UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS REITOR JOÃO DAVID FERREIRA LIMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VICTOR PIERRI DOS SANTOS

A GEOMETRIA PLANA VISTA NAS OBRAS DE VILLELA BARBOSA E BÉZOUT: UMA ANÁLISE HISTÓRICA

FLORIANÓPOLIS - SC
2022

VICTOR PIERRI DOS SANTOS

A GEOMETRIA PLANA VISTA NAS OBRAS DE VILLELA BARBOSA E BÉZOUT: UMA ANÁLISE HISTÓRICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.
Orientação: Prof. Dr. David Antonio da Costa

FLORIANÓPOLIS - SC
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Santos, Victor Pierri dos
A geometria plana vista nas obras de Villela Barbosa e Bézout: uma análise histórica / Victor Pierri dos Santos ; orientador, David Antonio da Costa, 2022.
108 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. História da Educação Matemática. 3. Geometria Plana. 4. Livro Didático. I. Costa, David Antonio da . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática. III. Título.

VICTOR PIERRI DOS SANTOS

A GEOMETRIA PLANA VISTA NAS OBRAS DE VILLELA BARBOSA E BÉZOUT:
UMA ANÁLISE HISTÓRICA

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de "Licenciado em Matemática" e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Florianópolis, 17 de março de 2022.

Profa. Dra. Silvia Martini de Holanda

Coordenadora do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. David Antonio da Costa

Orientador

Profa. Dra. Sonia Elena Palomino Castro

Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti

Universidade Federal de Santa Catarina

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à minha família: meus pais. Lenira e Roberto, e meus irmãos, Roberta e Vinícius, por todos os momentos que estamos juntos.

Aos meus amigos, Bruna Pacheco, Deborah, Jéssica Yuri, Juan, Luan, Marcelo Heinz, Millena e Victoria Gittens, por todas as risadas e auxílios quando eu mais precisei, me ajudando desde o primeiro ao último dia.

Um agradecimento especial aos professores Felipe Lopes Castro, Nereu Burin, Rosilene Beatriz Machado, que engrandecem a minha formação além da matemática, e pelo exemplo de profissionalismo.

Ao meu orientador. David Antonio da Costa. Pelo acolhimento, conhecimentos compartilhados, e por todo o auxílio no desenvolvimento deste trabalho. Obrigado pelo apoio e confiança.

Por fim, agradeço a professora Sonia Elena Palomino Castro, e o professor Méricles Thadeu Moretti, pelo aceite do convite e pelas contribuições.

“*Eu conheço a tabuada toda, e é o meu maior forte. O meu forte é matemática porque eu sou businessman, então eu estou com a tabuada toda na cabeça.*”

(Pai Diesel, 2014)

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso está inserido nos estudos do campo da História da educação matemática e tem como objetivo apresentar considerações diacrônicas das obras Elementos de Geometria de Étienne Bézout e Francisco Villela Barbosa, desde sua criação e utilização no Brasil e Portugal dos séculos XVIII e XIX. Particularmente intenta-se apresentar uma comparação das abordagens do ensino da geometria plana presente nas obras, destacando as semelhanças estruturais e demonstrativas. Apoia-se no quadro teórico desenvolvido por Alain Choppin que trata das funções, análise e estudo histórico dos livros didáticos; e dos estudos da história da matemática escolar abordado por Wagner Valente. As cópias digitalizadas das obras de Bézout e Barbosa foram obtidas no Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) na comunidade História da Educação Matemática. Foram analisados quatro livros didáticos, duas edições de cada autor. Os resultados obtidos nessa pesquisa apontam uma ligação, teórico-demonstrativo que perdura desde os Elementos de Euclides.

Palavras-chave: História da educação matemática. Geometria plana. Livro didático.

ABSTRACT

This work has inserted in the studies on the field of history of mathematics education and has as purpose to present diachronic considerations of the books Elements of Geometry by Étienne's Bézout and Francisco Villela Barbosa, since its creation and use in Brazil and Portugal in 18th and 19th centuries. Notably it is intented to present a comparison of teaching approaches of plane geometry presente in the books, highlighting the structural and demonstrative similarities.It is supported on the theoretical framework developed by Alain Choppin that treat with the functions, analysis and historical study of textbooks; and studies in the history of school mathematics approached by Wagner Valente. The scanned copies of the books of Bézout and Barbosa were obtained from the *Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina* (*UFSC*) [Institutional Repository of Federal University of Santa Catarina (UFSC)] in the community of History of Mathematics Education. Were analysed four textbooks, two editions of each author.The results obtained in this paper points to a theoretical- demonstrative connection that lasts from Euclid's Elements.

Keywords: History of mathematics education. Plane geometry. Textbooks

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Elementos de Geometria de Bézout traduzido para o português. 27
Figura 2 – Obra em francês de Bézout que contém os Elementos de Geometria.................... 28
Figura 3 – Definições das palavras axioma e teorema no contexto matemático. 30
Figura 4 – Índice do Elementos de Geometria de Bézout. 30
Figura 5 – Noções básicas de Geometria que Bézout utiliza em seus Elementos. 31
Figura 6 – Conceito de linha em Bézout. 32
Figura 7 – Medição de linhas, segundo Bézout. 32
Figura 8 – Repartição de uma circunferência em 360 partes. 33
Figura 9 – Definição de ângulo, segundo Bézout. 33
Figura 10 – Representação gráfica do transferidor. 34
Figura 11 – Representação gráfica do grafômetro. 34
Figura 12 – Representação gráfica da bússola marítima. 35
Figura 13 – Definição e representação de perpendicular por Bézout. 35
Figura 14 – Três corolários estabelecidos das noções de perpendicular. 36
Figura 15 – Definição de retas paralelas. 36
Figura 16 – Problemas propostos de retas consideradas a respeito das circunferências de acordo com Bézout. 37
Figura 17 – Ângulo inscrito em uma circunferência. 38
Figura 18 – Casos de ângulos inscritos em uma circunferência com centro no interior e fora, segundo Bézout. 39
Figura 19 – Os ângulos $\angle BAE$, $\angle BCE$, $\angle BDE$ com medida o arco $\widehat{BE}$. 39
Figura 20 – Ângulo na semicircunferência $\angle BAC = 90°$ 40
Figura 21 – Retas tangentes à circunferência por um ponto E fora dela. 40
Figura 22 – Definição de triângulos, em Bézout. 41
Figura 23 – Proposições de igualdade de triângulos, segundo Bézout. 42
Figura 24 – Representação de diagonais por um pentágono, segundo Bézout........................ 43
Figura 25 – Polígono inscrito em uma circunferência e os apótemas $\overline{OH}$ e $\overline{OL}$, em Bézout. ... 43
Figura 26 – Primeiro teorema proposto em linhas proporcionais no livro de Bézout. 44
Figura 27 – Teorema (104.), divisão do ângulo $\angle BAC$ por $\overline{AD}$. 44
Figura 28 – Teorema (105.), dois lados de qualquer triângulo cortados por uma reta paralela ao terceiro. 44

Figura 29 – Semelhanças no triângulo retângulo. 45
Figura 30 – Problema de semelhança proposto com utilização de elementos estudados anteriormente. 46
Figura 31 – Linhas proporcionais em um círculo. 47
Figura 32 – Ponto (125.), consequência do teorema (124.). 47
Figura 33 – Representação dos pontos (127.) e (129.) 48
Figura 34 – Polígonos semelhantes separados em triângulos semelhantes pelo caso LAL. 49
Figura 35 – Contorno de um polígono. 49
Figura 36 – Exemplo de planta retirada de uma costa utilizando figuras semelhantes. 50
Figura 37 – Definição de quadriláteros. 51
Figura 38 – Ponto (141.), superfícies iguais em paralelogramos de mesma altura e base. 51
Figura 39 – Construção do paralelogramo AECB a partir do triângulo ΔACB. 52
Figura 40 – Redução de um polígono a um triângulo. 52
Figura 41– Medição do retângulo ABCD por 28 quadrados como abcd. 53
Figura 42 – Medição da superfície de um trapézio. 53
Figura 43 – Cálculo de áreas de polígonos por repartições em triângulos. 54
Figura 44 – Teorema essencial utilizado para a prova do teorema de Pitágoras. 55
Figura 45 – Teorema de Pitágoras. 57
Figura 46 – Edição do livro Elementos de Geometria de Barbosa, 1816. 58
Figura 47 – Edição do livro Elementos de Geometria de Barbosa, 1838. 59
Figura 48 – Índice do Elementos de Geometria de Barbosa (1838). 61
Figura 49 – Noções gerais de Geometria nas edições de Barbosa, 1816 à esquerda e 1838 à direita. 62
Figura 50 – Linhas em Barbosa. 63
Figura 51 – Medição de linhas segundo Barbosa. 63
Figura 52 – Repartição de uma circunferência em 360 partes. 64
Figura 53 – Definição de ângulo, segundo Barbosa. 64
Figura 54 – Comparação de ângulos por arcos. 65
Figura 55 – Teorema relacionado com somas de ângulos e perpendiculares. 65
Figura 56 – Desigualdade triangular proposta por Barbosa. 66
Figura 57 – Problema de construção de perpendicular. 66
Figura 58 – Axioma inicial proposto no capítulo de paralelas por Barbosa. 67
Figura 59 – Teorema que envolve retas paralelas cortadas por uma transversal em Barbosa. 67

Figura 60 – Construção da reta paralela $\overleftrightarrow{EF}$ (esquerda) e cordas paralelas, arcos $\widehat{AE}$, $\widehat{BD}$ iguais (direita). 68
Figura 61 – Problemas propostos de retas consideradas a respeito das circunferências de acordo com Barbosa. 69
Figura 62 – Teoremas envolvendo a definição de reta secante e tangente em Barbosa. 69
Figura 63 – Casos de ângulos inscritos em uma circunferência com centro no interior, fora e no lado, segundo Barbosa. 70
Figura 64 – Corolários do teorema de ângulos inscrito em uma circunferência. 71
Figura 65 – Construção de retas tangentes a circunferência nos pontos A e B a partir de um ponto E fora do círculo, segundo Barbosa. 71
Figura 66 – Definição de triângulos, visto em Barbosa. 71
Figura 67 – Problema disposto por Barbosa sobre circunscrição de um triângulo. 72
Figura 68 – Proposições de igualdade de triângulos, segundo Barbosa. 73
Figura 69 – Problemas propostos em igualdade de triângulos por Barbosa. 73
Figura 70 – Primeiro Teorema proposto em linhas proporcionais no Elementos de Geometria de Barbosa. 74
Figura 71 – Dois lados de qualquer triângulo cortados por uma reta paralela ao terceiro. A representação gráfica da primeira implicação (à esquerda), e da segunda implicação (à direita). 75
Figura 72 – Divisão do ângulo $\angle BAC$ por $\overline{AD}$, segundo o teorema (125.) em Barbosa. 75
Figura 73 – Definição de figuras semelhantes. 75
Figura 74 – Teoremas dos casos de semelhança de triângulo, 1816 (esquerda), 1838 (direita). 76
Figura 75 – Teoremas do capítulo de linhas proporcionais no círculo. 77
Figura 76 – Teorema do perímetro de dois polígonos semelhantes. 77
Figura 77 – Polígonos semelhantes separados em triângulos semelhantes. 78
Figura 78 – Semelhanças de circunferências. 78
Figura 79 – Definição dos quadriláteros. 79
Figura 80 – Superfícies iguais em paralelogramos de mesma altura e base. 80
Figura 81 – Paralelogramo e o triângulo de mesma altura e base. 80
Figura 82 – Teorema da área de um círculo. 81
Figura 83 – Polígono regular circunscrito ao círculo C, cujos lados não encontram a

circunferência C’ ... 82
Figura 84 – Polígono regular circunscrito ao círculo c, cujos lados não encontram a circunferência C. ... 83
Figura 85 – Teorema de Pitágoras. ... 84
Figura 86 – Relato da utilização de Bézout e Lacroix no Brasil. ... 86
Figura 87 – Relato sobre a publicação da obra de Barbosa no Brasil. ... 86
Figura 88 – Alterações feitas no capítulo de perpendiculares e oblíquas, nas edições de 1816 (à esquerda) e de 1838 (à direita) do Elementos de Geometria de Barbosa. ... 90
Figura 89 – Representação dos casos de ângulos inscritos em uma circunferência. ... 92
Figura 90 – Construção de dois triângulos ΔACH, ΔACI não congruentes de acordo com a problematização. ... 94
Figura 91 – Teorema reescrito nas edições dos Elementos de Barbosa, 1816 (esquerda), 1838 (direita). ... 95
Figura 92 – Encontro da quarta proporcional. ... 97
Figura 93 – Semelhanças textuais encontradas nos capítulos, Bézout (à esquerda), Barbosa (à direita). ... 98
Figura 94 – Representação gráfica da potência de ponto. ... 99
Figura 95 – Imagem utilizada para a prova do teorema secante-tangente ... 99
Figura 96 – Informações sobre o número pi (π) nos autores. ... 101
Figura 98 – Transformação de um polígono em triângulo de mesma área. ... 102
Figura 99 – Cálculo de áreas de polígonos por repartições em triângulos ... 104

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AA	Ângulo-ângulo
AAA	Ângulo-ângulo-ângulo
ALA	Ângulo-lado-ângulo
Arith	Aritmética
BBM	Biblioteca Brasiliana Guita e José Mindlin
BDSF	Biblioteca Digital do Senado Federal
BND	Biblioteca Nacional Digital
&c	Et cetera
HEM	História da Educação Matemática
LAL	Lado-ângulo-lado
LLL	Lado-lado-lado
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
RI	Repositório Institucional
RJ	Rio de Janeiro
SF	Senado Federal
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **17**

CONSIDERAÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS **19**

OS AUTORES 20

Étienne Bézout **20**

Francisco Villela Barbosa **22**

ANÁLISE COMPARATIVA DOS LIVROS: BÉZOUT E BARBOSA **25**

SOBRE A GEOMETRIA PLANA NAS OBRAS 25

CAPÍTULO 1

ELEMENTOS DE GEOMETRIA DE BÉZOUT **27**

1.1 AS CAPAS 27

1.1.1 Sobre as editoras **28**

1.2 O PREFÁCIO 29

1.3 O ÍNDICE 30

1.4 A GEOMETRIA PLANA DE BÉZOUT 31

1.4.1 Noções preliminares **31**

1.4.2 As linhas **32**

1.4.3 Dos ângulos, e sua medida **33**

1.4.4 Das perpendiculares e oblíquas **35**

1.4.5 Das paralelas **36**

1.4.6 Das linhas retas consideradas a respeito de uma circunferência de um círculo **37**

1.4.7 Dos ângulos considerados dentro de um círculo **38**

1.4.8 Das linhas que se fecham um espaço **40**

1.4.9 Da igualdade de triângulos **41**

1.4.10 Dos polígonos **42**

1.4.11 Linhas proporcionais **43**

1.4.12 Da semelhança dos triângulos **45**

1.4.13 Linhas proporcionais consideradas no círculo **47**

1.4.14 Figuras semelhantes **48**

1.4.15 Das superfícies **50**

1.4.16 Da medição e comparação de superfícies **52**

CAPÍTULO 2

ELEMENTOS DE GEOMETRIA DE BARBOSA 58

2.1 AS CAPAS 58

2.1.1 Sobre as editoras 59

2.2 O PREFÁCIO 60

2.3 O ÍNDICE 61

2.4 A GEOMETRIA PLANA DE BARBOSA 61

2.4.1 Noções preliminares 61

2.4.2 As linhas 63

2.4.3 Dos ângulos, e sua medida 64

2.4.4 Das perpendiculares, e oblíquas 65

2.4.5 Das paralelas 66

2.4.6 Dos arcos de círculo, e de suas cordas: das retas consideradas a circunferência de um círculo 68

2.4.7 Dos ângulos considerados em um círculo 70

2.4.8 Dos triângulos 71

2.4.9 Dos casos de igualdade de triângulo 72

2.4.10 Dos polígonos 74

2.4.11 Linhas proporcionais 74

2.4.12 Dos casos de semelhança de triângulo 75

2.4.13 Das linhas proporcionais consideradas no círculo 77

2.4.14 Polígonos semelhantes 77

2.4.15 Das superfícies 79

2.4.16 Das avaliações das áreas, e sua medida 81

CAPÍTULO 3

DISCUSSÃO SOBRE AS OBRAS ELEMENTOS DE GEOMETRIA DE BÉZOUT E BARBOSA 85

3.1 AS CAPAS 85

3.2 OS PREFÁCIOS 86

3.3 OS ÍNDICES 87

3.4 DISCUSSÃO SOBRE A GEOMETRIA PLANA DAS OBRAS 87

3.4.1 Noções preliminares 87

3.4.2 As linhas 88
3.4.3 Dos ângulos e sua medida 89
3.4.4 Das perpendiculares e oblíquas 89
3.4.5 Das paralelas 90
3.4.6 Das linhas retas consideradas a respeito de uma circunferência de um círculo 91
3.4.7 Dos ângulos considerados em um círculo 91
3.4.8 Das linhas que fecham espaço/ Triângulos 92
3.4.9 Da igualdade de triângulos 93
3.4.10 Dos polígonos 94
3.4.11 Linhas proporcionais 95
3.4.12 Semelhanças de triângulos 96
3.4.13 Das linhas proporcionais consideradas do círculo 98
3.4.14 Figuras/ Polígonos semelhantes 100
3.4.15 Das superfícies 101
3.4.16 Medição e comparação de superfícies 102
CONSIDERAÇÕES FINAIS 105
REFERÊNCIAS 107

INTRODUÇÃO

Em meu progresso acadêmico como licenciando em matemática na UFSC, surgiram oportunidades de participar em projetos com remuneração por meio de bolsas, e foi no Programa de Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) que começou a minha aproximação com o ensino da geometria.

No semestre de 2020/2 fui aluno da disciplina de História da Educação Matemática (HEM), por indicações de colegas de curso, resolvendo assim entender melhor o propósito da disciplina. Estudamos ao longo das leituras semanais e aulas síncronas, sobre a história da matemática escolar no Brasil, em específico das análises históricas sobre os livros didáticos utilizados e a matemática escolar (VALENTE, 2007)

Ao estudarmos os primeiros livros didáticos de matemática no Brasil, a curiosidade de saber como a matemática era ensinada antigamente (séculos XVIII e XIX) e se a mesma se diferenciava da matemática escolar que conhecemos de hoje entrou em questão e despertou minha atenção. Boa parte dos livros podiam ser encontrados em formato digital na internet, e os que me interessavam eram os de geometria. Ao longo do desenvolvimento da disciplina HEM os autores e suas respectivas obras eram abordadas, observando-se diferenças e as transformações metodológicas sobre o ensino de geometria.

O interesse que tinha nos livros didáticos, e a familiaridade com a geometria, levou a aproximação com a História da Educação Matemática, e proporcionou trabalhar com livros de geometria contidos no Repositório Institucional (RI) da UFSC. Dentre os autores famosos que tiveram sucesso com a publicação de livros escolares de matemática, me interessou Francisco Villela Barbosa que além de geômetra, dedicava-se a outras áreas de conhecimento para além da matemática.

Como Barbosa havia baseado seu livro Elementos de Geometria em outros autores renomados, dentre eles Étienne Bézout, me fez pensar se realmente o livro poderia ser um melhoramento ou uma simples versão traduzida. Fazendo uma busca por autor, verificou-se que suas obras obtiveram tanto sucesso que receberam várias edições. A mesma situação pode ser vista para Bézout, cujo autor tem inúmeras edições de suas obras. Elementos de Geometria (1827) foi traduzido da versão francesa de 1771. Já Barbosa conta com oito edições do seu livro, sendo que foram encontradas as edições de 1816 e 1838 do Elementos de Geometria

Surge assim a pergunta de pesquisa: Como se estrutura o ensino de Geometria nestas obras? Mais particularmente como se dá abordagem do ensino de Geometria plana segundo estes autores?

Esta pergunta se desdobra em outras que ajudarão na resposta a esta investigação:

a) Os livros Elementos de Geometria de Bézout e de Barbosa possuem diferenças significativas na temática desta pesquisa?
b) Como tais obras foram utilizadas no contexto histórico do ensino de matemática em Portugal e no Brasil?

Para responder à questão de pesquisa, o texto segue com os seguintes tópicos:

a) Escrutinar a estruturação do ensino de Geometria plana proposta na obra de Bézout e Barbosa.
b) Analisar e comparar as edições dos livros;
c) Tecer algumas considerações teóricas.

CONSIDERAÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS

De acordo com Choppin (2004), o livro didático assume múltiplas funções, que podem variar de acordo com o ambiente sociocultural, à época, o nível de ensino, os métodos e as formas de utilização do mesmo. Uma delas é denominada referencial considerada tratando o livro como fiel tradução de um programa de estudo e o livro, propriamente dito, se constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações. O autor ainda reconhece que esta área de pesquisa - que trata da história dos livros e das edições didáticas - é recente. “As obras de síntese ainda são raras e não abrangem toda a produção didática nem todos os períodos[...]” (CHOPPIN, 2004, p. 549).

Analisar e estudar historicamente os livros didáticos, segundo Choppin (2004), desdobra-se em duas perspectivas:

> [...]Tomaram-se como objeto de estudo os manuais escolares mais antigos. Trata-se então, ou de colocar em evidência as principais características de um livro ou de uma coleção de livros, ou, segundo uma perspectiva diacrônica, de delimitar sua evolução por meio da análise de várias gerações de manuais ou de edições sucessivas — e freqüentemente bastante numerosas — de um mesmo livro (CHOPPIN, 2004 p. 556).

O autor prossegue com as recomendações acerca das pesquisas comparativas que tomam livros didáticos como fontes (CHOPPIN 2004, p. 561):

> Escrever a história dos livros escolares — ou simplesmente analisar o conteúdo de uma obra — sem levar em conta as regras que o poder político, ou religioso, impõe aos diversos agentes do sistema educativo, quer seja no domínio político, econômico, lingüístico, editorial, pedagógico ou financeiro, não faz qualquer sentido.

Nitidamente analisar apenas o prefácio, deixa boa parte das intenções pedagógicas e ideológicas dos autores de lado sendo que, como visto em Choppin (2004, p. 559) “[...] as notas de rodapé, os resumos, a formulação dos títulos e subtítulos dos capítulos, os sumários, o léxico, o índex ou, simplesmente, o próprio título dos livros, mereciam ser estudados com mais cuidado”.

Cabe elucidar os obstáculos que se enfrentam nas pesquisas que privilegiam livros didáticos como fontes de pesquisa. Dentre esses pode-se destacar a dificuldade de encontrar os livros e suas edições já que a maioria das obras possuem mais de duzentos anos. Tal situação se amplia quando tratamos de obras utilizadas/produzidas no exterior. Somente a busca por acervos digitalizados é que possibilita pesquisas dessa natureza.

Dentre os materiais disponíveis para revisão bibliográfica, sendo eles Trabalhos de Conclusão de Curso, Dissertações de Mestrado, Teses de Doutorado, Colóquios de Educação entre outros relativos à área de pesquisa em livros didáticos, encontra-se um material limitado sobre os autores e sobre o particular livro Elementos de Geometria. Boa parte dos pesquisadores se interessam sobre temas relacionados em geometria relata para um período mais recente da história da utilização de livros didáticos de matemática no Brasil.

Outro fator importante a ser levado em consideração é a semântica encontrada nos livros, ambos possuem um português antigo e entende-se boa parte, nos livros existem palavras que possuem sentidos múltiplos e que somente eram usadas na época e a sua disposição por escolha dos autores, junto as noções matemáticas de geometria, confundem até mesmo aqueles que entendem do assunto.

Traçar alguns aspectos da biografia dos autores é de extrema importância. É necessário que seja expresso a situação histórica dos mesmos, por qual razão o livro didático foi feito desta forma, do período de transição entre um autor e outro, além de quais conteúdos eram tratadas nestas obras didáticas. Para o particular interesse desta pesquisa, como a geometria foi abordada nas obas de Bézout e Barbosa.

OS AUTORES

Étienne Bézout

Étienne Bézout (1730-1783) estava predestinado a seguir os passos de seu pai e avô, porém foram os trabalhos de Leonhard Euler que divergiram sobre o destino de Bézout do magistrado para a matemática.

Em 1758 Bézout foi apontado como adjunto de mecânica na *Académia des Sciences*, e posteriormente após a saída de Camus como examinador do curso de artilharia francês em 1768, Bézout assume o cargo de examinador (VALENTE, 2007).

Ao assumir este posto de examinador do curso de artilharia na França, Bézout ficou encarregado de escrever um curso matemático para os oficiais navais e guardas bandeiras da marinha francesa e é assim que entre 1764 e 1769 publicou-se o *Cours de mathematiqués à la* *usage des gardes du pavillion et de la marine* (VALENTE, 2007). Infere-se que o sucesso de suas obras pode ter sido alavancadas por este autor ser também o responsável pelos exames do curso de artilharia. Os postos ocupados por Bézout – pensionista da Academia de Ciências, professor das escolas militares, examinador único dos alunos candidatos a oficiais da marinha e da artilharia francesas - representam um dos determinantes do sucesso de sua obra. Afinal, seus livros eram a única referência para os exames (VALENTE, 1999).

Em período pouco posterior as publicações de Bézout para uso do curso de matemática para oficiais e guardas bandeiras da marinha francesa, em 1779, D. Maria I de Portugal, por meio de uma carta, estabelece a criação de um ambiente de estudo, e aperfeiçoamento na arte, e prática da navegação. Criando-se assim a Academia Real de Marinha em Lisboa para um curso de matemática, o qual será composto das partes seguintes: Aritmética; Geometria; Trigonometria plana e esférica; Álgebra e sua aplicação à geometria; Estática; Dinâmica; Hidrostática, Hidráulica; Óptica; e um tratado completo de navegação. Havendo uma inspeção feita pela mesma Academia, a qual pertencerá ao Inspetor Geral da Marinha (SILVA, 1828, p. 230).

Essa lei portuguesa de 9 de agosto de 1779 retrata também que, os lentes responsáveis pelo ensino deveriam utilizar de compêndios em suas aulas, sendo esses próprios do lente[1], ou de outros autores renomados da época. A partir de uma reestruturação das obras e com o sucesso da utilização do *Cours de mathematiqués* na França, traduções para o português da obra foram feitas. Posteriormente, em 14 de dezembro de 1782, D. Maria estabelece a “companhia dos Guardas-Marinha” em Portugal (VALENTE, 2007).

Em 1807 a família Real de Portugal, se desloca ao Brasil como uma manobra do príncipe regente D. João, para manter Portugal independente das invasões de Napoleão. De acordo com Albuquerque (1979, apud VALENTE, 2007, p. 92), sobre a vinda da Família Real e a difusão do livro de Bézout no Brasil:

> Em 1808, dando-se a conhecida transmissão da Corte Portuguesa para o Brasil, veio também para cá a Academia Real dos Guarda-Marinha, embarcada toda ela onde boa parte deste material era utilizado na França para a formação dos guardas-marinha – alunos, mestres, oficiais e parte do material escolar[...].

O livro *Cours de mathematiqués* de Bézout, subdividido em cinco volumes, onde o segundo volume era os Elementos de Geometria, passou a ser fragmentado e comercializado por volumes.

[1] Antiquado professor universitário, professor catedrático

Segundo D'Alembert "A caracterização do livro por "Elementos" designa-se do primitivo e original de que uma entidade é construída, e sua noção tem uma consequência da existência de uma seriação lógica e contínua de todas as proposições de uma dada ciência, de forma que todos os elementos podem ser integrados naturalmente." (apud SCHUBRING, 2003 p. 63).

De acordo com Valente (2007, p. 119), a organização e a sequência dos conteúdos a serem aprendidos em matemática relativos ao ensino secundário nesta época dividem-se em dois caminhos, o primeiro é dado pelo aprendizado da sequência: Aritmética - Geometria – Álgebra, e o segundo por Aritmética – Álgebra – Geometria. A primeira sequência é observada em Bézout e justificada pelas seguintes razões:

> Nós preferimos fazer suceder à Geometria a Álgebra e antes dela a Aritmética, pois a Álgebra nos é de uma utilidade muito medíocre na Geometria elementar; os iniciantes, de outra parte, não estão ainda muito exercitados nos raciocínios matemáticos para se sentirem a força das demonstrações algébricas mesmo que elas sejam mais simples que as demonstrações sintéticas[...] (BÉZOUT,1781, p. VIII apud VALENTE, 2007, p.119-120).

Assim a geometria fica livre de formulações e utilizações de expressões algébricas e faz-se de forma teórica e construtiva, com limites apenas atrelados aos elementos de aritmética.

O primeiro caminho dessa sequência é utilizado na Academia Real de Guardas-Marinha, já que este curso é baseado nos livros de Bézout, e similarmente com a vinda da família Real ao Brasil, os preparatórios, liceus, marinha e o próprio colégio Dom Pedro II adotam a primeira sequência (VALENTE, 2007 p. 121).

Dentre o período de correções de sua obra, novas versões são publicadas, até mesmo após sua morte. Com isso, a essência da escrita do autor se fragmenta em diversos contribuidores e adoradores de suas obras, o que abre espaço e permite a Barbosa querer substituir a obra Elementos de Geometria de Bézout.

Francisco Villela Barbosa

A substituição do livro de geometria de Bézout pelo de Barbosa, segundo Valente (2007) ocorreu, "enquanto professor do 1º ano da Academia Real de Marinhas de Lisboa, Barbosa escreveu o livro Elementos de Geometria, e posteriormente foi examinador do curso de Matemática da Academia (1801-1821) garantido destaque a sua obra que aos poucos substituiria a geometria de Bézout".

O sucesso da obra de Barbosa, futuro marquês de Paranaguá, e o motivo para a substituição do material de Bézout é visto em Castro (1992 apud VALENTE, 2007, p. 97) que comenta a trajetória de Barbosa:

> [...] Em 1815 os seus elementos de geometria cujas três primeiras edições foram feitas por determinação e à custa da Academia Real de Ciências de Lisboa, da qual era sócio. Em 1838, a Sociedade Literária do Rio de Janeiro mandou imprimir à sua custa uma nova edição dessa obra. Posteriormente, teve a geometria de Marquês de Paranaguá, sucessivas edições, tanto no Brasil como em Portugal, pois em ambos países adquiriu grande popularidade.

Sobre os livros didáticos utilizados nos liceus brasileiros, de acordo com Renato Palumbo Dória:

> Muito atuante no cenário político brasileiro da primeira metade do século XIX, Francisco Villela Barbosa demonstraria especial interesse sobre o problema dos livros didáticos, condenando publicamente, na sessão do senado brasileiro de 8 de outubro de 1839 (na qual se discutiam os orçamentos do governo), a ineficiência de alguns dos compêndios adotados pelo Imperial Colégio de Pedro II (apud VALLE et al., 2014).

Barbosa no prólogo do seu livro, destaca que os livros de Bézout por serem famosos, havia sofrido inúmeras reformulações e que o de geometria necessitava de uma rigorosa reforma. Em virtude do rigor matemático, garantindo que não ignorou compêndios de geometria famosos para produzir seu livro, dentre eles o de Bézout, o que muitas vezes parece como uma tradução literal da obra do francês, devido às semelhanças.

Levando em consideração os apontamentos a respeito de semelhanças em obras, este fato é conhecido como o fenômeno da vulgata, que de acordo com Chervel:

> Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a tecnologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do corpus de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas (CHERVEL, 1990, p. 203).

Consequentemente é necessário ter mais informações dos livros didáticos para que se tire conclusões sobre a variações das obras, reconhecendo se as obras Elementos de Geometria de Bézout e Barbosa são semelhantes. O reconhecimento textual dos autores, estrutural e demonstrativo poderá trazer as aproximações entre as obras.

Francisco Villela Barbosa e Marquês de Paranaguá

A distinção evidente das edições do Elementos de Geometria de Barbosa (1816, 1838), está ligada ao nome que aparece como escritor da obra. No livro de 1816 o nome do autor é Francisco Villela Barbosa, já em 1838, sua autoria está escrita como Marquês de Paranaguá. Os títulos nobiliárquicos outorgados a Barbosa foram justamente após sua volta ao Brasil em 1823, por ocasião da independência do Brasil de Portugal.

Segundo Oliveira (2013), em sua dissertação, relata que Dom Pedro I por meio de um decreto (12 de novembro de 1823), dissolveu a Assembleia Legislativa e Constituinte, nomeando no dia seguinte um Conselho de Estado formado por dez membros, dentre eles, Barbosa. Os conselheiros entregaram ao imperador um projeto de Constituição para o Império Brasileiro, sendo agraciados com títulos de nobreza em 1825, garantindo o título de visconde de Paranaguá com honras de grandeza à Barbosa.

Todos os conselheiros do Estado na época foram nomeados senadores, e em 12 de outubro de 1826, D. Pedro concede títulos nobiliárquicos a uma parcela dos Senadores, elevando o título de Barbosa de visconde de Paranaguá à Marquês de Paranaguá.

No site do Senado Federal[2](SF), o decreto de 12 de outubro de 1825 e de 1826 de mesma data, não é encontrado em formato digital, porém na Biblioteca Digital do Senado Federal (BDSF), há um exemplar de um livro[3] que compila leis, decretos, resoluções e provisões de 1808 até 1831 em sete tomos. No tomo cinco, estão as compilações do ano de 1825 e 1826, ao se procurar a nomeação, não consta os títulos à Barbosa.

Em vinte e dois anos de diferença entre as publicações de seus Elementos de Geometria, seus títulos aumentaram consideravelmente. Barbosa foi Lente de Matemática na Academia Real de Marinha desde 1801 e sócio na Academia Real de Sciencias de Portugal.

Barbosa em 1823 pede demissão do posto de Major dos engenheiros no exército português, onde com sua vinda ao Brasil, foi nomeado Coronel de engenheiros. Vemos que em 1838 está apresentado por “Brigadeiro do Imperial Corpo dos Ingenheiros”, que segundo a formulação militar do império Brasileiro, que adotava a formulação de Portugal, corresponde a uma patente acima de Coronel.

[2] Disponível em <https://www12.senado.leg.br/hpsenado>. Acesso em 14 abr. de 2021
[3] Disponível em <https://www2.senado.leg.br/bdsf/item/id/227320>. Acesso em 14 abr. de 2021

Segundo o site do Senado Federal, Marquês de Paranaguá foi Deputado às cortes Portuguesas de 1821-1822, e Senador, já no Brasil, de 1826-1841 e de 1843-1846.

Barbosa recebeu a denominada Grã-Cruz da Imperial Ordem do Cruzeiro, uma ordem honorífica brasileira, em decorrência da independência do Brasil e a comemoração da coroação de Dom Pedro I; foi membro da Sociedade Literário do Rio de Janeiro (sem data) e continuava Sócio da Academia Real de Sciencias de Portugal, já que seus livros intercalam em publicações entre Rio de Janeiro e Lisboa.

ANÁLISE COMPARATIVA DOS LIVROS: BÉZOUT E BARBOSA

Foram encontradas quatro edições disponíveis digitalmente das obras, sendo elas duas de Bézout (1771, 1827) e duas de Barbosa (1816, 1838). Por questões históricas, organizou-se da seguinte forma: primeiramente o livro Elementos de Geometria de Bézout (1827), que é uma tradução da obra para o português; posteriormente a versão mais antiga da obra de Barbosa (1816); e por fim, a versão mais nova (1838).

