$

Scolie. — En combinant les solutions des deux problèmes précédens, on parviendra sans peine, par des moyens analogues, à

Trouver une droite égale en longueur à la somme d'autant de droites données que l'on voudra, diminuée de la somme d'autant d'autres droites données que l'on voudra.

Fig. 23.

Problème. (Fig. 23.)

61. *Trouver le rapport numérique de deux droites données*, AB, CD.

Portons la plus petite CD sur la plus grande AB, et supposons que la première soit comprise 2 fois dans la seconde, de A en E, avec un reste EB [moindre que CD] : nous aurons

$$AB = 2.CD + EB.$$

Portons maintenant EB sur CD ; et supposons que

$$CD = EB + FD.$$

Portons de même FD sur EB ; et soit

$$EB = 4.FD + GB.$$

Soit enfin

$$FD = 3GB.$$

Il résulte évidemment des égalités précédentes :

$$\begin{aligned} EB &= 4.3.GB + GB = 13.GB \\ CD &= 13.GB + 3.GB = 16.GB \\ AB &= 2.16.GB + 13.GB = 45.GB. \end{aligned}$$

Donc le *rapport* de AB à CD est exprimé par $\frac{45}{16}$: c'est-à-dire que l'on a

$$AB : CD :: 45 : 16.$$

62. Remarquons ici que soustraire CD de AB autant de fois que cela est possible, puis opérer de même sur le reste EB et sur la droite CD, puis sur le reste suivant et sur le premier, et ainsi de suite, c'est traiter les droites AB, CD, comme on traite en Arithmétique deux nombres dont on veut trouver *le plus grand diviseur commun.*

Ainsi, la droite GB étant le dernier diviseur de l'opération, et par conséquent la plus grande droite qui puisse être contenue en même temps, un nombre exact de fois dans AB, et un nombre exact de fois dans CD, doit être considérée comme le plus grand diviseur commun aux deux droites AB, CD. Elle est, pour cette raison, appelée leur *plus grande commune mesure;* et la recherche du rapport des deux droites revient à la recherche de cette plus grande commune mesure.

Quant aux deux nombres 45 et 16 dont le rapport exprime celui des deux droites, ils sont nécessairement *premiers entre eux :* car s'ils avaient pour facteur commun 3 par exemple, 3.GB serait contenu un nombre exact de fois dans AB et un nombre exact de fois dans CD; et alors GB ne serait pas la plus grande commune mesure de ces deux droites, hypothèse qui ne saurait s'accorder avec la nature de l'opération exécutée ci-dessus.

63. ⋚[Il est facile de généraliser la question précédente. Pour cela, soient désignées par A, B, les deux droites dont on veut obtenir le rapport, par q le nombre de fois que la plus petite B peut être portée sur la plus grande A, et par R la droite restante; par q' le nombre de fois que R peut être porté sur B, et par R′ le reste; par q'' le nombre de fois que R′ peut être porté sur R, et par R″ le reste; et ainsi de suite. D'après ces conventions, on aura les égalités suivantes :

$$A = B \cdot q + R \;\ldots (\alpha)$$
$$B = R \cdot q' + R' \;\ldots (\beta)$$
$$R = R' \cdot q'' + R'' \;\ldots (\gamma)$$
$$R' = R'' \cdot q''' + R''' \;\ldots (\delta)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or on déduit de l'égalité (α)...

$$\frac{A}{B} = q + \frac{R}{B},$$

et de l'égalité (β)...

$$\frac{B}{R} = q' + \frac{R'}{R}; \quad \text{d'où} \quad \frac{R}{B} = \cfrac{1}{q' + \cfrac{R'}{R}};$$

donc, en substituant dans la valeur de $\frac{A}{B}$:

$$\frac{A}{B} = q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{R'}{R}}.$$

De même, l'égalité (γ) donne

$$\frac{R}{R'} = q'' + \frac{R''}{R'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{R'}{R} = \cfrac{1}{q'' + \cfrac{R''}{R'}};$$

donc, en substituant dans la dernière valeur de $\frac{A}{B}$:

$$\frac{A}{B} = q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{R''}{R'}}}.$$

Et ainsi de suite.

Donc enfin la valeur de $\frac{A}{B}$ se présente sous la forme d'une *fraction continue* (Voy. l'*Arithmétique*) :

$$\frac{A}{B} = q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{q'''} + \ldots}}.$$

64. Maintenant, il peut se présenter deux cas dans les applications du procédé général que nous venons d'exposer.

Ou bien, après un certain nombre d'opérations partielles, on parvient à un reste qui peut être porté un nombre exact de fois sur le reste précédent, comme il est arrivé dans l'exemple du n° 61. On dit alors que les deux droites sont *commensurables entre elles*, parce que leur rapport peut s'exprimer par celui de deux nombres entiers [nombres que l'on obtient d'ailleurs par des substitutions analogues à celles que nous avons exécutées dans le même numéro].

Ou bien, quelque loin que l'on pousse les opérations partielles, il est impossible de trouver un reste qui soit contenu un nombre exact de fois dans le reste précédent; et dans ce second cas, les deux droites, n'ayant pas de commune mesure assignable, sont dites *incommensurables entre elles*. Ne pouvant plus alors, comme dans le cas précédent, représenter, d'une manière rigoureuse, la valeur du rapport des deux droites par un nombre fractionnaire exact, on est obligé, pour se faire une idée de ce rapport, de s'en tenir à une *approximation* qu'il faut tâcher de pousser aussi loin que possible. Pour cela, on néglige un des restes successifs fournis par l'opération, en regardant comme complet le quotient qui lui correspond; et la valeur du rapport ainsi obtenu sera d'autant *plus approchée* que le *reste* négligé sera *plus petit*, ou que les *quotiens* employés seront *plus nombreux*.

≤[Examinons ce que devient en même temps le rapport des deux droites, considéré sous sa forme de *fraction continue*.

Dans le premier cas, où cette fraction est *limitée*, le rapport des deux droites n'est autre chose que *la dernière réduite* (Voy. l'*Arithmétique*) qui en provient.

Dans le second, au contraire, où la fraction continue, étant composée d'un nombre *illimité* de *fractions intégrantes*, se prolonge indéfiniment, il faut la considérer sous cette forme *indéfinie*, si l'on veut avoir la *seule véritable expression du rapport* cherché. Néanmoins on approchera de plus en plus de cette valeur à mesure que l'on prendra un plus grand nombre de *fractions intégrantes*, ou que l'on calculera un plus grand nombre de réduites.] ≥

Observons toutefois que, dans la pratique, le nombre des opérations partielles a toujours nécessairement un terme, soit parce que les restes successifs finissent bientôt par échapper aux sens en raison de leur petitesse, et qu'on est obligé de les négliger dès qu'ils sont devenus inappréciables, soit encore par suite de l'imperfection des instrumens que l'on emploie. En effet, comme, à chaque opération, les deux *branches* du compas *se ferment* de plus en plus, elles finissent toujours par *se joindre* de manière qu'il devient *physiquement* impossible de les rapprocher davantage. La distance qui reste alors entre les deux *pointes* considérées comme des *points mathématiques* (n° 4), distance qui est plus ou moins petite suivant le degré de perfection de l'instrument, est bien encore mesurable par la pensée ; mais il n'en est pas moins impossible de continuer effectivement l'opération, bien que les deux droites proposées puissent être incommensurables entre elles, comme nous en verrons plus tard des exemples.

65. Cela posé, l'on dit qu'*il y a proportion entre deux quantités* homogènes entre elles [ou de même nature], A, B, *et deux autres* quantités, A′, B′, aussi homogènes, ou que *quatre quantités*, A et B, A′ et B′, *sont proportionnelles*, lorsque la recherche du plus grand diviseur commun, exécutée sur chaque couple de quantités, conduirait de part et d'autre à *la même série de quotiens*, en nombre limité ou en nombre illimité, ≤ [ou bien encore lorsque les deux rapports $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, sont susceptibles d'être exprimés par *la même fraction continue*, soit limitée, soit illimitée] ≥.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

N. B. Dans cette première partie ou dans la Géométrie plane (n° 27), toutes les figures que nous considérerons seront supposées dans un seul et même plan.

LIVRE PREMIER.

DES FIGURES CONSIDÉRÉES DANS UN PLAN.

PRÉLIMINAIRES DU LIVRE PREMIER.

66. D'après ce que nous avons vu précédemment (n° 10), on nomme ANGLE, et quelquefois ANGLE PLAN, chaque *portion indéfinie de plan comprise entre deux droites*, AB, CD (fig. 24), *qui se coupent*; et les deux droites elles-mêmes sont dites *concourantes*. Fig. 24.

Le *point de concours* ou *de rencontre* O (n° 7) est le *sommet* commun des quatre angles formés par les deux droites AB, CD; et chacun des segmens OA, OB, OC, OD, est un *côté* commun à deux angles *consécutifs*.

Un angle se désigne ordinairement par trois lettres dont deux indiquent des points pris respectivement sur les côtés, et dont la troisième, qui doit toujours être placée entre les deux autres dans l'énoncé, indique le sommet. Ainsi les angles de la figure 24 s'énoncent : AOC, COB, BOD, DOA.

Cependant, quand un angle, AOB (fig. 25), est isolé, on peut le désigner simplement par la lettre O du sommet, et dire : *l'angle* O. Fig. 25.

On peut encore, même quand plusieurs angles, consécutifs (fig. 26) ou non, ont le même sommet, les désigner chacun par une seule lettre : *m*, *n*, *p* ... ou par un *numéro* d'ordre : 1, 2, 3 ... Fig. 26.

Les angles (fig. 24) AOC et DOB sont dits *opposés*, ainsi que les angles AOD et BOC. Au contraire, les angles consécutifs AOC et COB, les angles COB et BOD, BOD et DOA, enfin DOA et AOC, pris ainsi deux à deux, sont dits *adjacens*. Fig. 24.

Fig. 27. Enfin, l'on nomme *bissectrice* d'un angle AOB (fig. 27), la droite OC qui partage cet angle en deux angles égaux (n° 3), AOC, COB.

67. Les droites qui, par leurs intersections mutuelles, déterminent les angles, étant toujours censées prolongées à l'infini, ce qui ne saurait avoir lieu dans la réalité; et les angles étant d'ailleurs, d'après leur définition (n° 66), des grandeurs essentiellement indéfinies, peut-être éprouvera-t-on quelque peine à se faire une idée claire de cette espèce de quantité. Mais il est facile de ramener la considération des angles à celle d'autres quantités absolument finies, et qu'il est, par conséquent, plus aisé de se représenter nettement.

Fig. 28. Pour cela, supposons que du sommet O (fig. 28) de chaque angle AOB, comme centre, et avec un certain rayon arbitraire OA, on ait décrit, dans son plan, un arc de cercle ACB, terminé aux deux côtés OA, OB. [Cet arc est ce que l'on nomme *l'arc correspondant à l'angle*, et réciproquement, *l'angle* est *correspondant à l'arc*, ou bien encore il est dit *l'angle au centre* de cet arc.]

Cela posé, il est clair que, dans un même cercle, ou dans des cercles de rayons égaux, OA, O'A',

A des angles égaux, AOB, A'O'B', *correspondent des arcs égaux*, ACB, A'C'B' :

Car si l'on superpose *directement* (n° 43) les deux angles, les points A et A' coïncideront, ainsi que les points B et B', et par suite les arcs ACB et A'C'B' (n° 17).

Il résulte de là qu'à un angle *double, triple, quadruple*... d'un autre, correspond aussi [dans le même cercle] un arc *double, triple, quadruple*... de l'arc correspondant à l'arc *simple*; et généralement,

A un plus grand angle correspond un plus grand arc :

Car il est évident qu'un angle ne peut augmenter ou diminuer, sans que l'arc correspondant augmente ou diminue en même temps.

Les deux propositions précédentes ont pour réciproques les deux suivantes, lesquelles sont vraies, d'après le principe établi n° 51 :

A des arcs égaux correspondent des angles égaux ;

Et .... *A un plus grand arc correspond un plus grand angle.*

68. Nous reviendrons sur ce sujet dans le second livre pour le traiter plus à fond ; et alors nous démontrerons complètement que *Les angles sont proportionnels aux arcs* qui leur correspondent dans un même cercle ; mais ce que nous venons de dire atteint déjà suffisamment le but principal que nous nous proposions ici, celui d'expliquer la définition que beaucoup d'auteurs donnent de l'angle, en disant que c'est *l'écartement plus ou moins considérable de deux droites qui se coupent,* écartement mesuré par la longueur de l'arc décrit dans son plan, entre ses côtés, de son sommet comme centre, et avec un rayon convenu.

Nous ferons encore une autre remarque très importante : c'est que l'idée d'angle pouvant être débarrassée de toute considération de *l'infini*, il en résulte que *Les angles sont soumis aux mêmes principes que toutes les autres espèces de grandeurs ;* qu'ils sont susceptibles d'être *comparés* entre eux, d'être *évalués* en nombres, c'est-à-dire *mesurés* ou *rapportés à une unité* commune ; qu'ils peuvent être *combinés* par voie d'*addition* ou de *soustraction,* d'être *multipliés, divisés,* etc.

On doit comprendre de même que *La grandeur d'un angle ne dépend en aucune manière de la longueur actuellement tracée des droites qui lui servent de côtés,* ces droites étant censées indéfinies si l'on considère l'angle proprement dit (nos 10 et 66), et pouvant, au contraire, être regardées comme terminées à l'arc qui lui correspond si l'on n'a égard qu'à l'écartement des côtés.

Enfin, il suit encore de ce qui précède, que les propositions relatives aux angles sont presque toujours susceptibles de deux genres de démonstration, puisqu'au lieu de considérer les angles en eux-mêmes, on peut raisonner sur les arcs qui les représentent. Nous emploierons l'une ou l'autre de ces deux méthodes, suivant les avantages particuliers que chacune d'elles pourra emprunter aux circonstances ; et quelquefois même, comme dans le *numéro* suivant, nous appliquerons l'une et l'autre aux mêmes propositions.

Fig. 29. 69. LEMME. — *Un angle* AOB (fig. 29), quelque petit qu'il soit, *ne peut jamais être contenu dans un plan qu'un nombre de fois limité.*

En effet, en répétant cet angle, comme le montre la figure, un nombre suffisant de fois, nombre essentiellement *fini* qu'il serait possible d'assigner, et qui est d'autant plus petit que l'angle AOB est plus grand, il est visible que l'on obtiendra bientôt une somme d'angles assez grande pour recouvrir entièrement le plan ; ce qui démontre la proposition énoncée.

Autrement : si du sommet O comme centre et d'un rayon quelconque OA, on décrit une circonférence, l'arc total correspondant à la somme des angles finira par égaler la circonférence entière lorsque chaque arc partiel sera une partie aliquote de cette circonférence, et, dans le cas contraire, par surpasser la même circonférence. Or, comme la somme d'angles qui correspond à cette circonférence recouvre entièrement le plan, on se trouve ainsi conduit à la même conséquence.

De là on peut conclure qu'un angle, quelque petit qu'il soit, surpasse en grandeur toute figure susceptible d'être contenue dans un plan un nombre indéfini de fois, que cette figure soit ou ne soit pas limitée de toutes parts ; et de plus, l'angle lui-même contient cette figure un nombre indéfini de fois.

Fig. 30. 70. Lorsqu'une *droite* AB (fig. 30) est *rencontrée par un segment* (n° 5) CO *d'une autre droite qui fait avec elle deux angles adjacens* (n° 66), AOC, COB, *égaux* entre eux, chacun de ces angles se nomme un ANGLE DROIT, et la seconde droite

OC est dite PERPENDICULAIRE *à* ou *sur* la première AB; le point de rencontre O est *le pied de la perpendiculaire*.

Cette perpendiculaire peut être considérée comme indéfinie, ou comme terminée au point O et à un autre point, C par exemple (n° 5). Quand la perpendiculaire est menée par un point O pris *sur* la droite AB, on dit qu'elle est *élevée* sur cette droite ; et quand elle est menée par un point C pris *hors* de la droite AB, on dit qu'elle est *abaissée* sur la droite. Ces expressions sont employées surtout dans la résolution des problèmes, et plus généralement dans l'explication des constructions.

71. Mais maintenant il est nécessaire de motiver la dénomination de *perpendiculaire* donnée à la droite OC (fig. 30) considérée comme indéfinie dans les deux sens, en faisant voir qu'un segment OC (fig. 31) d'une droite CD ne peut être perpendiculaire sur une autre droite AB, sans que le second segment OD de la première droite soit aussi perpendiculaire sur la seconde; d'où il résulte que les quatre angles ainsi formés autour du point O comme sommet commun, sont égaux. Fig. 31.

En effet, d'abord, la droite AB partage le plan des deux droites (n° 10) en deux moitiés superposables (n° 11), et de plus, les angles AOC, BOC, sont égaux d'après les définitions (n° 70); donc chacun de ces deux angles est *le quart* du plan total. Mais la droite CD partage aussi le plan en deux moitiés superposables; donc l'angle AOD et par suite l'angle BOD sont aussi chacun un quart du plan total.

Au surplus, cette proposition deviendra encore plus évidente si du point O comme centre et d'un rayon quelconque OA on décrit une circonférence. Car les droites AB, CD, en seront des diamètres; et de plus les arcs AC, BC, étant égaux (n° 67), seront chacun un *quadrant* (n° 19), ainsi que les arcs AD, BD; d'où résulte l'égalité des quatre angles.

Ainsi, non-seulement les segmens OC et OD sont perpendiculaires sur la droite indéfinie AB, mais en même temps les segmens OA et OB sont aussi perpendiculaires sur la droite

4..

indéfinie CD ; c'est pourquoi l'on dit alors que *les deux droites* sont *perpendiculaires entre elles*, ou plus simplement : *perpendiculaires*.

72. Ce qui vient d'être dit (n° 71) peut se résumer dans les propositions suivantes :

1° *Lorsqu'une droite* CD (fig. 31) *est perpendiculaire sur une autre* AB, *réciproquement* aussi *la seconde droite* AB *est perpendiculaire sur la première* CD ;

2° *Tous les angles droits sont égaux* : proposition qui ne doit pas s'entendre seulement des angles formés par deux droites perpendiculaires entre elles en un même point O, mais de tous les angles droits possibles, quels que soient leurs sommets respectifs, O, O'... ;

Et enfin 3° *L'un des quatre angles formés par deux droites qui se coupent ne peut être égal à un angle droit, sans que les trois autres le soient aussi.*

73. Des principes qui viennent d'être développés on peut conclure encore que *Par un point déterminé* O (fig. 32 et 33) *on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à une droite* AB [dans un même plan avec la droite].

Fig. 32. En effet, supposons d'abord que le point O soit sur la droite AB (fig. 32) :

Pour que l'on pût *élever* (n° 70) sur AB les deux perpendiculaires OC, OC', il faudrait que chacune des deux droites OC, OC', fît avec AB deux angles adjacens égaux ; et alors on aurait d'une part AOC moindre que AOC', et de l'autre BOC plus grand que BOC' ou son égal AOC', *ce qui est absurde ;*

Ou, *plus simplement*, il faudrait qu'une demi-circonférence décrite du point O comme centre et sur AB comme diamètre, pût avoir deux milieux, tels que C, C', *ce qui est* également *absurde* (n° 19).

Fig. 33. Supposons, en second lieu, que le point O soit extérieur à AB (fig. 33) :

Dans cette nouvelle hypothèse, soient OC, OC', les deux perpendiculaires *abaissées* (n° 70) du point O sur AB. Cela posé, faisons tourner la figure OCC′ autour de CC′ comme charnière, de manière à la rabattre en O′CC′, dans son plan primitif, et de l'autre côté de CC′. Les deux portions de droites CO, CO′, devront être, d'après ce qui précède, les prolongemens l'une de l'autre, puisqu'elles sont toutes deux perpendiculaires à AB, et que par un point pris *sur* une droite il ne peut passer qu'une seule perpendiculaire à cette droite. Pour la même raison, C′O, C′O′, devront faire partie d'une droite unique. D'où il résulte que par deux points O, O′, on pourrait mener deux droites différentes OCO′, OC′O′; *ce qui est absurde*.

74. Lorsqu'une *droite* AB (fig. 34) est *rencontrée par une autre droite* CO *qui fait avec elle deux angles adjacens*, AOC, COB, *inégaux*, le plus *petit*, AOC, des deux angles, se nomme un Angle Aigu, et le plus *grand*, COB, un Angle Obtus. La seconde droite OC est dite Oblique sur la première AB; et le point de rencontre O est encore *le pied* (n° 70) *de l'oblique*. Fig. 34.

L'oblique peut aussi être considérée comme indéfinie, ou comme déterminée de grandeur.

75. Deux *angles*, AOC, COD (fig. 34), *dont la somme est égale à un angle droit*, sont dits Complémens *l'un de l'autre*, ou Complémentaires.

Deux *angles dont la somme est équivalente à deux angles droits*, sont dits Supplémens *l'un de l'autre*, ou Supplémentaires.

Il est évident qu'un même angle ne peut avoir qu'un seul complément et un seul supplément, et que par conséquent *Deux angles sont égaux lorsque chacun d'eux est complémentaire ou supplémentaire d'un troisième*.

76. Cela posé, de la dernière des définitions précédentes il résulte que

Les angles adjacens (n° 66), AOC, COB (fig. 34), [formés par deux droites concourantes AB, CO], *sont supplémentaires*.

En effet, si par le point de rencontre O on élève sur AB la perpendiculaire OD, la somme des deux angles AOC, COB, sera identique avec la somme des deux angles droits AOD, DOB.

Il en serait de même des autres systèmes d'angles adjacens
Fig. 24. (fig. 24) formés par les mêmes droites (*Voy.* le n° 66).

77. On peut tirer de là les conséquences suivantes :

Fig. 35. 1° *La somme de tous les angles consécutifs*, AOC, COD, DOE, EOB (fig. 35), *formés d'un même côté d'une droite* AB, *par d'autres droites quelconques*, OC, OD, OE, *issues d'un de ses points* O, *est constamment égale à* 2 DROITS;

Fig. 24. 2° *La somme des quatre angles formés par deux droites qui se coupent* (fig. 24) *est égale à* 4 DROITS;

Fig. 36. 3° *La somme de tous les angles consécutifs*, AOB, BOC, COD, ... etc. (fig. 36), *formés autour d'un même point* O *par des segmens de droites quelconques*, OA, OB, OC, OD... etc., *issus de ce point*, *est constamment égale à* 4 DROITS;

Fig. 37. Et 4° *Les bissectrices*, OM, ON (fig. 37), *de deux angles adjacens* (n° 66), AOC, COB, *sont perpendiculaires entre elles.*

78. La même proposition démontrée ci-dessus, n° 76, a pour *réciproque* la suivante, qui est évidente d'après le principe du n° 49 :

Fig. 34. *Lorsque deux angles consécutifs*, AOC, COB (fig. 34), *sont supplémentaires*, *les côtés extrêmes*, AO, OB, *sont en ligne droite ;*

Et plus généralement :

Fig. 35. *Si un nombre quelconque d'angles consécutifs* (fig. 35) *forment une somme égale à* 2 DROITS, *les côtés extrêmes sont en ligne droite.*

79. La proposition du n° 76 conduit encore à cette autre :

Fig. 24. *Les angles opposés* (n° 66), AOC et BOD, AOD et BOC (fig. 24), [formés par deux droites qui se coupent, AB, CD] *sont égaux deux à deux.*

Cette nouvelle proposition est une conséquence évidente de ce que deux angles opposés, tels que AOC et BOD, sont à la fois supplémentaires d'un même angle, AOD ou BOC (*Voy.* le n° 75).

80. Enfin, la dernière proposition (n° 79) donne lieu aux *réciproques* suivantes :

1° Si les angles AOC et BOD (fig. 24) sont égaux ainsi que les angles AOD et BOC, leurs côtés AO et OB seront en ligne droite ainsi que CO et OD : — Car, d'après l'hypothèse, la somme de deux angles consécutifs quelconques est égale à 2 *droits* (*Voy.* le n° 78) ;

2° Si AO et BO, par exemple, sont en ligne droite, et que les angles AOC et BOD soient égaux, CO et OD seront aussi en ligne droite : — Car, en vertu de l'hypothèse, les angles AOC, AOD, seront supplémentaires, aussi bien que les angles BOD, AOD.

81. D'après ce qui précède (n^{os} 76 et 79), deux droites qui se coupent sans *tomber perpendiculairement* l'une sur l'autre, donnent lieu à deux angles supplémentaires, l'un aigu, l'autre obtus : or, les deux droites sont dites d'autant plus *inclinées* l'une sur l'autre que la différence de ces deux angles est plus considérable. Ainsi, généralement, *l'inclinaison* de deux droites est d'autant *plus grande* que l'angle *aigu* qu'elles font entre elles est *plus petit* et que leur angle *obtus* est *plus grand ;* et cette inclinaison est nulle quand les deux droites sont perpendiculaires entre elles.

Tout en nous conformant à l'usage qui a consacré ces locutions, nous ne pouvons nous dispenser de faire observer qu'elles sont vicieuses, et contradictoires avec la signification propre du mot *inclinaison*, ce mot étant employé, d'après Euclide, au lieu du mot *écartement* (n° 68), pour désigner l'angle quand on ne considère pas cette espèce de quantité comme une portion de plan (*).

(*) Γωνία ἐςὶν, ἡ ... δύο γραμμῶν... πρὸς ἀλλήλας κλίσις : *L'angle est l'inclinaison de deux droites l'une sur l'autre.* (*Euclide*, Livre I, défin. 8e.)

82. Terminons ce qui est relatif aux angles considérés en général, par une remarque relative à leur évaluation.

D'après ce qui précède (n° 72), l'angle droit ayant une valeur constante, il est naturel de le prendre pour unité de cette sorte de grandeur. Ainsi, nous dirons qu'un angle vaut $\frac{1}{3}$, ou $\frac{2}{5}$, ou $\frac{7}{4}$...., pour exprimer qu'il est *le tiers*, ou *les deux cinquièmes*, ou qu'il est égal à *sept fois le quart* .... d'un angle droit, ou simplement d'*un droit.*

Généralement, l'angle *droit* valant 1,
tout angle *aigu* (n° 74) est < 1, et tout angle *obtus* est > 1.

Quant aux arcs correspondans, suivant que l'angle est < 1, $= 1$, ou > 1, c'est-à-dire aigu, droit, ou obtus, l'arc est *inférieur, égal,* ou *supérieur* à un *quadrant* (n° 19).

Lorsque l'arc est égal à une demi-circonférence, il n'y a plus d'angle proprement dit; cependant, on peut considérer encore les rayons opposés, formant le diamètre qui sous-tend la demi-circonférence, comme faisant entre eux un angle égal à 2 *droits* et correspondant à cette demi-circonférence.

On peut même regarder comme un angle plus grand que 2 *droits* toute portion de plan correspondante à un arc plus grand qu'une demi-circonférence. Ainsi, par exemple, dans
Fig. 7. la figure 7, en supposant que les arcs AB et AC fassent une somme plus grande que la demi-circonférence, rien n'empêche de considérer la somme des angles consécutifs AOB, AOC, comme formant un angle unique plus grand que 2 *droits* et correspondant à l'arc total BAC.

Enfin, toujours suivant cette manière de voir, le plan lui-même, dans son étendue indéfinie, n'est autre chose qu'un angle égal à 4 *droits* et correspondant à une circonférence entière décrite d'un quelconque de ses points comme centre.

83. On nomme Parallèles deux *droites qui, situées dans un même plan, ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.*

Il est facile de constater l'existence de droites qui remplissent les conditions de cette définition. En effet, que l'on suppose par exemple, *dans un même plan, deux droites* distinctes, AB, CD (fig. 38), *perpendiculaires à une troisième* EF aux points respectifs M et N : il est clair que ces deux perpendiculaires *ne sauraient se rencontrer*, quelque loin qu'on les prolonge : car si elles se rencontraient en un point O, on pourrait, de ce point, abaisser deux perpendiculaires sur une même droite EF, ce qui est absurde (n° 73). Les deux perpendiculaires sont donc des droites parallèles. Fig. 38.

Deux droites parallèles sont nécessairement dans un même plan, d'après leur définition ; et elles le déterminent (n° 9). Ce plan se nomme le *plan des deux parallèles ;* et nous appellerons Bande la *portion de plan comprise entre* les *deux parallèles*.

84. Lemme. — *Toute bande* comprise entre deux parallèles, AB, CD (fig. 39), quel que soit leur écartement, *peut être contenue dans un plan un nombre infini de fois*. Fig. 39.

En effet, faisons d'abord tourner la bande ABCD autour de CD comme charnière (n° 44), de manière qu'elle vienne se rabattre sur son plan primitif en CDA'B'. Faisons de même tourner CDA'B' autour de A'B', de manière à former une troisième bande A'B'C'D' égale aux deux premières .....; et ainsi de suite.

Remettons maintenant la bande ABCD dans sa position primitive, et retournons-la successivement *sens dessus dessous*, du côté de AB, comme nous l'avions fait du côté de CD : nous aurons d'autres bandes égales aux premières, AB*cd*, *cdab*, *abc'd'*, ... etc.

Or, quel que soit l'écartement des deux parallèles, il est évident que le nombre des bandes égales que l'on pourra former ainsi sera infini : c'est-à-dire qu'il est impossible de recouvrir entièrement le plan avec un nombre limité de ces bandes.

85. On nomme généralement *sécante* (n° 20) ou *transversale*, toute ligne qui *coupe* ou qui *traverse* d'une manière quelconque, une autre ligne, ou un *système* [assemblage] d'autres lignes.

Fig. 40. Cela posé, lorsque deux droites quelconques, AB, CD (fig. 40), parallèles ou concourantes, sont rencontrées respectivement en deux points, M, N, par une sécante ou transversale EF, il en résulte, aux points d'intersection, M, N, *huit* angles qui, considérés isolément ou comparés deux à deux, prennent les dénominations suivantes :

Considérés *isolément*

1° Les quatre angles AMF, BMF, CNE, DNE, dont l'ouverture est *en-dedans* des droites AB, CD, se nomment des *angles internes ;*

2° Les quatre angles AME, BME, CNF, DNF, dont l'ouverture est *en-dehors* des droites AB, CD, se nomment des *angles externes :*

Comparés *deux à deux*

1° Les angles AMF et CNE, BMF et DNE, sont *internes d'un même côté* [de la sécante];

2° Les angles AME et CNF, BME et DNF, sont *externes d'un même côté ;*

3° Les angles internes AMF et DNE, CNE et BMF [situés, l'un d'un côté, l'autre de l'autre, de la sécante], sont *alternes-internes ;*

4° Les angles externes AME et DNF, BME et CNF, sont *alternes-externes ;*

5° Enfin, les angles AME et CNE, AMF et CNF, BME et DNE, BMF et DNF, situés ainsi, deux à deux, d'un même côté de la sécante, mais l'un en-dedans des deux parallèles, et l'autre en-dehors, sont dits, pour cette dernière raison, des angles *interne-externe*, ou des angles *correspondans ;* et bien que cette dernière dénomination soit assez impropre, nous l'emploierons de préférence comme plus abrégée.

Fig. 41 et 42. 86. On nomme généralement Polygone (fig. 6, 41, et 42) un *système* quelconque *de lignes qui se coupent.* Le polygone est dit *rectiligne* lorsque toutes ces lignes sont droites, ce qui est le cas le plus commun.

Ordinairement, on suppose en outre que les droites sont situées dans un même plan, qu'elles sont déterminées de longueur (n° 5), et terminées deux à deux aux mêmes points : alors le *polygone* n'est autre chose qu'une *ligne brisée plane* (nos 14 et 13). Les portions de droites qui composent le polygone sont dites les *côtés* de ce polygone ; leurs points d'intersection sont dits les *sommets ;* et les angles qu'elles forment entre elles se nomment encore les *angles* du polygone.

Chaque angle formé par deux côtés consécutifs d'un polygone est dit *compris* entre ces côtés ; et deux angles dont les sommets terminent un même côté sont dits *adjacens* à ce côté.

Un polygone est dit *ouvert* lorsque la première extrémité du premier côté ne coïncide pas avec la dernière extrémité du dernier côté (fig. 6). Dans le cas contraire où il circonscrit une portion de plan (fig. 41 et 42), il est dit *fermé*, et le nombre des angles est alors visiblement le même que celui des côtés.

87. Comme, le plus souvent, c'est d'un polygone fermé qu'il s'agit, on cesse alors de considérer les côtés en eux-mêmes, et l'on entend par le mot *polygone* une *portion de plan circonscrite par un système de droites* [ou plus généralement de lignes quelconques] *qui se coupent deux à deux.*

On nomme *périmètre* ou *contour* du polygone, l'*ensemble* ou plutôt la *somme* des côtés, supposés terminés respectivement aux sommets de ce polygone.

Il faut évidemment au moins trois droites pour circonscrire une portion de plan, d'où il suit qu'un polygone fermé ne peut avoir moins de trois côtés. Le plus simple des polygones fermés est donc celui de trois côtés, que l'on nomme TRIANGLE ou *trilatère*. — Toutes les propriétés des polygones en général, quel que soit le nombre de leurs côtés, se ramènent à celles du triangle, comme nous le verrons par la suite.

Enfin, on nomme *diagonales* les droites AC, AD, BD, BE, CE (fig. 41), qui joignent deux à deux les sommets des angles non adjacens à un même côté. — Un triangle ne peut donc avoir de diagonales. Fig. 41.

Fig. 42. **88.** On distingue dans un polygone deux sortes d'angles, les *angles saillans* et les *angles rentrans*. Un angle BAL (fig. 42) est dit *saillant*, lorsqu'il *appartient à l'intérieur* du polygone, tandis que son *opposé* et ses deux *adjacens* appartiennent *à l'extérieur*; un angle CDE est dit *rentrant* au contraire, lorsqu'il appartient à l'extérieur du polygone tandis que son opposé et ses deux adjacens appartiennent à l'intérieur.

C'est pourquoi l'on nomme ordinairement angle *extérieur* d'un polygone, chacun des deux angles BA*l*, *b*AL, adjacens à un angle saillant BAL.

On peut encore, pour mieux caractériser les angles saillans et les angles rentrans, considérer deux côtés consécutifs d'un polygone, supposés terminés à leur point d'intersection, comme formant ainsi deux angles différens, l'un moindre que 2 *droits*, et l'autre plus grand (n° 77); [celui-ci serait composé de l'angle opposé au premier et de ses deux adjacens]. Cela posé, en appelant, dans *tous* les cas, *angle du polygone* celui qui appartient *à l'intérieur*, cet angle sera *saillant* ou *rentrant* suivant qu'il sera *plus petit* ou *plus grand* que 2 *droits*, ou suivant qu'il correspondra à un arc plus petit ou plus grand que la demi-circonférence (*Voy.* le n° 82); et dans les mêmes circonstances, le second des deux angles formés par les côtés du polygone, ou l'angle appartenant à l'extérieur, sera au contraire plus grand ou plus petit que deux droits, ou bien il correspondra à un arc plus grand ou plus petit que la demi-circonférence.

Un triangle a nécessairement ses trois angles saillans; et généralement, il est facile de voir qu'*Un polygone fermé ne peut avoir moins de trois angles saillans.*

Fig. 41. **89.** Un polygone est dit *convexe* (fig. 41) lorsqu'il n'a que
Fig. 42. des angles saillans; il est dit *concave* (fig. 42) s'il a un ou plusieurs angles rentrans. Ainsi, d'après ce qui vient d'être dit, *Tout triangle est convexe.*

Nous donnerons par la suite une plus grande extension à cette définition de la convexité et de la concavité; mais, en l'admettant pour le moment telle que nous venons de l'établir, on aperçoit facilement un autre caractère propre à distinguer les polygones convexes des polygones concaves. Il consiste en ce que, dans les premiers, aucune droite différente des côtés ne saurait avoir avec le contour du polygone plus de deux points communs. Et quant aux côtés, aucun d'eux, même indéfiniment prolongé, ne peut rencontrer le reste de ce contour; de sorte que la figure se trouve ainsi tout entière dans une des deux régions (n° 11) du plan déterminées par chacun des côtés. Il est d'ailleurs bien évident que ces propriétés n'appartiennent pas aux polygones concaves.

Enfin, l'on reconnaît encore les polygones convexes à leurs diagonales qui sont toutes intérieures, tandis qu'il y en a toujours quelqu'une extérieure dans les polygones concaves : telles seraient, par exemple, celles qui, dans la figure 42, joindraient les points C et E, A et I, etc.

Il résulte évidemment de ces explications, que *Deux polygones convexes se confondent lorsqu'ils ont les mêmes sommets :* car s'il en était autrement, quelque côté de l'un des deux polygones serait une diagonale par rapport à l'autre, ce qui implique contradiction avec ce qui vient d'être dit.

90. Un polygone est dit *équilatéral* s'il a tous ses côtés égaux ; il est *équiangle* s'il a tous ses angles égaux. Un polygone qui est à la fois *équilatéral et équiangle* se nomme un *polygone régulier.* — Un polygone régulier est nécessairement convexe (nos 88 et 89).

Deux polygones d'un même nombre de côtés sont dits *équilatéraux entre eux* s'ils ont leurs côtés égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière ; ils sont *équiangles entre eux* s'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre.

Un *polygone* ABCD... (fig. 43) est dit *inscrit* à un cercle lorsque tous ses côtés sont des cordes du cercle ; et réciproquement le *cercle* est dit *circonscrit* au polygone. Fig. 43.

Un *polygone* ABCD ...... (fig. 44) est dit *circonscrit* à un Fig. 44.

cercle lorsque tous ses côtés sont *tangens* au cercle ; et réciproquement le *cercle* est *inscrit* au polygone.

Un polygone est dit *inscriptible* ou *circonscriptible* [au cercle], suivant que l'on peut circonscrire ou inscrire un cercle à ce polygone.

Enfin, l'on peut dire aussi qu'un *polygone* est *inscrit à un autre* polygone, lorsque les sommets du premier sont situés sur les côtés du second ; et réciproquement, le second est *circonscrit* au premier.

91. On classe ordinairement les polygones d'après le nombre de leurs côtés. Le polygone le plus simple après le triangle (nº 87), est celui de *quatre* côtés que l'on nomme QUADRILATÈRE et quelquefois *quadrangle*. Viennent ensuite

le *pentagone*, ou le polygone de *cinq* côtés,
l'*hexagone*, ... *six* ....,
l'*heptagone*, ... *sept* ....,
l'*octogone*, ... *huit* ....,
l'*ennéagone*, ... *neuf* ....,
le *décagone*, ... *dix* ....,
l'*endécagone*, ... *onze* ....,
le *dodécagone*, ... *douze* .....

Au-delà de douze côtés, les polygones ne reçoivent plus de noms particuliers, excepté celui de *quinze* côtés que l'on nomme *pentédécagone ;* les autres se désignent simplement par l'énonciation du nombre de leurs côtés.

92. Telles sont les principales figures que nous étudierons dans le premier livre, en nous bornant toutefois à leurs propriétés les plus importantes, et particulièrement à celles qui ne supposent la mesure d'aucune sorte d'étendue. Nous y joindrons quelques notions sur les courbes considérées en général.

Quant à l'ordre des matières, voici celui que nous suivrons :
Ce premier livre sera divisé en *six* chapitres :
Le *premier* chapitre traitera des *perpendiculaires* et des

obliques, ainsi que des propriétés du *cercle* qui y ont rapport;

Le *deuxième* contiendra la théorie des *parallèles* et les principales *conséquences* qui s'en déduisent;

Le *troisième* traitera du *triangle,* ainsi que des propriétés du *cercle* qui en dépendent;

Le *quatrième* traitera du *quadrilatère* et de ses diverses *espèces* et *variétés;*

Le *cinquième,* des propriétés générales des *polygones* d'un nombre quelconque de côtés, et particulièrement de celles qui sont communes à tous les *polygones réguliers;*

Enfin, nous exposerons dans le *sixième* les propriétés générales des lignes *courbes.*

CHAPITRE PREMIER.

DES PERPENDICULAIRES ET DES OBLIQUES.

§ I[er]. *Figures rectilignes.*

Lemme I. (Fig. 45.)

Fig. 45. 93. *Dans tout triangle* [rectiligne] ABC, *un côté quelconque est* 1° *plus petit que la somme des deux autres, et* 2° *plus grand que leur différence.*

1° La première partie de cet énoncé résulte immédiatement de ce que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

2° Supposons $AC > BC$: il s'agit de prouver, par exemple, que l'on a

$$AB > AC - BC;$$

or, c'est une conséquence évidente de ce que, d'après la première partie de la proposition, qui est également démontrée pour chacun des trois côtés, on a

$$AB + BC > AC.$$

Corollaire 1[er]. — *Étant donné un triangle* ABC (fig. 45), *si l'on joint par des droites les extrémités d'un même côté* AB *avec un point* D *pris dans l'intérieur, la somme des deux autres côtés est plus grande que la somme des droites intérieures.*

En effet, si l'on prolonge AD par exemple, jusqu'à la rencontre de BC en E, on aura, dans le triangle ACE,

$$AC + CE > AE;$$

d'où, en ajoutant EB membre à membre,

$$AC + CB > AE + EB.$$

Maintenant, le triangle DEB donne de même

$$DE + EB > DB;$$

d'où, en ajoutant AD membre à membre,

$$AE + EB > AD + DB.$$

De là on conclut, *à fortiori*,

$$AC + CB > AD + DB;$$

C. Q. F. D.

Coroll. 2. — *La somme de deux droites*, AB, CD (fig. 46), *qui se coupent* [en un point I] *est toujours plus grande que la somme de deux droites opposées*, AC, BD, *qui joignent, deux à deux, les extrémités des premières.* Fig. 46.

En effet, on a les inégalités

$$AI + IC > AC$$

et

$$BI + ID > BD;$$

ajoutons-les membre à membre, en observant que

$$AI + BI = AB$$

et

$$IC + ID = CD:$$

nous en tirerons cette autre inégalité

$$AB + CD > AC + BD;$$

C. Q. F. D.

Coroll. 3. — *Le diamètre est la plus grande corde du cercle.*

Soit, par exemple, une corde AB (fig. 47) qui ne passe pas par le centre O: je dis qu'elle sera moindre que le diamètre AOC. Fig. 47.

En effet, menons le rayon OB: nous aurons

$$AO + OB > AB,$$

ou

$$AO + OC > AB,$$

ou enfin

$$AC > AB; \quad \textit{C. Q. F. D.}$$

Fig. 48. COROLL. 4. — *La somme des cordes de deux arcs,* AC, BC (fig 48), *est plus grande que la corde* AB *de la somme* ACB *de ces arcs.*

COROLL. 5. — De plus, comme les arcs AC, CB, peuvent être égaux, ce qui entraîne l'égalité de leurs cordes (n° 7), il s'ensuit que

Fig. 8. *Le double de la corde d'un arc,* AC ou BC (fig. 8), *est plus grand que la corde* AB *d'un arc* ACB *double du premier.*

LEMME II. (Fig. 49.)

Fig. 49. 94. *Tout angle* A *d'un triangle* ABC *est moindre que chaque angle extérieur* CBD *adjacent à l'un des deux autres.*

En effet, les deux angles A et CBD ont une partie commune ECBD; et ils ont de plus, pour parties non communes, le premier un triangle ABC, et le second un angle ECF; mais le triangle étant une quantité limitée de toutes parts, tandis que l'angle est une quantité essentiellement indéfinie, il s'ensuit que le triangle est moindre que l'angle (n° 69);

donc *angle* A $<$ *angle* CBD; *C. Q. F. D.*

Fig. 45. COROLLAIRE. — *Étant donné un triangle* ABC (fig. 45), *si l'on joint par des droites les extrémités d'un même côté* AB *avec un point* D *pris dans l'intérieur, l'angle des deux autres côtés est moindre que l'angle des droites intérieures.*

En effet, en prolongeant AD jusqu'à la rencontre de BC en E (n° 93), on aura

angle ACB $<$ *angle* AEB, et *angle* AEB $<$ *angle* ADB;
d'où *angle* ACB $<$ *angle* ADB; *C. Q. F. D.*

THÉORÈME I. (Fig. 50.)

Fig. 50. 95. *La perpendiculaire* OC *abaissée sur une droite* AB *d'un point extérieur* O *est le plus court chemin de ce point à la droite.*

D'abord, la ligne droite étant le plus court chemin entre deux points donnés, il ne peut y avoir à considérer que des droites menées du point O à la droite AB.

Cela posé, prouvons que la perpendiculaire OC est plus courte que toute oblique OD. Pour cela, faisons tourner la portion de figure OCD autour de AB comme charnière, de manière à la rabattre de l'autre côté de AB, en O'CD : nous aurons

$$O'C = OC, \quad O'D = OD;$$

de plus, OCO' étant une ligne droite (n° 73), il en résultera :

$$OC + O'C < OD + O'D, \text{ ou } 2.OC < 2.OD;$$

d'où, en prenant la moitié de part et d'autre,

$$OC < OD; \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Corollaire. — *La perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite mesure la vraie distance du point à la droite.*

Scolie. — CD est dite la *projection* de OD sur AB. Plus généralement la projection d'une droite déterminée de grandeur, MN (fig. 51), sur une autre droite indéfinie AB, est la *distance* PQ *des pieds des perpendiculaires* abaissées des extrémités de la première sur la seconde. Fig. 51.

Théorème II. (Fig. 52.)

96. Si d'un point O extérieur à une droite donnée AB, on mène la perpendiculaire OC et différentes obliques, OD, OD', OE, ..., à cette droite : Fig. 52.

1° *Deux obliques*, OD, OD', *qui s'écartent également de la perpendiculaire* [c'est-à-dire telles que l'on ait CD = CD'] *sont égales, et également inclinées* (*Voy.* le n° 81) sur la droite donnée;

2° *De deux obliques*, OD, OE, *qui s'écartent inégalement de la perpendiculaire* [de sorte que l'on ait CD < CE] *celle*, OE, *qui s'en écarte le plus est la plus longue, et la plus inclinée* sur la droite donnée.

[Observons d'abord que les angles ODC, OD'C, OEC.... étant, d'après le *lemme* II (n° 94), moindres que les angles droits OCA ou OCB, sont par conséquent aigus, tandis que leurs supplémens sont obtus. Cela posé :]

1° Plions la figure le long de la perpendiculaire OC : les points D et D' se confondront puisque CD = CD';

donc $$OD = OD'$$

et $$\textit{angle}\ ODC = \textit{angle}\ OD'C;$$

2° Plions la figure le long de la droite AB : nous aurons

$$OD = O'D, \quad OE = O'E;$$

puis $$OD + O'D < OE + O'E \text{ (n° 93)};$$

d'où, en prenant la moitié de part et d'autre,

$$OD < OE.$$

Quant aux inclinaisons, c'est encore une conséquence du lemme déjà cité, que l'on a

$$\textit{angle}\ ODC > \textit{angle}\ OEC.$$

N. B. — Les raisonnemens précédens paraissent supposer que les obliques, OD, OE, que l'on considère, sont situées du même côté de la perpendiculaire; mais il n'en est pas ainsi, parce que d'après 1°, on peut remplacer OD par son égale OD'.

Corollaire. — *Entre une droite* indéfinie *et un point extérieur on ne saurait mener trois droites égales :*

Sans quoi il existerait au moins, soit deux obliques égales d'un même côté de la perpendiculaire, soit une oblique égale à cette perpendiculaire.

Scolie. — Le théorème II étant, en réalité, la réunion de *deux théorèmes* distincts dans lesquels le sujet et l'hypothèse sont les mêmes (n° 33), il en résulte *deux réciproques* différentes ; et ces réciproques sont nécessairement *vraies* d'après le principe général établi n° 51 : ce sont les suivantes :

Réciproque 1^re. — Si d'un point extérieur à une droite donnée on mène une perpendiculaire et différentes obliques à cette droite :

1° Deux obliques égales s'écartent également de la perpendiculaire, et elles sont également inclinées sur la droite donnée ;

2° De deux obliques inégales, la plus longue s'écarte le plus de la perpendiculaire, et elle est la plus inclinée sur la droite donnée.

Récipr. 2. — Si d'un point, etc.....

1° Deux obliques également inclinées sur la droite donnée sont égales, et elles s'écartent également de la perpendiculaire ;

2° De deux obliques inégalement inclinées sur la droite donnée, la plus inclinée est la plus longue, et elle s'écarte le plus de la perpendiculaire.

THÉORÈME III. (Fig. 53.)

97. 1° *Tout point* E *de la perpendiculaire* CD *élevée sur une droite* AB *par son milieu* C *est également distant des deux extrémités de la droite ;* Fig. 53.

2° *Tout point* F *extérieur à la perpendiculaire est inégalement distant des mêmes extrémités.*

En effet : — 1° Menons les droites AE, BE : nous aurons

$$AE = BE, \quad \text{puisque} \quad AC = BC \text{ (n° 96)};$$

2° Menons AF, BF ; et par le point E, où BF coupe CD, menons encore AE : nous aurons

$$AF < AE + EF, \quad \text{ou} \quad AF < BE + EF,$$

ou enfin $$AF < BF.$$

Réciproque qui n'a pas besoin de démonstration (n° 51).

— 1° Tout point également distant des extrémités d'une droite appartient à la perpendiculaire élevée par son milieu ;

2° Tout point inégalement distant des mêmes extrémités est extérieur à la perpendiculaire.

Corollaire. — *La perpendiculaire élevée sur une droite par son milieu, est le* lieu géométrique *de tous les points qui sont également distans de ses extrémités.*

Scolie 1er. — Le théorème précédent donne encore lieu à plusieurs autres propositions que l'on peut considérer comme autant de nouvelles réciproques, et qui sont évidentes d'après le principe du n° 49. Nous ne citerons que la suivante :

Si deux points, D, E, *sont respectivement à égale distance de deux autres points*, A, B, *la droite* DE *menée par les deux premiers est perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux derniers.*

Scol. 2. — Nous avons cru inutile d'ajouter à la seconde partie de l'énoncé du théorème précédent et de ses réciproques, que le point F et le point A, ou celle des deux extrémités, A, B, qui est la plus rapprochée de F, sont toujours du même côté de la perpendiculaire CD.

Une observation analogue peut être faite sur l'énoncé du théorème qui va suivre.

Théorème IV. (Fig. 54.)

Fig. 54. 98. 1° *Tout point* E *de la bissectrice* AD *d'un angle* BAC *est également distant des deux côtés de cet angle ;*

2° *Tout point* F *situé dans l'angle et extérieur à la bissectrice est inégalement distant des mêmes côtés.*

En effet : — 1° Abaissons sur AB et sur AC les perpendiculaires respectives EG, EI, et plions la figure suivant AD : les droites AB, AC, se confondront, et par conséquent aussi les perpendiculaires EG, EI ;

2° Abaissons sur AB et sur AC les perpendiculaires FK, FI, et plions la figure suivant AF : les droites AK, FK, prendront respectivement des positions telles que AL, FL; soit M le point d'intersection des droites FI et AL, nous aurons :

$$FL < FM, \text{ et } FM < FI;$$

donc, *à fortiori*,

$$FL < FI, \text{ ou } FK < FI.$$

Réciproque évidente (n° 51) ; — 1° Tout point situé dans un angle et également distant de ses côtés appartient à la bissectrice de cet angle ;

2° Tout point situé dans l'angle et inégalement distant de ses côtés est extérieur à la bissectrice.

COROLLAIRE. — *La bissectrice d'un angle est le* LIEU GÉOMÉTRIQUE *de tous les points situés dans cet angle à égale distance de ses côtés.*

99. REMARQUE. — Dans le courant de ce chapitre, nous avons rencontré et nous rencontrerons encore plusieurs circonstances où le *rabattement* (n° 44) seul suffit pour faire coïncider deux figures ou portions de figure. La théorie des perpendiculaires nous met à même de conclure que pareille chose a lieu pour toute *figure* plane ABCDE... A'B'C'D'E'... Fig. 55 (fig. 55 et 56) *dont les points sont, deux à deux, distribués* et 56. *de part et d'autre à égale distance d'une certaine droite* MN *de ce plan, et sur une perpendiculaire qui est la même pour chaque couple de points.* C'est, par exemple, ce qui arrive pour une droite sur le milieu de laquelle on élève une perpendiculaire (n° 97), pour un angle par rapport à sa bissectrice (n° 98) etc. La figure est alors dite *symétrique* par rapport à la droite MN qui est son *axe de symétrie* (n° 44).

La considération des axes de symétrie peut être utile pour simplifier beaucoup de démonstrations ; car bien souvent, des considérations analogues à celle des n° 48 et 49 rendent évidente dans une figure l'existence de pareilles droites ; et alors on peut conclure immédiatement l'égalité des deux moitiés de cette figure. Ainsi par exemple, dans la proposition du nº 18, il est évident que *Tout diamètre d'un cercle en est un axe de symétrie :* car il n'y a aucune raison pour que, si l'on pliait la figure suivant ce diamètre, l'une des parties débordât l'autre; ou, si on l'aime mieux, il ne saurait exister de pareille raison qui ne fût applicable à chacune des deux parties à la fois, d'où il résulterait que chacune d'elles devrait, à la fois et dans les mêmes points, *déborder* l'autre et en être débordée, ce qui est absurde.

Cette manière de raisonner est tout aussi rigoureuse que la forme de démonstration que nous avons employée dans le *numéro* cité; elle est applicable dans un grand nombre de circonstances, et particulièrement dans plusieurs des théorèmes qui suivront.

§ II. *Des perpendiculaires considérées relativement au cercle. — Des droites extérieures, tangentes, et sécantes à la circonférence.*

100. Puisque (nº 96) d'un même point à une même droite on ne peut mener plus de deux droites égales, il s'ensuit qu'*Une droite et une circonférence ne peuvent se rencontrer en plus de deux points ;*

Ainsi *Toute sécante à un cercle coupe la circonférence en deux points,* et pas davantage comme cela a lieu pour d'autres courbes.

Cela posé, une droite et un cercle, situés dans un même plan, peuvent avoir *trois* positions relatives essentiellement différentes : la droite peut être

Fig. 57. 1º *Extérieure au cercle* [telle que MN] (fig. 57),

Fig. 9. 2º *Tangente au cercle* [en un point A, telle que ST] (fig. 9),

3º *Sécante au cercle* [en deux points A, B] (fig. 9);

Et de plus, ces trois sortes de positions relatives sont les seules possibles.

Théorème V. (Fig. 8.)

101. *Le milieu d'une corde* AB *et les milieux des arcs correspondans sont toujours sur un même diamètre perpendiculaire à la corde.* Fig. 8.

Pour le prouver, menons par le centre O le diamètre CD perpendiculaire à la corde, et soit I leur point d'intersection [lequel est nécessairement intérieur au cercle (n° 95)]. En pliant la figure le long du diamètre CD, on voit d'abord que les deux demi-cercles CAD et CBD se confondront (n° 18); et secondement que, IA et IB prenant la même direction (n° 73), les points A et B doivent coïncider.

Donc IA = IB;
arc AC = *arc* BC,
et *arc* AD = *arc* BD; *C. Q. F. D.*

Scolie 1er. — La droite CD satisfait aux *cinq* conditions suivantes : elle passe par le centre O, par le point I, par les points C, D, et elle est perpendiculaire à AB ; or, *deux* de ces conditions entraînant toutes les autres (nos 7 et 73), il en résulte, d'après le principe du n° 49, autant de propositions distinctes et *réciproques* les unes des autres, qu'il y a de manières de combiner 5 choses en les prenant 2 à 2. Nous citerons particulièrement les propositions suivantes :

Réciproque 1re. — *Le rayon perpendiculaire à une corde divise cette corde et les arcs correspondans chacun en deux parties égales ;*

Récipr. 2. — *La perpendiculaire élevée sur une corde par son milieu contient les milieux des arcs correspondans ainsi que le centre.*

Récipr. 3. — *La flèche* (n° 19), IC ou ID, *d'un arc*, ACB ou ADB, *est perpendiculaire à sa corde* AB.

Corollaire. — *Deux cordes ne peuvent se couper* mutuellement *en deux parties égales sans passer à la fois par le centre :*

Car si l'on menait une droite du centre au point de rencontre des deux cordes, cette droite serait à la fois perpendiculaire à toutes deux ; *ce qui est absurde.*

SCOL. 2. — La droite AI, perpendiculaire au diamètre CD, se nomme le SINUS *de l'arc* AC ou AD. — On définit généralement cette ligne : la *perpendiculaire, déterminée de grandeur, abaissée d'une extrémité de l'arc sur le rayon qui aboutit à l'autre extrémité.* — Ainsi le *sinus* d'un arc est la *moitié de la corde* qui sous-tend un *arc double.*

Le sinus d'un arc est plus petit que la corde de cet arc (n° 95), *et à plus forte raison plus petit que l'arc lui-même* (n° 5). — *Le sinus d'un quadrant* (n° 9) *est égal au rayon.*

Cette même droite AI, *perpendiculaire au diamètre* CD, est encore dite une *ordonnée du diamètre.*

THÉORÈME VI. (Fig. 9.)

Fig. 9. 102. *La perpendiculaire* ST *élevée à l'extrémité d'un rayon* OA *est tangente à la circonférence ; — et réciproquement.*

En effet, tout autre point de la perpendiculaire ST est plus éloigné du centre que le point A ; donc cette perpendiculaire n'a qu'un point commun avec la circonférence ; donc elle lui est tangente (n° 20).

Scolie 1er. — Ce théorème pourrait aussi se déduire comme corollaire du précédent, parce que celui-ci ne doit pas cesser d'avoir lieu quand la sécante [ou la corde prolongée (n° 20)] devient tangente.

SCOL. 2. — On peut faire, sur ce théorème, une remarque analogue à celle que l'on a faite sur le précédent ; il en résulte les réciproques suivantes :

RÉCIPROQUE 1re. — *La perpendiculaire élevée au point de tangence sur la tangente passe par le centre ;*

RÉCIPR. 2. — *Le rayon qui aboutit au point de tangence est perpendiculaire à la tangente ;*

RÉCIPR. 3. — *La perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente passe par le point de tangence.*

COROLLAIRE. — *Par un point donné sur la circonférence on ne peut mener qu'une seule tangente.*

THÉORÈME VII. (Fig. 57.)

103. *La plus courte distance d'une circonférence O à une droite extérieure* MN *est une portion* AB *de la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite.* Fig. 57.

En effet, soit CD la distance de deux points autres que A et B, pris respectivement sur les deux lignes. En menant OC et OD, on aura (n° 95) :

$$OB < OD < OC + CD,$$

d'où

$$OA + AB < OC + CD;$$

mais

$$OA = OC;$$

donc

$$AB < CD; \qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME VIII. (Fig. 58.)

104. Dans un même cercle O, ou dans des cercles égaux : Fig. 58.

1° *A des arcs égaux correspondent des cordes égales, et ces cordes sont également distantes du centre ;*

2° *A un plus grand arc correspond une plus grande corde, et cette plus grande corde est la moins distante du centre ;*

[On suppose, dans cet énoncé, que *les arcs ne dépassent pas une demi-circonférence*].

1° La première partie du théorème n'a besoin d'aucune démonstration, puisque l'on peut opérer immédiatement la superposition. [Nous en avons déjà fait usage (n° 93, *cor.* 5).]

2° Soient deux arcs inégaux, un plus grand ACB, et un plus petit ACB′, que l'on peut supposer placés de telle manière qu'ils commencent en un même point A, et soient dirigés dans le même sens ACB′B ; soient encore OI, OI′, les perpendiculaires abaissées du centre O respectivement sur les cordes AB, AB′; soit enfin G le point d'intersection de OI′ avec AB.

[Il faut remarquer d'abord que, le point B′ étant situé entre le point A et le point B, de même le milieu de l'arc ACB′ le serait entre le point A et le milieu de l'arc ACB, et que par conséquent le point G se trouve entre le même point A et le point I. Cela posé :]

Il s'agit de prouver que l'on a $AB > AB'$, ou, ce qui revient au même, $AI > AI'$ (nº 101); et que $OI < OI'$.

En effet, on a d'abord :

$$AI > AG, \quad \text{et} \quad AG > AI' \ (\text{n}^\circ\ 95);$$

donc *à fortiori* $AI > AI'$.

En second lieu, l'on a de même :

$$OI < OG, \quad \text{et} \quad OG < OI';$$

donc $OI < OI'$.

Réciproques évidentes (nº 51).

Récipr. 1re. — Dans un même cercle, etc..... :

1º A des cordes égales correspondent des arcs égaux, et ces cordes sont également distantes du centre;

2º A une plus grande corde correspond un plus grand arc, et cette plus grande corde est la moins distante du centre :

[On suppose, etc. ....]

Récipr. 2. — 1º Des cordes également distantes du centre sont égales, et il leur correspond des arcs égaux;

2º Une corde moins distante du centre est plus grande, et il lui correspond un plus grand arc.

Scolie 1er. — Les propositions précédentes supposent essentiellement, conformément à l'énoncé, que les arcs ne dépassent pas une demi-circonférence. Dans le cas contraire il faudrait modifier ces propositions.

SCOL. 2. — Il est important d'observer que *Les cordes et les arcs*, bien que croissant et décroissant en même temps [lorsque les arcs sont au plus égaux à la demi-circonférence et les cordes au plus égales au diamètre], *ne sont pas proportionnels* (n° 93, *cor.* 5).

Scol. 3. — La distance du centre à une corde varie entre *zéro* et le rayon; à la première limite la corde est un diamètre; à la seconde elle devient nulle, et sa direction est tangente au cercle (n° 20). Et de plus, *Suivant qu'une droite est extérieure, tangente, ou sécante à un cercle, la distance du centre à cette droite est supérieure, égale, ou inférieure au rayon; — et réciproquement* (n° 51).

Théorème IX. (Fig. 59.)

105. *La plus petite corde que l'on puisse mener à un cercle par un point intérieur* I [différent du centre] *est la perpendiculaire* CD *au diamètre* AB *qui passe par ce point.* Fig. 59.

En effet, soit MN une autre corde quelconque passant par le même point, et OK sa distance au centre O, la perpendiculaire OK étant plus courte que l'oblique OI, il s'ensuivra (n° 104):

MN > CD; *C. Q. F. D.*

Théorème X. (Fig. 60.)

106. *Si d'un point* I *intérieur à un cercle* [et différent du centre] *on mène le diamètre* AB *et différentes cordes*, MN, M′N′, PQ... Fig. 60.

1° *Deux cordes*, MN, M′N′, *également inclinées sur le diamètre sont égales;*

2° *De deux cordes*, MN, PQ, *inégalement inclinées sur le diamètre, la plus inclinée* PQ *est la plus longue.*

[Remarquons d'abord que si l'on mène par le point I la corde CD perpendiculaire au diamètre AB, les pieds K, K′, L, ..., des perpendiculaires abaissées du centre O sur les cordes MN, M′N′, PQ... tomberont dans le plus grand, CBD, des deux segmens CAD, CBD, déterminés par la corde

CD, sans quoi ces perpendiculaires seraient plus longues que l'oblique OI. Cela posé :]

1°. Si l'on plie la figure le long du diamètre AB, les cordes MN, M'N', coïncideront, et par conséquent aussi les perpendiculaires OK, OK'. Ainsi, les cordes MN, M'N', étant également distantes du centre, sont égales (n° 104).

2° La perpendiculaire OK coupant nécessairement la corde PQ en un point G, on a ainsi (n° 95)

$$OL < OG, \quad \text{et} \quad OG < OK,$$

et par conséquent, *à fortiori*

$$OL < OK;$$

d'où il suit (n° 104) que la corde PQ est plus grande que la corde MN.

Les *réciproques* de ce théorème sont *évidentes* (n° 51).

N. B. — Avant de passer au chapitre suivant, il faut voir, dans l'appendice à la Géométrie plane, les problèmes dont la résolution ne dépend que de la théorie des perpendiculaires et des obliques. Pour cela, on consultera la table des matières placée au commencement de l'ouvrage.

Cette observation importante doit être renouvelée à la fin de chaque chapitre : nous la plaçons ici une fois pour toutes.

CHAPITRE II.

DES PARALLÈLES.

§ Ier. *Propriétés générales des Parallèles.*

LEMME.

107. *Toute bande* comprise entre deux parallèles (nº 83) *est moindre qu'un angle quelconque.*

En effet, nous savons : 1º qu'un angle quelconque ne peut être contenu dans un plan qu'un nombre limité de fois (nº 69); et au contraire, 2º qu'une bande quelconque y est toujours contenue un nombre infini de fois (nº 84); donc, non-seulement l'angle est toujours plus grand que la bande, mais on peut même dire que *La bande est infiniment plus petite que l'angle* ou que *L'angle équivaut à une infinité de bandes* (nº 69).

THÉORÈME I. (Fig. 61.)

108. *Par un point donné* O *on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée* AB. Fig. 61.

En effet, pour que l'on pût en mener deux, CD, EF, il faudrait que l'angle DOF pût être contenu dans la bande ABCD, ou l'angle COE dans la bande ABEF ; *ce qui est absurde.*

Corollaire 1er. — Si, par un point pris sur AB (fig. 39) on menait une droite quelconque différente de AB, cette droite rencontrerait toutes les parallèles CD, A′B′, C′D′.... *cd*, *ab*, *c′d′*....

Fig. 62. COROLL. 2.—*Deux droites*, AB, CD, *respectivement parallèles à une troisième* EF (fig. 62) *sont parallèles entre elles* :

Car si elles se rencontraient, on pourrait, par un même point, mener deux parallèles, AB, CD, à une même droite EF; *ce qui est absurde.*

Fig. 63. COROLL. 3.—Deux droites, AB, CD (fig. 63), perpendiculaires à une troisième MN [aux points M, N] étant parallèles (n° 83), il s'ensuit que *La perpendiculaire* AB *et l'oblique* EF [menée au point N] *doivent se rencontrer*; et de plus, le point d'intersection est situé du côté de l'angle interne aigu MNE.

THÉORÈME II. (Fig. 38.)

Fig. 38. 109. *Deux parallèles*, AB, CD, *ont leurs perpendiculaires communes.*

D'abord, si la droite EF est perpendiculaire à AB en E, elle ira rencontrer CD : sans quoi l'on pourrait, par un même point E, mener deux parallèles à la droite CD. Secondement, EF sera perpendiculaire à CD, car sans cela elle lui serait oblique; et alors AB, CD, étant l'une perpendiculaire et l'autre oblique à une même droite EF, se rencontreraient (n° 108, *cor.* 3); ce qui est contraire à l'hypothèse.

Scolie.—Les perpendiculaires à un système de droites parallèles forment un second système de droites parallèles.

THÉORÈME III. (Fig. 64.)

Fig. 64. 110. *Deux parallèles*, AB, CD, *sont partout également distantes*;—*et réciproquement.*

D'abord, la droite la plus courte que l'on puisse mener d'un point, E ou G, donné sur AB, à sa parallèle CD, est une perpendiculaire commune (n° 109), EF ou GI, à ces deux droites : cette perpendiculaire mesure donc, pour les points E ou G, la distance des deux parallèles. Ainsi, la question revient à démontrer que les perpendiculaires EF, GI, sont égales.

Pour cela, par le point M, milieu de EG, élevons sur AB la perpendiculaire MN qui aille rencontrer en N la parallèle CD;

puis rabattons BMND sur AMNC. Tous les angles de la figure étant droits, MG prendra la direction ME; et comme MG=ME, le point G tombera sur le point E. Ensuite GI prendra la direction EF, et NI la direction NF; donc le point I tombera en F; donc

$$GI = EF; \qquad C. Q. F. D.$$

Réciproquement : — *Si deux droites sont partout également distantes, elles sont parallèles* : — car alors elles ne sauraient se rencontrer.

Et d'ailleurs, comme deux points déterminent une droite (n° 7), on peut affirmer que

Deux droites sont parallèles lorsque deux points de l'une d'elles sont également distans de l'autre.

Scolie. — Tous les points qui sont à une distance donnée et du même côté d'une droite, se trouvent sur une même parallèle à la droite; de plus, les points situés *de ce même côté* de la droite, sont en dedans ou en dehors des deux parallèles, suivant que leur distance à la droite est plus petite ou plus grande que la distance donnée.

Théorème IV. (Fig. 65.)

111. *Deux droites*, AB, CD, *sont parallèles lorsqu'elles font avec une même transversale* EF [respectivement aux points M, N] *des angles alternes-internes égaux.* Fig. 65.

En effet, admettons que les segmens MA, NC, se rencontrent; et, dans cette hypothèse, faisons *pivoter* (n° 44) la portion de plan AMNC autour du point O, milieu de MN, de manière que OM prenne la place de ON, et ON la place de OM. Alors, le segment MA prendra la position ND, et le segment NC la position MB, puisque, d'après l'hypothèse faite sur les angles, on a

$$\textit{angle}\ AMN = \textit{angle}\ MND, \text{ et } \textit{angle}\ MNC = \textit{angle}\ BMN.$$

Or, les segmens MA, NC, ne cessant pas de se rencontrer

6

dans cette nouvelle position, il en résulte que les segmens MB, ND, avec lesquels ils coïncident chacun à chacun, se rencontreraient aussi ; et alors les droites AB, CD, auraient deux points communs ; *ce qui est absurde.*

Corollaire. — Les angles AMN, MND, BME, CNF, d'une part, et les angles MNC, BMN, DNF, AME, d'autre part, étant égaux quatre à quatre, et chacun des quatre premiers étant supplémentaire de chacun des quatre derniers, on peut généraliser la proposition de la manière suivante :

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coupées par une transversale (n° 85) *de telle manière qu'il en résulte*

1° *Des angles alternes-internes égaux ;*

2° *Des angles alternes-externes égaux ;*

3° *Des angles correspondans égaux ;*

4° *Des angles internes d'un même côté supplémentaires ;*

5° *Des angles externes d'un même côté supplémentaires.*

Scolie. — La proposition que *Deux droites, menées dans un même plan perpendiculairement à une troisième, sont parallèles* (n° 83), n'est qu'un cas particulier du théorème précédent.

Théorème V. (Fig. 66.)

Fig. 66. 112. *Deux droites,* AB, CD, *concourent vers un même point lorsque les angles alternes-internes qu'elles font avec une transversale* EF [respectivement aux points M, N] *sont inégaux.*

En effet, si par le point N, par exemple, on mène la droite C'D' de manière que les angles AMN, MND', soient égaux, les droites AB, C'D', seront parallèles (n° 111) ; donc AB et CD se rencontreront (n° 108).

Corollaire. — En observant que les quatre angles formés autour de chacun des deux points M, N, sont toujours, deux à deux, égaux ou supplémentaires (n° 111, *coroll.*), on peut généraliser la proposition de la manière suivante :

Deux droites se rencontrent lorsqu'elles sont coupées par une transversale de telle manière qu'il en résulte

1° *Des angles alternes-internes inégaux ;*

2° *Des angles alternes-externes inégaux ;*

3° *Des angles correspondans inégaux ;*

4° *Des angles internes d'un même côté non supplémentaires ;*

5° *Des angles externes d'un même côté non supplémentaires.*

SCOLIE. — *La rencontre a lieu du côté de la sécante où les angles internes forment une somme moindre que* 2 DROITS.

113. RÉCIPROQUES *des deux théorèmes précédens.* — Les théorèmes IV et V étant dans le cas de la remarque générale du n° 51, il en résulte que *leurs réciproques sont vraies.* Ainsi, suivant que deux droites coupées par une transversale sont ou ne sont pas parallèles, on peut affirmer

1° Que les angles alternes-internes, ou alternes-externes, ou correspondans, sont égaux ou inégaux ;

2° Que les angles internes ou externes d'un même côté sont ou ne sont pas supplémentaires ;

Et de plus, quand les deux droites se rencontrent, c'est toujours du côté du point d'intersection que les angles internes font la plus petite somme.

114. REMARQUE. — Soient AB, CD (fig. 67), deux parallèles ; Fig. 67.
et supposons que d'un point quelconque O pris sur CD, on mène sur AB la perpendiculaire OP et une série d'obliques, OR, OR′, OR″... : les pieds, R, R′, R″, ..., des obliques seront d'autant plus éloignés du pied P de la perpendiculaire, que les angles DOR, DOR′, DOR″, ..., ou leurs *alternes-internes* respectifs ORP, OR′P, OR″P, ..., seront plus petits ; et réciproquement. Ainsi, les angles DOR... ou ORP..., d'une part, pouvant devenir plus petits que tout angle donné, et d'autre part, les distances OR... ou les distances PR... pouvant devenir plus grandes que toute ligne donnée, il s'ensuit que la droite CD peut être considérée comme la *limite* dont s'approchent de plus en plus les droites OR... à mesure que les points de rencontre R... s'éloignent du point P, et que les

angles DOR... ou ORP... deviennent plus petits. C'est ce que l'on exprime d'une manière abrégée en disant que *Deux parallèles* sont deux droites qui *se rencontrent à l'infini en faisant entre elles un angle nul.*

§ II. *Conséquences des propriétés des parallèles.*

Théorème VI. (Fig. 68.)

Fig. 68. 115. *Lorsque deux droites*, AB, CD, *se coupent, leurs perpendiculaires respectives*, MN, PQ, *se coupent aussi.*

En effet, si MN et PQ étaient parallèles, AB et CD leur étant à la fois perpendiculaires (n° 109) seraient aussi parallèles (n° 111); ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème VII.

116. *Deux angles sont égaux ou supplémentaires lorsque les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre, chacun à chacun.*

Il peut se présenter plusieurs cas :

Fig. 69. 1° Les angles AOB, A'O'B', peuvent avoir les côtés dirigés chacun à chacun dans le même sens (fig. 69). Dans ce cas, le côté A'O', par exemple, [prolongé s'il est nécessaire] rencontrera le côté OB en un point C; et l'on aura, par la propriété des angles correspondans (n° 113),

$$AOB = A'CB, \quad A'CB = A'O'B',$$

d'où

$$AOB = A'O'B' :$$

Donc *Deux angles sont égaux lorsque les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre et dirigés dans le même sens, chacun à chacun.*

Fig. 70. 2° Les angles AOB, A'O'B', peuvent avoir les côtés dirigés chacun à chacun en sens contraire (fig. 70). Dans ce cas, soit OA'' le prolongement de OA, et OB'' le prolongement de OB : on aura

AOB = A″OB″ (n° 79), et A″OB″ = A′O′B′ (n° 116, 1°) ;
d'où AOB = A′O′B′ :

Donc *Deux angles sont égaux lorsque les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre et dirigés en sens contraire, chacun à chacun.*

3° Enfin le côté O′A′ peut être dirigé dans le sens de OA et O′B′ dans le sens contraire de OB (fig. 71). Alors, soit OA″ le prolongement de OA : les angles AOB et A″OB seront supplémentaires ; mais celui-ci est égal à A′O′B′ (n° 116, 1° ou 2°) ; donc AOB et A′O′B′ sont supplémentaires : Fig. 71.

Donc *Deux angles sont supplémentaires lorsque les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre, chacun à chacun, mais non dirigés à la fois dans le même sens ou en sens contraire.*

Ainsi, la proposition est complètement démontrée.

Théorème VIII. (Fig. 72.)

117. *Deux angles sont égaux ou supplémentaires lorsque les côtés de l'un sont perpendiculaires aux côtés de l'autre, chacun à chacun.* Fig. 72.

Soit un angle AOB. Faisons pivoter cet angle autour de son sommet, de manière que le côté OA prenne la direction OA′ perpendiculaire à sa direction primitive. Il faudra évidemment que, dans cette hypothèse, le côté OB prenne aussi une direction OB′ perpendiculaire à sa direction primitive. En effet, l'angle A′OB qui résulte du mouvement ainsi opéré, est tout aussi bien la différence des angles BOB′ et A′OB′, que celle des angles AOA′ et AOB ; or comme A′OB′ est identique avec AOB, il s'ensuit nécessairement que BOB′ égale AOA′, c'est-à-dire un angle droit. Maintenant, il est clair que l'angle A′OB′, son opposé $a'Ob'$, et leurs adjacens $A'Ob'$, $a'OB'$, sont les seuls, ayant leur sommet en O, dont les côtés puissent faire des angles droits avec ceux de l'angle AOB : donc puisque ces angles sont tous, deux à deux, égaux ou supplémentaires, la proposition est déjà démontrée pour le cas où les angles proposés ont le sommet commun.

Soit maintenant remplacé l'angle AOB par l'angle A″O″B″, ayant ses côtés parallèles à ceux du premier et dirigés dans le même sens, chacun à chacun : les angles AOB et A″O″B″ seront égaux (n° 116), et l'on pourra appliquer à celui-ci tout ce qui a été dit pour l'autre; donc la proposition est générale.

118. REMARQUE *sur les deux théorèmes précédens.* — La partie du dernier théorème qui est relative à l'égalité, revient à dire que les deux angles dont il s'agit sont égaux parce que, augmentés ou diminués à la fois d'un même angle, ils donnent tous deux un angle droit. Or, comme la proposition serait également vraie pour un résultat quelconque autre qu'un angle droit, il s'ensuit que ce même théorème, ainsi que le précédent, ne sont que deux cas particuliers d'une proposition beaucoup plus générale.

Soit en effet un angle AOB (fig. 72) : si on le fait pivoter dans son plan autour de son sommet, il prendra successivement toutes les positions possibles, et entre autres les *quatre* positions remarquables indiquées par la figure : il deviendra d'abord perpendiculaire [A′OB′] à sa première position, puis opposé [*a*O*b*], puis une seconde fois perpendiculaire [*a*′O*b*′], et enfin il reprendra sa position primitive [AOB]. Or dans ces quatre positions remarquables, ainsi que dans toutes les positions intermédiaires, l'angle AOB conservera constamment la même valeur.

THÉORÈME IX. (Fig. 73.)

Fig. 73. 119. *Deux tangentes*, ST, UV, *menées aux extrémités d'un même diamètre* AF *sont parallèles ; — et réciproquement.*

En effet, ces deux tangentes ne sont autre chose que des perpendiculaires à une même droite (n^{os} 102 et 111).

Réciproquement, deux tangentes parallèles ont nécessairement leurs points de contact situés aux extrémités d'un même diamètre : car les rayons qui aboutissent à ces deux points étant à la fois perpendiculaires aux deux tangentes doivent être les prolongemens l'un de l'autre (n° 109).

THÉORÈME X. (Fig. 73).

120. *Deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.*

Il peut se présenter plusieurs cas : Fig. 73.

1° Si les parallèles sont deux sécantes, BC, DE, le diamètre qui leur est perpendiculaire coupera la circonférence en deux points, A, F, également distans, d'une part, des points B et C, et d'autre part, des points D et E (n° 101). On aura donc :

$$arc\ AB = arc\ AC \quad \text{et} \quad arc\ AD = arc\ AE\,;$$

d'où $$arc\ BD = arc\ CE.$$

2°. Si, des deux parallèles, l'une est tangente, ST ou UV, et l'autre sécante, BC, en leur menant par le centre une perpendiculaire AOF, cette droite passera par le point de tangence (n° 102), A ou F, et coupera d'ailleurs l'arc BAC ou BFC en deux parties égales (n° 101);

donc $$AB = AC, \quad \text{ou} \quad FB = FC.$$

3° Enfin, si les parallèles sont deux tangentes, ST, UV, la droite AF qui passe par les points de tangence est un diamètre (n° 119), et alors les arcs ABDF, ACEF, égaux à la demi-circonférence, sont égaux entre eux.

La *réciproque* de cette proposition, que l'on démontrerait aisément par l'absurde, serait la suivante :

1° Si deux arcs égaux [d'un même cercle] n'ont aucune extrémité commune, les droites qui joignent deux à deux une extrémité de l'un avec une extrémité de l'autre, *sans se couper dans l'intérieur du cercle,* sont parallèles ;

2° Si deux arcs égaux ont une extrémité commune, la droite qui joint les extrémités non communes est parallèle à la tangente menée par l'extrémité commune ;

3° Si deux arcs égaux ont leurs extrémités communes, les tangentes menées par ces extrémités sont parallèles, [et alors chacun des deux arcs est une demi-circonférence].

121. REMARQUE *sur les théories précédentes*. — On a vu
Fig. 65. (n° 113) que lorsque deux parallèles, AB, CD (fig. 65), sont coupées par une transversale EF, il en résulte quatre couples d'angles correspondans égaux entre eux. Dire que les angles AMF, CNF, par exemple, sont égaux entre eux, c'est dire qu'ils peuvent se superposer (n° 3), ou bien qu'ils correspondent à des arcs égaux (n° 67) : cela se conçoit bien. Cependant, au premier abord, il paraîtrait s'ensuivre que la partie CNF est égale au tout AMF.

Pour résoudre cette espèce de paradoxe, il suffit de se rappeler les deux lemmes qui ont été établis précédemment dans les n^os 69 et 84, et les conséquences qui s'en déduisent. Il en résulte en effet que le rapport de l'angle AMB, ou de l'angle CNF, à la bande ABDC, ou à sa moitié AMNC, est infiniment grand; ou bien que le rapport de la bande à l'angle est infiniment petit, c'est-à-dire *nul*; ou bien enfin, comme nous l'avons dit ci-dessus (n° 107), que l'angle contient une infinité de bandes. D'où il suit nécessairement que la bande ne forme pas une quantité comparable à l'angle, ou mieux, que la bande et l'angle forment deux espèces différentes de grandeurs dont la première doit être considérée comme nulle et entièrement négligée en comparaison de la seconde (*).

C'est là ce qui explique en particulier comment tous les angles droits peuvent être égaux entre eux, c'est-à-dire pourquoi, *Par quelque point d'un plan que l'on mène deux droites perpendiculaires entre elles, ces droites partagent toujours le plan en quatre portions égales*.

(*) En d'autres termes, l'aire de la bande est une quantité *infinie du premier ordre*, parce qu'elle a une longueur infinie et une largeur finie; tandis que l'aire de l'angle est une quantité *infinie du second ordre*, parce que ses deux dimensions sont infinies. Or, de même qu'une quantité entièrement finie doit être négligée vis-à-vis d'une quantité infinie, de même aussi une quantité infinie du premier ordre doit être négligée vis-à-vis d'une quantité infinie du second ordre ou d'un ordre supérieur.

CHAPITRE III.

DU TRIANGLE.

§ 1er. *Propriétés générales des Triangles.*

122. Conformément à ce qui a été dit (nos 86 et 87) relativement aux polygones en général, on peut considérer un *triangle* ou *trilatère*, soit comme un *système de trois droites* qui se coupent deux à deux en trois points, A, B, C (fig. 74), Fig. 74 soit comme la *portion de plan* (fig. 75) *circonscrite par* ces Fig. 75. *trois droites* qui sont les *côtés* du triangle.

Du lemme I établi dans le no 93 il semble résulter que la possibilité de l'existence d'un triangle ayant pour côtés *trois* droites données, dépend de *six* conditions ; mais ces conditions se réduisent évidemment à *une seule* consistant en ce que *Le plus grand des trois côtés doit être moindre que la somme des deux autres.*

De plus, il résulte encore du lemme II démontré dans le numéro suivant (no 94), qu'*Un triangle a toujours au moins deux angles aigus*, puisque, si l'un de ses angles est droit ou obtus, chacun des deux autres, devant être moindre que l'angle supplémentaire adjacent au premier, est nécessairement aigu ; d'où l'on peut conclure qu'*Un triangle ne saurait avoir à la fois, ni deux angles droits, ni deux angles obtus, ni un angle droit et un angle obtus.*

123. Cela posé, un triangle est dit *acutangle*, *rectangle*, ou *obtusangle*, suivant que *le plus grand* de ses trois angles est aigu, droit, ou obtus.

Dans le triangle rectangle (fig. 76), le côté AC opposé à Fig. 76.

l'angle droit B prend le nom d'*hypoténuse;* les deux autres sont les *côtés de l'angle droit.*

Maintenant si, au lieu de considérer la valeur des angles, c'est aux grandeurs relatives des côtés que l'on a plus particulièrement égard, le triangle reçoit encore d'autres qualifications :

Fig. 77. Il est dit *scalène* (fig. 75, 76, 77) lorsque ses *trois côtés*, comparés deux à deux, sont *inégaux :* c'est le cas général;

Fig. 78. Il est dit *isocèle* (fig. 78) lorsque *deux* de ses *côtés*, AC, BC, sont *égaux* [le troisième, AB, étant généralement inégal aux deux premiers];

Enfin le triangle est *équilatéral* (n° 90) s'il a ses trois côtés
Fig. 79. égaux (fig. 79) : le triangle équilatéral étant un cas particulier du triangle isocèle, doit jouir de toutes les propriétés de ce dernier; mais la réciproque n'est pas vraie (nos 35 et 52).

Fig. 75 et 77. 124. Dans tout triangle ABC (fig. 75 et 77), la perpendiculaire CD abaissée d'un *quelconque* C des trois *sommets* (n° 86) sur le côté opposé AB, et ainsi déterminée de longueur, se nomme la *hauteur* du triangle; le côté AB sur lequel est abaissée la perpendiculaire prend le nom de *base*, et les deux autres sont dits les *côtés latéraux*. Un côté quelconque du triangle peut être pris pour base [cependant, lorsque le triangle est isocèle, on considère ordinairement comme base le côté qui diffère des deux autres]; aux divers côtés considérés comme bases correspondent des hauteurs généralement différentes. — Bien que chacun des trois points A, B, C, soit un sommet (n° 86), cependant on appelle plus particulièrement *sommet du triangle* le sommet C de l'angle opposé au côté que l'on considère comme base; cet angle prend alors le nom d'*angle au sommet*, et les deux autres, A, B, celui d'*angles à la base.*

Deux triangles ont même hauteur lorsqu'ils ont leurs bases sur une même droite et leurs sommets sur une même parallèle à cette droite (n° 109), ou bien encore lorsque, les bases étant parallèles, le sommet de chacun se trouve sur la base de l'autre ou sur son prolongement.

La perpendiculaire nommée *hauteur* peut tomber dans l'intérieur du triangle (fig. 75) ou se confondre avec l'un des côtés (fig. 76), ou enfin tomber à l'extérieur (fig. 77). Or, il est facile de conclure de ce qui précède, que le premier cas arrive lorsque les angles à la base sont tous deux aigus; le second quand l'un de ces angles est droit; enfin le troisième quand il y a un angle obtus, et c'est alors celui vers lequel tombe la perpendiculaire.

Théorème I. (Fig. 80.)

125. *La somme des angles d'un triangle quelconque* ABC *est égale à* 2 DROITS. Fig. 80.

Prolongeons l'un des côtés, AB par exemple, de manière à former l'angle extérieur (n° 88) CBD; puis, dans cet angle, menons BE parallèle à AC. Nous aurons ainsi

$$CBE = ACB, \quad \text{et} \quad EBD = CAB \ (\text{n}^\circ\ 113);$$

d'où $ABC + BCA + CAB = ABC + CBE + EBD = 2$ *droits*.

COROLLAIRE 1er. — *Tout angle d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres.*

COROLL. 2. — *Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.*

COROLL. 3. — *Si deux angles d'un triangle sont, chacun à chacun, égaux à deux angles d'un autre triangle, les deux triangles sont équiangles entre eux.*

SCOLIE 1er. — *Chaque angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacens au premier* (Voy. le n° 94).

Scol. 2. — De ce théorème on peut aussi conclure ce qui a été dit plus haut (n° 123), qu'*Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit ou obtus.* — La position de la hauteur du triangle suivant la nature des angles adjacens à la base s'en déduit également.

Théorème II. (Fig. 53.)

Fig. 53. 126. 1° *Lorsque deux côtés*, AE, BE, *d'un triangle* ABE *sont égaux, les angles opposés sont égaux ;*

2° *Lorsque deux côtés* AF, BF, *d'un triangle* ABF *sont inégaux, au plus grand côté* BF *est opposé un plus grand angle.*

Par le point D, milieu du troisième côté AB, élevons d'abord une perpendiculaire. Cela posé :

1er *Cas :* Les deux côtés AE, BE, étant égaux, la perpendiculaire élevée par le point D passera par le sommet E ; et alors les angles d'inclinaison A et B seront égaux (n° 96).

2e *Cas :* Puisque l'on a BF > AF, la perpendiculaire coupera BF en un point E ; alors, en menant AE, nous aurons

$$\textit{angle}\ \mathrm{BAE} = \textit{angle}\ \mathrm{ABE}\ ;$$

et par conséquent

$$\textit{angle}\ \mathrm{BAF} > \textit{angle}\ \mathrm{ABF}.$$

Réciproque évidente (n° 51) : — 1° Lorsque deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés sont égaux ;

2° Lorsque deux angles sont inégaux, au plus grand angle est opposé un plus grand côté.

Scolie 1er. — Le premier cas du théorème précédent et de sa réciproque étant celui du triangle isocèle, il en résulte que

Fig. 78. *Dans un triangle isocèle* ABC (fig. 78), *les angles,* A, B, *opposés aux côtés égaux sont égaux ; — et réciproquement, etc.*

Il s'ensuit encore que *Le triangle isocèle est une figure symétrique ayant pour axe la droite qui joint le milieu* D *de la base avec le sommet,* et que par conséquent *cette droite partage le triangle en deux triangles rectangles égaux* ayant pour hypoténuses respectives les deux côtés égaux.

La théorie des obliques, combinée avec la proposition du n° 49 et appliquée au cas du triangle isocèle, donne encore lieu, comme dans le n° 101 (*scol.* 1er), à plusieurs propositions; nous ne citerons que les deux suivantes :

1° La droite qui partage en deux parties égales l'angle du sommet d'un triangle isocèle est perpendiculaire sur le milieu de la base ;

2° Si la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets d'un triangle sur le côté opposé partage ce côté en deux parties égales, le triangle est isocèle.

Scol. 2. — *Un triangle équilatéral* (fig. 79) *est en même temps équiangle ;* et réciproquement *Un triangle équiangle est en même temps équilatéral.* — Le triangle équilatéral est donc un *triangle régulier* (n° 90). — Chacun de ses angles a pour valeur $\frac{2}{3}$ (n° 125). Fig. 79.

Le triangle équilatéral a trois axes de symétrie : ce sont les droites menées des sommets, A, B, C, de chaque angle, aux milieux, A′, B′, C′, des côtés respectivement opposés. Ces trois axes se coupent en un point O que l'on nomme le centre du triangle équilatéral, et qui est également distant, d'une part, de ses trois sommets, et de l'autre, de ses trois côtés.

Scol. 3. — *Dans un triangle quelconque, au plus grand ou au plus petit des trois côtés est opposé le plus grand ou le plus petit des trois angles ; — et réciproquement.*

Ainsi 1° *Dans un triangle rectangle* (fig. 76), *l'hypoténuse* AC *est le plus grand des trois côtés,* Fig. 76.

Et 2° *Dans un triangle obtusangle* ABC (fig. 77), *le plus grand côté est celui qui est opposé à l'angle obtus* B. Fig. 77.

Théorème III. (Fig. 81.)

127. *Dans un triangle rectangle* ABC, *le milieu de l'hypoténuse* BC *est également distant des trois sommets.* Fig. 81.

En effet, puisque l'angle droit A est égal à la somme des deux angles aigus, B, C, menons une droite AD qui partage cet angle droit en deux parties, BAD, CAD, dont la première soit égale à B : la seconde sera nécessairement égale à C. Le triangle ABC se trouvera donc ainsi partagé en deux triangles isocèles (n° 126, *récipr.*), DAB, DAC, ayant pour sommet commun le point D et pour bases respectives AB, AC; d'où il résulte, d'abord que le point D ainsi déterminé sera le milieu de l'hypoténuse, et ensuite que ce point sera également distant des trois sommets; *C. Q. F. D.*

Corollaire 1er. — *Dans un triangle rectangle, la droite menée du sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse partage le triangle en deux triangles isocèles* ayant respectivement pour bases les deux côtés de l'angle droit.

Coroll. 2. — *Si, du milieu de l'hypoténuse, comme centre, et d'un rayon égal à la moitié de cette hypoténuse, on décrit un cercle, sa circonférence passera par les trois sommets;* et et elle aura l'hypoténuse pour diamètre.

Réciproque. — *Lorsque dans un triangle* ABC, *le milieu* D *d'un côté* BC *est également distant des trois sommets, le triangle est rectangle* [et ce côté en est l'hypoténuse].

En effet, d'après l'hypothèse, les distances AD, BD, CD, étant égales, les angles BAD, ABD, sont égaux (n° 126), ainsi que les angles CAD, ACD; d'où il résulte que

$$BAC = ABC + ACB,$$

et que par conséquent BAC est un angle droit (n° 125).

Théorème IV. (Fig. 82.)

Fig. 82. 128. *Dans tout triangle* ABC, *les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés concourent en un même point.*

Considérons deux de ces perpendiculaires, A′O, B′O, menées respectivement par les milieux des côtés BC et AC: elles se coupent (n° 115) en un point O également distant des trois sommets (n° 97); donc la perpendiculaire abaissée du point O sur le troisième côté AB tombe sur le milieu C′ de ce côté; donc, etc.

Corollaire 1er. — Le point O étant également distant des trois sommets du triangle, si de ce point, comme centre, et d'un rayon égal à la distance OA = OB = OC, on décrit un cercle, sa circonférence passera par les trois sommets, et sera circonscrite (n° 90) au triangle. Ainsi *A tout triangle on peut circonscrire un cercle*, ou bien *Tout triangle est inscriptible à un cercle*.

Coroll. 2.— Le point O est le *seul* qui soit également distant des trois sommets du triangle. Donc *Trois points, non situés en ligne droite, déterminent* complètement *une circonférence de cercle*.

Si ces trois points sont supposés variables de position, et que deux d'entre eux viennent à se confondre en un seul, alors, la droite qui les joignait deviendra tangente au cercle, et la dernière proposition ne cessera cependant pas d'avoir lieu. *Un cercle est* donc également *déterminé lorsqu'il doit toucher une droite donnée en un point donné, et passer par un autre point donné* hors de la droite. C'est d'ailleurs ce qu'il est facile de reconnaître en élevant une perpendiculaire au point donné sur la droite, et une autre sur le milieu de la distance des deux points : car le centre devra nécessairement se trouver au point d'intersection de ces deux perpendiculaires.

Coroll. 3.— *Le centre d'un cercle est le seul point de son plan qui soit également distant de trois points de sa circonférence.*

≶[*Scolie.* — Le centre du cercle circonscrit à un triangle peut se trouver dans l'intérieur de ce triangle, ou sur l'un des côtés, ou à l'extérieur. Nous avons déjà prouvé dans le *numéro* 127, que le second cas a lieu quand le triangle est rectangle; et il serait facile de démontrer par des moyens analogues, que le centre du cercle circonscrit est intérieur ou extérieur au triangle, suivant que ce triangle est acutangle ou obtusangle.]≷

Théorème V. (Fig. 83.)

129. *Dans tout triangle* ABC, *les droites qui partagent les angles en deux parties égales concourent en un même point.* Fig. 83.

Considérons deux de ces droites, AO, BO : elles se coupent en un point O situé *dans l'intérieur* du triangle, et également distant des trois côtés (n° 98); donc la droite menée de ce point au sommet C partage l'angle C en deux parties égales; donc etc.

Corollaire 1er. — Le point O étant également distant des trois côtés du triangle, si l'on abaisse de ce point les perpendiculaires OA′, OB′, OC′, respectivement sur les trois côtés BC, AC, AB, ces perpendiculaires seront égales; d'où il résulte qu'en décrivant un cercle du point O comme centre et d'un rayon égal à OA′ = OB′ = OC′, sa circonférence touchera les trois côtés respectivement aux points A′, B′, C′ (n° 102), et sera par conséquent inscrite au triangle (n° 90). Ainsi *A tout triangle on peut inscrire un cercle*, ou bien *Tout triangle est circonscriptible* au cercle.

Coroll. 2. — Le point O est le *seul* point *intérieur* au triangle ABC, qui soit également distant de ses trois côtés. Donc *Un cercle est complètement déterminé quand on sait qu'il est inscrit à un triangle.*

≤ [*Scolie.* — On peut prouver de la même manière que chaque droite qui partage en deux parties égales l'un des an-
Fig. 84. gles d'un triangle ABC (fig. 84), passe par le point de concours des droites qui partagent en deux parties égales les supplémens des deux autres angles. D'où il résulte que, de chacun des trois nouveaux points de concours, *a*, *b*, *c*, comme centre, on peut décrire une circonférence qui touche à la fois l'un des côtés du triangle et les prolongemens des deux autres. Les trois cercles ainsi obtenus sont dits *ex-inscrits* au triangle.

Deux quelconques des quatre centres sont toujours en ligne droite avec un des sommets. De plus, chacune des droites qui joignent les centres de deux des cercles ex-inscrits avec un sommet du triangle, est perpendiculaire à la droite qui joint ce même sommet avec le centre du cercle intérieur.

On pourrait supposer que les côtés du triangle sont mobiles, et que deux d'entre eux deviennent parallèles : alors il n'y aurait plus que deux circonférences capables de toucher à la fois les trois droites que l'on considère.] ≥

§ II. *De l'Égalité des Triangles.*

Théorème VI. (Fig. 85.)

130. *Deux triangles*, ABC, A'B'C', *sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun*, AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'. Fig. 85.

Appliquons le côté A'B' sur son égal AB, et le triangle A'B'C' sur le plan ABC, de manière que les côtés égaux *se correspondent* [c'est-à-dire que le point A' soit sur le point A, le point B' sur le point B, et le point C' du même côté de AB que le point C]. Je dis que, par suite de ce mouvement, les deux triangles coïncideront. Or, pour cela, les conditions nécessaires et suffisantes sont, qu'après la superposition des côtés AB, A'B', les droites AC et A'C', BC et B'C', considérées deux à deux, aient la même direction; et c'est aussi ce qui arrivera.

Supposons en effet que cela n'ait pas lieu : dans cette hypothèse, quelque côté de l'un des deux triangles, par exemple le côté A'C' du triangle A'B'C', aura une direction intérieure à l'autre triangle ABC [et le même raisonnement peut être fait pour B'C', pour AC, et pour BC]. Alors le point C' tombera, ou dans le triangle ABC, en D, ou sur le côté BC, en E, ou bien enfin hors du triangle, en F.

Dans le premier cas, on aura (n° 93, *coroll.* 1^er^) :

$$AC + BC > AD + BD,$$

ou, en substituant à la place de AD et de BD leurs valeurs respectives A'C' et B'C',

$$AC + BC > A'C' + B'C',$$

ce qui est absurde, puisque, par hypothèse,

$$AC = A'C' \quad \text{et} \quad BC = B'C'.$$

Dans le second cas, on aura

$$BC > BE, \quad \text{ou} \quad BC > B'C',$$

ce qui est également contraire à l'hypothèse.

Enfin, dans le troisième cas, on aura de même (n° 93, *coroll.* 2) :

$$AF + BC > AC + BF,$$

ou bien

$$A'C' + BC > AC + B'C',$$

ce qui est absurde, comme ci-dessus.

Donc enfin, le point C′ tombera sur le point C, et par conséquent les deux triangles coïncideront.

C. Q. F. D.

Scolie. — *Un triangle est déterminé par ses trois côtés.*

Théorème VII. (Fig. 86.)

Fig. 86. 131. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun*, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, *ainsi que l'angle compris par ces côtés*, $A = A'$.

Appliquons le côté A′B′ sur son égal AB, et le triangle A′B′C′ sur le plan ABC, de manière que les côtés et les angles égaux se correspondent (n° 130) : l'angle A′ étant égal à l'angle A, le côté A′C′ prendra la direction AC ; et comme $A'C' = AC$, le point C′ tombera sur le point C : donc les deux triangles coïncideront.

Scolie. — *Un triangle est déterminé par deux côtés et l'angle compris.*

132. Remarque *sur les deux théorèmes précédens.* — Les démonstrations de ces deux théorèmes prouvent en même temps la proposition suivante :

Fig. 85 et 86. *Lorsque deux côtés*, AB, AC (fig. 85 et 86), *d'un triangle* ABC *sont égaux chacun à chacun à deux côtés*, A′B′, A′C′, *d'un autre triangle* A′B′C′ [de manière que l'on ait $AB = A'B'$, $AC = A'C'$], *suivant que l'angle* A *compris par les premiers est égal ou supérieur à l'angle* A′ *compris par les derniers*, *le troisième côté* BC *du premier triangle est égal ou supérieur au troisième côté* B'C' *du second triangle.*

Il suffit en effet, pour démontrer directement cette proposition, d'appliquer au premier cas [$A = A'$] le raisonnement du n° 131, et au second cas [$A > A'$] le raisonnement du n° 130.

La *réciproque* de cette proposition est *évidente* d'après le n° 51, et elle comprend visiblement le théorème VI que l'on peut, de cette manière, faire dériver du théorème VII.

Théorème VIII. (Fig. 86.)

133. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal* (*), $AB = A'B'$, *adjacent à des angles égaux chacun à chacun*, $A = A'$, $B = B'$. Fig. 86.

Appliquons le côté A'B' sur son égal AB, et le triangle A'B'C' sur le plan ABC, de manière que les angles égaux se correspondent (n° 130) : l'angle A' étant égal à l'angle A, le côté A'C' prendra la direction AC, et l'angle B' étant égal à l'angle B, le côté B'C' prendra la direction BC. Le point C', se trouvant ainsi à la fois sur AC et sur BC, se confondra avec le point C, et les deux triangles coïncideront.

Scolie 1er. — *Un triangle est déterminé par un côté et les angles adjacens.*

Scol. 2. — On peut dire encore que *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal, ainsi que l'angle opposé et l'un des angles adjacens :* car, dans cette hypothèse, les angles adjacens sont nécessairement égaux chacun à chacun (n° 125).

(*) Cette locution, quoique inexacte, est employée à cause de sa brièveté. Les énoncés de la plupart des théorèmes de ce paragraphe donnent lieu à des remarques analogues.

Théorème IX. (Fig. 87.)

Fig. 87. 134. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun,* AB = A′B′, BC = B′C′, *ainsi que l'angle opposé à l'un d'eux,* A = A′, *pourvu que l'angle opposé à l'autre côté soit de même espèce* dans les deux triangles, c'est-à-dire aigu, ou droit, ou obtus à la fois.

Appliquons le côté A′B′ sur son égal AB, et le triangle A′B′C′ sur le plan ABC, de manière que les côtés et les angles égaux se correspondent (n° 130) : l'angle A′ étant égal à l'angle A, le côté A′C′ prendra la direction AC.

Quant au côté B′C′, il faut distinguer deux cas : ou ce côté est perpendiculaire à A′C′, ou il lui est oblique.

Si B′C′ est perpendiculaire à A′C′, BC est aussi perpendiculaire à AC : car sans cela, l'on aurait, après la superposition, une oblique et une perpendiculaire à la même droite AC, égales entre elles, ce qui est impossible. Or, comme on ne peut abaisser, d'un même point B, deux perpendiculaires à une même droite AC, il s'ensuit que le point C′ tombera sur le point C : donc les deux triangles coïncideront.

Si au contraire B′C′ est oblique sur A′C′, alors BC sera aussi oblique sur AC, par la même raison que tout à l'heure. Dans ce cas, soit BD la perpendiculaire à AC menée par le point B : la droite B′C′ sera susceptible de prendre deux positions BC, B*c*, également distantes de la perpendiculaire BD. Mais des deux angles ACB, A*c*B, l'un est nécessairement aigu et l'autre obtus (n° 94) : donc si les angles C, C′, sont de même espèce, le point C′ tombera sur le point C; et ainsi les deux triangles coïncideront encore.

N. B. — Il faut remarquer cependant que la droite B′C′ ne sera pas toujours susceptible de prendre deux positions opposées à l'angle A comme nous venons de le supposer. Elle n'en aurait qu'une si A et A′ étaient obtus ou droits; et elle n'en aurait qu'une encore si, ces angles étant aigus, on avait

$$AB\ [=A'B'] < BC\ [=B'C']\qquad (\text{n}^\circ\ 96).$$

SCOLIE 1er. — *Un triangle est déterminé par deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, pourvu* toutefois *que l'on connaisse l'espèce de l'angle opposé à l'autre* côté donné.

SCOL. 2. — Comme l'équivoque à laquelle est soumis le théorème précédent a lieu seulement lorsque l'angle donné est opposé au plus petit des deux côtés donnés, on peut affirmer que

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, ainsi que l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés ;

D'où il résulte qu'*Un triangle est complètement déterminé par deux côtés et l'angle opposé au plus grand des deux.*

135. REMARQUE *sur les quatre théorèmes précédens.* — Bien que, dans la composition d'un triangle quelconque, il entre toujours *six* choses ou *données*, savoir *trois côtés* et *trois angles*, cependant, pour être assuré qu'il y a égalité entre deux triangles, il n'est pas nécessaire que l'on sache *à priori* que les six données relatives à l'un sont égales aux six données relatives à l'autre, chacune à chacune : trois de ces égalités suffisent en général pour entraîner l'égalité des deux triangles ; mais il faut pour cela que quelques autres conditions soient remplies.

La première condition est qu'au nombre des trois données communes, il se trouve *au moins un côté*. Il est facile de voir que les trois angles ne suffisent pas : car si, dans un triangle quelconque ABC, on mène à la base AB (fig. 88) une parallèle A'B', le triangle A'B'C' qui en résultera sera équiangle avec le premier, à cause de l'égalité des angles correspondans, A et A', B et B'. Fig. 88.

En second lieu, il est nécessaire que *les angles donnés égaux* soient à la fois *opposés ou adjacens aux côtés donnés égaux*.

Nous avons vu d'ailleurs (n° 134) que, si les données communes aux deux triangles sont deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, l'angle opposé à l'autre côté doit être de même espèce dans les deux triangles, mais qu'au surplus, cette restriction n'est pas toujours nécessaire.

136. REMARQUE *sur les triangles symétriques.*—On sait qu'il y a pour les figures planes deux sortes d'égalité ou deux modes de superposition (n° 43), lesquels n'ont point été distingués dans les théorèmes précédens. Les trois données communes aux deux triangles peuvent donc, dans les diverses hypothèses que nous avons faites (n^os 130, 131, 133, et 134), être disposées, pour chacun d'eux, de la même manière ou d'une manière absolument inverse; et suivant que l'un ou l'autre des deux cas aura lieu, la superposition des deux triangles se fera directement ou inversement (n° 45).

De plus, comme il n'y a évidemment que deux manières de disposer entre eux les trois côtés d'un triangle, puisque chacun de ces trois côtés est toujours consécutif de chacun des deux autres, il s'ensuit, d'abord que deux *triangles symétriques* entre eux peuvent être définis des triangles qui ont leurs *côtés égaux chacun à chacun mais inversement disposés;* et ensuite que *Deux triangles symétriques d'un troisième sont* toujours nécessairement égaux entre eux et *directement superposables.*

137. REMARQUE *sur le triangle isocèle.* — On a vu dans le n° 126 que le triangle isocèle est une figure symétrique par rapport à la droite (n° 99) qui joint son sommet au milieu de sa base. Il en résulte que deux triangles isocèles égaux sont susceptibles à la fois des deux modes de superposition [directe et inverse]; et l'on conçoit, que, par suite, les propositions relatives au triangle isocèle peuvent être déduites, comme corollaires, des théorèmes relatifs à l'égalité des triangles en général.

C'est ainsi que du théorème VI (n° 130), ou du théorème VII (n° 131), on peut conclure directement cette pro-
Fig. 89. position (n° 126) que *Dans tout triangle isocèle* ABC (fig. 89),

les angles, B, C, opposés aux côtés égaux, AC, AB, sont égaux.

Car si l'on retourne le triangle ABC de manière qu'il prenne la position A'B'C' inverse de la première, les deux triangles ABC, A'C'B', pourront être considérés, soit comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir :

$$BC = C'B', \quad AB = A'C', \quad \text{et} \quad AC = A'B';$$

soit comme ayant deux côtés égaux chacun à chacun, $AB = A'C'$, $AC = A'B'$, comprenant le même angle $A = A'$: donc ils seront égaux de telle manière que l'on aura

$$C' = B, \quad B' = C, \quad \text{ou simplement} \quad B = C.$$

Pareillement, du théorème VIII (n° 133) on peut conclure que, *Si deux angles, A, B, d'un triangle ABC sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux;* et que par conséquent *le triangle est isocèle.*

Car les deux triangles ABC, A'C'B', ont un côté égal $BC = C'B'$, adjacent à des angles égaux chacun à chacun, $B = C'$, $C = B'$, d'où résulte

$$AB = A'C' \quad \text{et} \quad AC = A'B', \quad \text{ou simplement} \quad AB = AC.$$

138. Remarque *sur le triangle rectangle* — Comme, dans un pareil triangle, un angle aigu détermine toujours le second, on peut conclure, comme cas particulier du théorème VIII (n° 133), en supposant droits les angles C et C' de la figure 86, Fig. 86.
que *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont chacun à chacun l'hypoténuse égale et un angle aigu égal* [outre l'angle droit].

Il est d'ailleurs facile de voir *à priori*, que si, en faisant coïncider les hypoténuses ainsi que les angles aigus que l'on suppose égaux [A et A' par exemple], les angles droits ne coïncidaient pas, on pourrait abaisser, d'un même point B, deux perpendiculaires sur une même droite AC, ce qui est absurde.

De même, en supposant droits les angles A et A' dans le Fig. 87.

théorème IX (n° 134) et dans la figure 87, on peut conclure de ce théorème, que *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont, chacun à chacun, l'hypoténuse égale et un second côté égal.*

C'est d'ailleurs ce que l'on peut voir d'une autre manière en observant que si, après avoir superposé les côtés égaux AB et A'B', ainsi que les angles droits A et A', les hypoténuses ne coïncidaient pas, on pourrait d'un même point B mener à la droite AC deux obliques égales.

Nous engageons les élèves, en raison de l'importance de ces divers cas particuliers, à en reprendre directement la démonstration.

§ III. *Des Triangles considérés relativement au Cercle. — Des Cercles Sécans, Tangens, extérieurs et intérieurs les uns aux autres.*

THÉORÈME X. (Fig. 90 et 91.)

Fig. 90 et 91. 139. *La plus grande et la plus petite droite que l'on puisse mener à une circonférence* OA, *d'un point* I [différent du centre] *intérieur* (fig. 90) *ou extérieur* (fig. 91), *sont les distances*, IA, IB, *de ce point aux extrémités du diamètre* AB *qui y passe.*

Soit IC (fig. 90 et 91) une droite quelconque qui ne passe pas par le centre, et menons le rayon OC. Cela posé :

1° Si le point I est intérieur au cercle (fig. 90), nous aurons

$$IC < OC + OI, \text{ ou } IC < OA + OI, \text{ ou } IC < IA;$$
$$IC > OC - OI, \text{ ou } IC > OB - OI, \text{ ou } IC > IB:$$

Ainsi les distances *maximum* et *minimum* du point I à la circonférence sont *les deux portions du diamètre* AB mené par ce point ;

2° Si le point I est extérieur au cercle (fig. 91), nous aurons

$$IC < OI + OC, \text{ ou } IC < OI + OA, \text{ ou } IC < IA;$$
$$IC > OI - OC, \text{ ou } IC > OI - OB, \text{ ou } IC > IB:$$

Ainsi les distances *maximum* et *minimum* du point I à la circonférence sont encore *les distances comptées sur le diamètre* qui passe par ce point. *C. Q. F. D.*

Théorème XI. (Fig. 90 et 91.)

140. Si, par un point I intérieur ou extérieur à une circonférence mais différent du centre, on mène le diamètre AB et différentes droites, IC, IC′, ID,..., terminées d'une part au point I et d'autre part à la circonférence :

1° *Deux droites*, IC, IC′, *dont les extrémités*, C, C′, *sont à des distances égales de chaque extrémité*, A ou B, *du diamètre sont égales ;*

2° *Deux droites*, IC, ID, *dont les extrémités*, C, D, *sont à des distances inégales de chaque extrémité du diamètre sont inégales.*

1° Plions la figure le long du diamètre AB : les points C et C′ se confondront puisque $AC = AC'$; donc $IC = IC'$.

2° Supposons $AC < AD$; et menons les rayons OC, OD : nous aurons deux triangles OCI, ODI, qui, outre le côté commun OI, donneront

$$OC = OD, \quad \text{et} \quad \textit{angle}\ IOC > \textit{angle}\ IOD\,;$$

d'où résulte (n° 132)

$$IC > ID.$$

Scolie. — Il faut remarquer, conformément au résultat précédent, que la plus longue de deux droites quelconques est celle dont l'extrémité est la plus rapprochée du point A auquel aboutit la distance *maximum*, tandis que la plus courte des deux est celle dont l'extrémité est la plus rapprochée du point B auquel correspond la distance *minimum*.

De plus, chacune des droites IC, ID, coupe la circonférence en un second point, *c*, *d*; et il est facile de voir qu'à la plus longue des deux distances IC, ID, correspond la plus petite distance I*c* ou I*d*. Si le point I est intérieur au cercle, la même droite donnera deux distances égales lorsqu'elle sera perpendiculaire au diamètre ; et si le point I est extérieur, les deux distances deviendront égales lorsque la droite, de sécante qu'elle était, deviendra tangente (nº 20).

Les *réciproques* du théorème précédent sont évidentes (nº 51).]$\geq$

---

141. Il résulte de ce qu'on a vu ci-dessus (nº 128, *coroll.* 2), que DEUX CIRCONFÉRENCES *ne peuvent se rencontrer en plus de deux points*, puisque l'on ne peut circonscrire qu'une seule circonférence à un triangle, ou puisque, par trois points donnés, on ne peut faire passer qu'une seule circonférence.

Il s'ensuit encore qu'*Un même arc ne saurait appartenir à deux circonférences différentes;* [d'où l'on peut conclure que, dans l'énoncé du théorème démontré nº 104, *mais non dans la réciproque,* on pourrait se dispenser d'énoncer la condition de l'identité ou de l'égalité des cercles].

Cela posé, deux cercles situés dans un même plan peuvent avoir *cinq* positions relatives différentes : ils peuvent être

Fig. 92. 1° *Extérieurs l'un à l'autre* (fig. 92) ;
Fig. 93. 2° *Tangens extérieurement* (fig. 93) ;
Fig. 94. 3° *Sécans*............... (fig. 94) ;
Fig. 95. 4° *Tangens intérieurement* (fig. 95) ;
Fig. 96. 5° *Intérieurs l'un à l'autre* (fig. 96).

Et de plus, ces cinq positions relatives sont les seules possibles.

La droite qui joint les deux centres se nomme la *ligne des centres.*

Fig. 97. Les deux cercles peuvent avoir le même centre (fig. 97) : alors ils sont dits *concentriques*, et la portion de plan comprise entre leurs circonférences se nomme une *couronne circulaire.*

Les deux cercles sont dits *excentriques* toutes les fois qu'ils n'ont pas le même centre.

Théorème XII. (Fig. 94.)

142. *Lorsque deux circonférences*, OM, O′M, *se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire à la corde* MN *qui joint les points d'intersection, et elle la divise en deux parties égales.* Fig. 95.

En effet, la perpendiculaire élevée sur le milieu P de MN, corde commune aux deux cercles, devant passer par les deux points O, O′ (n° 97), n'est autre chose que la ligne des centres (n^{os} 49 et 141) : ce qui démontre la proposition.

Théorème XIII. (Fig. 93 et 95.)

143. *Lorsque deux circonférences*, OA, O′A, *se touchent, la ligne des centres passe par le point de contact.* Fig. 93 et 95.

On peut regarder ce théorème comme un cas particulier du précédent : celui où les deux points d'intersection se réunissent en un seul (n° 20). Dans ce cas, la corde commune aux deux circonférences devient *nulle*, et la ligne des centres passe nécessairement par le seul point commun. Mais on peut démontrer directement cette nouvelle proposition.

Pour cela, soient O, O′ (fig. 94), les centres des deux circonférences ; et supposons que leur point de contact soit placé hors de la droite OO′, par exemple en M. Les trois points O, O′, M, formeront alors un triangle dans lequel OM et O′M seront les rayons respectifs des deux cercles. Cela posé, l'on pourra, en renversant le triangle OMO′, former un second triangle ONO′, symétrique du premier par rapport à la droite OO′ (n° 99), et dans lequel on aura par conséquent Fig. 94.

$$ON = OM \quad \text{et} \quad O'N = O'M;$$

ainsi, le point N appartenant aussi aux deux circonférences, ces deux circonférences seraient sécantes ; ce qui est contre l'hypothèse.

Scolie 1er. — Ce raisonnement prouve d'abord que si deux circonférences ont un point commun hors de la ligne des centres, elles en ont nécessairement un second, et qu'ainsi elles sont sécantes.

Il résulte en outre des deux théorèmes précédens, que *Si deux circonférences ont un point commun sur la ligne des centres, elles* ne sauraient avoir d'autre point commun et *sont* par conséquent *tangentes*.

Fig. 93 et 95. *Scol.* 2. — Si, au point de contact A (fig. 93 et 95) de deux circonférences, OA, O'A, on élève une perpendiculaire ST à la ligne des centres, cette perpendiculaire sera une tangente (nº 102) commune aux deux cercles. Par conséquent, tous les

Fig 98. cercles (fig. 98) qui ont leurs centres sur une même droite MN, et qui passent par un même point A pris sur cette droite, sont tangens les uns aux autres, ainsi qu'à la perpendiculaire ST élevée par ce point sur la ligne des centres.

D'où l'on peut conclure que, réciproquement, *Lorsqu'un nombre quelconque de circonférences se touchent deux à deux* en un même point A (fig. 98), 1º *tous leurs centres sont sur une même droite*, *et* 2º *elles ont* au point A *une tangente commune perpendiculaire à la ligne des centres*.

Scol. 3. — *Entre une circonférence et sa tangente on peut faire passer une infinité d'autres circonférences*, bien que cependant on ne puisse y faire passer aucune droite (nº 102, *coroll.*). La tangente est la limite commune de toutes ces circonférences dont le rayon devient de plus en plus grand: circonstance que l'on exprime en disant que *La droite est une circonférence de cercle décrite d'un rayon infiniment grand.*

Scol. 4. — *Deux circonférences de cercles ne sauraient avoir, en deux points différens, leurs tangentes communes:* car alors elles auraient le même centre et le même rayon (nº 102, *coroll.* 1er), et par conséquent elles se confondraient.

Théorème XIV. (Fig. 92 et 96.)

144. *Lorsque deux circonférences n'ont aucun point commun,*

la plus grande et la plus petite droite que l'on puisse mener de l'une à l'autre, est toujours une portion de la ligne des centres.

Soient, par exemple, les deux circonférences OA, O'A' (fig. 96), dont la seconde est intérieure à la première. Supposons que A et B, A' et B', soient les points d'intersection respectifs de la ligne des centres avec chacune des deux circonférences, de telle sorte que les points O', A', A, soient situés du même côté de O, et par suite les points O, B', B, du même côté de O'. Dans cette hypothèse, je dis que AA' est le *minimum* de toutes les droites que l'on peut mener entre les deux circonférences, et que BB' est, au contraire, le *maximum* des droites que l'on peut mener d'un point de l'une à un point de l'autre. Fig. 96.

Pour le prouver, faisons voir d'abord qu'une droite CC', terminée de part et d'autre aux deux circonférences, en deux points, C, C', qui ne sont pas sur la ligne des centres, ne saurait être ni la plus grande, ni la plus petite des droites que l'on peut mener de l'une des courbes à l'autre.

En effet, en menant, par le point C et par le centre O', la droite CMO'N, qui coupe la circonférence O'A' aux deux points M et N, *nous aurons* (n° 139) :

$$CM < CC' \quad \text{et} \quad CN > CC' ;$$

d'où il résulte que CC' n'est ni un *maximum*, ni un *minimum*; et il est clair que l'on aura toujours à faire un raisonnement pareil tant que les deux points C et C' ne seront pas sur la ligne des centres.

Il ne s'agit donc plus que de comparer les quatre distances AA', AB', BA', et BB'; or, on reconnaît sans aucune difficulté, que, de ces quatre distances, AA' est la plus petite, et BB' la plus grande. [La première des deux distances, AA', se nomme la *distance des* deux *circonférences*.]

La même démonstration est applicable à deux circonférences extérieures l'une à l'autre, OA, O'A' (fig. 92) : dans ce cas, AA' est le *minimum*, et BB' le *maximum* de leurs distances rectilignes. Fig. 92.

Fig. 97. *Scolie.* — Lorsque deux circonférences sont *concentriques* (fig. 97), on prouve de la même manière que le *maximum* de leurs distances rectilignes est la somme de leurs rayons, et que le *minimum* en est la différence. Cette plus courte distance des deux circonférences est la *largeur* de la *couronne circulaire* qu'elles comprennent entre elles. Elle peut être comptée dans la direction d'un rayon quelconque, aussi bien que la distance *maximum*.

Théorème XV. (Fig. 92 — 96.)

145. *Deux cercles*, O, O′, *étant situés dans le même plan :*

Fig. 92. 1° *Si les circonférences sont extérieures l'une à l'autre* (fig. 92), *la distance des centres est plus grande que la somme des rayons ;*

Fig. 93. 2° *Si les circonférences se touchent extérieurement* (fig. 93), *la distance des centres est égale à la somme des rayons ;*

Fig. 94. 3° *Si les circonférences se coupent* (fig. 94), *la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence ;*

Fig. 95. 4° *Si les circonférences se touchent intérieurement* (fig. 95), *la distance des centres est égale à la différence des rayons ;*

Fig. 96. 5° *Si les circonférences sont intérieures l'une à l'autre* (fig. 96), *la distance des centres est plus petite que la différence des rayons.*

En effet :

Fig. 92. 1° (Fig. 92). — En menant OO′, et nommant A, A′, les points d'intersection respectifs *intérieurs* de cette droite avec chacune des deux circonférences, de sorte que AA′ soit le *minimum* de leurs distances (n° 144), on aura :

$$OO' = OA + O'A' + AA' ;$$

et par conséquent :

$$OO' > OA + O'A' ;$$

Fig. 93. 2° (Fig. 93). — Les centres O, O′, étant en ligne droite avec

le point de tangence A (n° 143), on a :

$$OO' = OA + O'A.$$

3° (Fig. 94). — Les centres O, O', formant un triangle avec l'un des points communs M, on a (n° 93) : Fig. 94.

$$OO' < OM + O'M,$$

et [en supposant $OM > O'M$]

$$OO' > OM - O'M.$$

4° (Fig. 95). — Les centres O, O', étant en ligne droite avec le point de tangence A (n° 143), on a [en supposant $OA > O'A$] : Fig. 95.

$$OO' = OA - O'A.$$

5° (Fig. 96). — Si l'on mène la droite OO' et qu'on la prolonge, en nommant A et A' les points d'intersection respectifs de cette droite avec la plus grande et la plus petite des deux circonférences, de sorte que AA' soit le *minimum* de leur distance (n° 144), on aura : Fig. 96.

$$OO' = OA - O'A' - AA',$$

et par conséquent

$$OO' < OA - O'A'.$$

Réciproque évidente (n° 51). — Deux cercles étant situés dans le même plan :

1° Si la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, les deux circonférences sont extérieures l'une à l'autre ;

2° Si la distance des centres est égale à la somme des rayons, les deux circonférences se touchent extérieurement ;

3° Si la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence, les deux circonférences se coupent ;

4° Si la distance des centres est égale à la différence des rayons, les deux circonférences se touchent intérieurement ;

5° Si la distance des centres est plus petite que la différence des rayons, les deux circonférences sont intérieures l'une à l'autre.

Scolie 1er. — On peut résumer de la manière suivante les diverses parties du théorème précédent et de sa réciproque :

1° Pour que deux circonférences *se coupent*, il faut que la distance des centres soit à la fois moindre que la somme des rayons et plus grande que leur différence ; et ces *deux* conditions sont suffisantes ;

2° Pour que deux circonférences *se touchent*, il suffit que la distance des centres soit égale à la somme des rayons *ou* à leur différence ; mais l'une de ces conditions est nécessaire : le contact est extérieur dans le premier cas, et intérieur dans le second ;

3° Enfin, pour que deux circonférences n'aient *aucun point commun*, il suffit que la distance des centres soit plus grande que la somme des rayons *ou* plus petite que leur différence ; mais l'une de ces conditions est nécessaire : les deux circonférences seront extérieures ou intérieures l'une à l'autre suivant que le premier ou le second cas aura lieu.

Scol. 2. — La ligne des centres est toujours un *axe de symétrie* (n° 99) de la figure ; il en existe un second quand les deux cercles sont égaux, ce qui ne peut avoir lieu que dans les trois premières positions (n° 141). Ce second axe est la perpendiculaire élevée sur la ligne des centres par le point milieu de leur distance. Quand les cercles égaux sont sécans, cette perpendiculaire n'est autre que leur corde commune ; et quand ils sont tangens, c'est la tangente commune. — Dans le cas particulier de deux cercles concentriques, toute droite menée par le centre est un axe de symétrie.

CHAPITRE IV.

DU QUADRILATÈRE.

146. Nous savons déjà (n° 91) que l'on nomme QUADRILATÈRE ou *quadrangle* le *polygone de quatre côtés*, c'est-à-dire le *système de quatre droites* indéfinies qui se coupent deux à deux, ABE, ADF, BCF, ECD (fig. 99), ou bien la *portion de plan circonscrite par quatre droites* limitées. Fig. 99.

Dans ce dernier sens, il y a trois espèces de quadrilatères (fig. 100) : le quadrilatère *convexe* ABCD, le quadrilatère *concave* AECF ayant un angle rentrant C, et le quadrilatère *biconcave* BECDF formé de deux triangles opposés BEC, CDF. Fig. 100.

Ces trois espèces de quadrilatères se trouvent comprises dans le quadrilatère considéré sous le premier point de vue [à moins cependant qu'au nombre des quatre côtés il ne se trouve des parallèles] : c'est pourquoi l'on nomme ce système un *quadrilatère complet*, en appelant, par opposition, *quadrilatère simple* chacun des trois quadrilatères partiels auxquels il donne lieu.

Chaque quadrilatère simple a *deux* diagonales. Ces diagonales sont AC, BD, pour le quadrilatère ABCD; elles sont toutes deux intérieures. Le quadrilatère AECF a une diagonale intérieure AC, et une extérieure EF. Enfin les deux diagonales, BD, EF, du quadrilatère BECDF sont extérieures. — Les diagonales intérieures d'un quadrilatère simple le décomposent toujours en deux triangles; de plus, elles peuvent en être des axes de symétrie.

Un quadrilatère complet a *trois* diagonales, lesquelles, prises deux à deux, ne sont autres que celles des quadrilatères simples dont il présente la réunion.

147. Le quadrilatère simple convexe est celui dont on a le plus souvent occasion de s'occuper, et dont on est toujours censé parler, à moins d'indication contraire. Dans cette espèce de quadrilatère, on nomme *côtés opposés* deux côtés qui n'ont aucune extrémité commune : tels sont, dans le quadrilatère
Fig. 100. ABCD (fig. 100), d'une part AB, DC, et d'autre part AD, BC. On nomme de même *angles opposés* les angles A, C, ou B, D, qui n'ont aucun côté commun.

Lorsqu'un quadrilatère convexe est isolé sur un plan, il suffit, pour le distinguer, d'employer les lettres placées aux sommets de deux angles opposés, comme AC ou BD ; mais en général on prend toutes les lettres.

Il y a plusieurs variétés remarquables de quadrilatères convexes ; nous les examinerons particulièrement après avoir démontré un théorème sur les quadrilatères convexes en général.

On pourrait établir, sur l'égalité et la détermination des quadrilatères, plusieurs théorèmes analogues à ceux que nous avons établis pour les triangles (nos 130, 131, 133, 134) ; mais nous ne nous y arrêterons pas, devant donner plus loin, pour les polygones d'un nombre quelconque de côtés, des théorèmes dont les premiers ne sont que des cas particuliers. Observons seulement que le nombre des côtés donnés doit être au moins égal à *deux ;* car si l'on prend un quadrilatère, et que l'on fasse mouvoir un de ses côtés parallèlement à lui-même sans changer la position ni la grandeur du côté opposé et des angles adjacens à celui-ci, on obtiendra une série de quadrilatères qui seront tous différens, bien qu'ayant un côté commun et tous leurs angles égaux et disposés de la même manière, chacun à chacun.

Théorème I. (Fig. 100.)

Fig. 100. 148. *La somme des angles d'un quadrilatère convexe* ABCD *est égale à* 4 DROITS.

Cette proposition résulte évidemment de ce que la somme des angles du quatrilatère n'est autre chose que la somme des angles des triangles dans lesquels chaque diagonale, AC ou BD, le décompose (nos 146 et 125).

Scolie. — La proposition est encore vraie pour le quadrilatère concave AECF, si l'on considère la somme des angles ACE, ACF, comme formant l'angle C du quadrilatère (n° 88).

Quant au quadrilatère biconcave, puisqu'il est composé de deux triangles opposés, on peut encore, sous ce point de vue, regarder la proposition comme vraie à son égard.

Corollaire. — Lorsque deux angles d'un quadrilatère sont droits, les deux autres sont supplémentaires. Il est facile de conclure du théorème n° 127, que le quadrilatère est alors inscriptible dans un cercle qui aurait pour diamètre la diagonale opposée aux deux angles droits ; mais cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale que nous démontrerons plus loin (n° 163).

DU PARALLÉLOGRAMME.

149. *On nomme* Parallélogramme *un quadrilatère*, MNOP (fig. 101), *dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.* Fig. 101.
Deux côtés opposés quelconques du parallélogramme, par exemple MN, OP, se nomment les *bases*, et leur perpendiculaire commune AB est la *hauteur*.

Un parallélogramme est déterminé par deux côtés adjacens et l'angle compris ; d'où il résulte que *Deux parallélogrammes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun.*

Théorème II. (Fig. 101.)

150. *Dans tout parallélogramme* MNOP, *les angles opposés sont égaux deux à deux ; — et réciproquement.*

Des propriétés des parallèles coupées par une transversale (n° 113) il résulte que, dans tout parallélogramme, deux

Fig.101. angles adjacens à un même côté sont supplémentaires : ainsi par exemple

$$M + N = 2 \textit{ droits}, \quad \text{et} \quad N + P = 2 \textit{ droits};$$

d'où il résulte que

$$M = P, \quad \text{et par suite} \quad N = O.$$

Réciproquement : — Si les angles opposés d'un quadrilatère convexe sont égaux deux à deux, la figure est un parallélogramme.

En effet, la somme des quatre angles valant quatre droits (n° 148), il s'ensuit que les angles adjacens à un même côté sont supplémentaires : donc les côtés opposés sont parallèles deux à deux (n° 111).

Théorème III. (Fig. 101.)

151. *Dans tout parallélogramme* MNOP, *les côtés opposés sont égaux deux à deux.*

En effet, menons la diagonale ON : nous formerons ainsi deux triangles MNO, PON, ayant un côté commun ON ; de plus, l'angle MNO = NOP, et l'angle MON = ONP (n° 113) : donc les deux triangles sont égaux (n° 133) : donc MN = OP ; et de même MO = NP.

Scolie 1er. — Ce théorème s'énonce encore de la manière suivante : *Les portions de parallèles comprises entre parallèles sont égales ;* — le théorème que *Deux parallèles sont partout également distantes* (n° 110) en est un cas particulier.

Scol. 2. — *Chaque diagonale d'un parallélogramme le partage en deux triangles égaux.*

Théorème IV. (Fig. 101.)

