



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Séries e Transformadas de Fourier com Aplicações a Imagens

**Lara Fischer**

**Florianópolis**  
**26 de março de 2022**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Séries e Transformadas de Fourier com Aplicações a Imagens

Lara Fischer

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Leonardo Koller Sacht

Florianópolis  
26 de março de 2022

# Honras a quem me trouxe até aqui

Me sinto extremamente grata por todas as pessoas que já amei. Todos vocês deixaram um rastro em mim. Eu trouxe vocês comigo e vocês me trouxeram até aqui. Essa aliança feita pelo amor nos conecta e me faz muito feliz. Em um livro que eu aprendi a gostar muito, chamado “Em Defesa da Escola”, ele mostra como o amor pode significar cuidado pelo que se ensina e pelo que se aprende. Amor é o sentimento que uso pra embalar os nomes que estão nesse agradecimento. Apesar de as vezes ele parecer pouco.

Não consigo começar a agradecer sem pensar primeiramente na minha família. Foi olhando e me inspirando em pessoas como minha mãe, tio Márcio, tia Marilise e tia Glória que nasceu o desejo de me tornar professora. Muito obrigada família, esse trabalho também é pra vocês. Em especial, gostaria de agradecer minha mãe, meu pai e minha irmã por serem suporte e refúgio. Tantas e tantas vezes vivi momentos de dúvida na graduação, e vocês me escutaram e aconselharam da melhor forma que podiam. Obrigada também, vô Zeni. Você foi a primeira pessoa que eu contei que iria me formar, lembra? Isso tudo também é para você.

Continuo agradecendo minha segunda família, que são meus amigos. Acho fascinante essa história de escolher uma segunda família. A minha é boa de mais! Escolhi cada um de vocês e não abro mão. Obrigada Aline, Raquel, Pedro, Lara, Bella, Kendji, Pimenta, Graciani. É bom de mais poder contar com vocês. Agradeço imensamente o meu companheiro de vida. Mateus, sua determinação, dedicação, profissionalismo e caráter me inspiram diariamente. Estar do seu lado me faz me sentir mais livre e capaz para construir a pessoa que quero ser. Obrigada por tanto!

Dedico também meu TCC a todos os professores do ensino básico que passaram pela minha trajetória. Laerte, Maicon, Karline, Aline, Rosi, Chico, Leo, Dé, vocês me apaixonaram por dar aula. Eu era uma mera telespectadora da maestria com a qual vocês ensinavam. Não poderia esquecer das minhas inspirações universitárias. Rosi, você foi a primeira pessoa que me colocou de frente com a nossa profissão. Me deu armas para pensar em uma conversa fundamentada e transformadora. Minha maneira de ser e estar no mundo foi afetada graças a você. Paulo, Sílvia, Melissa, Francisco, Mortari, cada um de vocês me fez ter certeza de que se eu precisava estar na matemática para conhecê-los e ter as aulas que tive com vocês então eu estava no lugar certo. E finalmente, professor Koller. Gostaria de ter tido mais tempo com o senhor. Eu sou extremamente grata a sua dedicação, paciência, ética, disponibilidade, atenção, escuta, abertura. Você possui exatamente as características que eu mais admiro em um professor. Muito obrigada por construir comigo este trabalho.

Agradeço também ter tido a oportunidade de estudar em uma faculdade gratuita e de qualidade como a UFSC. Agradeço a todos os servidores que fizeram com que fosse possível eu estar nessa universidade de tanto renome e qualidade.

Por fim, agradeço você, caro leitor, que de tantos trabalhos para ler ou coisas para fazer, escolheu ler o meu TCC. Foi feito com muito amor e dedicação. Espero que goste.

”Liberdade é uma palavra que o sonho humano alimenta,  
que não há ninguém que explique e ninguém que não entenda.”

(Documentário Ilha das Flores)

# Resumo

Este trabalho nasce de um estudo a cerca da Série e a Transformada de Fourier, voltando-se para o entendimento das imagens nesse contexto. Busca-se dentro de uma perspectiva teórica pensar o que as Séries de Fourier representam, quais são as funções que ficam bem definidas pela sua série de Fourier, a importância dos coeficientes da série e quais são as limitações que envolvem esse processo. Isso motiva o próximo estudo, que é sobre a Transformada de Fourier, onde definiremos o espaço das funções cuja transformada está bem definida, a transformada Inversa de Fourier, e damos um enfoque na representação de imagens vistas como funções pela sua transformada. A leitura conta com exemplos de imagens e suas transformadas, além de exemplos de cálculos tanto da série quanto da transformada de Fourier.

**Palavras Chave:** *Transformada de Fourier, Série de Fourier, Processamento de Imagens.*

# Abstract

This work emerges from the study of the Fourier series and the Fourier transform, turning its attention to the understanding of images in this context. From a theoretical perspective, it approaches what the Fourier series represent, which functions are well defined by their Fourier series, the importance of the coefficients of the series and what are the limitations involved in this process. This motivates the next study about the Fourier transform, where we define the space of functions for which the Fourier transform is well defined, the inverse Fourier transform and the representation of images as functions and their Fourier transforms. The work has examples of images and their transforms, as well as examples of calculations of the Fourier series and transforms.

**Keywords:** *Fourier Transform, Fourier Series, Image Processing.*

# Sumário

<b>1</b>	<b>CONCEITOS PRELIMINARES . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>Fenômenos Periódicos . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>1.2</b>	<b>Produto Interno Hermitiano e Norma de Vetores . . . . .</b>	<b>13</b>
1.2.1	Teorema de Pitágoras . . . . .	15
1.2.2	Desigualdade de Cauchy-Schwarz . . . . .	16
<b>1.3</b>	<b>O Espaço de Funções <math>\mathcal{L}^2(I)</math> . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>1.4</b>	<b>Conjunto Ortonormal . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>1.5</b>	<b>Projeção Ortogonal . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>SÉRIES DE FOURIER . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>2.1</b>	<b>Definição da Série de Fourier e de seus Coeficientes . . . . .</b>	<b>25</b>
2.1.1	Série de Fourier para Funções Complexas . . . . .	31
2.1.2	Propriedades dos Coeficientes da Série de Fourier . . . . .	36
2.1.3	Espectro de Potências . . . . .	37
<b>2.2</b>	<b>Fenômeno de Gibbs . . . . .</b>	<b>38</b>
2.2.1	O elo com as projeções ortogonais . . . . .	40
<b>2.3</b>	<b>Teoremas sobre a Série de Fourier . . . . .</b>	<b>41</b>
2.3.1	Teorema da Convergência Pontual da Série de Fourier . . . . .	41
2.3.2	Teorema da Convergência Uniforme . . . . .	42
2.3.3	Teorema da Unicidade . . . . .	46
<b>3</b>	<b>TRANSFORMADA DE FOURIER . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>3.1</b>	<b>Definição da Transformada de Fourier . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>3.2</b>	<b>Transformada Inversa de Fourier . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>3.3</b>	<b>Adaptação para o <math>\mathbb{R}^2</math> . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>5</b>	<b>PROGRAMAS UTILIZADOS NO MATLAB . . . . .</b>	<b>62</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>69</b>

# O que está por vir

A área de Processamento de Imagens é uma subárea de Processamento de Sinais, com uma complexidade gigantesca de aplicações. Trata-se de uma especialidade com convergência de muitas áreas e grande demanda por pesquisa. Devido a isso, discutir sobre processamento de imagens pelo viés da matemática aplicada acaba por esbarrar em conceitos de outras áreas, como a computação. Isso motiva a exploração de conhecimentos não comumente encontrados em cursos de graduação em matemática licenciatura usuais. Além disso, o processamento de imagens digitais tem grande impacto nas imagens de exames clínicos, imagens de satélite, podendo propiciar aumento de qualidade de imagem, compressão de imagens sem grandes perdas entre outros proveitos.

Dentre tantos caminhos possíveis de percorrer nessa área, este trabalho fará o seguinte recorte: entender como Séries e Transformadas de Fourier se associam com imagens. Além disso, existiu uma tentativa de estabelecer uma comunicação com alcance maior, trazendo mais exemplos e motivações para as questões trabalhadas, para uma melhor didatização do conteúdo. Uma inspiração foi o livro (1), mas também partiu de quem vos escreve, afinal, sou uma professora interessada em espalhar ainda mais este conhecimento.

Buscaremos primeiramente entender os conceitos de Séries e Transformadas de Fourier, para após relacioná-las com imagens, percebendo os confrontos que surgem com a aplicação dos conceitos teóricos abordados com os conceitos práticos desenvolvidos. Afinal, apesar de termos softwares e computadores com cada vez mais capacidade de processamento, existe um distanciamento entre desenvolvimentos teóricos e práticos.

A fim de abarcar todos esses assuntos, dividimos o trabalho em três capítulos. O primeiro capítulo revisa conceitos de Álgebra Linear e Topologia para que o leitor tenha entendimento mais apurados sobre as ferramentas que iremos construir na sequência. O segundo capítulo constrói o conceito de Série de Fourier para funções reais e complexas, apresenta exemplos de ambas e começa a tecer um paralelo com imagens, desenvolvendo os conceitos de **espectro de potências** (seção 2.1.3) e **fenômeno de Gibbs** (seção 2.2). Além disso, este capítulo conta com a demonstração de alguns resultados interessantes e relevantes dentro do nosso estudo. O terceiro e último capítulo motiva e define o conceito de Transformada de Fourier, Transformada Inversa de Fourier e relaciona-os com imagens, adaptando intuitivamente os conceitos para o plano  $\mathbb{R}^2$ . Ademais, este trabalho conta com um apêndice contendo códigos das figuras utilizadas durante o trabalho.

Nesta seara, é interessante que o leitor tenha entendimento sobre o espaço vetorial complexo de funções,  $\mathcal{F}[X; \mathbb{C}]$ , disponível para estudo na referência (2). Além disso, será necessário entendimento sobre cálculo de integrais, de acordo com o nível da referência (3). Para entendimento dos códigos geradores de algumas imagens no trabalho, é desejável que

se tenha familiaridade com a linguagem de programação MATLAB, na qual os programas foram rodados.

# 1 Conceitos Preliminares

Nesse capítulo a intenção é trazer alguns conceitos necessários para o entendimento de Série de Fourier e motivar a definição dos coeficientes da Série de Fourier da forma como são. Em alguns tópicos traremos exemplos os quais adaptam as definições expostas para o nosso objeto de estudos: **O Espaço Vetorial das Funções Complexas definidas no intervalo**  $[0, 1]$ . As definições aqui trazidas foram retiradas das referências (2) e (4).

## 1.1 Fenômenos Periódicos

Os fenômenos periódicos são comumente encontrados na natureza. Por exemplo, a nossa noção de tempo é periódica: sabemos que depois de um mês, temos outro; depois da passagem de um ano temos outro. Essas divisões nem sempre obedecem um padrão fixo, afinal temos meses com contagens distintas de dias e anos bissextos, mas tentam estabelecer da melhor maneira possível uma forma de dividir e subdividir o nosso tempo e padronizá-lo de forma cíclica.

Podemos também citar o exemplo do **Oscilador Harmônico Simples**. Classicamente trabalhado nas salas de aula de Física, o oscilador tem o funcionamento, ilustrado na Figura 1.1.1:

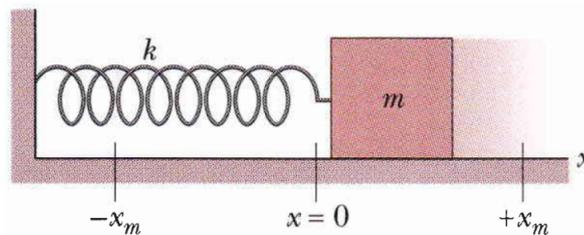


Figura 1.1.1 – Ilustração de um Oscilador Harmônico Simples. Referência: figura retirada de (4).

Fixa-se horizontalmente uma mola a uma superfície, e à outra extremidade da mola, adiciona-se uma massa. A partir de uma força externa ao sistema, a massa é comprimida ou esticada contra a mola. A leitura física do fenômeno seria que a força externa aplicada na massa faz com que a mola também seja comprimida ou esticada. Em contrapartida, devidamente conservada a resistência da mola, ela tende, por uma força restauradora, a voltar ao seu estado inicial. E assim, temos um movimento de compressão e expansão da mola, causando uma oscilação. Em circunstâncias de conservação de energia (retirando a força de atrito, ou o calor e o som gerado pelo movimento, entre outras perdas energéticas) este movimento oscilatório perduraria para sempre.

Veja que, fixado um tempo específico, conseguiríamos prever o que estava acontecendo com o peso e com a mola, ou seja, conseguimos descrever equações de movimento em função do tempo. Isso acontece pois este movimento oscilatório se repete após uma certa passagem de tempo. Ou seja, existe um intervalo de tempo, denominado de **período**, no qual o movimento é diferente (que seria a compressão e a expansão) e após isso, o mesmo padrão de movimento se repete. Esta é a principal característica dos fenômenos periódicos.

Normalmente (mas não necessariamente) estes fenômenos estão associados à ideia de periodicidade com o tempo, e por isso que usualmente quando pretendemos modelá-los definimos a variável como sendo  $t$ .

Sendo mais formal:

**Definição 1.** Uma função  $f(t)$  se diz **periódica** quando existe um número  $T > 0$  pertencente aos  $\mathbb{R}$  tal que para todo  $t$  no domínio da função:

$$f(t) = f(t + T).$$

Além disso, podemos definir o menor valor de  $T$  que faz com que a função seja periódica. A este valor damos o nome de **período fundamental**, o qual podemos expressar por

$$f(t) = f(t + nT), \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

onde  $n$  representará a quantidade de vezes que o período fundamental se repetiu.

Uma pergunta que pode surgir: o período fundamental de uma função periódica sempre existe? No caso de funções que são constantes não conseguimos definir um período, pois para cada  $T$  como sendo período, conseguimos um  $t < T$  que o seja também. Nesse caso, dizemos que a função periódica não possui período fundamental.

Além desse conceito de periodicidade, outro aspecto fundamental dentro do estudo de funções periódicas é a **frequência**. Intimamente ligada com a ideia de período, a frequência de oscilação é o número de vezes por unidade de tempo que uma partícula descreve uma oscilação completa (um ciclo). Sendo mais formal:

**Definição 2.** A **frequência** de uma função periódica  $f$  é dada por:

$$\omega = \frac{1}{T}$$

sendo  $T$  o período fundamental da função  $f$ .

Considere o seguinte exemplo sobre este conceito: A nossa percepção de cores no cotidiano é um processo complexo que depende de interações físico-químicas diversas. Porém, grande parte deste processo está intimamente ligada com a ideia de frequências (5). A junção da frequência da onda de luz e a velocidade com que impacta nossas retinas, dão origem ao comprimento de onda, e a cor é uma interpretação que nosso cérebro faz de

certa faixa de amplitude de comprimentos de onda. Existem outros tipos de animais, como os morcegos, que interpretam outros tipo de frequências que, para nós, seres humanos, passam despercebidas. No caso das cores, as frequências variam de acordo com a energia de vibração dos **fótons**, partícula constituinte do comportamento dual da onda de luz. Devido a essa oscilação da frequência podemos perceber o mundo ao nosso redor com diferentes tons de cores.

Este conceito de frequência nos será importante quando falarmos, na Seção 2.1.3, que o conjunto de frequências presente em um sinal é o espectro do sinal.

