



Universidade Federal de Santa Catarina

Centro Tecnológico (CTC)

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Algoritmos e estratégias de solução em poroviscoelasticidade:** um estudo aplicado à modelagem de tecidos biológicos moles submetidos a grandes deformações

por José Luís Medeiros Thiesen

Florianópolis

2021



José Luís Medeiros Thiesen

**Algoritmos e estratégias de solução em poroviscoelasticidade:** um estudo aplicado à modelagem de tecidos biológicos moles submetidos a grandes deformações

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr.

Coorientador: Prof. Thiago André Carniel, Dr.

Florianópolis

2021



Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Thiesen, José Luís Medeiros

Algoritmos e estratégias de solução em  
poroviscoelasticidade : um estudo aplicado à modelagem de  
tecidos biológicos moles submetidos a grandes deformações /  
José Luís Medeiros Thiesen ; orientador, Eduardo Alberto  
Fancello, coorientador, Thiago Carniel, 2021.  
145 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Poroviscoelasticidade. 3.  
Cinemática finita. 4. Tecidos biológicos moles. 5. Solução  
iterativamente acoplada. I. Fancello, Eduardo Alberto .  
II. Carniel, Thiago. III. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
IV. Título.

José Luís Medeiros Thiesen

**Algoritmos e estratégias de solução em poroviscoelasticidade:** um estudo aplicado à modelagem de tecidos biológicos moles submetidos a grandes deformações

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Marcio Arab Murad, D. Sci.  
Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC

Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Jakson Manfredini Vassoler, Dr.  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.

---

Prof. Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.  
Coordenação do Programa de  
Pós-Graduação

---

Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr.  
Orientador

Florianópolis  
2021

*Este trabalho é dedicado a minha sobrinha, Serena.*





# Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer aos professores Eduardo Alberto Fancello e Thiago André Carniel, pela orientação e apoio essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Neste contexto, agradeço também aos professores Eduardo Lenz Cardoso e Ricardo de Medeiros, por confiarem em meu trabalho nos momentos iniciais de meus estudos.

Ao colega e amigo, Bruno Klahr, pelas incansáveis discussões teóricas do dia-a-dia, pelo apoio no desenvolvimento de trabalhos e pela companhia à distância durante a pandemia da COVID-19.

Aos colegas do Grupo de Análise e Projeto Mecânico (GRANTE) que estiveram presentes no laboratório dos anos de 2019 até 2021. Em especial aos meus amigos Matheus Eduardo Wenceslau e Sérgio Vitor Britto Santos, pela amizade e acolhimento no período inicial do mestrado. Agradeço também ao meu amigo e colega de graduação na Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Matheus Rodrigues Silva, pelos momentos de descontração.

Agradeço aos meus pais, José e Rita, a minha irmã Indiara e a minha namorada Sandy, por todo o amor e por estarem ao meu lado em todos os momentos. A vocês, meu mais sincero agradecimento pelo apoio incondicional durante toda a minha trajetória.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudos concedida.



*“Pasma sempre quando acabo qualquer coisa. Pasma e desolo-me. O meu instinto de perfeição deveria inibir-me de acabar; deveria inibir-me até de dar começo. Mas distraio-me e faço. O que consigo é um produto, em mim, não de uma aplicação de vontade, mas de uma cedência dela. Começo porque não tenho força para pensar; acabo porque não tenho alma para suspender. Este livro é a minha covardia.”*

*(Fernando Pessoa, L. do D. — Trecho 152)*



# Resumo

Os modelos poroviscoelásticos têm sido amplamente utilizados para a modelagem de tecidos biológicos hidratados, uma vez que permitem investigar as respostas biomecânicas associadas ao fluxo de fluido intersticial. Estes problemas apresentam fortes acoplamentos físicos decorrentes de não-linearidades materiais e geométricas. A este respeito, o presente estudo investiga o desempenho numérico de cinco algoritmos de solução de problemas bifásicos dentro do contexto de tecidos biológicos moles: monolítico, *drained*, *undrained*, *fixed-strain* e *fixed-stress*. Para este fim, dois ensaios clássicos de caracterização de tecidos biológicos são estudados via método dos elementos finitos: compressão confinada e compressão livre. Uma vez que estes testes se comportam de maneira distinta em termos do acoplamento bifásico, a sensibilidade de diferentes valores de permeabilidade e incrementos de tempo em relação a performance dos algoritmos é avaliada. Os resultados salientam que as técnicas iterativo-sequenciais têm um bom desempenho em relação ao esquema monolítico para casos onde a força de acoplamento é fraca, mas apresentam problemas de falta de convergência quando a força de acoplamento aumenta. Isto significa que, em contraste com o que é recomendado na grande maioria dos trabalhos de geomecânica, os esquemas iterativamente acoplados nem sempre são adequados no contexto de mecânica de tecidos biológicos moles. Assim, o esquema monolítico surge como a escolha mais confiável para resolver problemas bifásicos desta natureza, especificamente quando esses possuem alta força de acoplamento e as análises são realizadas sob pequenos incrementos de tempo.

**Palavras-chave:** Poroviscoelasticidade, monolítico, iterativamente acoplado, grandes deformações, método dos elementos finitos, tecidos biológicos moles.



# Abstract

Poroviscoelastic models have been widely used for modeling hydrated biological tissues, as they allow for the investigation of biomechanical responses associated with interstitial fluid flow. These problems exhibit strong physical couplings arising from material and geometric nonlinearities. In this regard, the present study investigates the numerical performance of five biphasic solution algorithms within the context of soft biological tissues: monolithic, *drained*, *textitundrained*, *fixed-strain* and *fixed-stress*. For this purpose, two classical tests for biological tissue characterization are studied by means of the finite element method: confined compression and free compression. Since these tests behave differently in terms of the biphasic coupling, the sensitivity of different permeability values and time increments with respect to the performance of the algorithms is evaluated. The results highlight that iterative-sequential techniques perform well relative to the monolithic scheme for cases where the coupling strength is weak, but suffer from a lack of convergence when the coupling strength increases. This means that, in contrast to what is recommended in the vast majority of geomechanics papers, iteratively coupled schemes are not always suitable alternatives for problems in the context of soft biological tissue mechanics. Thus, the monolithic scheme emerges as the most reliable choice for solving biphasic problems in this context, specifically when these possess high coupling strength and the analyses are performed under small time increments.

**Keywords:** Poroviscoelasticity, monolithic, iteratively-coupled, finite-strains, finite element model, soft biological tissues.





# Lista de ilustrações

|  |     |
|--|-----|
| Figura 1 – Cinemática de um material bifásico. . . . .   | 60  |
| Figura 2 – Visualização das condições de contorno no domínio da mistura bifásica. . . . .  | 64  |
| Figura 3 – Descrição do elemento finito misto isoparamétrico utilizado para formulação $\mathbf{u} - p$ (U20P8), juntamente com a numeração local dos nós de deslocamento e pressão de poro. . . . .   | 69  |
| Figura 4 – Fluxograma indicando o processo geral de solução dos algoritmos <i>fixed-strain</i> e <i>fixed-stress</i> . Na figura, é explicitada a ordem em que as equações governantes são solucionadas ( $\mathcal{F} - \mathcal{M}$ ) e as restrições impostas durante a solução de cada equação. . . . .        | 80  |
| Figura 5 – Fluxograma indicando o processo geral de solução dos algoritmos <i>drained</i> e <i>undrained</i> . Na figura, é explicitada a ordem em que as equações governantes são solucionadas ( $\mathcal{M} - \mathcal{F}$ ) e as restrições impostas durante a solução de cada equação. . . . .                | 81  |
| Figura 6 – Descrição dos problemas confinado/livre, juntamente com as condições de contorno a serem impostas. . . . .  | 92  |
| Figura 7 – Descrição do modelo reológico utilizado. . . . .  | 93  |
| Figura 8 – Resultados referentes ao ensaio de compressão confinada. a) Comportamento da força de reação ao longo do tempo na face indicada; b) comportamento da pressão de poro do nó indicado ao longo do tempo; c) campo de deslocamento na direção axial; d) campo de pressão de poro na direção axial. . . . . | 96  |
| Figura 9 – Resultados referentes ao ensaio de compressão livre. a) Comportamento da força de reação ao longo do tempo na face indicada; b) comportamento da pressão de poro do nó indicado ao longo do tempo; c) campo de deslocamento na direção radial; d) campo de pressão de poro na direção radial. . . . .   | 97  |
| Figura 10 – Comparação do resultado obtido no ensaio de compressão confinada utilizando três valores distintos para o parâmetro de permeabilidade $\kappa$ . a) Histórico da força de reação [N] na área cuja normal é indicada na figura. b) Histórico da pressão de poro [MPa] no nó indicado na figura. . . . . | 100 |
| Figura 11 – Resultados do problema confinado para os campos tridimensionais de: a) pressão de poro [MPa]; b) medida de von Mises da tensão total de Cauchy. Os resultados foram obtidos para o parâmetro $\kappa = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ . . . . .   | 101 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 12 – Comparação do resultado obtido no ensaio de compressão livre utilizando três valores distintos para o parâmetro de permeabilidade $\kappa$ . a) Histórico da força de reação [N] na área cuja normal é indicada na figura. b) Histórico da pressão de poro [MPa] no nó indicado na figura. c) Variação do diâmetro $D$ da amostra ao longo do intervalo de análise. . . . .           | 102 |
| Figura 13 – Resultados do problema livre para os campos tridimensionais de: a) pressão de poro [MPa]; b) medida de von Mises da tensão total de Cauchy. Os resultados foram obtidos para o parâmetro $\kappa = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ . . .  | 103 |
| Figura 14 – Comparação do tempo de processamento (CPU) normalizado entre os métodos sequenciais ( <i>drained</i> , <i>undrained</i> , <i>fixed-stress</i> e <i>fixed-strain</i> ) e o método monolítico e do número total de iterações estagiadas de cada método sequencial no caso de compressão confinada. Denotam-se por interrompidas as análises que sofreram falta de convergência. . . . . | 105 |
| Figura 15 – Comparação do tempo de processamento (CPU) normalizado entre os métodos sequenciais ( <i>drained</i> , <i>undrained</i> , <i>fixed-stress</i> e <i>fixed-strain</i> ) e o método monolítico e número total de iterações estagiadas de cada método sequencial no caso de compressão livre. Denotam-se por interrompidas as análises que sofreram falta de convergência. . . . .        | 107 |

# Lista de tabelas

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 – Parâmetros constitutivos utilizados no modelo material do esqueleto sólido. . . . .  | 94 |
| Tabela 2 – Diferença relativa dos resultados do ensaio confinado para $\Delta t = 5$ s e $\Delta t = 10$ s em relação ao resultado de referência ( $\Delta t = 2$ s). . . . . | 98 |
| Tabela 3 – Diferença relativa dos resultados do ensaio livre para $\Delta t = 5$ s e $\Delta t = 10$ s em relação ao resultado de referência ( $\Delta t = 2$ s). . . . .     | 98 |



# Lista de abreviaturas e siglas

|       |   |
|-------|---|
| MEF   | Método dos Elementos Finitos  |
| EVR   | Elemento de Volume Representativo   |
| CPU   | Unidade Central de Processamento  |
| U20P8 | Elemento finito com 20 nós para o deslocamento e 8 nós para a pressão de poro                                 |
| LBB   | Ladyzhens-kaya - Babuška - Brezzi   |
| Q1P0  | Elemento finito com intepolação linear para o deslocamento e constante para a pressão de poro                 |
| Q1Q1  | Elemento finito com interpolação linear para ambos os campos de deslocamento e pressão de poro                |
| Q2Q1  | Elemento finito com interpolação quadrática para o deslocamento e linear para a pressão de poro (Taylor-Hood) |



# Lista de símbolos

|                       |  |
|-----------------------|--|
| $\mathcal{E}$         | Espaço tridimensional Euclidiano                     |
| $t$                   | Tempo  |
| $\mathcal{B}_0$       | Corpo na configuração referencial                    |
| $\Omega_0$            | Domínio aberto na configuração referencial           |
| $\partial\Omega_0$    | Fronteira na configuração referencial                |
| $\bar{\mathcal{B}}_0$ | Fechamento de $\mathcal{B}_0$                        |
| $\mathcal{B}_t$       | Corpo na configuração espacial                       |
| $\Omega_t$            | Domínio aberto na configuração espacial              |
| $\partial\Omega_t$    | Fronteira na configuração espacial                   |
| $\bar{\mathcal{B}}_t$ | Fechamento de $\mathcal{B}_t$                        |
| $\mathbf{X}$          | Vetor posição referencial                            |
| $\mathbf{x}$          | Vetor posição espacial                               |
| $\varphi$             | Função de mapeamento                                 |
| $\mathbf{u}$          | Vetor deslocamento de uma partícula material         |
| $\dot{\mathbf{x}}$    | Vetor velocidade de uma partícula material           |
| $\ddot{\mathbf{x}}$   | Vetor aceleração de uma partícula material           |
| $\mathbf{v}$          | Vetor velocidade na descrição espacial               |
| $\dot{\mathbf{v}}$    | Vetor aceleração na descrição espacial               |
| $f$                   | Campo espacial genérico (tensor de ordem genérica)   |
| $\mathcal{F}$         | Campo material genérico (tensor de ordem genérica)   |
| Grad                  | Operação de gradiente material de um campo material  |
| grad                  | Operação de gradiente espacial de um campo espacial  |
| Div                   | Operação de divergente material de um campo material |

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $\text{div}$          | Operação de divergente espacial de um campo espacial    |
| $\dot{\mathcal{F}}$   | Derivada temporal de um campo material                  |
| $\dot{f}$             | Derivada temporal de um campo espacial                  |
| $\mathbf{F}$          | Tensor gradiente de deformação                          |
| $d\mathbf{x}$         | Fibra infinitesimal Lagrangiana                         |
| $d\mathbf{X}$         | Fibra infinitesimal Euleriana                           |
| $\mathbf{I}$          | Tensor identidade (2 <sup>a</sup> ordem)                |
| $J$                   | Jacobiano de transformação volumétrica                  |
| $\ \cdot\ _2$         | Norma Euclidiana  |
| $\ \cdot\ _\infty$    | Norma do supremo  |
| $\mathbf{C}$          | Tensor de deformação de Cauchy-Green à direita          |
| $\mathbf{E}$          | Tensor de deformação de Green-Lagrange                  |
| $\mathbf{B}$          | Tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda         |
| $\mathbf{e}$          | Tensor de deformação de Euler-Almansi                   |
| $(\cdot)^T$           | Operação de transposição                                |
| $(\cdot)^{-1}$        | Operação de inversão                                    |
| $\varepsilon$         | Tensor de deformação infinitesimal                      |
| $\ell$                | Tensor gradiente do campo espacial de velocidade        |
| $\mathbf{d}$          | Tensor taxa de deformação (simétrico)                   |
| $\mathbf{w}$          | Tensor de vorticidade (anti-simétrico)                  |
| $\mathbf{n}$          | Vetor normal à superfície na configuração espacial      |
| $\mathbf{N}$          | Vetor normal à superfície na configuração de referência |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | Tensor de tensão de Cauchy                              |
| $\mathbf{t}$          | Vetor força de superfície espacial                      |
| $\mathbf{P}$          | Primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff            |
| $\mathbf{T}$          | Vetor força de superfície referencial                   |



|                             |  |
|-----------------------------|--|
| $\mathbf{S}$                | Segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff                          |
| $\boldsymbol{\tau}$         | Tensor de tensão de Kirchhoff  |
| $\text{Oldr}(\cdot)$        | Taxa de tensão de Oldroyd do tensor $(\cdot)$                        |
| $\text{Trues}(\cdot)$       | Taxa de tensão de Truesdell do tensor $(\cdot)$                      |
| $\dot{\mathbf{S}}$          | Taxa do segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff                  |
| $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ | Taxa do tensor de tensão de Cauchy                                   |
| $\text{tr}$                 | Operação de traço de um tensor de segunda ordem                      |
| $\rho$                      | Densidade específica espacial  |
| $\rho_0$                    | Densidade específica referencial                                     |
| $\mathbf{l}$                | Quantidade de movimento linear                                       |
| $dV_t$                      | Diferencial de volume espacial                                       |
| $dV_0$                      | Diferencial de volume referencial                                    |
| $dS_t$                      | Diferencial de área espacial   |
| $dS_0$                      | Diferencial de área referencial                                      |
| $\mathbf{b}$                | Campo vetorial de força de corpo específica                          |
| $\dot{\mathbf{j}}$          | Quantidade de movimento angular                                      |
| $\mathbf{r}$                | Vetor posição relativo à origem do sistema de coordenadas Euleriano. |
| $\boldsymbol{\epsilon}$     | Tensor de permutação (3ª ordem)                                      |
| $e$                         | Energia interna por unidade de volume atual                          |
| $\mathbf{q}$                | Vetor fluxo de calor por unidade de área atual                       |
| $r$                         | Campo escalar de geração de calor (através de fontes)                |
| $\mathcal{P}_{\text{ext}}$  | Potência externa   |
| $\theta$                    | Campo escalar de temperatura absoluta                                |
| $\eta$                      | Entropia por unidade de volume atual                                 |
| $\mathbf{h}$                | Fluxo de entropia por unidade de área atual                          |
| $\tilde{r}$                 | Campo escalar de geração de entropia (através de fontes)             |

|                            |  |
|----------------------------|--|
| $\mathcal{D}$              | Dissipação total   |
| $\mathcal{D}_{\text{int}}$ | Dissipação interna   |
| $\mathcal{D}_{\text{ter}}$ | Dissipação térmica   |
| $\Psi$                     | Energia livre de Helmholtz   |
| $\mathcal{S}$              | Conjunto de variáveis de estado termodinâmicas   |
| $\alpha$                   | Subconjunto de variáveis termodinâmicas associadas a processos dissipativos (variáveis internas) |
| $\mathcal{Q}$              | Conjunto de forças termodinâmicas conjugadas às variáveis internas                               |
| $\Xi$                      | Potencial de dissipação escalar  |
| $\phi$                     | Potencial de dissipação escalar conjugado à $\Xi$  |
| $\mathcal{P}$              | Potencial variacional  |
| $\bar{\mathcal{P}}$        | Potencial variacional efetivo  |
| inf                        | Operação de otimização (ínfimo)  |
| $\mathcal{W}$              | Potencial variacional semi-discreto  |
| $\bar{\mathcal{W}}$        | Potencial variacional efetivo semi-discreto  |
| $\Delta t$                 | Incremento temporal (associado ao processo de discretização no tempo)                            |
| $n$                        | Número inteiro associado à partição temporal   |
| $\mathbb{C}$               | Módulo tangente consistente material   |
| $\mathcal{C}$              | Módulo tangente consistente espacial   |
| $\bar{\mathbf{E}}$         | Vetor de base Lagrangiano  |
| $\Omega_0^\alpha$          | Domínio da configuração de referência do constituinte $\alpha$                                   |
| $\partial\Omega_0^\alpha$  | Fronteira da configuração de referência do constituinte $\alpha$                                 |
| $\mathbf{X}^\alpha$        | Vetor posição das partículas materiais de cada constituinte $\alpha$                             |
| $\mathbf{X}^\alpha$        | Vetor posição espacial de cada constituinte $\alpha$   |
| $\varphi^\alpha$           | Função de mapeamento de cada constituinte $\alpha$   |
| $\mathbf{u}^\alpha$        | Vetor deslocamento de uma partícula do constituinte $\alpha$                                     |

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| $\mathbf{F}^\alpha$         | Tensor gradiente de deformação do constituinte $\alpha$   |
| $J^\alpha$                  | Jacobiano de transformação volumétrica de cada constituinte $\alpha$                                |
| $dV_t^\alpha$               | Diferencial de volume de cada constituinte $\alpha$ na configuração espacial                        |
| $dV_0^\alpha$               | Diferencial de volume de cada constituinte $\alpha$ na configuração referencial                     |
| $\rho^\alpha$               | Densidade aparente de cada constituinte $\alpha$ na configuração espacial                           |
| $dm^\alpha$                 | Diferencial de massa do constituinte $\alpha$ na configuração espacial                              |
| $\rho_0^\alpha$             | Densidade aparente de cada constituinte $\alpha$ na configuração referencial                        |
| $\Omega_\mu^\alpha$         | Domínio de cada microconstituinte $\alpha$ relacionado ao Elemento de Volume Representativo (EVR)   |
| $\partial\Omega_\mu^\alpha$ | Fronteira de cada microconstituinte $\alpha$ relacionado ao Elemento de Volume Representativo (EVR) |
| $\rho_\mu^\alpha$           | Densidade intrínseca de $\alpha$  |
| $dV_\mu^\alpha$             | Diferencial de volume de cada fase $\alpha$ no EVR.   |
| $\nu^\alpha$                | Fração volumétrica Euleriana de cada constituinte $\alpha$  |
| $\nu^s$                     | Solidez Euleriana da mistura  |
| $\nu^f$                     | Porosidade Euleriana da mistura   |
| $\boldsymbol{\sigma}^s$     | Parcela efetiva da tensão total de Cauchy   |
| $\boldsymbol{\sigma}^f$     | Parcela hidrostática da tensão total de Cauchy  |
| $p$                         | Pressão de poro   |
| $\mathbf{0}$                | Tensor nulo (2ª ordem)  |
| $m^\alpha$                  | Massa total de cada componente $\alpha$   |
| $\mathbf{v}^\alpha$         | Vetor de velocidade espacial do constituinte $\alpha$   |
| $\mathbf{w}$                | Vetor de velocidade relativa do fluido  |
| $\partial\Omega_t^s _u$     | Região em que é aplicada a condição de contorno de deslocamento prescrito                           |
| $\partial\Omega_t^s _t$     | Região em que são aplicadas trações de superfície   |
| $\partial\Omega_t^f _p$     | Região em que é aplicada a condição de contorno de pressão de poro prescrita                        |

|                         |  |
|-------------------------|--|
| $\partial\Omega_t^f _q$ | Região em que são aplicados fluxos de superfície                     |
| $\emptyset$             | Espaço vazio   |
| $\cap$                  | Interseção de espaços  |
| $\cup$                  | União de espaços   |
| $\bar{\mathbf{u}}$      | Deslocamento prescrito   |
| $\bar{\mathbf{t}}$      | Tração de superfície prescrita                                       |
| $\bar{p}$               | Pressão de poro prescrita  |
| $\bar{q}$               | Fluxo de superfície prescrito  |
| $\delta$                | Variação virtual   |
| $\mathcal{V}_u$         | Espaço de deslocamentos cinematicamente admissíveis                  |
| $\boldsymbol{\kappa}$   | Tensor de segunda ordem de permeabilidade espacial                   |
| $\mathbf{K}$            | Tensor de segunda ordem de permeabilidade referencial                |
| $\delta W^u$            | Trabalho virtual relativo ao campo de deslocamentos                  |
| $\delta W^p$            | Potência virtual relativa ao campo de pressão de poro                |
| $\Delta \mathbf{u}$     | Incremento de deslocamento   |
| $\Delta p$              | Incremento de pressão de poro  |
| $\Delta \mathbf{e}$     | Incremento do tensor de deformação de Almansi                        |
| $\mathcal{K}$           | Módulo tangente de permeabilidade espacial (4 <sup>a</sup> ordem)    |
| $\mathbb{K}$            | Módulo tangente de permeabilidade referencial (4 <sup>a</sup> ordem) |
| $\underline{(\cdot)}$   | Notação de Voigt   |
| $N_\alpha^u$            | Funções de forma do campo de deslocamentos                           |
| $N_\alpha^p$            | Funções de forma do campo de pressão de poro                         |
| $\mathbf{q}$            | Vetor de deslocamentos nodais  |
| $\mathbf{p}$            | Vetor de pressões de poro nodais                                     |
| $\Delta \mathbf{q}$     | Vetor incremento de deslocamentos nodais                             |
| $\Delta \mathbf{p}$     | Vetor incremento de pressões de poro nodais                          |

|                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| $(\cdot)^e$                          | Variável relacionada ao elemento finito ( $e$ )                                 |
| $\dot{\mathbf{q}}$                   | Vetor de velocidades nodais   |
| $\mathbf{R}^u$                       | Vetor resíduo associado ao deslocamento   |
| $\mathbf{F}_{\text{int}}^u$          | Vetor força interna associada ao deslocamento                                   |
| $\mathbf{F}_{\text{ext}}^u$          | Vetor força externa associada ao deslocamento                                   |
| $\mathbf{F}_{\text{int}}^p$          | Vetor força interna associada à pressão de poro                                 |
| $\mathbf{F}_{\text{ext}}^p$          | Vetor força externa associada à pressão de poro                                 |
| $\mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}}$ | Operação de <i>assembly</i> matricial   |
| $\mathbf{K}^{uu}$                    | Parcela $\mathbf{K}^{uu}$ da matriz de rigidez global $\mathbf{K}$              |
| $\mathbf{K}^{up}$                    | Parcela $\mathbf{K}^{up}$ da matriz de rigidez global $\mathbf{K}$              |
| $\mathbf{K}^{pu}$                    | Parcela $\mathbf{K}^{pu}$ da matriz de rigidez global $\mathbf{K}$              |
| $\mathbf{K}^{pp}$                    | Parcela $\mathbf{K}^{pp}$ da matriz de rigidez global $\mathbf{K}$              |
| $\kappa$                             | Parâmetro de permeabilidade   |
| $\exp(\cdot)$                        | Função exponencial ( $e^{(\cdot)}$ )  |
| $M$                                  | Parâmetro exponencial dos modelos de permeabilidade                             |
| $\alpha$                             | Parâmetro do modelo de Holmes-Mow   |
| $\mathcal{M}$                        | Operador de equilíbrio mecânico (conservação da quantidade de movimento linear) |
| $\mathcal{F}$                        | Operador de fluxo de fluido (conservação de massa)                              |
| $M^f$                                | Conteúdo de massa de fluido   |
| $Q$                                  | Módulo de Biot  |
| $b$                                  | Coefficiente de Biot  |
| $\varepsilon_v$                      | Medida de deformação volumétrica  |
| $K_s$                                | Módulo volumétrico da partícula sólida  |
| $K_f$                                | Módulo volumétrico da partícula de fluido                                       |
| $K_{\text{dr}}$                      | Módulo volumétrico drenado  |

|                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| $\nu_0^f$                             | Porosidade na configuração de referência   |
| $\alpha_{\text{undr}}$                | Constante algorítmica do método de solução <i>undrained</i>                      |
| $\epsilon$                            | Tensor de deformação logarítmica   |
| $e_{\text{vol}}$                      | Parte volumétrica do tensor de deformação de Almansi                             |
| $\mathbf{K}_{\text{undr}}^{uu}$       | Termo adicional da matriz de rigidez relativo ao método <i>undrained</i>         |
| $\mathcal{L}_v$                       | Derivada de <i>Lie</i>   |
| $C^s$                                 | Módulo tangente constitutivo do esqueleto sólido                                 |
| $\mathbf{d}_{\text{dev}}$             | Parcela desviadora do tensor taxa de deformação                                  |
| $K_{\text{dr}}^{\text{PK2}}$          | Módulo volumétrico drenado do esquema <i>fixed second Piola-Kirchhoff stress</i> |
| $\mathbf{K}_{\text{fix-str}}^{pp}$    | Termo adicional da matriz de rigidez relativo ao método <i>fixed-stress</i>      |
| $\mathbf{F}^e$                        | Parcela elástica do tensor gradiente de deformação                               |
| $\mathbf{F}^v$                        | Parcela viscosa do tensor gradiente de deformação                                |
| $\mathbf{l}^v$                        | Parcela viscosa do tensor gradiente de velocidade                                |
| $\Psi^\infty$                         | Parcela de equilíbrio da energia livre de Helmholtz                              |
| $\Psi^e$                              | Parcela elástica da energia livre de Helmholtz                                   |
| $\mathbf{C}^e$                        | Parcela elástica do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita               |
| $\mu^\infty, k^\infty, \mu^e, \eta^v$ | Parâmetros do modelo constitutivo do esqueleto sólido                            |
| $H$                                   | Altura da amostra (direção axial)  |
| $R$                                   | Raio do amostra  |
| $D$                                   | Diâmetro da amostra  |

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>  | <b>33</b> |
| 1.1      | Contexto e motivação   | 33        |
| 1.2      | Objetivos  | 37        |
| 1.3      | Organização do conteúdo da dissertação   | 37        |
| <b>2</b> | <b>BREVE ESTADO DA ARTE</b>  | <b>39</b> |
| 2.1      | Visão histórica  | 39        |
| 2.2      | Teorias bifásicas aplicadas a tecidos biológicos moles                                 | 40        |
| 2.3      | Estratégias de solução   | 44        |
| 2.4      | Estratégias de solução sequenciais para problemas poromecânicos em grandes deformações | 45        |
| <b>3</b> | <b>CONCEITOS DE MECÂNICA E TERMODINÂMICA DE MEIOS CONTÍNUOS</b>                        | <b>47</b> |
| 3.1      | Descrição do movimento   | 47        |
| 3.2      | Gradiente de deformação  | 48        |
| 3.3      | Medidas de deformação e taxa de deformação   | 49        |
| 3.4      | Medidas de tensão  | 50        |
| 3.5      | Objetividade das medidas de taxa de tensão   | 51        |
| 3.6      | Leis de conservação em coordenadas espaciais   | 51        |
| 3.6.1    | Conservação de massa   | 51        |
| 3.6.2    | Conservação da quantidade de movimento linear  | 52        |
| 3.6.3    | Conservação da quantidade de movimento angular   | 52        |
| 3.7      | Leis fundamentais da termodinâmica em coordenadas espaciais                            | 53        |
| 3.7.1    | Primeira lei da termodinâmica (balanço energético)                                     | 53        |
| 3.7.2    | Segunda lei da termodinâmica (inequação de Clausius-Duhem)                             | 53        |
| 3.8      | Abordagem constitutiva variacional   | 54        |
| <b>4</b> | <b>DESCRIBÇÃO FINITA DE UM MATERIAL BIFÁSICO</b>                                       | <b>59</b> |
| 4.1      | Teoria bifásica em cinemática finita   | 59        |
| 4.2      | Hipóteses do modelo  | 61        |
| 4.3      | Equações de governo acopladas  | 62        |
| 4.3.1    | Conservação da quantidade de movimento   | 62        |
| 4.3.2    | Conservação da massa   | 62        |
| 4.3.3    | Problema de valor de contorno  | 64        |
| 4.4      | Formulação fraca   | 65        |

|       |   |                |
|-------|---|----------------|
| 4.4.1 | Equações incrementais . . . . .   | 66             |
| 4.5   | <b>Aproximação por Elementos Finitos . . . . .</b>  | <b>68</b>      |
| 4.6   | <b>Modelo de permeabilidade . . . . .</b>   | <b>75</b>      |
| 5     | <b>ESQUEMAS DE SOLUÇÃO SEQUENCIAIS . . . . .</b>  | <b>79</b>      |
| 5.1   | <i>Undrained split</i> . . . . .  | 82             |
| 5.1.1 | Formulação contínua . . . . .   | 82             |
| 5.1.2 | Formulação discretizada . . . . .   | 83             |
| 5.2   | <i>Drained split</i> . . . . .  | 84             |
| 5.3   | <i>Fixed-stress split</i> . . . . .   | 85             |
| 5.3.1 | Formulação contínua . . . . .   | 86             |
| 5.3.2 | Formulação discretizada . . . . .   | 87             |
| 5.4   | <i>Fixed-strain split</i> . . . . .   | 89             |
| 6     | <b>EXPERIMENTOS NUMÉRICOS . . . . .</b>   | <b>91</b>      |
| 6.1   | <b>Modelo constitutivo e lei de transporte . . . . .</b>  | <b>92</b>      |
| 6.2   | <b>Verificação dos esquemas de solução . . . . .</b>  | <b>94</b>      |
| 6.3   | <b>Resultados e discussões . . . . .</b>  | <b>95</b>      |
| 6.3.1 | Discussões acerca da eficiência dos algoritmos na solução do problema de compressão confinada . . . . . | 101            |
| 6.3.2 | Discussões acerca da eficiência dos algoritmos na solução do problema de compressão livre . . . . .     | 104            |
| 7     | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS . . . . .</b>  | <b>109</b>     |
| 7.1   | <b>Considerações finais . . . . .</b>   | <b>109</b>     |
| 7.2   | <b>Sugestões para trabalhos futuros . . . . .</b>   | <b>110</b>     |
|       | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>  | <b>113</b>     |
|       | <br><b>APÊNDICES</b>  | <br><b>123</b> |
|       | <b>APÊNDICE A – PRODUTOS TENSORIAIS . . . . .</b>   | <b>125</b>     |
|       | <b>APÊNDICE B – DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS</b>   | <b>127</b>     |
|       | <b>APÊNDICE C – ETAPA DE LINEARIZAÇÃO . . . . .</b>   | <b>131</b>     |
|       | <b>APÊNDICE D – OBTENÇÃO DO TERMO LINEARIZADO DO ALGORITMO <i>UNDRAINED</i> . . . . .</b>               | <b>137</b>     |



|  |     |
|--|-----|
| APÊNDICE E – OBTENÇÃO DO TERMO LINEARIZADO DO<br>ALGORITMO <i>FIXED-STRESS</i> . . . . . | 139 |
| APÊNDICE F – CONDICIONAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ<br>ACOPLADA . . . . .                  | 141 |



# 1 Introdução

## 1.1 Contexto e motivação

A mecânica dos tecidos biológicos consiste em uma área multidisciplinar, envolvendo, de modo geral, esforços de pesquisadores das áreas de medicina, biologia, física, engenharia e matemática aplicada. Nos últimos anos, grande parte destes esforços tem se dirigido ao entendimento das relações entre os processos mecânicos e biológicos que ocorrem entre as complexas escalas espaciais observadas nestes tecidos. A elucidação de que estímulos mecânicos são capazes de modificar o funcionamento das células torna o conjunto de áreas relacionadas à mecanobiologia (*e.g.*: mecanotransdução) e mecânica computacional extremamente promissor no desenvolvimento de técnicas de reparo, remodelação e crescimento tecidual. Além disto, o uso de ferramentas numéricas é fundamental para contornar as dificuldades intrínsecas às complexidades destes materiais, tornando possível um melhor entendimento de seus comportamentos biomecânicos.

Dentre as classificações histológicas, os tecidos conjuntivos (ou conectivos) representam a classe mais abundante presente no corpo humano (MESCHER, 2018). Na literatura, estes tecidos, com exceção dos calcificados (tecidos conjuntivos ósseos), identificam-se também por tecidos conjuntivos moles<sup>1</sup>. Assim, os tendões, ligamentos, vasos sanguíneos, derme, gorduras, discos intervertebrais e outros fazem parte deste grande grupo. Ainda que estas estruturas exerçam funções absolutamente distintas, nelas são observadas morfologias semelhantes. De modo geral, os tecidos conjuntivos moles são compostos por uma matriz extracelular e células especializadas. A matriz extracelular constitui-se de um conjunto de proteínas no formato de fibras de colágeno e elastina. As células especializadas (*e.g.*: fibroblastos) são responsáveis pela produção e manutenção das fibras da matriz extracelular. Todos estes componentes são imersos em uma substância base abundante em água, sendo ela uma das substâncias responsáveis pela difusão de nutrientes dentro do tecido. Além dos tecidos conjuntivos não calcificados, os tecidos nervosos e musculares também incluem-se na definição de tecidos biológicos moles. Entretanto, por possuírem células e fibras de outras naturezas, não estão no escopo deste trabalho.

A compreensão do comportamento biomecânico destes tecidos é fundamental para a evolução de técnicas de diagnóstico e prevenção de doenças associadas à sistemas fisiológicos. As doenças cardiovasculares estão entre as principais causas de óbito no mundo, impulsionam a pesquisa e o desenvolvimento de programas de simulação de sistemas

---

<sup>1</sup> Consideram-se tecidos biológicos moles todas as partes do organismo que não são órgãos, não possuem calcificação (*e.g.*: ossos) e não são epiteliais (*e.g.*: epiderme e epitélios). Assim, as classes de tecidos conjuntivos (cartilaginoso e adiposo), musculares e nervosos são denominadas tecidos biológicos moles.

hemodinâmicos e motivam estudos acerca das propriedades inerentes aos materiais de vasos sanguíneos. Segundo o “Cardiômetro”, indicador do número de mortes por doenças cardiovasculares no Brasil, além de representar a principal causa de óbitos no país, o número de mortes chega a ser de duas a três vezes maior do que o de todos os tipos de câncer juntos ([SOCIEDADE BRASILEIRA DE CARDIOLOGIA, 2020](#)). Em se tratando de doenças ortopédicas, as dores lombares representam o principal motivo pelo qual jovens e adultos de até 45 anos de idade afastam-se de seus empregos. Dentre os problemas relacionados à coluna vertebral, os associados à degeneração dos discos intervertebrais são substanciais. Segundo [Bowles e Setton \(2017\)](#), enquanto o entendimento dos mecanismos que envolvem as dores lombares for incompleto, qualquer esforço terapêutico com fins de tratamento de doenças relacionadas aos discos intervertebrais deve ser considerado. Com isto, as técnicas desenvolvidas pela medicina regenerativa junto à engenharia de tecidos são de grande interesse. Estes são apenas alguns de muitos outros exemplos onde eventuais aspectos clínicos podem receber, em um curto ou longo espaço de tempo, contribuições das áreas de biomecânica dos tecidos biológicos moles.