152. *Si les côtés opposés d'un quadrilatère* MNOP *sont égaux deux à deux, la figure est un parallélogramme.*

En effet, en menant la diagonale ON, on forme deux triangles égaux entre eux comme ayant les côtés égaux chacun à chacun (n° 130) : donc l'angle MNO = NOP : donc MN est parallèle à OP (n° 111). De même l'angle MON = ONP : donc MO et NP sont parallèles. Fig. 101.

Théorème V. (Fig. 101.)

153. *Si deux côtés opposés*, MN, OP, *d'un quadrilatère* MP *sont égaux et parallèles, la figure est un parallélogramme.*

La diagonale ON détermine deux triangles égaux comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun (n° 131) : en effet, MN et OP étant parallèles, les deux angles MNO et NOP sont égaux (n° 113); de plus MN = OP, et ON est commun. Il résulte de là que l'angle MON = ONP ; d'où il suit que MO et NP sont aussi parallèles (n° 111).

Corollaire. — Dans tout parallélogramme, la droite qui joint les milieux de deux côtés parallèles est égale et parallèle aux deux autres.

Scolie. — Ces deux derniers théorèmes sont réciproques du précédent et réciproques entre eux.

Théorème VI. (Fig. 102.)

154. *Les diagonales d'un parallélogramme* MNOP *se coupent mutuellement en deux parties égales ; — et réciproquement.* Fig. 102

Soit I le point d'intersection des deux diagonales ; les deux triangles MIN, PIO, sont égaux comme ayant un côté égal, MN = OP (n° 151), adjacent à des angles égaux chacun à chacun (n° 133) : donc

$$MI = IP, \quad NI = IO.$$

Réciproquement : — Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent mutuellement en deux parties égales, la figure est un parallélogramme.

En effet : de MI = IP et NI = IO on déduit que les triangles MIN, PIO, sont égaux comme ayant un angle égal [l'angle en I] compris entre des côtés égaux chacun à chacun (n° 131) : donc

$$MN = OP; \quad \text{et de même} \quad MO = NP.$$

Scolie 1er. — Les diagonales d'un parallélogramme le décomposent en deux couples de triangles opposés égaux.

Scol. 2. — La plus grande des diagonales est opposée à l'angle obtus du parallélogramme, et la plus petite à son angle aigu (n° 132).

Scol. 3. — Le point I se nomme le *centre* du parallélogramme.

DU RECTANGLE.

103. 155. On nomme RECTANGLE un *quadrilatère*, MNOP (fig. 103), *dont tous les angles sont droits*. La possibilité d'une pareille figure est évidente (n° 109) ; et il résulte de la réciproque du théorème n° 150 qu'elle n'est qu'une variété du parallélogramme : elle jouit donc de toutes les propriétés du parallélogramme ; [mais la réciproque n'est pas vraie].

Dans un rectangle, les côtés adjacens à ceux que l'on a pris pour bases sont égaux à la hauteur.

Deux rectangles sont égaux lorsqu'ils ont même base et même hauteur.

THÉORÈME VII. (Fig. 103.)

156. *Les diagonales d'un rectangle* MNOP *sont égales.*

En effet, comparons les deux triangles OMN, PNM : ils ont un angle égal [l'angle droit] ; de plus MO = NP, et MN est commun : donc les deux triangles sont égaux (n° 131), et

$$MP = NO.$$

Réciproquement: — Si les diagonales d'un quadrilatère MP se coupent mutuellement en parties égales et sont égales, la figure est un rectangle.

En effet : il résulte de l'hypothèse, que les quatre triangles qui composent le quadrilatère sont isocèles; d'où il suit que chaque diagonale partage le quadrilatère en deux triangles rectangles (n° 127, *récipr.*).

Scolie 1er. — Les diagonales d'un rectangle se coupent en quatre parties égales et décomposent la figure en quatre triangles isocèles égaux deux à deux, ayant leur sommet commun au centre (n° 154, *scol.* 3) du rectangle, et tous leurs côtés latéraux égaux entre eux. On peut en conclure le scolie suivant :

Scol. 2. — *Tout rectangle est inscriptible* dans un cercle construit sur les diagonales comme diamètres.

Scol. 3. — *Un rectangle a deux axes de symétrie* : ce sont les droites menées par les milieux des côtés opposés.

DU LOSANGE.

157. On nomme Losange ou Rhombe (*) un *quadrilatère*, MNOP (fig. 104), *dont tous les côtés sont égaux entre eux.* Il est facile de voir qu'une pareille figure peut exister; et d'après le n° 152, ce n'est encore qu'une variété du parallélogramme dont elle partage les propriétés, [mais non pas réciproquement]. Fig. 104.

Deux losanges sont égaux lorsqu'ils ont chacun à chacun un côté égal et un angle égal.

Théorème VIII. (Fig. 104.)

168. *Les diagonales d'un losange* MNOP *se coupent à angle droit.*

En effet : dans les deux triangles MIO, MIN, on a (n° 154)

$$MO = MN, \quad IO = IN,$$

(*) De cette expression dérive celle de *rhomboïde* que l'on emploie quelquefois pour désigner le *parallélogramme* : Ῥόμβος... ὃ ἰσόπλευρον,... ῥομβοειδὲς δὲ οὔτε ἰσόπλευρον, οὔτε ὀρθογώνιον : *Le rhombe est celui* [des quadrilatères] *qui a tous ses côtés égaux ; le rhomboïde n'a ni* [tous] *ses côtés égaux ni ses angles droits.* (*Euclide*, liv. I, défin. 32 et 33.)

et de plus MI est commun : donc les deux triangles sont égaux (n° 130) : donc l'angle MIO = MIN : donc, etc.

Réciproquement : — Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en parties égales et à angle droit, la figure est un losange.

En effet : les quatre triangles auront un angle égal [l'angle droit] compris entre des côtés égaux chacun à chacun.

Scolie. — Les diagonales d'un losange le décomposent en quatre triangles rectangles égaux entre eux, ayant tous le sommet de leur angle droit au centre du losange. De là se déduit le scolie suivant :

Scol. 2 — *Tout losange est circonscriptible* à un cercle décrit du même centre (n° 154, *scol.* 3) avec un diamètre égal à la distance des côtés opposés.

Scol. 3. — *Un losange a deux axes de symétrie* qui ne sont autres que ses deux diagonales.

DU CARRÉ.

Fig. 105. 159. On nomme Carré un *quadrilatère* (fig. 105) *dont tous les côtés sont égaux et les angles droits.* Le carré est donc un *quadrilatère régulier* (n° 90).

Ainsi, d'après sa définition, le carré doit jouir à la fois des propriétés du parallélogramme en général, et de celles du rectangle et du losange en particulier ; [mais la réciproque n'est pas vraie.]

Il s'ensuit que les diagonales du carré sont égales ; qu'elles se coupent en parties égales et à angle droit ; et enfin qu'elles décomposent la figure en quatre triangles rectangles isocèles égaux entre eux ; — *et réciproquement.*

Le carré est inscriptible et circonscriptible ; ses deux diagonales sont deux diamètres du cercle circonscrit, et les droites qui joignent deux à deux les milieux des côtés opposés sont deux diamètres du cercle inscrit. Ces *quatre* diamètres forment autant d'axes de symétrie de la figure qui ne peut en avoir d'autres.

Deux carrés sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal

DU TRAPÈZE.

160. Le TRAPÈZE est *un quadrilatère*, MNOP (fig. 106), *dont deux côtés* seulement, MN, OP, *sont parallèles*, les deux autres allant concourir en un point R situé hors du quadrilatère. Les deux côtés parallèles se nomment les *bases* du trapèze ; le plus grand des deux, OP, est la *grande base*, et le plus petit MN, est la *petite base ;* les deux autres côtés sont les *côtés latéraux ;* la *hauteur* du trapèze est la perpendiculaire AB commune aux deux bases. Il est facile de voir que les angles adjacens à la grande base forment toujours une somme moindre que 2 *droits, et vice versâ* pour la petite base ; et que les angles adjacens à un même côté latéral sont supplémentaires (n° 113). Fig. 106.

Le *trapèze* est dit *rectangle* lorsque l'un des côtés latéraux est perpendiculaire aux bases. — Il est *isocèle* lorsque les deux côtés latéraux sont égaux entre eux, et que, par suite, la droite qui joint les milieux des bases leur est perpendiculaire ; cette droite *étant* alors un axe de symétrie, le trapèze est encore dit *symétrique* en raison de cette circonstance. On reconnaît sans peine que les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés latéraux concourent en un point de l'axe ; d'où il résulte que *Le trapèze symétrique est inscriptible* (n° 90).

Chaque diagonale, MP ou NO, d'un trapèze le décompose en deux triangles dont chacun a pour base l'une de ses bases, et même hauteur que lui. — On peut encore considérer la même figure, non plus comme la somme, mais comme la différence de deux triangles, MNR, OPR, dont chacun aurait pour base l'une des bases du trapèze, et dont le sommet commun serait le point de concours des côtés latéraux.

Si ce point de concours des côtés latéraux s'éloignait indéfiniment (n° 114), le trapèze dégénérerait en parallélogramme. Cette dernière sorte de figure peut donc être, à juste titre, considérée comme cas particulier ou comme limite du traet de plus MI est commun : donc les deux triangles sont égaux (n° 130) : donc l'angle MIO = MIN : donc, etc.

Réciproquement : — Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en parties égales et à angle droit, la figure est un losange.

En effet : les quatre triangles auront un angle égal [l'angle droit] compris entre des côtés égaux chacun à chacun.

Scolie. — Les diagonales d'un losange le décomposent en quatre triangles rectangles égaux entre eux, ayant tous le sommet de leur angle droit au centre du losange. De là se déduit le scolie suivant :

Scol. 2 — *Tout losange est circonscriptible* à un cercle décrit du même centre (n° 154, *scol.* 3) avec un diamètre égal à la distance des côtés opposés.

Scol. 3. — *Un losange a deux axes de symétrie* qui ne sont autres que ses deux diagonales.

DU CARRÉ.

Fig. 105. 159. On nomme Carré un *quadrilatère* (fig. 105) *dont tous les côtés sont égaux et les angles droits.* Le carré est donc un *quadrilatère régulier* (n° 90).

Ainsi, d'après sa définition, le carré doit jouir à la fois des propriétés du parallélogramme en général, et de celles du rectangle et du losange en particulier ; [mais la réciproque n'est pas vraie.]

Il s'ensuit que les diagonales du carré sont égales ; qu'elles se coupent en parties égales et à angle droit ; et enfin qu'elles décomposent la figure en quatre triangles rectangles isocèles égaux entre eux ; — *et réciproquement.*

Le carré est inscriptible et circonscriptible ; ses deux diagonales sont deux diamètres du cercle circonscrit, et les droites qui joignent deux à deux les milieux des côtés opposés sont deux diamètres du cercle inscrit. Ces *quatre* diamètres forment autant d'axes de symétrie de la figure qui ne peut en avoir d'autres.

Deux carrés sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal

DU TRAPÈZE.

160. Le TRAPÈZE est *un quadrilatère*, MNOP (fig. 106), *dont deux côtés* seulement, MN, OP, *sont parallèles*, les deux autres allant concourir en un point R situé hors du quadrilatère. Les deux côtés parallèles se nomment les *bases* du trapèze; le plus grand des deux, OP, est la *grande base*, et le plus petit MN, est la *petite base;* les deux autres côtés sont les *côtés latéraux;* la *hauteur* du trapèze est la perpendiculaire AB commune aux deux bases. Il est facile de voir que les angles adjacens à la grande base forment toujours une somme moindre que 2 *droits, et vice versâ* pour la petite base; et que les angles adjacens à un même côté latéral sont supplémentaires (n° 113). Fig. 106.

Le *trapèze* est dit *rectangle* lorsque l'un des côtés latéraux est perpendiculaire aux bases. — Il est *isocèle* lorsque les deux côtés latéraux sont égaux entre eux, et que, par suite, la droite qui joint les milieux des bases leur est perpendiculaire; cette droite *étant* alors un axe de symétrie, le trapèze est encore dit *symétrique* en raison de cette circonstance. On reconnaît sans peine que les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés latéraux concourent en un point de l'axe; d'où il résulte que *Le trapèze symétrique est inscriptible* (n° 90).

Chaque diagonale, MP ou NO, d'un trapèze le décompose en deux triangles dont chacun a pour base l'une de ses bases, et même hauteur que lui. — On peut encore considérer la même figure, non plus comme la somme, mais comme la différence de deux triangles, MNR, OPR, dont chacun aurait pour base l'une des bases du trapèze, et dont le sommet commun serait le point de concours des côtés latéraux.

Si ce point de concours des côtés latéraux s'éloignait indéfiniment (n° 114), le trapèze dégénérerait en parallélogramme. Cette dernière sorte de figure peut donc être, à juste titre, considérée comme cas particulier ou comme limite du trapèze; d'où il résulte que les propriétés du trapèze existent également, avec quelques modifications particulières, dans le parallélogramme. Cependant, nous avons cru devoir étudier le parallélogramme avant de parler du trapèze, parce que la marche inverse eût entraîné quelques longueurs.

Théorème IX. (Fig. 107.)

Fig. 107. 161. *Dans tout trapèze* MNOP, *la droite* CD *qui joint les milieux*, C, D, *des côtés latéraux*, MO, NP, *est* 1° *parallèle aux bases*, 2° *également distante de chacune d'elles*, *et* 3° *égale à leur demi-somme.*

Par le point C, milieu de MO, menons AB parallèle à NP. Il en résultera [en prolongeant MN] deux triangles MCA, OCB, égaux entre eux (n° 133), comme ayant un côté égal $MC = OC$, et les angles adjacens égaux chacun à chacun; d'où résulte $CA = CB$.

Maintenant, dans le parallélogramme AP, les points C, D, étant les milieux des deux côtés AB, NP, il s'ensuit que la droite CD est égale et parallèle aux deux autres côtés, AN, BP (n° 153, *coroll.*); et de plus, qu'elle en est également distante.

Enfin, de ce que $CD = AN = BP$, on conclut

$$CD = \tfrac{1}{2}(AN + BP) = \tfrac{1}{2}(AM + MN + OP - OB),$$

ou enfin, puisque $AM = OB$,

$$CD = \tfrac{1}{2}(MN + OP).$$

DU QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE.

Théorème X. (Fig. 108.)

Fig. 108. 162. *Dans tout quadrilatère inscriptible* ABCD, *la somme des angles opposés, pris deux à deux, est égale à* 2 DROITS.

Il suffit évidemment (n° 148) de faire voir que les angles opposés, A et C, B et D, forment deux sommes égales, c'est-à-dire que l'on a $A + C = B + D$.

Pour cela, du centre O du cercle circonscrit menons aux sommets du quadrilatère, les rayons OA, OB, OC, OD ; il en résultera quatre triangles isocèles ayant ce centre pour sommet commun, et pour bases respectives les quatre côtés du quadrilatère. Les angles de la figure donneront donc les égalités suivantes :

$$1^\circ\ OAB = OBA, \ldots . OAD = ODA\,;$$
$$2^\circ\ OCB = OBC, \ldots . OCD = ODC.$$

Or, la somme des premiers membres de ces égalités est égale à $A + C$, et la somme des seconds membres à $B + D$: donc

$$A + C = B + D.$$

C. Q. F. D.

Scolie. — Il est facile de voir que, si l'on abaisse du point O sur les côtés du quadrilatère, les perpendiculaires OS, OT, OU, OV, on aura aussi, entre les angles au centre, la relation

$$VOS + TOU = SOT + UOV.$$

Théorème XI. (Fig 109.)

163. Réciproquement : — *Un quadrilatère est inscriptible lorsque les angles opposés y forment, deux à deux, une somme égale à* 2 droits. Fig. 109.

En effet, soit ABCD un quadrilatère dans lequel on suppose

$$A + C = B + D = 2 \textit{ droits}.$$

Par trois des sommets, A, B, C, faisons passer une circonférence (n° 128, *coroll.* 1er) ; et supposons que le point D lui soit, par exemple, intérieur. Cela posé, prolongeons AD [ou CD] jusqu'à la rencontre de la circonférence, en D′, et menons CD′ : nous aurons, en vertu du théorème direct (n° 162),

$$ABC + AD'C = 2 \textit{ droits}\,;$$

mais nous avons déjà, par hypothèse,

$$ABC + ADC = 2 \textit{ droits}\,;$$

d'où il résulterait

ADC = AD′C ; *ce qui est absurde* (n° 94).

Même raisonnement si le point D′ était extérieur à la circonférence.

Donc le quatrilatère AC est inscriptible.

DU QUADRILATÈRE CIRCONSCRIPTIBLE.

Théorème XII. (Fig. 110.)

Fig. 110. 164. *Dans tout quadrilatère circonscriptible* GIKL, *les côtés opposés, pris deux à deux, forment des sommes égales.*

Par les points de contact des côtés du quadrilatère avec la circonférence inscrite, menons les cordes AB, BC, CD, DA, puis les rayons OA, OB, OC, OD. Il en résultera, d'abord quatre triangles isocèles, OAB, OBC, OCD, ODA, ayant ces cordes pour bases respectives et le centre pour sommet commun, puis quatre autres triangles, AIB, BKC, CLD, DGA, qui seront aussi isocèles puisque leurs angles à la base seront les complémens respectifs des angles à la base des premiers triangles. On tire de là

1° AI = IB, ... GA = DG ;
2° KC = BK, ... CL = LD.

Or, la somme des premiers membres de ces égalités est égale à GI + KL, et la somme des seconds membres à IK + LG : donc

$$GI + KL = IK + LG.$$

C. Q. F. D.

Scolie. — On a encore, comme ci-dessus (n° 162, *scol.*), la relation

$$GOI + KOL = IOK + LOG.$$

Théorème XIII. (Fig. 111.)

Fig. 111. 165. Réciproquement : — *Un quadrilatère est circonscrip-*

tible lorsque les côtés opposés, pris deux à deux, y forment des sommes égales.

Soit GIKL un quadrilatère dans lequel on suppose

$$GI + KL = IK + LG.$$

A moins que la figure ne soit un losange, cas qui a déjà été traité spécialement (n° 158, *scol.* 2), il y aura toujours au moins deux côtés opposés, par exemple GI, KL, qui iront concourir en un point R de manière à former, avec un troisième côté IK, un triangle RIK dont le quadrilatère fasse partie. Cela posé, inscrivons un cercle à ce triangle (n° 129, *coroll.* 1er), et supposons que le quatrième côté GL du quadrilatère, ne touchant pas la circonférence, lui soit, par exemple, extérieure. Dans cette hypothèse, menons la tangente G'L' parallèle à GL, de manière à former le quadrilatère circonscrit G'IKL': nous aurons alors, en vertu du théorème direct,

$$G'I + KL' = IK + L'G';$$

or, ce résultat est contradictoire avec l'hypothèse, puisque d'une part on a

$$GI + KL > G'I + KL',$$

tandis que, d'autre part, LG étant nécessairement la petite base du trapèze GL' (n° 160), on a encore

$$LG < L'G'.$$

Même raisonnement pour le cas où le côté GL couperait la circonférence.

Donc enfin le quadrilatère GK est circonscriptible.

CHAPITRE V.

DES POLYGONES.

§ Ier. *Des Polygones en général.*

166. De même que l'on peut, en menant une diagonale, décomposer en deux triangles un quadrilatère simple [de première ou de seconde espèce (n° 146)]; de même aussi l'*On peut* toujours *décomposer en triangles un polygone d'un nombre quelconque de côtés*. [On suppose que le contour ne se croise en aucun point comme dans le quadrilatère simple de la troisième espèce.]

Fig. 112 et 113 La décomposition d'un polygone ABCDE (fig. 112 et 113) en triangles peut toujours se faire de plusieurs manières; mais le moyen le plus simple de l'opérer, lorsque ce polygone est

Fig. 112. convexe, consiste à mener, par l'un des sommets, A (fig. 112), des diagonales à tous les autres [excepté les deux sommets, B, E, consécutifs du premier]: le polygone se trouve alors partagé en autant de triangles, *moins deux*, qu'il a de côtés, puisqu'en prenant le point A pour sommet commun de tous les triangles, chaque côté du polygone, à l'exception des deux extrêmes AB et AE, sert de base à un triangle.

On peut encore décomposer en triangles un polygone convexe [et quelquefois même un polygone concave], en menant,

Fig. 113. par un point intérieur quelconque, O (fig. 113), des droites à tous les sommets: le polygone se trouve ainsi partagé en autant de triangles qu'il a de côtés. [Il est bien clair, d'ail-

leurs, que la première méthode ne diffère pas essentiellement de celle-ci.]

Quant aux polygones concaves (fig. 114), on aperçoit sans peine qu'au moyen d'un nombre suffisant de diagonales intérieures, menées convenablement par les sommets des angles rentrans, on peut toujours les partager en polygones convexes : les polygones concaves sont donc aussi décomposables en triangles. Fig.114.

Deux polygones, ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 115), sont évidemment égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière ; et réciproquement, deux polygones égaux peuvent toujours se décomposer en un même nombre de triangles égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière. — Il est d'ailleurs évident que deux polygones égaux ont tous leurs côtés et tous leurs angles égaux chacun à chacun, ainsi que leurs diagonales, etc. Fig.115.

Au reste, la décomposition en triangles n'est pas la seule dont un polygone est susceptible. Soit, par exemple, ABCDEFGI (fig. 116) un polygone, et AE sa plus grande longueur Fig.116.
[c'est-à-dire la plus grande droite que l'on puisse mener d'un point à un autre de son périmètre]. Abaissons des sommets B, C, D, ..., sur AE, les perpendiculaires Bb, Cc, Dd, ... : par ce moyen, le polygone se trouvera décomposé en trapèzes et en triangles rectangles. — Cette décomposition est souvent employée dans la Géométrie pratique.

Théorème I.

167. *La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est égale à autant de fois* 2 DROITS *qu'il a de côtés moins* DEUX.

En effet, si de l'un des sommets on mène des diagonales à tous les autres (fig. 112), le polygone se trouvera décomposé Fig.112.
en autant de triangles, *moins deux,* qu'il a de côtés (n° 166) ; or, la somme des angles du polygone étant égale à la somme

des angles de ces triangles, et la somme des angles de chaque triangle étant égale à 2 *droits*, il s'ensuit que la somme des angles du polygone est égale à autant de fois 2 *droits* qu'il a de côtés moins *deux*. *C. Q. F. D.*

Scolie 1er. — En prenant l'*angle droit* pour *unité* (n° 82), on peut énoncer la même proposition de la manière suivante :

Pour avoir la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe, il faut doubler le nombre des côtés et retrancher 4 *du résultat*; ce qui fait $(2n - 4)$ [angles droits] pour un polygone de n côtés.

Présenté de cette manière, le théorème peut se démontrer plus directement par la décomposition du polygone en triangles qui auraient un point intérieur pour sommet commun
Fig. 113. (n° 166, fig. 113).

Scol. 2. — Pour connaître la valeur de chaque angle d'un polygone équiangle, il faut diviser par le nombre des angles la somme énoncée dans le théorème. Ainsi, dans le quadrilatère équiangle, chaque angle vaut un droit ou simplement 1 ; dans le pentagone équiangle, chaque angle vaut $\frac{6}{5}$; dans l'hexagone équiangle, chaque angle vaut $\frac{4}{3}$; etc. La formule générale est $2\left(\frac{n-2}{n}\right)$ pour un polygone équiangle de n côtés. Cette valeur de l'angle augmente avec le nombre des côtés.

Théorème II. (Fig. 117.)

Fig. 117. 168. *Dans un polygone convexe quelconque* ABCDE, si l'on prolonge tous les côtés dans un même sens (*), *la somme des angles extérieurs* (n° 88), *e*AB, *a*BC, *b*CD, *c*DE, *d*EA, qui en résultent, *est égale à* 4 DROITS.

(*) Cette expression, *dans le même sens*, signifie que, si l'on faisait *le tour* du polygone en suivant, par exemple, l'ordre A, B, C, D,..., il faudrait, avant de *tourner* pour passer d'un côté, AB, BC,.... au suivant, BC, CD,...., prolonger toujours en avant [ou en arrière si l'on voulait] le côté que l'on quitte, AB*a*, BC*b*,....

En effet, on a $eAB + BAE = 2$,
$aBC + CBA = 2$,
$bCD + DCB = 2$,
.................;

d'où il résulte que la somme de tous les angles du polygone, augmentée de la somme des angles extérieurs, est égale à autant de fois 2 *droits* qu'il y a de côtés dans le polygone. Ainsi, la somme totale surpasse la somme des angles du polygone, de 4 *droits*; mais la somme totale surpasse aussi la somme des angles du polygone, de la somme des angles extérieurs : donc la somme des angles extérieurs est égale à 4 *droits*.

≶[Scolie *sur ces deux théorèmes*. — En convenant d'appeler toujours, comme on l'a proposé dans le n° 88, *angles du polygone* ceux qui appartiennent à l'intérieur, et *angles extérieurs* ceux qu'on obtient en retranchant de 4 *droits*, chacun des premiers [que ces divers angles soient d'ailleurs saillans ou rentrans], le théorème I devient également applicable aux polygones concaves, et le théorème II est remplacé par celui-ci :

La somme des angles extérieurs d'un polygone fermé quelconque est égal à autant de fois 2 DROITS *que le polygone a de côtés plus* DEUX ;

Ou bien [l'angle droit étant pris pour unité] : *Pour avoir la somme des angles extérieurs d'un polygone fermé quelconque, il faut doubler le nombre des côtés et ajouter 4 au résultat.*]≷

Théorème III.

169. *Deux polygones de* n *côtés sont égaux lorsqu'ils ont* (n — 1) *côtés égaux chacun à chacun, ainsi que les* (n — 2) *angles compris entre ces côtés.*

On démontre facilement que les deux polygones sont superposables, comme on l'a fait (n° 131) pour un théorème relatif aux triangles, lequel n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

Théorème IV.

170. *Deux polygones de* n *côtés sont égaux lorsqu'ils ont* (n — 2) *côtés consécutifs égaux chacun à chacun, ainsi que les angles qu'ils font entre eux et avec les deux autres côtés.*

Démonstration par la superposition, comme celle du théorème analogue relatif aux triangles (n° 133).

171. Remarque *sur les deux théorèmes précédens.* — En général, pour qu'un polygone de n côtés soit déterminé, il faut connaître $(2n - 3)$ des $2n$ *données* [côtés et angles] qui le constituent; mais ces $(2n - 3)$ données ne peuvent être prises arbitrairement, et doivent satisfaire à certaines conditions que l'on ne saurait exposer ici. Nous nous bornerons à faire observer 1° que chaque côté du polygone doit être moindre que la somme de tous les autres, 2° que, d'après le théorème I (n° 167), les n angles ne peuvent compter que pour $(n - 1)$ données, et 3° que les données doivent être disposées de la même manière.

Il existe, pour la détermination des polygones, une autre méthode qu'il est utile de connaître. Elle consiste à donner
Fig. 41. *deux* sommets, A, B (fig. 41), et leurs distances à tous les autres, C, D, E, ..., ainsi que leur disposition. On connaît ainsi les trois côtés de chacun des triangles ABC, ABD, ABE, ..., ce qui suffit pour les déterminer. La construction du polygone dépend alors de la connaissance de 3 de ses côtés et de $2(n - 3)$ diagonales: en tout $(2n - 3)$ lignes.

On arriverait au même résultat en décomposant le polygone en triangles par des diagonales menées de l'un des sommets. On aurait ainsi à considérer $(n - 2)$ triangles dont le premier exige 3 données et les autres chacun 2, ce qui fait $3 + 2(n - 3)$ ou $(2n - 3)$ données, comme précédemment.

Il en serait de même pour la décomposition du polygone en triangles qui auraient leur sommet commun en un point intérieur : il y a n triangles; le premier exige 3 données, les

$(n-2)$ suivans chacun 2, et le dernier n'en exige aucune : cela fait en tout $3+2(n-2)=2n-1$, dont il faut retrancher les 2 données nécessaires à la détermination du point intérieur qui est étranger à l'objet principal de la question ; résultat : $(2n-3)$.

≤[Théorème V. (Fig. 114.)]≥

172. *Lorsqu'une portion de plan est recouverte par un assemblage de polygones quelconques* [convexes ou concaves], *le nombre des polygones* [P] *plus le nombre des sommets* [S] *forment une somme égale au nombre des côtés* [C] *augmenté d'*UN : c'est-à-dire que l'on a toujours Fig. 114.

$$P+S=C+1.$$

Il est d'abord évident que cette formule est vraie quand $P=1$, c'est-à-dire quand il n'y a qu'un polygone.

Ensuite si, au premier polygone on en réunit un second, P deviendra égal à 2 ; C représentera le nombre total des côtés des deux polygones, diminué du nombre des côtés communs ; et de même S représentera le nombre total des sommets des deux polygones, diminué du nombre des sommets communs. Or, il est facile de voir que l'augmentation de C sera plus grande d'une unité que l'augmentation de S, puisque le nombre des sommets communs surpassera nécessairement d'une unité le nombre des côtés communs. Donc la formule est encore vraie pour 2 polygones.

On prouverait de même que la formule est vraie pour 3 polygones, pour 4, etc. Ainsi elle est vraie généralement.]≥

173. ≤[Remarque *sur la convexité des polygones.* — Après avoir fixé (n° 89) les conditions de la convexité des polygones, nous avons examiné dans ce chapitre les principales propriétés des polygones pour lesquels ces conditions se trouvent remplies. Mais on peut donner plus d'extension et de généralité à

la première définition que nous avons adoptée dans tout ce qui précède.

Pour cela, rappelons d'abord que toute droite indéfinie partage un plan qui la contient en deux moitiés superposables que nous avons nommées *régions* (n° 11). Cela posé, admettons que l'on prolonge indéfiniment, dans les deux sens, l'un des côtés AB (fig. 118 et 119) d'un polygone quelconque; il pourra arriver de deux choses l'une : ou bien les deux côtés AM, BN, consécutifs de AB, seront situés dans la même région du
Fig. 118 et 119. plan (fig. 118), ou bien ils se trouveront, l'un dans une des deux régions, et l'autre dans la seconde (fig. 119). Or, il résulte toujours de la même définition, que le polygone est convexe quand le premier cas a lieu pour tous les côtés [sans en excepter un seul] supposés prolongés indéfiniment, et au contraire que le polygone est concave lorsque quelqu'un de ses côtés se trouve dans le second cas.

Maintenant, en considérant les polygones, non plus comme des portions de plans (n° 87), mais comme des lignes brisées (n° 86), il arrive que le caractère assigné ci-dessus aux polygones convexes peut appartenir à des polygones dont les côtés s'entre-croiseraient en un ou plusieurs points, comme dans la
Fig. 120. figure 120. C'est pourquoi M. Poinsot (*Journal de l'École polytechnique*, 9ᵉ cahier) regarde ces sortes de lignes comme des polygones convexes *d'un ordre supérieur*, ceux que nous avons considérés jusqu'à présent étant alors des polygones convexes *du premier ordre*. On voit que dans ce genre de figure, une ligne droite peut rencontrer le système des divers côtés en plus de deux points, ou bien qu'un côté prolongé peut rencontrer le reste du contour, circonstances qui ne sauraient avoir lieu dans les polygones convexes du premier ordre.

Il est facile de voir d'ailleurs que ce qui précède s'applique aux polygones ouverts aussi bien qu'aux polygones fermés.

§ II. *Des Polygones réguliers.*

174. Nous avons vu (n° 90) que l'on nomme *polygone régulier* tout polygone qui est en même temps *équilatéral et équiangle*. Dans le triangle, ces deux conditions ne peuvent pas être remplies l'une sans l'autre, de sorte qu'un triangle est nécessairement régulier dès qu'il est équilatéral *ou* équiangle (n° 126, *scol.* 2); mais il n'en est pas de même quand le polygone a plus de trois côtés. Ainsi, le losange proprement dit (n° 157) est équilatéral sans être équiangle, et le rectangle (n° 155) est équiangle sans être équilatéral : le carré (n° 159) seul, parmi les quadrilatères, satisfait aux deux conditions à la fois.

Outre le triangle régulier et le quadrilatère régulier que nous connaissons déjà, il est facile de voir que nous obtiendrions encore l'hexagone régulier en réunissant, autour d'un même point O (fig. 121), *six* triangles réguliers, puisque l'angle de cette dernière figure vaut $\frac{2}{3}$ (n° 126) ou *le sixième de quatre* angles droits. Mais étudions maintenant les polygones réguliers d'une manière plus générale. Fig. 121.

Théorème VI. (Fig. 121.)

175. *Tout polygone régulier* ABCDEF *est décomposable en autant de triangles isocèles égaux entre eux qu'il a de côtés ;*

De plus, ces triangles ont pour sommet commun un point qui est également distant, d'une part de tous les sommets du polygone, et d'autre part de tous ses côtés;

Et réciproquement.

En effet, menons des droites qui partagent respectivement en deux parties égales les angles A, B, C, D, ... du polygone; nous obtenons ainsi une série de triangles qui ont respectivement pour bases les côtés AB, BC, CD, ... ; or, 1° tous ces triangles sont isocèles puisque, les angles A, B, C.... étant égaux, leurs moitiés sont aussi égales; et 2° les mêmes triangles sont égaux entre eux puisqu'ils ont un côté égal ainsi que les angles adjacens à ce côté.

Comme d'ailleurs ces triangles sont contigus deux à deux, il s'ensuit nécessairement qu'ils ont leurs sommets en un même point O intérieur au polygone, qui est, d'une part, également distant des sommets de ce polygone, et d'autre part, également distant de ses côtés : ce qui prouve que le polygone est l'ensemble de tous les triangles.

Réciproquement : — On peut composer un polygone régulier, d'un nombre quelconque de côtés, par l'assemblage de triangles isocèles égaux entre eux et ayant un sommet commun. En effet, concevons, tout autour d'un même point O, un nombre quelconque d'angles égaux entre eux et sous-multiples de 4 *droits ;* puis prenons, sur leurs côtés, des distances OA, OB, OC,.... égales entre elles, et menons AB, BC, CD,.... Tous les triangles ainsi formés seront isocèles, et de plus égaux entre eux comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux (nº 131). L'ensemble de tous ces triangles formera donc un polygone ABCDEF qui aura, d'abord tous ses côtés égaux, et ensuite tous ses angles égaux comme composés de parties égales, et qui, par conséquent, sera régulier.

Ainsi, *Il existe des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés* [plus grand que *deux*].

Scolie 1er. — Le point O s'appelle le *centre* du polygone régulier ; chacune des droites égales entre elles OA, OB, OC, est un *rayon du polygone ;* et si du centre O l'on abaisse des perpendiculaires, OM, ON,.... sur les côtés, chacune de ces perpendiculaires égales entre elles prendra le nom d'*apothème.* On peut nommer *triangle intégrant* du polygone chacun des triangles isocèles égaux, AOB, BOC,.... qui le composent.

Scol. 2. — Chaque rayon prolongé indéfiniment, ainsi que chaque apothème prolongé indéfiniment, forme un axe de symétrie du polygone régulier. Quand le nombre des côtés est pair, les rayons sont opposés deux à deux ainsi que les apothèmes, et quand le nombre des côtés est impair, chaque rayon est opposé à un apothème *et vice versâ* : donc, dans tous les cas, *Le nombre des axes de symétrie est égal à celui des côtés.*

Scol. 3. — Chacun des angles égaux formés par deux rayons consécutifs se nomme *l'angle au centre* du polygone régulier ; chaque angle formé par deux apothèmes a la même valeur : cette valeur est $\frac{4}{n}$ angles droits pour le polygone de n côtés. Quant à *l'angle* même *du polygone*, c'est-à-dire l'angle de deux côtés consécutifs, il est supplémentaire de l'angle au centre : il vaut donc $\left(2-\frac{4}{n}\right)$ ou $2\left(\frac{n-2}{n}\right)$ angles droits, comme on l'a vu précédemment (n° 167).

Scol. 4. — Un polygone régulier est déterminé quand on connaît 1° son espèce, c'est-à-dire le nombre de ses côtés, et 2° la longueur de l'un des côtés : car, avec ces données, chaque triangle intégrant du polygone est déterminé.

Ainsi, *Deux polygones réguliers sont égaux quand ils ont un côté égal et un angle égal.*

Problème.

176. *Recouvrir* [s'il est possible] *une portion de surface plane avec des polygones réguliers égaux* [assemblés *trois à trois, quatre à quatre,....* autour d'un sommet commun].

La condition nécessaire et suffisante pour la possibilité d'une solution, consiste en ce que l'angle du polygone que l'on voudra employer, soit contenu dans 4 *droits* un nombre de fois entier et au moins égal à 3, puisque pour recouvrir entièrement un plan, il faut réunir au moins *trois* angles saillans autour d'un même sommet. Cela posé, commençons par les polygones les plus simples.

L'angle du triangle régulier vaut $\frac{2}{3}$, nombre qui est contenu 6 fois dans 4 : donc la question sera résolue en assemblant des *triangles* équilatéraux *six à six* (fig. 122). Fig. 122.

La question est évidemment résoluble avec des *carrés* assemblés *quatre à quatre* (fig. 123). Fig. 123.

Elle ne l'est pas avec des pentagones, parce que leur angle, qui vaut $\frac{6}{5}$, n'est pas un sous-multiple de 4 *droits*.

On trouve de même que l'on peut assembler des *hexagones*
Fig. 124. réguliers *trois à trois*, (fig. 124), parce que leur angle vaut $\frac{8}{6}$ ou $\frac{4}{3}$, nombre contenu 3 fois dans 4.

Après l'hexagone régulier, il n'y a plus de solution possible, parce qu'au-delà de cette *limite*, les angles de tous les autres polygones surpassent le *tiers* de 4 *droits*.

Scolie 1er. — Les *trois* sortes de polygones réguliers qui satisfont aux conditions de la question précédente, jouissent en outre de la propriété suivante.

1° Si un plan est recouvert de *triangles* réguliers égaux
Fig. 122. (fig. 122), et que l'on joigue deux à deux, par des droites, les centres des triangles contigus, on forme ainsi des *hexagones* réguliers égaux qui recouvrent également le plan.

2° Réciproquement, si un plan est recouvert d'*hexagones*
Fig. 124. réguliers égaux (fig. 124), et que l'on joigne deux à deux, par des droites, les centres des hexagones contigus, on forme ainsi des *triangles* réguliers égaux qui recouvrent également le plan.

3° Enfin, en effectuant la même construction sur des *carrés*
Fig. 123. réunis quatre à quatre autour d'un même point (fig. 123), on produit d'autres *carrés* égaux aux premiers et réunis de la même manière.

En raison de ces propriétés, le triangle régulier et l'hexagone régulier sont dits des polygones réguliers *réciproques* ou *conjugués* l'un de l'autre. Le carré est réciproque du carré.

Scolie 2. — On peut aussi recouvrir un plan avec des mélanges de diverses sortes de polygones réguliers : par exemple
Fig. 125. avec des octogones et des carrés (fig. 125), des hexagones
Fig. 126. et des triangles (fig. 126), des triangles et des dodécagones
Fig. 127. (fig 127), etc.

On peut aussi combiner des triangles deux à deux pour en

composer des losanges (fig. 128), des carrés deux à deux Fig. 128.
pour en composer des rectangles (fig. 129), etc. Fig. 129.

Théorème VII. (Fig. 130.)

177. *A tout polygone régulier* ABCD.... *on peut circonscrire un cercle.* Fig. 130.

En effet, les rayons du polygone régulier, OA, OB, OC, OD, .. sont tous égaux entre eux (n° 175); donc si, du centre O et d'un rayon OA, on décrit une circonférence, cette circonférence passera par tous les points A, B, C, D,.... : donc le polygone est *inscriptible* (n° 90).

Scolie. — L'angle du polygone inscrit se nomme *angle à la circonférence.*

Théorème VIII. (Fig. 130.)

178. *A tout polygone régulier* ABCD.... *on peut inscrire un cercle.*

En effet, les apothèmes OM, ON, OP, ... sont tous égaux entre eux : donc, si du même centre O et d'un rayon OM on décrit une circonférence, elle passera par tous les points M, N, P, ... ; et de plus elle touchera tous les côtés AB, BC, CD,.... (n° 102) : donc le polygone est *circonscriptible* (n° 90).

Scolie 1er *sur ces deux théorèmes.* — Les réciproques ne sont pas vraies, c'est-à-dire que tout polygone inscriptible ou circonscriptible n'est pas pour cela un polygone régulier : tel est, par exemple, le triangle en général (nos 128 et 129).

Scol. 2. — Les droites OA, OM, OB, ON, OC,...., qui partagent le polygone en triangles égaux, partagent le cercle inscrit et le cercle circonscrit en secteurs respectivement égaux.

Scol. 3. — Le rayon du cercle circonscrit n'est autre que celui du polygone; le rayon du cercle inscrit se confond avec l'apothème; et enfin le centre du polygone est aussi le centre commun des deux cercles.

Théorème IX. (Fig. 131.)

Fig. 131. 179. *Si une circonférence* ABCD... *est partagée en parties égales, et que, par les points de division consécutifs*, A, B, C, D,..., *on mène des cordes, le polygone inscrit formé par ces cordes sera régulier.*

D'abord, les côtés du polygone seront égaux, comme sous-tendant des arcs égaux. En second lieu, en menant des rayons à tous ses sommets, on le décomposera en autant de triangles isocèles qu'il a de côtés; et tous ces triangles seront égaux (n° 130). Ainsi, les angles du polygone, étant tous supplémentaires de l'angle au sommet de chaque triangle isocèle, seront aussi égaux. Donc le polygone sera régulier.

Théorème X. (Fig. 131.)

180. *Si une circonférence* ABCD.... *est partagée en parties égales, et que, par les points de division consécutifs*, A, B, C, D,..., *on mène des tangentes, le polygone circonscrit* MNPQ... *formé par ces cordes sera régulier.*

En effet, menons les rayons OA, OB, OC, OD,....., puis les cordes AB, BC, CD,... : les angles MAB, MBA, NBC, NCB,.. des triangles AMB, BNC, CPD,... seront égaux comme complémentaires des angles à la base des triangles égaux et isocèles (n° 179) AOB, BOC, COD,.... qui ont pour sommet commun le centre O. Ainsi, les triangles AMB, BNC, CPD,.... seront eux-mêmes isocèles et égaux entre eux (n^os 126 et 133). Donc, d'une part, les angles M, N, P,.... seront égaux; et, d'autre part, les côtés MN, NP, PQ,... seront aussi égaux comme doubles des côtés latéraux des triangles AMB, BNC, CPD,.... Donc le polygone MNPQ.... sera régulier.

Scolie. — La construction des polygones réguliers se ramène à la division de la circonférence en parties égales.

181. [Remarque *sur les polygones étoilés.* — Au lieu de

joindre par des cordes les points de division *consécutifs*, comme on l'a fait dans le théorème IX (n° 179) [il y a une observation semblable pour le théorème X (n° 180)], on peut ne joindre ces points que *de deux en deux*, *de trois en trois*, etc. On obtient ainsi, conformément à ce qui a été dit ci-dessus (n° 173), des polygones réguliers *du second ordre, du troisième ordre,*.... que l'on comprend sous la dénomination générale de *polygones étoilés*. Les figures 132 à 140 offrent les exemples les plus simples de ces sortes de polygones.

Ainsi la figure 132 représente le *pentagone du second ordre*. C'est le plus simple des polygones étoilés, et il n'y a point d'autre pentagone possible après celui du premier ordre. Fig. 132.

La figure 133 représente l'*hexagone du second ordre*, lequel n'est autre chose qu'un système de deux triangles équilatéraux entrelacés. C'est le seul hexagone possible après celui du premier ordre. Fig. 133.

Les figures 134, 135, représentent les *heptagones du second* et *du troisième ordre*. Ce sont les seuls heptagones étoilés possibles. Fig. 134 et 135.

Enfin, les figures 136, 137, représentent les *octogones du second* et *du troisième ordre*, les seuls possibles, et dont le premier se compose du système de deux carrés. Fig. 136 et 137.

Il est bon d'observer que l'on obtient les polygones réguliers du second ordre en prolongeant les côtés de ceux du premier, puis les polygones du troisième ordre en prolongeant les côtés de ceux du second,... ; et ainsi de suite.

Nous ferons observer encore que l'on peut, à la rigueur, considérer les systèmes de *deux* (fig. 138), de *trois* (fig. 139), de *quatre* (fig. 140).... *diamètres*, comme représentant respectivement le *quadrilatère du second ordre*, l'*hexagone du troisième*, l'*octogone du quatrième*, etc. On pourrait même, sous ce point de vue, considérer un *diamètre unique* comme un *polygone de deux côtés* qui se confondent.]] Fig. 138, 139, et 140.

CHAPITRE VI.

DES COURBES.

§ Ier. *Généralisation de plusieurs définitions. — Des Élémens des Courbes. — De la Convexité.*

182. On nomme Arc d'une courbe, en général, toute *portion de cette courbe* (*Voy.* le n° 19), et Corde d'un arc, la *droite limitée qui joint les extrémités de l'arc.*

A l'égard de la Flèche, comme tout arc d'une courbe quelconque n'est pas susceptible de se partager en deux moitiés superposables, on nomme ainsi la *portion de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde, comprise entre cette corde et l'arc.*

La Sécante, dans les courbes en général, n'est plus une corde prolongée (*Voy.* le n° 20) : la sécante est une *droite qui coupe la courbe en* UN *point ou en un nombre quelconque de points ;* et pour qu'il y ait réellement *intersection,* il faut que le point commun partage la courbe en deux portions qui soient situées, par rapport à la droite, chacune dans une région différente du plan (n° 11) ; ou, en d'autres termes, l'une des portions de la courbe doit être située d'un côté de la droite, et l'autre portion de l'autre côté.

Quant à la Tangente, c'est toujours la *limite d'une sécante dont deux points d'intersection avec la courbe se sont réunis en un seul.* Il résulte de cette définition que le *point de tangence* peut être en même temps un *point d'intersection,* ou qu'une droite peut toucher et couper la courbe en même temps et au même point, ou enfin que la droite et la courbe peuvent être à la fois tangentes et sécantes. Une tangente prolongée peut aussi couper la courbe ailleurs qu'au point de tangence.

Au reste, ce que nous venons de dire sera mieux compris quand nous aurons donné quelques développemens sur la nature des courbes en général.

183. Pour cela, soit un polygone quelconque que nous regarderons comme une ligne brisée (n° 86), en ne considérant que son contour et faisant abstraction de la portion de plan qu'il circonscrit s'il est fermé. Pour mieux fixer les idées, prenons un *carré* (fig. 141); puis, après avoir, par la pensée, partagé en deux parties égales chacun des côtés de ce carré, disposons-les en *octogone* régulier (fig. 142). Partageons de même les côtés de cet octogone, et formons-en un polygone régulier *de seize côtés* (fig. 143); et ainsi de suite en doublant continuellement le nombre des côtés qui deviennent, à chaque fois, moindres de moitié. Il est clair que, par cette suite indéfinie de subdivisions, les côtés des divers polygones ainsi obtenus finiront par devenir inappréciables; et alors, les apothèmes et les rayons ne différant plus sensiblement, ni de longueur, ni de direction, le polygone lui-même aura pris sensiblement la forme d'une circonférence de cercle. Fig. 141. Fig. 142. Fig. 143.

Au lieu de former une suite de polygones *isopérimètres*, on peut prendre d'abord un carré inscrit dans un cercle (fig. 144); puis, en partageant en deux parties égales chacun des arcs sous-tendus, considérer l'octogone régulier qui aurait pour sommets les nouveaux points de subdivision de la circonférence conjointement avec les anciens; et ainsi de suite. On arrive de cette manière à un polygone inscrit qui ne se distingue plus sensiblement du cercle circonscrit. Fig. 144.

Enfin, l'on peut partir encore du carré circonscrit (fig. 145), puis le remplacer par l'octogone également circonscrit, et continuer indéfiniment de la même manière. Fig. 145

On arrive ainsi à cette conséquence qu'une circonférence de cercle peut être considérée, soit comme la *limite* (*) d'une série de polygones réguliers isopérimètres, soit comme la limite d'une série de polygones réguliers inscrits, soit enfin comme la limite d'une série de polygones réguliers circonscrits, les côtés de ces polygones diminuant indéfiniment de longueur dans les trois cas, tandis que leur nombre augmente indéfiniment. C'est ce que l'on exprime en disant que *La circonférence du cercle est un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits.*

Toutes les courbes, sans exception, pouvant évidemment offrir des résultats analogues, il s'ensuit qu'une courbe quelconque peut être assimilée à une ligne brisée, ce qui permet d'admettre que *Toute ligne courbe est composée d'une infinité de portions de lignes droites infiniment petites.* Ces petites portions de ligne droite, ou ces côtés infiniment petits de la ligne courbe, se nomment les ÉLÉMENS de la courbe.

184. Dans cette manière de voir, la tangente n'est autre chose que la *direction* (n° 7), ou le *prolongement* indéfini dans les deux sens, *d'un élément* de la courbe; mais il est clair que cette nouvelle définition de la tangente rentre au fond dans celle que nous avons donnée précédemment (n° 20).

Maintenant, de même qu'un polygone est convexe (n° 173) lorsqu'aucun de ses côtés, indéfiniment prolongé, ne peut rencontrer le reste du contour, ou lorsqu'une droite ne peut couper ce contour en plus de deux points, de même aussi une *courbe* est *convexe* lorsqu'elle ne peut être coupée par aucune de ses tangentes, ou lorsqu'une sécante ne peut la rencontrer en plus de deux points; et elle est *concave* dans le cas contraire. Au reste, comme cette définition ne suppose pas que la courbe soit *fermée*, on conçoit qu'il est toujours possible de partager une courbe quelconque en portions de courbe dont chacune,

---

(*) Observez que ce mot *limite* a déjà été employé plusieurs fois (n°s 1, 20, 114, 160, 176), et presque toujours dans des acceptions différentes les unes des autres.

prise séparément, soit convexe dans toute son étendue.

On voit par là qu'une courbe *doit* être à la fois *convexe et fermée* comme le cercle, pour que *sa* tangente puisse être définie une *droite qui n'a de commun avec la courbe qu'un seul élément*, ou *un seul point* comme on le dit ordinairement en raison de ce que l'élément, étant *infiniment petit* (n° 183), n'est qu'un point pour les yeux.

Toute courbe convexe ou portion convexe de courbe étant située en entier du même *côté* de sa tangente, il en résulte que, réciproquement, la tangente est toujours en entier située du même *côté de la courbe* [en employant ici le mot *côté* dans le même sens qu'on lui a attribué dans le n° 182]. Or, le côté de la courbe dans lequel est située la tangente, se nomme le *côté convexe* ou le *côté de la convexité*, et le côté opposé est le *côté concave* ou le côté vers lequel la courbe *tourne sa concavité*.

185. La considération des élémens est de la plus grande importance dans la théorie des lignes courbes : car, en conduisant à regarder ces sortes de lignes comme de véritables polygones, elle fait voir que *Toute propriété générale démontrée pour une ligne brisée* indépendamment du nombre, de la grandeur, et des inclinaisons mutuelles de ses côtés, *appartient*, par cela même, *à la ligne courbe* que l'on peut considérer comme sa *limite*.

Afin de rendre plus sensible l'exactitude de ce principe et la rigueur des conséquences que l'on peut en déduire, nous allons l'appliquer à la démonstration d'une propriété générale des courbes convexes; puis nous montrerons ensuite que l'on peut parvenir au même résultat sans employer la considération des élémens.

Théorème. (Fig. 146 et 147.)

186. *Une ligne convexe fermée* ABCDA, *brisée, courbe, ou mixte, est moindre qu'une ligne quelconque* PQRSTP [convexe ou concave] *qui l'envelopperait de toutes parts*. Fig. 146 et 147.

Pour démontrer cette proposition, supposons d'abord que
Fig. 146. la ligne enveloppée soit un polygone (fig. 146); et prolongeons tous ses côtés, AB, BC, CD, DA, *dans un même sens* (nº 168, *note*) [comme l'indique la figure], jusqu'à la rencontre de la ligne enveloppante, respectivement en a, b, c, d. Nous aurons cette suite d'inégalités :

$$\begin{aligned} AB + Ba &< Ad + dP + PQ + Qa, \\ BC + Cb &< Ba + aR + Rb, \\ CD + Dc &< Cb + bS + Sc, \\ DA + Ad &< Dc + cT + Td. \end{aligned}$$

Or, si l'on ajoute toutes ces inégalités membre à membre, et que, dans le résultat, on supprime les parties communes aux deux membres, Ad, Ba, Cb, Dc, en observant d'ailleurs que

$$\begin{aligned} Qa + aR &= QR, \\ Rb + bS &= RS, \\ Sc + cT &= ST, \\ Td + dP &= TP, \end{aligned}$$

il en résultera

$$AB + BC + CD + DA < PQ + QR + RS + ST + TP,$$

ou simplement

$$ABCDA < PQRSTP.$$

Fig. 147. En second lieu, si la ligne enveloppée est une ligne courbe [ou mixte] ABCD (fig. 147), les côtés du polygone ABCD (fig. 146) se trouveront remplacés [en totalité ou en partie] par les élémens de la courbe; et en supposant tous ces élémens prolongés dans un même sens suivant leurs tangentes respectives, la démonstration précédente sera applicable à la nouvelle hypothèse. Donc la proposition est vraie dans tous les cas possibles où la ligne enveloppée est convexe.

Faisons voir maintenant que l'on peut parvenir aux mêmes conséquences sans avoir besoin d'assimiler la ligne courbe à une ligne brisée.

Pour cela, supposons que la plus courte de toutes les lignes qui peuvent *enceindre* la portion de plan limitée par la ligne ABCD diffère de cette dernière, et que ce soit, par exemple, la ligne PQRST. Cela posé, par un point quelconque A pris sur la ligne ABCD, menons une tangente MN; elle ne rencontrera cette ligne en aucun autre point (184), et coupera la ligne PQRST en deux points, M et N, de sorte que l'on aura..... MN < MPQN; et ainsi il en résultera MNRSTM < PQRSTP. Il est donc impossible que la ligne PQRST soit la plus courte de toutes celles qui entourent la portion de plan ABCD. Or, comme le même raisonnement est applicable à toutes les lignes qui enveloppent ABCD et qui diffèrent de la ligne ABCD, il en résulte que celle-ci est la plus courte de toutes: donc, etc.

Scolie 1er. — Il est bien clair que la proposition précédente est applicable au cas (fig. 148) où la ligne enveloppée Fig. 148. ABCD et la ligne enveloppante ABCE ont une partie commune ABC, ou des points communs, pourvu que la partie enveloppée ADC soit convexe et tourne sa convexité vers la ligne enveloppante (n° 184).

On peut aussi supprimer la partie commune ABC, et l'on a alors AEC > ADC, résultat dont le corollaire 1er du lemme 1, chap. 1, n° 93, n'est qu'un cas particulier.

Scol. 2. — La même proposition a lieu, en particulier, pour une circonférence et un polygone inscrit ou circonscrit quelconque (fig. 130 et 131); de sorte que *La circonférence est* Fig. 130 et 131. *plus grande que tout polygone inscrit et plus petite que tout polygone circonscrit.* Il est clair d'ailleurs que la différence est d'autant moindre que le polygone se rapproche plus de la circonférence, ou que le nombre de ses côtés est plus multiplié.

§ II. *Autres propriétés des Courbes. — De la Normale. — Du Cercle Osculateur. — Des Points Singuliers, etc. — De la Continuité.*

187. Bien que ce qui précède contienne toutes les notions

essentielles relatives aux courbes, surtout pour ce qui appartient à la Géométrie Élémentaire proprement dite (n° 27), nous allons exposer encore quelques-unes de leurs propriétés générales les plus intéressantes, qui ne supposent d'ailleurs d'autres connaissances que celles que nous avons déjà acquises.

Fig. 149. La NORMALE à une courbe (fig. 149) est la *perpendiculaire*, MN, *menée à la tangente*, ST, *par le point de tangence*, M. Ainsi, par exemple, *Dans le cercle, tout rayon est normal* à la courbe, et réciproquement *Toute normale passe par le centre* (n° 102, *récipr.* 1^re^).

L'un des segmens, MP, de la normale est toujours situé du côté de la convexité (n° 184), tandis que l'autre, MN, est compris dans la concavité.

188. En un point donné M sur une courbe AB (fig. 149), on peut toujours mener une infinité de cercles ayant en ce point pour tangente commune, la tangente même, ST, de la courbe; d'où il résulte que ces cercles sont eux-mêmes tangens à cette dernière, puisqu'ils ont avec elle un élément commun. Or, il est bien clair que, parmi ces cercles, il en est un qui se rapproche plus de la courbe, dans les environs du point de contact M, que tous les autres, c'est-à-dire qui tend plus que tous les autres, dans l'étendue d'un petit arc pris de part et d'autre de ce point, à se confondre sensiblement avec la courbe. Ce cercle *unique* se nomme le CERCLE OSCULATEUR de la courbe au point M; mais la considération des élémens nous fournit le moyen d'en donner une définition plus précise et tout-à-fait géométrique.

Pour cela, rappelons-nous qu'il faut trois points pour déterminer une circonférence de cercle (n° 128, *coroll.* 2); d'où il résulte qu'on peut toujours faire passer une circonférence par trois points donnés [non en ligne droite], et que par conséquent, la circonférence qui approchera plus que toutes les autres de la courbe, dans les environs du point M, sera celle qui aura avec cette courbe, de part et d'autre et infiniment près de ce point, deux autres points communs, c'est-à-dire enfin, qui aura avec la courbe deux élémens consécutifs communs, l'un d'un côté du point M, l'autre de l'autre.

Cela posé, la construction du cercle osculateur d'une courbe donnée AB (fig. 150) en un point M, se réduit à ce qui suit : Fig. 150.
— En supposant la courbe décomposée en élémens, soient LM, MN, les deux élémens consécutifs qui doivent appartenir au cercle cherché; par les milieux, e, f, de ces élémens, élevons des perpendiculaires : elles se rencontrent (n° 115) en un point O : ce point est *le centre du cercle osculateur;* et les rayons sont d'ailleurs OL, OM, ON, ou bien Oe, Of, qui n'en diffèrent pas sensiblement.

189. Le cercle osculateur, dont nous venons de donner la construction générale, jouit de plusieurs propriétés aussi importantes que curieuses : nous allons examiner les principales.

Prolongeons d'abord les élémens LM, MN (fig. 150); il en résultera deux tangentes consécutives LT, MU, faisant entre elles un angle *infiniment petit* TMU que l'on nomme l'*angle de contingence*. Or, il est clair que plus cet angle est considérable, plus la courbe s'écarte, au point M, de sa tangente LM, et par conséquent *plus elle est courbe*. L'angle de contingence est donc propre à évaluer ce que l'on nomme la *courbure* d'une courbe en un point donné; c'est pourquoi on le nomme encore *angle de courbure*.

De plus, l'angle TMU étant évidemment égal à l'angle eOf, puisqu'ils ont l'un et l'autre pour supplément l'angle LMN (n° 148, *coroll.*), on tire de là un second moyen également propre à apprécier le degré de courbure d'une courbe donnée, moyen qui offre même plus de commodité que le premier, en ramenant cette évaluation à celle de la courbure du cercle osculateur, laquelle est d'autant plus considérable [en un point donné de la courbe] que le rayon du cercle est moindre, ce rayon diminuant évidemment à mesure que l'angle de contingence augmente, *et vice versâ*.

De là vient que le cercle osculateur reçoit encore le nom de *cercle de courbure*, son centre O celui de *centre de courbure*, et enfin son rayon celui de *rayon de courbure*.

190. Maintenant, supposons que l'on effectue, pour tous les
Fig. 151. points de la courbe AB (fig. 151), la construction que nous avons indiquée ci-dessus (n° 189) pour le point M. Il en résultera une autre courbe PQ, qui sera le *lieu géométrique des centres de courbure* de la courbe AB. De sorte que si, de chacun [O] des points de la courbe PQ, on décrivait, avec le rayon de courbure correspondant [O*e*], un petit arc de cercle [*e*M*f*], la courbe entière AB pourrait être considérée comme composée de tous ces arcs élémentaires. Or, cette description peut s'exécuter fort simplement par un moyen tout-à-fait *mécanique*, c'est-à-dire par un *mouvement continu*. Pour cela, admettons que l'on ait tendu le long de la courbe PQ, supposée *solide*, un *fil flexible* qui s'appuie exactement sur toute l'étendue de son contour, et qui le dépasse seulement, au point P, d'une longueur PA égale au rayon de courbure du point A. Il est clair que, dans cette hypothèse, si l'on détache successivement les divers élémens du fil PQ [en commençant au point P] des élémens qu'ils recouvraient respectivement sur la courbe solide PQ, le fil entier restant toujours tendu, l'extrémité A décrira successivement les divers élémens de la courbe AB.

La courbe PQ est dite, en raison de cette propriété, la *développée* de la courbe AB, et réciproquement la courbe AB est la *développante* de la courbe PQ. La développée d'un cercle se réduit à un point unique qui est son centre; et la développée d'une courbe quelconque est, par rapport à cette courbe, ce qu'est le centre par rapport au cercle. La développée est en quelque sorte un centre variable correspondant à un rayon variable qui est celui du cercle osculateur; et la développante peut être considérée comme décrite d'une manière analogue à la description du cercle, au moyen de ce centre et de ce rayon qui varient ainsi en même temps.

De même qu'un cercle n'a qu'un seul centre, mais qu'un même point peut être le centre de divers cercles : de même aussi une développante n'a qu'une seule développée, tandis qu'une même développée peut avoir une infinité de développantes différentes. Il est clair, en effet, que si, à partir du point A, l'on prend sur le fil APOQ, d'un côté ou de l'autre du point A, une certaine longueur AA′ tout-à-fait arbitraire, le même mouvement par lequel le point A décrit la courbe AB suffira pour que le point A′ engendre une seconde *courbe équidistante* de la première, ou *parallèle* à la première.

Enfin, pour terminer ce que nous avons à dire sur *les rayons de courbure*, il est facile de voir qu'ils *sont tangens à la développée et normaux à la développante.*

191. Examinons maintenant quelques circonstances remarquables que les courbes peuvent présenter dans leur cours.

Et d'abord, observons qu'ordinairement une ligne courbe, pas plus qu'une ligne droite, ne s'arrête brusquement en un point sans se continuer au-delà d'une manière quelconque. Ainsi, ou bien la courbe sera *rentrante* sur elle-même, comme le cercle, ou bien elle pourra se partager en deux *segmens* indéfinis, comme la ligne droite (n° 7), ou bien enfin elle se composera de diverses *portions* dont chacune sera dans l'un ou dans l'autre de ces deux cas. Autrement ce ne serait pas une véritable courbe *complète*, mais simplement un *arc* de courbe.

Cela posé, rappelons-nous 1° qu'une tangente est une sécante dont deux points d'intersection se réunissent en un seul (n° 20), et 2° qu'une sécante peut avoir un nombre quelconque de points communs avec la courbe (n° 182). D'où il suit qu'au moment où une sécante PQ (fig. 152) devient tangente [ST], *trois* des points primitifs d'intersection, P, A, Q, peuvent se réunir en un seul [A]. Or, tout point A pour lequel cette circonstance a lieu, se nomme un *point d'inflexion*. On voit qu'en ces sortes de points, la tangente coupe la courbe en même temps qu'elle la touche, et qu'ainsi les deux Fig. 152.

lignes ont deux élémens consécutifs communs au lieu d'un seul.

Ce qui caractérise encore les points d'inflexion, c'est que, si l'on considère les quatre angles droits formés par la tangente ST et la normale MN, les points de la courbe qui avoisinent le point de contact sont situés dans deux angles opposés.

Enfin, les points d'inflexion peuvent encore être définis en disant que ce sont des points dans lesquels la convexité et la concavité passent d'un côté de la courbe à l'autre, ou changent mutuellement de *sens* (*Voy.* le n° 184).

Il peut arriver encore que la courbe passe plusieurs fois par
Fig. 153. le même point, A, B, ou C (fig. 153) : ce point se nomme un *point multiple*.

Il peut y avoir, en un point multiple, ou plusieurs tangentes comme aux points A, B, ou une seule comme aux points C. Il en est de même du cercle osculateur; mais le nombre des cercles osculateurs différens ne peut être moindre que celui des tangentes différentes.

Quelquefois, la courbe retourne brusquement sur elle-
Fig. 154. même après s'être arrêtée en un certain point, A, B, ou C (fig. 154) : ce point se nomme alors un *point de rebroussement*.

Les deux arcs de courbe qui se réunissent en un point de rebroussement doivent y avoir la même tangente; sans quoi la direction de cette tangente varierait brusquement. Or, on ne doit pas non plus considérer comme complète une courbe qui présenterait cette circonstance (*) : il faudrait prolonger, par la pensée, chacun des deux arcs au-delà du point commun, lequel serait alors un véritable point multiple.

Le *rebroussement* est dit de *première espèce* quand les deux arcs de la courbe sont, l'un d'un côté de la tangente, l'autre de l'autre, comme aux points A, B; il est de *seconde espèce* quand les deux arcs sont du même côté de la tangente, comme

---

(*) La raison en est, d'après la théorie analytique des courbes, que deux valeurs d'une même quantité variable ne peuvent devenir *imaginaires* sans passer par l'égalité.

au point C (*). Mais dans tous les cas, ces deux arcs sont situés à la fois du même côté de la normale.

Les points d'inflexion et de rebroussement, ainsi que les points multiples, ont reçu le nom commun de *points singuliers*.

192. On peut considérer les points singuliers comme des points de division naturels de la courbe en divers segmens que l'on nomme ses *branches*. [Une courbe peut cependant, comme celle qui est marquée A dans la figure 154, n'avoir qu'une seule branche, quoique présentant un point de rebroussement.] Chaque branche est nécessairement convexe du même côté dans toute l'étendue de son cours.

On peut distinguer plusieurs sortes de branches de courbes : les unes sont terminées de part et d'autre en deux points singuliers; d'autres branches sont limitées dans un sens et illimitées dans l'autre [comme le sont, par exemple, les deux segmens d'une ligne droite]; d'autres enfin sont illimitées dans les deux sens.

Une branche de courbe AB, (fig. 155) peut être conformée de manière que les distances de ses divers points à une certaine droite XZ, comptées sur des perpendiculaires *équidistantes* entre elles, PM, P'M', P''M'',... soient susceptibles de devenir moindres que toute ligne donnée quelque petite que soit celle-ci, mais cependant sans être *jamais* rigoureusement nulles. C'est ce qui arriverait, par exemple, si ces distances pouvaient être représentées par la série des nombres Fig. 155.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

(*) M. Francœur a proposé les dénominations de *cératoïde* et de *ramphoïde* pour caractériser les courbes qui présentent des points de rebroussement de *première* et de *seconde* espèce. *Cératoïde*, κερατοειδής, signifie *semblable à une corne*, et *ramphoïde*, ῥαμφοειδής, *semblable à un bec d'oiseau*.

Lorsqu'une branche de courbe se trouve dans ce cas, de s'approcher indéfiniment d'une droite sans jamais l'atteindre, la courbe et la droite sont dites *asymptotes* l'une de l'autre. [La même chose peut aussi avoir lieu entre deux courbes.]

Fig. 156. Enfin, l'on nomme *spirale* (fig. 156) toute courbe ou branche de courbe qui, faisant un nombre infini de circonvolutions autour d'un point, s'en rapproche indéfiniment sans jamais l'atteindre, ou bien au contraire s'en éloigne indéfiniment.

193. Nous pouvons maintenant généraliser pour les courbes, comme nous l'avons fait pour les polygones, la notion de la convexité. Or, la manière dont elle a d'abord été définie pour les polygones dans le n° 173, revient à dire, quand il s'agit d'une courbe, que cette courbe n'a ni point d'inflexion, ni point de rebroussement ; telles sont, dans la figure 153, les deux courbes marquées de la seule lettre A. [On pourrait même encore, à la rigueur, considérer comme convexe la courbe de la figure 154.] Mais dans tous ces cas, il faut distinguer, comme pour les polygones, les courbes convexes du premier ordre qui n'ont aucune sorte de points singuliers, des courbes convexes qui ont des points multiples, etc., lesquelles sont alors des courbes convexes d'un ordre supérieur. On voit que dans celles-ci, la tangente peut rencontrer la courbe en d'autres points que le point de contact, et aussi qu'une sécante peut la couper en plus de deux points.

194. Il nous reste, pour terminer ce chapitre et le Livre premier, à dire quelques mots de ce que l'on nomme la *loi de continuité*, ainsi que des systèmes composés de courbes ou de segmens de courbes qui n'y satisfont pas.

Pour qu'une courbe soit *continue* entre deux de ses points, il faut qu'entre ces limites, les directions de sa tangente et de sa normale varient par degrés insensibles, ainsi que les valeurs de son rayon de courbure ; de sorte qu'entre deux élémens consécutifs, l'angle de contingence, et par suite la différence des deux rayons de courbure correspondans, ne soit nulle part appréciable. Lorsque ces conditions ne sont pas remplies, la courbe est *discontinue*, et ne doit plus être considérée que comme un assemblage d'arcs de courbes différentes.

Deux courbes [ou deux arcs de courbe] qui ont un point commun, sont dites *tangentes* en ce point si elles y ont un élément commun et par conséquent une tangente commune; elles sont simplement *sécantes* dans le cas contraire, quand bien même ce point commun serait une *extrémité* commune à deux arcs de courbes. Du reste, deux courbes peuvent aussi se couper et se toucher à la fois en un nombre quelconque de points.

Les arts, et surtout l'*Architecture*, présentent de nombreuses applications des lignes discontinues. Nous donnerons comme exemples la *rosace* (fig. 157) et l'*ogive* (fig. 158), également Fig. 157 et 158.
composées d'arcs de cercles qui se coupent; le *talon* (fig. 159) Fig. 159
et la *doucine* (fig. 160), composées d'arcs de cercles tangens; et 160.
et généralement les *profils* de toutes les sortes de *moulures*. Nous citerons encore les courbes en *ovales* composées de *quatre* arcs de cercle tangens, AB, BC, CD, DA (fig. 161), et Fig. 161.
ordinairement nommées *anses de paniers*. Il est bien clair que cette sorte de courbe, de même que les deux précédentes, est discontinue, puisque ses rayons de courbure n'étant autre chose que les rayons des arcs AB, BC, CD, DA, qui la composent, il en résulte que la courbure est constante pour toute l'étendue de chacun de ces arcs, et varie brusquement aux points de *raccordement* A, B, C, D.]

FIN DU LIVRE PREMIER.

N. B. — Avant de commencer le Livre deuxième, il est nécessaire de se rappeler quelques formules d'Algèbre dont on aura besoin. Voici ces formules :

Si l'on nomme a, b, des lignes ou des quantités quelconques, on a entre elles les relations suivantes :

$$1^\circ\ (a+b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2,$$
$$2^\circ\ (a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2,$$
$$3^\circ\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

LIVRE DEUXIÈME.

DE L'ÉTENDUE CONSIDÉRÉE DANS UN PLAN.

PRÉLIMINAIRES DU LIVRE DEUXIÈME.

195. Nous devons continuer dans le Livre deuxième à étudier les figures planes, mais en les considérant spécialement sous le point de vue des *relations métriques* ou des *rapports numériques* que présentent, soit les différentes lignes qui les composent, soit les portions de plan auxquelles ces lignes servent de limites.

Nous démontrerons donc, avant d'aller plus loin, la proposition relative aux angles, que nous n'avons fait qu'énoncer dans le premier Livre (n° 68).

Théorème I. (Fig. 162.)

Dans un même cercle, ou dans des cercles de rayons égaux, *Les angles au centre*, AOB, COD, *sont proportionnels aux arcs correspondans*, AB, CD. Fig. 162.

Pour le prouver, commençons par prendre une ouverture de compas égale à la corde de l'arc CD; puis, du point A comme centre et d'un rayon égal à cette corde, décrivons un petit arc de cercle qui coupe l'arc AB en un point K. Les arcs AK, CD, seront égaux, puisque par hypothèse leurs cordes sont égales (n° 104, *récipr.* 1^re^); et de plus, en menant le rayon OK, nous formerons un angle AOK égal à l'angle COD. Ainsi l'arc CD se trouvera porté une première fois sur l'arc AB, et l'angle COD sur l'angle AOB. Supposons que l'arc CD, ayant été porté de cette manière 2 fois sur l'arc AB, de A en E, ait donné un reste EB moindre que CD : l'angle COD se trouvera, de même, porté 2 fois sur l'angle AOB, avec un reste EOB moindre que COD ; et nous aurons à la fois

$$AB = 2.CD + EB, \quad AOB = 2.COD + EOB.$$

Portons à son tour l'arc EB sur l'arc CD ; et supposons que le premier soit contenu dans le second *une seule* fois, de C en F ; nous aurons alors

$$CD = EB + FD, \quad COD = EOB + FOD.$$

Portons encore FD sur EB ; et soit de même

$$EB = 4.FD + GB, \quad EOB = 4.FOD + GOB.$$

Soit enfin, pour fixer les idées,

$$FD = 3.GB, \quad \text{d'où} \quad FOD = 3.GOB.$$

Il résulte de ces égalités [comme dans le *numéro* 61],

$$\begin{array}{ll} EB = 13.GB, & EOB = 13.GOB; \\ CD = 16.GB, & COD = 16.GOB; \\ AB = 45.GB, & AOB = 45.GOB. \end{array}$$

Donc, le rapport de l'arc AB à l'arc CD, et celui de l'angle AOB à l'angle COD, sont exprimés tous deux par la fraction $\frac{45}{16}$; et par conséquent on a

$$\textit{angle}\, AOB : \textit{angle}\, COD :: \textit{arc}\, AB : \textit{arc}\, CD.$$

Cette proportion est vraie généralement, et elle aurait encore lieu même quand les arcs seraient incommensurables entre eux (*Voy.* le n° 64) ainsi que les angles.

≼[Mais pour le voir plus clairement, il vaut mieux réduire les rapports en fraction continue. L'exemple précédent donnerait ainsi

$$\frac{AB}{CD} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{3}}}, \quad \frac{AOB}{COD} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{3}}}.$$

On reconnaît alors que le rapport des arcs et celui des angles correspondans, étant représentés par la même fraction continue, sont égaux. Seulement, ces fractions continues seraient composées d'un nombre illimité de fractions intégrantes si les arcs, et par suite les angles, étaient incommensurables entre eux.

196. On prend ordinairement l'*angle droit* pour unité des angles, comme nous l'avons dit (n° 82); et par conséquent il est avantageux de prendre pour unité des arcs, l'arc correspondant, c'est-à-dire le *quart de circonférence* ou le *quadrant* (n° 19). Il résulte en effet de cette *convention*, que

Tout angle AOB (fig. 162) *a pour* MESURE *l'arc correspondant* AB.

En effet, si, dans la proportion (n° 195)

$$AOB : COD :: AB : CD$$

on suppose que COD et CD sont respectivement, COD l'unité des angles, et CD l'unité des arcs, cette proportion signifiera que *l'angle* AOB *contient son unité comme l'arc correspondant* AB *contient son unité;* et alors, en représentant par AOB et par AB les rapports numériques abstraits de cet angle et de cet arc à leurs unités respectives, on aura simplement.

$$AOB = AB,$$

égalité qui a identiquement la même signification que la proportion, et au moyen de laquelle la *mesure* ou l'*évaluation* (Voy. l'*Arithmétique*) d'un angle quelconque se trouvera toujours ramenée à celle d'un arc.

197. Tout ce qui vient d'être dit relativement aux angles au centre, est également applicable aux secteurs, aussi bien que ce qui avait été dit précédemment (n° 67) dans les préliminaires du Livre premier. En effet, il est évident

1° Qu'à des arcs égaux correspondent des secteurs égaux;

2° Que par conséquent à un arc double, triple,..., correspond un secteur double, triple, ...;

Et 3° qu'à un plus grand arc correspond un plus grand secteur.

De là il résulte, d'abord que les secteurs d'un même cercle ou de cercles égaux sont proportionnels aux arcs correspondans, et par suite qu'en prenant le quart de cercle pour unité de secteur, les arcs pourraient servir de mesure aux secteurs.

Ce n'est pas tout : en même temps que les raisonnemens du *numéro* 195 démontrent le théorème énoncé, l'opération qui les accompagne conduit à la solution de ce problème :

Déterminer le rapport de deux angles, ou *de deux arcs du même cercle*, ou *de deux secteurs*, et *Trouver leur plus grande commune mesure* quand il en existe une, c'est-à-dire quand les quantités que l'on compare sont commensurables entre elles ; dans le cas contraire ; c'est-à-dire quand ces quantités sont *incommensurables entre elles*, on est obligé de se contenter d'une commune mesure *approximative*, ainsi que d'un rapport *approché* (*Voy*. le n° 64).

198. Par opposition à la dénomination d'*angle au centre*, on appelle *angle excentrique* tout angle dont les côtés coupent ou touchent la circonférence, et dont le sommet est placé ailleurs qu'au centre, ce qui peut avoir lieu de *trois* manières distinctes, l'angle pouvant avoir son sommet sur la circonférence même (fig. 163 — 167), ou entre le centre et la circon-
Fig. 163 — 171. férence (fig. 168), ou hors du cercle (fig. 169, 170, et 171).

Parmi les angles excentriques, deux espèces surtout sont à considérer, l'*angle inscrit* APB (fig. 163 — 167) qui a son sommet sur la circonférence et dont les côtés sont des cordes, et l'*angle circonscrit* APB (fig. 171) dont les côtés sont des tangentes. — Nous appellerons *corde de contact* d'un angle circonscrit, la corde qui joint les points de tangence, A, B, ses côtés.

THÉORÈME II. (Fig. 163 — 166.)

199. *Tout angle inscrit* APB *est la moitié de l'angle au centre* AOB *qui correspond à l'arc* AB *compris entre ses côtés.*

En effet, supposons d'abord que l'un des côtés, PB, passe par le centre, O (fig. 163); et menons le rayon OA : l'angle AOB sera double de l'angle APB (n° 125, *scol.* 1^er^). *C. Q. F. D.* Fig. 163.

Si aucun des deux côtés ne passe par le centre, l'angle est la somme (fig. 164) ou la différence (fig. 165) de deux angles APC, BPC, dont un côté PC passe par le centre; et comme on a alors Fig. 164 et 165.

$$APC = \tfrac{1}{2}\,AOC, \quad BPC = \tfrac{1}{2}\,BOC,$$

il en résulte, dans les deux cas,

$$APB = \tfrac{1}{2}\,AOB.$$

N. B.—On peut considérer comme limite des angles inscrits, un *angle*, APB (fig. 166), *formé par une tangente* AA′ *et une corde* PB qui se coupent au point de tangence; et le même théorème est applicable à un pareil angle. Fig. 166.

En effet, si l'on mène le diamètre POC et le rayon OB, l'angle APC étant droit (n° 102), vaudra la moitié de POB plus la moitié de BOC; or, on sait déjà que

$$BPC = \tfrac{1}{2}\,BOC : \quad \text{donc} \quad APB = \tfrac{1}{2}\,POB.$$

Ce que nous venons de dire pour l'angle aigu APB est également vrai pour l'angle obtus A′PB supplémentaire du premier. *L'*angle A′PB est aussi moitié de l'angle [plus grand que deux droits] correspondant à l'arc PKCB plus grand que la demi-circonférence (n° 88).

[Nous avons déjà eu occasion (n^os^ 164 et 180) de considérer des angles formés par une corde et une tangente.]

Corollaire.—Il résulte de ce théorème, qu'en prenant toujours pour unité d'arc le quart de circonférence, et l'angle droit pour unité d'angle,

Tout angle inscrit APB (fig. 163—166) *a pour mesure* (n° 196) *la moitié de l'arc* AB *compris entre ses côtés;* Fig. 163 — 166.

Et son supplément API a pour mesure la moitié du reste de la circonférence.

200. De ce qui précède on peut tirer les conséquences suivantes :

Fig. 167. 1° *Tous les angles,* APB, AP′B, AP″B,... (fig. 167), *inscrits dans le même segment* APP′P″B *sont égaux, ainsi que les angles limites,* BAL, ABK, *que forme la base* AB *du segment avec les tangentes,* AL, BK, *menées à ses extrémités;*

Fig. 81. 2° *Tout angle* BAC (fig. 81) *inscrit dans un demi-cercle est un angle droit,* ce qui est conforme à ce que l'on a vu précédemment (n° 127, *récipr.*);

3° *L'angle inscrit dans un segment est aigu, droit, ou obtus, suivant que le segment est supérieur, égal, ou inférieur à la demi-circonférence.*

Fig. 167. On nomme *arc capable d'un angle* donné APB (fig. 167), un arc APB tel que tous les angles susceptibles d'y être inscrits sont égaux à l'angle APB.

201. La véritable mesure d'un angle étant l'arc de cercle décrit de son sommet comme centre et compris entre ses côtés, la nouvelle mesure que nous venons d'indiquer ne doit être considérée que comme secondaire. Elle est cependant très utile dans une foule de circonstances, pour évaluer plus facilement les angles, et pour les comparer plus commodément entre eux. Il en est de même des suivantes.

Fig. 168. *Tout angle* APB (fig. 168) *formé par deux cordes,* AC, BD [qui se coupent dans le cercle], *a pour mesure* (n° 196) *la demi-somme des arcs,* AB, CD, *compris entre ses côtés.*

En effet, cet angle est la somme (n° 125, *scol.*) des angles ACB, CBD, qui ont respectivement pour mesure les moitiés des arcs AB, CD (n° 197).

De même, l'angle APD a pour mesure la demi-somme des arcs AD, BC.

Fig. 169 et 170. *Tout angle* APB *formé par deux sécantes* (fig. 169), *ou par une sécante et une tangente* (fig. 170), PA, PB [qui se coupent hors du cercle], *a pour mesure la demi-différence des arcs,* AB, CD (fig. 169), ou AB, CB (fig. 170), *compris entre ses côtés.*

En effet, cet arc est égal à ACB — CBP.

Fig. 171. *L'angle circonscrit* APB (fig. 171) étant la *limite* des angles

formés par deux sécantes, doit avoir aussi pour mesure la demi-différence des arcs AGB, AKB, compris entre ses côtés, ou bien encore une demi-circonférence moins l'arc AKB; or, cela est d'ailleurs évident, puisque l'angle circonscrit APB *est supplémentaire de l'angle au centre* AOB dont les côtés passent par les points de tangence, A, B.

Quant à l'angle API (fig. 169 et 170) supplément de APB, il est facile de conclure de ce qui précède, qu'il a pour mesure l'arc CD (fig. 169) plus la demi-somme des arcs extérieurs AC, BD, ou l'arc CB (fig. 170) plus la moitié de l'arc AC. Fig. 169 et 170.

202. REMARQUE *sur la mesure des angles par des arcs de cercle.* — Pour que cette mesure ou évaluation puisse se faire commodément, on divise l'angle droit et le quadrant en fractions d'une espèce déterminée, ce qui se fait de deux manières différentes.

Dans la première méthode, qui est la plus ancienne, on partage l'angle droit [que l'on désigne par 1^d] et le quadrant [que l'on désigne par 1^q] en 90 parties que l'on nomme *degrés;* on les écrit ainsi : 1°, 2°, 3°, etc. Chaque degré se subdivise en 60 *minutes sexagésimales* que l'on écrit ainsi : 1′, 2′, 3′, etc. Chaque minute se subdivise en 60 *secondes sexagésimales,* que l'on écrit ainsi : 1″, 2″, 3″, etc. Chaque seconde à son tour se subdivise en 60 *tierces :* 1‴, 2‴, 3‴, etc.

Dans la division moderne, on partage l'angle droit et le quadrant en 100 *grades* que l'on désigne ainsi : 1^{gr}, 2^{gr}, 3^{gr}, etc.; chaque grade se subdivise en 100 *minutes centésimales*, chaque minute en 100 *secondes,* et ainsi de suite, comme dans la première méthode. On indique ces subdivisions de la même manière que les subdivisions sexagésimales; mais la dénomination de *degré* ou de *grade* appliquée à la division principale, suffit pour éloigner toute équivoque. [On nomme aussi quelquefois *décigrades*, *centigrades*, *milligrades*,... les dixièmes, centièmes, millièmes.... du grade.]

203. Chacune de ces divisions a des avantages qui lui sont

propres. Dans la première, par exemple, un plus grand nombre d'arcs peuvent s'exprimer exactement en degrés, le nombre 360, qui exprime la *quotité* des degrés contenus dans la circonférence, ayant plus de diviseurs que le nombre 400 qui exprime la quotité des grades (*Voy.* l'*Arithmétique*).

Cette division mérite encore la préférence sous un autre rapport : c'est que l'angle du triangle équilatéral vaut exactement 60°, tandis qu'il ne peut s'exprimer que par un nombre fractionnaire de grades : $66^{gr}\frac{2}{3}$. Cette circonstance est assez importante dans un grand nombre de cas.

La seconde méthode, de son côté, a sur la première l'avantage d'être en harmonie avec le système de numération moderne, d'être par conséquent exempte de l'inconvénient que présentent les nombres complexes, et par suite, de se prêter plus facilement au calcul. La réduction des fractions décimales d'unité d'angle ou d'arc, en degrés, minutes, secondes, ... et de celles-ci en fractions décimales d'unité, s'y fait immédiatement. On aperçoit tout de suite, par exemple, que $0^d,3682537$, ou $0^q,3682537$, équivaut à $36^{gr},82',53'',70'''$.

Dans la division moderne, les complémens et les supplémens des angles s'obtiennent par des complémens arithmétiques, ce qui est encore un avantage de cette division. Ainsi $36^{gr}\,82'\,53''\,70'''$ a pour complément $63^{gr}\,17'\,46''\,30'''$ et pour supplément $163^{gr}\,17'\,46''\,30'''$.

204. Au reste, il est facile de passer de l'une de ces divisions à l'autre : car, d'après ce qu'on vient de dire, le rapport du *degré* au *grade* étant celui de 10 *à* 9, ou bien, ce qui est la même chose, 10 *grades* valant 9 *degrés,* on peut en conclure que, pour réduire des degrés en grades, il suffit, après avoir réduit les minutes et secondes sexagésimales en fraction décimales de degrés, de multiplier par $\frac{10}{9}$ pour avoir le nombre de grades correspondans; la fraction décimale obtenue présente, sans autre calcul, les minutes et secondes centésimales. Au contraire, pour réduire les grades en degrés, il faut mul-

tiplier par $\frac{9}{10}$ et réduire la partie fractionnaire en minutes, secondes, etc. C'est en opérant ainsi que l'on trouvera, par exemple, que $36^{gr},82',53'',70'''$ [division centésimale] équivaut environ à $33^{\circ},8',34'',12'''$ [division sexagésimale.]

La division des arcs en degrés ou en grades est surtout employée dans la *Trigonométrie*, science qui se rattache à la *Géométrie*, et qui a pour but le calcul numérique des élémens des triangles, c'est-à-dire des côtés et des angles qui entrent dans leur composition.

205. Division du Livre deuxième.

Ce livre sera divisé en quatre chapitres.

Le *premier* chapitre traitera principalement des propriétés des *figures* [planes] *semblables*, et nous y exposerons en outre la théorie des *lignes proportionnelles*, c'est-à-dire les *relations métriques* qui servent de base à la théorie de la similitude ou qui en dérivent le plus immédiatement.

Le chapitre *deuxième* contiendra ce que l'on nomme la théorie des *transversales*, que l'on peut considérer comme une extension de celle des lignes proportionnelles. Nous comprendrons ce chapitre tout entier entre des crochets... ≶[ ]≷... pour indiquer que l'on peut se dispenser de l'étudier.

Dans le *troisième* chapitre, nous examinerons quelques questions relatives aux *rapports de longueur* que présentent *certaines classes* de *polygones réguliers*, et par suite nous déterminerons le *rapport de la circonférence au diamètre*.

Enfin, dans le *quatrième* chapitre, nous donnerons la *mesure des aires* des figures planes, et nous montrerons les conséquences les plus remarquables qui se déduisent de leur comparaison.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA SIMILITUDE.

§ Ier. *Caractères et Propriétés des Figures Semblables.*

206. Il n'est personne qui n'ait une idée de la *similitude* ou de la *ressemblance :* ainsi, par la dénomination de *figures semblables*, tout le monde entend deux figures dont l'une est *en petit* ce que l'autre est *en grand;* ce qui veut dire qu'il n'est aucun point de l'une qui n'ait son *correspondant*, ou comme on s'exprime ordinairement, son *homologue* dans l'autre; de telle sorte que si, par la pensée, on mène, de toutes les manières possibles, des droites qui joignent deux à deux tous les points de la première figure, puis que l'on fasse la même chose pour la seconde figure, les rapports numériques de chaque couple de lignes homologues soient tous égaux entre eux. [Ce rapport constant se nomme le *rapport de similitude* des deux figures.]

Or, toutes ces conditions, qui paraissent être en nombre infini, se réduisent cependant en définitive à un petit nombre de conditions essentiellement différentes. On conçoit en effet [comme on l'a vu d'ailleurs pour les polygones] que, la détermination complète d'une figure *d'une espèce donnée* se ramenant toujours à la détermination de certaines *lignes principales* desquelles dépendent toutes les autres lignes de la figure, il en résulte que le nombre des rapports dont il est nécessaire d'établir l'égalité n'est autre que le nombre même de ces lignes principales.

207. Ainsi par exemple, un triangle étant déterminé par ses trois côtés, il s'ensuit que

Deux triangles, ABC, A'B'C' (fig. 172 et 173), *sont semblables lorsqu'ils ont les côtés proportionnels*, Fig. 172 et 173.

C'est-à-dire lorsqu'on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'};$$

et nous prendrons dorénavant cet énoncé pour *définition géométrique* des triangles semblables.

De même, un rectangle étant déterminé par deux côtés consécutifs, il en résulte que

Deux rectangles sont semblables lorsque leurs bases sont proportionnelles à leurs hauteurs (nº 155).

Il est facile de voir pareillement

Que *Deux parallélogrammes sont semblables lorsque deux côtés consécutifs et une diagonale de l'un sont proportionnels à deux côtés consécutifs et à la diagonale homologue de l'autre;*

Que *Deux losanges sont semblables lorsqu'un côté et une diagonale de l'un sont proportionnels à un côté et à une diagonale de l'autre;*

Etc., etc......

Par suite de ce qui vient d'être dit, si la détermination des figures d'une espèce donnée n'exige qu'une seule ligne, toutes les figures de cette espèce seront semblables, sans qu'il soit pour cela nécessaire d'établir d'autre condition. Ainsi :

Tous les carrés sont semblables, puisque le côté d'un carré suffit à sa détermination;

Tous les cercles sont semblables, puisque le rayon d'un cercle suffit à sa détermination;

Tous les polygones réguliers de même espèce [c'est-à-dire d'un même nombre de côtés] *sont semblables;*.... etc.

208. Quant aux polygones considérés en général, puisqu'ils

sont déterminés quand on connaît un assemblage de triangles qui les composent, il s'ensuit que

Fig. 174 175. *Deux polygones* (fig. 174 et 175) *sont semblables lorsqu'ils peuvent se décomposer* [d'une manière quelconque (n° 166)] *en un même nombre de triangles semblables* (n° 207) *chacun à chacun et assemblés de la même manière.*

Telle est la définition géométrique des polygones semblables, réduite aux seules conditions rigoureusement nécessaires; et il s'ensuit que la théorie de la similitude des figures planes dépend entièrement de celle des triangles semblables.

≤ [Toutes les courbes pouvant être considérées (n° 183) comme des polygones, ce que l'on vient de dire leur est également applicable. Ainsi, *Deux courbes de même espèce* (fig. 176) *sont semblables lorsque les lignes principales* [AB, CD, et A'B', C'D', par exemple] *dont dépend leur construction* [lignes que l'on nomme pour cela les *paramètres* de la courbe] *sont proportionnelles ;* et elles sont nécessairement semblables, sans autre condition, si le nombre de ces lignes principales se réduit à *un*, comme cela arrive pour le cercle [ainsi que nous l'avons déjà dit], parce que le cercle n'a d'autre paramètre que son rayon.] ≥

On voit donc, en résumant ce qui vient d'être dit, que, si le rapport de similitude de deux figures d'une espèce donnée était une condition imposée d'avance, c'est-à-dire si les lignes de l'une des deux figures devaient être *deux* fois, *trois fois*.... aussi grandes que leurs homologues dans l'autre, le nombre des conditions de similitude serait précisément égal à celui des lignes principales relatives au genre de figures dont il s'agit. Mais, pour que les deux figures soient simplement semblables, *le rapport de similitude* n'étant pas donné et *restant arbitraire*, le nombre des conditions est égal à celui de ces lignes *moins un*.

209. Nous avons précédemment défini les *points homologues*, en nous contentant de dire que l'on nommait ainsi les points correspondans ; et cette définition est suffisamment in-

telligible. Cependant, pour mettre plus de rigueur dans nos expressions, nous devons en donner aussi une définition géométrique (n° 207).

Maintenant donc, nous nommerons POINTS HOMOLOGUES, dans les plans respectifs de deux polygones semblables, ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 177): Fig. 177.

1° Les *sommets correspondans*, c'est-à-dire les intersections des côtés proportionnels;

2° Les points, tels que M et M', qui partagent en parties [directement] proportionnelles, deux côtés proportionnels, AB et A'B', de sorte que l'on ait

$$\mathrm{CM : C'M' :: DM : D'M'};$$

3° Les points, tels que O et O', liés à des côtés proportionnels par des triangles semblables [et semblablement disposés], de sorte que l'on ait

$$\mathrm{OD : O'D' :: OE : O'E' :: DE : D'E'}.$$

Cette troisième espèce de points homologues comprend les deux premieres comme cas particuliers. — Les centres de polygones *réguliers* d'un même nombre de côtés sont des points homologues.

On nomme LIGNES HOMOLOGUES, les côtés correspondans, [ou proportionnels], les diagonales correspondantes, et généralement les droites, telles que MO et M'O', qui joignent des points homologues quelconques. — Les rayons et les apothèmes des polygones réguliers de même espèce sont des lignes homologues.

210. Il est facile de conclure des principes établis ci-dessus, que l'égalité des figures n'est qu'un cas particulier de leur similitude; et cette proposition sera prouvée généralement si on peut la démontrer pour deux triangles; or, en reprenant la relation, posée précédemment (n° 207, fig. 172 et 173), Fig. 172 et 173.

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B'C'}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{C'A'}},$$

et faisant $AB = A'B'$, on en tirera aussi

$$BC = B'C',\ CA = C'A';$$

et alors les deux triangles ABC, A′B′C′, seront égaux comme ayant les côtés égaux chacun à chacun (n° 130). Ainsi *Deux triangles*, et par suite *Deux polygones*, et plus généralement *Deux figures* [planes] *semblables sont égales lorsqu'elles ont une ligne homologue égale.*

211. On peut établir également [au moyen de la théorie des proportions] que *Deux figures semblables à une troisième sont semblables entre elles;* et il suffit encore de démontrer cette proposition pour les triangles, ce qui est facile : car si l'on désigne par ABC, A′B′C′, A″B″C″, trois triangles tels que l'on ait à la fois

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

et

$$\frac{AB}{A''B''} = \frac{BC}{B''C''} = \frac{CA}{C''A''},$$

on en conclut, en divisant membre à membre,

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{B'C'}{B''C''} = \frac{C'A'}{C''A''}.$$

212. Enfin, de même qu'il y a pour les figures planes deux modes de superposition possibles (n° 43), de même aussi l'on distingue deux sortes de similitude qui leur correspondent :
Fig. 172 et 173. la *similitude directe* (fig. 172) et la *similitude inverse* (fig. 173). La première a lieu lorsque les côtés homologues sont disposés dans le *même ordre*, et la seconde lorsqu'ils sont disposés dans un *ordre inverse*. On peut distinguer facilement les deux sortes de similitude en supposant que les côtés homologues deviennent égaux chacun à chacun : car alors les deux figures proposées sont *directement semblables* ou *inversement semblables*, suivant qu'elles se trouvent, par suite de cette hypothèse, directement ou inversement superposables.

Lorsque deux figures sont directement semblables et que l'on retourne l'une des deux, elles deviennent inversement semblables, et réciproquement. Du reste, entre la similitude directe et la similitude inverse il n'y a de différence que dans la position ; d'où l'on peut conclure les principes suivans :

1° *Deux figures inversement semblables sont directement semblables à leurs symétriques réciproques ;*

2° *Deux figures inversement semblables sont symétriques lorsqu'elles ont une ligne homologue égale ;*

Et enfin 3° *Deux figures inversement semblables à une troisième sont directement semblables entre elles.*

Lemme. (Fig. 178 et 179.)

213. *Les portions de deux droites quelconques,* AC, *ac*, *interceptées entre trois parallèles,* A*a*, B*b*, C*c*, *sont en proportion,* c'est-à-dire que l'on a

$$AB : BC :: ab : bc.$$

1^er^ *Cas.* — Supposons d'abord que AB = BC (fig. 178), et, dans cette hypothèse, menons à *ac* les parallèles AI, BK, terminées respectivement sur les droites B*b*, C*c*. Cela posé, les deux triangles ABI, BCK, sont égaux (n° 133) comme ayant un côté égal, AB = BC, adjacent à des angles égaux chacun à chacun, BAI = CBK, et ABI = BCK : donc AI = BK, et par suite *ab* = *bc* (n° 151), ce qui démontre la proposition. Fig. 178.

2^e^ *Cas.* — Supposons en second lieu que AB et BC étant différens, on ait AB > BC (fig. 179) ; et, dans cette nouvelle hypothèse, admettons, pour fixer les idées, qu'en portant BC le long de AB autant de fois qu'il est possible, de A vers B, on trouve que BC est contenu dans AB une première fois, de A en D, puis une seconde fois de D en E, avec un reste EB moindre que BC. Cela posé, menons, par les points D, E, les droites D*d*, E*e*, parallèles à A*a*, et terminées à la droite *ac*. Il est bien clair, d'après ce qui vient d'être démontré pour le premier cas, que *ad*, *de*, seront égaux à *bc*, et *eb* moindre que *bc*, et que par conséquent *ab* contiendra autant de fois *bc*, en nombre entier, que AB contient BC. Fig 179.

On prouverait de même, en portant le reste EB sur BC, et menant des parallèles, que BC contient EB autant de fois, en nombre entier, que *bc* contient *eb* ; et ainsi de suite.

Maintenant, l'opération que nous venons d'indiquer sur les lignes AB et BC, n'est évidemment autre que celle que l'on effectue pour trouver leur rapport (n° 61 et *suiv.*), et l'opération toute semblable exécutée sur *ab* et *bc* au moyen des parallèles D*d*, E*e*, etc., n'est aussi que la détermination de leur rapport. Or, puisque les quotiens successifs obtenus de part et d'autre sont continuellement les mêmes [que leur nombre soit limité ou illimité], il s'ensuit nécessairement que les deux rapports sont identiques (n° 65), c'est-à-dire que l'on a toujours

$$AB : BC :: ab : bc; \qquad C.Q.F.D.$$

Fig. 180. *Réciproquement* : — Si l'on a (fig. 180)

$$AB : BC :: ab : bc,$$

et que deux des trois droites A*a*, B*b*, C*c*, soient parallèles, par exemple A*a* parallèle à C*c*, la troisième B*b* sera parallèle aux deux autres.

Car si B*b* n'est pas parallèle aux deux autres droites A*a* et C*c*, alors par le point B, menons-leur une parallèle B*b'*, terminée en *b'* sur *ab* : nous aurons

$$AB : BC :: ab' : b'c,$$

d'où l'on tire [en comparant avec la proportion hypothétique] :

$$ab : bc :: ab' : b'c,$$

proportion absurde, puisque *ab* est $<$ *ab'* quand *bc* est $>$ *b'c*, *et vice versâ*.

Au surplus, cette réciproque n'étant qu'une application du principe posé dans le *numéro* 49, on peut se dispenser d'en donner une démonstration directe.

Fig. 179. COROLLAIRE 1er. — *Deux droites quelconques, rencontrées par un nombre quelconque de parallèles*, A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, . . . (fig. 179), *sont toujours coupées proportionnellement* par ces dernières, c'est-à-dire que l'on a

$$AD : ad :: DE : de :: EB : eb :: BC : bc \ldots \text{ etc.}$$

Coroll. 2. — *Toute droite* B′C′ (fig. 181) *menée dans le plan d'un triangle* ABC *parallèlement à l'un des côtés* BC, *partage les deux autres proportionnellement*, c'est-à-dire que l'on a Fig.181.

$$AB' : B'B :: AC' : C'C;$$

Et *Réciproquement*; — Si la droite B′C′ est menée dans le plan du triangle ABC de telle manière que l'on ait cette proportion, la droite B′C′ est parallèle à BC.

Au reste, ces propositions ont évidemment lieu, même quand la droite B′C′ (fig. 182) parallèle à BC est située hors du triangle : car, en prenant sur AB une partie AB″ égale à AB′, et menant B″C″ parallèle à BC, on obtient deux triangles égaux, AB′C′ et AB″C″ (n° 133). Fig.182.

Théorème I. (Fig. 181 et 182.)

214. *Toute droite* B′C′ *menée dans le plan d'un triangle* ABC *parallèlement à l'un des côtés* BC *détermine un second triangle* AB′C′ *semblable au premier*, de sorte que l'on a

$$AB : AB' :: AC : AC' :: BC : B'C'.$$

En effet, de

$$AB' : B'B :: AC' : C'C \text{ (fig. 181)}$$ Fig.181.

on tire, par la théorie des proportions,

$$AB' + B'B : AB' :: AC' + C'C : AC':$$

ou

$$AB : AB' :: AC : AC'.$$

Ensuite, si l'on mène B′D parallèle à AC, on aura encore

$$AB : AB' :: BC : DC \quad \text{ou} \quad :: BC : B'C' \text{ (n° 151)}:$$

donc, etc.

N. B. — La proposition a également lieu quand la droite B′C′ est menée hors du triangle (fig. 182). Fig.182.

Corollaire. — *Les portions de deux parallèles*, AD, A′D′, (fig. 183), *interceptées entre un nombre quelconque de droites* Fig.183.

PA, PB, PC, PD, *menées par un même point* P, *sont proportionnelles.*

En effet, on a :

$$
\begin{aligned}
PA : PA' &:: AB : A'B' :: PB : PB', \\
PB : PB' &:: BC : B'C' :: PC : PC', \\
PC : PC' &:: CD : C'D' :: PD : PD', \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

Tous ces rapports étant égaux, si l'on ne considère que ceux qui composent la colonne du milieu, on en déduit :

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D', \text{ etc.};$$

ce qui démontre la proposition.

N. B. — Le point P peut être également situé en dedans ou en dehors des deux parallèles.

Scolie. — *Les droites menées comme on voudra du sommet d'un triangle à la base, divisent cette base et ses parallèles en parties proportionnelles, et sont elles-mêmes coupées en parties proportionnelles.*

Théorème II. (Fig. 184.)

Fig. 184. 215. *Deux triangles semblables*, ABC, A'B'C', *sont équiangles entre eux.*

Soit AB > A'B', Prenons sur AB une longueur AB″ égale à A'B', et par le point B″ menons B″C″ parallèle à BC : le triangle AB″C″ ainsi formé sera semblable à ABC (n° 214).

Mais celui-ci est, par hypothèse, semblable à A'B'C' : donc AB″C″ et A'B'C' sont semblables (n° 211) ; et puisque AB″=A'B', ces deux triangles sont de plus égaux (nos 210 et 130). Or, il est visible que les triangles ABC et AB″C″ sont équiangles entre eux (n° 113) : donc ABC et A'B'C' sont aussi équiangles entre eux ; et l'on a

$$A = A' \mid B = B' \mid C = C'.$$

Scolie 1er. — *Dans deux triangles semblables, aux côtés homologues sont opposés des angles égaux.*

Scol. 2. — Les 3 angles ne suffisent pas pour déterminer un triangle (*Voy.* le n° 135).

Théorème III. (Fig. 184.)

216. *Deux triangles*, ABC, A'B'C', *équiangles entre eux sont semblables.* Fig. 184.

Répétons la même construction : il en résultera deux triangles ABC, AB''C'', semblables et par conséquent équiangles entre eux (nº 215).

Mais déjà ABC et A'B'C' sont équiangles entre eux par hypothèse : donc aussi AB''C'' et A'B'C' sont équiangles entre eux. De plus AB'' = A'B' : donc ces deux derniers triangles sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à des angles égaux chacun à chacun (nº 133).

Donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Corollaire 1er. — *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

Coroll. 2. — *Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal.*

Coroll. 3. — *Deux triangles isocèles sont semblables lorsque leurs angles à la base, ou lorsque leurs angles au sommet, sont égaux.*

Théorème IV. (Fig. 184.)

217. *Deux triangles*, ABC, A'B'C', *sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal*, A = A', *compris entre des côtés proportionnels*, de sorte que l'on ait AB : A'B' :: AC : A'C'.

La même construction donnera les deux triangles semblables, ABC, AB''C'', pour lesquels on a

$$AB : AB'' :: AC : AC''.$$

Or, de la proportion hypothétique combinée avec cette dernière, on tire :

$$A'B' : AB'' :: A'C' : AC'';$$

et comme, par construction, A'B' = AB'', il en résulte aussi

$$A'C' = AC'':$$

donc les deux triangles A'B'C' et AB''C'' sont égaux comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun (nº 131).

Donc ABC et A'B'C' sont semblables.

Théorème V. (Fig. 184.)

Fig. 184. 218. *Deux triangles*, ABC, A'B'C', *sont semblables lorsque deux côtés de l'un sont proportionnels à deux côtés de l'autre*,

$$AB : A'B' :: BC : B'C',$$

et que, des angles respectivement opposés à ces côtés, deux sont égaux, $A = A'$, *et les deux autres*, B, B', *de même espèce* (Voy. le nº 134).

Répétons encore la même construction : nous aurons deux triangles semblables ABC, AB"C", qui donneront

$$AB : AB'' :: BC : B''C'',$$

et dans lesquels les angles B, B", seront de même espèce.

Or, de cette proportion, comparée à la proportion hypothétique, il résulte que $B'C' = B''C''$; et comme les angles B', B", sont d'ailleurs de même espèce, il s'ensuit que les deux triangles A'B'C', AB"C", sont égaux (nº 134).

Donc ABC et A'B'C' sont semblables.

Théorème VI.

219. *Deux triangles sont semblables lorsque les côtés de l'un sont parallèles* [*ou perpendiculaires*] *aux côtés de l'autre, chacun à chacun.*

Soient désignés par ABC, A'B'C', les deux triangles dont on suppose les côtés parallèles [ou perpendiculaires] entre eux chacun à chacun. Il peut se présenter 4 cas (nºˢ 116 et 117) :

1º Que les trois angles du premier triangle sont respectivement égaux à ceux du second ; — dans cette hypothèse, les deux triangles seront semblables comme équiangles ;

2º Que deux angles du premier triangle, A et B par exemple, sont respectivement égaux à deux angles, A' et B', du second triangle, et le troisième angle C du premier triangle supplémentaire du troisième angle C' du second triangle ; — or [d'après le théorème démontré n° 125] ceci ne pourrait arriver qu'autant que C et C′ seraient droits et par conséquent égaux (n° 72); ainsi dans ce cas les triangles seraient encore semblables;

3° Qu'un angle du premier triangle, par exemple A, égale A′, et que les autres angles sont supplémentaires chacun à chacun; — dans ce cas on aurait :

$$B + C + B' + C' = 4 \textit{ droits};$$

ce qui est absurde (n° 125);

4°. Que les angles sont supplémentaires chacun à chacun; — dans ce cas on aurait :

$$A + B + C + A' + B' + C' = 6 \textit{ droits};$$

ce qui est également absurde.

Donc, etc.

Scolie 1er. — *Les côtés homologues sont les côtés parallèles ou perpendiculaires.*

Scol. 2 — Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'une proposition beaucoup plus générale, analogue à celle que nous avons indiquée pour les angles dans le n° 118. On conçoit en effet que si deux triangles situés dans un plan sont semblables, et que l'on fasse pivoter l'un des deux autour d'un de ses sommets ou autour d'un point quelconque de son plan, il ne cessera pas, dans les diverses positions qu'il prendra ainsi, d'être semblable à l'autre triangle (*Voy.* le n° 118).

Théorème VII. (Fig. 174 et 175.)

220. *Deux polygones semblables ont les côtés proportionnels et les angles égaux, chacun à chacun, et disposés dans le même ordre.* Fig. 174 et 175.

En effet 1° les côtés correspondans des deux polygones ne sont autre chose que les côtés homologues des triangles semblables dont les deux polygones sont composés d'après leur définition (n° 208); d'où il résulte que ces côtés, pris deux à deux, forment une suite de rapports égaux.

2° Les angles correspondans des deux polygones ne sont aussi que des angles homologues ou des sommes d'angles homologues de triangles semblables; d'où il résulte que ces angles sont égaux.

N. B. — Cette démonstration ne suppose pas que les triangles dans lesquels les polygones sont décomposés aient, dans chaque polygone, un sommet commun : il est facile de voir qu'elle s'appliquerait également à tout autre décomposition.

SCOLIE. — On pourrait démontrer par des raisonnemens analogues à ceux que l'on a employés pour la démonstration de ce théorème, que *Les lignes homologues de deux polygones semblables sont proportionnelles aux côtés homologues, font avec les côtés homologues des angles égaux, et partagent les polygones proposés en d'autres polygones semblables; — et réciproquement, etc.*

Ainsi, par exemple, *Les rayons et les apothèmes des polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont proportionnels à leurs côtés.*

De même encore, *Les hauteurs correspondantes de deux triangles semblables sont proportionnelles à leurs côtés homologues.*

THÉORÈME VIII. (Fig. 174.)

Fig. 174. 221. RÉCIPROQUEMENT : — *Deux polygones sont semblables lorsque leurs côtés, pris dans le même ordre, sont proportionnels et comprennent entre eux des angles égaux chacun à chacun.*

Par les sommets A et A′, par exemple, menons des diagonales. Nous aurons d'abord deux triangles, ABC, A′B′C′, semblables entre eux comme ayant un angle égal, B=B′, compris entre des côtés proportionnels (n° 217).

De là il résulte que le rapport des diagonales AC, A′C′, est le même que celui des côtés correspondans, et que les angles ACD, A′C′D′, sont égaux comme différences d'angles égaux chacun à chacun.

Par suite, les triangles ACD, A′C′D′, sont aussi semblables comme ayant un angle égal, ACD = A′C′D′, compris entre côtés proportionnels.

Et ainsi de tous les triangles formés autour du point A.

Donc les deux polygones sont semblables (n° 208).

Corollaire. — *Deux polygones sont semblables lorsque leurs côtés, pris dans le même ordre, sont proportionnels, parallèles, et dirigés dans le même sens ou en sens contraire, chacun à chacun :*

Car alors ils ont en même temps les angles égaux.

Scolie. — La réciproque précédente contient trop de conditions, puisqu'il suffit généralement de $(2n-3)$ données pour déterminer un polygone (n° 171). Ainsi, *Deux polygones de* n *côtés sont semblables lorsqu'ils ont* (n — 1) *côtés consécutifs proportionnels et également inclinés entre eux,* ... ou bien... (n — 2) *côtés consécutifs proportionnels, également inclinés entre eux et avec les deux autres côtés,*... etc.

Théorème IX. (Fig. 174).

222. *Les périmètres de deux polygones semblables sont* Fig. 174.
proportionnels à leurs côtés homologues [et plus généralement à leurs lignes homologues].

En effet, les côtés homologues des deux polygones, pris deux à deux, forment une suite de rapports égaux dont les antécédens sont les côtés de l'un des polygones et les conséquens les côtés homologues de l'autre. Or, dans une suite de rapports égaux, la somme d'un nombre quelconque d'antécédens est à la somme des conséquens correspondans comme un antécédent est à son conséquent (*Arithm.*) : donc

*Périm.*ABCDEA : *Périm.*A′B′C′D′E′A′ :: AB : A′B′ :: AC : A′C′, etc.

Corollaire. — *Les périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont proportionnels à leurs côtés, à leurs rayons, et à leurs apothèmes.*

223. [*Remarque sur les centres de similitude.* — Deux polygones *directement* semblables peuvent être situés sur un même plan de manière à avoir leurs côtés homologues parallèles ; et alors, les angles homologues ont les côtés dirigés dans le même sens chacun à chacun comme dans les polygones
Fig.185. ABCDE, *abcde* (fig. 185), ou dirigés en sens contraire comme dans les polygones ABCDE, A'B'C'D'E'. Suivant que le premier cas a lieu ou le second, les polygones sont dits *semblablement situés* ou *inversement situés*.

Lorsque deux polygones semblables sont semblablement ou inversement situés, il est facile de démontrer que *les droites qui joignent les sommets homologues*, pris deux à deux, *concourent toutes en un même point* [S]. Ce point, que l'on nomme *centre de similitude*, est dit *externe* dans le premier cas, en raison de ce qu'il est situé en *dehors* sur le prolongement de la droite qui joint chaque couple de points homologues; il est dit *interne* dans le second cas, parce qu'il est situé *entre* les points homologues. Il faut bien observer qu'un centre de similitude interne peut être *hors* des deux polygones, tandis qu'au contraire un centre de similitude externe pourrait être en *dedans* de l'un et de l'autre.

Dans le cas où les deux polygones sont égaux, leur centre de similitude est situé à l'infini s'il est externe; et s'il est interne il se trouve au milieu de chacune des droites qui joignent deux à deux les sommets homologues. Dans certains cas, et particulièrement lorsque les polygones sont réguliers et d'un nombre pair de côtés, ils peuvent être disposés de manière à avoir à la fois un centre de similitude externe et un centre de similitude interne.

Les centres de similitude jouissent [exclusivement] de la propriété d'être des points homologues communs aux deux polygones. Ainsi leurs distances aux points homologues sont proportionnelles aux côtés homologues : ces distances se nomment des *rayons de similitude*.

Toute droite passant par le centre de similitude de deux polygones est une ligne homologue commune aux deux polygones et fait des angles égaux avec deux droites homologues quelconques. Réciproquement, toute droite homologue commune passe par le centre de similitude (*).

224. Deux cercles O, O′ (fig. 186), tracés dans un plan, ont, ainsi que deux polygones réguliers d'un même nombre pair de côtés parallèles chacun à chacun, *deux* centres de similitude S, *s*, lesquels sont situés sur la ligne des centres, à des distances de ces centres proportionnelles aux rayons. Fig. 186.

Les rayons de similitude sont proportionnels aux rayons des deux cercles, aboutissent aux extrémités des rayons parallèles, OA, O′A′ ou O′*a*, font des angles égaux avec les tangentes menées par ces extrémités, partagent les deux circonférences en arcs proportionnels aux rayons et par conséquent semblables, etc.

Lorsque les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, comme dans la figure 186, ils ont *quatre* tangentes communes : le point d'intersection des tangentes extérieures est le centre de similitude externe [S]; et le point d'intersection des tangentes intérieures est le centre de similitude interne [*s*].

Lorsque les deux cercles se touchent extérieurement, leur point de contact est le centre de similitude interne; il est le centre de similitude externe quand les deux cercles se touchent intérieurement.

Dans deux cercles concentriques, les deux centres de similitude se réunissent au centre commun.

(*) La proposition énoncée ci-dessus peut être généralisée de la manière suivante :

Lorsque deux polygones [directement] *semblables sont placés d'une manière quelconque dans un plan, ils ont toujours* [dans ce plan] *un point homologue commun.*

Ce théorème fait partie d'une série de propositions sur les figures semblables, nouvellement démontrées par M. Chasles. En y nommant *centre de similitude* le point homologue commun, et *rayons de similitude* les droites qui le joignent aux autres points homologues, on retombe sur la proposition du texte en supposant que les rayons homologues de similitude aient, deux à deux, la même direction.

Dans deux cercles égaux, le centre de similitude externe est situé à l'infini sur la ligne des centres.

Quand l'un des deux cercles dégénère en une ligne droite, les centres de similitude sont les extrémités du diamètre perpendiculaire à la droite. Chacun d'eux peut être, indifféremment, considéré comme centre de similitude interne ou comme centre de similitude externe.

Quand l'un des cercles se réduit à un point, ce point est à la fois centre de similitude interne et externe.]⋛

225. ⋚[REMARQUE *sur la division harmonique des lignes.* — Fig. 186. La somme des distances Os, $O's$ (fig. 186), de même que la différence des distances OS, $O'S$, étant chacune égale à la distance OO' des centres, on dit, pour cette raison, que la distance OO' est partagée par le point s en deux *segmens additifs*, Os, $O's$, et par le point S en deux *segmens soustractifs*, OS, $O'S$.

Cela posé, des deux proportions

$$OS : O'S :: OA : O'A'$$

et

$$Os : O's :: OA : O'a$$

on tire, à cause de $O'A' = O'a$, cette autre proportion :

$$Os : O's :: OS : O'S;$$

c'est-à-dire que *les segmens additifs* de la distance OO', déterminés par le point s, *sont proportionnels aux segmens soustractifs* déterminés par le point S.

En raison de cette propriété, on dit que la distance OO' est *divisée harmoniquement* par les points s, S.

La proportion précédente pouvant encore se mettre sous la forme

$$SO' : sO' :: SO : sO,$$

il en résulte que, réciproquement, la distance Ss est divisée harmoniquement par les points O, O'.

Pour exprimer ces résultats, nous dirons que les *quatre* points O, s, O', S, forment un *système harmonique*; et les points non consécutifs, O et O′, S et s, pris deux à deux, seront dits *conjugués* l'un de l'autre. Trois points d'un système harmonique déterminent nécessairement le quatrième, pourvu que son rang soit donné.

Lorsque deux points s, O′, pris sur une droite déterminée de grandeur, OS, forment ainsi un système harmonique avec ses extrémités, *la ligne entière* OS *est à l'une des parties extrêmes*, Os ou O′S, *comme l'autre partie extrême*, O′S ou Os, *est à la partie intermédiaire* sO′; ou bien, ce qui est la même chose, *le produit de la ligne entière* OS *par la partie intermédiaire* sO′ *est égal au produit des deux parties extrêmes* Os et O′S. Cette propriété peut être prise pour définition de la division harmonique d'une droite déterminée de grandeur (*).

Lorsque, dans la figure, le point s est situé au milieu de OO′, ce qui arrive quand les deux cercles sont égaux, le point S est situé à l'infini, et la proportion donne OS = O′S, ce qui prouve que l'on doit considérer comme égales les deux lignes infinies OS, O′S, ou que leur différence OO′ doit être regardée comme nulle.

(*) En général, trois quantités sont dites en *proportion harmonique* lorsque *l'excès de la première sur la seconde est à l'excès de la seconde sur la troisième comme la première est à la troisième*; tels sont les trois nombres 6, 4, 3; ou les trois nombres 15, 12, 10; etc. De même les longueurs OS, OO′, Os, sont en proportion harmonique parce que la proportion

$$O'S : O's :: OS : Os$$

revient à

$$OS - OO' : OO' - Os :: OS : Os.$$

Il en est de même des longueurs SO, Ss, SO′.

La dénomination de *proportion harmonique* est tirée de ce que, pour faire rendre à une *corde sonore* les trois *tons* qui composent l'*accord parfait majeur*, il faut en faire *vibrer* trois parties qui soient entre elles comme les nombres 15, 12, et 10, lesquels, comme on vient de le dire, forment une proportion harmonique.

On nomme *progression harmonique* une série de nombres dont *trois* consécutifs forment une proportion harmonique; tels sont les nombres

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}\dots$$

Nous avons dû entrer dans ces détails sur la division harmonique des lignes, à cause du rôle important qu'elle doit jouer dans le chapitre suivant, et des nombreuses applications qu'elle aura par la suite.]

§ II. *Conséquences des propriétés des Figures Semblables. — Figures Rectilignes.*

Théorème X. (Fig. 187.)

Fig. 187. 226. *Dans un triangle quelconque* ABC, *la bissectrice* AD *de chaque angle* A *divise le côté opposé* BC *en deux segmens* BD, DC, *directement proportionnels aux côtés adjaçens* AB, AC; — *et réciproquement.*

Il n'y a lieu à démontrer la proposition que dans le cas où les deux côtés AB, AC, sont inégaux, et où, par conséquent, AD est oblique sur BC (*Voy.* le n° 126). Dans cette hypothèse, abaissons sur AD, des sommets B et C, les perpendiculaires BE et CF. Il en résultera deux triangles ABE, ACF, semblables comme équiangles (n° 216); d'où la proportion

$$AB : AC :: BE : CF.$$

Mais les deux triangles BDE, CDF, sont aussi semblables pour la même raison, d'où

$$BE : CF :: BD : CD.$$

Donc, $$AB : AC :: BD : CD.$$

C. Q. F. D.

La *réciproque* est évidente (n° 49).

Scolie 1er. — La bissectrice de l'angle supplémentaire adjacent à l'angle A, c'est-à-dire la perpendiculaire AD′ à la bissectrice AD (n° 77, 4°), partage aussi la base BC prolongée en un point D′ tel, que l'on a la proportion :

$$AB : AC :: BD' : CD'.$$

La démonstration de cette nouvelle proposition est en tout semblable à la précédente. [Nous avons distingué par des lignes ponctuées et des lettres accentuées les parties de la figure qui s'y rapportent spécialement.]

≶ [*Scol.* 2. — Des deux proportions démontrées on tire la suivante

$$BD : CD :: BD' : CD',$$

d'où il résulte que le côté BC est *divisé harmoniquement* (n° 225) par les points D, D'.]≷

Théorème XI. (Fig. 188.)

227. *Si du sommet* A *de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse,* cette perpendiculaire partagera le triangle total en deux triangles partiels également rectangles, et l'hypoténuse en deux segmens qui seront les *projections* (n° 95, *scol.*) des deux autres côtés. Cela posé : Fig. 188.

1° *Les deux triangles partiels,* ABD, ACD, *sont semblables au triangle total, et par conséquent semblables entre eux ;*

2° Les lignes étant supposées évaluées en nombres, *Chaque côté de l'angle droit,* AB ou AC, *est moyen proportionnel entre sa projection,* BD ou CD, *sur l'hypoténuse, et l'hypoténuse entière ;*

3° *La perpendiculaire* AD *est moyenne proportionnelle entre les deux segmens* BD, CD, *de l'hypoténuse ;*

4° Enfin, *L'hypoténuse* BC *est à un côté de l'angle droit,* AB ou AC, *comme l'autre côté,* AC ou AB, *est à la perpendiculaire* AD.

En effet : 1° Les triangles ABC et ABD ont un angle commun B et chacun un angle droit; donc ils sont semblables (n° 216); il en est de même des triangles ACB et ACD ; les triangles ABD et ACD sont donc aussi semblables entre eux (n° 211);

2° Comparant le triangle total avec chacun des triangles partiels, on obtient les deux proportions :

$$BC : AB :: AB : BD \quad | \quad BC : AC :: AC : DC;$$

3° Comparant entre eux les triangles partiels, on a :

BD : AD :: AD : DC ;

4° Enfin, comparant de nouveau le triangle total avec l'un des triangles partiels, on voit que

BC : AB :: AC : AD.

Corollaire 1er. — *Dans un triangle rectangle, les carrés* des valeurs numériques *des côtés de l'angle droit et de l'hypoténuse sont directement proportionnels aux segmens de cette hypoténuse et à l'hypoténuse entière :* c'est-à-dire qu'on a

$$AB^2 : AC^2 : BC^2 :: BD : DC : BC.$$

Coroll. 2. — Dans les mêmes hypothèses que précédemment, *Le carré d'un segment de l'hypoténuse est au carré de la perpendiculaire, comme ce premier segment est au second,* c'est-à-dire que

$$BD^2 : AD^2 :: BD : DC.$$

Scolie 1er. — Le théorème précédent donnerait lieu à diverses *réciproques* dont il est facile de trouver les énoncés, et qui se démontrent sans peine.

Fig. 189. Scol. 2. — On sait que tout triangle rectangle ABC (fig. 189) est inscriptible dans un demi-cercle qui a pour base l'hypoténuse BC (nos 127 et 200); et la perpendiculaire AD, considérée par rapport au diamètre BC, est dite alors une *ordonnée* de ce diamètre (n° 101, *scol.* 2).

Par suite de cette observation, la proposition précédente donne lieu à divers énoncés, au nombre desquels sont les suivans :

1° *Toute ordonnée* AD *d'un diamètre* BC *est moyenne proportionnelle entre ses deux segmens* BD, DC ;

2° *Toute corde* AB *est moyenne proportionnelle entre sa projection* BD *sur le diamètre* BC *mené par l'une de ses extrémités* B *et ce diamètre entier ;*

Fig. 190. Et par suite les carrés des cordes BA, BA′, BA″... (fig. 190) ; sont proportionnels à leurs projections BD, BD′, BD″... sur le diamètre BC ; .... etc.

THÉORÈME XII. (Fig. 188.)

228. *Dans un triangle rectangle* ABC, *le carré* [ou la 2^e puissance] *de* la valeur numérique de *l'hypoténuse* BC *est égal à la somme des carrés des* valeurs numériques des *deux autres côtés.* Fig. 188.

En effet, si du sommet de l'angle droit on abaisse la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse, on aura (n° 227, 2°)

$$AB^2 = BC \times BD \quad | \quad AC^2 = BC \times DC\,;$$

d'où, en ajoutant :

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + DC),$$

ou

$$AB^2 + AC^2 = BC^2. \qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRE. — *Dans tout polygone régulier, le carré du rayon est égal à la somme des carrés de l'apothème et du demi-côté* (*Voy.* le n° 175, *scol.* 1er).

THÉORÈME XIII. (Fig. 191.)

229. *Dans un triangle obtusangle* ABC, *le carré du côté* BC *opposé à l'angle obtus* A *est égal à la somme des carrés des deux autres côtés,* PLUS *le double produit de la projection* AD *de l'un de ces deux côtés* AC *sur l'autre* AB [supposé prolongé], *multipliée par ce dernier.* Fig. 191.

En effet, le triangle rectangle BCD donne d'abord

$$BC^2 = CD^2 + BD^2.$$

On a ensuite

$$BD = AD + AB\,;$$

d'où, en élevant au carré (*Voy.* à la *page* 154),

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 + 2AD \times AB.$$

Substituons cette valeur de BD^2 dans l'égalité primitive en observant que

$$CD^2 + AD^2 = AC^2,$$

il en résulte :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AD \times AB. \qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME XIV (Fig. 192 et 193).

Fig. 192 et 193. 230. *Dans un triangle quelconque* ABC, *le carré de chaque côté* BC *opposé à un angle aigu* A *est égal à la somme des carrés des deux autres côtés*, MOINS *le double produit de la projection* AD *de l'un de ces deux côtés* AC *sur l'autre* AB [prolongé s'il le faut], *multipliée par ce dernier.*

En effet, on a comme ci-dessus,

$$BC^2 = CD^2 + BD^2.$$

Maintenant, suivant que la perpendiculaire CD tombe au dehors ou au dedans du triangle, on a

$$BD = AD - AB \text{ (fig. 192)} \quad \text{ou} \quad BD = AB - AD \text{ (fig. 193)};$$

mais dans l'un comme dans l'autre cas, on obtient, en élevant au carré (*page* 154),

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \times AB;$$

d'où, en substituant comme ci-dessus,

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AD \times AB. \qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

N. B. — Cette égalité a encore lieu, même quand la perpen-
Fig. 194. diculaire CD se confond avec le côté CB (fig. 194); car, dans ce cas, en vertu de $AD = AB$, l'égalité se réduit à

$$BC^2 = AC^2 - AB^2,$$

ce qui est vrai (n° 227), puisqu'alors le triangle est rectangle en B.

231. REMARQUE sur ces 3 théorèmes. — *Un angle d'un triangle est droit, aigu, ou obtus, suivant que le carré du côté opposé est égal, inférieur, ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Et par suite, un triangle est rectangle, acutangle, ou obtusangle, suivant que le carré du *plus grand côté* est égal, inférieur, ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.

Exemples :

1° $AB=3$, $AC=4$, $BC=5$; $3^2+4^2=5^2$: donc le triangle est rectangle ;

2° $AB=2$, $AC=3$, $BC=4$; $2^2+3^2<4^2$: donc le triangle est obtusangle ;

3° $AB=4$, $AC=5$, $BC=6$; $4^2+5^2>6^2$: donc le triangle est acutangle ;

4° $AB=5$, $AC=12$, $BC=13$; $5^2+12^2=13^2$: donc le triangle est rectangle ;.... etc.

Théorème XV. (Fig. 195.)

232. *Dans un triangle quelconque* ABC, *la somme des carrés de deux des côtés*, AB, AC, *est équivalente au double du carré de la moitié du troisième côté* BC, *plus le double du carré de la droite* AD *qui joint le milieu* D *de ce troisième côté au sommet* A *de l'angle opposé.* Fig. 195.

La proposition serait évidente si le triangle était isocèle et avait pour base BC (n° 227) : supposons donc le cas contraire.

Abaissons la perpendiculaire AE du sommet A sur le côté BC ; [en supposant que le pied E de la perpendiculaire tombe plus près de C que de B] nous aurons (nos 228 et 229) :

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2BD \times DE,$$

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD \times DE;$$

d'où, en ajoutant membre à membre et observant que $BD = CD$,

$$AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2. \quad \textit{C.Q.F.D.}$$

Théorème XVI. (Fig. 102.)

233. *Dans tout parallélogramme* MNOP, *la somme des carrés des côtés est équivalente à la somme des carrés des diagonales.* Fig. 102.

En effet, en nommant I le centre (n° 154, *scol.* 3) du parallélogramme, on a d'abord (n° 232) :

$$MO^2 + MN^2 = 2OI^2 + 2MI^2,$$
$$OP^2 + NP^2 = 2OI^2 + 2PI^2.$$

Maintenant, si l'on ajoute membre à membre en observant que

$$4OI^2 = (2OI)^2 = ON^2,$$

et que

$$2MI^2 + 2PI^2 = 4MI^2 = (2MI)^2 = MP^2,$$

on obtient

$$MO^2 + OP^2 + MN^2 + NP^2 = MP^2 + ON^2. \qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

Théorème XVII. (Fig. 196.)

Fig. 196. 234. *Dans tout quadrilatère* MNOP, *la somme des carrés des quatre côtés est équivalente à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux de ces diagonales.*

En effet, en nommant I le milieu de la diagonale NO, on a d'abord

$$MO^2 + MN^2 = 2OI^2 + 2MI^2,$$
$$OP^2 + NP^2 = 2OI^2 + 2PI^2;$$

d'où, en ajoutant membre à membre et observant, comme ci-dessus (n° 232), que $4OI^2 = ON^2$:

$$MO^2 + OP^2 + MN^2 + NP^2 = ON^2 + 2(MI^2 + PI^2).$$

Maintenant, si l'on nomme K le milieu de la diagonale MP, on a encore

$$MI^2 + PI^2 = 2MK^2 + 2IK^2;$$

d'où, en substituant et observant que $4MK^2 = MP^2$:

$$MO^2 + OP^2 + MN^2 + NP^2 = ON^2 + MP^2 + 4IK^2.$$

C. Q. F. D.

≼[Problème. (Fig. 193.)]≽

Fig. 193. 235. *Exprimer les hauteurs d'un triangle* ABC *en fonction des trois côtés.*

Soient $AB = c$, $CA = b$, $BC = a$.

