UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Maritza Camilli Almeida Brito

Semigrupos Generalizados, Boa Colocação de Problemas Singulares e Estabilidade Exponencial

Florianópolis
2021

Maritza Camilli Almeida Brito

Semigrupos Generalizados, Boa Colocação de Problemas Singulares e Estabilidade Exponencial

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Matheus Cheque Bortolan, Dr.

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Brito, Maritza Camilli Almeida
Semigrupos Generalizados, Boa Colocação de Problemas Singulares e Estabilidade Exponencial / Maritza Camilli Almeida Brito ; orientador, Matheus Cheque Bortolan, 2021.
93 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, , Programa de Pós-Graduação em , Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. . 2. problema singular. 3. boa colocação. 4. semigrupos generalizados. 5. estabilidade exponencial. I. Cheque Bortolan, Matheus. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em . III. Título.

Maritza Camilli Almeida Brito

Semigrupos Generalizados, Boa Colocação de Problemas Singulares e Estabilidade Exponencial

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Everaldo de Mello Bonotto, Dr.
Universidade de São Paulo

Prof. Filipe Dantas dos Santos, Dr.
Universidade Federal de Sergipe

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 03/06/2021 18:40:02-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Matheus Cheque Bortolan
Data: 03/06/2021 13:35:09-0300
CPF: 337.007.338-28
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Matheus Cheque Bortolan, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2021.

Dedico este trabalho à minha amada vozinha Dalva.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por toda proteção ao longo da vida e deste ciclo. A minha avó Dalva por todo amor, proteção e por me proporcionar as melhores oportunidades, sem deixar de citar as duas horas de ligação que me confortavam e faziam os 2.153 km de distância desaparecerem. Ao meu pai Miguel, por sempre apoiar e acreditar nas minhas escolhas. E claro, sou grata a mim mesma, por ter sido sempre fiel ao meu propósito e por nunca ter cogitado desistir mediante as circunstâncias.

Agradeço aos meus familiares, que são muitos, mas em especial as minhas mães Mirilene e Mariana, meus tios Claúdio, Elvânio e Fabrício e as minhas tias Nalva e Silvana. Agradeço também a Maria Clara, Mirelly, José Fabrício, Isadora, Malena, Ramon e Isa, por mesmo estando longe, terem distribuido afeto, cuidado e atenção.

Aos meus colegas, que se tornaram amigos, Jonatan (esse foi um presente de Deus e com ele vivi as melhores histórias neste mestrado), Guilherme, Matheus, Gabriel e Izabella (minha maior surpresa, quanta cumplicidade e semelhança, sou grata por todo cuidado e tempo dedicados a mim). Agradeço também ao Carlos e ao Éverton por toda ajuda matemática quando eu ainda estava perdida.

Agradeço ao meu orientador Bortolan, por toda dedicação e paciência (que eu sei que não foram poucas). Por todo conhecimento matemático compartilhado não só na pesquisa mas em todas as matérias, o seu conhecimento é tão grande quanto a sua vontade de ensinar e eu não poderia deixar de aproveitar isso. Agradeço também pelas vezes em que foi conforto em meio ao caos.

Agradeço a todos os professores, em especial ao Fermín por me despertar o interesse pela matemática aplicada, ao Eliezer pela confiança em me emprestar seus livros, ao Gilles pelo excelente curso de Topologia, e ao Paulo pelo excelente curso de Equações Diferenciais Ordinárias e pelas conversas nos corredores que me incentivaram bastante.

Agradeço à Elisa (ex-secretária) e à Érica (atual secretária) da Pós por toda dedicação e paciência para resolver todos os meus conflitos. Agradeço também aos funcionários da limpeza que sempre tornaram os nossos espaços de estudo mais agradáveis.

Agradeço também ao Prof. Everaldo Bonotto (ICMC/USP) e ao Prof. Filipe Dantas (UFS) por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro a este trabalho.

"Quero, um dia, poder dizer às pessoas que nada foi em vão... que o amor existe, que vale a pena se doar às amizades e às pessoas, que a vida é bela sim, e que eu sempre dei o melhor de mim... e que valeu a pena."

Mário Quintana

RESUMO

Neste trabalho, olhamos para um problema de Cauchy singular (ou degenerado) abstrato, num espaço de Banach, da forma

$$\begin{cases} E\dfrac{du}{dt} = Au, \ t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde E é um operador não-necessariamente injetor, nos casos linear e não-linear. Buscamos encontrar relações e condições sobre A e E para que, dado u_0 em algum conjunto conveniente de dados inicias, possamos encontrar uma solução da equação que esteja definida para todo tempo $t \geqslant 0$. Tais soluções definem o que chamamos de *semigrupos generalizados*. Por fim, buscaremos condições necessárias e suficientes que garantam a estabilidade exponencial de tais semigrupos generalizados.

Palavras-chave: problema singular, problema degenerado, boa-colocação, semigrupos generalizados, estabilidade exponencial.

ABSTRACT

In this work, we turn our attention to a singular (or degenerate) abstract Cauchy problem, in a Banach space, of the form

$$\begin{cases} E\dfrac{du}{dt} = Au, \ t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

where E is not necessarily an injective operator, in the linear and nonlinear cases. We search relations and conditions on A and E so that, given u_0 in a convenient set of initial data, we can find a solution for the equation that is defined for all $t \geqslant 0$. Such solutions define what we call *generalized semigroups*. Also, we find necessary and sufficient conditions to ensure the exponential stability of such generalized semigroups.

Keywords: singular problem, degenerated problem, well-posedness, generalized semigroups, exponential stability.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo, num espaço de Banach X, do problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, \ t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases}$$

onde $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador linear, é extenso, e foi completamente resolvido por Feller, Miyadera, e Phillips em 1952, através do *Teorema de Hille-Yosida* (veja (ENGEL; NAGEL, 2000, Teorema 3.8), por exemplo). Com esse teorema, sabemos que, dadas constantes $M \geqslant 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$, o operador linear $A\colon D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ em X satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}$ para todo $t \geqslant 0$ se, e somente se, A é fechado, densamente definido, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e para todos $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda > \omega$ tem-se

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Nesse caso, a solução do problema de Cauchy abstrato acima é dada por $u(t) = T(t)u_0$ para $t \geqslant 0$. Lembremos que um C_0-semigrupo $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ é uma família satisfazendo $T(0) = I$ (onde I é a identidade em X), $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todos $t, s \geqslant 0$ e que $T(t)x \to x$ em X quando $t \to 0^+$ para cada $x \in X$.

O objetivo deste trabalho é explorar a teoria recente que lida com o problema de Cauchy singular

$$\begin{cases} E\dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \ t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde E é um operador não-necessariamente injetor, tanto nos casos linear e não-linear. A meta aqui é buscar relações e condições sobre A e E para que, dado x_0 em algum conjunto conveniente, possamos encontrar uma solução $x(\cdot)$ para (0.1) que esteja definida para todo $t \geqslant 0$. Veremos que, quando tais relações estão satisfeitas, podemos definir uma família $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ de operadores lineares limitados (em espaços convenientes), a qual chamaremos de *semigrupo generalizado*, de maneira que, para x_0 em um subconjunto específico de X, a solução do problema (0.1) seja dada por $x(t) = U(t)Ex_0$ para $t \geqslant 0$. Tal família satisfará uma a condição $U(t+s) = U(t)EU(s)$ para $t, s \geqslant 0$ e, para os pontos x_0 nesse subconjunto especificado, $U(0)Ex_0 = x_0$ e $U(t)Ex_0 \to x_0$ em X quando $t \to 0^+$.

Nosso estudo se inspira no trabalho de (GE; ZHU; FENG, 2009) para o caso linear, no qual o autor apresenta as definições e resultados básicos sobre semigrupos generalizados lineares. Para enunciar e demonstrar uma versão correta do (GE; ZHU; FENG, 2009, Teorema 4) (cf. Teorema 1.56) precisamos adaptar a teoria de *semigrupos degenerados* apresentada em, por exemplo, (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001). Para desenvolver os principais resultados que nos levam à demonstração do Teorema 1.56, trabalhamos com a definição de *famílias integráveis generalizadas* e de *geradores* para tais famílias, usando a teoria contida em (ARENDT, 1987) para fazer uma ponte entre as famílias integráveis gneralizadas e os semigrupos generalizados. A definição de geradores é formulada em termos da transformada de Laplace e, portanto, é uma formulação integral (veja Definição 1.39). Um ponto importante a ser destacado é que apresentamos nesse trabalho as versões diferencial e integral para geradores de semigrupos generalizados, além das relação entre essas formulações. Tais resultados são novos na teoria e estão presentes na Seção 1.3 (com exceç ao das Proposições 1.29 e 1.32, que são resultados conhecidos na literatura).

Para o caso não-linear, seguimos as ideias de (GE; FENG, 2013). Aqui, a definição de geradores para semigrupos generalizados escolhida é a dada pela formulação diferencial, pois a definição so semigrupo generalizado seguirá de uma versão do *Segundo Limite Fundamental*. Serão necessários resultados envolvendo estimativas espectrais para operadores resolventes não-lineares, que são não-triviais e decorrem de estimativas de sequências duplamente indexadas, presentes em (LUO; GUO; MORGUL, 1999).

Trabalharemos com os problemas na suas formas abstratas, e apresentaremos apenas um exemplo (também abstrato) para o caso linear. Mais exemplos podem ser encontrados, por exemplo, em (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001), (FAVINI; YAGI, 1999) e (SHOWALTER, 1973). Por fim, também baseados em (GE; FENG, 2013), estudaremos condições necessárias e suficientes que garantam a *estabilidade exponencial* de semigrupos generalizados.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: no Capítulo 1 estudaremos o caso linear, isto é, $A\colon D(A) \subset F_1 \to F$ e $E\colon F_1 \to F$ são operadores lineares, onde F, F_1 são subconjuntos de um espaço de Banach X, com F_1 fechado, A fechado e $E \in \mathscr{L}(F_1, F)$. Para isso, apresentamos resultados da *teoria E-espectral* para operadores fechados, que são generalizações dos resultados já conhecidos da teoria espectral para operadores fechados em espaços de Banach, contidos em (TAYLOR; LAY, 1986). Seguindo a teoria de (GE; ZHU; FENG, 2009), apresentaremos a teoria de semigrupos generalizados lineares e seus geradores, fazendo também a conexão com os conceitos de *semigrupos degenerados* (contido em (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001)), *semigrupos* (contido em (ENGEL; NAGEL, 2000)), e seus respectivos geradores. Definiremos ainda o conceito de *famílias integráveis generalizadas* (conceito relacionado ao de famílias integráveis degeneradas de (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001)), que é fundamental para demonstrarmos o principal resultado deste capítulo, o Teorema 1.56, que nos dá condições suficientes para resolvermos o problema (0.1) para valores de x_0 num determinado subconjunto de X. Por fim, apresentaremos um exemplo abstrato para ilustrar a teoria no caso linear.

O Capítulo 2 apresentará o caso onde A e E podem ser operadores não-lineares. Nesse caso, devido à dificuldade do problema, pouquíssimo é conhecido, e o principal resultado desse capítulo é o Teorema 2.16, que também lida com a boa colocação para (0.1). A demonstração, nesse caso, constrói o semigrupo generalizado usando uma versão generalizada para o conhecido *Segundo Limite Fundamental* para semigrupos (veja (ENGEL; NAGEL, 2000)). Por fim, no Capítulo 3, estudaremos condições necessárias e suficientes que garantam a *estabilidade exponencial* (veja Definição 3.1) de um semigrupo generalizado.

Adicionalmente, apresentaremos um apêndice contendo resultados essenciais para as demonstrações contidas neste trabalho, mas que, se apresentados em conjunto com o texto principal, pioraria a sua didática e dificultaria sua leitura.

1 O CASO LINEAR

Neste capítulo apresentaremos a teoria para determinar a boa colocação do problema

$$\begin{cases} E\dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \ t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

num espaço de Banach X, onde $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador linear (possivelmente não-limitado), e E é um operador linear contínuo em X.

1.1 TEORIA E-ESPECTRAL PARA OPERADORES LINEARES FECHADOS

Nesta seção apresentaremos alguns elementos da *teoria espectral* para operadores lineares fechados em espaços normados, numa versão um pouco mais geral da teoria usualmente encontrada em livros de Análise Funcional, baseada em (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001, Seção 1.5). Antes de mais nada, para X, Y espaços vetoriais normados, denotaremos por $\mathscr{L}(X,Y)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y, que é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|B\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Bx\|_Y \quad \text{para } B \in \mathscr{L}(X,Y).$$

Quando Y é um espaço de Banach, $\mathscr{L}(X,Y)$ também é. Quando $X = Y$, denotaremos $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X,X)$.

Para um operador $A\colon D(A) \subset X \to Y$, seu *núcleo* será denotado por $\ker A$, isto é

$$\ker A = \{x \in D(A) : Ax = 0\} \subset X.$$

Sua *imagem* será denotada por $\mathrm{Im}(A)$, isto é

$$\mathrm{Im} A = \{Ax : x \in D(A)\} \subset Y,$$

ou, alternativamente, denotaremos $\mathrm{Im} A = A(D(A)) = AD(A)$.

Definição 1.1 (Operador Fechado)**.** Consideremos dois espaços vetoriais normados X e Y, e um operador linear $A\colon D(A) \subset X \to Y$. Diremos que A é **fechado** se seu *gráfico*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times Y$$

é um subconjunto fechado de $X \times Y$.

A seguinte proposição nos dá uma caracterização para operadores lineares fechados em termos de sequências, e também um resultado importante que será utilizado mais adiante.

Proposição 1.2. *Consideremos dois espaços vetoriais normados X e Y e um operador linear $A\colon D(A)\subset X\to Y$. Então:*

(a) A é fechado se, e somente se, dada sequência $\{x_n\}\subset D(A)$ tal que $x_n\to x$ em X e $Ax_n\to y$ em Y então $x\in D(A)$ e $Ax=y$;

(b) se A é injetor, então A é fechado se, e somente se, A^{-1} fechado.

Demonstração. (a) Vejamos que $G(A)\ni(x_n,Ax_n)\to(x,y)$ e portanto $(x,y)\in G(A)$ se, e somente se, $G(A)$ é fechado em $X\times Y$.

(b) Defina $Z=\operatorname{Im}A$. Assuma que A é fechado e assuma que $\{y_n\}\subset D(A^{-1})=Z$ é tal que $y_n\to y$ em Y e $A^{-1}y_n\to x$ em X. Defina $x_n=A^{-1}y_n$. Assim $x_n\to x$ em X e $Ax_n=y_n\to y$ em Y. Como A é fechado $x\in D(A)$ e $Ax=y$. Logo $y\in Z=D(A^{-1})$ e $x=A^{-1}y$. Portanto A^{-1} é fechado. O resultado segue notando que $(A^{-1})^{-1}=A$. □

Para desenvolver a *teoria E-espectral*, fixaremos:

- ⋆ um espaço de Banach X;
- ⋆ dois subespaços vetoriais F e F_1 de X, com F_1 fechado;
- ⋆ um operador $E\in\mathscr{L}(F_1,F)$.

Como F_1 é um subespaço vetorial fechado de X, então F_1 com a norma induzida de X também é um espaço de Banach.

Observação 1.3. Quando $F=F_1=X$ e $E=I$, a identidade em X, essa teoria recupera os resultados clássicos da teoria espectral de operadores lineares fechados em espaços de Banach (veja, por exemplo, (TAYLOR; LAY, 1986)). A teoria fica qualitativamente diferente da teoria usual quando o operador E é *não-injetor*.

Definição 1.4 (E-resolvente e E-espectro)**.** Nas condições acima, considere um operador linear fechado $A\colon D(A)\subset F_1\to F$. Definimos o ***E*-resolvente de *A***, denotado por $\rho_E(A)$, como o conjunto dos $\lambda\in\mathbb{C}$ para os quais o operador $\lambda E-A\colon D(A)\subset F_1\to F$ é inversível e $(\lambda E-A)^{-1}\in\mathscr{L}(F,F_1)$.

Para $\lambda\in\rho_E(A)$, o operador $R_E(\lambda,A)=(\lambda E-A)^{-1}\in\mathscr{L}(F,F_1)$ é chamado de **operador *E*-resolvente de *A***. Quando não houver confusão, denotaremos $R_E(\lambda,A)$ simplesmente por $R(\lambda)$.

O complementar $\sigma_E(A)$ de $\rho_E(A)$ em $\mathbb{C}$ é chamado de ***E*-espectro de *A***.

Claramente, dependendo dos espaços F,F_1 e do operador E, podemos ter $\rho_E(A)=\varnothing$ ou $\rho_E(A)=\mathbb{C}$. Por exemplo, para $F=F_1=X$, se A não é inversível e $E=0$, então $\lambda E-A=-A$ não é inversível para nenhum $\lambda\in\mathbb{C}$, e portanto $\rho_E(A)=\varnothing$. Analogamente, se $E=0$ e A é inversível então $\rho_E(A)=\mathbb{C}$. No que segue, assumiremos que

$$\rho_E(A)\neq\varnothing.$$

Observação 1.5. Notemos que $R(\lambda)F = D(A)$ para todo $\lambda \in \rho_E(A)$. Além disso, quando F é também um subespaço fechado de X (o que nem sempre é o caso), a condição de que $(\lambda E - A)^{-1} \in \mathscr{L}(F, F_1)$ pode ser removida da definição, já que ela é consequência do fato de $\lambda E - A\colon D(A) \subset F_1 \to F$ ser inversível, juntamente com o Teorema do Gráfico Fechado (veja (BRÉZIS, 1984), por exemplo).

A seguinte identidade é fundamental para o desenvolvimento da teoria espectral.

Proposição 1.6 (Identidade do E-resolvente)**.** *Se $\lambda, \mu \in \rho_E(A)$ então*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) E R(\mu). \tag{1.2}$$

Em particular, para $\lambda, \mu \in \rho_E(A)$ temos $R(\mu)ER(\lambda) = R(\lambda)ER(\mu)$.

Demonstração. Sabemos que para $\lambda, \mu \in \rho_E(A)$ temos

$$\begin{aligned} R(\lambda) - R(\mu) &= (\lambda E - A)^{-1}[(\mu E - A) - (\lambda E - A)](\mu E - A)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda) R(\lambda) E R(\mu), \end{aligned}$$

o que prova (1.2). A última afirmação segue de (1.2), intercambiando λ e μ. □

A fim de simplificar a notação, denotaremos ambas $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(F,F_1)}$ e $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(F_1,F)}$ simplesmente por $\|\cdot\|$.

Proposição 1.7. *Se $\lambda \in \rho_E(A)$ e $\mu \in \mathbb{C}$ é tal que $|\mu - \lambda| \|R(\lambda)\| \|E\| < 1$ então $\mu \in \rho_E(A)$ e*

$$R(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n [R(\lambda)E]^n R(\lambda), \tag{1.3}$$

com convergência uniforme para $|\mu - \lambda| \|R(\lambda)\| \|E\| \leqslant r < 1$. Em particular $\rho_E(A)$ é aberto. Além disso, a aplicação $\rho_E(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda) \in \mathscr{L}(F, F_1)$ é analítica e

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda) = (-1)^n n! [R(\lambda)E]^n R(\lambda). \tag{1.4}$$

Demonstração. Primeiro vejamos que para $\lambda \in \rho_E(A)$ e $\mu \in \mathbb{C}$ temos

$$\mu E - A = (\lambda E - A) + (\mu - \lambda)E = (\lambda E - A)[I - (\lambda - \mu) R(\lambda) E].$$

Definimos $J = I - (\lambda - \mu) R(\lambda) E \in \mathscr{L}(F_1)$, onde I denota a identidade em F_1. Sabemos que[1] para $|\lambda - \mu| \|R(\lambda)\| \|E\| < 1$, J é inversível e sua inversa é dada por

$$J^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n [R(\lambda)E]^n,$$

[1] Lembremos que F_1 com a norma induzida de X é um espaço de Banach.

com convergência uniforme para $|\lambda-\mu|\|R(\lambda)\|\|E\| \leqslant r < 1$. Portanto $\mu E - A$ é inversível, o que mostra que $\mu \in \rho_E(A)$ e que

$$R(\mu) = J^{-1}R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^n[R(\lambda)E]^n R(\lambda).$$

Agora fixado $\lambda_0 \in \rho_E(A)$, como (1.3) converge uniformemente para

$$|\lambda-\lambda_0|\|R(\lambda)\|\|E\| < \frac{1}{2},$$

a aplicação $\rho_E(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda) \in \mathscr{L}(F,F_1)$ é contínua em λ_0. Segue de (1.2) que $\rho_E(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda) \in \mathscr{L}(F,F_1)$ é diferenciável em λ_0 e que

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda) = -R(\lambda)ER(\lambda).$$

Note que

$$\begin{aligned}&[R(\lambda)E]^n - [R(\mu)E]^n \\ &\quad = \Big\{[R(\lambda)E]^{n-1} + [R(\lambda)E]^{n-2}R(\mu)E + \cdots + [R(\mu)E]^{n-1}\Big\}[R(\lambda)-R(\mu)]E.\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{d\lambda}[R(\lambda)E]^n = -n[R(\lambda)E]^{n+1},$$

e o resultado segue por indução. □

Corolário 1.8. *Defina $S(\lambda) = R(\lambda)E$ para cada $\lambda \in \rho_E(A)$. Então para $\lambda, \mu \in \rho_E(A)$ temos*

$$S(\lambda) - S(\mu) = (\mu-\lambda)S(\lambda)S(\mu),$$

e $S(\lambda)S(\mu) = S(\mu)S(\lambda)$. Além disso, a aplicação $\rho_E(A) \ni \lambda \mapsto S(\lambda) \in \mathscr{L}(F_1)$ é analítica e

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}S(\lambda) = (-1)^n n! S(\lambda)^{n+1}.$$

Demonstração. A prova é imediata das Proposições 1.6 e 1.7. □

Um resultado importante é que os conjuntos $R(\lambda)EF_1$ e $R(\lambda)E\overline{D(A)}$ não dependem de $\lambda \in \rho_E(A)$.

Proposição 1.9. *Para $\mu, \lambda \in \rho_E(A)$ temos $R(\lambda)EF_1 = R(\mu)EF_1$. Mais ainda, temos $R(\lambda)E\overline{D(A)} = R(\mu)E\overline{D(A)}$.*

Demonstração. Se $y \in R(\lambda)EF_1$ então $y = R(\lambda)Ex$ para algum $x \in F_1$. Assim

$$Ex = (\lambda E - A)y = (\mu E - A)y + (\lambda-\mu)Ey,$$

ou seja $(\mu E - A)y = Ex_1$, onde $x_1 = x + (\mu-\lambda)y \in F_1$. Deste modo $y = R(\mu)Ex_1 \in R(\mu)EF_1$, o que mostra que $R(\lambda)EF_1 \subset R(\mu)EF_1$. Intercambiando λ e μ, a primeira parte do resultado segue.

Para a segunda, se $y = R(\lambda)Ex$ e $D(A) \ni x_n \to x$ então para $y_n = R(\lambda)Ex_n \in D(A)$ temos $y_n \to y$ e sabemos, do feito acima, que $y_n = R(\mu)Ex_n^1$, onde $x_n^1 = x_n + (\mu - \lambda)y_n \in D(A)$ e $x_n^1 \to x + (\lambda - \mu)y =: x_1 \in \overline{D(A)}$. Portanto $y = R(\mu)Ex_1 \in R(\mu)E\overline{D(A)}$. Trocando λ por μ, temos o resultado. □

O último resultado desta seção nos dá condição para termos uma certa *comutatividade* entre um operador B e o E-resolvente.

Lema 1.10. *Sejam $A\colon D(A) \subset F_1 \to F$ operador linear fechado, $E\colon F_1 \to F$ e $B\colon F \to F_1$ operadores lineares contínuos tais que para algum $\lambda \in \rho_E(A)$ vale $R(\lambda)EB = BER(\lambda)$. Então para $x \in D(A)$ temos $BEx \in D(A)$ e $ABEx = EBAx$.*

Demonstração. Para $x \in D(A)$ temos $R(\lambda)(\lambda E - A)x = x$ e $(\lambda E - A)R(\lambda)x = x$. Portanto, como $R(\lambda)EB = BER(\lambda)$, para $x \in D(A)$ temos

$$R(\lambda)EB(\lambda E - A)x = BEx,$$

e assim $BEx \in D(A)$ e $EB(\lambda E - A)x = (\lambda E - A)BEx$. Isto nos dá $EBAx = ABEx$. □

1.2 SEMIGRUPOS GENERALIZADOS

Nesta seção apresentaremos a teoria dos *semigrupos generalizados*. Como o próprio nome sugere, este conceito é uma generalização para o conceito usual de semigrupo (que recordaremos na Subseção 1.2.2).

No que segue, consideraremos um espaço de Banach X, dois subespaços F, F_1 de X, com a norma induzida de X, e um operador linear contínuo $E\colon F_1 \to F$.

Definição 1.11 (Semigrupo generalizado)**.** Uma família $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ de operadores lineares contínuos de F em F_1, indexada num parâmetro real $t \geqslant 0$, é chamada de **semigrupo generalizado** (ou **semigrupo linear generalizado**) induzido por E, de F em F_1, se

$$U(t+s) = U(t)EU(s) \quad \text{para todos } t, s \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Se além disso, tivermos

$$\lim_{t \to 0^+} \|U(t)x - U(0)x\| = 0 \quad \text{para cada } x \in F,$$

então $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é chamado de **C_0-semigrupo generalizado**.

