



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Gubio Gomes de Lima

Análise comparativa de métodos para geração de feixes parcialmente coerentes

Florianópolis
2022

Gubio Gomes de Lima

Análise comparativa de métodos para geração de feixes parcialmente coerentes

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em física.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique Souto Ribeiro,
Coorientadora: Nara Rubiano da Silva, Dra.

Florianópolis
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

LIMA, GUBIO

Análise comparativa de métodos para geração de feixes
parcialmente coerentes / GUBIO LIMA ; orientador, Paulo
Henrique Souto Ribeiro, coorientador, Nara Rubiano da
Silva, 2022.

63 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Física. I. Souto Ribeiro, Paulo Henrique. II.
Rubiano da Silva, Nara. III. Universidade Federal de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título.

Gubio Gomes de Lima

Análise comparativa de métodos para geração de feixes parcialmente coerentes

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Paulo Henrique Souto Ribeiro, Dr.
Instituição UFSC

Prof. Renné Luiz Câmara Medeiros de Araújo, Dr.
Instituição UFSC

Prof. Stephen Patrick Walborn, Dr.
Instituição Universidad de Concepción

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em física.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof. Dr. Paulo Henrique Souto Ribeiro,
Orientador

Florianópolis, 2022.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a minha família pelo apoio durante todos esse anos.

Agradeço ao meu orientador Professor Paulo Henrique Souto Ribeiro, por ter acreditado em mim, dado um voto de confiança, e por todos os conselhos, e ensinamentos.

Agradeço a minha coorientadora Professora Nara Rubiano Silva, pela ajuda no último ano do mestrado, sempre se mostrando disponível para ajudar e ensinar.

Agradeço, também, aos colegas pela participação no grupo de pesquisa e por dividirem lágrimas durante o mestrado.

E todas as outras pessoas que me ajudaram indiretamente durante o mestrado.

RESUMO

A criação do *laser* iniciou uma busca para se obter feixes cada vez mais coerentes. Em muitas aplicações é interessante ter uma alta coerência, mas em outras não. O feixe parcialmente coerente apresenta vantagens, por ser mais robusto em meios turbulentos. Logo, faz-se necessário saber como gerar, manipular e descrever feixes parcialmente coerentes(PC). Apresentamos duas classes de feixes PC, a primeira e mais antiga é a *Gaussian Schell-Model*(GSM), a segunda é a *Twist Gaussian Schell-Model*. Devido à complexidade dos feixes PC, não temos uma representação por meio de um único modo, como na onda plana, ou no modo gaussiano, mas sim um ensemble de modos. Por esse motivo, utilizamos a densidade espectral cruzada, para descrever as correlações entre dois pontos do feixe. Por meio dessa representação, é realizada uma decomposição modal, pelo qual obtemos uma soma incoerente de modos. Neste trabalho apresentamos dois métodos de representação modal: Decomposição em Modos Coerentes; e Decomposição em Pseudo-modos. Os feixes PC podem ser gerados em laboratório, utilizando-se um *laser* e um Modulador Espacial de Luz(SLM). No qual, modulamos o campo do *laser*, usando máscaras fases que devem reproduzir as decomposições modais, com o intuito de comparar a performance desses métodos para a geração de feixes parcialmente coerentes em laboratório, foram realizadas simulações que modelam o processo óptico necessário para gerar os feixes. No qual, observamos que o método de decomposição coerente necessita de menos modos em comparação aos pseudo-modo, como também apresenta uma fidelidade maior entre a simulação e a teoria, mas tais modos podem ser de difícil acesso experimental viabilizando o uso dos pseudo-modos.

Palavras-chave: Feixes parcialmente coerentes. Decomposição modal. Simulação.

ABSTRACT

The creation of the laser started a quest to obtain increasingly coherent beams. In many applications it is interesting to have high coherence, but in others it is not. The partially coherent beam has advantages, as it is more robust in turbulent environments. Therefore, it is necessary to know how to generate, manipulate and describe partially coherent beams (PC). We present two classes of PC bundles, the first and oldest is the Gaussian Schell-Model(GSM), the second is the Twist Gaussian Schell-Model. Due to the complexity of PC beams, we do not have a representation through a single mode, as in the plane wave, or in the Gaussian mode, but an ensemble of modes. For this reason, we use cross spectral density to describe the correlations between two points on the beam. Through this representation, a modal decomposition is performed, where by we obtain an incoherent sum of modes. In this work we present two methods of modal representation: Decomposition into Coherent Modes; and Decomposition in Pseudo-modes. PC beams can be generated in the laboratory, using an laser and a Spatial Light Modulator(SLM). In which, we modulate the laser field, using phase masks that should reproduce the modal decompositions, in order to compare the performance of these methods for the generation of partially coherent beams in the laboratory, simulations were performed that model the optical process needed to generate the beams. In which, we observed that the coherent decomposition method needs fewer modes compared to the pseudo-modes, as well as presents a greater fidelity between the simulation and the theory, but such modes can be difficult to access experimentally, enabling the use of pseudo-modes. .

Keywords: Partially coherent beams. Modal decomposition . Simulation.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Fonte: Autor | 12 |
| Figura 2 – Esboço da configuração experimental. BE, expansor de feixe; LP, polarizador linear; M, espelho refletor; SLM, modulador espacial de luz; PH, pinhole; CCD, dispositivo de carga acoplada. Fonte: Wang R. et al 2020 | 22 |
| Figura 3 – Distribuição dos auto-valores do feixe GSM com $q = 1$ e n e m indo, respectivamente até 4 e 5. | 25 |
| Figura 4 – Distribuição de auto-valores do feixe GSM para o método de DMC com n e m até 3 e 4, respectivamente. | 25 |
| Figura 5 – Gráfico da intensidade $I(x,0)$ da simulação(linha azul) e teórico(linha vermelha) para a decomposição em modos coerente. Em cada colunas temos diferentes valores de truncamento e na linhas diferentes comprimento de coerência. | 27 |
| Figura 6 – Distribuição de auto-valor do feixe GSM com $cutoff = 0.015$ | 27 |
| Figura 7 – a) Distribuição de Intensidade da simulação da fonte GSM em $z = 0$ com $q = 1$, utilizando DMC. b) $I(x,0)$ da simulação e do cálculo teórico | 28 |
| Figura 8 – Distribuição de auto-valores para o feixe GSM com $q = 0.5$ | 28 |
| Figura 9 – a) Distribuição de Intensidade da simulação da fonte GSM com $q = 0.5$. b) $I(x,0)$ da simulação e do cálculo teórico. | 28 |
| Figura 10 – a) e c) são os DOC da simulação com $r_2 = 0$ e $q = 0.5$ e $q = 0.2$ respectivamente. b) e d) são os DOC da simulação com $r_2 = y_1 = 0$ e $q = 0.5$ e $q = 0.2$ respectivamente com adição da curva teórica. | 29 |
| Figura 11 – a) Intensidade do feixe GSM para DMC com $z = 0$ e $q = 1$. b) Fenda Dupla. c) Distribuição de intensidade do padrão de interferência. | 30 |
| Figura 12 – Intensidade do padrão de Interferência com $y = 0$ e $q = 1$ para o feixe GSM utilizando o DMC | 30 |
| Figura 13 – Visibilidade da região entre $y = -15$ a 15 com $q = 1$ para o feixe GSM utilizando o DMC. | 31 |
| Figura 14 – Padrão de interferência com $y = 0$ de um feixe GSM | 31 |
| Figura 15 – Três Diferentes componente de n e m da mesma máscara para o feixe GSM, com $q = 0.2$ | 33 |
| Figura 16 – Resultado da soma coerente com $q = 0.2$ para diferente valores a) $N, M = 5$. b) $N, M = 15$. c) $N, M = 25$. Na primeira colunas temos a Intensidade e a segunda a fase correspondente | 34 |
| Figura 17 – DOC($x,0,0,0$) para o feixe GSM com $l = 50$ e $q = 0.2$ | 34 |
| Figura 18 – Função DOC($x,0;0,0$) para o feixe GSM com $l = 50$ e diferentes valores de comprimento de coerência para $D = 128 \times 128$ | 35 |

| | |
|--|----|
| Figura 19 – Função $\text{DOC}(x,0;0,0)$ para o feixe GSM com $l=50$ e diferentes valores de comprimento de coerência para $D = 256 \times 256$ | 35 |
| Figura 20 – Função $\text{DOC}(x,0;0,0)$ do feixe GSM com $l = 50$, $q = 0.2$ | 35 |
| Figura 21 – Módulo do função DOC em termo no número de modos incoerentes | 36 |
| Figura 22 – Intensidade e DOC do feixe GSM com $M, M = 20$, $q = 0.2$ e diferente valores de l para cada linha | 37 |
| Figura 23 – a) Intensidade com $l = 250$ e $q = 0.3$ b) Fenda Dupla. c) Padrão de Interferência do feixe GSM co pseudo-modos. | 38 |
| Figura 24 – Feixe GSM utilizando pseudo-modos com $q=1$. a) Intensidade $z = 0$. b) Padrão de interferência. | 38 |
| Figura 25 – Distribuição de auto-valores para o caso TGSM com $q = 1$ e $\tau_0 = 1$ | 39 |
| Figura 26 – Distribuição de auto-valores para o caso TGSM com $q = 1$ e $\tau_0 = -1$. . . | 39 |
| Figura 27 – Distribuição de auto-valores do feixe TGSM para diferentes comprimentos de coerência | 39 |
| Figura 28 – Auto-valores dos feixes TGSM variando o módulo do <i>twist</i> com $q = 0.66$. | 40 |
| Figura 29 – Intensidade e função DOC do feixe TGSM com $\tau_0 = 1$ a) 1° linha com $q = 1$. b) 2° linha com $q = 0.33$ | 40 |
| Figura 30 – Intensidade das franjas de interferência na fenda dupla devido ao feixe TGSM com $q = 0.5$ a) $\tau_0 = 1$, b) $\tau_0 = -1$, c) $\tau_0 = 0$ | 41 |
| Figura 31 – Franjas de interferência do feixe TGSM utilizando DMC a) $q = 1$. b) $q = 0.5$ e c) $q = 0.33$ | 42 |
| Figura 32 – Propagação dos feixes TGSM após passar pelas lentes, com $\tau_0 = 1$ e $q = 1$ | 43 |
| Figura 33 – Propagação do feixe TGSM após passar pelas lentes, com $\tau_0 = -1$ e $q = 1$ | 43 |
| Figura 34 – Propagação do feixe TGSM após passar pelas lentes, com $\tau_0 = -0.2$ e $q = 1$ | 43 |
| Figura 35 – Intensidade de cada elemento da soma coerente de um pseudo-modo usando para obter o feixe TGSM | 44 |
| Figura 36 – DOC para diferentes valores de N e M do feixe TGSM, com $l = 200$ e $q = 0.33$ | 44 |
| Figura 37 – Distribuição de Intensidade dos feixe TGSM com os pseudo-modos com $q = 0.33$; a) $N, M = 4$. b) $N, M = 8$. b) $N, M = 12$. c) $N, M = 16$. d) $N, M = 20$ | 45 |
| Figura 38 – Intensidades e DOC do feixe TGSM utilizando os pseudo-modos com $l=200$, $q = 0.33$ e $N, M = 12$ | 45 |
| Figura 39 – Intensidades e DOC do feixe TGSM utilizando os pseudo-modos com $l=300$, $q = 0.33$ e $N, M = 20$ | 46 |
| Figura 40 – Franjas de interferência do feixe TGSM com os pseudo-modos a) $q = 1$. b) $q = 0.5$ e c) $q = 0.33$ | 46 |
| Figura 41 – Propagação do feixe TGSM com os pseudo-modos usando $\tau_0 = 1$ e $q = 1$. | 47 |
| Figura 42 – Propagação do feixe TGSM com os pseudo-modos usando $\tau_0 = -1$ e $q = 1$ | 47 |

| | |
|--|----|
| Figura 43 – Intensidade para diferente valores da soma incoerente. Em cada linha, variamos o número de pseudo-modos l , e em cada coluna temos uma realização da simulação com o mesmo parâmetro. Na DMC foram utilizados 15 modos ambos com $\delta = 0.15$ mm que equivale a $q = 1$ | 48 |
| Figura 44 – Intensidade do feixe GSM com $q = 0.33$ utilizando os pseudo-modos com $l = 300$ e a DMC com 91 modos. | 49 |
| Figura 45 – Distribuição dos autos valores do feixe GSM com $q = 0.33$ | 50 |
| Figura 46 – Intensidade com 300 pseudo-modos e 254 modos coerente do feixe GSM $\delta = 0.03$ mm | 50 |
| Figura 47 – DOC com $q = 1$ do feixe GSM. Na primeira linha, o caso DMC. Na segunda linha temo a decomposição de pseudo-modos com $l = 300$ | 51 |
| Figura 48 – DOC para diferente comprimento de coerência para o feixe GSM com $l = 300$ | 51 |
| Figura 49 – Feixe TGSM com Pseudo-modos com $twist = 1$, $q = 1$ e $l = 100$ | 53 |
| Figura 50 – Intensidade e DOC do feixe TGSM com $q = 1$ e $twist = 1$. Na primeira linha temo a DMC e na segunda temos os pseudo-modos. | 53 |
| Figura 51 – Distribuição de auto-valores com $q = 0.33$ do feixe TGSM | 54 |
| Figura 52 – Intensidade e DOC do feixe TGSM com $q = 0.33$ e $twist = 1$. Na primeira linha temos a DMC e na segunda temos os pseudo-modos. | 54 |
| Figura 53 – Distribuição dos auto-valores do feixe TGSM com $twist = 0.2$ e $q = 0.33$. | 55 |
| Figura 54 – Intensidade e DOC do feixe TGSM com $q = 0.33$ e $twist = 0.2$. Na primeira linha temo a DMC e na segunda temos os pseudo-modos | 55 |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 2 | FEIXES PARCIALMENTE COERENTES | 12 |
| 2.1 | TEORIA DE FONTES PARCIALMENTE COERENTES | 12 |
| 2.2 | EXPANSÃO EM MODOS | 14 |
| 2.3 | EXEMPLOS DE FONTES PC | 16 |
| 2.3.1 | Fontes GSM | 17 |
| 2.3.2 | Fontes TGSM | 20 |
| 2.4 | GERAÇÃO EXPERIMENTAL DE FEIXES PARCIALMENTE COERENTES | 22 |
| 3 | SIMULAÇÃO DA GERAÇÃO DE FEIXES PARCIALMENTE CO- | |
| | ERENTES | 24 |
| 3.1 | GSM MODOS COERENTES | 24 |
| 3.2 | GSM PSEUDO-MODOS | 31 |
| 3.3 | TGSM MODOS COERENTES | 38 |
| 3.4 | TGSM PSEUDO-MODOS | 44 |
| 4 | COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS | 48 |
| 4.1 | GSM | 48 |
| 4.2 | TGSM | 52 |
| 5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 57 |
| | REFERÊNCIAS | 59 |

1 INTRODUÇÃO

A luz e seus fenômenos são estudados, há anos, em diversas perspectivas na física. A teoria de coerência e óptica estatística foi desenvolvida na metade do século 20 [1], apresentando diversas aplicações em medidas astronômicas, diagnósticos médicos, sensoriamento remoto ambientais e comunicações sem fio [2], sendo de interesse de grandes pesquisadores como Max Born, Emil Wolf, Leonard Mandel e Franco Gori.

As fontes de luz naturais produzem campos com baixa coerência, já o laser pode fornecer uma fonte com altíssima coerência. Há diversas aplicações que apresentam vantagens ao se trabalhar em uma região de coerência baixa ou alta. Neste trabalho tem-se o interesse nos casos em que os feixes parcialmente coerentes são obtidos controladamente. Uma forma de gerá-los é experimentalmente apresentado por [3, 4]. A ideia central se baseia no fato de que a correlação espacial da fonte pode ser armazenada na função de densidade espectral cruzada (CSD). Por intermédio dessa função, temos uma ferramenta para controlar o perfil de intensidade no campo distante, podendo ser representada como uma decomposição em modos, somados de forma incoerente [5, 6].

Este trabalho objetiva compreender como gerar e manipular os feixes parcialmente coerentes, para então utilizá-los na comparação entre os métodos de decomposição modal em duas fontes: *Gaussian Schell-Model* e *Twist Gaussian Schell-Model*. Para tanto, no segundo capítulo, é apresentada uma introdução teórica sobre feixes parcialmente coerentes e a forma com o qual pode ser representados utilizando a decomposição modal, bem como a ideia central para gerar no experimento. No terceiro capítulo, é realizada uma análise dos ajustes ocorridos nos parâmetros da simulação para obter uma boa aproximação entre a curva obtida na simulação e na teoria. Para isso, dois métodos de representação foram apresentado para cada classe de feixe. No quarto capítulo, realizou-se uma comparação entres os métodos para identificar quais as vantagens e desvantagens de cada abordagem.

2 FEIXES PARCIALMENTE COERENTES

Na primeira seção deste capítulo, são descritas como definir e representar um feixe parcialmente coerente(PC). Em seguida, é apresentada uma síntese do método que possibilita sua geração experimental.

2.1 TEORIA DE FONTES PARCIALMENTE COERENTES

Grau de coerência e visibilidade

Em livros-texto de óptica é comum a abordagem do conceito de campos parcialmente coerentes introduzindo o fenômeno da interferência e, naturalmente definindo a função de coerência [7–9].

A teoria de interferência é baseada no princípio de superposição linear dos campos. De acordo com esse princípio, o campo elétrico em um dado ponto (P) no espaço vazio pode ser entendido como uma soma vetorial dos campos que atuam naquele ponto, podendo ser representada como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (1)$$

Em geral, no experimento de interferência, os campos \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 são devidos às mesmas fontes, a exemplo da figura 1:

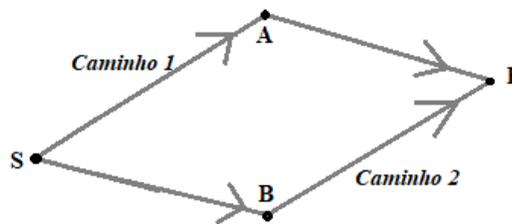


Figura 1 – Fonte: Autor

A intensidade, em um instante de tempo, varia rapidamente, portanto, é útil definir a intensidade média expressa por:

$$I = \langle \mathbf{E}^* \mathbf{E} \rangle, \quad (2)$$

em que $\langle \dots \rangle$ representa a média temporal da intensidade e $(*)$ representa o complexo conjugado, considerando que os campos são estacionários¹ e apresentam mesma polarização. Ao substituir a equação (1) em (2), obtemos:

$$\begin{aligned} I &= \langle \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_1 \rangle + \langle \mathbf{E}_2^* \mathbf{E}_2 \rangle + 2\text{Re}\langle \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 \rangle, \\ I &= I_1 + I_2 + 2\text{Re}\Gamma_{12}(\tau). \end{aligned} \quad (3)$$

em que $I_1 = \langle |\mathbf{E}_1|^2 \rangle$ e $I_2 = \langle |\mathbf{E}_2|^2 \rangle$. O argumento da parte real, $\Gamma_{12}(\tau)$ representa a função de coerência mútua ou função de correlação entre \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 . Eles diferem um do outro devido

¹ Uma quantidade estacionária significar que o tempo médio independe da escolha de origem do tempo.

ao caminho óptico percorrido por cada campo durante sua propagação. chama-se t , o tempo que o campo E_1 leva para percorrer o caminho 1; e $t + \tau$ o tempo que o campo E_2 leva para percorrer o caminho 2; e τ a diferença de tempo devido ao caminho óptico percorrido pelos campos.

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle \mathbf{E}_1(t)^* \mathbf{E}_2(t + \tau) \rangle. \quad (4)$$

Se os sub-índices 1 e 2 são iguais, obtemos o produto do campo por ele mesmo e interpretamos esse termo como uma função de auto-correlação.

$$\Gamma_{ii}(\tau) = \langle \mathbf{E}_i(t)^* \mathbf{E}_i(t + \tau) \rangle, \text{ com } i = 1 \text{ ou } 2. \quad (5)$$

A função de correlação normaliza ou grau de coerência é definido por:

$$\gamma = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}}. \quad (6)$$

Note que quando $\tau = 0$ em (5) obtemos a intensidade I_1 e I_2 . Assim a função deve varia entre $0 \leq \gamma \leq 1$ se,

$$|\gamma| = 1, \text{ Coerência total,}$$

$$0 < |\gamma| < 1, \text{ Coerência parcial,}$$

$$|\gamma| = 0, \text{ Incoerência total.}$$

A equação (3) pode ser escrita em termo da definição de grau de coerência, substituindo (6) em (3):

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re}(\gamma_{12}). \quad (7)$$

Este resultado teórico pode ser verificado experimentalmente, por meio da fenda dupla de Young, fazendo uma conexão entre a visibilidade do padrão de interferência e o grau de coerência. Assim, definimos a visibilidade das franjas como:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (8)$$

Considerando os valores máximo e mínimo da equação (7),

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}|\gamma| \text{ e } I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}|\gamma|, \quad (9)$$

e substituindo (9) em (8),

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma|. \quad (10)$$

Para o caso específico em que $I_1 = I_2$, obtemos a relação desejada:

$$V = |\gamma|. \quad (11)$$

De maneira simples, podemos verificar qual o grau de coerência, ou melhor, um valor aproximado da função de correlação, pois a fenda não representa exatamente dois pontos, dado que elas têm uma largura. Dessa forma, obtemos, um parâmetro para medir o grau de coerência e definir se o campo é parcialmente coerente ou não, útil tanto no experimento como na simulação.

Densidade espectral cruzada

No caso dos feixes parcialmente coerentes, não temos uma descrição do campo que possa ser representado por apenas um modo, como no caso de um feixe gaussiano, mas sim por um ensemble de modos. Como mencionado por [8] e [7], há vantagens na utilização da representação no espaço de frequência em problemas envolvendo campos e fontes estacionários aleatórios. Por esse motivo, utilizaremos a Densidade Espectral Cruzada, no inglês, *Cross-Spectral Density* (CSD).

Uma forma natural de se obter e entender a CSD é como a Transformada de Fourier no espaço de frequência da função de coerência mútua.