Supposons que l'on veuille trouver la valeur de la hauteur

CD correspondant au côté c pris pour base; représentons par h cette perpendiculaire CD, et faisons de plus $AD = d$; les deux triangles partiels ACD, BCD, nous donneront :

$$h^2 = b^2 - d^2, \quad \text{et} \quad h^2 = a^2 - (c-d)^2 = a^2 - c^2 + 2cd - d^2,$$

d'où l'on tire, en égalant les deux valeurs de h^2,

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cd, \quad \text{d'où} \quad d = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Il résulte de là :

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}$$

$$= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\,(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2} \text{ (page 154)}$$

$$= \frac{[(b+c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b-c)^2]}{4c^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}{4c^2}.$$

Faisons, pour simplifier,

$$a + b + c = 2s;$$

s sera la demi-somme des côtés du triangle, et nous aurons :

$$b + c - a = 2(s-a),$$
$$a + c - b = 2(s-b),$$
$$a + b - c = 2(s-c);$$

d'où il résulte :

$$h^2 = \frac{4}{c^2}\, s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c),$$

et

$$h = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)};$$

ce qui donne la règle suivante :

Pour avoir l'une des hauteurs d'un triangle : — 1° Faites la demi-somme des côtés ; — 2° Retranchez de cette demi-somme chacun des côtés en particulier ; — 3° Faites le produit des quatre restes ainsi obtenus ; — 4° Extrayez la racine carrée de ce produit ; — 5° Multipliez par 2 et divisez par le côté pris pour base.

Scolie. — La perpendiculaire CD ne tombe pas toujours ainsi dans l'intérieur du triangle. Alors, au lieu de $BD = c - d$ (fig. 193) comme le suppose la démonstration, on aura, soit
Fig. 191 et 192. $BD = d - c$ (fig. 192), soit $BD = c + d$ (fig. 191). Mais les légères modifications que ces hypothèses introduisent dans le calcul, n'influent en rien sur le résultat définitif, comme il est facile de s'en convaincre en reprenant directement les transformations relatives à ces différens cas.

§ III. *Autres conséquences. — Figures Circulaires.*

Théorème XVIII. (Fig. 168 et 169.)

Fig. 168 et 169. 236. *Les distances d'un même point* P *aux divers points d'une circonférence* ABCD *forment, deux à deux, en les prenant sur la même direction* (n° 7), *des produits constans.*

Il y a deux cas à distinguer, celui où le point P est intérieur (fig. 168) à la circonférence, et celui où il lui est extérieur (fig. 169); mais la même démonstration leur est commune.

Soient donc deux droites quelconques menées par le point P et coupant la circonférence, respectivement, en A et C, en B et D. Si l'on mène AD, BC, les deux triangles APD, BPC, qui en résultent, sont semblables : en effet, l'angle P est le même, et les angles A, B, sont égaux (n° 200, 1°). On a ainsi la proportion

$$PA : PB :: PD : PC,$$

d'où

$$PA \times PC = PB \times PD.$$

C. Q. F. D.

Scolie 1er. — La proposition est également applicable au cas
Fig 170. où, le point P étant extérieur, l'une des droites PB (fig. 170) serait tangente à la circonférence. Seulement, il faut remarquer que le point D se confondant alors avec le point B, le produit $PB \times PD$ est remplacé par le carré PB^2.

Fig. 168, 169, et 170. *Scol.* 2. — Les droites AD, BC (fig. 168 et 169), qui sont également inclinées, mais en sens inverse, sur les côtés de l'angle APD, sont dites *anti-parallèles* relativement à cet angle; il en est de même des droites AB, BC (fig. 170), par rapport à l'angle APB.

Scol. 3. — On a coutume de nommer particulièrement *sécante* la plus grande PA des deux *distances* PA, PC (fig. 169 et 170), *partie extérieure de la sécante* la plus petite distance PC, et enfin *tangente* la distance PB (fig. 170). Alors l'énoncé général ci-dessus se partage dans les suivans : Fig. 168 — 171.

1° *Les segmens des cordes qui se coupent en un même point* P (fig. 168) *sont inversement proportionnels ;*

2° *Les sécantes issues d'un même point* P (fig. 169) *sont inversement proportionnelles à leurs parties extérieures ;*

3° *Une tangente est moyenne proportionnelle entre une sécante issue du même point* P (fig. 170) *et sa partie extérieure ;*

4° *Les deux tangentes,* PA, PB (fig. 171), *issues d'un même point* P *sont égales* : [cette dernière proposition résulte aussi directement de l'égalité des angles PAB, PBA (n° 200, 1°)].

Réciproques qui se déduisent du principe établi n° 51 :

1° Si l'on a la relation

$$PA \times PC = PB \times PD \quad \text{(fig. 168 et 169)},$$

les quatre points A, B, C, D, sont sur une même circonférence ;

2° Si l'on a

$$PA \times PC = PB^2 \quad \text{(fig. 170)},$$

la circonférence qui passe par les trois points A, B, C, touche PB en B ;

3° Si l'on a

$$PA \times PC = PB^2 \quad \text{(fig. 170)},$$

la circonférence qui, touchant PB en B, passe par l'un des deux points A, C, passe aussi par l'autre ;

4° Si l'on a

$$PA = PB \quad \text{(fig. 171)},$$

la circonférence qui, passant par les points A, B, touche l'une des droites PA, PB, touche aussi l'autre.

237. Remarque *sur la division des droites en moyenne et extrême raison.* — Le théorème précédent présente un cas
Fig 197. très remarquable : celui où, la sécante PA (fig. 197) passant par le centre, la droite PB est une tangente égale au diamètre AC. Dans ce cas particulier, la sécante PA se trouve partagée au point C en deux segmens dont l'un AC, égal à la tangente PB, est moyen proportionnel entre la droite entière PA et son second segment PC [lequel est, par conséquent, le plus petit des deux]. La *droite* PA est dite, dans cette circonstance, *partagée* au point C *en moyenne* [AC] *et extrême* [PC] *raison.*

De plus, comme on a, par suite de PB = AC, la proportion

$$AP : AC :: PB : PC,$$

il s'ensuit que PC est aussi égal au plus grand segment de la tangente PB supposée partagée de même en moyenne et extrême raison. C'est d'ailleurs ce que l'on peut prouver directement; car, de la proportion précédente on tire

$$AP - AC : AC :: PB - PC : PC,$$

ou bien
$$PC : PB :: PB - PC : PC,$$

ou enfin
$$PB : PC :: PC : PB - PC;$$

ce qui démontre la proposition.

Ainsi, en *rabattant* PC sur PB, c'est-à-dire en décrivant, du point P comme centre et du rayon PC, un arc CD qui coupe PB en D, la droite PB se trouvera partagée au point D en moyenne [PD] et extrême [BD] raison.

Théorème XIX. (Fig. 198.)

Fig. 198. 238. *Dans tout quadrilatère inscriptible* ABCD, *le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés :* c'est-à-dire que l'on a

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

En effet, menons la droite BE, terminée sur AC en E, de manière que l'angle ABE soit égal à l'angle DBC [et par suite l'angle ABD à l'angle CBE]; les angles BAC, BDC, étant d'ailleurs égaux (nº 200), les triangles BAE, BDC, seront semblables, et nous aurons

$$AE : AB :: DC : DB,$$

d'où

$$AE \times DB = DC \times AB.$$

Par une raison semblable, les triangles BEC, BAD, donneront

$$EC : CB :: AD : DB,$$

d'où

$$EC \times DB = AD \times CB.$$

Maintenant, en ajoutant ces deux résultats membre à membre, nous obtiendrons

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD. \quad C. Q. F. D.$$

SCOLIE. — On a aussi

$$BA : BD :: BE : BC; \quad \text{d'où} \quad BA \times BC = BE \times BD.$$

Dans le cas particulier où BD est un diamètre, BA étant perpendiculaire à AD, BE est aussi perpendiculaire à AC. En considérant alors le cercle ABCD comme circonscrit au triangle ABC, on peut en conclure que

Dans tout triangle ABC, *le produit de deux côtés*, AB, BC, *est égal au produit du diamètre du cercle circonscrit, par la hauteur qui correspond au troisième côté supposé pris pour base.*

THÉORÈME XX. (Fig. 199.)

239. *Dans tout quadrilatère inscriptible* ABCD, *les diagonales sont proportionnelles aux sommes des produits des côtés qui aboutissent ensemble à leurs extrémités :* c'est-à-dire que l'on a Fig. 199.

$$AC : BD :: AB \times AD + CB \times CD : BA \times BC + DA \times DC.$$

Menons BE comme dans le théorème précédent : les triangles semblables BAD, BEC, donneront d'abord

$$BE : BC :: BA : BD;$$

d'où

$$BD \times BE = BA \times BC.$$

Ensuite, si l'on mène la droite DF qui fasse l'angle ADF égal à l'angle BDC, on aura de même [le point F étant l'intersection de DF avec AC] :

$$DB \times DF = DA \times DC.$$

Prolongeons maintenant BE jusqu'à la circonférence en G, et menons CG. Le triangle CGE est alors égal au triangle ADF : car AD = CG à cause de l'égalité des angles ABD, GBC (n° 199), ou des arcs AD, GC ; de plus, l'angle ADF = BDC = CGE par construction ; et l'angle DAF = GCE, puisque les arcs AG et CD sont égaux. Il suit de là que GE = DF ; et par conséquent l'égalité précédente devient

$$DB \times GE = DA \times DC;$$

ce qui donne, en ajoutant membre à membre cette nouvelle égalité avec la première, et observant que BE + GE = BG :

$$BD \times BG = BA \times BC + DA \times DC.$$

Enfin, si l'on mène la corde CI de manière que l'on ait l'arc BI = AD = GC, on obtient de même

$$CA \times CI = AB \times AD + CB \times CD;$$

et comme alors CI = BG, il en résulte

$$AC : BD :: AB \times AD + CB \times CD : BA \times BC + DA \times DC.$$

C. Q. F. D.

Théorème XXI. (Fig. 200.)

Fig. 200. 240. *Deux cercles OA, O'A', étant tracés dans un plan, tous les points de ce plan d'où l'on peut leur mener des tangentes d'égale longueur, sont situés sur une même ligne droite perpendiculaire à la ligne des centres.*

En effet, soient RT, RT', des tangentes égales menées respectivement aux deux cercles par le point R. Les droites RO, RO', et la droite RS perpendiculaire à la ligne des centres OO', déterminent des triangles rectangles ORS, O'RS', qui donnent d'abord (n° 228)

$$OS^2 + RS^2 = OR^2 \quad | \quad O'S^2 + RS^2 = O'R^2.$$

Or, de ces égalités on tire, en les retranchant membre à membre,

$$OS^2 - O'S^2 = OR^2 - O'R^2.$$

Ensuite, en menant les rayons OT, O'T', on obtient d'autres triangles rectangles ORT, O'RT', qui donnent de la même manière

$$OR^2 = RT^2 + OT^2 \quad | \quad O'R^2 = RT'^2 + O'T'^2;$$

d'où il résulte, à cause de $RT = RT'$,

$$OR^2 - O'R^2 = OT^2 - O'T'^2.$$

Enfin, mettant, dans cette dernière égalité, $OS^2 - O'S^2$ à la place de $OR^2 - O'R^2$, puis OA et O'A' à la place de OT et de O'T', on obtient

$$OS^2 - O'S^2 = OA^2 - O'A'^2.$$

Maintenant, le second membre de cette égalité étant une quantité constante et déterminée, il s'ensuit qu'il ne peut exister sur la droite OO' qu'un seul point S pour lequel cette relation ait lieu : car si le point S se rapprochait, par exemple, du point O, la distance OS diminuerait et la distance O'S augmenterait en même temps ; et alors le premier membre de l'égalité diminuant pour ces deux raisons à la fois, il en résulterait une absurdité.

Tous les points tels que R, d'où l'on peut mener aux deux cercles des tangentes d'égale longueur, sont donc situés sur une même perpendiculaire à la ligne des centres; et cette perpendiculaire tombe en un point tel que *la différence des carrés de ses distances aux deux centres est égale à la différence des carrés des rayons*.]≽

241. ≼[REMARQUE *sur les axes radicaux*. — La relation que nous venons de démontrer n'a pas lieu seulement pour deux cercles extérieurs l'un à l'autre ; elle existe également pour chacune des *cinq* positions (nº 141) que deux cercles peuvent avoir dans un plan.

Fig. 200. La perpendiculaire RS (fig. 200), ou le *lieu* des points d'où l'on peut mener aux deux cercles des tangentes d'égale longueur, se nomme l'*axe radical* des deux cercles. En nommant R et r les deux rayons, D et d les distances des centres à cet axe, sa position est déterminée, comme on vient de le voir (n° 240), par la relation

$$D^2 - d^2 = R^2 - r^2, \qquad (1)$$

ou

$$D^2 - R^2 = d^2 - r^2. \qquad (2)$$

De là on conclut ce qui suit :

1° Quand les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, l'axe radical est placé entre eux ; et, d'après l'égalité (1), il est plus éloigné du centre du plus grand cercle que du centre du plus petit. Mais il est plus rapproché de la circonférence du grand ; car, l'égalité (2) pouvant se mettre sous la forme

$$(D+R)(D-R) = (d+r)(d-r),$$

il s'ensuit que dans le cas où l'on a, comme le suppose la figure,

$$(D+R) > (d+r),$$

on doit avoir aussi, par compensation,

$$(D-R) < (d-r).$$

2° Quand les deux cercles se touchent extérieurement, l'axe radical est la tangente à leur point commun.

3° Quand les deux cercles se coupent, l'axe radical est le prolongement, dans les deux sens, de leur corde commune.

4° Quand les deux cercles se touchent intérieurement, leur axe radical est encore leur tangente commune.

5° Enfin, pour voir ce qui arrive quand les deux cercles sont intérieurs l'un à l'autre, il suffit d'observer que l'axe radical ne doit pas changer quand à l'un des deux cercles on substitue son symétrique par rapport à cet axe. Il résulte de ceci et de ce que l'on a dit plus haut (1°), que dans le cas actuel, l'axe radical doit être situé en dehors du grand cercle et du côté où le petit se rapproche le plus du grand (nº 144). Fig. 200.

D'ailleurs, l'égalité (1), mise sous la forme

$$(D + d)(D - d) = R^2 - r^2,$$

fait voir encore que si les centres de deux cercles intérieurs l'un à l'autre et de rayons constans vont en se rapprochant, $(D - d)$, qui est la distance des centres, allant en diminuant, $(D + d)$ ira au contraire en augmentant; de sorte que l'axe radical des deux cercles s'éloignera de plus en plus et sera infiniment éloigné quand les centres coïncideront. Ainsi *Deux cercles concentriques n'ont pas d'axe radical*, ni par conséquent de tangentes d'égale longueur issues d'un même point.

Dans le cas particulier où l'un des cercles dégénère en une ligne droite, l'axe radical est la droite elle-même; et lorsque l'un des cercles se trouve réduit à un point, l'axe radical est la droite qui joint les milieux des deux tangentes issues de ce point.

Généralement, quand les deux cercles peuvent avoir des tangentes communes, l'axe radical coupe chacune d'elles en deux parties égales.

Les tangentes égales que l'on peut mener à deux cercles d'un point de leur axe radical, sont au nombre de *quatre* quand les cercles sont extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre; il n'y en a que *trois* quand les cercles se touchent; et il y en a seulement *deux* lorsqu'ils se coupent.

Lorsque d'un point R (fig. 200) de l'axe radical de deux cercles, comme centre, et d'un rayon égal aux tangentes RT, RT', menées de ce point, on décrit un troisième cercle, ce dernier, qui passe nécessairement par les divers points de contact, coupe les deux autres de telle manière que si, à chaque point d'intersection de ce troisième cercle avec chacun des deux autres, on mène des tangentes à l'un et à l'autre, ces deux tangentes sont perpendiculaires entre elles; d'où il résulte que la tangente de l'un est normale à l'autre, et *réciproquement*. En pareil cas, les deux cercles sont dits *se* *couper orthogonalement*. — Il est évident d'ailleurs, puisque la normale au cercle passe toujours par son centre (nº 187), que *Quand deux cercles se coupent orthogonalement, le carré de la distance des centres est égal à la somme des carrés des rayons*.

Trois cercles pris deux à deux ont trois axes radicaux qui se coupent en un même point : ce point se nomme le *centre radical* des trois cercles ; il est toujours à la fois intérieur ou extérieur aux trois cercles.

Lorsque trois cercles se touchent deux à deux, leur centre radical est le point de concours de leurs tangentes communes.]≥

≤[THÉORÈME XXII. (Fig. 201.)]≥

Fig.201. 242. *Lorsque par l'un des centres de similitude* S *de deux cercles* O, O′, *on mène à ces cercles deux sécantes, les huit points d'intersection qui en résultent, pris quatre à quatre d'une manière convenable, forment* QUATRE *groupes situés respectivement sur autant de nouvelles circonférences.*

Soient A, C, les points d'intersection de l'une des deux sécantes avec la première circonférence, B, D, ceux de la seconde sécante avec la même circonférence. Soient de même A′, C′, et B′, D′, les points correspondans sur la seconde circonférence.

Cela posé, l'on aura

$$1^{o} \qquad SA : SB :: SA' : SB' \quad (n^{o}\ 224),$$
$$SA' : SB' :: SD' : SC' \quad (n^{o}\ 236);$$

d'où $SA : SB :: SD' : SC'$, ou $SA \times SC' = SB \times SD'$; donc les *quatre* points A, B, C′, D′, sont sur une même circonférence (nº 236, *récipr.*).

2º On prouverait de la même manière [en remplaçant les lettres *accentuées* par des lettres non accentuées, *et vice versâ*] que les *quatre* points A′, B′, C, D, sont sur une même circonférence.

3° $SA : SD :: SA' : SD'$,

$SA' : SD' :: SB' : SC'$;

d'où $SA : SD :: SB' : SC'$, ou $SA \times SC' = SD \times SB'$:
donc les *quatre* points A, D, B', C', sont sur une même circonférence.

4° De même, les *quatre* points A', D', B, C, sont aussi sur une même circonférence.

Scolie 1er. — Relativement à la manière de grouper les points d'intersection qui doivent appartenir à une même circonférence, il est à remarquer qu'un même groupe ne peut contenir à la fois, ni deux points homologues, ni deux points qui appartiennent en même temps à une même sécante et à une même circonférence donnée.

Scol. 2. — Pour exprimer la propriété qui fait l'objet du théorème précédent, nous dirons que chacun des *quatre* cercles ABC'D', A'B'CD, ADB'C', A'D'BC, est *réciproque* des deux cercles O, O', par rapport au centre de similitude S. Toute circonférence passant par deux points, A, C', où une sécante issue du centre de similitude S rencontre les circonférences O, *O'*, pourvu que les points A, C', ne soient pas des points homologues, jouira de la même propriété : c'est-à-dire que ses deux autres points d'intersection, D, B', avec les deux circonférences O, O', seront aussi sur même droite menée par le même centre de similitude, sans être cependant des points homologues.

Scol. 3. — On peut supposer que les deux sécantes AC, BD, se réunissent en une seule ; alors les deux cercles réciproques ADB'C', A'D'BC, se confondront avec elle ; quant aux deux autres cercles réciproques, ils deviendront à la fois tangens aux deux cercles O, O', le premier en A, C', le second en A', C (fig. 202). Fig. 202.

Réciproquement : *Tout cercle qui en touche à la fois deux autres est un de leurs cercles réciproques* par rapport au centre de similitude, externe ou interne suivant que le contact est de même espèce [extérieur ou intérieur à la fois] ou d'espèce différente ; et par conséquent *les deux points de contact sont en ligne droite avec le centre de similitude.*

COROLLAIRE. — *Chaque centre de similitude de deux cercles est le centre radical de tous les cercles réciproques relatifs à ce centre de similitude.*

Fig. 201. En effet, comme on a (fig. 201)

$$SA.SC' = SB.SD' = SA'.SC = SB'.SD,$$

il en résulte que les longueurs des tangentes menées par le point S à tous les cercles réciproques relatifs à ce point, ont pour valeur commune la racine carrée de ce produit constant. Donc, si du centre S, et d'un rayon égal à cette racine, on décrit un cercle, il coupera orthogonalement tous les cercles réciproques ; et par conséquent, le centre de similitude S appartient à l'axe radical de deux quelconques de ces cercles ; et il est le centre radical de trois quelconques d'entre eux.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES TRANSVERSALES.

§ Ier. *Transversales rectilignes.*

243. On comprend sous la dénomination générale de *Théorie des* TRANSVERSALES, les diverses relations métriques que présentent des systèmes quelconques de lignes qui se coupent suivant des lois déterminées. Ainsi, les propositions déjà démontrées n° 213, n° 214 (*coroll.*), n° 236,...., appartiennent à la théorie des transversales. Nous allons, dans ce chapitre, démontrer diverses autres propositions qui sont d'un usage fréquent.

THÉORÈME I. (Fig. 203.)

244. *Les trois côtés d'un triangle* ABC *étant prolongés indéfiniment, si l'on mène une transversale quelconque* C'B'A' *qui les coupe tous trois* [le côté AB en C', CA en B', et BC en A'], *il en résultera, sur chaque côté, deux segmens tels que le produit de trois d'entre eux, non consécutifs, est égal au produit des trois autres*; c'est-à-dire que l'on aura Fig. 203.

$$AB' \times CA' \times BC' = B'C \times A'B \times C'A.$$

En effet, par un point quelconque O pris dans le plan de la figure, menons à ses côtés AB, CA, BC, les parallèles respectives Oc, Ob, Oa, terminées à la transversale en c, b, a.

En comparant les triangles semblables qui résultent de cette construction, nous aurons

$$\frac{AB'}{AC'}=\frac{Ob}{Oc},\quad \frac{BC'}{BA'}=\frac{Oc}{Oa},\quad \frac{CA'}{CB'}=\frac{Oa}{Ob};$$

maintenant, en multipliant ces égalités membre à membre, et supprimant aux deux termes de la fraction ainsi formée dans le second membre, les facteurs communs Oa, Ob, Oc, nous obtiendrons l'égalité

$$\frac{AB'}{B'C}\times\frac{CA'}{A'B}\times\frac{BC'}{C'A}=1,$$

d'où résulte celle qu'il s'agissait de démontrer. Mais cette dernière forme est souvent plus commode dans les applications.

Scolie 1^er^. — La transversale peut passer dans l'intérieur du triangle ou être tout entière située au dehors; dans tous les cas, les points de division sont toujours en nombre *pair sur les côtés mêmes* du triangle, et en nombre *impair sur leurs prolongemens*.

Scol. 2. — Si la transversale est parallèle à l'un des côtés, BC par exemple, on a simplement

$AB'.BC'=B'C.C'A$, ou $AB':B'C::AC':C'B$ (n° 213, *coroll.* 2);

ce qui prouve que les deux lignes infinies CA', BA', doivent être considérées comme égales (*Voy.* le n° 225).

Scol. 3. — On pourrait étendre ce théorème à un polygone quelconque, en le décomposant en triangles au moyen de diagonales (n° 166).

Théorème II.

245. Réciproquement : — *Trois points étant distribués un à un sur les directions des trois côtés d'un triangle, de telle façon que, des six segmens qu'ils forment sur ces côtés, le produit de trois segmens non consécutifs soit égal au produit des trois autres :*

Si ces trois points sont en nombre impair sur les prolongemens des côtés, ils appartiennent à une même droite.

Cette réciproque, qui se démontre facilement par l'absurde, est d'ailleurs une conséquence du principe établi n° 49.

Théorème III. (Fig. 204.)

246. *Si par un point quelconque* O *pris dans le plan d'un triangle* ABC *et par chacun de ses sommets on mène une transversale au côté opposé, on obtiendra, sur chaque côté, deux segmens tels que le produit de trois d'entre eux, non consécutifs, est égal au produit des trois autres.* Fig. 204.

En effet, si l'on considère le triangle ACA′ et la transversale BOB′, on a, par le théorème précédent,

$$AB'.CB.A'O = B'C.BA'.OA\,;$$

de même, le triangle ABA′, coupé par la transversale COC′, donne

$$AC'.BC.A'O = C'B.CA'.OA\,;$$

d'où l'on tire, en multipliant *en croix*, et supprimant dans l'égalité résultante, les facteurs BC, A′O, OA, communs aux deux membres,

$$AB'.CA'.BC' = B'C.A'B.C'A.$$

C. Q. F. D.

Scolie 1er. — Le point O peut être pris dans l'intérieur du triangle ou au dehors; dans tous les cas, les pieds des transversales sont toujours en nombre *impair sur les côtés mêmes* du triangle, et en nombre *pair sur leurs prolongemens*.

Scol. 2. — Si l'un des côtés du triangle se trouve partagé en deux parties égales par la transversale correspondante, par exemple si CA′ = A′B, on a simplement

$$AB'.BC' = B'C.C'A, \quad \text{ou} \quad AB' : B'C :: AC' : C'B\,;$$

alors, la droite menée par les points B′, C′, serait parallèle à BC.

Et *réciproquement :* — Si B′C′ est parallèle à BC, on a CA′ = A′B ; d'où résulte le scolie suivant :

Fig.205. *Scol.* 3. — Si à partir du sommet A (fig. 205) d'un triangle ABb, on divise les côtés adjacens AB, Ab, en parties proportionnelles, et que des sommets b, B, l'on mène des droites aux points de division P, Q, R, S, ..., *p*, *q*, *r*, *s*, ..., toutes ces droites se couperont deux à deux sur la ligne AK menée du sommet A au milieu K du côté Bb; — et *réciproquement*.

Par conséquent, si, dans un trapèze, on prolonge les deux côtés non parallèles jusqu'à leur point de rencontre, et que de là on mène une droite par le point de rencontre des deux diagonales, cette droite partagera chacun des côtés parallèles en deux parties égales (n° 49).

Théorème IV.

247. Réciproquement : — *Trois points étant distribués un à un sur les directions des trois côtés d'un triangle, de telle façon que, des six segmens qu'ils forment sur ces côtés, le produit de trois segmens non consécutifs soit égal au produit des trois autres :*

Si ces trois points sont en nombre impair sur les côtés mêmes, les droites menées de chacun d'eux à l'angle opposé concourent en un même point.

Voyez au théorème II.

248. — Remarque. — Les théorèmes précédens, le dernier surtout, donnent lieu à une foule de corollaires que l'on peut considérer comme autant de théorèmes particuliers; nous citerons particulièrement les suivans.

Corollaire 1er. — *Les droites menées des sommets d'un triangle aux milieux des côtés respectivement opposés concourent en un même point.*

Ce point, que l'on nomme *centre des moyennes distances* (*), est [ainsi qu'on peut le démontrer aisément] situé dans l'intérieur du triangle, au tiers de chacune des trois droites en partant de la base.

(*) Et en *Mécanique* : *centre de gravité*.

De là il résulte que *Si, au tiers de chacune des trois hauteurs d'un triangle* [à partir de la base], *on mène des parallèles aux bases respectivement correspondantes, ces parallèles se couperont en un même point*, lequel est identique avec celui dont on vient de parler.

COROLL. 2. — *Les perpendiculaires* AA′, BB′, CC′ (fig. 206), *abaissées des sommets d'un triangle* ABC *sur les côtés respectivement opposés concourent en un même point.* Fig. 206.

Cette proposition se démontre facilement en comparant deux à deux les *six* triangles rectangles ABB′ et ACC′, BCC′ et BAA′, CAA′ et CBB′, formés dans le triangle proposé par les *trois* perpendiculaires. Ces triangles partiels sont, *deux à deux*, semblables comme ayant un angle aigu égal, d'où résulte, entre les *six* segmens, la relation comprise dans l'énoncé du théorème IV.

Suivant que le triangle proposé est acutangle ou obtusangle, le point de concours des perpendiculaires tombe au dedans ou au dehors; il se confond avec le sommet de l'angle droit quand le triangle est rectangle.

On pourrait se servir de ce corollaire pour démontrer le théorème du n° 128, relatif au cercle circonscrit. Car, étant donné un triangle, en joignant par des droites les milieux des côtés pris deux à deux, on forme un nouveau triangle dans lequel le point de concours des perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés, n'est autre chose que le centre du cercle circonscrit au premier triangle.

COROLL. 3. — *Les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent en un même point.*

Pour établir ici cette proposition qui a déjà été démontrée n° 129, il faut s'appuyer sur le théorème du n° 226.

On sait que le point de concours est le centre du cercle inscrit au triangle (n° 129). Or, chaque sommet étant également distant de deux des trois points de contact, il s'ensuit que les segmens *consécutifs* sont égaux deux à deux. D'ou résulte la proposition suivante :

Coroll. 4. — *Si, des points de contact du cercle inscrit à un triangle, on mène des droites aux sommets respectivement opposés, ces trois droites concourront en un même point.*

Cette proposition est également applicable aux trois cercles ex-inscrits (n° 129, *scol.*).

Coroll. 5. — Trois polygones semblables et parallèles ont, deux à deux, trois centres de similitude (n° 223). Cela posé, il résulte encore du théorème précédent que *Les trois centres de similitude sont en ligne droite*, dans le cas où ils sont tous *trois* des centres de similitude externes comme dans celui où *deux* d'entre eux sont des centres de similitude internes ; cette droite, la seule ligne homologue commune aux trois polygones, est appelée, pour cette raison, leur *axe de similitude*, *externe* dans le premier cas, *interne* dans le second.

Fig. 207. Dans le cas de trois polygones réguliers d'un nombre pair de côtés parallèles deux à deux (n° 223), ou dans le cas de trois cercles, O, O′, O″ (fig. 207), il y a trois centres de similitude externes, et trois centres de similitude internes. Or, les trois premiers sont en ligne droite, et chacun d'eux est en ligne droite avec deux des trois autres, comme on le reconnaît facilement en considérant le triangle OO′O″ déterminé par les trois centres. Il en résulte que ces *six* centres de similitude sont distribués *trois à trois* aux intersections de *quatre* axes de similitude qui forment ainsi un quadrilatère complet ayant ces six centres pour sommets. Ces axes sont les seules droites homologues communes que puissent avoir les trois polygones ou les trois cercles. (*Voy.* les *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne, Tome XIII, page 197.)

Théorème V. (Fig. 208.)

Fig. 208. 249. *Dans tout quadrilatère complet* ABCDEF, *chaque diagonale* AC *est divisée harmoniquement* (n° 225) [aux points G, K] *par les deux autres* BD, EF.

En effet, en considérant successivement les triangles ABC, ACF, ABF, et les transversales respectives EKF, EGD, ECD, on a (n° 224)

$$AE.BF.CK = EB.FC.KA,$$
$$AG.CB.FD = GC.BF.DA,$$
$$AD.FC.BE = DF.CB.EA;$$

d'où l'on tire, en multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs,

$$AG.CK = KA.GC,$$

ou bien

$$AG : GC :: AK : KC. \qquad C.Q.F.D.$$

On trouvera de même, en nommant I le point de concours des diagonales BD, EF,

$$BG : GD :: BI : ID,$$
$$EK : KF :: EI : IF.$$

250. REMARQUE *sur les faisceaux harmoniques.* — Lorsque *quatre* points I, E, K, F (fig. 209), pris sur une droite, forment un système harmonique, deux points conjugués de ce système, par exemple E, F, peuvent être considérés comme les extrémités d'une diagonale commune à une infinité de quadrilatères dans lesquels les deux autres diagonales passeraient par les deux autres points conjugués I, K. Parmi tous ces quadrilatères, ceux qui ont un sommet commun en A ne peuvent plus différer que par la direction de la diagonale IBGD, menée par le point I, et dont les *quatre* points I, B, G, D, forment aussi un système harmonique. Fig. 209.

Maintenant, si l'on mène la droite AI, et que, par un point quelconque I' de cette droite, on mène à IBGD la parallèle I'B'G'D', ces deux dernières droites se trouveront partagées en parties proportionnelles (nº 214, *coroll.*); d'où il résulte qu'une droite quelconque menée à travers le système, est partagée harmoniquement par les *quatre* droites.

En raison de cette propriété, les droites AI, AE, AK, AF, forment ce que l'on nomme un *faisceau harmonique* dont elles sont les *rayons*. Les droites non consécutives AI et AK sont dites *conjuguées* l'une de l'autre par rapport à l'angle EAF; et de même les droites AE, AF, sont conjuguées l'une de l'autre par rapport à l'angle IAK. — Trois rayons d'un faisceau déterminent toujours le quatrième.

Le quadrilatère n'est pas la seule figure qui présente de pareils systèmes de droites : par exemple, il résulte de ce que l'on
Fig. 187. a vu *numéro* 226 (*scol.*), que les bissectrices OM, ON (fig. 187), de deux angles adjacens supplémentaires AOC, BOC, forment, avec les côtés de cet angle, OA et OB, ou OB et OC, un faisceau harmonique ayant pour rayons conjugués, d'une part les côtés de l'angle, et de l'autre les deux bissectrices. Par conséquent, lorsque, dans un faisceau harmonique, l'angle de deux rayons conjugués, AB, AC, est partagé en deux parties égales par un troisième AD, celui-ci est perpendiculaire au quatrième AD′ qui partage en deux parties égales l'angle supplémentaire adjacent au premier. — Et *réciproquement*, lorsque, dans un faisceau harmonique, deux rayons conjugués, AD, AD′, sont perpendiculaires entre eux, chacun d'eux partage en deux parties l'angle BAC des deux autres ou l'angle supplémentaire adjacent.

Les droites menées du sommet d'un triangle au milieu de la base et parallèlement à cette base forment aussi un faisceau harmonique avec les deux côtés latéraux (n° 225).

Enfin, lorsque *quatre segmens* (n° 5) de droites forment un faisceau harmonique, trois d'entre eux et le prolongement du quatrième en forment un autre, ce qui fait en tout *huit* faisceaux formés par les *quatre* droites.

Fig. 210. 251. Remarque *sur les pôles et les polaires.* — Si, d'un point quelconque P (fig. 210) pris hors d'une droite OA, on mène à cette ligne autant d'autres droites que l'on voudra, PA, PB, PC, PD,.... et qu'ayant tiré par le point O une transversale Oa qui coupe toutes les droites partant du point P respectivement en a, b, c, ..., on mène les diagonales Ab et aB, Bc et bC, Cd et cD, ..., le lieu géométrique des points de croisement, p, q, r, ... des diagonales correspondantes prises deux à deux, sera une droite Op passant par le point O ; et cette dernière droite sera la même par rapport à

tout autre point de la première droite OP, pris à la place du point P.

Cette propriété est réciproque : c'est-à-dire que si, par un point p (fig. 211) de la droite Op, on mène des droites, Fig. 211. Ap, Bp, Cp, Dp,... terminées respectivement en A, B, C, D,... sur la droite OA, et en a, b, c, d,...sur la droite Oa, les droites correspondantes Ab et Ba, Bc et Cb, Cd et Dc,..., prises deux à deux, se couperont sur la droite OP, en P, Q, R,... ; et cette dernière droite serait la même pour tout autre point de Op, pris à la place du point p.

On exprime cette double propriété en disant que le point P Fig. 210 et 211. de la figure 210 est *un pôle* (*) de la droite Op, et que celle-ci est la *polaire* du point P, par rapport à l'angle AOa. De même le point p et la droite OP de la figure 211 sont réciproquement *pôle* et *polaire* l'un de l'autre. — Dans un faisceau harmonique quelconque, tout point de l'un des quatre rayons peut être pris pour pôle du rayon conjugué au premier, par rapport à l'angle des deux autres ; — et *réciproquement*.

Théorème VI. (Fig. 212.)

252. *Lorsqu'un triangle* ABC *est inscrit à un autre triangle* Fig. 212. DEF, *si les trois droites qui joignent les sommets opposés se coupent en un même point* O, *les trois points de concours de leurs côtés opposés sont en ligne droite ; — et réciproquement.*

En effet, dans le quadrilatère complet DBOCEF, on a d'abord, en nommant G le point de concours des diagonales BC, FE,

$$EA : AF :: EG : GF ;$$

on a de même, en nommant I et K les points d'intersection de CA avec DF, de AB avec ED,

$$FB : BD :: FI : ID,$$

et

$$DC : CE :: DK : KE.$$

(*) De πολέω, *je tourne.*

On tire de là, en multipliant les trois proportions terme à terme,

$$EA.FB.DC:AF.BD.CE :: EG.FI.DK:GF.ID.KE;$$

or, si les deux premiers termes de cette dernière proportion sont égaux, les deux derniers le sont aussi : c'est-à-dire que si les droites AD, BE, CF, se coupent en un même point (n° 247), les trois points G, I, K, sont en ligne droite (n° 245); — Et *réciproquement*, etc.

Scolie. — Le théorème précédent peut aussi se démontrer par la considération des triangles OAB, OBC, OCA, coupés respectivement par les transversales KDE, GEF, IDF, en multipliant membre à membre les trois égalités qui en résultent, comme dans le *numéro* 249, et simplifiant le résultat.

Cette seconde démonstration ne supposant pas que le triangle ABC soit inscrit au triangle DEF, ni que le point O soit intérieur aux deux triangles, il en résulte la proposition générale suivante :

Fig.213. *Si deux triangles* ABC, DEF (fig. 213), *ont leurs sommets placés deux à deux sur trois lignes droites concourantes* [en un point O], *les trois points de concours* G, I, K, *des côtés correspondans pris deux à deux, sont en ligne droite.*

La *réciproque* se démontre par la réduction à l'absurde.

§ II. *Transversales considérées dans le Cercle. — Hexagones Inscrits et Circonscrits, etc.*

253. Si, d'un même côté du centre d'un cercle, et sur la
Fig.214. direction d'un même rayon OA (fig. 214), on prend deux points P, Q, tels que le produit de leurs distances au centre soit égal au carré du rayon, ces deux *points* seront dits *conjugués* l'un de l'autre par rapport au cercle OA.

De deux points conjugués, l'un, P, est nécessairement intérieur, et l'autre, Q, extérieur au cercle. De plus, si l'on suppose que le point intérieur se meuve depuis la circonférence jusqu'au centre, son conjugué se mouvra en même temps depuis la circonférence jusqu'à l'infini; et *réciproquement*. Ainsi, tout point de la circonférence est à lui-même son conjugué; et le conjugué du centre est situé à une distance infinie hors du cercle : ou, si l'on veut, le centre n'a pas de conjugué.

Si, par l'un des deux points conjugués, P ou Q, on mène une perpendiculaire indéfinie, PM ou QN, à la droite qui les contient, cette perpendiculaire sera dite la *polaire* de l'autre point, Q ou P, lequel sera dit, réciproquement, le *pôle* de la droite, par rapport au cercle OA. [L'emploi de ces dénominations est fondé sur ce que les droites et les points auxquels on les applique, jouissent, par rapport au cercle, de propriétés analogues à celles des droites et des points auxquels on a donné les mêmes noms par rapport aux angles (n° 251).] Fig. 214.

Théorème VII. (Fig. 214.)

254. *La corde de contact* MM′ *d'un angle circonscrit* MQM′ *est la polaire de son sommet* Q; — *et réciproquement.*

En effet, soit P le point d'intersection de cette corde avec la droite QO; en menant le rayon OM, on aura (n° 227, 2°)

$$OM^2 = OP \times OQ;$$

donc les points P et Q sont conjugués : donc la droite MN est la polaire du point Q.

Réciproquement : — Toute sécante a pour pôle le point de concours des tangentes menées par les points où elle rencontre la circonférence.

Scolie. — En élevant au point Q sur le prolongement de AB la perpendiculaire QN, cette droite sera aussi la polaire du point P; — et *réciproquement.*

Théorème VIII. (Fig. 214.)

255. *Deux points conjugués*, P, Q, *divisent harmoniquement le diamètre* AB *sur lequel ils sont situés.*

En effet, de la proportion

$$OP : OA :: OA : OQ$$

on tire $OA - OP : OA + OP :: OQ - OA : OQ + OA$,

ou bien $AP : PB :: AQ : QB.$

Scolie. — Cette propriété des points conjugués peut être prise pour leur définition.

Théorème IX. (Fig. 215.)

Fig. 215. 256. *Les distances,* MP, MQ, *de chaque point* M *de la circonférence à deux mêmes points conjugués,* P, Q, *sont dans un rapport constant* [AP : AQ].

En effet, les quatre points Q, A, P, B, formant un système harmonique (n° 255), les quatre droites MQ, MA, MP, MB, composent un faisceau harmonique (n° 250). Or, l'angle AMB est droit (n° 200, 2°); donc la droite MA partage l'angle PMQ en deux parties égales : donc (n° 226)

$$MP : MQ :: AP : AQ. \qquad C. Q. F. D.$$

Théorème X. (Fig. 216.)

Fig. 216. 257. *Toute corde* MN *passant par un pôle* P *est divisée harmoniquement par ce pôle et par sa polaire* QL.

En effet, de la proportion (n° 256)

$$MP : MQ :: NP : NQ$$

il résulte que la droite QP partage en deux parties égales l'angle des deux droites QM, QN [ou son supplément] (n° 226, *récipr.*); d'où il suit que la droite QP est perpendiculaire à sa conjuguée par rapport à l'angle MQN (n° 250); donc cette droite conjuguée n'est autre que la polaire QL du point P; ce qui démontre la proposition.

Théorème XI. (Fig. 217.)

258. *Le pôle de toute droite menée par un point est sur la polaire de ce point;*

Et réciproquement : — *La polaire de tout point pris sur une droite passe par le pôle de cette droite.*

Soient P, Q, deux points conjugués situés sur la direction du rayon OA ; on aura Fig.217.

$$OP \times OQ = OA^2.$$

Soit maintenant une droite quelconque PP′ menée par le point P, OP′ sa distance au centre, et Q′ le conjugué de P′ ou le pôle de PP′, on aura encore :

$$OP' \times OQ' = OA^2\,;$$

d'où
$$OP \times OQ = OP' \times OQ',$$

ou bien
$$OP : OP' :: OQ' : OQ.$$

Il résulte de là que la droite QQ′ détermine un triangle OQQ′ semblable au triangle OP′P, qu'ainsi l'angle Q est droit, et que, par conséquent, la droite QQ′ est la polaire du point P, et le point P le pôle de la droite QQ′.

Corollaire. — *Si tant de droites que l'on voudra concourent en un même point* P (fig. 218), *leurs pôles sont situés sur une même ligne droite* QL *qui est la polaire de ce point ;* Fig.218.

Et réciproquement : — *Si tant de points que l'on voudra sont situés sur une même ligne droite* QL, *leurs polaires concourent en un même point* P *qui est le pôle de cette droite.*

Théorème XII. (Fig. 219.)

259. *Dans tout quadrilatère* ABCD *inscrit au cercle, le point de concours* I *des diagonales* AC, BD, *et les points de concours,* P, Q, *des côtés opposés,* AB et CD, AD et BC, *pris deux à deux, forment un triangle* IPQ *dans lequel chaque sommet est le pôle du côté opposé.* Fig.219.

D'abord, les droites PQ, PA, PI, PC, forment un faisceau harmonique (n^os 249 et 250) ; et par conséquent les droites AD, BC, sont divisées harmoniquement, la première aux points Q, E, la seconde aux points Q, F. De là il résulte que les points E, F, appartiennent tous deux à la polaire du point Q, et que par conséquent cette polaire n'est autre que la droite PI.

Par une raison toute semblable, la droite QI est la polaire du point P.

Quant à la troisième droite PQ, son pôle doit se trouver à la fois sur la polaire du point P et sur celle du point Q : donc, ce pôle est le point I (n° 258).

Théorème XIII. (Fig. 220.)

Fig. 220. 260. *Dans tout hexagone* ABCDEF *inscrit au cercle, les points d'intersection des côtés opposés pris deux à deux, sont tous trois en ligne droite.*

Prolongeons les côtés alternatifs AB, CD, EF, jusqu'à leurs points de rencontre mutuels en L, M, N; nous aurons d'abord (n° 236) :

$$LA.LB = LC.LD,$$
$$MC.MD = ME.MF,$$
$$NE.NF = NA.NB.$$

Maintenant, les droites AG, EI, CK, considérées comme transversales par rapport au triangle LMN, nous donneront :

$$LA.NF.MG = AN.FM.GL,$$
$$NE.MD.LI = EM.DL.IN,$$
$$MC.LB.NK = CL.BN.KM.$$

Or, en multipliant ces nouvelles égalités membre à membre et ayant égard aux précédentes, on obtient

$$MG.LI.NK = GL.IN.KM:$$

donc (n° 245) les trois points G, I, K, sont en ligne droite.

Scolie. — Ce théorème n'est pas seulement applicable à un hexagone convexe comme celui de la figure. Les côtés pourraient s'entre-croiser et les sommets se succéder sur la circonférence dans un ordre quelconque, ce qui fournirait 60 hexagones différens [dont un seul convexe] ayant les mêmes sommets. On obtiendrait ainsi 60 groupes différens de trois points situés en ligne droite. — Toutefois, cela ne donnerait pas 180 points différens : car, par les 6 points de la circonférence, en les prenant deux à deux, on ne peut faire passer que

15 droites ; chacune de ces 15 droites en rencontre 8 aux deux sommets par lesquels elle passe ; restent donc, pour chacune, 6 points d'intersection non situés sur la circonférence ; ce qui donne 45 points en tout pour fournir les 60 groupes ci-dessus.

261. REMARQUE. — On peut supposer qu'un ou plusieurs côtés de l'hexagone inscrit, indéfiniment prolongés, deviennent des tangentes (n° 20). De là résultent divers corollaires ou théorèmes relatifs au pentagone, au quadrilatère, et au triangle inscrit. Nous allons en donner les énoncés, en observant qu'ils sont susceptibles du même genre d'extension que le théorème lui-même.

COROLLAIRE 1er. — *Dans tout pentagone inscrit, les points de concours de deux paires de côtés non consécutifs quelconques, et celui du cinquième côté avec la tangente au sommet opposé, sont tous trois en ligne droite.*

COROLL. 2. — *Dans tout quadrilatère inscrit, les points de concours des côtés opposés, et ceux des tangentes aux sommets opposés, pris deux à deux, sont tous quatre en ligne droite.*

Coroll. 3. — Dans tout quadrilatère inscrit, le point de concours de deux côtés opposés, et ceux des tangentes menées aux extrémités de l'un de ces deux côtés, avec les deux autres, sont tous trois en ligne droite.

COROLL. 4. — *Dans tout triangle inscrit, les points de concours des côtés avec les tangentes aux sommets respectivement opposés, sont tous trois en ligne droite.*

THÉORÈME XIV. (Fig. 221.)

262. *Dans tout hexagone* PQRSTU *circonscrit au cercle, les diagonales menées par les sommets opposés pris deux à deux, concourent toutes trois en un même point.* Fig. 221.

En effet, si l'on joint par des cordes les points de tangence consécutifs, on formera un hexagone inscrit ABCDEF dont les côtés opposés, pris deux à deux, se couperont sur une même ligne droite GKI. De plus, les côtés de cet hexagone inscrit auront respectivement pour pôles les sommets de l'hexagone circonscrit (n° 254); et les points d'intersection G, I, K, de ses côtés seront au contraire les pôles respectifs des diagonales menées dans le second par les sommets opposés (n° 258). Donc ces diagonales se coupent en un même point O (n° 258, *coroll.*) qui est le pôle de la droite GKI.

263. Remarque. — Ce théorème admet une extension analogue à celle du théorème précédent. Lorsque l'un des côtés de l'hexagone inscrit se change en une tangente, le sommet de l'angle correspondant de l'hexagone circonscrit est remplacé par le point de tangence, et les deux côtés qui comprenaient cet angle se confondent avec la tangente. Par suite de cette observation, on obtient les corollaires suivans qui correspondent à ceux du théorème XIII (n° 261).

Corollaire 1er. — *Dans tout pentagone circonscrit, les diagonales menées par deux paires de sommets non consécutifs quelconques, et la droite qui joint le cinquième sommet au point de contact du côté opposé, concourent toutes trois en un même point.*

Coroll. 2. — *Dans tout quadrilatère circonscrit, les droites menées par les points de contact des côtés opposés pris deux à deux, concourent avec les diagonales en un même point.*

Coroll. 3. — Dans tout quadrilatère circonscrit, la droite menée par les sommets de deux angles opposés, et celles qui joignent les points de contact des côtés qui comprennent l'un de ces angles, avec les deux autres sommets, concourent toutes trois en un même point.

Coroll. 4. — *Dans tout triangle circonscrit, les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés respectivement opposés, concourent toutes trois en un même point.*

(Voyez les *Annales de Mathématiques* en divers endroits, et notamment *Tome* XIV, *page* 39 *et suiv.* — Voyez aussi la *Correspondance sur l'École Polytechnique.*)

CHAPITRE III.

Des Dimensions relatives de quelques Polygones Réguliers, et du Rapport de la Circonférence au Diamètre.

264. Nous avons vu (n° 175, *récipr.*) qu'il existait des polygones réguliers d'un nombre infini d'espèces différentes, et (n° 207) que les polygones réguliers de même espèce ou du même nombre de côtés étaient des figures semblables. Or, les lignes homologues des figures semblables étant proportionnelles, il s'ensuit que, pour chaque sorte de polygones réguliers, les rapports des côtés, des rayons, et des apothèmes, sont des nombres constans. Mais il s'en faut bien que des opérations effectuées avec la règle et le compas seulement (nos 22 et 25), suffisent dans tous les cas pour déterminer rigoureusement ces rapports ou pour les représenter exactement par des rapports de lignes. Ce n'est que pour un petit nombre d'espèces de polygones qu'il en est ainsi; et encore même quelques-unes exigeraient-elles des constructions qui excèdent tout-à-fait les bornes d'un cours élémentaire.

Nous allons, dans ce chapitre, déterminer les rapports dont nous venons de parler, pour les polygones réguliers les plus simples, et par suite nous calculerons le rapport de la circonférence à son diamètre, le cercle pouvant être, ainsi que nous l'avons dit (n° 183), considéré comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits, et dont le rayon et l'apothème sont égaux entre eux.

[Nous supposerons, pour plus de clarté, dans ce qui va suivre, que les polygones réguliers que nous avons à considérer, soient inscrits dans un cercle dont nous prendrons le rayon pour unité.]

§ Ier. *Polygones Réguliers.*

Théorème I. (Fig. 222.)

Fig. 222. 265. *Le côté* AB *du carré* ABCD *est au rayon* OA $:: \sqrt{2} : 1$.

En effet, l'angle au centre étant droit, le triangle AOB donne (nº 228)

$$OA^2 + OB^2 = AB^2, \quad \text{ou} \quad 2.OA^2 = AB^2;$$

d'où l'on tire $AB : OA :: \sqrt{2} : 1$.

Scolie 1er. — On a aussi

$$AC^2 = 2.AB^2; \quad \text{d'où} \quad AC : AB :: \sqrt{2} : 1.$$

Il suit de là que *La seconde puissance* de la valeur numérique *de la diagonale d'un carré est double de la seconde puissance* de la valeur numérique *de son côté*, et que par conséquent, *la valeur de la diagonale est à la valeur du côté* $:: \sqrt{2} : 1$. — Ainsi *La diagonale d'un carré est incommensurable avec son côté.*

Scol. 2. — L'apothème OP du carré étant égal au demi-côté AP, on a encore

$$2.OP^2 = OA^2 = 1;$$

d'où

$$OP = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

266. ≼[Remarque *sur l'incommensurabilité des racines carrées des nombres.* — Du résultat que nous venons d'obtenir on peut conclure que la *racine carrée* du nombre 2 [et il en est de même des racines carrées de tous les nombres entiers qui ne sont pas des carrés parfaits] peut être représentée exactement par une construction, bien que l'*Arithmétique* démontre que cette racine est incommensurable. Mais la *Géométrie* même, tout en fournissant une *expression linéaire* de $\sqrt{2}$, concourt aussi à en démontrer l'incommensurabilité.

Soit en effet un carré ABCD (fig. 223). De l'un de ses sommets C, comme centre, et d'un rayon égal à son côté, soit décrite une demi-circonférence qui coupe la diagonale AC au point E, et son prolongement au point F. On aura ainsi, en prenant un instant le côté AB pour unité [conformément au *scolie* 1er du *numéro* précédent (n° 265)] : Fig. 223.

$$AC = 1 + AE.$$

Or (n° 236) $AE : AB :: AB : AF,$

ou bien $AE : 1 :: 1 : 2 + AE,$

d'où $AE = \frac{1}{2 + AE}$:

donc $AC = \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+AE} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+AE}}$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + AE}}} = \text{etc., etc.}$$

Ainsi, l'on trouvera toujours un reste, quelque loin que l'on pousse l'opération, puisque la valeur de AC est exprimée par une *fraction continue périodique* : par conséquent le rapport de la diagonale AC au côté AB est *incommensurable* (n° 64).

Suivant qu'on négligera le premier reste, ou le second, ou le troisième, ..., on obtiendra pour la valeur de AC l'une des réduites suivantes

$$1 \;\Big|\; \frac{3}{2} \;\Big|\; \frac{7}{5} \;\Big|\; \frac{17}{12} \;\Big|\; \frac{41}{29} \;\Big|\; \frac{99}{70} \;\ldots\ldots$$

dont la dernière, exprimée en décimales, donne 1,4142..., résultat exact à 0,0001 près.

Théorème II. (Fig. 224.)

267. *Le côté* AB *de l'hexagone régulier* ABCDEF *est égal au rayon* OA.

Fig. 224. En effet, l'angle au centre AOB valant les $\frac{4}{6}$ ou les $\frac{2}{3}$ d'*un* angle *droit* (nº 175, *scol.* 3), il en résulte que le triangle ABO est équilatéral (nº 126, *scol.* 2); par conséquent

$$AB = OA.$$

C'est d'ailleurs ce que nous avons déjà vu (nº 174).

Scolie.— L'apothème $OP = \sqrt{OA^2 - AP^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, en prenant le rayon pour unité.

Théorème III. (Fig. 224.)

268. *Le côté* AC *du triangle équilatéral* ACE *est au rayon* $:: \sqrt{3} : 1$.

En joignant les sommets alternatifs A, C, E, de l'hexagone régulier inscrit, on a d'abord un triangle équilatéral inscrit (nº 179). Cela posé, soit K le point d'intersection des droites AC et OB : on aura (nº 233), dans le losange ABCO,

$$4.AB^2 = AC^2 + OB^2;$$

ou bien, puisque $AB = OB = OA$ (nº 267),

$$3.OA^2 = AC^2; \quad \text{d'où} \quad AC : OA :: \sqrt{3} : 1.$$

Scolie. — L'apothème $OK = \frac{1}{2} OA$. — Il en résulte que EK, ou la hauteur du triangle ACE, est égale à $\frac{3}{2}$ OA.

Théorème IV. (Fig. 225.)

Fig. 225. 269. *Le côté* AB *du décagone régulier est égal à la plus grande partie du rayon* OA *partagé en moyenne et extrême raison* (nº 237).

D'abord, l'angle au centre AOB vaut les $\frac{4}{10}$ ou les $\frac{2}{5}$ d'*un* angle *droit* : donc chacun des angles BAO, ABO, vaut les $\frac{4}{5}$ d'*un* angle *droit* (nº 125). Cela posé, partageons l'angle ABO en deux parties égales par la droite BI : le triangle ABO se trouvera décomposé en deux triangles isocèles ABI, BIO, qui donneront $AB = BI = OI$; et l'on aura d'ailleurs (nº 226) :

$$OB : OI :: AB : AI, \quad \text{ou} \quad OA : OI :: OI : AI;$$

donc le rayon OA est partagé au point I en moyenne et extrême raison (n° 237) ; mais la plus grande partie OI = AB : donc, etc.

≤[*Scolie*. — En nommant x le côté du décagone et prenant le rayon pour *unité* (n° 264), on a

$$1 : x :: x : 1 - x, \quad \text{ou} \quad x^2 + x = 1;$$

d'où l'on tire

$$(x + \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{5}{4}, \quad \text{ou} \quad x + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5},$$

ou enfin

$$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Quant à l'apothème OP, on a toujours $OP^2 = OA^2 - AP^2$; d'où l'on tire, en faisant $OA = 1$ et substituant pour AP la moitié de la valeur trouvée pour x,

$$OP = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}. \quad]≥$$

Théorème V. (Fig. 226.)

270. Si un pentagone régulier et un décagone régulier ont même rayon ou sont inscrits au même cercle, *Le carré du côté* AB *du pentagone régulier est égal au carré du côté* AC *du décagone régulier, plus le carré du rayon commun* AO. Fig. 226.

En joignant les sommets alternatifs du décagone régulier inscrit, on a d'abord un pentagone régulier inscrit (n° 179). Cela posé, soit K le point d'intersection du côté AB avec la bissectrice de l'angle AOC. Les triangles AOK, COK, étant égaux (n° 131), le triangle AKC sera isocèle et semblable au triangle ACB, ce qui donnera

$$AC^2 = AB \times AK.$$

Maintenant, l'angle OBK, moitié de l'angle du pentagone régulier, vaut $\frac{3}{5}$; et l'angle BOK a la même valeur comme étant égal à l'angle au centre BOC du décagone régulier, plus la moitié COK de cet angle. Il résulte de là que le triangle BKO est isocèle et semblable au triangle AOB, d'où l'on tire encore

$$OB^2 = AB \times KB.$$

Enfin, ajoutant membre à membre les deux égalités ainsi obtenues, on a

$$AC^2 + OB^2 = AB(AK + KB),$$

ou $$AC^2 + OA^2 = AB^2. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

⋞[*Scolie.* — Par suite des deux théorèmes qui précèdent, la valeur numérique du côté du pentagone régulier est égale à la valeur du rayon multipliée par $\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, et son apothème, à ce même rayon multiplié par $\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$.] ⋟

Théorème VI. (Fig. 227.)

Fig.227. 271. *L'arc sous-tendu par le côté* AB *du pentédécagone régulier inscrit est la différence des arcs sous-tendus respectivement par les côtés,* AB et AC, *de l'hexagone et du décagone.*

En effet, l'arc AB vaut $\frac{1}{6}$ de la circonférence, et l'arc AC vaut $\frac{1}{10}$. Or $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$; donc l'arc BC est $\frac{1}{15}$ de la circonférence : donc etc.

⋞[*Scolie.* — Si l'on prolonge le rayon AO jusqu'à la rencontre de la circonférence, en D, et que l'on mène BD, CD, on formera un quadrilatère inscrit ACBD, dont les diagonales seront AB, CD. Cela posé, en appliquant à ce quadrilatère le théorème démontré *numéro* 238 et observant que l'on a $AB = 1$, $AD = 2$, $AC = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (n° 269, *scol.*), et enfin que les triangles ABD, ACD, sont rectangles en B et en C, on obtient

$$BC = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right). \qquad]⋟$$

Problème I. (Fig. 228.)

Fig.228. 272. *Étant donné le côté* $AB = c$ *d'un polygone régulier inscrit, et le rayon* $OA = r$ *du cercle, trouver le côté* $AC = C$ *d'un polygone régulier inscrit d'un nombre sous-double de côtés.*

En effet, si l'on achève le quadrilatère inscrit ABCD ayant pour diagonale le diamètre BOD perpendiculaire à AC, et que l'on applique à ce quadrilatère la proposition démontrée *numéro* 238 [ou au triangle ABD celle du *numéro* 227 (4°)], en faisant $BD = 2r$, $BC = AB = c$, et enfin Fig. 228.

$$AD = CD = \sqrt{4r^2 - c^2},$$

on obtient $$2Cr = 2c\sqrt{4r^2 - c^2}:$$

d'où $$C = \frac{c}{r}\sqrt{4r^2 - c^2}.$$

— *Par exemple*, en faisant $c = r = 1$ (nos 267 et 264), on a, pour le côté du triangle équilatéral,

$$C = \sqrt{3},$$

comme on l'a trouvé n° 268.

On obtiendrait de même le côté du pentagone régulier inscrit (nos 269 et 270).

⋧[Si l'on fait $r = 1$, et $c = \sqrt{2}$ (n° 265), on trouve

$$C = 2,$$

ce qui doit être d'après une remarque faite n° 181, puisque le diamètre du cercle peut être considéré comme un polygone inscrit de *deux* côtés.]⋦

Problème II. (Fig. 228.)

273. Réciproquement : — *Étant donné le côté* $AC = C$ *d'un polygone inscrit, et le rayon* $OA = r$ *du cercle, trouver le côté* $AB = c$ *d'un polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés.*

Pour cela, soit achevé le quadrilatère ABCD, comme dans le *numéro* précédent. Alors, il suffit d'observer que dans le triangle rectangle BAD, AB est moyen proportionnel entre l'hypoténuse BD et le segment BI. Car, en faisant $BD = 2r$, et

$$BI = BO - OI = BO - \sqrt{OA^2 - AI^2} = r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}C^2},$$

on obtient $$c^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}C^2}\right);$$

Fig. 228. ou bien $$c^2 = r\left(2r - \sqrt{4r^2 - C^2}\right).$$

— *Par exemple*, si l'on veut trouver le côté de l'octogone régulier inscrit, il faudra faire (nos 264 et 265)

$$r = 1 \quad \text{et} \quad C = \sqrt{2}; \quad \text{d'où} \quad c^2 = 2 - \sqrt{2}.$$

Pour trouver le côté du dodécagone, il faudrait faire

$$C = 1 \ (\text{n}^\circ\ 267): \quad \text{d'où} \quad c^2 = 2 - \sqrt{3}.$$

274. Remarque. — Les deux problèmes (nos 272 et 273) et les divers théorèmes qui précèdent fournissent les moyens de déterminer géométriquement les dimensions relatives des polygones réguliers compris dans les catégories suivantes :

1° les polygones de.. 4, 8, 16, 32, ... côtés (n° 265);
2° .... 3, 6, 12, 24, ... (nos 267, 268);
3° .... 5, 10, 20, 40, ... (nos 269, 270);
4° .... 15, 30, 60, 120, ... (n° 271).

≼[On peut y parvenir encore pour les polygones réguliers dans lesquels le nombre des côtés est représenté par la formule $2^n + 1$, n étant un nombre entier et $2^n + 1$ un nombre premier; mais la question, relativement à ces sortes de polygones, sort tout-à-fait des élémens (n° 27). (*Voyez* les *Recherches Arithmétiques* de M. Gauss.)]≽

De plus, les formules précédentes (nos 272 et 273) n'ayant rien qui suppose que les arcs AB et AC (fig. 228) soient des sous-multiples de la circonférence, il en résulte qu'on peut les employer généralement à résoudre les deux problèmes suivans :

1° *Déterminer la corde du double d'un arc, connaissant la corde de cet arc;*

2° Réciproquement : — *Déterminer la corde de la moitié d'un arc, connaissant la corde de cet arc.*

≼[On peut encore, par un moyen analogue à celui qu'on a employé ci-dessus (n° 271, *scol.*), résoudre la question suivante :

Étant données les cordes de deux arcs, trouver la corde de leur somme ou de leur différence.

C'est ainsi que l'on a pu parvenir à déterminer en nombres les valeurs des cordes d'un très grand nombre d'arcs. (*Voyez*, à la fin du volume, la *Table des Cordes*.)

Problème III. (Fig. 229.)

275. *Étant donnés le côté* $ab = c$ *d'un polygone régulier* Fig. 229.
inscrit et le rayon $Oa = r$ *du cercle, trouver le côté* $AB = C$ *du polygone circonscrit semblable.*

Les côtés AB et *ab* des deux polygones étant proportionnels à leurs apothèmes OP et O*p* (n° 220, *scol.*), on a

$$C : c :: r : \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}c^2} :: 2r : \sqrt{4r^2 - c^2},$$

d'où

$$C = \frac{2cr}{\sqrt{4r^2 - c^2}}.$$

Problème IV. (Fig. 229.)

276. Réciproquement : — *Étant donnés le côté* $AB = C$ *d'un* Fig. 229.
polygone régulier circonscrit et le rayon $OP = r$ *du cercle, trouver le côté* $ab = c$ *du polygone inscrit semblable.*

Les côtés *ab* et AB des deux polygones étant proportionnels à leurs rayons O*a* et OA (n° 220, *scol.*), on a

$$c : C :: r : \sqrt{r^2 + \tfrac{1}{4}C^2} :: 2r : \sqrt{4r^2 + C^2},$$

d'où

$$c = \frac{2Cr}{\sqrt{4r^2 + C^2}}.$$

Problème V. (Fig. 230.)

277. *Étant donnés le rayon,* $OA = R$, *et l'apothème,* $OP = r$, Fig. 230.
d'un polygone régulier, trouver le rayon R' *et l'apothème* r', *d'un polygone régulier isopérimètre* (n° 183) *et d'un nombre double de côtés.*

Construisons le cercle circonscrit au polygone proposé : l'arc AB mesurera son angle au centre AOB. Cela posé, l'angle au centre du nouveau polygone doit être moitié de l'angle au centre du polygone donné; donc, si l'on mène le rayon OG prolongement de OP, puis les droites AC et BC, l'angle ACB sera l'angle du polygone cherché. De même, le côté de celui-ci doit être moitié du côté du premier polygone; donc, si l'on mène OA′ perpendiculaire à AC, et A′P′B′ parallèle à AB, A′B′ sera le côté demandé (nos 126 et 214). Alors, CA′ [=CB′] sera le rayon, et CP′ l'apothème de ce même polygone.

Il ne s'agit plus que de déterminer $CA'=R'$ et $CP'=r'$. Pour cela on a d'abord :

$$CP'=\frac{1}{2}CP\ (\text{n}^\circ\ 220,\ \textit{scol.})=\frac{1}{2}(CO+OP)=\frac{1}{2}(OA+OP),$$

ou bien
$$r'=\frac{1}{2}(R+r).$$

Secondement, dans le triangle rectangle CA′O, on a (n° 227, 2°)
$$\overline{CA'}^2=CO\times CP',$$

d'où
$$R'=\sqrt{Rr'};$$

et comme r' est déjà déterminé, le problème est résolu.

Scolie. — Le rayon du nouveau polygone est moindre que celui du premier; c'est le contraire pour les apothèmes : il est facile, en effet, de reconnaître sur les formules précédentes, que l'on a
$$r'>r \quad \text{et} \quad R'<R.$$

§ II. *Propositions générales relatives au Rapport de la Circonférence au Diamètre.*

278. La *rectification* d'une courbe est une opération qui consiste à déterminer le rapport de la longueur de cette courbe, supposée redressée ou *rectifiée*, à l'unité linéaire rectiligne.

On peut toujours y parvenir approximativement en regardant la courbe comme un polygone, conformément aux considérations qui ont été développées dans le *numéro* 183 et dans les suivans; on obtient ainsi un degré d'approximation d'autant plus élevé que les points de division de la courbe sont plus multipliés.

Ainsi, en regardant le cercle comme un polygone régulier, on en conclut sur-le-champ que *Les circonférences de cercle, étant des lignes semblables* (n° 207), *sont proportionnelles à leurs rayons et à leurs diamètres*, et que par conséquent, il suffit de déterminer une fois pour toutes *le rapport de la circonférence au rayon* ou *au diamètre* : le rayon *ou* le diamètre d'une circonférence quelconque, multiplié par ce rapport constant, donne toujours la longueur de la circonférence rectifiée.

Bien que ces propositions soient incontestables, cependant, pour ne laisser aucun doute sur leur exactitude, nous allons les démontrer d'une autre manière ; puis nous déterminerons la valeur du rapport dont il vient d'être question.

LEMME. (Fig. 231.)

279. *Deux circonférences concentriques étant données, on peut toujours, 1° supposer inscrit à la plus grande un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la plus petite, et 2° supposer circonscrit à la plus petite un polygone régulier dont les côtés, non prolongés, ne rencontrent pas la plus grande* [de sorte que, dans les deux cas, les côtés du polygone soient compris entre les deux circonférences]. Fig. 231.

Soit O le centre commun des deux circonférences. Par un point I pris sur la circonférence intérieure, menons une tangente terminée à la circonférence extérieure, en A et en B.

Cela posé, quelque petit que soit l'arc ACB sous-tendu par la corde AIB, on peut toujours supposer la grande circonférence partagée en parties égales plus petites que cet arc : soit MCN une de ces parties, ayant pour corde MN une parallèle à la droite AIB, hypothèse qui est toujours admissible. Alors, la droite MN est le côté d'un polygone régulier inscrit à la grande circonférence, lequel ne rencontre pas la petite.

Maintenant, menons les rayons OM, ON, et soient P, Q, leurs points d'intersection avec la droite AIB : l'angle POQ étant une partie aliquote de 4 angles *droits*, PQ sera le côté d'un polygone régulier circonscrit à la petite circonférence, lequel ne rencontrera pas la grande. Donc, etc.

Scolie. — Le théorème précédent est également applicable à
Fig.232. deux arcs de cercles concentriques AB, A'B', correspondans au même angle au centre AOB (fig. 232), en opérant la division en parties égales, sur l'arc AB, au lieu de l'opérer sur la grande circonférence entière, et en remplaçant les périmètres des polygones par des *lignes brisées régulières :* [nous nommons ainsi des séries de droites égales et également inclinées entre elles, et jouissant par conséquent en général des propriétés des polygones réguliers ; il faut bien observer qu'une ligne brisée régulière peut bien ne pas faire partie d'un polygone régulier, ce qui arrivera lorsque l'arc du cercle circonscrit, sous-tendu par chacun des côtés, ne sera pas une partie aliquote de la circonférence].

La même proposition peut encore être étendue à deux arcs
Fig.233. de cercles concentriques AB, A'B' (fig. 233), sous-tendus par deux cordes placées de manière à faire partie de la même droite, en observant que chacun des deux arcs doit être divisé séparément en parties égales, parce qu'alors les points de division correspondans ne sont pas situés sur un même rayon.

Théorème VII. (Fig. 234.)

Fig.234. 280. *Les circonférences, OA, O'A', sont proportionnelles à leurs diamètres.*

En effet, admettons pour un instant que l'on n'ait pas

$$OA : O'A' :: circ.OA : circ.O'A', \qquad [1]$$

mais, au contraire,

$$OA : O'A' :: circ.OA : circ.O'A'', \qquad [2]$$

$O'A''$ étant supposé $> O'A'$, et par suite *circ.* $O'A'' >$ *circ.*$O'A'$ (nº 186). Cela posé, *circonscrivons* au cercle O'A' un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence O'A'' et dont nous désignerons le périmètre par *périm.*O'A', et au cercle OA un second polygone régulier semblable au premier, dont nous désignerons de même le périmètre par *périm.* OA. Nous aurons (n° 222, *coroll.*) :

$$\text{OA} : \text{O}'\text{A}' :: \textit{périm.}\ \text{OA} : \textit{périm.}\ \text{O}'\text{A}'. \qquad [3]$$

Or, en comparant les proportions [2] et [3], on en tire :

$$\textit{circ.}\text{OA} : \textit{circ.}\text{O}'\text{A}'' :: \textit{périm.}\text{OA} : \textit{périm.}\text{O}'\text{A}', \qquad [4]$$

proportion absurde, puisque l'on a

$$\textit{circ.}\text{OA} < \textit{périm.}\text{OA} \quad \text{et} \quad \textit{circ.}\text{O}'\text{A}'' > \textit{périm.}\text{O}'\text{A}'.$$

On démontrerait de la même manière que le quatrième terme de la proportion [1] ne peut être supposé < *circ.* O'A'. Pour cela on *inscrirait* à cette circonférence un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence O'A'', et un polygone régulier semblable à la circonférence OA : etc.

Maintenant, l'absurdité de la proportion [4] que l'on obtient par la comparaison des proportions [2] et [3], ne pouvant provenir que de la première des deux puisque l'autre résulte d'une proposition démontrée (n° 222), il s'ensuit que la proportion [2] est fausse, ce qui démontre la vérité de la proportion [1].

N. B. — La différence des constructions à employer dans les deux hypothèses successives qu'exige la démonstration précédente, tient à ce qu'il faut conserver dans les proportions un *rapport commun* qui est celui des deux rayons OA, O'A'.

Corollaire. — Le rapport de la circonférence au rayon est une quantité constante.

On représente ordinairement par π ce rapport constant ; et alors, en nommant c une circonférence quelconque et r son rayon, on a $c = 2\pi r$: telle est la valeur de la *circonférence rectifiée*.

On voit que le nombre π exprime encore la longueur de la circonférence dont le diamètre est l'unité, ou celle de la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

Théorème VIII. (Fig. 232.)

281. *Les arcs*, AB, A'B', *correspondans au même angle* Fig. 232.

au centre AOB *sont proportionnels à leurs rayons*; — *et réciproquement.*

En effet, toute circonférence entière pouvant être considérée comme un arc correspondant à 4 angles *droits* (n° 82), on a (n° 195) :

$$arc\ AB : circ.\ OA :: AOB : 4\ droits,$$
$$arc\ A'B' : circ.\ OA' :: AOB : 4\ droits;$$

et d'où $arc\ AB : arc\ A'B' :: circ.\ OA : circ.\ OA' :: OA : OA'.$

La *réciproque* se démontre par l'absurde, ou se conclut du *numéro* 49.

Corollaire 1er. — Deux *arcs* étant nécessairement *semblables* lorsqu'ils sont *proportionnels à leurs rayons* (nos 206 et 207), il s'ensuit que, dans deux cercles différens, *Les arcs correspondans au même angle au centre sont semblables;* et ces arcs sont évidemment proportionnels à leurs cordes et à leurs flèches, qui en sont des lignes homologues (n° 209; et n° 220, *scol.*).

Réciproquement : — A des arcs semblables correspondent toujours des angles au centre égaux entre eux.

Ce qu'on vient de dire dans ce corollaire relativement aux arcs, est également applicable aux secteurs. (*Voy.* le n° 197).

Coroll. 2. — Comme les arcs correspondans au même angle au centre comprennent le même nombre de degrés, il résulte encore du théorème précédent, que *Dans deux cercles différens, les longueurs absolues des degrés ou des grades rectifiés sont proportionnelles à leurs rayons.*

Théorème IX. (Fig. 235.)

Fig. 235. 282. *Deux arcs quelconques*, AB, A'B', *sont proportionnels aux produits des angles*, AOB, O'AB', *par les rayons correspondans*, OA, OA'.

Supposons que les deux arcs aient même centre, et que leurs rayons, OA, OA', aient la même direction. Soit de plus B″ le point d'intersection du rayon OB′ [prolongé s'il est nécessaire] avec la circonférence OA. Nous aurons (n° 195) :

$$AB : AB'' :: AOB : AOB'',$$

puis (n° 281) $AB'' : A'B' :: OA : OA'$;

d'où, à cause de $AOB'' = A'OB'$,

$$AB : A'B' :: AOB \times OA : A'OB' \times OA \qquad C.Q.F.D.$$

COROLLAIRE 1^er^. — On tire de là :

$$AOB : A'OB' :: \frac{AB}{OA} : \frac{A'B'}{OA'}.$$

Ainsi, quand on compare des angles au centre dans des cercles de rayons différens, *Les angles au centre sont proportionnels aux quotiens des arcs par les rayons correspondans.*

COROLL. 2. — Si l'on fait $A'B' = 1$, $OA' = 1$, et $A'OB' = 1$,

on aura $$AOB = \frac{AB}{OA};$$

c'est-à-dire : *En prenant pour unité d'angle celui qui correspond à l'unité d'arc dans un cercle dont le rayon est égal à l'unité de longueur, l'angle au centre a pour mesure le quotient de l'arc par le rayon.*

Scolie. — Les arcs et les rayons étant des quantités d'espèces différentes, on peut les rapporter respectivement à telles unités que l'on veut : ces unités sont tout-à-fait indépendantes l'une de l'autre. Quelquefois on prend pour unité d'arc le quart de la circonférence [dont le rayon est l'unité de longueur]; mais souvent aussi on rapporte l'arc et le rayon à la même unité linéaire ; et l'unité des arcs, supposée rectifiée, est alors égale à l'unité linéaire rectiligne.

§ III. *Détermination du Rapport numérique de la Circonférence au Diamètre.*

283. Ce qui précède (n^os^ 265 et *suiv.*) fournit divers moyens pour arriver au rapport de la circonférence au diamètre.

Ainsi, par exemple, le théorème 1. (n° 265) donnant la valeur du côté du carré inscrit à un cercle dont le rayon est l'*unité* [et l'on pourrait tout aussi bien prendre l'hexagone (n° 267), le décagone (n° 269), ou même le pentédécagone (n° 271)], il s'ensuit que si l'on multiplie par 4 la valeur du côté de ce carré, on aura son périmètre. Supposons ensuite que l'on ait déterminé, par le problème II (n° 273), le côté de l'octogone inscrit au même cercle : on aura le périmètre de cet octogone en multipliant son côté par 8; et l'on obtiendrait de la même manière les périmètres des polygones de 16, de 32, de 64, ... côtés, inscrits au même cercle.

Maintenant, le problème III (n° 275), appliqué successivement aux divers polygones dont nous venons de parler, donnerait les côtés, et par suite les périmètres des polygones circonscrits de même espèce que chacun d'eux.

Or, il résulte d'un théorème démontré *numéro* 186, ou plus simplement, du lemme établi *numéro* 93, que dans la série des opérations que l'on vient d'indiquer, les périmètres des polygones inscrits vont sans cesse en augmentant, tandis qu'au contraire les périmètres des polygones circonscrits vont sans cesse en diminuant. Et comme ils ont la circonférence pour *limite* commune (n° 183), il est clair que l'on peut pousser les calculs assez loin pour que le périmètre de l'un des polygones inscrits et celui du polygone circonscrit correspondant, ne diffèrent plus dans tel ordre que l'on voudra d'unités fractionnaires décimales. Les deux périmètres ainsi obtenus pouvant alors être considérés comme identiques, il est permis de prendre leur valeur commune pour celle de la circonférence, qui se trouve de plus en plus resserrée entre eux : la moitié de cette valeur est le rapport cherché. (*Voyez* la *Géométrie* de M. Lacroix.)

284. Au lieu de chercher la valeur approchée d'une circonférence dont le rayon est déterminé d'avance, comme nous venons d'en indiquer le moyen, on peut au contraire chercher la valeur du rayon, pour une circonférence de longueur déterminée. Cette méthode nous paraissant préférable par la simplicité des calculs, qui n'exigent, d'après les formules du n° 277, que la détermination de *moyennes alternati-*

vement par différence et *par quotient*, nous allons l'exposer avec quelque détail.

Pour cela, considérons encore un des polygones régulier dont il a été question ci-dessus, et prenons de préférence le carré. En représentant son côté par 1, son périmètre vaudra 4, son rayon $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, et son apothème $\frac{1}{2}$.

Supposons actuellement qu'on transforme le carré en un octogone de même périmètre et d'un nombre double de côtés (nº 277) : le rayon de cet octogone sera plus petit que celui du carré, et son apothème sera plus grand. Faisons subir à ce nouveau polygone la même transformation qu'au premier : la différence entre le rayon et l'apothème sera encore moindre. Continuons ainsi à faire subir la même transformation aux polygones successivement obtenus : nous pourrons, en poussant le calcul suffisamment loin, parvenir à un polygone, toujours du même périmètre égal à 4, et dont le rayon différera de l'apothème, d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

≼[Cette dernière assertion peut être vérifiée bien aisément : car, en représentant par R, r, et c, le rayon, l'apothème, et le côté de l'un des polygones successifs, on a

$$R^2 - r^2 = \frac{c^2}{4} \quad (\text{n}^\circ\ 228,\ \textit{coroll.}).$$

Il en résulte (*page* 154) :

$$(R - r)(R + r) = \frac{c^2}{4};$$

d'où, en représentant par r' l'apothème du polygone d'un nombre de côtés double de celui que l'on considère,

$$R - r = \frac{c^2}{4(R + r)} = \frac{c^2}{8r'} \quad (277).$$

Or, c peut devenir plus petit que toute quantité donnée, pourvu que l'on multiplie suffisamment le nombre des côtés du polygone, et d'ailleurs r' va continuellement en augmentant : donc, etc.]≽

Maintenant, il est visible que, par la suite des transformations, le périmètre du polygone tend continuellement à prendre la figure de la circonférence isopérimètre, circonférence dont le rayon est intermédiaire entre les rayons et les apothèmes des polygones successifs. Or, par hypothèse, l'opération a été poussée assez loin pour que la différence du dernier rayon et du dernier apothème fût moindre que toute grandeur donnée, et pût être négligée. Donc le rayon de la *circonférence limite,* qui est compris entre ce rayon et cet apothème, se trouvera déterminé à tel degré d'approximation que l'on voudra; et comme on connaît aussi la circonférence, équivalente au périmètre constant des polygones successifs, c'est-à-dire à 4 unités de longueur, il sera facile d'avoir le rapport de l'un à l'autre.

285. Observons que les nombres $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, qui représentent respectivement l'apothème et le rayon du carré, peuvent être considérés, le premier comme moyen par différence entre 0 et 1, et le second comme moyen par quotient entre 1 et $\frac{1}{2}$; ≼[ce qui revient d'ailleurs à prendre pour premier polygone, celui de 2 côtés (n° 181), dans lequel l'apothème serait 0, le rayon 1, et le périmètre 4]≽. — De là résulte le théorème suivant :

Une suite de nombres dont les deux premiers sont 0 *et* 1, *et dont les autres sont alternativement, à partir du troisième inclusivement, moyens par différence et moyens par quotient entre les deux qui les précèdent immédiatement, converge sans cesse vers la valeur du rayon d'une circonférence égale à* 4.

≼[On peut figurer ce théorème géométriquement par la
Fig. 236. construction suivante : — Soit AOO′ (fig. 236) un triangle isocèle, rectangle en O ; et soit A′ le milieu de O′A ; prolongeons OO′ d'une quantité O′O″ égale à O′A′ ; menons AO″ ; et soit A″ le milieu de cette droite ; prolongeons OO′O″ d'une quantité O″O‴ égale à O″A″, etc. : les droites OO′, O′O″, O″O‴, . . . diminueront sans cesse en convergeant vers le rayon d'une circonférence égale à 4.OA. — De plus, si l'on *projette* (n° 95, *scol.*) les droites O′A′, O″A″, . . ., sur la droite OO′O″O‴ . . ., on aura une autre série de droites qui augmenteront sans cesse en convergeant aussi vers la même limite.

En effet, si l'on rapproche cette construction de celle qui a été donnée pour la résolution du problème v (n° 277), il sera facile de reconnaître que OA étant la moitié du côté du carré inscrit, 1° les droites O'O'', O''O''', O'''O''''...., sont respectivement les moitiés des rayons du carré, de l'octogone isopérimètre, du polygone de 16 côtés,... ; et 2° que les projections, sur OO'O''O'''..., des droites O'A', O''A'', O'''A''', ... sont respectivement les moitiés des apothèmes des mêmes polygones. Or, il résulte évidemment de là, que toutes ces droites tendent vers la moitié de la valeur du rayon d'une circonférence égale à 8.OA, ou vers celle du rayon d'une circonférence égale à 4.OA.

286. Voici maintenant le tableau du calcul numérique, dans lequel r et R, r' et R', r'' et R'', ... représentent respectivement les apothèmes et les rayons des polygones de 2, de 4, de 8, ... côtés, calculés jusqu'à la *septième* décimale.

Nombre des côtés.	APOTHÈME.	RAYON.
2.....	$r = 0,0000000$	$R = 1,0000000$
4.....	$r^{\text{I}} = 0,5000000$	$R^{\text{I}} = 0,7071068$
8.....	$r^{\text{II}} = 0,6035534$	$R^{\text{II}} = 0,6532815$
16.....	$r^{\text{III}} = 0,6284174$	$R^{\text{III}} = 0,6407289$
32.....	$r^{\text{IV}} = 0,6345731$	$R^{\text{IV}} = 0,6376435$
64.....	$r^{\text{V}} = 0,6361083$	$R^{\text{V}} = 0,6368754$
128.....	$r^{\text{VI}} = 0,6364919$	$R^{\text{VI}} = 0,6366836$
256.....	$r^{\text{VII}} = 0,6365878$	$R^{\text{VII}} = 0,6366357$
512.....	$r^{\text{VIII}} = 0,6366117$	$R^{\text{VIII}} = 0,6366237$
1024.....	$r^{\text{IX}} = 0,6366177$	$R^{\text{IX}} = 0,6366207$
2048.....	$r^{\text{X}} = 0,6366192$	$R^{\text{X}} = 0,6366199$
4096.....	$r^{\text{XI}} = 0,6366195$	$R^{\text{XI}} = 0,6366197$
8192.....	$r^{\text{XII}} = 0,6366196$	$R^{\text{XII}} = 0,6366196$

Ainsi une circonférence égale à 4 a pour rayon 0,6366196...., ou pour diamètre 1,2732392...; d'où il résulte que le rapport du diamètre à la circonférence est

$$\tfrac{1}{4}\cdot 1{,}2732392\ldots = 0{,}3183098\ldots,$$

et que celui de la circonférence au diamètre [rapport que nous avons représenté par π (n° 280, *coroll.*)], vaut

$$\frac{10000000}{3183098} = 3{,}14159\ldots (*).$$

287. ≼ [Les calculs précédens sont susceptibles de plusieurs simplifications.

D'abord, on sait que dans l'extraction de la racine carrée, lorsqu'on a calculé plus de la moitié des chiffres décimaux, les autres s'obtiennent par la division (*Voyez* l'*Arithmétique*).

Secondement, on voit qu'à partir du polygone de 512 côtés, les valeurs de l'apothème et du rayon se confondent dans plus de la moitié de leurs chiffres décimaux; d'où il résulte que

---

(*) On peut obtenir par une construction assez simple la longueur approchée d'une circonférence dont on a le rayon. Ce rayon étant pris pour unité, le côté du carré inscrit vaut $\sqrt{2}$ (n° 265), et celui du triangle équilatéral inscrit $\sqrt{3}$ (n° 258); or, on a $\sqrt{2}+\sqrt{3}=3,146\ldots$; donc, la somme faite du côté du carré inscrit et du côté du triangle équilatéral inscrit, égale, à *un demi-centième* près, la demi-circonférence rectifiée.

Il existe un rapport approché de la circonférence au diamètre, qui, bien que peu exact, me paraît cependant mériter d'être connu, parce qu'il donne très facilement une quadrature approchée du cercle, suffisante pour des opérations grossières. Ce rapport est représenté par le nombre $\left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3,16\ldots$, valeur exacte à moins de $\frac{1}{150}$ de la circonférence. En adoptant ce rapport, un cercle qui aurait 81 de rayon, aurait 512 de circonférence; et son aire, comme on le verra dans le chapitre suivant, vaudrait $81 \times 256 = 3^4 \times 4^4 = 12^4 = 144^2$. Ainsi le cercle serait équivalent à un carré construit sur une ligne égale à 144. Ou bien encore, puisque $81 : 144 :: 9 : 16$, le cercle construit sur le rayon 9 [$=3^2$] serait équivalent au carré construit sur le côté 16 [$=4^2$]. Le carré est cependant un peu plus fort, mais d'une quantité moindre que $\frac{1}{150}$ de chacune des deux surfaces.

depuis ce point, on peut prendre des moyens par différence au lieu de moyens par quotiens (*Voyez* l'*Algèbre*).

Troisièmement enfin, dans une série dont chaque terme est la demi-somme des deux qui le précèdent immédiatement, les termes convergent sans cesse vers une limite qui a pour valeur le premier terme augmenté ou diminué [suivant que le second est plus grand ou plus petit que le premier] des deux tiers de la différence des deux premiers termes.

Pour démontrer cette dernière proposition, soit a et $a \pm d$ les deux premiers nombres de la série; les autres pourront s'écrire ainsi :

$$a \pm \tfrac{2}{3}\, d \mp \tfrac{1}{6}\, d,$$
$$a \pm \tfrac{2}{3}\, d \pm \tfrac{1}{12}\, d,$$
$$a \pm \tfrac{2}{3}\, d \mp \tfrac{1}{24}\, d, \ldots \text{etc.};$$

or, tous ces nombres ont évidemment pour limite $a \pm \frac{2}{3}\, d$; d'où il résulte que le dernier rayon a pour valeur

$$0{,}6366357 - 0{,}0000160 = 0{,}6366197.$$

Il y aurait encore à faire, sur le calcul précédent, plusieurs autres observations de détail. Ainsi, nous n'avons présenté le tableau que des 7 premières décimales des rayons et des apothèmes; mais il est facile de concevoir que ces 7 premières décimales ne sauraient être exactes partout, si les opérations qui y conduisent, particulièrement dans le commencement du calcul, n'étaient poussées beaucoup plus loin. Car on sait qu'en général, et sauf les simplifications, le nombre des chiffres significatifs exacts d'une racine carrée, n'est que la moitié du nombre des chiffres du carré proposé. (*Voyez* les *Élémens de Géométrie de* SCHWAB, ainsi que les *Annales de Mathématiques,* Tome VI, pages 192 et suivantes, et Tome XVII, page 148.)]B

288. La valeur que nous venons d'obtenir pour le nombre π, convertie en fraction continue (*Voyez* l'*Arithmétique*), donne pour premières réduites les 4 suivantes :

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113}.$$

Le premier rapport $\frac{3}{1}$ est très peu approché [à $\frac{1}{7}$ près], et n'est presque jamais employé. — Le second $\frac{22}{7}$, qui porte le nom d'*Archimède*, est assez usité; il est exact à moins d'*un centième* près. — Le troisième $\frac{333}{106}$ porte le nom de *Rivard;* on ne l'emploie jamais, parce que le suivant donne, avec le même nombre de chiffres, une valeur beaucoup plus approchée. — Enfin, le dernier $\frac{355}{113}$, qui porte le nom de *Métius*, a l'avantage de pouvoir être facilement retenu, parce qu'il s'obtient en partageant en 2 tranches de 3 chiffres le nombre 113 355; il est exact à moins d'*un millionième* près.

On a, par d'autres méthodes, poussé le calcul de la valeur de π jusqu'à 140 décimales. Voici les 20 premières, qui sont plus que suffisantes dans les applications ordinaires :

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846.$$

Il est souvent utile de connaître le logarithme du nombre π; ce logarithme est le suivant :

$$\log.\pi = 0,49714\ 98726\ 94153\ 85435.$$

289. Enfin, pour terminer ce chapitre, faisons connaître le nombre des degrés ou des grades contenus dans l'arc égal au rayon (nº 282, *scol.*) : on y parvient en divisant $180°$ ou 200^{gr} par le nombre π, et l'on obtient ainsi $57°,17',45''$, ou $63^{gr},66198$. En multipliant ces nombres par la longueur d'un arc, donné en parties du rayon, on a le nombre des degrés ou des grades contenus dans cet arc.

CHAPITRE IV.

DES AIRES.

290. Nous avons dit dans les préliminaires que l'on nommait Aire *l'étendue considérée dans une surface*. Cette étendue, pour être *mesurée*, c'est-à-dire pour être *évaluée en nombre*, doit être rapportée à une unité. A cet effet, on prend un *carré dont le côté est égal à l'unité de longueur*; et alors, *confondant l'étendue avec sa mesure*, on nomme Aire le *rapport d'une étendue superficielle à l'étendue superficielle du carré construit sur l'unité de longueur*. — De là vient que l'on nomme *quadrature* l'évaluation d'une aire.

§er I. *Mesure des Aires.*

Théorème I. (Fig. 237.)

291. *Deux rectangles*, AD, AF, *de même base* AB *sont proportionnels à leurs hauteurs*, AC, AE; [c'est-à-dire : les aires de deux rectangles qui ont des bases égales, sont proportionnelles à leurs hauteurs]. Fig. 237.

D'abord, si les hauteurs étaient égales, en même temps que les bases, les rectangles seraient nécessairement égaux (nº 149); et de plus, il est évident que les rectangles de même base augmentent ou diminuent en même temps que leurs hauteurs.

Cela posé, faisons coïncider les bases AB; les côtés adjacens prendront la même direction, chacun à chacun. Admettons maintenant, pour fixer les idées, que AE soit contenu *deux* fois dans AC, de A en G, avec un reste GC moindre que AE ; puis, dans cette hypothèse, menons à AB la parallèle GI. Il est clair que le rectangle EI sera égal au rectangle AF, et que le rectangle GD sera moindre que AF ; par conséquent, le rectangle AD contiendra autant de fois le rectangle AF, en nombre entier, que la hauteur AC contient la hauteur AE.

On prouverait de même, en portant le reste GC sur AE et menant des parallèles, que le rectangle AF contient autant de fois le rectangle GD, en nombre entier, que AE contient GC ; .... et ainsi de suite (*Voy.* les nos 61 et *suiv.*, et le no 195).

Il résulte de là que le rapport des rectangles AD, AF, est identiquement égal au rapport des hauteurs AC, AE : c'est-à-dire que l'on a

$$AD : AF :: AC : AE. \qquad C. Q. F. D.$$

Corollaire. — La base et la hauteur d'un rectangle pouvant être prises l'une pour l'autre (no 149), il s'ensuit que *Deux rectangles de même hauteur sont proportionnels à leurs bases.*

Théorème II. (Fig. 238.)

Fig. 238. 292. *Deux rectangles quelconques,* AD, AG, *sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

On peut placer les rectangles de manière qu'ils aient un angle opposé en A. Cela posé, soit I le point d'intersection de DC avec GE ; on aura

$$AD : AI :: AB : AE,$$

$$AI : AG :: AC : AF ;$$

d'où, en multipliant par ordre et supprimant AI,

$$AD : AG :: AB \times AC : AE \times AF.$$

Scolie. — On pourrait étendre ce théorème, ainsi que le précédent, à des parallélogrammes quelconques, pourvu toutefois qu'ils eussent les mêmes angles, en remplaçant, dans les énoncés, la base et la hauteur par deux côtés consécutifs.

Corollaire. — Il résulte de là que deux rectangles, ou deux parallélogrammes qui ont un angle commun, sont équivalens lorsque leurs côtés consécutifs sont inversement proportionnels.

Par exemple, si, d'un point quelconque G (fig. 239) pris sur la diagonale BC d'un parallélogramme AD, on mène les droites MN, OP, respectivement parallèles à ses côtés, on formera deux parallélogrammes partiels AG, GD, ayant les côtés inversement proportionnels, et qui seront équivalens entre eux. En effet, les deux parallélogrammes partiels ON, MP, semblables au parallélogramme total AD (nos 217 et 208), donnent la proportion Fig. 239.

$$GM : GP :: GN : GO,$$

d'où $$GM \times GO = GN \times GP.$$

Par conséquent les deux parallélogrammes AG, GD, étant proportionnels à deux produits égaux, sont équivalens.

293. Remarque *générale sur la mesure des aires.* — Comparons le rectangle quelconque AD (fig. 240) au carré *ad*; nous aurons d'abord Fig. 240.

$$AD : ad :: AB \times AC : ab \times ac.$$

Mais si l'on suppose que *ab* [$= ac$] soit l'unité linéaire, et que l'aire du carré *ad* ait été prise pour unité de surface comme nous l'avons admis plus haut (n° 290), alors la proportion précédente deviendra simplement

$$AD = AB \times AC.$$

Ainsi, *Tout rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur*: c'est-à-dire que le rapport abstrait de l'aire du rectangle AD à *l'unité superficielle* est égal au produit des rapports abstraits des lignes AB et AC à l'unité linéaire, *l'unité superficielle étant le carré construit sur l'unité linéaire.*

Par exemple, soit $AB = 3$ et $AC = 4$ (fig. 241), partageons AB en 3 parties égales et AC en 4 parties égales entre elles ainsi qu'aux premières; puis menons, par les points de division, des Fig. 241.

parallèles aux côtés du rectangle AD : nous aurons décomposé ce rectangle en $4 \times 3 = 12$ carrés unitaires.

De là vient que l'on nomme quelquefois *rectangle de deux nombres*, leur produit.

On se sert aussi du nom commun de *dimension* (*Voy.* le nº 2, *note*) pour désigner la base et la hauteur d'un rectangle ; et alors on dit qu'*Un rectangle a pour mesure le produit de ses deux dimensions.*

La mesure d'une surface quelconque est toujours exprimée, comme on le verra dans ce chapitre, soit par un produit de *deux facteurs linéaires*, soit par une somme de produits de cette espèce : ces deux facteurs se nomment encore *dimensions*, quelle que soit la figure à évaluer.

Tout carré a pour mesure la seconde puissance de son côté. De là le mot *carré* pour désigner la seconde puissance d'un nombre.

Théorème III. (Fig. 242.)

Fig. 242. 294. *Tout parallélogramme* ABCD *est équivalent à un rectangle de même base et de même hauteur.*

En effet, prolongeons le côté CD; et par les extrémités du côté opposé AB élevons les perpendiculaires AE, BF, terminées à la droite CD en E et en F. Cela fait, si l'on retranche de la figure totale ABDE le triangle ACE, il reste le parallélogramme AD, et si l'on retranche de la même figure le triangle BDF, il reste le rectangle AF ; or, les deux triangles ACE, BDF, sont égaux (nº 131) : donc le parallélogramme AD est équivalent au rectangle AF de même base AB et de même hauteur AE.

Scolie. — *Tout parallélogramme* AD *a pour mesure le produit de sa base* AB *par sa hauteur* AE.

Théorème IV. (Fig. 101.)

Fig. 101. 295. *Tout triangle* NOP *est équivalent à la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur.*

En effet si, par les points N et O, on mène respectivement à

OP et à NP les parallèles NM et OM, on formera un parallélogramme MP double du triangle (n° 151, *scol.* 2), et qui aura même base et même hauteur que lui; or le parallélogramme est équivalent à un rectangle de même base et de même hauteur; donc, etc.

296. REMARQUE *sur la mesure du triangle.* — Tout polygone étant décomposable en triangles, l'évaluation de l'aire d'un polygone quelconque se ramène toujours à celle de l'aire du triangle; c'est pourquoi il est utile d'avoir plusieurs expressions de cette dernière; nous allons indiquer les principales.

Ainsi 1° il résulte immédiatement du théorème précédent, que *Tout triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

≼[2° On peut *Exprimer l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés*, au moyen de la formule trouvée dans le *numéro* 235. En effet, si dans l'expression $\frac{1}{2}ch$, laquelle, d'après ce qu'on vient de dire (1°), représente l'aire du triangle, on met pour h sa valeur, on obtient pour nouvelle expression de cette aire $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.]≽

3° Il suffit de se rappeler ce qui a été dit n° 129, et de jeter les yeux sur la figure 83, pour voir que *Tout triangle a* encore *pour mesure la moitié du produit de son périmètre par le rayon du cercle inscrit.* Fig. 183.

≼[4° Enfin *Tout triangle* ABC (fig. 198) *a pour mesure le produit de ses trois côtés, divisé par le double du diamètre* BD *du cercle circonscrit.* Fig. 198.

En effet, AC étant pris pour base, et BE étant la hauteur correspondante, le triangle a pour mesure

$$\tfrac{1}{2}\text{AC}\times\text{BE};$$

mais on a $\quad \text{AB}\times\text{BC}=\text{BD}\times\text{BE}$ (n° 238, *scol.*),

d'où $$\text{BE}=\frac{\text{AB}\times\text{BC}}{\text{BD}};$$

donc $$\textit{triangle }\text{ABC}=\frac{\text{AB}\times\text{BC}\times\text{CA}}{2.\text{BD}}.$$]≽

297. REMARQUE *sur la mesure des autres figures planes.* — De la mesure du triangle dérive, comme nous venons de le dire, la mesure de toutes les figures planes.

Fig. 106. Ainsi 1° *Tout trapèze* MP (fig. 106) *a pour mesure le produit de sa hauteur* par la demi-somme des côtés parallèles, ou *par la droite qui joint les milieux des côtés latéraux* (n° 161) :

Car, en menant la diagonale MP, on décompose le trapèze en deux triangles qui ont respectivement pour base chacune des bases du trapèze, et même hauteur que lui ; d'où, etc.

Fig. 121. 2° *Tout polygone régulier* ABCDEF (fig. 121) *a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par son apothème.*

C'est ce que l'on voit facilement en faisant la somme de tous les triangles intégrans (n° 175, *scol.* 1er).

3° Plus généralement, *Tout polygone circonscriptible au cercle a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par le rayon du cercle inscrit.* [Nous avons déjà vu ci-dessus (n° 296, 3°) le cas particulier du triangle.]

4° *Le cercle* étant la limite (n° 183) des polygones qui lui sont circonscrits, ou bien pouvant être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits, *a aussi pour mesure la moitié du produit de sa circonférence* [rectifiée] *par son rayon.*

De même *Tout secteur de cercle a pour mesure la moitié du produit de l'arc correspondant par son rayon.*

Quant aux segmens, suivant qu'ils sont plus petits ou plus grands qu'un demi-cercle, ils s'obtiennent toujours en augmentant ou en diminuant l'aire d'un secteur, de celle d'un triangle isocèle qui a pour base la corde correspondante et pour sommet le centre du cercle.

Au reste, pour ne rien laisser à désirer sur la mesure de l'aire du cercle, nous démontrerons tout à l'heure ces dernières propositions d'une autre manière.

298. ≤[La décomposition en triangles n'est pas la seule que l'on puisse employer avec avantage pour évaluer l'aire d'un

polygone. Nous avons indiqué *numéro* 166, un autre genre de décomposition qui rend cette évaluation encore plus facile à effectuer : le polygone (fig. 116) se trouvant partagé en trapèzes et en triangles rectangles, on n'a à considérer, pour en avoir la mesure, que des divisions de la ligne AE et des perpendiculaires à cette ligne : l'aire du polygone total est la somme des aires des figures partielles. Fig.116

Si le polygone avait, au lieu du côté CD, un angle rentrant CKD tel que DK coupât la perpendiculaire Cc, on mènerait CD et l'on opérerait de la même manière, en observant toutefois de retrancher du résultat obtenu l'aire du triangle CKD. — Etc., etc.

On peut encore enceindre le polygone dans un rectangle MP dont on évaluera l'aire ; puis, après avoir abaissé des perpendiculaires Bb', Dd',... sur les côtés opposés MN, OP, on retranchera, de l'aire du rectangle, celles des triangles et des trapèzes $AMb'B$, $Bb'C$,... : on aura ainsi l'aire du polygone.

On emploie des moyens analogues aux précédens pour évaluer *par approximation* l'aire d'une surface plane terminée par une ligne courbe ABCDEFGI (fig. 243). On peut d'abord en séparer un polygone ACEG ; et alors il reste à évaluer les portions *mixtilignes* ABC, CDE, etc. Pour évaluer ABC, partageons la droite AC en parties égales très petites, AM, MN, NO ... ; puis élevons, par les points de division, les perpendiculaires Mm, Nn, Oo, ... terminées à la courbe. Si les divisions de la droite AC sont suffisamment petites, les portions de courbe Am, mn, no,... pourront sans erreur sensible être regardées comme de petites lignes droites ; et l'on aura approximativement : Fig.243.

$$
\begin{aligned}
AMm &= \tfrac{1}{2}AM \times Mm,\\
MNnm &= \tfrac{1}{2}MN \times (Mm + Nn),\\
NOon &= \tfrac{1}{2}NO \times (Nn + Oo),\\
OPpo &= \tfrac{1}{2}OP \times (Oo + Pp),\\
PCp &= \tfrac{1}{2}PC \times Pp\,;
\end{aligned}
$$

d'où, puisque $AM = MN = NO \ldots$,

$$ABC = AM \times (Mm + Nn + Oo + Pp).$$

Si l'on voulait évaluer un espace tel que MNOP*ponm*, qui ne contient que des trapèzes, on obtiendrait l'expression

$$\mathrm{MN} \times (\tfrac{1}{2}\mathrm{M}m + \mathrm{N}n + \mathrm{O}o + \tfrac{1}{2}\mathrm{P}p).$$

Cette méthode donnera un résultat d'autant plus exact que les divisions AM, MN, ... seront plus petites.

L'application des divers procédés que nous venons d'indiquer, à la mesure des terrains, constitue la science de l'*Arpentage*, branche de la *Géométrie pratique*, pour laquelle nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer à l'excellent *Manuel d'Arpentage* de M. Lacroix.

Terminons par les démonstrations relatives au cercle, dont nous avons parlé ci-dessus.

Théorème V. (Fig. 244.)

Fig. 244. 299. *Tout cercle* OA *est équivalent à un triangle qui aurait pour base la circonférence rectifiée, et le rayon pour hauteur.*

Supposons en effet que $\frac{1}{2}\mathrm{OA} \times circ.\mathrm{OA}$, mesure du triangle que nous venons de désigner, ne soit pas la mesure du cercle OA, et que l'on ait

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{OA} \times circ.\,\mathrm{OA} = cercle\,\mathrm{OA}',$$

OA′ étant, par exemple, $< \mathrm{OA}$.

Cela posé, *inscrivons* au cercle OA un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence OA′ (nº 279); représentons l'aire de ce polygone par *pol.* OA, son périmètre par *périm.* OA, et soit OB son apothème; nous aurons :

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{OB} \times périm.\,\mathrm{OA} = pol.\mathrm{OA}.$$

Or, en comparant ces deux égalités, comme on a $\mathrm{OB} < \mathrm{OA}$, et $périm.\mathrm{OA} < circ.\,\mathrm{OA}$, il s'ensuit que l'on devrait trouver $pol.\,\mathrm{OA} < cercle\,\mathrm{OA}'$, tandis qu'au contraire on a

$$pol.\,\mathrm{OA} > cercle\,\mathrm{OA}';$$

ce qui est *absurde*.

On prouverait de même que $\frac{1}{2}\mathrm{OA} \times circ.\,\mathrm{OA}$ ne peut être la mesure d'un cercle plus grand que le cercle OA. [Le raisonnement est un peu plus simple dans cette seconde hypothèse quand on circonscrit un polygone au cercle OA, parce que OA est alors facteur commun.]

COROLLAIRE 1er. — En nommant r le rayon d'un cercle et d son diamètre, son aire a pour expression πr^2 ou $\frac{1}{4}\pi d^2$.

COROLL. 2. — *Le cercle est plus grand que tout polygone régulier isopérimètre* (nº 183). — ≶ [On peut démontrer la même proposition pour un polygone quelconque (*Voyez la Géométrie* de M. LEGENDRE); et il en résulte que *Le cercle est, de toutes les figures, celle qui, pour un périmètre donné, a le* MAXIMUM *d'aire,* ou *qui, pour une aire donnée, a le* MINIMUM *de périmètre.*] ≷

THÉORÈME VI. (Fig. 245.)

300. *Tout secteur de cercle,* AOB, *est équivalent à un triangle qui aurait pour base l'arc correspondant* AB [supposé rectifié], *et le rayon* OA *pour hauteur.* Fig. 245.

En effet, on a (nº 197) :

$$\textit{sect. } AOB : \tfrac{1}{2}\, OA \times \textit{circ. } OA :: \textit{arc } AB : \textit{circ. } OA;$$

d'où l'on tire

$$\textit{sect. } AOB = \tfrac{1}{2}.\textit{arc } AB \times OA.$$

COROLLAIRE. — *Tout segment plus petit qu'un demi-cercle a pour mesure la moitié du produit du rayon* OA (fig. 245) *par la différence entre l'arc correspondant* ACB *et son sinus* BD (nº 101, *scol.* 2).

En effet, on a

$$\textit{segment } ACB = \textit{secteur } AOB - \textit{triangle } AOB;$$

or $\quad \textit{secteur } AOB = \frac{1}{2} OA \times \textit{arc } AB,$

et $\quad \textit{triangle } AOB = \frac{1}{2} OA \times BD:$

donc $\quad \textit{segment } ACB = \frac{1}{2} OA \times (\textit{arc } AB - BD).$

On démontre de la même manière, que *Tout segment plus grand qu'un demi-cercle a pour mesure la moitié du produit du rayon par la somme de l'arc et de son sinus.*

*

Théorème VII. (Fig. 246.)

Fig. 246. 301. *La couronne circulaire* (n° 141) *comprise entre deux circonférences concentriques*, OA, OA', *est équivalente à un cercle qui aurait pour diamètre une corde* CD *de la circonférence extérieure, menée tangentiellement à la circonférence intérieure.*

En effet, l'aire de la couronne a pour valeur (n° 299, *coroll.* 1er) :

$$\pi(OA^2 - OA'^2) = \pi(OA + OA')(OA - OA') \quad (\textit{page } 154)$$
$$= \pi . BA' \times A'A;$$

or $\quad BA' \times A'A = A'C^2$ (n° 227, *scol.* 2, 1°) :

donc l'aire de la couronne a pour valeur $\pi . A'C^2$; elle est par conséquent équivalente à celle d'un cercle qui aurait pour rayon A'C, ou pour diamètre CD. *C. Q. F. D.*

Scolie. — On peut encore mesurer une couronne circulaire au moyen d'une formule analogue à celle que nous allons donner dans le théorème suivant.

Théorème VIII. (Fig. 247.)

Fig. 247. 302. *La différence de deux secteurs semblables*, AOB, A'OB', *est équivalente à un trapèze qui aurait les mêmes bases* [supposées rectifiées], *et la différence de leurs rayons pour hauteur.*

Superposons d'abord les deux angles au centre; puis, par le point B, élevons sur le rayon OB une perpendiculaire BC équivalente à l'arc AB supposé rectifié; tirons OC et menons encore, dans le triangle OBC, B'C' parallèle à BC. Nous aurons ainsi :

$$AB : A'B' :: OB : OB' :: BC : B'C';$$

or, par hypothèse, $\quad AB = BC$: donc $\quad A'B' = B'C'$.

Il résulte de là que le secteur AOB est équivalent au triangle BOC, et le secteur A'OB' au triangle B'OC'; donc le *trapèze circulaire* ABB'A' est équivalent au trapèze rectiligne BCC'B'. *C. Q. F. D.*

Scolie. — La figure ABB'A' a donc pour mesure

$$BB' \times \frac{1}{2}(BC + B'C') \text{ (n° 297, 1°)} = AA' \times \frac{1}{2}(AB + A'B').$$

Or, si par le point a milieu de AA', on décrit, du point O comme centre et du rayon Oa, l'arc ab semblable aux arcs AB, A'B', on aura

$$AB : A'B' : ab :: BC : B'C' : bc,$$

d'où

$$AB + A'B' : ab :: BC + B'C' : bc;$$

et comme (n° 161)

$$bc = \frac{1}{2}(BC + B'C'),$$

il en résulte encore

$$ab = \frac{1}{2}(AB + A'B');$$

et par conséquent la figure ABB'A' a aussi pour mesure le produit $ab \times AA'$.

§ II. *Comparaison des Aires.*

Théorème IX. (Fig. 248 et 249.)

303. *Deux triangles*, ABC, ADE, *qui ont un angle égal* A, *sont proportionnels aux rectangles des côtés qui comprennent l'angle égal.* Fig. 248 et 249.

Après avoir placé les angles égaux l'un sur l'autre, menons BE : les deux triangles ABC, ABE, pourront être considérés comme ayant respectivement pour bases AC, AE ; ils auront donc pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée du sommet commun B sur la droite AC, et par conséquent ils seront proportionnels à leurs bases (n° 296, 1°), c'est-à-dire que l'on aura :

$$ABC : ABE :: AC : AE.$$

En comparant de même les triangles ABE, ADE, on aura encore :

ABE : ADE :: AB : AD.

Maintenant, si l'on multiplie ces deux proportions par ordre, et que l'on supprime, dans les deux termes du premier rapport, le facteur commun ABE, il viendra :

ABC : ADE :: AB $\times$ AC : AD $\times$ AE.

C. Q. F. D.

Scolie 1er. — Le théorème précédent pourrait se démontrer plus simplement d'après le scolie du n° 292, en observant que chaque triangle est la moitié d'un parallélogramme construit sur deux de ses côtés et l'angle compris.

Scol. 2. — La réciproque n'est pas vraie.

Fig. 248. *Corollaire* 1er. — Le triangle ABE (fig. 248) serait moyen proportionnel entre les triangles ABC, ADE, si BC et DE étaient parallèles ; en effet, on a dans ce cas :

AB : AD :: AC : AE ;

d'où il résulte, d'après les deux premières proportions établies ci-dessus,

ABC : ABE :: ABE : ADE.

Fig. 249. *Coroll.* 2. — Les deux triangles ABC, ADE (fig. 249), seraient équivalens si AB $\times$ AC était égal à AD $\times$ AE, c'est-à-dire si DC était parallèle à BE (n° 213) ; c'est d'ailleurs ce qu'il est facile de voir directement.

≶ [*Coroll.* 3. — Les droites menées par les sommets d'un triangle et par le centre des moyennes distances (n° 248, *coroll.* 1er) partagent le triangle proposé en *six* triangles partiels équivalens.] ≷

Théorème X. (Fig. 172 et 173.)

Fig. 172 et 173. 304. *Deux triangles semblables*, ABC, A'B'C', *sont proportionnels aux carrés de leurs côtés homologues.*

En effet, les triangles ABC, A'B'C', étant équiangles (n° 215), on a, d'après le théorème précédent,

ABC : A'B'C' :: AB $\times$ AC : A'B' $\times$ A'C' ;

mais comme d'ailleurs (n° 207)

$$AC : A'C' :: AB : A'B',$$

il en résulte, en multipliant ces deux proportions par ordre et supprimant respectivement AC et A'C' dans les antécédens et dans les conséquens,

$$ABC : A'B'C' :: AB^2 : A'B'^2, \text{ ou } :: AC^2 : A'C'^2, \text{ ou } :: BC^2 : B'C'^2.$$

Théorème XI. (Fig. 174 et 175.)

305. *Deux polygones semblables* ABCDE, A'B'C'D'E', *sont proportionnels aux carrés de leurs côtés homologues.* Fig. 174 et 175.

En effet, les deux polygones étant, d'après leur définition (n° 208), composés de triangles semblables qui, comparés entre eux, sont, chacun à chacun, dans un même rapport, celui des carrés des côtés homologues, il s'ensuit, d'après la propriété des rapports égaux (*Voy.* le n° 222) que les deux polygones sont aussi dans le même rapport.

Corollaire 1er. — *Les figures semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs lignes homologues* (n° 209).

Ainsi, *Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont proportionnels aux carrés de leurs côtés, ou de leurs rayons, ou de leurs apothèmes, ou de leurs périmètres* (n° 209).

De même, *Les cercles sont proportionnels aux carrés de leurs rayons, ou de leurs diamètres, ou de leurs circonférences* [rectifiées].

De même encore, *Les secteurs semblables* (n° 281, *coroll.* 1er) *sont proportionnels aux carrés de leurs rayons ou de leurs arcs* [rectifiés].

Coroll. 2. — *Si, sur les côtés d'un triangle rectangle* ABC Fig. 250
(fig. 250), *comme homologues, on construit trois figures semblables, la figure construite sur l'hypoténuse sera équivalente à la somme des figures construites sur les deux autres côtés.*

En effet, ces trois figures sont proportionnelles aux carrés des côtés sur lesquels elles sont respectivement construites (*coroll.* 1[er]); or, le carré de la valeur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des valeurs des deux autres côtés : donc etc.

La décomposition du triangle rectangle en deux triangles partiels semblables au triangle total (nº 227, 1º) rentre comme cas particulier dans le corollaire précédent.

Ce corollaire s'applique également à trois cercles qui auraient pour diamètres respectifs les côtés du triangle ; de là résulte encore la conséquence suivante :

Fig. 251. COROLL. 3. — *Si, sur les côtés d'un triangle rectangle* ABC (fig. 251), *comme diamètres, on décrit trois circonférences, l'aire des deux* LUNULES *résultantes*, ADBF, AECG, *comprises* entre la grande circonférence et les deux petites, *est équivalente à celle du triangle.*

En effet, le demi-cercle BDAEC étant équivalent à la somme des demi-cercles AFB, AGC, si l'on retranche de part et d'autre les deux segmens ADB, AEC, il en résulte d'une part le triangle, et d'autre part les deux lunules ; d'où etc.

THÉORÈME XII.

306. *Si les lignes homologues de deux figures semblables sont proportionnelles aux lignes homologues de deux autres figures semblables* [entre elles, mais non pas nécessairement semblables aux premières], *les aires de celles-ci seront proportionnelles aux aires de celles-là ; — et réciproquement.*

Soient A, B, les deux premières figures, et a, b, deux de leurs lignes homologues : on aura

$$A : B :: a^2 : b^2.$$

Soient de même C, D, les deux dernières figures, et c, d, deux de leurs lignes homologues : on aura encore

$$C : D :: c^2 : d^2.$$

Mais, par hypothèse,

$$a : b :: c : d,$$

d'où

$$a^2 : b^2 :: c^2 : d^2 ;$$

donc
$$A : B :: C : D.$$

Il serait facile de prouver également, en renversant la démonstration, que si
$$A : B :: C : D,$$
il en résulte
$$a : b :: c : d.$$

Scolie. — La proposition a également lieu quand les quatre figures sont semblables.

Corollaire. — Si trois figures sont semblables, et qu'une ligne de l'une soit moyenne proportionnelle entre les lignes homologues des deux autres, l'aire de la première figure sera moyenne proportionnelle entre les aires des deux dernières; — et *réciproquement.*

307. REMARQUE *générale sur les aires.* — Nous terminerons ce chapitre et le second Livre par un rapprochement très important.

Dans les deux derniers paragraphes du premier chapitre de ce Livre, ainsi qu'en divers autres endroits, nous avons démontré un grand nombre de théorèmes dans lesquels on considère le produit des valeurs numériques de deux lignes. Or, nous savons maintenant qu'un semblable produit représente le rectangle construit sur les deux lignes (n° 293), [rectangle qui devient un carré lorsque ces deux lignes sont égales]. De là résulte une nouvelle interprétation toute géométrique de ces théorèmes, et une nouvelle manière de les énoncer.

C'est ainsi, par exemple, que les formules d'*Algèbre* que nous avons rappelées à la page 154 donnent lieu aux *théorèmes* suivans:

1° *Le carré construit sur la somme* AC (fig. 252) *de deux lignes*, AB, BC, *est équivalent au carré fait sur la première, plus le carré fait sur la seconde, plus le double du rectangle construit sur les deux lignes;* Fig. 252.

2° *Le carré construit sur la différence* AB (fig. 252) *de deux lignes*, AC, BC, *est équivalent au carré construit sur la pre-*

mière, plus le carré construit sur la seconde, moins le double du rectangle construit sur les deux lignes;

Fig. 253. 3° *Le rectangle* AF (fig. 253) *construit sur la somme* AC *et la différence* AD [= AE] *de deux lignes*, AB, BC [= BD], *est équivalent au carré* AI *construit sur la plus grande, moins le carré* GI *construit sur la plus petite.*

Il suffit, pour ainsi dire, de jeter les yeux sur les figures relatives à ces théorèmes, pour en apercevoir sur-le-champ la vérité.

Mais toutes les propositions de ce genre ne sont pas immédiatement de la même évidence; et un grand nombre d'entre elles exigeraient des démonstrations spéciales. Nous nous bornerons ici à considérer celle que l'on déduit du théorème démontré n° 228, et qui n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du corollaire 2e du théorème XI (n° 305). Il existe un très grand nombre de manières de parvenir à cette proposition que l'on peut regarder comme la plus importante de toutes celles de ce genre; et en raison de son fréquent usage et de sa fécondité, nous allons donner ou indiquer encore quelques-unes des démonstrations qui y conduisent.

Théorème XIII. (Fig. 254 et 255.)

308. *Le carré* BCDE *construit sur l'hypoténuse* BC *d'un triangle rectangle* ABC *est équivalent à la somme des carrés,* ABFG, ACIK, *construits respectivement sur les deux autres côtés*, AB, AC.

Fig. 254. 1re *Démonstration.* — Les trois carrés étant supposés construits en dehors du triangle ABC (fig. 254), abaissons, du sommet A de l'angle droit, une perpendiculaire AL sur l'hypoténuse, et prolongeons cette perpendiculaire jusqu'à la rencontre de DE en M : le carré BE se trouvera décomposé en deux rectangles BM et CM. Menons de plus AD et CG.

Cela posé, les angles ABD et GBC sont égaux comme étant respectivement composés d'un angle droit et d'une partie commune ABC. De plus, AB = BG et BC = BD comme étant deux à deux les côtés d'un même carré; donc

$$triangle\ DBA = triangle\ CBG\ (n^o\ 131).$$

Maintenant, le triangle DBA est moitié du rectangle BM (n° 295) comme ayant même base BD et même hauteur BL; de même, le triangle CBG est moitié du carré AG comme ayant même base BG et même hauteur BA; donc

$$rectangle\ BM = carré\ AG.$$

On prouverait de même que

$$rectangle\ CM = carré\ AK;$$

et comme $\quad rectangle\ BM + rectangle\ CM = carré\ BE,$

il en résulte

$$BE = AG + AK. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

2° *Démonstr.* — Les trois carrés étant disposés comme dans la démonstration précédente, construisons, en dehors de la figure, le triangle NED (fig. 255) égal au triangle ABC, en faisant l'angle DEN = ABC, et l'angle EDN = ACB; puis menons les droites AN, GAK, et FI. Cela posé, il est facile de prouver que les quatre quadrilatères ABDN, NECA, GBCK, et GFIK, sont égaux (n° 169); d'où il résulte, d'abord que les deux hexagones ABDNEC et GBCKIF sont équivalens, et ensuite, par la soustraction des triangles égaux ABC, NED, AFI, que le carré BE équivaut à la somme des carrés AG et AK. (*Voyez* le *Manuel de Géométrie* de M. TERQUEM.) Fig. 255.

≤ [3° et 4° *Démonstr.* — On construit un carré sur la droite AO égale à la somme AB + AC (fig. 256), ou à la différence AB — AC (fig. 257), puis un autre carré sur l'hypoténuse BC, comme l'indiquent les deux figures. Alors, on voit que le carré construit sur cette somme (fig. 256) ou sur cette différence (fig. 257) se compose en augmentant (fig. 256) ou diminuant (fig. 257) le carré construit sur l'hypoténuse, de *quatre fois le triangle* proposé, c'est-à-dire de *deux fois le* Fig. 256 et 257.

rectangle construit sur les côtés de l'angle droit. Comparant ces résultats avec la composition connue du carré construit sur la somme ou sur la différence de deux lignes (*page* 154, 1° et 2°), on en conclut facilement la proposition dont il s'agit.

Scolie. — Les trois dernières parties ainsi que les corollaires du théorème démontré n° 227, de même que les théorèmes suivans (n° 229 — 234), donneraient lieu à autant de nouvelles propositions du même genre que la précédente, dont il serait superflu de donner même les énoncés. Nous citerons cependant encore la suivante, qui se déduit du *numéro* 265 (*scol.* 1er) et que l'on peut vérifier immédiatement sur la figure :

Fig. 258. *Le carré* MP (fig. 258) *construit sur la diagonale d'un carré* AD *est double de celui-ci.*

FIN DU LIVRE DEUXIÈME.

PROBLÈMES
DE GÉOMÉTRIE PLANE (*).

CHAPITRE PREMIER.

PROBLÈMES GRAPHIQUES.

§ I^er. *Problèmes sur la Construction des Perpendiculaires, des Parallèles, des Angles, des Polygones, du Cercle,* etc.

PROBLÈME I. (Fig. 259.)

309. *Par un point* O *pris sur une droite* MN [supposée indéfinie] *élever une perpendiculaire sur cette droite.* Fig. 259.

Analyse. — Soit pris, sur la droite MN, OA = OB. Tout point également distant des points A et B appartient à la perpendiculaire cherchée (n° 97) : le problème sera donc résolu si l'on trouve, outre le point O, un second point également distant des points A et B.

Synthèse. — 1° Marquons sur MN, de part et d'autre du point O, et à des distances égales, deux points quelconques A, B [ce qui se fait au moyen du compas (n° 25)]. — 2° Des points A et B comme centres, et d'un même rayon arbitraire [mais toutefois plus grand que OA = OB], décrivons deux arcs de cercle qui se coupent en un point C. — 3° Tirons la droite OC.

(*) *Voyez* les n^os 22 — 26; 53 — 58; 60, 61, et *suiv.*; et le n° 197.

— OC est la perpendiculaire cherchée, d'après ce que l'on vient de voir en faisant l'analyse du problème.

Scolie 1er. — Pour que les deux circonférences décrites des points A et B comme centres, se coupent, il est nécessaire et suffisant que leur rayon soit plus grand que OA : car alors la distance des centres est moindre que la somme des rayons, et plus grande que leur différence puisque cette différence est nulle (*Voy.* le n° 145).

Scol. 2. — Cette construction fournit le moyen de

Mener une tangente à un cercle, par un point donné sur sa circonférence [le centre étant supposé connu] :

Car pour cela il suffit d'élever une perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui aboutit au point de tangence (n° 102).

Problème II. (Fig. 260.)

310. *D'un point pris hors d'une droite* [supposée indéfinie] *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Fig. 260. 1re Construction. — *Analyse.* — Soit MN la droite donnée, et C le point donné. — Le pied de la perpendiculaire étant supposé en D, si l'on considère sur la droite MN, deux points, A, B, également distans du point C, ils seront aussi également distans du point D (n° 96); et tout point E également distant de A et de B appartiendra à la perpendiculaire (n° 97).

Synthèse. — 1° Du point C comme centre, et d'un rayon arbitraire [mais qui toutefois doit être pris, *à vue d'œil*, plus grand que la perpendiculaire CD], décrivons un arc de cercle qui coupera la droite MN en deux points A et B (n° 104, *scol.* 3). — 2° Des points A et B comme centres, et d'un rayon aussi arbitraire [mais plus grand que la moitié de AB], décrivons deux arcs de cercle. — 3° Par l'un des points d'intersection E de ces arcs et par le point C menons une droite. — CE sera la perpendiculaire cherchée, d'après l'analyse ci-dessus.

N. B. — Il est bon que le point E ne soit pas pris du même côté de la droite MN, que le point C : la direction de la perpendiculaire CD en est mieux déterminée.

2ᵉ Constr. — Comme CD ne peut être perpendiculaire à MN sans que réciproquement MN ne soit perpendiculaire à CD, il en résulte une autre manière de résoudre le problème :

Pour cela, soit A le point donné, et CE la droite donnée.

Synthèse. — 1° D'un point quelconque C pris sur la droite CE, comme centre, et du rayon CA, décrivons un arc AFB qui coupe en F la droite CE. — 2° Prenons, sur cet arc, FB égal à FA (*Voy.* le nº 104). — 3° Menons AB. — AB est la perpendiculaire cherchée.

Problème III. (Fig. 261.)

311. *Par l'extrémité* A *d'une droite* AB *qui ne peut être prolongée, élever une perpendiculaire à cette droite.* Fig. 261.

1ʳᵉ Construction. — *Analyse.* — Soit AC la perpendiculaire cherchée. — En joignant, par une droite, un point quelconque B de AB avec un point quelconque C de AC, on formera un triangle rectangle CAB dans lequel le milieu D de l'hypoténuse sera également distant des trois sommets A, B, C (nº 127); et par conséquent la circonférence décrite du point D comme centre avec le rayon DA, passera par ces trois sommets.

Synthèse. — 1° D'un point quelconque D pris hors de la droite AB, comme centre, et du rayon DA, décrivons un arc de cercle qui coupe la droite AB en un second point B. — 2° Menons la droite BD, et prenons, sur son prolongement, DC = DB = DA. — 3° Menons la droite AC. — Cette droite est la perpendiculaire cherchée.

En effet, etc. (*Voy.* le nº 200, 2°).

Scolie. — En renversant cette construction, on en tire encore un autre moyen de résoudre le problème II (nº 310). — Ainsi, pour abaisser du point C une perpendiculaire sur AB, on pourra prendre d'abord une longueur arbitraire [qui toutefois doit être, à vue d'œil, plus grande que la moitié de la perpendiculaire cherchée]; puis, après avoir doublé cette longueur, on marquera, au moyen du compas, sur la droite AB, un point B dont la distance au point C soit égale à la double longueur obtenue. On aura facilement le milieu D de cette droite, puisque sa moitié n'est autre que la droite arbitraire. Alors, du point D comme centre, et du rayon DC [=DB], on décrira une demi-circonférence qui coupera la droite donnée en un second point A : ce point sera le pied de la perpendiculaire cherchée.

Ce moyen de résolution serait surtout avantageux si la droite donnée ne pouvait être prolongée commodément que dans un seul sens, parce qu'alors les points A et B de la Fig.260. figure 260 (*probl.* II, n° 310, 1re *constr.*), ne pouvant être pris assez distans l'un de l'autre, ne se distingueraient pas suffisamment.

Dans le cas où ces deux points se confondraient en un seul dans la construction, c'est-à-dire dans le cas où l'arc AFB (fig. 260) toucherait la droite MN, le point de tangence serait bien, à la vérité, le pied cherché de la perpendiculaire; mais il faut observer, conformément à ce qu'on a vu précédemment (n° 184), qu'un point de tangence doit être considéré comme une petite portion de droite d'une certaine longueur, commune aux deux lignes tangentes; d'où il résulte qu'*Un point est toujours mal déterminé quand il ne l'est que par un contact,* et que par conséquent *On doit éviter avec soin ce mode de détermination.*

Fig.261. 2e CONSTR. — *Synthèse.* — 1° Du point A (fig. 261) comme centre, et d'un rayon AC = 3, décrivons un arc de cercle. — 2° Du même point A comme centre, et d'un rayon AB = 4, décrivons un autre arc de cercle qui coupe AB en B. — 3° Du point B comme centre, et d'un rayon BC = 5, décrivons un troisième arc de cercle qui coupe le premier en C. — AC est la perpendiculaire cherchée.

En effet, le triangle ABC est rectangle en A puisque l'on a $3^2 + 4^2 = 5^2$ (*Voy.* le n° 231).

≶[PROBLÈME IV. (Fig. 206.)]≷

312. *Par un point donné* A *abaisser une perpendiculaire sur une droite* BC *qui n'est accessible que par ses extrémités.* Fig. 206.

Synthèse. — 1° Du point B abaissons sur AC la perpendiculaire BB′. — 2° Du point C abaissons sur AB la perpendiculaire CC′. — 3° Par le point O d'intersection des deux perpendiculaires menons la droite AO. — AO est la perpendiculaire cherchée.

En effet, les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés respectivement opposés concourent en un même point (n° 248, 2°).]≷

PROBLÈME V. (Fig. 262, 263, et 264.)

313. *Par un point* C *donné hors d'une droite* AB *mener une parallèle à cette droite.*

1re CONSTRUCTION. — *Analyse.* — Soit CD (fig. 262) la parallèle cherchée. — Si l'on mène une transversale quelconque CE, on aura des angles alternes-internes CEB, ECD, égaux entre eux (n° 113). Fig 262.

Synthèse. — 1° Menons une droite du point C à un point quelconque E de la droite AB. — 2° Du point E comme centre, et d'un rayon égal à EC, décrivons un arc CF coupant AB en F. — 3° Du point C comme centre et du même rayon CE décrivons un arc ED. — 4° Du point E comme centre et d'un rayon égal à la corde de l'arc CF (n° 104) décrivons un petit arc de cercle qui coupe l'arc ED en un point D. — 5° Menons la droite CD. — CD est la parallèle demandée (*Voy.* le n° 152).