O outro livro encontrado de Bézout (1771), corresponde ao livro em francês dos Elementos de Geometria, com a adição da trigonometria retilínea e esférica, que não será o enfoque desta análise por dificuldades com a língua francesa, apesar de que foram comparadas as duas edições (Figura 1) e (Figura 2) buscando a veracidade da tradução.

Para que não houvesse desvio na pesquisa, e falta de comprometimento com a história, as obras evidenciadas estão em um período histórico onde os autores permaneciam vivos, a menos a tradução de Bézout.

SOBRE A GEOMETRIA PLANA NAS OBRAS

Será dado destaque aos primeiros capítulos das obras que destacam a geometria plana (seção 1 e 2).

Como visto, a utilização das obras estava destinada ao ensino secundário de Portugal e Brasil e seguiam a sequência Aritmética – Geometria – Álgebra. Para a análise textual presente nas obras didáticas será estipulado uma abordagem acerca da estruturação, seguindo o conteúdo programático proposto no índice dos livros. A cada capítulo será feito um comentário sobre diferenças e semelhanças nas obras, além de apontamentos históricos.

Algumas construções geométricas e teoremas serão expostos e demonstrados pela sua importância no campo da geometria plana e aplicabilidade em outros setores da matemática, outros serão apenas apresentados.

Contemplado a estrutura no ambiente textual das obras didáticas, omitir a identificação de significativas melhorias na Geometria plana é falho. Como será visto no prefácio, informações ditas serão utilizadas nessa análise para comprovar se os autores cumprem com suas palavras. Será feito comentários, caso aconteça semelhanças textuais entre os autores.

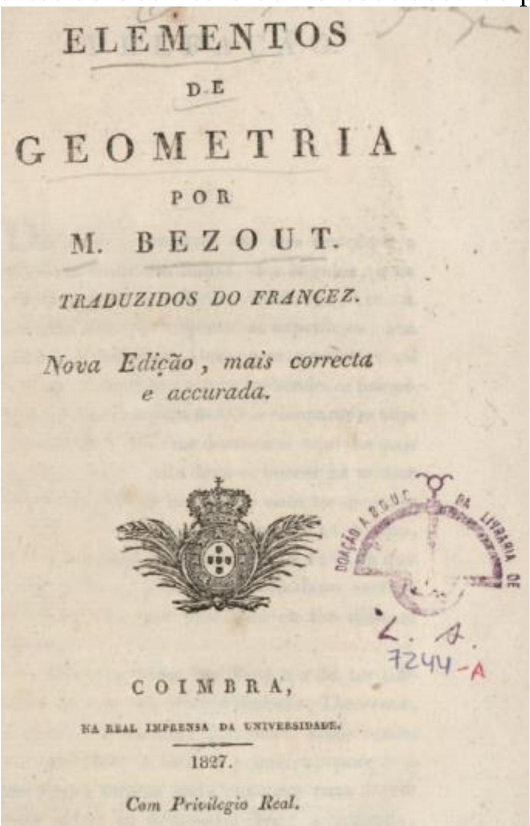
A organização dos conteúdos é feita por uma separação em pontos, permitindo que isso seja um instrumento de acompanhamento do ritmo da matéria pelo professor (COSTA, 2010, p. 168). Similarmente as figuras utilizadas são representadas entre parênteses junto a um número, para que os estudantes possam observar a imagem no final do livro, na chamada prancha de figuras.

CAPÍTULO 1

ELEMENTOS DE GEOMETRIA DE BÉZOUT

1.1 AS CAPAS

Figura 1 – Elementos de Geometria de Bézout traduzido para o português.



ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA

POR

M. BEZOUT.

TRADUZIDOS DO FRANCEZ.

Nova Edição, mais correcta e accurada.

COIMBRA,

NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

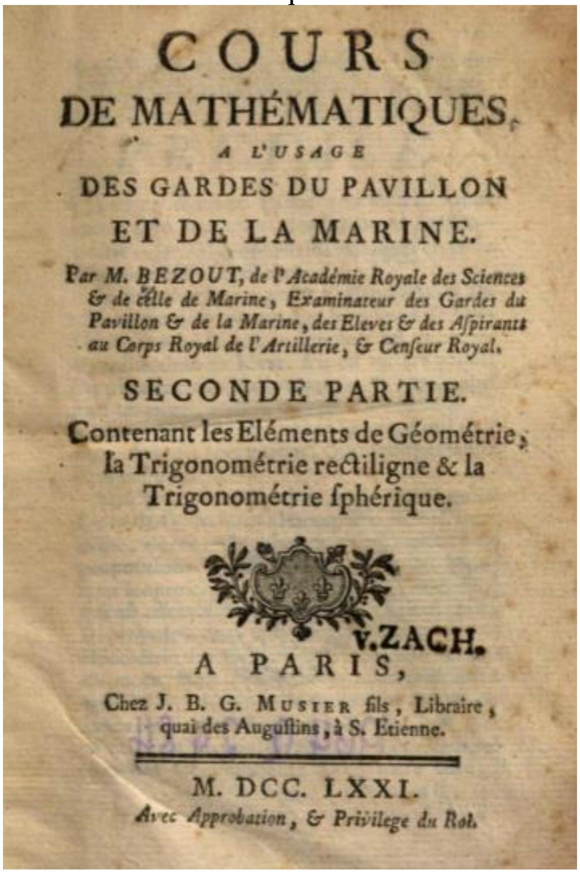
1827.

Com Privilegio Real.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC[4].

[4] Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/232408 >. Acesso em 1 mar. de 2022

Figura 2 – Obra em francês de Bézout que contém os Elementos de Geometria.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC [5].

1.1.1 Sobre as editoras

1.1.1.1 Paris e Coimbra

Os brasões encontrados estampados nas capas representam a identificação da entidade responsável pelo desenvolvimento. Na edição da obra de 1771 feita em Paris, a obra em francês conta com a flor de lis, símbolo heráldico atribuído à monarquia, especificamente o rei. As siglas J.B.G, se referem a Jean-Baptiste-Guillaume Musier, livreiro com residência em Paris. Jean possui uma tipografia, que foi responsável pela reprodução do livro de Bézout.

Com o sucesso de seu livro e as vastas edições, fizeram com que várias tipografias reproduzissem suas obras. As obras que se pode encontrar publicadas por Musier são:

a) Elementos de fortificação;
b) Melhoria da terra, agricultura;

[5] Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/232404 >. Acesso em 1 mar. de 2022

c) História de Heródoto, traduzido do grego;
d) Principais e instrutivas experiências do novo tratamento de vinhos. (WORLDCAT, c2021a).

No Elementos de Geometria de 1827, a Real Imprensa da Universidade instalada primariamente na capital portuguesa, e sendo realocada por último em Coimbra, detinha uma política de impressão que segundo a história da própria universidade:

> Impressão ou reimpressão das obras com tanto que não fossem obras fúteis, nas quais não devia trabalhar a Imprensa da Universidade, ainda que por outra parte se visse que haveriam de ter grande consumo. Através das obras impressas ou difundidas ressaltam nomes de grandes personalidades em quase todos os campos das ciências – Direito, Botânica, Filosofia, Matemática, História, Teologia, Oratória, Medicina, Química, História Natural, Astronomia, Física Experimental (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2021).

O regimento da universidade mediante o uso dos livros didáticos no século XIX diz:

> “[...]não seria admitido à matrícula académica nenhum estudante que não apresentasse uma declaração da Imprensa da Universidade em como tinha comprado os compêndios do ano que pretendia frequentar, bem como os demais livros necessários para ouvir com proveito as respetivas lições.” (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2021).

1.2 O PREFÁCIO

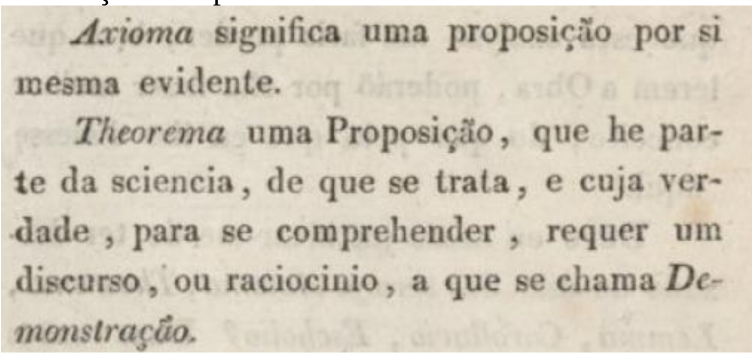
A prefação dos livros é a parte do livro que o autor conversa com o leitor e mostra suas intenções em relação à matemática, o porquê do livro, pra quem ele é destinado e as tentativas/dificuldades do ensino da matemática.

Para Bézout, a geometria foi dividida em três seções: linhas, ângulos, medida de ângulos, das relações de linhas, etc. A segunda parte conta com as superfícies, medidas e relações, e a última parte aos sólidos, compreendendo os princípios de comparação de capacidades.

Os termos: axioma, teorema, lema, corolário e escólio são deixados de lado em sua obra, pois segundo o autor, a utilização dos mesmos não esclarece as demonstrações além de que se um principiante que encontra uma proposição com o nome revestido de “teorema” pode pensar que a proposição é remota ao seu conhecimento, quanto a própria palavra em questão.

Bézout por preocupação com os leitores e com receio dos mesmos não entenderem os termos deixados de lado por ele, escreve a definição de cada palavra e o contexto matemático na utilização delas.

Figura 3 – Definições das palavras axioma e teorema no contexto matemático.



Axioma significa uma proposição por si mesma evidente.

Theorema uma Proposição, que he parte da sciencia, de que se trata, e cuja verdade, para se comprehender, requer um discurso, ou raciocinio, a que se chama *Demonstração.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

1.3 O ÍNDICE

Figura 4 – Índice do Elementos de Geometria de Bézout.

INDICE

DAS COUSAS, QUE SE CONTÊM NESTES ELEMENTOS.

SECÇÃO PRIMEIRA.

	Pag.
NOções preliminares	1.
Das Linhas	2.
Dos Angulos, e sua medida	6.
Das perpendiculares e obliquas	13.
Das Parallelas	15.
Das linhas rectas consideradas a respeito da circumferencia do circulo: e das circumferencias de circulo comparadas umas com outras	18.
Dos angulos considerados dentro do circulo	22.
Das linhas rectas, que fechão um espaço	26.
Da igualdade dos triangulos	28.
Dos polygonos	31.
Das Linhas proporcionaes	35.
Da similhança dos triangulos	41.
Das Linhas proporcionaes consideradas no circulo	50.
Das figuras similhantes	52.

SECÇÃO SEGUNDA.

DAs Superficies	61.
Da medição das superficies	64.
Do modo de medir as superficies em toezas	73.
Taboa das subdivisões da toeza quadrada em rectangulos, que tem por altura uma toeza; e caracteres, que representão estas partes	75.
Da comparação das superficies	80.
Dos Planos	86.
Propriedades das linhas rectas cortadas por planos parallelos	91.

SECÇÃO TERCEIRA.

DOs Sólidos	93.
Dos Sólidos similhantes	96.
Da medição da superficie dos Sólidos	97.
Da razão das superficies dos Sólidos	102.
Da solidez dos Prismas	104.
Da medição da solidez dos prismas e cylindros	105.
Da solidez das pyramides	107.
Medição da solidez das pyramides	ibid.
Da solidez da Esfera, dos seus sectores, e segmentos	110.
Da medição dos mais Sólidos	111.
Da medição dos Sólidos em toezas	118.
Da medição da madeira	124.
Da razão dos Sólidos em geral	125.
Applicação ás novas medidas	130.

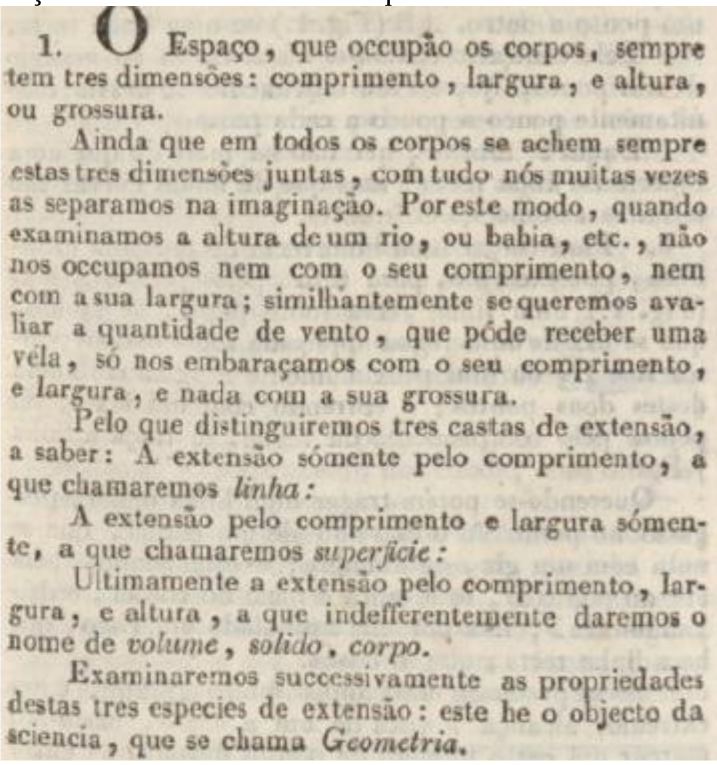
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

1.4 A GEOMETRIA PLANA DE BÉZOUT

1.4.1 Noções preliminares

Concebe-se a Geometria por objetos básicos de estudo, o ponto, a reta e o plano. Definitivamente nenhum dos três possuem uma definição fixa, sendo este um ótimo começo para observarmos o andamento do livro.

Figura 5 – Noções básicas de Geometria que Bézout utiliza em seus Elementos.



1. O Espaço, que occupão os corpos, sempre tem tres dimensões: comprimento, largura, e altura, ou grossura.

Ainda que em todos os corpos se achem sempre estas tres dimensões juntas, com tudo nós muitas vezes as separamos na imaginação. Por este modo, quando examinamos a altura de um rio, ou bahia, etc., não nos occupamos nem com o seu comprimento, nem com a sua largura; similhantemente se queremos avaliar a quantidade de vento, que póde receber uma véla, só nos embaraçamos com o seu comprimento, e largura, e nada com a sua grossura.

Pelo que distinguiremos tres castas de extensão, a saber: A extensão sómente pelo comprimento, a que chamaremos *linha:*

A extensão pelo comprimento e largura sómente, a que chamaremos *superficie:*

Ultimamente a extensão pelo comprimento, largura, e altura, a que indefferentemente daremos o nome de *volume*, *solido*, *corpo*.

Examinaremos successivamente as propriedades destas tres especies de extensão: este he o objecto da sciencia, que se chama *Geometria*.

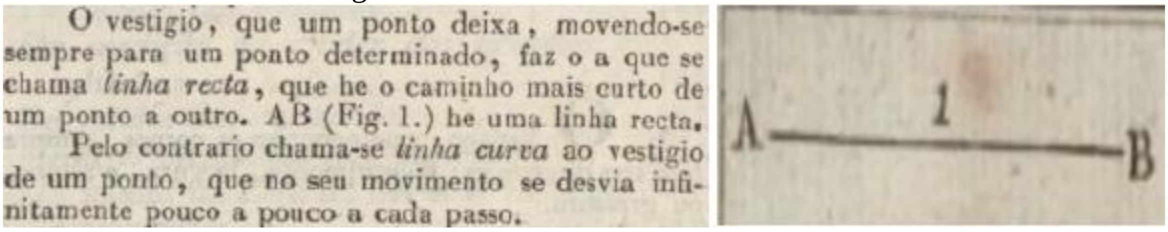
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Observa-se indubitavelmente o ambiente que o autor insere em sua explicação, tendo em vista a aplicação de suas obras na marinha francesa. Supõe assim, um espaço e suas características organizadas da forma:

a) O ponto pode considerar-se como uma porção de extensão, com um comprimento, largura, e grossura, infinitamente pequenos;
b) Linha como uma extensão que possui somente comprimento;
c) Superfície como uma extensão com somente comprimento e largura.

1.4.2 As linhas

Figura 6 – Conceito de linha em Bézout.



O vestigio, que um ponto deixa, movendo-se sempre para um ponto determinado, faz o a que se chama *linha recta*, que he o caminho mais curto de um ponto a outro. AB (Fig. 1.) he uma linha recta.

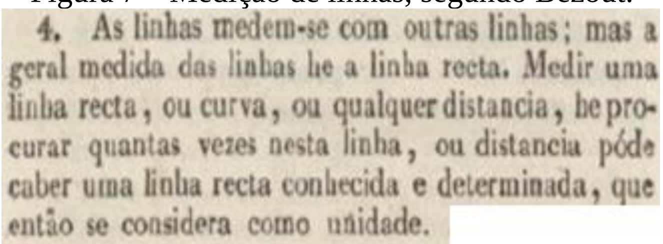
Pelo contrario chama-se *linha curva* ao vestigio de um ponto, que no seu movimento se desvia infinitamente pouco a pouco a cada passo.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Na parte introdutória sobre linhas, Bézout as classifica em linhas retas e curvas, sendo que não há mais de uma espécie de linha reta, em compensação há infinitas que são curvas. Após a diferenciação, Bézout ensina como traçar uma linha reta a partir de dois pontos, além de como fazer o traçado de uma linha reta que é demasiada grande.

O conceito de medição de linhas expresso no livro é dito como a quantidade de vezes que uma linha cabe em outra, essa medição é de suma importância para os próximos conteúdos. Após o dito é definido então superfície plana, que segundo o autor é uma aplicação de linhas retas por toda a parte.

Figura 7 – Medição de linhas, segundo Bézout.



4. As linhas medem-se com outras linhas; mas a geral medida das linhas he a linha recta. Medir uma linha recta, ou curva, ou qualquer distancia, he procurar quantas vezes nesta linha, ou distancia póde caber uma linha recta conhecida e determinada, que então se considera como unidade.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Finalizando o capítulo, é dito pelo autor que das linhas curvas, se tratará apenas a circunferência do círculo, relatando sobre raios, diâmetro, arcos, cordas e centro, relatando suas definições.

Sobre a repartição da circunferência e suas denominações, alega utilizações na astronomia com contagens de graus em trinta em trinta denominados *signos* e aplicações marítimas com utilizações nas bússolas separadas em trinta e duas partes iguais denominadas *ares* ou *rumos* de vento.

Figura 8 – Repartição de uma circunferência em 360 partes.

8. Assentou-se em repartir todas as circumferencias de circulo, seja elle grande, ou pequeno, em 360 partes iguaes, a que chamão *gráos*: cada gráo se divide em 60 partes iguaes, chamadas *minutos*: cada minuto em 60 partes iguaes, a que se dá o nome de *segundos*, subdividindo cada uma parte sempre de 60 em 60, e denominando-a consecutivamente *minutos*, *segundos*, *terceiros*, *quartos*, *quintos*, etc.

Marca-se o gráo deste modo .... °
O minuto deste modo .... ′
O segundo .... ″
O terceiro .... ‴
O quarto .... ⁗

Para assentar 3 gráos, 24 minutos, e 55 segundos, escreve-se 3° 24′ 55″.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

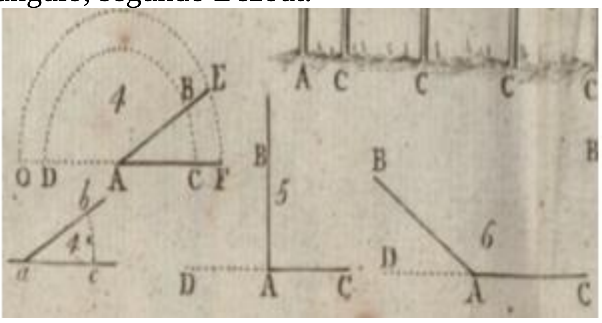
1.4.3 Dos ângulos, e sua medida

Figura 9 – Definição de ângulo, segundo Bézout.

9. DUas linhas AB, AC, quando se encontrão, podem formar entre si uma abertura maior, ou menor, como mostrão as Figuras 4. 5. 6.

A esta abertura BAC chama-se *angulo*. Chama-se angulo *rectilineo*, ou *curvilineo*, ou *mixtilineo*, conforme são as linhas, que o compõem, ou ambas rectas, ou ambas curvas, ou uma recta, e outra curva.

Por ora vamos tratar tão sómente dos angulos rectilineos.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Definidos os conceitos de linhas, os ângulos fazem parte do objeto de estudo deste capítulo. Dada a definição, Bézout a completa com os nomes relativos dado ao encontro das linhas e os lados do ângulo, além da forma de se referenciar o mesmo (BAC, utilizando as figuras dispostas pelo autor). Neste trabalho consideraremos a notação de ângulo como: $\angle BAC$ ou $\angle A$ em casos específicos feitos pelos autores.

Quando o assunto é transposição de ângulo, o autor faz questão de escrever os passos que devem ser feitos para que aconteça o transporte, deixando evidente o uso do compasso. Depois de transpor, o autor define ângulo reto, obtuso e agudo; ângulos em uma circunferência; ângulos suplementares e complementares; e ângulos opostos pelo vértice (ou opostos verticalmente).

Em seu Elementos de Geometria, Bézout diz que os ângulos estão tanto no prático, quanto no teórico. Certamente que as ocasiões que o autor propõe são teóricas e que as práticas são exercícios que ele deixa no fim do capítulo, simulando um suposto navio derrotado (que seguiu rumo). Posteriormente o autor introduz a ideia de que o ângulo pode ser calculado por meio de um problema utilizando os instrumentos:

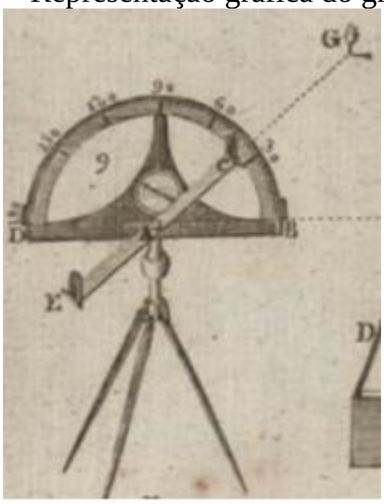
a) Transferidor: O qual tem uso para medir ângulos sobre o papel, e para ali mesmo fazer os ângulos, que são precisos. É cômodo e frequente o seu uso (BÉZOUT, 1827, p. 10);

Figura 10 – Representação gráfica do transferidor.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

b) Grafômetro: É um semicírculo dividido em 180º, conforme se marca também meios graus, conforme a grandeza de seu diâmetro[...] muitas vezes têm este instrumento uma Bússola ordinária, ou simples (BÉZOUT, 1827, p. 10-11);

Figura 11 – Representação gráfica do grafômetro.

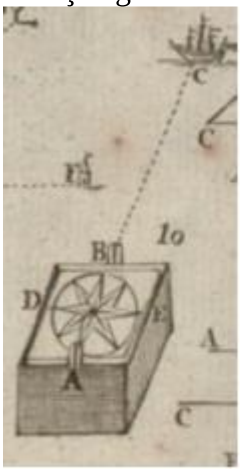


Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

c) Bússola sem grafômetro: É unicamente para determinar grosseiramente um a um, muitos pontos de um plano (BÉZOUT, 1827, p. 12);

d) Bússola marítima, Compasso de mar ou Compasso de Variação: “[...] e que tem por objeto fazer com que as partes todas desta máquina, que servem para medir os ângulos, não participem de outros movimentos do navio, além daqueles que pode ter girando horizontalmente” (BÉZOUT, 1827, p. 12).

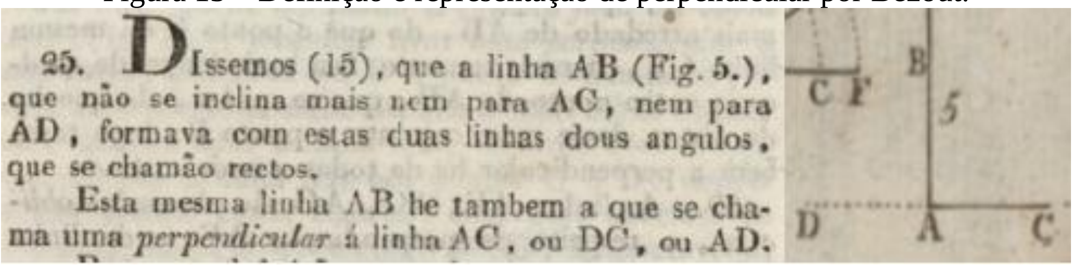
Figura 12 – Representação gráfica da bússola marítima.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

1.4.4 Das perpendiculares e oblíquas

Figura 13 – Definição e representação de perpendicular por Bézout.



25. DIssemos (15), que a linha AB (Fig. 5.), que não se inclina mais nem para AC, nem para AD, formava com estas duas linhas dous angulos, que se chamão rectos.

Esta mesma linha AB he tambem a que se chama uma *perpendicular* á linha AC, ou DC, ou AD.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Retomando a definição dita sobre um ângulo reto, seu lado $\overrightarrow{AB}$ não inclina nem para $\overrightarrow{AC}$ nem para $\overrightarrow{AD}$, formando com essas duas linhas, dois ângulos retos. $\overrightarrow{AB}$ assume o papel então de uma perpendicular a linha $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, ou $\overrightarrow{AD}$. Estabelecendo assim três corolários.

Figura 14 – Três corolários estabelecidos das noções de perpendicular.

26. 1.° *Quando uma linha AB* (Fig. 11.) *he perpendicular sobre outra linha CD, tambem estoutra CD he perpendicular sobre a linha AB.*

Porque quando AB he perpendicular sobre CD, os angulos AEC, AED são iguaes; mas AED he igual a BEC (20); logo AEC he igual a BEC: logo a linha CE, ou CD não se inclina mais nem para AE, nem para BE: logo CD he perpendicular sobre AB.

27. 2.° *Do mesmo ponto E, tomado na linha CD, não se póde levantar mais do que uma só perpendicular a esta linha.*

28. 3.° *E do mesmo ponto A, tomado fóra de uma linha CD, não se póde abaixar mais do que uma só perpendicular a esta linha.*

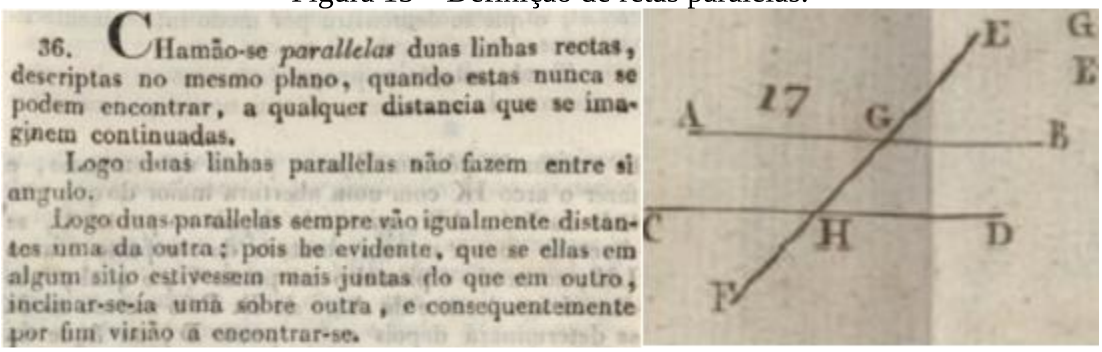
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

A partir da própria imagem disponibilizada pelo autor, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG}$ são chamadas linhas oblíquas, a respeito da perpendicular $\overrightarrow{AE}$ e da linha $\overrightarrow{CD}$. Seu nome é relativo ao ângulo agudo ou obtuso que faz a respeito de outra linha.

Encaminhando para o final do capítulo, Bézout resolve dois problemas por construção ensinando como levantar uma perpendicular ao meio de uma linha, e fazer o mesmo por um ponto fora de uma linha. Deixa claro que caso seja impossível tal marcação com o compasso, que se estenda as linhas para facilitar o desenho.

1.4.5 Das paralelas

Figura 15 – Definição de retas paralelas.



36. CHamão-se *parallelas* duas linhas rectas, descriptas no mesmo plano, quando estas nunca se podem encontrar, a qualquer distancia que se imaginem continuadas.

Logo duas linhas parallelas não fazem entre si angulo.

Logo duas parallelas sempre vão igualmente distantes uma da outra; pois he evidente, que se ellas em algum sitio estivessem mais juntas do que em outro, inclinar-se-ia uma sobre outra, e consequentemente por fim virião a encontrar-se.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Dada a definição de retas paralelas, o autor utiliza das ideias de duas retas paralelas e uma transversal que as cruza, afirmando cinco propriedades:

a) ângulos correspondentes: $\angle BGE, \angle DHE$ ou $\angle AGH, \angle CHF$;

b) ângulos alternos internos: $\angle AGH, \angle GHD$ são iguais, apenas dado um deles;

c) ângulos alternos externos: $\angle BGE, \angle CHF$ são iguais, apenas dado um deles;

d) ângulos internos para mesma parte: $\angle BGH, \angle DHG$, ou $\angle AGH, \angle CHG$ são suplementos um do outro;

e) ângulos externos para mesma parte: $\angle BGE, \angle DHF$, ou $\angle AGE, \angle CHF$ são suplementos um do outro.

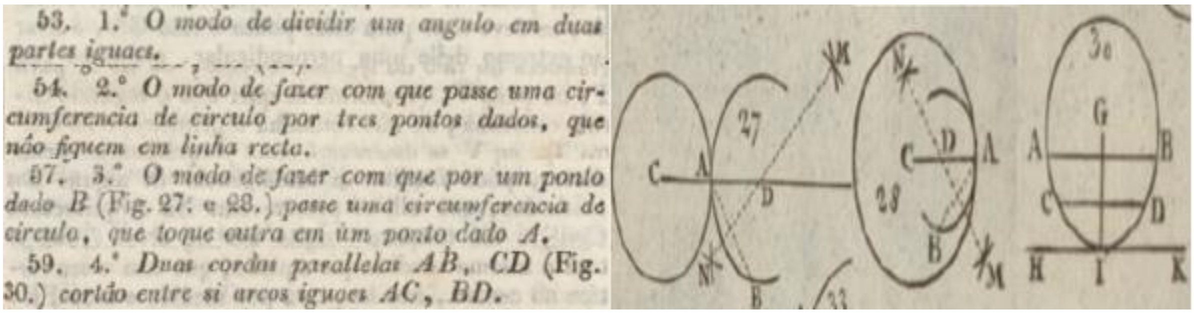
Assim, cada uma das propriedades é verificada toda vez que duas linhas paralelas são cortadas por uma terceira, e a recíproca por sua vez também é válida. Duas propostas de construções de retas paralelas são descritas, com a necessidade da régua e compasso para o transporte de ângulos que são resolvidas pelo autor.

Finalizando o capítulo, Bézout resume a utilização de retas perpendiculares e paralelas em toda a matemática prática. A primeira é necessária para medir superfícies, capacidade dos corpos, utilizados na arquitetura naval, já a segunda tem seu uso para demonstrar um grande número de proposições, úteis na pilotagem, marcação de derrota[6] em cartas marítimas.

1.4.6 Das linhas retas consideradas a respeito de uma circunferência de um círculo

Bézout optou por organizar esse capítulo após a identificação de perpendiculares e paralelas, já que as construções que são apresentadas aqui, necessitam de perpendicularismo. Definindo primariamente reta secante e tangente. No decorrer do texto são dados problemas que envolvem construções geométricas, que são feitas pelo autor.

Figura 16 – Problemas propostos de retas consideradas a respeito das circunferências de acordo com Bézout.



53. 1.º *O modo de dividir um angulo em duas partes iguaes.*

54. 2.º *O modo de fazer com que passe uma circumferencia de circulo por tres pontos dados, que não fiquem em linha recta.*

57. 3.º *O modo de fazer com que por um ponto dado B* (Fig. 27. e 28.) *passe uma circumferencia de circulo, que toque outra em um ponto dado A.*

59. 4.º *Duas cordas parallelas AB, CD* (Fig. 30.) *cortão entre si arcos iguaes AC, BD.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

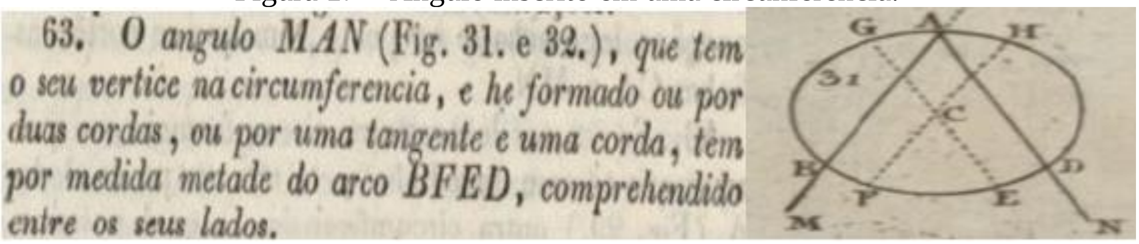
[6] Derrota: Rumo ou caminho seguido por um navio.

Das aplicações citadas pelo autor, a arquitetura naval (ou construção de navios) necessita de arcos que se toquem, ou toquem linhas retas, e passem por pontos determinados. Além da naval, a arquitetura civil também faz uso de arcos que se tocam. (BÉZOUT, 1827, p. 22).

1.4.7 Dos ângulos considerados dentro de um círculo

Neste capítulo não será aprendido um novo método de medir, apenas propriedades que serão utilizadas com o objetivo de facilitar as demonstrações futuras. Dentre os teoremas se destaca o ponto (63.). Este teorema conta com a demonstração feita com ângulos e retas paralelas cortadas por uma transversal.

Figura 17 – Ângulo inscrito em uma circunferência.


63. O angulo MAN (Fig. 31. e 32.), que tem o seu vertice na circumferencia, e he formado ou por duas cordas, ou por uma tangente e uma corda, tem por medida metade do arco BFED, comprehendido entre os seus lados.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC

(63.) Demonstração: Tire pelo centro C o diâmetro $\overline{FH}$ paralelo ao lado $\overrightarrow{AM}$, e de mesma forma o diâmetro $\overline{GE}$ paralelo ao lado $\overrightarrow{AN}$. O ângulo $\angle MAN$ é igual o ângulo $\angle FCE$: logo terá a mesma medida que aquele, que tem o seu vértice no centro, isto é, terá por medida o arco $\widehat{FE}$.

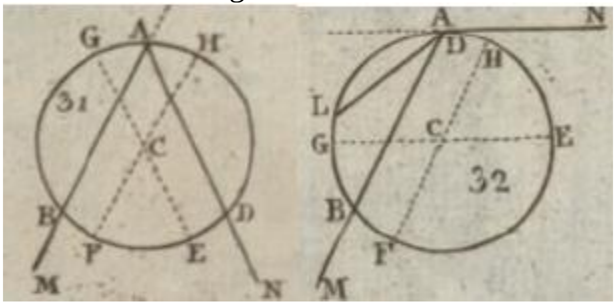
Resta mostrar que o arco $\widehat{FE}$ é metade do arco $\widehat{BFED}$. Ora o arco $\widehat{BF}$ é igual ao arco $\widehat{AH}$, por causa que $\overrightarrow{AM}$, $\overline{HF}$ são paralelas; e pelo mesmo motivo, o arco $\widehat{ED}$ é igual ao arco $\widehat{AG}$, pois $\overrightarrow{AM}, \overline{HF}$ são paralelas, logo os arcos, $\widehat{ED} + \widehat{BF} = \widehat{AG} + \widehat{AH} = \widehat{GH}$.