Observação 1.12. Veja que, de (1.5), se n é um inteiro positivo e $\delta > 0$ então

$$U(n\delta)E = U(\delta + (n-1)\delta)E = U(\delta)EU((n-1)\delta)E = \cdots = [U(\delta)E]^n.$$

Além disso, (1.5) implica que $U(t)EU(s) = U(s)EU(t)$ para todos $t, s \geqslant 0$ e também que $U(t) = U(0)EU(t)$ para todo $t \geqslant 0$.

Vejamos a seguir importantes propriedades de C_0-semigrupos generalizados. No que segue, por simplicidade de notação, denotaremos $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(F,F_1)}$ e $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(F_1,F)}$ por $\|\cdot\|$.

Definição 1.13. Diremos que um semigrupo generalizado $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$ de F em F_1 induzido por E é **exponencialmente limitado** se existem $M\geqslant 1$ e $\omega\in\mathbb{R}$ tais que

$$\|U(t)\|\leqslant Me^{\omega t} \quad \text{para todo } t\geqslant 0.$$

Diremos também que $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$ é (M,ω)-exponencialmente limitado, quando quisermos explicitar as constantes M e ω.

Um resultado semelhante ao da teoria usual de semigrupos, sob uma condição adicional sobre o espaço de saída F, é o seguinte:

Teorema 1.14. *Se F também é um subsespaço fechado de X e $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo generalizado de F em F_1 induzido por E, então $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$ é exponencialmente limitado.*

Demonstração. Primeiramente observamos que existe $\eta>0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,\eta]}\|U(t)\|<\infty. \tag{1.6}$$

De fato, se este não fosse o caso, existiria uma sequência $t_n\to 0^+$ tal que

$$\|U(t_n)\|\geqslant n \quad \text{para cada } n\in\mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Mas para cada $x\in F$ temos $\|U(t)x-U(0)x\|\to 0$ quando $t\to 0^+$, e portanto a sequência $\{U(t_n)x\}\subset X$ é limitada (já que é convergente). Como F é fechado, e portanto um espaço de Banach com a norma induzida por X, segue do Princípio da Limitação Uniforme (veja (BRÉZIS, 1984, Teorema II.1)) que $\{\|U(t_n)\|\}$ é limitada, o que contradiz (1.7).

Tomamos então $\eta>0$ que satisfaz (1.6) e definimos

$$M_1=1+\sup_{t\in[0,\eta]}\|U(t)\|,$$

e notamos que $M_1\geqslant 1$. Para cada $t\geqslant 0$ existem um inteiro não-negativo k e $\delta\in[0,\eta)$ tal que $t=k\eta+\delta$. Assim

$$\begin{aligned}\|U(t)\|&=\|U(\delta+k\eta)\|=\|U(\delta)EU(k\eta)\|\overset{(*)}{=}\|U(\delta)[EU(\eta)]^k\|\leqslant\|U(\delta)\|\|E\|^k\|U(\eta)\|^k\\&\leqslant M_1(1+\|E\|)^kM_1^k\leqslant M^{k+1},\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a Observação 1.12 e $M=(1+\|E\|)M_1$. Como $t=k\eta+\delta$ temos $k=\eta^{-1}(t-\delta)\leqslant\eta^{-1}t$ e portanto

$$\|U(t)\|\leqslant MM^{\eta^{-1}t}=Me^{\omega t},$$

onde $\omega = \eta^{-1}\ln M$. Claramente $M \geqslant M_1 \geqslant 1$, o que mostra que $\{U(t): t \geqslant 0\}$ é exponencialmente limitado. □

Proposição 1.15. *Considere* $\{U(t): t \geqslant 0\}$ *um* C_0*-semigrupo generalizado de* F *em* F_1 *induzido por* E*, e assuma que* $\{U(t): t \geqslant 0\}$ *é* (M,ω)*-exponencialmente limitado.*

(1) Para cada $x \in F$*, a aplicação* $[0,\infty) \ni t \mapsto U(t)x \in F_1$ *é contínua.*

(2) A aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto \|U(t)\| \in [0,\infty)$ *é semicontínua inferiormente, e portanto mensurável.*

Demonstração. (1) Sejam $t \geqslant 0$, $h > 0$ e $x \in F$. Então

$$U(t+h)x - U(t)x = U(t)EU(h)x - U(t)EU(0)x,$$

e como $\{U(t): t \geqslant 0\}$ é (M,ω)-exponencialmente limitado, temos

$$\|U(t+h)x - U(t)x\| \leqslant Me^{\omega t}\|E\|\|U(h)x - U(0)x\| \to 0$$

quando $h \to 0^+$. Agora, para $t \geqslant 0$, $h > 0$ tal que $t - h \geqslant 0$ e $x \in F$ temos

$$U(t-h)x - U(t)x = U(t-h)EU(0)x - U(t-h)EU(h)x,$$

e assim

$$\|U(t-h)x - U(t)x\| \leqslant Me^{\omega(t-h)}\|E\|\|U(0)x - U(h)x\| \to 0,$$

quando $h \to 0^+$, e a demonstração deste item está completa.

(2) Basta mostrar que $\{t \geqslant 0: \|U(t)\| > b\}$ é aberto em $[0,\infty)$ para cada $b \in \mathbb{R}$. Mas $\|U(t_0)\| > 0$ implica que existe $x \in F$ com $\|x\| = 1$ tal que $\|U(t_0)x\| > b$. Segue de (1) que $\|U(t)x\| > b$ para todo t suficientemente próximo de t_0 em $[0,\infty)$. Logo $\|U(t)\| > b$ para esta vizinhança de t_0 em $[0,\infty)$, e o resultado está provado. □

1.2.1 Semigrupos degenerados

Nesta breve subseção, compararemos a teoria de semigrupos generalizados apresentada neste trabalho com a teoria de *semigrupos degenerados* apresentada em (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001, Seção 1.5).

Definição 1.16. Uma família $\{S(t): t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ é chamada de **semigrupo degenerado** se

(i) o operador $S(0)$ possui núcleo não-trivial;

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todos $t, s \geqslant 0$.

Se além disso, temos

(iii) $\|S(t)x - S(0)x\| \to 0$ quando $t \to 0^+$ para cada $x \in X$,

diremos que $\{S(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ é um **C_0-semigrupo degenerado**.

Se $\{U(t) : t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo generalizado de F em F_1, induzido por um operador linear contínuo não-injetor E de F_1 em F , então $\{S(t) : t \geqslant 0\}$, definido por $S(t) = U(t)E$ para cada $t \geqslant 0$, é um C_0-semigrupo degenerado em F_1.

De fato, note que

$$S(t+s) = U(t+s)E = U(t)EU(s)E = S(t)S(s) \quad \text{para todos } t, s \geqslant 0.$$

Além disso $S(0) = U(0)E$, o que mostra $\ker E \subset \ker S(0)$. Assim, o núcleo de $S(0)$ é não-trivial. Finalmente, se $x \in F_1$, temos $Ex \in F$ e

$$\|S(t)x - S(0)x\| = \|U(t)Ex - U(0)Ex\| \to 0 \text{ quando } t \to 0^+.$$

Agora se $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo degenerado em X, então definindo $E = S(0) : X \to X$ e $U(t) = S(t)$ para $t \geqslant 0$ temos

$$U(t+s) = S(t+s) = S(t)S(s) = S(t)S(0)S(s) = U(t)EU(s),$$

e para $x \in X$ temos

$$\|U(t)x - U(0)x\| = \|S(t)x - S(0)x\| \to 0 \quad \text{quando } t \to 0^+,$$

e $\{U(t) : t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo generalizado de X em X induzido por $E = S(0) \in \mathscr{L}(X)$.

Sendo assim, a teoria apresentada em (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001) para C_0-semigrupos degenerados está contemplada neste trabalho.

1.2.2 Semigrupos

Definição 1.17. Um **semigrupo** num espaço métrico X é uma família $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset C(X)$ que satisfaz:

(i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geqslant 0$.

Quando X é um espaço de Banach e $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$, diremos que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um **semigrupo linear** (ou somente semigrupo, quando a linearidade estiver clara). Quando $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ é um semigrupo e tivermos

(iii) $\|T(t)x - x\| \to 0$ quando $t \to 0^+$ para cada $x \in X$,

diremos que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo.

Veja que todo C_0-semigrupo $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ é um C_0-semigrupo generalizado de X em X induzido por $E = I$ (a identidade em X) satisfazendo $T(0) = I$. Com isto, o seguinte resultado segue diretamente da teoria apresentada anteriormente.

Proposição 1.18. *Seja $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ um C_0-semigrupo. Então:*

(a) $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ é exponencialmente limitado;

(b) para cada $x \in X$, a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é contínua;

(c) a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto \|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \in [0,\infty)$ é semicontínua inferiormente, e portanto mensurável.

Vejamos que de um C_0-semigrupo generalizado podemos construir um semigrupo, considerando os operadores e os espaços corretos. Para isso, consideremos um C_0-semigrupo generalizado $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ de F em F_1 induzido por E. Da Observação (1.12) obtemos $U(0) = U(0)EU(0)$, o que mostra que o operador $P = U(0)E$ é uma projeção em F_1, e decompõe o espaço em

$$F_1 = \mathrm{Im}P \oplus \ker P.$$

Lema 1.19. *Os subespaços ImP e $\ker P$ são positivamente invariantes pelo C_0-semigrupo degenerado $\{S(t)\colon t \geqslant 0\}$ em F_1, dado por $S(t) = U(t)E$ para $t \geqslant 0$, isto é, $S(t)ImP \subset ImP$ e $S(t)\ker P \subset \ker P$ para todo $t \geqslant 0$.*

Demonstração. Vejamos que se $x \in \mathrm{Im}P$ então $x = Py = U(0)Ey$. Assim, da Observação (1.12) temos

$$U(t)Ex = U(t)EU(0)Ey = U(0)EU(t)Ey = PU(t)Ey \in \mathrm{Im}P.$$

Analogamente se $x \in \ker P$ então

$$U(t)Ex = U(t)EU(0)Ex = U(t)EPx = 0,$$

e portanto $U(t)Ex \in \ker P$. □

Proposição 1.20. *Se $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo generalizado de F em F_1 induzido por E, $P = U(0)E$ e $Y = ImP$, então a família $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ dada por $T(t) = U(t)E\big|_Y$ é um C_0-semigrupo (no sentido usual) em Y.*

Demonstração. Já vimos que a família $\{S(t)\colon t \geqslant 0\}$ dada por $S(t) = U(t)E$ é um C_0-semigrupo degenerado em F_1. Basta ver que $T(0)$ é a identidade em Y. Para $x \in Y$ temos

$$T(0)x = U(0)Ex = Px = x,$$

logo $T(0) = I$, onde I é a identidade em Y. Portanto $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo em Y. □

Isto condiz com (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001, Observação 1.5.2), que resulta no seguinte resultado para C_0-semigrupos degenerados.

Proposição 1.21. *Se $\{S(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo degenerado em X, então $P = S(0)$ é uma projeção em X e a família $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ dada por $T(t) = S(t)|_{ImP}$ é um C_0-semigrupo (no sentido usual) em ImP.*

Demonstração. É análoga à demonstração da Proposição 1.20. $\square$

1.3 GERADORES PARA SEMIGRUPOS GENERALIZADOS

Definição 1.22. Considere um C_0-semigrupo generalizado $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ de F em F_1, induzido por E, (M,ω)-exponencialmente limitado. Dizemos que um operador linear fechado $A\colon D(A) \subset F_1 \to F$ é um **gerador** de $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ se para $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ temos $\lambda \in \rho_E(A)$ e

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)x dt \quad \text{para todo } x \in F. \tag{1.8}$$

Teorema 1.23. *O gerador de um C_0-semigrupo generalizado exponencialmente limitado, quando existe, é único.*

Demonstração. De fato, note que se A e B são geradores de $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ então existe $\lambda > 0$ tal que

$$R_E(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)x dt = R_E(\lambda, B)x,$$

para todo $x \in F$. Isto implica que $R_E(\lambda, A) = R_E(\lambda, B)$ em F e assim

$$D(A) = R_E(\lambda, A)F = R_E(\lambda, B)F = D(B).$$

Além disso, para cada $x \in D(A) = D(B)$ temos

$$x = R_E(\lambda, A)(\lambda E - A)x = R_E(\lambda, B)(\lambda E - A)x,$$

o que nos dá $(\lambda E - B)x = (\lambda E - A)x$, e portanto $Ax = Bx$. $\square$

Teorema 1.24. *Assuma que $\{U_1(t)\colon t \geqslant 0\}$ e $\{U_2(t)\colon t \geqslant 0\}$ sejam C_0-semigrupos generalizados (M,ω)-exponencialmente limitados de F em F_1 induzidos por E, ambos tendo A como gerador. Então $U_1(t) = U_2(t)$ para todo $t \geqslant 0$.*

Demonstração. Sabemos que existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que para $\lambda > \omega$ e $x \in F$ temos

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} U_1(t)x dt = R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_2(t)x dt.$$

Da unicidade da transformada de Laplace (veja o Corolário A.3), obtemos $U_1(t)x = U_2(t)x$ para todos $t \geqslant 0$ e $x \in F$. $\square$

Proposição 1.25. *Se A é o gerador de um C_0-semigrupo generalizado (M,ω)-exponencialmente limitado $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ de F em F_1 induzido por E, então para cada $x \in D(A)$ temos*

(a) $U(0)Ex = x$;

(b) $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{U(h)Ex - x}{h} = U(0)Ax$.

Demonstração. Para $x \in D(A)$ e $\lambda > \omega$ fixado, sabemos que existe um único $y \in F$ tal que

$$x = R(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)ydt.$$

Assim

$$U(0)Ex = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(0)EU(t)ydt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)ydt = x,$$

o que prova o item (a). Para o item (b), veja que para $h > 0$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{U(h)Ex - x}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(h)EU(t)ydt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)ydt\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t+h)ydt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)ydt\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[(e^{\lambda h} - 1)\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)ydt - e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t} U(t)ydt\right] \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} x - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} U(t)ydt,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{U(h)Ex - x}{h} &= \lambda x - U(0)y = \lambda x - U(0)(\lambda E - A)x \\
&= \lambda x - \lambda U(0)Ex + U(0)Ax = U(0)Ax.
\end{aligned}$$

□

O primeiro resultado envolvendo a existência de soluções para o problema (1.1) é o seguinte:

Teorema 1.26. *Se A é o gerador do C_0-semigrupo generalizado (M,ω)-exponencialmente limitado $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ de F em F_1 induzido por E, então para $x \in D(A)$ temos $U(t)Ex \in D(A)$ e $AU(t)Ex = EU(t)Ax$ para todo $t > 0$. Além disso a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto U(t)Ex \in F_1$ é continuamente diferenciável e*

$$\frac{d}{dt} U(t)Ex = U(t)Ax \quad \text{para todo } t > 0.$$

Assim para $x \in D(A)$, a aplicação $\xi\colon [0,\infty) \to F_1$ dada por $\xi(t) = U(t)Ex$ para $t \geqslant 0$ satisfaz: $\xi(0) = x$ e

$$E\frac{d}{dt}\xi(t) = A\xi(t) \quad \text{para todo } t > 0.$$

Demonstração. Primeiramente notamos que para $x \in D(A)$, $y \in F$ tal que

$$x = R(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda s} U(s) y ds$$

e $t \geqslant 0$ temos

$$U(t)Ex = \int_0^\infty e^{-\lambda s} U(t)EU(s) y ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s} U(s)EU(t) y ds,$$

o que mostra que $R(\lambda)EU(t)y = U(t)Ex$. Assim $U(t)Ex \in D(A)$ e $(\lambda E - A)U(t)Ex = EU(t)y = EU(t)(\lambda E - A)x$, o que nos dá $AU(t)Ex = EU(t)Ax$.

Agora notemos que para $x \in D(A)$ e $t \geqslant 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{d^+}{dt}U(t)Ex &= \lim_{h\to 0^+} \frac{U(t+h)Ex - U(t)Ex}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{U(t)EU(h)Ex - U(t)Ex}{h} \\ &= U(t)E \lim_{h\to 0^+} \frac{U(h)Ex - x}{h} = U(t)EU(0)Ax = U(t)Ax.\end{aligned}$$

Segue então do Lema de Dini (Lema A.6) que $[0,\infty) \ni t \mapsto U(t)Ex \in F_1$ é continuamente diferenciável e $\frac{d}{dt}U(t)Ex = U(t)Ax$.

A última afirmação segue diretamente do que foi feito acima. □

Observação 1.27. Diferentemente da teoria usual de C_0-semigrupos e seus *geradores infinitesimais*, que será relembrada a seguir, o domínio $D(A)$ do gerador A não é necessariamente um conjunto denso de F_1. Na verdade, levando em conta o item (a) da Proposição 1.25, vemos que se $D(A)$ é denso em F_1, então $U(0)Ex = x$ para todo $x \in F_1$ (pois $U(0)E$ é um operador contínuo), o que implica que E deve ser, em particular, injetor.

1.3.1 Geradores para semigrupos

Lembremos que para um semigrupo $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$, temos a seguinte definição de *gerador infinitesimal*:

Definição 1.28. Dado um semigrupo $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$, o seu **gerador infinitesimal** é o operador linear $A\colon D(A) \subset X \to X$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X\colon \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\},$$

e

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \quad \text{para cada } x \in D(A).$$

No que segue, nosso trabalho nesta subseção é demonstrar que para C_0-semigrupos, esta definição de gerador infinitesimal coincide com a Definição 1.22.

Proposição 1.29. *Seja $T \subset \mathscr{L}(X)$ um C_0-semigrupo.*

(1) Seja A o gerador infinitesimal de T. Então A é fechado, $D(A)$ é denso em X, e para $x \in D(A)$ a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto T(t)x \in D(A)$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad \text{para todo } t > 0.$$

(2) Se $\{T(t): t \geqslant 0\}$ é (M,ω)-exponencialmente limitado, então para $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ temos $\lambda \in \rho(A)$ e

$$R_I(\lambda, A)x = (\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \quad \text{para todo } x \in X.$$

Demonstração. (1) A prova de que A é fechado será feita na demonstração do item (2). Para a densidade, seja $x \in X$ e, para $\epsilon > 0$, defina $x_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T(t)x\,dt$. Então $x_\epsilon \to x$ quando $\epsilon \to 0^+$ e para $h > 0$ temos

$$\frac{T(h)x_\epsilon - x_\epsilon}{h} = \frac{1}{\epsilon h}\Big(\int_\epsilon^{\epsilon+h} T(t)x\,dt - \int_0^h T(t)x\,dt\Big) \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{T(\epsilon)x - x}{\epsilon},$$

assim $x_\epsilon \in D(A)$ e $D(A)$ é denso em X. Agora, se $x \in D(A)$ temos

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} = T(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax,$$

logo $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Portanto

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = AT(t)x = T(t)Ax,$$

existe e é contínua, e pelo Lema de Dini (Lema A.6), a aplicação $[0,\infty) \in t \mapsto T(t)x \in D(A)$ é continuamente diferenciável e $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$ para todo $t > 0$.

(2) Note que se $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ temos $\|e^{-\lambda t}T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant Me^{-(\mathrm{Re}\lambda - \omega)t}$, que é uma função integrável em $[0,\infty)$, e podemos definir $Q(\lambda) \in \mathscr{L}(X)$ por

$$Q(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt.$$

Temos $\|Q(\lambda)\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega}$, e para $x \in X$ e $h > 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}Q(\lambda)x &= Q(\lambda)\frac{T(h)x - x}{h}\\
&= \frac{1}{h}\Big(\int_h^\infty e^{-\lambda t + \lambda h}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\Big)\\
&= \frac{1}{h}\Big(-\int_0^h e^{\lambda(h-t)}T(t)xdt + \int_0^\infty (e^{\lambda h}-1)e^{-\lambda t}T(t)xdt\Big)\\
&\overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} -x + \lambda Q(\lambda)x,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

o que mostra que $Q(\lambda)x \in D(A)$ e $(\lambda - A)Q(\lambda)x = x$. Portanto $\lambda - A$ é sobrejetivo. Além disso para $x \in D(A)$, usando integração por partes segue que

$$Q(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}T(t)xdt$$

$$= e^{-\lambda t}T(t)x\Big|_0^\infty + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = -x + \lambda Q(\lambda)x,$$

e portanto $Q(\lambda)(\lambda - A)x = x$ para todo $x \in D(A)$ e $\lambda - A$ é também injetora. Logo $\lambda - A$ é uma bijeção de $D(A)$ sobre X com inversa $Q(\lambda) \in \mathscr{L}(X)$, e segue da Proposição 1.2 que A é fechado, e portanto $\lambda \in \rho(A)$, e a prova está completa. □

Como consequência deste resultado, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.30. *Seja $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ um C_0-semigrupo. Um operador A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ se, e somente se, ele é o gerador de $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ (pela Definição 1.22).*

Demonstração. Assuma que A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$. Segue da Proposição 1.29 que A é o gerador de $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ pela Definição 1.22.

Reciprocamente, se A é o gerador de $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ pela Definição 1.22, seja C o gerador infinitesimal de $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$. Do que acabamos de provar, C é também o gerador de $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ e portanto, do Teorema 1.23, $A = C$. □

Mais adiante precisaremos de algumas propriedades das iterações de geradores infinitesimais de C_0-semigrupos, que apresentaremos agora.

Definição 1.31. Seja $T \subset \mathscr{L}(X)$ um C_0-semigrupo com gerador infinitesimal A. Defina $A^0 = I$, $A^1 = A$ e, estando definido A^{m-1}, indutivamente definimos

$$D(A^m) = \{x \in X : x \in D(A^{m-1}) \text{ e } A^{m-1}x \in D(A)\},$$

e para $x \in D(A^m)$, definimos $A^m x = A(A^{m-1}x)$.

Claramente $D(A^m)$ é um subespaço vetorial de X e $A^m\colon D(A^m) \subset X \to X$ é um operador linear, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.32. *Seja $T \subset \mathscr{L}(X)$ um C_0-semigrupo com gerador infinitesimal A. Então:*

(a) se $x \in D(A^m)$ então $T(t)x \in D(A^m)$ para todo $t \geqslant 0$, a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é m-vezes continuamente diferenciável e

$$\frac{d^m}{dt^m}T(t)x = A^m T(t)x = T(t)A^m x \text{ para } t > 0;$$

(b) $\cap_{m\geqslant 1} D(A^m)$ é denso em X. Em particular, $D(A^m)$ é denso em X para cada $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (a) O caso $m = 1$ é o item (1) da Proposição 1.29. Agora suponha por indução que o resultado seja válido para m e o provemos para $m + 1$. Para isto, seja $x \in D(A^{m+1})$, logo $x \in D(A^m)$ e da hipótese de indução temos $T(t)x \in D(A^m)$. Além disso, $A^m x \in D(A)$ e assim

$$A^m T(t)x = T(t)A^m x \in D(A),$$

e portanto $T(t)x \in D(A^{m+1})$. Finalmente

$$\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}T(t)x = \frac{d}{dt}\frac{d^m}{dt^m}T(t)x = \frac{d}{dt}T(t)A^m x = AT(t)A^m x = T(t)A^{m+1}x.$$

(b) Seja ϕ uma função em $C^\infty(\mathbb{R})$ com $\phi(t)=0$ em uma vizinhança de $t=0$ e para t suficientemente grande. Sejam também $x \in X$ e $f = \int_0^\infty \phi(t)T(t)x\,dt$. Para $h>0$ suficientemente pequeno, temos

$$\frac{T(h)f-f}{h} = \int_h^\infty \frac{\phi(t-h)-\phi(t)}{h}T(t)x\,dt,$$

e assim $f \in D(A)$ e $Af = -\int_0^\infty \phi'(t)T(t)x\,dt$. Como $-\phi'$ satisfaz as mesmas condições que ϕ, temos $f \in D(A^2)$ e

$$A^2 f = \int_0^\infty \phi''(t)T(t)xdt,$$

e ϕ'' satisfaz as mesmas condições que ϕ. Indutivamente, para cada $m \geqslant 1$, obtemos $f \in D(A^m)$ e

$$A^m f = (-1)^m \int_0^\infty \phi^{(m)}(t)T(t)x\,dt,$$

o que mostra que $f \in \cap_{m\geqslant 1} D(A^m)$. Para mostrar que $D(A^m)$ é denso em X, escolha ϕ satisfazendo também $\int_0^\infty \phi(t)dt = 1$, e defina $f_n = \int_0^\infty n\phi(nt)T(t)xdt$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $t \mapsto n\phi(nt)$ está em $C^\infty(\mathbb{R})$ e é zero numa vizinhaça de $t=0$ e para t suficientemente grande, segue que $f_n \in \cap_{m\geqslant 1} D(A^m)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso $f_n = \int_0^\infty \phi(s)T(s/n)xds$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e assim $f_n \to x$ quando $n \to \infty$. □

1.3.2 Geradores para semigrupos generalizados: definição alternativa

Baseados na Definição 1.28 para C_0-semigrupos (e em (GE; FENG, 2013) para o caso não-linear, que veremos no próximo capítulo), podemos introduzir o conceito de *gerador infinitesimal* para um C_0-semigrupo generalizado $\{U(t) : t \geqslant 0\}$ de F em F_1 induzido por E da seguinte maneira:

Definição 1.33. Dado um semigrupo generalizado $\{U(t) : t \geqslant 0\}$ de F em F_1 induzido por E, seu **gerador infinitesimal** é o operador $A\colon D(A) \subset F_1 \to F$ definido da seguinte maneira:

$$D(A) = \left\{ x \in F_1 : U(0)Ex = x \text{ e } \lim_{h\to 0^+} \frac{U(h)Ex-x}{h} \text{ existe} \right\},$$

com

$$Ax = E\Big(\lim_{h\to 0^+} \frac{U(h)Ex-x}{h}\Big) \quad \text{para } x \in D(A).$$

Observação 1.34. Notemos que $\ker E \cap \overline{D(A)} = \{0\}$. De fato para $x \in \ker E \cap \overline{D(A)}$ e $D(A) \ni x_n \to x$, temos $U(0)Ex_n = x_n$ e portanto $x = U(0)Ex = 0$. Em particular, E é injetor sobre $\overline{D(A)}$.

