



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO CTC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Gabriel Fontanelle Pereira

ESTUDO DE UM CVT DE CONES E ESFERAS DE TRAÇÃO POR ATRITO
Avaliação de Viabilidade Sob Condição de Tração e Micro Escorregamento

Florianópolis

2022

Gabriel Fontanelle Pereira

ESTUDO DE UM CVT DE CONES E ESFERAS DE TRAÇÃO POR ATRITO

Avaliação de Viabilidade Sob Condição de Tração e Micro Escorregamento

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pereira, Gabriel Fontanelle
ESTUDO DE UM CVT DE CONES E ESFERAS DE TRAÇÃO POR
ATRITO : Avaliação de Viabilidade Sob Condição de Tração e
Micro Escorregamento / Gabriel Fontanelle Pereira ;
orientador, Edson Roberto De Pieri, 2022.
194 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Transmissões continuamente
variáveis . 3. Análise de mecanismos. 4. Mecanismos de
transmissão. 5. Modelagem de mecanismos por grafos e
helicóides . I. De Pieri, Edson Roberto. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica. III. Título.

Gabriel Fontanelle Pereira

ESTUDO DE UM CVT DE CONES E ESFERAS DE TRAÇÃO POR ATRITO

Avaliação de Viabilidade Sob Condição de Tração e Micro Escorregamento

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Rodrigo de Souza Vieira, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Luís Paulo Laus, Dr. Eng.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.

Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, Ph.D.
Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr. Eng.
Orientador

Florianópolis, 2022

Dedico aos meus pais, Tadeu e Evani, e à minha noiva, Fabiane.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, que sempre me incentivaram na busca pelo conhecimento e compreenderam a minha ausência.

À minha noiva, por todo amparo, compreensão e amor a mim dedicados neste período.

Aos familiares e amigos pelo incentivo e por compreenderem todos os momentos que não pude estar presente.

Ao meu orientador, Prof. Edson, pelo conhecimento compartilhado, paciência e auxílio para o desenvolvimento e conclusão deste estudo.

À Universidade Federal de Santa Catarina, pela oportunidade e o grau de excelência ofertado aos discentes de Engenharia Mecânica.

RESUMO

Neste trabalho é investigada a viabilidade de uma transmissão continuamente variável de cones e esferas autoalinhantes, cuja finalidade é eliminar os escorregamentos laterais, gerados nas trocas de relações, e possibilitar a dispensa de lubrificantes nos contatos de transmissão. O modelo de análise, elaborado por meio de teorias de grafos e helicoides, permite avaliar as características estática e cinemática do mecanismo, assim como introduzir fontes de dissipação e estimar as perdas decorrentes. Para a introdução das forças dissipativas no algoritmo, foram assumidas resistências de atrito nos mancais e estimados os microescorregamentos nas juntas de tração, com base em teorias de contato para corpos elásticos, e em modelos de previsão de escorregamentos entre corpos rolantes. Adotou-se o contato direto entre as interfaces, sem presença de lubrificação, classificando o mecanismo como CVT acionado por atrito. Foram simuladas doze configurações diferentes do mecanismo, em um intervalo de relações de transmissão de 1:2 a 1:0,5; mantendo-se constantes rotação, a 2000RPM, e torque de entrada, em 35Nm. Com isto, avaliou-se perdas, escorregamentos, aquecimento e desgastes. As eficiências médias de transmissão ficaram entre 94,1% e 95,4%, contudo, os resultados demonstraram que para a liga AISI-52100, apenas uma das doze variantes obteve níveis toleráveis de elevação da temperatura nos contatos, e nenhuma delas demonstrou durabilidade razoável sob condição de desgaste, com vidas entre 91 e 159 horas. Assim, verificou-se que, para as condições adotadas, o mecanismo proposto não é viável, restando espaço para novos estudos sob diferentes regimes de lubrificação, ou, de variações topológicas que visem eliminar completamente o escorregamento circunferencial, verificado como principal responsável pelas perdas, desgastes e aquecimentos nos contatos.

Palavras-chave: CVTs; CVTs de fricção; Análise de mecanismos; Modelagem por grafos e helicoides.

ABSTRACT

This work investigates the feasibility of a continuously variable transmission, consisting of cones and self-aligning spheres, whose purpose is to eliminate sideslips generated during ratio exchanges and to enable the lubricants dispensing in transmission contacts. The analysis model, developed with graphs and screw theories, allows evaluating the mechanism's static and kinematic characteristics, introducing dissipative sources, and estimating overall losses. To introduce dissipative forces in the algorithm, friction resistances in rolling bearings were assumed and micro slips in the traction couples were estimated based on theories of elastic bodies contacts and prediction models of slip between rolling elements. Direct contact between the interfaces was adopted without lubrication, thus the mechanism is classified as friction driven CVT. Twelve different mechanisms configurations were evaluated for a gear ratio ranging between 1:2 and 1:0,5, and at a constant speed (2,000 RMP) and input torque (35 Nm). Under these conditions, the losses, slips, heating and wear were evaluated. The average transmission efficiencies stayed between 94.1% and 95.4%. However, the results showed that, for alloy AISI-52100, only one of twelve variants showed tolerable levels of temperature rise, and none of them obtained reasonable durability under wear conditions, with life expectancy ranging from 91 to 159 hours. Therefore, under the conditions adopted, the proposed mechanism is not viable, leaving room for studying different lubrication regimes or topological variations that aim to eliminate spin, which is the greatest responsibility for dissipation, wear, and heating in the contacts.

Keywords: CVTs; Friction CVTs; Mechanism Efficiency; Mechanism Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1: Desenho contido na patente do CVT de Hunt, registrado em 1887.	35
Figura 2-2: (a) Cartaz publicitário de 1906, de uma transmissão de tração por atrito. (b) Anúncio publicitário de 1907, de um automóvel Lambert, com transmissão tipo CVT.	36
Figura 2-3: Transmissão semi-toroidal de duas cavidades, batizada pela Nissan de Extroid CVT.	37
Figura 2-4: Esquema de como um CVT de polias variadoras altera suas relações.	39
Figura 2-5: (a) CVT de correia flexível; (b) CVT de corrente; (c) CVT de correia segmentada.	40
Figura 2-6: Esquema de funcionamento de um CVT semi-toroidal; (a) Relação de transmissão 1:1; (b) Multiplicação de velocidade; (c) Redução de velocidade.	42
Figura 2-7: (a) CVT do tipo toroidal e (b) CVT do tipo semi-toroidal.	43
Figura 2-8: Transmissão de forças entre cilindros sob tração por fluido.	44
Figura 2-9: Funcionamento de uma roda de atrito; (a) Redução de velocidade; (b) Multiplicação de velocidade.	46
Figura 2-10: Transferência de torque por tração entre dois discos em rotação.	47
Figura 2-11: (a) Rolamento puro, sem escorregamento longitudinal (<i>slip</i>); (b) Contato com escorregamento longitudinal.	51
Figura 2-12: (a) Contatos rolantes sem <i>spin</i> e (b) Contatos rolantes com <i>spin</i>	52
Figura 2-13: (a) CVT com ocorrência de <i>spin</i> ; (b) CVT com perfis otimizados.	52
Figura 2-14: (a) Escorregamento lateral total; (b) Escorregamento lateral parcial.	53
Figura 2-15: Cilindros iguais sob rolamento: (a) puro, sem ocorrência de <i>creep</i> ; (b) com tração e presença de <i>creep</i>	54
Figura 3-1: Raios de curvatura de dois corpos em contato.	61
Figura 3-2: Área e deformações normais em um contato hertziano elíptico.	61
Figura 3-3: Distribuição de pressão e deformações normais no contato.	63
Figura 3-4: (a) Estado de tensões a partir da superfície, ao longo do eixo Z; (b) Distribuição de tensões cisalhantes, em função da pressão de contato.	65
Figura 3-5: Transição entre regimes de deformação, de acordo com a razão entre tensão média compressiva (p) e tensão de escoamento (σ_e).	69
Figura 3-6: Estado de tensões em um contato hertziano sob rolamento livre.	70

Figura 3-7: Distribuição das tensões de cisalhamento em um contato entre cilindros sob rolamento com tração.	71
Figura 3-8: Zonas de adesão e escorregamento, em contato circular com tração tangencial... ..	78
Figura 3-9: Zonas de adesão e escorregamento, em contato elíptico, com tração tangencial. .	79
Figura 3-10: Curva de microescorregamento em função do fator de tração ($FTr\mu FN$).	81
Figura 3-11: Diferentes tipos de desgastes provocados por spin.....	85
Figura 3-12: Principais tipos de acoplamentos, suas liberdades (f) e restrições (c).....	90
Figura 3-13: Internalização de ações externas e fontes dissipativas no grafo de ações (GA) de um par de engrenagens.	102
Figura 4-1: Representação do CVT de tração por esferas.	106
Figura 4-2: Simplificação do mecanismo proposto.	107
Figura 4-3: (a) Mancal esférico e suas liberdades ; (b) Acoplamento rolante de esferas.	108
Figura 4-4: Representação de um acoplamento planar (a); e de um acoplamento rolante (b).	109
Figura 4-5: (a) Mecanismo em regime permanente; (b) Rotação com rolamento longitudinal.	110
Figura 4-6: Distribuição das forças tangenciais no contato entre cone e esfera. (a) Esfera com eixo de rotação gerando spin; (b) Esfera rotacionando na direção de zero spin.	110
Figura 4-7: (a) Inclinações dos eixos de rotação das esferas S_f e S_g ; (b) Direções de rotação resultantes r_f e r_g	112
Figura 4-8: Três configurações de inclinação dos cones de transmissão.	113
Figura 4-9: Parâmetros dimensionais do modelo de análise.	114
Figura 4-10: Lógica de execução do programa de simulação.	118
Figura 5-1: Simplificação do mecanismo em estudo.	119
Figura 5-2: (a) Representação estrutural do mecanismo; (b) Grafo de acoplamentos (GC)... ..	120
Figura 5-3: Graus de liberdade de movimentos dos acoplamentos.	120
Figura 5-4: (a) Grafo de movimentos (GM).; (b) Grafo de ações (GA), com ações e forças dissipativas internalizadas.	123
Figura 5-5: (a) Circuitos no Grafo de movimentos (GM).; (b) Cortes no Grafo de ações (GA).	123
Figura 5-6: (a) Posição das juntas no mecanismo e (b) dimensões dos componentes.	125
Figura 6-1: Torques e rotações de saída, conforme relações de transmissão.	142

Figura 6-2: Índices de escorregamento nos acoplamentos dos modelos de base.	143
Figura 6-3: Dissipações nos acoplamentos dos quatro modelos de base.	146
Figura 6-4: Forças empregadas pelos atuadores lineares, para os diferentes modelos.	148
Figura 6-5: Variação instantânea de temperatura nos contatos dos modelos de base.	149
Figura 6-6: Índices de desgaste nos diferentes conceitos de base.	152
Figura 6-7: Eficiências dos acoplamentos de tração dos modelos de base.	156
Figura 6-8: Eficiências globais de transmissão para MA, MB, MC e MD, de acordo com os ângulos α e as relações de transmissão.	159
Figura 6-9: Potências de transmissão, para os ângulos α e as relações de transmissão.	160

LISTA DE QUADROS

Quadro 1-1: Metodologia de elaboração do estudo.....	27
--	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 2-1: Perdas em um CVT semi-toroidal, de acordo com o coeficiente de tração (C_t)...55	55
Tabela 2-2: Eficiências médias aproximadas de diferentes tipos de transmissão. 57	57
Tabela 3-1: Máxima tensão cisalhante normalizada (τ_{1p0}) e sua profundidade (z_a), de acordo com a excentricidade do contato (ab). 64	64
Tabela 4-1: Identificação dos componentes de transmissão e seus acoplamentos. 107	107
Tabela 4-2: Parâmetros de variação das simulações. 114	114
Tabela 4-3: Dimensões calculadas para os modelos M1 e M2..... 115	115
Tabela 4-4: Propriedades da liga AISI 52100, com tratamento para endurecimento superficial. 116	116
Tabela 5-1: Graus de liberdade e restrição dos acoplamentos..... 121	121
Tabela 5-2: Ações externas e dissipativas internalizadas no modelo..... 122	122
Tabela 5-3: Tabela de direções unitárias e vetores de posição dos acoplamentos. 125	125
Tabela 5-4: Equações constitutivas da estática..... 137	137
Tabela 5-5: Cálculo das potências e eficiências para os acoplamentos..... 139	139
Tabela 5-6: Cálculo do aquecimento e taxa de desgaste nos acoplamentos de tração. 139	139
Tabela 6-1: Vida das esferas, de acordo com suas taxas de desgaste (d^*), para uma relação de transmissão média de 1:1. 155	155
Tabela 6-2: Comparação entre eficiências médias (η), massas e diâmetros dos CVTs. 161	161
Tabela 6-3: Influência dos fatores α , λr e nc sobre o desempenho dos CVTs..... 162	162
Tabela 7-1: Comparação entre eficiências aproximadas de diferentes transmissões. 164	164

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CVT: transmissão continuamente variável

IVT: transmissão infinitamente variável

VDT: *Van-Doorne Transmisie*

ISSO: *International Organization for Standardization*

LISTA DE SÍMBOLOS

$v_{T.entr}$: velocidade tangencial do elemento de entrada

$v_{T.sai}$: velocidade tangencial do elemento de saída

$\dot{\omega}_{entr}$: velocidade angular do elemento de entrada

r_{entr} : raio de entrada

$\dot{\omega}_{sai}$: velocidade angular de saída

r_{sai} : raio de saída

T_{entr} : torque nominal dos elementos de entrada

T_{sai} : torque nominal dos elementos de saída

i_{tr} : relação de transmissão

μ_j : coeficiente de atrito

F_N : força normal

n_c : número de contatos entre os componentes

K_{seg} : coeficiente de segurança

E_{mec_entr} : energia mecânica de entrada do mecanismo

E_{mec_sai} : energia mecânica de saída do mecanismo

E_{diss} : energia dissipada

P_{mec_entr} : potência mecânica de entrada do mecanismo

P_{mec_sai} : potência mecânica de saída do mecanismo

P_{diss} : potência dissipada

η_{tr} : eficiência de um mecanismo de transmissão

P_{diss} : potência dissipada

η : eficiência

F_{diss} : força dissipativa

T_{diss} : torque dissipativo

$(E_1$ e $E_2)$: módulos de elasticidade

$(\nu_1$ e $\nu_2)$: coeficientes de Poisson

$(r_{1x}$ e $r_{1y})$: curvaturas

$(r_{1x}$ e $r_{1y})$: curvatura do corpo 1

$(r_{2x}$ e $r_{2y})$: curvatura do corpo 2

δ_0 : valor máximo de deformação
 R_x e R_y : raios equivalentes nas direções x e y
 πc^2 : área de um contato levemente elíptico
 p_0 : pressão máxima de contato
 \bar{p} : pressão média
(Π) : plano de contato
 k_e : excentricidade da elipse
 $p_{x,y}$: distribuições de pressão
 $\delta_{x,y}$: deformação normal
 τ_1 : máxima tensão principal cisalhante
 σ_e : tensão de escoamento por tração axial
 p_0 : pressão de carregamento
 $p_{0(e)}$: valor mínimo da máxima pressão de carregamento
 $R_{e(f)}$: mínimo raio equivalente de contato
 F_{Tr} : força de tração
 r : raio
 $\tau_{(r)}$: tensão tangencial de tração
 μ_{est} : coeficiente de atrito estático
 F_N : força normal
 c : raio equivalente de contato
 ξ_x : índice adimensional de micro escorregamento
 ν e G : coeficientes de Poisson
 V_T : velocidade tangencial
 P_{diss} : potência dissipada
 $T_{diss(j)}$: torque dissipativo
 j : determinada junta do mecanismo
 d : profundidade de desgaste por adesão
 K_d : coeficiente de desgaste
 S_d : distância de deslizamento
 H_d : dureza à penetração do material
 A : área de contato

S_n : distância total percorrida pelo contato
 λ : ordem do sistema
 f : número do grau de liberdade
 c : número do grau de restrições
 F : grau de liberdade bruto
 e : número de acoplamentos
 f_i : grau de liberdade que um acoplamento e_i possui
 C : grau de restrição bruto
 c_{pi} : número de restrições passivas de um acoplamento
 c_{aj} : número de restrições internalizadas no acoplamento ativo
 v : número de circuitos fundamentais
 n : vértices
 k : número de cortes fundamentais
 G_C : grafo de acoplamentos
 G_A : grafo de ações
 G_M : grafo de movimentos
 $[A]_{n \times n}$: matriz de adjacência
 $[I]_{n \times e}$: matriz de incidência
 $[B]_{v \times e}$: matriz de circuitos fundamentais
 $[Q]_{k \times e}$: matriz de cortes fundamentais
 G_M : grafos de movimentos
 G_A : grafos de ações
 \vec{S} : vetor de direção
 \vec{S}_0 : vetor de posição
 h : passo
 $\M : heligiro
 $\vec{\omega}$: vetor de velocidade angular
 \vec{V}_0 : vetor binário de velocidade de translação
 φ^M : magnitude
 $\A : heliforça
 $[M_D]_{\lambda \times F}$: matriz de movimento

$[A_D]_{\lambda \times C}$: Matriz de Ações

$[\hat{A}_N]_{\lambda k \times C}$: Matriz de Ações Unitárias em Rede

$[\hat{M}_N]_{\lambda v \times F}$: Matriz de Movimentos Unitários em Rede

F_N : grau de liberdade líquido

m : posto de uma matriz

m_f : posto da matriz de movimentos unitários

C_N : grau de restrição líquido

C : número total de restrições

$[D_A]$: Matriz de Ações Aumentada

$\$C^A$: heliforça

$Null(D_A)$: espaço nulo da matriz de ações aumentada

j : índice que representa o acoplamento

\mathcal{P} : potência transferível

i_{tr} : relação de transmissão

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	APRESENTAÇÃO DO TEMA.....	23
1.2	OBJETIVOS DO TRABALHO	26
1.2.1	Observações adicionais.....	27
1.3	MÉTODOS E ESTRUTURA DO TRABALHO	27
2	PRINCIPAIS CONCEITOS SOBRE CVTS.....	29
2.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	29
2.1.1	Classes de transmissões	30
2.1.2	Transmissões por tração	31
2.1.3	CVT e IVT	32
2.1.4	Regimes de lubrificação	33
2.2	BREVE HISTÓRICO SOBRE CVTS.....	35
2.3	TRANSMISSÕES CONTINUAMENTE VARIÁVEIS POR TRAÇÃO.....	38
2.3.1	CVTs de polias variadoras.....	38
2.3.2	CVTs toroidais	42
2.4	PARÂMETROS DE PROJETO.....	44
2.4.1	Relações de velocidades.....	45
2.4.2	Torque e relação de transmissão.....	46
2.4.3	Capacidade de torque.....	47
2.4.4	Potência e eficiência de transmissão	49
2.5	PERDAS NOS CONTATOS.....	50
2.6	DESEMPENHO E EFICIÊNCIA DOS CVTS	54
3	MÉTODOS DE ANÁLISE.....	58
3.1	TEORIAS DE CONTATO.....	58
3.1.1	Etapa 1 – tensões e deformações hertzianas.....	60

3.1.1.1	<i>Crêterios de falha para carregamento estático</i>	64
3.1.2	Etapa 2 – intera�es dinâmicas nos contatos	67
3.1.2.1	<i>Fadiga em contatos rolantes</i>	68
3.1.2.2	<i>Perdas por microescorregamento longitudinal</i>	77
3.1.2.3	<i>Perdas por spin</i>	82
3.1.2.4	<i>Desgastes nos contatos</i>	84
3.1.2.5	<i>Aquecimento dos contatos</i>	86
3.2	ANÁLISE ESTÁTICA E CINEMÁTICA POR GRAFOS E HELICOIDES	87
3.2.1	Método de Davies	88
3.2.2	Dire�es espaciais e ordem do sistema	88
3.2.3	Acoplamentos e cadeias cinemáticas	89
3.2.4	Representa�o topológica de mecanismos por grafos	91
3.2.5	Representa�o por helicoides	94
3.2.6	Montagem dos sistemas de equa�es	97
3.2.7	Solu�o dos sistemas	99
3.2.8	Internaliza�o das perdas por matrizes de rede aumentadas	101
3.2.9	Cálculo das potências e eficiências	103
3.3	CONSIDERA�ES SOBRE OS MÉTODOS DE ANÁLISE	105
4	DESCRIP�O DO MECANISMO DE TRANSMISSÃO	106
4.1	ACOPLAMENTOS AUTO ALINHANTES	108
4.2	CONDI�ES DE SIDESLIP E SPIN	109
4.3	CONDI�ES DE CONTORNO E DIMENSIONAMENTO	113
5	MODELAGEM POR GRAFOS E HELICOIDES	119
5.1	REPRESENTA�O TOPOLÓGICA	119
5.2	MATRIZES DE A�ES E MOVIMENTOS UNITÁRIOS E SEUS HELICOIDES	

5.2.1	Heligiros e matriz de movimentos unitários.....	126
5.2.2	Heliforças e matriz de ações unitárias	129
5.3	MATRIZES EM REDE E EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS	132
5.4	EQUAÇÕES CONTITUTIVAS.....	135
5.4.1	Equações da cinemática	135
5.4.2	Equações da estática	136
5.5	RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES	138
5.6	CÁLCULO DAS POTÊNCIAS E EFICIÊNCIA GLOBAL	138
5.7	CÁLCULO DOS AQUECIMENTOS E TAXAS DE DESGASTE	139
6	RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES	141
6.1	RELAÇÕES DE TRANSMISSÃO, TORQUES E VELOCIDADES	141
6.2	ESCORREGAMENTOS NOS CONTATOS.....	142
6.3	PERDAS NOS CONTATOS.....	145
6.4	AQUECIMENTO	149
6.5	DESGASTES.....	152
6.6	EFICIÊNCIAS DOS ACOPLAMENTOS	156
6.7	COMPARAÇÃO ENTRE OS MECANISMOS ESTUDADOS.....	159
7	CONCLUSÕES.....	163
7.1	SOBRE O MECANISMO ESTUDADO	163
7.2	SOBRE O EMPREGO DO MÉTODO DE DAVIES	165
7.3	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	166
	REFERÊNCIAS.....	167
	APÊNDICE 1 – MATRIZES DE CORTES E CIRCUITOS.....	173
	APÊNDICE 2 – MATRIZES DA ESTÁTICA E CINEMÁTICA	177
	APÊNDICE 3 – TORQUES E VELOCIDADES NOS ACOPLAMENTOS	183
	APÊNDICE 4 – EFICIÊNCIAS, PERDAS E ESCORREGAMENTOS NOS CONTATOS.....	189

ANEXO 1 – PROPRIEDADES MECÂNICAS E CONSTANTES UTILIZADAS..... 193

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho irá investigar o comportamento de uma transmissão continuamente variável (CVT) constituída de cones e esferas auto alinhantes, as quais têm por finalidade eliminar escorregamentos laterais, presentes nas mudanças de relação de transmissão e escorregamentos longitudinais, causados em decorrência da lubrificação dos contatos.

Para isto, são propostas a utilização de esferas auto alinhantes, como elementos de transmissão, com liberdade para rolaem em todas as direções impostas pelos contatos, e a eliminação de fluidos lubrificantes nos pontos de contato por tração.

Por esta razão, serão estudados os impactos da solução, sobre as condições de operação, como dissipação por atrito, eficiências de transmissão, fadiga de superfície, aquecimento e desgastes dos acoplamentos, uma vez que não se espera eliminar completamente o microescorregamento (*creep*) e possíveis aparecimentos de escorregamento circunferencial (*spin*).

O mecanismo estudado será modelado por Método de Davies utilizando representação por grafos e helicoides, onde serão introduzidas as fontes de dissipação obtidas a partir de modelamentos teóricos para contatos rolantes, sob condição de tração e forças normais.

Com os resultados de análise, será possível ter uma visão acerca da viabilidade do mecanismo e sobre os principais fatores e condições de contorno a serem levados em conta para uma eventual aplicação real da transmissão.

1.1 APRESENTAÇÃO DO TEMA

O modo de vida moderno não seria possível sem a utilização dos sistemas mecânicos de transmissão. Embora se atribua a aplicação destes mecanismos majoritariamente aos veículos automotores, tais dispositivos estão presentes em todos as máquinas que, ou requerem algum tipo de controle mecânico de rotação ou exigem redução ou multiplicação de suas velocidades.

Dentre os diversos tipos existentes, as transmissões continuamente variáveis ou simplesmente CVTs (*Continuously Variable Transmission*) se destacam pela vantagem de oferecer mudanças de velocidade contínuas e infinitas relações em um intervalo delimitado. Esta característica permite que sejam empregadas em uma variedade de equipamentos, pois possibilitam maior controle sobre as velocidades de saída, ao mesmo tempo que permitem às

fontes acionadoras operarem em seus regimes ótimos de funcionamento, contribuindo para a melhor eficiência do conjunto.

Ao longo do último século, uma infinidade de concepções construtivas foi criada, como CVTs de polias variadoras, polias cônicas, transmissões hidrostáticas e hidrodinâmicas, CVTs toroidais e muitas outras (BEACHLEY e FRANK, 1979). Contudo, algumas variedades acabaram ganhando a adoção do mercado em maior escala. Os CVTs de polias variadoras e os semi-toroidais dominaram esta categoria dentro da indústria automotiva (MACHIDA, 2005), modelos de polias cônicas e rodas de atrito ganharam adesão em maquinários industriais e de perfuração (CARSON, 1975), ao passo que sistemas com divisão de potência, conhecidos como PSTs (*Power Split Transmission*), que empregam CVTs acoplados em paralelo a trens de engrenagens epicicloidais, vêm sendo estudados para aplicação em automóveis híbridos (LI *et al*, 2019; FISHER, 2015; MANTRIOTA, 2002).

Embora possam operar por diferentes princípios de transmissão, os CVTs de tração se tornaram o tipo mais utilizado. Quando não há lubrificação, ou o lubrificante exerce somente a função de evitar desgaste e reduzir aquecimento, se diz que a transmissão é de tração por atrito¹; já, quando a transferência de forças ocorre por intermédio de um fluido especial, sem contato direto entre os componentes, chama-se de transmissão de tração por fluido² (SRIVASTAVA; HAQUE, 2008).

Algumas transmissões por tração trabalham a seco, como os CVTs de polias variadoras com correias flexíveis, usados em *snowmobiles*, quadriciclos e outras máquinas de pequeno porte. Contudo, para maiores potências de transmissão, a ausência de lubrificação, quase sempre implica em desgaste prematuro e superaquecimento dos contatos, gerados devido a escorregamentos entre as superfícies dos elementos de transmissão (SRIVASTAVA, 2006).

Este escorregamento pode ocorrer tanto em escala macroscópica - como os escorregamentos lateral (*sideslip*), longitudinal (*slippage*) e circunferencial (*spin*) - quanto em escala microscópica, também chamado de *creep*, o qual geralmente se manifesta nas regiões periféricas do contato (JOHNSON, 1985).

Enquanto o *slippage* e o *spin* podem ser eliminados por meio de um bom projeto, especificando adequadamente as grandezas de projeto, como capacidade de torque, coeficientes de atrito, forças de aperto, direção dos eixos de rotação e muitos outros, os demais tipos de escorregamento podem ser mais complexos de evitar (LINGARD, 1974; CARBONE; MANGIALARDI; MANTRIOTA, 2004; LI *et al*, 2015; DELKHOSH e FOUMANI, 2013).

1 – Tradução livre do termo “*friction drive*”.

2 – Tradução livre do termo “*traction drive*”. Estas traduções serão explicadas na seção 2.1.

O escorregamento lateral, por exemplo, aparece em praticamente todos os tipos de CVTs, majoritariamente na fase transiente, ou seja, durante as trocas de relações (LOEWENTHAL, 1983; GOTT, 1991) e somente pode ser evitado por meio de alterações na topologia do mecanismo, ao se adicionar mais graus de liberdade às juntas de transmissão.

Já o micro escorregamento (*creep*) é inerente dos contatos rolantes que transmitem torque e acontece devido às diferenças entre as deformações elásticas nas superfícies dos materiais, causadas pela dinâmica de forças nos contatos, que faz com que as velocidades tangenciais variem de forma diferente entre os elementos, ao longo de sua área de contato (JOHNSON, 1985). Contudo, apesar de não poder ser eliminado, este fenômeno pode ser minimizado.

A forma mais comum de contornar os problemas causados pelos diferentes tipos de escorregamento se dá pelo uso de lubrificantes (NAUNHEIMER *et al*, 2014; NORTON, 2013). Entretanto, estas substâncias provocam severa redução do coeficiente de atrito nos contatos em que são aplicados, por isso, nas transmissões de tração, apesar de minimizarem o desgaste e aquecimento nos componentes, o emprego de lubrificação implica na necessidade de elevadas forças de aperto, em maiores taxas de escorregamento e, por consequência, na queda da eficiência global do mecanismo. Isto se deve porque, enquanto nas transmissões de engrenagens o atrito não contribui para a transmissão de forças, podendo ser minimizado sem grandes consequências, nas transmissões por tração, o atrito é fator preponderante para a transferência de forças entre os corpos (LOEWENTHAL, 1983).

Assim, ao desenvolver uma transmissão por tração, a equipe de projeto é levada a escolher entre usar contatos sem lubrificação e ter um projeto mais enxuto, porém arcar com limitações de durabilidade, capacidade de torque e rotação, ou, optar por contatos lubrificados e ganhar em todos os aspectos citados, sob pena de maior complexidade, massa e custos de fabricação.

Por este motivo, no presente trabalho será estudado o comportamento estático e cinemático de um CVT de tração por atrito, constituído de cones e esferas. Neste conceito, as juntas possuem graus de liberdade que possibilitam o alinhamento constante entre as direções de velocidade tangencial nos contatos, buscando eliminar *spin*, *sideslip*, e minimizar o *creep*. Com os resultados deste estudo, será discutido quais escorregamentos podem ser eliminados pelo conceito e se os fluidos de tração, ou lubrificantes, podem ser dispensados, assim como

quais serão as considerações necessárias para garantir níveis aceitáveis de durabilidade e eficiência.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

De acordo com os pontos levantados anteriormente, o objetivo geral do presente estudo é, por meio do Método de Davies e teorias de contato, modelar e avaliar os escorregamentos e dissipações nos contatos de uma transmissão continuamente variável tracionada por atrito, bem como estimar sua eficiência e condição de desgaste.

A fim de que seja possível atingir com sucesso o objetivo geral estabelecido, os seguintes objetivos específicos devem ser satisfeitos:

- Realizar pesquisa bibliográfica acerca das transmissões continuamente variáveis, das ferramentas de análise utilizadas no estudo, como, modelos teóricos para a análise de contato entre corpos rolantes, métodos para estimar a vida em fadiga sob tais condições e método de Davies, aplicado na análise estática e cinemática de mecanismos;
- Descrever o conceito proposto, explicando seus princípios de funcionamento, suas possíveis aplicações, vantagens e condições de contorno;
- Descrever a modelagem e análise matemática do conceito – por meio das teorias de grafos e helicoides com analogia à lei de cortes e circuitos de Kirchhoff aplicada a mecanismos – assim como a introdução das forças dissipativas no modelo;
- Estabelecer parâmetros de análise para a avaliação dos escorregamentos e dissipações no mecanismo;
- Expor e comentar os resultados da análise, de acordo com os parâmetros estabelecidos;
- Efetuar uma avaliação geral dos resultados encontrados e da contribuição do trabalho no estudo de mecanismos, incluindo observações sobre o conceito proposto e as oportunidades para estudos futuros.

1.2.1 Observações adicionais

É importante guardar que este estudo não busca projetar uma transmissão, mas sim, investigar o conceito proposto e avaliar sua viabilidade de aplicação. Por tal motivo, todos os critérios e valores empregados são estimativas e servem para que se possa comparar parâmetros e obter uma direção acerca da factibilidade do mecanismo.

No desenvolvimento de um produto de aplicação real, seriam necessários mais dados e investigações, como estudo de modos de vibração, ruído, geração e transferência de calor nos contatos, projeto de subsistemas, conformidades com normas e muitos outros.

1.3 MÉTODOS E ESTRUTURA DO TRABALHO

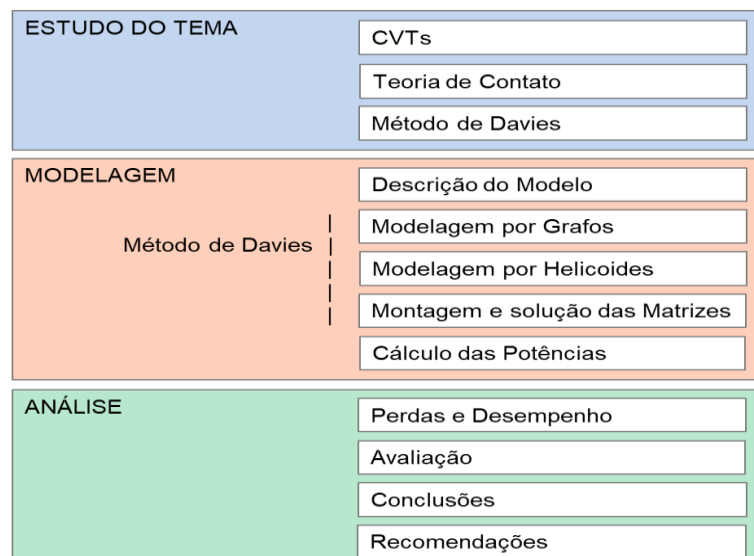
A metodologia de execução deste estudo inicia com um apanhado geral sobre os temas abordados, explorando mais detalhadamente os problemas levantados, assim como seus princípios teóricos e as ferramentas de análise e modelagem.

Na sequência, é feita a descrição do conceito de solução proposto, seguindo para sua modelagem matemática e resolução dos sistemas de equações.

Por fim, os resultados são analisados de acordo com os parâmetros estabelecidos na descrição do modelo e as conclusões sobre o estudo são apresentadas.

A metodologia descrita é exibida no Quadro 1-1 a seguir:

Quadro 1-1: Metodologia de elaboração do estudo.



Fonte: do autor

O capítulo 1 compreende a introdução do tema abordado, a apresentação do problema a ser resolvido e a proposta para sua solução. Conclui relatando os objetivos gerais e específicos, a metodologia utilizada e a estrutura de organização do trabalho.

No capítulo 2 são revisados os principais conceitos sobre CVTs, bem como apresentado um breve histórico sobre seu desenvolvimento.

No capítulo 3 são descritas as teorias e métodos utilizados para a análise da transmissão estudada, abrangendo as principais teorias para modelagem de contatos rolantes, assim como o método de Davies, e sua adaptação para a introdução direta de perdas no modelo.

No capítulo 4, descreve-se o conceito proposto, são relacionados seus componentes e princípios de funcionamento e levantados os pontos de atenção, como prováveis modos de falha e gargalos de projeto. Nesta seção também serão definidos os parâmetros de análise e condições de operação considerados neste estudo.

No capítulo 5, é realizada a modelagem do mecanismo por meio do método de Davies e são solucionados os sistemas de equações lineares resultantes.

No capítulo 6, os resultados de saída do modelo são analisados, de acordo com os parâmetros estabelecidos e são discutidos os comportamentos dos diferentes mecanismos simulados.

Por fim, no capítulo 7, são apresentadas as conclusões gerais sobre o conceito investigado, bem como sobre a aplicação do método de Davies, além de serem sugeridas oportunidades para trabalhos futuros.

2 PRINCIPAIS CONCEITOS SOBRE CVTS

Esta seção apresentará ao leitor as transmissões continuamente variáveis, abordando sua trajetória de desenvolvimento, principais conceitos, problemas e características de operação.

A seção 2.1 traz considerações importantes a serem tomadas antes de iniciar a revisão sobre CVTs.

A seção 2.2 apresenta um breve histórico de sua evolução tecnológica, com os principais autores/inventores e marcos dessa tecnologia.

A seção 2.3 faz uma revisão geral sobre CVTs, com os principais tipos, suas aplicações e características.

Na seção 2.4, são introduzidos os parâmetros de projeto mais elementares, que devem ser usados como ponto de partida para a modelagem de um CVT.

A seção 2.5 traz os principais tipos de fenômenos responsáveis por dissipação de energia e desgaste nos contatos.

Por fim, a seção 2.6 compara alguns números de eficiência entre diferentes conceitos de CVTs e transmissões convencionais.

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A presente seção faz um apanhado geral dos principais pontos de discussão sobre transmissões continuamente variáveis. Para tanto, foram colhidas informações em livros e artigos de periódicos, a fim de contextualizar o leitor e fornecer uma base de comparação, para que se possa mais a diante, analisar os resultados obtidos neste estudo.

É necessário registrar que, grande parte dos trabalhos consultados foi publicada entre os anos de 1990 e 2010, período em que houve expressivo crescimento do número de pesquisas sobre transmissões mais eficientes, sendo os CVTs, uma das tecnologias mais promissoras à época.

Contudo, a disponibilidade de estudos técnicos sobre CVTs reduz drasticamente a partir dos anos 2010, encontrando-se apenas estudos teóricos, de caráter acadêmico, muito importantes para a área, porém carecendo de resultados em ambientes reais de aplicação.

Por este motivo, as observações desta seção baseiam-se nos avanços feitos entre os anos de 1990 e 2010, havendo, quando possível, comparações com dados de estudos mais recentes.

2.1.1 Classes de transmissões

De forma geral, transmissões mecânicas são mecanismos que têm o propósito de transmitir, reduzir ou multiplicar torque e rotação entre diferentes eixos. Assim, podem ter concepções construtivas e princípios de funcionamento distintos.

De acordo com BIANCHI (2009), os mecanismos de transmissão podem ser classificados de acordo com: seu **princípio de funcionamento**, pela **forma de controle das mudanças** e, pelo **número de relações de transmissão**.

A classificação, de acordo com o **número de relações**, se dá por três divisões:

- **Transmissões de relação única**, também conhecidas como redutores, ou multiplicadores de velocidade;
- **Transmissões de relações escalonadas**, como as caixas de marcha manuais e automáticas epicicloidais, dos automóveis e;
- **Transmissões continuamente variáveis**, e infinitamente variáveis, como as transmissões toroidais e de polias variadoras.

Já, a divisão de acordo com o **método de controle das mudanças** é bastante intuitiva e divide-se em:

- **Transmissões manuais**, em que as mudanças ocorrem por acionamento direto pelo operador, podendo haver diversas tecnologias de acionamento e;
- **Transmissões automáticas**, as quais efetuam as mudanças, sob controle de sistemas autônomos de controle e acionamento, sem a interferência direta do operador.
- **Transmissões automatizadas**, ou semiautomáticas, são usadas no setor automotivo (BIANCHI, 2009) e, apesar de consistirem em transmissões automáticas, pois não requerem controle direto do operador, diferenciam-se das demais, por utilizarem a mesma arquitetura de construção das transmissões manuais de eixos paralelos, e realizarem as trocas, por acionadores eletro-hidráulicos robotizados.

Por último, pelo seu **princípio de transmissão**, são classificados como:

- **Transmissão de engrenagens**; é o conceito mais conhecido de mecanismo de transmissão, são empregados em praticamente todos os tipos de aplicação e transmitem torque, pelo acoplamento de seus dentes, em que os dentes da engrenagem motora empurram os dentes da engrenagem acionada (SHIGLEY, 2015).
- **Transmissões hidrostáticas**; neste tipo de transmissão, uma bomba transmite potência mecânica do motor para um fluido não compressível, o qual se comporta como meio de transmissão da energia. Uma turbina, então, capta esta energia mecânica transferindo-a para seu respectivo eixo de saída, completando a transferência de torque. Estes sistemas são muito empregados em máquinas agrícolas e da construção civil, onde os equipamentos são normalmente submetidos a elevados esforços (BEACHLEY e FRANK, 1979). Os conversores de torque, usados em conjunto com as transmissões epicicloidais, também são considerados um tipo de transmissão hidrostática.
- **Transmissões de tração**; transmitem torque por meio das forças de atrito entre seus elementos e podem ser divididos em dois grupos: “Transmissões de tração por fluido”, que trabalham por intermédio de fluidos especiais, sem contato direto entre seus elementos; e “Transmissões de tração por atrito”, que operam por contato direto, com ou sem presença de lubrificantes (LOEWENTHAL, 1983).

Pode ser observado que a definição de CVT não está fixada em princípios construtivos ou de funcionamento, mas à forma contínua como as relações são alteradas e ao fato de haver um número infinito de relações disponível. Assim, qualquer transmissão capaz de proporcionar infinitas relações e realizar mudanças de forma contínua, pode ser chamada de CVT.

Contudo, os termos “tração por atrito” e “tração por fluido”, devem ainda ser esclarecidos.

2.1.2 Transmissões por tração

O conceito de tração é bastante amplo, porém, neste trabalho, ficará restrito à tração tangencial, que significa transferência de força tangencial entre corpos, por meio da adesão superficial no contato, causada por atrito (JOHNSON, 1985). Portanto, pode compreender

várias situações, como os pneus de um veículo, que recebem torque do motor e tracionam o asfalto, as rodas de uma locomotiva, que tracionam os trilhos e aceleram o conjunto de vagões, ou os roletes de um CVT toroidal, que transmitem torque entre os discos de entrada e saída, por meio de um fluido tracionado entre os contatos.

Por sua vez, os termos “tração por atrito” e “tração por fluido” correspondem à uma tradução livre, feita neste trabalho, a fim de evitar interpretações equivocadas das expressões originais, “*friction drive*” e “*traction drive*”, as quais, quando traduzidas diretamente, significam “transmissão de fricção” e “transmissão de tração”, ignorando o fato de ambas pertencerem ao grupo das transmissões por tração. Além disso, na língua portuguesa, fricção implica em atrito com presença de escorregamento, que difere do termo atrito por si só, o qual pode se referir tanto ao atrito estático quanto ao atrito dinâmico.

Segundo Loewenthal, a diferenciação entre “*friction drive*” e “*traction drive*” acabou disseminada por força do uso, pois os autores adotavam estes termos de trabalhos anteriores e os passavam a diante em suas próprias publicações. Loewenthal, por exemplo, tratou as transmissões de tração como uma classe única, dentro da qual diferenciou as transmissões de tração lubrificadas, “*lubricated drives*”, das transmissões de tração não lubrificadas, “*nonlubricated drives*” (LOEWENTHAL, 1983).

Assim, pode-se dizer que as transmissões de tração por fluido são um caso particular do grupo de transmissões por tração, o qual engloba as transmissões de tração por atrito (*friction drive*) e as transmissões de tração por fluido (*traction drive*).

2.1.3 CVT e IVT

É preciso, ainda, esclarecer que há uma diferenciação entre CVT (transmissão continuamente variável) e IVT (transmissão infinitamente variável). Seus conceitos são praticamente iguais, entretanto, diferentemente do CVT, o IVT possui capacidade de oferecer relação de transmissão infinita – o que difere de infinitas relações de transmissão –, na qual, dados um torque e uma rotação de entrada, a transferência de torque para o eixo de saída é mantida, enquanto a rotação de saída é nula. Logo, um CVT somente tem sua rotação de saída nula, quando a fonte motriz estiver parada ou o eixo de entrada estiver desacoplado, ao passo que para um IVT, é possível manter o eixo de saída parado com a transmissão acoplada, garantindo a manutenção de momento no eixo de saída (BEACHLEY e FRANK, 1979).

Uma vez que os conceitos que serão apresentados valem igualmente para as duas concepções, para evitar a necessidade de especificar cada tipo dentro dos temas discorridos, ambos serão compreendidos pelo termo CVT.

2.1.4 Regimes de lubrificação

Transmissões continuamente variáveis podem ser projetadas para trabalhar em diferentes regimes de lubrificação, dependendo de sua topologia e princípio de funcionamento. Portanto, é importante esclarecer os regimes possíveis para estes mecanismos.

De acordo com NORTON (2013) e SHIGLEY (2015), de forma geral, podem existir três regimes de lubrificação diferentes: **lubrificação de filme completo, de filme misto e lubrificação de contorno.**

A **lubrificação de filme completo** caracteriza a situação em que as superfícies deslizantes são separadas por uma camada de filme lubrificante, não havendo contato direto entre as interfaces. Neste caso, a espessura do filme lubrificante deve ser suficientemente alta, a ponto de evitar que picos de rugosidade superficial dos elementos se toquem, gerando fricção e desgastes. Este tipo de lubrificação pode ocorrer de três formas:

- Lubrificação hidrostática, em que é necessário o bombeamento do lubrificante sob alta pressão, a fim de manter a área de contato com uma espessura mínima de filme, não havendo dependência da velocidade de deslizamento para a manutenção deste estado;
- Lubrificação hidrodinâmica, na qual não há o bombeamento ativo do fluido para a região a ser lubrificada, mas o arrasto do fluido pelas superfícies em movimento até o contato. Assim como na lubrificação hidrostática, é preciso um reservatório de fluido para evitar a falta de suprimento até a zona lubrificada, entretanto, neste caso, não existe dependência da pressão do fluido, mas sim da velocidade de escorregamento entre as superfícies;
- Lubrificação elastohidrodinâmica, ocorre de forma similar à lubrificação hidrodinâmica, no entanto, em situações onde as áreas de contato são muito pequenas e as pressões normais são elevadas, o fluido depende da deformação elástica dos materiais para que consiga penetrar por entre as superfícies e exercer sua função de lubrificante. Este é o caso dos contatos entre dentes de engrenagens, entre cames e seguidores, e entre discos e roletes de CVTs do tipo toroidal. A

grande diferença entre os três exemplos citados é que nos dois primeiros casos são usados fluidos lubrificantes comuns, uma vez que se busca a redução do atrito, ao passo que nos CVTs, devido à importância do coeficiente de atrito para a transferência das forças de tração, são usados fluidos capazes de aumentar este parâmetro, de acordo com a velocidade de escorregamento, pressão normal, temperatura e força de tração empregada. Neste caso, normalmente o termo coeficiente de atrito é substituído por coeficiente de tração, o qual deriva da nomenclatura inglesa para as transmissões de tração por fluido.

- O regime de **lubrificação de contorno** é observado em situações onde não é possível manter uma espessura de filme suficiente para que haja lubrificação hidrodinâmica, devido à interação de vários fatores como: pequena área de contato, elevação da temperatura, baixa viscosidade do fluido, pressão de contato elevada e baixa velocidade relativa entre as superfícies. Neste caso, o fluido não consegue chegar a área de contato, permanecendo nas regiões periféricas.
- Por último, **lubrificação mista**, é a combinação dos regimes de lubrificação de filme completo e de contorno. Na prática, a medida que a espessura de filme é reduzida, chega-se a um ponto em que as rugosidades das superfícies começam a se tocar e é estabelecida a condição de regime misto. Deste modo, o regime misto inicia com predominância do estado de lubrificação hidrodinâmica e caminha em direção ao estado de lubrificação de fronteira, acompanhando o decréscimo da espessura de filme lubrificante. Este regime está presente nos CVTs de correntes e de correias segmentadas, os quais apresentam condições de operação insuficientes para a utilização dos fluidos de tração empregados nos CVTs toroidais, e tão pouco podem trabalhar sem lubrificação. Uma vez que o estado de lubrificação hidrodinâmica resulta em coeficientes de atrito demasiadamente reduzidos para este tipo de mecanismo, a solução encontrada foi operar em regime misto, com pontos de contato direto, transmitindo as forças de tração, e regiões com formação de filme hidrodinâmico, arrefecendo e evitando desgastes. Por esta razão, CVTs de polias variadoras são tratados como transmissões de tração por atrito e os CVTs toroidais, como transmissões de tração por fluido.

Ainda é válido lembrar que alguns tipos de juntas podem trabalhar sem lubrificação, como nos CVTs de correias flexíveis. Isto é possível devido aos materiais das correias, que absorvem maior parte das deformações e desgastes, além de oferecerem coeficientes de atrito

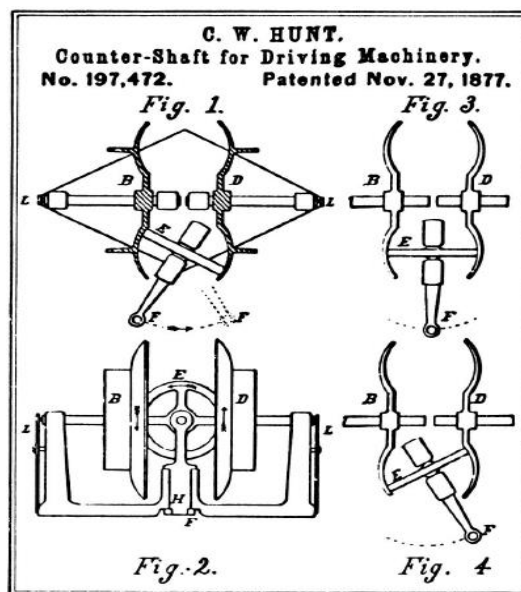
substancialmente maiores. Neste caso, as correias são projetadas para serem substituídas após determinada vida útil, poupando as polias, normalmente mais caras e difíceis de substituir.

2.2 BREVE HISTÓRICO SOBRE CVTS

As transmissões continuamente variáveis ficaram popularmente conhecidas a partir da década de 90, após sua adoção em larga escala no mercado automotivo (MACHIDA, 2005), entretanto, segundo LOEWENTHAL (1983), os CVTs são utilizados há mais de 100 anos em implementos agrícolas, sistemas de perfuração, máquinas industriais e no setor de geração de energia.

O primeiro CVT, patenteado em 1877, por Charles W. Hunt, nos Estados Unidos, tratava de um mecanismo de tração por atrito, com dois discos metálicos de perfil toroidal, entre os quais ficavam pressionadas rodas de eixos pivotantes, como mostra a Figura 2-1.

Figura 2-1: Desenho contido na patente do CVT de Hunt, registrado em 1887.



Fonte: CARSON (1975).

Devido à sua simplicidade, os CVTs de tração por atrito foram amplamente adotados para uso em maquinários agrícolas e industriais, sob o nome de rodas de tração ou variadores de velocidade. Mais tarde, este tipo de transmissão passou a ser empregado em alguns dos primeiros modelos de automóveis (Figura 2-2), como os Cartercar, de 1906, e os Lambert, de 1907 (LOEWENTHAL, 1983). Contudo, por conta dos materiais e processos de fabricação disponíveis na época, tais mecanismos apresentavam baixa durabilidade para os padrões

automotivos, de modo que, com a introdução dos sincronizadores de velocidade nos anos 20, acabaram substituídos pelas transmissões de engrenagens.

Figura 2-2: (a) Cartaz publicitário de 1906, de uma transmissão de tração por atrito. (b) Anúncio publicitário de 1907, de um automóvel Lambert, com transmissão tipo CVT.



(a)

(b)

Fonte: LOEWENTHAL (1983).

Nos anos 40, Jean Kopp apresentou o Variador Kopp, o qual consistia em um CVT de tração por esferas, que disponibilizava relações entre 3:1 e 1:3 e era capaz de transmitir potências superiores a 50 hp. O conceito obteve notável sucesso, com mais de 250.000 unidades vendidas até 1975, porém, devido ao elevado peso, seu uso ficou restrito a aplicações estacionárias (LOEWENTHAL, 1983).

No final dos anos 50, a VDT (*Van-Doorne Transmissie*), da Holanda, lançou uma transmissão de polias variadoras, com correia metálica segmentada, voltada para uso industrial. Diferentemente das transmissões antecessoras, que utilizavam correias flexíveis, este conceito introduziu uma correia constituída de blocos de aço, em formato de “V”, unidos por finas tiras de aço sobrepostas. Este também foi o primeiro CVT de polias variadoras a transferir torque de uma polia para outra por compressão da correia ao invés de tracioná-la (BEACHLEY e FRANK, 1979). Em 1958, batizada de Variomatic, esta transmissão foi adotada pela DAF, em seu pequeno sedan familiar DAF 600, que foi o primeiro veículo de produção em massa a adotar uma transmissão continuamente variável (GOTT, 1991). Este tipo de transmissão é o CVT mais empregado em automóveis até hoje (NOVELLIS e CARBONE, 2019).

Nos anos 60, com base nos trabalhos de ERTEL (1939) e GRUBIN (1949), sobre lubrificação elastohidrodinâmica, e na teoria de LUNDBERG e PALMGREN (1949), sobre

fadiga em elementos rolantes, as transmissões de tração por filme fluido começaram a ser melhor compreendidas (MACHIDA, 2005).

HEWKO (1962) investigou a capacidade de tração de diferentes óleos e os relacionou com a influência de diversos fatores como geometria dos contatos, temperatura, velocidade tangencial, pressão de contato e aditivos nos óleos. No estudo, concluiu que a geometria dos contatos e a composição do óleo lubrificante eram os fatores que mais influenciavam no coeficiente de tração. Hewko também publicou estudos sobre tração e micro escorregamento em contatos sob altas velocidades tangenciais (HEWKO, 1969), obtendo bons resultados no desenvolvimento de redutores de velocidade de cilindros planetários, os quais apresentaram significativa redução de ruído em comparação a redutores de engrenagens (HEWKO, 1968).

No mesmo período, Charles Kraus estudou o escorregamento circunferencial (*spin*) nos contatos de um CVT semi-toroidal baseado no modelo patenteado por Arter em 1932 (KRAUS, 1964). Mais tarde, estudando este mesmo conceito, Kraus conseguiu obter significantes melhorias de desempenho em aceleração e consumo em rodovia, com um veículo Ford Pinto, utilizando um fluido desenvolvido pela Monsanto (KRAUS, 1973).

Apesar de importantes avanços ao longo das décadas de 60 e 70, os CVTs de tração por fluido ainda não apresentavam durabilidade suficiente para sua ampla adoção naquela época.

Em 1999, após vinte e um anos de pesquisas, a NSK/Nissan conseguiu introduzir no mercado o primeiro CVT de filme trator a ser bem-sucedido, equipando os sedans Cedric e Gloria (MACHIDA, 2005). Batizado de Extroid CVT (Figura 2-3), consistia em um CVT semi-toroidal de tração por filme, desempenhando maior eficiência, capacidade de torque e aceleração do que seus concorrentes de polias variadoras.

Figura 2-3: Transmissão semi-toroidal de duas cavidades, batizada pela Nissan de Extroid CVT.



Fonte: Adaptado de NISSAN® (2005).

Para atingir este sucesso, a NSK precisou desenvolver um aço especial de altíssima pureza e resistência mecânica, além de um óleo de tração inédito, com elevados coeficiente de tração e estabilidade química. Por conta dos ótimos resultados do CVT de Machida, a indústria automobilística voltou a apresentar interesse neste tipo de transmissão e vários fabricantes passaram a oferecer a opção de CVT em seus modelos, dando continuidade ao desenvolvimento de novas transmissões até os dias atuais.

2.3 TRANSMISSÕES CONTINUAMENTE VARIÁVEIS POR TRAÇÃO

Como explicado anteriormente, os CVTs por tração transmitem potência de eixo pela aderência nos contatos entre seus elementos, gerada devido às forças de atrito. As transmissões em que a tração ocorre por contato direto entre as superfícies dos componentes são chamadas de transmissões de tração por atrito (*friction drive*), podendo ou não haver presença de lubrificação. Todavia, quando a tração se dá por intermédio de fluidos, na forma de filmes finíssimos, tracionados entre os elementos, sem o contato direto entre as superfícies, estas transmissões são chamadas de transmissões de tração por fluido (*traction drive*) (SRIVASTAVA; HAQUE, 2008).

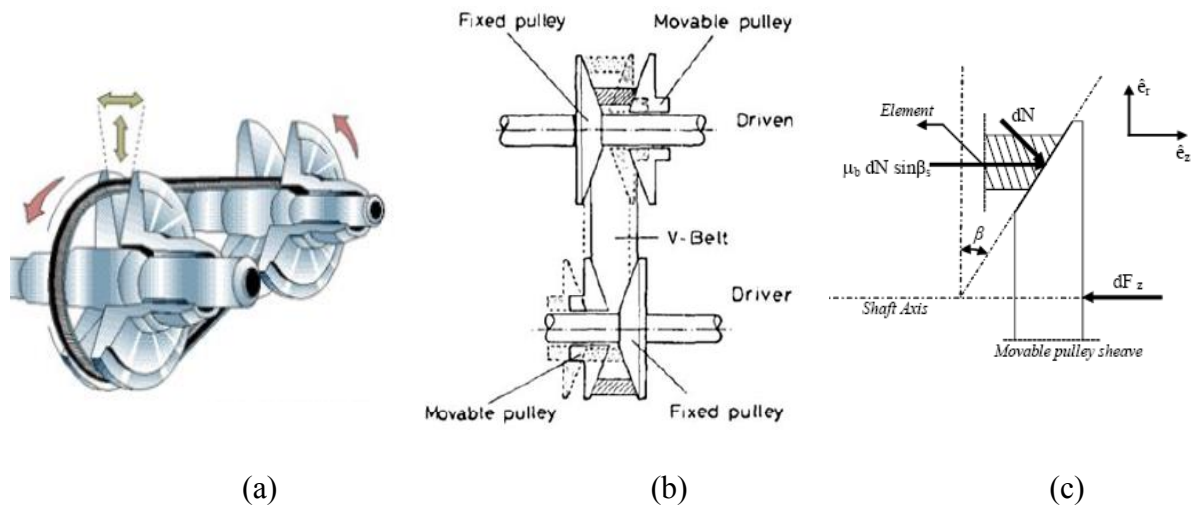
Apesar das diferentes concepções de transmissão existentes, o princípio de transmissão por tração acabou prevalecendo entre os CVTs, tanto pela sua simplicidade quanto pelo seu melhor desempenho (MURAKAMI *et al*, 1999; SRIVASTAVA, 2006). Dentro deste grupo, as concepções mais empregadas são os CVTs de polias variadoras e os CVTs toroidais e semi-toroidais, assim, esta seção irá focar nestes principais tipos.