Perceba que, se tratando de modelagem, uma boa escolha de funções que já possuem em seu comportamento essa periodicidade são as funções **seno** e **coseno**. Então as utilizamos como base, e buscando fazer as adaptações necessárias dentro das especificidades de cada modelo. É claro que isso traz certas limitações para nossas representações. Afinal de contas, funções como essas são sempre contínuas, e nem sempre as funções periódicas que queremos representar o são. Esta discussão será mais aprofundada no Capítulo 2.2.

Neste momento, iremos relembrar algumas definições das áreas de Álgebra Linear e de Topologia. Isso se faz necessário pois desejamos atribuir um significado para a Série de Fourier que só será possível a partir desse ferramental.

## 1.2 Produto Interno Hermitiano e Norma de Vetores

O produto interno é o primeiro degrau de construção de nossas ferramentas. A partir dele, e utilizando ele, faremos grande parte das definições nas seções subsequentes. Pelo objeto de estudo deste trabalho ser o espaço vetorial complexo, é necessário fazer-se uso do produto interno hermitiano, o qual se diferencia do produto interno usual do espaço vetorial real por apresentar o uso do conjugado.

**Definição 3.** Um **produto interno hermitiano** é uma função  $E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  que associa a cada par ordenado de vetores  $u, v$  no espaço vetorial complexo  $E$  um número complexo, atendendo as seguintes propriedades: Para quaisquer  $u, v, w \in E$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , temos:

1.  $\langle u; v \rangle = \overline{\langle v; u \rangle}$ ;
2.  $\langle u + w; v \rangle = \langle u; v \rangle + \langle w; v \rangle$ ;
3.  $\langle \alpha \cdot u; v \rangle = \alpha \cdot \langle u; v \rangle$ ;
4.  $\langle u; u \rangle > 0$ , se  $u \neq 0$ .

**Notação 1.** Neste estudo, usaremos a seguinte notação para representar o produto interno do vetor  $u$  com o vetor  $v$ :  $\langle u; v \rangle$ .

**Exemplo 1.** No espaço  $\mathbb{C}^n$ , o produto interno canônico é definido, para  $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e  $v = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ , como:

$$\begin{aligned}\langle u; v \rangle &= \alpha_1 \overline{\beta_1} + \dots + \alpha_n \overline{\beta_n} \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{\beta_k}.\end{aligned}$$

Esta definição verifica as 4 condições de produto interno citadas acima.

**Exemplo 2.** Seja  $E = \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{C})$  o espaço vetorial complexo formado pelas funções contínuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas no intervalo  $[a, b]$  e tomando valores complexos. É possível verificar com as propriedades citadas anteriormente que um produto interno hermitiano entre  $f, g \in E$  pode ser definido como:

$$\langle f; g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (1.2.1)$$

Interessando notar nesse exemplo: o espaço vetorial  $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{C})$  é um subespaço do espaço vetorial  $\mathbb{C}^{[a, b]}$ , que são as funções  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Além disso, o espaço  $\mathbb{C}^n$  pode ser pensado, por definição, como sendo o espaço  $\mathbb{C}^{\{1, 2, \dots, n\}}$  das funções com coeficientes no conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  e que vão para o conjunto  $\mathbb{C}$ . Portanto tanto o conjunto tratado no Exemplo 1 quanto neste exemplo são do mesmo tipo. Dito isso, o produto interno de ambos precisa ser análogo. Note que no Exemplo 1 definimos o produto interno como sendo uma soma enumerável; já no exemplo atual, definimos como sendo uma soma não enumerável.

Segue diretamente da definição de produto interno que quando o produto interno de dois vetores em um espaço vetorial é igual a 0, eles são ditos **ortogonais**. Podemos ainda definir um **conjunto ortogonal** como sendo aquele em que, dados dois vetores diferentes entre si deste conjunto, eles são ortogonais entre si.

Uma definição muito conectada com a de produto interno, é a **norma**. A norma em um espaço vetorial pode ser entendida intuitivamente como uma régua. Ou seja, ela trás uma noção de distância entre os elementos de um espaço vetorial.

**Definição 4.** Seja  $E$  um espaço vetorial complexo. Uma norma em  $E$  é uma função que associa a cada vetor  $x \in E$  com o número real  $\|x\|$ , chamado de **norma de  $x$** , de modo que para quaisquer  $x, y \in E$  e  $\lambda$  escalar temos:

1. Se  $x \neq 0$  então  $\|x\| \neq 0$ ;
2.  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Exemplo 3.** Seja  $v \in \mathbb{C}^n$ . Então  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , com  $v_k = a_k + i \cdot b_k$  sendo  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  e  $i$  sendo a unidade imaginária. A definição usual de norma em  $\mathbb{C}^n$  é:

$$\|v\| = \sqrt{v_1\bar{v}_1 + v_2\bar{v}_2 + \dots + v_n\bar{v}_n}.$$

Mas veja que esta é exatamente a norma induzida pelo produto interno do mesmo espaço, citado no Exemplo 1:

$$\begin{aligned} \|v\| &= \left( \sum_{k=1}^n v_k\bar{v}_k \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle v; v \rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Caso  $v \in \mathbb{R}$ , caso particular de  $v \in \mathbb{C}^n$  ( $n = 1$  e parte imaginária de  $v$  igual a 0) teríamos uma ideia semelhante com a de módulo de um número real. Mais uma vez evidenciando a norma ser chamada de comprimento do vetor.

**Exemplo 4.** Seja  $E = \mathcal{C}^0([a, b])$  o espaço vetorial cujos elementos são as funções contínuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Neste caso, com o produto interno das funções complexas já definido no tópico acima, temos que:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)\bar{f}(t)dt}. \quad (1.2.2)$$

Perceba que esta norma é induzida pelo produto interno de seu espaço, citado no Exemplo 2.

Agora veremos duas importantes relações dentro do estudo de normas:

### 1.2.1 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um importante teorema dentro da geometria plana Euclidiana. Por ter uma explicação acessível, é apresentado para os estudantes desde o ensino fundamental. Normalmente o conhecemos como uma relação entre a hipotenusa de um triângulo retângulo e seus catetos. Mas na verdade o teorema se estende para Espaços Vetoriais além do  $\mathbb{R}^2$ , se afastando de sua apresentação usual da geometria plana, como se segue:

**Teorema 1.** Dados dois vetores  $u, v$  em um espaço vetorial  $E$ , se  $u$  e  $v$  são ortogonais entre si, então:

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|.$$

*Demonstração.* Sejam  $u, v \in E$  vetores ortogonais. Dessa forma  $\langle u; v \rangle = 0 = \langle v; u \rangle$ . Então

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &= \langle u + v; u + v \rangle \\
&\stackrel{=1}{=} \langle u; u \rangle + \langle u; v \rangle + \langle v; u \rangle + \langle v; v \rangle \\
&= \langle u; u \rangle + \langle v; v \rangle \\
&= \|u\|^2 + \|v\|^2.
\end{aligned}$$

onde em  $=^1$  foram utilizadas propriedades do produto interno. ■

Da forma que se coloca, o Teorema de Pitágoras estabelece uma relação necessária e suficiente para que dois vetores sejam ortogonais, como ilustrado na Figura 1.2.1

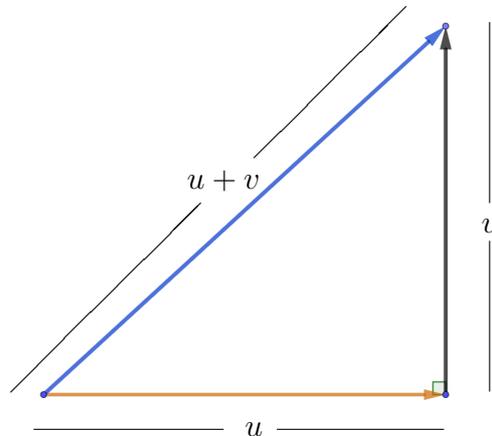


Figura 1.2.1 – Representação da soma de dois vetores ortogonais. Nesta imagem os vetores  $u$  e  $v$  são ortogonais, e o vetor  $u + v$  é sua soma. Créditos à autora utilizando o programa GeoGebra.

## 1.2.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz é uma relação entre o produto interno de dois vetores e suas normas, a qual será importante para a demonstração do Teorema 5.

**Teorema 2.** Dados dois vetores  $u, v$  de um espaço vetorial  $V$  com produto interno, podemos escrever que:

$$|\langle u; v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (1.2.3)$$

e a igualdade é válida se, e somente se, os elementos  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes.

*Demonstração.* Dividiremos essa demonstração em dois casos:

- Caso algum dos vetores for nulo, digamos  $v$ , então este vetor será linearmente dependente do outro, por definição. Além disso  $|\langle u; v \rangle| = 0$  e  $\|u\| \cdot \|v\| = 0$ , o que gera a igualdade.
- Se os vetores não forem nulos, então considere  $w = v - \frac{\langle u; v \rangle \cdot u}{\|u\|^2}$ . Sabemos que:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|w\|^2 &= \left\| v - \frac{\langle u; v \rangle \cdot u}{\|u\|^2} \right\|^2 \\
0 &\leq \|w\|^2 &= \|v\|^2 - \frac{2\langle u; v \rangle^2}{\|u\|^2} + \frac{\langle u; v \rangle^2 \|u\|^2}{\|u\|^4} \\
0 &\leq \|w\|^2 &= \|v\|^2 - \frac{2\langle u; v \rangle^2}{\|u\|^2} + \frac{\langle u; v \rangle^2}{\|u\|^2} \\
\Rightarrow 0 &\leq \|w\|^2 \cdot \|u\|^2 &= \|v\|^2 \cdot \|u\|^2 - \langle u; v \rangle^2 \\
&\Rightarrow 0 &\leq \|v\|^2 \cdot \|u\|^2 - \langle u; v \rangle^2 \\
&\Rightarrow \langle u; v \rangle^2 &\leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\
&\Rightarrow |\langle u; v \rangle| &\leq \|u\| \cdot \|v\|.
\end{aligned}$$

donde se prova a desigualdade.

Além disso, veja que no caso da igualdade, ou seja

$$|\langle u; v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$$

teríamos que todas as desigualdades anteriores seriam igualdades, culminando em

$$0 = \|w\|^2$$

ou seja, a norma de  $w$  seria 0 e então  $w = 0$ . Daí tem-se:

$$v = \frac{\langle u; v \rangle \cdot u}{\|u\|^2}$$

e segue que  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes. ■

Nas próximas três seções desenvolveremos ferramentas importantes utilizadas no próximo capítulo. A próxima seção desenha o espaço de funções que usaremos para nossas aplicações.

### 1.3 O Espaço de Funções $\mathcal{L}^2(I)$

**Definição 5.** Seja  $I$  um intervalo. Definimos o conjunto  $\mathcal{L}^2(I)$ , como sendo o conjunto de funções  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  no intervalo  $I$  tal que:

$$\int_I |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (1.3.1)$$

A partir desta definição conseguimos adaptar os intervalos de análise das funções estudadas para se adaptar às necessidades das definições. Um espaço que será muito útil em nossas aplicações, é o espaço  $\mathcal{L}^2[0, 1]$ . Isso porque temos por objetivo relembrar elementos para o desenvolvimento de uma teoria que terá aplicações destes e de posteriores conceitos em processamento de imagens.

Para este estudo não é interessante trabalhar com funções cuja integral não converge, pois as funções que trabalharemos contém informações de um sinal, o qual posteriormente

será interpretado por um equipamento, seja este um computador ou um celular. Se este sinal representado pela função não tiver integral finita, isso impedirá que ele seja computado, pois veremos que podemos associar esta informação com a energia do sinal, e até mesmo por limitações físicas do equipamento não conseguimos representar uma energia infinita. Então estipulamos que a energia deste sinal deve ser finita. Observe também que há uma limitação inferior que surge primordialmente do fato de que podemos estipular que a ausência do sinal é o limite inferior. Por exemplo no caso das funções que transmitem a informação de uma imagem, o máximo do valor da função é interpretado como sendo a cor branca, e o mínimo de energia que ela contém é interpretado como a ausência de cor, que seria a cor preta.

Agora que definimos o espaço aonde buscaremos nossas funções, como seria um conjunto ortonormal nele? Iremos agora relembrar os conceitos principais ao redor da ideia de conjunto ortonormal.

## 1.4 Conjunto Ortonormal

**Definição 6.** Um conjunto é dito **ortonormal** quando é ortogonal e além disso, o comprimento de seus vetores é igual a 1.

O que faremos nessa seção é construir um conjunto, que ao final da discussão, veremos que se trata de um conjunto ortonormal de dimensão. Antes disso, precisamos relembrar a **Fórmula de Euler** e definir um tipo de integral que será usada no exemplo que se segue:

**Proposição 1** (Fórmula de Euler). Dado  $\theta \in \mathbb{R}$  vale a identidade:

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta. \quad (1.4.1)$$

Para a demonstração deste resultado, usaremos as séries infinitas de três funções na variável  $x$  conhecidas do cálculo, e encontradas na referência (3), que são:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \\ \operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Iremos mostrar a igualdade com o sinal positivo, pois com o sinal negativos é análogo. Primeiramente, vamos considerar a função exponencial em sua forma de série infinita:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Faremos a substituição  $x = i\theta$  com  $i$  sendo a unidade imaginária e  $\theta \in \mathbb{R}$ . Daí segue:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} \dots \end{aligned}$$

Como a série converge uniformemente, reorganizaremos a equação acima e usaremos as séries infinitas de seno e cosseno. Temos:

$$e^{i\theta} = \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right)}_{\cos \theta} + i \underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right)}_{\sin \theta}.$$

Portanto o resultado segue. ■

**Definição 7.** Seja  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  com  $c, d \in \mathbb{R}$  e tal que  $f(t) = a(t) + i b(t)$ ,  $\forall t \in [c, d]$ . Definimos:

$$\int_c^d f(t) dt = \int_c^d a(t) dt + i \int_c^d b(t) dt$$

sempre que as integrais forem números reais, ou seja, existirem.

A partir disso temos:

**Exemplo 5.** Seja  $\Phi$  o conjunto das exponenciais complexas da forma

$$e^{2\pi i n t} \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Chamaremos cada vetor de  $\Phi$  de  $e_n$ . Veja que dados dois vetores  $e_n, e_m \in \Phi$  podemos supor sem perda de generalidade que existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $e_m = e_{n-k}$ . Dessa forma, o produto interno deles será:

$$\begin{aligned} \langle e^{2\pi i n t}; e^{2\pi i(n-k)t} \rangle &= \int_0^1 e^{2\pi i n t} \overline{e^{2\pi i(n-k)t}} dt \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i n t} e^{-2\pi i(n-k)t} dt \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i n t} e^{-2\pi i n t} e^{2k\pi i t} dt \\ &= \int_0^1 e^{2k\pi i t} dt. \end{aligned}$$

Com a Fórmula de Euler 1 temos:

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \cos(2k\pi t) dt + i \int_0^1 \operatorname{sen}(2k\pi t) dt \\
&= \frac{1}{2k\pi} (\cos(2k\pi) - 1) + \frac{i}{2k\pi} \operatorname{sen}(2k\pi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, vemos que quaisquer vetores de  $\Phi$  serão dois a dois ortogonais entre si. Portanto estamos trabalhando com um conjunto ortogonal. Para além disso, calculando a norma de um vetor genérico  $e^{2\pi i n t} \in \Phi$  a partir da Equação (1.2.2):

$$\begin{aligned}
\|e^{2\pi i n t}\| &= \sqrt{\langle e^{2\pi i n t}; e^{2\pi i n t} \rangle} \\
&= \sqrt{\int_0^1 e^{2\pi i n t} \overline{e^{2\pi i n t}} dt} \\
&= \sqrt{\int_0^1 e^{2\pi i n t} e^{-2\pi i n t} dt} \\
&= \sqrt{\int_0^1 e^0 dt} \\
&= \sqrt{[t]_0^1 dt} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Concluimos que além de ortogonal,  $\Phi$  tem seus vetores com norma 1, e portanto  $\Phi$  é um conjunto ortonormal.