Vejamos que a afirmação do Teorema 1.26 continua válida quando consideramos geradores infinitesimais.

Teorema 1.35. *Se A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo generalizado $\{U(t): t \geqslant 0\}$ de F em F_1 induzido por E, então para $x \in D(A)$ temos $U(t)Ex \in D(A)$ e $AU(t)Ex = EU(t)Ax$ para todo $t > 0$. Além disso a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto U(t)Ex \in F_1$ é continuamente diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}U(t)Ex = U(t)Ax \quad \text{para todo } t > 0.$$

Assim para $x \in D(A)$, a aplicação $\xi: [0,\infty) \to F_1$ dada por $\xi(t) = U(t)Ex$ para $t \geqslant 0$ satisfaz: $\xi(0) = x$ e

$$E\frac{d}{dt}\xi(t) = A\xi(t) \quad \text{para todo } t > 0.$$

Demonstração. Vejamos que para $x \in D(A)$ e $t \geqslant 0$ temos $U(0)EU(t)Ex = U(t)Ex$ e

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{U(h)EU(t)Ex - U(t)Ex}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{U(t)EU(h)Ex - U(t)Ex}{h}\\ &= U(t)E\left(\lim_{h\to 0^+}\frac{U(h)Ex - x}{h}\right) = U(t)Ax,\end{aligned}$$

logo $U(t)Ex \in D(A)$ e $AU(t)Ex = EU(t)Ax$. Assim

$$\begin{aligned}\frac{d^+}{dt}U(t)Ex &= \lim_{h\to 0^+}\frac{U(t+h)Ex - U(t)Ex}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{U(h)EU(t)Ex - U(t)Ex}{h} = U(t)Ax,\end{aligned}$$

e como o lado direito é uma função contínua, segue do Lema de Dini (Lema A.6) que $[0,\infty) \ni t \mapsto U(t)Ex \in F_1$ é diferenciável e que

$$\frac{d}{dt}U(t)Ex = EU(t)Ax = U(t)AEx \quad \text{para todo } t > 0.$$

A afirmação final segue do fato de que $EU(t)Ax = AU(t)Ex$ para $x \in D(A)$ e $t \geqslant 0$. □

No que segue, para conseguirmos comparar as Definições 1.22 e 1.33, faremos a seguinte hipótese

$$EU(0)x = x \quad \text{para todo } x \in F. \tag{1.10}$$

Veja que, em particular, segue de (1.10) que E deve ser sobrejetor (o que pode ser assumido, sem perda de generalidade, trocando F por $\operatorname{Im} E$, se necessário).

Teorema 1.36. *Considere um C_0-semigrupo generalizado $\{U(t): t \geqslant 0\}$ de F em F_1 induzido por E com gerador infinitesimal A, com (1.10) válida. Assuma que $\{U(t): t \geqslant 0\}$ é (M,ω)-exponencialmente limitado. Então A é fechado e para $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ temos $\lambda \in \rho_E(A)$ e*

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt \quad \text{para todo } x \in F.$$

Portanto A é gerador de $\{U(t): t \geqslant 0\}$.

Demonstração. Para $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, notemos que

$$\|e^{-\lambda t}U(t)\| \leqslant Me^{-(\mathrm{Re}\lambda-\omega)t} \quad \text{para todo } t \geqslant 0,$$

que é uma função integrável em $[0,\infty)$. Podemos assim definir então o operador $B \in \mathscr{L}(F,F_1)$ por

$$Bx = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt, \tag{1.11}$$

satisfazendo $\|B\| \leqslant \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda-\omega}$.

Vejamos que para cada $x \in F$, $Bx \in D(A)$. De fato, para $x \in X$ notemos que

$$U(0)EBx = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\underbrace{U(0)EU(t)}_{=U(t)}xdt = Bx.$$

Agora para $h > 0$ temos

$$\begin{aligned}&\frac{EU(h)EBx - EU(0)EBx}{h}\\ &\quad = \frac{1}{h}\left[-\int_0^h e^{\lambda(h-t)}EU(t)xdt + \int_0^\infty (e^{\lambda h}-1)e^{-\lambda t}EU(t)xdt\right],\end{aligned}$$

e assim

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{EU(h)EBx - EU(0)EBx}{h} = -EU(0)x + \lambda EBx.$$

Portanto $Bx \in D(A)$ e $ABx = -EU(0)x + \lambda EBx$. Logo, de (1.10), segue que

$$(\lambda E - A)Bx = EU(0)x = x. \tag{1.12}$$

Agora, para $x \in D(A)$, usando o Teorema 1.35 e integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}EBAx &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}EU(t)Axdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}(EU(t)Ex)dt\\ &= e^{-\lambda t}EU(t)Ex\Big|_0^\infty + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}EU(t)Exdt\\ &= -EU(0)Ex + \lambda EBEx = -Ex + \lambda EBEx,\end{aligned}$$

ou seja $EB(\lambda E - A)x = Ex$. Como E é injetor sobre $D(A)$ segue que

$$B(\lambda E - A)x = x. \tag{1.13}$$

Usando (1.12) e (1.13), segue que $\lambda \in \rho_E(A)$ e que

$$R(\lambda)x = Bx = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt,$$

para todo $x \in F$. Segue do item (b) da Proposição 1.2 que A é fechado e portanto A é o gerador de $\{U(t) : t \geqslant 0\}$. □

Teorema 1.37. *Considere um C_0-semigrupo generalizado $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ induzido por E, (M,ω)-exponencialmente limitado, com gerador A e com (1.10) válida. Então A é o gerador infinitesimal de $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$.*

Demonstração. Denote por C o gerador infinitesimal de $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$. A Proposição 1.25 implica que para $x \in D(A)$ temos $U(0)Ex = x$ e $\lim_{h\to 0^+} h^{-1}(U(h)Ex - x) = U(0)Ax$. Assim $x \in D(C)$ e

$$Cx = E\Big(\lim_{h\to 0^+} \frac{U(h)Ex - x}{h}\Big) = EU(0)Ax = Ax,$$

o que mostra que $D(C) \subset D(A)$ e $Ax = Cx$ para $x \in D(C)$. Do teorema anterior segue que para algum $\lambda > 0$ temos

$$R_E(\lambda, C)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)xdt$$

para todo $x \in F$. E portanto, para algum $\lambda > 0$ temos $R_E(\lambda, C) = R_E(\lambda, A)$ em F, e portanto

$$D(C) = R_E(\lambda, C)F = R_E(\lambda, A)F = D(A).$$

Assim $A = C$ é o gerador infinitesimal de $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$. □

Com isso, vemos que as Definições 1.22 e 1.33 são equivalentes, desde que tenhamos (1.10).

1.4 FAMÍLIAS INTEGRÁVEIS GENERALIZADAS

Nesta seção, queremos buscar um resultado parecido com o Teorema de Hille-Yosida para C_0-semigrupos, isto é, queremos encontrar condições sobre o operador A para que ele seja o gerador de um C_0-semigrupo generalizado. Para este fim, o seguinte conceito é fundamental.

Definição 1.38 (Família integrável generalizada)**.** Diremos que $\{V(t)\colon t \geqslant 0\}$ é uma **família integrável generalizada** de F em F_1 induzida por E se ela satisfaz:

(i) $\{V(t)\colon t \geqslant 0\}$ é fortemente contínua, isto é, para cada $x \in F$, a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto V(t)x \in F_1$ é contínua;

(ii) para cada $x \in F$ e $t,s \geqslant 0$ temos

$$V(t)EV(s)x = \int_0^s \Big[V(t+r)x - V(r)x\Big]dr;$$

(iii) $V(0) = 0$.

Se, além disso, existem $M \geqslant 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que $\|V(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ para todo $t \geqslant 0$ então diremos que $\{V(t)\colon t \geqslant 0\}$ é **(M,ω)-exponencialmente limitada** (ou, simplesmente, **exponencialmente limitada**).

Inspirados em (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001, Definição 1.5.3), fazemos a seguinte definição:

Definição 1.39. Considere uma família integrável generalizada (M,ω)-exponencialmente limitada $\{V(t)\colon t\geqslant 0\}$ de F em F_1 induzida por E. Dizemos que um operador fechado $A\colon D(A)\subset F_1\to F$ é um **gerador** de $\{V(t)\colon t\geqslant 0\}$ se para $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ temos $\lambda\in\rho_E(A)$ e

$$R(\lambda)x=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}V(t)xdt, \tag{1.14}$$

para todo $x\in F$.

Como para C_0-semigrupos generalizados, é simples ver que quando um gerador para uma família integrável generalizada exponencialmente limitada existe, ele é único. Além disso, como no item (2) da Proposição 1.15, temos $[0,\infty)\ni t\mapsto \|V(t)\|\in[0,\infty)$ semicontínua inferiormente, e portanto mensurável.

Para simplificar a notação, dado $t\geqslant 0$ escreveremos $I_h(t)=[t,t+h]$ se $h\geqslant 0$ e $I_h(t)=[t+h,t]$ se $h\leqslant 0$.

Teorema 1.40. *Se $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo generalizado (M,ω)-exponencialmente limitado de F em F_1 induzido por E com gerador A, defina*

$$V(t)x=\int_0^t U(s)xds \quad \text{para cada } t\geqslant 0 \text{ e } x\in F.$$

Então $\{V(t)\colon t\geqslant 0\}$ é uma família integrável generalizada de F em F_1 induzida por E com gerador A, tal que para $t\geqslant 0$ e $h\in\mathbb{R}$ com $t+h\geqslant 0$ temos

$$\|V(t+h)-V(t)\|\leqslant M|h|\gamma(h), \tag{1.15}$$

onde $\gamma(h)=\sup\limits_{s\in I_h(t)} e^{\omega s}$. Além disso, existem $M_1\geqslant M$ e $\omega_1\geqslant\omega$ tais que $\{V(t)\colon t\geqslant 0\}$ é (M_1,ω_1)-exponencialmente limitada.

Demonstração. Escolha $\omega_1>\max\{\omega,0\}$ e $M_1=\max\{M,M/\omega_1\}$. Notemos que para cada $x\in F$ e $t\geqslant 0$ temos

$$\begin{aligned}\big\|V(t)x\big\|=\Big\|\int_0^t U(s)xds\Big\|&\leqslant\int_0^t Me^{\omega s}\|x\|ds\leqslant\int_0^t Me^{\omega_1 s}ds\cdot\|x\|\\&=M\frac{e^{\omega_1 t}-1}{\omega_1}\|x\|\leqslant\frac{M}{\omega_1}e^{\omega_1 t}\|x\|\leqslant M_1e^{\omega_1 t}\|x\|,\end{aligned}$$

o que mostra que $\{V(t)\colon t\geqslant 0\}$ é (M_1,ω_1)-exponencialmente limitada.

Agora, vejamos que para $x\in F$, $t\geqslant 0$ e $h\in\mathbb{R}$ tal que $t+h\geqslant 0$ temos

$$\big\|V(t+h)x-V(t)x\big\|=\Big\|\int_t^{t+h}U(s)xds\Big\|\leqslant\Big|\int_t^{t+h}Me^{\omega s}\|x\|ds\Big|=M|h|\gamma(h)\|x\|,$$

o que mostra (1.15). Isto implica, em particular, que $\{V(t)\colon t\geqslant 0\}$ é fortemente contínua.

Agora, para $x \in F$ e $t,s \geqslant 0$, temos

$$\begin{aligned} V(t)EV(s)x &= \int_0^t U(w)EV(s)xdw = \int_0^t U(w)E\int_0^s U(r)xdrdw \\ &= \int_0^t \int_0^s U(w)EU(r)xdrdw = \int_0^t \int_0^s U(w+r)xdrdw. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \int_0^s [V(t+r)x - V(r)x]dr &= \int_0^s \left[\int_0^{t+w} U(r)xdr - \int_0^w U(r)xdr\right] dw \\ &= \int_0^s \int_w^{t+w} U(r)xdrdw = \int_0^s \int_0^t U(y+w)xdydw = \int_0^t \int_0^s U(y+w)xdwdy, \end{aligned} \tag{1.17}$$

e juntando (1.16) e (1.17) obtemos

$$V(t)EV(s)x = \int_0^s [V(t+r)x - V(r)x]dr.$$

Claramente $V(0)=0$, e portanto $\{V(t)\colon t\geqslant 0\}$ é uma família integrável generalizada de F em F_1 induzida por E. Nos resta somente mostrar que A é o gerador de $\{V(t)\colon t\geqslant 0\}$. Para $x\in F$ e $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} V(t)xdt &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t U(s)xdsdt = \int_0^\infty \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} U(s)xdsdt \\ &= \int_0^\infty \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda t} U(s)xdtds = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt\right] U(s)xds = \int_0^\infty e^{-\lambda s} U(s)xds, \end{aligned}$$

e o último termo é igual a $R(\lambda)x$ já que A é o gerador de $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$. □

Agora, buscaremos encontrar condições para que um operador linear $A\colon D(A)\subset F_1 \to F$ seja o gerador de uma família integrável generalizada $\{V(t)\colon t\geqslant 0\}$ de F em F_1 induzida por E, isto é, queremos encontrar um resultado análogo o Teorema de Hille-Yosida para geradores infinitesimais de semigrupos lineares em espaços de Banach ((ENGEL; NAGEL, 2000, Teorema II.3.8)). Para tanto, a teoria desenvolvida por (ARENDT, 1987) e (WIDDER, 1971) se mostra fundamental. Apresentaremos aqui uma adaptação desta teoria para o caso de famílias integráveis generalizadas. Tal adaptação é apresentada em (GE; ZHU; FENG, 2009), porém sem demonstrações.

Antes de começarmos apresentamos um resultado básico, que pode ser encontrado em (ARENDT, 1987, Corolário 1.2).

Lema 1.41. *Sejam X um espaço de Banach, $\omega\in\mathbb{R}$ e $r\colon(\omega,\infty)\to X$ uma função infinitamente diferenciável. Assuma que existam $M\geqslant 0$ e uma função $F\colon[0,\infty)\to X$ satisfazendo $F(0)=0$ e*

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\|F(t+h)-F(t)\| \leqslant Me^{\omega t} \text{ para cada } t\geqslant 0, \tag{1.18}$$

tais que

$$r(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t)dt \quad \text{para } \lambda > \omega. \tag{1.19}$$

Então para todos $\lambda > \omega$ e $k \in \mathbb{N}$

$$\|r^{(k)}(\lambda)\| \leqslant \frac{Mk!}{(\lambda-\omega)^{k+1}}. \tag{1.20}$$

Mais ainda r possui uma extensão analítica a $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\}$.

O (ARENDT, 1987, Corolário 1.2) apresenta o resultado acima como uma equivalência entre as duas afirmações. Porém, para a recíproca, precisaremos de um resultado que dê uma limitação exponencial para F.

Teorema 1.42. *Sejam X um espaço de Banach, $\omega \in \mathbb{R}$ e $r : (\omega, \infty) \to X$ uma função infinitamente diferenciável. Assuma que exista $M \geqslant 0$ tal que (1.20) é válida para todos $\lambda > \omega$ e $k \in \mathbb{N}$.*

Então existe uma função $F : [0,\infty) \to X$ com $F(0) = 0$, satisfazendo (1.19), com

$$\|F(t+h) - F(t)\| \leqslant M|h| \sup_{s \in I_h(t)} e^{\omega s},$$

para todos $t \geqslant 0$, $h \in \mathbb{R}$ com $t+h \geqslant 0$. Além disso existem $M_1 \geqslant M$ e $\omega_1 \geqslant \omega$ tais que

$$\|F(t)\| \leqslant M_1 e^{\omega_1 t} \quad \text{para todo } t \geqslant 0,$$

e r possui uma extensão analítica a $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\}$.

Demonstração. No que segue, X^* e X^{**} denotam o espaço dual e bidual de X, respectivamente. Para cada $x^* \in X^*$, defina $g_{x^*} : (\omega,\infty) \to \mathbb{R}$ por $g_{x^*}(\lambda) = \langle r(\lambda), x^* \rangle$. Para todos $\lambda > \omega$ e $k \in \mathbb{N}$ temos

$$|g_{x^*}^{(k)}(\lambda)| = |\langle r^{(k)}(\lambda), x^* \rangle| \leqslant \frac{M\|x^*\|_{X^*} k!}{(\lambda-\omega)^{k+1}}.$$

Segue de (WIDDER, 1971, Corolário 8, Pg. 159) que existe $f(\cdot, x^*) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ com $|f(t,x^*)| \leqslant M\|x^*\|_{X^*} e^{\omega t}$ para todo $t \geqslant 0$ tal que

$$\langle r(\lambda), x^* \rangle = g_{x^*}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t,x^*)dt. \tag{1.21}$$

Defina $F(t,x^*) = \int_0^t f(s,x^*)ds$. Temos $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, com $F(0,x^*) = 0$, e para $t \geqslant 0$ temos

$$|F(t,x^*)| \leqslant M\|x^*\|_{X^*} \int_0^t e^{\omega s} ds \leqslant M\|x^*\|_{X^*} t \sup_{s \in [0,t]} e^{\omega s}. \tag{1.22}$$

Além disso, para $t \geqslant 0$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $t+h \geqslant 0$ temos

$$|F(t+h,x^*) - F(t,x^*)| \leqslant M\|x^*\|_{X^*} |h| \sup_{s \in I_h(t)} e^{\omega s}.$$

Fazendo uma integração por partes em (1.21) obtemos

$$\langle r(\lambda), x^*\rangle = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t,x^*)dt.$$

Se $x_1^*, x_2^* \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\langle r(\lambda), x_1^* + \alpha x_2^*\rangle = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}[F(t,x_1^*) + \alpha F(t,x_2^*)]dt,$$

e também

$$\langle r(\lambda), x_1^* + \alpha x_2^*\rangle = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t,x_1^* + \alpha x_2^*)dt.$$

Como $F(\cdot, x^*)$ é contínua para cada $x^* \in X^*$, segue da unicidade da transformada de Laplace que

$$F(t, x_1^* + \alpha x_2^*) = F(t,x_1^*) + \alpha F(t,x_2^*),$$

para todo $t \geqslant 0$. Ou seja, $F(t,\cdot)\colon X^* \to \mathbb{R}$ é um funcional linear. Assim, para cada $t \geqslant 0$, existe $F(t) \in X^{**}$ com

$$\langle x^*, F(t)\rangle = F(t,x^*) \quad \text{ para todo } x^* \in X^*.$$

Desta forma, identificando X com um subsepaço denso de X^{**} via avaliação, temos

$$\langle r(\lambda), x^*\rangle = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\langle x^*, F(t)\rangle dt,$$

e segue que

$$r(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t) dt,$$

com a igualdade em X^{**}.

Agora mostremos que $F(t) \in X$ para todo $t \geqslant 0$. Considere $q\colon X^{**} \to X^{**}/X$ a avaliação quociente. Como $r(\lambda) \in X$, temos

$$0 = q(r(\lambda)) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} q(F(t))dt,$$

e da unicidade da transformada de Laplace segue que $q(F(t)) = 0$, isto é, $F(t) \in X$, para todo $t \geqslant 0$.

Finalmente, de (1.22) temos $\|F(t)\| \leqslant Mt \sup_{s\in[0,t]} e^{\omega s}$. Se $\omega > 0$, para $\delta > 0$ fixado, a função $[0,\infty) \ni t \mapsto te^{-\delta t}$ é limitada, e existe $M_1 \geqslant M$ tal que

$$\|F(t)\| \leqslant Mte^{\omega t} = Mte^{-\delta t} e^{(\omega+\delta)t} \leqslant M_1 e^{\omega_1 t},$$

com $\omega_1 = \omega + \delta \geqslant \omega$. Para $\omega \leqslant 0$, escolha $\omega_1 > 0$ e temos

$$\|F(t)\| \leqslant Mt = Mte^{-\omega_1 t} e^{\omega_1 t} \leqslant M_1 e^{\omega_1 t}.$$

□

O seguinte resultado é adaptado de (ARENDT, 1987, Teorema 3.1).

Proposição 1.43. *Considere* $V\colon [0,\infty) \mapsto \mathscr{L}(F,F_1)$ *uma função fortemente contínua e* (M,ω)*-exponencialmente limitada, para a qual*

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} V(t)x dt \quad \textit{para todos } \lambda > \omega \textit{ e } x \in F.$$

Então para todos $t,s \geqslant 0$ *e* $x \in F$ *temos*

$$V(t)EV(s)x = \int_0^s \Big[V(t+r)x - V(r)x\Big] dr. \tag{1.23}$$

Demonstração. Para $\mu > \lambda > \omega$ temos

$$\frac{R(\lambda)ER(\mu)}{\lambda\mu} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} V(t)EV(s) ds dt,$$

e da identidade do E-resolvente (1.2) segue que

$$\frac{R(\lambda)ER(\mu)}{\lambda\mu} = \frac{R(\lambda)-R(\mu)}{(\mu-\lambda)\lambda\mu},$$

e o resultado estará provado se mostrarmos que o lado direito da expressão acima é igual a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} \int_0^s \Big[V(t+r) - V(r)\Big] dr ds dt,$$

pela unicidade da transformada de Laplace. Veja que

$$\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{(\mu-\lambda)\lambda\mu} = \frac{1}{(\mu-\lambda)\mu}\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda} - \frac{R(\mu)}{\mu}\right) - \frac{1}{\lambda\mu}\frac{R(\mu)}{\mu}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\mu-\lambda)}\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda} - \frac{R(\mu)}{\mu}\right) &= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\frac{R(\lambda)}{\lambda} dt - \int_0^\infty \frac{1}{(\mu-\lambda)} e^{(\lambda-\mu)t} e^{-\lambda t} V(t) dt \\
&= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} V(s) ds dt - \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^t e^{-\lambda s} V(s) ds dt \\
&= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_t^\infty e^{-\lambda s} V(s) ds dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_t^\infty e^{-\lambda(s-t)} V(s) ds dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} V(t+s) ds dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu s} V(t+s) ds dt.
\end{aligned}$$

Aplicando integração por partes em $\int_0^\infty e^{-\mu s} V(t+s) ds$ obtemos

$$\frac{1}{(\mu-\lambda)}\left(\frac{R(\lambda)}{\mu} - \frac{R(\mu)}{\mu}\right) = \mu \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu s} \int_0^s V(t+r) dr ds dt,$$

ou seja

$$\frac{1}{(\mu-\lambda)\mu}\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda} - \frac{R(\mu)}{\mu}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu s} \int_0^s V(t+r) dr ds dt.$$

Agora, notando que

$$\frac{1}{\lambda}\frac{R(\mu)}{\mu} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt \int_0^\infty e^{-\mu s} V(s) ds = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \mu \int_0^\infty e^{-\mu s} \int_0^s V(r) dr ds,$$

temos

$$\frac{1}{\lambda\mu}\frac{R(\mu)}{\mu} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu s} \int_0^s V(r) dr ds dt,$$

o que conclui a demonstração. □

Com estes resultados, podemos apresentar hipóteses necessárias e suficientes para que operador fechado A seja o gerador de uma família integrável generalizada.

Teorema 1.44. *O operador fechado $A\colon D(A) \subset F_1 \to F$ é o gerador de uma família integrável generalizada exponencialmente limitada $\{V(t)\colon t \geqslant 0\}$ de F em F_1 induzida por E para a qual existem $M \geqslant 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \| V(t+h) - V(t) \| \leqslant M e^{\omega t} \quad \textit{para cada } t \geqslant 0, \tag{1.24}$$

se, e somente se,

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda) \right\| \leqslant \frac{Mk!}{(\lambda-\omega)^{k+1}},$$

para todos $\lambda > \omega$ e $k \geqslant 0$.

Demonstração. Podemos assumir que M e ω são escolhidos de modo que $\omega > 0$, $\| V(t) \| \leqslant M e^{\omega t}$ para todo $t \geqslant 0$, e também que para $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ temos

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} V(t) x dt \quad \text{para todo } x \in F.$$

Assim, para $r(\lambda) = R(\lambda)x$ temos $r\colon (\omega,\infty) \to F_1$ infinitamente diferenciável e

$$r(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} V(t) x dt.$$

Do Lema 1.41, com $F(t) = V(t)x$ para $t \geqslant 0$, para $\lambda > \omega$ e $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\| r^{(k)}(\lambda) \| \leqslant \frac{M\|x\|k!}{(\lambda-\omega)^{k+1}}.$$

Isto nos dá

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda) x \right\| \leqslant \frac{M\|x\|k!}{(\lambda-\omega)^{k+1}},$$

para todo $x \in X$, $\lambda > \omega$ e $k \in \mathbb{N}$. Portanto para $\lambda > \omega$ e $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda) \right\| \leqslant \frac{Mk!}{(\lambda-\omega)^{k+1}}.$$

Para a recíproca, veja que do Teorema 1.42 existem uma função $V\colon [0,\infty) \to \mathscr{L}(F,F_1)$ com $V(0)=0$, fortemente contínua, exponencialmente limitada e $\omega_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$R(\lambda)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}V(t)dt,$$

para todo $\lambda>\omega_1$. Da Proposição 1.43 segue que $\{V(t)\colon t\geqslant 0\}$ é uma família integrável generalizada, e por definição, A é seu gerador. □

Com isto encontramos condições necessárias para que A seja o gerador de um C_0-semigrupo generalizado.