2.3.1 CVTs de polias variadoras

Atualmente, o tipo de CVT de tração mais comum do mercado é o de transmissão de polias variadoras, utilizado em jet-skis, quadriciclos, *snowmobiles* e automóveis de médio e pequeno porte (CHOLIS *et al*, 2015).

Tais mecanismos são constituídos de uma correia ou corrente, de perfil em “V” ou trapezoidal, conectada a duas polias bipartidas. Cada polia altera seu diâmetro de contato por meio do deslocamento axial de um de seus lados (Figura 2-4 (a)), modificando a distância entre suas faces e, com isto, o espaço para o posicionamento radial da correia, como mostra a Figura 2-4(b).

Figura 2-4: Esquema de como um CVT de polias variadoras altera suas relações.

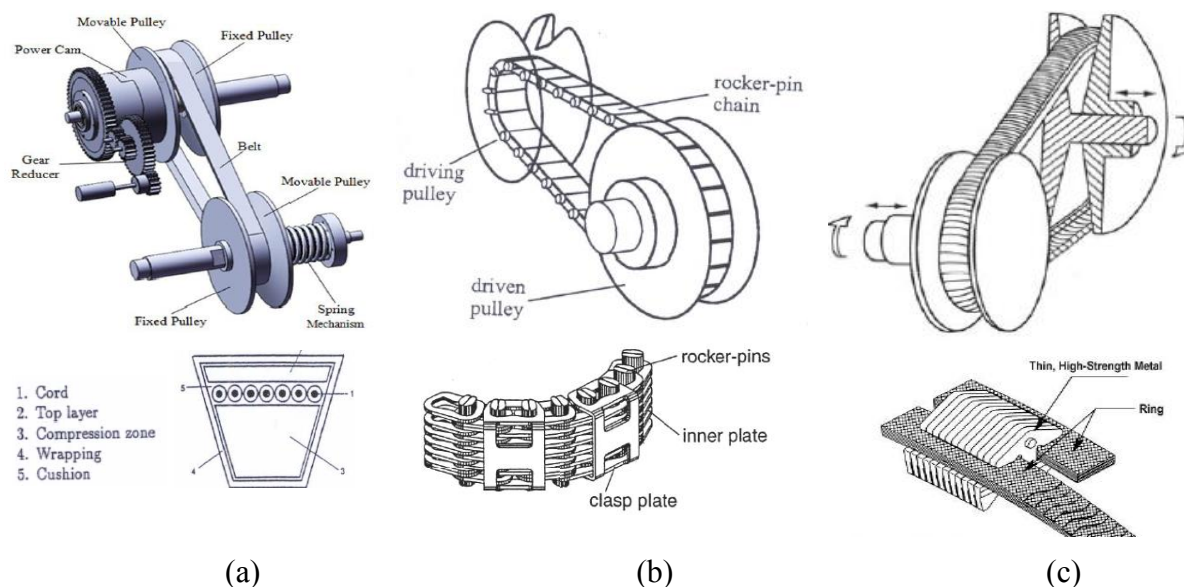


Fonte: (a) BONSEN *et al.*, (2003); (b) CHOLIS *et al.*, (2015); (c) SRIVASTAVA (2006).

Do lado em que o diâmetro está crescendo, as laterais da polia pressionam axialmente as laterais da correia, empurrando-a radialmente em direção à periferia da polia (Figura 2-4 (c)). Do outro lado, considerando que a correia/corrente tem um comprimento constante e sofre deformação longitudinal desprezível, a corrente/correia precisa empurrar as laterais da polia na direção axial, movendo-se radialmente em sentido ao centro da polia. Desta forma, enquanto uma polia comprime axialmente a correia/corrente, aumentando seu diâmetro de contato, a outra polia se afasta, de forma a reduzir seu diâmetro, resultando na variação da relação de transmissão.

Os tipos mais comuns de transmissão por polias variadoras são os CVTs de correias flexíveis, os CVTs de correntes e os CVTs de correias segmentada, mostradas na Figura 2-5.

Figura 2-5: (a) CVT de correia flexível; (b) CVT de corrente; (c) CVT de correia segmentada.



Fonte: (a) BONSEN *et al* (2003); (b) CHOLIS *et al* (2015); (c) SRIVASTAVA (2006).

Nestes mecanismos, a transferência de forças ocorre pela aderência mecânica entre as polias e as laterais da correia ou corrente, em que o coeficiente de atrito, a força de aperto das polias e as velocidades de rotação são os fatores principais na dinâmica de transmissão. Nos modelos de corrente e correias segmentadas, os contatos são lubrificados, com regime misto entre lubrificação elastohidrodinâmica e lubrificação periférica, onde há formação de filme lubrificante nas regiões de menor pressão de contato, e sua expulsão nas áreas de maior pressão. Contudo, enquanto estes dois tipos de CVT utilizam os mesmos lubrificantes das transmissões automáticas epicicloidais, os CVTs de correias flexíveis trabalham a seco, ou seja, com contatos não lubrificados.

Os CVTs de correias flexíveis (Figura 2-5a) foram os primeiros a serem introduzidos no mercado, sendo utilizados em maquinários agrícolas e industriais. Mais tarde foram adotados em veículos de pequeno porte (GOTT, 1991) e, devido à sua simplicidade, às pequenas dimensões, o baixo custo e à comodidade de oferecerem trocas de relações automáticas, estas transmissões são usadas até os dias atuais (CHOLIS *et al*, 2015).

Por não conseguirem trabalhar com torques e potências mais elevadas, em razão de limitações de resistência das correias, feitas geralmente de polímeros ou compósitos, os conceitos de correias flexíveis evoluíram para os CVTs de corrente e correias metálicas segmentadas (GOTT, 1991).

O CVT de corrente (Figura 2-5b) foi desenvolvido em parceria pelas empresas LUK, da Alemanha, e Borg-Varner, dos Estados Unidos, mas ficou conhecido por sua adoção pela Audi, no sistema Multitronic, lançado no ano 2000 (BIANCHI, 2009). Esta forma de transmissão transfere força de uma polia à outra, por meio de tração na corrente, gerada pelas forças de atrito entre as extremidades dos pinos da corrente e as polias. No entanto, devido à dinâmica deste tipo de contato, em que acontecem pequenas colisões no momento do acoplamento com as polias, este conceito está sujeito a vibrações e elevado ruído, sendo necessário sua integração com sistemas de amortecimento e isolamento acústico (NAUNHEIMER *et al*, 2014). A capacidade de torque destes mecanismos varia de acordo com cada projeto, entretanto, comparados às transmissões de correias segmentadas, demonstram superioridade neste ponto, devido à maior resistência à tração das correntes (FAUST; LINNENBRUGGER, 2002).

O CVT de correia segmentada, também chamado de CVT de correia de compressão (*push belt*), foi desenvolvido pela empresa holandesa VDT, no final dos anos 50, destacando-se pela transferência de forças entre as polias por meio da compressão entre os elementos de sua correia, a qual é feita de blocos de aço de alta dureza, ligados por finas bandas de aço sobrepostas, como mostra a Figura 2-5c. Devido às características construtivas, os CVTs de correias segmentadas desempenham sua transmissão de maneira mais suave e silenciosa que transmissões de corrente, porém, apresentam eficiência semelhante e relativamente menor capacidade de torque (SRIVASTAVA; HAQUE, 2008).

No geral, observa-se que, no mercado automotivo, as transmissões por correia segmentada acabaram, em sua maior parte, adotadas em veículos populares, com maior volume de produção e menores potências, a exemplo de veículos da Nissan, Honda, Suzuki e Toyota (NISSAN[®], 2005; NARITA, 2012), ao passo que as variantes de corrente foram empregadas em automóveis mais caros e de maior potência, a exemplo de alguns modelos da Audi e Subaru, (FAUST; LINNENBRUGGER, 2002; LUK[®], 2002).

Quando comparados aos CVTs toroidais e às demais transmissões de engrenagens, os CVTs de polias variadoras, desenvolvidos até metade dos anos 2000, apresentam limitações em sua capacidade de torque e aceleração, impostas principalmente pela resistência à fadiga das correias/correntes, pelo coeficiente de tração dos óleos empregados e pela resistência dos materiais ao desgaste (SRIVASTAVA, 2006). Além disso, possuem menor eficiência, uma vez que apresentam significativas perdas por escorregamento e devido à potência consumida nos

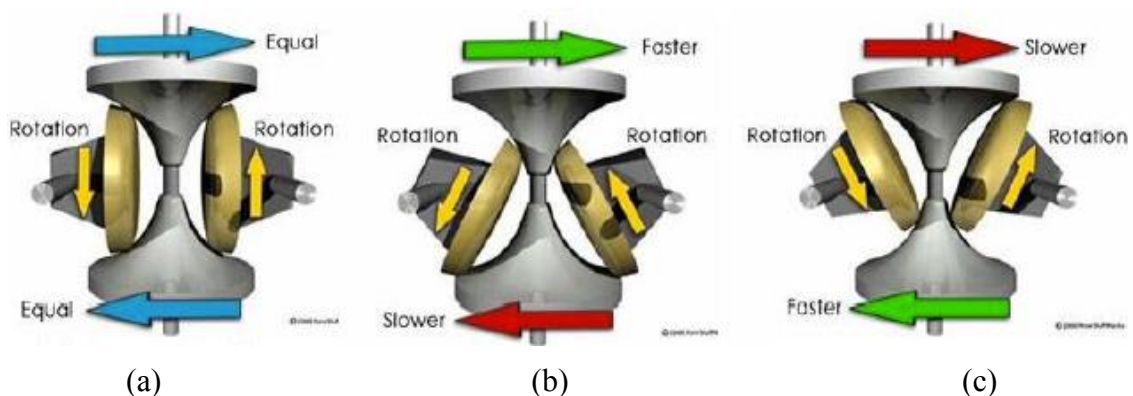
sistemas hidráulicos de acionamento e controle das polias (KLUGER; LONG, 1999; MURAKAMI *et al*, 1999; SRIVASTAVA; HAQUE, 2008).

Apesar de tudo, estas transmissões mostraram-se competitivamente duráveis e baratas se comparadas aos CVTs toroidais e às transmissões automáticas convencionais (Nissan[®], 2005). Existem poucos dados disponíveis sobre os números de eficiência e desempenho dos CVTs mais recentes, todavia, sabe-se que avanços nos sistemas de controle de força de aperto das polias, vêm adicionando melhoras significativas de desempenho, como mostram OSAWA (2019) e NAUNHEIMER *et al* (2014), que relatam capacidades de torque máximas de 350Nm e 450Nm para CVTs de correias segmentadas e de correntes, respectivamente.

2.3.2 CVTs toroidais

Os CVTs toroidais são um tipo de transmissão continuamente variável por tração de fluido, constituídos de discos toroidais, dispostos coaxialmente, entre os quais ficam pressionados rolos de eixos pivotantes com a função de transferir as forças de um disco para o outro e alterar as relações de transmissão. Ao variar a posição de contato entre os rolos e os discos, são alterados os raios de contato destes elementos e, por conseguinte, as relações de transmissão, conforme mostra a Figura 2-6 a seguir.

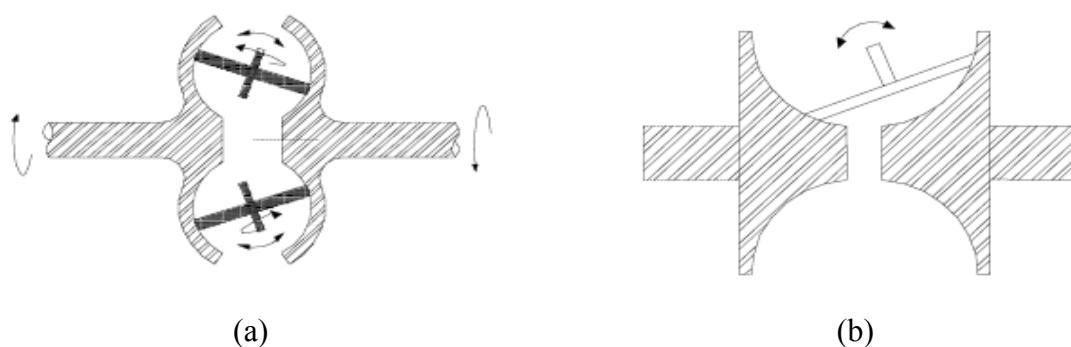
Figura 2-6: Esquema de funcionamento de um CVT semi-toroidal; (a) Relação de transmissão 1:1; (b) Multiplicação de velocidade; (c) Redução de velocidade.



Fonte: HOW STUFF WORKS (2005).

Estas transmissões podem ser do tipo toroidal (Figura 2-7(a)) ou semi-toroidal (Figura 2-7(b)), de modo que o segundo tipo é uma evolução do primeiro.

Figura 2-7: (a) CVT do tipo toroidal e (b) CVT do tipo semi-toroidal.

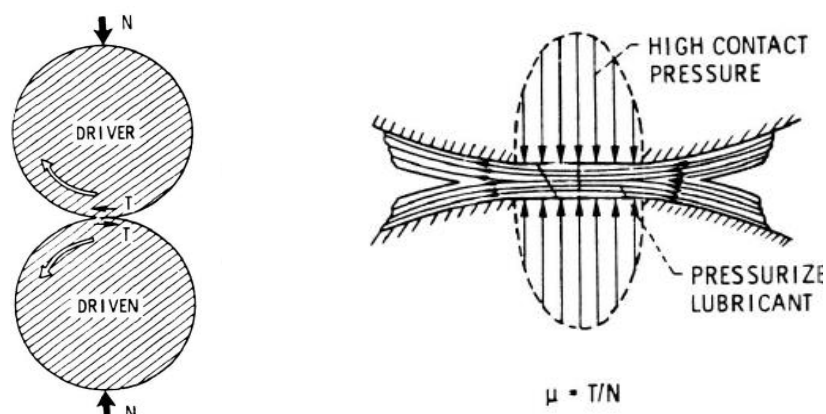


Fonte: FORTI (2003)

Nos anos 50, Charles Kraus estudou o comportamento dos CVTs semi-toroidais e concluiu que apresentavam menores perdas por escorregamento circunferencial (*spin*) que seus antecessores e, portanto, eram mais eficientes (MACHIDA, 2005; CARBONE; MANGIALARDI; MANTRIOTA, 2004). Desde então, os CVTs semi-toroidais tornaram-se objeto de estudo de inúmeros trabalhos (GOTT, 1991; LOEWENTHAL, 1983; SRIVASTAVA, 2006; SANDA e HAYKAWA, 2005).

Seu princípio de transmissão é de tração por fluido, em que os elementos não se tocam diretamente, de forma que a transmissão das forças trativas ocorre por meio de um fluido especial, em regime de funcionamento, conhecido como lubrificação elastohidrodinâmica – EHL (MACHIDA, 1999; MURAKAMI *et al*, 1999). Neste caso, pela ação do movimento de rolagem e do torque aplicado, somados à pressão de contato entre os componentes, o fluido é espremido entre as superfícies de transmissão, formando um filme de espessura microscópica. Devido às altas pressões de contato e às tensões cisalhantes impostas pelas superfícies, as moléculas nestes fluidos se agregam, tornando-o momentaneamente sólido, o que possibilita a transferência das forças de uma superfície para a outra (LINGARD, 1974), como mostra a Figura 2-8.

Figura 2-8: Transmissão de forças entre cilindros sob tração por fluido.



Fonte: LOEWENTHAL (1983).

Várias configurações de CVTs por fluido já foram estudadas (YU e SUN, 2020; NOVELLIS e CARBONE, 2019; GOTT, 1991; CARSON, 1975), porém, os CVTs semi-toroidais acabaram se tornando os mais bem-sucedidos, em razão dos trabalhos de Machida (MACHIDA, 1999), que resultaram na estreia destas transmissões nos modelos da Nissan, Cedric e Gloria, em 1999.

Apesar de possuírem faixa de eficiência superior a 90% e elevada capacidade de torque, devido aos seus custos de fabricação, e a evoluções importantes nas transmissões de polias variadoras, atualmente, não há nenhum CVT do tipo toroidal/semi-toroidal sendo produzido no mercado automotivo. De fato, os modelos mais recentes consistiam de CVTs semi-toroidais acoplados a trens de engrenagens planetárias, conferindo a capacidade de recirculação de potência dentro da transmissão, transformando-as em IVTs (transmissões infinitamente variáveis), como o Extroid CVT da Nissan, com capacidade de torque de mais de 380Nm (NISSAN[®], 2005) e o Torotrak, usado pela Toyota, que pode transmitir até 450Nm (SHINOJIMA *et al*, 2004).

2.4 PARÂMETROS DE PROJETO

Nesta subseção são abordadas as primeiras considerações de projeto, a fim de que seja possível modelar uma transmissão por tração.

2.4.1 Relações de velocidades

Nas transmissões por tração, se desconsiderados os fenômenos de escorregamento, as velocidades e as forças tangenciais são coincidentes entre as superfícies de transmissão. Logo, para dois corpos em contato sob rotação, a velocidade tangencial do elemento de entrada ($v_{T.entr}$) será igual à velocidade tangencial do elemento de saída ($v_{T.sai}$), como estabelece a equação 2.1.

$$v_{T.entr} = v_{T.sai} \quad (2.1)$$

para:

$$v_{T.entr} = \omega_{entr} r_{entr} \quad (2.1.a)$$

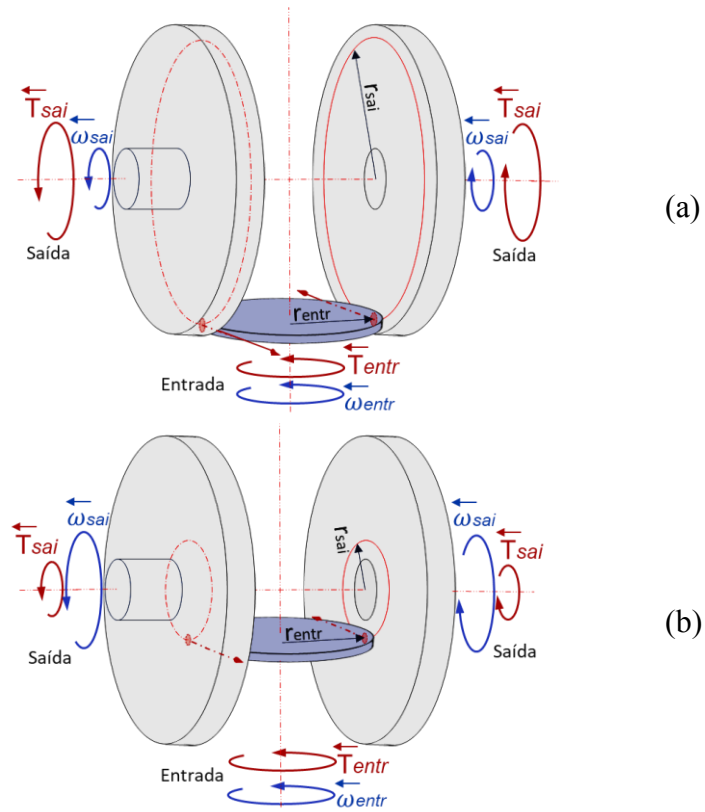
$$v_{T.sai} = \omega_{sai} r_{sai} \quad (2.1.b)$$

Portanto, nos CVTs de tração, ao se deslocar a posição dos pontos de contato entre os elementos, variam-se, também, as distâncias radiais destes pontos até seus eixos de rotação e, com isto, suas velocidades angulares, como relaciona a equação 2.2.

$$\omega_{entr} r_{entr} = \omega_{sai} r_{sai} \quad (2.2)$$

Em que, ω_{entr} é a velocidade angular do elemento de entrada; r_{entr} é a distância dos pontos de contato do elemento de entrada, até seu eixo de rotação, ou simplesmente raio de entrada; ω_{sai} é a velocidade angular de saída; e r_{sai} , o raio de saída, que é a distância dos pontos de contato do elemento de saída, até seu eixo de rotação, como mostra a Figura 2-9.

Figura 2-9: Funcionamento de uma roda de atrito; (a) Redução de velocidade; (b) Multiplicação de velocidade.

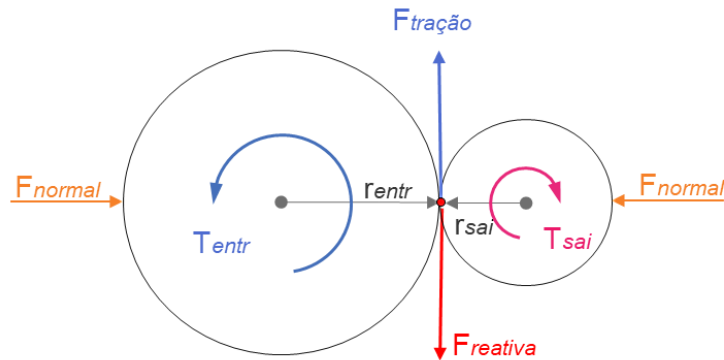


Fonte: do autor.

2.4.2 Torque e relação de transmissão

Da mesma forma que a velocidade tangencial, a força de tração no contato é comum aos elementos do par cinemático, assim uma relação semelhante à equação (2.1) pode ser aplicada ao torque, se desconsideradas as perdas por atrito, como mostram a Figura 2-10 e as equações a seguir.

Figura 2-10: Transferência de torque por tração entre dois discos em rotação.



Fonte: do autor.

$$\frac{T_{entr}}{r_{entr}} = F_{tração} = -\frac{T_{sai}}{r_{sai}} \quad (2.3.a)$$

Logo:

$$\frac{T_{entr}}{r_{entr}} = -\frac{T_{sai}}{r_{sai}} \quad (2.4)$$

A equação 2.4 mostra que os torques nominais dos elementos de entrada e saída (T_{entr} e T_{sai}) são proporcionais aos seus respectivos raios de contato, ou seja, para um dado eixo com torque constante, à medida que o raio de um componente acoplado a este eixo aumenta, a força tangencial, ou tração, decresce de forma inversamente proporcional.

Assim, a relação de transmissão (i_{tr}) pode ser obtida como:

$$i_{tr} = \frac{r_{sai}}{r_{entr}} = \left| \frac{T_{sai}}{T_{entr}} \right| = \left| \frac{\omega_{entr}}{\omega_{sai}} \right| \quad (2.5)$$

2.4.3 Capacidade de torque

Nas transmissões por tração, a magnitude do torque transmitido por uma junta (j) é limitada pela relação entre seu coeficiente de atrito μ_j (ou de tração), a força normal F_N , o número de contatos entre os componentes n_c e o raio do elemento de entrada r_{entr} , como relaciona a equação 2.6.

$$\frac{T_{sai}}{r_{sai}} \leq \frac{T_{entr}}{r_{entr}} \leq n_c (\mu_j F_N) \quad (2.6)$$

Portanto, para uma capacidade de torque desejada, ao ser projetada uma transmissão de tração, deverá ser estabelecido qual será o coeficiente de atrito nos contatos, e com isto, relacionar o número de regiões de contato, com a força normal de aperto.

$$T_{entr} \leq r_{entr} n_c (\mu_j F_N) \quad (2.6.a)$$

Assim:

$$F_N \geq \frac{K_{seg} T_{entr}}{r_{entr} n_c \mu_j} \quad (2.6.b)$$

Na equação 2.6.b, é aplicado um coeficiente de segurança (K_{seg}), obtido no Cap.3.1.2 pelas equações (3.24c) e (3.29), para evitar a nucleação de trincas superficiais e que eventuais picos de carregamento não ocasionem o escorregamento total entre as superfícies. Este coeficiente deverá ser determinado de acordo com o tipo de aplicação em que a transmissão será usada, de forma a considerar a possibilidade de eventuais choques ou sobrecargas no eixo de saída. Ainda, é preciso atentar que esta relação é limitada pelo valor da vida em fadiga, especificado como requisito de projeto dos componentes, levando em conta as propriedades mecânicas dos materiais usados e as tensões de contato entre corpos em rotação (SANDA e HAYKAWA, 2005).

De acordo com a teoria dos contatos elásticos de Hertz, o comportamento das tensões e da área de contato entre corpos em rotação é fortemente sensível à geometria destes elementos, de maneira que suas formas e dimensões precisam ser levadas em conta no momento da definição da capacidade de torque do mecanismo (JOHNSON, 1985). Assim, para uma capacidade de torque requerida, as geometrias dos elementos e o número de contatos de transmissão deverão ser trabalhados, considerado um dado coeficiente de atrito, ou de tração, para que as tensões resultantes nestas regiões, não ultrapassem as tensões admissíveis, para uma vida em fadiga especificada.

As tensões de contato entre corpos rolantes serão abordadas mais detalhadamente na seção 3.1.1, sobre teorias de contato.

2.4.4 Potência e eficiência de transmissão

Se consideradas as forças dissipativas, para que a lei da conservação de energia seja respeitada, a energia mecânica que entra no mecanismo deve ser igual à energia mecânica que sai, somada à energia dissipada (NORTON, 2013), logo:

$$E_{entr} = E_{sai} + E_{dis} \quad (2.7)$$

Esta relação, quando analisada instantaneamente, aplicando o conceito de potência, fica como:

$$P_{entr} = P_{sai} + P_{dis} \quad (2.8)$$

Sabendo que a potência mecânica em um eixo é igual ao torque, multiplicado pela velocidade angular, obtemos:

$$T_{entr} \omega_{entr} = T_{sai} \omega_{sai} + P_{dis} \quad (2.8.a)$$

Assim, a eficiência de um mecanismo de transmissão representa a relação entre a potência disponível no eixo de saída e a potência inserida no eixo de entrada do mecanismo, como mostra a expressão (2.9).

$$\eta_{tr} = \frac{P_{sai}}{P_{entr}} = \frac{P_{entr} - P_{dis}}{P_{entr}} \quad (2.9a)$$

$$\eta_{tr} = \frac{T_{sai} \omega_{sai}}{T_{entr} \omega_{entr}} = \frac{T_{entr} \omega_{entr} - P_{dis}}{T_{entr} \omega_{entr}} \quad (2.9b)$$

A equação 2.9b faz uma representação geral das transmissões de tração, portanto o termo referente à potência dissipada (P_{dis}) permanece sem ser desdobrado, já que, de acordo com o tipo de transmissão analisado, diferentes fontes de perdas podem ser contabilizadas.

Apesar disso, se uma junta de transmissão for analisada separadamente, a equação (2.8a) pode ser adaptada da seguinte forma:

$$T_{entr} \omega_{entr} = T_{sai} \omega_{sai} + T_{dis} \omega_{sai} \quad (2.10a)$$

$$T_{entr} \omega_{entr} = T_{sai} \omega_{sai} + F_{dis} r_{sai} \omega_{sai} \quad (2.10b)$$

$$T_{sai} \omega_{sai} = T_{entr} \omega_{entr} - F_{dis} r_{sai} \omega_{sai} \quad (2.10c)$$

É possível ainda, aplicar a relação (2.2) e obter:

$$T_{sai} \omega_{sai} = T_{entr} \omega_{entr} - F_{dis} r_{entr} \omega_{entr} \quad (2.10.c)$$

Na equação 2.10.a, a força dissipativa no contato (F_{dis}) foi relacionada ao eixo de saída, de maneira que o torque de saída pudesse ser subtraído por um torque dissipativo resultante. No entanto, essa força pode também ser relacionada ao eixo de entrada, multiplicando-a pelo raio de entrada e assim possibilitar a subtração do torque de entrada por um torque dissipativo resultante, como mostra a equação 2.10.c. É importante lembrar que a força dissipativa terá sempre sentido oposto ao da força de tração e da velocidade tangencial.

Logo, a eficiência de um dado acoplamento (j), que liga dois corpos (n e $n + 1$), pode ser expressa da forma:

$$\eta_j = \frac{T_n \omega_n - F_{dis_j} r_j \omega_j}{T_n \omega_n} \quad (2.11.a)$$

$$\eta_j = 1 - \left(\frac{F_{dis_j} r_j \omega_j}{T_n \omega_n} \right) = 1 - \left(\frac{F_{dis_j} r_n}{T_n} \right) \quad (2.11.b)$$

A força dissipativa F_{dis_j} representa a resistência ao movimento de rolagem da junta. Seu cálculo será explicado na seção 3.1.2, e suas causas serão abordadas na seção 2.5, a seguir.

2.5 PERDAS NOS CONTATOS

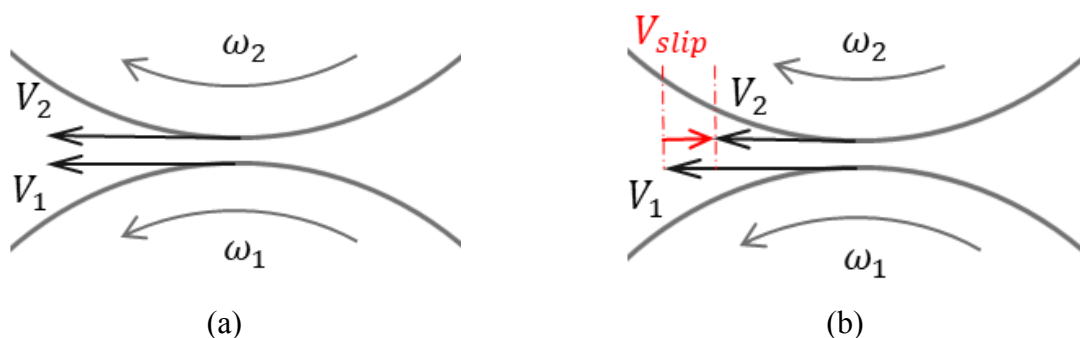
Segundo JOHNSON (1985) e TABOR (1955), a dissipação de energia nos contatos rolantes se deve pela ação de escorregamentos superficiais conhecidos como: micro escorregamento (*creep*); escorregamento longitudinal (*slip*); escorregamento lateral (*sideslip*); e escorregamento circunferencial (*spin*); e, em menor escala, pelo amortecimento causado por histerese dos materiais, ao sofrerem deformações cíclicas.

Apesar destes escorregamentos poderem ocorrer de forma simultânea, cada tipo apresenta intensidade e probabilidade de ocorrer, conforme as cargas aplicadas, materiais utilizados e com a geometria dos corpos em contato.

Por exemplo, o *slip* ou *slippage*, que é o escorregamento na direção das velocidades tangenciais de rolagem (Figura 2-11), acontece quando a força de tração ultrapassa a resistência gerada pelo atrito e resulta na diferença entre as velocidades de rotação dos elementos.

Nas transmissões de contato a seco, este tipo de perda é mais difícil de acontecer, uma vez que, como medida de segurança, uma transmissão deve ser projetada para que tenha capacidade de torque superior ao torque máximo do motor (BEACHLEY e FRANK, 1979). Já nas transmissões de tração por fluido, uma pequena taxa de escorregamento longitudinal sempre estará presente, pois a diferença entre as velocidades tangenciais, juntamente das elevadas pressões de contato, é responsável pelas tensões cisalhantes ao longo do filme de fluido, as quais possibilitam a transferência de forças entre as superfícies (MURAKAMI *et al*, 1999). O escorregamento longitudinal nas transmissões de tração por fluido, muitas vezes também é chamado de *creep*, sem se referir especificamente ao micro escorregamento, o qual também está presente neste tipo de mecanismo, porém já está inserido no fenômeno de escorregamento longitudinal (MACHIDA, 2005; SANDA e HAYKAWA, 2005; CARBONE, MANGIALARDI e MANTRIOTA, 2004).

Figura 2-11: (a) Rolamento puro, sem escorregamento longitudinal (*slip*); (b) Contato com escorregamento longitudinal.

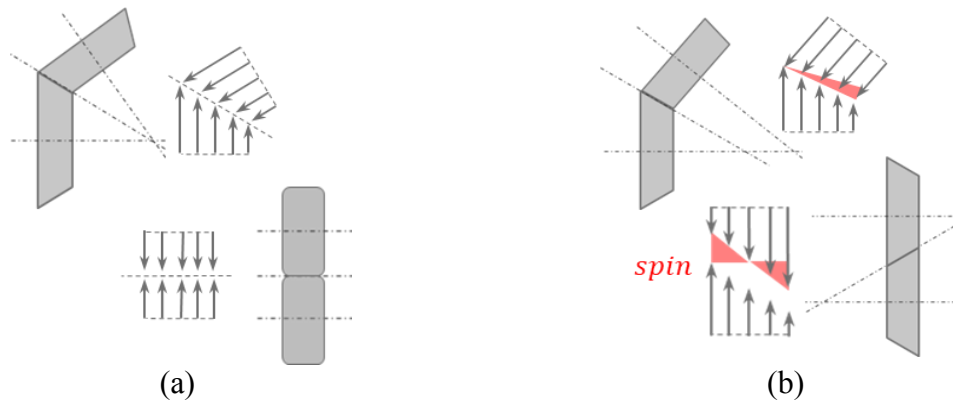


Fonte: do autor.

Já o escorregamento circunferencial, conhecido como *spin*, ocorre quando os eixos de rotação dos elementos e de seu contato não são paralelos entre si, ou não interceptam um ponto em comum (Figura 2-12), assim, a soma das componentes de velocidade resulta em um movimento relativo de rotação, com eixo perpendicular à superfície de contato. Nos CVTs, este

tipo de escorregamento pode ser evitado ao se garantir o paralelismo entre os eixos (quando possível), ou, que estes se interceptem em um mesmo ponto, para todas as relações possíveis de velocidade (DELKHOSH e FOUMANI, 2013; LI *et al*, 2015; LI, XIUQUAN, QINGTAO, 2020).

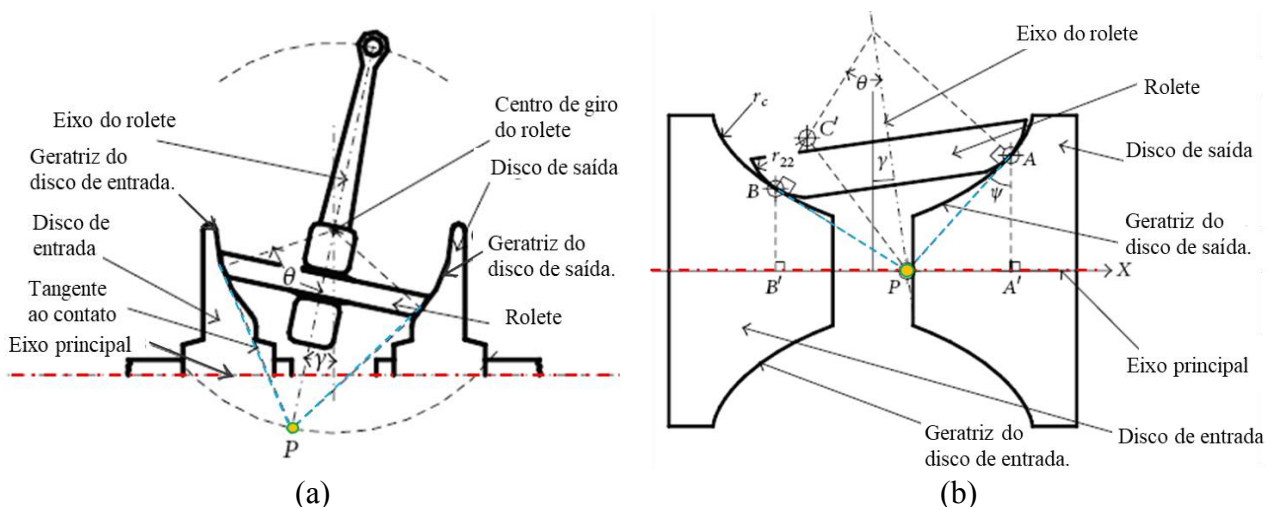
Figura 2-12: (a) Contatos rolantes sem *spin* e (b) Contatos rolantes com *spin*.



Fonte: do autor.

Li (Li *et al* 2015) conseguiu demonstrar por meio de simulações, a completa eliminação do *spin* em um conceito de CVT semi-toroidal, cujos discos e roletes foram otimizados, resultando em perfis de curvas logarítmicas, garantindo a convergência das direções de rotação em um ponto em comum, como mostra a Figura 2-13:

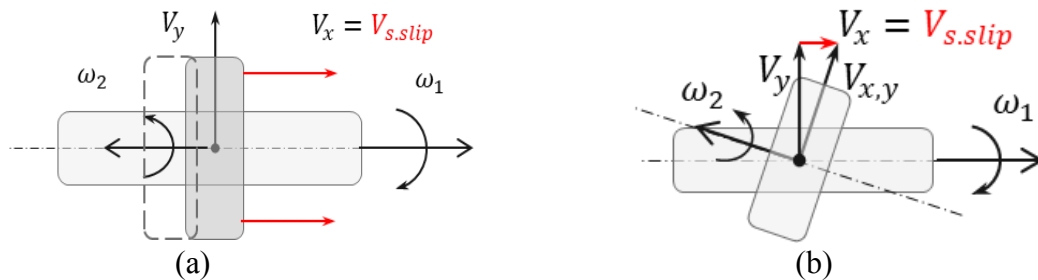
Figura 2-13: (a) CVT com ocorrência de *spin*; (b) CVT com perfis otimizados.



Fonte: Adaptado de Li *et al* (2015).

Sideslip, algumas vezes chamado de *sliding* (SRIVASTAVA; HAQUE, 2008), é o escorregamento lateral entre os contatos (Figura 2-14), com direção diferente à direção de rolagem, ocorre para possibilitar os deslocamentos durante as trocas de relações, apesar de também poder aparecer devido a desalinhamentos de montagem ou por características construtivas da junta. (LOEWENTHAL, 1983). Em transmissões de relação única, como redutores e multiplicadores de velocidade, este tipo de escorregamento pode ser facilmente evitado, no entanto, em CVTs, uma vez que as juntas de transmissão normalmente apresentam apenas um grau de liberdade para rolagem, este fenômeno não pode ser evitado durante as mudanças de velocidade sem a adição de mais graus de liberdade às juntas.

Figura 2-14: (a) Escorregamento lateral total; (b) Escorregamento lateral parcial.



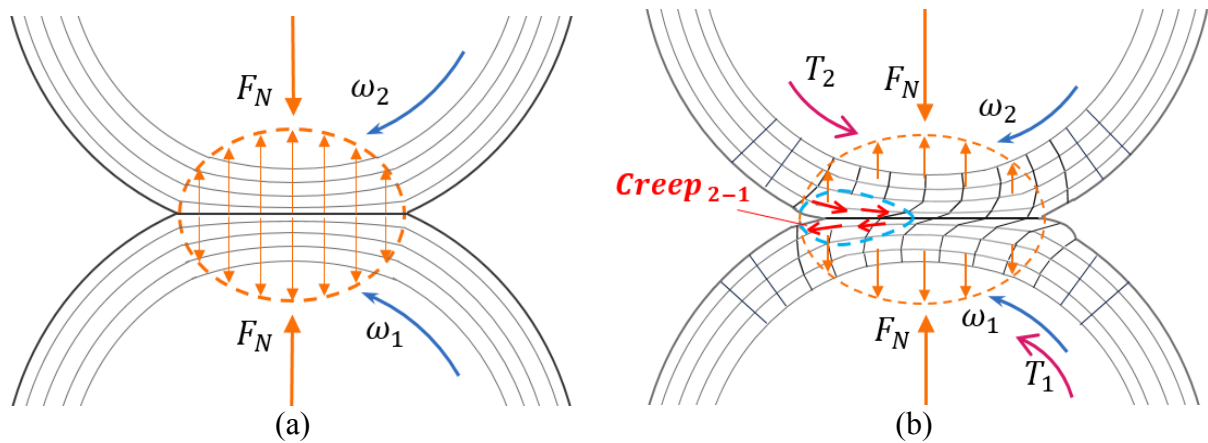
Fonte: do autor.

Por sua vez, **Creep** é o micro escorregamento superficial, causado por diferenças entre a deformação elástica das faces ao longo da área de contato, devido à presença de forças tangenciais de tração. Este fenômeno foi descrito por REYNOLDS 1875, apud JOHNSON, 1985 que descobriu que a área de contato é dividida em zonas de adesão superficial e zonas de escorregamento, delimitadas pela interação entre as forças de atrito e as forças tangenciais (JOHNSON, 1985).

Estas deformações iniciam na borda frontal e crescem ao longo do comprimento longitudinal até o centro da área de contato. A partir deste ponto, a deformação na direção normal à superfície diminui proporcionalmente à pressão normal, ao passo que a deformação tangencial se mantém constante, até o ponto em que a força de atrito torna-se inferior à força tangencial. A partir deste ponto, o contato perde adesão e as superfícies deformadas aceleram em sentido oposto ao da deformação sofrida. Como as deformações superficiais são diferentes entre os corpos – devido a diferenças nos materiais, às geometrias e, principalmente, aos sentidos opostos das forças tangenciais (força de tração e força reativa) – as velocidades de

recuperação elástica destas superfícies também são diferentes, provocando o escorregamento relativo entre as faces de contato, como mostra a Figura 2-15 (b).

Figura 2-15: Cilindros iguais sob rolamento: (a) puro, sem ocorrência de *creep*; (b) com tração e presença de *creep*.



Fonte: do autor.

De acordo com JOHNSON (1985), quando o contato envolve apenas rolamento puro, com tração nula ou de magnitude muito inferior à força de atrito, o micro escorregamento se dá em função da força normal, do coeficiente de atrito e das geometrias dos corpos, de modo que, para contatos não conformantes de mesma geometria e materiais iguais, este escorregamento torna-se desprezível. Para TABOR (1960), quando esferas ou cilindros de perfis e materiais iguais encontram-se em rolamento puro, a resistência ao rolamento se deve majoritariamente ao efeito da histerese na deformação dos materiais.

Na seção 3.2, juntamente com a teoria da elasticidade dos corpos, proposta por Hertz (JOHNSON, 1985), são discutidos modelos matemáticos para a estimativa das pressões e deformações nos contatos, bem como das perdas por micro escorregamento.

2.6 DESEMPENHO E EFICIÊNCIA DOS CVTS

Quando analisados separadamente do conjunto, os CVTs apresentam eficiências mecânicas inferiores às apresentadas pelas transmissões de engrenagens tradicionais (OSAWA, 2019; NAUNHEIMER *et al*, 2014).

KLUGER e LONG (1999) relataram eficiências de transmissão médias em torno de 96,2% para caixas manuais de cinco marchas; de 85,3% para transmissões epicicloidais com

conversor de torque; de 84,6% para os CVTs de polias variadoras; e de 91% nos modelos semi-toroidais de primeira geração. Contudo, de acordo com o estudo, enquanto as transmissões manuais já haviam atingido sua maturidade tecnológica, com pouco espaço para melhorias e as transmissões automáticas epicicloidais guardavam espaço para pouco mais de 1%, os CVTs apresentavam as melhores perspectivas de evolução, podendo chegar a 92,8% de eficiência.

Segundo os autores, as maiores perdas nos CVTs seriam causadas pelos sistemas hidráulicos, usados para controlar e manter as forças de contato, seguidas pelo escorregamento entre as superfícies de tração e pelo atrito nos mancais, como mostrado na Tabela 2-1.

Ao observar que os CVTs de segunda geração já usavam as melhores bombas e rolamentos disponíveis, apontaram que o ponto chave para a otimização destes sistemas se encontrava no desenvolvimento de óleos com melhores coeficientes de tração e estabilidade térmica. Conforme o exemplo mostrado no artigo, aumentar o coeficiente de tração do óleo de transmissão de 0,8 para 1,2 resultaria em ganho de eficiência de 1,8%, uma vez que possibilitaria menores forças de aperto e, com isto, menos gasto de potência no sistema hidráulico, além da redução das perdas nos rolamentos.

Tabela 2-1: Perdas em um CVT semi-toroidal, de acordo com o coeficiente de tração (Ct).

Origem da Perda	Ct = 0,08	Ct = 1,20	Melhoria
Sist. Hidráulico	67%	59%	8%
Escorregamentos (<i>creep</i>)	16%	20%	4%*
Manc.Rolamentos	10%	9%	1%
Selos de Vedação	7%	9%	1%*
Outros	~ 0	3%	-

* Apesar de terem sofrido redução em números absolutos, estes fatores aumentaram sua participação sobre o valor total das perdas.

Fonte: Adaptado de KLUGER e LONG (1999)

Kluger e Long, ainda, apontaram que enquanto os CVTs semi-toroidais operavam com cerca de 91% de eficiência para grande parte de sua faixa de torques, para baixas reduções, operando em baixos torques, sua eficiência caía para aproximadamente 78%. Isto se deve ao fato dos óleos de tração precisarem de altas pressões de contato para que possam transmitir as forças tangenciais, impedindo que se reduza as forças normais a partir de um certo nível de aperto, reduzindo a relação entre potência transmitida e potência gasta pelo sistema de

pressurização hidráulico. Os autores citam que este problema pode ser evitado adicionando caminhos alternativos de transmissão (*transmission shunt*), os quais substituem o CVT nas faixas de menor redução ao acoplar o motor ao *drivetrain* por meio de engrenagens, como ocorre nos PSTs (*Power Split Transmission*) (LI *et al*, 2019; FISHER, 2015).

MACHIDA (2005) relatou significativa melhora de eficiência entre CVTs semi-toroidais de primeira e segunda geração desenvolvidos pela NSK. Em seu artigo, é possível observar um avanço de 91% para 94% de eficiência, do CVT de primeira geração para o modelo subsequente, resultados que se mostram consistentes com as previsões de KLUGER e LONG (1999).

Por sua vez, LANG (2000) reportou valores próximos aos de Kluger e Long para as transmissões manuais e automáticas, porém divergiu nas eficiências de CVTs. Segundo Lang, os CVTs de polias variadoras da época podiam apresentar eficiências entre 90 e 97%, contra 84,6%, – com perspectivas de melhora para 88,4% – sustentado por Kluger e Long. Já, para os CVTs toroidais, apesar de terem reportado valores similares para as eficiências máximas, Lang apresentou uma faixa mais abrangente de valores, entre 70 e 94%, contra 91 e 92,8% dos autores comparados. Esta diferença ocorre, muito provavelmente, pelo fato de que Kluger e Long publicaram seu estudo baseados nos resultados de sua própria análise de alguns CVTs disponíveis no mercado americano, enquanto Lang agregou resultados de diferentes autores, incluindo Kluger, os quais abrangiam desde CVTs mais antigos, até aqueles ainda em fase de desenvolvimento.

Já os números publicados por Lechner e Naunheimer, em seu livro *Automotive Transmissions* (LECHNER e NAUNHEIMER, 1999), conferem com os de Kluger e Long, acerca das transmissões manuais e dos CVTs de polias, ao passo que mostram valores maiores para as transmissões automáticas epicicloidais. As razões para esta divergência, provavelmente, são similares às sugeridas para a discordância entre as publicações anteriormente comparadas, uma vez que Lechner e Naunheimer estavam inseridos no ambiente de pesquisa automotiva alemão, onde, aparentemente, ainda não havia projetos de CVTs toroidais publicados, porém, havia desenvolvimentos promissores em tecnologias de transmissões automáticas epicicloidais.

A Tabela 2-2 a seguir, resume uma visão geral das eficiências médias apresentadas por diferentes concepções de transmissão, de acordo com os autores citados.

Tabela 2-2: Eficiências médias aproximadas de diferentes tipos de transmissão.

Transmissão	$\eta^{(1)}\%$	$\eta^{(2)}\%$	$\eta^{(3)}\%$
Manual	96,2 - 96,7	97	92 - 97
Automática epic.	85,3 - 86,3	86	90 - 95
CVT polias	84,6 - 88,4	90-97	80-86
CVT Toroidal	91 - 92,8	70-94	-

Fonte: Adaptado de: (1) KLUGER e LONG (1999); (2) LANG (2000); (3) LECHNER e NAUNHEIMER, (1999)

Para LOEWENTHAL (1983), o desempenho superior dos CVTs semi-toroidais em relação aos de polias variadoras, se dá por utilizarem fluidos de transmissão mais eficientes e devido à topologia de suas juntas de transmissão, que favorecem a redução do *spin* e dos escorregamentos lateral e longitudinal. Ainda, em decorrência de sua arquitetura e das pequenas áreas de contato, estes mecanismos podem trabalhar com menores forças de aperto e, mesmo assim, obter pressões de contato elevadas, exigindo menos trabalho do sistema de acionamento. Tudo isso, leva à redução das perdas por escorregamento e da potência despendida pelo sistema hidráulico, resultando em melhor eficiência do conjunto.

3 MÉTODOS DE ANÁLISE

Esta seção tem por objetivo apresentar os principais conceitos sobre teorias de contato para corpos rolantes e método de Davies, para a modelagem e análise de mecanismos, por meio de grafos e helicoides, com modificações propostas por LAUS, SIMAS E MARTINS (2012) para a introdução de perdas no modelo.

A seção 3.1 aborda a teoria de Hertz, que descreve o contato entre corpos elásticos, e possibilita a estimativa das tensões e áreas geradas devido à compressão. Juntamente, são apresentadas teorias sobre fadiga de superfície e modelos de previsão para escorregamentos, desgaste por adesão e aquecimento entre contatos rolantes.

A seção 3.2, sobre métodos de Davies, explica os princípios do método, assim como fornece, passo a passo, seu algoritmo para modelagem de mecanismos por grafos e helicoides, bem como a resolução matemática do sistema de equações resultante.

Ao final, a seção 3.3 faz um apanhado geral sobre os principais pontos apresentados no capítulo 3.

3.1 TEORIAS DE CONTATO

O desempenho das transmissões de tração está diretamente ligado à interação entre fatores relacionados a suas áreas de contato, como distribuição de tensões, velocidades tangenciais, coeficiente de atrito, raios de curvatura, entre outros. Assim, o emprego de teorias capazes de prever o comportamento e influência dessas grandezas é essencial para a modelagem de tais mecanismos.

De acordo com JOHNSON (1985) e TABOR (1954), a base para os atuais modelos de contato vêm da teoria proposta por Heinrich Hertz, em 1881, que trata das tensões e deformações nos contatos entre corpos elásticos. O modelo desenvolvido por Hertz significou um marco para a engenharia e é até hoje utilizado para prever tensões e deformações em contatos, chamados de contatos hertzianos.

Hertz abordou o problema da distribuição de tensões ao longo da área de contato entre corpos de geometrias não conformantes, ou seja, entre corpos que, ao se tocarem sem qualquer carregamento, o fazem idealmente em um único ponto ou uma reta. A medida que uma carga de compressão é aplicada, este ponto, ou reta, evolui para uma área, a qual crescerá em função do carregamento, da rigidez dos materiais e das curvaturas dos corpos.

Neste modelo, considerando dois cilindros, ou um cilindro e um plano, uma linha de contato correspondente irá evoluir para uma área retangular. Para duas esferas, ou uma esfera e um plano, o contato crescerá de um ponto para uma área circular.

No caso geral, o formato da área resultante dependerá das relações entre as curvaturas dos corpos, podendo tender para retangular, elíptica, circular ou alguma combinação entre elas (JOHNSON, 1985).

Assim, em sua teoria, Hertz assumiu as seguintes considerações:

- As superfícies dos corpos devem ser contínuas e não conformantes;
- A área de contato é muito reduzida, em comparação às dimensões dos corpos;
- Os materiais são isotrópicos e perfeitamente elásticos;
- Os limites de elasticidade dos materiais não são atingidos;
- Não há movimento relativo entre os corpos;
- Não há forças de atrito e, portanto, não há tração envolvida;
- Os corpos estão sujeitos a um carregamento estático, normal ao plano de contato.

Tais hipóteses fazem com que esta teoria seja válida para carregamentos estáticos, sendo necessário incluir modelos mais complexos na análise de casos em que é preciso assumir o comportamento não linear de muitos materiais, ou introduzir fatores dinâmicos.

Contudo, é importante observar que, apesar das pressões e deformações encontradas desconsiderarem atrito, forças tangenciais e qualquer movimento entre os corpos, dados experimentais mostraram que as dimensões da área de contato são pouco afetadas por efeitos dinâmicos e forças tangenciais (JOHNSON, 1985). Por este motivo, tais valores são usados como ponto de partida para a análise de casos mais complexos, como o de contatos rolantes sob tração, que será apresentado na seção 3.1.2.

JOHNSON (1985), traz em seu livro “*Contact Mechanics*” desenvolvimentos de diferentes autores com relações empíricas para inúmeros regimes de contato. Para a análise de contatos rolantes, sob ação de forças de tração, o autor separa o problema em duas etapas.

Etapa 1: por meio de análise estática, aplicando as teorias de Hertz, calcula-se a área de contato, bem como suas tensões e deformações, comparando-as com critérios de falha para carregamento estático;

Etapa 2: são introduzidos fatores como atrito, velocidades, tensões e deformações tangenciais, carregamento dinâmico e vários outros, com o objetivo de avaliar sua influência sobre as tensões e deformações locais, assim como os fenômenos responsáveis pela dissipação

de energia, desgastes e fadiga do contato. Nesta etapa, devido às particularidades de cada caso e do grau de complexidade das interações entre os fatores, são usadas formulações deduzidas a partir de observações e dados experimentais.

Assim, o presente trabalho seguirá a mesma lógica utilizada por Johnson, em que os modelos de análise pertinentes ao caso da transmissão avaliada serão apresentados de acordo com as duas etapas citadas, como será visto a seguir.

3.1.1 Etapa 1 – tensões e deformações hertzianas

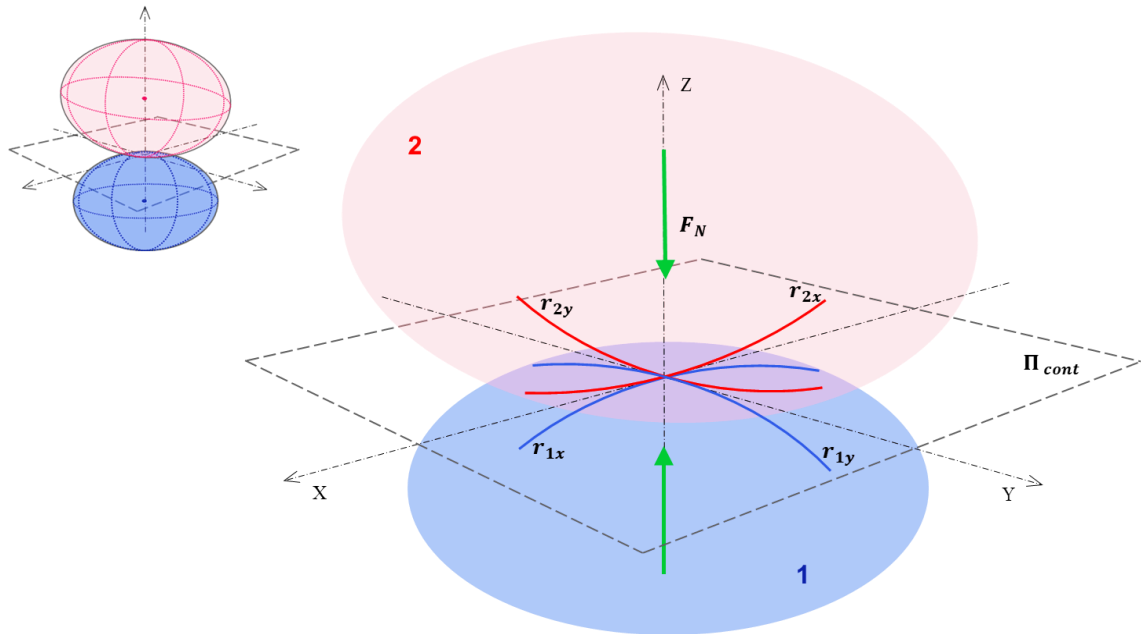
Os desenvolvimentos formulados por Hertz descrevem a distribuição de tensões e deformações para corpos genéricos, desde que obedecem às considerações citadas anteriormente. Sua solução exata envolve a resolução de integrais elípticas de primeira e segunda ordem, resolvidas por métodos de aproximação. Por isso, para facilitar a aplicação, foram deduzidas formulações específicas para casos diferentes, como mostram PUTTOCK e THWAITE (1969), JOHNSON (1985) e GREENWOOD (1997).

Para este estudo foi escolhido o desenvolvimento proposto por GREENWOOD (1997), o qual aplica as formulações para contatos circulares, em contatos elípticos, substituindo os semieixos da elipse a e b , por um raio efetivo c . GREENWOOD (1997), relata que este método se mostrou mais conveniente e bastante preciso, de modo que para relações de curvatura ($B/A \leq 5$), os erros em relação à solução “exata” (por aproximação numérica) se mostraram abaixo de 0,2%.

Deste modo, sua análise inicia com as mesmas considerações da teoria de Hertz:

Consideram-se dois corpos, de perfis não conformantes, com módulos de elasticidade (E_1 e E_2) e coeficientes de Poisson (ν_1 e ν_2), possuindo nas proximidades da região de contato, curvaturas (r_{1x} e r_{1y}), para o corpo 1 e (r_{2x} e r_{2y}), para o corpo 2, como mostra a Figura 3-1 abaixo.