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (12)$$

Mesmo não sendo apresentada aqui, devemos mencionar que tanto a função de coerência como a CSD devem obedecer à equação de Helmholtz e ser hermitiana, não negativa. A mesma expressão dada em (12) pode ser encontrada, a princípio, de uma maneira mais geral, por meio do teorema generalizado de Wiener–Khintchine no estudo de processo estacionário aleatório, tomando um caso específico onde $\omega = \omega'$. Para mais detalhes, ver seção 2.5 de [8]. Temos também a CSD normalizada, comumente chamada de *Degree of coherence* (DOC) ou Grau de Coerência Espectral.

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)}}. \quad (13)$$

Omiti-se a dependência com a frequência sem perda de generalidade. Devemos ter o cuidado, pois, em alguns livros e artigos a nomenclatura do grau de coerência é utilizada tanto para a função de coerência normalizada como para a CSD normalizada. As funções de coerência e CSD são ligadas pela Transformada de Fourier. Contudo essas funções normalizadas não são necessariamente pares de Transformada. As condições necessárias para que as mesmas sejam pares, ou não, pode ser vista com detalhes em [10]. Neste trabalho, quando nos referirmos à função de coerência normalizada, denominaremos grau; e quando nos referirmos à CSD normalizada, denominaremos DOC.

2.2 EXPANSÃO EM MODOS

A pergunta que nos motivará nesta seção é: existe um método para expressar a CSD que proporcione uma interpretação sobre fontes PC e geração de feixes com propriedades correspondentes?.

Expansão em Modos Coerentes

Sabendo que a CSD obedece às propriedades de ser hermitiano e não-negativo:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = W^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (14)$$

e

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j^* a_k W(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \geq 0. \quad (15)$$

Quando $a_{j,k}$ são constantes reais ou complexas, a CSD se torna um *kernel* do espaço de Hilbert-Schmidt. Isso implica que podemos representá-la como uma expansão em modos ortonormais. Algumas vezes essa expansão é interpretada por meio do Teorema de Mercer, mas, ambas implicam a mesma expressão:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \psi_l^*(\mathbf{r}_1) \psi_l(\mathbf{r}_2). \quad (16)$$

A auto-função ortonormal $\psi(\mathbf{r})$ e seu auto-valor λ_l , devem obedecer tanto à equação de Helmholtz como à integral homogênea de Fredholm do segundo tipo:

$$\int W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_l(\mathbf{r}_1) d^2 \mathbf{r}_1 = \lambda_l \psi_l(\mathbf{r}_2). \quad (17)$$

A equação (16) representa a fonte como uma soma incoerente de modos coerentes, justificando o nome do método: Decomposição em Modos Coerentes(DMC). Devido a essa característica, ela é conveniente em alguns casos, pois são utilizados modos coerentes conhecidos como o de Laguerre-Gauss, ou Hermite-Gauss. Mesmo sendo uma ferramenta matemática simples, por ser apenas uma expansão, a DMC tem um papel importante na construção dos feixes PC, usando o SLM, o qual será descrito na sub-seção da geração experimental dos feixes.

Expansão em pseudos modos

O caminho para encontrar os auto-valores da DMC não é fácil. Trata-se de um processo no qual é necessário resolver a equação integral homogênea de Fredholm, tornando inevitavelmente o caminho árduo, dependendo da função escolhida. Essa dificuldade abriu portas para novas ideias, a exemplo da proposta por [5, 6].

Gori e Santarsiero, em seu trabalho de 2007, mostram uma maneira de construir matematicamente qualquer tipo de função de correlação espacial ou CSD. A ideia principal por trás do resultado obtido é levar o estudo de teoria de reprodução de *kernel* no espaço de Hilbert para a teoria de coerência. De modo específico, se temos o CSD que obedece à definição de não-negatividade, podemos escrever, como uma superposição integral da forma:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int p(\mathbf{v}) H^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}) H(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}) d^2 v. \quad (18)$$

Em que v é um vetor de tamanho finito, $H(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ é um *kernel* arbitrário e $p(v)$ é uma função não-negativa denominada de função peso. O próximo passo foi dado em 2009 por Martínez-Herrero et al., que rescreveram a integral da equação (18) como uma expansão em modos:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l=1}^{\infty} \psi_l^*(\mathbf{r}_1) \psi_l(\mathbf{r}_2). \quad (19)$$

em que $\psi_l(\mathbf{r})$ são chamados de pseudo-modos. Assim, para determinarmos as expressões dos modos, temos que resolver:

$$\psi_l(\mathbf{r}) = \int \sqrt{p(\mathbf{v})} H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) F_l^*(\mathbf{v}) d^2v, \quad (20)$$

onde $F_l(\mathbf{v})$ são funções ortonormais.

A expressão (19) é semelhante ao caso da expansão em modos coerentes (16), mas sem a restrição das funções ψ_l serem ortonormais. Consequentemente, os pseudo-modos não precisam satisfazer a equação de Fredholm. Dessa forma, o processo fica mais simples que no caso coerente, pois precisamos saber apenas o *kernel* $H(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ e o $p(\mathbf{v})$ que geram a CSD. Em seguida, basta substituir em (20) escolhendo uma função adequada(ortonormal) para $F_l(\mathbf{v})$.

Esta não é a única maneira de obter os pseudo-modos, outra proposta, baseada em um trabalho de Martínez-Herrero, foi apresentada. Nela, a função peso[3], foi reescrita:

$$p(\mathbf{v}) = \sum_{n,m=0}^{N,M} p(\mathbf{v}_{n,m}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{n,m}). \quad (21)$$

No qual $\delta(y)$ é a função delta de Dirac e $\mathbf{v}_{n,m} = (\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m)$ é uma variável discreta em duas dimensões. Substituindo a expressão (21) em (18), obtemos:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n,m}^{N,M} p(\mathbf{v}_{n,m}) H^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_{n,m}) H(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_{n,m}). \quad (22)$$

De acordo com Wang, o lado direito da equação (22) pode ser lido como uma combinação linear de modos mutualmente incoerentes, na qual $H(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ e $p(\mathbf{v})$ representam o papel de pseudo-modos e seus respectivos pesos. Para o caso em que $N, M \rightarrow \infty$, obtemos a expressão dada em (18). A ideia descrita por Wang é basicamente sair do contínuo para o caso discreto da equação (18), como bem sabemos da definição de integral, isso implica que consideramos um espaçamento maior para a variação de v . É importante ter em mente que os limites inferior e superior da variável v , são truncados a partir de um valor da função peso.

Por fim, questionamos qual dos dois caminhos é o melhor para encontrar os pseudo-modos. Em muitos casos, um *software* e um bom computador podem ser utilizados para resolver (20), ou pode ser escolhida uma função ortonormal que viabilize a solução da integral que encontra as expressões dos pseudo-modos. Os dois caminhos apresentados são equivalentes, mas o caminho apresentado por R. Wang é o mais simples, pois não precisamos resolver a integral em (20). Em alguns artigos, bons resultados foram apresentados ao utilizar o caminho de Wang, R. a exemplo de [3, 11–14]. Neste trabalho, o caminho a ser utilizado também será este.

2.3 EXEMPLOS DE FONTES PC

Utilizaremos o que foi descrito na seção 2.2 para alguns tipos de fontes. Seguiremos a proposta de Gori para gerar a CSD de cada modelo e, em seguida, expandi-lá em modos

coerentes e pseudo-modos. O objetivo dessa proposta é aplicá-la na simulação. Para tanto, veremos dois casos: o primeiro é o Gaussian Schell-Model(GSM), um exemplo clássico muito estudado; o segundo é o Twist Gaussian Schell-Model(TGSM).

2.3.1 Fontes GSM

O caso mais tradicional e simples, para as fontes ditas GSM muito estudado por Emil Wolf e F. Gori desde 1978, [15, 16]. Uma forma simples de construir a CSD para diferentes feixes foi mencionada em (18). Apresentada por F. Gori, ela se baseia na escolha de um kernel $H(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ e de uma função peso $p(\mathbf{v})$ apropriada.

Iremos utilizar as expressões de peso e *kernel* dados por Wang, F. [11]:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{4\sigma^2} + 2\pi i \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}\right), \quad (23)$$

e

$$p(\mathbf{v}) = 2\pi\delta^2 \exp\left(-2\pi^2\delta^2\mathbf{v}^2\right). \quad (24)$$

onde δ e σ são constantes reais. Ao substituir as equações (23) e (24) em (18), temos:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 2\pi\delta^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{4\sigma^2}\right) \int \exp\left(-2\pi^2\delta^2\mathbf{v}^2 + 2\pi i(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{v}\right) d^2v. \quad (25)$$

Esta integral é tabelada, expressão (3323-2) em [17]. Ao resolver a integral, e realizar algumas manipulações, obtemos:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{4\sigma^2} - \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}{2\delta^2}\right). \quad (26)$$

A equação (26) representa a CSD de uma fonte GSM, e as constantes nos denominadores têm uma interpretação física para o feixe. O δ é o comprimento de coerência, que representa a distância máximo entre dois pontos, para que tenha correlação de fase, o σ é a largura do feixe que delimita a região onde a distribuição de intensidade gaussiana decai até $1/e^2$.

Decomposição em modos coerentes da fonte GSM

Encontrada a CSD que descreve a fonte GSM, iremos decompô-la em modos coerentes. Por definição, podemos encontrar as expressões, resolvendo a integral homogênea de Fredholm, que é complicada de ser resolvida. Por esse motivo, autores como Starikov apresentam caminhos alternativos manipulando a função que descreve a CSD [18]. Neste trabalho, baseamos nosso estudo na ideia de F. Gori e M. Santarsiero [19].

Em síntese, a ideia é manipular a CSD de tal maneira que consigamos utilizar identidade uma que nos forneça expansões. Nesse caso, utilizaremos o sistema de coordenadas polares (r, θ) , e rescreveremos a equação (26) como:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp\left[-s(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2)\right] \exp[b\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1(\tau + 1/\tau)], \quad (27)$$

onde $s = 1/4\sigma^2 + 1/2\delta^2$, $a = 1/4\sigma^2$, $b = 1/2\delta^2$ e $\tau = \exp[-i(\theta - \theta')]$. Sabemos que o 2º termo do lado direito de (27) pode ser reescrito, por meio da relação existente entre a função geratriz e a expansão das funções de Bessel modificada I_m , dada por:

$$\exp[b\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 (\tau + 1/\tau)] = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \tau^m I_m(2b\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2). \quad (28)$$

Na relação 9.6.33 de [20], substituindo esse resultado em (27), obtemos:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} I_m(2b\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \exp[-s(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2) - im(\theta - \theta')]. \quad (29)$$

O resultado obtido em (29) não é suficiente, pois queremos construir uma expressão que seja o produto de modos coerentes, em que cada modo tem apenas uma variável espacial \mathbf{r}_i , motivando a separação da função de Bessel em dois termos. Todavia, primeiro faremos algumas manipulações para fornecer uma interpretação física mais clara, modificando os componentes da CSD de cada sub-índice m como:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \mu_m M_m(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (30)$$

com

$$M_m(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = N_m I_m(2b\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \exp[-s(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2) - im(\theta - \theta')],$$

$$\mu_m = \frac{\pi}{2\sqrt{s^2 - b^2}} \left(\frac{1}{s + \sqrt{s^2 - b^2}} \right)^{|m|}.$$

A escolha de N_m e μ_m são feitas de maneira que $M_m(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ seja unitária, para qualquer escolha de m . A unitariedade é satisfeita se M_m obedecer à relação 6.611.4 em [21]. Veremos, mais a frente que μ_m deve tender a zero quando " m " tende a $\pm\infty$. Esse fato é uma vantagem dessa representação, pois nos ajuda a interpretar a decomposição. Com essas condições para os auto-valores o número de componente da série não diverge no infinito. Em física, queremos soluções que convirjam, isso implica que temos um número finito na expansão. Como consequência, a expansão em (30) pode ser lida como uma soma incoerente de um conjunto de fontes coerentes, no qual cada fonte é caracterizada por M_m e com peso dado por μ_m .

Ainda não estamos satisfeitos com essa expressão, pois ela não se mostra interessante para ser utilizada futuramente como objeto matemático no experimento/simulação. Para que isso aconteça, queremos que M seja descrito como produto de um campo com seu complexo conjugado. Com objetivo de satisfazer essa condição, utilizaremos a relação da função de Bessel modificada de ordem m com o produto de outras duas funções, de tal forma que as variáveis \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 que estão juntas na função de Bessel sejam separadas. Podemos obter essa

relação utilizando a identidade (8.976.1) de [21].

$$I_{|m|} \left(\frac{4\sqrt{\xi} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{(1-\xi)w^2} \right) = (1-\xi)\xi^{|m|/2} \left(2 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{w^2} \right)^{|m|} \exp \left(\frac{2\xi}{1-\xi} \frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{w^2} \right) \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(|m|+n)!} \xi^n L_n^{|m|} \left(\frac{2\mathbf{r}_1^2}{w^2} \right) L_n^{|m|} \left(\frac{2\mathbf{r}_2^2}{w^2} \right). \quad (31)$$

Observe que estamos usando a propriedade da função de Bessel modificada, onde $I_{-m} = I_m = I_{|m|}$, identidade (9.6.6) em [20]. Ao realizar algumas manipulações nas constantes em (30), possibilita a utilização da expressão (31) e organizando os termos para que se obter o produto dos modos de Laguerre-Gauss:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \lambda_{n,m} \psi_{n,m}^*(\mathbf{r}_1, \theta) \psi_{n,m}(\mathbf{r}_2, \theta'). \quad (32)$$

onde

$$\psi_{n,m}(\mathbf{r}, \theta) = \frac{1}{w} \sqrt{\frac{2n!}{\pi(n+|m|)!}} \left(\frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{w} \right)^{|m|} L_n^{|m|} \left(\frac{2\mathbf{r}^2}{w^2} \right) e^{-\mathbf{r}^2/w^2 + im\theta}, \quad (33) \\ \lambda_{n,m} = \frac{\pi}{a+b+c/2} \left(\frac{a+b-c/2}{a+b+c/2} \right)^{|m|/2+n}, \\ w = \sqrt{2/c}, \\ c = 2\sqrt{a^2 + 2ab}.$$

A equação (32) representa a CSD da fonte GSM como uma expansão de modos coerentes de Laguerre-Gauss. O resultado em (32) será útil durante a simulação, pois agora podemos construir a fonte parcialmente coerente utilizando apenas um certo número de modos de Laguerre-Gauss somados incoerentemente.

Decomposição em Pseudo-modos da fonte GSM

Como apresentado na seção 2.2.2, podemos representar a CSD por meio de uma expansão de pseudo-modos. Com o objetivo de comparar, posteriormente, as duas formas de representação para a mesma fonte, deduzir a decomposição da fonte GSM para esse caso.

O processo será mais simples, pois já temos o *kernel* e a função peso, respectivamente, as equações (23) e (24), substituindo em (22) e truncando $\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}_{n,m}$ obtemos:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n,m=0}^{N,M} 2\pi\delta^2 \exp \left[-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{4\sigma} - 2\pi^2\delta_0^2 \mathbf{v}_{n,m}^2 + 2\pi i(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{v}_{n,m} \right] \quad (34)$$

Como mencionado no final da seção 2.2.2, o limite superior e inferior dos valores de v são definidos a partir de $p(\mathbf{v}_{n,m})$, e, neste caso em específico, dependem do argumento da exponencial. Em alguns artigos como [3, 13] a escolha é dada para quando $\sqrt{p(\mathbf{v}_{n,m})} \sim e^{-4}$ e $\sqrt{p(\mathbf{v}_{n,m})} \sim e^{-2}$ [12]. Aqui utilizaremos como parâmetro o valor e^{-4} , levando a:

$$\mathbf{v}_n = \{ -\sqrt{2}/\pi\delta, \sqrt{2}/\pi\delta \}.$$

2.3.2 Fontes TGSM

Simon e Mukunda em 1993 no artigo *Twisted Gaussian Schell-model beams* [22], introduzem uma nova classe de feixes parcialmente coerentes, parecida com a já conhecida GSM, mas com uma nova contribuição de fase não separável, denominada pelos autores de *twist phase* em português, fase de torção. A escolha do nome é devido ao seu efeito de rotação do perfil transversal do feixe durante sua propagação. Essa nova contribuição de fase apresenta propriedades semelhantes dos feixes com fase helicoidal, que carregam um momento angular orbital (OAM) médio. Porém diferentemente dos outros casos, o *twist* e conseqüentemente o OAM só existe quando o feixe é parcialmente coerente. Em situações que envolvem propagação num meio turbulento, o TGSM se mostra mais robusto durante a propagação, sendo mais viável nesse tipo de aplicação [23–25].

Nesta seção, temos o objetivo de descrever a CSD e a decomposição para cada método. Utilizando a proposta apresentada por Gori para construção da CSD, escolhemos o *kernel* e função peso adequado, para descrever a CSD do TGSM. Há várias escolhas possíveis de *kernel*, aqui usaremos a apresentada por [4]:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \exp \left[\alpha \mu_0 (xv_y - yv_x) - i(xv_x + yv_y) - r^2 (\alpha k^2 \mu_0^2 / 2 + 1/4\sigma_0^2) \right], \quad (35)$$

e,

$$p(\mathbf{v}) = \frac{\alpha}{\pi} \exp \left(-\alpha v^2 \right), \quad (36)$$

onde os parâmetros α , δ , μ_0 e k devem satisfazer a relação: $1/2\delta^2 = \alpha k \mu_0 / 4 + 1/4\alpha$. Substituindo as equações (35),(36) em (18), obtemos:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\alpha}{\pi} \exp \left[-\frac{\alpha \mu_0^2 k^2}{2} (r_1^2 + r_2^2) - \frac{r_1^2 + r_2^2}{4\sigma^2} \right] \times \int \exp \left(-\alpha v_x^2 - \beta_I v_x \right) dv_x \int \exp \left(-\alpha v_y^2 - \beta_{II} v_y \right) dv_y, \quad (37)$$

com

$$\beta_I = \alpha \mu_0 k (y_1 + y_2) + i(x_1 - x_2),$$

$$\beta_{II} = \alpha \mu_0 k (x_1 + x_2) - i(y_1 - y_2).$$

Chegamos na mesma integral que no caso GSM, podendo assim, ser resolvida da mesma forma. Após algumas manipulações, obtemos como resultado:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp \left(-\frac{r_1^2 + r_2^2}{4\sigma^2} - \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{2\delta^2} - ik\mu_0(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_\perp \right), \quad (38)$$

A constante μ_0 é chamada de parâmetro de torção, podendo ser escrito na forma normalizada como $\tau_0 = k\mu_0\delta^2$, variando entre -1 a +1. O módulo do valor de τ_0 indica a intensidade que o efeito de fase efetua no feixe. Já o sinal indica o sentido do *twist*, podendo ser horário ou anti-horário .

Sabendo que a CSD do TGSM deve respeitar a propriedade de ser não-negativa e hermitiana, podemos obter o limite do parâmetro de torção, dada pela desigualdade :

$$|\mu_0| \leq \frac{1}{k\delta^2}. \quad (39)$$

Essa expressão (39) nos informa algo relevante sobre o TGSM. No caso onde temos $\delta \sim \infty$, conseqüentemente $|\mu_0| \rightarrow 0$, portanto, no caso de coerência máxima não temos *twist*, evidenciando o fato que o TGSM só pertence à classe de feixe parcialmente coerente.

Decomposição em modos coerente da fonte TGSM

Como mencionado no caso da fonte GSM, podemos encontrar a decomposição em modos coerente fazendo uma expansão da função nos modos desejados. Para o caso do TGSM, o processo é idêntico ao descrito na seção do GSM. Muda-se apenas as constantes multiplicativas do termo na exponencial com respeito ao produto das variáveis \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 .

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp \left[-s(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2) - \rho \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 (\tau + 1/\tau) \right]. \quad (40)$$

Onde agora,

$$\begin{aligned} s &= a + b, \\ \tau &= \kappa e^{-i(\theta - \theta')}, \\ \rho &= \sqrt{b^2 - \mu_0^2 k^2 / 4}, \\ \kappa &= \sqrt{\frac{b + \mu_0 k / 2}{b - \mu_0 k / 2}}. \end{aligned}$$

Sabemos que o segundo termo do lado direito da equação (40) pode ser reescrito como uma expansão das funções de Bessel modificadas. Em seguida, utilizando a relação entre estas funções com os polinômios de Laguerre e depois de várias manipulações, obtemos o desejado:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \lambda_{n,m} \psi_{n,m}^*(\mathbf{r}_1, \theta) \psi_{n,m}(\mathbf{r}_2, \theta'), \quad (41)$$

onde ,

$$\psi_{n,m}(\mathbf{r}, \theta) = \frac{1}{w} \sqrt{\frac{2n!}{\pi(n+|m|)!}} \left(\frac{\mathbf{r}\sqrt{2}}{w} \right)^{|m|} L_n^{|m|} \left(\frac{2\mathbf{r}^2}{w^2} \right) e^{-\mathbf{r}^2/w^2 + im\theta}, \quad (42)$$

$$\lambda_{n,m} = \frac{\pi}{a+b+c/2} \left(\frac{b + \mu_0 k / 2}{b - \mu_0 k / 2} \right)^{m/2} \left(\frac{a+b-c/2}{a+b+c/2} \right)^{|m|/2+n}, \quad (43)$$

$$w = \sqrt{\frac{2}{c}},$$

$$c = 2\sqrt{a^2 + 2ab + \mu_0^2 k^2 / 4}.$$

Decomposição em Pseudo-modos da fonte TGSM

Agora encontraremos a decomposição em pseudo-modos utilizando o método descrito na seção 2.2.2. A partir do *kernel* e da função peso, utilizando para construir a CSD em (38), obtemos:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha}{\pi} \exp \left(-\alpha \mathbf{v}_{m,n}^2 + \alpha \mu_0 k [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times \mathbf{v}_{m,n}]_{\perp} + i(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{v}_{m,n} \right) \times \exp \left[-(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2) (\alpha \mu_0^2 k^2 / 2 + 1/4\sigma^2) \right]. \quad (44)$$

onde \perp representa a componente ortogonal, com

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 - \delta^4 \mu_0^2 k^2}}{\delta^2 \mu_0^2 k^2}.$$

válida apenas para $\mu_0 \neq 0$, no caso limite $\mu_0 = 0$, temos $\alpha = \delta/2$. As expressões são obtidas por meio da relação $1/2\delta^2 = \alpha \mu_0^2 k^2 / 4 + 1/4\alpha$. Por fim, temos interesse em encontrar o limite superior e inferior, ou seja, o intervalo de valores de $v_{n,m}$ para o qual o argumento da exponencial da função peso seja -8 . Observando o comportamento da função (31), podemos concluir que $v_{n,m}$ varia entre $[-2/\sqrt{\alpha}, 2/\sqrt{\alpha}]$.