Corolário 1.45. *Se $A\colon D(A)\subset F_1 \to F$ é o gerador de um C_0-semigrupo generalizado $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$ de F em F_1 induzido por E, então existem $M\geqslant 1$ e $\omega\in\mathbb{R}$ tais que*

$$\Big\|\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda)\Big\|\leqslant\frac{Mk!}{(\lambda-\omega)^{k+1}}\qquad \textit{para todo } \lambda>\omega.$$

Demonstração. O resultado segue dos Teoremas 1.40 e 1.44. □

Embora o resultado que gostaríamos de provar seria um análogo ao Teorema de Hille-Yosida para C_0-semigrupos generalizados, e não para famílias integráveis generalizadas, este não é o caso. A recíproca do corolário acima não é válida em geral, já que de uma família integrável generalizada qualquer não é possível construir diretamente um semigrupo generalizado.

Os resultados a seguir apresentam uma tentativa de encontrar uma recíproca parcial, e para tanto, vemos que será necessário trocar os espaços F e F_1 para conseguir construir um semigrupo generalizado a partir de uma família integrável generalizada.

Proposição 1.46. *Seja $\{V(t)\colon t\geqslant 0\}$ uma família integrável generalizada (M,ω)-exponencialmente limitada com gerador A, satisfazendo (1.24). Então $\ker E\cap\overline{D(A)}=\{0\}$ e $\ker E\oplus\overline{D(A)}$ é um subespaço fechado de F_1.*

Demonstração. O Teorema 1.44 com $k=0$ garante que

$$\|R(\lambda)\|\leqslant\frac{M}{\lambda-\omega}\qquad\text{para } \lambda>\omega.$$

Para $x\in D(A)$ temos $R(\lambda)(\lambda E-A)x=x$, o que implica que $\lambda R(\lambda)Ex-x=R(\lambda)Ax$ e nos dá

$$\|\lambda R(\lambda)Ex-x\|\leqslant\frac{M}{\lambda-\omega}\|Ax\|\to 0\qquad\text{quando } \lambda\to\infty.$$

Notemos também que para $\lambda>\omega$ temos

$$\|\lambda R(\lambda)E\|\leqslant\frac{M\lambda\|E\|}{\lambda-\omega}.$$

Como a função $[\omega+1,\infty)\ni\lambda\mapsto\frac{\lambda}{\lambda-\omega}$ é limitada, segue que existe uma constante $C\geqslant 1$ tal que

$$\|\lambda R(\lambda)E\|\leqslant C \quad \text{para } \lambda\geqslant\omega+1. \tag{1.25}$$

Assim, para $x\in\overline{D(A)}$ e $\epsilon>0$ existe $x_\epsilon\in D(A)$ tal que $\|x_\epsilon-x\|<\frac{\epsilon}{3C}$ e $\|\lambda R(\lambda)Ex_\epsilon-x_\epsilon\|<\frac{\epsilon}{3}$ para λ suficientemente grande. Deste modo

$$\|\lambda R(\lambda)Ex-x\|\leqslant\|\lambda R(\lambda)E(x-x_\epsilon)\|+\|\lambda R(\lambda)Ex_\epsilon-x_\epsilon\|+\|x_\epsilon-x\|<\epsilon,$$

o que mostra que

$$\lambda R(\lambda)Ex\to x \quad \text{para } x\in\overline{D(A)}. \tag{1.26}$$

Assim, se $x\in\ker E\cap\overline{D(A)}$ temos $0=\lambda R(\lambda)Ex\to x$, e portanto $x=0$. Logo $\ker E\cap\overline{D(A)}=\{0\}$.

Agora, notemos que $\lambda R(\lambda)E$ converge em $\ker E\oplus\overline{D(A)}$ quando $\lambda\to\infty$. Da limitação (1.25), $\lambda R(\lambda)E$ converge em $Y:=\overline{\ker E\oplus\overline{D(A)}}$ quando $\lambda\to\infty$. Definamos

$$Px=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda)Ex$$

para cada $x\in Y$. Por (1.25) temos $\|Px\|\leqslant C\|x\|$ para todo $x\in Y$. Além disso, temos:

(i) $Px=x$ para todo $x\in\overline{D(A)}$;

(ii) $\ker P=\ker E$.

De fato, se $x\in\ker E$ então $Px=0$ e $x\in\ker P$. Agora sejam $x\in\ker P$ e $\ker E\oplus\overline{D(A)}\ni x_n\to x$, escrevemos $x_n=z_n+y_n$, onde $z_n\in\ker E$ e $y_n\in\overline{D(A)}$. Temos $Px_n=Pz_n+Py_n=y_n$, e como $Px_n\to Px=0$, segue que $y_n\to 0$. Assim $z_n=x_n-y_n\to x$. Mas $z_n\in\ker E$ e $\ker E$ é fechado. Portanto $x\in\ker E$.

(iii) $\operatorname{Im}P=\overline{D(A)}$.

De fato, se $y\in\operatorname{Im}P$, então $y=Px$ para algum $x\in Y$. Mas $\lambda R(\lambda)Ex\in D(A)$ para todo $\lambda>\omega$ e portanto $y=Px\in\overline{D(A)}$. Reciprocamente, se $y\in\overline{D(A)}$ temos $y=Py\in\operatorname{Im}P$;

(iv) $P^2x=P(Px)=Px$ para $x\in Y$.

De fato, para $x\in Y$, temos $Px\in\overline{D(A)}$ e portanto $P(Px)=Px$.

Desta forma P é uma projeção em Y, e portanto

$$\overline{\ker E\oplus\overline{D(A)}}=Y=\ker P\oplus\operatorname{Im}P=\ker E\oplus\overline{D(A)},$$

o que mostra que $\ker E\oplus\overline{D(A)}$ é um subespaço fechado de F_1. □

Dada uma família integrável generalizada de F em F_1, queremos construir espaços G, G_1, e um semigrupo generalizado de G em G_1. Como veremos, G_1 será dado exatamente por $\ker E\oplus\overline{D(A)}$ e $G=EG_1$. Isto nos permitirá reescrever o Teorema 1.26 para os espaços $R(\lambda)E\overline{D(A)}$ (que não dependem de λ) no lugar de $D(A)$, e encontrar soluções de (1.1) dadas por $x(t)=U(t)Ex$ $(t\geqslant 0)$ para todo $x\in G_1$.

Proposição 1.47. *Seja $\{V(t)\colon t \geqslant 0\}$ uma família integrável generalizada (M,ω)-exponencialmente limitada de F em F_1 induzida por E com gerador $A\colon D(A)\subset F_1 \to F$.*

(a) Para $\mu \in \rho_E(A)$ temos

$$R(\mu)EV(t) = V(t)ER(\mu) \quad \text{para todo } t \geqslant 0, \tag{1.27}$$

e para $x \in D(A)$ temos $AV(t)Ex = EV(t)Ax$;

(b) para $x \in D(A)$ e $t \geqslant 0$ temos $V(t)Ex \in D(A)$ e $AV(t)Ex = EV(t)Ax$ e

$$V(t)Ex = tx + \int_0^t V(s)Axds;$$

(c) para $x \in \overline{D(A)}$ e $t \geqslant 0$ temos

$$\int_0^t V(s)Exds \in D(A)$$

e

$$A\int_0^t V(s)Exds = EV(t)Ex - tEx.$$

Demonstração. (a) Para $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ temos

$$R(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} V(t)dt,$$

e assim, para $\mu \in \rho_E(A)$, segue que

$$\frac{R(\mu)ER(\lambda)}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} R(\mu)EV(t)dt.$$

Além disso

$$\frac{R(\lambda)ER(\mu)}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} V(t)ER(\mu)dt.$$

Da identidade do E-resolvente sabemos que $R(\mu)ER(\lambda) = R(\lambda)ER(\mu)$ e portanto

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} R(\mu)EV(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} V(t)ER(\mu)dt,$$

e da unicidade da transformada de Laplace (Corolário A.3) segue que $R(\mu)EV(t) = V(t)ER(\mu)$. Finalmente o Lema 1.10 implica que para $x \in D(A)$ temos $V(t)Ex \in D(A)$ e $AV(t)Ex = EV(t)Ax$.

(b) Para $x \in D(A)$ note que e $\lambda > \max\{\omega, 0\}$ temos

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} txdt = x = R(\lambda)(\lambda E - A)x = \lambda R(\lambda)Ex - R(\lambda)Ax \\ = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} V(t)Exdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} V(t)Axdt\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} V(t)Exdt - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t V(s)Axdsdt,$$

onde na última parcela utilizamos integração por partes. Pela unicidade da transformada de Laplace (Corolário A.3), segue que

$$V(t)Ex = tx + \int_0^t V(s)Axds.$$

(c) Sejam $\{x_k\} \subset D(A)$ com $x_k \to x$ e $t \geqslant 0$. Do item (b) segue que $V(s)Ex_k \in D(A)$ para todos $k \in \mathbb{N}$ e $s \geqslant 0$. Como A é fechado, temos

$$\int_0^t V(s)Ex_k ds \in D(A)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e

$$A\int_0^t V(s)Ex_k ds = \int_0^t AV(s)Ex_k ds = \int_0^t EV(s)Ax_k ds = EV(t)Ex_k - tEx_k.$$

Mas então

$$D(A) \ni \int_0^t V(s)Ex_k ds \to \int_0^t V(s)Exds \quad \text{e} \quad A\int_0^t V(s)Ex_k ds \to EV(t)Ex - tEx,$$

e como A é fechado segue que

$$\int_0^t V(s)Exds \in D(A) \quad \text{e} \quad A\int_0^t V(s)Exds = EV(t)Ex - tEx.$$

□

Corolário 1.48. *Seja $\{V(t) : t \geqslant 0\}$ uma família integrável exponencialmente limitada de F em F_1 induzida por E satisfazendo* (1.24)*, com gerador A. Então para todos $x \in \ker E \oplus \overline{D(A)}$ e $t \geqslant 0$ temos*

$$EV(t)Ex = tEx + A\int_0^t V(s)Exds. \tag{1.28}$$

Demonstração. Veja que para $x \in \overline{D(A)}$ e $t \geqslant 0$, (1.28) segue da Proposição 1.47, e (1.28) é imediata para $x \in \ker E$. □

A partir de agora buscaremos uma adaptação para o (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001, Teorema 1.5.2). Separaremos a demonstração em alguns lemas e proposições para facilitar a compreensão, e o resumo de todos estes resultados culmina no Teorema 1.56. Para tanto, consideraremos $\{V(t) : t \geqslant 0\}$ uma família integrável generalizada (M,ω)-exponencialmente limitada de F em F_1 induzida por E, com gerador A e satisfazendo (1.24). Definimos

$$G_1 = \{x \in F_1 : [0,\infty) \ni t \mapsto V(t)Ex \in F_1 \text{ é continuamente diferenciável}\}, \tag{1.29}$$

e

$$U(t)z = \frac{d}{dt}V(t)Ex \quad \text{para todo } t \geqslant 0, \tag{1.30}$$

para $z = Ex \in G := EG_1$. Notemos que esta definição claramente não depende da escolha de $x \in G_1$. Além disso, para $x \in G_1$, denotaremos

$$S(t)x = U(t)Ex \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Lema 1.49. *G_1 é um subespaço vetorial fechado de F_1 (e portanto de X).*

Demonstração. Claramente G_1 é um subespaço vetorial de F_1 (e portanto de X). Para cada $t \geqslant 0$, $S(t)\colon G_1 \to F_1$ é um operador linear, e como $\{V(t)\colon t \geqslant 0\}$ satisfaz (1.24) temos

$$\|S(t)x\| \leqslant Me^{\omega t}\|E\|\|x\| \quad \text{para todos } x \in G_1 \text{ e } t \geqslant 0 \tag{1.31}$$

e

$$\|U(t)z\| \leqslant Me^{\omega t}\|z\| \quad \text{para todos } z \in EG_1 \text{ e } t \geqslant 0. \tag{1.32}$$

Assim, para $G_1 \ni x_n \to x \in X$ e $t \geqslant 0$ temos $x \in F_1$ (pois F_1 é fechado) e $\|S(t)x_n - S(t)x_m\| \leqslant Me^{\omega t}\|E\|\|x_n - x_m\|$, o que mostra que a sequência $\{S(t)x_n\}$ é de Cauchy em F_1, o que nos permite definir

$$F_1 \ni Q(t)x = \lim_{n\to\infty} S(t)x_n, \tag{1.33}$$

onde o limite é uniforme para t em intervalos limitados de $[0,\infty)$. Dado $\epsilon > 0$, podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2Me^{\omega t}\|E\|\|x_{n_0} - x\| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad \|S(t)x_{n_0} - Q(t)x\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Como $x_{n_0} \in G_1$, existe $\delta > 0$ tal que para $|h| < \delta$ e $t + h \geqslant 0$ temos

$$\frac{1}{h}\|V(t+h)Ex_{n_0} - V(t)Ex_{n_0} - hS(t)x_{n_0}\| < \frac{\epsilon}{3},$$

e, por (1.24), podemos assumir que $\delta > 0$ é tal que para $0 < h < \delta$ temos

$$\frac{1}{h}\|V(t+h) - V(t)\| \leqslant 2Me^{\omega t}\|E\|.$$

Deste modo para $0 < h < \delta$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\|V(t+h)Ex - V(t)Ex - hQ(t)x\| &\leqslant \frac{1}{h}\|V(t+h)E(x - x_{n_0}) - V(t)E(x - x_{n_0})\| \\
&\quad + \frac{1}{h}\|V(t+h)Ex_{n_0} - V(t)Ex_{n_0} - hS(t)x_{n_0}\| + \|S(t)x_{n_0} - Q(t)x\| \\
&\leqslant \frac{1}{h}\|V(t+h) - V(t)\|\|E\|\|x - x_{n_0}\| + \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Assim, a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto V(t)Ex$ é diferenciável à direita e

$$\frac{d^+}{dt}V(t)Ex = Q(t)x.$$

Mostremos agora que a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto Q(t)x$ é contínua. De fato, dado $\epsilon > 0$, como o limite em (1.33) é uniforme em limitados de $[0,\infty)$, sabemos que para $t \in [0,\infty)$ fixado e $|s| < 1$ com $t+s \geqslant 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{r\in[t-s,t+s]\cap[0,\infty)} \|S(r)x_{n_0} - Q(r)x\| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Para este n_0, como $x_{n_0} \in G_1$, a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto S(t)x_{n_0}$ é contínua e portanto existe $0 < \delta < 1$ tal que para $|s| < \delta$ com $t+s \geqslant 0$ temos

$$\|S(t+s)x_{x_0} - S(t)x_{n_0}\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim para $|s| < \delta$ com $t+s \geqslant 0$ temos

$$\begin{aligned} \|Q(t+s)x - Q(t)x\| &\leqslant \|Q(t+s)x - S(t+s)x_{n_0}\| \\ &\quad + \|S(t+s)x_{n_0} - S(t)x_{n_0}\| + \|S(t)x_{n_0} - Q(t)x\| < \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade desejada. Segue então do Lema de Dini (Lema A.6) que $[0,\infty) \ni t \mapsto V(t)Ex \in F_1$ é continuamente diferenciável. Portanto $x \in G_1$ com $S(t)x = Q(t)x$ para todo $t \geqslant 0$, e a prova está completa. □

Lema 1.50. *Com as hipóteses acima, para cada $s \geqslant 0$ e $z \in G$ temos $U(s)z \in G_1$ e $U(t)EU(s)z = U(t+s)z$ para $t \geqslant 0$.*

Demonstração. Para $z = Ex \in G$, com $x \in G_1$, sabemos que

$$V(t)EV(s)z = V(t)EV(s)Ex = \int_0^s \left[V(t+r)Ex - V(r)Ex\right] dr,$$

e para $x \in G_1$ diferenciando ambos os lados na variável s obtemos

$$V(t)EU(s)z = V(t+s)Ex - V(s)Ex.$$

Mas o lado direito desta expressão é continuamente diferenciável em t, e portanto $U(s)z \in G_1$ e

$$U(t)EU(s)z = \frac{d}{dt}V(t+s)Ex = U(t+s)z.$$

□

Ainda, do que fizemos acima, a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto U(t)x \in F_1$ é contínua para cada $x \in F$, e temos o seguinte resultado:

Proposição 1.51. *Considere a restrição $E\colon G_1 \to G$, que novamente denotaremos por E. Então $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo generalizado (M,ω)-exponencialmente limitado de G em G_1 induzido por E.*

Além disso, a família $\{S(t)\colon t \geqslant 0\}$ definida por $S(t) = U(t)E$ para $t \geqslant 0$ é um C_0-semigrupo degenerado em G_1.

Demonstração. Do que fizemos acima $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo generalizado de G em G_1 induzido por E. A (M,ω)-limitação exponencial segue de (1.32). Os resultados da Subseção 1.2.1 mostram a última afirmação. □

Lema 1.52. *Temos* $\ker E = \ker S(0)$.

Demonstração. Seja $x \in G_1$ com $Ex = 0$. Assim $V(t)Ex = 0$ para todo $t \geqslant 0$, o que nos dá $U(t)Ex = 0$ para todo $t \geqslant 0$. Em particular, $S(0)x = U(0)Ex = 0$.

Reciprocamente, se $S(0)x = 0$, como $S(t)x = S(t)S(0)x$ para todo $t \geqslant 0$ temos $S(t)x = 0$ para todo $t \geqslant 0$, isto é $U(t)Ex = 0$ para todo $t \geqslant 0$. Mas como A é o gerador de $\{V(t)\colon t \geqslant 0\}$, usando integração por partes chegamos em

$$R(\lambda)Ex = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)Exdt = 0,$$

e portanto $Ex = 0$, pois $R(\lambda)$ é inversível. □

Lema 1.53. $S(0)$ *é uma projeção em* G_1 *e* $G_1 = \ker E \oplus S(0)G_1$.

Demonstração. Temos $S(0) = S(0)S(0)$ e portanto $S(0)$ é uma projeção em G_1. Assim

$$G_1 = \ker S(0) \oplus S(0)G_1 = \ker E \oplus S(0)G_1,$$

onde na última igualdade usamos o lema anterior. □

Lema 1.54. *Considere o conjunto*

$$G_2 = \{x \in G_1 : [0,\infty) \ni t \mapsto S(t)x \in F \text{ é continuamente diferenciável}\}.$$

Então $S(0)G_1 \subset \overline{G_2}$.

Demonstração. Notemos que da Proposição 1.21, para $Y = S(0)G_1$, a família $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ dada por

$$T(t) = S(t)|_Y \text{ para cada } t \geqslant 0 \tag{1.34}$$

é um C_0-semigrupo em Y. Denotando por C o seu gerador infinitesimal, sabemos da Proposição 1.32 que $D(C^2)$ é denso em Y e $D(C^2) \subset G_2$. Deste modo

$$S(0)G_1 = Y = \overline{D(C^2)} \subset \overline{G_2}.$$

□

Lema 1.55. *Temos* $S(0)G_1 \subset \overline{D(A)}$ *e*

$$G_1 = \ker E \oplus \overline{D(A)}.$$

Demonstração. Como $V(t)Ex = 0$ para todo $x \in \ker E$, temos $\ker E \subset G_2$ e assim

$$G_1 = \ker E \oplus S(0)G_1 \subset \overline{G_2}.$$

Como $G_2 \subset G_1$, temos $\overline{G_2} \subset \overline{G_1} = G_1$, e portanto $G_1 = \overline{G_2}$. Para $x \in G_2$, temos

$$\lambda R(\lambda)Ex = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} S(t)xdt = S(0)x + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} S(t)xdt,$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, o segundo termo da soma tende a zero quando $\lambda \to \infty$ e portanto

$$S(0)x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda)Ex.$$

Da limitação uniforme dos operadores $\lambda R(\lambda)E$, a igualdade segue para todo $x \in \overline{G_2} = G_1$. Portanto $S(0)G_1 \subset \overline{D(A)}$.

Vamos agora considerar o conjunto $X_1 = R(\lambda)E\overline{D(A)}$ para $\lambda > \omega$, que não depende de λ, pela Proposição 1.9. Para $x \in D(A)$, temos $R(\lambda)(\lambda E - A)x = x$ e assim $R(\lambda)Ax = \lambda R(\lambda)Ex - x$. Se $x \in X_1$ e $x = R(\lambda)Ey$ então vale (1.28) com y no lugar de x, e após aplicarmos $R(\lambda)$ nesta equação (e usarmos o item (a) da Proposição 1.47) obtemos

$$V(t)Ex = tx + \lambda R(\lambda)E \int_0^t V(s)Eyds - \int_0^t V(s)Eyds,$$

o que nos dá

$$V(t)Ex = tx + \int_0^t V(s)E(\lambda x - y)ds. \tag{1.35}$$

Como o lado direito desta expressão é continuamente diferenciável, temos $x \in G_1$. Portanto $X_1 \subset G_1$.

Mas $X_1 = R(\lambda)E\overline{D(A)} \subset \overline{R(\lambda)ED(A)} \subset \overline{D(A)}$, e segue de (1.26) e do fato que X_1 não depende de λ, que $\overline{D(A)} \subset X_1$. Portanto $X_1 = \overline{D(A)}$, e assim $\overline{D(A)} \subset G_1$. Deste modo

$$\ker E \oplus \overline{D(A)} \subset G_1.$$

Deste modo, obtemos

$$G_1 = \ker S(0) \oplus S(0)G_1 = \ker E \oplus S(0)G_1 \subset \ker E \oplus \overline{D(A)} \subset G_1,$$

e o lema está provado. □

Com isto, enunciamos e demonstramos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 1.56. *Seja $\{V(t) : t \geqslant 0\}$ uma família integrável generalizada de F em F_1 induzida por E, (M, ω)-exponencialmente limitada satisfazendo (1.24) com gerador A, e defina o conjunto G_1 por (1.29). Então G_1 é um subespaço fechado de F_1, que coincide com $\ker E \oplus \overline{D(A)}$.*

Para $G = EG_1$, a família $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ definida por (1.30) é um C_0-semigrupo generalizado de G em G_1 induzido pela restrição $E \in \mathscr{L}(G_1, G)$. Além disso, para $x \in R(\lambda)E\overline{D(A)}$ temos $[0,\infty) \ni t \mapsto U(t)Ex$ continuamente diferenciável e

$$E\frac{d}{dt}U(t)Ex = AU(t)Ex \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Demonstração. Para concluir este resultado só nos resta mostrar a última afirmação. Veja que se $x \in R(\lambda)E\overline{D(A)}$ e $x = R(\lambda)Ey$, diferenciando (1.35) temos

$$U(t)Ex = \frac{d}{dt}V(t)Ex = x + V(t)E(\lambda x - y),$$

e como $\lambda x - y \in \overline{D(A)} \subset G_1$, segue que $[0,\infty) \ni t \mapsto U(t)Ex$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}U(t)Ex = U(t)E(\lambda x - y) = U(t)E(\lambda R(\lambda)Ey - y).$$

Como para $\lambda > \omega$ e $z \in G_1$ temos

$$R(\lambda)Ez = \int_0^\infty e^{-\lambda s}U(s)Ezdt,$$

obtemos para $y \in \overline{D(A)}$ e $\lambda > \omega$

$$U(t)ER(\lambda)Ey = \int_0^\infty e^{-\lambda s}U(t)EU(s)Ey = R(\lambda)EU(t)Ey.$$

Assim

$$\frac{d}{dt}U(t)Ex = (\lambda R(\lambda)E - I)U(t)Ey,$$

onde I é a identidade em G_1. Aplicando E em ambos os lados desta expressão e notando que $\lambda ER(\lambda)E - E = AR(\lambda)E$ obtemos

$$E\frac{d}{dt}U(t)Ex = AR(\lambda)EU(t)Ey = AU(t)ER(\lambda)Ey = AU(t)Ex.$$

□

1.5 EXEMPLO

Operadores $A\colon D(A) \subset X \to X$ que não são densamente definidos, mas são os geradores de um semigrupo 1-vez integrado exponencialmente limitado em X (veja (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001, Definição 1.2.1)), nos permitem construir semigrupos generalizados.

Um **semigrupo 1-vez integrado exponencialmente limitado** em X é uma família $\{W(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ satisfazendo:

SI1. para $t, s \geqslant 0$ temos

$$W(t)W(s) = \int_0^s [W(t+s) - W(r)]dr;$$

SI2. para cada $x \in X$, a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto W(t)x \in X$ é contínua;

SI3. existem $M \geqslant 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que $\|W(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ para todo $t \geqslant 0$;

Dizemos que A é o gerador de $\{W(t)\colon t \geqslant 0\}$ se para $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ temos $\lambda \in \rho(A)$ e

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} W(t)dt.$$

Segue do (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001, Teorema 1.2.2) que, nesse caso, temos

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k}(\lambda - A)^{-1} \right\| \leqslant \frac{Mk!}{(\lambda - \omega)^{k+1}} \quad \text{para } \lambda > \omega \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Considere $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado que gera um semigrupo 1-vez integrado exponencialmente limitado $\{W(t)\colon t \geqslant 0\}$ em X, com $\overline{D(A)} \subsetneq X$. Assuma que $\overline{D(A)}$ possui um complementar em X, isto é, existe um subsepaço vetorial fechado $Y \subset X$ tal que $X = Y \oplus \overline{D(A)}$. Podemos então considerar o operador $E \in \mathscr{L}(X)$, como sendo a projeção de X sobre $\overline{D(A)}$. Temos então $\ker E = Y$, $EX = \overline{D(A)}$ e $E^2 = E$. Assim, para $x \in D(A)$, temos

$$(\lambda E - A)x = (\lambda - A)x,$$

e, portanto, para $\lambda \in \rho(A) = \rho_E(A)$ temos $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$. Segue do Teorema 1.44 que A é o gerador de uma família integrável generalizada exponencialmente limitada $\{V(t)\colon t \geqslant 0\}$ em X induzida por E.