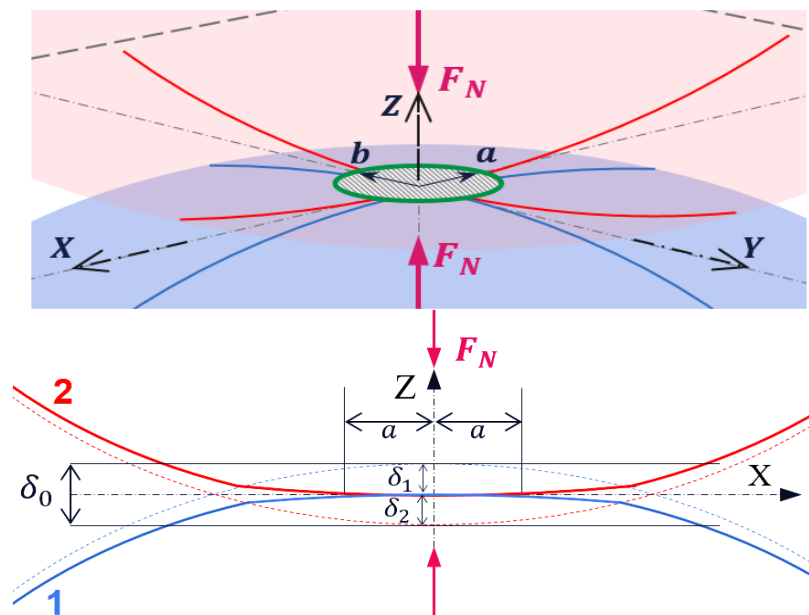
Figura 3-1: Raios de curvatura de dois corpos em contato.



Fonte: do autor.

Ao serem pressionados por uma força normal F_N , formarão uma área de contato de formato elíptico, pertencente ao plano de contato Π_{cont} , com semieixos a (na direção X) e b (na direção Y), e sofrerão uma deformação normal, que atingirá seu valor máximo δ_0 no centro da área de contato, como mostra a Figura 3-2. Para tanto, deve-se considerar uma curvatura equivalente R_e , e um módulo de elasticidade equivalente E^* .

Figura 3-2: Área e deformações normais em um contato hertziano elíptico.



Fonte: do autor.

Primeiro, são calculados raios equivalentes R_x e R_y , nas direções perpendiculares ao plano de contato (Π), os quais possibilitam o cálculo da curvatura equivalente R_e . Portanto:

$$A = \frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{1x}} + \frac{1}{r_{2x}} \qquad B = \frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{1y}} + \frac{1}{r_{2y}} \quad (3.01)$$

$$R_e = \left[A \cdot B \left(\frac{A+B}{2} \right) \right]^{-1/3} \quad (3.02)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (3.03)$$

Logo, com as formulações para um contato circular de área $\pi \bar{r}^2$ e pressão máxima de contato p_0 , os semieixos da elipse, a e b , podem ser obtidos pelas seguintes fórmulas:

$$\bar{r} = \left(\frac{3}{4} \frac{F_N R_e}{E^*} \right)^{1/3} \quad (3.04)$$

$$p_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{6 F_N E^{*2}}{R_e^2} \right)^{1/3} = \frac{3 F_N}{2 \pi \bar{r}^2} \quad (3.05a)$$

O valor da pressão média, ao longo da área de contato, pode ser calculado como:

$$\bar{p} = \frac{F_N}{\pi \bar{r}^2} = \frac{2}{3} p_0 \quad (3.05b)$$

Um das principais considerações feitas por Greenwood, foi assumir que a excentricidade da elipse k_e pode ser encontrada pela seguinte equação assintótica:

$$\frac{1}{k_e} = \left(\frac{b}{a} \right) \sim \left(\frac{A}{B} \right)^{2/3} \quad (3.06)$$

Assim, assumindo que $(a \cdot b = \bar{r}^2)$, obtém-se:

$$a = \frac{\bar{r}}{\sqrt{b/a}} = \bar{r} \sqrt{k_e} \qquad b = \bar{r} \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\bar{r}}{\sqrt{k_e}} \quad (3.07)$$

Com isso, a máxima deformação normal no contato δ_0 pode ser encontrada pela expressão:

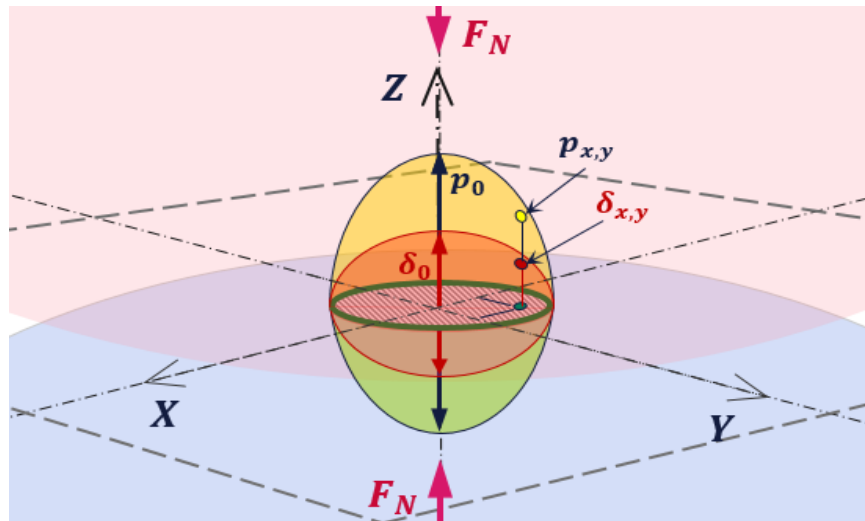
$$\delta_0 = \frac{1}{2} (A a^2 + B b^2) \quad (3.08)$$

Hertz observou, por meio de experimentos, que as distribuições de pressão ($p_{x,y}$) e deformação normal ($\delta_{x,y}$) são proporcionais entre si e podem ser descritas por funções elípticas (Figura 3-4), portanto, seus valores, em um dado ponto da área de contato, podem ser obtidos com as seguintes equações:

$$\delta_{x,y} = \delta_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (3.09)$$

$$p_{x,y} = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (3.10)$$

Figura 3-3: Distribuição de pressão e deformações normais no contato.



Fonte: (a) do autor

Um fator muito importante a ser avaliado em um contato hertziano é a máxima tensão de cisalhamento, que em contatos com carregamento compressivo estático, é igual à máxima tensão principal cisalhante (τ_1), localizada abaixo da superfície em um ponto pertencente ao eixo Z. JOHNSON (1985) apresentou uma tabela relacionando os valores máximos desta tensão, normalizados em relação a p_0 , e sua profundidade relativa (z/a), de acordo com diferentes excentricidades (a/b), como mostra a Tabela 3-1.

Tabela 3-1: Máxima tensão cisalhante normalizada (τ_1/p_0) e sua profundidade (z/a), de acordo com a excentricidade do contato (a/b).

Relação	<i>retangular</i>					<i>circular</i>	
	a/b	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
z/a		0,785	0,745	0,665	0,590	0,530	0,480
τ_1/p_0		0,300	0,322	0,325	0,323	0,317	0,310

Fonte: Adaptado de JOHNSON (1985).

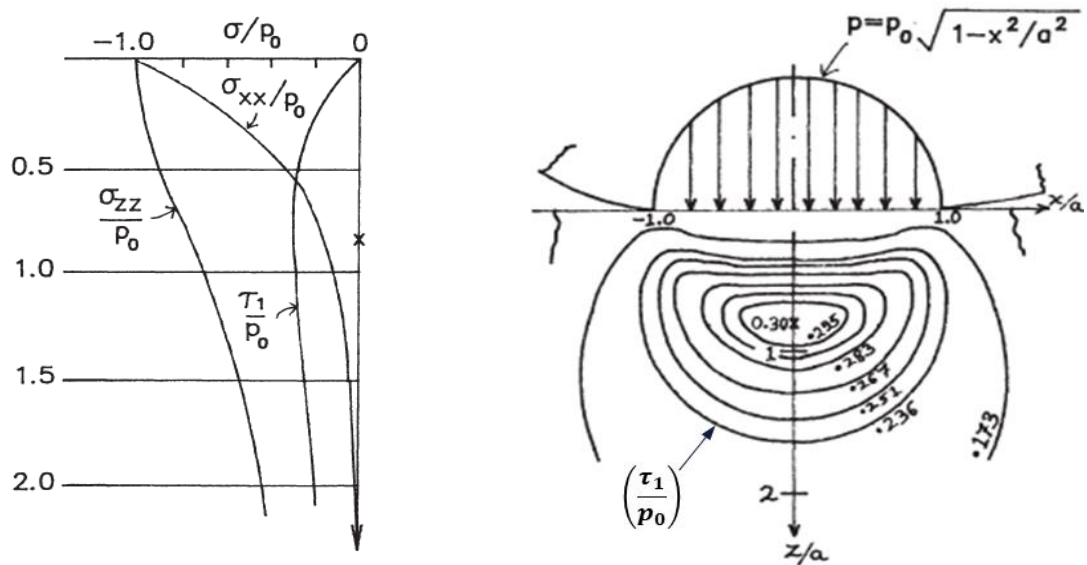
O valor máximo de (τ_1) ocorre em um plano paralelo à superfície e é utilizado como critério para avaliar se o material está próximo de sofrer deformação plástica. Este critério será explicado na seção 3.1.1.1 a seguir.

3.1.1.1 Critérios de falha para carregamento estático

CALLISTER (2002), aponta que nos metais as deformações se dão por escorregamento entre planos cristalográficos, causado por tensões resultantes, de natureza cisalhante, mesmo para carregamentos puramente compressivos.

Por sua vez, JOHNSON (1985), explica que em contatos hertzianos sob compressão, surgem tensões circunferenciais resultantes (σ_{xx} e σ_{yy} , ou σ_θ), que na superfície, se equivalem às tensões radiais (σ_{zz} , ou σ_r) e dificultam a deformação do material. A medida que se avança para as camadas subsuperficiais, tais tensões variam desproporcionalmente, originando bandas de tensões cisalhantes, responsáveis pelas direções de deformação, propagando-se radialmente a partir do centro da área de contato (Figura 3-4 (b)).

Figura 3-4: (a) Estado de tensões a partir da superfície, ao longo do eixo Z; (b) Distribuição de tensões cisalhantes, em função da pressão de contato.



Fonte: Adaptado de JOHNSON (1992).

Portanto, dado uma pressão máxima (p_0), deve ser estimada a máxima tensão principal cisalhante (τ_1), de acordo com a Tabela 3-1, considerando a excentricidade do contato (a/b), e compará-la com algum critério de falha por cisalhamento, sendo os dois principais: Tresca e Von Mises.

Assumindo **critério de Tresca**, considera-se que a falha ocorrerá quando a máxima tensão cisalhante atingir o valor da resistência ao cisalhamento ($\tau_1 = \tau_e$). Portanto, para tensões principais ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), obtém-se:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| = \tau_e = \frac{1}{2} \sigma_e \quad (3.11)$$

Na qual, τ_e é a tensão de escoamento por cisalhamento puro e, σ_e é a tensão de escoamento por tração axial.

Uma vez que, para um carregamento compressivo estático, o valor máximo de τ_1 está situado sobre o eixo de simetria ($x = 0$), as tensões principais são iguais a σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} , logo:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_{xx} - \sigma_{zz}| = \tau_e = \frac{1}{2} \sigma_e \quad (3.12)$$

Considerando um contato circular como exemplo, a pressão necessária para gerar escoamento pode ser obtida de acordo com as seguintes expressões:

$$\tau_{max} = 0,31p_0 = \tau_e = \frac{1}{2}\sigma_e \quad (3.13a)$$

$$p_{0(e)} = 3,22\tau_e = 1,61\sigma_e \quad (3.13b)$$

Em que $p_{0(e)}$, localizado sobre a origem, é o valor mínimo que a pressão máxima de carregamento (p_0) deve atingir para gerar deformação plástica.

Agora, de acordo com o **critério de von Mises**, considera-se a energia necessária para que ocorra escoamento.

Sabendo que a distribuição das tensões no contato é simétrica, assume-se que: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_r$ e $\sigma_3 = \sigma_{zz}$, e aplica-se à expressão desenvolvida por von Mises (JOHNSON, 1985):

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 6\tau_e^2 = 2\sigma_e^2 = 6J_2 \quad (3.14a)$$

$$2(\sigma_r - \sigma_{zz})^2 = 6\tau_e^2 = 2\sigma_e^2 = 6J_2 \quad (3.14b)$$

Lembrando que $|\sigma_r - \sigma_{zz}| = |\sigma_1 - \sigma_3| = 2\tau_1$; e que para um contato circular, $(\tau_1)_{max} = 0,31p_0$, é possível deduzir que:

$$(0,62p_0)^2 = 3\tau_e^2 = \sigma_e^2 = 3J_2 \quad (3.14c)$$

Portanto:

$$p_{0(e)} = \frac{\sqrt{3}}{0,62}\tau_e = \frac{1}{0,62}\sigma_e \quad (3.14d)$$

$$p_{0(e)} = 2,79\tau_e = 1,61\sigma_e \quad (3.14e)$$

Segundo os dois critérios, pode ser observado que a pressão normal necessária para iniciar escoamento em contatos circulares será de $1,61\sigma_e$. Assim, relacionando este resultado com a equação (3.05a), obtém-se a expressão que define a máxima força normal possível para que não haja deformação plástica no contato.

$$F_{N(e)} < \frac{R_e^2 (p_{0(e)} \pi)^3}{6 E^{*2}} = \frac{\pi^3}{6} \left[\frac{R_e^2 (1,61\sigma_e)^3}{E^{*2}} \right] \quad \therefore \quad F_{N(e)} < 21,57 \left[\frac{R_e^2 \sigma_e^3}{E^{*2}} \right] \quad (3.15)$$

Desenvolvendo a equação (3.15) para o caso geral, deve-se substituir o fator 1,61 (contatos circulares) das equações (3.13b) e (3.14e), pela metade do inverso da relação (τ_1/p_0) , obtida por interpolação da Tabela 3-1, como mostra a equação (3.16).

$$p_{0(e)} = \left(\frac{\tau_1}{p_0}\right)^{-1} \frac{1}{2} \sigma_e \quad (3.16)$$

Desenvolvendo a equação (3.16), o limite para a máxima pressão de contato ($p_{0(e)}$) ficará entre $1,67\sigma_e$ e $1,54\sigma_e$, de acordo com o grau de excentricidade entre os semieixos do contato (a/b). Assim, para contatos moderadamente elípticos ($B/A \leq 5$), a equação (3.15) ficará da seguinte forma:

$$F_{N(e)} < \frac{\pi^3}{6} \left[\frac{R_e^2 \left(\frac{\sigma_e}{2} \left(\frac{\tau_1}{p_0} \right)^{-1} \right)^3}{E^{*2}} \right] \quad \therefore \quad F_{N(e)} < \frac{R_e^2}{1,548 E^{*2}} \left[\frac{\sigma_e}{\left(\frac{\tau_1}{p_0} \right)} \right]^3 \quad (3.17)$$

Com isso, é possível dimensionar o mecanismo de forma que os valores de tensão nos contatos permaneçam abaixo do parâmetro indicado (equação 3.16).

Respeitando tal condição, segue-se para a etapa 2, de modelagem das perdas, fadiga e desgastes.

3.1.2 Etapa 2 – interações dinâmicas nos contatos

As teorias sobre interações dinâmicas em contatos rolantes são essenciais para que se possa compreender os agentes responsáveis pela dissipação de energia, desgastes e falhas de componentes. Por isso, a presente seção traz as principais teorias e ferramentas de análise, utilizados na previsão de tais fenômenos.

O problema da fadiga em elementos rolantes será abordado na seção 3.1.2.1, de acordo com desenvolvimentos sobre fadiga em mancais de rolamento; as perdas por microescorregamento e *spin* serão tratadas, nas seções 3.1.2.2 e 3.1.2.3, e o desgaste decorrente, na seção 3.1.2.4. Por fim, o aquecimento provocado pela dissipação por atrito será discutido na seção 3.1.2.5.

3.1.2.1 *Fadiga em contatos rolantes*

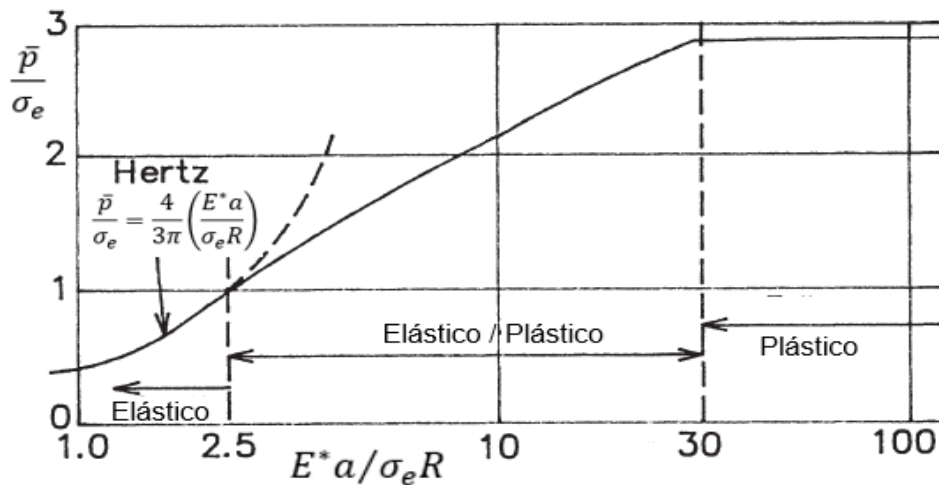
Fadiga é a fragilização gradual de um elemento submetido a esforços mecânicos cíclicos, sendo comum em eixos, asas de aeronaves, trens de pouso, mancais de rolamento e muitos outros. É um dos problemas mais sérios e complexos da área de projeto mecânico, sendo responsável por grande parte das limitações de carga e vida útil. Além disso, em muitos casos, não é possível de ser evitada, levando à necessidade de monitoramento periódico e a aplicação de modelos de previsão de falha.

Sua ocorrência pode ser provocada de diferentes maneiras, dependendo dos materiais usados e da forma que os carregamentos são impostos. Nos casos clássicos de fadiga por flexão e tração, a região de maior criticidade se passa na superfície dos corpos, onde ocorrem as máximas amplitudes de tensão, de modo que defeitos superficiais, ou a própria rugosidade de superfície, podem atuar como concentradores de tensão e originar trincas. Por este motivo, em peças sujeitas a esforços cíclicos, como eixos e longarinas, um bom acabamento de superfície é essencial para a resistência à fadiga (NORTON, 2013).

Por sua vez, em corpos sujeitos a contatos sob compressão e rolamento livre, exceto a ocorrência de leves tensões trativas nas bordas externas do contato, as superfícies permanecem sob estado compressivo, dificultando a formação e propagação de trincas na região. Isto, faz com que a maior probabilidade de fragilização ocorra nas camadas subsuperficiais, aonde se encontram as maiores tensões cisalhantes, conforme explicado anteriormente.

JOHNSON (1985), mostra que ao estudar o comportamento real de deformação de corpos sob contatos hertzianos, é possível observar que não existe uma fronteira absoluta entre os comportamentos elástico e plástico, mas uma faixa de transição gradual entre os dois regimes, que inicia após certo patamar de tensões, como mostra a Figura 3-5.

Figura 3-5: Transição entre regimes de deformação, de acordo com a razão entre tensão média compressiva (\bar{p}) e tensão de escoamento (σ_e).



O gráfico da Figura 3-5 mostra que um regime de deformações totalmente elástico pode ser previsto de forma mais conservadora, para valores de $(\bar{p}/\sigma_e < 1)$, ou ainda, $(p_0/\sigma_e < 1,5)$, onde, a e R , representam o raio da área de contato e a curvatura equivalente entre os corpos, podendo ser substituídos por \bar{r} e R_e , segundo as considerações de Greenwood.

Tal comportamento, é explicado pela forma desigual que se manifesta a distribuição de tensões em contatos hertzianos.

Uma vez que a tensão de cisalhamento máxima atinge o limite de escoamento em um ponto, esta região sofrerá deformação plástica, reduzindo a tensão local novamente para o campo elástico, sendo necessário o aumento da carga para que a zona de plasticidade avance pelo material.

Assim, para uma faixa de carregamentos situada dentro do regime misto de deformações ($1 \leq \bar{p}/\sigma_e < 30$), haverá uma zona sob deformação plástica e outra sob deformação elástica, onde sua proporção ocorrerá de acordo com a intensidade do carregamento, em relação ao limite elástico.

No entanto, o gráfico mostra que o início da plasticidade pode ocorrer a partir de uma compressão com tensão máxima (p_0) igual à $1,5\sigma_e$, inferior ao limite de $1,61\sigma_e$, calculado anteriormente para os critérios de Tresca e von Mises. Esta diferença pode ser explicada pela presença de imperfeições na microestrutura, como poros e inclusões não metálicas, as quais atuam como concentradores de tensão locais, facilitando o surgimento de pontos de deformação plástica, dentro de um campo de deformações elásticas.

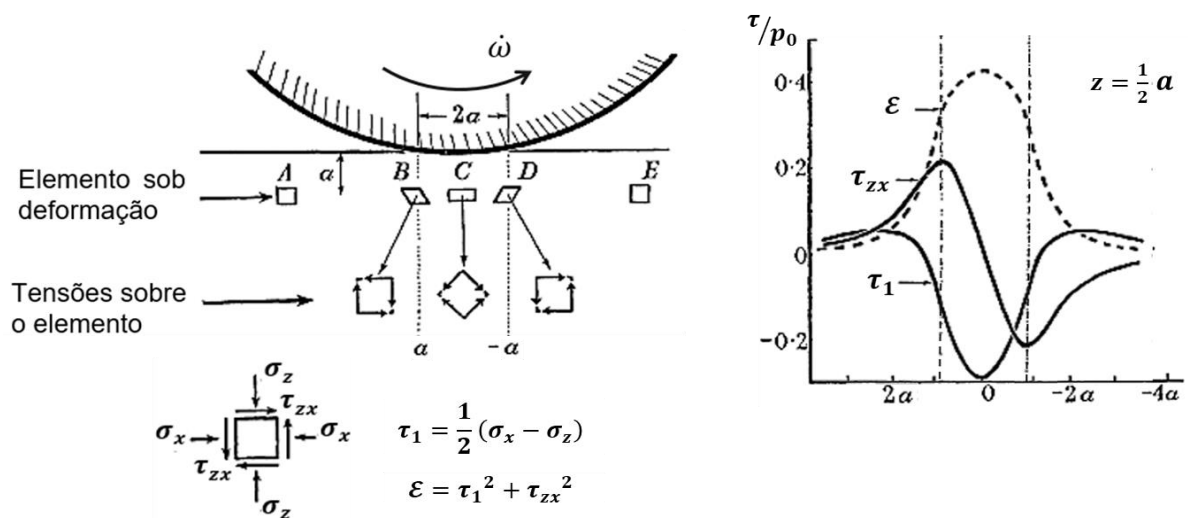
Em um carregamento estático, este fenômeno normalmente não é problemático, visto que, atingido o estado de equilíbrio, as deformações param de avançar. Por outro lado, em carregamentos cíclicos, considerando que as deformações plásticas são incapazes de retornar ao seu estado original após o relaxamento das forças, à medida que novos ciclos são impostos, as regiões afetadas podem tanto: provocar o aumento da área de contato e a atenuação do estado de tensões, em um fenômeno conhecido como *shakedown*; como podem encontrar defeitos com geometrias e direções de maior criticidade, favorecendo ainda mais a ocorrência de plasticidade e nucleação de trincas (JOHNSON, 1985; FISCHER-CRIPPS, 2007).

Portanto, deve-se diferenciar os mecanismos de falha em contatos sob carregamentos estáticos, daqueles presentes em carregamentos cíclicos.

Em um contato hertziano sob carregamento estático, o critério de falha deve se basear na tendência do material deformar plasticamente na região de máxima tensão cisalhante, a qual, para esses casos, corresponde à máxima tensão principal de cisalhamento (τ_1), localizada sobre o eixo z, com profundidade e magnitude dadas de acordo com a Tabela 3-1.

Já, se este mesmo contato for submetido ao rolamento livre, considerando uma carga compressiva constante, as tensões e deformações perderão sua característica estática, passando a avançar circunferencialmente ao longo do perímetro dos corpos, de acordo com a velocidade de rotação. Com isto, a frente de deformação iniciará à frente da borda dianteira do contato, estabilizando-se ao centro, a partir de onde se inicia o campo de retorno elástico, terminando após a fronteira posterior da área de contato ($-a$), como mostra a Figura 3-6.

Figura 3-6: Estado de tensões em um contato hertziano sob rolamento livre.



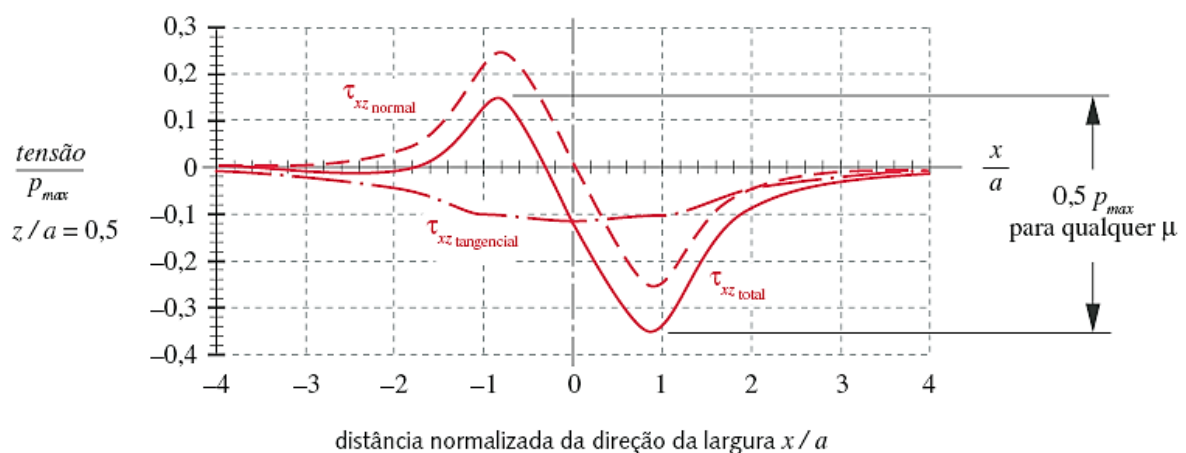
Fonte: adaptado de JOHNSON, (1985).

Na Figura 3-6, é possível observar que, para um dado ponto localizado abaixo da superfície, haverá um ciclo de compressões que se repetirá a cada revolução, com as tensões variando constantemente de magnitude, direção e sentido. Assim, se o material não falhar inicialmente em regime estático (devido à máxima tensão principal τ_1), estará sujeito à fadiga superficial, fenômeno em que as amplitudes das tensões são mais críticas que seus valores máximos (JOHNSON, 1985).

Nesses casos a amplitude da tensão de cisalhamento ortogonal (τ_{zx}) será sempre superior à da tensão cisalhante principal (τ_1), mesmo apresentando picos de magnitudes inferiores, motivo pelo qual tal grandeza é tomada como principal fator na análise de fadiga de componentes rolantes.

NORTON (2013) e JOHNSON (1985), citam que a amplitude máxima da tensão ortogonal de cisalhamento (τ_{zx}) se mantém próxima de $0,5p_0$, para áreas de contato retangulares (Figura 3-7), e de $0,42p_0$, para áreas circulares e levemente elípticas (Figura 3-6), não sendo influenciada pela introdução de tensões tangenciais de tração, nem pela variação do coeficiente de atrito, os quais atuam deslocando os valores de pico, mas não sua amplitude. No entanto, a introdução de forças tangenciais influencia diretamente na localização das tensões máximas de cisalhamento, aproximando-as da superfície, à medida que a tração aumenta em relação à força normal.

Figura 3-7: Distribuição das tensões de cisalhamento em um contato entre cilindros sob rolamento com tração.



SADEGHI et al. (2009), publicou um estudo comparativo em que faz uma ampla revisão dos principais modelos de análise de fadiga em componentes rolantes. Segundo relata,

existem basicamente dois grandes grupos de métodos de análise para fadiga de contato: modelos determinísticos e estatísticos.

Métodos determinísticos, são de natureza teórica e requerem análise completa dos estados de tensão e deformação, juntamente do emprego de ferramentas de modelagem, analíticas e numéricas, para prever o comportamento dos materiais.

Já os **modelos estatísticos**, são muito mais práticos, pois foram criados para aplicação direta em engenharia, utilizando ferramentas estatísticas para calcular a probabilidade de um componente sobreviver a um determinado número de carregamentos. Este tipo de análise, depende diretamente de formulações e dados experimentais, obtidos especificamente para cada material.

De acordo com JOHNSON (1985) e SADEGHI et al. (2009), foram LUNDBERG e PALMGREN (1949) que publicaram o primeiro modelo teórico para previsão de fadiga em contatos rolantes. Assumiram a hipótese de que as trincas eram nucleadas nas camadas subsuperficiais pela interação entre tensões ortogonais de cisalhamento e defeitos microestruturais modelados por uma distribuição de Weibull. Portanto, seu modelo era essencialmente estatístico e calculava a probabilidade de um certo volume de material sobreviver a um determinado número de carregamentos. Tal estudo foi voltado para a estimativa de vida de mancais de rolamento, porém sua aplicação se estendeu para todos os tipos de peças com contatos rolantes, sendo adotado como base das primeiras normas de vida de rolamentos.

Ao longo dos anos, com o avanço de novas técnicas de análise e caracterização de materiais, outros modelos foram surgindo, complementando a teoria de Lundberg e Palmgren.

CHIU *et al* (1971), assumiram um modelo probabilístico, sob influência do caráter gradual de comportamento entre regime elástico e plástico nos materiais, juntamente de fatores como concentração, tamanho e geometria de defeitos, dentro do campo de tensões.

IOANNIDES e HARRIS (1985), adicionaram ao modelo de Lundberg e Palmgren, uma tensão mínima de fadiga, abaixo da qual não deveria haver tal falha. Adotaram, ainda, a discretização do material em pequenos volumes, com probabilidades individuais de falha, obtendo uma probabilidade final de falha, por meio de integração. Em 1989, este método de análise foi estabelecido como padrão da norma ISO-281, para cálculo de vida de mancais de rolamento (SADEGHI et al., 2009).

SHAO (1987) e LENG (1988), analisaram aços utilizados em esferas de rolamento e separaram a evolução das trincas subsuperficiais, em estágios de: nucleação, crescimento estável e propagação ou ramificação.

SHIMIZU (2002) mostrou que os aços de alta resistência não apresentavam limites de resistência à fadiga por rolamento vindo a falhar eventualmente em algum momento. Mais tarde, KOTZALAS (2005) reforçou esta hipótese ao mostrar que a distribuição de Weibull de três parâmetros era capaz de estimar uma vida finita para fadiga de alto ciclo comparando seus resultados com dados estatísticos de rolamentos axiais de rolos cônicos.

SADEGHI et al. (2009) também comparou outra equação baseada em distribuição de Weibull de três parâmetros, proposta por RAJE, SADEGHI e RATEICK (2008), à equação de LUNDBERG e PALMGREN (1949), e concluiu que seu modelo demonstrou acuracidade superior na previsão de vida em fadiga de alto ciclo, baseado em simulações numéricas.

No entanto, é possível perceber que tanto os modelos determinísticos quanto os estatísticos são altamente dependentes de constantes e curvas de análise extraídas de caracterizações experimentais. Por sua vez, tais parâmetros tornam-se específicos, não somente para um determinado tipo de liga, mas na prática, também para seu fabricante e para outros fatores, tais como, máquina de ensaio, temperatura, concentração e distribuição de defeitos microestruturais e etc.

Em seu estudo, SADEGHI et al. (2009) relata que há importante dispersão de resultados entre os diferentes modelos analisados e que cada tipo apresenta suas vantagens e limitações.

CIAVARELLA e MONNO (2010) compararam os critérios multiaxiais de fadiga em contatos rolantes, de DANG-VAN (1989), CROSSLAND (1956) e PAPADOPOULOS (1997) e observaram significativa diferença de resultados, com o critério de Papadopoulos sendo mais conservador e o de Crossland, aparentemente, o mais realista. Contudo, concluíram que critérios multiaxiais, por si só, não ofereciam estimativas confiáveis para cálculo de fadiga por rolamento.

JOHNSON (1985) explica que em componentes rolantes sob compressão, as direções das tensões variam constantemente o que, somado à imprevisibilidade de distribuição e características dos defeitos microestruturais, torna a aplicação de modelos analíticos extremamente difícil e pouco confiável para aplicações práticas.

Por esta razão, em projetos mecânicos, muitas vezes opta-se pela adoção de normas, as quais estabelecem relações práticas, além de fornecerem estimativas conservadoras.

Para não se limitar a um caso particular nem criar a necessidade de estender este estudo para diferentes ligas, será adotado o critério de tensão compressiva da norma **ISO 281 (2007)**, para mancais de rolamentos, que estabelece uma pressão máxima de 1500 MPa como limite de

fadiga para o contato entre esferas e pista de rolamento considerando a utilização de aços típicos para este tipo de aplicação. Este limite será imposto ao contato entre as esferas e os cones do mecanismo que será estudado.

Para se ter noção do grau de segurança deste critério, é possível compará-lo com o parâmetro de tensão para regime elástico ($p_0/\sigma_e < 1,5$), deduzido da Figura 3-5, que ao ser aplicado às equações (3.13b) e (3.14e), dá origem a um novo limite para a pressão de contato máxima em regime puramente elástico, como estabelece a equação (3.18).

$$p_{0(e)} = 1,5\sigma_e \quad (3.18)$$

Observa-se que o novo limite para a pressão de contato é 6,83% menor que aquele estabelecido para carregamentos estáticos.

Agora, tomando como exemplo o aço austenítico AISI-52100, comum em aplicações de rolamentos, com tensão de escoamento tipicamente entre 2000 e 2300 MPa (SHARIFIMEHR e FATEMI, 2018; SHIGLEY, 2013; WOYDT *et al*, 2021), é possível adotar um limite de escoamento de: $\sigma_e = 2000MPa$, e comparar sua correspondente pressão máxima de contato ($p_{0(e)}$), com o critério adotado da norma ISO 281-2007, como é mostrado a seguir.

$$p_{0(e)} = 1,5\sigma_e = 1,5(2000) = 3000MPa > 1500MPa \text{ (ISO 281: 2007)} \quad (3.19)$$

Percebe-se o caráter conservador da norma, com limite 50% inferior ao critério de plasticidade obtido para Tresca e von Mises.

É possível ainda, aplicar o limite adotado à amplitude máxima da tensão de cisalhamento ortogonal ($\Delta\tau_{zx}$) e comparar seu valor ao coeficiente de resistência à fadiga por cisalhamento, da liga AISI-52100 ($\tau'_f \cong 2500MPa$), apontado por diferentes autores (SHARIFIMEHR e FATEMI, 2018; SHIMIZU, 2009; RAJE; SADEGHI; RATEICK, 2008).

Para cilindros em rolamento, sob pressão de contato de $p_{0m\acute{a}x} = 1500MPa$, a amplitude máxima de tensão cisalhante é de $\Delta\tau_{zx} \cong 0,50p_0 \cong 750MPa$, cerca de 30% do valor do coeficiente de resistência à fadiga. Aplicando as constantes encontradas pelos autores ($\tau'_f \cong 2500MPa$ e $b \cong -0,09$) à equação de Basquin, para fadiga por torção, este valor corresponde a uma vida de aproximadamente: $N_f \cong 1,4 \cdot 10^9$ ciclos, como é mostrado a seguir.

$$N_f = \left(\frac{\Delta\tau}{2\tau'_f} \right)^{1/b} = \left(\frac{750}{2 \cdot 2500} \right)^{1/-0,09} \quad \therefore \quad N_f \cong 1,4 \cdot 10^9 \quad (3.20)$$

Para contatos circulares e elípticos, que caracterizam o mecanismo que será estudado, a amplitude máxima ($\Delta\tau_{zx} \cong 0,42p_0 \cong 630MPa$) será de 25,2% do coeficiente de resistência à fadiga, equivalendo a uma vida estimada de $N_f \cong 9,9 \cdot 10^9$ ciclos.

É evidente que estes números são meramente comparativos, servindo apenas para mostrar o grau de segurança em que se situa o critério da norma ISO 281-2007, já que, dados experimentais dos autores citados mostraram dispersões chegando a ordem de dez vezes o número de ciclos calculados teoricamente.

GOLMOHAMMADI *et al*, (2018), por exemplo, avaliaram a resistência à fadiga de placas de aço AISI-52100, submetendo-as ao rolamento contra esferas da mesma liga, sob pressões máximas de contato atingindo 5 GPa, para observar o efeito das deformações plásticas e encruamento (*shakedown*) no alívio das tensões e conseqüentemente na extensão da vida útil dos componentes. Foram realizadas quatro baterias de testes para 10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6 ciclos de carregamento, em que, após cada uma, as amostras eram analisadas para avaliar seu grau de deformações e tensões residuais. Com isso, observou-se que, para uma força normal constante, as pressões máximas de contato (p_0), que iniciavam em 5 GPa, reduziam rapidamente estabilizando-se na faixa de 2,5 GPa após pouco menos de 500 ciclos de carregamento. Baseando-se nos dados obtidos e simulações numéricas, traçaram uma curva de probabilidades de falha em função do número de ciclos, para o mesmo carregamento, onde os componentes teriam 5% de probabilidade de falhar até os 4×10^6 ciclos, 10% até os 9×10^6 e 99% de probabilidade até 10^8 ciclos.

WOYDT *et al* (2021), por sua vez, publicaram resultados experimentais de amostras da mesma liga, as quais apresentaram vidas superiores a 10^7 ciclos sob rolamento a 2,94 GPa de pressão.

MACHIDA e AIHARA (1999) utilizaram um aço austenítico de alta pureza e resistência mecânica nos discos e roletes de um CVT semi-toroidal e relatam que tais componentes foram capazes de resistir, sem danos, a $2,4 \times 10^8$ ciclos sob pressões de contato de 2,88 GPa, demonstrando a capacidade dos aços modernos de resistir à fadiga de alto ciclo mesmo sob carregamentos elevados.

É válido lembrar que estas estimativas, assim como os ensaios de fadiga sobre os quais se basearam, foram realizadas com ciclos de carregamento sobre pequenas regiões fixas das

amostras, com largura igual à sua área de contato e comprimento igual ao seu perímetro, ao passo que, no mecanismo proposto para este estudo, assim como ocorre em outros CVTs, o número de ciclos ao qual um componente será submetido se distribuirá por toda sua área sujeita a incidência de carregamentos reduzindo drasticamente a quantidade de solicitações sobre qualquer ponto em sua superfície.

Assim, se reforça o caráter conservador da norma ISO 281-2007 como critério de segurança para a resistência à fadiga do mecanismo, deixando para estudos futuros a obtenção de um fator de segurança otimizado visando melhores relações entre a massa do mecanismo e sua potência de transmissão.

Com este limite definido, é possível aplicá-lo à equação (3.05a) e encontrar o raio mínimo equivalente de contato ($R_{e(f)}$) que satisfaça esta condição, como é mostrado a seguir:

$$F_{N(f)} \leq \frac{R_e^2 (p_{0(f)} \cdot \pi)^3}{6 \cdot E^{*2}} = \frac{R_e^2 (1,5 \cdot \pi)^3}{6 \cdot E^{*2}} \quad \therefore \quad F_{N(f)} \leq 17,44 \left(\frac{R_e^2}{E^{*2}} \right) \quad (3.21a)$$

$$R_{e(f)} = \sqrt{\frac{F_N E^{*2}}{17,44}} \quad (3.21b)$$

$$F_{N(f)} = \frac{17,44}{E^{*2}} \left[\left(\frac{1}{r_{1x}} + \frac{1}{r_{2x}} \right) \cdot \left(\frac{1}{r_{1y}} + \frac{1}{r_{2y}} \right) \cdot \left(\frac{\frac{1}{r_{1x}} + \frac{1}{r_{2x}} + \frac{1}{r_{1y}} + \frac{1}{r_{2y}}}{2} \right) \right]^{-\frac{2}{3}} \quad (3.21c)$$

As equações (3.21b) e (3.21c) servem para que se possa determinar os raios dos elementos de transmissão em função da força normal, a partir da equação (2.6b). Contudo, visto que esta força é obtida em função do raio mínimo do elemento de entrada, existem infinitas soluções sendo necessário impor uma condição que restrinja as possibilidades de resposta ao correlacionar os raios de curvatura entre si ou a algum limite específico. Tal condição irá variar de acordo com as especificações e gargalos de projeto, no entanto, para o presente estudo, será adotada uma relação entre as curvaturas dos corpos representada por: $\lambda_r = r_{1min}/r_2$.

Considerando que r_{2x} e r_{2y} são os raios das esferas, nas direções x e y , e que r_{1x} e r_{1y} são as correspondentes curvaturas dos cones, para: $r_{1y} = \infty$, substituindo λ_r nas equações (3.21), obtém-se:

$$\frac{K_{seg} \cdot T_{entr}}{r_{1min} \cdot n_c \cdot \mu} = \frac{(\pi \cdot p_0)^3}{6 \cdot E^*} \left(\frac{\lambda_r + 3\lambda_r^2 + 2\lambda_r^3}{r_{1min}^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2)^{\frac{2}{3}} \quad (3.22a)$$

$$r_{1min} = \left(\frac{K_{seg} \cdot T_{entr} \cdot E^{*2} \cdot 6}{n_c \cdot \mu \cdot 1,587(\pi \cdot p_{0(f)})^3} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot (\lambda_r + 3\lambda_r^2 + 2\lambda_r^3)^{\frac{2}{9}} \quad (3.22b)$$

Na seção 4.3, a influência da variação de λ_r será um dos fatores destacados para a análise do mecanismo.

O fator de segurança K_{seg} , na equação (3.22b), abrange dois coeficientes de segurança, K_{s1} e K_{s2} , que têm as respectivas funções de evitar que a amplitude máxima das tensões de cisalhamento ocorra na superfície e de minimizar o microescorregamento (*creep*).

JOHNSON (1985) aponta que a medida que são introduzidas tensões de tração tangenciais ($z = 0$), os valores dos picos de tensão cisalhante são alterados e sua localização se aproxima da superfície até o limite em que a relação entre tração e força normal chega a 0,30 e a máxima tensão cisalhante passa a ocorrer sobre a superfície trazendo para esta região a maior probabilidade de nucleação de trincas.

Portanto, ao se calcular os valores da força normal e de tração, de acordo com a equação (2.6b), deverá ser respeitada a relação: $F_{Tr}/F_N < 0,30$, incorporada por meio do coeficiente de segurança (K_{s1}), dado como:

$$K_{s1} > \frac{F_N \cdot \mu_{est}}{F_{Tr}} = \frac{\mu_{est}}{0,30} \quad \therefore \quad \begin{cases} K_{s1} > 3,33\mu_{est}, & \mu_{est} \geq 0,30 \\ K_{s1} \geq 1, & \mu_{est} < 0,30 \end{cases} \quad (3.23)$$

Este fator será comparado com o coeficiente de segurança K_{s2} , que serve para minimizar o microescorregamento e evitar o escorregamento longitudinal (*slip*), como será mostrado na seção 3.1.2.2 a seguir.

3.1.2.2 Perdas por microescorregamento longitudinal

Como foi abordado na subseção 2.1.5, nas transmissões por tração, *creep* é o nome dado ao microescorregamento que ocorre entre as interfaces de contato.

Em corpos iguais, sob rolamento livre, segundo TABOR (1955), SAVKOOR (2001) e JOHNSON (1985), o *creep* pode ser considerado insignificante, atribuindo-se à dissipação por histerese das deformações elásticas, a causa pela resistência ao rolamento.

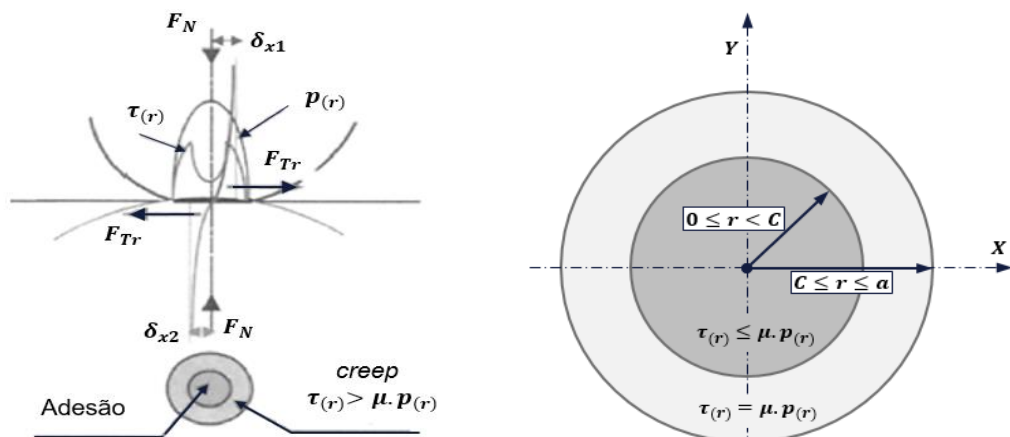
Nos CVTs de tração por fluido, desconsiderando *spin* e *sideslip*, chama-se de *creep* ao escorregamento longitudinal situado na faixa entre 1% e 3% necessário para a manutenção das tensões cisalhantes no filme de fluido e, portanto, para a transferência de forças (LOEWENTHAL, 1983; MACHIDA, 1999).

Nos CVTs de polias variadoras, o micro escorregamento ocorre nos contatos entre cada segmento de correia, ou corrente, com as polias, devido a variação das deformações elásticas nas regiões em que há transição entre os estados de tração e compressão (CARBONE *et al*, 2007).

Já, nos CVTs de tração por atrito, como o mecanismo estudado neste trabalho, *creep* refere-se ao microescorregamento presente em uma parcela da área de contato causado por diferenças nas deformações elásticas entre os corpos.

O modelo que melhor descreve este tipo de contato, segundo JOHNSON (1985) e SAVKOOR (2001), foi proposto por CATTANEO (1938) e MINDLIN (1949), os quais separaram a área de contato em regiões de adesão superficial, onde as tensões locais de tração são inferiores à resistência de atrito ($0 \leq \tau_{Tr} < \mu p_{x,y}$), e regiões de escorregamento, onde as tensões tangenciais de tração se igualam à resistência de atrito ($\tau_{Tr} = \mu p_{x,y}$).

Consideraram um contato circular de raio a , com região de adesão se estendendo radialmente entre: ($0 \leq r \leq C$); e uma área de escorregamento anular entre: ($C < r \leq a$), como mostra a Figura 3-8.



Fonte: adaptado de SAVKOOR (2001).

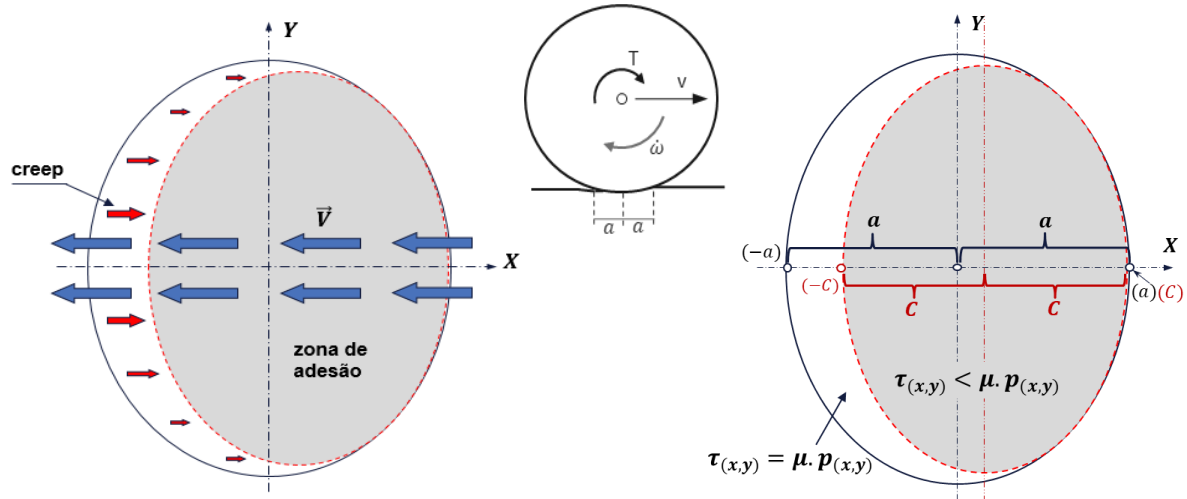
Nesta hipótese, assumiram uma pressão de contato ($p(r)$) e uma tensão tangencial de tração ($\tau(r)$) distribuídas em função do raio r a partir da origem.

Para determinar a dimensão da região de adesão de raio C , CATTANEO (1938) e MINDLIN (1949), consideraram a seguinte relação:

$$\frac{C}{a} = \left(1 - \frac{F_{tr}}{\mu F_N}\right)^{1/3} \quad (3.24)$$

Contudo, OLLERTON e HAINES (1963), observaram por meio de experimentos em contatos elípticos que a zona de adesão apresenta forma semelhante à de um limão, coincidindo com a borda dianteira do contato e fazendo fronteira com a zona de escorregamento, ao longo de uma curva espelhada em relação à borda frontal. JOHNSON (1985) então, propôs uma aproximação em que a zona de adesão assume um formato de elipse, semelhante ao da área de contato, como mostra a Figura 3-9.

Figura 3-9: Zonas de adesão e escorregamento, em contato elíptico, com tração tangencial.



Fonte: do autor.

Neste modelo, a zona de aderência inicia na borda dianteira $(a, 0)$ e termina em $(-C, 0)$. As distribuições de pressão ($p(x,y)$) e tensão tangencial ($\tau(x,y)$) podem ser modeladas de acordo com as considerações de Greenwood (1985) para contatos moderadamente elípticos, portanto, para uma força compressiva (F_N), coeficiente de atrito (μ), uma força de tração (F_{Tr}) e o semieixo de contato na direção da velocidade tangencial (a), o índice adimensional de micro escorregamento longitudinal (ξ_L) é dado como:

$$\xi_L = \frac{3\mu F_N(4-3\nu)}{16Ga^2} \left[1 - \left(1 - \frac{F_{tr}}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right] \quad (3.25)$$

em que, ν e G são os coeficientes de Poisson e o módulo de cisalhamento do material.

Considerando a velocidade tangencial como: $V_T = \dot{\omega}_{entr} * r_{entr}$, a dissipação de potência devido ao microescorregamento será obtida pelo produto da força de atrito pela taxa de escorregamento e a velocidade tangencial, de acordo com a equação (2.36) da seção 2.4.4, logo:

$$P_{\xi_L} = \mu F_N \xi_L V_T \quad (3.26a)$$

Uma vez que a potência pode ser obtida em função de uma força e uma velocidade ($P = T\dot{\omega} = F r \dot{\omega} = F V_T$), força e torque dissipativos podem ser obtidos, para um dado acoplamento j :

$$T_{\xi_L j} = \mu F_N \xi_L r_j \quad (3.26b)$$

$$F_{\xi_L j} = \mu F_N \xi_L \quad (3.26c)$$

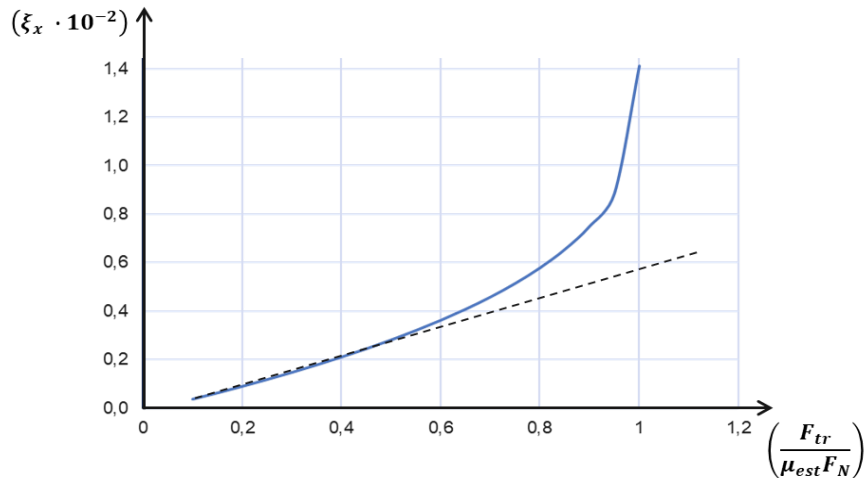
Em que, r_j é o raio equivalente da junta j , calculado pela equação (3.27), de acordo com LAUS (2011):

$$r_j = \left(\frac{r_n \cdot r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} \right) \quad (3.27)$$

Onde, o subíndice n representa o elemento motor, e $n + 1$, o elemento movido.

JOHNSON (1985) aponta que para relações em que: $F_{Tr}/\mu F_N \leq 0,5$, o microescorregamento aproxima-se de um comportamento linear. A partir deste valor, a área de adesão começa a reduzir mais rapidamente até a ocorrência de escorregamento longitudinal total, como mostra a Figura 3-10.

Figura 3-10: Curva de microescorregamento em função do fator de tração ($F_{Tr}/\mu F_N$).



Fonte: do autor.

A tolerância ao micro escorregamento deverá variar de acordo com as especificações do projeto, contudo, é prudente manter este índice o menor possível uma vez que escorregamentos, além da perda de potência, geram desgastes caso os contatos não sejam lubrificados. Por outro lado, reduzir demasiadamente esta relação ($F_{Tr}/\mu F_N$) resultará no superdimensionamento dos componentes, com o conseqüente aumento dos custos de fabricação e da massa total do mecanismo.

Para este estudo, será adotado: $F_{Tr}/\mu F_N \leq 0,5$, para manter o *creep* na faixa de comportamento linear e, ao mesmo tempo, evitar a aplicação de forças normais muito elevadas. Esta relação será incorporada ao coeficiente de segurança (K_{s2}), o qual será comparado com K_{s1} (equação 3.23) para que se possa escolher o fator que satisfaça as condições de microescorregamento e confiabilidade simultaneamente, como mostrado a seguir.

$$K_{s1} > \frac{F_N \cdot \mu}{F_{Tr}} = \mu/0,30 \quad \text{e} \quad K_{s2} \geq \frac{F_N \cdot \mu}{F_{Tr}} = 2,00 \quad (3.28a)$$

$$\begin{cases} K_{seg} = 2,00; & \mu \leq 0,60 \\ K_{seg} > \mu/0,30; & \mu > 0,60 \end{cases} \quad (3.28b)$$

Portanto, para coeficientes de atrito até 0,6 ($\mu \leq 0,60$), K_{s2} será tomado como fator de segurança (K_{seg}) das equações (3.22) e (2.6b).

3.1.2.3 Perdas por spin

O aparecimento de *spin* em um acoplamento rolante, introduz diferenças de velocidade ao longo de sua área de contato, provocando dissipação de energia devido ao trabalho gasto para “arrastar” as superfícies e manter sua mobilidade, a qual desaparecerá caso a força de atrito supere a força de tração. JOHNSON (1985) aponta que, na região de aderência, estas diferenças são absorvidas pelas deformações tangenciais até o limite em que as tensões resultantes na interface se equiparam à resistência de atrito ($\mu \cdot p_{(x,y)}$) e ocorre escorregamento. A partir deste ponto, as deformações retornam elasticamente e as componentes de velocidade do *spin* são somadas ao microescorregamento longitudinal (ξ_L), causado pelas forças de tração.

JOHNSON (1985) e SAVKOOR (2001) apresentam diferentes métodos para a estimativa das perdas provocadas pelos escorregamentos longitudinal, transversal e por *spin*, escolhidos de acordo com as geometrias de contato e seus regimes de distribuição de forças e velocidades. No entanto, segundo os autores, a combinação destes fatores em um único modelo torna sua análise demasiadamente complexa para abordagens analíticas, sendo necessário o emprego de métodos numéricos e a discretização da área de contato para sua resolução.

Por este motivo, JOHNSON (1985) mostra que para muitos casos a sobreposição de seus efeitos, calculados separadamente, é o melhor caminho, resultando em variações pequenas de resultados quando comparadas aos métodos numéricos e experimentais, sobretudo se levado em conta a variabilidade do coeficiente de atrito, que normalmente chega a 20% do valor médio calculado.

Portanto, esta seção seguirá a mesma abordagem, em que *creep* e *spin* são analisados separadamente e por fim, seus efeitos sobrepostos, fornecendo a potência dissipada no contato de acordo com a equação (3.29).

$$P_{dis(j)} = P_{\xi_{Lj}} + P_{\phi_j} \quad (3.29)$$

na qual ξ_{Lj} e ϕ_j são os índices de microescorregamento longitudinal (*creep*) e de *spin*.