Agora definiremos talvez o conceito mais importante para a seção seguinte, que é o conceito de projeção ortogonal. Entendendo como são os vetores do conjunto ortonormal do espaço que iremos trabalhar, agora vamos entender como vetores que não estão nesse espaço podem ser aproximados pelos vetores que estão. Através das projeções ortogonais.

## 1.5 Projeção Ortogonal

Pegando como ponto de partida o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , podemos pensar na projeção ortogonal de um vetor  $v$  sobre  $u$ , em que  $u$  é não-nulo, como sendo um vetor  $p$  contido na reta suporte do vetor  $u$  tal que forme um ângulo reto com  $v$ . A Figura 1.5.1 nos ilustra esta ideia.

Portanto o vetor  $p$  depende do vetor  $u$  para ser encontrado. Como ambos pertencem à mesma reta suporte, podemos dizer que  $p = \lambda u$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . A fim de facilitar a visualização, construiremos um vetor auxiliar  $w$  com a característica de que  $w + p = v$ . A Figura 1.5.2 retrata a discussão.

Desta forma podemos escrever que:

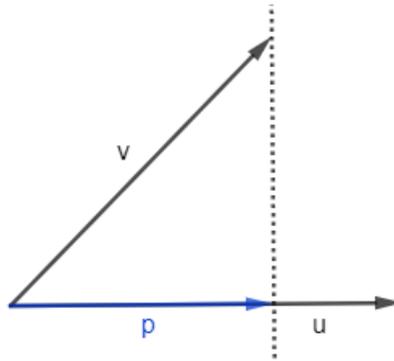


Figura 1.5.1 – Projeção ortogonal do vetor  $v$  sobre o vetor  $u$ , gerando o vetor  $p$ . Figura elaborada pela autora utilizando o programa GeoGebra.

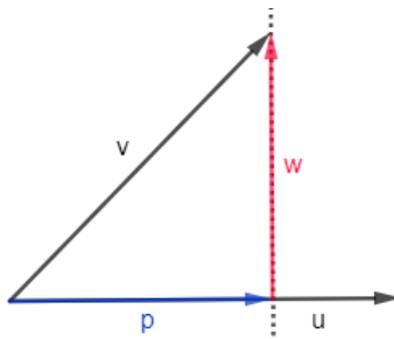


Figura 1.5.2 – Projeção ortogonal do vetor  $v$  sobre o vetor  $u$ , gerando o vetor  $p$ , com destaque para o vetor  $w$ . Figura elaborada pela autora utilizando o programa GeoGebra.

$$\begin{aligned} v &= p + w \\ &= \lambda u + w. \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno de  $u$  com  $v$ , e utilizando as propriedades de produto interno:

$$\begin{aligned} \langle u; v \rangle &= \langle u; \lambda u + w \rangle \\ &= \lambda \langle u; u \rangle + \langle u; w \rangle. \end{aligned}$$

Como  $u$  e  $w$  são ortogonais,  $\langle u, w \rangle = 0$ . Então:

$$\begin{aligned} \langle u; v \rangle &= \lambda \langle u; u \rangle \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\langle u; v \rangle}{\langle u; u \rangle}. \end{aligned}$$

em que  $u$  é diferente de 0.

Trouxemos esta intuição de  $\mathbb{R}^2$  já que nesse espaço conseguimos ilustrar as teorias. Tendo esta motivação em mente, agora vamos generalizar a ideia de projeção ortogonal para o espaço vetorial  $\mathbb{C}^n$ :

**Definição 8.** Num espaço vetorial  $\mathbb{C}^n$  com produto interno, seja  $u$  um vetor não-nulo. Dado qualquer  $v \in \mathbb{C}^n$ , o vetor

$$\frac{\langle u; v \rangle}{\langle u; u \rangle} u$$

chama-se **projeção ortogonal de  $v$  sobre o eixo que contém o vetor não-nulo  $u$** .

**Notação 2.** Para identificar a projeção ortogonal do vetor  $v$  sobre o eixo que contém o vetor não-nulo  $u$  usaremos a seguinte notação:

$$\text{pr}_u(v) = \frac{\langle u; v \rangle}{\langle u; u \rangle} u.$$

Note que no caso de o vetor  $u$  ser unitário, então teríamos uma simplificação na notação, ficando:  $\text{pr}_u(v) = \langle u; v \rangle u$ .

**Exemplo 6.** Dada uma função  $f \in \mathcal{L}^2[0, 1]$  e seja  $e_n$  um dos vetores do conjunto  $\Phi$ , citado no Exemplo 5. Logo, a projeção ortogonal de  $f$  sobre  $e_n$  é dada por:

$$\text{pr}_{e_n}(f) = \frac{\langle f; e_n \rangle}{\langle e_n; e_n \rangle} e_n$$

Como vimos anteriormente que o conjunto  $\Psi$  é ortonormal, e pela Equação (1.2.1) temos:

$$\begin{aligned} \text{pr}_{e_n}(f)(t) &= \frac{\int_0^1 f(t) \overline{e_n(t)}}{\int_0^1 e_n(t) \overline{e_n(t)}} e_n(t) \\ \Rightarrow \text{pr}_{e_n}(f)(t) &= e_n(t) \int_0^1 f(t) \overline{e_n(t)} dt. \end{aligned}$$

Poderíamos, por exemplo, escolher  $f$  como sendo  $f(t) = \cos(2\pi t)$  e um vetor  $e^{2\pi it}$  de  $\Phi$  para o qual  $n = 1$ . A partir disso, e utilizando a Fórmula de Euler temos:

$$\begin{aligned} \text{pr}_{e_n}(f)(t) &= e^{2\pi it} \cdot \int_0^1 \cos(2\pi t) \cdot \overline{e^{2\pi it}} dt \\ &= e^{2\pi it} \cdot \int_0^1 \cos(2\pi t) \cdot e^{-2\pi it} dt \\ &= e^{2\pi it} \cdot \int_0^1 \cos(2\pi t) \cdot (\cos(2\pi t) - i \text{sen}(2\pi t)) dt \\ &=^* e^{2\pi it} \left[ \int_0^1 \cos(2\pi t)^2 dt - i \int_0^1 \cos(2\pi t) \text{sen}(2\pi t) dt \right] \\ &= e^{2\pi it} \left[ \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 dt}_1 + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \cos(4\pi t) dt}_0 - \underbrace{\frac{i}{2} \int_0^1 \text{sen}(4\pi t) dt}_0 \right] \\ &= \frac{e^{2\pi it}}{2}. \end{aligned}$$

Na igualdade  $=^*$  foram usadas as seguintes igualdades trigonométricas:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \text{ e } \text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen} \theta \cos \theta.$$

Esta seria a projeção ortogonal de  $f$  sobre um dos vetores do conjunto  $\Phi$ . Para aproximar  $f$  do subespaço gerado pelos vetores de  $\Psi$  precisaríamos ter as projeções de  $f$  sobre todos os vetores de  $\Phi$ . Mas como  $\Phi$  possui infinitos vetores, teríamos que somar as projeções com relação a cada um deles, obtendo algo como:

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \cdot \int_0^1 f(t) \cdot \overline{e_n(t)} dt = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n t} \cdot \int_0^1 \cos(2\pi t) \cdot e^{-2\pi i n t} dt.$$

## 2 Séries de Fourier

Com base no capítulo anterior, agora discutiremos séries de Fourier. O objetivo por trás da representação de funções pela sua Séries de Fourier, quando possível, é fazer com que uma função **periódica**, de lei de formação muitas vezes não trivial, seja transformada numa soma de funções que mais facilmente conseguimos manipular e entender, que são as funções seno e cosseno. A beleza desta teoria está exatamente em simplificar a lei de formação de funções de comportamento menos previsível.

Mas devido a isso, precisamos nos atentar a certos aspectos:

- Será que qualquer função pode ser representada por sua série de Fourier?
- Se pudermos fazer esta representação, existem perdas de informações?
- Se não forem todas as funções que podem ser expressas, quais podem?

Para discutir tais pontos, utilizaremos fortemente as duas definições abaixo:

**Definição 9.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades de primeira ordem em qualquer intervalo limitado.

Ou seja, dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a < b$ , e  $n \in \mathbb{N}$ , existem  $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b$ , tais que  $f$  é contínua em cada intervalo aberto  $(a_j, a_{j+1})$ , com  $j \in 1, \dots, n - 1$ , e existem os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Esta definição nos permitirá entender a seguinte:

**Definição 10.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se sua função derivada  $f'$  também o for.

O leitor perceberá que durante os textos as palavras **funções** e **sinais** são tratadas como sinônimos exatamente pelo nosso objetivo final ser o de interpretar funções que codificam informações sobre sinais de imagens. Além disso, pelo fato da função ser periódica, analisando as informações no período dela saberemos prever o que acontece com a função em qualquer outro momento, posterior e anterior. Devido a isso, grande parte de nossos exemplo trazem a análise apenas do período da função.

Discutiremos todos os tópicos mencionados e outros tendo suporte na teoria já mencionada no Capítulo 1. Sem mais delongas, vamos adentrar ao estudo das Séries de Fourier:

## 2.1 Definição da Série de Fourier e de seus Coeficientes

Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função periódica de período  $2L$ . Neste momento gostaríamos de nos atentar aos coeficientes da série de Fourier, ou seja, aos números  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  que fazem com que

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right).$$

Colocamos primeiramente o símbolo de 'aproximadamente' ao invés de 'igualdade', pois ainda não sabemos ao certo se qualquer função pode ser expressa por sua série de Fourier. Tanto a igualdade dessa representação quanto a convergência da série, serão preocupações futuras trazidas neste capítulo. Antes de vermos a motivação da definição dos coeficientes precisaremos nos basear em alguns resultados retirados das referências (6) e (3). As demonstrações das proposições que se seguem podem ser encontradas em (7).

**Definição 11.** Seja uma sequência de funções  $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Uma série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , **converge uniformemente** se, dado  $\varepsilon > 0$ , existir um número inteiro  $N$ , dependendo apenas de  $\varepsilon$ , tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| < \varepsilon$$

para todos  $m > n \geq N$  e com  $x \in I$ .

**Proposição 2.** Suponhamos que as funções  $u_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , sejam contínuas e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente. Então a soma da série  $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  é também uma função contínua.

A definição 11 e a Proposição 2 são úteis para entendermos melhor nosso objeto de estudo.

**Proposição 3.** Suponhamos que as funções  $u_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , sejam integráveis em um intervalo  $I$  e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente. Então:

$$\int_I \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx.$$

**Proposição 4.** As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado, e seja  $a \in \mathbb{R}$ . Então:

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt. \quad (2.1.1)$$

2. Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função ímpar e integrável em qualquer intervalo limitado, e seja  $a \in \mathbb{R}$ , então:

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0. \quad (2.1.2)$$

As proposições 3 e 4 são especialmente importantes para nosso estudo dentro dos cálculos dos coeficientes de Fourier.

Agora suponhamos uma função  $f(t)$  que possa ser escrita como sua série de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{\pi nt}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi nt}{L}\right) \right) \quad (2.1.3)$$

e que a série convirja uniformemente para  $f$ . Podemos afirmar pela Proposição 2 que a função  $f$  é contínua. Verifica-se que um período de  $f$  é  $2L$ . Usando a Proposição 3, e utilizando a Proposição 4 podemos escrever:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(t)dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{\pi nt}{L}\right) dt + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi nt}{L}\right) dt \right) \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2 \cdot a_n \int_0^L \cos\left(\frac{\pi nt}{L}\right) dt \right) \\ &= L \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2 \cdot L \cdot a_n}{\pi n} (\operatorname{sen}(\pi n) - \operatorname{sen}0) \right) \\ \Rightarrow a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t)dt. \end{aligned}$$

Para encontrar os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  utilizaremos as seguintes relações, encontradas em (7):

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = 0, \text{ em que } n, m \geq 1. \quad (2.1.4)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \begin{cases} L, & n = m \geq 1; \\ 0, & n \neq m; n, m \geq 1. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = \begin{cases} L, & n = m \geq 1; \\ 0, & n \neq m; n, m \geq 1. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

com  $n, m \in \mathbb{Z}^*$ .

Para encontrarmos  $a_n$  multiplicamos a Equação (2.1.3) por  $\cos\left(\frac{\pi mt}{L}\right)$ , para algum  $m \in \mathbb{Z}^*$ , integramos em relação a  $t$  e após utilizaremos as relações de paridade da função para identificar o coeficiente:

$$\begin{aligned}
 f(t) \cos\left(\frac{\pi mt}{L}\right) &= \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{\pi mt}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{\pi nt}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi mt}{L}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi nt}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi mt}{L}\right) \right\} \\
 \Rightarrow \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{\pi mt}{L}\right) dt &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{\pi mt}{L}\right) dt + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L a_n \cos\left(\frac{\pi nt}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi mt}{L}\right) dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-L}^L b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi nt}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi mt}{L}\right) dt \right\} \\
 &= a_m \cdot L \\
 \Rightarrow a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{\pi mt}{L}\right) dt.
 \end{aligned}$$

Já que todos os coeficientes em que  $m \neq n$  serão iguais a 0. Para encontrar  $b_n$  faremos um processo similar, porém agora multiplicaremos a Equação (2.1.3) por  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi mt}{L}\right)$ , novamente para algum  $m \in \mathbb{Z}^*$ :

$$\begin{aligned}
 f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi mt}{L}\right) &= \frac{a_0}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi mt}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{\pi nt}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi mt}{L}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi nt}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi mt}{L}\right) \right\} \\
 \Rightarrow \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi mt}{L}\right) dt &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi mt}{L}\right) dt + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L a_n \cos\left(\frac{\pi nt}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi mt}{L}\right) dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-L}^L b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi nt}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi mt}{L}\right) dt \right\} \\
 &= b_m \cdot L \\
 \Rightarrow b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi mt}{L}\right) dt.
 \end{aligned}$$

Utilizaremos a notação  $a_n$  em vez de  $a_m$  por ser mais largamente utilizada na literatura. Dessa forma:

**Definição 12.** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período  $2L > 0$  e  $f$  e  $f'$  são seccionalmente contínuas então a **Série de Fourier da função  $f$**  é dada por

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right) \quad (2.1.7)$$

em todos os pontos de continuidade de  $f$ , com

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) dt, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) dt. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

quando tais integrais são convergentes.

Veja que neste caso estamos considerando funções de períodos qualquer, mas adotando as funções no espaço  $\mathcal{L}^2[0, 1]$  que podem ser escritas em termos de suas séries de Fourier teríamos uma notação um pouco mais simplificada, já que seu período seria 1, e  $L = \frac{1}{2}$ :

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n t) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n t))$$

com

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \int_{-1}^1 f(t) dt, \\ a_n &= 2 \int_{-1}^1 f(t) \cos(2\pi n t) dt, \\ b_n &= 2 \int_{-1}^1 f(t) \operatorname{sen}(2\pi n t) dt. \end{aligned}$$

Antes de adentrarmos nos exemplos que se seguem, gostaríamos de relembrar duas fórmulas de Prostaferese que nos serão úteis no cálculo das integrais abaixo:

$$\operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{p+q}{2} \right) \cos \left( \frac{p-q}{2} \right). \quad (2.1.9)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \operatorname{sen} \left( \frac{p+q}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{p-q}{2} \right). \quad (2.1.10)$$

**Exemplo 7.** Esboçaremos a série de Fourier da função  $f(t) = \text{sen}(2\pi t)$ .

Veja que como a função é dada em termos somente de seno, é de se esperar que os coeficientes  $a_n$  e  $a_0$  sejam nulos, e que todos os termos  $b_n$  para os quais  $n \neq 1$  sejam nulos também. Verificaremos isso.