NOTAS

Neste capítulo estudamos a *teoria E-espectral* de operadores fechados $A\colon D(A) \subset F \to F_1$, onde F, F_1 são subespaços de um espaço de Banach X, com F_1 fechado. Também apresentamos as teorias de *C_0-semigrupos generalizados*, *famílias integráveis generalizadas* de F em F_1 induzidas por E, e seus *geradores*. Sabemos:

(a) que de um C_0-semigrupo generalizado $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ de F em F_1 somos capazes de definir uma família integrável generalizada, com mesmo gerador, via Teorema 1.40;

(b) encontrar condições necessárias e suficientes para que um operador A seja o gerador de uma família integrável generalizada, usando o Teorema 1.44;

(c) que de uma família integrável de F em F_1, podemos construir os espaços $G_1 = \ker E \oplus \overline{D(A)}$ e $G = EG_1$, e um C_0-semigrupo generalizado $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ de G em G_1 induzido pela restrição de E a estes espaços, de maneira que $x(t) = U(t)Ex$, $t \geqslant 0$, seja a solução de (1.1) para cada $x \in G_1$, que é a conclusão do Teorema 1.56. Tal construção estende o Teorema 1.26 de $D(A)$ para G_1, fato este que age como uma substituição à propriedade de densidade do domínio do gerador infinitesimal na teoria usual de semigrupos.

O trabalho apresentado neste capítulo foi baseado em (GE; ZHU; FENG, 2009), e contou com adaptações de vários resultados de (TAYLOR; LAY, 1986) para a parte de teoria E-espectral e de (ARENDT, 1987), (WIDDER, 1971) e (MELNIKOVA; FILINKOV, 2001) para a teoria de semigrupos generalizados e seus geradores. Além disso, muitos exemplos com aplicações desta teoria podem ser encontrados em (FAVINI; YAGI, 1999).

2 O CASO NÃO-LINEAR

Neste capítulo estudaremos a boa colocação do seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}Ex(t) = Ax(t),\ t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

num espaço de Banach X, onde E, A agora serão aplicações possivelmente não-lineares.

Como sabemos, a teoria não-linear é consideravelmente mais complicada do que a teoria linear, e sendo assim, conseguiremos resultados menos robustos.

2.1 TEORIA E-ESPECTRAL NÃO-LINEAR

Nesta seção apresentaremos resultados que nos serão úteis ao lidarmos com aplicações não-lineares E e A. Tais resultados nos lembram da teoria E-espectral de operadores lineares, apesar de não serem análogos imediatos.

Primeiramente dados um espaço de Banach X, com dual X^* e $x \in X$, a *dualidade de x* é o conjunto

$$W(x) = \{x^* \in X^* : \mathrm{Re}\langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Sabemos do Teorema de Hahn-Banach que $W(x) \neq \varnothing$ para cada $x \in X$.

No que segue, consideraremos X um espaço de Banach e F, F_1 subconjuntos não-vazios de X, com F_1 fechado.

Definição 2.1. Uma aplicação $B\colon D(B) \subset F_1 \to F$ (não necessariamente linear) é dita:

(a) **dissipativa** se dados $x, y \in D(B)$ existe $\xi \in W(x-y)$ tal que

$$\mathrm{Re}\langle Bx - By, \xi\rangle \leqslant 0.$$

(b) **não-expansiva** se

$$\|Bx - By\| \leqslant \|x - y\| \quad \text{para todos } x, y \in D(B).$$

Para $\omega \in \mathbb{R}$ definimos o intervalo real $I(\omega)$ por

$$I(\omega) = \begin{cases} (0, \omega^{-1}), & \text{se } \omega > 0, \\ (0, \infty), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $\lambda \in I(\omega)$ se, e somente se, $\lambda > 0$ e $\lambda\omega < 1$.

Definição 2.2. Considere aplicações $A\colon D(A) \subset F_1 \to F$ e $E\colon F_1 \to F$, e fixe $\omega \in \mathbb{R}$. Dizemos que $A \in C_E(\omega)$ se para todo $\lambda \in I(\omega)$ temos

(a) a aplicação $E-\lambda A\colon D(A)\subset F_1\to F$ é inversível;

(b) para a inversa $(E-\lambda A)^{-1}\colon F\to D(A)$ temos

$$\left\|(E-\lambda A)^{-1}x-(E-\lambda A)^{-1}y\right\|\leqslant\frac{1}{1-\lambda\omega}\|x-y\|\quad\text{para todos } x,y\in F.$$

Observação 2.3. Na definição acima, podemos considerar o cenário levemente mais geral no qual $E-\lambda A\colon D(A)\subset F_1\to F$ é injetora e o item (b) vale para a inversa $(E-\lambda A)^{-1}\colon \mathrm{Im}(E-\lambda A)\to D(A)$. Os resultados que seguem continuam válidos neste cenário com pequenos ajustes nos espaços (veja (GE; FENG, 2013)), mas por simplicidade de notação decidimos adicionar a hipótese de que $\mathrm{Im}(E-\lambda A)=F$ para todo $\lambda\in I(\omega)$.

A seguir, mostraremos algumas propriedades importantes das aplicações $(E-\lambda A)^{-1}$, para $A\in C_E(\omega)$ e $\lambda\in I(\omega)$.

Proposição 2.4 (Identidade do resolvente não-linear)**.** *Considere $A\in C_E(\omega)$. Para $\lambda,\mu\in I(\omega)$ e $x\in F$ e temos*

$$(E-\lambda A)^{-1}x=(E-\mu A)^{-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}E(E-\lambda A)^{-1}x\right).$$

Demonstração. Como $x\in F$, existe um único $y\in D(A)$ tal que $(E-\lambda A)y=x$. Portanto

$$\begin{aligned}(E-\mu A)^{-1}&\left(\frac{\mu}{\lambda}(E-\lambda A)y+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}E(E-\lambda A)^{-1}(E-\lambda A)y\right)\\&=(E-\mu A)^{-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}(E-\lambda A)y+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}Ey\right)=(E-\mu A)^{-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}Ey-\mu Ay+Ey-\frac{\mu}{\lambda}Ey\right)\\&=(E-\mu A)^{-1}(E-\mu A)y=y.\end{aligned}$$

Como $y=(E-\lambda A)^{-1}x$, o resultado segue. $\square$

Proposição 2.5. *Considere uma aplicação não-expansiva $E\colon F_1\to F$ e $A\colon D(A)\subset F_1\to F$. Se $A\in C_E(\omega)$ então:*

(i) para todos $x,y\in F_1$ e $\lambda\in I(\omega)$ temos

$$\left\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-(E-\lambda A)^{-1}Ey\right\|\leqslant\frac{1}{1-\lambda\omega}\|x-y\|;$$

(ii) para cada $\lambda\in I(\omega)$, a aplicação

$$F_1\ni x\mapsto G_\lambda x=\frac{1}{\lambda}\left((E-\lambda A)^{-1}Ex-x\right)\in F_1$$

é Lipschitz contínua. Se $\omega=0$, ela também é dissipativa;

(iii) para $x\in D(A)$ e $\lambda\in I(\omega)$ temos

$$\left\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-x\right\|\leqslant\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}\|Ax\|;\tag{2.2}$$

e

$$\lim_{\lambda\to0^+}(E-\lambda A)^{-1}Ex=x.\tag{2.3}$$

Demonstração. (i) Como $A \in C_E(\omega)$ e E é não-expansiva, para todos $x, y \in F_1$ temos

$$\left\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-(E-\lambda A)^{-1}Ey\right\| \leqslant \frac{1}{1-\lambda\omega}\|Ex-Ey\| \leqslant \frac{1}{1-\lambda\omega}\|x-y\|.$$

(ii) Para $x, y \in F_1$ temos

$$\begin{aligned}\|G_\lambda x-G_\lambda y\| &\leqslant \frac{1}{\lambda}\big(\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-(E-\lambda A)^{-1}y\|+\|x-y\|\big)\\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{1}{1-\lambda\omega}+1\Big)\|x-y\|,\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o item (i).

Agora assuma que $\omega=0$. Para todos $x, y \in F_1$ temos

$$\left\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-(E-\lambda A)^{-1}Ey\right\| \leqslant \|x-y\|,$$

e logo para cada $\xi \in W(x-y)$ obtemos

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\langle G_\lambda x-G_\lambda y,\xi\rangle\\ &\quad=\frac{1}{\lambda}\Big(\mathrm{Re}\langle (E-\lambda A)^{-1}Ex-(E-\lambda A)^{-1}Ey,\xi\rangle-\mathrm{Re}\langle x-y,\xi\rangle\Big)\\ &\quad=\frac{1}{\lambda}\Big(\mathrm{Re}\langle (E-\lambda A)^{-1}Ex-((E-\lambda A)^{-1}Ey,\xi\rangle-\|x-y\|^2\Big)\\ &\quad\leqslant\frac{1}{\lambda}\Big(\left\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-((E-\lambda A)^{-1}Ey\right\|\|\xi\|-\|x-y\|^2\Big)\\ &\quad\leqslant\frac{1}{\lambda}\Big(\|x-y\|^2-\|x-y\|^2\Big)=0.\end{aligned}$$

Isto prova, em particular, que G_λ é dissipativa.

(iii) Notando que $x=(E-\lambda A)^{-1}(E-\lambda A)x$ temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\left\|((E-\lambda A)^{-1}Ex-x\right\| &= \frac{1}{\lambda}\left\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-(E-\lambda A)^{-1}(E-\lambda A)x\right\|\\ &\leqslant \frac{1}{\lambda(1-\lambda\omega)}\|Ex-(E-\lambda A)x\| = \frac{1}{1-\lambda\omega}\|Ax\|,\end{aligned}$$

o que prova (2.2). Fazendo $\lambda\to 0^+$ em (2.2) obtemos (2.3). □

Proposição 2.6. *Sejam E não-expansiva e $A \in C_E(\omega)$. Então para todos $x, y \in F_1$, $\lambda \in I(\omega)$ e $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$\left\|((E-\lambda A)^{-1}E)^n x-((E-\lambda A)^{-1}E)^n y\right\| \leqslant \frac{1}{(1-\lambda\omega)^n}\|x-y\|; \tag{2.4}$$

e

$$\left\|((E-\lambda A)^{-1}E)^n x-x\right\| \leqslant \frac{n}{(1-\lambda\omega)^{n-1}}\left\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-x\right\|, \tag{2.5}$$

Demonstração. Provemos (2.4) por indução sobre $n \in \mathbb{N}$. O caso $n=0$ é trivial e o caso $n=1$ segue da Proposição 2.5. Como hipótese de indução assumimos que

$$\|((E-\lambda A)^{-1}E)^n x-((E-\lambda A)^{-1}E)^n y\| \leqslant \frac{1}{(1-\lambda\omega)^n}\|x-y\|.$$

Assim, da Proposição 2.5, temos

$$\|((E-\lambda A)^{-1}E)^{n+1}x-((E-\lambda A)^{-1}E)^{n+1}y\| \leqslant \frac{1}{1-\lambda\omega}\|((E-\lambda A)^{-1}E)^{n}x-((E-\lambda A)^{-1}E)^{n}y\|,$$

o que, juntamente com a hipótese de indução, prova (2.4).

Para provar (2.5), primeiro vejamos que, de (2.4), para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}\big\|((E-\lambda A)^{-1}E)^{k+1}x-((E-\lambda A)^{-1}E)^{k}x\big\| &\\ = \big\|(E-\lambda A)^{-1}E)^{k}(E-\lambda A)^{-1}Ex-((E-\lambda A)^{-1}E)^{k}x\big\| &\\ \leqslant \frac{1}{(1-\lambda\omega)^{k}}\big\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-x\big\|.&\end{aligned} \tag{2.6}$$

Assim

$$\begin{aligned}\big\|((E-\lambda A)^{-1}E)^{n}x-x\big\| &= \Big\|\sum_{k=0}^{n-1}\big[((E-\lambda A)^{-1}E)^{n-k}x-((E-\lambda A)^{-1}E)^{n-k-1}x\big]\Big\|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\big\|((E-\lambda A)^{-1}E)^{n-k}x-((E-\lambda A)^{-1}E)^{n-k-1}x\big\|\\ &\overset{(2.6)}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(1-\lambda\omega)^{n-k-1}}\big\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-x\big\|\\ &= \frac{1}{(1-\lambda\omega)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(1-\lambda\omega)^{k}\big\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-x\big\| \leqslant \frac{n}{(1-\lambda\omega)^{n-1}}\big\|(E-\lambda A)^{-1}Ex-x\big\|,\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $0<1-\lambda\omega<1$. □

Proposição 2.7. *Sejam E não-expansiva e $A \in C_E(\omega)$. Então para todos $x \in F_1$, $\lambda,\mu \in I(\omega)$ com $\lambda \geqslant \mu$ e $n \geqslant m > 0$ inteiros temos*

$$\begin{aligned}\|((E-\mu A)^{-1}E)^{n}x-((E-\lambda A)^{-1}E)^{m}x\| &\\ \leqslant (1-\mu\omega)^{-n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\alpha^{k}\beta^{n-k}\|((E-\lambda A)^{-1}E)^{m-k}x-x\| &\\ +\sum_{k=m}^{n}(1-\mu\omega)^{-k}\binom{k-1}{m-1}\alpha^{m}\beta^{k-m}\|((E-\mu A)^{-1}E)^{n-k}x-x\|,&\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $\alpha=\mu/\lambda$, $\beta=(\lambda-\mu)/\lambda$.

Demonstração. Defina $a_{k,i}=\|((E-\mu A)^{-1}E)^{i}x-((E-\lambda A)^{-1}E)^{k}x\|$ para $0\leqslant i\leqslant n$ e $0\leqslant k\leqslant m$. Para $i,k>0$, note que

$$a_{k,i}=\|(E-\mu A)^{-1}E((E-\mu A)^{-1}E)^{i-1}x-(E-\lambda A)^{-1}E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x\|,$$

e da Proposição 2.4 temos

$$\begin{aligned}&(E-\lambda A)^{-1}E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x\\ &=(E-\mu A)^{-1}\Big(\frac{\mu}{\lambda}E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}E(E-\lambda A)^{-1}E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x\Big).\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}a_{k,i} &= \|(E-\mu A)^{-1}\underbrace{E((E-\mu A)^{-1}E)^{i-1}x}_{=:\,x_1}\\ &-(E-\mu A)^{-1}\underbrace{\Big(\frac{\mu}{\lambda}E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}E(E-\lambda A)^{-1}E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x\Big)}_{=:\,x_2}\|,\end{aligned}$$

e como $A\in C_E(\omega)$ e $\mu\in I(\omega)$ obtemos

$$a_{k,i}=\|(E-\mu A)^{-1}x_1-(E-\mu A)^{-1}x_2\|\leqslant(1-\mu\omega)^{-1}\|x_1-x_2\|,$$

ou seja

$$\begin{aligned}a_{k,i} &\leqslant (1-\mu\omega)^{-1}\|E((E-\mu A)^{-1}E)^{i-1}x\\ &-(\frac{\mu}{\lambda}E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}E(E-\lambda A)^{-1}E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x\Big)\|\\ &=(1-\mu\omega)^{-1}\|\qquad\underbrace{E((E-\mu A)^{-1}E)^{i-1}x}_{=\frac{\mu}{\lambda}E((E-\mu A)^{-1}E)^{i-1}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}E((E-\mu A)^{-1}E)^{i-1}x}\\ &-\frac{\mu}{\lambda}E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x-\frac{\lambda-\mu}{\lambda}E\underbrace{(E-\lambda A)^{-1}E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x}_{=((E-\lambda A)^{-1}E)^{k}x}\|.\end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}a_{k,i} &\leqslant (1-\mu\omega)^{-1}\frac{\mu}{\lambda}\|E((E-\mu A)^{-1}E)^{i-1}x-E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x\|\\ &\quad+(1-\mu\omega)^{-1}\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\|E((E-\mu A)^{-1}E)^{i-1}x-E((E-\lambda A)^{-1}E)^{k}x\|\\ &\overset{(\star)}{\leqslant}(1-\mu\omega)^{-1}\frac{\mu}{\lambda}\|((E-\mu A)^{-1}E)^{i-1}x-((E-\lambda A)^{-1}E)^{k-1}x\|\\ &\quad+(1-\mu\omega)^{-1}\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\|((E-\mu A)^{-1}E)^{i-1}x-((E-\lambda A)^{-1}E)^{k}x\|\\ &=(1-\mu\omega)^{-1}\frac{\mu}{\lambda}a_{k-1,i-1}+(1-\mu\omega)^{-1}\frac{\lambda-\mu}{\lambda}a_{k,i-1},\end{aligned}$$

onde em $(\star)$ usamos o fato de que E é não-expansiva. Logo

$$a_{k,i}\leqslant(1-\mu\omega)^{-1}\alpha a_{k-1,i-1}+(1-\mu\omega)^{-1}\beta a_{k,i-1},$$

onde $\alpha=\mu/\lambda$ e $\beta=(\lambda-\mu)/\lambda$. A demonstração agora segue do Lema A.7, com $(1-\mu\omega)^{-1}\alpha$ e $(1-\mu\omega)^{-1}\beta$ no lugar de α e β, respectivamente. □

2.2 SEMIGRUPOS GENERALIZADOS NÃO-LINEARES

Nesta seção discutiremos brevemente a teoria de semigrupos generalizados não-lineares, a fim de encontrar soluções para o problema (2.1).

Definição 2.8. Sejam X um espaço de Banach, $F, F_1 \subset X$ não-vazios, com F_1 fechado em X, e $E\colon F_1 \to F$ uma aplicação contínua (possivelmente não-linear). Um **semigrupo generalizado (não-linear)** de F em F_1 induzido por E, é uma família de aplicações $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$, com $U(t)\colon F \to F_1$ contínua para cada $t \geqslant 0$, que satisfaz:

$$U(t+s) = U(t)EU(s) \quad \text{para todos } t, s \geqslant 0.$$

Quando $\lim\limits_{t\to 0^+} \|U(t)x - U(0)x\| = 0$ para cada $x \in F$, dizemos que $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um **semigrupo generalizado fortemente contínuo**.

Dizemos que $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é **de tipo** (M,ω) se existem $M \geqslant 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|U(t)x - U(t)y\| \leqslant Me^{\omega t}\|x - y\| \quad \text{para todos } t \geqslant 0 \text{ e } x, y \in F.$$

Em particular, se $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é de tipo $(1,0)$ diremos que ele é um **semigrupo generalizado de contrações**.

Proposição 2.9. *Considere* $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ *um semigrupo generalizado fortemente contínuo de tipo* (M,ω) *de* F *em* F_1 *induzido por* E*. Assuma que* $E\colon F_1 \to F$ *é Lipschitz contínua com constante* $L \geqslant 0$*. Então para cada* $x \in F$ *a aplicação* $[0,\infty) \ni t \mapsto U(t)x \in F_1$ *é contínua.*

Demonstração. Note que para $t \geqslant 0$ fixado e $h > 0$ temos $U(t+h)x - U(t)x = U(h)EU(t)x - U(0)EU(t)x$ e como $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é fortemente contínuo, tomando $y = EU(t)x \in F$, temos

$$\|U(t+h)x - U(t)x\| = \|U(h)y - U(0)y\| \to 0 \quad \text{quando } h \to 0^+.$$

Agora veja que para $t \geqslant 0$ fixo e $h > 0$ tal que $t - h \geqslant 0$ temos $U(t-h)x - U(t)x = U(t-h)EU(0)x - U(t-h)EU(h)x$. Assim, do fato de $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ ser do tipo (M,ω) e E ser Lipschitz contínua com constante L obtemos

$$\|U(t-h)x - U(t)x\| \leqslant MLe^{\omega(t-h)}\|U(h)x - U(0)x\| \to 0 \quad \text{quando } h \to 0^+,$$

o que completa a demonstração. □

Para a teoria não-linear é mais conveniente trabalhar com o conceito de *gerador infinitesimal*, análogo ao da Definição 1.33 para o caso linear.

Definição 2.10. Para um semigrupo generalizado $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ de F em F_1 induzido por E, o operador $B\colon D(B) \subset F_1 \to F$ definido por

$$D(B) = \left\{ x \in F\colon U(0)Ex = x \text{ e } \lim_{h\to 0^+} \frac{EU(h)Ex - EU(0)Ex}{h} \text{ existe} \right\},$$

e para $x \in D(B)$

$$Bx = \lim_{h\to 0^+} \frac{EU(h)Ex - Ex}{h},$$

é chamado de **gerador infinitesimal** de $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$.

Observação 2.11. Note que, como no caso linear (veja Teorema 1.35), se $x \in D(A)$ então para cada $t \geqslant 0$ temos $U(t)Ex \in D(A)$ e $AU(t)Ex = EU(t)Ax$.

Lema 2.12. *Suponha que X é um espaço de Banach, F, F_1 subconjuntos não-vazios de X, $E\colon F_1 \to F$ uma aplicação não-expansiva e $A \in C_E(\omega)$. Então*

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(\left(E - \frac{t}{n}A\right)^{-1} E\right)^n y \tag{2.8}$$

existe para cada $x = Ey$ com $y \in D(A)$, uniformemente para t intervalos compactos de $(0,\infty)$. Além disso, para $t, s > 0$ e $y \in D(A)$ temos

$$\|U(t)Ey - U(s)Ey\| \leqslant |t-s|\left(e^{2|\omega|(t+s)} + e^{2|\omega|t}\right)\|Ay\|. \tag{2.9}$$

Demonstração. Primeiramente, tome $x \in E(D(A))$ e $y \in D(A)$ tal que $Ey = x$. Considere $n \geqslant m > 0$ inteiros e $\lambda \geqslant \mu > 0$ com $\lambda|\omega| \leqslant 1/2$. Vemos que $\lambda, \mu \in I(\omega)$, e da Proposição 2.7 temos

$$\begin{aligned}
&\left\|((E-\mu A)^{-1}E)^n y - ((E-\lambda A)^{-1}E)^m y\right\| \\
&\qquad \leqslant (1-\mu\omega)^{-n} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \left\|((E-\lambda A)^{-1}E)^{m-k} y - y\right\| \\
&\qquad\quad + \sum_{k=m}^{n} (1-\mu\omega)^{-k} \binom{k-1}{m-1} \alpha^m \beta^{k-m} \left\|((E-\mu A)^{-1}E)^{n-k} y - y\right\|.
\end{aligned}$$

Das Proposições 2.6 e 2.5 (iii), e como $1-\lambda\omega \geqslant 1-\lambda|\omega| > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|((E-\lambda A)^{-1}E)^{m-k} y - y\right\| &\leqslant \frac{m-k}{(1-\lambda\omega)^{m-k-1}} \left\|(E-\lambda A)^{-1}Ey - y\right\| \\
&\leqslant \frac{\lambda(m-k)}{(1-\lambda\omega)^{m-k}}\|Ay\| \leqslant \frac{\lambda(m-k)}{(1-\lambda|\omega|)^{m-k}}\|Ay\|,
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\left\|((E-\mu A)^{-1}E)^{n-k} y - y\right\| \leqslant \frac{\mu(n-k)}{(1-\mu|\omega|)^{n-k}}\|Ay\|.$$

Denotando $a_{n,m} = \|((E-\mu A)^{-1}E)^n y - ((E-\lambda A)^{-1}E)^m y\|$, obtemos

$$\begin{aligned}
a_{n,m} &\leqslant \frac{1}{(1-|\mu\omega|)^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \frac{\lambda(m-k)}{(1-\lambda|\omega|)^{m-k}}\|Ay\| \\
&\quad + \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{(1-\mu|\omega|)^k} \binom{k-1}{m-1} \alpha^m \beta^{k-m} \frac{\mu(n-k)}{(1-\mu|\omega|)^{n-k}}\|Ay\| \\
&= \frac{\lambda}{(1-\mu|\omega|)^n (1-\lambda|\omega|)^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} (m-k)(1-\lambda|\omega|)^k \|Ay\| \\
&\quad + \frac{\mu}{(1-\mu|\omega|)^n} \sum_{k=m}^{n} \binom{k-1}{m-1} \alpha^m \beta^{k-m} (n-k)\|Ay\|.
\end{aligned}$$

Como $0<1-\lambda|\omega|<1$ temos

$$a_{n,m}\leqslant\frac{\lambda}{(1-\mu\omega)^n(1-\lambda\omega)^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}(m-k)\|Ay\|$$
$$+\frac{\mu}{(1-\mu|\omega|)^n}\sum_{k=m}^{n}\binom{k-1}{m-1}\alpha^m\beta^{k-m}(n-k)\|Ay\|.$$

Do Lema A.10 sabemos que

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}(m-k)\leqslant((n\alpha-m)^2+n\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k-1}{m-1}\alpha^m\beta^{k-m}(n-k)\leqslant(m\beta/\alpha^2+(m\beta/\alpha+m-n)^2)^{\frac{1}{2}},$$

e portanto

$$a_{n,m}\leqslant[\lambda(1-\mu|\omega|)^{-n}(1-\lambda|\omega|)^{-m}((n\alpha-m)^2+n\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\mu(1-\mu|\omega|)^{-n}(m\beta/\alpha^2+(m\beta/\alpha+m-n)^2)^{\frac{1}{2}}]\|Ay\|.$$

Notando que para $0\leqslant p\leqslant 1/2$ temos $(1-p)^{-n}\leqslant e^{2np}$ para cada $n\in\mathbb{N}$ segue que

$$a_{n,m}\leqslant[\lambda e^{2|\omega|(n\mu+m\lambda)}((n\alpha-m)^2+n\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\mu e^{2n\mu|\omega|}(m\beta/\alpha^2+(m\beta/\alpha+m-n)^2)^{\frac{1}{2}}]\|Ay\|,$$

e lembrando que $\alpha=\frac{\mu}{\lambda}$ e $\beta=\frac{\lambda-\mu}{\lambda}$, obtemos

$$\begin{aligned}a_{n,m}\leqslant[&e^{2|\omega|(n\mu+m\lambda)}((n\mu-m\lambda)^2+n\mu(\lambda-\mu))^{\frac{1}{2}}\\&+e^{2n\mu|\omega|}((n\mu-m\lambda)^2+m\lambda(\lambda-\mu))^{\frac{1}{2}}]\|Ay\|.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Assim, para $t>0$, tomando $\mu=\frac{t}{n}$ e $\lambda=\frac{t}{m}$ em (2.10) obtemos

$$\left\|\left(\left(E-\frac{t}{n}A\right)^{-1}E\right)^n y-\left(\left(E-\frac{t}{m}A\right)^{-1}E\right)^m y\right\|\leqslant 2t\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}e^{4t|\omega|}\|Ay\|,$$

garantindo que

$$L(y):=\lim_{n\to\infty}\left(\left(E-\frac{t}{n}A\right)^{-1}E\right)^n y$$

existe, uniformemente para t em intervalos compactos de $(0,\infty)$. Como

$$L(y)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(E-\frac{t}{n}A\right)^{-1}E\right)^{n-1}\left(E-\frac{t}{n}A\right)^{-1}Ey,$$

vemos claramente que se $y_1,y_2\in D(A)$ são tais que $Ey_1=Ey_2$ então $L(y_1)=L(y_2)$. Isto nos permite definir

$$U(t)x=\lim_{n\to\infty}\left(\left(E-\frac{t}{n}A\right)^{-1}E\right)^n y,$$

para cada $x \in E(D(A))$.