2.4 GERAÇÃO EXPERIMENTAL DE FEIXES PARCIALMENTE COERENTES

Até o momento, falamos sobre a teoria matemática para descrever as classes de feixes parcialmente coerentes. Agora falaremos brevemente sobre uma proposta de geração experimental dos feixes correspondentes. Saber o *setup* e as etapas necessárias para gerar o feixe PC, nos ajudará a pensar em como desenvolver a simulação. Algumas propostas foram apresentadas, a exemplo de [3, 4, 12, 26, 27]. A ideia central comum a estes trabalhos é bem sintetizada no experimento realizado por Wang, R. et al, ver figura 2.

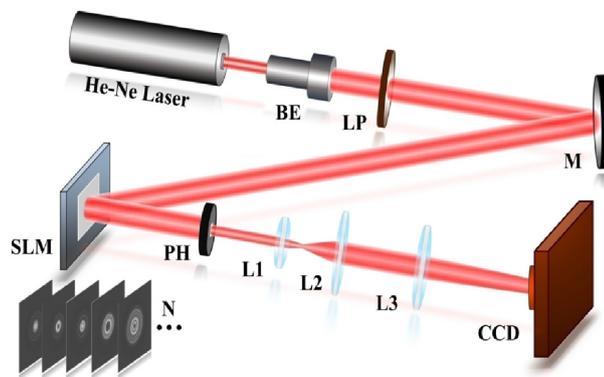


Figura 2 – Esboço da configuração experimental. BE, expansor de feixe; LP, polarizador linear; M, espelho refletor; SLM, modulador espacial de luz; PH, pinhole; CCD, dispositivo de carga acoplada. Fonte: Wang R. et al 2020

A partir da ilustração, na figura 1, podemos dividir o experimento em 3 etapas:

1º (Fonte coerente): Uma fonte de luz que fornecer o campo inicial. Comumente é utilizado o laser devido à alta coerência.

2º (Manipulação): Nessa etapa do experimento, toda a teoria matemática de decomposição descrita na seção anterior será utilizada. O feixe que parte do laser será conduzido até incidir no SLM, cujo papel é modelar a fase do campo inicial, para que o feixe de saída (refletido ou transmitido) tenha a propriedade desejada. A modulação, algumas vezes chamadas de máscaras de fases, é devidamente controlada por um computador, elas são escolhidas a parti da decomposição em modos, no qual cada máscara é um elemento da série em (19) e (16).

Assim, para obtermos o feixe resultante, as máscaras são inseridas individualmente, modelando o campo e propagando até o plano de detecção. Após o feixe ter suas fases alteradas, a etapa seguinte é rápido devido à velocidade da luz. Todo o processo é realizado para cada componente da decomposição, a maior parte do tempo que é tomado, para a mudança de máscara. O tempo de resposta do SLM, tempo para mudar a máscara de fase, depende do dispositivo podendo variar de 0.1 a 100ms [28].

3º (Detecção): Por fim, temos o plano de observação, no qual é utilizado um detector/câmera com o papel de receber as informações do campo transmitido pelo SLM. A câmera deve ficar exposta tempo suficiente para que toda a etapa anterior seja finalizada.

As três etapas são uma síntese do experimento, útil na simulação. No caso experimental, deve haver mais detalhes com adição de objetos ópticos entre as 3 etapas. Por se tratarem de questões mais técnicas, e por não serem necessários na simulação, não são descritos aqui.

3 SIMULAÇÃO DA GERAÇÃO DE FEIXES PARCIALMENTE COERENTES

Agora com as ferramentas matemáticas em mãos, podemos desenvolver as simulações. Como mencionado no final da seção anterior, podemos implementar na simulação o mesmo raciocínio utilizado no experimento, pois a ideia da simulação é projetar um modelo computacional de um sistema real e realizar experimentos. Dessa forma temos um , ou uma análise prévia do experimento, de forma mais rápida.

Neste capítulo, veremos como simular um feixe parcialmente coerente, utilizando como ferramenta de programação a linguagem *Python* e o conhecimento adquirido sobre teoria de feixes PC. Em seguida, realizaremos uma análise, para determinar quais são os parâmetros a ajustar para obter um número mínimo de modos necessários na geração de cada feixe, com boa aproximação de distribuição de intensidade e DOC, em comparação com a curva teórica.

Em certas situações faremos o feixe propagar através de uma fenda dupla e por um conjunto de lentes, com objetivo de observar o efeito do *twist*. Todos os *scripts* utilizados serão disponibilizado em uma página no Github [29].

3.1 GSM MODOS COERENTES

Números de modos

Com intuito de aplicar tecnologicamente os feixes, estes devem ser gerados rapidamente para transmitir informações, como as ideias apresentadas por [30], cujas correlações são em segunda ordem para criptografar informações [31, 32]. Por isso, e sabendo que a rapidez para gerar um feixe está ligado aos números de modos, desejamos utilizar o menor número possível.

Na Decomposição em Modos Coerentes, os números de modos depende estritamente da distribuição da função peso ou auto-valor $\lambda_{n,m}$. Para o feixe GSM foi obtida a seguinte expressão :

$$\lambda_{n,m} = \frac{\pi}{a + b + c/2} \left(\frac{a + b - c/2}{a + b + c/2} \right)^{|m|/2+n}.$$

Modificando as constantes para simplificar a análise, com $q = \delta/\sigma$, temos que $a/b = q^2/2$, e normalizando a distribuição do auto-valor tomando como referência o primeiro modo, temos:

$$\lambda_N = \frac{\lambda_{n,m}}{\lambda_{0,0}} = \left(\frac{q + 1 - \sqrt{q^2/4 + q}}{q + 1 + \sqrt{q^2/4 + q}} \right)^{|m|/2+n}. \quad (45)$$

Fixado o valor do parâmetro q para um feixe, podemos calcular a distribuição dos auto-valores, variando n e m . A vantagem de se utilizar, a equação (45) em termo de uma razão, está associada a generalização da análise realizada, pois deverá se respeitar o tamanho da escala ou grande, desde que os parâmetros sejam mantidos na mesma proporção, resultando em uma análise mais geral. Como exemplo, podemos calcular a distribuição dos auto-valores fixando $q = 1$.

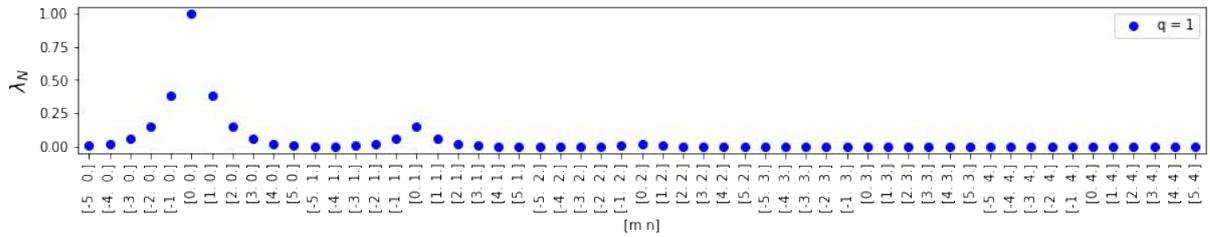


Figura 3 – Distribuição dos auto-valores do feixe GSM com $q = 1$ e n e m indo, respectivamente até 4 e 5.

Na figura 3, podemos notar que a distribuição de auto-valores decai rapidamente, para o caso com $q = 1$. Apesar de visualizarmos apenas os termos de ordem até $n = 4$ e $m = +5$, temos contribuições de ordens maiores, com valores cada vez menores. Realizando o cálculo para $q = 1$, $n = 19$ e $m = 2$, obtemos $\lambda_N = 5.72 \times 10^{-25}$ que é um valor pequeno em comparação ao caso com $n = m = 0 (\lambda_N = 1)$. No caso limite, quando m e $n \sim \infty$ temos, $\lambda_N \sim 0$. É interessante obter uma comparação entre diferentes valores do parâmetro q .

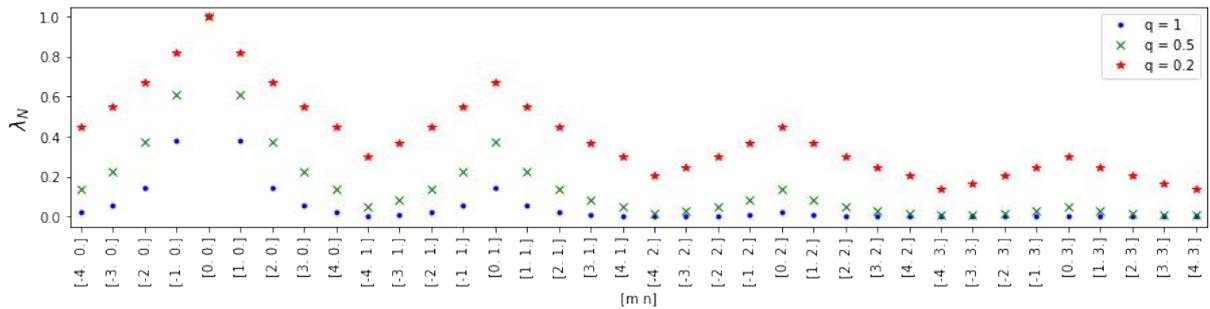


Figura 4 – Distribuição de auto-valores do feixe GSM para o método de DMC com n e m até 3 e 4, respectivamente.

Analisando a figura 4, notamos que valores de q próximo a 1 tendem a decair mais rápido em comparação a valores de q menores. Isso indica que necessitamos de menos modos para gerar o feixe, pois as contribuições de ordens maiores vão tornando-se aproximadamente zero mais rápido. Esta é uma consequência do fato do parâmetro q ser diretamente proporcional ao comprimento de coerência, uma CSD com pequeno valor de δ em comparação a cintura do feixe é também mais incoerente, logo são necessários mais modos incoerente para reproduzi-los.

A *priori*, o número de modos é finito, pois os auto-valores convergem a zero no infinito. Contudo, temos muitos termos de ordens altas que são desprezíveis. Isso nos motiva a realizar um truncamento para eliminar os valores de λ_N que são desprezíveis. A escolha do valor do truncamento é baseada em tentativa e erro, por isto devemos testar valores de truncamento para verificar se o resultado da simulação corresponde ao teórico, e, depois utilizá-lo nos experimentos. Em 2019, Bhattacharjee gerou experimentalmente os feixes GSM utilizando decomposição de Hermite-Gauss, com o valor do truncamento igual a $0.07 \times \lambda_{00}$ [33]. Para os feixe TGSM,c om decomposição em modos de Laguerre-Gauss, foi utilizado o valor de $0.015 \times \lambda_{00}$ [34].

Faremos a mesma análise através da simulação, variando o parâmetro q e observando a intensidade para diferentes valores de *cutoff* (truncamento). Para analisar, antes precisamos saber construir a intensidade resultante da soma incoerente, objetivo da seção seguinte.

Intensidade

No capítulo anterior, descrevemos como encontrar a expansão dos feixes usando dois métodos diferentes. Mencionamos também, de forma sucinta, o modelo do *setup* experimental, utilizado na simulação.

A primeira etapa é criar um campo inicial. No caso da simulação, criar uma onda plana com comprimento de onda de 780 nm, restrita em uma região de 128x128 pixels, no qual cada pixel tem largura de 10 μm . A segunda etapa é modular o campo inicial com a fase desejada, definidas pela decomposição em modos. No caso da decomposição em modos coerentes, cada máscara holográfica será dada por :

$$\Phi_{n,m}(\mathbf{r}) = \sqrt{\lambda_{n,m}} \psi_{n,m}(\mathbf{r}, \theta). \quad (46)$$

A expressão (46) nos informa que, para cada valor de n e m , temos uma máscara modulando o campo inicial por um modo de Laguerre-Gauss com seu respectivo auto-valor definindo um peso. Além do valor de n, m para gerar as máscaras de fase, precisamos definir o comprimento de onda, largura do feixe $\sigma = 0.15$ mm (fixo) e, por fim, o comprimento de coerência δ . Para obtemos a intensidade de cada termo, faremos:

$$I_{n,m} = |\Phi_{n,m}(\mathbf{r})|^2 = \lambda_{n,m} |\psi_{n,m}(\mathbf{r}, \theta)|^2. \quad (47)$$

Como realizaremos uma soma incoerente, temos :

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{n,m}. \quad (48)$$

Sabemos que a soma em (48) converge para o infinito. Como o número de modos até convergir podem ser muito grande, com contribuições insignificantes, definiremos um truncamento. Com todas as ferramentas matemáticas em mãos, obtemos o gráfico da distribuição de intensidade para o método coerente, variando δ e conseqüentemente q , como também o *cutoff* (figura 5), e comparando a distribuição.

$$I = \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma}\right). \quad (49)$$

Podemos concluir, por meio da figura 5, que o regime de *cutoff* entre 0.07 e 0.015 tem uma boa concordância entre a curva da simulação e a teórica, mesmo para valores pequenos de coerência, nos permitindo padronizar o valor do parâmetro. Nessa perspectiva, definiremos o *cutoff* como 0.015 para a fonte GSM e TGSM com decomposição de Laguerre-Gauss. Com

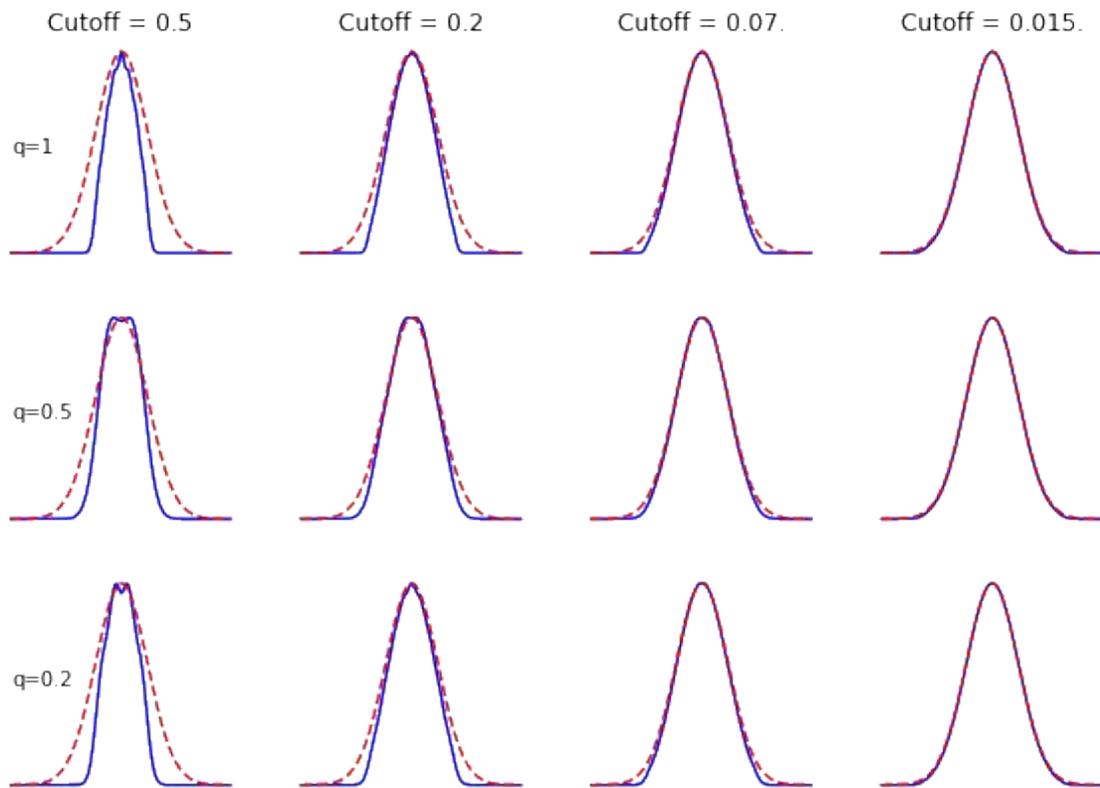


Figura 5 – Gráfico da intensidade $I(x,0)$ da simulação (linha azul) e teórico (linha vermelha) para a decomposição em modos coerente. Em cada colunas temos diferentes valores de truncamento e na linhas diferentes comprimento de coerência.

o *cutoff* determinado, podemos definir o número de modos para cada valor de q , refazendo o cálculo da distribuição de auto-valor.

Para o caso específico com $q = 1$ e *cutoff* = 0.015, por exemplo, necessitamos de 15 modos diferentes para gerar a feixe GSM apresentado na figura 6.

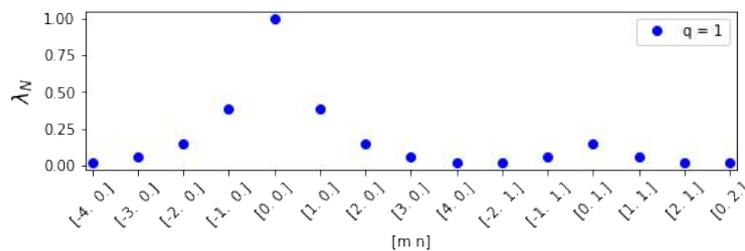


Figura 6 – Distribuição de auto-valor do feixe GSM com *cutoff* = 0.015.

No eixo horizontal, encontra-se a informação sobre as ordens dos modos de cada termo da decomposição, no qual vemos que a ordem radial varia de 0 a 2 e a azimutal de -4 a 4. Não são todos os termos, dentre essas ordens escolhidos que contribuem, somente aquelas que obedecem à condição de truncamento. O perfil de intensidade correspondente mostrado na figura 7.

Realizando o mesmo processo com comprimentos de coerência menores, obtemos, no caso com $q = 0.5$, que necessitamos de 45 modos diferentes. Ao variar as ordens de $n = 0$ até

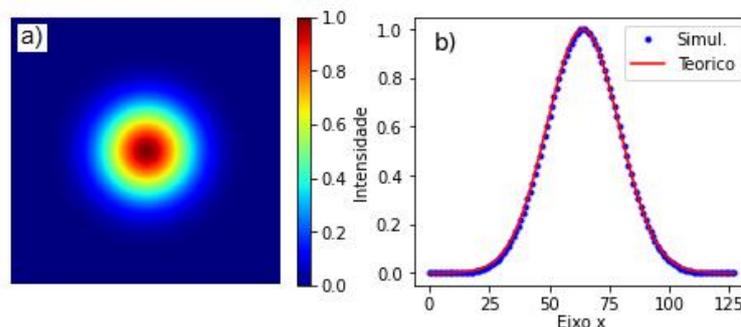


Figura 7 – a) Distribuição de Intensidade da simulação da fonte GSM em $z = 0$ com $q = 1$, utilizando DMC. b) $I(x,0)$ da simulação e do cálculo teórico

4 e $m = -8$ a $+8$ (figura 9), obtemos o perfil de intensidade da figuras 9.

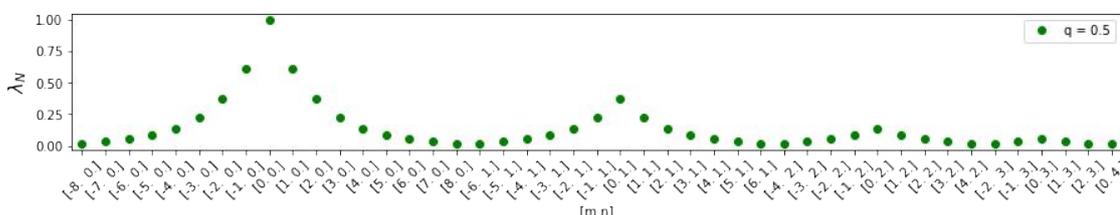


Figura 8 – Distribuição de auto-valores para o feixe GSM com $q = 0.5$

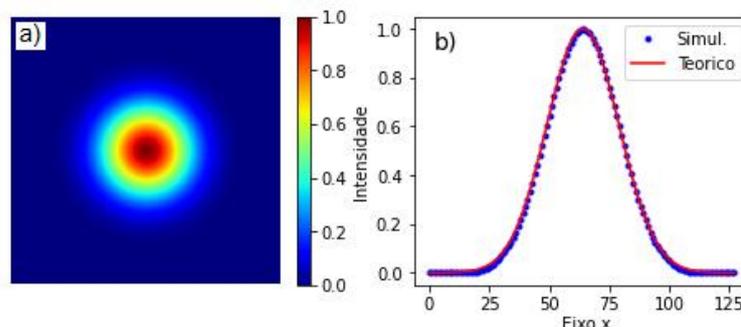


Figura 9 – a) Distribuição de Intensidade da simulação da fonte GSM com $q = 0.5$. b) $I(x,0)$ da simulação e do cálculo teórico.

Já no caso com $q = 0.2$, o número de modos é 253, uma quantidade alta para esse método. Se consideramos que as ordens dos modos dessa situação vão até $m = \pm 21$ e $n = 10$, o experimento poderia ser inviável, devido à dificuldade de gerar máscaras holográficas com ordens altas dos feixes Laguerre-Gauss. Todavia, essa dificuldade pode ser contornada, com uma escolha de *cutoff* mais alta, pois até 0.07 o perfil de intensidade simulado apresenta uma boa aproximação.