2e CONSTR. — *Synthèse.* — 1° Menons la droite CD (fig. 263) rencontrant AB en un point quelconque D. — 2° Du point D comme centre, et d'un rayon égal à DC, décrivons un petit arc de cercle qui coupe AB en E. — 3° Des points C et E comme centres, et du même rayon DC, décrivons deux autres arcs de Fig. 263.

cercle qui se coupent en F. — 4° Menons CF — CF sera la parallèle demandée, puisque la figure DECF est un losange; etc. (n° 157).

N. B. — On pourrait employer un parallélogramme quelconque au lieu d'un losange, en prenant des rayons inégaux.

Fig. 264. ≶[3° Constr. — *Synthèse.* — 1° Sur la droite donnée AB (fig. 264) prenons trois points, A, B, D, tels que l'on ait AB = BD. — 2° Traçons la droite ACE. — 3° D'un point quelconque E pris sur AC menons EB, ED. — 4° Menons CD coupant EB en F. — 5° Tirons AFG coupant ED en G. — 6° Menons CG. — La droite CG est la parallèle cherchée (*Voy.* le n° 246, *scol.* 3).

N. B. — Cette construction, fondée sur la théorie des transversales, présente l'avantage de n'exiger que l'emploi de la règle : car cet instrument suffit, à la rigueur, pour prendre sur une droite donnée des distances égales lorsque ces distances sont arbitraires, comme dans le cas actuel.]≷

Scolie. — Quand on sait mener une parallèle à une droite donnée, on peut aisément

Transformer un polygone quelconque en un polygone équivalent d'un nombre de côtés moindre d'une unité, et par suite le transformer *en un triangle.*

Fig. 265. Soit, par exemple, à *Transformer un pentagone* ABCDE (fig. 265) *en quadrilatère.*

Synthèse. — 1° Menons la diagonale CE. — 3° Menons une droite DD′ parallèle à CE et terminée en D′ sur le côté AE. — 3° Menons CD′. — Le quadrilatère ABCD′ sera équivalent au pentagone ABCDE.

En effet, les triangles CDE, CD′E, seront équivalens (n°s 124 et 295).

Problème VI. (Fig. 266.)

Fig. 266. 314. *Étant donné un angle* AOB, *mener par un point* O′ *pris sur une droite* O′A′, *une autre droite* O′B′ *qui fasse avec la première un angle égal à l'angle donné.*

Synthèse. — 1° Du point O comme centre, et d'un rayon arbitraire OA, décrivons entre les côtés de l'angle O un arc AB. — 2° Du point O′ comme centre, et du même rayon, décrivons un arc indéfini A′B′. — 3° Prenons la distance AB; et avec cette distance comme rayon, décrivons du point A′ comme centre un petit arc de cercle qui coupe le précédent en B′. — 4° Menons la droite O′B′. — L'angle A′O′B′ sera l'angle demandé.

En effet, si l'on mène AB et A′B′, on aura deux cordes égales dans deux cercles de rayons égaux, OA, O′A′; les arcs correspondans à ces cordes seront donc égaux (n° 104); et par suite, les angles correspondans, AOB, A′O′B′, le seront aussi (n° 67).

Scolie 1er. — Le problème n'est complètement déterminé qu'autant que l'on indique comment doit être située la droite cherchée; sans quoi il y a *quatre* solutions.

Scol. 2. — L'angle donné peut être droit : dans ce cas, la construction précédente est une nouvelle méthode de résolution à ajouter à celle du problème III (n° 311).

Problème VII. (Fig. 267.)

315. *Par un point* C *donné hors d'une droite* AB, *mener une autre droite qui fasse avec la première un angle donné.* Fig. 267.

Synthèse. — 1° Par un point quelconque D pris sur AB menons une droite DE qui fasse avec AB un angle égal à l'angle donné (n° 314). — 2° Menons CF parallèle à DE (n° 313). — CF sera la droite demandée.

En effet, etc. (n° 113).

Scolie 1er. — Ce problème a *deux* solutions quand on ne précise pas la position de la droite demandée.

Scol. 2. — On peut également employer une parallèle auxiliaire pour résoudre les problèmes II et IV (nos 310 et 312): on ramène ainsi la question à la résolution du problème I (n° 309).

Problème VIII. (Fig. 268.)

Fig. 268. 316. *Déterminer l'angle de deux droites*, AB, CD, *que l'on ne peut prolonger jusqu'à leur point de concours.*

Synthèse. — Par un point A pris sur AB menons la droite AE parallèle à CD (nº 313), [ce qui peut se faire sans prolonger les droites données] : l'angle BAE est égal à l'angle cherché, d'après les propriétés des parallèles (*Voy.* le nº 113).

Problème IX. (Fig 269.)

Fig. 269. 317. *Partager en deux parties égales une droite* AB [déterminée de grandeur].

1re Construction. — *Synthèse.* — 1º Des points A et B comme centres, et d'un même rayon quelconque [pourvu qu'il surpasse la moitié de AB (*Voy.* le nº 145)], décrivons des arcs de cercle qui se couperont en deux points C, D, situés, l'un d'un côté de la droite AB, l'autre de l'autre (*Voy.* le nº 142). — 2º Menons CD. — Le point O d'intersection de la droite CD avec la droite AB sera le milieu de celle-ci.

En effet, etc. (nº 97, *scol.* 1er).

N. B. — Il n'est pas nécessaire que les arcs de cercle qui se coupent en C et en D soient décrits du même rayon : il suffirait que ce fût le même rayon pour le point C, et le même pour le point D. Alors, les deux points C, D, pourraient être pris d'un même côté de AB ; mais il est plus avantageux de les prendre des deux côtés différens (*Voyez* le nº 310, *N. B.*).

Scolie 1er. — La construction précédente ne donne pas seulement le milieu d'une droite : elle détermine en même temps la perpendiculaire élevée sur la droite par son milieu ; par conséquent, on peut se servir de cette construction pour résoudre les problèmes suivans :

1º *Par trois points donnés faire passer une circonférence* (*Voy.* le nº 128), Ou *Circonscrire une circonférence à un triangle donné :*

Le centre se trouve à l'intersection des trois perpendiculaires élevées respectivement sur les milieux des trois côtés du triangle ;

2° *Par deux points donnés faire passer une circonférence qui ait son centre sur une droite donnée :*

Le centre se trouve à l'intersection de la droite donnée avec la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés.

Le premier de ces deux problèmes exige, pour être possible, que les trois points donnés ne soient pas en ligne droite ; et le second, que la droite donnée ne soit pas perpendiculaire à la droite qui joint les deux points donnés. — Il n'y a qu'*une* solution dans un cas comme dans l'autre.

Le dernier des deux problèmes conduit encore au suivant :

3° *Décrire une circonférence qui touche une droite donnée* PB (fig. 170) *en un point donné* P, *et qui passe par un autre point donné*, A ou C [*Voyez* les n^{os} 128, *coroll.* 2 ; et 317, *scol.* 1er, 1°). Fig. 170.

Ce problème serait impossible si le point donné se trouvait sur la droite donnée.

On se sert de la même construction pour

4° *Trouver le centre d'une circonférence* ou *d'un arc de cercle :*

On prend trois points quelconques sur cette circonférence ou sur cet arc, et l'on opère comme pour faire passer une circonférence par les trois points.

On opère encore de même pour

5° *Trouver le centre d'un polygone régulier donné,*

Et pour *Circonscrire* ou *Inscrire une circonférence à un polygone régulier.*

Enfin, on a bien souvent à résoudre la question de

6° *Décrire sur une droite donnée, comme diamètre, une circonférence* ou *une demi-circonférence :*

La construction ci-dessus en fait connaître le centre qui n'est autre que le milieu de la droite donnée; et la moitié de cette droite en est le rayon.

Fig. 264. ⩽[2ᵉ Constr. — *Synthèse.* — Soit AD (fig. 264) la droite à partager. — 1° Menons à AD une parallèle quelconque CG (nº 313). — 2° Tirons, par les points A, D, les deux droites quelconques ACE, DGE, qui se coupent en un point E. — 3° Menons les deux droites AG, DC; et soit F leur point d'intersection. — 4° Traçons la droite EF, et prolongeons-la jusqu'à la rencontre de AD au point B. — Le point B est le point de division cherché (*Voyez* ci-dessus, nº 313).

N. B. — Cette construction, combinée avec la 3ᵉ du *numéro* 313 pour mener la parallèle CG, a l'avantage de n'exiger que l'emploi de la règle.]⩾

Scol. 2. — Il y a encore plusieurs autres moyens de résolution qui sont compris implicitement dans ceux d'un autre problème plus général que nous résoudrons ci-après (nº 338).

Problème X. (Fig. 270.)

Fig. 270. 318. *Partager en deux parties égales un angle donné* AOB.

Synthèse. — 1° Du sommet O comme centre, et d'un rayon quelconque OA, décrivons l'arc ACB terminé aux deux côtés de l'angle en A et en B. — 2° Marquons un point quelconque K à égale distance des points A et B. — 3° Menons OK. — Cette droite OK partagera l'angle proposé en deux parties égales.

En effet, si l'on mène la corde AB, la droite OK sera perpendiculaire sur le milieu de cette corde (*Voy.* le nº 97, *scol.* 1ᵉʳ).

Scolie — Cette construction sert aussi à

1° *Partager en deux parties égales, un arc* ACB, ou *un secteur* OACB, ou *un segment* ACBD.

On peut s'en servir également pour

2° *Inscrire une circonférence à un triangle donné* (*Voy.* le nº 129).

Enfin, cette construction donne encore, comme la première du problème précédent (n° 317), un moyen de

3° *Trouver le centre d'un polygone régulier donné.*

PROBLÈME XI. (Fig. 271.)

319. *Tracer la bissectrice de l'angle de deux droites* [concourantes] AB, CD, *que l'on ne peut prolonger jusqu'à leur point de concours.* Fig. 271.

Analyse. — Soit MN la droite cherchée. — Si par un point K pris sur MN on élève une perpendiculaire à cette droite, cette perpendiculaire rencontrera (n° 108, *coroll.* 3) les droites AB, CD, respectivement en deux points G, I, et fera avec elles des angles KGB, KID, qui seront complémentaires de la moitié de l'angle des droites AB, CD. Si donc par le point G [l'un des deux points d'intersection], on mène une droite PGQ faisant l'angle KGP égal à l'angle KGB, l'angle double PGB qui en résultera sera supplémentaire de l'angle des deux droites AB, CD; l'angle BGQ sera égal à cet angle même; et par conséquent PGQ sera parallèle à CD.

Synthèse. — 1° Par un point quelconque G pris sur AB, l'une des deux droites données, menons une parallèle PGQ à l'autre droite CD (n° 313). — 2° Partageons en deux parties égales (n° 318) l'angle intérieur BGP qui en résulte, au moyen d'une droite GI qui ira rencontrer CD en un point I. — 3° Divisons la droite GI en deux parties égales par une perpendiculaire MKN (n° 317). — La perpendiculaire MKN est la droite cherchée, d'après l'analyse.

Scolie 1er. — Lorsque les droites AB, CD, sont parallèles, la bissectrice MKN, fournie par la construction précédente, leur devient aussi parallèle et partage leur distance en deux parties égales.

SCOL. 2. — La résolution des deux problèmes précédens peut servir à résoudre encore cette autre question :

Inscrire une circonférence à un triangle donné :

Le centre du cercle cherché est à l'intersection des droites qui partagent les angles du triangle en deux parties égales; et le rayon est la distance de ce point aux trois côtés (*Voy.* le n° 129, *coroll.* 1[er] et 2[e]).

Au lieu de la dernière question, on peut proposer, plus généralement, de

Décrire une circonférence qui touche trois droites données:

Et alors il y a *quatre* solutions quand les trois droites données forment un triangle, puisqu'outre le cercle inscrit *intérieurement* au triangle, on doit obtenir encore les *trois* cercles *ex-inscrits* (n° 129, *scol.*) — Le nombre des solutions se réduirait évidemment à *deux* si deux des trois droites étaient parallèles. — Enfin, le problème serait *impossible* si les droites étaient toutes trois parallèles entre elles.

PROBLÈME XII. (Fig. 272.)

Fig. 272. 320. *Par deux points donnés*, A, B, *mener respectivement deux droites qui se coupent sur une troisième droite donnée* MN, *en faisant avec elle de part et d'autre des angles égaux*, ACM, BCN.

Analyse. — Le point C étant le point cherché, on aura

$$ACM = BCN;$$

et si l'on prolonge BC au-delà de MN en CA′, on aura aussi

$$A'CM = BCN = ACM.$$

De plus, si l'on abaisse sur MN la perpendiculaire ADA′ et que l'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'à la rencontre de BCA′ au point A′, les deux droites CA, CA′, considérées comme des obliques par rapport à la perpendiculaire CD, en seront également distantes, c'est-à-dire que l'on aura A′D = AD.

Synthèse. — 1° Abaissons sur MN la perpendiculaire AD, et prolongeons AD d'une quantité DA′ = AD. — 2° Menons les droites BCA′ et AC. — AC et BC seront les droites demandées, conformément à l'analyse.

SCOLIE. — Le système des droites AC, BC, forme le plus court chemin pour aller de A en B en passant par un point de la droite MN.

En effet, pour tout autre point C′ pris sur MN, on aurait

$$BC' + C'A' > BA' > BC + CA';$$

d'où, à cause de $C'A' = C'A$ et de $CA' = CA$,

$$BC' + C'A > BC + CA.$$

Problème XIII. (Fig. 273.)

321. *Étant donnés deux angles d'un triangle, déterminer le troisième.*

Analyse. — L'angle cherché est le supplément de la somme des deux angles donnés (n° 125).

Synthèse. — 1° Par un point O pris sur une droite quelconque AB, menons une droite OC qui fasse avec OA un angle AOC égal à l'un des angles donnés (n° 314). — 2° Par le même point O menons une droite OD qui fasse avec OB un angle BOD égal à l'autre angle donné. — L'angle COD sera l'angle cherché (n° 77, 1°). Fig. 273.

Scolie 1er. — On peut se proposer, pour application, de

Déterminer un angle saillant AOB (fig. 274), ou *rentrant* COD, *dont le sommet* O *est inaccessible :* Fig. 274.

Il suffit de marquer deux points M et N respectivement sur les aliguemens AO et BO, ou OC et OD, puis de prendre le supplément de la somme des angles OMN et ONM.

Scol. 2. — S'il s'agissait d'avoir une solution numérique du même problème, il faudrait faire la somme des valeurs des deux angles donnés, exprimés en *degrés* ou en *grades* (n° 202), puis retrancher cette somme de 180° ou de 200^{gr}.

Problème XIV. (Fig. 275.)

322. *Étant donnés les trois côtés d'un triangle, construire le triangle.*

Synthèse. — 1° Prenons, sur une droite indéfinie, une longueur AB égale à l'un des côtés donnés. — 2° Du point A comme centre, et d'un rayon AC égal au second côté donné, décri- Fig. 275.

Fig.275. vons un arc de cercle. — 3° Du point B comme centre, et d'un rayon égal au troisième côté donné, décrivons un autre arc de cercle qui coupera le premier en C [si le triangle est possible]. — 4° Menons les droites AC, BC. — Le triangle ABC sera le triangle demandé (*Voy.* le n° 130).

Scolie. — Pour que le triangle soit possible, il faut que les deux arcs de cercle décrits des points A et B comme centres, se coupent; et pour cela, il faut que le côté AB soit plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence (n° 145). Or, si ces conditions sont remplies, comme les arcs se couperont en deux points C, C', il y aura deux triangles ABC, ABC', symétriques par rapport à AB, qui satisferont à la question. — Mais nous reviendrons sur cette remarque et nous la généraliserons (n° 326).

Problème XV. (Fig. 275.)

323. *Étant donnés deux côtés d'un triangle et l'angle compris, contruire le triangle.*

Synthèse. — 1° Prenons une droite AB égale à l'un des côtés donnés. — 2° Faisons sur cette droite un angle BAC égal à l'angle donné (n° 314); et prenons sur la droite AC une grandeur AC égale au second côté donné. — 3° Menons BC. — Le triangle ABC sera le triangle demandé (*Voy.* le n° 131)

Scolie. — Le triangle est toujours possible.

Problème XVI. (Fig. 275.)

324. *Étant donnés un côté et deux angles d'un triangle, construire le triangle.*

Les trois angles sont connus dès que deux d'entre eux sont donnés (n° 125); ainsi, on peut supposer que les deux angles donnés sont les angles adjacens au côté donné : nous raisonnerons dans cette hypothèse.

Synthèse. — 1° Prenons une droite AB égale au côté donné.

— 2° Par les points A et B menons des droites qui fassent avec AB deux angles respectivement égaux aux angles donnés (n° 314) ; et soit C leur point d'intersection. — Le triangle CAB sera le triangle demandé (*Voy.* le n° 133). Fig. 275

Scolie 1er. — Le problème sera toujours possible quand les deux angles donnés feront une somme moindre que 2 *droits*.

Scol. 2. — Si les deux angles qui doivent être adjacens au côté donné formaient une somme égale à *un droit*, le triangle demandé serait un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le côté donné ; et alors le problème pourrait s'énoncer ainsi :

Étant donnés l'hypoténuse d'un triangle rectangle et l'un de ses angles aigus, construire le triangle.

Dans ce cas, la question pourrait être résolue de la manière suivante :

Synthèse. — 1° Prenons une droite AB (fig. 276) égale au côté donné. — 2° Par le point A [ou B] menons une droite AK qui fasse avec AB un angle égal à l'angle donné. — 3° Du point B abaissons une perpendiculaire BC [ou BD] sur AK (n° 310). — Etc. Fig. 276.

Problème XVII. (Fig. 276.)

325. *Étant donnés deux côtés d'un triangle et l'angle opposé à l'un d'eux, construire le triangle.*

Synthèse. — 1° Prenons une droite AB égale à celui des deux côtés donnés qui doit être adjacent à l'angle donné A. — 2° Par le point A menons une droite indéfinie AK faisant avec AB un angle égal à l'angle donné. — 3° Du point B comme centre, et d'un rayon égal à l'autre côté donné [celui qui doit être opposé à l'angle donné], décrivons une circonférence qui coupera généralement [si le triangle est possible] la droite AK en deux points C et *c*. — 4° Menons BC, B*c*. — Les deux triangles ABC, AB*c*, satisferont également à la question si les points C et *c* sont situés sur AK même et non sur son prolongement.

Discussion. — 1er *Cas.* — Supposons que l'*angle* A soit *aigu*. — Le triangle serait *impossible* si le côté donné BC était moindre que la perpendiculaire BD abaissée du point B sur AK : car alors l'arc de cercle décrit du point B comme centre ne rencontrerait pas AK. — Si BC est égal à cette perpendiculaire, les points C, *c*, se confondront avec le point D : par conséquent l'arc de cercle touchera AK en D, et il n'y aura qu'*une* solution. Le triangle sera rectangle en C [ou D]. — Enfin si BC est plus grand que la perpendiculaire, il y aura deux points d'intersection ; mais les deux triangles qui en résulteront ne satisferont à la question que si les points C et *c* sont du même côté de A, c'est-à-dire si AB > BC.

2e *Cas*. — Supposons que l'*angle* A soit *droit*. — Le problème peut alors s'énoncer ainsi :

Étant donnés l'hypoténuse d'un triangle rectangle et un second côté, construire le triangle.

Ce triangle ne sera possible que si AB < BC ; et si cette condition est remplie, il y aura *deux* points d'intersection qui donneront deux triangles rectangles symétriques entre eux.

3e *Cas*. — Supposons l'*angle* A *obtus*. — Dans ce cas, il n'y aura encore de solution que si AB < BC ; et la solution sera *unique*.

326. Remarque *sur les quatre problèmes précédens*. — Dans les quatre problèmes qui précèdent, c'est toujours sur un premier côté AB que s'effectue la construction du triangle. Or il y
Fig. 277. a *quatre* manières de disposer les *données* du triangle par rapport à la droite AB, comme le montre la figure 277 ; d'où il résulte que, si l'on veut avoir égard à la disposition de ces données, le nombre des solutions de la question sera *généralement* de *quatre*, et pourra même aller jusqu'à *huit* dans le problème XVII (n° 325) ; mais d'abord, le nombre des solutions essentiellement différentes se trouvera réduit *de moitié* si l'on considère que la droite AB partage la figure en deux parties égales ou symétriques (n° 43) ; et ensuite, les solutions restantes seront encore symétriques deux à deux par rapport à une seconde droite perpendiculaire sur le milieu de AB. Enfin, il pourra même n'y avoir en tout qu'*une seule* solution, ce qui arrivera si le triangle à construire doit

être un triangle isocèle ayant pour sommet le point C. (*Voy.* la *remarque* du n° 135.)

Si l'on se proposait de *Construire un triangle, étant donnés ses trois angles* seulement, le problème serait indéterminé (n° 135). On pourrait alors prendre un côté tout-à-fait arbitrairement ; et l'on construirait le triangle sur ce côté, comme dans le *numéro* 324. Au moyen de ce triangle, on obtiendrait ensuite facilement tous ceux qui satisfont aux mêmes conditions : il suffirait pour cela de mener des parallèles à l'un des côtés.

Quand on sait d'avance que le triangle doit être isocèle ou rectangle, cette connaissance équivaut à une donnée ; et il n'en faut plus que deux autres pour déterminer le triangle.

Ainsi, un *triangle isocèle* peut être construit lorsque l'on connaît :

1° *Deux côtés inégaux avec l'espèce de chacun* [base ou côté latéral] ;

2° *Un côté et un angle avec l'espèce de chacun* [angle au sommet ou à la base, etc.].

De même, un *triangle rectangle* peut être construit lorsque l'on connaît :

1° *Les deux côtés de l'angle droit* (n° 323);

2° *Un côté de l'angle droit et un angle aigu* (n° 324);

3° *L'hypoténuse et un angle aigu* (n° 324);

4° *L'hypoténuse et un côté de l'angle droit* (n° 325).

[*Voyez* les *numéros* 135, 136, 137, et 138.]

Il est facile de voir que le troisième et le quatrième cas des triangles rectangles peuvent se résoudre au moyen du cercle, en décrivant une demi-circonférence sur l'hypoténuse donnée comme diamètre (n° 317, *scol.* 1er, 6°), et menant par l'une des extrémités de ce diamètre, une corde qui satisfasse à la seconde condition exigée.

La construction d'un triangle rectangle dans lequel on connaît les deux côtés de l'angle droit, donne le moyen de

Construire un carré équivalent à la somme de deux carrés donnés, et par suite, d'un nombre quelconque de carrés.

De même, la construction d'un triangle rectangle dans lequel on connaît l'hypoténuse et un côté de l'angle droit, conduit à savoir

Construire un carré équivalent à la différence de deux carrés donnés, et par suite *au rectangle fait sur la somme et la différence de deux droites données* (*Voy.* la page 154, et le n° 307, 3°.).

PROBLÈME XVIII. (Fig. 278.)

Fig. 278. 327. *Étant donnés les quatre côtés d'un quadrilatère* [avec leur disposition], *et l'angle compris par deux côtés consécutifs, construire la figure.*

Synthèse. — 1° Faisons d'abord un angle MOP égal à l'angle donné (n° 314); et prenons des longueurs OM, OP, respectivement égales aux côtés qui doivent comprendre cet angle. — 2° Des points M et P, comme centres, et de rayons respectivement égaux aux deux autres côtés, décrivons deux arcs de cercle qui se couperont en un point N [si le problème est possible]. — 3° Menons MN, PN. — Le quadrilatère ainsi obtenu satisfera évidemment aux conditions de la question.

Discussion. — Les arcs qui ont les points M et P pour centres respectifs se coupent généralement en deux points. — Si ces deux points se trouvent tous deux dans l'intérieur de l'angle MOP, il y aura *deux* solutions : dans l'une des deux le quadrilatère aura un angle rentrant N, et dans l'autre il sera convexe, [à moins qu'il n'ait un autre angle rentrant, ce qui pourrait arriver]. — Si la somme des rayons MN et PN était égale à MP, le quadrilatère *dégénérerait* en triangle. — Enfin la question serait tout-à-fait *absurde* si ces rayons formaient une somme moindre que MP.

Scolie 1er. — On obtient, comme pour les triangles, des solutions symétriques.

Scol. 2. — On pourrait proposer la construction d'un quadrilatère dont on donnerait 3 côtés et les 2 angles compris, ou 2 côtés et les 3 angles adjacens, ou les 4 côtés et une diagonale, etc. — Dans tous les cas, il faut au moins 2 côtés (n° 147), ou un côté et une diagonale.

Problème XIX.

328. *Étant donnés les deux côtés consécutifs d'un parallélogramme et l'un de ses angles, construire la figure.*

Même marche que pour le problème précédent (n° 327).

Discussion. — La figure sera un rectangle si l'angle est droit; elle sera un losange si les deux côtés sont égaux; elle sera un carré si ces deux hypothèses ont lieu à la fois.

Scolie. — Dans le cas général, on peut avoir deux parallélogrammes symétriques; mais il n'y a pas de solution double pour le rectangle, le losange, et le carré, parce que ces figures sont à elles-mêmes leurs symétriques (*Voy.* les n°s 155 — 159).

Problème XX.

329. *Construire un polygone égal à un polygone donné.*

Pour résoudre cette question, il faut décomposer le polygone donné en triangles [par l'une des méthodes indiquées au *numéro* 166], ou bien en trapèzes et en triangles (*même numéro*); ou bien encore, on fixera la position des sommets au moyen de diagonales menées des extrémités d'un côté à tous les autres sommets (n° 171).

On peut encore opérer en menant, par les sommets du polygone donné ABCDE (fig. 279), des droites parallèles et égales entre elles, AA′, BB′, CC′, DD′, EE′ : les extrémités A′, B′, C′, D′, E′, seront les sommets d'un polygone égal au polygone donné. Fig. 279.

On aurait un polygone symétrique du polygone donné, si, au lieu de mener des parallèles égales, AA′, BB′, CC′, . . . , on abaissait des perpendiculaires A*a*, B*b*, C*c*, . . . (fig. 56) sur une droite quelconque MN menée dans le plan du polygone donné, et que l'on prît sur les perpendiculaires, de l'autre côté de cette droite, des distances *a*A′ = A*a*, *b*B′ = B*b*, *c*C′ = C*c*, etc. Fig. 56.

18..

PROBLÈME XXI. (Fig. 131 et 280.)

330. *Étant donné un polygone régulier* ABCDEF *inscrit à un cercle, circonscrire un polygone régulier du même nombre de côtés.*

Fig. 131. 1re CONSTRUCTION. — On mène des tangentes (n° 309, *scol.* 2) par les sommets A, B, C,... (fig. 131) du polygone donné; et l'on forme ainsi un polygone régulier MNPQRS circonscrit (n° 180), et du même nombre de côtés.

Fig. 280. 2e CONSTR. — On prolonge tous les apothèmes jusqu'à leur rencontre avec la circonférence, en T, U, V, X, Y, Z (fig. 280); puis, par ces derniers points, on mène des tangentes : ces tangentes déterminent un polygone MNPQRS qui est le polygone demandé.

Scolie. — Dans la seconde construction, les points M, N, P,.... se trouvent respectivement sur les prolongemens des rayons OA, OB, OC, ... ; et les côtés du polygone cherché sont parallèles, chacun à chacun, aux côtés correspondans du polygone donné, et de plus en sont tous également distans.

PROBLÈME XXII. (Fig. 131 et 280.)

331. *Étant donné un polygone régulier* MNPQRS *circonscrit à un cercle, inscrire un polygone régulier du même nombre de côtés.*

Il y a également *deux* modes de construction.

Fig. 131. *Premièrement* (fig. 131) : en menant des droites AB, BC, CD, ... entre les points de tangence consécutifs, on formera le polygone demandé ABCDEF (n° 179).

Fig. 280. *Secondement* (fig. 280) : par les points A, B, C,.... où les rayons OM, ON, OP, ... coupent la circonférence, on mène les droites AB, BC, CD,.... : on a ainsi le polygone cherché ABCDEF.

Scolie. — Comme ci-dessus (n° 330, *scol.*).

Problème XXIII.

332. *Étant donné un polygone régulier inscrit ou circonscrit à un cercle, inscrire ou circonscrire un polygone régulier d'un nombre de côtés double ou sous-double.*

Pour avoir un polygone régulier d'un nombre de côtés double, on partage en deux parties égales chacun des arcs compris entre les points de division (n° 318, *scol.* 1er, 1°); et par les nouveaux points de division conjointement avec les anciens on mène des cordes (n° 179) ou des tangentes (n° 180).

Pour avoir un polygone régulier d'un nombre de côtés sous-double, on prend les points de division, seulement de deux en deux. [Il faut alors que le polygone donné soit d'un nombre pair de côtés.]

Problème XXIV. (Fig. 281.)

333. *Décrire, sur une droite* AB *donnée de grandeur, un arc capable d'un angle donné* C (n° 200). Fig 281.

Analyse. — ACB étant supposé l'arc demandé, l'angle ACB a pour mesure la moitié du reste ADB de la circonférence (n° 169). Supposons que par le point A, on mène à cette circonférence une tangente MAN : cette tangente fera avec AB deux angles supplémentaires dont l'un BAM aura aussi pour mesure la moitié de ADB (n° 170), et sera par conséquent égal à l'angle donné.

Synthèse. — 1° Menons par le point A une droite MAN qui fasse avec AB un angle BAM égal à l'angle donné (n° 314). — 2° Décrivons une circonférence qui touche MN en A et qui passe par le point B (n° 317, *scol.* 1er, 3°). — L'arc ACB [situé du côté de AN] sera l'arc demandé.

En effet, etc. (*Voyez* l'analyse).

Scolie 1er — Le second segment ADB donné par la même construction, est capable du supplément BAN de l'angle donné.

Scol. 2. — Si l'angle donné est droit, l'arc cherché est une demi-circonférence dont la droite donnée est le diamètre. Le centre se trouvant au milieu de cette droite, la construction de la droite MN devient inutile ; et le problème rentre dans celui du *numéro* 317, (*scol.* 1er, 6°).

Problème XXV. (Fig. 282.)

Fig. 282. 334. *Déterminer un point* D, *connaissant les angles que font entre elles trois droites qui le joignent à trois points donnés*; A, B, C.

Il suffit de décrire, sur les deux droites AC, BC, par exemple, des arcs respectivement capables des deux angles correspondans ADC, BDC. Le second point, D, d'intersection de ces deux arcs sera le point cherché.

On pourrait également décrire, sur la troisième droite AB, l'arc capable de l'angle ADB. Cet arc devrait passer par le point D, ce qui fournit une vérification ou une *rectification* de la solution déjà obtenue.

Problème XXVI. (Fig. 283.)

Fig. 283. 335. *Étant donnés trois points*, A, B, C, *d'une circonférence, en déterminer autant d'autres que l'on veut sans connaître le centre ni le rayon.*

Pour avoir un quatrième point de la circonférence, D par exemple, il suffit de mener deux droites AD, BD, l'une intérieure au triangle ABC, l'autre extérieure, et faisant respectivement avec AC et BC des angles égaux CAD et CBD : car alors, l'angle D étant nécessairement égal à l'angle C (n° 125), le point D sera sur l'arc capable (n° 200) de l'angle C, décrit sur la corde AB, et appartiendra par conséquent à la circonférence ABC.

Problème XXVII. (Fig. 284.)

Fig. 284. 336. *Par deux points donnés*, A, B, *faire passer une circonférence d'un rayon donné* OA.

Analyse. — Le centre du cercle cherché doit se trouver à une distance égale à OA de chacun des points A, B.

1^re Construction. — *Synthèse.* — 1° Des points A, B, comme centres respectifs, et d'un rayon égal à OA, décrivons deux circonférences, lesquelles se couperont généralement en deux points O, O′. — 2° Des points O et O′, comme centres respectifs, et du même rayon donné, décrivons deux autres circonférences. — Chacune de ces circonférences satisfera à la question.

Discussion. — Si la distance des points donnés est moindre que le double du rayon donné, les circonférences décrites des points A, B, comme centres, se couperont en deux points O, O′; et il y aura *deux* solutions distinctes. — Si AB est égal au double du rayon donné, les circonférences A, B, se toucheront en un point qui sera le centre du *seul* cercle qui puisse satisfaire à la question. — Enfin, si AB est plus grand que le double du rayon donné, il n'y aura plus ni point d'intersection, ni solution.

2^e Constr. — 1° Sur le milieu de AB élevons une perpendiculaire (n° 317, *scol.* 1^er). — 2° Du point A ou du point B comme centre, et d'un rayon égal au rayon donné, décrivons un petit arc de cercle qui coupe la perpendiculaire en un point O ou O′. — Ce sera le centre d'un cercle qui satisfait aux conditions du problème.

La *discussion* de cette construction est à peu près la même que celle de la précédente.

Problème XXVIII.

337. *Trouver l'axe radical de deux cercles* (n° 241).

Si les deux cercles sont sécans ou tangens, l'axe radical n'est autre que la sécante ou la tangente commune (n° 241) : nous avons donc seulement à considérer le cas de deux cercles extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre.

Soient, par exemple, deux circonférences OA, O′A′ (fig. 285), extérieures l'une à l'autre. — Prenons, hors de la droite OO′, un point arbitraire C; et de ce point C comme centre Fig. 285.

décrivons une troisième circonférence qui coupe la circonférence OA en deux points A, B, et la circonférence O′A′ en deux points A′, B′ : les deux sécantes AB, A′B′, se couperont en un point R de l'axe radical. — On aura cet axe en déterminant un second point R′ de la même manière, ou bien en abaissant du point R une perpendiculaire sur la droite OO′.

Scolie. — On peut, au moyen de cette solution, trouver le *centre radical* de trois cercles (n° 241).

§ II. *Problèmes sur les Lignes Proportionnelles et sur les Aires.*

Problème I.

338. *Partager une longueur donnée en un certain nombre donné de parties égales.*

Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de partager la droite AB (fig. 286, 287, et 288) en 5 parties égales.

Fig. 286. 1^re^ Construction. — *Synthèse.* — 1° Portons à la suite l'une de l'autre, sur une droite quelconque *ab* (fig. 286), 5 longueurs arbitraires mais égales entre elles, *ap*, *pq*, *qr*, *rs*, *sb*. — 2° Des points *a*, *b*, comme centres, et d'un rayon égal à *ab*, décrivons deux arcs de cercle qui se coupent en un point C. — 3° Tirons *a*C, *b*C, ce qui formera un triangle équilatéral. — 4° Prenons sur C*a* et sur C*b* les longueurs CA et CB égales à AB. — 5° Tirons AB. — 6° Menons des droites du point C aux points *p*, *q*, *r*, *s*; et soient P, Q, R, S, les points où ces droites coupent AB. — Ces derniers seront les points de division cherchés.

En effet, d'après la construction précédente, AB est égale à la droite donnée (n° 214); et de plus elle est partagée en 5 parties égales (n° 214, *scol.*).

N. B. — Dans le cas où la *droite auxiliaire* [*ab*] serait moindre que la droite donnée, alors le point A tomberait sur le prolongement de C*a*, et le point B sur le prolongement de C*b*; mais la construction serait la même à cela près. — S'il arrivait que *ab* fût justement égal à la droite donnée, alors la division demandée se trouverait toute faite sur ab, aux points p, q, r, s.

2e Constr. — *Synthèse.* — 1° Menons, par les points A, B (fig. 287), en sens contraire l'une de l'autre, deux parallèles Ab, Ba (n° 313). — 2° Portons à la suite l'une de l'autre, sur la droite Ab, 5 longueurs égales quelconques Ap, pq, qr, rs, sb; et sur la droite Ba, 5 longueurs égales aux premières, Bs', $s'r'$, $r'q'$, $q'p'$, $p'a$. — 3° Menons les droites Aa, pp', qq', rr', ss', bB. — Ces droites [sans y comprendre la première et la dernière] partageront la longueur AB en 5 parties égales. Fig. 287.

En effet, les quadrilatères Ap', pq', qr', rs', sB, étant des parallélogrammes, les portions de la droite AB sont proportionnelles à celles des droites Ab, aB (n° 213), et par conséquent égales.

3e Constr. — *Synthèse.* — 1° Portons encore, à la suite l'une de l'autre, sur une droite Ab (fig. 288) menée par le point A, 5 longueurs égales quelconques, Ap, pq, qr, rs, sb. — 2° Menons la droite indéfinie bBb'. — 3° Du point A comme centre, et d'un rayon égal à Ab, décrivons un arc de cercle qui coupera bBb' en un autre point b'. — 4° Menons Ab'. — 5° Du point A comme centre commun, décrivons 4 autres arcs de cercles ayant respectivement pour rayons les droites Ap, Aq, Ar, As; et soient p', q', r', s', les points d'intersection de ces arcs avec la droite Ab'. — 6° Menons les droites pp', qq', rr', ss'; et soient P, Q, R, S, les points d'intersection de ces droites avec AB. — Ces points seront les points de division cherchés. Fig. 288.

En effet, les triangles App', Aqq', ... Abb', sont tous isocèles; et comme ils ont le même angle au sommet A, ils sont équiangles entre eux (n° 125), et par conséquent semblables (n° 216). Il en résulte que les droites pp', qq', ... bb', sont parallèles, et par suite que AB [ainsi que Ab et Ab'] est partagée en parties égales (n° 213).

≼ [4e Constr. — *Synthèse.* — Portons toujours, comme précédemment, sur une droite Ab (fig. 205) menée par le point A, les 5 longueurs égales Ap, pq, qr, rs, sb. — 2° Tirons Bb et cherchons-en le milieu K (n° 317). — 3° Menons des droites du Fig. 205.

point B aux points p, q, r, s. — 4° Traçons la droite AK. — 5° Par les points d'intersection de cette dernière avec les quatre précédentes menons des droites qui, partant du point b', aillent se terminer sur la droite AB, en P, Q, R, S. — Ce sont les points de division cherchés.

(*Voyez*, pour la démonstration, le n° 246, *scol.* 3.)]≽

Scolie. — Il existe une foule d'autres moyens de résoudre le même problème; les précédens, qui sont au nombre des plus simples, ont chacun des avantages et des inconvéniens. — Le premier, par exemple, présente le désavantage de ne pas donner les divisions cherchées sur la droite proposée elle-même, mais sur une autre qui lui est égale. — Le second exige la construction d'une parallèle, ce qui est un autre inconvénient. — Le troisième, qui ne se trouve dans aucun de ces deux cas, paraît devoir mériter la préférence, surtout en y supprimant les arcs de cercle et ne marquant que leurs intersections avec Ab'. — ≼[Quant au quatrième, qui est fondé sur la théorie des transversales, il paraît exiger la division d'une droite en deux parties égales; mais on élude facilement cette difficulté par un moyen semblable à celui qu'on a employé *numéro* 311 (*scol.*), en prenant d'abord une longueur arbitraire AK et doublant cette longueur. On construit alors le triangle ABb avec ses trois côtés; et la moitié de Bb est connue.]≽

Il faut faire encore, relativement à l'emploi de ces divers moyens, une observation qui leur est commune : c'est que, plus les longueurs égales au moyen desquelles on aura formé la droite auxiliaire [ab ou Ab] (*ci-dessus*, *N. B.*), seront considérables, plus les points de division P, Q, R, S, seront exactement déterminés.

Ainsi, dans la 3e construction, il y aurait un inconvénient grave à ce que Ab fût moindre que AB : car alors AB ne pourrait être intérieur au triangle Abb'.

Il faut observer encore que le problème IX du 1er paragraphe (n° 317) n'est qu'un cas particulier du précédent, et que par conséquent on peut lui appliquer les 4 moyens de résolution qui viennent d'être exposés.

Problème II.

339. *Partager une longueur donnée en parties proportionnelles à des nombres donnés.*

Les moyens de résolution ne diffèrent de ceux du problème précédent, qu'en ce que les divisions de la droite auxiliaire, au lieu d'être égales entre elles, doivent être proportionnelles aux nombres donnés.

Scolie. — Les deux problèmes précédens fournissent le moyen de

Partager un triangle en parties proportionnelles à des nombres donnés, au moyen de droites menées d'un même point pris sur son périmètre.

Analyse. — Soit, par exemple, à partager le triangle ABC (fig. 289) en trois parties équivalentes DAG, DGCI, DIB, au moyen des droites DG, DI, menées d'un même point D pris sur le côté AB : [il sera facile de généraliser]. Fig. 289.

Supposons que le côté AB soit partagé en 3 parties égales par les points E, F. Dans cette hypothèse, si l'on mène les droites CE, CF, du sommet C opposé à ce côté, les parties ACE, ECF, FCB, vaudront aussi le tiers du triangle ABC. Ainsi

$$\text{DAG} = \text{ACE} \quad | \quad \text{DGCI} = \text{ECF} \quad | \quad \text{DIB} = \text{FCB};$$

d'où l'on conclut

$$\text{EGD} = \text{EGC} \quad \text{et} \quad \text{FID} = \text{FIC}:$$

donc GE et IF sont parallèles à la droite CD qui joint le point donné avec le sommet opposé.

Synthèse. — 1° Menons CD. — 2° Partageons AB, aux points E, F, en trois parties égales [et généralement proportionnelles aux nombres donnés]. — 3° Menons les droites EG, FI, parallèles à CD (n° 313); et soient G, I, leurs points d'intersection respectifs avec AC et BC. — 4° Menons DG, DI. — Ce seront les droites cherchées.

PROBLÈME III. (Fig. 290.)

Fig. 290. 340. *Partager une longueur donnée* AB, *en deux parties proportionnelles à deux nombres donnés* [m, n].

[Quoique ce problème soit un cas particulier du précédent, nous croyons devoir le traiter séparément, à cause des remarques auxquelles il donne lieu.]

Synthèse. — 1° Par l'extrémité A de la droite donnée AB élevons une perpendiculaire AC égale à m (n° 311). — 2° Par l'autre extrémité B élevons, en sens inverse de la première, une autre perpendiculaire BD égale à n. — 3° Menons la droite CD qui coupera la droite AB, entre A et B, en un point X. — Le point X est le point de division cherché.

En effet, les deux triangles ACX, BDX, étant semblables, donnent

$$AX : BX :: AC : BD :: m : n.$$

Scolie 1er. — Il n'est pas nécessaire que les droites AC, BD, soient perpendiculaires à AB : il suffit qu'elles soient parallèles entre elles [*Voyez* la 2e *constr.* du *problème* 1 (n° 338)].

SCOL. 2. — Le problème précédent peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Trouver, sur une droite donnée AB, *un point* X *tel que ses distances respectives à deux points*, A, B, *de cette droite, soient entre elles dans un rapport donné* [celui de m à n].

La question, ainsi posée, est susceptible d'une seconde solution dans laquelle le point de division X′ est situé sur le prolongement de la droite AB. Pour trouver ce point, élevons la perpendiculaire BD′ égale à BD, dans le même sens que la perpendiculaire AC. La droite CD′ rencontre le prolongement de AB au point cherché X′, ce qui se prouve comme ci-dessus.

Le point X′ est situé du côté du point B ou du côté du point A suivant que m est plus grand ou plus petit que n. — Dans le cas particulier de $m = n$, le point X′ est situé à l'infini, c'est-à-dire que la seconde solution n'a plus lieu.

⋚[Ces résultats sont conformes à ce qu'on a vu précédemment (n° 225) : car il est facile de reconnaître que les points X, X', divisent la droite AB *harmoniquement*.]⋛.

⋚[Scol. 3. — Enfin le problème peut encore s'énoncer ainsi :

Partager une droite AB *en deux segmens additifs ou soustractifs* (n° 225) *qui soient proportionnels à deux nombres donnés* [*m*, *n*].]⋛

⋚[Scol. 4. — La construction du problème précédent est celle que l'on emploie quand on veut

Trouver les centres de similitude de deux cercles, OA, Fig. 291.
O'A' (fig. 291) :

Pour cela on prend, à la place des droites *m* et *n*, deux rayons parallèles, lesquels doivent être dirigés dans le même sens [OA, O'A'] ou en sens contraire [OA, O'*a*], suivant que l'on veut obtenir le centre de similitude externe S ou le centre de similitude interne *s* (*Voy.* le n° 223).

Il est facile d'obtenir, par suite, les axes de similitude de trois cercles (*Voy.* le n° 248, 5°).]⋛

⋚[Problème IV.]⋛

341. *Étant donnée une droite* [déterminée de grandeur], *et un point sur cette droite, trouver* [sur la même droite] *un second point qui, conjointement avec le premier, la divise harmoniquement.*

1^re^ Construction. — *Voyez* le problème précédent.

2^e^ Constr. — *Synthèse.* — Soit EF (fig. 208) la droite à Fig. 208.
partager.

1^er^ *Cas :* — Le point donné, K, étant situé *entre* les extrémités, E, F, de la droite donnée.

1° Par un point quelconque A, extérieur à la droite donnée, menons les trois droites AE, AF, AK. — 2° Par un point quelconque C de AK tirons la droite FC terminée sur AE en B, et la droite EC terminée sur AF en D. — 3° Menons la droite DB terminée sur le prolongement de EF en I. — Le point I est le point cherché.

En effet, dans le quadrilatère ABCDEF, la diagonale EF est divisée harmoniquement par les deux autres, AC, BD (n° 249).

2ᵉ *Cas :* — Le point donné, I, étant situé *sur le prolongement* de EF.

1° Par un point extérieur A menons AE, AF. — 2° Par le point I menons une droite quelconque terminée sur AE en B et sur AF en D. — 3° Tirons les droites BF, DE; et soit C leur point d'intersection. — 4° Menons la droite AC terminée sur EF en K. — Le point K est le point cherché.

En effet, etc.

Problème V.

342. *Trouver une quatrième proportionnelle*, x, *à trois longueurs données*, a, b, c : [de manière que l'on ait $a : b :: c : x$].

Fig. 292. 1ʳᵉ Construction. — *Synthèse.* — 1° Traçons, sous un angle quelconque, les droites indéfinies OA, OB (fig. 292). — 2° Prenons OA $= a$, OB $= b$, OC $= c$. — 3° Menons AB; puis CX parallèle à AB (n° 313). — OX sera la longueur cherchée.

En effet, on aura

$$OA : OB :: OC : OX,$$

ou $\quad a : b :: c : OX;\quad$ et par conséquent $\quad OX = x.$

Scolie. — Il y a plusieurs manières de varier cette construction. — Par exemple, au lieu de prendre OC $= c$, on pourrait prendre AC $= c$: alors, au lieu de $x =$ OX, on aurait $x =$ BX..... Etc.

Fig. 168 et 169. 2ᵉ Constr. — Si l'on suppose PA $= a$, PB $= b$, PD $= c$ (fig. 168 et 169), la question se trouve ramenée à faire passer une circonférence par les trois points A, B, D (*Voy.* le n° 128, *coroll.* 2, le n° 236, et le n° 317, *scol.* 1ᵉʳ, 1°). Soit C son second point d'intersection avec PA : on aura PC $= x$.

SCOLIE. — Le problème précédent fournit le moyen de *Construire, sur un côté donné, a, un rectangle* [ou un parallélogramme] *équivalent à un rectangle* [ou à un parallélogramme] *donné*, et fait [avec le même angle] sur les côtés b, c.

En effet, de $a : b :: c : x$ on tire $ax = bc$ (*Voy.* le n° 292).

PROBLÈME VI.

343. *Trouver une troisième proportionnelle, x, à deux longueurs données, a, b :* [de sorte que l'on ait $a : b :: b : x$].

1[re] et 2[e] CONSTRUCTIONS. — Comme pour le problème précédent, en faisant $b = c$.

3[e] CONSTR. — *Synthèse.* — 1° Prenons BD $= a$ (fig. 188), Fig. 188. et prolongeons. — 2° Élevons au point D la perpendiculaire DA $= b$ (n° 309); et menons AB. — 3° Élevons sur AB la perpendiculaire AC; et soit C le point d'intersection de AC avec BD prolongé. — DC est la longueur demandée.

En effet, etc. (n° 227, 3°).

4[e] CONSTR. — *Synthèse.* — Il faut distinguer deux cas : $a < b$, et $a > b$; [si a était égal à b, on aurait $x = a = b$].

1[er] *Cas : $a < b$.* — 1° Prenons BD $= a$ (fig. 188). — 2° Élevons sur BD la perpendiculaire indéfinie DA. — 3° Du point B comme centre, et d'un rayon BA $= b$, décrivons un petit arc de cercle qui coupe cette perpendiculaire en A. — 4° Élevons sur AB la perpendiculaire AC [comme dans la troisième construction]; et soit C son point d'intersection avec BD prolongé. — BC sera la longueur cherchée.

En effet, etc. (n° 227, 2°).

2[e] *Cas : $a > b$.* — 1° Sur BC $= a$ (fig. 189) comme diamètre, décrivons une demi-circonférence (n° 317, *scol.* 1[er], 6°). Fig. 189 — 2° Du point B comme centre, et d'un rayon BA $= b$, décrivons un petit arc de cercle qui coupe la demi-circonférence en A. — 3° Abaissons du point A sur BC la perpendiculaire AD (n° 310). — BD sera la longueur cherchée.

En effet, etc. (n° 227, *scol.* 2, 2°).

SCOLIE. — On peut, au moyen du problème précédent,

Construire sur un côté donné, a, un rectangle équivalent à un carré donné, b^2 (*Voy.* le *scolie* du *numéro* précédent).

PROBLÈME VII.

344. *Trouver une moyenne proportionnelle, x, entre deux longueurs données, a, b* : [de sorte que l'on ait $a : x :: x : b$].

1re CONSTRUCTION. — *Synthèse.* — 1° Prenons, sur une même
Fig. 189. droite, BD = a (fig. 189), DC = b; et sur BC comme diamètre décrivons une demi-circonférence (n° 317, *scol.* 1er, 6°). — 2° Élevons sur BC la perpendiculaire DA (n° 309), rencontrant la demi-circonférence en A. — DA sera la longueur cherchée.

En effet, etc. (n° 227, *scol.* 2, 1°).

2e CONSTR. — *Synthèse.* — Soit a la plus grande des deux longueurs a et b. — 1° Prenons BC = a et BD = b. — 2° Sur BC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. — 3° Élevons sur BC la perpendiculaire DA. — 4° Menons BA. — AB est la longueur cherchée.

En effet, etc. (n° 227, *scol.* 2, 2°).

SCOLIE. — On peut se servir du problème précédent pour

Construire un carré équivalent à un parallélogramme ou *à un triangle donné.*

Pour cela, on cherche une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur du parallélogramme, ou entre la base et la moitié de la hauteur du triangle. — Cette moyenne est le côté du carré cherché, etc. (*Voy.* les nos 293, 294, et 295).

En réunissant cette dernière question avec celle du *numéro* 313 (*scol.*), on en déduit le moyen de

Transformer un polygone quelconque en un carré équivalent;

Et l'on parvient facilement, par suite, à

Transformer en un carré unique une somme quelconque de polygones donnés.

PROBLÈME VIII. (Fig. 293, 294, et 295.)

345. *Construire un rectangle équivalent à un carré donné* AI^2, *et dont les côtés consécutifs fassent une somme donnée* AB.

1re CONSTRUCTION. — *Synthèse.* — 1° Sur AB (fig. 293) comme diamètre décrivons une demi-circonférence (n° 317, *scol.* 1er, 6°). — 2° Élevons au point A, sur AB, la perpendiculaire AI (n° 311) égale au côté du carré donné. — 3° Menons par le point I une parallèle à AB (n° 313), et soit D un de ses points d'intersection avec la demi-circonférence. — 4° Du point D abaissons sur AB une perpendiculaire DC (n° 310). — AC et CB seront les côtés du rectangle cherché. Fig 293.

En effet, on a d'abord $\quad AC + CB = AB$;

et ensuite (n° 227, *scol.* 2, 1°) $\quad AC \times CB = AI^2$.

Discussion. — Il y a généralement deux points d'intersection D, D', entre la droite ID et la demi-circonférence ; mais il est facile de voir qu'ils donnent des résultats identiques. — La droite ID pourrait être tangente à la demi-circonférence ; et alors, les deux segmens du diamètre se trouvant égaux au rayon, le rectangle demandé serait lui-même égal au carré donné qui, dans ce cas, satisferait seul à la question. — Enfin, si la droite ID ne rencontrait pas la demi-circonférence, le problème serait impossible.

SCOLIE 1er. — *Le plus grand rectangle que l'on puisse faire avec les deux portions d'une longueur donnée, est égal au carré construit sur la moitié de cette longueur.*

2e CONSTR. — *Synthèse.* — 1° Sur OA (fig. 294) moitié de AB, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence (n° 317, *scol.* 1er, 6°). — 2° Menons, dans cette demi-circonférence, à partir du point A, la corde AI égale au côté du carré donné. — 3° Du point O comme centre, et du rayon OI, décrivons une autre demi-circonférence; et soit C l'un des points où elle coupe AB. — AC et CB seront encore les côtés du rectangle cherché. Fig.294.

En effet, on a d'abord

$$AC + CB = AB,$$

et ensuite

$$AC \times CB = (OA - OC)(OA + OC) = OA^2 - OC^2 = OA^2 - OI^2 = AI^2.$$

La *discussion* de cette construction est à peu près la même que celle de la première.

Fig. 295. ≷[3ᵉ CONSTR. — *Synthèse.* — 1° Prenons sur AB (fig. 295), de chaque côté du point A, des distances AI, AI′, égales au côté du carré donné. — 2° Décrivons sur OI comme diamètre une demi-circonférence. — 3° Menons à cette demi-circonférence l'ordonnée I′E (nº 310). — 4° Du point O comme centre, et du rayon OE, décrivons une autre demi-circonférence; et soit C l'un de ses points d'intersection avec AB. — AC et CB seront encore les côtés cherchés.

En effet, on a

$$\begin{aligned} AC \times CB &= (OA - OC)(OA + OC) = OA^2 - OC^2 = OA^2 - OE^2 \\ &= OA^2 - OI \times OI' = OA^2 - (OA + AI)(OA - AI) \\ &= OA^2 - (OA^2 - AI^2) = AI^2. \end{aligned}$$]≷

SCOL. 2. — Le problème précédent peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Trouver deux droites qui [évaluées en nombres] *fassent une somme donnée* [AB] *et un produit donné* [AI^2];

Et d'après le *scolie* 1ᵉʳ, ce problème serait impossible si l'on donnait $AI^2 > \frac{1}{4}AB^2$.

PROBLÈME IX. (Fig. 296 et 297.)

346. *Construire un rectangle équivalent à un carré donné* AI^2, *et dont les côtés consécutifs fassent une différence donnée* AB.

Fig. 296. 1ʳᵉ CONSTRUCTION. — *Synthèse.* — 1° Sur AB (fig. 296) comme diamètre décrivons une circonférence (nº 317, *scol.* 1ᵉʳ, 6°). — 2° Élevons au point A, sur AB, la perpendiculaire AI égale au côté du carré donné (nº 311). — 3° Menons par le centre O la sécante ICOC′ coupant la circonférence en C et en C′. — IC et IC′ seront les côtés du rectangle cherché.

En effet, on a

$IC' - IC = AB$, et $IC \times IC' = AI^2$ (nº 236, *scol.* 3, 3°).

Scolie 1er. — Le problème est toujours possible.

2e Constr. — *Synthèse.* — 1° Élevons au point A (fig. 297), sur AB, la perpendiculaire AI égale au côté du carré donné (n° 309). — 2° Du point O, milieu de AB (n° 317, *scol.* 1er), comme centre, et du rayon OI, décrivons une demi-circonférence; et soient C, C′, les points où elle coupe AB prolongé. — AC et AC′ seront les côtés cherchés. Fig. 297.

En effet, on a

$$AC' - AC = AB, \quad \text{et} \quad AC \times AC' = AI^2 \text{ (n° 227, \textit{scol.} 2, 1°)}.$$

Scol. 2. — Le problème peut encore s'énoncer ainsi :

Trouver deux droites qui fassent une différence donnée [AB] *et un produit donné* [AI^2].

Problème X. (Fig. 298.)

347. *Partager* [en un point X] *une droite* AB [déterminée de grandeur] *en moyenne et extrême raison :* [c'est-à-dire de manière que l'on ait AB : AX :: AX : BX]. Fig. 298.

Synthèse. — 1° Au point B élevons (n° 311) une perpendiculaire BB′ égale à AB. — 2° Sur BB′ comme diamètre décrivons une circonférence (n° 317, *scol.* 1er, 6°). — 3° Par le centre O menons AO coupant la circonférence en C. — 4° Rabattons AC sur AB, par un arc de cercle CX décrit du point A comme centre. — X sera le point cherché.

En effet, etc. (*Voy.* le n° 237).

Scolie 1er. — La construction que l'on vient d'indiquer peut se simplifier; car elle se réduit à ce qui suit : — 1° Élever sur AB, au point B, la perpendiculaire $BO = \frac{1}{2} AB$, et mener AO; — 2° Rabattre OB sur OA par un arc de cercle BC décrit du point O comme centre; — 3° Rabattre AC sur AB par l'arc de cercle CX décrit du point A comme centre.

Scol. 2. — Le même problème peut s'énoncer ainsi :

Trouver sur une droite donnée AB *un point* X *tel que sa distance à une extrémité* A *de cette droite soit moyenne pro-*

portionnelle entre sa distance à l'autre extrémité B *et la droite entière* AB.

Le problème, ainsi énoncé, a pour solution un autre point X' tel que AX' = AC' = AO + OC; car de la proportion

$$AC' : AB :: AB : AC \ (\text{n}^\circ\ 236)$$

on tire la suivante :

$$AC' + AB : AC' :: AC' : AB,$$

ou

$$BX' : AX' :: AX' : AB.$$

≼[Scol. 3.—Enfin, le problème peut encore s'énoncer ainsi : *Partager une longueur* AB *en deux segmens additifs ou soustractifs* (n° 225) *tels que le carré de l'un d'eux soit équivalent au produit de l'autre segment multiplié par la droite entière.*]≽

≼[Problème XI. (Fig. 299.)]≽

Fig. 299. 348. *Partager une droite donnée* AB *en deux parties telles que le carré de l'une soit au produit de l'autre partie par la droite entière dans un rapport donné* [$m : n$].

Synthèse. — 1° Prenons, sur le prolongement de AB, une distance BC telle que l'on ait BC : AB :: $m : n$ (n° 342). — 2° Sur AC comme diamètre décrivons une demi-circonférence (n° 317, *scol.* 1er, 6°). — 3° Elevons l'ordonnée BD (n° 309). — 4° Sur BC comme diamètre décrivons une circonférence (n° 317, *scol.* 1er, 1°). — 5° Par le centre O de cette dernière et par le point D, menons la sécante DXOY, coupant la circonférence en X et en Y. — DX est la première partie de la droite AB : celle *dont le carré,* etc. ; [AB — DX est la seconde].

En effet, on a, d'après la construction précédente, d'abord

$$BD^2 = AB \times BC \ (\text{n}^\circ\ 227,\ scol.\ 2,\ 1^\circ),$$

et ensuite

$$BD^2 = DX \times DY = DX(BC + DX) \ (\text{n}^\circ\ 236);$$

d'où l'on tire

$$AB \times BC = DX\,(BC + DX),$$

et par conséquent

$$DX^2 = (AB - DX)BC.$$

Maintenant, puisque l'on a

$$BC : AB :: m : n,$$

d'où $(AB - DX)\,BC : (AB - DX)\,AB :: m : n,$

il en résulte

$$DX^2 : (AB - DX)\,AB :: m : n,$$

ce qui fait voir que DX remplit les conditions demandées.

Scolie 1er. — Comme DX est moyen proportionnel entre (AB — DX) et BC, la même construction sert à résoudre le problème suivant :

Partager une droite AB *en deux parties telles que l'une,* DX, *soit moyenne proportionnelle entre l'autre partie et une seconde droite donnée* BC.

Scol. 2. — Dans le cas particulier de $m = n$, on a aussi

$$AB = BC = BD,$$

et l'on retombe sur le problème précédent (n° 347).]⋗

Problème XII. (Fig. 300.)

349. *Inscrire à un angle donné* AOB, *une droite* AB *qui passe par un point* P *donné dans cet angle, et qui soit partagé en ce point en deux parties proportionnelles à des nombres donnés* [*m*, *n*]. Fig. 300.

Menons par le point P une droite parallèle à OA, et terminée en Q sur OB : nous aurons

$$AP : PB :: OQ : QB \text{ (n° 214)}.$$

Donc, si l'on détermine le point B par la proportion

$$m : n :: OQ : QB \text{ (n° 342)},$$

et que l'on mène BPA, la droite AB satisfera aux conditions de la question.

Scolie 1er. — Si l'on ne donnait pas la position relative des portions de AB qui doivent être proportionnelles à m et à n, il y aurait deux solutions, parce que l'on pourrait poser aussi

$$n : m :: OQ : QB.$$

SCOL. 2. — Si $m = n$, la question pourra s'énoncer ainsi :

Inscrire à un angle donné une droite qui passe par un point donné dans cet angle, et qui soit partagée en ce point en deux parties égales.

PROBLÈME XIII.

350. *Mesurer une distance dont l'extrémité n'est point accessible.* — [On suppose le terrain sensiblement plan.]

Fig. 301. 1re CONSTRUCTION. — Soit B (fig. 301) l'extrémité inaccessible de la distance cherchée AB. — Après avoir fixé la direction AB au moyen de *jalons* (n° 24), on élève sur AB, dans le plan du terrain, une perpendiculaire AD (nos 309 et 311), et sur AD une perpendiculaire DE; puis on détermine le point C où BE rencontre AD. Cela fait on pose la proportion

$$AB : AC :: DE : CD \text{ (n° 214), d'où } AB = \frac{AC \times DE}{CD};$$

ainsi, en mesurant AC, CD, et DE, la valeur de AB sera déterminée par la formule précédente.

N. B. — Il faut, autant que possible, pour atténuer les petites erreurs qui résultent toujours de l'inexactitude des mesures, donner aux droites arbitraires AD, DE, des longueurs telles que les angles aigus de la figure soient à peu près des angles demi-droits.

Au reste, il n'est pas nécessaire que les droites AB et DE soient perpendiculaires à AD : il suffit qu'elles soient parallèles entre elles (*Voy.* le n° 340, *scol.* 1er).

Fig. 302. ≼ [2e CONSTR. — Soit X (fig. 302) l'extrémité inaccessible de la distance cherchée EX. — Prenons un point quelconque D sur l'alignement EX; puis deux points quelconques A, C, sur un même alignement avec le point D; et soit B le point d'intersection des alignemens CE et AX. La droite ABX étant

une transversale par rapport au triangle CDE, nous aurons (n° 244)

$$EX.DA.CB = XD.AC.BE = (DE + EX)AC.BE;$$

d'où $$EX = \frac{DE.AC.BE}{DA.CB - AC.BE}.$$

Ainsi, en mesurant les *cinq* distances ED, DA, AC, CB, BE, nous aurons la distance cherchée EX.]⪸

⪷[3e CONSTR. — Soit I (fig. 208) l'extrémité inaccessible de la distance cherchée EI. — 1° Marquons deux points quelconques, B, A, sur un même alignement avec le point E. — 2° Marquons un troisième point D sur l'alignement IB; — 3° Un point F à l'intersection des alignemens IE, AD; — 4° Un point C à l'intersection des alignemens BF, ED; — 5° Un point K à l'intersection des alignemens AC, IF. — Nous aurons ainsi Fig. 208.

$$EI : IF :: EK : KF,$$

d'où $$EI : IF - EI :: EK : KF - EK;$$

et par conséquent, à cause de $IF - EI = EF$,

$$EI = \frac{EF.EK}{KF - EK}.$$

Alors, au moyen des distances EK, KF, que l'on peut facilement mesurer, on aura EI.]⪸

⪷[*Scolie* 1er. — Cette dernière construction a l'avantage de pouvoir être modifiée pour le cas où l'extrémité inaccessible de la distance cherchée est en même temps *invisible* de l'autre extrémité. Mais alors les deux transversales ID, IF, ne suffisent pas pour déterminer cette distance; et il en faut une troisième. Ainsi, par exemple, s'il s'agit de déterminer la distance E'I (fig. 303) dont l'extrémité I est inaccessible Fig. 303. et invisible de l'extrémité E', il faudra d'abord fixer par des alignemens, mais sans mesurer aucune distance, les positions respectives des points E, K, F, dans une direction suivant laquelle le point I peut être aperçu. Alors on marquera : 1° le point C′, intersection des alignemens E′F et AK ; 2° le point F′, intersection des alignemens EC′ et AF ; 3° puis on mesurera E′K′ et K′F′ ; et l'on aura E′I comme ci-dessus (3ᵉ *constr.*).

Scol. 2. — La solution du problème precédent fournit le moyen de

Fig.304. *Mener, par un point donné* D (fig. 304), *une parallèle* DE *à une droite inaccessible* AB.

Pour cela, on recule dans la direction AD d'une quantité quelconque DC que l'on mesure ; puis on détermine les distances CA, CB, comme on l'a expliqué ci-dessus. On pose alors la proportion

$$CA : CB :: CD : CE \text{ (n° 214)};$$

et la distance CE fait connaître, sur la direction CB, le point E de la parallèle cherchée.

Scol. 3. — On peut encore se servir du même problème pour *Mesurer la distance* AB (fig. 304) *de deux points inaccessibles :*

On détermine d'abord les distances CA et CB comme dans la question principale ; puis, par un point quelconque D pris sur la droite CA par exemple, on mène la droite DE parallèle à AB (*scol.* 2) et terminée en E sur CB ; on mesure DE ; et comme CD est déjà mesuré, on pose la proportion

$$AB : CA :: DE : CD \text{ (n° 214)},$$

d'où l'on tire

$$AB = \frac{CA \times DE}{CD}.$$

Problème XIV.

351. *Mesurer la hauteur d'un édifice.*

1ᵉʳ *Cas.* — Supposons que le pied de l'édifice soit *accessible.*

Fig.305. Soit AB (fig. 305) la hauteur cherchée. — Sur une droite ACE menée par le pied A de l'édifice, et à des distances de ce point, AC, AE, qui ne diffèrent pas beaucoup de sa hau-

teur présumée, on plante, parallèlement à AB, deux *jalons* CD, EF, d'inégales longueurs, le premier plus grand, et le second plus petit. Cela fait, par l'extremité F du plus petit, on mène un *rayon visuel* au sommet B de l'édifice, et l'on marque le point D d'intersection de ce rayon avec le jalon CD. Alors, les droites AB, CD, EF, étant parallèles, si par le point F on mène la droite FGI parallèle à ECA et coupant CD et AB respectivement en G et en I, on aura la proportion

$$\mathrm{IB} : \mathrm{IF} :: \mathrm{GD} : \mathrm{GF} \text{ (n° 214)},$$

d'où
$$\mathrm{IB} = \frac{\mathrm{IF} \times \mathrm{GD}}{\mathrm{GF}}.$$

Ainsi, en mesurant $\mathrm{IF} = \mathrm{AE}$, $\mathrm{GD} = \mathrm{CD} - \mathrm{EF}$, et $\mathrm{GF} = \mathrm{CE}$, on aura IB. Enfin, ajoutant $\mathrm{AI} = \mathrm{EF}$, on aura la hauteur cherchée : $\mathrm{AB} = \mathrm{AI} + \mathrm{IB}$.

N. B. — Il n'est pas nécessaire que AE et IF soient perpendiculaires à AB (n° 340, *scol.* 1[er]). Par conséquent, on opère sur un terrain *en pente* comme sur un terrain *de niveau ;* la seule chose à observer est que IF doit être parallèle à la droite AE menée du pied A de l'édifice au pied E du jalon qui en est le plus éloigné.

2[e] *Cas.* — Si le pied de l'édifice est *inaccessible*, on commence par en déterminer la distance (n° 350).

Problème XV. (Fig. 306 et 307.)

352. *Par un point donné* A, *mener une droite qui aille passer par le point de rencontre* P *de deux droites*, BP, CP, *concourantes* [mais que l'on ne peut prolonger jusqu'à leur point de rencontre].

1[re] Construction. — *Synthèse.* — 1° Menons la droite ABC (fig. 306) coupant BP et CP respectivement en B et en C. — 2° Menons à cette droite la parallèle A′B′C′ (n° 313) coupant BP et CP respectivement en B′ et en C′. — 3° Mesurons AB, BC, B′C′, et prenons sur le prolongement de B′C′ une Fig 306.

distance A′B′ quatrième proportionnelle aux trois droites BC, B′C′, et AB ; c'est-à-dire telle que l'on ait

$$A'B' = \frac{AB \times B'C'}{BC}.$$

— Le point A′ appartiendra à la droite AP (n° 214, *coroll.*).

Fig.307. ⋞[2ᵉ Constr. — *Synthèse.* — 1° Menons les droites BAC, DAE (fig. 307), coupant les droites BP et CP respectivement en B et en C, en D et en E. — 2° Menons les droites BE, DC, se coupant au point F. — 3° Menons FGI, coupant BP et CP respectivement en G et en I. — 4° Menons DI, CG, se coupant au point K. — Ce point appartient à la droite cherchée.

En effet, d'après la construction précédente, les points P, A, K, doivent appartenir à une même droite ayant le point F pour pôle par rapport à l'angle BPC (n° 251).]⋟

⋞[Problème XVI.]⋟

353. *Prolonger une droite au-delà d'un obstacle.*

Fig.302 1ʳᵉ Construction. — Soit AB (fig. 302) la droite à prolonger au-delà de l'obstacle M ou N.

On marque d'abord deux points quelconques, A, B, sur cette droite ; puis un point quelconque C hors de cette droite ; ensuite un point D dans la direction CA ; et enfin un point E dans la direction CB. Alors, après avoir mesuré les distances CA, AD, DE, EB, BC, on calcule la valeur de EX comme dans le *numéro* 350 ; et en mesurant cette distance sur le prolongement de la droite DE, on a un point X de la droite AB.

Ensuite, faisant varier un ou plusieurs des trois points C, D, E, on obtient de la même manière autant de nouveaux points que l'on veut de la droite AB.

N. B. — La même opération pourrait encore servir à déterminer un point X (fig. 308) situé entre A et B ; seulement, comme alors DX = ED — EX, il en résulte

Fig.308.

$$EX = \frac{DE.AC.BE}{DA.CB + AC.BE}.$$

2ᵉ Constr. — *Synthèse.* — Soit B, E (fig. 307), deux points de la droite à prolonger. — 1° Prenons un point P quelconque et deux points C, D, dans les directions respectives PE, PB. — 2° Menons les droites ED, BC, et soit A leur point d'intersection. — 3° Menons PA et CD. — 4° Prenons un autre point I sur PEC ; menons la droite ID ; et soit K son point d'intersection avec PA. — 5° Menons CK ; et soit G son point d'intersection avec PBD. — 6° Menons la droite IG ; et soit F son point d'intersection avec CD. — Le point F est un point de BE. Fig. 307.

En effet, le point F étant conjugué de la droite PAK par rapport à l'angle BPE (nᵒ 251), se trouve nécessairement sur la droite BE.

3ᵉ Constr. — *Synthèse.* — Soient A, F (fig. 212), deux points de la droite proposée. — 1° Prenons, hors de la droite AF, deux points quelconques A, B ; et formons le triangle ABC. — 2° Menons les droites FB, FC ; et prolongeons la première jusqu'à la rencontre de AC en I. — 3° Menons, par le point C et par un point quelconque D pris sur FBI entre B et I, la droite CD ; et prolongeons-la jusqu'à la rencontre de AB en K. — 4° Menons DA ; et soit O son point d'intersection avec CF. — 5° Menons la droite BO ; et prolongeons-la jusqu'à la rencontre de CD en E. — 6° Menons de même la droite KI ; et prolongeons-la jusqu'à la rencontre de BC en G. — Les points E, G, appartiendront tous deux à la droite AF. Fig. 212.

(*Voy.* le nᵒ 252.)

Problème XVII. (Fig. 172.)

354. *Etant donné un triangle* ABC, *construire un triangle semblable sur une ligne* A′B′ *donnée* [comme homologue de AB]. Fig. 172.

Analyse. — Le triangle cherché A′B′C′ devant être semblable au triangle ABC, on aura (nᵒˢ 207 et 215)

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C',$$

et $$A = A' \mid B = B' \mid C = C'.$$

Ainsi l'on peut facilement déterminer les trois côtés et les trois angles du triangle A'B'C'. — De là résultent plusieurs moyens de résoudre la question.

Synthèse. — 1re *Construction.* — Employez les trois côtés avec la construction du *numéro* 322.

2e *Constr.* — Employez le côté A'B', un second côté, et l'angle compris, comme dans le *numéro* 323.

3e *Constr.* — Faites aux points A' et B' des angles respectivement égaux à A et B, comme dans le *numéro* 324.

Scolie 1er. — Quant à la construction du *numéro* 325, il vaut mieux l'éviter parce qu'elle pourrait induire en erreur.

Scol. 2. — On a vu dans le *numéro* 214 qu'une parallèle menée à l'un des côtés d'un triangle déterminait un autre triangle semblable au premier : il en résulte encore un moyen qu'on peut employer dans beaucoup de circonstances.

Scol. 3. — La construction d'un triangle semblable à un autre est susceptible de nombreuses *applications ;* nous en avons déjà donné des exemples dans les *numéros* 350, 351, 352, etc.

Problème XVIII. (Fig. 309.)

Fig. 309. 355. *Inscrire à une circonférence un triangle* ABC *semblable à un triangle donné.*

Synthèse. — 1° Menons une droite MN tangente à la circonférence (n° 309, *scol.* 2), en un point quelconque A. — 2° Tirons, par le point A, deux cordes AB, AC, faisant avec AM et AN les angles MAB, NAC (n° 314), respectivement égaux à deux angles du triangle donné. — 3° Menons BC. — Le triangle ABC satisfera aux conditions de la question.

En effet, ACB = MAB, ABC = NAC (n° 199) ; et quant à l'angle A, il est nécessairement égal au troisième angle, A, du triangle donné (n° 125).

PROBLÈME XIX. (fig. 310.)

356. *Circonscrire à une circonférence un triangle* ABC *semblable à un triangle donné.* Fig.310.

Synthèse. — 1° Inscrivons à la circonférence un triangle semblable au triangle donné (n° 355). — 2° Du centre, O, menons des rayons O*a*, O*b*, O*c*, respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle A′B′C′ (n° 310). — 3° Par les extrémités, *a*, *b*, *c*, de ces rayons, menons des tangentes (n° 309, *scol.* 2). — Elles formeront un triangle ABC qui satisfera aux conditions de la question.

En effet, le triangle ABC sera semblable au triangle A′B′C′ (n° 219), et par conséquent au triangle donné (n° 211).

PROBLÈME XX.

357. *Etant donné un polygone, construire un polygone semblable sur une ligne donnée* [comme homologue d'un côté déterminé du premier].

La résolution de ce problème se ramène à celle du précédent, en employant, pour la détermination du polygone cherché, l'une des méthodes indiquées *numéro* 166 *ou* 171, ⋦[ou même encore les propriétés des centres de similitude internes ou externes (n° 223).]⋧

⋦[*Scolie.* — On peut, par le même moyen, construire approximativement une courbe semblable à une courbe donnée quelconque. — Pour cela, on commence par inscrire à la courbe donnée un polygone dont les côtés soient suffisamment petits : [plus les sommets consécutifs sont voisins les uns des autres, plus la solution approche d'une exactitude rigoureuse]. On construit ensuite un second polygone semblable au premier, et tel que les côtés homologues des deux polygones aient le même rapport donné que les dimensions homologues des deux courbes. Enfin, on fait passer une courbe continue (n° 194) par les sommets consécutifs du nouveau polygone.]⋧

Problème XXI. (Fig. 250).

Fig.250. 358. *Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable aux premières et équivalente à leur somme.*

Synthèse. — Sur AB et AC, côtés homologues des figures données, construisons un triangle rectangle en A (n° 323); et menons BC. — Ce sera le côté homologue de la figure cherchée.

En effet, etc. (n° 305, *coroll.* 2).

Problème XXII. (Fig. 250.)

359. *Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable aux premières et équivalente à leur différence.*

Construction analogue à la précédente.

Scolie sur ces deux problèmes. — Les cercles étant des figures semblables (n° 207), les solutions des deux problèmes précédens sont applicables aux cercles décrits sur les côtés d'un triangle rectangle comme diamètres respectifs (n° 305, *coroll.* 2).

Problème XXIII. (Fig. 311 et 312.)

360. *Construire un carré qui soit à un carré donné comme une ligne donnée* DC *est à une autre ligne donnée* BD.

1re Construction. — *Analyse.* — Cette question ayant une analogie évidente avec la proposition du n° 227 (*coroll.* 1er), plaçons à la suite l'une de l'autre, les deux droites données
Fig.311. BD, DC (fig. 311); décrivons sur BC comme diamètre une demi-circonférence; élevons l'ordonnée DA; puis menons AB et AC. Nous aurons alors

$$AB^2 : AC^2 :: BD : DC;$$

et si AB était le côté du carré donné, AC serait le côté du carré cherché.

D'ailleurs, le même rapport doit exister entre les deux lignes BD, DC, et deux carrés dont les côtés seraient proportionnels à ceux du premier, etc.

Synthèse. — 1° Sur BC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence (n° 317, *scol.* 1er, 6°). — 2° Menons l'ordonnée DA (n° 309), les cordes AB, AC; et prolongeons toutes ces droites. — 3° Sur AB, à partir du point A, prenons une longueur AB′ égale au côté du carré donné. — 4° Menons par le point B′, parallèlement à BDC, la droite B′D′C′ (n° 313), coupant AD et AC respectivement en D′ et en C′. — AC′ sera le côté du carré cherché.

En effet, on a

	$AB : AC :: AB' : AC'$ (n° 214),
d'où	$AB^2 : AC^2 :: AB'^2 : AC'^2$;
de plus	$AB^2 : AC^2 :: BD : DC$ (n° 227, *coroll.* 1er) :
donc	$AB'^2 : AC'^2 :: BD : DC$.

Scolie 1er. — On pourrait varier cette solution en plaçant, par exemple, les deux lignes données comme AD et AB. — Etc.

2e Constr. — *Synthèse.* — Menons une droite BD′ (fig. 312) égale au côté du carré donné. — 2° Tirons DD′. — 3° Menons, parallèlement à DD′ (n° 313), la droite CC′ terminée en C′ sur la droite BD′ prolongée. — 4° Sur BC′ comme diamètre, décrivons une demi-circonférence (nos 317, *scol.* 1er, 6°). — 5° Élevons l'ordonnée D′A (n° 309). — D′A est le côté du carré cherché. Fig. 312.

En effet, comme le triangle BAC′ est rectangle, il en résulte

$BD'^2 : D'A^2 :: BD' : D'C'$ (n° 227, *coroll.* 2) $:: BD : DC$ (n° 214).

Scol. 2. — Il y a aussi plusieurs manières de varier cette construction : par exemple on pourrait faire en sorte que les côtés des deux carrés fussent le diamètre BC′ et la corde BA.

Problème XXIV.

361. *Construire un polygone,* X, *semblable à un polygone donné,* P, *et qui soit à ce dernier dans un rapport donné* [$m : n$].

Soit a un côté du polygone donné, et x le côté homologue du polygone cherché ; on aura

$$x^2 : a^2 :: X : P$$

et
$$X : P :: m : n,$$

d'où
$$x^2 : a^2 :: m : n.$$

La question est alors ramenée à déterminer x d'après les conditions du problème précédent (n° 360).

Problème XXV.

362. *Construire un polygone*, X, *semblable à un polygone donné*, P, *et équivalent à un autre polygone donné*, Q.

Analyse. — Soit a un côté du polygone P, et x le côté homologue du polygone X; on aura

$$x^2 : a^2 :: X : P \quad \text{et} \quad X = Q,$$

d'où
$$x^2 : a^2 :: Q : P.$$

Supposons que l'on transforme P et Q en carrés ayant respectivement pour côtés p et q, on aura

$$Q : P :: q^2 : p^2,$$

d'où
$$x^2 : a^2 :: q^2 : p^2,$$

ou
$$x : a :: q : p.$$

Synthèse. — 1° Transformons les polygones donnés en carrés ayant respectivement pour côtés p et q (n° 344, *scol.*). — 2° Cherchons une quatrième proportionnelle aux droites p, q, et au côté a du polygone P (n° 342). — Ce sera le côté du polygone cherché, homologue de a.

Problème XXVI.

363. *Trouver deux longueurs* [x, y] *proportionnelles à deux rectangles donnés* [ab, $a'b'$], [ou en général à deux polygones donnés].

1re Construction. — *Analyse.* — On a

$$x : y :: ab : a'b',$$

d'où
$$x = \frac{aby}{a'b'}.$$

L'une des longueurs, par exemple y, étant arbitraire, faisons-la égale à b', il restera

$$x=\frac{ab}{a'},\quad \text{d'où}\quad x : a :: b : a'.$$

Synthèse. — Cherchons une quatrième proportionnelle aux longueurs a', b, a (n° 342) : son rapport à la longueur b' sera le même que celui du rectangle ab au rectangle $a'b'$.

Scolie 1er. — Si les deux rectangles étaient des carrés, a^2, a'^2 (n° 159), il faudrait chercher une troisième proportionnelle aux longueurs a' et a (n° 343) : le rapport de cette nouvelle droite à la droite a' serait le rapport cherché.

2e Constr. — *Synthèse.* — 1° Transformons les deux rectangles [ou figures quelconques] en deux carrés (n° 344, *scol.*); et soient AB, AC (fig. 311), les côtés de ces deux carrés. — 2° Formons le triangle rectangle BAC (n° 323). — 3° Abaissons sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire BD (n° 310). — Le rapport de BD à DC est le rapport cherché (n° 227, *coroll.* 1er). Fig.311.

N.B. — Toute parallèle B'D'C' à BDC est aussi coupée suivant le même rapport par les droites AB, AD, AC (n° 214, *coroll.*).

Scol. 2. — On peut, par le même moyen,

Trouver, en lignes, le rapport de deux polygones semblables, P, Q :

Si a et b sont deux côtés homologues des polygones donnés, on a

$$P : Q :: a^2 : b^2 \quad (\text{n° } 305);$$

et la question est ramenée à trouver le rapport de a^2 à b^2 (*Voyez* ci-dessus, *scol.* 1er, et 2e *constr.*).

Problème XXVII.

364. *Inscrire à un cercle un polygone régulier d'une espèce donnée.*

Pour la résolution de ce problème, il faut distinguer deux cas : — ou bien 1° on connaît le rapport du côté du polygone de l'espèce donnée, soit au rayon du cercle circonscrit [ou inscrit] soit au côté d'un polygone déjà connu, et inscrit [ou circonscrit] au même cercle (*Voy.* le n° 274); — ou bien 2° on ne connaît aucun de ces rapports.

1er *Cas.* — On pourra déterminer exactement une droite égale au côté cherché; et en traçant dans la circonférence, autant de cordes consécutives égales à cette droite, que le polygone doit avoir de côtés, on obtiendra le polygone cherché (n° 179).

Fig.313. Soit proposé pour exemple d'*Inscrire à un cercle* OA (fig. 313) *un décagone régulier* (*Voy.* le n° 269).

Pour cela: — 1° Menons deux rayons perpendiculaires entre eux, OA, OB (n° 309 ou 311). — 2° Menons du point A au milieu C (n° 317) du rayon OB la droite AC. — 3° Rabattons CO sur CA par un arc de cercle OD décrit du point C comme centre. — 4° Décrivons, du point A comme centre, et du rayon AD, un arc de cercle DE qui coupe en un point E la circonférence donnée. — La corde AE sera un côté du polygone cherché.

[2e *Cas.* — Ne pouvant plus obtenir rigoureusement le côté cherché, il faut se contenter d'une approximation. Or, voici un moyen qui donne une valeur de ce côté, aussi approchée que l'on veut.

Supposons qu'il s'agisse, par exemple, d'*Inscrire à un*
Fig.314. *cercle* OP (fig. 314) *un heptagone régulier.*

Pour cela: — 1° Essayons deux droites qui ne diffèrent pas beaucoup du côté cherché, l'une AB un peu trop grande, l'autre *ab* un peu trop petite: c'est-à-dire telles que, chacune d'elles étant portée *sept* fois de suite comme corde, à partir du point P, sur la circonférence OP [et dans le sens PC], l'opération se termine, pour la première, en un point C situé au-delà de P, et pour la seconde, en un point *c* situé en-deçà de P: [on peut prendre, par exemple, le côté de l'hexagone inscrit et celui de l'octogone]. — 2° Traçons une droite DE égale à AB; et prenons, à partir du point D, une portion D*e* de cette droite, égale à *ab*. — 3° Élevons au point E, sur DE, une perpendiculaire EF (n° 311) égale à la corde PC de l'arc *excé-*

dant, et au point *e*, sur la même droite DE, et dans le sens inverse du précédent, une perpendiculaire *ef* égale à la corde P*c* de l'arc *déficient*. — 4° Menons F*f* coupant DE au point G. — La droite DG ne pourra différer que fort peu du côté cherché.

Si l'on trouve que l'erreur est encore trop considérable, et que le résultat obtenu donne, par exemple, un côté trop petit, on recommencera l'opération en substituant ce nouveau côté approché au côté *ab*; et, cette fois, l'erreur sera beaucoup moindre.

On pourra, du reste, continuer cette série d'approximations jusqu'à ce que deux résultats consécutifs ne diffèrent plus d'une quantité appréciable : dès qu'on est parvenu à ce point, une construction rigoureuse n'aurait plus aucun avantage réel sur la solution ainsi obtenue.

Scolie 1er. — La méthode précédente est très digne de remarque, en ce qu'elle peut être employée dans toutes les circonstances où l'on cherche une ligne dont la longueur doit satisfaire à une condition donnée, et où en même temps on ne peut trouver exactement cette valeur par quelque moyen simple et commode. On s'en sert, en particulier, pour partager en un certain nombre donné de parties égales, non-seulement une circonférence entière, comme on vient de le voir, mais un arc quelconque.

Scol. 2. — La droite E*e*, différence des valeurs supposées du côté inconnu, se trouvant, par la solution approximative que l'on vient de donner, partagée proportionnellement aux erreurs respectives qui résultent des deux hypothèses (*Voy.* le n° 340), il s'ensuit que la construction précédente n'est, en quelque sorte, que la traduction géométrique de la méthode connue en Arithmétique sous le nom de *règle de fausse position double*, laquelle consiste, comme l'indique son titre, à *supposer* deux valeurs successives au nombre inconnu, puis à regarder les accroissemens des erreurs qui résultent de ces suppositions, comme proportionnels aux accroissemens des valeurs supposées.

Scol. 3. — On peut encore employer, pour l'inscription des polygones réguliers, la table des cordes, dont nous avons indiqué la formation dans le n° 274, et que nous avons placée à la fin de l'ouvrage. Par exemple, le nombre 6840, valeur de la corde de 40° dans un cercle dont le rayon est représenté par 10000, est en même temps, pour la même hypothèse, la valeur du côté de l'*ennéagone* régulier inscrit. De même, le nombre 8679, corde de 51°26′ ou de 360° : 7, est le côté de l'*heptagone*, etc.

Problème XXVIII.

365. *Circonscrire à un cercle un polygone régulier d'une espèce donnée.*

On commence par inscrire un polygone de la même espèce (n° 364); et l'on trouve, par le n° 330, le polygone circonscrit semblable.

Problème XXIX.

366. *Construire, sur un côté donné, un polygone régulier d'une espèce déterminée.*

Il faut, pour résoudre ce problème, construire un polygone de l'espèce désignée, en lui donnant pour côté ou pour rayon une droite arbitraire; puis construire, sur le côté donné, un polygone semblable au premier. Ce sera le polygone cherché.

Scolie. — On peut aussi quelquefois résoudre la question en traçant deux côtés consécutifs qui comprennent entre eux l'angle du polygone; mais il faut pour cela que l'on sache construire cet angle directement.

§ III. *Problèmes sur les Contacts* (*).

Problème I. (Fig. 315 et 316.)

367. *Par un point* T *donné hors d'un cercle* OA, *mener une tangente.*

(*) *Voyez* le n° 309 (*scol.* 2), le n° 317 (*scol.* 1er, 3°), et le n° 319 (*scol.* 2).

1re Construction. — *Analyse.* — Soit TA (fig. 315) la tangente demandée, et OA le rayon mené au point de tangence : les droites TA, OA, seront perpendiculaires entre elles (n° 102). Soit pris, sur le prolongement de OA, une distance AP = OA ; et menons TP : les droites TO, TP, seront égales entre elles (n° 96). Le point P se trouvera donc sur une circonférence décrite du point T comme centre avec le rayon TO ; et la droite TA partagera en deux parties égales la portion OP de cette circonférence (n° 67). Fig. 315.

Synthèse. — 1° Du point T comme centre, et du rayon TO, décrivons un arc de cercle suffisamment grand. — 2° Du point O comme centre, et d'un rayon égal au diamètre de la circonférence donnée, décrivons un petit arc de cercle qui coupe le premier en un point P. — 3° Menons la droite OP coupant la circonférence donnée en un point A. — 4° Menons la droite TA. — Ce sera la tangente demandée.

En effet, etc. (*Voyez* l'analyse).

Discussion. — 1° Pour que les circonférences TO et OP se coupent, ou pour que le triangle TOP soit possible (n° 145), il faut que OP soit moindre que le double de TO, ou que OA soit moindre que TO : ce qui revient à dire que le point donné T doit être hors du cercle OA. De plus, comme il y a nécessairement alors entre les deux circonférences, deux points d'intersection, P, P′, il en résulte aussi deux points de tangence A, A′, ou *deux* tangentes TA, TA′, qui satisfont également à la question.

2° Si TO = OA, c'est-à-dire si le point T est sur la circonférence donnée, les deux circonférences TO, OA, sont alors égales ; les circonférences OP, TO, au lieu de se couper, se touchent en un point de OT ; d'où il résulte que la droite OP se confond avec la droite OT, et le point A avec le point T. La construction ne donnant plus, pour le point de tangence cherché, que le point T lui-même, n'apprend donc plus rien : ce qui provient de ce que l'on veut appliquer au cas où le point donné est sur la circonférence, un mode de résolution qui n'a été trouvé que pour l'hypothèse où ce point serait extérieur. Au reste, il n'y a alors, pour résoudre la question, qu'à élever une perpendiculaire à l'extrémité du rayon OT (*Voy.* le n° 309, *scol.* 2). — On n'obtient qu'*une* solution.

3° Enfin, il n'y a plus *aucune* solution possible si le point T est dans l'intérieur du cercle OA, parce que les circonférences OP et TO n'ont plus alors de point commun.

Fig. 316. 2ᵉ Constr. — *Synthèse.* — 1° Sur OT (fig. 316) comme diamètre décrivons une circonférence (n° 317, *scol.* 1ᵉʳ, 6°). — 2° Au point d'intersection A menons dans le cercle donné le rayon OA. — 3° Menons TA. — Ce sera la tangente cherchée.

En effet, l'angle TAO est droit; etc. (n° 102).

Discussion. — Si le point donné T est extérieur au cercle donné OA, il y a deux points d'intersection, A, A′, et par conséquent *deux* tangentes, TA, TA′. — Si le point donné est sur la circonférence OA, les deux cercles se touchent intérieurement : il n'y a plus qu'*une* tangente, et il faut, pour la construire, recourir à une autre méthode (*Voy.* ci-dessus, 2°). — Enfin, si le point est intérieur au cercle OA, les deux circonférences n'ont plus aucun point commun; et le problème est *impossible*.

Problème II. (Fig. 317 et 318.)

Fig. 317 et 318. 368. *Mener une droite tangente à deux cercles donnés,* OT, *ot.*

1ʳᵉ Construction. — *Analyse.* — Soit T*t* une tangente commune aux deux cercles : cette tangente sera perpendiculaire aux rayons OT, *ot* (n° 102). Du point O, centre du plus grand cercle, et d'un rayon OG égal à la différence (fig. 317) ou à la somme (fig. 318) des deux rayons donnés, décrivons une circonférence OG; et du point *o*, centre du plus petit cercle, menons une parallèle à T*t* : cette parallèle sera tangente au cercle OG.

Synthèse. — 1° Du centre O du plus grand des deux cercles, et d'un rayon égal à la différence (fig. 317) ou à la somme (fig. 318) des deux rayons donnés, décrivons une circonférence OG. — 2° Du centre o du petit cercle menons des tangentes, oG, oG', au cercle OG (n° 367); [ou marquons simplement les points de tangence, G, G']. — 3° Menons les rayons OG, OG'; et prolongeons-les jusqu'à la rencontre de la circonférence OT, en T, T'. — 4° Menons, dans le plus petit cercle, des rayons *ot*, *ot'*, parallèles à OG, OG' (n° 313). — 5° Menons les droites T*t*, T'*t'*. — Ces droites sont les tangentes cherchées, d'après l'analyse.

Discussion. — Lorsque les deux cercles donnés sont extérieurs l'un à l'autre, il y a *quatre* solutions. — Quand ces cercles se touchent extérieurement, il n'y a plus que *trois* tangentes, parce que deux d'entre elles se confondent en une seule passant par le point de contact des deux cercles. — Quand les deux cercles se coupent, il y a seulement *deux* solutions. — Il n'y en a plus qu'*une* lorsque les deux cercles se touchent intérieurement. — Enfin le problème est *impossible* lorsque les cercles sont intérieurs l'un à l'autre.

Dans le cas particulier où les deux cercles donnés seraient égaux, les tangentes extérieures s'obtiendraient en élevant des diamètres perpendiculaires à la ligne des centres (n° 311), et menant par les extrémités de ces diamètres, des parallèles à cette ligne (n° 313).

⋞[2° Constr. — La question pouvant se ramener à la détermination des centres de similitude des deux cercles, par lesquels passent leurs tangentes communes (n° 224), nous renverrons, pour cette seconde construction, au *numéro* 340 (*scol.* 4).]⋟

Problème III.

369. *Décrire un cercle d'un rayon donné, qui touche une droite donnée en un point donné.*

Pour cela il suffit d'élever, au point donné sur la droite, une perpendiculaire (n° 109) égale au rayon donné, et de prendre pour centre l'extrémité de cette perpendiculaire (n° 145).

Il y a *deux* solutions.

PROBLÈME IV. (Fig. 319.)

Fig. 319. 370 *Décrire un cercle d'un rayon donné* OA, *qui touche une droite donnée* MN, *et qui passe par un point* A [donné hors de cette droite].

Synthèse. — 1° Par un point quelconque P pris sur MN, élevons, du même côté que le point donné, une perpendiculaire PQ (n° 309) égale au rayon donné. — 2° Par l'extrémité Q de cette perpendiculaire menons une parallèle M'N' à la droite MN : [ce qui peut se faire en élevant au point Q une autre perpendiculaire (*Voy.* le n° 110)]. — 3° Du point donné comme centre, avec un rayon égal au rayon donné, décrivons une circonférence OA. — L'intersection de cette circonférence avec la parallèle M'N' donnera le centre cherché, O ou O'.

Il y aura *deux* solutions qui pourront se réduire à *une* seule ou devenir *imaginaires*.

PROBLÈME V. (Fig. 93 et 95.)

Fig. 93 et 95. 371. *Décrire un cercle d'un rayon donné, qui touche une circonférence donnée* OA *en un point donné* A.

Synthèse. — 1° Menons une droite indéfinie par le point donné A et par le centre O du cercle donné. — 2° A partir du point A, prenons sur cette droite une longueur AO' égale au rayon donné. — L'extrémité de cette longueur sera le centre d'un cercle qui satisfera aux conditions exigées.

Il y a *deux* solutions : dans l'une, le cercle donné et le cercle cherché se touchent extérieurement (fig. 93); dans l'autre ils se touchent intérieurement (fig. 95).

PROBLÈME VI. (Fig. 320.)

Fig. 320. 372. *Décrire un cercle d'un rayon donné* OA, *qui touche une circonférence donnée* CA, *et qui passe par un point donné* D [extérieur ou intérieur à cette circonférence].

Synthèse. — 1° Du point donné comme centre, avec le rayon donné, décrivons une circonférence DO. — 2° Décrivons une autre circonférence concentrique au cercle donné, et d'un rayon égal à la somme ou à la différence des deux rayons donnés, suivant que le contact doit être extérieur [comme dans la figure] ou intérieur (n° 145). — Ces deux circonférences déterminent le centre cherché.

Il y a pour *chaque* mode de tangence, *deux* solutions qui peuvent se réduire à *une* seule ou devenir *imaginaires* (*Voy*, le n° 370).

Problème VII.

373. *Décrire un cercle d'un rayon donné, qui touche deux droites données.*

Les droites données formant généralement quatre angles, il y aura *quatre* solutions, c'est-à-dire quatre cercles respectivement inscrits à ces angles.

Pour trouver les centres de ces quatre cercles, il suffit de mener, de part et d'autre de chaque droite donnée, et à des distances égales au rayon donné (*Voy.* le problème IV, n° 370), des parallèles à ces droites. — L'intersection de ces parallèles sera le centre cherché.

Dans le cas particulier où les droites données sont parallèles, le problème n'est possible qu'autant que leur distance est égale au diamètre; et alors le problème est tout-à-fait *indéterminé*, c'est-à-dire qu'il a une infinité de solutions : tout point de la droite menée à égale distance des deux parallèles, peut être pris pour centre.

Problème VIII.

374. *Décrire un cercle d'un rayon donné, qui touche une droite donnée et une circonférence donnée.*

Le centre du cercle cherché se trouvera sur une parallèle à la droite donnée (n° 370), menée à une distance de cette droite égale au rayon donné, et sur une circonférence concentrique au cercle donné (n° 372), décrite d'un rayon égal à la somme ou à la différence des deux rayons, suivant le mode de tangence.

Il y aura généralement *quatre* solutions quand la droite donnée sera extérieure ou tangente à la circonférence donnée; il pourra y en avoir jusqu'à *huit* quand la droite coupera la circonférence. Mais le nombre de ces solutions est susceptible, suivant les circonstances, de se réduire beaucoup, et même de devenir tout-à-fait *nul*.

Problème IX.

375. *Décrire un cercle d'un rayon donné, qui touche deux circonférences données.*

Le centre du cercle cherché se trouve sur deux circonférences respectivement concentriques aux deux circonférences données (n° 372), et décrites chacune, suivant le mode de tangence, d'un rayon égal à la somme ou à la différence du rayon de chaque cercle donné et du rayon du cercle cherché (*Voy.* le n° 145).

Il y a aussi à faire, relativement au nombre des solutions, une observation analogue à celle du problème précédent.

Problème X. (Fig. 321 et 322.)

Fig. 321 et 322. 376. *Décrire un cercle qui touche une droite donnée* MN, *et qui passe par deux points donnés*, A, B [extérieurs à cette droite].

Analyse. — Soit C le point de tangence. — Il peut arriver deux cas : ou bien la droite AB rencontre la droite MN en un point D (fig. 321), ou bien AB est parallèle à MN (fig. 322).

Dans le premier cas, DC est moyenne proportionnelle entre DA et DB (n° 236).

Dans le second cas, la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB doit passer par le centre et couper la droite MN au point de tangence (n°s 101 et 102); etc.

Synthèse. — 1° Menons AB et distinguons deux cas : celui où AB coupe MN, par exemple en D, et celui où AB est parallèle à MN.

1er *Cas* (fig. 321). — 2° Sur AD comme diamètre [le point A étant, des deux points A, B, le plus éloigné de D] décrivons une demi-circonférence (n° 317, *scol.* 1er, 6°). — 3° Par le point B élevons l'ordonnée BE (n° 309). — 4° Menons DE. — 5° Du point D comme centre et du rayon DE décrivons un arc de cercle qui coupe la droite MN en un point C. — Ce sera le point de tangence. Fig. 321.

Comme l'arc de cercle décrit du point D comme centre, coupe la droite MN en deux points, C, C', il y a *deux* solutions pour ce cas.

2e *Cas* (fig. 322). — 2° Par le milieu G de AB élevons la perpendiculaire GC (n° 317) coupant MN en C. — 3° Menons AC [ou BC]. — 4° Par le milieu I de AC élevons une perpendiculaire IO coupant CG en un point O. — Ce sera le centre du cercle cherché. Fig. 322.

Il n'y a qu'*une* solution pour ce second cas.

Problème XI.

377. *Décrire un cercle qui touche deux droites données, connaissant l'un des points de contact.*

Le centre du cercle cherché se trouvera à l'intersection de la bissectrice (n° 318) de l'angle des deux droites, avec la perpendiculaire élevée (n° 309), par le point de contact donné, sur la droite à laquelle appartient ce point; cette perpendiculaire donnera en outre le rayon.

Il y aura *deux* solutions puisqu'il y a deux bissectrices (*Voy.* le n° 77, 4°).

Dans le cas particulier où les deux droites données sont parallèles, le centre se trouve au milieu de leur perpendiculaire commune menée par le point donné; cette perpendiculaire est le diamètre. — Il n'y a qu'*une* solution.

Problème XII.

378. *Décrire un cercle qui touche deux droites données, et qui passe par un point donné* [hors de ces droites].

En considérant comme axe de symétrie la bissectrice de l'angle des deux droites (nos 98 et 99), il sera facile d'avoir, au moyen d'une perpendiculaire (n° 310), le point symétrique du point donné, par rapport à cet axe. Alors on prendra les deux points et l'une des deux droites, et l'on retombera sur le problème x (n° 376).

Si le point donné était sur la bissectrice, alors le cercle cherché devrait toucher la perpendiculaire élevée en ce point sur la bissectrice. On retomberait ainsi sur le problème précédent (n° 377).

Les mêmes constructions sont applicables au cas où les deux droites données sont parallèles.

Il y a toujours *deux* solutions.

Problème XIII. (Fig. 323.)

Fig. 323. 379. *Décrire un cercle qui touche en un point donné* A *une circonférence donnée* OA, *et qui passe par un second point* B *donné* [extérieur ou intérieur à cette circonférence].

Analyse. — Le centre du cercle doit se trouver à la fois sur la perpendiculaire élevée par le milieu de AB, et sur la direction du rayon OA (nos 101 et 143).

Synthèse. — 1° Menons la droite AB. — 2° Par son milieu D élevons une perpendiculaire DC (n° 309). — 3° Menons le rayon OA et prolongeons. — Le point de rencontre C des deux dernières droites sera le centre cherché ; et le rayon sera égal à CA.

Discussion. — Soit MN la perpendiculaire à OA menée par le point A. — Si les points donnés O et B sont, l'un d'un côté de MN, l'autre de l'autre, les deux cercles seront tangens extérieurement (n° 145). — Les deux cercles seront tangens intérieurement si les deux points sont du même côté de MN. — Enfin, le problème sera impossible si le point B est sur MN (*Voy.* le n° 143, *scol.* 2).

Lorsque les points O et B sont du même côté de MN, suivant que le point B est intérieur ou extérieur au cercle donné, celui-ci enveloppe le cercle cherché ou lui est intérieur. — Si le point B était sur la circonférence OA, les deux cercles se confondraient.

Lorsque le point B sera sur la droite OA, le centre du cercle cherché se trouvera au milieu de AB.

PROBLÈME XIV. (Fig. 324.)

380. *Décrire un cercle qui touche une circonférence donnée* Fig.324. OC, *et qui passe par deux points donnés*, A, B [extérieurs ou intérieurs à cette circonférence].

Synthèse. — Pour trouver le point de contact C : — 1° Par les deux points donnés, A, B, faisons passer une circonférence quelconque qui coupe la circonférence donnée OC en deux points, E, F : [ce qui sera toujours facile en élevant une perpendiculaire IG sur le milieu I de AB (nº 317), et prenant pour centre un point G de cette perpendiculaire, suffisamment éloigné du point I]. — 2° Prolongeons les droites AB, EF, jusqu'à leur rencontre en K. — 3° Marquons les points C, C′, où deux droites issues du point K peuvent toucher le cercle OC (nº 367). — Chacun des deux points C, C′, fournit une solution du problème : de sorte que la question se trouve ramenée à faire passer une circonférence par les trois points A, B, C, ou A, B, C′ (nº 317, *scol.* 1er, 1°).

Cette construction résout en effet le problème proposé, puisque le cercle OC a une tangente commune en C avec le cercle ABC, et en C′ avec le cercle ABC′.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut que les deux points donnés soient tous deux hors de la circonférence donnée, ou tous deux dans l'intérieur : et alors il y a *deux* solutions.

Quand les deux points donnés sont hors de la circonférence, les deux cercles obtenus peuvent être, suivant les cas, soit tous deux extérieurs au premier, soit tous deux enveloppans, soit l'un extérieur et l'autre enveloppant comme dans la figure 324. — Quand les deux points sont dans le cercle donné, les deux cercles obtenus lui sont intérieurs.

Dans le cas particulier où les deux points donnés sont sur une même tangente à la circonférence, cette tangente remplace l'une des solutions; et elle les remplacerait même toutes deux si l'un des points donnés était le point de contact.

Si les deux droites AB, EF, étaient parallèles, la construction donnée ci-dessus serait en défaut; mais dans ce cas, les points cherchés, C, C', seraient précisément les points d'intersection de la perpendiculaire IG avec la circonférence donnée.

Problème XV. (Fig. 325.)

Fig. 325. 381. *Décrire un cercle qui touche une droite donnée* AB *et une circonférence donnée* O, *connaissant le point* D *de contact avec la droite donnée.*

Analyse. — Soit C le centre du cercle cherché, et K le point de contact des deux circonférences. — Après avoir décrit la circonférence CO et tiré le rayon CDD', si l'on mène de plus, par le point D', une tangente A'B' à cette dernière circonférence, cette tangente sera parallèle à AB, et l'on aura DD' = KO.

Synthèse. — 1° Au point D, élevons sur AB la perpendiculaire DC indéfinie dans les deux sens (n° 309). — 2° Sur cette perpendiculaire prenons DD' égale au rayon OK du cercle donné. — 3° Par le point D' menons la droite A'B' parallèle à AB (n° 313) ou perpendiculaire à DD' (n° 309). — 4° Traçons une circonférence qui touche A'B' en D', et qui passe par le point O (n° 317, *scol.* 1er, 3°); et soit C le centre de cette circonférence. — CD sera le rayon de la circonférence cherchée.

En effet, etc. (*Voyez* l'analyse).

Scolie. — Cette construction peut se simplifier; car elle se réduit à prendre DD' = OK, puis à faire un triangle isocèle D'OC pour avoir le point C (n° 314).

Discussion. — Comme on peut prendre DD' d'un côté ou de l'autre de AB, il y a généralement *deux* solutions.

Lorsque la droite donnée est extérieure au cercle donné, le cercle cherché touche extérieurement le premier dans l'une des deux solutions, et il l'enveloppe dans l'autre.

Lorsque la droite donnée coupe le cercle donné, le cercle cherché touche extérieurement le cercle donné dans les deux solutions si le point donné est extérieur au cercle donné ; et il est enveloppé par celui-ci dans ces deux solutions si le point donné lui est intérieur. — Le problème ne serait pas possible si le point donné était un des points d'intersection du cercle et de la droite.

Enfin, lorsque la droite donnée est tangente au cercle donné, on n'obtient plus qu'*une* solution dans laquelle le cercle cherché est extérieur au cercle donné ; la tangente est elle-même la seconde solution (*Voy*. la *discussion* du problème XIV, n° 380). — Il y a pourtant une exception pour le cas où le point donné serait le point même de tangence : il est évident qu'alors *tous* les cercles tangens en ce point à la droite donnée satisfont à la question (n° 143, *scol*. 2).

Problème XVI.

382. *Décrire un cercle qui touche une droite donnée et une circonférence donnée, connaissant le point de contact avec cette circonférence.*

Ce problème se ramène facilement à celui du n° 377, en remplaçant le cercle donné par sa tangente au point donné.

Il y a aussi *deux* solutions, excepté dans le cas où la tangente est parallèle à la droite donnée : alors il n'y en a qu'*une*.

Si la droite donnée est tangente au cercle donné, ce cercle est lui-même une solution de la question. — Si cette tangente était celle qui appartient au point donné, le problème serait tout-à-fait *indéterminé*, c'est-à-dire qu'il aurait une infinité de solutions (*Voy*. ci-dessus, n° 381, *discuss*.).

≼[Problème XVII. (Fig. 326.)]≽

Fig. 326. 383. *Décrire un cercle qui touche une circonférence donnée* OA *et une droite donnée* BC, *et qui passe par un point donné* D [supposé quelconque].

Analyse. — Soit GD le cercle cherché, touchant OA en E et BC en F. — Du centre O abaissons la perpendiculaire OC sur BC; et soient A, A′, les deux points d'intersection de cette perpendiculaire avec la circonférence OA. Menons la droite OEG, le rayon GF, et les cordes AE, EF. Ces cordes seront les prolongemens l'une de l'autre : en effet, AC et GF étant parallèles, les angles alternes AOE, EGF, sont égaux; donc les triangles isocèles AOE, EGF, sont semblables (n° 216, *coroll.* 3); donc AEF est une sécante commune menée par le point de tangence E.

Maintenant, menons la droite AD; et soient B, X, ses points d'intersection respectifs avec la droite BC et avec la circonférence GD; nous aurons (n° 236)

$$AX \times AD = AE \times AF.$$

Mais il est à observer que les quatre points A′, C, F, E, sont les sommets d'un quadrilatère inscriptible (n° 163), puisque l'angle C est droit par construction, et que la droite A′E serait perpendiculaire sur AEF (n° 200, 2°); nous aurons donc aussi

$$AE \times AF = AA' \times AC.$$

De là il résulte

$$AX \times AD = AA' \times AC;$$

ce qui fait voir que AX, la seule inconnue parmi ces quatre longueurs, est quatrième proportionnelle à AD, AA′, et AC. Par conséquent le problème peut être ramené à celui-ci : Décrire un cercle tangent à la droite BC, et passant par les deux points D, X (n° 376).

Synthèse. — 1° Du centre O abaissons la perpendiculaire OC sur la droite BC (n° 310). — 2° Menons la droite ADB, terminée sur BC en B; et prenons sur cette droite, à partir du point A, une distance AX quatrième proportionnelle à AD, AA′, et AC (n° 342). — 3° Prenons sur BC, à partir du point B, une distance BF moyenne proportionnelle entre BD et BX (n° 344). — 4° Élevons deux perpendiculaires, l'une sur la droite BC par le point F, l'autre sur la droite DX par son milieu (n° 309). — Ces perpendiculaires se rencontreront en un point G qui sera le centre du cercle cherché.

En effet, etc. (*Voyez* l'analyse.)

Discussion. — Le problème est généralement susceptible de *quatre* solutions qui proviennent, premièrement de ce que BF peut être pris sur BC de part et d'autre du point B, et ensuite de ce que l'on peut substituer l'un à l'autre, les points A, A′. Mais ces quatre solutions ne sont possibles qu'autant que le point donné et la droite donnée sont en même temps extérieurs au cercle donné. Les cercles fournis par deux d'entre elles enveloppent le cercle donné; dans les deux autres, ils lui sont extérieurs.

Quand la droite est sécante à la circonférence donnée, et que le point lui est extérieur, il n'y a de possibles que les *deux* cercles extérieurs.

Quand le point et la droite sont intérieurs au cercle donné, il n'y a que *deux* solutions dans lesquelles les cercles obtenus sont intérieurs au premier.

Enfin, le problème est *impossible* quand le point est intérieur et la droite extérieure au cercle donné.

Il y aurait encore beaucoup d'autres remarques à faire; nous nous bornerons à ajouter que si la distance du point D à la droite BC était égale à AC, il faudrait, pour avoir le centre G, remplacer la perpendiculaire FG par une autre perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde DX (*Voyez* le second cas du problème x (n° 376).

Problème XVIII. (Fig. 327.)

384. *Décrire un cercle tangent à une circonférence donnée* OA, *et à deux droites données*, MN, PQ.

Fig.327. Soit GA le cercle cherché, A le point de tangence avec la circonférence OA, et B, C, les points de tangence respectifs avec les droites MN, PQ. Si l'on mène à ces deux droites, à des distances BB', CC', égales au rayon OA [et en dehors du cercle GA], des parallèles M'N', P'Q', le cercle tangent à ces parallèles, décrit du point G comme centre, passera par le centre O; d'où il résulte qu'en traçant ces parallèles (n° 370), on ramènera la question à trouver le centre G d'un cercle qui les touche et qui passe par le point O (n° 378).

Comme ce dernier problème a deux solutions, et que l'on peut supposer les parallèles M'N', P'Q', tracées en dedans du cercle GA, au lieu de les supposer en dehors, le problème proposé est susceptible de *quatre* solutions distinctes. Ces solutions fourniront, par rapport à la circonférence donnée, des cercles extérieurs, intérieurs, ou enveloppans, suivant les diverses positions relatives du cercle donné et des droites données; nous abandonnons aux élèves l'examen de ces diverses circonstances. Nous remarquerons seulement que si le cercle donné touchait l'une des droites données en un certain point, deux des quatre solutions se réuniraient en une seule pour laquelle le centre cherché se trouverait à l'intersection de la bissectrice des deux droites, avec la perpendiculaire élevée en ce point, lequel serait aussi l'un des points de tangence cherchés.

Tout ce qui précède est applicable, sans modification notable, au cas où les deux droites données sont parallèles.

Problème XIX.

385. *Décrire un cercle tangent à deux circonférences données, connaissant l'un des points de contact.*

On ramène ce problème à celui du n° 381, en remplaçant la circonférence à laquelle appartient le point donné, par sa tangente en ce point.

Il y a généralement *deux* solutions.

Problème XX. (Fig. 328.)

386. *Décrire un cercle tangent à deux circonférences données,* Fig.328.
A, B, *et passant par un point donné* C [supposé quelconque].

Analyse. — Soit O le cercle cherché, touchant les circonférences données A et B, respectivement en M et en N.

Le cercle O étant réciproque des circonférences A, B (n° 242), il s'ensuit que la droite MN doit couper la droite AB au centre de similitude des deux circonférences [externe si les deux contacts sont de même espèce, c'est-à-dire extérieurs ou intérieurs à la fois, et interne dans le cas contraire].

Maintenant, les points de contact, M, N, déterminent, conjointement avec deux des points d'intersection, G, G′, K, K′, de la droite ABS avec les circonférences données, un quadrilatère inscriptible MGKN, puisque ces quatre points appartiennent à une même circonférence de cercle, réciproque de A et B relativement à S (n° 242).

On a donc d'abord

$$SM \times SN = SG \times SK.$$

Mais ensuite, en nommant D le second point d'intersection de la droite SC avec la circonférence O, on aura aussi

$$SM \times SN = SC \times SD;$$

et par conséquent

$$SG \times SK = SC \times SD,$$

égalité dans laquelle SD, ou la seule distance inconnue, est quatrième proportionnelle à SC, SG, et SK.

Synthèse. — 1° Menons la droite AB par les centres des deux cercles donnés : soient G, G′, les points d'intersection de cette droite avec la circonférence A, et K, K′, les points d'intersection de cette même droite avec la circonférence B. — 2° Déterminons le centre S de similitude des deux cercles donnés (n° 340, *scol.* 4) [externe si les deux contacts doivent être de même espèce, et interne s'ils doivent être d'espèce différente]. — 3° Menons la droite SC, et prenons sur SC une distance SD quatrième proportionnelle (n° 342) à SC, SG ou SG′, et SK

21..

ou SK′, suivant les cas : [en observant que les lettres sans accent correspondent aux contacts extérieurs, et les lettres accentuées aux contacts intérieurs]. — 4° Décrivons une circonférence qui passe par les deux points C, D, et qui touche une des circonférences données (n° 380). — Le nouveau cercle ainsi décrit touchera aussi la seconde circonférence donnée, et satisfera par conséquent à toutes les conditions de la question.

Discussion. — Le problème précédent est généralement susceptible de *quatre* solutions. Dans une de ces solutions [celle de la figure], les deux contacts sont extérieurs; dans une autre, ils sont tous deux intérieurs; enfin, dans les deux autres solutions, l'un des contacts est intérieur et l'autre extérieur. Mais les quatre solutions peuvent se réduire à *deux*, même disparaître entièrement; et il peut arriver aussi que deux d'entre elles se réduisent à *une* seule. Nous laissons aux élèves le soin de discuter les hypothèses qui peuvent amener ces divers résultats.]≥

≤[Problème XXI. (Fig. 329.)]≥

Fig. 329. 387. *Décrire un cercle tangent à deux circonférences données,* A, B, *et à une droite donnée* CD.

Synthèse. — 1° Menons, parallèlement à CD, et à une distance égale au rayon du plus petit B des deux cercles, une droite C′D′ (n° 370). — 2° Du point A comme centre, et d'un rayon AG égal à la différence ou à la somme des rayons des cercles donnés, traçons une circonférence. — 3° Décrivons une circonférence OK′ tangente à la fois à la circonférence AG et à la parallèle C′D′, et passant de plus par le point B (n° 383). — 4° Décrivons encore une circonférence OK dont le rayon soit celui de la circonférence OK′, diminué ou augmenté, suivant le cas, d'une longueur égale au rayon de la circonférence B. — La dernière circonférence décrite satisfera à toutes les conditions de la question.

En effet, etc. (*Voy.* le n° 383).

Discussion. — Ce problème est généralement susceptible de *huit* solutions, puisque l'on peut mener *deux* parallèles dont chacune fournit *quatre* cercles.

PROBLÈME XXII.

388. *Décrire un cercle tangent à trois circonférences données.*

1^re^ CONSTRUCTION. — *Synthèse.* — Soient AM, BN, CP (fig. 330), les trois circonférences données. — 1° En supposant que CP soit la plus petite des trois, décrivons, du point A comme centre, un cercle qui ait pour rayon, AM diminué ou augmenté du rayon CP. — 2° Décrivons de même, du point B comme centre, un cercle qui ait pour rayon le rayon BN diminué ou augmenté du rayon CP. — 3° Traçons une circonférence tangente aux deux nouveaux cercles ainsi obtenus, et passant par le point C (n° 386); et soit O le centre de cette nouvelle circonférence. — 4° De ce point O, comme centre, décrivons une quatrième circonférence qui ait pour rayon celui de la précédente diminué ou augmenté du rayon CP. — Ce sera la circonférence cherchée. Fig.330.

En effet, etc. (*Voy.* le n° 386).

Il est facile de voir qu'il y aura généralement *huit* solutions.

2^e^ CONSTR. — *Synthèse.* — Soient C, C′, C″ (fig. 331), les trois cercles donnés. — 1° Cherchons le centre S de similitude (n° 340, *scol.* 4) des deux cercles C et C′ [externe si ces deux cercles doivent être touchés de la même manière par le cercle cherché, interne dans le cas contraire]; et cherchons de même le centre S′ de similitude [externe ou interne] des deux cercles C et C″. — 2° Traçons l'axe de similitude SS′ des trois cercles C, C′, C″ (n° 248, *coroll.* 5). — 3° Menons au cercle C, par un point quelconque A de sa circonférence, les sécantes SA, S′A; et soient A′, A″, deux points, non situés sur les rayons homologues à CA (n° 242, *scol.* 1^er^), où Fig.331.

elles coupent respectivement les circonférences C′, C″. — 4° Par les trois points A, A′, A″, menons une circonférence K (n° 317, *scol.* 1er, 1°); et soient B, B′, B″, les trois autres points où elle coupe respectivement les trois circonférences données. — 5° Menons les cordes AB′, A′B′, A″B″; et soient D, D′, D″, leurs points d'intersection respectifs avec la droite SS′. — 6° Du point D menons deux tangentes au cercle C (n° 367), ou marquons seulement les points de tangence T, *t*; soient de même T′, *t*′, les points de tangence fournis par le point D′ sur le cercle C′, et T″, *t*″, les points de tangence relatifs au point D″ et au cercle C″. — 7° Menons et prolongeons les rayons CT, C*t*, C′T′, C′*t*′, C″T″, C″*t*″. — Trois de ces rayons se rencontreront en un point O, les trois autres en un point *o*; et les deux points O, *o*, seront les centres de deux cercles tangens à la fois aux trois cercles donnés. — Ayant ainsi les deux centres et les six points de contact, rien ne sera plus aisé que d'avoir les rayons et de décrire les circonférences.

Il est facile de rendre raison de la construction précédente. En effet, le cercle K est réciproque des cercles C et C′ (n° 242, *scol.* 2), relativement à l'un de leurs centres de similitude [S]; et il l'est de même des cercles C et C″. Or, les cercles qui touchent à la fois C et C′, C et C″, leur sont aussi respectivement réciproques (n° 242, *scol.* 3); donc, l'axe radical (n° 241) du cercle K et de chacun des cercles cherchés, O, *o*, passant à la fois par deux centres de similitude, tels que S et S′, se confond avec l'axe de similitude SS′ qui les contient. Mais AB est l'axe radical des cercles K et C; donc le point D est le centre radical des cercles K, O, C, ou K, *o*, C; donc l'axe radical de C et O, ou de C et *o*, ou, ce qui est la même chose, leur tangente commune, doit passer par le point D; et il en est de même des autres. Donc etc.

N. B. — Observons qu'afin de simplifier la figure, on a pris, pour le point arbitraire A, l'un des deux points où la circonférence C peut être touchée par une droite issue du point S. La droite SA, au lieu d'être une sécante, est donc alors une tangente commune aux deux cercles C et C′; et le point A′ est le point de contact de cette droite avec le cercle C′. De plus, les rayons de similitude CA, C′A′, deviennent homologues en raison de cette particularité.

Scolie 1er. — Puisque la droite SS′ est l'axe radical des cercles O et K, *o* et K, il s'ensuit que les trois points O, K, *o*, doivent être sur une même perpendiculaire à cette droite. De là résulte un moyen de vérification pour la construction ci-dessus.

Scol. 2. — Comme les trois circonférences proposées ont *quatre* axes de similitude (n° 248, *coroll.* 5), et que chacun fournit *deux* nouveaux cercles, il en résulte *huit* solutions pour le problème proposé, ce qui est conforme avec ce que l'on a vu dans la première construction.

Scol. 3. — La construction précédente s'applique encore très bien au cas où deux des cercles donnés, par exemple C′ et C″, ont même rayon, pourvu que celui du troisième C soit différent. Mais lorsque, les trois cercles donnés ayant même rayon, les trois contacts doivent être de même espèce, cette construction se trouve en défaut : il faut alors revenir à la première, en faisant d'abord passer une circonférence par les trois centres, et en augmentant ou diminuant son rayon, d'une longueur égale au rayon des cercles donnés.

Scol. 4. — En mettant à part le cas d'exception que nous venons de signaler, la deuxième construction a le grand avantage de pouvoir s'appliquer, lorsqu'elle est convenablement modifiée, aux problèmes qui ont été résolus depuis le *numéro* 276 inclusivement.

Pour cela, il suffit de considérer chaque droite donnée comme un cercle d'un rayon infini (n° 143, *scol.* 3); chaque point donné comme un cercle d'un rayon nul, et d'avoir égard à ces hypothèses dans la détermination des centres de similitude, conformément aux observations faites dans le *numéro* 224.

Les mêmes observations sont applicables à la construction suivante.

Fig. 332. 3e Constr. — *Synthèse*. — 1° Traçons, comme dans la solution précédente, l'un des quatre axes de similitude (fig. 332) des trois cercles donnés. — 2° Déterminons les pôles P, P′, P″, de cet axe, par rapport à chacun des trois cercles (nos 255 et 341). — 3° Déterminons le centre radical R de ces trois cercles (nos 241; et 337, *scol.*). — 4° Menons les droites PR, P′R, P″R; et soient T, *t*, T′, *t′*, T″, *t″*, les points d'intersection respectifs de ces droites avec les trois cercles proposés. — Ces points d'intersection sont les points de tangence cherchés.

Cette construction aussi simple qu'élégante, due à M. Gergonne, est extraite des *Annales de Mathématiques*, Tome XVII, *page* 309; nous sommes obligés d'y renvoyer pour la démonstration qui eût exigé de nous beaucoup trop de développemens. Nous engageons aussi les élèves à consulter la Géométrie de M. Bergery. Ils y trouveront la discussion des divers cas que peut présenter la deuxième construction que l'on doit d'ailleurs à M. Poncelet.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES NUMÉRIQUES.

§ Ier. *Problèmes sur les Lignes proportionnelles.*

Problème I. (Fig. 75.)

389. *Étant donnés deux côtés,* AC, BC, *d'un triangle* ABC, *égaux respectivement à* $8^m,76$ *et* $5^m,26$, *ainsi que la perpendiculaire* CD *abaissée du sommet de l'angle compris* C, *sur le troisième côté* AB, *égale à* $4^m,38$: *trouver ce troisième côté.* Fig. 75.

On a d'abord (n° 228)

$$AD=\sqrt{(8,76)^2-(4,38)^2}=\sqrt{(8,76+4,38)(8,76-4,38)}\ (p.154)$$
$$=\sqrt{13,14\times4,38}=\sqrt{57,5532}=7^m,59.$$

On a de même

$$BD=\sqrt{(5,26)^2-(4,38)^2}=\sqrt{(5,26+4,38)(5,26-4,38)}$$
$$=\sqrt{9,64\times0,88}=\sqrt{8,4832}=2^m,91.$$

Enfin $AD+BD=10^m,50.$

Le calcul précédent peut se faire commodément au moyen des *logarithmes*.

On a pour cela $2.log.AD=log.13,14+log.4,38$;

$$\begin{aligned} log.13,14&=1,1185954\\ log.\ 4,38&=\underline{0,6414741}\\ 2.log.AD\ldots&=1,7600695\\ log.AD\ldots&=0,8800347=log.7,58638.\end{aligned}$$

De même $\quad 2 . log.BD = log.9,64 + log.0,88$;

$$\begin{aligned} log.9,64 &= 0,9840770 \\ log.0,88 &= \bar{1},9444827 \\ \hline 2.log.BD.. &= 0,9285597 \\ log.BD.. &= 0,4642798 = log.2,91259. \end{aligned}$$

D'où $\quad AD+BD = 10,49897 = 10^m,50$, à *un centimètre* près.

Problème II. (Fig. 75.)

Fig. 75. 390. *Étant donnés deux côtés d'un triangle* $AC = 128^m,49$, $AB = 88^m$, *et la perpendiculaire* $CD = 96^m,45$, *abaissée du sommet* C *sur le côté* AB : *trouver le troisième côté* BC.

On a (nº 228)

$$AD = \sqrt{(128,49)^2 - (96,45)^2} = 84,90,$$
$$BD = 88 - 84,90 = 3,10,$$
$$BC = \sqrt{(3,10)^2 + (96,45)^2} = 96^m,50.$$

Problème III.

391. *La hauteur du talus d'une batterie est de* $2^m,274$ [7^p] *à l'intérieur, et la base est de* $0^m,758$ [2^p, 4^p], *ou le tiers de la hauteur. — Calculer la longueur du talus.*

La longueur du talus est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont respectivement de $2^m,274$ et $0^m,758$: cette longueur vaut donc

$$\sqrt{(2,274)^2 + (0,758)^2} = 2^m,397\ [7^p,\ 5^p].$$

Problème IV.

392. *Au moyen d'une échelle dont la longueur est de* 6^m, *on veut atteindre à une fenêtre dont la hauteur au-dessus du sol est de* $5^m,4$. — *On demande ce qu'il faut donner de pied à l'échelle.*

La distance cherchée est égale à

$$\sqrt{(6)^2-(5,4)^2}=\sqrt{11,4\times 0,6}=\sqrt{6,84}=2^m,6.$$

Problème V. (Fig. 305.)

393. *Déterminer la hauteur d'un édifice* AB, *ayant mesuré* AC = IG = 75m, CE = GF = 1m,35, CD = 2m,3, *et* EF = CG = AI = 1m,1. Fig. 305.

On a d'abord (n° 351)

$$IB=\frac{IF\times GD}{GF}=\frac{(75+1,3)(2,3-1,1)}{1,3}=\frac{76,3\times 1,2}{1,3}=70,4\,;$$

d'où $AB=70^m,4+1^m,1=71^m,5.$

Problème VI. (Fig. 301.)

394. *On a pris, sur une même droite, les distances arbitraires* AC = 75m, CD = 25m, *et mené la droite* DE *parallèle à* AB (n° 313); *puis, après avoir marqué le point d'intersection* E *de cette parallèle avec la droite* BC, *on a mesuré la distance* DE *qui s'est trouvée de* 27m,3. — *On demande quelle est la distance* AB. Fig. 301.

On a (n° 350, 1re *constr.*)

$$AB=\frac{AC\times DE}{CD}=\frac{75\times 27,3}{25}=81,9.$$

Ainsi $AB=81^m,9.$

Problème VII. (Fig. 302.)

395. *On a pris les trois distances arbitraires* ED = 100m, DA = 100m, AC = 100m; *puis, en marquant le point* B *d'intersection des alignemens* CE *et* AX, *on a trouvé* CB = 48m,3 *et* BE = 35m,7 : *on veut connaître la distance* EX (n° 350, 2e *constr.*). Fig. 302.

On a

$$EX=\frac{100.100.35,7}{100.48,3-100.35,7}=\frac{100.35,7}{48,3-35,7}=\frac{35700}{126}=283.$$

La distance cherchée EX est donc 283^m. Mais, en supposant que les distances CB et BE ne soient exactes qu'à *un décimètre* près, on n'est pas sûr du chiffre des unités de la distance EX.

Problème VIII. (Fig. 304.)

Fig. 304. 396. [Étant placé au point C], *Mesurer la distance de deux objets inaccessibles*, A, B.

Supposons d'abord que l'on ait mesuré, par le problème VI (n° 394), les distances $AC = 215^m,25$, $BC = 475^m,15$, et que l'on ait pris, dans la direction AC, une distance arbitraire $CD = 3^m,7$. Alors, la proportion

$$CE : CD :: CB : CA \quad (\text{n° } 350,\ scol.\ 2)$$

déterminera un point E tel que DE sera parallèle à AB. On aura ainsi, en employant les logarithmes,

$$\begin{aligned} log.CD &= 0,5682017 \\ log.CB &= 2,6768367 \\ C.\,log.CA &= 7,6670568 \\ \hline log.CE &= 0,9120892 = log.8,1675. \end{aligned}$$

Il faudra donc mesurer, dans la direction CB, une longueur $CE = 8^m,17$. Ensuite on mesurera DE : supposons cette dernière distance égale à $8^m,15$. On aura alors

$$AB : DE :: CA : CD;$$

$$\begin{aligned} log.DE &= 0,9111576 \\ log.CA &= 2,3329432 \\ C.\,log.CD &= 9,4317983 \\ \hline log.AB &= 2,6758991 = log.474,132. \end{aligned}$$

Ainsi $AB = 474^m,132$.

Problème IX.

397. *Deux cordes se coupent dans un cercle ; les segmens de l'une valent respectivement* 13^m *et* 25^m *; les deux segmens de*

l'autre sont entre eux dans le rapport de 4 à 7 : on demande la valeur de cette dernière.

En nommant x et y les deux segmens de la corde cherchée,

on a $$x : y :: 4 : 7 \quad \text{ou} \quad x = \frac{4}{7} . y,$$

et $$xy = 25 \times 13 = 325 \ (\text{n}^\circ\ 236);$$

d'où l'on tire, en éliminant x,

$$y^2 = 568{,}75,$$
$$y = 23{,}85;$$
$$x = \frac{23{,}85 \times 4}{7} = 13{,}63.$$

La corde cherchée vaut donc, à *un centimètre* près,

$$x + y = 37^m{,}48.$$

Problème X.