Para encontrar a potência dissipada pelo *spin* (P_{ϕ_j}), sua velocidade de rotação ($\dot{\omega}_{\phi_j}$), deve ser calculada pela diferença entre as componentes de rotação dos corpos na direção perpendicular à superfície de contato, como mostra a equação (3.30).

$$\dot{\omega}_{\phi_j} = \dot{\omega}_{\perp n} - \dot{\omega}_{\perp n+1} = \dot{\omega}_n \sin \alpha_n - \dot{\omega}_{n+1} \sin \alpha_{n+1} \quad (3.30)$$

em que, α_n e α_{n+1} representam os ângulos formados entre a direção de rotação do acoplamento com os eixos do elemento motor e movido. O índice de *spin* (ϕ_j) correspondente é dado pela relação entre as velocidades de *spin* ($\dot{\omega}_{\phi_j} \cdot \bar{r}_j$) e a velocidade tangencial do contato ($V_j = \dot{\omega}_j \cdot r_j$), como mostra a equação (3.31).

$$\phi_j = \frac{\dot{\omega}_{\phi_j} \cdot \bar{r}_j}{\dot{\omega}_j \cdot r_j} ; \quad (3.31)$$

O momento resultante de resistência ao *spin* é dado pelas equações (3.32) apresentadas por JOHNSON (1985).

$$M_{\phi_j} = \frac{32(2 - \nu)}{9(3 - 2\nu)} G a^3 \phi_j \quad (3.32a)$$

$$M_{\phi_j} = \frac{3\pi a \mu F_N}{16} \quad (3.32b)$$

A equação (3.32a) se aplica ao estado de escorregamento parcial, em que, na maior parte do contato, as tensões tangenciais resultantes são inferiores à resistência de atrito. Nesta equação, ν é o coeficiente de Poisson e G é o módulo de cisalhamento do material. Por sua vez, quando esta resistência é superada, aplica-se a equação (3.32b), utilizada nos casos em que, devido a elevados índices de *spin*, as tensões oriundas das deformações tangenciais alteram as dimensões e formato da zona de aderência, fazendo-a tender a zero. Para esta formulação, a é a largura da área de contato na direção da velocidade de rolamento, podendo ser substituída por $\bar{r} (\sqrt{a \cdot b})$, para o caso de contatos elípticos.

Em ambos os casos, a potência dissipada por *spin* é calculada como:

$$P_{\phi_j} = M_{\phi_j} * \dot{\omega}_{\phi_j} \quad (3.33)$$

Assim, as perdas por *spin* (P_{ϕ_j}) se dão em função da velocidade de rotação circunferencial e do raio da área de contato devendo ser somadas às perdas por microescorregamento longitudinal ($P_{\xi_{Lj}}$), como mostrado na equação (3.29).

3.1.2.4 Desgastes nos contatos

Em juntas que apresentam mobilidade diferente de zero, sempre ocorrerá algum tipo de escorregamento entre as interfaces. Em muitas, o deslizamento entre superfícies é indispensável para a obtenção de seus graus de liberdade, como em dobradiças e dentes de engrenagens, entretanto, em contatos de tração, escorregamentos são um fator indesejado.

Em acoplamentos sem lubrificação, como consequência da interação direta entre as superfícies, há aparecimento de desgaste por adesão. De acordo com RABINOWICZ (1981) e POPOV (2010), desgaste por adesão acontece entre interfaces limpas, sem presença de contaminantes, como fluidos ou corpos abrasivos e se dá pela aderência entre as microrugosidades das superfícies que, ao deslizarem entre si, podem provocar arrancamentos de material ou sua transferência de uma face para a outra.

Os mesmos autores apontam que, embora já datada, a equação de ARCHARD (1953) ainda é a principal relação para a estimativa de desgaste por adesão, sendo aplicada ao material mais mole do par de contato. Nela (equação 3.34a), o volume de desgaste (V_d) depende de um coeficiente adimensional de desgaste (K_d), da força normal (F_N), da distância de deslizamento (S_d) e dureza à penetração do material (H_d), com as unidades variando de acordo com a referência e as constantes adotadas:

$$V_d = K_d \frac{F_N S_d}{H_d} \quad (3.34a)$$

$$\Delta_d = \frac{V_d}{A_0} = K_d \frac{F_N S_d}{H_d A_0} \quad (3.34b)$$

$$d^* = \frac{\Delta_d}{N} = K_d \frac{F_N \xi_{L_j} (2\pi r_n)}{H_d A_0} \quad (3.34c)$$

Se for desejado conhecer a profundidade de desgaste (Δ_d), deve-se dividir o volume desgastado pela área sujeita à condição de escorregamento (A_0), como mostra a equação (3.34b), ao passo que a taxa de desgaste por revolução é obtida ao se dividir a profundidade de desgaste pelo número de revoluções (equação 3.34c).

Nos ensaios de desgaste, normalmente a área A_0 é igual ao perímetro da amostra, multiplicado pela largura da área de contato, formando uma área anular estreita ($A_0 = 2\pi \cdot r \cdot b$),

contudo, para a transmissão que será avaliada neste trabalho, a área de desgaste corresponde à superfície das esferas, uma vez que, além de estarem sujeitas à passagem dos contatos de transmissão, são menores que as áreas laterais dos cones e, portanto, mais críticas em relação ao desgaste. Os valores que serão adotados para K_d e H_d estão listados na Tabela 4-4, da seção 4 e no ANEXO 1.

A distância de deslizamento é calculada pela multiplicação do índice de escorregamento da junta (ξ_{L_j}) pela distância total percorrida pelo contato (S_n), a qual pode ser calculada pelo produto entre o número de ciclos (N) para o qual se deseja avaliar o desgaste e o perímetro do componente na região de contato, como mostra a equação (3.35):

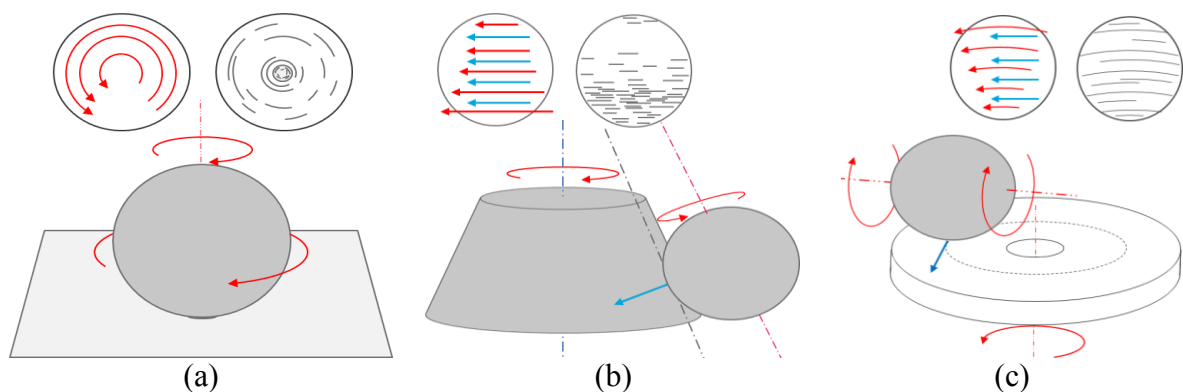
$$S_d = \xi_{L_j} S_n = \xi_{L_j} (N 2\pi r_n) \quad (3.35)$$

Uma vez que ξ_{L_j} é adimensional, S_d terá as mesmas unidades que o raio r_n .

Deve-se prestar atenção que estas equações não devem ser aplicadas diretamente para as perdas e desgastes causados por escorregamento circunferencial (*spin*), sendo necessário considerações adicionais para este caso.

O desgaste provocado por *spin* depende das direções de rotação e da distribuição das velocidades tangenciais das superfícies em contato (JOHNSON, 1985 e POPOV, 2010). No caso em que há *spin* puro (Figura 3-11a), sem rolamento entre os corpos, o desgaste se mostrará como uma cavidade hemisférica localizada sobre o centro de giro, porém, quando há presença de rolamento, o desgaste será resultado da sobreposição do *creep* com os escorregamentos provocados pelo *spin*, os quais podem ser: paralelos à velocidade tangencial (Figura 3-11b), como no CVT proposto para este estudo, ou podem se distribuir circunferencialmente a partir de um ponto de giro, como mostra a Figura 3-11c a seguir.

Figura 3-11: Diferentes tipos de desgastes provocados por spin.



Fonte: do autor

Os casos mostrados nas Figura 3-11a e Figura 3-11c não serão abordados no presente estudo, logo, aplicando a sobreposição das velocidades longitudinais de escorregamento por *creep* e *spin*, obtém-se:

$$\dot{S}_L = V_T \left[\xi_{L_j} + \phi_j \frac{y}{a} \right]; \quad \dot{S}_{Tr} = 0 \quad (3.36a)$$

$$\overline{\dot{S}_{L_j}} = V_T \left[\xi_{L_j} + \phi_j \frac{2b}{3a} \right] \quad (3.36b)$$

$$\overline{S_{d_n}} = (N 2\pi r_n) \cdot \left[\xi_{L_j} + \phi_j \frac{2b}{3a} \right] \quad (3.36c)$$

A equação (3.36a), apresentada por JOHNSON (1985), calcula a velocidade de escorregamento total para um ponto sobre a área de contato, já a equação (3.36b) fornece a velocidade de escorregamento média para todo o contato, ao passo que a equação (3.36c) obtém a distância média de escorregamento sofrida por um corpo (n), em um determinado número de ciclos (N). Nas formulações mostradas, V_T é a velocidade tangencial no contato, \dot{S}_L é a velocidade de escorregamento longitudinal e \dot{S}_{Tr} , a velocidade de escorregamento transversal.

Assim, é possível aplicar a distância média de escorregamento, encontrada com a expressão (3.36c), na equação (3.34) e obter a profundidade média de desgaste sobre a superfície de um componente, sujeito ao rolamento sob condição de *spin* e *creep* longitudinal.

Contudo, é importante lembrar que as constantes K_d são obtidas a partir de testes de desgaste em componentes com posições estáticas, em que todos os ciclos são impostos à mesma área anular do perímetro das amostras, com largura igual à da área de contato (b). Tal condição é muito mais severa que a existente nos elementos de transmissão do CVT que será estudado, no qual os ciclos são distribuídos ao longo de toda a área lateral dos componentes, com regiões de maior ou menor incidência, de acordo com o regime de operação preponderante.

3.1.2.5 Aquecimento dos contatos

Outro efeito importante, causado pelos escorregamentos, é o aquecimento provocado pela dissipação de energia.

Em acoplamentos cujas áreas de contato são consideravelmente reduzidas em comparação à taxa de calor gerado, há uma elevada resistência térmica que, caso não seja considerada, pode gerar sobreaquecimento dos componentes e a degradação das propriedades mecânicas dos materiais (POPOV, 2010).

POPOV (2010) considera que um fluxo de calor é gerado devido ao aquecimento local instantâneo (*flash temperature*), causado por escorregamentos, dependendo também da resistência térmica local da área de contato. Assim, apresenta um equacionamento que permite obter a elevação instantânea de temperatura nos contatos, como função da potência dissipada ($P_{dis}/2 = \dot{W}$) e da resistência térmica do contato (R_w).

$$\dot{W}_j = \frac{\Delta T}{R_{wj}} ; \quad R_{wj} = \frac{1}{2a_j k_w} ; \quad (3.37a)$$

$$\Delta T_j = \frac{\dot{W}_j}{2a_j k_w} = \frac{P_{dis}}{4a_j k_w} \quad (3.37b)$$

A resistência térmica, em contatos circulares e elípticos, se dá em função do raio de contato (a_j ou \bar{r}_j) e da condutividade térmica do material (k_w), que para os aços, é de aproximadamente 50 W/m.K (CALLISTER, 2011). Para materiais iguais e supondo uma mesma temperatura média dos corpos, pode-se considerar que o fluxo de calor correrá igualmente para cada superfície, por este motivo, a taxa de calor gerado, tomada como fluxo de calor na equação (3.37b), foi dividida pela metade.

Para grande parte das ligas de aço aceita-se temperaturas de até $150 \text{ }^\circ\text{C}$ sem grandes prejuízos às propriedades mecânicas, desde que previstos os efeitos da expansão térmica no mecanismo. Segundo WOYDT *et al* (2021), algumas ligas são capazes de suportar temperaturas superiores a 450°C por longos períodos e manter elevada dureza e resistência ao desgaste, como as ligas “*Cronidur 30*” (AMS 5898) e “*CSS-42LTM*” (AMS 5932), contudo, para o aço AISI-52100, que será tomado como referência neste estudo, será considerado um limite de $120 \text{ }^\circ\text{C}$ para longos períodos de exposição e 180°C para picos eventuais de temperatura.

3.2 ANÁLISE ESTÁTICA E CINEMÁTICA POR GRAFOS E HELICOIDES

No presente estudo é utilizado o Método de Davies para a modelagem e solução das equações estáticas e cinemáticas que caracterizam o mecanismo proposto. São aplicadas

modificações deste método, propostas por LAUS, SIMAS e MARTINS (2012), para a contabilização das perdas diretamente dentro do modelo matemático. Com os resultados obtidos, é possível estimar a eficiência global de transmissão e calcular as perdas de cada um de seus acoplamentos.

Assim, esta seção traz uma breve revisão sobre as teorias e ferramentas que constituem o Método de Davies, bem como explica as considerações propostas por LAUS, SIMAS e MARTINS (2012) para a internalização das forças dissipativas no modelo.

3.2.1 Método de Davies

Davies (1981) apresentou um método para a representação de sistemas multicorpos empregando teoria de grafos para a modelagem topológica de cadeias cinemáticas, juntamente de uma analogia às leis de Kirchhoff (circuitos elétricos) para determinar relações de interdependência entre seus elementos. Nesta adaptação, os vértices do grafo representam corpos rígidos e as arestas podem representar ações ou movimentos transmitidos pelos acoplamentos. Ainda, por meio de helicoides, direções e grandezas escalares são associadas aos graus de liberdade e restrições dos acoplamentos, possibilitando a montagem e solução de sistemas de equações que caracterizem o sistema.

Uma vez que esta técnica emprega diferentes ferramentas e teorias, nesta seção seus tópicos são abordados separadamente, dentro do contexto do método, utilizando a mesma notação adotada por DAVIES (1995, 2000, 2005), com eventuais adaptações.

3.2.2 Direções espaciais e ordem do sistema

O estado dinâmico de um corpo somente pode ser determinado se forem considerados elementos referenciais. Para o estado cinemático, são necessários um espaço dimensional e um ponto referencial fixo, de forma que as velocidades e suas direções devem ser tomadas relativamente a este ponto. O mesmo deve ocorrer para a determinação da estática de um objeto para que se possa estabelecer posições, sentidos e direções às forças relacionadas.

De acordo com DAVIES (1995) a quantidade de direções independentes no espaço de trabalho onde um acoplamento é representado é chamada de **ordem do sistema** (λ), sendo constituída de duas parcelas: número de **graus de liberdade** (f) e de **graus de restrição** (c), como mostra a equação (3.38) a seguir.

$$\lambda = f + c \quad (3.38)$$

Em que **graus de liberdade** é o número de direções independentes de movimento permitidas pelo acoplamento e, **graus de restrição** é o número de ações independentes transmitidas pelo acoplamento.

Portanto, em um espaço tridimensional deverão existir seis direções independentes ($\lambda = 6$), sendo três direções de translação ou de força e três direções de rotação ou momento. Em um espaço bidimensional (plano) existirão três direções independentes ($\lambda = 3$), duas de translação/força e uma direção de rotação/momento, que será normal às duas outras direções. Por último, em um espaço unidimensional só poderá haver uma direção ($\lambda = 1$), relacionada a uma força ou liberdade de translação.

Assim, ao representar dois elementos em um espaço de ordem $\lambda = 6$, tomando um dos corpos como referencial estacionário, se não houver qualquer ligação entre os corpos, seu movimento relativo será livre e haverá seis graus de liberdade entre eles ($f = 6; c = 0$), contudo, ao ser adicionado um acoplamento entre eles, caso este elemento restrinja cinco de todos os movimentos possíveis, a mobilidade reduzirá para um e o grau de restrição será igual a cinco ($f = 1; c = 5$).

Deste modo os graus de liberdade e restrições de um acoplamento poderão variar entre zero e um valor máximo igual à ordem do sistema, este último podendo assumir um valor máximo $\lambda = 6$, para um espaço tridimensional, até um valor mínimo $\lambda = 1$, para um espaço unidimensional.

É importante ressaltar que a equação (3.38) é válida apenas para acoplamentos passivos, uma vez que na representação de um acoplamento ativo, uma ação adicional precisa ser considerada, fazendo com que a soma de graus de liberdades e restrições supere o valor da ordem do sistema.

3.2.3 Acoplamentos e cadeias cinemáticas

DAVIES (1995) forneceu alguns conceitos sobre acoplamentos e cadeias cinemáticas. Segundo o autor, **acoplamento** em sua definição mais geral é um meio pelo qual é possível transmitir uma ação entre dois corpos.

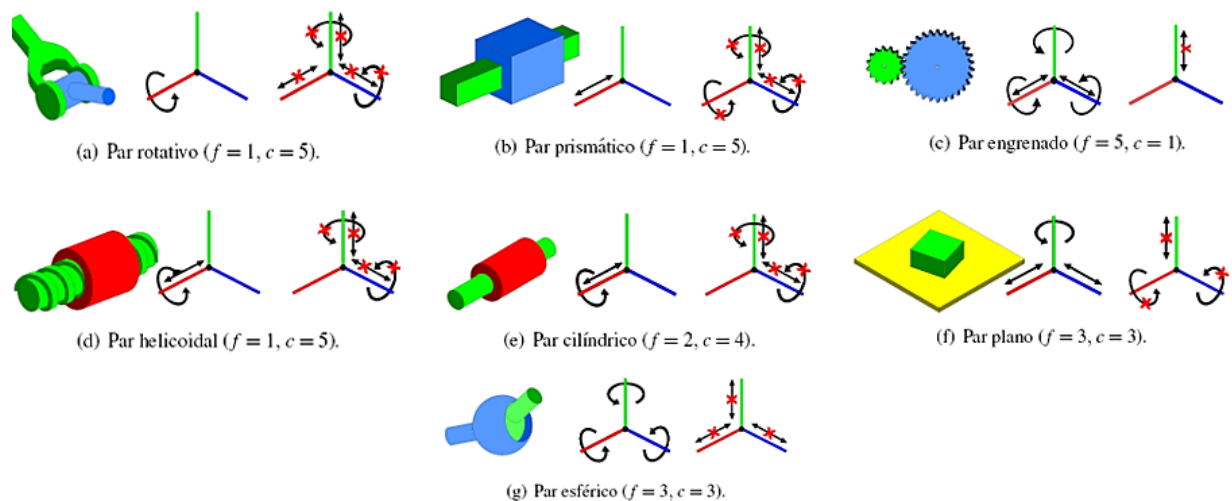
Quando dois corpos estiverem ligados diretamente por um acoplamento, este será chamado **de acoplamento direto**, a exemplo das juntas de rotação, já, quando existirem corpos

intermediários entre eles, o conjunto de elementos intermediários será chamado de **acoplamento indireto**, como no caso das juntas universais.

Aos acoplamentos diretos capazes de transferir trabalho, consumindo ou fornecendo potência mecânica para a rede de acoplamentos, dá-se o nome de **acoplamentos ativos**. Chamados também de **terminais** podem ser do tipo **entrada** ou **fonte**, quando introduzem potência no sistema, ou do tipo **saída** ou **receptor**, quando permitem a saída de potência do sistema. Já, se o acoplamento apenas restringir alguns graus de liberdade, sem fornecer ou absorver energia, este é denominado **acoplamento passivo**.

A Figura 3-12 mostra exemplos dos principais tipos de acoplamentos com seus respectivos graus de liberdade e restrições, considerando um espaço de ordem seis ($\lambda = 6$).

Figura 3-12: Principais tipos de acoplamentos, suas liberdades (f) e restrições (c).



Fonte: adaptado de CAZANGI (2008).

Quando vários corpos estiverem conectados, havendo no mínimo um caminho de ligação entre qualquer par possível, este conjunto é chamado de **rede de acoplamentos**.

Caso os corpos de uma rede de acoplamentos apresentem mobilidade em relação aos seus pares, esta rede é uma **cadeia cinemática**. Portanto, uma **estrutura**, a exemplo de uma treliça, é uma rede de acoplamentos que não possui mobilidade (CAZANGI, 2008).

Para uma cadeia cinemática, a soma de todos os graus de liberdade individuais de seus acoplamentos é chamada de **grau de liberdade bruto** (F), como mostra a equação (3.39).

$$F = \sum_{i=1}^e f_i \quad (3.39)$$

Em que e é o número de acoplamentos e f_i é o grau de liberdade que um acoplamento e_i possui.

De forma análoga, o **grau de restrição bruto** (C), representa a soma das restrições de todos os acoplamentos, como pode ser visto na equação (3.40) com c_i representando o grau de restrição.

$$C = \sum_{i=1}^e c_i \quad (3.40)$$

No entanto, quando houver internalização de ações na cadeia cinemática, para a representação de acoplamentos ativos, o grau de restrição bruto será o somatório das restrições independentes de todos os acoplamentos, com as restrições internalizadas dos acoplamentos ativos. Assim a equação (3.40) fica como:

$$C = \sum_{i=1}^e c_{pi} + \sum_{j=1}^{e_a} c_{aj} \quad (3.41)$$

Com c_{pi} representando o número de restrições passivas que um dado acoplamento e_i possui e c_{aj} o número de restrições internalizadas no acoplamento ativo e_a .

Mais à frente, são mostrados o grau de liberdade líquido e o grau de restrição líquido de uma cadeia cinemática, os quais são usados para a determinação do número de variáveis primárias e de equações redundantes do sistema.

3.2.4 Representação topológica de mecanismos por grafos

Grafos são diagramas utilizados para representar sistemas formados por múltiplos elementos na modelagem de problemas de áreas como logística, eletrônica computação e sistemas mecânicos (CAZANGI, 2008). São constituídos de vértices (pontos) e arestas (linhas), os quais correspondem a elementos do sistema, estabelecendo entre eles relações de causalidade, reciprocidade, dependência, adjacência, entre outras.

Para sua melhor compreensão, alguns conceitos sobre grafos serão apresentados, de acordo com definições de DAVIES (1995, 2000), HUNT (2000) e (CAZANGI, 2008).

Grafo direcionado, ou **di-grafo**: quando as arestas apresentam sentido de orientação.

Grafo não direcionado: quando as arestas não apresentam sentido de orientação.

Cadeia: é uma sequência de arestas adjacentes, que ligam dois vértices, sem fazer distinção entre grafos e di-grafos.

Caminho: é uma cadeia na qual cada aresta aparece uma única vez.

Circuito: caminho que inicia e termina em um mesmo vértice.

Corte: nome dado a um conjunto de arestas que, ao ser removido, separa o grafo em dois subgrafos independentes.

Grafo conexo: quando há pelo menos uma cadeia ligando cada par de vértices. Se houver pelo menos um vértice separado, o grafo é chamado de **desconexo**.

Árvore: grafo conexo que não possui circuitos.

Árvore geradora: é um subconjunto de um grafo, contendo todos os seus vértices e um subconjunto de arestas, chamadas de **ramos**. As demais arestas, retiradas do grafo, para formar a árvores geradora, são chamadas de **cordas**, em que apenas uma corda pode ser removida por circuito.

Circuito fundamental: conjunto de ramos da árvore geradora acrescentado de apenas uma corda. Assim, o número de circuitos fundamentais deve ser igual ao número de cordas.

O número de circuitos fundamentais (v) de acordo com o número de arestas (e) e vértices (n) é dado pela equação (3.42), apresentada por KIRCHHOFF (1847).

$$v = e - n + 1 \quad (3.42)$$

Corte fundamental: é formado por um conjunto de cordas e um único ramo da árvore geradora, de maneira que o número de cortes fundamentais (k) é igual ao número de ramos. Portanto, segundo CAZANGI (2008), o número de cortes fundamentais pode ser encontrado com a seguinte equação:

$$k = n - 1 \quad (3.43)$$

Na modelagem de sistemas mecânicos por grafos, um mecanismo corresponde a uma **cadeia cinemática** fechada em que os vértices representam corpos rígidos e as arestas, acoplamentos diretos. Sua topologia deve ser representada por um **grafo de acoplamentos** (G_C), do qual são obtidos o **grafo de ações** (G_A) e o **grafo de movimentos** (G_M) (DAVIES, 1995).

O grafo de ações é obtido por meio da substituição de cada aresta do grafo de acoplamentos por c_i arestas paralelas correspondentes aos seus c_i graus de restrições.

Por sua vez, o grafo de movimentos é criado ao substituir cada aresta do grafo de acoplamentos por f_i arestas em série correspondentes aos f_i graus de liberdade dos acoplamentos diretos aos quais correspondem.

De acordo com CAZANGI (2008), a principal vantagem da representação por grafos é sua capacidade de traduzir o comportamento de sistemas complexos para linguagem matemática em que um grafo é definido como um par ordenado $(G = \langle V, E \rangle)$ no qual V é formado pelo conjunto de vértices (n_1, n_2, \dots, n_n) e E , pelo conjunto das arestas (e_1, e_2, \dots, e_n) . Logo, um grafo pode ser representado matematicamente por uma matriz $[A]_{n \times n} = [A_{i,j}]$, chamada de **Matriz de Adjacência** e a representação matemática de um di-grafo, formado por n vértices e e arestas, pode ser feita por uma **Matriz de Incidência** $([I]_{n \times e} = [I_{i,j}])$.

Analogamente, os circuitos fundamentais podem ser representados por uma **Matriz de Circuitos Fundamentais** $([B]_{v \times e} = [B_{i,j}])$, em que:

- $B_{i,j} = 1$, caso e_i pertença ao circuito fundamental v_i e tenha a mesma orientação da corda que o define;
- $B_{i,j} = -1$, caso e_i pertença ao circuito fundamental v_i e tenha orientação oposta à corda que o define;
- $B_{i,j} = 0$, caso e_i não pertença ao circuito fundamental v_i .

De igual forma, os cortes fundamentais podem ser representados por uma **Matriz de Cortes Fundamentais** $([Q]_{k \times e} = [Q_{i,j}])$, de modo que:

- $Q_{i,j} = 1$, se e_i pertencer ao corte fundamental k_i e tiver a mesma orientação do ramo que o define;
- $Q_{i,j} = -1$, se e_i pertencer ao corte fundamental k_i e tiver orientação oposta ao ramo que o define;
- $Q_{i,j} = 0$, se e_i não pertencer ao corte fundamental k_i .

Portanto, ao utilizar grafos na representação de sistemas mecânicos, o método de Davies permite traçar um paralelo entre uma cadeia cinemática fechada (mecanismo) e um circuito elétrico que também forma uma cadeia fechada. Com isto, considera-se que os movimentos possíveis em uma cadeia cinemática, podem receber as mesmas considerações aplicadas às tensões em um circuito elétrico, por meio da Segunda Lei de Kirchhoff (Lei das

Malhas), com sua representação matemática sistematizada pela Matriz de Circuitos Fundamentais ($[B]_{v \times e}$). De forma similar, as ações presentes no mecanismo, são tratadas como correntes elétricas em um circuito, obedecendo à Primeira Lei de Kirchhoff (Lei dos Nós), sintetizada pela Matriz de Cortes Fundamentais ($[Q]_{k \times e}$).

Quando construídas a partir dos grafos de movimentos (G_M) e de ações (G_A), as matrizes $[B]_{v \times e}$ e $[Q]_{k \times e}$ passam para sua forma expandida ($[B_M]_{v \times F}$ e $[Q_A]_{k \times C}$), incorporando os graus de liberdade e restrições de seus acoplamentos.

Assim, as formas expandidas da Matriz de Circuitos Fundamentais $[B_M]_{v \times F}$ e da Matriz de Cortes Fundamentais $[Q_A]_{k \times C}$ carregam as relações criadas pela topologia do mecanismo, obedecendo às leis de Kirchhoff para circuitos elétricos. Ao serem combinadas com as matrizes de Movimentos Unitários e de Ações Unitárias, possibilitam o estabelecimento dos sistemas de equações da cinemática e da estática do mecanismo, como será mostrado adiante.

3.2.5 Representação por helicoides

Helicoide é uma entidade geométrica (assim como planos, pontos e retas) definida por uma reta direcionada e um passo (*screw pitch*) atribuído de uma quantidade escalar (HUNT, 2000). No estudo de mecanismos, são utilizados para representar os estados cinemático e estático dos acoplamentos em relação a um referencial fixo, tomado como origem do sistema (O_{xyz}).

O helicoide é constituído por um **vetor de direção** (\vec{S}), um **vetor de posição** (\vec{S}_0), que passa pela origem e intercepta \vec{S} , e um **passo** (h), o qual estabelece uma razão entre as grandezas escalares linear e angular. Sua representação vetorial se dá por meio seis coordenadas, conhecidas como **coordenadas de Plücker** (CAZANGI, 2008).

Na representação cinemática de um acoplamento, cada grau de liberdade deve ser representado por um helicoide de velocidade, também chamado de **heligiro** ($\M), constituído por um vetor de velocidade angular ($\vec{\omega} = \{r, s, t\}$), sobre o eixo de direção (\vec{S}), e um vetor que representa a velocidade instantânea de um ponto que passa pela origem ($\vec{V}_0 = \{u, v, w\}$). Tal vetor resulta da soma da velocidade $h\omega$ (paralela ao eixo do helicoide) com $\vec{S}_0 \times \vec{\omega}$ (normal a este eixo), como mostra a equação (3.44).

$$\mathcal{S}^M = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ \dots \\ u^* \\ v^* \\ w^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ \dots \\ u + hr \\ v + hs \\ w + ht \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ \dots \\ \vec{S}_0 \times \vec{\omega} + h\vec{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ \dots \\ \vec{V}_0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Para representar um acoplamento que permite apenas rotação, considera-se que seu passo (h) é nulo, tornando o helicóide uma função apenas de seu vetor de posição e sua velocidade angular. De forma análoga, para um acoplamento que permite somente translação, sua representação ocorrerá apenas em função de sua direção de velocidade linear, como mostra a equação (3.45) (CAZANGI, 2008).

Helicóide de rotação pura ($h = 0$)

Helicóide de translação pura ($h = \infty$)

$$\mathcal{S}^M = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ \dots \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ \dots \\ \vec{S}_0 \times \vec{\omega} \end{pmatrix} \quad \mathcal{S}^M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ u^* \\ v^* \\ w^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \vec{V}_0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Um heligiro pode ainda ser representado em função de seu **heligiro normalizado** ($\hat{\mathcal{S}}^M$) contendo suas direções unitárias e sua **magnitude** (φ^M), a qual confere grandeza escalar aos vetores de direção. Assim, pode ser reescrito na forma:

$$\mathcal{S}^M = \hat{\mathcal{S}}^M \varphi^M = \begin{pmatrix} \vec{S}^M \\ \dots \\ \vec{S}_0 \times \vec{S}^M + h\vec{S}^M \end{pmatrix} \varphi^M \quad (3.46)$$

Em que $\varphi^M = |\vec{\omega}| = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}$, para um heligiro de rotação, e $\varphi^M = |\vec{V}_0| = \sqrt{u^{*2} + v^{*2} + w^{*2}}$, para um heligiro de translação.

Ao se representar a ação de um acoplamento, a mesma tratativa pode ser dada a um helicóide, agora podendo ser chamado de **heliforça** (\mathcal{S}^A). Neste caso, será composto por um vetor de força ($\vec{F} = \{U, V, W\}$), o qual define o eixo do helicóide, e um vetor de momento ($\vec{T}_0 = \{R, S, T\}$) sobre a origem, como mostra a equação (3.47).

$$\$_A = \begin{pmatrix} R^* \\ S^* \\ T^* \\ \dots \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + hU \\ S + hV \\ T + hW \\ \dots \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{S}_0 \times \vec{F} + h\vec{F} \\ \dots \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{T}_0 \\ \dots \\ \vec{F} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

De igual forma, a representação de um helicóide de força pura ou momento puro é dada como:

Helicóide de força pura ($h = 0$)

Helicóide de momento puro ($h = \infty$)

$$\$_A = \begin{pmatrix} R \\ S \\ T \\ \dots \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{S}_0 \times \vec{F} \\ \dots \\ \vec{F} \end{pmatrix} \quad \$_A = \begin{pmatrix} R^* \\ S^* \\ T^* \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{T}_0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Assim, a representação da heliforça por sua **heliforça normalizada** ($\hat{\$_A}$) e sua **magnitude** (φ^A), fica escrita na forma de:

$$\$_A = \hat{\$_A} \varphi^A = \begin{pmatrix} \vec{S}_0 \times \vec{S}^A + h\vec{S}^A \\ \dots \\ \vec{S}^A \end{pmatrix} \varphi^A \quad (3.49)$$

Para um helicóide de força pura considera-se: $\varphi^A = |\vec{F}| = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$; e para uma helicóide de momento puro: $\varphi^A = |\vec{T}_0| = \sqrt{R^{*2} + S^{*2} + T^{*2}}$.

Tanto na cinemática como na estática, os acoplamentos devem estar na forma de acoplamentos diretos, com cada um de seus graus de liberdade e restrições representados por um heligiro e uma heliforça, respectivamente.

Os heligiros unitários são utilizados para compor a **Matriz de Movimentos Unitários** ($[\widehat{M}_D]_{\lambda \times F}$), que sintetiza os graus de liberdade da rede de acoplamentos e dá origem à **Matriz de Movimentos** ($[M_D]_{\lambda \times F}$), ao ser multiplicada pela matriz diagonal do vetor de magnitudes ($d\{\overline{\Psi}^M\}_{F \times F}$), como mostra a equação (3.50).

$$[M_D]_{\lambda \times F} = [\widehat{M}_D]_{\lambda \times F} d\{\overline{\Psi}^M\}_{F \times F} \quad (3.50)$$

A **Matriz de Movimentos** ($[M_D]_{\lambda \times F}$) sintetiza todas as velocidades de uma rede de acoplamentos, tendo seu número de linhas igual à ordem do sistema (λ) e de colunas correspondendo ao grau de liberdade bruto (F). O subíndice “D” (de *direct*) é usado nas matrizes de Ações e de Movimentos, pois identifica que a rede é constituída apenas de acoplamentos diretos.

Igualmente, a **Matriz de Ações** ($[A_D]_{\lambda \times C}$) representa todos as forças e momentos nos acoplamentos do mecanismo, com número de linhas iguais à ordem do sistema e número de colunas igual ao grau de restrição bruto (C). É obtida a partir da multiplicação da **Matriz de Ações Unitárias** ($[\hat{A}_D]_{\lambda \times C}$) pela matriz diagonal do vetor de magnitudes ($d\{\bar{\Psi}^A\}_{C \times C}$), de acordo com a equação (3.51).

$$[A_D]_{\lambda \times C} = [\hat{A}_D]_{\lambda \times C} d\{\bar{\Psi}^A\}_{C \times C} \quad (3.51)$$

Ambas as matrizes unitárias servem para montagem dos sistemas de equações, com as matrizes de Movimentos e de Ações sendo obtidas após a resolução dos sistemas.

3.2.6 Montagem dos sistemas de equações

A elaboração dos sistemas de equações é realizada por meio de duas matrizes, a **Matriz de Ações Unitárias em Rede** ($[\hat{A}_N]_{\lambda k \times C}$), para as equações da estática, e a **Matriz de Movimentos Unitários em Rede** ($[\hat{M}_N]_{\lambda v \times F}$), para as equações da cinemática.

Estas equações recebem as regras e relações de interdependência entre os elementos da cadeia cinemática das formas expandidas da Matriz de Circuitos Fundamentais e da Matriz de Cortes Fundamentais ($[Q_A]_{k \times C}$ e $[B_M]_{v \times F}$), ao passo que as restrições e movimentos dos acoplamentos (quantidades e direções), são incorporadas por meio das matrizes de ações e de movimentos unitários ($[\hat{A}_D]_{\lambda \times C}$ e $[\hat{M}_D]_{\lambda \times F}$).

As matrizes em rede servem para discriminar os helicoides das matrizes unitárias de acordo com os cortes e circuitos aos quais pertencem, para isso, as matrizes unitárias devem ser multiplicadas separadamente por cada linha de suas respectivas matrizes topológicas (cortes e circuitos). Esta multiplicação é possível por meio da diagonalização das linhas a serem multiplicadas, dando origem a matrizes diagonais de dimensão igual ao seu número de colunas.

A montagem final das matrizes em rede se dá pela disposição vertical de cada submatriz resultante das multiplicações, respeitando a ordem das linhas de suas matrizes topológicas correspondentes, como mostram as equações (3.52) e (3.53).

$$[\hat{A}_N]_{\lambda k \times C} = \begin{bmatrix} [\hat{A}_D]_{\lambda \times C} \cdot \text{diag} \{ [Q_{A_l1}]_{1 \times C} \} \\ [\hat{A}_D]_{\lambda \times C} \cdot \text{diag} \{ [Q_{A_l2}]_{1 \times C} \} \\ [\hat{A}_D]_{\lambda \times C} \cdot \text{diag} \{ [Q_{A_l3}]_{1 \times C} \} \\ \vdots \\ [\hat{A}_D]_{\lambda \times C} \cdot \text{diag} \{ [Q_{A_lk}]_{1 \times C} \} \end{bmatrix}_{\lambda k \times C} \quad (3.52)$$

$$[\hat{M}_N]_{\lambda v \times F} = \begin{bmatrix} [\hat{M}_D]_{\lambda \times F} \cdot \text{diag} \{ [B_{M_l1}]_{1 \times F} \} \\ [\hat{M}_D]_{\lambda \times F} \cdot \text{diag} \{ [B_{M_l2}]_{1 \times F} \} \\ [\hat{M}_D]_{\lambda \times F} \cdot \text{diag} \{ [B_{M_l3}]_{1 \times F} \} \\ \vdots \\ [\hat{M}_D]_{\lambda \times F} \cdot \text{diag} \{ [B_{M_lv}]_{1 \times F} \} \end{bmatrix}_{\lambda v \times F} \quad (3.53)$$

O subíndice N se refere à palavra “*network*” indicando que estas matrizes unitárias representam a distribuição dos movimentos e restrições na rede de acoplamentos.

Ao multiplicar estas matrizes por seus vetores de magnitudes, são estabelecidos os sistemas de equações da estática e da cinemática do mecanismo, traduzindo as leis dos cortes e circuitos para relações matemáticas. Assim, os sistemas de equações ficam representados como:

Sistema de equações da Estática:

$$[\hat{A}_N]_{\lambda k \times C} \{ \bar{\Psi}^A \}_{C \times 1} = \{ \bar{0} \}_{\lambda k \times 1} \quad (3.54)$$

Sistema de equações da Cinemática:

$$[\hat{M}_N]_{\lambda v \times F} \{ \bar{\Psi}^M \}_{F \times 1} = \{ \bar{0} \}_{\lambda v \times 1} \quad (3.55)$$

3.2.7 Solução dos sistemas

Para a resolução desses sistemas é necessário descobrir quantas e quais são as variáveis independentes que devem ser tomadas como entradas, a fim de que se possa determinar as demais variáveis dependentes. A escolha das variáveis independentes deve se basear na quantidade de informações disponíveis, sendo aconselhável tomar aquelas relacionadas às entradas, ou saídas, da rede de acoplamentos, uma vez que, fisicamente, determinam os movimentos dos componentes internos do mecanismo (CAZANGI, 2008).

No sistema de equações da cinemática, o número de variáveis independentes corresponde ao **grau de liberdade líquido** (F_N), que resulta da restrição de m_f equações independentes sobre o total de F variáveis existentes, como mostra a equação (3.56).

$$F_N = F - m_f \quad (3.56)$$

O número de equações independentes (m_f) equivale ao posto da matriz $[\hat{M}_N]_{\lambda v \times F}$, que por sua vez é obtido por meio de operações lineares sobre a mesma matriz (CAZANGI, 2008).

Na maioria dos mecanismos, m_f é menor que o número total de equações do sistema, isto significa que existem $(\lambda v - m_f)$ equações redundantes que podem ser eliminadas do sistema. O número de equações redundantes da cinemática equivale ao **grau de restrição líquido** (C_N) e representa a quantidade de restrições redundantes no mecanismo (DAVIES, 2005).

Por outro lado, no sistema de equações da estática o **grau de restrição líquido** (C_N), representa o número de variáveis independentes, sendo obtido da subtração do número total de restrições (C) pelo posto (m_c) da matriz de $[\hat{A}_N]_{\lambda k \times C}$, de acordo com a equação (3.57).

$$C_N = C - m_c \quad (3.57)$$

De forma análoga à cinemática, o posto m_c representa o número de equações independentes, necessárias para a determinação do sistema. Caso m_c seja inferior ao número total de equações (λk), significa que existem $(\lambda k - m_c)$ equações redundantes que podem ser removidas sem impactar na determinação do sistema.

Seguindo o Método de Daives, a resolução do sistema é obtida da seguinte forma:

- Em um primeiro passo, nas equações (3.54 e 3.55) separa-se as variáveis independentes, chamadas de variáveis primárias, e removem-se as equações redundantes.

$$\left[[\hat{A}_{Nsec}]_{m_c \times m_c} \vdots [\hat{A}_{Npri}]_{m_c \times C_N} \right] \begin{Bmatrix} \{\vec{\Psi}_{sec}^A\}_{m_c \times 1} \\ \dots \dots \dots \\ \{\vec{\Psi}_{pri}^A\}_{C_N \times 1} \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\}_{m_c \times 1} \quad (3.58)$$

$$\left[[\hat{M}_{Nsec}]_{m_f \times m_f} \vdots [\hat{M}_{Npri}]_{m_f \times F_N} \right] \begin{Bmatrix} \{\vec{\Psi}_{sec}^M\}_{m_f \times 1} \\ \dots \dots \dots \\ \{\vec{\Psi}_{pri}^M\}_{F_N \times 1} \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\}_{m_f \times 1} \quad (3.59)$$

- Em seguida, os dois lados da equação devem ser subtraídos pelas variáveis primárias.

$$[\hat{A}_{Nsec}]_{m_c \times m_c} \{\vec{\Psi}_{sec}^A\}_{m_c \times 1} = -[\hat{A}_{Npri}]_{m_c \times C_N} \{\vec{\Psi}_{pri}^A\}_{C_N \times 1} \quad (3.60)$$

$$[\hat{M}_{Nsec}]_{m_f \times m_f} \{\vec{\Psi}_{sec}^M\}_{m_f \times 1} = -[\hat{M}_{Npri}]_{m_f \times F_N} \{\vec{\Psi}_{pri}^M\}_{F_N \times 1} \quad (3.61)$$

- Atribui-se valores às variáveis primárias, multiplicando sua matriz normalizada por seu vetor de magnitudes, contendo grandezas arbitradas.
- Logo após, divide-se os dois lados da equação pela matriz de variáveis secundárias.

$$\{\vec{\Psi}_{sec}^A\}_{m_c \times 1} = [\hat{A}_{Nsec}]_{m_c \times m_c}^{-1} \times \left[-[\hat{A}_{Npri}]_{m_c \times C_N} \{\vec{\Psi}_{pri}^A\}_{C_N \times 1} \right] \quad (3.62)$$

$$\{\vec{\Psi}_{sec}^M\}_{m_f \times 1} = [\hat{M}_{Nsec}]_{m_f \times m_f}^{-1} \times \left[-[\hat{M}_{Npri}]_{m_f \times F_N} \{\vec{\Psi}_{pri}^M\}_{F_N \times 1} \right] \quad (3.63)$$

- O vetor resultante será a resposta, contendo os valores das magnitudes secundárias.

A resposta final do sistema é obtida pelo produto vetorial das matrizes de movimentos e ações unitárias por seus respectivos vetores de magnitudes na forma diagonalizadas.

$$[A_D]_{\lambda \times C} = [\hat{A}_D]_{\lambda \times C} \times \text{diag} \left[\{\bar{\Psi}^A\}_{C \times 1} \right] \quad (3.64)$$

$$[M_D]_{\lambda \times F} = [\hat{M}_D]_{\lambda \times F} \times \text{diag} \left[\{\bar{\Psi}^M\}_{F \times 1} \right] \quad (3.65)$$

Com isto, a matriz de movimentos e a matriz de ações assumem sua forma determinada, representando os estados cinemático e estático instantâneos do mecanismo.

3.2.8 Internalização das perdas por matrizes de rede aumentadas

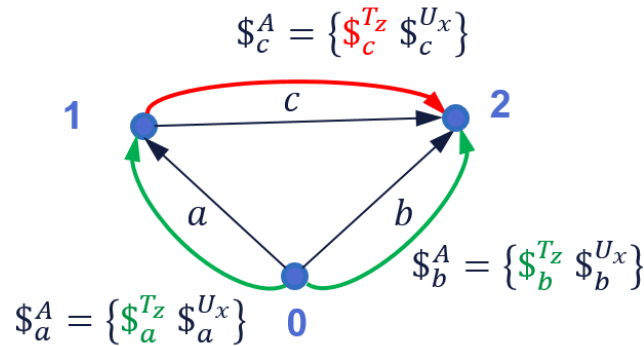
Embora o Método de Davies possibilite a internalização de forças externas por meio de acoplamentos de entrada e saída, as forças dissipativas não são consideradas diretamente no sistema de equações.

Por este motivo, foi adotado no presente estudo, o método proposto por LAUS, SIMAS e MARTINS (2012), o qual introduz fontes dissipativas por meio de sua internalização na rede de acoplamentos e determina o sistema ao adicionar **equações constitutivas** à matriz de ações unitárias em rede ($[\hat{A}_N]_{\lambda k \times C}$), dando origem à **Matriz de Ações Aumentada** ($[D_A]$).

A introdução de heliforças dissipativas, ocorre de modo igual à internalização de ações externas nos terminais de entrada e saída.

No exemplo a seguir (Figura 3-13), tirado de LAUS, SIMAS e MARTINS (2012), está representado o grafo de ações (G_A) de um par de engrenagens, neste modelo estão desconsideradas as restrições redundantes, de forma a possibilitar a simplificação do mecanismo em um espaço de ordem dois ($\lambda = 2$). Os helicoides $\T_z_a e $\T_z_b representam as ações externas internalizadas no grafo, integrando as heliforças resultantes $\A_a e $\A_b . De maneira análoga, a fonte dissipativa está internalizada na forma do helicóide $\T_z_c constituinte da heliforça resultante $\A_c .

Figura 3-13: Internalização de ações externas e fontes dissipativas no grafo de ações (G_A) de um par de engrenagens.



Fonte: adaptado de LAUS, SIMAS e MARTINS (2012).

Nesta abordagem, o grau de restrição bruto (C) da matriz de ações unitárias em rede irá crescer. Por este motivo, para que se mantenha o grau de restrição líquido (quantidade de variáveis de entrada) é preciso adicionar ($n_{eq} = C - a - C_N$) **equações constitutivas** para a determinação do sistema. Assim, seguindo com o exemplo anterior:

$$[D_A] = \begin{matrix} T \\ U \\ T \\ U \\ eq_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} T_a & U_a & T_b & U_b & T_c & U_c \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -r_1 - r_2 & 1 & -r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k_c \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

No exemplo mostrado, a equação eq_1 estabelece a relação de dependência entre as heliforças $\$_c^{T_z}$ (coluna T_c) e $\$_c^{U_x}$ (coluna U_c). Apesar de k_c poder assumir vários tipos de funções, neste exemplo está representando uma constante proporcional de atrito, obtida de uma relação entre o coeficiente de atrito adimensional e o raio equivalente entre as engrenagens, calculado a partir de seus raios primitivos. Esta relação é apresentada por LAUS (2011).

Uma vez estabelecidas as equações constitutivas, o vetor de magnitudes secundárias é obtido pela multiplicação do espaço nulo da matriz de ações aumentada ($Null(D_A)$) pelo vetor de magnitudes das variáveis primárias.

Por fim, a matriz das ações ($[A_D]_{\lambda \times C}$) é definida pelo produto matricial da matriz de ações unitárias pela matriz diagonal dos vetores de magnitudes encontrados, como mostrado na seção anterior.

3.2.9 Cálculo das potências e eficiências

A eficiência de um mecanismo é calculada pela relação entre o trabalho útil e a energia gasta para a realização deste trabalho (NORTON, 2013). No caso de uma cadeia cinemática, esta consideração é feita sobre a energia que deixa o sistema, dividida pela energia que entra. Entretanto, ao utilizar representação por helicoides, por este método representar estados instantâneos, os cálculos de eficiência se dão sobre potências instantâneas.

A potência que entra ou sai de uma cadeia cinemática é chamada de **potência transferível**, ou simplesmente potência (CAZANGI, 2008). Seu cálculo pode ser realizado diretamente, pelo produto interno entre heliforça e heligiro resultantes de um terminal como mostra a equação (3.67).

$$\mathcal{P} = \$_j^A \cdot \$_j^M = rR + sS + tT + uU + vV + wW \quad (3.67)$$

Em que j é o índice que representa o acoplamento de entrada ou saída.

É válido lembrar que, para respeitar o princípio da conservação da energia, o somatório de todas as potências calculadas nos terminais é igual a zero.

Assim, a eficiência global será calculada pela relação entre as potências dos terminais de entrada e saída do mecanismo, como mostra a equação (3.68):

$$\eta_{CVT} = \frac{\mathcal{P}_{j_sai}}{\mathcal{P}_{j_entr}} = \frac{\$_{j_sai}^A \$_{j_sai}^M}{\$_{j_entr}^A \$_{j_entr}^M} \quad (3.68)$$

Contudo, para encontrar as perdas nos acoplamentos é necessário aplicar os conceitos de Fluxo de Potência, descritos por DAVIES (2005), CAZANGI (2008), LAUS (2011) e LAUS, SIMAS e MARTINS (2012), já que os acoplamentos internos não podem ser considerados como terminais de saída da rede.

Ainda, de acordo com LAUS, SIMAS e MARTINS (2012), **Fluxo de Potência**, é a potência transferida de elo para elo, por meio de um acoplamento, dentro da cadeia cinemática, sendo calculada por um observador que se move juntamente com o elo tomado como referencial. Se o referencial estiver diretamente ligado aos terminais de entrada e saída, obtém-se o **Fluxo de Potência Real**, caso o elo referencial não esteja acoplado simultaneamente às entradas e saídas, o resultado é denominado **Fluxo de Potência Virtual**, o qual não corresponde à quantidade real de potência transmitida, mas pode ser usado para encontrar a direção do fluxo de potência ao longo da cadeia e para obter as perdas nos acoplamentos.

No caso do mecanismo estudado neste trabalho, será calculado o fluxo de potência real em cada acoplamento, para tanto, deve-se encontrar primeiro as velocidades absolutas dos elos da rede de acoplamentos em relação a um elo referencial que seja comum aos terminais, obtendo a matriz de movimentos absolutos ($[M_i]_{\lambda \times n-1}$) e, então, multiplicar a coluna correspondente ao heligiro que representa as velocidades do corpo em análise pela heliforça da matriz de ações ($[A_D]_{\lambda \times c}$) correspondente ao acoplamento que está transmitindo as forças a este corpo, como mostra a equação (3.69) a seguir.

$$\mathcal{P}_{12} = \$_{j_{12}}^A \cdot \$_1^{M_0} \quad (3.69)$$

O fluxo de potência \mathcal{P}_{12} , representa a potência transferida do corpo 1 para o corpo 2, por meio do acoplamento j_{12} . O heligiro $\$_1^{M_0}$ é a coluna da matriz de movimentos absolutos $[M_i]_{\lambda \times n-1}$ que representa as velocidades do elo 1 em relação ao elo 0.

A matriz de movimentos absolutos (M_i) é obtida pela multiplicação da matriz de movimentos ($[M_D]_{\lambda \times e}$) pela pseudo inversa de Moore-Penrose da matriz de incidência reduzida ($[A_i^\dagger]_{e \times n-1}$), como mostram as equações a seguir.

$$[M_i]_{\lambda \times n-1} = -[M_D]_{\lambda \times e} [A_i^\dagger]_{e \times n-1} \quad (3.70)$$

$$[A_i^\dagger]_{e \times n-1} = ([I_i]_{n-1 \times e})^T ([I_i]_{n-1 \times e} ([I_i]_{n-1 \times e})^T)^{-1} \quad (3.71)$$

Em que $[I_i]_{n-1 \times e}$ é a matriz de incidência reduzida, obtida ao se eliminar da matriz de incidência a linha correspondente ao elo escolhido como referência.

No exemplo mostrado na equação (3.69), caso sejam consideradas fontes dissipativas no acoplamento ($\mathcal{D}_{j_{12}}$), as perdas serão obtidas pela subtração do fluxo de potência \mathcal{P}_{21} pelo fluxo inverso \mathcal{P}_{12} (equação 3.72), uma vez que no segundo termo as perdas não são contabilizadas. Para a obtenção da eficiência deve-se dividir \mathcal{P}_{21} pela potência entregue pelo corpo 1 (\mathcal{P}_{12}), como mostra a equação (3.73).

$$\mathcal{D}_{j_{12}} = \mathcal{P}_{21} - \mathcal{P}_{12} = \$_{j_{12}}^A \cdot \$_2^{M_0} - \$_{j_{12}}^A \cdot \$_1^{M_0} \quad (3.72)$$

$$\eta_{j_{12}} = \frac{\mathcal{P}_{21}}{\mathcal{P}_{12}} = \frac{\$_{j_{12}}^A \cdot \$_2^{M_0}}{\$_{j_{12}}^A \cdot \$_1^{M_0}} \quad (3.73)$$

3.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MÉTODOS DE ANÁLISE

Neste capítulo foram revisadas as metodologias de análise que serão empregadas no presente estudo. Assim, foram apresentadas:

As teorias e ferramentas que compõem o Método de Davies, o qual será empregado para a modelagem e análise do mecanismo estudado.

A metodologia para a internalização das forças dissipativas dentro da rede de acoplamentos, bem como a resolução do sistema de equações da Matriz de Ações Aumentada, resultante do procedimento.

Teorias de contato entre corpos elásticos, utilizadas para estimar os coeficientes de dissipação que serão introduzidos no modelo de análise, de forma análoga aos coeficientes de atrito empregados por LAUS (2011) e LAUS, SIMAS e MARTINS (2012).

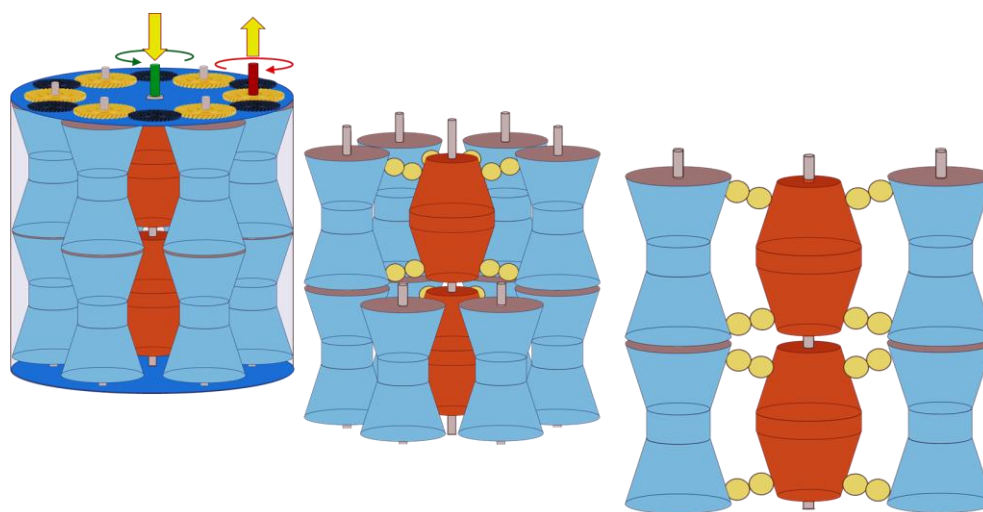
Ainda, por meio das teorias de contato, foi demonstrado como se chegou a um critério de segurança para a estimativa das cargas e dimensões de projeto, bem como foram revistos os principais tópicos sobre fadiga superficial, desgaste e aquecimento em contatos rolantes sob compressão.

4 DESCRIÇÃO DO MECANISMO DE TRANSMISSÃO

O CVT proposto compreende uma transmissão de tração por atrito composta de cones e esferas autoalinhantes. Seu propósito é eliminar os escorregamentos lateral e circunferencial sem prejudicar a mobilidade necessária para a execução das variações contínuas de velocidade. Com tal melhoria, teoricamente, seria possível eliminar a necessidade de lubrificantes, de forma a aumentar o torque específico da transmissão. Para que se possa propor esta opção, é necessário avaliar os escorregamentos nos contatos e prever os níveis de desgaste, dissipação e aquecimento dos componentes, o que será realizado no capítulo 6.

Como mostra a Figura 4-2, neste conceito, a potência mecânica deverá entrar no mecanismo pelo eixo acoplado ao componente central e ser distribuída para os cones circundantes, por meio das esferas de transmissão. Dependendo da escolha de projeto, o fluxo de potência também pode se dar no sentido oposto.

Figura 4-1: Representação do CVT de tração por esferas.



Fonte: do autor.

Visto que os acoplamentos formam pares cinemáticos superiores, buscou-se utilizar múltiplos pontos de contato, a fim de distribuir o torque de entrada, maximizar a área total de transmissão e possibilitar a redução das forças de aperto. O número de eixos de saída deve ser escolhido de acordo com os requisitos de projeto, uma vez que impacta diretamente nas dimensões e na massa do mecanismo, contudo, seu valor máximo é restringido pela relação entre os diâmetros dos cones e das esferas. Por tal motivo, a saída para que se pudesse aumentar o número de contatos de transmissão, foi espelhar o conjunto em relação à sua base, abrindo

possibilidade de se criar múltiplas seções acopladas ao mesmo eixo. Esta solução também beneficia a redução da inércia rotacional do mecanismo, uma vez que possibilita diminuir os diâmetros dos componentes, sob pena do aumento da massa e do comprimento total da transmissão.