Conforme dito anteriormente, os componentes celulares que formam a estrutura básica dos tecidos biológicos moles estão imersos em uma substância base abundante em água ([MESCHER, 2018](#)). Ao considerar estruturas pouco vascularizadas (*e.g.* tendões, ligamentos e discos intervertebrais), o fenômeno de difusão assume um papel fundamental no processo de transporte de nutrientes do ambiente externo para dentro das fronteiras do tecido. Os tecidos moles formam estruturas que, por natureza, estão sujeitas a regimes de grandes deformações, fenômenos de deformação dependente do tempo, danificação, interação fluido-estrutura, acoplamento difusivo-mecânico, entre outros. Além disto, duas fases podem ser consideradas para distinguir a estrutura básica de um tecido biológico mole: (i) uma fase sólida de macromoléculas estruturais (colágeno, elastina e proteoglicanos) e células, e (ii) uma fase fluida de água e solutos ([MALANDRINO; MOEENDARBARY, 2019](#)). Com estas características, é comum a utilização de modelos baseados em misturas bifásicas considerando cinemática finita, modelos constitutivos não lineares, modelos de permeabilidade dependentes do estado volumétrico de deformação e hipóteses de incompressibilidade que acabam por dificultar o processo de obtenção de respostas numéricas do problema acoplado ([ALMEIDA; SPILKER, 1997a](#); [ALMEIDA; SPILKER, 1997b](#); [ATESHIAN; WEISS, 2010](#)).

Uma das primeiras objeções da literatura acerca da modelagem de tecidos biológicos moles através de modelos fenomenológicos bifásicos esteve na consideração do comportamento viscoso intrínseco à fase sólida. Assim, em adição à dissipação natural decorrente da velocidade relativa entre a fase sólida e a fluida, os chamados modelos poroviscoelásticos consideram que a fase sólida possui uma dissipação intrínseca ao seu processo de deformação ([MAK, 1986a](#); [MAK, 1986b](#)).

Neste tipo de modelagem, além de fazer-se necessário identificar parâmetros constitutivos relativos ao esqueleto sólido, surge a necessidade de determinar parâmetros relacionados à chamada lei de transporte de Darcy (COUSSY, 2003) para modelar o fluxo de fluido através de meios porosos. Mesmo nos modelos de permeabilidade mais simples, onde considera-se que o parâmetro de permeabilidade de Darcy (comprimento<sup>4</sup>/força · tempo) não é função da deformação volumétrica do esqueleto sólido, a identificação deste parâmetro é absolutamente não-trivial. Isto se decorre de dois motivos: 1) Da natureza acoplada do material, que faz com que não existam ensaios experimentais com condições homogêneas de deformação; assim, a identificação de parâmetros utilizando o método dos elementos finitos não pode ser realizada a nível de um ponto de Gauss. 2) Dos ensaios experimentais para determinação da constante de permeabilidade, que geralmente são realizados através de métodos indiretos. Esta dificuldade faz com que, ao buscar um valor para o parâmetro de permeabilidade na literatura, seja encontrada uma ampla faixa de valores do parâmetro para uma mesma estrutura, sob as mesmas condições. Considerando, por exemplo, o caso de tendões, a faixa encontrada está entre os valores ( $5 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-1} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ ) (HOLMES; MOW, 1990; YIN; ELLIOTT, 2004; LAVAGNINO et al., 2008; KHAYYERI et al., 2016; OFTADEH et al., 2018). Para o caso de cartilagens articulares, encontra-se valores na faixa ( $1 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ ) (DISILVESTRO; SUH, 2001; BOSCHETTI et al., 2004; ÜN; ÇALIK, 2019; TANSKA et al., 2020), e para discos intervertebrais a faixa encontrada é (KLISCH; LOTZ, 2000; JOHANNESSEN; ELLIOTT, 2005; GUO; LI; ZHANG, 2016). Sendo assim, uma determinação precisa deste parâmetro é ainda um problema a ser bem estabelecido na literatura (KLAHR et al., 2021).

Esta sequência de argumentos demarcam um cenário importante a ser considerado na modelagem de tecidos biológicos moles através de modelos bifásicos:

- Regime de grandes deformações;
- Esqueleto sólido viscoelástico;
- Parâmetro de permeabilidade dentro de uma faixa encontrada na literatura.
- Escalas de tempo e espaço em que ocorrem as análises.

Entretanto, em se tratando de métodos numéricos para a solução de problemas em poromecânica, estas características geram uma alta *força de acoplamento* no sistema. Assim, o tratamento de problemas numéricos em métodos de solução de sistemas acoplados tem sido objeto de estudo de diversos autores, principalmente da área de geomecânica. Na literatura, a resposta totalmente acoplada destes sistemas é obtida por meio de duas classes de métodos: os monolíticos e os sequenciais iterativamente acoplados. No esquema monolítico, as equações governantes são resolvidas simultaneamente em cada

incremento, geralmente utilizando o método de Newton-Raphson. Embora esta abordagem seja incondicionalmente estável, a mesma pode sofrer de problemas relacionados ao mal condicionamento — caso em que podem ser necessários pré-condicionadores e algoritmos de solução robustos. Além disso, este método normalmente resulta em grandes sistemas de equações não-simétricos, tornando-se computacionalmente custoso (LI; LIU; LEWIS, 2005; LI; WANG, 2018). Por outro lado, esquemas sequenciais iterativamente acoplados dividem o problema bifásico em dois sub-problemas: um relacionado ao equilíbrio mecânico e outro relacionado à equação de conservação da massa. Em cada incremento de tempo, os sub-problemas não lineares são resolvidos de forma iterativa-sequencial, até que um certo critério de convergência seja satisfeito. Em contraste com o esquema monolítico, esta abordagem resulta em dois sistemas de equações menores e simétricos, permitindo a utilização de algoritmos modulares e até de diferentes métodos de discretização temporal e espacial. Apesar destas vantagens, a utilização de esquemas sequenciais pode ser limitada devido a falta de estabilidade e a problemas de convergência (ARMERO, 1999; KIM; TCHELEPI; JUANES, 2011a).

Quatro tipos de esquemas iterativamente acoplados são tipicamente mencionados na literatura: *drained*, *undrained*, *fixed-strain* e *fixed-stress splits* (KIM; TCHELEPI; JUANES, 2011b; KIM; TCHELEPI; JUANES, 2011c; YI; BEAN, 2017). Cada um destes métodos baseia-se em premissas físicas particulares, levando a escolhas numéricas que estabelecem o operador de partição (*splitting operator*) e a evolução da solução em cada iteração dentro da etapa temporal. Estes esquemas de partição apresentam-se como abordagens alternativas interessantes, particularmente em problemas que envolvem discretizações com um elevado número de graus de liberdade.

Investigações numéricas sobre esquemas iterativos considerando grandes deformações podem ser encontradas na literatura (KIM, 2018; REVERÓN et al., 2020), mas poucas obras abordam suas eficiências em problemas fortemente não lineares encontrados em aplicações biomecânicas. Apesar dos esquemas iterativos serem amplamente investigados — e frequentemente recomendados — em aplicações geomecânicas, Mikelić e Wheeler (2013) salienta que tais esquemas podem sofrer de lenta ou mesmo de falta de convergência na presença de não linearidades materiais e/ou geométricas.

É visto que as características de problemas geomecânicos são justamente aquelas que tornam os esquemas sequenciais atrativos. Estes problemas geralmente apresentam escalas espaciais (geométricas) e parâmetros materiais que diferem significativamente daqueles encontrados em aplicações biomecânicas. Além disto, na maioria dos casos de geomecânica, a hipótese de cinemática infinitesimal é adotada, enquanto que a consideração de grandes deformações é uma escolha primordial para modelar tecidos biológicos moles.

A discussão acima motiva o desenvolvimento de um estudo comparativo do desempenho numérico de diferentes esquemas de solução no contexto de cinemática finita,

modelos constitutivos não lineares, parâmetros materiais e escalas geométricas tipicamente encontradas na literatura de tecidos biológicos moles.

## 1.2 Objetivos

Os principais objetivos desta dissertação de mestrado são:

- Propor um novo algoritmo *fixed-stress* para problemas de poroviscoelasticidade em grandes deformações.
- Estender a formulação dos principais esquemas sequenciais encontrados na literatura (*drained*, *undrained* e *fixed-strain*) para o método dos elementos finitos utilizando uma abordagem Lagrangiana atualizada.
- Comparar a eficiência numérica dos algoritmos acima citados com uma abordagem monolítica em problemas aplicados à biomecânica de tecidos biológicos moles.

## 1.3 Organização do conteúdo da dissertação

O conteúdo deste documento é organizado da seguinte forma:

- O Capítulo 1 se inicia com aspectos relacionados ao contexto biológico em que se insere este trabalho. Junto a esta apresentação, o leitor é motivado ao tema em sí, que refere-se a métodos de solução para problemas bifásicos sujeitos a não linearidades geométricas e materiais.
- O Capítulo 2 apresenta um breve estado da arte contendo os principais trabalhos relacionados a modelagem de tecidos biológicos utilizando modelos bifásicos e estratégias de solução de problemas acoplados presentes da literatura.
- O Capítulo 3 apresenta um breve resumo dos principais tópicos de mecânica do contínuo necessários para formular os esquemas de solução acoplados dos Capítulos seguintes.
- O Capítulo 4 abrange a chamada teoria bifásica, que refere-se ao caso particular de poroelasticidade onde os microconstituintes são considerados incompressíveis. Aqui, as equações de governo do problema são obtidas em seu formato totalmente discreto pelo método dos elementos finitos. Por fim, apresenta-se a chamada formulação monolítica.
- O Capítulo 5 apresenta as formulações no contínuo e discretizadas dos algoritmos sequenciais iterativamente acoplados: *drained*, *undrained*, *fixed-strain* e *fixed-stress*.

- O Capítulo 6 apresenta aplicações numéricas presentes na literatura de tecidos biológicos moles. Nesta seção, compara-se a eficiência de todos os métodos de solução de problemas acoplados tratados no corpo do texto.
- O Capítulo 7 apresenta as principais conclusões acerca dos resultados obtidos e também apresenta a visão do autor sobre os possíveis trabalhos futuros.
- As páginas finais do texto são dedicadas às Referências e aos Apêndices, onde encontram-se algumas das deduções/informações julgadas importantes para um entendimento mais profundo do corpo principal do texto.



## 2 Breve estado da arte

### 2.1 Visão histórica

Os primeiros estudos relacionados às atuais teorias poromecânicas são orientados a aplicações geomecânicas. Em se tratando de mecânica dos solos — estudo do comportamento mecânico de solos saturados de água sujeitos a um carregamento externo —, um dos fenômenos de interesse está no adensamento. Durante este fenômeno, devido a estrutura porosa da grande maioria dos solos, observa-se uma transferência gradual da pressão dos poros para o esqueleto sólido. Esta eventual compressão da fase sólida e drenagem do fluido pela rede de poros é chamada de consolidação, e foi objeto de estudo de [Terzaghi \(1923\)](#) no desenvolvimento da chamada Teoria da Consolidação unidimensional. Ademais, o autor propôs o princípio das tensões efetivas, utilizado como hipótese em problemas de modelagem bifásica até os dias de hoje.

Posteriormente, [Biot \(1941\)](#) propõe uma teoria tridimensional em pequenas deformações para analisar o comportamento de meios porosos constituídos de uma matriz sólida perfeitamente elástica e isotrópica, preenchida por um fluido incompressível. Mais tarde, além de tornar-se conhecida por Teoria de Poroelasticidade, esta foi estendida para o caso de deformações finitas e outros tipos de meios porosos ([BIOT; TEMPLE, 1972](#)). O trabalho de [Schiffman, Chen e Jordan \(1969\)](#) apresenta, além de uma revisão das soluções analíticas mencionadas, certas vantagens do modelo tridimensional quando comparado ao unidimensional, principalmente pelo desenvolvimento dos métodos numéricos no início da década de 70.

No início da década de 60, é apresentada por [Truesdell e Toupin \(1960\)](#) uma formulação geral para meios contínuos representando misturas de todas as naturezas, sendo elas sólidas, gasosas, líquidas, sujeitas a reações químicas, entre outras, vindo a ser denominada Teoria das Misturas. Quando sujeitas às hipóteses de completa saturação da mistura, compressibilidade intrínseca dos constituintes e inviscidade da fase imersa na rede de poros, ambas as teorias Poroelástica e das Misturas são equivalentes. No âmbito de modelagem constitutiva de materiais biológicos porosos, o quadro teórico apresentado por Truesdell possui caráter fundamental na formulação dos chamados modelos bifásicos, trifásicos e quadrifásicos a serem apresentados nas próximas seções.

Referências apontam os trabalhos de [Fick \(1855\)](#) e [Stefan \(1871\)](#) como precursores de uma premissa básica utilizada na Teoria das Misturas<sup>1</sup>. Estes autores sugerem que, em

---

<sup>1</sup> As teorias bi/tri/quadrifásicas — derivadas da Teoria das Misturas — também utilizam esta premissa.

uma mistura de  $k$  componentes<sup>2</sup>, cada ponto da mistura é ocupado simultaneamente por estes. Nestes trabalhos, nenhum processo de homogeneização é mencionado; porém, nos trabalhos de [Whitaker \(1969\)](#) e [Slattery \(1978\)](#) este processo é utilizado como justificativa para a sobreposição dos componentes em um único ponto espacial.

## 2.2 Teorias bifásicas aplicadas a tecidos biológicos moles

Nos anos iniciais da década de 70, a resposta de tecidos biológicos moles (cartilagens articulares, tendões, discos intervertebrais, artérias, entre outros) era expressa através de modelos elásticos ou viscoelásticos, podendo conter características lineares ou não lineares. Além disto, a consideração de modelos contendo uma única fase era usual. Ao modelar a seção transversal de paredes arteriais utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) sob deformações finitas, o trabalho de [Simon et al. \(1971\)](#) ilustra esta tendência. Neste trabalho, os autores consideram apenas a isotropia transversal causada pela disposição de fibras de colágeno, desconsiderando a fase de fluido intersticial. Na mesma linha, [Belytschko et al. \(1974\)](#) realizam análises estruturais de um segmento de coluna vertebral (disco intervertebral e vértebras adjacentes) utilizando o MEF. Para a obtenção de parâmetros constitutivos a partir de resultados experimentais, os autores simularam o comportamento do núcleo pulposo<sup>3</sup> considerando um material incompressível sujeito a um estado de tensões hidrostático. Entretanto, a modelagem do anel fibroso<sup>4</sup> é realizada considerando um material elástico, linear e ortotrópico. Em se tratando de modelos viscoelásticos de uma única fase, [Hayes e Mockros \(1971\)](#) estudam a influência do estado patológico de cartilagens articulares nos parâmetros viscoelásticos do modelo. Todavia, destaca-se que a natureza bifásica destes tecidos é conhecida e deve ser investigada.

Uma visão bifásica para a modelagem de tecidos moles é descrita por [Mow et al. \(1980\)](#). Ao utilizar o formalismo da Teoria das Misturas de [Truesdell e Toupin \(1960\)](#), este trabalho representa um importante marco histórico para as chamadas Teorias Bifásicas, exaustivamente estudadas durante os anos subsequentes da década de 80. Além disto, é importante destacar que, dadas as hipóteses assumidas, os modelos bifásicos e poroelásticos são equivalentes. Neste estudo, os autores apresentam modelos teóricos para a cartilagem articular considerando-a um material linear bifásico composto por uma fase de matriz sólida e outra de fluido intersticial. A fase sólida é assumida intrinsecamente incompressível, elástica e linear, enquanto a fase fluida é incompressível e não dissipativa. Ademais, admite-se o movimento relativo entre as fases como a única fonte característica de dissipação. Como última hipótese, considera-se a permeabilidade como variável independente da deformação. No decorrer do trabalho, são apresentados testes experimentais de compressão

<sup>2</sup> Cada componente é tratado como um meio contínuo.

<sup>3</sup> Estrutura extremamente hidratada contida na região interna de discos intervertebrais.

<sup>4</sup> Região fibrosa que circunda a lateral dos discos intervertebrais.

unidimensional sob confinamento, estudando o comportamento de fluência e relaxação de tensão. Os autores enfatizam que o modelo reológico bifásico é o único capaz de prever o comportamento deste tipo de tecido, mas destacam a importância da inserção de não linearidades referentes a permeabilidade no modelo.

Pouco tempo depois, [Lai, Mow e Roth \(1981\)](#) exploraram a não linearidade supracitada. A proposta de uma expressão exponencial para a permeabilidade do tecido cartilaginoso fez com que, ao aumentar-se os níveis de deformação compressiva, o parâmetro decaísse drasticamente. Devido às condições cinemáticas em que estão sujeitos estes tecidos, os autores sugerem a inclusão de deformações finitas nas análises. Um modelo em deformações finitas para os tecidos cartilagosos foi apresentado por [Mow, Holmes e Lai \(1986\)](#) e incluiu a referida permeabilidade não linear. Baseados no trabalho experimental de [Nussbaum e Grodzinsky \(1981\)](#) sobre a ocorrência de edemas<sup>5</sup> em cartilagens articulares, [Myers, Lai e Mow \(1984\)](#) propuseram uma extensão do modelo bifásico, incorporando o efeito da concentração de íons na deformação do tecido.

O comportamento dissipativo dos modelos mencionados até aqui é uma consequência da velocidade relativa entre as fases sólida e fluida. Ao utilizar dados experimentais de cartilagens articulares obtidos na literatura da época, os trabalhos de [Mak \(1986a\)](#), [Mak \(1986b\)](#) relatam que, além da dissipação devido a perda de líquido por infiltração, ambas as fases do modelo bifásico possuem um certo grau de dissipação intrínseca (comportamento viscoso). Ao propor efeitos viscoelásticos no esqueleto sólido, o autor dá origem aos chamados modelos poroviscoelásticos.

Desde a segunda metade da década de 70, podem ser encontradas diversas contribuições utilizando o MEF na solução de problemas envolvendo materiais porosos. Entretanto, no âmbito de modelagem de tecidos moles, alguns artigos se destacam. Os trabalhos de [Simon et al. \(1985a\)](#) e [Simon et al. \(1985b\)](#), em contrapartida com o já mencionado de [Belytschko et al. \(1974\)](#), utilizam materiais bifásicos para investigar o comportamento de discos intervertebrais sujeitos a ação das vértebras adjacentes. Os resultados são obtidos para os casos estático, quasi-estático e dinâmico, estimando parâmetros através de experimentos realizados em amostras de segmentos de coluna vertebral de macacos-rhesus. [Oomens \(1985\)](#) investiga o efeito de fatores mecânicos em úlceras por pressão na pele e na camada subcutânea. O autor apresenta um modelo em elementos finitos bifásico, considerando uma fase sólida permeada pela fase fluida.

Mais tarde, [Lanir \(1987a\)](#) considera a presença de um soluto na fase fluida do modelo bifásico. Os autores enfatizam que os efeitos da concentração de íons afetam a resistência a deformação volumétrica do tecido. Em um segundo momento, [Lanir \(1987b\)](#) investiga o problema de compressão não confinada em discos intervertebrais apresentando

---

<sup>5</sup> Fenômeno de acúmulo de líquido intersticial dentro dos tecidos biológicos moles. Uma de suas causas está na retenção de íons.

inchaço<sup>6</sup>. É observado que, nesta aplicação, o efeito do inchaço é significativo na resposta do disco. Em se tratando de tecidos moles presentes no sistema cardiovascular, o trabalho de [Simon e Gaballa \(1988\)](#) foi pioneiro na modelagem de paredes de artérias longas através de modelos poroelásticos via MEF considerando cinemática finita. Os autores relatam a capacidade do modelo em prever o efeito da hipertensão no comportamento de tecidos arteriais. Fundamentados nos modelos analíticos em que incorpora-se a condição de permeabilidade dependente da deformação, [Spilker, Suh e Mow \(1988\)](#) apresentam um modelo bifásico em elementos finitos de um tecido cartilaginoso presente em articulações.

A partir do início da década de 90 — após as primeiras implementações —, é evidenciada a grande quantidade de trabalhos com foco no desenvolvimento e tecnologia do MEF para problemas bifásicos. Estes trabalhos foram impulsionados pelo estudo do comportamento de tecidos moles cartilagosos, além da busca por formulações eficientes para o tratamento de problemas tridimensionais. De modo geral, a solução de modelos bifásicos consiste no tratamento acoplado de duas equações: a equação de continuidade (conservação da massa) e o balanço mecânico (conservação da quantidade de movimento). [Spilker e Suh \(1990\)](#) apresentam um elemento finito bifásico, sob regime de deformações infinitesimais, em que a equação de continuidade é satisfeita através de uma penalização. Por meio do método dos resíduos ponderados de Galerkin, é obtido um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, com o deslocamento da fase sólida e a velocidade da fase fluida sendo as variáveis nodais desconhecidas. Os autores revelam que, apesar das boas taxas de convergência obtidas, é necessária a investigação de novas formulações.

As chamadas formulações mistas com penalização são propostas por [Spilker e Maxian \(1990\)](#), resolvendo alguns problemas de travamento e alta sensibilidade à distorção de malha presenciados pela formulação de penalização pura mencionada anteriormente. O que caracteriza estas formulações, além da discretização das variáveis cinemáticas (campo de deslocamentos e velocidades), é a discretização de uma das variáveis cinéticas. No caso da proposta de Spilker, opta-se por discretizar o campo de pressões do fluido. [Vermilyea e Spilker \(1992\)](#) apresentam a formulação para os chamados elementos finitos híbridos. Estes, consistem em uma classe especial daqueles obtidos pela formulação mista com penalização. Sendo assim, os mesmos campos cinemáticos e cinéticos são discretizados; entretanto, as funções representando o campo de pressões são escolhidas de modo a satisfazer as equações de balanço mecânico. O conjunto de formulações — penalização pura, mista com penalização e híbrida — pode ser encontrado nas versões tridimensionais e com cinemática finita nos trabalhos de [Suh, Spilker e Holmes \(1991\)](#), [Almeida e Spilker \(1993\)](#) e [Vermilyea e Spilker \(1993\)](#), respectivamente.

A melhora dos métodos de solução para problemas bifásicos, por apresentarem a hipótese de incompressibilidade, continuou a ser o foco de alguns autores da época.

---

<sup>6</sup> O efeito de inchaço é bastante conhecido por *swelling*; e na literatura médica por edema.

Até então, as formulações eram tratadas, tipicamente, por discretizações de dois campos com alguma espécie de penalização. Entretanto, para alguns problemas, a satisfação deste tipo de restrição cinemática (incompressibilidade) requer a utilização de valores muito elevados para os parâmetros de penalização. Em termos computacionais, este fator pode ser responsável por problemas de mal condicionamento. Uma alternativa a utilização de métodos de penalização, além da formulação híbrida já comentada, está na formulação de problemas bifásicos a partir da discretização de três campos (ZIENKIEWICZ; SHIOMI, 1984). Em se tratando de problemas fora do escopo biomecânico, muitos trabalhos podem ser encontrados utilizando esta formulação. Entretanto, no âmbito de tecidos biológicos moles, Levenston, Frank e Grodzinsky (1998) são precursores ao apresentarem vantagens significativas em utilizar uma formulação de três campos (discretização do deslocamento do sólido, pressão do fluido e velocidade relativa entre as fases) a de apenas dois.

Estendendo os conceitos da teoria bifásica, Lai, Hou e Mow (1990) desenvolvem a chamada teoria trifásica. Os autores apresentam um modelo matemático considerando a concentração de íons como uma terceira fase da mistura. Mais tarde, Sun et al. (1999) apresentam um modelo infinitesimal em elementos finitos considerando a discretização dos campos de cátions e ânions presentes na solução iônica de tecidos biológicos moles. Frijns, Huyghe e Janssen (1997) propõem o modelo quadrifásico, distinguindo a fase iônica em uma fase de cargas positivas, catódica, e negativas, anódica. Loon et al. (2003) investigam o comportamento de amostras cilíndricas de hidrogéis sujeitas a inchaço através de um modelo tridimensional quadrifásico em elementos finitos.

A teoria de poroviscoelasticidade, fundamentada por Mak (1986a), Mak (1986b) para problemas considerando tecidos bifásicos, é apresentada por Suh e Bai (1998) e Suh e DiSilvestro (1999) em um formato adequado para a utilização do MEF. Estes últimos investigam o comportamento de tecidos biológicos moles quando considerada a viscoelasticidade intrínseca da matriz sólida, além da dissipação causada pelo movimento relativo das fases da mistura. Dada a proposta desta dissertação, estes trabalhos possuem uma elevada importância histórica. Outros trabalhos incluindo algum tipo de modelo inelástico para representar a fase sólida são amplamente encontrados na literatura de mecânica dos solos, entrando no escopo de possibilidades a serem tratadas na proposta. O trabalho de Armero (1999) apresenta uma formulação de poroplasticidade em cinemática finita, baseada na decomposição multiplicativa do gradiente de deformação.

Os testes mais comuns utilizados para caracterizar tecidos moles são os de compressão confinada, compressão não confinada, indentação e inchaço. As teorias disponíveis até então, de modo geral, conseguem apresentar uma boa concordância com alguns destes testes; porém nenhuma delas é capaz de representar a resposta destes tecidos quando sujeitos às condições presentes em todos eles. Wilson et al. (2005) apresentam um modelo em elementos finitos poroviscoelástico reforçado por fibras com inchaço. Os autores mos-

tram que o modelo axissimétrico bidimensional, além de ser capaz de prever a resposta de cartilagens articulares sujeitas a todos estes testes, é apto a representar estes tecidos quando sob deformação lateral durante o teste de compressão não confinada.

## 2.3 Estratégias de solução

Em se tratando dos problemas acoplados tratados até aqui, a interação entre o problema de conservação da quantidade de movimento e a conservação da massa tem sido tratada através de diversos tipos de métodos de solução. Estes métodos são tipicamente classificados em três classes: monolíticos (*fully-implicit*), sequenciais iterativamente acoplados (*sequential fully-implicit*) e sequenciais fracamente acoplados (*sequential weakly-coupled*). Em termos gerais, as principais características destes esquemas podem ser listadas:

1. Monolíticos (*fully-implicit*). As equações de governo acopladas são resolvidas simultaneamente em cada instante de tempo (SUKIRMAN; LEWIS, 1993; MURAD; LOULA, 1994; WAN et al., 2003). A solução convergida é obtida através de métodos iterativos para a solução de problemas não lineares (*e.g.* Newton-Raphson). Apesar desta formulação ser bem estabelecida e apresentar características de estabilidade incondicional, ela apresenta baixa escalabilidade, já que é impraticável em sistemas com muitos graus de liberdade.
2. Sequenciais iterativamente acoplados (*sequential fully-implicit*). As equações de governo são solucionadas de maneira segregada, tendo o acoplamento satisfeito de forma iterativa. Em particular para problemas em poromecânica, ou o sub-problema de conservação da massa ou o sub-problema de conservação da quantidade de movimento é solucionado primeiro, sendo o problema seguinte resolvido a partir da informação intermediária obtida através do sub-problema inicial (PREVOST, 1997; SETTARI; MOURITS, 1998; SETTARI; WALTERS, 2001; WHEELER; GAI, 2007; TCHONKOVA; PETERS; STURE, 2008; KIM; TCHELEPI; JUANES, 2011c; KIM; TCHELEPI; JUANES, 2011b; KIM; TCHELEPI; JUANES, 2011a). Nesta classe de esquemas, a solução convergida é a mesma daquela obtida pela formulação monolítica.
3. Sequenciais fracamente acoplados (*sequential weakly-coupled*). Estes esquemas são definidos através de casos particulares da classe de algoritmos sequenciais iterativamente acoplados. Nesta classe, encontram-se os chamados algoritmos *Staggered* (ZIENKIEWICZ; PAUL; CHAN, 1988; FELIPPA; PARK, 1980; ARMERO; SIMO, 1992; ARMERO, 1999), onde apenas uma iteração é realizada; e os algoritmos ligeiramente acoplados (*Loosely-coupled*) (HANAFY; HAGREY, 2002; DEAN et al., 2006; SAMIER; ONAISI; GENNARO, 2008), onde um número fixo de iterações é

realizado. Apesar destes esquemas apresentarem um baixo custo computacional, a solução obtida por eles é menos acurada.

## 2.4 Estratégias de solução sequenciais para problemas poromecânicos em grandes deformações

A grande maioria dos trabalhos supracitados tratam do desenvolvimento de algoritmos para problemas com cinemática infinitesimal. Segundo (KIM, 2018), o estudo de algoritmos sequenciais para poromecânica de grandes deformações tem sido pouco estudado. Por isto, o autor propõe dois algoritmos fixed-stress em uma abordagem Lagrangiana Total: o do primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff fixo (*fixed first Piola-Kirchhoff stress*) e o do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff fixo (*fixed second Piola-Kirchhoff stress*). O estudo de estabilidade é demonstrado apenas para o primeiro método, onde prova-se que o mesmo é incondicionalmente estável. Entretanto, o autor não apresenta provas de estabilidade para o algoritmo *fixed second Piola-Kirchhoff stress*.

Em Reverón et al. (2020), os autores apresentam ambas as abordagens monolítica (*L-scheme-based monolithic*) e sequenciais (*L-scheme undrained split*) para resolver o problema de poroelasticidade considerando cinemática finita. Aqui, os autores estudam rigorosamente a convergência dos *solvers* sob a condição de pequenas deformações; entretanto, a convergência dos mesmos para o caso geral em grandes deformações é demonstrada apenas através de casos numéricos.

Em termos de biomecânica, o único trabalho encontrado com este foco é o de (LENG; LUCIO; GOMEZ, 2021), onde apresenta-se uma formulação *fixed-stress* para problemas hiperelásticos baseada na separação isocórica-volumétrica de energia de deformação. Os autores analisam a convergência do algoritmo baseando-se no estudo do refino temporal e espacial associados aos métodos de discretização utilizados. O algoritmo *fixed-stress* proposto é utilizado para solucionar o problema poroelástico não linear que modela o processo de injeção subcutânea de anticorpos terapêuticos.





## 3 Conceitos de mecânica e termodinâmica de meios contínuos

### 3.1 Descrição do movimento

Seja  $\mathcal{B}_0$  um corpo que ocupa uma região aberta  $\Omega_0$  no espaço tridimensional Euclidiano  $\mathcal{E}$  em um instante de tempo  $t = 0$  (configuração de *referência*). Posto que esta região possui fronteira regular  $\partial\Omega_0$ , define-se por  $\bar{\mathcal{B}}_0 = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$  o fechamento de  $\mathcal{B}_0$ . Em um instante de tempo  $t$ , os pontos materiais (Lagrangianos)  $\mathbf{X} \in \bar{\mathcal{B}}_0$  são mapeados para as posições espaciais (Eulerianas)  $\mathbf{x} \in \bar{\mathcal{B}}_t = \Omega_t \cup \partial\Omega_t$  através de uma função injetora (um-a-um) diferenciável  $\varphi$ , denominada função de movimento. A região de  $\mathcal{E}$  ocupada pelo corpo  $\bar{\mathcal{B}}_t$  é denominada configuração *deformada*, e a posição de suas partículas é descrita pelo mapeamento

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (3.1)$$

O campo vetorial  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ , definido por

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \quad (3.2)$$

é o deslocamento do ponto material  $\mathbf{X}$  no instante de tempo  $t$ . Sendo assim, dado o campo de deslocamentos, pode-se definir a posição espacial de cada partícula situada em  $\mathbf{X}$  através da expressão

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (3.3)$$

Dada a continuidade da função de mapeamento, define-se por

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial\varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

a velocidade e a aceleração de uma partícula de ponto material  $\mathbf{X}$ , respectivamente. Os campos de velocidade e aceleração podem ser descritos espacialmente através do mapeamento inverso  $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{x}}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t). \quad (3.5)$$

Dado um campo tensorial de ordem genérica e dependente do tempo, pode-se dizer que, nos casos em que este é escrito em termos de  $\mathbf{x}$ , está-se diante de um campo espacial  $f(\mathbf{x}, t)$ ; por outro lado, ao escrevê-lo utilizando  $\mathbf{X}$  como argumento, este é denominado um campo material  $\mathcal{F}(\mathbf{X}, t)$ .

A escolha de uma descrição material ou espacial para as equações de governo em meios contínuos dá origem às formulações Lagrangianas e Eulerianas, respectivamente. Sendo assim, faz-se necessária a distinção das operações de gradiente e divergente materiais e espaciais. O gradiente e o divergente material de um campo material geral  $\mathcal{F}$  (tensor de ordem 0, 1, 2 ... e notação indicial  $\mathcal{F}_{i\dots}$ ) são definidos por

$$\text{Grad } \mathcal{F}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \mathcal{F}_{i\dots}}{\partial X_j} \right|_t \quad \text{e} \quad \text{Div } \mathcal{F}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \mathcal{F}_{\dots j\dots}}{\partial X_j} \right|_t. \quad (3.6)$$

De maneira análoga, define-se o gradiente e o divergente espacial de um campo espacial por

$$\text{grad } f(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial f_{i\dots}}{\partial x_j} \right|_t \quad \text{e} \quad \text{div } f(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial f_{\dots j\dots}}{\partial x_j} \right|_t. \quad (3.7)$$

As taxas de variação temporal também são obtidas de maneira distinta, seja o campo escrito em seu formato material ou espacial. A derivada temporal material de campos materiais e espaciais são obtidas por

$$\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \quad \text{e} \quad \dot{f}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \text{grad } f(\mathbf{x}, t) * \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (3.8)$$

sendo  $*$  uma operação adequada entre tensores de ordem geral.

## 3.2 Gradiente de deformação

O gradiente de deformação da função de movimento  $\varphi$  é definido como um tensor  $\mathbf{F}$  que transforma fibras infinitesimais de uma configuração Lagrangiana para suas respectivas posições na configuração Euleriana, *i.e.*,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X}. \quad (3.9)$$

Visto que  $\mathbf{F}$  é definido como uma ponte entre entidades vetoriais de configurações distintas, este é um tensor de segunda ordem misto definido por

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \text{Grad } \varphi(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right|_t. \quad (3.10)$$

O gradiente de deformação pode ser expresso em termos do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  ao substituir a Eq. (3.3) em Eq. (3.10), sendo escrito no formato

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (3.11)$$

Além disto, o determinante deste tensor representa o Jacobiano de transformação volumétrica  $J$ , sendo este uma medida de mudança de volume local,

$$J = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) > 0. \quad (3.12)$$

### 3.3 Medidas de deformação e taxa de deformação

Dado que  $\mathbf{F}$  é um tensor positivo-definido, é possível representá-lo através da decomposição multiplicativa de um tensor de alongamento e um tensor de rotação (decomposição polar). Logo, é conveniente apresentar tensores de deformação insensíveis a movimentos de corpo rígido. De modo a simplificar a notação, abandona-se o argumento espaço/tempo dos tensores apresentados nesta subseção.

Através do gradiente de deformação  $\mathbf{F}$ , pode-se determinar o quadrado do comprimento de uma fibra espacial  $d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$  através da relação

$$(\|d\mathbf{x}\|_2)^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{C} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}, \quad (3.13)$$

onde

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (3.14)$$

são os tensores Lagrangianos (materiais) de deformação de Cauchy-Green à direita e de Green-Lagrange, respectivamente. Similarmente, o quadrado do comprimento de uma fibra referencial  $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}$  pode ser obtido por

$$(\|d\mathbf{X}\|_2)^2 = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{e}) d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.15)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (3.16)$$

são os tensores Eulerianos (espaciais) de deformação de Cauchy-Green à esquerda e de Almansi, respectivamente.

De forma trivial é possível demonstrar que, ao desprezar os termos de alta ordem destas medidas de deformação, o tensor de deformação infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é aproximado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{E} \approx \mathbf{e}. \quad (3.17)$$

Além de medir a mudança no comprimento de elementos diferenciais ao longo do movimento, faz-se necessário definir o quanto estas mudanças variam no tempo.

O tensor gradiente do campo espacial de velocidade  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  é definido por

$$\boldsymbol{\ell}(\mathbf{x}, t) = \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (3.18)$$

Dado que qualquer tensor de segunda ordem pode ser representado pela soma de um único tensor simétrico com um único tensor anti-simétrico, pode-se admitir a decomposição

$$\boldsymbol{\ell}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad (3.19)$$

onde

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell}^T) = \mathbf{d}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}^T) = -\mathbf{w}^T \quad (3.20)$$

são os tensores taxa de deformação (simétrico) e vorticidade (anti-simétrico), respectivamente.

### 3.4 Medidas de tensão

As descrições apresentadas até aqui não fazem menção às entidades que, em forma de potência/trabalho, realizam mudança no estado cinemático do corpo contínuo. De acordo com [Neto, Peric e Owen \(2011, p. 60\)](#), estas entidades podem ser classificadas em duas categorias: forças aplicadas ao contorno do corpo (forças de superfície) e forças exercidas internamente ao corpo (forças de corpo). De modo a descrever matematicamente o conceito de forças de superfície, introduz-se o conceito de tensão.

Segundo o teorema de Cauchy, dado um ponto  $\mathbf{x}$  em uma superfície cuja normal é  $\mathbf{n}$ , o vetor força de superfície  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  (força por unidade de área deformada) segue a transformação linear

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \quad (3.21)$$

em que  $\boldsymbol{\sigma}$  é o chamado tensor espacial de tensões de Cauchy. A mesma relação linear é transcrita para uma descrição referencial admitindo-se um ponto  $\mathbf{X}$  em uma superfície cuja normal é  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{N}) = \mathbf{P} \mathbf{N}, \quad (3.22)$$

com  $\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$  definindo o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e  $\mathbf{T}$  o vetor de força por unidade de área de superfície referencial. Adianta-se aqui que, em contraste à simetria do tensor de tensões de Cauchy, o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff pode não ser simétrico. Em alternativa, o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  e o tensor de tensões de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  são tensores simétricos definidos, respectivamente, por

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.23)$$

As medidas de tensão apresentadas até aqui relacionam-se através do gradiente de deformações  $\mathbf{F}$ ,

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T = J^{-1} \boldsymbol{\tau}. \quad (3.24)$$

## 3.5 Objetividade das medidas de taxa de tensão

A formulação das equações constitutivas em formato de taxa requer a definição de taxas de tensão denominadas objetivas<sup>1</sup>. Entretanto, apesar das abordagens constitutivas baseadas em taxas (*i.e.* hipoelasticidade) não serem tratadas neste trabalho, estas definições virão a ser necessárias para o entendimento das técnicas de solução acopladas apresentadas nos próximos capítulos.