398. *Trouver la longueur, en mètres, d'un arc de 45°20', dans un cercle d'un rayon égal à* $5^m{,}4$.

En nommant a la longueur cherchée, on aura

$$a = \frac{5^m{,}4 \times 45^\circ 20' \times \pi}{180^\circ} \ (\text{n}^\circ\ 282 \text{ et } suiv.);$$

$$\begin{aligned} \log.5{,}4 \ldots &= 0{,}7323938 \\ \log.45^\circ 20' &= 1{,}6564177 \\ \log.\pi \ldots\ldots &= 0{,}4971499 \\ C.\log.180 \ldots &= \underline{7{,}7447275} \\ \log.a \ldots\ldots &= 0{,}6306889 = \log.4{,}272567. \end{aligned}$$

Ainsi, $a = 4^m{,}2726$, à *un déci-millimètre* près.

§ II. *Problèmes sur les Aires.*

Problème I.

399. *Une salle a* $4^m{,}87$ *de hauteur,* $15^m{,}76$ *de longueur, et* $8^m{,}24$ *de largeur ; on veut la tapisser avec des rouleaux de papier dont la largeur est de* $0^m{,}6$ *: on demande combien de*

mètres en longueur il faudra en employer, en supposant que le lambris ait $0^m,37$ *de hauteur.*

La hauteur de la partie qui doit être tapissée est de

$$4^m,87 - 0^m,37 = 4^m,5;$$

le contour de la salle est de

$$(15^m,76 + 8^m,24) \times 2 = 48^m;$$

or $$48^m : 0^m,6 = 80;$$

donc il faudra 80 largeurs de papier. Ainsi le nombre de mètres à employer est $4^m,5 \times 80 = 360^m$.

Problème II.

400. *Une salle a* 8^m *de longueur,* $6^m,2$ *de largeur, et* $4^m,8$ *de hauteur; on veut en faire blanchir les murailles et le plafond : on demande, à* $0^f,75$ *le mètre carré, ce que l'ouvrage coûtera.*

Il y a d'abord deux rectangles de 8^m sur $4^m,8$, ce qui fait $76^{mq},80$;

Ensuite, deux rectangles de $6^m,2$ sur $4^m,8$, ce qui donne $59^{mq},52$;

Enfin, un rectangle de 8^m sur $6^m,2$, ce qui fait $49^{mq},60$.

Réunissant ces résultats, on a une somme égale à $185^{mq},92$.

Multipliant par cette somme le prix d'un mètre carré, ou $0^f,75$, on a, pour le prix de l'ouvrage, $139^f,44$.

Problème III.

401. *Trouver la hauteur d'un rectangle qui a* $34^m,9$ *de base et* $9^a,25$ *de surface.*

Il suffit de diviser $9^a,25$ ou 925^{mq}, par $34^m,9$; ce qui donne $26^m,50$, à *un centimètre* près.

Problème IV. (Fig. 103.)

Fig. 103. 402. *Trouver l'aire d'un rectangle* MP *dont on connaît un côté* OM *égal à* $26^m,45$, *et la diagonale* MP *égale à* $44^m,76$.

Il faut d'abord déterminer le côté OP. Pour cela on a

$$OP = \sqrt{\overline{MP}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{(44{,}76)^2 - (26{,}45)^2} = 36^m{,}11 \text{ (n° 228)};$$

et l'on obtient alors, pour l'aire cherchée (n° 293),

$$26^m{,}45 \times 36^m{,}11 = 955^{mq}{,}11.$$

Problème V.

403. *La surface d'un rectangle est* $23^{mq}{,}85$, *et sa base est à sa hauteur dans le rapport de* 5 *à* 3 : *on demande ses deux dimensions.*

Soient b la base du rectangle et h sa hauteur, on aura

$$h = \frac{3}{5}.b;$$

d'où $$\frac{3}{5}.b^2 = 23{,}85, \quad \text{ou} \quad b^2 = 39{,}75.$$

On tire de là

$$2.\log.b = \log.39{,}75 = 1{,}5993371,$$

d'où $$\log.b = 0{,}7996685 = \log.6{,}30476.$$

Ainsi l'on a, à *un millimètre* près,

$$b = 6^m{,}305, \quad \text{et} \quad h = 3^m{,}783.$$

Problème VI.

404. *Trouver le côté et l'aire d'un carré dont la diagonale est de* $0^m{,}25$.

En représentant par c le côté cherché, l'aire cherchée sera c^2 (n° 293); et l'on aura (n° 265, *scol.* 1^er^) :

$$2.c^2 = (0{,}25)^2,$$
$$2.\log.c = 2.\log.0{,}25 - \log.2;$$

$$\begin{array}{ll} 2.\log.0{,}25 = \bar{2}{,}79588002 \\ C.\log.2\ldots = 9{,}69897000 \\ \hline 2.\log.c\ldots = \bar{2}{,}4948500 = \log.0{,}03125; \\ \log.c\ldots = \bar{1}{,}2474250 = \log.0{,}1767667. \end{array}$$

Ainsi, le côté du carré cherché est de $0^m{,}1768$, et son aire de $0^{mq}{,}0312$.

Problème VII.

405. *Étant donné un triangle ayant pour base* $39^m{,}25$, *et pour hauteur* $42^m{,}56$, *on demande de le transformer en un carré équivalent.*

Soit c le côté du carré cherché ; on aura (nº 293)

$$c^2 = 39{,}25 \times 21{,}28,$$

$$2.\log.c = \log.39{,}25 + \log.21{,}28;$$

$$\begin{aligned} \log.39{,}25 &= 1{,}5938397 \\ \log.21{,}28 &= \underline{1{,}3279716} \\ 2.\log.c \ldots\ldots &= 2{,}9218113 \\ \log.c \ldots\ldots &= 1{,}4609056 = \log.28{,}9005. \end{aligned}$$

Ainsi $$c = 28^m{,}9005.$$

Problème VIII.

406. *Étant donné un carré dont le côté a* $3^m{,}75$ *de longueur, trouver le côté d'un second carré dont l'aire soit les* $\frac{3}{5}$ *de celle du premier.*

En nommant c le côté du carré cherché, on aura la proportion

$$c^2 : (3{,}75)^2 :: 3 : 5,$$

d'où $$c^2 = \frac{3}{5}.(3{,}75)^2 = 8{,}4375;$$

et par conséquent

$$c = \sqrt{8{,}4375} = 2^m{,}90,$$

à un centimètre près.

Problème IX. (Fig. 182.)

Fig. 182. 407. *Étant donnés les trois côtés d'un triangle* ABC, *égaux respectivement,* AB *à* 35^m, AC *à* 30^m, *et* BC *à* 28^m, *partager ce triangle en deux* [ou plus] *parties équivalentes, par une droite* B″C″ *parallèle au petit côté.*

Prenons pour inconnue $AB'' = c$, nous aurons (nº 304)

$$ABC : AB''C'' :: 35^2 : c^2 :: 2 : 1;$$

d'où

$$c^2 = \frac{35^2}{2}, \quad \text{et} \quad c = \frac{35}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.35.\sqrt{2} = 24^m,748.$$

Scolie. — Le résultat est indépendant des côtés $AC = 30^m$ et $BC = 28^m$.

Problème X.

408. *Trouver l'aire d'un trapèze dont les bases sont respectivement de* $56^m,83$ *et* $38^m,27$, *et la hauteur de* $21^m,40$.

L'aire du trapèze est, d'après le *numéro* 297 (1°), égale à

$$\frac{56,83 + 38,27}{2} \times 21,40 = 47,55 \times 21,40 = 1017^{mq},57.$$

Problème XI.

409. *Connaissant l'une des deux bases d'un trapèze, égale à* $29^m,37$, *sa hauteur égale à* $15^m,28$, *et son aire égale à* $1139^{mq},3860$: *trouver la seconde base.*

Si l'on divise l'aire donnée par la moitié de la hauteur, ou par $7^m,64$, le quotient approché à *un centimètre* près, $149^m,13$, sera égal à la somme des deux bases ; et si l'on retranche de cette somme la base connue, le reste $119^m,76$ séra la base cherchée, à *un centimètre* près.

Problème XII.

410. *Étant données les bases d'un trapèze symétrique* (nº 160), *respectivement égales à* $46^m,28$ *et* 32^m76, *et son aire valant* $5826^{mq},4360$: *trouver les deux autres côtés.*

En divisant l'aire donnée par la demi-somme des deux bases, ou par $39^m,52$, on obtient pour quotient $147^m,43$: c'est la hauteur du trapèze.

Maintenant, l'un des côtés cherchés, qui sont égaux entre eux, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui aurait pour côtés de l'angle droit, la hauteur du trapèze et la demi-différence, $6^m,76$, de ses deux bases; ainsi sa valeur est

$$\sqrt{(147,43)^2 + (6,76)^2} = 147^m,58.$$

[§ III. *Autres Problèmes sur les Aires.*]

Problème I. (Fig. 116.)

Fig. 116. 411. *Trouver l'aire d'un polygone* ABCDEFGI (n° 298), *en supposant*

$$\begin{array}{lll|lll} & & \overset{m}{} & & & \overset{m}{} \\ Ab & = & 19,3, & Bb & = & 25,3, \\ bi & = & 2,4, & Cc & = & 29,4, \\ ig & = & 16,7, & Dd & = & 11,5, \\ gc & = & 3,5, & Ii & = & 13,1, \\ cf & = & 22,6, & Gg & = & 8,2, \\ fd & = & 10,8, & Ff & = & 28,0. \\ dE & = & 9,9; & & & \end{array}$$

Pour cela on a :

$$\begin{array}{llll} ABb & = \frac{1}{2}.\overset{m}{19,3} \times \overset{m}{25,3} & = & \overset{mq}{244,145} \\ BCcb & = \frac{1}{2}.22,6 \times 54,7 & = & 618,110 \\ CDdc & = \frac{1}{2}.33,4 \times 40,9 & = & 683,030 \\ DEd & = \frac{1}{2}.\ 9,9 \times 11,5 & = & 56,925 \\ AIi & = \frac{1}{2}.21,7 \times 13,1 & = & 142,135 \\ IGgi & = \frac{1}{2}.16,7 \times 21,3 & = & 177,855 \\ GFfg & = \frac{1}{2}.26,1 \times 36,2 & = & 472,410 \\ FEf & = \frac{1}{2}.29,7 \times 28,0 & = & 289,800 \end{array}$$

D'ou $$ABCDEFGI = \overset{mq}{2684,410} = \overset{a}{26,8441}.$$

Vérification :

$$
\begin{array}{lcl}
ABb'M & = \tfrac{1}{2}.\overset{m}{19,3} \times \overset{m}{33,5} = & \overset{mq}{323,275} \\
BCb' & = \tfrac{1}{2}.22,6 \times 4,1 = & 46,330 \\
CDd' & = \tfrac{1}{2}.33,4 \times 17,9 = & 298,930 \\
DENd' & = \tfrac{1}{2}.\ 9,9 \times 47,3 = & 234,135 \\
AIi'O & = \tfrac{1}{2}.21,7 \times 42,9 = & 465,465 \\
IGg'i' & = \tfrac{1}{2}.16,7 \times 34,7 = & 289,745 \\
GFg' & = \tfrac{1}{2}.26,1 \times 19,8 = & 258,390 \\
FEP & = \tfrac{1}{2}.20,7 \times 28,0 = & 289,800 \\
\hline
 & & \overset{mq}{2206,070} \\
MNPO & = \quad 85,2 \times 57,4 = & 4890,480 \\
\hline
 & ABCDEFGI = & \overset{mq}{2684,410}.
\end{array}
$$

Problème II.

412. *Trouver les deux côtés et l'aire d'un rectangle dont la diagonale est de $2^m,45$, sachant qu'un côté est double de son contigu.*

Soit c le petit côté ; le grand côté vaudra $2c$; l'aire sera $2c^2$ (n° 293) ; et l'on aura (n° 228) :

$$5c^2 = (2,45)^2,$$
$$2.\log.c = 2.\log.2,45 - \log.5;$$

$$
\begin{array}{ll}
2.\log.2,45 & = 0,7783322 \\
C.\log.5\ldots & = 9,3010300 \\
\hline
2.\log.c\ldots & = 0,0793622 \\
\log.c\ldots & = 0,0396811 = \log.1,09567;
\end{array}
$$

ainsi les deux côtés sont de $1^m,09567$ et $2^m,19134$.

Maintenant, pour avoir le logarithme de l'aire du rectangle, il faut ajouter $2.\log.c$ avec $\log.2$; on a ainsi

$$
\begin{array}{ll}
2.\log.c & = 0,0793622 \\
\log.2 & = 0,3010300 \\
\hline
\end{array}
$$

d'où $$\log.2c^2 = 0,3803922 = \log.2,4010;$$

l'aire cherchée vaut donc $2^{mq},4010$, à *un centimètre carré* près.

Problème III.

413. *Étant donnée l'aire d'un triangle équilatéral, égale à* 576^{mq} *: trouver son côté.*

En représentant le côté cherché par c, la hauteur du triangle sera $\frac{1}{2}.c\sqrt{3}$ (n° 268), et son aire $\frac{1}{4}.c^2\sqrt{3}=576$;

d'où $$c^2=\frac{4}{3}.576\sqrt{3}=768\sqrt{3}=1330,21,$$

et $$c=36^m,47.$$

Problème IV.

414. *Étant donnée l'aire d'un hexagone régulier, égale à* 3456^{mq} *: trouver son côté.*

Par la même méthode que dans le problème précédent, on voit que c étant le côté de l'hexagone régulier, son aire a pour mesure $\frac{3}{2}c^2\sqrt{3}$; d'où (n° 267)

$$c^2=\frac{2}{9}.3456\sqrt{3}=768\sqrt{3}=1330,21,$$

et $$c=36^m,47.$$

Problème V.

415. *Étant donné un carré dont le côté est* $0^m,25$, *on propose de le transformer en un triangle équilatéral équivalent.*

En nommant c le côté du triangle cherché, on aura (n° 268)

$$(0,25)^2=\frac{1}{4}c^2\sqrt{3},$$

$$2.log.c=2.log.0,25+log\ 4-\frac{1}{2}.log.3=2.log.0,5-\frac{1}{2}.log.3,$$

$$2.\log.0,5 = \bar{1},39794000$$
$$C.\frac{1}{2}.\log.3.. = 9,76143938$$
$$2.\log.c.. = \bar{1},15937938$$
$$\log.c.. = \bar{1},57968969 = \log.0,3799;$$

d'où $c = 0^m,38$, à $0^m,0001$ près.

Problème VI.

416. *Déterminer l'aire d'un triangle dont les côtés sont respectivement égaux à* $4^m,25$, $6^m,84$, et $9^m,47$.

En faisant $a = 4,25$, $b = 6,84$, $c = 9,47$, et employant la formule du *numéro* 296 (2°), on a

$$\begin{aligned} s\ldots &= 10,28, \\ s - a &= 6,03, \\ s - b &= 3,44, \\ s - c &= 0,81; \end{aligned}$$

et l'aire du triangle a pour mesure

$$\sqrt{10,28 \times 6,03 \times 3,44 \times 0,81} = 13^{mq},14.$$

Problème VII.

417. *Les trois côtés d'un triangle sont entre eux* :: 3 : 4 : 5, *et son aire vaut* 24^{mq} : *on demande la valeur de chaque côté*.

Soient a, b, c, ces trois côtés, et $\frac{a+b+c}{2} = s$; on a

$$a = \frac{3}{5}c, \quad b = \frac{4}{5}c; \quad s = \frac{6}{5}c;$$

et, d'après la formule du *numéro* 296 (2°),

$$24 = c^2\sqrt{\frac{6}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5}} = \frac{6}{25}c^2;$$

d'où
$$\begin{aligned} c^2 &= 100, \\ c &= 10^m, \\ a &= 6^m, \\ b &= 8^m. \end{aligned}$$

Problème VIII.

418. *Étant donnés les deux côtés, a, b, d'un parallélogramme, et une diagonale, c, valant respectivement,* $a = 15^m,47$, $b = 23^m,72$, *et* $c = 30^m,48$: *trouver son aire* [A].

L'aire du parallélogramme s'obtiendra en doublant celle du triangle formé par les deux côtés et la diagonale. On a ainsi

$$A = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{n}^\circ\ 296,\ 2^\circ);$$

$$\log.A = \log.2 + \frac{1}{2}[\log.s + \log.(s-a) + \log.(s-b) + \log.(s-c)];$$

$a = 15,47$	$s-a = 19,365$	$\log.19,365 = 1,2870175$
$b = 23,72$	$s-b = 11,115$	$\log.11,115 = 1,0459095$
$c = 30,48$	$s-c = 4,355$	$\log.4,355 = 0,6389882$
$2s = 69,67$	$s \ldots = 34,835$	$\log.34,835 = 1,5420033$
Vérification.........69,670		Somme...4,5139185
		demi-somme...2,2569592
		$\log.2 = 0,3010300$
		$\log.A = 2,5579892$

d'où $A = 361^{mq},40$, à *un décimètre carré* près.

Problème IX. (Fig. 112.)

Fig. 112. 419. *Étant donnés les côtés d'un pentagone* ABCDE, *savoir* AB = $25^m,36$, BC = $48^m,25$, CD = $19^m,43$, DE = $9^m,16$, EA = $22^m,03$; *et deux diagonales*, AC = $36^m,49$, AD = $28^m,73$, *aboutissant à un même sommet* A : *trouver son aire.*

Il faut calculer l'aire de chacun des trois triangles qui composent le polygone, et en faire la somme. On trouve ainsi (n° 296, 2°) :

Pour le triangle	ABC.............	$454^{mq},1792$,
....	ACD.............	$277\ ,2546$,
....	ADE.............	$77\ ,9636$;

d'où l'on tire l'aire du pentagone, égale à. $809^{mq},3974$.

Problème X.

420. *La surface d'un rectangle est* $193^{mq},11$; *et la somme de sa base et de sa hauteur est* 28^{m} : *trouver ces deux dimensions.*

Soit b la base et h la hauteur : on aura

$$bh = 193,11,$$
$$b + h = 28 \quad ;$$

d'où l'on tire

$$b(28 - b) = 193,11,$$

ou bien

$$b^2 - 28.b + 193,11 = 0,$$

ou bien encore

$$(b - 14)^2 = 14^2 - 193,11 = 2,89;$$

et par suite

$$b - 14 = \pm\sqrt{2,89} = \pm 1,7,$$

ou
$$b = 14 \pm 1,7.$$

Il en résulte ces deux solutions identiques :

$$b = 15^{m},7, \quad h = 12^{m},3;$$
$$b = 12^{m},3, \quad h = 15^{m},7.$$

Problème XI.

421. *Étant donnés, l'aire d'un rectangle, égale à* $873^{mq},15$, *et l'excès de sa base sur sa hauteur, égal à* $18^{m},37$: *on demande ses deux dimensions.*

En nommant de même b la base, la hauteur sera $(b - 18^{m},37)$; et l'on aura

$$b(b - 18,37) = 873,15;$$

d'où, en opérant comme dans le *numéro* précédent,

$$b = 9,185 + \sqrt{(9,185)^2 + 873,15}$$
$$= 9,185 + 30,944 = 40,129.$$

Ainsi, la base est de $40^{m},129$, et la hauteur de $21^{m},759$.

PROBLÈME XII.

422. *Étant donnés, un côté d'un triangle, égal à* $5^m,45$, *la somme des deux autres, égale à* $13^m,65$, *et son aire égale à* $5^{mq},579$: *trouver les deux autres côtés.*

Soient $a = 5,45$, $b + c = 13,65$, et $A = 5,579$; on aura, en nommant s le demi-périmètre (nº 296, 2°),

$$s = 9,55, \text{ et } s - a = 4,10;$$

d'où

$$5,579 = \sqrt{9,55 \times 4,10 \times (9,55 - b)(9,55 - c)},$$

ou bien

$$(5,579)^2 = 9,55 \times 4,10 \times [(9,55)^2 - 9,55 \times 13,65 + bc],$$

ou, en réduisant et effectuant,

$$31,125241 = 39,1550(bc - 39,1550),$$

ou enfin $$bc = 39,9499.$$

Cette valeur de bc et celle de $(b + c)$ suffisent pour déterminer b et c. Elles donnent, en opérant comme ci-dessus (nº 420),

$$b = 6,825 \pm 2,575,$$
$$c = 6,825 \mp 2,575;$$

d'où, en prenant b pour le grand côté et c pour le petit,

$$b = 9^m,40; \quad c = 4^m,25.$$

PROBLÈME XIII.

423. *Étant donné le côté d'un octogone régulier, valant* $0^m,25$: *trouver son aire.*

Soit généralement : c le côté de l'octogone, r le rayon du cercle circonscrit, et C le côté du carré inscrit : on a la formule (nº 273)

$$c^2 = r\left(2r - \sqrt{4r^2 - C^2}\right);$$

ou, comme $$C^2 = 2r^2,$$

$$c^2 = r\left(2r - \sqrt{2r^2}\right) = r^2\left(2 - \sqrt{2}\right);$$

d'où $$r^2 = \frac{1}{2}.c^2\left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Soit a l'apothème de l'octogone, on aura aussi (n° 228, *coroll.*) :

$$a^2 = r^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}(3 + 2\sqrt{2})c^2,$$

d'où
$$a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})c.$$

Ainsi, l'aire [S] de l'octogone aura pour expression

$$S = 4ac = 2(1 + \sqrt{2})c^2.$$

Soit maintenant $c = 0{,}25$: on aura

$$log.S = log.2 + log.(1 + \sqrt{2}) + 2.log.0{,}25\,;$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136\,;$$

$$\begin{array}{rl} log.(1 + \sqrt{2}) & = 0{,}3827756 \\ log.2 \ldots\ldots\ldots & = 0{,}3010300 \\ 2.log.0{,}25 \ldots\ldots & = \bar{2}{,}7958800 \\ \hline log.S \ldots\ldots\ldots & = \bar{1}{,}4796856 = log.0{,}301777. \end{array}$$

Ainsi, $S = 0^{mq}{,}301777$, à *un millimètre carré* près.] ≽

§ IV. *Problèmes sur l'Aire du Cercle.*

Problème I.

424. *Trouver l'aire d'un cercle, connaissant les valeurs de deux cordes, $4^m{,}19$ et $3^m{,}25$, menées d'un même point aux extrémités d'un même diamètre.*

Le carré du diamètre est

$$(4{,}19)^2 + (3{,}25)^2 = 28{,}1186\,;$$

l'aire cherchée sera donc (n° 299, *coroll.* 1er)

$$\frac{1}{4}.28{,}1186 \times 3{,}1415927 = 22^{mq}{,}0843.$$

Problème II.

425. *Le côté d'un carré a $7^m{,}2$ de longueur : trouver les surfaces du cercle inscrit et du cercle circonscrit.*

La moitié du côté donné ayant $3^m,6$, l'aire du carré inscrit aura pour valeur (nº 299, *coroll.* 1er)

$$\pi.(3,6)^2 = 40^{mq},7150 ;$$

et le carré circonscrit étant double du précédent (nº 308, *scol.*), vaudra $81^{mq},4300$.

PROBLÈME III.

426. *Trouver l'aire d'un secteur de cercle décrit d'un rayon égal à $5^m,4$, la base du secteur ayant $45^o20'$.*

D'après le problème du *numéro* 398, la base du secteur a $4^m,27$ de longueur; donc son aire a pour mesure (nº 297) :

$$\frac{1}{2}.4,2726 \times 5,4 = 11^{mq},536.$$

PROBLÈME IV.

427. *Déterminer l'aire [A] d'un segment de cercle dont l'arc vaut $33^{gr}\frac{1}{3}$, le rayon étant de $4^m,25$.*

$33^{gr}\frac{1}{3}$ valant $\frac{1}{12}$ de la circonférence, le sinus de l'arc de $33^{gr}\frac{1}{3}$ est égal à la moitié du rayon (nº 101, *scol.* 2); donc, d'après le *numéro* 300 (*coroll.*), l'aire cherchée vaut

$$\frac{1}{2}.(4,25)^2\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}(4,25)^2(\pi - 3) ;$$

d'où

$$log.A = 2.log.4,25 + log.0,14159265 + C.log.12 - 10 ;$$

$$\begin{aligned} 2\,log.4,25 \ldots &= 1,2567778 \\ log.(\pi - 3) &= \bar{1},1510407 \\ C.log.12 \ldots &= 8,9208187 \\ \hline log.A \ldots &= \bar{1},3286372 = log.0,2131264. \end{aligned}$$

Ainsi l'aire cherchée vaut $0^{mq},2131264$.

Scolie. — Ce problème ne peut se résoudre géométriquement que pour des arcs dont les sinus sont les moitiés des côtés des polygones réguliers que l'on sait inscrire au cercle. [On peut néanmoins le résoudre dans tous les cas; au moyen de la table des cordes qui se trouve à la fin de l'ouvrage.]

Problème V.

428. *Déterminer l'aire* [*A*] *d'un segment de cercle dont l'arc vaut* 50gr, *le rayon étant de* $3^m,15$.

$$A = \frac{1}{2}(3,15)^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \quad (\text{n}^\circ\,300,\ \textit{coroll.})$$

$$= \frac{1}{8}(3,15)^2(\pi - 2\sqrt{2});$$

$$\pi - 2\sqrt{2} = 0,3131655\,;$$

$$\log.A = 2\log.3,15 + \log.0,3131655 + C.\log.8 - 10\,;$$

$$\begin{aligned}
2\log.3,15 \ldots\ldots\ldots &= 0,9966212\\
\log.(\pi - 2\sqrt{2}) &= \bar{1},4957740\\
C.\log.8 \ldots\ldots\ldots\ldots &= \underline{9,0969100}\\
\log.A \ldots\ldots\ldots &= \bar{1},5893052 = \log.0,3884232\,;\\
A &= 0^{mq},3884232.
\end{aligned}$$

Problème VI.

429. *Étant donnée l'aire d'un cercle, égale à* $33^{mq},1830$: *trouver son rayon* [*r*].

On a $\quad 33,1830 = \pi r^2$ (n° 299, *coroll.* 1er) ;

d'où l'on tire $\quad 2.\log.r = \log.33,1830 - \log.\pi$;

$$\begin{aligned}
\log.33,1830 &= 1,5209156\\
C.\log.\pi \ldots\ldots &= \underline{9,5028501}\\
2.\log.r \ldots\ldots &= 1,0237657\\
\log.r \ldots\ldots &= 0,5118828 = \log.3,25.
\end{aligned}$$

Ainsi $\quad r = 3^m,25$, à *un centimètre* près.

Problème VII.

430. *Calculer le côté* [*c*] *d'un carré équivalent à la surface comprise entre deux circonférences concentriques dont les rayons sont* $R = 1^m,3456$ *et* $r = 0^m,3458$.

On a

$$c^2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r) \text{ (page 154)};$$

d'où $\quad 2.log.c = log.\pi + log.(R+r) + log.(R-r)$;

$$R + r = 1{,}6914,$$
$$R - r = 0{,}9998;$$

$$\begin{aligned} log.\pi \ldots\ldots &= 0{,}4971499 \\ log.1{,}6914 &= 0{,}2282463 \\ log.0{,}9998 &= \underline{\bar{1}{,}9999131} \\ 2.log.x \ldots\ldots &= 0{,}7253093 \\ log.x \ldots\ldots &= 0{,}3626546 = log.2{,}30491. \end{aligned}$$

Ainsi $\quad x = 2^m{,}305$, à *un millimètre* près.

Problème VIII.

431. *Le côté d'un triangle équilatéral a $5^m{,}8$ de longueur : trouver les surfaces du cercle inscrit et du cercle circonscrit.*

La hauteur du triangle valant $\frac{1}{2}.5{,}8\sqrt{3}$ (n° 268), le rayon du cercle circonscrit, qui en est les $\frac{2}{3}$, vaudra $\frac{1}{3}.5{,}8.\sqrt{3}$; et l'expression de ce cercle sera $\frac{1}{3}.\pi(5{,}8)^2$.

Alors, en prenant les logarithmes, on aura

$$\begin{aligned} log.\pi \ldots &= 0{,}49714987 \\ 2.log.5{,}8 &= 1{,}5268598 \\ C.log.3 \ldots &= \underline{9{,}5228787\,5} \\ & 1{,}54688460 = log.35{,}2277. \end{aligned}$$

Ainsi l'aire du cercle circonscrit sera de $35^{mq}{,}2277$.

Quant au cercle inscrit, son rayon étant moitié de celui du cercle circonscrit, son aire vaudra $\frac{1}{4}$ de la précédente, ou $8^{mq}{,}8069$.

FIN DES PROBL. DE GÉOMÉTRIE PLANE, ET DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

N. B.—Dans cette seconde Partie qui a pour objet la Géométrie dans l'espace (n° 27), toutes les figures doivent être supposées pénétrables et transparentes. — En divers endroits nous donnerons, pour plus de clarté, sous le même *numéro*, une figure ombrée en même temps que la figure au simple trait.

LIVRE TROISIÈME.

DES FIGURES CONSIDÉRÉES DANS L'ESPACE.

PRÉLIMINAIRES DU LIVRE TROISIÈME.

432. Jusqu'à présent, les figures que nous avons étudiées avaient tous leurs points situés dans un même plan : nous allons maintenant considérer les choses d'une manière plus générale, et traiter des figures DANS L'ESPACE (*Voy*. le n° 28) en commençant encore par les plus simples, c'est-à-dire par celles qui ne sont composées que de lignes droites et de plans.

Nous rappellerons d'abord que trois points non situés en ligne droite, ou que deux droites qui se coupent, déterminent un plan (nos 9 et 10). Il en est de même de deux droites parallèles (n° 83) : car d'abord, deux pareilles droites sont toujours dans un même plan d'après leur définition ; et ensuite, s'il était possible qu'il existât plusieurs plans passant à la fois par les deux parallèles, il s'ensuivrait que par deux points quelconques de la première et par un point de la seconde, on pourrait faire passer plusieurs plans, ce qui est absurde (n° 9). — Cette observation était nécessaire pour confirmer ce que nous avons dit dans le *numéro* 83, et en même temps pour motiver l'expression que nous avons employée en disant *le plan des deux parallèles*.

Il en résulte encore que

Dans l'espace comme sur un plan, on ne peut mener par un point donné qu'une seule parallèle à une droite donnée ;

23..

Et que *Toutes les parallèles qu'il est possible de mener par les différens points d'une même droite, sont dans un même plan.*

433. Il est important de remarquer encore que

Deux droites peuvent ne pas se rencontrer sans cependant être parallèles.

Fig.333. Soit en effet une droite AB (fig. 333) qui vient *percer* (n° 8) d'une manière quelconque, un plan MN en un point O. Il est clair d'abord que toute droite CD tracée dans ce plan sans passer par le point O, ne pourra rencontrer la droite AB ; et ensuite que les deux droites ne peuvent être contenues à la fois dans un même plan, puisque ce plan, renfermant la droite CD et passant par le point O, se confondrait nécessairement avec le plan MN. Les deux droites AB, CD, ne satisfont donc qu'à une seule des deux conditions que suppose à la fois la définition des parallèles (n° 83).

De là résulte entre autres cette conséquence, que

Dans l'espace, deux droites peuvent être perpendiculaires à une troisième sans être pour cela *parallèles entre elles :*

Car on conçoit qu'une troisième droite, menée par le point O dans le plan MN perpendiculairement à CD, pourrait être en même temps perpendiculaire à la droite AB. — C'est d'ailleurs ce que nous comprendrons encore mieux tout-à-l'heure.

434. On sait en effet (n° 73) que par un point pris sur une droite, on ne peut mener *dans un même plan avec la droite*, qu'une seule perpendiculaire à cette ligne. Mais aussi, comme par une droite (n° 13) on peut mener une infinité de plans, il s'ensuit que

Fig.334. *Par un point* O (fig. 334) *pris sur une droite* AB, *on peut mener, dans des plans différens, une infinité de perpendiculaires distinctes.*

Au reste, rien n'empêche de considérer toutes ces perpendiculaires comme n'étant autre chose que les positions successives d'une même droite, mobile autour de la première de manière à faire toujours avec elle, au point O, deux angles égaux entre eux. Or, nous allons établir que toutes ces perpendiculaires sont dans un même plan, ce qui exige la démonstration des deux théorèmes qui suivent.

THÉORÈME I. (Fig. 335.)

435. *Si une droite* OA *est perpendiculaire à deux autres droites,* OB, OC, *menées par son pied dans un plan* MN, *elle est perpendiculaire à toutes les droites que l'on peut mener par son pied dans le même plan.* Fig.335.

Soit OD une *quelconque* de ces droites : il suffit de prouver que OA est perpendiculaire à OD. Pour cela, prolongeons OA de l'autre côté du plan, d'une quantité OA′ = OA; prenons sur les deux droites OB, OC, deux points quelconques B, C [de manière toutefois que la droite OD se trouve dans l'angle BOC]; tirons BC, et soit D le point d'intersection de BC avec OD; enfin menons AB, AC, AD, A′B, A′C, A′D.

Cela posé, AB = A′B (nº 97), et AC = A′C; donc (nº 130) les deux triangles ABC et A′BC sont égaux, de telle manière que dans leur superposition mutuelle, les droites AD, A′D, coïncideraient : donc OD est perpendiculaire à OA (nº 97).

THÉORÈME II. (Fig. 336.)

436. *Si une droite* OA *est perpendiculaire à trois autres,* OB, OC, OD, *menées par un de ses points,* O, *celles-ci sont toutes trois dans un même plan.* Fig.336.

Pour le prouver, soit MN le plan des deux droites OB, OC; et supposons que OD ne soit pas dans ce plan. Soit encore AD le plan des deux droites OA et OD. Les deux plans se couperont suivant une droite OD′ qui, par hypothèse, différera de OD. Mais alors OD et OD′ seront perpendiculaires à OA, et dans un même plan avec OA; *ce qui est absurde.*

COROLLAIRE. — *Tant de droites que l'on voudra, perpendi-*

culaires à une même droite en un même point, sont toutes dans un même plan.

[Cette proposition peut être considérée comme la *réciproque* du théorème 1er].

Par conséquent : Si l'on fait tourner un angle droit autour de l'un de ses côtés, l'autre côté *engendrera* un plan; ou en d'autres termes, *le* LIEU *des perpendiculaires* élevées sur le premier côté par un de ses points, est un plan.

437. Cela posé, une DROITE est dite PERPENDICULAIRE *à un plan*, lorsque [rencontrant cette surface] elle est *perpendiculaire à toutes les droites menées par son* PIED (n° 70) *dans le plan*. Ainsi, d'après le théorème précédent,

Si une droite est perpendiculaire à deux autres droites menées par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire au plan.

Réciproquement, le PLAN est dit PERPENDICULAIRE *à la droite*.

Lorsqu'une *droite* perce un plan sans cependant satisfaire à la condition que l'on vient d'énoncer, elle est dite OBLIQUE *au plan*, et le *plan* est dit *oblique à la droite*. Le point d'intersection de la droite avec le plan est encore dit le *pied de l'oblique* (n° 74).

THÉORÈME III. (Fig. 337 et 338.)

Fig. 337 et 338. 438. *Par un point donné* O *on ne peut mener qu'une seule droite perpendiculaire à un plan* AB.

Il y a *deux cas* distincts : car le point donné peut être sur le plan (fig. 337) ou hors du plan (fig. 338); mais la démonstration est la même pour les deux cas.

Soient OC, OC', deux perpendiculaires au plan AB : le plan de ces deux droites coupera le plan AB suivant une droite GK; mais alors (n° 437) OC et OC' seront perpendiculaires à GK et *dans un même plan avec* GK; *ce qui est absurde*.

Théorème IV. (Fig. 339 et 340.)

439. *Par un point donné O on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire à une droite* AB. Fig. 339 et 340.

Le point peut être sur la droite ou hors de la droite : distinguons ces *deux cas*.

1er *Cas* (fig. 339). — Soient MN et M'N' deux plans perpendiculaires à AB au même point O, et GK leur intersection commune. Par la droite AB menons un plan qui ne passe pas suivant GK, ce qui est possible d'une infinité de manières (n° 13). Soient OC, OC', les intersections respectives de ce troisième plan avec les deux premiers : OC et OC' seront à la fois perpendiculaires à AB, et *dans un même plan avec* AB ; *ce qui est absurde*. Fig. 339.

2e *Cas* (fig. 340). — Soient encore MN et M'N' deux plans menés par le point O perpendiculairement à la droite AB, le premier coupant la droite au point C et le second au point C' : [les deux points C, C', ne sauraient coïncider, sans quoi l'on pourrait, par un même point C de la droite AB, mener deux plans perpendiculaires à cette droite]. Cela posé, tirons OC, OC' : nous aurons ainsi deux perpendiculaires menées à une même droite AB par un même point O *extérieur* à cette droite ; *ce qui est absurde*. Fig. 340.

440. De même que deux droites, en se coupant, partagent l'étendue de leur plan en quatre portions que nous avons nommées *angles plans*, ou plus simplement *angles* (n° 66) : de même, deux plans, en se coupant, partagent l'espace en quatre portions indéfinies que l'on nomme Angles Dièdres. Les côtés de l'angle plan sont ici remplacés par deux *moitiés* de plans indéfinis qui comprennent l'angle dièdre, et que l'on nomme ses *faces* ; et le sommet de l'angle est remplacé par l'intersection des deux plans, que l'on nomme l'*arête* de l'angle dièdre. Ainsi, OP (fig. 341) est l'arête d'un angle dièdre formé par les plans AOPG et BOPD qui en sont les faces. Cet angle dièdre se désigne par OP quand il est isolé, et Fig. 341.

Fig. 341. par AOPD ou BOPC quand plusieurs angles dièdres ont la même arète OP. — Enfin, on nomme *plan bissecteur* d'un angle dièdre, le plan qui, passant par son arète, le partage en deux angles dièdres superposables ou égaux (*Voy.* le n° 66).

441. Supposons que par un point I (fig. 341) pris sur l'arète OP, on élève une perpendiculaire IG dans le plan OC, et une perpendiculaire IK dans le plan OD; il en résultera un angle plan GIK : nous le nommerons *l'angle plan correspondant à l'angle dièdre* OP; et nous appellerons ainsi, en général, l'*angle formé par deux perpendiculaires à l'arète, menées respectivement dans chacune des deux faces par un de ses points.*

Réciproquement, l'angle dièdre correspondant à un angle plan IGK, s'obtiendra en élevant, par le sommet de ce dernier, une perpendiculaire OP sur son plan, puis menant un plan par chacun des deux côtés IG, IK, et par la perpendiculaire OP.

442. De là il est aisé de tirer les conséquences suivantes :

D'abord, *A des angles plans égaux entre eux*, GIK, G′I′K′ (fig. 341), *correspondent des angles dièdres égaux entre eux.*

En effet, faisons coïncider les angles GIK, G′I′K′ : les droites OP, O′P′, coïncideront (n° 438); donc les plans OC et O′C′ coïncideront (n° 10), ainsi que les plans OD et O′D′ : donc, etc.

Il résulte de là qu'à un angle plan *double, triple, quadruple*...... correspond un angle dièdre *double, triple, quadruple*...; et plus généralement :

A un plus grand angle plan correspond un angle dièdre plus grand.

443. Il est nécessaire de remarquer en outre, que

L'angle plan correspondant à un angle dièdre a la même valeur pour tous les points de son arète.

Admettons en effet que l'angle GIK (fig. 341) soit plus grand que l'angle *gik*, qui correspond, en un autre point de l'arète PO, à l'angle dièdre des mêmes plans. Il en résulterait évidem-

ment une absurdité : car, en supposant un autre angle G′I′K′ Fig. 341.
égal à l'angle GIK, l'angle dièdre A′O′P′D′ correspondant à l'angle G′I′K′ serait égal à l'angle dièdre correspondant à GIK, et plus grand que l'angle dièdre correspondant à *gik* : c'est-à-dire que l'angle dièdre AOPD serait tout-à-la-fois égal et supérieur au même angle dièdre A′O′P′D′.

444. On peut facilement généraliser ce qui précède ; et par des raisonnemens analogues à ceux que l'on a déjà employés dans plusieurs circonstances analogues (n^{os} 61 et *suiv.*, 195, 291), on en conclut d'abord que

Les angles dièdres, tels que AOPD, AOPD′ (fig. 342), *sont* Fig. 342.
proportionnels aux angles plans correspondans, AOB, AOB′.

Ensuite, on en tire un moyen de mesurer les angles dièdres par les angles plans qui leur correspondent.

Pour cela, soient deux droites AB, CD (fig. 343), perpen- Fig. 343.
diculaires entre elles au point O, et une troisième droite OP perpendiculaire à leur plan : les quatre angles dièdres qui ont la droite OP pour arète commune, et qui correspondent respectivement aux angles droits AOC, COB, BOD, DOA, partageront l'espace en quatre parties égales. Dans ce cas, les *plans* AF, CK, sont dits *perpendiculaires entre eux*, ou simplement *perpendiculaires ;* il en est de même généralement lorsqu'un plan vient en couper un autre de manière à faire avec lui des angles dièdres égaux entre eux ; et les angles dièdres sont dits des *angles dièdres rectangles* ou *droits*. On voit que les angles dièdres droits correspondent aux angles plans droits (n° 442).

Lorsque l'angle dièdre de deux plans n'est pas droit, les plans sont obliques l'un à l'autre : l'*angle dièdre* est alors *obliquangle*, et il est dit *aigu* ou *obtus* dans les mêmes circonstances que l'angle plan qui lui correspond.

Cela posé, de même que l'on a pris l'angle droit pour unité des angles, on prend l'angle dièdre droit pour unité des angles dièdres ; et alors

Fig. 342. *Tout angle dièdre* AOPD (fig. 342) *a pour mesure l'angle correspondant* AOB, ou bien encore *l'arc correspondant* à cet angle (n° 196).

Au reste, nous reviendrons plus tard sur ce sujet, pour montrer que l'angle correspondant est le seul qui puisse servir ainsi de mesure à l'angle dièdre.

445. On voit donc que les angles dièdres sont dans l'espace ce que sont sur un plan les angles formés par deux droites.

Aussi *Les angles dièdres jouissent*-ils, *en général, des mêmes propriétés que les angles plans qui leur correspondent.*

Ainsi : de même qu'un angle ne peut être contenu dans un plan qu'un nombre de fois limité (n° 69), de même

Un angle dièdre ne peut être contenu dans l'espace qu'un nombre de fois limité ;

De même que les angles opposés formés par deux droites qui se coupent sont égaux deux à deux (n° 79), de même

Les angles dièdres opposés, formés par deux plans qui se coupent, sont aussi *égaux deux à deux ;* .... Etc.

Fig. 344. 446. Soient deux droites parallèles (n° 83) AB, CD (fig. 344). Par l'une d'elles, la droite CD par exemple, on peut mener une infinité de plans (n° 13). Or, de tous ces plans, aucun ne rencontrera la droite AB, excepté le plan des deux parallèles qui la contiendra tout entière : en effet, si tout autre que ce dernier, si le plan MN par exemple, pouvait rencontrer la droite AB en un certain point, ce plan se confondrait avec celui des parallèles (n° 9).

Cela posé, on dit qu'un *plan* MN et une *droite* AB sont *parallèles*, lorsque le plan et la droite *ne se rencontrent pas*, quoique indéfiniment prolongés.

On voit en même temps que

Quand deux droites, AB, CD, *sont parallèles, tout plan* MN *mené suivant l'une d'elles* CD [le plan des parallèles excepté] *est parallèle à l'autre* AB ;

Et que par conséquent,

Par un point donné, C par exemple, *on peut mener une infinité de plans parallèles à une droite donnée* AB.

447. Deux Plans MN, PQ (fig. 345), sont dits Parallèles lorsque, prolongés indéfiniment, ils ne se rencontrent pas : c'est ce qui arrive, par exemple [d'après le n° 439], pour deux *plans perpendiculaires à une même droite*. Fig.345.

Il est évident que,

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite menée dans l'un est parallèle à l'autre ;

Et qu'ainsi

Par un point donné, on peut mener une infinité de droites parallèles à un plan donné.

Il serait facile d'établir, par un raisonnement semblable à celui que l'on a employé dans le *numéro* 84, que la portion d'espace comprise entre deux plans parallèles, est contenue un nombre infini de fois dans l'espace indéfini.

448. On nomme en général Angle Polyèdre [et plus ordinairement, mais improprement, Angle Solide] la *portion indéfinie de l'espace, comprise entre plusieurs plans* [il doit y en avoir au moins *trois*] *qui se coupent en un même point* S (fig. 346). Ce point se nomme le *sommet* de l'angle polyèdre ; on appelle *faces* chacun des angles plans qui le comprennent ; l'ensemble de ces faces forme la *surface* de l'angle polyèdre ; et leurs intersections deux à deux, SA, SB, SC, SD, SE, sont les *arètes*. Chacune des arètes sert en même temps de côté à deux faces contiguës. — Il faut encore distinguer dans un angle polyèdre autant d'angles dièdres qu'il a de faces. Fig.346.

Un angle polyèdre se désigne par la lettre de son sommet, après laquelle on énonce ordinairement des lettres qui servent à représenter respectivement un point de chaque arète.

Pour indiquer le nombre des faces, on remplace ordinairement la dénomination générale d'angle polyèdre, par celles d'*angle trièdre*, *tétraèdre*, *pentaèdre*, etc., suivant que le nombre des faces est *deux*, *trois*, *quatre*, *etc.* — L'angle trièdre est évidemment, d'après la définition ci-dessus, le plus simple des angles polyèdres.

Un angle polyèdre de plus de trois faces peut avoir un ou plusieurs angles dièdres *rentrans* : il est alors *concave*; si tous ses angles dièdres sont *saillans*, il est *convexe*. — On peut dire encore qu'un angle polyèdre est convexe ou concave, suivant qu'une droite peut percer sa surface en deux points seulement ou en un plus grand nombre de points; *etc.* (*Voy.* le n° 89.)

Fig. 347. Lorsqu'un angle polyèdre, tel que SABCDE (fig. 347), est convexe, il est toujours possible de faire passer par son sommet S un plan MN [différent des faces], tel que l'angle polyèdre soit tout entier situé d'un même côté de ce plan; et en menant par un point A′ d'une arète SA, un plan PQ parallèle au premier, celui-ci coupera toutes les arètes respectivement en A′, B′, C′, D′, E′: donc on peut toujours mener un plan qui coupe à la fois toutes les arètes d'un angle polyèdre convexe.

On nomme *plan diagonal*, tout plan, SAC, SAD, mené par deux arètes qui n'appartiennent pas à la même face. — Au moyen d'un nombre convenable de pareils plans, *Tout angle polyèdre est décomposable en angles trièdres*, de la même manière que tout polygone est décomposable en triangles au moyen de diagonales.

Un angle polyèdre est *régulier* quand il a toutes ses faces égales et tous ses angles dièdres égaux; il est alors nécessairement convexe.

449. Lorsque, par un point quelconque de l'intersection de deux plans, on en fait passer un troisième qui coupe cette intersection, on décompose chacun des *quatre* angles dièdres formés par les deux premiers plans, en *deux* portions qui

sont des angles trièdres ; d'où l'on voit que trois plans qui se coupent en un même point décomposent toujours l'espace en *huit* angles trièdres.

Soient donc les *huit* angles trièdres SABC, SA′BC, SAB′C, SA′B′C, SA′B′C′, SAB′C′, SA′BC′, SABC′ (fig. 348), formés par *trois* plans qui se coupent au point S. [On peut, pour plus de facilité, se représenter les deux droites AA′, BB′, comme étant dans le plan de la figure, puis l'arète SC avec les quatre premiers angles trièdres comme étant *en avant* de ce plan, et l'arète SC′ avec les quatre autres angles trièdres comme étant *derrière*.] Examinons les relations qui lient chacun de ces angles trièdres, SABC par exemple, avec les autres. Fig. 348.

D'abord, SABC et SA′BC ont une face commune BSC, et un angle dièdre égal, opposé, dans chacun d'eux, à cette face commune. De plus, les faces ASB et ASC du premier sont respectivement supplémentaires (n° 75) des faces A′SB et A′SC du second; et il en est de même des angles dièdres SB et SC du premier qui sont respectivement supplémentaires des angles dièdres SB et SC du second. A cause de ces propriétés, nous dirons que l'*angle trièdre* SA′BC est *conjugué de l'angle trièdre* SABC *par la face* BSC, et *réciproquement*. De même, les angles trièdres SABC, SAB′C, sont conjugués par la face ASC, et les angles trièdres SABC, SABC′, par la face ASB. [Si plusieurs couples d'angles trièdres conjugués avaient la même face, BSC par exemple, il faudrait dire que les *angles trièdres* SABC et SA′BC sont *conjugués par la face* BSC *et par l'arète* AA′, ce qui les déterminerait complètement.] — L'angle trièdre SABC augmenté de son conjugué par la face BSC, forme une somme égale à l'angle dièdre AA′ opposé à cette face. Il en est de même pour les autres angles trièdres conjugués de SABC.

450. Maintenant, les angles trièdres SABC et SA′B′C′ *ont les faces égales chacune à chacune* [comme opposées (n° 79)], *mais inversement disposées ;* pour cette raison, ces deux *angles trièdres* sont dits *symétriques entre eux*, ou simplement *symétriques*. On remarquera d'ailleurs : 1° que trois faces

données ne peuvent être disposées pour faire un angle trièdre, que de l'une de ces deux manières (*Voy*. le n° 136); 2° que deux angles trièdres peuvent être symétriques indépendamment de leur position relative dans l'espace; 3° que la symétrie des angles trièdres diffère de celle des triangles, en ce qu'il suffit de renverser un triangle symétrique d'un autre, pour les faire coïncider (n^{os} 43 et 136), tandis que deux angles trièdres symétriques ne sauraient [en général] coïncider en aucune manière; et enfin 4° que les angles dièdres SA′, SB′, SC′, de l'angle trièdre SA′B′C′, sont respectivement égaux chacun à chacun, comme opposés, aux angles dièdres SA, SB, SC, de l'angle trièdre SABC symétrique du premier.

Quant aux angles trièdres SAB′C′, SA′BC′, SA′B′C, dont on n'a pas encore parlé, ils sont, chacun à chacun, symétriques des angles trièdres SA′BC, SAB′C, et SABC′, ou des conjugués de l'angle trièdre SABC; et par suite ils sont eux-mêmes les conjugués de l'angle trièdre SA′B′C′. L'un d'eux, par exemple SAB′C′, et l'angle trièdre SABC, ont un angle dièdre égal comme opposé par l'arète SA; et les faces de ces deux angles dièdres sont supplémentaires chacune à chacune.

Enfin, il faut observer que dans la même figure, quatre angles trièdres qui se trouvent du même côté d'un même plan, forment toujours une somme égale à 2 *angles dièdres droits* : c'est ce qui a lieu, par exemple, pour les quatre angles trièdres SABC, SA′BC, SAB′C, et SA′B′C.

Fig.349. 451. On nomme en général POLYÈDRE (fig. 349) une portion d'espace, ou plus simplement un *espace entièrement circonscrit par plusieurs plans qui se coupent deux à deux*. Le polyèdre se trouve ainsi limité par une série de polygones que l'on nomme ses *faces*, et dont l'ensemble constitue la *surface* du polyèdre; les côtés de ces faces sont les *arètes* du polyèdre, et les points d'intersection de ces arètes en sont les *sommets*. On nomme *diagonale* toute droite menée entre deux sommets non consécutifs, et *plan diagonal* tout plan mené par trois sommets non situés sur la même face. Il y a encore à considérer

dans un polyèdre, autant d'angles dièdres qu'il a d'arêtes, et autant d'angles polyèdres qu'il a de sommets. — Le polyèdre est *convexe* lorsque tous ses *angles polyèdres sont saillans;* il est *concave* si quelqu'un d'eux est *rentrant.* Ou bien, un polyèdre est convexe lorsqu'une droite ne peut rencontrer sa surface en plus de deux points, ou que le plan prolongé d'une face quelconque ne peut couper la figure, ou, ce qui est la même chose, lorsque le polyèdre est tout entier d'un même côté d'une face quelconque indéfiniment prolongée. — Deux polyèdres convexes coïncident lorsqu'ils ont les mêmes sommets (*Voy.* le n° 89).

Les plus simples des *polyèdres* sont, d'abord les PRISMES (fig. 350), qui *ont pour faces deux polygones égaux et parallèles, et une série de parallélogrammes en nombre égal à celui des côtés de chaque polygone,* puis les PYRAMIDES (fig. 351), qui *ont pour faces un polygone d'un nombre quelconque de côtés, et une série de triangles dont le sommet est commun.* Fig. 350. Fig. 351.

Un POLYÈDRE est dit RÉGULIER lorsque *toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux entre eux,* et que *tous ses angles dièdres sont égaux.* — D'après cette définition, un polyèdre régulier est nécessairement convexe (*Voy.* le n° 90).

452. Nous avons vu précédemment (n° 1) que *Sur une surface quelconque on peut concevoir une infinité de lignes;* d'où il résulte que toutes les surfaces peuvent être considérées comme *engendrées* (*Voy.* le n° 436, *coroll.*) *par le mouvement d'une ligne.* Cette ligne, MN (fig. 452 et 453), généralement variable de forme en même temps que de position, se nomme pour cette raison la *génératrice* de la surface; et pour achever de déterminer cette dernière, on suppose que la génératrice est assujettie à glisser le long d'une ligne droite ou courbe AB que l'on nomme la *directrice.* Fig. 452 et 453.

Cela posé, il est naturel de considérer comme les plus simples, les *surfaces qui ont pour génératrice une ligne droite,* et que l'on nomme SURFACES RÉGLÉES pour exprimer que l'*on peut, en chaque point, y appliquer une droite, au moins dans un sens.* Chacune des positions de la génératrice, ou chacune des directions suivant lesquelles on peut appliquer ainsi une droite sur la surface, se nomme une *arète* de cette surface.

Le *genre* des surfaces réglées se divise en trois *espèces*.

Le plan, par sa nature, étant nécessairement une surface réglée, et la plus simple de toutes, en constitue à lui seul la première espèce ; les deux autres ne contiennent que des surfaces courbes.

Dans les surfaces réglées de la seconde espèce, composant la première espèce des surfaces réglées courbes, *deux arètes consécutives*, c'est-à-dire infiniment voisines, *sont constamment dans un même plan ;* on les nomme SURFACES DÉVELOPPABLES, en raison de ce qu'elles peuvent s'étendre, se dérouler, ou *se développer* sur un plan : il résulte en effet de leur définition, qu'elles peuvent être considérées comme composées de portions de plan, infiniment étroites dans un sens, mais infiniment allongées dans celui de leurs arètes ; et comme d'ailleurs chaque arète se trouve commune à deux portions consécutives, il s'ensuit que deux portions consécutives quelconques peuvent s'appliquer l'une à côté de l'autre sur un même plan, et que par conséquent il en est de même pour la surface entière.

Au reste, il est facile de voir que les portions de plan consécutives infiniment petites dont il est ici question peuvent être de deux sortes ; savoir : des angles infiniment petits, lorsque les arètes consécutives se coupent deux à deux ; et au contraire des bandes infiniment étroites et indéfinies en longueur, lorsque les arètes consécutives sont parallèles.

Enfin, la troisième espèce des surfaces réglées, ou la seconde espèce des surfaces réglées courbes, comprend toutes celles dans lesquelles *deux arètes consécutives quelconques ne se trouvent pas dans un même plan :* on les nomme SURFACES GAUCHES(*).

(*) Les arts nous offrent une multitude d'exemples de surfaces réglées : ainsi, les surfaces exécutées par les *cartonniers*, les *ferblantiers*, etc., sont généralement des surfaces développables, puisqu'on les construit en *pliant*, en *courbant*, en *contournant* de diverses manières, des surfaces planes. Au contraire, la surface inférieure d'un escalier tournant, engendrée par une droite horizontale qui glisse le long d'une verticale, et nommée *conoïde*, est une surface gauche, etc.

453. Mais revenons aux surfaces développables, les seules surfaces réglées que l'on considère dans les élémens de Géométrie.

Les plus simples parmi ces surfaces sont les SURFACES CYLINDRIQUES (fig. 352). On nomme ainsi les *surfaces engendrées par le mouvement d'une droite qui reste constamment parallèle à elle-même.* Toutes les génératrices étant deux à deux dans un même plan, il est clair que la surface est développable. Fig. 352.

On nomme CYLINDRE *l'espace renfermé entre une surface cylindrique et deux plans parallèles entre eux* [ce qui suppose que la directrice de la surface est une courbe fermée]. — Les sections parallèles sont les *bases* du cylindre; le *cylindre* est dit *circulaire* quand les bases sont des cercles.

Après les surfaces cylindriques viennent les SURFACES CONIQUES (fig. 353). On nomme ainsi les *surfaces engendrées par le mouvement d'une droite qui passe constamment par un même point.* Ce point se nomme le *sommet* ou le *centre* de la surface. Toute surface conique est nécessairement composée de deux portions indéfinies qui se réunissent au sommet : ces deux portions se nomment les *nappes* de la surface. Fig 353.

On nomme CÔNE *l'espace renfermé entre une surface conique et un plan* [ce qui suppose que la directrice est une courbe fermée]. — Cette section plane se nomme la *base* du cône; le *cône* est dit *circulaire* quand cette base est un cercle.

≼[Enfin, restent les surfaces dont les génératrices consécutives se coupent deux à deux, mais en des points variables : [c'est le cas le plus général des surfaces développables]. On ne donne pas de nom spécial à ces surfaces; mais le lieu des intersections consécutives des génératrices se nomme *l'arète de rebroussement.* Il est facile de voir que cette arète [qui est toujours une courbe à double courbure (n° 14)] partage encore la surface en deux portions distinctes que l'on nomme de même les deux *nappes.*]≽

454. Les plus simples des surfaces, après les surfaces

Fig.354. réglées, sont les SURFACES DE RÉVOLUTION (fig. 354). On appelle ainsi les *surfaces engendrées par la révolution d'une ligne droite ou courbe, à simple ou à double courbure* (n° 14), *tournant autour d'une droite* que l'on nomme l'AXE de *révolution* (n° 46), de manière que, dans ce mouvement, *chaque point de la génératrice décrive une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe, et son plan perpendiculaire à cet axe* (*).

On nomme *lignes méridiennes* ou *sections méridiennes* les intersections de la surface par les plans que l'on peut mener suivant l'axe. — *Toutes les sections méridiennes sont* évidemment *égales entre elles.*

On nomme *cercles parallèles* de la surface les cercles perpendiculaires à l'axe de révolution, dont les circonférences sont décrites par chaque point de la génératrice.

Celles des surfaces coniques et cylindriques que l'on considère ordinairement dans la Géométrie élémentaire, sont aussi des surfaces de révolution. On leur donne en effet pour directrice un cercle; de plus, dans la surface cylindrique, la génératrice est assujettie à rester perpendiculaire au plan du cercle; et dans la surface conique, le sommet est pris sur la perpendiculaire élevée au plan du cercle par son centre. Or, il résulte de là, comme la suite le fera mieux voir, que tous les points de la génératrice, dans chacune des deux surfaces, décrivent des cercles parallèles dont les centres sont sur la perpendiculaire élevée par le centre de la circonférence directrice.

On appelle généralement et improprement *corps rond* tout espace renfermé, soit dans une surface de révolution, soit entre une portion de surface de révolution et les divers cercles parallèles de la surface

Le cône et le cylindre que l'on obtient (n° 453) en coupant

---

(1) Telles sont les surfaces que l'on construit au moyen du *tour* ordinaire.

les surfaces conique et cylindrique de révolution, par des plans perpendiculaires à l'axe, sont donc des corps ronds.

455. La plus simple des surfaces de révolution, après celles dont nous venons de parler, est la SURFACE SPHÉRIQUE (fig. 355). Fig. 355
Cette surface est *engendrée par la révolution d'une demi-circonférence qui tourne autour du diamètre qui lui sert de corde.* Il résulte de là qu'on peut encore en donner la définition suivante : Une *surface courbe entièrement fermée, dont tous les points sont également distans d'un point intérieur que l'on nomme* CENTRE (*Voy.* le n° 16).

La SPHÈRE est *l'espace renfermé dans la surface sphérique :* [cependant ce nom s'applique aussi à *la surface* elle-même] ; c'est le troisième et dernier des principaux corps ronds (n° 454) que l'on considère ordinairement dans la Géométrie élémentaire.

La sphère est donc, dans l'espace, relativement aux surfaces courbes, ce que le cercle est par rapport aux courbes planes.

Ainsi, l'on nomme de même RAYON de la sphère *la distance constante du centre à la surface*, et DIAMÈTRE toute *droite* qui, *passant par le centre*, aboutit de part et d'autre à la surface. — *Tous les diamètres sont égaux* et doubles du rayon, comme dans le cercle. — *Deux sphères sont égales lorsqu'elles ont même rayon* ou *même diamètre* (*Voy.* le n° 16 et les *suiv.*).

Une sphère se désigne ordinairement, soit par *quatre* points de sa surface, non situés dans un même plan, soit par un rayon OA (fig. 356) [le centre étant énoncé le premier], soit simplement par la lettre, O, du centre.

456. Tout *plan* PQ (fig. 356) *passant par le centre* O de la sphère coupe sa surface suivant une ligne courbe qui est évidemment un *cercle de même centre et de même rayon* que la surface elle-même (n° 455). Fig. 356

De plus, il est facile de prouver, par un raisonnement analogue à celui du *numéro* 18, qu'un pareil plan *partage la sphère et sa surface en deux parties égales :* on les nomme *hémisphères*.

Pour suivre en tous points, relativement à la Géométrie dans l'espace, la marche que nous avons suivie pour la Géométrie plane, nous devrions examiner les diverses propriétés de la sphère simultanément avec celles de la ligne droite et du plan qui peuvent y conduire. Mais, en nous hâtant de traiter du cercle, nous avions pour but d'habituer les élèves à manier le compas en même temps que la règle, et de les mettre à même d'exécuter le plus tôt possible les principales opérations graphiques de la Géométrie. N'étant plus, dans le cas actuel, sollicité par un motif aussi puissant, nous étudierons de préférence les propriétés de la sphère dans un chapitre spécial.

457. De même qu'une ligne courbe peut être regardée comme composée d'une infinité de lignes droites infiniment petites : de même aussi l'*On peut considérer toute surface courbe comme composée d'une infinité de facettes planes infiniment petites*. En effet, on peut d'abord prendre sur la surface, une infinité de points infiniment rapprochés ; on peut ensuite supposer tous les points voisins réunis deux à deux par des droites qui seront infiniment petites, et qui par conséquent pourront être regardées comme étant toutes sur la surface. Comme d'ailleurs trois points déterminent un plan, et que pour réunir trois points deux à deux il faut trois droites, il en résulte que la surface se trouvera ainsi décomposée en une infinité de triangles plans *infiniment petits*. Ces *facettes triangulaires* infiniment petites sont ce que l'on nomme les *élémens* de la surface courbe ; et l'on peut conclure de la possibilité de cette décomposition de toute surface courbe en élémens plans, que *Les surfaces courbes jouissent, en général, des mêmes propriétés que les surfaces polyèdres* (*Voy*. le n° 185).

Fig.357. 458. Cela posé, on nomme *plan tangent* à la surface (fig. 357),

chacun des plans de ces élémens indéfiniment prolongés à l'entour. Si par l'élément ou par le point de tangence on trace une série quelconque de courbes sur la surface, et que par le même point on mène des tangentes à ces courbes, toutes ces tangentes, qui seront aussi des *tangentes à la surface*, se trouveront dans le plan tangent. En effet, chacune des courbes tracées sur la surface a un élément dans le plan du triangle élémentaire commun à la surface et au plan tangent; donc le prolongement de l'élément de la courbe est dans le plan du triangle élémentaire indéfiniment prolongé.

Le plan tangent peut aussi être considéré comme la limite d'un *plan sécant* [c'est-à-dire qui coupe la surface], dont plusieurs points communs avec la surface se sont réunis en un seul. Et lorsqu'il n'y a plus aucun autre point commun entre le plan et la surface courbe, on dit, en employant une définition analogue à celle que l'on a adoptée pour la tangente au cercle (n° 20), que le *plan tangent* est celui qui n'a qu'*un point commun* avec la surface; mais cette définition n'est pas admissible en général, et ne peut présenter l'idée de contact que pour les surfaces qui, comme la sphère, satisfont à deux conditions : la première d'être convexe, c'est-à-dire de ne pouvoir être percée par une ligne droite en plus de deux points (n° 6), et la seconde d'être fermée de toutes parts. Ainsi par exemple, dans les surfaces développables, qui ont une infinité d'élémens situés dans un même plan et en ligne droite (n° 452), le plan tangent touche la surface suivant toute la longueur d'une arète. On peut alors le définir ainsi : *un plan dont deux arètes d'intersection avec la surface sont réunies en une seule*, ou *un plan qui n'a qu'une arète commune avec la surface* (*Voy.* le n° 20).

On appelle encore *normale* à une surface courbe, toute perpendiculaire à un plan tangent, menée par le point de tangence (*Voy.* le n° 187), et *plan normal* tout plan passant par une normale; l'intersection de la surface par un pareil plan se nomme une *section normale*.

459. Tels sont les principaux objets dont nous aurons à nous occuper dans ce troisième Livre, que nous diviserons en *huit* chapitres.

Dans le *premier*, nous traiterons des *droites perpendiculaires aux plans*, et des *plans perpendiculaires* entre eux.

Dans le *second*, nous examinerons les propriétés des *droites parallèles* entre elles *dans l'espace*, des *droites parallèles aux plans*, et des *plans parallèles entre eux*.

Nous exposerons *succinctement* dans le chapitre *troisième*, les principes généraux de la *Géométrie descriptive*, partie de la Géométrie, qui consiste à résoudre, en opérant sur un plan unique, toutes les questions relatives aux figures considérées dans l'espace.

Dans le chapitre *quatrième*, nous examinerons les propriétés des *angles polyèdres* en général, et des *angles trièdres* en particulier;

Dans le *cinquième*, nous traiterons des *prismes* et du *cylindre*;

Dans le *sixième*, des *pyramides* et du *cône*;

Dans le *septième*, des *polyèdres* en général, et en particulier des *polyèdres réguliers*;

Dans le *huitième* enfin, nous étudierons les propriétés de la *sphère*.

CHAPITRE PREMIER.

DES PERPENDICULAIRES ET DES OBLIQUES. — DES ANGLES DIÈDRES ; — etc.

§ Ier. *Des Perpendiculaires et des Obliques au Plan.*

Théorème I. (Fig. 358.)

460. *La perpendiculaire* OC *abaissée sur un plan* AB, *d'un point extérieur* O, *est le plus court chemin de ce point au plan.* Fig. 358.

En effet, soit une oblique quelconque OD menée du point O au plan AB. En tirant la droite CD, on formera un triangle OCD dont OD sera l'hypoténuse ; d'où OC $<$ OD (n° 95).

C. Q. F. D.

Corollaire. — *La perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan mesure la vraie distance du point à ce plan.*

Scolie. — La distance CD est dite la *projection* de la droite OD sur le plan AB. — [En général, la projection d'une droite déterminée de grandeur, MN (fig. 359), sur un plan indéfini AB, est la *distance* PQ *des pieds des perpendiculaires* abaissées des extrémités de la droite sur le plan. — Quand la droite est perpendiculaire au plan, la projection se réduit à un point qui est le pied de la perpendiculaire.] Fig 359.

L'angle ODC (fig. 358) que la droite OD fait avec sa projection CD, est dit *l'angle de projection*, ou *l'inclinaison* de la Fig 358.

droite sur le plan AB, ou simplement *l'angle de la droite et du plan :* il est complémentaire de l'angle que fait la même oblique OD avec la perpendiculaire OC menée par le même point O.

Théorème II. (Fig. 360.)

F.360. 461. Si d'un point O pris hors d'un plan AB on mène la perpendiculaire OC et différentes obliques OD, OD′, OD″.... OE,.... à ce plan :

1° *Deux obliques*, OD, OD′, *qui s'écartent également de la perpendiculaire sont égales et également inclinées* sur le plan ;

2° *De deux obliques*, OD, OE, *qui s'écartent inégalement de la perpendiculaire, celle* OE *qui s'en écarte le plus est la plus longue et la plus inclinée* sur le plan.

1° Puisque, par l'hypothèse, $CD = CD' = CD''$......, les triangles OCD, OCD′, OCD″,..... sont égaux (n° 131) ; donc, d'abord

$$OD = OD' = OD''.....,$$

et ensuite $ODC = OD'C = OD''C.....;$

Généralement : si du point C comme centre et d'un rayon égal à CD on décrit une circonférence dans le plan AB, toutes les obliques qui joindront le point O aux divers points de la circonférence seront égales et également inclinées sur le plan ;

2° Si, les trois points C, D, E, étant supposés en ligne droite, on a $CE > CD,$

on aura aussi $OE > OD$ et $OEC < ODC$ (n° 96) ;

D'ailleurs, la même conséquence aurait encore lieu quand bien même les trois points C, D, E, ne seraient pas en ligne droite, puisque, d'après la première partie de la proposition, on peut remplacer l'oblique OD par toute oblique OD′ dont la distance à la perpendiculaire serait la même.

Scolie. — Le théorème précédent donne lieu à plusieurs *réciproques* analogues à celles du n° 96 auquel il nous suffira de renvoyer.

COROLLAIRE. — *D'un même point on peut mener à un même plan une infinité de droites égales* [pourvu qu'elles soient plus grandes que la perpendiculaire].

De plus, toutes ces droites étant également distantes de la perpendiculaire, il s'ensuit qu'*Un point quelconque* O *d'une perpendiculaire* OC *à un plan peut servir à décrire dans ce plan une circonférence dont son pied soit le centre.*

Cette perpendiculaire se nomme l'*axe* du cercle. Tous les points de l'axe peuvent être considérés comme autant de centres du cercle, puisqu'ils peuvent être également employés à le décrire.

THÉORÈME III. (Fig. 361.)

462. 1° *Tout point* O *de la perpendiculaire élevée sur le plan d'un cercle* CA *par son centre* C *est également distant de tous les points de la circonférence;* Fig. 361.

2° *Tout point* G *extérieur à la perpendiculaire est inégalement distant des divers points de la circonférence.*

En effet : — 1° Les distances du point O à tous les points de la circonférence CA sont des obliques égales (n° 96);

2° Si du point G on abaisse, sur le plan du cercle, la perpendiculaire GI, les distances du point I aux divers points de la circonférence CA n'étant pas égales entre elles (n° 140), les obliques correspondantes, c'est-à-dire les distances du point G aux points correspondans de cette circonférence ne le seront pas non plus (n° 461).

COROLLAIRE 1er. — *L'axe d'un cercle est le* LIEU *des points qui sont également distans de tous les points de sa circonférence.*

Scolie. — Tout point pris dans le plan du cercle CA, et différent du centre C, ne pouvant être à la fois également distant que de deux points au plus de la circonférence (n° 128, *coroll.* 3), il s'ensuit aussi que tout point G extérieur à la perpendiculaire CO ne peut être également distant que de deux points au plus de la même circonférence. — De là résultent encore les corollaires suivans :

Coroll. 2. — *Tout point également distant de trois points de la circonférence d'un cercle* CA *appartient à son axe ;* et par suite il est également distant de tous les points de cette circonférence ;

Coroll. 3. — Puisque deux points déterminent une droite, *Si deux points sont respectivement à égale distance de trois points d'une circonférence de cercle, la droite menée par les deux premiers points sera l'axe du cercle.*

Coroll. 4. — Si du point G on mène des droites à tous les points de la circonférence :

1° La plus grande et la plus petite de toutes ces droites seront les droites GA et GB, contenues dans le plan déterminé par l'axe CO et par le point G ;

2° De deux droites GP, GQ, celle-là sera la plus longue qui sera la plus rapprochée de la distance *maximum* GA, et celle-là sera la plus courte qui sera la plus rapprochée de la distance *minimum* GB.

Toutes ces propositions résultent de la comparaison des triangles rectangles GIA, GIB, GIP, GIQ, dans lesquels le côté GI étant commun, les côtés IA, IB, IP, IQ, sont les distances des obliques à la perpendiculaire (n° 461), et les hypoténuses sont les obliques elles-mêmes.

N. B. — Nous supprimons les *réciproques* qui n'offrent aucune difficulté d'après tout ce qui précède.

Théorème IV. (Fig. 362.)

Fig. 362. 463. *L'angle que fait une oblique* GC *à un plan* MN *avec sa projection* IC *sur ce plan est, le* minimum *des angles que fait cette droite avec toutes celles que l'on peut mener par son pied dans le plan.*

En effet, décrivons dans le plan MN, et du centre C, une circonférence quelconque ; menons divers rayons CP, CQ, ...

à cette circonférence; et enfin par le point I menons le diamètre BCA.

Cela posé, en comparant les triangles GCA, GCP, GCQ..., GCB, nous voyons d'abord qu'ils ont tous deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : GC qui est commun, et un rayon du cercle. Ensuite, ces côtés GA, GP, GQ,... vont en diminuant jusqu'au côté GB qui est leur *minimum* (n° 462, *coroll.* 4) : donc, etc. (*Voy.* le n° 132, *récipr.*).

Scolie. — Le raisonnement précédent prouve de plus, que les angles GCA, GCB, GCQ,... vont en diminuant depuis GCA qui est leur *maximum* jusqu'à GCB qui est leur *minimum* et le supplément de GCA.

Il en résulte, par suite, qu'*Une droite est nécessairement perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est également inclinée sur trois autres droites menées par son pied dans le plan.*

Théorème V. (Fig. 363.)

464. *Tout point* E *du plan perpendiculaire* MN *mené sur* Fig. 363.
une droite AB *par son milieu* C *est également distant des deux extrémités de la droite ;*

Tout point F *extérieur au plan est inégalement distant des mêmes extrémités.*

En effet : — 1° En menant AE, BE, CE, on aura, comme dans le *numéro* 97,

$$AE = BE ;$$

2° En menant AF, BF, et nommant E le point d'intersection de BF avec le plan MN, on aura encore (même *numéro*),

$$AF < AE + EF, \quad \text{ou} \quad AF < BF.$$

Scolie 1er. — Ce théorème a aussi plusieurs *réciproques* pour lesquelles nous renvoyons au *numéro* 97.

Corollaire 1er. — *Le plan perpendiculaire mené par le milieu d'une droite est le* lieu *des points qui sont également distans des extrémités de cette droite.* — On le nomme *plan de symétrie* (*Voy.* le n° 99).

SCOL. 2. — *Si trois points* [non situés en ligne droite] *sont respectivement à égale distance de deux autres points, le plan mené par les trois premiers est perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux derniers.*

Scol. 3. — Il est clair, dans le théorème précédent, qu'un point F est toujours, par rapport au plan, du même côté que l'extrémité A dont il est le plus rapproché (*Voy. le* n° 97).

COROLL. 2. — *Les plans perpendiculaires menés respectivement aux trois côtés d'un triangle par leurs milieux, se coupent suivant une même droite.*

§ II. *Des Plans Perpendiculaires entre eux, et des Angles Dièdres en général.*

THÉORÈME VI. (Fig. 364.)

Fig. 364. 465. *Lorsqu'une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* MN, *tout autre plan* CF *mené suivant la droite est perpendiculaire au premier.*

Pour le prouver, par le pied B de la perpendiculaire AB élevons, dans le plan MN, la droite BG perpendiculaire à EF : l'angle ABG sera celui qui correspond à l'angle dièdre des deux plans MN, CF (n° 441); or, l'angle ABG est droit : donc, etc.

SCOLIE. — On peut encore énoncer ce théorème de la manière suivante :

Un plan perpendiculaire à une droite tracée dans un plan, est perpendiculaire à ce dernier.

COROLLAIRE. — *Lorsque trois droites, passant par un même point, sont, deux à deux, perpendiculaires entre elles, chacune d'elles est perpendiculaire au plan des deux autres ; et les trois plans sont perpendiculaires entre eux ; — et réciproquement.*

THÉORÈME VII. (Fig. 364.)

466. *Lorsque deux plans*, MN, CF, *sont perpendiculaires entre eux, toute droite* AB *menée dans l'un des deux* CF *per-*

pendiculairement à l'intersection commune EF *est perpendiculaire à l'autre.* Fig. 364.

En effet, menons [de même] la droite BG dans le plan MN, perpendiculairement à EF : l'angle ABG sera celui qui correspond à l'angle dièdre des deux plans (n° 441) ; or, cet angle dièdre est droit : donc la droite AB est perpendiculaire à BG ; et comme elle l'est aussi à EF, elle est perpendiculaire au plan MN (n° 437).

Corollaire. — *Une droite et un plan étant donnés, on ne peut mener suivant la droite, qu'un seul plan perpendiculaire au premier, à moins que la droite ne soit perpendiculaire au plan proposé.*

Car si on en pouvait mener deux, on pourrait aussi, par un même point [pris sur la droite] élever ou abaisser deux perpendiculaires au même plan.

Théorème VIII. (Fig. 364.)

467. *Lorsque deux plans,* MN, CF, *sont perpendiculaires entre eux, toute droite menée perpendiculairement à l'un d'eux* MN, *par un point pris sur l'autre, est tout entière dans ce dernier.*

Il peut se présenter *deux cas* : le point peut être pris en A, hors de l'intersection commune, ou en B, sur cette intersection ; mais la démonstration est la même pour ces deux cas.

Si la perpendiculaire au plan MN, menée par le point A ou B, n'est pas tout entière dans le plan CF, menons par ce même point A ou B, et dans le plan CF, la droite AB perpendiculaire à l'intersection EF : la droite AB sera une seconde perpendiculaire au plan MN (n° 466), menée par le même point ; *ce qui est absurde* (n° 438).

Corollaire — *Les perpendiculaires abaissées des différens points d'une droite sur un plan, sont toutes dans un même plan perpendiculaire au premier.*

Car, d'après le corollaire du *numéro* précédent (nº 466), on ne peut mener, par la droite donnée, qu'un seul plan perpendiculaire au plan donné; et d'après le dernier théorème, ce plan perpendiculaire doit contenir toutes les droites perpendiculaires;

De plus, *Les pieds de ces perpendiculaires sont tous sur une même droite*, intersection des deux plans.

D'ailleurs, la droite proposée peut être située dans le plan proposé, ou lui être parallèle; ou bien encore elle peut percer obliquement le plan. Dans ces divers cas, l'intersection du plan perpendiculaire avec le plan proposé est la *projection* de la droite sur ce dernier (nº 460, *scol.*).

Scolie sur les trois théorèmes précédens. — Ces trois théorèmes sont *réciproques* l'un de l'autre.

Théorème IX.

468. *Deux plans*, A, B, *perpendiculaires à un troisième* C, *et non parallèles, se coupent suivant une droite perpendiculaire à ce troisième plan; — et réciproquement.*

En effet, si par un point de l'intersection commune des deux plans A, B, on mène une perpendiculaire au plan C, elle se trouvera tout entière dans chacun des deux premiers (nº 467), et se confondra par conséquent avec leur intersection.

Réciproquement : — *Tout plan* C *perpendiculaire à deux autres plans*, A, B, *qui se coupent*, *est perpendiculaire à leur intersection.*

Théorème X. (Fig. 365.)

Fig. 365. 469. *Si d'un point* O *pris dans l'intérieur d'un angle dièdre* MPNQ *on abaisse des perpendiculaires* OA, OB, *sur ses faces, l'angle* AOB *de ces perpendiculaires sera le supplément de l'angle dièdre.*

En effet le plan AOB est perpendiculaire à chacun des plans

MN, PQ (n° 465), et par suite à leur intersection PN (n° 468) qu'il coupe en un point C; donc ACB est l'angle correspondant à l'angle dièdre (n° 441). Or celui-ci est le supplément de AOB (n° 148, *coroll.*) : donc, etc.

Scolie. — Au lieu d'abaisser les perpendiculaires d'un point pris dans l'intérieur de l'angle dièdre, on pourrait les élever par un point de l'arète. Alors, en les supposant indéfinies dans les deux sens, on obtiendrait quatre angles, dont deux égaux à celui qui correspond à l'angle dièdre, et chacun des deux autres supplémentaires des deux premiers.

Théorème XI. (Fig. 366.)

470. 1° *Tout point* E *pris sur le plan bissecteur* OE *d'un angle dièdre* BOAC *est également distant des deux faces de cet angle dièdre;* Fig. 366.

2° *Tout point situé dans l'intérieur de l'angle dièdre et hors du plan bissecteur, est inégalement distant des mêmes faces.*

1° Soient EG, EI, les perpendiculaires abaissées respectivement du point E sur les faces AB, AC, de l'angle dièdre proposé : le plan GEI sera perpendiculaire à chacune de ces deux faces (n° 465), et par suite à l'arète OA (n° 468). De plus, les angles GAE, EAI, GAI, correspondront respectivement aux angles dièdres partiels BOAE, DOAI, et à l'angle dièdre total BOAI (n° 441); et l'intersection AE du plan perpendiculaire GEI avec le plan bissecteur OE sera la bissectrice de l'angle GAI (n° 442). Les droites EG, EI, seront donc égales entre elles (n° 98).

2° Pour la démonstration de la seconde partie du théorème, nous nous contenterons de renvoyer au *numéro* 98.

Scolie — Le plan bissecteur d'un *angle dièdre* est le lieu des points qui sont également distans des deux faces de cet angle dièdre. — C'est un *plan de symétrie*. (*Voy* le n° 464, *coroll.* 1er.)

CHAPITRE II.

DU PARALLÉLISME DANS L'ESPACE.

§ Ier. *Conditions du Parallélisme des Droites et des Plans.*

Théorème I. (Fig. 367.)

Fig. 367. 471. *Deux droites*, AB, CD, *perpendiculaires à un même plan* MN *sont parallèles.*

En effet, d'abord les deux droites AB, CD, ne sauraient se rencontrer (n° 438). Il suffit donc de prouver qu'elles sont dans un même plan (n° 83).

Pour cela, tirons dans le plan MN, par les pieds de ces deux perpendiculaires, la droite BD ; puis, par la droite BD menons le plan perpendiculaire au plan MN : ce plan contiendra les deux droites AB, CD (n° 467) : *C. Q. restait à D.*

Scolie. — La proposition précédente peut être considérée comme analogue à celle-ci :

Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles (n° 447).

Théorème II. (Fig. 368.)

Fig. 368. 472. *Les intersections respectives*, AB, CD, *de deux plans parallèles*, MN, PQ, *avec un troisième* AD *sont parallèles.*

En effet, ces intersections sont dans un même plan ; et si elles se rencontraient, les plans parallèles se rencontreraient.

Scolie. — La *réciproque* est *fausse* : car il est évident que par chacune des deux parallèles et par un *même* point quelconque pris hors de leur plan, on peut toujours mener deux autres plans ; or ces plans doivent nécessairement se couper.

Théorème III. (Fig. 369.)

473. *Par un point donné* O *on ne peut mener qu'un seul plan parallèle à un plan donné* MN. Fig. 369.

En effet, supposons qu'on en puisse mener deux, PQ, RS ; et soit XOY leur intersection. Par le point O et par un point L du plan MN, imaginons un plan quelconque [pourvu qu'il n'ait de commun avec la droite XY que le seul point O] : ce plan coupera les plans MN, PQ, RS, respectivement suivant les droites ALB, COD, EOF, dont les deux dernières, COD, EOF, seront à la fois parallèles à ALB (n° 472) ; *ce qui est absurde* (n° 432).

Scolie. — On pourrait aussi, en s'appuyant sur ce qu'on a vu dans les *numéros* 445 et 447, démontrer la même proposition par un raisonnement analogue à celui du *numéro* 108.

Corollaire. — *Deux plans respectivement parallèles à un troisième sont parallèles entre eux.*

Théorème IV. (Fig. 344.)

474. *Lorsqu'une droite* AB *est parallèle à une autre droite* CD *tracée dans un plan* MN, *elle est parallèle à ce plan.* Fig. 344.

Cette proposition, qui résulte de ce que l'on a vu plus haut (n° 446), peut d'ailleurs se démontrer directement.

En effet, la droite CD étant l'intersection même du plan des parallèles AB, CD, avec le plan MN, la droite AB ne pourrait rencontrer ce dernier qu'en un point de la droite CD : et alors AB, CD, ne seraient pas parallèles.

Théorème V. (Fig. 344.)

475. *Lorsqu'une droite* AB *est parallèle à un plan* MN, *tout autre plan* AD *mené suivant la droite, et non parallèle*

au premier, coupe celui-ci suivant une seconde droite CD *parallèle à la première.*

En effet, les droites AB et CD sont dans un même plan ; et de plus, elles ne peuvent se rencontrer, puisque la droite AB est parallèle au plan MN qui contient la droite CD tout entière : donc, etc. (nº 83).

SCOLIE. — On peut encore énoncer ce théorème de la manière suivante :

Lorsque deux plans, AD, MN, *se coupent, toute droite* AB *menée dans l'un des deux parallèlement à l'autre, est parallèle à l'intersection commune* CD.

Ce théorème est *réciproque* du précédent (nº 474).

Fig 370. COROLLAIRE. — *Les intersections des plans quelconques menés par deux droites parallèles*, AB, CD (fig. 370), *sont toutes parallèles à ces droites.*

Soit EF l'intersection de deux pareils plans : AB étant parallèle à la droite CD, sera parallèle au plan CF (nº 474), et par suite à la droite EF (nº 475).

On prouverait de même que CD est parallèle à EF.

THÉORÈME VI. (Fig. 371.)

Fig.371. 476. *Lorsque deux plans*, MN, PQ, *sont parallèles, toute droite* AB *parallèle à l'un d'eux*, PQ, *et passant par un point* A *pris sur l'autre* MN, *est contenue tout entière dans ce dernier.*

En effet, supposons que la droite AB ne soit pas contenue dans le plan MN. Par cette droite et par un point quelconque C pris sur le plan PQ, menons un troisième plan : il coupera le plan MN suivant une droite AB′ et le plan PQ suivant une droite CD parallèle à la première (nº 472) ; mais déjà CD est parallèle à AB (nº 475) ; donc les droites AB et AB′ seraient à la fois parallèles à CD ; *ce qui est absurde* (nº 432).

Scolie 1er. — Le plan MN est le *lieu* des droites parallèles au plan PQ menées par le point A.

Scol. 2. — Ce théorème forme la *réciproque* de la proposition du n° 447. Il y a une autre *réciproque* qui est *fausse* et que voici : si la droite AB est parallèle au plan PQ, et que AB soit dans le plan MN, MN est parallèle à PQ : on voit que cette réciproque est contradictoire avec le principe établi *numéro* 475.

COROLLAIRE. — Du théorème précédent il est facile de tirer cette conséquence, que

Deux plans parallèles ont leurs droites parallèles communes ;

Et que par conséquent

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite qui perce l'un des deux perce aussi l'autre.

THÉORÈME VII. (Fig. 372.)

477. *Lorsque deux droites*, AB, CD, *sont parallèles, tout plan* MN *parallèle à l'une d'elles* AB *et passant par un point* C *pris sur l'autre* CD, *contient celle-ci tout entière.* Fig. 372.

En effet, si la droite CD n'était pas tout entière dans le plan MN, celui-ci couperait le plan des deux parallèles suivant une droite CD′ parallèle à AB (n° 475) ; et par un même point C on pourrait mener deux parallèles à la droite AB ; *ce qui est absurde* (n° 432).

COROLLAIRE. — Il est facile de conclure de là, que

Deux droites parallèles ont leurs plans parallèles communs ;

Et que par conséquent

Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une des deux coupe aussi l'autre.

THÉORÈME VIII. (Fig. 373.)

478. *Toute droite* AB *parallèle à la fois à deux plans qui se coupent*, MN, PQ, *est parallèle à leur intersection.* Fig. 373.

En effet, si par un point M de l'intersection commune on mène une parallèle à la droite AB, elle sera contenue à la fois dans les deux plans (n° 477) ; donc elle se confondra avec cette intersection : donc, etc.

Théorème IX. (Fig. 374.)

Fig. 374. 479. *Lorsque deux droites concourantes*, AB, CD, *sont respectivement parallèles à un plan* MN, *celui-ci est parallèle au plan des deux droites.*

En effet, le plan MN ne saurait rencontrer le plan des deux droites AB, CD, que suivant une troisième droite parallèle à la fois à chacune des deux premières (n° 475); *ce qui est absurde* (n° 432).

Corollaire. — Lorsque deux droites qui se coupent sont respectivement parallèles à deux autres droites qui se coupent, les plans des deux couples de droites concourantes sont parallèles entre eux (n° 474).

§ II. *Propriétés des Droites et des Plans Parallèles.*

Théorème X. (Fig. 375.)

Fig. 375. 480. *Deux plans parallèles*, MN, PQ, *ont leurs droites perpendiculaires communes.*

Soit la droite AC perpendiculaire en A au plan MN : elle sera aussi perpendiculaire au plan PQ. En effet, d'abord elle rencontrera PQ (n° 476, *coroll.*) : soit C le point de rencontre. Par la droite AC menons un plan *quelconque;* soient AB et CD ses intersections respectives avec les plans parallèles : les droites AB et CD seront aussi parallèles (n° 472). Or AB est perpendiculaire à AC; donc CD est aussi perpendiculaire à AC (n° 109). Mais le plan ABCD étant quelconque, la droite CD est aussi quelconque; donc AC est perpendiculaire à une droite quelconque menée par son pied dans le plan PQ : donc AC est perpendiculaire au plan PQ (n° 437).

Corollaire. — *Deux plans parallèles ont leurs plans perpendiculaires communs* (*Voy.* le n° 465).

Théorème XI. (Fig. 376.)

481. *Deux droites parallèles*, AB, CD, *ont leurs plans perpendiculaires communs.* Fig. 376.

Soit le plan MN perpendiculaire à la droite AB au point B; je dis que CD est perpendiculaire au plan MN.

D'abord le plan MN rencontrera la droite CD (n° 477, *coroll.*) : soit D le point où la droite CD perce le plan MN. Cela posé, si CD n'est pas perpendiculaire à MN, élevons par le point D, sur ce plan, la perpendiculaire DC' : les droites BA et DC' seront parallèles (n° 471); d'où il résulterait que par le point D on pourrait mener deux parallèles à la droite AB; *ce qui est absurde* (n° 432).

Corollaire 1er. — *Deux droites*, AB, CD (fig. 377), *respectivement parallèles à une troisième* EF [dans l'espace], *sont parallèles entre elles.* Fig. 377.

En effet, si l'on menait un plan MN perpendiculaire à EF, il serait perpendiculaire à AB et à CD : donc AB et CD sont parallèles (n° 471).

N. B. — Le raisonnement du *numéro* 108 (*coroll.* 2) ne suffirait pas pour démontrer le corollaire précédent, par la raison que les droites AB, CD, pourraient ne pas se rencontrer, sans cependant être parallèles (n° 433).

Coroll. 2. — *Les intersections de deux plans parallèles entre eux, par deux autres plans parallèles entre eux, sont toutes, deux à deux, parallèles entre elles* (*Voy.* le n° 472).

Coroll. 3. — *Deux plans respectivement perpendiculaires à un troisième, passant par deux droites parallèles et non perpendiculaires à ce dernier, sont parallèles entre eux.*

En effet, ces deux plans ne peuvent se rencontrer que suivant une droite qui devrait être à la fois perpendiculaire au plan donné (n° 468) et parallèle aux droites données (n° 475, *coroll.*) : d'où il résulterait que celles-ci seraient perpendiculaires au plan donné; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Scolie. — *Lorsque deux plans sont respectivement perpendiculaires à un troisième, ou ils sont parallèles, ou ils se coupent suivant une perpendiculaire à ce troisième plan* (n° 468).

Théorème XII. (Fig. 344.)

Fig. 344. 482. *Deux droites concourantes*, AB, AC, *sont perpendiculaires entre elles, lorsque l'une*, AC, *est perpendiculaire, et l'autre*, AB, *parallèle à un même plan* MN.

En effet, le plan des deux droites coupe le plan MN suivant une droite CD parallèle à AB (n° 471), et perpendiculaire à AC (n° 437) : donc (n° 109) AB et AC sont perpendiculaires entre elles.

Réciproquement : — *Lorsque deux droites concourantes* AB, AC, *sont perpendiculaires entre elles, tout plan* MN *perpendiculaire à l'une*, AC, *est parallèle à l'autre* AB.

En effet, le plan des deux droites coupera le plan MN suivant une droite CD perpendiculaire à AC (n° 437) ; donc (n°s 83 et 433) AB et CD seront parallèles : donc, etc.

Scolie 1er. — Il y a une seconde réciproque que voici : si les deux droites AB et AC sont perpendiculaires entre elles, et que le plan MN soit parallèle à AB, il sera perpendiculaire à AC ; mais cette *réciproque* est évidemment *fausse*, car le plan des deux droites peut prendre toutes les positions possibles autour de AB sans que les deux hypothèses cessent d'avoir lieu ; et si, dans ce mouvement, AC restait continuellement perpendiculaire au plan MN, il en résulterait que du point A on pourrait abaisser une infinité de perpendiculaires sur ce plan ; *ce qui est absurde* (n° 438).

Scol. 2. — Toutes les perpendiculaires au plan MN, menées par les divers points de AB, sont perpendiculaires à la droite AB. — Mais la *réciproque* est *fausse*.

Théorème XIII. (Fig. 378.)

Fig. 378. 483. *Deux plans*, MN, PQ, *sont perpendiculaires entre*

eux, lorsque l'un, MN, *est perpendiculaire, et l'autre,* PQ, *parallèle à une même droite* AB.

D'abord, le plan MN rencontrera le plan PQ, sans quoi il lui serait parallèle et contiendrait la droite AB (n° 476) : soit donc NO l'intersection des deux plans. Du point C où la droite AB perce le plan MN, abaissons la perpendiculaire CD sur NO, et menons le plan ABD qui rencontrera le plan PQ suivant une droite EF : cette droite EF étant parallèle à AB (n° 475), sera aussi perpendiculaire à CD (n° 481). Ainsi, CD étant perpendiculaire au plan PQ, les deux plans MN, PQ, seront perpendiculaires entre eux (n° 465).

Réciproquement : — *Lorsque deux plans*, MN, PQ, *sont perpendiculaires entre eux, toute droite* AB *perpendiculaire à l'un* MN *est parallèle à l'autre* [à moins d'être tout entière dans ce dernier].

Cette réciproque résulte du *numéro* 467.

Scolie. — Il y a une autre réciproque qui est la suivante : si les plans MN, PQ, sont perpendiculaires entre eux, et que la droite AB soit parallèle au plan PQ, elle sera perpendiculaire au plan MN. Cette *réciproque* est évidemment *fausse :* car la droite AB peut prendre une infinité de positions différentes autour du point C, dans un plan parallèle à PQ, sans que les deux hypothèses cessent d'avoir lieu ; et si dans ce mouvement, la droite AB restait continuellement perpendiculaire au plan MN, il en résulterait que par un même point C, on pourrait élever une infinité de perpendiculaires sur ce plan ; *ce qui est absurde* (n° 438).

Théorème XIV. (Fig. 379.)

484. *Les portions de deux droites parallèles* AB, CD, *comprises entre un plan* PQ *et une droite* MN *parallèles, sont égales.* Fig. 379.

En effet, le plan des deux parallèles coupe le plan PQ suivant une droite BD parallèle à AC (n° 475) ; donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme (nº 149) : donc, etc. (nº 151).

Corollaire. — La droite la plus courte que l'on puisse mener entre une droite et un plan parallèles, est leur perpendiculaire commune (nºˢ 460 et 482) : cette perpendiculaire mesure donc la distance de la droite au plan ; or, le théorème ayant encore lieu dans le cas où les parallèles sont perpendiculaires au plan et à la droite, il s'ensuit que les perpendiculaires communes à une droite et à un plan parallèles sont toutes égales entre elles; d'où il résulte que

Un plan et une droite parallèles sont partout également distans.

Réciproquement : — *Si un plan et une droite sont partout également distans, ils sont parallèles ;*

Et comme deux points déterminent une droite,

Une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle a deux de ses points également distans du plan.

Mais cette conséquence n'aurait plus lieu si l'on supposait que c'est le plan qui a *deux* ou même *trois* de ses points également distans de la droite : parce que généralement les distances dont il est question ne seraient pas parallèles entre elles.

Théorème XV. (Fig. 380.)

Fig. 380. 485. *Les portions de deux droites parallèles*, AB, CD, *comprises entre deux plans parallèles*, MN, PQ, *sont égales.*

En effet, le plan des deux parallèles coupe les deux plans MN, PQ, suivant deux autres droites, AC, BD, aussi parallèles entre elles (nº 472) ; donc ACBD est un parallélogramme (nº 149) : donc, etc. (nº 151).

Corollaire. — La droite la plus courte que l'on puisse mener entre deux plans parallèles est leur perpendiculaire commune (nºˢ 460 et 480) : cette perpendiculaire mesure donc la distance des deux plans ; or, le théorème ayant encore lieu dans le cas où les droites sont perpendiculaires aux plans, il s'ensuit que les perpendiculaires communes à deux plans parallèles sont toutes égales entre elles; d'où il résulte que

Deux plans parallèles sont partout également distans.

Réciproquement : — *Si deux plans sont partout également distans, ils sont parallèles;*

Et comme trois points déterminent un plan,

Deux plans sont parallèles lorsque trois points de l'un sont également distans de l'autre.

Scolie. — Tous les points qui sont également distans et du même côté d'un plan, se trouvent sur un même plan parallèle au premier (*Voy.* le n° 110, *scol.*).

§ III. — *Conséquences des propriétés précédentes. — Plus courte Distance de deux Droites.*

Théorème XVI. (Fig. 381.)

486. *Les portions de deux droites quelconques*, AB, CD, *interceptées entre trois plans parallèles*, MN, PQ, RS, *sont en proportion.* Fig.381.

Lorsque les droites AB, CD, sont dans un même plan, la proposition est évidente, soit d'après les *numéros* 472 et 213 si elles se coupent, soit d'après les *numéros* 472 et 485 si elles sont parallèles.

Supposons donc que les droites AB, CD, ne soient pas dans un même plan; et, dans cette hypothèse, soient A, B, E, les points où la première droite perce les plans extrêmes MN, PQ, et le plan intermédiaire RS, et C, D, F, les points où la seconde droite perce les mêmes plans. Menons AD, et soit O le point d'intersection de cette dernière droite avec le plan RS; nous aurons (n^os^ 472 et 214) :

$$AE : EB :: AO : OD :: CF : FD.$$

ou simplement $\quad AE : EB :: CF : FD. \qquad$ *C. Q. F. D.*

Scolie. — La *réciproque* est *fausse* : c'est-à-dire que trois plans qui couperaient les deux droites en parties proportionnelles ne seraient pas pour cela parallèles : parce que la position des *six* points A, E, B, C, F, D, ne suffit pas pour déterminer celle des *trois* plans MN, RS, PQ.

Mais on peut affirmer que si la proportion a lieu, il existe toujours *un* système de trois plans parallèles qui passent par ces six points. En effet, le point O de la droite AD est déterminé par la première des proportions ci-dessus; et à son tour, conjointement avec les points E, F, il détermine le plan RS, et par suite les plans parallèles MN, PQ.

Théorème XVII. (Fig. 382.)

Fig. 382. 487. *Lorsque deux angles,* BAC, B′A′C′ [non situés dans le même plan], *ont les côtés parallèles chacun à chacun, ils sont égaux ou supplémentaires.*

Il peut se présenter plusieurs cas, les mêmes que si les angles étaient dans le même plan (n° 116).

En supposant d'abord les côtés AB et A′B′, AC et A′C′, dirigés chacun à chacun *dans le même sens,* prenons AB = A′B′, AC = AC′, et menons AA′, BB′, CC′ : les deux quadrilatères AB′, AC′, seront des parallélogrammes (n° 153); donc les droites BB′ et C′C′ sont égales et parallèles entre elles, comme étant respectivement égales et parallèles à AA′ (n° 481, *coroll.* 1er). Maintenant, menons BC et B′C′ : le quadrilatère BC′ sera aussi un parallélogramme; donc les droites BC et B′C′ sont égales et parallèles. Donc les deux triangles BAC et B′A′C′ sont égaux (n° 130) : donc les angles BAC et B′A′C′ sont aussi égaux.

Pour les autres cas, la démonstration s'achève comme dans le *numéro* 116.

Scolie 1er. — Il résulte en outre du *numéro* 479 (*coroll.*), que les plans BAC, B′A′C′, sont parallèles.

Scol. 2. — *Si trois droites sont égales et parallèles, les droites qui joignent leurs extrémités* correspondantes *forment des triangles égaux et parallèles* : [c'est-à-dire que leurs côtés sont, chacun à chacun, égaux et parallèles.]

Plus généralement : — ***Si, des sommets d'un polygone on mène*** **[dans l'espace]** ***des droites égales et parallèles*** **[et dirigées dans le même sens],** ***leurs extrémités opposées seront les sommets d'un polygone égal et parallèle au premier.***

La proposition est également vraie, soit lorsque toute la figure est contenue dans un même plan, soit lorsque le polygone est gauche (nº 14), etc., etc.

THÉORÈME XVIII. (Fig. 383.)

488. *Deux droites quelconques*, AB, EF, *sont toujours situées, ou dans un même plan, ou dans des plans parallèles.* Fig. 383.

En effet, si les deux droites AB, EF, ne sont pas dans un même plan, par un point A pris sur la première, menons AC parallèle à EF, et par un point E pris sur la seconde, menons EG parallèle à AB : les deux angles BAC et GEF seront situés dans des plans parallèles (nº 479, *coroll.*).

C. Q. F. D.

Scolie 1er. — Ce système de deux plans parallèles, contenant respectivement chacune des deux droites AB, EF, non situées dans un même plan, est *unique*.

Car tout plan passant par la droite AB par exemple, et faisant partie d'un pareil système de plans parallèles, doit contenir toutes les droites parallèles à EF qui rencontrent AB; et par conséquent ce plan ne saurait différer du plan ABC. — Même raisonnement pour le second plan.

Pour désigner les plans ABC, EFG, nous les nommerons *les plans parallèles des deux droites* AB, EF.

Scol. 2. — Lorsque deux droites ne sont pas dans un même plan, on peut toujours, par chacune d'elles, faire passer un plan parallèle à l'autre (nº 474); et ce plan est *unique*.

THÉORÈME XIX.

489. *Lorsque deux droites ne sont pas situées dans un même*

plan, leurs plans perpendiculaires respectifs se coupent toujours.

D'abord, ces plans ne sauraient se confondre, sans quoi les droites proposées seraient parallèles (n° 471), ce qui est contraire à l'hypothèse. Ensuite, ces plans ne peuvent être parallèles, car alors leurs droites perpendiculaires seraient communes (n° 480) : et les droites proposées seraient encore parallèles.

Scolie. — Chacun des plans perpendiculaires dont il s'agit étant perpendiculaire en même temps aux plans parallèles des deux droites (n^{os} 465, et 480, *coroll.*), il s'ensuit que l'intersection des deux premiers plans est aussi perpendiculaire au système des deux derniers (n° 468).

THÉORÈME XX. (Fig. 384 et 385.)

490. *La plus courte distance de deux droites,* AB, EF, *non situées dans un même plan, est une perpendiculaire commune à la fois aux deux droites et au système de leurs plans parallèles.*

Fig.384. Supposons, en effet, que la plus courte distance des deux droites AB, EF (fig. 384), soit une troisième droite GO, oblique sur EF par exemple. En abaissant du point G sur EF une perpendiculaire GP, on aurait GP $<$ GO, ce qui est contraire à l'hypothèse : donc la plus courte distance ne peut être oblique à aucune des deux droites.

Fig.385. Soit donc MN (fig. 385) cette plus courte distance, perpendiculaire commune aux deux droites AB, EF. Si par les points M et N on mène deux plans respectivement perpendiculaires à AB et à EF, ces plans [nécessairement différens (n° 489)] contiendront tous deux la droite MN (n° 437) qui sera par conséquent leur intersection commune ; et de plus, cette droite sera perpendiculaire aux plans parallèles des deux droites (n° 488, *scol.* 1er).

Scolie 1er. — Pour mieux fixer la position de la perpendiculaire commune, observons que si, suivant AB et suivant EF (fig. 386), on mène respectivement deux plans ANB, EMF, perpendiculaires aux plans parallèles des deux droites, ces deux plans perpendiculaires devront contenir à la fois la droite MN (nº 467), laquelle, par conséquent, sera aussi leur intersection commune.

SCOL. 2. — *La perpendiculaire commune à deux droites*, AB, EF, *non situées dans un même plan, est unique.*

Scol. 3. — *L'angle de deux droites non situées dans un même plan* se mesure par celui de deux autres droites qui leur seraient respectivement parallèles, menées par un même point quelconque de l'espace ; ou bien, ce qui est la même chose, par l'angle que fait l'une des deux droites avec une parallèle à l'autre, menée par un point de la première. Ainsi, par exemple, MK (fig. 386) étant l'intersection du plan EMF Fig.386.
avec le plan RS, l'angle AMK, ou BMK, mesurera l'angle des deux droites AB, EF : on voit en même temps que cet angle est le même que l'angle dièdre des deux plans ANB, EMF (nº 441). — Quand cet angle est droit, les *droites* sont dites *perpendiculaires entre elles.*

On voit donc que, dans l'espace, deux droites peuvent être perpendiculaires entre elles ou faire un angle quelconque, sans cependant se couper (*Voy.* le nº 433).

On voit encore, par la même raison, que deux parallèles font un angle nul [ce qui confirme la remarque du *numéro* 114], et qu'une droite perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toutes les droites contenues dans ce plan ou parallèles à ce plan, etc.

491. Terminons cette théorie par les énoncés de quelques théorèmes dont on trouvera facilement les démonstrations en leur appliquant les principes établis dans les deux chapitres qui précèdent, et par l'indication de quelques *propositions fausses* que les élèves, trompés par une analogie apparente, sont souvent portés à admettre un peu trop légèrement.

THÉORÈMES A DÉMONTRER.

I. *Deux droites parallèles sont également inclinées sur un plan quelconque.*

II. *Deux plans parallèles sont également inclinés sur une droite quelconque.*

III. *Lorsque deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les angles dièdres alternes-internes sont égaux*, etc., etc. (*Voy*. le n° 113).

≤ [IV. *Lorsque deux droites se coupent, leurs plans perpendiculaires respectifs se coupent aussi.*

V. *Lorsqu'une droite et un plan se rencontrent, toute droite perpendiculaire au plan et tout plan perpendiculaire à la droite se rencontrent aussi.*] ≥

PROPOSITIONS FAUSSES.

I. Lorsque deux plans se coupent, leurs droites perpendiculaires respectives se coupent aussi.

II. Lorsque deux plans se coupent, leurs plans perpendiculaires respectifs se coupent aussi.

III. Lorsque deux droites se coupent, leurs droites perpendiculaires respectives se coupent aussi.

IV. Lorsqu'une droite et un plan se rencontrent, toute droite perpendiculaire à la droite et tout plan perpendiculaire au plan se rencontrent aussi.

V. Deux droites également inclinées sur un même plan sont parallèles.

VI. Deux plans également inclinés sur une même droite sont parallèles.

VII. Deux plans également inclinés sur un même plan sont parallèles.

VIII. Deux droites également inclinées sur une même droite sont parallèles.

IX. Deux droites respectivement parallèles à un même plan sont parallèles entre elles.

X. Deux plans respectivement parallèles à une même droite sont parallèles entre eux.

CHAPITRE III.

PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

492. Les théorèmes démontrés dans les deux chapitres qui précèdent, vont maintenant nous mettre à même d'exposer brièvement les moyens que l'on a imaginés pour représenter *sur un plan unique*, des systèmes quelconques de points, de lignes, de surfaces. Ces moyens, qui constituent la *méthode des projections*, servent de base à cette partie de la Géométrie que l'on nomme *Géométrie descriptive*, et qui a pour objet de résoudre, par rapport aux surfaces et aux lignes considérées dans l'espace, les questions analogues à celles que l'on a déjà résolues (*Probl. de Géom. plane*, chap. I), sur les lignes tracées dans un plan.

Nous donnerons, parmi les problèmes qui suivront le livre quatrième, quelques-uns des exemples les plus simples de ces applications ; ici, nous nous bornerons à établir les principes.

493. Pour cela, soient d'abord deux plans MN, PQ (fig. 387), qui se coupent suivant une droite XY. Ces deux plans pourraient être disposés d'une manière quelconque dans l'espace, et inclinés sous un angle dièdre quelconque ; mais, pour plus de simplicité, on les suppose presque toujours perpendiculaires entre eux, et l'on considère l'un, MN, comme *horizontal*, et l'autre, PQ, comme *vertical*. Afin de mieux fixer les idées, nous raisonnerons dans cette double hypothèse ; et suivant l'usage, nous appellerons *ligne de terre* l'intersection XY des deux plans. Fig. 387.

494. Cela posé, soit un point quelconque A situé dans l'angle dièdre MXYP. De ce point abaissons sur le plan horizontal et sur le plan vertical les perpendiculaires, respectives A*a*, A*a'*. Les pieds, *a*, *a'*, de ces perpendiculaires seront les *projections* (n° 460, *scol.*) du point A sur les plans MN, PQ, que l'on nomme pour cela les *plans de projection ;* et les droites A*a*, A*a'*, seront les *droites projetantes* du point A.

Menons encore un plan suivant les droites A*a* et A*a'* : ce plan sera perpendiculaire aux plans de projection (n° 465), et par suite à la ligne de terre (n° 468). Soit a le point d'intersection de cette ligne par le plan *a*A*a'* : le quadrilatère A*a*a*a'* sera un rectangle (n° 155).

Or, les longueurs a*a*, a*a'*, et la position du point a déterminent évidemment le point A. En effet, des deux premières données il résulte d'abord que le point A se trouve sur deux plans respectivement parallèles aux plans PQ et MN, situés à des distances de ceux-ci (n° 485, *scol.*) égales à A*a'* et A*a* : ce qui revient à dire que le point A se trouve sur une parallèle à la droite XY (n° 481, *coroll.* 2), déterminée par ces deux distances. Ensuite, le point a détermine un plan perpendiculaire à cette parallèle, sur lequel doit aussi se trouver le point A, ce qui achève de déterminer complètement ce dernier.

495. Maintenant, supposons que l'on fasse tourner l'un des deux plans de projection autour de la droite XY, de manière que la *région* (n° 11) *supérieure* XP du plan vertical vienne *se rabattre* sur la région *postérieure* YN du plan horizontal, et la région *inférieure* YQ du premier sur la région *antérieure* XM du second.

La figure primitive (fig. 387) se réduira alors à une figure
Fig.388. plane (fig. 388) dans laquelle les distances a*a*, a*a'*, se trouveront *sur une même perpendiculaire à la ligne de terre ;* mais la position du point A dans l'espace n'en sera pas moins parfaitement déterminée par les deux projections *a*, *a'* ; et nous le nommerons, par cette raison, *le point* $\{a, a'\}$.

496. A la vérité, on pourrait croire que ce moyen de représentation s'applique seulement aux points situés dans l'angle dièdre compris entre la région supérieure du plan vertical et la région antérieure du plan horizontal; mais il est facile de se convaincre qu'il s'applique également à toute autre position.

En effet, si l'on convient une fois pour toutes que les projections horizontales seront désignées par des lettres sans accent et les projections verticales par des lettres accentuées, il s'ensuivra qu'un point de l'espace sera situé *devant* ou *derrière* le plan vertical, suivant que la lettre non accentuée, qui représente sa projection horizontale, se trouvera au-dessous ou au-dessus de la ligne de terre; et de même, il sera situé *au-dessus* ou *au-dessous* du plan horizontal, suivant que la lettre accentuée, qui représente sa projection verticale, se trouvera au-dessus ou au-dessous de la ligne de terre.

D'après ces observations, on reconnaîtra sans peine la position des points représentés par la figure 389. Ainsi Fig. 389.

$\{a, a'\}$ est situé *devant* le pl. vertic. et *au-dessus* du pl. horiz.
$\{b, b'\}$...... *devant*.............. *au-dessous* ....
$\{c, c'\}$...... *derrière*.............. *au-desssus* ....
$\{d, d'\}$...... *derrière*.............. *au-dessous* ....

Quant aux points situés *dans* l'un des plans de projection, ils ont nécessairement une de leurs projections située sur la ligne de terre. Ainsi, dans la figure 390, Fig. 390.

Les points marqués $\{a, a'\}$ sont situés *dans* le plan horiz.,
Les points........ $\{b, b'\}$......... dans le plan vertical,
Et le point...... $\{c, c'\}$......... sur la ligne de terre.

Concluons de là, généralement, qu'un système de deux projections situées *sur une même perpendiculaire* à la ligne de terre, représente toujours un point déterminé de l'espace, dont il est facile d'assigner la position d'une manière précise.

497. Quand on sait représenter un point, on sait évidemment représenter une ligne quelconque, puisque toute ligne peut être, à la rigueur, considérée comme une série de points infiniment rapprochés les uns des autres.

Ainsi, supposons que de tous les points d'une ligne donnée quelconque, on abaisse des perpendiculaires sur les deux plans de projection : il en résultera deux *surfaces cylindriques* (n° 453) dont ces perpendiculaires seront les arêtes; on nomme ces surfaces les *cylindres projetans* de la ligne donnée, et leurs intersections avec les plans de projection sont les projections de cette ligne qu'elles déterminent évidemment.

Si la ligne donnée est plane, et que son plan soit perpendiculaire à l'un des plans de projection, le plan de la courbe sera lui-même un de ses cylindres projetans (n° 467), et la projection correspondante sera une ligne droite.

Fig.391. Enfin, si la ligne donnée est une ligne droite, telle que AB (fig.391), ses cylindres projetans se réduiront à deux plans, Ab, Ab', que l'on nomme les *plans projetans* de la droite; et ses projections ab, $a'b'$, seront toutes deux des lignes droites (n° 467, *coroll.*). Ce cas est le seul que nous ayons maintenant à examiner avec quelque détail.

Fig.392. 498. Soient donc $\{a,a'\}$, $\{b,b'\}$ (fig. 392), deux points d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace: les droites ab, $a'b'$, seront respectivement ses projections horizontale et verticale; et comme elle est complètement déterminée par ces projections, nous la nommerons *la droite* $\{ab, a'b'\}$.

Cela posé, la première chose à faire est de déterminer les points où la droite $\{ab,a'b'\}$ perce les plans de projection, points que nous nommerons ses *traces*.

Pour cela, remarquons que tous les points d'une ligne droite se projettent suivant une autre ligne droite (n° 497), et que par conséquent la trace de la droite $\{ab,a'b'\}$ sur le plan horizontal par exemple, est un point de ab. Maintenant, ce point étant situé dans le plan horizontal, sa projection verticale est sur la ligne de terre XY ; et comme elle est aussi sur la droite $a'b'$, il s'ensuit, d'abord que la projection verticale de la trace cherchée est le point c' d'intersection de $a'b'$ avec XY, et ensuite que sa projection horizontale, avec laquelle se confond la trace elle-même, est le point c d'intersection de ab avec la perpendiculaire élevée sur XY par le point c′.

On obtient de même la trace verticale de la droite $\{ab, a'b'\}$, en prolongeant ab jusqu'à la rencontre de XY en d, puis élevant sur XY la perpendiculaire dd' qui vient couper $a'b'$ au point cherché d'.

499. Quant à la *distance* des deux traces, ou à la partie de la droite $\{ab, a'b'\}$, comprise dans l'angle dièdre des deux plans de projection, il est évident que c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit, soit cc' et c$'d'$, soit cd et dd' : ainsi, en rabattant, par exemple, c$'d'$ sur XY, par un arc de cercle d'M, puis menant cM, cette dernière distance sera la distance cherchée.

Au reste, il serait facile d'avoir, par un moyen analogue, la distance de deux points quelconques $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$, de la même droite $\{ab', a'b'\}$: on reconnaîtra sans peine que cette distance est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit, soit ab et la différence des hauteurs aa' et bb', soit $a'b'$ et la différence des perpendiculaires aa et bb.

500. Une droite peut être parallèle à l'un des plans de projection, par exemple au plan vertical : dans ce cas sa projection horizontale est parallèle à la ligne de terre (n° 472) ; — et *réciproquement* (n° 447).

Si une droite est parallèle à la fois aux deux plans de projection, elle l'est aussi à la ligne de terre (n° 478) : ses deux projections sont alors parallèles à la ligne de terre (n° 475, *coroll.*) ; — et *réciproquement*.

Lorsqu'une droite est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, ses projections sont toutes deux perpendiculaires à cette ligne (n° 465, *scol.*; et 466); et *réciproquement* (n° 437). Mais les projections de la droite ne suffisent plus pour la déterminer quand elle est indéfinie. — Dans le cas particulier où la droite est perpendiculaire à l'un des deux plans de projection, par exemple au plan horizontal, sa projection horizontale se réduit à sa trace sur le plan horizontal (n° 460, *scol.*).

Fig. 393. 501. Examinons encore un système de deux droites.

Lorsque deux droites $\{ab, a'b'\}$, $\{cd, c'd'\}$ (fig. 393), se coupent, leurs projections horizontales et verticales se coupent aussi deux à deux en deux points, o, o', qui sont situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre (n° 495), et qui sont évidemment les projections du point d'intersection. — *Réciproquement*, lorsque les projections satisfont à cette condition, les droites se coupent évidemment.

Les deux droites peuvent être parallèles entre elles : alors leurs projections horizontales et verticales sont parallèles chacune à chacune (n^{os} 481, *coroll.* 3; et 472); *et réciproquement* (n° 481, *coroll.* 2). Mais si deux projections seulement, par exemple les projections horizontales, étaient parallèles, sans que les projections verticales le fussent, alors les deux droites ne seraient pas dans un même plan; et leurs plans parallèles (n° 488) seraient verticaux. Il est facile de voir en outre que le point d'intersection des projections verticales est la projection de leur perpendiculaire commune, laquelle est alors perpendiculaire au plan vertical.

Dans le cas général, celui où les projections se coupent deux à deux, mais non sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, les deux droites ne se rencontrent pas, ne sont pas parallèles, et leur perpendiculaire commune n'est perpendiculaire à aucun des plans de projection.

Il pourrait arriver encore que les deux droites fussent toutes deux situées dans des plans perpendiculaires à la ligne de terre, ou dans un seul. Nous ne nous arrêterons point à examiner ces différentes circonstances dans lesquelles la position des droites n'est pas complètement déterminée par le système des plans de projection que l'on a choisis. Il vaut mieux, alors, changer ces plans.

502. Passons maintenant à la représentation des surfaces.

Il n'est aucune surface que l'on ne puisse considérer comme engendrée par le mouvement d'une ligne variable (n° 452), soit de position seulement, soit de forme en même temps que de position.

De là résulte un moyen général propre à représenter une surface quelconque, puisque la question se réduit toujours à représenter une suite de lignes suffisamment rapprochées les unes des autres.

Mais ordinairement le procédé se simplifie, parce qu'il existe presque toujours dans une surface, quelques lignes remarquables et caractéristiques qui suffisent pour la déterminer complètement.

Ainsi, par exemple, une surface cylindrique (n° 453) est déterminée quand on en connaît une directrice ainsi que la direction des génératrices : on n'a donc, à représenter, à la rigueur, pour une surface cylindrique, qu'une droite et une courbe.

De même, une surface conique (n° 453) étant déterminée par son sommet et sa directrice, on n'a à représenter, pour une pareille surface, qu'un point et une ligne.

Pour les surfaces de révolution (n° 454), on n'a de même à représenter que l'axe et une ligne méridienne.

Et ainsi de suite.

503. Occupons-nous particulièrement du plan.

Un plan étant déterminé par trois points ou par deux droites (n°s 9 et 10), le moyen le plus simple de représenter un plan est de tracer les projections de deux des droites qu'il contient ; et parmi toutes ces droites, on choisit de préférence les intersections du plan proposé avec les plans de projection, intersections que l'on nomme les *traces* du plan proposé.

Fig.394. Ainsi, dans la *figure* 394, les droites ab et bc', situées respectivement dans le plan horizontal et dans le plan vertical, représentent les traces d'un plan que nous nommerons le plan abc'.

Observons que la trace horizontale ab est à elle-même sa projection horizontale, et qu'elle a pour projection verticale la ligne de terre; *et vice versâ* pour la trace verticale.

Il pourrait se faire qu'une des traces du plan proposé, par exemple la trace verticale, fût perpendiculaire à la ligne de terre : alors elle serait perpendiculaire au plan horizontal (n° 466), ainsi que le plan proposé (n° 465). Si les deux traces étaient à la fois perpendiculaires à la ligne de terre, alors elles se confondraient; et le plan proposé serait perpendiculaire à la fois à la ligne de terre (n° 437) et aux deux plans de projection (n° 465, *scol.* — *Voy.* aussi le n° 500).

Enfin, il pourrait se faire encore que les deux traces du plan proposé fussent à la fois parallèles à la ligne de terre [ce qui est impossible pour une seule] : alors ce plan serait lui-même parallèle à cette ligne (n° 474).

504. Toute droite $\{de, d'e'\}$ tracée dans un plan abc' (fig. 394), à moins d'être parallèle à l'une des traces de ce plan, les rencontrera toutes les deux, l'une en un point $\{d, d'\}$, l'autre en un point $\{e, e'\}$.

Réciproquement : toute droite qui aura deux points situés, l'un $\{d, d'\}$ sur une trace ab, l'autre $\{e, e'\}$ sur l'autre trace bc', appartiendra au plan abc'; et tout plan qui passera par les traces $\{d, d'\}$, $\{e, e'\}$, d'une droite, contiendra la droite tout entière.

On reconnaîtra de même qu'un point $\{f, f'\}$ est situé dans le plan, lorsque, prenant un point quelconque $\{d, d'\}$ sur l'une des traces ab, on obtient une droite $\{df, d'f'\}$ qui va rencontrer l'autre trace en un point $\{e, e'\}$.

Fig.395. Dans le cas où une droite $\{de, d'e'\}$ (fig. 395) menée dans un plan abc', est parallèle à l'une des traces de ce plan, par exemple à la trace horizontale, sa projection horizontale est

aussi parallèle à cette trace d'après le corollaire du *numéro* 475 ; et sa projection verticale est parallèle à la ligne de terre d'après les *numéros* 481 (*coroll.* 3) et 472.

505. Supposons maintenant deux plans abc', def' (fig. 396), dont les traces correspondantes se coupent respectivement en deux points g, i' : ces deux points seront évidemment communs aux deux plans ; et par conséquent la droite $\{g'i, gi'\}$ sera leur intersection. Fig. 396.

Dans le cas particulier où les traces verticales bc', ef' (fig. 397), par exemple, étant parallèles, les traces horizontales concourraient en un point g, ce serait une preuve que les deux plans se coupent suivant une droite parallèle au plan vertical (nos. 475, *coroll.* ; et 474) et passant par le point g. Il est facile de voir que la projection horizontale de l'intersection serait une droite gi parallèle à la ligne de terre (nos. 481, *coroll.* 3 ; et 472), et la projection verticale une droite $g'i'$ parallèle aux droites bc', ef' (no 475, *coroll.*). Fig. 397.

Enfin, si les traces horizontales et verticales étaient parallèles chacune à chacune, les deux plans seraient alors parallèles entre eux (no 479, *coroll.*) ; — et *réciproquement* (no 472).

506. Ce que l'on vient de dire pour un système de deux plans ne suffit plus dans le cas où les traces sont toutes quatre parallèles à la ligne de terre.

Pour voir ce qui arrive dans cette circonstance, il faudrait mener un second plan vertical perpendiculaire au premier. On déterminerait facilement par ce moyen, soit les conditions de parallélisme des deux plans, soit les projections de leur intersection ; mais nous laisserons cette recherche à faire aux élèves.

On fera bien d'examiner aussi quelques autres cas particuliers, tels que celui où le plan proposé, étant parallèle à l'un des plans de projection, n'a qu'une seule trace parallèle à la ligne de terre. Au reste, d'après ce qui précède, cette circonstance ne présente aucune difficulté réelle.

507. Considérons encore, pour terminer, un système composé d'une droite et d'un plan, ce qui peut présenter les *trois cas* suivans [outre celui où la droite est située dans le plan (n° 504)]:

1° La droite parallèle au plan;

2° La droite perpendiculaire au plan;

3° La droite oblique au plan.

Fig. 398. 1^{er} *Cas*. — Pour qu'un plan abc' (fig. 398) et une droite $\{de, d'e'\}$ soient parallèles, il faut que par la droite on puisse mener un plan fgi' parallèle au plan proposé. Or, les traces des plans parallèles étant parallèles entre elles (n° 505), chacune à chacune, la première condition exige qu'en menant par les points d et e', des droites df, $e'i'$, respectivement parallèles à ab et à bc', ces deux droites se rencontrent en un même point g de la ligne de terre. Telle est la condition du parallélisme de la droite et du plan, puisque, si cette condition est remplie, les droites fg, gi', seront les traces d'un plan parallèle à abc' (n° 505), et contenant la droite $\{de, d'e'\}$ (n° 504).

Fig. 399. 2^e *Cas*. — Théorème. — *Lorsqu'un plan* abc' (fig. 399) *et une droite* $\{de, d'e'\}$ *sont perpendiculaires l'un à l'autre, les traces du plan et les projections correspondantes de la droite sont perpendiculaires chacune à chacune.*

En effet, les plans projetans de la droite sont alors perpendiculaires au plan proposé (n° 465); et comme ils sont d'ailleurs perpendiculaires aux plans de projection (n° 497), ils sont perpendiculaires [respectivement] aux intersections des plans de projection avec le plan proposé (n° 468), c'est-à-dire aux traces de celui-ci. Ces traces étant donc perpendiculaires aux plans projetans de la droite, seront perpendiculaires aux projections elles-mêmes (n° 437).

Réciproquement : — *Lorsque les traces d'un plan* abc' *sont perpendiculaires aux projections*, de, $d'e'$, *d'une droite, le plan et la droite sont perpendiculaires l'un à l'autre.*

En effet, les traces du plan proposé étant alors perpendiculaires aux plans projetans de la droite (n° 466), ceux-ci sont perpendiculaires au plan proposé lui-même (n° 465, *scol.*); et par conséquent le plan proposé est perpendiculaire à l'intersection (n° 468) des plans projetans, c'est-à-dire à la droite elle-même.

3ᵉ *Cas.* — Enfin, si la droite et le plan ne satisfont ni aux conditions du parallélisme, ni à celles de la perpendicularité, la droite et le plan sont obliques l'un à l'autre.

508. Lorsqu'une droite vient percer un plan, soit perpendiculairement, soit obliquement, il est facile de trouver le point de rencontre. Pour cela : 1° on mène un plan quelconque par la droite proposée (n° 504); 2° on cherche la droite d'intersection des deux plans (n° 505) : cette seconde droite rencontre la proposée en un point qui est le point cherché.

509. Telles sont les propriétés principales des projections que l'on nomme *orthogonales* parce qu'elles sont données par des perpendiculaires aux plans de projection; il y a aussi des projections *obliques* : elles sont peu employées.

Mais il n'est pas nécessaire que les droites projetantes restent parallèles entre elles : elles peuvent, par exemple, partir d'un point fixe. Dans ce cas, les cylindres projetans sont remplacés par des *cônes projetans*; et les projections sont dites *centrales*. Ce genre de projection est aussi très usité, car c'est celui dont on se sert dans la *Peinture* : le centre du cône est la position de l'*œil*...; les droites projetantes sont les *rayons visuels*;... et le plan de projection est le *tableau*. C'est pour cette raison que la théorie des projections centrales porte le nom de *Géométrie perspective*. — Sur ce sujet nous nous contenterons de renvoyer aux Traités spéciaux, et particulièrement à un Mémoire de M. Cousinery.

CHAPITRE IV.

DES ANGLES POLYÈDRES EN GÉNÉRAL; ET DES ANGLES TRIÈDRES EN PARTICULIER.

---

§ Ier. *Propriétés générales des Angles Trièdres et Polyèdres.*

Théorème I. (Fig. 400.)

Fig. 400. 510. *Si d'un point quelconque* [*s*] *pris dans l'intérieur d'un angle trièdre* SABC, *on abaisse des perpendiculaires sur ses faces* [*sa* sur BSC, *sb* sur CSA, *sc* sur ASB], *il en résultera un nouvel angle trièdre* [*sabc*] *dont les faces seront les supplémens respectifs des angles dièdres du premier ; — et réciproquement* les faces du premier seront les supplémens respectifs des angles dièdres du second.

Soient A, B, C, les points d'intersection respectifs des arètes SA, SB, SC, de l'angle trièdre SABC, par les faces *bsc*, *csa*, *asb*, de l'angle trièdre *sabc* : les droites A*b*, A*c*, seront les intersections respectives des faces CSA, ASB, du premier angle trièdre [S], par la face *bsc* du second angle trièdre [*s*] ; de même, B*c*, B*a*, seront les intersections respectives des faces ASB, BSC, par la face *csa* ; et enfin C*a*, C*b*, seront les intersections des faces BSC, CSA, par la face *asb*.

Cela posé, d'après la démonstration du *numéro* 469, les arètes SA, SB, SC, de l'angle trièdre S, sont respectivement perpendiculaires aux faces *bsc*, *csa*, *asb*, de l'angle trièdre *s* ; d'où il suit que l'angle trièdre S est par rapport à l'angle trièdre *s*, dans la même situation que celui-ci par rapport au premier.

Or, il résulte encore du théorème (nº 469) déjà cité, que les angles bAc, cBa, aCb, qui correspondent respectivement aux angles dièdres SA, SB, SC, de l'angle trièdre S, sont supplémentaires, chacun à chacun, des angles bsc, csa, asb, qui ne sont autre chose que les faces de l'angle trièdre s; et que *réciproquement* les angles BaC, CbA, AcB, qui correspondent aux angles dièdres sa, sb, sc, de l'angle trièdre s, sont les supplémens respectifs des faces BSC, CSA, ASB, de l'angle trièdre S. *C. Q. F. D.*

Scolie. — En raison de la propriété qui vient d'être démontrée, les deux ANGLES TRIÈDRES S et s sont dits SUPPLÉMENTAIRES.

Chacun des deux angles trièdres peut d'ailleurs être remplacé par son symétrique (*Voy.* le nº 450) : car dans la définition précédente, c'est uniquement à la valeur des angles plans ou dièdres qu'il faut avoir égard, et nullement à leur situation relative.

Ainsi, au lieu de prendre le sommet s dans l'intérieur de l'angle trièdre S, nous eussions pu le prendre sur une de ses arêtes, ou au point S lui-même : mais alors, les trois perpendiculaires, indéfiniment prolongées, déterminant *huit* angles trièdres (nº 449), il eût été difficile de reconnaître parmi eux les deux supplémentaires [symétriques l'un de l'autre] de l'angle trièdre proposé.

THÉORÈME II. (Fig. 401.)

511. *Dans tout angle trièdre S, une face quelconque est* 1º *plus petite que la somme des deux autres, et* 2º *plus grande que leur différence.* Fig. 401.