Grau de Coerência

No segundo Capítulo, falamos da função DOC que é a CSD normalizada, cujo papel é importante na descrição do feixe, pois nos informa sobre as correlações do campo em dois

pontos r_1 e r_2 . Então, esperamos que a simulação respeite com boa aproximação a expressão teórica do DOC de cada feixe. Para realizar a análise, primeiro determinaremos a expressão teórica do DOC para o feixe GSM. Substituindo (26) em (13), obtemos:

$$\mu(r_1, r_2) = \exp \left[\frac{(r_2 - r_1)^2}{2\delta^2} \right]. \quad (50)$$

Os gráficos da função DOC, para os dois casos, com diferentes comprimento de coerência:

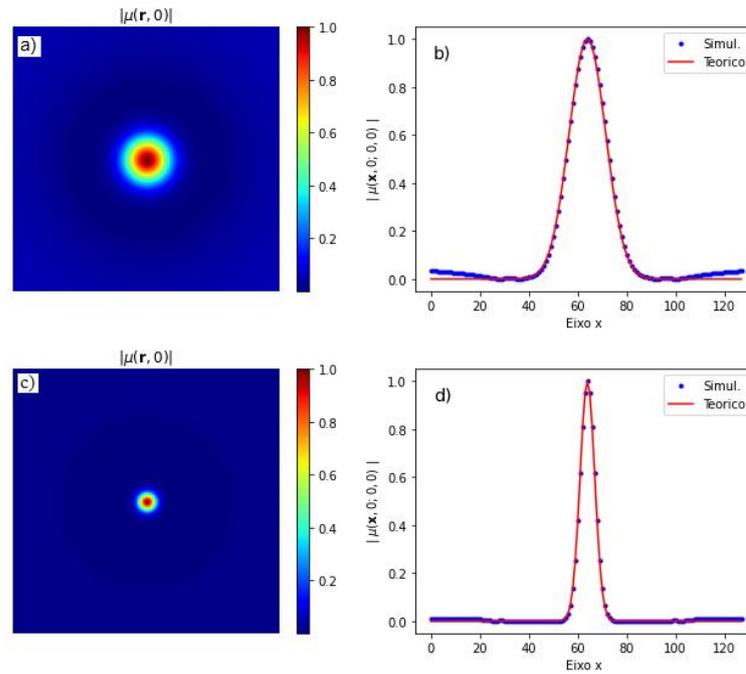


Figura 10 – a) e c) são os DOC da simulação com $r_2 = 0$ e $q = 0.5$ e $q = 0.2$ respectivamente. b) e d) são os DOC da simulação com $r_2 = y_1 = 0$ e $q = 0.5$ e $q = 0.2$ respectivamente com adição da curva teórica.

Na figura 10, podemos notar que a simulação aproxima bem o DOC à fonte GSM com a escolha de *cutoff* de 0.015, tanto para o valor de $q = 0.5$, utilizando 15 modos diferentes, quanto com $q = 0.2$ utilizando 253 modos.

Fenda dupla

Um método experimental para determinar o grau de coerência é utilizar a fenda dupla, observando os máximos e mínimos, de intensidade no padrão de interferência, com o objetivo de obter a visibilidade. Dessa forma, faremos o feixe GSM passar pela fenda dupla na simulação e, em seguida, calcularemos o valor médio da visibilidade.

Podemos visualizar o feixe em $z = 0$ na figura 11-a), a fenda dupla em b) e o padrão de interferência após propagar até uma distância z . Para o cálculo da visibilidade, necessitamos do máximo e mínimo do padrão de interferência. Diferentemente da situação com feixes coerentes os mínimos de intensidade não são todos iguais, logo devemos especificar que no cálculo da

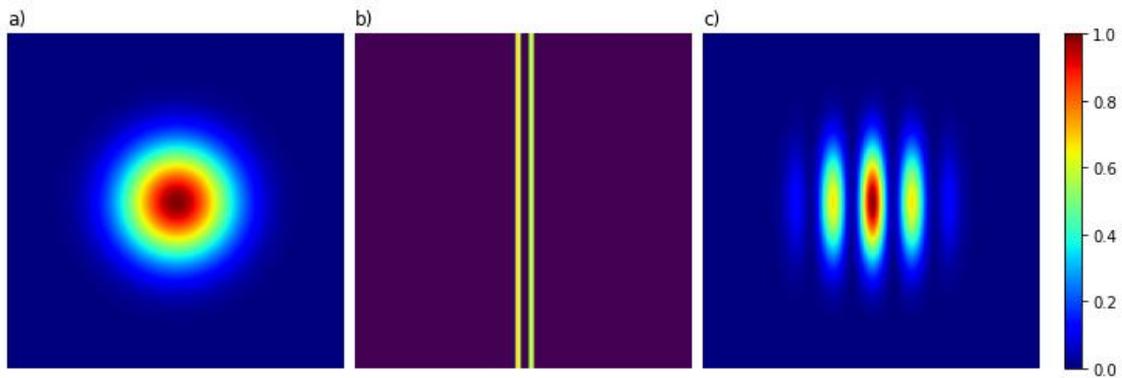


Figura 11 – a) Intensidade do feixe GSM para DMC com $z = 0$ e $q = 1$. b) Fenda Dupla. c) Distribuição de intensidade do padrão de interferência.

visibilidade de feixes parcialmente coerentes o mínimo utilizado deve ser o primeiro em relação ao valor máximo da intensidade. Segue um exemplo na figura 12, da utilização do resultado da figura 11 com $y = 0$ (linha central do padrão).

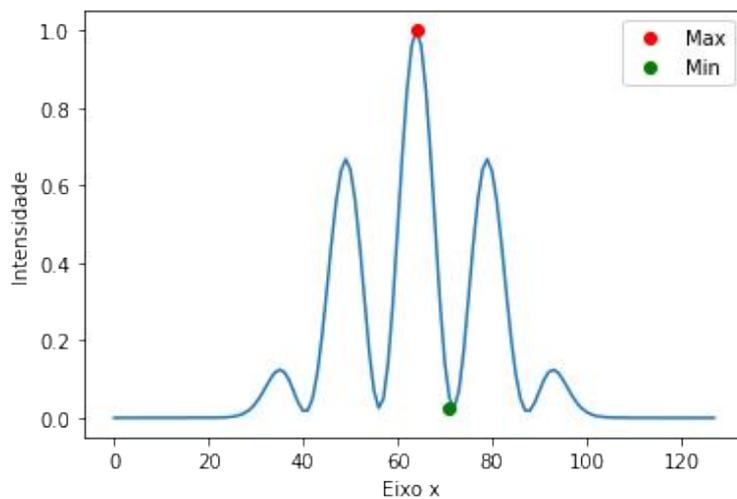


Figura 12 – Intensidade do padrão de Interferência com $y = 0$ e $q = 1$ para o feixe GSM utilizando o DMC

Na Figura 12, apresentamos apenas a interferência com $y = 0$, mas a imagem contém 128 valores com $y = -64$ a 64. Para o cálculo da visibilidade faremos uma média dos valores obtidos na região central de y . Considerando que a dimensão da imagem é 128×128 , podemos utilizar as posições de y entre -15 a 15. Ao realizar o cálculo para a figura 12, é obtido o valor de $V = 0.94$, evidenciando-se o fato do feixe GSM ser parcialmente coerente. A visibilidade para toda a região delimitada pode ser vista no seguinte plot:

Realizando o mesmo processo com $q = 0.33$, obtemos o valor médio da visibilidade igual a 0.654, menor que o anterior, caracterizando assim um feixe mais incoerente que o anterior. Na figura 14, podemos visualizar um valor de y da interferência considerado na visibilidade média. O fato de os mínimos de intensidade ficarem mais altos leva a uma diminuição da visibilidade, o que, visualmente, implica na dificuldade de distinguir as franjas de interferência.

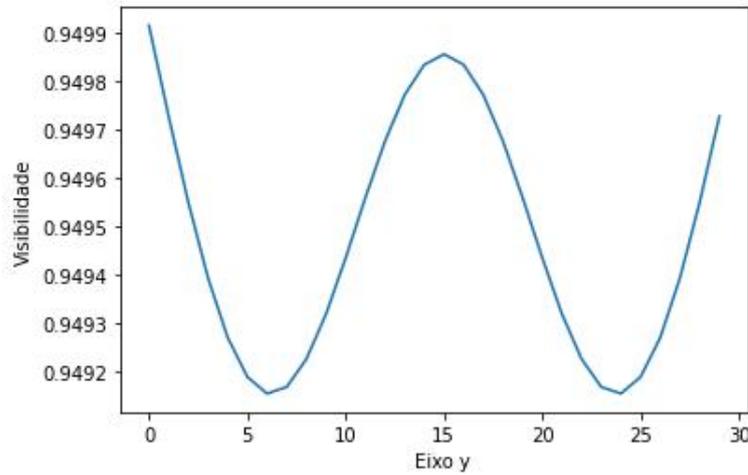


Figura 13 – Visibilidade da região entre $y = -15$ a 15 com $q = 1$ para o feixe GSM utilizando o DMC.

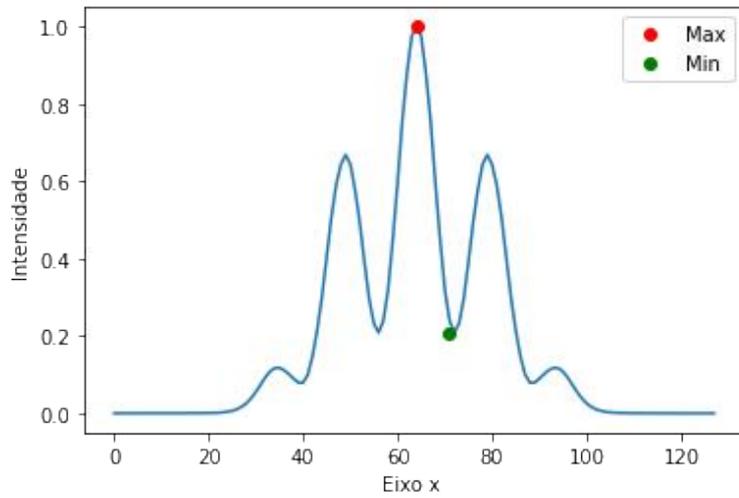


Figura 14 – Padrão de interferência com $y = 0$ de um feixe GSM

3.2 GSM PSEUDO-MODOS

Construiremos o feixe GSM utilizando a decomposição em pseudo-modos, e, dessa forma, tentar identificar quais são os parâmetros que deve ser ajustados na simulação, para obtemos uma boa aproximação da simulação com a teoria. A metodologia para analisar os números de modos difere do caso coerente, pois não temos funções pesos definidos em termos de auto-valores. O procedimento apresentado é inspirado em [3, 12], no qual se obtêm um valor aproximado do número de modos observando a função DOC teórica (50). Com esse, temos uma especificidade na hora de gerar as máscaras de fases do SLM, em comparação ao caso coerente (46), pois devemos multiplicar o produto entre a função peso com o *kernel* por uma exponencial com fase aleatória .

$$\Phi_l = \sum_n^N \sum_m^M \sqrt{p(v_{n,m})} H(r, v_{n,m}) e^{-i\chi_{n,m}^l}, \quad (51)$$

onde $\chi_{n,m}^l$ é um número aleatório para cada valor de l, n e m , entre o intervalo de $[0, 2\pi]$. O sub-índice l representa a quantidade de campos somados incoerentemente entre si.

Substituindo as expressões (23) e (24) em (51), obtemos :

$$\Phi_l(r, v) = \sum_n^N \sum_m^M \sqrt{2\pi\delta^2} \exp \left[-\pi^2\delta^2 v_{n,m}^2 - r^2/4\sigma^2 + 2\pi i r \cdot v_{n,m} - i\chi_{n,m}^l \right]. \quad (52)$$

Para compreender melhor as equações (51) e (52), utilizaremos a simulação e visualizaremos cada elemento da série. Nessa proposta, o método para gerar cada campo da série em (19) é utilizar a expressão (51), somando coerentemente para obter um pseudo-modo $\psi_l(r, v)$. Em seguida, devemos repetir l vezes o passo anterior, na simulação.

Como apresentado por Fei Wang, a ideia principal da representação modal é expressar a CSD em termo, de uma soma incoerente de modos[11]. Cada termo da soma incoerente é dito um modo na representação utilizada. Conseqüentemente, como obtido no caso DMC, devemos chamar o resultado da soma coerente (51) de pseudo-modo. Essa interpretação diverge do que é definido como pseudo-modo em [12]. De qualquer forma, a maneira como chamamos os termos não altera o método de geração da simulação ou das máscaras para os experimentos.

Note que, em comparação à decomposição coerente, em que teríamos para cada elemento da expansão um campo diferente, interpretando o pseudo-modo pela expressão (51), todos os termos são idênticos. Assim, o termo de fase aleatória tem papel importante, na soma incoerente, pois adiciona mais uma série na decomposição e uma distinguibilidade entre as fases, sem as quais, seria equivalente a repetir a mesma máscara l vezes. Para a mesma máscara, temos que somar coerentemente $N \times M$ campos e cada uma delas têm uma fase aleatória diferente. A seguir, mostraremos a fase e intensidade de algumas componente da mesma máscara, mantendo fixos o comprimento de onda e dimensão.

Na figura 15, podemos visualizar três campos que contribuem na soma coerente para compor um único pseudo-modo. Cada um dos campos contém diferentes valores de n e m , e têm a cara de uma função periódica (tipo senoidal), cuja periodicidade e direção de periodicidade dependem de n, m (via $v_{n,m}$), para qualquer fase aleatória $\chi_{n,m}^l$.

Já na figura 16, temos o resultado da soma coerente com valores diferentes de $N \times M$. É observado que a fase se torna mais aleatória com o aumento de N e M , ficando evidente quando comparamos a) e c), mas visualmente não se percebe tanta diferença entre b) e c). Então para "Qual valor de $N \times M$ é obtido uma boa modelagem do feixe GSM ? ". Para verificar quais são os valores usaremos a função DOC (50) com $r_2 = 0$ e $y_1 = 0$.

Na Figura 17, a curva(vermelha) mostra qual o comportamento ideal da função DOC. Da curva cinza até a azul, notamos visualmente uma diminuição da periodicidade na função DOC, devido ao aumento de pontos na variável v , implicando mais campos somados coerentemente, resultando em uma diminuição da periodicidade da função DOC. Sabendo que a função DOC, nos fala sobre o grau de coerência entre dois pontos, nesse caso com $r_2 = (0,0)$ e $r_1 = (x,0)$, a curva teórica nos informa que para o feixe GSM, a coerência é limitada em uma certa região e todos os outros pontos, deve ter incoerência total. Na curva cinza notamos que a função DOC

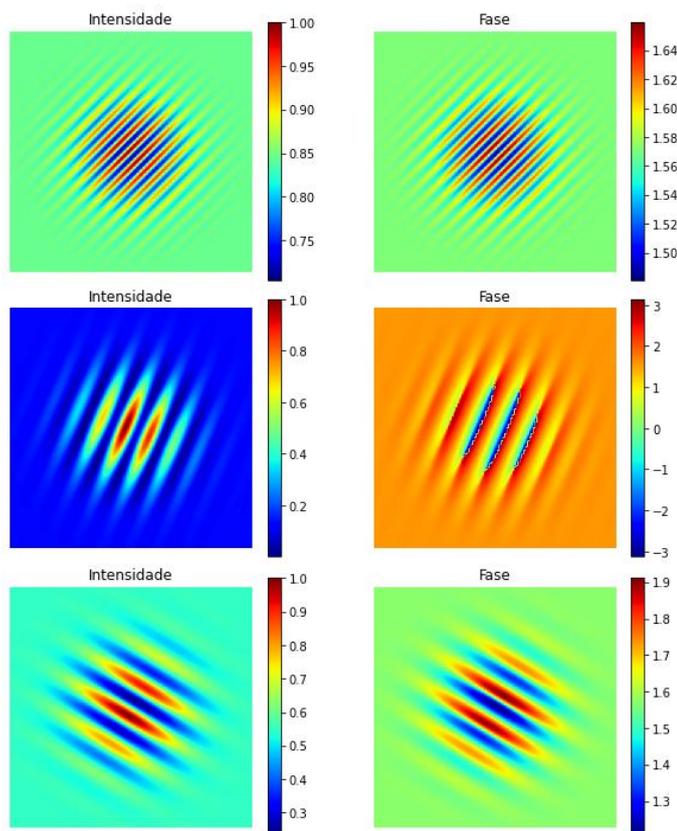


Figura 15 – Três Diferentes componente de n e m da mesma máscara para o feixe GSM, com $q = 0.2$

não obedece à curva teórica, devidos aos poucos campos somados. Porém quando aumentamos os números de campos, aumentamos também incoerência, pois estamos incrementando fases aleatórias e ao fim, em média elas se cancelam.

Os valores N e M podem aumentar e diminuir, com diferentes escolhas de dimensões e coerência. No artigo de referência para a escolha de *kernel* e função peso [11], os autores mostram que o número de modos é proporcional à razão entre a dimensão da simulação e o comprimento de coerência. Podemos notar a mudança na função DOC em termo dessas variáveis, observando os gráficos para valores diferente de coerência.

Na figura 18, observamos melhor o comportamento do número de termos na soma coerente com relação ao comprimento de coerência, mostrando que o número de termos é inversamente proporcional ao comprimento de coerência. Com o aumento do comprimento de coerência, a distância da periodicidade aumenta também. ficando de fora da área de simulação. Podemos ver bem essa diferença quando observamos o caso com $N, M = 4$.

Em todas as curvas apresentadas, o valor de $N, M = 20$ com 400 campos, já é suficiente para eliminar as grandes ondulações da curva. Ainda que para valores pequenos de coerência, respeita-se a curva teórica. Alguns artigos com resultados experimentais, consta que utilização de $N, M = 15$ a 23, já fornece um bom resultado, dependendo da expressão do *kernel* e peso [3, 12, 13] .

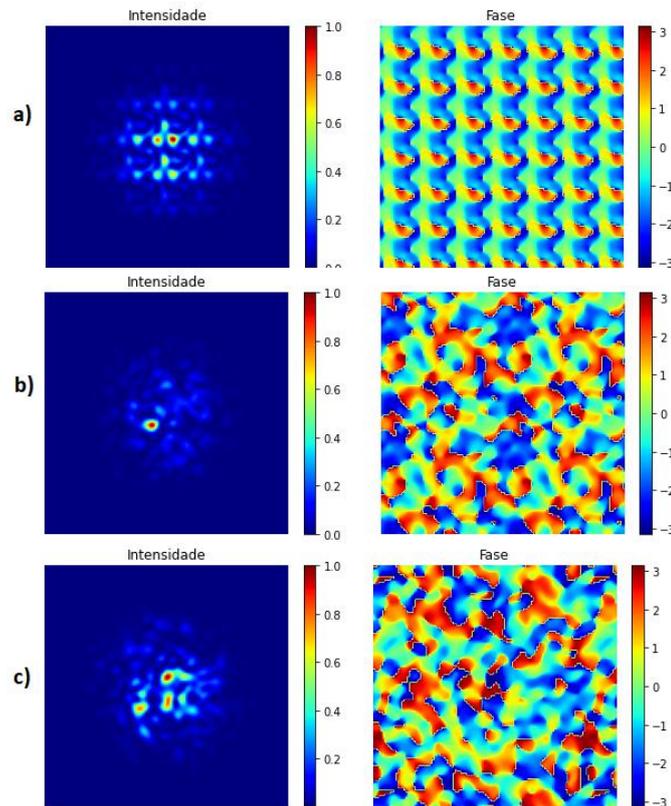


Figura 16 – Resultado da soma coerente com $q = 0.2$ para diferente valores a) $N, M = 5$. b) $N, M = 15$. c) $N, M = 25$. Na primeira colunas temos a Intensidade e a segunda a fase correspondente

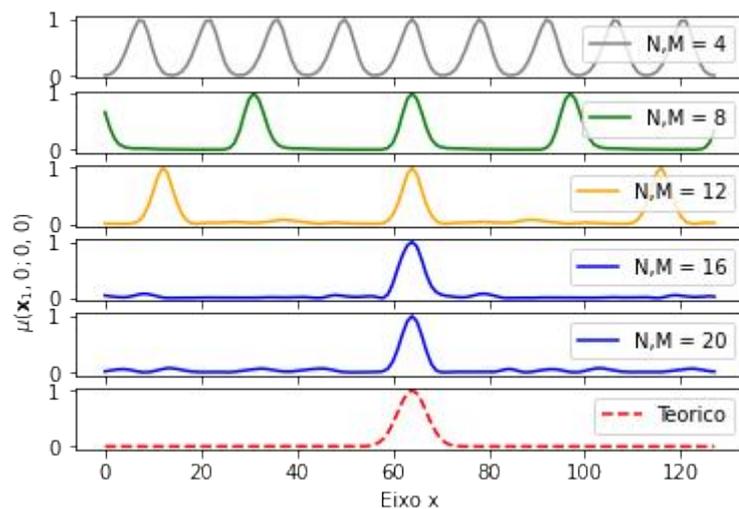


Figura 17 – $DOC(x,0,0,0)$ para o feixe GSM com $l = 50$ e $q = 0.2$

Alterando agora a dimensão e utilizando os mesmo valores de coerência, obtemos a figura 19. Comparando as curvas com $q = 0.2$ e $N, M = 20$ nas figuras 18 e 19, temos duas conclusões diferente. Primeiramente, na figura 18, o valor 20 fornece uma boa aproximação, mas na figura 19 vemos mais dois picos, mostrando não ser um número suficiente. Para padronizar o número N e M , e não haver esse problema com o aumento da dimensão, devemos respeita

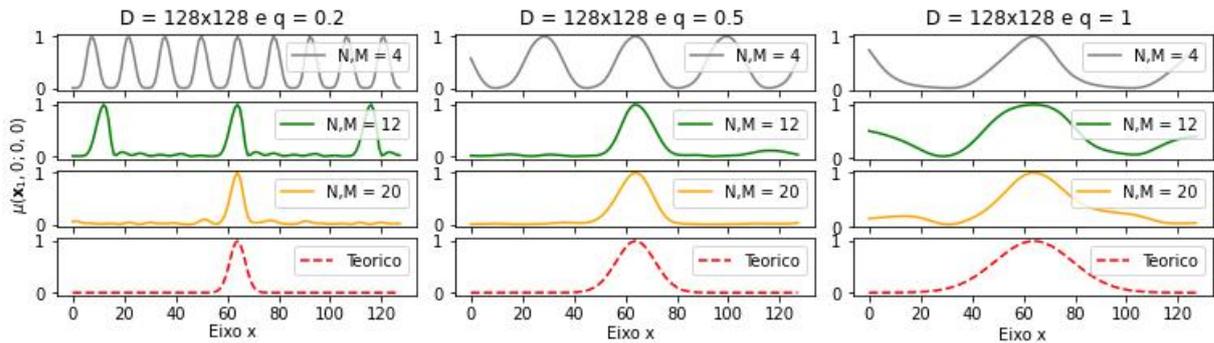


Figura 18 – Função $\text{DOC}(x,0;0,0)$ para o feixe GSM com $l=50$ e diferentes valores de comprimento de coerência para $D = 128 \times 128$.