A taxa de tensão de Oldroyd de um tensor de tensão espacial é definida pela derivada de *Lie* do tensor em questão. Sendo assim, a taxa de tensão de Oldroyd do tensor de tensões de Cauchy é obtida através da operação de *push-forward* na derivada total do campo material dado pelo *pull-back* no tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , *i.e.*,

$$\text{Oldr}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{L}_v(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{F} \left[ \frac{D}{Dt} (\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}) \right] \mathbf{F}^T, \quad (3.25)$$

ou

$$\text{Oldr}(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\ell} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\ell}^T, \quad (3.26)$$

onde  $\mathcal{L}_v(*)$  indica a derivada de *Lie* do campo tensorial (\*).

Dentre as taxas de tensão objetivas, destacam-se também as taxas de tensão de Truesdell. A taxa de tensão de Truesdell do tensor de tensões de Cauchy é definida pela operação de *push-forward* na taxa do segundo tensor de Piola-Kirchhoff  $\dot{\mathbf{S}}$  multiplicada pela inversa do Jacobiano de transformação volumétrica  $J^{-1}$ , *i.e.*,

$$\text{Trues}(\boldsymbol{\sigma}) = J^{-1} \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T, \quad (3.27)$$

ou

$$\text{Trues}(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\ell} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\ell}^T + \boldsymbol{\sigma} \text{tr} \mathbf{d}. \quad (3.28)$$

As taxas de tensão de Truesdell e de Oldroyd do tensor de tensões de Cauchy relacionam-se através da expressão

$$\text{Oldr}(\boldsymbol{\sigma}) = \text{Trues}(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.29)$$

## 3.6 Leis de conservação em coordenadas espaciais

### 3.6.1 Conservação de massa

Através da relação de continuidade entre os campos de densidade específica espacial  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  e referencial  $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{X})$  dada pela expressão

$$\frac{D}{Dt} \rho_0 = \dot{\rho} J = 0, \quad (3.30)$$

<sup>1</sup> O conceito de objetividade é explorado extensivamente no trabalho de Holzapfel (2000, p. 179)

junto a taxa de variação temporal do Jacobiano de transformação volumétrica  $\dot{J} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$ , pode-se obter um dos formatos da lei fundamental de conservação de massa

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.31)$$

### 3.6.2 Conservação da quantidade de movimento linear

A quantidade de movimento linear  $\mathbf{l}(t)$  de um corpo  $\mathcal{B}_t$  é definida por

$$\mathbf{l}(t) = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV_t. \quad (3.32)$$

O balanço entre a força total atuante em  $\mathcal{B}_t$  e a taxa da quantidade de movimento linear no instante de tempo  $t$  resulta do princípio da conservação da quantidade de movimento linear, postulado por

$$\dot{\mathbf{l}}(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV_t = \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} dS_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{b} dV_t}_{\text{força total atuante}}, \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{b}$  é campo vetorial de força de corpo específica e  $D(*)/Dt$  denota a operação de diferenciação total sob a variável tempo  $t$ .

Sendo  $\mathbf{l}(t)$  uma integral sobre o domínio espacial  $\Omega_t$ , faz-se necessária a utilização do teorema de transporte de Reynolds:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV_t = \int_{\Omega_t} \rho \dot{\mathbf{v}} dV_t. \quad (3.34)$$

Ao utilizar o resultado do teorema de Cauchy (Eq. (3.21)) junto ao teorema da divergência, obtém-se a primeira equação de movimento de Cauchy (formato local):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t \quad \text{e} \quad \forall t. \quad (3.35)$$

### 3.6.3 Conservação da quantidade de movimento angular

A quantidade de movimento angular  $\mathbf{j}(t)$  é definida por

$$\mathbf{j}(t) = \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_t, \quad (3.36)$$

onde  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  é o vetor posição relativo à origem do sistema de coordenadas Euleriano. De forma análoga ao princípio de conservação da quantidade de movimento linear, postula-se

$$\dot{\mathbf{j}}(t) = \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{v}} dV_t = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \mathbf{b} dV_t. \quad (3.37)$$

Utilizando o resultado do teorema de Cauchy (Eq. (3.21)) junto à relação

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, dS_t = \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T \, dV_t \quad (3.38)$$

com  $\boldsymbol{\epsilon}$  denotando o tensor de permutação, observa-se que, pela satisfação do princípio da conservação de movimento linear, é válida a relação bicondicional

$$\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \quad (3.39)$$

que traduz-se pela simetria do tensor de tensões de Cauchy (segunda equação de movimento de Cauchy).

## 3.7 Leis fundamentais da termodinâmica em coordenadas espaciais

### 3.7.1 Primeira lei da termodinâmica (balanço energético)

O primeiro princípio fundamental da termodinâmica postula a equivalência energética de um sistema, e pode ser descrito em termos da configuração espacial por

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \left( e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) dV_t}_{\text{taxa da energia total}} = \underbrace{\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{v})}_{\text{potência externa}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS_t}_{\text{fluxo de calor em } S_t} + \underbrace{\int_{\Omega_t} r \, dV_t}_{\text{fonte de calor}}, \quad (3.40)$$

onde  $e = e(\mathbf{x}, t)$  é a energia interna por unidade de volume atual,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  é o vetor fluxo de calor por unidade de área atual e  $r = r(\mathbf{x}, t)$  é o campo escalar que representa possíveis fontes que geram calor em determinadas porções do corpo (por unidade de volume atual e tempo).

Este axioma estabelece que a taxa de variação da energia total (soma da energia cinética com a energia interna) de um sistema termodinâmico se iguala a taxa do trabalho mecânico (potência mecânica externa) e térmico (através de fluxos de calor e fontes geradoras) realizado no corpo. A primeira lei da termodinâmica é comumente expressa em seu formato local espacial,

$$\dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \mathbf{q} + r, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t. \quad (3.41)$$

### 3.7.2 Segunda lei da termodinâmica (inequação de Clausius-Duhem)

Embora a primeira lei da termodinâmica governe a transferência de energia ao longo de processos termodinâmicos, esta não é capaz de definir limitações em termos da direção em que esta transferência ocorre. Nesta seção, apresenta-se o segundo princípio da termodinâmica, responsável por delimitar a viabilidade de processos termodinâmicos

através do conceito de irreversibilidade. Postula-se que a produção total de entropia  $\Gamma(t)$  de um sistema é sempre não-negativa, *i.e.*

$$\Gamma(t) = \underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \eta dV_t}_{\text{taxa de entropia}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dS_t - \int_{\Omega_t} \frac{r}{\theta} dV_t}_{\text{entrada/geração de entropia}} \geq 0, \quad \text{com } \mathbf{q} = \mathbf{h}\theta \quad \text{e} \quad r = \tilde{r}\theta, \quad (3.42)$$

onde  $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$  é o campo escalar de temperatura absoluta ( $\theta > 0$ ),  $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$  é a entropia por unidade de volume atual,  $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  denota o fluxo de entropia definido por unidade de área atual e  $\tilde{r} = \tilde{r}(\mathbf{x}, t)$  representa a fonte de entropia por unidade de volume atual. A Eq. (3.42) é também conhecida como a forma espacial da inequação de Clausius-Duhem, e tem seu formato local dado por

$$\dot{\eta} + \text{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \frac{r}{\theta} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t. \quad (3.43)$$

Baseado em argumentos apresentados em [Holzapfel \(2000, p. 169 - 173\)](#) e [Anand e Govindjee \(2020, p. 90\)](#), este princípio pode ser reescrito em termos da dissipação  $\mathcal{D}$  e da energia livre de Helmholtz  $\Psi^2$ , resultando na restrição:

$$\mathcal{D} := \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \dot{\Psi} - \eta\dot{\theta} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0. \quad (3.44)$$

O último termo da Eq. (3.44) é denominado dissipação por condução térmica  $\mathcal{D}_{\text{ter}}$ , enquanto a soma restante é denominada dissipação interna  $\mathcal{D}_{\text{int}}$ . Hipóteses adicionais permitem estender a não-negatividade de cada parcela de dissipação, *i.e.*:

$$\mathcal{D}_{\text{ter}} = -\frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0 \quad \text{e} \quad (3.45)$$

$$\mathcal{D}_{\text{int}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \dot{\Psi} - \eta\dot{\theta} \geq 0. \quad (3.46)$$

Em problemas onde a influência térmica é desprezível, *i.e.*,  $\theta(\mathbf{x}, t) = \text{constante}$ , a equação de dissipação interna reduz-se ao formato

$$\mathcal{D}_{\text{int}} := \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \dot{\Psi} \geq 0. \quad (3.47)$$

Entretanto, na apresentação de aspectos de teorias constitutivas, é conveniente expressar esta inequação em sua descrição Lagrangiana:

$$\mathcal{D}_{\text{int}} := \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{\Psi} \geq 0. \quad (3.48)$$

### 3.8 Abordagem constitutiva variacional

Seja  $\mathcal{S}$  um conjunto de variáveis de estado dado por

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{F}, \boldsymbol{\alpha}\}, \quad (3.49)$$

<sup>2</sup> Aplicando a transformação de Legendre  $\Psi = e - \theta\eta$ .



onde  $\alpha$  representa um subconjunto de variáveis termodinâmicas associadas a processos dissipativos (variáveis internas). Admite-se que a energia livre de Helmholtz  $\Psi$  e o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$  dependem de  $\mathcal{S}$ , ou seja,

$$\Psi = \Psi(\mathcal{S}) \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathcal{S}). \quad (3.50)$$

Desprezando efeitos de variação de temperatura ao longo do processo termodinâmico e considerando a dependência das variáveis de estado de  $\mathcal{S}$  no potencial de energia livre, pode-se escrever a inequação de dissipação interna (Eq. (3.48)) no formato

$$\mathcal{D}_{\text{int}} = \mathbf{P}(\mathcal{S}) : \dot{\mathbf{F}} - \frac{\partial \Psi(\mathcal{S})}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} - \frac{\partial \Psi(\mathcal{S})}{\partial \alpha} * \dot{\alpha} \geq 0. \quad (3.51)$$

O princípio do determinismo termodinâmico estabelece que a inequação (3.51) deve permanecer válida para qualquer processo termocinético, *i.e.*, para quaisquer pares  $\{\dot{\mathbf{F}}, \dot{\alpha}\}$ . Sendo assim, o procedimento de Coleman-Noll (GURTIN; FRIED; ANAND, 2010, p. 279) permite a obtenção das relações constitutivas

$$\mathbf{P}(\mathcal{S}) = \frac{\partial \Psi(\mathcal{S})}{\partial \mathbf{F}}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{Q}(\mathcal{S}) = \frac{\partial \Psi(\mathcal{S})}{\partial \alpha}, \quad (3.53)$$

e da expressão reduzida para a dissipação interna,

$$\mathcal{D}_{\text{int}} = -\mathbf{Q}(\mathcal{S}) * \dot{\alpha} \geq 0, \quad (3.54)$$

onde  $Q_k \in \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathcal{S})$  ( $k = 1, 2, \dots, n_{\text{int}}$ ) representa o conjunto de forças termodinâmicas conjugadas a cada variável interna  $\alpha_k \in \alpha$ . Uma forma eficaz de satisfazer a inequação (3.54) consiste em postular a existência de um potencial de dissipação de valor escalar na forma de

$$\Xi = \Xi(\mathbf{Q}; \mathcal{S}), \quad (3.55)$$

onde as variáveis de  $\mathcal{S}$  aparecem como parâmetros. Admite-se que o potencial  $\Xi$  é convexo em relação a cada uma das forças conjugadas  $Q_k$ , não-negativo e de valor zero na origem  $\{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{0}\}$ . Em adição, introduz-se a hipótese de dissipatividade normal (NETO; PERIC; OWEN, 2011, p. 74), onde as taxas  $\dot{\alpha}$  são determinadas pela lei

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial \Xi(\mathbf{Q}; \mathcal{S})}{\partial \mathbf{Q}}. \quad (3.56)$$

Pode-se provar que, pela convexidade de  $\Xi$ , existe um potencial conjugado  $\phi = \phi(\dot{\alpha}; \mathcal{S})$  (também convexo), tal que

$$\mathbf{Q}(\mathcal{S}) = -\frac{\partial \phi(\dot{\alpha}; \mathcal{S})}{\partial \dot{\alpha}}. \quad (3.57)$$

Ao observar as Eqs. (3.53) e (3.57), nota-se que é possível escrever a igualdade:

$$\frac{\partial \Psi(\mathcal{S})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \phi(\dot{\boldsymbol{\alpha}}; \mathcal{S})}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}} = 0. \quad (3.58)$$

A abordagem variacional (ORTIZ; STAINIER, 1999) utilizada neste trabalho torna possível a obtenção das equações constitutivas (3.52) e (3.53) a partir da definição do potencial

$$\mathcal{P}(\dot{\mathbf{F}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}; \mathcal{S}) = \dot{\Psi}(\dot{\mathbf{F}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}; \mathcal{S}) + \phi(\dot{\boldsymbol{\alpha}}; \mathcal{S}) = \frac{\partial \Psi(\mathcal{S})}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial \Psi(\mathcal{S})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \phi(\dot{\boldsymbol{\alpha}}; \mathcal{S}) \quad (3.59)$$

e de sua contraparte efetiva<sup>3</sup>

$$\bar{\mathcal{P}}(\dot{\mathbf{F}}; \mathcal{S}) = \inf_{\dot{\boldsymbol{\alpha}}} \mathcal{P}(\dot{\mathbf{F}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}; \mathcal{S}). \quad (3.60)$$

Com isto, a equação de estado para o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$  e a relação (3.58) são retomadas através da derivada total do potencial efetivo  $\bar{\mathcal{P}}$  em relação à taxa  $\dot{\mathbf{F}}$  e da derivada parcial do potencial  $\mathcal{P}$  em relação à taxa  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ , respectivamente:

$$\frac{d\bar{\mathcal{P}}(\dot{\mathbf{F}}; \mathcal{S})}{d\dot{\mathbf{F}}} = \mathbf{P}(\mathcal{S}), \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\dot{\mathbf{F}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}; \mathcal{S})}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}} \implies \frac{\partial \Psi(\mathcal{S})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \phi(\dot{\boldsymbol{\alpha}}; \mathcal{S})}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}} = 0. \quad (3.62)$$

Como ponto de partida para discretizar as equações constitutivas no domínio de tempo contínuo, opta-se por adotar um esquema de Euler totalmente implícito. Dada uma partição de tempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , pode-se substituir os termos da função potencial  $\mathcal{P}$  por seus respectivos valores incrementais no intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ . A versão semi-discreta dos potenciais  $\mathcal{P}$  e  $\bar{\mathcal{P}}$  é definida pelas expressões incrementais  $\mathcal{W}$  e  $\bar{\mathcal{W}}$ , respectivamente:

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}; \mathcal{S}_n) = \Psi(\mathbf{F}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) - \Psi(\mathbf{F}_n, \boldsymbol{\alpha}_n) + \Delta t \phi(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}; \mathcal{S}_n) \quad (3.63)$$

$$\bar{\mathcal{W}}(\mathbf{F}_{n+1}; \mathcal{S}_n) = \inf_{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}} \mathcal{W}(\mathbf{F}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}; \mathcal{S}_n). \quad (3.64)$$

A partir da definição dos potenciais incrementais, é possível construir um algoritmo constitutivo cujo objetivo é determinar regras de atualização para as variáveis internas  $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$  e para o tensor tensão  $\mathbf{P}_{n+1}$ .

**Problema constitutivo incremental:** *Dados os valores  $\mathbf{F}_n$  e  $\boldsymbol{\alpha}_n$  do gradiente de deformações e do conjunto de variáveis internas no início do intervalo de (pseudo-)tempo*

<sup>3</sup> Potencial  $\mathcal{P}$  avaliado no argumento minimizante.

$[t_n, t_{n+1}]$ , e dado um incremento  $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_n$ , resolver o problema de atualização das variáveis internas

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \arg \inf_{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}} \mathcal{W}(\mathbf{F}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}; \mathcal{S}_n) \Big|_{\mathbf{F}_{n+1}=\text{cte}} \quad (3.65)$$

e determinar o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{P}_{n+1} = \frac{d\bar{\mathcal{W}}(\mathbf{F}_{n+1}; \mathcal{S}_n)}{d\mathbf{F}_{n+1}} \quad (3.66)$$

ou o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{S}_{n+1} = 2 \frac{d\bar{\mathcal{W}}(\mathbf{F}_{n+1}; \mathcal{S}_n)}{d\mathbf{C}_{n+1}}. \quad (3.67)$$

Além disto, determinar a segunda derivada do potencial  $\bar{\mathcal{W}}$  em relação ao tensor de deformações de Cauchy-Green à direita  $\mathbf{C}_{n+1}$ , retomando o chamado módulo tangente consistente material

$$\mathbb{C}_{n+1} = 4 \frac{d^2 \bar{\mathcal{W}}}{d\mathbf{C}_{n+1} d\mathbf{C}_{n+1}}; \quad \mathbb{C}_{IJKL} = \sum_{I,J,K,L=1}^3 \mathbb{C}_{IJKL} \bar{\mathbf{E}}_I \otimes \bar{\mathbf{E}}_J \otimes \bar{\mathbf{E}}_K \otimes \bar{\mathbf{E}}_L. \quad (3.68)$$

O procedimento de discretização por elementos finitos deste trabalho segue uma abordagem Lagrangiana atualizada. Em vista disto, é de interesse definir a operação de *push-forward* que retoma o chamado módulo tangente espacial:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = J^{-1} F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} \mathbb{C}_{IJKL}, \quad F_{aA} = \frac{\partial x_a}{\partial X_A}; \quad a, A = i, I; j, J; k, K; l, L, \quad (3.69)$$

onde os subíndices minúsculos referem-se às coordenadas espaciais e os subíndices maiúsculos referem-se às coordenadas materiais.

A abordagem variacional oferece muitas vantagens em termos de implementação computacional. Dentre elas, pode-se citar o caráter hiperelástico das atualizações incrementais (3.66), (3.67) e (3.68), uma vez que os tensores de quarta ordem  $\mathbb{C}$  e  $\mathcal{C}$  possuem simetria maior (HOLZAPFEL, 2000, p. 253); e a possibilidade de incluir restrições na formulação do problema (3.65) através da extensa variedade de algoritmos de otimização disponíveis na literatura. Nas próximas seções, esta abordagem constitutiva variacional será utilizada como ferramenta para a obtenção do modelo material viscoelástico intrínseco ao esqueleto sólido no problema bifásico.



## 4 Descrição finita de um material bifásico

A formulação apresentada neste capítulo é inspirada na Teoria das Misturas e particularizada para materiais bifásicos. A grande maioria das hipóteses utilizadas nesta descrição pode ser encontrada em trabalhos clássicos referentes a teorias bifásicas para tecidos biológicos moles (MOW et al., 1980; SPILKER; SUH, 1990; LEVENSTON; FRANK; GRODZINSKY, 1998). Ainda, o trabalho de Armero (1999) possibilita a extensão da teoria para outros casos de dissipação intrínseca dos componentes (poroelastoplasticidade). Os conceitos cinemáticos a serem desenvolvidos são fundamentados a partir de duas conjecturas:

1. No instante de tempo  $t$ , cada ponto da configuração espacial é simultaneamente ocupado por pontos materiais de todos os  $\kappa$  ( $\text{num}(\alpha) = 1, 2, \dots, \kappa$ ) constituintes.
2. Sendo estes pontos precedentes de posições referenciais distintas, cada constituinte possui uma função de mapeamento/movimento independente.

### 4.1 Teoria bifásica em cinemática finita

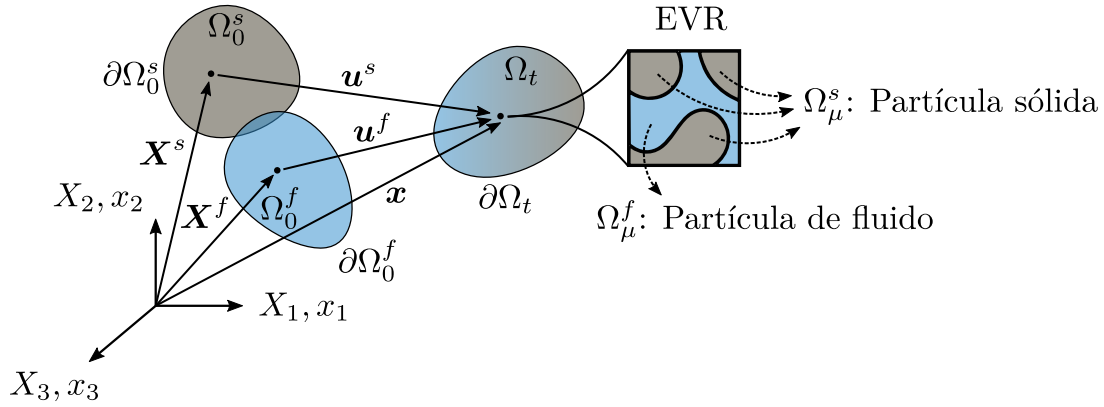
Seja  $\bar{\mathcal{B}}_0$  um corpo agora definido pelas regiões abertas  $\Omega_0^\alpha \subset \mathcal{E}$  e fronteiras regulares  $\partial\Omega_0^\alpha \subset \mathcal{E}$  dos constituintes  $\alpha = s, f$  (fases sólida e fluida) no instante de tempo  $t = 0$ . Denota-se por  $\mathbf{X}^\alpha \in \bar{\mathcal{B}}_0$  a posição das partículas materiais de cada componente. No instante de tempo  $t$ , os pontos materiais são mapeados para posições espaciais  $\mathbf{x}^\alpha = \varphi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) \in \bar{\mathcal{B}}_t = \Omega_t^\alpha \cup \partial\Omega_t^\alpha$ . Com base nas conjecturas previamente apresentadas, admite-se que as partículas de cada fase  $\alpha$  na configuração  $\bar{\mathcal{B}}_0$  (referencial) podem ou não serem coincidentes. É também assumido que, na configuração espacial, ambos os constituintes ocupam toda a região  $\Omega_t^\alpha$  na configuração espacial (Fig. 1),

$$\mathbf{x}^\alpha := \mathbf{x} = \mathbf{X}^\alpha + \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{X}, t). \quad (4.1)$$

Mesmo que cada componente da mistura admita uma função de mapeamento  $\varphi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$  para representar seu movimento, suas posições em cada instante de tempo  $t$  são coincidentes. Desta forma, dada a posição  $\mathbf{x}$  da mistura no instante  $t$ , é possível, através da inversa da função de mapeamento, obter as posições do fluido e do sólido na configuração de referência,

$$\mathbf{X}^\alpha = (\varphi^\alpha)^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (4.2)$$

Figura 1 – Cinemática de um material bifásico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo assim, define-se o gradiente de deformação  $\mathbf{F}^\alpha$  e o Jacobiano da transformação volumétrica  $J^\alpha$  de cada componente por,

$$\mathbf{F}^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)}{\partial \mathbf{X}^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}^\alpha}, \quad (4.3)$$

$$J^\alpha = \det \mathbf{F}^\alpha > 0. \quad (4.4)$$

Outros campos cinemáticos (velocidade, aceleração e medidas de deformações) tratados para corpos sólidos contínuos no Capítulo 3 podem ser aqui definidos de maneira absolutamente análoga.

Através do Jacobiano de transformação volumétrica, é possível obter as relações entre elementos de volume de referência de cada componente  $dV_0^\alpha$  e elementos de volume da mistura na configuração deformada  $dV_t$ :

$$dV_t^\alpha = dV_t = J^\alpha dV_0^\alpha. \quad (4.5)$$

As densidades aparentes  $\rho^\alpha = \rho^\alpha(\mathbf{x}, t)$  de cada componente da mistura podem ser determinadas pela relação

$$\rho^\alpha = \frac{dm^\alpha}{dV_t} = J^{\alpha-1} \rho_0^\alpha, \quad (4.6)$$

com  $dm^\alpha$  sendo o elemento de massa do componente  $\alpha$  na configuração espacial e  $\rho_0^\alpha = \rho_0^\alpha(\mathbf{X})$  a densidade aparente referencial.

Conforme o exposto na Fig. 1, cada ponto macroscópico  $\mathbf{x}$  da mistura é associado a um Elemento de Volume Representativo (EVR) concebido em uma escala microscópica. Esta região é definida pela união do fechamento  $\Omega_\mu^\alpha \cup \partial\Omega_\mu^\alpha$  de cada microconstituente.

As densidades intrínsecas<sup>1</sup>  $\rho_\mu^\alpha = \rho_\mu^\alpha(\mathbf{x}, t)$  são dadas por

$$\rho_\mu^\alpha = \frac{dm^\alpha}{dV_\mu^\alpha}, \quad (4.7)$$

<sup>1</sup> As propriedades definidas em relação a microescala são chamadas de intrínsecas ou reais.

onde  $dV_\mu^\alpha$  são os elementos de volume de cada fase  $\alpha$ . Sendo assim, é possível determinar o campo de densidade espacial  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  da mistura como um todo,

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_\mu^\alpha. \quad (4.8)$$

Por tratar-se de um meio homogeneizado (na configuração espacial), a definição das frações de volume presentes em cada ponto espacial  $\mathbf{x}$  é fundamental. Na configuração deformada, um elemento de volume da mistura  $dV_t$  é parcialmente ocupado por um elemento de volume de fluido  $dV_\mu^f$  e por um elemento de volume de sólido  $dV_\mu^s$ . Estima-se as frações volumétricas Eulerianas  $\nu^\alpha = \nu^\alpha(\mathbf{x}, t)$  de cada constituinte  $\alpha$  a partir da razão

$$\nu^\alpha = \frac{dV_\mu^\alpha}{dV_t}, \quad (4.9)$$

onde  $\nu^s$  e  $\nu^f$  são medidas bem estabelecidas na literatura de meios porosos, denominadas solidez e porosidade, respectivamente. O conjunto de frações volumétricas de um meio poroso é restrito às condições físicas:

$$0 \leq \nu^\alpha \leq 1, \quad \text{e} \quad \sum_{\text{num}(\alpha)} \nu^\alpha = 1. \quad (4.10)$$

Através da definição das frações volumétricas de cada fase  $\alpha$ , é possível relacionar as densidades reais e aparentes da mistura por,

$$\rho^\alpha = \nu^\alpha \rho_\mu^\alpha. \quad (4.11)$$

## 4.2 Hipóteses do modelo

De modo a derivar as equações de governo do problema bifásico em estudo, adota-se as seguintes hipóteses:

**Hipótese 1 (H1):** *Os constituintes referentes a microescala espacial (EVR) são incompressíveis<sup>2</sup>, i.e,*

$$\frac{D}{Dt} \rho_\mu^\alpha = \dot{\rho}_\mu^\alpha = 0.$$

**Hipótese 2 (H2):** *Saturação da mistura na configuração espacial, i.e,*

$$\nu^s + \nu^f = 1.$$

**Hipótese 3 (H3):** *Princípio das tensões efetivas, onde*

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^f$$

<sup>2</sup> A incompressibilidade dos constituintes deve ser tratada na microescala, já que não há distinção dos domínios  $\Omega_x^\alpha$  na macroescala espacial.

**Hipótese 4 (H4):** *Fluido sujeito a uma pressão de poro  $p$  hidrostática<sup>3</sup>, i.e.,*

$$\boldsymbol{\sigma}^f = -p \mathbf{I}.$$

**Hipótese 5 (H5):** *Ausência de forças inerciais e de corpo*

$$\rho^\alpha \dot{\mathbf{v}}^\alpha = \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

## 4.3 Equações de governo acopladas

### 4.3.1 Conservação da quantidade de movimento

A hipótese de ausência de forças dinâmicas e gravitacionais é bem estabelecida na modelagem de tecidos biológicos moles através de modelos bifásicos (MOW; HOLMES; LAI, 1986). Desta forma, ao considerar um processo difusivo quasi-estático (lento), a equação de conservação da quantidade de movimento linear da mistura em sua configuração espacial (Eq. 3.35) pode ser reescrita apenas em função do campo tensorial de tensões auto-equilibradas  $\boldsymbol{\sigma}$  da mistura:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

com o tensor de tensão total de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  admitindo a decomposição aditiva dada pela Hipótese H3. A satisfação da equação de conservação da quantidade de movimento angular resulta na simetria do tensor total de Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (4.13)$$

### 4.3.2 Conservação da massa

A massa total de cada componente  $\alpha$  pode ser escrita no formato integral,

$$m^\alpha = \int_{\Omega_t} dm^\alpha, \quad (4.14)$$

onde  $dm^\alpha = \rho^\alpha dV_t$ . Sendo assim, utiliza-se a Eq. (4.11) para escrever a equação em função das densidades reais de cada fase,

$$m^\alpha = \int_{\Omega_t} \rho^\alpha \nu^\alpha dV_t. \quad (4.15)$$

Através da Eq. (4.5), transforma-se o domínio da integral (4.15) para a configuração de referência:

$$m^\alpha = \int_{\Omega_0^\alpha} \rho_\mu^\alpha \nu^\alpha J^\alpha dV_0^\alpha. \quad (4.16)$$

<sup>3</sup> Na literatura de poromecânica é comum a consideração da constante de Biot  $b$  multiplicando este termo. Entretanto, aqui já é considerada a hipótese de incompressibilidade, fazendo com que a constante  $b$  seja igual a 1.



A expressão para a conservação da massa de cada fase (*i.e.*,  $\dot{m}^\alpha = 0$ ) é obtida derivando a Eq. (4.16) pela regra da cadeia. Utilizando a derivada temporal do Jacobiano de transformação volumétrica de cada componente (*i.e.*,  $\dot{J}^\alpha = J^\alpha \operatorname{div} \mathbf{v}^\alpha$ ) junto com a hipótese H1, tem-se

$$\dot{m}^\alpha = \int_{\Omega_0^\alpha} \rho_\mu^\alpha (\dot{\nu}^\alpha J^\alpha + \nu^\alpha J^\alpha \operatorname{div} \mathbf{v}^\alpha) dV_0^\alpha, \quad (4.17)$$

com  $\mathbf{v}^\alpha$  sendo o campo de velocidades do componente  $\alpha$ .

Utilizando novamente a Eq. (4.5), as relações para a conservação da massa das fases  $\alpha$  na configuração espacial são dadas por,

$$\int_{\Omega_t} \rho_\mu^\alpha (\dot{\nu}^\alpha + \nu^\alpha \operatorname{div} \mathbf{v}^\alpha) dV_t = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad (4.18)$$

com o formato local

$$\dot{\nu}^\alpha + \nu^\alpha \operatorname{div} \mathbf{v}^\alpha = 0. \quad (4.19)$$

Manipulando a Eq. (4.19) através do processo de derivação do campo escalar espacial  $\nu^\alpha = \nu^\alpha(\mathbf{x}, t)$  (veja a Eq. (3.8)) e utilizando a regra

$$\mathbf{v}^\alpha \cdot \operatorname{grad} \nu^\alpha = \operatorname{div} (\nu^\alpha \mathbf{v}^\alpha) - \nu^\alpha \operatorname{div} \mathbf{v}^\alpha, \quad (4.20)$$

reescreve-se:

$$\frac{\partial \nu^\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} (\nu^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = 0. \quad (4.21)$$

Somando ambas as Eqs. (4.21)<sup>4</sup> e utilizando a hipótese<sup>5</sup> H2, obtém-se:

$$\operatorname{div} (\nu^s \mathbf{v}^s + \nu^f \mathbf{v}^f) = 0. \quad (4.22)$$

Para adequar a Eq. (4.22) à lei de fluxo em meios porosos de Darcy (Lei de Darcy), utiliza-se novamente a hipótese H2 e reescreve-se a equação com o formato

$$\operatorname{div} (\mathbf{v}^s + \mathbf{w}) = 0, \quad (4.23)$$

onde é definida uma nova variável  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{w} = \nu^f (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s), \quad (4.24)$$

conhecida por velocidade relativa do fluido.

<sup>4</sup> Note que a Eq. (4.21) expressa uma equação para cada componente, *i.e.*,  $\alpha = s, f$

<sup>5</sup> Derivando a relação dada pela hipótese de saturação total da mistura, obtém-se que a soma das derivadas de cada fase  $\frac{\partial \nu^\alpha}{\partial t}$  é nula

Como já discutido, na configuração deformada, os domínios de ambas as fases sólida e fluida são coincidentes. Sendo assim, a região de contorno  $\partial\Omega_t$  pode referir-se tanto a  $\partial\Omega_t^s$  quanto a  $\partial\Omega_t^f$ . Na presente abordagem, apenas o esqueleto sólido possui uma descrição Lagrangiana, de tal forma que o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}^s$  e o gradiente de deformação  $\mathbf{F}^s$  são registrados em cada instante de tempo  $t$ . Desta forma, omite-se o sobrescrito “s” das entidades vetoriais/tensoriais  $\mathbf{u}^s$ ,  $\mathbf{F}^s$  e das medidas de deformação associados à  $\mathbf{F}^s$  (incluindo o Jacobiano de transformação volumétrica), assim como de suas variações virtuais (a serem apresentadas na forma fraca). Por outro lado, para distinguir a notação das velocidades do sólido e do fluido, opta-se por manter o sobrescrito da variável cinemática  $\mathbf{v}^s$ .

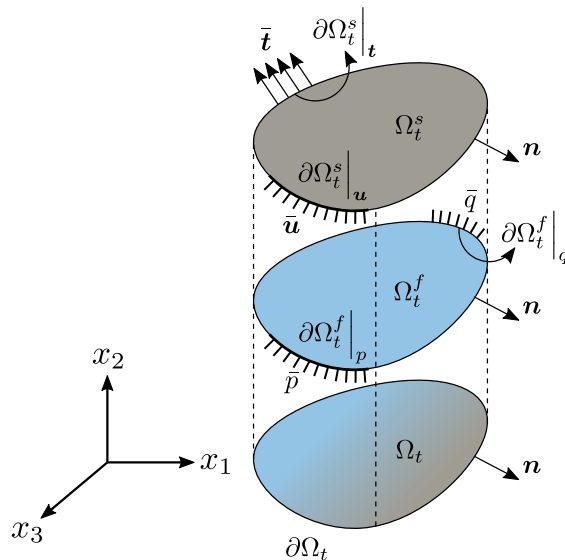
### 4.3.3 Problema de valor de contorno

O conjunto de condições de contorno em que está sujeita a mistura é definido na configuração espacial, conforme ilustrado na Fig. 2. Tratando-se do contorno do esqueleto sólido, as condições de contorno para o deslocamento e trações de superfície são prescritas em  $\partial\Omega_t^s|_u$  e  $\partial\Omega_t^s|_t$ , respectivamente. Além disto, a condição de complementariedade

$$\partial\Omega_t^s = \partial\Omega_t^s|_u \cup \partial\Omega_t^s|_t, \quad \text{com} \quad \partial\Omega_t^s|_u \cap \partial\Omega_t^s|_t = \emptyset \quad (4.25)$$

deve ser satisfeita.

Figura 2 – Visualização das condições de contorno no domínio da mistura bifásica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o caso do contorno da fase fluida, as condições de contorno para o campo de pressão e fluxo através da superfície são prescritas em  $\partial\Omega_t^f|_p$  e  $\partial\Omega_t^f|_q$ , respectivamente, e respeitam a condição

$$\partial\Omega_t^f = \partial\Omega_t^f|_p \cup \partial\Omega_t^f|_q, \quad \text{com} \quad \partial\Omega_t^f|_p \cap \partial\Omega_t^f|_q = \emptyset. \quad (4.26)$$

Assim, pode-se apresentar o problema de valor de contorno acoplado por:

|   |   |        |
|---|---|--------|
| Conservação da quantidade de movimento linear                 | $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$           |        |
| Conservação da massa  | $\operatorname{div} (\mathbf{v}^s + \mathbf{w}) = 0$            |        |
| Conservação da quantidade de movimento angular                | $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$                   |        |
| Decomposição da tensão de Cauchy                              | $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s - p\mathbf{I}$     |        |
| Velocidade relativa   | $\mathbf{w} = \nu^f (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s)$              | (4.27) |
| Condições de contorno de Dirichlet em $\partial\Omega_t^s _u$ | $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$                                 |        |
| Condições de contorno de Neumann em $\partial\Omega_t^s _t$   | $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ |        |
| Condições de contorno de Dirichlet em $\partial\Omega_t^f _p$ | $p = \bar{p}$   |        |
| Condições de contorno de Neumann em $\partial\Omega_t^f _q$   | $q = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \bar{q},$                    |        |

junto a lei de transporte de fluidos em meios porosos e as equações constitutivas descritas no Capítulo 6. Este conjunto de equações resulta na chamada forma forte do problema de valor de contorno. Devido ao viés numérico deste trabalho, as equações devem ser convertidas aos seus respectivos formatos integrais, sendo estes obtidos através do princípio dos trabalhos virtuais. Este procedimento resulta em um conjunto de equações suscetíveis a serem discretizadas pelo método dos elementos finitos.