Mas $\widehat{GH}$ como medida do ângulo $\angle GCH$, deve ser igual a $\widehat{FE}$ medida do ângulo $\angle FCE$, que é igual a $\angle GCH$. Logo, os arcos $\widehat{BF}$ com $\widehat{ED}$ são iguais a $\widehat{EF}$, e assim, $\widehat{FE}$ é a metade de $\widehat{BFED}$: concluindo assim que o ângulo $\angle MAN$ tem por medida metade do arco $\widehat{BFED}$, compreendido entre seus lados. (BÉZOUT, 1827, p. 22).

■

Nota-se que o centro está no interior do ângulo $\angle MAN$, mas poderia acontecer do mesmo estar em um dos lados, ou fora de um desses lados. Em seu livro, consta somente dois dos três casos.

Figura 18 – Casos de ângulos inscritos em uma circunferência com centro no interior e fora, segundo Bézout.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Os corolários atribuídos em função deste teorema relatam circunstâncias úteis no futuro em linhas proporcionais em um círculo. São eles:

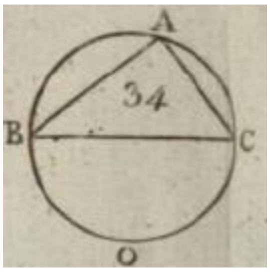
a) todos os ângulos $\angle BAE, \angle BCE, \angle BDE$, tendo o vértice na circunferência, compreendem entre seus lados o mesmo arco, ou arco iguais, são iguais; por que a medida de cada um deles será metade do mesmo arco $\widehat{BE}$;

Figura 19 – Os ângulos $\angle BAE$, $\angle BCE$, $\angle BDE$ com medida o arco $\widehat{BE}$.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

b) todo ângulo $\angle BAC$ que tiver o vértice na circunferência, e cujos lados passam pelos extremos do diâmetro será reto, pois há de compreender entre seus lados a semicircunferência BOC, que é de 180º, e como a medida do ângulo é metade dela, será 90º;

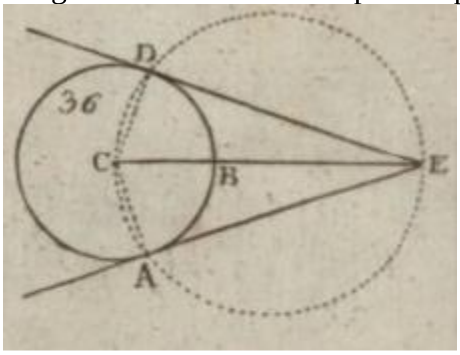
Figura 20 – Ângulo na semicircunferência $\angle BAC = 90°$.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Por consequência do segundo corolário, consegue estipular como tirar retas tangentes à circunferência.

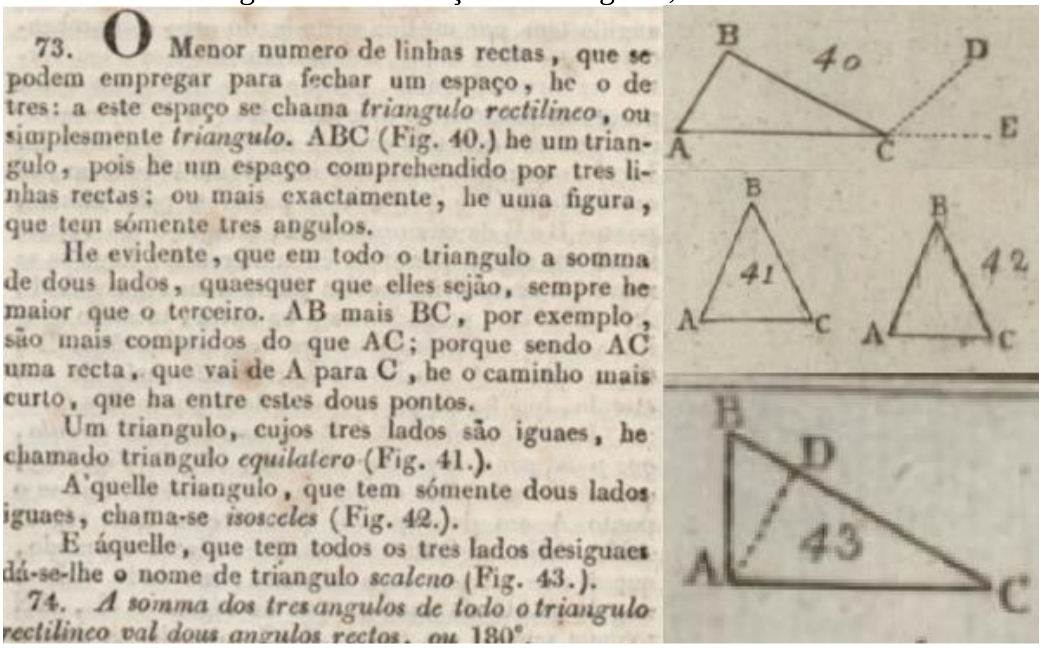
Figura 21 – Retas tangentes à circunferência por um ponto E fora dela.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

1.4.8 Das linhas que se fecham um espaço

Figura 22 – Definição de triângulos, em Bézout.



73. O Menor numero de linhas rectas, que se podem empregar para fechar um espaço, he o de tres: a este espaço se chama *triangulo rectilineo*, ou simplesmente *triangulo*. ABC (Fig. 40.) he um triangulo, pois he um espaço comprehendido por tres linhas rectas; ou mais exactamente, he uma figura, que tem sómente tres angulos.

He evidente, que em todo o triangulo a somma de dous lados, quaesquer que elles sejão, sempre he maior que o terceiro. AB mais BC, por exemplo, são mais compridos do que AC; porque sendo AC uma recta, que vai de A para C, he o caminho mais curto, que ha entre estes dous pontos.

Um triangulo, cujos tres lados são iguaes, he chamado triangulo *equilatero* (Fig. 41.).

A'quelle triangulo, que tem sómente dous lados iguaes, chama-se *isosceles* (Fig. 42.).

E áquelle, que tem todos os tres lados desiguaes dá-se-lhe o nome de triangulo *scaleno* (Fig. 43.).

74. *A somma dos tres angulos de todo o triangulo rectilineo val dous angulos rectos, ou 180°.*

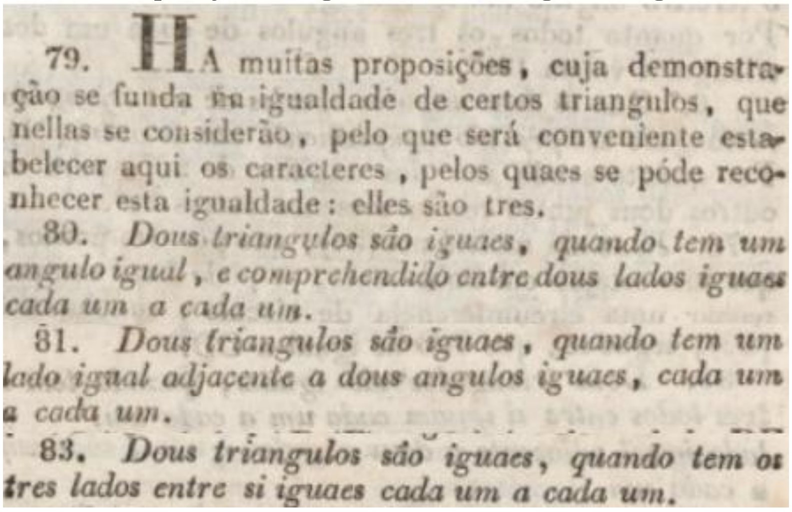
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Triângulos correspondem a parte mais densa da geometria plana em termos de definições e corolários, o autor apresenta as seguintes noções no decorrer deste capítulo:

a) definição de triângulo;
b) desigualdade triangular;
c) distinção pelos seus lados em equilátero, isósceles e escaleno;
d) soma dos ângulos internos do triângulo, provando-o;
e) ângulo externo como a soma dos ângulos internos opostos a ele;
f) triângulo não possui mais de um ângulo reto ou obtuso, mas pode ter todos agudos, nomeando cada triângulo quanto aos ângulos;
g) soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo são complemento um do outro;
h) por três pontos não colineares se pode passar uma circunferência de um círculo, dizendo que isto seria circunscrever um triângulo;
i) se dois ângulos de um triângulo são iguais, também são iguais os lados que lhe são opostos, e a recíproca também é válida, provando-a;

1.4.9 Da igualdade de triângulos

Figura 23 – Proposições de igualdade de triângulos, segundo Bézout.



79. HA muitas proposições, cuja demonstração se funda na igualdade de certos triangulos, que nellas se considerão, pelo que será conveniente estabelecer aqui os caracteres, pelos quaes se póde reconhecer esta igualdade: elles são tres.

80. *Dous triangulos são iguaes, quando tem um angulo igual, e comprehendido entre dous lados iguaes cada um a cada um.*

81. *Dous triangulos são iguaes, quando tem um lado igual adjacente a dous angulos iguaes, cada um a cada um.*

83. *Dous triangulos são iguaes, quando tem os tres lados entre si iguaes cada um a cada um.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Das proposições ditas pelo autor, sua demonstração conta apenas com um manejo das figuras umas sobre as outras. Após cada demonstração, Bézout ensina como construir um triângulo igual a outro de acordo com as proposições ditas por ele.

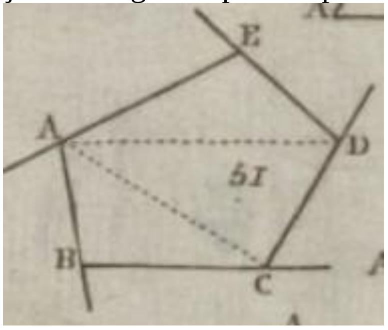
Dos casos de igualdade de triângulos listados por Bézout, como são comumente conhecidos:

a) (80.) lado-ângulo-lado (LAL);
b) (81.) ângulo-lado-ângulo (ALA);
c) (83.) lado-lado-lado (LLL).

1.4.10 Dos polígonos

A nomenclatura de polígonos acontece de acordo com seus lados, porém o autor afirma que as demais nomenclaturas não são necessárias para listar, pois não seriam tão úteis gravá-las. Apresentado em seguida o conceito de diagonais onde, nada é provado, o autor deixa que os estudantes observem uma figura do seu livro e tirem conclusões.

Figura 24 – Representação de diagonais por um pentágono, segundo Bézout.



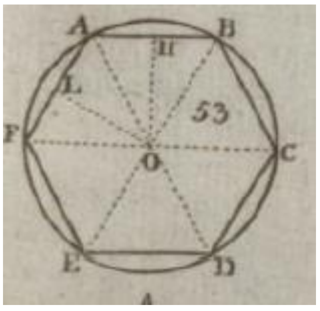
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Utilizando desta mesma definição, diz que o polígono pode ser fragmentado em triângulos e estipula a soma dos ângulos internos de um polígono. Após o dito, prolongando as retas da figura base, Bézout define que a soma dos ângulos externos de um polígono é 360º, utilizando a ideia de suplementos já discutida pelo autor.

Bézout aproveita de conceitos já antes fornecidos, para concretizar sua exposição. É dito que um polígono é regular se ele possui ângulos iguais e lados iguais, e assim por todos os vértices dos ângulos do polígono regular poderia então descrever uma circunferência, similar ao o que foi feito em seu capítulo de triângulos.

O autor acrescenta que todas as perpendiculares abaixadas do centro do polígono regular sobre os lados são iguais, e com um raio igual a uma das perpendiculares se escreve uma circunferência circunscrita ao polígono, chamando $\overline{OH}$ ou $\overline{OL}$ de apótema do polígono.

Figura 25 – Polígono inscrito em uma circunferência e os apótemas $\overline{OH}$ e $\overline{OL}$, em Bézout.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

1.4.11 Linhas proporcionais

Bézout utiliza de seu livro de aritmética no capítulo para relembrar a proporcionalidade, que serão úteis em linhas proporcionais. Depois de relembrar os conceitos, o autor enuncia seu primeiro teorema do capítulo.

Figura 26 – Primeiro teorema proposto em linhas proporcionais no livro de Bézout.

As razões, que aqui vamos considerar, são razões Geometricas. Assim quando dissermos, que uma determinada linha he para outra, como 5 he para 4, por exemplo, deve-se entender, que a primeira contém a segunda tantas vezes, como 5 contém 4.

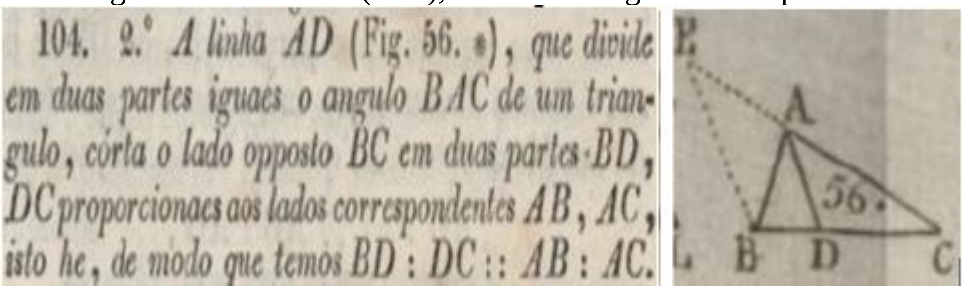
101. *Se sobre um dos lados AZ de qualquer angulo ZAX* (Fig. 55.) *se marcão as partes iguaes AB, BC, CD, DE, etc., de qualquer grandeza e numero, que se quizer, tendo-se tirado arbitrariamente por um ponto F da divisão a linha FL, que encontre o lado AX em L, tirando pelos outros pontos da divisão as linhas BG, CH, DI, EK, etc., parallelas a FL, digo que as partes AG, GH, HI, etc., do lado AX são tambem iguaes entre si.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Para identificar as proporções, é utilizado as igualdades de triângulos já definidas pelo autor. Não há necessidades de listar todas as proporções encontradas, representando assim o exemplo de somente uma delas como: $AD\!:\!AI :: AB\!:\!AG$. Onde $\overline{AI}$, $\overline{AB}$ representam os meios e $\overline{AD}$ e $\overline{AG}$ representam os externos(ou extremos).

Finalizando o capítulo de linhas proporcionais, há a inclusão de dois teoremas (104. e 105.), que são serão palco para discussões entre os autores no capítulo 3 deste trabalho.

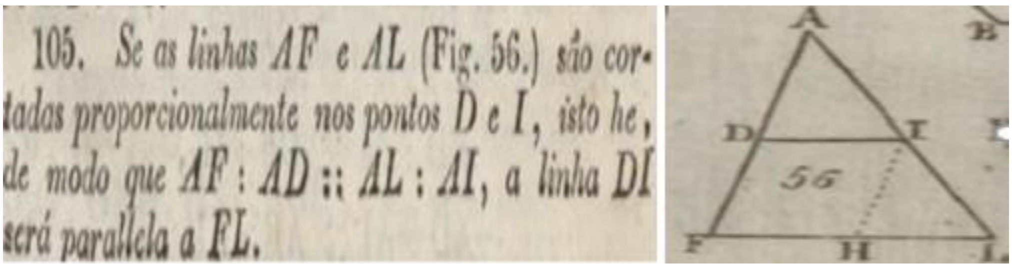
Figura 27 – Teorema (104.), divisão do ângulo $\angle BAC$ por $\overline{AD}$.



104. 2.° *A linha AD* (Fig. 56. *), *que divide em duas partes iguaes o angulo BAC de um triangulo, córta o lado opposto BC em duas partes BD, DC proporcionaes aos lados correspondentes AB, AC, isto he, de modo que temos BD : DC :: AB : AC.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Figura 28 – Teorema (105.), dois lados de qualquer triângulo cortados por uma reta paralela ao terceiro.



105. *Se as linhas AF e AL* (Fig. 56.) *são cortadas proporcionalmente nos pontos D e I, isto he, de modo que AF : AD :: AL : AI, a linha DI será parallela a FL.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

1.4.12 Da semelhança dos triângulos

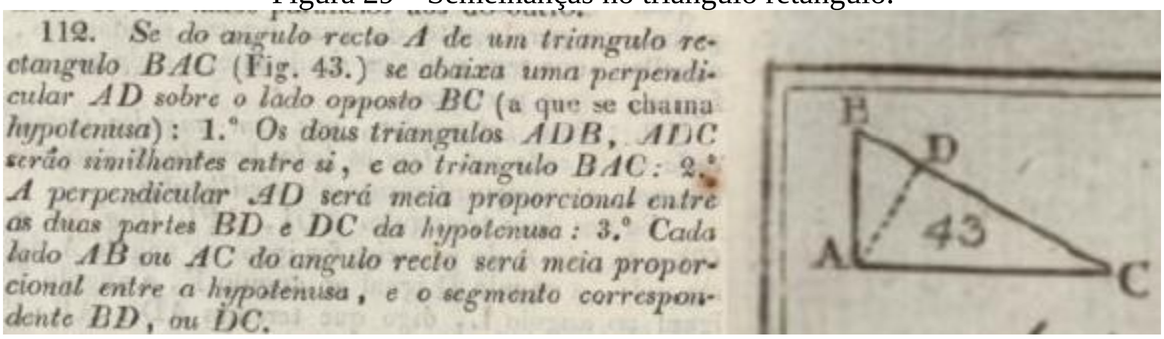
O capítulo de semelhança de triângulo é um dos mais extensos em relação aos demais. Algumas definições de congruência de triângulos e proporções são essenciais para estabelecer relações de semelhança entre triângulos.

Bézout relata que lados homólogos de dois triângulos, ou figuras semelhantes, são aqueles que têm posições semelhantes, cada um a cada figura a que pertence, o que fará parte dos teoremas elencados pelos pontos escritos pelo autor:

a) (109.) dois triângulos, que têm os ângulos iguais cada um a cada um, tem os lados homólogos proporcionais, e consequentemente são semelhantes (caso ângulo-ângulo-ângulo ou AAA);
b) (110.) dois triângulos são semelhantes, quando têm dois ângulos iguais cada um a cada um (caso ângulo-ângulo ou AA);
c) (113.) dois triângulos, que têm um ângulo igual compreendido entre dois lados proporcionais, tem também iguais os outros dois ângulos, e por consequência são semelhantes (caso lado-ângulo-lado ou LAL);
d) (114.) dois triângulos, que têm os três lados homólogos proporcionais, têm os ângulos opostos iguais cada um a cada um, e consequentemente são semelhantes (caso lado-lado-lado ou LLL).

Dos casos explicitados, se dará o destaque ao ponto que aborda o triângulo retângulo e suas propriedades, proposto no ponto (112.).

Figura 29 – Semelhanças no triângulo retângulo.


112. Se do angulo recto A de um triangulo rectangulo BAC (Fig. 43.) se abaixa uma perpendicular AD sobre o lado opposto BC (a que se chama hypotenusa): 1.° Os dous triangulos ADB, ADC serão similhantes entre si, e ao triangulo BAC: 2.° A perpendicular AD será meia proporcional entre as duas partes BD e DC da hypotenusa: 3.° Cada lado AB ou AC do angulo recto será meia proporcional entre a hypotenusa, e o segmento correspondente BD, ou DC.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

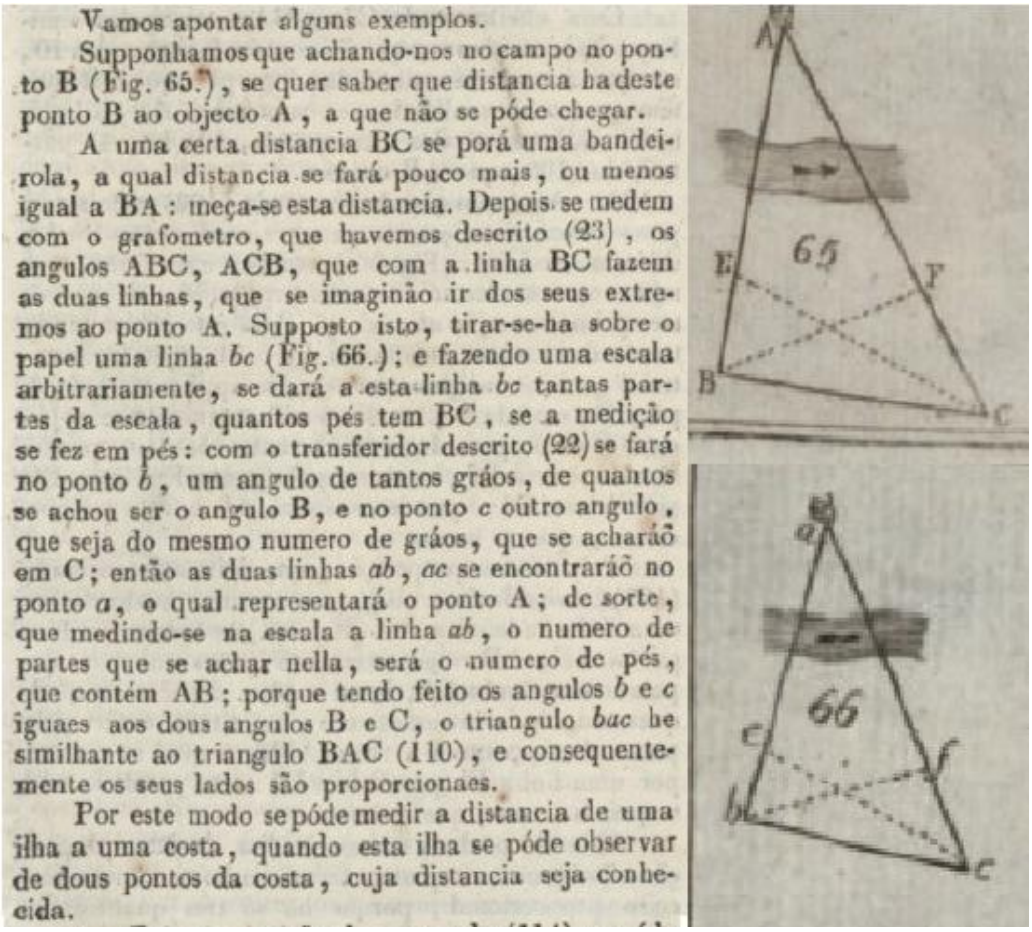
De fato, os triângulos ΔABD e ΔADC são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo, e comparando os lados homólogos dos três triângulos $\Delta ADC, \Delta ADB, \Delta BAC$ dois a dois, obtém-se:

a) $BD : AD :: AD : DC$;
b) $BD : AB :: AB : BC$;
c) $CD : CA :: CA : BC$.

Onde $\overline{AD}$ é meia proporcional entre $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$; $\overline{AB}$ é meia proporcional entre $\overline{BD}$ e $\overline{BC}$; $\overline{AC}$ é meia proporcional entre $\overline{DC}$ e $\overline{BC}$.

Segundo Bézout, os princípios aprendidos neste capítulo são fundamentos de todas as partes da matemática teórica e prática. É importante por sua vez, ganhar familiaridade com eles (BÉZOUT,1827, p. 45). O método adotado foi a proposição de problemas adotados desde as linhas proporcionais até a semelhança de triângulos.

Figura 30 – Problema de semelhança proposto com utilização de elementos estudados anteriormente.



Vamos apontar alguns exemplos.

Supponhamos que achando-nos no campo no ponto B (Fig. 65.), se quer saber que distancia ha deste ponto B ao objecto A, a que não se póde chegar.

A uma certa distancia BC se porá uma bandeirola, a qual distancia se fará pouco mais, ou menos igual a BA: meça-se esta distancia. Depois se medem com o grafometro, que havemos descrito (23), os angulos ABC, ACB, que com a linha BC fazem as duas linhas, que se imaginão ir dos seus extremos ao ponto A. Supposto isto, tirar-se-ha sobre o papel uma linha *bc* (Fig. 66.); e fazendo uma escala arbitrariamente, se dará a esta linha *bc* tantas partes da escala, quantos pés tem BC, se a medição se fez em pés: com o transferidor descrito (22) se fará no ponto *b*, um angulo de tantos gráos, de quantos se achou ser o angulo B, e no ponto *c* outro angulo, que seja do mesmo numero de gráos, que se acharáõ em C; então as duas linhas *ab*, *ac* se encontraráõ no ponto *a*, o qual representará o ponto A; de sorte, que medindo-se na escala a linha *ab*, o numero de partes que se achar nella, será o numero de pés, que contém AB; porque tendo feito os angulos *b* e *c* iguaes aos dous angulos B e C, o triangulo *bac* he similhante ao triangulo BAC (110), e consequentemente os seus lados são proporcionaes.

Por este modo se póde medir a distancia de uma ilha a uma costa, quando esta ilha se póde observar de dous pontos da costa, cuja distancia seja conhecida.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Apesar dos conceitos de semelhanças serem bem definidos, a trigonometria traria melhor exatidão as propostas, já que levar os conceitos teóricos, visto neste capítulo ao prático, pode acarretar em pequenos erros que inferem nas conclusões que se queria tomar (BÉZOUT, 1827, p. 49).

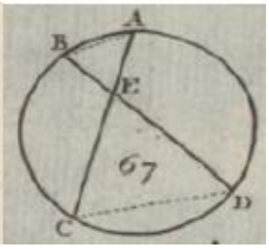
1.4.13 Linhas proporcionais consideradas no círculo

Para este tópico, utiliza-se um conglomerado de conhecimentos já estudados anteriormente, para definir as proposições (124. e 125.).

No ponto (124.), o autor utiliza da semelhança de triângulos, relembrando ângulos opostos pelo vértice e ângulo inscrito para provar o que se é pedido.

Figura 31 – Linhas proporcionais em um círculo.

124. *Duas cordas AC e BD* (Fig. 67.), *que se cortão no circulo, em qualquer ponto E que seja, e debaixo de qualquer angulo que seja, sempre se cortão em razão reciproca;* isto he, sempre AE : BE :: DE : CE.

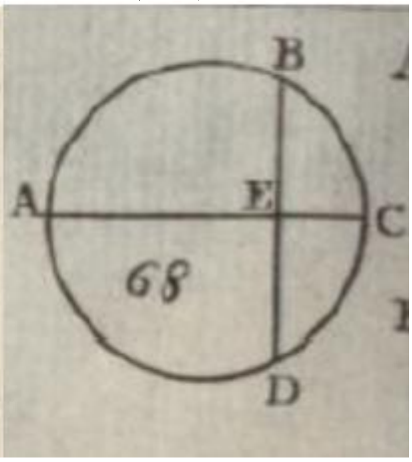


Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

No ponto (125.), Bézout relata que a proposição anterior é válida para qualquer posição que se encontrar o ponto E, e por um exemplo, traça duas cordas perpendiculares entre si, obtendo a proporção desejada.

Figura 32 – Ponto (125.), consequência do teorema (124.).

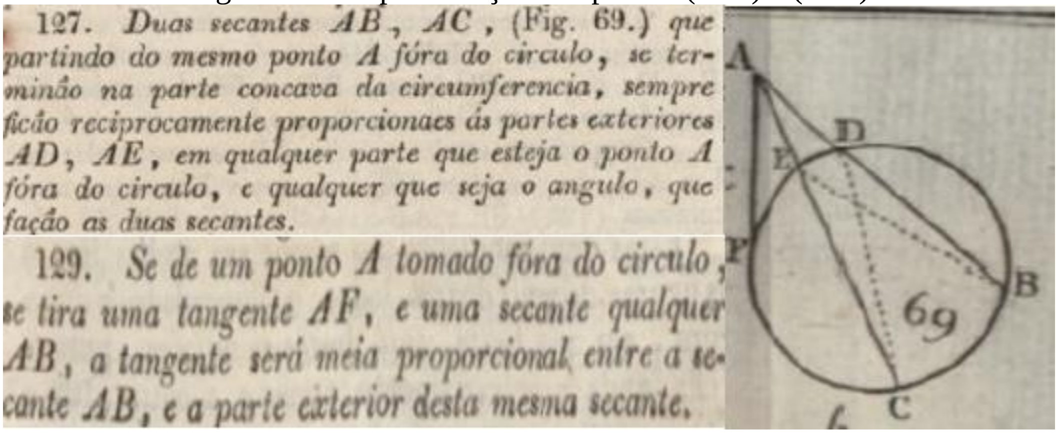
125. Pois que a proposição, que acabamos de demonstrar, tem lugar em qualquer parte que esteja o ponto E, e qualquer que seja o angulo, debaixo de que se cortem as duas cordas AC, BD, terá tambem lugar, quando as duas cordas (Fig. 68.) são perpendiculares uma á outra, e uma dellas AC, por exemplo, passa pelo centro: ora nesse caso ficando a corda BD cortada em duas partes iguaes (52), vem a ser iguaes os dous termos medios da proporção AE : BE :: DE : CE, e a proporção se muda na outra AE : BE :: BE : CE; logo *toda a perpendicular BE tirada de um ponto B da circumferencia sobre o diametro, he meia proporcional entre as duas partes AE, CE do mesmo diametro.*



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Retirando retas secantes partindo de um ponto fora da circunferência também acusa proporções representada pelo ponto (127.). O ponto (129.) conta com uma tangente e uma secante partindo de um ponto fora da circunferência.

Figura 33 – Representação dos pontos (127.) e (129.)



127. *Duas secantes AB, AC,* (Fig. 69.) *que partindo do mesmo ponto A fóra do circulo, se terminão na parte concava da circumferencia, sempre ficão reciprocamente proporcionaes ás partes exteriores AD, AE, em qualquer parte que esteja o ponto A fóra do circulo, e qualquer que seja o angulo, que fação as duas secantes.*

129. *Se de um ponto A tomado fóra do circulo, se tira uma tangente AF, e uma secante qualquer AB, a tangente será meia proporcional entre a secante AB, e a parte exterior desta mesma secante.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

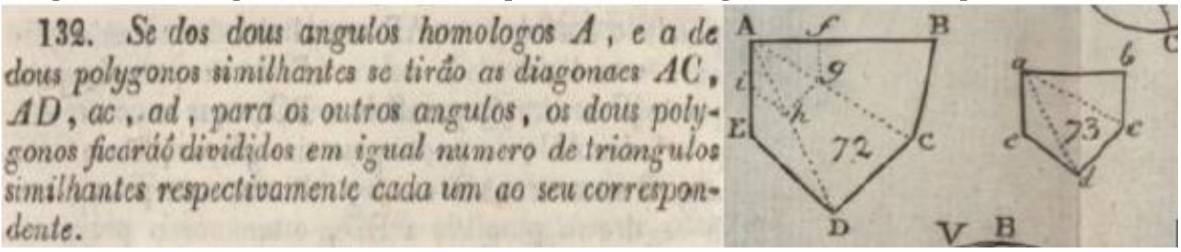
Para o ponto (127.) será feita uma semelhança entre os triângulos ΔADC e ΔAEB. $\angle A$ é ângulo em comum, $\angle B = \angle C$ (ângulo inscrito sobre o mesmo arco $\widehat{DE}$), sendo semelhantes pelo caso AA. Concluindo que $AB\colon AC :: AE\colon AD$.

O ponto (129.) de forma semelhante obtém-se $AB\colon AF :: AF\colon AD$, que por sua vez será discutido no capítulo 3.

1.4.14 Figuras semelhantes

As figuras semelhantes segundo o autor seguem a seguinte analogia: igual número de lados, quando estas têm ângulos homólogos iguais e lados homólogos proporcionais. Para fixar essa definição, é utilizado duas figuras para uma compreensão visual. É dito que em polígonos de mais de três lados, são necessárias as duas condições juntas para se ter figuras semelhantes, já o triângulo visto anteriormente, basta que ocorra uma delas para ter a outra como consequência.

Figura 34 – Polígonos semelhantes separados em triângulos semelhantes pelo caso LAL.

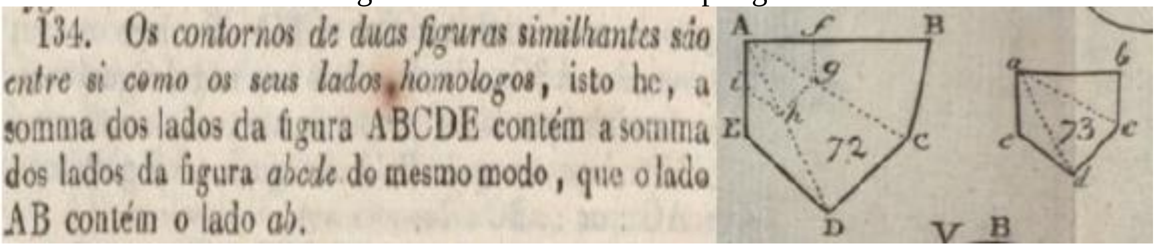


132. *Se dos dous angulos homologos A, e a de dous polygonos similhantes se tirão as diagonaes AC, AD, ac, ad, para os outros angulos, os dous polygonos ficaráõ divididos em igual numero de triangulos similhantes respectivamente cada um ao seu correspondente.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Para provar o ponto (132.), faz-se uso apenas da semelhança de triângulos, deixando explícito que caso o polígono possua mais lados, basta repetir o processo mais vezes. A construção de uma figura semelhante também é dada, por $\overline{BC} \parallel \overline{fg}$; $\overline{CD} \parallel \overline{gh}$; $\overline{DE} \parallel \overline{hi}$, de modo que caia sobre as linhas $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, tendo o polígono $ABCDE$ semelhante ao $Afghi$. Após o dito, é introduzido o conceito de contorno de uma figura no ponto (134.).

Figura 35 – Contorno de um polígono.



134. *Os contornos de duas figuras similhantes são entre si como os seus lados homologos*, isto he, a somma dos lados da figura ABCDE contém a somma dos lados da figura *abcde* do mesmo modo, que o lado AB contém o lado *ab*.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Para a demonstração do ponto (134.), Bézout relembra as propriedades de proporção definidas na aritmética em seu Elementos de Geometria e assim, estabelece que a proporção será utilizada para os lados homólogos.

(134.) Demonstração: Considerando as duas figuras semelhantes, $ABCDE$ e $abcde,$ a razão de semelhança é expressa por:

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: EA : ea \qquad \text{(I)}$$

Bézout relembra o que foi estudado em aritmética, relatando o seguinte teorema:

(Arith. 186): A soma dos antecedentes é para a soma dos consequentes, como um antecedente para seu consequente. (BÉZOUT,1827, p. 36).