Então, primeiramente iremos identificar quem é o período desta função. O período de uma função do tipo  $\text{sen}t$  é  $2\pi$ . Como o argumento desta função está sendo multiplicado por  $2\pi$ , um bom candidato a período seria 1. Verificando:

$$\begin{aligned} f(t+1) &= \text{sen}(2\pi(t+1)) \\ &= \text{sen}(2\pi t + 2\pi) \\ &= \text{sen}(2\pi t) \cos(2\pi) + \text{sen}(2\pi) \cos(2\pi t) \\ &= \text{sen}(2\pi t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Portanto, o período fundamental da função é 1. Dessa forma  $L = \frac{1}{2}$ . Agora podemos encontrar os coeficientes de sua série de Fourier:

- Para  $a_0$  temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \\ &= 2 \int_{-1/2}^{1/2} \text{sen}(2\pi t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como esperávamos.

- Para  $a_n$  temos::

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt \\ &= 2 \int_{-1/2}^{1/2} \text{sen}(2\pi t) \cos(2\pi n t) dt. \end{aligned}$$

Utilizando substituição  $u = 2\pi n t$  temos:

$$a_n = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi n}^{\pi n} \text{sen}\left(\frac{u}{n}\right) \cos(u) du.$$

Utilizando a fórmula 2.1.9 de Prostaferese, com  $p = \frac{u + un}{n}$  e  $q = \frac{u - un}{n}$ , e a Proposição 4 sobre paridade:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi n} \left[ \int_{-\pi n}^{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{u+un}{n}\right) du + \int_{-\pi n}^{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{u-un}{n}\right) du \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como esperávamos. Uma solução alternativa seria notar que o integrando é uma função ímpar, pois é a multiplicação de uma função par, que é a função  $\cos(2\pi nt)$ , por uma função ímpar, que é a função  $\operatorname{sen}(2\pi t)$ . Como estamos em um intervalo simétrico, o valor é 0, realmente.

- Para o cálculo de  $b_n$ :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi nt}{L}\right) dt \\ &= 2 \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sen}(2\pi t) \operatorname{sen}(2\pi nt) dt. \end{aligned}$$

Utilizando a substituição  $w = 2\pi nt$  temos:

$$b_n = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi n}^{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{w}{n}\right) \operatorname{sen}(w) dw.$$

Utilizando a fórmula 2.1.10 de Prostaferese, para  $p = \frac{w+wn}{n}$  e  $q = \frac{w-wn}{n}$ , e a Proposição 4 sobre paridade temos:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{-1}{2\pi n} \left[ \int_{-\pi n}^{\pi n} \cos\left(\frac{w+wn}{n}\right) dw - \int_{-\pi n}^{\pi n} \cos\left(\frac{w-wn}{n}\right) dw \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi n} \left[ \frac{2n}{1+n} \cdot \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{w+wn}{n}\right) \right]_0^{\pi n} - \frac{2n}{1-n} \cdot \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{w-wn}{n}\right) \right]_0^{\pi n} \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi n} \left[ \frac{2n}{1+n} \cdot [\operatorname{sen}(\pi n)] - \frac{2n}{1-n} \cdot [-\operatorname{sen}(\pi n)] \right] \\ &= \frac{-2 \operatorname{sen}(\pi n)}{\pi(n^2-1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mas veja que no terceiro passo de nossa última conta, para atender às condições de existência da fração, precisamos que  $n \neq 1$ . Então faremos o caso particular em que  $n = 1$  separadamente:

$$\begin{aligned}
b_1 &= 2 \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sen}(2\pi t) \operatorname{sen}(2\pi t) dt \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} 2(\operatorname{sen}(2\pi t))^2 dt \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} dt - \int_{-1/2}^{1/2} \cos(2\pi t) dt \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo o único coeficiente diferente de 0 será  $b_1$ . Portanto a série de Fourier da função  $f$  será:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}f(t) &= \frac{a_0}{2} + b_1 \operatorname{sen}(2\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n t) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(2\pi n t) \\
&= \underbrace{b_1}_1 \operatorname{sen}(2\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cos(2\pi n t) + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \operatorname{sen}(2\pi n t) \\
&= \operatorname{sen}(2\pi t).
\end{aligned}$$

### 2.1.1 Série de Fourier para Funções Complexas

A partir da representação da série já mencionada, conseguimos usar a Fórmula de Euler para concluir outra representação que inclua também números complexos. Lembrando que tendo a Fórmula de Euler 1.4.1 em mãos, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \\
\operatorname{cos} z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

sendo  $z \in \mathbb{R}$ .

A partir da Definição 2.1.7, e considerando que conseguimos escrever a função  $f$  como sua série de Fourier, temos:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{\pi n t}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n t}{L}\right) \right).$$

Veja que se conseguirmos provar uma equivalência desta definição para os números complexos com  $n$  percorrendo um número finito de termos no somatório, ainda valerá que para  $n$  percorrendo uma infinidade de termos teremos esta igualdade. Desta maneira e utilizando as equações em 2.1.11 segue que:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( a_n \frac{e^{\frac{\pi int}{L}} + e^{-\frac{\pi int}{L}}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{\pi int}{L}} - e^{-\frac{\pi int}{L}}}{2i} \right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{\frac{\pi int}{L}} + \left( \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-\frac{\pi int}{L}} \right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n i}{2i i} \right) e^{\frac{\pi int}{L}} + \sum_{n=1}^N \left( \frac{a_n}{2} - \frac{b_n i}{2i i} \right) e^{-\frac{\pi int}{L}} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( \frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2} \right) e^{\frac{\pi int}{L}} + \sum_{n=1}^N \left( \frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2} \right) e^{-\frac{\pi int}{L}}.
\end{aligned}$$

Agora defina:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2}; \\
c_n &= \left( \frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2} \right); \\
c_{-n} &= \left( \frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2} \right).
\end{aligned}$$

Dessa forma podemos escrever:

$$f(t) = c_0 e^{\frac{\pi i 0 t}{L}} + \sum_{n=1}^N c_n e^{\frac{\pi int}{L}} + \sum_{n=1}^N c_{-n} e^{-\frac{\pi int}{L}}.$$

Faremos uma substituição no segundo somatório, chamando  $j = -n$ . Teremos:

$$\sum_{n=1}^N c_{-n} e^{-\frac{\pi int}{L}} = \sum_{j=-1}^{-N} c_j e^{\frac{\pi i j t}{L}} = \sum_{j=-N}^{-1} c_j e^{\frac{\pi i j t}{L}}.$$

Portanto escrevemos:

$$\begin{aligned}
f(t) &= c_0 e^{\frac{\pi i 0 t}{L}} + \sum_{n=1}^N c_n e^{\frac{\pi int}{L}} + \sum_{j=-N}^{-1} c_j e^{\frac{\pi i j t}{L}} \\
&= \sum_{n=-N}^N c_n e^{\frac{\pi int}{L}}.
\end{aligned}$$

Consequentemente podemos dizer que os coeficientes complexos da série de Fourier seriam da forma:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2}; \\
c_n &= \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & \text{se } n > 0; \\ \frac{a_n + ib_n}{2}, & \text{se } n < 0; \end{cases}
\end{aligned}$$

com  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  sendo os coeficientes de Fourier. Mas uma outra maneira muito útil de representar  $c_n$  é por uma integral, assim como fizemos para os coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  e  $a_0$  anteriormente. Utilizando as definições que demos para os coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  e  $a_0$ , e a Fórmula de Euler 1.4.1 temos para  $n > 0$ :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) dt - i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) dt \right) \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \left( \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) - i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right) dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-\frac{\pi i n t}{L}} dt. \end{aligned}$$

E para  $n < 0$  temos:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) dt + i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) dt \right) \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \left( \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right) dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{\frac{\pi i n t}{L}} dt. \end{aligned}$$

Além do que para  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-\frac{\pi i 0 t}{L}} dt. \end{aligned}$$

E dessa maneira mostramos que se conseguimos escrever uma função complexa na forma de 2.1.12, então seu coeficiente será da forma:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-\frac{\pi i n t}{L}} dt.$$

Definimos:

**Definição 13.** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é periódica de período  $2L > 0$ ,  $f$  e  $f'$  são seccionalmente contínuas, então a **Série de Fourier da função**  $f$  é dada por

$$\mathcal{S}f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{\pi i n t}{L}} \quad (2.1.12)$$

em todos os pontos de continuidade de  $f$ , com

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-\frac{\pi i n t}{L}} dt$$

quando tal integral é convergente.

Essa representação nos é muito útil por abarcar as funções complexas, mas também pela forma mais enxuta que se mostra em relação à representação para funções reais. É interessante notar que da forma como definimos,  $c_0$  será sempre um número real.

Perceba que o intervalo de integração pode ser modificado, desde que se respeite o intervalo periódico  $2L$  da função. Ou seja, estamos querendo dizer que:

$$g(a) = \frac{1}{2L} \int_a^{a+2L} f(t) e^{-\frac{\pi int}{L}} dt$$

é uma função constante,  $\forall a \in \mathbb{R}$ . Uma das formas de mostrarmos isso é ver que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left( \int_a^{a+2L} f(t) e^{-\frac{\pi int}{L}} dt \right) &= e^{-\frac{\pi in(a+2L)}{L}} f(a+2L) - e^{-\frac{\pi ina}{L}} f(a) \\ &= e^{-\frac{\pi ina}{L}} e^{-2\pi in} f(a+2L) - e^{-\frac{\pi ina}{L}} f(a) \\ &\stackrel{=1}{=} e^{-\frac{\pi ina}{L}} e^{-2\pi in} f(a) - e^{-\frac{\pi ina}{L}} f(a) \\ &= e^{-\frac{\pi ina}{L}} f(a) (e^{-2\pi in} - 1) \\ &= e^{-\frac{\pi ina}{L}} f(a) ((e^{-\pi i})^{2n} - 1) \\ &\stackrel{=2}{=} e^{-\frac{\pi ina}{L}} f(a) (1^{2n} - 1) \\ &= e^{-\frac{\pi ina}{L}} f(a) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

A igualdade  $\stackrel{=1}{=}$  se deve ao fato de que a função  $f$  é periódica de período  $2L$ , portanto  $f(a) = f(a+2L)$ . E a igualdade  $\stackrel{=2}{=}$  é derivada da Fórmula de Euler (Proposição 1).

Isso quer dizer que, no caso de funções  $f$  seccionalmente contínua definida no intervalo  $[0, 1]$ , sua série de Fourier poderia ser escrita como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int} \tag{2.1.13}$$

com

$$c_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi int} dt. \tag{2.1.14}$$

Vamos a um exemplo de um cálculo da Série de Fourier utilizando a representação complexa:

**Exemplo 8.** Escreveremos a série de Fourier em sua representação complexa da função Box, definida pela lei de formação abaixo, e fazendo sua extensão periódica de período 1 para que a função se torne periódica. Ou seja, essa mesma lei de formação se repete em um intervalo de um em um, a partir do intervalo citado:

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

O gráfico da função Box pode ser encontrado na Figura 2.1.1.

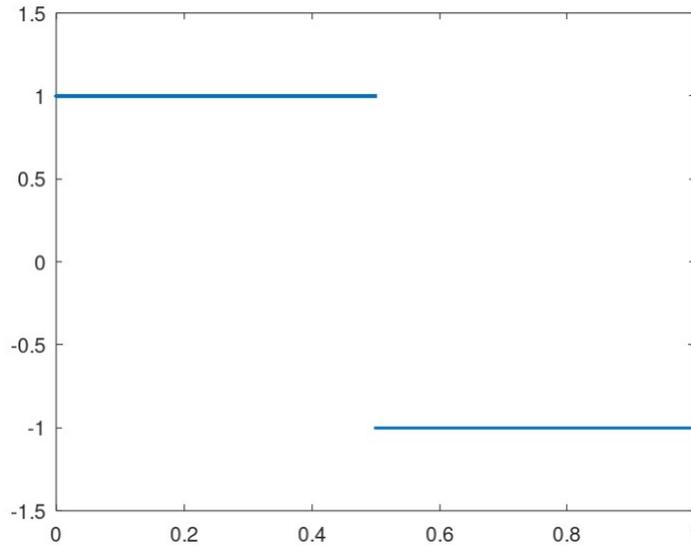


Figura 2.1.1 – Gráfico da função Box. O código dessa imagem pode ser encontrado no apêndice 5 em 5.1.

Para esta função consideramos que o período fundamental é 1, e dessa forma  $L = \frac{1}{2}$ . E veja que a Função Box é seccionalmente contínua no intervalo  $[0, 1]$ , e portanto podemos representar seus coeficientes pela Equação (2.1.14). Então para encontrar sua equação faremos para  $n \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
 c_n &= \int_0^1 g(t)e^{-2\pi int} dt \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi int} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-2\pi int} dt \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi nt) - i \operatorname{sen}(2\pi nt) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(2\pi nt) - i \operatorname{sen}(2\pi nt) dt \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi nt) dt - i \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(2\pi nt) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(2\pi nt) dt + i \int_{\frac{1}{2}}^1 \operatorname{sen}(2\pi nt) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi n} (\underbrace{\operatorname{sen}(\pi n)}_0 - \underbrace{\operatorname{sen}0}_0 + i \underbrace{\cos(\pi n)}_1 - i \underbrace{\cos 0}_1 - \underbrace{\operatorname{sen}(2\pi n)}_0 + \underbrace{\operatorname{sen}(\pi n)}_0 \\
 &\quad - i \underbrace{\cos(2\pi n)}_1 + i \underbrace{\cos(\pi n)}_1).
 \end{aligned}$$

Veja que a partir desse momento, dependendo do valor de  $n$  ser par ou ímpar, os valores dos cossenos serão diferentes. Portanto dividiremos em dois casos:

- Caso  $n$  seja par:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2\pi n} (\underbrace{\operatorname{sen}(\pi n)}_0 - \underbrace{\operatorname{sen}0}_0 + i \underbrace{\cos(\pi n)}_1 - i \underbrace{\cos 0}_1 - \underbrace{\operatorname{sen}(2\pi n)}_0 + \underbrace{\operatorname{sen}(\pi n)}_0 \\
 &\quad - i \underbrace{\cos(2\pi n)}_1 + i \underbrace{\cos(\pi n)}_1) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

- Caso  $n$  seja ímpar:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2\pi n} \left( \underbrace{\text{sen}(\pi n)}_0 - \underbrace{\text{sen}0}_0 + i \underbrace{\cos(\pi n)}_{-1} - i \underbrace{\cos 0}_1 - \underbrace{\text{sen}(2\pi n)}_0 + \underbrace{\text{sen}(\pi n)}_0 \right. \\
 &\quad \left. - i \underbrace{\cos(2\pi n)}_1 + i \underbrace{\cos(\pi n)}_{-1} \right) \\
 &= \frac{-4i}{2\pi n} \\
 &= \frac{-2i}{\pi n}.
 \end{aligned}$$

No caso de  $n = 0$  teremos:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \int_0^1 g(t) e^0 dt \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 dt \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto para esta função, seu coeficiente de Fourier será:

$$c_n = \begin{cases} \frac{-2i}{\pi n}, & \text{se } n \text{ for ímpar;} \\ 0, & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Com isso temos que a Série de Fourier complexa da função  $g$  é da forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t} = \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{-2i}{\pi n} e^{2\pi i n t}.$$

### 2.1.2 Propriedades dos Coeficientes da Série de Fourier

Usualmente destinamos a notação de  $c_n$  para os coeficientes da Série de Fourier para funções complexas, e reservamos os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  para a Série de Fourier de funções reais. Outra maneira usual de nos referirmos a  $c_n$  é como  $\hat{f}(n)$ .