Visando otimizar a capacidade de torque, as saídas podem estar acopladas entre si, como mostrado na Figura 4-1, ou então, serem independentes, com controle individual das relações para cada saída, viabilizando o aproveitamento de uma única fonte motora para o acionamento de múltiplos atuadores, como acontece em alguns robôs e veículos de tração integral.

Devido à simetria do mecanismo, para simplificar sua representação, o modelo de análise compreenderá somente uma saída de potência, englobando uma seção do eixo central (cone-1) e a correspondente seção de um dos eixos circundantes (cone-5), com seu acoplamento realizado pelo par de esferas (3 e 4), posicionado por meio de um atuador linear (2), como mostra a Figura 4-2.

Figura 4-2: Simplificação do mecanismo proposto.

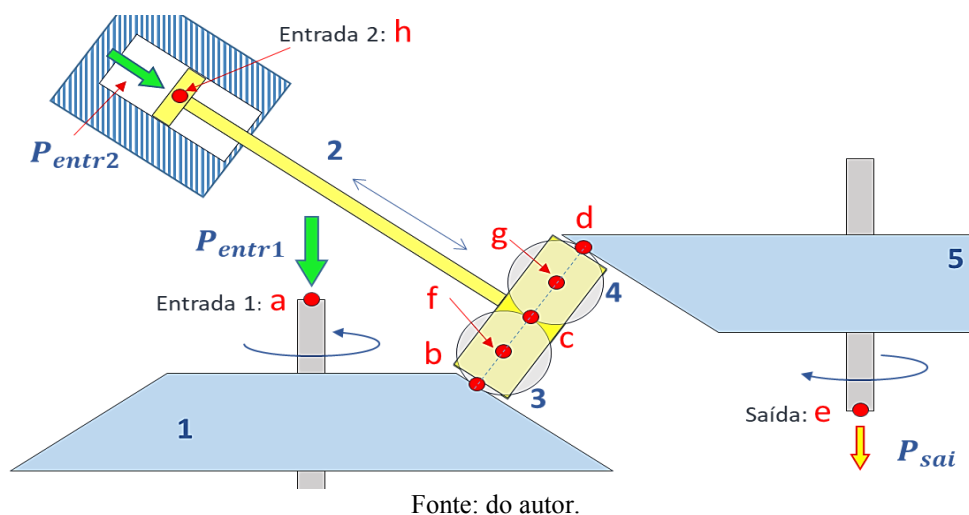


Tabela 4-1: Identificação dos componentes de transmissão e seus acoplamentos.

Elemento	Índice	Função
Cone central	1	Receber potência de eixo do motor e distribuir para os contatos.
Braço posicionador	2	Deslocar as esferas modificando a relação de transmissão.
Esferas	3, 4	Transferir potência do cone central para os cones periféricos.
Cones periféricos	5	Receber potência das esferas e disponibilizar na saída.
Mancais de rolamento	a, e	Permitir rotação em uma direção e restringir demais movimentos.
Contatos rolantes	b, c, d	Transmitir as forças tangenciais e permitir o rolamento das esferas.

Mancais esféricos	f, g	Permitir a rotação das esferas em todas as direções.
Junta prismática	h	Gerar deslocamento no posicionador em sua direção longitudinal.

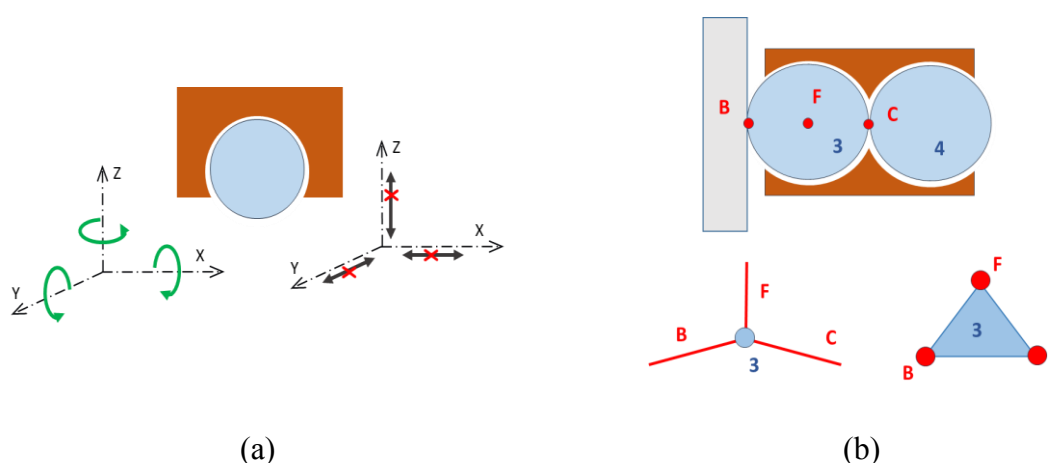
Fonte: do autor.

No modelo de análise, a atuação do braço posicionador será feita por meio de um atuador linear, contudo, devido à restrição de espaço no mecanismo, a forma mais provável de controle para o posicionamento será por fusos e guias lineares.

4.1 ACOPLAMENTOS AUTO ALINHANTES

A fim de possibilitar a variação contínua das relações, sem que haja escorregamento lateral entre as superfícies (*sideslip*), são utilizados acoplamentos indiretos, formados por pares de esferas dispostas em série. Estas esferas são alojadas por mancais esféricos que lhes proporcionam três graus de liberdade para rotação, restringindo sua translação (Figura 4-3). Para sua representação topológica, cada esfera é considerada um elo, ligado a três acoplamentos diretos: um acoplamento esférico com o braço posicionador ($f_i = 3$); um acoplamento rolante com o cone adjacente ($f_i = 3$); e outro acoplamento rolante, com a esfera ao lado ($f_i = 3$).

Figura 4-3: (a) Mancal esférico e suas liberdades ; (b) Acoplamento rolante de esferas.

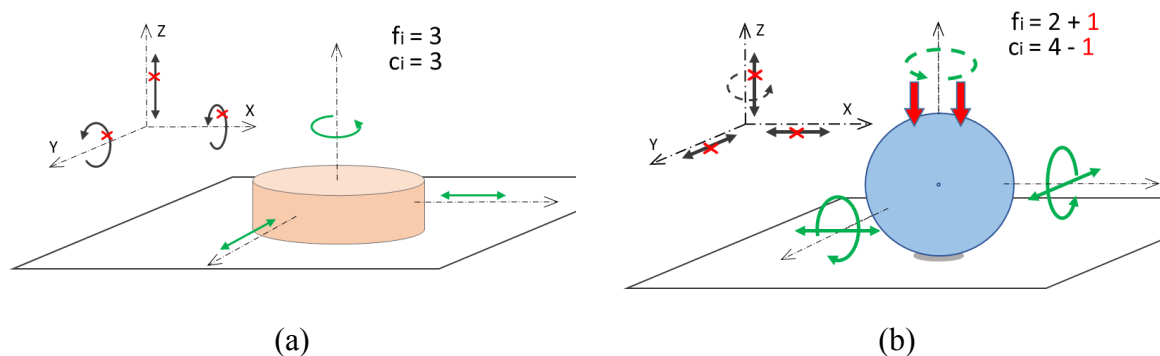


Fonte: do autor

Acoplamento rolante (Figura 4-4b) foi a definição adotada neste estudo, para descrever um caso particular de acoplamentos planares, constituído de uma esfera pressionada contra um plano, sendo restringida por ele e pela resistência de atrito. Tal esfera, terá dois graus de

liberdade para rolar nas direções pertencentes ao plano, e um para girar na direção ortogonal à superfície, condicionado à superação das forças de atrito.

Figura 4-4: Representação de um acoplamento planar (a); e de um acoplamento rolante (b).



Fonte: do autor.

A condição atribuída à liberdade para rotação na direção perpendicular ao plano (Figura 4-4b), depende de que o momento aplicado à esfera nesta direção seja superior ao momento resultante das forças de atrito. Considerando que, em contatos sem lubrificação, a resistência ao rolamento é, no mínimo, uma ordem de grandeza inferior à resistência de atrito (TABOR, 1955 e JOHNSON, 1985), ao ser submetida a forças tangenciais, a esfera rolará na direção que oferecer menor resistência, estabelecendo a condição de auto alinhamento.

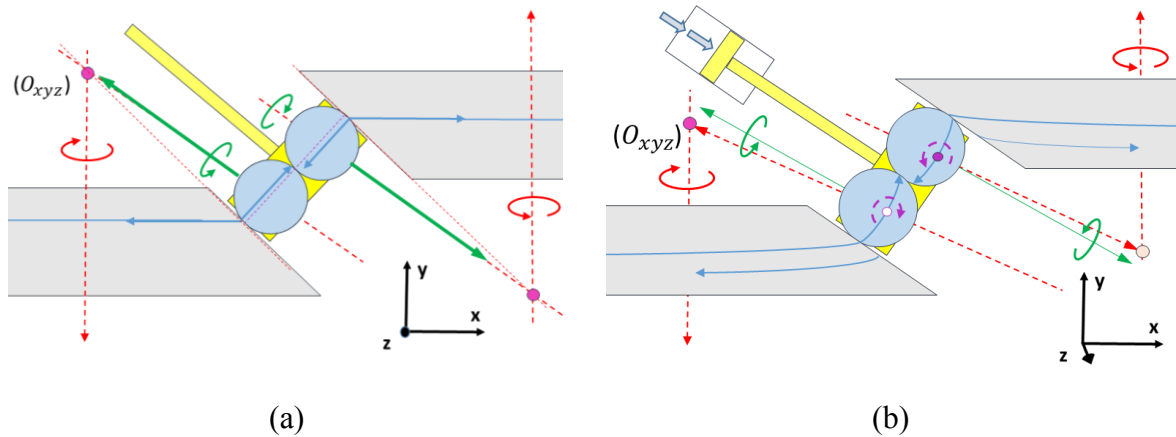
4.2 CONDIÇÕES DE *SIDESLIP* E *SPIN*

Conforme explicado no capítulo 2, o *sideslip* ocorre em praticamente todos os CVTs por tração, visto que os conceitos tradicionais não dispõem de acoplamentos com liberdade para rolamento nas direções de variação das relações.

Por sua vez, o *spin* está presente nos CVTs cujas direções de rotação não são paralelos e não convergem em um mesmo ponto. Nesses casos, surge uma componente de rotação perpendicular à superfície de contato, provocando escorregamento circunferencial e dissipação por atrito.

O mecanismo investigado no presente trabalho foi inicialmente concebido com o objetivo de eliminar os dois problemas e manter os níveis de microescorregamento reduzidos, baseado na premissa de que suas esferas têm liberdade para rotacionar em todas as direções resultantes das velocidades tangenciais, podendo deslocar-se por rolamento sobre as superfícies de transmissão, como mostra a Figura 4-5.

Figura 4-5: (a) Mecanismo em regime permanente; (b) Rotação com rolamento longitudinal.

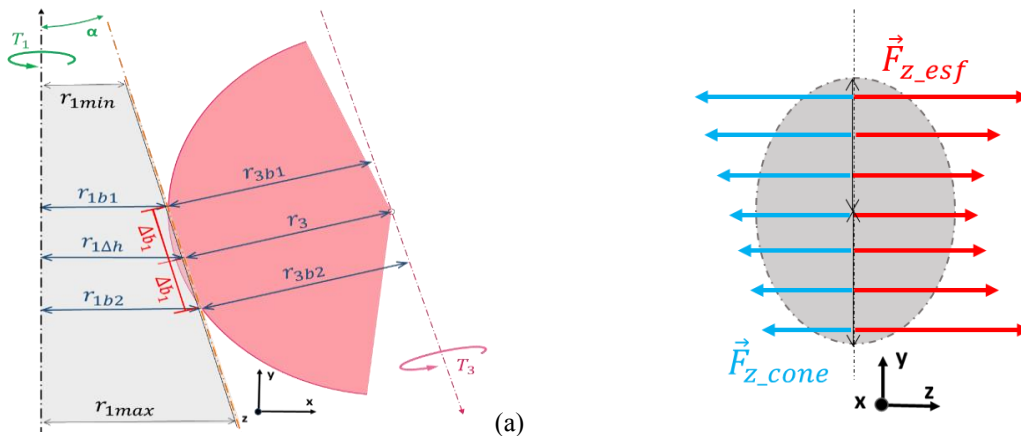


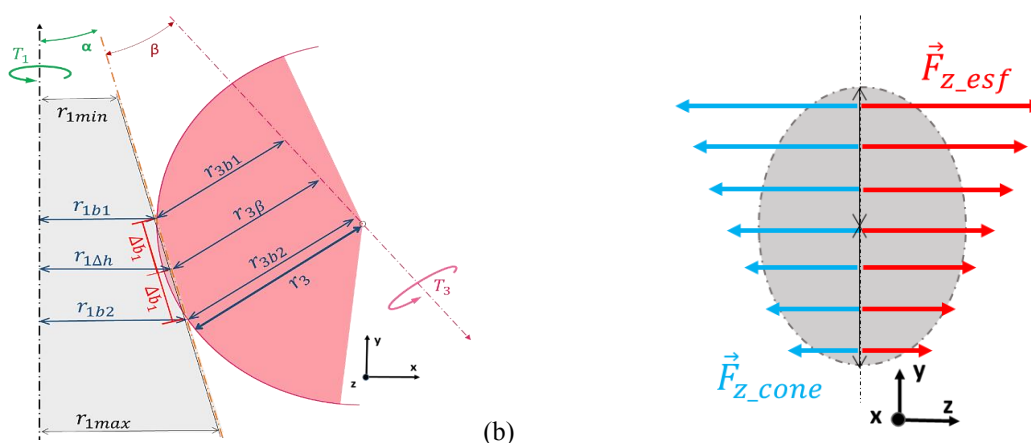
Fonte: do autor

Na Figura 4-5 (a), o atuador está parado e o mecanismo opera em regime permanente, de maneira que as esferas rotacionam com seus eixos pertencendo ao mesmo plano. Na Figura 4-5 (b), o atuador é acionado, deslocando as esferas, as quais adquirem uma segunda velocidade de rotação, na direção Z. Os eixos de rotação resultantes, deverão permitir que cada esfera continue transmitindo a potência principal enquanto se deslocam ao longo das laterais dos cones, sem provocar escorregamentos laterais.

No entanto, as forças tangenciais, resultantes dos torques, variam em função da posição do contato ao longo do comprimento lateral dos cones, de acordo com os raios instantâneos ($r_{\Delta h}$), por isso, ao analisar os acoplamentos entre cones e esferas é possível inferir que estas deverão redirecionar seu eixo de rotação para acompanhar o perfil de distribuição das forças e velocidades tangenciais, buscando o estado de equilíbrio, conforme Figura 4-6.

Figura 4-6: Distribuição das forças tangenciais no contato entre cone e esfera. (a) Esfera com eixo de rotação gerando spin; (b) Esfera rotacionando na direção de zero spin.





(b)
Fonte: do autor

Na Figura 4-6, observa-se que a pressão de contato provoca o achatamento de uma pequena porção da esfera. Assume-se que a superfície resultante é plana e estará aderente à lateral do cone, por este motivo, as forças de atrito direcionarão a inclinação do eixo de rotação da esfera de forma a igualar a distribuição de forças ao longo do contato.

Contudo, ainda que isoladamente as esferas possam corrigir sua direção de rotação para a condição de zero *spin* em seu contato com os cones, quando acopladas uma a outra, atuam reciprocamente como restrição ao seu auto alinhamento.

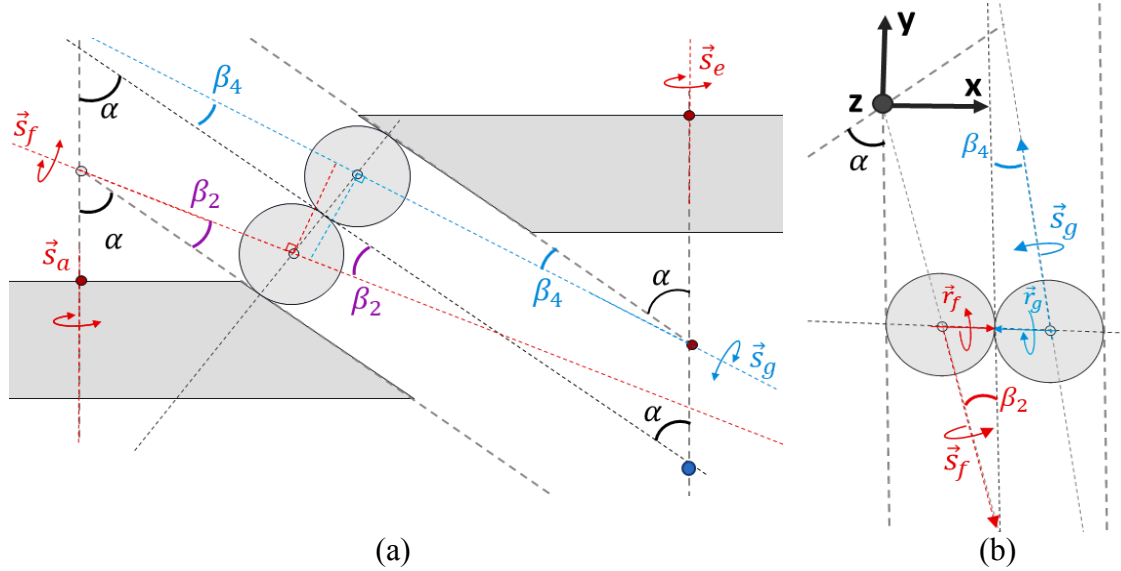
Nestas condições, as esferas ficam sob influência simultânea do momento de resistência ao *spin* no acoplamento *c* e do momento provocado pela distribuição de velocidades nos contatos periféricos. Para chegar ao estado de equilíbrio, o momento resultante sobre cada esfera, na direção de *spin*, deve ser igual a zero, logo, o comportamento esperado neste caso, é que exista uma parcela de *spin* em cada um dos contatos de tração.

Apesar disso, considerando que tais momentos variam em função de seus raios de contato, elevados à quarta potência, (equações 3.31 e 3.32a), é de se esperar que sejam significativamente superiores nos contatos com os cones, visto que seus raios decorrentes são maiores que o raio formado entre as esferas. Outro fator importante, é que, uma vez que se inicia o escorregamento por *spin*, o momento de resistência a este movimento cai rapidamente e passa para o regime dinâmico, modelado pela equação (3.32b), a partir deste ponto, as esferas ajustam suas direções de rotação ainda mais às velocidades tangenciais impostas pelos cones, reduzindo os escorregamentos circunferenciais nestes pontos e aumentando no contato *c*.

Em vista da complexidade deste fenômeno, e em face de que não se dispõe, até o momento, de dados experimentais que deem sustentação para um modelo de previsão dos ângulos de inclinação dos eixos das esferas, como função dos momentos de resistência ao *spin*, para este estudo, o *spin* nos contatos com os cones será considerado insignificante, abrindo

espaço para que se adote a condição ideal de auto alinhamento, observada nas Figura 4-6b e Figura 4-7.

Figura 4-7: (a) Inclinações dos eixos de rotação das esferas \vec{S}_f e \vec{S}_g ; (b) Direções de rotação resultantes \vec{r}_f e \vec{r}_g .



Fonte: do autor

Portanto, assumindo o estado de equilíbrio entre os corpos e desconsiderando o efeito do momento de resistência ao *spin* gerado no contato c , é possível encontrar os ângulos de direção dos eixos das esferas, conforme os raios instantâneos dos cones e os raios e posições das esferas.

$$\text{Zero spin em } b: \quad \frac{T_1}{r_{1(t)}} = \frac{T_3}{r_{3(t)}} \quad \therefore \quad \frac{T_1}{r_{1\Delta h}} = \frac{T_3}{r_3 \cos \beta_3} \quad (4.01)$$

$$\frac{T_1}{r_{1\Delta h} - \Delta b_1 \sin \alpha} = \frac{T_3}{r_3 \cos \beta_3 - \Delta b_1 \sin \beta_3} \quad (4.02)$$

Combinando (4.01) e (4.02):

$$\frac{T_1}{r_{1\Delta h} - \Delta b_1 \sin \alpha} = \frac{T_1 r_3 \cos \beta_3}{r_{1\Delta h} (r_3 \cos \beta_3 - \Delta b_1 \sin \beta_3)} \quad (4.03.a)$$

$$\frac{r_{1\Delta h}}{r_{1\Delta h} - \Delta b_1 \sin \alpha} = \frac{r_3 \cos \beta_3}{r_3 \cos \beta_3 - \Delta b_1 \sin \beta_3} \quad (4.03.b)$$

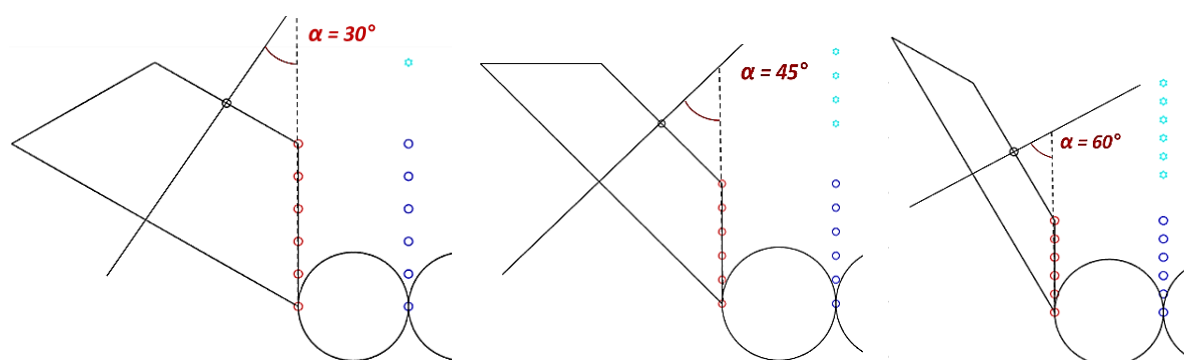
$$\beta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{r_3 \sin \alpha}{r_{1\Delta h}} \right) \qquad \beta_4 = \tan^{-1} \left(\frac{r_4 \sin \alpha}{r_{5\Delta h}} \right) \qquad (4.04)$$

4.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO E DIMENSIONAMENTO

O presente conceito de transmissão visa cobrir diferentes áreas de aplicação, faixas de torque e potências, entretanto antes de se avaliar sua aplicabilidade em múltiplos cenários, é necessário primeiro investigar seu comportamento de acordo com alguns parâmetros dimensionais selecionados.

Para isso, serão simulados doze modelos diferentes, para avaliar a influência de três fatores – **ângulo de inclinação dos cones** (α – Figura 4-8), **número de contatos** (n_c) e a **relação entre o raio mínimo dos cones com o raio das esferas** ($\lambda_r = r_{min}/r_{esf}$) – sobre os índices de escorregamento, perdas, desgaste e aquecimento nos contatos, bem como sobre a eficiência global, massa e dimensões da transmissão.

Figura 4-8: Três configurações de inclinação dos cones de transmissão.



Fonte: do autor

Os mecanismos serão dimensionados para uma potência máxima de transmissão de 7,3kW ($\cong 10hp$), de acordo com as relações mostradas nos capítulos 2.4 e 3.1.2, com torque máximo de entrada de 35Nm, a 2000RPM, valores que se manterão constantes, enquanto as relações de transmissão deverão variar de $i_{tr} = 2$ a $i_{tr} = 0,5$. Os parâmetros α , n_c e λ_r , para cada modelo são mostrados na Tabela 4-2, a seguir.

Tabela 4-2: Parâmetros de variação das simulações.

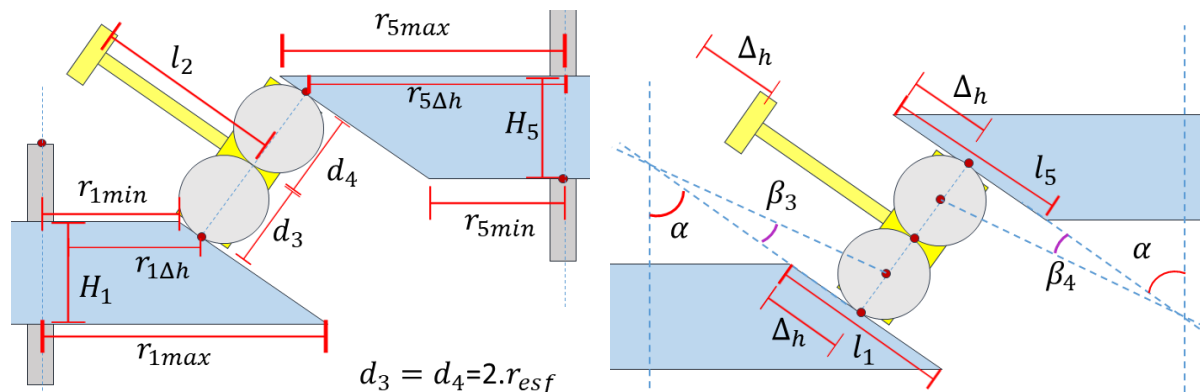
Modelo	$\lambda_r \left(\frac{r_{min}}{r_{esf}} \right)$	n_c (nº. contatos)	α (ângulo)
MA-30°	1,5	16	30°
MA-45°	1,5	16	45°
MA-60°	1,5	16	60°
MB-30°	1,5	24	30°
MB-45°	1,5	24	45°
MB-60°	1,5	24	60°
MC-30°	2,0	16	30°
MC-45°	2,0	16	45°
MC-60°	2,0	16	60°
MD-30°	2,0	24	30°
MD-45°	2,0	24	45°
MD-60°	2,0	24	60°

Fonte: do autor.

Na coluna “Modelo” da Tabela 4-2, MA, MB, MC e MD, referem-se às variações do mecanismo, as quais se diferenciam em função dos parâmetros dimensionais n_c e λ_r . Para cada uma haverá três inclinações de cone: 30°, 45° e 60°.

O mecanismo em estudo foi dimensionado conforme a Figura 4-9 e a Tabela 4-3, de acordo com as formulações apresentadas nos capítulos 2.4 e 3.1.

Figura 4-9: Parâmetros dimensionais do modelo de análise.



Fonte: do autor.

Tabela 4-3: Dimensões calculadas para os modelos M1 e M2.

Parâmetro	MA	MB	MC	MD	Fonte/Equação	
$T_{entr} \left[\frac{N}{m} \right]$	35	35	35	35	Arbitrado	
μ_{est}	0,5	0,5	0,5	0,5	Arbitrado	
n_c	16	24	16	24	Arbitrado	
λ_r	1,5	1,5	2,0	2,0	Arbitrado	
$F_{N_{m\acute{a}x}} [kN]$	0,302	0,230	0,259	0,197	Eq. (2.26b) e (3.26)	
$\sigma_f \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$	1,5	1,5	1,5	1,5	ISO 281-2007	
$r_{1_{min}}; r_{5_{min}} [mm]$	29,00	25,33	33,83	29,55	Eq. (4.06)	
$r_{esf}; r_3; r_4 [mm]$	19,33	16,89	16,91	14,78	Eq. (3.24), (3.25)	
$r_{1_{m\acute{a}x}}; r_{5_{m\acute{a}x}} [mm]$	58,00	50,67	67,66	59,10	$= r_{1_{min}}/i_{tr_{min}}$	
α	30° / 45° / 60°			Arbitrado		
$H_1; H_5 [mm]$	30°	50,23	43,88	58,59	51,19	$= \frac{(r_{max} - r_{min})}{\tan(\alpha)}$
	45°	29,00	25,33	33,83	29,55	
	60°	16,74	14,63	19,53	17,06	
$l_1; l_5 [mm]$	30°	100,46	87,76	117,19	102,37	$= H/\sin(\alpha)$
	45°	58,00	50,67	67,66	59,10	
	60°	33,49	29,25	39,06	34,12	
$l_2 [mm]$	120			Arbitrado		
$\Delta_h [mm]$	$f(t)$			$= v_h \Delta t$		
$r_{1_{\Delta h}} [mm]$	$f(\Delta h)$			$= r_{1_{min}} + \Delta_h \sin(\alpha)$		
$r_{5_{\Delta h}} [mm]$	$f(\Delta h)$			$= r_{5_{m\acute{a}x}} - \Delta_h \sin(\alpha)$		
$\beta_{3(t=0)}$	30°	18,44	18,44	14,04	14,04	(4.04)
	45°	25,24	25,24	19,47	19,47	
	60°	30,00	30,00	23,41	23,41	
$\beta_{4(t=0)}$	30°	9,46	9,46	7,12	7,12	(4.04)
	45°	13,26	13,26	10,02	10,02	
	60°	16,10	16,10	12,23	12,23	

Fonte: do autor.

Os raios mínimos dos cones (r_{1min} e r_{5min}) e as forças de aperto (F_N) foram obtidos aplicando as equações (2.6b) e (3.22b), como é mostrado a seguir.

$$r_{1min} = \left(\frac{K_{seg} \cdot T_{entr} \cdot E^{*2}}{n_c \cdot \mu_j \cdot 27,68} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot (\lambda_r + 3\lambda_r^2 + 2\lambda_r^3)^{\frac{2}{9}} \quad (4.05a)$$

$$F_N \geq \frac{K_{seg} * T_{entr}}{r_{entr} * n_c * \mu_j} \quad (4.05b)$$

O coeficiente de atrito μ foi arbitrado de acordo com faixas de valores comumente encontradas (entre 0,4 e 0,8) para contatos entre aços de elevada dureza (CALLISTER, 2011; GALE e TOTEMEIER, 2004). Os coeficientes de atrito dos mancais de rolamento ($\mu_r = 0,0015$) foram estabelecidos de acordo com HAMROCK e ANDERSON (1983), e dos mancais esféricos ($\mu_{re} = 0,004$), de acordo com BOSCH (2016).

Os componentes serão considerados todos da mesma liga de aço, AISI-52100, cujas propriedades mecânicas estão disponíveis na Tabela 4-4 a seguir.

Tabela 4-4: Propriedades da liga AISI 52100, com tratamento para endurecimento superficial.

Aço ASTM/AISI 52100		
Propriedade	Valor [unidades]	Fonte
Módulo de Elasticidade E	205 [GPa]	*2; *3
Módulo de Cisalhamento G	80 [GPa]	*2; *3
Tensão de Escoamento σ_e	2000 [MPa]	*2; *3
Coeficiente de Poisson ν	0,3	*2; *3
Dureza Vickers H_d	8829 [N/mm ²] ^{***}	*3; *4
Coeficiente de desgaste K_d	5×10^{-4}	*4
Coeficiente de atrito ** μ_s	0,5	*1; *4
Condutividade térmica k_w	50 [W/m.K]	*1
Massa específica $\rho_{aço}$	$7,86 \times 10^{-6}$ [kg/mm ³]	*1

*1-CALLISTER (2011); *2-SHARIFIMEHR e FATEMI (2018); *3-WOYD *et al* (2021); *4-GALE e TOTEMEIER (2004).

** Para contatos entre aços de alta dureza, idênticos, o coeficiente de atrito estático pode variar entre 0,5 e 0,8, e o atrito dinâmico, entre 0,4 e 0,6.

*** O valor em escala Vickers (HV) foi multiplicado por 9,81[m/s²], para sua conversão em [N/mm²], correspondendo às unidades das demais variáveis da equação (3.34).

Fonte: do autor.

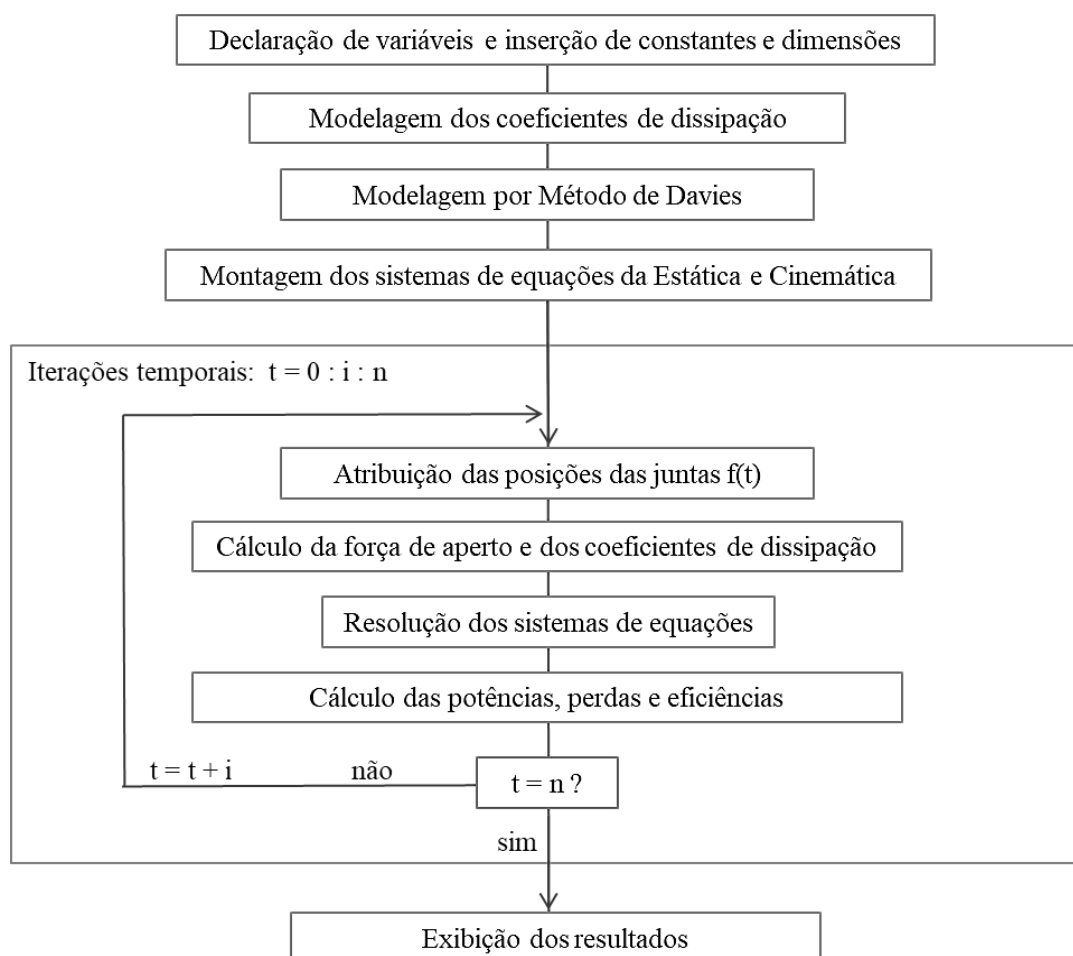
É importante ressaltar que nesta análise **não serão considerados**:

- Efeitos dinâmicos provocados pela inércia e aceleração dos corpos.
- Deformações dos eixos e outras, que não sejam as deformações hertzianas nos contatos rolantes.
- Variações causadas por aquecimento sobre as propriedades físicas, tais como: coeficiente de atrito, tensão de escoamento, módulo de elasticidade, dilatação térmica e etc.
- Influência da aceleração da gravidade.
- Influência de acoplamentos externos ao mecanismo.

O algoritmo de simulação foi escrito em MatLab, com os sistemas de equações da estática e da cinemática, montados e resolvidos para um caso geral, sem atribuição de dimensões, então, para cada modelo, aplicaram-se os valores correspondentes da Tabela 4-3 e, variadas as relações de transmissão, deslocando as posições das esferas.

O código em MatLab encontra-se no APÊNDICE 4, ao final do trabalho, e sua lógica de análise pode ser observada na Figura 4-10.

Figura 4-10: Lógica de execução do programa de simulação.



Fonte: do autor.

Os passos da modelagem por método de Davies, bem como do cálculo das perdas e potências serão apresentados na seção 5 a seguir.

5 MODELAGEM POR GRAFOS E HELICOIDES

Este capítulo descreve a modelagem e resolução das equações de estados cinemático e estático do mecanismo proposto de acordo com o Método de Davies e a técnica para internalização de forças dissipativas apresentados no capítulo 3.2.

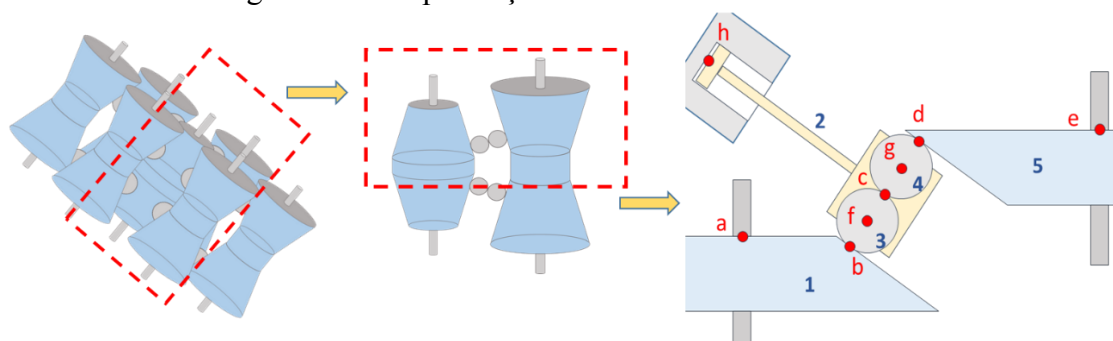
Será empregada a mesma ordem de passos conforme revisão do método mencionado, iniciando com a representação topológica e seguindo para a montagem dos helicoides, construção das matrizes de ações e movimentos em rede, adição das equações de estado e resolução dos sistemas de equações.

Por último, são utilizados os estados encontrados para os cálculos das perdas nos acoplamentos e de eficiência global do mecanismo.

5.1 REPRESENTAÇÃO TOPOLÓGICA

Como explicado anteriormente, na seção 4, a transmissão possui simetria radial e em relação ao plano xz , portanto é possível representá-la por meio da seção transversal de um de seus contatos, cortando o plano $z = 0$, conforme Figura 5-1.

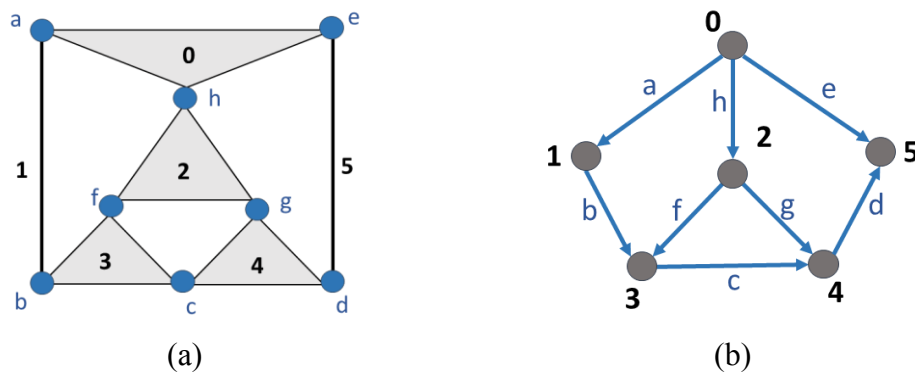
Figura 5-1: Simplificação do mecanismo em estudo.



Fonte: do autor.

Após sua simplificação, podem ser construídas a representação estrutural e o grafo de acoplamentos do mecanismo (Figura 5-2).

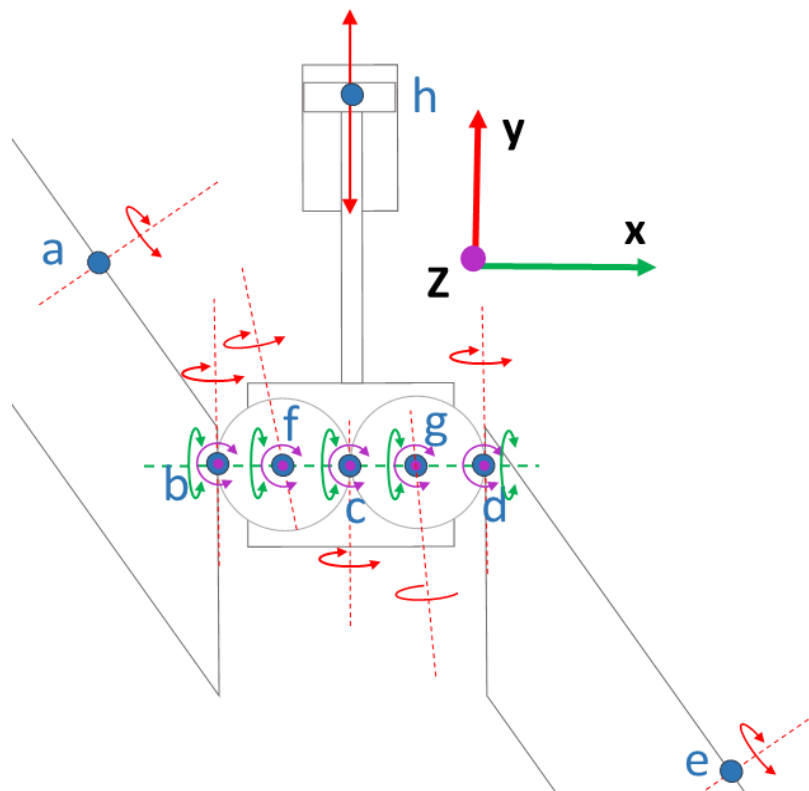
Figura 5-2: (a) Representação estrutural do mecanismo; (b) Grafo de acoplamentos (G_C).



Fonte: do autor.

O mecanismo está inserido no espaço de ordem seis ($\lambda = 6$), possui seis corpos ($n = 6$) e oito juntas ($e = 8$), considerando a base fixa como um dos corpos. As características de suas juntas não demonstradas nas Figura 5-3 e Tabela 5-1.

Figura 5-3: Graus de liberdade de movimentos dos acoplamentos.



Fonte: do autor

Tabela 5-1: Graus de liberdade e restrição dos acoplamentos.

Par cinemático	Tipo	Liberdades		Direções \vec{S}			c_{ip}	Restrições
		f_i		\vec{S}_x	\vec{S}_y	\vec{S}_z		
a	Rotativo:	1	$s_{(x)}$	$\begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	5	$R_{(x)}; T_{(z)}$ $U_{(x)}; V_{(y)}; W_{(z)}$
b	Rolante:	3	$r_{(x)}; s_{(y)};$ $t_{(z)}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	3	$U_{(x)}; V_{(y)}; W_{(z)}$
c	Rolante:	3	$r_{(x)}; s_{(y)};$ $t_{(z)}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	3	$U_{(x)}; V_{(y)}; W_{(z)}$
d	Rolante:	3	$r_{(x)}; s_{(y)};$ $t_{(z)}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	3	$U_{(x)}; V_{(y)}; W_{(z)}$
e	Rotativo:	1	$s_{(x)}$	$\begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	5	$R_{(x)}; T_{(z)}$ $U_{(x)}; V_{(x)}; W_{(z)}$
f	Esférico:	3	$r_{(x)}; s_{(y)};$ $t_{(z)}$	$\begin{bmatrix} \cos \beta_f \\ \sin \beta_f \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\sin \beta_f \\ \cos \beta_f \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	3	$U_{(x)}; V_{(x)}; W_{(z)}$
g	Esférico:	3	$r_{(x)}; s_{(y)};$ $t_{(z)}$	$\begin{bmatrix} \cos \beta_g \\ \sin \beta_g \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\sin \beta_g \\ \cos \beta_g \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	3	$U_{(x)}; V_{(x)}; W_{(z)}$
h	Prismático	1	$v_{(y)}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	5	$R_{(x)}; S_{(y)}; T_{(z)}$ $U_{(x)}; W_{(z)}$
		$F = \sum_{i=1}^e f_i = 18$					$C = \sum_{i=1}^e c_{ip} = 30$	

Fonte: do autor.

Portanto, considerando apenas os graus de liberdade e restrições característicos dos acoplamentos, o mecanismo terá grau de restrição bruto $C = 30$ e grau de liberdade bruto $F = 18$.

Porém, é preciso incorporar as ações externas e dissipativas dentro do modelo. Neste caso, serão considerados um torque de entrada no acoplamento a , com direção S_{xy} , outro torque na saída e , com direção S_{xy} , e uma força na direção V_y aplicada ao atuador h . Também são introduzidos torques dissipativos em todas as juntas, exceto no atuador linear, conforme Tabela 5-2.

Tabela 5-2: Ações externas e dissipativas internalizadas no modelo.

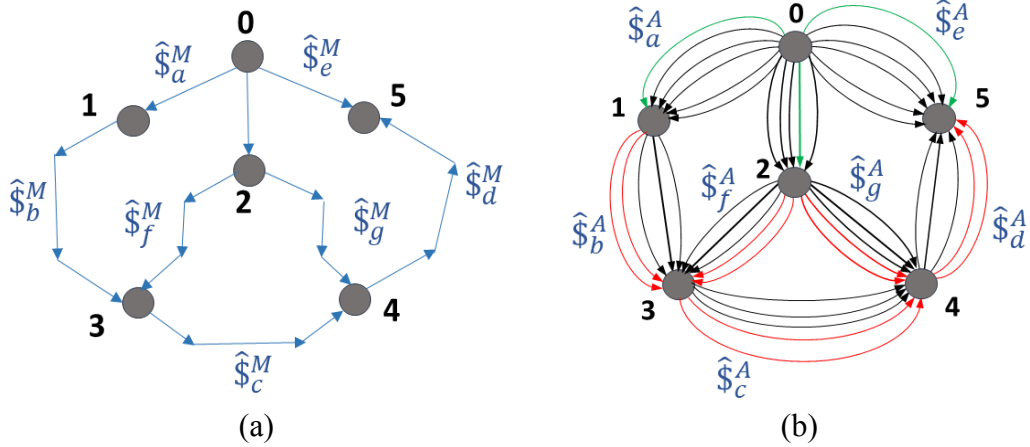
Acoplamento	Representação	Tipo da ação	Direção
<i>a</i>	S_{a_ent}	Torque externo	$(\sin \alpha ; \cos \alpha ; 0)^T$
<i>a</i>	S_{a_di}	Torque de atrito	$(\sin \alpha ; \cos \alpha ; 0)^T$
<i>c</i>	R_{c_di}	Torque de atrito	$(1; 0; 0)^T$
<i>c</i>	S_{c_di}	Torque de atrito	$(0; 1; 0)^T$
<i>c</i>	T_{c_di}	Torque de atrito	$(0; 0; 1)^T$
<i>d</i>	R_{d_di}	Torque de atrito	$(1; 0; 0)^T$
<i>d</i>	S_{d_di}	Torque de atrito	$(0; 1; 0)^T$
<i>d</i>	T_{d_di}	Torque de atrito	$(0; 0; 1)^T$
<i>b</i>	R_{b_di}	Torque de atrito	$(1; 0; 0)^T$
<i>b</i>	S_{b_di}	Torque de atrito	$(0; 1; 0)^T$
<i>b</i>	T_{b_di}	Torque de atrito	$(0; 0; 1)^T$
<i>e</i>	S_{e_sai}	Torque externo	$(\sin \alpha ; \cos \alpha ; 0)^T$
<i>e</i>	S_{e_di}	Torque de atrito	$(\sin \alpha ; \cos \alpha ; 0)^T$
<i>f</i>	S_{f_di}	Torque de atrito	$(-\sin \alpha ; \cos \alpha ; 0)^T$
<i>g</i>	S_{g_di}	Torque de atrito	$(-\sin \alpha ; \cos \alpha ; 0)^T$
<i>h</i>	V_{h_ent}	Força externa	$(0; 1; 0)^T$

$$Ca = \sum_{i=1}^{e_a} c_{ia} = 16$$

Fonte: do autor.

No total são adicionadas dezesseis restrições, três ações externas com subíndice (*_ent*) e (*_sai*), para entradas e saídas, mais treze torques dissipativos, com subíndice (*_di*). Com as liberdades e restrições dos acoplamentos conhecidos, os grafos de ações (G_A) e movimentos (G_M) podem ser construídos.

Figura 5-4: (a) Grafo de movimentos (G_M).; (b) Grafo de ações (G_A), com ações e forças dissipativas internalizadas.



Fonte: do autor.

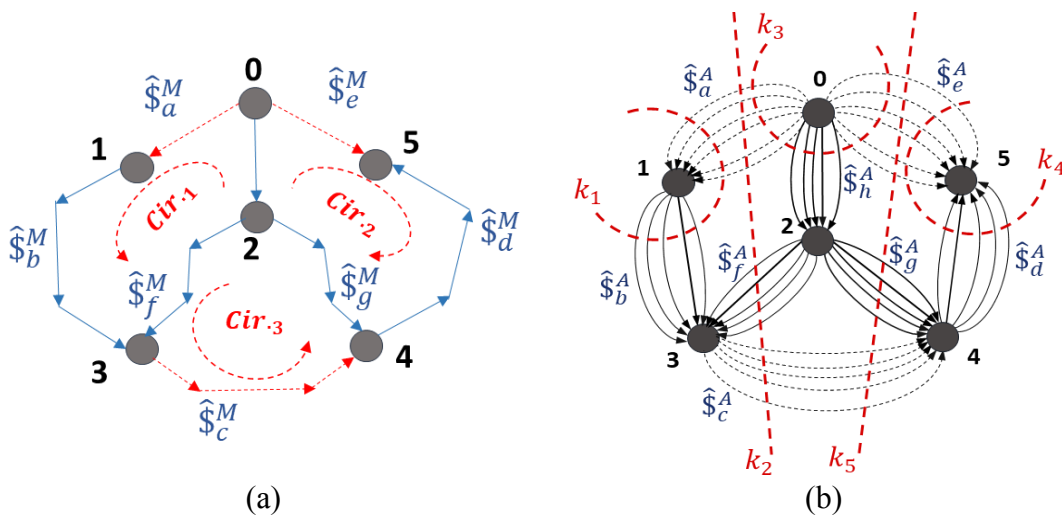
Conhecendo o número de vértices ($n = 6$) e de arestas ($e = 8$) é possível calcular o número de cortes e circuitos, de acordo com as equações (3.36) e (3.37).

$$v = e - n + 1 = 8 - 6 + 1 = 3 \tag{5.01}$$

$$k = n - 1 = 6 - 1 = 5 \tag{5.02}$$

Portanto, haverá três circuitos e cinco cortes. Para a matriz de circuitos, foram escolhidos como cordas os acoplamentos a , c e e , ao passo que a árvore geradora que restou será usada de base para a matriz de cortes. O respectivo grafo de cortes está representado na figura 5-5.

Figura 5-5: (a) Circuitos no Grafo de movimentos (G_M).; (b) Cortes no Grafo de ações (G_A).



Fonte: do autor.

Com isso, foram montadas as matrizes de circuitos (equação 5.03) e de cortes (equação 5.04).

$$[B]_{3 \times 8} = \begin{bmatrix} a & c & d & b & f & g & h & e \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_a \\ v_c \\ v_e \end{matrix} \quad (5.03)$$

$$[B]_{3 \times 18} = \begin{bmatrix} a & c & c & c & d & d & d & b & \dots & \dots & e \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_a \\ v_c \\ v_e \end{matrix} \quad (5.04)$$

Da mesma maneira, foi construída a matriz de cortes fundamentais ($[Q]_{5 \times 46}$), mostrada abaixo.

$$[Q]_{5 \times 8} = \begin{bmatrix} a & c & d & b & f & g & h & e \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} k_b \\ k_f \\ k_g \\ k_h \\ k_d \end{matrix} \quad (5.03)$$

$$[Q]_{5 \times 46} = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a & a & a & c & \dots & e & e \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} k_b \\ k_f \\ k_g \\ k_h \\ k_d \end{matrix} \quad (5.04)$$

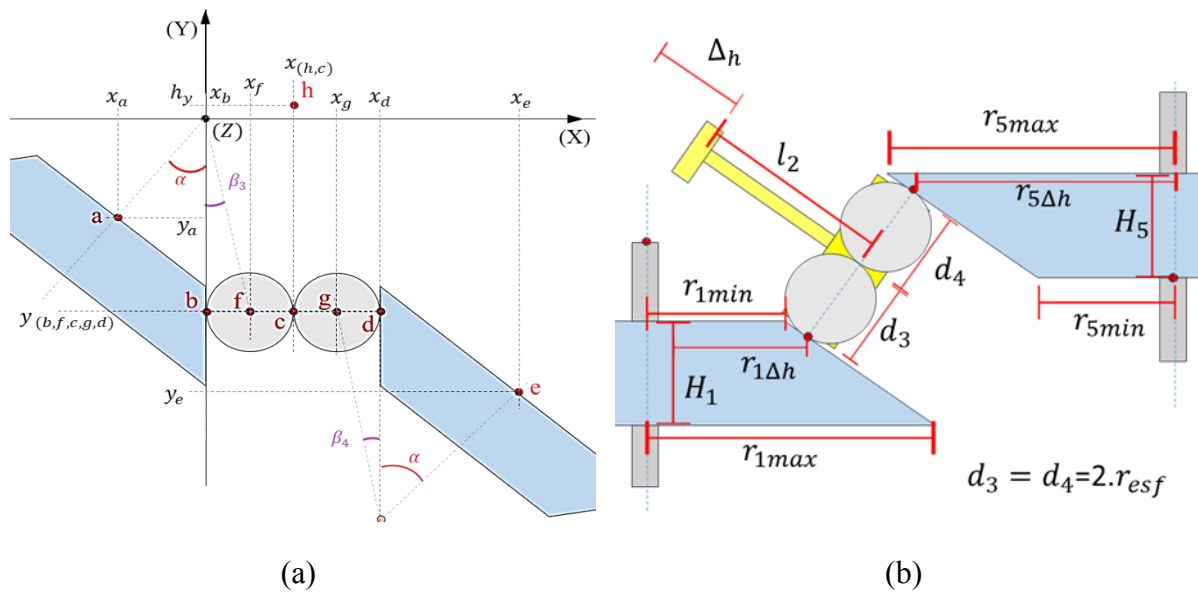
As matrizes de circuitos $[B]_{3 \times 18}$ e cortes fundamentais $[Q]_{5 \times 46}$ podem ser encontradas integralmente no APÊNDICE 1.

Seguindo a diante com o método, para construir as equações da estática e da cinemática, será necessário conhecer as características geométricas dos acoplamentos, que estão inseridas no sistema por meio de helicoides, formando as matrizes de ações e movimentos, as quais serão mostradas a seguir.

5.2 MATRIZES DE AÇÕES E MOVIMENTOS UNITÁRIOS E SEUS HELICOIDES

Os helicoides devem ser montados de acordo com suas posições em relação à origem do sistema e com suas direções unitárias. A Figura 5-6 mostra como estão dispostos os acoplamentos.

Figura 5-6: (a) Posição das juntas no mecanismo e (b) dimensões dos componentes.



Fonte: do autor

Para a construção dos helicoides é necessário saber os vetores de posição dos acoplamentos (\vec{S}_0) e os vetores de direções unitárias (\vec{S}). As coordenadas de cada acoplamento para a elaboração de seus vetores de posição estão na Tabela 5-3.

Tabela 5-3: Tabela de direções unitárias e vetores de posição dos acoplamentos.

Junta	(z = 0)		Coordenadas
	Eixo		
f	x_f		r_3
	y_f		$-\tan \alpha * (r_3 + r_{1min}/(\sin \alpha)) + \Delta h$
h	x_h		$2 * r_3$
	y_h		$y_f + l_2 + \Delta h$
c	x_c		$2 * r_3$
	y_c		y_f
	x_b		0

<i>b</i>	y_b	y_f
<i>a</i>	x_a	$-r_{1min} \sin \alpha$
	y_a	$y_f - \Delta h + r_{1min} \cos \alpha$
<i>g</i>	x_g	$3 * r_3$
	y_g	y_f
<i>d</i>	x_d	$4 * r_3$
	y_d	y_f
<i>e</i>	x_e	$4 * r_3 + r_{5max} \sin \alpha$
	y_e	$y_f - \Delta h - r_{5max} \cos \alpha$

Fonte: do autor.

Em que Δh é a posição do atuador linear, a qual deverá variar ao longo das iterações da simulação.

Após conhecer os vetores de posição e as direções unitárias dos acoplamentos, é possível dar início à montagem de seus helicoides, a iniciar pelos heligiros.

5.2.1 Heligiros e matriz de movimentos unitários

As dezoito possibilidades de movimento que formam o grau de liberdade bruto ($F = \sum_{i=1}^e f_i = 18$) darão origem a dezoito heligiros, construídos de acordo com a equação (3.39), do capítulo 3.2.5.

Heligiro de rotação pura ($h = 0$)

$$\hat{\$}^M = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ \dots \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{S} \\ \dots \\ \vec{S}_0 \times \vec{S} \end{pmatrix}$$

Heligiro de translação pura ($h = \infty$)

$$\hat{\$}^M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ u^* \\ v^* \\ w^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \vec{S} \end{pmatrix} \quad (5.05)$$

Com exceção do acoplamento prismático, todos os demais acoplamentos são de rotação pura, com passo (h) igual a zero, como mostram as equações a seguir.