1º Il n'y a lieu à démontrer la première partie de ce théorème, que pour la plus grande des trois faces. Ainsi, supposons que l'on ait séparément

$$\text{ASB} > \text{ASC} \quad \text{et} \quad \text{ASB} > \text{BSC};$$

et démontrons que $\quad \text{ASB} < \text{ASC} + \text{BSC}.$

Pour cela, menons une droite AB d'un point quelconque A de l'arète SA à un point quelconque B de l'arète SB. Puis, par le point S et dans le plan ASB, menons une droite SC′ qui fasse un angle BSC′ égal à l'angle BSC, et qui coupe AB en un point C′. Prenons sur l'arète SC une longueur SC égale à SC′. Enfin, tirons AC et BC.

D'après cette construction, les triangles BSC et BSC′ sont égaux (n° 131); donc BC = BC′. Or, dans le triangle ABC, on a

$$AB < AC + CB, \quad \text{ou} \quad AC' + C'B < AC + CB;$$

donc $$AC' < AC;$$

et par conséquent (n° 132)

$$ASC' < ASC.$$

Ajoutant respectivement de part et d'autre BSC et BSC′, on obtient

$$ASC' + BSC' < ASC + BSC, \quad \text{ou} \quad ASB < ASC + BSC.$$

2° En supposant $ASC > BSC$, on aura

$$ASB > ASC - BSC:$$

car c'est une conséquence de ce que

$$ASB + BSC > ASC \quad (\textit{Voy. le n° 93, 2°}).$$

Fig. 402. Corollaire 1er. — *Si par le sommet* S (fig. 402) *d'un angle trièdre* SABC, *on mène une droite* SD *dans l'intérieur, et par cette droite deux plans aboutissant aux deux côtés*, SA, SB, *d'une même face* ASB, *la somme des deux angles plans*, ASD, BSD, *qui en résulteront, sera moindre que la somme des deux autres faces*, ASC, BSC.

En effet, si l'on prolonge le plan ASD par exemple, jusqu'à la rencontre de la face BSC suivant une droite SE, on aura, en opérant comme dans le *numéro* 93 (*coroll.* 1er):

1° $$ASC + CSE > ASE,$$

et en ajoutant ESB, $$ASC + CSB > ASE + ESB;$$

2° $$DSE + ESB > DSB,$$

et en ajoutant ASD, $$ASE + ESB > ASD + DSB;$$

d'où *à fortiori* $$ASC + CSB > ASD + DSB. \quad \textit{C. Q. F. D.}$$

COROLL. 2. — *La somme de deux angles plans* ASC, BSD *(fig. 403), ayant même sommet* S, *mais du reste entièrement isolés dans l'espace, est moindre que celle des angles compris dans les plans,* SAB, SCD, *qui joignent en croix leurs arètes.* Fig. 403.

En procédant encore comme dans le *numéro* 93 (*coroll.* 2), et désignant par SI la droite d'intersection des plans SAB, SCD, on aura de même

$$\text{ASI} + \text{ISC} > \text{ASC},$$
$$\text{BSI} + \text{ISD} > \text{BSD};$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$\text{ASB} + \text{CSD} > \text{ASC} + \text{BSD}. \quad C.\ Q.\ F.\ D.$$

SCOLIE. — On démontrerait facilement que

Dans tout angle polyèdre, une face quelconque est moindre que la somme de toutes les autres.

512. REMARQUE *sur la mesure de l'angle dièdre.* — Le théorème précédent conduit à une conséquence qui a déjà été annoncée précédemment (n° 444) : c'est que l'angle plan formé par les perpendiculaires à l'arète d'un angle dièdre, élevées par un même point dans chacune de ses faces, ou en un mot

L'angle plan correspondant à l'angle dièdre (n° 441), *est le seul qui puisse lui servir de mesure.*

En effet, il faut d'abord que les côtés de l'angle plan soient également inclinés sur l'arète, puisqu'il doit devenir nul en même temps que l'angle dièdre.

Ainsi, pour que l'on ait constamment

$$\text{AOPD} : \text{AOPD}' :: \text{AOB} : \text{AOB}' \text{ (fig. 342)},$$ Fig. 342.

il faut que les angles AOP, BOP, B'OP, soient égaux.

En second lieu, puisque l'on a, entre les angles dièdres, la relation

$$\text{AOPD} = \text{AOPD}' + \text{B'OPD},$$

il faut aussi qu'entre les angles plans on ait la relation

$$\text{AOB} = \text{AOB}' + \text{B'OB};$$

d'où il suit, d'après le théorème précédent, que les trois droites OA, OB, OB′, doivent être dans un même plan.

Enfin, puisque ces droites sont dans un même plan, et qu'elles sont également inclinées sur la droite OP, celle-ci est perpendiculaire au plan des trois premières (nº 463, *scol.*).

Théorème III. (Fig. 404.)

Fig. 404. 513. *Dans tout angle trièdre* S, *la somme des trois faces est moindre que* 4 *angles* Droits.

Pour le prouver, menons un plan qui coupe les faces suivant AB, AC, BC; puis, d'un point quelconque O pris dans le triangle ABC, menons les droites AO, BO, CO. Nous aurons trois triangles ayant respectivement pour bases les droites AB, AC, BC, et le point S pour sommet commun; puis trois autres triangles ayant respectivement les mêmes bases, et leur sommet en O. Cela posé, l'angle CAB, formé de la somme des angles OAC et OAB, est moindre que la somme des angles SAC et SAB (nº 511); de même ABC $<$ SBA $+$ SBC, et BCA $<$ SCB $+$ SCA; donc la somme des angles à la base des triangles qui ont leur sommet en O est moindre que la somme des angles à la base des triangles qui ont leur sommet en S. Mais la somme des angles des trois triangles de chaque système est la même (nº 125); donc la somme des angles en S est moindre que la somme des angles en O; et puisque celle-ci vaut 4 *droits,* il s'ensuit que la première est moindre que 4 *droits.* *C. Q. F. D.*

Scolie. — On démontre absolument de la même manière, que

Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est moindre que 4 *angles* droits.

On coupe les arètes par un plan (nº 448) : il en résulte un polygone dans l'intérieur duquel on prend un point quelconque; on mène par ce point des droites à tous les sommets du polygone, et la démonstration s'achève comme celle du théorème précédent.

Théorème IV.

514. *Dans tout angle trièdre, la somme des angles dièdres est plus grande que* 2 DROITS *et plus petite que* 6.

En effet, la somme des *angles dièdres* de l'angle trièdre proposé, augmentée de la somme des faces de son angle trièdre supplémentaire, forme 6 *droits* (n° 510). Or la seconde somme partielle est comprise entre *zéro* et 4 *droits* : donc la première est moindre que 6 *droits* et plus grande que 2.

C. Q. F. D.

Scolie. — La somme des angles dièdres d'un angle trièdre n'est pas constante comme celle des angles plans d'un triangle : il en résulte qu'un angle trièdre peut avoir *deux* et même *trois* angles dièdres droits. C'est d'ailleurs ce qu'il est facile de reconnaître directement, d'après ce que l'on a déjà vu (n° 449).

Cela posé, un angle trièdre est dit *rectangle*, *birectangle*, ou *trirectangle*, suivant qu'il a *un*, *deux*, ou *trois* angles dièdres droits.

515. Remarque *sur les angles trièdres.* — On pourrait établir, sur l'angle trièdre, des propositions analogues à plusieurs des théorèmes démontrés pour le triangle dans le premier livre (*chap.* III, § I, nos 126 *et suiv.*); mais la théorie des angles trièdres ne présente pas d'analogues pour tous ces théorèmes, parce que plusieurs d'entre eux dépendent de ce que la somme des angles d'un triangle est constante, ce qui, comme nous venons de le voir, n'est pas vrai pour les angles dièdres d'un angle trièdre.

Ainsi, par exemple, il est *faux* que deux angles trièdres aient toujours leurs trois angles dièdres égaux chacun à chacun lorsque deux angles dièdres de l'un d'eux sont égaux à deux angles dièdres du second (*Voy.* le n° 125, *coroll.* 3); il est *faux* que la face opposée à un angle dièdre droit ou obtus soit toujours la plus grande (*Voy.* le n° 126, *sol.* 3); etc., etc.

Mais il n'en est pas de même des propositions suivantes qui sont *vraies :* et dont nous recommandons aux élèves de rechercher les démonstrations, ce qui sera facile à ceux qui se seront bien pénétrés des théories qui précèdent.

THÉORÈME I. — 1° *Lorsque deux faces d'un angle trièdre sont égales, les angles dièdres opposés sont égaux ;*

2° *Lorsque deux faces sont inégales, à la plus grande face est opposé le plus grand angle dièdre ;*

Réciproquement : — etc. (*Voy.* le n° 126).

Il résulte du théorème précédent qu'*Un angle trièdre est régulier* (n° 448) *quand il a ses trois faces égales, ou ses trois angles dièdres égaux.*

Quant aux angles trièdres qui n'ont que deux faces égales entre elles, ainsi que les angles dièdres opposés, on peut, par analogie, les nommer *angles trièdres isoèdres :* — Nous nommerons encore *base* la face inégale aux deux autres, *angle dièdre culminant*, et *arète culminante*, l'angle dièdre opposé à la base, et son arète. — On observera que *Tout angle trièdre isoèdre est à lui-même son symétrique.*

TH. II. — *Le plan mené suivant l'arète culminante d'un angle trièdre isoèdre et suivant la bissectrice de sa base, est perpendiculaire à cette base* (Voy. le n° 126, *scol.* 1er);

Les deux angles trièdres rectangles partiels qui en résultent sont symétriques entre eux ; — La face qui leur est commune est un *plan de symétrie* (nos 464, *coroll.* 1er; et 470, *scol.*).

[TH. III. — *Dans tout angle trièdre, les plans perpendiculaires élevés suivant les bissectrices des faces, se coupent tous les trois suivant une même droite* (Voy. le n° 128).

TH. IV. — *Dans tout angle trièdre, les plans qui partagent les angles dièdres en deux parties égales, se coupent tous les trois suivant une même droite* (Voy. le n° 129).

TH. V. — *Les plans menés suivant les arètes d'un angle trièdre et suivant les bissectrices des faces opposées, se coupent tous les trois suivant une même droite* (Voy. le n° 247, *coroll.* 1er).

TH. VI. — *Les plans menés suivant les arètes d'un angle trièdre et perpendiculairement aux faces opposées, se coupent tous les trois suivant une même droite* (Voy. le n° 248, *coroll.* 2).

TH. VII. — *Avec un nombre quelconque d'angles plans égaux,* [*pourvu que leur nombre soit au moins égal à trois et que leur somme soit moindre que* 4 DROITS], *on peut toujours former un angle polyèdre régulier, et l'on n'en peut former qu'*UN.]≽

N. B. — Il faut observer que les démonstrations de plusieurs de ces théorèmes supposent les théorèmes sur l'égalité des angles trièdres, que nous allons donner dans le paragraphe suivant.

§ II. *De l'Égalité et de la Symétrie des Angles Trièdres.*

THÉORÈME V. (Fig. 405.)

516. *Deux angles trièdres,* SABC, S'A'B'C', *sont égaux lorsqu'ils ont les faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.* Fig. 405.

[Pour suivre une méthode analogue à celle que nous avons employée dans le *numéro* 130 relativement aux triangles] Appliquons la face A'S'B' sur son égale ASB, de manière que les arètes correspondantes, SA, S'A', se confondent, ainsi que les arètes SB, S'B'. Je dis qu'alors les arètes SC, S'C', se confondront aussi, et que par suite les deux angles trièdres coïncideront.

En effet, si cela n'avait pas lieu, quelque face de l'un des deux angles trièdres, par exemple la face A'S'C', pénétrerait dans l'intérieur du second angle trièdre SABC. Alors, l'arète S'C' [ou SC'] serait dirigée, soit dans l'angle trièdre SABC, suivant SD, soit sur la face SBC, suivant SE, soit enfin en dehors de l'angle trièdre, suivant SF. On aurait ainsi

Dans le premier cas :

$$ASC + BSC > A'S'C' + B'S'C' \quad (\text{n}^\circ\ 511,\ \textit{coroll.}\ 1^{\text{er}});$$

Dans le second : $BSC > B'S'C'$;

Et dans le troisième :

$$A'S'C' + BSC > ASC + B'S'C' \quad (\text{n}^\circ\ 511,\ \textit{coroll. } 2)\,;$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE Ier. — *Un angle trièdre n'a qu'un seul symétrique.*

Fig. 406. En effet, soient deux angles trièdres SABC, S'A'B'C' (fig. 406), ayant les faces égales chacune à chacune. Si la disposition de ces faces n'est pas la même, prolongeons en sens inverse les arêtes S'A', S'B', S'C' : il en résultera un troisième angle trièdre S'A"B"C" qui sera égal à l'angle trièdre SABC, comme ayant avec lui les faces égales chacune à chacune et disposées de la même manière ; donc, etc.

Il suit encore de là :

1° Que *Deux angles trièdres symétriques d'un troisième sont* toujours *égaux entre eux ;*

Et 2° que *Deux angles trièdres symétriques entre eux ont les angles dièdres égaux chacun à chacun :* ce qui complète la *remarque* 4e du *numéro* 450.

COROLL. 2. — *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont les arètes parallèles et dirigées dans le même sens, chacune à chacune* (Voy. le n° 487).

COROLL. 3. — *Deux angles trièdres sont symétriques entre eux lorsqu'ils ont les arètes parallèles et dirigées en sens contraire, chacune à chacune.*

Scolie. — Lorsque deux angles trièdres ont les arètes parallèles chacune à chacune, il existe entre eux, quelles que soient les directions respectives de ces arètes, la même
Fig. 348. relation qu'entre l'angle trièdre SABC (nos 449 et 450, fig. 348) et l'un des sept autres formés par les mêmes plans.

THÉORÈME VI.

517. *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

En effet, dans cette hypothèse, les faces des angles trièdres respectivement supplémentaires des deux proposés (n° 510), seront égales chacune à chacune ; donc ces angles trièdres supplémentaires seront égaux [ou symétriques] (n° 516); donc ils auront les angles dièdres égaux chacun à chacun ; donc les faces des deux angles trièdres proposés seront égales chacune à chacune; et comme elles seront d'ailleurs, ainsi que les angles dièdres, semblablement disposées, il s'ensuit que les deux angles trièdres proposés seront égaux.

C. Q. F. D.

Scolie. — Cette proposition n'a pas d'analogue dans la théorie des triangles, parce que les trois angles ne suffisent pas pour déterminer un triangle (n° 135), tandis que les trois angles dièdres suffisent, comme on vient de le voir, pour déterminer un angle trièdre.

Théorème VII. (Fig. 407.)

518. *Deux angles trièdres,* SABC, S'A'B'C', *sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal,* SA = S'A', *compris entre des faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.* Fig. 407.

Appliquons la face A'S'B' sur la face ASB, comme dans le *numéro* 516 : les angles dièdres SA et S'A' étant égaux, la face A'S'C' se placera sur le plan de la face ASC ; et comme ces faces sont égales, l'arète S'C' se confondra avec l'arète SC : d'où il résulte que les deux angles trièdres coïncideront.

Théorème VIII.

519. *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale adjacente à des angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

On peut démontrer ce théorème, soit par la superposition, comme les théorèmes V et VII (n°s 516 et 518), soit en appliquant le théorème précédent (n° 518) aux angles trièdres supplémentaires des deux proposés, comme on l'a fait pour le théorème VI (n° 517).

520. REMARQUES *sur l'égalité et la symétrie des angles trièdres et polyèdres.*

On pourrait établir un théorème analogue à celui du *numéro* 134, pour le cas où deux angles trièdres auraient *deux faces égales chacune à chacune ainsi que l'angle dièdre opposé à l'une d'elles*, et un second théorème correspondant pour le cas de *deux angles dièdres égaux chacun à chacun ainsi que la face opposée à l'un d'eux*; mais, à cause de la difficulté de discuter exactement sans entrer dans de trop longs détails, les restrictions auxquelles ces deux théorèmes sont soumis, nous avons cru devoir les passer sous silence et nous borner aux *quatre* théorèmes précédens (nos 516 — 519).

Au lieu de supposer [dans ces *quatre* propositions] que la disposition des élémens donnés [faces ou angles dièdres] est la même, si l'on supposait qu'elle est inverse, les angles trièdres seraient symétriques : car en construisant, comme on l'a fait ci-dessus (n° 516, *coroll.* 1er), un troisième angle trièdre, symétrique de l'un des deux proposés, cet autre angle trièdre aurait les mêmes élémens donnés que le second angle trièdre proposé, et de plus ces élémens seraient disposés de la même manière ; donc ces deux derniers angles trièdres seraient égaux : donc les deux angles trièdres proposés seraient symétriques. — Toutefois, il faut observer que cette condition relative à la disposition des données, devient inutile lorsque les angles trièdres sont isoèdres, parce que les angles trièdres qui offrent cette particularité sont à eux-mêmes leurs symétriques (*Voy.* le n° 515, *théor.* II).

Ainsi, un angle trièdre est déterminé par *trois* quelconques des *six* élémens [faces ou angles dièdres] qui le constituent, pourvu 1° que les trois élémens donnés soient consécutifs, et 2° que la disposition soit la même. Si cette seconde condition n'était pas énoncée, les données conviendraient à deux angles trièdres symétriques entre eux ; mais elles ne conviendraient à aucun autre.

Observons en outre que *Dans deux angles trièdres égaux* *ou symétriques, aux faces égales sont opposés des angles dièdres égaux; — et réciproquement;*

Et que *Dans deux angles trièdres égaux ou symétriques, les inclinaisons* [des arètes homologues sur les faces égales (nº 460, *scol.*)] *sont égales chacune à chacune.*

Indiquons encore, relativement aux angles trièdres, les deux théorèmes suivans que nous ne ferons qu'énoncer :

1º *Lorsque deux faces d'un angle trièdre sont égales, chacune à chacune, à deux faces d'un autre angle trièdre, si l'angle dièdre compris par les premières est plus grand que l'angle dièdre compris par les dernières, la troisième face du premier angle trièdre est plus grande que la troisième face du second angle trièdre; — et réciproquement* (Voy. le nº 132);

2º *Lorsque deux angles dièdres d'un angle trièdre sont égaux, chacun à chacun, à deux angles dièdres d'un autre angle trièdre, si la face adjacente aux deux premiers est plus grande que la face adjacente aux deux derniers, le troisième angle dièdre de la première figure est plus grand que le troisième angle dièdre de la seconde figure; — et réciproquement.*

Quant aux angles polyèdres en général, on pourrait établir, sur leur égalité, des théorèmes analogues aux théorèmes III et IV de la théorie des polygones (nºs 169 et 170), en observant toujours que, pour l'égalité de deux angles polyèdres, il faut une condition de plus, savoir : que la disposition des élémens donnés soit la même. Dans le cas inverse, les angles polyèdres seraient symétriques : pour le prouver, on prolongerait les arètes de l'un, et l'on démontrerait sans peine que le nouvel angle polyèdre ainsi formé est égal à l'autre. Nous ne nous y arrêterons point, croyant faire une chose plus utile en recommandant ces sortes de recherches aux élèves qui veulent s'exercer.

§ III. *De la Mesure des Angles Trièdres et Polyèdres.*

Théorème IX. (Fig. 408.)

F.408. 521. *Deux angles trièdres symétriques entre eux,* SABC, S′A′B′C′, *sont équivalens.*

Pour le prouver, prenons, sur les arètes, les six distances égales SA, SB, SC, S′A′, S′B′, S′C′, et menons AB, AC, BC, A′B′, A′C′, B′C′ : les triangles SAB et S′A′B′, SAC et S′A′C′, SBC et S′B′C′, seront égaux chacun à chacun (nº 131) : donc les deux triangles ABC et A′B′C′ seront aussi égaux (nº 130). Cela posé, circonscrivons des circonférences aux deux triangles ABC et A′B′C′ : ces circonférences seront aussi égales entre elles (nº 128, *coroll^s.*) : soient O et O′ leurs centres respectifs. Les droites SO et S′O′ seront respectivement perpendiculaires aux plans ABC et A′B′C′ (nº 462, *coroll^s.*); et de plus, les rayons OA, OB, OC, O′A′, O′B′, O′C′, étant égaux, les triangles rectangles SOA, SOB, SOC, S′O′A′, S′O′B′, S′O′C′, seront aussi égaux (nº 131). Donc les deux angles trièdres SOAB, S′O′A′B′, par exemple, ont les trois faces égales chacune à chacune ; et comme ils sont en même temps isoèdres (nº 515), ils sont nécessairement égaux (nº 520). Il en est de même des angles trièdres SOAC et S′O′A′C′, SOBC et S′O′B′C′.

Maintenant, il peut se présenter *trois cas* (nº 128, *scol.*) : les centres O, O′, tomberont tous deux à la fois, ou dans l'intérieur des triangles ABC, A′B′C′ (fig. 408), ou sur deux côtés correspondans tels que BC, B′C′, ou enfin hors des triangles.

Dans le *premier cas,* les deux angles trièdres SABC, S′A′B′C′, sont composés de *trois* parties égales chacune à chacune, et sont par conséquent [non pas égaux (nº 3), mais] équivalens.

Dans le *second cas,* deux angles trièdres partiels se trouvant réduits à *zéro*, les deux angles trièdres proposés sont composés seulement de *deux* parties égales chacune à chacune; mais ils sont encore équivalens.

Enfin dans le *troisième cas*, les deux angles trièdres SABC, S'A'B'C', sont composés de la somme de deux angles trièdres égaux chacun à chacun, *diminuée* d'un troisième angle trièdre aussi égal de part et d'autre : ainsi ils sont encore équivalens.

C. Q. F. D.

Théorème X. (Fig. 348.)

522. *Tout angle trièdre* SABC *est équivalent à la demi-somme de ses trois angles dièdres, moins* UN *angle dièdre droit.* Fig. 348.

Les trois droites SA, SB, SC, indéfiniment prolongées, déterminent *huit* angles trièdres pour lesquels on a (n° 449) :

$$\text{SABC} + \text{SA'BC} = \textit{dièdre}\ \text{CAA'B},$$

$$\text{SABC} + \text{SAB'C} = \textit{dièdre}\ \text{ABB'C}.$$

$$\text{SABC} + \text{SABC'} = \textit{dièdre}\ \text{BCC'A}.$$

Remplaçons, dans la dernière égalité, l'angle trièdre SABC' par son symétrique équivalent SA'B'C ; ajoutons membre à membre les trois égalités ; et observons (n° 450) que

$$\text{SABC} + \text{SA'BC} + \text{SAB'C} + \text{SA'B'C} = 2$$

[en prenant l'angle dièdre droit pour unité] ; nous obtiendrons :

$$2.\text{SABC} + 2 = \textit{dièdre}\ \text{CAA'B} + \textit{dièdre}\ \text{ABB'C} + \textit{dièdre}\ \text{BCC'A};$$

d'où

$$\text{SABC} = \tfrac{1}{2}(\textit{dièdre}\ \text{CAA'B} + \textit{dièdre}\ \text{ABB'C} + \textit{dièdre}\ \text{BCC'A}) - 1.$$

C. Q. F. D.

Corollaire 1er. — *L'angle trièdre trirectangle* (n° 514, *scol.*) *est équivalent à la moitié d'un angle dièdre droit.*

Coroll. 2. — *Un angle trièdre birectangle est équivalent à la moitié de son angle dièdre obliquangle.*

Coroll. 3. — *Un angle trièdre* simplement *rectangle est équivalent à la demi-somme de ses deux angles dièdres obliquangles, moins un angle trièdre trirectangle.*

THÉORÈME XI.

523. *Tout angle polyèdre convexe est équivalent à la demi-somme de ses angles dièdres, diminuée d'autant d'angles dièdres droits qu'il a de faces moins* DEUX.

En effet : 1° l'angle polyèdre est décomposable en autant d'angles trièdres qu'il a de faces, *moins deux* (n° 448); 2° la somme des angles dièdres de l'angle polyèdre est égale à la somme des angles dièdres des angles trièdres qui le composent; 3° chaque angle trièdre est équivalent à la demi-somme de ses angles dièdres, moins *un* angle dièdre *droit* (n° 522) : donc, etc.

THÉORÈME XII.

524. *Si un nombre quelconque d'angles plans ayant leurs sommets au même point, sont disposés de manière à décomposer* L'ESPACE *en un certain nombre d'angles polyèdres convexes, le nombre des arètes* [A], *plus le nombre des angles polyèdres* [P], *formeront une somme égale au nombre des angles plans* [F], *augmenté de* DEUX *unités.*

En effet, d'après le théorème précédent, L'ESPACE est équivalent à la demi-somme des angles dièdres de tous les angles polyèdres, diminuée [chaque face appartenant à deux angles polyèdres contigus] de *deux* fois autant d'angles dièdres *droits* qu'il y a de faces, et augmentée de *deux* fois autant d'angles dièdres *droits* qu'il y a d'angles polyèdres. Or, L'ESPACE est aussi égal à 4 [l'angle dièdre *droit* étant pris pour *unité*], et la demi-somme des angles dièdres de tous les angles polyèdres est égale à 2 multiplié par le nombre des arètes, puisqu'à chaque arète correspond 4 *droits*. On a donc :

$$2A - 2F + 2P = 4,$$

d'où

$$A + P = F + 2 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

CHAPITRE V.

DES PRISMES ET DU CYLINDRE.

§ I^er^. *Du Prisme en général.*

525. Nous avons déjà dit (nº 451) que l'on nomme PRISME tout *polyèdre qui a pour faces deux polygones* [plans] *égaux et parallèles, et une série de parallélogrammes en nombre égal à celui des côtés de chaque polygone.* — Les prismes sont les plus simples des polyèdres, non pas sous le rapport du nombre des faces, mais en raison des propriétés dont ils jouissent.

Pour obtenir un prisme, considérons un polygone plan ABCDE (fig. 409); par les sommets de ce polygone menons, hors de son plan et du même côté, les droites égales et parallèles AA′, BB′, CC′, DD′, EE′; et formons le polygone A′B′C′D′E′. Fig. 409.
Les quadrilatères AB′, BC′, CD′,.... seront des parallélogrammes (nº 153), et le polygone A′B′C′D′E′ sera égal et parallèle au polygone ABCDE (nº 487, *scol.* 2) : par conséquent la figure résultante sera un *prisme*.

Les parallélogrammes AB′, BC′, CD′, DE′, EA′, sont les *faces latérales* ou les *pans* du prisme; et leur ensemble compose sa *surface latérale*. Quant aux deux polygones ABCDE, A′B′C′D′E′, on les nomme les *bases* du prisme; il faut observer que ces deux bases, considérées *extérieurement*, sont *inversement superposables* (nº 43). — La *hauteur* du prisme est la distance de ses bases, ou la perpendiculaire commune à leurs plans. — Le prisme est *convexe* ou *concave* suivant que sa base elle-même est un polygone convexe ou concave; etc., etc.

Tous les angles polyèdres du prisme sont des angles trièdres;

Fig. 409 et il est évident que le prisme est *déterminé* quand on en connaît *trois faces formant un angle trièdre, avec leur position relative*. Le prisme est encore déterminé quand on en connaît seulement *une base et une arète avec sa position*, ou bien encore *ses arètes latérales*, etc.

526. Un prisme est dit *triangulaire, quadrangulaire, pentagonal*, ... suivant que sa base est un *triangle*, un *quadrilatère*, un *pentagone*, ..., ou suivant qu'il a 3, 4, 5, ... pans.

Trois droites égales et parallèles, non situées dans un même plan, déterminent encore *un prisme triangulaire*. Il en est de même des autres espèces de prismes, lesquels sont aussi déterminés par autant de droites égales et parallèles qu'ils ont de faces latérales. Il faut cependant ajouter, lorsque le nombre des pans surpasse *trois*, que les extrémités correspondantes de ces droites doivent être dans un même plan (n° 487, *scol.* 2).

Un prisme est dit *droit* lorsque ses arètes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases : chaque arète est alors égale à la hauteur; et les pans sont des rectangles. Dans le cas contraire, le prisme est *oblique;* et par conséquent la hauteur est moindre qu'une arète latérale (n° 460). — *Deux prismes droits de même base et de même hauteur sont* évidemment *égaux* (n° 525).

Un prisme est *régulier* quand ses bases sont des polygones réguliers, et que d'ailleurs il est droit; les pans sont alors des rectangles égaux.

Un prisme peut avoir des *plans de symétrie* (n^{os} 464, *coroll.* 1er; et 470, *scol.*). Ainsi par exemple, tout prisme droit a au moins *un* plan de symétrie qui partage en parties égales les arètes latérales et par suite le prisme.

Lorsqu'on fait passer entre les bases d'un prisme (fig. 409), un plan MNPQR non parallèle à ces bases, on le décompose en deux figures dont chacune est un *tronc de prisme* ou un *prisme tronqué*. Tout prisme tronqué a deux bases qui sont des polygones généralement inégaux, mais d'un même nombre de côtés, et des faces latérales qui sont généralement des trapèzes. — Un prisme tronqué peut aussi avoir un ou plusieurs plans de symétrie. Fig. 409.

527. *Tout prisme* (fig. 409) *peut se décomposer en prismes triangulaires*, de la même manière qu'un polygone se décompose en triangles (n° 166). Il suffit pour cela de mener des plans diagonaux AC′, AD′, par les arètes latérales.

Deux prismes sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de prismes triangulaires égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière ; — et *réciproquement*.

Deux *prismes* sont *symétriques entre eux*, ou simplement *symétriques*, lorsqu'ils ont *les bases et les autres faces égales chacune à chacune, mais inversement disposées*.

Il est facile de voir, d'après cela, qu'*Un prisme n'a qu'un seul symétrique* (n° 525) ; et que par conséquent *Deux prismes respectivement symétriques d'un troisième, sont égaux*.

Il s'ensuit encore que deux prismes symétriques entre eux ont les angles trièdres symétriques chacun à chacun, les angles dièdres égaux, même hauteur, les inclinaisons (n° 460, *scol.*) égales ; etc, etc.

Enfin, deux prismes [à plus de *trois* pans] symétriques entre eux peuvent se décomposer en un même nombre de prismes triangulaires symétriques chacun à chacun ; — et *réciproquement*.

Théorème I. (Fig. 409.)

528. *Les sections*, MNPQR, M′N′P′Q′R′, *faites dans un prisme par deux plans parallèles qui coupent à la fois toutes les arètes latérales, sont des polygones égaux*.

En effet, les droites MN et M′N′, NP et N′P′, ... sont parallèles deux à deux (n° 472) ; or MM′, NN′, PP′, ... sont aussi parallèles deux à deux ; donc les quadrilatères MN′, NP′, ... sont des parallélogrammes (n° 149) : donc, etc.

Corollaire. — *Toute section faite dans un prisme par un plan parallèle à la base, est égale à cette base* ; — mais la *réciproque* est *fausse*.

Scolie. — Il est facile de déduire du théorème précédent, cette conséquence que si les bases d'un prisme droit sont des polygones symétriques par rapport à un axe ou à plusieurs axes, les plans menés par les axes correspondans des deux bases sont des plans de symétrie [outre celui dont nous avons parlé ci-dessus (n° 526)]. C'est ce qui arrive, par exemple, pour les prismes réguliers.

Théorème II.

529. *Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont une base et une face égales chacune à chacune, également inclinées, et semblablement disposées.*

En effet, on pourra faire coïncider, chacune à chacune, les deux bases et les deux autres faces ; or la base et une arète avec sa position suffisent pour déterminer un prisme (n° 525) : donc les deux prismes coïncideront entièrement.

Corollaire 1er. — *Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont un angle trièdre compris entre trois* [de leurs] *faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.*

Si la disposition était inverse, les prismes seraient symétriques : en effet, en construisant un prisme symétrique de l'un des proposés, il serait égal à l'autre (n° 527).

Coroll. 2. — *Deux prismes triangulaires sont égaux lorsqu'ils ont un angle trièdre formé par trois arètes égales, parallèles, et dirigées dans le même sens, chacune à chacune* (Voy. le n° 516, *coroll.* 2).

Les prismes seraient symétriques si les arètes parallèles étaient, chacune à chacune, dirigées en sens contraire.

Coroll. 3. — *Deux prismes droits symétriques entre eux sont égaux et ne diffèrent que par la position.*

Supposons en effet les deux prismes placés de telle manière que leurs bases inférieures et leurs bases supérieures soient, deux à deux, dans un même plan. Admettons, pour mieux fixer les idées, qu'on les ait d'abord *posés* ainsi sur un plan horizontal, et qu'ensuite on ait *retourné* l'un des deux *sens dessus dessous* (Voy. le n° 45). Il est clair que, dans cette nouvelle position, les bases *inférieures* seront *directement* superposables (n° 43), puisqu'alors chacune d'elles sera symétrique d'une quelconque des bases *supérieures;* [*et vice versâ*]. De plus, les arètes *latérales* étant toutes égales entre elles et perpendiculaires aux bases, il s'ensuit que, dans la superposition des bases inférieures [ou supérieures], les deux prismes coïncideront entièrement.

§ II. *Du Parallélépipède.*

530 Dans le cas où *les bases* du prisme sont des *parallélogrammes* (fig. 410), le prisme a pour faces *six* parallélogrammes opposés deux à deux ; et il prend le nom de PARALLÉLÉPIPÈDE. — Un parallélépipède est déterminé par *trois* arètes formant un angle trièdre. — Tout parallélépipède a *quatre diagonales* qui joignent deux à deux les sommets opposés, et *six plans diagonaux* (n° 451) passant par deux arètes opposées. On le désigne par les lettres de deux sommets opposés : OG, AD, BE, ou CF. Fig. 410.

Le parallélépipède est dit *rectangle* (fig. 411) quand toutes ses faces sont des rectangles : c'est donc la même chose qu'un prisme quadrangulaire droit dont les bases sont des rectangles ainsi que les faces latérales; la dénomination de *prisme rectangle* suffit alors pour le caractériser. — *Deux parallélépipèdes rectangles de même base et de même hauteur sont égaux* (n° 526). Fig. 411.

Les deux bases d'un parallélépipède rectangle peuvent être des carrés : la figure est alors un *prisme quadrangulaire régulier*, ou un *parallélépipède droit à base carrée*, ou simplement, pour abréger, un *prisme carré*.

Enfin, toutes les faces peuvent être des carrés égaux (fig. 412) : et alors la figure est un *hexaèdre régulier* ou un *cube*. — Le cube est donc un cas particulier du prisme carré, et par suite du prisme rectangle. Fig. 412.

Tout parallélépipède droit à base rectangle ou à base rhombe (n° 157) a *trois* plans de symétrie ; à base carrée, il en a *cinq* (n° 528, *scol*). — Le cube en a *neuf*, *six* qui passent par les arètes opposées prises deux à deux, et *trois* qui partagent en deux parties égales les arètes parallèles prises quatre à quatre.

Théorème III. (Fig. 410.)

Fig. 410. 531. *Dans tout parallélépipède* OG, *les faces opposées sont égales et parallèles.*

La proposition n'a besoin de preuve que pour les faces latérales. En supposant donc que OF et CG soient les bases du parallélépipède, considérons les faces latérales OE et BG. Or, OA est égale et parallèle à BF, parce que OF est un parallélogramme ; de même OC est égale et parallèle à BD puisque OD est un parallélogramme ; donc les angles COA et DBF sont égaux et parallèles (n° 487), ainsi que les deux parallélogrammes OE et BG (n° 149). *C. Q. F. D.*

Il est facile de prouver que, *réciproquement*, si dans un polyèdre à *six* faces, les faces opposées sont égales *ou* parallèles deux à deux, la figure est un parallélépipède.

Scolie 1er. — *Deux faces opposées quelconques d'un parallélépipède peuvent être prises pour ses bases.*

Scol. 2. — *Les arètes d'un parallélépipède sont égales et parallèles quatre à quatre.* — Chaque angle trièdre est formé par trois arètes *adjacentes* qui sont en général différentes de longueur pour le même angle trièdre, et toujours égales chacune à chacune dans deux angles trièdres quelconques du même parallélépipède.

Scol. 3. — *Tout plan diagonal* (n° 530) *d'un parallélépipède le coupe suivant un parallélogramme et le décompose en deux prismes triangulaires.*

Corollaire 1er. — *Dans un parallélépipède, toute section* [faite par un plan *entre* deux faces opposées] *est un parallélogramme* (n° 472).

COROLL. 2. — *Dans tout parallélépipède, les angles dièdres opposés* [ou formés par des faces opposées deux à deux] *sont égaux* (Voy. le n° 445). Fig. 410.

THÉORÈME IV. (Fig. 410.)

532. *Dans tout parallélépipède* OG, *les diagonales se coupent toutes les quatre en un même point qui est leur milieu commun.*

En effet, en menant OF et CG par exemple, on formera un parallélogramme OCGF (n° 153) dont OG et CF seront les diagonales ; donc (n° 154) OG et CF se coupent en un point K, mutuellement en deux parties égales. Or, il en serait de même évidemment pour toute combinaison des quatre diagonales prises deux à deux : donc, etc.

Scolie. — Le point K se nomme le *centre* du parallélépipède.

THÉORÈME V. (Fig. 410.)

533. *Dans tout parallélépipède* OG, *les angles trièdres opposés en diagonale sont symétriques deux à deux.*

En effet, en prolongeant les arètes d'un quelconque, G, des angles trièdres, on formerait un angle trièdre extérieur égal à l'angle trièdre opposé O (n° 516, *coroll.* 2) : donc, etc.

SCOLIE. — *Dans tout parallélépipède, les inclinaisons des arètes opposées sur les faces opposées sont égales* (n° 520).

THÉORÈME VI.

534. *Tout plan diagonal d'un parallélépipède le décompose en deux prismes triangulaires symétriques entre eux.*

En effet, les deux prismes (n° 531, *scol.* 3) ont deux angles trièdres symétriques entre eux (n° 533), formés par des faces égales chacune à chacune (n° 531) : donc, etc. (n° 529, *coroll.* 1er).

Réciproquement : — Deux prismes triangulaires symétriques entre eux peuvent s'assembler [de *trois* manières] pour composer un parallélépipède.

SCOLIE. — *Les deux prismes triangulaires sont égaux si le parallélépipède est droit*, [en supposant toutefois, si ce parallélépipède n'est pas rectangle, que les arètes dont il s'agit soient les arètes latérales].

THÉORÈME VII. (Fig. 411.)

Fig. 411. 535. *Dans tout parallélépipède rectangle* OG, *le carré d'une diagonale est égal à la somme des carrés de trois arètes adjacentes* [ou formant un même angle trièdre (nº 531, *scol.* 2°)].

On a, par exemple, $OG^2 = OC^2 + CG^2$;

or $CG^2 = OF^2 = OB^2 + BF^2 = OB^2 + OA^2$:

donc $OG^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE. — *Les quatre diagonales d'un parallélépipède rectangle sont égales.*

Fig. 413 et 414. 536. DU RHOMBOÈDRE. — Le *rhomboèdre* est un parallélépipède dans lequel toutes les faces sont des rhombes égaux (nº 157). Il y en a de deux espèces : le rhomboèdre *allongé* ou *aigu* (fig. 413), et le rhomboèdre *aplati* ou *obtus* (fig. 414). Dans le premier (fig. 413), les faces sont réunies trois à trois par un de leurs angles aigus pour former deux angles trièdres opposés S, S′ [qui sont égaux entre eux]; et chacun des six autres angles trièdres est formé de deux angles obtus et d'un angle aigu; dans le second au contraire (fig. 414), deux angles trièdres S, S′, sont formés de trois angles obtus, et les six autres de deux angles aigus et un obtus. — La droite SS′ s'appelle l'*axe* du rhomboèdre.

La forme cubique est la limite qui sépare le rhomboèdre aigu du rhomboèdre obtus.

Le rhomboèdre a trois plans de symétrie qui passent par son axe et par deux arètes opposées aboutissant chacune à l'un des deux sommets de cet axe.

§ III. *Du Cylindre.*

537. Nous avons nommé *cylindre* (nº 453) l'espace limité par une surface cylindrique et par deux plans parallèles. Il est clair d'après cela que tout cylindre peut être considéré comme un prisme régulier (nº 526) d'un nombre infini de faces latérales dont la largeur est infiniment petite. C'est pourquoi la directrice d'une surface cylindrique prend le nom de *base* quand elle est plane.

Lorsque la base est une circonférence de cercle, la surface cylindrique est dite *circulaire*; et quand les génératrices sont de plus perpendiculaires au plan de ce cercle, la surface cylindrique est dite *circulaire droite*; le diamètre du cercle est dit le *diamètre de la surface*. — Il est facile de voir que si l'on prenait une droite pour base d'une surface cylindrique, cette surface se réduirait à un plan; il en serait encore de même si la génératrice ne faisait que se mouvoir dans le plan de la directrice [supposée plane].

Toutes les arètes d'une surface cylindrique étant parallèles, il s'ensuit que

Tout plan mené suivant une arète et par un point d'une seconde arète contient celle-ci tout entière (nº 432).

Théorème VIII. (Fig. 415.)

538. *Tout plan mené suivant une arète* MP *d'une surface cylindrique circulaire droite et suivant une tangente* TU *à sa base* ABP, *est tangent à la surface cylindrique*; — *et réciproquement.* Fig. 415.

En effet, le plan et la surface ont d'abord l'arète commune MP : prouvons qu'ils n'ont pas d'autre point commun que ceux de cette arète. Pour cela, soit N un autre point supposé commun : l'arète qui passe par le point N se trouvant à la fois dans le plan (nº 432) et dans la surface (nº 537), devrait percer le plan de la base en un point Q, différent de P, qui appartiendrait également à la circonférence de la base ABP et à la tangente TU, ce qui est absurde (n° 20); donc le plan n'a pas d'autres points communs avec la surface que ceux de l'arète MP : donc, etc.

Réciproquement : — Le plan qui touche la surface cylindrique suivant une arète, coupe le plan de la base suivant une droite TU tangente à la base. Car si la droite d'intersection TU pouvait avoir, avec la circonférence de la base, plusieurs points communs, P, Q, les arètes qui passent par les points P, Q, se trouveraient à la fois dans la surface et dans le plan tangent; *ce qui est absurde.*

Scolie. — La même démonstration s'appliquerait également à une surface cylindrique convexe quelconque. La *proposition* a même encore lieu pour les surfaces cylindriques qui ne sont pas convexes; mais la *démonstration* n'est plus applicable à ce cas (*Voy.* les n^{os} 184 et 458).

Théorème IX. (Fig. 416.)

Fig. 416 539. *Tout plan parallèle à la base* OA *d'une surface cylindrique circulaire droite, coupe cette surface suivant un cercle égal à la base.*

Soient OA, OB, deux rayons quelconques de la base, et O′, A′, B′, les intersections respectives de l'axe OO′ et des deux arètes AA′, BB′, avec un plan quelconque parallèle à la base : les droites OO′, AA′, et BB′, seront parallèles, et égales (n° 485); donc aussi O′A′ = OA, O′B′ = OB, et par conséquent O′A′ = O′B′ : donc, etc.

Scolie 1er. — De là il résulte, comme on l'a annoncé précédemment (n° 454), que dans la génération de la surface cylindrique circulaire droite, tous les points de la génératrice décrivent des cercles égaux et parallèles à la base, ayant un axe commun (n° 461, *coroll.*); et par conséquent cette surface est une surface de révolution qui a le même axe que ces cercles.

SCOL. 2. — Proposition analogue pour une surface cylindrique quelconque : — *Les intersections d'une surface cylindrique par des plans parallèles sont des courbes égales* ; ce qui résulte d'ailleurs de la proposition démontrée pour le prisme (n° 528).

Il s'ensuit que toute surface cylindrique peut être engendrée par sa directrice dont les points se mouvraient parallèlement, chacun sur une même arète.

540. Un cylindre circulaire droit (fig. 416) peut être considéré comme engendré par la révolution d'un rectangle OA′ autour d'un de ses côtés OO′ qui devient l'*axe* du cylindre. L'axe est égal aux arètes et à la hauteur. Fig 416.

En menant un plan suivant l'axe du cylindre, on a pour section un rectangle CA′ double du rectangle générateur : on peut désigner le cylindre par ce rectangle, en disant *le cylindre* CA′. — Lorsque ce rectangle est un carré, le *cylindre* est dit *équilatéral*.

Les bases du cylindre droit étant perpendiculaires aux arètes, il s'ensuit que, dans le développement de sa surface latérale, la circonférence de chaque base devient une ligne droite également perpendiculaire à ces arètes. Et par conséquent, en supposant cette surface *ouverte* ou *fendue* le long d'une arète, on voit qu'elle doit prendre, après son développement, la forme d'un rectangle de même hauteur, et dont la base est équivalente à la circonférence [rectifiée] de la base du cylindre.

On nomme *cylindre tronqué* ou *tronc de cylindre* (fig. 417) l'espace limité par une surface cylindrique et par deux plans non parallèles. Les sections de la surface cylindrique par ces deux plans se nomment encore les *bases*. Fig. 417.

541. Un *prisme* dont les arètes sont des arètes du cylindre est dit *inscrit* au cylindre : et réciproquement le *cylindre* est *circonscrit* au prisme.

Un *prisme* dont les faces sont tangentes au cylindre est dit *circonscrit* au cylindre; et réciproquement le *cylindre* est *inscrit* au prisme. Les arètes de ce dernier sont parallèles à celles du cylindre (n° 475, *coroll.*).

Lorsqu'un cylindre et un prisme sont inscrits ou circonscrits l'un à l'autre, cette même relation de position existe aussi entre leurs bases.

Le cylindre peut être considéré comme la limite des prismes inscrits et des prismes circonscrits (*Voy.* le n° 537).

CHAPITRE VI.

DES PYRAMIDES ET DU CÔNE.

§ Ier. *Du Tétraèdre.*

542. Lorsque l'on coupe par un plan les arètes d'un angle trièdre S (fig. 418), on forme un *polyèdre à quatre faces triangulaires* SAB, SAC, SBC, ABC : ce polyèdre prend le nom particulier de TÉTRAÈDRE ; c'est le plus simple de tous les polyèdres sous le rapport du nombre des faces. — Un tétraèdre peut être désigné par la lettre d'un de ses sommets quand il est isolé, et par les lettres de ses quatre sommets quand il ne l'est pas. — Deux tétraèdres se confondent quand ils ont les mêmes sommets. Fig. 418.

On donne le nom de *base* à une quelconque ABC des quatre faces ; et quand on abaisse du sommet opposé une perpendiculaire sur cette base, cette perpendiculaire s'appelle la *hauteur* du tétraèdre [correspondante à cette face prise pour base].

543. Le tétraèdre est dit *régulier* lorsque toutes ses faces sont des triangles équilatéraux, lesquels sont alors nécessairement égaux entre eux.

Si l'on prolonge au-delà d'un sommet quelconque S (fig. 419), les arètes qui y aboutissent, que sur les prolongemens on prenne SA′ = SA, SB′ = SB, SC′ = SC, et qu'enfin l'on mène le plan A′B′C′, il en résultera deux tétraèdres, SABC, S′A′B′C′, qui auront les *arètes égales chacune à chacune, mais inversement disposées* [ce qui signifie que ces arètes Fig. 419.

sont, [à *chaque angle trièdre*, assemblées dans un ordre inverse (n° 450)] : ces deux tétraèdres sont dits *symétriques entre eux*.

Théorème I. (Fig. 420.)

Fig. 420. 544. *Deux tétraèdres*, S, S′, *sont égaux lorsqu'ils ont trois faces égales chacune à chacune*, SAB et S′A′B′, SAC et S′A′C′, SBC et S′B′C′, *et semblablement disposées.*

En effet, d'après l'hypothèse, les angles trièdres S et S′ sont égaux (n° 516) ; et par conséquent les angles dièdres SA et S′A′, SB′ et S′B, SC et S′C′, le sont aussi.

Cela posé, plaçons la face S′A′B′ sur la face SAB ; l'angle dièdre S′A′ étant égal à l'angle dièdre SA, la face S′A′C′ s'appliquera sur le plan de la face SAC; et comme ces deux faces sont égales et disposées de la même manière, le sommet C′ tombera sur le sommet C : donc, etc.

Corollaire. — *Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont toutes les arètes égales chacune à chacune et assemblées de la même manière.*

Scolie. — *Un tétraèdre est déterminé par ses six arètes.*

Théorème II. (Fig. 420.)

545. *Deux tétraèdres*, S et S′, *sont égaux lorsqu'ils ont deux faces égales chacune à chacune*, SAB et S′A′B′, SAC et S′A′C′, *également inclinées, et semblablement disposées.*

Même démonstration.

Théorème III. (Fig. 420.)

546. *Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale*, ABC et A′B′C′, *et les angles dièdres adjacens égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

En effet, plaçons la face A′B′C′ sur la face ABC : à cause de l'égalité des angles dièdres AB et A′B′, la face S′A′B′ s'appliquera sur le plan de la face SAB ; et ainsi le point S' se trouvera dans ce plan ; il se trouvera de même dans les plans SAC et SBC ; donc il coïncidera avec leur point d'intersection S : donc, etc.

SCOLIE. — Dans les propositions précédentes, si la disposition est inverse, les tétraèdres sont symétriques : pour le démontrer, il n'y a qu'à supposer construit un tétraèdre symétrique de l'un des proposés (nº 543), et prouver qu'il est égal à l'autre, ce qui est facile.

Il résulte de là qu'*Un tétraèdre n'a qu'un seul symétrique ;* et que

Deux tétraèdres symétriques entre eux ont les faces égales, les angles trièdres symétriques (nº 516 et 520), et les angles dièdres égaux chacun à chacun. De plus, leurs hauteurs homologues sont égales, ainsi que les inclinaisons des arètes homologues sur les faces homologues.

547. Pour terminer ce qui regarde le tétraèdre, indiquons les énoncés de quelques théorèmes propres à servir d'exercices aux élèves.

THÉORÈMES *à démontrer.*

I. *Les perpendiculaires élevées sur les faces d'un tétraèdre par les centres respectifs de leurs cercles circonscrits, concourent toutes les quatre en un même point.*

Le point de concours est également distant des quatre sommets. Il est tantôt intérieur et tantôt extérieur ; il peut aussi être situé sur une face ou sur une arète.

II. *Les plans perpendiculaires aux arètes d'un tétraèdre et menés respectivement par leurs milieux, passent tous les six par un même point.*

Le point commun est le même que celui du théorème précédent.

III *Les plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre passent tous les six par un même point.*

Ce point est également distant des quatre faces ; il est toujours intérieur.

IV. *Les droites menées de chaque sommet d'un tétraèdre au centre des moyennes distances* (n° 248) *de la face opposée, concourent toutes les quatre en un même point.*

Ce point, que l'on nomme *centre des moyennes distances* (*) du tétraèdre, est situé dans l'intérieur de la figure, à l'intersection des trois plans menés parallèlement aux arètes opposées prises deux à deux : il se trouve au *quart,* en partant de la base, de chacune des quatre droites de l'énoncé. De là résulte le théorème suivant :

V. *Les plans menés parallèlement aux faces d'un tétraèdre, au quart de chaque hauteur à partir de ces faces* [prises tour à tour pour bases], *passent tous les quatre par un même point.*

Le point commun est le même que celui du théorème précédent.

VI. *Les plans menés par chaque arète d'un tétraèdre et par le milieu de l'arète opposée, passent tous les six par un même point.*

Ce point est le même que dans les deux théorèmes précédens. Quand le tétraèdre est régulier, les six plans sont des plans de symétrie ; ils se coupent deux à deux à angle droit.

VII. *Les droites menées dans un tétraèdre par les milieux des arètes opposées, concourent toutes les trois en un même point.*

Ce point est le même que dans les trois théorèmes précédens ; il est situé *au milieu* de chacune des trois droites.

VIII. *Les plans menés par le milieu de chaque arète d'un tétraèdre perpendiculairement à l'arète opposée, passent tous les six par un même point.*

Proposition fausse : Les perpendiculaires abaissées des som-

(*) Ou *centre de gravité.*

mets d'un tétraèdre sur les faces respectivement opposées concourent toutes les quatre en un même point.]≯

§ II. *De la Pyramide en général.*

548. Nous avons nommé Pyramide en général (nº 451), tout *polyèdre qui a pour faces, un polygone plan d'un nombre quelconque de côtés, et une série de triangles dont le sommet est commun.*

D'après cette définition, l'on obtient une pyramide en joignant par des droites les sommets d'un polygone ABCDE (fig. 421) à un point quelconque S extérieur à son plan. — Les triangles ainsi formés sont les *faces latérales* ou *pans* de la pyramide, et le polygone en est la *base*. Le sommet commun des triangles porte plus particulièrement le nom de *sommet* de la pyramide. La *hauteur* de la pyramide est la perpendiculaire SO abaissée du sommet S sur le plan de la base [prolongé s'il est nécessaire]. — Une pyramide est *convexe* ou *concave* suivant que sa base est un polygone convexe ou concave. Fig. 421.

Tous les angles polyèdres de la pyramide sont des angles trièdres, à l'exception de celui du sommet quand la pyramide a plus de trois faces latérales; et il est clair que la pyramide est *déterminée* quand on en connaît *trois faces formant un même angle trièdre*, c'est-à-dire *la base et deux faces latérales contiguës, avec leur position relative*. La pyramide est encore déterminée quand on connaît seulement *la base et une arête avec sa position*, ou bien *les arêtes latérales*, etc.

549. On distingue aussi les pyramides suivant le nombre de leurs pans. La pyramide *triangulaire* est celle qui a *trois* pans : c'est la même chose que le tétraèdre. La pyramide *quadrangulaire* est celle qui a *quatre* pans, etc. — Ou bien, une pyramide est dite *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*,..., suivant que sa base est un *triangle*, un *quadrilatère*, un *pentagone*,.... etc.

Fig. 421. Une pyramide est dite *régulière* lorsque sa *base* est un *polygone régulier* et que ses *pans* sont des *triangles isocèles égaux entre eux*. Alors, la droite menée du sommet au centre de la base est perpendiculaire à cette base (nº 462, *coroll*^{s}.) : on la nomme *axe*; et l'on nomme *apothème de la pyramide*, la hauteur commune des faces latérales, qu'il faut bien distinguer de la hauteur ou de l'axe de la pyramide, ainsi que de l'apothème de sa base. — *Deux pyramides régulières de même base et même hauteur sont égales*. — Une pyramide régulière est nécessairement convexe. — Le tétraèdre régulier est une pyramide triangulaire régulière; mais *non* pas *réciproquement*.

Une pyramide peut avoir des *plans de symétrie* (nºˢ 464, *coroll.* 1er; et 470, *scol.*) : il faut pour cela que sa base ait des axes de symétrie, et que le sommet se trouve sur les divers plans perpendiculaires à la base, menés respectivement par ces axes : ces plans sont alors les plans de symétrie de la pyramide. Ainsi, dans une pyramide régulière, chaque axe de symétrie de la base fournit un plan de symétrie.

Lorsque toutes les arêtes latérales d'une pyramide SABCDE (fig. 421) sont coupées par un plan entre le sommet et la base, la figure se trouve décomposée en deux autres : l'une S*abcde* est une seconde pyramide, et l'autre ABCDE*abcde* se nomme *un tronc de pyramide* ou *une pyramide tronquée*. On distingue, dans le tronc de pyramide, outre les faces latérales qui sont des quadrilatères, la *grande base* ABCDE qui n'est autre chose que la base de la pyramide entière, et la *petite base abcde*, qui coïncide avec celle de la petite pyramide retranchée. Si le plan coupant est parallèle à la base de la grande pyramide, on obtient un *tronc à bases parallèles*, dont les faces latérales sont des trapèzes (nº 472). — Un tronc de pyramide peut aussi avoir des plans de symétrie.

550. *Toute pyramide* SABCDE (fig. 421) *peut se décomposer en tétraèdres* ayant pour sommet commun celui de la

pyramide, et pour bases respectives les triangles ABC, ACD, ADE, dans lesquels peut se décomposer sa base. Fig. 421.

Deux pyramides égales peuvent toujours se décomposer en tétraèdres égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière; — et ***réciproquement.***

Deux *pyramides* peuvent être *composées de tétraèdres symétriques entre eux et inversement disposés :* alors elles sont dites *symétriques entre elles.* D'après cette définition, deux pyramides symétriques entre elles ont les faces égales, les angles dièdres égaux, les angles polyèdres symétriques, les inclinaisons et les hauteurs égales, chacun à chacun.

En prolongeant au-delà du sommet les arètes latérales d'une pyramide, et coupant ces arètes par un plan parallèle à la base, à une distance du sommet égale à la hauteur, on forme une pyramide symétrique de la première (*Voy.* le n° 543); et il est facile d'en conclure que deux pyramides respectivement symétriques d'une troisième sont égales entre elles, ou qu'*Une pyramide n'a qu'une seule symétrique.*

Théorème IV. (Fig. 421.)

551. *Les sections faites dans une pyramide* SABCDE *par deux plans parallèles qui coupent à la fois toutes les arètes latérales, sont des polygones semblables.*

Considérons, par exemple, pour simplifier la figure, la base ABCDE et une section parallèle *abcde*.

Les triangles latéraux SAB, SBC, SCD, SDE, SEA, étant semblables respectivement aux triangles S*ab*, S*bc*, S*cd*, S*de*, S*ea*, il s'ensuit d'abord que les côtés des deux polygones ABCDE et *abcde* sont proportionnels. Ensuite, ces côtés étant parallèles (n° 472) il en résulte que les deux polygones sont aussi équiangles (n° 487) : donc ils sont semblables (n° 221).

Corollaire. — *Toute section faite dans une pyramide par un plan parallèle à la base, est semblable à cette base* [la *réciproque* est *fausse*]; — et par conséquent, *Dans un tronc* *de pyramide à bases parallèles, ces bases sont semblables.*

Scolie. — Le rapport des dimensions homologues des sections parallèles est le même que celui des distances au sommet, comptées, soit sur les arètes, soit sur les perpendiculaires abaissées du sommet.

Théorème V.

552. *Deux pyramides sont égales lorsqu'elles ont la base et une face égales chacune à chacune, également inclinées, et semblablement disposées.*

La démonstration est la même que celle du *numéro* 529 ou celle du *numéro* 544.

Corollaire. — *Deux pyramides sont égales lorsqu'elles ont un angle trièdre formé de trois* [de leurs] *faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.*

Scolie. — L'égalité se change en symétrie si la disposition est inverse (*Voy.* le n° 550).

§ III. *Du Cône.*

553. De même que le cylindre peut être assimilé à un prisme (n° 537), de même aussi le *cône* (n° 453) peut être considéré comme une pyramide régulière d'un nombre infini de pans dont la base est infiniment petite (n° 549). Pour cette raison, la directrice d'une surface conique prend encore le nom de *base* quand elle est plane; et la surface est dite *circulaire* quand cette base est un cercle. Enfin, quand le sommet est situé sur l'axe de ce cercle (n° 461, *coroll.*), la surface est *circulaire droite.* — La surface conique se réduirait à un plan si son sommet était situé dans le plan de la base [supposée plane].

Toutes les arètes se coupant en un même point, il s'ensuit que

Tout plan mené suivant une arète et par un point d'une seconde arète, contient celle-ci tout entière.

Théorème VI. (Fig. 422.)

554. *Tout plan mené suivant une arète* SP *d'une surface* Fig. 422.
conique circulaire droite, et suivant une tangente TU *à sa base* ABP, *est tangent à la surface conique; — et réciproquement.*

La démonstration est la même que celle du *numéro* 538, en observant toutefois que les arètes, au lieu d'être parallèles entre elles, se coupent au sommet S.

Théorème VII. (Fig. 423.)

555. *Tout plan parallèle à la base* OA *d'une surface* Fig. 423.
conique circulaire droite, coupe cette surface suivant un cercle.

Soient O′, A′, et B′, les intersections respectives de ce plan avec l'axe SO et avec les deux arètes quelconques SA, SB; on aura (n° 214) :

$$OA : O'A' :: SO : SO',$$

$$OB : O'B' :: SO : SO';$$

d'où l'on tire : $O'A' = O'B'$: donc, etc.

Scolie 1^er^. — On a :

$$OA : O'A' :: SO : SO' :: SA : SA';$$

c'est-à-dire que *Les rayons des sections circulaires, les distances du sommet à leurs centres et à leurs circonférences respectives, sont proportionnelles.*

Scol. 2. — De là il résulte (*Voy.* le n° 454) que dans la génération de la surface conique circulaire droite, tous les points de la génératrice décrivent des cercles parallèles à la base, dont les rayons sont proportionnels à la distance du sommet, et dont l'axe est commun; et par conséquent la surface est de révolution autour de cet axe (*Voy* le n° 539, *scol.* 1^er^).

≼[*Scol.* 3. — Proposition analogue pour une surface conique quelconque : — *Les intersections d'une surface conique par des plans parallèles sont des courbes semblables* (n° 208) ; ce qui résulte d'ailleurs du théorème démontré (n° 551) pour la pyramide.]≽

Fig. 423. 556. Un cône circulaire droit (fig. 423) peut être considéré comme engendré par la révolution d'un triangle rectangle SOA autour d'un des côtés SO de l'angle droit O, qui devient l'axe du cône. — En menant un plan suivant l'axe du cône, on a pour section un triangle isocèle ASC double du triangle générateur : on peut désigner le cône par ce triangle, et dire le *cône* ASC ; lorsque ce triangle est équilatéral, le *cône* est dit *équilatéral*. — L'angle ASC se nomme *l'angle au centre* du cône ; l'angle ASO du triangle générateur est le demi-angle au centre. — L'angle au centre est le *maximum* de tous ceux que peuvent former les arètes prises deux à deux.

L'espace limité par une surface conique et par deux plans quelconques menés du même côté du sommet se nomme un *cône tronqué* ou *tronc de cône*. Les sections de la surface conique par les deux plans se nomment les *bases* du tronc. La *petite base* est la plus rapprochée et la *grande base* la plus éloignée du sommet. Quand les plans sont parallèles, le *tronc* est dit *à bases parallèles*.

Un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles CA' (fig. 423), peut être considéré comme engendré par la révolution d'un trapèze OA' rectangle en O et en O', tournant autour du côté OO' comme axe. La section du tronc de cône par un plan mené suivant l'axe est un trapèze symétrique (n° 160) double du trapèze générateur.

Toutes les arètes d'un cône circulaire droit étant égales entre elles, il en résulte que si l'on suppose sa surface latérale *ouverte* (n° 540) suivant une arète, le développement de cette surface sera un secteur ayant pour rayon l'arète du cône, et une base équivalente en longueur à la circonférence de la base du cône. [L'angle au centre de ce secteur est nécessairement moindre que 4 *droits* (Voy. le n° 513 *scol.*)]

Quant à la surface latérale du tronc de cône, elle devient, lorsqu'elle est développée, un trapèze circulaire (n° 302) dont les bases sont respectivement équivalentes en longueur aux circonférences des bases du tronc de cône, et dont la largeur est égale à son arète.

557. Une *pyramide* dont les arètes sont des arètes du cône, est dite *inscrite* au cône; et réciproquement le *cône* est *circonscrit* à la pyramide.

Une *pyramide* dont les faces sont tangentes au cône, est dite *circonscrite* au cône; et réciproquement le *cône* est *inscrit* à la pyramide.

Lorsqu'un cône et une pyramide sont inscrits ou circonscrits l'un à l'autre, cette même position relative existe aussi entre leurs bases.

Le cône peut être considéré comme la limite des pyramides inscrites et des pyramides circonscrites (*Voy.* le n° 553).

CHAPITRE VII.

DES POLYÈDRES EN GÉNÉRAL.

§ Ier. *Des Polyèdres quelconques.*

558. *Un polyèdre quelconque peut toujours se décomposer* [de plusieurs manières] *en tétraèdres.*

D'abord, un polyèdre quelconque peut se décomposer en polyèdres convexes : pour opérer cette décomposition, il n'y a qu'à mener convenablement un certain nombre de plans coupans par les arêtes rentrantes.

Fig. 424. Maintenant, soit un polyèdre convexe SABCDEFGIKLMNOPQ (fig. 424); [on n'a représenté que les faces antérieures, pour ne pas trop compliquer la figure]. Supposons que par un point quelconque intérieur au polyèdre, on mène des droites à tous ses sommets : on déterminera ainsi autant de triangles que le polyèdre a d'arêtes, ayant ces arêtes pour bases respectives, et le point intérieur pour sommet commun. De plus, il est facile de voir que le polyèdre se trouvera alors décomposé en pyramides, ayant respectivement ces triangles pour faces latérales, pour bases les faces du polyèdre, et aussi pour sommet commun le point intérieur. Or, on sait déjà qu'une pyramide peut se décomposer en tétraèdres (n° 550) : donc, etc.

Au lieu de placer intérieurement le sommet commun des pyramides, on peut le prendre, soit sur une face, soit sur une arête, soit au sommet d'un angle trièdre, tétraèdre, etc. Par exemple, prenons arbitrairement un sommet S auquel se réunissent les trois faces SABCD, SAEF, SDGIF; supposons des droites menées de ce sommet à tous les autres; et achevons la construction comme précédemment : le polyèdre se trouvera encore décomposé en pyramides qui auront pour bases ses diverses faces, à l'exception cependant de celles qui se réunissent en S. Et généralement, le nombre des pyramides obtenues sera égal au nombre total des faces du polyèdre, diminué du nombre des faces sur lesquelles se trouve le sommet commun des pyramides. Fig. 424.

559. Il est évident maintenant que deux polyèdres égaux peuvent se décomposer en tétraèdres égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière;

Et réciproquement que *Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils sont décomposables en un même nombre de tétraèdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

Deux polyèdres égaux ont nécessairement les arètes et les faces égales chacune à chacune et semblablement disposées, les inclinaisons égales, les angles dièdres et les angles polyèdres égaux;

Et réciproquement : *Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils ont les faces égales chacune à chacune, également inclinées, et semblablement disposées.*

En effet, si l'on considère le tétraèdre SABE (fig. 424) et son homologue dans le second polyèdre, on voit qu'ils sont égaux comme ayant deux faces égales chacune à chacune, comprenant un angle dièdre égal [SA et son homologue], et semblablement disposées. En retranchant ces deux tétraèdres, on aura deux nouveaux polyèdres dans lesquels les nouvelles faces seront encore égales et les nouveaux angles dièdres égaux chacun à chacun : on pourra donc opérer sur ces nouveaux polyèdres comme sur les précédens; et de proche en proche on aura décomposé les deux polyèdres proposés en un même nombre de tétraèdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés : d'où l'on voit qu'ils sont égaux.

Fig. 424. Ou bien on peut encore, pour plus de simplicité, faire coïncider d'abord la face SABCD avec son homologue. Les angles dièdres SA, AB, BC, CD, DS, étant respectivement égaux à leurs homologues, les faces contiguës se placeront chacune à chacune dans un même plan; et leur égalité les fera coïncider. Faisant de même coïncider, de proche en proche, les faces suivantes, on parviendra ainsi à faire coïncider entièrement les deux polyèdres.

⋞ [Il est bon de savoir d'ailleurs que la réciproque précédente contient trop de conditions : par exemple, lorsque les polyèdres sont convexes, il suffit qu'ils aient, pour être égaux, les faces égales chacune à chacune et disposées de la même manière; l'égalité des inclinaisons respectives des faces égales est une conséquence de l'égalité et de la disposition de ces faces. (Pour la démonstration, *Voyez*, dans le *Journal de l'École polytechnique*, XVI[e] cahier, *page* 87 et suiv., un *Mémoire* de M. Cauchy sur ce sujet.)] ⋟

560. Deux polyèdres égaux ont aussi les diagonales homologues égales chacune à chacune; d'où il suit que si l'on combine 4 *à* 4, de toutes les manières possibles, les sommets homologues de deux polyèdres égaux, on déterminera, en joignant ces sommets par des droites, autant de couples de tétraèdres égaux chacun à chacun, que l'on peut former de combinaisons.

On peut supposer un polyèdre déterminé par 3 sommets et leurs distances à tous les autres, ce qui, en nommant n le nombre des sommets, exige la connaissance de $3+3(n-3)$ ou de $3(n-2)=3n-6$ données.

On arrive au même résultat en supposant le polyèdre *décomposé* (n° 558) en tétraèdres n'ayant tous pour sommets que ceux mêmes du polyèdre : le premier tétraèdre exige 6 données pour déterminer 4 sommets; il reste à déterminer $(n-4)$ sommets pour chacun desquels il faut un tétraèdre; chacun de ces $(n-4)$ autres tétraèdres exige 3 données, ce qui fait en tout $6+3(n-4)=3n-6$ données.

Il en serait encore de même si les tétraèdres avaient un sommet commun, pris, soit dans l'intérieur du polyèdre, soit sur une arète; mais le nombre des tétraèdres n'est pas le même dans ces divers genres de décomposition; et il est évidemment le plus petit possible quand les tétraèdres n'ont aucun sommet qui ne soit un de ceux du polyèdre.

[Néanmoins, lorsque le polyèdre est d'une espèce donnée, c'est-à-dire lorsque l'on connaît le nombre de ses faces, le nombre des côtés respectifs de ces faces, et leur disposition relative, le nombre des données nécessaires pour déterminer le polyèdre est beaucoup moindre et se réduit à celui des arètes (*Voyez* la *Géométrie* de M. Legendre). Quelquefois même il est encore moindre, comme on l'a vu dans la théorie du prisme.]

561. Deux Polyèdres sont dits Symétriques entre eux lorsqu'ils *peuvent se décomposer en un même nombre de tétraèdres symétriques chacun à chacun et inversement disposés.*

Il résulte d'abord de cette définition, que si une face de l'un des polyèdres est composée de plusieurs faces triangulaires des tétraèdres qui le composent, les faces triangulaires homologues des tétraèdres homologues du second polyèdre se réuniront aussi en une seule dans un même plan pour former une face symétrique de celle du premier polyèdre.

Il en résulte en second lieu, que

Deux polyèdres symétriques ont toutes les arètes égales, les faces symétriques, les inclinaisons égales, les angles dièdres égaux, et les angles polyèdres symétriques, chacun à chacun;

Et que réciproquement : *Deux polyèdres sont symétriques lorsqu'ils ont les faces égales chacune à chacune, inversement disposées, et également inclinées :*

En effet, si l'on construit un troisième polyèdre, symétrique de l'un des proposés, il sera nécessairement égal au second (n° 559), comme ayant les faces et les angles dièdres respectivement égaux à ceux de ce second polyèdre, et semblablement disposés.

562. Pour construire ce polyèdre symétrique de l'un des proposés, il faut commencer par supposer celui-ci décomposé en tétraèdres, ce qui peut se faire de plusieurs manières (n° 558); mais, quel que soit l'ordre suivi dans la décomposition du premier des polyèdres proposés, le nouveau polyèdre construit sera toujours égal au second des proposés; d'où il résulte qu'*Un polyèdre n'a qu'un seul symétrique*.

De ce que cet ordre de décomposition est arbitraire, il résulte encore que *Dans deux polyèdres symétriques, les diagonales homologues* [que l'on pourra toujours, au moyen d'une décomposition convenable, regarder comme des arètes homologues de tétraèdres symétriques] *sont égales chacune à chacune;* et par suite, que si l'on combine 4 *à* 4, de toutes les manières possibles, les sommets homologues des deux polyèdres, on formera, en joignant ces sommets par des droites, une série de tétraèdres symétriques chacun à chacun.

⋞[Dans le cas de polyèdres convexes, l'énoncé de la réciproque précédente contient encore des conditions superflues, celles de l'égalité des angles dièdres (n° 559).]⋟

Lorsque la figure est un prisme, les conditions de la symétrie se réduisent à l'égalité de la base et d'une face adjacente, également inclinées et inversement disposées : parce que la base et une arète avec sa position suffisent pour déterminer un prisme (n° 525). [Cette observation était nécessaire pour faire voir que la définition que nous avons donnée (n° 527) des prismes symétriques *en général,* rentre dans la définition générale, dont, au premier abord, elle semble s'écarter.]

⋞[Théorème I.]⋟

563. *Le nombre* [*S*] *des sommets d'un polyèdre convexe, augmenté du nombre* [*F*] *de ses faces, forme une somme égale*

au nombre [A] *des arètes augmenté de* DEUX : c'est-à-dire que l'on a toujours

$$S+F=A+2.$$

En effet, supposons que, par un point quelconque pris dans l'intérieur du polyèdre, on mène des droites à tous ses sommets : ces droites détermineront une série d'angles plans, en nombre égal à celui des arètes du polyèdre, formant, par leur réunion, autant d'angles polyèdres que le polyèdre a de faces : d'où (n° 524) l'on conclut l'énoncé.

Scolie. — Le théorème précédent est dû au célèbre géomètre EULER dont il porte le nom.

THÉORÈME II.

564. *La somme des angles plans qui forment les angles polyèdres de tout polyèdre convexe, vaut autant de fois* 4 DROITS *qu'il a de sommets moins* DEUX.

En effet, si dans le polyèdre, on nomme

t le nombre des faces *triangulaires*,
q le nombre des ..... *quadrilatères*,
p celui des.......... *pentagones*,
h celui des.......... *hexagones*,
e celui des.......... *heptagones*,
etc., etc.,

la somme de tous les angles plans du polyèdre vaudra

$$(2t+4q+6p+8h+10e+\ldots.)\ \textit{angles droits}.$$

Mais on a

$$A=\tfrac{1}{2}(3t+4q+5p+6h+7e+\ldots.),$$

d'où
$$4A=6t+8q+10p+12h+14e+\ldots.);$$

et comme d'ailleurs

$$4F=4t+4q+4p+4h+4e+\ldots.,$$

il en résulte

$$2t+4q+6p+8h+10e+\ldots.\ =4A-4F=4(S-2);$$

ce qui démontre la proposition.

Théorème III.

565. *Dans tout polyèdre, les faces d'un nombre impair de côtés sont toujours en nombre pair.*

En effet, il résulte de la valeur de A, employée dans la démonstration du théorème précédent, que la somme

$$3t + 4q + 5p + 6h + 7e + \ldots.$$

est un nombre *pair*; et par suite, plus simplement, que

$$t + p + e + \ldots.$$

est un nombre *pair*. *C. Q. F. D.*

Théorème IV.

566. *Dans tout polyèdre, les sommets auxquels aboutissent un nombre impair d'arètes sont toujours en nombre pair.*

En effet, comme chaque arète appartient à la fois à deux faces et se termine à deux sommets, il s'ensuit qu'en comptant, soit le nombre des côtés de toutes les faces, soit le nombre des arètes de tous les sommets, on compte deux fois le nombre total des arètes.

Par conséquent, à la valeur de A donnée dans le théorème II (n° 564), et employée dans le théorème III (n° 565) qui précède, on peut substituer la suivante

$$A = \tfrac{1}{2}(3t' + 4q' + 5p' + 6h' + 7e' + \ldots),$$

formule dans laquelle

t' représente le nombre des *angles trièdres*,
q'.............. celui des *angles tétraèdres*,
p'...................... *angles pentaèdres*,
h'............................. *hexaèdres*,
e'............................. *heptaèdres*,

etc., etc.

Il en résulte, comme ci-dessus, que

$$3t' + 4q' + 5p' + 6h' + 7e' + \ldots.,$$

et plus simplement, que

$$t' + p' + e' + \ldots.$$

est un nombre *pair*. *C. Q. F. D.*

Scolie. — La comparaison des deux théorèmes précédens conduit à une remarque très importante, en laissant entrevoir une propriété générale des polyèdres, qui consiste en ce qu'à l'exception de quelques théorèmes [tels, par exemple, que celui d'*Euler* (n° 563)] dans l'énoncé desquels le nombre des faces et celui des sommets figurent de la même manière, il ne saurait exister, entre le nombre des arètes, celui des sommets, et celui des faces, aucune relation à laquelle il n'en réponde une autre qui s'en déduit en permutant simplement entre eux les mots *faces* et *sommets*.

On nomme *conjugués* ou *réciproques* les polyèdres qui présentent ces relations mutuelles.

(*Voyez*, pour la théorie des polyèdres, outre le *Mémoire* de M. Cauchy déjà cité, les *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne, en divers endroits, et notamment *Tome* xv, page 157.)]⪰

⪯[§ II. *Des polyèdres réguliers.*]⪰

Théorème V.

567. *Il ne peut exister que* 5 *sortes de polyèdres réguliers.*

Considérons d'abord les polyèdres à faces *triangulaires*.

Les faces étant des triangles réguliers, on ne peut réunir à chaque sommet plus de 5 faces, parce que chaque angle plan d'un triangle équilatéral vaut $\frac{2}{3}$, et que $\frac{2}{3} \times 6 = 4$, somme déjà trop forte pour former un angle polyèdre (n° 513, *scol.*).

On pourra donc réunir 3, ou 4, ou 5 triangles ; et dans ces trois cas on aura $A = \frac{3}{2} F$, puisque chaque triangle a

3 côtés, et que chaque côté d'un triangle se réunit à un côté d'un autre triangle pour former une arète. De là on tire par le théorème d'*Euler* pour le cas où les faces du polyèdre sont des triangles,

$$2S = F + 4.$$

Si l'on réunit 3 triangles à chaque sommet du polyèdre, on aura

$$S = \frac{3}{3}F = F\,;\ \text{d'où}\ 2F = F + 4,\ \text{ou}\ F = 4\,;$$

et la figure sera un *tétraèdre régulier*.

Si l'on réunit 4 triangles à chaque sommet, on aura

$$S = \frac{3}{4}F\,;\quad \text{d'où}\quad \frac{3}{2}F = F + 4,\quad \text{ou}\quad F = 8\,;$$

et la figure sera dite un *octaèdre régulier*.

Si l'on réunit 5 triangles à chaque sommet, on aura

$$S = \frac{3}{5}F\,;\quad \text{d'où}\quad \frac{6}{5}F = F + 4,\quad \text{ou}\quad F = 20\,;$$

et la figure sera un *icosaèdre régulier*.

Maintenant, prenons pour faces des *carrés :* nous aurons

$$A = \frac{4}{2}F = 2F\,;\quad \text{d'où}\quad S = F + 2.$$

On ne peut assembler des carrés que 3 *à* 3 : donc

$$S = \frac{4}{3}F\,;\quad \text{d'où}\quad \frac{4}{3}F = F + 2,\quad \text{ou}\quad F = 6\,;$$

ainsi la figure sera un *hexaèdre*.

Enfin, prenons pour faces des *pentagones :* nous aurons

$$A = \frac{5}{2}F\,;\quad \text{d'où}\quad S = \frac{3}{2}F + 2,\quad \text{ou}\quad 2S = 3F + 4.$$

Les pentagones ne peuvent non plus s'assembler que 3 *à* 3 : ainsi

$$S = \frac{5}{3}F\,;\quad \text{d'où}\quad \frac{10}{3}F = 3F + 4,\quad \text{ou}\quad F = 12\,;$$

et la figure sera un *dodécaèdre*.

On ne saurait former d'angle trièdre avec des hexagones réguliers, ni à plus forte raison avec des polygones réguliers d'un nombre de côtés plus grand que 6 (n° 513) : donc *Il ne peut exister que 5 sortes de polyèdres réguliers.*

Prouvons maintenant qu'en effet ces polyèdres peuvent être construits.

CONSTRUCTION DES POLYÈDRES RÉGULIERS.

568. *Tétraèdre régulier* (fig. 425). — On peut toujours réunir *trois* triangles équilatéraux SAB, SAC, SBC, de manière à former un angle trièdre S (n° 515, *théor.* VII). Cela fait, la figure ABC sera évidemment un triangle égal aux trois premiers, et les angles dièdres seront tous égaux (n° 515, *théor.* I) : donc, etc. Fig. 425.

Le tétraèdre régulier a 4 sommets et 6 arètes : le nombre des sommets est donc égal à celui des faces. — Nous avons vu (n° 547, *théor.* VI) qu'il avait 6 plans de symétrie.

569. *Octaèdre régulier* (fig. 426). — Supposons que par le point O on mène d'abord 3 droites, AA′, BB′, CC′, perpendiculaires entre elles (n° 465, *coroll.*), de manière que OA = OA′ = OB = OB′ = OC = OC′ ; puis ensuite les droites AB, BA′, A′B′, B′A, CA, CB, CA′, CB′, C′A, C′B, C′A′, C′B′ : on aura formé ainsi *huit* pyramides triangulaires régulières, OABC, OBA′C, OA′B′C, OB′AC, OABC′, OBA′C′, OA′B′C′, OB′AC′, égales entre elles (n° 544). Fig. 426.

Donc les faces ABC, BA′C, A′B′C, B′AC, ABC′, BA′C′, A′B′C′, B′AC′, sont égales entre elles et également inclinées : donc le polyèdre à *huit* faces CABA′B′C′ est un polyèdre régulier.

L'octaèdre régulier a 6 sommets et 12 arètes. — Il a 9 plans de symétrie dont 6 sont perpendiculaires sur les milieux des arètes opposées prises deux à deux, et les 3 autres sur les milieux des droites qui joignent les sommets opposés pris aussi deux à deux. Chacun de ces derniers partage la figure en deux pyramides quadrangulaires régulières égales entre elles et opposées par la base.

Fig.427. 570. *Icosaèdre régulier* (fig. 427). — Soit un triangle équilatéral ABC. Supposons d'abord qu'avec cinq triangles égaux à ABC [le triangle ABC compris] on forme au point A un angle pentaèdre régulier, ce qui est toujours possible (n° 515, *théor.* VII). Supposons ensuite qu'au point B on forme de la même manière, en employant la face ABC, un angle pentaèdre régulier : ce second angle pentaèdre sera égal au précédent; leurs angles dièdres seront par conséquent tous égaux; donc ces deux angles pentaèdres auront deux faces communes, ABC, ABD. De même, il suffira de deux nouveaux triangles CFG, CGI, pour former au point C un troisième angle pentaèdre régulier, puisque les angles dièdres AC, BC, ont la valeur convenable. On aura ainsi réuni *dix* triangles égaux et également inclinés, composant une sorte de *calotte polyèdre* DEFGIK telle que les angles du *bord* seront alternativement formés de *deux* et de *trois* triangles.

Cela fait, imaginons que l'on construise de la même manière une seconde calotte égale à la première : tous les angles dièdres de cette seconde calotte auront la même valeur que ceux de la première. Donc on pourra, sans solution de continuité, réunir les *angles doubles* du bord de la première avec les *angles triples* du bord de la seconde, *et vice versâ;* et il en résultera une figure à 20 faces égales entre elles et également inclinées.

L'icosaèdre régulier a 12 sommets, 30 arètes, et 15 plans de symétrie qui passent par les arètes opposées prises deux à deux. Les 5 faces qui se réunissent à chaque sommet forment une pyramide régulière.

Fig.412. 571. *Hexaèdre régulier* (fig. 412). — C'est le polyèdre que l'on a nommé *cube* (n° 530).

Le cube a 8 sommets et 12 arètes. — Nous avons vu (n° 530) qu'il a 9 plans de symétrie.

L'octaèdre régulier et le cube ont le même nombre d'arètes et le même nombre de plans de symétrie; et le nombre des faces de l'un est égal au nombre des sommets de l'autre.

572. *Dodécaèdre régulier* (fig. 428). — Supposons qu'avec *trois* pentagones réguliers égaux on forme un angle trièdre, ce qui est possible (n° 515, *théor.* VII) : les trois angles dièdres de cet angle trièdre seront égaux (n° 515, *théor.* I). Maintenant, avec de nouveaux pentagones égaux aux précédens, on peut de même former successivement au point B, au point C, au point D, et enfin au point E, d'autres angles trièdres toujours de même valeur. Cela fait, on aura *six* pentagones réguliers composant une calotte FGIKLMNOPQ telle que les angles du *bord* seront alternativement formés d'*un* et de *deux* angles plans. Fig. 428.

Si l'on imagine ensuite une seconde calotte égale à la première, on pourra les réunir toutes deux *bord à bord* de manière que les *angles simples* de l'une se raccorderont avec les *angles doubles* de l'autre ; et l'on aura ainsi une figure à 12 faces égales et également inclinées.

Le dodécaèdre régulier a 20 sommets, 30 arètes, et 15 plans de symétrie qui passent par les arètes opposées prises deux à deux.

Le nombre des arètes de l'icosaèdre et du dodécaèdre régulier est le même, ainsi que le nombre des plans de symétrie; et le nombre des sommets de l'un est égal au nombre des faces de l'autre.

THÉORÈME VI. (Fig. 429.)

573. *Tout polyèdre régulier peut être décomposé en autant de pyramides régulières qu'il a de faces.* Fig. 429.

Soient ABC, ABD, deux faces adjacentes d'un polyèdre régulier quelconque, AB leur commune arète, et E, F, leurs centres respectifs. Des points E, F, abaissons sur AB des perpendiculaires : elles seront égales et tomberont en un même point G ; de plus elles détermineront un plan perpendiculaire à AB (n° 437) et par conséquent aux deux faces (n° 465, *scol.*), et feront un angle EGF qui mesurera leur angle dièdre (n° 444). Cela posé, par les points E et F, menons des droites respectivement perpendiculaires aux deux faces : elles se couperont (n° 115) en un point O qui sera également distant des points A, B, C, D (n° 462) : les pyramides OABC, OABD, seront donc régulières (n° 549), et égales entre elles (n° 552); et leurs hauteurs respectives seront OE, OF. De plus, si l'on mène OG, on formera deux triangles OEG, OFG, égaux entre eux (n° 138); de sorte que les angles OGE, OGF, mesureront respectivement la moitié de l'angle dièdre des deux faces.

Je dis maintenant que les perpendiculaires élevées sur chacune des autres faces par son centre, viendront aboutir au point O : et il suffit de prouver la proposition pour une troisième face adjacente à l'une des deux premières. Pour cela, supposons que par le centre d'une face adjacente à ABC, on élève une perpendiculaire : cette droite rencontrera la droite EO en un certain point dont la position dépend de l'angle dièdre des deux faces; et comme cet angle dièdre est le même que celui des deux premières, il est facile de voir, d'après cette considération, que le nouveau point de rencontre est le point O lui-même.

De là on conclut l'énoncé du théorème.

Scolie 1er. — On peut nommer *pyramides intégrantes* les pyramides régulières qui composent les polyèdres réguliers.

Scol. 2. — Le point O est d'une part également distant de toutes les faces du polyèdre, ensuite de toutes ses arètes, et enfin de tous ses sommets; et il est, de plus, le point de concours de tous les plans de symétrie : on le nomme le *centre* du polyèdre régulier. On nomme *rayons* du polyèdre régulier les arètes latérales des pyramides intégrantes qui le composent, ou les distances du centre aux sommets ; la hauteur des pyramides, ou la distance du centre aux faces, est l'*apothème* du polyèdre.

Scol. 3. — Un polyèdre peut n'avoir pour faces que des polygones réguliers, sans être pour cela un polyèdre régulier; *exemple :* deux tétraèdres réguliers égaux opposés base à base.

THÉORÈMES A DÉMONTRER.

574. THÉORÈME I. — *Si l'on joint deux à deux par des droites les centres des faces d'un tétraèdre régulier, ces droites seront les arètes d'un second tétraèdre régulier* [inscrit au premier].

TH. II. — *Si l'on mène des plans perpendiculaires aux extrémités des rayons d'un tétraèdre régulier, ces plans détermineront un second tétraèdre régulier* [circonscrit au premier].

TH. III. — *Si l'on joint deux à deux par des droites les centres des faces adjacentes d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{octaèdre}\\ \textit{hexaèd.}\end{matrix}\right\}$ *régulier, ces droites seront les arètes d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{hexaèdre}\\ \textit{octaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier* $\left[\text{inscrit}\left\{\begin{matrix}\text{à l'octaèdre}\\ \text{à l'hexaèdre}\end{matrix}\right\}\right]$.

TH. IV. — *Si l'on mène des plans perpendiculaires aux extrémités des rayons d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{octaèdre}\\ \textit{hexaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier, ces plans détermineront un* $\left\{\begin{matrix}\textit{hexaèdre}\\ \textit{octaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier* $\left[\text{circonscrit}\left\{\begin{matrix}\text{à l'octaèdre}\\ \text{à l'hexaèdre}\end{matrix}\right\}\right]$.

TH. V. — *Si l'on joint deux à deux par des droites les centres des faces adjacentes d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{icosaèdre}\\ \textit{dodécaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier, ces droites seront les arètes d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{dodécaèdre}\\ \textit{icosaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier* $\left[\text{inscrit}\ \ldots\ldots \left\{\begin{matrix}\text{à l'icosaèdre}\\ \text{au dodécaèdre}\end{matrix}\right\}\right]$.

TH. VI. — *Si l'on mène des plans perpendiculaires aux extrémités des rayons d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{icosaèdre}\\ \textit{dodécaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier, ces plans détermineront un* $\left\{\begin{matrix}\textit{dodécaèdre}\\ \textit{icosaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier* $\left[\text{circonsc.}\left\{\begin{matrix}\text{à l'icosaèdr.}\\ \text{au dodécaè.}\end{matrix}\right\}\right]$.

Scolie 1[er]. — Dans deux polyèdres réguliers inscrits ou circonscrits l'un à l'autre, les arètes de l'un sont, chacune à chacune, perpendiculaires aux arètes de l'autre ; et les plans de symétrie sont communs.

Scol. 2. — Le cube et l'octaèdre régulier sont des *polyèdres* *réguliers réciproques* l'un de l'autre (nº 566, *scol.*) ; il en est de même du dodécaèdre et de l'icosaèdre régulier ; le tétraèdre régulier est réciproque de lui-même.

TH. VII. — *Deux polyèdres réguliers réciproques qui ont des rayons égaux, ont aussi des apothèmes égaux ; — et réciproquement.*

TH. VIII. — *Les angles dièdres d'un polyèdre régulier sont supplémentaires des angles au sommet des faces latérales des pyramides intégrantes de son réciproque.*

CHAPITRE VIII.

DE LA SPHÈRE.

§ Ier. *Propriétés générales.—Cercles de la Sphère, etc.*

Théorème I. (Fig. 430.)

575. *Toute section d'une sphère* OA *par un plan* CDEF *est un cercle.* Fig. 430.

En effet, abaissons du centre O la perpendiculaire OP sur le plan de la section; et menons aux divers points de la ligne d'intersection, les rayons OC, OD,..., et les droites PC, PD,... etc. Les obliques OC, OD,.... étant égales, on aura aussi (n° 461, *récipr.*) PC = PD = ...; donc la ligne d'intersection est une circonférence de cercle qui a pour centre le point P et pour rayon la distance PC.

576. Lorsque le plan passe par le centre de la sphère, le cercle et la sphère ont même centre et même rayon, comme nous l'avons déjà dit (n° 456). On nomme Grand Cercle l'*intersection de la sphère et d'un plan* GIKL (fig. 430) *qui passe par son centre*, parce que ce cercle est le plus grand que l'on puisse tracer sur sa surface. Les autres sections se nomment des *petits cercles.* — *Tous les grands cercles d'une même sphère, ou de sphères égales, sont égaux.*

De plus, il est facile de voir que

Deux points quelconques, A, C, *d'une surface sphérique déterminent toujours un grand cercle* [pourvu qu'ils ne soient

Fig. 430. pas sur un même diamètre], puisque ces deux points et le centre de la sphère déterminent un plan. — Mais si les deux points A, B, étaient les extrémités d'un même diamètre AB, on pourrait y faire passer une infinité de grands cercles.

On peut aussi, par les deux points A, B, faire passer une infinité de petits cercles, puisque l'on peut y faire passer une infinité de plans; mais, quand on parle d'un arc de cercle passant par deux points A et B, c'est toujours d'un arc de grand cercle que l'on est censé parler, à moins que l'on n'énonce expressément le contraire.

On peut conclure de là, que

Deux grands cercles, ACBE, ADBF, *se coupent mutuellement en deux parties égales*,

Puisque leur intersection commune AB, passant par le centre O, est un diamètre commun aux deux cercles.

On peut en conclure encore que *La sphère est une surface convexe*, c'est-à-dire qu'une ligne droite ne saurait percer sa surface en plus de *deux* points : car en menant un plan par cette droite et par le centre, on obtient une circonférence de grand cercle, qui, d'une part, doit contenir tous les points communs à la droite et à la surface sphérique, et qui, d'autre part, n'en peut contenir que deux (n° 100).

577. Le centre du cercle CDEF (fig. 430) et celui de la sphère sont sur une même droite perpendiculaire au plan du cercle; cette droite est l'*axe* du cercle, et l'on nomme Pôles du cercle les points A, B, où cette droite perce la surface sphérique. — *Tous les cercles parallèles ont même axe et mêmes pôles.*

Tous les points de la circonférence CDEF *d'un cercle de la sphère sont également distans* [en ligne droite] *de chacun de ses pôles*, A ou B.

Par conséquent, tous les arcs de grand cercle, CA, DA, menés des différens points de la circonférence CDEF à l'un de ses pôles, A ou B, sont égaux, puisqu'ils ont leurs cordes égales (n° 104, *récipr.*); et les plans de ces arcs sont perpendiculaires à celui de la circonférence, puisqu'ils contiennent l'axe de celle-ci. — On dit, pour cette raison, que ces *arcs* sont *perpendiculaires* à la circonférence; et il est clair, d'après ce qui précède, que Fig 430.

Par un point donné sur la surface de la sphère, *on ne peut mener qu'un seul arc de grand cercle perpendiculaire à un grand cercle* [ou à un petit cercle] *donné*, à moins que le point donné ne soit le pôle du cercle donné (*Voy.* le n° 466, *coroll.*).

Les arcs de grand cercle menés des divers points de plusieurs circonférences parallèles, à l'un de leurs pôles communs, sont d'autant plus grands que ces circonférences sont plus éloignées du pôle. Pour toute circonférence de grand cercle, l'arc de grand cercle mené de chacun de ses points à l'un de ses pôles est un quart de grand cercle ou un *quadrant* (n° 19). Enfin, tous les arcs de grand cercle, compris entre deux circonférences parallèles et perpendiculaires à leurs plans, sont égaux.

578. Chaque pôle d'un cercle est déterminé par l'*intersection de deux arcs* de grand cercle *perpendiculaires* à son plan, et menés respectivement par deux points de sa circonférence [non situés sur le même diamètre]; et quand il s'agit d'un grand cercle, le pôle se trouve encore à l'*extrémité d'un quadrant perpendiculaire*.

Réciproquement : *Un cercle est déterminé par un point de sa circonférence et un de ses deux pôles;* et l'on peut, avec ces données, le décrire au moyen d'un compas.

Si l'on suppose la distance rectiligne des deux pointes du compas égale à la diagonale du carré construit sur un côté égal au rayon [et que ses deux branches soient convenablement courbées], on pourra s'en servir pour décrire sur la surface, des circonférences ou des arcs de grand cercle, pour trouver les pôles d'un grand cercle donné, etc., etc.

579. Il y aurait encore à établir, sur la théorie des arcs de cercle tracés sur la sphère, plusieurs théorèmes importans ; mais comme ils se déduisent facilement d'autres théorèmes déjà démontrés, nous ne ferons que les indiquer, en même temps que les propositions sur lesquelles ils reposent ou avec lesquelles ils ont de l'analogie.

THÉORÈME I. — *Les arcs de grand cercle perpendiculaires abaissés d'un point donné sur une circonférence de grand cercle, sont un* MAXIMUM *et un* MINIMUM parmi tous les arcs de grand cercle que l'on peut mener du même point à la même circonférence (*Voy.* le n° 463) ;

On pourrait aussi démontrer la même proposition pour le cas plus général où la circonférence donnée est quelconque.

TH. II. — *Les arcs obliques également éloignés de l'arc perpendiculaire à un grand cercle sont égaux* (Voy. le même *numéro*) :

TH. III. — *Les arcs obliques sont d'autant plus grands qu'ils sont plus éloignés du* PLUS PETIT *arc perpendiculaire* (même *numéro*).

TH. IV. — *L'arc de grand cercle élevé perpendiculairement sur le milieu d'un arc, contient tous les points de la surface sphérique dont les distances à ses deux extrémités, comptées sur des arcs de grand cercle, sont égales entre elles* (Voy. le n° 97).

Etc., etc.

Fig. 430. 580. On nomme CALOTTES SPHÉRIQUES les deux *portions dans lesquelles la surface se trouve divisée par un plan* CDEF (fig. 430) ; le cercle CDEF est leur *base* commune. Le *sommet* d'une calotte ACDEF est le point A où elle est percée par l'axe du cercle CDEF qui lui sert de base ; et sa *hauteur* est la portion AP de cet axe, comprise entre son sommet et le centre P de la base.

On nomme SEGMENT SPHÉRIQUE la *portion de sphère comprise entre une calotte sphérique et sa base*. Le segment sphérique a même axe, même hauteur, et même sommet que la calotte correspondante. Fig. 430.

On nomme ZONE SPHÉRIQUE la *portion de surface sphérique comprise entre deux plans parallèles*, tels que CDEF, GIKL (fig. 430), ou la *différence de deux calottes à bases parallèles*. Ces deux bases sont les *bases* de la zone. Une zone a même *axe* que les calottes dont elle est la différence; la portion de cet axe, comprise entre les deux bases, ou la distance de leurs plans, est la *hauteur* de la zone.

On nomme TRANCHE SPHÉRIQUE la *portion de sphère comprise entre deux plans parallèles*, ou la *différence de deux segmens à bases parallèles*. Une tranche sphérique a mêmes bases, même axe, et même hauteur que la zone correspondante.

On nomme SECTEUR SPHÉRIQUE l'*espace compris entre une calotte* ACB (fig. 8) *et une surface conique* AOB *ayant pour* Fig. 8.
sommet le centre O *de la sphère et pour base celle de la calotte*. Un secteur se compose ainsi d'un segment augmenté ou diminué d'un cône. Il se réduirait toutefois à un segment si la base de la calotte était un grand cercle. On nomme *base* d'un secteur la calotte qui lui correspond.

On peut considérer une calotte ACB comme engendrée par la révolution d'un arc de cercle AC tournant autour d'un diamètre COD qui passe par l'une de ses extrémités, et la base de cette calotte comme engendrée par le sinus AI de l'arc.

De même, un secteur sphérique OACB peut être considéré comme engendré par un secteur circulaire OAC tournant autour d'un de ses côtés OC ; etc., etc.

On nomme FUSEAU SPHÉRIQUE chacune des quatre portions de Fig. 430.
surface sphérique, comprise entre les plans de deux grands cercles ACBE, ADBF (fig. 430), qui se coupent, et *coin sphérique* la portion de sphère correspondante ; on nomme *arète* le diamètre d'intersection des deux plans ; ceux-ci sont les *faces* du coin ; leur angle dièdre est l'*angle dièdre correspondant* au fuseau ou au coin qu'ils comprennent : et cet angle dièdre a

pour mesure l'arc de grand cercle compris entre les deux faces, et décrit de l'une des extrémités de l'arête, considérée comme pôle. Le *fuseau* ou le *coin* est dit *rectangulaire* lorsque l'angle dièdre correspondant est droit, ou lorsque l'arc correspondant est un quadrant. — *Deux fuseaux ou deux coins sont égaux* [sur une même sphère] *lorsqu'ils correspondent à des angles dièdres égaux;* et de plus, *ils sont proportionnels aux angles dièdres* (*Voy.* le n° 444).

Enfin, on appelle Angle de deux arcs *de cercle* qui se coupent, l'angle de leurs tangentes respectives, menées par leur point d'intersection. Quand il s'agit de deux arcs de grand
Fig.430. cercle, tels que AC, AD (fig. 430), [ayant pour tangentes respectives MAN, RAS], cet angle, qui n'est autre chose que l'angle dièdre de leurs plans (n° 577), se mesure par l'arc du grand cercle GI décrit du sommet de l'angle comme pôle entre ses côtés, prolongés s'il est nécessaire.

Théorème II. (Fig. 431.)

Fig.431. 581. *Quatre points, A, B, C, D, non situés dans un même plan, déterminent une surface sphérique.*

D'abord, trois quelconques de ces points, A, B, C [lesquels, d'après l'hypothèse, ne sauraient se trouver sur une même droite], déterminent une circonférence qui peut être considérée comme appartenant à une infinité de surfaces sphériques différentes, ayant toutes leurs centres sur l'axe PQ du cercle ABC.

Maintenant, supposons que l'on mène un plan par l'axe PQ et par le point D; et soit E l'un des points d'intersection de ce plan avec la circonférence ABC: il sera toujours possible de faire passer, par les deux points D, E, une circonférence qui aura son centre sur l'axe PQ (n° 317, *scol.* 1er, 2°) en un point O. Or ce point, ainsi déterminé, sera également distant des quatre points A, B, C, D; et de plus, ce sera le seul. Donc, parmi toutes les surfaces sphériques qui passent par les trois points A, B, C, il y en aura nécessairement une qui passera par le quatrième point D; et ce sera la seule. *C. Q. F. D.*

Scolie 1er. — Quatre points situés dans un meme plan ne détermineraient pas une sphère : en effet, si les quatre points sont sur une même circonférence, on peut y faire passer une infinité de surfaces sphériques différentes ; et s'ils ne sont pas sur une même circonférence, on n'en peut faire passer aucune.

SCOL. 2. — *Une surface sphérique est déterminée par une circonférence de petit cercle et un point extérieur à cette circonférence,* — ou *par une circonférence de petit cercle et le centre de la sphère,* — ou *par une circonférence de grand cercle.*

SCOL. 3. — *Une même portion de surface sphérique ne saurait appartenir à deux sphères différentes.*

COROLLAIRE 1er. — *Deux calottes sphériques sont égales lorsqu'elles ont des bases égales et même hauteur :*

En effet, la hauteur de la calotte déterminant le pôle de sa base, détermine la surface (*scol.* 2).

Coroll. 2. — Deux calottes d'une même sphère sont égales lorsqu'elles ont des bases égales et sont de même espèce [plus grandes ou plus petites que l'hémisphère].

THÉORÈME III.

582. *Tout plan perpendiculaire à l'extrémité du rayon est tangent à la sphère ; — et réciproquement.*

Mêmes démonstrations que pour le cercle (n° 102).

COROLLAIRE 1er. — *Par un point donné sur la surface de la sphère on ne peut mener qu'un seul plan tangent.*

COROLL. 2. — *Deux plans tangens menés aux extrémités d'un même diamètre sont parallèles ; — et réciproquement.*

THÉORÈME IV. (Fig. 430.)

583. 1° *Les petits cercles également éloignés du centre sont égaux ;*

Fig. 430. 2° *Les petits cercles sont d'autant plus petits qu'ils sont plus éloignés du centre ;*

Et réciproquement.

Dans le triangle rectangle OPC, OC est le rayon de la sphère, PC est le rayon du petit cercle CDEF, OP est la distance du plan de ce cercle au centre de la sphère ; et l'on a :

$$OC^2 = OP^2 + PC^2.$$

On voit donc [comme cela a déjà lieu dans le cercle pour les cordes et leurs distances au centre (n° 104)], que, dans une même sphère ou dans des sphères égales,

1° Des valeurs égales de OP doivent donner des valeurs égales de PC ;

Et 2° plus les valeurs de OP sont grandes, plus celles de PC sont petites.

Les *réciproques* de ces propositions sont évidentes (n° 51).

Scolie 1er. — On voit en même temps que dans une même sphère ou dans des sphères égales,

1° Des cercles égaux entre eux servent de bases à des calottes égales ;

2° Des cercles plus petits servent de bases à des calottes plus petites [tant que l'on considère seulement des calottes moindres que l'hémisphère] ;

Et *réciproquement* (*Voy.* le n° 104, ainsi que les *réciproques* et les *scolies*).

Scol. 2. — En considérant comme une *corde* de la sphère le diamètre du petit cercle CDEF, on voit

1° Que *Les cordes également éloignées du centre sont égales ;*

2° Que *Les cordes sont d'autant plus petites qu'elles sont plus éloignées du centre ;*

Et *réciproquement.*

Scol. 3. — Tandis que la distance d'un petit cercle au centre de la sphère varie entre *zéro* et le rayon de la sphère, le rayon du petit cercle varie entre le rayon de la sphère et *zéro*. A la première limite, on a un grand cercle ; à la seconde, le petit cercle se réduit à un point, et son plan prolongé, de *sécant* qu'il était, devient *tangent* à la sphère (n° 458).

THÉORÈME V. (Fig. 94.)

584. *La section mutuelle de deux sphères*, O, O′, *est un cercle.*

Soit M l'un des points de la section des deux surfaces. Leurs intersections respectives par le plan OMO′, seront, pour chacune, deux grands cercles, OM, O′M, dont les circonférences se couperont au point M, et au point N symétrique de M. Or, les deux sphères peuvent être considérées comme engendrées respectivement par la révolution de ces deux cercles autour de la droite OO′ ; et dans cette révolution, les points M et N décrivent une même circonférence de cercle, dont les points sont les seuls communs aux deux surfaces, et qui, par conséquent, est leur intersection. Fig. 94.

C. Q. F. D.

Scolie. — On peut démontrer pour les sphères sécantes, tangentes, etc., des théorèmes analogues à ceux des *numéros* 141 — 145.

≤[On pourrait aussi établir, sur les systèmes de deux, trois, ou quatre sphères, une théorie des centres, axes, et plans de similitude (n^{os} 223 et *suiv.*), une théorie des plans, axes, et centres radicaux (n^{os} 241 et 242) ; et en y joignant des théorèmes analogues à ceux que l'on a démontrés dans la première partie, sur les pôles et polaires réciproques du cercle, on pourrait arriver à établir très simplement les moyens de *Construire une sphère tangente à quatre sphères données ;* mais ces diverses théories nous mèneraient beaucoup trop loin ; et nous nous contenterons de renvoyer sur ce sujet, aux *Annales de Mathématiques* de M. GERGONNE, déjà citées plusieurs fois, ainsi qu'aux différens mémoires qui s'y trouvent indiqués.]≥

585. Un *polyèdre* est dit *inscrit* à une sphère lorsqu'il a tous ses sommets sur la surface de la sphère ; et alors la *sphère* est *circonscrite* au polyèdre. — ≤[*Un tétraèdre quelconque est inscriptible à la sphère* (nº 547, *théor* I.).]≥

Réciproquement : — Un *polyèdre* est *circonscrit* à une sphère lorsque toutes ses faces sont tangentes à la sphère ; et alors la *sphère* est *inscrite* au polyèdre. — ≤[*Un tétraèdre quelconque est circonscriptible à la sphère* (nº 547, *théor.* III).]≥

Dans la génération de la sphère par un demi-cercle tournant autour du diamètre qui lui sert de corde (nº 455), la tangente menée à l'extrémité de ce diamètre engendre un plan tangent (nº 458). Toute autre tangente à ce demi-cercle engendre une *surface conique* ou une *surface cylindrique* (nº 453) [ce dernier cas n'a lieu que pour la tangente parallèle au diamètre] qui peut être dite *circonscrite à la sphère*, puisque tous ses plans tangens sont aussi tangens à la sphère ; et il en est de même de tout système composé de portions de surfaces engendrées ainsi par des tangentes à la demi-circonférence génératrice.

Réciproquement : — Les cordes de la demi-circonférence génératrice engendrent des portions de *surfaces coniques* ou *cylindriques* qui peuvent être considérées comme *inscrites à la sphère* ; [tout petit cercle de la sphère est dans le même cas] ; et il en est de même encore de tout système composé de pareilles portions de surfaces.

≤[Si, du centre d'un polyèdre régulier comme centre, et d'un rayon égal à son rayon, on décrit une sphère, sa surface passera par tous les sommets du polyèdre, et n'aura pas d'autre point commun avec la surface du polyèdre : donc

Tout polyèdre régulier est inscriptible à la sphère.

Si, du centre d'un polyèdre régulier comme centre, et d'un rayon égal à son apothème, on décrit une sphère, sa surface passera par les pieds de tous les apothèmes, et n'aura pas d'autre point commun avec la surface du polyèdre;

les faces de ce polyèdre seront donc tangentes à la sphère (n° 458) : ainsi

Tout polyèdre régulier est circonscriptible à la sphère.]

586. [De même que le cercle peut être considéré comme la limite des polygones réguliers inscrits et circonscrits (n° 183), ou comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits, de même aussi

La sphère peut être considérée comme un polyèdre régulier d'une infinité de faces infiniment petites.

Pour prouver cette proposition, reprenons la relation, démontrée précédemment (n° 563),

$$S + F = A + 2.$$

Quand on y suppose infinis, F, S, et A, elle se réduit à

$$F + S = A;$$

or, si l'on cherche à satisfaire à cette dernière égalité comme dans le *numéro* 567, on trouvera que cela peut se faire de *trois* manières :

1° En faisant $A = \frac{3}{2}F$, et $S = \frac{3}{6}F = \frac{1}{2}F$,

ce qui donne des *triangles* assemblés 6 *à* 6 ;

2° En faisant $A = \frac{4}{2}F = 2F$, et $S = \frac{4}{4}F = F$,

ce qui donne des *carrés* assemblés 4 *à* 4 ;

Enfin 3° en faisant $A = \frac{6}{2}F = 3F$, et $S = \frac{6}{3}F = 2F$,

ce qui donne des *hexagones* assemblés 3 *à* 3.

On remarquera que ces trois sortes d'assemblages correspondent précisément aux trois manières dont on peut recouvrir un plan avec des polygones réguliers (n° 176). Cela vient de ce que l'*On peut considérer la surface plane comme une surface sphérique d'un rayon infiniment grand*, de la même manière que la ligne droite peut être considérée comme une circonférence de cercle d'un rayon infiniment grand (n° 143, *scol.* 3).

§ II. *Des Triangles, des Polygones, et des Pyramides Sphériques.*

Fig.432. 587. On nomme TRIANGLE SPHÉRIQUE une *portion* ABC (fig. 432) *de surface sphérique, comprise entre trois arcs de grand cercle qui se coupent.* Ces arcs se nomment les *côtés* du triangle sphérique; leurs extrémités en sont les *sommets*; et l'on nomme *angles* du triangle les angles compris par les côtés (*Voy.* le n° 586). Un triangle sphérique se désigne par les lettres de ses trois sommets. — Les côtés d'un triangle sphérique sont toujours censés moindres qu'une demi-circonférence.

Supposons que, du centre O de la sphère, on mène à chacun des sommets A B, C, d'un triangle sphérique ABC, des rayons OA, OB, OC : on formera ainsi un *angle trièdre au centre* dont les faces auront pour mesures respectives les côtés du triangle, et dont les angles dièdres seront les mêmes que les angles du triangle (n° 580). Il existe donc une analogie parfaite entre un angle trièdre et le triangle sphérique qu'il détermine sur la surface d'une sphère décrite de son sommet comme centre. De là vient que l'on peut déduire toutes les propriétés des triangles sphériques, de celles des angles trièdres : ce qui nous permettra de supprimer beaucoup de développemens pour lesquels nous nous contenterons de renvoyer à la théorie des angles trièdres.

Trois grands cercles qui ne passent pas par un même diamètre, forment toujours *huit* triangles sphériques. Entre un quelconque de ces triangles et les *sept* autres, il existe les mêmes relations qu'entre un angle trièdre et les sept autres formés par les mêmes plans (n° 283). Il faut surtout distinguer les *triangles sphériques symétriques*, qui sont dans une situation opposée, et qui ont les *côtés égaux chacun à chacun mais inversement disposés*, et les *triangles sphériques conju-*

gués par un côté, dont la somme forme un fuseau correspondant à l'angle opposé à ce côté commun. — *Deux triangles sphériques symétriques ont les angles égaux, etc., etc.*

Il faut encore observer, relativement aux triangles sphériques symétriques résultant de l'intersection de la sphère par les trois mêmes plans, que ces triangles ont leurs sommets homologues situés deux à deux aux extrémités d'un même diamètre. Par suite, les petits cercles circonscrits à ces deux triangles sont égaux et parallèles ; et ils ont de plus leurs pôles communs et situés également aux extrémités d'un même diamètre, lequel est à la fois intérieur ou extérieur aux deux angles trièdres au centre qui correspondent aux triangles proposés, ou contenu dans deux faces opposées.

588. Soit un triangle sphérique ABC (fig. 433). Supposons Fig.433.
que, du point A comme pôle, on décrive un arc de grand cercle *bc*, du point B comme pôle un autre arc de grand cercle *ca*, et enfin du point C comme pôle un troisième arc de grand cercle *ab*. On obtiendra ainsi deux triangles ABC, *abc*, tels que *les sommets de chacun seront les pôles respectifs des côtés de l'autre.*

En effet, les arcs de grand cercle *a*B et *a*C, *b*C et *b*A, *c*A et *c*B étant des quadrans, il s'ensuit d'abord que les points *a*, *b*, *c*, sont pôles respectifs des arcs BC, CA, AB.

Et de même, les arcs A*b* et A*c*, B*c* et B*a*, C*a* et C*b*, étant des quadrans, les points A, B, C, sont pôles des arcs *bc*, *ca*, *ab*.

En raison de cette propriété, les deux triangles sont dits des *triangles polaires l'un de l'autre,* ou simplement des *triangles polaires.* — Il faut observer que le triangle *abc* se distingue des autres triangles formés par les mêmes cercles, en ce que les angles A et *a* doivent être du même côté de *bc*, B et *b* du même côté de *ca*, C et *c* du même côté de *ab*.

Théorème VI. (Fig. 433.)

589. *Tout angle* A *d'un triangle sphérique* ABC *a pour mesure le supplément du côté* bc *qui lui est opposé dans son triangle polaire* abc.

Fig. 433. En effet, prolongeons les arcs AB et AC jusqu'aux points B′, C′, où ils rencontrent respectivement le côté bc; B′C′ sera la mesure de l'angle A (nº 580); mais

$$bC' = 1\ quadrant, \quad \text{et} \quad B'c = 1\ quadrant;$$

donc $bc = 2\ quadrans - B'C'$, et $B'C' = 2\ quadrans - bc$: ce qui prouve la proposition.

Scolie. — Il existe donc entre deux triangles polaires, la même relation qu'entre deux angles trièdres supplémentaires (nº 510). C'est pourquoi les triangles polaires se nomment encore des *triangles supplémentaires*; et l'on peut, de même, remplacer le triangle abc par son symétrique opposé (nº 510, *scol.*).

Théorème VII. (Fig. 432.)

Fig. 432. 590. *Dans tout triangle sphérique* ABC, *un côté quelconque* AB *est* 1º *plus petit que la somme des deux autres, et* 2º *plus grand que leur différence.*

En effet : — 1º des points A, B, C, menons au centre les rayons OA, OB, OC : les angles AOB, AOC, BOC, auront respectivement pour mesure les arcs AB, AC, BC;

or $$AOB < AOC + BOC \quad (\text{nº } 511);$$

donc $$AB < AC + BC;$$

2º En supposant $AC > BC$, on a aussi

$$AB > AC - BC,$$

puisque $$AB + BC > AC.$$

Voyez les *deux* premiers *corollaires* des *numéros* 93 et 500, en substituant des arcs de grand cercle aux lignes droites (nº 93) ou aux angles plans (nº 500).

591. Pour compléter la théorie des triangles sphériques, il faudrait placer ici divers théorèmes analogues à ceux qui ont été démontrés dans la théorie des angles trièdres (nºˢ 513 et *suiv.*). Tels sont les suivans dont nous ne donnerons que les énoncés, parce que la démonstration en est facile à rétablir.

Théorème I. — *Dans tout triangle sphérique, la somme des* *trois côtés est moindre que la circonférence d'un grand cercle* (nº 513).

TH. II. — *Dans tout triangle sphérique, la somme des angles est* $>$ 2 DROITS *et* $<$ 6 DROITS (nº 514).

TH. III. — 1º *Lorsque deux côtés d'un triangle sphérique sont égaux, les angles opposés sont égaux ;*

2º *Lorsque deux côtés sont inégaux, au plus grand côté est opposé le plus grand angle ;*

Et *réciproquement*, etc., etc. (*Voy.* le nº 515).

Il résulte du théorème précédent, qu'*Un triangle sphérique équilatéral est aussi équiangle, et vice versâ :* dans ce cas il est *régulier ;* s'il n'a que deux côtés et deux angles égaux, il est *isocèle.*

Un triangle sphérique peut aussi avoir, comme l'angle trièdre qui lui correspond, *un*, *deux*, et même *trois* angles droits ; il est dit alors *rectangle*, *birectangle*, ou *trirectangle* (nº 514, *scol.*).

Enfin, les propriétés du triangle sphérique conduisent à une proposition importante que nous allons démontrer.

THÉORÈME VIII. (Fig. 434.)

592. *Entre deux points*, A, B, *d'une surface sphérique* [non situés sur un même diamètre], *le plus court chemin* [en suivant la surface] *est le plus petit* AB *des deux arcs de grand cercle qui vont de l'un à l'autre.* Fig. 434.

Pour prouver cette proposition, nous pouvons d'abord établir les deux axiomes suivans :

1º Que *Les plus courts chemins des divers points d'une circonférence quelconque à l'un de ses pôles sont égaux pour tous ces points ;*

2º Que *Si deux circonférences sont parallèles* [et ont par conséquent mêmes pôles], *le plus court chemin de l'un des pôles à la circonférence qui en est la plus éloignée, est plus grand que le plus court chemin de ce même pôle à la circonférence qui en est la plus rapprochée.*

Cela posé, admettons que le plus court chemin de A en B passe par un point C extérieur à l'arc de grand cercle AB [lequel est supposé moindre qu'une demi-circonférence]; et menons les arcs de grand cercle AC et BC de manière à former un triangle sphérique ABC. Les arcs AC et BC seront nécessairement moindres que AB : car si, par exemple, AC était plus grand que AB, en décrivant du point A comme pôle une circonférence de petit cercle passant par le point B, cette circonférence couperait AC en un point D situé entre A et C; puis le plus court chemin de A en B serait égal au plus court chemin de A en D, conformément au premier axiome, et plus petit que le plus court chemin de A en C, conformément au second, ce qui est absurde d'après l'hypothèse.

Les arcs AC et BC étant donc respectivement moindres que l'arc AB, du point A comme pôle décrivons un arc de petit cercle passant par le point C et coupant AB en E, et du point B comme pôle un autre arc de petit cercle passant par le même point C et coupant AB en F : le point F sera situé entre les points A et E, puisque AB $<$ AC $+$ CB (n° 590).

Maintenant, le plus court chemin entre A et B en passant par E, est égal au plus court chemin entre A et E, plus le plus court chemin entre E et B; et le plus court chemin entre A et B en passant par C, est égal au plus court chemin entre A et C, plus le plus court chemin entre C et B. Mais le plus court chemin entre A et E est égal au plus court chemin entre A et C, et le plus court chemin entre E et B est moindre que le plus court chemin entre C et B, puisque ce dernier est égal au plus court chemin entre B et F : donc le plus court chemin absolu entre les points A et B [en suivant la surface] ne saurait passer par le point C.

Scolie. — Si les deux points A et B étaient les extrémités d'un même diamètre, on pourrait mener de l'un à l'autre une infinité d'arcs de grand cercle qui seraient des demi-circonférences; tous ces arcs seraient autant de plus courts chemins égaux entre eux.

593. Il y aurait encore à établir, sur l'*égalité* des triangles sphériques, des théorèmes analogues à ceux qui ont été démontrés pour les triangles rectilignes (nos 130 *et suiv.*) et pour les angles trièdres (nos 516 — 519). Nous pensons qu'il suffira d'en donner les énoncés, et de renvoyer pour leur démonstration, aux endroits cités; en faisant seulement deux observations : la première, que deux triangles sphériques, et plus simplement, que deux arcs de grand cercle, ne peuvent jamais être égaux que sur la même sphère ou sur des sphères égales; et la seconde, que pour superposer deux arcs ou deux triangles, il faut toujours commencer par faire coïncider les sommets des angles plans ou trièdres qui leur correspondent, et par conséquent les centres des sphères quand elles sont différentes.

THÉORÈME I. — *Deux triangles sphériques sont égaux lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

TH. II. — *Deux triangles sphériques sont égaux lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

TH. III. — *Deux triangles sphériques sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

TH. IV. — *Deux triangles sphériques sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à des angles égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

Lorsque la disposition est inverse au lieu d'être la même, les autres hypothèses subsistant, *les triangles sphériques sont symétriques entre eux.*

Un triangle sphérique n'a qu'un seul symétrique (nos 516, *coroll.* 1er). — Deux triangles sphériques symétriques entre eux ne peuvent coïncider que quand ils sont isocèles, etc. (*Voy.* les nos 515, *théor.* 2; et 520).

Voyez encore le *numéro* 520 pour le cas où deux triangles sphériques ont seulement deux côtés ou deux angles égaux chacun à chacun, que pour celui de deux côtés égaux ainsi que l'angle opposé à l'un d'eux, et enfin pour celui de deux angles égaux ainsi que le côté opposé à l'un d'eux.

594. On nomme Polygone Sphérique une *portion de surface sphérique comprise entre plusieurs arcs de grand cercle* [toujours supposés moindres qu'une demi-circonférence] : à tout polygone sphérique correspond un *angle polyèdre au centre* (*Voy.* le n° 587). — Nous ne nous arrêterons pas à la théorie des polygones sphériques, parce qu'on peut la calquer très aisément sur celle des angles polyèdres (*Liv.* III, *chap.* IV) ; nous remarquerons seulement qu'*Un polygone sphérique peut toujours se décomposer en triangles sphériques* [lorsqu'il n'est pas lui-même un triangle], et que *Le périmètre de tout polygone sphérique convexe est moindre que la circonférence d'un grand cercle* (Voy. le n° 511, *scol.*).

Deux *polygones sphériques* sont dits *symétriques entre eux* lorsqu'ils sont composés de triangles sphériques symétriques chacun à chacun, et inversement disposés; ils ont alors les côtés et les angles égaux chacun à chacun et inversement disposés.

Enfin, on nomme Pyramide Sphérique l'*espace compris entre un triangle, ou* généralement *un polygone sphérique, et l'angle trièdre ou polyèdre au centre qui lui correspond.* Le triangle ou le polygone est la *base* de la pyramide. La pyramide est *triangulaire* quand sa base est un triangle, etc. — La théorie des pyramides sphériques est tout-à-fait analogue à celle des triangles et des polygones sphériques (*Voy.* les n^os^ 587 et *suiv.*).

⋚ [Théorème à démontrer : — *Si l'on inscrit ou si l'on circonscrit un polyèdre régulier à une sphère, les plans menés par le centre et par les arêtes du polyèdre décomposeront la sphère en pyramides régulières égales, et sa surface en polygones sphériques réguliers égaux.*] ⋛

FIN DU LIVRE TROISIÈME.

LIVRE QUATRIÈME.

DE L'ÉTENDUE CONSIDÉRÉE DANS L'ESPACE.

595. Dans ce quatrième et dernier *Livre*, il nous reste à nous occuper des figures considérées dans l'espace, sous le point de vue spécial des rapports numériques auxquels leur étude peut donner lieu.

Nous le diviserons en *trois* chapitres :

Dans le *premier*, nous traiterons de la *similitude* ;

Dans le *second*, de la mesure des *aires* ;

Et dans le *troisième*, de celle des *volumes* (Voy. le n° 2).

CHAPITRE PREMIER.

DE LA SIMILITUDE.

596. Ayant fixé dans le Livre deuxième (nº 206 et *suiv.*) les caractères généraux de la similitude, nous n'avons plus maintenant qu'à appliquer aux figures considérées dans l'espace, les principes établis en cet endroit.

Ainsi, les propriétés de toutes les figures dans l'espace dépendant de celles du tétraèdre de la même manière que les propriétés des figures planes dépendent de celles du triangle, c'est la définition des tétraèdres semblables qui servira de base à la théorie des figures semblables dans l'espace.

Or, un tétraèdre étant déterminé par ses six arètes (nº 544, *scol.*), il s'ensuit que

Fig. 435. *Deux tétraèdres*, SABC, S'A'B'C' (fig. 435), *sont semblables lorsqu'ils ont les arètes correspondantes proportionnelles* entre elles, c'est-à-dire lorsqu'on a, entre ces arètes [considérées dans un ordre convenable qui doit être le même pour les deux tétraèdres], les proportions

$$\frac{SA}{S'A'}=\frac{SB}{S'B'}=\frac{SC}{S'C'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{CA}{C'A'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

De cette définition il résulte d'abord que

Deux tétraèdres semblables ont les faces semblables chacune à chacune, les angles trièdres et dièdres égaux chacun à chacun, et les inclinaisons égales (nº 520).

Si les *arètes* sont *proportionnelles et inversement disposées* (n° 543, fig. 436), alors les deux *tétraèdres* sont *inversement semblables*. Deux tétraèdres inversement semblables jouissent de toutes les propriétés que l'on vient d'attribuer aux tétraèdres semblables, excepté que les faces sont inversement semblables, et que les angles trièdres homologues sont symétriques au lieu d'être égaux. Fig. 436.

Il en résulte encore les conséquences suivantes :

Deux tétraèdres inversement semblables sont réciproquement semblables à leurs symétriques ;

Deux tétraèdres sont semblables [ou inversement semblables] *lorsqu'ils ont trois faces semblables chacune à chacune et semblablement* [ou inversement] *disposées ;*

Deux tétraèdres semblables ou inversement semblables à un troisième, sont [directement] *semblables entre eux ;*

Enfin *Deux tétraèdres semblables sont égaux lorsqu'ils ont une arète homologue égale,*

Et *Deux tétraèdres inversement semblables sont symétriques lorsqu'ils ont une arète homologue égale.*

597. Maintenant, un *polyèdre* d'un nombre quelconque de faces étant déterminé par un assemblage de tétraèdres qui le composent, il s'ensuit que

Deux polyèdres sont semblables lorsqu'ils peuvent se décomposer en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés ;

Et que *Deux polyèdres sont inversement semblables, lorsqu'ils peuvent se décomposer en un même nombre de tétraèdres inversement semblables chacun à chacun et inversement disposés.*

Il résulte de ces définitions, que si plusieurs faces des tétraèdres qui composent le premier polyèdre sont dans un même plan, les faces homologues des tétraèdres qui composent le second polyèdre sont aussi dans un même plan.

On peut encore en déduire les conséquences suivantes :

Deux polyèdres inversement semblables sont réciproquement semblables à leurs symétriques;

Deux polyèdres semblables ou inversement semblables à un troisième sont [directement] *semblables entre eux;*

Deux polyèdres semblables sont égaux lorsqu'ils ont une arète homologue égale;

Et *Deux polyèdres inversement semblables sont symétriques lorsqu'ils ont une arète homologue égale.*

598. Lorsque le polyèdre est d'une espèce donnée, les conditions de similitude qui viennent d'être établies se réduisent nécessairement (nº 560), à un nombre d'autant moindre que celui des lignes qu'exige la détermination de ce polyèdre est moins considérable. Ainsi, par exemple, en ayant égard au nombre des données nécessaires pour déterminer un prisme (nº 525) ou une pyramide (nº 548), on voit que

Deux prismes, ou *deux pyramides*, *sont semblables lorsqu'ils ont la base et une face semblables chacune à chacune, également inclinées, et disposées de la même manière*, ou *lorsqu'ils ont un angle trièdre compris entre trois faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées*, ou, etc.

Si la disposition est inverse, les prismes ou les pyramides sont inversement semblables.

De même; *Deux parallélépipèdes sont semblables* [ou inversement semblables] *lorsqu'ils ont un angle trièdre formé par des arètes proportionnelles, également inclinées*, et *semblablement* [ou inversement] *disposées.*

Tous les cubes sont semblables.

≼[En général, deux polyèdres *convexes* sont semblables ou inversement semblables, lorsque leurs faces sont semblables chacune à chacune et disposées semblablement ou inversement (nº 559).]≽

599. On détermine par les mêmes principes, les conditions de similitude des figures limitées par des surfaces courbes.

Ainsi, par exemple, les cylindres et les cônes circulaires droits étant déterminés par leur base et leur hauteur, il s'ensuit que

Deux cylindres circulaires droits sont semblables lorsque leurs axes sont proportionnels aux rayons de leurs bases, ou *lorsqu'ils sont engendrés par des rectangles semblables tournant autour de deux côtés homologues ;*

Et que *Deux cônes circulaires droits sont semblables lorsque leurs axes sont proportionnels aux rayons de leurs bases*, ou *lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables tournant autour de deux côtés homologues*, ou bien encore *lorsque leurs angles au centre sont égaux*, etc. ; — *leurs arètes sont alors proportionnelles à ces mêmes rayons.*

Il faut une condition de plus pour la similitude de deux troncs de cône, parce qu'il s'y trouve une ligne arbitraire de plus : ainsi

Deux troncs de cône circulaire droit sont semblables lorsque les rayons des deux bases et les axes [*et* par suite *les arètes*] *sont proportionnels,* ou, ce qui revient au même, *lorsqu'ils sont engendrés* (n° 556) *par des trapèzes semblables.*

Une sphère étant déterminée par son rayon *seul*,

Toutes les sphères sont semblables.

Sur une même sphère, deux portions de surface ne peuvent être semblables à moins d'être égales ; — mais sur des sphères différentes :

Deux fuseaux ou *deux coins sont semblables lorsqu'ils correspondent à des arcs égaux* [ou à des angles dièdres égaux];

Deux triangles sphériques sont semblables lorsque leurs côtés sont proportionnels entre eux et aux rayons, et disposés de la même manière, ou, ce qui est la même chose, *lorsqu'ils correspondent à des angles trièdres au centre, égaux entre eux* ; [si la disposition était inverse, ou si les angles trièdres étaient symétriques, les triangles seraient *inversement semblables*].

Deux *calottes* sont *semblables* lorsqu'elles sont engendrées par la révolution de deux arcs semblables tournant chacun autour d'un rayon qui aboutit à l'une de ses extrémités, ou ce qui est la même chose, lorsque leurs hauteurs, les rayons de leurs bases, ceux des sphères, et enfin les arcs générateurs, sont dans un même rapport ;

Deux *zones* sont *semblables* quand elles sont les différences de calottes semblables chacune à chacune, parce que cette condition suffit pour que leurs lignes homologues soient proportionnelles ;

Deux *secteurs* sont *semblables* lorsqu'ils ont pour bases des calottes semblables ; [les *segmens* sont *semblables* dans les mêmes circonstances] ;

Enfin, deux *tranches* sont *semblables* quand elles correspondent à des calottes ou à des zones semblables.

600. On nomme *points homologues*, dans deux figures semblables :

1° Les points homologues de leurs faces (n° 209),

2° Les points qui sont liés aux faces homologues par des tétraèdres (n° 596) semblables et semblablement disposés.

Les centres des bases des prismes réguliers ou des pyramides régulières semblables, ... sont des points homologues. — ≶ [Il en est de même des centres des polyèdres réguliers semblables.] ≷

On nomme *lignes homologues* les couples de lignes que déterminent des points homologues chacun à chacun.

Les rayons et les apothèmes des bases des pyramides régulières semblables, les apothèmes de leurs faces latérales, les rayons et les apothèmes des bases des prismes semblables, les hauteurs des tétraèdres et des pyramides semblables quelconques, etc., etc., sont des lignes homologues. — ≶ [Il en est de même des rayons et des apothèmes des polyèdres réguliers semblables (n° 573, *scol.* 2).] ≷

On nomme *sections homologues* les polygones résultant de l'intersection de deux polyèdres semblables par deux plans que déterminent des points homologues chacun à chacun [ou des lignes homologues]. Telles sont les sections que l'on forme en décomposant deux polyèdres semblables en tétraèdres semblables. — ≶ [Telles sont encore les sections faites dans deux polyèdres réguliers de même espèce par leurs plans de symétrie.] ≷ — Etc., etc.