## 4.4 Formulação fraca

Esta seção tem por objetivo apresentar a forma fraca da chamada formulação  $\mathbf{u}$ - $p$  do problema bifásico. Assim, as equações são manipuladas de modo a garantir que os campos de deslocamento e de pressão de poro sejam as variáveis primárias (solução) da equação integral. A forma variacional da equação de conservação da quantidade de movimento linear (balanço mecânico) pode ser obtida multiplicando a Eq. (4.12) por um campo virtual cinematicamente admissível, integrando através do domínio espacial  $\Omega_t = \Omega_t^\alpha$  e utilizando o teorema da divergência. Assim, obtém-se a expressão:

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{e} \, dV_t - \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS_t = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}_u, \quad (4.28)$$

sendo  $\delta \mathbf{u}$  o campo de deslocamento virtual,  $\delta \mathbf{e} = \operatorname{sym}(\operatorname{grad} \delta \mathbf{u})$  o campo de variações do tensor de deformações de Euler-Almansi e  $\mathcal{V}_u$  o espaço de deslocamentos cinematicamente admissíveis da mistura. Utilizando as hipóteses H3 e H4, e substituindo a condição de contorno de Neumann  $\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ , obtém-se

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}^s : \delta \mathbf{e} \, dV_t - \int_{\partial\Omega_t^s|_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS_t - \int_{\Omega_t} p \operatorname{tr}(\delta \mathbf{e}) \, dV_t = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}_u. \quad (4.29)$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para obter a forma variacional da equação de conservação da massa, *i.e.*, Eq. (4.23), resultando em

$$\int_{\Omega_t} \delta p \operatorname{div} \mathbf{v}^s \, dV_t - \int_{\Omega_t} \operatorname{grad} \delta p \cdot \mathbf{w} \, dV_t + \int_{\partial\Omega_t^f|_q} \delta p \bar{q} \, dS_t = 0 \quad \forall \delta p \in \mathcal{V}_p, \quad (4.30)$$

onde  $\delta p$  é o campo de pressões virtuais e  $\mathcal{V}_p$  é o espaço de pressões de poro admissíveis. A relação entre o gradiente de pressão de poro e o campo de velocidades relativas pode ser escrita pela Lei de Darcy

$$\mathbf{w} = -\boldsymbol{\kappa} \operatorname{grad} p, \quad (4.31)$$

onde  $\boldsymbol{\kappa}$  é o tensor de segunda ordem de permeabilidade<sup>6</sup>. Substituindo esta relação em (4.30), tem-se a expressão para a forma integral do fluido,

$$\int_{\Omega_t} \delta p \operatorname{div} \mathbf{v}^s \, dV_t + \int_{\Omega_t} \operatorname{grad} \delta p \cdot \boldsymbol{\kappa} \operatorname{grad} p \, dV_t + \int_{\partial\Omega_t^f|_q} \delta p \bar{q} \, dS_t = 0. \quad (4.32)$$

Em resumo, obtém-se a chamada forma fraca do sistema de equações acopladas:

$$\begin{cases} \delta W^u = \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}^s : \delta \mathbf{e} \, dV_t - \int_{\partial\Omega_t^s|_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS_t - \int_{\Omega_t} p \operatorname{tr}(\delta \mathbf{e}) \, dV_t = 0, & \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}_u. \\ \delta W^p = \int_{\Omega_t} \delta p \operatorname{div} \mathbf{v}^s \, dV_t - \int_{\Omega_t} \operatorname{grad} \delta p \cdot \mathbf{w} \, dV_t + \int_{\partial\Omega_t^f|_q} \delta p \bar{q} \, dS_t = 0, & \forall \delta p \in \mathcal{V}_p. \end{cases} \quad (4.33)$$

A dedução destas equações variacionais é apresentada com detalhes no Apêndice B.

#### 4.4.1 Equações incrementais

Dado um intervalo discreto  $[t_n, t_n + \Delta t]$ , onde  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ , o sistema acoplado (4.33) pode ser reescrito em um formato temporal discretizado,

$$\begin{cases} \delta W_{n+1}^u = \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^s : \delta \mathbf{e}_{n+1} \, dV_t - \int_{\partial\Omega_t^s|_t} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{u}_{n+1} \, dS_t - \int_{\Omega_t} p_{n+1} \operatorname{tr}(\delta \mathbf{e}_{n+1}) \, dV_t, \\ \delta W_{n+1}^p = \int_{\Omega_t} \delta p_{n+1} \operatorname{div} \mathbf{v}_{n+1}^s \, dV_t - \int_{\Omega_t} \operatorname{grad} \delta p_{n+1} \cdot \mathbf{w}_{n+1} \, dV_t + \int_{\partial\Omega_t^f|_q} \delta p_{n+1} \bar{q}_{n+1} \, dS_t. \end{cases} \quad (4.34)$$

Devido ao comportamento não linear das equações constitutivas (cujos potenciais são descritos no Capítulo 6) e da consideração de uma cinemática finita, a solução do problema de equilíbrio acoplado requer um procedimento de linearização. Sendo assim, de modo a solucionar o sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson,

<sup>6</sup> Ao considerar a condição de fluxo isotrópico, o tensor de permeabilidade pode ser escrito em termos do coeficiente  $\kappa$ . Assim,  $\boldsymbol{\kappa} = \kappa \mathbf{I}$ .

é necessário determinar as derivadas direcionais de  $\delta W_{n+1}^u$  e  $\delta W_{n+1}^p$  em relação a  $\mathbf{u}_{n+1}$  e  $p_{n+1}$ .

Utilizando uma expansão de Taylor de primeira ordem ao redor dos incrementos de deslocamento  $\Delta \mathbf{u}_{n+1}$  e pressão de poro  $\Delta p_{n+1}$  a partir de um par deslocamento-pressão virtual  $(\delta \mathbf{u}_{n+1}, \delta p_{n+1})$  na configuração atual, pode-se escrever o sistema

$$\delta W_{n+1}^u + \frac{\partial \delta W_{n+1}^u}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \cdot \Delta \mathbf{u}_{n+1} + \frac{\partial \delta W_{n+1}^u}{\partial p_{n+1}} \cdot \Delta p_{n+1} = 0, \quad (4.35)$$

$$\delta W_{n+1}^p + \frac{\partial \delta W_{n+1}^p}{\partial p_{n+1}} \cdot \Delta p_{n+1} + \frac{\partial \delta W_{n+1}^p}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \cdot \Delta \mathbf{u}_{n+1} = 0, \quad (4.36)$$

onde  $\partial \delta W_{n+1}^{(\cdot)} / \partial (\cdot)_{n+1} \cdot \Delta (\cdot)_{n+1}$  denota a operação de derivação direcional, ou derivada de *Gâteaux*. Ao realizar a derivada direcional de  $\delta W_{n+1}^u$  na direção de um incremento  $\Delta \mathbf{u}_{n+1}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta W_{n+1}^u}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \cdot \Delta \mathbf{u}_{n+1} &= \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{e}_{n+1} : \mathcal{C}_{n+1}^s : \Delta \mathbf{e}_{n+1} dV_t \\ &+ \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^s : [\text{grad}^T \Delta \mathbf{u}_{n+1} \text{ grad } \delta \mathbf{u}_{n+1}] dV_t \\ &- \int_{\Omega_t} p_{n+1} \mathbf{I} : [\text{grad}^T \Delta \mathbf{u}_{n+1} \text{ grad } \delta \mathbf{u}_{n+1}] dV_t \\ &- \int_{\Omega_t} p_{n+1} \text{div } \delta \mathbf{u}_{n+1} \text{div } \Delta \mathbf{u}_{n+1} dV_t. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Em (4.37),  $\mathcal{C}_{n+1}^s$  representa o tensor constitutivo de quarta ordem do esqueleto sólido na configuração espacial.

Tomando a derivada de  $\delta W_{n+1}^u$  em relação a pressão  $p_{n+1}$ , obtém-se,

$$\frac{\partial \delta W_{n+1}^u}{\partial p_{n+1}} \Delta p_{n+1} = - \int_{\Omega_t} \Delta p_{n+1} \text{tr} (\delta \mathbf{e}_{n+1}) dV_t. \quad (4.38)$$

Neste trabalho, emprega-se o esquema de integração de Euler implícito para aproximar a velocidade do sólido e obter o campo discreto  $\text{div } \mathbf{v}_{n+1}^s$ . Assim, pode-se escrever

$$\text{div } \mathbf{v}_{n+1}^s = \text{div} \left( \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} \right). \quad (4.39)$$

Assim, a derivada direcional de  $\delta W_{n+1}^p$  — em termos da configuração de referência

— em relação ao campo de deslocamentos pode ser avaliada por,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta W_{n+1}^p}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \cdot \Delta \mathbf{u}_{n+1} = & - \int_{\Omega_t} \delta p_{n+1} \operatorname{tr} \left( \operatorname{grad} \mathbf{v}_{n+1}^s \operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_{n+1} \right) dV_t \\
& + \int_{\Omega_t} \frac{1}{\Delta t} \delta p_{n+1} \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_{n+1} dV_t \\
& + \int_{\Omega_t} \delta p_{n+1} \operatorname{div} \mathbf{v}_{n+1}^s \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_{n+1} dV_t \\
& + \int_{\Omega_t} \operatorname{grad} \delta p_{n+1} \cdot (\mathcal{K}_{n+1} : \Delta \mathbf{e}_{n+1}) \operatorname{grad} p_{n+1} dV_t,
\end{aligned} \tag{4.40}$$

onde  $\mathcal{K} = J^{-1}(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}) : \mathbb{K} : (\mathbf{F}^T \oplus \mathbf{F}^T)$  e  $\mathbb{K} = \frac{\partial \mathbf{K}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}}$  (refere-se ao Apêndice A para detalhes sobre o produto tensorial  $\oplus$ ).

Por último, avalia-se a derivada de  $\delta W_{n+1}^p$  em relação ao campo de pressão de poro,

$$\frac{\partial \delta W_{n+1}^p}{\partial p_{n+1}} \Delta p_{n+1} = \int_{\Omega_t} \operatorname{grad} \delta p_{n+1} \cdot (\boldsymbol{\kappa}_{n+1} \operatorname{grad} \Delta p_{n+1}) dV_t. \tag{4.41}$$

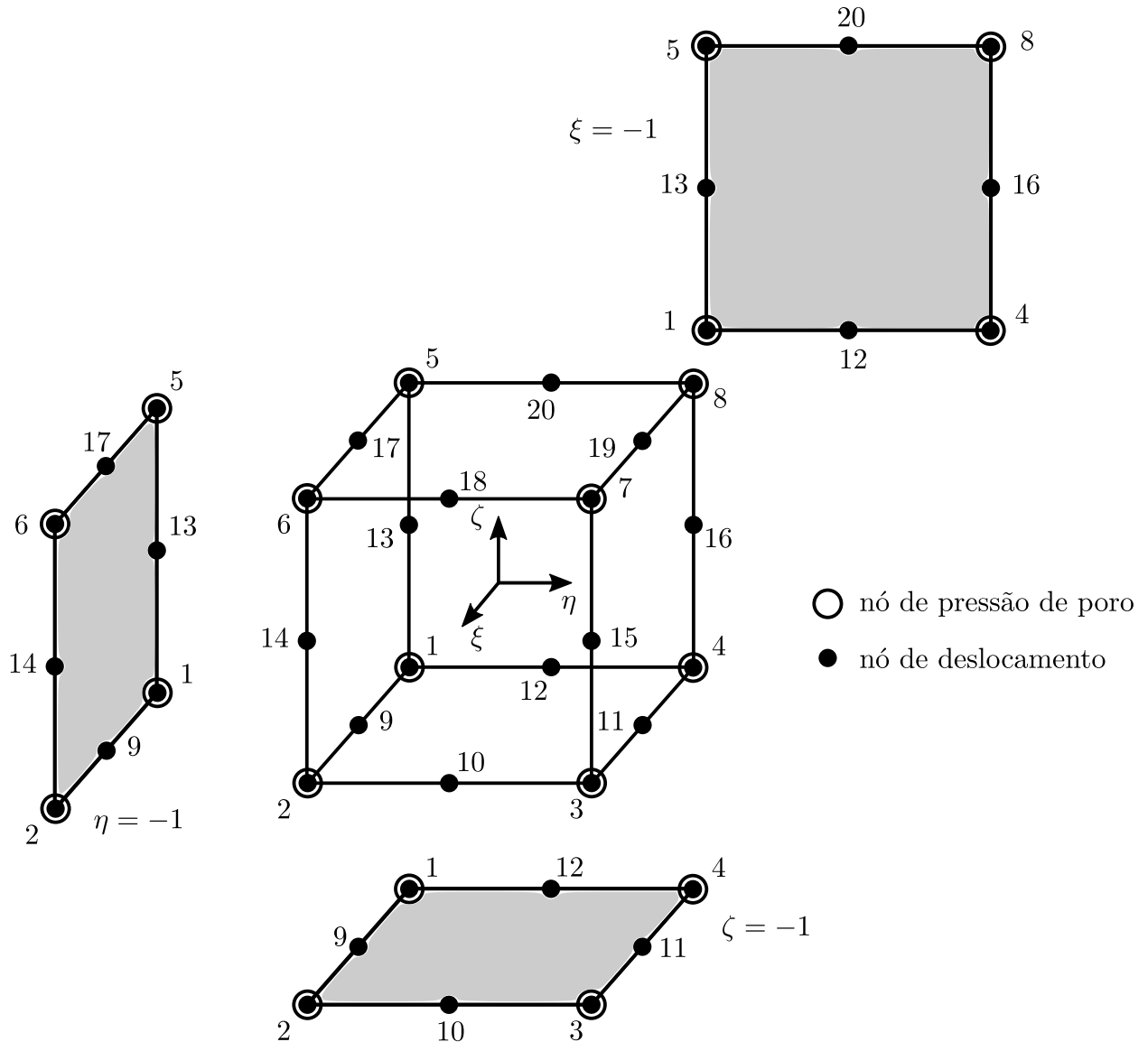
É importante notar que, nos casos em que o processo de solução é sequencial (refere-se a teoria apresentada no Capítulo 5), o cálculo das derivadas de campos cruzados é evitado. O processo de linearização necessário para obter as Eqs. (4.37), (4.38), (4.40) e (4.41) é explicitado em detalhes no Apêndice C.

## 4.5 Aproximação por Elementos Finitos

Em alternativa à obtenção de uma solução analítica - que de modo geral é inviável para geometrias e condições de contorno não convencionais - para as Eqs. (4.34), emprega-se o método dos elementos finitos para a obtenção de soluções aproximadas. A discretização completa destas equações dá origem a um sistema monolítico, cuja solução para os campos primais é obtida de forma simultânea em cada instante de tempo.

Da forma com que a formulação variacional é apresentada, a discretização espacial dos campos primais resulta em uma formulação de elementos finitos mista, na qual o vetor de deslocamento e de pressão de poro são variáveis primárias do problema. De modo a evitar problemas de instabilidade numérica, a ordem dos polinômios de interpolação do par deslocamento/pressão de poro deve satisfazer a chamada condição de compatibilidade LBB (Ladyzhenskaya - Babuška - Brezzi), também conhecida como condição *inf-sup* (BATHE, 2001). Dentre as opções disponíveis na literatura, pode-se citar o elemento Q1P0, cujo deslocamento é interpolado dentro do elemento por funções trilineares e a pressão de poro por funções constantes; o elemento Q1Q1, que é trilinear no campo de deslocamento e trilinear no campo de pressão de poro; e o elemento Q2Q1 (Taylor-Hood), que interpola

Figura 3 – Descrição do elemento finito misto isoparamétrico utilizado para formulação  $\mathbf{u} - p$  (U20P8), juntamente com a numeração local dos nós de deslocamento e pressão de poro.



Fonte: Elaborada pelo autor.

o campo de deslocamentos por funções triquadráticas e o campo de pressões de poro por funções trilineares (uma ordem abaixo do campo de deslocamentos). Dentre estes elementos, apenas o elemento Q2Q1 satisfaz a condição de compatibilidade LBB, sendo este o modelo de elemento utilizado como referência para este trabalho.

Em particular, considera-se aqui o elemento finito misto isoparamétrico (com as funções de forma para o deslocamento) denominado pela sigla U20P8, no qual são dedicados 20 nós para o deslocamento (interpolação quadrática) e 8 nós para a pressão de poro (interpolação linear), conforme a Fig. 3.

Os campos contínuos incrementais (em notação de Voigt) são aproximados no

domínio de cada elemento ( $e$ ) por,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{N}_{n+1}^{u(e)} \mathbf{q}_{n+1}^{(e)}, & \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{N}_{n+1}^{u(e)} \delta \mathbf{q}_{n+1}^{(e)}, & \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{N}_{n+1}^{u(e)} \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(e)}, \\ p_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)T} \mathbf{p}_{n+1}^{(e)}, & \delta p_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)T} \delta \mathbf{p}_{n+1}^{(e)}, & \Delta p_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)T} \Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(e)}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde, para o caso tridimensional,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1}^{(e)} &= [q_{x_1}^1 \ q_{x_2}^1 \ q_{x_3}^1 \ q_{x_1}^2 \ q_{x_2}^2 \ \cdots \ q_{x_3}^{n^u}]^T, \\ \mathbf{p}_{n+1}^{(e)} &= [p^1 \ p^2 \ p^3 \ \cdots \ p^{n^p}]^T, \end{aligned} \quad (4.43)$$

representam o campo de deslocamentos e de pressões de poro nodais de cada elemento, e

$$\mathbf{N}_{n+1}^{u(e)} = \begin{bmatrix} N_\alpha^u & & \\ & N_\alpha^u & \cdots \\ & & N_\alpha^u \end{bmatrix}, \quad \alpha=1, n^u \quad (4.44)$$

e

$$\mathbf{N}_{n+1}^{p(e)} = \begin{bmatrix} N_\alpha^p \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \alpha=1, n^p. \quad (4.45)$$

são as matrizes de funções de forma dos campos de deslocamento e pressão, respectivamente. As variáveis  $n^u$  e  $n^p$  representam o número de nós para o deslocamento e o número de nós para a pressão de poro. As aproximações para as variações  $\underline{\delta \mathbf{e}}_{n+1}^{(e)}$  e  $\underline{\Delta \mathbf{e}}_{n+1}^{(e)}$  do tensor de deformações de Almansi ( $\delta \mathbf{e} = \text{sym}(\text{grad } \delta \mathbf{u})$ ) podem ser escritas na forma,

$$\begin{aligned} \underline{\delta \mathbf{e}}_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{B}_{n+1}^{u(e)} \delta \mathbf{q}_{n+1}^{(e)}, \\ \underline{\Delta \mathbf{e}}_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{B}_{n+1}^{u(e)} \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(e)}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde,

$$\begin{aligned} \underline{\delta \mathbf{e}}_{n+1}^{(e)} &= [\delta e_{11} \ \delta e_{22} \ \delta e_{33} \ 2\delta e_{12} \ 2\delta e_{23} \ 2\delta e_{13}]^T, \\ \underline{\Delta \mathbf{e}}_{n+1}^{(e)} &= [\Delta e_{11} \ \Delta e_{22} \ \Delta e_{33} \ 2\Delta e_{12} \ 2\Delta e_{23} \ 2\Delta e_{13}]^T, \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^{u(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_1} & & & & & \\ & \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_2} & & & & \\ & & \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_3} & & & \\ \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_2} & \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_1} & & & & \\ & \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_3} & \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_2} & & & \\ \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_3} & & \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_1} & & & \end{bmatrix}, \quad \alpha=1, n^u. \quad (4.48)$$



A operação de traço no tensor de variações de Almansi, na notação de Voigt, pode ser escrita por,

$$\text{tr} \left( \delta \mathbf{e}_{n+1}^{(e)} \right) = \mathbf{h}_{n+1}^{u(e)T} \delta \mathbf{q}_{n+1}^{(e)}, \quad (4.49)$$

onde

$$\mathbf{h}_{n+1}^{u(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\alpha}^u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_{\alpha}^u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_{\alpha}^u}{\partial x_3} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \alpha=1, n^u. \quad (4.50)$$

O campo de velocidades do meio sólido é aproximado pela mesma base de funções de forma que aproximam o campo de deslocamentos,

$$\mathbf{v}_{n+1}^{s(e)} = \mathbf{N}_{n+1}^{u(e)} \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(e)}, \quad (4.51)$$

onde  $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(e)}$  é o vetor de velocidades nodais do sólido.

Os gradientes dos campos  $\delta \mathbf{u}_{n+1}$  e  $\Delta \mathbf{u}_{n+1}$  são aproximados por,

$$\begin{aligned} \underline{\text{grad}} \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{G}_{n+1}^{u(e)} \delta \mathbf{q}_{n+1}^{(e)}, & \underline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{G}_{n+1}^{u(e)} \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(e)}, \\ \underline{\text{grad}} \delta p_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{H}_{n+1}^{p(e)} \delta \mathbf{p}_{n+1}^{(e)}, & \underline{\text{grad}} \Delta p_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{H}_{n+1}^{p(e)} \Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(e)}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde,

$$\begin{aligned} \underline{\text{grad}} \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(e)} &= \left[ \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_3} \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_3} \right]^T, \\ \underline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(e)} &= \left[ \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_3} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_3} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_3} \right]^T, \\ \underline{\text{grad}} \delta p_{n+1}^{(e)} &= \left[ \frac{\partial \delta p^f}{\partial x_1} \frac{\partial \delta p^f}{\partial x_2} \frac{\partial \delta p^f}{\partial x_3} \right]^T, \\ \underline{\text{grad}} \Delta p_{n+1}^{(e)} &= \left[ \frac{\partial \Delta p^f}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta p^f}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta p^f}{\partial x_3} \right]^T, \end{aligned} \quad (4.53)$$



Os divergentes dos campos  $\delta \mathbf{u}_{n+1}$  e  $\Delta \mathbf{u}_{n+1}$  são representados pela aproximação,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{b}_{n+1}^{u(e)T} \delta \mathbf{q}_{n+1}^{(e)}, \\ \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(e)} &= \mathbf{b}_{n+1}^{u(e)T} \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(e)}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(e)} &= \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_3}, \\ \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(e)} &= \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{b}_{n+1}^{u(e)} = \mathbf{h}_{n+1}^{u(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_\alpha^u}{\partial x_3} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \alpha=1, n^u. \quad (4.61)$$

A mesma aproximação pode ser realizada para o divergente do campo de velocidades do meio sólido

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_{n+1}^s = \mathbf{b}_{n+1}^{u(e)T} \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(e)}. \quad (4.62)$$

Devido a arbitrariedade das componentes de  $\delta \mathbf{q}_{n+1}^{(e)}$  e  $\delta \mathbf{p}_{n+1}^{(e)}$ , pode-se substituir as entidades discretizadas até aqui em (4.34) e obter-se as parcelas do resíduo,

$$\begin{cases} \mathbf{R}^u = \mathbf{F}_{\text{int}}^u - \mathbf{F}_{\text{ext}}^u = \mathbf{0}, \\ \mathbf{R}^p = \mathbf{F}_{\text{int}}^p - \mathbf{F}_{\text{ext}}^p = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4.63)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{int}}^u &= \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{B}_{n+1}^{u(e)T} \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{s(e)} dV_t^{(e)} - \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{h}_{n+1}^{u(e)} \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)T} \mathbf{p}_{n+1}^{(e)} dV_t^{(e)} \right] \\ \mathbf{F}_{\text{ext}}^u &= \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\partial \Omega_t^{(e)}} \mathbf{N}_{n+1}^{u(e)T} \mathbf{t}_{n+1}^{(e)} dS_t^{(e)} \right], \\ \mathbf{F}_{\text{int}}^p &= \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{H}_{n+1}^{u(e)T} \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{(e)} \mathbf{H}_{n+1}^{u(e)} \mathbf{p}_{n+1}^{(e)} dV_t^{(e)} + \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)} \mathbf{b}_{n+1}^{u(e)T} \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(e)} dV_t^{(e)} \right], \\ \mathbf{F}_{\text{ext}}^p &= \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\partial \Omega_t^{(e)}} \mathbf{N}_{n+1}^{f(e)} \bar{\mathbf{q}}_{n+1}^{(e)} dS_t^{(e)} \right], \end{aligned} \quad (4.64)$$

com  $\mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}}$  representando a operação de montagem dos vetores globais a partir das considerações de cada elemento e  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{s(e)} = [\sigma_{11}^s \ \sigma_{22}^s \ \sigma_{33}^s \ \sigma_{12}^s \ \sigma_{23}^s \ \sigma_{13}^s]^T$  sendo o tensor tensão de Cauchy (efetivo) reescrito pela notação de Voigt. A discretização das derivadas obtidas nas Eqs. (4.37)-(4.41) dá origem a cada uma das parcelas da matriz tangente,

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{uu} = \mathbf{K}_1^{uu} + \mathbf{K}_2^{uu} - \mathbf{K}_3^{uu} - \mathbf{K}_4^{uu} \\ \mathbf{K}^{up} = -\mathbf{K}_1^{up} \\ \mathbf{K}^{pu} = -\mathbf{K}_1^{pu} + \mathbf{K}_2^{pu} + \mathbf{K}_3^{pu} - \mathbf{K}_4^{pu} \\ \mathbf{K}^{pp} = \mathbf{K}_1^{pp} \end{cases} \quad (4.65)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^{uu} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{B}_{n+1}^{u(e)T} \underline{\mathcal{C}}_{n+1}^{s(e)} \mathbf{B}_{n+1}^{u(e)} dV_t^{(e)} \right], \\ \mathbf{K}_2^{uu} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{G}_{n+1}^{u(e)T} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{s(e)} \mathbf{G}_{n+1}^{u(e)} dV_t^{(e)} \right], \\ \mathbf{K}_3^{uu} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{G}_{n+1}^{u(e)T} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{f(e)} \mathbf{G}_{n+1}^{u(e)} dV_t^{(e)} \right], \\ \mathbf{K}_4^{uu} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{b}_{n+1}^{u(e)T} \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)T} \mathbf{b}_{n+1}^{u(e)} \mathbf{p}_{n+1}^{(e)} dV_t^{(e)} \right], \\ \mathbf{K}_1^{up} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{h}_{n+1}^{u(e)T} \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)T} dV_t^{(e)} \right], \\ \mathbf{K}_1^{pu} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)} \left( \mathbf{Q}_{n+1}^{u(e)} \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(e)} \right)^T \mathbf{G}_{n+1}^{u(e)} dV_t^{(e)} \right], \\ \mathbf{K}_2^{pu} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)} \mathbf{b}_{n+1}^{u(e)T} dV_t^{(e)} \right], \\ \mathbf{K}_3^{pu} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)} \mathbf{b}_{n+1}^{u(e)T} \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(e)} \mathbf{b}_{n+1}^{u(e)T} dV_t^{(e)} \right], \\ \mathbf{K}_4^{pu} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{H}_{n+1}^{p(e)T} \hat{\mathbf{T}}_{n+1}^{p(e)T} \underline{\mathcal{K}}_{n+1}^{(e)} \mathbf{B}_{n+1}^{u(e)} dV_t^{(e)} \right], \\ \mathbf{K}_1^{pp} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \mathbf{H}_{n+1}^{p(e)T} \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{(e)} \mathbf{H}_{n+1}^{p(e)} dV_t^{(e)} \right], \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{s^{(e)}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{s^{(e)}} & & \\ & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{s^{(e)}} & \\ & & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{s^{(e)}} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{f^{(e)}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{f^{(e)}} & & \\ & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{f^{(e)}} & \\ & & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{f^{(e)}} \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

e

$$\hat{\mathbf{T}}_{n+1}^{p^{(e)T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{p^{(e)}} & & \\ & \mathbf{T}_2^{p^{(e)}} & \\ & & \mathbf{T}_3^{p^{(e)}} \\ \mathbf{T}_2^{p^{(e)}} & \mathbf{T}_1^{p^{(e)}} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_3^{p^{(e)}} & \mathbf{T}_2^{p^{(e)}} \\ \mathbf{T}_3^{p^{(e)}} & 0 & \mathbf{T}_1^{p^{(e)}} \end{bmatrix}, \text{ com } \quad \mathbf{T}_{n+1}^{p^{(e)}} = \mathbf{H}_{n+1}^{p^{(e)}} \mathbf{p}_{n+1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1^{p^{(e)}} \\ \mathbf{T}_2^{p^{(e)}} \\ \mathbf{T}_3^{p^{(e)}} \end{Bmatrix}. \quad (4.69)$$

Desta forma, o conjunto de equações de equilíbrio linearizadas, no sistema global, pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{uu} \Delta \mathbf{q} + \mathbf{K}^{up} \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{R}^u, \\ \mathbf{K}^{pu} \Delta \mathbf{q} + \mathbf{K}^{pp} \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{R}^p, \end{aligned} \quad (4.70)$$

ou no formato matricial compacto,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{up} \\ \mathbf{K}^{pu} & \mathbf{K}^{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}}^u \\ \mathbf{F}_{\text{ext}}^p \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}^u \\ \mathbf{F}_{\text{int}}^p \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^u \\ \mathbf{R}^p \end{Bmatrix}. \quad (4.71)$$

## 4.6 Modelo de permeabilidade

Neste trabalho, admite-se a hipótese de um meio bifásico isotrópico, *i.e.*, o parâmetro de permeabilidade do meio não possui direções preferenciais. O equacionamento apresentado até aqui possibilita a inserção de diferentes modelos de permeabilidade (ATESHIAN; WEISS, 2010). A forma geral da medida espacial do tensor de segunda ordem de permeabilidade pode ser expressa por

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa(J) \mathbf{I}, \quad (4.72)$$

onde  $\kappa(J)$  representa uma possível dependência da deformação volumétrica no parâmetro de permeabilidade. Durante o processo de linearização, requer-se o cômputo do tensor de quarta ordem de permeabilidade espacial. A estratégia aqui adotada é obter a derivada do tensor de permeabilidade referencial  $\mathbf{K}$  em relação ao tensor de deformação de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  e realizar um *push-forward*, assim obtendo a derivada do tensor de permeabilidade espacial  $\boldsymbol{\kappa}$  em relação ao tensor de deformação de Euler-Almansi  $\mathbf{e}$ .

Ao realizar um *pull-back* no tensor de permeabilidade espacial, obtém-se

$$\mathbf{K} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\kappa} \mathbf{F}^{-T}. \quad (4.73)$$

Substituindo a relação (4.72) em (4.73), pode-se reescrever

$$\mathbf{K} = \kappa(J) J \mathbf{C}^{-1}, \quad \text{onde } \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}. \quad (4.74)$$

A derivada parcial de  $\mathbf{K}$  em relação a  $\mathbf{E}$  é obtida através de uma sequência de algebrismos de cunho tensorial. Entretanto, opta-se por apresentar apenas o resultado final:

$$\mathbb{K} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{E}} = \left( \frac{\partial \kappa(J)}{\partial J} J^2 + \kappa(J) J \right) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2 \kappa(J) J (\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}). \quad (4.75)$$

Pela Eq. (4.75), é possível afirmar que o tensor  $\mathbb{K}$  possui simetria menor, já que os tensores  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{K}$  são simétricos. Assim, é válido que

$$\mathbb{K}_{IJKL} = \mathbb{K}_{JIKL} = \mathbb{K}_{IJLK}. \quad (4.76)$$

Entretanto, ao contrário do tensor de quarta ordem de elasticidade, o tensor de quarta ordem de permeabilidade não provém de uma função potencial (hiperelasticidade). Desta forma, nada se pode afirmar sobre a existência de uma possível simetria maior.

O tensor de quarta ordem de permeabilidade em sua descrição espacial, denotado por  $\mathcal{K}$ , é definido pela operação de *push-forward* em  $\mathbb{K}$ . Pode-se escrever esta operação em termos da transformação dos índices maiúsculos de  $\mathbb{K}$ :

$$\mathcal{K}_{ijkl} = J^{-1} F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} \mathbb{K}_{IJKL}. \quad (4.77)$$

Efetuando estas operações, pode-se escrever o tensor espacial  $\mathcal{K}$  no formato tensorial

$$\mathcal{K} = \left( \kappa(J) + J \frac{\partial \kappa(J)}{\partial J} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - 2 \kappa(J) (\mathbf{I} \odot \mathbf{I}). \quad (4.78)$$

Neste ponto, pode-se citar os principais modelos de permeabilidade  $\kappa(J)$  encontrados na literatura:

1. Isotrópico e constante; neste modelo material, o tensor de permeabilidade  $\boldsymbol{\kappa}$  é constante. Assim, não há dependência do parâmetro  $\kappa$  com a deformação volumétrica:

$$\kappa(J) = \kappa; \quad \frac{\partial \kappa(J)}{\partial J} = 0, \quad (4.79)$$

2. Isotrópico e exponencial; este modelo material possui um parâmetro de permeabilidade que varia com o Jacobiano de transformação volumétrica  $J$  de maneira exponencial:

$$\kappa(J) = \kappa \exp\left(M \frac{J-1}{J-\nu^f}\right); \quad \frac{\partial \kappa(J)}{\partial J} = M \frac{1-\nu^f}{(J-\nu^f)^2} \kappa(J), \quad (4.80)$$

onde  $M$  é um parâmetro que define a velocidade com que a permeabilidade diminui com o aumento da deformação volumétrica (no caso de compressão). No caso especial em que  $M = 0$ , o modelo retorna ao caso de permeabilidade constante.

3. Holmes-Mow (Isotrópico); este modelo também considera um tensor de permeabilidade dependente da deformação volumétrica:

$$\kappa(J) = \kappa \left(\frac{J-\nu^f}{1-\nu^f}\right)^\alpha \exp\left(\frac{1}{2}M(J^2-1)\right); \quad \frac{\partial \kappa(J)}{\partial J} = \left(JM + \frac{\alpha}{J-\nu^f}\right), \quad (4.81)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro do modelo. No caso especial em que  $M = 0$  e  $\alpha = 0$ , o modelo retorna ao caso de permeabilidade constante.





## 5 Esquemas de solução sequenciais

Dentre os métodos de solução de problemas acoplados presentes na literatura, pode-se listar dois grandes grupos. O primeiro, composto por estratégias denominadas monolíticas (*fully-implicit*), acopla todas as equações a serem resolvidas em um único sistema de equações não lineares (*e.g.* via Método de Newton-Raphson). Nestes esquemas, a consideração das derivadas direcionais de campos cruzados acaba por aumentar significativamente o tamanho do sistema de equações resultante. O segundo, composto por estratégias sequenciais ou estagiadas, particiona o sistema de equações em sub-sistemas referentes a solução de cada uma das equações governantes envolvidas no problema. A hipótese física associada à troca de informações entre cada um dos sub-problemas caracteriza cada uma das classes de métodos sequenciais a serem apresentados nesta seção.

Para o caso de meios porosos bifásicos, o conjunto de equações a serem solucionadas de forma acoplada é definido pela equação de conservação da quantidade de movimento linear e pela equação de conservação (continuidade) da massa. Nesta seção, em alternativa à estratégia monolítica já apresentada, apresenta-se uma formulação Lagrangiana atualizada para os esquemas clássicos de solução estagiada: *undrained*, *drained*, *fixed-stress* e *fixed-strain*. De modo a generalizar a formulação dos quatro métodos, introduz-se os operadores de equilíbrio mecânico  $\mathcal{M}$  e de fluxo de fluido  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{K}_{n+1}^{uu} \left( {}^{(\cdot)}\mathbf{q}_{n+1}, {}^{(\cdot)}\mathbf{p}_{n+1} \right) \Delta \mathbf{q}_{n+1} = -\mathbf{R}_{n+1}^u \left( {}^{(\cdot)}\mathbf{q}_{n+1}, {}^{(\cdot)}\mathbf{p}_{n+1} \right), \quad (5.1)$$

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{K}_{n+1}^{pp} \left( {}^{(\cdot)}\mathbf{q}_{n+1}, {}^{(\cdot)}\mathbf{p}_{n+1} \right) \Delta \mathbf{p}_{n+1} = -\mathbf{R}_{n+1}^p \left( {}^{(\cdot)}\mathbf{q}_{n+1}, {}^{(\cdot)}\mathbf{p}_{n+1} \right), \quad (5.2)$$

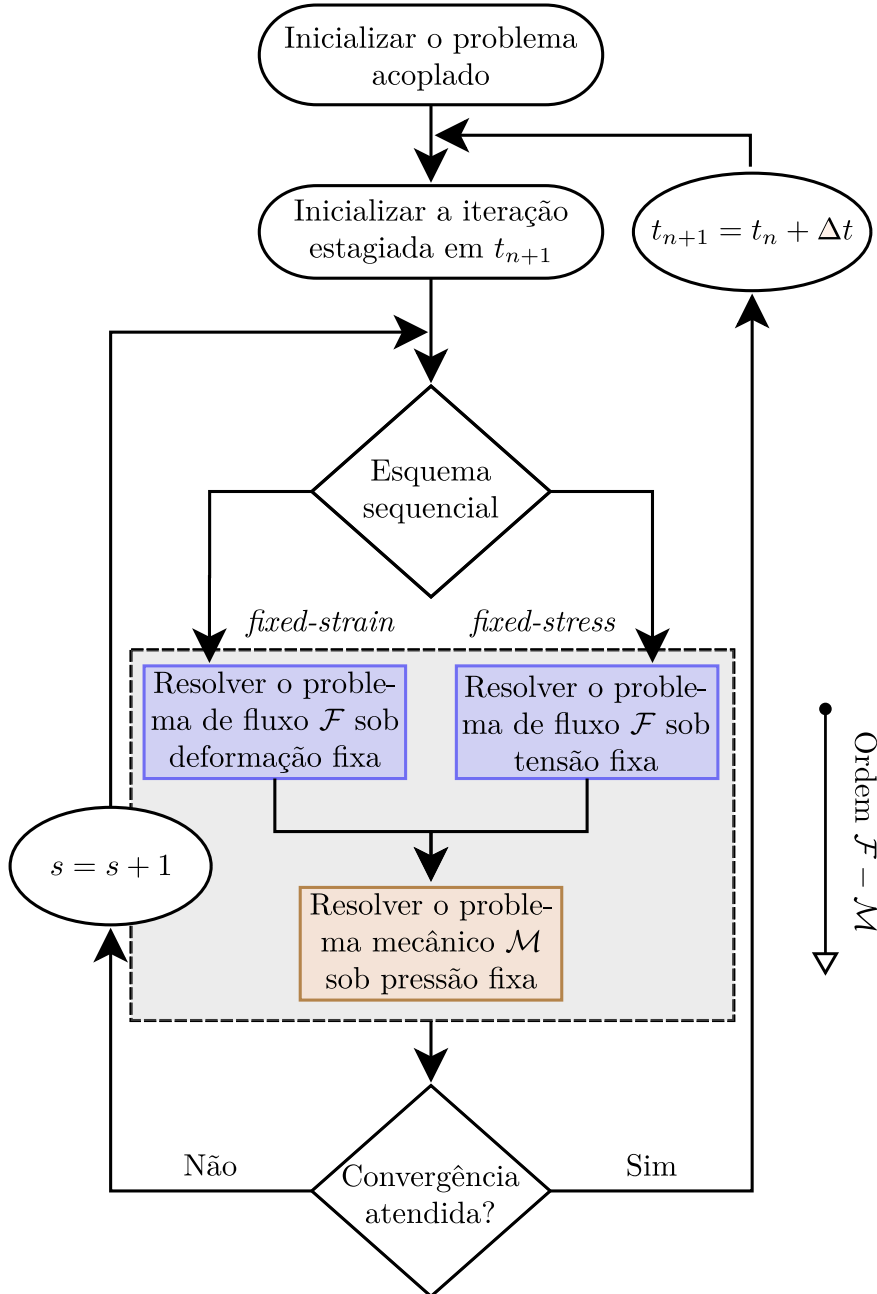
onde  $\left( {}^{(\cdot)}\mathbf{q}_{n+1}, {}^{(\cdot)}\mathbf{p}_{n+1} \right)$  refere-se à dependência das matrizes de rigidez  $\mathbf{K}_{n+1}^{uu}$  e  $\mathbf{K}_{n+1}^{pp}$ , e dos resíduos  $\mathbf{R}_{n+1}^u$  e  $\mathbf{R}_{n+1}^p$  em relação ao par de vetores nodais de deslocamento e de pressão de poro particular à cada um dos métodos sequenciais<sup>1</sup>.