É interessante notar que se estamos trabalhando com um sinal que é real, então  $c_{-n} = \overline{c_n}$ . De fato:

$$\begin{aligned}
c_{-n} &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{\frac{-\pi i(-n)t}{L}} f(t) dt \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{\frac{\pi i n t}{L}} f(t) dt \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{\frac{-\pi i n t}{L}} \overline{f(t)} dt \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \overline{e^{\frac{-\pi i n t}{L}} f(t)} dt \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{\frac{-\pi i n t}{L}} f(t) dt \\
&= \overline{c_n}.
\end{aligned}$$

O que reforça ainda mais o fato de que  $c_0$  é um número real. De fato, ao se calcular  $c_0$  teremos exatamente a média da função  $f$ , por definição:

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{\frac{-\pi i t 0}{L}} f(t) dt = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt.$$

### 2.1.3 Espectro de Potências

Podemos representar graficamente uma função  $f$  pelo módulo de seus coeficientes da Série de Fourier ao quadrado e suas frequências. Esta é uma outra maneira de representar a função  $f$ , comumente encontrada na literatura pelo fato de explicitar a composição das frequências de cada exponencial no sinal. Esta representação será chamada de **espectro de potências da função  $f$** .

O gráfico é construído utilizando o módulo dos coeficientes da Série de Fourier pois como os coeficientes são complexos, é necessário para a construção do gráfico que eles estejam em módulo. A frequência da exponencial  $e^{2\pi i n t}$  associada a cada coeficiente é dada pelos índices  $n$  que os acompanham. O nome do conjunto de frequências associadas a cada exponencial complexa é **Domínio de Frequências**. Porém, por abuso de notação, muitas vezes falamos apenas “as frequências que constituem a função  $f$ ”.

Por exemplo, iremos representar o espectro de potências da função Box, citada no Exemplo 8. Destacamos abaixo alguns dos coeficientes da função Box e suas respectivas frequências associadas:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t} &= \dots - \frac{2}{3\pi i} e^{2\pi i(-3)t} - 0 e^{2\pi i(-2)t} - \frac{2}{\pi i} e^{2\pi i(-1)t} + 0 e^{2\pi i(0)t} + \frac{2}{\pi i} e^{2\pi i(1)t} + \\
&\quad + 0 e^{2\pi i(2)t} + \frac{2}{3\pi i} e^{2\pi i(3)t} + \dots
\end{aligned}$$

Dessa forma, conseguimos construir o gráfico presente na Figura 2.1.2.

Vimos na seção anterior a  $c_{-n} = \overline{c_n}$ . Aqui podemos visualizar este fato olhando a simetria do gráfico em relação à origem.

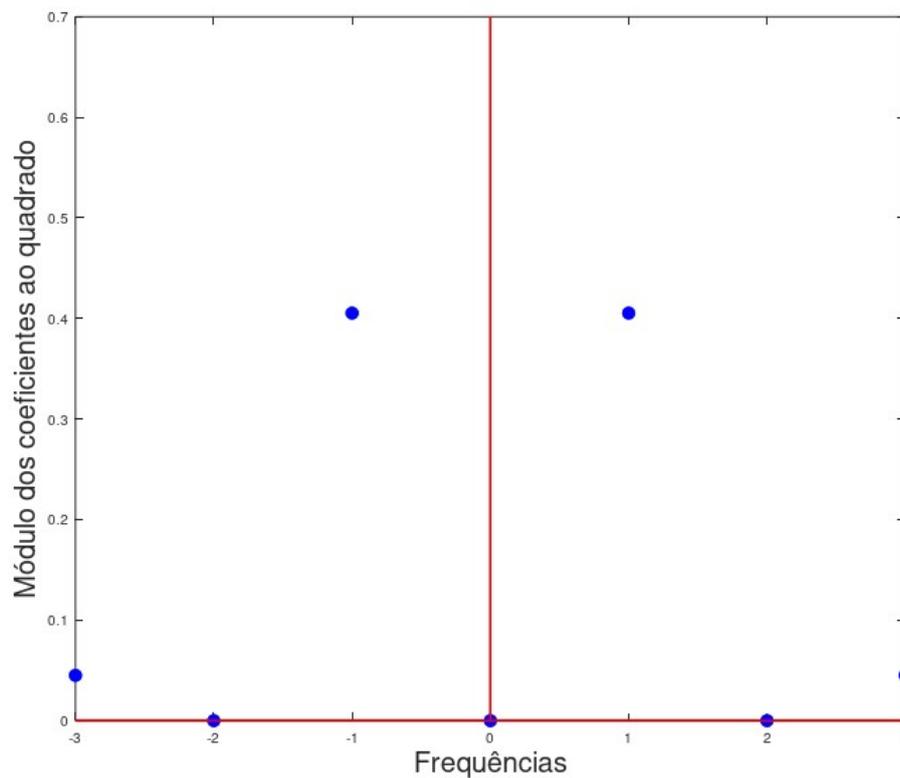


Figura 2.1.2 – Gráfico do espectro de potências da Função Box. O código dessa imagem pode ser encontrado no apêndice 5 em 5.2.

## 2.2 Fenômeno de Gibbs

Como vimos no capítulo anterior, na seção 1.5, sabemos que a projeção ortogonal de uma função aproxima a função de um conjunto ortogonal quando conseguimos as projeções da função sobre todos os vetores desse conjunto. E quando limitamos essa quantidade de vetores, temos um problema na representação, o qual em processamento de imagens é conhecido como **Fenômeno de Gibbs**. Essa limitação de projeções, ou informações, pode ser entendida até mesmo como um problema estrutural. Isso porque não conseguimos processar infinitos dados em um computador.

Ilustraremos este problema com a função box, trazida no Exemplo 8:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

cuja representação por série de Fourier é dada por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t} = \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{-2i}{\pi n} e^{2\pi i n t}$$

com

$$c_n = \begin{cases} \frac{-2i}{\pi n}, & \text{se } n \text{ for ímpar;} \\ 0, & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Utilizaremos a representação gráfica apenas no intervalo  $[0, 1]$ , tanto para a função quanto para suas séries. Implementando a lei de formação da função no programa Octave obtemos a Figura 2.2.1. Agora, como é computacionalmente impossível implementar infinitos termos, precisamos fazer as aproximações para  $n$  finito. O resultado para uma aproximação de  $n = 5$ , ou seja, com o somatório variando de  $n = -5$  até  $n = 5$ , é encontrado na Figura 2.2.2; o resultado para uma aproximação de  $n = 50$ , ou seja, com o somatório variando de  $n = -50$  até  $n = 50$ , é encontrado na Figura 2.2.3; e o resultado para uma aproximação de  $n = 100$ , ou seja, com o somatório variando de  $n = -100$  até  $n = 100$ , é encontrado na Figura 2.2.4.

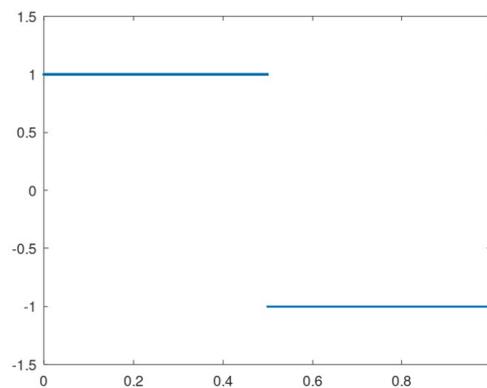


Figura 2.2.1 – Gráfico da função Box. O código dessa imagem pode ser encontrado no apêndice 5 em 5.1.

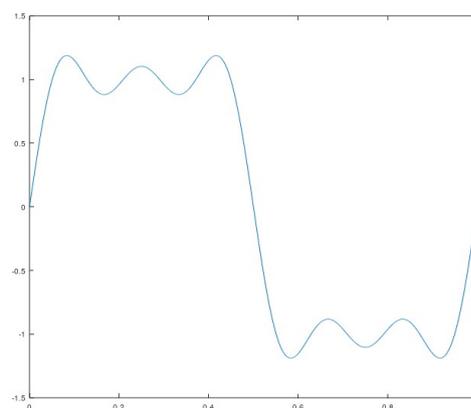


Figura 2.2.2 – Gráfico da Série de Fourier da função Box para  $n = 5$ . O código dessa imagem pode ser encontrado no apêndice 5 em 5.3.

Podemos ver que conforme aumentados o valor de  $n$ , ou seja, o número de frequências utilizadas para formar nossa função, mais próxima a representação na parte contínua se torna. Porém a parte descontínua permanece com um erro, um sobressalto na curva não existente na função original, o qual só seria reparado com  $n \rightarrow \infty$ .

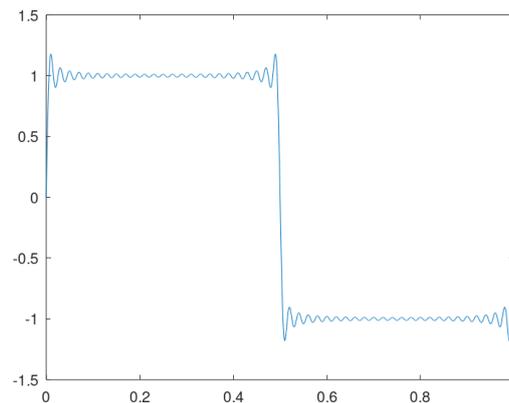


Figura 2.2.3 – Gráfico da Série de Fourier da função Box para  $n = 50$ . O código dessa imagem pode ser encontrado no apêndice 5 em 5.3.

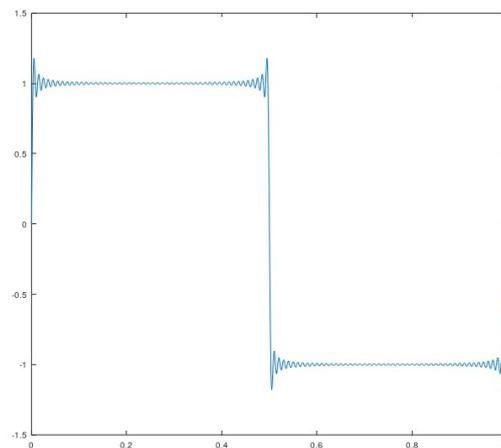


Figura 2.2.4 – Gráfico da Série de Fourier da função Box para  $n = 100$ . O código dessa imagem pode ser encontrado no apêndice 5 em 5.3.

### 2.2.1 O elo com as projeções ortogonais

Vimos no capítulo 1 na seção 1.5, com o Exemplo 6, que conseguimos escrever a projeção ortogonal de  $f$  sobre todos os vetores do conjunto ortonormal  $\Phi$  como sendo aproximadamente:

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \cdot \int_0^1 f(t) \cdot \overline{e_n(t)} dt \\ &\approx \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n t} \cdot \int_0^1 f(t) \cdot e^{-2\pi i n t} dt. \end{aligned}$$

Neste capítulo definimos através da Equação (2.1.13) que para  $f \in \mathcal{L}^2[0, 1]$ , poderíamos escrever sua série de Fourier como:

$$\mathcal{S}f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t}$$

com

$$c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int} dt.$$

Então quando fazemos a série de Fourier de uma função  $f \in \mathcal{L}^2[0, 1]$  o que essencialmente fazemos é tentar descrever a função  $f$  projetada sobre o conjunto das funções exponenciais, o qual chamamos de  $\Phi$ . No exemplo trabalhado o espaço escolhido foi o  $\mathcal{L}^2[0, 1]$ , porém poderíamos pegar funções em outros espaços em  $\mathcal{L}^2(I)$ , com  $I$  sendo um intervalo qualquer, que a lógica seria a mesma.

A partir dessa identificação conseguimos um olhar mais apurado sobre o fenômeno de Gibbs, entendendo que a aproximação de  $f$  sobre  $\Phi$  é possível somente com uma quantidade infinita de vetores, pois é assim que é formado o conjunto  $\Phi$ .

## 2.3 Teoremas sobre a Série de Fourier

Esta seção é dedicada a três resultados teóricos para saciar possíveis questionamentos a respeito da aplicabilidade de nossa teoria. Mostraremos a seguir sob quais circunstâncias a sua série de Fourier converge pontualmente para a função que representa, quando a série de Fourier de uma função converge uniformemente e em quais termos existe a unicidade da representação.

### 2.3.1 Teorema da Convergência Pontual da Série de Fourier

Este teorema é muito importante dentro de nossa teoria, pois ele revela uma característica local da série de Fourier, que é a convergência em cada ponto  $x$  da função para sua devida série de Fourier calculada no mesmo. Característica essa relevante até mesmo na demonstração do próximo resultado.

Por uma escolha da autora a demonstração desse teorema não foi apresentada, apenas comentada. O principal motivo foi a organização com o tempo, visto que este teorema possui algumas técnicas importantes nas quais investiríamos um tempo que será poupado para podermos discutir com mais profundidade a parte de processamento de imagens. Indicamos que a demonstração na íntegra pode ser encontrada na referência (6).

**Teorema 3.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e de período  $2L$ . Então a série de Fourier da função  $f$  fica bem definida e converge em cada ponto  $t$  para  $\frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \right]$ , isto é:

$$\frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right).$$

O que nos mostra que a média dos limites laterais da função aplicada no ponto será exatamente o valor da série de Fourier da função aplicada no mesmo ponto. E veja que, quando  $f$  for contínua, o lado esquerdo dessa igualdade é exatamente  $f(t)$ .

Uma demonstração possível para este teorema é dividir as funções que serão verificadas em três grupos, reunindo-as de tal forma a conseguir utilizar o **Teste de Dini** para demonstrar cada caso. Esse teste pode ser encontrado na referência (6).

O Teste de Dini estipula sobre quais circunstâncias o erro existente entre a **soma parcial da série de Fourier** da função  $f$  no ponto  $x$ , dada por

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n \left( a_j \cos \left( \frac{\pi j t}{L} \right) + b_j \operatorname{sen} \left( \frac{\pi j t}{L} \right) \right)$$

e o valor da função  $f$  aplicada no ponto  $x$  tende a 0.

### 2.3.2 Teorema da Convergência Uniforme

Este teorema traça o comportamento necessário e suficiente para que a série de Fourier de uma função convirja uniformemente, conforme definição trazida em 11.

Para demonstrarmos o teorema desejado, definiremos alguns conceitos e traremos algumas propriedades necessárias. Algumas demonstrações foram, por escolha da autora, omitidas por entrarem em certos aspectos do desenvolvimento teórico que fugiriam do objetivo principal do trabalho. Mas para os leitores interessados, indicaremos referências adequadas.