Por fim, considerando $s \geqslant t > 0$, $n = m$, $\mu = \frac{t}{n}$ e $\lambda = \frac{s}{n}$ em (2.10), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\left(E - \frac{t}{n} A \right)^{-1} E \right)^n y - \left(\left(E - \frac{s}{n} A \right)^{-1} E \right)^n y \right\| \\
&\quad \leqslant \left\{ e^{2(t+s)|\omega|} \left[(t-s)^2 + t\left(\frac{s-t}{n} \right) \right]^{\frac{1}{2}} + e^{2t|\omega|} \left[(t-s)^2 + s\left(\frac{s-t}{n} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \|Ay\|,
\end{aligned}$$

e fazendo $n \to \infty$ obtemos (2.9). □

Como $(E - \lambda A)^{-1} Ey \in D(A)$ para todos $y \in D(A)$ e $\lambda \in I(\omega)$, obtemos $U(t)x \in \overline{D(A)}$ para todo $x \in E(D(A))$.

Lema 2.13. *Nas condições do Lema 2.12, o limite*

$$U(0)x = \lim_{t \to 0^+} U(t)x \tag{2.11}$$

existe para cada $x \in E(D(A))$. Além disso, para cada $t \geqslant 0$, dados $x_1, x_2 \in E(D(A))$ temos

$$\|U(t)x_1 - U(t)x_2\| \leqslant e^{\omega t} \|x_1 - x_2\|. \tag{2.12}$$

Mais ainda, para $y \in D(A)$, temos $U(0)Ey = y$.

Demonstração. Segue diretamente de (2.9) que para cada $x = Ey \in E(D(A))$ o limite em (2.11) existe. Ainda, como $A \in C_E(\omega)$ e E é não-expansiva, para $x_1 = Ey_1$ e $x_2 = Ey_2$ com $y_1, y_2 \in D(A)$ e $\lambda \in I(\omega)$, da Proposição 2.6 temos

$$\begin{aligned}
&\left\| ((E - \lambda A)^{-1} E)^n y_1 - ((E - \lambda A)^{-1} E)^n y_2 \right\| \\
&\quad = \left\| ((E - \lambda A)^{-1} E)^{n-1} (E - \lambda A)^{-1} E y_1 - ((E - \lambda A)^{-1} E)^{n-1} (E - \lambda A)^{-1} E y_2 \right\| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{(1 - \lambda\omega)^{n-1}} \left\| (E - \lambda A)^{-1} E y_1 - (E - \lambda A)^{-1} E y_2 \right\| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{(1 - \lambda\omega)^n} \left\| E y_1 - E y_2 \right\| = \frac{1}{(1 - \lambda\omega)^n} \|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Para $t > 0$, tomando $\lambda = \frac{t}{n}$ e fazendo $n \to \infty$ obtemos (2.12). Para $t = 0$, basta tomar o limite de $t \to 0^+$ em (2.12).

Para provar a última afirmação, veja que de (2.5) e (2.2) para $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande obtemos

$$\left\| ((E - \frac{t}{n} A)^{-1} E)^n y - y \right\| \leqslant \frac{t}{(1 - \frac{t\omega}{n})^n} \|Ay\|.$$

Fazendo $n \to \infty$ segue que

$$\left\| U(t)Ey - y \right\| \leqslant t e^{\omega t} \|Ay\|,$$

e o resultado segue fazendo $t \to 0^+$. □

Lema 2.14. *Nas condições do Lema 2.12, para cada $t \geqslant 0$ podemos estender continuamente $U(t)$ a $E(\overline{D(A)})$ de maneira que (2.12) seja válida para todos $x_1, x_2 \in E(\overline{D(A)})$.*

Demonstração. Sejam $x \in E(\overline{D(A)})$ e $y \in \overline{D(A)}$ com $x = Ey$. Se $\{y_n\} \subset D(A)$ é tal que $y_n \to y$, tomando $x_n = Ey_n$ definimos

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty} U(t)x_n. \tag{2.13}$$

Vejamos primeiramente que este limite existe. Note que $\|x_n - x\| = \|Ey_n - Ey\| \leqslant \|y_n - y\| \to 0$ quando $n \to \infty$, e portanto $\{U(t)x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $\overline{D(A)}$. Assim o limite acima está bem definido. Agora se $E(D(A)) \ni x_n^1 \to x_1$ e $E(D(A)) \ni x_n^2 \to x_2$ temos

$$\|U(t)x_n^1 - U(t)x_n^2\| \leqslant e^{\omega t}\|x_n^1 - x_n^2\|,$$

e fazendo $n \to \infty$ obtemos (2.12) para $x_1, x_2 \in E(\overline{D(A)})$. □

Corolário 2.15. *Nas condições do Lema 2.12, para cada $t > 0$ e $x \in E(\overline{D(A)})$, com $x = Ey$ e $y \in \overline{D(A)}$, temos*

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(\left(E - \frac{t}{n}A\right)^{-1}E\right)^n y.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $y_\epsilon \in D(A)$ tal que $\|y - y_\epsilon\| < \epsilon$. Definindo $x_\epsilon = Ey_\epsilon$, temos $\|x_\epsilon - x\| < \epsilon$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ temos

$$\left\|U(t)x_\epsilon - \left(\left(E - \frac{t}{n}A\right)^{-1}E\right)^n y_\epsilon\right\| < \epsilon.$$

Deste modo, para $n \geqslant n_0$ obtemos

$$\begin{aligned}\left\|U(t)x - \left(\left(E - \frac{t}{n}A\right)^{-1}E\right)^n y\right\| &\leqslant \|U(t)x - U(t)x_\epsilon\| \\ &\quad + \left\|U(t)x_\epsilon - \left(\left(E - \frac{t}{n}A\right)^{-1}E\right)^n y_\epsilon\right\| + \left\|\left(\left(E - \frac{t}{n}A\right)^{-1}E\right)^n y_\epsilon - \left(\left(E - \frac{t}{n}A\right)^{-1}E\right)^n y\right\| \\ &\leqslant e^{\omega t}\|x - x_\epsilon\| + \epsilon + (1 - \frac{t\omega}{n})^{-n}\|y_\epsilon - y\| \leqslant C\epsilon,\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva que depende somente de t e ω, e o resultado está demonstrado. □

Note que dos lemas acima, definindo $U(t)$ por (2.8), (2.11) e (2.13) para cada $t \geqslant 0$, temos $U(t) \colon E(\overline{D(A)}) \to \overline{D(A)}$ contínua. Além disso, é fácil notar que das convergências acima, para cada $x \in E(\overline{D(A)})$, a aplicação $[0, \infty) \ni t \mapsto U(t)x \in \overline{D(A)}$ é contínua. Mais ainda, estes lemas nos permitem demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.16. *Nas condições do Lema 2.12, a família $\{U(t) \colon t \geqslant 0\}$ é um semigrupo generalizado fortemente contínuo de tipo $(1, \omega)$ de $G = E(\overline{D(A)})$ em $G_1 = \overline{D(A)}$ induzido pela restrição de E a G_1.*

Demonstração. Dos resultados provados acima, só nos resta provar que $U(t+s) = U(t)EU(s)$ para todos $t, s \geqslant 0$. Primeiramente, note que para cada $t > 0$, m inteiro positivo, e $x = Ey \in E(\overline{D(A)})$, aplicando a mudança de variável $k = n/m$, temos

$$U(mt)Ey = \lim_{n\to\infty}\Big(\Big(E-\frac{mt}{n}A\Big)^{-1}E\Big)^{n}y = \lim_{k\to\infty}\Big(\Big(E-\frac{t}{k}A\Big)^{-1}E\Big)^{km}y.$$

Afirmamos que para $t>0$ e m inteiro positivo, e $x = Ey \in E(\overline{D(A)})$ temos

$$(U(t)E)^m y = \lim_{k\to\infty}\Big(\Big(E-\frac{t}{k}A\Big)^{-1}E\Big)^{km}y.$$

Para simplificar a notação, denotemos por $T = U(t)E$ e $T_k = ((E-t/kA)^{-1}E)^k$. Assim queremos mostrar que $T_k^m y \to T^m y$ quando $k\to\infty$. O resultado é válido para $m=1$, e suponhamos que ele seja válido para m. Note que

$$\begin{aligned}\|T^{m+1}y - T_k^{m+1}y\| &= \|TT^m y - T_kT_k^m y\| \leqslant \|TT^m y - T_kT^m y\| + \|T_kT^m y - T_kT_k^m y\|\\ &\overset{(\star)}{\leqslant} \|TT^m y - T_kT^m y\| + (1-\tfrac{t\omega}{k})^{-k}\|T^m y - T_k^m y\|,\end{aligned}$$

e fazendo $k\to\infty$ obtemos o resultado, onde na primeira parcela usamos o fato de que $z = T^m y \in \overline{D(A)}$ e que $T_k z \to Tz$ quando $k\to\infty$, na segunda parcela usamos a hipótese de indução e na desigualdade $(\star)$ usamos (2.4).

Deste modo para $t = a/b$ e $s = c/d$, com a, b, c, d inteiros positivos, temos

$$\begin{aligned}U\Big(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\Big)Ey &= U\Big(\frac{ad+bc}{bd}\Big)Ey = \Big[U\Big(\frac{1}{bd}\Big)E\Big]^{ad+bc}y = \Big[U\Big(\frac{1}{bd}\Big)E\Big]^{ad}\Big[U\Big(\frac{1}{bd}\Big)E\Big]^{bc}y\\ &= U\Big(\frac{a}{b}\Big)EU\Big(\frac{c}{d}\Big)Ey.\end{aligned}$$

Portanto $U(t+s)Ey = U(t)EU(s)Ey$ para todos $t, s > 0$ racionais.

Para $t>0$ racional e $s=0$, temos $U(t+s)Ey = U(t)Ey$ e

$$U(t)EU(0)Ey = U(t)E\lim_{n\to\infty}U(1/n)Ey = \lim_{n\to\infty}U(t)EU(1/n)Ey = \lim_{n\to\infty}U(t+1/n)Ey = U(t)Ey,$$

uma vez que a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto U(t)Ey$ é contínua para cada $y \in \overline{D(A)}$ e a aplicação $\overline{D(A)} \ni y \mapsto U(t)Ey$ é Lipschitz contínua. Assim $U(t)Ey = U(t)EU(0)Ey$ para $t>0$. Fazendo $t\to 0^+$, obtemos também $U(0)Ey = U(0)EU(0)Ey$. Portanto $U(t+s)Ey = U(t)EU(s)Ey$ para todos $t, s \geqslant 0$ racionais.

Das continuidades especificadas acima, segue que $U(t+s)Ey = U(t)EU(s)Ey$ para todos $t, s \geqslant 0$. Como $y \in \overline{D(A)}$ é arbitrário, o resultado segue. □

2.2.1 Boa colocação no caso não-linear

Nesta subseção vamos encontrar condições para garantir a existência e unicidade de soluções do problema (2.1), usando a teoria de semigrupos generalizados.

Definição 2.17. Para $T>0$, dizemos que uma função $x\colon[0,T]\to X$ é uma **solução forte** de (2.1) se

(i) $x(0)=x_0$;

(ii) $[0,T]\ni t\mapsto x(t)\in X$ é contínua;

(iii) $x(t)\in D(A)$ para todo $t\in[0,T]$ e a aplicação $[0,T]\ni t\mapsto Ax(t)\in X$ é contínua;

(iv) $[0,T]\ni t\mapsto Ex(t)\in X$ é Lipschitz contínua;

(v) $[0,T]\ni t\mapsto Ex(t)\in X$ é diferenciável quase sempre em $[0,T]$ e

$$\frac{d}{dt}(Ex(t))=Ax(t) \quad \text{para quase todo } t\in[0,T].$$

Dizemos que uma função $x\colon[0,\infty)\to X$ é uma **solução forte** de (2.1) se para cada $T>0$ a restrição x_T de x ao intervalo $[0,T]$ (isto é, $x_T(t)=x(t)$ para $0\leqslant t\leqslant T$) é uma solução forte de (2.1) em $[0,T]$.

No que segue, assumiremos que X é um espaço de Banach que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{toda função Lipschitz contínua } y\colon[0,T]\to X \text{ é diferenciável quase sempre.} \tag{2.14}$$

De acordo com (GE; FENG, 2013), um espaço X satisfaz (2.14) se, e somente se, X satisfaz a propriedade de Radon-Nikodym. Em particular, se X é um espaço de Banach real reflexivo então ele satisfaz (2.14). Para a definição e resultados envolvendo a propriedade de Radon-Nikodym, recomendamos (RYAN, 2002).

Teorema 2.18. *Assuma que X seja um espaço de Banach satisfazendo (2.14), $F,F_1\subset X$ não vazios com F_1 fechado e $E\colon F_1\to F$ uma aplicação contínua não-expansiva. Considere um semigrupo generalizado fortemente contínuo $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$ de F em F_1 induzido por E, de tipo $(1,\omega)$ para algum $\omega\leqslant 0$, e com gerador infinitesimal $A\colon D(A)\subset F_1\to F$.*

Então para cada $x_0\in D(A)$ a função $x(t)=U(t)Ex_0$ é uma solução forte de (2.1).

Demonstração. Primeiramente notemos que $x(t)=U(t)Ex_0$ é contínua, pela Proposição 2.9. Agora provemos que para cada $x_0\in D(A)$ a função $[0,\infty)\ni t\mapsto Ex(t)\in F$ é Lipschitz contínua. Dado $h>0$, como E é não-expansiva e $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$ é de tipo $(1,\omega)$ temos

$$\begin{aligned}\|Ex(t+h)-Ex(t)\| &= \|EU(t+h)Ex_0-EU(t)Ex_0\|\\ &= \|EU(t)EU(h)Ex_0-EU(t)EU(0)Ex_0\|\\ &\leqslant \|U(t)EU(h)Ex_0-U(t)Ex_0\|\leqslant e^{\omega t}\|EU(h)Ex_0-Ex_0\|\\ &\leqslant \|EU(h)Ex_0-Ex_0\|.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Como A é o gerador infinitesimal de $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$, para $x_0\in D(A)$ temos $x(0)=U(0)Ex_0=x_0$ e

$$Ax_0=\lim_{\eta\to 0^+}\frac{EU(\eta)Ex_0-Ex_0}{\eta}.$$

Assim dado $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para $0\leqslant\eta<\delta$ temos

$$\big\|EU(\eta)Ex_0-Ex_0\big\|\leqslant(\epsilon+\|Ax_0\|)\eta. \tag{2.16}$$

Considere $0<\eta<\delta$ e k inteiro não-negativo tal que $k\eta\leqslant h<(k+1)\eta$. Assim $0\leqslant h-k\eta<\eta$ e temos

$$\begin{aligned}\big\|EU(h)Ex_0-Ex_0\big\|&\leqslant\big\|EU(h)Ex_0-EU(k\eta)Ex_0\big\|+\big\|EU(k\eta)Ex_0-Ex_0\big\|\\&=\big\|EU(k\eta)EU(h-k\eta)Ex_0-EU(k\eta)Ex_0\big\|+\big\|EU(k\eta)Ex_0-Ex_0\big\|.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora como E é não-expansiva, $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$ é de tipo $(1,\omega)$ com $\omega\leqslant 0$, e vale (2.16), segue que

$$\begin{aligned}\big\|EU(k\eta)EU(h-k\eta)Ex_0-EU(k\eta)Ex_0\big\|&\leqslant e^{\omega k\eta}\big\|EU(h-k\eta)Ex_0-Ex_0\big\|\\&\leqslant(\epsilon+\|Ax_0\|)(h-k\eta).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Além disso, veja que

$$EU(k\eta)Ex_0-Ex_0=\sum_{j=0}^{k-1}\big[EU((j+1)\eta)Ex_0-EU(j\eta)Ex_0\big],$$

e portanto

$$\begin{aligned}\big\|EU(k\eta)Ex_0-Ex_0\big\|&\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\big\|EU((j+1)\eta)Ex_0-EU(j\eta)Ex_0\big\|\\&\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}e^{\omega j\eta}\cdot\big\|EU(\eta)Ex_0-Ex_0\big\|\leqslant(\epsilon+\|Ax_0\|)k\eta.\end{aligned}$$

Assim, usando (2.15), obtemos $\|Ex(t+h)-Ex(t)\|\leqslant(\epsilon+\|Ax_0\|)h$, para todo $t\geqslant 0$ e $h>0$. Como $\epsilon>0$ é arbitrário, obtemos

$$\|Ex(t+h)-Ex(t)\|\leqslant\|Ax_0\|h.$$

Analogamente, para $t\geqslant 0$ e $h>0$ tal que $t-h\geqslant 0$, obtemos

$$\|Ex(t-h)-Ex(t)\|\leqslant\|Ax_0\|h,$$

o que conclui a prova de que $[0,\infty)\ni t\mapsto Ex(t)\in F$ é Lipschitz contínua.

Agora de (2.14) segue que a função $[0,\infty)\ni t\mapsto Ex(t)\in F$ é diferenciável quase sempre. Além disso, segue da Observação 2.11 que para $t\geqslant 0$ temos $x(t)=U(t)Ex_0\in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}Ex(t)=\frac{d}{dt}EU(t)Ex_0=\lim_{h\to 0^+}\frac{EU(t+h)Ex_0-EU(t)Ex_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{EU(h)EU(t)Ex_0 - EU(t)Ex_0}{h}$$
$$= AU(t)Ex_0,$$

para quase todo $t\in[0,\infty)$, ou seja, $\frac{d}{dt}Ex(t) = Ax(t)$ para quase todo $t\in[0,\infty)$.

Segue então que $x(t) = U(t)Ex_0$ é uma solução forte de (2.1), e a demonstração está completa. □

No que segue, buscaremos condições para obter a unicidade de soluções para o problema (2.1). Para isso, dados X um espaço de Banach, F, F_1 subconjuntos de X com F_1 fechado, $E\colon F_1 \to F$ uma aplicação não-expansiva e $A\colon D(A)\subset F_1 \to F$ com $A \in C_E(\omega)$ para algum $\omega\in\mathbb{R}$, definimos, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $x_0 \in D(A)$, a função auxiliar:

$$x_\epsilon(t) = \begin{cases} ((E-\epsilon A)^{-1}E)^{\lfloor t/\epsilon\rfloor}x_0 & \text{para } t \geqslant 0, \\ x_0 & \text{para } t<0. \end{cases}, \tag{2.19}$$

onde $\lfloor t/\epsilon\rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a t/ϵ. Estabeleceremos algumas propriedades de x_ϵ que serão fundamentais para o que segue.

Proposição 2.19. *Para cada $t>0$ temos*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} x_\epsilon(t) = U(t)Ex_0,$$

onde $\{U(t)\colon t\geqslant 0\}$ é dada por (2.8), com limite uniforme para intervalos compactos de $(0,\infty)$.

Demonstração. Para $t>0$ e $\epsilon>0$, escolha $n\in\mathbb{N}$ tal que $0<t/(n+1)<\epsilon\leqslant t/n$ (note que assim $\lfloor t/\epsilon\rfloor = n$). De (2.10) com $\lambda = t/n$, $\mu=\epsilon$, $m=n$ obtemos

$$\begin{aligned}&\left\|\left((E-\epsilon A)^{-1}E\right)^{\lfloor t/\epsilon\rfloor}x_0 - \left((E-\tfrac{t}{n}A)^{-1}E\right)^n x_0\right\| \\ &\leqslant \left[e^{2|\omega|(n\epsilon+t)}\left((n\epsilon-t)^2+\epsilon(t-\epsilon n)\right)^{1/2} + e^{2|\omega|n\epsilon}\left((n\epsilon-t)^2+\frac{t}{n}(t-\epsilon n)\right)^{1/2}\right]\|Ax_0\| \\ &\leqslant \left[e^{4|\omega|t}2^{1/2}\epsilon + e^{2|\omega|t}3^{1/2}\epsilon\right]\|Ax_0\| \leqslant 4e^{4|\omega|t}\epsilon\|Ax_0\|.\end{aligned}$$

Como $\epsilon\to 0^+$ se e só se $n\to\infty$, levando em conta (2.8) obtemos

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} x_\epsilon(t) = U(t)Ex_0,$$

com o limite uniforme para t em intervalos compactos de $(0,\infty)$. □

Proposição 2.20. *Para cada $t\geqslant\epsilon$ temos*

$$x_\epsilon(t) = (E-\epsilon A)^{-1}Ex_\epsilon(t-\epsilon)$$

Demonstração. Veja que $\lfloor (t-\epsilon)/\epsilon \rfloor = \lfloor t/\epsilon \rfloor - 1$. Assim para $t \geqslant \epsilon$ obtemos

$$x_\epsilon(t) = ((E-\epsilon A)^{-1}E)^{\lfloor t/\epsilon \rfloor} x_0 = (E-\epsilon A)^{-1} E((E-\epsilon A)^{-1}E)^{\lfloor t/\epsilon \rfloor - 1} x_0 = (E-\epsilon A)^{-1} E x_\epsilon(t-\epsilon).$$

□

Teorema 2.21. *Sejam X espaço de Banach, F, F_1 subconjuntos de X com F_1 fechado, $E \colon F_1 \to F$ uma aplicação não-expansiva e $A \colon D(A) \subset F_1 \to F$ com $A \in C_E(\omega)$ para algum $\omega \in \mathbb{R}$.*

Se $x(t)$ é uma solução forte de (2.1) em $[0,\infty)$ com $x_0 = x(0) \in D(A)$ então, para $\{U(t) \colon t \geqslant 0\}$ definido em (2.8), temos $x(t) = U(t)Ex_0$ para cada $t \geqslant 0$.