As classes de algoritmos sequenciais a serem apresentadas estão dentro do escopo dos esquemas iterativamente acoplados (*Iteratively-coupled schemes*). Os algoritmos que as constituem caracterizam-se por apresentar um laço interno ao de incrementos temporais, sendo este denominado laço estagiado. Antes da proposição de cada um dos métodos, é de fundamental importância distinguir a notação:

$$\begin{aligned} {}^s(\cdot) &\longrightarrow \text{Iteração prévia do laço estagiado,} \\ {}^{s+1}(\cdot) &\longrightarrow \text{Iteração atual do laço estagiado,} \\ (\cdot)_n &\longrightarrow \text{Iteração prévia do laço temporal,} \\ (\cdot)_{n+1} &\longrightarrow \text{Iteração atual do laço temporal.} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> É importante salientar que, além de definir este par de vetores, as hipóteses físicas de cada método acabam por zerar as parcelas  $\mathbf{K}^{up}\Delta\mathbf{p}$  e  $\mathbf{K}^{pu}\Delta\mathbf{q}$  do sistema linear (4.70).

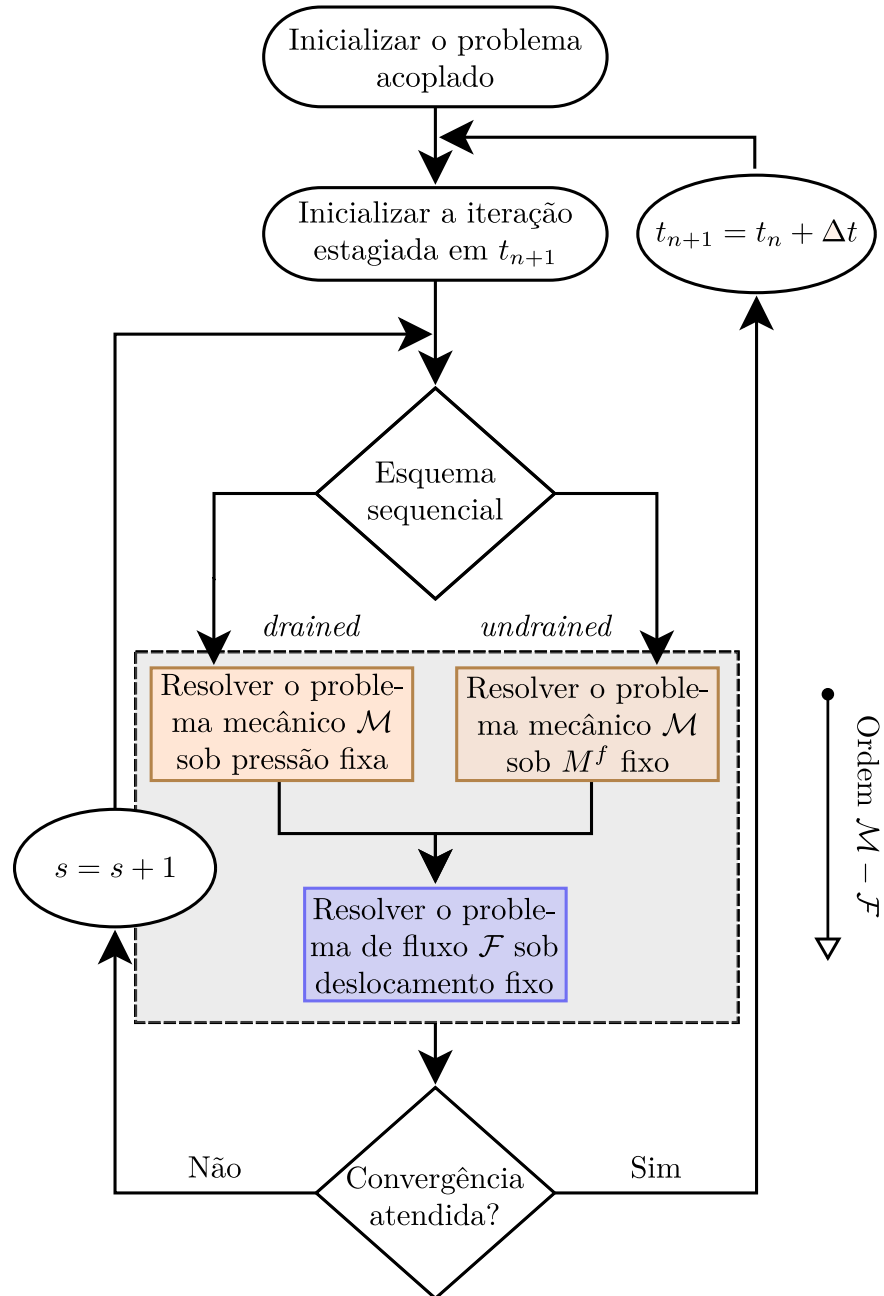
Figura 4 – Fluxograma indicando o processo geral de solução dos algoritmos *fixed-strain* e *fixed-stress*. Na figura, é explicitada a ordem em que as equações governantes são solucionadas ( $\mathcal{F}$ - $\mathcal{M}$ ) e as restrições impostas durante a solução de cada equação.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Desta forma, a solução do problema de incrementos  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  é resolvida através de uma sequência de  $(s + 1)$ -iterações estagiadas para cada passo de tempo. Esta sequência é determinada através da solução iterativa dos problemas  $\mathcal{M}$ - $\mathcal{F}$  ou  $\mathcal{F}$ - $\mathcal{M}$ , sendo a ordem de resolução dependente do método sequencial utilizado (*undrained*, *drained*, *fixed-stress* e *fixed-strain*). O laço na variável  $(s)$  é cessado após a satisfação de um critério de tolerância estabelecido pelas normas do supremo  $\|^{s+1}\mathbf{q}_{n+1} - ^s\mathbf{q}_{n+1}\|_\infty$  e  $\|^{s+1}\mathbf{p}_{n+1} - ^s\mathbf{p}_{n+1}\|_\infty$ . Uma

Figura 5 – Fluxograma indicando o processo geral de solução dos algoritmos *drained* e *undrained*. Na figura, é explicitada a ordem em que as equações governantes são solucionadas ( $\mathcal{M}$ - $\mathcal{F}$ ) e as restrições impostas durante a solução de cada equação.



Fonte: Elaborada pelo autor.

vez que a convergência é obtida, garante-se que a solução alcançada seja idêntica àquela obtida pela estratégia monolítica (*fully-coupled*). Os fluxogramas das Figs. 4 e 5 ilustram a sequência de solução de cada um dos métodos sequenciais citados.

Em problemas com grande escala espacial (*e.g.* reservatórios de petróleo, consolidação de solos de larga extensão), os esquemas monolíticos e sequenciais iterativamente

acoplados podem se tornar demasiadamente custosos. Logo, estratégias de solução fracamente acopladas (*weakly-coupled*) emergem como alternativas viáveis a tratar desta natureza de problemas. A consideração desta classe de esquemas é dada pelo colapso do laço estagiado a uma única iteração ( $s = 1$ ). Estes métodos de solução são muitas vezes tratados como explícitos, já que, apesar de garantirem a solução implícita de cada problema  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{F}$  pelo método de Newton-Raphson, não garantem o acoplamento entre as soluções de ambas as equações.

## 5.1 Undrained split

A premissa fundamental do esquema de divisão *undrained* está em manter a massa de fluido fixa durante a solução do problema mecânico  $\mathcal{M}$ . Esta restrição é imposta através de uma equação preditora para o campo de pressões de poro, resultando em uma atualização para a tensão total de Cauchy a nível de pontos de integração do elemento. Após solucionar o problema mecânico e obter o vetor de deslocamentos  ${}^{s+1}\mathbf{q}_{n+1}$ , resolve-se a equação de conservação de massa  $\mathcal{F}$  mantendo a configuração espacial fixa. Conforme já mencionado, estas equações são solucionadas na ordem  $\mathcal{M}$ - $\mathcal{F}$  de modo iterativo para cada passo de tempo  $n$ .

### 5.1.1 Formulação contínua

De modo a formular a restrição de não-drenagem (*undrained*) de fluido durante a solução do problema de equilíbrio mecânico (satisfação da conservação da quantidade de movimento linear da mistura), introduz-se a variável conteúdo de massa (*mass content*) de fluido  $M^f$ :

$$M^f = \rho_\mu^f \nu^f J, \quad \text{com} \quad J = \det \mathbf{F}^s = \det \mathbf{F}. \quad (5.3)$$

Segundo a teoria de Biot, mudanças na pressão de poro podem ser relacionadas a variações no estado de deformação volumétrica e no conteúdo de massa de fluido. Desta forma, além das relações constitutivas para o esqueleto sólido, apresenta-se a relação

$$\dot{M}^f = \frac{\dot{p}}{Q} + b \varepsilon_v, \quad (5.4)$$

onde  $Q$  é o módulo de Biot,  $b$  é o coeficiente de Biot e  $\varepsilon_v$  é uma possível medida volumétrica de deformação do esqueleto sólido (COUSSY, 2003). As medidas escalares  $Q$  e  $b$  são conhecidas na literatura de meios porosos, podendo ser determinadas através das relações

$$\frac{1}{Q} = \frac{\nu_0^f}{K_f} + \frac{b - \nu_0^f}{K_s} \quad \text{e} \quad b = 1 - \frac{K_{\text{dr}}}{K_s}, \quad (5.5)$$

onde  $K_s$  e  $K_f$  são os módulos volumétricos das partículas sólidas e fluidas, respectivamente;  $K_{\text{dr}}$  é o módulo volumétrico *drenado* e  $\nu_0^f$  é a porosidade na configuração de referência.

Note que, utilizando a hipótese de incompressibilidade das partículas de fluido e do esqueleto sólido ( $K_s \rightarrow \infty$ ,  $K_f \rightarrow \infty$ ), os valores dos coeficientes  $b$  e  $Q$  aproximam-se de 1 e  $\infty$ , respectivamente. Entretanto, opta-se por mantê-los como incógnitas na equação e utilizá-los como parâmetros algorítmicos, possibilitando ajustá-los para aumentar a eficiência numérica do método. Caso contrário, o algoritmo *undrained* não seria estritamente viável, já que na formulação bifásica considerando incompressibilidade dos microconstituintes a equação constitutiva (5.4) não se faz necessária. No algoritmo aqui proposto, a Eq. (5.4) é utilizada apenas como inspiração para o método.

A restrição de não-drenagem do fluido durante a solução de  $\mathcal{M}$  é dada através da imposição  $\dot{M}^f = 0$  sobre a Eq. (5.4). Sendo assim, obtém-se a equação

$$\frac{\dot{p}}{Q} + b\dot{\varepsilon}_v = 0 \quad (5.6)$$

a ser utilizada como restrição sobre a variação temporal do campo de pressões de poro.

### 5.1.2 Formulação discretizada

Utilizando o método de Euler implícito (*backward Euler method*) para discretizar a taxa temporal contínua das variáveis  $\dot{\varepsilon}_v$  e  $\dot{p}$  contidas em (5.6), obtém-se uma expressão para a atualização local do campo de pressões de poro, dada por

$$p_{n+1} = p_n - bQ (\varepsilon_{v_{n+1}} - \varepsilon_{v_n}). \quad (5.7)$$

Para os casos em que a solução sequencial  $\mathcal{M}$ - $\mathcal{F}$  é realizada uma única vez, a atualização dada pela Eq. (5.7) é válida. Entretanto, conforme descrito no início deste capítulo, o algoritmo aqui proposto encontra-se no contexto de esquemas iterativamente acoplados. Em vista disso, essa atualização deve levar em consideração uma eventual retroalimentação dos valores de pressão de poro obtidos pela iteração prévia do laço estagiado. Sendo assim, a integração temporal é realizada acerca da variável  $s$  no tempo atual  $n + 1$ :

$${}^{s+1}p_{n+1} = {}^s p_{n+1} - \alpha_{\text{undr}} ({}^{s+1}\varepsilon_{v_{n+1}} - {}^s \varepsilon_{v_{n+1}}), \quad (5.8)$$

onde  $\alpha_{\text{undr}} = bQ$  é adotado como constante algorítmica intrínseca ao processo de solução *undrained*. Dentre as medidas de deformação volumétrica, destacam-se as mais conhecidas:

- Traço do tensor de deformação logarítmico:

$$\varepsilon_v = \text{tr } \boldsymbol{\epsilon} = \ln J \quad (5.9)$$

- Traço do tensor de deformação infinitesimal:

$$\varepsilon_v = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = J - 1 \quad (5.10)$$

– Traço da parte volumétrica do tensor de deformação de Euler-Almansi:

$$\varepsilon_v = \text{tr } \mathbf{e}_{\text{vol}} \quad (5.11)$$

Cada uma destas medidas representa desvios em relação ao valor unitário de  $J$  (estado de deformação em que se preserva o volume) de modo ligeiramente distinto. Dada a trivialidade da determinação de suas derivadas direcionais, opta-se por utilizar a medida  $\varepsilon_v = J - 1$ . Deste modo, a atualização (5.8) pode ser reescrita por

$${}^{s+1}p_{n+1} = {}^s p_{n+1} - \alpha_{\text{undr}} \left( {}^{s+1}J_{n+1} - {}^s J_{n+1} \right). \quad (5.12)$$

Observando a equação de equilíbrio em sua forma fraca (Eq. (4.34)), nota-se que  $\delta W_{n+1}^u$  depende de  $p_{n+1}$ . Entretanto, dado que a pressão de poro  $p_{n+1}$  é uma variável independente do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}_{n+1}$ , a parcela referente a  $(\partial p_{n+1} / \partial \mathbf{u}_{n+1}) \cdot \Delta \mathbf{u}_{n+1}$  é desconsiderada no cômputo da derivada direcional obtida em (4.37). Aqui, através da Eq. (5.8), o algoritmo *undrained* gera uma dependência do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}_{n+1}$  (dado que  $J = J(\mathbf{u})$ ) na variável  $p_{n+1}$ . Esta dependência induz a determinação de um novo termo a ser adicionado na matriz tangente  $\mathbf{K}^{uu}$  introduzida na Eq. (4.65):

$$\mathbf{K}^{uu} = \mathbf{K}_1^{uu} + \mathbf{K}_2^{uu} - \mathbf{K}_3^{uu} - \mathbf{K}_4^{uu} + \underbrace{\mathbf{K}_{\text{undr}}^{uu}}_{\text{termo adicional}}, \quad (5.13)$$

onde

$$\mathbf{K}_{\text{undr}}^{uu} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[ \alpha_{\text{undr}} \int_{\Omega_t^{(e)}} J_{n+1}^{(e)} \mathbf{b}_{n+1}^{u^{(e)}} \mathbf{b}_{n+1}^{u^{(e)T}} dV_t^{(e)} \right]. \quad (5.14)$$

O cômputo da derivada direcional que origina a parcela  $\mathbf{K}_{\text{undr}}^{uu}$  da matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{uu}$  é apresentado no Apêndice D.

O esquema iterativo pode ser resolvido em duas etapas: 1) obtenção da solução  ${}^{s+1}\mathbf{q}_{n+1}$  do problema  $\mathcal{M}$  utilizando o par  $({}^s \mathbf{q}_{n+1}, {}^s \mathbf{p}_{n+1})$ ; 2) obtenção da solução  ${}^{s+1}\mathbf{p}_{n+1}$  do problema  $\mathcal{F}$  utilizando o par  $({}^{s+1}\mathbf{q}_{n+1}, {}^s \mathbf{p}_{n+1})$ . Note que o vetor  ${}^{s+1}\mathbf{p}_{n+1}^*$  induzido pela Eq. (5.12) não é utilizado como estimativa inicial para o problema  $\mathcal{F}$ , sendo este um vetor reativo à restrição  $\dot{M}^f$ . Em suma, o processo iterativo para a obtenção da solução no tempo  $t_{n+1}$  pode ser descrito pelo esquema

$$\begin{bmatrix} {}^s \mathbf{q}_{n+1} \\ {}^s \mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{sujeito a } \dot{M}^f=0]{\mathcal{M}({}^s \mathbf{q}_{n+1}, {}^s \mathbf{p}_{n+1})} \begin{bmatrix} {}^{s+1} \mathbf{q}_{n+1} \\ {}^{s+1} \mathbf{p}_{n+1}^* \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{sujeito a } \delta \mathbf{q}_{n+1}=\mathbf{0}]{\mathcal{F}({}^{s+1} \mathbf{q}_{n+1}, {}^s \mathbf{p}_{n+1})} \begin{bmatrix} {}^{s+1} \mathbf{q}_{n+1} \\ {}^{s+1} \mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

## 5.2 Drained split

O esquema *drained* mantém a mesma ordem de solução do método *undrained* ( $\mathcal{M}$ - $\mathcal{F}$ ). Por outro lado, ao contrário do último, o campo de pressão de poro é mantido fixo

ao longo do processo de solução de  $\mathcal{M}$ . Após a solução da equação de equilíbrio mecânico, resolve-se o problema de fluxo  $\mathcal{F}$  fixando a geometria (campo de deslocamentos).

Sendo o campo de pressão de poro  $p_{n+1}$  constante entre as iterações estagiadas  $s$  e  $s + 1$ , este é tratado como uma variável independente do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}_{n+1}$ . Desta forma, assim como nas derivações do esquema de solução monolítico, a parcela referente a  $(\partial p_{n+1}/\partial \mathbf{u}_{n+1}) \cdot \Delta \mathbf{u}_{n+1}$  é desconsiderada no processo de obtenção da Eq. (4.37). Assim, a matriz tangente  $\mathbf{K}_{uu}$  não necessita de termos adicionais.

O processo iterativo para a obtenção da solução no tempo  $t_{n+1}$  pode ser realizado em duas etapas: 1) obtenção da solução  ${}^{s+1}\mathbf{q}_{n+1}$  do problema  $\mathcal{M}$  utilizando o par  $({}^s\mathbf{q}_{n+1}, {}^s\mathbf{p}_{n+1})$  e consideração da hipótese  $\delta \mathbf{p}_{n+1} = 0$ ; 2) obtenção da solução  ${}^{s+1}\mathbf{p}_{n+1}$  do problema  $\mathcal{F}$  utilizando o par  $({}^{s+1}\mathbf{q}_{n+1}, {}^s\mathbf{p}_{n+1})$ . Em resumo, o processo iterativo para a obtenção da solução no tempo  $t_{n+1}$  pode ser exposto por

$$\begin{bmatrix} {}^s\mathbf{q}_{n+1} \\ {}^s\mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{sujeito a } \delta \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{0}]{\mathcal{M}({}^s\mathbf{q}_{n+1}, {}^s\mathbf{p}_{n+1})} \begin{bmatrix} {}^{s+1}\mathbf{q}_{n+1} \\ {}^s\mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{sujeito a } \delta \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{0}]{\mathcal{F}({}^{s+1}\mathbf{q}_{n+1}, {}^s\mathbf{p}_{n+1})} \begin{bmatrix} {}^{s+1}\mathbf{q}_{n+1} \\ {}^{s+1}\mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

### 5.3 Fixed-stress split

A ideia principal do método de solução *fixed-stress* é manter o campo de tensões fixo durante a solução do problema de fluxo de fluido  $\mathcal{F}$ . Para problemas de poroelasticidade em deformações infinitesimais, este esquema está bem estabelecido na literatura. No contexto de grandes deformações, a ideia de manter as tensões constantes pode gerar a dúvida: *qual medida de tensão manter fixa?* Ao resolver os problemas  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{F}$  utilizando respectivamente o método dos elementos finitos com formulação Lagrangiana total e o método dos volumes finitos, Kim (2018) propõe duas alternativas de algoritmos *fixed-stress*: 1) primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$  fixo; 2) segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  fixo. Apesar da apresentação de provas de estabilidade (contratibilidade e B-estabilidade) do primeiro método, o autor relata que a fixação do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff não fornece estabilidade incondicional.

No presente trabalho, por encontrarmos no contexto do método dos elementos finitos utilizando uma abordagem Lagrangiana atualizada para ambos os problemas  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{F}$ , a imposição de uma restrição sobre o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, apesar de não ter prova de estabilidade incondicional (KIM, 2018), traz vantagens em termos de implementação computacional. Sendo assim, propõe-se, antes de solucionar o problema mecânico  $\mathcal{M}$  e obter o vetor de deslocamentos  ${}^{s+1}\mathbf{q}_{n+1}$ , resolver a equação de conservação de massa  $\mathcal{F}$  mantendo o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff fixo. Esta restrição resulta em um termo adicional no campo divergente de velocidade da fase sólida. Vale ressaltar que a ordem de solução das iterações estagiadas é  $\mathcal{F}$ - $\mathcal{M}$ , *i.e.*, invertida em relação à ordem dos esquemas *drained* e *undrained*.

### 5.3.1 Formulação contínua

No esquema *fixed second Piola-Kirchhoff stress*, a restrição a ser imposta pelo algoritmo é determinada através da relação  $\delta\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{0}$ . De modo a contabilizar a hipótese de tensão fixa na equação de governo  $\mathcal{M}$ , recorda-se a hipótese de decomposição aditiva do tensor tensão de Cauchy,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s - p\mathbf{I}. \quad (5.17)$$

Dado que a taxa do tensor de tensão de Cauchy não é objetiva, pode-se obter seu formato em taxa de Oldroyd (Eq. 3.25) através da aplicação da derivada de *Lie* em ambos os lados da equação,

$$\text{Oldr}(\boldsymbol{\sigma}) = \text{Oldr}(\boldsymbol{\sigma}^s) - \dot{p}\mathbf{I}, \quad (5.18)$$

com  $\mathcal{L}_v(p) = \dot{p}$ .

Recordando a Eq.(3.29), pode-se reescrever a equação em termos das taxas de Truesdell:

$$\text{Trues}(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} \text{tr} \mathbf{d} = \text{Trues}(\boldsymbol{\sigma}^s) - \boldsymbol{\sigma}^s \text{tr} \mathbf{d} - \dot{p}\mathbf{I}, \quad (5.19)$$

onde  $\text{tr} \mathbf{d}$  é o traço do tensor taxa de deformação (parcela simétrica do tensor gradiente do campo espacial de velocidade  $\boldsymbol{\ell}$ ). A taxa de Truesdell da tensão de Cauchy efetiva  $\text{Trues}(\boldsymbol{\sigma}^s)$  relaciona-se com o tensor taxa de deformação  $\mathbf{d}$  através da relação constitutiva espacial (em taxas)

$$\text{Trues}(\boldsymbol{\sigma}^s) = \mathcal{C}^s : \mathbf{d}. \quad (5.20)$$

Substituindo a Eq. (5.20) e a expressão  $\boldsymbol{\sigma}^s = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}$  em (5.19), obtém-se

$$\text{Trues}(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} \text{tr} \mathbf{d} = \mathcal{C}^s : \mathbf{d} - (\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}) \text{tr} \mathbf{d} - \dot{p}\mathbf{I}. \quad (5.21)$$

Rearranjando a equação em termos de  $\text{tr} \mathbf{d}$ , tem-se a expressão

$$\text{Trues}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{C}^s : \mathbf{d} - (p \text{tr} \mathbf{d} + \dot{p})\mathbf{I}, \quad (5.22)$$

que, através da operação de *push-forward* escalada pelo inverso do Jacobiano de transformação volumétrica  $\text{Trues}(\boldsymbol{\sigma}) = J^{-1} \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T$ , relaciona-se com a taxa do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff <sup>2</sup>  $\dot{\mathbf{S}}$ :

$$\frac{1}{J} \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T = \mathcal{C}^s : \mathbf{d} - (p \text{tr} \mathbf{d} + \dot{p})\mathbf{I}. \quad (5.23)$$

<sup>2</sup> Sendo o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff um tensor material (definido em termos das bases do domínio de referência), sua taxa é objetiva.



A Eq. (5.23) pode ser simplificada através da operação de produto interno com o tensor identidade  $\mathbf{I}$ . Considerando que  $\mathbf{I} : \mathbf{I} = 3$ , obtém-se

$$\frac{1}{J} \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T : \mathbf{I} = \mathcal{C}^s : \mathbf{d} : \mathbf{I} - 3(p \operatorname{tr} \mathbf{d} + \dot{p}). \quad (5.24)$$

Nesta etapa da formulação, faz-se necessária a decomposição desviadora-esférica do tensor taxa de deformação:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{\text{dev}} + \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{d} \mathbf{I}, \quad \text{com} \quad \operatorname{tr} \mathbf{d}_{\text{dev}} = 0. \quad (5.25)$$

Assim, utilizando um tensor constitutivo  $\mathcal{C}^s$  que satisfaz a relação  $\mathcal{C}^s : \mathbf{d}_{\text{dev}} : \mathbf{I} = 0$ , o termo  $\mathcal{C}^s : \mathbf{d} : \mathbf{I}$  reduz-se para

$$\mathcal{C}^s : \mathbf{d} : \mathbf{I} = \frac{1}{3} (\mathbf{I} : \mathcal{C}^s : \mathbf{I}) \operatorname{tr} \mathbf{d} = 3 K_{\text{dr}}^{\text{PK2}} \operatorname{tr} \mathbf{d}, \quad (5.26)$$

sendo a variável escalar  $K_{\text{dr}}^{\text{PK2}} = \frac{1}{9} (\mathbf{I} : \mathcal{C}^s : \mathbf{I})$  o módulo volumétrico drenado do esquema *fixed second Piola-Kirchhoff stress*. Substituindo a Eq. (5.26) em (5.24), obtém-se uma expressão para  $\operatorname{tr} \mathbf{d}$ :

$$\operatorname{tr} \mathbf{d} = \operatorname{div} \mathbf{v}^s = \frac{1}{3(K_{\text{dr}}^{\text{PK2}} - p)} \left( \frac{1}{J} \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T : \mathbf{I} \right) + \frac{1}{(K_{\text{dr}}^{\text{PK2}} - p)} \dot{p}. \quad (5.27)$$

Como o tensor  $\mathbf{d}$  é o gradiente espacial do campo vetorial de velocidade, o traço do mesmo equivale a divergência do campo de velocidade do esqueleto sólido.

### 5.3.2 Formulação discretizada

Ao utilizar o esquema de integração de Euler implícito (*backward Euler method*), pode-se escrever a Eq. (5.27) em seu formato semi-discreto:

$${}^{s+1} \operatorname{div} \mathbf{v}_{n+1}^s = \frac{1}{3(K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}} - p_n)} \left( \frac{1}{J_n} \mathbf{F}_n {}^{s+1} \dot{\mathbf{S}}_{n+1} \mathbf{F}_n^T : \mathbf{I} \right) + \frac{{}^{s+1} p_{n+1} - p_n}{\Delta t (K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}} - p_n)}, \quad (5.28)$$

onde as variáveis que não estão em formato de taxas são avaliadas no instante de tempo convergido  $t_n$ .

Em um contexto iterativo-sequencial, a condição de *fixed-stress*  $\delta \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{0}$  resulta em

$$\delta \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{0} \quad \implies \quad {}^{s+1} \dot{\mathbf{S}}_{n+1} - {}^s \dot{\mathbf{S}}_{n+1} = \mathbf{0}. \quad (5.29)$$

Desta forma, ao levar em consideração esta condição, é válida a relação para o primeiro termo ao lado direito da Eq. (5.28),

$$\frac{1}{3(K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}} - p_n)} \left( \frac{1}{J_n} \mathbf{F}_n {}^{s+1} \dot{\mathbf{S}}_{n+1} \mathbf{F}_n^T : \mathbf{I} \right) = \frac{1}{3(K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}} - p_n)} \left( \frac{1}{J_n} \mathbf{F}_n {}^s \dot{\mathbf{S}}_{n+1} \mathbf{F}_n^T : \mathbf{I} \right). \quad (5.30)$$

Ao considerar a Eq. (5.30) e determinar o divergente do campo de velocidade da fase sólida na iteração sequencial  $s$  ( ${}^s \text{div } \mathbf{v}_{n+1}^s$ ), é possível concluir que

$$\frac{1}{3(K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}} - p_n)} \left( \frac{1}{J_n} \mathbf{F}_n^{s+1} \dot{\mathbf{S}}_{n+1} \mathbf{F}_n^T : \mathbf{I} \right) = {}^s \text{div } \mathbf{v}^s - \frac{{}^s p_{n+1} - p_n}{\Delta t (K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}} - p_n)}. \quad (5.31)$$

Dado que as variáveis nos instantes  $(\cdot)_n$  e  ${}^s(\cdot)_{n+1}$  são conhecidas, a relação (5.31) resulta em um formato explícito para a determinação do primeiro termo do lado direito da Eq. (5.28). Substituindo a Eq. (5.31) em (5.28), obtém-se a expressão final para a atualização do campo divergente:

$${}^{s+1} \text{div } \mathbf{v}_{n+1}^s = \underbrace{\text{div} \left( \frac{{}^s \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} \right)}_{{}^s \text{div } \mathbf{v}_{n+1}^s} + \frac{{}^{s+1} p_{n+1} - {}^s p_{n+1}}{\Delta t (K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}} - p_n)}. \quad (5.32)$$

Assim como no método *undrained*, esta nova regra de atualização resulta em modificações nas linearizações efetuadas na Subseção 4.4.1. Na derivada direcional obtida em (4.41), considerou-se nula a derivada de *Gatêaux* referente à primeira integral do lado direito da Eq. (4.34). A partir daqui, dado que o campo escalar  $\text{div } \mathbf{v}_{n+1}^s$  é dependente do campo de pressão de poro, é necessário o cômputo de um novo termo da matriz tangente  $\mathbf{K}^{pp}$  (Eq. (4.65)),

$$\mathbf{K}^{pp} = \mathbf{K}_1^{pp} + \underbrace{\mathbf{K}_{\text{fix-str}}^{pp}}_{\text{termo adicional}} \quad (5.33)$$

cuja discretização espacial é dada por

$$\mathbf{K}_{\text{fix-str}}^{pp} = \mathbf{A} \left[ \int_{\Omega_t^{(e)}} \left( \frac{\Delta t^{-1}}{K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}} - p_n} \right) \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)} \mathbf{N}_{n+1}^{p(e)T} dV_t^{(e)} \right]. \quad (5.34)$$

O termo escalar  $K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}}$  é determinado pela equação matricial em notação de Voigt,

$$K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}} = \frac{1}{9} \mathbf{I} \cdot (\mathcal{C}_n^s \mathbf{I}), \quad (5.35)$$

com  $\mathbf{I} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Os detalhes do cômputo da derivada direcional que origina parcela  $\mathbf{K}_{\text{fix-str}}^{pp}$  da matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{pp}$  são apresentados no Apêndice E.

De forma resumida, o processo iterativo para a obtenção da solução no tempo  $t_{n+1}$  pode ser realizado em duas etapas: 1) obtenção da solução  ${}^{s+1} \mathbf{p}_{n+1}$  do problema  $\mathcal{F}$  utilizando o par  $({}^s \mathbf{q}_{n+1}, {}^s \mathbf{p}_{n+1})$  e consideração da hipótese  $\delta \dot{\mathbf{S}}_{n+1} = 0$ ; 2) obtenção da solução  ${}^{s+1} \mathbf{q}_{n+1}$  do problema  $\mathcal{M}$  utilizando o par  $({}^s \mathbf{q}_{n+1}, {}^{s+1} \mathbf{p}_{n+1})$  e consideração do campo de pressão constante. Este processo é sistematizado por:

$$\begin{bmatrix} {}^s \mathbf{q}_{n+1} \\ {}^s \mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{sujeito a } \delta \dot{\mathbf{S}}_{n+1} = 0]{\mathcal{F}({}^s \mathbf{q}_{n+1}, {}^s \mathbf{p}_{n+1})} \begin{bmatrix} {}^s \mathbf{q}_{n+1} \\ {}^{s+1} \mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{sujeito a } \delta \mathbf{p}_{n+1} = 0]{\mathcal{M}({}^s \mathbf{q}_{n+1}, {}^{s+1} \mathbf{p}_{n+1})} \begin{bmatrix} {}^{s+1} \mathbf{q}_{n+1} \\ {}^{s+1} \mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

## 5.4 Fixed-strain split

O esquema *fixed-strain* mantém a mesma ordem de solução do método *fixed-stress* ( $\mathcal{F}$ - $\mathcal{M}$ ). Porém, sendo a deformação constante, a divergência do campo vetorial de velocidade espacial do esqueleto sólido é mantida constante ao longo de  $\mathcal{F}$ . Após a solução do problema de fluxo, resolve-se o problema mecânico  $\mathcal{M}$  fixando o campo de pressão de poro.

Dado que a determinação de  $\text{div } \mathbf{v}_{n+1}^s$  pelo método de Euler implícito depende do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}_{n+1}$  e este último é mantido constante entre as iterações estagiadas  $s$  e  $s+1$  ( $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ), o campo divergente é também mantido fixo. Desta forma, assim como nas derivações do esquema de solução monolítico, a parcela referente a  $(\partial \text{div } \mathbf{v}_{n+1}^s / \partial p_{n+1}) \cdot \Delta p_{n+1}$  é desconsiderada no processo de obtenção da Eq. (4.41). Assim, a matriz tangente  $\mathbf{K}^{pp}$  não necessita de termos adicionais.

O processo iterativo para a obtenção da solução no tempo  $t_{n+1}$  pode ser realizado em duas etapas: 1) obtenção da solução  ${}^{s+1}\mathbf{p}_{n+1}$  do problema  $\mathcal{F}$  utilizando o par  $({}^s\mathbf{q}_{n+1}, {}^s\mathbf{p}_{n+1})$  e consideração da hipótese  $\delta \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{0}$ ; 2) obtenção da solução  ${}^{s+1}\mathbf{q}_{n+1}$  do problema  $\mathcal{M}$  utilizando o par  $({}^s\mathbf{q}_{n+1}, {}^{s+1}\mathbf{p}_{n+1})$  e consideração do campo de pressão constante. Este processo é sistematizado por:

$$\begin{bmatrix} {}^s\mathbf{q}_{n+1} \\ {}^s\mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{sujeito a } \delta \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{0}]{\mathcal{F}({}^s\mathbf{q}_{n+1}, {}^s\mathbf{p}_{n+1})} \begin{bmatrix} {}^s\mathbf{q}_{n+1} \\ {}^{s+1}\mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{sujeito a } \delta \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{0}]{\mathcal{M}({}^s\mathbf{q}_{n+1}, {}^{s+1}\mathbf{p}_{n+1})} \begin{bmatrix} {}^{s+1}\mathbf{q}_{n+1} \\ {}^{s+1}\mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$



## 6 Experimentos numéricos

De modo a validar as formulações e os algoritmos apresentadas(os) nas últimas seções e avaliar a capacidade de solução de cada esquema (monolítico e sequenciais), é introduzido neste capítulo um conjunto de experimentos numéricos enquadrados no cenário de biomecânica. Para este propósito, propõe-se a modelagem de dois ensaios amplamente utilizados na caracterização de tecidos biológicos:

1. Ensaio de uma amostra cilíndrica de tecido biológico mole sujeita a um estado de compressão livre. Neste caso, para que o fluxo de fluido escoe apenas na direção radial, utiliza-se uma placa rígida e impermeável (conforme ilustrado na Fig. 6a)
2. Ensaio de uma amostra cilíndrica de tecido biológico mole sujeita a um estado de compressão confinado. A compressão é realizada através de uma placa rígida e permeável, permitindo que o fluido escoe na direção  $X_3$  (conforme ilustrado na Fig. 6b)

Um modelo tridimensional em elementos finitos é desenvolvido de forma a simular o comportamento destes ensaios. Além disto, a natureza do problema permite a definição de condições de simetria para a geometria e para as condições de contorno, o que reduz a amostra para 1/4 do seu domínio. Considera-se uma amostra de altura  $H = 2$  mm e raio  $R = 2$  mm, conforme ilustrado na Fig. 6c. No caso de compressão livre, o fluxo de fluido através da face lateral externa é considerado livre (condição de contorno homogênea para o campo de pressão de poro). Por outro lado, no caso confinado, a condição de fluxo livre é restrita à face superior da amostra (por isto a utilização de uma placa permeável).