Isto é, $:: AB : ab$. Somando todos os lados das figuras, e a informação do teorema, obtém-se:

$$(AB + BC + CD + DE + EA) : (ab + bc + cd + de + ea) :: AB : ab \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II), conseguimos estabelecer a seguinte relação considerando as figuras semelhantes dadas:

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{ab + bc + cd + de + ea} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EA}{ea}$$

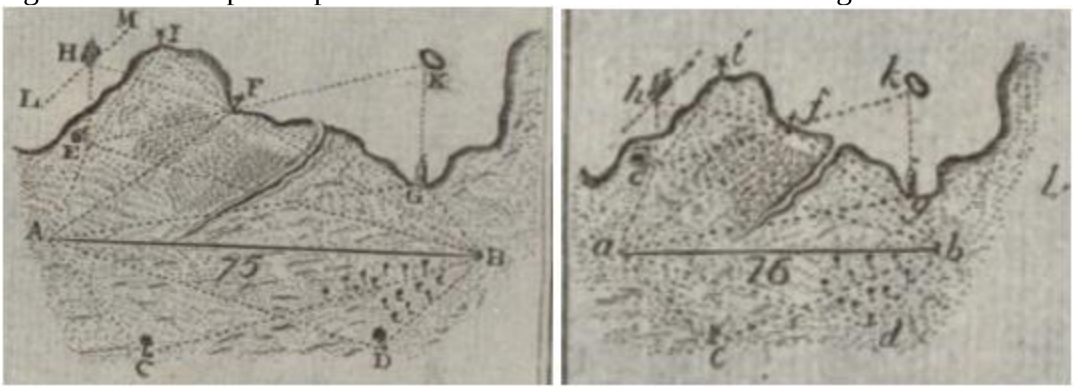
Onde é evidente que as somas são os contornos das duas figuras.

■

O mesmo é válido entre circunferências, Bézout diz que os círculos são figuras semelhantes e que as circunferências têm entre si a razão de seus raios ou diâmetros. Como a semelhança não depende do número de lados, quando o lado se multiplicar infinitamente também acontecerá, tal que o contorno da circunferência não diferia de um polígono inscrito nela.

Após essa conclusão o autor disponibiliza a aplicabilidade de figuras semelhantes no contexto da marinha da época: Arte de tirar plantas de uma costa ou país pequeno (BÉZOUT, 1827, p. 55).

Figura 36 – Exemplo de planta retirada de uma costa utilizando figuras semelhantes.

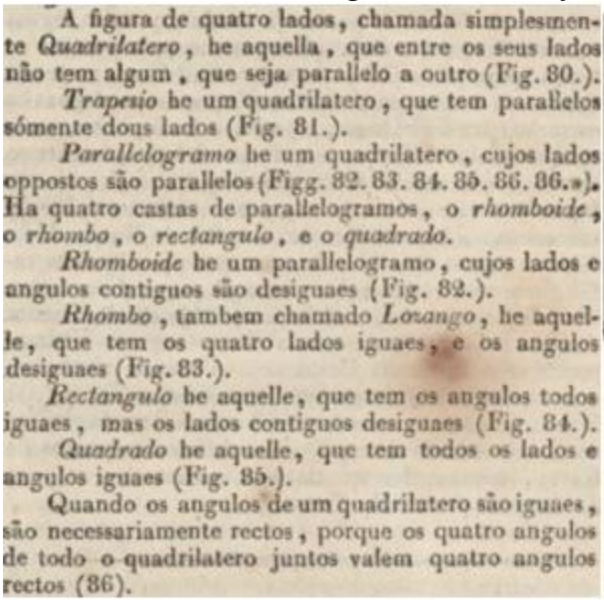


Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

1.4.15 Das superfícies

De acordo com Bézout (1827, p. 61), “Nesta seção só consideramos as superfícies planas, e limitar-nos-emos unicamente às das figuras retilíneas, e do círculo”. Assim, as medições de superfícies se reduzirão a de triângulos e quadriláteros, apresentando-os em seguida com as definições de quadriláteros.

Figura 37 – Definição de quadriláteros.



A figura de quatro lados, chamada simplesmente *Quadrilatero*, he aquella, que entre os seus lados não tem algum, que seja parallelo a outro (Fig. 80.).

Trapesio he um quadrilatero, que tem parallelos sómente dous lados (Fig. 81.).

Parallelogramo he um quadrilatero, cujos lados oppostos são parallelos (Figg. 82. 83. 84. 85. 86. 86.*). Ha quatro castas de parallelogramos, o *rhomboide*, o *rhombo*, o *rectangulo*, e o *quadrado*.

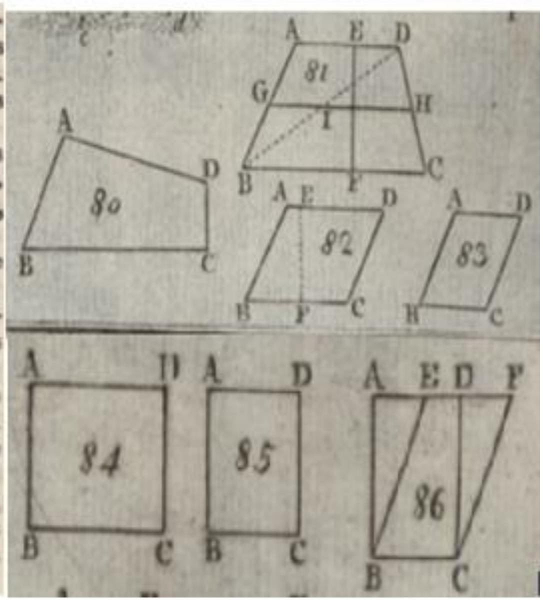
Rhomboide he um parallelogramo, cujos lados e angulos contiguos são desiguaes (Fig. 82.).

Rhombo, tambem chamado *Lozango*, he aquelle, que tem os quatro lados iguaes, e os angulos desiguaes (Fig. 83.).

Rectangulo he aquelle, que tem os angulos todos iguaes, mas os lados contiguos desiguaes (Fig. 84.).

Quadrado he aquelle, que tem todos os lados e angulos iguaes (Fig. 85.).

Quando os angulos de um quadrilatero são iguaes, são necessariamente rectos, porque os quatro angulos de todo o quadrilatero juntos valem quatro angulos rectos (86).

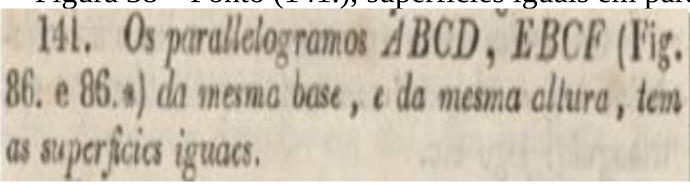


Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

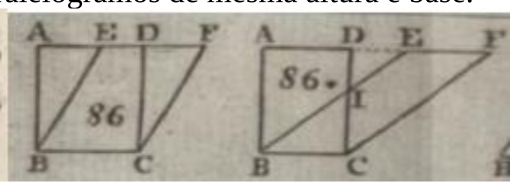
A partir das definições, é utilizado a figura de um paralelogramo com a construção de uma perpendicular entre os lados opostos para identificação da altura do quadrilátero e a sua base que repousa no segmento que contém o pé da altura. De mesma forma, a altura e a base de um triângulo são análogos ao pensamento do paralelogramo, assim o autor mostra em duas figuras onde a altura está dentro e outra fora do triângulo.

Com a altura e base definidos pelo autor em um paralelogramo, consegue-se estipular o seguinte teorema (141.):

Figura 38 – Ponto (141.), superfícies iguais em paralelogramos de mesma altura e base.



141. *Os parallelogramos ABCD, EBCF (Fig. 86. e 86.*) da mesma base, e da mesma altura, tem as superficies iguaes.*



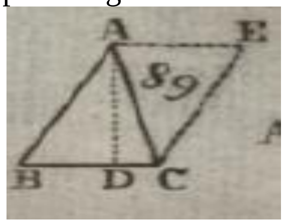
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

No teorema (141.), a primeira figura dada pelo autor à esquerda, é estipulada uma semelhança de triângulos, para provar que o paralelogramo $ABCD$ é igual ao paralelogramo $EBCF$.

Na segunda figura à direita, segundo Bézout (1827, p. 63) “Os dois triângulos ΔABE, ΔDCF são iguais, removidos de cada um o triângulo ΔDIE. Os trapézios $ABID$, $EIFC$ serão iguais, acrescentando o triângulo ΔBIC a cada um dos trapézios, os paralelogramos $ABCD$, e $EBCF$ serão iguais.”

Seguindo o conteúdo, é dito que qualquer triângulo retilíneo de mesma base e de mesma altura, é metade do paralelogramo de mesma base e da mesma altura do triângulo.

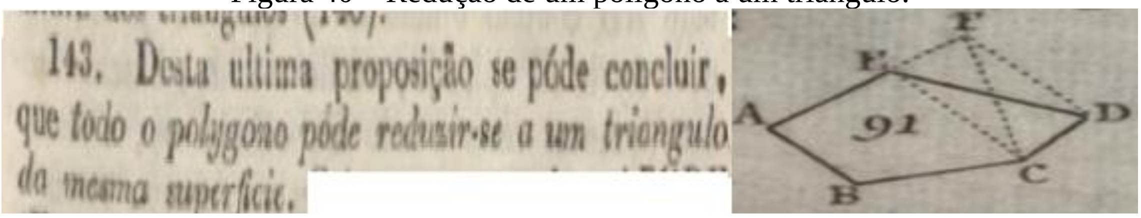
Figura 39 – Construção do paralelogramo $AECB$ a partir do triângulo ΔACB.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

A prova é feita por Bézout utiliza construções de paralelas $\overline{AE}, \overline{EC}$ de modo que: $\overline{AE} \parallel \overline{CB},\ \overline{AB} \parallel \overline{EC}$, além de semelhanças de triângulos. A utilização desse teorema é útil para o próximo teorema (143.). No capítulo 3 do trabalho será abordado algumas curiosidades demonstrativas.

Figura 40 – Redução de um polígono a um triângulo.

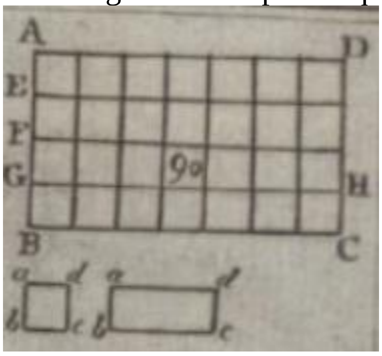

143. Desta ultima proposição se póde concluir, que todo o polygono póde reduzir-se a um triangulo da mesma superficie.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

1.4.16 Da medição e comparação de superfícies

De acordo com Bézout (1827, p. 64), medir uma superfície é determinar quantas vezes esta superfície contém outra superfície conhecida. As medidas utilizadas são quadrados, ou às vezes um paralelogramo retângulo. No exemplo temos, que o retângulo $ABCD$ contém 28 quadrados como $abcd$.

Figura 41– Medição do retângulo $ABCD$ por 28 quadrados como $abcd$.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

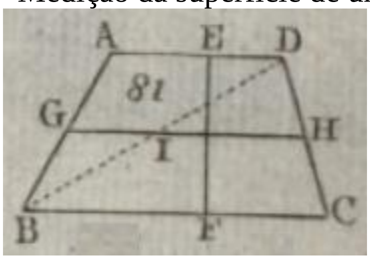
Visto que a maneira de conceber os quadrados acontece por meio de uma multiplicação, o autor discursa em seu livro a respeito de uma forma resumida de contemplar tal multiplicação, sem deixar de lado o rigor matemático atribuído.

> Multiplicar uma linha por uma linha é contemplar uma superfície, no qual se deve dizer que o número de partes de uma linha, multiplicado com o número de partes de outra linha, exprime um número de partes quadradas contidas no paralelogramo, que teria por altura uma dessas linhas, e a outra linha por base (BÉZOUT,1827, p. 66).

Do fato expresso, utiliza-se de paralelogramos já vistos, e escreve as áreas (ou superfícies) como a multiplicação das linhas da forma: base $\times$ altura. De um teorema visto, a superfície de um triângulo é metade de um paralelogramo de mesma base e altura, fica estipulado que a superfície de um triângulo corresponde à metade da base $\times$ altura.

Bézout em trapézios, diz que a superfície pode ser calculada pela soma dos dois lados paralelos divididos por dois, multiplicado com a perpendicular entre as duas paralelas.

Figura 42 – Medição da superfície de um trapézio.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Para conceber a superfície, é feito a diagonal $\overline{BD}$ do trapézio $ADBC$, obtendo dois triângulos ΔADB e ΔDCB, onde a altura dos dois é $\overline{EF}$ (perpendicular entre as duas paralelas). A superfície do trapézio é a soma das áreas dos dois triângulos:

$$\text{Área }(\Delta ADB) + \text{Área }(\Delta DCB) = \text{Área }(ADCB)$$

$$= \frac{\overline{AD} \times \overline{EF}}{2} + \frac{\overline{BC} \times \overline{EF}}{2} = \frac{(AD + BC) \times EF}{2}$$

Ainda sobre trapézios, o autor comenta sobre o ponto G e H no trapézio, como pontos médios dos lados respectivos, dizendo que a linha $\overline{GH}$ corresponde a soma de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ dividida por dois, provando-a. Essa fala de Bézout remete a base média do trapézio.

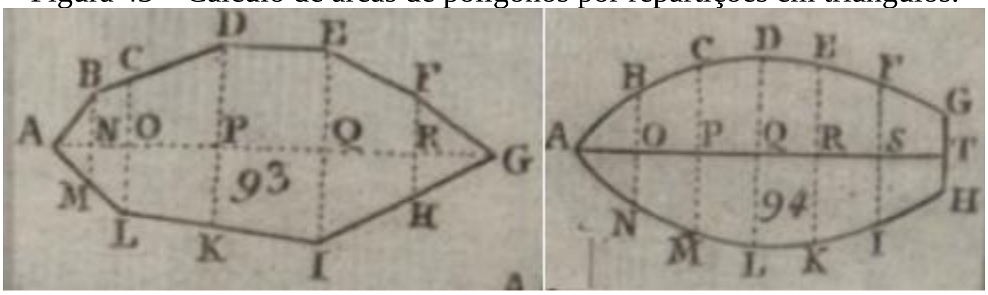
Encaminhando-se a áreas de polígonos quaisquer, é aconselhado que sejam divididos em triângulos, de linhas tiradas de um ponto (vértice) até cada um dos seus ângulos. Somando a área de todos os triângulos obtém-se a área do polígono, caso o polígono for regular, basta multiplicar o apótema por metade do perímetro.

Bézout (1827, p. 69) relembra que o círculo se pode considerar por um polígono regular de infinitos lados, e que sua área corresponde a multiplicar o comprimento da circunferência por metade do raio, pois a perpendicular tirada sobre um dos lados, não difere do raio, quando o número de lados do polígono tende a infinito. Bézout comenta sobre o valor de π, exatamente aqueles que Barbosa abordará em seu tópico de polígonos.

Consequentemente, a área de um setor circular é dada por multiplicar o comprimento do arco por metade do raio (BÉZOUT, 1827, p. 71).

Calcular as áreas de polígonos por repartições em triângulos é o bastante para medir figuras retilíneas de toda espécie, porém Bézout expõe outro método que na prática é mais simples.

Figura 43 – Cálculo de áreas de polígonos por repartições em triângulos.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

No primeiro polígono à esquerda é traçado o segmento $\overline{AG}$, e abaixar sobre ela de cada um dos ângulos perpendiculares $\overline{BM},\ \overline{CL},\ \overline{DK},\ \overline{EI},\ \overline{FH}$. Com isso a figura será repartida em várias partes das quais as extremas são triângulos e as demais trapézios, onde já é sabido como encontrar suas superfícies.

No segundo polígono à direita, a figura é terminada por uma linha curva. Para determinar a área com uma diferença mínima o suficiente, traça-se o segmento $\overline{AT}$, e abaixe sobre ele de cada um dos ângulos perpendiculares $\overline{BN}$, $\overline{BM}$, $\overline{DL}$, $\overline{EK}$, $\overline{FI}$, dividindo o mesmo em partes, tal que se podem considerar como linhas retas os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, etc.

Para facilitar os cálculos, consideram-se $\overline{AO}$, $\overline{OP}$, etc. iguais entre si, portanto a área é dada pela soma das linhas $\overline{BN}$, $\overline{CM}$, $\overline{DL}$, $\overline{EK}$, $\overline{FI}$ e somente a metade da linha $\overline{GH}$ perpendicular a $\overline{AT}$, multiplicados por um dos intervalos $\overline{AO}$. Resumindo temos a área do polígono dada por:

$$= AO \times \frac{BN}{2} + AO \times \frac{(BN + CM)}{2} + AO \times \frac{(CM + DL)}{2} + AO \times \frac{(DL + EK)}{2} +$$

$$+ AO \times \frac{(EK + FI)}{2} + AO \times \frac{(FI + GH)}{2}$$

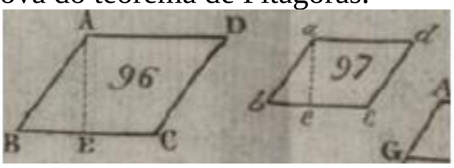
$$= AO \times \left(BN + CM + DL + EK + FI + \frac{GH}{2}\right)$$

A medição de superfícies planas terminadas por linhas curvas possui aplicações em navios, utilizadas para conhecer a superfície de cortes horizontais dos mesmos, finalizando a medição e entrando em comparação de superfícies.

No último capítulo da Geometria plana de Bézout, o autor se preocupa em definir teoremas que envolvam semelhança e proporção. As proposições encontradas servirão de base para demonstração do Teorema de Pitágoras feita pelo autor.

Figura 44 – Teorema essencial utilizado para a prova do teorema de Pitágoras.

159. *As superficies dos parallelogramos, e triangulos similhantes estão entre si como os quadrados dos seus lados homologos.*



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

(159.) Demonstração: Considerando os dois paralelogramos $ABCD$, e $abcd$ ambos estão entre si como o produto de suas bases pelas suas alturas, representados por:

$$ABCD : abcd :: BC \times AE : bc \times ae \qquad \text{(III)}$$

Se os paralelogramos, $ABCD, abcd$ são semelhantes, e se $\overline{AB}$, e $\overline{ab}$ são dois lados homólogos, os triângulos ΔAEB e Δaeb serão semelhantes, além de E , e serem retos, devem ser iguais entre si os ângulos $\angle B$ e $\angle b$. Logo teremos:

$$AE : ae :: AB : ab \text{ ou} :: BC : bc \qquad \text{(IV)}$$

Por serem paralelogramos semelhantes. De (III):

$$ABCD : abcd :: BC \times AE : bc \times ae$$

Como ae é diferente de zero, teremos a seguinte correspondência:

$$ABCD : abcd :: BC \times \frac{AE}{ae} : bc$$

De (IV), pode-se substituir tendo o resultado:

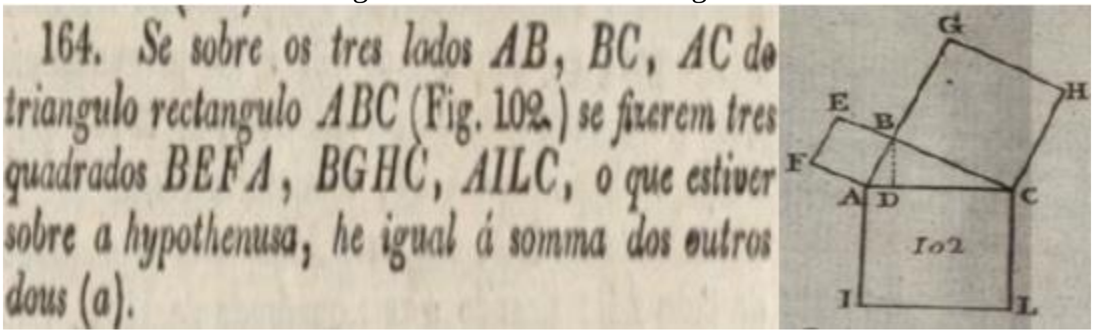
$$ABCD : abcd :: BC \times \frac{BC}{bc} : bc$$

$$ABCD : abcd :: BC^2 : bc^2$$

■

Como indiferentemente se pode tomar por base qualquer lado, que se escolher, vê-se, que geralmente as superfícies dos paralelogramos semelhantes estão entre si como os quadrados dos seus lados homólogos.

Figura 45 – Teorema de Pitágoras.


164. Se sobre os tres lados AB, BC, AC do triangulo rectangulo ABC (Fig. 102.) se fizerem tres quadrados BEFA, BGHC, AILC, o que estiver sobre a hypothenusa, he igual á somma dos outros dous (a).

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

(164.) Demonstração: Do ângulo $\angle B$ abaixa-se sobre a hipotenusa $\overline{AC}$ a perpendicular $\overline{BD}$: Cada um dos dois triângulos ΔBDA, ΔBDC é semelhante ao triângulo ΔABC. Logo as superfícies dos três estão entre si como os quadrados dos lados homólogos (demonstrado no teorema anterior), logo temos esta série de razões iguais:

$$ABD : AB^2 :: BDC : BC^2 :: ABC : AC^2, \text{ ou} \qquad \text{(V)}$$

$$ABD : ABEF :: BDC : BGHC :: ABC : AILC \qquad \text{(VI)}$$

Novamente é exaltado o teorema visto em aritmética e em figuras semelhantes de Bézout e aplicando em (VI):

(Arith. 186): A soma dos antecedentes é para a soma dos consequentes, como um antecedente para seu consequente. (BÉZOUT,1827, p. 36).

$$ABD + BDC : ABEF + BGHC :: ABC : AILC$$

É evidente que o triângulo ΔABC é igual à $\Delta ABD + \Delta BDC$. Logo também $AILC$ é igual a $ABEF + BGHC$, o que também se pode apresentar por $\overline{AC}^2$ igual a $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

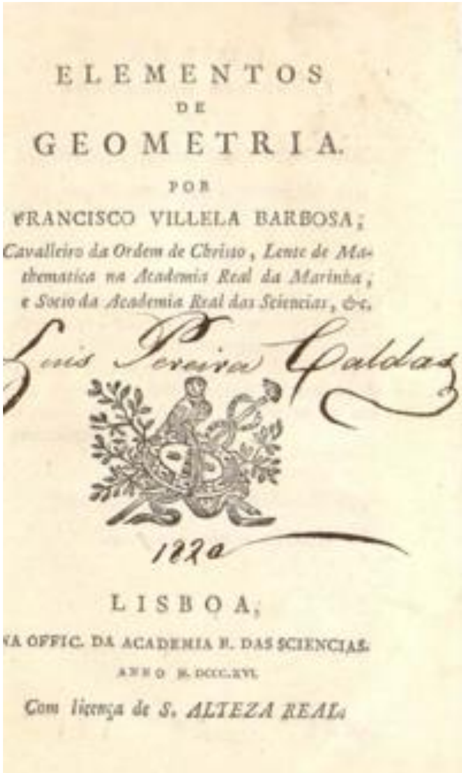
■

CAPÍTULO 2

ELEMENTOS DE GEOMETRIA DE BARBOSA

2.1 AS CAPAS

Figura 46 – Edição do livro Elementos de Geometria de Barbosa, 1816.



ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.
POR
FRANCISCO VILLELA BARBOSA;
Cavalleiro da Ordem de Christo, Lente de Mathematica na Academia Real da Marinha, e Socio da Academia Real das Sciencias, &c.
Luis Pereira Caldas
1820
LISBOA,
NA OFFIC. DA ACADEMIA R. DAS SCIENCIAS.
ANNO M. DCCC.XVI.
Com licença de S. ALTEZA REAL.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC[7].

[7] Disponíveis em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/222341> e <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/222343>. Acesso em 14 abr. de 2021

Figura 47 – Edição do livro Elementos de Geometria de Barbosa, 1838.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

2.1.1 Sobre as editoras

2.1.1.1 Lisboa e Rio de Janeiro

Na primeira edição dos Elementos de Geometria de Barbosa (1816), a editora é a Officina da Academia Real de Sciencias. A Officina publicou apenas um dos oito exemplares do Elementos de Geometria, os demais publicados em Lisboa foram pela Typografia da mesma Academia. Dentre as obras produzidas pela Officina, destacam-se as que estão no final da obra:

> Memorias sobre o modo de aperfeiçoar a Manufactura do Azeite em Portugal; Tratado da educação fysica dos meninos, para uso da nação portuguesa; Obras Poeticas de Pedro de Andrade Caminha; Diccionario da Lingoa Portugueza (BARBOSA,1816, p. 251-256).

A Typografia Austral foi responsável pela primeira edição da obra de Barbosa no Brasil, por sua vez não era considerada uma tipografia renomada. Uma breve informação histórica da tipografia é vista em Berger (1984, p. 40): “Registrada no dia 2 de agosto de 1836 no Beco dos Quartéis, 21, atual Beco da Bragança, a Typografia Austral ainda consta no

Almanak Laemmert de 1846, no Beco da Bragança, 15. Funcionou até 1847...”. A curta vida da tipografia não é motivo de fracasso, a empresa não fica para trás em obras produzidas, dentre elas:

> O Orador Maçon Brasileiro,1839; uma poesia feita para sua majestade imperial Dom Pedro II intitulada: Canto Genethliaco; Lara, romance de Lord Byron; o romance: Os dous matrimonios malogrados, ou as duas victimas do crime; relações políticas e de governo intituladas de: Viagem da cidade do Cuzco a de Belem do Grão Pará pelos rios Vilcamayu, Ucayaly e Amazonas, precedido de hum bosquejo sobre o estado politico, moral e litterario do Perú em suas tres grandes épocas. (BBM DIGITAL, c2021)[8].

2.2 O PREFÁCIO

Barbosa, nas edições dos seu Elementos de Geometria de 1816 e 1838, não apresenta diferenças nas prefações. O autor diz que inúmeros livros de geometria foram escritos desde Euclides e aplicados nas escolas portuguesas, principalmente nas militares os aplicados foram de Bézout.

Esse apreço por Bézout se deve ao fato de seu antecessor escrever um curso completo de matemáticas[9] utilizados por alunos da marinha e artilharia, sendo que o próprio Barbosa critica as faltas que possuem o material e as dificuldades que os estudantes (e mestres) tinham com as explicações de sua geometria.

Barbosa não mede esforços em dizer que os Elementos de Geometria de Bézout necessitavam de uma urgente substituição, afirmando que proposições merecem ser devidamente demonstradas, e que nem todos possuem a facilidade de conceber imediatamente e reter na memória.

O autor complementa dizendo que escrever uma obra de Geometria é uma tarefa árdua, referenciando Descartes, Newton, Leibniz e Bernoulli como bons escritores de Geometria, e servindo de base para a construção de seu livro. A busca nesses autores servia para que as doutrinas fossem expostas de forma clara e bem definida.

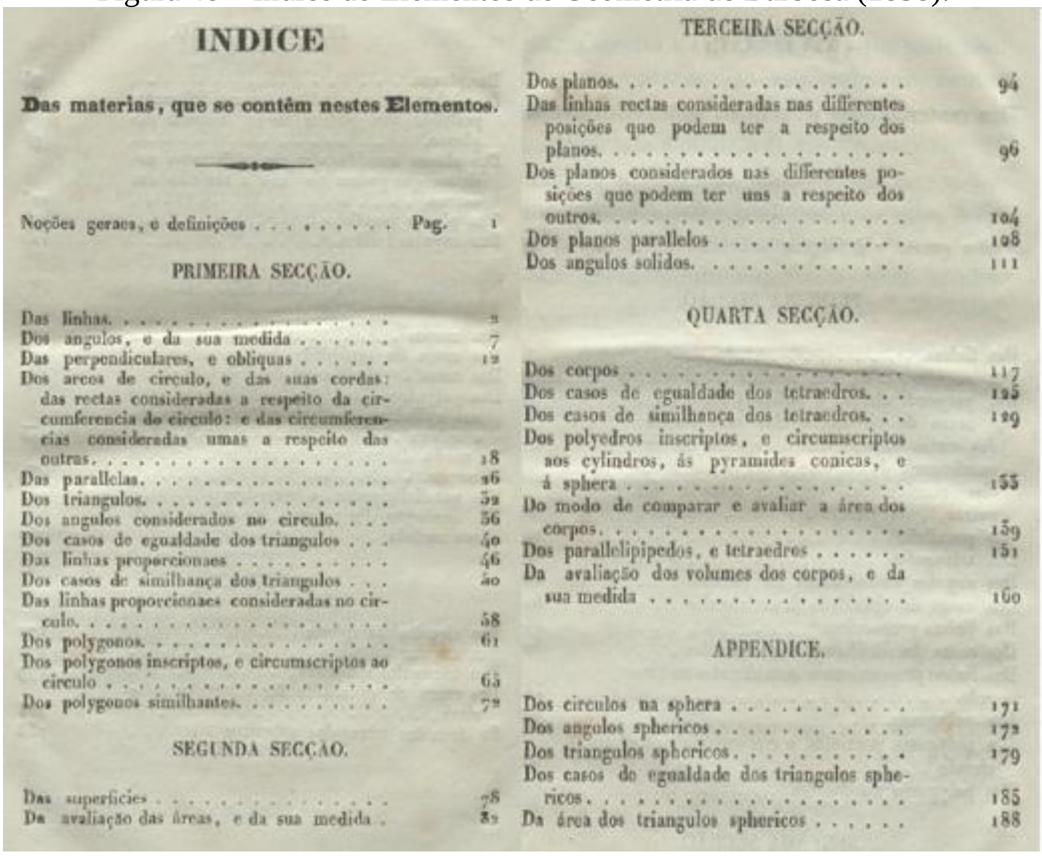
Curiosamente Barbosa destaca que havia tido problema em demonstrar teorias, dentre elas a utilização de paralelas e certas noções de concorrência. Finalmente conclui que

[8] Biblioteca Digital da Biblioteca Brasiliana Guita e José Mindlin (BBM Digital) – Universidade de São Paulo.
[9] Cours de mathematiqués à la usage des gardes du pavillion et de la marine.

as aplicações de medição de distâncias, não teriam espaço em seu livro pois requer conhecimentos mais avançados e não unicamente a descrição dos mesmos.

2.3 O ÍNDICE

Figura 48 – Índice do Elementos de Geometria de Barbosa (1838).



INDICE

Das materias, que se contêm nestes Elementos.

Noções geraes, e definições . . . . Pag. 1

PRIMEIRA SECÇÃO.

Das linhas 2
Dos angulos, e da sua medida 7
Das perpendiculares, e obliquas 12
Dos arcos de circulo, e das suas cordas: das rectas consideradas a respeito da circumferencia do circulo: e das circumferencias consideradas umas a respeito das outras 18
Das parallelas 26
Dos triangulos 32
Dos angulos considerados no circulo . . . 36
Dos casos de egualdade dos triangulos . . . 40
Das linhas proporcionaes 46
Dos casos de similhança dos triangulos . . . 50
Das linhas proporcionaes consideradas no circulo 58
Dos polygonos 61
Dos polygonos inscriptos, e circumscriptos ao circulo 65
Dos polygonos similhantes 72

SEGUNDA SECÇÃO.

Das superficies 78
Da avaliação das áreas, e da sua medida . 82

TERCEIRA SECÇÃO.

Dos planos 94
Das linhas rectas consideradas nas differentes posições que podem ter a respeito dos planos 96
Dos planos considerados nas differentes posições que podem ter uns a respeito dos outros 104
Dos planos parallelos 108
Dos angulos solidos 111

QUARTA SECÇÃO.

Dos corpos 117
Dos casos de egualdade dos tetraedros . . . 125
Dos casos de similhança dos tetraedros . . . 129
Dos polyedros inscriptos, e circumscriptos aos cylindros, ás pyramides conicas, e á sphera 133
Do modo de comparar e avaliar a área dos corpos 139
Dos parallelipipedos, e tetraedros 151
Da avaliação dos volumes dos corpos, e da sua medida 160

APPENDICE.

Dos circulos na sphera 171
Dos angulos sphericos 172
Dos triangulos sphericos 179
Dos casos de egualdade dos triangulos sphericos 185
Da área dos triangulos sphericos 188

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

2.4 A GEOMETRIA PLANA DE BARBOSA

2.4.1 Noções preliminares

De acordo com os objetos básicos de estudo da geometria, Barbosa os classifica como “noções gerais e definições” nas edições dos seu Elementos de Geometria.

Figura 49 – Noções gerais de Geometria nas edições de Barbosa, 1816 à esquerda e 1838 à direita.

Noções geraes, e definições.

1. NOtamos em qualquer corpo tres dimensões: comprimento, largura, e profundidade, ou grossura. Se abstrahindo do corpo, consideramos sómente a porção da Extensão em todo o sentido, que elle occupava; resulta a idéa do que se chama *volume*. (*)

Pelo que *volume* he a extensão considerada com tres dimensões: *comprimento*, *largura*, e *profundidade*, ou *grossura*.

Se abstrahindo da grossura, ou profundidade do volume, examinamos só-

A men-

(*) Muitos Geometras dão tambem ao volume o nome de corpo, ou solido.

2 ELEMENTOS

mente o seu exterior; resulta a idéa do que se chama *superficie*.

Pelo que *superficie* he a extensão considerada com duas dimensões: *comprimento*, e *largura*.

Se na superficie, abstrahindo da largura, attendemos unicamente ao comprimento; resulta a idéa do que se chama *linha*.

Pelo que *linha* he a extensão considerada com huma só dimensão: *comprimento*.

Se finalmente na linha, abstrahindo do comprimento, notamos sómente o lugar, em que ella termina; resulta a idéa do que se chama *ponto*.

Pelo que *ponto* he o que se considera sem dimensão alguma.

Damos em particular o nome de *área* a huma determinada superficie, isto he, á extensão superficial, que se encerra entre huma, ou mais linhas; as quaes, fechando assim espaço, appresentão hum todo, que se chama *figura*.

Noções geraes e definições.

1. Consideramos os corpos, somente como porções de extensão penetraveis, divisiveis, e figuradas.

Notamos em qualquer delles tres dimensões: *comprimento*, *largura*, e *profundidade*.

Si abstrahindo a profundidade, contemplamos so o exterior do corpo; temos a idea da *superficie*.

Si na superficie abstrahindo a largura, attendemos unicamente ao comprimento; temos a idea da *linha*.

Si na linha abstrahindo o comprimento, consideramos somente o logar em que ella começa ou termina; temos a idea do *ponto*.

Conseguintemente:

Corpo é uma extensão com tres dimensões: *comprimento*, *largura*, e *profundidade*.

Superficie é uma extensão com duas dimensões: *comprimento*, e *largura*.

Linha é uma extensão com uma so dimensão: *comprimento*.

— 2 —

Ponto é o logar da Extensão, que se considera sem dimensão alguma.

2. Todo o spaço terminado, ou por uma ou mais linhas, ou por uma ou mais superficies, diz-se *figura*.

3. Intendemos por *volume* a quantidade de extensão com tres dimensões, que um corpo occupa:

E por *área* a quantidade de extensão superficial que se contém em uma figura.

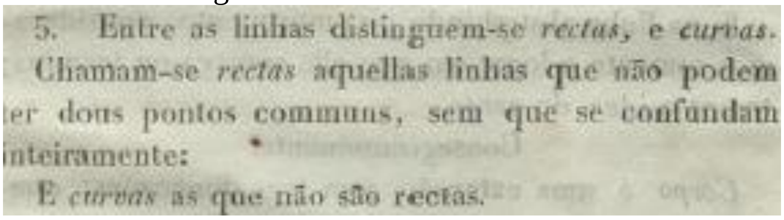
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

É visto que o autor se apropria dos conhecimentos de volume, abstraindo a cada passo uma dimensão até chegar no ponto, Barbosa então diz que:

a) Ponto é o lugar da extensão, que se considera sem dimensão;
b) Linha é uma extensão com uma só dimensão: comprimento;
c) Superfície é uma extensão com duas dimensões: comprimento e largura;
d) Área é a quantidade de extensão superficial que contém uma figura;
e) Duas figuras sobrepostas, se encaixam perfeitamente;

2.4.2 As linhas

Figura 50 – Linhas em Barbosa.