Demonstração. Fixemos $0 < \eta < T$. Para $0 < \epsilon < \eta$ e $t \in [\eta, T]$, definimos

$$h_\epsilon(t) = \frac{Ex(t) - Ex(t-\epsilon)}{\epsilon} - \frac{d}{dt}Ex(t)$$

Como $x(t)$ é uma solução forte de (2.1), para quase todo $t \in [\eta, T]$ temos $h_\epsilon(t) \to 0$ quando $\epsilon \to 0^+$ e $\frac{d}{dt}Ex(t) = Ax(t)$ para quase todo t em $[0,\infty)$, o que nos dá

$$h_\epsilon(t) = \frac{Ex(t) - Ex(t-\epsilon)}{\epsilon} - Ax(t) \quad \text{para quase todo } t \in [0,\infty). \tag{2.20}$$

Como $[0,T] \ni t \mapsto Ex(t) \in X$ é Lipschitz contínua e $[\eta, T] \ni t \mapsto Ax(t) \in X$ é contínua, temos h_ϵ mensurável (pois é igual quase sempre a uma função contínua) e segue de (2.20) que

$$\sup_{\epsilon > 0} \|h_\epsilon\|_{L^\infty(\eta,T;X)} < \infty,$$

e portanto o Teorema da Convergência Dominada nos dá

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\eta^T \|h_\epsilon(s)\| ds = 0. \tag{2.21}$$

Note que de (2.20) obtemos

$$x(t) = (E-\epsilon A)^{-1}[Ex(t-\epsilon) + \epsilon h_\epsilon(t)] \quad \text{para quase todo } t \in [\eta, T], \tag{2.22}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\|x_\epsilon(t) - x(t)\| &= \|(E-\epsilon A)^{-1} E x_\epsilon(t-\epsilon) - (E-\epsilon A)^{-1}[Ex(t-\epsilon) + \epsilon h_\epsilon(t)]\| \\
&\leqslant (1-\epsilon\omega)^{-1} \|Ex_\epsilon(t-\epsilon) - [Ex(t-\epsilon) + \epsilon h_\epsilon(t)]\| \\
&\leqslant (1-\epsilon\omega)^{-1} [\|Ex_\epsilon(t-\epsilon) - Ex(t-\epsilon)\| + \epsilon \|h_\epsilon(t)\|] \\
&\leqslant (1-\epsilon\omega)^{-1} [\|x_\epsilon(t-\epsilon) - x(t-\epsilon)\| + \epsilon \|h_\epsilon(t)\|],
\end{aligned}$$

quase sempre em $[\eta, T]$. Integrando esta última desigualdade em $[\eta, t]$ chegamos em

$$\int_\eta^t \|x_\epsilon(s) - x(s)\| ds \leqslant \frac{1}{1-\epsilon\omega} \int_\eta^t \|x_\epsilon(s-\epsilon) - x(s-\epsilon)\| ds + \frac{\epsilon}{1-\epsilon\omega} \int_\eta^t \|h_\epsilon(s)\| ds. \tag{2.23}$$

Reescrevendo o primeiro membro desta desigualdade obtemos

$$\int_{\eta}^{t}\|x_\epsilon(s)-x(s)\|ds=\int_{\eta}^{t-\epsilon}\|x_\epsilon(s)-x(s)\|ds+\int_{t-\epsilon}^{t}\|x_\epsilon(s)-x(s)\|ds.$$

Como

$$\int_{\eta}^{t-\epsilon}\|x_\epsilon(s)-x(s)\|ds=\int_{\eta+\epsilon}^{t}\|x_\epsilon(s-\epsilon)-x(s-\epsilon)\|ds,$$

temos que

$$\int_{\eta}^{t}\|x_\epsilon(s)-x(s)\|ds=\int_{\eta+\epsilon}^{t}\|x_\epsilon(s-\epsilon)-x(s-\epsilon)\|ds+\int_{t-\epsilon}^{t}\|x_\epsilon(s)-x(s)\|ds. \tag{2.24}$$

Substituindo (2.24) em (2.23) ficamos com

$$\begin{aligned}
&\int_{t-\epsilon}^{t}\|x_\epsilon(s)-x(s)\|ds\\
&\quad\leqslant\frac{1}{1-\epsilon\omega}\int_{\eta}^{t}\|x_\epsilon(s-\epsilon)-x(s-\epsilon)\|ds-\int_{\eta+\epsilon}^{t}\|x_\epsilon(s-\epsilon)-x(s-\epsilon)\|ds+\frac{\epsilon}{1-\epsilon\omega}\int_{\eta}^{T}\|h_\epsilon(s)\|ds\\
&\quad=\frac{\epsilon\omega}{1-\epsilon\omega}\int_{\eta+\epsilon}^{t}\|x_\epsilon(s-\epsilon)-x(s-\epsilon)\|ds+\frac{1}{1-\epsilon\omega}\int_{\eta}^{\eta+\epsilon}\|x_\epsilon(s-\epsilon)-x(s-\epsilon)\|ds\\
&\qquad\qquad+\frac{\epsilon}{1-\epsilon\omega}\int_{\eta}^{T}\|h_\epsilon(s)\|ds\\
&\quad=\frac{\epsilon\omega}{1-\epsilon\omega}\int_{\eta+\epsilon}^{t}\|x_\epsilon(s-\epsilon)-x(s-\epsilon)\|ds+\frac{1}{1-\epsilon\omega}\int_{\eta-\epsilon}^{\eta}\|x_\epsilon(s)-x(s)\|ds\\
&\qquad\qquad+\frac{\epsilon}{1-\epsilon\omega}\int_{\eta}^{T}\|h_\epsilon(s)\|ds
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon}\int_{t-\epsilon}^{t}\|x_\epsilon(s)-x(s)\|ds\\
&\quad\leqslant\frac{\omega}{1-\epsilon\omega}\int_{\eta+\epsilon}^{t}\|x_\epsilon(s)-x(s)\|ds+\frac{1}{1-\epsilon\omega}\cdot\frac{1}{\epsilon}\int_{\eta-\epsilon}^{\eta}\|x_\epsilon(s)-x(s)\|ds+\frac{1}{1-\epsilon\omega}\int_{\eta}^{T}\|h_\epsilon(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon\to 0^+$ na desigualdade acima e considerando a Proposição 2.19 e (2.21) obtemos

$$\|U(t)Ex_0-x(t)\|\leqslant\omega\int_{\eta}^{t}\|U(s)Ex_0-x(s)\|ds+\|U(\eta)Ex_0-x(\eta)\|, \tag{2.25}$$

para $t\in[\eta,T]$. Desta forma, fazendo $\eta\to 0$ obtemos

$$\|U(t)Ex_0-x(t)\|\leqslant\omega\int_{0}^{t}\|U(s)Ex_0-x(s)\|ds,$$

e o resultado segue facilmente. □

Este resultado nos dá a unicidade de soluções fortes com dado inicial em $D(A)$. Veremos a seguir um outro resultado de unicidade, envolvendo o conceito de *operador monótono*, mas que não é tão simples de ser aplicado na prática, pois possui hipóteses bastante restritivas.

Definição 2.22. Sejam X um espaço de Hilbert com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, F, F_1 subconjunto de X com F_1 fechado e $A\colon D(A)\subset F_1 \to F$ um operador (não necessariamente linear). Então dizemos que A é

(a) **monótono** se

$$\mathrm{Re}\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geqslant 0 \quad \text{para todos } x, y \in D(A);$$

(b) **estritamente monótono** se

$$\mathrm{Re}\langle Ax - Ay, x - y\rangle > 0 \quad \text{para todos } x, y \in D(A) \text{ com } x \neq y.$$

Teorema 2.23. *Considere X um espaço de Hilbert com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, F, F_1 subconjuntos de X com F_1 fechado, $E\colon F_1 \to F$ uma aplicação contínua e $A\colon D(A)\subset F_1 \to F$ um operador (não necessariamente linear). Assuma que ou A ou o operador dE/dt seja monótono, e que $-A$ é estritamente monótono. Se a solução de* (2.1) *existe, então ela é única.*

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 soluções de (2.1), e assuma que existe $t_0 \in [0,\infty)$ tal que $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$. Então como $-A$ é estritamente monónoto temos

$$\mathrm{Re}\langle -Ax_1(t_0) + Ax_2(t_0), x_1(t_0) - x_2(t_0)\rangle > 0,$$

o que nos dá

$$\mathrm{Re}\langle Ax_1(t_0) - Ax_2(t_0), x_1(t_0) - x_2(t_0)\rangle < 0.$$

Como $dE/dt = A$ sobre soluções, obtemos uma contradição com o fato de dE/dt ou A serem operadores monónotos. Portanto $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \geqslant 0$. □

NOTAS

Como esperado, o caso não-linear apresenta uma dificuldade muito maior do que o linear, e conseguimos mostrar somente alguns resultados análogos ao caso linear. Os resultados deste capítulo são baseados em (GE; FENG, 2013), com algumas modificações substanciais nas demonstrações, pois não fomos capazes de reproduzi-los da maneira como eles são apresentados. Ressaltamos que a teoria de semigrupos generalizados não-lineares possui poucos resultados na literatura atual, e representa um campo amplo, muito interessante, e com muitos problemas em aberto a serem resolvidos.

3 ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Neste capítulo discutiremos rapidamente o problema de *estabilidade exponencial* para semigrupos generalizados não-lineares. Mais precisamente, buscaremos algumas condições para garantir a estabilidade exponencial.

No que segue, como antes, consideraremos X um espaço de Banach, F, F_1 subconjuntos de X com F_1 fechado, $E\colon F_1 \to F$ uma aplicação contínua e $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ um semigrupo generalizado (possivelmente não-linear) de F em F_1 induzido por E.

Definição 3.1. Diremos que $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é **exponencialmente estável** se existem constantes $K \geqslant 1$ e $\alpha > 0$ tais que

$$\|U(t)x\| \leqslant Ke^{-\alpha t}\|x\| \quad \text{para todos } x \in F \text{ e } t \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Teorema 3.2. *Assuma que existam uma constante $M > 0$ tal que*

$$\|Ex\| \leqslant M\|x\| \quad \textit{para todo } x \in F, \tag{3.2}$$

e uma função contínua $g\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ tal que

$$\|U(t)x\| \leqslant g(t)\|x\| \quad \textit{para todo } x \in F. \tag{3.3}$$

Então $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é exponencialmente estável se, e somente se, existem $p > 0$ e $N > 0$ tais que

$$\int_0^\infty \|U(t)x\|^p dt \leqslant N^p\|x\|^p \quad \textit{para todos } x \in F \textit{ e } t \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Demonstração. Assuma que $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é exponencialmente estável e considere $p > 0$. De (3.1) obtemos

$$\|U(t)x\|^p \leqslant K^p e^{-\alpha pt}\|x\|^p \quad \text{para todos } x \in F \text{ e } t \geqslant 0.$$

Assim

$$\int_0^\infty \|U(t)x\|^p dt \leqslant \int_0^\infty K^p e^{-\alpha pt}\|x\|^p dt = K^p\|x\|^p \int_0^\infty e^{-\alpha pt} dt = \frac{K^p}{p\alpha}\|x\|^p,$$

e (3.4) está demonstrada, com $N = K(p\alpha)^{-1/p}$.

Reciprocamente, para $t \geqslant 0$ e $x \in F$ temos

$$\begin{aligned}\|U(t)x\|^p \int_0^t g^{-p}(t-\tau)d\tau &= \int_0^t g^{-p}(t-\tau)\|U(t-\tau+\tau)x\|^p d\tau \\ &= \int_0^t g^{-p}(t-\tau)\|U(t-\tau)EU(\tau)x\|^p d\tau \\ &\overset{(3.3)}{\leqslant} \int_0^t g^{-p}(t-\tau)g^p(t-\tau)\|EU(\tau)x\|^p d\tau\end{aligned}$$

$$\overset{(3.2)}{\leqslant} M^p \int_0^t \|U(\tau)x\|^p d\tau \leqslant M^p N^p \|x\|^p,$$

ou seja,

$$\|U(t)x\|^p \int_0^t g^{-p}(t-\tau)d\tau \leqslant (MN)^p \|x\|^p.$$

Fixe $T>0$ arbitrário e defina $C = \left(\int_0^T g^{-p}(\tau)d\tau\right)^{1/p} > 0$. Para $t \geqslant T$ temos

$$\int_0^t g^{-p}(t-\tau)d\tau = \int_0^t g^{-p}(\tau)d\tau = C^p + \int_T^t g^{-p}(\tau)d\tau \geqslant C^p,$$

logo

$$C^p \|U(t)x\|^p \leqslant \|U(t)x\|^p \int_0^t g^{-p}(t-\tau)d\tau \leqslant M^p N^p \|x\|^p,$$

ou seja

$$\|U(t)x\| \leqslant MNC^{-1}\|x\| \quad \text{para todo } x \in F \text{ e } t \geqslant T.$$

Da desigualdade acima e de (3.3) existe $J>0$ tal que

$$\|U(t)x\| \leqslant J\|x\| \quad \text{para todos } x \in F \text{ e } t \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Agora consideremos $t>0$ e $x \in F$. Então

$$\begin{aligned} t\|U(t)x\|^p &= \int_0^t \|U(t)x\|^p d\tau = \int_0^t \|U(t-\tau)EU(\tau)x\|^p d\tau \\ &\overset{(3.5)}{\leqslant} J^p \int_0^t \|EU(\tau)x\|^p d\tau \overset{(3.2)}{\leqslant} (MJ)^p \int_0^t \|U(\tau)x\|^p d\tau \overset{(3.4)}{\leqslant} (MNJ)^p \|x\|^p, \end{aligned}$$

ou seja

$$\|U(t)x\| \leqslant (MNJ)t^{-1/p}\|x\| \quad \text{para todos } x \in F \text{ e } t>0.$$

Assim, para cada $0<\eta<1/M$ podemos escolher $M_\eta>0$ tal que

$$\|U(t)x\| \leqslant \eta\|x\| \quad \text{para todos } x \in F \text{ e } t \geqslant M_\eta. \tag{3.6}$$

Fixado $0<\eta<1/M$, para cada $t \geqslant M_\eta$ existe um inteiro positivo $n \geqslant 1$ e $0 \leqslant r < M_\eta$ tais que $t = nM_\eta + r$. Assim

$$\|U(t)x\| = \|U(nM_\eta + r)x\| = \|U(nM_\eta)EU(r)x\| = \|[U(M_\eta)E]^n U(r)x\|,$$

e usando (3.6) e (3.2) n-vezes, obtemos

$$\|U(t)x\| \leqslant (\eta M)^n \|U(r)x\|.$$

De (3.5) segue então que

$$\|U(t)x\| \leqslant (\eta M)^n J\|x\|.$$

Note que

$$(\eta M)^n = \exp(n\ln(\eta M)) = \exp((t-r)M_\eta^{-1}\ln(\eta M)) = e^{\alpha r}e^{-\alpha t},$$

onde $\alpha = -M_\eta^{-1}\ln(\eta M) > 0$. Assim para $t \geqslant M_\eta$ e $x \in F$ obtemos

$$\|U(t)x\| \leqslant Je^{\alpha r}e^{-\alpha t}\|x\|.$$

Para $0 \leqslant t < M_\eta$, de (3.5) temos

$$\|U(t)x\| \leqslant J\|x\| = Je^{\alpha t}e^{-\alpha t}\|x\| \leqslant Je^{\alpha M_\eta}e^{-\alpha t}\|x\|.$$

Assim definindo

$$K = \max\{Je^{\alpha r},\ Je^{\alpha M_\eta},\ 1\},$$

obtemos

$$\|U(t)x\| \leqslant Ke^{-\alpha t}\|x\| \quad \text{para todos } x \in F \text{ e } t \geqslant 0,$$

o que completa a prova de que $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é exponencialmente estável. □

Teorema 3.3. *Assuma que* $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ *satisfaz* (3.2)-(3.3)*. Então* $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ *é exponencialmente estável se, e somente se, existem* $T > 0$ *e* $\beta \in (0, 1/M)$ *tais que para cada* $x \in F$ *existe* $\tau \in (0, T]$ *para o qual* $\|U(\tau)x\| \leqslant \beta\|x\|$*.*

Demonstração. Se $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é exponencialmente estável, considere $T > 0$ tal que $\beta = Ke^{-\alpha T/2} < 1/M$. Então para $T/2 < \tau \leqslant T$ temos

$$\|U(\tau)x\| \leqslant Ke^{-\alpha\tau}\|x\| \leqslant Ke^{-\alpha T/2}\|x\| = \beta\|x\|.$$

Para a recíproca, dados $x \in F$ e $t \geqslant \tau$ então existem n inteiro positivo e $0 \leqslant r < \tau$ tais que $t = n\tau + r$. Sendo assim,

$$\|U(t)x\| = \|U(n\tau + r)x\| = \|[U(\tau)E]^n U(r)x\|.$$

Usando n-vezes o fato de que $\|U(\tau)x\| \leqslant \beta\|x\|$ juntamente com (3.2) obtemos

$$\|U(t)x\| \leqslant (\beta M)^n \|U(r)x\|, \tag{3.7}$$

e de (3.3) segue que $\|U(t)x\| \leqslant (\beta M)^n g(r)\|x\|$. Para $\alpha_1 = -\tau^{-1}\ln(\beta M)$ temos

$$(\beta M)^n = e^{-\alpha_1 t}e^{\alpha_1 r}.$$

Mas $\alpha_1 r = -\frac{r}{\tau}\ln(\beta M) < -\ln(\beta M)$, pois $0 \leqslant r < \tau$. Além disso

$$\alpha_1 = \frac{-\ln(\beta M)}{\tau} \geqslant \frac{-\ln(\beta M)}{T} =: \alpha > 0,$$

e portanto $e^{-\alpha_1 t} \leqslant e^{-\alpha t}$ para $t \geqslant 0$. Assim de (3.7) segue que

$$\|U(t)x\| \leqslant e^{-\alpha t}e^{-\ln(\beta M)}g(r)\|x\| \quad \text{para todo } t \geqslant \tau. \tag{3.8}$$

Para $0 \leqslant t < \tau$, de (3.3) temos

$$\|U(t)x\| \leqslant g(t)\|x\| \leqslant e^{-\alpha t}e^{\alpha t}g(t)\|x\|. \tag{3.9}$$

Tomando então

$$K = \max\{e^{-\ln(\beta M)} \max_{0\leqslant r\leqslant T} g(r),\ \max_{0\leqslant t\leqslant T} e^{\alpha t}g(t),\ 1\},$$

segue de (3.8) e (3.9) que

$$\|U(t)x\| \leqslant Ke^{-\alpha t}\|x\| \quad \text{para todos } x \in F \text{ e } t \geqslant 0,$$

o que completa a demonstração. □

Teorema 3.4. *Assuma que* $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ *satisfaz* (3.2)-(3.3). *Então* $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ *é exponencialmente estável se, e somente se, existem uma função* $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *contínua, não-decrescente, com* $\phi(t) > 0$ *para* $t > 0$ *e* $\phi(ts) \leqslant \phi(t)\phi(s)$ *para todos* $t, s \geqslant 0$, *e uma constante* $R > 0$ *tais que para todo* $x \in F$ *temos*

$$\int_0^\infty \phi(\|U(t)x\|)dt \leqslant R\phi(\|x\|). \tag{3.10}$$

Demonstração. Se $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é exponencialmente estável temos

$$\int_0^\infty \|U(t)x\|dt \leqslant K\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt\|x\| = K\alpha^{-1}\|x\|,$$

o resultado segue com $\phi(t) = t$ e $R = K\alpha^{-1}$.

Para a recíproca, suponhamos que $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ não seja exponencialmente estável. Pelo Teorema 3.3, para cada $T > 0$ e $\beta \in (0, 1/M)$ existe $x_0 \in F$ tal que

$$\|U(t)x_0\| > \beta\|x_0\|, \tag{3.11}$$

para todo $t \in [0, T]$. Em particular, para $T = R\phi(2M)$ e $\beta = 1/2M$, temos

$$\begin{aligned}
\phi(2M)\int_0^\infty \phi(\|U(t)x_0\|)dt &= \int_0^\infty \phi(2M)\phi(\|U(t)x_0\|)dt \\
&\geqslant \int_0^\infty \phi(2M\|U(t)x_0\|)dt \geqslant \int_0^T \phi(2M\|U(t)x_0\|)dt \\
&> \int_0^T \phi(2M\beta\|x_0\|)dt = \int_0^T \phi(\|x_0\|)dt = R\phi(2M)\phi(\|x_0\|),
\end{aligned}$$

o que mostra que

$$\int_0^\infty \phi(\|U(t)x_0\|)dt > R\phi(\|x_0\|),$$

e contradiz (3.10). Portanto $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é exponencialmente estável, o que completa a demonstração. □

Com uma demonstração análoga a do Teorema 3.4, temos o seguinte:

Teorema 3.5. *Assuma que* $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ *satisfaz* (3.2)-(3.3). *Então* $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ *é exponencialmente estável se, e somente se, existe uma função* $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *contínua, não-decrescente, com* $\phi(t) > 0$ *para* $t > 0$ *e* $\phi(ts) \geqslant \phi(t)\phi(s)$ *para todo* $t, s \geqslant 0$, *e uma constante* $R > 0$ *tais que para todo* $x \in F$ *temos* (3.10).

Por fim apresentamos o último resultado que caracteriza a estabilidade exponencial.

Teorema 3.6. *Assuma que* $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ *satisfaz* (3.2)-(3.3). *Então* $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ *é exponencialmente estável se, e somente se, existem constantes* $L > 0$ *e* $\omega > 0$ *tais que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t e^{\omega\tau}\|U(\tau)x\|d\tau \leqslant L\|x\| \quad \text{para todos } x \in F \text{ e } t > 0. \tag{3.12}$$

Demonstração. Se $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ é exponencialmente estável, então para $x \in F$ temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t e^{\frac{\alpha\tau}{2}}\|U(\tau)x\|d\tau &\leqslant \frac{K}{t}\int_0^t e^{\frac{\alpha\tau}{2}}e^{-\alpha\tau}\|x\|d\tau \\ &= \frac{K}{t}\int_0^t e^{\frac{-\alpha\tau}{2}}\|x\|d\tau = \frac{K}{t}\left[\frac{-2(e^{\frac{-\alpha t}{2}}-1)}{\alpha}\right]\|x\| = \frac{2K}{\alpha}\left[\frac{(1-e^{\frac{-\alpha t}{2}})}{t}\right]\|x\|.\end{aligned}$$

Assim (3.12) segue com $\omega = \alpha/2$ e

$$L = K\sup_{v>0}\frac{1-e^{-v}}{v}.$$

Para a recíproca, suponhamos por contradição que $\{U(t)\colon t \geqslant 0\}$ não seja exponencialmente estável. Seja $T > 0$ tal que

$$\frac{e^{\omega T}-1}{T} > 2ML\omega. \tag{3.13}$$

Do Teorema 3.3, para $\beta = 1/2M$, existe $x_0 \in F$ tal que $\|U(t)x_0\| > \beta\|x_0\|$ para todo $t \in (0,T]$. Assim

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T e^{\omega\tau}\|U(\tau)x_0\|d\tau &\geqslant \frac{1}{T}\int_0^T e^{\omega\tau}\beta\|x_0\|d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{e^{\omega\tau}}{2M}\|x_0\|d\tau \\ &= \frac{1}{2MT}\|x_0\|\int_0^T e^{\omega\tau}d\tau = \frac{e^{\omega t}-1}{2MT\omega}\|x_0\| > L\|x_0\|,\end{aligned}$$

o que contradiz (3.12), e completa a demonstração. □

NOTAS

Neste capítulo apresentamos condições necessárias e suficientes para garantir a estabilidade exponencial de semigrupos generalizados. A estabilidade exponencial apresenta sua importância tanto para resultados práticos como para resultados abstratos, como por exemplo, verificar a compacidade assintótica de problemas semilineares (veja (HENRY, 1981), por exemplo). Os resultados apresentados nesse capítulo estão presentes em (GE; FENG, 2013), e têm sua contra-parte linear em (GE, 2012).

A RESULTADOS AUXILIARES

A.1 UNICIDADE DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nesta seção apresentamos o resultado de unicidade da transformada de Laplace, que é frequentemente usada no texto. Começaremos com um lema.

Lema A.1. *Se* $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua e*

$$\int_0^1 h(t)t^n dt = 0 \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N},$$

então $h \equiv 0$ *em* $[0,1]$.

Demonstração. Do Teorema da Aproximação de Weierstrass (RUDIN, 1976, Teorema 7.26), para cada $\epsilon > 0$ existe um polinômio real P_ϵ tal que

$$\sup_{t\in[0,1]} |h(t) - P_\epsilon(t)| < \epsilon.$$

Como $\int_0^1 h(t)P_\epsilon(t)dt = 0$ por hipótese, temos

$$\int_0^1 h(t)(h(t) - P_\epsilon(t))dt = \int_0^1 h^2(t)dt - \int_0^1 h(t)P_\epsilon(t)dt = \int_0^1 h^2(t)dt.$$

Para $K = \sup_{t\in[0,1]} |h(t)|$ temos

$$\left| \int_0^1 h^2(t)dt \right| \leqslant K\epsilon,$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitrário segue que $\int_0^1 h^2(t)dt = 0$, e portanto $h \equiv 0$ em $[0,1]$. $\square$

Sejam $f, g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ funções contínuas e assuma que existam $M \geqslant 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que

$$|f(t)| \leqslant Me^{\omega t} \quad \text{e} \quad |g(t)| \leqslant Me^{\omega t} \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Então para $s > \omega$, estão definidas as transformadas de Laplace de f e g, dadas respectivamente por

$$\mathscr{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad \text{e} \quad \mathscr{L}g(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt.$$

Teorema A.2. *Nas hipóteses acima, se* $\mathscr{L}f(s) = \mathscr{L}g(s)$ *para todo* $s > a$ *então* $f(t) = g(t)$ *para todo* $t \geqslant 0$.

Demonstração. Pela linearidade da transformada de Laplace, basta mostrar que se $\mathscr{L}f(s) = 0$ para $s > \omega$ então $f(t) = 0$ para $t \geqslant 0$.

Fixemos $s_0 > \max\{\omega, 0\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$0 = \mathscr{L}f(s_0 + n + 1) = \int_0^\infty e^{-(s_0+n+1)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-s_0 t} e^{-nt} e^{-t} f(t)dt.$$

Fazendo a mudança $u = e^{-t}$ temos

$$0 = \int_0^1 u^n u^{s_0} f(-\ln u) du.$$

Defina a função $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$h(u) = \begin{cases} u^{s_0} f(-\ln u), & \text{para } u \in (0,1], \\ 0 & \text{para } u = 0, \end{cases}$$

que é contínua em $[0,1]$ pois

$$|u^{s_0} f(-\ln u)| \leqslant u^{s_0} M e^{-\omega \ln u} = M u^{s_0-\omega} \to 0 \quad \text{quando } u \to 0^+.$$

Desta forma, pelo Lema A.1 temos $h(u) = 0$ para todo $u \in [0,1]$, isto é $u^{s_0} f(-\ln u) = 0$ para todo $u \in (0,1]$, e portanto $f(t) = 0$ para todo $t \geqslant 0$. □

Com isso temos o seguinte corolário:

Corolário A.3. *Sejam X um espaço de Banach real e $f, g\colon [0,\infty) \to X$ funções contínuas, e assuma que existam $M \geqslant 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que $\|f(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ e $\|g(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ para todo $t \geqslant 0$.*

Se $\mathscr{L} f(s) = \mathscr{L} g(s)$ para todo $s > \omega$ então $f(t) = g(t)$ para todo $t \geqslant 0$.