Consideraremos uma adaptação da Definição 5: o espaço de funções  $\mathcal{L}^2[-L, L]$ , lembrando que nesse caso teremos:

$$\int_{-L}^L |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.3.1)$$

**Expressões alternativas dos coeficientes de Fourier:** Suponha que  $f$  seja periódica, de período  $2L$ , derivável de modo que  $f$  e  $f'$  são seccionalmente contínuas. Temos:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) dt.$$

Ao integrarmos por partes, com  $u = f(t)$  e  $dv = \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right)$  obtemos:

$$a_n = \frac{1}{L} \left[ \frac{L}{n\pi} f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(t) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) dt \right].$$

Como  $f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi nt}{L} \right) \Big|_{-L}^L = 0$  obtemos:

$$a_n = \frac{-1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(t) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi nt}{L} \right) dt. \quad (2.3.2)$$

Analogamente, para  $b_n$  temos:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi nt}{L} \right) dt.$$

Ao integrarmos por partes, com  $u = f(t)$  e  $dv = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi nt}{L} \right)$  obtemos:

$$b_n = \frac{1}{L} \left[ \frac{-L}{n\pi} f(t) \cos \left( \frac{\pi nt}{L} \right) \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(t) \cos \left( \frac{\pi nt}{L} \right) dt \right].$$

Veja que como  $f$  é periódica de período  $2L$ :

$$\frac{-L}{n\pi} f(t) \cos \left( \frac{\pi nt}{L} \right) \Big|_{-L}^L = \frac{-L}{n\pi} [f(L) \cos(\pi n) - f(-L) \cos(-\pi n)] = 0.$$

Portanto:

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(t) \cos \left( \frac{\pi nt}{L} \right) dt. \quad (2.3.3)$$

Esta forma alternativa nos será necessária durante a demonstração do teorema 5.

**Proposição 5.** Seja  $n \in \mathbb{N}$  e sejam  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $b_n = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  vetores do  $\mathbb{R}^n$ . A **Desigualdade de Cauchy-Schwarz** para vetores do  $\mathbb{R}^n$  tem a seguinte forma:

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A demonstração dessa desigualdade pode ser encontrada em (7).

**Teorema 4** (Identidade de Parseval). Para  $f \in \mathcal{L}^2[-L, L]$  e considerando sua série de Fourier temos:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrado em (6).

**Lema 1.** Seja  $a, b \in \mathbb{R}$ . Então  $(|a| + |b|)^2 \leq 2 \cdot (|a|^2 + |b|^2)$ .

*Demonstração.* Tome  $a, b \in \mathbb{R}$ . Veja que:

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2 \cdot |a| \cdot |b| + |b|^2$$

$$2 \cdot |a| \cdot |b| \leq |a|^2 + |b|^2$$

ou

$$|a| \cdot |b| \leq |a|^2 + |b|^2.$$

Ao mesmo tempo, veja que:

$$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2 \cdot |a| \cdot |b| + |b|^2$$

$$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \leq 2 \cdot (|a|^2 + |b|^2).$$

■

Agora vamos para o enunciado e posterior demonstração do teorema da convergência da série de Fourier para a função que ela representa:

**Teorema 5.** Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$  e  $f'$  seccionalmente contínua em  $[-L, L]$ . Então a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$ .

*Demonstração.* Considere a definição da série de Fourier de uma função  $f$  (2.1.7) e de seus coeficientes (2.1.8), com  $f' \in \mathcal{L}^2[-L, L]$ . Para mostrar a convergência uniforme da série de Fourier, vamos mostrar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right)$$

converge uniformemente. Podemos simplificar a análise vendo que:

$$\left| a_n \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right| = |a_n| \left| \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right| \leq |a_n|.$$

Já que  $-1 \leq \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \leq 1$ . De maneira análoga, podemos escrever que

$$\left| b_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right| \leq |b_n|.$$

Então vamos verificar em quais condições se dá a convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|). \quad (2.3.4)$$

Considerando os coeficientes da função derivada de  $f$  como sendo:

$$a_n' = \int_{-L}^L f'(t) \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) dt \text{ e } b_n' = \int_{-L}^L f'(t) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) dt$$

pela estimativa dos coeficientes de Fourier nas equações 2.3.3 e 2.3.2, obtemos

$$a_n = \frac{-L}{\pi n} b_n' \text{ e } b_n = \frac{L}{\pi n} a_n'.$$

Portanto, a reduzida de ordem  $n$  da série 2.3.4 é:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) &= \sum_{k=1}^n \left( \left| \frac{-L}{\pi k} b_k' \right| + \left| \frac{L}{\pi k} a_k' \right| \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{L}{\pi k} |b_k'| + \frac{L}{\pi k} |a_k'| \right) \\ &= \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a_k'| + |b_k'|). \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz citada na Proposição 5, temos que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a_k'| + |b_k'|) \leq \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n (|a_k'| + |b_k'|)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou, como  $L > 0$ , podemos escrever que:

$$\frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a_k'| + |b_k'|) \leq \frac{L}{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n (|a_k'| + |b_k'|)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, obtemos uma majoração para reduzidas da série 2.3.4:

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) \leq \frac{L}{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n (|a_k'| + |b_k'|)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando o lema 1, obtemos da expressão acima a seguinte majoração para a reduzida da série 2.3.4:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) &\leq \frac{L}{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n 2 (|a_k'|^2 + |b_k'|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n |a_k'|^2 + |b_k'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto, quando  $n \rightarrow \infty$ , a série numérica  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  converge (conforme encontrado na referência (3)) e, pela Identidade de Parseval 4 aplicada à derivada:

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) \leq \underbrace{\frac{\sqrt{2}L}{\pi}}_{\text{constante}} \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{converge}} \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k'|^2 + |b_k'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f'(x)|^2 dx}.$$

Como  $f' \in \mathcal{L}^2[-L, L]$  sabemos que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f'(x)|^2 dx \leq \infty.$$

Logo a série converge. Sabemos pelo teorema anterior que a série converge pontualmente para  $f$ . Logo, a série converge uniformemente para  $f$ . ■

Apesar de termos utilizado na demonstração apenas a representação real, como ambas as representações são análogas para funções complexas, então o teorema se estende para funções reais e complexas que acatem as hipóteses.

### 2.3.3 Teorema da Unicidade

**Teorema 6.** Sejam  $f$  e  $g$  funções periódicas de período  $2L$ , contínuas e com  $f'$  e  $g'$  seccionalmente contínuas em  $[-L, L]$ . Suponha que suas séries de Fourier sejam as mesmas. Então  $f = g$ .

*Demonstração.* Considere a definição da série de Fourier de duas funções  $f$  e  $g$  (2.1.7) e de seus respectivos coeficientes (2.1.8) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &=^1 \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right); \\ g(x) &=^2 \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) + d_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right). \end{aligned}$$

Como hipótese temos que suas séries de Fourier são iguais, ou seja:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n \cos \left( \frac{\pi n t}{L} \right) + d_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n t}{L} \right) \right).$$

Então das igualdades  $=^1$  e  $=^2$  segue que  $f = g$  em todos os pontos de continuidade, já que a Definição 2.1.7 diz respeito apenas aos pontos de continuidade. ■

Este teorema nos mostra que a Série de Fourier capta melhor o comportamento de partes contínuas de funções do que de partes descontínuas. Isso evidencia a necessidade do estudo de outras possíveis representações, como trataremos no próximo capítulo, porém não desqualifica esta representação.

## 3 Transformada de Fourier

No capítulo anterior, trabalhamos com a série de Fourier, que pode ser aplicada somente em funções que são periódicas. Gostaríamos de estender este conceito para funções que não são periódicas, para assim abarcar mais tipos de funções, mantendo um paralelo com certos conceitos já estudados até então. Para isso, estudaremos sobre a **Transformada de Fourier**, que atenderá essa demanda. Além disso, definiremos a **Transformada Inversa de Fourier**, e entenderemos a relação que existe entre a transformada de Fourier com os coeficientes da série de Fourier, e da transformada inversa de Fourier com a série de Fourier.

Além disso, na seção 3.3 iniciaremos a discussão sobre aplicação dos conceitos estudados para imagens, discutindo como entender uma imagem como uma função, e como estender as definições trazidas para funções em  $\mathbb{R}^2$ . Além disso, vamos discutir sobre quais aspectos podemos identificar uma imagem e seu espectro de potências.

### 3.1 Definição da Transformada de Fourier

Tentaremos por meio de uma abordagem informal intuir a expressão para a transformada de Fourier. Inicialmente interpretaremos funções que não são periódicas como sendo funções periódicas cujo período  $T$  tende a infinito. Dessa forma, essas funções que a princípio não poderiam ser representadas por sua série de Fourier passam a ter uma definição alternativa de período. Seria interessante se para termos a forma da transformada de Fourier simplesmente calculássemos o limite de  $T \rightarrow \infty$ . Mas, como veremos a seguir, isso nos traz um certo tipo de problema, com o qual teremos de lidar.

Tomando um caso um pouco mais simples de início, vamos trabalhar com um grupo especial de funções, que são as funções com **suporte compacto**. Essas funções possuem a característica de, após determinado valor, serem nulas. Essa adaptação será feita visando uma simplificação dos cálculos, porém as definições encontradas servirão para funções de suporte compacto ou não. Da mesma maneira que fizemos no Exemplo (8), repetiremos a lei de formação da função para que ela se torne periódica, fazendo sua extensão periódica, em um intervalo de  $T$  em  $T$ .

Então vamos considerar uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , com suporte compacto e extensão periódica de período  $T$ . Calcularemos seu coeficiente de Fourier de acordo com a Definição 13.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\pi i \frac{n}{T} t} f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\pi i t \frac{n}{T}} f(t) dt. \end{aligned}$$

Como a partir de certo ponto a função se anula, podemos mudar os limites de integração para a parte que contém as informações não nulas da função. Supondo que a função seja diferente de zero no intervalo  $[a, b]$  temos:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^b e^{-2\pi i t \frac{n}{T}} f(t) dt.$$

A representação dos coeficientes pode ser feita no domínio de frequências, como vimos na seção 2.1.3. E para isso, como as funções e seus coeficientes podem ser complexos, é necessário que se tire o módulo dos coeficientes. Então temos:

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \frac{1}{T} \int_a^b e^{-2\pi i t \frac{n}{T}} f(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{T} \int_a^b |e^{-2\pi i t \frac{n}{T}}| |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Nesse momento, quando fizermos  $T \rightarrow \infty$  teremos que  $\frac{n}{T} \rightarrow 0$ , então  $e^{-2\pi i t \frac{n}{T}} = 1$ . Restará:

$$|c_n| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Mas  $\int_a^b |f(t)| dt$  é um número  $M \in \mathbb{R}$ . Isso quer dizer que  $|c_n| \leq \frac{M}{T}$ . O que quer dizer que quando  $T \rightarrow \infty$  os coeficientes vão para 0! Isso não nos será útil, afinal dessa maneira não ganharemos nenhum tipo de informação do sinal. O que faremos para contornar este problema será alterar  $\frac{n}{T}$ , que é uma variável discreta, para uma variável contínua. Consideraremos  $\frac{n}{T} = \omega$ , e com isso queremos que  $n \rightarrow \infty$  ao passo que  $T \rightarrow \infty$ . Dessa forma definimos a transformada de Fourier de  $f$  como:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

**Para uma definição formal:** Precisaremos investir um tempo analisando a convergência dessa integral. Nesse sentido, precisamos definir um espaço no qual as funções que trataremos terão um comportamento específico que fará com que a integral convirja para um número. Vejamos:

A fórmula que encontramos pode ser reescrita como:

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

e com isso veja que as características que estamos procurando nesse espaço são:

1.  $f$  precisa ser seccionalmente contínua em cada intervalo  $[-M, N]$ , pois isso fará com que a função  $f(t)e^{-2\pi i\omega t}$  seja limitada e integrável no intervalo  $[-M, N]$ ;
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \leq \infty$ , pois isso implica que  $\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt$  existe, em outras palavras, que ele tem um valor limitado. De fato, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $K > 0$  tal que:

$$\int_{-\infty}^{-K} |f(x)|dx + \int_K^{\infty} |f(x)|dx < \epsilon$$

e além disso:

$$\left| \int_{-\infty}^{-K} e^{-2\pi i\omega t} f(x)dx + \int_K^{\infty} e^{-2\pi i\omega t} f(x)dx \right| \leq \int_{-\infty}^{-K} |f(x)|dx + \int_K^{\infty} |f(x)|dx.$$

Uma classe que comporta funções com essas características é o espaço de funções  $\mathcal{L}^1$ , espaço este bastante similar com o espaço  $\mathcal{L}^2$  citado no capítulo 1, mas que oferece funções  $f$  tais que o item 2 é satisfeito e que portanto a integral imprópria da função também converge. Porém dada  $f \in \mathcal{L}^1$  não é verdade que  $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$ , como mostrado no exemplo abaixo.

**Exemplo 9.** A função pulso unitária é dada por:

$$u_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

e sua transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot e^{-2\pi i\omega x} dx + \int_{-1}^1 e^{-2\pi i\omega x} dx + \int_1^{\infty} 0 \cdot e^{-2\pi i\omega x} dx \\ &= \int_{-1}^1 \cos(2\pi\omega x) dx - i \underbrace{\int_{-1}^1 \text{sen}(2\pi\omega x) dx}_0 \\ &= \left. \frac{\text{sen}(2\pi\omega x)}{2\pi\omega} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\text{sen}(2\pi\omega)}{2\pi\omega} - \frac{\text{sen}(-2\pi\omega)}{2\pi\omega} \\ &\stackrel{2}{=} \frac{\text{sen}(2\pi\omega)}{2\pi\omega} + \frac{\text{sen}(2\pi\omega)}{2\pi\omega} \\ \Rightarrow \hat{f}(\omega) &= \frac{\text{sen}(2\pi\omega)}{\pi\omega}. \end{aligned}$$

Utilizamos em  $=^1$  a Proposição 2.1.2 e em  $=^2$  o fato da função seno ser ímpar. Note que  $u_1(x) \in \mathcal{L}^1$ . De fato, de  $u_1(x) \geq 0$ , para todo  $x$  temos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u_1(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x) dx = \int_{-\infty}^{-1} u_1(x) dx + \int_{-1}^1 u_1(x) dx + \int_1^{\infty} u_1(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^{\infty} 0 dx \\ &= x \Big|_{-1}^1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que  $\hat{f}(\omega) \notin \mathcal{L}^1$ . Faremos isso provando que a integral abaixo diverge

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\text{sen}(2\pi\omega)}{\pi\omega} \right| d\omega.$$

Para fins de simplificação de cálculo, retornaremos a  $\hat{f}(\omega) = \frac{2 \text{sen}(2\pi\omega)}{2\pi\omega}$  e veja que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \text{sen}(2\pi\omega)}{2\pi\omega} d\omega &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi\omega)}{2\pi\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(z)}{z} dz \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 \frac{\text{sen}(z)}{z} dz + \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(z)}{z} dz \right] \end{aligned}$$

com  $z = 2\pi\omega$ . Além disso, veja que a constante nesse caso não interfere em nossa análise, visto que precisamos verificar se esta integral diverge ou não, e que se somente uma das integrais divergir já será suficiente para inferir que a soma delas diverge. Logo analisaremos apenas que a integral abaixo diverge

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\text{sen}(z)}{z} \right| dz = \int_0^{\infty} \frac{|\text{sen}(z)|}{z} dz.$$

Considere intervalos  $I_k = [k\pi; (k+1)\pi]$  e veja que:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\text{sen}(z)|}{z} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\text{sen}(z)|}{z} dz. \quad (3.1.1)$$

O que estamos fazendo é dividir o intervalo real em intervalos de  $k\pi$  até  $(k+1)\pi$ . E dentro deste intervalo, o maior valor assumido por  $z$  é  $(k+1)\pi$ ; dessa forma

$$\sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\text{sen}(z)|}{z} dz \geq \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\text{sen}(z)|}{(k+1)\pi} dz. \quad (3.1.2)$$

Agora veja que

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(z)|}{(k+1)\pi} dz &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\operatorname{sen}(z)| dz \\
&= \frac{-1}{(k+1)\pi} \cos z \Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\
&= \frac{-1}{(k+1)\pi} [\cos((k+1)\pi) - \cos(k\pi)] \\
&= \frac{-1}{(k+1)\pi} [-1 - 1] \\
&= \frac{2}{(k+1)\pi}.
\end{aligned}$$

Mas  $\sum_{k=0}^n \frac{2}{(k+1)\pi}$  é uma p-série com  $p < 1$  e portanto divergente (isso pode ser encontrado na referência (3)). Analisando as equações em 3.1.1 e 3.1.2 temos a situação:

$$\int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen}(z)|}{z} dz \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Pelo fato da série  $\sum_{k=0}^n \frac{2}{(k+1)\pi}$  divergir, então quando  $n \rightarrow \infty$  isso também irá divergir, e portanto  $\int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen}(z)|}{z} dz$  diverge.