Toutes les lignes homologues de deux figures semblables sont nécessairement proportionnelles; et leurs sections homologues sont des polygones semblables.

Théorème I. (Fig. 437 et 438.)

601. *Tout plan* A′B′C′ *parallèle à l'une des faces* ABC *d'un tétraèdre* SABC [pourvu qu'il ne passe pas le sommet opposé S], *détermine, conjointement avec les trois autres faces, un tétraèdre semblable* (fig. 437) *ou inversement semblable* (fig. 438) *au premier* [suivant que les deux plans parallèles sont du même côté du sommet, ou que le sommet est entre les deux plans parallèles]. Fig. 437 et 438.

En effet, les droites A′B′, B′C′, C′A′, étant respectivement parallèles aux droites AB, BC, CA (n° 472), il en résulte

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{SC}{SC'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire 1^er^. — *Tout plan parallèle à la base d'une pyramide, détermine une seconde pyramide semblable ou inversement semblable à la première. — De même pour le cône.*

Coroll. 2. — *Les arêtes homologues,* SO, S′O′, *de deux tétraèdres semblables,* SABC, S′A′B′C′, [*ou de deux pyramides semblables*] *sont également inclinées sur les faces homologues.*

Ce corollaire, qui résulte, d'abord de ce que les hauteurs des tétraèdres ou des pyramides semblables sont des lignes homologues (n° 600), et ensuite de ce que les tétraèdres, ou les pyramides, peuvent être placés de manière à avoir le même sommet, les bases parallèles, et les arètes latérales ainsi que les hauteurs (*Voy.* les nos 548 et 480) dans la même direction respective, peut d'ailleurs se démontrer directement :

Pour cela, il suffit de joindre deux sommets homologues, A, A′, aux pieds, O, O′, des perpendiculaires SO, SO′: car alors les triangles rectangles SAO, SA′O′, sont évidemment semblables comme ayant un angle aigu égal en S.

Il en résulte de plus une démonstration directe de cette proposition, que *Les hauteurs des tétraèdres* [*ou des pyramides*] *semblables sont proportionnelles aux arètes homologues.*

On verrait de même que *Les hauteurs des cônes semblables sont proportionnelles aux rayons des bases.*

Il en serait *de même* pour les *prismes semblables*, les *cylindres semblables*, etc.

THÉORÈME II. (Fig. 439.)

Fig.439. 602. *Deux tétraèdres*, SABC, S′A′B′C′, *sont semblables lorsqu'ils ont deux faces semblables chacune à chacune*, SAB et S′A′B′, SAC et S′A′C′, *également inclinées, et semblablement disposées.*

En effet, de l'énoncé on tire :

$$\frac{SA}{S'A'}=\frac{SB}{S'B'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{SC}{S'C'}=\frac{AC}{A'C'};$$

et $$\textit{dièdre } SA = \textit{dièdre } S'A'.$$

Cela posé, prenons sur l'arète SA, supposée plus grande que S′A′, une longueur SA″ égale à S′A′; et par le point A″ menons un plan A″B″C″ parallèle à ABC; le tétraèdre SA″B″C″ ainsi formé sera semblable au tétraèdre SABC (no 601); et il en résultera

$$\frac{SA}{SA''}=\frac{SB}{SB''}=\frac{AB}{A''B''}=\frac{SC}{SC''}=\frac{AC}{A''C''}.$$

Comparant cette suite de rapports avec la précédente, et Fig. 439.
remarquant que $SA'' = S'A'$, nous en conclurons :

$$SB'' = S'B' \mid A''B'' = A'B \mid SC'' = S'C' \mid A''C'' = A'C'.$$

Donc les triangles $SA''B''$ et $S'A'B'$, $SA''C''$ et $S'A'C'$, sont égaux (n° 130) ; donc les deux tétraèdres $SA''B''C''$ et $S'A'B'C'$ sont égaux (n° 545) : donc, etc.

Théorème III. (Fig. 439.)

603. *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont une face semblable*, SAB et S'A'B', *et les angles dièdres adjacens égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

De l'énoncé on tire :

$$\frac{SA}{S'A'} = \frac{SB}{S'B'} = \frac{AB}{A'B'};$$

dièd. $SA =$ *dièd.* $S'A' \mid$ *dièd.* $SB =$ *dièd.* $S'B' \mid$ *dièd.* $AB =$ *dièd.* $A'B'$.

Cela posé, prenons encore $SA'' = S'A'$, et menons le plan $A''B''C''$ parallèle à ABC : les deux tétraèdres SABC et $SA''B''C''$ seront semblables ; et il en résultera

$$\frac{SA}{SA''} = \frac{SB}{SB''} = \frac{AB}{A''B''}, \text{ et } \textit{dièdre } AB = \textit{dièdre } A''B'';$$

d'où $$SB'' = S'B' \mid A''B'' = A'B',$$

et $$\textit{dièdre } A''B'' = \textit{dièdre } A'B'.$$

Donc les deux tétraèdres $SA''B''C''$ et $S'A'B'C'$ sont égaux (n° 546) : donc, etc.

Théorème IV.

604. *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

En effet, les angles plans de leurs faces sont tous égaux chacun à chacun (n° 517) ; donc toutes ces faces sont semblables (n° 216) : donc etc. (n° 596).

Scolie. — Ce théorème contient une condition de trop :

parce que, trois faces étant assemblées, deux angles dièdres suffisent pour déterminer la direction de la quatrième.

Scolie sur ces trois théorèmes. — Si la disposition est in-
Fig. 440. verse (fig. 440), les tétraèdres, au lieu d'être semblables, sont inversement semblables.

En effet, si l'on construit un troisième tétraèdre, symétrique de l'un des proposés, il sera semblable au second : donc, etc. (n° 596).

Théorème V.

605. *Deux polyèdres semblables ont les faces homologues semblables, les angles dièdres et les angles polyèdres homologues égaux chacun à chacun, les arètes homologues proportionnelles, et les inclinaisons égales.*

En effet — : 1° Les faces homologues des deux polyèdres semblables sont, ou des triangles semblables, faces homologues de tétraèdres semblables, ou des assemblages de triangles semblables et disposés de la même manière ;

2° Les angles dièdres homologues des deux polyèdres sont, ou des angles dièdres homologues de tétraèdres semblables, ou des sommes d'angles dièdres homologues : ils sont par conséquent égaux ;

3° Les angles polyèdres homologues sont aussi des assemblages d'angles trièdres égaux et disposés de la même manière ;

4° Les arètes homologues sont proportionnelles comme appartenant à des tétraèdres semblables et assemblés de la même manière ;

5° Enfin, les inclinaisons des arètes homologues sur les faces homologues sont égales à cause de l'égalité des angles polyèdres homologues.

Scolie 1er. — L'ordre de la décomposition étant arbitraire, il en résulte que

Dans deux polyèdres semblables, les diagonales homologues sont proportionnelles, Et que par conséquent, si l'on combine quatre à quatre de toutes les manières possibles les sommets homologues des deux polyèdres, en joignant ces sommets par des droites, on formera une série de tétraèdres semblables chacun à chacun.

Scol. 2. — Les mêmes conséquences ont également lieu pour deux polyèdres inversement semblables, à cela près que les faces homologues sont alors inversement semblables, et que les angles polyèdres sont symétriques au lieu d'être égaux.

Théorème VI.

606. Réciproquement : — *Deux polyèdres sont semblables lorsqu'ils ont toutes leurs faces semblables chacune à chacune, également inclinées, et semblablement disposées.*

En effet, en suivant l'une des méthodes indiquées au *numéro* 558, et raisonnant comme pour les polygones (nº 221), on peut décomposer les deux polyèdres en tétraèdres semblables chacun à chacun et disposés de la même manière. — Nous croyons pouvoir nous dispenser de développer cette décomposition.

Scolie 1er. — Si les faces étaient inversement semblables et la disposition inverse, les deux polyèdres seraient aussi inversement semblables.

≼[*Scol.* 2. — D'après la même raison déjà donnée au *numéro* 559, cette réciproque contient aussi trop de conditions pour le cas où les polyèdres sont convexes.]≽

607. On pourrait démontrer, sur la similitude des polyèdres, beaucoup d'autres propositions : par exemple, on pourrait établir des propositions analogues à celles des *numéros* 223 et 224, relatives aux *centres de similitude* internes et externes; nous ne nous y arrêterons pas, et nous terminerons cette théorie en proposant comme exercices la démonstration des théorèmes suivans :

Théorème I. — *Dans deux prismes semblables* [ou inversement semblables], *les sections perpendiculaires aux arètes* *latérales sont des polygones semblables* [ou inversement semblables].

Th. II. — *Deux pyramides sont semblables* [ou inversement semblables] *lorsqu'elles ont les arêtes parallèles chacune à chacune.*

≤[Th. III. — *Deux polyèdres réguliers de même espèce ou de même nom sont semblables et peuvent se décomposer en un même nombre de pyramides régulières semblables.*]≥

CHAPITRE II.

DES AIRES.

§ I^er^. *Mesure des Surfaces des Polyèdres, du Cylindre, et du Cône.*

608. L'AIRE (n^os^ 2 et 290) de la surface d'un polyèdre étant égale à la somme des aires des diverses faces qui le terminent, il sera toujours aisé de la calculer, ainsi que celle des figures dont les surfaces sont développables. Nous n'aurons, sur ce sujet, que quelques observations à faire et quelques propositions à démontrer.

Il est facile de reconnaître tout d'abord,

Que *Les aires des surfaces des polyèdres symétriques* [et par suite *des figures symétriques* quelconques] *sont équivalentes*;

Que *Les aires des surfaces des polyèdres* [ou *des figures*] *semblables sont proportionnelles aux carrés des arètes* [ou *des lignes*] *homologues*, puisque ce rapport est celui des faces homologues prises partiellement;

Que *Les aires des sections homologues sont dans le même rapport;*

Etc., etc.

THÉORÈME I.

609. *L'aire de la surface latérale d'un prisme droit est équivalente à celle d'un rectangle qui aurait pour base le périmètre* [développé] *de la base du prisme, et pour hauteur une arète.*

En effet, cette surface n'est autre chose qu'une série de rectangles adjacens ayant une arète pour hauteur commune, et dont la somme des bases compose le périmètre de la base du prisme.

Corollaire 1er. — *L'aire de la surface latérale d'un prisme droit a pour mesure* [en prenant pour unité d'aire celle du carré qui a pour côté l'unité de longueur (n° 290)] *le produit du périmètre de sa base par une arète.*

Coroll. 2. — *L'aire de la surface totale d'un prisme régulier* [les bases comprises] *a pour mesure le produit du périmètre de sa base par la somme faite d'une arète et de l'apothème de cette base.*

Coroll. 3. — Le cylindre devant être assimilé aux prismes, les propositions précédentes lui sont applicables. Ainsi

L'aire de la surface latérale d'un cylindre droit est équivalente à celle d'un rectangle qui aurait pour base la circonférence [rectifiée] *de la base du cylindre, et son arète pour hauteur;*

Par conséquent, *elle a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par une arète.*

Ces propositions résultent d'ailleurs de ce que l'on a vu précédemment (n° 540) sur le développement de la surface latérale du cylindre.

Coroll. 4. — *L'aire de la surface totale d'un cylindre circulaire droit a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par la somme faite de son arète et du rayon de cette base.*

Scolie. — *L'aire de chaque base d'un cylindre circulaire droit est à celle de sa surface latérale comme la moitié du rayon de cette base est à la hauteur du cylindre.*

Théorème II. (Fig. 441.)

Fig. 441. 610. *L'aire de la surface latérale d'un prisme oblique* ABCDEA'B'C'D'E' *est équivalente à celle d'un prisme droit qui aurait pour base une section* MNPQR *perpendiculaire*

aux arètes du prisme oblique, et les arètes de même longueur que les premières. Fig. 441.

En effet, prolongeons indéfiniment dans un même sens, les arètes latérales, AA′, BB′, CC′, DD′, EE′; coupons les prolongemens par un plan perpendiculaire MNPQR qui ne passe pas dans l'intérieur du prisme; puis prenons, dans un même sens, des longueurs MM′, NN′, PP′, QQ′, RR′, égales entre elles et aux arètes du prisme oblique : la figure MNPQRM′N′P′Q′R′ ainsi déterminée sera un prisme droit de mêmes arètes latérales que le prisme proposé, et ayant pour base la section perpendiculaire à ces arètes.

Cela posé, les parallélogrammes AB′, BC′, CD′,... ont même base que les rectangles MN′, NP′, PQ′,..., et mêmes hauteurs respectives : donc les parallélogrammes sont équivalens aux rectangles (nº 294), chacun à chacun : donc, etc.

COROLLAIRE 1er. — *L'aire de la surface latérale d'un prisme oblique a pour mesure le produit du périmètre d'une section perpendiculaire aux arètes multiplié par leur longueur.*

COROLL. 2. — La même proposition ayant évidemment lieu pour un cylindre oblique, il en résulte aussi que

La surface latérale d'un cylindre oblique a pour mesure le produit du périmètre d'une section perpendiculaire aux arètes multiplié par leur longueur.

COROLL. 3. — *La surface latérale d'un tronc de cylindre circulaire droit a pour mesure le produit de son axe par la circonférence de sa base circulaire :*

Car si l'on considère un cylindre de même base, et dont l'axe serait double, on voit que ce cylindre contiendrait deux fois le tronc proposé.

THÉORÈME III.

611. *L'aire de la surface latérale d'une pyramide régulière est équivalente à celle d'un triangle unique qui aurait pour*

base le périmètre [développé] *de la base de la pyramide, et pour hauteur son apothème.*

En effet, cette surface n'est autre chose qu'une série de triangles adjacens ayant l'apothème pour hauteur commune, et dont la somme des bases compose le périmètre de la base de la pyramide.

Corollaire 1^er^. — *L'aire de la surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par l'apothème de la pyramide.*

Coroll. 2. — *L'aire de la surface totale d'une pyramide régulière* [la base comprise] *a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par la somme des apothèmes respectifs de la pyramide et de la base.*

Coroll. 3. — Le même mode d'évaluation est évidemment applicable au cône. Par conséquent

L'aire de la surface latérale d'un cône circulaire droit est équivalente à celle d'un secteur qui aurait pour base un arc de même longueur que la circonférence développée de la base du cône, et son arète pour rayon;

Ainsi, *elle a pour mesure la moitié du produit de son arète par la circonférence de sa base.*

Cela résulte d'ailleurs de ce qu'on a vu (n° 556) sur le développement de la surface conique.

Coroll. 4. — *L'aire de la surface totale d'un cône circulaire droit a pour mesure la moitié du produit de la circonférence de sa base par la somme faite du rayon de cette base et d'une arète.*

Scolie. — *L'aire de la base d'un cône circulaire droit est à celle de sa surface latérale comme le rayon de cette base est à l'arète du cône.*

Coroll. 5. — Le *tronc de cône circulaire droit à bases parallèles* étant la différence de deux cônes circulaires droits semblables, sa surface latérale est équivalente à la différence de deux secteurs semblables (nº 281, *coroll.* 1er); d'où il résulte que l'on peut en donner les expressions suivantes :

L'aire de la surface convexe d'un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles a pour mesure le produit de son arète par la demi-somme des circonférences des bases (nº 302),

Ou bien *le produit de son arète par la circonférence de la section perpendiculaire à l'axe, faite à égale distance des bases;*

Elle est donc *équivalente à la demi-somme des surfaces latérales de deux cônes de même arète que le tronc, et dont les bases seraient respectivement égales à ses deux bases;*

Ou bien *à la surface latérale d'un cylindre circulaire droit qui aurait pour base la section perpendiculaire à l'axe, faite à égale distance des bases du tronc, et son arète pour hauteur.*

Cette dernière expression présente l'avantage d'être également applicable au cône entier lorsqu'on regarde comme nulle la petite base du tronc, et même au cylindre, que l'on peut considérer comme un tronc de cône dont le sommet serait situé à une distance infinie de la base (nº 114).

Coroll. 6. — Enfin *La surface totale d'un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles est équivalente à la somme des surfaces totales de deux cônes de même arète que lui, et dont les bases seraient respectivement les deux bases du tronc.*

Théorème IV.

612. *Dans deux pyramides quelconques* [quelles que soient les figures respectives de leurs bases], *les aires des sections parallèles faites à des distances des sommets, égales respectivement, ou proportionnelles, sont proportionnelles.*

En nommant A, B, les aires des sections de la première pyramide, C, D, les aires des sections de la seconde, a, b, deux côtés [ou lignes] homologues des deux premières, et c, d, deux côtés [ou lignes] homologues des deux dernières, on aura d'abord (nos 551 et 305) :

$$A : B :: a^2 : b^2, \quad \text{et} \quad C : D :: c^2 : d^2.$$

Or : 1° les côtés a, b, des deux premières figures, étant proportionnels à leurs distances au sommet de la première pyramide (nos 600 ; et 601, *coroll.* 2) ; 2° les côtés c, d, des deux dernières, étant proportionnels à leurs distances au sommet de la seconde pyramide ; et enfin 3° les distances aux deux sommets étant égales deux à deux, ou proportionnelles, il en résulte

$$a : b :: c : d;$$

d'où $$A : B :: C : D$$ (*Voy.* le n° 306).

Scolie 1er. — Si l'on a A=C, on aura aussi B=D; *et vice versâ*.

Scol. 2. — Chacune des deux pyramides peut être, dans le théorème précédent, remplacée par un cône, sans que la proposition cesse d'avoir lieu.

613. ≼ [REMARQUE *sur la mesure de aires des surfaces cylindriques et coniques*.

Au lieu de nous fonder sur le développement des surfaces du cône et du cylindre pour en déterminer l'aire, nous aurions pu employer, au moins pour les cylindres et pour les cônes circulaires droits, un moyen analogue à celui dont nous nous sommes servi pour le cercle (n° 299). Mais pour cela, il eût fallu établir divers *lemmes* que nous allons indiquer.

Fig. 442. LEMME I. — *Si, en menant dans deux portions finies de surfaces*, OABCD, O'A'B'C'D' (fig. 442), *une infinité de plans parallèles à une direction déterminée* AA', *on trouve que dans l'une* OABCD, *toutes les lignes d'intersection*, AOB, COD,... *sont plus petites* [*ou les unes de même longueur et toutes les autres plus petites*] *que les lignes d'intersection correspondantes*, A'O'B', C'O'D',... *de l'autre, on doit en conclure que la première surface est moindre que la seconde*.

On peut tirer de là, comme cas particulier, ce principe que

*Toute portion de plan o*ABCD (fig. 443) [limitée par une ligne ABCD] *est moindre qu'une portion de surface quelconque* OABCD *terminée au même contour* ABCD. Fig. 443.

Ici, l'on peut prendre pour la direction déterminée dont il est question dans l'énoncé du lemme général, une perpendiculaire au plan, c'est-à-dire que l'on peut faire toutes les sections perpendiculairement à ce plan ; et alors, comme on a évidemment $AoB < AOB$, $CoD < COD, \ldots$, il s'ensuit que

$$oABCD < OABCD.$$

Au surplus, il serait très permis et beaucoup plus simple de considérer cette dernière proposition comme résultant évidemment de la nature du plan.

On déduit encore, du lemme I, une autre conséquence que nous préférons démontrer séparément : nous la placerons en tête du paragraphe suivant.

Lemme II. — *La surface latérale d'un cylindre circulaire droit est* 1° *plus grande que celle de tout prisme inscrit, et* 2° *plus petite que celle de tout prisme circonscrit.*

Il suffit de prouver 1° que chaque pan AA'BB' (fig. 444) du prisme inscrit est moindre que la portion correspondante AA'CC'BB' de surface cylindrique, et 2° que chaque portion AA'DD'BB' du prisme circonscrit, comprise entre deux arêtes de tangence consécutives, AA', BB', est plus grande que la portion correspondante de surface cylindrique. Pour cela on mène, conformément à l'énoncé du lemme I, une infinité de plans [tels que *abcd*], tous perpendiculaires au plan que l'on considère. Il est facile de voir que les sections qui en résultent, satisfont aux conditions de cet énoncé. Fig. 444.

La proposition peut s'étendre à une série quelconque de cylindres circulaires droits et de prismes, ayant les arêtes égales et terminées aux mêmes plans, et dont les surfaces latérales s'entoureraient les unes les autres.

Lemme III. — *La surface latérale d'un cône circulaire droit est* 1° *plus grande que celle de toute pyramide régulière ins-*

crite, et 2° plus petite que celle de toute pyramide régulière circonscrite.

Fig.445. Même démonstration que pour le *lemme* précédent, en substituant le sommet commun S (fig. 455) à la section A'B'C'D'.

Cette proposition peut également s'étendre à une série quelconque de cônes circulaires droits et de pyramides régulières, tous de même axe, et dont les bases s'envelopperaient les unes les autres.

Maintenant, ces divers lemmes étant établis, il n'est pas difficile d'en déduire, comme nous l'avons dit ci-dessus, et sans employer la considération du *développement*, les expressions déjà obtenues pour la surface du cylindre et celle du cône.]≽

614. ≼[Indiquons encore, pour la mesure des surfaces courbes en général, un moyen approché, analogue à la méthode établie dans le second Livre (n° 298) pour la mesure des aires planes terminées par des lignes courbes; après quoi nous nous occuperons de la surface sphérique.

Nous avons établi (n° 457) que toute surface courbe pouvait être considérée comme composée d'élémens plans : son aire, comme celle des surfaces développables, sera donc toujours susceptible d'être évaluée ou *carrée*. Pour effectuer approximativement la quadrature d'une portion de surface courbe, on est ainsi conduit à supposer cette surface partagée en triangles très petits : en considérant ces triangles comme plans, et faisant la somme de leurs aires, évaluées d'après la méthode du *numéro* 296 (2°), on aura une mesure de celle de la surface courbe, d'autant plus approchée que ces triangles seront plus petits.

Pour plus d'exactitude, on peut s'y prendre de la manière suivante, qui cependant a l'inconvénient d'exiger des calculs un peu longs.

Projetons sur un plan la portion de surface proposée, c'est-à-dire menons, par des points très rapprochés pris sur ses *bords*, des perpendiculaires à ce plan. Joignons par des droites les pieds de ces perpendiculaires, et décomposons en triangles la figure plane ainsi formée. Puis, par les sommets de ces triangles, élevons des perpendiculaires terminées à la surface courbe, et menons des droites par les sommets des perpendiculaires voisines : nous formerons ainsi un *réseau* de triangles inscrits à la surface courbe, et dont la somme des aires différera d'autant moins de l'aire de cette surface, que les triangles seront plus petits. La question se trouvera ainsi ramenée à calculer l'aire de chaque triangle.

Pour plus de simplicité, supposons que les triangles primitivement formés dans le plan de projection, soient tous égaux entre eux, équilatéraux (*Voy*. le n° 176); et prenons leur côté commun pour unité. [On peut négliger les triangles du bord qui ne sont pas équilatéraux.] Soient d, d', d'', les différences de longueur des perpendiculaires correspondantes à l'un de ces triangles, prises deux à deux : les côtés du triangle inscrit correspondant auront respectivement pour longueurs

$$\sqrt{1+d^2},\ \sqrt{1+d'^2},\ \text{et}\ \sqrt{1+d''^2};$$

et il sera facile d'en déduire l'aire de ce dernier triangle par la formule du *numéro* 296 (2°).

Lorsque la courbure de la surface est très faible, c'est-à-dire lorsqu'elle se rapproche assez sensiblement de la forme plane, en prenant le plan de projection convenablement, les différences d, d', d'', seront très petites; et pour simplifier le calcul, on pourra négliger les puissances de d, d', d'', supérieures à la seconde, et supposer (*Voy*. l'*Algèbre*)

$$\begin{aligned}\sqrt{1+d^2} &= 1+\tfrac{1}{2}d^2,\\ \sqrt{1+d'^2} &= 1+\tfrac{1}{2}d'^2,\\ \sqrt{1+d''^2} &= 1+\tfrac{1}{2}d''^2.\end{aligned}$$

Si l'on fait alors, pour abréger,

$$d^2+d'^2+d''^2=D^2,$$

et que l'on continue à négliger toujours les puissances supérieures de ces quantités, la formule déjà citée donnera, pour l'aire de chaque triangle, des expressions de la forme

$$\frac{1}{4}\sqrt{3}\,(1+\tfrac{1}{3}D^2)\ ;$$

et l'on n'aura plus qu'à en faire la somme.

Il est facile de reconnaître (*Voy.* le n° 613) que le résultat obtenu par cette méthode sera toujours un peu au-dessous du véritable, mais qu'il en différera d'autant moins, que la courbure de la surface sera plus faible, et que les triangles élémentaires seront plus petits et approchant plus d'être parallèles au plan de projection.]⋧

§ II. *De l'Aire de la Surface Sphérique.*

Lemme I.

615. *L'aire d'une surface convexe fermée de toutes parts, polyèdre ou courbe, est moindre que celle de toute autre surface qui l'envelopperait entièrement.*

⋦[Cette proposition est une conséquence du lemme 1 établi ci-dessus (n° 613) : car en coupant par un plan quelconque les deux surfaces proposées, la ligne d'intersection de la surface enveloppante sera toujours plus grande que la ligne d'intersection de la surface enveloppée (*Voy.* le n° 186). Mais . . . .]⋧

On peut démontrer ce nouveau lemme par un raisonnement à très peu près semblable à celui du *numéro* 186.

Fig. 147. Il suffit pour cela de convenir que ABC, PQRS (fig. 147), représenteront des surfaces au lieu de représenter des lignes. Alors, au lieu de considérer la portion de plan limitée par la ligne ABC, on considère la portion d'espace limitée par la surface ABC, et l'on mène un plan tangent représenté par MAN. Ce plan coupe la surface enveloppante suivant une courbe; et la portion de ce plan limitée par la courbe, étant moindre que la portion de surface courbe représentée par MPN, on en tire l'énoncé, comme dans le *numéro* cité.

Scolie 1er. — La proposition est applicable au cas de deux surfaces ayant une partie commune, ou des points communs, ou des lignes communes, pourvu que la partie enveloppée soit convexe, etc. (*Voy.* le n° 186, *scol.* 1er). On peut aussi supprimer les portions de surface qui sont communes; et alors on voit que

De deux portions de surfaces terminées au même contour, l'une enveloppée convexe, l'autre enveloppante quelconque, la première est la plus petite.

Scol. 2. — La même proposition peut encore être étendue à une série de surfaces qui s'enveloppent les unes les autres, pourvu qu'elles soient convexes; [toutefois, cette restriction est inutile pour la plus extérieure].

616. Les deux surfaces pourraient être des surfaces de révolution autour d'un même axe A*a* (fig. 446), et avoir en même temps un même plan de symétrie ST perpendiculaire à cet axe. Dans ce cas, le plan de symétrie partageant chacune des deux surfaces en deux parties égales, MNM′ et M*n*M′, PQP′ et P*q*P′, il y aurait lieu d'appliquer aux portions situées d'un même côté du plan de symétrie [bien qu'elles ne soient pas fermées de toutes parts, et que l'une n'enveloppe pas l'autre], le principe démontré pour les surfaces entières. Fig. 446.

On peut énoncer cette conséquence de la manière suivante :

Lemme II. (Fig. 446.)

Soient deux lignes, MN, PQ, *comprises dans un angle droit* SOA *et terminées à ses côtés, sans se couper dans son intérieur;*

En faisant tourner les deux lignes autour de l'un des côtés de cet angle, on obtient deux surfaces de révolution dont l'une intérieure, MNM′, *est moindre que la surface extérieure,* PQP′, *toutes les fois que la ligne génératrice intérieure satisfait aux conditions suivantes :*

1° *Si elle présente, dans toute son étendue, sa concavité vers le sommet de l'angle* (n° 184);

Et 2° *Si les tangentes à ses deux extrémités,* M, N, *ne font avec les côtés de l'angle primitif* SOA *que des angles intérieurs aigus ou droits.*

Scolie. — Cette dernière condition est nécessaire pour que la surface totale MNM'n soit convexe. Ainsi, par exemple, la proposition ne serait pas applicable au cas où la ligne MN serait un arc de circonférence plus grand qu'un *quadrant*.

LEMME III. (Fig. 447.)

Fig. 447. 617. *L'aire de la surface latérale d'un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles,* AA'BB', *est équivalente à celle d'un cylindre de même hauteur* ab, *et dont la base aurait pour rayon la perpendiculaire* PO *élevée sur le milieu* P *d'une arète* AB, *et terminée à l'axe* ab.

En effet, si l'on abaisse du point P sur l'axe ab la perpendiculaire Pp, l'aire de la surface latérale du tronc aura d'abord pour mesure $2\pi . Pp \times AB$. Maintenant, si de l'extrémité A d'un rayon aA de la petite base, on abaisse une perpendiculaire AL sur le rayon parallèle bB de la grande base, les deux triangles ABL, POp, seront semblables comme ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun; et l'on aura

$$AB : AL :: OP : Pp,$$

d'où

$$AB \times Pp = OP \times AL = OP \times ab :$$

par conséquent, l'aire de la surface latérale du tronc de cône peut s'exprimer par $2\pi . OP \times ab$. *C. Q. F. D*

Scolie. — L'expression précédente est également applicable au cône entier (*Voy.* le n° 611, *coroll.* 5).

LEMME IV. (Fig. 448.)

Fig. 448. 618. *La surface engendrée par la révolution d'une ligne brisée régulière* ABCD... (n° 279, *scol.*) *tournant autour d'une droite* MN *qui passe par son centre, et qui ne la coupe pas, est équivalente à la surface latérale d'un cylindre circulaire droit qui aurait pour base le cercle inscrit à la ligne brisée, et sa projection sur l'axe pour hauteur.*

Soient ab, bc, cd,.... les projections respectives des côtés AB, BC, CD,.... de la ligne brisée, sur l'axe de révolution, et OP, OQ, OR, ... leurs apothèmes. En représentant par *aire* AB, *aire* BC, *aire* CD, ... les aires des surfaces engendrées par la révolution de ces côtés, nous aurons (n° 617)

$$\begin{aligned} aire\ \mathrm{AB} &= circ.\ \mathrm{OP} \times ab, \\ aire\ \mathrm{BC} &= circ.\ \mathrm{OQ} \times bc, \\ aire\ \mathrm{CD} &= circ.\ \mathrm{OR} \times cd, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}$$

d'où, en faisant la somme, et observant que $\mathrm{OP} = \mathrm{OQ} = \mathrm{OR} \ldots$, et que $ab + bc + cd = ad$,

$$aire\ \mathrm{ABCD} = circ.\ \mathrm{OP} \times ad,$$

mesure d'une surface cylindrique conforme à l'énoncé.

Scolie. — D'après ce même énoncé, la ligne génératrice ne doit pas couper l'axe de révolution, et peut tout au plus y aboutir, soit par une de ses extrémités, soit par toutes les deux. Dans ce dernier cas ou elle devient un *demi-polygone régulier,* la hauteur de la surface cylindrique équivalente est égale au diamètre du cercle circonscrit.

Théorème V. (Fig. 244.)

619. *Toute surface sphérique* OA *est équivalente à la surface latérale d'un cylindre circulaire droit équilatéral* (n° 540) *qui aurait pour base un grand cercle* [et le diamètre AC pour hauteur]. Fig. 244.

Cette proposition résulte de ce que la demi-circonférence génératrice de la sphère peut être considérée comme un demi-polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits (n° 183). On peut d'ailleurs, en suivant la même marche que dans le *numéro* 299, la démontrer comme il suit :

Supposons que *circ.*OA $\times$ AC, qui est la mesure d'un cylindre équilatéral conforme à l'énoncé, soit en même temps la mesure d'une surface plus petite que celle de la sphère OA, par exemple la mesure de la surface sphérique OA'. Inscrivons dans la demi-circonférence génératrice de la sphère OA un demi-polygone régulier qui ait OB pour apothème, et dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence; puis, faisons tourner tout le système autour du diamètre AC. Le demi-polygone régulier engendrera une surface dont la mesure sera *circ*. OB $\times$ AC ; mais OB est moindre que OA, tandis que la surface engendrée par le demi-polygone est plus grande que la surface de la sphère OA'; *ce qui est absurde*.

On démontrerait de même que *circ*. OA $\times$ AC ne peut mesurer la surface d'une sphère plus grande : [pour cela on circonscrirait à la demi-circonférence génératrice de la sphère OA un demi-polygone régulier dont les côtés ne la rencontrent pas ; alors, au lieu d'avoir AC pour facteur commun des deux expressions que l'on doit comparer, on aurait pour facteur commun OA : à cela près, le raisonnement est le même.]

Corollaire 1er. — En nommant r le rayon de la sphère et d son diamètre, sa surface a pour mesure $4\pi r^2$ ou πd^2 : elle est *quadruple de celle d'un grand cercle*.

Coroll. 2. — En prenant pour unité de fuseau le fuseau correspondant à un angle dièdre droit, c'est-à-dire le quart de la surface sphérique ou l'aire d'un grand cercle :

L'aire d'un fuseau a pour mesure l'angle dièdre correspondant, ou *l'arc de grand cercle correspondant* (*Voy*. le n° 580).

La mesure absolue du fuseau, rapportée au carré qui a pour côté l'unité linéaire, est donc $A\pi r^2$, en nommant A la valeur de l'angle ou de l'arc correspondant à ce fuseau.

Et par suite, l'aire d'un fuseau *est à* celle de la sphère *comme* l'angle dièdre correspondant *est à* 4 *droits*, ou *comme* l'arc de grand cercle correspondant *est à* la circonférence d'un grand cercle.

Scolie 1er. — Il serait facile de démontrer que *L'aire de la surface sphérique, celle du cylindre circonscrit, et celle du*
Fig. 449. *cône équilatéral circonscrit* (n° 556, fig. 449), *sont entre elles* :: 4 : 6 : 9.

Par conséquent *L'aire du cylindre est moyenne proportionnelle entre les deux autres ;*

Et *L'aire de la sphère est équivalente aux* $\frac{2}{3}$ *de la surface totale du cylindre.*

≤[Scol. 2. — On démontrerait de même, que *L'aire de la surface sphérique, celle du cylindre équilatéral inscrit, et celle du cône équilatéral inscrit* (fig. 450), *sont entre elles* :: 16 : 12 : 9. Fig.450.

L'aire du cylindre est donc encore *moyenne proportionnelle entre les deux autres ;*

Et *L'aire de la sphère est double de la surface latérale du cylindre ; elle vaut les* $\frac{4}{3}$ *de sa surface totale.*]≥

Théorème VI. (Fig. 451.)

620. *Une calotte sphérique*, BAB' ou BCB' *est équivalente à la surface latérale d'un cylindre circulaire droit qui aurait pour base un grand cercle, et même hauteur* AD *que la calotte.* Fig.451.

La démonstration de ce théorème est à peu près la même que celle du précédent.

Pour y parvenir directement, considérons d'abord une calotte BAB' *au plus* égale à une demi-sphère, et supposons que *circ.* OA × AD puisse être la mesure d'une calotte plus petite *bab'* (n° 616), ayant même centre O que la première, et sa base sur le même plan. Inscrivons à l'arc générateur AB une ligne brisée régulière dont les côtés ne rencontrent pas l'arc *ab* (n° 279, *scol.*), et ayant OP pour apothème. La surface engendrée par cette ligne brisée tournant autour de AD, aura pour mesure *circ.* OP × AD. Or cette surface est plus grande que la calotte *bab'* (n° 616), tandis qu'au contraire OP est moindre que OA ; *ce qui est absurde.*

On prouverait de la même manière que *circ.* OP × AD ne saurait être la mesure d'une calotte plus grande que BAB'.

Considérons maintenant la calotte BCB' plus grande qu'une demi-sphère : la démonstration précédente n'y est plus applicable (n° 616, *scol.*); mais on a

$$BCB' = BAB'CB - BAB' = circ.\,OA \times AC - circ.\,OA \times AD\,;$$
ou
$$BCB' = circ.\,OA \times CD:$$

donc le théorème est général.

COROLLAIRE 1er. — *Une zone* étant la différence de deux calottes, et ayant pour hauteur la différence de leurs hauteurs, *est* aussi *équivalente à la surface latérale d'un cylindre circulaire droit qui aurait pour base un grand cercle, et même hauteur que la zone.*

COROLL. 2. — *L'aire d'une calotte ou d'une zone est à celle de la sphère entière comme sa hauteur est au diamètre;*

Elle est donc, pour une même sphère, indépendante des rayons des bases;

Elle a pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle, multipliée par sa hauteur.

Enfin, en nommant h cette hauteur, r le rayon de la sphère et d son diamètre, elle a pour expression $2\pi rh$ ou πdh.

THÉORÈME VII. (Fig. 452.)

Fig. 452. 621. *Deux triangles sphériques symétriques entre eux,* ABC, A'B'C', *sont équivalens.*

La démonstration est toute pareille à celle du *numéro* 521, relative aux angles trièdres.

Les côtés des deux triangles proposés étant égaux, les cordes qui les sous-tendent sont aussi égales, et forment des triangles égaux. Les cercles circonscrits à ces triangles, qui sont nécessairement des petits cercles (n° 576), sont aussi égaux; et en menant de leurs pôles respectifs, P, P', des arcs de grand cercle aux sommets des triangles sphériques proposés, on formera des triangles sphériques isocèles qui seront aussi égaux chacun à chacun.

Seulement, il faut bien faire attention à ceci : suivant que l'un des triangles proposés sera la somme de deux ou de trois triangles isocèles, ou l'excès de la somme de deux pareils triangles sur un troisième, c'est-à-dire suivant que le pôle du petit cercle circonscrit à l'un des triangles proposés sera dans l'intérieur de cet angle, ou sur l'un de ses côtés, ou à l'extérieur, la même chose aura également lieu pour le second triangle (*Voy.* le n° 521).

Corollaire.—*Deux polygones sphériques symétriques entre eux* étant composés de triangles sphériques symétriques, *sont équivalens.*

Théorème VIII. (Fig. 453.)

622. *Un triangle sphérique* ABC *est équivalent à l'excès de la demi-somme des fuseaux correspondans, sur un fuseau droit.* Fig. 453.

Les circonférences de grand cercle auxquelles appartiennent les trois côtés du triangle, forment, en se coupant sur la surface de la sphère, *huit* triangles sphériques différens, entre lesquels il existe les mêmes relations qu'entre les angles trièdres correspondans (n^os 449 et 450); et en nommant A, B, C, les fuseaux qui correspondent aux angles du triangle, on a (*Voy.* le n° 522) :

$$\begin{aligned} ABC + A'BC &= A, \\ ABC + AB'C &= B, \\ ABC + ABC' &= C. \end{aligned}$$

Remplaçant dans la dernière égalité, ABC′ par son symétrique équivalent A′B′C (n° 621), ajoutant membre à membre les trois égalités, et observant que

$$ABC + A'BC + AB'C + A'B'C = 2$$

[en prenant le fuseau rectangle pour unité], on obtient

$$2.ABC + 2 = A + B + C, \quad \text{où} \quad ABC = \tfrac{1}{2}(A + B + C) - 1.$$

Corollaire 1^er.—*Un triangle sphérique* ABC *est équivalent au fuseau dont l'angle dièdre serait* $\{\tfrac{1}{2}(A + B + C) - 1\}$; il a pour mesure absolue (n° 619, *coroll.* 2) : $\{\tfrac{1}{2}(A+B+C)-1\}\pi r^2$.

Voyez les *corollaires* du *numéro* 522.

Scolie 1er. — Au lieu de mesurer les fuseaux et les triangles sphériques par des angles dièdres, on pourrait au contraire mesurer les angles dièdres et trièdres par les fuseaux et les triangles sphériques qui leur correspondent respectivement sur une sphère décrite d'un rayon arbitraire constant, et ayant son centre sur l'arète de chaque angle dièdre, ou au sommet de chaque angle trièdre ; ce qui serait analogue à la mesure des angles plans par des arcs de cercle (n° 196).

Scol. 2. — L'expression $(A+B+C-2)$ dont la moitié mesure l'aire du triangle sphérique quand on prend le fuseau droit pour unité, se nomme l'*excès sphérique* du triangle. En supposant infini le rayon de la sphère, la somme des angles A, B, C, devient égale à 2 puisqu'alors le triangle est un triangle rectiligne ; et l'excès sphérique se réduit à *zéro*.

Coroll. 2. — En prenant encore l'aire du fuseau droit pour unité (n° 619, *coroll.* 2),

L'aire d'un polygone sphérique convexe a pour mesure la demi-somme de ses angles, diminuée d'autant d'angles DROITS *qu'il a de côtés moins* DEUX (Voy. le n° 523).

≤[Coroll. 3. — *La surface de la sphère étant supposée partagée en un certain nombre de polygones convexes, son aire a pour mesure le double du nombre des sommets, plus le double du nombre des polygones, moins le double du nombre des côtés* (Voy. le n° 524).]≥

CHAPITRE III.

DES VOLUMES.

623. On nomme *volume*, comme nous l'avons dit au *numéro* 2, l'*étendue considérée dans un espace limité*, ou bien encore le *rapport de l'étendue de cet espace à l'étendue de l'espace unitaire.*

On prend ordinairement pour unité de volume, le *cube ayant pour arète l'unité de longueur ;* et de là vient que l'on nomme *cubature* la détermination des volumes.

§ Ier. *Mesure des Volumes des Prismes, etc.*

Théorème I. (Fig. 454.)

624. *Deux parallélépipèdes rectangles,* OG, OG', *de même base* OF *sont proportionnels à leurs hauteurs,* OC, OC'. Fig. 454.

Pour démontrer cette proposition, on fait d'abord coïncider les bases OF; les arètes perpendiculaires à ces bases prennent la même direction chacune à chacune. Alors, en procédant comme dans les cas analogues (*Voy.* par *ex.* le n° 291), on arrive à cette conséquence, que le rapport des deux parallélépipèdes est le même que celui de leurs hauteurs, c'est-à-dire que

$$OG : OG' :: OC : OC'. \qquad C. Q. F. D.$$

Théorème II. (Fig. 455.)

625. *Deux parallélépipèdes rectangles*, OG, OG', *de même hauteur* OC *sont proportionnels à leurs bases*, OF, OF'. Fig. 455.

En effet, on peut d'abord placer les deux parallélépipèdes de manière qu'ils aient un angle trièdre commun en O. Cela fait, la face A′G′ du parallélépipède OG′ [prolongée s'il est nécessaire] détermine un troisième parallélépipède rectangle OG″ qui peut être considéré comme ayant pour base le rectangle OD, et OA′ pour hauteur. En lui comparant le parallélépipède OG considéré comme ayant la même base OD et OA pour hauteur, on a la proportion

$$OG : OG'' :: OA : OA'.$$

Maintenant, le même parallélépipède OG″ peut être considéré comme ayant pour base OE et pour hauteur OB. En le comparant au parallélépipède OG′ considéré comme ayant la même base OE et OB′ pour hauteur, on a encore

$$OG'' : OG' :: OB : OB'.$$

Multipliant ensuite ces deux proportions par ordre, on obtient, en supprimant le facteur commun OG″,

$$OG : OG' :: OA \times OB : OA' \times OB' ;$$

alors, le second rapport de la proportion étant précisément celui des bases, OF, OF′, des deux parallélépipèdes OG, OG′, on en tire l'énoncé du théorème.

Théorème III. (Fig. 456.)

Fig. 456. 626. *Deux parallélépipèdes rectangles quelconques* OG, OG′, *sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

On peut placer les deux parallélépipèdes de manière qu'ils aient un angle trièdre commun O. Cela posé, en prolongeant, s'il est nécessaire, les faces A′G′ et B′G′ du parallélépipède OG′, on formera un nouveau parallélépipède OG″ qui pourra être considéré comme ayant pour base le rectangle OF′, et OC pour hauteur; en lui comparant le parallélépipède OG considéré comme ayant pour base OF, et la même hauteur OC, on aura

$$OG : OG'' :: OF : OF'.$$

Maintenant, en comparant le même parallélépipède OG″ au parallélépipède OG′ qui a la même base OF et pour hauteur OC′, on a cette seconde proportion

$$OG'' : OG' :: OC : OC'\,;$$

d'où l'on tire, en la multipliant par ordre avec la précédente et supprimant le facteur OG″,

$$OG : OG' :: OF \times OC : OF' \times OC'.$$

C. Q. F. D.

SCOLIE 1[er]. — Si l'on multiplie la proportion que l'on vient d'obtenir, par la suivante

$$OF : OF' :: OA \times OB : OA' \times OB' \quad (\text{n}^\circ\ 292),$$

on obtiendra, en supprimant les facteurs OF et OF′,

$$OG : OG' :: OA \times OB \times OC : OA' \times OB' \times OC'\,;$$

c'est-à-dire que *Deux parallélépipèdes rectangles quelconques*, OG, OG′, *sont proportionnels aux produits des arètes adjacentes* (n° 531, *scol.* 2) [qui forment, dans chacun d'eux, un même angle trièdre].

Scol. 2. — Les démonstrations des deux théorèmes précédens s'appliqueraient également à deux parallélépipèdes quelconques, pourvu qu'ils eussent un angle trièdre égal.

Scol. 3. — On peut, comme dans le *numéro* 363, *Trouver deux longueurs* [x, y] *proportionnelles à deux parallélépipèdes rectangles* ayant respectivement pour arètes a, b, c, a', b', c'.

Pour cela, on a d'abord

$$x : y :: abc : a'b'c',$$

ou

$$x = \frac{abcy}{a'b'c'}.$$

Cela posé, y étant arbitraire, faisons $y = c'$; nous aurons

$$x = \frac{ab}{a'} \times \frac{c}{b'}.$$

Ainsi, l'on cherchera, 1° une quatrième proportionnelle aux lignes a', b, a : [représentons-la par p]; 2° une quatrième proportionnelle aux lignes b', c, p : ce sera la valeur de x.

Fig. 457. 627. REMARQUE *générale sur la mesure des volumes.* — En comparant le parallélépipède rectangle quelconque OG (fig. 457) au cube *og*, on aura

$$OG : og :: OA \times OB \times OC : oa \times ob \times oc.$$

Mais si l'on suppose que *oa* $[= ob = oc]$ soit l'unité linéaire, et que le volume du cube *og* soit pris pour unité de volume (*Voy.* le n° 623), alors la proportion précédente deviendra

$$OG = OA \times OB \times OC :$$

c'est-à-dire que dans l'*hypothèse* où l'on prend pour *unité de volume le cube construit sur l'unité linéaire : Tout parallélépipède rectangle* OG *a pour mesure le produit de ses trois arètes adjacentes* formant un même angle trièdre (n° 531, *scol.* 2); ou, en d'autres termes, que le rapport abstrait du volume d'un parallélépipède rectangle OG à l'*unité de volume*, est égal au produit des rapports abstraits de ses trois arètes à l'unité linéaire.

Fig. 458. Ainsi, le parallélépipède de la figure 458, dont les trois arètes adjacentes sont supposées avoir respectivement 3, 5, et 8 unités de longueur, aura pour mesure le nombre

$$3 \times 8 \times 5 = 120 :$$

en effet, on peut le considérer comme composé de 5 couches superposées dont chacune contient 3×8 ou 24 cubes unitaires, ce qui fait en tout 120 cubes.

Cette proposition s'exprime encore d'une manière générale en disant que *Tout parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur ;*

Ou bien encore, comme au *numéro* 293, que *Tout parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de ses trois dimensions* [en nommant *dimensions* les longueurs des trois arètes adjacentes qui forment chacun de ses angles trièdres].

On verra dans ce chapitre que la mesure d'un volume quelconque se ramène toujours à un produit de *trois facteurs* *linéaires* que l'on nomme de même ses dimensions, ou à une somme de produits de cette espèce.

Le volume d'un cube a pour mesure la troisième puissance de son arète : et de là le mot *cube* pour désigner la troisième puissance d'un nombre.

Lorsque les arètes d'un parallélépipède rectangle forment une progression par quotient, on peut le transformer en un cube construit sur son arète moyenne. En effet, soit a la longueur de la plus petite arète, ar l'arète moyenne, et ar^2 la plus grande des trois : le volume du parallélépipède sera mesuré par le produit $a \times ar \times ar^2$, ou a^3r^3, ou $(ar)^3$; d'où il suit qu'il est équivalent au cube construit sur l'arète ar. Mais en général, on ne peut transformer un parallélépipède rectangle en cube comme on réduit un rectangle en carré, parce qu'il n'existe pas de moyens pour extraire géométriquement une racine cubique comme il y en a pour extraire géométriquement une racine carrée.

C'est à cette circonstance qu'est due la célébrité qu'avait acquise chez les anciens, le problème de la *duplication du cube*, qui consiste dans la recherche de l'arète d'un cube équivalent au double d'un cube donné. Ce problème, qui marche de pair avec celui de la *quadrature du cercle*, peut de même se résoudre avec un degré d'approximation tel, que l'exactitude absolue, si l'on y parvenait, ne saurait plus désormais offrir aucune utilité réelle.

THÉORÈME V. (Fig. 459.)

628. *Tout parallélépipède droit* AF *est équivalent à un parallélépipède rectangle* AF *de base équivalente et de même hauteur*. Fig.4

Soient AD et GF les faces opposées prises pour bases, les arètes AG, BI, CE, DF, étant perpendiculaires à ces bases.

Par les droites AG, BI, menons des plans perpendiculaires aux plans parallèles AI, CF. Les plans ainsi menés couperont respectivement les plans des faces latérales AD et GF suivant des droites AC′ et BD′, GE′ et IF′ ; et en supposant ces droites ter-

33..

Fig. 459. minées au plan de la base opposée CF, il en résultera un nouveau parallélépipède AF′ (n° 530). Or, ce parallélépipède sera rectangle : car d'abord, AC′ et ses parallèles seront perpendiculaires aux plans AI, CF (n° 468), et par conséquent aux droites AB, C′D′ (n° 437) ; d'où il résulte que les faces AD′, GF′, que l'on peut prendre pour bases, seront des rectangles; et d'ailleurs les arètes latérales AG, BI, ... restent perpendiculaires aux plans de ces bases.

Maintenant, les deux parallélépipèdes AF, AF′, qui ont des bases équivalentes AD, AD′ (n° 294), et même hauteur AG, sont équivalens. En effet, les deux prismes déterminés par les arètes latérales AG, CE, C′E′, d'une part, et BI, DF, D′F′, de l'autre, sont égaux (n° 529, *coroll.* 2) ; donc, en retranchant l'un ou l'autre de la figure totale AGBIDFC′E′, on aura des restes équivalens. Or, l'un de ces restes est le parallélépipède AF, et l'autre le parallélépipède AF′ : donc etc.

Théorème VI. (Fig. 459.)

629. *Tout parallélépipède* AF *dont deux faces latérales sont perpendiculaires aux bases, est équivalent à un parallélépipède droit* AF′ *de même base et de même hauteur.*

Nous pouvons employer la même figure, en prenant pour bases les faces AI, CF, et supposant les faces AD, GF, perpendiculaires à ces bases.

Cela posé, par les droites AG, BI, menons encore, comme dans le *numéro* précédent, des plans perpendiculaires aux faces AI, CF. Il en résultera un nouveau parallélépipède AF′ qui sera droit (n° 530), et qui aura même base et même hauteur que le parallélépipède AF. Il est facile de démontrer comme précédemment l'équivalence de ces deux parallélépipèdes.

Théorème VII. (Fig. 459.)

630. *Tout parallélépipède* AF *est équivalent à un parallélépipède* AF′ *de même base et de même hauteur, ayant deux faces latérales perpendiculaires aux bases.*

La même figure peut servir encore, en supposant quelconque le parallélépipède AF, et en menant comme ci-dessus (nos 628 et 629), par les droites AG et BI, des plans perpendiculaires au plan de la face AI que l'on prend pour base. On détermine un nouveau parallélépipède AF', de même base et de même hauteur que le parallélépipède AF, et qui a les deux faces latérales AE', BF', perpendiculaires aux bases. Il est facile de prouver, de la même manière, que les deux parallélépipèdes sont équivalens. Fig. 459

Théorème VIII.

631. *Tout parallélépipède est équivalent à un parallélépipède rectangle de base équivalente et de même hauteur.*

En effet, tout parallélépipède peut être transformé en un autre de même base et de même hauteur, et ayant deux faces latérales perpendiculaires aux bases (n° 630); celui-ci peut être transformé en un parallélépipède droit aussi de même base et de même hauteur (n° 629); et ce dernier peut être transformé en un parallélépipède rectangle de base équivalente et de même hauteur (n° 628). Donc, etc.

Corollaire. — *Tout parallélépipède a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Théorème IX. (Fig. 460.)

632. *Tout prisme triangulaire* ADBECF *est équivalent à un prisme triangulaire droit* A'D'B'E'C'F' *de mêmes arètes latérales, et ayant pour base une section perpendiculaire aux pans du premier.* Fig. 460

Pour le prouver, opérons comme dans le *numéro* 610, et prolongeons suffisamment, dans un même sens, les arètes latérales AD, BE, CF; coupons ces droites perpendiculairement par un plan A'B'C' qui ne passe pas dans l'intérieur du prisme; puis prenons sur les arètes prolongées, les longueurs A'D', B'E', C'F', égales entre elles et à ces arètes. Nous déterminerons ainsi un prisme droit A'D'B'E'C'F' de mêmes arètes latérales que le prisme proposé, et ayant pour base la section faite perpendiculairement à ces arètes.

Cela posé, l'espace AA'BB'CC' est égal à l'espace DD'EE'FF' : car si l'on place le triangle DEF sur son égal ABC, les droites DD', EE', FF', coïncideront respectivement avec les droites AA', BB', CC'. Maintenant, si de chacun de ces deux espaces égaux on retranche l'espace DEFA'B'C', il restera

ADBECF. = A'D'B'E'C'F' *C. Q. F. D.*

Scolie. — Le même raisonnement est applicable à un prisme oblique quelconque, comme dans le *numéro* 610 déjà cité.

COROLLAIRE. — *Deux prismes triangulaires sont équivalens lorsqu'ils ont les arètes latérales toutes de même longueur, et que les sections respectivement perpendiculaires à ces arètes sont des triangles égaux.*

Par conséquent : *Les deux prismes triangulaires symétriques dans lesquels se décompose un parallélépipède* (n° 534) *sont équivalens.*

THÉORÈME X.

633. *Tout prisme est équivalent à un parallélépipède de base équivalente et de même hauteur.*

1° Si le prisme est triangulaire, il équivaut, d'après le corollaire du théorème précédent, à la moitié d'un parallélépipède construit sur l'un de ses angles trièdres, avec les mêmes arètes ; et comme la base du prisme est aussi la moitié de celle du parallélépipède, et que d'ailleurs leur hauteur est commune, la proposition se trouve démontrée pour le prisme triangulaire.

2° Maintenant, s'il s'agit d'un prisme quelconque, on peut le décomposer en prismes triangulaires de même hauteur, et dont les bases respectives forment en somme la base du prisme total : donc la proposition est encore vraie pour un prisme quelconque.

634. REMARQUE *sur la mesure du prisme.* — Tout prisme étant équivalent à un parallélépipède de base équivalente et

de même hauteur, et le parallélépipède ayant pour mesure le produit de sa base par sa hauteur, il s'ensuit que

Tout prisme a aussi *pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Un prisme quelconque a également *pour mesure le produit d'une section perpendiculaire aux arêtes latérales, multipliée par leur longueur.*

Les mêmes mesures sont évidemment applicables aux *cylindres*, droits ou obliques.

C'est, au reste, ce que l'on pourrait démontrer pour le cylindre circulaire droit, par un raisonnement analogue à celui du *numéro* 299, en employant des prismes réguliers inscrits et circonscrits.

Quand il s'agit d'*un prisme triangulaire*, il est facile de voir qu'il *a* aussi *pour mesure la moitié du produit d'une face latérale par la perpendiculaire abaissée sur cette face, d'un point de l'arête opposée,*

Ou bien *la moitié du produit de sa surface latérale par le rayon du cercle inscrit à une section perpendiculaire aux pans ou aux arêtes latérales.*

§ II. *Mesure des Pyramides et des autres Polyèdres, etc.*

Théorème XI. (Fig. 461.)

635. *Deux tétraèdres*, SABC, *sabc*, *sont équivalens lorsqu'ils ont des bases équivalentes*, ABC, *abc*, *et même hauteur* MN. Fig. 461.

Plaçons d'abord les deux tétraèdres de manière qu'ils aient leurs bases sur un même plan, et leurs sommets sur une même parallèle à ce plan. Puis, supposons que l'on partage la hauteur MN en un très grand nombre de parties égales, et que l'on mène par les points de division des plans parallèles aux bases : soient pour un instant $A'B'C'$, $A''B''C''$,..., $a'b'c'$, $a''b''c''$,..., les sections ainsi déterminées. Les deux tétraèdres se trouveront décomposés en un même nombre de tranches ABCA′B′C′, A′B′C′A″B″C″,..., $abca'b'c'$, $a'b'c'a''b''c''$,..., qui différeront d'autant moins de la forme prismatique, que les sections seront plus rapprochées. De plus, ces tranches seront toutes de même hauteur, et de bases équivalentes chacune à chacune (n° 612, *scol.* 1er); donc si elles étaient rigoureusement prismatiques, les deux tétraèdres seraient équivalens comme composés d'un même nombre de parties équivalentes chacune à chacune. La différence des deux tétraèdres, s'il en existe une, est donc d'une petitesse indéfinie, puisque les sections parallèles peuvent être supposées indéfiniment rapprochées.

Nous pouvons, au reste, prouver que cette différence est rigoureusement nulle.

En effet, soit $SABC > sabc$, et $SABC - sabc = ABC \times MP$. Partageons la hauteur commune des deux tétraèdres en parties égales quelconques, mais toutefois moindres que MP; et soit MQ l'une de ces parties. Décomposons, comme ci-dessus, les deux tétraèdres en tranches d'une hauteur commune égale à MQ; et soient A′B′C′, A″B″C″,..., $a'b'c'$, $a''b''c''$,..., les sections ainsi obtenues.

Cela posé, par les points B, C, B′, C′,...., menons parallèlement à SA, *en dehors* du tétraèdre SABC, et entre les plans ABC et A′B′C′, A′B′C′ et A″B″C″,..., les droites BD, CE, B′D′, C′E′,... : nous formerons ainsi une série de prismes (n° 525) *excédens*, d'une même hauteur égale à MQ, et ayant respectivement pour bases *inférieures*, ABC, A′B′C′,....; leur nombre sera d'ailleurs égal à celui des sections, *y compris la base*.

De même, par les points b', c', b'', c'',..., menons parallèlement à sa, *en dedans* du tétraèdre $sabc$, et entre les plans abc et $a'b'c'$, $a'b'c'$ et $a''b''c''$,..., les droites $b'd$, $c'e$, $b''d'$, $c''e'$, .. : nous formerons ainsi une autre série de *prismes déficiens* de même hauteur que les premiers, et ayant respectivement pour bases *supérieures*, $a'b'c'$, $a''b''c''$,.......;

leur nombre sera égal à celui des sections, *non compris la base*.

Maintenant, les prismes excédens et les prismes déficiens sont équivalens *un à un* à partir des sommets S et *s* (n° 634); donc la somme des premiers excède la somme des derniers, du prisme AA'BDCE, où d'une quantité $ABC \times MQ$ (n° 634). Or, on diminuera cette différence en remplaçant la somme des prismes excédens par le tétraèdre SABC qui lui est inférieur, et la somme des prismes déficiens par le tétraèdre *sabc* qui lui est supérieur; donc

$$SABC - sabc < ABC \times MQ;$$

d'où l'on tire, en substituant au premier membre sa valeur supposée,

$$ABC \times MP < ABC \times MQ, \text{ ou } MP < MQ;$$

ce qui est absurde.

Corollaire 1er. — *Deux tétraèdres symétriques entre eux sont équivalens* (*Voy.* les nos 543; et 546, *scol.*).

Coroll. 2. — *Deux polyèdres symétriques entre eux sont équivalens* (n° 561).

Théorème XII.

636. *Toute pyramide est équivalente au tiers d'un prisme de même base et de même hauteur.*

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un tétraèdre ABCD Fig. 462.
(fig. 462) : dans cette hypothèse, menons par les points B, C, les droites BE, CF, égales et parallèles à AD; et achevons le prisme ADBECF qui aura même base ABC et même hauteur que le tétraèdre. Menons de plus le plan CDE : le prisme se trouvera décomposé en *trois* tétraèdres, ABCD, BCDE, et CDEF. Le second de ces tétraèdres, considéré comme ayant pour base BCE et D pour sommet, est équivalent au troisième considéré comme ayant pour base CEF et D pour sommet; et celui-ci, considéré comme ayant pour base DEF et C pour sommet, est équivalent au premier considéré comme

ayant pour base ABC et D pour sommet. Donc les trois tétraèdres sont équivalens ; donc le tétraèdre ABCD est le tiers du prisme : donc, etc.

Maintenant, toute pyramide peut se décomposer en tétraèdres de même hauteur qu'elle, et ayant respectivement pour bases les triangles partiels dans lesquels se décompose sa base : donc la proposition est également vraie pour une pyramide quelconque.

637. REMARQUES *sur la mesure des pyramides et des autres polyèdres.* — Toute pyramide étant le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur, et le prisme ayant pour mesure le produit de sa base par sa hauteur, il s'ensuit que

Toute pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

La même proposition est applicable à *un cône à base quelconque,* lequel *est,* par conséquent, *équivalent au tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur.*

Au reste, il est facile de démontrer directement la proposition pour le cas d'un cône circulaire droit, en y appliquant un raisonnement semblable à celui des *numéros* 299 et 634, et employant des pyramides régulières inscrites et circonscrites au cône.

Quand on sait évaluer le volume d'une pyramide, on peut évaluer celui d'un polyèdre quelconque : il faut pour cela le décomposer en pyramides (n° 558), de la même manière que l'on évalue l'aire d'un polygone en le décomposant en triangles (n° 296).

Ainsi par exemple, si l'on suppose des perpendiculaires abaissées de l'un des sommets du polyèdre [supposé convexe], sur toutes les faces qui ne passent pas par ce point, le volume du polyèdre aura pour mesure le tiers de la somme des produits que l'on obtient en multipliant chacune de ces dernières faces, par la perpendiculaire correspondante.

≼[S'il s'agit d'un polyèdre régulier, comme il est décomposable en autant de pyramides régulières égales qu'il a de faces (n° 573), et que de plus chaque pyramide a pour base une face du polyèdre et son apothème pour hauteur, il s'ensuit que

Tout polyèdre régulier a pour mesure le tiers du produit de sa surface par son apothème,

Proposition que l'on peut encore énoncer ainsi :

Tout polyèdre régulier a le même volume qu'une pyramide construite sur une base équivalente à la surface du polyèdre, avec l'apothème du polyèdre pour hauteur.

THÉORÈME XIII. (Fig. 463.)

638. *Tout prisme triangulaire tronqué* ABCDEF *est équivalent à la somme de trois tétraèdres ayant pour base commune l'une des bases* ABC *du tronc, et pour sommets les angles de la base opposée.* Fig. 463.

Pour le prouver, menons le plan BCD et le plan CDE : le prisme tronqué se trouvera décomposé en *trois* tétraèdres, ABCD, BCDE, et CDEF. Le premier a d'abord pour base ABC et pour sommet le point D. Le second, considéré comme ayant pour base BCE et pour sommet le point D, peut être transformé en un autre ayant même base BCE et pour sommet le point A (n° 635); et ce nouveau tétraèdre peut être considéré comme ayant pour base ABC et pour sommet E. Le troisième tétraèdre CDEF peut être considéré comme ayant pour base CEF et D pour sommet; il peut donc être transformé en un autre qui aurait la même base CEF et A pour sommet, ou ACF pour base et E pour sommet. Enfin, celui-ci peut être transformé en un autre ayant la même base ACF et B pour sommet, ou bien ABC pour base et F pour sommet. Donc, etc.

SCOLIE. — *Un prisme triangulaire tronqué a pour mesure le produit d'une de ses bases par le tiers de la somme des trois perpendiculaires abaissées respectivement sur cette base, de chacun des sommets de la base opposée.*

Si le prisme tronqué est droit, les perpendiculaires sont les arètes elles-mêmes.

Coroll. 2. — En menant un plan parallèle à l'une des bases d'un prisme tronqué, à une distance égale à la distance moyenne de cette base aux sommets opposés, on détermine un prisme équivalent au tronc de prisme proposé.

Théorème XIV. (Fig. 464.)

Fig. 464. 639. *Tout parallélépipède tronqué* MNOPABCD *est équivalent à la somme de quatre pyramides construites sur l'une de ses bases* MNOP, *et ayant pour sommets respectifs ceux des angles de la base opposée.*

Pour le prouver, menons les deux plans AMPD, BNOC, dont chacun partage la figure en deux prismes triangulaires tronqués; et supposons d'abord, pour simplifier la figure, que les arètes latérales soient perpendiculaires à la base MNOP. Nous aurons :

$$MNPABD = \frac{1}{3} MNP \times (AM + BN + DP),$$

$$MOPACD = \frac{1}{3} MOP \times (AM + CO + DP),$$

$$OMNCAB = \frac{1}{3} OMN \times (CO + AM + BN),$$

$$OPNCDB = \frac{1}{3} OPN \times (CO + DP + BN).$$

Ajoutons maintenant toutes ces égalités membre à membre, en observant que

$$MNPABD + MOPACD = OMNCAB + OPNCDB = MNOPABCD,$$

et que

$$MNP = MOP = OMN = OPN = \frac{1}{2} MNOP;$$

il en résultera, en divisant par 2,

$$MNOPABCD = \frac{1}{4} MNOP \times (AM + BN + CO + DP).$$

C. Q. F. D.

Maintenant, si les arètes latérales ne sont pas perpendiculaires à la base inférieure MNOP, on les remplace par les perpendiculaires abaissées des sommets de la base supérieure. Il est facile de voir que la proposition est également vraie.

Corollaire. — *Tout parallélépidède tronqué* MNOPABCD *a pour mesure le produit d'une de ses bases* MNOP *par le quart de la somme des quatre perpendiculaires abaissées respectivement sur cette base, de chacun des angles de la base opposée,* [ou, ce qui est la même chose, par la demi-somme de deux arètes latérales opposées quelconques].

Par conséquent, en menant un plan parallèle à l'une des bases d'un parallélépipède tronqué, à une distance égale à la distance moyenne de cette base aux sommets opposés, on détermine un parallélépipède équivalent au tronc proposé.

≼[Une proposition semblable ne serait pas vraie pour un tronc de prisme quelconque; mais elle est exacte pour un tronc de prisme régulier : c'est-à-dire que

Tout tronc de prisme régulier est équivalent à un prisme régulier de même base et de même axe;

Et que par conséquent *il a pour mesure le produit de sa base* [régulière] *par son axe.*]≽

Un mode analogue d'évaluation est applicable à un tronc de cylindre circulaire droit : c'est-à-dire que

Un tronc de cylindre circulaire droit (fig. 417) *est équivalent à un cylindre circulaire droit de même base et de même axe;* Fig. 417.

Et *il a pour mesure le produit de sa base* [circulaire] *par son axe.*

Cette dernière proposition peut se démontrer directement par le moyen déjà employé au *numéro* 610 (*coroll.* 3).

Théorème XV.

640. *Un tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides qui auraient pour hauteur*

commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives la base inférieure du tronc, sa base supérieure, et une figure moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

Nous supposerons d'abord que la figure est un tronc de
Fig.465. tétraèdre ABCDEF (fig. 465). Cela posé, menons les plans BCD, CDE : la figure se trouvera décomposée en *trois* tétraèdres ABCD, BCDE, et CDEF. Le premier a pour base ABC et pour hauteur celle du tronc; le troisième a pour base DEF et pour hauteur celle du tronc; il ne reste donc plus à considérer que le deuxième tétraèdre BCDE. Or, par le point D, et dans le plan de la face AE, menons DG parallèle à BE : FG sera aussi parallèle au plan BCEF (n° 474); donc le tétraèdre BCDE peut être remplacé par un tétraèdre qui aurait pour base BCE et pour sommet le point G, ou bien BCG pour base et E pour sommet, et par conséquent même hauteur que le tronc. Pour évaluer sa base BCG, menons GI parallèle à AC : le triangle BGI sera égal au triangle EDF (n° 131); et par conséquent BCG sera moyen proportionnel (n° 303, *coroll.* 1er) entre ABC et DEF : ce qui achève de prouver la proposition.

Voyons maintenant le cas où le tronc LMNOPQRSTU
Fig.466. (fig. 466) n'est pas triangulaire; et complétons la pyramide VLMNOP. Nous pouvons supposer, sur le plan de la base, un triangle ABC équivalent au polygone LMNOP; sur ce triangle comme base, construisons un tétraèdre ZABC ayant son sommet sur le plan parallèle à la base mené par le point V : le tétraèdre et la pyramide seront équivalens. Prolongeons, au travers du tétraèdre, le plan QRSTU : nous y déterminerons une section DEF équivalente au polygone QRSTU (n° 612, *scol.* 1er); par conséquent le tétraèdre partiel ZDEF et la pyramide partielle VQRSTU seront équivalens comme ayant des bases équivalentes et même hauteur. Donc les deux troncs seront équivalens; et comme ils ont d'ailleurs des bases respectivement équivalentes et même hauteur, le théorème démontré pour l'un est également vrai pour l'autre.

SCOLIE. — La proposition précédente, ainsi que la démonstration même [à quelques mots près], est applicable à un cône tronqué à bases parallèles, et quelconque d'ailleurs. Ainsi, en particulier,

Un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles (fig. 423) *est équivalent à la somme de trois cônes de même hauteur, ayant respectivement pour bases la base inférieure du tronc, sa base supérieure, et une troisième base moyenne proportionnelle entre les deux premières.* Fig. 423.

641. ≶[*Autre* REMARQUE *sur la mesure des polyèdres.* — Le moyen indiqué ci-dessus (n° 637) pour évaluer un polyèdre, n'est pas le seul dont on puisse se servir. Ainsi, par exemple, on peut employer une méthode analogue à celle du *numéro* 298, relative à la mesure des aires. Pour cela, on suppose un plan mené dans l'intérieur du polyèdre, de manière que la section qui en résulte soit, *à vue*, aussi grande que possible; puis on mène, par chacune des arètes, des plans perpendiculaires au premier. Le polyèdre se trouve ainsi décomposé en prismes tronqués et en pyramides, que l'on évalue chacun en particulier.

Ce moyen, souvent impraticable, peut être remplacé par le suivant (*Voy.* le n° 298) : on enclot le polyèdre dans une figure moins irrégulière, telle qu'un parallélépipède, dont on évalue le volume; puis on détermine les volumes des espaces vides, et on les retranche du premier.

Quant aux espaces terminés par des surfaces courbes, il est facile de les évaluer *approximativement* par un moyen analogue (*Voy.* le n° 298). La question pouvant aisément se ramener au cas d'un espace compris entre une surface courbe et une base plane, supposons que l'on partage cette base en petites portions rectangulaires égales entre elles, au moyen d'une série de parallèles équidistantes, perpendiculaires à une autre série de parallèles aussi équidistantes; puis, que par chacune de ces parallèles on élève des plans perpendiculaires à la base. L'espace à évaluer se trouvera ainsi décomposé en portions que l'on pourra considérer comme des parallélépipèdes rectangles tronqués : car si les plans parallèles sont suffisamment rapprochés, les quadrilatères courbes qui terminent ces parallélépipèdes seront à peu près plans. En faisant la somme de tous les parallélépipèdes tronqués, on trouvera pour mesure résultante : *l'aire d'un petit rectangle de la base, multipliée par la somme de toutes les perpendiculaires.*

Dans l'emploi de cette méthode, il y a plusieurs observations à faire : 1° les petites portions de la base, adjacentes à son contour, ne sont en général que des portions de rectangles : on peut négliger celles qui, *à vue*, paraissent moindres que la moitié d'un rectangle, et considérer les autres comme des rectangles entiers ; 2° les perpendiculaires extrêmes doivent être considérées comme nulles ; 3° cependant, si l'espace que l'on considère avait en outre des faces planes faisant en même temps partie des plans perpendiculaires à la base, on ne devrait faire entrer dans la somme des perpendiculaires, que la moitié de celles des bords parce qu'elles n'appartiennent qu'à deux parallélépipèdes, et le quart seulement de celles qui servent d'arètes parce qu'elles n'appartiennent qu'à un parallélépipède (*Voy.* le *Cours normal* de M. Dupin).

Enfin l'on peut encore, pour évaluer l'espace terminé par une surface courbe, y supposer tracées des lignes qui seraient les intersections de cette surface par une série de plans parallèles. Alors, en supposant ces plans suffisamment rapprochés, l'espace à mesurer se trouvera partagé en tranches assez minces pour que l'on puisse les considérer comme terminées, soit par des surfaces planes, soit par des portions de surface cylindrique, ou conique, ou sphérique. Alors, on mesurera chacune de ces tranches, et l'on fera la somme des résultats obtenus (*Voy.* la *Géométrie appliquée à l'industrie*, de M. Bergery).]⪢

Dans le paragraphe suivant, nous allons nous occuper spécialement des espaces terminés par la surface sphérique.

§ III. *Du Volume de la Sphère.*

Lemme I. (Fig. 467, 468, et 469.)

642. *Le volume de l'espace engendré par la révolution d'un triangle quelconque* OAB *tournant autour d'une droite* MN *menée dans son plan par un de ses sommets* O, *est équivalent à celui d'une pyramide qui aurait une base équivalente à la surface engendrée par le côté* AB *opposé à ce sommet, et pour hauteur la hauteur* OP *du triangle, correspondante à ce côté considéré comme base.*

Pour démontrer cette proposition, nous considérerons *trois cas.*

1[er] *Cas* (fig. 467) : — L'axe de révolution se confondant avec l'un des côtés OA. Fig. 467.

Abaissons du sommet opposé B la perpendiculaire B*b* sur l'axe de révolution, et d'un second sommet O la perpendiculaire OP sur la base AB du triangle. Nous aurons, en désignant par *vol.* OAB le volume de l'espace engendré par le triangle OAB, par *cercle b*B l'aire du cercle qui a pour rayon *b*B, par *surf.* AB l'aire de la surface engendrée par la droite AB dans la révolution du triangle [et ainsi des autres] :

$$
\begin{aligned}
vol.\,\mathrm{OAB} &= vol.\,\mathrm{AB}b + vol.\,\mathrm{OB}b \\
&= \frac{1}{3}\,cercle\ b\mathrm{B} \times \mathrm{A}b + \frac{1}{3}\,cercle\ b\mathrm{B} \times \mathrm{O}b \\
&= \frac{1}{3}\,cercle\ b\mathrm{B} \times \mathrm{AO}.
\end{aligned}
$$

Mais on a (n° 611, *scol.*)

$$cercle\ b\mathrm{B} : surf.\ \mathrm{AB} :: b\mathrm{B} : \mathrm{AB};$$

en outre, de la similitude des triangles A*b*B, APO, il résulte

$$b\mathrm{B} : \mathrm{AB} :: \mathrm{OP} : \mathrm{AO};$$

par conséquent

$$cercle\ b\mathrm{B} : surf.\ \mathrm{AB} :: \mathrm{OP} : \mathrm{AO};$$

d'où $$\text{cercle } bB \times AO = \text{surf. } AB \times OP,$$

et enfin $$\text{vol. } AOB = \frac{1}{3}\,\text{surf. } AB \times OP.$$

N. B. — La perpendiculaire OP pourrait être extérieure au triangle, ou se confondre avec le côté OB : le résultat serait le même.

Fig 468. 2^e *Cas* (fig. 468) : — L'axe de révolution étant rencontré en un point R par la base AB du triangle, suffisamment prolongée.

Nous aurons alors, d'après la démonstration précédente, en conservant les mêmes notations,

$$\begin{aligned} \text{vol. } OAB &= \text{vol. } ORB - \text{vol. } ORA \\ &= \frac{1}{3}\,\text{surf. } RB \times OP - \frac{1}{3}\,\text{surf. } RA \times OP \\ &= \frac{1}{3}\,\text{surf. } AB \times OP. \end{aligned}$$

Fig. 469. 3^e *Cas* (fig. 469) : — L'axe de révolution étant parallèle à la base AB du triangle.

Dans ce cas, soit de plus Aa la perpendiculaire abaissée du point A sur l'axe MN : les trois perpendiculaires Aa, Bb, OP, seront égales ; et nous aurons

$$\begin{aligned} \text{vol. } OAB &= \text{vol. } aABb - \text{vol. } OAa - \text{vol. } OBb \\ &= \text{cercle } OP \times ab - \frac{1}{3}\,\text{cercle } OP \times Oa - \frac{1}{3}\,\text{cercle } OP \times Ob \\ &= \text{cercle } OP \times ab - \frac{1}{3}\,\text{cercle } OP \times ab \\ &= \frac{2}{3}\,\text{cercle } OP \times ab. \end{aligned}$$

Or (n° 609, *scol.*),

$$\text{cercle } OP : \text{surf. } AB :: \frac{1}{2}\,OP : ab,$$

d'où $$\text{cercle } OP \times ab = \frac{1}{2}\,\text{surf. } AB \times OP\,;$$

donc $$\text{vol. } OAB = \frac{1}{3}\,\text{surf. } AB \times OP.$$

N. B. — La proposition est toujours vraie, quelle que soit la situation de la perpendiculaire OP.

Scolie. — Il y aurait encore à examiner le cas où l'axe de révolution coupe la surface du triangle : on obtiendrait alors une portion de volume qui, étant produite deux fois dans la révolution du triangle, se trouverait aussi comprise deux fois dans l'expression de la mesure. Mais cette circonstance ne devant pas se présenter dans les applications que nous aurons à faire de la proposition précédente, il est inutile de nous en occuper.

Lemme II. (Fig. 470.)

643. *Le volume de l'espace engendré par la révolution d'un secteur polygonal régulier* OABCD *tournant autour d'une droite* MN *qui passe par son centre* O, *est le même que celui d'une pyramide dont la base serait équivalente à la surface engendrée par la révolution de la ligne brisée régulière qui sert de base à ce secteur, et dont la hauteur serait égale au rayon du cercle inscrit.* Fig. 470.

En effet, en nommant OP, OQ, OR, les perpendiculaires abaissées du centre O sur les côtés AB, BC, CD, on a, d'après le lemme précédent (nº 642),

$$\textit{vol.}\text{OAB} = \frac{1}{3}\,\textit{surf.}\ \text{AB} \times \text{OP},$$

$$\textit{vol.}\text{OBC} = \frac{1}{3}\,\textit{surf.}\ \text{BC} \times \text{OQ},$$

$$\textit{vol.}\text{OCD} = \frac{1}{3}\,\textit{surf.}\ \text{CD} \times \text{OR},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

or $\quad \text{OP} = \text{OQ} = \text{OR} \ldots :$

donc $\quad \textit{vol.}\text{OABCD} = \frac{1}{3}\,\textit{surf.}\ \text{ABCD} \times \text{OP}.$

C. Q. F. D.

Scolie. — La proposition s'applique également à un demi-polygone régulier dont les extrémités aboutissent à l'axe.

34..

Corollaire. — *Le volume de l'espace engendré par la révolution d'un secteur polygonal régulier tournant autour d'une droite qui passe par son centre, a pour mesure le tiers du produit de sa surface extérieure multipliée par le rayon du cercle inscrit,* ou les *deux tiers* de l'aire du cercle inscrit multipliée par la projection de la ligne génératrice sur l'axe.

Théorème XVI. (Fig. 244.)

Fig. 244. 644. *Le volume d'une sphère* OA *est le même que celui d'une pyramide dont la base serait équivalente à la surface sphérique, et qui aurait le rayon pour hauteur.*

Cette proposition résulte de ce que, la surface sphérique pouvant être considérée comme composée d'une infinité de polygones plans infiniment petits, la sphère elle-même peut être considérée comme composée de pyramides ayant pour bases ces polygones, et le rayon pour hauteur. Elle se déduirait encore de ce que la sphère peut être regardée comme la limite de l'espace engendré par un demi-polygone régulier tournant autour de son diamètre (nº 643, *scol.*).

Au reste, la proposition se démontre rigoureusement en faisant voir par les moyens ordinaires (*Voy.* les nºs 299, 619, etc.), que le tiers de la surface extérieure multipliée par le rayon ne saurait être la mesure d'une sphère plus petite ni plus grande que la sphère OA.

Corollaire 1er. — Si l'on nomme r le rayon de la sphère et d son diamètre, son volume aura pour expression $\frac{4}{3}\pi r^3$ ou $\frac{1}{6}\pi d^3$.

Coroll. 2. — Lorsqu'on prend pour unité de coin sphérique le quart de sphère [qui vaut $\frac{1}{3}\pi r^3$] :

Un coin a pour mesure l'angle dièdre correspondant, ou *l'arc de grand cercle correspondant.*

La mesure absolue du coin, rapportée au cube qui a pour arète l'unité linéaire, est $\frac{1}{3}A\pi r^3$ (nº 619, *coroll.* 2);

Et par suite : *Le volume d'un coin est à celui de la sphère comme l'angle dièdre correspondant est à* 4 droits, ou *comme* *l'arc de grand cercle correspondant est à la circonférence d'un grand cercle;* il est le même que celui d'une pyramide construite sur une base équivalente au fuseau correspondant, et ayant le rayon pour hauteur.

SCOLIE 1^er^. — *Les polyèdres* [ou figures quelconques] *circonscrits à la sphère ont pour mesure le tiers du produit de leurs surfaces respectives par le rayon*, et par conséquent *leurs volumes sont proportionnels aux surfaces.*

SCOL. 2. — Par suite de la remarque précédente,

Le volume de la sphère, celui du cylindre circonscrit, et celui du cône équilatéral circonscrit, sont entre eux :: 4 : 6 : 9;

C'est ce qu'il serait d'ailleurs très facile de démontrer directement.

Le volume du cylindre est donc *moyen proportionnel entre les deux autres;* etc.

Voyez le *numéro* 619 (*scol.* 1^er^).

⋠[SCOL. 3.—On démontrerait pareillement, que *Le volume de la sphère, celui du cylindre équilatéral inscrit, et celui du cône équilatéral inscrit, sont entre eux* :: $32 : 12\sqrt{2} : 9$;

Le volume du cylindre est encore *moyen proportionnel entre les deux autres.*]⋡

⋠[SCOL. 4. — *La sphère est plus grande que tout polyèdre régulier de même surface.* Il en est de même d'un polyèdre quelconque (*Voy.* le n° 299, *coroll.* 2); et de là résulte que *La sphère est la figure qui, pour une surface donnée, a le* MAXIMUM *de volume, ou qui, pour un volume donné, a le* MINIMUM *de surface.*]⋡

THÉORÈME XVII. (Fig. 471.)

645. *Tout secteur sphérique* OBAB' *est équivalent à une pyramide dont la base serait équivalente à la calotte correspondante, et qui aurait le rayon pour hauteur.* Fig. 471.

Même raisonnement que dans le cas d'une sphère.

Ainsi, pour prouver par la *réduction à l'absurde*, que le tiers du produit de l'aire de la calotte multipliée par le rayon, n'est pas la mesure d'un espace plus grand ou plus petit :

Considérons un secteur sphérique concentrique au premier, correspondant à une calotte bab' dont la base soit sur un même plan que celle de la calotte BAB' (*Voy.* le n° 620) ; et supposons que l'on ait

$$\frac{1}{3}\,\textit{surf. cal.}\ \mathrm{BAB'} \times \mathrm{OA} = \textit{vol. sect.}\ \mathrm{O}bab'.$$

Cela posé, inscrivons une ligne brisée régulière à l'arc générateur AB, et soit OP son apothème : nous aurons

$$\frac{1}{3}\,\textit{surf. pol.}\,\mathrm{BPAB'} \times \mathrm{OP} = \textit{vol. pol.}\,\mathrm{OBPAB'};$$

ce qui est absurde, puisque, d'une part,

$$\textit{surf. pol.}\ \mathrm{BPAB'} < \textit{surf. cal.}\ \mathrm{BAB'},$$

et $$\mathrm{OP} < \mathrm{OA},$$

tandis que, d'autre part,

$$\textit{vol. pol.}\ \mathrm{OBPAB'} > \textit{vol. sect.}\ \mathrm{O}bab'.$$

Scolie. — La démonstration précédente supposant que le secteur est moindre qu'une demi-sphère, il faut pour le cas opposé, opérer par soustraction, comme dans le *numéro* 620.

COROLLAIRE 1^er^. — *Le volume d'un secteur sphérique est à celui de la sphère entière comme la hauteur de la calotte qui lui sert de base est au diamètre ;*

Il a pour mesure le tiers du produit de la calotte par le rayon, ou $\frac{2}{3}\pi r^2 h$, ou $\frac{1}{6}\pi d^2 h$, en nommant h la hauteur de la calotte, r le rayon de la sphère et d son diamètre (*Voy.* le n° 620, *coroll.* 2).

Fig. 472. *Coroll.* 2. — La différence de deux secteurs OACA', OBCB' (fig. 472), correspondant respectivement à deux calottes dont les bases sont parallèles, a pour mesure le tiers du produit de la zone correspondante par le rayon, ou $\frac{2}{3}\pi.\mathrm{OA}^2 \times \mathrm{DE}$.

Scolie 1er. — Le volume du segment sphérique ACB (fig. 8) Fig. 8.
peut s'obtenir en retranchant du secteur OACB le cône OAB; le volume du segment ADB s'obtient au contraire en ajoutant le même cône au secteur OADB.

Scol. 2. — Le volume d'une tranche de sphère, telle que ABB'A' (fig. 472), s'obtient en retranchant le segment BCB' Fig. 472.
du segment ACA'.

Théorème XVIII. (Fig. 472.)

646. *Le volume de l'espace engendré par la révolution d'un segment circulaire* AKB *tournant autour d'un axe* OC *qui passe par le centre* [et extérieur à ce segment], *est équivalent aux deux tiers d'un cylindre ayant pour diamètre la corde* AB *de ce segment, et pour hauteur la projection* DE *de cette corde sur l'axe.*

Soit OP la perpendiculaire abaissée du centre sur la corde AB, et BL la perpendiculaire abaissée du point B sur la droite AD; en désignant par *vol.*AKB l'espace engendré par le segment AKB, et ainsi des autres, on aura :

$$vol.\text{OAKB} = \frac{2}{3}\pi.\text{OA}^2 \times \text{DE} \qquad (\text{n}^\circ\ 645,\ \textit{coroll.}\ 2),$$

$$vol.\text{OAB} = \frac{2}{3}\pi.\text{OP}^2 \times \text{DE} \qquad (\text{n}^\circ\ 642);$$

d'où l'on tire, en retranchant,

$$vol.\text{AKB} = \frac{2}{3}\pi\,(\text{OA}^2 - \text{OP}^2)\,\text{DE} = \frac{2}{3}\pi.\text{AP}^2 \times \text{DE};$$

ou bien encore

$$vol.\ \text{AKB} = \frac{1}{6}\pi.\text{AB}^2 \times \text{DE}.$$

Scolie. — Le volume proposé *est à* celui de la sphère qui aurait AB pour diamètre :: DE : AB.

Théorème XIX. (Fig. 472.)

647. *Une tranche sphérique* AKBB'K'A' *est équivalente à la demi-somme de deux cylindres de même hauteur* DE *que la*

Fig. 472. *tranche, et ayant respectivement pour bases celles de la tranche, plus une sphère ayant cette même hauteur pour diamètre.*

On a (nº 646)

$$vol.\ AKB = \frac{1}{6}\pi . AB^2 \times DE,$$

et

$$vol.\ ABED = \frac{1}{3}\pi (AD^2 + BE^2 + AD \times BE) \times DE \text{ (nº 640, } scol.\text{)};$$

d'où $vol.\ AKBED$, ou, ce qui est la même chose,

$$AKBB'K'A' = \frac{1}{6}\pi . (2.AD^2 + 2.BE^2 + 2.AD \times BE + AB^2) \times DE;$$

mais $AB^2 = BL^2 + AL^2 = DE^2 + (AD - BE)^2$

$$= DE^2 + AD^2 + BE^2 - 2AD \times BE;$$

donc

$$AKBB'K'A' = \frac{1}{6}\pi (3.AD^2 + 3.BE^2 + DE^2) \times DE;$$

ou enfin $AKBB'K'A' = \frac{1}{2}\pi . (AD^2 + BE^2) \times DE + \frac{1}{6}\pi . DE^3.$

Scolie. — Si l'on fait $BE = 0$ dans l'expression précédente, on aura le volume du segment ACA', qui se réduit à

$$\frac{1}{2}\pi . AD^2 \times CD + \frac{1}{6}\pi . CD^3:$$

[parce que DE devient égal à CD].

On peut lui donner encore une autre forme, en remplaçant AD par $(2.OC - CD) \times CD$: elle devient alors

$$\frac{1}{3}\pi . CD^2 \times (3.OC - CD).$$

Théorème XX. (Fig. 452.)

Fig. 452. 648. *Deux pyramides triangulaires sphériques symétriques entre elles*, OABC, O'A'B'C', *sont équivalentes.*

Voyez le *numéro* 621.

Corollaire. — *Deux pyramides sphériques symétriques entre elles*, et de bases quelconques d'ailleurs, *sont équivalentes.*

Théorème XXI. (Fig. 453.)

649. *Une pyramide triangulaire sphérique* OABC *est équivalente à l'excès de la demi-somme des coins correspondans sur un coin droit.* Fig. 453.

Voyez le *numéro* 622 et les *corollaires.*

Corollaire 1er. — *Toute pyramide sphérique est équivalente à une pyramide construite sur une base plane équivalente à sa base, et ayant le rayon pour hauteur.*

Coroll. 2. — *Les pyramides sphériques appartenant à une même sphère, sont proportionnelles à leurs bases.*

§ IV. *Comparaison des Volumes.*

Théorème XXII. (Fig. 473.)

650. *Deux tétraèdres*, ABCD, AB'C'D', *qui ont un angle trièdre égal* A, *sont proportionnels aux produits des arètes qui forment cet angle trièdre.* Fig. 473.

Nous pouvons d'abord placer les deux tétraèdres de manière que leurs angles trièdres égaux coïncident. Alors, prenons pour base le plan d'une de leurs faces communes, et abaissons, des sommets opposés, les perpendiculaires DO et D'O' sur ce plan. Les droites DO et D'O' seront les hauteurs respectives des deux tétraèdres; elles seront dans un même plan perpendiculaire à la base (no 467, *coroll.*), coupant cette base suivant AO'O, et passant par l'arète AD.

Cela posé, nous aurons d'abord

$$ABCD : AB'C'D' :: ABC \times DO : AB'C' \times D'O' \quad (\text{n}^\circ\ 637);$$

mais $\quad ABC : AB'C' :: AB \times AC : AB' \times AC' \quad (\text{n}^\circ\ 303),$

et de plus $\quad DO : D'O' :: AD : AD' \quad (\text{n}^\circ\ 214);$

d'ailleurs, en multipliant terme à terme les deux dernières proportions, nous aurons encore

$$ABC \times DO : AB'C' \times D'O' :: AB \times AC \times AD : AB' \times AC' \times AD':$$

donc $ABCD : AB'C'D' :: AB \times AC \times AD : AB' \times AC' \times AD'$.

C. Q. F. D.

Scolie. — La *réciproque* est *fausse.*

Théorème XXIII. (Fig. 435.)

Fig. 435. 651. *Deux tétraèdres semblables sont proportionnels aux cubes de leurs arètes homologues.*

En effet, les angles trièdres des deux tétraèdres étant égaux chacun à chacun (nº 596), on a, d'après le théorème précédent,

$$SABC : S'A'B'C' :: SA \times SB \times SC : S'A' : S'B' : S'C'.$$

D'ailleurs $SB : S'B' :: SA : S'A'$,

et $SC : S'C' :: SA : S'A'$.

De là on tire, en multipliant terme à terme et supprimant les facteurs communs aux antécédens et aux conséquens,

$$SABC : S'A'B'C' :: SA^3 : S'A'^3 :: SB^3 : S'B'^3 :: AB^3 : A'B'^3, \text{ etc.}$$

Théorème XXIV.

652. *Deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes de leur arètes homologues.*

Même démonstration qu'au *numéro* 305, en substituant les mots.................. *polyèdres*, *tétraèdres, arètes, cubes,* aux mots correspondans *polygones, triangles, côtés, carrés.*

Corollaire. — *Les volumes des figures semblables sont proportionnels aux cubes de leurs lignes homologues.*

Ainsi, par exemple, *Deux pyramides semblables*, ou *deux prismes semblables, sont proportionnels aux cubes de leurs hauteurs.*

≼[*Les polyèdres réguliers de même espèce sont proportionnels aux cubes de leurs arètes,* ou *de leurs rayons,* ou *de leurs apothèmes ; etc.*]≽

Les sphères sont proportionnelles aux cubes de leurs rayons, ou *de leurs diamètres ; etc.*

Il en est de même des *secteurs sphériques* semblables, des *pyramides sphériques* semblables ; etc., etc.

FIN DU LIVRE QUATRIÈME.

PROBLÈMES

DE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

CHAPITRE PREMIER.

PROBLÈMES GRAPHIQUES.

[§ Ier. *Problèmes sur les Droites et les Plans, qui se résolvent par la Théorie des Projections.*]

N. B. — Les solutions graphiques de plusieurs des problèmes qui suivent ayant été suffisamment indiquées dans le *troisième* chapitre du Livre *troisième*, nous nous contenterons, en pareil cas, de renvoyer à ce chapitre; et nous nous dispenserons d'exécuter *l'épure* du problème, c'est-à-dire le dessin présentant tous les détails de sa construction.

PROBLÈME I.

653. *Par deux points donnés dans l'espace, faire passer une droite.*

Voyez le *numéro* 498.

Dans les arts d'*application*, on se contente de faire passer une règle par les deux points donnés : sa direction donne la droite cherchée (*Voy.* le n° 22).

PROBLÈME II.

654. *Par deux droites qui se coupent, faire passer un plan.*

Il faut, d'après les nos 498 et 504, chercher les traces des deux droites : la droite qui joindra leurs traces verticales sera la trace verticale du plan cherché ; et de même pour les traces horizontales.

Les traces du plan, ainsi obtenues, doivent se couper sur la ligne de terre, ce qui fournit un moyen de vérifier l'exactitude de la construction.

Pour obtenir le plan lui-même, on fait glisser une règle le long des deux droites (*Voy.* le n° 9).

Problème III.

655. *Par trois points donnés faire passer un plan.*

Par les points pris deux à deux, on fait passer des droites : et le problème se trouve ramené au précédent. — *Trois* des *six* traces suffisant pour déterminer le plan, chacune des *trois* autres fournira un moyen de vérification.

Problème IV.

656. *Par un point donné hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

En faisant d'abord passer un plan par la droite donnée et par le point donné (n° 654 ou 655), on ramène le problème à une question de géométrie plane.

Problème V.

657. *Par un point donné mener une droite perpendiculaire à un plan donné.*

Voyez le *numéro* 507.

On pourra trouver le point d'intersection par le *numéro* 508, et la longueur de la perpendiculaire par le *numéro* 498.

Si c'est la droite elle-même que l'on veut obtenir et non ses projections, on opérera comme il suit.

Fig. 474. *Pour élever par un point* O (fig. 474) *donné sur un plan* MN, *une perpendiculaire à ce plan :*

1° Construisez dans le plan MN un triangle AOB rectangle en O. — 2° Faites tourner ce triangle autour d'un côté AO de l'angle droit : l'autre côté OB de l'angle droit engendrera un plan perpendiculaire au plan donné (*Voy.* le n° 436, *coroll.*). — 3° Menez dans le plan ainsi formé une droite OP perpendiculaire à la position primitive du côté OB. — La droite OP sera la perpendiculaire cherchée, puisqu'elle sera en même temps perpendiculaire à OA et à OB (*Voy.* le n° 437).

Pour abaisser une perpendiculaire d'un point donné O (fig. 360) *sur un plan donné* AB :

1° Du point O décrivez une circonférence dans le plan MN (*Voy.* le n° 461, *coroll.*). — 2° Cherchez le centre C de cette circonférence. — Ce sera le pied de la perpendiculaire.

Scolie. — Cette construction résout aussi le problème suivant :

Décrire une circonférence dans un plan, en prenant pour centre un point extérieur à ce plan.

PROBLÈME VI. (Fig. 475.)

658. *Par un point donné* $\{a, a'\}$ *mener un plan perpendiculaire à une droite donnée* $\{cd, c'd'\}$. Fig. 475.

Analyse. — Soit mnp' le plan cherché. Si, dans ce plan, l'on mène par le point $\{a, a'\}$ une droite horizontale [c'est-à-dire parallèle au plan horizontal], la projection horizontale ab de cette droite sera à la fois parallèle à la trace mn (n° 504), et perpendiculaire à la projection cd (n° 507, 2°); et quant à la projection verticale $a'b'$ de cette même droite, elle sera parallèle à la ligne de terre, et viendra rencontrer la trace verticale np' en un point b' dont la projection horizontale b sera située sur la ligne de terre (*Voy.* le n° 504).

Synthèse. — 1° Par le point a menons une perpendiculaire à la projection horizontale cd, et par le point a' une parallèle à la ligne de terre ; soit $\{b, b'\}$ le point où la droite représentée par ce système de projections, perce le plan vertical.

— 2° Par le point b' menons une perpendiculaire np' à la projection $c'd'$; et par le point n où elle rencontre la ligne de terre, menons une perpendiculaire nm à la projection cd. — mnp' représente le plan cherché.

Scolie. — La construction est la même pour un point pris sur la droite et pour un point extérieur à la droite.

Si c'était le plan lui-même que l'on voulût obtenir et non ses traces, il faudrait faire une distinction entre ces deux cas.

Fig.334. Ainsi, pour *Mener par un point* O (fig. 334) *donné sur une droite* AB, *un plan perpendiculaire à cette droite* :

Après avoir fait passer un plan quelconque par la droite donnée, menez dans ce plan, par le point donné, une perpendiculaire à la droite donnée. Faites ensuite tourner cette perpendiculaire autour de la droite : elle engendrera le plan cherché (*Voy.* le n° 436, *coroll.*). — Ou bien, menez deux perpendiculaires de la même manière, et faites-y passer un plan (*Voy.* le n° 437).

Au contraire, pour *Mener par un point donné hors d'une droite, un plan perpendiculaire à cette droite :*

Abaissez une perpendiculaire du point sur la droite (n° 656) ; et par le pied de cette perpendiculaire menez une seconde perpendiculaire qui, conjointement avec la première, déterminera le plan, comme il vient d'être dit.

Problème VII.

659. *Par une droite donnée mener un plan perpendiculaire à un plan donné.*

Par un point de la droite donnée il faut mener une seconde droite, perpendiculaire au plan donné (n° 657) ; ensuite, par les deux droites mener un plan (n° 654) : c'est le plan cherché (n° 465).

Scolie. — La construction est toujours la même, quelle que soit la situation de la droite donnée par rapport au plan donné.

PROBLÈME VIII.

660. *Par un point donné mener une parallèle à une droite donnée.*

Voyez le *numéro* 501.

PROBLÈME IX. (Fig. 476.)

661. *Par un point donné* $\{a, a'\}$ *mener un plan parallèle à un plan donné* cde'. Fig. 476.

L'*analyse* ne diffère de celle du problème v (n° 658) qu'en ce que les traces du plan cherché doivent être parallèles aux traces du plan donné (n° 505).

Synthèse. — 1° Par le point a menons une parallèle ab à la trace cd, et par le point a' une parallèle $a'b'$ à la ligne de terre; soit $\{b, b'\}$ le point où la droite $\{ab, a'b'\}$ perce le plan vertical. — 2° Par le point b' menons une parallèle np' à la trace de'; et par le point n une parallèle nm à la trace cd. — mnp' représente le plan cherché.

PROBLÈME X.

662. *Par un point donné mener un plan parallèle à deux droites données.*

Par le point donné on mène des parallèles aux deux droites données (n° 660) : le plan de ces parallèles est le plan cherché (*Voy.* le n° 474).

Scolie. — On peut employer ce moyen pour *Construire les plans parallèles de deux droites* qui ne sont pas dans un me plan (*Voy.* le n° 488, *scol.* 1^er^).

PROBLÈME XI.

663. *Mener une perpendiculaire commune à deux droites données dans l'espace.*

Il faut d'abord mener les plans parallèles des deux droites (n° 662, *scol.*); ensuite, suivant chacune d'elles et perpendiculairement aux deux plans parallèles, mener deux autres plans (n° 659) : ces deux derniers se coupent suivant la droite cherchée (*Voy.* le n° 490).

Problème XII.

664. *Construire la plus courte distance de deux droites données.*

Pour cela il suffit, après avoir résolu le problème précédent, de chercher la distance des points d'intersection de chacune des droites données, avec leur perpendiculaire commune (*Voy.* le n° 499).

Si les deux droites se coupaient, il n'y aurait pas lieu de chercher leur plus courte distance; et si elles étaient parallèles, il faudrait leur mener un plan perpendiculaire (n° 658) et chercher la distance des points d'intersection.

Problème XIII.

665. *Construire l'angle de deux droites.*

Supposons que les deux droites se coupent : on peut d'abord chercher la distance entre leur point d'intersection et un point pris arbitrairement sur chacune d'elles (n° 499) ; déterminant ensuite la distance entre les deux points arbitraires, on aura les trois côtés d'un triangle : l'angle opposé au troisième côté sera l'angle cherché.

On pourrait aussi substituer aux deux droites proposées, deux parallèles (n° 660) menées par un point quelconque de l'espace, que l'on peut prendre, pour simplifier, sur la ligne de terre. — Cette seconde construction présente l'avantage de s'appliquer même au cas de deux droites qui ne se rencontrent pas.

Problème XIV.

666. *Construire l'angle qu'une droite fait avec un plan.*

Par un point quelconque de la droite, par exemple son point d'intersection avec le plan, on mène une droite perpendiculaire à ce plan (nº 656) : l'angle des deux droites est le complément de l'angle cherché (*Voy.* le nº 460, *scol.*).

PROBLÈME XV.

667. *Construire l'angle de deux plans.*

Par un point de l'intersection des deux plans on mène un plan perpendiculaire (nº 657); on cherche les droites suivant lesquelles celui-ci coupe les deux premiers (nº 505) : l'angle de ces droites est l'angle cherché (nº 444).

§ II. *Problèmes qui se résolvent par des Rabattemens.*

PROBLÈME I.

668. *Étant données les trois faces d'un angle trièdre* SABC (fig. 477), *déterminer ses trois angles dièdres.* Fig. 477.

Déterminons, par exemple, l'angle dièdre SA.

Analyse. — Pour cela, prenons les trois distances SA, SB, SC, égales entre elles ; et menons AB, AC, BC.

Les arètes SA, SB, SC, du tétraèdre SABC, étant égales entre elles, seront obliques au plan ABC (*Voy.* le nº 460). Donc en menant, par un point P de l'arète SA, un plan perpendiculaire à cette arète, ce plan coupera le plan ABC (*Voy.* le nº 480), et les plans ASB, ASC, respectivement suivant les trois côtés d'un triangle MPN, [côtés que l'on peut supposer contenus tout entiers dans les faces du tétraèdre, en prenant AP suffisamment petit]; et l'angle MPN ainsi formé mesurera l'angle dièdre SA (nº 444).

Cela posé, coupons la figure suivant les droites SC, AC, BC; et *développons* ou *rabattons* les quatre faces du tétraèdre sur le plan de la face SAB (fig. 478) : les sommets C, A, B, C', des faces SAB, SAC, SBC, se trouveront sur un arc de cercle moindre qu'une circonférence (nº 513), décrit du point S comme centre avec un rayon SC = SA = SB = SC'; et cet arc sera décomposé en trois parties ayant respectivement pour cordes CA, AB, BC' ou BC. De plus, MP et PN formeront une Fig. 478.

seule perpendiculaire à la droite SA ; et enfin, le triangle ABC prendra la position ABC″.

Fig 478. *Synthèse.* — Après avoir développé la figure, etc. (*Voy.* l'*analyse*) : — 1° Élevons, par un point P (fig. 478) pris arbitrairement sur SA [mais assez rapproché de A], une perpendiculaire terminée aux deux côtés AB, AC, par les points M, N. — 2° Du point A comme centre, et du rayon AN, décrivons un arc de cercle qui vienne couper AC″ en N′, et menons MN′. — 3° Avec les trois côtés MP, PN, MN′, construisons le triangle MP*n* [ce qui est toujours possible si le tétraèdre donné existe, puisqu'alors le triangle existe nécessairement dans le tétraèdre]. — L'angle MP*n* sera l'angle demandé.

En effet, etc. (*Voyez* l'analyse).

Scolie. — On peut employer la méthode précédente pour *Construire les faces de l'angle trièdre supplémentaire d'un angle trièdre donné* (*Voy.* le n° 510) :

Pour cela, il suffit de prendre les supplémens des angles dièdres de l'angle trièdre proposé, déterminés comme il vient d'être dit.

Problème II.

669. *Étant donnés les angles dièdres d'un angle trièdre, construire ses faces.*

En remplaçant l'angle trièdre proposé par son supplémentaire (n° 668, *scol.*), on ramène la question au problème précédent.

Problème III.

Fig 477. 670. *Étant données deux faces*, ASB, ASC, *d'un angle trièdre* S (fig. 477), *et l'angle dièdre compris, déterminer la troisième face et les deux autres angles dièdres.*

La question sera ramenée au problème I (n° 668) si seulement on détermine la face BSC. — Cela posé :

Analyse : — Comme ci-dessus (n° 668).

Fig. 478. *Synthèse.* — 1° Du point S (fig. 478) comme centre et d'un rayon arbitraire SA, décrivons un arc de cercle ; et menons

les deux cordes AC, AB. — 2° Par un point P pris sur SA, élevons une perpendiculaire MPN terminée aux deux côtés AB, AC, respectivement en M et en N. — 3° Avec les deux côtés MP, PN, et l'angle compris MPN qui est donné, construisons le triangle MP*n*. — 4° Avec les trois côtés AM, AN, et M*n*, construisons le triangle MAN′ [ce qui est toujours possible, par la même raison que ci-dessus (n° 668)]. — 5° Sur AN′ prolongé prenons AC″ égal à AC ; et formons ainsi le triangle ABC″. — 6° Prenons une corde BC′ égale à BC″ ; et menons SC′. — — L'angle BSC′ sera égal à la face demandée.

En effet, etc.

Problème IV.

671. *Étant donnés dans un angle trièdre, deux angles dièdres et la face comprise entre leurs arètes, trouver les deux autres faces.*

Au moyen de l'angle trièdre supplémentaire (n° 668, *scol.*), le problème est ramené au précédent (n° 670).

Problème V.

672. *Étant données deux faces*, ASC, BSC (fig. 479), *d'un angle trièdre* S, *et l'angle dièdre* SA *opposé à l'une d'elles* BSC, *trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres.* Fig. 479.

La question se ramène comme précédemment (n° 670) à déterminer la face ASB.

Analyse. — D'un point quelconque C (fig. 479) de l'arète SC abaissons une perpendiculaire CP sur la face ASB ; et du point P les perpendiculaires PA et PB sur les arètes SA et SB. Menons de plus CA et CB. — Cela posé, les triangles APC, BPC, sont rectangles en P ; le premier a un angle A égal à l'angle dièdre donné (n° 466) ; et tous deux ont un côté commun PC ; etc.

Synthèse. — 1° Construisons sur un même plan les deux angles ASC, BSC (fig. 480), ayant le côté commun SC. — Fig. 480.
2° D'un point quelconque C pris sur SC, abaissons sur SB et sur SA les perpendiculaires respectives CB, CA ; et prolongeons celle-ci indéfiniment dans le sens CAP........ —

3° Faisons au point A, sur le prolongement AP, l'angle PAC′ égal à l'angle dièdre donné [SA de la figure précédente]; et prenons AC′ égal à AC. — 4° Abaissons sur AP la perpendiculaire C′P. — 5° Du point C′ comme centre, et du rayon CB, marquons un petit arc de cercle qui coupe la droite AP en un point *b*. — 6° Du point P comme centre, et du rayon P*b*, décrivons une circonférence. — 7° Du point S comme centre, et d'un rayon égal à SB, décrivons une autre circonférence; et soient B′, B″, ses points d'intersection avec la précédente. — 8° Menons SB′, SB″. — Les angles ASB′, ASB″, sont en général deux solutions du problème.

Scolie. — Ce problème, comme celui du *numéro* 325 auquel il est analogue, est susceptible d'avoir *deux* solutions, ou *une* seule, ou de n'en avoir *aucune*. Nous nous dispenserons, pour les raisons données au *numéro* 520, de *discuter* les divers cas qui peuvent se présenter ainsi que les résultats qui leur correspondent. Nous observerons seulement que si quelqu'un des angles CSA, CSB, était obtus, les perpendiculaires CA, CB, ne tomberaient pas sur les droites SA, SB, mais sur leurs prolongemens respectifs.]≽

≼[PROBLÈME VI.]≽

673. *Étant donnés deux angles dièdres d'un angle trièdre, et la face opposée à l'un d'eux, trouver les deux autres faces et le troisième angle dièdre.*

Au moyen de l'angle trièdre supplémentaire (n° 668, *scol.*), le problème est ramené au précédent (n° 672).]≽

PROBLÈME VII.

674. *Construire la hauteur d'une pyramide au moyen de ses arêtes.*

Soit par exemple un tétraèdre dont nous appellerons la base ABC et le sommet S. Rabattons les trois faces latérales sur le plan de la base, comme le montre la *figure* 481.

Cela posé : — 1° Abaissons sur les trois côtés de la base, les perpendiculaires respectives SP, S′Q, S″R : elles iront concourir en un même point O qui est la projection du sommet S du tétraèdre, sur le plan de cette base. — 2° Sur une quelconque SP de ces perpendiculaires, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. — 3° A partir du point P rabattons PO comme corde sur cette demi-circonférence, suivant PI. — SI sera la hauteur cherchée. Fig. 481.

Problème VIII.

675. *Étant donné un polyèdre régulier, trouver l'angle dièdre de deux faces adjacentes.*

Tétraèdre (n° 568). — Formez un angle trièdre avec trois angles de triangles équilatéraux : l'angle dièdre opposé à l'un d'eux sera l'angle dièdre cherché (*Voy.* le n° 668).

Cube (n° 571). — Formez un angle trièdre avec trois angles droits : l'angle dièdre opposé à l'un d'eux sera l'angle dièdre cherché. — Cet angle est droit.

Octaèdre (n° 569). — Formez un angle trièdre avec deux angles de triangles équilatéraux et un angle droit : l'angle dièdre opposé à celui-ci sera l'angle dièdre cherché.

Dodécaèdre (n° 572). — Formez un angle trièdre avec trois angles de pentagones réguliers : l'angle dièdre opposé à l'un d'eux sera l'angle dièdre cherché.

Icosaèdre (n° 570). — Formez un angle trièdre avec deux angles de triangles équilatéraux et un angle de pentagone régulier : l'angle dièdre opposé à ce dernier sera l'angle dièdre cherché.

Problème IX.

676. *Étant donné un polyèdre régulier, construire son apothème et son rayon.*

Synthèse. — 1° Formez un triangle rectangle ayant pour un des côtés de l'angle droit l'apothème d'une face du polyèdre, et pour angle adjacent à ce côté l'angle qui correspond à la moitié de l'angle dièdre de deux faces adjacentes (n° 675) : l'autre côté de l'angle droit sera l'*apothème* du polyèdre.

2° Formez un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit l'apothème du polyèdre (1°) et le rayon d'une de ses faces : l'hypoténuse sera le *rayon* du polyèdre.

§ III. *Problèmes sur la Sphère.*

Problème I.

677. *Étant donnés, sur la surface d'une sphère, un point d'une circonférence et son pôle, décrire la circonférence.*

De même que dans un plan, en prenant le pôle donné pour centre (*Voyez* d'ailleurs les nos 461, *coroll.*; et 578).

Scolie. — Si la distance rectiligne des deux points donnés est égale à la diagonale du carré construit sur un côté égal au rayon, la circonférence décrite sera celle d'un grand cercle.

Problème II.

678. *Étant donnée une sphère, déterminer son rayon par une construction plane.*

Synthèse. — 1° Avec une ouverture de compas arbitraire, décrivez un cercle sur la surface de la sphère (n° 677); et marquez sur sa circonférence trois points quelconques. — 2° Prenez avec le compas les distances rectilignes de ces trois points combinés deux à deux; et construisez sur un plan, un triangle qui ait ces trois distances pour côtés. — 3° Circonscrivez un cercle à ce triangle : ce cercle sera évidemment égal à celui que vous aurez tracé sur la sphère.

Fig 189. Cela posé, soit DA (fig. 189) le rayon de ce cercle, [rayon qui est nécessairement moindre que l'ouverture de compas qui a servi à tracer la circonférence].

4° Construisez un triangle rectangle ABD qui ait cette ouverture, égale à AB, pour hypoténuse, et dans lequel le rayon DA soit un côté de l'angle droit. — 5° Tracez une circonférence qui passe par les points A, B, et qui ait son centre sur la droite BD prolongée (n° 317, *scol.* 1^er^, 2°). — La figure ainsi construite sera égale au grand cercle de la sphère.

Problème III. (Fig. 430.)

679. *Par deux points donnés*, G, I, *sur la surface d'une sphère, faire passer une circonférence de grand cercle.* Fig. 430.

Synthèse. — 1° Prenons une distance rectiligne égale à la diagonale du carré construit sur le rayon de la sphère (n° 578), [ou à l'arète de l'octaèdre régulier inscrit]. — 2° De cette diagonale comme rayon, et des points G, I, comme centres respectifs, décrivons d'un même côté, sur la surface de la sphère, deux petits arcs qui se couperont en un point A. — Ce point sera un pôle dont on pourra se servir pour décrire la circonférence cherchée (*Voy.* le n° 677).

Problème IV.

680. *Par un point pris sur une circonférence quelconque* [de grand ou de petit cercle] *tracée sur la sphère, élever une circonférence de grand cercle perpendiculaire à la première.*

Supposons que dans la *figure* 259, le point O soit le point donné, et la ligne MN un arc de la circonférence donnée. En employant une méthode analogue à celle que l'on a suivie au *numéro* 309, on pourra opérer comme il suit : Fig. 259.

Synthèse. — 1° Marquons sur MN, de part et d'autre du point O, et à des distances égales, deux points quelconques, A, B. — 2° Des points A et B comme pôles, et d'une même ouverture quelconque de compas [plus grande cependant que OA=OB], décrivons deux arcs de cercle qui se coupent en un point C. — 3° Menons une circonférence de grand cercle par les deux points O et C (n° 679). — C'est la circonférence demandée.

SCOLIE. — On peut employer cette construction quand on veut

Mener à un petit cercle, par un point donné sur sa circonférence, une circonférence de grand cercle tangente :

Pour cela, il faut mener une circonférence de grand cercle par le point donné et par le centre du cercle donné (n° 679); puis élever perpendiculairement à cette circonférence, par le point donné, une autre circonférence de grand cercle.

PROBLÈME V.

681. *D'un point pris sur la surface de la sphère, abaisser une circonférence de grand cercle perpendiculaire sur une circonférence quelconque tracée sur cette surface.*

Fig. 260. Supposons encore que dans la *figure* 260, C étant le point donné, la ligne MN représente un arc de la circonférence donnée. Cela posé (*Voy.* le n° 310) :

Synthèse. — 1° Du point C comme pôle, décrivons un arc de cercle qui coupe l'arc MN en deux points, A, B. — 2° Des points A et B comme pôles respectifs, et d'une même ouverture de compas suffisamment grande, décrivons deux arcs de cercle qui se coupent. — 3° Par l'un des points d'intersection, E, de ces arcs, et par le point C, menons une circonférence de grand cercle (n° 679). — Ce sera la circonférence cherchée.

Scolie 1er. — On obtiendrait une seconde construction en modifiant d'une manière convenable la seconde du *numéro* 310.

SCOL. 2. — On peut encore, par un moyen analogue,

Mener une circonférence de grand cercle qui partage en deux parties égales les arcs de cercle que l'on peut tracer sur la sphère entre deux points donnés (*Voy.* le n° 317).

PROBLÈME VI.

682. *Par trois points donnés sur une sphère, mener une circonférence de cercle.*

On mène, par le problème précédent (n° 681, *scol.* 2), deux circonférences de grand cercle dont tous les points soient, pour chacune, également distans des points donnés pris deux à deux. Ces deux circonférences se coupent en un point qui est le pôle du cercle cherché (*Voy.* le n° 578).

SCOLIE. — On peut encore, par le même moyen,

Trouver le pôle d'un cercle donné.

≼[PROBLÈME VII.]≽

683. *Mener à un petit cercle, par un point quelconque situé hors de sa circonférence, mais sur la surface de la sphère, une circonférence de grand cercle tangente.*

En supposant que, dans la figure 315, OA soit le cercle donné Fig. 315.
[O étant le pôle], et T le point donné, suivons l'opération du *numéro* 367 (1^re^ *constr.*) :

Synthèse. — 1° Du point T comme pôle, et d'une ouverture de compas égale à TO, décrivons un arc de cercle. — 2° Du point O comme pôle, et d'une ouverture de compas égale à la corde du double d'un arc de grand cercle mené du point O à un point de la circonférence OA, décrivons un petit arc qui coupe le premier en un point P. — 3° Menons l'arc de grand cercle OP coupant la circonférence donnée en un point A (n° 679). — 4° Menons la circonférence de grand cercle TA. — Ce sera la circonférence demandée.]≽

684. ≼[REMARQUES *sur les problèmes de géométrie sphérique.* — Les problèmes précédens sont les principaux et en même temps les plus simples que l'on puisse avoir à résoudre sur la surface de la sphère. Il en est un grand nombre d'autres que nous aurions pu nous proposer, particulièrement des problèmes relatifs aux contacts, analogues à ceux que nous avons résolus dans le *paragraphe troisième* des problèmes graphiques de géométrie plane. Tels sont, par exemple, les suivans :

PROBLÈME I. — *Tracer une circonférence de grand cercle tangente à deux petits cercles donnés* (*Voy.* le n° 368);

PROBL. II. — *Tracer une circonférence qui touche un cercle donné, et qui passe par deux points donnés* (*Voy.* le n° 380);

PROBL. III. — *Mener par un point donné une circonférence tangente à deux circonférences données* (*Voy.* le n° 386);

PROBL. IV. — *Tracer une circonférence tangente à trois circonférences données* (*Voy.* le n° 388);

Etc., etc.

Nous ne nous occuperons point des problèmes de ce genre, pour lesquels nous renverrons aux *Annales de Mathématiques*, ainsi qu'à un *Mémoire* de M. *Alph.* HEEGMANN, inséré dans le *Recueil de la Société royale de Lille*, année 1825; et nous terminerons par quelques observations fort importantes dont nous sommes redevable au savant rédacteur des *Annales de Mathématiques*.

685. « Nous avons vu (nos 578 et 680) que l'hypoténuse du » triangle isocèle rectangle dont les deux côtés de l'angle » droit sont égaux au rayon d'une sphère, est l'ouverture de » compas qu'il faut employer pour décrire des grands cer- » cles sur cette surface. Quand on a plusieurs arcs de grand » cercle à décrire sur une même sphère, on peut y em- » ployer un *compas à ouverture fixe* égale à cette hypoté- » nuse; et comme, sur la sphère, les arcs de grand cercle » jouent le même rôle que joue la ligne droite sur un plan, » M. GERGONNE appelle un pareil compas le *compas-règle*. Un » autre compas, à ouverture variable, servira à décrire des » arcs de petits cercles de toutes grandeurs : [seulement il sera bon de donner à ses branches une disposition qui permette d'incliner les pointes l'une sur l'autre d'un angle quelconque, en les fixant cependant, pour chaque circonférence que l'on voudra décrire, à une distance déterminée. Le compas ordinaire, ainsi légèrement modifié, pourrait se nommer un *compas sphérique*].

» Nous venons de dire que l'arc de grand cercle jouait » sur la sphère, le même rôle que joue la ligne droite sur le » plan, mais en ce sens seulement que par deux points donnés

» sur une sphère, on peut toujours mener un arc de grand
» cercle, et un seul, qui mesure leur plus courte distance. Il
» y a d'ailleurs entre l'un et l'autre une différence notable :
» car, tandis que deux droites ne peuvent se couper qu'en un
» point unique, deux grands cercles se coupent toujours en
» deux points; et tandis que deux droites peuvent être telle-
» ment situées sur un plan qu'elles ne puissent pas se ren-
» contrer, deux grands cercles sur une sphère se rencontrent
» toujours. Il n'existe donc pas de parallèles sur la sphère, ni
» conséquemment de triangles semblables. Il n'y a de paral-
» lèles ni de triangles semblables que sur deux sphères con-
» centriques.

» Il suit de là que tout théorème de géométrie plane qui
» ne peut être démontré, que tout problème qui ne peut
» être résolu, qu'en vertu de la théorie des parallèles ou
» d'autres théories qui reposent *nécessairement* sur celle-là,
» n'a point d'analogue sur la sphère; et tels sont, par exem-
» ple, les théorèmes relatifs à la mesure des angles par le
» cercle, et les problèmes qui s'y rapportent.

» Mais comme, dans tous les cas où deux triangles rectili-
» gnes sont égaux, deux triangles sphériques le sont aussi, il
» s'ensuit que tout théorème ou problème de géométrie
» plane, qui peut être démontré ou résolu par la seule consi-
» dération de l'égalité des triangles, peut être transporté sur
» la sphère par la simple substitution des arcs de grand cercle
» aux lignes droites, ou du compas à ouverture fixe à la règle,
» et en remplaçant les centres des cercles par leurs pôles.

» Nous avons employé tout-à-l'heure le mot *nécessaire-*
» *ment,* et voici pourquoi. On peut, dans la démonstration
» d'un théorème ou dans la solution d'un problème, employer
» la théorie des parallèles ou les théories qui en dépendent,
» sans que cela soit nécessaire, et uniquement par *élégance ;*
» et alors le théorème ou le problème pourra avoir son ana-
» logue sur la sphère : la démonstration ou la construction
» devra seulement en être convenablement modifiée. Par

» exemple, la deuxième construction que nous avons donnée
» (nº 367) de la tangente au cercle par un point extérieur,
» repose sur la théorie des angles inscrits, et cette construction
» ne saurait être transportée sur la sphère ; mais la première
» construction du même problème ne dépend aucunement de
» la théorie des parallèles, et c'est celle-là que nous avons
» imitée (nº 683) pour mener par un point donné sur la
» sphère, un grand cercle qui touche un petit cercle donné.

» Il y a aussi certains problèmes de géométrie plane qu'on
» ne peut résoudre sans employer la théorie des parallèles, et
» que pourtant on peut se proposer de résoudre sur la sphère ;
» mais alors leur construction sur la sphère n'a aucun rap-
» port avec leur construction sur un plan. Nous citerons
» pour exemple le problème où l'on propose de *Décrire un*
» *grand cercle qui touche à la fois deux petits cercles donnés*
» (nº 684, *probl.* 1). »

CHAPITRE II.

PROBLÈMES NUMÉRIQUES.

§ Ier. *Problèmes sur les Volumes des Polyèdres.*

PROBLÈME I.

686. *En supposant que la quantité d'air nécessaire à la respiration soit pour chaque personne, de 4 mètres cubes par jour, on demande combien de personnes pourront vivre pendant un jour avec l'air contenu dans un appartement hermétiquement fermé, et ayant $12^m,5$ de longueur, 5^m de largeur, et $3^m,2$ de hauteur.*

Pour résoudre cette question, il faut d'abord calculer la capacité de la salle, ce qui donne (nº 627)

$$12,5 \times 5 \times 3,2 = 200^{mc};$$

ensuite il faut diviser par 4, ce qui donne 50 personnes.

PROBLÈME II.

687. *On veut mesurer un stère ou mètre cube de bois, au moyen d'une membrure composée de quatre tringles rectilignes formant un carré d'un mètre de côté dont le plan est disposé verticalement; les bûches, au lieu d'avoir 1 mètre de longueur, ont $1^m,2$: — on demande quelle réduction il faut faire subir à la hauteur du parallélépipède.*

La base du parallélépipède ayant $1^m,2 \times 1^m$ ou $1^{mq},2$ de surface, il faut diviser 1 par 1,2, ce qui donne la hauteur, égale à $8\frac{1}{3}$ *décimètres.*

PROBLÈME III.

688. *On demande ce que pèse un cristal de chaux carbonatée en forme de prisme hexaèdre régulier, dont la hauteur est sextuple du côté de la base, ce côté ayant* $0^m,006$ *de longueur, et le poids spécifique* (Voyez la *note* B) *de la chaux carbonatée étant* 2,7.

L'aire de la base vaut d'abord $\frac{3}{2}(0,006)^2 \times \sqrt{3}$ (n° 414); et le volume a pour mesure (n° 634)

$$\frac{3}{2}(0,006)^2\sqrt{3}\times 0,036 = 0^{mc},0000033670 08 = 3^{cmc},367008.$$

Le poids, exprimé en *grammes*, est donc............

$$3,367008 \times 2,7 = 9^g,091,$$ à *un milligramme* près.

PROBLÈME IV.

689. *Les côtés de la base d'une pyramide triangulaire ont* $12^m, 15^m, 17^m$; *sa hauteur est* 9^m : — *trouver son volume.*

L'aire de la base ayant pour mesure (n° 296, 2°)

$$\sqrt{22\times 10\times 7\times 5} = \sqrt{7700},$$

le volume de la pyramide sera (n° 637)

$$3\sqrt{7700} = \sqrt{7700\times 9} = 263^{mc},248.$$

PROBLÈME V.

690. *Les côtés de la base inférieure d'un prisme triangulaire tronqué sont* $5^m, 6^m, 7^m$; *les hauteurs des sommets de la base supérieure sont* $3^m, 4^m, 6^m$: — *trouver son volume.*

L'aire de la base a pour expression $\sqrt{9.4.3.2} = 6\sqrt{6}$: donc le volume (n° 638, *scol.*) est égal à

$$\frac{1}{3}(3+4+6).6\sqrt{6} = 13.2\sqrt{6} = 63^{mc},686.$$

PROBLÈME VI.

691. *On demande le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, dont la hauteur est de* $9^{m},6$, *la petite base ayant* $2^{mq},25$ *de surface, et les côtés de la grande base étant à leurs homologues de la petite dans le rapport de 4 à 3.*

En nommant x l'aire de la grande base, on a d'abord :

$$x : 2,25 :: 4^2 : 3^2, \quad \text{d'où} \quad x=4.$$

Le volume cherché sera donc (n° 640) :

$$\frac{1}{3}(2,25+4+\sqrt{4\times 2,25}).9,6=3,2\times 9,25=29^{mc},6.$$

PROBLÈME VII.

692. *Un obélisque en pierre de taille a la forme d'une pyramide quadrangulaire régulière supportée par un prisme carré qui lui sert de piédestal ; la base commune de la pyramide et du piédestal a* $1^{m},2$ *de côté ; l'apothème de la pyramide est à ce côté* $:: 5 : \sqrt{2}$ *; et la hauteur du piédestal est double de ce même côté : — on demande le poids total de la masse, sachant que le poids spécifique de la pierre de taille est de 2,5.*

L'apothème a pour valeur $\frac{1,2\times 5}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}$; et son carré vaut 18. Retranchant le carré de 0,6, et extrayant la racine du reste, on a $4^{m},2$ pour la hauteur de la pyramide, dont le volume (n° 637) sera ainsi $\frac{1}{3}(1,2)^2.4,2=2,016$.

Le volume du piédestal (n° 627) est d'ailleurs de $(1,2)^2\times 2,4=3,456$; ce qui donne pour le volume total, $5^{mc},472$.

Le poids s'obtient en multipliant ce volume par 2,5, puis par 1000000, ce qui donne :

$$13\,680\,000^{g}=13\,680^{kilog}.$$

PROBLÈME VIII.

693. *Étant donné le volume d'un tétraèdre régulier, égal à* $19^{mc},683$, *trouver son arète* [*a*] *et son aire* [*A*].

La base du tétraèdre a pour mesure $\frac{1}{4}a^2.\sqrt{3}$ (n° 413); et il est facile de prouver que sa hauteur vaut $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$: ce qui donne (n° 637)

$$19,683 = \frac{1}{36}a^3\sqrt{18} = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2},$$

d'où

$$a^3 = \frac{12 \times 19,683}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \times 19,683;$$

et

$$3.log.a = log.6 + log.19,683 + \frac{1}{2}.log.2 = 2,2227575,$$

d'où

$$log.a = 0,7409192 = log.5,50705:$$

ainsi l'arète vaut $5^m,50705$.

On a ensuite (n° 413)

$$A = a^2\sqrt{3};$$

$$log.A = 2.log.a + \frac{1}{2}.log.3 = 1,7203990 = log.52,5289:$$

ainsi

$$A = 52^m,5289.$$

Problème IX.

694. *On a une pyramide hexaèdre régulière d'argent pur dont on ne connaît ni les dimensions ni le poids ; mais on sait 1° que son arète latérale est double du côté de la base, 2° que le poids spécifique de l'argent est* 10,5, *3° que si l'on monnayait la pyramide en y ajoutant une quantité convenable d'alliage, on en retirerait* 6048^f *: — on demande les dimensions et le poids de la pyramide.*

En nommant x le côté de la base, l'aire de cette base sera $\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}$ (n° 414). L'arète latérale étant double de ce côté qui est aussi le rayon de la base, la hauteur vaudra $x\sqrt{3}$; et le volume de la pyramide (n° 637) sera exprimé par

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}\times x\sqrt{3}=\frac{3}{2}x^3.$$

Si de plus on prend le *centimètre* pour *unité*, il suffira de multiplier cette expression par $10,5=\frac{21}{2}$ pour avoir le poids de la pyramide exprimé en *grammes*, ce qui donnera $\frac{3}{2}\cdot\frac{21}{2}\cdot x^3$.

Il faut ajouter $\frac{1}{9}$ d'alliage pour monnayer la pyramide : le poids total s'obtiendra donc en multipliant le précédent par $\frac{10}{9}$, ce qui donnera

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{21}{2}\cdot x^3\times\frac{10}{9}=\frac{7\cdot5}{2}\cdot x^3.$$

Maintenant puisqu'*un franc* pèse 5 *grammes*, en divisant par 5 on aura le nombre de *francs* ; d'où

$$\frac{7}{2}\cdot x^3=6048, \quad \text{ou} \quad x^3=1728;$$

et $$x=12.$$

Ainsi, le *côté* de la base vaudra 12 *centimètres* ; les arètes latérales 24 ; et la hauteur vaudra $12\sqrt{3}$ centimètres.

Le volume sera exactement 2592 *centimètres cubes*, et le poids $27^{\text{kilog}},216$.

Problème X. (Fig. 482.)

695. *On nomme ponton une espèce de bateau dont la figure a deux plans verticaux de symétrie dirigés respectivement, l'un suivant sa longueur, l'autre suivant sa largeur.* Fig. 482.