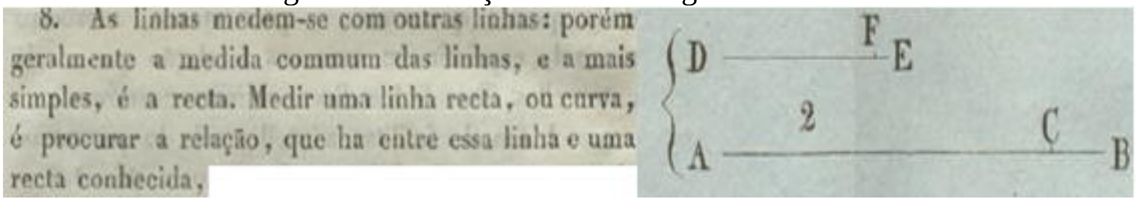


5. Entre as linhas distinguem-se *rectas*, e *curvas*.
Chamam-se *rectas* aquellas linhas que não podem ter dous pontos communs, sem que se confundam inteiramente:
E *curvas* as que não são rectas.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Definidos as linhas retas e curvas, é contemplado a escrita de uma reta, a posição dos pontos, e como se nomeia a mesma. Consegue-se perceber que a definição de reta difere da de Bézout.

Figura 51 – Medição de linhas segundo Barbosa.



8. As linhas medem-se com outras linhas: porém geralmente a medida commum das linhas, e a mais simples, é a recta. Medir uma linha recta, ou curva, é procurar a relação, que ha entre essa linha e uma recta conhecida,

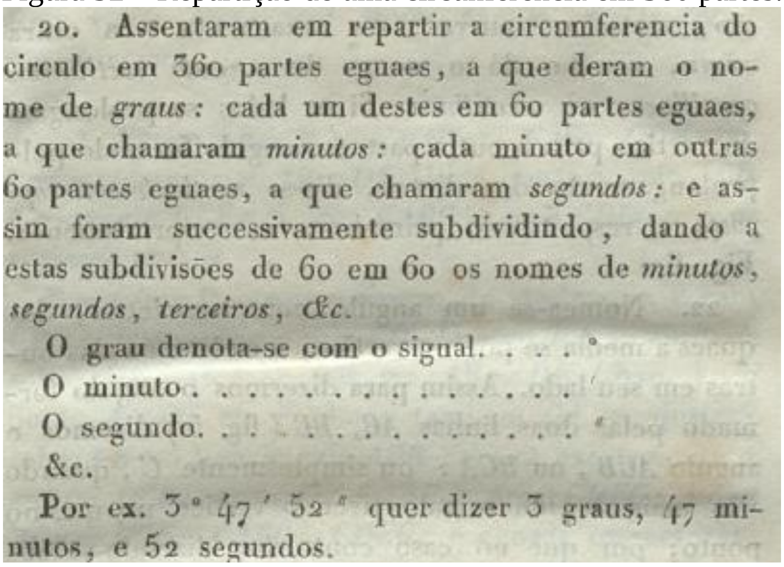
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Barbosa de forma demonstrativa mostra retas maiores e que caiba uma sobre a outra, evidenciando as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$. Caso não se ache a relação entre duas linhas, o autor diz que a aproximação entre linhas pode ser feita até o quanto se queira, exprimindo em números a relação entre elas, as chamando de incomensuráveis.

Definindo logo em seguida o que é uma superfície plana, com as mesmas palavras que foram usadas por Bézout. Essa definição difere pela adição de um corolário dizendo que por três pontos que não estão em linha reta, determinam um plano.

A circunferência de um círculo e suas repartições são definidas da mesma forma como Bézout. Barbosa não propõe nenhum exercício, muito menos dá uma aplicabilidade.

Figura 52 – Repartição de uma circunferência em 360 partes.



20. Assentaram em repartir a circumferencia do circulo em 360 partes eguaes, a que deram o nome de *graus:* cada um destes em 60 partes eguaes, a que chamaram *minutos:* cada minuto em outras 60 partes eguaes, a que chamaram *segundos:* e assim foram successivamente subdividindo, dando a estas subdivisões de 60 em 60 os nomes de *minutos*, *segundos*, *terceiros*, &c.

O grau denota-se com o signal. . . . . °

O minuto . . . . ′

O segundo. . . . . ″

&c.

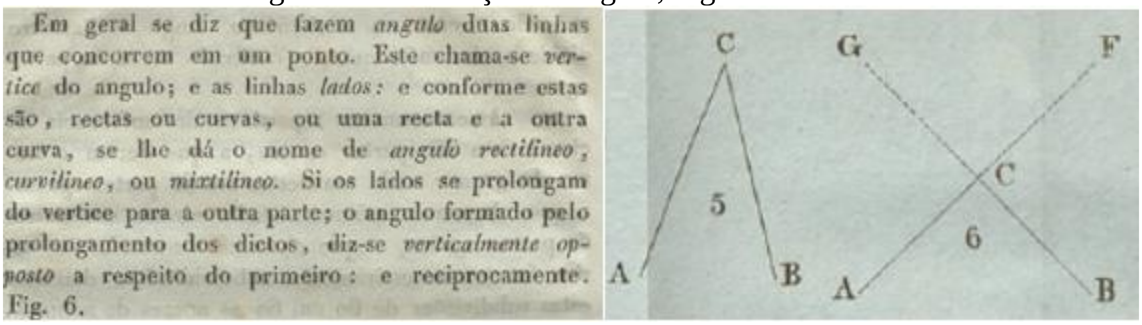
Por ex. 3° 47′ 52″ quer dizer 3 graus, 47 minutos, e 52 segundos.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

2.4.3 Dos ângulos, e sua medida

Iniciando o tema é dito que duas retas que concorrem em um ponto, em um mesmo plano fazem ângulos, que podem se chamar “ACB, ou BCA”. Seguindo um padrão definitivo diferente de Bézout, o autor relata que um ângulo é igual a outro quando se pode colocar “um sobre o outro” ajustando seus lados. Caso o ângulo não encaixe, diz-se que o ângulo é maior ou menor que aquele, considerando o ângulo como uma grandeza que não depende dos lados.

Figura 53 – Definição de ângulo, segundo Barbosa.

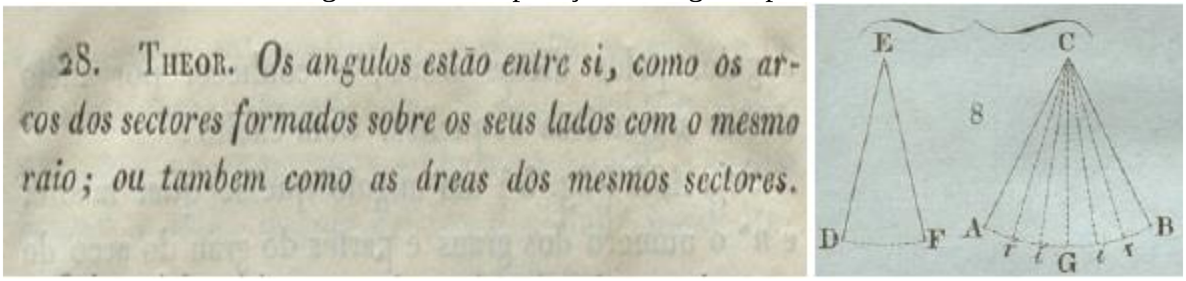


Em geral se diz que fazem *angulo* duas linhas que concorrem em um ponto. Este chama-se *vertice* do angulo; e as linhas *lados:* e conforme estas são, rectas ou curvas, ou uma recta e a outra curva, se lhe dá o nome de *angulo rectilineo*, *curvilineo*, ou *mixtilineo*. Si os lados se prolongam do vertice para a outra parte; o angulo formado pelo prolongamento dos dictos, diz-se *verticalmente opposto* a respeito do primeiro: e reciprocamente. Fig. 6.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

De modo análogo, a noção de ângulos é transportada para uma circunferência e se é diferenciado ângulos maiores de ângulos menores. O teorema (28.)[10] a seguir corresponde a esta consequência.

Figura 54 – Comparação de ângulos por arcos.



28. THEOR. *Os angulos estão entre si, como os arcos dos sectores formados sobre os seus lados com o mesmo raio; ou tambem como as áreas dos mesmos sectores.*

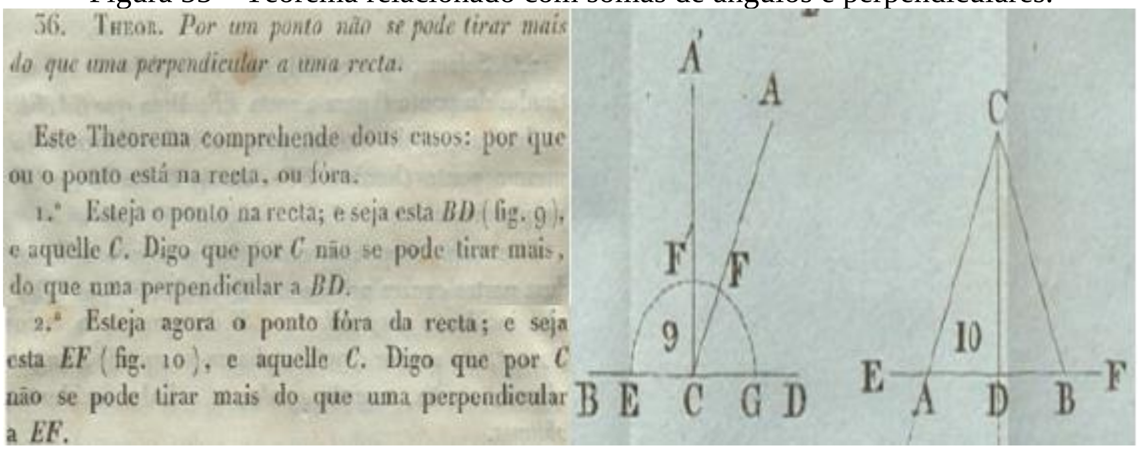
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Privarei da demonstração deste teorema, pois não há argumentos o suficiente para descrever áreas de setores. Devemos ter noções preliminares que ainda não foram definidas cruciais no estudo. No final do capítulo não há problemas ou exercícios propostos pelo autor.

2.4.4 Das perpendiculares, e oblíquas

Barbosa inicia o capítulo de perpendiculares e oblíquas com definições e corolários sobre ângulos suplementares, complementares, ângulos verticalmente opostos ou opostos pelo vértice comumente conhecidos, levando assim ao primeiro teorema envolvendo perpendicularidade.

Figura 55 – Teorema relacionado com somas de ângulos e perpendiculares.



36. THEOR. *Por um ponto não se pode tirar mais do que uma perpendicular a uma recta.*

Este Theorema comprehende dous casos: por que ou o ponto está na recta, ou fóra.

1.º Esteja o ponto na recta; e seja esta *BD* (fig. 9), e aquelle *C*. Digo que por *C* não se pode tirar mais, do que uma perpendicular a *BD*.

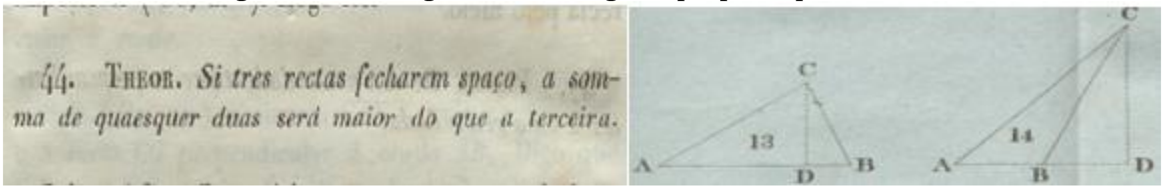
2.º Esteja agora o ponto fóra da recta; e seja esta *EF* (fig. 10), e aquelle *C*. Digo que por *C* não se pode tirar mais do que uma perpendicular a *EF*.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

[10] Ver em: PARANAGUÁ, 1838, p. 11. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/222343>. Acesso em 14 abr. de 2021

Diferente de seu antecessor, Barbosa não considera o teorema (36.) como corolário, e demonstra os dois casos por absurdo (PARANAGUÁ, 1838, p. 33-34). Antes dos problemas propostos do capítulo é enunciado outro teorema (44.), que corresponde a desigualdade triangular.

Figura 56 – Desigualdade triangular proposta por Barbosa.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC

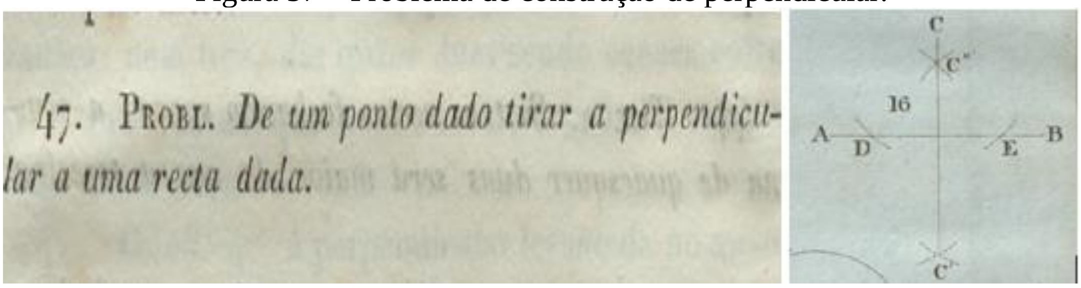
Para a demonstração, Barbosa utiliza as representações gráficas e diz que, por exemplo $AC + BC > AB$.

(44.) Demonstração: Suponha que se é tirada do ponto C sobre AB a perpendicular CD. Será $AC > AD$ e $CB > DB$. Logo também $AC + CB > AD + DB$. Porém $AD + DB$(figura à esquerda) é o mesmo que AB, ou (figura à direita) $> AB$. Logo $AC + BC > AB$

■

Barbosa finaliza o capítulo com construções de retas perpendiculares, com o uso de régua e compasso para construção dos desenhos.

Figura 57 – Problema de construção de perpendicular.



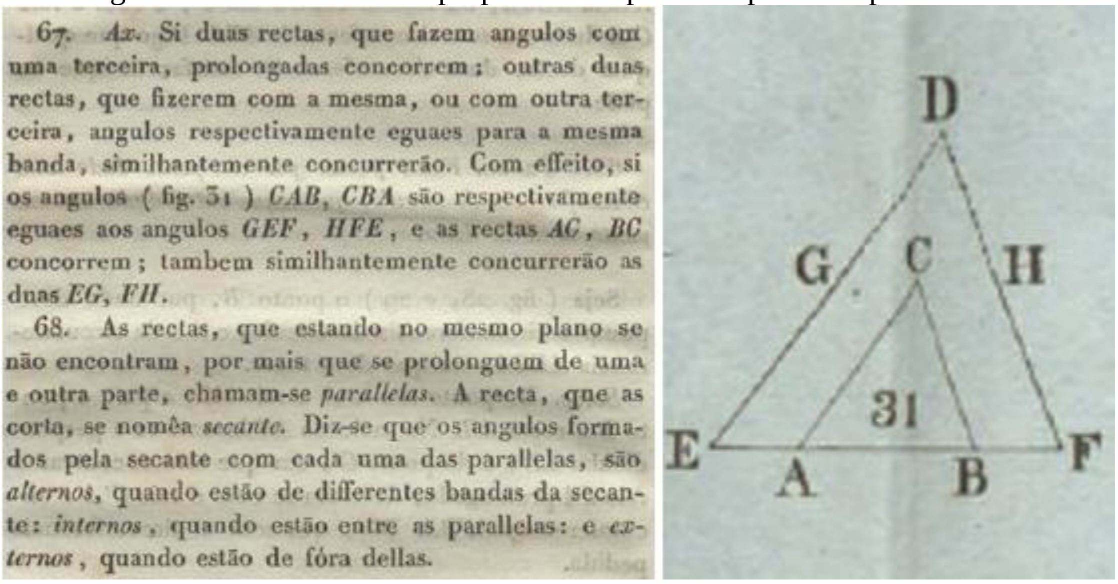
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

2.4.5 Das paralelas

No prefácio do Elementos de Geometria, em relação as dificuldades encontradas, Barbosa diz que:

> Algumas dificuldades se tem encontrado em demonstrar certas *teorias*: e entre todas a das *paralelas* tem dado mais que intender aos Geometras. Eu quis antes valer-me do principio de *similhança*; e me persuado de que facilmente se me concederá 'Que si duas rectas que estão inclinadas a respeito de terceira, concorrem; outras que estiverem inclinadas do mesmo modo a respeito dessa ou de uma terceira, similhantemente também concorrerão'. (PARANAGUÁ, 1838, grifo do autor).

Figura 58 – Axioma inicial proposto no capítulo de paralelas por Barbosa.



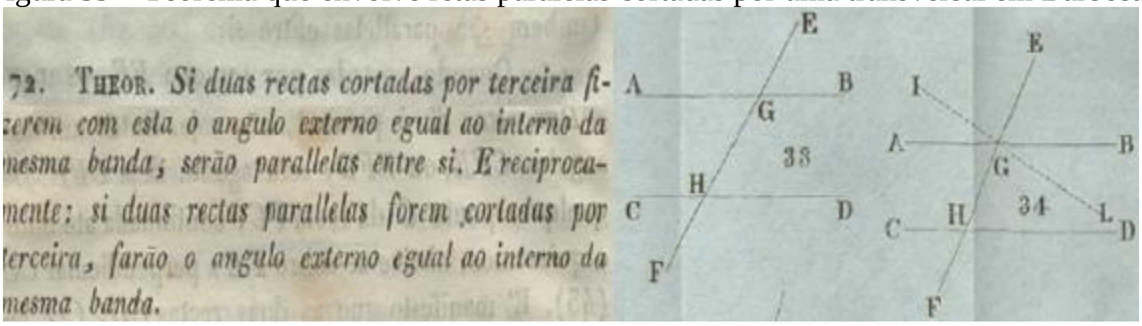
67. *Ax.* Si duas rectas, que fazem angulos com uma terceira, prolongadas concorrem; outras duas rectas, que fizerem com a mesma, ou com outra terceira, angulos respectivamente eguaes para a mesma banda, similhantemente concurrerão. Com effeito, si os angulos (fig. 31) *CAB*, *CBA* são respectivamente eguaes aos angulos *GEF*, *HFE*, e as rectas *AC*, *BC* concorrem; tambem similhantemente concurrerão as duas *EG*, *FH*.

68. As rectas, que estando no mesmo plano se não encontram, por mais que se prolonguem de uma e outra parte, chamam-se *parallelas*. A recta, que as corta, se nomêa *secante*. Diz-se que os angulos formados pela secante com cada uma das parallelas, são *alternos*, quando estão de differentes bandas da secante: *internos*, quando estão entre as parallelas: e *externos*, quando estão de fóra dellas.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Após o que foi definido como paralelas, corolários são estipulados entre três retas paralelas entre si serem paralelas, além de outro tal que por um ponto fora de uma reta não se pode tirar mais do que uma paralela. Partindo assim ao enunciado do teorema (72.) que envolve retas paralelas e uma transversal que as corta.

Figura 59 – Teorema que envolve retas paralelas cortadas por uma transversal em Barbosa.



72. THEOR. *Si duas rectas cortadas por terceira fizerem com esta o angulo externo egual ao interno da mesma banda; serão parallelas entre si. E reciprocamente: si duas rectas parallelas forem cortadas por terceira, farão o angulo externo egual ao interno da mesma banda.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

A demonstração do teorema divide-se em duas etapas:

Sejam as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ cortadas por $\overleftrightarrow{EF}$, e seja o ângulo externo $\angle EGB = \angle GHD$. Então $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

(72.) Demonstração: $\Rightarrow$) $\angle EGB = \angle GHD$ (hipótese); $\angle GHD = \angle CHF$ e $\angle EGB = \angle AGH$ (opostos pelo vértice); e assim, $\angle EGB = \angle GHD = \angle CHF = \angle AGH$, tendo assim ângulos iguais tanto de um lado quanto de outro.

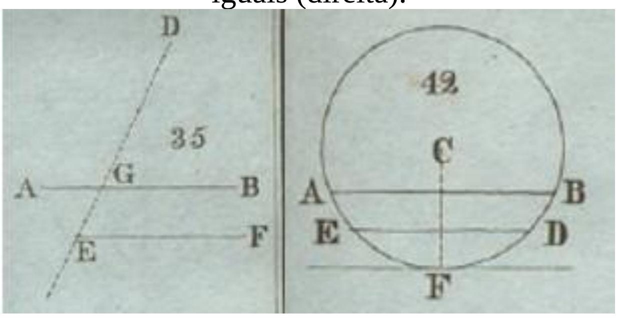
O próximo passo conta com uma suposição por absurdo de que as retas não sejam paralelas, e assim elas possuiriam um ponto de encontro em algum lado. Então é dito que não há razão para concorrência de um lado e não do outro, concorrendo em ambos os lados, o que seria um absurdo. Logo $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

$\Leftarrow$) Observando a figura da direita, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ cortada por $\overleftrightarrow{EF}$. Por absurdo, suponha que $\angle EGB \neq \angle GHD$ sendo assim, um deles é menor que o outro $(\angle EGB < \angle GHD)$. Construindo um ângulo $\angle EGL$ igual ao ângulo $\angle GHD$, $\overleftrightarrow{IL}$ será paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ (duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si). Mas, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (hipótese), $\overleftrightarrow{IL}$ por sua vez também é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, o que contraria a noção de que retas paralelas não se encontram mesmo que prolongadas. Logo, $\angle EGB = \angle GHD$

■

Demonstrada a correspondência de ângulos, as próximas definições ficam como corolários da demonstração feita anteriormente, exatamente as cinco propriedades ditas por Bézout. Finalizando o capítulo, Barbosa aborda um problema de construção de reta paralela passando por um ponto fora dela, e em um teorema desenvolve a ideia de paralelismo em uma circunferência, que será importante ao decorrer dos capítulos em relação a arcos.

Figura 60 – Construção da reta paralela $\overleftrightarrow{EF}$ (esquerda) e cordas paralelas, arcos $\widehat{AE}$, $\widehat{BD}$ iguais (direita).

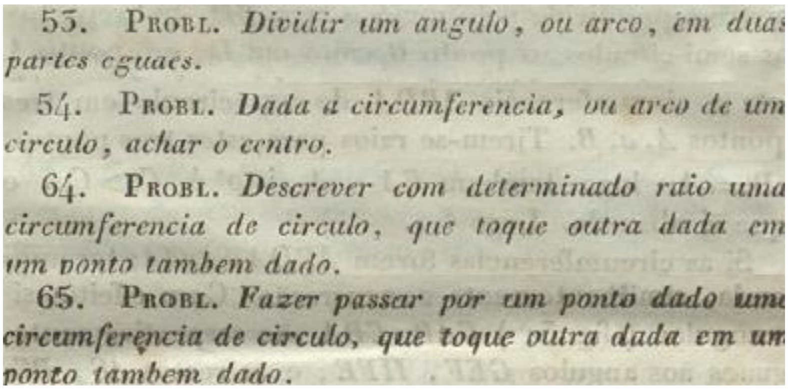


Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

2.4.6 Dos arcos de círculo, e de suas cordas: das retas consideradas a circunferência de um círculo

Há poucos teoremas neste capítulo em relação aos demais sendo que, o intuito aqui são suas aplicabilidades e por sua vez uma maior incidência de problemas e construções geométricas.

Figura 61 – Problemas propostos de retas consideradas a respeito das circunferências de acordo com Barbosa.



53. Probl. *Dividir um angulo, ou arco, em duas partes eguaes.*

54. Probl. *Dada a circumferencia, ou arco de um circulo, achar o centro.*

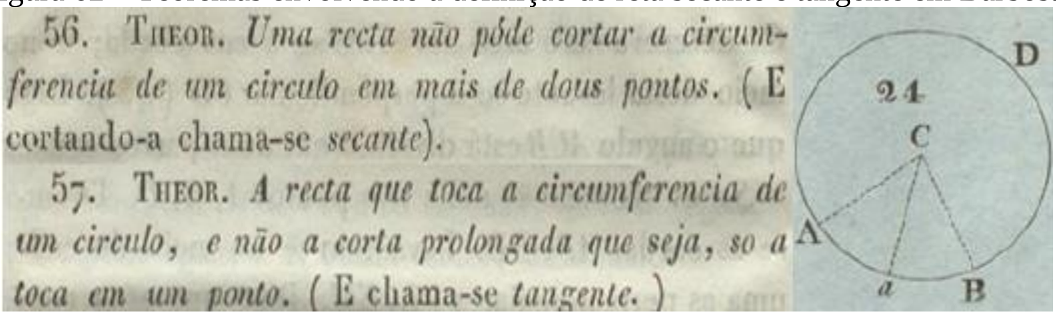
64. Probl. *Descrever com determinado raio uma circumferencia de circulo, que toque outra dada em um ponto tambem dado.*

65. Probl. *Fazer passar por um ponto dado uma circumferencia de circulo, que toque outra dada em um ponto tambem dado.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Assim como seu predecessor, as retas secantes e tangentes estão definidas, com uma distinção própria de organização de cada autor. Barbosa demonstra então os teoremas (56. e 57.) propostos.

Figura 62 – Teoremas envolvendo a definição de reta secante e tangente em Barbosa.



56. Theor. *Uma recta não póde cortar a circumferencia de um circulo em mais de dous pontos.* (E cortando-a chama-se *secante*).

57. Theor. *A recta que toca a circumferencia de um circulo, e não a corta prolongada que seja, so a toca em um ponto.* (E chama-se *tangente.*)

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

(40.) Corolário: Dado um ponto fora da reta não se pode tirar para esta três retas iguais.

(56.) Demonstração: Se for possível, corte uma reta a circunferência $ABDA$ de um círculo em três pontos $A,\ a,\ B$. Tirando raios para esses três pontos, utilizando o corolário (40.), segue a impossibilidade. (PARANAGUÁ,1838, p.22).

■

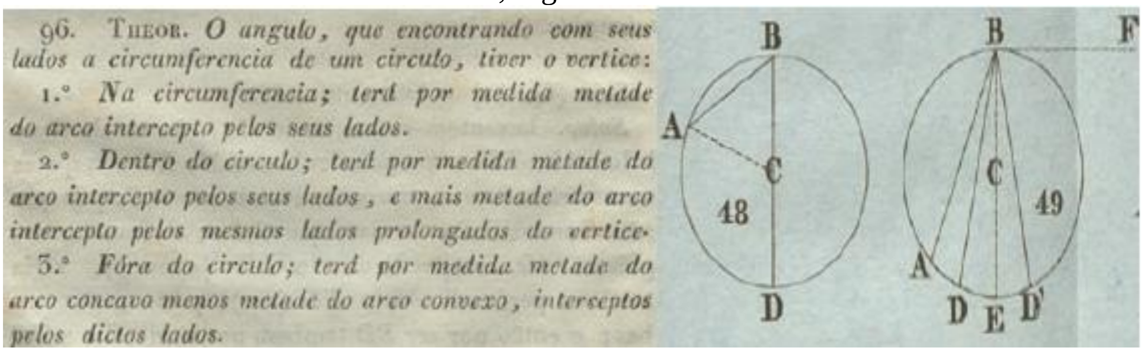
(57.) Demonstração: Se for possível, toque uma reta a circunferência $ABDA$ de um círculo em dois pontos A, B, sem que a corte, prolongada que seja. Tire os raios para estes dois pontos. A perpendicular, que do centro C se abaixar sobre a dita reta cairá entre eles; e será menor do que os raios. Logo ela encontrará a reta dentro do círculo; e por sua vez cortará a circunferência, contrariando a hipótese. (Ibidem, p.22).

■

2.4.7 Dos ângulos considerados em um círculo

O capítulo, tem destaque em relação a sua organização inicial, de um teorema o autor estabelece três opções de ocorrência de ângulos em uma circunferência e demonstra os casos. Será destacado a demonstração da primeira ocorrência (96.), com o centro em um dos lados, que Bézout não faz em seu Elementos de Geometria.

Figura 63 – Casos de ângulos inscritos em uma circunferência com centro no interior, fora e no lado, segundo Barbosa.


96. THEOR. *O angulo, que encontrando com seus lados a circumferencia de um circulo, tiver o vertice:*

1.° *Na circumferencia; terá por medida metade do arco intercepto pelos seus lados.*

2.° *Dentro do circulo; terá por medida metade do arco intercepto pelos seus lados, e mais metade do arco intercepto pelos mesmos lados prolongados do vertice.*

3.° *Fóra do circulo; terá por medida metade do arco concavo menos metade do arco convexo, interceptos pelos dictos lados.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Considerada as figuras dadas pelo autor, $\angle DBA$ o ângulo que tem vértice na circunferência, é formado por uma corda ou um diâmetro; diâmetro e uma tangente; duas cordas; ou uma corda e tangente. Seja a figura a esquerda, pela corda $\overline{AB}$ e pelo diâmetro $\overline{BD}$, $\angle ABD$ tem medida metade do arco $\widehat{AD}$.

(96. 1º caso) Demonstração: Tire o raio $\overline{CA}$, teremos no triângulo ΔABC o ângulo $\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC$ (ângulo externo). Mas o ângulo $\angle ABC = \angle CAB$, por ser $\overline{AC} = \overline{BC}$, logo $\angle ACD = 2\,\angle ABC$; onde $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle\, ACD$. Mas $\angle ACD$ tem por medida o arco $\widehat{AD}$. Logo $\angle ABC$, ou $\angle ABD$, terá medida metade do arco $\widehat{AD}$. (PARANAGUÁ, 1838, p.37).

■

Levando em consideração a demonstração do teorema (96.), os corolários ditos pelo autor são expressos sem uma figura de referência visual.

Figura 64 – Corolários do teorema de ângulos inscrito em uma circunferência.

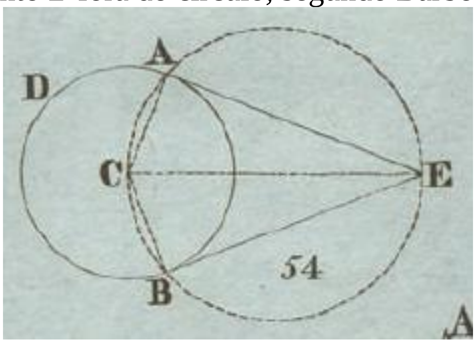
97. *Coroll.* 1.º São pois eguaes todos os angulos, que tendo os vertices na circumferencia, interceptam com seus lados o mesmo arco, ou arcos eguaes.

98. *Coroll.* 2.º E' recto o angulo, que tendo o vertice na circumferencia, toca com seus lados os extremos do diametro.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Finalizando o capítulo, Barbosa propõe dois problemas envolvendo construções, sendo um deles a construção de tangentes a uma circunferência a partir de um ponto E fora do círculo.

Figura 65 – Construção de retas tangentes a circunferência nos pontos A e B a partir de um ponto E fora do círculo, segundo Barbosa.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

2.4.8 Dos triângulos

Figura 66 – Definição de triângulos, visto em Barbosa.

82. O menor numero de rectas, que se pode empregar para fechar spaço, é o de tres. Concurrendo duas a duas, formam tres angulos, que estão todos no mesmo plano (17, e 10). Por isso:

Chama-se *triangulo rectilineo*, ou *triangulo* simplesmente, a figura terminada por tres linhas rectas. Cada uma destas se diz *lado* do triangulo. Si todas tres são eguaes; chama-se *triangulo equilatero*. Si duas somente eguaes; *triangulo isosceles*. Si todas deseguaes; *triangulo scaleno*.

Distinguem-se pois no triangulo sete cousas: *tres angulos*, *tres lados*, e a *área*.

83. Em todo o triangulo a somma de quaesquer dous lados é maior do que o terceiro (44).

84. *Coroll.* Logo com tres rectas quaesquer nem sempre se forma triangulo.

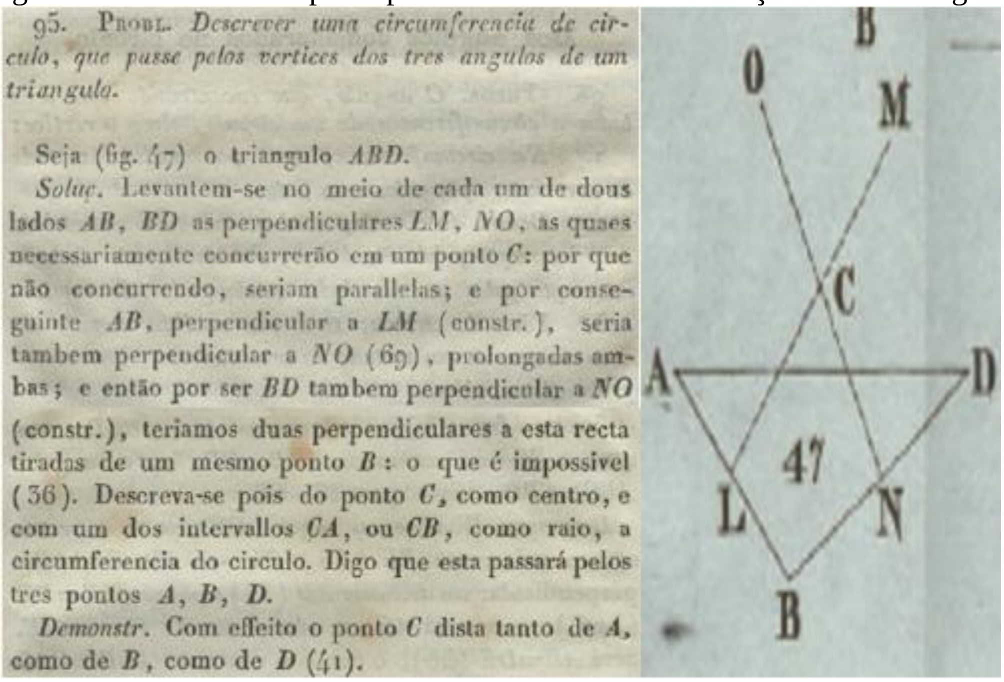
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

As definições impostas pelo autor são elencadas segundo cada conteúdo apresentado:

a) Definição de triângulo;
b) Classificação de um triângulo quanto aos lados;
c) Desigualdade triangular, provado no capítulo de perpendiculares;
d) Soma dos ângulos internos de um triângulo, provando-o;
e) Classificação de um triângulo quanto aos ângulos;
f) Nomenclatura de hipotenusa, ao lado oposto ao ângulo reto de um triângulo;
g) Soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo são complemento um do outro;
h) Ângulo externo como a soma dos ângulos internos opostos a ele;
i) Se dois ângulos de um triângulo são iguais, também são iguais os lados que lhe são opostos, e a recíproca também é válida, provando somente a primeira implicação.

No final da seção é proposto um problema de circunscrição de um triângulo.