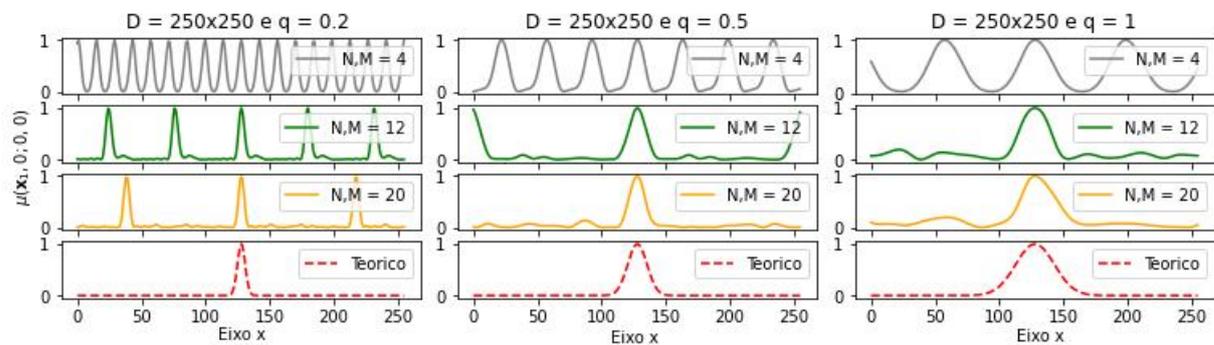


Figura 19 – Função $\text{DOC}(x,0;0,0)$ para o feixe GSM com $l=50$ e diferentes valores de comprimento de coerência para $D = 256 \times 256$.

a proporcionalidade entre a dimensão e o comprimento de coerência.

Tomando como exemplo, na figura 18, $N, M = 20$ e $q = 0.2$, o valor de $\delta = 0.03$ mm. Sabendo que a dimensão é 128×128 pixel e cada pixel têm comprimento igual a $10 \mu\text{m}$, a proporção deve ser $30/120 = 0.25$, ou seja, para que o $N, M = 20$ seja uma boa escolha, o comprimento de coerência deve cobrir no mínimo 25% da dimensão. Logo, se aumentamos a dimensão para 256 pixel, teremos que ajustar o comprimento de coerência, por meio de uma conta simples: $0.25 * 256 = 64$. Com isso, no mínimo, devemos ter algo próximo δ de 0.064 mm, justificando o caso da figura 19 com $q = 0.5$, em que o comprimento de coerência é 0.75 mm. Para ilustrar o que foi mencionado no parágrafo anterior, veja a figura 20 com os parâmetros $\delta = 0.064$ mm e $\sigma = 0.3$ mm para que q continue sendo 0.2:

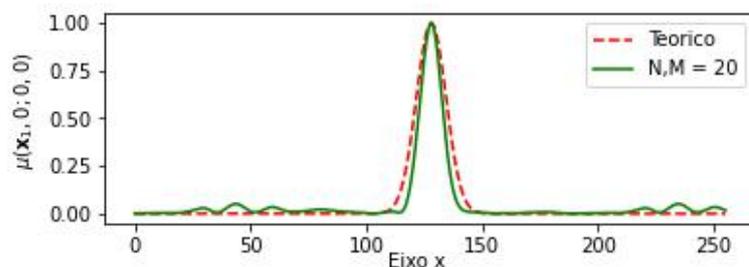


Figura 20 – Função $\text{DOC}(x,0;0,0)$ do feixe GSM com $l = 50$, $q = 0.2$.

Diferente do caso apresentado na figura 19, obtemos uma boa aproximação, após fazer

o ajuste adequado. Concluímos, com isso que o valor de N, M em torno de 20, fornece uma boa aproximação, desde que consideramos a relação do comprimento de coerência com a dimensão.

Agora, com a escolha adequada de N e M para gerar cada holograma, devemos repetir o processo l vezes. Mas podemos nos questionar qual é o menor valor para que haja uma boa aproximação. Na figura 17 a 20, foi utilizado $l = 50$ sem justificativa. Observaremos, agora, como o modulo da função DOC se comporta com o aumento de l . De acordo com [3, 12, 35], o módulo da função DOC é dada por :

$$|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = \sqrt{\frac{W^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)}}. \quad (53)$$

Utilizando a equação (19) com os pseudo-modos descrito pela equação (51), e substituindo na equação (53), obtemos como resultado:

$$|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = \frac{1}{l} \sum_{l=1}^l \left| \exp \left[i(\chi_{n,m}^l - \chi_{n',m'}^l) \right] \right|, (m, n \neq m', n'). \quad (54)$$

A figura 21 mostra o gráfico da equação (54).

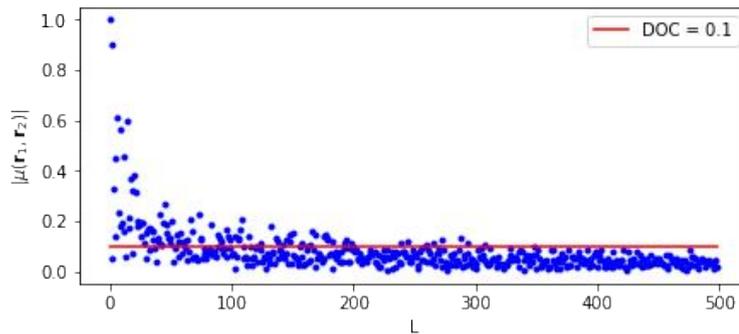


Figura 21 – Módulo do função DOC em termo no número de modos incoerentes

Observamos na figura 21, com o aumento do valor de l , a função DOC tende a diminuir. Isso implica que estamos aumentando a incoerência entre as máscaras do SLM, o caso limite considerando que l tende ao infinito, naturalmente o DOC tende a zero, obtendo a soma totalmente incoerente. Como vem sendo mostrado, no caso dos pseudo-modos sempre estamos considerando aproximações e truncamento, em valores que nos forneçam quantidade finitas e realizáveis.

Assim como no caso dos modos coerente, queremos o mínimo de pseudo-modos possível, para obtemos uma alta velocidade na geração dos feixes. Olhando com mais detalhe o gráfico, após $l = 200$, já se observa o valor de DOC abaixo de 0.1. Alguns trabalhos mostram que l entre 200 a 300, produz bons resultados experimentais, obtendo valores baixos para o módulo da função DOC, entre 0.03 a 0.06 [3, 12, 13]. Então podemos testar nossa simulação dentro desse intervalo de valores e verificar se podemos obter uma boa aproximação.

A figura 22 apresenta, nas duas primeiras colunas, a intensidade com diferente valores, de l . É evidente que há uma boa semelhança da curva teórica com a simulação na região não

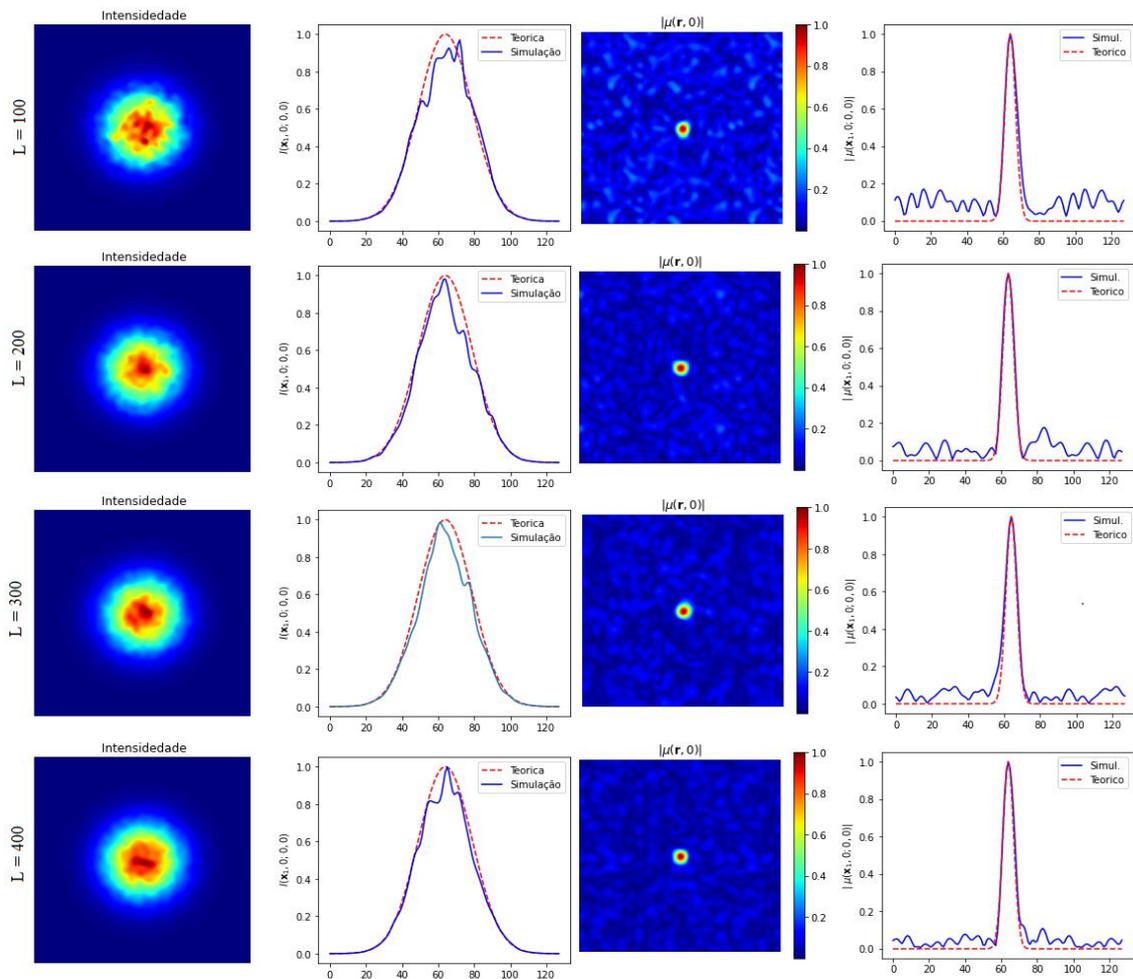


Figura 22 – Intensidade e DOC do feixe GSM com $M, M = 20, q = 0.2$ e diferentes valores de l para cada linha

central em todos os casos. Já a função DOC respeita bem a região central, mas não obtemos nada equivalente na região periférica, a qual exibe ondulações menores que decrescem com o aumento de l , devido a aumento da incoerência.

Fenda dupla

Novamente faremos o feixe devido a fonte GSM($z = 0$) passar pela fenda dupla. Em seguida calcularemos o valor médio da visibilidade.

Para determinar a visibilidade necessitamos dos máximos e mínimos do padrão de interferência. Como antes, consideramos as 64 posições centrais do padrão de interferência. Para o feixe GSM da figura 23, o valor de $V = 0.68$ confirma ser parcialmente coerente. Já para um comprimento de coerência maior, as franjas de interferência, apresentadas na figura 24, obtiveram visibilidade igual a 0.95 como o esperado, sendo maior que a anterior.

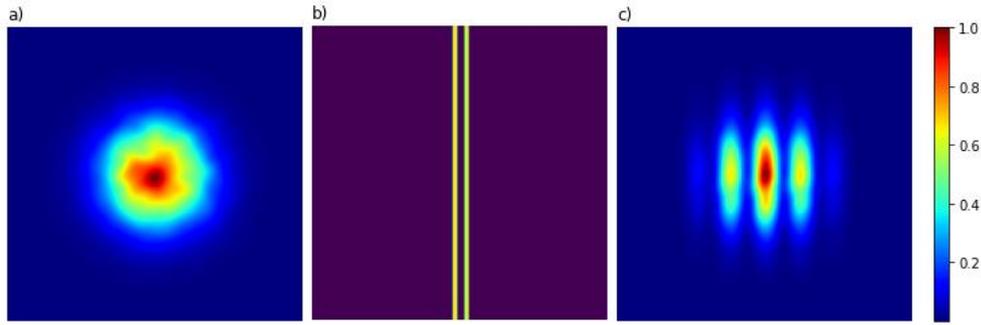


Figura 23 – a) Intensidade com $l = 250$ e $q = 0.3$ b) Fenda Dupla. c) Padrão de Interferência do feixe GSM co pseudo-modos.

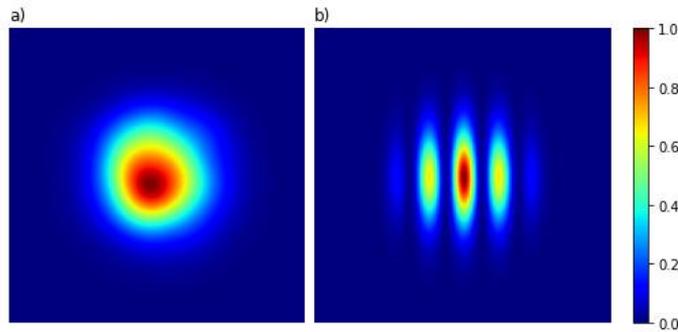


Figura 24 – Feixe GSM utilizando pseudo-modos com $q = 1$. a) Intensidade $z = 0$. b) Padrão de interferência.

3.3 TGSM MODOS COERENTES

Números de modos

O primeiro passo é analisar os auto-valores $\lambda_{n,m}$, dados pela expressão (43), para identificar o número de elementos da decomposição. Escrevemos o auto-valor em termo de a, b, k e normalizaremos a distribuição dos auto-valores, tomando como referência o primeiro modo.

$$\lambda_N = \frac{\lambda_{n,m}}{\lambda_{0,0}} = \left(\frac{b + \mu_0 k/2}{b - \mu_0 k/2} \right)^{m/2} \left(\frac{a + b - \sqrt{a^2 + 2ab + \mu_0^2 k^2/4}}{a + b + \sqrt{a^2 + 2ab + \mu_0^2 k^2/4}} \right)^{|m|/2+n}.$$

Para ilustrar o comportamento da distribuição dos auto-valores alguns gráficos serão apresentados a seguir, com os valores de comprimento de onda, largura do feixe ($\sigma = 0.15$ mm) e truncamento (0.015), iguais ao do caso GSM. Com todos os outros parâmetros iguais. As figuras 25 e 26 mostram as distribuições obtidas ao mudar o sinal do *twist*

Analisando as figuras 25 e 26, notamos que mudar apenas o sinal do *twist* não muda a quantidade de modos utilizada na decomposição, mas altera a ordem do modo azimutal trocando as ordens positivas pelas negativas.

Já na figura 27, fixamos o parâmetro de torção normalizado ($\tau_0 = \mu\delta^2 = 1$) e variamos o comprimento de coerência. Notamos que a curva vermelha (com o menor comprimento de

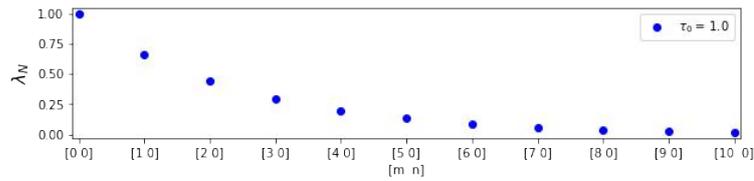


Figura 25 – Distribuição de auto-valores para o caso TGSM com $q = 1$ e $\tau_0 = 1$

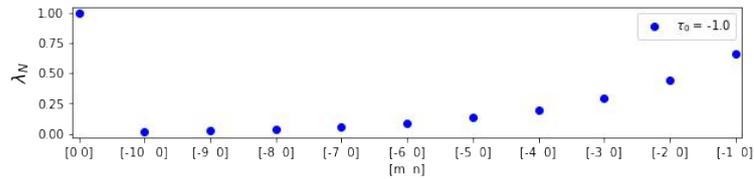


Figura 26 – Distribuição de auto-valores para o caso TGSM com $q = 1$ e $\tau_0 = -1$

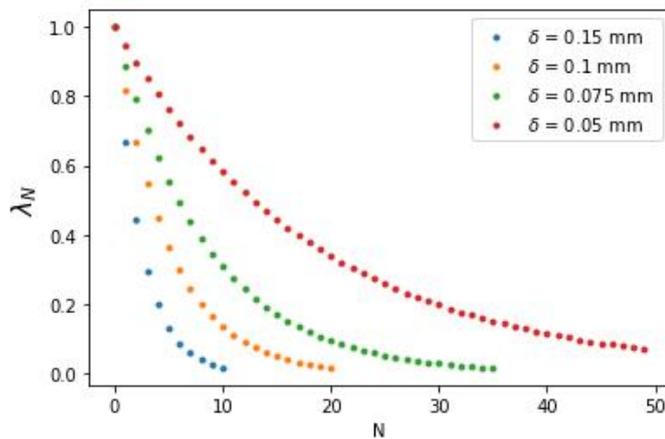


Figura 27 – Distribuição de auto-valores do feixe TGSM para diferentes comprimentos de coerência

coerência) apresenta 50 modos, enquanto a curva azul tem 11 modos. Comparando as curvas, observamos que o TGSM com menor coerência tem mais modos com auto-valores significativos, portanto a curva decai mais devagar em comparação aos de maior coerência.

Podemos afirmar que o número de modos é inversamente proporcional ao comprimento de coerência. Queremos saber agora como o módulo do parâmetro de torção influencia na distribuição de auto-valores.

Na figura 28, observa-se que os valores representados pelos pontos azuis, com maior valor de *twist*, decaem mais rápido e tem apenas 21 modos. Já os pontos vermelho com 27, os laranjas com 28 auto-valores, respectivamente têm suas distribuição alteradas devido ao *twist*, formando picos na distribuição de auto-valores. Isto indica que os modos dos polinômios de ordens maiores contribuem mais para *twist* pequenos, assim podemos afirmar que o número de modos é inversamente proporcional ao valor do *twist*.

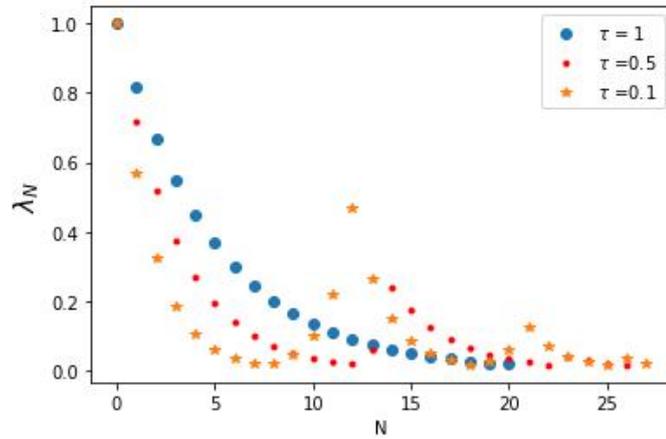


Figura 28 – Auto-valores dos feixes TGSM variando o módulo do *twist* com $q = 0.66$

Intensidade e DOC

Como no caso GSM, para gerarmos o feixe TGSM usaremos a expressão (46) para definir cada termo da soma incoerente.

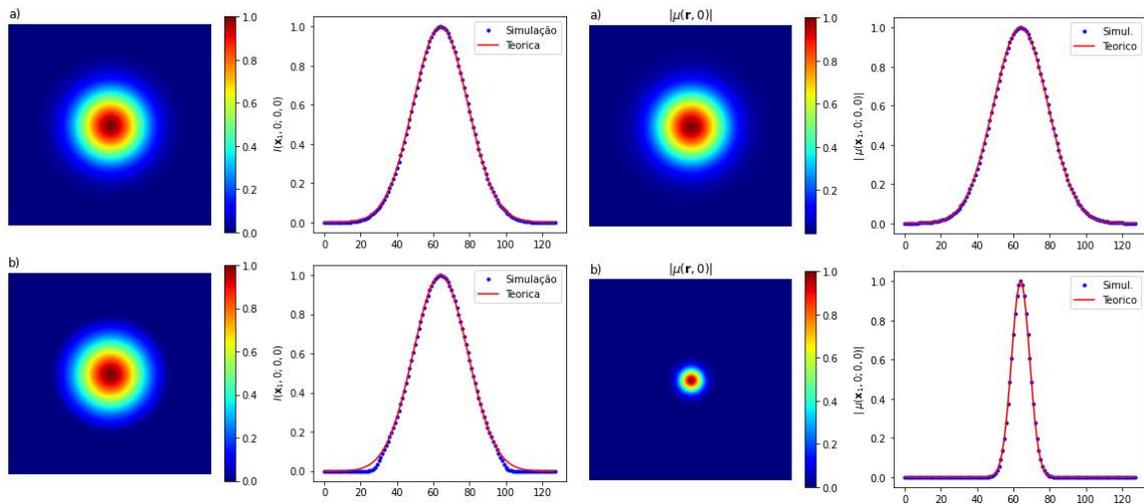


Figura 29 – Intensidade e função DOC do feixe TGSM com $\tau_0 = 1$ a) 1° linha com $q = 1$. b) 2° linha com $q = 0.33$.

Na figura 29, observamos que a simulação respeita bem, tanto a curva teórica da intensidade e da função DOC, quanto os casos com alta(a) e baixa(b) coerência. A expressão teórica da intensidade e função DOC com $r_2 = 0$ do TGSM é a mesma que a do feixe GSM, equação (49) e (50).

Fenda dupla

Obtido o feixe TGSM, podemos propagá-lo através da fenda dupla. No entanto, agora não queremos apenas observar a visibilidade para determinar o grau de coerência do feixe. Como no caso do GSM, queremos também verificar se o feixe apresenta o *twist*, pois o

comportamento da intensidade e da função DOC não nos informa sobre o efeito da torção na fase.

Apresentaremos duas formas que podem ser utilizadas no experimento ou na simulação, para verificar a existência da fase com torção. A primeira é usando a fenda dupla, que não é o método mais utilizado nos artigos científicos, mesmo aparecendo no trabalho publicado de Fridberg em 1994[36], o primeiro autor a utilizar o método para a classe de feixes com *twist*. Nos artigos experimentais consecutivo, utiliza-se um conjunto de lentes, o qual será descrito na próxima seção. Recentemente, no trabalho de Santos 2022, é demonstrada a implementação da interferência para os feixes TGSM [13].