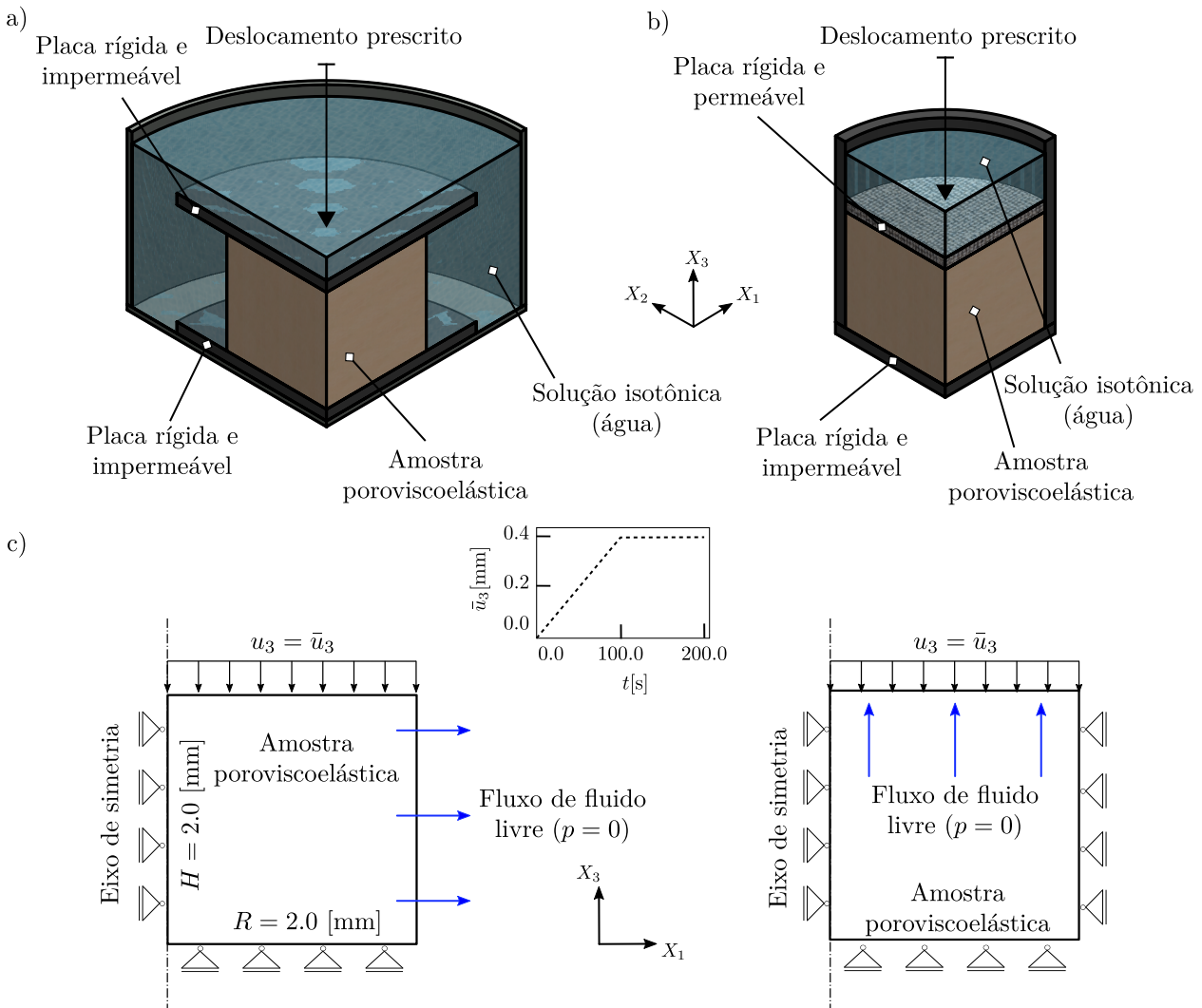
De acordo com o gráfico no centro da Fig. 6c, ambos os ensaios numéricos confinado/livre são realizados a uma taxa de compressão de  $4 \mu\text{m/s}$  até atingir o valor de deslocamento axial máximo  $\bar{u}_3 = 0,4$  mm, o que resulta em 20% de deformação relativa (regime de grandes deformações). Para visualizar o efeito de relaxação de tensão, este nível de deformações é mantido constante durante o intervalo de tempo  $t = 100$  s até  $t = 200$  s.

Para solucionar todos os sistemas lineares associados ao método de Newton-Raphson completo, utilizou-se o *solver* direto Pardiso (BOLLHÖFER et al., 2020). Este solucionador está contido em uma biblioteca robusta que lida com sistemas de equações lineares simétricos e não-simétricos. O critério de convergência não linear é baseado na norma do supremo do resíduo, e é satisfeito com uma tolerância relativa de  $10^{-5}$ . O critério de convergência estagiado é satisfeito com uma tolerância de  $10^{-3}$ . As implementações numéricas foram realizadas em um código laboratorial de elementos finitos não-linear em linguagem *FORTTRAN*, e a validade dos resultados do programa foi avaliada através de

uma comparação com os resultados obtidos pelo software comercial *ABAQUS*<sup>TM</sup> para o caso de poroelasticidade.

O Apêndice F apresenta o esquema de escalonamento do sistema de equações utilizado para melhorar o condicionamento da matriz Jacobiana acoplada do método de solução monolítico.

Figura 6 – Descrição dos problemas confinado/livre, juntamente com as condições de contorno a serem impostas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 6.1 Modelo constitutivo e lei de transporte

As características viscosas e difusivas da amostra são tratadas através de um modelo poroviscoelástico no qual, além da viscosidade proveniente da velocidade relativa entre as fases, é contabilizada uma parcela viscosa intrínseca ao material do esqueleto sólido. Em um contexto de deformações finitas, o gradiente de deformação  $\mathbf{F}$  pode ser escrito através

da decomposição multiplicativa

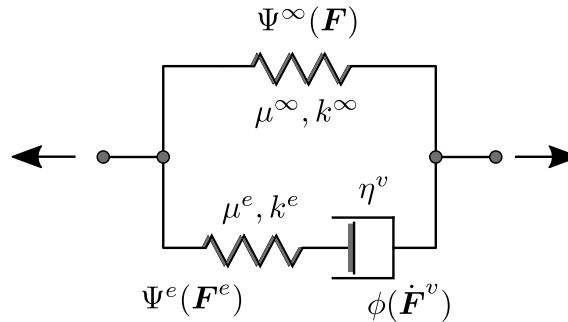
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^v, \quad (6.1)$$

onde  $\mathbf{F}^e$  e  $\mathbf{F}^v$  são, respectivamente, a parcela elástica e viscosa do gradiente de deformação (LEE, 1969). Assumindo que a parcela viscosa do tensor de vorticidade (*i.e.* parte anti-simétrica do gradiente de velocidade obtido através da parcela viscosa do gradiente de deformação  $\boldsymbol{\ell}^v = \dot{\mathbf{F}}^v (\mathbf{F}^v)^{-1}$ ) é nula, pode-se escrever o tensor taxa de deformação viscoso como

$$\mathbf{d}^v = \boldsymbol{\ell}^v = \dot{\mathbf{F}}^v (\mathbf{F}^v)^{-1}. \quad (6.2)$$

A definição de um modelo constitutivo viscoelástico isotrópico para a fase sólida é tratada através da abordagem constitutiva variacional definida no Capítulo 3. Assim, propõe-se a utilização de um conjunto de potenciais de Helmholtz e de dissipação definidos no trabalho de Carniel (2017) para a matriz da fibra de um Elemento de Volume Representativo (EVR) de fascículo de tendão. A visualização do papel destes potenciais fica clara através do modelo reológico ilustrado na Fig. 7.

Figura 7 – Descrição do modelo reológico utilizado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez que a energia livre de Helmholtz é definida pela decomposição  $\Psi(\mathbf{F}, \mathbf{F}^e) = \Psi^\infty(\mathbf{F}) + \Psi^e(\mathbf{F}^e)$ , o potencial variacional descrito na Eq. (3.59) pode ser escrito como

$$\mathcal{P}(\dot{\mathbf{F}}; \mathbf{F}, \mathbf{F}^e) = \overline{\Psi^\infty(\mathbf{F}) + \Psi^e(\mathbf{F}^e)} + \phi(\dot{\mathbf{F}}^v), \quad (6.3)$$

onde

$$\Psi^\infty(\mathbf{F}) = \frac{\mu^\infty}{2} (\text{tr } \mathbf{C} - 3) - \mu^\infty \ln J + \frac{k^\infty}{2} (\ln J)^2, \quad (6.4)$$

$$\Psi^e(\mathbf{F}^e) = \frac{\mu^e}{2} (\text{tr } \mathbf{C}^e - 3) - \mu^e \ln J^e, \quad (6.5)$$

$$\phi(\dot{\mathbf{F}}^v) = \frac{\eta^v}{2} \mathbf{d}^v : \mathbf{d}^v, \quad (6.6)$$

com  $\mathbf{C}^e = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  sendo a parcela elástica do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita e  $\{\mu^\infty, k^\infty, \mu^e, \eta^v\}$  sendo o conjunto de parâmetros do modelo de material do esqueleto

sólido. Os potenciais elásticos (6.4) e (6.5) pertencem à classe de modelos constitutivos *neo-Hookeanos* compressíveis (BONET; WOOD, 2008, p. 162) e o potencial de dissipação (6.6) é um potencial quadrático em  $\mathbf{d}^v$ . A Tab. 1 indica o conjunto de parâmetros utilizados para o modelo material da amostra, seguindo os resultados obtidos na identificação de parâmetros realizada no trabalho de Carniel (2017). Neste trabalho, as unidades básicas (MPa e mm) são adotadas de modo a reduzir as diferenças entre as ordens de magnitude presentes nos termos da matriz de rigidez, diminuindo problemas de condicionamento (WHITE et al., 2019).

Tabela 1 – Parâmetros constitutivos utilizados no modelo material do esqueleto sólido.

| Parâmetro    | Unidade | Valor adotado |
|--------------|---------|---------------|
| $\mu^\infty$ | MPa     | 10,0          |
| $k^\infty$   | MPa     | 15,0          |
| $\mu^e$      | MPa     | 50,0          |
| $\eta^v$     | MPa · s | 1500,0        |

O transporte do fluido que permeia o esqueleto sólido é representado pela lei de Darcy, exigindo a definição do tensor de permeabilidade de segunda ordem  $\boldsymbol{\kappa}$ . Neste caso, é escolhido o modelo de permeabilidade isotrópica constante:

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa \mathbf{I}, \quad (6.7)$$

onde  $\kappa$  é a constante de permeabilidade espacial. É importante notar que este modelo não considera a influência da deformação do esqueleto sólido sobre o tensor de permeabilidade.

Neste trabalho, o parâmetro de permeabilidade espacial  $\kappa$  é utilizado como fator de amplificação do acoplamento entre as equações de continuidade e de balanço mecânico. Neste sentido, enquanto os parâmetros referentes ao modelo constitutivo do material do esqueleto sólido (Tab. 1) são mantidos fixos ao longo das análises, o parâmetro de permeabilidade é variável. Esta variação é realizada dentro de uma faixa de propriedades encontrada na literatura de tecidos biológicos moles.

## 6.2 Verificação dos esquemas de solução

A etapa de verificação dos esquemas sequenciais se dá através de uma comparação direta entre os quatro esquemas sequenciais implementados (*drained*, *undrained*, *fixed-strain*, *fixed-stress*) e o esquema monolítico (totalmente implícito). Apesar do formato sequencial destes esquemas, espera-se que o resultado obtido por esses deva ser mesmo daquele obtido pelo método monolítico. Entretanto, dado que alguns dos esquemas sofrem de problemas de falta de convergência, faz-se necessária a utilização de um critério *ad-hoc* para a escolha dos parâmetros numéricos (condição em que todos os métodos obtenham convergência).



Desta forma, o parâmetro de permeabilidade escolhido para as análises de verificação é  $\kappa = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ . Além disto, por haver um processo de discretização temporal no problema de poroviscoelasticidade, é necessária a definição de um valor para o incremento de tempo  $\Delta t$ . Utiliza-se um incremento  $\Delta t = 2 \text{ s}$  fixo, o que resulta em 100 incrementos de deslocamento (observe a Fig. 6c). Para ambos os casos, um refino de malha no tamanho dos elementos é realizado até que o erro relativo devido à influência da malha seja aceitável.

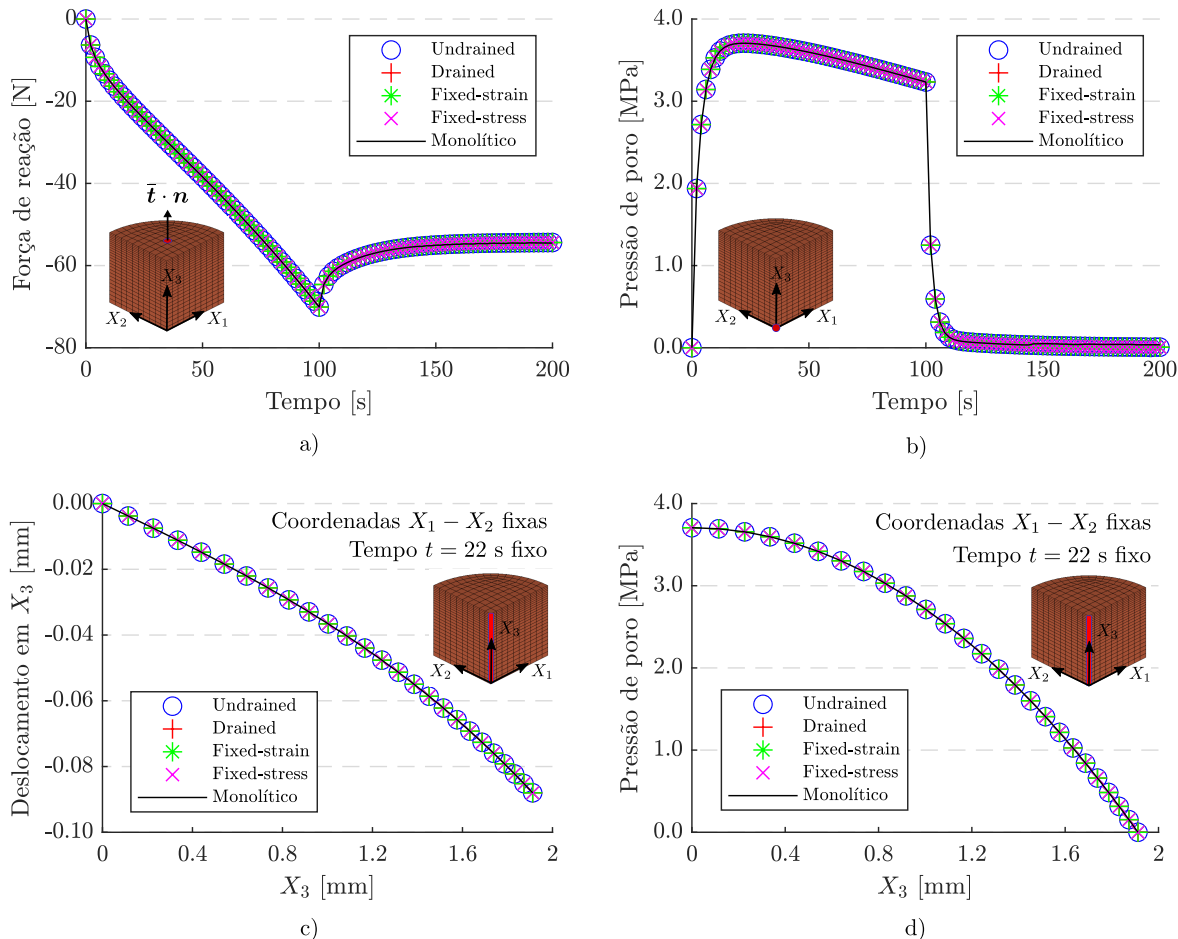
A resposta do caso de compressão confinada é apresentada nas Figs. 8a) - 8d), onde observa-se que a solução obtida pelos cinco esquemas é a mesma. As Figs. 8a) e 8b) enfatizam a conformidade das respostas de força de reação e pressão de poro ao longo de todo o tempo de análise, e as Figs. 8c) e 8d) ilustram a resposta dos campos primais (deslocamento e pressão de poro) no instante de tempo  $t = 22 \text{ s}$  (instante onde a pressão de poro atinge o seu valor máximo). Para o caso de compressão livre, os resultados de verificação são apresentados nas Figs. 9a) - 9d).

### 6.3 Resultados e discussões

Neste ponto, é importante apresentar um importante conceito a ser investigado neste trabalho; o de força de acoplamento. Esta variável relaciona-se diretamente com as não linearidades materiais (modelo constitutivo e amplitude dos parâmetros) e geométricas do modelo (consideração de grandes deformações). Além disto, as respostas obtidas até aqui mostram que, embora o mesmo nível de deformação axial seja imposto em ambos os testes e as mesmas propriedades materiais sejam consideradas, a resposta do teste de compressão confinada gera níveis de pressão mais elevados. Conseqüentemente, a tensão efetiva no esqueleto sólido apresenta uma maior contribuição da pressão de poro. Este quadro retrata a dependência não só dos parâmetros do modelo (permeabilidade, coeficiente de Poisson efetivo, e outros) e dos níveis de deformação na força de acoplamento, mas também das condições de contorno do problema. Além do papel da permeabilidade, as compressibilidades dos microconstituintes sólido/fluido possuem um papel importante na força de acoplamento do problema bifásico. Neste trabalho, ambos os constituintes são considerados incompressíveis, o que é uma hipótese comum na modelagem de tecidos biológicos moles. Entretanto, esta hipótese pode levar a problemas de solução numérica (KIM; TCHELEPI; JUANES, 2011a; WHITE; CASTELLETTO; TCHELEPI, 2016).

Esta seção visa investigar a influência da força de acoplamento na capacidade dos esquemas de solução apresentados. O processo de investigação é desempenhado através da variação do parâmetro de permeabilidade em ambas as análises de compressão confinada e livre. Para este fim, cada um dos ensaios é realizado utilizando o conjunto de valores  $\kappa = [1 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-2}] \text{ mm}^4/\text{Ns}$ . Estes valores são escolhidos de modo a englobar a faixa de permeabilidades encontrada na literatura para tecidos biológicos

Figura 8 – Resultados referentes ao ensaio de compressão confinada. a) Comportamento da força de reação ao longo do tempo na face indicada; b) comportamento da pressão de poro do nó indicado ao longo do tempo; c) campo de deslocamento na direção axial; d) campo de pressão de poro na direção axial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

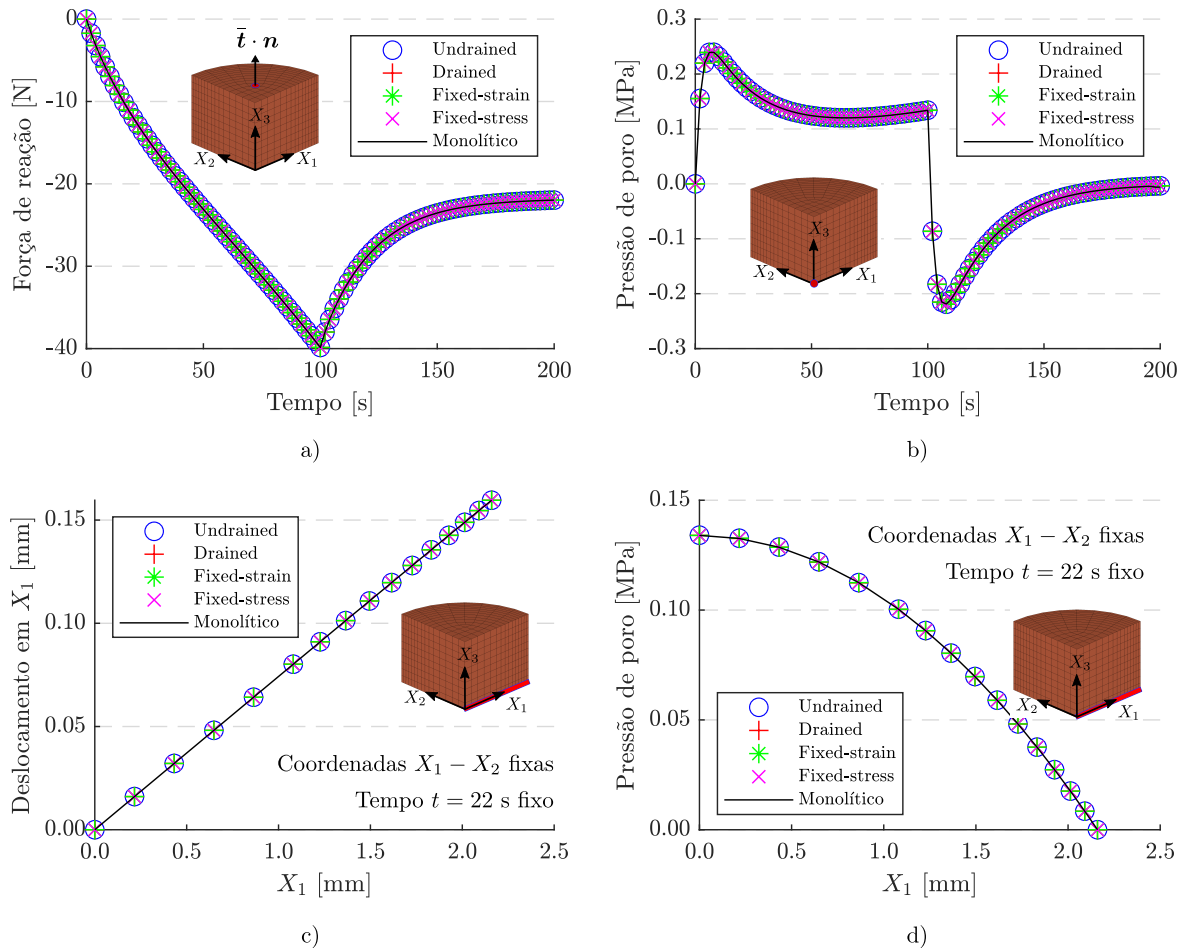
moles.

De modo a avaliar a influência da escolha do incremento de tempo  $\Delta t$  nos resultados, é estudada a evolução do erro relativo dos valores de pressão de poro e de força de reação conforme são variados o incremento de tempo e o valor do parâmetro de permeabilidade.

A Tab. 2 apresenta a comparação dos resultados obtidos no caso de compressão confinada considerando  $\Delta t = 5$  s e  $\Delta t = 10$  s com aqueles obtidos ao considerar  $\Delta t = 2$  s (valor de referência). As diferenças nos campos de pressão de poro e de força de reação são determinadas para todos os valores de permeabilidade estudados. Neste caso, é possível observar que os resultados para os maiores valores de permeabilidade sofrem menos influência da discretização do tempo, já que o fenômeno de viscoelasticidade devido à velocidade relativa entre o esqueleto sólido e o fluido é desacentuado.

Os resultados indicados na Tab. 3 indicam uma maior dependência da discretização

Figura 9 – Resultados referentes ao ensaio de compressão livre. a) Comportamento da força de reação ao longo do tempo na face indicada; b) comportamento da pressão de poro do nó indicado ao longo do tempo; c) campo de deslocamento na direção radial; d) campo de pressão de poro na direção radial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

do tempo no resultado das análises de compressão livre. Observa-se, também, que a variação da permeabilidade não tem grande influência na diferença relativa, o que pode indicar que a força de acoplamento intrínseca ao ensaio é menor (para esta faixa de permeabilidades). Por consequência, é possível presumir uma maior facilidade na solução deste tipo de problema (compressão livre).

Mesmo que as diferenças relativas à pressão de poro sejam maiores, as diferenças relativas máximas encontradas são próximas de 2% para o caso confinado, e próximas de 7% para o caso livre. Desta forma, é plausível considerar que os resultados obtidos para os três valores de  $\Delta t$  estão dentro de uma faixa de erro aceitável.

A Fig. 10 ilustra as curvas da força de reação e da pressão de poro ao longo do tempo de análise para o caso confinado. Observa-se uma grande influência do parâmetro de permeabilidade na amplitude dos campos e em seus tempos de relaxação. Valores menores

Tabela 2 – Diferença relativa dos resultados do ensaio confinado para  $\Delta t = 5$  s e  $\Delta t = 10$  s em relação ao resultado de referência ( $\Delta t = 2$  s).

|   | <b>Diferença relativa</b>    |                   |                               |                   |
|---|------------------------------|-------------------|-------------------------------|-------------------|
|   | Pressão de poro <sup>†</sup> |                   | Força de reação <sup>††</sup> |                   |
|   | $\Delta t = 5$ s             | $\Delta t = 10$ s | $\Delta t = 5$ s              | $\Delta t = 10$ s |
| $\kappa = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ | 0.696%                       | 1.715%            | 0.267%                        | 0.710%            |
| $\kappa = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ | 0.092%                       | 0.250%            | 0.022%                        | 0.077%            |
| $\kappa = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ | 0.070%                       | 0.109%            | 0.017%                        | 0.055%            |
| $\kappa = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ | 0.006%                       | 0.018%            | 0.038%                        | 0.054%            |
| $\kappa = 1 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ | 0.003%                       | 0.009%            | 0.017%                        | 0.054%            |

<sup>†</sup> A pressão de poro é avaliada no nó ilustrado na Fig. 8b), no instante de tempo  $t = 100$  s.

<sup>††</sup> A força de reação é avaliada na área ilustrada na Fig. 8a), no instante de tempo  $t = 100$  s.

Tabela 3 – Diferença relativa dos resultados do ensaio livre para  $\Delta t = 5$  s e  $\Delta t = 10$  s em relação ao resultado de referência ( $\Delta t = 2$  s).

|   | <b>Diferença relativa</b>    |                   |                               |                   |
|---|------------------------------|-------------------|-------------------------------|-------------------|
|   | Pressão de poro <sup>†</sup> |                   | Força de reação <sup>††</sup> |                   |
|   | $\Delta t = 5$ s             | $\Delta t = 10$ s | $\Delta t = 5$ s              | $\Delta t = 10$ s |
| $\kappa = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ | 1.261%                       | 3.236%            | 0.094%                        | 0.216%            |
| $\kappa = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ | 2.491%                       | 6.638%            | 0.015%                        | 0.059%            |
| $\kappa = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ | 2.573%                       | 6.951%            | 0.041%                        | 0.149%            |
| $\kappa = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ | 2.311%                       | 6.192%            | 0.062%                        | 0.198%            |
| $\kappa = 1 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ | 2.217%                       | 5.901%            | 0.062%                        | 0.199%            |

<sup>†</sup> A pressão de poro é avaliada no nó ilustrado na Fig. 8b), no instante de tempo  $t = 100$  s.

<sup>††</sup> A força de reação é avaliada na área ilustrada na Fig. 8a), no instante de tempo  $t = 100$  s.

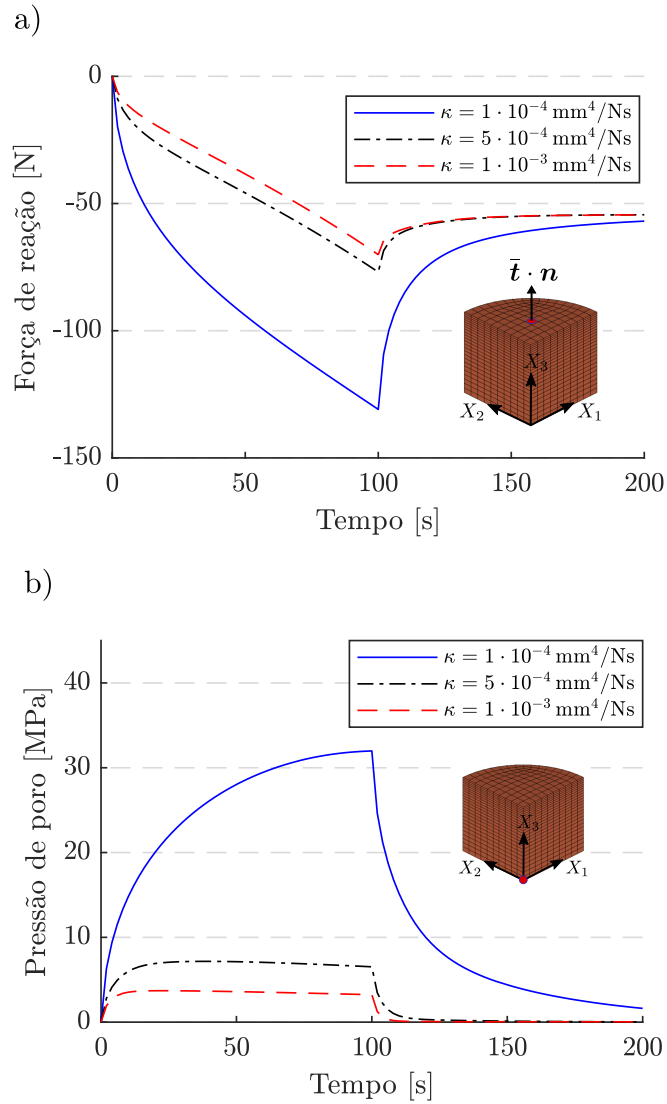
de permeabilidade implicam em uma maior resistência ao fluxo de fluido que permeia o esqueleto sólido, o que aumenta a contribuição da pressão de poro na tensão total em que estão sujeitas as partículas do meio bifásico (na configuração deformada). As condições cinemáticas do ensaio também contribuem para a grande força de acoplamento vista aqui, o que pode ser evidenciado pela Fig. 11 ao ilustrar as configurações indeformada/deformada dos campos de pressão de poro e de tensão total de Cauchy (von Mises).

Para o caso livre, as curvas de pressão de poro e de força de reação são ilustradas na Fig. 12. Neste caso, observa-se uma influência muito pequena da variação dos valores de permeabilidade na evolução da força de reação na superfície indicada, o que é resultado das baixas amplitudes de pressão de poro atingidas durante o ensaio (veja a Fig. 12b)) e, conseqüentemente, de uma menor contribuição do fluxo de fluido na tensão total de Cauchy. No ensaio de compressão confinada, a deformação volumétrica total é imposta pela própria cinemática das condições de contorno. No caso livre, por não serem restritas as paredes laterais da amostra, o corpo bifásico é livre para deformar-se volumetricamente. A Fig. 12c) ilustra a evolução do diâmetro  $D$  da amostra ao longo do tempo para três valores de permeabilidade. Aqui, é observado um fenômeno interessante; para os menores valores de permeabilidade, o diâmetro da amostra continua aumentando ao submetê-la a um deslocamento axial constante (como já visto, após  $t = 100$  s o corpo mantém uma deformação axial de 20%). Este fenômeno é decorrente da inversão do sinal da pressão de poro no instante de tempo  $t = 100$  s, como visto na Fig. 12b). Neste instante de tempo, o fluxo de fluido acaba sofrendo uma inversão no seu sentido, fazendo com que a amostra apresente inchaço (*swelling*), o que é também relatado no trabalho de Klahr et al. (2021). A Fig. 13 ilustra as configurações indeformada/deformada dos campos de pressão de poro e de tensão total de Cauchy (von Mises) para o caso livre.

A partir deste ponto, avalia-se a capacidade de solução dos esquemas apresentados (*drained*, *undrained*, *fixed-strain*, *fixed-stress* e monolítico) no que se refere a eficiência numérica. Cada um dos ensaios numéricos (confinado e livre) é executado para a faixa de permeabilidades exposta no início da seção, e os testes são realizados utilizando os três valores de incremento de tempo  $\Delta t$  estudados:  $\Delta t = 2, 5$  e  $10$  s. Para todos os esquemas de solução, é calculado o tempo de CPU normalizado, *i.e.*, o tempo requerido para desempenhar a etapa de processamento dividido pelo maior tempo observado.

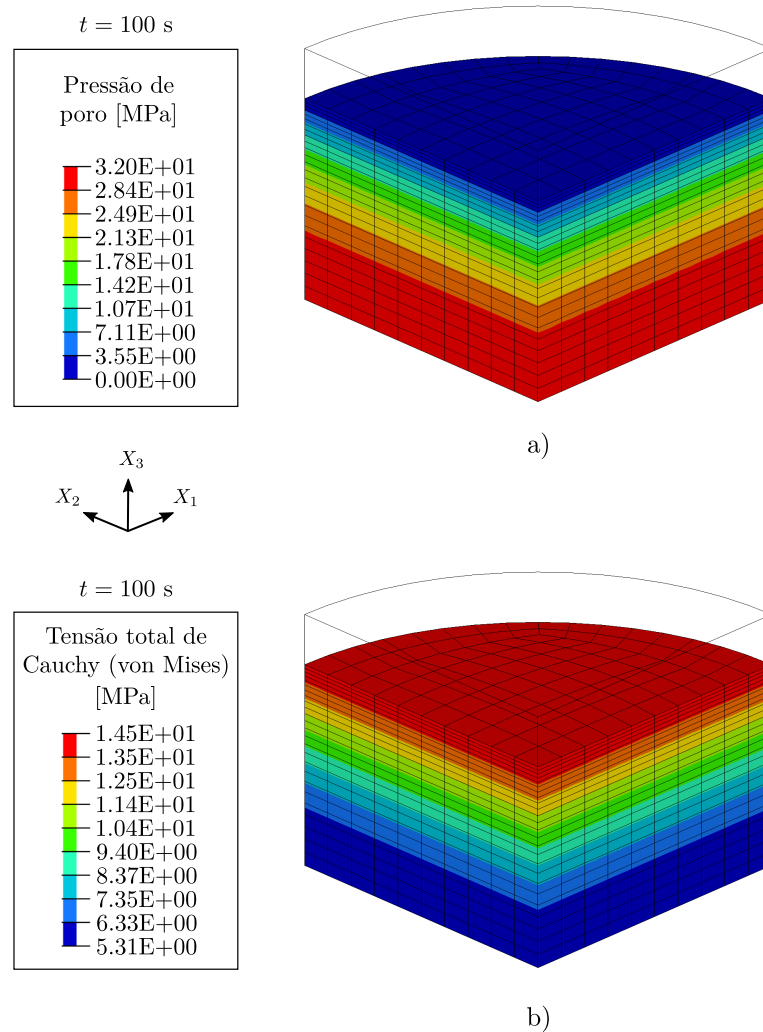
A Fig. 14 indica uma seqüência de gráficos em barras, onde, no caso das Figs. 14a), c) e e), a altura de cada uma destas representa tempo de processamento (normalizado) necessário para solucionar o problema de compressão confinada. As subfiguras 14b), d) e f) (coluna à direita) representam gráficos em barra onde cada uma das barras denota a quantidade de iterações estagiadas necessárias para convergir cada um dos métodos estagiados (omite-se as barras referentes ao esquema monolítico, já que este não pertence a classe de algoritmos sequenciais). Em cada um dos gráficos, a mesma medida é calculada

Figura 10 – Comparação do resultado obtido no ensaio de compressão confinada utilizando três valores distintos para o parâmetro de permeabilidade  $\kappa$ . a) Histórico da força de reação [N] na área cuja normal é indicada na figura. b) Histórico da pressão de poro [MPa] no nó indicado na figura.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11 – Resultados do problema confinado para os campos tridimensionais de: a) pressão de poro [MPa]; b) medida de von Mises da tensão total de Cauchy. Os resultados foram obtidos para o parâmetro  $\kappa = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$



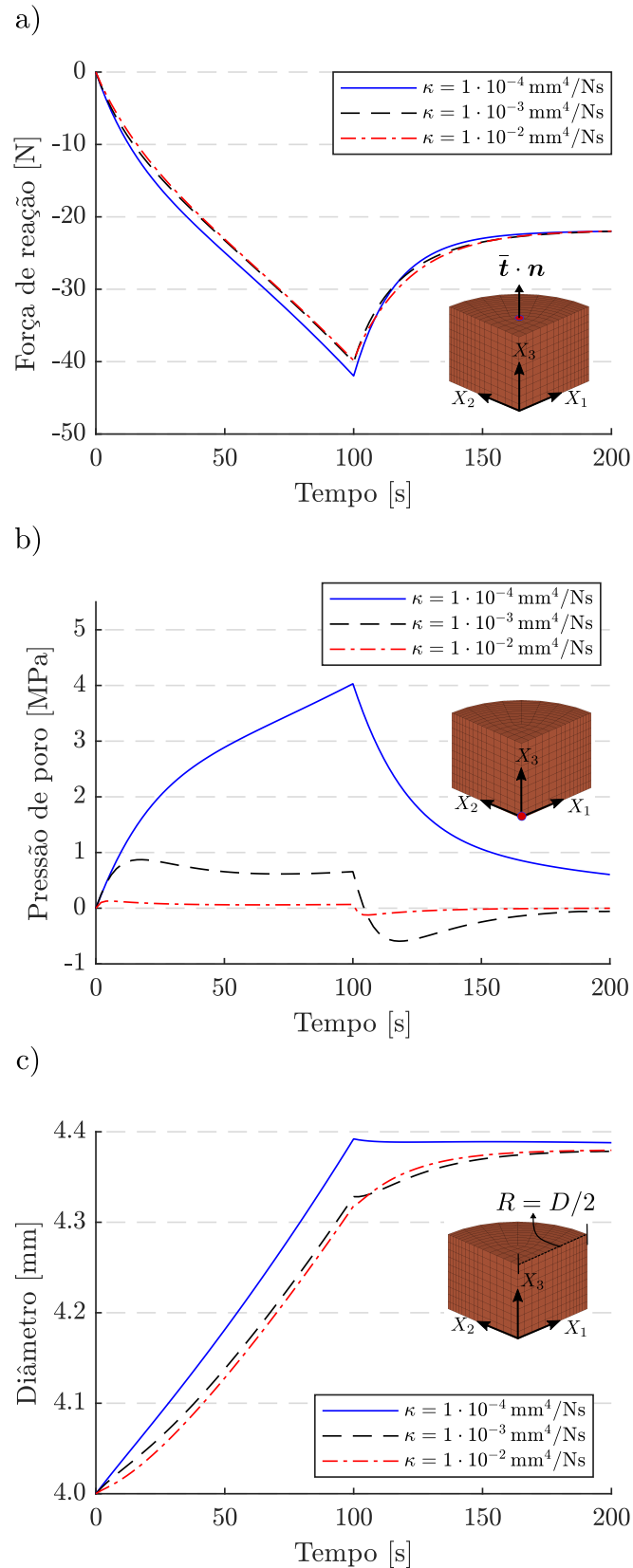
Fonte: Elaborada pelo autor.

para os 5 valores de permeabilidade. De modo a organizar as discussões de cada um dos métodos, opta-se por apresentá-las em formato de tópicos nas subseções seguintes.