Figura 67 – Problema disposto por Barbosa sobre circunscrição de um triângulo.



95. PROBL. *Descrever uma circumferencia de circulo, que passe pelos vertices dos tres angulos de um triangulo.*

Seja (fig. 47) o triangulo *ABD*.

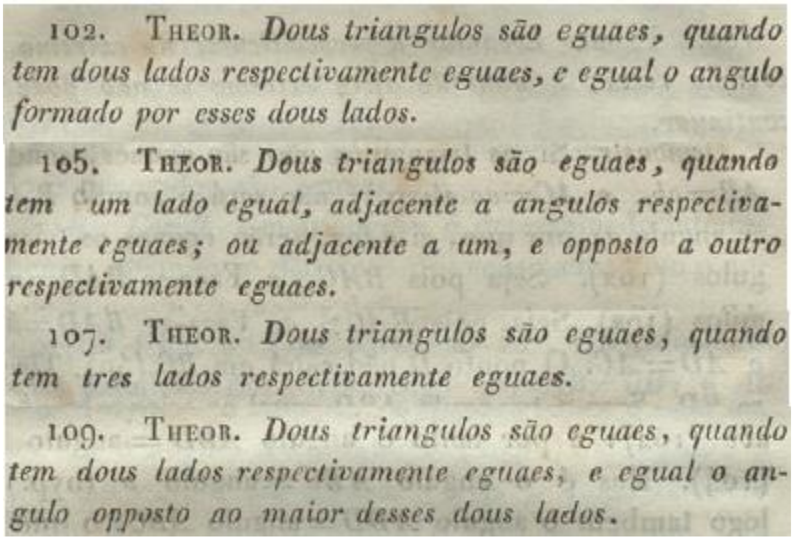
Soluç. Levantem-se no meio de cada um de dous lados *AB*, *BD* as perpendiculares *LM*, *NO*, as quaes necessariamente concurrerão em um ponto *C*: por que não concurrendo, seriam parallelas; e por conseguinte *AB*, perpendicular a *LM* (constr.), seria tambem perpendicular a *NO* (69), prolongadas ambas; e então por ser *BD* tambem perpendicular a *NO* (constr.), teriamos duas perpendiculares a esta recta tiradas de um mesmo ponto *B*: o que é impossivel (36). Descreva-se pois do ponto *C*, como centro, e com um dos intervallos *CA*, ou *CB*, como raio, a circumferencia do circulo. Digo que esta passará pelos tres pontos *A*, *B*, *D*.

Demonstr. Com effeito o ponto *C* dista tanto de *A*, como de *B*, como de *D* (41).

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

2.4.9 Dos casos de igualdade de triângulo

Figura 68 – Proposições de igualdade de triângulos, segundo Barbosa.



102. THEOR. *Dous triangulos são eguaes, quando tem dous lados respectivamente eguaes, e egual o angulo formado por esses dous lados.*

105. THEOR. *Dous triangulos são eguaes, quando tem um lado egual, adjacente a angulos respectivamente eguaes; ou adjacente a um, e opposto a outro respectivamente eguaes.*

107. THEOR. *Dous triangulos são eguaes, quando tem tres lados respectivamente eguaes.*

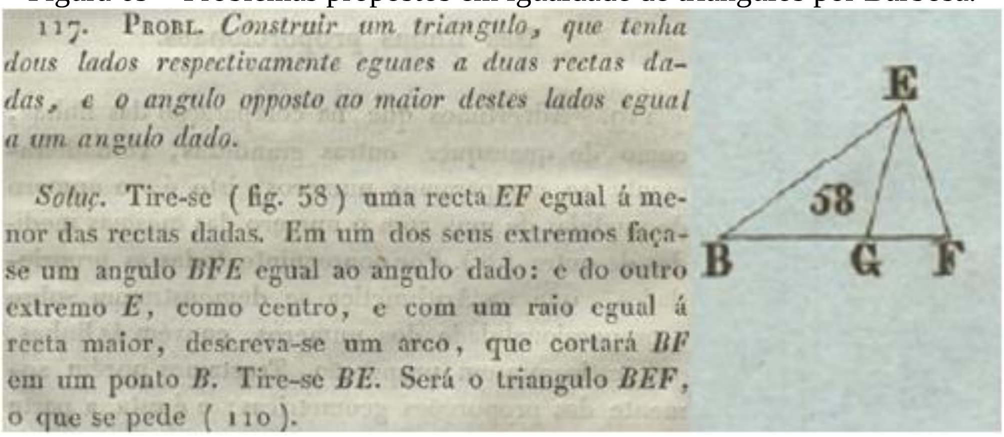
109. THEOR. *Dous triangulos são eguaes, quando tem dous lados respectivamente eguaes, e egual o angulo opposto ao maior desses dous lados.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Barbosa opta por demonstrar todos os teoremas, o primeiro deles com uma sobreposição de figuras. No entanto, os demais casos são demonstrados por absurdo, supondo um lado maior (105.), um ângulo maior ao segundo (107.), e o último supondo um ângulo maior (109.).

No final do capítulo, são propostos cinco problemas de construções de triângulos, dadas retas e ângulos fornecidos no problema.

Figura 69 – Problemas propostos em igualdade de triângulos por Barbosa.



117. PROBL. *Construir um triangulo, que tenha dous lados respectivamente eguaes a duas rectas dadas, e o angulo opposto ao maior destes lados egual a um angulo dado.*

Soluç. Tire-se (fig. 58) uma recta *EF* egual á menor das rectas dadas. Em um dos seus extremos faça-se um angulo *BFE* egual ao angulo dado: e do outro extremo *E*, como centro, e com um raio egual á recta maior, descreva-se um arco, que cortará *BF* em um ponto *B*. Tire-se *BE*. Será o triangulo *BEF*, o que se pede (110).

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Como Bézout, Barbosa apresenta os casos de igualdade de triângulos com a adição de um caso a mais (109.), que será discutido com maior ênfase no capítulo 3 deste trabalho.

2.4.10 Dos polígonos

Barbosa, define polígono como uma figura terminada em um plano por linhas retas, e que os lados considerados “juntos” se chamam perímetro do polígono. Após o dito, a nomenclatura dos polígonos, quanto os lados são enunciados.

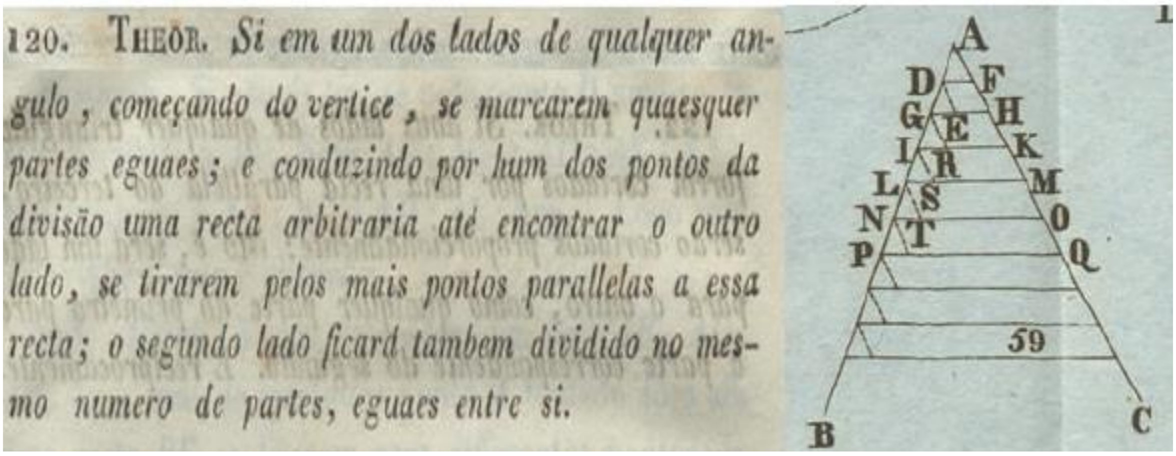
Os teoremas expressos pelo autor no decorrer do capítulo são demonstrados e correspondem a:

a) Fragmentação do polígono em triângulos, estipulando a soma dos ângulos internos;
b) Soma dos ângulos externos de um polígono;
c) Polígono regular inscrito em uma circunferência.

2.4.11 Linhas proporcionais

De forma análoga, todas as propriedades na aritmética que são demonstradas sobre a proporcionalidade dos números, convém as linhas que estão em proporção. A partir de proporções geométricas se estabelece o teorema a seguir.

Figura 70 – Primeiro Teorema proposto em linhas proporcionais no Elementos de Geometria de Barbosa.



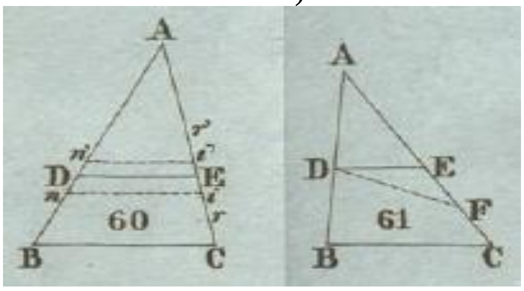
120. THEOR. *Si em um dos lados de qualquer angulo, começando do vertice, se marcarem quaesquer partes eguaes; e conduzindo por hum dos pontos da divisão uma recta arbitraria até encontrar o outro lado, se tirarem pelos mais pontos parallelas a essa recta; o segundo lado ficará tambem dividido no mesmo numero de partes, eguaes entre si.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

A partir do teorema de Tales, temos por consequência o teorema (122.):

(122.) Teorema: Se dois lados de qualquer triângulo forem cortados por uma reta paralela ao terceiro; serão cortados proporcionalmente e a recíproca também é válida.

Figura 71 – Dois lados de qualquer triângulo cortados por uma reta paralela ao terceiro. A representação gráfica da primeira implicação (à esquerda), e da segunda implicação (à direita).

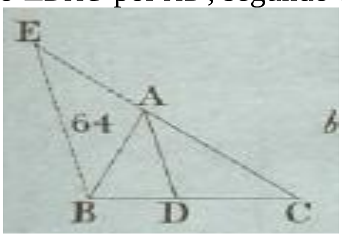


Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Por fim, é enunciado o último teorema do capítulo de linhas proporcionais:

(125.) Teorema: Se uma reta divide pelo meio qualquer ângulo de um triângulo; dividirá o lado oposto a esse ângulo em duas partes proporcionais aos lados correspondentes.

Figura 72 – Divisão do ângulo $\angle BAC$ por $\overline{AD}$, segundo o teorema (125.) em Barbosa.



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

2.4.12 Dos casos de semelhança de triângulo

Figura 73 – Definição de figuras semelhantes.

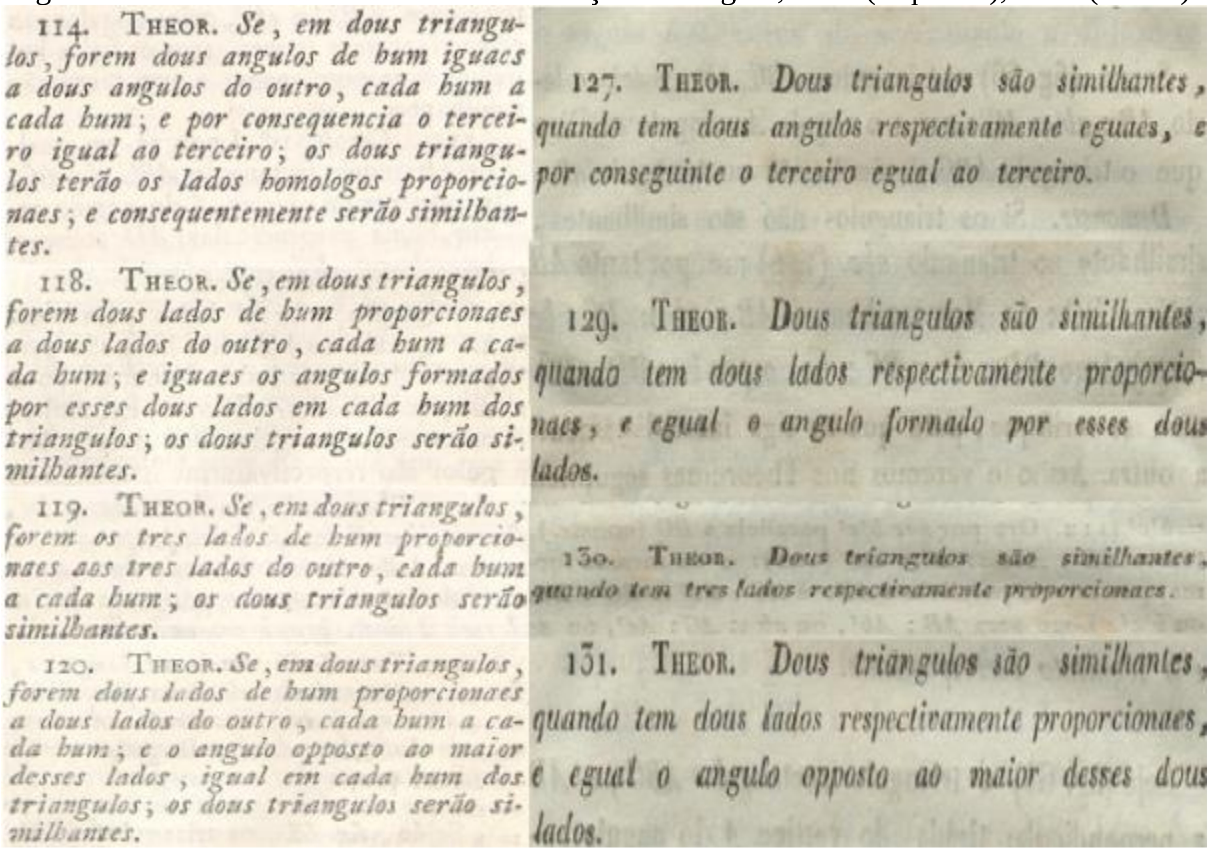
126. *Figuras similhantes* são as que tem egual numero de lados respectivamente proporcionaes e adjacentes a angulos respectivamente eguaes.

Os lados adjacentes aos angulos eguaes dizem-se *homologos*.

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Logo após a definição, é dado os teoremas relativos às semelhanças de triângulos. Observando as duas edições do Elementos de Geometria do autor, é visto uma diferença significativa na escrita dos teoremas referentes aos casos de semelhança.

Figura 74 – Teoremas dos casos de semelhança de triângulo, 1816 (esquerda), 1838 (direita).



114. THEOR. *Se, em dous triangulos, forem dous angulos de hum iguaes a dous angulos do outro, cada hum a cada hum; e por consequencia o terceiro igual ao terceiro; os dous triangulos terão os lados homologos proporcionaes; e consequentemente serão similhantes.*

118. THEOR. *Se, em dous triangulos, forem dous lados de hum proporcionaes a dous lados do outro, cada hum a cada hum; e iguaes os angulos formados por esses dous lados em cada hum dos triangulos; os dous triangulos serão similhantes.*

119. THEOR. *Se, em dous triangulos, forem os tres lados de hum proporcionaes aos tres lados do outro, cada hum a cada hum; os dous triangulos serão similhantes.*

120. THEOR. *Se, em dous triangulos, forem dous lados de hum proporcionaes a dous lados do outro, cada hum a cada hum; e o angulo opposto ao maior desses lados, igual em cada hum dos triangulos; os dous triangulos serão similhantes.*

127. THEOR. *Dous triangulos são similhantes, quando tem dous angulos respectivamente eguaes, e por conseguinte o terceiro egual ao terceiro.*

129. THEOR. *Dous triangulos são similhantes, quando tem dous lados respectivamente proporcionaes, e egual o angulo formado por esses dous lados.*

130. THEOR. *Dous triangulos são similhantes, quando tem tres lados respectivamente proporcionaes.*

131. THEOR. *Dous triangulos são similhantes, quando tem dous lados respectivamente proporcionaes, e egual o angulo opposto ao maior desses dous lados.*

Fonte: Elaboração nossa[11].

Vemos que o último dos teoremas corresponde a um específico que Barbosa também utilizou em congruências de triângulos, e que da mesma forma pode ser ambíguo, quando dois triângulos tiverem dois lados respectivamente proporcionais, e igual o ângulo oposto ao menor desses dois lados.

Por último, são evidenciados o triângulo retângulo e a perpendicular abaixada do vértice do ângulo reto sobre a hipotenusa, revelando o conceito de meia proporcional e suas relações, que seguem os mesmos padrões e relações exibidos por Bézout.

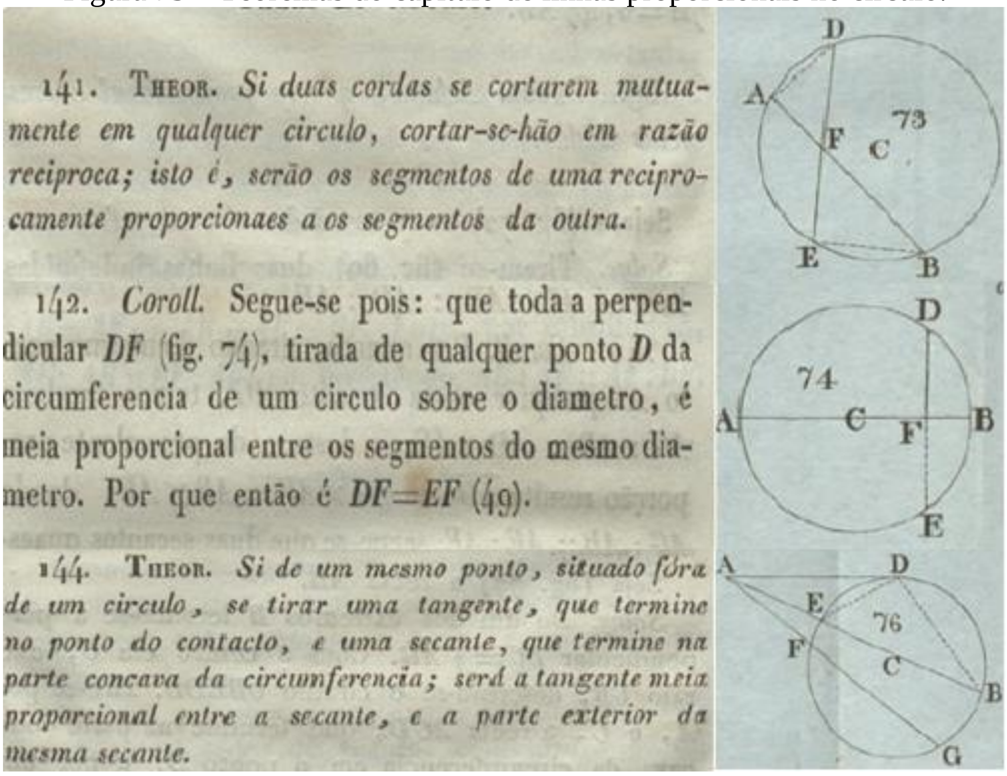
Em sua parte final, o autor propõe problemas sobre divisão de retas em partes iguais, relatando divisões pequenas de uma linha, e o encontro da quarta proporcional.

[11] BARBOSA,1816, p.75 e 78-81 (à esquerda)
PARANAGUÁ,1838, p. 51-53 (à direita)

2.4.13 Das linhas proporcionais consideradas no círculo

Sem distinção de teoremas entre os autores, os mesmos são propostos e não apresentam diferenças significativas de demonstração, portanto serão apenas evidenciados como estão apresentados, evitando demonstrações e propostas repetidas.

Figura 75 – Teoremas do capítulo de linhas proporcionais no círculo.



141. THEOR. *Si duas cordas se cortarem mutuamente em qualquer circulo, cortar-se-hão em razão reciproca; isto é, serão os segmentos de uma reciprocamente proporcionaes a os segmentos da outra.*

142. *Coroll.* Segue-se pois: que toda a perpendicular *DF* (fig. 74), tirada de qualquer ponto *D* da circumferencia de um circulo sobre o diametro, é meia proporcional entre os segmentos do mesmo diametro. Por que então é *DF=EF* (49).

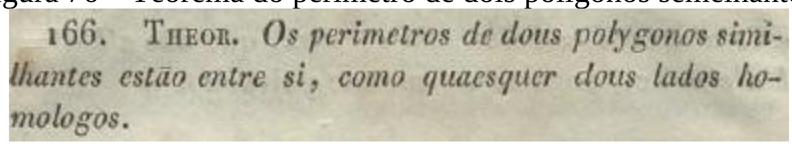
144. THEOR. *Si de um mesmo ponto, situado fóra de um circulo, se tirar uma tangente, que termine no ponto do contacto, e uma secante, que termine na parte concava da circumferencia; será a tangente meia proporcional entre a secante, e a parte exterior da mesma secante.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

O teorema (144.) possui mesma argumentação demonstrativa, porém os meios de descobrir a proporção relativa ao segmento tangente não é evidente.

2.4.14 Polígonos semelhantes

Figura 76 – Teorema do perímetro de dois polígonos semelhantes.



166. THEOR. *Os perimetros de dous polygonos similhantes estão entre si, como quaesquer dous lados homologos.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

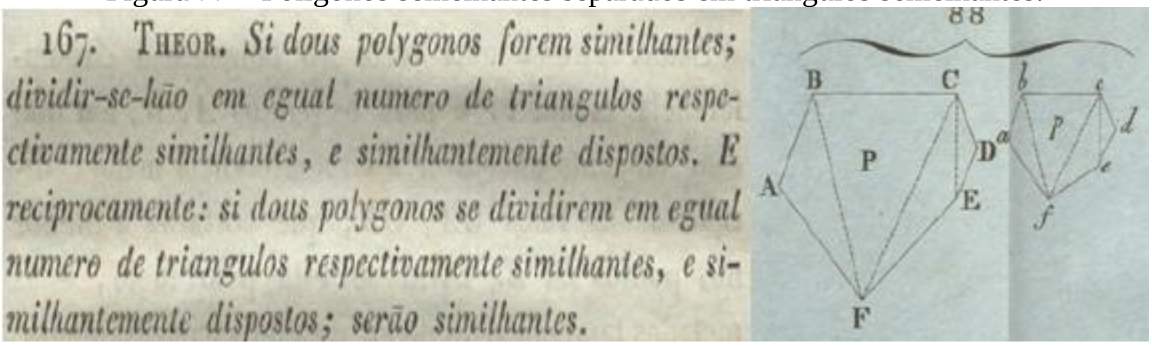
A palavra perímetro vem a substituir o "contorno" de Bézout. Barbosa não faz construção, e utiliza do conceito de figuras semelhantes para a prova, porém definida para um polígono que não se sabe os lados da forma:

$$A + B + C + \&c : a + b + c + \&c :: A : a :: B : b :: C : c \ \&c$$

Onde, $A, B, C, a, b, c\ldots etc.$ correspondem aos lados de polígonos semelhantes.

Dado a definição de perímetro e sua demonstração, é dado sequência aos teoremas (167.) e (171.):

Figura 77 – Polígonos semelhantes separados em triângulos semelhantes.

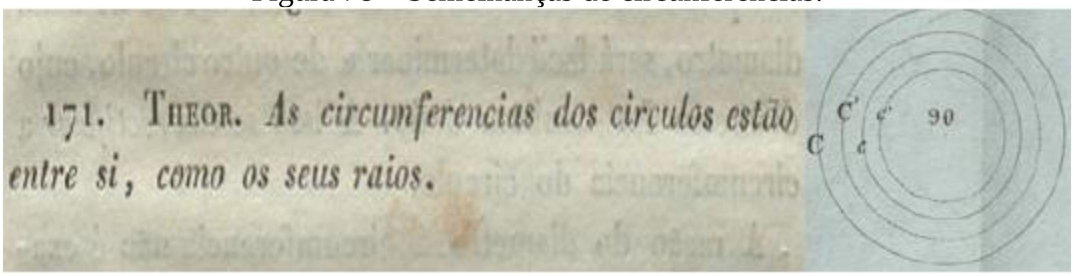


167. THEOR. *Si dous polygonos forem similhantes; dividir-se-hão em egual numero de triangulos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos. E reciprocamente: si dous polygonos se dividirem em egual numero de triangulos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos; serão similhantes.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

A demonstração do teorema (167.) como o visto em Bézout, possui poucas diferenças, em ambas são utilizadas somente semelhanças de triângulos. Barbosa fez sua demonstração em um polígono de seis lados, esquecendo-se de mencionar que um polígono de mais lados, obteria ainda sim um argumento válido. Nota-se também que esse teorema representa um "se e somente se" em Barbosa, distinto de Bézout, que conta com apenas uma implicação.

Figura 78 – Semelhanças de circunferências.



171. THEOR. *As circumferencias dos circulos estão entre si, como os seus raios.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Em semelhanças de circunferências (171.), a demonstração é feita por construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos a figura dada pelo autor. A prova do teorema é feita por absurdo, de complicada compreensão. Após o teorema, é explicitado sobre a razão do diâmetro à circunferência, que será visto no capítulo a seguir.

2.4.15 Das superfícies

Barbosa aborda superfícies de forma semelhante, tratando somente de áreas de polígonos e de círculos, onde essas medições ficam a cargo das áreas dos triângulos, e quadriláteros.

Figura 79 – Definição dos quadriláteros.

Entre os quadrilateros distinguem-se o *trapezio*, e o *parallelogrammo*. Chama-se

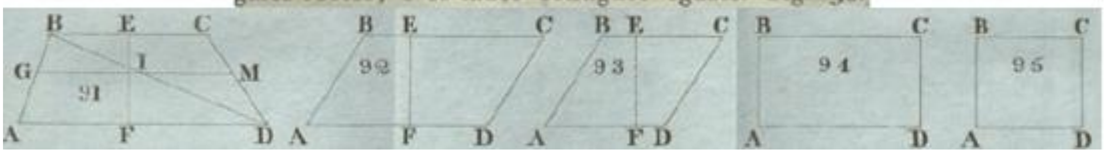
Trapezio o quadrilatero, em que ha so dous lados parallelos. Fig. 91.

Parallelogrammo o quadrilatero, em que são parallelos os lados oppostos; e por isso eguaes entre si (112). Fig. 92, 93, 94, 95.

Tambem entre os parallelogramos se distinguem o *rectangulo*, e o *quadrado*. Chama-se

Rectangulo o parallelogrammo, que tem todos os angulos rectos, e os lados contiguos deseguaes. Fig. 94.

Quadrado o parallelogrammo, que tem todos os angulos rectos, e os lados contiguos eguaes. Fig. 95.

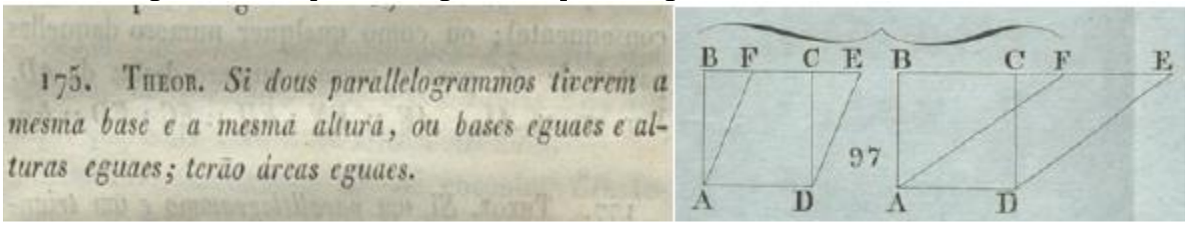


Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Os quadriláteros são classificados a partir das suas distinções, mas o romboide e o rombo (losango) não são comentados explicitamente. De mesmo modo, é definido altura e base de um quadrilátero e triângulo. A redução de um polígono a um triângulo não é expressa.

De forma análoga a Bézout, Barbosa apresenta o teorema (175.) de paralelogramos de mesma base e altura.

Figura 80 – Superfícies iguais em paralelogramos de mesma altura e base.

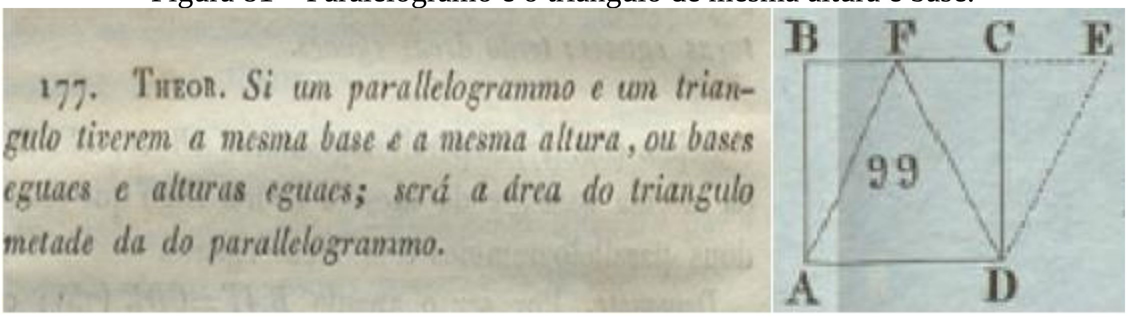

175. THEOR. *Si dous parallelogrammos tiverem a mesma base e a mesma altura, ou bases eguaes e alturas eguaes; terão áreas eguaes.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

Para a demonstração, considera-se o paralelogramo da esquerda, $ABCD$ e $AFED$ de mesma base e altura. Utilizando de semelhanças de triângulos, conclui que a área do trapézio $ABED$ é composta da área do triângulo ΔDCE mais a do paralelogramo $ABCD$, ou a área do triângulo ΔABF somado a área do paralelogramo $AFED$. Como a área dos triângulos é a mesma, necessariamente são iguais as áreas dos paralelogramos. O paralelogramo a direita, como em Bézout, é dito que a demonstração é a análoga.

Assim como no Elementos de Geometria de Bézout, o teorema (177.) de Barbosa, corresponde a um triângulo de mesma base e altura de um paralelogramo, com demonstrações diferentes entre os autores.

Figura 81 – Paralelogramo e o triângulo de mesma altura e base.


177. THEOR. *Si um parallelogrammo e um triangulo tiverem a mesma base e a mesma altura, ou bases eguaes e alturas eguaes; será a área do triangulo metade da do parallelogrammo.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

(177.) Demonstração: Considerando o triângulo ΔAFD de mesma base e altura do paralelogramo $ABCD$, tira-se pelo ponto D a reta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela a $\overline{AF}$, e prolonga-se $\overline{FC}$ até encontrar $\overleftrightarrow{DE}$ em um ponto E. Os paralelogramos $ABCD, AFED$ têm mesma área, porém o paralelogramo $AFED$ compõe-se de dois triângulos ΔAFD, ΔDFE iguais entre si.

Logo a área do triângulo ΔAFD é a metade do paralelogramo $AFED$, e por consequência, também metade do paralelogramo $ABCD$. (PARANAGUÁ, 1838, p.80).

■

A construção difere de Bézout que, a partir de um triângulo, constrói um paralelogramo obtendo o mesmo resultado demonstrativo.

2.4.16 Das avaliações das áreas, e sua medida

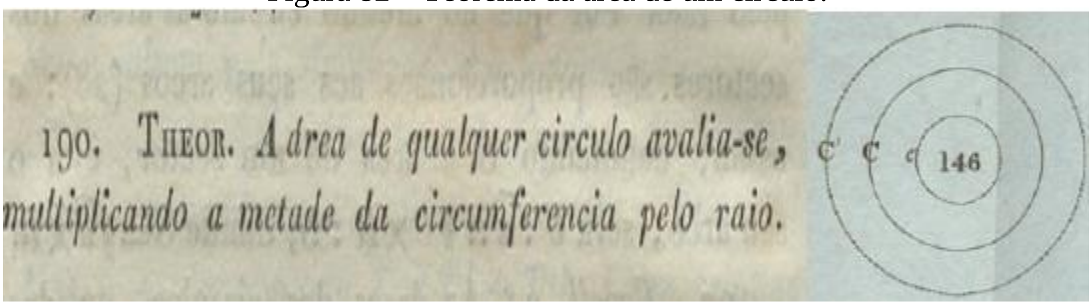
A maneira de medir a área de uma figura é determinar quantas vezes esta contém outra conhecida, e com um processo semelhante de Bézout, é dividido um retângulo medido com um quadrado (chamado unidade). A área de um paralelogramo é avaliada pela multiplicação da base pela altura, e por sua vez o quadrado pela segunda potência de seu lado.

Como consequência, são apresentados corolários e teoremas a respeito de áreas de figuras, sendo eles:

a) (183.) Corolário: A área de qualquer triângulo se avalia, multiplicando a metade da base pela altura;
b) (187.) Teorema: A área de um trapézio equivale a semissoma dos lados paralelos pela altura do trapézio;
c) (189.) Teorema: A área de um polígono regular avalia-se multiplicando a metade do perímetro pelo apótema.

Os teoremas (187.) e (189.) expressos, já foram demonstrados ou comentados por Bézout. Após as demonstrações, é enunciado o teorema da área de um círculo (190.).

Figura 82 – Teorema da área de um círculo.


190. THEOR. *A área de qualquer circulo avalia-se, multiplicando a metade da circumferencia pelo raio.*

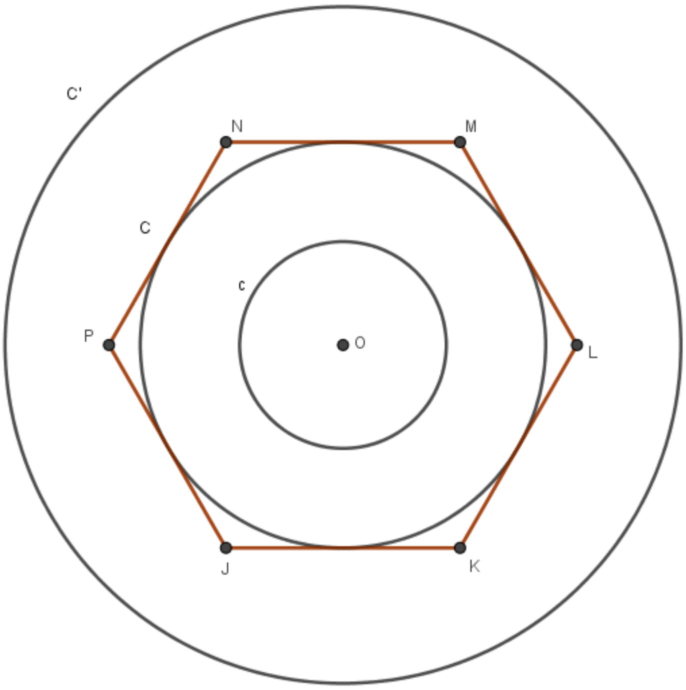
Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

A imagem que é imposta aos leitores não apresenta todas as informações visuais necessárias, assim a cada passo da demonstração será apresentado a real intenção de Barbosa em definir a área de um círculo, segundo as próprias palavras do autor.

Seja o círculo, cuja circunferência é dita C. Represente R o raio, e A a área. Então $A = \frac{1}{2}C \times R$.

(190.) Demonstração: Se não é $A = \frac{1}{2}\ C\ \times R$; seja $\frac{1}{2}\ C\ \times R$ o valor da área de outro círculo maior, ou menor que o proposto. Seja igual a área do círculo maior concêntrico, cuja circunferência está notada por C'. Imagine-se circunscrito ao círculo C um polígono regular, cujos lados não se encontrem a circunferência C'.