Cela posé, soient

$AA'=BB'=6^m$ *la plus grande longueur,*
$CC'=DD'=4^m,4$ *la plus petite longueur,*
$AB=A'B'=1^m,5$ *la plus grande largeur,*
$CD=C'D'=1^m,3$ *la plus petite largeur,*
et enfin .... $0^m,8$ *la profondeur :*

On demande le volume ou la capacité du ponton.

Si, des points C, D, C', D', on abaisse des perpendiculaires sur la grande base AB', et que, par ces droites, on mène des plans convenablement, le volume du ponton se trouvera décomposé en un parallélépipède rectangle, quatre prismes triangulaires, et quatre pyramides quadrangulaires, ayant respectivement pour mesure :

le parallélépipède (n° 627).....	$4{,}4 \times 1{,}3 \times 0{,}8 = \overset{mc}{4{,}576}$,
deux prismes (n° 634),.........	$0{,}1 \times 4{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}352$,
les deux autres prismes.........	$0{,}8 \times 1{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}835$,
les quatre pyramides (n° 637)..$\frac{1}{3}$	$1{,}6 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}085\frac{1}{3}$.

Ainsi le volume cherché sera de $\overset{mc}{5{,}845}\frac{1}{3}$.

Scolie 1er. — Cette méthode peut aussi servir à calculer certaines excavations de terrain [telles que les fossés] auxquelles on donne la forme de pontons, ou les monceaux de terre auxquels on fait aussi prendre cette même forme renversée.

Scol. 2. — En faisant $AA' = L$, $CC' = l$, $AB = L'$, $CD = l'$, et représentant par p la profondeur, la formule générale est

$$\frac{1}{6}[(L+2l)l' + (l+2L)L']p.$$

Scol. 3. — Si l'on suppose $l' = 0$ dans cette formule, elle se réduit à celle-ci

$$\frac{1}{6}(l+2L)L'p,$$

qui peut servir à calculer les volumes de certains *tas de pierres*, ainsi que les espaces recouverts par les *toits symétriques* à 4 pans. On peut d'ailleurs parvenir directement aux expressions de ces sortes de volumes, comme il sera toujours bon de le faire dans les applications particulières.

Problème XI. (Fig. 464.)

696. *On a mesuré, sur le parallélépipède rectangle tronqué* MNOPABCD (n° 639), *les longueurs* MN $= 2^m{,}438$,

MO$=1^m,203$, CO$=4^m,748$, BN$=3^m,942$: — *on demande le volume du corps.* Fig. 464.

La hauteur moyenne étant la demi-somme de deux arètes opposées (n° 639, *coroll.*), vaudra $4^m,345$.

Maintenant, l'aire de la base a pour expression

$$MN \times MO = 2,438 \times 1,203;$$

le volume du corps aura donc pour mesure

$$2,438 \times 1,203 \times 4,345.$$

$$\begin{aligned} log.2,438 &= 0,3870337 \\ log.1,203 &= 0,0802656 \\ log.4,345 &= 0,6379898 \\ \hline 1,1052891 &= log.12,744. \end{aligned}$$

Ainsi le volume cherché est, à *un décimètre cube* près, $12^{mc},744$.

Problème XII.

697. *Le volume d'un parallélépipède rectangle est* $17^{mc},435$, *et ses arètes sont proportionnelles aux nombres* 2, 3, *et* 7 : — *on demande les trois dimensions du parallélépipède.*

Voyons d'abord quel serait le volume d'un parallélépipède semblable au proposé, et dont les arètes auraient 2^m, 3^m, et 7^m de longueur : ce volume serait 42 *mètres cubes* (n° 627).

Maintenant, en appelant a, b, c, les trois dimensions cherchées, on a (n° 652)

$$a^3 : 2^3 :: 17,435 : 42,$$
$$b^3 : 3^3 :: 17,435 : 42,$$
$$c^3 : 7^3 :: 17,435 : 42.$$

Or,

$$\begin{aligned} log.17,435 &= 1,2414220 \\ log.42 \ldots &= 1,6232493 \\ \hline \end{aligned}$$

d'où $log.17,435 - log.42 = \bar{1},6181727$

nombre dont *le tiers* est ...... $\bar{1},8727242$:

donc, en ajoutant ce résultat successivement aux logarithmes de 2, de 3, et de 7, on aura les logarithmes des nombres cherchés. — [Nous nous contenterons d'indiquer ici le premier calcul.]

$$\begin{aligned} & \bar{1},8727242 \\ log.2 = & \underline{0,3010300} \\ \text{donc,} \quad log.a = & 0,1737542 = log.1,49195. \end{aligned}$$

On trouverait de même $log.b = 0,3498455 = log.2,23792$;

et $log.c = 0,7178222 = log.5,22182.$

Ainsi, en se bornant aux *centimètres*, les arètes ont pour valeurs respectives : $1^m,49$, $2^m,24$, et $5^m,22$.

Problème XIII. (Fig. 483.)

Fig.483. 698. *On demande le volume* [V] *d'un tronc* ABCabc *de pyramide triangulaire régulière* SABC, *dont la grande base a* $0^m,9$ *de côté, la petite base* $0^m,4$, *et dont l'arète latérale* Aa *a* $0^m,5$ *de longueur.* [On suppose les trois faces ABC, abc, ABab, rabattues sur un même plan qui est celui de la figure.]

Remarquons d'abord que, de la proportion

$$SA : Sa :: AB : ab,$$

fournie par les triangles semblables SAB, Sab, on déduit

$$\begin{aligned} Aa : SA &:: AB - ab : AB, \\ Aa : Sa &:: AB - ab : ab; \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} 0,5 : SA &:: 0,5 : AB, \\ 0,5 : Sa &:: 0,5 : ab; \end{aligned}$$

ce qui donne $SA = AB = 0,9$, et $Sa = ab = 0,4$:

d'où il résulte que les deux pyramides SABC, Sabc, sont des tétraèdres réguliers (n° 543).

Cela posé, désignons pour un moment par L et l les longueurs respectives des arètes SA, Sa, de ces tétraèdres; et soient O et o les centres respectifs de leurs bases. Abaissons sur BC la perpendiculaire AOD, et menons SocO; nous aurons (nos 268 et 413)

$$AD = \frac{1}{2} L\sqrt{3} \quad \text{et} \quad AO = \frac{2}{3}.AD = \frac{1}{3} L\sqrt{3};$$

et par suite $\quad SO = \sqrt{\overline{AS}^2 - \overline{AO}^2} = \frac{1}{3} L\sqrt{6},$

$$So = \sqrt{\overline{As}^2 - \overline{Ao}^2} = \frac{1}{3} l\sqrt{6};$$

d'où $\quad 1° \quad Oo = SO - So = \frac{1}{3}(L - l)\sqrt{6};$

$$2° \quad ABC = L \times \frac{1}{4} L\sqrt{3} = \frac{1}{4} L^2\sqrt{3},$$

et $\quad abc = l \times \frac{1}{4} l\sqrt{3} = \frac{1}{4} l^2\sqrt{3}.$

On a maintenant (n° 640), pour l'expression du volume du tronc de tétraèdre,

$$V = \frac{1}{3}.Oo \times \left(ABC + abc + \sqrt{ABC \times abc}\right);$$

ou bien, en substituant,

$$\frac{1}{9}(L - l).\sqrt{6}.\left(\frac{1}{4} L^2\sqrt{3} + \frac{1}{4} l^2\sqrt{3} + \frac{1}{4} Ll\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1}{12}(L - l).\sqrt{2}.(L^2 + l^2 + Ll).$$

On obtient ainsi, en mettant à la place de L, l, leurs valeurs,

$$V = \frac{1}{12}.0,5.\sqrt{2}.(0,81 + 0,16 + 0,36) = \frac{1}{12}.0,5.\sqrt{2}.1,33;$$

d'où

$$\log.V = \log.0,5 + \log.1,33 + \frac{1}{2}.\log.2 - \log.12 = \bar{2},8941553;$$

et enfin

$$V = 0^{mc},078371,$$

à *un centimètre cube* près.

Vérification.

$$V = \text{SABC} - \text{S}abc.$$

Or (n° 693)

$$\text{SABC} = \text{ABC} \times \frac{1}{3}.\text{SO} = \frac{1}{4} L^2 \sqrt{3} \times \frac{1}{9} L\sqrt{6} = \frac{1}{12} L^3 \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{12}(0{,}9)^3 \sqrt{2} = 0{,}085913\,;$$

$$\text{S}abc = abc \times \frac{1}{3}.\text{S}o = \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3} \times \frac{1}{9} l\sqrt{6} = \frac{1}{12} l^3 \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{12}(0{,}4)^3 \sqrt{2} = 0{,}007542\,;$$

d'où $V = 0{,}078371$, comme ci-dessus.

§ II. *Problèmes sur les Corps Ronds.*

Problème I.

699. *Étant donné le volume d'un cylindre, égal à...* $4985^{mc}{,}7024$, *et la circonférence de sa base, égale à* 18^m, *trouver sa hauteur.*

La circonférence de la base étant de 18^m, le rayon sera de $\frac{18^m}{2\pi}$; et la base elle-même aura pour mesure

$$\frac{(18^m)^2}{4\pi} = \frac{81^{mq}}{\pi}.$$

La hauteur s'obtient alors en divisant $4985{,}7024$ par $\frac{81}{\pi}$ (n° 634), ce qui donne (*Voy.* le n° 288)

$$\frac{4985{,}7024 \times \pi}{81} = 193^m{,}371.$$

Problème II.

700. *Un rouleau cylindrique de bois de chéne a* $0^m{,}3$ *d'épaisseur* [ou de diamètre], *et* $2^m{,}5$ *de longueur; on sait d'ail-*

leurs que le poids spécifique du bois de chêne est de 1,17 : — *on demande le volume et le poids du rouleau.*

Le volume du rouleau sera d'abord (n° 634):

$$\pi.(0,15)^2 \times 2,5 = 0^{mc},176714, \quad \text{ou} \quad 176^{dmc},714\,;$$

et en multipliant par 1,17, on aura le poids du rouleau, égal à $206^{kilog},756$.

Problème III.

701. *Le fût d'une colonne d'ordre corinthien a la forme d'un cône tronqué; le rayon de la base supérieure est les* $\frac{5}{6}$ *du module ou du rayon de la base inférieure, et la hauteur vaut* 16 $\frac{2}{3}$ *modules : — on demande le volume* [V] *du fût, en supposant le module égal à* $0^m,12$.

Soit généralement r le module, le volume V vaudra (n° 640, *scol.*)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right) + \frac{5}{6}\right]\frac{50}{3}r = \frac{50}{9}\cdot\frac{91}{36}\cdot\pi r^3 = \frac{2275}{162}\pi r^3\,;$$

d'où l'on tire, en mettant pour π sa valeur et faisant $r = 0^m,12$,

$$V = 76^{dmc},236.$$

Problème IV.

702. *On demande quel volume* [V] *de maçonnerie il entre dans une tour ronde dont le rayon intérieur est de* $1^m,3$, *l'épaisseur de* $0^m,5$, *et la hauteur de* $19^m,4$.

Ce volume (n° 634) est exprimé par

$$V = \pi[(1,8)^2 - (1,3)^2]19,4 = \pi \times 3^m,1 \times 0^m,5 \times 19^m,4\,;$$

or
$$\begin{aligned} \log.\pi \ldots &= 0,49714987 \ (\text{n° } 288) \\ \log.3,1 \ldots &= 0,49136169 \\ \log.0,5 \ldots &= \bar{1},69897000 \\ \log.19,4 &= 1,28780173\,. \end{aligned}$$

d'où
$$\log.V = 1,97528329 = \log.94,4677.$$

Ainsi le volume de la maçonnerie est de $94^{mc},4677$.

Problème V.

703. *Les saucissons* (*) *employés au revêtement d'une batterie, peuvent être considérés comme des cylindres droits; avec des matériaux suffisans pour en faire* 25 *de* 325 *millimètres* [12 pouces] *de diamètre, on voudrait en faire* 36 *de même longueur : quel doit être le diamètre* [x] *de ces derniers ?*

On a $$25.\pi.(0,325)^2 = 36.\pi.x^2;$$

d'où $$x^2 = \frac{25}{36}(0,325)^2,$$

et $$x = \frac{5}{6}.0,325 = 0^m,271.$$

Problème VI.

704. *La chambre d'un mortier est un cylindre droit; celle du mortier de* 12 *pouces* [$0^m,325$] *et celle du mortier de* 8 *pouces* [$0^m,217$] *ont la même profondeur; la première contient* 1693 *grammes de poudre* [3 liv. 7 onces $\frac{1}{3}$], *et la seconde en contient* 635 *grammes* [20 onces $\frac{3}{4}$]; *enfin le diamètre de la première est de* $0^m,126$ [4 pouces 8 lignes] : — *on demande celui de la seconde.*

Les volumes des cylindres sont proportionnels, d'une part aux quantités de poudre qu'ils contiennent respectivement, et d'autre part aux carrés de leurs diamètres puisque les longueurs sont les mêmes : on a donc

$$x^2 : (0,126)^2 :: 635 : 1693,$$

et $$x = \sqrt{\frac{(0,126)^2 \times 635}{1693}};$$

d'où, en opérant par logarithmes,

$$log.x = log.0,07716.$$

Ainsi le diamètre cherché est de $0^m,077$ [2 pouc. 10 lign.].

(*) On nomme ainsi des faisceaux de branchages.

Problème VII.

705. *Étant donnée l'arète d'un cône droit, égale à $25^m,15$, et sa hauteur $17^m,3$, trouver sa surface latérale [A] et son volume [V].*

On a d'abord (n° 611, *coroll.* 3)

$$A = \pi.25,15.\sqrt{(25,15)^2 - (17,3)^2}$$
$$= \pi.25,15.\sqrt{42,45 \times 7,85};$$
$$log.A = log.\pi + log.25,15 + \tfrac{1}{2}.log.42,45 + \tfrac{1}{2}.log.7,85;$$

ou, en effectuant les calculs indiqués,

$$log.A = 3,1590615 = log.1442,32:$$

donc $A = 1442^{mq},32.$

On a ensuite (n° 637)

$$V = \frac{1}{3}.\pi \times 17,3 \times 42,45 \times 7,85;$$

$$log.V = log.\pi + log.17,3 + log.42,45 + log.7,85 - log.3,$$

ou, effectuant les calculs,

$$log.V = 3,7808221 = log.6037,01;$$

d'où $V = 6037^{mc},01.$

Problème VIII.

706. *Les rayons des bases d'un cône tronqué ont 3^m et 5^m, et son arète a 7^m de longueur : — on demande sa surface latérale et son volume.*

La surface latérale a pour mesure (n° 611, *coroll.* 5) :

$$\pi(3+5)7 = 56.\pi = 175^{mq},93.$$

Le volume a pour mesure (n° 640, *scol.*) :

$$\frac{1}{3}.\pi\sqrt{7^2-2^2}\times(3^2+5^2+3.5) = 49.\pi\sqrt{5} = 344^{mc},216.$$

Problème IX.

707. *On a un creuset en forme de cône tronqué, dont le fond a $0^m,03$ de diamètre, l'ouverture $0^m,06$, et dont la*

hauteur est de $0^m,08$; ce creuset contient une certaine quantité de métal fondu dont la surface a $0^m,05$ de diamètre : on veut en faire une sphère, et l'on demande le rayon du moule de cette sphère.

On a la hauteur du liquide, exprimée en *centimètres*, par la proportion

$$x : 8 :: 2 : 3,$$

d'où $$x = \frac{16}{3}.$$

Le volume du métal fondu est donc (n° 640, *scol.*) :

$$\frac{16}{9}.\pi.\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}.\frac{5}{2}\right] = \frac{4}{9}.\pi.49.$$

De là on tire, en représentant par r le rayon cherché,

$$\frac{4}{9}.49 = \frac{4}{3}r^3;$$

d'où $$r^3 = \frac{49}{3},$$

et $$r = \sqrt[3]{\frac{49}{3}} = 2^{cm},53722.$$

Problème X.

708. *Étant donnée l'aire d'une sphère, égale à $728^{mq},4926$, trouver son rayon* [r].

On a (n° 619, *coroll.* 1^er) : $728,4926 = 4\pi r^2$;

d'où $$r = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{728,4926} = 7^m,61.$$

Problème XI.

709. *Étant donné le volume d'une sphère, égal à..... $1843^{mc},086278$, trouver son rayon* [r].

On a (n° 644, *coroll.* 1^er) :

$$1843^{mc},086278 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

d'où $$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \sqrt[3]{1843,086278} = 7^{m},61.$$

Problème XII.

710. *Le diamètre d'un boulet de canon dit de* 36 *est de* $0^{m},168$ [6 pouces, 2 lignes, 8 points] : — *évaluer le diamètre du boulet de* 24, *celui du boulet de* 16, *de* 12, *de* 8, *de* 4.

Soit x le diamètre du boulet de 24 : on aura (n° 652, *coroll.*), en prenant le *millimètre* pour *unité*,

$$x^3 : (168)^3 :: 24 : 36 :: 2 : 3,$$

$$x^3 = \frac{(168)^3 . 2}{3},$$

et $$x = \frac{168\sqrt[3]{2.9}}{3} = 56\sqrt[3]{18} = 147 \text{ millimètres}.$$

On trouverait de même :

128 *millimètres* pour le boulet de 16,
116........................... 12,
102........................... 8,
81........................... 4.

Problème XIII.

711. *L'arête d'un cube a* $0^{m},36$ *de longueur* : — *on demande le volume de la sphère circonscrite.*

Le carré de la diagonale (n° 535) vaut $3.(0,36)^2$; et par conséquent, la diagonale elle même a de longueur.... $0,36.\sqrt{3}$. Cette diagonale étant d'ailleurs le diamètre de la sphère demandée, il s'ensuit que le volume de celle-ci a pour expression (n° 644, *coroll.* 1er)

$$\frac{1}{6}.\pi.3\sqrt{3}.(0,36)^3 = \frac{1}{2}.\pi\sqrt{3}.(0,36)^3.$$

$$\begin{array}{lcl}
\log.\pi \ldots\ldots\ldots & = & 0,4971499 \\
\frac{1}{2}.\log.3 \ldots\ldots\ldots & = & 0,2385606 \\
3.\log.0,36. \ldots\ldots & = & \bar{2},6689075 \\
C.\log.2 \ldots\ldots\ldots & = & \underline{9,6989700} \\
 & & \bar{1},1035880 = \log.0,126937.
\end{array}$$

Ainsi le volume cherché est, à *un centimètre cube* près, $0^{mc},126937$.

Problème XIV.

712. *On demande l'aire d'un triangle sphérique dont les angles sont respectivement* $A = 85^{gr},17'$, $B = 103^{gr},35'$, $C = 67^{gr},49'$, *le rayon de la sphère étant égal à* $1^{m},54$.

On a d'abord

$$\tfrac{1}{2}(A + B + C) - 1 = 0^{q},28005.$$

Par conséquent, d'après la formule du *numéro* 622 (*coroll.* 1^er^), l'aire du triangle vaudra

$$\pi.(1,54)^2 \times 0,28005 = 2^{mq},0865,$$

à *un centimètre carré* près.

Problème XV.

713. *Évaluer une tranche sphérique, connaissant les rayons B et b de ses deux bases, ainsi que sa hauteur h.*

Soient

$$B = 0^{m},25 \mid b = 0^{m},19 \mid h = 0^{m},035.$$

On a (n° 647, *scol.*), en désignant par V le volume du segment,

$$V = \frac{1}{6}.\pi h^3 + \frac{1}{2}.\pi h(B^2 + b^2).$$

Or, $\qquad h^3 = (0,035)^3 = 0,000042875,$

d'où l'on tire d'abord $\qquad \frac{1}{6}.\pi h^3 = 0,000022449.$

Ensuite $\qquad B^2 = (0,25)^2 = 0,0625,$

$\qquad b^2 = (0,19)^2 = 0,0361,$

d'où $\qquad B^2 + b^2 = 0,0986;$

et de plus, $\qquad \frac{1}{2}.\pi h = 0,0549779;$

donc secondement

$$\frac{1}{2}.\pi h(B^2 + b^2) = 0,0549779 \times 0,0986 = 0,00542082\mathrm{I}.$$

Par conséquent

$$V = 0^{mc},005443270,$$

à un millimètre cube près.

Problème XVI.

714. *Évaluer le volume d'un verre de forme lenticulaire, dont le diamètre est* $0^m,03$, *et l'épaisseur* $0^m,004$.

Le volume du verre est un double segment de sphère; par conséquent son volume sera composé comme il suit (n° 647, *scol.*) :

$$\pi(0,015)^2 \times 0,002 + \frac{1}{3}.\pi(0,002)^3$$

$$= \frac{1}{3}.\pi[3(0,015)^2 \times 0,002 + (0,002)^3]$$

$$= 1,04719755 \times 0,000001358$$

$$= 0,000\ 001\ 422\ 094.$$

Ainsi le volume cherché est de

$$1422^{mmc},094.$$

[§ III. *Autres Problèmes sur les Corps Ronds.*]

Problème I.

715. *En supposant la terre parfaitement sphérique, et sachant que le quart du méridien est égal à* 10 000 000 *mètres, on demande de déterminer son rayon* [r], *l'aire de la surface* [s], *son volume* [v], *et son poids* [p], [*la densité moyenne de la terre étant, d'après Cavendish, égale à* 4,5].

En nommant, pour abréger, c la circonférence du méridien, on a d'abord

$$r = \frac{c}{2\pi},$$

$$\begin{aligned} log.\tfrac{1}{2}c = log.20\ 000\ 000 &= 7,30103000 \\ C.\ log.\pi \ldots\ldots\ldots &= 9,50285013 \\ \hline log.r \ldots\ldots\ldots &= 6,80388013 \end{aligned}$$

d'où $$r = 6\,366\,200 \textit{ mètres}.$$

Ensuite, $$s = 4\pi r^2 = \frac{c^2}{\pi};$$

d'où, en appliquant les logarithmes,

$$log.s = 14{,}7069701\text{i},$$

et par conséquent,

$$s = 509\,296 \textit{ myriamètres carrés}.$$

Puis, $$v = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{c^3}{6\pi^2},$$

d'où appliquant les logarithmes,

$$log.v = 21{,}033728 97,$$

et par conséquent,

$$v = 1\,080\,759\,000 \textit{ myriamètres cubes}.$$

Enfin, multipliant le nombre de *mètres cubes* contenus dans v par 4500, on aura le poids de la terre exprimé en kilogrammes,

$$\begin{aligned} log.v\ldots &= 21{,}03372897 \\ log.4500 &= 3{,}65321251 \\ \hline log.p\ldots &= 24{,}68694148 \end{aligned}$$

d'où

$$p = 4\,863\,420\,000\,000\,000\,000 \textit{ millions de kilogrammes}.$$

Problème II.

716. *On demande de calculer la surface de chacune des cinq zones qui composent la surface de la terre, sachant*

1° *Que la hauteur* (*) *de la zone torride* [*comptée sur l'axe*] *est de* 5 070 240 *mètres* [$= h$],

2° *Que la hauteur de chaque zone tempérée est de*... 3 304 550 *mètres* [$= h'$],

(*) Ces hauteurs sont celles qui résultent de ce qu'il y a 23°28′ de l'équateur à chaque tropique, 43°4′ d'un tropique au cercle polaire correspondant, et enfin 23°28′ d'un cercle polaire au pôle correspondant. (*Voyez* la *Table des Cordes*.)

3° *Que la hauteur de chaque zone glaciale est de*........ 526 530 *mètres* [$= h''$].

Soient a, a', a'', les aires respectives de la zone torride, d'une zone tempérée, et d'une zone glaciale; nous aurons (n° 620), en nommant toujours c la circonférence de la terre, ou 40 000 000 *mètres :*

$$a = ch, \quad a' = ch', \quad a'' = ch''.$$

Or, 1° $log.a = log.c + log.h$

$$log.c = 7{,}6020600$$
$$log.h = 6{,}7050285$$
$$log.\,a = 14{,}3070885;$$

d'où $a = 2\,028\,100$ *myriamètres carrés.*

2° $log.\,a' = log.\,c + log.h' = 14{,}1211724$;

d'où $a' = 1\,328\,120$ *myriamètres carrés.*

3° $log.a'' = log.c + log.h'' = 13{,}3234831$;

d'où $a'' = 210\,610$ *myriamètres carrés.*

Vérification.

$$a = 2\,028\,100 \text{ myriamètres carrés.}$$
$$2a' = 2\,643\,640$$
$$2a'' = 421\,220$$

d'où $s = 5\,092\,960$ [comme au n° 714].

Scolie. — Entre les surfaces des cinq zones et la surface totale de la terre, de même qu'entre les hauteurs respectives de ces zones et le diamètre, on a les rapports approchés :

$$a : 2a' : 2a'' : s :: h : 2h' : 2h'' : 2r :: 40 : 52 : 8 : 100 :: 10 : 13 : 2 : 25.$$

Problème III.

717. *Le diamètre du soleil vaut* 112,88 *fois celui de la terre : — on demande son volume.*

Les volumes des sphères étant proportionnels aux cubes de leurs diamètres, le volume V du soleil sera (n° 652, *coroll.*)

$$1\ 080\ 759\ 000 \times (112{,}88)^3 \quad \textit{myriamètres cubes.}$$

Or,

$$\begin{aligned} log.1\ 080\ 759\ 000 &= 9{,}0337289 \\ 3.log.112{,}88 \ldots\ldots &= 6{,}1578510 \\ \hline log.V &= 15{,}1915799 \end{aligned}$$

d'où $V = 1\ 554\ 462\ 000\ 000\ 000$ *myriamètres cubes.*

Ainsi, le soleil est *environ* de 15 à 16 *cent mille* fois plus gros que la terre.

Problème IV.

718. *On a compté* 50 000 *étoiles entre le pôle boréal et le solstice d'hiver : — on demande combien, à proportion, il doit y en avoir dans tout le ciel.*

La surface totale du ciel *est à* la portion dont on a compté les étoiles, *comme* la surface de la terre *est à* la calotte comprise entre le pôle boréal et le solstice d'hiver, ou *comme* le diamètre de la terre *est à* la hauteur de cette calotte : ainsi, en nommant x le nombre total des étoiles, on doit avoir à peu près (n^os 620, *coroll.* 2; et 716, *scol.*) :

$$x : 50\ 000 :: 100 : 40+26+4 :: 100 : 70 :: 10 : 7;$$

d'où $x \doteq 50\ 000 \times \frac{10}{7} = 71\ 429.$

Par conséquent, il y a *environ* 72 000 étoiles.

Problème V.

719. *Le litre que l'on emploie pour mesurer les matières sèches, a la forme d'un cylindre équilatéral* (n° 540) *: — déterminer ses dimensions.*

On a pour cela (n° 634), en nommant x le diamètre et la hauteur du vase,

$$0^{mc}{,}001 = \frac{1}{4}\pi x^3 \quad \text{d'où} \quad x^3 = \frac{0{,}004}{\pi},$$

et
$$log.x = \frac{1}{3}(log.0,004 - log.\pi);$$

$$\begin{array}{rl} log.0,004 & = \bar{3},60205999 \\ C.log.\pi\ldots & = \underline{9,50285013} \\ & \ \bar{3},10491012 \\ log.x & = \bar{1},03497004 = log.0,108385. \end{array}$$

Ainsi le diamètre et la hauteur valent chacun 108 *millimètres*.

Problème VI.

720. *Le litre que l'on emploie pour les liquides a la forme d'un cylindre dont la hauteur est double du diamètre : — on demande ses dimensions.*

En nommant x la hauteur, on a

$$0^{mc},001 = \frac{1}{16}.\pi x^3, \text{ d'où } x^3 = \frac{0,016}{\pi};$$

et
$$log.x = \bar{1},2356567 = log.0,172061.$$

La *hauteur* est donc de 172 *millimètres*, le *diamètre* de 86, et le *rayon* de 43.

Problème VII.

721. *On suppose une série de poids ayant la forme de troncs de cône creux* [à l'exception du poids intérieur qui est un tronc de cône plein] *s'emboîtant les uns dans les autres, et tous semblables entre eux : — on demande quel rapport il doit y avoir entre le rayon extérieur* [R] *et le rayon intérieur* [r] *de chacune des grandes bases, pour que chaque poids soit équivalent à la somme de tous ceux qui lui sont intérieurs.*

En nommant V le volume total d'un poids et de tous ceux qui lui sont intérieurs, et v le volume de ces derniers, on doit avoir

d'après l'énoncé........... $V : v :: 2 : 1$,
et d'après le *numéro* 652... $V : v :: R^3 : r^3$;
d'où $R^3 : r^3 :: 2 : 1$,

et par conséquent $R : r :: \sqrt[3]{2} : 1$.

Problème VIII.

722. *Un vase de forme cylindrique dont la base a* $0^m,3$ *de rayon, contient une certaine quantité d'eau. On met dans ce vase une sphère d'argent pur qui se trouve tout-à-fait plongée dans le liquide; et l'eau s'élève de* $0^m,05$ *au-dessus de son niveau primitif. — Cela posé: 1° on demande le rayon de la sphère; 2° le poids spécifique de l'argent étant* $10,4743$, *on demande combien de francs on retirerait de la sphère, si on la monnayait après l'avoir fondue avec la quantité convenable d'alliage.*

D'abord, le volume de la sphère est égal à celui de l'eau soulevée, ou à

$$\pi.(0,3)^2 \times 0,05 = \pi \,.\, 0,0045 = 14137166^{mmc}.$$

Ensuite, en nommant d le diamètre de la sphère, on a

$$\pi.0,0045 = \frac{1}{6}\pi d^3;$$

d'où $d^3 = 0,027$, $d = 0^m,3$, et $\frac{1}{2}d = 0^m,15$.

Maintenant pour avoir le poids en *grammes*, il faut multiplier le volume exprimé en centimètres cubes, par le poids spécifique $10,4743$; ce qui donne

$$\pi.4500 \times 10,4743.$$

Il faut ajouter, en poids, $\frac{1}{9}$ d'alliage : le poids total sera donc

$$\frac{10}{9}\pi.4500 \times 10,4743 = \pi.5000 \times 10,4743^g.$$

Enfin, on aura le nombre de francs en divisant par 5, ce qui donnera

$$\pi.1000 \times 10,4743 = 10474,3 \times \pi = 32905^f,98.$$

Problème IX.

723. *On suppose un pain de sucre ayant la forme d'un cône dont l'angle au centre est de* $45°$, *et la hauteur de* $0^m,25$:

— *trouver son volume et son poids, le poids spécifique du sucre étant* 1,6.

En nommant généralement r le rayon de la base, h la hauteur, et V le volume, on a (n° 637)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Or, l'angle au centre du cône étant l'angle au centre d'un octogone régulier, on aura d'après le *numéro* 423, en nommant a l'arête,

$$4r^2 = a^2(2-\sqrt{2}).$$

D'ailleurs $$a^2 = r^2 + h^2;$$

donc $$4r^2 = (r^2 + h^2)(2-\sqrt{2});$$

d'où l'on tire $$r^2 = h^2(3-2\sqrt{2});$$

et $$V = \frac{1}{3}\pi h^3(3-2\sqrt{2}).$$

On a donc $\log.V = \log.\pi + 3.\log.h + \log.(3-2\sqrt{2}) - \log.3.$

$$3-2\sqrt{2} = 0,17157.$$

$$\begin{aligned}
\log.\pi \ldots\ldots &= 0,4971499\\
3.\log.h \ldots\ldots &= \bar{2},1938200\\
\log.0,17157 &= \bar{1},2344414\\
C.\log.3 \ldots\ldots &= 9,5228787\\
\hline
\log.V &= \bar{3},4482900 = \log.0^{mc},00280731.
\end{aligned}$$

Ainsi le volume est de

$$2807^{cmc},31.$$

Pour avoir le poids en *grammes*, il faut multiplier par 1,6;

or $\log.2807,31 = 3,4482900$

$\log.1,6 \ldots\ldots = 0,2041200$

donc $\log.p \ldots\ldots = 3,6524100 = \log.4491,69.$

Ainsi le poids est de $4^{kilog},49169$.

37...

Problème X.

724. *Une futaille a* $0^m,572$ *de longueur intérieure; le diamètre du fond est de* $0^m,435$*; la circonférence du bouge est à celle du fond* :: 98 : 87*; et la circonférence de la section qui est également distante du bouge et du fond est à la première* :: 34 : 35.— *On demande la capacité de la futaille, en la considérant comme composée de 4 troncs de cônes ayant ces sections pour bases respectives.*

Il faut d'abord chercher les rayons ou les diamètres de la section du bouge et de la section intermédiaire entre celle-ci et le fond. Or les circonférences étant proportionnelles aux diamètres, le diamètre du bouge sera égal à...........
$\frac{0^m,435\times 98}{87}=0^m,490$, et celui de l'autre section vaudra
$\frac{0^m,490\times 34}{35}=0^m,476.$

La capacité V de la futaille sera donc exprimée (n° 640, *scol.*) par

$$\frac{2}{3}\pi.0,143[(0,245)^2+0,245\times 0,238+2(0,238)^2+0,238\times 0,2175+(0,2175)^2]$$

$$=\frac{2}{3}\pi.0,143\times 0,330691;$$

d'où $$\log.V=\bar{2},9958210=\log.0,0990424.$$

Ainsi $V=0^{mc},0990424=99$ *litres,* à moins d'*un litre* près.

Scolie. — Les dimensions que nous avons supposées à la futaille, sont à peu près celles que l'on donne à l'hectolitre. La différence de volume [moindre qu'un litre] provient de ce que la méthode employée n'est qu'approchée. On aurait un résultat plus exact en partageant la futaille en *six* troncs de cône, de même que l'on pourrait se contenter de la partager en *deux* si l'on ne voulait qu'une approximation grossière.

Problème XI.

725. *La futaille du problème précédent, étant supposée placée sur son fond, contient du liquide jusqu'à la hauteur de*

$0^m,494$; *on a mesuré la circonférence correspondante au niveau, et l'on a trouvé qu'elle était à celle du bouge* :: 33 : 35 *: — on demande de déterminer approximativement la quantité de liquide que contient la futaille.*

Il faut d'abord déterminer le rayon du niveau, dont la valeur est

$$\frac{0^m,245 \times 33}{35} = 0^m,231.$$

Maintenant, retranchant la hauteur du liquide de la longueur de la futaille, on a $0^m,078$. La portion vide de l'intérieur peut donc être considérée comme un tronc de cône dont la hauteur est $0^m,078$, et dont les bases ont respectivement pour rayon $0^m,231$ et $0^m,2175$.

Ainsi le volume v du vide sera exprimé (n° 640, *scol.*) par

$$\frac{1}{3}\pi . 0,078 [(0,231)^2 + 0,231 \times 0,2175 + (0,2175)^2]$$

$$= \pi . 0,026 \times 0,150906;$$

d'où $$log.v = \bar{2},0908404 = log. 0,0123261.$$

Par conséquent, il y a environ 12 *litres* de *vide* : c'est-à-dire que la futaille contient 87 à 88 *litres* de liquide.

Problème XII. (Fig. 484.)

726. *Une chaudière a la forme d'un tronc de cône terminé par une calotte sphérique tangente au cône. Le rayon* AB *de la grande base du tronc, ou de la bouche de la chaudière, est de* $1^m,5$ *; le rayon commun* CD *de la petite base et de la calotte est de* 1^m *; l'arête* BD *du tronc de cône est de* $1^m,3$ *; et enfin l'épaisseur de la chaudière est de* $1\frac{1}{4}$ *millimètre. — On demande : 1° l'aire de la chaudière, 2° sa capacité* [en négligeant la différence des rayons, due à l'épaisseur], *et 3° son poids, en supposant le poids spécifique du cuivre égal à* 8. Fig. 484.

1° La surface du tronc a pour mesure (n° 611)

Fig. 484. $$\pi(AB+CD)\,BD = 2{,}5\times 1{,}3\times\pi = 3{,}25\times\pi = \frac{13}{4}\pi.$$

On a ensuite pour la hauteur de ce tronc,

$$AC = DE = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{BE}^2} = \sqrt{(1{,}3)^2 - (0{,}5)^2} = 1{,}2.$$

Maintenant, pour déterminer le rayon FD = FO de la calotte, on a la proportion

$$FD : CD :: BD : DE,$$

d'où $$FD = \frac{CD\times BD}{DE} = \frac{1\times 1{,}3}{1{,}2} = \frac{13}{12}.$$

De plus, la différence FC entre ce rayon et la hauteur OC de la calotte, est donnée par la proportion

$$FC : CD :: BE : ED;$$

d'où $$FC = \frac{CD\times BE}{ED} = \frac{1\times 0{,}5}{1{,}2} = \frac{5}{12}.$$

Ainsi $$OC = FO - FC = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

L'aire de la calotte vaut donc (n° 620, *coroll.* 2)

$$2\pi.FO\times OC = 2\pi.\frac{13}{12}.\frac{2}{3} = \pi.\frac{13}{9}.$$

Par conséquent, l'aire totale de la chaudière sera

$$\pi\left(\frac{13}{4}+\frac{13}{9}\right) = \pi\left(\frac{13}{6}\right)^2 = 14^{mq},748020,$$

ou la même que celle d'un cercle qui aurait pour rayon $\frac{13^m}{6}$.

2° La capacité de la chaudière s'obtient en ajoutant le volume du tronc et celui du segment de sphère, qui composent le volume total.

Or, le volume du tronc (n° 640, *scol.*) est

$$\frac{1}{3}\pi\,[(1{,}5)^2+(1{,}0)^2+(1{,}0\times 1{,}5)]\,1{,}2 = \pi.1{,}9 = \frac{19}{10}\pi;$$

le volume du segment est (647, *scol.*)

$$\frac{1}{2}\pi(1{,}0)^2.\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{31}{81}\pi:$$

ainsi le volume total sera Fig. 484.

$$\left(\frac{19}{10}+\frac{31}{81}\right).\pi=\frac{1849}{810}.\pi=7^{mc},171364=7171^{l},364,$$

à *un millilitre* près.

3° Quant au poids de la chaudière, il s'obtient en multipliant le volume de ses parois [qu'il faut bien distinguer de sa capacité], par le poids spécifique du cuivre.

Or d'abord, l'épaisseur de la chaudière étant de $0^{m},00125$ ou $\frac{1^{m}}{800}$, le volume du cuivre employé sera de $\pi\left(\frac{13}{6}\right)^2.\frac{1}{800}$ *mètres cubes*, ou de $\pi\left(\frac{13}{6}\right)^2.\frac{5}{4}$ *décimètres cubes ;* et par conséquent, le poids spécifique du cuivre étant 8, le poids de la chaudière sera

$$\pi\left(\frac{13}{6}\right)^2.\frac{5}{4}\times 8=\pi\left(\frac{13}{6}\right)^2\times 10=147^{kilog},480322.$$

Problème XIII. (Fig. 484.)

727. *On suppose la chaudière du problème précédent remplie de suif fondu jusqu'à 2 décimètres du bord, comptés verticalement : — on demande 1° le volume du suif ; 2° combien on en pourra faire de chandelles de 2 centimètres de diamètre sur 22 de hauteur.*

1° Le rayon ab de la surface du suif diffère de CD d'une quantité be déterminée par la proportion

$$be : \mathrm{BE} :: \mathrm{D}e : \mathrm{DE};$$

d'où $$be=\frac{\mathrm{BE}\times\mathrm{D}e}{\mathrm{DE}}=\frac{0,5\times 1,0}{1,2}=\frac{2^{m},5}{6}.$$

Ainsi le volume de la partie vide de la chaudière a pour mesure (n° 640, *scol.*)

$$\frac{1}{3}\pi\left[(1,5)^2+\left(\frac{8,5}{6}\right)^2+1,5\times\frac{8,5}{6}\right]0,2=\frac{919^{mc}}{2160}\pi;$$

d'où il résulte que le volume du suif est égal à

$$\left(\frac{1849}{810}-\frac{919}{2160}\right)\pi=\left(\frac{14792-2757}{6480}\right)\pi=\frac{12035}{6480}.\pi=\frac{2407}{1296}.\pi$$
$$=5^{mc},834727722=5834^{l},727722.$$

2° Le volume d'une chandelle est (n° 634) de

$$\pi\times 0,0001\times 0,22=0,000022\times\pi=\frac{11.\pi}{500000};$$

ainsi le nombre de chandelles sera

$$\frac{2407}{1296}:\frac{11}{500000}=84420,\ \text{à une \textit{fraction} près.}$$

Problème XIV (*).

728. *Un physicien s'est assuré qu'une goutte d'eau de savon formant un cylindre de 2 millimètres de rayon et de 2 millimètres de hauteur, peut se développer en une bulle de 54 millimètres de rayon : — on demande 1° quelle doit être l'épaisseur de l'enveloppe aqueuse de cette bulle ; 2° combien cette enveloppe contient de parties visibles à l'œil nu, en supposant qu'une bonne vue puisse distinguer $\frac{1}{10}$ de millimètre; 3° combien de parties visibles à l'aide d'un microscope qui grossirait seulement 20 fois les dimensions linéaires.*

Soit en général r le rayon de la goutte, et h sa hauteur : son volume sera $\pi r^2 h$ (n° 634).

Soit ensuite R le rayon de toute la bulle et x l'épaisseur de son enveloppe : le volume de la partie aqueuse sera (n° 644)

$$\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi(R-x)^3.$$

(*) Ces deux derniers problèmes m'ont été communiqués par M. Magnier, ancien professeur de Physique au collége royal d'Amiens, dont la modestie égale les profondes connaissances, et que je m'honore d'avoir eu pour maître : je me trouve heureux de pouvoir lui donner ici un témoignage de ma reconnaissance.

On aura donc

$$\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi (R-x)^3\,;$$

d'où $$(R-x)^3 = R^3 - \frac{3}{4} r^2 h\,;$$

$$R - x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{8R^3 - 6r^2 h}\,;$$

et $$x = R - \frac{1}{2}\sqrt[3]{8R^3 - 6r^2 h}.$$

Maintenant : 1° mettant pour R, r, et h, leurs valeurs respectives en *millimètres*,

$$R = 54, \quad r = 2, \quad \text{et} \quad h = 2,$$

on obtient

$$x = 54 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(108)^3 - 48}$$

$$= 54 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{1259664}$$

$$= 54 - \frac{1}{2}\cdot 107{,}9986$$

$$= 54 - 53{,}9993 = 0{,}0007\,:$$

l'épaisseur cherchée est donc $\frac{7}{10000}$ *de millimètre.*

2° La surface de la bulle a pour mesure $4\pi R^2 = 366^{mmq},43$ (n° 619, *coroll.* 1er) ; et par conséquent son aire contient 3 664 300 parties visibles à l'œil nu.

3° Si l'on emploie un microscope qui rend 20 fois plus grandes les dimensions linéaires ou 400 fois plus grandes les surfaces, on aura 400 fois plus de parties visibles, ou 1 465 720 000.

De plus, cette goutte contient $8.\pi = 25^{mmc}$ à peu près ; donc un millimètre cube d'eau de savon donnera au même microscope, 58 628 800 parties visibles.

Problème XV. (Fig. 485.)

729. *Dans un jour d'été, une pie aperçoit de l'eau dans un trou conique* ABIG *dont le fond* APB *a* 3 *pouces de dia-*

Fig. 485. *mètre. Elle y vole pour s'y désaltérer; mais l'eau, dont la surface* CQD *a* 6 *pouces de diamètre, ne s'élève qu'à* 2 *pouces au-dessus du fond, et la pie ne peut y atteindre. Elle boirait cependant bien à son aise si la surface de l'eau avait* 8 *pouces de diamètre* ERF. *Elle vole vers un trésor qu'elle a découvert et qui contient des pièces de monnaie d'une ligne d'épaisseur et de* 16 *de diamètre. Elle en apporte, et jette dans l'eau jusqu'à ce qu'elle puisse atteindre à la surface En supposant que ces pièces se soient trouvées toutes sous l'eau, on demande combien la pie a été obligée d'en apporter.*

Ne considérons que la section du trou par un plan mené suivant l'axe PQRS. Il s'agit d'abord de mesurer la hauteur QR du tronc CDFE formé par l'eau soulevée.

Pour cela nous aurons

$$QR : PQ :: ER - CQ : CQ - AP,$$

ou, en prenant le pouce pour unité,

$$QR : 2 :: 1 : \frac{3}{2};$$

d'où
$$QR = \frac{4}{3}.$$

Le volume du tronc CDFE aura donc pour mesure (n° 640, *scol.*)

$$\frac{1}{3}\pi(3^2 + 4^2 + 3 \times 4)\frac{4}{3} = \frac{4}{9}37\pi.$$

Maintenant, le volume de chacune des pièces de monnaie a pour mesure (n° 634)

$$\pi.\left(\frac{2}{3}\right)^2.\frac{1}{12} = \frac{1}{27}\pi.$$

Ainsi en représentant leur nombre par n, on aura

$$\frac{4}{9}37\pi = \frac{1}{27}n\pi;$$

d'où
$$n = 37 \times 12 = 444.$$

FIN DES PROBL. DE GÉOM., ET DE LA SECONDE PARTIE.

NOTES.

NOTE A, RELATIVE AUX PROBLÈMES GRAPHIQUES.

Des principaux Instrumens employés dans la Géométrie Pratique.

DE LA RÈGLE ET DU COMPAS.

730. Nous avons donné dans le *numéro* 22, la définition de la *règle*, instrument destiné à *décrire* la ligne droite ; et nous avons exposé en quelques mots la manière de s'en servir pour cet usage. Malgré la simplicité du *tracé* que nous avons indiqué, on aurait tort de le regarder comme tout-à-fait rigoureux : deux raisons s'opposent principalement à ce que l'on puisse décrire une droite autrement que *par approximation*.

Premièrement, les bords de la règle que l'on emploie ne sont jamais parfaitement rectilignes : ils sont toujours plus ou moins hérissés de petites aspérités ; et la règle elle-même, considérée dans son entier, affecte souvent une courbure très notable.

Secondement, les lignes, telles qu'il nous est possible de les tracer, au lieu d'être absolument dépourvues de largeur ainsi qu'on le suppose, sont toujours, en réalité, de véritables surfaces à deux dimensions, comme cela devient surtout sensible lorsque plusieurs lignes viennent à se couper : car alors les points de rencontre, qui devraient n'avoir aucune étendue, se trouvent presque toujours représentés par de petites figures qui sont, non-seulement très visibles, mais souvent même appréciables.

Ces deux inconvéniens pouvant occasioner de graves erreurs dans les constructions tant soit peu compliquées, il est important de chercher, sinon à les éviter entièrement, du moins à les atténuer autant que possible. Relativement au premier inconvénient, il n'y a pas de meilleur moyen pour reconnaître si la règle est suffisamment droite, que de la placer de manière que ses deux extrémités se trouvent sur un même rayon visuel : ce procédé, en réduisant autant qu'on le veut la longueur apparente de la règle, permet d'apercevoir sur-le-champ les moindres défauts de rectitude. Ou bien, on

Fig. 486. peut encore, après avoir tracé une droite MN (fig. 486) avec le bord AB d'une règle ABCD, retourner cette règle *sens dessus-dessous*, non pas de manière que l'extrémité A se place en B, *et vice versâ* [ce moyen ne suffirait pas], mais de manière que l'instrument prenne la position AB*cd*, dans laquelle l'angle C aura passé en *c*, et l'angle D en *d*; et alors on verra si la ligne MN continue à coïncider avec le bord ou l'arête AB qui a servi à la décrire, comme cela doit avoir lieu si la règle est suffisamment bien dressée; dans le cas contraire, il faut renoncer à s'en servir, pour peu que l'on tienne à opérer avec quelque exactitude.

Quant au second inconvénient, il faut, pour le faire disparaître autant que cela est possible, employer une pointe très fine, et tracer la droite avec une extrême légèreté. On n'arrivera jamais, il est vrai, à décrire une *ligne mathématique* dans la rigueur absolue de l'expression; mais on pourra du moins parvenir à en obtenir une assez *fine* et assez *déliée* pour qu'il soit permis, sans avoir à craindre d'erreur notable, de la regarder comme une véritable ligne sans largeur.

731. Le compas, dont nous avons indiqué l'usage dans le *numéro* 25, est sujet aux mêmes inconvéniens que la règle. D'abord, il est très difficile que ses deux branches soient réunies d'une manière parfaitement fixe : de sorte que bien souvent, pendant le tracé, leur écartement vient à varier; et à la fin de l'opération, la pointe décrivante ne repasse plus par le point de départ. On remédie à cet inconvénient en resserrant la tête du compas, ce qui empêche les deux branches de s'écarter ou de se rapprocher l'une de l'autre trop facilement.

Quant à l'inconvénient résultant de ce que les pointes du compas ne seraient pas suffisamment *effilées*, nous renvoyons à ce que nous avons dit ci-dessus pour la règle.

DE L'ÉQUERRE ET DE LA FAUSSE ÉQUERRE.

732. Pour mener des perpendiculaires, on se sert avec avantage d'un instru-
Fig. 487. ment AOB (fig. 487) que l'on nomme une *équerre*. L'équerre est ordinairement composée de deux règles AO, OB, que l'on nomme ses *côtés* ou ses *branches*, et qui sont réunies de manière à former au point O un angle droit, soit en dehors, soit en dedans. — De là vient que deux droites sont dites *d'équerre* lorsqu'elles sont perpendiculaires entre elles.

Pour mener une perpendiculaire au moyen de l'équerre, on place l'un des bords de l'une de ses branches contre la droite à laquelle on veut mener une perpendiculaire, en faisant en sorte que l'un des bords de l'autre branche passe par le point donné. La droite tracée le long de ce bord est la perpendiculaire demandée.

Pour *vérifier* une équerre, c'est-à-dire pour s'assurer que ses deux branches sont bien perpendiculaires entre elles, il faut tracer un angle par son moyen, puis prolonger l'un des côtés de cet angle de manière à former un angle supplémentaire du premier. L'équerre est juste si l'angle de ses branches est égal à chacun des deux angles supplémentaires ainsi formés.

L'*équerre d'arpenteur* est un prisme carré que l'on place *verticalement* sur un pied. Chaque pan est partagé en deux moitiés par une fente verticale très étroite. Les plans verticaux qui passent par les fentes opposées sont perpendiculaires entre eux. On vérifie cette équerre d'une manière analogue à la précédente.

733. Pour faire un angle égal à un autre, on emploie souvent un instrument AOB (fig. 488) nommé *fausse équerre*, et qui diffère de l'équerre en ce que ses branches, AO, BO, au lieu d'être fixées à angle droit l'une sur l'autre, peuvent tourner autour du point O de manière à prendre telle inclinaison que l'on veut.

Il est facile de concevoir l'usage de cet instrument. On le place de manière que ses deux branches s'appliquent respectivement le long des côtés de l'angle proposé, ce qui s'appelle *relever l'angle;* puis on *rapporte* l'angle ainsi relevé, en appliquant l'une des branches de l'instrument contre la droite sur laquelle on veut construire l'angle donné, et faisant en sorte que l'un des bords de la seconde branche de l'instrument passe par le point donné du second côté de l'angle : on trace alors ce côté en suivant le bord de l'instrument.

Cette construction est également applicable au cas où le point donné est le sommet de l'angle à construire (n° 314), et au cas où le point donné est un point quelconque du second côté de cet angle (n° 315). Seulement, dans le premier cas, la tête de l'instrument doit être placée au sommet même de l'angle. [Même observation pour l'emploi de l'équerre (nos 309 et 310).]

Le procédé que nous venons d'exposer pour l'emploi de l'équerre ou Fig. 487.
de la fausse équerre, n'est cependant pas le meilleur : car il serait très difficile, en le suivant de point en point, d'obtenir un angle dont le sommet fût bien nettement déterminé. Mais, en combinant l'emploi de ces instrumens avec celui de la règle, il est possible d'éviter cet inconvénient ; nous ne saurions, au reste, entrer dans ces détails de pratique que l'usage apprendra.

734. On peut aisément, au moyen d'une règle et d'une équerre ou d'une fausse équerre, *Mener par un point donné, une parallèle à une droite donnée.*

Pour cela, on applique d'abord une branche de l'équerre ou de la fausse équerre suivant la droite donnée; puis on applique la règle le long de la seconde branche. Ensuite on fait glisser cette seconde branche le long de la règle jusqu'à ce que la première branche passe par le point donné. La direction de celle-ci est alors la parallèle cherchée.

DU RAPPORTEUR ET DU GRAPHOMÈTRE.

735. On emploie aussi aux mêmes usages un autre instrument que pour cette raison l'on nomme *rapporteur*, et qui a l'avantage de donner en même
Fig. 489. temps l'évaluation des angles. Il consiste en un demi-cercle (fig. 489) en métal ou en corne, dont la circonférence est divisée en *degrés*, *minutes*, etc.

L'instrument prend le nom de *graphomètre* quand il est porté sur un pied et disposé de manière à pouvoir mesurer des angles dans toutes les directions de l'espace. On y adapte à cet effet une règle nommée *alidade*, égale en longueur au diamètre, dont le milieu est fixé au centre du demi-cercle, et qui peut tourner dans son plan autour de ce centre. Les extrémités de l'alidade, ainsi que celles du diamètre qui sert de base au demi-cercle, sont garnies chacune d'une petite plaque nommée *pinnule*. Les pinnules sont traversées par des fentes perpendiculaires au plan de l'instrument, au travers desquelles on dirige des rayons visuels qui passent par son centre. L'instrument donne la mesure de l'angle de ces rayons visuels.

Le graphomètre peut être considéré comme une combinaison de la fausse équerre et du rapporteur.

Au moyen du rapporteur, on peut inscrire dans un cercle, un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés : pour cela, on calcule d'abord l'angle au centre du polygone, et l'on construit cet angle avec l'instrument.

DES ÉCHELLES ET DU VERNIER.

736. Les moyens indiqués au *numéro* 338 pour diviser une droite en parties égales, sont insuffisans dans la pratique lorsque la droite à diviser est très petite et que le nombre des parties est très grand, parce qu'alors les points de division obtenus par ces diverses méthodes, ne sont plus assez distincts. On y supplée de la manière suivante.

Fig. 490 Soit par exemple, à diviser la droite ab (fig. 490) en 10 parties égales : menons à ab la perpendiculaire am, sur laquelle nous prendrons 10 parties égales quelconques ; tirons mb, et menons par les points de division de am, des parallèles à ab : ces parallèles vaudront respectivement $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$,...de ab.

Pour mener plus exactement les parallèles, il est nécessaire de prolonger ab d'une quantité suffisante bc, et de construire le rectangle $mnac$: on partage le côté cn comme le côté am, et l'on mène des parallèles par ces points de division. Pour plus de commodité, on divise aussi les parallèles à mn en parties égales à ab : la figure donne alors des lignes multiples de ab, en même temps que les parties fractionnaires.

La méthode précédente est surtout employée pour la construction des *échelles*, c'est-à-dire pour la division des droites qui doivent servir à mesurer d'autres droites ou à les diviser elles-mêmes en parties égales. L'échelle prend le nom d'échelle de *dixièmes* quand chacune de ses parties, représentée par *ab*, est subdivisée en dix parties égales, comme cela a lieu dans la *figure* 490 où *ab* valant à peu près un *millimètre*, chacune des subdivisions qu'elle fournit vaut un *déci-millimètre*.

On peut employer les échelles pour trouver le rapport de deux droites, en commençant par prendre directement leur mesure.

737. Pour évaluer de très petites portions de droites, on emploie encore un instrument appelé *vernier* ou *nonius* (fig. 491), du nom des inventeurs. Cet instrument consiste en deux règles divisées respectivement en parties égales, l'une plus grande OZ que nous considérerons comme fixe, l'autre plus petite qui doit être mobile le long de la première : [c'est ordinairement à la petite règle que l'on donne plus particulièrement le nom de *vernier*]. Afin de mieux fixer les idées, nous supposerons que les divisions de la grande règle OZ aient été prises pour unité, et que la longueur du vernier contienne 9 de ces divisions : dans ce cas il doit être lui-même divisé en 10 parties égales [une de plus qu'il ne contient d'unités] dont chacune vaudra par conséquent $\frac{9}{10}$. Pour plus de clarté, les divisions de la grande règle seront indiquées par des chiffres romains, et celle du vernier par des chiffres arabes. Fig. 491.

Cela posé, quand le point O de la grande règle coïncide avec le point o de la petite, la division IX doit coïncider avec la division 10; la division 1 est distante de $\frac{1}{10}$ de la division I, 2 diffère de II de $\frac{2}{10}$, 3 diffère de III de $\frac{3}{10}$, etc. Donc, si l'on fait avancer le vernier de $\frac{1}{10}$, 1 coïncidera avec I; si on le fait avancer de $\frac{2}{10}$, 2 coïncidera avec II; si on le fait avancer de $\frac{3}{10}$, 3 coïncidera avec III; et ainsi de suite. Le rang de la coïncidence d'une division de la petite règle avec une division de la grande indique donc le nombre de 10^{mes} dont la petite règle a avancé depuis que ses extrémités coïncidaient avec deux divisions de la grande règle. Par exemple, sur la *figure* 492, l'extrémité 10 est comprise entre XV et XVI, et 7 coïncide avec un point de division de la grande règle : cela indique qu'entre O et 10, il y a une distance égale à $15 + \frac{7}{10}$. On peut donc ainsi évaluer une distance quelconque à $\frac{1}{10}$ près. On pourrait même l'évaluer à $\frac{1}{20}$ près : car si les points de division 6 et 7, par exemple, se trouvaient compris entre deux points de division consécutifs de la règle OZ, sans coïncidence, l'extrémité 10 étant d'ailleurs comprise entre XV et XVI, la distance des Fig. 492.

points O et 10 serait sensiblement égale à 15 *plus* 6 *dixièmes*, *plus un demi-dixième*, ou à $15+\frac{13}{20}$.

La même méthode est applicable à l'évaluation des arcs ; on emploie alors un vernier circulaire.

DU COMPAS DE PROPORTION ET DU COMPAS DE RÉDUCTION.

738. La plupart des problèmes relatifs aux lignes proportionnelles peuvent se
Fig.493. résoudre au moyen d'un instrument nommé *compas de proportion* (fig. 493). On peut se le représenter comme une fausse équerre sur les branches de laquelle, à partir de leur point de jonction o, on aurait compté un même nombre de parties égales, 1, 2, 3, 4, etc. Pour en comprendre l'usage, il suffit de faire remarquer que si, ayant donné à l'instrument une ouverture quelconque, on joint deux à deux les points marqués sur les deux branches par le même *numéro* d'ordre, 1, 2, 3,....., on formera une série de triangles isocèles qui auront leur sommet commun en o, et tous semblables entre eux.

Cela posé, admettons qu'il s'agisse de *Trouver une quatrième proportionnelle à trois longueurs données : a, b, c* (n° 342). Pour cela : — 1° On prend à partir du point o, sur l'une des deux branches, une longueur égale à *a* : supposons que son extrémité tombe au point 3 ; — 2° On prend à partir du même point o sur la même branche, une longueur égale à *b* : supposons que l'extrémité tombe au point 5 ; — 3° On donne à l'instrument une ouverture telle que la distance des deux points marqués 3 soit égale à *c* [ce que l'on fait au moyen du compas ordinaire] : — La distance des deux points marqués 5 est la longueur cherchée.

Soit encore, par exemple, à *Partager une longueur donnée en deux parties proportionnelles aux nombres* 5 *et* 3 (n° 340). — Pour cela, on fait la somme des nombres 5 et 3, ce qui donne 8, et l'on ouvre l'instrument de manière que la distance des deux points 8 soit égale à la ligne donnée : les distances respectives des *couples* de points marqués 5 et 3, sont les deux parties cherchées.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur les usages de cet instrument ; nous ajouterons seulement qu'il peut aussi servir à *réduire* les lignes d'une figure donnée dans un rapport donné, c'est-à-dire à trouver des lignes qui soient respectivement avec les premières dans ce rapport donné. Par exemple, si l'on veut réduire les lignes de la figure dans le rapport de 5 à 3, on donnera à l'instrument une ouverture telle que la distance des deux points marqués 5 soit égale à 3. Alors les distances des couples de points marqués deux à deux, 1, 2, 3. .., seront respectivement égales aux distances du point o aux points 1, 2, 3,...., réduites dans le rapport donné.

739. Pour le dernier usage qui vient d'être indiqué, on emploie plus

commodément un instrument spécial nommé *compas de réduction*. Il est formé de deux branches égales AB, A'B' (fig. 494), terminées en pointes, que l'on réunit à tel point O que l'on veut de leur longueur, pourvu cependant que AO = A'O et BO = B'O. Dans ce cas, si BO est, par exemple, les $\frac{2}{5}$ de AO, BB' sera la distance AA' réduite aux $\frac{2}{5}$. Fig. 494

DU LEVER DES PLANS, ET DE LA PLANCHETTE.

740. L'art de *lever les plans* est une application du problème qui consiste à construire une figure semblable à une figure donnée. Il a pour but de décrire sur le papier, des figures semblables à celles que forment sur un terrain, les points où se trouvent placés des objets remarquables, ou bien aux figures dans lesquelles le terrain se trouve décomposé. Quand la figure du terrain est terminée par des lignes courbes, et non par des côtés rectilignes, on y substitue d'abord un polygone inscrit; et si les sommets de ce polygone sont suffisamment rapprochés, il est facile ensuite de rétablir la forme de la courbe, du moins approximativement.

Tout plan doit être accompagné d'une échelle (n° 736) qui indique dans quel rapport la figure du terrain se trouve réduite.

741. Au nombre des instrumens employés pour lever les plans, se trouve la *planchette*. On nomme ainsi un rectangle de bois MN (fig. 495), dont la surface est rendue aussi plane que possible. Supposons que l'on veuille, au moyen de cet instrument, lever *le plan* du polygone ABCDEF supposé horizontal dans toute son étendue. Pour cela, on se place d'abord au point A, où l'on établit l'instrument dans une situation également horizontale. On marque sur la planchette le point A; et l'on trace des droites dans les directions AB, AC, AD, AE, AF. Cela fait, on se transporte en un autre point E. On place de nouveau l'instrument dans une situation horizontale, de manière que la droite que l'on y a tracée suivant AE, coïncide avec sa première direction. Puis on prend, à partir du point *a* que l'on a marqué sur la planchette pour représenter le point A, une distance *a*E qui soit à AE dans le rapport de réduction suivant lequel on veut construire le plan: [le point E du terrain est censé correspondre exactement, sur une même verticale, avec le point E de la planchette]. Dans cette nouvelle position de l'instrument, les droites qu'on y avait tracées sont restées parallèles à elles-mêmes. Alors, par le point E, on trace de nouveau des droites dans les directions EB, EC, ED, EF: soient *b*, *c*, *d*, *f*, les points d'intersection respectifs des droites AB et EB, AC et EC, AD et ED, AF et EF; on mène de plus, les droites *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fa*: les polygones ABCDEF et *abcdef*, étant alors composés de triangles qui sont semblables chacun à chacun comme équiangles, sont par conséquent semblables eux-mêmes. Fig. 495.

DU PANTOGRAPHE.

742. On trouve encore une application de la théorie des figures semblables, et en particulier de celle des centres de similitude (n^{os} 223 et 224), dans le *pantographe* ou *singe*, instrument nommé ainsi parce qu'il sert à *imiter* une figure donnée. Il se compose de *quatre* règles, AB, A'B', OB, A'C
Fig. 496. (fig. 496), mobiles autour des articulations A', B', B, C, de manière à former toujours un parallélogramme A'B'BC, et deux triangles OAB, OA'B', semblables comme équiangles quelles que soient les valeurs que l'on fasse prendre aux angles. Si donc on fait parcourir au point A les contours d'une figure donnée MAN, le point A', convenablement *armé*, tracera une figure M'A'N' semblable à la première (n° 223).

Les règles qui composent le pantographe sont divisées en parties égales, de sorte qu'en changeant à volonté la position des articulations B' et C, on peut établir un rapport quelconque entre les dimensions des deux figures.

DU FIL A PLOMB ET DU NIVEAU.

743. On nomme *verticale* la direction de la pesanteur, c'est-à-dire la route que tend à parcourir un corps qu'on laisse tomber librement.

Pour obtenir la direction verticale, on emploie un *fil à plomb*, c'est-à-dire un fil auquel on suspend un corps pesant qui consiste ordinairement en une
Fig. 497. petite masse de plomb (fig. 497). Ce fil, abandonné à lui-même, prend naturellement la direction verticale.

744. Tout plan perpendiculaire à la direction verticale est dit un *plan horizontal*. — La surface du sol, supposée plane, est ordinairement horizontale.

Pour s'assurer qu'un plan est *horizontal*, comme cela est nécessaire dans plusieurs opérations de géométrie pratique, on emploie un instrument nommé *niveau* [ce qui fait que l'on nomme quelquefois *plan de niveau* un plan horizontal]. Cet instrument, réduit à son plus grand degré de simplicité,
Fig. 498. consiste en un triangle isocèle (fig. 498) formé de tringles de bois, au sommet duquel est suspendu un fil à plomb. Quand le plan de l'instrument est vertical, et que la base de l'instrument est horizontale, le fil à plomb se dirige suivant l'axe de symétrie du triangle.

Cet instrument peut donc servir à reconnaître si un plan est horizontal; et comme deux droites déterminent un plan, il suffit pour cela de vérifier si le fil à plomb coïncide avec l'axe du triangle dans deux positions différentes de l'instrument, que, pour plus d'exactitude, il faut prendre à peu près perpendiculaires entre elles.

Cette dernière opération, exécutée sur un plan que l'on sait d'avance être horizontal, sert aussi à vérifier le niveau, c'est-à-dire à s'assurer si le triangle est isocèle, et si le point de suspension du fil se trouve bien exactement sur l'axe.

Le niveau que nous venons de décrire est celui qu'emploient les maçons. Plus ordinairement, le niveau est formé d'un *tube* de verre à peu près cylindrique (fig. 499), fermé aux deux bouts, et légèrement renflé à son milieu. Fig. 499.
Le tube est rempli d'eau ou d'un autre liquide, à l'exception d'un petit espace qui est occupé par une bulle d'air. Pour que l'axe du tube soit horizontal, il faut que la bulle d'air occupe le milieu du tube. Le niveau est fixé à une petite plaque rectangulaire dont le plan est parallèle à son axe. En plaçant cette plaque dans toutes les directions sur un plan horizontal, l'axe du tube parcourt un plan horizontal parallèle au premier, et la bulle d'air ne cesse pas d'occuper le milieu du tube; la bulle quitterait au contraire cette position si le plan sur lequel on place l'instrument n'était pas horizontal.

Dans les grandes opérations de *nivellement*, on adapte au niveau une *lunette* dont l'axe est parallèle à celui de l'instrument.

745. Le niveau et le fil à plomb peuvent servir dans l'évaluation des volumes des corps solides dans l'intérieur desquels on ne peut pénétrer. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de mesurer le volume d'une pyramide : la base pouvant être mesurée, la question se réduit à mesurer la hauteur. Pour cela, on posera la pyramide par sa base, sur un plan de niveau (fig. 500); puis Fig. 500.
on prendra une équerre; on la placera de manière que la direction de l'une de ses branches soit verticale, en la faisant coïncider avec la direction du fil à plomb; et l'on fera passer la direction de l'autre branche par le sommet de la pyramide. Alors, on laissera *filer* le fil à plomb jusqu'à ce que la petite masse suspendue touche le plan de niveau : la longueur du fil [y compris la masse], donnera la hauteur cherchée.

746. On peut mesurer, par une suite d'opérations analogues, le volume d'un polyèdre convexe de forme quelconque. On sait en effet (nº 558) que tout polyèdre convexe est décomposable en pyramides qui ont pour sommet commun l'un des sommets du polyèdre, et pour bases respectives les faces de ce polyèdre, desquelles il faut excepter celles qui passent par le sommet commun. Il résulte de là qu'en posant successivement le polyèdre sur un plan de niveau, par chacune des faces qui servent de bases aux pyramides qui le composent, puis mesurant, pour chacune de ces positions, l'aire de la base correspondante et la hauteur du sommet commun au-dessus du plan horizontal, on aura tous les élémens nécessaires à la détermination des pyramides partielles, et par suite du polyèdre entier.

NOTE B, RELATIVE AUX PROBLÈMES NUMÉRIQUES.

Exposition du système métrique français.

747. La résolution des problèmes numériques que nous nous sommes proposés, dépendant du système métrique, il est nécessaire de reprendre en quelques mots l'exposition de ce système.

On peut se représenter la terre comme une sphère que l'on aurait légèrement aplatie dans le sens de l'un de ses diamètres. Sa surface est donc une surface de révolution autour de ce diamètre que l'on nomme par conséquent son *axe*. On nomme *pôles* de la terre les extrémités de cet axe, et *méridiens* les intersections de la surface par les plans quelconques menés suivant l'axe. Le plan perpendiculaire à l'axe, mené par son milieu ou par le *centre* de la terre, coupe la surface suivant un cercle que l'on nomme *équateur*.

La distance d'un pôle à l'équateur, comptée sur la surface, ou le quart du méridien, est supposée partagée en *dix millions* de parties. La petitesse de chaque partie, comparée au méridien entier, permettant de la regarder comme rectiligne, on la prend pour *unité linéaire* rectiligne, et on lui donne le nom de MÈTRE.

Le mètre se désigne dans les calculs par M ou *m*.

Les multiples et les sous-multiples décimaux du mètre sont indiqués par les mots

Déca, qui signifie............	10,
Hecto........................	100,
Kilo.........................	1000,
Myria........................	10000,
Déci.........................	0,1,
Centi........................	0,01,
Milli........................	0,001.

On désigne ces trois derniers mots par les abréviations *d*, *c*, *m*.

748. L'*unité de surface* est le *mètre carré*, c'est-à-dire un carré d'un mètre de côté.

Le décamètre carré vaut 100 mètres carrés; l'hectomètre carré vaut 100 décamètres carrés ou 1 00 00 mètres carrés, etc. De même, le mètre carré vaut 100 décimètres carrés, le décimètre carré vaut 100 centimètres carrés, etc.

Le mètre carré se désigne par *m.q*.

L'*unité de volume* est le *mètre cube*, ou un cube qui a pour arête un mètre de longueur. — On lui donne le nom de *stère* quand il est employé à la mesure des bois de chauffage.

Le décamètre cube vaut 1000 mètres cubes; l'hectomètre cube vaut 1000 décamètres cubes ou 1 000 000 mètres cubes, etc. De même le mètre cube vaut 1000 décimètres cubes, celui-ci vaut 1000 centimètres cubes, etc.

RÉDUCTION DES MESURES ANCIENNES EN MESURES NOUVELLES.

1 ligne vaut en m.M....	2,255829
1 pouce vaut en c.M....	2,706995
1 pied vaut en d.M.....	3,248394
1 toise vaut en MÈTRE..	1,949036
1 lig. q. vaut en m.M.Q..	5,088765
1 pouc. q. vaut en c.M.Q.	7,327821
1 pied q. vaut en d.M.Q.	10,552063
1 toise q. vaut en M.Q...	3,798743
1 lig. cub. v. en m.M.C.	11,479383
1 po. cub. vaut en c.M.C.	19,836375
1 pi. cu. vaut en d.M.C.	34,277255
1 toise cub. vaut en M.C.	7,403887
	M.
1 aune vaut en mètre..	1,191077
	K.M.
1 lieue de 2000 tois. vaut.	3,898072
1 lieue de 2500 tois. vaut.	4,872590
1 arpent de 100 perches carrées vaut en hectares, la perche de 18 pi. —	0,341886
la perche de 22 —	0,510720
1 corde [de bois] v. en STÈRE.	3,83905
1 solive vaut en stère....	0,10283
1 pinte vaut en LITRE...	0,93132
1 muid vaut en hectolitre.	2,68220
1 setier vaut en hectolitre.	1,56100
1 boisseau v. en décalitre.	1,30083
1 litron vaut en litre....	0,81302
	G.
1 grain v. en GRAMME.	0,05311
1 gros..............	3,82426
1 once..............	30,59408
	K.G.
1 livre vaut en K.G...	0,48951
10 livres valent.......	4,89505
100 livres.............	48,95054
	F.
1 denier vaut en FRANC.	0,004
1 sou................	0,049
1 livre...............	0,988
10 livres valent.........	9,877
81 livres...............	80,000

RÉDUCTION DES MESURES NOUVELLES EN MESURES ANCIENNES.

1 m.M. vaut en lignes...	0,443296
1 c.M. vaut en pouces..	0,369413
1 d.M. vaut en pieds...	0,307844
1 MÈTRE vaut en toises.	0,513074
1 m.M.Q. vaut en lig. q..	0,196511
1 c.M.Q. vaut en po. q...	0,136466
1 d.M.Q. vaut en pi. q..	0,094768
1 M.Q. vaut en toises q..	0,263245
1 m.M.C. vaut en lig. c..	0,087113
1 c.M.C. vaut en po. c...	0,050412
1 d.M.C. vaut en pi. c...	0,029174
1 M.C. vaut en toises c...	0,135064
	A.
1 mètre vaut en aune .	0,839576
	L.
1 K.M. v. en l. de 2000 t.	0,256537
1 K.M. v. en l. de 2500 t.	0,205232
1 hectare vaut en arpent de 100 perches carrées, la perche de 18 pi. —	2,924943
la perche de 22 —	1,958020
1 STÈRE vaut en corde...	0,26048
1 stère vaut en solive....	9,72462
1 LITRE vaut en pinte..	1,07374
1 hectolitre v. en muid...	0,37283
1 hectolitre v. en setier..	0,64062
1 décalitre v. en boisseau.	0,76874
1 litre vaut en litron....	1,22998
	liv. o. g. g.
1 GRAMME vaut...	0.0.0.19
1 décagramme....	0.0.2.44
1 hectogramme...	0.3.2.11
1 kilogramme....	2.0.5.35
10 kilogrammes....	20.6.6.64
100 kilogrammes....	204.4.4.59
	liv. s. d
1 centime vaut.........	0.0.2
1 décime.............	0.2.0
1 franc..............	1.0.3
10 francs valent.........	10.2.6
80 francs...............	81.0.0

TABLE DES CORDES

POUR UN RAYON ÉGAL A 10000 (nos 274; et 364, *scol.* 3).

D.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Diff.
0°	0	29	58	87	116	145	29
1	175	204	233	262	291	320	
2	349	378	407	436	465	494	
3	523	553	582	611	640	669	
4	698	727	756	785	814	843	
5	872	901	931	960	989	1018	
6	1047	1076	1105	1134	1163	1192	
7	1221	1250	1279	1308	1337	1366	
8	1395	1424	1453	1482	1511	1540	
9	1569	1598	1627	1656	1685	1714	
10	1743	1772	1801	1830	1859	1888	
11	1917	1946	1975	2004	2033	2062	
12	2091	2120	2148	2177	2206	2235	
13	2264	2293	2322	2351	2380	2409	
14	2437	2466	2495	2524	2553	2582	29
15	2611	2639	2668	2697	2726	2755	
16	2783	2812	2841	2870	2899	2927	
17	2956	2985	3014	3042	3071	3100	
18	3129	3157	3186	3215	3244	3272	
19	3301	3330	3358	3387	3416	3444	
20	3473	3502	3530	3559	3587	3616	
21	3645	3673	3702	3730	3759	3788	
22	3816	3845	3873	3902	3930	3959	
23	3987	4016	4044	4073	4101	4130	
24	4158	4187	4215	4244	4272	4300	28
25	4329	4357	4386	4414	4443	4471	
26	4499	4527	4556	4584	4612	4641	
27	4669	4697	4725	4754	4782	4810	
28	4838	4867	4895	4923	4951	4979	
29	5008	5036	5064	5092	5120	5148	
30	5176	5204	5233	5261	5289	5317	
31	5345	5373	5401	5429	5457	5485	
32	5513	5541	5569	5597	5625	5652	
33	5680	5708	5736	5764	5792	5820	
34	5847	5875	5903	5931	5959	5986	
35	6014	6042	6070	6097	6125	6153	28
36	6180	6208	6236	6264	6291	6319	
37	6346	6374	6401	6429	6456	6484	
38	6511	6539	6566	6594	6621	6649	
39	6676	6704	6731	6759	6786	6813	
40	6840	6868	6895	6922	6949	6977	
41	7004	7031	7059	7086	7113	7140	
42	7167	7195	7222	7249	7276	7303	
43	7330	7357	7384	7411	7438	7465	
44	7492	7519	7546	7573	7600	7627	27

Soit à trouver la corde de 62° 47′, on pose la proportion $x : 25 :: 7 : 10$; d'où $x = 17$; ajoutant 17 à 10400, on a 10417 pour la corde cherchée.

Le sinus d'un arc s'obtient en prenant la moitié de la corde de l'arc double: ainsi le sinus de 31° 23′ 30″ vaut 5208.

TABLE DES CORDES

POUR UN RAYON ÉGAL A 10000 (nos 274 ; et 364, *scol.* 3).

D.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Diff.
45°	7654	7680	7707	7734	7761	7788	27
46	7815	7841	7868	7895	7922	7948	
47	7975	8002	8028	8055	8082	8108	
48	8135	8161	8188	8214	8241	8267	
49	8294	8320	8347	8373	8400	8426	
50	8452	8479	8505	8532	8558	8584	26
51	8610	8636	8663	8689	8715	8741	
52	8767	8794	8820	8846	8872	8898	
53	8924	8950	8976	9002	9028	9054	
54	9080	9106	9132	9157	9183	9209	
55	9235	9261	9287	9312	9338	9364	
56	9389	9415	9441	9466	9492	9518	
57	9543	9569	9594	9620	9645	9671	
58	9696	9722	9747	9772	9798	9823	
59	9848	9874	9899	9924	9949	9975	
60	10000	10025	10050	10075	10101	10126	25
61	10151	10176	10201	10226	10251	10276	
62	10301	10326	10351	10375	10400	10425	
63	10450	10475	10500	10524	10549	10574	
64	10598	10623	10648	10672	10697	10721	
65	10746	10771	10795	10819	10844	10868	
66	10893	10917	10941	10966	10990	11014	
67	11039	11063	11087	11111	11136	11160	24
68	11184	11208	11232	11256	11280	11304	
69	11328	11352	11376	11400	11424	11448	
70	11472	11495	11519	11543	11567	11590	
71	11614	11638	11661	11685	11709	11732	
72	11756	11779	11803	11826	11850	11873	
73	11896	11920	11943	11966	11990	12013	
74	12036	12060	12083	12106	12129	12152	
75	12175	12198	12221	12244	12267	12290	23
76	12313	12336	12359	12382	12405	12427	
77	12450	12473	12496	12518	12541	12564	
78	12586	12609	12632	12654	12677	12699	
79	12721	12744	12766	12789	12811	12833	
80	12856	12878	12900	12922	12944	12966	22
81	12989	13011	13033	13055	13077	13099	
82	13121	13143	13165	13187	13209	13231	
83	13252	13274	13296	13318	13339	13361	
84	13383	13404	13426	13447	13469	13490	
85	13512	13533	13555	13576	13597	13619	21
86	13640	13661	13682	13704	13725	13746	
87	13767	13788	13809	13830	13851	13872	
88	13893	13914	13935	13956	13977	13997	
89	14018	14039	14060	14080	14101	14121	20

La corde de 90° vaut 14142 (nos 265 et 266).

Soit a la corde d'un angle, x la corde de son supplément, et r le rayon, on a : $x=\sqrt{4r^2-a^2}=\sqrt{(2r+a)(2r-a)}$.
On peut, par cette formule, trouver les cordes de tous les angles supérieurs à 90° :

Exemple : . . . $a=$ *corde* 62° 47′ = 10417 ; $x=\sqrt{30417\times 9583}=17073=$ *corde* 117° 13′.

TABLE DES POIDS SPÉCIFIQUES
DES SUBSTANCES LES PLUS COMMUNES.

Eau distillée (au *maximum* de condensation)		1,000
Platine		20,722
Or		19,258
Mercure		13,586
Plomb		11,352
Argent		10,474
Bismuth		9,070
Cuivre		8,895
Laiton		8,395
Fer fondu	7,645 .. à ...	7,788
Fer forgé	7,875 .. à ...	8,778
Acier		7,767
Étain		7,264
Zinc		6,862
Spath d'Islande (carbonate de chaux cristallisé)		2,170
Craie	2,25 ... à ...	2,32
Marbre de Carrare		2,716
Pierre de Saint-Cloud		2,201
Pierre de Liais		2,077
Pierre d'Arcueil		2,06
Pierre de Saint-Leu		1,578
Porphyre		2,765
Granit d'Égypte		2,960
Pierre ponce		0,914
Gypse compacte (sulfate de chaux)	1,87 ... à ...	2,29
Spath fluor (fluate de chaux)	2,44 ... à ...	2,60
Spath pesant (sulfate de baryte)	4,3 .... à ...	4,4
Terre glaise	1,8 .... à ...	2,0
Grès	2,11 ... à ...	2,56
Silex	2,58 ... à ..	2,67
Cristal de roche		2,653
Verre vert	2,5 .... à ...	2,6
Verre blanc	2,4 .... à ...	2,5
Flint glass (cristal)	3,20 ... à ...	3,329
Salpêtre		1,900
Sel commun		1,918
Sel ammoniac		1,420
Diamant		3,521
Soufre		1,800
Cire	0,95 ... à ...	0,96
Bois de chêne (frais)		0,93
(sec)		1,67
Hêtre		0,85
Sapin		0,55
Liége		0,24
Glace		0,916
Eau de mer		1,026
Vin de Bourgogne		0,992
Alcool (absolu)		0,792
Huile d'olive		0,913

Air (à 0°, sous la pression 0m,76)	1,0000	0,001 2991
Oxigène	1,1026	0,001 4323
Azote	0,9757	0,001 2675
Hydrogène	0,0688	0,000 0894
Acide carbonique	1,5245	0,001 9805

Le mètre cube se désigne par *m.c.*

Dans l'évaluation des grandes portions de la surface terrestre, on emploie une autre unité que le mètre carré : cette unité est l'*are* ou décamètre carré : on la désigne par A ou *a*. Ses multiples et ses sous-multiples décimaux employés, sont l'*hectare* ou hectomètre carré, le *myriare* ou kilomètre carré, le *centiare* ou mètre carré.

Dans l'évaluation des volumes des matières liquides, et généralement de celles que l'on peut renfermer dans des vases, comme les graines, etc., on prend pour unité de volume le *litre* ou décimètre cube, que l'on désigne par L ou *l*. Ses multiples décimaux sont le *décalitre*, l'*hectolitre*, le *kilolitre* ou mètre cube, et le *myrialitre* ; ses sous-multiples sont le *décilitre*, le *centilitre*, et le *millilitre* ou centimètre cube.

749. On emploie encore pour mesurer les volumes des corps, un moyen physique qui consiste à déterminer la force avec laquelle, en vertu de l'attraction terrestre, ils pressent un plan horizontal sur lequel on les pose. Cette force que l'on nomme poids, étant, pour des corps de même nature, proportionnelle à leur quantité ou à leur volume, peut servir à les mesurer. L'unité des poids, nommée *gramme*, est le poids d'un centimètre cube d'eau *distillée* [c'est-à-dire exactement purifiée], et prise dans un certain état constant que l'on nomme en Physique son *maximum de condensation*. Pour concevoir la raison de cette dénomination, il faut savoir que l'eau, une fois parvénue au degré de chaleur ou à la température qui constitue cet état, augmente toujours de volume dès qu'on vient à changer ce degré, soit pour l'augmenter, soit pour le diminuer. D'où il suit qu'à cette température, l'eau occupe son *minimum* de volume pour le même poids, ou présente son *maximum* de poids sous un volume donné.

Il est facile de conclure de ce qui vient d'être dit, qu'un litre d'eau à son *maximum* de condensation, pèse un kilogramme.

Le gramme se désigne par G ou *g*. Ses multiples et ses sous-multiples décimaux sont désignés par les mots *décagramme*, *hectogramme*, etc., *décigramme*, etc. [comme pour le mètre et le litre].

Tous les corps n'ayant pas le même poids sous le même volume, on nomme *poids spécifique* d'un corps le rapport du poids d'un certain volume de ce corps, à celui d'un pareil volume d'eau distillée prise à son *maximum* de condensation, ou bien le poids absolu, en grammes, d'un centimètre cube de ce corps, ou bien encore le nombre de kilogrammes que pèse un volume du corps égal à un décimètre cube. Ainsi, le poids absolu d'un corps quelconque est le produit du poids spécifique de sa substance, par le volume qu'il occupe, exprimé en centimètres cubes. On peut donc aisément, étant donnés deux de ces trois élémens, déterminer le troisième. (*Voyez* à la fin de l'ouvrage, la *Table des poids spécifiques* des substances les plus communes.)

750. Enfin, chaque substance ayant une *valeur* relative particulière, dépendant de l'importance de ses usages, de sa rareté, ou même du caprice, on prend

pour unité de cette espèce de grandeur, la valeur d'une petite masse métallique pesant 5 grammes, et composée de $\frac{9}{10}$ d'argent sur $\frac{1}{10}$ de cuivre ou d'alliage. On donne à cette unité le nom de *franc*. Il résulte de là, par exemple, que 100 francs d'argent monnayé pèsent un demi-kilogramme.

Le *franc* se désigne par F ou *f*. Ses sous-multiples sont, le *décime*, valant un dixième de franc, le *centime*, valant un centième de franc, et le *millime* [monnaie de compte, rarement employée], représentant un millième de franc.

Pour de plus grands détails, nous renvoyons à l'Arithmétique.

FIN.

Addition relative aux n^{os} 226 (pag. 182) *et* 244 (pag. 201).

M. Ampère a donné, dans une des dernières leçons qu'il a faites au Collége de France, une nouvelle démonstration de la règle du parallélogramme des forces, fondée sur un théorème de Géométrie dont celui du *numéro* 226 n'est qu'un cas particulier. En raison de l'importance que donne à ce théorème la proposition de Statique à laquelle il s'applique, nous croyons devoir en faire ici une mention spéciale, la communication nous en ayant été faite trop tard pour que nous pussions l'insérer dans le texte même de l'ouvrage. Voici la manière dont M. *Ampère* énonce le théorème dont il est question :

Si par le sommet d'un angle B (fig. *a*) *adjacent à la base* BC *d'un triangle* ABC, *on mène une droite quelconque* BG *qui rencontre en un point* G *le côté opposé* AC, *prolongé s'il est nécessaire, et que par le milieu* E *de cette droite on mène une droite* EA *au sommet* A *du triangle, cette droite coupera la base* BC *en deux parties* CD, BD, *qui seront entre elles comme le même côté* AC *est à la partie* AG *interceptée sur ce côté entre le sommet* A *du triangle et la droite quelconque* BG. Fig. *a*.

Pour démontrer ce théorème, menons par le point C, parallèlement à BG, la droite CF terminée en F sur AD ou sur son prolongement. Alors, les deux triangles semblables BED, CFD, donneront

$$BD : CD :: BE : CF.$$

Ensuite, les deux triangles semblables AGE, ACF, donneront encore

$$GE : CF :: AG : AC.$$

Or, à cause de BE = GE, ces deux proportions ont un rapport commun : d'où il résulte

$$BD : CD :: AG : AC. \qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

Scolie 1er. — Le théorème précédent peut aussi se déduire, comme cas particulier, de celui du *numéro* 244. Pour y parvenir de cette manière, il faut considérer la figure comme composée du triangle partiel BCG coupé par la transversale AC. On a ainsi

$$BE \times GA \times CD = EG \times AC \times DB ;$$

et comme BE = EG, il en résulte l'énoncé.

Scol. 2. — Si l'on a mené BG de manière que AG = AB, alors le triangle ABG étant isocèle, la droite AD partage l'angle A en deux parties égales, et la proportion obtenue devient

$$BD : CD :: AB : AC.$$

C'est le cas particulier démontré au *numéro* 226.

Scol. 3. — Si c'est au contraire le triangle ABC qui est isocèle et le triangle ABG quelconque, la proportion

$$BD : CD :: AG : AC$$

devient

$$BD : CD :: AG : AB ;$$

d'où il suit que dans tout triangle ABG, la droite AD qui joint le sommet d'un angle A au milieu du côté opposé, coupe la droite BC, menée de manière que AC = AB, en deux parties réciproquement proportionnelles aux côtés AB et AG.

Addition relative aux n^{os} 338 (pag. 280) *et* 353 (pag. 298).

M. Chenou, professeur distingué au collége royal de Douay, et chargé du cours industriel, a introduit dans les ateliers de cette ville, un nouveau procédé pour la division des droites en parties égales. Ce procédé doit avoir des avantages sur les procédés ordinaires (*Voy.* le n° 338), puisque les artistes, bons juges en matière d'opérations pratiques, paraissent lui donner la préférence. Nous l'indiquerons ici d'autant plus volontiers, qu'il peut être considéré comme une application de la formule relative à la théorie des transversales, que nous avons donnée au *numéro* 353 (*N. B.*), pour la détermination d'un point X (fig. 308) situé entre deux points donnés, A, B.

Nous avons employé à cet effet, l'expression

$$EX = \frac{DE.AC.BE}{DA.CB + AC.BE}.$$

Fig. 308. Or, supposons d'abord que dans la *figure* 308, BE et CE soient *égaux*, d'où BC $=$ 2.BE : l'expression précédente deviendra, en divisant *haut et bas* par BE,

$$EX = \frac{DE.AC}{2.DA + AC}.$$

Supposons en second lieu la droite DC divisée en $(m+1)$ parties égales [m étant un nombre entier]; et admettons que AC contienne 2 de ces parties. Nous aurons, en prenant pour unité l'une des parties égales,

$$EX = \frac{2.DE}{2(m-1)+2} = \frac{DE}{m},$$

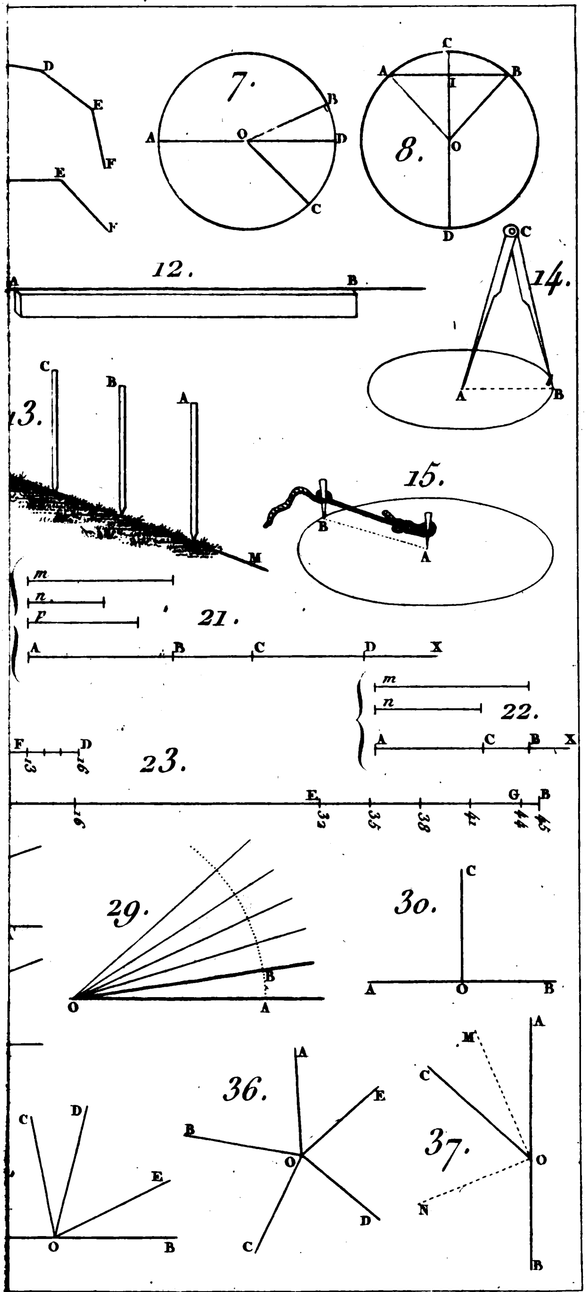
c'est-à-dire que EX sera la m^e partie de DE. De là résulte la règle suivante

Pour obtenir la m^e partie d'une droite DE :

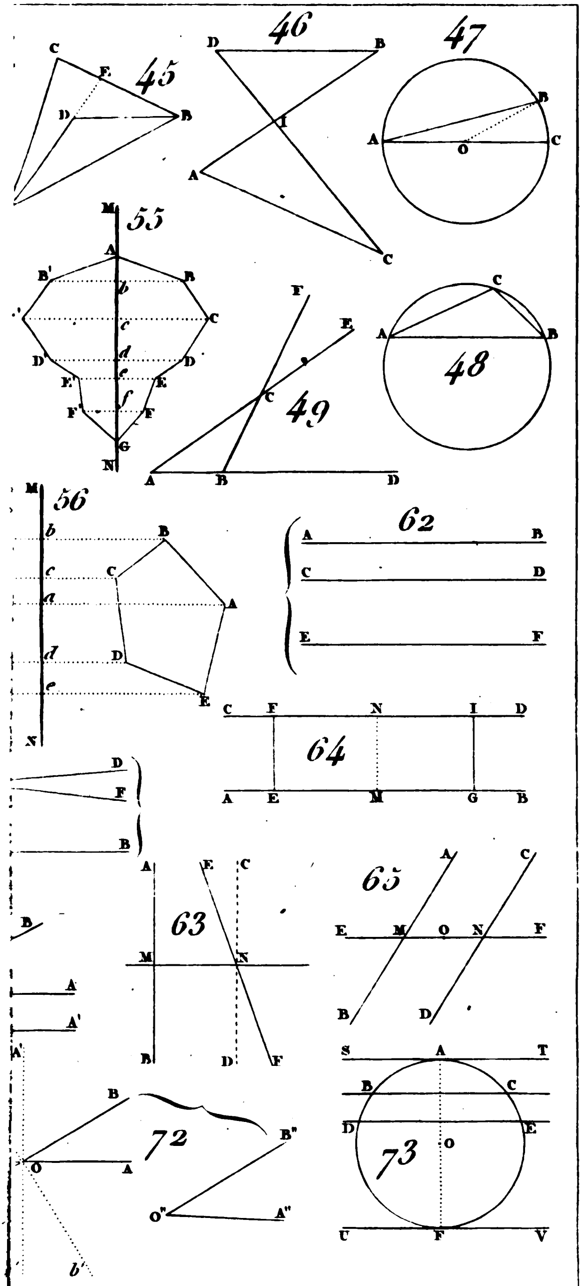
Synthèse. — 1° Par l'une des extrémités D de la droite donnée, menez une droite indéfinie DC sur laquelle vous porterez, de D en C, $(m+1)$ parties égales quelconques. — 2° Menez une droite par les deux points C, E; et sur son prolongement prenez BE égal à CE. — 3° Par le point A, *avant-dernier* point de division *avant l'extrémité* C de la droite DC, et par le point B, menez la droite AB : soit X son point d'intersection avec DE. — EX sera le m^e de DE.

Scolie 1er. — Le procédé précédent a ceci de remarquable, que c'est surtout pour les divisions en un nombre impair de parties, qu'il présente le plus d'avantage. Dans ce cas en effet, au lieu de prendre sur DC, $(m+1)$ parties égales (*ci-dessus*, 1°), on en prend seulement $\frac{m+1}{2}$ [toujours de D en C]; et alors, au lieu de l'avant-dernier point de division (3°), c'est le dernier A que l'on joint au point B.

Scol. 2. — Il est très utile de remarquer d'ailleurs, pour les applications usuelles de ce procédé, que l'on y parvient très facilement sans employer la théorie des transversales, et en considérant seulement la proportion fournie par le triangle DAX et un second triangle, semblable au premier, que l'on obtient en menant une droite par le point E et par le milieu de AC : cette droite étant parallèle à AB, on en déduit la proportion.

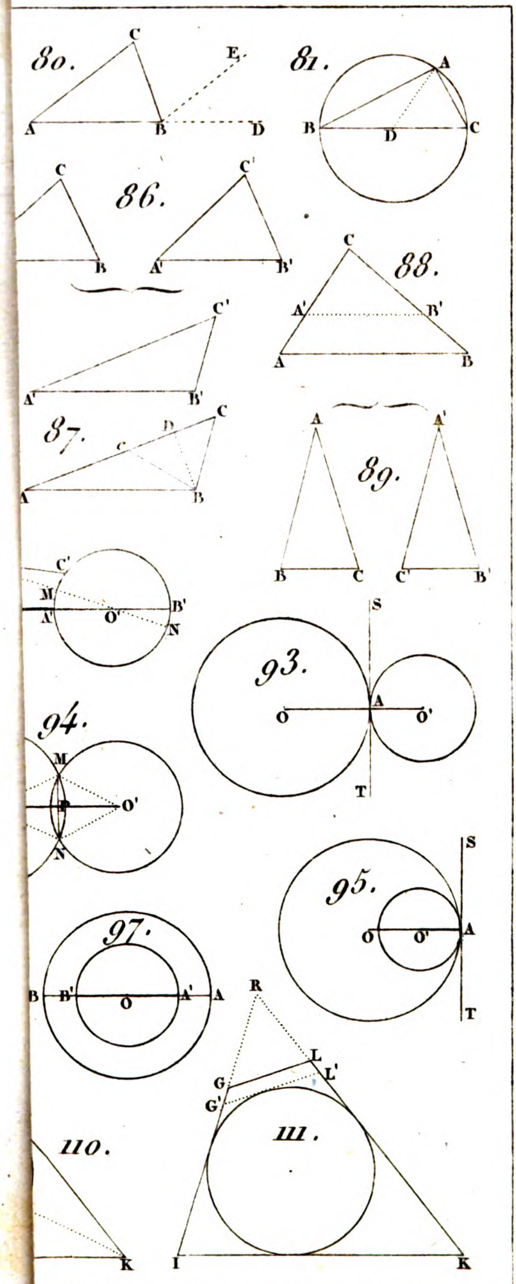


Gravé par N.L. Rousseau père.



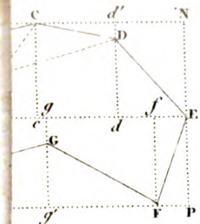
Gravé par N.L. Rousseau père.

Planche 3.

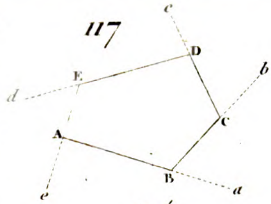


Gravé par N. L. Rousseau père.

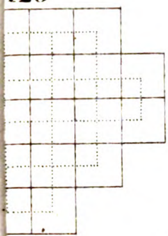
116



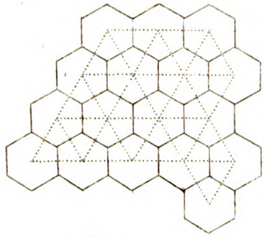
117



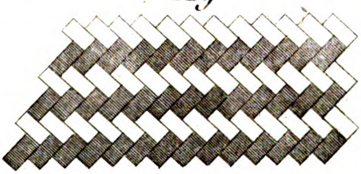
123

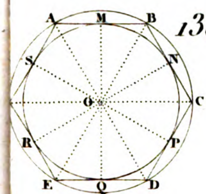


124

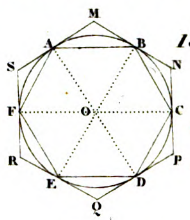


129



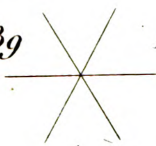


130

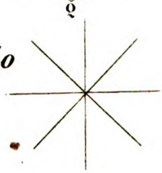


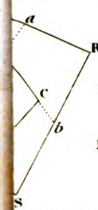
131

139

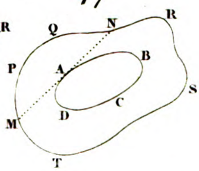


140

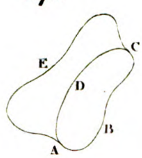




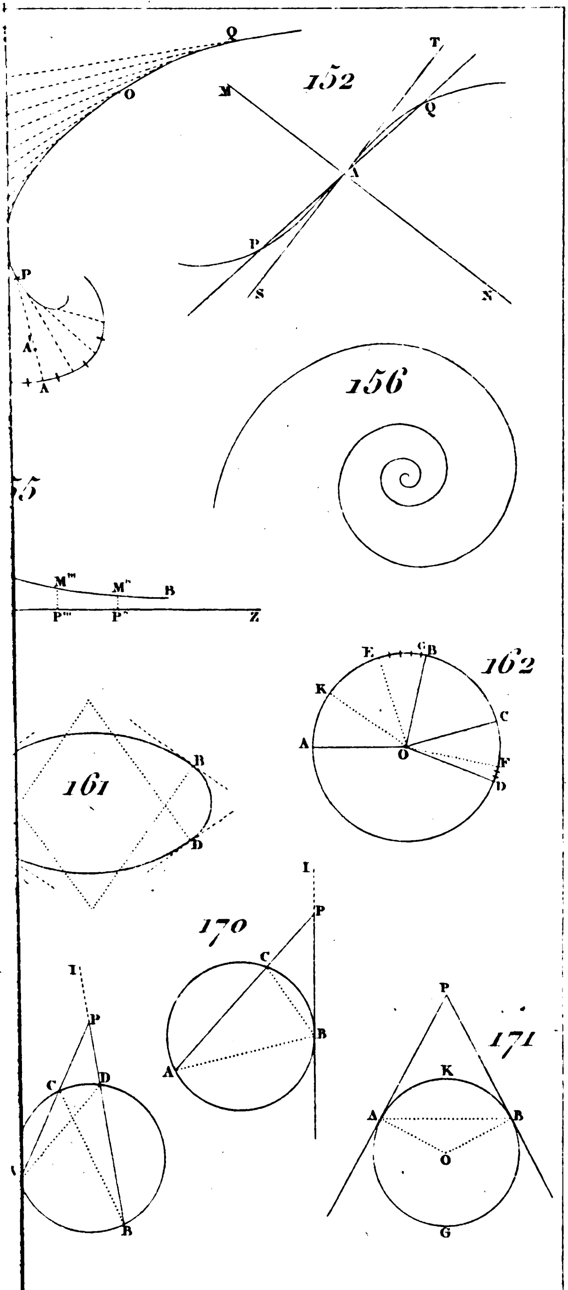
147



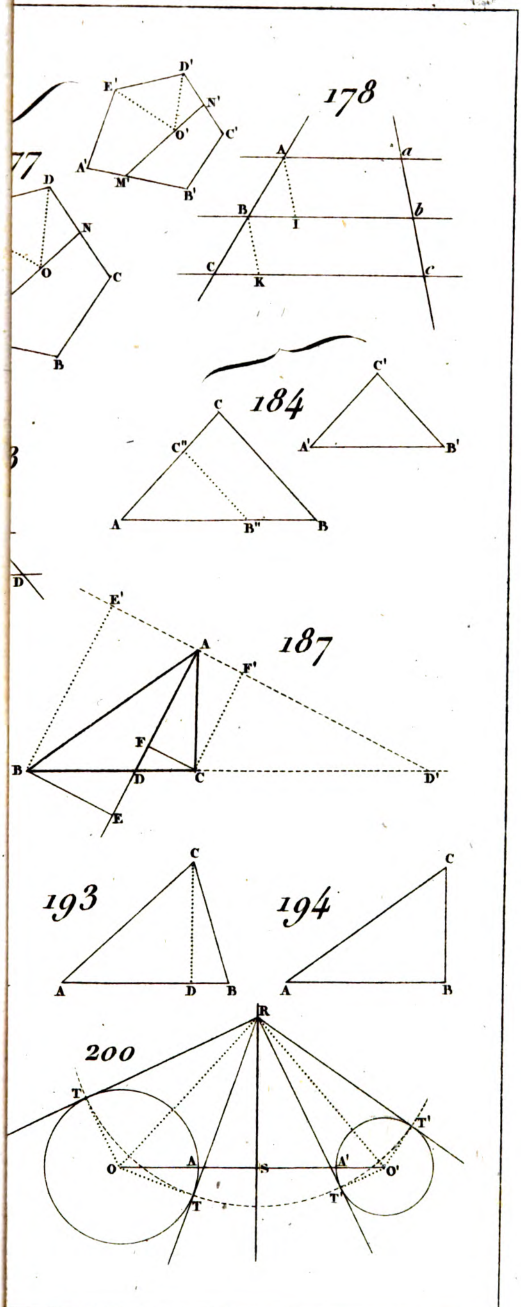
148



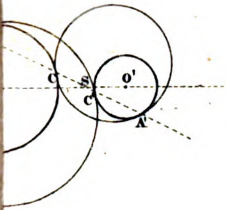
Gravé par Durau.

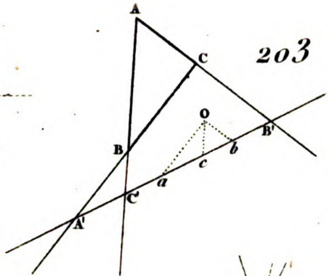


Gravé par N.L. Rousseau père.



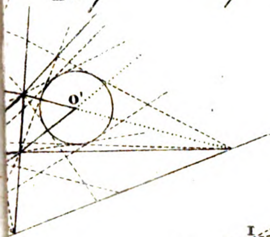
Gravé par Durau.

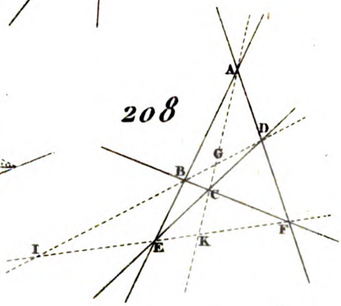




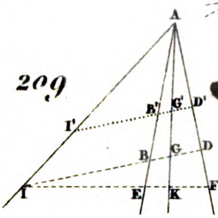
203

207

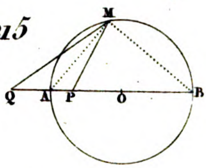




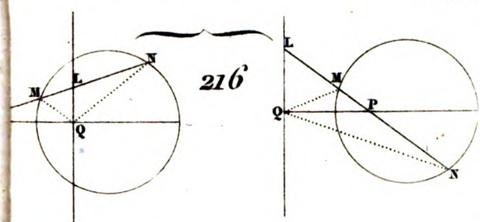
208



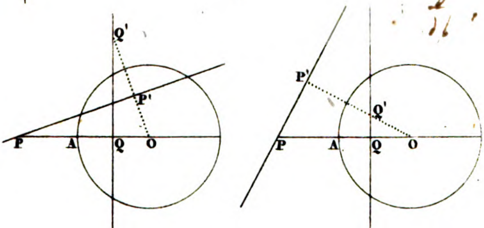
209



215

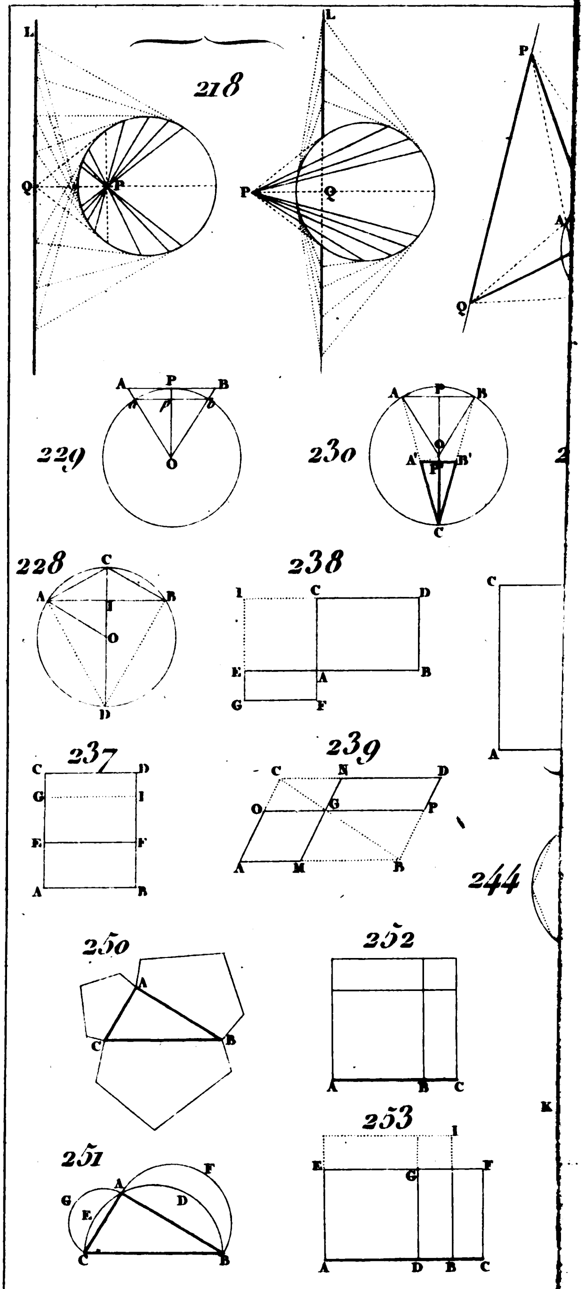


216



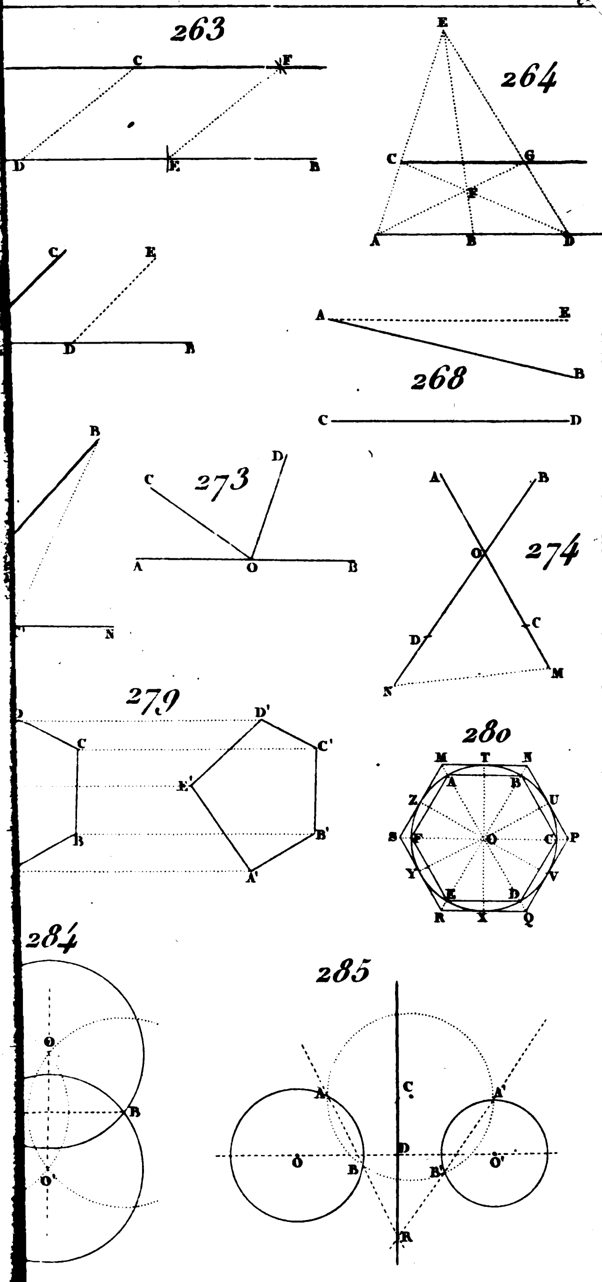
217

Gravé par Durau.



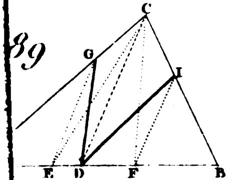
Dessiné par Amand.

Planche

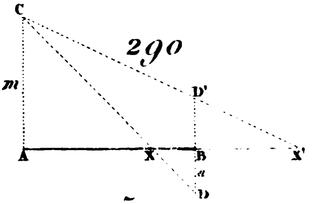


Gravé par Durau.

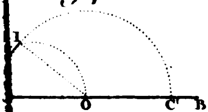
89



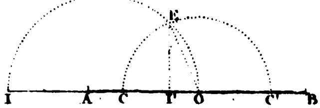
290



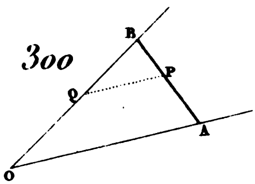
294



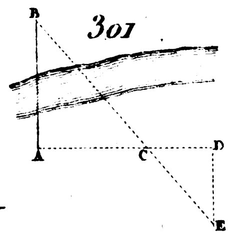
295



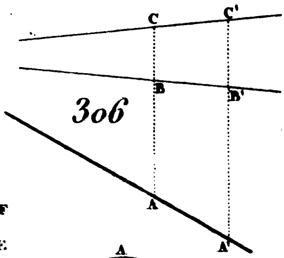
300



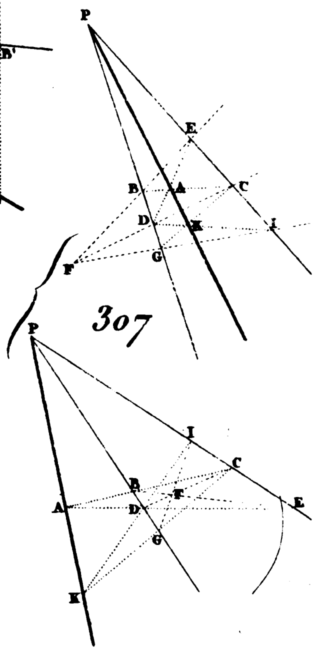
301



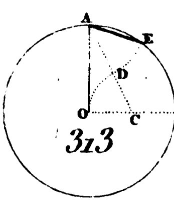
306

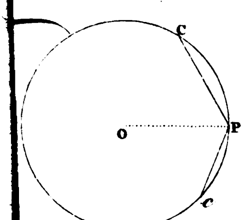


307

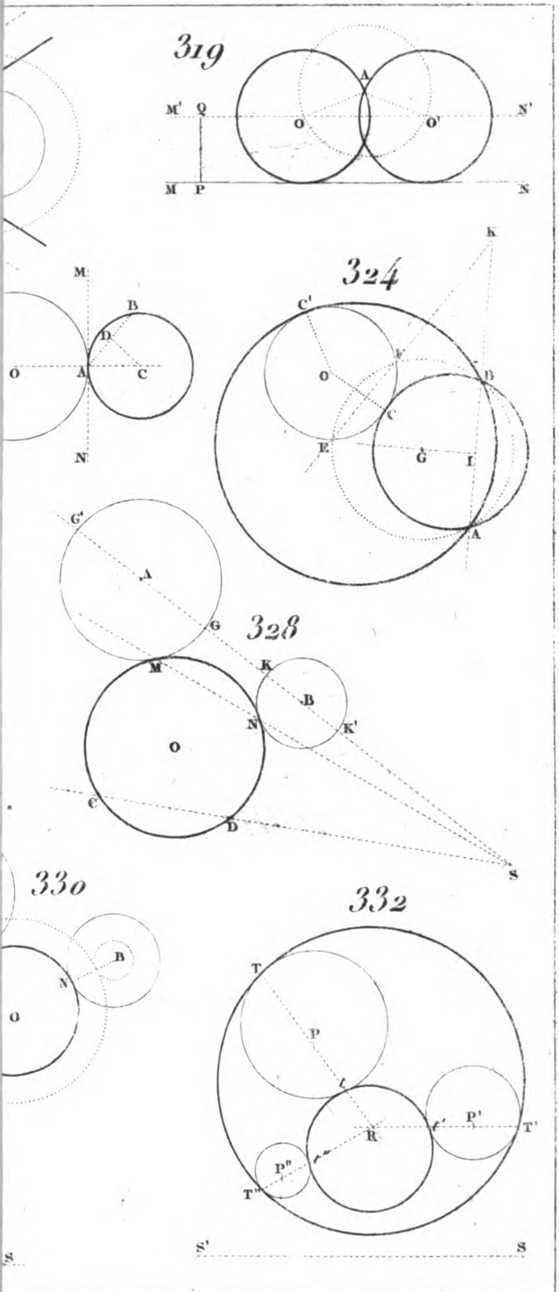


313



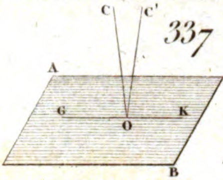


Gravé par Durau.

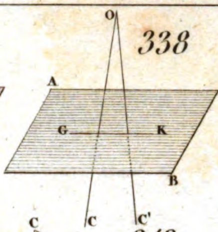


Gravé par Durau.

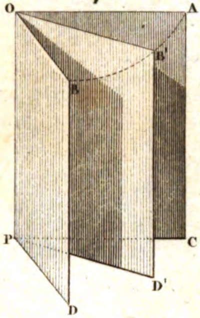
337



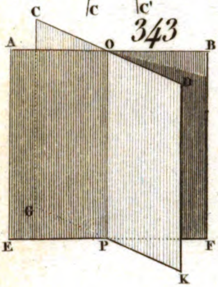
338

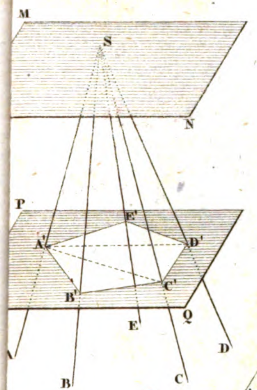


342

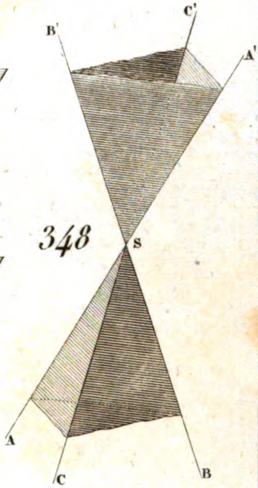


343

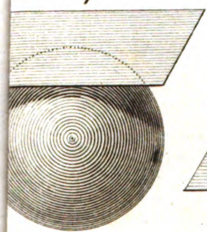




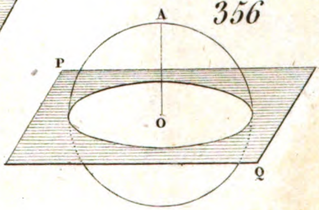
348



357

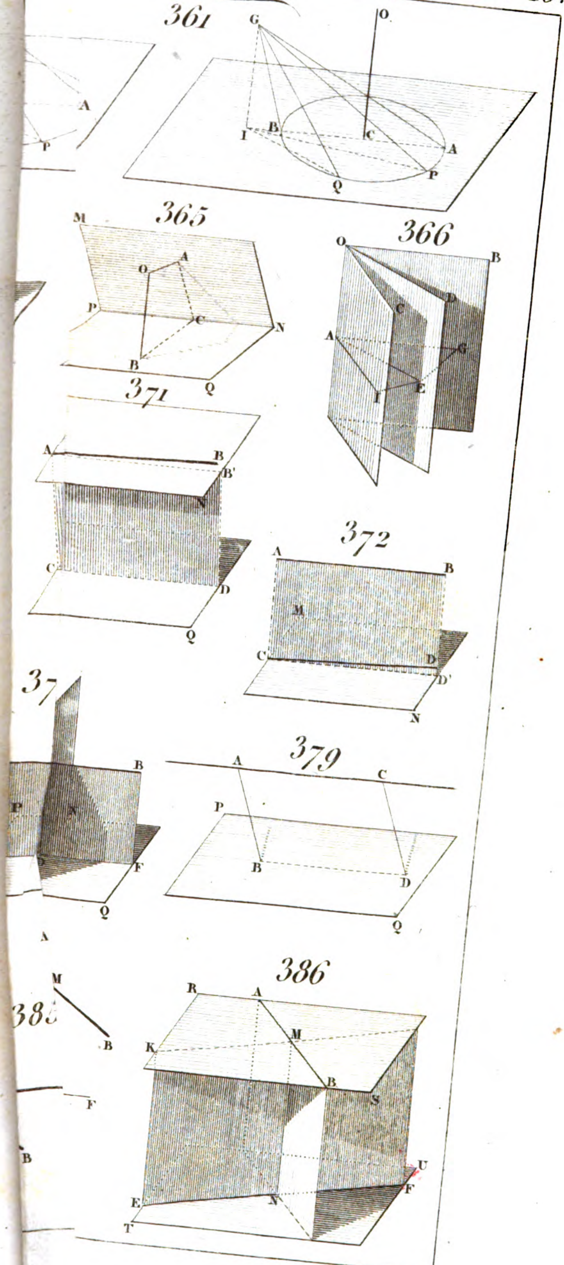


356

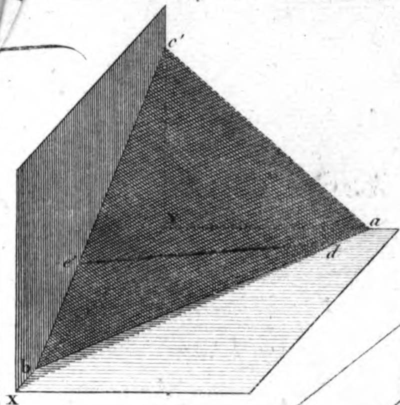


Gravé par Durau.

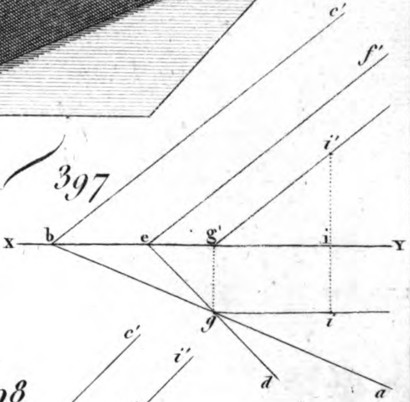
Planche 13.



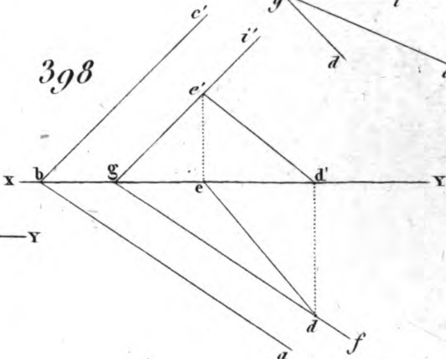
Gravé par Durau.



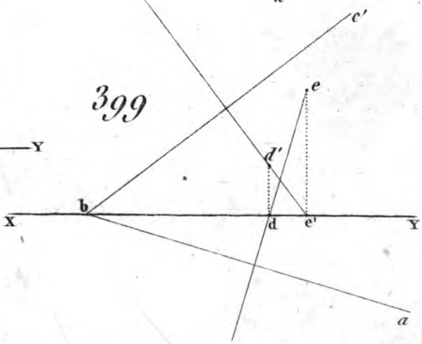
397



398

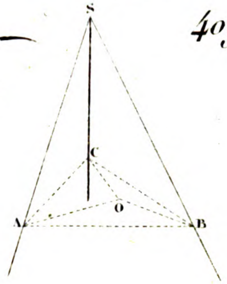


399

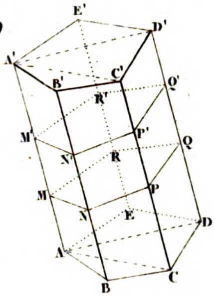


Gravé par Duran.

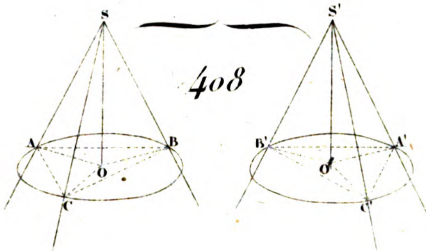
4



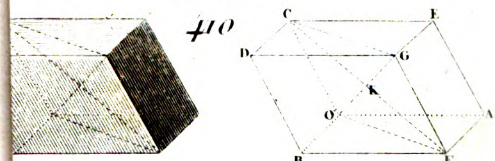
409



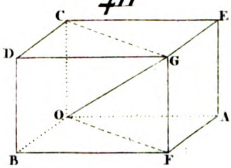
408



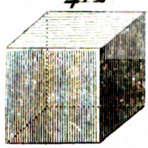
410



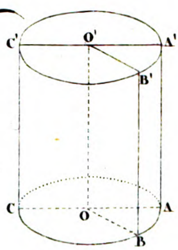
411



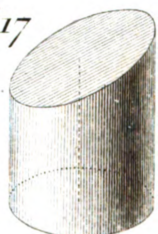
412



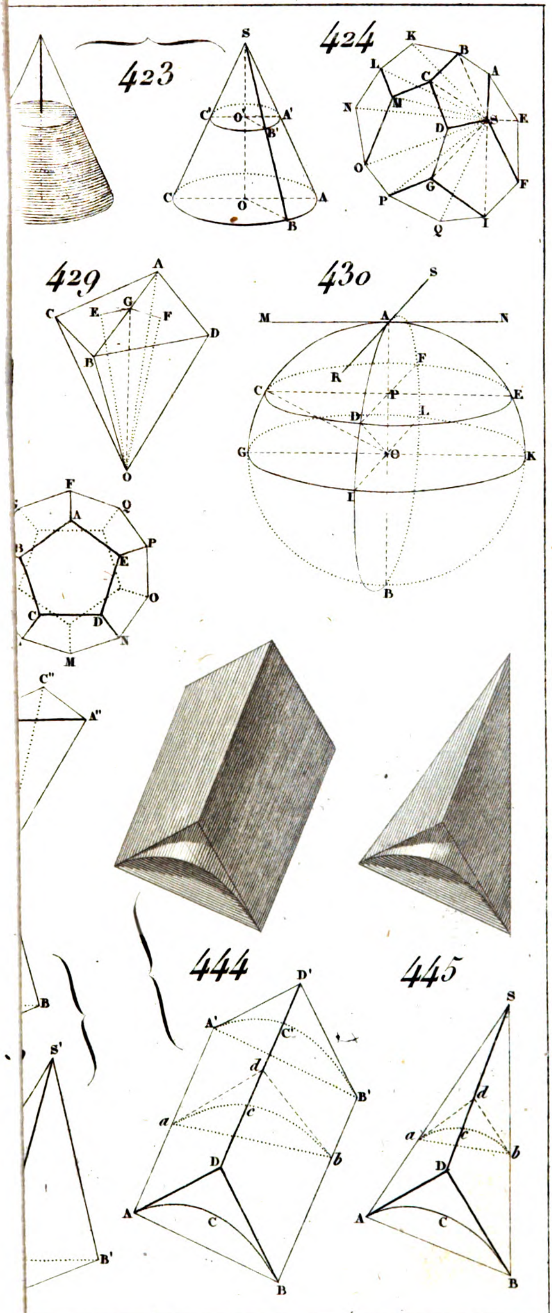
416



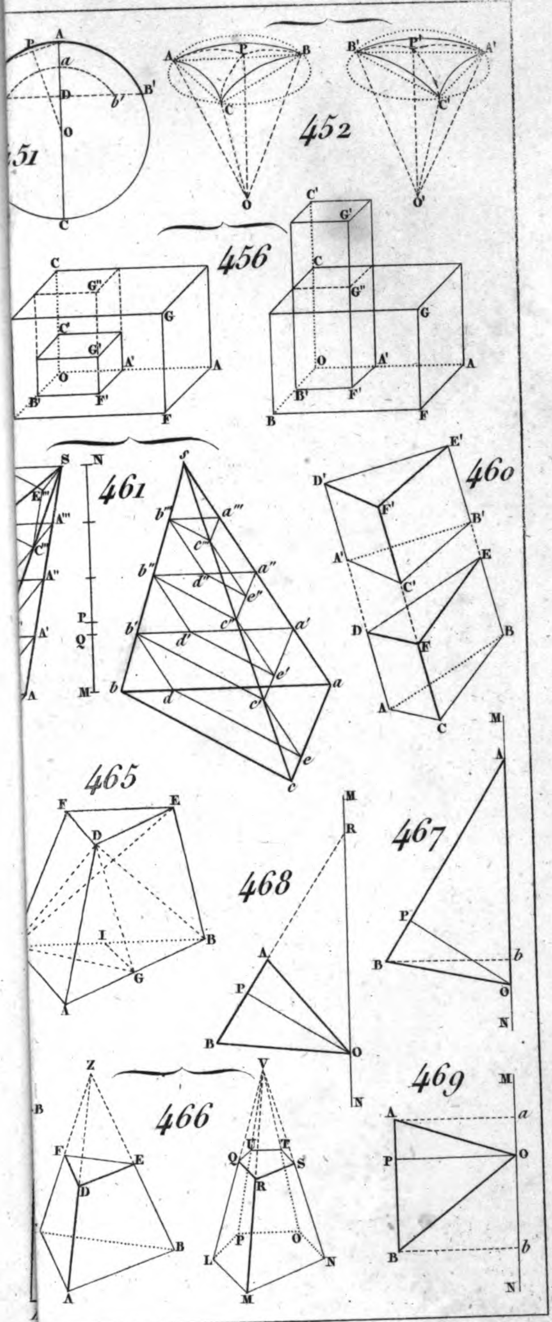
417



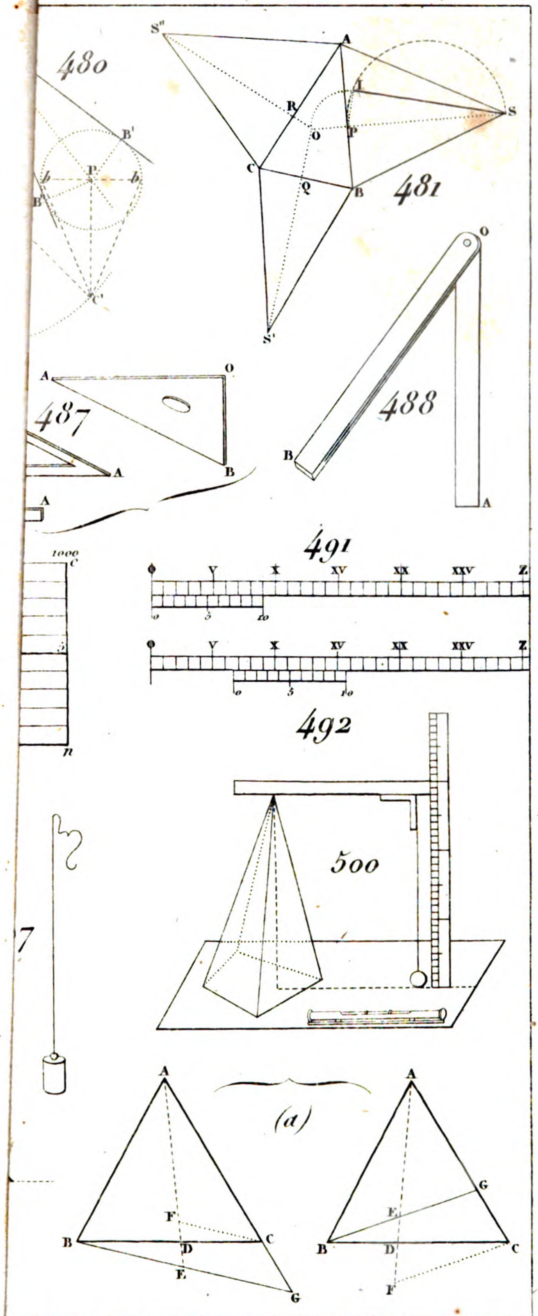
Gravé par Durau



Gravé par Durau.



Gravé par Durau.



Gravé par Durau.