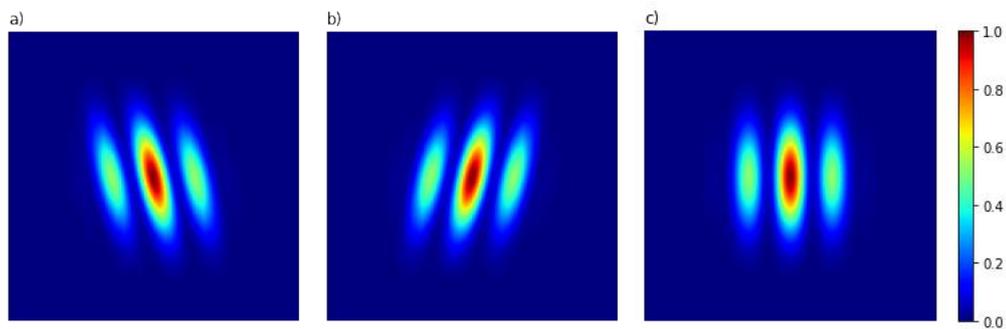


Figura 30 – Intensidade das franjas de interferência na fenda dupla devido ao feixe TGSM com $q = 0.5$ a) $\tau_0 = 1$, b) $\tau_0 = -1$, c) $\tau_0 = 0$

Comparando a), b) e c) na figura 30, podemos notar a influência do fator de torção na interferência do feixe TGSM após a fenda dupla. Em a), com $\tau_0 = 1$, as franjas de interferência inclinam para o sentido anti-diagonal, enquanto que $\tau_0 = -1$, em b), as franjas estão na diagonal, mostrando que o sinal do fator de *twist* altera a propagação do feixe. Em ambos os casos, a visibilidade é 0.8, mostrando que o valor do *twist* não afeta o grau de coerência.

Para entender o efeito, devemos ter em mente que o TGSM é formado por uma composição de modos, no qual somamos incoerentemente todas as contribuições. A decomposição em modos de Laguerre-Gauss pode ajudar a interpretar o motivo do efeito de rotação das franjas de interferência. Cada modo de Laguerre-Gauss que propaga até a fenda interfere consigo e propaga até o plano de observação. Se a carga topológica diferir de zero, o padrão das franjas de interferência inclinará para um dos lados. O processo deve se repetir para todos os termos da soma. Quando somamos todos os termos da decomposição, estamos somando também o OAM, e os pesos (auto-valores) de cada campo que afeta a contribuição do OAM a ele associado, moldando o valor do OAM médio do TSGM. Como é apresentado na figura 30 podemos ter um OAM médio positivo, negativo ou nulo, isso dependerá da distribuição de auto valores.

No início da seção, apresentamos como o *twist* afeta a distribuição de auto-valores. Agora podemos entender o motivo do feixe TGSM com o *twist* negativo apresentarem a ordem azimutal também negativa. No caso sem *twist*, a distribuição dos modos é dada de forma que

temos o mesmo número de modos com ordem azimutal positiva e negativa, para que em média o *twist* e OAM sejam zero.

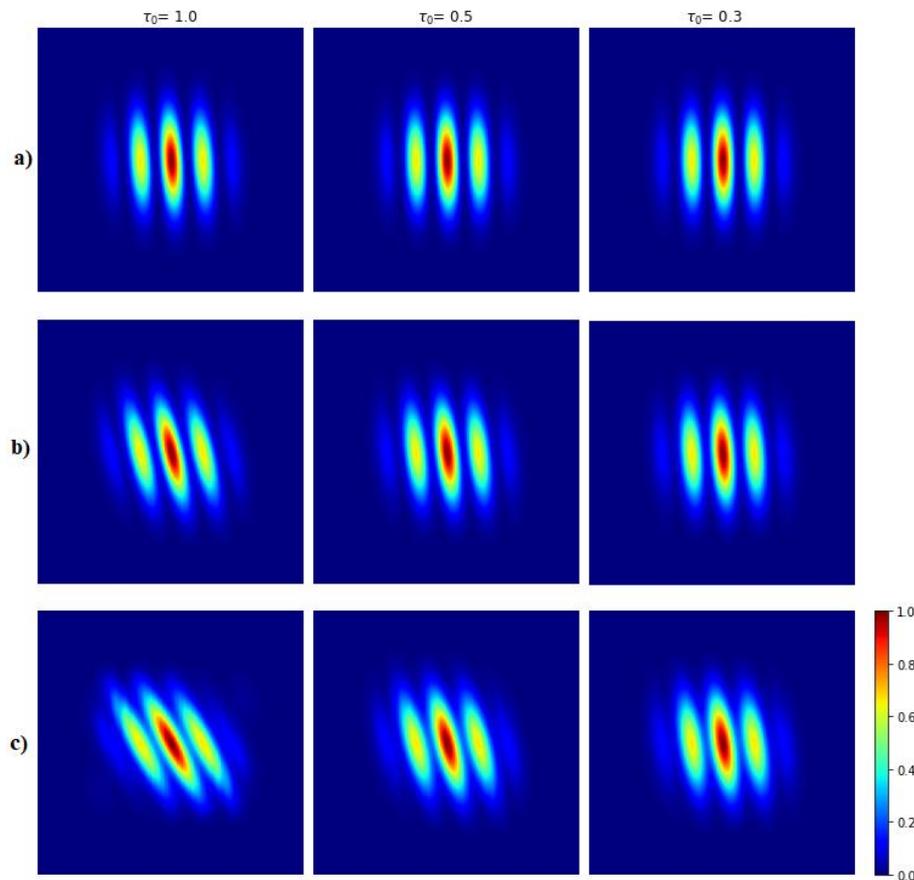


Figura 31 – Franjas de interferência do feixe TGSM utilizando DMC a) $q = 1$. b) $q = 0.5$ e c) $q = 0.33$

Sabemos que o *twist* é afetado pelo valor do comprimento de coerência (39), e podemos observar essa mudança utilizando o fenômeno de interferência. Nas franjas de interferência da coluna 1 da figura 31, podemos notar com clareza o efeito do *twist*, com diferentes valores de comprimento de coerência. O efeito é mais forte com comprimentos de coerência menores. Calculando a visibilidade para a primeira coluna, obtemos os valores de 0.94, 0.8 e 0.52 para a), b) e c), respectivamente. Podemos afirmar que feixes com menor grau de coerência tem o efeito do *twist* realçado, consequência de o comprimento de coerência ser menor.

Lentes

A *twist phase* é conhecida por rotacionar o feixe durante sua propagação. Contudo, o perfil transversal do feixe é simetricamente circular, como foi apresentado nos gráficos da distribuição de intensidade do feixe. Devido à simetria, não conseguiríamos observar o efeito de rotação. Uma técnica experimental utilizada para quebrar a simetria é através de um conjunto de lentes, uma esférica e uma cilíndrica, criando um efeito astigmático no feixe[4, 37].

Nas simulações, a lente cilíndrica foi ajustada para ter foco em $f_x = 50$ mm e $f_y = \infty$, já a lente esférica tem foco em $f = 100$ mm. Devido à diferença das distâncias focais, o feixe converge mais rápido no eixo x em comparação ao eixo y , quebrando a simetria circular. Podemos verificar esse efeito nas figuras a seguir.

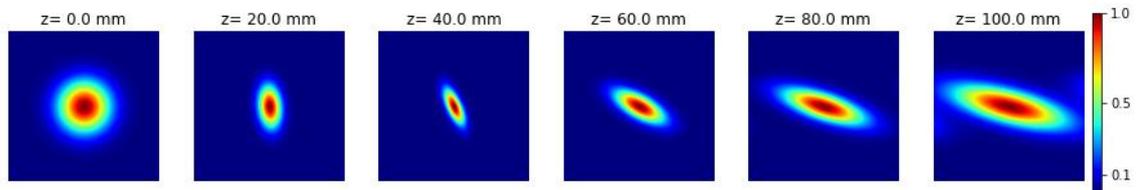


Figura 32 – Propagação dos feixes TGS após passar pelas lentes, com $\tau_0 = 1$ e $q = 1$

A figura 32, mostra a distribuição de intensidade para diferentes valores de z (distância de propagação após conjunto de lentes), com *twist* positivo, em que observamos que o feixe rotaciona no sentido anti-horário. Para valores de z maior que 10 cm o feixe continua rotacionando, mas devido à alta divergência apresentada as imagens simuladas com os parâmetros utilizados já não se são viáveis.

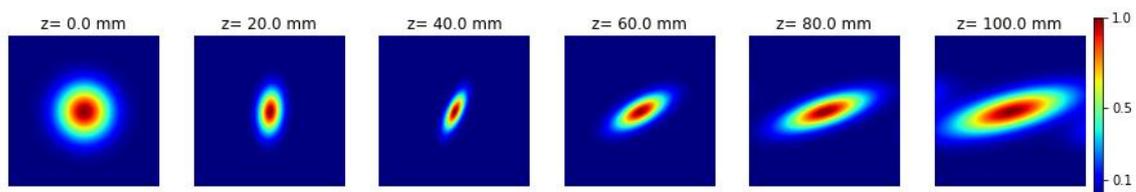


Figura 33 – Propagação do feixe TGS após passar pelas lentes, com $\tau_0 = -1$ e $q = 1$

Resultado análogo é mostrado na figura 33, com a mudança do sentido de rotação, devido à mudança de sinal do *twist*. Por fim, na figura 34, podemos ver, como a diminuição do módulo do *twist* afeta a propagação. Como mencionado o parâmetro de torção indica a "Intensidade" do efeito do *twist*, que diz respeito à rotação do feixe durante a propagação. Logo, para valores pequenos de τ_0 teremos uma rotação menos evidente, conforme mostra a figura 34.

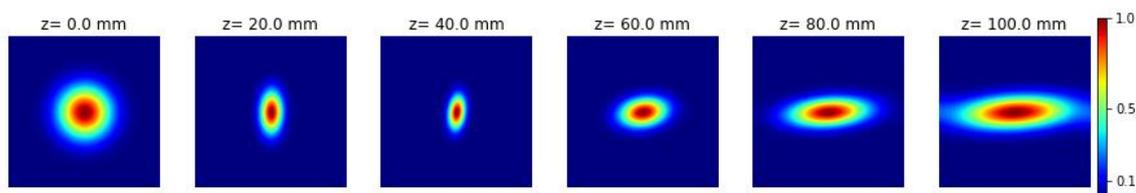


Figura 34 – Propagação do feixe TGS após passar pelas lentes, com $\tau_0 = -0.2$ e $q = 1$

3.4 TGSM PSEUDO-MODOS

Números de modos

O procedimento é análogo ao que foi descrito no caso GSM. Primeiramente, queremos saber qual o número mínimo de modos para gerar o TGSM. A expressão que modela a fase do campo é descrita em (51), mas agora o *kernel* e função peso são dadas por (35) e (36).

$$\Phi_l(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{n,m=0}^{N,M} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp \left[-\alpha \mathbf{v}_{m,n}^2 + \alpha \mu_0 k (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_{m,n})_{\perp} + i \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_{m,n} \right] \times \exp \left[-\mathbf{r}^2 (\alpha \mu_0^2 k^2 / 2 + 1/4\sigma^2) - i \chi_{n,m}^l \right]. \quad (55)$$

Cada máscara é descrita pela expressão (55). Para compor um pseudo-modo, é realizada uma soma coerente de $N \times M$ campos diferentes em dois pontos. O primeiro é a fase aleatória e o segundo é um deslocamento realizado pela variável $\mathbf{v}_{n,m}$. Como toda a expressão é dada por uma função exponencial, a intensidade de cada uma delas obedece a uma distribuição gaussiana em torno do ponto definido pelo deslocamento $\mathbf{v}_{n,m}$. As gaussianas que estão mais perto do centro têm peso maior, o que ilustramos através da simulação utilizando $q = 0.5$.

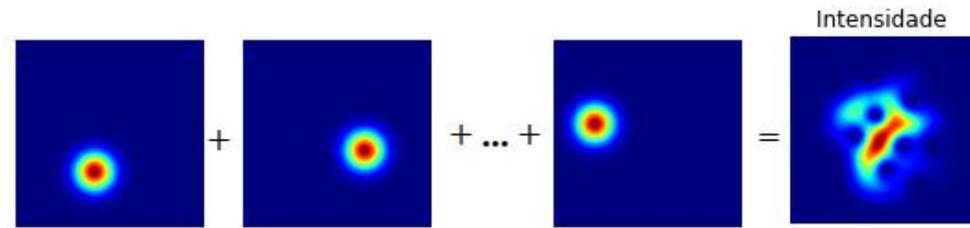


Figura 35 – Intensidade de cada elemento da soma coerente de um pseudo-modo usando para obter o feixe TGSM

Podemos visualizar na figura 35 alguns campos que compõem um único termo da soma coerente. Cada uma das gaussianas são deslocadas de acordo com seu valor $\mathbf{v}_{n,m}$ carregando uma fase aleatória. A escolha do número de campos utilizados na soma coerente influencia na intensidade e na coerência espacial do feixe, por esse motivo a escolha do número N, M é realizada observando ambas.

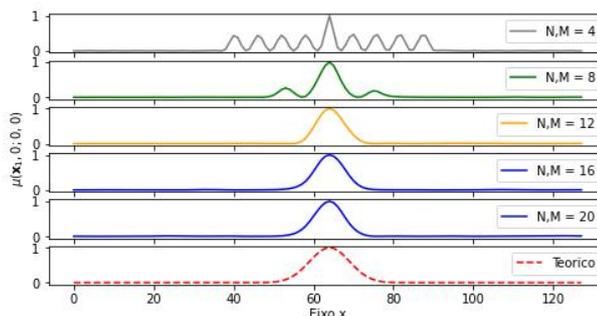


Figura 36 – DOC para diferentes valores de N e M do feixe TGSM, com $l = 200$ e $q = 0.33$

Na figura 36, observamos que valores de N, M acima de 12 já resultam em uma boa aproximação do DOC. No entanto, se considerarmos as situações com um valor maior de coerência essa quantidade pode ser menor. Já a distribuição de intensidade mostrada na figura 37 com $q = 0.33$. Visualmente, para $N, M = 12$, já se obtém uma boa aproximação, considerando que o feixe deve apresentar uma distribuição gaussiana. Para ter uma melhor visualização, se estamos tendo uma boa aproximação, podemos comparar com a curva teórica.

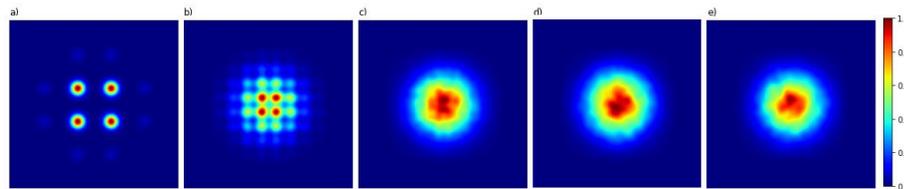


Figura 37 – Distribuição de Intensidade dos feixe TGS com os pseudo-modos com $q = 0.33$; a) $N, M = 4$. b) $N, M = 8$. b) $N, M = 12$. c) $N, M = 16$. d) $N, M = 20$

Do lado esquerdo da figura 38, temos o perfil transversal de intensidade $I(x, y)$ e a função DOC com $r_2 = 0$. Do lado direito temos as curvas comparativas entre a simulação e a teoria. Podemos afirmar por meio das imagens, que a simulação respeita a curva teórica, mas não tem boa aproximação como no caso coerente. Esperamos, com o aumento do números de campos (N, M) e da soma incoerente (l), que a simulação resulte em uma aproximação mais fidedigna com as curvas teóricas. Em relação ao número de campos somados incoerentemente, aproveitamos os resultados da análise realizada para o feixe GSM e, com isso, manteremos os valores de l entre 200 a 300, por mostrarem bons resultados.

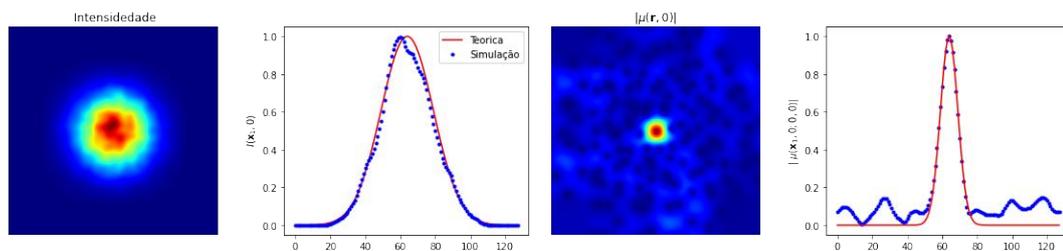


Figura 38 – Intensidades e DOC do feixe TGS utilizando os pseudo-modos com $l=200$, $q = 0.33$ e $N, M = 12$

Se compararmos as figuras 38 e 39, podemos observar que os pontos da simulação são mais próximos aos teóricos no segunda caso, e o $DOC(x, 0; 0, 0)$ na região periférica tem ondulações mais suaves.

Fenda dupla

Na seção anterior, observamos que com N, M maior que 12 e l entre 200 e 300 já obtemos uma boa aproximação para fonte TGS. Com o objetivo de verificar se há *twist*, faremos o feixe TGS passar pela fenda dupla e propagar até uma distância z . Ajustado os

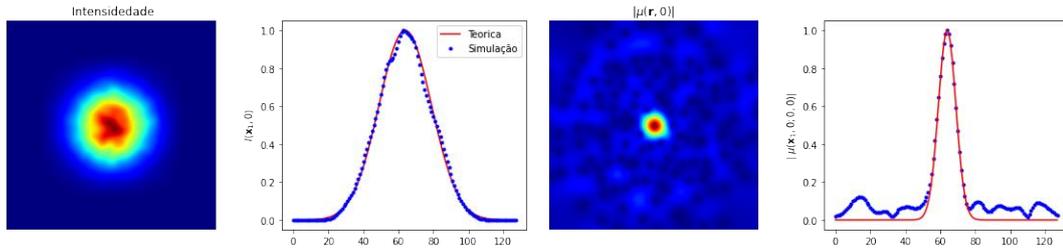


Figura 39 – Intensidades e DOC do feixe TGS utilizando os pseudo-modos com $l=300$, $q = 0.33$ e $N, M = 20$

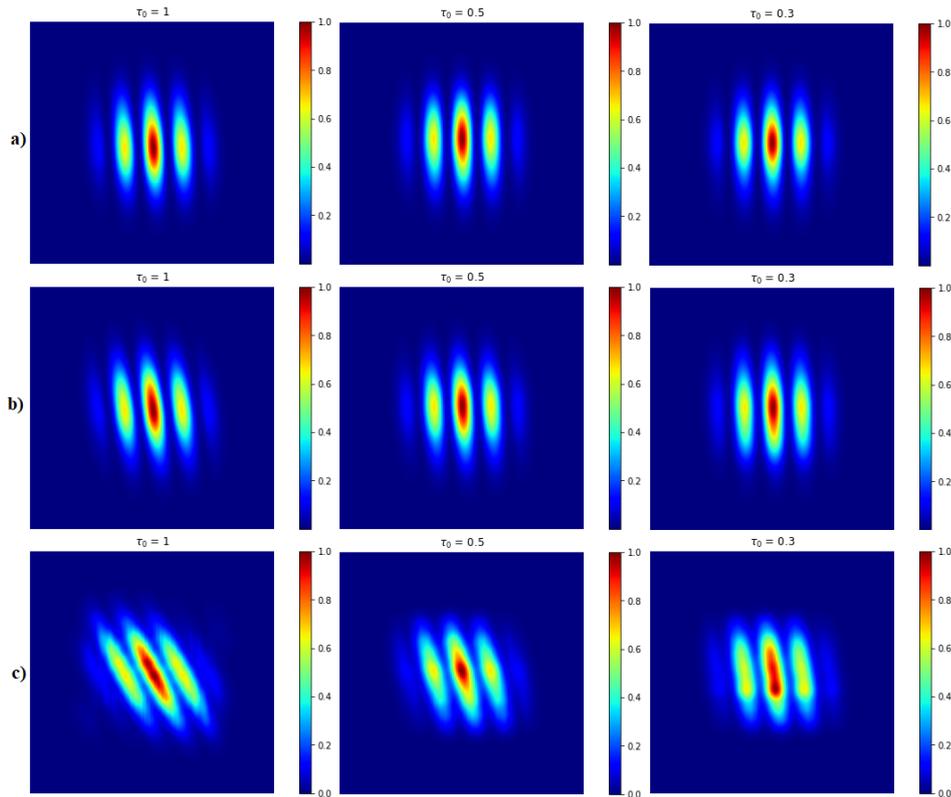


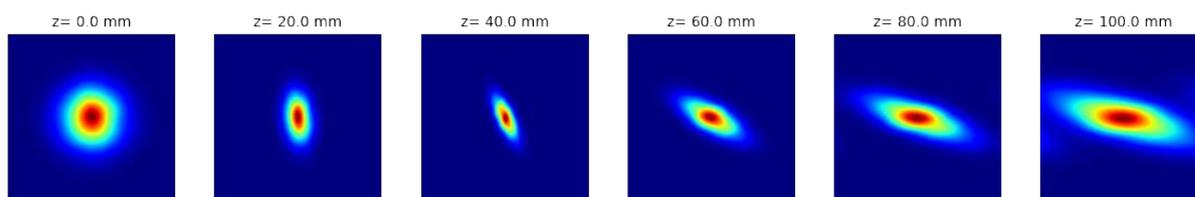
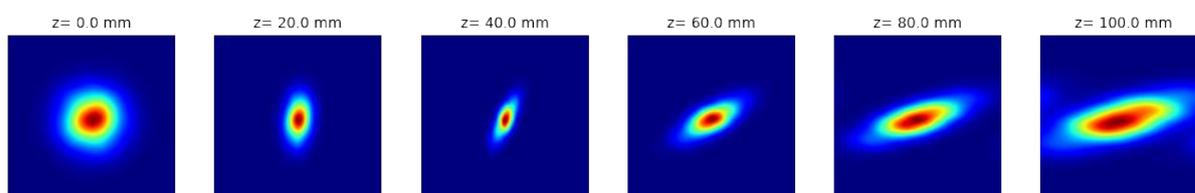
Figura 40 – Franjas de interferência do feixe TGS com os pseudo-modos a) $q = 1$. b) $q = 0.5$ e c) $q = 0.33$

parâmetros em $l = 250$ e $N, M = 16$ podemos obter a distribuição de intensidade da franjas de interferência como apresentado na figura 40. Assim na linha a) temos $q = 1$, em que é difícil visualizar o efeito da torção por causa da alta coerência. Já na linha c) fica bem evidente que o efeito da torção é acentuado quando diminuimos o valor da coerência, como prevê a teoria .