Figura 83 – Polígono regular circunscrito ao círculo C, cujos lados não encontram a circunferência C'.

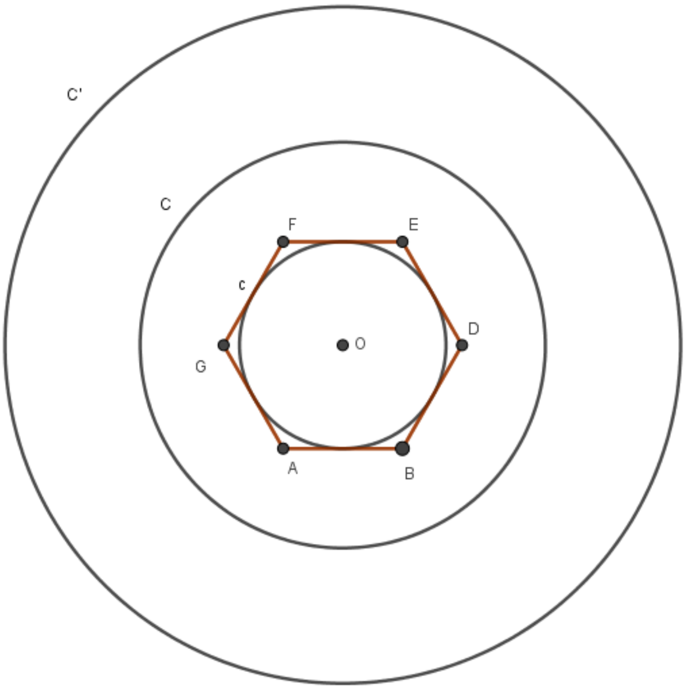


Fonte: Elaboração nossa.

Denote P o perímetro desse polígono. Será a sua área $= \frac{1}{2}\ P \times R$. Ora esta área é menor do que a do círculo C': logo será $\frac{1}{2} P\ \times R < \frac{1}{2} C\ \times R$; isto é, $P < C$: o que é um absurdo.

Pois seja $\frac{1}{2}\ C\ \times R =$ área do círculo menor concêntrico, cuja circunferência está notada por c. Imagine-se circunscrito ao círculo c um polígono regular, cujos lados não encontrem a circunferência C.

Figura 84 – Polígono regular circunscrito ao círculo c, cujos lados não encontram a circunferência C.



Fonte: Elaboração nossa.

Denote p o perímetro desse polígono, e r o raio do círculo c. Será a sua área $= \frac{1}{2}\, p \times r$. Ora esta área é maior do que a do círculo c: logo será $\frac{1}{2} p \times r > \frac{1}{2} C \times R$: o que é absurdo, por ser $r < R$, e $p < C$.

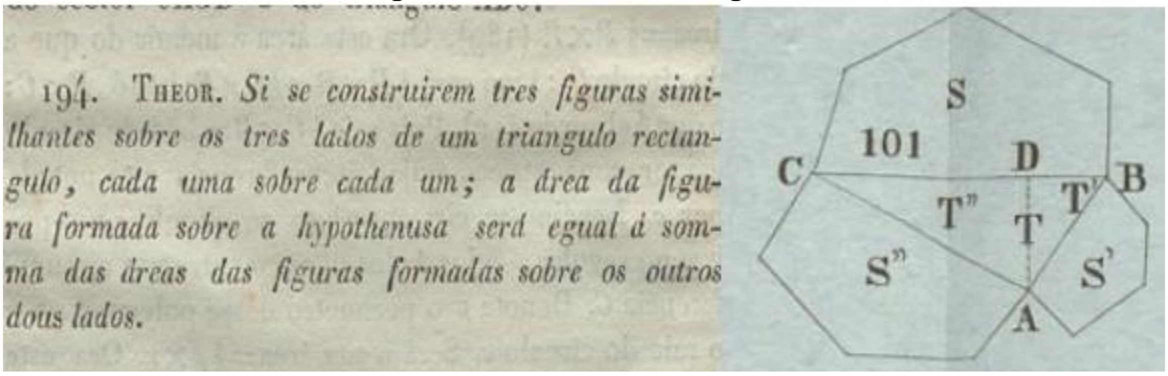
E pois não é $\frac{1}{2} C \times R =$ área $>$ ou $< A$; será $A = \frac{1}{2} C \times R$.

∎

O polígono pode ser representado por quantos lados se queiram na demonstração, porém comprometeria visualmente a representação gráfica.

O teorema de Pitágoras também é presente em Barbosa, necessitando de um corolário proposto pelo autor que é apresentado da seguinte forma:

Figura 85 – Teorema de Pitágoras.



194. THEOR. *Si se construirem tres figuras similhantes sobre os tres lados de um triangulo rectangulo, cada uma sobre cada um; a área da figura formada sobre a hypothenusa será egual á somma das áreas das figuras formadas sobre os outros dous lados.*

Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

(185.) Corolário: Logo em geral as áreas de dois polígonos semelhantes estão entre si, como os quadrados de quaisquer dois lados ou linhas homólogas. (PARANAGUÁ,1838, p. 84)

(194.) Demonstração: Do ponto A abaixa-se sobre a hipotenusa a perpendicular $\overline{AD}$. Nomeando T a área do ΔABC, T' a área do ΔABD, T'' a área do ΔADC. Por serem triângulos semelhantes, às seguintes relações são encontradas:

$$T : T' : T'' :: \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 \qquad \text{(VII)}$$

Por semelhança também se possui:

$$S : S' : S'' :: \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 \qquad \text{(VIII)}$$

Logo de (VII) e (VIII):

$$S : S' : S'' :: T : T' : T''$$

É evidente que $T = T' + T''$, por sua vez $S = S' + S''$

■

CAPÍTULO 3

DISCUSSÃO SOBRE AS OBRAS ELEMENTOS DE GEOMETRIA DE BÉZOUT E BARBOSA.

3.1 AS CAPAS

Pode-se notar escritos nas capas dos livros didáticos a palavra “nova edição” e similares, remete aos leitores que comprarão, uma caracterização de forma positiva do título da obra (CHOPPIN, 2009).

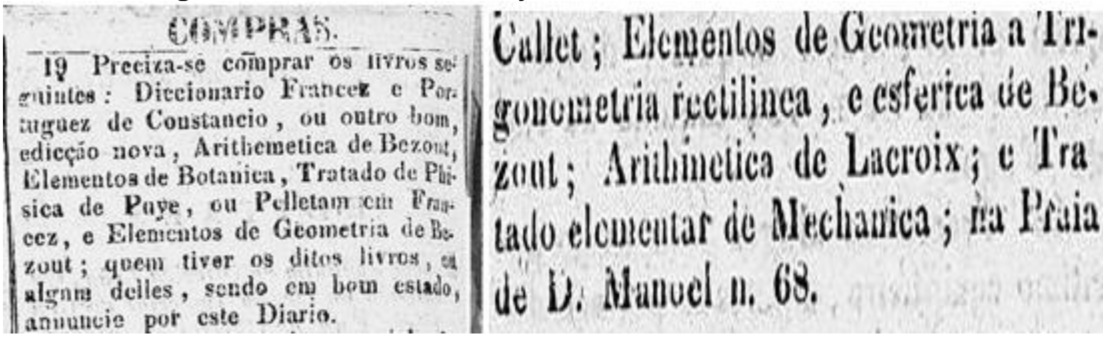
Nos Elementos de Geometria de Bézout (1827) e Barbosa (1816) é nítido o escudo português, com diferenças singelas de uma coroa e uma coruja, representando respectivamente a Coroa Real de Portugal e um símbolo de sabedoria.

A edição do Elementos de Geometria (1838) de Barbosa por sua vez, continha a identificação da Sociedade Literária do Rio de Janeiro a qual era membro honorário e confirma o envolvimento do mesmo com o propósito de acolher poetas, escritores e professores (intelectuais no geral), que debatessem sobre ideias filosóficas, políticas e iluministas, o que não se distancia do autor, que era senador na época, poeta e de certa forma professor em não exercício.

Freire (1872, p.147-148), diretor da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, escreveu um livro sobre a Memória Histórica da Faculdade de Matemática, que continha as obras utilizadas no ensino de matemática (1772-1872) na Universidade de Coimbra. A obra Elementos de Geometria de Bézout traduzida, e as duas edições dos Elementos de Barbosa foram utilizadas pela Universidade.

Os relatos sobre o uso de compêndios ou livros didáticos também são observados no Brasil em jornais da época, encontrados na Biblioteca Nacional Digital (BND) do Rio de Janeiro. A Hemeroteca da BND (RJ) no período de 1821 a 1851, evidencia os principais autores adotados no Brasil, como Bézout, Lacroix, Legendre, possuem obras à venda ou para aulas particulares. Não necessariamente apenas um autor de livro era adotado em colégios, dependia do material que o professor escolhia.

Figura 86 – Relato da utilização de Bézout e Lacroix no Brasil.



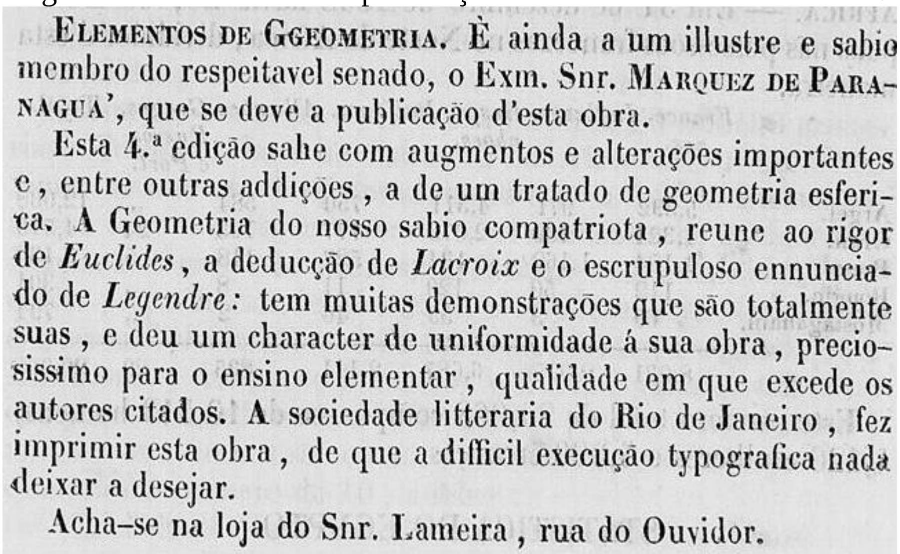
COMPRAS.

19 Precisa-se comprar os livros seguintes: Diccionario Francez e Portuguez de Constancio, ou outro bom, edicção nova, Arithemetica de Bezout, Elementos de Botanica, Tratado de Phisica de Paye, ou Pelletam em Francez, e Elementos de Geometria de Bezout; quem tiver os ditos livros, ou algum delles, sendo em bom estado, annuncie por este Diario.

Callet; Elementos de Geometria a Trigonometria rectilinea, e esferica de Bezout; Arithmetica de Lacroix; e Tratado elementar de Mechanica; na Praia de D. Manoel n. 68.

Fonte: Diário do Rio de Janeiro – Hemeroteca Digital

Figura 87 – Relato sobre a publicação da obra de Barbosa no Brasil.



ELEMENTOS DE GGEOMETRIA. È ainda a um illustre e sabio membro do respeitavel senado, o Exm. Snr. MARQUEZ DE PARANAGUA', que se deve a publicação d'esta obra.

Esta 4.ª edição sahe com augmentos e alterações importantes e, entre outras addiçoes, a de um tratado de geometria esferica. A Geometria do nosso sabio compatriota, reune ao rigor de *Euclides*, a deducção de *Lacroix* e o escrupuloso ennunciado de *Legendre*: tem muitas demonstrações que são totalmente suas, e deu um character de uniformidade á sua obra, preciosissimo para o ensino elementar, qualidade em que excede os autores citados. A sociedade litteraria do Rio de Janeiro, fez imprimir esta obra, de que a difficil execução typografica nada deixar a desejar.

Acha-se na loja do Snr. Lameira, rua do Ouvidor.

Fonte: Revista Nacional e Estrangeira (RJ), 1839 a 1840 – Hemeroteca Digital.

As tipografias em questão não apenas se delimitavam para a impressão de obras de caráter educacional matemático, possivelmente houveram obras que foram reimpressas nas tipografias que foram perdidas com o tempo, e não se possuem relatos que comprovem.

3.2 OS PREFÁCIOS

Não há autor que esteja correto ou equivocado, cada um possui seus pontos favoráveis e que possam melhorar. Bézout abre mão das necessidades matemáticas, já Barbosa retoma o rigor matemático ausente em Bézout, retratando demonstrações ausentes de seu antecessor, além de preocupar-se com o ensino de matemática da mocidade da época, uma transição de uma geometria prática à um modelo didático-pedagógico.

Ler o prefácio não dirá que os autores fizeram tudo o que haviam proposto, mas identifica os cuidados com o ensino da Geometria aos leitores de seus livros. A veracidade sobre possíveis plágios, e as propostas dos autores ficará evidente no decorrer deste capítulo.

3.3 OS ÍNDICES

As edições do Elementos de Geometria de Bézout, apesar das diferenças linguísticas, possuem os mesmos índices. Barbosa em contraposto, possui leves diferenças relatadas do livro didático mais antigo ao mais recente, que são:

a) Linhas retas que se fecham espaço por triângulos;
b) Na quarta seção da edição de 1838, semelhança de tetraedros aparece explicitamente;
c) Adição a partir de 1819, em todas as edições, do apêndice de Geometria Esférica.

A similaridade entre os índices dos autores é notável, os conteúdos, a organização da obra, ambos desfrutam de um mesmo conteúdo programático que ainda perdura até hoje.

3.4 DISCUSSÃO SOBRE A GEOMETRIA PLANA DAS OBRAS

3.4.1 Noções preliminares

Segundo Pinho, Batista e Carvalho (2010, grifo do autor):

> Para iniciar o estudo da geometria, é necessário primeiramente estabelecer os objetos básicos de estudo. Cabe-nos dizer que os conceitos fundamentais da geometria, ponto, reta, plano, não podem ser propriamente definidos. Toda a conceituação que se faz deles é circular, ou apela para outros conceitos igualmente indefinidos. Por exemplo, Euclides, na obra **Os Elementos** define uma **linha** como **um comprimento sem largura**, deixando, no entanto, indefinidos os conceitos de comprimento e largura. Dizemos que estes são conceitos primitivos. Porém, mesmo sem uma definição matemática precisa, podemos mostrar o quão razoáveis estes conceitos são, pois eles são construídos a partir de nossa intuição geométrica.

Os Elementos que os autores se referem é o de Thomas L. Heath, uma tradução inglesa separada em três volumes, contendo os treze livros dos Elementos de Euclides, junto a um aparato crítico analisando cada definição, postulado e proposição, munido de análises matemáticas das proposições de Euclides e notas históricas.

Segundo Heath, (1956, p.196, tradução nossa)[12]: Ponto é aquilo de que nada é parte; uma linha é comprimento sem largura; uma superfície é aquilo que tem apenas comprimento e largura.

Claramente as definições que Heath elencou, vista no Elementos de Euclides, são similares ao que Bézout e Barbosa estipularam como parte inicial de suas obras. Entre si, ao olhar cauteloso dos enunciados, é notório a semelhança das noções preliminares dos autores.

3.4.2 As linhas

Visualmente as definições primárias, após as noções básicas, costumam ter semelhanças significativas. Quando Bézout diz que uma linha reta é o caminho mais curto entre dois pontos, pode-se pensar em o que Arquimedes disse supostamente com: "A menor distância entre dois pontos é uma linha reta". Em compensação, a definição de linha reta de Barbosa[13] não é simples, muito menos clara de se entender.

Sobre a reflexão no Elementos de Euclides de linha reta, e a dificuldade em defini-la, para Pfleiderer (1827 apud HEATH, 1956, p. 216, tradução nossa):

> A noção de linha reta, devida sua simplicidade, não pode ser explicada por qualquer definição regular que não introduza palavras que já contêm em si mesmas, por implicação, a noção que se quer definida (por exemplo: direção, igualdade, uniformidade). Se uma pessoa não conhecer o que o termo reto significa, ensine-a colocando diante dela, de alguma forma, uma imagem ou um desenho.

Das distintas definições de linha reta, boa parte delas compartilham a mesma essência definitiva. De acordo com Unger (1833), conforme citado por Heath (1956, p. 218, tradução nossa): "Uma vez que for encontrado a ideia adequada de linha reta, todas as outras serão explicações dessa".

Sobre medição de linhas, Bézout relata que linhas se medem com outras linhas (retas ou curvas), utilizando unidades de medidas, e o quanto elas equivaleriam em outras unidades de medida (toezas, passo, braça, légua, milha, ...). Barbosa faz uso de duas retas e pontos

---

[12] No original: A point is that which has no part.;
A line is breadthless length.;
A surface is that which has length and breadth only. (HEATH,1956, p.196)

[13] Ver em: PARANAGUÁ,1838, p. 2. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/222343>. Acesso em 14 abr. de 2021

específicos nela para calcular quantas vezes que uma linha cabe em outra, exemplificando o cálculo.

As circunferências, no entanto, não há diferença de escrita entre os autores, sendo que Barbosa copia a definição de Bézout, utilizando palavras iguais e até os mesmos verbos ditos por ele.

3.4.3 Dos ângulos e sua medida

As definições propostas pelos autores diferem em certos aspectos. A definição de ângulo, sua transposição e ângulos opostos pelo vértice são idênticos nas obras. Bézout por sua vez, utiliza as nomenclaturas de ângulos, os coloca em uma circunferência, define suplemento e complemento. Com transporte da noção de ângulo à circunferência, é dito que no decorrer da obra será visto que certo ângulo tem por medida um arco.

Barbosa em seu Elementos de Geometria, não propõe suplemento e complemento, além de não relatar ângulos obtusos, agudos e retos, deixando para o próximo capítulo. Os ângulos em uma circunferência, por sua vez, são "mal definidos" pela utilização de conhecimentos que não foram demonstrados ainda pelo autor, que poderia ter seguido a mesma saída que Bézout, explicando que no decorrer de sua obra, será visto.

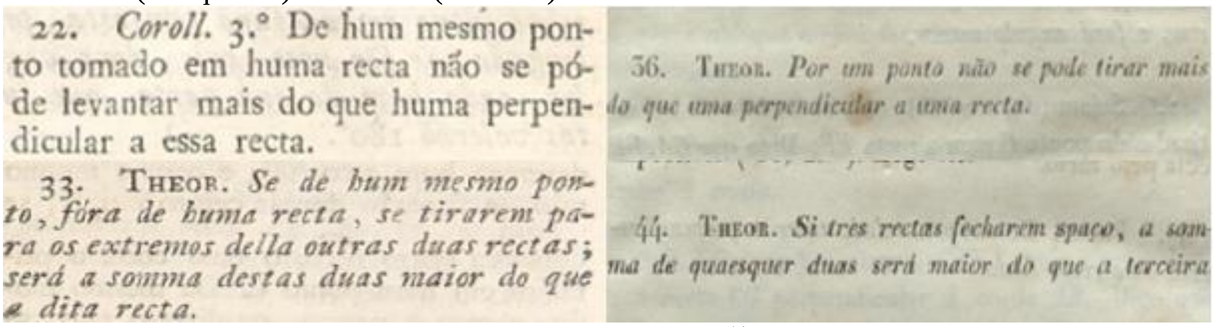
3.4.4 Das perpendiculares e oblíquas

Vemos que as diferenças entre os autores são notórias neste capítulo, cada autor possui sua linha de pensamento e ambas convergem para as mesmas definições por trilhos distintos. Bézout trata como corolários noções que Barbosa considera como teoremas, isso se dá pelo fato de a demonstração ser concebida em poucas linhas, ou ser intuitiva o suficiente para concepção.

As edições do Elementos de Geometria de Barbosa trazem diferenças de escrita (substituição de palavras, reformulação de teoremas e corolários). Segundo Duval (1988 apud MORETTI, 2012, p. 99):

> Substituir uma formulação ou apresentação por outra, referencialmente equivalente, é um processo essencial para o pensamento matemático. E esta substituição, em geral, exige algumas condições para que haja sentido no pensamento natural: a continuidade semântica e a associatividade entre as expressões a serem substituídas.

Figura 88 – Alterações feitas no capítulo de perpendiculares e oblíquas, nas edições de 1816 (à esquerda) e de 1838 (à direita) do Elementos de Geometria de Barbosa.



22. *Coroll.* 3.° De hum mesmo ponto tomado em huma recta não se póde levantar mais do que huma perpendicular a essa recta.

33. THEOR. *Se de hum mesmo ponto, fóra de huma recta, se tirarem para os extremos della outras duas rectas; será a somma destas duas maior do que a dita recta.*

36. THEOR. *Por um ponto não se pode tirar mais do que uma perpendicular a uma recta.*

44. THEOR. *Si tres rectas fecharem spaço, a somma de quaesquer duas será maior do que a terceira*

Fonte: Elaboração nossa [14].

3.4.5 Das paralelas

A definição de paralelas no primeiro livro de Euclides é dada por:

> linhas retas **Paralelas** são retas que, estando em um mesmo plano, e sendo prolongadas em ambas direções, não se encontram em nenhuma delas. (HEATH, 1956, p. 197, tradução nossa, grifo do autor)[15].

Em Bézout e Barbosa, a definição de paralelas são parecidas em relação à Euclides.

O axioma proposto por Barbosa no início do capítulo de paralelas (Figura 58), não é de simples compreensão matemática e semântica, o autor faz uso implicitamente das propriedades de paralelas e utilizará esse axioma depois para provar tais propriedades. O que de fato não foi uma boa escolha para o seu livro.

Pinho, Batista, Carvalho (2010, p.70) afirmam que "Apesar de não falar em paralelas, o Postulado V de Euclides possui formulações equivalentes que falam explicitamente em tais retas. A mais conhecida é a versão de John Playfair (1795), algumas vezes denominada Postulado de Playfair, embora já tivesse sido citada por Proclus (410 – 485 d.C.)". O axioma de Playfair é escrito da seguinte forma:

Axioma das Paralelas (Playfair). Por um ponto P fora de uma reta r passa uma, e somente uma, reta paralela a r (PINHO; BATISTA; CARVALHO, 2010 grifo do autor).

---

[14] BARBOSA,1816, p.18 e 23 (à esquerda)
PARANAGUÁ,1838, p.13-14 e 17 (à direita).

[15] No original: Parallel straight lines are straight which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do no meet one another in either direction. (HEATH, 1956, p. 197)

Este axioma está presente em ambas as obras, distintos da nomenclatura acima, tal que Barbosa, diz que esta reta paralela é única, já Bézout realiza uma construção como prova, sem destacar que ela é única para o ambiente de estudo.

3.4.6 Das linhas retas consideradas a respeito de uma circunferência de um círculo

Um dos pontos interessantes de se analisar, são as demonstrações feitas para reta secante e tangente de Barbosa. Normalmente esses conceitos são atribuídos como corolários e suas demonstrações são deixadas de lado, mas Barbosa exprime toda a ideia por construções estabelecendo de maneira visual o que era proposto. É óbvio que demonstrar boa parte dos teoremas por absurdo é cansativo ao leitor que espera algo inovador, situacionalmente essa escolha demonstrativa feita pelo autor foi de bom uso.

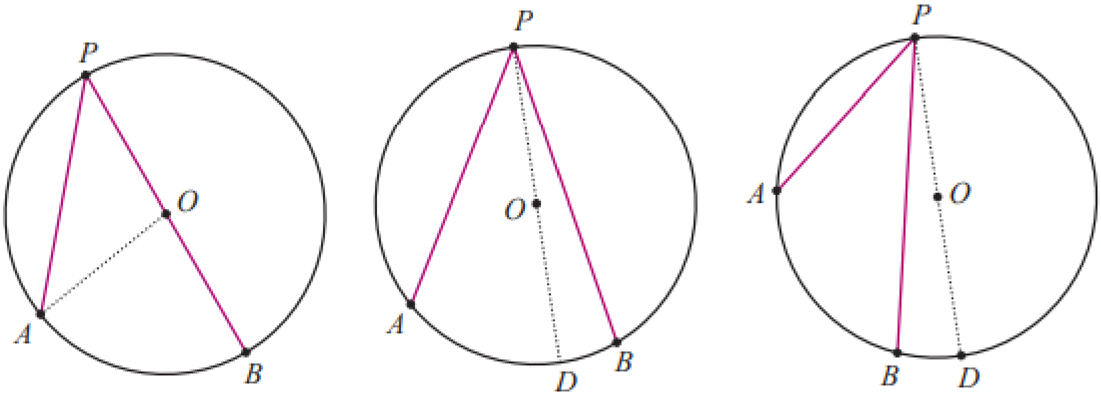
Em relação aos problemas propostos pelos autores, eles acabam tendo os mesmos enunciados, e as mesmas demonstrações, sem construções ou métodos distintos. Ainda em relação às semelhanças nas obras, Bézout definiu neste capítulo duas cordas paralelas que cortam entre si em arcos iguais, o que já havia sido feito por Barbosa no seu capítulo das paralelas, com o mesmo desenho e demonstração semelhante.

3.4.7 Dos ângulos considerados em um círculo

Diferenciando-se no quesito demonstrativo, o que ambos os autores propõem neste capítulo representam a mesma informação. Das mínimas diferenças, Bézout resolve dois casos de um ângulo que possui vértice na circunferência (centro dentro e fora do ângulo), enquanto Barbosa adota o caso particular do centro estar no lado do ângulo, provando os demais a partir dele.

Pinho, Batista, Carvalho (2010, p.142-143), demonstram o teorema do capítulo, exprimindo primeiramente o caso de o centro estar sobre o lado do ângulo e, a partir dele por mínimas construções de retas auxiliares que passam pelo centro, concluem que o ângulo que possui vértice na circunferência seria uma soma ou subtração de arcos nos outros casos.

Figura 89 – Representação dos casos de ângulos inscritos em uma circunferência.



Fonte: Pinho, Batista, Carvalho (2010, p. 142-143).

Os corolários expostos por Barbosa e Bézout são de fato aplicáveis e, Bézout os expõe com uma característica visual, explicando o porquê de cada um. O problema da construção de retas tangentes a uma circunferência por um ponto fora dela possui a mesma demonstração e figura descrita pelos dois autores. Essa construção parece perdurar nos livros de desenho geométrico, como por exemplo nos textos de Putnoki, intitulados: Elementos de Geometria & Desenho Geométrico, Volumes 1 e 2.

3.4.8 Das linhas que fecham espaço/ Triângulos

A desigualdade triangular feita por Barbosa, em perpendiculares e oblíquas, é uma versão que utiliza propriamente segmentos que possuem tamanhos diferentes, que se diferencia da maioria das definições históricas, pela utilização de uma perpendicular. Euclides em seus Elementos, por sua vez, utiliza construções de um triângulo isósceles e trabalha com a ideia de que o maior lado de um triângulo é sempre oposto ao seu maior ângulo, e o mesmo para o menor lado, oposto ao menor ângulo. (HEATH, 1956, p. 359-362). Em Pinho, Batista, Carvalho (2010, p. 121-122), a demonstração da desigualdade triangular é similar à de Euclides.

Outras proposições podem ser encontradas também no livro I de Euclides, como o ângulo externo - proposição 32; soma de dois ângulos de um triângulo retirados de 180º encontra-se o terceiro - proposição 17. As demonstrações no livro de Euclides são iguais às demonstrações dos autores.

O último teorema: “Se dois ângulos de um triângulo são iguais, também são iguais os lados que lhe são opostos”, são demonstrados de maneiras distintas. Bézout faz uso de um triângulo inscrito em uma circunferência, e prova as duas implicações (se e somente se), pela utilização de arcos de mesma medida. Barbosa utiliza dois triângulos iguais ΔABC e por meio de uma reflexão plana da figura, encaixando o ponto A em C e C em A (B fixo) e conclui por superposição que são iguais, fazendo um processo similar em igualdade de triângulos.

3.4.9 Da igualdade de triângulos

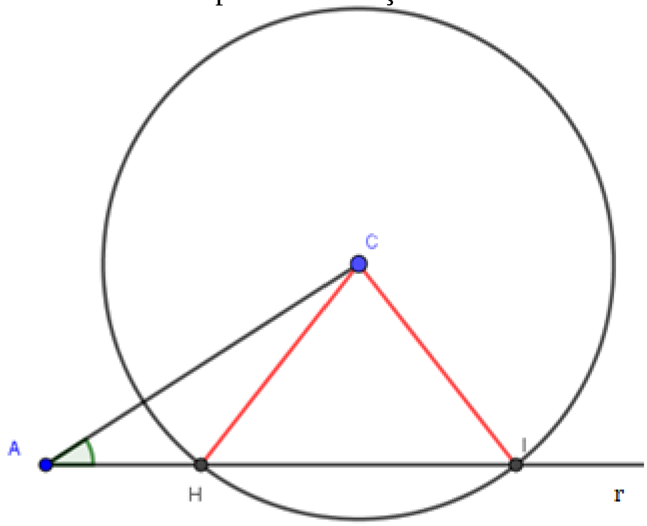
Conhecido também por congruência de triângulos, são subentendidos os casos de congruência: lado-ângulo-lado (LAL); ângulo-lado-ângulo (ALA); lado-lado-lado (LLL) comum aos dois autores. Euclides em seu livro I demonstra os três casos comuns aos autores, Proposição 4 (LAL); Proposição 8 (LLL); Proposição 26 (ALA) (HEATH, 1956).

O teorema demonstrado por Barbosa (109.), no capítulo de igualdade de triângulos, é de fato um caso particular ambíguo, o autor retratou que pode não ocorrer, caso o ângulo é oposto ao menor lado. Para a visualização a não ocorrência, observe a construção dos triângulos feita a seguir:

Construção: Suponha $\angle A$, um ângulo feito entre o lado $\overline{AC}$ e uma reta r. Para que se obtenha triângulos, considere o ponto C como o centro de uma circunferência com raio menor que $\overline{AC}$ e que encontre a reta r dada (seja secante). Os raios traçados $\overline{CH}, \overline{CI}$ delimitam dois triângulos: $\Delta ACH, \Delta ACI$.

Note que $\overline{CH} \equiv \overline{CI}$, $\overline{AC}$ é lado comum, $\angle HAC$ o ângulo em comum oposto ao menor lado (construção), assim consegue-se obter dois triângulos $\Delta ACH, \Delta ACI$ que não são congruentes por construção.

Figura 90 – Construção de dois triângulos ΔACH, ΔACI não congruentes de acordo com a problematização.



Fonte: Elaboração nossa.

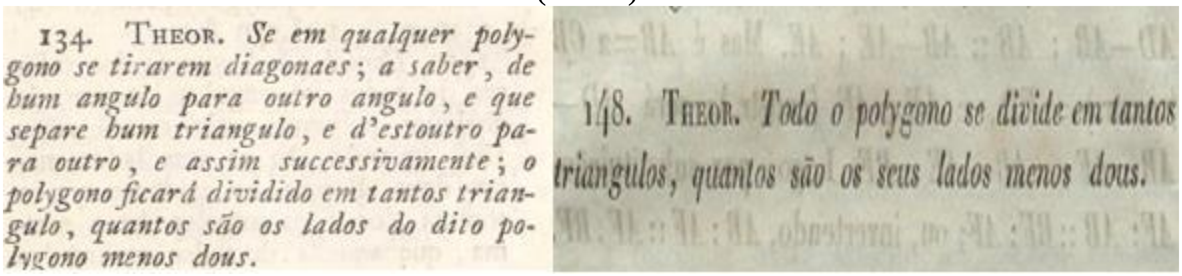
Barbosa relata que há outros dois casos relacionados ao ângulo estar oposto ao menor desses dois lados. Se o raio traçado $\overline{CH}$ for perpendicular a reta r, haverá uma solução, e se o raio traçado $\overline{CH}$ não encontrar a reta r (for menor que a medida da perpendicular), não haverá triângulo e por sua vez, solução. No total há seis casos possíveis envolvendo o ângulo estar oposto ao menor e maior lado.

Os problemas do capítulo propostos por Barbosa são idênticos aos que são apresentados por Bézout, organizados de formas distintas. Bézout propõe a cada teorema um problema, e Barbosa os faz separadamente após toda a teoria.

3.4.10 Dos polígonos

A mesma estruturação, definições e demonstrações são concebidas em ambas as obras, com mínimas diferenças. Barbosa, em suas duas edições do Elementos de Geometria, apresenta uma ligeira melhora na escrita do teorema a seguir.

Figura 91 – Teorema reescrito nas edições dos Elementos de Barbosa, 1816 (esquerda), 1838 (direita).



134. THEOR. *Se em qualquer polygono se tirarem diagonaes; a saber, de hum angulo para outro angulo, e que separe hum triangulo, e d'estoutro para outro, e assim successivamente; o polygono ficará dividido em tantos triangulo, quantos são os lados do dito polygono menos dous.*

148. THEOR. *Todo o polygono se divide em tantos triangulos, quantos são os seus lados menos dous.*

Fonte: Elaboração nossa [16].

Sobre os polígonos, Barbosa acrescenta um capítulo a mais chamado: Dos polígonos inscritos e circunscritos ao círculo, que conta com construções geométricas de problemas envolvendo polígonos inscritos e circunscritos. Não há teoremas ou corolários nesse capítulo extra dado pelo autor.

3.4.11 Linhas proporcionais

O teorema de Tales é o teorema central deste capítulo, utilizado com frequência por conta de sua aplicabilidade. Nos autores analisados, ambos utilizam o mesmo argumento para provar o teorema. A definição do teorema de Tales dada por Putnoki (1993a, p.112, grifo nosso):

Teorema de Tales: Um feixe de retas paralelas determina sobre duas ou mais transversais quaisquer segmentos de uma, proporcionais aos segmentos correspondentes nas outras.

Essa definição é mais simplificada do que as de Bézout e Barbosa, exprimindo o mesmo resultado.

Um detalhe importante é a utilização do livro de aritmética de Bézout em seu Elementos de Geometria. Os teoremas da aritmética são relembrados e descritos no capítulo de linhas proporcionais. O problema seria preocupante caso não fosse caracterizado tais teoremas pois, não necessariamente todos os livros de Bézout são utilizados simultaneamente em uma instituição na época, e assim outros autores poderiam ter sua aritmética difundida, comprometendo a linha de raciocínio do ensino.

[16] BARBOSA 1816, p. 91-92 (esquerda)
PARANAGUÁ,1838, p.62 (direita)

Os teoremas concebidos além do de Tales, quando enunciados pelos autores, recebem tratamentos distintos. O teorema que divide ao meio um ângulo de um triângulo, ilustrada nas (Figura 27 e Figura 72), possuem a mesma demonstração e imagem.