Junta (**a**); ($h = 0$); $\hat{\mathcal{F}}_a^M = (\hat{\mathcal{F}}_a^{s_y})$

$$\hat{\mathcal{F}}_a^{s_y} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{ya} \\ \dots\dots\dots \\ \vec{S}_{0a} \times \vec{S}_{ya} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dots\dots\dots \\ \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ x_a \cos \alpha - y_a \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (5.06)$$

Junta (**e**); ($h = 0$); $\hat{\mathcal{F}}_e^M = (\hat{\mathcal{F}}_e^{s_y})$

Junta (**h**); ($h = \infty$); $\hat{\mathcal{F}}_h^M = (\hat{\mathcal{F}}_h^{v_y})$

$$\hat{\mathcal{F}}_e^{s_y} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ x_e \cos \alpha - y_e \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \hat{\mathcal{F}}_h^{v_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots\dots\dots \\ \vec{S}_{ye} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.07)$$

Junta (**b**); ($h = 0$); $\hat{\mathcal{F}}_b^M = (\hat{\mathcal{F}}_b^{r_x} \hat{\mathcal{F}}_b^{s_y} \hat{\mathcal{F}}_b^{t_z})$

$$\hat{\mathcal{F}}_b^{r_x} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{xb} \\ \dots\dots\dots \\ \vec{S}_{0b} \times \vec{S}_{xb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ -y_b \end{pmatrix} \quad \hat{\mathcal{F}}_b^{s_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ x_b \end{pmatrix} \quad \hat{\mathcal{F}}_b^{t_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots\dots\dots \\ y_b \\ -x_b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.08)$$

Junta (**c**); ($h = 0$); $\hat{\mathcal{F}}_c^M = (\hat{\mathcal{F}}_c^{r_x} \hat{\mathcal{F}}_c^{s_y} \hat{\mathcal{F}}_c^{t_z})$

$$\hat{\mathcal{F}}_c^{r_x} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{xc} \\ \dots\dots\dots \\ \vec{S}_{0c} \times \vec{S}_{xc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ -y_c \end{pmatrix} \quad \hat{\mathcal{F}}_c^{s_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ x_c \end{pmatrix} \quad \hat{\mathcal{F}}_c^{t_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots\dots\dots \\ y_c \\ -x_c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.09)$$

$$\text{Junta (d); } (h = 0); \hat{\$}_d^M = (\hat{\$}_d^{r_x} \hat{\$}_d^{s_y} \hat{\$}_d^{t_z})$$

$$\hat{\$}_d^{r_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ -y_d \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_d^{s_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ x_d \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_d^{t_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ y_d \\ -x_d \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$\text{Junta (f); } (h = 0); \hat{\$}_f^M = (\hat{\$}_f^{r_x} \hat{\$}_f^{s_y} \hat{\$}_f^{t_z})$$

$$\hat{\$}_f^{r_x} = \begin{pmatrix} \cos \beta_f \\ \sin \beta_f \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ x_f \sin \beta_f - y_f \cos \beta_f \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_f^{s_y} = \begin{pmatrix} -\sin \beta_f \\ \cos \beta_f \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ y_f \sin \beta_f + x_f \cos \beta_f \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_f^{t_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ y_f \\ -x_f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$\text{Junta (g); } (h = 0); \hat{\$}_g^M = (\hat{\$}_g^{r_x} \hat{\$}_g^{s_y} \hat{\$}_g^{t_z})$$

$$\hat{\$}_g^{r_x} = \begin{pmatrix} \cos \beta_g \\ \sin \beta_g \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ x_g \sin \beta_g - y_g \cos \beta_g \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_g^{s_y} = \begin{pmatrix} -\sin \beta_g \\ \cos \beta_g \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ y_g \sin \beta_g + x_g \cos \beta_g \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_g^{t_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ y_g \\ -x_g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Uma vez montados os heligiros, segue-se para a construção da matriz de movimentos unitários $[\hat{M}_D]_{\lambda \times F}$, atentando para seguir a mesma ordem que as matrizes de cortes e circuitos usam para a disposição dos helicoides, como mostra a equação (5.13).

$$[\hat{M}_D]_{6 \times 18} = [\hat{\$}_a^M \hat{\$}_c^M \hat{\$}_d^M \dots \dots \hat{\$}_e^M] \quad (5.13a)$$

$$[\widehat{M}_D]_{6 \times 18} = \begin{bmatrix} \widehat{\$}_a^M & & \widehat{\$}_c^M & & \widehat{\$}_d^M & & \widehat{\$}_h^M \\ \sin \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & y_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_c & 0 & 0 & 1 \\ x_a \cos \alpha - y_a \sin \alpha & -y_c & x_c & 0 & -y_d & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13b)$$

A matriz de movimentos unitários ($[\widehat{M}_D]_{6 \times 18}$) pode ser conferida integralmente no APÊNDICE 2. Ao ser multiplicada pelo vetor de magnitudes dará origem à matriz de movimentos $[M_D]_{6 \times 18}$, caracterizando o estado cinemático do mecanismo.

$$[M_D]_{6 \times 18} = [\widehat{M}_D]_{6 \times 18} \{\overline{\Psi}^M\}_{18 \times 1} \quad (5.14)$$

Contudo, para se conhecer as magnitudes é necessário resolver o sistema de equações da cinemática, empregando a matriz de movimentos unitários em rede, a qual será montada na seção 5.3.

5.2.2 Heliforças e matriz de ações unitárias

Seguindo os mesmos passos aplicados nos heligiros, constroem-se as heliforças $\A , de acordo com a equação (3.42) da seção 3.2.5.

$$\begin{array}{ll} \text{Heliforça de força pura } (h = 0) & \text{Heliforça de momento puro } (h = \infty) \\ \$^A = \begin{pmatrix} R \\ S \\ T \\ \dots \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{S}_0 \times \vec{F} \\ \dots \\ \vec{F} \end{pmatrix} & \$^A = \begin{pmatrix} R^* \\ S^* \\ T^* \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{T}_0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad (5.15)$$

O mecanismo possui grau de restrições bruto $C = \sum_{i=1}^e c_{ip} + \sum_{i=1}^{e,a} c_{ia} = 46$, considerando as ações dissipativas e as forças internalizadas.

Como é um número considerável de helicoides a serem mostrados, a seguir serão exemplificados as heliforças dos acoplamentos a , b e h , por serem de tipos diferentes. A junta

α é do tipo rotativa, possui cinco restrições passivas e duas ações internalizadas, um torque de entrada e um torque dissipativo. O total de heliforças está localizado no APÊNDICE 2, ao final do trabalho.

$$\text{Junta } (\mathbf{a}); \quad \hat{\mathcal{F}}_a^A = \left(\hat{\mathcal{F}}_a^{R_x} \hat{\mathcal{F}}_a^{S_y} \hat{\mathcal{F}}_a^{S_y} \hat{\mathcal{F}}_a^{T_z} \hat{\mathcal{F}}_a^{U_x} \hat{\mathcal{F}}_a^{V_y} \hat{\mathcal{F}}_a^{W_z} \right)$$

Momento puro ($h = 0$)

$$\hat{\mathcal{F}}_a^{R_x} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{xa} \\ \dots \dots \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathcal{F}}_a^{S_y} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{ya} \\ \dots \dots \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathcal{F}}_a^{S_y} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_a^{T_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Força pura ($h = \infty$)

$$\hat{\mathcal{F}}_a^{U_x} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{0a} \times \vec{S}_{xa} \\ \dots \dots \dots \\ \vec{S}_{xa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_a \sin \alpha - y_a \cos \alpha \\ \dots \dots \dots \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathcal{F}}_a^{V_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_a \cos \alpha - y_a \sin \alpha \\ \dots \dots \dots \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_a^{W_z} = \begin{pmatrix} y_a \\ -x_a \\ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Junta (**b**); $\hat{\$}_b^A = \left(\hat{\$}_{bDi}^{Rx} \quad \hat{\$}_{bDi}^{Sy} \quad \hat{\$}_{bDi}^{Tz} \quad \hat{\$}_b^{Ux} \quad \hat{\$}_b^{Vy} \quad \hat{\$}_b^{Wz} \right)$
 Momento puro ($h = 0$)

$$\hat{\$}_{bDi}^{Rx} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{xb} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_{bDi}^{Sy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_{bDi}^{Tz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Junta (**b**) Força pura ($h = \infty$)

$$\hat{\$}_b^{Ux} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{0b} \times \vec{S}_{xb} \\ \dots \\ \vec{S}_{xb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_b \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_b^{Vy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_b \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_b^{Wz} = \begin{pmatrix} y_b \\ -x_b \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Junta (**h**); $\hat{\$}_h^A = \left(\hat{\$}_h^{Rx} \quad \hat{\$}_h^{Sy} \quad \hat{\$}_h^{Tz} \quad \hat{\$}_h^{Ux} \quad \hat{\$}_{hEnt}^{Vy} \quad \hat{\$}_h^{Wz} \right)$
 Momento puro ($h = 0$)

$$\hat{\$}_h^{Rx} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{xh} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_h^{Sy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_h^{Tz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Força pura ($h = \infty$)

$$\hat{\$}_h^{Ux} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{0h} \times \vec{S}_{xh} \\ \dots \\ \vec{S}_{xh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_h \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_{hEnt}^{Vy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_h \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\$}_h^{Wz} = \begin{pmatrix} y_h \\ -x_h \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Com todos as heliforças montadas segue-se para a construção da matriz de ações unitárias $[\hat{A}_D]_{\lambda \times C}$, como mostram as equações (5.21) e (5.22).

$$[\hat{A}_D]_{6 \times 46} = [\hat{\$}_a^A \quad \hat{\$}_c^A \quad \hat{\$}_d^A \quad \dots \quad \dots \quad \hat{\$}_e^A] \quad (5.21)$$

$$[\hat{A}_D]_{6 \times 46} = \begin{bmatrix}
\hat{\$}_a^{Rx} & \hat{\$}_{aEnt}^{Sy} & \hat{\$}_{aDi}^{Sy} & \hat{\$}_a^{Tz} & & \hat{\$}_a^{Ux} & \dots & \hat{\$}_{bDi}^{Rx} & \dots \\
\cos \alpha & \sin \alpha & \sin \alpha & 0 & & 0 & & 1 & \dots \\
-\sin \alpha & \cos \alpha & \cos \alpha & 0 & & 0 & & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & x_a \sin \alpha - y_a \cos \alpha & & & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \cos \alpha & & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & & -\sin \alpha & & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 & \dots
\end{bmatrix} \quad (5.22)$$

A matriz de ações unitárias ($[\hat{A}_D]_{6 \times 46}$) também pode ser encontrada na íntegra no APÊNDICE 2. Ao ser multiplicada pelo vetor de magnitudes dará origem à matriz de ações $[A_D]_{6 \times 46}$, caracterizando a estática do mecanismo.

$$[A_D]_{6 \times 46} = [\hat{A}_D]_{6 \times 46} \{\vec{\Psi}^A\}_{46 \times 1} \quad (5.23)$$

Obtidas as matrizes de movimentos e ações unitárias, o passo seguinte será combiná-las às matrizes de cortes e circuitos dando forma as equações constitutivas da cinemática e da estática, as quais sintetizam as leis de Kirchhof, como foi explicado no capítulo 3. A seguir, será mostrado como tais matrizes foram montadas.

5.3 MATRIZES EM REDE E EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Para que se possa incorporar as relações implícitas nas matrizes de cortes e circuitos nos sistemas de equações da estática e da cinemática, é necessário multiplicar a matriz de movimentos unitários pela matriz de circuitos, e a matriz de ações unitárias, pela matriz de cortes. Como resultado serão obtidas as matrizes de Ações Unitárias em Rede ($[\hat{A}_N]_{30 \times 46}$) e de Movimentos Unitários em Rede ($[\hat{M}_N]_{18 \times 18}$). Devido às dimensões das matrizes aqui tratadas, nesta seção apenas será descrito como se deu a sua montagem, de modo que ambas podem ser encontradas no Apêndice 2, ao final deste trabalho.

Na elaboração do sistema de equações da cinemática, a matriz de movimentos deve ser multiplicada por cada uma das linhas constituintes da matriz de circuitos, deste modo, a matriz de movimentos unitários em rede será o resultado da disposição vertical de cada submatriz resultante das multiplicações, como mostram as equações (5.24) e (5.25).

$$[\widehat{M}_N]_{6,3 \times 18} = \begin{bmatrix} [\widehat{M}_D]_{6 \times 18} \cdot \text{diag} \{ [B_{M,l1}]_{1 \times 18} \} \\ [\widehat{M}_D]_{6 \times 18} \cdot \text{diag} \{ [B_{M,l2}]_{1 \times 18} \} \\ [\widehat{M}_D]_{6 \times 18} \cdot \text{diag} \{ [B_{M,l3}]_{1 \times 18} \} \end{bmatrix}_{6,3 \times 18} \quad (5.24)$$

$$[\widehat{M}_N]_{18 \times 18} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_a \cos \alpha - y_a \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & y_c & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -x_c & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -y_c & x_c & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_d & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & -x_d \end{bmatrix}_{18 \times 18} \quad (5.25)$$

Com a matriz completa, está montado o sistema de equações que levará à solução do estado cinemático do mecanismo.

Sistema de equações da Cinemática:

$$[\widehat{M}_N]_{18 \times 18} \{\widehat{\Psi}^M\}_{18 \times 1} = \{\widehat{0}\}_{18 \times 1} \quad (5.26)$$

De forma análoga, é obtida a Matriz de Ações Unitárias em Rede $[\widehat{A}_N]_{30 \times 46}$, multiplicando a matriz de ações unitárias, por cada uma das linhas da matriz de cortes, na forma diagonalizadas, como mostra a equação (5.27).

$$[\hat{A}_N]_{6.5 \times 46} = \begin{bmatrix} [\hat{A}_D]_{6 \times 46} \cdot \text{diag} \{ [Q_{A_l1}]_{1 \times 46} \} \\ [\hat{A}_D]_{6 \times 46} \cdot \text{diag} \{ [Q_{A_l2}]_{1 \times 46} \} \\ [\hat{A}_D]_{6 \times 46} \cdot \text{diag} \{ [Q_{A_l3}]_{1 \times 46} \} \\ [\hat{A}_D]_{6 \times 46} \cdot \text{diag} \{ [Q_{A_l4}]_{1 \times 46} \} \\ [\hat{A}_D]_{6 \times 46} \cdot \text{diag} \{ [Q_{A_l5}]_{1 \times 46} \} \end{bmatrix}_{6.5 \times 46} \quad (5.27)$$

Como resultado, será obtido o sistema de equações da estática, representado pela equação (5.28).

Sistema de equações da Estática:

$$[\hat{A}_N]_{30 \times 46} \{ \bar{\Psi}^A \}_{46 \times 1} = \{ \bar{0} \}_{30 \times 1} \quad (5.28)$$

O próximo passo deve ser identificar as variáveis de entrada e as equações redundantes, que podem ser eliminadas. O número de variáveis de entrada pode ser considerado igual ao número de variáveis linearmente independentes. Para as equações da cinemática, é igual ao grau de liberdade líquido (F_N), obtido da subtração do grau de liberdade bruto (F) pelo posto da matriz de movimentos em rede (m_f), ao passo que para a estática, é igual ao grau de restrições líquido (C_N), calculado da subtração do grau de restrição bruto (C) pelo posto da matriz de ações unitárias em rede (m_c), como é mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} F_N &= F - m_f \\ F_N &= 18 - 14 = 4 \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} C_N &= C - m_c \\ C_N &= 46 - 30 = 16 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Ao olhar para a cinemática, em uma primeira análise, pode-se dizer que existem 4 variáveis independentes no sistema. Contudo, sabe-se que este mecanismo foi concebido para ter dois graus de liberdade, um grau sendo a entrada de potência de eixo que o mecanismo irá transmitir e o segundo grau, o atuador utilizado para controlar as variações de transmissão.

Portanto, em vez de tirar equações do sistema, será tomado emprestado o mesmo método aplicado à estática, proposto por LAUS, SIMAS E MARTINS (2012), ao utilizar

equações de estado, criando uma **Matriz de Movimentos Aumentada** ($[D_M]$). Este mesmo método será empregado para a resolução do sistema de equações da estática, gerando a **Matriz de Ações Aumenta** ($[D_A]$).

5.4 EQUAÇÕES CONTITUTIVAS

Conforme anteriormente mencionado, será aplicada a metodologia da matriz aumentada, a fim de determinar o sistema de equações. Para sua construção é preciso adicionar equações que criem relações entre as variáveis, reduzindo o número de variáveis independentes.

Como se busca um mecanismo de dois graus de liberdade, para a solução da cinemática, serão empregadas duas equações de estado.

5.4.1 Equações da cinemática

Ao aplicar escalonamento pelo método de Gauss-Jordan na matriz de movimentos unitários em rede ($[\widehat{M}_N]$), confirmou-se a existência de quatro variáveis linearmente independentes; duas relacionadas às velocidades na direção $r_{(x)}$, uma relacionada à velocidade $s_{(x,y)}$ em um dos acoplamentos de entrada ou saída, e a quarta podendo ser a velocidade $v_{(y)}$ do atuador linear ou uma rotação $t_{(z)}$ em um dos acoplamentos g ou f .

A independência das velocidades na direção $r_{(x)}$ condiz com o comportamento real do mecanismo, descrito no capítulo 4, uma vez que estas rotações ocorrem na direção perpendicular aos seus contatos, sem gerar deslocamentos, tornando-as linearmente independentes.

Assim, optou-se por adotar como variáveis de entrada as velocidades ($s_{(a)}$) e ($v_{(h)}$), por serem as juntas de entrada do mecanismo, e as velocidades $r_{(g)}$ e $r_{(f)}$, para a aplicação de relações de dependência por equações constituintes, de acordo com a seção 3.2.8.

Portanto, devem ser adicionadas à Matriz de Movimentos Unitários em Rede ($[\widehat{M}_N]_{18 \times 18}$), duas equações que relacionem as velocidades na direção r_x às velocidades nas direções s_y de g e f , de modo que, optou-se pelos acoplamentos b e d , por serem responsáveis por direcionar as velocidades das esferas.

Na primeira equação foi relacionada a componente na direção x , da velocidade de entrada s_a , com a mesma componente da velocidade angular (s_f) da esfera 3, onde a diferença

entre as duas resultantes será o escorregamento circunferencial (*spin*) no acoplamento *b*, como mostra a equação (5.31).

Eq. constitutiva 1:	$s_a \sin \alpha - r_b + s_f \sin \beta_f = 0$	(5.31)
colunas:	$s_a \quad \dots \quad r_b \quad \dots \quad s_f \quad \dots$	
Linha 19.:	$[(\sin \alpha) \quad \dots \quad (-1) \quad \dots \quad (\sin \beta_f) \quad \dots]$	

Usando a mesma analogia, foi montada a segunda equação constitutiva, para determinar a velocidade r_d em função dos acoplamentos *g* e *e*, de acordo com a equação (5.32).

Eq. constitutiva 2:	$-r_d + s_g \sin \beta_g + s_e \sin \alpha = 0$	(5.32)
colunas:	$r_d \quad \dots \quad s_g \quad \dots \quad s_e \quad \dots$	
Linha 20.:	$[(-1) \quad \dots \quad (\sin \beta_g) \quad \dots \quad (\sin \alpha) \quad \dots]$	

Estas equações assumem que não há escorregamento por *spin* em *b* e *d*, e foram elaboradas com base nas relações geométricas entre os elementos do mecanismo, mostradas na Figura 5-6 e Figura 4-9, com seus valores disponibilizados na Tabela 4-3 da seção 4.

Outras relações poderiam ser aplicadas para a determinação do sistema, porém as equações escolhidas se mostraram mais práticas de verificar manualmente.

Para adicionar ambas as equações à Matriz de Movimentos Unitários em Rede ($[\widehat{M}_N]_{18 \times 18}$), deve-se acrescentá-las ao final da matriz, na forma de duas novas linhas, em que os termos presentes nas equações constitutivas 1 e 2 devem ocupar suas respectivas colunas, com as demais sendo preenchidas por zeros.

Uma vez montada a Matriz de Movimentos Aumentada ($[D_M]_{20 \times 18}$) e, conhecendo as magnitudes das variáveis de entrada, é possível resolver o sistema, neste caso, por meio da multiplicação do espaço nulo de $[D_M]_{20 \times 18}$ pelo vetor das magnitudes de $s_{(a)}$ e $v_{(h)}$.

5.4.2 Equações da estática

O método da matriz aumentada é o mesmo para os problemas da estática e da cinemática, havendo diferença apenas na quantidade de equações utilizadas.

Na cinemática, buscava-se duas variáveis independentes, para uma matriz de dezoito variáveis e posto $m_f = 14$, já no problema da estática, a Matriz de Ações Unitárias em Rede, é constituída de quarenta e seis variáveis ($C=46$), com posto $m_c = 30$. Considerando que se deseja duas variáveis de entrada, será necessário adicionar quatorze equações constitutivas para a determinação do sistema.

Como ponto de partida, foram retiradas todas as ações internalizadas da matriz $[\hat{A}_N]_{30 \times 46}$ e então, realizado seu escalonamento pelo método de Gauss Jordan.

A matriz resultante, constituída de trinta colunas, por trinta linhas, apresentou posto $m_c = 28$ e mostrou que as variáveis linearmente independentes eram as forças U_e e V_e . Para tirar a prova, foram trocadas as posições das colunas dos acoplamentos a e e , de modo que desta vez, as variáveis independentes foram U_a e V_a . Com isto, comprovou-se que as forças nos acoplamentos a e e eram responsáveis pela determinação do sistema estático, desconsiderando as perdas e forças internalizadas.

Por já estarem relacionadas ao eixo de entrada, optou-se pela força U_a , integrando a primeira equação constitutiva, e V_a , servindo como a primeira variável de entrada.

Sabendo que a segunda entrada será o torque S_{aEnt} , conclui-se que restam treze equações a serem adicionadas, como mostra a Tabela 5-4.

Tabela 5-4: Equações constitutivas da estática.

Ordem	Equação de Estado	
Eq.1	$U_a - U_b \cos \alpha = 0$	(5.32)
Eq.2	$U_e + U_b \cos \alpha = 0$	(5.33)
Eq.3	$U_g - U_f = 0$	(5.34)
Eq.4	$R_{c_di} - U_c S_{pin_c} = 0$	(5.35)
Eq.5	$S_{a_di} + U_a K_a = 0$	(5.36)
Eq.6	$S_{e_di} + U_e K_e = 0$	(5.37)
Eq.7	$S_{c_di} + U_c C r_c = 0$	(5.38)
Eq.8	$S_{d_di} + U_d C r_d = 0$	(5.39)
Eq.9	$S_{b_di} + U_b C r_b = 0$	(5.40)
Eq.10	$S_{f_di} - W_f K_f = 0$	(5.41)
Eq.11	$S_{g_di} - W_g K_g = 0$	(5.42)
Eq.12	$T_{b_di} - U_b K_{bRol} = 0$	(5.43)

Eq.13	$T_{d_di} - U_d K_{d_{Rol}} = 0$	(5.44)
Eq.14	$T_{c_di} + U_c K_{c_{Rol}} = 0$	(5.45)

Fonte: do autor

As constantes K_a , K_e , K_f e K_g , são os coeficientes de atrito dos mancais das juntas a e e , e dos mancais esféricos f e g , já multiplicados por seus respectivos raios equivalentes, dados pela equação (3.27). Os coeficientes Cr_c , Cr_d e Cr_b foram obtidos por meio da multiplicação dos índices de microescorregamento (ξ_{c_x} , ξ_{d_x} e ξ_{b_x}) pelos raios equivalentes de suas juntas e pelo coeficiente de atrito. Por sua vez S_{pin_c} representa o coeficiente de resistência ao *spin* e é calculado pela divisão do momento (M_{ϕ_j}), pela força normal (F_N). Os coeficientes $K_{b_{Rol}}$, $K_{c_{Rol}}$ e $K_{d_{Rol}}$ referem-se à resistência ao rolamento livre (sem tração na direção de movimento), considerados como 0,003, valor similar a aproximações obtidas por TABOR (1955) e JOHNSON (1985).

5.5 RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Os sistemas de equações foram resolvidos pela multiplicação dos espaços nulos das matrizes aumentadas, pelos respectivos vetores de magnitudes de suas variáveis de entrada, como mostrado na seção 3.2.8, sendo obtidas como resultado as magnitudes das forças e velocidades para cada junta, as quais, ao multiplicarem as matrizes unitárias, deram origem à Matriz de Movimentos ($[M_D]_{6 \times 18}$) e a Matriz de Ações ($[A_D]_{6 \times 46}$), disponíveis no APÊNDICE 3, juntamente com suas respectivas magnitudes.

5.6 CÁLCULO DAS POTÊNCIAS E EFICIÊNCIA GLOBAL

As potências de entrada e saída foram obtidas de acordo com a equação (3.67) da seção 3.2.9, e a eficiência global do mecanismo, seguindo a equação (3.68). Já, as potências transferidas e dissipadas pelos acoplamentos, foram calculadas por meio das equações (3.69) e (3.72), com as respectivas eficiências dadas pela equação (3.73), como mostra a Tabela 5-5.

Tabela 5-5: Cálculo das potências e eficiências para os acoplamentos.

Acoplamento	Potência \mathcal{P}	Eficiência η
a	$\mathcal{P}_a = \$_a^A \cdot \$_1^{M_0}$	$\eta_a = (\$_a^A \cdot \$_1^{M_0}) / (\$_{aEnt}^{Sy} \$_1^{M_0})$
b	$\mathcal{P}_b = \$_b^A \cdot \$_3^{M_0}$	$\eta_b = (\$_b^A \cdot \$_3^{M_0}) / (\$_b^A \cdot \$_1^{M_0})$
c	$\mathcal{P}_c = \$_c^A \cdot \$_4^{M_0}$	$\eta_c = (\$_c^A \cdot \$_4^{M_0}) / (\$_c^A \cdot \$_3^{M_0})$
d	$\mathcal{P}_d = \$_d^A \cdot \$_5^{M_0}$	$\eta_d = (\$_d^A \cdot \$_5^{M_0}) / (\$_d^A \cdot \$_4^{M_0})$
e	$\mathcal{P}_e = \$_e^A \cdot \$_5^{M_0}$	$\eta_e = (\$_e^A \$_5^{M_0}) / (\$_{eSai}^{Sy} \$_5^{M_0})$
f	$\mathcal{P}_f = \$_f^A \cdot \$_3^{M_0}$	$\eta_f = 1 - (\$_f^A \$_3^{M_0}) / (\$_b^A \cdot \$_3^{M_0})$
g	$\mathcal{P}_g = \$_g^A \cdot \$_4^{M_0}$	$\eta_g = 1 - (\$_g^A \$_4^{M_0}) / (\$_c^A \cdot \$_4^{M_0})$
CVT	$\mathcal{P}_{Sai} = \$_e^A \cdot \$_5^{M_0}$	$\eta_{CVT} = - (\$_e^A \cdot \$_e^M) / (\$_{aEnt}^{Sy} \$_e^M)$

Fonte: do autor

Na Tabela 5-5, os elementos $\$_j^A$ representam a soma de todas as heliforças em um determinado acoplamento j , ao passo que cada heligiro $\$_n^{M_0}$ é uma coluna da Matriz de Movimentos Absolutos ($[M_0]_{6 \times 5}$), representando as velocidades do corpo n .

5.7 CÁLCULO DOS AQUECIMENTOS E TAXAS DE DESGASTE

As elevações instantâneas de temperatura (ΔT) nos acoplamentos foram calculadas por meio da equação (3.37b), ao passo que as taxas de desgaste por revolução (d^*) foram obtidas aplicando a equação (3.34c), como mostra a Tabela 5-6.

Tabela 5-6: Cálculo do aquecimento e taxa de desgaste nos acoplamentos de tração.

Acoplamento	Aquecimento ΔT	Taxa de desgaste d^*
b	$\Delta T_b = \mathcal{P}_b / 4\bar{r}_b k_w$	$d^*_b = K_d F_N \xi_b (2\pi r_3) / H_d A_3$
c	$\Delta T_c = \mathcal{P}_c / 4\bar{r}_c k_w$	$d^*_c = K_d F_N \xi'_c (2\pi r_3) / H_d A_3$
d	$\Delta T_d = \mathcal{P}_d / 4\bar{r}_d k_w$	$d^*_d = K_d F_N \xi_d (2\pi r_4) / H_d A_3$

Fonte: do autor

Onde o índice de escorregamento total do acoplamento c é: $\xi'_c = \xi_{Lc} + \phi_c \frac{2}{3} \frac{b_c}{a_c}$; e a taxa de desgaste de cada esfera será a soma dos desgastes causados por cada um de seus acoplamentos, divididos por dois: $d^*_3 = \frac{d^*_b}{2} + \frac{d^*_c}{2}$, e: $d^*_4 = \frac{d^*_d}{2} + \frac{d^*_c}{2}$. Esta divisão deve-se à atribuição da mesma dureza e resistência ao desgaste para todos os componentes de transmissão, o que, em teoria, implicaria na distribuição igualitária do desgaste entre as superfícies em contato.

6 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

Os resultados das simulações descritas nas seções 4 e 5 serão apresentados na presente seção.

Serão mostrados (seção 6.1 à 6.6) os comportamentos dos modelos base MA, MB, MC e MD, sendo dispostos índices de escorregamento, torques dissipativos, perdas de potência, aquecimento, taxa de desgaste e eficiência dos acoplamentos de tração (b , c e d), de acordo com os ângulos de inclinação dos cones (α) e variações das relações (i_{tr}).

Na seção 6.7, serão comparadas as eficiências globais dos mecanismos, suas massas e dimensões, apontando para a existências de prováveis condições limitantes. Ainda, será comentada a influência das considerações adotadas sobre os resultados, em razão das limitações no modelo teórico e da carência de dados experimentais para sua validação.

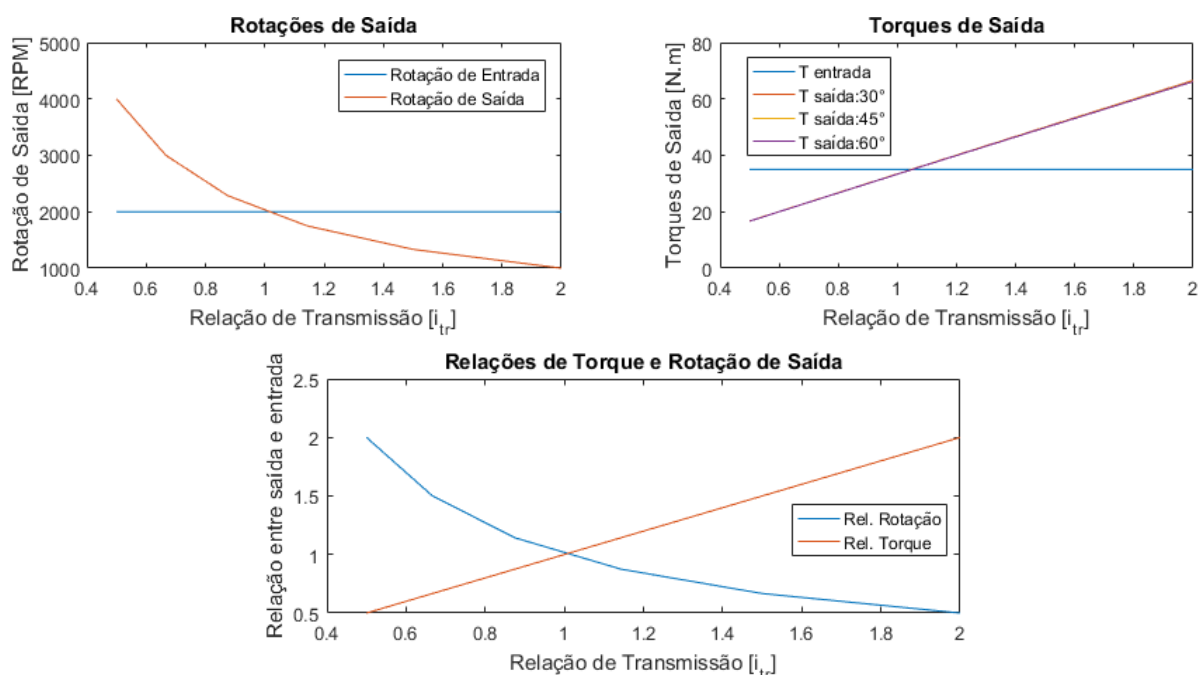
Somente o comportamento dos acoplamentos b , c e d foram dispostos nas seções citadas, haja vista que os demais não sofrem interferência direta das variações dos parâmetros dimensionais (a , n_c e λ_r).

Ao final deste trabalho, no APÊNDICE 3, podem ser encontradas as forças e velocidades para todos os acoplamentos.

6.1 RELAÇÕES DE TRANSMISSÃO, TORQUES E VELOCIDADES

As relações de transmissão variaram dentro da faixa de 1:2 a 1:0,5 de forma igual para as diferentes versões do mecanismo. Na Figura 6-1 observa-se que as relações de rotação são inversamente proporcionais às relações de torque, as quais são iguais às relações de transmissão.

Figura 6-1: Torques e rotações de saída, conforme relações de transmissão.



Torques e velocidades dos acoplamentos de entrada e saída, também se comportaram de maneira igual para as diferentes variantes, contudo, suas eficiências de transmissão apresentaram alterações, tanto para valores globais quanto para os contatos internos, como será mostrado nas próximas seções.

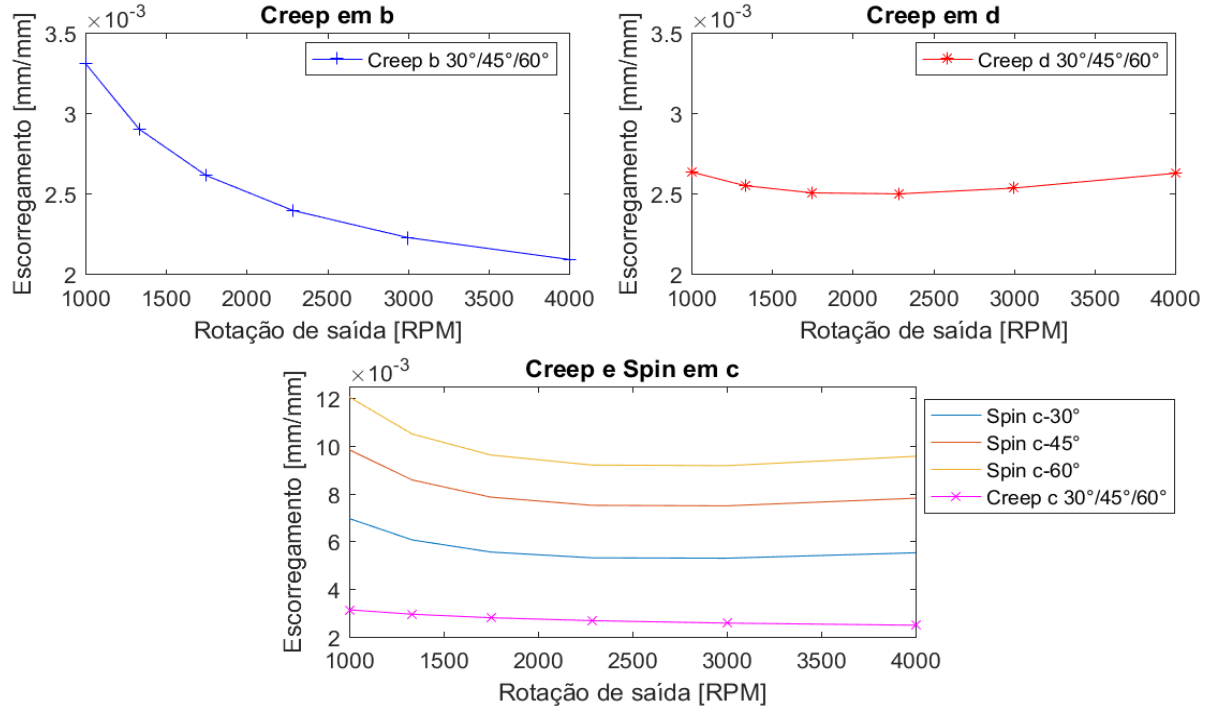
6.2 ESCORREGAMENTOS NOS CONTATOS

Conforme já mencionado anteriormente, escorregamentos macroscópicos longitudinais e laterais foram ignorados, tanto pela capacidade de auto alinhamento dos acoplamentos de transmissão, quanto pela relação entre forças normais e forças tangenciais, que impedem o escorregamento total entre as superfícies.

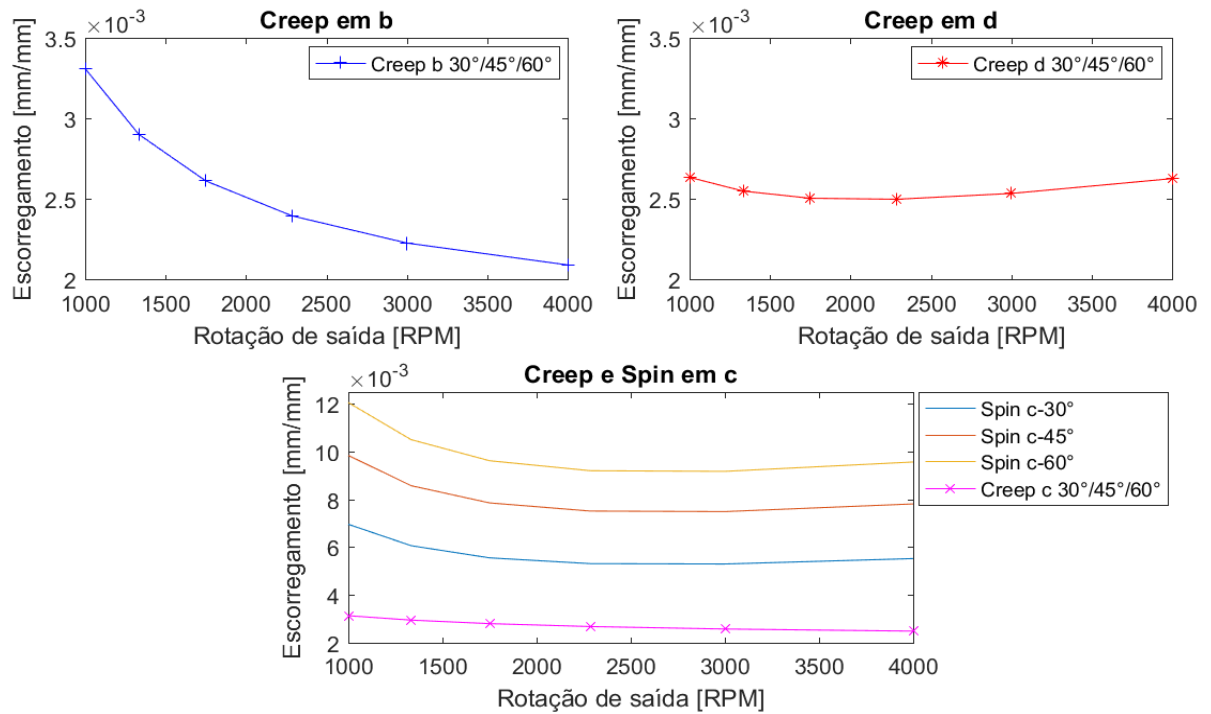
Nota-se que o *creep* longitudinal apresentou maior sensibilidade à alteração das relações de transmissão (i_{tr}), e, em menor intensidade, à mudança do fator dimensional λ_r , por ter influência sobre os raios equivalentes dos acoplamentos (R_e) e sobre as forças normais (F_N).

Porém, devido à proporção entre forças normais e tangenciais ser constante, tais escorregamentos se mostraram indiferentes às variações dos ângulos de inclinação dos cones e do número de contatos, permanecendo iguais entre estes subgrupos. Já o comportamento de *spin* (ϕ), sofreu influência das relações de transmissão (i_{tr}), do fator dimensional λ_r e, principalmente, dos ângulos α , como mostram os gráficos da Figura 6-2.

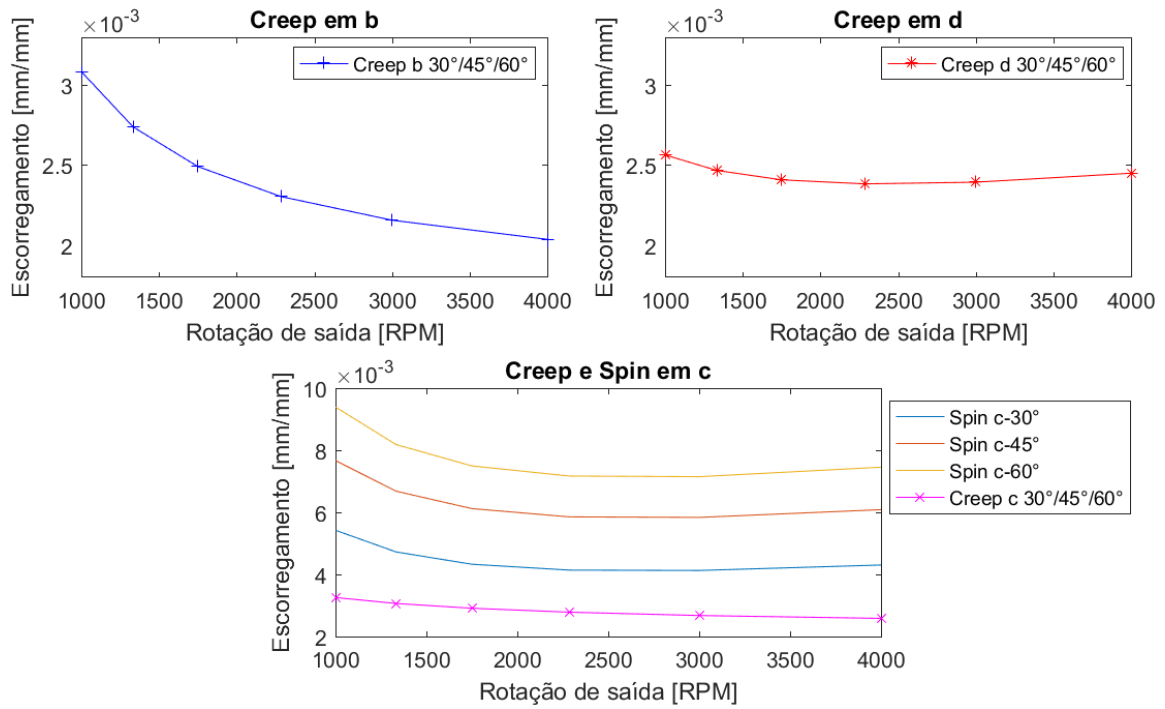
Figura 6-2: Índices de escorregamento nos acoplamentos dos modelos de base.



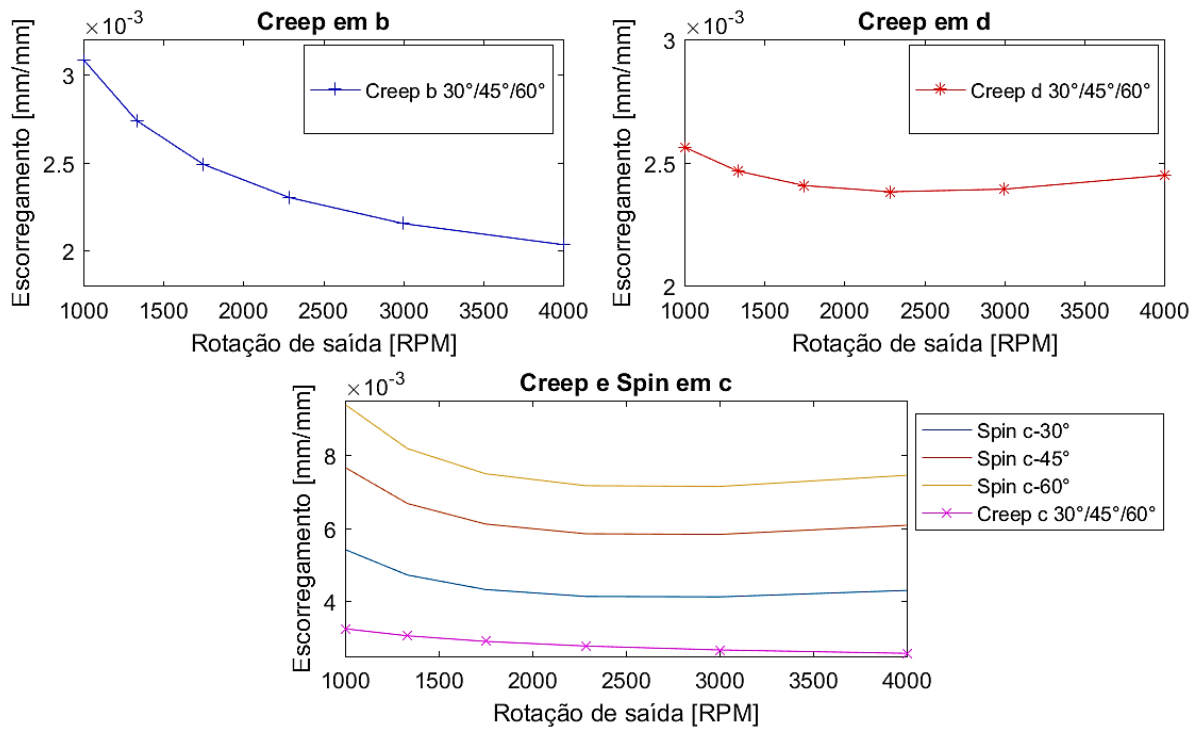
a) *Creep* (ξ) e *Spin* (ϕ) nos acoplamentos das transmissões MA.



b) *Creep* (ξ) e *Spin* (ϕ) nos acoplamentos das transmissões MB.



c) *Creep* (ξ) e *Spin* (ϕ) nos acoplamentos das transmissões MC.



d) *Creep* (ξ) e *Spin* (ϕ) nos acoplamentos das transmissões MD.

Verifica-se que, à medida que as relações de transmissão diminuem, o *creep* decai de forma menos intensa para os acoplamentos d , pois, com o deslocamento das esferas, apesar de haver redução igualitária das forças em todos os contatos, os raios equivalentes (R_e) variam de forma diferente, crescendo em b , mantendo-se constante em c e reduzindo em d , provocando a retração mais acentuada da área de contato neste último. Ao considerar que, para $F_{Tr}/\mu F_N$ constante, o microescorregamento é proporcional à força de atrito dividida pelo raio da área de contato ao quadrado ($\xi \propto \mu F_N/a_j^2$) - equação (3.25) -, espera-se que o decréscimo mais acelerado do raio de contato em d , compense parte do decaimento da força normal, levando à menor variação em seus índices de *creep*.

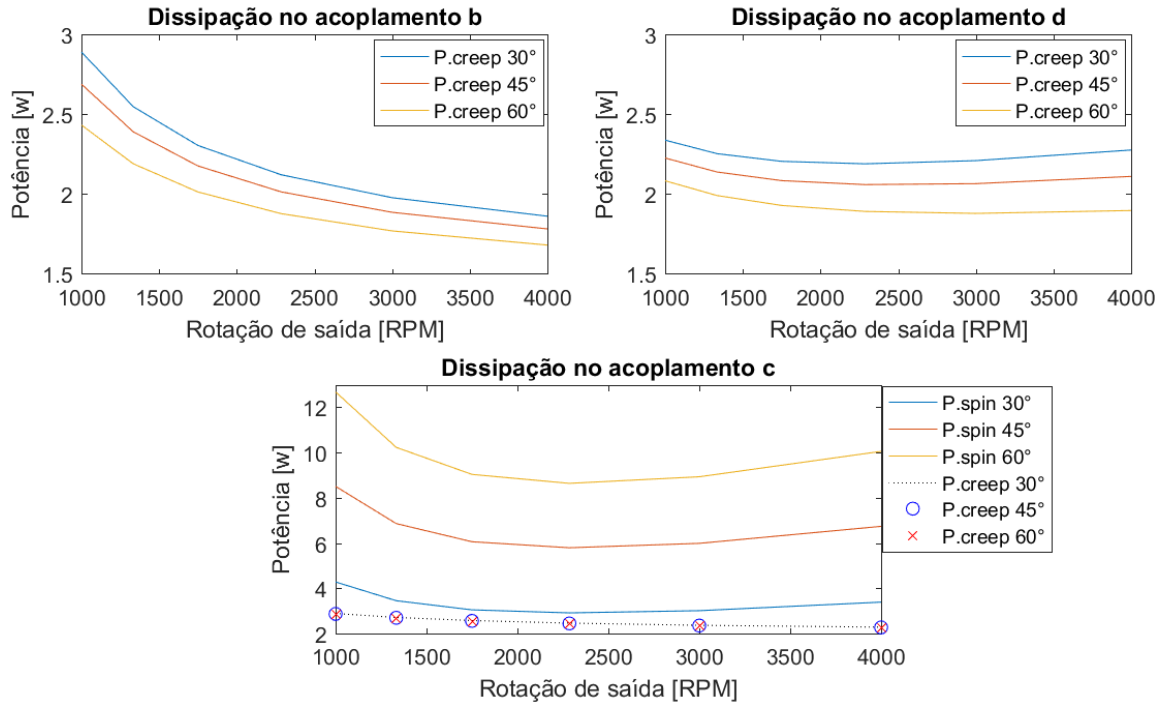
Assim, os índices de *creep* decaem por influência da diminuição das relações de transmissão e, em menor proporção, com o aumento do fator λ_r .

Por sua vez, os valores de *spin*, em primeira instância, decaem com a diminuição das relações de transmissão, que ocasiona a redução das forças normais e dos raios de contato, porém, este efeito é suprimido pela variação da diferença entre as direções de rotação das esferas, com seu valor mínimo atingido nas relações de 1:1 (a 2000 RPM no eixo de saída), quando estas direções estão paralelas.

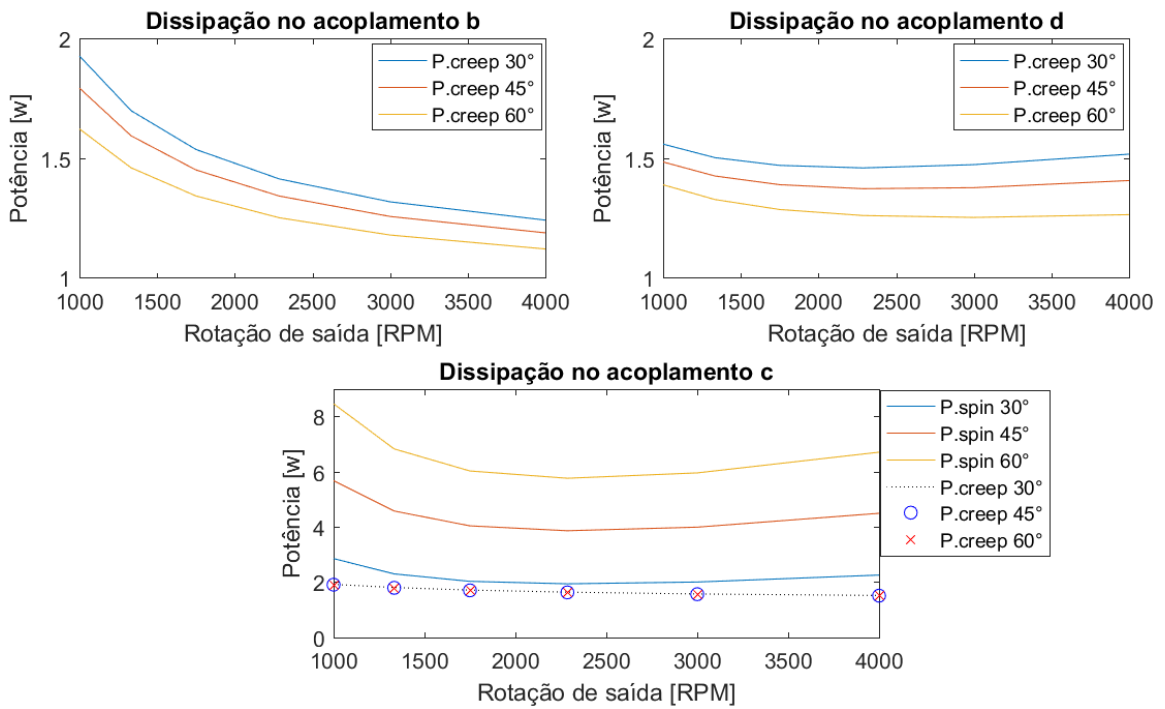
6.3 PERDAS NOS CONTATOS

As perdas de potência nos acoplamentos de tração são decorrentes dos escorregamentos e das forças de resistência que se opõem a eles, desconsiderando-se outros fenômenos no modelo de análise, como por exemplo, histerese nas deformações elásticas. Por conseguinte, os torques e potências dissipativas deverão resultar da sobreposição dos efeitos de *creep* e *spin* nos contatos, tornando o comportamento das perdas semelhante a eles, conforme gráficos da Figura 6-3.

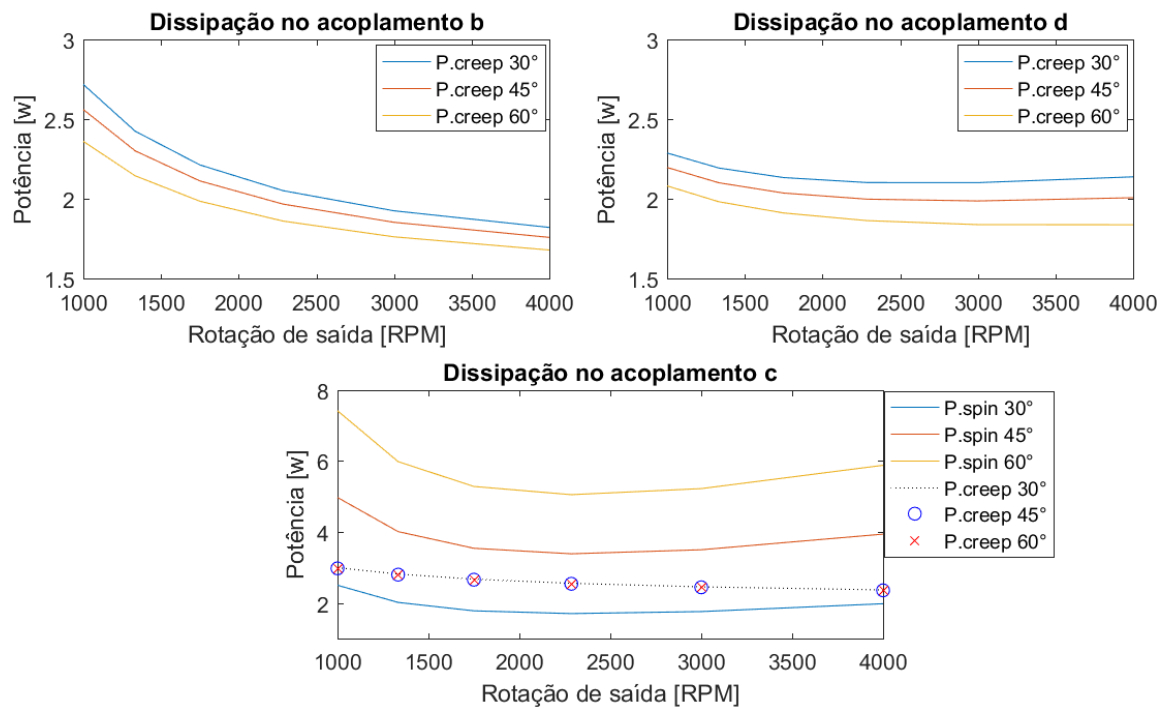
Figura 6-3: Dissipações nos acoplamentos dos quatro modelos de base.



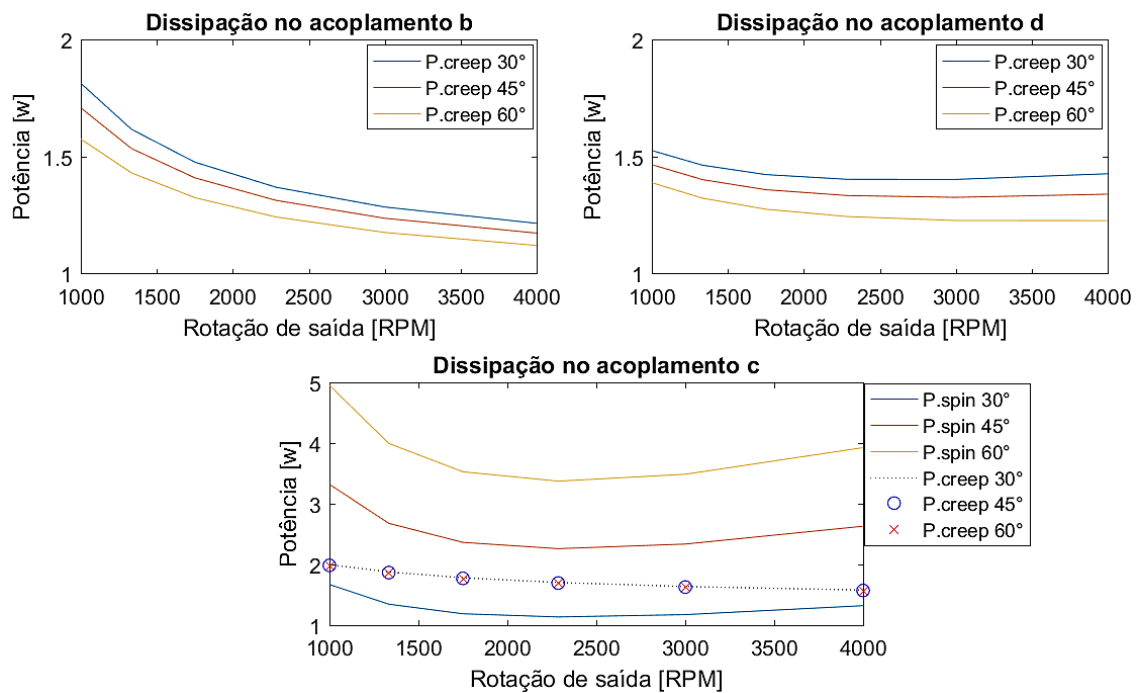
a) Potências dissipadas nos acoplamentos das transmissões MA.



b) Potências dissipadas nos acoplamentos das transmissões MB.



c) Potências dissipadas nos acoplamentos das transmissões MC.