Lentes

O mesmo pode ser feito com o conjunto de lentes, usando a lente cilíndrica com foco em $f_x = 50$ mm e $f_y = \infty$ mm, e a lente esférica com foco em $f = 100$ mm.

As figuras 41 e 42 mostram a distribuição de intensidade do feixe propagado após o conjunto de lentes, para *twist* positivo e negativo, respectivamente. É possível notar, a existência do *twist* pela rotação do perfil do feixe durante a propagação, no caso com *twist*

Figura 41 – Propagação do feixe TGSM com os pseudo-modos usando $\tau_0 = 1$ e $q = 1$ Figura 42 – Propagação do feixe TGSM com os pseudo-modos usando $\tau_0 = -1$ e $q = 1$

positivo temos a rotação no sentido anti-horário e com *twist* negativo para o sentido horário. Comparando a observação da torção do feixe TGSM entre a fenda dupla e o conjunto de lentes, fica evidente que no caso com alto comprimento de coerência (q próximo de 1, figura 40-a), mesmo $\tau_0 = 1$ é difícil de visualizar a torção, mas com lentes não (figura 41 e 42).

4 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS

Nos capítulos anteriores, detalhamos a descrição teórica dos métodos e, por meio da simulação, geramos os feixes. Mostramos também como fazer a escolha dos parâmetros na soma incoerente para obtermos uma boa aproximação da função DOC e da intensidade para o caso GSM e TGSM.

Nesta seção, temos como objetivo realizar uma análise comparativa dos métodos de decomposição modal e identificar quais são as vantagens e desvantagens em cada situação.

4.1 GSM

Iniciaremos com o caso da fonte GSM, usando os parâmetros do capítulo anterior, como o comprimento de onda, a dimensão 128x128pixel, e a largura do feixe igual a 0.15 mm. No capítulo 3, foi elaborada uma análise sobre a da quantidade de modos utilizada na soma incoerente. Então, comparamos as intensidades produzidas com os dois métodos, em duas situações: na primeira, com um valor alto de coerência (compatível com a largura do feixe); e na segunda para um valor baixo de coerência (menor que a largura do feixe) $\delta = 0.15$ mm e $\delta = 0.05$ mm para cada situação respectivamente, trabalhando sempre com a perspectiva de utilizar poucos modos.

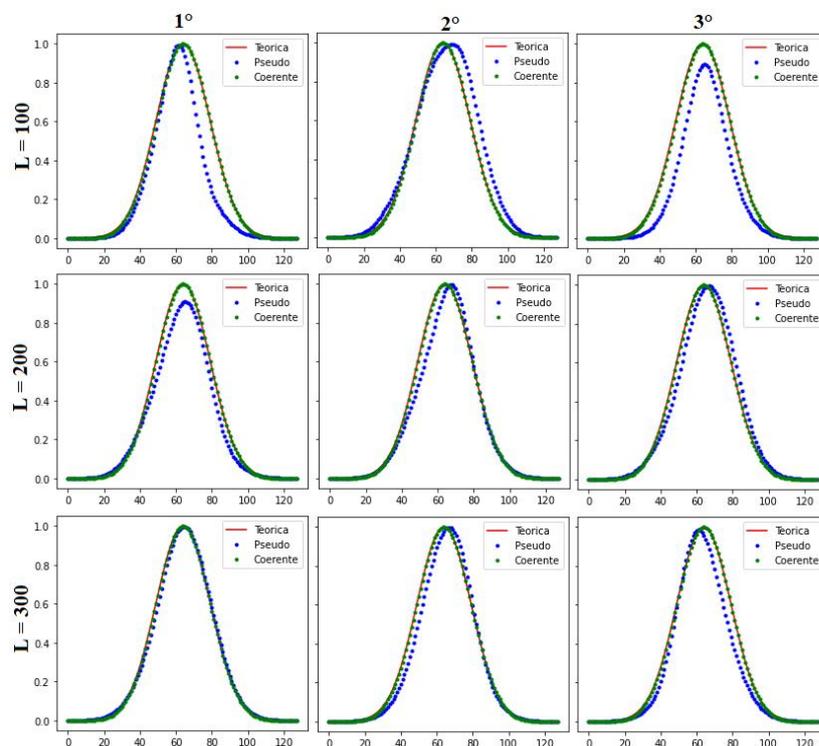


Figura 43 – Intensidade para diferente valores da soma incoerente. Em cada linha, variamos o número de pseudo-modos l , e em cada coluna temos uma realização da simulação com o mesmo parâmetro. Na DMC foram utilizados 15 modos ambos com $\delta = 0.15$ mm que equivale a $q = 1$

Lembramos que, no caso da decomposição em pseudo-modos, temos mais uma soma, além da incoerente, a soma coerente realizada para construir uma máscara de fase. Como a análise tem o intuito de pensar na perspectiva experimental no laboratório, essa soma não é contabilizada no tempo de execução do experimento, dado que o processo da soma coerente será aplicado apenas na preparação das máscaras (antes da realização experimental). Se a aplicação envolver uma construção para uso imediato da máscara de fase no SLM, então devemos considerar o tempo de execução da soma coerente.

Independente disso, o método de decomposição em modos coerentes leva vantagem por não necessitar da soma coerente. A figura ?? apresenta as curvas teóricas do feixe GSM, cuja simulação utiliza os modos coerentes e os pseudo-modos. Para os casos coerentes, foram utilizados apenas 15 modos. Ainda na mesma figura, cada linha representa diferentes valores de soma incoerente de pseudo-modos com $N, M = 20$, e cada coluna representa uma nova realização da simulação. A simulação foi repetida 3 vezes, para evidenciar o caráter de o feixe produzido pelos pseudo-modos não serem sempre igual devido à fase aleatória. Pelo mesmo motivo, em alguns poucos casos, quando $l = 100$, obtemos uma boa aproximação, mas temos que ficar repetindo a simulação. Com o aumento de l , aumentamos a probabilidade de obter, em qualquer realização, um caso que mais se aproxime da curva teórica. Essa argumentação também pode ser observada no gráfico da figura 21, pois os pontos do módulo do DOC não são bem definidos por uma curva, há uma flutuação dos pontos. O que podemos afirmar é que, a partir de $l = 200$, as flutuações devem ser abaixo de 0.1 .

Portanto, a decomposição em modos coerentes apresenta vantagem relação ao números de modos utilizados. Se observarmos a figura ??, notamos uma ótima aproximação com apenas 15 modos; enquanto são necessários 200 pseudo-modos para obter uma boa aproximação. Em contrapartida, necessitamos de 15 modos diferentes de Laguerre-Gauss, conforme a distribuição apresentada na figura 6, para valores relativamente altos de comprimento de coerência. Se diminuirmos a coerência, precisaremos de ordens mais altas de Laguerre-Gauss, que em certo ponto tornam-se inviáveis experimentalmente, representando assim uma desvantagem.

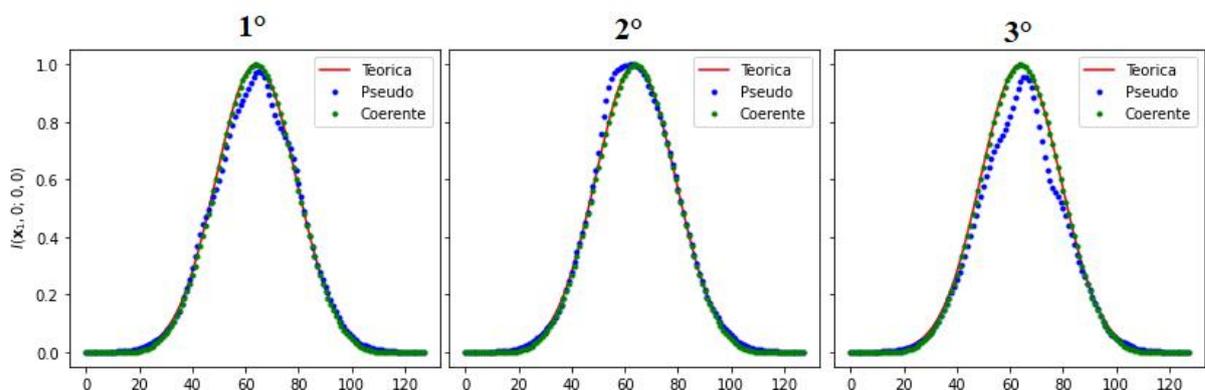


Figura 44 – Intensidade do feixe GSM com $q = 0.33$ utilizando os pseudo-modos com $l = 300$ e a DMC com 91 modos.

Auto-valores correspondente a o feixe GSM da figura 42 :

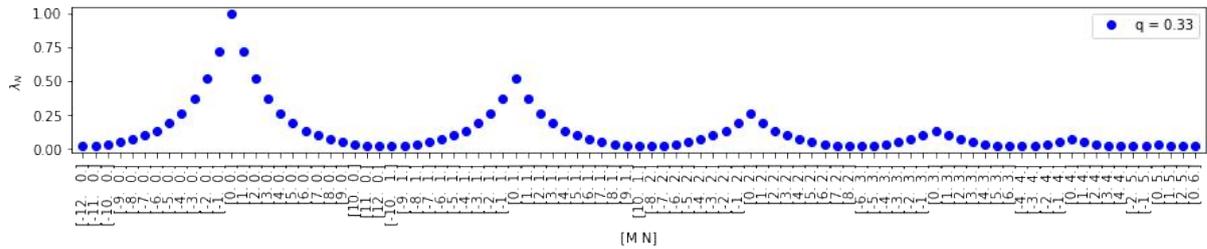


Figura 45 – Distribuição dos autovalores do feixe GSM com $q = 0.33$

A figura 44 mostra os gráficos de distribuição de intensidade para a situação de baixa coerência mencionada no início da seção, isto, com comprimento de coerência menor que a largura do feixe. Nesse caso, fixamos $l = 300$ e realizamos novamente 3 vezes, para ilustrar melhor o método do pseudo-modo. Para a expansão em modos coerentes, o número de modos são determinados pelos auto-valores acima do valor de truncamento. Como apresentado na figura 45 são usados 91 modos com ordem radial variando de 0 a 6 e azimutal de -12 a 12. Na figura 44, observamos a intensidade gerada por percebemos que, no caso dos pseudo-modos, não é tão bem respeitada a região central em duas das 3 realizações.

Tomando um valor ainda menor de comprimento de coerência de $\delta = 0.03$ mm, que equivale a $q = 0.2$, ma expansão em modos coerentes, o número de modos é 254, com ordem azimutal variando de -21 a +21 e radial até 10 .

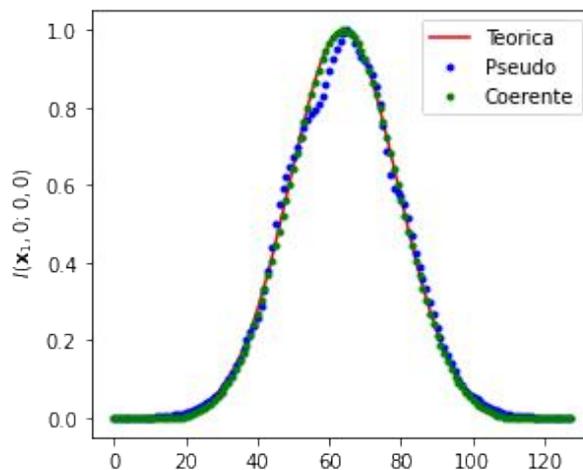


Figura 46 – Intensidade com 300 pseudo-modos e 254 modos coerente do feixe GSM $\delta = 0.03$ mm

Em geral, vemos que o caso coerente resulta em uma aproximação mais fidedigna (figura 43,44 e 46), como também tem um menor números de modos. Podemos atribuir a alta fidelidade em comparação ao caso dos pseudo modos, pensando em cada elemento da soma incoerente. Como no caso coerente, todos os feixes de Laguerre-Gauss têm cinturas bem definidas e iguais, devido a sua simetria radial no termo de intensidade. Quando realizamos a soma incoerente, os feixes tendem a continuar respeitando os mesmos valores. No caso dos pseudo-modos, cada termo da expansão não tem distribuição bem definida como demonstrado

na figura 16-c e 35. Há uma delimitação de uma região que não respeita, no entanto não há uma homogeneidade na distribuição gaussiana. Em um termo da soma incoerente, observamos regiões com mais intensidade e outras com menos, resultante da soma coerente realizada e da fase aleatória.

É importante também que os feixe gerados obedecem à função DOC, pois ela nos informa sobre a correlação da fase dos campos. Portanto, iremos novamente analisar as situações, com alta e baixa coerência, relativa largura do feixe (figura 47). Da mesma forma que a distribuição de intensidade, o método coerente apresenta maior respeito em relação à curva teórica. Podemos questionar se o mesmo ocorre quando temos menos coerência.

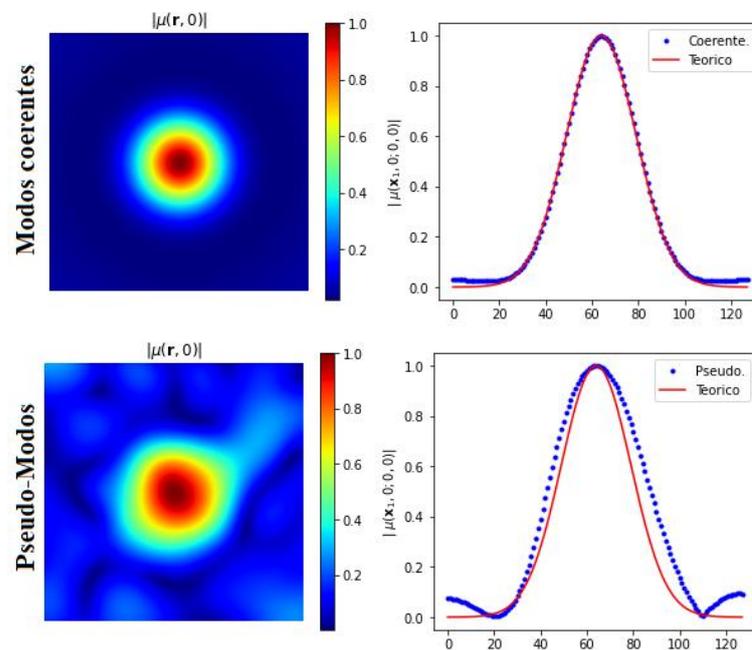


Figura 47 – DOC com $q = 1$ do feixe GSM. Na primeira linha, o caso DMC. Na segunda linha temos a decomposição de pseudo-modos com $l = 300$

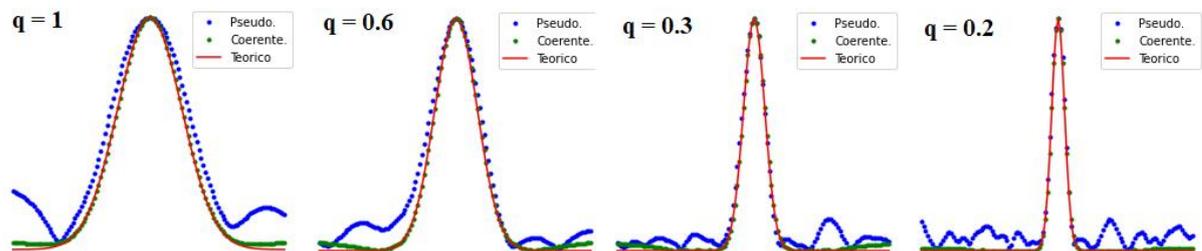


Figura 48 – DOC para diferente comprimento de coerência para o feixe GSM com $l = 300$

Na figura 48, é apresentada uma sequência de curvas da função DOC para diferentes valores de coerência. Lembrando que o símbolo $q = 1$ equivale a $\delta = 0.15$ mm e consequentemente $q = 0.2$ é $\delta = 0.03$ mm. A partir dos 4 gráficos, com valores baixos e altos de comprimento de coerência, notamos que aqueles com $q = 0.2, 0.3$ e 0.6 apresentam uma boa aproximação com a curva teórica na região central e pequenas ondulações fora dela, mas no

caso $q = 1$ o método do pseudo-modo não apresentou uma boa aproximação nas bordas e na região central, pois, tanto na figura 47 quanto na figura 47, os pontos da simulação não tem uma fidelidade boa com a curva teórica.

Para o feixe GSM, podemos concluir que o método de decomposição em modos coerentes utilizando como base os modos de Laguerre-Gauss, leva a uma ótima aproximação da curva teórica de intensidade e do DOC. Em contrapartida, o número de modos aumenta com a diminuição do comprimento de coerência, podendo se tornar um fator limitante pensando em perspectivas experimentais, pois necessita de ordens altas. Nas situações com alta coerência, o número de modos é aproximadamente 30 vezes menor se comparado ao método dos pseudo-modos, mas com a diminuição da coerência o número de modos aumenta. Se a coerência for pequena (próximo de $q = 0.2$), a quantidade chega a ser equivalente ao número de pseudo-modos.

Já no método de decomposição de pseudo-modos temos uma instabilidade fora da região central das curvas da função DOC, principalmente quando q é próximo de 1, devido à fase randômica. No entanto, há uma boa aproximação na região central. Já a distribuição de intensidade é próxima da curva teórica, desde que use um número de modos adequado. Foi apresentado na figura 21 que a partir de 200 Modos, temos uma maior probabilidade de obtermos incoerência entre os modos. Portanto foi padronizado nesse capítulo de comparação a utilização de 300 pseudo-modos, e dentro da soma coerente $N \times M = 20^2 = 400$ campos. Diferentemente do caso coerente, nas situações de alta e baixa coerência o número de modos foi o mesmo.

Por fim, em situações nos quais o feixe GSM tem comprimento de coerência próximo ao valor da largura do feixe, o método de decomposição em modos coerentes leva vantagem, pois necessitamos de menos modos e ainda obtemos uma alta fidelidade em relação a curva teórica. Quando temos baixa coerência, o método de pseudo-modos pode ser mais acessível, pois não há aumento no número de modos e a necessidade de gerar ordens altas dos modos de Laguerre-Gauss. Assim, o método coerente se torna mais difícil de ser implementado experimentalmente. É importante lembrar também que encontrar a decomposição em modos coerentes, algumas vezes, pode ser complicado dependendo da CSD.

4.2 TGSM

Novamente iniciaremos a seção comparando a intensidade e observando o número de modos com diferentes valores de comprimento de coerência. A equação (54) mostra que o número l independe da escolha do *kernel* e da função peso, mas durante a simulação não foi exatamente isso que foi observado, pois a escolha dos *kernel* (35) e (36) favoreceu uma aproximação com um número menor de modos. A figura 49, mostra o comparativo das distribuições de intensidade, com $twist = 1$, $q = 1$, $l = 100$ e $M \times N = 20$.

Apesar de l ser consideravelmente menor do que no caso do feixe GSM (200 pseudo-modos a menos), ainda é uma quantidade distante do método coerente, que necessita de

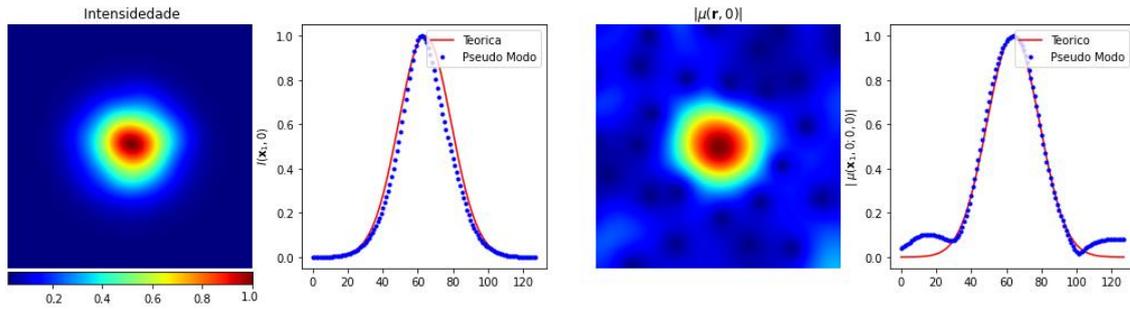


Figura 49 – Feixe TGSM com Pseudo-modos com $twist = 1$, $q = 1$ e $l = 100$

apenas 11 modos quando $q = 1$ (distribuição de auto-valores apresentado na figura 25). A metodologia seguida aqui para análise é a mesma que para o feixe GSM: primeiro fixaremos o número de pseudo-modos em 200 e $N, M = 20$ baseado no capítulo anterior e apresentaremos o caso com alta ($\delta = 0.15$ mm) e baixa ($\delta = 0.05$ mm) coerência.