O teorema que corresponde a dois lados de um triângulo cortados por uma reta paralela ao terceiro, ilustrada pelas (Figura 28 e Figura 71), possui diferenças demonstrativas. Bézout prova apenas uma parte da demonstração (segunda implicação), enquanto Barbosa propõe a prova por contradição das duas implicações feitas no teorema. Esse teorema está contido no livro VI de Euclides, e possui a escrita como em Barbosa, com a seguinte formulação, vista em Heath (1908, p. 194-195, tradução nossa, grifo nosso):

Proposição 2: Se uma linha reta for traçada paralela a um dos lados de um triângulo, então ela corta os lados do triângulo proporcionalmente; e caso os lados de um triângulo sejam cortados proporcionalmente, então a reta, que une os pontos da seção será paralela ao lado remanescente do triângulo[17].

3.4.12 Semelhanças de triângulos

Das diferenças encontradas entre os teoremas de semelhança, é visto que Bézout faz o acréscimo do teorema do caso de semelhança (AAA), que não é comum de ser visto em livros atuais e nem ao menos há menções no livro de Euclides. As demonstrações não fogem do padrão dos autores, Bézout demonstra por construções e Barbosa por absurdo, sendo que o teorema relativo a meia proporcional é idêntico aos dois, com mesmas proposições e demonstrações.

A meia proporcional, nos dias atuais, pode ser encontrada em livros de geometria ou desenho geométrico, pelo nome de média geométrica ou média proporcional, remetendo-se às relações métricas em um triângulo retângulo.

Após vários capítulos sem uma aplicação prática no mar, Bézout faz um compilado de aplicações, com utilização dos conteúdos de todos os capítulos e conhecimentos adquiridos dos mesmos. Em um dos problemas, Bézout pede que se encontre a quarta proporcional, que de acordo com Putnoki (1993a, p.117, grifo do autor):

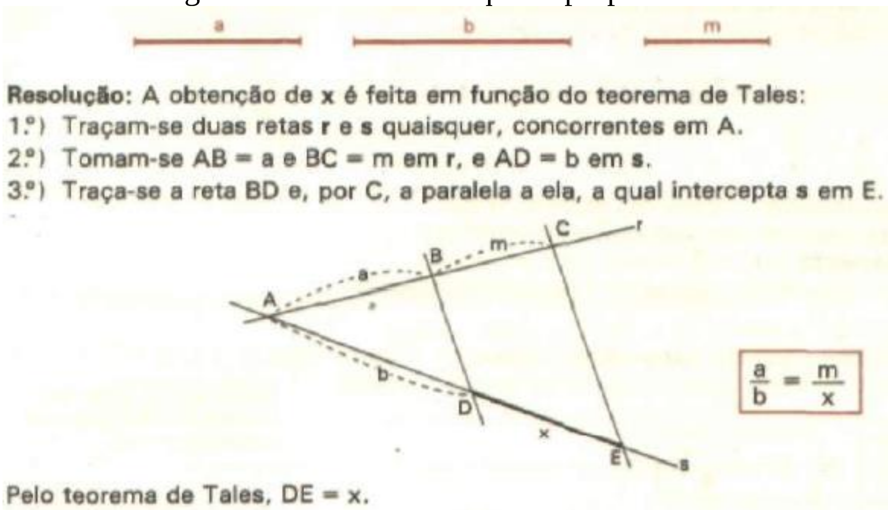
[17] No original: If a straight line is drawn parallel to one of the sides of a triangle, then it cuts the sides of the triangle proportionally; and, if the sides of the triangle are cut proportionally, then the line joining the points of section is parallel to the remaining side of the triangle. (HEATH, 1908, p. 194-195)

Definição: Chama-se **quarta proporcional** entre os segmentos a, b e m, **citados dessa ordem**, o segmento **x** que se obtém na proposição:

$$a : b :: m : x$$

Observe que $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{m}$ foram mantidos na ordem dada, e $\boldsymbol{x}$ foi colocado na quarta posição. Os elementos das proporções são distintos de zero.

Figura 92 – Encontro da quarta proporcional.



Resolução: A obtenção de x é feita em função do teorema de Tales:
1.º) Traçam-se duas retas **r** e **s** quaisquer, concorrentes em A.
2.º) Tomam-se AB = a e BC = m em r, e AD = b em **s**.
3.º) Traça-se a reta BD e, por C, a paralela a ela, a qual intercepta **s** em E.

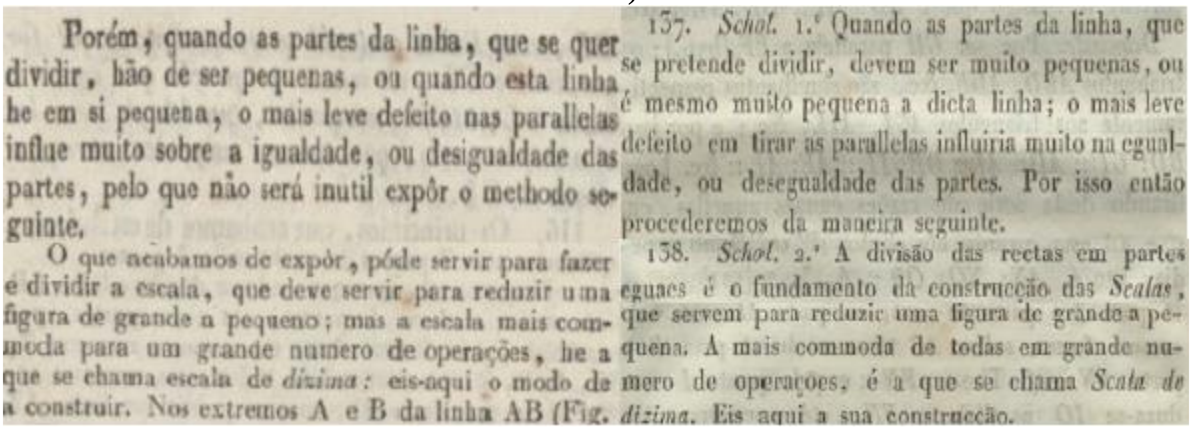
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{x}$$

Pelo teorema de Tales, DE = x.

Fonte: PUTNOKI, 1993a.

Algumas cópias textuais de Barbosa a Bézout são evidentes. Essas cópias estão presentes nos problemas deixados pelos autores, de modo que Barbosa simplesmente “apaga” os exemplos marítimos.

Figura 93 – Semelhanças textuais encontradas nos capítulos, Bézout (à esquerda), Barbosa (à direita).



Porém, quando as partes da linha, que se quer dividir, hão de ser pequenas, ou quando esta linha he em si pequena, o mais leve defeito nas parallelas influe muito sobre a igualdade, ou desigualdade das partes, pelo que não será inutil expôr o methodo seguinte.

O que acabamos de expôr, póde servir para fazer e dividir a escala, que deve servir para reduzir uma figura de grande a pequeno; mas a escala mais commoda para um grande numero de operações, he a que se chama escala de *dizima*: eis-aqui o modo de a construir. Nos extremos A e B da linha AB (Fig.

137. *Schol.* 1.° Quando as partes da linha, que se pretende dividir, devem ser muito pequenas, ou é mesmo muito pequena a dicta linha; o mais leve defeito em tirar as parallelas influiria muito na egualdade, ou desegualdade das partes. Por isso então procederemos da maneira seguinte.

138. *Schol.* 2.° A divisão das rectas em partes eguaes é o fundamento da construcção das *Scalas*, que servem para reduzir uma figura de grande a pequena. A mais commoda de todas em grande numero de operações, é a que se chama *Scala de dizima*. Eis aqui a sua construcção.

Fonte: Elaboração nossa [18].

3.4.13 Das linhas proporcionais consideradas do círculo

Como visto anteriormente nas obras dos autores, não há diferenças demonstrativas entre os dois primeiros teoremas propostos neste capítulo.

Com relação ao teorema de duas secantes que partem de um ponto em comum fora do círculo, ambos os autores encontram as proporções relativas de mesma forma. Quando o teorema envolve uma secante e uma tangente, obtemos uma generalização do teorema sem provas concretas. Bézout diz que uma das secantes $\overrightarrow{AC}$ (Figura 33), quando aproximadas da tangente $\overrightarrow{AF}$, fará com que seus pontos de seção E, C se encontrem em F, obtendo $\overline{AF}^2 = AB \times AD$. Barbosa apenas assume que é verídico o fato da tangente ser ao quadrado, sem provas.

As linhas proporcionais consideradas em um círculo podem ser encontradas pela nomenclatura de “potência de um ponto em relação a uma circunferência”, como é visto em Putnoki (1993b, p. 102-104, grifo do autor) sob o teorema:

Teorema: Sejam dados uma circunferência e um ponto P que não pertencente a ela. Se as retas que são concorrentes em P interceptam a circunferência nos pontos A e B, C e D, E e F etc., então:

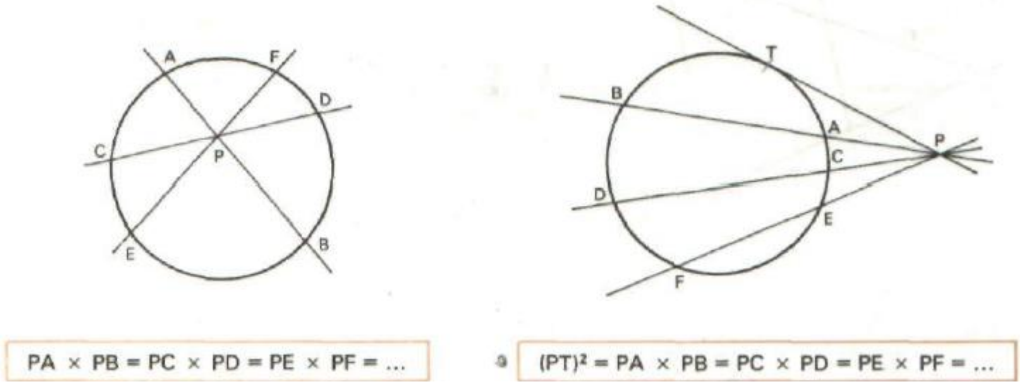
[18] BÉZOUT,1827, p. 46 (à esquerda)
PARANAGUÁ,1838 p. 56-57 (à direita)

$$PA \times PB = PC \times PD = PE \times PF = \cdots$$

Caso o ponto P seja externo à circunferência, e a reta **t**, passando por P, a tangencie no ponto T, então têm-se também:

$$(PT)^2 = PA \times PB = PC \times PD = \cdots$$

Figura 94 – Representação gráfica da potência de ponto.

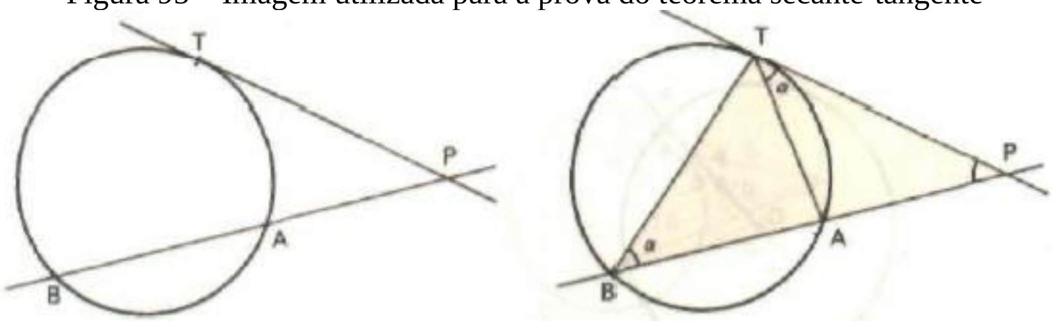


Fonte: PUTNOKI, 1993b.

Em um sentido amplo definitivo, uma potência de ponto em relação a uma circunferência representa distâncias do centro da circunferência ao ponto P. Utilizaremos apenas os teoremas: secante-secante; secante-tangente; e intersecção de cordas dessa teoria.

Para provar o teorema da secante-tangente, Putnoki faz o traçado abaixo, afirmando que o ângulo $\angle PTB \equiv \angle PTA$, e o ângulo $\angle P$ é comum aos triângulos $\Delta PBT, \Delta PTA$. Pelo caso (AA), os triângulos são semelhantes, concluindo que $PT^2 = PA \times PB$. Putnoki deixa claro que o ângulo $\angle PTA$ corresponde a um ângulo de segmento, utilizado para construções de arcos capazes, e que não está presente nas teorias de Bézout e Barbosa.

Figura 95 – Imagem utilizada para a prova do teorema secante-tangente



Fonte: PUTNOKI, 1993b

Curiosamente, observando o livro III de Euclides nas proposições 35 e 36, obtemos as intersecções de cordas e o teorema secante-tangente (HEATH, 1908, p. 71-75). Lembrando que as proposições dadas por Euclides não possuem o conteúdo de proporções, que são introduzidas somente em seu livro VI.

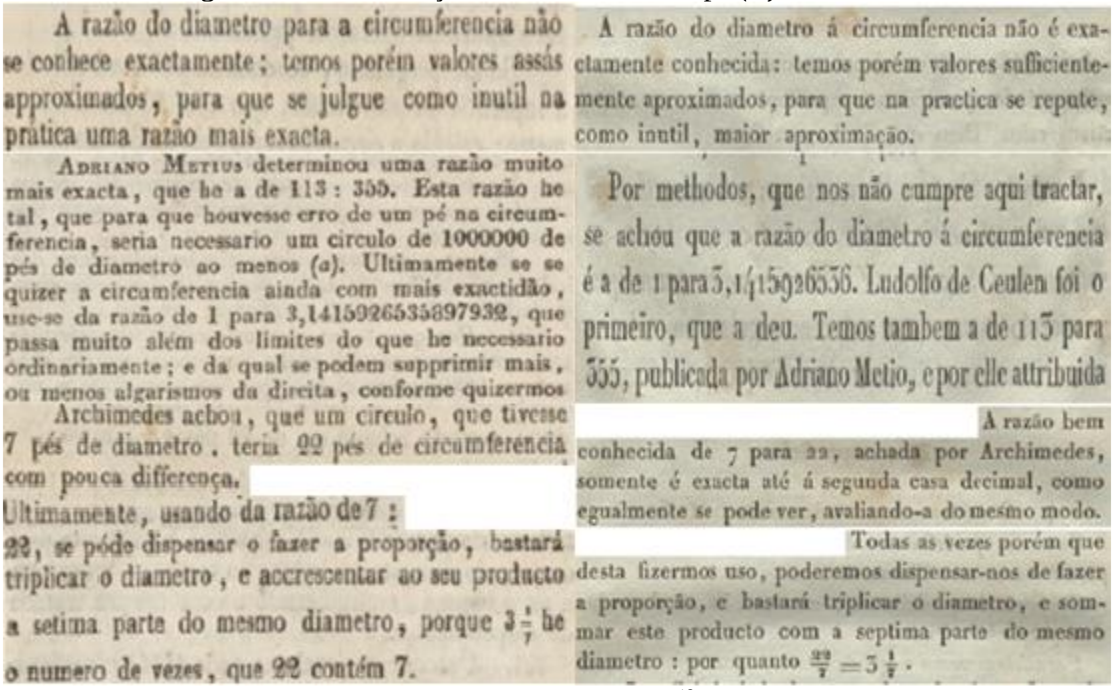
3.4.14 Figuras/ Polígonos semelhantes

Primeiramente, quando foi enunciado o contorno/perímetro de figuras semelhantes, Bézout usa o artifício de sua aritmética, contando com todas as demonstrações que são revisadas em seu livro de geometria, obtendo que o perímetro de figuras semelhantes está em uma razão de proporção. Barbosa, utiliza apenas o conhecimento de figuras semelhantes e assume como verdade que os perímetros estão em tal razão. Historicamente em Euclides, a razão de proporção é encontrada no livro VII, proposição 12 (HEATH, 1908, p.159-160).

Alguns conceitos devem ser aceitos no ambiente de figuras semelhantes, um deles é que o perímetro de uma circunferência se aproxima do perímetro do polígono regular. Sem noções de cálculo, e somente com a aritmética e geometria em mãos, a melhor saída seria aceitar esse fato e elencar um comentário sobre o assunto.

No final do capítulo de Barbosa, o autor comenta da razão do diâmetro para a circunferência: o número π. Infelizmente há uma cópia entre os autores, Bézout exprime as mesmas palavras no capítulo de medição de superfícies, nos últimos capítulos da geometria plana.

Figura 96 – Informações sobre o número pi (π) nos autores.



A razão do diametro para a circumferencia não se conhece exactamente; temos porém valores assás approximados, para que se julgue como inutil na pratica uma razão mais exacta.

ADRIANO METIUS determinou uma razão muito mais exacta, que he a de 113 : 355. Esta razão he tal, que para que houvesse erro de um pé na circumferencia, seria necessario um circulo de 1000000 de pés de diametro ao menos (a). Ultimamente se se quizer a circumferencia ainda com mais exactidão, use-se da razão de 1 para 3,1415926535897932, que passa muito além dos limites do que he necessario ordinariamente; e da qual se podem supprimir mais, ou menos algarismos da direita, conforme quizermos

Archimedes achou, que um circulo, que tivesse 7 pés de diametro, teria 22 pés de circumferencia com pouca differença.

Ultimamente, usando da razão de 7 : 22, se póde dispensar o fazer a proporção, bastará triplicar o diametro, e accrescentar ao seu producto a setima parte do mesmo diametro, porque $3\frac{1}{7}$ he o numero de vezes, que 22 contém 7.

A razão do diametro á circumferencia não é exactamente conhecida: temos porém valores sufficientemente aproximados, para que na practica se repute, como inutil, maior aproximação.

Por methodos, que nos não cumpre aqui tractar, se achou que a razão do diametro á circumferencia é a de 1 para 3,1415926536. Ludolfo de Ceulen foi o primeiro, que a deu. Temos tambem a de 113 para 355, publicada por Adriano Metio, e por elle attribuida

A razão bem conhecida de 7 para 22, achada por Archimedes, somente é exacta até á segunda casa decimal, como egualmente se pode ver, avaliando-a do mesmo modo.

Todas as vezes porém que desta fizermos uso, poderemos dispensar-nos de fazer a proporção, e bastará triplicar o diametro, e sommar este producto com a septima parte do mesmo diametro: por quanto $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$.

Fonte: Elaboração nossa [19].

3.4.15 Das superfícies

Visto em Heath (1956, p. 197, tradução nossa, grifo do autor)[20], Euclides define quadriláteros da seguinte forma (definição 22, livro I):

> Das figuras quadriláteras, o **quadrado** é aquele que é tanto equilátero quanto retangular; um **retângulo** é aquele que é retangular, mas não é equilátero; um **losango** é aquele que é equilátero, porém não é retangular; e um **romboide** é aquele que tem lados e ângulos opostos iguais uns aos outros mas não é equilátero tampouco retangular. E que outros quadriláteros além desses sejam chamados de **trapézios**.

Podemos notar de Euclides que não se é utilizado em momento algum a ideia de paralelogramo (ou paralelas) nos quadriláteros, justamente porque, de acordo com Heath (1956, p. 196) a próxima definição de Euclides (definição 23, livro I) será retas paralelas.

Para a redução de um polígono em um triângulo (Figura 40), Bézout traz um pentágono, o reduz a um quadrilátero e pôr fim a um triângulo de mesma área. Essa

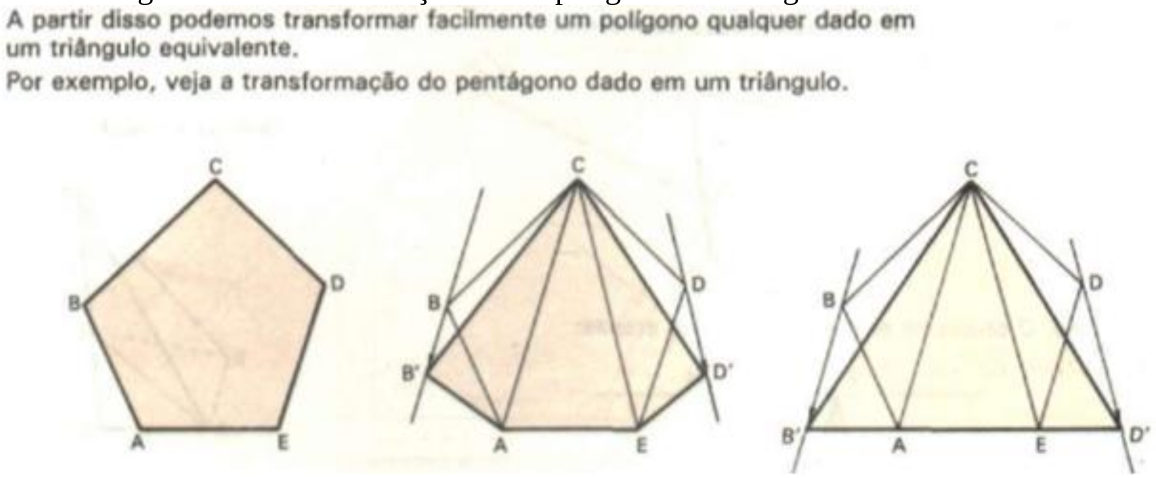
---

[19] PARANAGUÁ, 1838, p. 76-77 (direita)
BÉZOUT, 1827, p. 69-70 (esquerda)

[20] No original: Of quadrilateral figures, a **square** is that which is both equilateral and right-angled; an **oblong** that which is right-angled but not equilateral; a **rhombus** that which is equilateral but not right-angled; and a **rhomboid** that which has its opposite sides and angles equal to one another but is neither equilateral nor right-angled. And let quadrilaterals other than these be called **trapezia.** (HEATH, 1956, p. 197)

construção é vista em Putnoki (1993b, p. 84) e corresponde a uma das principais em desenho geométrico. O teorema proposto por Bézout tem a demonstração análoga a seguir:

Figura 97 – Transformação de um polígono em triângulo de mesma área.



PUTNOKI, 1993b

Demonstração: Traça-se a diagonal $\overline{CA}$, e considere uma reta r paralela a $\overline{CA}$, passando por B. "deslizando" o ponto B até o encontro no prolongamento de $\overline{AE}$, obtemos B', transformando um pentágono em um quadrilátero. Traçando agora a diagonal $\overline{CE}$, considere a reta s paralela a $\overline{CE}$ que passa por D. Deslizando D até o encontro no prolongamento de $\overline{AE}$, obtém-se D', transformando o quadrilátero no triângulo pedido.

■

Lembrando que o pentágono possui a mesma área que o quadrilátero e que esse possui a mesma área que o triângulo construído. Essa redução não é vista nos Elementos de Barbosa.

3.4.16 Medição e comparação de superfícies

Após a apresentação da área de um círculo, vemos que ambos os autores caminham em direções demonstrativas diferentes. Bézout trata como um corolário ao invés de demonstrá-lo, utilizando-se de uma problemática. Curiosamente não é dito o valor de π usado, porém com os dados do problema, consegue-se descobrir o valor de 3,1428 aproximadamente, que corresponde a $\frac{22}{7}$, valor utilizado por Arquimedes, citado pelo próprio Bézout em seu Elementos de Geometria.

Barbosa demonstra a área do círculo por contradição, que de fato é uma construção geométrica bem feita. A figura usada pelo autor para apresentar essa demonstração é simples o suficiente para confundir quem observa pela primeira vez, foi feito assim duas representações que auxiliem quem lê o trabalho e sinta dificuldades em compreender o que o autor demonstra.

As demonstrações de áreas de triângulos e de trapézios são idênticas entre os autores, ambos dizem sobre a "base média do trapézio" como um método de calcular a área, porém esse termo, base média, não é definido em nenhum dos livros.

Indo ao próximo assunto, o teorema de Pitágoras possui inúmeras demonstrações, a que foi feita por Barbosa difere da primeira delas no livro I de Euclides (proposição 47):

Proposição 47: Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado subentendido pelo ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto[21]. (HEATH, 1956, p.426, tradução nossa)

Pinho, Batista, Carvalho (2010, p.228 - 231), demonstram o Teorema de Pitágoras como a proposição 47. Já em seu livro VI, Euclides faz uma generalização da proposição 47, definida por:

Proposição 31: Nos triângulos retângulos, a figura sobre o lado subtendendo o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e também semelhantemente descritas sobre os lados que formam o ângulo reto[22]. (HEATH, 1908, p.276).

Esta proposição, corresponde com o teorema de Barbosa, e para um caso específico com o de Bézout.

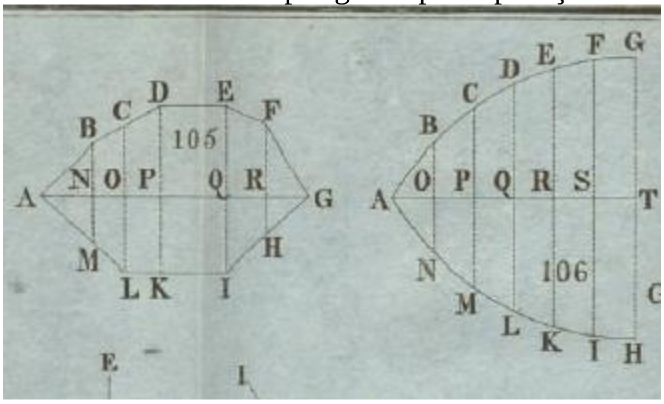
Bézout inclui dois capítulos extras, sobre medição de superfícies que utilizam problemas envolvendo a unidade de medida "toeza" (1,949 metros) e subdivisões da toeza quadrada. Em Portugal, uma das medidas lineares utilizadas era a braça, que corresponderia a 2,2 metros.

[21] No original: Proposition 47. In right-angled triangles the square on the side subtending the right angle is equal to the squares on the sides containing the right angle. (HEATH, 1956, p.426)

[22] No original: Proposition 31: In right-angled triangles the figure on the side opposite the right angle equals the sum of the similar and similarly described figures on the sides containing the right angle. (HEATH, 1908, p.276).

Finalizando a geometria plana de Barbosa, o autor apresenta um método simples de calcular a área de figuras retilíneas de toda espécie. Esse método é o mesmo feito por Bézout, na (Figura 43) com uma demonstração idêntica.

Figura 98 – Cálculo de áreas de polígonos por repartições em triângulos



Fonte: Repositório Institucional da UFSC.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa é consequência de um estudo primordial dos Elementos de Geometria de Barbosa no Brasil e Portugal, apenas no contexto histórico. Com os devidos aportes teóricos metodológicos de Choppin (2004) e Valente (2007), introduzir Bézout ao trabalho, como um autor comparativo de obras, foi importante para a construção do estudo matemático e histórico.

Durante a escrita do trabalho, o objetivo foi responder os questionamentos de acordo com as perguntas: sobre as estruturas das obras didáticas e como se era ensinado geometria plana em determinada época?

As soluções para apresenta-las continha as possíveis diferenças e semelhanças das obras e a utilização das mesmas no contexto histórico do ensino de matemática no Brasil e Portugal.

Feitas as separações em capítulos dos livros, a análise e comparação de toda a estrutura somada com o estudo da geometria plana, garantiu informações precisas sobre as obras dos autores.

Com a remoção dos termos: teorema, axioma, corolário, no prefácio de Bézout, não tiveram nítidas diferenças ao se analisar o texto do referido autor. A escrita é bem definida, e mesmo deixando de lado o rigor matemático, cumpre com o proposto dito pelo autor na introdução do livro. Barbosa em seu prefácio havia dito que os livros de Bézout possuíam lacunas a serem preenchidas e não satisfaziam os padrões matemáticos, necessitando assim de uma reforma. Notamos a inclusão dos termos matemáticos e em algumas demonstrações uma escrita melhor trabalhada, o que não justifica uma melhoria. Entre as próprias edições dos Elementos de Geometria de Barbosa, o autor em sua primeira edição (1816), se assemelha ao padrão de escrita de Bézout em seus teoremas, que vinte e dois anos após sofrem alterações e suavizam a escrita formulada, possibilitando uma melhor compreensão.

Os padrões demonstrativos dos autores são diferentes, Bézout possui uma característica de provar de forma direta ou por construções auxiliares e Barbosa em boa parte de sua obra, prova por contradição. Apesar de ser considerado uma demonstração indireta e não construtiva, é útil quando não há argumentos o suficiente para uma prova, e o bom uso dessas demonstrações está nos capítulos iniciais dos Elementos de Geometria de Barbosa. Porém, em certos aspectos a contradição não é bem utilizada, e cria demonstrações grandes e de difícil entendimento. Há também semelhanças de escrita que progridem às formulações de teoremas iguais e enfim, a demonstrações idênticas.

Para a expansão do conhecimento sobre o desenvolvimento da abordagem do ensino de geometria plana ao longo do tempo, é interessante que novas investigações sejam feitas levando em conta outros autores de livros didáticos que foram precedentes de Bézout (Camus) e sucessores de Barbosa (Pedro d'Alcântara Bellegarde, Cristiano Benedito Ottoni...) e principalmente Lacroix e Legendre, que tiveram inúmeros de seus livros (dentre eles os Elementos de Geometria) difundidos no Brasil e Portugal no mesmo período que os autores.

Uma futura pesquisa com mais autores, e a inclusão da geometria espacial, evidenciaria um período histórico maior da geometria e por consequência, possíveis semelhanças entre os autores.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Francisco Villela. **Elementos de geometria**. Lisboa: Na Offic. da Academia R. das Sciencias, 1816. 303 p. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/222341. Acesso em: 14 abr. 2021.

BBM Digital. Typographia Austral. c2021. Disponível em: https://digital.bbm.usp.br/simple-search?query=Typographia+Austral. Acesso em: 20 ago. 2021.

BERGER, Paulo. **A tipografia do Rio de Janeiro**: impressos bibliográficos de 1808-1900. Rio de Janeiro: Cia. Industrial de Papel Pirahy, 1984.

BÉZOUT, Étienne. **Cours De Mathématiques, A L'Usage Des Gardes Du Pavillon Et De La Marine: Contenant les Eléments de Géométrie, la Trigonométrie rectiligne & la Trigonométrie sphérique,** Volume 2. Paris: Chez J.B.G Musier, 1771. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/232404. Acesso em: 1 mar. 2022.

BÉZOUT, Étienne. **Elementos de geometria / por M. Bezout; traduzidos do francez**. Coimbra: Na Real Imprensa da Universidade, 1827. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/232408. Acesso em: 1 mar. 2022.

Biblioteca Nacional Digital (Portugal). Luis Pereira Caldas. c2021. Disponível em: http://catalogo.bnportugal.pt/ipac20/ipac.jsp?session=162965TL624S4.20390&profile=bn&source=~!bnp&view=subscriptionsummary&uri=full=3100024~!1684775~!1&ri=3&aspect=basic_search&menu=search&ipp=20&spp=20&staffonly=&term=luis+pereira+caldas&index=.GW&uindex=&aspect=basic_search&menu=search&ri=3. Acesso em: 14 abr. 2021.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa**. Teoria & educação**, v. 2, n. 1, p. 177-229, 1990.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, *[S. l.]*, v. 30, n. 3, p. 549-566, 2004. DOI: 10.1590/S1517-97022004000300012. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/ep/article/view/27957. Acesso em: 26 jul. 2021.

CHOPPIN, A. O manual escolar: uma falsa evidência histórica. **História da Educação**, ASPHE/FaE/UFPel, Pelotas, v. 13, n. 27 p. 9-75, Jan/Abr 2009. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/asphe/article/view/29026>. Acesso em 26 jul. 2021.

COSTA, David Antonio da. **A aritmética escolar no ensino primário brasileiro: 1890-1946**. 2010. 279f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

DIARIO DO RIO DE JANEIRO. Rio de Janeiro, 27 fev. 1834. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=094170_01&Pesq=&pagfis=15578. Acesso em: 20 ago. 2021.

DIARIO DO RIO DE JANEIRO. Rio de Janeiro, 22 out. 1835. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/docreader.aspx?bib=094170_01&pasta=ano%20182&pesq=&pagfis=17579. Acesso em: 20 ago. 2021.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 7, n. 1, p. 97-117, 16 jul. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97. Acesso em 07/10/2021

FREIRE, Francisco de Castro - **Memoria historica da Faculdade de Mathematica nos cem annos decorridos desde a reforma da Universidade em 1772 até o presente**. Coimbra: [s.n.]. 195 p.

HEATH, Thomas L. **The Thirteen Books of The Elements Vol 1(Books 1-2)**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1956.

HEATH, Thomas L. **The Thirteen Books of The Elements Vol 2 (Books 3-9)**. London: Cambridge University Press, 1908.

JOYCE, David. **Euclid's Elements**. 1994. Disponível em: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/. Acesso em: 01/10/2021

LENTE. *In*: INFOPEDIA, Dicionário Infopédia de Língua Portuguesa. Porto. Porto Editora. Disponível em: https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/lente. Acesso: 20 ago. 2021

OLIVEIRA, Marina Garcia de. **Entre nobres lusitanos e titulados brasileiros: práticas, políticas e significados dos títulos nobiliárquicos entre o período joanino e o alvorecer do Segundo Reinado**. 2013. 222 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de História, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

PARANAGUÁ, Marquez de. **Elementos de geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: Typografia Austral, 1838. 236 p. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/222343. Acesso em: 14 abr. 2021.

PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. **Geometria I**. 2. ed. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.

PUTNOKI, José Carlos. **ELEMENTOS DE GEOMETRIA & DESENHO GEOMÉTRICO**: volume 1. São Paulo: Scipione, 1993a.

PUTNOKI, José Carlos. **ELEMENTOS DE GEOMETRIA & DESENHO GEOMÉTRICO**: volume 2. São Paulo: Scipione, 1993b.

SILVA, A. D. (1828). **Collecção da Legislação Portugueza. Legislação de 1791 a 1801**. Lisboa: Typografia Migrense. Disponível em: http://www.governodosoutros.ics.ul.pt/?menu=consulta&id_partes=109&accao=ver&pagina=1. Acesso em 05 de ago. 2021.

UNIVERSIDADE DE COIMBRA. **UC**: Imprensa da Universidade de Coimbra, c2021. Disponível em: https://www.uc.pt/imprensa_uc/imprensa/historia. Acesso em: 20 ago. 2021.

Secretaria-Geral da Mesa. **Senadores do Brasil**. Disponível em: https://www25.senado.leg.br/web/senadores/senador/-/perfil/1700. Acesso em: 14 abr. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues**. Há 150 anos uma querela sobre a geometria elementar no Brasil**: algumas cenas dos bastidores da produção do saber escolar. Bolema, Rio Claro, SP, v. 13, n.13, p. 44-61, 1999. Acesso em: 03/12/2021

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil**: 1730-1930. 2ª. ed. São Paulo: Annablume: FAPESP, 2007.

VALLE, Arthur et al. **Oitocentos - Tomo III: Intercâmbios culturais entre Brasil e Portugal**. 2. ed. Rio de Janeiro: CEFET/RJ, 2014. Disponível em: http://www.dezenovevinte.net/800/tomo3/index_arquivos/Oitocentos%20Tomo%203%20-%2033.pdf. Acesso em: 20 ago. 2021.

WorldCat. Jean-Baptiste-Guillaume Musier. c2021a. Disponível em: https://www.worldcat.org/search?q=au%3AMusier%2C+Jean-Baptiste-Guillaume&qt=hot_author. Acesso em: 20 ago. 2021.

WorldCat. Officina da Academia Real de Sciencias. c2021b. Disponível em: https://www.worldcat.org/search?q=Officina+da+Academia+Real+de+Sciencias&fq=&dblist=638&start=1&qt=page_number_link. Acesso em: 20 ago. 2021.