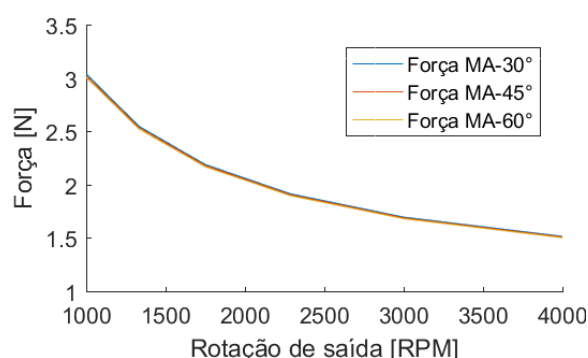
d) Potências dissipadas nos acoplamentos das transmissões MD.

Observa-se que para os contatos *b* e *d*, as perdas são governadas pelo microescorregamento, enquanto que no contato *c*, o aparecimento do *spin* domina as condições de dissipação, com exceção dos modelos MC-30° e MD-30°, nos quais, devido aos menores índices de *spin*, a potência dissipada sofre maior influência do microescorregamento.

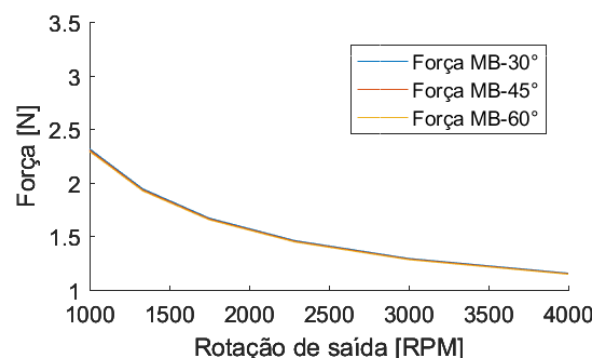
Embora as taxas de microescorregamento e torques dissipativos não sejam afetados pelas inclinações dos cones (α), pode ser observado que há variação nos níveis de potência dissipada. Isto é explicado pelas diferentes velocidades das esferas, influenciadas por suas direções de rotação (β_3 e β_4), as quais determinam as distâncias radiais dos contatos até seus eixos, conforme Figura 4-6.

Em decorrência da variação das forças dissipativas, a força empregada pelo atuador, necessária para movimentá-las também é afetada, como mostra a Figura 6-4.

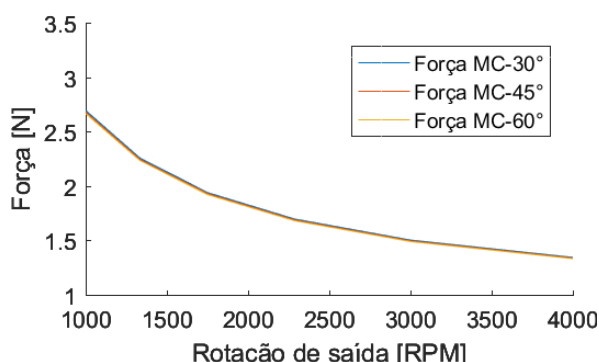
Figura 6-4: Forças empregadas pelos atuadores lineares, para os diferentes modelos.



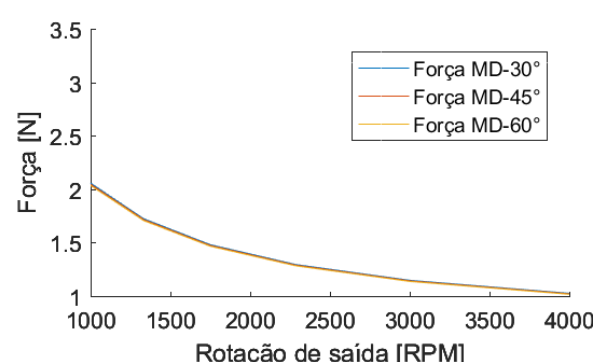
a) Forças nos atuadores para o grupo MA.



b) Forças nos atuadores para o grupo MB.



c) Forças nos atuadores para o grupo MC.



d) Forças nos atuadores para o grupo MD.

As forças foram calculadas para um intervalo total de 10 segundos entre o início e o final do deslocamento, no entanto, suas magnitudes deverão mudar para diferentes intervalos de tempo.

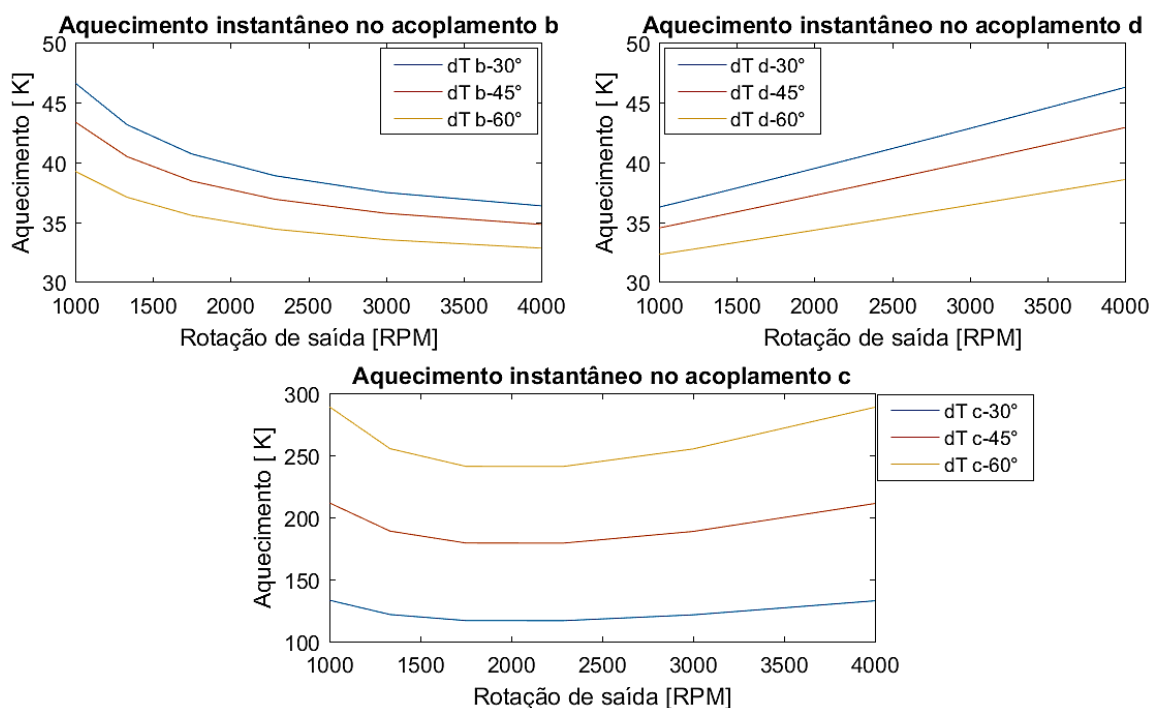
Percebe-se que seguindo os torques dissipativos, as forças de atuação são pouco afetadas pelas variações dos ângulos α , porém sofrem interferência fator λ_r e, em maior grau, pelo número de contatos, já que impactam diretamente nas forças normais de compressão.

6.4 AQUECIMENTO

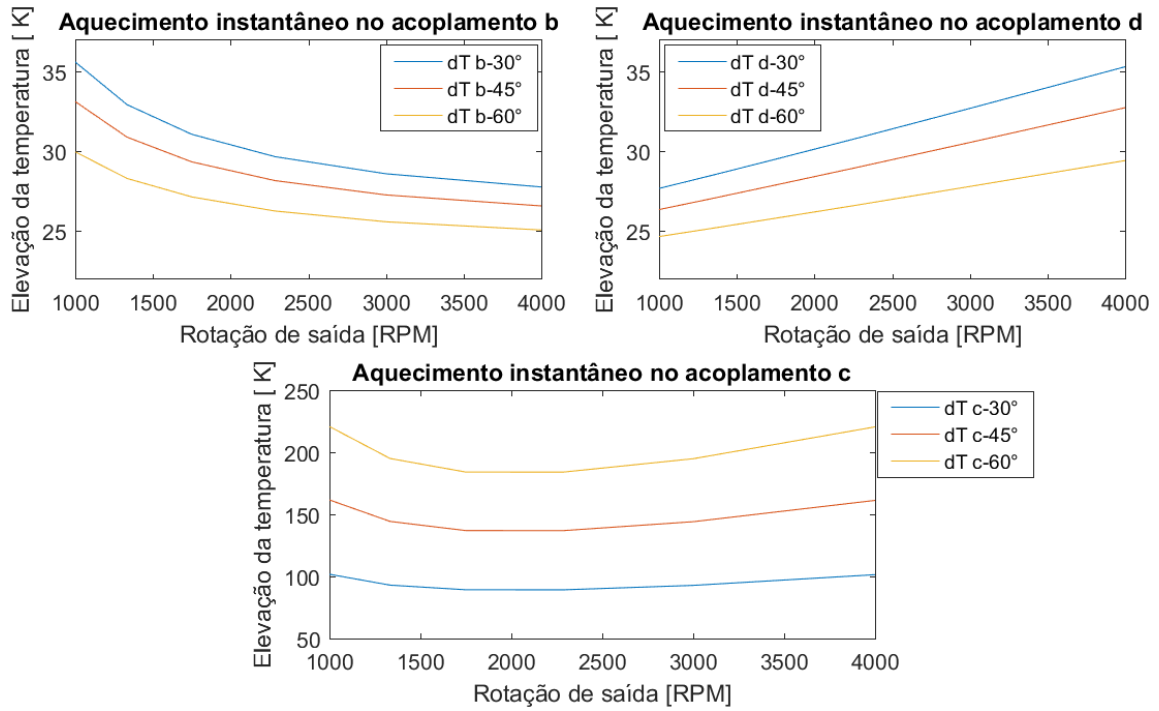
No presente estudo, foi considerado que toda a potência consumida pelos escorregamentos será dissipada na forma de calor, o qual é distribuído igualmente entre o par de superfícies, como assumido na equação (3.37b).

Por este motivo, o aquecimento instantâneo decorrente sofre influência direta dos escorregamentos. Além disso, as extensões das áreas dos contatos também exercem papel importante, pois, juntamente com a condutividade do material, determinam a resistência térmica do contato. Seu efeito pode ser identificado ao comparar as elevações de temperatura nos acoplamentos d (Figura 6-5), ao mesmo tempo em que decrescem os valores de potência dissipada, mostrados na Figura 6-3.

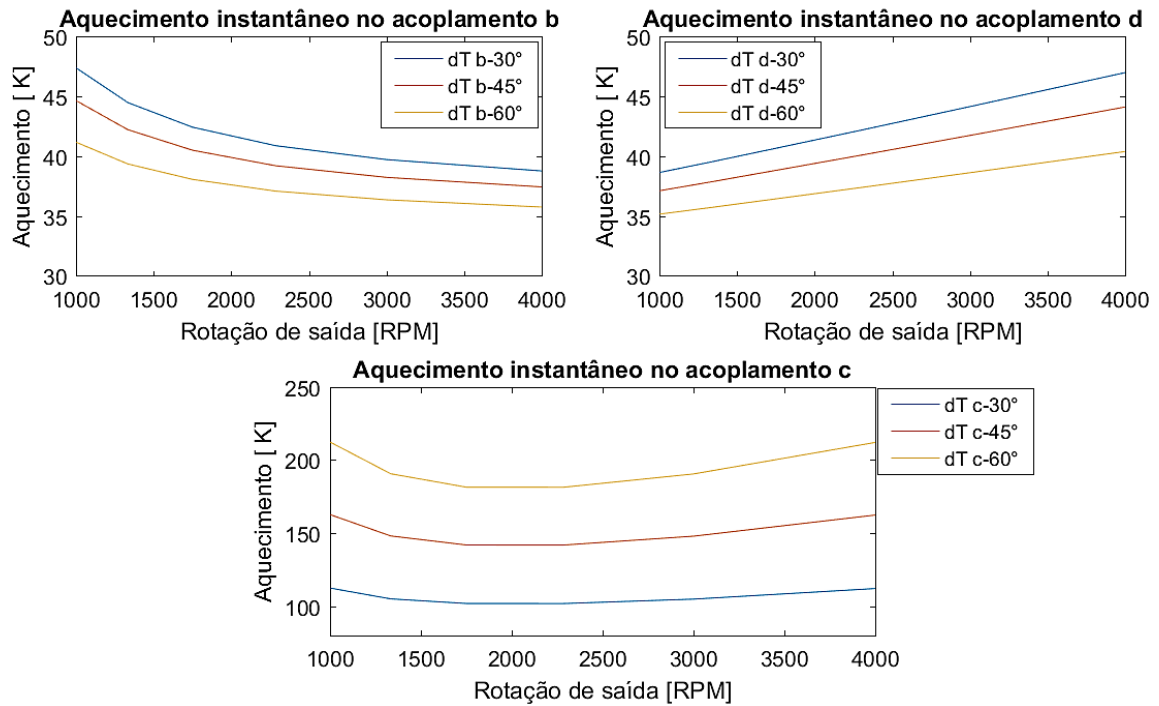
Figura 6-5: Variação instantânea de temperatura nos contatos dos modelos de base.



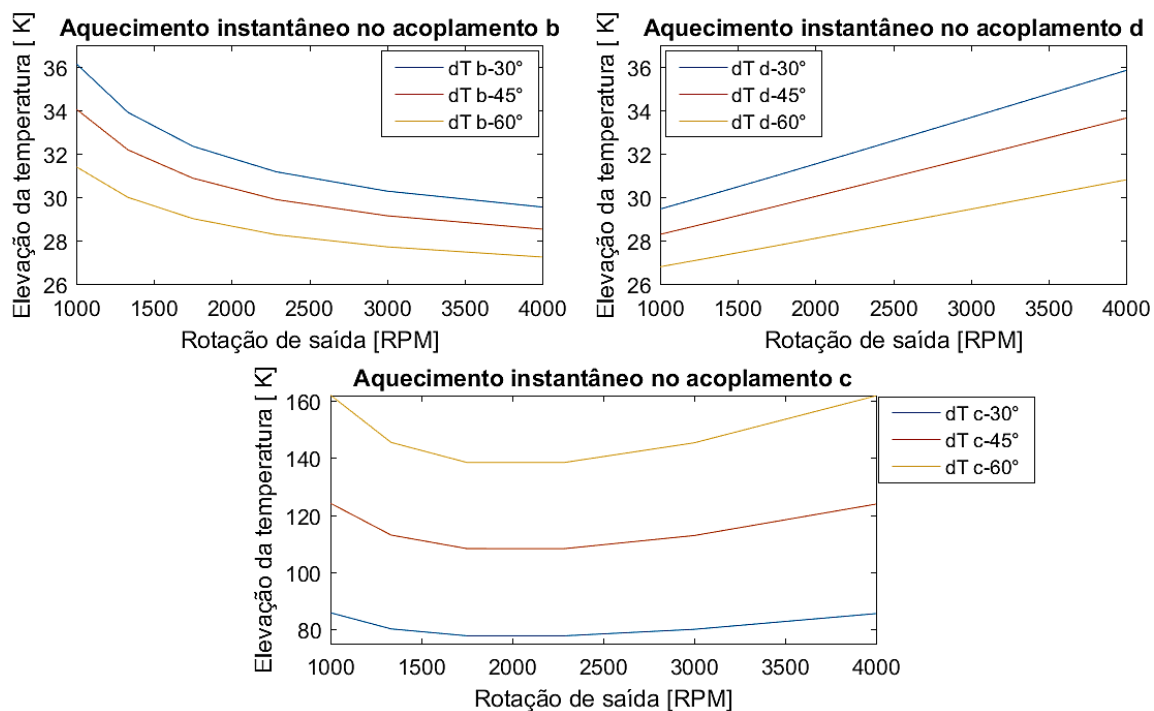
a) Aquecimento instantâneo nos acoplamentos das transmissões MA.



b) Aquecimento instantâneo nos acoplamentos das transmissões MB.



c) Aquecimento instantâneo nos acoplamentos das transmissões MC.



d) Aquecimento instantâneo nos acoplamentos das transmissões MD.

Nos acoplamentos *c*, dado que as áreas de contato se mantêm constantes, o aquecimento instantâneo nestes pontos é regido pela magnitude das perdas, ao passo que em *b* o decréscimo das dissipações soma-se ao aumento das áreas de contato, favorecendo a queda das taxas de aquecimento.

De acordo com os resultados apresentados, observa-se que as variações de temperatura se mantiveram abaixo de 150 K para todas as variantes com inclinação de 30° e para o modelo D, com inclinação de 45°. Em todos os demais, a elevação instantânea de temperatura ultrapassou este valor.

No entanto, considerando que a depender da eficiência do sistema de arrefecimento, é possível que as temperaturas dos componentes se mantenham na faixa dos 373K (100°C), uma elevação de temperatura de 150K, mesmo que por um mínimo instante, pode levar a sérias degradações das propriedades do material. Deste ponto de vista, somente o modelo MD-30° poderia ser cogitado para aplicação nas condições de trabalho adotadas, com picos de elevação inferiores a 90K (90°C), os quais, ao considerar as temperaturas nos componentes próximas a 373K, implicariam em picos de até 463K (190°C).

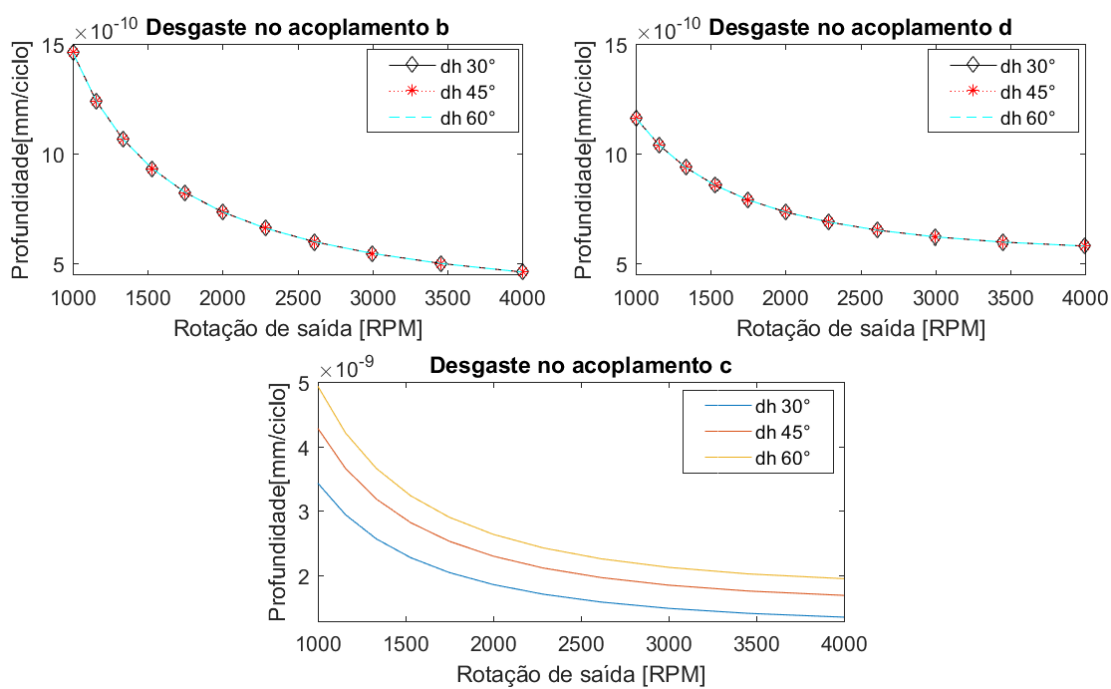
Ressalta-se que os valores instantâneos de ΔT não dependem das temperaturas do ambiente e dos corpos, tampouco do fluxo de calor dissipado para o meio externo, uma vez que

se considera uma passagem infinitesimal de tempo, levando-se em conta apenas as resistências térmicas, calculadas para os contatos, e as perdas geradas nos acoplamentos .

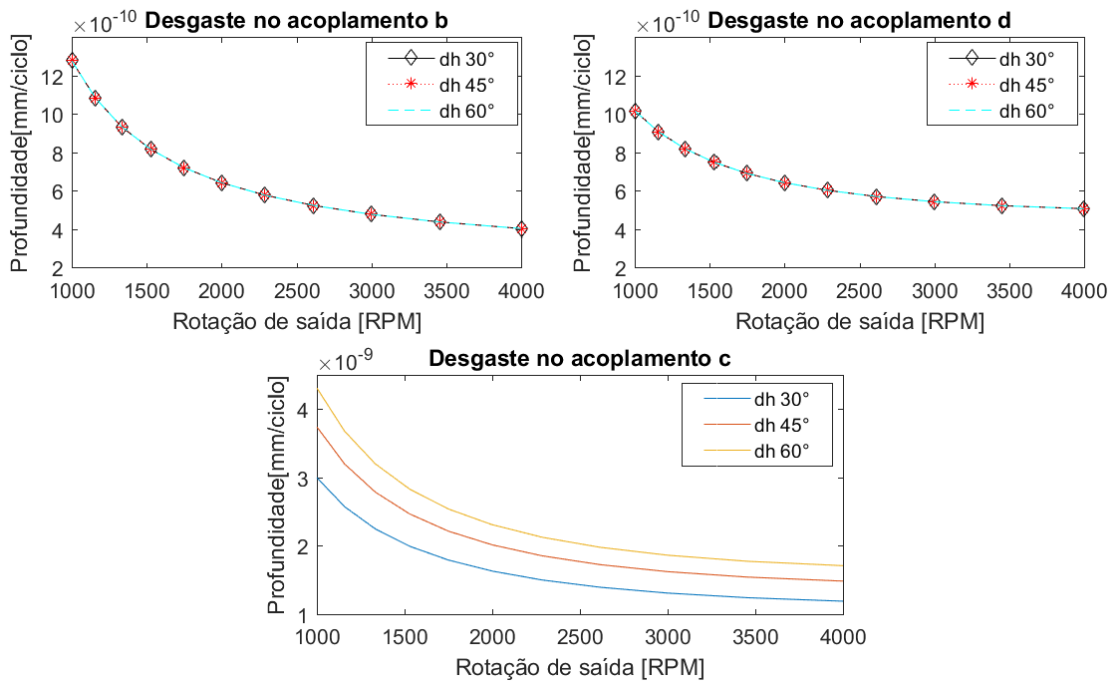
6.5 DESGASTES

Outra consequência dos escorregamentos, sobretudo em regime de atrito sem lubrificação, são os desgastes das superfícies. A Figura 6-6 mostra as taxas de desgaste por rotação (d^*), calculadas para cada acoplamento, de acordo com a equação (3.34c).

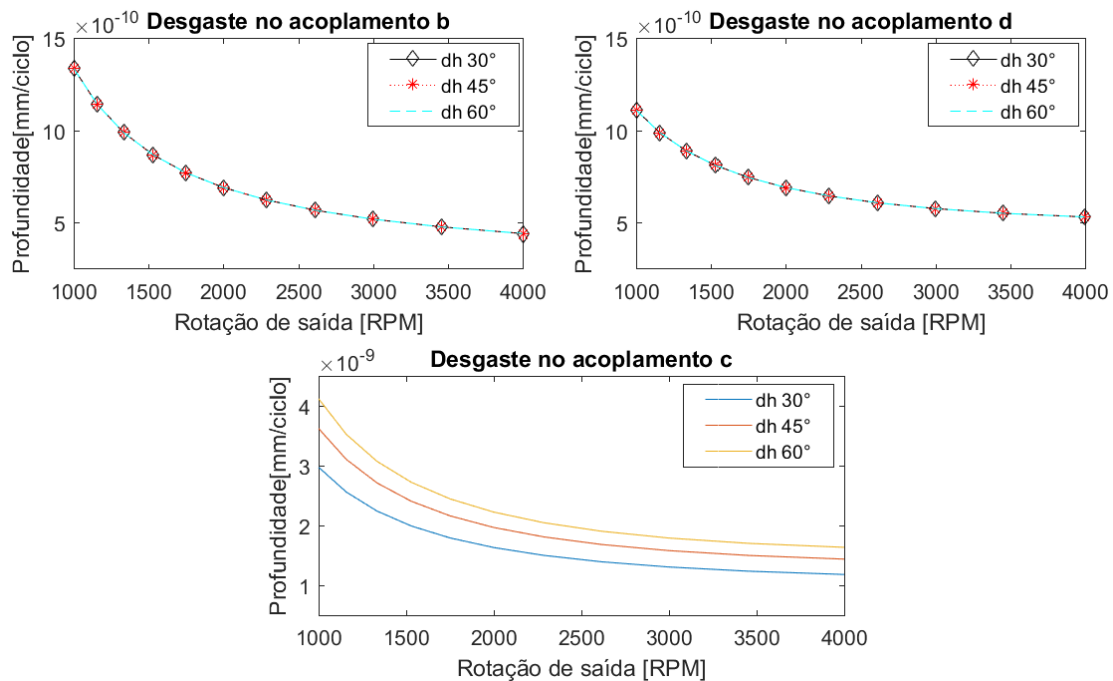
Figura 6-6: Índices de desgaste nos diferentes conceitos de base.



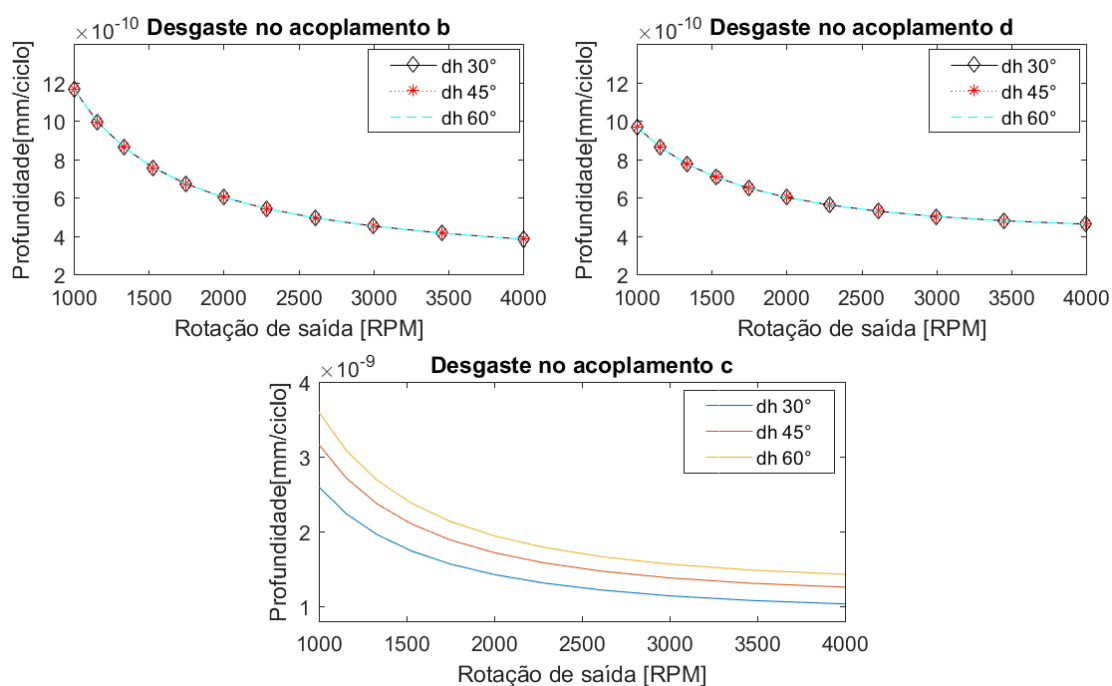
a) Índices de desgaste por rotação nos contatos de tração dos modelos MA.



b) Índices de desgaste por rotação nos contatos de tração dos modelos MB.



c) Índices de desgaste por rotação nos contatos de tração dos modelos MC.



d) Índices de desgaste por rotação nos contatos de tração dos modelos MD.

Devido às maiores magnitudes do *spin*, nota-se que os índices de desgaste nos contatos *c* podem chegar a ser 3 vezes maiores que aqueles encontrados nos contatos *b* e *d*, onde há apenas a presença de *creep*, percebe-se, ainda, que para todos os contatos, os índices de desgaste decrescem com o aumento da velocidade de saída, acompanhando a redução das forças normais, o que indica seu papel predominante sobre este fenômeno.

Para melhor compreender a durabilidade estimada para os componentes, em função de seus índices de desgaste, pode-se definir um limite para a profundidade de sulco nos componentes e usá-lo para encontrar a quantidade estimada de ciclos que o mecanismo poderá suportar, conforme Tabela 6-1.

Tabela 6-1: Vida das esferas, de acordo com suas taxas de desgaste (d^*), para uma relação de transmissão média de 1:1.

Modelo	d_3^* e d_4^* [mm/ciclo]	F Normal [N]	ω esferas [RPM]	Vida [ciclos]	Vida [horas]
MA-30°	1,30E-09	201,2	4610,5	3,85E+07	139,08
MA-45°	1,52E-09	201,2	4717,7	3,29E+07	116,29
MA-60°	1,68E-09	201,2	4822,5	2,96E+07	102,41
MB-30°	1,13E-09	153,5	4609,8	8,9E+07	159,28
MB-45°	1,33E-09	153,5	4717	3,77E+07	133,18
MB-60°	1,47E-09	153,5	4821,8	3,39E+07	117,29
MC-30°	1,16E-09	172,4	6084,5	4,32E+07	118,22
MC-45°	1,33E-09	172,4	6166,1	3,77E+07	101,93
MC-60°	1,45E-09	172,4	6246,7	3,44E+07	91,73
MD-30°	1,01E-09	131,6	6080,8	4,94E+07	135,48
MD-45°	1,16E-09	131,6	6162,4	4,32E+07	116,80
MD-60°	1,27E-09	131,6	6243	3,94E+07	105,10

Fonte: do autor

Os valores de vida apresentados na Tabela 6-1, representam o número máximo de rotações e a durabilidade equivalente das esferas até atingir o limite de desgaste, neste caso, arbitrado em 0,05mm, ou 50 microns.

Visto que os índices de desgaste podem variar em mais de 100%, de acordo com a relação de transmissão, os cálculos se deram para uma relação de 1:1, por se acreditar que esta provavelmente seria a relação mais frequente de utilização e por seus índices estarem em um patamar intermediário.

De acordo com os resultados, é possível perceber que os desgastes dos componentes se comportam de forma diferente das dissipações e escorregamentos. Os modelos MB apresentaram as maiores vidas, com média de 136,6 horas, seguidos pelos modelos MA, com média de 119,3 horas, e pelos modelos MD, suportando 119,1 horas, com o pior desempenho ocorrendo para o grupo MC, com média de 104 horas. Apesar dos menores índices de desgaste, os modelos MC e MD, mostraram vidas inferiores aos modelos MA e MB, demonstrando que o fator λ_r exerce a maior influência sobre a resistência ao desgaste.

Contudo, é importante ressaltar que tais valores são apenas estimativas, servindo como mais um parâmetro de comparação entre os modelos, uma vez que as reais condições de

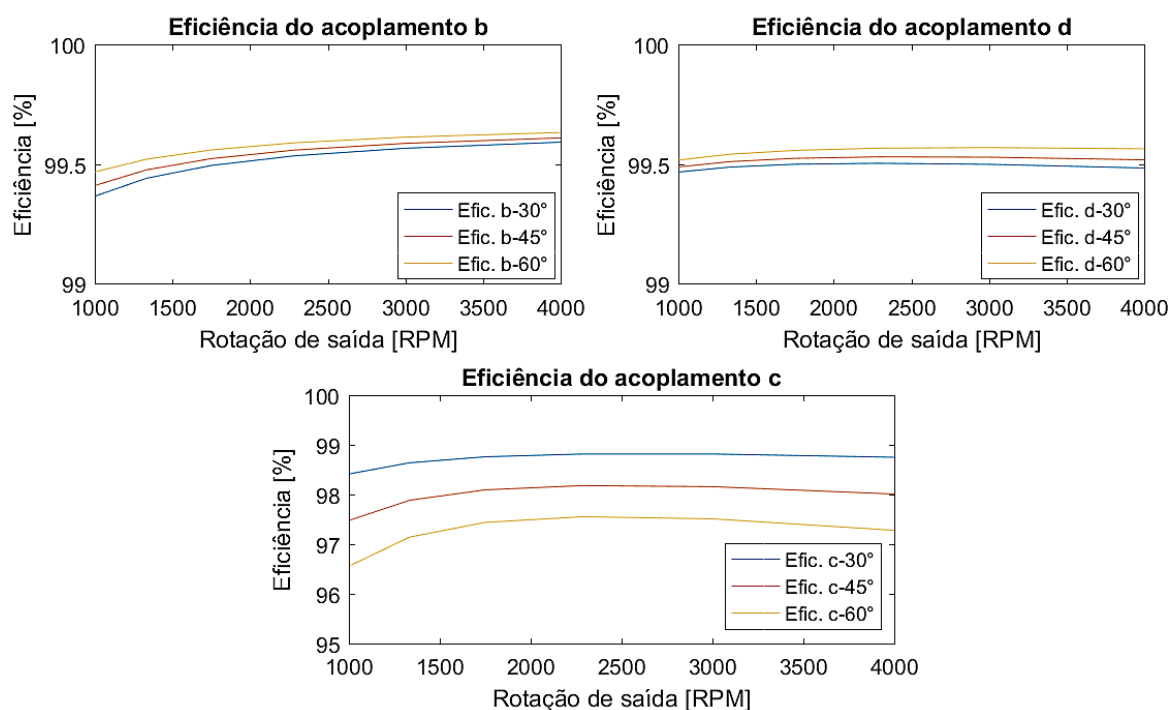
desgaste ainda não são bem compreendidas teoricamente, tampouco se dispõe de coeficientes de atrito e de desgaste, que sejam estatisticamente representativos em estimativas de vida como esta, onde não são detalhados fatores como: rugosidade média de superfície, forma e distribuição dos picos de rugosidade, energia superficial e afinidade química dos materiais, entre outros.

6.6 EFICIÊNCIAS DOS ACOPLAMENTOS

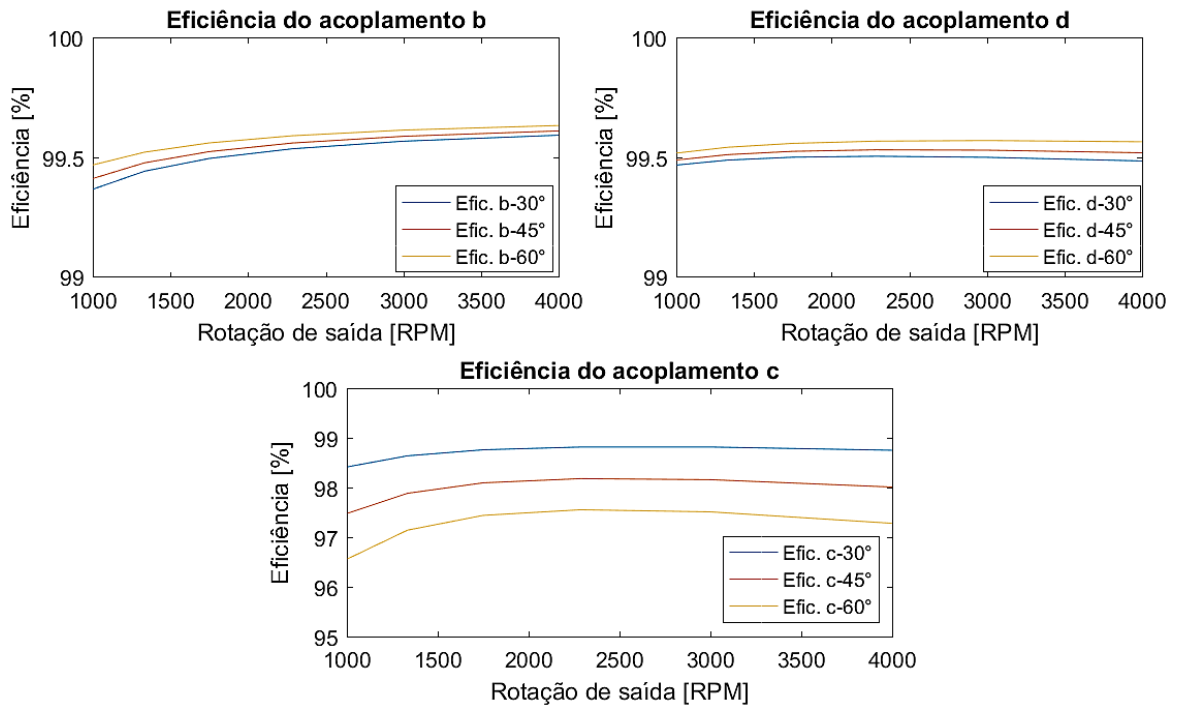
As eficiências dos acoplamentos foram calculadas com base em suas velocidades de rotação, torques transmitidos e torques dissipativos, gerados pelos escorregamentos, como apresentado nas seções 3.2.9 e 5.6.

Nos gráficos da Figura 6-7 é possível observar que, como esperado, as potências dissipadas crescem proporcionalmente aos índices de escorregamento e, por consequência, resultam na queda da eficiência.

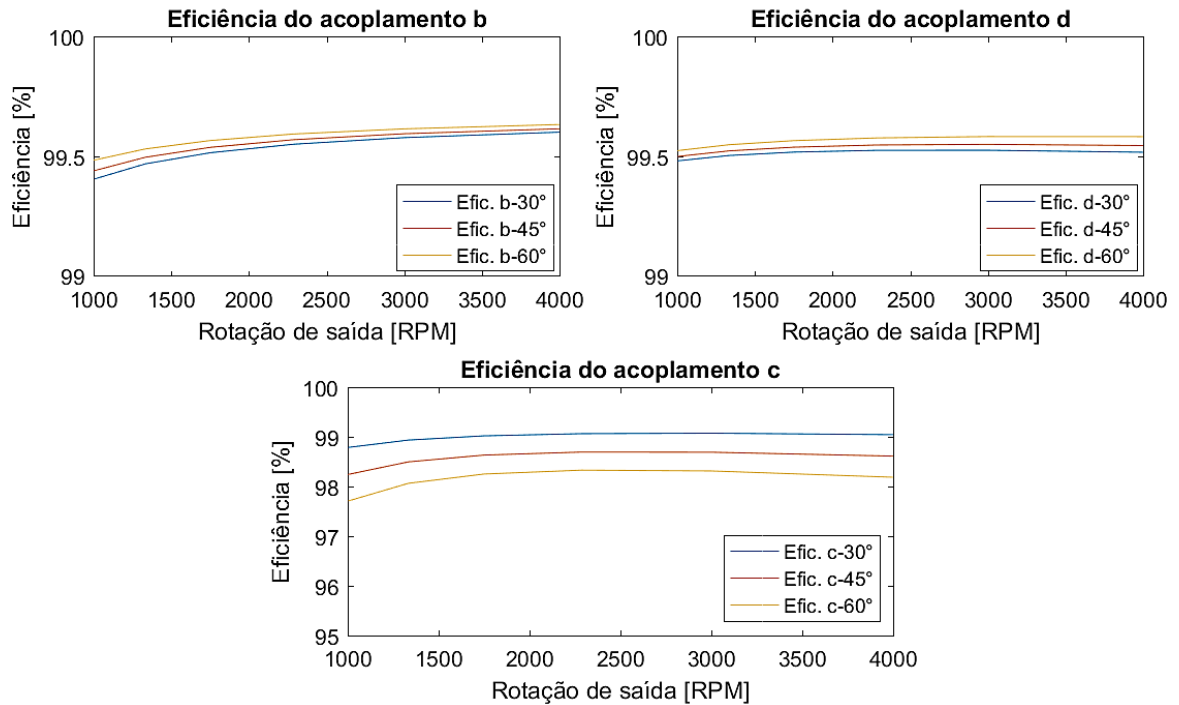
Figura 6-7: Eficiências dos acoplamentos de tração dos modelos de base.



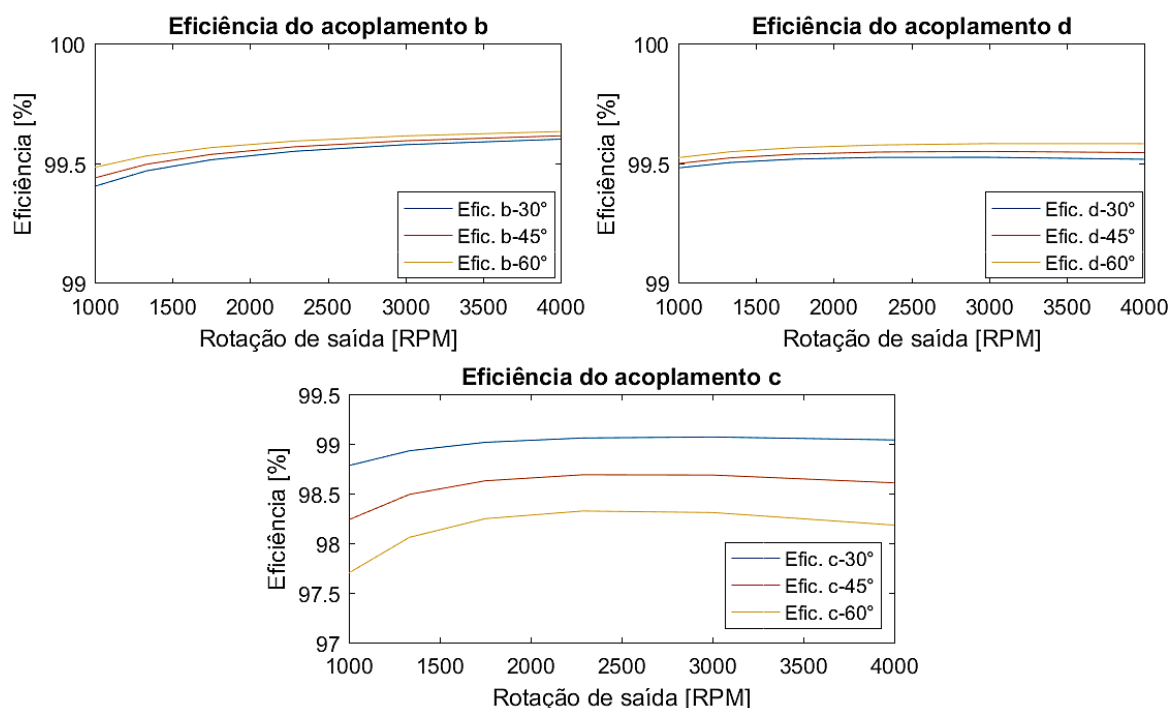
a) Eficiências dos acoplamentos de tração dos modelos MA.



b) Eficiências dos acoplamentos de tração dos modelos MB.



c) Eficiências dos acoplamentos de tração dos modelos MC.



d) Eficiências dos acoplamentos de tração dos modelos MD.

Os piores desempenhos foram apresentados pelos modelos MA e por aqueles com inclinações de 60° nos cones, em decorrência de seus maiores índices de *spin*, nos contatos *c*.

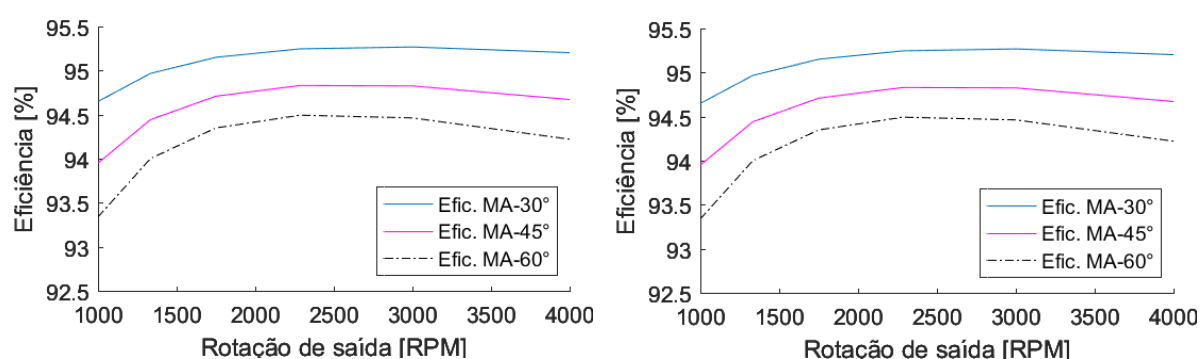
De forma geral, devido suas perdas serem governadas pelo microescorregamento, as eficiências dos acoplamentos *b* e *d* apresentaram pouca ou nenhuma sensibilidade às variações do número de contatos (n_c) e das relações dimensionais (λ_r), sofrendo leve influência dos ângulos de inclinação (α) e, em maior proporção, das relações de transmissão.

Para os contatos *c*, seguindo o comportamento dos escorregamentos, sobretudo do *spin*, as eficiências foram maiores para os conceitos MC e MD, enquanto que, por influência do menor fator λ_r , os modelos MB e MA obtiveram eficiências inferiores, além de sofrerem maior variação em função dos diferentes ângulos α .

6.7 COMPARAÇÃO ENTRE OS MECANISMOS ESTUDADOS

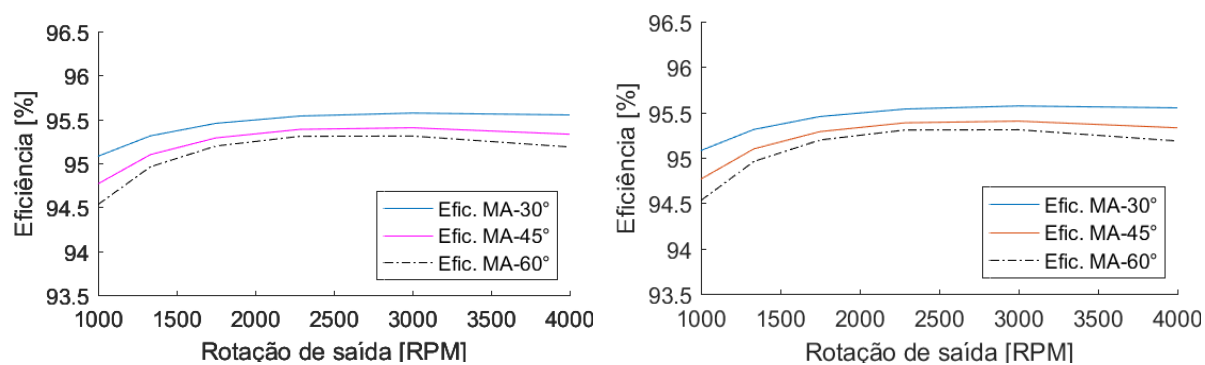
Conforme previam os modelos teóricos apresentados na seção 3.1, variações dimensionais interferem diretamente nas magnitudes dos escorregamentos e, conseqüentemente, nas eficiências de transmissão. Nos gráficos da Figura 6-8, a influência das inclinações dos cones e das relações de transmissão sobre as eficiências globais pode ser observada para cada modelo.

Figura 6-8: Eficiências globais de transmissão para MA, MB, MC e MD, de acordo com os ângulos α e as relações de transmissão.



a) Eficiências globais para os modelos MA.

b) Eficiências globais para os modelos MB.

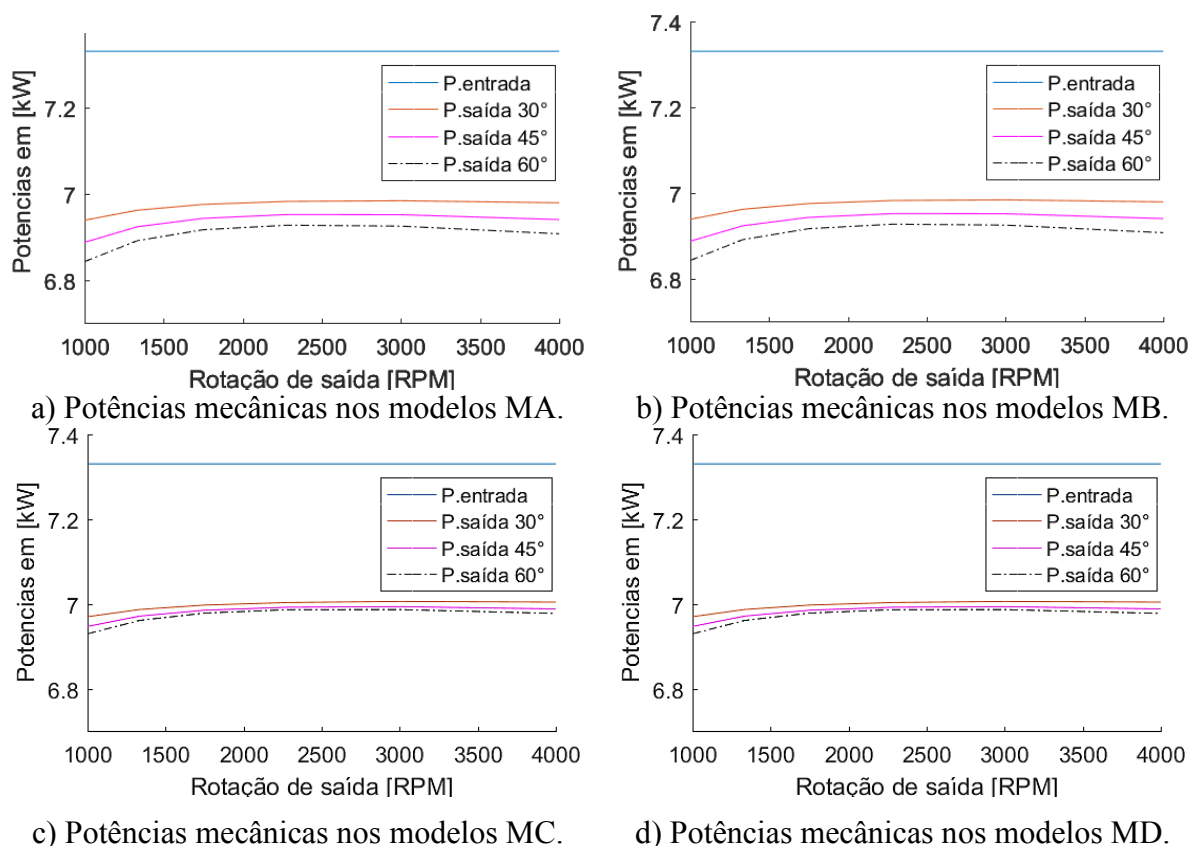


c) Eficiências globais para os modelos MC.

d) Eficiências globais para os modelos MD.

Os valores das potências de saída, em função das rotações de saída, estão dispostas no gráfico da Figura 6-9.

Figura 6-9: Potências de transmissão, para os ângulos α e as relações de transmissão.



Verifica-se eficiências inferiores nas relações de transmissão mais elevadas, em consequência das maiores forças normais e suas forças dissipativas decorrentes.

Além disso, é perceptível que o número de contatos não altera as eficiências, pois os mecanismos são dimensionados em sua função, juntamente com os valores de torque e coeficientes de segurança. Entretanto, o aumento da inclinação dos cones desloca as curvas para baixo, visto que tem relação direta com o crescimento dos índices de *spin*. Por este motivo, a redução do fator λ_r , além de deslocar as curvas levemente para baixo, faz com que as eficiências dos mecanismos se tornem mais sensíveis às variações dos ângulos α , o que também pode ser observado em relação às potências úteis no eixo de saída.

A fim de se encontrar o modelo mais adequado, foram estimadas massas e o diâmetro total ocupado por cada transmissão, então comparadas suas eficiências médias e listados prováveis fatores limitantes de aplicação, como mostrado na Tabela 6-2. Para isto, assumiu-se que os cones poderão ter alívios em suas geometrias, conferindo-lhes menor massa em relação a seu volume externo, considerado aqui, como 50% da massa que teriam, caso fossem corpos maciços de aço.

Tabela 6-2: Comparação entre eficiências médias ($\bar{\eta}$), massas e diâmetros dos CVTs.

Modelo	Massa kg	Diâmetro m	Altura m	$\bar{\eta}$ %	Inviabilidade
MA-30°	42,81	0,424	0,394	95,08	ΔT em c e desgastes
MA-45°	27,94	0,340	0,357	94,57	ΔT em c e desgastes
MA-60°	19,34	0,367	0,345	94,14	ΔT em c e desgastes
MB-30°	40,48	0,370	0,344	95,08	ΔT em c e desgastes
MB-45°	26,59	0,349	0,312	94,57	ΔT em c e desgastes
MB-60°	18,57	0,321	0,302	94,14	ΔT em c e desgastes
MC-30°	60,98	0,455	0,403	95,42	ΔT em c e desgastes
MC-45°	37,36	0,434	0,346	95,21	ΔT em c e desgastes
MC-60°	23,72	0,406	0,322	95,08	ΔT em c e desgastes
MD-30°	57,25	0,398	0,352	95,42	desgastes
MD-45°	35,21	0,379	0,303	95,21	ΔT em c e desgastes
MD-60°	22,48	0,354	0,281	95,08	ΔT em c e desgastes

Fonte: do autor

Os diâmetros e alturas externas foram calculados em função dos raios dos cones e das esferas, levando em conta os ângulos α e desconsiderando demais estruturas, como carcaças, coxins, selos, acoplamentos externos etc. Já as eficiências dos modelos, foram obtidas das médias para cada relação de transmissão.

Do ponto de vista das temperaturas nos contatos, utilizando a liga de aço para rolamentos AISI-52100, somente o modelo MD-30° poderia ser considerado para aplicação. Isto dependeria, ainda, da capacidade do sistema de arrefecimento em manter as temperaturas dos componentes abaixo dos 100°C.

Excluindo esta limitação, observa-se que a variação máxima na eficiência média de transmissão é de 1,28%, entre MD-30° (melhor caso) e, MA-60° e MB-60° (piores desempenhos), valor relativamente pequeno em comparação à diferença entre suas massas, que partem de 18,57kg em MB-60°, para 19,34kg em MA-60°, chegando a 57,25kg para MD-30°, 208% maior que MB-60° e 196% mais pesado que MA-60°.

Analisando os índices de desgaste e as durabilidades calculadas para as esferas, constata-se que, sem a adoção de fluidos de transmissão, estes fatores surgem como outro complicador para a aplicação dos mecanismos, inviabilizando seu uso, já que suas vidas calculadas (entre 91,73 horas (91h44min) e 159,28 horas (159h17min)) se mostraram bastante reduzidas em relação ao que se espera de um CVT.

Os diâmetros e alturas mudam com menor intensidade, contudo, seus valores são elevados, se consideradas as dimensões normais de um motor de 10HP (7,3kW) ou de sistemas que façam seu uso, como uma motocicleta de pequeno porte, por exemplo.

O impacto dos fatores dimensionais (α , λ_r e n_c) sobre o desempenho dos mecanismos é mostrado na Tabela 6-3.

Tabela 6-3: Influência dos fatores α , λ_r e n_c sobre o desempenho dos CVTs.

Fator	Creep/Spin	Eficiência	Desgaste	Aquecimento	Massa e Dimensões
α	--	--	--	---	+++
n_c	//	//	+	++	+
λ_r	+	+	---	+	--

Fonte: do autor

Na tabela acima, o sinal “ – “ indica que o aumento do fator sob análise provoca a piora do índice mostrado sobre a coluna, enquanto que “ + “ representa o oposto, com “ // ” indicando a não influência sobre o correspondente índice.

A quantidade de sinais (+, ++ e +++), aponta para o peso do fator sobre as variações do índice correspondente.

Portanto, é possível afirmar que para a obtenção de melhor relação entre massa e desempenho, deve-se buscar o maior número de contatos possível, buscando a redução das forças de contato e, com isto, dos diâmetros dos cones e das esferas. Além disso, se forem desconsideradas as limitações impostas pelo *spin*, maior responsável pelo aquecimento nos contatos, os ângulos α devem ser os maiores possíveis, pois seu crescimento tem baixo impacto na eficiência e resistência ao desgaste em comparação ao seu efeito sobre a economia de massa e espaço. No entanto, sem que se encontre uma solução para a eliminação do *spin*, α deve ser mantido nos mínimos patamares possíveis, contrariamente ao fator λ_r , que pelos mesmos motivos, deve ser mantido nos máximos valores.

Por fim, devido à vida reduzida em relação ao desgaste e ao excessivo aquecimento dos contatos c , nenhum dos modelos apresentou viabilidade de aplicação, contudo, uma vez que se encontre a solução para o *spin*, o modelo MB-60° seria o mais indicado para aplicações móveis, por apresentar as menores dimensões e massa, com uma pequena redução de sua eficiência, ao passo que o modelo MD-30° seria o mais adequado para aplicações estacionárias, por apresentar as melhores eficiências, apesar da maior massa e dimensões.

7 CONCLUSÕES

O presente trabalho analisou uma transmissão continuamente variável, proposta para eliminar escorregamentos laterais oriundos das variações de relações de transmissão e longitudinais, causados pela presença de lubrificantes.

Para tanto, o mecanismo foi modelado pelo método de Davies, em que foram introduzidas fontes dissipativas e calculadas as perdas e eficiências do conjunto e dos acoplamentos de transmissão.