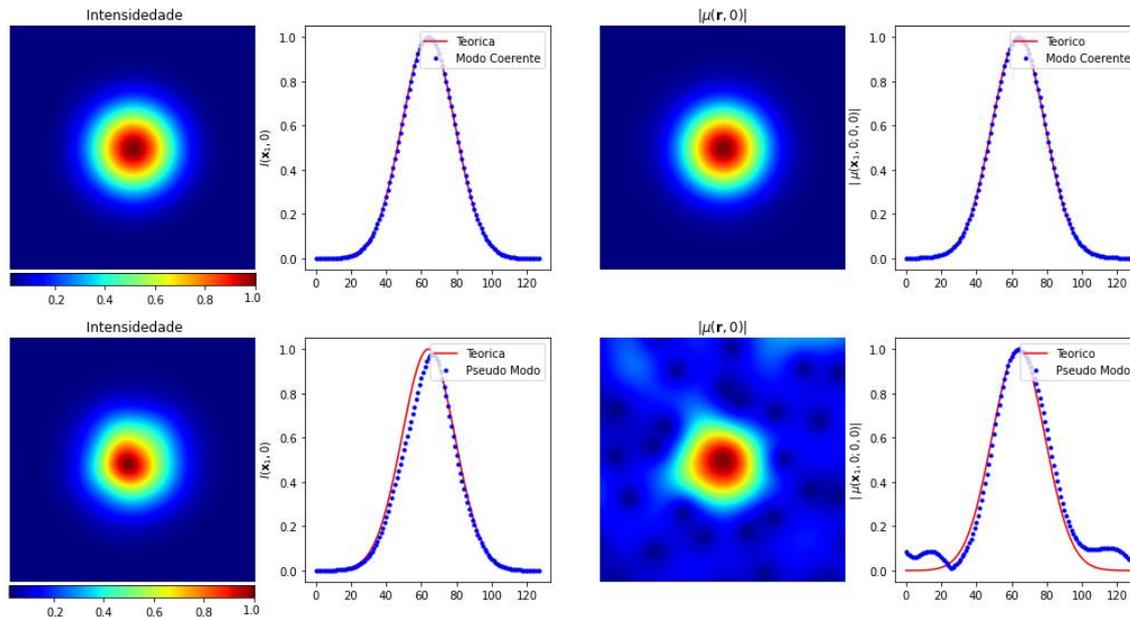


Figura 50 – Intensidade e DOC do feixe TGSM com $q = 1$ e $twist = 1$. Na primeira linha temos a DMC e na segunda temos os pseudo-modos.

Na figura 50, apresentamos a intensidade e função DOC para o feixe TGSM com coerência alta, mostrando que o método DMC respeita melhor a curva teórica, tanto na intensidade quanto na função DOC. Este resultado é similar ao caso GSM. Já no caso da decomposição em pseudo-modos, há leve desvio na região central da intensidade, que, respeitando a distribuição gaussiana e a função DOC apresenta o mesmo problema já visto fora da região central.

Analisando agora o caso com baixa coerência, primeiro devemos obter a distribuição de auto-valores para decomposição em modos coerentes. Conforme a figura 27, necessitamos de 50 modos com torção igual a 1. Os modos, não foram apresentados anteriormente, como feito na figura 51. Dentre os 50 modos, temos ordem azimutal variando de 0 a 50 e radial fixa em zero.

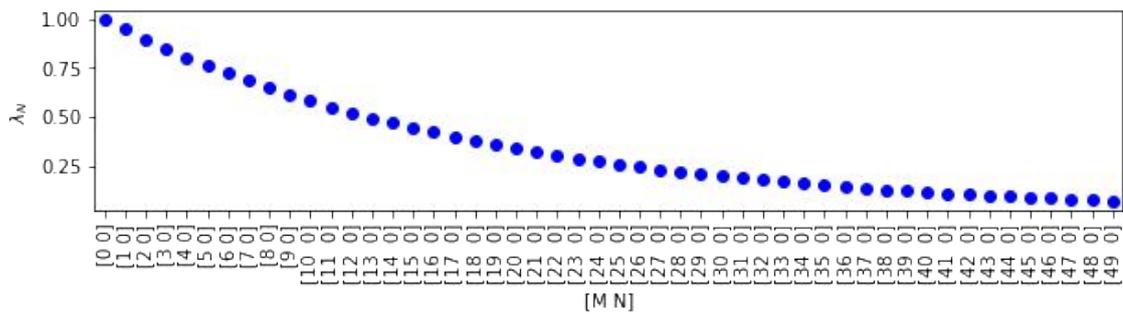


Figura 51 – Distribuição de auto-valores com $q = 0.33$ do feixe TGSM

Com os modos da decomposição definidos podemos determinar a intensidade e a função DOC realizando a soma incoerente. O resultado do método dos modos coerentes é apresentado na figura 52, primeira linha, em que se observa uma ótima fidelidade com a curva teórica da intensidade e DOC. No entanto, é importante lembrar que é necessário utilizar ordens altas dos modos de Laguerre-Gauss.

A mesma figura, na segunda linha, traz os resultados para a expansão em pseudo-modos. Estes não apresentam, uma boa aproximação na região central da intensidade, em contrapartida, há uma consistência no número de modos. Com relação à função DOC, notamos uma boa aproximação na região central e nas ondulações na região periférica, pelos motivos já discutidos anteriormente.

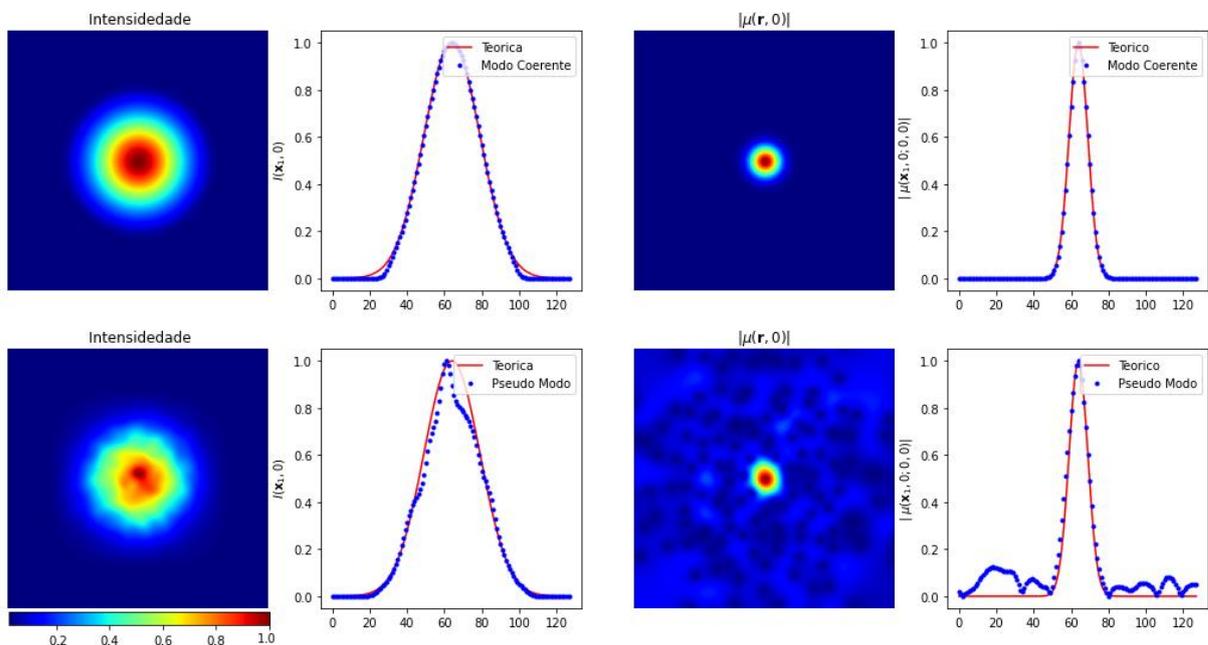


Figura 52 – Intensidade e DOC do feixe TGSM com $q = 0.33$ e $twist = 1$. Na primeira linha temos a DMC e na segunda temos os pseudo-modos.

Podemos nos questionar sobre o efeito da mudança do módulo do $twist$ na simulação dos TGSM, pois afeta a distribuição de auto-valores na decomposição coerente. A mudança do sinal apenas altera a distribuição das ordens positivas dos polinômios de Laguerre-Gauss para

negativas, mas o módulo afeta o número de modos coerentes. Por exemplo, ainda utilizando um valor baixo de coerência, mas com $twist = 0.2$, obtemos os auto-valores da figura 53:

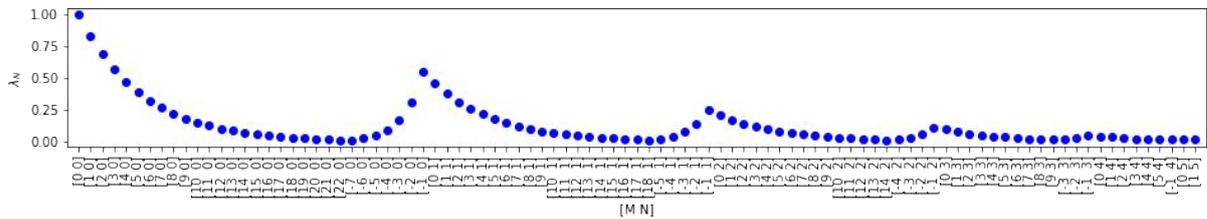


Figura 53 – Distribuição dos auto-valores do feixe TGSM com $twist = 0.2$ e $q = 0.33$

Vemos que agora são necessários 95 modos para reproduzir o feixe TGSM com $q = 0.33$, 41 modos a mais que no caso anterior com $twist = 1$, comparável à figura 45, o caso sem torção no qual obtemos 91 modos. Se observarmos com detalhe a distribuição, notaremos que foi acrescentado ordens radiais maiores e ordens azimutais negativas, para haver a diminuição da torção. Em seguida, mostramos a intensidade e a função DOC desta situação na figura 54.

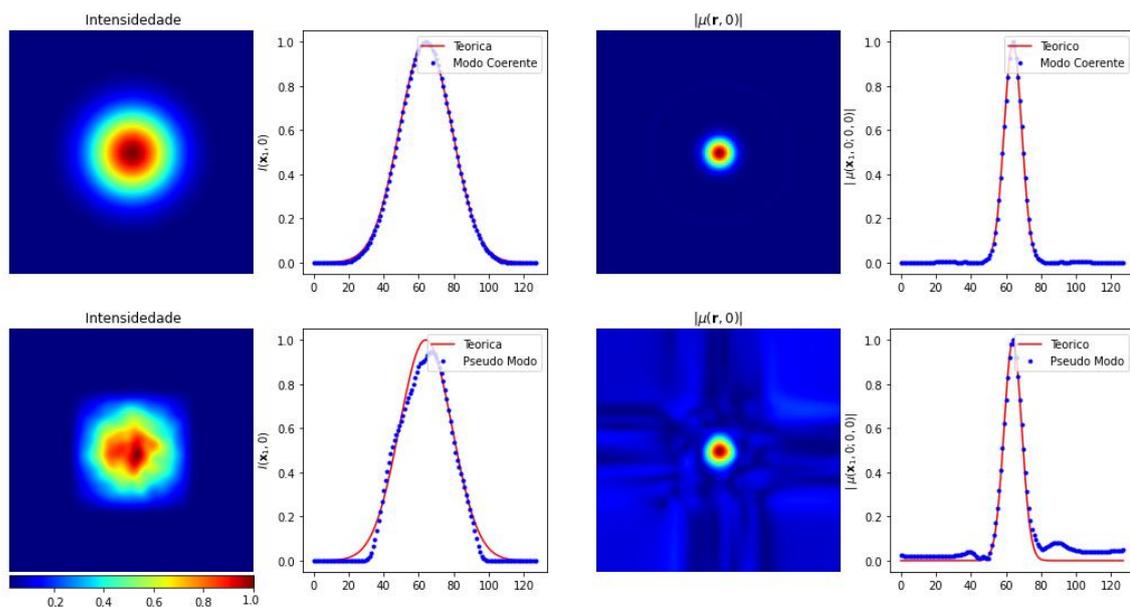


Figura 54 – Intensidade e DOC do feixe TGSM com $q = 0.33$ e $twist = 0.2$. Na primeira linha temos a DMC e na segunda temos os pseudo-modos

A primeira linha da figura 54 mostra a intensidade e DOC da decomposição coerente. Podemos notar um bom acordo entre a simulação e teoria. Na segunda linha, observamos que, para a decomposição em pseudo-modos, em alguns pontos, a intensidade não respeita tão bem a curva teórica, mas a função DOC foi bem respeitada.

Observamos algumas semelhanças com o resultado do feixe GSM, em situações de alto e baixo valor do comprimento de coerência. O método de decomposição em modos coerentes leva vantagem em todos os casos, pois usa menos modos com boa aproximação, tanto no DOC quanto na intensidade. No caso de baixa coerência, contudo, necessitamos de ordens altas dos modos de Laguerre-Gauss. Já a decomposição em pseudo-modos tem a vantagem

na consistência dos números de pseudo-modos, mesmo não apresentando algumas vezes uma ótima aproximação como na DMC, principalmente na região periférica da função DOC. Outra vantagem é a simplicidade da construção teórica para encontrar os pseudo-modos, sem a necessidade de calcular auto-valores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação, dois métodos de representação de feixes parcialmente coerentes foram analisados e comparados via simulação. São eles:

DCM : Decomposição em Modos Coerentes, que permite escrever a CSD como uma soma incoerente de modos, como Laguerre-Gauss e Hermite-Gauss. Neste trabalho apresentamos uma forma mais simples de utilizar esse método para as duas classes de feixes.

Pseudo-modos : Apresentado por Rui Wang, é um método mais flexível de representação modal, que se baseia na discretização da função CSD, obtendo também uma soma incoerente, no qual cada modo não é mais ortonormal.

Em particular, duas classes de feixes parcialmente coerentes foram estudadas:

GSM :O feixe *Gaussian Schell-Model* é a classe de feixes parcialmente coerentes mais estudada, com amplas aplicações. Devido a sua descrição matemática, em termo de exponencial, é agradável utilizá-la. Na dissertação, apresentamos como são descritos esses feixes para ambos os métodos.

TGSM :É uma classe de feixes singular, devido a sua fase torcida, que possibilita a utilização de feixes PC com OAM, transmitida de forma mais robusta. Logo, há um interesse no meio científico na exploração de como manipular, gerar e aplicar esses feixes em diversas situações.

Tais feixes podem ser gerados em laboratório, utilizando uma fonte de *laser* e realizando uma modulação da fase da luz, usando máscaras holográficas, que devem reproduzir as decomposições acima. A fim de comparar a performance desses métodos para a geração de feixes parcialmente coerentes em laboratório, simulamos a propagação de campos ópticos, e observamos que:

- Em geral, a decomposição em modos coerentes apresenta uma boa aproximação utilizando o truncamento de 0.015 para os modos de Laguerre-Gauss, para o feixe GSM e TGSM.
- Em situações de baixa coerência, a DMC tem o número de modos aumentado, como também as ordens dos modos de Laguerre-Gauss. Isso, pode inviabilizar o método para aplicações experimentais.
- Em alta coerência, o método da DMC necessita de um número 20 vezes menor que o da decomposição em pseudo-modos, mostrando-se mais vantajoso.
- No quesito teórico, para encontrar os modos e seus auto-valores, a DMC é mais complicada, pois necessitamos resolver integrais árduas ou encontrar manipulações complicadas.

- A decomposição em pseudo-modos, após selecionados os parâmetros (l,n,m) corretos, apresenta uma boa aproximação em certas regiões, mas de forma instável, devido à fase aleatória adicionada.
- O método de decomposição em pseudo-modo tem uma descrição teórica para encontrar os modos mais simples em comparação ao DMC.
- Uma vantagem dos pseudo-modos é a quantidade de modos, que permanece constante para alta e baixa coerência. Como também não apresenta dificuldade em gerar qualquer um dos modos.

Perspectivas futuras desse trabalho:

- Explorar a possibilidade de utilizar outros tipos de modos, como Ince-Gauss no método coerente.
- Em relação aos métodos de representação, uma possibilidade é ampliar a análise, implementando outras formas de decomposição, como exemplo a decomposição em modos aleatórios.
- Outra possibilidade, é a construção de novas classes de feixes parcialmente coerentes, através da proposta apresentada por Gori.
- Implementação experimental dessas modulações.

REFERÊNCIAS

- [1] O. Korotkova, F. Gori, "Introduction to the Special Issue on Structured Light Coherence", *Photonics* **2021**, *8*.
- [2] O. Korotkova, G. Gbur *In A Tribute to Emil Wolf*, (ed.: T. Visser), Progress in Optics, Publisher Copyright: © 2020 Elsevier B.V., Elsevier B.V., **2020**, pp. 43–104.
- [3] R. Wang, S. Zhu, Y. Chen, H. Huang, Z. Li, Y. Cai, "Experimental synthesis of partially coherent sources", *Opt. Lett.* **2020**, *45*, 1874–1877.
- [4] H. Wang, X. Peng, H. Zhang, L. Liu, Y. Chen, F. Wang, Y. Cai, "Experimental synthesis of partially coherent beam with controllable twist phase and measuring its orbital angular momentum", *Nanophotonics* **2022**, *11*, 689–696.
- [5] F. Gori, M. Santarsiero, "Devising genuine spatial correlation functions", *Opt. Lett.* **2007**, *32*, 3531–3533.
- [6] R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías, F. Gori, "Genuine cross-spectral densities and pseudo-modal expansions", *Opt. Lett.* **2009**, *34*, 1399–1401.
- [7] L. Mandel, E. Wolf, C. U. Press, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, **1995**.
- [8] E. Wolf, *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*, Cambridge University Press, **2007**.
- [9] G. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Dover Publications, **1989**.
- [10] A. T. Friberg, E. Wolf, "Relationships between the complex degrees of coherence in the space–time and in the space–frequency domains", *Opt. Lett.* **1995**, *20*, 623–625.
- [11] F. Wang, H. Lv, Y. Chen, Y. Cai, O. Korotkova, "Three modal decompositions of Gaussian Schell-model sources: comparative analysis", *Opt. Express* **2021**, *29*, 29676–29689.
- [12] C. Tian, S. Zhu, H. Huang, Y. Cai, Z. Li, "Customizing twisted Schell-model beams", *Opt. Lett.* **2020**, *45*, 5880–5883.

- [13] G. H. dos Santos, A. G. de Oliveira, N. R. da Silva, G. Cañas, E. S. Gómez, S. Joshi, Y. Ismail, P. H. S. Ribeiro, S. P. Walborn, “Phase conjugation of twisted Gaussian Schell model beams in stimulated down-conversion”, *Nanophotonics* **2022**, *11*, 763–770.
- [14] S. Zhu, P. Li, Z. Li, Y. Cai, W. He, “Generating non-uniformly correlated twisted sources”, *Opt. Lett.* **2021**, *46*, 5100–5103.
- [15] E. Wolf, E. Collett, “Partially coherent sources which produce the same far-field intensity distribution as a laser”, *Optics Communications* **1978**, *25*, 293–296.
- [16] F. Gori, “Collett-Wolf sources and multimode lasers”, *Optics Communications* **1980**, *34*, 301–305.
- [17] *In Table of Integrals, Series, and Products (Seventh Edition)*, (ed.: A. Jeffrey, D. Zwillinger, I. Gradshteyn, I. Ryzhik), Academic Press, Boston, **2007**, pp. 247–617.
- [18] A. Starikov, E. Wolf, “Coherent-mode representation of Gaussian Schell-model sources and of their radiation fields”, *J. Opt. Soc. Am.* **1982**, *72*, 923–928.
- [19] F. Gori, M. Santarsiero, “Twisted Gaussian Schell-model beams as series of partially coherent modified Bessel-Gauss beams”, *Opt. Lett.* **2015**, *40*, 1587–1590.
- [20] M. Abramowitz, I. A. Stegun, R. H. Romer, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, **1988**.
- [21] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic press, **2014**.
- [22] R. Simon, N. Mukunda, “Twisted Gaussian Schell-model beams”, *J. Opt. Soc. Am. A* **1993**, *10*, 95–109.
- [23] R. Lin, H. Yu, X. Zhu, L. Liu, G. Gbur, Y. Cai, J. Yu, “The evolution of spectral intensity and orbital angular momentum of twisted Hermite Gaussian Schell model beams in turbulence”, *Opt. Express* **2020**, *28*, 7152–7164.
- [24] X. Peng, L. Liu, J. Yu, X. Liu, Y. Cai, Y. Baykal, W. Li, “Propagation of a radially polarized twisted Gaussian Schell-model beam in turbulent atmosphere”, *Journal of Optics* **2016**, *18*, 125601.

- [25] M. Zhou, W. Fan, G. Wu, "Evolution properties of the orbital angular momentum spectrum of twisted Gaussian Schell-model beams in turbulent atmosphere", *J. Opt. Soc. Am. A* **2020**, *37*, 142–148.
- [26] F. Wang, X. Liu, Y. Yuan, Y. Cai, "Experimental generation of partially coherent beams with different complex degrees of coherence", *Opt. Lett.* **2013**, *38*, 1814–1816.
- [27] M. Olvera Santamaría, J. R. Garciapiña, J. García García, A. Ostrovsky, "Generation of a partially coherent secondary source with Bessel-mode vortex structure by liquid crystal spatial light modulator", *Optics Communications* **2019**, *439*, 312–316.
- [28] Jullien, Aurélie, "Spatial light modulators", *Photoniques* **2020**, 59–64.
- [29] G. G. D. Lima, <https://github.com/GubioGL/MESTRADO.git>, **2022**.
- [30] D. Peng, Z. Huang, Y. Liu, Y. Chen, F. Wang, S. A. Ponomarenko, Y. Cai, Optical Coherence Encryption with Structured Random Light, preprint, In Review, **2021**.
- [31] J. C. Ricklin, F. M. Davidson, "Atmospheric turbulence effects on a partially coherent Gaussian beam: implications for free-space laser communication", *J. Opt. Soc. Am. A* **2002**, *19*, 1794–1802.
- [32] Y. Chen, S. A. Ponomarenko, Y. Cai, "Experimental generation of optical coherence lattices", *Applied Physics Letters* **2016**, *109*, 061107.
- [33] A. Bhattacharjee, R. Sahu, A. K. Jha, "Generation of a Gaussian Schell-model field as a mixture of its coherent modes", *Journal of Optics* **2019**, *21*, 105601.
- [34] Y. Zhang, X. Zhang, H. Wang, Y. Ye, L. Liu, Y. Chen, F. Wang, Y. Cai, "Generating a twisted Gaussian Schell-model beam with a coherent-mode superposition", *Opt. Express* **2021**, *29*, 41964–41974.
- [35] Y. Cai, Y. Chen, J. Yu, X. Liu, L. Liu *In* (ed.: T. D. Visser), *Progress in Optics*, Elsevier, **2017**, pp. 157–223.
- [36] A. T. Friberg, E. Tervonen, J. Turunen, "Interpretation and experimental demonstration of twisted Gaussian Schell-model beams", *J. Opt. Soc. Am. A* **1994**, *11*, 1818–1826.

-
- [37] H. Wang, X. Peng, L. Liu, F. Wang, Y. Cai, S. A. Ponomarenko, “Generating bona fide twisted Gaussian Schell-model beams”, *Opt. Lett.* **2019**, *44*, 3709–3712.