### 6.3.1 Discussões acerca da eficiência dos algoritmos na solução do problema de compressão confinada

1. No caso do esquema *fixed-stress*, observa-se que o tempo de CPU decai exponencialmente com o aumento da permeabilidade. Verifica-se que, utilizando incrementos de tempo  $\Delta t = 2$  e  $5 \text{ s}$ , o esquema se mostra o mais custoso; tanto de termos do tempo de processamento quanto do número de iterações estagiadas. Nas análises, o método apresenta problemas de convergência ao considerar o valor de permeabilidade  $\kappa = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$  (a barra cinza indica falta de convergência e interrupção do

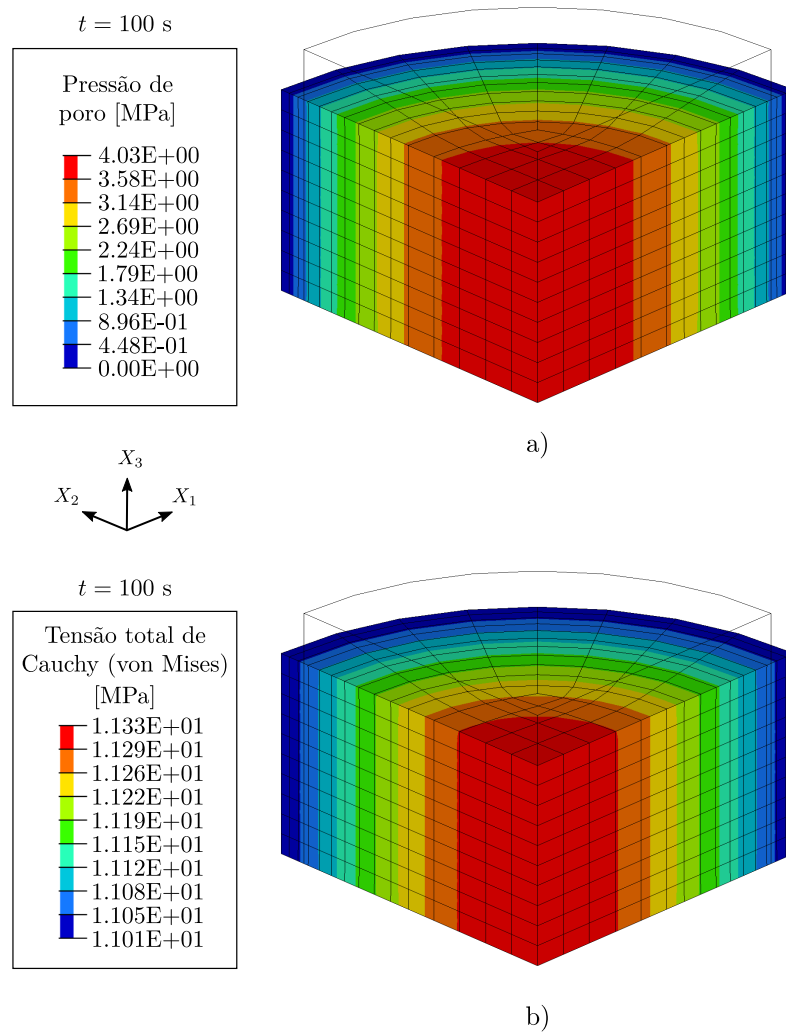
Figura 12 – Comparação do resultado obtido no ensaio de compressão livre utilizando três valores distintos para o parâmetro de permeabilidade  $\kappa$ . a) Histórico da força de reação [N] na área cuja normal é indicada na figura. b) Histórico da pressão de poro [MPa] no nó indicado na figura. c) Variação do diâmetro  $D$  da amostra ao longo do intervalo de análise.



Fonte: Elaborada pelo autor.



Figura 13 – Resultados do problema livre para os campos tridimensionais de: a) pressão de poro [MPa]; b) medida de von Mises da tensão total de Cauchy. Os resultados foram obtidos para o parâmetro  $\kappa = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

código). É aparente que, nas condições estudadas, a combinação de baixos valores de permeabilidade com pequenos incrementos de tempo é prejudicial ao algoritmo.

2. No caso do esquema *drained*, o tempo de processamento decai brevemente com o aumento da permeabilidade. Entretanto, o número de iterações estagiadas é praticamente constante em todas as análises. Comparando as Figs. 14a), c) e d), verifica-se que, ao diminuir o incremento de tempo de  $\Delta t = 5 \text{ s}$  para  $\Delta t = 2 \text{ s}$ , o esquema passa a não convergir na análise com permeabilidade  $\kappa = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ , o que indica que a utilização de pequenos incrementos de tempo é prejudicial ao método. De modo geral, exceto nos casos de não convergência, o esquema se mostra o mais rápido.
3. No caso do esquema *undrained*, nota-se que, na maior parte dos casos, o tempo

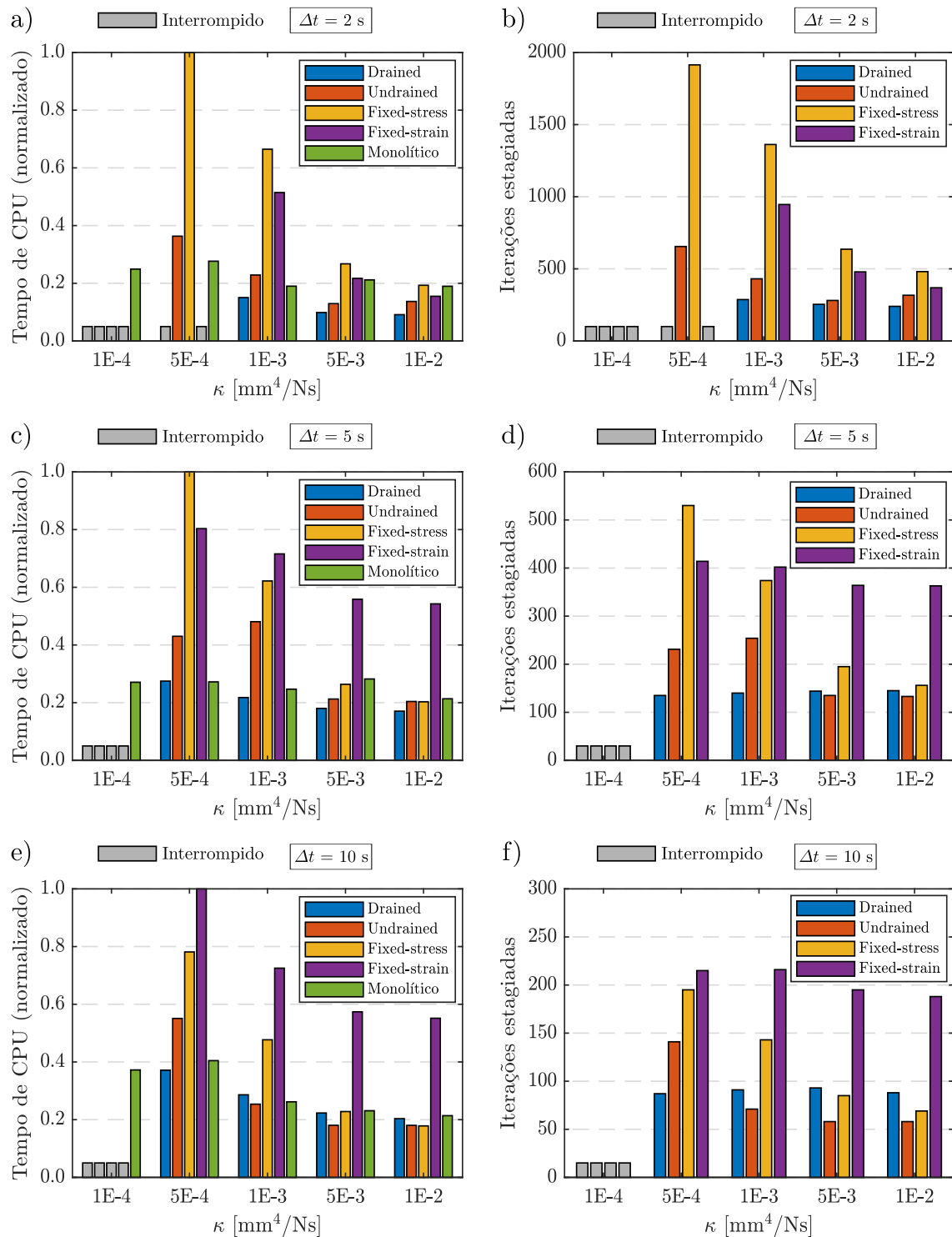
de processamento também decai com o aumento da permeabilidade. Assim como o esquema *drained*, o *undrained* apresenta falta de convergência para o valor de permeabilidade  $\kappa = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ . Entretanto, ao diminuir o incremento de tempo de  $\Delta t = 5 \text{ s}$  para  $\Delta t = 2 \text{ s}$ , o método mantém a convergência da análise com permeabilidade  $\kappa = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ . Nos gráficos, pode-se indicar uma plena vantagem do esquema *undrained* sob o algoritmo *fixed-stress*.

4. O esquema *fixed-strain* apresenta a mesma capacidade de solução do algoritmo *drained*, porém apresenta um custo computacional mais elevado. Este comportamento é esperado, uma vez que ambos os métodos são os únicos que não consideram quaisquer restrições adicionais. Como pode ser visto na seção anterior, estes algoritmos são semelhantes, exceto pelo fato de a ordem de solução das equações ser trocada.
5. Para este problema, o método monolítico (totalmente implícito) mostra uma grande vantagem sobre os algoritmos estagiados. O esquema apresenta a maior capacidade de solução do problema de compressão confinada, uma vez que este é o único a convergir as análises com o menor valor de permeabilidade  $\kappa = 1 \cdot 10^{-4}$  (com baixo custo computacional). Somado a isto, é possível observar que o tempo de processamento não é tão influenciado pelo valor da constante de permeabilidade, o que indica que o método é adequado a solução deste tipo de problemas (com escala de tempo/espaco dentro do contexto de mecânica de tecidos biológicos moles). Vale lembrar que o algoritmo requer a utilização de condicionadores e *solvers* de alta performance para a solução do sistema de equações lineares (não simétrico).

### 6.3.2 Discussões acerca da eficiência dos algoritmos na solução do problema de compressão livre

1. Nas análises de compressão livre, o algoritmo *fixed-stress* se mostra mais competitivo, já que o tempo de processamento aumenta de maneira controlada com a diminuição de permeabilidade, e o número de iterações máximo (em torno de 800 iterações) é menor que a metade daquele obtido nas análises confinadas (em torno de 2000 iterações). Observa-se que, para permeabilidades menores que  $\kappa = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ , o esquema *fixed-stress* apresenta um tempo de CPU menor do que o método monolítico. Em alguns casos, e.g., para  $\Delta t = 10 \text{ s}$  e  $\kappa = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ , e  $\Delta t = 5 \text{ s}$  e  $\kappa = 1 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^4/\text{Ns}$ , o algoritmo apresenta o menor tempo de processamento. Para este problema, pode-se afirmar que, dentre os esquemas sequenciais, o algoritmo *fixed-stress* é o que apresenta a maior eficiência e capacidade de solução.
2. O algoritmo *drained* apresenta grande vantagem ao considerar pequenos incrementos de tempo. Ao aumentar o incremento de tempo, o esquema passa a ser superado pelo

Figura 14 – Comparação do tempo de processamento (CPU) normalizado entre os métodos sequenciais (*drained*, *undrained*, *fixed-stress* e *fixed-strain*) e o método monolítico e do número total de iterações estagiadas de cada método sequencial no caso de compressão confinada. Denotam-se por interrompidas as análises que sofreram falta de convergência.

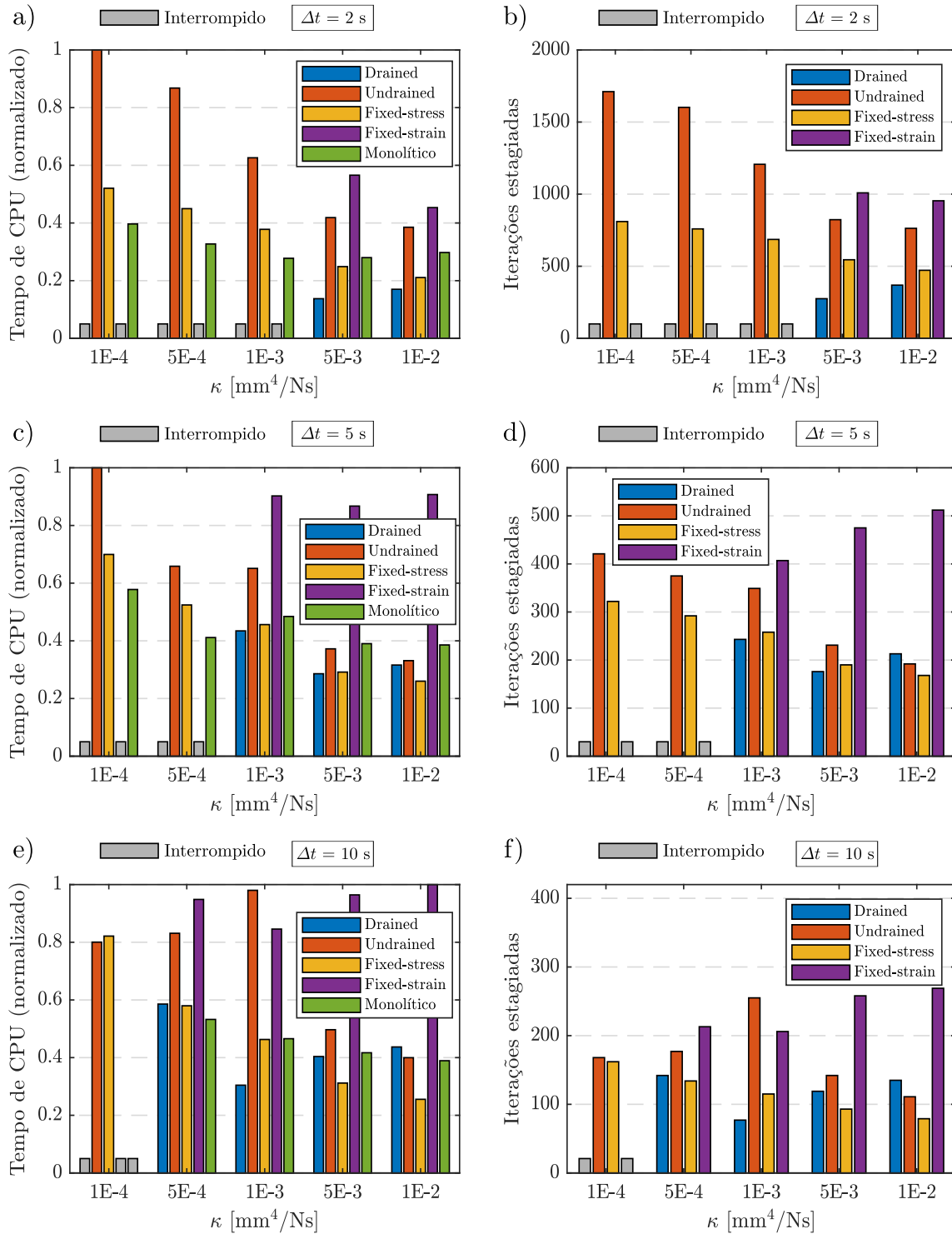


Fonte: Elaborada pelo autor.

algoritmo *fixed-stress*, tanto em termos do tempo computacional quanto do número de iterações estagiadas..

3. Assim como o *fixed-stress*, o esquema *undrained* é capaz de solucionar o problema para todos os valores de permeabilidade e incrementos de tempo. Além disto, o tempo de processamento do esquema apresenta uma inversão de comportamento ao aumentar o incremento de tempo. Observa-se que, ao considerar o menor incremento de tempo ( $\Delta t = 2$  s), o esquema apresenta um tempo de CPU duas vezes maior do que o algoritmo *fixed-stress*. Por outro lado, ao aumentar o incremento de tempo, a diferença entre o tempo de solução dos dois algoritmos passa a ser menor. O método apresenta o menor tempo computacional na análise considerando  $\Delta t = 10$  s e  $\kappa = 1 \cdot 10^{-4}$  mm<sup>4</sup>/Ns.
4. Como já mencionado nas discussões de resultados do caso de compressão confinada, o esquema *fixed-strain* é capaz de resolver os mesmos problemas do algoritmo *drained*. Entretanto, o tempo computacional despendido é muito superior. Estes resultados indicam que o esquema *fixed-strain* não é adequado para a solução de ambos os problemas confinado e livre.
5. Observando as Figs. 15 a), c), e), pode-se verificar que a convergência do esquema monolítico depende diretamente do incremento de tempo. Para o maior incremento de tempo ( $\Delta t = 10$  s), o algoritmo monolítico apresenta falta de convergência. Isto se decorre das limitações do algoritmo de solução não linear utilizado, que neste caso é o método de Newton-Raphson completo. Este problema pode ser solucionado através de uma estratégia de *line-search/backtracking*, de modo a ampliar o raio de convergência do algoritmo. Para os casos de menor permeabilidade (maior força de acoplamento) e menor incremento de tempo, o método apresenta convergência e, de modo geral, é o mais eficiente. É importante observar que, no caso de compressão confinada, apenas o método monolítico foi capaz de resolver os problemas com menor permeabilidade. Já aqui, os esquemas *fixed-stress* e *undrained* apresentaram convergência para toda a faixa de permeabilidades estudada.

Figura 15 – Comparação do tempo de processamento (CPU) normalizado entre os métodos sequenciais (*drained*, *undrained*, *fixed-stress* e *fixed-strain*) e o método monolítico e número total de iterações estagiadas de cada método sequencial no caso de compressão livre. Denotam-se por interrompidas as análises que sofreram falta de convergência.



Fonte: Elaborada pelo autor.



## 7 Considerações finais e perspectivas futuras

### 7.1 Considerações finais

Neste trabalho foram apresentadas formulações para os principais métodos de solução de problemas acoplados encontrados na literatura de meios porosos bifásicos em regime de grandes deformações. A performance dos esquemas monolítico e sequenciais (*drained*, *undrained*, *fixed-strain* e *fixed-stress*) para resolver problemas de poroviscoelasticidade não linear no contexto de tecidos biológicos moles (onde os microconstituintes são incompressíveis) foi avaliada e discutida. Todos os algoritmos se mostraram capazes de obter a resposta totalmente acoplada (*fully-coupled*) característica do esquema monolítico.

Apesar destes algoritmos serem bem estabelecidos na literatura de meios porosos em pequenas deformações, extensões considerando cinemática finita ainda são recentes. Como alternativa ao método proposto por Kim (2018) para formulações baseadas em uma abordagem Lagrangiana total, este trabalho propõe um algoritmo *fixed-stress* (mantendo o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff fixo) computacionalmente viável às formulações baseadas em uma abordagem Lagrangiana atualizada.

De modo a avaliar a performance dos algoritmos, dois estudos numéricos foram realizados: o de compressão confinada e o de compressão livre. Estes dois casos são considerados problemas *benchmark* em mecânica dos tecidos biológicos moles, e se comportam de maneira distinta em termos de acoplamento numérico. Um conjunto de análises foram realizadas com o objetivo de avaliar o papel do parâmetro de permeabilidade na capacidade dos algoritmos de solucionar estes casos de compressão. Os valores admitidos para a constante de permeabilidade estão dentro da faixa de parâmetros encontrada na literatura de tendões, assim como o modelo constitutivo viscoelástico utilizado para o esqueleto sólido (CARNIEL, 2017). O tempo de processamento e o número de iterações estagiadas (exceto o esquema monolítico) necessários para solucionar cada caso são apresentados de modo a comparar a capacidade dos esquemas de solução.

No caso de compressão confinada, o esquema de solução monolítico demonstrou ser o mais viável, já que obteve convergência em todas as análises estudadas. Em relação aos esquemas iterativos, enquanto o algoritmo *undrained* apresentou a melhor performance (nas análises em que obteve convergência), o *fixed-stress* mostrou ser cada vez mais computacionalmente custoso conforme a constante de permeabilidade é reduzida. Além disto, o algoritmo exibiu falta de convergência para as análises com a menor das permeabilidades.

No caso de compressão livre, os algoritmos *undrained* e *fixed-stress* apresentaram convergência para todas as análises. Por outro lado, o método monolítico exibiu problemas

de convergência<sup>1</sup> para o caso de menor permeabilidade com  $\Delta t = 10 s$ . Este resultado está de acordo com o observado por Gee e Gracie (2021), onde é concluído que os esquemas monolíticos requerem intervalos de tempo suficientemente pequenos para obter convergência.

Os resultados apresentados estão alinhados com aqueles obtidos por Kim, Tchelepi e Juanes (2011a) para cinemática infinitesimal: os algoritmos *drained* e *fixed-strain* não são as melhores escolhas para solucionar problemas de poromecânica apresentando forças de acoplamento altas e/ou modelos constitutivos não-lineares.

Assim, conclui-se que, como indicado por Yi e Bean (2016), não existe um esquema ótimo para abordar problemas acoplados desta natureza, mas sim um esquema que seja adequado a cada caso. Os métodos sequenciais aparentam ter um desempenho melhor do que o monolítico para análises com pequenas forças de acoplamento. Entretanto, conforme a força de acoplamento aumenta, estes esquemas podem apresentar falta de convergência. Assim, em contraste com o que é geralmente recomendado nos trabalhos de geomecânica, os esquemas sequenciais iterativamente acoplados nem sempre são adequados aos tipos de problemas encontrados em biomecânica. Consequentemente, o método monolítico surge como uma escolha mais confiável quando a força de acoplamento do sistema não é conhecida *a priori*.

Observou-se que o algoritmo monolítico levou tempos de solução viáveis, e até consideravelmente melhores do que os algoritmos sequenciais. Isto mostra que o trabalho se encontra dentro de uma faixa de aplicação onde o número de graus de liberdade é tal que a utilização de métodos diretos para a solução dos sistemas de equações lineares é plausível. Uma alternativa está na utilização de *solvers* iterativos pré-condicionados baseados em subespaços de Krylov (WHITE; CASTELLETTO; TCHELEPI, 2016) para a solução dos sistemas lineares e/ou técnicas de *line search* para aumentar o raio de convergência do método de Newton-Raphson completo utilizado nas análises (WHITE et al., 2019). Estas opções certamente levariam o algoritmo monolítico a um desempenho numérico ainda melhor.

## 7.2 Sugestões para trabalhos futuros

De modo a dar continuidade ao estudo realizado neste trabalho e delinear extensões acerca das limitações vistas nos resultados obtidos, é importante destacar alguns pontos que podem ser melhor explorados em trabalhos futuros. Dentre eles, pode-se mencionar as seguintes contribuições:

- A proposta de um algoritmo *fixed-stress* tratando de fixar o primeiro tensor de tensão

<sup>1</sup> Neste caso em particular, o autor verificou que a implementação de um Newton-Raphson com *line search* é suficiente para que o algoritmo obtenha convergência numérica.



de Piola-Kirchhoff no contexto de elementos finitos com uma formulação Lagrangiana atualizada.

- A extensão do modelo bifásico para um modelo trifásico (incluindo uma fase de íons, de modo a considerar o fenômeno de inchaço), avaliando qual dos esquemas de solução é mais viável computacionalmente.
- A utilização de elementos finitos mistos com mesma ordem de interpolação para os campos de pressão de poro e deslocamento, dado que estudos mostram que algoritmos sequenciais não necessitam de classes de elementos finitos que satisfaçam a condição *inf-sup*. Este estudo traria vantagens adicionais aos algoritmos sequenciais (HUANG; WU; ZIENKIEWICZ, 2001; MARKERT; HEIDER; EHLERS, 2010).
- O estudo da viabilidade dos algoritmos de solução acoplada quando inclusos modelos de permeabilidade não-linear (*e.g.* Holmes-Mow, exponencial, e outros).
- A comparação dos esquemas utilizando solvers lineares iterativos baseados em subespaços de Krylov (WHITE; CASTELLETTO; TCHELEPI, 2016).
- A utilização de esquemas sequenciais em problemas multiescala, onde a implementação de condições de contorno apresentaria vantagens pelo tratamento segregado das equações governantes.



## Referências

- ALMEIDA, E. S.; SPILKER, R. L. Three-dimensional mixed-penalty finite element for a biphasic continuum under finite deformation. In: *American Society of Mechanical Engineers, Bioengineering Division*. [S.l.: s.n.], 1993. v. 26, p. 19–22. Citado na página 42.
- ALMEIDA, E. S.; SPILKER, R. L. Mixed and Penalty Finite Element Models for the Nonlinear Behavior of Biphasic Soft Tissues in Finite Deformation: Part I - Alternate Formulations. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, v. 1, n. 1, p. 25–46, 1997. ISSN 1025-5842. Citado na página 34.
- ALMEIDA, E. S.; SPILKER, R. L. Mixed and Penalty Finite Element Models for the Nonlinear Behavior of Biphasic Soft Tissues in Finite Deformation: Part II - Nonlinear Examples. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, v. 1, n. 2, p. 151–170, 1997. ISSN 1025-5842. Citado na página 34.
- ANAND, L.; GOVINDJEE, S. *Continuum Mechanics of Solids*. [S.l.]: Oxford University Press, 2020. (Oxford Graduate Texts). ISBN 9780198864721. Citado na página 54.
- ARMERO, F. Formulation and finite element implementation of a multiplicative model of coupled poro-plasticity at finite strains under fully saturated conditions. Elsevier BV, v. 171, n. 3-4, p. 205–241, abr. 1999. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(98\)00211-4](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(98)00211-4)>. Citado 4 vezes nas páginas 36, 43, 44 e 59.
- ARMERO, F.; SIMO, J. C. A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems. Wiley, v. 35, n. 4, p. 737–766, set. 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.1620350408>>. Citado na página 44.
- ATESHIAN, G. A.; WEISS, J. A. Anisotropic Hydraulic Permeability Under Finite Deformation. *Journal of Biomechanical Engineering*, v. 132, n. 11, 10 2010. ISSN 0148-0731. 111004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4002588>>. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 75.
- BATHE, K.-J. The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods. *Computers & Structures*, v. 79, n. 2, p. 243–252, 2001. ISSN 0045-7949. Citado na página 68.
- BELYTSCHKO, T. et al. Finite element stress analysis of an intervertebral disc. *Journal of Biomechanics*, v. 7, n. 3, p. 277–285, may 1974. ISSN 00219290. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, v. 12, n. 2, p. 155–164, 1941. Citado na página 39.
- BIOT, M. A.; TEMPLE, G. Theory of finite deformations of porous solids. *Indiana University Mathematics Journal*, Indiana University Mathematics Department, v. 21, n. 7, p. 597–620, sep 1972. ISSN 00222518, 19435258. Citado na página 39.
- BOLLHÖFER, M. et al. State-of-the-art sparse direct solvers. Springer International Publishing, Cham, p. 3–33, 2020. Citado na página 91.

- BONET, J.; WOOD, R. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, 2008. ISBN 9781139467544. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=V5ZflrVeeEsC>>. Citado na página 94.
- BOSCHETTI, F. et al. Biomechanical properties of human articular cartilage under compressive loads. *Biorheology*, IOS Press, v. 41, n. 3-4, p. 159–166, 2004. Citado na página 35.
- BOWLES, R. D.; SETTON, L. A. Biomaterials for intervertebral disc regeneration and repair. *Biomaterials*, v. 129, p. 54–67, jun 2017. ISSN 1878-5905 (Electronic). Citado na página 34.
- CARNIEL, T. A. *Investigações numéricas multiescala do comportamento viscoelástico de tecidos tendinosos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 93, 94 e 109.
- COUSSY, O. *Poromechanics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/0470092718>>. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 82.
- DEAN, R. H. et al. A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics. *Society of Petroleum Engineers (SPE)*, v. 11, n. 01, p. 132–140, mar. 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.2118/79709-pa>>. Citado na página 44.
- DISILVESTRO, M. R.; SUH, J.-K. F. A cross-validation of the biphasic poroviscoelastic model of articular cartilage in unconfined compression, indentation, and confined compression. *Journal of biomechanics*, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 519–525, 2001. Citado na página 35.
- FELIPPA, C.; PARK, K. Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems: Formulation. Elsevier BV, v. 24, n. 1, p. 61–111, out. 1980. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(80\)90040-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(80)90040-7)>. Citado na página 44.
- FICK, A. Ueber diffusion. *Annalen der Physik*, v. 170, n. 1, p. 59–86, 1855. Citado na página 39.
- FRIJNS, A. J. H.; HUYGHE, J. M.; JANSSEN, J. D. A validation of the quadriphasic mixture theory for intervertebral disc tissue. *International Journal of Engineering Science*, v. 35, n. 15, p. 1419–1429, 1997. ISSN 0020-7225. Citado na página 43.
- GEE, B.; GRACIE, R. Comparison of fully-coupled and sequential solution methodologies for enhanced geothermal systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 373, p. 113554, 2021. Citado na página 110.
- GUO, L.-X.; LI, R.; ZHANG, M. Biomechanical and fluid flowing characteristics of intervertebral disc of lumbar spine predicted by poroelastic finite element method. *Acta of bioengineering and biomechanics*, v. 18, n. 2, 2016. Citado na página 35.
- GURTIN, M.; FRIED, E.; ANAND, L. *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9781139482158. Citado na página 55.
- HANAFY, S.; HAGREY, S. A. al. GPR tomography for mapping soil moisture and roots. In: . European Association of Geoscientists & Engineers, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.3997/2214-4609.201406151>>. Citado na página 44.

HAYES, W. C.; MOCKROS, L. F. Viscoelastic properties of human articular cartilage. *Journal of applied physiology*, v. 31, n. 4, p. 562–568, 1971. ISSN 00218987. Citado na página 40.

HOLMES, M.; MOW, V. C. The nonlinear characteristics of soft gels and hydrated connective tissues in ultrafiltration. *Journal of biomechanics*, Elsevier, v. 23, n. 11, p. 1145–1156, 1990. Citado na página 35.

HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. [S.l.]: Wiley, 2000. ISBN 9780471823193. Citado 3 vezes nas páginas 51, 54 e 57.

HUANG, M.; WU, S.; ZIENKIEWICZ, O. Incompressible or nearly incompressible soil dynamic behaviour—a new staggered algorithm to circumvent restrictions of mixed formulation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 21, n. 2, p. 169–179, 2001. ISSN 0267-7261. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0267726100001056>>. Citado na página 111.

JOHANNESSEN, W.; ELLIOTT, D. M. Effects of degeneration on the biphasic material properties of human nucleus pulposus in confined compression. *Spine*, LWW, v. 30, n. 24, p. E724–E729, 2005. Citado na página 35.

KHAYYERI, H. et al. Comparison of structural anisotropic soft tissue models for simulating achilles tendon tensile behaviour. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, Elsevier, v. 61, p. 431–443, 2016. Citado na página 35.

KIM, J. A new numerically stable sequential algorithm for coupled finite-strain elastoplastic geomechanics and flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 335, p. 538–562, 2018. ISSN 0045-7825. Citado 4 vezes nas páginas 36, 45, 85 e 109.

KIM, J.; TCHELEPI, H. A.; JUANES, R. Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics. *SPE Journal*, OnePetro, v. 16, n. 02, p. 249–262, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 36, 44, 95 e 110.

KIM, J.; TCHELEPI, H. A.; JUANES, R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Drained and undrained splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 200, n. 23-24, p. 2094–2116, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 44.

KIM, J.; TCHELEPI, H. A.; JUANES, R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Fixed-stress and fixed-strain splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 200, n. 13-16, p. 1591–1606, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 44.

KLAHR, B. et al. Cell mechanics: Are poroviscoelastic parameters reliable? Elsevier BV, v. 118, p. 103793, dez. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2021.103793>>. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 99.

KLISCH, S. M.; LOTZ, J. C. A special theory of biphasic mixtures and experimental results for human annulus fibrosus tested in confined compression. *Journal of biomechanical engineering*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 122, n. 2, p. 180–188, 2000. Citado na página 35.

- LAI, W. M.; HOU, J. S.; MOW, V. C. A triphasic theory for the swelling properties of hydrated charged soft biological tissues. In: RATCLIFFE, A.; WOO, S. L.-Y.; MOW, V. C. (Ed.). New York, NY: Springer New York, 1990. p. 283–312. ISBN 978-1-4612-3448-7. Citado na página 43.
- LAI, W. M.; MOW, V. C.; ROTH, V. Effects of non-linear strain-dependent permeability and rate of compression on the stress behavior of articular-cartilage. *Journal of biomechanical engineering-transactions of the ASME*, v. 103, n. 2, p. 61–66, 1981. ISSN 0148-0731. Citado na página 41.
- LANIR, Y. Biorheology and fluid flux in swelling tissues. I. Bicomponent theory for small deformations, including concentration effects. *Biorheology*, v. 24, n. 2, p. 173–187, 1987. ISSN 0006-355X (Print). Citado na página 41.
- LANIR, Y. Biorheology and fluid flux in swelling tissues, II. Analysis of unconfined compressive response of transversely isotropic cartilage disc. *Biorheology*, v. 24, n. 2, p. 189–205, 1987. ISSN 0006-355X (Print). Citado na página 41.
- LAVAGNINO, M. et al. A finite element model predicts the mechanotransduction response of tendon cells to cyclic tensile loading. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, Springer, v. 7, n. 5, p. 405–416, 2008. Citado na página 35.
- LEE, E. H. Elastic-plastic deformation at finite strains. 1969. Citado na página 93.
- LENG, Y.; LUCIO, M. de; GOMEZ, H. Using poro-elasticity to model the large deformation of tissue during subcutaneous injection. Elsevier BV, v. 384, p. 113919, out. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113919>>. Citado na página 45.
- LEVENSTON, M. E.; FRANK, E. H.; GRODZINSKY, A. J. Variationally derived 3-field finite element formulations for quasistatic poroelastic analysis of hydrated biological tissues. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 156, n. 1-4, p. 231–246, 1998. ISSN 00457825. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 59.
- LI, G.; WANG, K. Stabilized low-order explicit finite element formulations for the coupled hydro-mechanical analysis of saturated poroelastic media. *Transport in Porous Media*, Springer, v. 124, n. 3, p. 1035–1059, 2018. Citado na página 36.
- LI, X.; LIU, Z.; LEWIS, R. Mixed finite element method for coupled thermo-hydro-mechanical process in poro-elasto-plastic media at large strains. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 64, n. 5, p. 667–708, 2005. Citado na página 36.
- LOON, R. van et al. 3D FE implementation of an incompressible quadriphasic mixture model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 57, n. 9, p. 1243–1258, 2003. Citado na página 43.
- MAK, A. F. The apparent viscoelastic behavior of articular cartilage—the contributions from the intrinsic matrix viscoelasticity and interstitial fluid flows. *Journal of biomechanical engineering*, v. 108, n. 2, p. 123–130, may 1986. ISSN 0148-0731 (Print). Citado 3 vezes nas páginas 34, 41 e 43.

- MAK, A. F. Unconfined compression of hydrated viscoelastic tissues: A biphasic poroviscoelastic analysis. *Biorheology*, v. 23, n. 4, p. 371–383, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 34, 41 e 43.
- MALANDRINO, A.; MOEENDARBARY, E. Poroelasticity of living tissues. In: . Elsevier, 2019. p. 238–245. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/b978-0-12-801238-3.99932-x>>. Citado na página 34.
- MARKERT, B.; HEIDER, Y.; EHLERS, W. Comparison of monolithic and splitting solution schemes for dynamic porous media problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 82, n. 11, p. 1341–1383, 2010. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2789>>. Citado na página 111.
- MESCHER, A. L. *Junqueira's Basic Histology: Text & Atlas*. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2018. 562 p. ISBN 978-1-260-02617-7. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- MIKELIĆ, A.; WHEELER, M. F. Convergence of iterative coupling for coupled flow and geomechanics. *Computational Geosciences*, Springer, v. 17, n. 3, p. 455–461, 2013. Citado na página 36.
- MOW, V. C.; HOLMES, M. H.; LAI, W. M. Energy dissipation in articular cartilage in finite deformation. In: *Advances in Bioengineering*. [S.l.: s.n.], 1986. p. 160–161. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 62.
- MOW, V. C. et al. Biphasic creep and stress-relaxation of articular-cartilage in compression - Theory and experiments. *Journal of biomechanical engineering-transactions of the ASME*, v. 102, n. 1, p. 73–84, 1980. ISSN 0148-0731. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 59.
- MURAD, M. A.; LOULA, A. F. D. On stability and convergence of finite element approximations of biot's consolidation problem. Wiley, v. 37, n. 4, p. 645–667, fev. 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.1620370407>>. Citado na página 44.
- MYERS, E. R.; LAI, W. M.; MOW, V. C. A continuum theory and an experiment for the ion-induced swelling behavior of articular cartilage. *Journal of biomechanical engineering*, v. 106, n. 2, p. 151–158, may 1984. ISSN 0148-0731 (Print). Citado na página 41.
- NETO, E. A. de S.; PERIC, D.; OWEN, D. R. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 55.
- NUSSBAUM, J. H.; GRODZINSKY, A. J. Proton diffusion reaction in a protein polyelectrolyte membrane and the kinetics of electromechanical forces. *Journal of Membrane Science*, v. 8, n. 2, p. 193–219, 1981. ISSN 03767388. Citado na página 41.
- OFTADEH, R. et al. Biological connective tissues exhibit viscoelastic and poroelastic behavior at different frequency regimes: application to tendon and skin biophysics. *Acta biomaterialia*, Elsevier, v. 70, p. 249–259, 2018. Citado na página 35.
- OOMENS, C. W. J. *A mixture approach to the mechanics of skin and subcutis : a contribution to pressure sore research*. Tese (Doutorado) — University of Twente, 1985. Citado na página 41.