Antes disso, realizou-se uma revisão sobre CVTs compreendendo um breve histórico de seu desenvolvimento ao longo do século XX, condições de operação, características construtivas, teorias de contato e principais problemas enfrentados.

Com os resultados obtidos, em função das variações de parâmetros dimensionais escolhidos, foram comparadas as eficiências dos diferentes modelos, suas perdas, desgastes e aquecimentos nos contatos, obtendo-se as conclusões abaixo descritas.

7.1 SOBRE O MECANISMO ESTUDADO

Ao analisar o comportamento das velocidades e direções de rotação dos acoplamentos, conclui-se que o mecanismo é capaz de variar as relações de transmissão sem gerar escorregamentos laterais, tendo em vista que as esferas possuem mobilidade para realinhar seus eixos nas direções resultantes de seu rolamento lateral (para a variação das relações) e sua rotação principal (transmissão de potência). Todavia, o modelo de análise ignorou os efeitos do momento de resistência ao *spin* entre as esferas sobre suas direções de rotação, levando ao aparente desaparecimento deste escorregamento nos contatos *b* e *d* e ao seu agravamento nos contatos *c*. Acredita-se que no comportamento real da transmissão, por conta do momento gerado em *c*, os eixos das esferas se deslocam levemente para fora da direção ideal, transferindo uma pequena parcela de *spin* para os contatos com os cones.

Apesar da capacidade de autoalinhamento das esferas, não existe combinação de direções capaz de eliminar o *spin*, na qual não haja necessidade de alterar as características topológicas do mecanismo.

Em decorrência disto, observou-se elevados índices de aquecimento nos contatos *c*, os quais permitiram que somente uma variação do mecanismo (MD-30°) apresentasse viabilidade para aplicação real, com os demais modelos sofrendo aquecimentos proibitivos neste

acoplamento. O problema poderia ser solucionado utilizando outras ligas, que não a AISI-52100 adotada, no entanto, seria necessária nova investigação para conhecer seu comportamento frente às pressões de contato e às condições de escorregamento. Tal elevação de temperatura não foi observada para os demais contatos, visto que suas dissipações, geradas somente por *creep*, mantiveram-se na faixa de 25% dos valores encontrados para *c*.

As eficiências médias de transmissão se mantiveram próximas de 94,6% para os modelos MA e MB, com variações próximas de 0,5% entre as diferentes inclinações dos cones, e cerca de 95,2% para os grupos MC e MD, mudando cerca de 0,20% para cada 15° de diferença.

O impacto das dissipações sobre a eficiência global do mecanismo mostrou a forte interferência do *spin* em seu comportamento, com proporção de 1% de variação nos valores de eficiência, para cada 2,7% de mudança nos índices de *spin*, para os grupos MA e MB, e de 1% para 2,9% nos grupos MC e MD. Esta proporção se manteve igual para todas as inclinações de cone e relações entre raios λ_r , porém sofreu leve mudança ao se variar o número de contatos.

Em uma primeira análise, se forem comparadas as eficiências do modelo MD-30° com aquelas apresentadas na seção 2.6 para outros tipos de transmissão, pode-se concluir que o mecanismo proposto demonstra ser competitivo. Entretanto, se consideradas as estimativas de KLUGER e LONG (1999), que previam que as dissipações por escorregamento seriam responsáveis por aproximadamente 20% das perdas nos CVTs de segunda geração, mesmo assumindo sistemas periféricos mais eficientes, é provável que a introdução das perdas dos sistemas de atuação e controle reduzam os valores de eficiência de forma significativa.

A Tabela 7-1 compara as eficiências de outros tipos de transmissões, apresentadas na seção 2.6, com a eficiência média, prevista para o modelo MD-30°, sem considerar as perdas dos sistemas de atuação e controle.

Tabela 7-1: Comparação entre eficiências aproximadas de diferentes transmissões.

Transmissão	$\eta^{(1)}\%$	$\eta^{(2)}\%$	$\eta^{(3)}\%$
Manual	96,2 - 96,7	97	92 - 97
Automática epic.	85,3 - 86,3	86	90 - 95
CVT polias	84,6 - 88,4	90-97	80-86
CVT Toroidal	91 - 92,8	70-94	-
Modelo MD-30°	95,4*	-	-

* Eficiência média obtida para MD-30° no presente estudo.

Adaptado de: (1) KLUGER e LONG (1999); (2) LANG (2000); (3) LECHNER e NAUNHEIMER, (1999)

As massas e dimensões prováveis, calculadas para os modelos, mostram que o único mecanismo que seria capaz de ser utilizado sem grandes restrições de eficiência e aquecimento, seria demasiadamente grande e pesado, em comparação à sua potência de transmissão, descartando seu emprego para aplicações em equipamentos móveis, como automóveis e motocicletas.

Por fim, apesar das perdas decorrentes dos microescorregamentos se mostraram inferiores a 1% em cada acoplamento, os índices de desgaste nas esferas permaneceram elevados, com médias entre $1,13\text{E-}9$ e $1,45\text{E-}9$ milímetros por rotação, o que levaria a transmissão a suportar vidas entre 91 e 159 horas, durabilidades consideradas insuficientes para a maioria das aplicações. Estes valores poderiam melhorar cerca de 45% com a eliminação do *spin*, todavia sem uma redução da relação entre tração e força normal ($F_{Tr}/\mu F_N$), ou a adoção de lubrificantes, estes mecanismos permaneceriam inviáveis do ponto de vista de durabilidade.

Porém, não é possível se basear nestes valores para uma previsão exata da durabilidade dos componentes, pois os parâmetros de desgaste utilizados (equação 3.34c) são aproximações generalizadas para os materiais e condições tribológicas adotadas, servindo apenas como critério de comparação entre os mecanismos. Além disso, para o cálculo dos índices de desgaste, foi considerada uma distribuição homogênea do arraste entre superfícies por toda a área lateral dos componentes. No entanto, havendo predominância de uma determinada relação de transmissão, é provável que as regiões correspondentes dos cones sofram desgastes maiores ao longo do tempo.

É possível que este quadro seja revertido por meio da otimização dos parâmetros dimensionais e dos coeficientes de segurança. Além disso, a eventual eliminação do *spin*, possibilitaria a aplicação de maiores inclinações para os cones, resultando na diminuição da massa do mecanismo e abrindo espaço para menores relações de $F_{Tr}/\mu F_N$, com índices mais brandos de *creep* e de desgastes.

7.2 SOBRE O EMPREGO DO MÉTODO DE DAVIES

Devido ao número de graus de liberdade dos acoplamentos, foi necessário utilizar todas as seis dimensões do espaço de trabalho, tornando a modelagem por grafos e helicoides não somente trabalhosa, em razão das proporções tomadas pelas matrizes, mas também

desafiante, por não se conhecer de início, qual seria a mobilidade final do mecanismo e de cada acoplamento.

Porém, por meio deste método, foi possível compreender a dependência das mobilidades dos acoplamentos em função das forças de atrito e da liberdade de rotação nas direções perpendiculares aos contatos.

Assim, para estudos iniciais sobre mecanismos ainda não testados, em que não se dispõe de protótipos ou recursos computacionais para simulações dinâmicas de múltiplos corpos, o Método de Davies se mostra um importante aliado, não somente para conhecer as características estáticas e cinemáticas, mas também, por possibilitar a estimativa das perdas e seus efeitos sobre o sistema investigado.

7.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Por conta de limitações de tempo e de recursos, não foi possível abranger mais fatores na análise da transmissão estudada, assim, foram levantados possíveis tópicos a serem investigados a fim de dar continuidade e aprimorar o conhecimento obtido com o presente trabalho.

Primeiro, é interessante variar os materiais no intuito de conhecer como será o comportamento da transmissão caso utilizados outros tipos de ligas ou sejam aplicados recobrimentos superficiais.

Pode-se, também, avaliar a adoção de lubrificação elastohidrodinâmica ou lubrificação de contorno e comparar seu impacto no desempenho e nas dimensões do mecanismo.

Por fim, existe a oportunidade de utilizar técnicas de síntese e otimização de mecanismos para a eliminação do *spin* entre as esferas, reduzindo as dissipações e possibilitando o emprego de maiores ângulos de inclinação dos cones.

REFERÊNCIAS

- ARCHARD, J. F. Contact and Rubbing of Flat Surfaces. **Journal of Applied Physics**, v. 24, n. 8, p. 981–988, ago. 1953.
- BEACHLEY, N. H.; FRANK, A. A. **Continuously Variable Transmissions Theory and Practice**. 1979. 52 f. College of Engineering, University of Wisconsin, Madison, 1979.
- BIANCHI, K. E. **Desenvolvimento de um sistema de transmissão mecânica baseado em engrenagens cônicas e faciais**. 2009. 149 f. Tese (Doutorado) - Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.
- BONSEN, B. Analysis of slip in a continuously variable transmission. **ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition**. 2003. p. 995-1000.
- BORODICH, F. M. The Hertz frictional contact between nonlinear elastic anisotropic bodies (the similarity approach). **International Journal of Solids and Structures**, [s. l], v. 30, p. 1513-1526, 1993.
- BOSCH. **Ball Transfer Units**. Schweinfurt, DE: Bosch Rexroth AG, jul. 2016. Disponível em: <https://www.boschrexroth.com/documents/12605/25207932/R999000498_2016_07_EN_Kugelrollen_04_10_2016_1_media.pdf/49e81cc0-0220-90c7-4f38-3768e7621d31>. Acesso em: 15 out. 2021.
- BREWE, D. E.; HAMROCK, B. J. Simplified Solution for Elliptical-Contact Deformation Between Two Elastic Solids. **Journal of Tribology**, [s. l], v. 99, p. 485-487, out. 1977.
- CARBONE, G.; MANGIALARDI, L.; MANTRIOTA, G. A comparison of the performances of full and half toroidal traction drives. **Mechanism and Machine Theory**, v. 39, n. 9, p. 921–942, set. 2004.
- CARBONE, G. et al. CVT dynamics: Theory and experiments. **Mechanism and Machine Theory**, v. 42, n. 4, p. 409–428, 1 abr. 2007.
- CARSON, R. W. Focus on traction drives: 100 years of traction drives. **Power Transmission Design**, v. 17, n. 9, p. 84-88, 1975.
- CAZANGI, H. R. **Aplicação do método de Davies para análise cinemática e estática de mecanismos com múltiplos graus de liberdade**. 2008. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008. 219 p.
- CHAO, L.; HUA, L.; QINGTAO, L.; SHIYOU, Z.; JIN, Y. Modeling, kinematics and traction performance of no-spin mechanism based on roller-disk type of traction drive continuously

variable transmission. **Mechanism and Machine Theory**, [s. l], v. 133, p. 278-294, mar. 2019.

CHIU, Y. P.; TALLIAN, T. E.; MCCOOL, J. I. An engineering model of spalling fatigue failure in rolling contact: I. The subsurface model. **Wear**, v. 17, n. 5-6, p. 433-446, 1971.

CHOLIS, N.; ARIYONO, S.; PRIYANDOKO, G. Design of Single Acting Pulley Actuator (SAPA) Continuously Variable Transmission (CVT). **Energy Procedia**, [s. l], v. 68, p. 389-397, abr. 2015.

CIAVARELLA, M.; MONNO, F. A comparison of multiaxial fatigue criteria as applied to rolling Contact fatigue. **Tribology International**, v. 43, n. 11, p. 2139-2144, 2010.

CROESLAND, B. Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. **Proc. of Int. Conf. on Fatigue of Metals**, London, 1956.

DAVIES, T. H. Couplings, coupling networks and their graphs. **Mechanism and Machine Theory**, v. 30, n. 7, p. 991-1000, 1995.

DANG-VAN, K.; CAILLETAUD, G.; FLAVENOT, JF.; LE DOUARON, A.; LIEURADE, HP. Criterion for high cycle fatigue failure under multiaxial loading. **Biaxial and multiaxial fatigue**. London, UK: Mechanical Engineering Publications; 1989. p. 459-78.

DELKHOSH, M.; FOUMANI, M. S. Multi-objective geometrical optimization of full toroidal CVT. **International Journal of Automotive Technology**, [s. l], v. 14, p. 707-715, set. 2013.

ERTEL, A. M. Hydrodynamic lubrication based on new principles. **Akad. Nauk SSSR Prikadnaya Matematika i Mekhanika**, v. 3, n. 2, p. 41-52, 1939.

GREENWOOD, J. A.; TABOR, D. The Friction of Hard Sliders on Lubricated Rubber: The Importance of Deformation Losses. **Rubbr Chemistry and Technology: Rubber Reviews**, [s. l], v. 33, p. 129-141, 1960.

GREENWOOD, J. A. Analysis of elliptical Hertzian contacts. **Tribology International**, [s. l], v. 30, p. 235-237, mar. 1997.

GRUBIN, A. N. Investigation of the contact of machine components. **Central Scientific Research Inst. Tech. & Mech. Eng.**, 1949.

HAINES, D. J.; OLLERTON, E. Contact stress distributions on elliptical contact surfaces subjected to radial and tangential forces. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, v. 177, n. 1, p. 95-114, 1963.

HEWKO, L. O. Automotive Traction Drive CVTs - an Overview. **SAE Technical Paper Series**, 1 out. 1986.

HEWKO, L. O. Roller Traction Drive for Quiet, High Speed Power Transmission. **Sae Transactions**, [s. l], v. 78, p. 2034-2046, 1969.

HEWKO, L. O. Roller traction drive unit for extremely quiet power transmission. **Journal of Hydronautics**, v. 2, n. 3, p. 160-167, 1968.

HUGHES, A.; DRURY B. **Electric motors and drives: fundamentals, types and applications**. Newnes, 2019.

HYUNDAI MOTOR GROUP. **World of Transmissions: Maximizing Performance & Efficiency**. 2020. Disponível em: <https://tech.hyundaimotorgroup.com/article/world-of-transmissions-maximizing-performance-efficiency/>. Acesso em: 14 abr. 2021.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 281:2007**: Rolling bearings — Dynamic load ratings and rating life. 2007. 51 p.

IOANNIDES, E.; HARRIS, T. A. A New Fatigue Life Model for Rolling Bearings. **Journal of Tribology**, [s. l], v. 107, p. 367-377, jul. 1985

JOHNSON, K. L. **Contact Mechanics**. [s.l.] Cambridge University Press, 1985.

KALKER, J. J. Rolling with slip and spin in the presence of dry friction. **Wear**, v. 9, n. 1, p. 20–38, jan. 1966.

KLUGER, M. A.; LONG, D. M. An Overview of Current Automatic, Manual and Continuously Variable Transmission Efficiencies and Their Projected Future Improvements. **Journal of Commercial Vehicles**, [s. l], v. 108, p. 1-6, 1999.

KIRCHHOFF, G. Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. **Annalen der Physik und Chemie**, v. 148, n. 12, p. 497–508, 1847.

KOTZALAS, M. N. Statistical Distribution of Tapered Roller Bearing Fatigue Lives at High Levels of Reliability. **Journal of Tribology**, v. 127, n. 4, p. 865–870, 26 maio 2005.

LAI, J.; LUND, T.; RYDEN, K.; GABELLI, A.; STRANDELL, I. The fatigue limit of bearing steels—Part I: A pragmatic approach to predict very high cycle fatigue strength. **International Journal of Fatigue**, v. 38, p. 155-168, 2012.

LAUS, L. P.; SIMAS, H.; MARTINS, D. Efficiency of gear trains determined using graph and screw theories. **Mechanism and Machine Theory**, v. 52, p. 296-325, 2012.

LAUS, L. P. **Determinação da eficiência de máquinas com base em teoria de helicoides e grafos: aplicação em trens de engrenagens e robôs paralelos**. 2011. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2011. 195 p.

LECHNER, G.; NAUNHEIMER, H. **Automotive transmissions: fundamentals, selection, design and application**. London: Springer, 1999.

LI, Q. A Mathematical Method for Eliminating Spin Losses in Toroidal Traction Drives. **Mathematical Problems in Engineering**, [s. l], v. 2015, dez. 2015.

LINGARD, S. Traction at the spinning point contacts of a variable ratio friction drive. **Tribology**, [s. l], v. 7, p. 228-234, out. 1974.

LOEWENTHAL, S. H. A Historical Perspective of Traction Drives and Related Technology. **National Aeronautics and Space Administration Cleveland Oh Lewis Research Center**, 1983.

LUNDBERG, G.; PALMGREN, A. Dynamic Capacity of Rolling Bearings. **Journal of Applied Mechanics**, [s. l], v. 16, p. 165-172, jun. 1949.

MACHIDA, H. Technology of a Traction Drive CVT - past, present and future. **Life Cycle Tribology**, [s. l], p. 3-13, 2005.

MANTRIOTA, G. Performances of a series infinitely variable transmission with type I power flow. **Mechanism and Machine Theory**, [s. l], v. 37, p. 579-597, jun. 2002.

MINDLIN, R. D. Compliance of Elastic Bodies in Contact. **Journal of Applied Mechanics**, [s. l], v. 16, p. 259-268, set. 1949.

MORALES-ESPEJEL, G. E.; GABELLI, A. The behavior of indentation marks in rolling-sliding elastohydrodynamically lubricated contacts. **Tribology Transactions**, v. 54, n. 4, p. 589-606, 2011.

MURAKAMI, Y. Development and testing of CVT fluid for Nissan toroidal CVT. **SAE Technical Paper**, 1999.

NARITA, K. Tribological properties of metal V-belt type CVT lubricant. **Advances in Tribology**, v. 2012, 2012.

NAUNHEIMER, H. et al. **Automotive Transmissions Fundamentals, Selection, Design and Application**. [s.l.] Berlin Springer Berlin, 2014.

PAPADOPOULOS, IV. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. **International Journal of Fatigue**, v. 19, n. 3, p. 219–235, mar. 1997.

POPOV, V. L. **Contact Mechanics and Friction**. [s.l.] Berlin, Heidelberg Springer Berlin Heidelberg, 2010.

PUTTOCK, M. J.; THWAITE, E. G. **Elastic Compression of Spheres and Cylinders at Point and Line Contact**. Melbourne: Csiro, 1969.

RABINOWICZ, E. The Wear Coefficient—Magnitude, Scatter, Uses. **Journal of Lubrication Technology**, v. 103, n. 2, p. 188–193, 1 abr. 1981.

RAJE, N.; SADEGHI, F.; RATEICK JR, R. G. A statistical damage mechanics model for subsurface initiated spalling in rolling contacts. 2008. **Journal of Tribology**, [s. l], v. 130, ago. 2008.

ROESSLE, M. L.; FATEMI, A. Strain-controlled fatigue properties of steels and some simple approximations. **International journal of fatigue**, v. 22, n. 6, p. 495-511, 2000.

SHARIFIMEHR, S.; FATEMI, A. Evaluation of Estimation Methods for Shear Fatigue Properties and Correlations with Uniaxial Fatigue Properties for Steels and Titanium Alloys. **MATEC Web of Conferences 165**, 16012, 2018.

SADEGHI, F. et al. A Review of Rolling Contact Fatigue. **Journal of Tribology**, v. 131, n. 4, 24 set. 2009.

SANDA, S.; HAYAKAWA, K. **Traction drive system and its characteristics as power transmission**. 3. ed. Japão: R&D Review of Toyota Crdl, 2005. 8 p.

SAVKOOR, A. R. Models of friction. **Handbook of materials behavior models, volume II failures of materials**. Academic, 2001. p. 700-759.

SHIMIZU, M. et al. Study on power transmitting mechanisms for CVT using dry hybrid V-belts-Mechanisms for Change of Pitch Line and Transmitting Efficiency due to Pulley Tilting. **Proceeding of Helsinki 2002 FISITA World Automotive Congress**. 2002.

SHINOJIMA, T.; TOYODA, T.; IMANISHI, T.; INOUE, E.; MACHIDA, H. Development of the next-generation half-toroidal CVT with geared neutral and power-split systems for 450 Nm engines. **SAE Technical Paper**, 2004.

SRIVASTAVA, N.; HAQUE, I. Transient dynamics of metal V-belt CVT: Effects of band pack slip and friction characteristic. **Mechanism and Machine Theory**, v. 43, n. 4, p. 459–479, abr. 2008.

SRIVASTAVA, N. **Modeling and simulation of friction-limited continuously variable transmissions**. PhD Thesis—Clemson University, 2006.

TABOR, D. The mechanism of rolling friction II. The elastic range. **Royal Society**, [s. l], v. 229, 1955.

APÊNDICE 1 – MATRIZES DE CORTES E CIRCUITOS

Tab1: Matriz de Circuitos.

	a	c	d	b	f	g	h	e
v_a	1	0	0	1	-1	0	-1	0
v_c	0	1	0	0	1	-1	0	0
v_e	0	0	-1	0	0	-1	-1	1

Tab2: Matriz de Circuitos com graus de liberdades.

	a1	c1	c2	c3	d1	d2	d3	b1	b2	b3	f1	f2	f3	g1	g2	g3	h1	e1
v_a	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0	-1	0
v_c	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	0	0
v_e	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	1

Tab3: Matriz de Incidência

	a	c	d	b	f	g	h	e
Elo0	1	0	0	0	0	0	1	1
Elo1	-1	0	0	1	0	0	0	0
Elo2	0	0	0	0	1	1	-1	0
Elo3	0	1	0	-1	-1	0	0	0
Elo4	0	-1	1	0	0	-1	0	0
Elo5	0	0	-1	0	0	0	0	-1

Tab4: Pseudo Inversa de Moore-Penrose

	Elo1	Elo2	Elo3	Elo4	Elo5
a	-0.68571	-0.2	-0.37143	-0.22857	-0.11429
c	0.14286	-1.9885e-16	0.28571	-0.28571	-0.14286
d	0.11429	0.2	0.22857	0.37143	-0.31429
b	0.31429	-0.2	-0.37143	-0.22857	-0.11429
f	-0.17143	0.2	-0.34286	-0.057143	-0.028571
g	-0.028571	0.2	-0.057143	-0.34286	-0.17143
h	-0.2	-0.6	-0.4	-0.4	-0.2
e	-0.11429	-0.2	-0.22857	-0.37143	-0.68571

	h1	h2	h3	h4	h5	h6	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
k_b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
k_f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
k_g	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
k_h	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
k_d	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

APÊNDICE 2 – MATRIZES DA ESTÁTICA E CINEMÁTICA

1.a- Matriz de Movimentos Unitários (Simbólica)

	sA_x	rC_x	sC_y	tC_z	rD_x	sD_y	tD_z	rB_x	sB_y	tB_z	rF_x	sF_y	tF_z	rG_x	sG_y	tG_z	vH_y	sE_y
rx	$Sn\alpha$	1	0	0	1	0	0	1	0	0	$Cn\beta_3$	$-Sn\beta_3$	0	$Cn\beta_4$	$-Sn\beta_4$	0	0	$Sn\alpha$
sy	$Cn\alpha$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	$Sn\beta_3$	$Cn\beta_3$	0	$Sn\beta_4$	$Cn\beta_4$	0	0	$Cn\alpha$
tz	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
ux	0	0	0	yc	0	0	yd	0	0	yb	0	0	yf	0	0	yg	0	0
vy	0	0	0	$-xc$	0	0	$-xd$	0	0	$-xb$	0	0	$-xf$	0	0	$-xg$	1	0
wz	$Cn\alpha.xa - Sn\alpha.ya$	$-yc$	xc	0	$-yd$	xd	0	$-yb$	xb	0	$Sn\beta_3.xf - Cn\beta_3.yf$	$Cn\beta_3.xf + Sn\beta_3.yf$	0	$Sn\beta_4.xg - Cn\beta_4.yg$	$Cn\beta_4.xg + Sn\beta_4.yg$	0	0	$Cn\alpha.xe - Sn\alpha.ye$

1.b- Matriz de Movimentos Unitários (Numérica)

	sAy	rCx	sCy	tCz	rDx	sDy	tDz	rBx	sBy	tBz	rFx	sFy	tFz	rGx	sGy	tGz	vHy	sEy
rx	0.5	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0.99	-0.16	0	0.95	-0.3	0	0	0.5
sy	0.87	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0.16	0.99	0	0.3	0.95	0	0	0.87
tz	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
ux	0	0	0	-0.19	0	0	-0.19	0	0	-0.19	0	0	-0.19	0	0	-0.19	0	0
vy	0	0	0	-0.05	0	0	-0.1	0	0	0	0	0	-0.02	0	0	-0.07	1	0
wz	0.02	0.19	0.05	0	0.19	0.1	0	0.19	0	0	0.19	-0.01	0	0.21	0.01	0	0	0.22

2- Matriz de Movimentos Unitários em Rede

	sAy	rCx	sCy	tCz	rDx	sDy	tDz	rBx	sBy	tBz	rFx	sFy	tFz	rGx	sGy	tGz	vHy	sEy
wx1	0.5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.99	0.16	0	0	0	0	0	0
wy1	0.87	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-0.16	-0.99	0	0	0	0	0	0
wz1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0
dx1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.19	0	0	0.19	0	0	0	0	0
dy1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.02	0	0	0	-1	0
dz1	0.02	0	0	0	0	0	0	0.19	0	0	-0.19	0.01	0	0	0	0	0	0
wx2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0.99	-0.16	0	-0.95	0.3	0	0	0
wy2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.16	0.99	0	-0.3	-0.95	0	0	0
wz2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0
dx2	0	0	0	-0.19	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.19	0	0	0.19	0	0
dy2	0	0	0	-0.05	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.02	0	0	0.07	0	0
dz2	0	0.19	0.05	0	0	0	0	0	0	0	0.19	-0.01	0	-0.21	-0.01	0	0	0
wx3	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.95	0.3	0	0	0.5
wy3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-0.3	-0.95	0	0	0.87
wz3	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
dx3	0	0	0	0	0	0	0.19	0	0	0	0	0	0	0	0	0.19	0	0
dy3	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0.07	-1	0
dz3	0	0	0	0	-0.19	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	-0.21	-0.01	0	0	0.22

3- Matriz de Ações Unitárias

	RA	SAin	SAa	TA	UA	VA	WA	RC	SCr	TCr	UC	VC	WC	RD	SDr	
wx1	0.87	0.5	0.5	0	0	0	-0.1	1	0	0	0	0	-0.19	1	0	
wy1	-0.5	0.87	0.87	0	0	0	0.03	0	1	0	0	0	-0.05	0	1	
wz1	0	0	0	1	0.1	0.02	0	0	0	1	0.19	0.05	0	0	0	
dx1	0	0	0	0	0.87	0.5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
dy1	0	0	0	0	-0.5	0.87	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
dz1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
	TDr	UD	VD	WD	RB	SBr	TBr	UB	VB	WB	SFa	UF	VF	WF	SGa	
wx1	0	0	0	-0.19	1	0	0	0	0	-0.19	-0.16	0	0	-0.19	-0.3	
wy1	0	0	0	-0.1	0	1	0	0	0	0	0.99	0	0	-0.02	0.95	
wz1	1	0.19	0.1	0	0	0	1	0.19	0	0	0	0.19	-0.01	0	0	
dx1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.99	-0.16	0	0	
dy1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0.16	0.99	0	0	
dz1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	
	UG	VG	WG	RH	SH	TH	UH	VHin	WH	RE	SEot	SEa	TE	UE	VE	WE
wx1	0	0	-0.19	1	0	0	0	0	-0.08	0.87	0.5	0.5	0	0	0	-0.16
wy1	0	0	-0.07	0	1	0	0	0	-0.05	-0.5	0.87	0.87	0	0	0	-0.16
wz1	0.21	0.01	0	0	0	1	0.08	0.05	0	0	0	0	1	0.05	0.22	0
dx1	0.95	-0.3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.87	0.5	0
dy1	0.3	0.95	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.5	0.87	0
dz1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

APÊNDICE 3 – TORQUES E VELOCIDADES NOS ACOPLAMENTOS

1- Matriz de Velocidades para os acoplamentos de MA-30°, sob relação de transmissão de 1:0,5. (r , s e t em [rad/s]; v em [m/s])

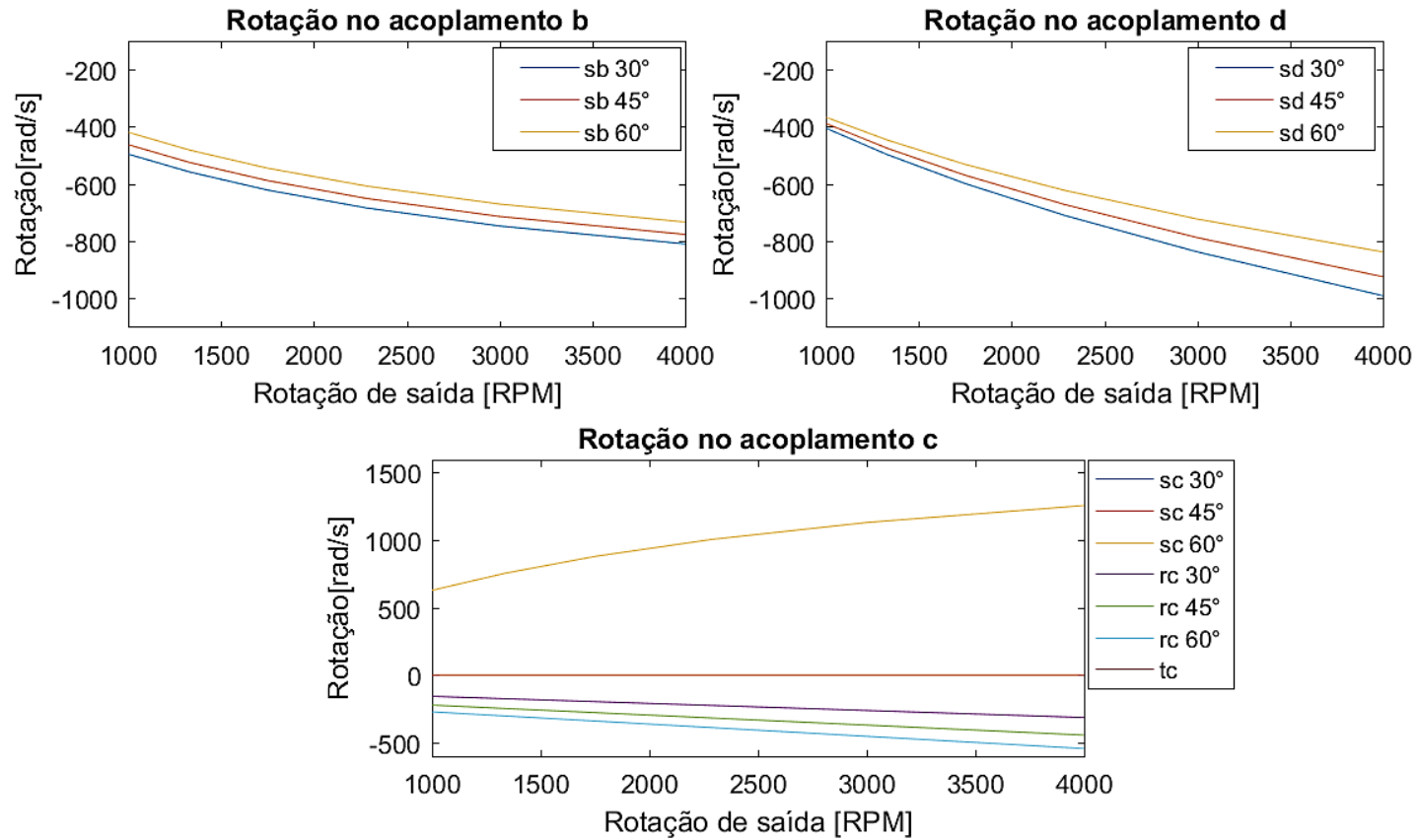
	sA	rC	sC	tC	rD	sD	tD	rB	sB
wx1	104.72	-314.16	0	0	2.1579e-13	0	0	3.302e-14	0
wy1	181.38	0	1256.9	0	0	-991.19	0	0	-809.81
wz1	0	0	0	0.6001	0	0	-0.30005	0	0
dx1	0	0	0	-0.087015	0	0	0.043508	0	0
dy1	0	0	0	0	0	0	0.0116	0	0
dz1	-3.9753	-45.553	0	0	3.1289e-14	-38.319	0	4.7879e-15	31.307
	tB	rF	sF	tF	rG	sG	tG	vH	sE
wx1	0	6.604e-14	104.72	0	0	-209.44	0	0	-209.44
wy1	0	1.1005e-14	-628.43	0	0	628.43	0	0	-362.76
wz1	-0.30005	0	0	-0.30005	0	0	0.30005	0	0
dx1	0.043508	0	0	0.043508	0	0	-0.043508	0	0
dy1	-0.0116	0	0	-0.0058	0	0	-0.0058	-0.0058	0
dz1	0	9.363e-15	27.332	0	0	-18.221	0	0	-56.541

2- Matriz de Velocidades Absolutas ($[M_0]_{6 \times 5}$) para os componentes de MA-30°, sob relação de transmissão de 1:0,5, adotando o elo “0” como referencial estático. ($\dot{\omega}x$, $\dot{\omega}y$ e $\dot{\omega}z$ em [rad/s]; dx , dy e dz em [m/s])

	Con1	Hast2	Esf3	Esf4	Con5
wx1	104.72	2.1316e-14	104.72	-209.44	-209.44
wy1	181.38	6.9633e-13	-628.43	628.43	-362.76
wz1	9.3675e-17	2.4286e-16	-0.30005	0.30005	2.2204e-16
dx1	-1.2577e-17	-3.4694e-17	0.043508	-0.043508	-3.1225e-17
dy1	-6.7221e-18	-0.0058	-0.0116	-0.0116	-4.7705e-18
dz1	-3.9753	2.3093e-14	27.332	-18.221	-56.541

3- Magnitudes das velocidades para os acoplamentos dos modelos MA-30°, sob relação de transmissão de 1:0,5. (r , s e t em [rad/s]; v em [m/s])

s_A	r_C	s_C	t_C	r_D	s_D	t_D	r_B	s_B	t_B
209.44	-314.16	1256.9	0.6001	2.1579e-13	-991.19	-0.30005	3.302e-14	-809.81	-0.30005
r_F	s_F	t_F	r_G	s_G	t_G	v_H	s_E		
6.695e-14	-637.09	-0.30005	0	662.41	0.30005	-0.0058	-418.88		

4- Gráfico das rotações nos acoplamentos *b*, *d* e *c*, de MA-30°.

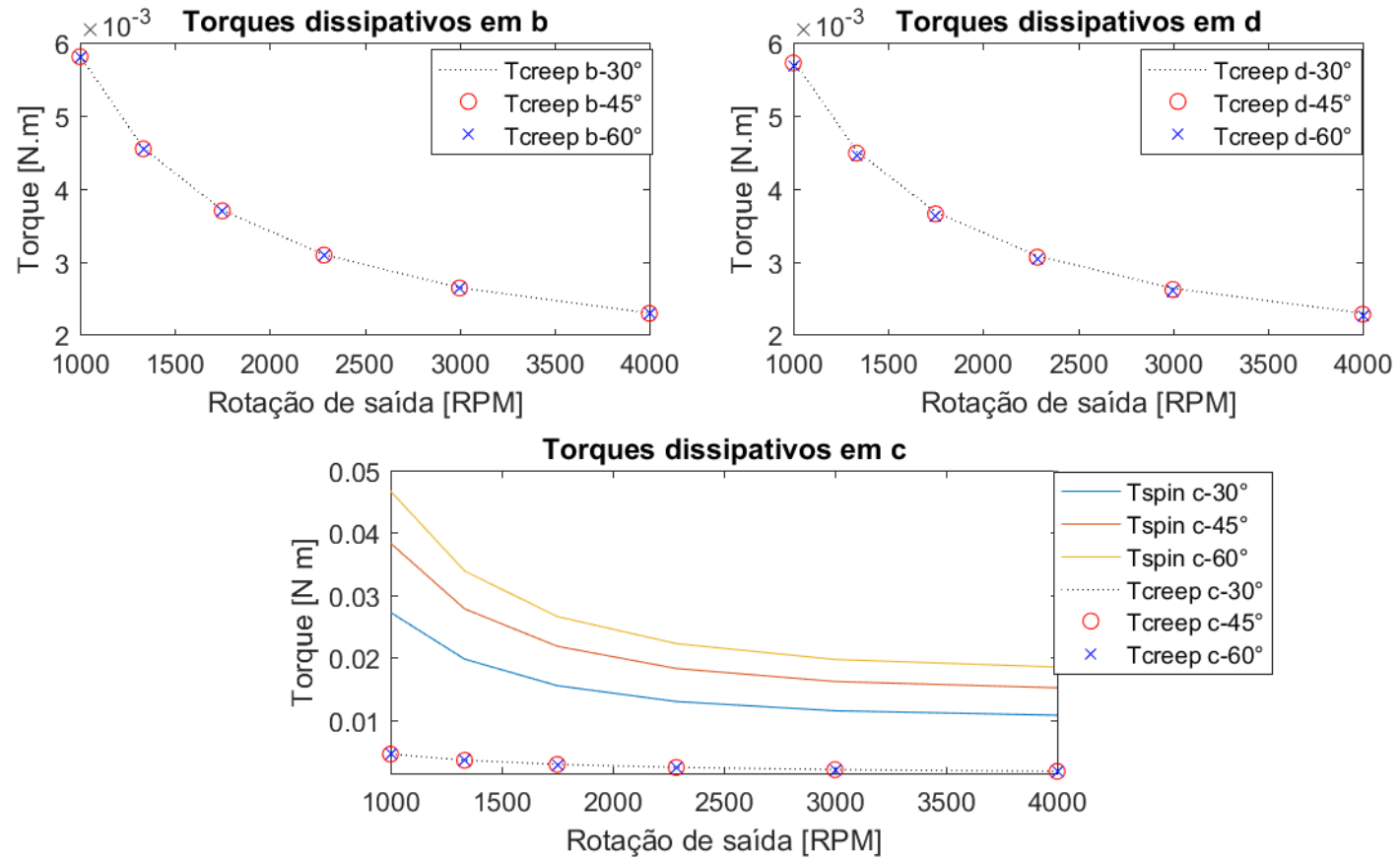
Fonte: do autor.

6- Magnitudes das ações para os acoplamentos de MA-30°, em relação de transmissão de 1:0,5. (R , S e T em [N.m]; U , V e W em [N])

SEot	RE	TE	UE	VE	WE	UC	VC	WC	RD	UD	VD	WD
1.0413	-1.8375	-4.4468	-131.12	-73.955	36.388	150.54	0.79225	36.878	0.01256	150.53	-1.5149	-36.388
RB	UB	VB	WB	UF	VF	WF	UG	VG	WG	RH	SH	...
0.011713	151.41	1.719e-06	-37.384	-0.73095	0.92498	74.262	-0.73095	-2.1883	-73.266	-0.085763	2.852	...
TH	UH	VHin	WH	WA	RA	TA	UA	VA	SAin			
-0.136	-0.87461	-1.5149	0.99553	-37.384	1.8868	10.984	131.12	75.704	2.1875			

7- Torques dissipativos nos acoplamentos de MA-30°, em relação de transmissão de 1:0,5. (R , S e T em [N.m]; U , V e W em [N])

SEa	RC	SCr	TCr	SDr	TDr	SBr	TBr	SFa	SGa	SAa
0.0057039	0.010769	-0.0018079	-0.0087296	0.0022941	0.0052386	0.0022954	0.0065848	0.0057419	-0.005665	-0.011408

8- Gráfico dos torques dissipativos nos acoplamentos *b*, *d* e *c*, de MA-30°.

Fonte: do autor.

APÊNDICE 4 – EFICIÊNCIAS, PERDAS E ESCORREGAMENTOS NOS CONTATOS

1- Índices de escorregamentos nos acoplamentos de MA, com força normal em [kN] e raio de contato c em [mm].

F_normal	Raio_C	Creep_b	Creep_c	Spin_c	Creep_d	F_normal	Raio_C	Creep_b	Creep_c	Spin_c	Creep_d
0.30172	0.26878	0.0033098	0.0031301	0.0069512	0.002635	0.30172	0.26878	0.0033098	0.0031301	0.0098305	0.002635
0.27429	0.26038	0.0030867	0.0030322	0.0064439	0.0025868	0.27429	0.26038	0.0030867	0.0030322	0.009113	0.0025868
0.25144	0.25293	0.0029018	0.0029455	0.0060568	0.0025497	0.25144	0.25293	0.0029018	0.0029455	0.0085656	0.0025497
0.2321	0.24627	0.002746	0.002868	0.0057639	0.0025227	0.2321	0.24627	0.002746	0.002868	0.0081514	0.0025227
0.21552	0.24026	0.0026127	0.002798	0.005548	0.0025053	0.21552	0.24026	0.0026127	0.002798	0.007846	0.0025053
0.20115	0.2348	0.0024973	0.0027344	0.0053977	0.0024973	0.20115	0.2348	0.0024973	0.0027344	0.0076335	0.0024973
0.18858	0.2298	0.0023963	0.0026762	0.0053064	0.002499	0.18858	0.2298	0.0023963	0.0026762	0.0075044	0.002499
0.17748	0.22521	0.0023069	0.0026227	0.0052709	0.0025111	0.17748	0.22521	0.0023069	0.0026227	0.0074541	0.0025111
0.16762	0.22096	0.0022274	0.0025732	0.0052911	0.002535	0.16762	0.22096	0.0022274	0.0025732	0.0074827	0.002535
0.1588	0.21701	0.0021559	0.0025272	0.0053706	0.0025726	0.1588	0.21701	0.0021559	0.0025272	0.0075952	0.0025726
0.15086	0.21333	0.0020914	0.0024844	0.0055172	0.002627	0.15086	0.21333	0.0020914	0.0024844	0.0078025	0.002627
a) Modelos MA-30°						b) Modelos MA-45°					
		F_normal	Raio_C	Creep_b	Creep_c	Spin_c	Creep_d				
		0.30172	0.26878	0.0033098	0.0031301	0.01204	0.002635				
		0.27429	0.26038	0.0030867	0.0030322	0.011161	0.0025868				
		0.25144	0.25293	0.0029018	0.0029455	0.010491	0.0025497				
		0.2321	0.24627	0.002746	0.002868	0.0099834	0.0025227				
		0.21552	0.24026	0.0026127	0.002798	0.0096093	0.0025053				
		0.20115	0.2348	0.0024973	0.0027344	0.0093491	0.0024973				
		0.18858	0.2298	0.0023963	0.0026762	0.009191	0.002499				
		0.17748	0.22521	0.0023069	0.0026227	0.0091294	0.0025111				
		0.16762	0.22096	0.0022274	0.0025732	0.0091644	0.002535				
		0.1588	0.21701	0.0021559	0.0025272	0.0093022	0.0025726				
		0.15086	0.21333	0.0020914	0.0024844	0.009556	0.002627				
c) Modelos MA-60°											

2- Eficiências dos acoplamentos de MA, em [%].

effi_CVT	effi_A	effi_B	effi_C	effi_D	effi_E	effi_F	effi_G	effi_CVT	effi_A	effi_B	effi_C	effi_D	effi_E	effi_F	effi_G
94.65	99.477	99.366	98.407	99.467	99.451	99.164	99.194	93.95	99.574	99.411	97.473	99.488	99.549	99.13	99.179
94.83	99.478	99.407	98.536	99.479	99.452	99.171	99.192	94.233	99.574	99.446	97.708	99.501	99.55	99.142	99.177
94.967	99.478	99.441	98.632	99.488	99.453	99.176	99.191	94.443	99.575	99.476	97.879	99.511	99.551	99.151	99.174
95.072	99.478	99.47	98.702	99.495	99.454	99.18	99.189	94.598	99.575	99.502	98.002	99.519	99.552	99.159	99.17
95.151	99.478	99.495	98.753	99.5	99.454	99.183	99.187	94.71	99.575	99.523	98.088	99.524	99.553	99.165	99.166
95.208	99.478	99.516	98.788	99.503	99.455	99.185	99.184	94.786	99.575	99.542	98.144	99.528	99.553	99.17	99.161
95.247	99.478	99.535	98.808	99.504	99.455	99.188	99.181	94.83	99.575	99.559	98.173	99.531	99.554	99.174	99.155
95.267	99.478	99.551	98.816	99.503	99.455	99.189	99.177	94.844	99.575	99.574	98.176	99.531	99.554	99.177	99.148
95.268	99.478	99.566	98.809	99.499	99.455	99.191	99.172	94.825	99.575	99.587	98.152	99.529	99.554	99.18	99.139
95.248	99.478	99.58	98.786	99.493	99.455	99.192	99.166	94.771	99.575	99.599	98.097	99.525	99.553	99.183	99.127
95.203	99.479	99.592	98.743	99.484	99.455	99.193	99.158	94.671	99.575	99.61	98.003	99.518	99.553	99.185	99.112
a) Modelos MA-30°								b) Modelos MA-45°							
effi_CVT	effi_A	effi_B	effi_C	effi_D	effi_E	effi_F	effi_G								
93.339	99.699	99.468	96.553	99.517	99.679	99.098	99.165								
93.721	99.699	99.496	96.893	99.53	99.68	99.115	99.162								
94.001	99.699	99.521	97.137	99.542	99.681	99.128	99.157								
94.205	99.7	99.542	97.313	99.55	99.682	99.139	99.152								
94.349	99.7	99.559	97.434	99.557	99.683	99.147	99.147								
94.444	99.7	99.575	97.511	99.563	99.683	99.154	99.139								
94.494	99.7	99.589	97.547	99.567	99.683	99.16	99.131								
94.501	99.7	99.602	97.546	99.569	99.683	99.165	99.12								
94.463	99.7	99.613	97.505	99.569	99.683	99.17	99.106								
94.373	99.7	99.623	97.418	99.568	99.683	99.173	99.089								
94.221	99.7	99.632	97.274	99.564	99.682	99.176	99.067								
c) Modelos MA-60°															

3- Dissipações nos acoplamentos de MA, em [W].

Pot_A	soma_diss	Pot_E	erro_por_cent	Pdiss_B	Pdiss_C	Pdiss_D	Pdiss_F	Pdiss_G
458.15	-24.536	-433.64	-0.0054111	-2.8881	-7.1527	-2.3359	-3.779	-3.5802
458.15	-23.708	-434.46	-0.0049263	-2.7023	-6.5756	-2.2893	-3.7517	-3.5916
458.15	-23.076	-435.09	-0.00452	-2.5463	-6.1501	-2.2515	-3.7307	-3.6026
458.15	-22.596	-435.57	-0.0041741	-2.4145	-5.8372	-2.2232	-3.7142	-3.6137
458.15	-22.234	-435.93	-0.0038758	-2.3031	-5.6094	-2.2036	-3.7011	-3.6255
458.15	-21.969	-436.2	-0.0036149	-2.205	-5.4533	-2.1921	-3.6904	-3.6385
458.15	-21.793	-436.37	-0.0033847	-2.1196	-5.3614	-2.1883	-3.6816	-3.6534
458.15	-21.7	-436.46	-0.0031794	-2.0441	-5.3304	-2.1932	-3.6743	-3.6709
458.15	-21.694	-436.47	-0.0029951	-1.9761	-5.3629	-2.2083	-3.6681	-3.6922
458.15	-21.784	-436.38	-0.0028281	-1.9158	-5.467	-2.2342	-3.6628	-3.7186
458.15	-21.989	-436.17	-0.0026756	-1.8601	-5.6591	-2.275	-3.6581	-3.7525

a) Modelos MA-30°

Pot_A	soma_diss	Pot_E	erro_por_cent	Pdiss_B	Pdiss_C	Pdiss_D	Pdiss_F	Pdiss_G
458.15	-27.734	-430.43	-0.0038301	-2.6872	-11.362	-2.2244	-3.9419	-3.6095
458.15	-26.437	-431.73	-0.0034822	-2.5255	-10.309	-2.1766	-3.8891	-3.6296
458.15	-25.474	-432.69	-0.0031914	-2.389	-9.5451	-2.137	-3.848	-3.6493
458.15	-24.763	-433.4	-0.0029441	-2.2733	-8.9941	-2.1061	-3.8154	-3.6695
458.15	-24.249	-433.91	-0.0027309	-2.1752	-8.607	-2.083	-3.7891	-3.6912
458.15	-23.899	-434.26	-0.0025444	-2.0884	-8.357	-2.0673	-3.7677	-3.7154
458.15	-23.695	-434.46	-0.0023797	-2.0127	-8.2286	-2.0582	-3.7499	-3.7433
458.15	-23.632	-434.53	-0.0022326	-1.9455	-8.2172	-2.0568	-3.7349	-3.7764
458.15	-23.716	-434.44	-0.0021207	-1.8846	-8.3277	-2.0642	-3.7222	-3.8166
458.15	-23.967	-434.19	-0.0020022	-1.8307	-8.5776	-2.0807	-3.7113	-3.8667
458.15	-24.422	-433.74	-0.0018939	-1.7806	-8.9989	-2.1098	-3.7018	-3.9308

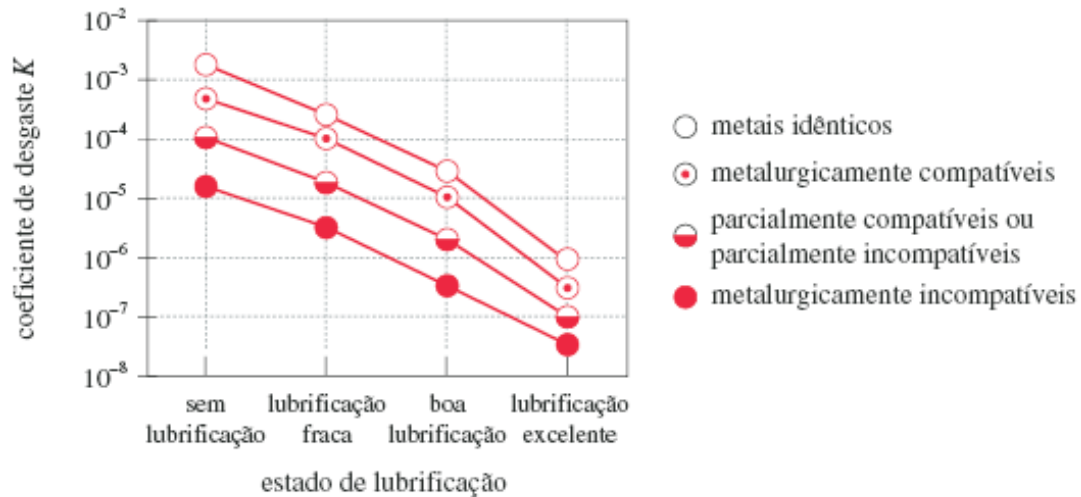
b) Modelos MA-45°

Pot_A	soma_diss	Pot_E	erro_por_cent	Pdiss_B	Pdiss_C	Pdiss_D	Pdiss_F	Pdiss_G
458.15	-30.53	-427.63	-0.0031465	-2.4314	-15.52	-2.0816	-4.097	-3.6395
458.15	-28.779	-429.38	-0.0028637	-2.3003	-13.998	-2.032	-4.0213	-3.6682
458.15	-27.496	-430.66	-0.0026123	-2.1888	-12.9	-1.9897	-3.9619	-3.6963
458.15	-26.561	-431.6	-0.0024137	-2.0935	-12.114	-1.9552	-3.9144	-3.7253
458.15	-25.9	-432.26	-0.0022438	-2.0123	-11.57	-1.9276	-3.8759	-3.7566
458.15	-25.465	-432.69	-0.0020967	-1.9399	-11.226	-1.9062	-3.8442	-3.7916
458.15	-25.236	-432.92	-0.0019685	-1.8764	-11.063	-1.8903	-3.8178	-3.832
458.15	-25.203	-432.95	-0.0018557	-1.8198	-11.071	-1.8806	-3.7956	-3.8798
458.15	-25.377	-432.78	-0.0017309	-1.7683	-11.26	-1.8779	-3.7767	-3.9378
458.15	-25.785	-432.37	-0.0016406	-1.7224	-11.654	-1.8822	-3.7603	-4.01
458.15	-26.482	-431.67	-0.0015601	-1.6795	-12.303	-1.8961	-3.746	-4.1019

c) Modelos MA-60°

ANEXO 1 – PROPRIEDADES MECÂNICAS E CONSTANTES UTILIZADAS

1- Coeficientes de desgaste para diferentes estados de contato.



Fonte: NORTON (2013).

2- Dureza Vickers para diferentes tipos de aços.

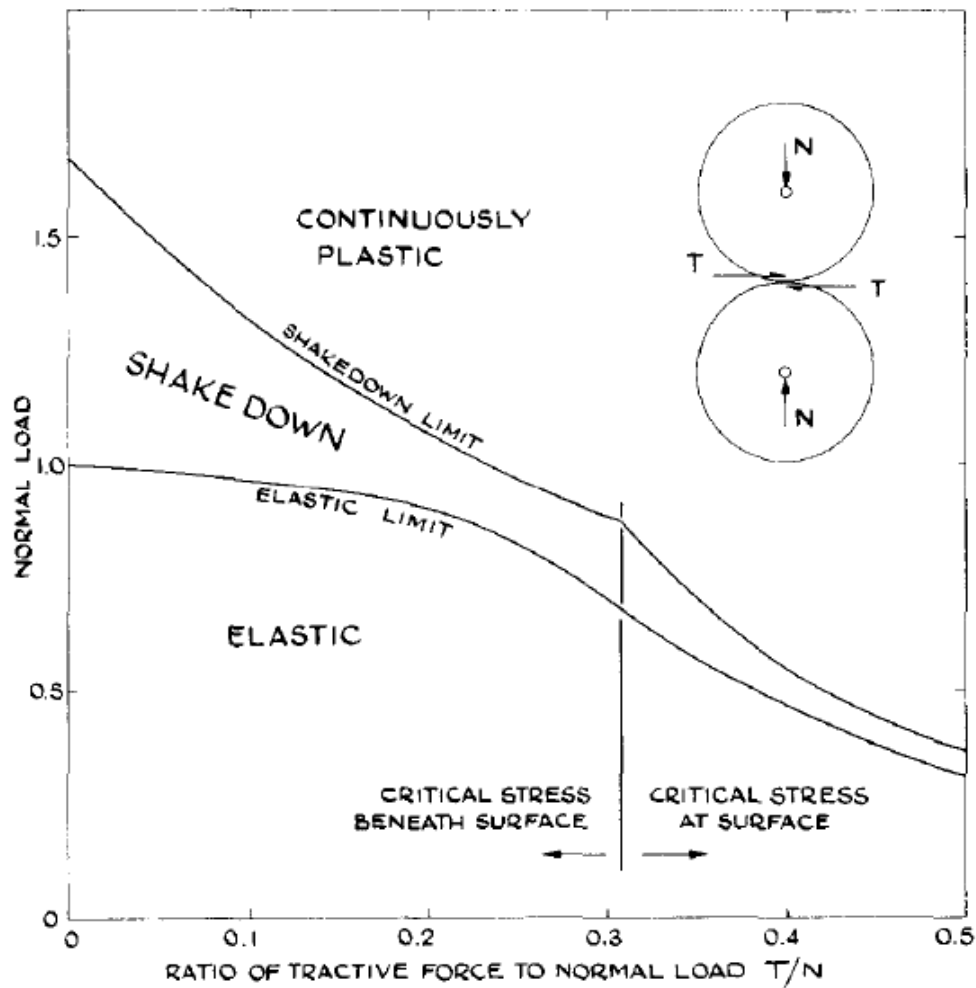
Tabela 7-4 Materiais resistentes à abrasão

Material	Dureza (kg/mm^2)	Desgaste relativo
Carboneto de tungstênio (sinterizado)	1400-1800	0,5-5
Ferro fundido branco com alto teor de cromo		5-10
Aço ferramenta	700-1000	20-30
Aço para rolamentos	700-950	
Cromo (eletrodepositado)	900	
Aço cementado	900	20-30
Aço nitretado	900-1250	20-30
Ferro perlítico branco		25-30
Aço austenítico com manganês		30-50
Aço perlítico baixa-liga (0,7% C)	480	30-60
Aço perlítico sem componente de liga (0,7% C)	300	50-70
Aço normalizado ou como laminado com baixo teor de carbono (0,2% C)		100

Fontes: E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, 1965, reimpresso com permissão de John Wiley & Sons, Inc., New York T. E. Norman, *Abrasive Wear of Metals*, in *Handbook of Mechanical Wear*, C. Lipson, ed., U. Mich. Press, 1961.

Fonte: retirado de NORTON (2013).

3- Curvas de máximas tensões compressivas, normalizadas em função da tensão de escoamento, para diferentes relações entre tração e força normal sobre o contato.



Fonte: retirado de JOHNSON (1985).

No gráfico acima, a curva inferior representa a tensão limite, na qual inicia o aparecimento de plasticidade nas deformações. A curva superior representa o limite da capacidade de encruamento (*shakedown limit*), em que, devido às deformações plásticas, há um aumento da área de contato, reduzindo as tensões compressivas, ao mesmo tempo em que o material sofre endurecimento local, em decorrência do acúmulo de discordâncias nas regiões deformadas. Muitos projetistas, utilizam o *shakedown limit* como fator de projeto, por permitir a aplicação de maiores tensões sobre os contatos, no entanto, no presente trabalho aplicou-se o limite elástico, por não se tratar de um estudo de otimização, além de não se conhecer a fundo o comportamento da liga utilizada, em regime de fadiga. Ainda, foi adotada a relação de 0,3, entre força de tração tangencial e força normal nos contatos, a fim de garantir que as máximas tensões cisalhantes ocorram sob a superfície.