Demonstração. Novamente por linearidade, basta mostrar que se $\mathscr{L} f(s) = 0$ para todo $s > \omega$ então $f(t) = 0$ para todo $t \geqslant 0$. Mas se $\mathscr{L} f(s) = 0$ então para cada $x^* \in X^*$ (o dual de X), definindo $f_{x^*}(t) = \langle f(t), x^* \rangle$ para todo $t \geqslant 0$, temos $f_{x^*}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua,

$$|f_{x^*}(t)| = |\langle f(t), x^* \rangle| \leqslant \|x^*\|_{X^*} \|f(t)\| \leqslant M \|x^*\|_{X^*} e^{\omega t} \quad \text{para todo } t \geqslant 0,$$

e para todo $s > \omega$ temos

$$\mathscr{L} f_{x^*}(s) = \langle \mathscr{L} f(s), x^* \rangle = 0.$$

Pelo Teorema A.2 segue que $\langle f(t), x^* \rangle = f_{x^*}(t) = 0$ para todo $t \geqslant 0$. Como isto vale para qualquer $x^* \in X^*$, segue[1] do Teorema de Hahn-Banach que $f(t) = 0$ para todo $t \geqslant 0$. □

A.2 LEMA DE DINI

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar o *Lema de Dini*. Para começar, precisaremos de alguns conceitos e resultados auxiliares.

Definição A.4. Sejam X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, $a < b$ números reais e $f\colon [a,b) \to X$ uma função. Diremos que f é **diferenciável à direita** em $[a,b)$ se para cada $x \in [a,b)$ o seguinte limite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{existe}.$$

[1] Na verdade, isto segue de uma das consequências do Teorema de Hahn-Banach. Veja (BRÉZIS, 1984, Corolário 1.3).

Neste caso, definimos
$$\frac{d^+f}{dx}(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Lema A.5. *Sejam X um espaço de Banach, $a<b$ números reais e $f\colon [a,b) \to X$ uma função contínua e diferenciável à direita no intervalo $[a,b)$. Se $\frac{d^+f}{dx}(x) = 0$, para todo $x \in [a,b)$ então f é constante em $[a,b)$.*

Demonstração. De fato, assuma por absurdo que f não é constante. Assim, existem $x_0, y_0 \in [a,b)$, com $x_0 > y_0$, tais que $f(x_0) \neq f(y_0)$. Defina
$$\eta = \frac{\|f(x_0)-f(y_0)\|}{2(x_0-y_0)} > 0,$$
e considere o conjunto
$$\Lambda = \{x \in (y_0, x_0] \colon \|f(x)-f(y_0)\| > \eta(x-y_0)\}.$$
Claramente $x_0 \in \Lambda$, portanto Λ é não-vazio e podemos definir $c = \inf \Lambda$.

Afirmação 1: Temos $c > y_0$.

De fato, se $c = y_0$ então para cada $\epsilon > 0$, existe $y_\epsilon \in (y_0, y_0+\epsilon)$ tal que $y_\epsilon \in \Lambda$. Assim $\|f(y_\epsilon)-f(y_0)\| > \eta(y_\epsilon - y_0)$, para todo $\epsilon > 0$. Fazendo $\epsilon \to 0^+$, obtemos $0 = \|\frac{d^+f}{dx}(y_0)\| \geqslant \eta$, o que é uma contradição.

Afirmação 2: Temos $\|f(c)-f(y_0)\| = \eta(c-y_0)$.

De fato, é simples verificar que $\|f(c)-f(y_0)\| \geqslant \eta(c-y_0)$. Agora, assuma que $\|f(c)-f(y_0)\| > \eta(c-y_0)$. Da continuidade da função
$$(y_0, x_0] \ni x \to g(x) = \frac{\|f(x)-f(y_0)\|}{x-y_0},$$
e do fato de que $g(c) > \eta$, existe $0 < \delta < c-y_0$ tal que $g(x) > \eta$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Assim $c-\delta \in (y_0, x_0]$ e $g(c-\delta) > \eta$, o que contraria o fato de c ser o ínfimo de Λ.

Agora, como $\frac{d^+f}{dx}(c) = 0$, existe $d > c$ tal que
$$\|f(x)-f(c)\| < \eta(x-c) \quad \text{para todo } x \in (c,d]$$
e assim, se $x \in (c,d]$, temos
$$\|f(x)-f(y_0)\| \leqslant \|f(x)-f(c)\| + \|f(c)-f(y_0)\| < \eta(x-c) + \eta(c-y_0) = \eta(x-y_0),$$
o que, novamente contraria o fato de c ser o ínfimo de Λ, o que conclui a demonstração, e prova que f deve ser constante em $[a,b)$. □

Com este resultado, enunciamos e demonstramos o Lema de Dini.

Lema A.6 (Lema de Dini)**.** *Seja $\phi\colon [a,b) \to X$ uma função contínua e diferenciável à direita no intervalo $[a,b)$. Se $\frac{d^+\phi}{dx}$ é contínua em $[a,b)$, então ϕ é diferenciável em $[a,b)$.*

Demonstração. Defina a função

$$\Phi(t) = \int_a^t \frac{d^+\phi}{ds}(s)ds \quad \text{para cada } t \in [a,b).$$

Como $\frac{d^+\phi}{dx}$ é contínua em $[a,b)$, segue que Φ é diferenciável em $[a,b)$, e além disso temos $\Phi'(t) = \frac{d^+\phi}{dt}(t)$, para cada $t \in [a,b)$. Ainda, como $\Phi' = \frac{d^+\Phi}{dt}$, temos $\frac{d^+}{dt}(\Phi-\phi)(t) = 0$, para todo $t \in [a,b)$, e o lema anterior nos dá que existe uma constante c tal que

$$\phi(t) = \Phi(t) + c \quad \text{para todo } t \in [a,b),$$

e portanto, ϕ é diferenciável. □

A.3 DESIGUALDADES

Nesta seção, provaremos os resultados usados no Capítulo 2 envolvendo desigualdades. Lembremos que para $p,q \in \mathbb{Z}$ com $p,q \geqslant 0$, escreveremos

$$C_p^q = \binom{p}{q} = \frac{p!}{(p-q)!q!} = \frac{p(p-1)\dots(p-q+1)}{q!}.$$

Lema A.7. *Sejam $a_{k,i} \geqslant 0$, para $i,k \geqslant 0$ (k,i inteiros) satisfazendo*

$$a_{k,i} \leqslant \alpha a_{k-1,i-1} + \beta a_{k,i-1} \quad \text{para } k,i \geqslant 1,$$

onde $\alpha,\beta > 0$. Então:

(a) para $k \geqslant i > 0$ temos

$$a_{k,i} \leqslant \sum_{j=0}^{i} C_i^j \alpha^j \beta^{i-j} a_{k-j,0}\ ;$$

(b) para $n > m > 0$ temos

$$a_{m,n} \leqslant \sum_{k=0}^{m} C_n^k \alpha^k \beta^{n-k} a_{m-k,0} + \sum_{k=m}^{n-1} C_{k-1}^{m-1} \alpha^m \beta^{k-m} a_{0,n-k}. \tag{A.1}$$

Demonstração. (a) Notemos primeiramente que

$$a_{k,1} \leqslant \alpha a_{k-1,0} + \beta a_{k,0} \quad \text{para todo } k \geqslant 1.$$

Também

$$\begin{aligned} a_{k,2} &\leqslant \alpha a_{k-1,1} + \beta a_{k,1} \leqslant \alpha(\alpha_{k-2,0} + \beta a_{k-1,0}) + \beta(\alpha a_{k-1,0} + \beta a_{k,0}) \\ &= \alpha^2 a_{k-2,0} + 2\alpha\beta a_{k-1,0} + \beta^2 a_{k,0} \quad \text{para } k \geqslant 2. \end{aligned}$$

Suponhamos por indução que o resultado é válido para $k \geqslant i > 0$. Assim, para $k \geqslant i+1$ temos $k-1 \geqslant i > 0$ e $k \geqslant i > 0$. Portanto

$$
\begin{aligned}
a_{k,i+1} \leqslant \alpha a_{k-1,i} + \beta a_{k,i} &\leqslant \alpha \sum_{j=0}^{i} C_i^j \alpha^j \beta^{i-j} a_{k-1-j,0} + \beta \sum_{j=0}^{i} C_i^j \alpha^j \beta^{i-j} a_{k-j,0} \\
&= \sum_{j=0}^{i} C_i^j \alpha^{j+1} \beta^{i-j} a_{k-1-j,0} + \sum_{j=0}^{i} C_i^j \alpha^j \beta^{i+1-j} a_{k-j,0} \\
&= \sum_{j=1}^{i+1} C_i^{j-1} \alpha^j \beta^{i+1-j} a_{k-j,0} + \sum_{j=0}^{i} C_i^j \alpha^j \beta^{i+1-j} a_{k-j,0} \\
&= C_i^0 \beta^{i+1} \alpha_{k,0} + C_i^i \alpha^{i+1} a_{k-i-1,0} + \sum_{j=1}^{i} (C_i^{j-1} + C_i^j) \alpha^j \beta^{i+1-j} a_{k-j,0}.
\end{aligned}
$$

Como $C_i^{j-1} + C_i^j = \binom{i}{j-1} + \binom{i}{j} = \binom{i+1}{j} = C_{i+1}^j$, $C_i^0 = 1 = C_{i+1}^0$ e $C_i^i = 1 = C_{i+1}^{i+1}$ obtemos

$$
a_{k,i+1} \leqslant C_i^0 \beta^{i+1} \alpha_{k,0} + C_i^i \alpha^{i+1} a_{k-i-1,0} + \sum_{j=1}^{i} C_{i+1}^j \alpha^j \beta^{i+1-j} a_{k-j,0} = \sum_{j=0}^{i+1} C_{i+1}^j \alpha^j \beta^{i+1-j} a_{k-j,0} \, ,
$$

e completa a demonstração do item (a).

(b) Para $n = 2$ e $m = 1$ temos

$$
a_{1,2} \leqslant \alpha a_{0,1} + \beta a_{1,1} \leqslant \alpha a_{0,1} + \alpha \beta a_{0,0} + \beta^2 a_{1,0},
$$

e (A.1) está verificada. Faremos uma prova por indução. Suponha que (A.1) é válida para $n = 1, \ldots, p$ e $0 < m < n$, e mostremos que ela vale também para $a_{m,p+1}$ com $0 < m < p$. Temos

$$
\begin{aligned}
a_{m,p+1} &\leqslant \alpha a_{m-1,p} + \beta a_{m,p} \\
&\leqslant \alpha \Big(\sum_{k=0}^{m-1} C_p^k \alpha^k \beta^{p-k} a_{m-1-k,0} + \sum_{k=m-1}^{p-1} C_{k-1}^{m-2} \alpha^{m-1} \beta^{k-m+1} a_{0,p-k} \Big) \\
&\quad + \beta \Big(\sum_{k=0}^{m} C_p^k \alpha^k \beta^{p-k} a_{m-k,0} + \sum_{k=m}^{p-1} C_{k-1}^{m-1} \alpha^m \beta^{k-m} a_{0,p-k} \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} C_p^k \alpha^{k+1} \beta^{p-k} a_{m-1-k,0} + \sum_{k=m-1}^{p-1} C_{k-1}^{m-2} \alpha^m \beta^{k-m+1} a_{0,p-k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{m} C_p^k \alpha^k \beta^{p+1-k} a_{m-k,0} + \sum_{k=m}^{p-1} C_{k-1}^{m-1} \alpha^m \beta^{k-m+1} a_{0,p-k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} C_p^{k-1} \alpha^k \beta^{p-k+1} a_{m-k,0} + \sum_{k=m-1}^{p-1} C_{k-1}^{m-2} \alpha^m \beta^{k-m+1} a_{0,p-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=0}^{m} C_p^k \alpha^k \beta^{p+1-k} a_{m-k,0} + \sum_{k=m}^{p-1} C_{k-1}^{m-1} \alpha^m \beta^{k-m+1} a_{0,p-k} \\
&= C_p^0 \beta^{p+1} a_{m,0} + \sum_{k=1}^{m} (C_p^{k-1} + C_p^k) \alpha^k \beta^{p-k+1} a_{m-k,0} \\
&+ C_{m-2}^{m-2} \alpha^m a_{0,p-m+1} + \sum_{k=m}^{p-1} (C_{k-1}^{m-2} + C_{k-1}^{m-1}) \alpha^m \beta^{k-m+1} a_{0,p-k}.
\end{aligned}
$$

Agora, note que $C_p^{k-1} + C_p^k = \binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k} = C_{p+1}^k$ e $C_{k-1}^{m-2} + C_{k-1}^{m-1} = \binom{k-1}{m-2} + \binom{k-1}{m-1} = \binom{k}{m-1} = C_k^{m-1}$, e assim chegamos em

$$
\begin{aligned}
a_{m,p+1} &\leqslant C_p^0 \beta^{p+1} a_{m,0} + \sum_{k=1}^{m} C_{p+1}^k \alpha^k \beta^{p-k+1} a_{m-k,0} \\
&\quad + C_{m-2}^{m-2} \alpha^m a_{0,p-m+1} + \sum_{k=m}^{p-1} C_k^{m-1} \alpha^m \beta^{k-m+1} a_{0,p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_{p+1}^k \alpha^k \beta^{p-k+1} a_{m-k,0} + \sum_{k=m-1}^{p-1} C_k^{m-1} \alpha^m \beta^{k-m+1} a_{0,p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_{p+1}^k \alpha^k \beta^{p+1-k} a_{m-k,0} + \sum_{k=m}^{p} C_{k-1}^{m-1} \alpha^m \beta^{k-m} a_{0,p+1-k},
\end{aligned}
$$

o que conclui a indução. Para concluir a demonstração, falta provar o caso $m = p$. Usando a indução e o item (a) para $a_{p,p}$ temos

$$
\begin{aligned}
a_{p,p+1} &\leqslant \alpha a_{p-1,p} + \beta a_{p,p} \\
&\leqslant \alpha \Big(\sum_{k=0}^{p-1} C_p^k \alpha^k \beta^{p-k} a_{p-1-k,0} + C_{p-2}^{p-2} \alpha^{p-1} a_{0,1} \Big) + \beta \sum_{k=0}^{p} C_p^k \alpha^k \beta^{p-k} a_{p-k,0} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k \alpha^{k+1} \beta^{p-k} a_{p-1-k,0} + C_{p-2}^{p-2} \alpha^p a_{0,1} + \sum_{k=0}^{p} C_p^k \alpha^k \beta^{p+1-k} a_{p-k,0} \\
&= \sum_{k=1}^{p} C_p^{k-1} \alpha^k \beta^{p+1-k} a_{p-k,0} + \sum_{k=0}^{p} C_p^k \alpha^k \beta^{p+1-k} a_{p-k,0} + C_{p-2}^{p-2} \alpha^p a_{0,1} \\
&= C_p^0 \beta^{p+1} a_{p,0} + \sum_{k=1}^{p} (C_p^{k-1} + C_p^k) \alpha^k \beta^{p+1-k} a_{p-k,0} + C_{p-2}^{p-2} \alpha^p a_{0,1} \\
&= C_{p+1}^0 \beta^{p+1} a_{p,0} + \sum_{k=1}^{p} C_{p+1}^k \alpha^k \beta^{p+1-k} a_{p-k,0} + C_{p-1}^{p-1} \alpha^p a_{0,1} \\
&= \sum_{k=0}^{p} C_{p+1}^k \alpha^k \beta^{p+1-k} a_{p-k,0} + C_{p-1}^{p-1} \alpha^p a_{0,1},
\end{aligned}
$$

e a demonstração está completa. □

Agora faremos a demonstração do (GE; FENG, 2013, Lema 4), tirada de (LUO; GUO; MORGUL, 1999, Lema 2.118) (página 104). Mas antes precisaremos de dois lemas auxiliares.

Lema A.8. *Se $n>0$ é inteiro e $\alpha,\beta>0$ são tais que $\alpha+\beta=1$ então*

$$\sum_{i=0}^{n} iC_n^i\alpha^i\beta^{n-i}=\sum_{i=1}^{n} iC_n^i\alpha^i\beta^{n-i}=n\alpha$$

e

$$\sum_{i=0}^{n} i^2C_n^i\alpha^i\beta^{n-i}=\sum_{i=1}^{n} i^2C_n^i\alpha^i\beta^{n-i}=n^2\alpha^2+n\alpha\beta.$$

Demonstração. O termo $i=0$ em cada uma das somas é 0, e as igualdades entre as somas está justificada. Agora, para a primeira igualdade com $n=1$ temos

$$\sum_{i=0}^{1} iC_1^i\alpha^i\beta^{1-i}=C_1^1\alpha=\alpha.$$

Para $n>1$, temos

$$n\alpha=n\alpha(\alpha+\beta)^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1} nC_{n-1}^i\alpha^{i+1}\beta^{n-1-i}=\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)C_n^{i+1}\alpha^{i+1}\beta^{n-1-i}=\sum_{i=1}^{n} iC_n^i\alpha^i\beta^{n-i}.$$

Para a segunda, é simples verificar diretamente que ela é válida para $n=1,2$. Para $n>2$, o processo é análogo ao anterior, escrevendo $n^2\alpha^2+n\alpha\beta=(n^2\alpha^2+n\alpha\beta)(\alpha+\beta)^{n-2}$. □

Lema A.9. *Para $m>0$ inteiro e $|\gamma|<1$ temos*

$$\sum_{i=m}^{\infty} C_{i-1}^{m-1}\gamma^{i-m}=(1-\gamma)^{-m},$$

$$\sum_{i=m}^{\infty}(i-m)C_{i-1}^{m-1}\gamma^{i-m}=\gamma m(1-\gamma)^{-m-1},$$

$$\sum_{i=m}^{\infty}(i-m)^2C_{i-1}^{m-1}\gamma^{i-m}=\gamma m(1-\gamma)^{-m-2}(\gamma m+1).$$

Demonstração. Para $|\gamma|<1$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_{i-1}^{0}\gamma^{i-1}=\sum_{i=0}^{\infty} C_i^0\gamma^i=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i=(1-\gamma)^{-1}.$$

Para $m>1$, derivando $(m-1)$-vezes esta expressão (na variável γ), obtemos

$$(m-1)!(1-\gamma)^{-m}=\sum_{i=m-1}^{\infty} i(i-1)\cdots(i-m)\gamma^{i-(m-1)}=\sum_{i=m}^{\infty}(i-1)(i-2)\cdots(i-m-1)\gamma^{i-m},$$

e portanto

$$(1-\gamma)^{-m} = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-m-1)}{(m-1)!}\gamma^{i-m} = \sum_{i=m}^{\infty} C_{i-1}^{m-1}\gamma^{i-m}.$$

Derivando esta expressão mais uma vez em γ, obtemos

$$m(1-\gamma)^{-m-1} = \sum_{i=m}^{\infty}(i-m)C_{i-1}^{m-1}\gamma^{i-m-1},$$

e multiplicando por γ segue que

$$\gamma m(1-\gamma)^{-m-1} = \sum_{i=m}^{\infty}(i-m)C_{i-1}^{m-1}\gamma^{i-m}.$$

A última expressão é provada derivando a expressão anterior na variável γ. □

Lema A.10. *Sejam $n \geqslant m > 0$ inteiros, e $\alpha, \beta > 0$ com $\alpha + \beta = 1$. Então:*

$$\sum_{i=0}^{m} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}(m-i) \leqslant \left((n\alpha - m)^2 + n\alpha\beta\right)^{1/2}, \tag{A.2}$$

$$\alpha^m \sum_{i=m}^{n} C_{i-1}^{m-1} \beta^{i-m}(n-i) \leqslant \left(m\beta/\alpha^2 + (m\beta/\alpha + m - n)^2\right)^{1/2}. \tag{A.3}$$

Demonstração. Note primeiro que como $n \geqslant m$, temos

$$\sum_{i=0}^{m} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}(m-i) = \sum_{i=0}^{m} \sqrt{C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}}\sqrt{C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}}(m-i),$$

e assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}(m-i) &\leqslant \left(\sum_{i=0}^{m} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{m} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}(m-i)^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}(m-i)^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Mas

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i} = (\alpha+\beta)^n = 1,$$

pois $\alpha + \beta = 1$. Além disso, temos

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}(m-i)^2 = m^2 \underbrace{\sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}}_{=\,(\alpha+\beta)^n=1} - 2m\sum_{i=0}^{n} iC_n^i \alpha^i \beta^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} i^2 C_n^i \alpha^i \beta^{n-i},$$

e usando o Lema A.8 obtemos

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i}(m-i)^2 = m^2 - 2mn\alpha + n^2\alpha^2 + n\alpha\beta = (n\alpha - m)^2 + n\alpha\beta,$$

e prova (A.2).

Agora, procedendo como antes, note que

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m}(n-i) &\leqslant \left(\sum_{i=m}^{n} C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=m}^{n} C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m}(n-i)^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant \left(\sum_{i=m}^{\infty} C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=m}^{\infty} C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m}(n-i)^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Usando o Lema A.9, e lembrando que $\alpha+\beta=1$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{\infty} C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m}(n-i)^2 &= \sum_{i=m}^{\infty} C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m}(n-m-(i-m))^2\\ &= (n-m)^2\sum_{i=m}^{\infty} C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m} - 2(n-m)\sum_{i=m}^{\infty}(i-m)C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m} + \sum_{i=m}^{\infty}(i-m)^2 C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m}\\ &= (n-m)^2\alpha^{-m} - 2(n-m)\beta m\alpha^{-m-1} + m\beta\alpha^{-m-2}(\beta m+1).\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m}(n-i) &\leqslant \alpha^{-m/2}\left((n-m)^2\alpha^{-m} - 2(n-m)\beta m\alpha^{-m-1} + m\beta(\beta m+1)\alpha^{-m-2}\right)^{1/2}\\ &= \alpha^{-m}\left((n-m)^2 - 2(n-m)m\beta/\alpha + m^2\beta^2/\alpha^2 + m\beta/\alpha^2\right)^{1/2}\\ &= \alpha^{-m}\left((m-n+m\beta/\alpha)^2 + m\beta/\alpha^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

e portanto

$$\alpha^m \sum_{i=m}^{n} C_{i-1}^{m-1}\beta^{i-m}(n-i) \leqslant \left((m-n+m\beta/\alpha)^2 + m\beta/\alpha^2\right)^{1/2}.$$

□

REFERÊNCIAS

ARENDT, Wolfgang. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. **Israel J. Math.**, v. 59, n. 3, p. 327–352, 1987. ISSN 0021-2172. DOI: 10.1007/BF02774144. Disponível em: https://doi.org/10.1007/BF02774144.

BRÉZIS, Haim. **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones**. [*S.l.*]: Alianza, 1984.

ENGEL, Klaus-Jochen; NAGEL, Rainer. **One-parameter semigroups for linear evolution equations**. [*S.l.*]: Springer-Verlag, New York, 2000. v. 194, p. xxii+586. (Graduate Texts in Mathematics). With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt. ISBN 0-387-98463-1.

FAVINI, Angelo; YAGI, Atsushi. **Degenerate differential equations in Banach spaces**. [*S.l.*]: Marcel Dekker, Inc., New York, 1999. v. 215, p. xii+313. (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics). ISBN 0-8247-1677-9.

GE, ZhaoQiang. GE-Semigroup Methods for the Stability of the Singular Distributed Parameter Systems. **Proceedings of the 31st Chinese Control Conference**, p. 2045–2052, 2012.

GE, ZhaoQiang; FENG, DeXing. Well-posed problem of nonlinear singular distributed parameter systems and nonlinear GE-semigroup. **Science China Information Sciences**, v. 56, n. 12, p. 1–14, 2013. ISSN 1869-1919. DOI: 10.1007/s11432-013-4852-3. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s11432-013-4852-3.

GE, ZhaoQiang; ZHU, GuangTian; FENG, DeXing. Exact controllability for singular distributed parameter system in Hilbert space. **Science in China Series F: Information Sciences**, Springer, v. 52, n. 11, p. 2045–2052, 2009.

HENRY, Daniel. **Geometric theory of semilinear parabolic equations**. [*S.l.*]: Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981. v. 840, p. iv+348. (Lecture Notes in Mathematics). ISBN 3-540-10557-3.

LUO, Zheng-Hua; GUO, Bao-Zhu; MORGUL, Omer. **Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications**. [*S.l.*]: Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999. P. xiv+403. (Communications and Control Engineering Series). ISBN 1-85233-124-0. DOI: 10.1007/978-1-4471-0419-3. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0419-3.

MELNIKOVA, Irina V.; FILINKOV, Alexei. **Abstract Cauchy problems: three approaches**. [*S.l.*]: Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001. v. 120, p. xxii+236. (Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics).

ISBN 1-58488-250-6. DOI: 10.1201/9781420035490. Disponível em: https://doi.org/10.1201/9781420035490.

RUDIN, Walter. **Principles of mathematical analysis**. Third. [*S.l.*]: McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976. P. x+342. International Series in Pure and Applied Mathematics.

RYAN, Raymond A. **Introduction to tensor products of Banach spaces**. [*S.l.*]: Springer-Verlag London, Ltd., London, 2002. P. xiv+225. (Springer Monographs in Mathematics). ISBN 1-85233-437-1. DOI: 10.1007/978-1-4471-3903-4. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-3903-4.

SHOWALTER, R. E. Degenerate evolution equations and applications. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 23, p. 655–677, 1973. ISSN 0022-2518. DOI: 10.1512/iumj.1974.23.23056. Disponível em: https://doi.org/10.1512/iumj.1974.23.23056.

TAYLOR, Angus E.; LAY, David C. **Introduction to functional analysis**. second. [*S.l.*]: Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1986. P. xii+467. ISBN 0-89874-951-4.

WIDDER, David Vernon. **An introduction to transform theory**. [*S.l.*]: Academic Press, 1971. v. 42.

ÍNDICE