- ORTIZ, M.; STAINIER, L. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 7825, n. 98, p. 419–444, 1999. Citado na página 56.
- PREVOST, J. H. Partitioned solution procedure for simultaneous integration of coupled-field problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 13, n. 4, p. 239–247, 1997. Citado na página 44.
- REVERÓN, M. A. B. et al. Iterative solvers for biot model under small and large deformations. *Computational Geosciences*, Springer, p. 1–13, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 45.
- SAMIER, P.; ONAISI, A.; GENNARO, S. de. A practical iterative scheme for coupling geomechanics with reservoir simulation. Society of Petroleum Engineers (SPE), v. 11, n. 05, p. 892–901, out. 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.2118/107077-pa>>. Citado na página 44.
- SCHIFFMAN, R. L.; CHEN, A. T.-F.; JORDAN, J. C. An analysis of consolidation theories. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, v. 95, n. 1, p. 285–312, 1969. Citado na página 39.
- SETTARI, A.; MOURITS, F. A coupled reservoir and geomechanical simulation system. Society of Petroleum Engineers (SPE), v. 3, n. 03, p. 219–226, set. 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.2118/50939-pa>>. Citado na página 44.
- SETTARI, A.; WALTERS, D. A. Advances in Coupled Geomechanical and Reservoir Modeling With Applications to Reservoir Compaction. *SPE Journal*, v. 6, n. 03, p. 334–342, 09 2001. ISSN 1086-055X. Disponível em: <<https://doi.org/10.2118/74142-PA>>. Citado na página 44.
- SIMON, B. R.; GABALLA, M. A. Finite strain, poroelastic finite element models for large arterial cross sections. In: *American Society of Mechanical Engineers, Bioengineering Division*. [S.l.: s.n.], 1988. v. 9, p. 325–333. Citado na página 42.
- SIMON, B. R. et al. Large deformation analysis of the arterial cross section. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, v. 93, n. 2, p. 138–145, 1971. ISSN 0021-9223. Citado na página 40.
- SIMON, B. R. et al. Poroelastic dynamic structural models of rhesus spinal motion segments. *Spine*, v. 10, n. 6, 1985. ISSN 0362-2436. Citado na página 41.
- SIMON, B. R. et al. Structural models for human spinal motion segments based on a poroelastic view of the intervertebral disk. *Journal of Biomechanical Engineering*, v. 107, n. 4, p. 327–335, 1985. Citado na página 41.
- SLATTERY, J. C. *Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua*. [S.l.]: Krieger Publishing Company, 1978. ISBN 9780882756103. Citado na página 40.
- SOCIEDADE BRASILEIRA DE CARDIOLOGIA. *Cardiômetro*. 2020. Disponível em: <<http://www.cardiometro.com.br/>>. Citado na página 34.
- SPIPKER, R. L.; MAXIAN, T. A. A mixed-penalty finite-element formulation of the linear biphasic theory for soft-tissues. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 30, n. 5, p. 1063–1082, 1990. ISSN 0029-5981. Citado na página 42.



SPIPKER, R. L.; SUH, J.-K. Formulation and evaluation of a finite element model for the biphasic model of hydrated soft tissues. *Computers and Structures*, v. 35, n. 4, p. 425–439, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 59.

SPIPKER, R. L.; SUH, J.-K.; MOW, V. C. Finite element formulation of the nonlinear biphasic model for articular cartilage and hydrated soft tissues including strain-dependent permeability. In: *American Society of Mechanical Engineers, Bioengineering Division (Publication) BED*. [S.l.: s.n.], 1988. v. 9, p. 81–92. Citado na página 42.

STEFAN, J. Über das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen. *Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien, 2te Abteilung*, v. 63, p. 63–124, 1871. Citado na página 39.

SUH, J.-K.; BAI, S. Finite element formulation of biphasic poroviscoelastic model for articular cartilage. *Journal of Biomechanical Engineering*, v. 120, n. 2, p. 195–201, apr 1998. ISSN 0148-0731. Citado na página 43.

SUH, J.-K.; DISILVESTRO, M. R. Biphasic poroviscoelastic behavior of hydrated biological soft tissue. *Journal of Applied Mechanics*, v. 66, n. 2, p. 528–535, jun 1999. ISSN 0021-8936. Citado na página 43.

SUH, J. K.; SPIPKER, R. L.; HOLMES, M. H. A penalty finite-element analysis for nonlinear mechanics of biphasic hydrated soft-tissue under large deformation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 32, n. 7, p. 1411–1439, nov 1991. ISSN 0029-5981. Citado na página 42.

SUKIRMAN, Y.; LEWIS, R. W. A finite element solution of a fully coupled implicit formulation for reservoir simulation. Wiley, v. 17, n. 10, p. 677–698, out. 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nag.1610171002>>. Citado na página 44.

SUN, D. N. et al. A mixed finite element formulation of triphasic mechano-electrochemical theory for charged, hydrated biological soft tissues. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, v. 45, n. 10, p. 1375–1402, 1999. ISSN 0029-5981. Citado na página 43.

TANSKA, P. et al. A multiscale framework for evaluating three-dimensional cell mechanics in fibril-reinforced poroelastic tissues with anatomical cell distribution—analysis of chondrocyte deformation behavior in mechanically loaded articular cartilage. *Journal of Biomechanics*, Elsevier, v. 101, p. 109648, 2020. Citado na página 35.

TCHONKOVA, M.; PETERS, J.; STURE, S. A new mixed finite element method for poro-elasticity. Wiley, v. 32, n. 6, p. 579–606, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nag.630>>. Citado na página 44.

TERZAGHI, K. Die Berechnung der Durchlässigkeitszifferdes tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungerscheinungen. *Akademie der Wissenschaften in Wien*, p. 125–138, 1923. Citado na página 39.

TRUESDELL, C.; TOUPIN, R. The classical field theories. In: \_\_\_\_\_. *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1960. p. 226–858. ISBN 978-3-642-45943-6. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

- ÜN, M. K.; ÇALIK, A. Estimation of depth-dependent material properties of biphasic soft tissues through finite element optimization and sensitivity analysis. *Medical engineering & physics*, Elsevier, v. 74, p. 73–81, 2019. Citado na página 35.
- VERMILYEA, M. E.; SPILKER, R. L. A hybrid finite element formulation of the linear biphasic equations for hydrated soft tissue. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 33, n. 3, p. 567–593, 1992. Citado na página 42.
- VERMILYEA, M. E.; SPILKER, R. L. Hybrid and mixed-penalty finite elements for 3-D analysis of soft hydrated tissue. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 36, n. 24, p. 4223–4243, 1993. Citado na página 42.
- WAN, J. et al. Stabilized finite element methods for coupled geomechanics - reservoir flow simulations. In: . SPE, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.2118/79694-ms>>. Citado na página 44.
- WHEELER, M. F.; GAI, X. Iteratively coupled mixed and galerkin finite element methods for poro-elasticity. Wiley, v. 23, n. 4, p. 785–797, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/num.20258>>. Citado na página 44.
- WHITAKER, S. Advances in theory of fluid motion in porous media. *Industrial & Engineering Chemistry*, v. 61, n. 12, p. 14–28, 1969. Citado na página 40.
- WHITE, J. A. et al. A two-stage preconditioner for multiphase poromechanics in reservoir simulation. Elsevier BV, v. 357, p. 112575, dez. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112575>>. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 110.
- WHITE, J. A.; CASTELLETTI, N.; TCHELEPI, H. A. Block-partitioned solvers for coupled poromechanics: A unified framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 303, p. 55–74, 2016. ISSN 0045-7825. Citado 3 vezes nas páginas 95, 110 e 111.
- WILSON, W. et al. A fibril-reinforced poroviscoelastic swelling model for articular cartilage. *Journal of Biomechanics*, v. 38, n. 6, p. 1195–1204, 2005. ISSN 00219290. Citado na página 43.
- YI, S.-Y.; BEAN, M. L. Iteratively coupled solution strategies for a four-field mixed finite element method for poroelasticity. Wiley, v. 41, n. 2, p. 159–179, jul. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nag.2538>>. Citado na página 110.
- YI, S.-Y.; BEAN, M. L. Iteratively coupled solution strategies for a four-field mixed finite element method for poroelasticity. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Wiley Online Library, v. 41, n. 2, p. 159–179, 2017. Citado na página 36.
- YIN, L.; ELLIOTT, D. M. A biphasic and transversely isotropic mechanical model for tendon:: application to mouse tail fascicles in uniaxial tension. *Journal of biomechanics*, Elsevier, v. 37, n. 6, p. 907–916, 2004. Citado na página 35.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; PAUL, D. K.; CHAN, A. H. C. Unconditionally stable staggered solution procedure for soil-pore fluid interaction problems. Wiley, v. 26, n. 5, p. 1039–1055, maio 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.1620260504>>. Citado na página 44.

---

ZIENKIEWICZ, O. C.; SHIOMI, T. Dynamic behaviour of saturated porous media; The generalized Biot formulation and its numerical solution. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 8, n. 1, p. 71–96, 1984. Citado na página [43](#).



# Apêndices



## APÊNDICE A – Produtos tensoriais

Neste apêndice, pretende-se apresentar de forma sucinta alguns dos produtos tensoriais que estão presentes no corpo principal do texto. De modo a generalizar as equações, denota-se por  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  os vetores (tensores de primeira ordem) e por  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  os tensores de segunda ordem. Ao escrever estas entidades em seus respectivos formatos indiciais, considera-se que as bases em que são escritos os tensores são sempre ortonormais.

$$(\cdot) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} a_i b_i$$

$$(\cdot) \quad \mathbf{A} : \mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ij} B_{ij}$$

$$\otimes \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_i b_j; \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ij} B_{kl}$$

$$\oplus \quad (\mathbf{A} \oplus \mathbf{B})_{ijkl} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ik} B_{jl}$$

$$\odot \quad (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})_{ijkl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (A_{ik} B_{jl} + A_{il} B_{jk})$$





# APÊNDICE B – Derivação das equações fundamentais

A derivação das equações integrais obtidas em (4.33) é feita ao considerar a condição de que a ponderação da função resíduo  $R = \text{div } \boldsymbol{\sigma}$  com um conjunto de variações virtuais cinematicamente admissíveis  $\delta \mathbf{u}$  é nula,

$$\int_{\Omega_t} \text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV_t = 0. \quad (\text{B.1})$$

Seguindo a dedução, é estabelecida a relação tensorial (análoga a uma regra da cadeia de funções),

$$\text{div } (\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) = \text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \text{grad } \delta \mathbf{u}, \quad (\text{B.2})$$

permitindo reescrever a Eq. (B.1) em formato expandido:

$$\int_{\Omega_t} \text{div } (\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \text{grad } \delta \mathbf{u} \, dV_t = 0. \quad (\text{B.3})$$

Neste ponto, faz-se necessário demonstrar a relação entre o gradiente da variação de  $\mathbf{u}$  e a variação do tensor de deformação de Euler-Almansi. Para isto, demonstra-se a obtenção da variação do gradiente de deformação  $\delta \mathbf{F}$  através do conceito de derivada direcional,

$$\delta \mathbf{F}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = D_{\delta \mathbf{u}} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad (\text{B.4})$$

$$= \left. \frac{d \mathbf{F}(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (\text{B.5})$$

$$= \left. \frac{d}{d\varepsilon} [\mathbf{F}(\mathbf{u}) + \varepsilon \delta(\mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u})] \right|_{\varepsilon=0} \quad (\text{B.6})$$

$$= \delta \text{Grad } \mathbf{u} = \text{Grad } \delta \mathbf{u}. \quad (\text{B.7})$$

Com isto, é possível desenvolver uma expressão para  $\delta \mathbf{e}$  em termos da variação da variável primal  $\mathbf{u}$ :

$$\delta \mathbf{e}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \mathcal{X}_* (D_{\delta \mathbf{u}} \mathbf{E}) \quad (\text{B.8})$$

$$= \mathbf{F}^{-T} (D_{\delta \mathbf{u}} \mathbf{E}) \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{B.9})$$

$$= \mathbf{F}^{-T} (\delta \mathbf{E}) \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-T} (\delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-T} \left( \text{Grad}^T \delta \mathbf{u} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u} \right) \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{B.12})$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-T} \text{Grad}^T \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \text{Grad} \delta \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{B.13})$$

$$= \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}^{-T} \text{Grad}^T \delta \mathbf{u} + \text{Grad} \delta \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \text{Grad} \delta \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} \right)^T + \text{Grad} \delta \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} \right] \quad (\text{B.15})$$

$$= \frac{1}{2} \left( \text{grad}^T \delta \mathbf{u} + \text{grad} \delta \mathbf{u} \right) \quad (\text{B.16})$$

$$= \text{sym}(\text{grad} \delta \mathbf{u}) \quad (\text{B.17})$$

Dado que  $\boldsymbol{\sigma}$  é um tensor de segunda ordem simétrico, pode-se afirmar que é válida a equivalência

$$\boldsymbol{\sigma} : \text{sym}(\text{grad} \mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \mathbf{u}, \quad (\text{B.18})$$

o que possibilita reescrever a Eq. (B.3):

$$\int_{\Omega_t} \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{e} \, dV = 0, \quad (\text{B.19})$$

Utilizando a hipótese de decomposição aditiva do tensor total de Cauchy e aplicando o teorema da divergência, obtém-se a derivação

$$\int_{\partial \Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS_t - \int_{\Omega_t} (\boldsymbol{\sigma}^s - p \mathbf{I}) : \delta \mathbf{e} \, dV_t = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}^s : \delta \mathbf{e} \, dV_t - \int_{\Omega_t} p \, \text{tr} \delta \mathbf{e} \, dV_t - \int_{\partial \Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS_t = 0 \quad (\text{B.21})$$

que resulta no chamado princípio dos trabalhos virtuais para a equação do movimento.

Um procedimento análogo é realizado para a equação de conservação da massa; porém agora considerando a função resíduo  $R = \text{div}(\mathbf{v}^s + \mathbf{w})$  e um conjunto de variações virtuais cinematicamente admissíveis para a pressão de poro  $\delta p$ :

$$0 = \int_{\Omega_t} \text{div}(\mathbf{v}^s + \mathbf{w}) \delta p \, dV_t \quad (\text{B.22})$$

$$= \int_{\Omega_t} \text{div} \mathbf{v}^s \delta p + \text{div} \mathbf{w} \delta p \, dV_t \quad (\text{B.23})$$

Estabelecendo uma relação tensorial análoga a (B.2), dada por

$$\text{div}(\delta p \mathbf{w}) = \text{grad} \delta p \cdot \mathbf{w} + \delta p \, \text{div} \mathbf{w}, \quad (\text{B.24})$$

pode-se obter a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega_t} \text{div} \mathbf{v}^s \delta p + \text{div}(\delta p \mathbf{w}) - \text{grad} \delta p \cdot \mathbf{w} \, dV_t = 0 \quad (\text{B.25})$$

---

Utilizando o teorema da divergência, obtém-se o princípio dos trabalhos virtuais para a equação de conservação de massa:

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{v}^s \delta p \, dV_t - \int_{\Omega_t} \operatorname{grad} \delta p \cdot \mathbf{w} \, dV_t + \int_{\partial\Omega_t} \delta p (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \, dS_t = 0. \quad (\text{B.26})$$



## APÊNDICE C – Etapa de linearização

Estando o meio bifásico em equilíbrio *quasi*-estático, a igualdade entre o trabalho virtual realizado pelas forças externas e internas deve ser satisfeita (Princípio dos Trabalhos Virtuais) em todo intervalo de tempo  $t$ . Entretanto, as não linearidades explícitas nas Eqs. (B.21) e (B.26) tornam necessária a adoção de um procedimento de obtenção de raízes de equações não lineares (neste caso, o Método de Newton-Raphson). Pela natureza acoplada do sistema de equações sólido-fluido, as opções de solução baseadas em estratégias monolíticas ou estagiadas surgem como alternativa. Nas monolíticas, ambas as equações são solucionadas ao mesmo tempo, obtendo  $\mathbf{u}$  e  $p$ . Entretanto, é necessário determinar as derivadas direcionais  $\Delta\delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u})$ ,  $\Delta\delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{p}, \Delta p)$ ,  $\Delta\delta W^p(\mathbf{u}, p, \delta p, \Delta p)$  e  $\Delta\delta W^p(\mathbf{u}, p, \delta p, \Delta p)$ .

Neste apêndice, apresenta-se de modo sistemático as etapas de linearização necessárias para o procedimento de Newton-Raphson. Inicialmente, são deduzidas algumas relações variacionais importantes. A primeira delas é a variação do tensor de deformação de Euler-Lagrange  $\delta\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned}
 \delta\mathbf{E}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= D_{\delta\mathbf{u}}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \\
 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon\delta\mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0} \\
 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}^T(\mathbf{u} + \varepsilon\delta\mathbf{u}) \mathbf{F}(\mathbf{u} + \varepsilon\delta\mathbf{u}) + \mathbf{I} \right) \right] \right|_{\varepsilon=0} \\
 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}^T(\mathbf{u})\mathbf{F}(\mathbf{u}) + \varepsilon\mathbf{F}^T(\mathbf{u})\delta\mathbf{F}^T + \varepsilon\delta\mathbf{F}^T\mathbf{F}(\mathbf{u}) + \varepsilon^2\delta\mathbf{F}^T\delta\mathbf{F} + \mathbf{I} \right) \right] \right|_{\varepsilon=0} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}^T\delta\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}^T\mathbf{F} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}^T\delta\mathbf{F} + \left( \mathbf{F}^T\delta\mathbf{F} \right)^T \right) \\
 &= \text{sym} \left( \mathbf{F}^T\delta\mathbf{F} \right) \\
 &= \text{sym} \left( \mathbf{F}^T \text{Grad} \delta\mathbf{u} \right),
 \end{aligned}$$

e a linearização desta variação:

$$\begin{aligned}
 \Delta\delta\mathbf{E}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) &= D_{\Delta\mathbf{u}}\delta\mathbf{E}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \\
 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \delta\mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0} \\
 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \text{sym} \left( \mathbf{F}^T(\mathbf{u} + \varepsilon\Delta\mathbf{u}) \text{Grad} \delta\mathbf{u} \right) \right|_{\varepsilon=0} \\
 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \text{sym} \left[ \left( \mathbf{F}^T(\mathbf{u}) + \varepsilon\Delta\mathbf{F}^T(\mathbf{u}) \right) \text{Grad} \delta\mathbf{u} \right] \right|_{\varepsilon=0} \\
 &= \text{sym} \left( \Delta\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta\mathbf{u} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \text{sym} \left( \text{Grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{Grad} \delta \mathbf{u} \right).$$

Através da operação de *pull-back* em  $\Delta \delta \mathbf{E}$ , pode-se obter a linearização da variação do tensor deformação de Almansi:

$$\begin{aligned} \Delta \delta \mathbf{e}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) &= D_{\Delta \mathbf{u}} \delta \mathbf{e}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{F}^{-T} \left[ \text{sym} \left( \text{Grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{Grad} \delta \mathbf{u} \right) \right] \mathbf{F}^{-1} \\ &= \text{sym} \left( \left( \text{Grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} \right)^T \text{Grad} \delta \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} \right) \\ &= \text{sym} \left( \text{grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{grad} \delta \mathbf{u} \right). \end{aligned}$$

A linearização do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff é obtida através da regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) &= D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) : D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \\ &= \mathbb{C} : \text{sym} \left( \mathbf{F}^T \text{Grad} \Delta \mathbf{u} \right). \end{aligned}$$

Por último, determina-se a linearização do Jacobiano de transformação volumétrica:

$$\begin{aligned} \Delta J(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) &= D_{\Delta \mathbf{u}} J(\mathbf{u}) \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \det(\mathbf{F}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} : \Delta \mathbf{F} \\ &= J \mathbf{F}^{-T} : \text{Grad} \Delta \mathbf{u} \\ &= J \mathbf{I} : \text{Grad} \Delta \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} \\ &= J \mathbf{I} : \text{grad} \Delta \mathbf{u} \\ &= J \text{div} \Delta \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Com todas estas entidades calculadas, é possível determinar a derivada direcional do campo  $\delta W^u$  na direção do vetor  $\Delta \mathbf{u}$  através do seguinte desenvolvimento:

$$\Delta \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = D_{\Delta \mathbf{u}} \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}) \quad (\text{C.1})$$

$$= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \delta W^u(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0} \quad (\text{C.2})$$

$$= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) : \delta \mathbf{e}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) dV_t \right] \right|_{\varepsilon=0} - \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_{\Omega_t} p \operatorname{tr} \delta \mathbf{e}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) dV_t \right] \Big|_{\varepsilon=0} \quad (\text{C.4})$$

$$\Delta \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_{\Omega_0^s} \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})) : \delta \mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) dV_0^s \right] \Big|_{\varepsilon=0} - \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_{\Omega_0^s} J(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) p \mathbf{I} : \delta \mathbf{e}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) dV_0^s \right] \Big|_{\varepsilon=0} \quad (\text{C.6})$$

$$\Delta \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_0^s} \left[ \mathbf{S}^s(\mathbf{E}(\mathbf{u})) : \frac{d}{d\varepsilon} \delta \mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) \Big|_{\varepsilon=0} \right] + \quad (\text{C.7})$$

$$\left[ \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{S}^s(\mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})) \Big|_{\varepsilon=0} : \delta \mathbf{E}(\mathbf{u}) \right] dV_0^s - \quad (\text{C.8})$$

$$\int_{\Omega_0^s} \left[ J(\mathbf{u}) p \mathbf{I} : \frac{d}{d\varepsilon} \delta \mathbf{e}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) \Big|_{\varepsilon=0} \right] - \quad (\text{C.9})$$

$$\left[ \frac{d}{d\varepsilon} p J(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) \mathbf{I} \Big|_{\varepsilon=0} : \delta \mathbf{e}(\mathbf{u}) \right] dV_0^s \quad (\text{C.10})$$

$$\Delta \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_t} J^{-1}(\mathbf{u}) \left[ \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau}^s \mathbf{F}^{-T} : \frac{d}{d\varepsilon} \delta \mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) \Big|_{\varepsilon=0} \right] + \quad (\text{C.11})$$

$$J^{-1}(\mathbf{u}) \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{S}^s(\mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})) \Big|_{\varepsilon=0} : \mathbf{F}^T \delta \mathbf{e} \mathbf{F} \right] dV_t - \quad (\text{C.12})$$

$$\int_{\Omega_0^s} \left[ J(\mathbf{u}) p \mathbf{I} : \operatorname{sym}(\operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u} \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}) \right] - \quad (\text{C.13})$$

$$[p J(\mathbf{u}) \operatorname{div} \Delta \mathbf{u} \mathbf{I} : \operatorname{sym}(\operatorname{grad} \delta \mathbf{u})] dV_0^s \quad (\text{C.14})$$

$$\Delta \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_t} \left[ \boldsymbol{\sigma}^s : \mathbf{F}^{-T} \frac{d}{d\varepsilon} \delta \mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) \Big|_{\varepsilon=0} \mathbf{F}^{-1} \right] + \quad (\text{C.15})$$

$$\left[ J^{-1}(\mathbf{u}) \mathbf{F} \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})) \Big|_{\varepsilon=0} \mathbf{F}^T : \operatorname{sym}(\operatorname{grad} \delta \mathbf{u}) \right] dV_t - \quad (\text{C.16})$$

$$\int_{\Omega_0^s} \left[ J(\mathbf{u}) p \mathbf{I} : \operatorname{sym}(\operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u} \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}) \right] - \quad (\text{C.17})$$

$$[p J \operatorname{div} \Delta \mathbf{u} \mathbf{I} : \operatorname{sym}(\operatorname{grad} \delta \mathbf{u})] dV_0^s \quad (\text{C.18})$$

$$\Delta \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_t} \left[ \boldsymbol{\sigma}^s : \operatorname{sym}(\operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u} \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}) \right] + \quad (\text{C.19})$$

$$[\mathcal{C}^s : \operatorname{grad} \Delta \mathbf{u} : \operatorname{sym}(\operatorname{grad} \delta \mathbf{u})] dV_t - \quad (\text{C.20})$$

$$\int_{\Omega_0^s} [J(\mathbf{u}) p \mathbf{I} : \text{sym}(\text{grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{ grad } \delta \mathbf{u})] - \quad (\text{C.21})$$

$$[p J(\mathbf{u}) \text{div } \Delta \mathbf{u} \mathbf{I} : \text{sym}(\text{grad } \delta \mathbf{u})] dV_0^s \quad (\text{C.22})$$

$$\Delta \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_t} [\boldsymbol{\sigma}^s : \text{grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{ grad } \delta \mathbf{u}] + \quad (\text{C.23})$$

$$[\text{grad } \delta \mathbf{u} : \mathcal{C}^s : \text{grad } \Delta \mathbf{u}] dV_t - \quad (\text{C.24})$$

$$\int_{\Omega_0^s} [J(\mathbf{u}) p \mathbf{I} : \text{grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{ grad } \delta \mathbf{u}] - \quad (\text{C.25})$$

$$[p J(\mathbf{u}) \text{div } \Delta \mathbf{u} \text{ div } \delta \mathbf{u}] dV_0^s \quad (\text{C.26})$$

$$\Delta \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_t} [\boldsymbol{\sigma}^s : \text{grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{ grad } \delta \mathbf{u}] + \quad (\text{C.27})$$

$$[\text{grad } \delta \mathbf{u} : \mathcal{C}^s : \text{grad } \Delta \mathbf{u}] dV_t - \quad (\text{C.28})$$

$$\int_{\Omega_t} [p \mathbf{I} : \text{grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{ grad } \delta \mathbf{u}] - \quad (\text{C.29})$$

$$[p \text{div } \Delta \mathbf{u} \text{ div } \delta \mathbf{u}] dV_t. \quad (\text{C.30})$$

Por fim, pode-se obter a expressão final contida no corpo do texto:

$$\begin{aligned} \Delta \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{e} : \mathcal{C}^s : \Delta \mathbf{e} dV_t \\ &+ \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}^s : [\text{grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{ grad } \delta \mathbf{u}] dV_t \\ &- \int_{\Omega_t} p \mathbf{I} : [\text{grad}^T \Delta \mathbf{u} \text{ grad } \delta \mathbf{u}] dV_t \\ &- \int_{\Omega_t} p \text{div } \delta \mathbf{u} \text{ div } \Delta \mathbf{u} dV_t. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

A derivada direcional do campo  $\delta W^u$  na direção do vetor  $\Delta p$  é dada através de:

$$\Delta \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}, \Delta p) = D_{\Delta p} \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}) \quad (\text{C.32})$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \delta W^u(\mathbf{u}, p + \varepsilon \Delta p, \delta \mathbf{u}) \Big|_{\varepsilon=0} \quad (\text{C.33})$$

$$= -\frac{d}{d\varepsilon} \left( \int_{\Omega_t} p(p + \varepsilon \Delta p) \text{tr } \delta \mathbf{e} dV_t \right) \Big|_{\varepsilon=0} \quad (\text{C.34})$$

$$= -\int_{\Omega_t} \frac{d}{d\varepsilon} p(p + \varepsilon \Delta p) \Big|_{\varepsilon=0} \text{tr } \delta \mathbf{e} dV_t \quad (\text{C.35})$$

$$= -\int_{\Omega_t} \Delta p \text{tr } \delta \mathbf{e} dV_t. \quad (\text{C.36})$$



O desenvolvimento da derivada direcional do campo  $\delta W^p$  na direção do vetor  $\Delta \mathbf{u}$  segue os passos

$$\Delta \delta W^p(\mathbf{u}, p, \delta p, \Delta \mathbf{u}) = D_{\Delta \mathbf{u}} \delta W^p(\mathbf{u}, p, \delta p) \quad (\text{C.37})$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \delta W^p(\mathbf{u}, p + \varepsilon \Delta p, \delta p) \Big|_{\varepsilon=0} \quad (\text{C.38})$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_{\Omega_t} \left( \mathbf{w} \cdot \text{grad } \delta p - \delta p \frac{J}{J} \right) dV_t \right] \Big|_{\varepsilon=0} \quad (\text{C.39})$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_{\Omega_0^s} \left( J \mathbf{w} \cdot \mathbf{F}^{-T} \text{Grad } \delta p - \delta p J \right) dV_0^s \right] \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (\text{C.40})$$

Dado que o vetor velocidade relativa de fluido pode ser escrito em sua descrição referencial por

$$\mathbf{W} = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{w}, \quad (\text{C.41})$$

pode-se obter

$$\Delta \delta W^p(\mathbf{u}, p, \delta p, \Delta \mathbf{u}) = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_{\Omega_0^s} \left( \mathbf{W} \cdot \text{Grad } \delta p - \delta p J \right) dV_0^s \right] \Big|_{\varepsilon=0} \quad (\text{C.42})$$

$$= \int_{\Omega_0^s} \left( \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{W}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) \Big|_{\varepsilon=0} \right) \cdot \text{Grad } \delta p + \frac{\delta p}{\Delta t} \frac{d}{d\varepsilon} J(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}, p, \delta p) \Big|_{\varepsilon=0} dV_0^s \quad (\text{C.43})$$

$$= \int_{\Omega_0^s} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{W} : D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \right) \cdot \text{Grad } \delta p + \frac{\delta p}{\Delta t} J \text{div } \Delta \mathbf{u} \right] dV_0^s \quad (\text{C.44})$$

$$= \int_{\Omega_0^s} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} (\mathbf{K} \text{Grad } p) : D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \right) \cdot \text{Grad } \delta p + \frac{\delta p}{\Delta t} J \text{div } \Delta \mathbf{u} \right] dV_0^s \quad (\text{C.45})$$

$$= \int_{\Omega_0^s} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} (\mathbf{K} \text{Grad } p) : D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \right) \cdot \text{Grad } \delta p + \frac{\delta p}{\Delta t} J \text{div } \Delta \mathbf{u} \right] dV_0^s \quad (\text{C.46})$$

$$= \int_{\Omega_0^s} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{E}} : D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \text{Grad } p \right) \cdot \text{Grad } \delta p + \frac{\delta p}{\Delta t} J \text{div } \Delta \mathbf{u} \right] dV_0^s \quad (\text{C.47})$$

$$= \int_{\Omega_0^s} \left[ \left( \mathbb{K} : \mathbf{F}^T \Delta \mathbf{e} \mathbf{F} : \mathbf{F}^T \text{grad } p \right) \cdot \mathbf{F}^T \text{grad } \delta p + \frac{\delta p}{\Delta t} J \text{div } \Delta \mathbf{u} \right] dV_0^s \quad (\text{C.48})$$

$$= \int_{\Omega_0^s} \left[ \left( (\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}) : \mathbb{K} : (\mathbf{F}^T \oplus \mathbf{F}^T) : \Delta \mathbf{e} : \text{grad } p \right) \cdot \mathbf{F}^T \text{grad } \delta p + \frac{\delta p}{\Delta t} J \text{div } \Delta \mathbf{u} \right] dV_0^s \quad (\text{C.49})$$

$$= \int_{\Omega_0^s} \left[ \text{grad } \delta p \cdot (J \mathcal{K} : \Delta \mathbf{e} : \text{grad } p) + \frac{\delta p}{\Delta t} J \text{div } \Delta \mathbf{u} \right] dV_0^s \quad (\text{C.50})$$

$$= \int_{\Omega_0^s} \left[ \text{grad } \delta p \cdot (\mathcal{K} : \Delta \mathbf{e} : \text{grad } p) + \frac{\delta p}{\Delta t} \text{div } \Delta \mathbf{u} \right] dV_t. \quad (\text{C.51})$$

## APÊNDICE D – Obtenção do termo linearizado do algoritmo *undrained*

Até aqui, durante a obtenção da linearização do campo  $\delta W^u$  na direção do vetor  $\Delta \mathbf{u}$ , assumiu-se a hipótese de que a variável pressão de poro é independente da deformação. Desta forma, a regra da cadeia obtida pela derivada direcional da integral  $\int_{\Omega_t} p \operatorname{tr} \delta \mathbf{e} \, dV_t$  não considerava a derivada do campo  $p$  na direção de  $\Delta \mathbf{u}$ .

Entretanto, no algoritmo *undrained*, é imposta uma regra de atualização sobre o campo de pressões de poro, tornando-o função do Jacobiano de transformação volumétrica. Assim, em termos das iterações estagiadas  $s$  e do intervalo de tempo  $n$ , a atualização pode ser escrita por

$${}^{s+1}p_{n+1} = {}^s p_{n+1} - \alpha_{\text{undr}} \left( {}^{s+1}J_{n+1} - {}^s J_{n+1} \right). \quad (\text{D.1})$$

Desta forma, a linearização  $\Delta \delta W^u(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})$  é complementada pelo termo adicional:

$$\int_{\Omega_0^s} \left( \frac{d}{d\varepsilon} p(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) \Big|_{\varepsilon=0} \right) \operatorname{tr} \delta \mathbf{e} \, J \, dV_0^s. \quad (\text{D.2})$$

A derivada do campo  $p$  na direção do vetor  $\Delta \mathbf{u}$  é dada por

$$\frac{d}{d\varepsilon} p(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) \Big|_{\varepsilon=0} = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} {}^s p_{n+1} \right) \cdot \Delta \mathbf{u} - \alpha_{\text{undr}} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( {}^{s+1}J_{n+1} - {}^s J_{n+1} \right) \right) \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (\text{D.3})$$

$$= -\alpha_{\text{undr}} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} {}^{s+1}J_{n+1} \right) \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (\text{D.4})$$

$$= -\alpha_{\text{undr}} {}^{s+1}J_{n+1} \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}. \quad (\text{D.5})$$

Substituindo este resultado no termo (D.2), avalia-se o termo adicional por

$$\int_{\Omega_t} -\alpha_{\text{undr}} {}^{s+1}J_{n+1} \operatorname{div} \Delta \mathbf{u} \operatorname{tr} \delta \mathbf{e} \, dV_t \quad (\text{D.6})$$

$$= \int_{\Omega_t} -\alpha_{\text{undr}} {}^{s+1}J_{n+1} \operatorname{div} \Delta \mathbf{u} \mathbf{I} : \delta \mathbf{e} \, dV_t \quad (\text{D.7})$$

$$= \int_{\Omega_t} -\alpha_{\text{undr}} {}^{s+1}J_{n+1} \operatorname{div} \Delta \mathbf{u} \mathbf{I} : \operatorname{sym}(\Delta \delta \mathbf{u}) \, dV_t \quad (\text{D.8})$$

$$= \int_{\Omega_t} -\alpha_{\text{undr}} {}^{s+1}J_{n+1} \operatorname{div} \Delta \mathbf{u} \operatorname{div} \delta \mathbf{u} \, dV_t. \quad (\text{D.9})$$



## APÊNDICE E – Obtenção do termo linearizado do algoritmo *fixed-stress*

Com exceção do algoritmo *fixed-stress*, todos os algoritmos estagiados enunciados até aqui consideram que a variação do campo de deslocamentos é nula ao longo da solução do problema de conservação de massa. Neste apêndice, apresenta-se a derivação do um termo adicional da linearização do campo  $\delta W^p$  na direção de  $\Delta p$ , decorrente da consideração da regra de atualização

$${}^{s+1}\text{div } \mathbf{v}_{n+1}^s = {}^s\text{div } \mathbf{v}_{n+1}^s + \frac{{}^{s+1}p_{n+1} - {}^s p_{n+1}}{\Delta t (K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}} - p_n)} \quad (\text{E.1})$$

imposta ao problema de conservação de massa do algoritmo *fixed-stress*.

A equação incremental (E.1) faz com que a regra da cadeia da derivada direcional do campo  $\delta W^p$  seja completa, *i.e.*, inclua o termo da derivada do divergente do campo de velocidade do esqueleto sólido em relação ao campo de pressão de poro. Assim, é possível deduzir o termo adicional através da derivação

$$\int_{\Omega_t} \delta p \left( \frac{d}{d\varepsilon} \text{div } \mathbf{v}^s(p + \varepsilon \Delta p) \right) \Big|_{\varepsilon=0} dV_t, \quad (\text{E.2})$$

onde

$$\left( \frac{d}{d\varepsilon} \text{div } \mathbf{v}^s(p + \varepsilon \Delta p) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial p} \left( {}^s\text{div } \mathbf{v}_{n+1}^s + \frac{{}^{s+1}p_{n+1} - {}^s p_{n+1}}{\Delta t (K_{\text{dr}_n}^{\text{PK2}} - p_n)} \right) \Delta p \quad (\text{E.3})$$

$$= \left( \frac{\Delta t^{-1}}{K_{\text{dr}_n} - p_n} \right) \frac{\partial}{\partial p} ({}^{s+1}p_{n+1}) \Delta p \quad (\text{E.4})$$

$$= \left( \frac{\Delta t^{-1}}{K_{\text{dr}_n} - p_n} \right) \Delta p. \quad (\text{E.5})$$

Assim, a integral adicional (E.2) resume-se por

$$\int_{\Omega_t} \delta p \left( \frac{\Delta t^{-1}}{K_{\text{dr}_n} - p_n} \right) \Delta p dV_t. \quad (\text{E.6})$$



# APÊNDICE F – Condicionamento da matriz de rigidez acoplada

No problema bifásico abordado neste trabalho, observa-se uma grande distinção entre a ordem de grandeza do tensor constitutivo do esqueleto sólido e a do tensor de permeabilidade. Isto implica em uma grande diferença na magnitude dos termos da matriz de rigidez acoplada do sistema monolítico, tornando-a mal condicionada. De modo a diminuir este problema, a unidade de força pode ser substituída por um múltiplo desta,

$$1\bar{N} = 1 \cdot 10^p N \quad (\text{F.1})$$

onde  $p$  é um número inteiro e positivo. Através deste escalonamento, os parâmetros constitutivos que antes possuíam unidade  $N/\text{mm}^s$  passam a ter magnitude  $\bar{N} \cdot 10^{-p}/\text{mm}^2$ ; e o parâmetro de permeabilidade que antes possuía unidade  $\text{mm}^4/\text{Ns}$  passa a ter magnitude  $\text{mm}^4 \cdot 10^p/\bar{N}s$ . O valor do expoente  $p$  deve ser escolhido de modo a tornar os valores dos parâmetros o mais próximos possível, resolvendo o problema de condicionamento.