Dessa forma, temos uma teoria um tanto quanto assimétrica. Um dos problemas disso é o fato de a composição de transformadas de Fourier não necessariamente pertencerem ao espaço  $\mathcal{L}^1$ , assim como o fato de não conseguirmos definir uma função inversa da transformada que ainda esteja no espaço. Por conseguinte, iremos tomar um subconjunto de  $\mathcal{L}^1$  de forma a garantir que esse tipo de contradição não aconteça. O referido espaço é definido abaixo:

**Definição 14.** O **Espaço de Schwarz**, ou espaço das funções rapidamente decrescentes, o qual denotaremos por  $\mathcal{S}$ , é o subespaço vetorial de  $\mathcal{L}^1$  formado pelas funções  $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  tais que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^k \frac{d^\alpha \zeta(x)}{dx^\alpha} = 0 \quad (3.1.3)$$

quaisquer que sejam  $k \in \mathbb{N}$  e  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

Explorando um pouco mais a definição: Para que o limite (3.1.3) seja igual a zero é necessário que as funções  $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  tendam mais rápido para zero do que as funções polinomiais crescem. Daí o nome “espaço das funções rapidamente decrescentes”.

A partir desse embasamento, conseguimos definir a transformada de Fourier:

**Definição 15.** Seja  $f$  uma função tal que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $f \in \mathcal{S}$ . A transformada de Fourier de  $f$  é dada por:

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt. \quad (3.1.4)$$

É possível que se encontre na literatura outras notações para a transformada de Fourier, devido a quantidade de áreas que a utilizam. Mas neste trabalho optaremos somente pelas duas notações já expostas. Ressaltamos: apesar de a construção ter sido de forma não formal, essa definição se estende para todas as funções  $f \in \mathcal{S}$ .

Enunciaremos a seguir uma proposição que vai de encontro com nossas expectativas ao escolher este espaço:

**Proposição 6.** Se  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  for uma função do Espaço de Schwarz, então a transformada de Fourier  $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  pertencerá ao mesmo espaço.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada na referência (6), assim como outras propriedades importantes da transformada de Fourier, mas que optamos por não trazer para nosso trabalho por dependerem de outras proposições.

## 3.2 Transformada Inversa de Fourier

A transformada de Fourier é na verdade um operador de funções, que passa uma função  $f$  que estava definida no domínio do tempo para o domínio de frequências, revelando assim as frequências que compõe a função, ou o sinal. Nesse sentido, ter obter uma relação entre essas duas representações é importante.

Podemos continuar na mesma intuição desenvolvida anteriormente e continuar calculando a série de Fourier da função citada acima. Pela definição de série de Fourier 13 teríamos:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$$

com

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt.$$

Faremos a substituição  $\frac{n}{T} = \omega$  nos coeficientes  $c_n$  da seguinte forma:

$$\frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt}_{\approx \hat{f}(\omega)} = \frac{1}{T} \hat{f}(\omega).$$

Chamando  $\frac{1}{T} = \Delta\omega$  teremos que a série será da forma:

$$f(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} \Delta\omega.$$

Fazendo  $\Delta\omega \rightarrow \infty$ , o somatório acima converge para a integral, pela soma de Riemann. Logo:

$$f(t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega. \quad (3.2.1)$$

A esta expressão damos o nome de **Fórmula Integral de Fourier** de uma função  $f \in \mathcal{S}$ . O teorema abaixo condensa 3 resultados interessantes sobre a transformada de Fourier e dá forma a versão contínua da série de Fourier usando a transformada:

**Teorema 7.** A transformada de Fourier  $\hat{f} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  é um operador linear, injetivo, sobrejetivo e o operador

$$\check{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$$

é o operador inverso da transformada de Fourier de uma função  $f$ .

A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência (6). Mas elucidando um pouco mais, podemos demonstrar que esse operador é o inverso da transformada de Fourier mostrando que vale a identidade abaixo:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$$

**Um paralelo com o capítulo anterior:** Antes de definirmos a transformada, para reconstruirmos sinais mais bem comportados (ou seja, periódicos), precisávamos de uma quantidade enumerável de informações. A identificação trazida no momento nos mostra que podemos reconstruir um sinal não periódico através de uma soma **não enumerável** de funções exponenciais. E assim como existiam problemas na implementação deste resultado teórico para um programa de computador, como vimos no capítulo 2 sessão 2.2, esbarraremos em dificuldades que vão distorcer nossas imagens, causando um efeito conhecido como **Aliasing**, discutido melhor na referência (5).

É interessante notar que os coeficientes de Fourier da série de Fourier mostram a função representada no seu domínio discreto de frequências, enquanto a transformada de Fourier mostra a função representada no seu domínio contínuo de frequências. Já a série de Fourier e a transformada inversa de Fourier representam a função no domínio do tempo. Trazemos um exemplo sobre isso:

**Exemplo 10.** Primeiramente faremos o espectro de potências da *função caixa*, dada pela lei de formação:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{se } |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Escolhemos esta função pois ela é bastante conhecida na literatura. Seu nome se dá devido ao seu gráfico:

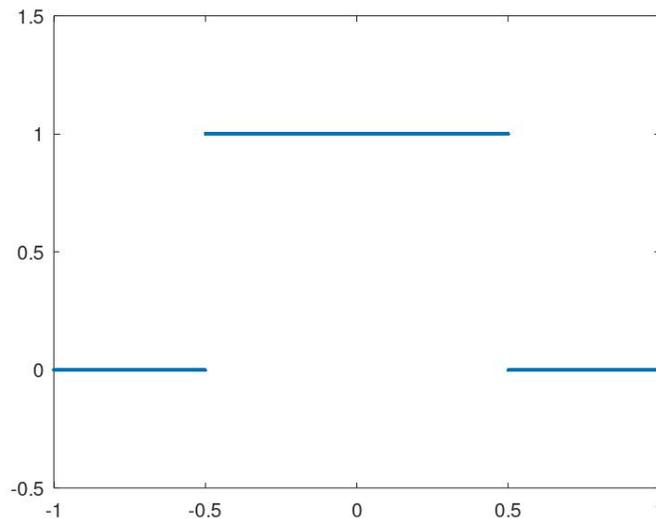


Figura 3.2.1 – Gráfico da função caixa. O código dessa imagem pode ser encontrado no apêndice 5 em 5.4.

Percebe-se que esta função não é periódica, e por isso não podemos fazer seu espectro de potências, já que a priori ela não teria série de Fourier. Mas faremos 3 extensões periódicas para ela, com os períodos sendo 2, 4 e 16. Nosso intuito é entender o que acontece conforme o período da função aumenta.

Vamos calcular uma forma geral com período  $T$  para seu coeficiente de Fourier, usando a forma complexa, e após iremos colocar os períodos citados e fazer seu espectro de potências, como na seção 2.1.3. Calculando seu coeficiente, temos:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} \Pi(t) dt \\ &\stackrel{=1}{=} \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} 1 dt \\ &= \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt - i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \right]. \end{aligned}$$

Sendo que  $\stackrel{=1}{=}$  é verdade uma vez que fora do intervalo de integração  $|t| \leq \frac{1}{2}$  o valor da função é nulo. Pela Proposição 4:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{2}{T} \int_0^{1/2} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2\pi nt} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]_0^{1/2} \\
 &= \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right).
 \end{aligned}$$

A função encontrada é comumente chamada de função **sinc**. Veja que como a função é real, podemos fazer seu espectro de potências simplesmente com o valor dos coeficientes, e não mais com o módulo dos coeficientes ao quadrado.

Para a plotagem dos gráficos foi necessário usar um fator de correção, para que todos os gráficos permanecessem na mesma escala. Isso porque conforme o valor de  $T$  era aumentado, o valor de  $\frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right)$  diminuía. Para corrigir isso, utilizamos o fator  $T$ :

$$T \cdot c_n = \frac{T}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/T)}{\pi n/T}.$$

Apesar do fator de correção, a menos deles, as variações das frequências são conservadas. Dessa forma conseguimos:

- Para  $T = 2$  temos o gráfico representado em 3.2.2.

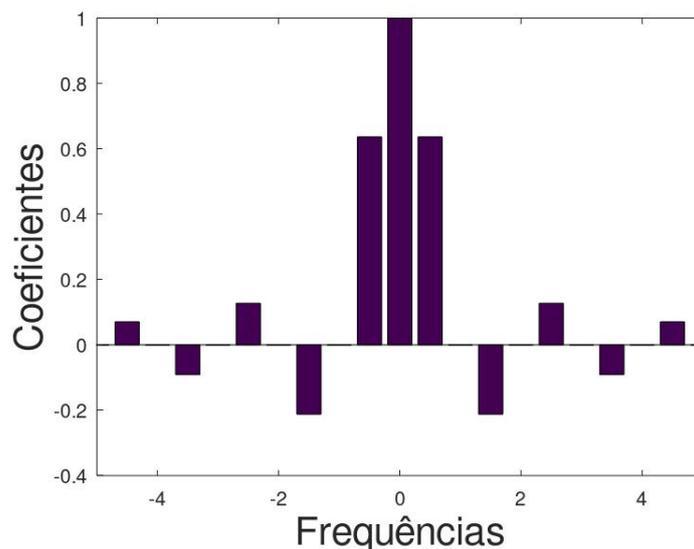


Figura 3.2.2 – Gráfico do espectro de potências da função caixa com  $T=2$ . Código para geração da imagem disponível no apêndice 5 em 5.5.

- Para  $T = 4$  temos o gráfico representado em 3.2.3.
- Para  $T = 16$  temos o gráfico representado em 3.2.5.

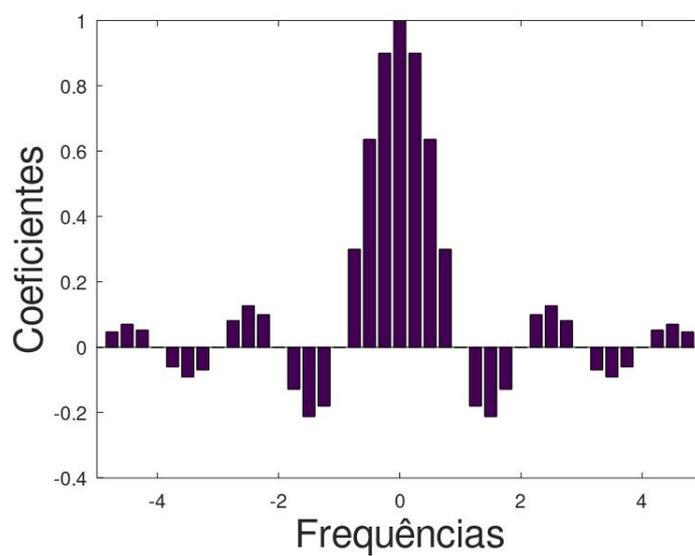


Figura 3.2.3 – Gráfico do espectro de potências da função caixa com  $T=4$ . Código para geração da imagem disponível no apêndice 5 em 5.5.

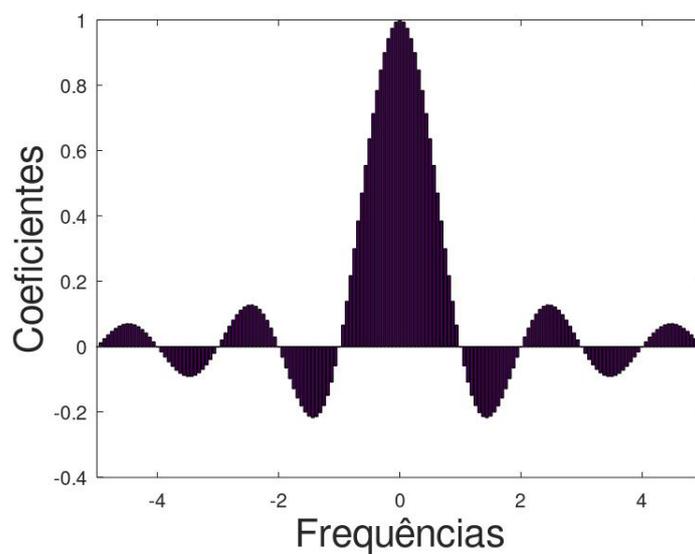


Figura 3.2.4 – Gráfico do espectro de potências da função caixa com  $T=16$ . Código para geração da imagem disponível no apêndice 5 em 5.5.

Perceba que conforme o período foi aumentando, o espaçamento entre as frequências diminuiu devido à relação inversa que existe entre período ( $T$ ) e frequência ( $\omega$ ) já citada anteriormente no capítulo 1:  $T = \frac{1}{\omega}$ . E conforme o período aumentou e as frequências se aproximaram, mais perto de um desenho de uma curva a representação se tornou.

Agora iremos calcular a transformada de Fourier dessa mesma função e fazer seu gráfico:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t)e^{-2\pi\omega t} dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{-2\pi\omega t} dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \cos(2\pi\omega t) dt - i \int_{-1/2}^{1/2} \text{sen}(2\pi\omega t) dt.\end{aligned}$$

Pela Proposição 4:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= 2 \int_0^{1/2} \cos(2\pi\omega t) dt \\ &= \frac{2}{2\pi\omega} \text{sen}(2\pi\omega t) \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{\pi\omega} \text{sen}(\pi\omega).\end{aligned}$$

Veja que essa representação é exatamente a mesma representação para o coeficiente de Fourier que havíamos encontrado, com a diferença de que  $\omega$  é uma variável contínua. A representação gráfica deixa isso ainda mais claro:

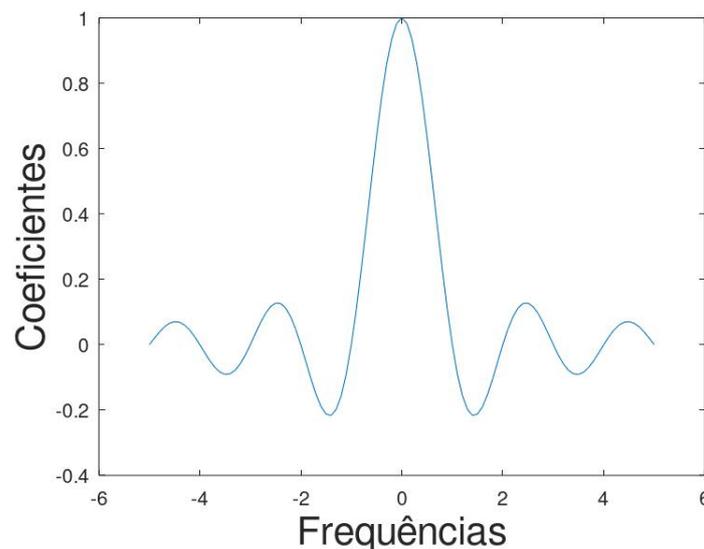


Figura 3.2.5 – Gráfico da transformada de Fourier da função caixa. O código dessa imagem pode ser encontrado no apêndice 5 em 5.6.

Realmente, percebemos geometricamente a aproximação pela curva acontecendo.

Além disso, note que a frequência mais utilizada para recuperar o sinal da função caixa é a frequência  $\omega = 0$ , o que faz muito sentido já que a função é constante em quase todo o seu domínio, necessitando de frequências mais baixas para ser recuperada.

### 3.3 Adaptação para o $\mathbb{R}^2$

Para conseguirmos entender como o conceito de transformada de Fourier se aplica em imagens, que têm domínio em um plano, precisamos entender como são funções que representam imagens e como é a expressão da transformada de Fourier para funções de duas variáveis.

As imagens podem ser entendidas como funções, se as dividirmos em vários pontos muito pequenos, organizados em linhas e colunas como uma matriz. Uma analogia seriam os *pixels* das telas. Cada pixel comporta informações de cor, e a composição de todos formam as imagens que vemos nas telas. A Figura 3.3.1a traz uma imagem e a Figura 3.3.1b traz a função que representa o canal de cores da imagem anterior.

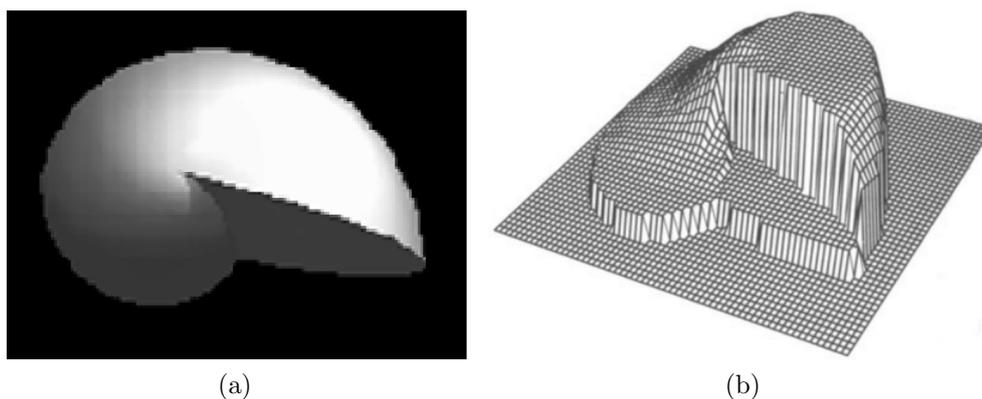


Figura 3.3.1 – Na Figura 3.3.1a temos uma imagem ilustrativa e a Figura 3.3.1b é o gráfico da função que a representa. Imagens retiradas da referência (5).

A cada ponto dessa matriz, associamos uma informação que será interpretada como a cor da imagem. Cada um desses pontos (*pixels*) comporta somente uma escala de cor. A essa organização chamamos de **canal de cores**. Por exemplo, fotos preto e branco podem ser representadas por apenas um desses canais, pois os pontos possuem informações que vão do branco (normalmente relacionado com o número 1) ao preto (normalmente representado pelo número 0). Nuances de cores, ou seja, os vários tons de cinza dentro dessa escala, se associam com números dentro do intervalo  $[0, 1]$ .

Fotos coloridas podem ser representadas pela composição de 3 canais. Isso porque a maioria das cores podem ser formadas pela combinação das cores vermelha, verde e azul, que é a escala *RGB* (do inglês: *red, green, blue*). Quando processamos uma imagem colorida, é necessário que a avaliemos em cada um de seus canais separadamente, pois

essa imagem teria duas coordenadas no domínio, e o contradomínio teriam três, referentes a cada uma das cores.

Entendida a parte de modelar imagens como funções, precisamos entender como adaptar o conceito de transformada de Fourier, até então em uma dimensão, para duas dimensões. Consideraremos duas variáveis para as frequências  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ . Teremos:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega_1, \omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(x\omega_1 + y\omega_2)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i x \omega_1} e^{-2\pi i y \omega_2} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i x \omega_1} dx \right) e^{-2\pi i y \omega_2} dy.\end{aligned}$$

A parte entre parênteses representa a transformada de Fourier da função  $f$  em relação a  $x$ . Trazendo uma metáfora, pense na imagem como uma malha de tecido retangular, constituída por várias linhas muito finas, na horizontal e na vertical. Primeiramente calculamos as transformadas de Fourier das linhas em uma mesma direção, digamos que seja a horizontal referente a  $x$ , e após calculamos as transformadas de Fourier das linhas na outra direção, que seria a vertical referente a  $y$ , e por fim temos a formação do tecido, que seria a imagem.

Com isso todos os conceitos estudados até então podem ser adaptados para as imagens se pensarmos que estamos dividindo os cálculos primeiro em uma direção, e após na outra direção.

Abaixo representamos na imagem 3.3.2a um bosque e na Figura 3.3.2b seu respectivo espectro de potências. Seu espectro de potências se vale do módulo da transformada de Fourier ao quadrado ( $|\hat{f}(\omega_1, \omega_2)|^2$ ) pois as frequências nesse caso são complexas. Este espectro foi obtido usando a função Fourier do software Mathematica, que calcula a **transforma rápida de Fourier** de uma imagem. A transformada rápida é uma discretização da transformada de Fourier em duas dimensões que acabamos de definir, e é explicada com mais detalhes na referência (8).

O centro da imagem 3.3.2b representa as frequências  $\omega_1 = 0$  e  $\omega_2 = 0$ . As cores mais claras representam um valor mais alto das frequências, e as cores mais em tons de azul representam frequências mais baixas. Perceba que a imagem possui bastante mudanças abruptas de cores, e devido a isso o seu espectro de potências se utiliza de bastante frequências elevadas.

A imagem 3.3.3a é uma foto tirada debaixo d'água, e a Figura 3.3.3b representa seu espectro de potências. O espectro de potências é construído da mesma maneira que o anterior. Nesse caso, vemos que o espectro de potências utiliza mais focadamente frequências mais baixas, pois as mudanças de cores são mais suaves do que na figura anterior.

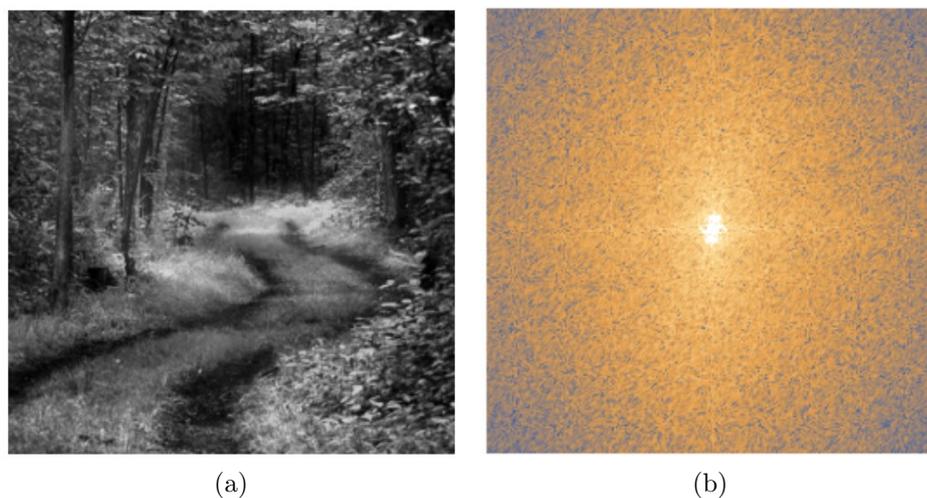


Figura 3.3.2 – Na Figura 3.3.2a temos a imagem de um bosque e a Figura 3.3.2b é seu espectro de potências. Imagens retiradas da referência (9).

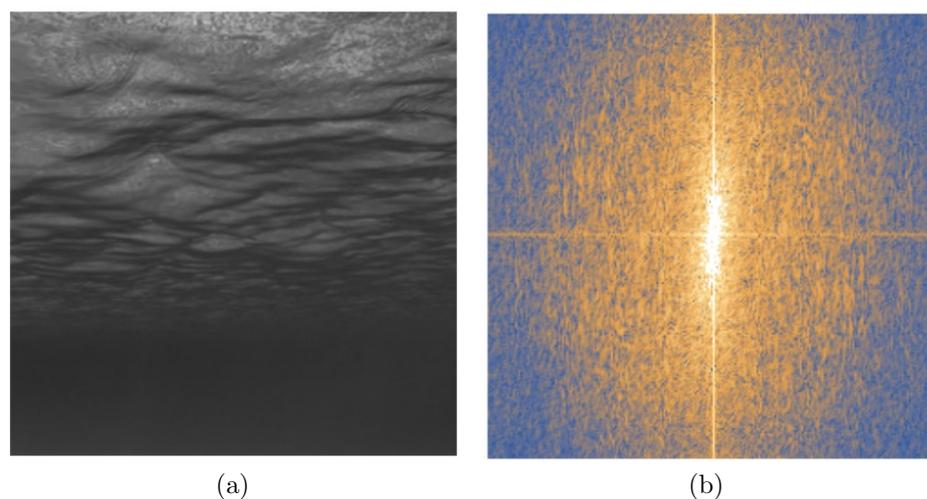


Figura 3.3.3 – Na Figura 3.3.3a é uma foto tirada debaixo d'água, e a Figura 3.3.3b representa seu espectro de potências. Imagens retiradas da referência (9).

## 4 Conclusões

Neste trabalho trouxemos a definição de Série de Fourier, construindo alguns exemplos com o leitor. A princípio parecia ser apenas mais um ferramental advindo do cálculo, mas a conotação foi alterada com base no capítulo 1, observando que se trata da representação de uma função  $f$  sobre os vetores da base do espaço das funções exponenciais. Além disso, entendemos como falar sobre as séries de Fourier pode ser interessante, mas possui certas limitações, pelo fato das funções para as quais a definição se aplica serem necessariamente periódicas. Estendemos esse conceito com a Transformada de Fourier, abarcando também funções não periódicas. Não obstante a transformada de Fourier ter trazido maior alcance de funções, precisamos dar um passo atrás e compreender qual espaço vetorial continha as características necessárias para abarcar esse novo conjunto de funções, para o qual escolhemos o espaço de Schwarz. A partir desse ponto, conseguimos olhar para as ferramentas que construímos e entender a relação existente entre elas e as imagens.

A construção do texto tentou ao máximo simplificar a linguagem, tornando-a mais acessível, contudo sem deixar de lado demonstrações de interesse para nosso desenvolvimento. Claro que algumas escolhas foram necessárias nessa trajetória, excluindo alguns resultados ou demonstrações, mas visando uma coerência com nossos objetivos.

Acreditamos que um trabalho que se coloque a pensar profundamente sobre os temas abordados não se dá por satisfeito. Ou seja, nunca há um fim; as reticências é que fazem parte da pesquisa acadêmica. Devido a isso, deixamos como portas possíveis para futuros trabalhos o estudo da convolução de imagens e o efeito causado por *Aliasing*.

## 5 Programas utilizados no MATLAB

Ressaltamos que todos os códigos aqui presentes foram rodados no software MATLAB.

Listing 5.1 – Código para geração do gráfico da função Box

---

```
clear all
clc

%variaveis
intervalo = 0:0.0001:1;
indice = 1;

%comandos em si
for t = intervalo
    valor = 0;
    if t < 0.5
        valor = 1;
    else
        valor = -1;
    endif

    vetor(indice) = valor;
    indice = indice + 1;
end

%grafico
plot(intervalo ,vetor ,'.', 'LineWidth',0.1)
xlim([0 1])
ylim([-1.5 1.5])
```

---

Listing 5.2 – Código para geração do espectro de potências da função Box

---

```

%Espectro de Potencia da fun    o Box
clear all
clc
% vari veis
n=3 %Desse modo iremos conseguir calcular os coeficientes
%de -3 at  3

%comandos
for k=1
for w = -n:n
    if mod(w,2)==0 %condicional para alterar para 0 o valor dos
    %coeficientes pares
        cn=0
    else
        cn = (-2*i)/(pi*w)
    endif
    mod2(k) = (abs(cn))^2 %para conseguirmos montar o gr fico ,
    %pois os coeficientes podem ser complexos

        k=k+1

endfor
endfor

v=-n:n

%plotagem do gr fico
plot(v,mod2,'ob','markerfacecolor','b')
hold on
plot([-3 3],[0 0],'-r','linewidth',1)
plot([0 0],[0 0.7],'-r','linewidth',1)
ylabel('M dulo dos coeficientes ao quadrado','fontsize',20)
xlabel('Frequ ncias','fontsize',20)

```

---

Listing 5.3 – Código para geração da série de Fourier da função Box

---

```
clear all
clc

%variaveis
n = 100; %Atualizar a depender do numero de frequencias desejado
intervalo = 0:0.001:1;
indice = 1;

%comandos
for t = intervalo;
    valor = 0;
    for m = -n:n;
        if m ~= 0
            valor = valor + (1)/(pi*j*m)*(1-e^(-pi*j*m))*e^(2*pi*j*m*t);
        endif
    endfor

    res(indice) = valor;
    indice = indice+1;

endfor

%grafico
plot(intervalo , res)
```

---

Listing 5.4 – Código para geração do gráfico da função Caixa

---

```
clear all
clc

%variaveis
intervalo = -1:0.0001:1;
indice = 1;

%comandos em si
for t = intervalo
    valor = 0;
    if abs(t) < 0.5
        valor = 1;
    else
        valor = 0;
    endif

    vetor(indice) = valor;
    indice = indice + 1;

end

%graficos
plot(intervalo ,vetor ,'. ', 'LineWidth',0.1)
xlim([-1 1])
ylim([-0.5 1.5])
```

---

Listing 5.5 – Código para geração do espectro de potências da função Caixa

---

```
%Espectro de Pot ncia da fun o Caixa
clear all
clc

% variaveis
T=2; %Esse numero se altera a depender do periodo
n=5*T; %Desse modo iremos conseguir calcular os coeficientes de
%-3 at 3

%Comandos
for k=1
for w = -n:n;
    if w==0
        c(k) = 1

        else

            c(k) =T*(sin((pi*w)/T))/(pi*w);

endif

    k=k+1;
endfor
endfor

v=-n:n

%plotagem do grafico
bar(v*(1/T),c)
xlim([-5 5])
ylabel(' Coeficientes ', ' fontsize ',20)
xlabel(' Frequ ncias ', ' fontsize ',20)
```

---

Listing 5.6 – Código para geração da transformada de Fourier da função Caixa

---

```
clear all
clc

%variaveis
k=1
c = -5:0.1:5;

%comandos
for w = -5:0.1:5;
    if w==0
        tf(k) = 1
    else
        tf(k) = (sin(pi*w))/(pi*w);
    endif

    k=k+1;

endfor

%plotagem do grafico
plot(c,tf)
ylabel('Coeficientes','fontsize',20)
xlabel('Frequências','fontsize',20)
```

---

# Referências

- 1 OSGOOD, B. *Lecture notes for EE 261 the Fourier transform and its applications*. California: Stanford University, 2002.
- 2 LIMA, E. L. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- 3 STEWART, J. *Cálculo: volume 1*. New York: Thomson, 2008.
- 4 WALKER, J.; HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Fundamentos de física: volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica*. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- 5 GOMES, J.; VELHO, L. *Computação gráfica: imagem*. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.
- 6 FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1987.
- 7 CASTRO, C. E. L. d. *Análise dos métodos de reconstrução de imagens aplicados a sinais de áudio*. Florianópolis: UFSC, 2017.
- 8 LOAN, C. V. *Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform*. Cornell University: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- 9 SACHT, L. *Processamento de Imagens no Domínio de Fourier*. Florianópolis: UFSC, 2021. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/~leo/fourier.html>.